INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Órdenes parciales con respecto a algunas nociones de envejecimiento

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

PRESENTA

ISMAEL SANDOVAL GONZÁLEZ

Director de Tesis
Dr. José María Rocha Martínez

México, D. F. Octubre de 2008

Agradecimientos

A mis padres y hermanos, por su comprensión y cariño. Sin ustedes no tendría sentido nada de lo que hago.

Al Doctor José María Rocha, por su infinita paciencia e inestimable ayuda. Su contribución resulto fundamental e imprescindible.

Contenido

Introducción

La Teoría Matemática de Fiabilidad surgió alrededor de los años treinta del siglo pasado como respuesta a ciertas demandas de la tecnología y posteriormente a raíz de algunas experiencias ocurridas durante la Segunda Guerra Mundial.

A pesar de que la Teoría de Fiabilidad usa herramientas de Probabilidad, Procesos Estocásticos y Estadística, no puede ser considerada como una subdisciplina de ninguna de ellas por contar con métodos que le son propios y técnicas de trabajo encaminadas a la solución de problemas que le son característicos.

Un problema de interés en Teoría de Fiabilidad es modelar distintas nociones de envejecimiento. En la práctica, las nociones de envejecimiento se relacionan con problemas de fatiga de materiales, desgaste de piezas, oxidación de partes, mortandad infantil, etc. El concepto matemático que modela apropiadamente estas nociones es el de función tasa de falla. Se han estudiado varias nociones de envejecimiento basadas en diferentes propiedades de la función tasa de falla, como son IFR (Increasing Failure Rate), IFRA (Increasing Failure Rate Average), NBU (New Better than Used), DMRL (Decreasing Mean Residual Live), NBUE (New Better than Used in Expectation), HNBUE (Harmonic New Better than Used in Expectation), NBUFR (New Better than Used in Failure Rate), NBUFRA (New Better than Used in Failure Rate Average) y sus duales, entre otras, las cuales han surgido principalmente de diversas aplicaciones a problemas como el cálculo de la fiabilidad de los sistemas, el desarrollo de políticas de mantenimiento y reemplazo, problemas de refacciones, obtención de cotas de distribuciones, etc.

Los órdenes estocásticos han sido una herramienta de gran utilidad tanto en Teoría de Fiabilidad como en otras áreas de estudio (vea, por ejemplo, [5]).

Cuando se tienen dos objetos que envejecen a lo largo del tiempo es natural plantearse el problema de determinar cuál de ellos muestra un envejecimiento más acelerado. Es pues deseable contar con algún orden que resuelva este problema para cada noción de envejecimiento distinta. El propósito de esta tesis es hacer un estudio detallado del trabajo de Kochar y Wiens [4] donde se introducen y analizan algunos órdenes entre distribuciones de vida con respecto a diversas nociones de envejecimiento. En ese trabajo se echa mano de los órdenes convexo, star-shaped y superaditivo, bien conocidos en la literatura, para definir algunos de dichos órdenes.

La tesis se encuentra estructurada en seis capítulos que se detallan enseguida. En el Capítulo 1 presentamos una relación de las herramientas que emplearemos en el desarrollo de este trabajo, sobre todo aspectos básicos de Probabilidad y de Fiabilidad. En particular, hacemos referencia a las distribuciones de clase IFR, IFRA, NBU, DMRL, NBUE, HNBUE, NBUFR y NBUFRA.

En el Capítulo 2 se discuten el orden IFR, el orden IFRA y el orden NBU e indicamos las relaciones existentes entre ellos y con la distribución exponencial.

En el Capítulo 3 se hace una caracterización del orden DMRL: las condiciones que deben cumplir dos distribuciones de probabilidad para estar relacionadas bajo este orden. Se destaca la relación que guarda con la distribución exponencial. Se demuestra que el orden IFR implica el orden DMRL.

Por lo que respecta a los Capítulos 4 y 5 se presenta un tratamiento similar a lo tratado en el capítulo tercero pero ahora para los órdenes NBUE, HNBUE y NBUFR, NBUFRA, respectivamente.

El Capítulo 6 está dedicado a presentar algunas aplicaciones de los órdenes IFR, IFRA y NBU a los estadísticos de orden y a la obtención de cotas para algunas distribuciones de vida.

A lo largo de este trabajo se incluyen ilustraciones y ejemplos de los distintos conceptos en consideración. Al final se presentan las conclusiones generales de la tesis y hacemos una crítica de las fortalezas y deficiencias del orden IFR que pudiera ser de utilidad para futuros trabajos.

Capítulo 1

Preliminares de Probabilidad y Fiabilidad

En este capítulo daremos una relación de algunos de los elementos de Teoría de Probabilidad y de Teoría de Fiabilidad que emplearemos en el desarrollo del trabajo que nos ocupa.

1.1. Elementos de Probabilidad

Definición 1.1. Sea Ω un conjunto no vacío. Una familia $\mathfrak{A}$ de subconjuntos de Ω se llama **$\boldsymbol{\sigma}$-álgebra** si cumple:

i. $\Omega \in \mathfrak{A}$.

ii. $A_1, A_2, \cdots \in \mathfrak{A}$ implica $\bigcup_i A_i \in \mathfrak{A}$.

iii. $A \in \mathfrak{A}$ implica $A^c \in \mathfrak{A}$, siendo A^c el complemento de A.

Por ejemplo, si $A \subset \Omega$, $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ es una σ-álgebra de Ω. La colección de todos los subconjuntos de Ω, denotada por 2^Ω, es una σ-álgebra de Ω. La intersección de todas las σ-álgebras de $\mathbb{R}^n$ que contienen a los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, es una σ-álgebra de $\mathbb{R}^n$, denotada por $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ y llamada la **σ-álgebra de Borel** de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

Definición 1.2. Una función $P : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ se llama **medida de probabilidad** sobre $\mathfrak{A}$ si cumple:

i. $P(A) \geq 0$ para cualquier $A \in \mathfrak{A}$.

ii. $P(\Omega) = 1$.

iii. Si $\{A_\nu\}_{\nu\geq 1}$ es una sucesión en $\mathfrak{A}$ de conjuntos ajenos a pares, entonces

$$P\left(\bigcup_{\nu\geq 1} A_\nu\right) = \sum_{\nu\geq 1} P(A_\nu).$$

Definición 1.3. Un **espacio de probabilidad** es la triada $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ que consta de un conjunto no vacío Ω, una σ-álgebra $\mathfrak{A}$ de Ω, y una medida de probabilidad P.

Teorema 1.1 (Teorema de continuidad). *Sea $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $\{A_\nu\}_{\nu\geq 1}$ una sucesión de eventos. Se tiene:*

i. *Si $\{A_\nu\}_{\nu\geq 1}$ es creciente y $A = \bigcup_{\nu\geq 1} A_\nu$, entonces $P(A) = \lim_{\nu\to\infty} P(A_\nu)$.*

ii. *Si $\{A_\nu\}_{\nu\geq 1}$ es decreciente y $A = \bigcap_{\nu\geq 1} A_\nu$, entonces $P(A) = \lim_{\nu\to\infty} P(A_\nu)$.*

Algunas definiciones y resultados

Definición 1.4. Sea $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Dados dos eventos $A, B \in \mathfrak{A}$ se dice que A y B son **independientes** si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

En general, una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ en $\mathfrak{A}$ se dice **independiente** si $\forall\ J \subset I$ finito se satisface que:

$$P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} P(A_j).$$

Definición 1.5. Sea $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Dados dos eventos $A, B \in \mathfrak{A}$ tales que $P(B) > 0$, la probabilidad condicional de A dado B se define:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}\ .$$

Teorema 1.2 (Ley de multiplicación para probabilidades). *Sean B_1, $\ldots, B_n$ eventos tales que $P(B_1 \cap B_2 \cdots \cap B_n) > 0$, entonces:*

$$P(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = P(B_n|B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1}) \cdots P(B_2|B_1)P(B_1)\ .$$

Definición 1.6. Sea $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Una **partición por eventos** de Ω es una sucesión de eventos $\{B_\nu\}_{\nu \geq 1}$ tal que

i. $B_\nu \in \mathfrak{A}$ y $P(B_\nu) > 0, \quad \forall\, \nu \geq 1.$

ii. $B_\nu \cap B_\mu = \emptyset, \quad \forall\, \mu \neq \nu.$

iii. $\bigcup_{\nu \geq 1} B_\nu = \Omega.$

Proposición 1.1 (Ley de probabilidad total). *Sea $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Dados dos eventos A, B tales que $P(B) > 0$, $P(B^c) > 0$, se tiene:*

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c).$$

En general, si $\{B_\nu\}_{\nu \geq 1}$ es una partición por eventos de Ω, se cumple que:

$$P(A) = \sum_{\nu \geq 1} P(A|B_\nu)P(B_\nu).$$

Variables aleatorias

Definición 1.7. Se le llama espacio medible a la pareja $(\Omega, \mathfrak{A})$, en donde Ω es un conjunto y $\mathfrak{A}$ una σ-álgebra de Ω.

Definición 1.8. Sea X una función del espacio medible $(\Omega, \mathfrak{A})$ en otro espacio medible $(\Gamma, \mathfrak{B})$. Se dice que X es una **función medible** si

$$X^{-1}(B) \in \mathfrak{A}, \quad \forall\, B \in \mathfrak{B}.$$

Definición 1.9. Una **variable aleatoria** (v.a.) es una función medible $X : (\Omega, \mathfrak{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. La **distribución** de X es la medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ dada por

$$Q_X(A) = P(X \in A), \quad \forall\, A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}).$$

Se demuestra fácilmente que una función $X : (\Omega, \mathfrak{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ es una v.a. ssi

$$\{X \leq x\} = X^{-1}((-\infty, x]) = \{w \in \Omega \mid X(w) \leq x\} \in \mathfrak{A}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Definición 1.10. La **función de distribución** de una v.a. X se define como la función $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ dada por

$$F_X(x) = P[X \leq x], \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Observe que

$$F_X(x) = Q_X((-\infty, x]), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Se verifica con facilidad que F_X tiene las propiedades siguientes:

i. F_X es creciente y continua por la derecha para todo punto.

ii. $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0 \quad$ y $\quad \lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1$.

Definición 1.11. La **función de sobrevivencia** de una v.a. X se define como la función de $\mathbb{R}$ en $[0, 1]$ dada por

$$\overline{F}_X(x) = 1 - F_X(x) = P[X > x], \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Definición 1.12. El **soporte** de una v.a. X se define como cualquier conjunto $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ tal que $Q_X(C) = 1$.

Por definición, una **distribución de vida** es la distribución de alguna v.a. con soporte contenido en $[0, \infty)$. Como su nombre lo indica, tales v.a.'s usualmente denotan tiempos de vida. A la función de sobrevivencia de una distribución de vida se le acostumbra llamar **función de fiabilidad**. Es claro que si X tiene soporte contenido en $[0, +\infty)$, entonces $Q_X[(-\infty, 0)] = 0$, equivalentemente, $F_X(x) = 0$, $\forall\, x < 0$, ó $\overline{F}_X(x) = 1$, $\forall\, x < 0$.

Definición 1.13. Se dice que una v.a. X es **continua** si $P(X = x) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Observe que X es una v.a. continua si y sólo si su función de distribución $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en todo punto.

Definición 1.14. Se dice que una v.a. X (o F_X o Q_X) es **absolutamente continua** (con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$), abreviado ab.c., si existe una función $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt\ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

A f_X se le llama la **función de densidad** de X (o de F_X o de Q_X).

Se pueden construir fácilmente ejemplos de distribuciones continuas que no son ab.c..

Las demostraciones de los dos resultados que siguen requieren de ciertos conocimientos de Análisis Real fuera del alcance de este trabajo por lo que las omitimos.

Proposición 1.2. *La función de densidad de una v.a. X tiene las propiedades siguientes:*

(i) $f_X(x) \geq 0$, *para toda $x \in \mathbb{R}$ excepto en un conjunto con medida de Lebesgue cero.*

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1.$

Proposición 1.3. *Sea X una v.a. ab.c., entonces*

$$Q_X(A) = \int_A f_X(t)\,dt, \quad \forall\, A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}).$$

Además,

$$f_X(x) = F'_X(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ en donde exista $F'_X(x)$, es decir, excepto en un conjunto con medida de Lebesgue cero.

Ejemplo 1.1 (Distribución exponencial). Una v.a. ab.c. X con soporte contenido en $[0, \infty)$ se dice que tiene **distribución exponencial** con parámetro $\lambda > 0$, si tiene función de densidad dada por

$$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \forall\, t \geq 0.$$

La función de distribución de X está dada por

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad \forall\, x \geq 0.$$

La distribución exponencial con parámetro $\lambda > 0$ es un caso particular de la distribución gama al tomar como parámetros $\alpha = 1$ y $\lambda > 0$. Por convención, diremos que la v.a. constante de valor ∞ es exponencial con parámetro $\lambda = 0$.

De manera análoga a la distribución geométrica, se puede demostrar que la distribución exponencial es la única distribución continua que tiene la propiedad de pérdida de memoria.

Proposición 1.4. *Si X es una v.a. continua con soporte contenido en $[0, \infty)$, entonces X tiene la siguiente propiedad de pérdida de memoria*

$$P(X > t + s | X > t) = P(X > s), \quad \forall\, t, s \geq 0$$

si y sólo si X tiene distribución exponencial con parámetro λ, para algún $0 \leq \lambda < \infty$.

Esperanza

La versión más general del concepto de esperanza se define primeramente para v.a.'s simples, luego para v.a.'s no negativas y por último para v.a.'s que pueden tomar ambos signos, de tal suerte que la esperanza de una v.a. $X : (\Omega, \mathfrak{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ con distribución arbitraria sobre $\mathbb{R}$, viene a ser (si existe) la integral de Lebesgue de la función medible X sobre el espacio de medida finita $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, es decir,

$$E(X) = \int_\Omega X \, dP \qquad \text{o} \qquad \int_\Omega X(\omega) \, P(d\omega).$$

Un resultado de teoría de probabilidad demuestra que cuando $E(X)$ existe su valor coincide con el de la integral de Lebesgue de la función identidad sobre el espacio de medida finita $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), Q_X)$, es decir,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, Q_X(dx), \tag{1.1}$$

la cual, a su vez, puede ser calculada por medio de la integral de Lebesgue-Stieltjes siguiente

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF_X(x). \tag{1.2}$$

Así pues, la esperanza hereda las propiedades de la integral de Lebesgue, como linealidad, teoremas de convergencia, etc.. En particular, se cumple el siguiente teorema de cambio de variable, el cual generaliza a (1.2) y resulta ser de gran utilidad para el cálculo de esperanzas.

Teorema 1.3. *Sea X una v.a. con distribución arbitraria sobre $\mathbb{R}$. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función Borel medible, entonces $g(X)$ es una v.a. con valores reales y además*

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, dF_X(x)$$

siempre que la esperanza exista.

Referimos al lector interesado a Ash [1] donde el concepto general de esperanza y sus propiedades se tratan con mayor amplitud, profundidad y detalle.

Cuando la distribución de X es una medida de probabilidad absolutamente continua con respecto a la medida de conteo (con soporte contenido en algún conjunto a lo sumo numerable de $\mathbb{R}$) o con respecto a la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$, es decir, cuando X es una v.a. discreta o absolutamente continua, el cálculo de su esperanza es relativamente sencillo de hacer. En lo que resta de esta sección discutiremos estos casos.

Definición 1.15. La **esperanza, valor medio o valor esperado** de una v.a. X ab.c. se define como:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$$

siempre y cuando la integral de Lebesgue exista, pudiendo ser igual a $+\infty$ o $-\infty$.

Se acostumbra denotar a $E[X]$ también por μ_X, o por μ si no hay peligro de confusión.

Proposición 1.5. *Se tiene:*

(i) *Si $X \geq 0$, entonces $E[X] \geq 0$.*

(ii) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$.

(iii) $|E[X]| \leq E(|X|)$.

El siguiente resultado es bien conocido.

Proposición 1.6. *Si X es una v.a. ab.c. con soporte contenido en $[0, \infty)$, entonces*

$$E(X) = \int_0^\infty P(X > x)\, dx.$$

El siguiente resultado es otro caso particular del Teorema 1.3.

Teorema 1.4. *Sea X una v.a. ab.c.. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función Borel medible, entonces*

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx$$

siempre que la integral de Lebesgue exista.

Definición 1.16. Sea X una v.a. ab.c. y $k \geq 1$. Se define el momento k-ésimo por $\mu_k = E[X^k]$ siempre que el momento absoluto k-ésimo $E[|X|^k]$ sea finito.

Si la esperanza siguiente existe, se llama la **varianza** de X:

$$\mathrm{Var}\,(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2.$$

Se acostumbra denotar $\sigma^2 = \mathrm{Var}\,(X)$. En virtud del último teorema, se tiene:

$$\mathrm{Var}\,(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx\right]^2.$$

Ejemplo 1.2. Si X tiene distribución exponencial(λ), puesto que es un caso particular de la distribución gama con parámetros $\alpha = 1$ y λ, se debe tener:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}\,(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{y} \quad E(X^k) = \frac{k!}{\lambda^k},\ k = 1, 2, 3, \ldots. \ \blacktriangleleft$$

Proposición 1.7. *Si X y Y son dos v.a.'s independientes, entonces*

$$E[XY] = E[X]E[Y].$$

Definición 1.17. Si X es una v.a. y A es un evento tal que $P(A) > 0$, se define la **esperanza condicional** de X dado A como el número real

$$E[X|A] = \frac{E[XI_A]}{P(A)}$$

donde I_A denota la función indicadora de A, es decir, la función que toma el valor 1 si el evento A ocurre y cero si no.

