

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS



*El frenado por radiación y la ecuación de G. W. Ford bajo la acción de un campo central*

*Tesis que presenta:*

*Rigoberto Cruz Albino*

*Para obtener el Título de*

**Licenciado en Física y Matemáticas**

*Asesor y Director de Tesis: Dr. Gonzalo Ares de Parga Álvarez*

*[30 de Enero] [2006]*

# Introducción

Desde el principio del siglo XX, el problema de encontrar una expresión correcta que describa el frenado por radiación para una partícula cargada, ha sido planteado. Tanto Planck como Lorentz y Abraham propusieron la misma expresión en los albores del siglo XX. Sin embargo hasta 1938, cuando Dirac realizó un estudio profundo del tema, se encontró una ecuación relativista que coincidía con la propuesta citada anteriormente para el caso de bajas velocidades, o sea, el no relativista. Desafortunadamente esta ecuación presenta dos problemas fundamentales conocidos como la renormalización de la masa y las autoaceleraciones y preaceleraciones. En nuestros días se ha aceptado que la ecuación de Ford que no presenta las dificultades anteriores, describe el movimiento de una partícula cargada con estructura. El objetivo de esta tesis es comparar la fuerza de frenado de Ford con las fuerzas de fricción que aparecen en la Mecánica Clásica. Por ello se estudia la función de Raleigh en el primer capítulo. En el segundo capítulo analizamos la ecuación de Abraham con el objetivo de entender el estado del arte y sentar las bases para el estudio de la ecuación de Ford. El tercer capítulo está orientado en estudiar la ecuación de Ford en el caso de un campo de fuerza central con dos objetivos primordiales. El primero es analizar la potencia radiada en este caso y el segundo es analizar el tiempo de decaimiento.

# Índice general

<b>1. Fuerzas de Rozamiento</b>	<b>1</b>
1.1. <b>Fundamentos</b>	1
1.1.1. Conceptos de energía cinética y potencial	1
1.1.2. Función de disipación de Raleigh	3
1.2. <b>Fuerzas conservativas y no conservativas</b>	4
1.2.1. Fuerza conservativa	5
1.2.2. Adicionando al sistema una fuerza no conservativa.	6
1.2.3. Pérdida de energía en función de la posición	9
<b>2. Fuerza de Abraham y Lorentz</b>	<b>13</b>
2.1. <b>Introducción</b>	13
2.1.1. Fórmula de Larmor	14
2.1.2. Fuerza de Reacción a la Radiación.	15
<b>3. Fuerza Central y la Ecuación de Ford</b>	<b>21</b>
3.1. <b>Movimiento de una partícula</b>	21
3.1.1. <b>Clasificación de órbitas</b>	21
3.2. <b>La Ecuación de Ford y el Campo Central</b>	26
3.2.1. <b>Tiempo de Decaimiento</b>	31
<b>4. Conclusiones</b>	<b>35</b>

# Índice general

<b>1. Fuerzas de Rozamiento</b>	<b>1</b>
1.1. <b>Fundamentos</b>	1
1.1.1. Conceptos de energía cinética y potencial	1
1.1.2. Función de disipación de Raleigh	3
1.2. <b>Fuerzas conservativas y no conservativas</b>	4
1.2.1. Fuerza conservativa	5
1.2.2. Adicionando al sistema una fuerza no conservativa.	6
1.2.3. Pérdida de energía en función de la posición	9
<b>2. Fuerza de Abraham y Lorentz</b>	<b>13</b>
2.1. <b>Introducción</b>	13
2.1.1. Fórmula de Larmor	14
2.1.2. Fuerza de Reacción a la Radiación.	15
<b>3. Fuerza Central y la Ecuación de Ford</b>	<b>21</b>
3.1. <b>Movimiento de una partícula</b>	21
3.1.1. <b>Clasificación de órbitas</b>	21
3.2. <b>La Ecuación de Ford y el Campo Central</b>	26
3.2.1. <b>Tiempo de Decaimiento</b>	31
<b>4. Conclusiones</b>	<b>35</b>

<b>A. Intensidad de campo</b>	<b>37</b>
A.0.2. Solución de la ecuación de onda en forma covariante. Funciones de Green invariantes . . . . .	40
A.0.3. Los potenciales de Liénard-Wiechert y los campos de una carga puntual . . . . .	44
<b>B. Constantes Físicas Usadas</b>	<b>51</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>53</b>

# Capítulo 1

## Fuerzas de Rozamiento

La mecánica clásica describe el movimiento de los cuerpos según las fuerzas que actúen sobre ellos. Cuando las fuerzas son conservativas, la energía representa no solamente una herramienta matemática para simplificar la solución del problema sino un concepto físico que se heredará en todas las disciplinas de la física. Sin embargo, en ciertos procesos físicos la energía no se conserva como son los casos de fricciones en cuerpos macroscópicos y el frenado por radiación para una partícula cargada. En este capítulo describiremos en particular las fuerzas de fricción típicas dependientes de la velocidad para después compararlas en el siguiente capítulo con la fuerza de frenado por radiación.

### 1.1. Fundamentos

En esta sección analizaremos a la segunda ley de Newton para una partícula de masa  $m$  y su relación con los conceptos de energía cinética y potencial. Después estudiaremos el caso en que se adiciona al sistema una fuerza no conservativa y como ésta afecta la energía del sistema. Nos restringiremos al caso de fricciones dependientes de la velocidad. En tales casos, deduciremos la función de disipación de Raleigh.

#### 1.1.1. Conceptos de energía cinética y potencial

Consideramos a  $\vec{r}$  como el vector de posición de la partícula para un origen dado y a  $\vec{v}$  su vector velocidad correspondiente. La partícula se mueve

según la ecuación de Newton:

$$m \vec{a} = \vec{F}. \quad (1.1)$$

Esta ecuación diferencial puede ser transformada multiplicándola escalarmente por el vector velocidad  $\vec{v}$  de la siguiente manera:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (1.2)$$

Esta última ecuación es equivalente a:

$$m \vec{v} \cdot d\vec{v} = \left( \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) dt. \quad (1.3)$$

Finalmente se obtiene

$$m \vec{v} \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (1.4)$$

Integrando la Ec.(1.4),

$$\int_a^b m \vec{v} \cdot d\vec{v} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (1.5)$$

se define al trabajo efectuado por la fuerza exterior  $\vec{F}$  sobre la partícula cuando ésta va del punto  $a$  al punto  $b$ , como  $W_{ab}$ :

$$\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} \equiv W_{ab}. \quad (1.6)$$

La Ec.(1.5) puede reescribirse como:

$$W_{ab} = \frac{m}{2}(v_b^2 - v_a^2), \quad (1.7)$$

donde  $v_a$  y  $v_b$  representan a las velocidades en las posiciones  $a$  y  $b$ . Se define la energía cinética de la partícula, como la magnitud escalar,

$$K = \frac{1}{2}mv^2. \quad (1.8)$$

El trabajo, en otras palabras es la diferencia de la energía cinética entre los puntos  $b$  y  $a$ .

$$W_{ab} = K_b - K_a \quad (1.9)$$

Ahora bien, se define a una fuerza conservativa como aquella cuyo trabajo que realiza entre dos posiciones es independiente de la trayectoria que se siga. En tales casos, es fácilmente demostrable que si existe una función escalar  $V(r)$ , conocida como el potencial escalar o energía potencial, tal que:

$$\vec{F} = -\nabla V(r), \quad (1.10)$$

entonces la fuerza  $\vec{F}$  es conservativa. En efecto, si existe tal función potencial  $V$  tenemos que:

$$\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_a^b \nabla V(r) \cdot d\vec{r} = - \int_a^b dV = V(a) - V(b), \quad (1.11)$$

que es independiente de la trayectoria.

De la Ec.(1.10), podemos sumar a  $V(r)$  una cantidad cualquiera constante en el espacio, sin que este afecte el resultado. Así el nivel cero de  $V(r)$  es arbitrario.

De esta forma en el caso de un sistema conservativo el trabajo efectuado por las fuerzas es

$$W_{ab} = -V_b + V_a. \quad (1.12)$$

De la Ec.(1.9) y la Ec.(1.12) se tiene entonces que:

$$K_a + V_a = K_b + V_b. \quad (1.13)$$

Esta última expresión se conoce como el teorema de la conservación de la energía de una partícula. Si las fuerzas que actúan sobre una partícula son conservativas, se conserva la energía total  $E = K + V$  de la partícula.

### 1.1.2. Función de disipación de Raleigh

En la naturaleza no todas las fuerzas son conservativas. En efecto, una buena parte de las fuerzas que se describen en la mecánica newtoniana no lo son. Se conocen como fuerzas de fricción o de rozamiento. Cuando la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad de la partícula, se expresa de la siguiente forma:

$$\vec{F}_f = -k_x v_x \hat{i} - k_y v_y \hat{j} - k_z v_z \hat{k}, \quad (1.14)$$



donde  $k_x$ ,  $k_y$  y  $k_z$  son constantes. Este tipo de fuerzas se pueden deducir a partir de una función escalar  $f$ , llamada función de disipación de Raleigh, definida por:

$$f = \frac{1}{2}(k_x v_x^2 + k_y v_y^2 + k_z v_z^2). \quad (1.15)$$

Las componentes de la fuerza se obtienen de la siguiente forma:

$$F_{fx} = -\frac{\partial f}{\partial v_x}, \quad F_{fy} = -\frac{\partial f}{\partial v_y} \quad \text{y} \quad F_{fz} = -\frac{\partial f}{\partial v_z} \quad (1.16)$$

La interpretación física de la función de disipación se relaciona con el trabajo efectuado por el sistema contra el rozamiento ; es decir:

$$dW_f = -\vec{F}_f \cdot d\vec{r}, \quad (1.17)$$

por lo que

$$-\vec{F}_f \cdot d\vec{r} = -\vec{F}_f \cdot \vec{v} dt.$$

Finalmente

$$-\vec{F}_f \cdot \vec{v} dt = (k_x v_x^2 + k_y v_y^2 + k_z v_z^2) dt. \quad (1.18)$$

De la Ec.(1.15) y la Ec.(1.18), vemos que  $2f$  es igual a la disipación de energía por unidad de tiempo a causa del rozamiento. En forma simple, vemos que la potencia perdida representa dos veces la función de disipación de Raleigh[1]; es decir  $P = 2f$ .

## 1.2. Fuerzas conservativas y no conservativas

Veamos como pierde energía una partícula de masa  $m$  en presencia de una fuerza no conservativa, bosquejando la energía en función de la posición y comparando con el caso sin fricción. Sin perder generalidad consideremos el problema en una sola dimensión, eliminando todos los caracteres vectoriales o de componentes.

