INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Una teoría de funciones de una variable cuaterniónica según Cullen

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

PRESENTA
Alfonso Henández Montes

DIRECTOR DE TESIS
Dr. Michael Shapiro Fishman

México, D. F. 2009

Índice general

1. Resumen e Introducción **3**
1.1. Resumen 3
1.2. Introducción 4

2. Algunas propiedades básicas sobre cuaternios **7**

3. Funciones C-regulares. **19**

4. Series de potencias y expansión en series de funciones regulares **29**

5. Fórmula Integral de Cauchy **35**

6. Lema de Schwarz y la geometría en la bola unitaria **41**

7. Ceros en series de potencias cuaterniónicas **49**

8. Funciones Regulares en un Álgebra de Clifford **61**
8.1. Propiedades Algebraicas de Cl(0,3). 61
8.2. Funciones regulares y su expansión en series de potencias 67

A. Apéndice **73**
A.1. Resultados básicos de la variable compleja. 73

Bibliografía **77**

Capítulo 1

Resumen e Introducción

1.1. Resumen

En este trabajo se analizan los artículos “ A new theory of regular functions of a quaternionic variable “ y “ Regular functions on a Clifford algebra ”. La tarea que realicé fue desarrollar de una manera detallada, las demostraciones de los artículos y elaborar algunas de las demostraciones que no se incluían en dichos trabajos y por último complementar algunas ideas de los autores.

Las ideas originales de los autores se basan en [12], en el cual se definen las funciones Cullen-regulares sobre el conjunto de los cuaternios. El conjunto de dichas funciones resulta ser una clase distinta de las funciones hiperholomorfas (refiriéndome a funciones hiperholomorfas, como aquellas que se anulan con el operador de Cauchy-Fueter) y por ello algunos de los resultados que aquí se expresan difieren.

En los siguientes capítulos de esta tesis se demuestran algunos resultados, los cuales muestran que, en base a la definición de función Cullen-regular; es posible construir una teoría interesante. Los primeros resultados tratan sobre las cuestiones de convergencia de las series de potencias, el principio de identidad, el principio de módulos máximos, la representación de la Fórmula de Cauchy, el Teorema de Liouville y el Teorema de Morera. Después se prueba una versión del lema de Schwarz y también se presentan algunos avances en el estudio geométrico de la bola unitaria del análogo de cuatro dimensiones del plano derecho de Siegel (birregular de la bola unitaria vía el análogo de la transformación de

Cayley) y sus transformaciones. También, la penúltima sección de este trabajo describe los ceros de las funciones regulares, con un resultado extendido de [11].Y para finalizar el último capítulo está dedicado a extender los resultados a un álgebra de Clifford de signatura (0,3).

1.2. Introducción

Desde principios del siglo pasado algunos matemáticos se han interesado en la creación de una teoría de funciones valuadas en los cuaternios de una variable cuaterniónica, que de alguna manera se asemeje a la teoría clásica de funciones holomorfas de una variable compleja.

Hasta ahora, varias teorías interesantes han sido introducidas. La más conocida es la que se debe a Fueter [5]; en el espacio de funciones $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ el definió el siguiente operador :

$$\frac{\partial}{\partial \overline{q}} f(q) = \frac{1}{4}(\frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}) f(q)$$

Ahora éste se conoce como el operador de Cauchy-Fueter, dicho operador define el espacio de funciones regulares como el espacio de soluciones de la ecuación asociada a este operador. Esta teoría de funciones regulares hasta el momento está solidamente desarrollada en muchas direcciones; y hacemos referencia al lector [13] para las características básicas de estas funciones. Un trabajo más reciente en esta área se incluye en [7] y todas sus referencias en ellos. Si bien la teoría tiene un gran éxito en la reproducción de muchas propiedades importantes de las funciones holomorfas (y no sólo en una variable, véase [2]), la gran decepción(según nuestra intuición) es que incluso la función identidad $f(q) = q$, y por tanto polinomios y series; no son regulares en el sentido de Fueter.

Una segunda, pero no tan conocida definición se debe a Cullen [3]. Esta definición tiene la ventaja los polinomios y series de potencias de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n$ son regulares en este sentido (como se verá más adelante).

Polinomios en una variable cuaterniónica y series de potencias, son también introducidas en la interesante clase de funciones holomorfas sobre cuaternios, que fue definida por Fueter [4] y más recientemente generalizada y desarrollada por Laville y Ramadanoff [8, 9], quienes construyeron la teoría de funciones Clifford-dianas holomorfas. Si Δ denota el Laplaciano, entonces las funciones holomorfas (izquierdas) sobre los cuaternios son soluciones de la ecuación asociada al operador diferencial $\frac{\partial}{\partial \bar{q}}\Delta$. Resulta que el conjunto de funciones regulares según Cullen y el conjunto de funciones regulares según Fueter, que están estrictamente contenidos en el conjunto de funciones holomorfas sobre los cuaternios; no coinciden.

Las funciones ordinarias de Cullen también están estrechamente relacionadas a una clase de funciones de la reducción de variable cuaterniónica $x_0 + ix_1 + jx_2$, estudiada por Leutwiler [10]. Esta clase consiste de todas las soluciones de una generalización del sistema de ecuaciones de Cauchy-Riemann, que contiene a los polinomios, y sustenta a la expansión de series y sus elementos.

Capítulo 2

Algunas propiedades básicas sobre cuaternios

En esta sección se presentan algunas propiedades sobre los cuaternios, que nos van a ayudar con algunas de las demostraciones (e incluso, a sustentar definiciones) de este trabajo.

Denotemos por $\mathbb{H}$ el conjunto de los cuaternios. Los elementos de $\mathbb{H}$ son de la forma $q = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$, donde $x_l \in \mathbb{R}$, con $l = 0, 1, 2, 3$ y i, j, k las unidades imaginarias (es decir, su cuadrado es igual a -1) y tales que $ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$.

Una característica importante de los cuaternios es la conjugación, la cual se define, primeramente para unidades imaginarias como: $\overline{i_0} := i_0 := 1$, $\overline{i_k} := -i_k$ para $k = 1, 2, 3$. Obsérvese que i_0 es la unidad real.

De esta manera dado $a \in \mathbb{H}$, definimos el conjugado de a, como :

$$\overline{a} := \sum_{k=0}^{3} \overline{i_k a_k} = \sum_{k=0}^{3} \overline{i_k} a_k = a_0 - \sum_{k=1}^{3} i_k a_k.$$

Ahora, recordemos que una involución es una función $\varphi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ tal que $\varphi^2 = Id_{\mathbb{H}}$. De esta manera, se tiene que la conjugación es una involución.

Por otra parte los cuaternios también poseen otras involuciones, en particular tienen conjugaciones parciales:

$$Z_l : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \qquad \text{l=1,2,3.}$$

$$Z_1(a = a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3) := a_0 - ia_1 + ja_2 + ka_3,$$

$$Z_2(a = a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3) := a_0 + ia_1 - ja_2 + ka_3,$$

$$Z_3(a = a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3) := a_0 + ia_1 + ja_2 - ka_3.$$

Otra representación conveniente de los cuaternios es la siguiente:

Sea $a \in \mathbb{H}$, con $a = a_0+ia_1+ja_2+ka_3$, entonces se definen, la parte escalar de a por $Sc(a) := a_0$ y la parte vectorial de a por $\overrightarrow{a} := Vect(a) := ia_1 + ja_2 + ka_3$. De esta manera $a = a_0 + \overrightarrow{a}$.