Ley de grandes números

Definición 1.18. Se dice que la sucesión de variables aleatorias $\{X_\nu\}_{\nu\geq 1}$ **converge con probabilidad 1** (o converge casi seguramente), y se abrevia c.p.1 (o c.s.), a una v.a. X si:

$$P(\{w | \{X_\nu(w)\}_{\nu\geq 1} \text{ no converge a } X(w)\}) = 0.$$

En este caso se escribe

$$\lim_{\nu\to\infty} X_\nu = X \quad \text{c.p.1.}$$

Teorema 1.5 (Ley fuerte de grandes números). *Sea $\{X_\nu\}_{\nu\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media común μ. Si $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $\forall\, n \geq 1$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu \quad \textit{c.p.1.}$$

Conceptos adicionales

Definición 1.19. Una función $f(x)$, definida en $[0,\infty)$, se llama **star-shaped** (también conocida como función con **forma de estrella**) si $f(x)/x$ es creciente en $[0,\infty)$, ó, equivalentemente, $g(\alpha{\cdot}x) \leq \alpha{\cdot}g(x)$ para $0 \leq \alpha \leq 1, x \geq 0$.

Definición 1.20. Una función $f(x)$, definida en $[0,\infty)$, decimos que es **superaditiva** si $f(x+y) \leq f(x)\cdot f(y)$ para $x, y \geq 0$.

Definición 1.21. Una función real continua $f(x)$ se dice **convexa** en un intervalo $[a,b]$, si para todo par de puntos $x_1, x_2 \in [a,b]$ y para todo $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$:

$$f[\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda)\cdot x_2] \leq \lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda)\cdot f(x_2)$$

Si $f(x)$ poseé segunda derivada en $[a,b]$, entonces una condición necesaria y suficiente para que sea convexa en dicho intervalo es que $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Si para todo par de puntos $x_1, x_2 \in [a,b]$ la función $-f(x)$ es convexa en el intervalo, diremos que f es **cóncava**.

Definición 1.22. Sean X y Y dos variables aleatorias. Diremos que $X =_{st} Y$ si X y Y tienen la misma distribución. También se dice que X es **estocásticamente más grande** que Y y se escribe $X \geq_{st} Y$, si

$$P[X > x] \geq P[Y > x], \quad \forall\, x.$$

1.2. Elementos de Fiabilidad

Considérese un sistema (una máquina, un proceso, etc.) de n componentes. Para indicar el estado del i-ésimo componente, se asigna una variable indicadora x_i de la siguiente forma:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si el componente i funciona} \\ 0 & \text{si el componente i falla} \end{cases}$$

para $i = 1, \ldots, n$. Similarmente, la variable binaria ϕ indica el estado de todo el sistema:

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si el sistema funciona} \\ 0 & \text{si el sistema falla.} \end{cases}$$

Asumiremos que el estado de todo el sistema queda determinado completamente por los estados de los componentes, de tal forma que podamos escribir

$$\phi = \phi(\mathbf{x})$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. El número de componentes n en el sistema es llamado **el orden** del sistema. Ejemplos de sistemas son: sistema en serie, sistema en paralelo, sistema k de n, entre otros.

Supongamos que los componentes de nuestro sistema son independientes, y asumamos que el estado X_i del i-ésimo componente es aleatorio con

$$P[X_i = 1] = p_i = E[X_i], \quad i = 1, \dots, n.$$

Definición 1.23. La probabilidad de que el componente i funcione, p_i, es llamada **la fiabilidad** del componente i. Similarmente, por **fiabilidad del sistema** se entenderá a la probabilidad $P[\phi(\mathbf{X}) = 1] = E[\phi(\mathbf{X})]$, donde $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$.

Función tasa de falla

El concepto de función tasa de falla (failure rate) modela matemáticamente la noción de envejecimiento para distribuciones de vida (o de falla). Dicho concepto se ha usado extensamente en actuaría, estadística y fiabilidad donde se le conoce también por otros nombres, como "fuerza de mortalidad", "función de intensidad", "tasa de riesgo", etc.

Definición 1.24. Sea X una v.a. ab.c. con valores reales no negativos, que usualmente representa el tiempo de vida de algún objeto, con función de distribución F, función de fiabilidad $\overline{F} = 1 - F$ y función de densidad f. Se define la **tasa de falla** de X en $t \geq 0$ como

$$r_F(t) = \frac{d}{dt}(-\log(\overline{F}(t))) = \frac{f_X(t)}{\overline{F}_X(t)} \quad \text{si} \quad \overline{F}_X(t) > 0, \tag{1.3}$$

y $+\infty$ de otra forma, por convención. La función r_F se denota simplemente por r si no hay peligro de confusión.

Proposición 1.8. *La tasa de falla puede expresarse alternativamente como*

$$r(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P[t < X \leq t + \Delta t | X > t]}{\Delta t}. \tag{1.4}$$

Demostración. Para $t \geq 0$ tal que $\overline{F}(t) > 0$, se tiene

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{d}{dt}(-\log(\overline{F}(t))) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\bar{F}(t)} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P[t < X \leq t + \Delta t]}{P[X > t]} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P[t < X \leq t + \Delta t | X > t]}{\Delta t}. \blacksquare \end{aligned}$$

Observación 1.1. Para $\Delta > 0$ pequeño, $r(t)$ representa empíricamente la fracción de objetos que fallan en el intervalo $[t, t + \Delta)$ de los objetos de una muestra que alcanzan la edad t por unidad de tiempo.

Ejemplo 1.3. Sea

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{1+t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0, \end{cases}$$

entonces

$$r(t) = \frac{F'(t)}{\overline{F}(t)} = \frac{\dfrac{(1+t)-t}{(1+t)^2}}{1 - \dfrac{t}{1+t}} = \frac{\dfrac{1}{(1+t)^2}}{\dfrac{1}{1+t}} = \frac{1}{1+t}.$$

En particular, se tiene que $r(3) = 1/4$, es decir, en una población de tales objetos, al alcanzar la edad $t = 3$ fallan a razón de 1 por cada 4 unidades de tiempo. ◀

Algunas identidades útiles se obtienen de (1.3); por ejemplo, integrando ambos lados de (1.3) se tiene

$$\int_0^x r(t)dt = -\log \overline{F}(x) \tag{1.5}$$

y aplicando la función exponencial, resulta

$$\overline{F}(x) = \exp\left[-\int_0^x r(t)dt\right]. \tag{1.6}$$

Finalmente, despejando y sustituyendo en (1.3), se obtiene

$$f(t) = r(t)\exp\left[-\int_0^x r(t)dt\right]. \tag{1.7}$$

Así pues, la función de distribución de X, determina unívocamente a la función tasa de falla de X y, viceversa, la función tasa de falla de X determina unívocamente a la función de distribución de X.

Se sigue, por ejemplo de (1.6), que X es una v.a. propia si y sólo si

$$\int_0^\infty r(t)dt = +\infty.$$

Definición 1.25. Se define la **tasa de falla acumulativa o función de riesgo** R como

$$R(x) = \int_0^x r(t)dt = -\log \overline{F}(x). \tag{1.8}$$

Teorema 1.6. *La distribución exponencial(λ), $\lambda > 0$, es la única distribución ab.c. con tasa de falla constante.*

Demostración. Sea X una v.a. con distribución exponencial(λ). Se tiene

$$r(t) = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda, \quad \forall\, t > 0.$$

Recíprocamente, si X es una v.a. ab.c. con soporte contenido en $[0, \infty)$ tal que $r(t) = \lambda$ $(\lambda > 0)$, $\forall\, t > 0$, entonces, de (1.6)

$$\overline{F}(t) = e^{-\int_0^t \lambda\, dx} = e^{-\lambda t}, \quad \forall\, t > 0 \ \blacksquare$$

Definición 1.26. Sea X el tiempo de vida de algún objeto con función de distribución F. La función **vida residual media** del objeto al alcanzar la edad $x \geq 0$ (x en el soporte de F) se define como

$$\mu_F(x) = E[X - x \mid X > x] = \frac{1}{\overline{F}(x)} \int_x^{\infty} \overline{F}(t)\, dt.$$

En particular $\mu_F(0) = \mu_F = E[X]$.

Clases de distribuciones de vida

Definición 1.27. Una distribución de vida F se dice ser **IFR** (por sus siglas en inglés, tasa de falla creciente) si $-\log \overline{F}$ es convexa en el soporte de F, esto es, si $\log \overline{F}$ es cóncava. De manera análoga se define la clase dual **DFR** (tasa de falla decreciente) en ambos casos.

Las distribuciones IFR pueden surgir de una gran variedad de formas, por ejemplo, envejecimiento natural, oxidación, fatiga de los materiales, etc., mientras que las distribuciones DFR se presentan en situaciones como “mortalidad infantil” en organismos vivos, pues estos tienen una tasa de falla decreciente durante una primera etapa de su vida. También, como ciertos metales o herramientas que se hacen más resistentes conforme más se utilicen.

Proposición 1.9. *Sea X una v.a. ab.c. con valores en $(0, +\infty)$, entonces X es IFR (DFR), si y sólo si su función tasa de falla $r(t)$ es creciente (decreciente).*

Demostración. Suponga que $r(u)$ es creciente. Se sabe que

$$r(t) = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} = \frac{d}{dt}\left[-\log \overline{F}(t)\right],$$

es decir, $\overline{F}(t) = e^{-\int_0^t r(u)du}$, $\forall\, t\ > 0$, de donde

$$\frac{\overline{F}(t+x)}{\overline{F}(t)} = e^{-\int_t^{t+x} r(u)du} \tag{1.9}$$

Como $r(u)$ es creciente por hipótesis, para cada $x > 0$, $t \mapsto \int_t^{t+x} r(u)du$ es creciente, luego $t \mapsto e^{-\int_t^{t+x} r(u)du}$ es decreciente. Por lo tanto, X es de clase IFR.

Suponga ahora que X es IFR, entonces

$$\begin{aligned} r(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} & \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\overline{F}(t)} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{\overline{F}(t) - \overline{F}(t+\Delta t)}{\overline{F}(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[1 - \frac{\overline{F}(t+\Delta t)}{\overline{F}(t)}\right]. \end{aligned}$$

Similarmente

$$r(t') = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{1}{\Delta t'}\left[1 - \frac{\overline{F}(t'+\Delta t')}{\overline{F}(t')}\right].$$

De (1.9) se sigue que $t \mapsto -\overline{F}(t+x)/\overline{F}(t)$ es creciente, por lo tanto $r(t) \leq r(t')$. La parte DFR se demuestra de manera similar. ∎

Definición 1.28. Una distribución de vida F se dice ser **IFRA** (tasa de falla creciente en promedio) si

$$-\log \overline{F}(\lambda x) \leq -\lambda \log \overline{F}(x), \quad \forall\, 0 \leq \lambda \leq 1, \quad x \geq 0.$$

Si F es ab.c., lo anterior equivale a decir que

$$x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x r_F(t)\,dt$$

es creciente en el soporte de F, es decir, que la función de riesgo R de F es star-shaped. De manera análoga se define la clase dual **DFRA**.

Definición 1.29. Una distribución de vida F se dice ser **NBU** (mejor nuevo que usado) si $-\log \overline{F}$ es superaditiva en $(0, \infty)$, es decir,

$$-\log \overline{F}(s+t) \ \geq \ -\log \overline{F}(s) - \log \overline{F}(t), \quad \forall\ s, t \geq 0.$$

Ó, equivalentemente:

$$\overline{F}(s+t) \leq \overline{F}(s) \cdot \overline{F}(t), \quad \forall\ s, t \geq 0.$$

De manera análoga se define la clase dual **NWU**.

Definición 1.30. Una distribución de vida F se dice ser **DMRL** (vida residual media decreciente) si μ_F es decreciente en el soporte de F. De manera análoga se define la clase dual **IMRL**.

Definición 1.31. Una distribución de vida F se dice ser **NBUE** (mejor nueva que usada en promedio) si

(i) F tiene media μ (finita o infinita),

(ii) Se cumple la desigualdad

$$\int_t^{\infty} \overline{F}(x)dx \leq \mu \overline{F}(t), \quad \forall\ t \geq 0. \tag{1.10}$$

De manera análoga se define la clase dual **NWUE**.

Debe notarse que $\int_t^{\infty} (\overline{F}(x)/\overline{F}(t))dx$ representa la vida residual media condicional de una unidad de edad t. Por lo tanto (1.10) implica que una unidad usada de edad t tiene una vida residual media menor que una unidad nueva si F es NBUE.

Lema 1.1. *La función de distribución F es NBUE si y sólo si*

$$\int_0^{t} \overline{F}(x)dx \geq \mu \overline{F}(t) \quad \forall\ t \geq 0.$$

Demostración. F es NBUE si y sólo si

$$\int_t^{\infty} \overline{F}(x)dx \leq \mu \overline{F}(t) = \mu(1 - F(t)), \quad \forall\ t \geq 0,$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned}\mu\overline{F}(t) &\leq \mu - \int_t^\infty \overline{F}(x)dx \\ &= \int_0^\infty \overline{F}(x)dx - \int_t^\infty \overline{F}(x)dx = \int_0^t \overline{F}(x)dx, \quad \forall\, t \geq 0. \blacksquare\end{aligned}$$

Definición 1.32. Una distribución de vida F se dice ser **HNBUE** (armónicamente mejor nueva que usada en esperanza) si

$$\int_x^\infty \overline{F}(t)\,dt \leq \mu_F e^{-x/\mu_F}, \quad \forall\, x \geq 0.$$

De manera análoga se define la clase dual **HNWUE**.

Definición 1.33. Una distribución de vida F se dice ser **NBUFR** (mejor nueva que usada en tasa de falla) si

$$r(x) \geq r(0), \quad \forall\, x \geq 0.$$

De manera análoga se define la clase dual **NWUFR**.

Definición 1.34. Una distribución de vida F se dice ser **NBUFRA** (mejor nueva que usada en tasa de falla promedio) si

$$r(0) \leq \frac{1}{x}\int_0^x r(t)\,dt = \frac{-\log(\overline{F}(x))}{x}\,, \forall\, x > 0.$$

De manera análoga se define la clase dual **NWUFR**.

Los criterios de envejecimiento señalados se relacionan de la siguiente manera:

Teorema 1.7. *Las siguientes relaciones, y no otras, se establecen entre los conceptos anteriores:*

$$\begin{array}{ccccccccc} IFR & \Rightarrow & IFRA & \Rightarrow & NBU & \Rightarrow & NBUFR & \Rightarrow & NBUFRA \\ \Downarrow & & & & \Downarrow & & & & \\ DMRL & & \Longrightarrow & & NBUE & \Rightarrow & HNBUE & & \end{array} \tag{1.11}$$

Capítulo 2

Los órdenes IFR, IFRA y NBU

Un problema de interés en Teoría de Fiabilidad es modelar distintas nociones de envejecimiento. Cuando se tienen dos objetos que envejecen, en algún sentido, a lo largo del tiempo es natural plantearse el problema de determinar cuál de ellos muestra un envejecimiento más acelerado. Para envejecimientos del tipo IFR, IFRA y NBU se puede echar mano de algunos órdenes estocásticos existentes en la literatura, como el orden convexo, el orden en forma de estrella y el orden superaditivo para dar una posible solución a este problema.

En lo sucesivo denotaremos por ζ el conjunto de funciones de distribución ab.c. F con soporte contenido en $[0, \infty)$ tales que $F(0) = 0$. Se dice que $F, G \in \zeta$ son **equivalentes**, y se escribe $F \sim G$, si y sólo si F y G difieren en a lo más un factor de escala positivo, es decir,

$$G(x) = F(\theta x), \quad \forall\, x,$$

para algún $\theta > 0$. Denotaremos por $\mathfrak{F}$ el conjunto de clases de equivalencia de ζ con respecto a la relación de equivalencia anterior.

Recuerde que una relación $>$ sobre $\mathfrak{F}$ es un orden parcial si satisface las condiciones siguientes:

i. (Reflexividad) Dados $F, G \in \zeta$, se cumple $F \sim G$ implica $G > F$.

ii. (Antisimetría) Dados $F, G \in \zeta$, se cumple $F > G$ y $G > F$ implican $F \sim G$.

iii. (Transitividad) Dados $F, G, H \in \zeta$, se cumple $F > G$ y $G > H$ implican $F > H$.

Note que un orden $>$ sobre $\mathfrak{F}$ debe ser es invariante con respecto a factores de escala en ζ, es decir, dados $F, G \in \zeta$, $F(x) > G(x)$ implica $F(x) > G(\theta x)$, $\forall\, x$ y $\forall\, \theta > 0$.

2.1. El orden IFR

Definición 2.1. Decimos que F es **más IFR** que G, se escribe $F \overset{IFR}{>} G$, si $G^{-1} \circ F$ es una función convexa.

Observe que la relación $F \overset{IFR}{>} G$ es una auténtica relación de orden sobre ζ. De hecho, la definición del orden $F \overset{IFR}{>} G$ coincide con la definición del orden convexo $F \overset{c}{<} G$ presente en la literatura (ver, por ejemplo, [2]).

Proposición 2.1. *Se tiene que* $F \overset{IFR}{>} G$ *si y sólo si la función*

$$u \mapsto \frac{r_F(F^{-1}(u))}{r_G(G^{-1}(u))}$$

es creciente en $(0,1)$.