## 1.2.1. Fuerza conservativa

Definiendo a  $v_x = \dot{x}$  y a  $a_x = \ddot{x}$  como la velocidad y la aceleración respectivamente, en la componente  $\hat{i}$ , la partícula se moverá según la segunda ley de Newton (ver Ec. (1.1)),

$$m\ddot{x} = F. \quad (1.19)$$

El trabajo necesario para llevar una partícula de  $x_0$  a una posición  $x$  es (ver Ec.(1.7)):

$$\int_{x_0}^x F dx = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \dot{x}_0^2).$$

Considerando las condiciones iniciales siguientes:  $\dot{x}_0 = 0$  en  $x_0 = 0$ , se llega a que el trabajo sea igual a la energía cinética

$$F x = \frac{1}{2} m \dot{x}^2.$$

O bien

$$K(x) = F x. \quad (1.20)$$

Para obtener la energía potencial, (ver Ec.(1.10)),

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Se tiene entonces que:

$$V(x) = -Fx, \quad (1.21)$$

escogiendo  $V$  tal que  $V(x = 0) = 0$ .

En la (Figura 1.1) se ve que no importando de que magnitud sea la fuerza, cómo la energía total del sistema se mantiene constante, que en nuestro caso es igual a cero.

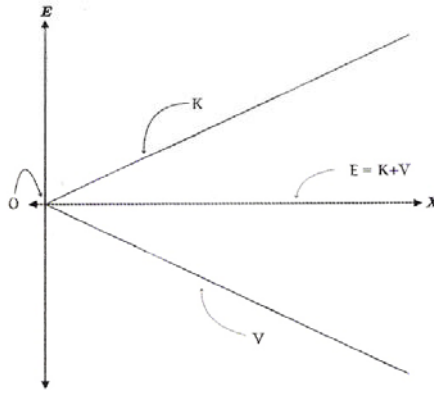


Figura 1.1: Energía cinética  $K$  y potencial  $V$ , en un campo de fuerza conservativo.

### 1.2.2. Adicionando al sistema una fuerza no conservativa.

Estudieemos el movimiento de una partícula que está sometida a una fuerza  $F$  de origen conservativo en un medio que ofrece una resistencia al movimiento por medio de una fuerza proporcional a la velocidad  $\dot{x}$ .

La partícula se moverá según la ecuación:

$$m\ddot{x} = F - k\dot{x}. \quad (1.22)$$

La Ec. (1.22) se puede reescribir como:

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} + k\dot{x} = F. \quad (1.23)$$

La solución de esta ecuación diferencial de primer orden consta de una solución particular,

$$\dot{x}_p = \frac{F}{k}, \quad (1.24)$$

y una solución de la ecuación homogénea

## 1.2. FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS 7

$$\frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{k}{m}\dot{x} = 0, \quad (1.25)$$

la solución de esta ecuación homogénea es:

$$\dot{x}_h = Ce^{-\frac{k}{m}t}. \quad (1.26)$$

La solución general de la Ec.(1.23) es de la siguiente forma:

$$\dot{x} = \dot{x}_p + \dot{x}_h = \frac{F}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}, \quad (1.27)$$

y la condición  $\dot{x}(t=0) = 0$  implica,

$$C = -\frac{F}{k}. \quad (1.28)$$

La solución se reduce a

$$\dot{x}(t) = \frac{F}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}). \quad (1.29)$$

Esta es la velocidad que experimenta la partícula en un medio resistente, del tipo ya mencionado anteriormente. Integrando la ecuación anterior con respecto al tiempo, se llega a:

$$x(t) = \frac{F}{k}\left(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right) + c, \quad (1.30)$$

la condición  $x(t=0) = 0$ , implica

$$c = -\frac{Fm}{k^2}. \quad (1.31)$$

Sustituyendo la Ec.(1.31) en la Ec.(1.30) se obtiene la posición de la partícula en el tiempo; es decir

$$x(t) = \frac{F}{k}\left(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{Fm}{k^2}. \quad (1.32)$$

De la Ec.(1.8)

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2. \quad (1.33)$$

Sustituyendo la velocidad de la Ec.(1.29) en la Ec.(1.33), se tiene

$$K(t) = \frac{1}{2}m\frac{F^2}{k^2}(1 - [e^{-\frac{k}{m}t}])^2 = \frac{mF^2}{2k^2} \left(1 - 2[e^{-\frac{k}{m}t}] + [e^{-2\frac{k}{m}t}]\right). \quad (1.34)$$

De la Ec.(1.10), se obtiene la energía potencial

$$dV = -Fdx, \quad (1.35)$$

integrando la Ec.(1.35)

$$V(x) = -Fx + c.$$

La condición  $V(x = 0) = 0$ , implica  $c = 0$ , de este modo,

$$V(x) = -Fx. \quad (1.36)$$

Sustituyendo la Ec.(1.32) en la Ec.(1.36), obtenemos  $V$  en función del tiempo

$$V(t) = \frac{F^2m}{k^2} - \frac{F^2}{k}t - \frac{F^2m}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t}. \quad (1.37)$$

La energía total del sistema en función del tiempo es:

$$E(t) = K(t) + V(t) = \frac{1}{2}m\left(\frac{F}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})\right)^2 + \frac{F^2m}{k^2} - \frac{F^2}{k}t - \frac{F^2m}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t},$$

reduciendo términos se tiene:

$$E(t) = \frac{3}{2}\frac{mF^2}{k^2} - \frac{F^2}{k}t - \frac{2mF^2}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mF^2}{2k^2}e^{-2\frac{k}{m}t}. \quad (1.38)$$

Por otro lado, si multiplicamos la función de disipación por dos e integramos con respecto al tiempo, encontramos que coincide salvo el signo, obviamente, con la energía total. Esto es debido a que tomamos la energía base igual con cero; es decir:

$$\int_0^t 2f(t)dt = \int_0^t (k\dot{x}^2) dt = k \int_0^t \left(\frac{F}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})\right)^2 dt,$$

## 1.2. FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS 9

distribuyendo la integral como:

$$\int_0^t 2f(t)dt = \frac{F^2}{k} \int_0^t dt - 2\frac{F^2}{k} \int_0^t e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F^2}{k} \int_0^t e^{-2\frac{k}{m}t} dt,$$

de aquí

$$\int_0^t 2f(t)dt = -\frac{3}{2} \frac{mF^2}{k^2} + \frac{F^2}{k} t + \frac{2mF^2}{k^2} e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mF^2}{2k^2} e^{-2\frac{k}{m}t}. \quad (1.39)$$

De la Ec.(1.38) y la Ec.(1.39), se obtiene que

$$\int_0^t 2f(t)dt = -E(t) \quad (1.40)$$

### 1.2.3. Pérdida de energía en función de la posición

Hemos visto cómo la energía cambia en función del tiempo debido a una fuerza de rozamiento. Ahora se verá cómo es la energía en función de la posición debido a esta fuerza de rozamiento. Si seguimos el mismo razonamiento de la sección [1.2.2.]. La Ec.(1.23) no puede tener una solución analítica, de tal forma que tengamos una expresión de la velocidad en función de la posición. La solución de la Ec.(1.23) donde hay relación de la posición y la velocidad, se obtiene resolviendo la siguiente integral:

$$m \int \frac{\dot{x} d\dot{x}}{F - k\dot{x}} = \int dx.$$

Que tiene como solución a\*:

$$x(\dot{x}) = -\frac{m}{k} \dot{x} - \frac{mF}{k^2} \ln(F - k\dot{x}) + \frac{mF}{k^2} \ln F. \quad (1.41)$$

Acomodando términos se obtiene,

$$\ln(F - k\dot{x}) = \ln F - \frac{k}{F} \dot{x} - \frac{k^2}{mF} x,$$

que es equivalente a:

---

\*Hemos considerado la condición  
 $\dot{x}(x=0) = 0$

$$\dot{x} = \frac{F}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{F}\dot{x}} e^{-\frac{k^2}{Fm}x} \right). \quad (1.42)$$

Esta ecuación trascendente puede resolverse por aproximaciones sucesivas. De forma aproximada podemos expresar la Ec.(1.42) como:

$$\dot{x} \cong \frac{F}{k} \left( 1 - e^{-1-\frac{k^2}{Fm}x} \right). \quad (1.43)$$

Aunque ésta no es una buena aproximación para valores de  $\frac{k^2}{Fm}x \ll 1$ , pero para  $\frac{k^2}{Fm}x \gg 1$  nos da una idea de cómo se comporta la partícula analíticamente a grandes distancias (obsérvese que en la Ec.(1.43)  $\dot{x}(x = 0) \neq 0$ ). De esta forma podemos expresar la energía cinética como:

$$K(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \cong \frac{1}{2}m\frac{F^2}{k^2} \left( 1 - e^{-1-\frac{k^2}{Fm}x} \right)^2. \quad (1.44)$$

De la Ec.(1.36),

$$V(x) = -Fx. \quad (1.45)$$

Entonces la energía total del sistema en función de la posición, para  $\frac{k^2}{Fm}x \gg 1$  queda como:

$$E(x) = K(x) + V(x) \cong \frac{1}{2}m\frac{F^2}{k^2} - m\frac{F^2}{k^2}e^{-1-\frac{k^2}{Fm}x} + \frac{1}{2}m\frac{F^2}{k^2}e^{-2-\frac{2k^2}{Fm}x} - Fx. \quad (1.46)$$

Con un programa se puede obtener este resultado de una manera más exacta y una expresión analítica diferente definiendo otras funciones, exclusivos de un programa. Nos apoyaremos de un programa [MATHEMATICA], para bosquejar de una manera mas exacta a la (Ec.1.46)

Por otro lado, si multiplicamos la función de disipación por dos e integramos con respecto al tiempo. Haciendo un cambio de variable encontramos que coincide salvo por el signo, con la energía total. Para hacer el cambio de límites de la integral de la Ec.(1.47) se hace uso de la Ec.(1.32);:

$$\int_0^t 2f dt = 2 \int_a^{g(x)} f(x) \frac{1}{\dot{x}} dx = 2 \int_a^{g(x)} \left( \frac{1}{2}k\dot{x}^2 \right) \frac{1}{\dot{x}} dx = k \int_a^{g(x)} \dot{x} dx = -E(x). \quad (1.47)$$

Donde  $a$  es una constante [apoyándose de un programa [MATHEMATICA] se puede realizar la integral de la ecuación Ec.(1.47), en función de la posición.