Si denotamos por $<,>$ el producto escalar en $\mathbb{R}^3$ y $[,]$ el producto vectorial también sobre $\mathbb{R}^3$, se tienen las siguientes definiciones.

2.1 Definición *Dados $a, b \in \mathbb{H}$ con $a = a_0+ia_1+ja_2+ka_3$ y $b = b_0+ib_1+jb_2+kb_3$ se definen:*

1. *La operación suma: Es la función $+ : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, dada por, $+(a, b) := a + b := (a_0 + b_0) + i(a_1 + b_1) + j(a_2 + b_2) + k(a_3 + b_3)$.*
2. *La operación producto: Es la función $\cdot : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, dada por; $\cdot(a, b) := a \cdot b := a_0b_0 - < \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} > + a_0\overrightarrow{b} + b_0\overrightarrow{a} + [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$.*

Ahora que se tienen definidas las operaciones suma y producto sobre cuaternios enunciemos propiedades fundamentales de éstas:

2.2 Proposición *La conjugación en $\mathbb{H}$ es un anti-automorfismo, es decir, tiene las siguientes propiedades:*

1. $\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}$.
2. $\overline{ab} = \overline{b}\overline{a}$.
3. $\overline{\overline{a}} = a$.
4. $\overline{\lambda a} = \lambda\overline{a}$. *Para todo $a, b \in \mathbb{H}$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demostración:

Sean $a, b \in \mathbb{H}$ con $a = a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3$ y $b = b_0 + ib_1 + jb_2 + kb_3$, entonces:

1.

$$\begin{aligned}\overline{a+b} &= \overline{[a_0+b_0+i(a_1+b_1)+j(a_2+b_2)+k(a_3+b_3)]}\\ &= a_0+b_0-i(a_1+b_1)-j(a_2+b_2)-k(a_3+b_3)\\ &= (a_0-ia_1-ja_2-ka_3)+(b_0-ib_1-jb_2-kb_3)\\ &= \overline{a}+\overline{b}.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\overline{b}\overline{a} &= (b_0-\overrightarrow{b})(a_0-\overrightarrow{a})\\ &= b_0a_0- < \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} > -b_0\overrightarrow{a}-a_0\overrightarrow{b}+[-\overrightarrow{b},-\overrightarrow{a}]\\ &= b_0a_0- < \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} > -b_0\overrightarrow{a}-a_0\overrightarrow{b}-[-\overrightarrow{a},-\overrightarrow{b}]\\ &= a_0b_0- < \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} > -a_0\overrightarrow{b}-b_0\overrightarrow{a}-[-\overrightarrow{a},-\overrightarrow{b}]\\ &= \overline{ab}.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\overline{\overline{a}} &= \overline{(a_0-ia_1-ja_2-ka_3)}\\ &= a_1+ia_2+ja_3+ka_4\\ &= a.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\overline{\lambda a} &= \lambda a_0-i\lambda a_1-j\lambda a_2-k\lambda a_3\\ &= (\lambda)\overline{a}.\end{aligned}$$

□

2.3 Teorema *Las operaciones cuaterniónicas definidas anteriormente (suma, producto y conjugación) son continuas.*

Demostración:

Sean $a, b \in \mathbb{H}$ y sean $(a_n)_n, (b_n)_n$ dos sucesiones de cuaternios tales que $a_n \longrightarrow a$ y $b_n \longrightarrow b$ cuando n tiende a infinito.

Estimamos las distancias: Para la suma,

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| \leq |a_n-a|+|b_n-b| \longrightarrow 0;$$

para el producto

$$|a_nb_n - ab| = |a_nb_n - a_nb + a_nb - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \longrightarrow 0;$$

y por ultimo para la conjugación

$$|\overline{a_n} - \overline{a}| = |\overline{a_n - a}| = |a_n - a| \longrightarrow 0.$$

$\square$

2.4 Proposición *Sean $a \in \mathbb{H}$, entonces se tiene que:*

$$\overline{a}a = a\overline{a} = \sum_{k=0}^{3} a_k^2 = |a|^2.$$

Demostración:

Sea $a \in \mathbb{H}$, entonces $a = a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3 = a_0 + \overrightarrow{a}$ y $\overline{a} = a_0 - ia_1 - ja_2 - ka_3 = a_0 - \overrightarrow{a}$, por lo que

$$\begin{aligned}\overline{a} \cdot a &= a_0^2 - < -\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} > + a_0\overrightarrow{a} - a_0\overrightarrow{a} + [-\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}] \\ &= a_0^2 - (-a_0^2 - a_1^2 - a_3^2) \\ &= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \\ &= |a|^2 \\ &= a_0^2 - < -\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} > - a_0\overrightarrow{a} + a_0\overrightarrow{a} + [\overrightarrow{a}, -\overrightarrow{a}] \\ &= a \cdot \overline{a}.\end{aligned}$$

$\square$

Con las propiedades que se han demostrado se tiene que :

2.5 Proposición *Sea $q \in \mathbb{H}$, entonces existe un elemento $p \in \mathbb{H}$ tal que*

$$pq = qp = 1$$

y tal elemento p se denota por q^{-1}

Demostración: Sea $p = \frac{\overline{q}}{|q|^2}$, entonces

$$\begin{aligned} qp &= q\left(\frac{\overline{q}}{|q|^2}\right) \\ &= q\left(\frac{\overline{q}}{q\overline{q}}\right) \\ &= 1 \\ &= \left(\frac{\overline{q}}{q\overline{q}}\right) q \\ &= \left(\frac{\overline{q}}{|q|^2}\right) q \\ &= pq. \end{aligned}$$

$\square$

2.6 Proposición *Dado $a \in \mathbb{H}$, $a \in \mathbb{R}$ si y sólo si $ab = ba$ para todo $b \in \mathbb{H}$, es decir, el centro de $\mathbb{H}$ es $\mathbb{R}$.*

Demostración:

Sea $a \in \mathbb{H}$, tal que $a \in \mathbb{R}$; entonces dado $b \in \mathbb{H}$ con $b = b_0 + \overrightarrow{b}$ se tiene que

$$\begin{aligned} ab &= a(b_0 + \overrightarrow{b}) \\ &= ab_0 - < \overrightarrow{0}, \overrightarrow{b} > + a\overrightarrow{b} + b_0\overrightarrow{0} + [\overrightarrow{0}, \overrightarrow{b}] \\ &= ab_0 + a\overline{b} \\ &= b_0 a + \overrightarrow{b} a \\ &= ba. \end{aligned}$$

Recíprocamente sea $a = a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3$ y por hipótesis $ab = ba$ para todo $b \in \mathbb{H}$. En particular para $b = i$, por lo que: $ai = a_0 i - a_1 + a_2 ji + a_3 ki = ia_0 - a_1 - a_2 ij - a_3 ik = ia$ lo que implica que $a_2 = -a_2$ y $a_3 = -a_3$, pero esto último sucede si y sólo si $a_2 = a_3 = 0$. Entonces $a = a_0 + ia_1$. Tomamos ahora $b = j$ y así, $aj = a_0 j + a_1 ij = ja = a_0 j - a_1 ij$, lo que implica que $a_1 = 0$ y por lo tanto $a = a_0$.