Demostración. Calculemos la derivada de la función $G^{-1} \circ F$ en $[0,\infty)$. Por la regla de la cadena y por el Teorema de la Función Inversa, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[G^{-1} \circ F(x)] &= (G^{-1})'(F(x)) \cdot F'(x) \\ &= \frac{F'(x)}{G'(G^{-1} \circ F(x))} = \frac{f(x)}{g(G^{-1} \circ F(x))}, \quad \forall\, x \geq 0.\end{aligned}$$

Haciendo $x = F^{-1}(u)$, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(G^{-1} \circ F(x))} &= \frac{f(F^{-1}(u))/(1-u)}{[g(G^{-1} \circ F(F^{-1}(u)))]/(1-u)} \\ &= \frac{f(F^{-1}(u))/[1 - F(F^{-1}(u))]}{[g(G^{-1} \circ F(F^{-1}(u)))]/[1 - G(G^{-1}(u))]} \\ &= \frac{f(F^{-1}(u))/[\overline{F}(F^{-1}(u))]}{[g(G^{-1} \circ F(F^{-1}(u)))]/[\overline{G}(G^{-1}(u))]} \\ &= \frac{[f(F^{-1}(u))]/[\overline{F}(F^{-1}(u))]}{[g(G^{-1}(u))]/[\overline{G}(G^{-1}(u))]} = \frac{r_F(F^{-1}(u))}{r_G(G^{-1}(u))}, \quad \forall\, u \in [0,1].\end{aligned}$$

Así pues, se tiene $F \overset{IFR}{>} G$, es decir, la función $x \mapsto G^{-1} \circ F(x)$ es convexa en $[0, \infty)$ si y sólo si $u \mapsto r_F(F^{-1}(u))/r_G(G^{-1}(u))$ es una función creciente en $[0, 1]$. ▮

La proposición anterior proporciona una posible interpretación intuitiva del orden IFR. En efecto, los tiempos $F^{-1}(u)$ y $G^{-1}(u)$ corresponden al u-ésimo cuantil de F y G, respectivamente. Así pues, para que $F \overset{IFR}{>} G$ es condición necesaria y suficiente que el cociente $r_F(F^{-1}(u))/r_G(G^{-1}(u))$ se incremente cuando, al incrementarse u en Δu unidades, el tiempo para F se incrementa de su u-ésimo cuantil $F^{-1}(u)$ a su $(u+\Delta)$-ésimo cuantil $F^{-1}(u+\Delta u)$ mientras que el tiempo para G se incrementa de su u-ésimo cuantil $G^{-1}(u)$ a su $(u + \Delta u)$-ésimo cuantil $G^{-1}(u + \Delta u)$. Es en tales escalas de tiempo y en tal sentido que r_F crece más rápidamente que r_G (o que r_F decrece más lentamente que r_G).

2.2. Los órdenes IFRA y NBU

Definición 2.2. Decimos que F es **más IFRA** que G, se escribe $F \overset{IFRA}{>} G$, si $G^{-1} \circ F$ es una función star-shaped.

Definición 2.3. Decimos que F es **más NBU** que G, se escribe $F \overset{NBU}{>} G$, si $G^{-1} \circ F$ es una función superaditiva.

Observe que las relaciones $F \overset{IFRA}{>} G$ y $F \overset{NBU}{>} G$ son auténticas relaciones de orden sobre ζ. De hecho, la definición del orden $F \overset{IFRA}{>} G$ coincide con la definición del orden en forma de estrella $F \overset{*}{<} G$ y la definición del orden $F \overset{NBU}{>} G$ coincide con la definición del orden superaditivo $F \overset{su}{<} G$, ambos conocidos en la literatura .

Los órdenes anteriores tienen la propiedad de que si $E(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ es la función de distribución exponencial con parámetro $\lambda > 0$, entonces:

$$F \overset{\varrho}{>} E \tag{2.1}$$

si y sólo si, para $\varrho \in \{IFR, IFRA, NBU\}$, F tiene la propiedad de envejecimiento ϱ.

Proposición 2.2. *Las siguientes implicaciones siempre se cumplen*

$$F \overset{IFR}{>} G \quad \Longrightarrow \quad F \overset{IFRA}{>} G \quad \Longrightarrow \quad F \overset{NBU}{>} G.$$

Demostración. Si $F \overset{IFR}{>} G$, entonces $G^{-1} \circ F$ es convexa, es decir,

$$G^{-1} \circ F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda G^{-1} \circ F(x_1) + (1-\lambda)G^{-1} \circ F(x_2),$$

$\forall\, x_1, x_2$ en el soporte de F y $\forall\, \lambda \in [0,1]$. Entonces, tomando siempre $x_2 = 0$, tendremos

$$G^{-1} \circ F(\lambda x) \leq \lambda G^{-1} \circ F(x), \quad \forall\, \lambda \in [0,1]$$

y $\forall\, x$ en el soporte de F, lo cual significa que $G^{-1} \circ F$ es star-shaped. Por lo tanto $F \overset{IFRA}{>} G$.

Por otro lado, si $F \overset{IFRA}{>} G$, entonces $G^{-1} \circ F$ es star-shaped en el soporte de F, o sea,

$$G^{-1} \circ F(\lambda x) \leq \lambda G^{-1} \circ F(x) \quad \forall\, \lambda \in [0,1]$$

y $\forall\, x$ en el soporte de F. Sean $x, y > 0$ en el soporte de F. Como $x/(x+y), y/(x+y) \in [0,1]$, entonces

$$\begin{aligned} G^{-1}\circ\overline{F}(x)+G^{-1}\circ\overline{F}(y) &= G^{-1}\circ\overline{F}\left[\frac{x}{x+y}\cdot(x+y)\right]+G^{-1}\circ\overline{F}\left[\frac{y}{x+y}\cdot(x+y)\right] \\ &\leq \frac{x}{x+y}G^{-1}\circ\overline{F}(x+y) + \frac{y}{x+y}G^{-1}\circ\overline{F}(x+y) = G^{-1}\circ\overline{F}(x+y). \end{aligned}$$

En otras palabras, $G^{-1} \circ F$ es superaditiva. Por lo tanto $F \overset{NBU}{>} G$. ∎

En el caso particular $G(x) = 1 - e^{-x}$, $\forall\, x \geq 0$, la proposición prueba las implicaciones siguientes entre las clases de distribuciones que se indican

$$IFR \quad \Longrightarrow \quad IFRA \quad \Longrightarrow \quad NBU.$$

Observación 2.1. Debemos mencionar que, estrictamente, para los órdenes IFR, IFRA y NBU no se requiere que las distribuciones posean una vida media residual $\mu_F(x)$ finita, pero, dado que se compararán dichos órdenes con otros que sí lo necesitan, en el presente trabajo no se abordaran casos de distribuciones con vida media infinita.

2.3. Ejemplos

Ejemplo 2.1. Suponga dos distribuciones con tasa de falla como sigue:

$$r_F(x) = \frac{1}{x+1} \qquad \text{y} \qquad r_G(x) = \frac{p}{x+1},$$

con $0 < p < 1$, respectivamente. Entonces, por lo antes visto,

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - \exp\left[-\int_0^x r_F(t)\,dt\right] = 1 - \exp\left[-\int_0^x \frac{1}{t+1}\,dt\right] \\ &= 1 - \exp[-\log(x+1)] = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}, \\ G(x) &= 1 - \exp\left[-\int_0^x \frac{p}{t+1}\,dt\right] = \frac{(x+1)^p - 1}{(x+1)^p}. \end{aligned}$$

Entonces

$$F^{-1}(u) = -\frac{u}{1-u}\,, \qquad G^{-1}(u) = \left(\frac{1}{1-u}\right)^{1/p-1}, \quad \forall\, u \in [0,1].$$

Luego

$$\frac{r_F(F^{-1}(u))}{r_G(G^{-1}(u))} = \frac{1}{p(1-u)^{\frac{1-p}{p}}}.$$

La función

$$u \mapsto \frac{1}{p(1-u)^{\frac{1-p}{p}}}$$

es claramente creciente en $[0,1]$, luego $F \overset{IFR}{>} G$. ◀

Ejemplo 2.2. Sean ahora F, G funciones de distribución con funciones tasa de falla

$$r_F(x) = x^3, \qquad r_G(x) = x^2, \quad \forall\, x > 0,$$

respectivamente. Se tiene

$$F(x) = 1 - e^{-\int_0^x r_F(t)\,dt} = 1 - e^{-x^4/4}, \qquad G(x) = 1 - e^{-x^3/3}, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Luego

$$F^{-1}(u) = [-4\log(1-u)]^{1/4}, \quad G^{-1}(u) = [-3\log(1-u)]^{1/3}, \quad \forall\, u \in [0,1].$$

Entonces

$$\frac{r_F(F^{-1}(u))}{r_G(G^{-1}(u))} = \frac{[-4\log(1-u)]^{3/4}}{[-3\log(1-u)]^{2/3}} = \frac{(4)^{3/4}[-\log(1-u)]^{1/12}}{(-3)^{2/3}}\ , \quad \forall\, u \in (0,1).$$

Esta función es claramente creciente en $(0,1)$. Por lo tanto, $F \overset{IFR}{>} G$. ◀

Es necesario señalar que los órdenes mencionados no son totales, es decir, dadas dos distribuciones, éstas no necesariamente están relacionadas por dichos órdenes. Sirva el siguiente caso para ejemplificar con el orden IFR.

Ejemplo 2.3. Consideremos las distribuciones que siguen:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1/2 \\ 1 - \dfrac{9/16}{x+1/4} & \text{si } x \ge 1/2, \end{cases}$$
$$\overline{F}_{1/3}(x) = [\overline{F}(x)]^{1/3}, \quad \forall\, x \ge 0.$$

Tenemos

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} u^{1/2} & \text{si } 0 \le u \le 1/4 \\ \dfrac{9/16}{1-u} & \text{si } u \ge 1/4. \end{cases}$$

Además $F^{-1} \circ F_{1/3}(x) = F^{-1}[1-(1-F(x))^{1/3}]$, $\forall\, x \ge 0$, es decir,

$$F^{-1} \circ F_{1/3}(x) = \begin{cases} F^{-1}[1-(1-x^2)^{1/3}] & \text{si } 0 \le x \le 1/2 \\ F^{-1}\left[1 - \left(\dfrac{9/16}{x+1/4}\right)^{1/3}\right] & \text{si } x \ge 1/2. \end{cases}$$

Se afirma que, más específicamente, se tiene

$$F^{-1} \circ F_{1/3}(x) = \begin{cases} (1-(1-x^2)^{1/3})^{1/2} & \text{si } 0 \le x \le 1/2 \\ \left[1 - \left(\dfrac{9/16}{x+1/4}\right)^{1/3}\right]^{1/2} & \text{si } 1/2 \le x \le 13/12 \\ (9/16)^{2/3}(x+1/4)^{1/3} - 1/4 & \text{si } x \ge 13/12. \end{cases}$$

En efecto, tenemos por una parte que

$$0 \le 1-(1-x^2)^{1/3} \le 1-(1-(1/2)^2)^{1/3} = 1-(3/4)^{1/3} < 1/4$$

para $0 \leq x \leq 1/2$. Por otra parte, como la función $x \mapsto 1 - \left(\frac{9/16}{x+1/4}\right)^{1/3}$ es creciente, $1 - \left(\frac{9/16}{1/2+1/4}\right)^{1/3} = 1 - (3/4)^{1/3}$ y $1 - \left(\frac{9/16}{13/12+1/4}\right)^{1/3} = 1/4$, entonces

$$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3} \leq 1 - \left(\frac{9/16}{x+1/4}\right)^{1/3} \leq \frac{1}{4}$$

para $1/2 \leq x \leq 13/12$ y

$$1 - \left(\frac{9/16}{x+1/4}\right)^{1/3} > \frac{1}{4}$$

para $x \geq 13/12$. Esto prueba la afirmación. Se afirma ahora que la función $F^{-1} \circ F_{1/3}$ es convexa en $[0, 1/2]$. En efecto, se verifica de inmediato que

$$(F^{-1} \circ F_{1/3})'(x) = \frac{x}{3(1-x^2)^{2/3}[1-(1-x^2)^{1/3}]^{1/2}},$$

$$(F^{-1} \circ F_{1/3})''(x)$$

$$= \frac{[1-(1/3)x^2-(1-x^2)^{1/3}] + [(2/3)x^2-(2/3)x^2(1-x^2)^{1/3}]}{3(1-x^2)^{5/3}[1-(1-x^2)^{1/3}]^{3/2}},$$

$\forall\, 0 \leq x \leq 1/2$. Note que

$$\frac{2x^2}{3} - \frac{2x^2(1-x^2)^{1/3}}{3} > 0, \quad \forall\, 0 \leq x \leq 1/2.$$

Por otra parte, la función $x \mapsto 1 - (1/3)x^2 - (1-x^2)^{1/3}$ tiene como derivada a la función

$$-\frac{2x}{3} + \frac{2x}{3(1-x^2)^{2/3}} \geq 0, \quad \forall\, 0 \leq x \leq 1/2,$$

entonces, $x \mapsto 1 - (1/3)x^2 - (1-x^2)^{1/3}$ es creciente en $[0, 1/2]$. Como dicha función toma el valor 0 en 0, se debe tener

$$1 - \frac{x^2}{3} - (1-x^2)^{1/3} > 0, \quad \forall\, 0 \leq x \leq 1/2.$$

Lo anterior prueba que $(F^{-1} \circ F_{1/3})''(x) > 0$, $\forall\, 0 \leq x \leq 1/2$, es decir, $F^{-1} \circ F_{1/3}$ es estrictamente convexa en $[0, 1/2]$. Esto prueba la afirmación. Por otra parte, es claro que la función

$$F^{-1} \circ F_{1/3}(x) = \left(\frac{9}{16}\right)^{2/3} \cdot \left(x + \frac{1}{4}\right)^{1/3} - \frac{1}{4}, \quad \forall\, x \geq 13/12,$$

es estrictamente cóncava en $[13/12, +\infty)$. Luego, hemos llegado a la conclusión de que $F^{-1} \circ F_{1/3}$ no es cóncava ni convexa en $[0, +\infty)$, es decir, $F \overset{IFR}{\not>} F_{1/3}$ y también $F_{1/3} \overset{IFR}{\not>} F$. ◀

En lo que resta de este trabajo se pretende hacer una análisis similar al anterior para los cinco nociones de envejecimiento restantes. En cada caso se satisface (2.1). Con una sola excepción (de NBU a NBUE) las implicaciones de (1.11) también se mantienen.

Capítulo 3

El orden DMRL

3.1. Caracterizaciones del orden DMRL

Sean $F, G \in \zeta$. Denotemos por $\mu_F(x)$ y $\mu_G(x)$ las respectivas funciones de vida media residual de F y G. Sean también

$$\overline{F}_e(x) = \frac{1}{\mu_F}\int_x^{\infty}\overline{F}(t)\,dt, \qquad \overline{G}_e(x) = \frac{1}{\mu_G}\int_x^{\infty}\overline{G}(t)\,dt$$

las respectivas funciones de probabilidad de sobrevivencia de equilibrio (o límite) de F y G. Este tipo de funciones son utilizadas en teorías para la prevención de pérdidas o seguridad industrial, íntimamente ligados con la fiabilidad de los sistemas, la cual depende de la fiabilidad de cada uno de sus componentes, que, como es natural, no funcionarán eternamente, por lo que es importante conocer su tiempo de vida útil para hacer los reemplazos correspondientes en el momento justo. También, son de importancia en Teoría de Renovación para estudiar procesos que han funcionado por un largo periodo de tiempo. Sean además

$$\tilde{r}_F(x) = \frac{\overline{F}(x)}{\mu_F\overline{F}_e(x)}, \qquad \tilde{r}_G(x) = \frac{\overline{G}(x)}{\mu_G\overline{G}_e(x)}$$

las respectivas funciones de tasa de falla de F_e y G_e. Note que

$$\tilde{r}_F(x) = [\mu_F(x)]^{-1}, \qquad \tilde{r}_G(x) = [\mu_G(x)]^{-1}.$$

En efecto, se tiene

$$[\mu_F(x)]^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{\overline{F}(x)}\int_x^{\infty}\overline{F}(t)\,dt} = \frac{\overline{F}(x)}{\int_x^{\infty}\overline{F}(t)\,dt} = \frac{\overline{F}(x)}{\mu_F\overline{F}_e(x)} = \tilde{r}_F(x).$$

Definamos

$$W_F(u) = \overline{F} \circ \overline{F}_e^{-1}(u), \quad W_G(u) = \overline{G} \circ \overline{G}_e^{-1}(u), \quad \forall\, u \in [0,1].$$

Nótese que W_F y W_G son en sí mismas funciones de distribución en $[0,1]$. Por último definamos

$$\alpha(x) = G^{-1} \circ F(x) = \overline{G}^{-1} \circ \overline{F}(x),$$

$$\beta(x) = G_e^{-1} \circ F_e(x) = \overline{G}_e^{-1} \circ \overline{F}_e(x).$$

Las igualdades anteriores se derivan del hecho de que $\overline{G}^{-1}(x) = G^{-1}(1-x)$ y, análogamente, $\overline{G}_e^{-1}(x) = G_e^{-1}(1-x)$.

Tenemos el resultado siguiente.

Proposición 3.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i. *La función* $u \mapsto \dfrac{\mu_F(F^{-1}(u))}{\mu_G(G^{-1}(u))}$ *es decreciente en* $[0,1]$.

ii. *La función* $u \mapsto \dfrac{\tilde{r}_F(F^{-1}(u))}{\tilde{r}_G(G^{-1}(u))}$ *es creciente en* $[0,1]$.

iii. *La función* $x \mapsto \dfrac{\overline{G}_e \circ \beta(x)}{\overline{G}_e \circ \alpha(x)}$ *es decreciente en* $[0,\infty)$.

iv. *La función* $u \mapsto W_F^{-1} \circ W_G(u)$ *es star-shaped en* $(0,1]$.

Demostración.