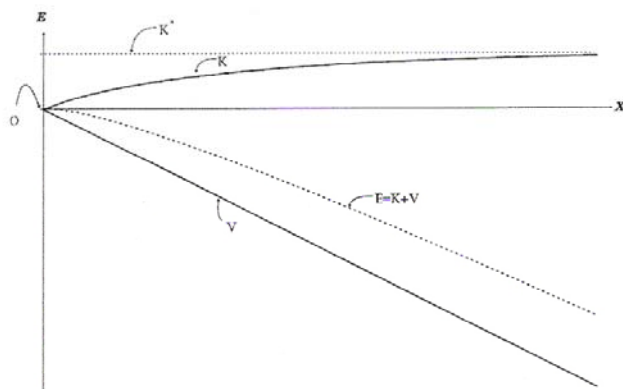


Figura 1.2: La energía cinética  $K$  y potencial  $V$  al adicionar al sistema una fuerza no conservativa. La energía cinética está acotada superiormente por  $K' = \frac{1}{2} \frac{F^2}{m}$

Ya hemos probado esto, en función del tiempo (ver Ec.(1.40)). Se comprueba la conservación de la energía en el sentido que la pérdida de energía del sistema coincide con la energía disipada que a su vez se convertirá en calor en el medio o otro tipo de energía.

Una fuerza de fricción de tipo  $kv$ , le corresponde una función de disipación  $f = \frac{1}{2}kv^2$ , la cual se identifica integrándola con respecto al tiempo con la mitad de la energía perdida por la partícula. La pregunta es: ¿existirá una función de disipación similar para una partícula cargada que pierde energía debido al frenado por radiación? Si existe, ¿podrá integrarse a un Lagrangiano como en el caso de la función de Raleigh?. En los siguientes capítulos trataremos de responder a estas preguntas.





# Capítulo 2

## Fuerza de Abraham y Lorentz

### 2.1. Introducción

Desde finales del siglo XIX, Abraham, Lorentz y Planck[2] dedujeron una ecuación de movimiento para una partícula cargada en forma no relativista que contemplaba la fuerza de frenado por radiación. A principios del siglo XX, van Laue tenía una expresión relativista para el frenado por radiación. Sin embargo la reciente teoría de la relatividad no había sido entendida por completo y la ecuación no fue considerada importante. En la obtención del término de frenado, se encontró una dificultad conocida como la renormalización de la masa que tiempo después Dirac reencontró en su trabajo de 1938 donde obtuvo una ecuación conocida como la ecuación de Lorentz-Dirac[3] para partículas cargadas puntuales. Esta última al igual que la ecuación no relativista de Abraham-Lorentz-Planck, presenta ciertas soluciones físicas no consistentes que se conocen como las soluciones divergentes o autoaceleraciones y las preaceleraciones. Sin embargo, la aparición de la Mecánica Cuántica dejó a un lado la problemática pues se suponía que esta última teoría explicaría todos los fenómenos relacionados con la radiación. Sin embargo en nuestros días debido al desarrollo de la Física de Plasmas y el estudio de las renormalizaciones en Mecánica Cuántica, el problema se ha retomado. Veamos brevemente en qué consiste el problema del frenado por radiación.

El movimiento de las partículas cargadas en campos externos implica necesariamente emisión de radiación siempre que las cargas estén aceleradas. La radiación emitida transporta energía e ímpetu y por lo tanto debe influir

en el movimiento subsiguiente de las partículas cargadas. Como consecuencia debe existir una fuerza de frenado por radiación. Empecemos por estudiar el proceso de radiación para poder encontrar tal fuerza.

### 2.1.1. Fórmula de Larmor

El campo eléctrico de una carga acelerada está dada por la siguiente expresión[4]\*:

$$\vec{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{\gamma^2(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R^2} \right]_{ret} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \left[ \frac{\vec{n} \times \{(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\}}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R} \right]_{ret} \quad (2.1)$$

donde  $\vec{n}$  es la dirección en la cual se propaga la onda electromagnética,  $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}(\tau)}{c}$  y los corchetes con la indicación "ret" como subíndice significan que la magnitud en el corchete debe ser evaluada en el tiempo retardado, y  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$  donde  $R$  es la distancia que hay entre la partícula y el observador,  $\epsilon_0$  es la permitividad del espacio libre. Si una carga está acelerada y se observa desde un sistema de referencia inercial cuya velocidad relativa a la partícula es pequeña con respecto a la de la luz, el primer término se puede despreciar para largas distancias quedando solo el segundo término conocido como el campo de aceleración y la expresión obtenida a partir de la Ec.(2.1) se reduce a:

$$\vec{E}_a(\vec{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \left[ \frac{\vec{n} \times \{\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}}\}}{R} \right]_{ret} \quad (2.2)$$

El flujo energético instantáneo viene dado por el vector de Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (2.3)$$

Donde  $\mu_0$  es la permeabilidad en el vacío. Sea

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{n} \times \vec{E}$$

---

\* Ver ( apéndice A.)

Sustituyendo a  $\vec{B}$  se llega a:

$$\vec{S} = \frac{1}{c\mu_0} \left| \vec{E}_a \right|^2 \vec{n}. \quad (2.4)$$

O sea la potencia radiada por unidad de ángulo sólido es:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{c\mu_0} \left| R\vec{E}_a \right|^2. \quad (2.5)$$

Si  $\Theta$  es el ángulo entre la aceleración  $\dot{\vec{v}}$  y  $\vec{n}$ , entonces la potencia radiada puede escribirse:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \left| \dot{\vec{v}} \right|^2 \text{sen}^2\Theta \quad (2.6)$$

La fórmula presenta la dependencia angular característica en  $\text{sen}^2\Theta$  que es un resultado bien conocido. De la Ec.(2.2) notamos que la radiación está polarizada en el plano determinado por  $\dot{\vec{v}}$  y  $\vec{n}$ . La potencia total instantánea radiada se obtiene integrando la Ec.(2.6) a todos los ángulos sólidos. Así tenemos

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \left| \dot{\vec{v}} \right|^2 \quad (2.7)$$

Este resultado se conoce como la fórmula de Larmor para una carga acelerada no relativista.

### 2.1.2. Fuerza de Reacción a la Radiación.

El problema es ahora cómo incluir los efectos de la radiación en las ecuaciones de movimiento de una partícula cargada. Comenzaremos con un argumento muy sencillo que se basa en la conservación de la energía de una partícula cargada no relativista. Si despreciamos la emisión de radiación, una partícula de masa  $m$  y carga  $e$ , sometida a la acción de una fuerza externa  $\vec{F}_{ext}$  se mueve según la ecuación de movimiento de Newton:

$$m \dot{\vec{v}} = \vec{F}_{ext}. \quad (2.8)$$

Como es acelerada, la partícula emite radiación cuya potencia viene dada por la Ec.(2.7) (fórmula de Larmor) :

$$P(t) = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \left| \dot{\vec{v}} \right|^2. \quad (2.9)$$

Con el fin de tener en cuenta esta pérdida de energía por radiación y el efecto que produce en el movimiento de la partícula, modificaremos la ecuación de Newton Ec.(2.8) sumándole una fuerza de reacción a la radiación  $\vec{F}_{rad}$ :

$$m \dot{\vec{v}} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{rad}. \quad (2.10)$$

Determinaremos la forma de  $\vec{F}_{rad}$  exigiendo que el trabajo efectuado por esta fuerza sobre la partícula en el intervalo de tiempo  $t_1 < t < t_2$  sea igual a la energía radiada en este tiempo con signo negativo. De este modo se conservará la energía, al menos en el intervalo de tiempo  $(t_1, t_2)$ . Con el resultado de Larmor, Ec.(2.9), se tiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{rad} \cdot \vec{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\vec{v}} \cdot \dot{\vec{v}} dt. \quad (2.11)$$

Integrando por partes el segundo miembro, se obtiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{rad} \cdot \vec{v} dt = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\vec{v}} \cdot \vec{v} dt - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left( \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} \right) \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (2.12)$$

Si el movimiento es periódico o tal que  $\left( \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} \right) = 0$  para  $t = t_1$  y  $t = t_2$ , podemos poner

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \vec{F}_{rad} - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\vec{v}} \right) \cdot \vec{v} dt = 0. \quad (2.13)$$

Entonces, resulta permisible identificar la fuerza de reacción a la radiación en la forma:

$$\vec{F}_{rad} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\vec{v}} = m\tau \ddot{\vec{v}}. \quad (2.14)$$

la Ec.(2.10) modificada toma la forma,

$$m \left( \dot{\vec{v}} - \tau \ddot{\vec{v}} \right) = \vec{F}_{ext}. \quad (2.15)$$

Esta es la forma como Planck dedujo la ecuación de movimiento para una partícula cargada conocida como la ecuación de Abraham-Lorentz-Planck. Planck[2, 4] obtuvo el resultado para un sistema de osciladores cargados con el objetivo de analizar el cuerpo negro y por ello al no analizar el comportamiento de los campos cercanos a la partícula cargada, evitó la problemática de la renormalización de la masa. En realidad, existen dos caminos formales para encontrar la reacción a la radiación. El primero fue propuesto por Abraham[2, 4] y consiste en considerar a una partícula cargada con una estructura esférica. Se calcula la fuerza que ejerce cada diferencial de volumen cargado sobre otro diferencial de volumen de la partícula cargada. Por ello, también la reacción a la radiación se conoce como la autofuerza. En el proceso de mandar al límite cero el radio de la partícula aparece un término infinito que al ser multiplicado por una aceleración, juega el papel de una masa. El eliminar este término se conoce como la renormalización de la masa. El otro camino, utilizado por Dirac[3], consiste en considerar a la partícula cargada como puntual y calcular los flujos de energía-momentum. Se vuelve a encontrar un término infinito que debe renormalizarse al igual que en el caso de la partícula con estructura. La ecuación que encontró Dirac[3] es una ecuación relativista y se expresa como:

$$ma^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} v_\nu + \tau m (\dot{a}^\mu + \frac{1}{c^2} a^2 v^\mu).$$

Esta última ecuación, conocida como la ecuación de Lorentz-Dirac[3] coincide con la ecuación de Abraham-Lorentz cuando las aceleraciones y las velocidades son pequeñas. Además de la renormalización de la masa, las ecuaciones de Lorentz-Dirac y de Abraham-Lorentz presentan una problemática importante. En efecto, las dos presentan soluciones no físicas que a continuación analizaremos sólo en el caso de la ecuación de Abraham-Lorentz.