$\square$

Antes de seguir con más propiedades de los cuaternios hay que hacer una reflexión acerca de como están encajados los elementos de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{H}$, pues en un principio podemos encajar de muchas maneras a dichos elementos, como ejemplo podemos tener lo siguiente:

Sea $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ entonces definimos $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{H}$ dada por $\psi(x) := ix_3 + jx_2 + kx_1$, entonces se tiene que ψ es un encanje de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{H}$.

Para los propósitos de este trabajo vamos a considerar el encaje de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{H}$ como sigue: dado $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ se tiene que x se ve como un elemento de $\mathbb{H}$ de la siguiente manera, $x = x_1 + ix_2 + jx_3$, es decir el encaje está dado por $x = (x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1 + ix_2 + jx_3)$.

2.7 Proposición *Dado $a \in \mathbb{H}$, $a \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ si y sólo si $a^2 \in \mathbb{R}$ y $a^2 < 0$.*

Demostración:

Sea $a \in \mathbb{H}$, $a = a_0 + \overrightarrow{a}$. Primeramente supongamos que $a \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, entonces $a = \overrightarrow{a}$, por lo que:

$$a^2 = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = - < \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} > + [\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a}] = -|\overrightarrow{a}|^2,$$

por lo que $a^2 \in \mathbb{R}$, con $a^2 < 0$.

Recíprocamente si $a \in \mathbb{H}$ con $a^2 < 0$ y $a^2 \in \mathbb{R}$, entonces

$$a^2 = (a_0 + \overrightarrow{a})^2 = (a_0 + \overrightarrow{a})(a_0 + \overrightarrow{a}) = a_0^2 - |\overrightarrow{a}|^2 + 2a_0 \overrightarrow{a},$$

puesto que $a^2 \in \mathbb{R}$, entonces $2a_0 \overrightarrow{a} = 0$, luego $a_0 = 0$ ó $\overrightarrow{a} = 0$. Si $a_0 = 0$ terminamos, si $\overrightarrow{a} = 0$ entonces se tendra que $a^2 = a_0^2 > 0$, lo cual sería una contradicción.

$\square$

El siguiente resultado relaciona la conjugación de un producto con su parte real.

2.8 Proposición *Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{H}$ se tiene que:*

$$2Sc(ab) = ab + \overline{b}\overline{a}.$$

Demostración:

Sean $a, b \in \mathbb{H}$ con $a = a_0 + \overrightarrow{a}$ y $b = b_0 + \overrightarrow{b}$, entonces:

$$\begin{aligned}
ab+\bar{b}\bar{a} &= (a_0b_0 - < \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} > + a_0\overrightarrow{b} + b_0\overrightarrow{b} + [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]) + \\
&= +(b_0a_0 - < -\overrightarrow{b}, -\overrightarrow{a} > - b_0\overrightarrow{a} - a_0\overrightarrow{b} + [-\overrightarrow{b}, -\overrightarrow{a}]) \\
&= a_0b_0 - < \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} > + b_0a_0 - < \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} > \\
&= 2Sc(ab).
\end{aligned}$$

□

2.9 Observación *Dado $a \in \mathbb{H}$, se tiene que*

$$a = a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3 = (a_0 + a_1 i) + (a_2 + a_3 i)j,$$

de esta manera si definimos $z_1 := a_0 + a_1 i$ y $z_2 := a_2 + a_3 i$ obtenemos que $a = z_1 + z_2 j$, donde $z_1, z_2 \in \mathbb{C}(i)$.

De manera semejante se tiene que $a = w_1 + iw_2$, con $w_1 := a_0 + ja_2$, $w_2 := a_1 + ja_3$ y $w_1, w_2 \in \mathbb{C}(j)$

Así se tiene que:

$$\mathbb{H} = \mathbb{C}(i) + \mathbb{C}(i)j = \mathbb{C}(j) + i\mathbb{C}(j).$$

2.10 Definición *Definamos las esferas unitarias:*

1. $\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$.
2. $\mathbb{S}^3 := \{x \in \mathbb{H} : |x| = 1\}$.
3. $\mathbb{S} := \{x \in \mathbb{H} : Sc(x) = 0 \quad y \quad |x| = 1\}$
4. $x_0 + y_0\mathbb{S} := \{x_0\} + \{y_0 I \in \mathbb{H} : I\mathbb{S}\}$ *con* $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ *e* $y_0 \geq 0$.

Una forma geométrica de observar la última esfera definida es, tomar la esfera unitaria $\mathbb{S}$ incrementar su radio en y_0 y desplazarla del origen al punto x_0.

2.11 Proposición *Dado $a \in \mathbb{S}^3$, existen un ángulo $\alpha \in [-\pi, \pi]$ y un $b \in \mathbb{S}^2$ tales que:*

$$a = \cos\alpha + b \operatorname{sen}\alpha.$$

Demostración:

Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $a = \pm 1$ y basta tomar $\alpha = 0$ ó $\alpha = \pi$, según sea el caso y $b \in \mathbb{S}^2$ arbitrario.

Si a no pertenece a los reales, entonces; $a = a_0 + \overrightarrow{a}$, con la parte vectorial de a diferente de cero.

Entonces
$$a = a_0 + \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}|\overrightarrow{a}| = a_0 + b|\overrightarrow{a}|.$$
Por otro lado, $1 = |a|^2 = a_0 + |\overrightarrow{a}|^2$ y se sabe que existe $\alpha \in [-\pi, \pi]$ tal que $\cos\alpha = a_0$ y $\operatorname{sen}\alpha = |\overrightarrow{a}|$.

De esta manera combinando los resultados anteriores se tiene que
$$a = \cos\alpha + b\operatorname{sen}\alpha.$$
□

2.12 Corolario *Dado $q \in \mathbb{H}$, existe $\alpha \in [-\pi, \pi]$ y existe $b \in \mathbb{S}^2$ tales que:*
$$q = |q|\frac{q}{|q|} = |q|(\cos\alpha + b\operatorname{sen}\alpha).$$

Demostración:

Como $q = |q|\frac{q}{|q|}$ y $\frac{q}{|q|} \in \mathbb{S}^3$, entonces por la proposición anterior se tiene que existen $\alpha \in [-\pi, \pi]$ y $b \in \mathbb{S}^2$ tales que $\frac{q}{|q|} = \cos\alpha + b\operatorname{sen}\alpha$. Así $q = |q|\frac{q}{|q|} = |q|(\cos\alpha + b\operatorname{sen}\alpha)$.

□

Ahora veamos el modelo de matrices reales 4×4 para los cuaternios.