(i) $\Rightarrow$ (ii). En el párrafo anterior se demostraron las identidades

$$\tilde{r}_F(F^{-1}(u)) = [\mu_F(F^{-1}(u))]^{-1} \qquad \text{y} \qquad \tilde{r}_G(G^{-1}(u)) = [\mu_G(G^{-1}(u))]^{-1}.$$

Luego

$$\frac{\tilde{r}_F(F^{-1}(u))}{\tilde{r}_G(G^{-1}(u))} = \left[\frac{\mu_F(F^{-1}(u))}{\mu_G(G^{-1}(u))}\right]^{-1}.$$

Se sigue pues de la hipótesis que la función

$$u \mapsto \frac{\tilde{r}_F(F^{-1}(u))}{\tilde{r}_G(G^{-1}(u))}$$

debe ser creciente en $[0,1]$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Se sigue de las definiciones dadas antes de la proposición que

$$\begin{aligned}\frac{\overline{G}_e \circ \beta(x)}{\overline{G}_e \circ \alpha(x)} &= \frac{\overline{G}_e(\overline{G}_e^{-1} \circ \overline{F}_e(x))}{\overline{G}_e(\alpha(x))} = \frac{\overline{F}_e(x)}{\overline{G}(\alpha(x))/[\mu_G r_G(\alpha(x))]} \\ &= \frac{\overline{F}(x)/[\mu_F \tilde{r}_F(x)]}{\overline{G}(\overline{G}^{-1} \circ \overline{F}(x))/[\mu_G \tilde{r}_G(G^{-1} \circ F(x))]} = \frac{\overline{F}(x)/[\mu_F \tilde{r}_F(F^{-1} \circ F(x))]}{\overline{F}(x))/[\mu_G \tilde{r}_G(G^{-1} \circ F(x))]} \\ &= \frac{\mu_G \tilde{r}_G(G^{-1} \circ F(x))}{\mu_F \tilde{r}_F(F^{-1} \circ F(x))} = \frac{\mu_G}{\mu_F}\left[\frac{\tilde{r}_F(F^{-1} \circ F(x))}{\tilde{r}_G(G^{-1} \circ F(x))}\right]^{-1}\end{aligned}$$

Ya que F^{-1} es creciente, si ponemos $x = F^{-1}(u)$ y usamos la hipótesis de que la función $u \mapsto \tilde{r_F}(F^{-1}(u))/\tilde{r_G}(G^{-1}(u))$ es creciente en $[0,1]$, se concluye que la función

$$x \mapsto \frac{\overline{G_e} \circ \beta(x)}{\overline{G_e} \circ \alpha(x)}$$

es decreciente en $[0, \infty)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Debe mostrarse que la función $u \mapsto W_F^{-1} \circ W_G(u)/u$ es creciente en $(0,1]$. Se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\overline{G_e} \circ \beta(x)}{\overline{G_e} \circ \alpha(x)} &= \frac{\overline{F_e}(x)}{\overline{G_e}(\overline{G}^{-1}(\overline{F}(x)))} = \frac{\overline{F_e}(\overline{F}^{-1}(t))}{\overline{G_e}(\overline{G}^{-1}(t))} \\ &= \frac{1}{u}\overline{F_e} \circ \overline{F}^{-1}(\overline{G} \circ \overline{G_e}^{-1}(u)) = \frac{1}{u} W_F^{-1} \circ W_G(u),\end{aligned}$$

donde $x = \overline{F}^{-1}(t)$ y $u = \overline{G_e}(\overline{G}^{-1}(t))$. Por hipótesis, la función

$$x \mapsto \frac{\overline{G_e} \circ \beta(x)}{\overline{G_e} \circ \alpha(x)}$$

es decreciente en $[0, \infty)$ y por ser la función $\overline{F}^{-1}$ decreciente, entonces la función

$$t \mapsto \frac{\overline{F_e}(\overline{F}^{-1}(t))}{\overline{G_e}(\overline{G}^{-1}(t))}$$

debe ser creciente en $[0,1]$, luego la función

$$u \mapsto \frac{1}{u} W_F^{-1} \circ W_G(u)$$

debe ser creciente en $(0,1]$.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{u}(W_F)^{-1}\circ W_G(u) = \frac{\overline{F}_e(\overline{F}^{-1}(x))}{\overline{G}_e(\overline{G}^{-1}(x))} &= \frac{\overline{F}(\overline{F}^{-1}(x))/[\mu_F\tilde{r}_F(\overline{F}^{-1}(x))]}{\overline{G}(\overline{G}^{-1}(x))/[\mu_G\tilde{r}_G(\overline{G}^{-1}(x))]} \\ &= \frac{\mu_G\tilde{r}_G(\overline{G}^{-1}(x))}{\mu_F\tilde{r}_F(\overline{F}^{-1}(x))} = \frac{\mu_G\mu_F(\overline{F}^{-1}(x))}{\mu_F\mu_G(\overline{G}^{-1}(x))},\end{aligned}$$

donde $u = \overline{G}_e(\overline{G}^{-1}(x))$. Como la función

$$u \mapsto \frac{1}{u}(W_F)^{-1}\circ W_G(u)$$

es creciente en $(0,1]$ y la función $\overline{G}^{-1}$ es decreciente, se sigue que la función

$$x \mapsto \frac{\mu_G\mu_F(\overline{F}^{-1}(x))}{\mu_F\mu_G(\overline{G}^{-1}(x))}$$

debe ser decreciente en $[0,1]$. ∎

Definición 3.1. Si se cumplen las condiciones equivalentes de la proposición anterior, decimos que F **es más DMRL que** G, y escribimos $F \overset{DMRL}{>} G$.

El orden DMRL, al igual que los órdenes anteriores, es una relación de orden sobre el conjunto de clases de equivalencia $\mathfrak{F}$ de ζ. De hecho, tenemos el resultado siguiente.

Teorema 3.1. *Se cumplen las afirmaciones siguientes.*

i. *La relación* $\overset{DMRL}{>}$ *es un orden parcial sobre el conjunto de clases de equivalencia* $\mathfrak{F}$ *de* ζ.

ii. *Si* $\overline{G}(x) = e^{-x}$, *entonces* $F \overset{DMRL}{>} G$ *si y sólo si* F *es una distribución de clase DMRL.*

iii. *Si* $F \overset{IFR}{>} G$, *entonces* $F \overset{DMRL}{>} G$.

Demostración. i. (Reflexividad) Suponga que $F \sim G$, es decir, $\overline{F}(x) = \overline{G}(\theta x)$ para algún $\theta > 0$. Se debe probar que $F \overset{DMRL}{>} G$. Se tiene

$$\begin{aligned}\mu_F = \mu_F(0) = \int_0^\infty \frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(0)}\,dt &= \int_0^\infty \overline{F}(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty \overline{G}(\theta t)\,dt = \frac{1}{\theta}\int_0^\infty \overline{G}(t)\,dt = \frac{1}{\theta}\mu_G(0) = \frac{1}{\theta}\mu_G.\end{aligned}$$

Luego $\theta = \mu_G/\mu_F$. También:

$$\overline{F}_e(x) = \int_x^\infty \frac{\overline{F}(t)}{\mu_F}\,dt = \int_x^\infty \frac{\overline{G}(\theta t)}{\theta\mu_G}\,dt = \overline{G}_e(\theta x)$$

y entonces

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \overline{G}^{-1} \circ \overline{F}(x) = \overline{G}^{-1} \circ \overline{G}(\theta x) = \theta x, \\ \beta(x) &= \overline{G}_e^{-1} \circ \overline{F}_e(x) = \overline{G}_e^{-1} \circ \overline{G}_e(\theta x) = \theta x.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{\overline{G}_e \circ \beta(x)}{\overline{G}_e \circ \alpha(x)} = 1$$

la cual es decreciente para $x \in [0, \infty)$. Usando (iii) de la Proposición 3.1 resulta $F \overset{DMRL}{>} G$.

(Antisimetría) Suponga que $F \overset{DMRL}{>} G$ y $G \overset{DMRL}{>} F$. Se debe probar que $F \sim G$. Note que $\beta(x) = \overline{G}_e^{-1} \circ \overline{F}_e(x)$ implica

$$\beta'(x) = [(\overline{G}_e^{-1})' \circ \overline{F}_e(x)] \cdot [\overline{F}'_e(x)].$$

Como

$$\overline{F}_e(x) = \int_x^\infty \frac{\overline{F}(t)}{\mu_F}\,dt \quad \text{y} \quad \overline{G}_e(x) = \int_x^\infty \frac{\overline{G}(t)}{\mu_G}\,dt,$$

el Teorema Fundamental del Cálculo y el Teorema de la Función Inversa implican

$$\overline{F}'_e(x) = \frac{\overline{F}(x)}{\mu_F} \quad \text{y} \quad \left(\overline{G}_e^{-1}\right)'(F_e(x)) = \frac{\mu_G}{\overline{G}(\overline{G}_e^{-1} \circ F_e(x))}.$$

Sustituyendo en la relación de arriba, resulta

$$\beta'(x) = \frac{\mu_G \cdot \overline{F}(x)}{\mu_F \cdot \overline{G}(\overline{G}_e^{-1} \circ \overline{F}_e(x)} = \frac{\mu_G \cdot \overline{G} \circ \alpha(x)}{\mu_F \cdot \overline{G} \circ \beta(x)} = \beta'(0) \cdot \frac{\overline{G} \circ \alpha(x)}{\overline{G} \circ \beta(x)}. \tag{3.1}$$

Por la hipótesis y por (i) de la Proposición 3.1 se debe tener

$$\frac{\mu_F(F^{-1}(u))}{\mu_G(G^{-1}(u))} = cte.$$

Por tanto $\mu_F(F^{-1}(u))$ es un múltiplo de $\mu_G(G^{-1}(u))$, luego, por la parte (iii) de la Proposición 3.1, se concluye que $\overline{G}_e \circ \beta(x) = \overline{F}_e$ es proporcional a $\overline{G}_e \circ \alpha(x)$. Al tomar $x = 0$, se obtiene

$$\overline{G}_e \circ \beta(0) = \overline{G}_e(0) = 1 \quad \text{y} \quad \overline{G}_e \circ \alpha(0) = \overline{G}_e(0) = 1,$$

pues $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 0$ y $\overline{G}_e(0) = 1$. Así, la constante de proporcionalidad es la unidad, por lo que $\alpha(x) = \beta(x)$, $\forall\, x \geq 0$. De (3.1) se obtiene

$$\beta'(x) = \frac{\mu_G}{\mu_F}, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Por tanto

$$\alpha(x) = \beta(x) = \theta x, \quad \forall\, x \geq 0,$$

para algún $\theta > 0$. Luego $\overline{F}(x) = \overline{G}(\theta x)$, es decir, $F \sim G$.

(Transitividad) Por (i) de la Proposición 3.1, se tiene que si $F \overset{DMRL}{>} G$ y $G \overset{DMRL}{>} H$, entonces las funciones $u \mapsto \mu_F(F^{-1}(u))/\mu_G(G^{-1}(u))$ y $u \mapsto \mu_G(G^{-1}(u))/\mu_H(H^{-1}(u))$ son decrecientes en $[0, 1]$. Siendo estas funciones además no negativas se sigue que

$$u \mapsto \left[\frac{\mu_F(F^{-1}(u))}{\mu_G(G^{-1}(u))}\right] \cdot \left[\frac{\mu_G(G^{-1}(u))}{\mu_H(H^{-1}(u))}\right] = \frac{\mu_F(F^{-1}(u))}{\mu_H(H^{-1}(u))}$$

es decreciente en $[0, 1]$. Luego $F \overset{DMRL}{>} H$, por (i) de la Proposición 3.1.

(ii) Suponga que $\overline{G}(x) = e^{-x}$. Debemos probar que $F \overset{DMRL}{>} G$ si y sólo si F es DMRL. Se tiene

$$\overline{G}_e(x) = \int_x^\infty \frac{\overline{G}(t)}{\mu_G}\, dt = \frac{1}{\mu_G} \int_x^\infty e^{-t}\, dt = \frac{e^{-x}}{\mu_G} = \frac{\overline{G}(x)}{\mu_G}, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Luego

$$W_G(u) = \overline{G} \circ \overline{G}_e^{-1}(u) = u, \quad \forall\, u \in [0,1].$$

De este modo,

$$W_F^{-1} \circ W_G(u) = W_F^{-1}(u) = \overline{F} \circ \overline{F}_e^{-1}(u), \quad \forall\, u \in [0,1].$$

Por (iv) de la Proposición 3.1, $W_F^{-1} \circ W_G(u)$ es star-shaped en $[0,1]$ si y sólo si $F \overset{DMRL}{>} G$. Se tiene que

$$W_F^{-1} \circ W_G(u) = W_F^{-1}(u) = \overline{F} \circ \overline{F}_e^{-1}(u)$$

es star-shaped en $[0,1]$, es decir, que la función

$$u \mapsto \frac{1}{u} \cdot \overline{F} \circ \overline{F}_e^{-1}(u)$$

es creciente en $[0,1]$, si y sólo si la función

$$\begin{aligned} u \mapsto \frac{1}{u}\overline{F} \circ \overline{F}_e^{-1}(u) &= \frac{1}{u} \cdot \tilde{r}_F(\overline{F}_e^{-1}(u)) \cdot \mu_F \cdot \overline{F}_e(\overline{F}_e^{-1}(u)) \\ &= \frac{1}{u} \cdot \tilde{r}_F(\overline{F}_e^{-1}(u)) \cdot \mu_F \cdot u = \mu_F \cdot \tilde{r}_F(\overline{F}_e^{-1}(u)) = \frac{\mu_F}{\mu_F(\overline{F}_e^{-1}(u))} \end{aligned}$$

es creciente en $[0,1]$, si y sólo si la función $x \mapsto \mu_F(x)$ es decreciente en $[0,\infty)$, si y sólo si F es DMRL.

(iii) Suponga que $F \overset{IFR}{>} G$. Debemos probar que $F \overset{DMRL}{>} G$. Si F y G tienen densidades positivas f y g, entonces $\alpha(x)$ y $\gamma(u) = (W_F)^{-1} \circ W_G(u)$ son diferenciables, donde

$$\gamma(u) = \overline{F}_e \circ \overline{F}^{-1} \circ \overline{G} \circ \overline{G}_e^{-1}(u).$$

Por regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \gamma'(u) = [(\overline{F}_e)' \circ \overline{F}^{-1} \circ \overline{G} \circ \overline{G}_e^{-1}(u)] \cdot [(\overline{F}^{-1})' \circ \overline{G} \circ \overline{G}_e^{-1}(u)] \\ \cdot [(\overline{G})' \circ \overline{G}_e^{-1}(u)] \cdot [(\overline{G}_e^{-1})'(u)], \end{aligned}$$

donde

$$(\overline{F}_e)'(x) = \frac{\overline{F}(x)}{\mu_F}, \quad (\overline{G}_e^{-1})'(u) = \left.\frac{1}{(\overline{G}_e)'(x)}\right|_{x=\overline{G}_e^{-1}(u)} = \left.\frac{\mu_G}{\overline{G}(x)}\right|_{x=\overline{G}_e^{-1}(u)}.$$

Luego

$$\gamma'(u) = \frac{\mu_G}{\mu_F} \cdot \frac{\overline{G} \circ \overline{G}_e^{-1}(u)}{\overline{G}(x)} \cdot [(\overline{F}^{-1})' \circ \overline{G} \circ \overline{G}_e^{-1}(u)] \cdot [(\overline{G})' \circ \overline{G}_e^{-1}(u)] \bigg|_{x=\overline{G}_e^{-1}(u)} .$$

Puesto que $\alpha(x) = \overline{G}^{-1} \circ \overline{F}(x)$, entonces $\alpha^{-1}(x) = \overline{F}^{-1} \circ \overline{G}(x)$. Así pues

$$\frac{d}{dx}\alpha^{-1}(x) = [(\overline{F}^{-1})' \circ \overline{G}(x)] \cdot [(\overline{G})'(x)].$$

Entonces

$$\begin{aligned}\gamma'(u) = \frac{\mu_G}{\mu_F} \cdot \frac{\overline{G} \circ \overline{G}_e^{-1}(u)}{\overline{G} \circ \overline{G}_e^{-1}(u)} \cdot [(\overline{F}^{-1})' \circ \overline{G} \circ \overline{G}_e^{-1}(u)] \cdot [(\overline{G})' \circ \overline{G}_e^{-1}(u)] \\ = \frac{\mu_G}{\mu_F} \cdot \frac{d}{dx}\alpha^{-1}(x) \bigg|_{x=\overline{G}_e^{-1}(u)} .\end{aligned}$$

Como $F \overset{IFR}{>} G$, entonces $\alpha(x)$ es convexa en $[0, \infty)$, luego $\gamma(u)$ es convexa en $[0, 1]$. Por lo tanto $\gamma(u)$ es star-shaped en $[0, 1]$. El resultado general se sigue del hecho de que las distribuciones con densidad positiva son densas en $\mathfrak{F}$. ▮

3.2. Ejemplos

Ejemplo 3.1. Consideremos las distribuciones siguientes:

$$\overline{F}(x) = e^{-x} \qquad \text{y} \qquad \overline{G}(x) = \frac{1}{(x+1)^2} .$$

Por definicion se sigue que

$$\mu_F(x) = \frac{1}{\overline{F}(x)} \cdot \int_x^\infty \overline{F}(t)\, dt = \frac{1}{e^{-x}} \cdot \int_x^\infty e^{-t}\, dt = \frac{1}{e^{-x}} \left[-(-e^{-x})\right] = 1$$

y, de igual forma,

$$\begin{aligned}\mu_G(x) = \frac{1}{\overline{G}(x)} \cdot \int_x^\infty \overline{G}(t)\, dt = (x+1)^2 \cdot \int_x^\infty \frac{1}{(x+1)^2}\, dt \\ = (x+1)^2 \cdot \left[-\left(-\frac{1}{x+1}\right)\right] = x+1.\end{aligned}$$

Por otro lado, es claro que

$$F^{-1}(u) = -\log(1-u) \quad \text{y} \quad G^{-1}(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u}} - 1, \quad \forall\, u \in (0,1).$$

De donde

$$\frac{\mu_F(F^{-1}(u))}{\mu_G(G^{-1}(u))} = \sqrt{1-u}, \quad \forall\, u \in (0,1).$$

La función

$$u \mapsto \frac{\mu_F(F^{-1}(u))}{\mu_G(G^{-1}(u))} = \sqrt{1-u}$$

es claramente decreciente en $[0,1]$. Por la parte (i) de la Proposición anterior podemos afirmar que

$$F \overset{DMRL}{>} G. \blacktriangleleft$$

Ejemplo 3.2. Sean ahora las distribuciones

$$\overline{F}(x) = e^{-x} \quad \text{y} \quad \overline{G}(x) = e^{-xp},$$

donde $p > 0$. Del anterior ejemplo sabemos que $\mu_F(x) = 1$. Para G se tiene:

$$\mu_G(x) = \frac{1}{e^{-xp}} \cdot \int_x^{\infty} e^{-tp}\, dt = \frac{1}{e^{-xp}} \cdot \left(-\frac{1}{p}\right) \left[-e^{-xp}\right] = \frac{1}{p}\,.$$

Luego, la función

$$u \mapsto \frac{\mu_F(F^{-1}(u))}{\mu_G(G^{-1}(u))} = p$$

es decreciente en $[0,1]$, es decir, se satisface el orden

$$F \overset{DMRL}{>} G.$$

Obsérvese que en este caso también se verifica el orden inverso, es decir, que

$$G \overset{DMRL}{>} F.$$

En efecto, la función

$$u \mapsto \frac{\mu_G(G^{-1}(u))}{\mu_F(F^{-1}(u))} = \frac{1}{p}$$

también es decreciente en $[0,1]$. Este hecho ejemplifica la parte (ii) del Teorema 3.1, pues ambas distribuciones F y G son DMRL ($\mu_F(x)$ y $\mu_G(x)$ decrecientes), condición necesaria y suficiente para ordenarse de tal modo. $\blacktriangleleft$

Capítulo 4

Los órdenes NBUE y HNBUE

4.1. El orden NBUE

De definiciones anteriores y de (3.1) se sigue el resultado siguiente.