Si la fuerza externa es cero, es evidente que la Ec.(2.15) tiene por solución general:

$$\vec{v}(t) = \vec{a}_0 e^{\frac{t}{\tau}}. \quad (2.16)$$

Estas soluciones se conocen como las "runaway solutions" o autoaceleraciones pues una partícula aislada puede entonces acelerarse súbitamente sin que ninguna interacción aparezca. Es decir se necesita conocer la aceleración inicial para resolver el problema. Esto es debido a que la ecuación es una

ecuación de tercer orden que no coincide con la filosofía de Newton de una ecuación de movimiento de segundo orden. Dirac[3] solucionó el problema proponiendo que las soluciones a la ecuación deben cumplir con las condiciones asintóticas que predicen solamente resultados físicos; es decir:  $\vec{a}_o = \vec{0}$ . Aunque de esta manera se evitan las soluciones autoaceleradas si consideramos, en una dimensión, una fuerza súbita de la siguiente manera,  $F = 0$  para  $t < 0$  y  $F = F_0$  para  $t \geq 0$ , y considerando que en este caso las condiciones asintóticas implican que  $a(-\infty) = 0$ , la solución es de la forma:

$$a = \frac{F_0}{m} e^{\frac{t}{\tau}} \text{ para } t < 0 \text{ y } a = \frac{F_0}{m} \text{ para } t \geq 0.$$

Esta solución se conoce como la preaceleración que para Dirac[3] no tiene importancia pues cae dentro del dominio cuántico pues  $\tau = 6 \times 10^{-24} \text{seg.}$  Sin embargo, a largo plazo y en condiciones donde la Mecánica Cuántica no juega un papel importante[5], las preaceleraciones representan una prueba para desechar a las ecuaciones de Abraham-Lorentz-Planck y de Lorentz-Dirac. Por esto último se han propuesto una infinidad de ecuaciones alternas. Entre ellas la más aceptada es la ecuación de Ford[4 , 6] y se expresa de la siguiente forma:

$$m \vec{a} = \vec{F} + \tau \frac{d\vec{F}}{dt}.$$

Notamos inmediatamente que es una ecuación de segundo orden que no presentará ningún tipo de autoaceleración o preaceleración. Esta ecuación fue deducida por primera vez por Elzevier[7] pero en forma intuitiva. Ford la dedujo en una forma más rigurosa para el caso de partículas con estructura. Si analizamos ahora la disipación de energía; o sea la potencia radiada:

$$P_{rad} = \tau \frac{d\vec{F}}{dt} \cdot \vec{v}.$$

Vemos que no coincide con la fórmula de O'Connell[8] de potencia de radiación

$$P_{O'Connell} = \tau \frac{F^2}{m}.$$

Y por lo tanto esta teoría tiene un hueco. En efecto, la no existencia de una función de disipación derivada directamente de la ecuación de movimiento representa una problemática abierta. A diferencia con la teoría de Dirac[3] donde ésta dificultad se entiende debido a utilizar una ecuación relativista

y por tanto se puede diferenciar entre la energía radiada al infinito y la energía radiada en las cercanías, o sea que sigue a la partícula (Attached Fields), para la teoría de Ford no existe tal ecuación de movimiento relativista que pueda ser desdoblado en campos radiativos de largo y corto alcance. Aunque para algunos la ecuación de Elzevier en forma relativista podría ser la generalización de la ecuación de Ford para altas velocidades, no presenta una forma que permita encontrar el desdoblamiento de los campos. Sigue siendo un problema abierto. Sin embargo, esto no excluye a la ecuación de Ford de describir el movimiento de una carga y por ello se analizará en el siguiente capítulo el campo central utilizando esta ecuación.





## Capítulo 3

# Fuerza Central y la Ecuación de Ford

### 3.1. Movimiento de una partícula

#### 3.1.1. Clasificación de órbitas

El movimiento de un sistema formado por un cuerpo bajo la influencia de una fuerza dirigida según la recta que une el origen del sistema al centro del cuerpo, constituye un problema de gran importancia para la Física y cuya solución puede determinarse completamente si la fuerza depende del cuadrado del inverso de la distancia o si es proporcional a la distancia. Tal sistema se le denomina por el término de campo central. Cuando la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa del origen al cuerpo o a la partícula, la ecuación de movimiento de Newton se expresa como:

$$\mu \vec{a} = -\frac{k}{r^2} \hat{r}. \quad (3.1)$$

Suponiendo que el movimiento de la partícula de masa  $\mu$  se reduce a un plano y expresando al vector aceleración  $\vec{a}$  en coordenadas polares, llegamos a que la Ec.(3.1)\* se describe como:

---

\*Para  $k$  positiva, el signo menos asegura que la fuerza esté dirigida hacia el centro de fuerzas.

$$\mu \left\{ [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2] \hat{r} + [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}] \hat{\theta} \right\} = -\frac{k}{r^2} \hat{r}, \quad (3.2)$$

que conduce a un sistema de dos ecuaciones:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{k}{\mu r^2} = 0, \quad (3.3)$$

y

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0. \quad (3.4)$$

La Ec.(3.4) puede reescribirse como:

$$\frac{d}{dt}(\mu r^2 \dot{\theta}) = 0. \quad (3.5)$$

El momentum angular resulta ser entonces una constante, de hecho se puede demostrar que vectorialmente el momento angular vectorial es constante y por ello el movimiento es en un plano; tenemos:

$$l = \mu r^2 \dot{\theta} = cte. \quad (3.6)$$

La energía del sistema queda como,

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r), \quad (3.7)$$

donde  $U(r)$  representa al potencial del campo central. Definamos el potencial efectivo como:

$$V \equiv \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)$$

Por otro lado el potencial  $U(r)$  se puede encontrar realizando la siguiente integración:

$$U(r) = - \int \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = -\frac{k}{r}. \quad (3.8)$$

De la Ec.(3.7) podemos obtener:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}}.$$

Podemos escribir entonces:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} = \left( \frac{l}{\mu r^2} \right) \frac{dr}{d\theta}.$$

Así la ecuación de la trayectoria se escribe como

$$\theta(r) = \int \frac{\left(\frac{l}{r^2}\right) dr}{\sqrt{2\mu \left(E + \frac{k}{r} - \frac{l^2}{2\mu r^2}\right)}}. \quad (3.9)$$

Si hacemos el cambio de variable  $u = \frac{1}{r}$ , la Ec.(3.9) se convierte en:

$$\theta(u) = \theta' - \int \frac{l du}{\sqrt{2\mu \left(E + ku - \frac{l^2}{2\mu} u^2\right)}}, \quad (3.10)$$

donde se trata de una integral definida. La cantidad  $\theta'$  es una constante de integración determinada por las condiciones iniciales, no tiene por qué ser el ángulo inicial  $\theta'$  en el instante  $t = 0$ .

La integral de la Ec.(3.10) tiene como solución:

$$\theta(u) = \theta' - \arccos \left( \frac{\frac{l^2}{\mu k} u - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}} \right). \quad (3.11)$$

Por último, despejando  $u = \frac{1}{r}$ , la ecuación de la órbita resulta ser,

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \cos(\theta - \theta') \right).$$

Definiendo ahora los parámetros siguientes:

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \frac{l^2}{\mu k} \quad \text{y} \\ \varepsilon &\equiv \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

se llega a la siguiente relación:

24CAPÍTULO 3 FUERZA CENTRAL Y LA ECUACIÓN DE FORD

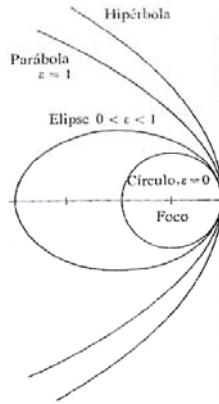


Figura 3.1: La naturaleza de la órbita depende del valor  $\varepsilon$ .

$$\frac{\alpha}{r} = 1 + \varepsilon \cos(\theta), \quad (3.13)$$

con  $\theta' = 0$  en  $t = 0$ . Llegando a la ecuación de una cónica con uno de sus focos en el origen. La cantidad  $\varepsilon$  es la excentricidad. Al haber hecho cero la constante de integración de la Ec.(3.11)\*\* habremos de medir  $\theta$  a partir  $r_{\min}$ , posición que recibe el nombre de pericentro, correspondiendo el de apocentro a la de  $r_{\max}$ . El término general con el que se denominan los puntos de inversión es el ápside.

Las órbitas quedan clasificadas según los valores de la excentricidad (y por ende, de la energía  $E$ ) en las distintas cónicas (véase la figura 3.1 ).

$\varepsilon > 1;$	$E > 0$	(hipérbola)
$\varepsilon = 1;$	$E = 0$	(Parábola)
$0 < \varepsilon < 1;$	$V_{\min} < E < 0$	(Elipse)
$\varepsilon = 0;$	$E = V_{\min}$	(Círculo)
$\varepsilon < 0;$	$E < V_{\min}$	(no permitida).

y el potencial efectivo correspondiente es:

\*\*El valor mínimo de  $r$  corresponde al valor máximo de  $\cos \theta$ ; o sea, a  $\theta=0$

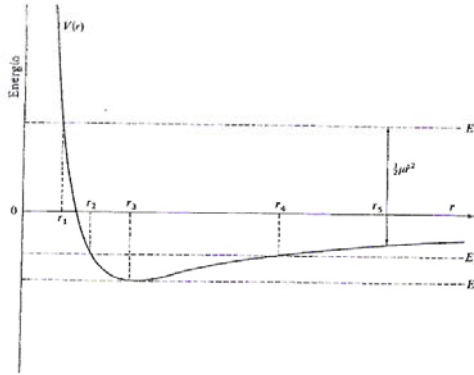


Figura 3.2: Potencial unidimensional equivalente para una fuerza atractiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

$$V \equiv -\frac{k}{r} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2}$$

En la figura (3.2) podemos ver dicha gráfica.

Si representamos la energía como en la fig.(3.2), se identifican tres regiones de interés. Consideremos ahora el movimiento de una partícula que tenga la energía  $E_1 > 0$ , indicada en la figura (3.2). Está claro que dicha partícula nunca podrá acercarse a una distancia inferior a  $r_1$ , en cambio no existe límite superior para los valores posibles de  $r$ , por lo que la órbita no está acotada. Una partícula puede venir del infinito, chocar contra la “barrera centrífuga repulsiva”, ser repelida en el punto de inversión  $r = r_1$  y volver a alejarse infinitamente, así para ( $E_1 \geq 0$ ), el movimiento no será confinado. Obsérvese que la altura sobre  $V(r)$  de la recta de la energía total ( de valor constante  $E_1$ ) vale  $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$  cualquiera que sea  $r$ , como se indica en  $r_5$  de la fig.(3.2). Entonces, la velocidad radial  $\dot{r}$  se anulará y cambiará de signo en el punto (o puntos de inversión).

Cuando la energía es negativa y su valor se encuentra entre cero y el mínimo de  $V(r)$ , como es el caso de  $E_2$ , el movimiento será confinado por  $r_2 \leq r \leq r_4$ . Los valores  $r_2$  y  $r_4$  corresponden a los puntos de inversión y son las llamadas distancias apsidales de la órbita.