Sean $a, b \in \mathbb{H}$ con $a = a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3$ y $b = b_0 + ib_1 + jb_2 + kb_3$, luego
$$\begin{aligned} ab &= (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)i + \\ &\quad + (a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1)j + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)k \\ &= \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
De manera análoga se obtiene que:
$$ba = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

De esta manera definimos:

$$\mathfrak{B}_l(a) := \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathfrak{B}_r(a) := \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Así se obtienen los siguientes mapeos:

$$B_l : \mathbb{H} \longrightarrow M_{4\times 4}(\mathbb{R}); \qquad \textit{dado} \qquad \textit{por} \qquad B_l(a) := \mathfrak{B}_l(a);$$

y

$$B_r : \mathbb{H} \longrightarrow M_{4\times 4}(\mathbb{R}); \qquad \textit{dado} \qquad \textit{por} \qquad B_r(a) := \mathfrak{B}_r(a).$$

Estos mapeos cumplen las siguientes propiedades:

1. $B_l(a+b) = B_l(a) + B_l(b)$,
2. $B_l(ab) = B_l(a) \cdot B_l(b)$,
3. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $B_{xa} = xB_l(a)$,
4. $B_l(1) = E_{4\times 4}$, (matriz identidad 4×4),
5. $\mathfrak{B}_l(\overline{a}) = (\mathfrak{B}_l(a))^T$,
6. $\det \mathfrak{B}_l(a) = (\sum_{n=0}^{3} a_n^2)^2 = |a|^4$.

De las propiedades 1 y 3 se deduce que B_l es una transformación $\mathbb{R}$-lineal.

Cabe mencionar que para el mapeo B_r se cumplen las mismas propiedades que para el mapeo B_l con el único cambio de la propiedad 2 por la siguiente:

$$2. \qquad B_r(ab) = B_r(b) \cdot B_r(a).$$

2.13 Observación *Como una consecuencia de la multiplicación en $\mathbb{H}$, se tiene que dados $a, b \in \mathbb{H}$ se cumple que:*

$$\mathfrak{B}_l(a) \cdot \mathfrak{B}_r(b) = \mathfrak{B}_r(b) \cdot \mathfrak{B}_l(a).$$

Demostración:

Se deduce de las propiedades de la multiplicación en $\mathbb{H}$.
$\square$

Con el fin de introducir a esta generalización la definición de Cullen[3] (que se verá un poco más adelante), recordemos que $\mathbb{S}$ representa la esfera unitaria de cuaternios puramente imaginarios. Obsérvese que si $I \in \mathbb{S}$, entonces $I^2 = -1$; por esta razón los elementos de $\mathbb{S}$ son llamados unidades imaginarias. La siguiente proposición se utiliza para sostener la definición de regularidad (sección 3).

2.14 Proposición *Para cualquier número cuaterniónico no real $q \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$, existen únicos $x_q, y_q \in \mathbb{R}$ con $y_q > 0$, e $I_q \in \mathbb{S}$ tales que $q = x_q + y_q I_q$.*

Demostración:

Sea $q \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$, es decir; q es de la forma $q = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3 = x_0 + \overrightarrow{q}$. De esta manera basta tomar $x_q = x_0$. Además $\overrightarrow{q} \in y_q\mathbb{S}$ en donde $y_q = \|\overrightarrow{q}\|$ e $y_q\mathbb{S} = \{y_q I | I \in \mathbb{S}\}$, por lo que $\frac{\overrightarrow{q}}{|\overrightarrow{q}|} \in \mathbb{S}$; así que tomemos $I_q = \frac{\overrightarrow{q}}{|\overrightarrow{q}|}$ e $|\overrightarrow{q}| = y_q > 0$. Lo que implica que $q = x_q + y_q I_q$. Que es lo que se quería demostrar, ya que tanto x_q como y_q son únicos por la forma en que fueron elegidos.
$\square$

Con esta representación de los cuaternios la multiplicación se reescribe de la siguiente manera: Sean $a, b \in \mathbb{H}$, con $a = x_a + y_a I_a$ y $b = x_b + y_b I_b$, entonces:

$$a \cdot b = x_a x_b - < y_a I_a, y_b I_b > + x_a y_b I_b + x_b y_a I_a + [y_a I_a, y_b I_b].$$

La operación de suma se expresa ahora de la siguiente manera.

$$a + b = x_{a+b} + y_{a+b} I_{a+b};$$

Ahora obtendremos algunos resultados sobre el conjunto $\mathbb{S}$.

2.15 Proposición *Sean I y J dos elementos de $\mathbb{S}$. Entonces el producto cuaterniónico IJ se cálcula con la siguiente fórmula:*

$$IJ = - < I, J > + I \times J.$$

Demostración:

Sean $I, J \in \mathbb{S}$; de la definición de producto de cuaternios tenemos que:

$$\begin{aligned} IJ &= 0 \cdot 0 - < I, J > + 0 \cdot I + 0 \cdot J + (I \times J) \\ &= - < I, J > + (I \times J). \end{aligned}$$

$\square$

Téngase presente que el cálculo anterior muestra, en particular; que el producto de dos elementos ortogonales de $\mathbb{S}$ también se encuentra en $\mathbb{S}$. Este pequeño hecho se utilizará para la construir bases ortogonales en $\mathbb{S}$.

2.16 Proposición *Sean I, J dos elementos ortogonales de $\mathbb{S}$ y sea $K := IJ$, entonces:*

1. *$K = IJ = -JI$, es un elemento de $\mathbb{S}$.*
2. *K es ortogonal tanto a I como a J.*
3. *$JK = I = -KJ$ y $KI = J = -IK$.*

Demostración:

Sean $I, J \in \mathbb{S}$ con $I = iI_1 + jI_2 + kI_3$ y $J = iJ_1 + jJ_2 + kJ_3$, entonces:

1. De la Proposición 1.14 tenemos que $K = - < I, J > + I \times J$, puesto que, por hipótesis; I y J son ortogonales entre sí luego $< I, J >= 0$. Por lo tanto $K = I \times J = -J \times I$.

   Ahora como $|I \times J| = |I||J| \operatorname{sen} \theta$, dónde θ representa el ángulo formado entre I y J; que en este caso en particular se tiene que $\theta = \frac{\pi}{2}$, por lo que $\operatorname{sen} \theta = 1$ y así $|K| = |I \times J| = |I||J| \operatorname{sen} \theta = |I||J| \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = |I||J| = 1 \cdot 1 = 1$, y en consecuencia $K \in \mathbb{S}$.

2. Dado que $< I, J >= 0$ y $K = IJ = I \times J \Longrightarrow$

   $$\begin{aligned} < K, I > &=< I \times J, I > \\ &= 0 \\ &=< I \times J, J > \\ &=< K, I > . \end{aligned}$$

   Esto último demuestra lo deseado.

3. Dado que $JK = - < J, K > + J \times K$; como J es ortogonal a K, por el inciso anterior; se tiene que

$$\begin{aligned} JK &= J \times K \\ &= J \times (IJ) \\ &= J \times (- < I, J > + I \times J) \\ &= J \times (I \times J); \qquad\qquad \text{pues } I \text{ y } J \text{ son ortogonales} \\ &= I \\ &= -(IJ) \times J \\ &= -KJ. \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} KI &= K \times I \\ &= (IJ) \times I \\ &= (- < I, J > + I \times J) \times I \\ &= (I \times J) \times I \\ &= J \\ &= I \times -(IJ) \\ &= -IK. \end{aligned}$$

$\square$

El resultado que se acaba de demostrar es simple; pero nos dice que podemos usar I, J y K como una base para $\mathbb{S}$, además dado cualquier $I \in \mathbb{S}$, se puede extender a una base (aunque no en forma única ya que en última instancia la base depende de la elección de J de entre los vectores ortogonales a I).

Capítulo 3

Funciones C-regulares.