Proposición 4.1. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

i. $\dfrac{\mu_F(F^{-1}(u))}{\mu_G(G^{-1}(u))} \leq \dfrac{\mu_F}{\mu_G}, \quad \forall\, u \in [0,1].$

ii. $\dfrac{\tilde{r}_F(F^{-1}(u))}{\tilde{r}_G(G^{-1}(u))} \geq \dfrac{\mu_G}{\mu_F}, \quad \forall\, u \in [0,1].$

iii. $\dfrac{\tilde{r}_F(F_e^{-1}(u))}{\tilde{r}_G(G_e^{-1}(u))} \geq \dfrac{\mu_G}{\mu_F}, \quad \forall\, u \in [0,1].$

iv. $\beta'(x) \geq \beta'(0) = \dfrac{\mu_G}{\mu_F}, \quad \forall\, x \geq 0.$

v. $\beta(x) \geq \alpha(x), \quad \forall\, x \geq 0.$

vi. $\dfrac{\overline{G}_e \circ \beta(x)}{\overline{G}_e \circ \alpha(x)} \leq 1, \quad \forall\, x \geq 0.$

Demostración. (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Recuerde que

$$\tilde{r}_F(F^{-1}(u)) = [\mu_F(F^{-1}(u))]^{-1} \quad \text{y} \quad \tilde{r}_G(G^{-1}(u)) = [\mu_G(G^{-1}(u))]^{-1}, \quad \forall\, u \in [0,1].$$

Luego

$$\frac{\tilde{r}_F(F^{-1}(u))}{\tilde{r}_G(G^{-1}(u))} = \left[\frac{\mu_F(F^{-1}(u)}{\mu_G(G^{-1}(u))}\right]^{-1}, \quad \forall\, u \in [0,1].$$

Entonces, se cumple (i), es decir,

$$\frac{\mu_F(F^{-1}(u))}{\mu_G(G^{-1}(u))} \leq \frac{\mu_G}{\mu_F}, \quad \forall\, u \in [0,1],$$

si y sólo si

$$\frac{\tilde{r}_F(F^{-1}(u))}{\tilde{r}_G(G^{-1}(u))} \geq \frac{\mu_G}{\mu_F}, \quad \forall\, u \in [0,1],$$

es decir, se cumple (ii).

(ii) $\Leftrightarrow$ **(iii)**. Se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{r}_F(F^{-1}(u))}{\tilde{r}_G(G^{-1}(u))} &= \frac{[\overline{F}(F^{-1}(u))]/[\mu_F \cdot \overline{F_e}(F^{-1}(u))]}{[\overline{G}(G^{-1}(u))/[\mu_G \cdot \overline{G_e}(G^{-1}(u))]} \\ &= \frac{\mu_G}{\mu_F} \cdot \frac{[1-F(F^{-1}(u))]/[\overline{F}_e(F^{-1}(u))]}{[1-G(G^{-1}(u))]/[\overline{G}_e(G^{-1}(u))]} \\ &= \frac{\mu_G}{\mu_F} \cdot \frac{(1-u)\overline{G}_e(G^{-1}(u))}{(1-u)\overline{F}_e(F^{-1}(u))} = \frac{\mu_G}{\mu_F} \cdot \frac{\overline{G}_e(G^{-1}(u))}{\overline{F}_e(F^{-1}(u))}\,.\end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{r}_F(F_e^{-1}(u))}{\tilde{r}_G(G_e^{-1}(u))} &= \frac{[\overline{F}(F_e^{-1}(u))]/[\mu_F \cdot \overline{F_e}(F_e^{-1}(u))]}{[\overline{G}(G_e^{-1}(u))/[\mu_G \cdot \overline{G_e}(G_e^{-1}(u))]} \\ &= \frac{\mu_G}{\mu_F} \cdot \frac{[\overline{F}(F_e^{-1}(u))]/[1-F_e(F_e^{-1}(u))]}{[\overline{G}(G_e^{-1}(u))]/[1-G_e(G_e^{-1}(u))]} \\ &= \frac{\mu_G}{\mu_F} \cdot \frac{[\overline{F}(F_e^{-1}(u))]/[1-u]}{[\overline{G}(G_e^{-1}(u))]/[1-u]} = \frac{\mu_G}{\mu_F} \cdot \frac{\overline{F}(F_e^{-1}(u))}{\overline{G}(G_e^{-1}(u))}\,.\end{aligned}$$

Entonces, se cumple (ii), es decir,

$$\frac{\tilde{r}_F(F^{-1}(u))}{\tilde{r}_G(G^{-1}(u))} \geq \frac{\mu_G}{\mu_F}, \quad \forall\, u \in [0,1],$$

si y sólo si

$$\frac{\overline{G}_e(G^{-1}(u))}{\overline{F}_e(F^{-1}(u))} \geq 1, \quad \forall\, u \in [0,1],$$

o sea,

$$\overline{G}_e(G^{-1}(u)) \geq \overline{F}_e(F^{-1}(u)), \quad \forall\, u \in [0,1],$$

es decir,

$$\overline{F}(F_e^{-1}(v)) \geq \overline{G}(G_e^{-1}(v)), \quad \forall\, v \in [0,1],$$

equivalentemente

$$\frac{\overline{F}(F_e^{-1}(v))}{\overline{G}(G_e^{-1}(v))} \geq 1, \quad \forall\, v \in [0,1],$$

es decir, si y sólo si se cumple (iii).

(iii) $\Leftrightarrow$ **(iv)**. Por (3.1) sabemos que

$$\beta^{'}(x) = \beta^{'}(0) \cdot \frac{\overline{G} \circ \alpha(x)}{\overline{G} \circ \beta(x)}, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Así pues, se cumple (iv) si y sólo si

$$\frac{\overline{G} \circ \alpha(x)}{\overline{G} \circ \beta(x)} \geq 1, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Por definiciones anteriores, tenemos

$$\frac{\overline{G} \circ \alpha(x)}{\overline{G} \circ \beta(x)} = \frac{\overline{G}(G^{-1} \circ F(x))}{\overline{G}(G_e^{-1} \circ F_e(x))} = \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(G_e^{-1} \circ F_e(x))}, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Haciendo $u = F_e(x)$, equivalentemente, $x = F_e^{-1}(u)$, tenemos que se cumple (iv) si y sólo si

$$\frac{\overline{F}(F_e^{-1}(u))}{\overline{G}(G_e^{-1}(u))} \geq 1, \quad \forall\, u \in [0,1].$$

De acuerdo a la demostración de la parte anterior, esto último se cumple si y sólo si se cumple (iii).

(iv) $\Leftrightarrow$ **(v).** Por la demostración de la parte anterior, se cumple (iv) si y sólo si

$$\frac{\overline{F}(F_e^{-1}(u))}{\overline{G}(G_e^{-1}(u))} \geq 1, \quad \forall\, u \in [0,1],$$

es decir,

$$\overline{F}(F_e^{-1}(u)) \geq \overline{G}(G_e^{-1}(u)), \quad \forall\, u \in [0,1],$$

o sea,

$$F(F_e^{-1}(u)) \leq G(G_e^{-1}(u)), \quad \forall\, u \in [0,1],$$

equivalentemente

$$G^{-1} \circ F(F_e^{-1}(u)) \leq G_e^{-1}(u), \quad \forall\, u \in [0,1],$$

o sea,

$$\alpha(x) = G^{-1} \circ F(x) \leq G_e^{-1}(F_e(x)) = \beta(x), \quad \forall\, x \geq 0,$$

es decir, si y sólo si se cumple (v).

(v) $\Leftrightarrow$ (vi). Tenemos que se cumple (v), es decir,

$$\beta(x) \geq \alpha(x), \quad \forall\, x \geq 0,$$

si y sólo si

$$\overline{G}_e \circ \beta(x) \leq \overline{G}_e \circ \alpha(x), \quad \forall\, x \geq 0,$$

por ser $\overline{G}_e$ una función estrictamente decreciente, lo cual se cumple si y sólo si

$$\frac{\overline{G}_e \circ \beta(x)}{\overline{G}_e \circ \alpha(x)} \leq 1, \quad \forall\, x \geq 0. \blacksquare$$

Definición 4.1. Si se satisfacen las condiciones equivalentes de la proposición anterior, decimos que F **es más nueva mejor que usada en esperanza que** G, y escribiremos $F \overset{NBUE}{>} G$.

4.2. Propiedades del orden NBUE

El orden NBUE tiene las propiedades siguientes.

Teorema 4.1. *Se cumplen las afirmaciones siguientes.*

i. *La relación* $\overset{NBUE}{>}$ *es un orden parcial sobre el conjunto de clases de equivalencia* $\mathfrak{F}$ *de* ζ.

ii. *Si* $\overline{G}(x) = e^{-x}$, *entonces* $F \overset{NBUE}{>} G$ *si y sólo si* F *es una distribución NBUE.*

iii. *Si* $F \overset{DMRL}{>} G$, *entonces* $F \overset{NBUE}{>} G$.

iv. *Si* $F \overset{IFRA}{>} G$, *entonces* $F \overset{NBUE}{>} G$.

Demostración. (i) (Reflexividad) Debe mostrarse que $F \sim G$ implica $G \overset{NBUE}{>} F$. Si $F \sim G$, entonces $\overline{F}(x) = \overline{G}(\theta x)$ para $\theta > 0$, luego, como en la demostración del Teorema 3.1

$$\theta = \frac{\mu_G}{\mu_F} \qquad \text{y} \qquad \alpha(x) = \beta(x).$$

Por lo tanto

$$\frac{\overline{G}_e \circ \beta(x)}{\overline{G}_e \circ \alpha(x)} = 1,$$

luego se cumple $F \overset{NBUE}{>} G$.

(Antisimetría) Si $F \overset{NBUE}{>} G$ y $G \overset{NBUE}{>} F$, se debe probar que $F \sim G$. Se tiene por la condición (e) de la Proposición anterior,

$$G^{-1} \circ F(x) \leq G_e^{-1} \circ F_e(x) \qquad \text{y} \qquad F^{-1} \circ G(x) \leq F_e^{-1} \circ G_e(x), \quad \forall\, x \geq 0.$$

Por lo tanto $G^{-1} \circ F(x) \equiv G_e^{-1} \circ F_e(x)$, $\forall\, x \geq 0$, es decir, $\alpha(x) = \beta(x)$, $\forall\, x$. Se sigue de (3.1) que

$$\beta'(x) = \frac{\mu_G}{\mu_F} = \theta, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Luego $\alpha(x) = \beta(x) = \theta x, \forall\, x \geq 0$, para algún $\theta > 0$. De donde $\overline{F}(x) = \overline{G}(\theta x)$, $\forall\, x \geq 0$, es decir, $F \sim G$.

(Transitividad) Sean $F, G, H \in \mathfrak{F}$ tales que $F \overset{NBUE}{>} G$ y $G \overset{NBUE}{>} H$. De nuevo, por (e) de la Proposición anterior

$$G_e^{-1} \circ F_e(x) \geq G^{-1} \circ F(x) \qquad \text{y} \quad H_e^{-1} \circ G_e(x) \geq H^{-1} \circ G(x), \quad \forall\, x \geq 0.$$

Como

$$H_e^{-1} \circ F_e(x) = H_e^{-1} \circ G_e \circ G_e^{-1} \circ F_e(x)$$

y

$$H^{-1} \circ F(x) = H^{-1} \circ G \circ G^{-1} \circ F(x),$$

entonces

$$H_e^{-1} \circ F_e(x) \geq H^{-1} \circ F(x), \quad \forall\, x \geq 0.$$

Por tanto $F \overset{NBUE}{>} G$.

(ii) Sea $\overline{G}(x) = e^{-x}$, $\forall\, x \geq 0$.

Se tiene

$$\mu_G(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{\overline{G}(x)}\, dt = \frac{1}{e^{-x}} \cdot \int_x^\infty e^{-t}\, dt = \frac{1}{e^{-x}} \cdot e^{-x} = 1.$$

En particular $\mu_G = 1$.

Entonces $F \overset{NBUE}{>} G \iff$

$$\frac{\mu_F(x)}{\mu_G(x)} \leq \frac{\mu_F}{\mu_G} = \mu_F$$

con $x = F^{-1}(u) \geq 0$, esto por (i) de la Proposición anterior, $\iff$

$$\mu_F(x) \leq \mu_F \;, \quad \forall\, x \geq 0$$

$\iff$

$$F \; es \; NBUE.$$

(iii) Definamos

$$q_{F,G}(x) = \frac{\int_x^\infty \overline{F}(y)\, d\alpha(y)}{\int_x^\infty \overline{F}(y)\, dy}, \forall\, x \geq 0.$$

Nótese que

$$\mu_G(\alpha(x)) = \int_{\alpha(x)}^\infty \frac{\overline{G}(t)}{\overline{G}(\alpha(x))}\, dt = \int_x^\infty \frac{\overline{G}(\alpha(y))}{\overline{F}(x)}\, d\alpha(y)$$

en virtud del cambio de variable $t = \alpha(y)$ y de que $\alpha(y) = \overline{G}^{-1} \circ \overline{F}(y)$. Luego

$$\overline{F}(x) \cdot \mu_G(\alpha(x)) = \int_x^\infty \overline{G}(\alpha(y))\, d\alpha(y) = \int_x^\infty \overline{F}(y)\, d\alpha(y),$$

lo cual resulta aplicando otra vez la identidad $\alpha(y) = \overline{G}^{-1} \circ \overline{F}(y)$. Así que

$$\begin{aligned}\int_x^\infty \overline{F}(y)\, d\alpha(y) = \overline{F}(x) \cdot \mu_G(\alpha(x)) = \frac{\overline{F}(x)}{\tilde{r}_G(\alpha(x))}& \\ = \frac{\overline{G}(\alpha(x))}{\tilde{r}_G(\alpha(x))} = \mu_G \cdot \overline{G}_e \circ \alpha(x).&\end{aligned}$$

Del mismo modo

$$\int_x^\infty \overline{F}(y)\,dy = \mu_F \cdot \overline{F}_e(x) = \mu_F \cdot \overline{G}_e \circ \beta(x)$$

Por tanto:

$$q_{F,G}(x) = \frac{\mu_G}{\mu_F} \cdot \frac{\overline{G}_e \circ \alpha(x)}{\overline{G}_e \circ \beta(x)}.$$

Veamos ahora que $F \overset{NBUE}{>} G$ si y sólo si $q_{F,G}(x) \geq q_{F,G}(0), x \geq 0$. Si $F \overset{NBUE}{>} G$, entonces

$$\frac{\overline{G}_e \circ \beta(x)}{\overline{G}_e \circ \alpha(x)} \leq 1 \quad \text{ssi} \quad \frac{\mu_G}{\mu_F} \cdot \frac{\overline{G}_e \circ \alpha(x)}{\overline{G}_e \circ \beta(x)} \geq \frac{\mu_G}{\mu_F}$$

Puesto que

$$q_{F,G}(0) = \frac{\mu_G}{\mu_F} \cdot \frac{\overline{G}_e \circ \alpha(0)}{\overline{G}_e \circ \beta(0)} = \frac{\mu_G}{\mu_F} \cdot \frac{\overline{G}_e(0)}{\overline{G}_e(0)} = \frac{\mu_G}{\mu_F}$$

pues $\alpha(0) = \beta(0) = 0$ y $\overline{G}_e(0) = 1$. Se sigue que $F \overset{NBUE}{>} G$ si y sólo si

$$\frac{\mu_G}{\mu_F} \cdot \frac{\overline{G}_e \circ \alpha(x)}{\overline{G}_e \circ \beta(x)} \geq \frac{\mu_G}{\mu_F} \qquad \text{ssi} \qquad q_{F,G}(x) \geq q_{F,G}(0), \quad \forall\, x \geq 0.$$

Suponga pues que $F \overset{DMRL}{>} G$. Por (iii) de la Proposición 3.1 , se tiene que

$$a \mapsto \frac{\overline{G}_e \circ \beta(x)}{\overline{G}_e \circ \alpha(x)}$$

es decreciente en $[0, \infty)$, lo cual implica

$$\frac{\mu_G}{\mu_F} \cdot \frac{\overline{G}_e \circ \alpha(x)}{\overline{G}_e \circ \beta(x)} \geq \frac{\mu_G}{\mu_F}, \quad \forall\, x \geq 0,$$

es decir,

$$q_{F,G}(x) \geq q_{F,G}(0), \quad \forall\, x \geq 0.$$

Luego

$$F \overset{NBUE}{>} G.$$

Para probar la otra implicación, note que si $\alpha(y) = y \cdot I_{\{y \geq y_0\}}$, para algún $y_0 > 0$, donde I es la función indicadora, siendo $\alpha(y) = G^{-1} \circ F(y) = \overline{G}^{-1} \circ \overline{F}(y)$, $\forall\, y \geq 0$, se seguiría que $G(y) = F(y)$ y $\overline{G}(y) = \overline{F}(y)$ para toda $y \geq y_0$, esto es, $\alpha(y) = \beta(y)$, $\forall\, y \geq y_0$. Haciendo $x = y - y_0$, resultaría

$$\frac{\overline{G}_e \circ \alpha(x)}{\overline{G}_e \circ \beta(x)} = 1,$$

de lo cual se deduciría de inmediato que

$$q_{F,G}(x) = \frac{\mu_G}{\mu_F} \cdot \frac{\overline{G}_e \circ \alpha(x)}{\overline{G}_e \circ \beta(x)} \geq \frac{\mu_G}{\mu_F} = q_{F,G}(0), \quad \forall\, x \geq 0.$$

Así pues, en este caso se tendría sin más que $F \overset{NBUE}{>} G$.