Cuando  $E$  sea igual al valor mínimo de la energía potencial efectiva (vease  $E_3$  en la fig. (3.2)), el vector de posición de la trayectoria de la partícula se limita al único valor  $r_3$ , siendo  $\dot{r} = 0$  en todo instante, y el movimiento será circular. Valores de  $E$  inferiores a  $V_{\min} = -\frac{\mu k^2}{2I^2}$  no producen movimientos reales, ya que entonces  $\dot{r}^2 < 0$  y la velocidad sería imaginaria[1].

### 3.2. La Ecuación de Ford y el Campo Central

La partícula se mueve según la ecuación de movimiento de Ford:

$$m \vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{rad} \quad (3.14)$$

donde  $\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \hat{r}$ , y  $\vec{F}_{rad} = \tau \dot{\vec{F}}$ , con  $\tau = 6,26 \times 10^{-24} \text{ seg}$ . Sustituyendo estos valores y tomando a  $k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ , la Ec.(3.14) queda de la siguiente forma:

$$m \left\{ [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2] \hat{r} + [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}] \hat{\theta} \right\} = -\frac{k}{r^2} \hat{r} + \tau \dot{\vec{F}}, \quad (3.15)$$

donde  $\dot{\vec{F}}$  se expresa como:

$$\dot{\vec{F}} = 2k \frac{\dot{r}}{r^3} \hat{r} - k \frac{\dot{\theta}}{r^2} \hat{\theta}. \quad (3.16)$$

Finalmente, la Ec.(3.15) queda como:

$$m \left\{ [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2] \hat{r} + [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}] \hat{\theta} \right\} = \left[ -\frac{k}{r^2} + 2\tau k \frac{\dot{r}}{r^3} \right] \hat{r} - \tau k \frac{\dot{\theta}}{r^2} \hat{\theta}. \quad (3.17)$$

Llegamos entonces al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{1}{m} \left[ -\frac{k}{r^2} + 2\tau k \frac{\dot{r}}{r^3} \right] \quad (3.18)$$

y

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -\tau k \frac{\dot{\theta}}{mr^2}. \quad (3.19)$$

Para resolver este sistema de ecuaciones diferenciales representado por la Ec.(3.18) y la Ec.(3.19), se hace una aproximación, igualando a cero el segundo miembro de la Ec.(3.19), teniendo en cuenta que  $\tau = 6,26 \times 10^{-24} \text{seg}$ . Reescribimos a la Ec.(3.19) como:

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0, \quad (3.20)$$

obteniendo así una constante de movimiento

$$l = mr^2\dot{\theta} = \text{cte}. \quad (3.21)$$

De este modo, la Ec.(3.18) puede ser expresada de una forma más conveniente haciendo un cambio de variable:

$$u \equiv \frac{1}{r}. \quad (3.22)$$

Calculando

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}.$$

Según la Ec.(3.21),

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2},$$

de forma que

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{m}{l} \dot{r}. \quad (3.23)$$

Derivando por segunda vez la Ec.(3.23) se llega a:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left( -\frac{m}{l} \dot{r} \right) = \frac{dt}{d\theta} \frac{d}{dt} \left( -\frac{m}{l} \dot{r} \right) = -\frac{m}{l} \ddot{r},$$

considerando que  $\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$ , tenemos a,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{m^2}{l^2} r^2 \ddot{r}. \quad (3.24)$$



De las Ecs.(3.22), (3.23) y (3.24) se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} r &\equiv \frac{1}{u}, \\ \dot{r} &= -\frac{l}{m} \frac{du}{d\theta}, \\ \ddot{r} &= -\frac{l^2}{m^2} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}, \\ \text{y } r\ddot{\theta} &= \frac{l^2}{m^2} u^3. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la Ec.(3.18), resulta:

$$-\frac{l^2}{m^2} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{l^2}{m^2} u^3 = -\frac{k}{m} \frac{1}{r^2} + 2 \frac{\tau k}{m} \frac{\dot{r}}{r^3},$$

de forma que

$$-\frac{l^2}{m^2} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{l^2}{m^2} u^3 = -\frac{k}{m} u^2 - 2 \frac{\tau l k}{m^2} u^3 \frac{du}{d\theta}. \quad (3.25)$$

Reescribiendo la Ec.(3.25) de una forma adecuada, llegamos a:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{mk}{l^2} + 2 \frac{\tau k}{l} u \frac{du}{d\theta}. \quad (3.26)$$

La Ec.(3.26) es nuestra nueva ecuación para cuya solución seguiremos el método de aproximaciones sucesivas. Como *primera solución de prueba* utilizaremos la correspondiente al caso en que se desprecie en la Ec.(3.26) el término  $(2 \frac{\tau k}{l} u \frac{du}{d\theta})$ ; o sea:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{mk}{l^2}. \quad (3.27)$$

Teniendo como solución a:

$$u(\theta) = \frac{mk}{l^2} + A \cos(\theta - \omega), \quad (3.28)$$

donde  $A$  es una constante de integración y  $\omega = 0$  en  $t = 0$ . Así

$$u(\theta) = \frac{mk}{l^2} \left[ 1 + \frac{l^2}{mk} A \cos(\theta - \omega) \right]. \quad (3.29)$$

Definiendo  $\varepsilon = \frac{l^2}{mk}A$ , y  $\alpha = \frac{l^2}{mk}$ , con lo cual la primera función de prueba se podrá escribir,

$$u_1 = \frac{1}{\alpha}(1 + \varepsilon \cos \theta), \quad (3.30)$$

que constituye el resultado que nos es familiar (ver la Ec.(3.13)) para cuando la fuerza obedece exactamente la ley de proporcionalidad a la inversa del cuadrado de la distancia. Por otro lado

$$\frac{du_1}{d\theta} = -\frac{1}{\alpha}\varepsilon \sin \theta.$$

Si llevamos esta expresión y la Ec.(3.30) al segundo miembro de la Ec.(3.26), tendremos

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{\alpha} + 2\frac{\tau k}{l} \left[ \frac{1}{\alpha}(1 + \varepsilon \cos \theta) \right] \left[ -\frac{1}{\alpha}\varepsilon \sin \theta \right]$$

6

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{\alpha} - 2\frac{\tau k}{l\alpha^2}\varepsilon \sin \theta - 2\frac{\tau k}{l\alpha^2}\varepsilon^2 \cos \theta \sin \theta.$$

Considerando a  $\cos \theta \sin \theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$ , entonces se puede reescribir como:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{\alpha} - 2\frac{\tau k}{l\alpha^2}\varepsilon \sin \theta - \frac{\tau k}{l\alpha^2}\varepsilon^2 \sin 2\theta. \quad (3.31)$$

Definiendo  $\gamma = \frac{\tau k}{l}$ , entonces la Ec.(3.31) queda como

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha^2} [2\varepsilon \sin \theta + \varepsilon^2 \sin 2\theta]. \quad (3.32)$$

Resulta así que la primera función de prueba  $u_1$  llevada al segundo miembro de Ec.(3.26), sólo reproduce el primer término del mismo, o sea  $\frac{1}{\alpha}$ . En consecuencia, podemos formar una segunda función de prueba sumando a  $u_1$  un término que reproduce el resto del segundo miembro de la Ec.(3.32), y calculando la integral particular; o sea de la Ec.(3.32),

$$\frac{d^2u_p}{d\theta^2} + u_p = B \sin \theta + C \sin 2\theta, \quad (3.33)$$

donde

$$B = -\frac{2\gamma\varepsilon}{\alpha^2},$$

$$\text{y } C = -\frac{\gamma\varepsilon^2}{\alpha^2}.$$

Para encontrar la solución particular de la Ec.(3.33) se emplea el método de selección. Este método establece que dada una ecuación diferencial del tipo

$$a_0y^n + a_1y^{n-1} + \dots + a_n = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos(\beta x) + Q_m(x) \sin(\beta x)], \quad (3.34)$$

donde  $P_n(x)$  y  $Q_m(x)$  son polinomios de grado  $n$  y  $m$ , respectivamente. En este caso se busca una solución particular  $y_p$  de la Ec.(3.34) de la forma

$$y_p = x^s e^{\alpha x} [P_k(x) \cos(\beta x) + Q_k(x) \sin(\beta x)], \quad (3.35)$$

donde  $k = \max(m, n)$ ,  $P_k(x)$  y  $Q_k(x)$  son polinomios en  $x$  de grado  $k$ , de coeficientes indeterminados, y  $s$  es el orden de multiplicidad de la raíz  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ . De la ecuación característica ( $s = 0$ , si  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  no son raíces de la ecuación característica)[9]. La Ec.(3.33) tiene como ecuación característica a

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

con raíces  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$  por lo que para  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$ . y sus raíces son de multiplicidad uno; o sea:  $s = 1$ . Para  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2$ , donde estos valores no corresponden el mismo valor de las raíces; o sea:  $\lambda \neq \pm 2i$ . Por lo tanto  $s = 0$ . Teniendo estos datos se busca una solución particular de la forma

$$u_p = \theta[a_1 \cos(\theta) + a_2 \sin(\theta)] + [b_1 \cos 2(\theta) + b_2 \sin 2(\theta)] \quad (3.36)$$

y fácilmente se puede llegar a que

$$u_p = -\frac{B}{2}\theta \cos(\theta) - \frac{C}{3} \sin 2(\theta). \quad (3.37)$$

Por lo tanto, la segunda función de prueba es

$$u_2 = u_1 + u_p$$

si en este punto detenemos el proceso de aproximación, tendremos

$$u \cong u_2 = \frac{1}{\alpha}(1 + \varepsilon \cos \theta) - \frac{B}{2}\theta \cos(\theta) - \frac{C}{3} \sin 2(\theta).$$

sustituyendo los valores de las constantes  $A, B$  y  $C$ , se llega a:

$$u \cong \frac{1}{\alpha}(1 + \varepsilon \cos \theta) + \frac{\gamma\varepsilon}{\alpha^2}\theta \cos(\theta) + \frac{\gamma\varepsilon^2}{3\alpha^2} \sin 2(\theta). \quad (3.38)$$

Ahora sustituimos a  $u = \frac{1}{r}$ , y  $\gamma = \frac{\tau k}{l}$ , se obtiene

$$\frac{1}{r} \cong \frac{1}{\alpha}(1 + \varepsilon \cos \theta) + \frac{\tau k}{l} \frac{\varepsilon}{\alpha^2} \theta \cos(\theta) + \frac{\tau k}{l} \frac{\varepsilon^2}{3\alpha^2} \sin 2(\theta),$$

finalmente sustituimos a  $\alpha = \frac{l^2}{mk}$ , así

$$\frac{1}{r} \cong \frac{mk}{l^2}(1 + \varepsilon \cos \theta) + \frac{\tau k}{l} \frac{m^2 k^2}{l^4} \varepsilon \theta \cos(\theta) + \frac{\tau k}{l} \frac{m^2 k^2}{l^4} \frac{\varepsilon^2}{3} \sin 2(\theta).$$

Reacomodando términos se llega entonces a que:

$$\frac{1}{r} \cong \frac{mk}{l^2}(1 + \varepsilon \cos \theta) + \tau \frac{m^2 k^3}{l^5} \varepsilon \theta \cos(\theta) + \tau \frac{m^2 k^3}{l^5} \frac{\varepsilon^2}{3} \sin 2(\theta). \quad (3.39)$$

Obsérvese que en  $\varepsilon = 0$ , la Ec.(3.39), toma la misma forma de la Ec.(3.13) en  $\varepsilon = 0$ . Esto quiere decir que la excentricidad  $\varepsilon$  se puede considerar como un invariante adiabático. Es decir que aunque la suposición de que el momento angular no pueda ser válida a largo plazo, se puede considerar que la excentricidad  $\varepsilon$  no cambia y esto nos permitirá conocer el movimiento en una mejor forma aproximada.