Antes de dar la definición de funciones Cullen-regulares vamos a dar una pequea reseña de como definir el concepto de derivada de una función en espacios de Banach, pues como se verá este tipo de definiciones son la esencia de las funciones Cullen-regulares.

Asi consideremos una función cualquiera $f : X \longrightarrow F$, donde F es un espacio de Banach y X es un subconjunto abierto de un espacio de Banach E. Una forma de estudiar el comportamiento de f en un entorno de un punto a de X es restringir su dominio a una dimensión, esto es, analizar cómo se comporta f sobre cada recta que pasa por a. Con esta idea introducimos la noción de derivada direccional la cual no es suficiente para realizar un estudio completo sobre el comportamiento local de f pero es de gran utilidad para establecer resultados parciales.

Sean E y F espacios de Banach, X un subconjunto abierto de E y $f : X \longrightarrow F$ una función dada. Decimos que f tiene una derivada en un punto $a \in X$ en la dirección de $h \in E$ si el límite $\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$ existe. En este caso, designamos a este límite por $Dh(a)$ y lo llamamos derivada de Gâteaux de f en a en la dirección de h y en la cual se tiene que $Dh(a) \in F$.

Daremos una definición de diferenciabilidad más amplia que la anterior y para ello centraremos nuestra atención en las funciones lineales y continuas entre espacios de Banach. Estas aplicaciones, además de respetar la estructura de espacio vectorial, poseen propiedades (consecuencia de su continuidad) que facilitan su estudio. De este modo, si podemos aproximar localmente a f en un punto a (tanto como se quiera) a una aplicación lineal y continua, es de esperar que en un entorno de a, f tenga un comportamiento análogo al de la función en cuestión.

Planteada la idea general que motiva la nueva noción de diferenciabilidad, procedamos con la definición. Sean E y F espacios de Banach, X un subconjunto abierto de E y $f : X \longrightarrow F$ una aplicación dada. Decimos que f es diferenciable en un punto a de X si existe una aplicación $Df(a)$ en $\mathfrak{L}(E, F)$ (el conjunto de aplicaciones lineales y continuas de E en F) tal que $\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)-f(a)-Df(a)(x-a)}{||x-a||} = 0$ Llamamos a la aplicación $Df(a) : E \longrightarrow F$ la derivada de Fréchet) de f en a.

Ahora antes de dar la definición de una función Cullen-regular, observemos que, de acuerdo a la Definición 2.9 es posible construir "planos complejos"de la siguiente manera. Sea $I \in \mathbb{S}$ entonces $L_I := \mathbb{R} + I\mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{H}$, el cual tiene una estructura algebraica similar al campo de los números complejos, pues un elemento en L_I es de la forma $a + Ib$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y como $I \in \mathbb{S}$ entonces $I^2 = -1$; de ahí que se llame plano complejo. Un detalle más es el hecho de que la suma y el producto en los planos L_I son cerradas en L_I, para todo $I \in \mathbb{S}$; ya que si tomamos $z, w \in L_I$ con $z = a + Ib$ y $w = x + Iy$ entonces $z + w = [(a + x) + I(b + y)] \in L_I$ y $zw = [(ax - by) + I(ay + bx)] \in L_I$.

Dado $I \in \mathbb{S}$, un interesante resultado sobre el plano L_I es el siguiente.

3.1 Proposición *Sea $I \in \mathbb{S}$, entonces dados $z, w \in L_I$ se tiene que:*

1. $(w + z)|_{L_I} = (z + w)|_{L_I} = z + w.$
2. $(w \cdot z)|_{L_I} = (z \cdot w)|_{L_I} = z \cdot w.$

Es decir la suma y el producto en el plano complejo L_I coinciden con la suma y el producto cuaterniónico (respetando la multiplicación en $\mathbb{H}$).

Demostración: Sean $I \in \mathbb{S}$ y $z, w \in L_I$, entonces existen $x_z, x_w, y_z, y_w, a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $z = x_z + Iy_z$, $w = x_w + Iy_w$ con $I = ia + jb + kc$. Así

1.

$$\begin{aligned}
(z + w)|_{L_I} &= (x_z + x_w) + I(y_z + y_w) \\
&= (x_z + x_w) + (ia + jb + kc)(y_z + y_w) \\
&= (x_z + x_w) + (iay_z + jby_z + kcy_z) + (iay_w + jby_w + kcy_w) \\
&= (x_z + iay_z + jby_z + kcy_z) + (x_w + iay_w + jby_w + kcy_w) \\
&= (x_z + x_w) + i(ay_z + ay_w) + j(by_z + by_w) + k(cy_z + cy_w) \\
&= (z + w).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(z\cdot w)|_{L_I} &= (x_z+Iy_z)\cdot(x_w+Iy_w)\\ &= (x_zx_w-y_zy_w)+I(x_zy_w+y_zx_w)\\ &= (x_zx_w-y_zy_w)+(ia+jb+kc)(x_zy_w+y_zx_w)\\ &= (x_zx_w-y_zy_w)+x_z[(ia+jb+kc)(y_w)]+x_w[(ia+jb+kc)(y_z)]\\ &= x_zx_w-<I_{y_z},I_{y_w}>+x_zI_{y_w}+x_wI_{y_z}\\ &= (z\cdot w).\end{aligned}$$

□

Ahora como una consecuencia de la multiplicación en $\mathbb{H}$ y la proposición 2.14 se tiene lo siguiente

3.2 Observación *Dados $a,b\in\mathbb{H}$ con $a=x+Iy$ y $b=z+Jw$ entonces*

$$ab=(x+Iy)(z+Jw)=xz+xwJ+yzI+ywIJ.$$

Esta ultima observación nos dice la manera de multiplicar dos elementos de planos distintos, y esto último se debe a que los planos están contenidos en $\mathbb{H}$ y no son independientes, pues el producto que se menciona en la observación no es más que el producto cuaterniónico de dos elementos.

Ya que se definieron las operaciones en los planos L_I y se dieron algunas características de éstas, una pregunta intuitiva sería: ¿podemos construir funciones que tengan como dominio a los planos L_I, pero que su contradominio sea $\mathbb{H}$?

La respuesta a esta pregunta es afirmativa, y la forma de construirlas es la siguiente: Primero sea $f:\mathbb{H}\longrightarrow\mathbb{H}$ una función, después definamos la función $\varphi:\mathbb{H}\longrightarrow\mathbb{H}$ dada por $\varphi(q):=x_q+y_qI_q$. Obsérvese que la función φ está bien definida en vista de la Proposición 2.13. Ahora se definen para cada $I\in\mathbb{S}$ las funciones f_I como, $f_I : f\circ\varphi|_{L_I}$. Está nueva función tiene dominio en el plano L_I y su contradominio en $\mathbb{H}$, la ventaja de este tipo de funciones es que como su dominio es un plano complejo, entonces es posible aplicar la teoría clásica de funciones de una variable compleja a ellas. Y esto último se puede hacer gracias a que este tipo de funciones son en esencia funciones que van de un campo(L_I) a un espacio de Banach($\mathbb{H},L_I$), y la teoría de estas funciones está muy desarrollada y por tal razón las funciones f_I estan bien definidas. Cabe mencionar que este tipo de funciones son fundamentales para la construcción de funciones Cullen-regulares como se mostrara en la definición (un pequeño comentario es que los autores originales de estas ideas, llaman a las funciones f_I, funciones restricción, aunque como se observa, eso es un abuso de notación y del lenguaje; esto se encuentra en [15]).