Supongamos pues que $F \overset{IFRA}{>} G$. Entonces $G^{-1} \circ F(x) = \alpha(x)$ es star-shaped, o equivalentemente, que $y \mapsto \frac{\alpha(y)}{y}$ es creciente en $[0, \infty)$. Se sabe que entonces la función $y \mapsto \frac{\alpha(y)}{y}$ debe ser el límite de una sucesión creciente de combinaciones líneales finitas positivas de funciones indicadoras de la forma $I_{\{y \geq y_i\}}$. Empleando el Teorema de Convergencia Monótona y aplicando el análisis del párrafo anterior a cada una de las funciones aproximantes se concluye que $q_{F,G}(x) \geq q_{F,G}(0)$, $\forall\, x \geq 0$, es decir, que $F \overset{NBUE}{>} G$. ∎

Ejemplo 4.1. Tomemos el Ejemplo 3.1, donde se consideran las distribuciones

$$\overline{F}(x) = e^{-x}; \qquad \text{y} \qquad \overline{G}(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Recuerde que $\mu_F(x) = 1$, $\forall\, x \geq 0$, $\mu_F = 1$, $\mu_G(x) = x+1$, $\forall\, x \geq 0$, y $\mu_G = 1$. Entonces

$$\frac{\mu_F(F^{-1}(u))}{\mu_G(G^{-1}(u))} = \sqrt{1-u} \leq 1 = \frac{\mu_F}{\mu_G}, \quad \forall\, u \in [0,1].$$

Por la parte (i) de la Proposición 4.1 se sigue que $F \overset{NBUE}{>} G$. ◀

Ejemplo 4.2. En el Ejemplo 3.2 se consideraron las distribuciones

$$\overline{F}(x) = e^{-x} \qquad \text{y} \qquad \overline{G}(x) = [\overline{F}(x)]^p = e^{-xp}, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Ahí se vió que $\mu_F(x) = 1$, $\forall\, x \geq 0$, $\mu_F = 1$, $\mu_G(x) = 1/p$, $\forall\, x \geq 0$, y $\mu_G = 1/p$. Se sigue que

$$\frac{\mu_F(F^{-1}(u))}{\mu_G(G^{-1}(u))} = p \leq \frac{\mu_F}{\mu_G}, \quad \forall\, u \in [0,1].$$

Se concluye que $F \overset{NBUE}{>} G$.

Nótese que también se satisface $G \overset{NBUE}{>} F$ en el último ejemplo, dada su condición de distribuciones exponenciales, verificando la validez de la parte (ii) del Teorema 4.1. ◄

4.3. El orden HNBUE

Definición 4.2. Decimos que F **es más nueva mejor que usada en esperanza armónica que** G, y escribimos $F \overset{HNBUE}{>} G$, si

$$\frac{G_e^{-1} \circ F_e(x)}{x} \geq \frac{d}{dx} G_e^{-1} \circ F_e(x) \mid_{x=0} = \frac{\mu_G}{\mu_F}, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Observe que la última igualdad se cumple porque $G_e^{-1} \circ F_e(x) = \beta(x)$ y, como se vió en (3.1) dentro de la demostración del Teorema 3.1 ,

$$\beta'(0) = \beta'(x) \mid_{x=0} = \frac{\mu_G}{\mu_F} \cdot \left. \frac{\overline{G} \circ \alpha(x)}{\overline{G} \circ \beta(x)} \right|_{x=0} = \frac{\mu_G}{\mu_F}.$$

Teorema 4.2. *Se satisfacen los siguientes enunciados.*

i. *La relación $F \overset{HNBUE}{>} G$ es un orden parcial sobre el conjunto de clases de equivalencia $\mathfrak{F}$ de ζ.*

ii. *Si $\overline{G}(x) = e^{-x}$, entonces $F \overset{HNBUE}{>} G$ si y sólo si F es una distribución HNBUE.*

iii. *Si $F \overset{NBUE}{>} G$, entonces $F \overset{HNBUE}{>} G$.*

Demostración. (i) (Reflexividad) Suponga $F \sim G$, entonces $\overline{F}(x) = \overline{G}(\theta x)$ para $\theta > 0$. Como se hizo en demostraciones anteriores, resulta $\theta = \mu_G/\mu_F$ y $\alpha(x) = \beta(x)$, $\forall\, x \geq 0$. Por lo tanto

$$\frac{G_e^{-1} \circ F_e(x)}{x} = \frac{\theta x}{x} = \theta \geq \frac{\mu_G}{\mu_F}.$$

Luego $F \overset{HNBUE}{>} G$.

(Antisimetría) Si $F \overset{HNBUE}{>} G$ y $G \overset{HNBUE}{>} F$, entonces

$$\frac{G_e^{-1} \circ F_e(x)}{x} \geq \frac{\mu_G}{\mu_F} \qquad \text{y} \qquad \frac{F_e^{-1} \circ G_e(x)}{x} \geq \frac{\mu_F}{\mu_G}, \quad \forall\, x > 0.$$

Luego

$$\frac{G_e^{-1} \circ F_e(x)}{x} = \frac{\mu_G}{\mu_F}, \quad \forall\, x > 0.$$

Así pues $\beta(x) = \theta \cdot x$, $\forall\, x \geq 0$, donde $\theta = \mu_G/\mu_F > 0$. De donde $\overline{F}_e(x) = \overline{G}_e \circ \beta(x) = \overline{G}_e(\theta x)$, $\forall\, x \geq 0$, es decir,

$$\int_x^\infty \frac{\overline{F}(t)}{\mu_F}\, dt = \int_x^\infty \frac{\overline{G}(\theta t)}{\mu_G}\, dt = \int_x^\infty \frac{\overline{G}(\theta t)}{\theta \cdot \mu_F}\, dt, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Derivando ambos lados, resulta

$$\frac{\overline{F}(x)}{\mu_F} = \frac{\overline{G}(\theta x) \cdot \theta}{\theta \cdot \mu_F}, \quad \forall\, x \geq 0,$$

es decir, $\overline{F}(x) = \overline{G}(\theta x)$ $\forall\, x \geq 0$, o sea que $F \sim G$.

(Transitividad) Sean $F, G, H \in \mathfrak{F}$ tales que $F \overset{HNBUE}{>} G$ y $G \overset{HNBUE}{>} H$. Entonces,

$$\frac{G_e^{-1} \circ F_e(x)}{x} \geq \frac{\mu_G}{\mu_F} \qquad \text{y} \qquad \frac{H_e^{-1} \circ G_e(x)}{x} \geq \frac{\mu_H}{\mu_G}, \quad \forall\, x \geq 0,$$

luego

$$\begin{aligned} H_e^{-1} \circ F_e(x) &= H_e^{-1} \circ G_e(G_e^{-1} \circ F_e(x)) \\ &\geq \frac{\mu_H}{\mu_G} \cdot (G_e^{-1} \circ F_e(x)) \geq \frac{\mu_H}{\mu_G} \cdot \frac{\mu_G}{\mu_F} \cdot x, \quad \forall\, x \geq 0, \end{aligned}$$

esto es,

$$\frac{H_e^{-1} \circ F_e(x)}{x} \geq \frac{\mu_H}{\mu_F}, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Por lo tanto $F \overset{HNBUE}{>} H$.

(ii) Sea $\overline{G}(x) = e^{-x}$. Se tiene $F \overset{HNBUE}{>} G$ si y sólo si

$$\frac{G_e^{-1} \circ F_e(x)}{x} \geq \frac{\mu_G}{\mu_F} = \frac{1}{\mu_F}, \quad \forall\, x \geq 0,$$

o sea, $G_e^{-1} \circ F_e(x) \geq x/\mu_F$, $\forall\ x \geq 0$, es decir $F_e(x) \geq G_e(x/\mu_F)$, $\forall\ x \geq 0$, equivalentemente, $\overline{F}_e(x) \leq \overline{G}_e(x/\mu_F)$, $\forall\ x \geq 0$. Ahora notemos que

$$\overline{G}_e(x) = \int_x^\infty \frac{\overline{G}(t)}{\mu_G}\, dt = \int_x^\infty e^{-t}\, dt = e^{-x} = \overline{G}(x)$$

Por lo tanto $F \overset{HNBUE}{>} G$ si y sólo si

$$\int_x^\infty \frac{\overline{F}(t)}{\mu_F}\, dt \leq e^{-x/\mu_F}, \quad \forall\ x \geq 0,$$

es decir,

$$\int_x^\infty \overline{F}(t)\, dt \leq \mu_F \cdot e^{-x/\mu_F}, \quad \forall\ x \geq 0,$$

o sea, si y sólo si Fes HNBUE.

(iii) Suponga $F \overset{NBUE}{>} G$. Por (iv) de la Proposición 4.1, se tiene $\beta'(x) \geq \beta'(0) = \mu_G/\mu_F$. Integrando a ambos lados, resulta

$$\beta(x) \geq x \cdot \frac{\mu_G}{\mu_F}$$

es decir,

$$\frac{G_e^{-1} \circ F_e(x)}{x} \geq \frac{\mu_G}{\mu_F}.$$

Por tanto $F \overset{HNBUE}{>} G$. ▮

Ejemplo 4.3. Consideremos otra vez el Ejemplo 3.2, a saber las distribuciones

$$\overline{F}(x) = e^{-x} \qquad \text{y} \qquad \overline{G}(x) = [\overline{F}(x)]^p = e^{-xp}, \quad \forall\ x \geq 0.$$

Recuerde que $\mu_F(x) = 1$, $\forall\ x \geq 0$, $\mu_F = 1$, $\mu_G(x) = 1/p$, $\forall\ x \geq 0$, y $\mu_G = 1/p$. Calculemos las correspondientes funciones de equilibrio. De lo visto al inicio del Capítulo 3, se tiene

$$\overline{F}_e(x) = \frac{1}{\mu_F} \int_x^\infty \overline{F}(t)\, dt = \int_x^\infty e^{-t}\, dt = e^{-x}, \quad \forall\ x \geq 0.$$

Análogamente se demuestra que $\overline{G}_e(x) = e^{-xp}$, $\forall\, x \geq 0$. Entonces

$$F_e^{-1}(u) = -\log(1-u) \qquad \text{y} \qquad G_e^{-1}(u) = -\frac{log(1-u)}{p}, \quad \forall\, u \in (0,1).$$

Por tanto

$$\frac{G_e^{-1} \circ F_e(x)}{x} = -\frac{\log\left[1-(1-e^{-x})\right]}{x \cdot p} = \frac{1}{p} \geq \frac{1}{p} = \frac{\mu_G}{\mu_F}, \quad \forall\, x \geq 0,$$

condición suficiente para concluir que $F \overset{HNBUE}{>} G$. ◀

Capítulo 5

Los órdenes NBUFR y NBUFRA

5.1. El orden NBUFR

Asumiremos que F y G son absolutamente continuas, por tanto, que $\alpha(x) = G^{-1} \circ F(x)$ es diferenciable.

Definición 5.1. Decimos que F **es más nueva mejor que usada en tasa de falla que** G, y escribimos $F \overset{NBUFR}{>} G$ si:

$$\alpha'(x) \geq \alpha'(0), \quad \forall\, x \geq 0,$$

es decir,

$$\frac{r_F(F^{-1}(u))}{r_G(G^{-1}(u))} \geq \frac{r_F(0)}{r_G(0)}, \quad \forall\, u \in [0,1],$$

equivalentemente,

$$\frac{r_F(x)}{r_G(G^{-1}(F(x))} \geq \frac{r_F(0)}{r_G(0)}, \quad \forall\, x \geq 0,$$

o también,

$$\frac{r_F(F^{-1}(G(x))}{r_G(x)} \geq \frac{r_F(0)}{r_G(0)}, \quad \forall\, x \geq 0.$$

El orden NBUFR tiene las propiedades siguientes.

Teorema 5.1. *Las siguientes propiedades se cumplen.*

i. *La relación* $\overset{NBUFR}{>}$ *es un orden parcial sobre el conjunto de clases de equivalencia* $\mathfrak{F}$ *de* ζ.

ii. *Si* $\overline{G}(x) = e^{-x}$, *entonces* $F \overset{NBUFR}{>} G$ *si y sólo si* F *es una distribución NBUFR.*

iii. *Si* $F \overset{NBU}{>} G$, *entonces* $F \overset{NBUFR}{>} G$.

Demostración. (i) (Reflexividad) Suponga $F \sim G$. Entonces $\overline{F}(x) = \overline{G}(\theta x)$, $\forall\, x \geq 0$, donde $\theta = \mu_G/\mu_F > 0$. Luego

$$\alpha(x) = \overline{G}^{-1} \circ \overline{F}(x) = \theta x = \frac{\mu_G}{\mu_F} \cdot x, \quad \forall\, x \geq 0.$$

De donde

$$\alpha'(x) = \frac{\mu_G}{\mu_F} = \alpha'(0), \quad \forall\, x \geq 0.$$

Por lo tanto $F \overset{NBUFR}{>} G$.

(Antisimetría) Si $F \overset{NBUFR}{>} G$ y $G \overset{NBUFR}{>} F$, entonces

$$[G^{-1} \circ F]'(x) \geq [G^{-1} \circ F]'(0) \quad \text{y} \quad [F^{-1} \circ G]'(x) \geq [F^{-1} \circ G]'(0), \quad \forall\, x \geq 0.$$

De donde

$$[G^{-1} \circ F]'(x) = [G^{-1} \circ F]'(0), \quad \forall\, x \geq 0.$$

Pongamos $\theta = \alpha^{'}(0) = [G^{-1} \circ F]'(0) > 0$. Integrando resulta

$$G^{-1} \circ F(x) = \theta x, \quad \forall\, x \geq 0,$$

es decir, $F(x) = G(\theta x)$, $\forall\, x \geq 0$, o sea, $F \sim G$.

(Transitividad) Sean $F, G, H \in \mathfrak{F}$ tales que $F \overset{NBUFR}{>} G$ y $G \overset{NBUFR}{>} H$, es decir,

$$[G^{-1} \circ F]'(x) \geq [G^{-1} \circ F]'(0) \quad \text{y} \quad [H^{-1} \circ G]'(x) \geq [H^{-1} \circ G]'(0).$$

Note que

$$H^{-1} \circ F(x) = [H^{-1} \circ G] \circ [G^{-1} \circ F](x),$$

luego

$$\begin{aligned}
[H^{-1} \circ F]'(x) &= [(H^{-1} \circ G) \circ (G^{-1} \circ F)]'(x) \\
&= [(H^{-1} \circ G)' \circ (G^{-1} \circ F)(x)] \cdot (G^{-1} \circ F)'(x) \\
&\geq [H^{-1} \circ G]'(0) \cdot [G^{-1} \circ F]'(0) \\
&= [(H^{-1} \circ G)' \circ (G^{-1} \circ F)(0)] \cdot (G^{-1} \circ F)'(0) \\
&= [H^{-1} \circ F]'(0), \quad \forall\, x \geq 0,
\end{aligned}$$

ya que por hipótesis tenemos $[H^{-1} \circ G]'(y) \geq [H^{-1} \circ G]'(0)$, $\forall\, y \geq 0$, que en particular se cumple para $y = (G^{-1} \circ F)](x)$, y $(G^{-1} \circ F)(0) = 0$. Por lo tanto $F \overset{NBUFR}{>} H$.

(ii). Sea $\overline{G}(x) = e^{-x}$. Se tiene que $F \overset{NBUFR}{>} G$ si y sólo si

$$[\overline{G}^{-1} \circ \overline{F}]'(x) \geq [\overline{G}^{-1} \circ \overline{F}]'(0), \quad \forall\, x \geq 0.$$

Pero como $\overline{G}^{-1}(x) = -\log(x)$, entonces $F \overset{NBUFR}{>} G$ si y sólo si

$$[-\log \overline{F}]'(x) \geq [-\log \overline{F}]'(0), \quad \forall\, x \geq 0.$$

Sin embargo

$$-\log \overline{F}(x) = \int_0^x r_F(t)\, dt, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Luego $F \overset{NBUFR}{>} G$ si y sólo si

$$r_F(x) \geq r_F(0), \quad \forall\, x \geq 0,$$

si y sólo si F es NBUFR.

(iii). Si $F \overset{NBU}{>} G$, entonces $G^{-1} \circ F(x) = \alpha(x)$ es superaditiva, esto es, $\alpha(x+y) \geq \alpha(x) + \alpha(y)$, $\forall\ x, y \geq 0$. En particular $\alpha(0) = 0$. Siendo α diferenciable en todo punto, resulta

$$\begin{aligned}
\alpha'(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\alpha(x+h) - \alpha(x)}{h} &\geq \lim_{h\to 0^+} \frac{\alpha(h) + \alpha(x) - \alpha(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\alpha(h) - \alpha(0)}{h} = \alpha'(0), \quad \forall\, x \geq 0.
\end{aligned}$$

Se concluye que $F \overset{NBUFR}{>} G$. ∎

Ejemplo 5.1. Refiriéndonos de nueva cuenta al Ejemplo 3.1, recordemos que

$$\overline{F}(x) = e^{-x}; \qquad \text{y} \qquad \overline{G}(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, \quad \forall\, x \geq 0$$

y que

$$G^{-1}(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u}} - 1, \quad \forall\, u \in [0,1].$$

Entonces

$$\alpha(x) = G^{-1} \circ F(x) = \sqrt{e^x} - 1, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Luego

$$\alpha'(x) = \frac{\sqrt{e^x}}{2} \qquad \text{y} \qquad \alpha'(0) = \frac{1}{2}.$$

Así pues,

$$\alpha'(x) \geq \alpha'(0), \quad \forall\, x \geq 0,$$

esto es $F \overset{NBUFR}{>} G$. ◀

Ejemplo 5.2. Consideremos de nueva cuenta las condiciones del Ejemplo 3.2. Se tenía

$$\overline{F}(x) = e^{-x} \qquad \text{y} \qquad \overline{G}(x) = [\overline{F}(x)]^p = e^{-xp}, \quad \forall\, x \geq 0.$$

De donde

$$G^{-1}(u) = -\frac{\log(1-u)}{p}, \quad \forall\, u \in (0,1).$$

Lo cual implica

$$\alpha(x) = G^{-1} \circ F(x) = -\frac{\log\left[1-(1-e^{-x})\right]}{p} = \frac{x}{p}, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Así pues

$$\alpha'(x) = \frac{1}{p} \geq \alpha'(0), \quad \forall\, x \geq 0.$$

Concluimos $F \overset{NBUFR}{>} G$.