### 3.2.1. Tiempo de Decaimiento

Uno de los aspectos más interesantes que demostramos es la constancia de la excentricidad que implica que la forma de la trayectoria se conserva bajo la ecuación de Ford. Es decir, al ser el tiempo característico  $\tau$  tan pequeño, la diferencia de las trayectorias de la partícula para las ecuaciones de Newton y Ford, con condiciones iniciales iguales, es mínima. Sin embargo, a largo

plazo existe un decaimiento, pero la forma de las trayectorias será la misma. Veamos entonces qué pasa para una situación típica. Tomemos la Ec.(3.19),

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -\tau k \frac{\dot{\theta}}{mr^2}.$$

Se tiene que la excentricidad se puede escribir como

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{l^2}{mkr}}. \quad (3.40)$$

Consideremos que  $\varepsilon = 0$ , o sea que el movimiento es circular y de modo que la Ec.(3.40) queda como:

$$1 = \frac{l^2}{mkr} = \frac{(mr^2\dot{\theta})^2}{mkr} = \frac{mr^3\dot{\theta}^2}{k}, \quad (3.41)$$

dejando la velocidad angular como:

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{k}{mr^3}}. \quad (3.42)$$

Derivando la Ec.(3.42), con respecto al tiempo, se tiene:

$$\ddot{\theta} = -\frac{3}{2r} \sqrt{\frac{k}{mr^3}} \dot{r}. \quad (3.43)$$

Sustituyendo la Ec.(3.42) y la Ec.(3.43) en la Ec.(3.19), se tiene:

$$2\dot{r} \left( \sqrt{\frac{k}{mr^3}} \right) + r \left( -\frac{3}{2r} \sqrt{\frac{k}{mr^3}} \dot{r} \right) = -\tau k \frac{1}{mr^2} \left( \sqrt{\frac{k}{mr^3}} \right).$$

Así acomodando términos, se llega a

$$2\dot{r} - \frac{3}{2}\dot{r} = -\tau k \frac{1}{mr^2}.$$

Finalmente se obtiene

$$\dot{r} = -\tau k \frac{2}{mr^2}. \quad (3.44)$$

Si reescribimos la Ec.(3.44) como

$$dt = -\frac{m}{2k\tau} r^2 dr \quad (3.45)$$

e integrando la Ec.(3.45), se llega a:

$$\int_0^t dt = -\frac{m}{2k\tau} \int_{a_0}^0 r^2 dr,$$

donde  $a_0$  es el radio de Bohr. Hemos considerado el radio de Bohr pues queremos calcular el tiempo de decaimiento del átomo de hidrógeno y comprobar que este tiempo es lo suficientemente pequeño como para predecir que la Mecánica Clásica con frenado por radiación no puede describir a la Física Atómica. El tiempo de decaimiento del átomo de hidrógeno es

$$t = \frac{m}{6k\tau} (a_0)^3. \quad (3.46)$$

El valor estimado de la Ec. (3.46) es:

$$t = \frac{(9,1093897 \times 10^{-31} kg)(0,529177249 \times 10^{-10} m)^3}{6(2,307708005 \times 10^{-28} Nm^2)(6,25342961 \times 10^{-24} s)}$$

$$t = 1,55898667 \times 10^{-11} seg.$$



## Conclusiones

Hemos visto que para una fuerza de fricción de tipo  $kv$ , le corresponde una función de disipación de Raleigh. Se comprueba la conservación de la energía en el sentido de que la pérdida de energía del sistema coincide con la energía disipada que a su vez se convertirá en otro tipo de energía. En el caso de frenado por radiación, tanto para el modelo de Dirac como el de Ford, la disipación de la energía no concuerda con la potencia radiada. Esto es un problema abierto. Pero queda claro que no existe en tales casos una función de disipación. Por otro lado, aunque la ecuación de Ford describa el movimiento de una partícula cargada no podrá hacerlo a nivel atómico pues el tiempo de decaimiento en el caso del átomo de hidrógeno es muy pequeño y por lo tanto no predice la existencia de tal átomo. Por lo tanto es necesario utilizar la Mecánica Cuántica.





# Apéndice A

## Intensidad de campo

El operador Laplaciano cuadrimensional se define como el invariante por contracción

$$\square \equiv \partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x^0{}^2} - \nabla^2, \quad (\text{A.1})$$

es precisamente el operador de la ecuación de onda en el vacío, con la componente contravariante  $x^0 = ct$ . La derivación con respecto a una componente contravariante del vector de coordenadas se transforma como la componente de un operador vectorial covariante. Y la derivación con respecto a una componente covariante da un operador vectorial contravariante. Para el espacio-tiempo plano de la relatividad especial el tensor métrico es diagonal y sus elementos son:

$$g_{00} = 1; \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1. \quad (\text{A.2})$$

Con este tensor métrico se deduce que si un 4-vector contravariante tiene las componentes  $x^0, x^1, x^2, x^3$ , su compañero covariante tiene las componentes  $x_0 = x^0, x_1 = -x^1, x_2 = -x^2, x_3 = -x^3$

Por consiguiente emplearemos la notación

$$\partial^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla \right); \quad \partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right). \quad (\text{A.3})$$

La 4-divergencia de un 4-vector  $A$  es el invariante

$$\partial^\alpha A_\alpha = \partial_\alpha A^\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \nabla \cdot A. \quad (\text{A.4})$$

Ahora por sencillez, consideramos las ecuaciones microscópicas de Maxwell, sin  $D$  y  $H$ . Empezando por la densidad de carga  $\rho(x, t)$ , y la densidad de corriente  $J(x, t)$  y la ecuación de continuidad que las relaciona:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0. \quad (\text{A.5})$$

De la Ec.(A.4) resulta natural postular que  $\rho$  y  $J$  juntas forman el 4-vector  $J^\alpha$

$$J^\alpha = (c\rho, J), \quad (\text{A.6})$$

por tanto la ecuación de continuidad Ec.(A.5), toma la forma covariante

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0, \quad (\text{A.7})$$

en la que el operador diferencial covariante  $\partial_\alpha$  viene dado por Ec.(A.3). Que  $J^\alpha$  sea un legítimo 4-vector se deduce de la invariancia de la carga eléctrica. La carga en un pequeño elemento de volumen  $d^3x$  es  $\rho d^3x$ . puesto que es un invariante experimental, se cumplirá que  $\rho' d^3x' = \rho d^3x$ . Pero el elemento de volumen *cuadri*-dimensional  $d^4x = dx_0 d^3x$ , es una invariante de Lorentz  $d^4x' = d^4x$ . La igualdad  $\rho' d^3x' = \rho d^3x$  implica, por tanto, que  $c\rho$  se transforma como  $x^0$ , a saber, la componente temporal del 4-vector Ec.(A.6).

En la familia de potenciales que satisfacen el contraste de Lorentz las ecuaciones de onda para el potencial vector  $A$  y el potencial escalar  $\Phi$  son:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla^2 A &= \mu_0 J \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

con la condición de Lorentz:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot A = 0. \quad (\text{A.9})$$

El operador diferencial que aparece en la Ec.(A.8) es la Laplaciana cuatridimensional invariante Ec.(A.1), mientras que los segundos miembros son las componentes de un 4-vector. La covariancia requiere que los potenciales  $\Phi$  y  $A$  formen un potencial 4-vector

$$A^\alpha = \left( \frac{\Phi}{c}, A \right). \quad (\text{A.10})$$

Entonces, las ecuaciones de onda y la condición de Lorentz, ambas adoptan la forma covariante,

$$\begin{aligned} \square A^\alpha &= \mu_0 J^\alpha \\ \partial_\alpha A^\alpha &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

los campos se expresan en función de los potenciales en la forma

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \Phi \\ B &= \nabla \times A, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

las componentes según  $x$  de  $E$  y  $B$  son explícitamente,

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -c(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0) \\ B_x &= -\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

en las que la segunda forma se deduce de la Ec.(A.10) y  $\partial^\alpha = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla \right)$ . Estas ecuaciones implican que los campos eléctrico y magnético, seis componentes en total, son los elementos de un tensor de segundo orden, el tensor antisimétrico intensidad de campo,

$$F^{\alpha\beta} = (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha). \quad (\text{A.14})$$

En forma matricial explícita, el tensor de intensidad del campo es

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

### A.0.2. Solución de la ecuación de onda en forma covariante. Funciones de Green invariantes

El campo electromagnético  $F^{\alpha\beta}$  que se origina de una fuente externa  $J^\alpha(x)$  satisface las ecuaciones de Maxwell no homogénea:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^\beta. \quad (\text{A.15})$$

Definiendo los campos en función de los potenciales esta expresión se convierte en:

$$\square A^\beta - \partial^\beta (\partial_\alpha A^\alpha) = \mu_0 J^\beta,$$

si los potenciales satisfacen la condición de Lorentz,  $\partial^\alpha A^\alpha = 0$ , entonces son soluciones de la ecuación de ondas cuadi-dimensional:

$$\square A^\beta = \mu_0 J^\beta(x). \quad (\text{A.16})$$

La solución de la Ec.(A.16) puede conseguirse hallando una función de Green  $D(x, x')$  para la ecuación:

$$\square_x D(x, x') = \delta^{(4)}(x - x'). \quad (\text{A.17})$$

En la que  $\delta^{(4)}(x - x') = \delta(x_0 - x'_0)\delta(x - x')$  es una función delta cuadi-dimensional. En ausencia de superficies límite, la función de Green sólo puede depender de 4-vector diferencia  $z^\alpha = x^\alpha - x'^\alpha$ . Por tanto,  $D(x, x') = D(x - x') = D(z)$  y la Ec.(A.17) se convierte en:

$$\square_z D(z) = \delta^{(4)}(z). \quad (\text{A.18})$$

Para pasar del espacio de coordenadas al de numeros de ondas empleamos integrales de Furier. La transformada de Furier  $\tilde{D}(k)$  de la función de Green se define por medio de

$$D(k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \tilde{D}(k) e^{-ik \cdot z}, \quad (\text{A.19})$$

siendo  $k \cdot z = k_0 z_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{z}$ . Como la representación de la función delta es:

$$\delta^{(4)}(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik \cdot z}, \quad (\text{A.20})$$

se encuentra que en el espacio  $k$  la función de Green es:

$$\tilde{D}(k) = -\frac{1}{k \cdot k}, \quad (\text{A.21})$$

por tanto, la función de Green es:

$$D(z) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ik \cdot z}}{k \cdot k}. \quad (\text{A.22})$$

La expresión Ec.(A.22) es ambigua, por que el integrando es singular, y sólo se le da un significado definido si se manejan adecuadamente las singularidades. Vamos a proceder en primer lugar a relizar la integración en  $dk_0$ . De este modo:

$$D(z) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{ik \cdot z} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - |\mathbf{k}|^2}. \quad (\text{A.23})$$

A la integral en  $k_0$  se le da sentido considerando  $k_0$  como variable compleja y tratándola como una integral de contorno en el plano  $k_0$ . Como se indica en la figura.1, el integrando dos polos simples en  $k_0 = \pm |\mathbf{k}|$ . Escogiendo contornos de integración diferentes respecto a los polos se obtienen funciones de Green con comportamientos diferentes. En la figura.1 se ha denominado  $r$  y  $a$  dos posibles contornos.