Ahora antes de dar la definición de funciones Cullen-regulares, tomemos en cuenta que en el párrafo anterior se menciona que las funciones f_I son funciones que tienen como contradominio un espacio de Banach, por lo que tiene sentido aplicarle a dichas funciones un operador, tal como se muestra en la siguiente definición.

3.3 Definición *Sea $f : \Omega \to \mathbb{H}$ una función. Decimos que las funciones f_I son holomorfas en $\Omega \bigcap L_I$ si el operador $\overline{\partial_I} f_I(x+yI) := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + I\frac{\partial}{\partial y})f_I(x+yI)$ anula a las funciones, es decir $\overline{\partial_I} f_I(x+yI) = 0$*

La siguiente definición es sustentada por la Proposición 2.14.

3.4 Definición *Sea Ω un dominio en $\mathbb{H}$. Una función real diferenciable $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{H}$ es llamada Cullen-regular si, para cada $I \in \mathbb{S}$, la función f_I es holomorfa en $\Omega \cap L_I$.*

A lo largo de este trabajo, ya que no existe confusión alguna nos referiremos a funciones Cullen-regular como funciones regulares a secas.

Una primera pregunta que surge al analizar la definición de función regular es la siguiente. ¿cuáles son los puntos de intersección del plano L_I con la esfera imaginaria? Pues bien la respuesta a esta pregunta se enuncia en la siguiente proposición:

3.5 Proposición *Para toda $I \in \mathbb{S}$ el plano L_I intersecta a $\mathbb{S}$ en exactamente dos puntos; a saber: I y $-I$.*

Demostración:

Primeramente hay que observar que claramente se tiene que para toda $I \in \mathbb{S}$ el plano L_I si intersecta a la esfera imaginaria, dicho esto; sólo nos resta por demostrar que $L_I \cap \mathbb{S} = \{I, -I\}$. Para esto, supongamos que existe $J \in \mathbb{S}$, con $J \neq \pm I$, tal que $J \in (L_I \cap \mathbb{S})$, entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $J = a + bI$; pero como $J \in \mathbb{S}$, se tiene que $J = ix_1 + jx_2 + kx_3$ es decir J no tiene parte escalar por

lo que $a = 0$, así se tiene que $J = bI$ y esto último implica a que J sea paralelo a I y como $||J|| = 1$ se tiene que $J = \pm I$.
$\square$

Este último resultado es muy importante, ya que nos dice que para todo $I, J \in \mathbb{S}$, con $I \neq \pm J$; se tiene que $L_I \neq L_J$.

Pero dicho lo último, y de la definición de función regular; surge una interrogante aún mayor. ¿porqué pedir de requisito que las funciones f_I sean holomorfas para todo I? Si por ejemplo, se toma a $I \in \mathbb{S}$ y al formar su plano generado L_I intuitivamente podriamos decir que éste último es el mismo que el plano generado por $-I$, entonces no sólo bastaría con pedir de requisito que las funciones f_I posean dominios generados por media esfera imaginaria?

Las respuestas a estas preguntas son interesantes, pues si bien el plano L_I y el plano L_{-I}, son el mismo geométricamente hablando cada plano tiene una estructura algebraica diferente. Pues dado $z \in L_I$, se tiene que $z = a + bI$ mientras que si tomamos el mismo punto z del plano L_I, pero con la estructura algebraica del plano L_{-I}, se tendrá que $z = c - dI$ y de estas dos últimas expresiones se tiene que $a = c$, pero $d = -b$. Ahora bien aunque sólo se trate de un signo, la estructura cambia demasiado, ya que en el plano L_I, el operador que anula a las funciones holomorfas es $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, mientras que este mismo operador en el plano L_{-I}, viene siendo la derivada de las funciones holomorfas y en general la derivada no tiene por que ser cero (excepto en funciones constantes y algunos casos de funciones holomorfas). Y por esta razón no se puede considerar media esfera, ya que como se ha visto para cada $I \in \mathbb{S}$ su plano generado L_I es único (algebraicamente hablando), por lo cual se debe de considerar toda la esfera imaginaria.

Ahora vamos a dar algunos ejemplos de funciones regulares.

3.6 Ejemplo *La función identidad es regular. En efecto sea $Id : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ entonces para cada $I \in \mathbb{S}$, se tiene que $f_I = Id : L_I \longrightarrow L_I$, luego $\overline{\partial_I} Id(x + Iy) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + I\frac{\partial}{\partial y})(x + Iy) = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0$.*

Para dar nuestro siguiente ejemplo necesitamos un resultado previo.

3.7 Proposición *Para cualesquiera enteros no negativos k, n con $k < n$ se tiene que*

$$k\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}[n - (k - 1)].$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1}[n-(k-1)] &= \left(\frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!}\right)[n-(k-1)] \\ &= \left(\frac{n!}{(n-(k-1)-1)!(k-1)!}\right) \\ &= \left(\frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}\right) \\ &= k\left(\frac{n!}{(n-k)!(k)!}\right) \\ &= k\binom{n}{k}\end{aligned}$$

$\square$

Ahora es posible seguir con los ejemplos

3.8 Ejemplo *La función* $f:\mathbb{H}\longrightarrow\mathbb{H}$ *dada por* $f(q)=q^n$ *es regular. En efecto para cada* $I\in\mathbb{S}$, $f_I(x+Iy)=(x+Iy)^n$, *pero* $(x+Iy)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}I^iy^i$ *por* *lo que*

$$
\begin{aligned}
\overline{\partial_I} f_I(x+Iy) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + I\frac{\partial}{\partial y}\right)(x+Iy)^n \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + I\frac{\partial}{\partial y}\right)\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} x^{n-i}I^i y^i \\
&= nx^{n-1} + \binom{n}{1}(n-1)x^{n-2}Iy + \binom{n}{2}(n-2)x^{n-3}I^2y^2 + \binom{n}{3}(n-3)x^{n-4}I^3y^3 \\
&\dots + 4\binom{n}{n-4}x^3I^{n-4}y^{n-4} + 3\binom{n}{n-3}x^2I^{n-3}y^{n-3} + \\
&+ 2\binom{n}{n-2}xI^{n-2}y^{n-2} + \binom{n}{n-1}I^{n-1}y^{n-1} \\
&+ \binom{n}{1}x^{n-1}I^2 + 2\binom{n}{2}x^{n-2}I^3y + 3\binom{n}{3}x^{n-3}I^4y^2 + 4\binom{n}{4}x^{n-4}I^5y^3 + \dots \\
&\dots + (n-3)\binom{n}{n-3}x^3I^{n-2}y^{n-4} + (n-2)\binom{n}{n-2}x^2I^{n-1}y^{n-3} + \\
&+ (n-1)\binom{n}{n-1}xI^ny^{n-2} + nI^{n+1}y^{n-1} \\
&= x^{n-1}\left(n - \binom{n}{1}\right) + x^{n-2}Iy\left(\binom{n}{1}(n-1) - 2\binom{n}{2}\right) + \\
&+ x^{n-3}y^2\left(3\binom{n}{3} - \binom{n}{2}(n-2)\right) + x^{n-4}Iy^3\left(4\binom{n}{4} - \binom{n}{3}(n-3)\right) + \dots \\
&\dots + xy^{n-2}\left(2\binom{n}{n-2}I^{n-2} + (n-1)\binom{n}{n-1}I^n\right) + y^{n-1}\left(\binom{n}{n-1}I^{n-1} + nI^{n}\right. \\
&= 0+0+0+0+\dots+0+0+0+0 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Ahora veamos un ejemplo un poco más sencillo de demostrar.