Una vez más observemos que también $G \overset{NBUFR}{>} F$ pues

$$F^{-1} \circ G(x) = -\log\left[1 - \left(1 - e^{-x}\right)\right] = xp, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Luego
$$\left[F^{-1}\circ G(x)\right]'(x) = p \geq \left[F^{-1}\circ G(x)\right]'(0), \quad \forall\, x \geq 0.$$
Manifestación del comportamiento tan especial que poseé la distribución exponencial (tal como se vio en el teorema anterior) es el hecho mencionado anteriormente. ◀

5.2. El orden NBUFRA

Finalmente consideraremos el orden siguiente.

Definición 5.2. Decimos que F **es más nueva mejor que usada en tasa de falla promedio que** G, y escribimos $F \overset{NBUFRA}{>} G$, si

$$\alpha(x) \geq x\alpha'(0), \quad \forall\, x \geq 0,$$

equivalentemente,

$$\frac{G^{-1}(F(x))}{x} \geq \frac{r_F(0)}{r_G(0)}, \quad \forall\, x > 0.$$

El orden NBUFRA tiene las propiedades siguientes.

Teorema 5.2. *Se cumplen las afirmaciones siguientes.*

i. *La relación $F \overset{NBUFRA}{>} G$ es un orden parcial sobre el conjunto de clases de equivalencia $\mathfrak{F}$ de ζ.*

ii. *Si $\overline{G}(x) = e^{-x}$, entonces $F \overset{NBUFRA}{>} G$ si y sólo si F es una distribución NBUFRA.*

iii. *Si $F \overset{NBUFR}{>} G$, entonces $F \overset{NBUFRA}{>} G$.*

Demostración. (i) (Reflexividad) Suponga $F \sim G$. Entonces $\overline{F}(x) = \overline{G}(\theta x)$, $\forall x \geq 0$, donde $\theta = \mu_G/\mu_F > 0$. Luego

$$\alpha(x) = \overline{G}^{-1}\circ\overline{F}(x) = \theta x = \frac{\mu_G}{\mu_F}\cdot x = x\cdot\alpha'(0), \quad \forall\, x \geq 0,$$

es decir, $F \overset{NBUFRA}{>} G$.

(Antisimetría) Suponga $F \overset{NBUFRA}{>} G$ y $G \overset{NBUFRA}{>} F$, entonces,

$$G^{-1} \circ F(x) \geq x \cdot \frac{r_F(0)}{r_G(0)} \qquad \text{y} \qquad F^{-1} \circ G(x) \geq x \cdot \frac{r_G(0)}{r_F(0)}, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Luego

$$x \geq G^{-1} \circ F(x \cdot \frac{r_G(0)}{r_F(0)}) \geq x \cdot \frac{r_G(0)}{r_F(0)} \cdot \frac{r_F(0)}{r_G(0)} = x, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Así pues,

$$G^{-1} \circ F(x \cdot \frac{r_G(0)}{r_F(0)}) = x, \quad \forall\, x \geq 0,$$

es decir, $F \sim G$.

(Transitividad) Sean $F, G, H \in \mathfrak{F}$ tales que $F \overset{NBUFRA}{>} G$ y $G \overset{NBUFRA}{>} H$. Entonces

$$[G^{-1} \circ F](x) \geq x \cdot [G^{-1} \circ F]'(0) \quad \text{y} \quad [H^{-1} \circ G](x) \geq x \cdot [H^{-1} \circ G]'(0), \quad \forall\, x \geq 0.$$

Como en el Teorema anterior,

$$[H^{-1} \circ F]'(0) = [H^{-1} \circ G]'(0) \cdot [G^{-1} \circ F]'(0).$$

Por hipótesis, se tiene

$$\begin{aligned} [H^{-1} \circ F](x) = [H^{-1} \circ G](G^{-1} \circ F(x)) \\ \geq [G^{-1} \circ F(x)] \cdot [H^{-1} \circ G]'(0) \\ \geq x \cdot [G^{-1} \circ F]'(0) \cdot [H^{-1} \circ G]'(0), \quad \forall\, x \geq 0, \end{aligned}$$

es decir,

$$[H^{-1} \circ F](x) \geq x \cdot [H^{-1} \circ F]'(0), \quad \forall\, x \geq 0.$$

Por lo tanto, $F \overset{NBUFRA}{>} H$.

(ii) Sea $\overline{G}(x) = e^{-x}$. Se tiene que $F \overset{NBUFRA}{>} G$ si y sólo si

$$[\overline{G}^{-1} \circ \overline{F}](x) \geq x \cdot [\overline{G}^{-1} \circ \overline{F}]'(0), \quad \forall\, x \geq 0$$

es decir,

$$-\log \overline{F}(x) \geq x \cdot [-\log \overline{F}]'(0), \quad \forall\, x \geq 0,$$

o sea,

$$-\log \overline{F}(x) \geq x \cdot r_F(0), \quad \forall\, x \geq 0,$$

equivalentemente,

$$\frac{-\log \overline{F}(x)}{x} \geq r_F(0), \quad \forall\, x > 0,$$

es decir, F es NBUFRA.

(iii) Si $F \overset{NBUFR}{>} G$, entonces

$$\alpha'(x) \geq \alpha'(0), \quad \forall\, x \geq 0.$$

Integrando de ambos lados resulta

$$\alpha(x) \geq x \cdot \alpha'(0), \quad \forall\, x \geq 0.$$

Por lo tanto $F \overset{NBUFRA}{>} G$. ▮

Ejemplo 5.3. Otra vez, del Ejemplo 3.2, teníamos

$$\overline{F}(x) = e^{-x} \qquad \text{y} \qquad \overline{G}(x) = [\overline{F}(x)]^p = e^{-xp}, \quad \forall\, x \geq 0.$$

Y como ya vimos

$$\alpha(x) = G^{-1} \circ F(x) = -\frac{\log\left[1 - (1 - e^{-x})\right]}{p} = \frac{x}{p} \geq x \cdot \alpha'(0), \quad \forall\, x \geq 0.$$

O sea $F \overset{NBUFRA}{>} G$.

Como en los casos anteriores, producto de la parte (ii) del Teorema 5.2 y por el hecho de que

$$\left[F^{-1} \circ G(x)\right](x) = xp \geq x \cdot \left[F^{-1} \circ G(x)\right]'(0), \quad \forall\, x \geq 0,$$

tenemos también $G \overset{NBUFRA}{>} F$. ◀

Capítulo 6

Aplicaciones

En este capítulo se presentan algunas aplicaciones a Teoría de Fiabilidad conocidas en la literatura de los órdenes IFR, IFRA y NBU.

6.1. Estadísticos de orden

Veremos primeramente la relación que hay entre los órdenes IFR, IFRA y NBU y los estadísticos de orden. Empecemos por recordar lo que es un estadístico de orden i para una muestra de tamaño n de una distribución de vida F.

Definición 6.1. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución F, y ordenemos dicha muestra de menor a mayor. La variable aleatoria $X_{i:n}$, que ocupa el lugar i en este ordenamiento es llamada el **estadístico de orden** i para una muestra de tamaño n de F. Por ejemplo, $X_{1:n} = \text{mín}[X_1, ..., X_n]$ y $X_{n:n} = \text{máx}[X_1, ..., X_n]$.

Proposición 6.1. *Sea $F_{j:n}$ la distribución del j-ésimo estadístico de orden en una muestra de tamaño n de F. Entonces*

$$F_{j:n}(x) = B_{j:n}[F(x)], \quad \forall\, x > 0,$$

donde

$$B_{j:n}(p) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \cdot \int_0^p u^{j-1}(1-u)^{n-j}\, du, \quad 0 \le p \le 1,$$

es el j-ésimo estadístico de orden de una muestra de tamaño n tomada de la distribución uniforme sobre $]0, 1[$.

Demostración. Por definición,

$$F_{j:n}(x) = P[X_{j:n} \leq x] = \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i} [F(x)]^i [\overline{F}(x)]^{n-i}$$

$$= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \cdot \int_0^{F(x)} u^{j-1}(1-u)^{n-j}\, du. \blacksquare$$

Teorema 6.1. *Sean F, G dos distribuciones de vida tales que $F \overset{IFR}{>} G$ ($F \overset{IFRA}{>} G$ o $F \overset{NBU}{>} G$). Entonces $F_{j:n} \overset{IFR}{>} G_{j:n}$ ($F_{j:n} \overset{IFRA}{>} G_{j:n}$ o $F_{j:n} \overset{NBU}{>} G_{j:n}$) siendo $G_{j:n}$ la distribución del j-ésimo estadístico de orden en una muestra de tamaño n de G.*

Demostración. De la Proposición anterior,

$$G_{j:n}^{-1} \circ F_{j:n}(x) = (B_{j:n} \circ G)^{-1} \circ (B_{j:n} \circ F(x)) = G^{-1} \circ F(x).$$

Luego, se heredan los ordenamientos para $F_{j:n}$ y $G_{j:n}$ respecto a los órdenes IFR, IFRA y NBU. $\blacksquare$

Como consecuencia tenemos el resultado siguiente sobre la preservación de las clase IFR respecto a la formación de estadísticos de orden.

Teorema 6.2. *Sea F una distribución IFR. Entonces $F_{j:n}$ es IFR.*

Demostración. Sean F una distribución IFR y $G(t) = 1 - e^{-t}$. Por lo mencionado en Capítulos anteriores sabemos que $F \overset{IFR}{>} G$. Ahora, verifiquemos que $G_{j:n} \overset{IFR}{>} G$, es decir, que $G_{j:n}$ es IFR. De la Proposición primera de este Capítulo tenemos:

$$\frac{\overline{G}_{j:n}(t)}{g_{j:n}(t)} = \frac{B_{n-j+1}[\overline{G}(t)]}{B'_{n-j+1}[\overline{G}(t)] \cdot g(t)} = \frac{1}{p} \cdot \int_0^p \left(\frac{x}{p}\right)^{n-j} \left(\frac{1-x}{1-p}\right)^{j-1} dx$$

donde $p = \overline{G}(t) = e^{-t}$. Haciendo $u = x/p$ tendremos

$$\frac{\overline{G}_{j:n}(t)}{g_{j:n}(t)} = \int_0^1 u^{n-j} \left(\frac{1-up}{1-p}\right)^{j-1} du$$

Como $(1-up)/(1-p)$ es creciente en p, $0 \leq p \leq 1$, y por tanto, decreciente en t, $0 \leq t < \infty$, concluimos que la función

$$u \mapsto \frac{\overline{G}_{j:n}(t)}{g_{j:n}(t)}$$

es decreciente en t, o sea, G_{j_n} es IFR. Luego, por ser orden parcial, $F_{j:n} \overset{IFR}{>} G$ o, equivalentemente, $F_{j:n}$ es IFR. ▮

6.2. Propiedad de cruzamiento simple

Veamos ahora una propiedad de cruzamiento simple para las distribuciones IFRA.

Teorema 6.3. *Si $F >_{IFRA} G$, entonces $\overline{F}(t)-\overline{G}(t)$ tiene a lo más un cambio de signo. Si el cambio de signo se presenta éste será de $+$ a $-$, es decir, si existe $t_0 > 0$ tal que $\overline{F}(t_0) = \overline{G}(t_0)$, entonces*

$$\overline{F}(t) \geq \overline{G}(t), \quad \forall\, t \in [0, t_0], \qquad y \qquad \overline{F}(t) \leq \overline{G}(t), \quad \forall\, t \in [t_0, \infty).$$

Demostración. Como $F \overset{IFRA}{>} G$, entonces $\overline{G}^{-1} \circ \overline{F}$ es una función star-shaped tal que $\overline{G}^{-1} \circ \overline{F}(0) = 0$. Por otro lado, la función $\overline{G}^{-1}(\overline{G}(t)) = t$, $\forall\ t \geq 0$, es lineal. Ya que ambas funciones pasan por el origen, entonces $\overline{G}^{-1} \circ \overline{F}$ cruza a $\overline{G}^{-1} \circ \overline{G}$ a lo más una vez. Además, si el cruce se presenta es en dirección de abajo hacia arriba. Se sigue que $\overline{F}$ cruza a $\overline{G}$ a lo más una ocasión, y si el cruce ocurre, lo hace desde abajo. ▮

Corolario 6.1. *Si F es IFRA, es decir, para cada $\lambda > 0$, $F \overset{IFRA}{>} G$, donde $\overline{G}(t) = e^{-\lambda t}$, entonces $\overline{F}(t) - e^{-\lambda t}$ tiene a lo más un cambio de signo. Si el cambio de signo se presenta éste será de $+$ a $-$.*

Corolario 6.2. *Sea F una distribución IFRA cuyo p-ésimo cuantil es ξ_p (esto es, $F(\xi_p) = p$). Si $\alpha = -\log(1-p)/\xi_p$, entonces*

$$\overline{F}(x) \geq e^{-\alpha x}, \quad \forall\, t \in [0, \xi_p], \qquad y \qquad \overline{F}(x) \leq e^{-\alpha x}, \quad \forall\, t \in [\xi_p, \infty).$$

Demostración. Note que la distribución exponencial $e^{-\alpha x}$ tiene el mismo p-ésimo cuantil que F. Entonces, al menos puede haber un cruce entre las gráficas de $e^{\alpha x}$ y $\overline{F}$. Tal punto de cruce es $t = \xi_p$. Pero, por el Teorema anterior, el cruce es único y es en la dirección indicada en el enunciado. ▮

6.3. Obtención de cotas

A continuación presentaremos algunos criterios sobre cotas basados en algún momento conocido relacionados con los órdenes IFR e IFRA.

Proposición 6.2. *Dadas X, Y dos variables aleatorias con funciones de distribución F y G, respectivamente, siendo G estrictamente creciente, se debe tener*

$$Y \stackrel{st}{=} G^{-1} \circ F(X)$$

Demostración. Sea H la función de distribución de la variable aleatoria $G^{-1} \circ F(X)$. Se tiene

$$\begin{aligned} H(t) = P[G^{-1} \circ F(X) \leq t] &= P[F(x) \leq G(t)] \\ &= P[X \leq F^{-1} \circ G(t)] = F(F^{-1} \circ G(t)) = G(t), \quad \forall\, t. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Y \stackrel{st}{=} G^{-1} \circ F(X)$. ∎

Teorema 6.4. *Si $F \stackrel{IFR}{>} G$, $F(0) = G(0) = 0$, y*

$$\int_0^\infty t^r \, dF(t) = \mu_r = \int_0^\infty t^r \, dG(t),$$

para un valor fijo de $r \geq 1$, entonces

$$\overline{F}(x) \geq \begin{cases} \overline{G}(t) & si \;\; t < \mu_r^{1/r}, \\ 0 & si \;\; t \geq \mu_r^{1/r}. \end{cases}$$

Demostración. Sean X, Y variables aleatorias con distribuciones F y G, respectivamente. Denotemos por F_r y G_r las distribuciones de X^r y Y^r, respectivamente. Primero veamos que $G_r^{-1} \circ F_r(x)$ es una función convexa en $x \geq 0$. Es claro que

$$G_r^{-1} \circ F_r(x) = [G^{-1} \circ F(x^{1/r})]^r \tag{6.1}$$

Ahora, como $G^{-1} \circ F$ es diferenciable, se tiene

$$\frac{d}{dt}[G^{-1} \circ F(x)] = \left[\frac{G^{-1} \circ F(x^{1/r})}{x^{1/r}}\right]^{r-1} \cdot (G^{-1} \circ F)'(x^{1/r}).$$

El primer término del lado derecho de la igualdad es creciente en $x \geq 0$, pues $G^{-1} \circ F$ es star-shaped y $r \geq 1$. El segundo término también es creciente en x dado que ya vimos que $G_r^{-1} \circ F_r$ es convexa.