Estos caminos abiertos pueden cerrarse en el infinito mediante semicírculos en el semiplano superior o en el semiplano inferior, según el signo que tenga  $z_0$  en la exponencial. Cuando  $z_0 > 0$ , la exponencial  $e^{-ik_0 z_0}$  crece sin límite en el semiplano superior. Para poder emplear el teorema de los residuos debemos cerrar el contorno en el semiplano inferior. Cuando  $z_0 < 0$ , se cumple lo contrario.

Considerese ahora el contorno  $r$ . Cuando  $z_0 < 0$ , la integral resultante se anula debido a que el contorno se cierra en el semiplano superior y no encierra ninguna singularidad. Para  $z_0 > 0$ , la integral en  $k_0$  es:

$$\int_r dk_0 \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - |\mathbf{k}|^2} = -2\pi i \text{Res} \left( \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2 - |\mathbf{k}|^2} \right) = -\frac{2\pi}{|\mathbf{k}|} \sin(kz_0).$$

Entonces, la función de Green Ec.(A.23) es:

$$D_r(z) = \frac{\theta(z_0)}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{ik \cdot z} \frac{\sin(|\mathbf{k}| z_0)}{|\mathbf{k}|},$$

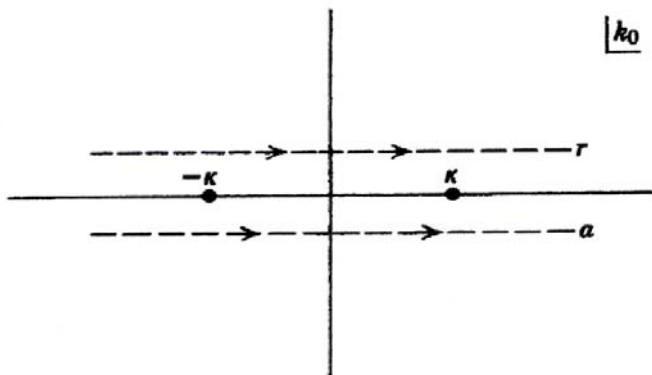


Figura .1: .

la integración extendida a los ángulos de  $\mathbf{k}$  conduce a :

$$D_r(z) = \frac{\theta(z_0)}{2\pi^2 R} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \sin(|\mathbf{k}| R) \sin(|\mathbf{k}| z_0), \quad (\text{A.24})$$

siendo  $R = |\mathbf{z}| = |x - x'|$  la distancia espacial entre  $x^\alpha$  y  $x'^\alpha$ . Haciendo algunas transformaciones trigonométricas y un cambio de variable la Ec.(A.24) puede escribirse:

$$D_r(z) = \frac{\theta(z_0)}{2\pi^2 R} \int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{k}| [e^{i(z_0-R)|\mathbf{k}|} - e^{i(z_0+R)|\mathbf{k}|}].$$

Las integrales restantes son precisamente funciones delta de Dirac. Como  $z_0 > 0$  y  $R > 0$ , la segunda integral es siempre cero. La función de Green para el contorno  $r$  es, pues:

$$D_r(x - x') = \frac{\theta(x_0 - x'_0)}{4\pi R} \delta(x_0 - x'_0 - R). \quad (\text{A.25})$$

En la que hemos reintroducido las variables originales  $x$  y  $x'$ . Esta función de Green se denomina retardada o causal, debido a que el instante del punto-fuente  $x'_0$  es siempre anterior al instante de punto-observación  $x_0$ . La Ec.(A.25), o su transformada de Fourier con respecto a  $x_0$ ,  $(4\pi R)^{-1} e^{\frac{i\omega R}{c}}$  es la familiar función de Green de las ondas radiales.

Cuando se elige el contorno  $a$  de la figura.1, un cálculo exactamente paralelo conduce a la función de Green avanzada :

$$D_a(x - x') = \frac{\theta \left[ - (x_0 - x'_0) \right]}{4\pi R} \delta (x_0 - x'_0 + R). \quad (\text{A.26})$$

Estas funciones de Green pueden ponerse en forma covariante utilizando la siguiente identidad :

$$\begin{aligned} \delta \left[ (x - x')^2 \right] &= \delta \left[ (x_0 - x'_0)^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 \right] = \delta \left[ (x_0 - x'_0 - R) (x_0 - x'_0 + R) \right] \\ &= \frac{1}{2R} \left[ \delta (x_0 - x'_0 - R) + \delta (x_0 - x'_0 + R) \right]. \end{aligned}$$

Entonces, como las funciones theta seleccionan uno u otro de los dos terminos, tenemos :

$$\begin{aligned} D_r(x - x') &= \frac{1}{2\pi} \theta (x_0 - x'_0) \delta \left[ (x - x')^2 \right] \\ D_a(x - x') &= \frac{1}{2\pi} \theta (x'_0 - x_0) \delta \left[ (x - x')^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Las funciones theta, aparentemente no son invariantes, son en realidad invariantes en las transformaciones de Lorentz propias cuando están ligadas por las funciones delta. Así, Ec.(A.27) da a las funciones de Green una expresión invariante explícitamente. Las funciones theta y la delta en la Ec.(A.27) demuestran que la función de Green retardada, o avanzada, es distinta de cero sólo en el cono de luz futuro, o pasado, respectivamente, del punto fuente.

La solución de la ecuación de onda Ec.(A.16) puede expresarse ahora en terminos de las funciones de Green:

$$A^\alpha(x) = A_{in}^\alpha(x) + \mu_0 \int d^4x' D_r(x - x') J^\alpha(x'), \quad (\text{A.28})$$

$$A^\alpha(x) = A_{out}^\alpha(x) + \mu_0 \int d^4x' D_a(x - x') J^\alpha(x'), \quad (\text{A.29})$$

siendo  $A_{in}^\alpha$  y  $A_{out}^\alpha$  soluciones de la ecuación de onda homogénea. En la Ec.(A.28) se emplea la función de Green retardada. En el limite  $x_0 \rightarrow \infty$ ,



se anula la integral extendida a las fuentes, suponiendo que estas fuentes están localizadas en el espacio y en el tiempo, debido al carácter retardado de la función de Green. Vemos que el potencial del campo libre  $A_{in}^\alpha(x)$  admite la interpretación de un potencial <<incidente>>, dado para  $x_0 \rightarrow -\infty$ . Análogamente, en la Ec.(A.29) que contiene la función de Green avanzada, la solución homogénea  $A_{out}^\alpha(x)$  es el potencial asintótico <<saliente>>, dado para  $x_0 \rightarrow +\infty$ . Los campos de radiación se definen como la diferencia entre los campos <<saliente>> y <<incidente>>. Su 4-vectorpotencial es :

$$A_{rad}^\alpha(x) = A_{out}^\alpha - A_{in}^\alpha = \mu_0 \int d^4x' D(x-x') J^\alpha(x'), \quad (\text{A.30})$$

siendo:

$$D(z) = D_r(z) - D_a(z), \quad (\text{A.31})$$

la diferencia entre las funciones de Green avanzada y retardada.

Si la partícula es una carga puntual  $e$  cuya posición en el sistema inercial  $K$  es  $\mathbf{r}(t)$ , su densidad de carga y su densidad de corriente en este sistema son:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &= e\delta[\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)], \\ J(\mathbf{x}, t) &= e\mathbf{v}(t)\delta[\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)], \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

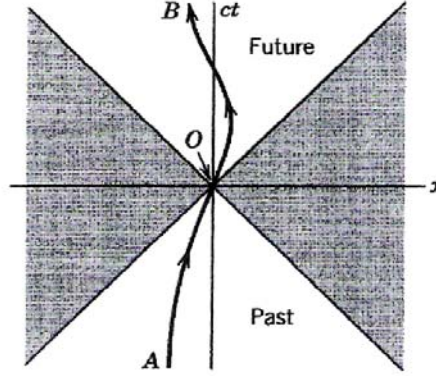
siendo  $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$  la velocidad de la carga en el sistema  $K$ . Las densidades de carga y corriente pueden escribirse en forma manifestante covariante como un 4-vector densidad de corriente introduciendo el 4-vector posición de la carga  $r^\alpha(\tau)$  como función del tiempo propio de la carga  $\tau$  e integrando a lo largo del tiempo propio con una función delta adicional apropiada. Así :

$$J^\alpha(x) = ec \int d\tau V^\alpha(\tau) \delta^{(4)}[x - r(\tau)], \quad (\text{A.33})$$

en la que  $V^\alpha$  es la 4-velocidad de la carga. En el sistema inercial  $K$ ,  $r^\alpha = [ct, \mathbf{r}(t)]$  y  $V^\alpha = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$ .