3.9 Ejemplo *Sea $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ la función dada por $f(q) = qa$, donde $a \in \mathbb{H}$; entonces se tiene que f es regular. En efecto, primero que nada se tiene que existen números reales α, β e $J \in \mathbb{S}$ tales que $a = \alpha + J\beta$, luego para todo $I \in \mathbb{S}$ se tiene que $f(q) = f_I(x+Iy) = qa = (x+Iy)(\alpha+J\beta) = (x\alpha+x\beta J+y\alpha I+y\beta IJ)$,* *y por tanto se tendra que:*

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x}+I\frac{\partial}{\partial y}\right)(f(x+Iy)) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}+I\frac{\partial}{\partial y}\right)(x\alpha+x\beta J+y\alpha I+y\beta IJ)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}(x\alpha+x\beta J+y\alpha I+y\beta IJ)+I\frac{\partial}{\partial y}(x\alpha+x\beta J+y\alpha I+y\beta IJ)\\
&= (\alpha+\beta J)+I(\alpha I+\beta IJ)\\
&= \alpha+\beta J-\alpha-\beta J\\
&= 0
\end{aligned}
$$

De la combinación de los ejemplos anteriores se deduce que los polinomios de una variable cuaterniónica son regulares, y más aun; con el fin de considerar las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n$ vamos a dotar el espacio de funciones regulares con la convergencia uniforme natural sobre conjuntos compactos. Argumentos similares se utilizan para las series de potencias en variable compleja, véase [1], esto permite obtener el análogo al teorema de Abel; de esta manera se tiene que las series de potencias en una variable cuaterniónica son funciones regulares (esto se debe a que el operador $\overline{\partial_I}$ anula a todos los elementos que componen la serie en un punto $(x+Iy)$).

Ahora demos un ejemplo de una función que no es regular.

3.10 Ejemplo *Sea $f:\mathbb{H}\longrightarrow\mathbb{H}$ dada por $f(x+Iy)=x^2+Ixy$ luego para todo $I\in\mathbb{S}$ se tiene que las funciones f_I no son holomorfas ya que*

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x}+I\frac{\partial}{\partial y}\right)(f(x+Iy)) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}+I\frac{\partial}{\partial y}\right)(x^2+Ixy)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}(x^2+Ixy)+I\frac{\partial}{\partial y}(x^2+Ixy)\\
&= 2x+Iy+Ix\neq 0,
\end{aligned}
$$

excepto cuando tomamos el punto cero. Por lo que se concluye que la función no puede ser regular.

Continuemos con dar un resultado sobre funciones regulares.

3.11 Proposición *Sean $f,g:\Omega\longrightarrow\mathbb{H}$ dos funciones regulares en un dominio $\Omega\subset\mathbb{H}$. Entonces se tiene que la función suma f+g es una función regular.*

Demostración:

La demostración de este resultado se sigue de la definición de funciones regulares y de la Proposición A.3. Ya que para toda $I \in \mathbb{S}$, la función $f_I + g_I$ es una función holomorfaa en el plano L_I.

□

Ahora definamos la noción de I-derivadas de la siguiente manera:

3.12 Definición *Sea Ω un dominio en $\mathbb{H}$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{H}$ una función real diferenciable y regular. Para cada $I \in \mathbb{S}$ y para caulquier punto $q = x + yI$ en Ω se define la I-derivada de f en q como:*

$$\partial_I f(x + yI) := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - I\frac{\partial}{\partial y})f_I(x + yI).$$

Capítulo 4

Series de potencias y expansión en series de funciones regulares

En el estudio de polinomios y series de potencias en q, nótese primeramente que el polinomio base $q^n a$, con $a \in \mathbb{H}$, es una función regular de acuerdo a los ejemplos de la sección anterior.

4.1 Teorema *Para cada serie de potencias de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n$ existe un número R, $0 \leq R \leq \infty$, llamado el radio de convergencia de la serie, de tal forma que la serie es absolutamente convergente para todo $q \in \mathbb{H}$ con $\|q\| < R$ y uniformemente convergente para los $q \in \mathbb{H}$ con $\|q\| < \rho < R$. Por otra parte si $\|q\| > R$ se dice que la serie no converge en estos puntos o que es divergente.*

Demostración: Para la demostración de este teorema solo hay que observar que como las series son regulares, entonces a cada punto de ellas se les aplica el teorema de Abel de la variable compleja y se obtiene el resultado deseado. Pues en cada punto q, podemos expresar a q como $q = x_q + y_q I_q$ y obtener una serie en el plano complejo correspondiente.
$\square$

Una primera consecuencia importante de la Definición 4.1 es que, para funciones regulares; se puede introducir una noción de derivada.

4.2 Definición *Sea Ω un dominio en $\mathbb{H}$, y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{H}$ una función regular. La derivada de Cullen de f, denotada por $\partial_c f$, está definida de la siguiente* *manera:*

$$\partial_c f(q) := \begin{cases} \partial_I f(q), & si\ q = x + yI, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x), & si\ q = x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Esta definición de derivada es posible porque sólo se aplica a funciones regulares. De hecho , el valor de la derivada en un punto $x \in \mathbb{R}$, puede ser calculado utilizando diferentes unidades imaginarias, y a priori no hay razón para que estos valores obtenidos coincidan. Sin embargo; si una función es regular, se observa que la derivada en el punto x es $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$. Para observar esto útimo vease el ejemplo (3.10) de la sección anterior, en el cual se muestra que si la función no es regular entonces el valor de la derivada en un punto real depende de la unidad imaginaria que se esté tomando, por esa razón las funciones deben de ser regulares para aplicarles la definición anterior.

Sea f una función regular. Dado que para cada $I \in \mathbb{S}$ se tiene que $\overline{\partial}_I(\partial_c(f)) = \partial_c(\overline{\partial}_I(f)) = 0$, se obtiene que la derivada de Cullen de una función regular todavía es regular.

Nótese también que la derivada de una serie de potencias se puede realizar término a término debido a la convergencia uniforme, de modo que :

$$\partial_c(\sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n-1} n a_n.$$

Esta nueva serie tiene el mismo radio de convergencia que la serie original.

En lo siguiente, siempre dirigiremos nuestra atención a funciones que son regulares en una bola $\mathbb{B}(0, R)$ centrada en el origen y de radio R.

En el estudio de funciones regulares, se necesitará una simple representación de la restricción de una función regular como un par de funciones holomorfas. Para ello, se utilizarán los resultados del apéndice A.

El siguiente lema (que a menudo se le conoce como el lema de separación) es fácil de demostrar, pero es esencial para los resultados en el presente trabajo.