Ahora, sean $X_1^r, ..., X_n^r; Y_1^r, ..., Y_n^r$ muestras aleatorias de F_r y G_r, respectivamente. Puesto que $G_r^{-1} \circ F_r$ es convexa, entonces

$$G_r^{-1} \circ F_r \left(1/n \sum_{i=1}^{n} X_i^r \right) \leq 1/n \sum_{i=1}^{n} G_r^{-1} \circ F_r(X_i^r).$$

Se sigue que

$$F_r \left(1/n \sum_{i=1}^{n} X_i^r \right) \leq G_r \left(1/n \sum_{i=1}^{n} G_r^{-1} \circ F_r(X_i^r) \right) = G_r \left(1/n \sum_{i=1}^{n} Y_i^r \right),$$

ya que $G_r^{-1} \circ F_r(X_i^r) = Y_i^r$ y $X_1^r, ..., X_n^r$ son independientes. Cuando n tiende a ∞, por la Ley Fuerte de los Grandes Números, se tiene

$$F_r(\mu_r) \leq G_r(\mu_r)$$

y, de (6.1)

$$F_r(\mu_r^{1/r}) \leq G_r(\mu_r^{1/r}).$$

Entonces, como $F \overset{IFR}{>} G$, $\overline{F}$ cruza a $\overline{G}$ exactamente una vez y lo hace de arriba hacia abajo, luego $\overline{F}(t) \geq \overline{G}(t)$ para $t \leq \mu_r^{1/r}$. Para $t \geq \mu_r^{1/r}$ se tiene trivialmente que $\overline{F}(t) \geq 0$. ∎

Corolario 6.3. *Sean F una distribución absolutamente continua IFR, $\mu_r = \int_0^\infty t^r \, dF(t)$ y $\lambda_r = \mu_r/\Gamma(r+1)$, $r \geq 1$. Entonces*

$$\overline{F}(x) \geq \begin{cases} \exp(-t/\lambda_r^{1/r}) & si \;\; t < \mu_r^{1/r}, \\ 0 & si \;\; t \geq \mu_r^{1/r}. \end{cases}$$

Demostración. Observe que

$$\int_0^\infty (t^r/\lambda_r^{1/r}) e^{-t/\lambda_r^{1/r}} \, dt = \lambda_r \cdot \Gamma(r+1) = \mu_r$$

y que $F \overset{IFR}{>} G$, donde $G(t) = 1 - e^{-t/\lambda_r^{1/r}}$. Entonces, la conclusión es inmediata del teorema precedente. ∎

Teorema 6.5. *Sean* $F \overset{IFRA}{>} G$,

$$\int_0^\infty x^s \, dF(x) = \int_0^\infty x^s \, dG(x),$$

para algún $s > 0$ *fijo, y* Ψ *una función creciente. Entonces:*

$$\int_0^\infty \Psi(x) \cdot x^{s-1} \cdot \overline{F}(x) \, dx \geq \int_0^\infty \Psi(x) \cdot x^{s-1} \cdot \overline{G}(x) \, dx.$$

Demostración. $F \overset{IFRA}{>} G$ implica que $\overline{F}$ cruza a $\overline{G}$ a lo más una vez y, en caso de hacerlo, es desde arriba. Por otro lado $\int_0^\infty x^s \, dF(x) = \int_0^\infty x^s \, dG(x)$ implica que $\overline{F}$ cruza a $\overline{G}$ al menos una vez. Luego, $\overline{F}$ deberá cruzar a $\overline{G}$ exactamente una vez. Sea $0 < t_0 < \infty$ la solución de $\overline{F}(x) = \overline{G}(x)$. Entonces $x^{s-1} \cdot \overline{F}(x)$ cruza a $x^{s-1} \cdot \overline{G}(x)$ en t_0, y lo hace en la dirección arriba-abajo. Se sigue que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \Psi(x) \cdot x^{s-1} \cdot \overline{F}(x) \, dx - \int_0^\infty \Psi(x) \cdot x^{s-1} \cdot \overline{G}(x) \, dx \\ = \int_0^\infty [\Psi(x) - \Psi(t_o)] \cdot [x^{s-1} \cdot \overline{F}(x) - x^{s-1} \cdot \overline{G}(x)] \, dx,\end{aligned}$$

pues

$$\int_0^\infty x^{s-1} \cdot \overline{F}(x) \, dx = \frac{1}{s} \int_0^\infty x^s \, dF(x) = \frac{1}{s} \int_0^\infty x^s \, dG(x) = \int_0^\infty x^{s-1} \cdot \overline{G}(x) \, dx.$$

Puesto que las funciones $\Psi(x) - \Psi(t_0)$ y $x^{s-1} \cdot \overline{F}(x) - x^{s-1} \cdot \overline{G}(x)$ son opuestas en signo para toda x, se tiene la conclusión deseada. ∎

Corolario 6.4. *Sean* F *una distribución IFRA,* $\mu_r = \int_0^\infty x^r \, dF(x)$ *y* $\lambda_r = \mu_r / \Gamma(r+1)$. *Entonces* $\lambda_r^{1/r}$ *es decreciente en* $r \geq 0$.

Demostración. Sean $0 < r < s$ y notemos que

$$\mu_r = r \int_0^\infty x^{r-1} \overline{F}(x) \, d(x) = r \int_0^\infty x^{r-1} \exp(-x/\lambda_r^{1/r}) \, d(x).$$

Aplicando el Teorema anterior con $\Psi(x) = x^{s-r}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\lambda_s = \frac{\mu_s}{\Gamma(s+1)} = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty s x^{s-1} \overline{F}(x) \, d(x) \\ \leq \int_0^\infty \frac{s x^{s-1}}{\Gamma(s+1)} \exp(-x/\lambda_r^{1/r}) \, d(x) = \lambda_r^{s/r}\end{aligned}$$ ∎

Teorema 6.6. *Para un valor fijo* $t \geq 0$*, la cota inferior* $\exp(-t/\lambda_r^{1/r})$ *del corolario anterior es decreciente en* $r > 0$.

Demostración. Del corolario anterior, tenemos $\exp(-t/\lambda_s^{1/s}) \leq \exp(-t/\lambda_r^{1/r})$, para $r < s, t \geq 0$, de donde se tiene la conclusión. ▮

Un caso especial, cuando $r = 1$ en el Corolario 6.3, que a continuación se remarca, tiene gran importancia en aplicaciones de fiabilidad.

Observación 6.1. Sea F una distribución IFR con media μ_1, entonces:

$$\overline{F}(t) \geq \begin{cases} \exp(-t/\mu_1) & \text{si } t < \mu_1, \\ 0 & \text{si } t \geq \mu_1. \end{cases}$$

Cotas para la fiabilidad de sistemas

En las primeras etapas del diseño de un sistema, es necesario predecir que tan fiable será éste a partir del mínimo conocimiento, ya sea de la estructura del sistema, de la vida media de sus componentes, de saber que, por ejemplo, cada componente es IFR, que todos los componentes son independientes, etc. Empleando la desigualdad de la observación (6.1), podemos hacer una predicción conservadora de la fiabilidad del sistema. Concretamente, sea **h** la función de fiabilidad de un sistema coherente de n componentes independientes y consideremos al componente i con distribución F_i (desconocida) y con media μ_i (conocida), $i = 1, \ldots, n$. Entonces una cota inferior para el valor de la fiabilidad del sistema $h(\overline{F}_1(t), \ldots, \overline{F}_n(t))$ para una misión de duración t es dada por

$$h(\overline{F}_1(t), \ldots, \overline{F}_n(t)) \geq h(e^{-t/\mu_1}, \ldots, e^{-t/\mu_n})$$

para $t < \text{mín}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

De hecho, se puede hacer una predicción de la fiabilidad aún cuando no conozcamos exactamente la estructura del sistema y su función de fiabilidad, de hecho, los componentes no necesariamente deben ser independientes, pero si estar asociados. Supongamos pues que: (a) Tenemos un sistema coherente con función estructura Φ (desconocida) y (b) Las componentes están asociadas, con distribuciones IFR y medias $\mu_1, \ldots, \mu_n$ (conocidas). Entonces, podemos hacer la siguiente predicción conservadora de la fiabilidad del sistema:

$$\overline{F}(t) \geq \exp\left[-t \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu_i}\right], \quad t < \text{mín}(\mu_1, \ldots, \mu_n). \tag{6.2}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\overline{F}(t) = P[\Phi(X_1(t),\ldots,X_n(t)) = 1] &\geq \prod_{i=1}^{n} P[X_i(t) = 1] \\ &\geq \prod_{i=1}^{n} e^{-t/\mu_i} = \exp\left[-t\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\mu_i}\right]\end{aligned}$$

La cota (6.2) resulta tener varias aplicaciones en componentes que: (a) Son parte de un sistema coherente, (b) Están asociados y (c) Tienen distribuciones IFR con medias conocidas $\mu_1,\ldots,\mu_n$.

Ejemplo 6.1. Supongamos un circuito electrónico formado por diodos, transistores, resistores y capacitores, cada uno de ellos con vida media $\mu_d = 500000$, $\mu_t = 100000$, $\mu_r = 1000000$ y $\mu_c = 500000$ horas, respectivamente. Entonces (6.2) permite predecir la fiabilidad del sistema:

$$\overline{F}(t) \geq e^{-0.0001t}$$

para $t < 100000$ horas, donde 0.0001 representa la tasa de falla y 100 000 indica la vida media mínima del total de componentes.

Teorema 6.7. *Sea F de clase IFRA con media μ_1. Entonces,*

$$\overline{F}(t) \leq \begin{cases} e^{-wt} & si \quad t > \mu_1 \\ 1 & si \quad t \leq \mu_1. \end{cases}$$

donde $w > 0$ es una función de t que satisface que

$$1 - w\mu_1 = e^{-wt}.$$

Demostración. Fijemos $t > \mu_1$. Definamos

$$\overline{G}(x) \leq \begin{cases} e^{-wx} & \text{si} \;\; x < t \\ 0 & \text{si} \;\; x \geq t, \end{cases}$$

donde $w > 0$ es tal que

$$\int_0^t e^{-wx}\,dx = \mu_1,$$

lo cual es equivalente a la condición para w del enunciado. Puesto que $t > \mu_1$, tal valor w existe y es único. Por el Teorema 6.3, $\overline{F}$ cruza $\overline{G}$ a lo más una vez en $(0, t)$. Como F y G tienen la misma media, y $\overline{F}$ domina a $\overline{G}$ en $[t, \infty)$, entonces $\overline{F}$ no puede dominar estrictamente a $\overline{G}$ en $[0, t]$. Por lo tanto, en $[0, t]$, $\overline{F}$ cruza a $\overline{G}$ exactamente una vez y lo hace de arriba hacia abajo, ó bien, $\overline{F}$ se halla enteramente por debajo de $\overline{G}$. En cualquiera de los dos casos concluimos que $\overline{F}(t) \leq \overline{G}(t)$. ▮

Conclusiones

Las nociones de envejecimiento aquí consideradas (IFR, IFRA, NBU, DMRL, NBUE, NBUFR y NBUFRA) indican de modo más específico algunas de las distintas maneras en las que un objeto puede envejecer. Dados dos objetos que envejecen a lo largo del tiempo, en alguno de los sentidos anteriores, se ha dado una posible respuesta a la cuestión de cuál de los dos envejece más aceleradamente con respecto a la propiedad de envejecimiento que tengan. Existiendo relaciones naturales entre esas clase de distribuciones, se ha mostrado que los órdenes correspondientes heredan la mayoría de esas relaciones. Además, cuando se hacen comparaciones con la distribución exponencial, resulta que una distribución es mayor que la exponencial si y sólo si dicha distribución pertenece a la clase correspondiente. Este resultado confirma la pertinencia de esos órdenes ya que la exponencial tiene la propiedad de no envejecimiento. Los órdenes estocásticos con respecto a las propiedades de envejecimiento IFR, IFRA y NBU echan mano para su definición de los conocidos órdenes estocásticos convexo, star-shaped y superaditivo, respectivamente. La idea de extender estos órdenes a las clases de envejecimiento restantes se ha logrado satisfactoriamente estableciendo cierta analogía con algunas propiedades exhibidas de los órdenes IFR, IFRA y NBU.

Por otra parte, a pesar de la patente utilidad de esos órdenes, se debe mencionar que, en particular, el orden IFR tiene ciertas limitaciones importantes. Por ejemplo, este orden IFR no posee (o al menos no se conoce) un análogo natural para distribuciones discretas, aún reemplazando a las funciones inversas de la definición del orden IFR con funciones inversas continuas por la izquierda. De hecho, parece ser que una distribución F sólo podría ser comparable con distribuciones G que tuviesen el mismo rango que F. Esto sería muy restrictivo ya que una distribución IFR discreta arbitraria (digamos, la uniforme sobre $\{1, \ldots, n\}$) no sería comparable con la distribución geométrica, como se muestra en el contraejemplo de abajo, lo cual iría en contra del espíritu del orden IFR.

Ejemplo. Considere la distribución uniforme sobre $\{0, 1, 2, 3\}$ cuya función de distribución está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1/2 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 3/4 & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \le x. \end{cases}$$

Es claro que F es IFR, pues $x \mapsto r_F(x) = f(x)/\overline{F}(x)$ es creciente en $[0, \infty)$. Sea ahora G una distribución geométrica con parámetro $p = 1/2$, es decir,

$$G(x) = \sum_{k=0}^{[x]} (1/2)^{k+1}, \quad \forall\, x \ge 0,$$

donde $[x]$ es la parte entera de x. En particular, $G(0) = 1/2$ y $G(1) = 1/2 + 1/4 = 3/4$, de donde, $G^{-1}(1/2) = 0$ y $G^{-1}(3/4) = 1$, donde G^{-1} es la función inversa continua por la izquierda de G. Resulta que $G^{-1} \circ F(x) = 0$, si $1 \le x < 2$, y $G^{-1} \circ F(x) = 1$, si $2 \le x < 3$. Afirmamos que $G^{-1} \circ F$ no es una función convexa, es decir, que $F \overset{IFR}{\not>} G$, como hubiésemos esperado. Probemos que

$$G^{-1} \circ F[(1-\alpha)t + \alpha s] \not\le (1-\alpha)G^{-1} \circ F(t) + \alpha G^{-1} \circ F(s)$$

para algunos $t, s \ge 0$ y $\alpha \in [0, 1]$. Si tomamos $t = 5/2$, $s = 3/2$, y $\alpha = 1/4$, se tiene

$$\begin{aligned} &G^{-1} \circ F[(1-1/4)(5/2) + (1/4)(3/2)] = G^{-1} \circ F(9/4) = 1 \\ &> 3/4 = (3/4)(1) + (1/4)(0) = (1-1/4)G^{-1} \circ F(5/2) + (1/4)G^{-1} \circ F(3/2). \end{aligned}$$

Esto prueba la afirmación. ◄

Otra limitación importante del orden IFR es la siguiente. Suponga que F es la distribución del tiempo de vida de un objeto sometido al modelo de reparación imperfecta de Brown y Proschan [3]. El tiempo de vida de salida del objeto a través de ese modelo tiene distribución

$$\overline{F_p}(x) = [\overline{F}(x)]^p, \quad \forall\, x \ge 0,$$

y función tasa de falla

$$r_p(x) = pr(x), \quad \forall\, x \geq 0,$$

donde r es la función tasa de falla de F. Es razonable esperar que F_p, $0 < p < 1$, (usando las notaciones de [3]) satisfaga la desigualdad estocástica $F \overset{IFR}{>} F_p$, siempre que, por ejemplo, F fuese de clase IFR. El contraejemplo siguiente muestra que éste no es siempre el caso.

Ejemplo. Considere la función de distribución absolutamente continua, con soporte contenido en $[0,1]$, definida como $F(t) = t^2$, $\forall\, 0 \leq t \leq 1$. La función tasa de falla de F es

$$r_F(t) = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \forall\, 0 \leq t \leq 1.$$

La distribución de vida de salida F_p a través del modelo dado en [3] es

$$\overline{F_p}(t) = \left[\overline{F}(t)\right]^p = 1 - (1-t^2)^p, \quad \forall\, 0 \leq t \leq 1,$$

y su correspondiente función tasa de falla es

$$r_{F_p}(t) = pr(t) = \frac{2pt}{1-t^2}, \quad \forall\, 0 \leq t \leq 1.$$

Es claro que F y F_p son ambas de clase IFR. Afirmamos que si $p = 1/3$, entonces $F \overset{IFR}{\not>} F_{1/3}$, es decir, que $F_{1/3}^{-1} \circ F$ no es convexa. Basta probar que $F^{-1} \circ F_{1/3}$ es estrictamente convexa en $(0,1)$. Para ver esto, note que $F^{-1}(u) = u^{1/2}$, $\forall\, 0 \leq u \leq 1$. Luego,

$$F^{-1} \circ F_{1/3}(t) = F^{-1}(1-(1-F(t))^{1/3}) = \left(1-(1-t^2)^{1/3}\right)^{1/2}, \quad \forall\, 0 < t < 1.$$

Se tiene

$$[F^{-1} \circ F_{1/3}]''(t) = \frac{\left[1 - \frac{1}{3}t^2 - (1-t^2)^{1/3}\right] + \left[\frac{2t^2}{3} - \frac{2t^2}{3}(1-t^2)^{1/3}\right]}{3(1-t^2)^{5/3}(1-(1-t^2)^{1/3})^{3/2}}.$$

Es claro que

$$\frac{2}{3}t^2 - \frac{2}{3}t^2(1-t^2)^{1/3} > 0, \quad \forall\, 0 \leq t \leq 1.$$

Por otra parte, puesto que la derivada de la función

$$t \mapsto 1 - \frac{t^2}{3} - (1-t^2)^{1/3}$$

satisface

$$-\frac{2t}{3} + \frac{2t}{3(1-t^2)^{2/3}} > 0, \quad \forall\, 0 \le t < 1,$$

entonces la función de arriba es estrictamente creciente en $[0,1]$. Como

$$1 - \frac{t^2}{3} - (1-t^2)^{1/3}\Big|_{t=0} = 0,$$

entonces

$$1 - \frac{t^2}{3} - (1-t^2)^{1/3} > 0, \quad \forall\, 0 < t < 1.$$

Esto prueba que $[F^{-1} \circ F_{1/3}]''(t) > 0$, $\forall\ 0 < t < 1$, lo cual implica que la función $F^{-1} \circ F_{1/3}$ es estrictamente convexa en $(0,1]$. Por lo tanto, $F_{1/3} \overset{IFR}{>} F$, en contradicción con el sentido común. ◀

Aunque los órdenes estocásticos con respecto a las propiedades de envejecimiento aquí presentados resuelven parcialmente el problema de determinar cuál de dos objetos envejece más aceleradamente que el otro y resultan ser de utilidad en varias aplicaciones importantes de Teoría de Fiabilidad, hemos visto que, por ejemplo, el orden IFR tiene algunas deficiencias importantes. Una solución alternativa de ese problema, esencialmente distinta de la anterior, podría ser comparar las derivadas de las funciones tasa de falla de los tiempos de vida de los objetos como criterio de discriminación. Al parecer, esto decidiría favorablemente, por ejemplo, que F es más IFR que F_p en el modelo dado en [3] cuando ambas distribuciones son de clase IFR, como lo indica el sentido común. Esperamos poder explorar esta alternativa en un futuro próximo.

Referencias

[1] Ash, Robert B. (1972), *Real Analysis and Probability*. Academic Press.

[2] Barlow, R.E. and Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. To Begin With.

[3] Brown, M. and Proschan, F. (1983) Imperfect repair, *Journal of Applied Probability* **20**, 851–859.

[4] Kochar, S. C. and Wiens, D. P. (1987), Partial orderings of life distributions with respect to their aging properties, *Naval Research Logistics*, Vol. 34, pp. 823–829.

[5] Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (1994), Stochastic orderds and their applications, *Probability and Mathematical Statistics, Academic Press*.