### A.0.3. Los potenciales de Liénard-Wiechert y los campos de una carga puntual

En la sección anterior hemos visto que si no hay campos incidentes, el 4-vector potencial producido por una partícula cargada en movimiento es :



**Figura .2:** Línea de universo de un sistema y cono de luz. La parte interior del cono (no obscura) representa el pasado y el futuro, mientras que la región rayada exterior del cono representa cualquier otro lugar". Se dice que un punto interior (exterior) al cono de luz tiene una separación respecto del origen de tipo temporal (tipo espacial).

$$A^\alpha(x) = \mu_0 \int d^4x' D_\tau(x-x') J^\alpha(x') \quad (\text{A.34})$$

y

$$J^\alpha(x) = ec \int d\tau V^\alpha(\tau) \delta^{(4)}[x-r(\tau)] \quad (\text{A.35})$$

el 4-vector densidad de corriente de la carga,  $V^\alpha(\tau)$ , es su 4-velocidad y  $r^\alpha(\tau)$  su posición. Al introducir en la Ec.(A.34) la función de Green y la densidad de corriente, después de integrar respecto a  $d^4x'$ , se obtiene :

$$A^\alpha(x) = \frac{\mu_0 ec}{2\pi} \int d\tau V^\alpha(\tau) \theta[x_0 - r_0(\tau)] \delta\{[x-r(\tau)]^2\} \quad (\text{A.36})$$

La integral que resta, extendida al tiempo propio de la carga, sólo da contribución en el instante  $\tau = \tau_0$ , estando  $\tau_0$  definido por la condición del cono de Luz :

$$[x-r(\tau_0)]^2 = 0 \quad (\text{A.37})$$

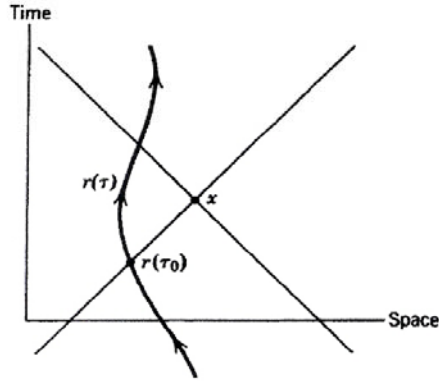


Figura .3: .

y el requisito de que exista retardo  $x_0 > r_0(\tau_0)$ . En la figura.3 se indica esquemáticamente el significado de estas condiciones. La función de Green sólo es diferente de cero en el cono de luz correspondiente al pasado del punto de observación. La línea de universo de la partícula  $r(\tau)$  corta al cono de luz en los dos únicos puntos, uno anterior y otro posterior a  $x_0$ . El punto anterior,  $r^\alpha(\tau_0)$ , es la única parte de la trayectoria que contribuye a los campos en  $x^\alpha$ . Para calcular Ec.(A.36), utilizaremos la regla,

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \left( \frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} \right|}$$

en donde los puntos  $x = x_i$  son los ceros de  $f(x)$ , supuestos simples. Necesitamos :

$$\frac{d}{d\tau} [x - r(\tau)]^2 = -2 [x - r(\tau)]_\beta V^\beta(\tau) \quad (\text{A.38})$$

evaluada en el punto  $\tau = \tau_0$ . Por consiguiente, el 4-vector potencial es:

$$A^\alpha(x) = \frac{\mu_0 c e V^\alpha(\tau)}{4\pi V \cdot [x - r(\tau)]} \Big|_{\tau=\tau_0} \quad (\text{A.39})$$

en la que  $\tau_0$  está definida por Ec. (A.37).

Los potenciales Ec.(A.39) se conocen como potenciales de *Liénard-Wiechert*. Frecuentemente se escriben en forma no covariante, pero es más familiar quizá, como sigue. La restricción impuesta por el cono de luz Ec.(A.37) implica que  $x_0 - r_0(\tau_0) = |\mathbf{x} - \mathbf{r}(\tau_0)| = R$ . Entonces,

$$V \cdot (x - r) = V_0 [x_0 - r_0(\tau_0)] - \mathbf{V} \cdot [\mathbf{x} - \mathbf{r}(\tau_0)] = \gamma c R - \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} R = \gamma c R (1 - \beta \cdot \mathbf{n}) \quad (\text{A.40})$$

siendo  $\mathbf{n}$  un vector unitario en la dirección de  $\mathbf{x} - \mathbf{r}(\tau)$  y  $\beta = \frac{v(\tau)}{c}$ . Así, pues, los potenciales Ec.(A.39) pueden escribirse :

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \left[ \frac{e}{4\pi\epsilon_0 (1 - \beta \cdot \mathbf{n}) R} \right]_{ret} ; \quad A(\mathbf{x}, t) = \left[ \frac{\mu_0 e \mathbf{v}}{4\pi (1 - \beta \cdot \mathbf{n}) R} \right]_{ret} \quad (\text{A.41})$$

Los corchetes con la indicación << ret >> como subíndice significan que la magnitud en el corchete debe ser evaluada en el instante retardado  $r_0(\tau_0) = x_0 - R$ . Es evidente que para movimiento no relativista los potenciales se reducen a los resultado bien sabidos.

Los campos electromagnéticos  $F^{\alpha\beta}(x)$  pueden calcularse directamente Ec.(A.39) o Ec.(A.41), pero es más sencillo volver a la integral sobre  $d\tau$ , Ec.(A.36). Al calcular  $F^{\alpha\beta}$  la diferenciación respecto al punto de observación  $x$  actuará sobre las funciones theta y delta. La diferenciación de la función theta dará  $\delta[x_0 - r_0(\tau)]$ , de modo que restringe la función delta a ser  $\delta(-R^2)$ . No habrá contribución de esta diferenciación salvo en  $R = 0$ . Excluyendo el punto  $R = 0$ , de las consideraciones, de la derivada  $\partial^\alpha A^\beta$  es

$$\partial^\alpha A^\beta = \frac{\mu_0 e c}{2\pi} \int d\tau V^\beta(\tau) \theta[x_0 - r_0(\tau)] \partial^\alpha \delta \{ [x - r(\tau)]^2 \} \quad (\text{A.42})$$

La derivada parcial puede escribirse :

$$\partial^\alpha \delta[f] = \partial^\alpha f \cdot \frac{d}{df} \delta[f] = \partial^\alpha f \cdot \frac{d\tau}{df} \cdot \frac{d}{d\tau} \delta[f]$$

siendo  $f = [x - r(\tau)]^2$ . La diferenciación indicada da :

$$\partial^\alpha \delta[f] = -\frac{(x - r)^\alpha}{V \cdot (x - r)} \frac{d}{d\tau} \delta[f]$$

Cuando se introduce esto en Ec.(A.42) y se realiza la integración por partes, el resultado es :

$$\partial^\alpha A^\beta = \frac{\mu_0 e c}{2\pi} \int d\tau \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{(x-r)^\alpha V^\beta}{V \cdot (x-r)} \right] \theta [x_0 - \tau_0(\tau)] \delta \{ [x - r(\tau)]^2 \} \quad (\text{A.43})$$

En la integración por partes la diferenciación de la función theta no da contribución alguna, como ya se ha indicado. La forma Ec.(A.43) es la misma que la de la Ec.(A.36), con  $V^\alpha(\tau)$  reemplazado por el término de la derivada. Por tanto, el resultado puede interpretarse como la sustitución de la Ec.(A.39). El tensor de intensidad del campo es :

$$F^{\alpha\beta} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c V \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r})} \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{r})^\alpha V^\beta - (\mathbf{x} - \mathbf{r})^\beta V^\alpha}{V \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r})} \right] \quad (\text{A.44})$$

En esta expresión  $r^\alpha$  y  $V^\alpha$  son funciones de  $\tau$ . Después de la diferenciación la expresión completa debe evaluarse en el tiempo propio retardado  $\tau_0$ .

El tensor intensidad del campo  $F^{\alpha\beta}$  Ec.(A.44) es manifiestamente covariante, pero no explícito. Algunas veces es útil tener los campos  $E$  y  $B$  como funciones explícitas de la velocidad y aceleración de la carga. Para llevar a cabo la diferenciación de Ec.(A.44) algunos ingredientes necesarios son:

$$\begin{aligned} (x-r)^\alpha &= (R, R\mathbf{n}); & V^\alpha &= (\gamma c, \gamma c\boldsymbol{\beta}) \\ \frac{dV^\alpha}{d\tau} &= \left[ c\gamma^4 \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}, \quad \gamma c^2 \dot{\boldsymbol{\beta}} + c\gamma^4 \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right] \\ \frac{d}{d\tau} [V \cdot (x-r)] &= -c^2 + (x-r)_\alpha \frac{dV^\alpha}{d\tau} \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

siendo  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt}$ , la aceleración ordinaria dividida por  $c$ , cuando se emplean estas expresiones y la Ec.(A.40), pueden escribirse los campos Ec.(A.44) en las formas, inelegantes, pero quizá más intuitivas,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_{ret} \quad (\text{A.46})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\gamma^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R^2} \right]_{ret} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \left[ \frac{\mathbf{n} \times \{ (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R} \right]_{ret} \quad (\text{A.47})$$

Los campos Ec.(A.46) y (A.47), en forma natural, se dividen en campos de velocidad", que no dependen de la aceleración, y campos de aceleración", que dependen linealmente de  $\dot{\beta}$ . Los campos de velocidad son campos esencialmente estáticos que decrecen como  $R^{-2}$ , mientras que los campos de aceleración son, tanto  $E$  como  $B$ , campos de radiación típicos transversales al radio vector y que decrecen como  $R^{-1}$ .



## Apéndice B

### Constantes Físicas Usadas

CONSTANTE	SIMBOLO	VALOR
<i>Radio de Bohr</i>	$a_0$	$0,529177249 \times 10^{-10} m$
<i>Carga del electrón</i>	$e$	$1,60217733 \times 10^{-19} C$
<i>Masa del electrón</i>	$m_e$	$9,1093897 \times 10^{-31} kg$
<i>Tiempo característico</i>	$\tau$	$6,25342961 \times 10^{-24} s$





# Bibliografía

- [ 1 ] H. GOLSTEIN : *Mecánica Clásica, Columbia University, Ed. Reverté, S.A., 2ª. Edición, (Pag. 105) .*
- [ 2 ] F. ROHRLICH: *Classical Charged Particles, (Addison-Wesley Publishing Company, Reading Massachussets, 1965), Cap. 1, 5, 6.*
- [ 3 ] P. A. M. DIRAC: *Proc. Roy. Soc. A 167, 148 (1938).*
- [ 4 ] J. D. JACKSON: *Classical Electrodynamics, University of California, Berkeley, Ed. J. Wiley & Sons, Ins. Third Edition. (Pag. 665, 745)*
- [ 5 ] C. S. SHEN: *Phys. Rev. D 17, 434 (1978).*
- [ 6 ] G. W. FORD AND R. F. O'CONNELL: *Phys. Lett. A 157, 4-5, 217 (1991).*
- [ 7 ] C. JAYARATNAM ELIEZER: *Proc. Roy. Soc. de London, A 194, 1039, 543 (1948).*
- [ 8 ] R. F. O'CONNELL: *Phys. Lett. A 158, 31 (1991).*
- [ 9 ] A. KISELIOV, M. KRASNOV Y G. MAKARENKO: *Problemas de Ecuaciones diferenciales Ordinarias, D. R.© 1996, I.P.N. Primera Edición (Págs. 97).*