4.3 Lema *Si f es una función regular en $\mathbb{B}(0, R)$, entonces para cualquier $I \in \mathbb{S}$, y para cada $J \in \mathbb{S}$ ortogonal a I, existen funciones holomorfas $F_{I,J}, G_{I,J} : B \cap$*

$L_I \longrightarrow L_I$ *tales que para cada* $z = x + yI \in \mathbb{H}$*, se tiene que:*

$$f_I(z) = F_{I,J}(z) + G_{I,J}(z)J.$$

Demostración:

Dado cualquier par de vectores ortogonales I, J en $\mathbb{S}$, considere el tercer elemento K de la base ortogonal I, J, K, y escribimos $f_I(x+yI) = f(x+yI)$ como $f = f_0+If_2+Jf_2+Kf_3$. Como f es regular, se sabe que $(\frac{\partial}{\partial x}+I\frac{\partial}{\partial y})f_I(x+yI) = 0$, por lo que:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} + I\frac{\partial f_1}{\partial x} + J\frac{\partial f_2}{\partial x} + K\frac{\partial f_3}{\partial x} + I(\frac{\partial f_0}{\partial y} + I\frac{\partial f_1}{\partial y} + J\frac{\partial f_2}{\partial y} + K\frac{\partial f_3}{\partial y}) = 0.$$

Por las propiedades de los elementos de la base de $\mathbb{S}$ descritas en la Proposición 2.15, la expresión anterior se puede reescribir como:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} + I(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial y}) + J(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_3}{\partial y}) + K(\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}) = 0.$$

Esto implica que las funciones $f_0 + If_1$ y $f_2 + If_3$ satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann y por tanto ambas son holomorfas. En particular si definimos $F_{I,J} := f_0 + If_1$ y $G_{I,J} := f_2 + If_3$, se obtiene que $f_I(x + yI) = F_{I,J}(x + yI) + G_{I,J}(x + yI)J$, por lo que el lema se demuestra si se fija $z = x + yI$. $\square$

4.4 Observación *Hay que observar que en el lema anterior las funciones* $F_{I,J}(z)$ *y* $G_{I,J}(z)$*, no son únicas, ya que el mismo lema nos dice que tenemos que utilizar todos los elementos de la esfera unitaria que sean ortogonales a* I*. Pero hay que tener en cuenta, un hecho sorprendente: que para todos los elementos ortogonales a* I *se forman diferentes funciones* $F_{I,J}$ *y* $G_{I,J}$*, y que todas ellas son funciones holomorfas en el plano* L_I *y que siempre dependen de la variable* z*. Este hecho se debe a que si nos fijamos en la parte izquierda de la igualdad, en el lema; y le aplicamos el operador* $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$*, obtendremos que* $0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}F(z)_{I,J} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}G_{I,J}(z)J$ *lo que implica que* $0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}F_{I,J}(z)$ *y* $0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}G_{I,J}(z)$*, y esto a su vez implica que las funciones sean holomorfas sin importar qué elemento ortogonal a* I *se utilice.*

Dado que las funciones $F_{I,J}$ y $G_{I,J}$ son holomorfas en el plano $\mathbb{R} + \mathbb{R}I$ es de esperarse que (se demostrará más adelante) f admita en ese plano una expansión en series de potencias de z, y lo que es más sorprendente es el hecho de que tal expansión pueda ser usada para proveer una expansión de f en series de potencias de q. Este es un resultado fundamental para esta teoría, y su demostración requiere unos resultados previos.

4.5 Proposición *Sea $f : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{H}$ una función regular. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, la derivada de Cullen $\partial_c^n : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{H}$ es regular y se tiene que:*

$$\partial_c^n f(x+yI) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x+yI).$$

Demostración:

Primeramente el hecho de que $\partial_c^n f$ está bien definida ya ha sido establecido. Para demostrar la igualdad $\partial_c^n f(x+yI) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x+yI)$ se procederá por inducción sobre n. Primeramente la igualdad se satisface para $n = 1$, ya que:

$$\partial_c f(x+yI) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - I\frac{\partial}{\partial y})f(x+yI) = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - I\frac{\partial f}{\partial y})(x+yI) = \frac{\partial f}{\partial x}(x+yI).$$

Para demostrar el paso inductivo notemos que como f es regular, entonces:

$$(\frac{\partial}{\partial x} + I\frac{\partial}{\partial y})(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}) = \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}} + I\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^n \partial y} = \frac{\partial^n}{\partial x^n}(\frac{\partial f}{\partial x} + I\frac{\partial f}{\partial y}) = 0.$$

Así se tiene que:

$$\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}} = -I\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^n \partial y}.$$

Y por tanto (por hipótesis de inducción):

$$\partial_c^{n+1} f = \partial_c(\partial_c^n f) = \partial_c(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - I\frac{\partial}{\partial y})(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}} - I\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^n \partial y}) = \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}},$$

y esto concluye la demostración.

□

Ahora es posible deducir el siguiente resultado.

4.6 Teorema *Una función $f : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{H}$ es regular si y sólo si, ésta tiene una expansión de series de la forma:*

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0),$$

convergente sobre $\mathbb{B}$. En particular si f es regular, entonces esta es de clase C^∞ sobre $\mathbb{B}$.

Demostración:

Considérese en el plano complejo L_I, el disco $\Delta_I \subset L_I$ centrado en el origen y con radio $a > 0$, donde $a < R$ (recordando que R es el radio de la bola B centrada en el origen). Entonces podemos utilizar la representación del Lema 5.3 para encontrar una representación integral para f_I dentro de Δ_I. En concreto, utilizando el hecho de que $F_{I,J}$ y $G_{I,J}$ son holomorfas en el dominio $\mathbb{B} \cap L_I$ del plano complejo L_I, se obtiene que $(\zeta - z)^{-1}F_{I,J}(z) = F_{I,J}(z)(\zeta - z)^{-1}$ y $(\zeta - z)^{-1}G_{I,J}(z) = G_{I,J}(z)(\zeta - z)^{-1}$, para cada $\zeta \neq z \in \mathbb{B} \cap L_I$. Por lo tanto para cada z en Δ_I se tiene que:

$$f_I(z) = \frac{1}{2\pi I}\int_{\partial\Delta_I} \frac{F_{I,J}(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \left(\frac{1}{2\pi I}\int_{\partial\Delta_I} \frac{G_{I,J}(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right) J.$$

Cada una de estas dos integrales puede ser transformada en una serie de potencias, como en el análisis complejo clásico. Por ejemplo (y el mismo procedimiento se puede aplicar a la integral que contiene $G_{I,J}$) uno tiene que, para cada $z \in \Delta_I$,

$$\int_{\partial\Delta_I} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} \frac{F_{I,J}(\zeta)}{\zeta}d\zeta = \int_{\partial\Delta_I} \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n \frac{F_{I,J}(\zeta)}{\zeta}d\zeta = \sum_{n\geqslant 0} z^n \left(\int_{\partial\Delta_I} \frac{F_{I,J}(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta\right). \tag{4.1}$$

Nótese que en la ecuación de arriba hemos colocado $(\frac{z}{\zeta})^n$ a la izquierda (en lugar de la derecha) de $\frac{F(z)}{\zeta}$ de forma que la serie de potencias tenga coeficientes derechos, y sea regular en el dominio de convergencia. La ecuación (4.1) implica que:

$$\begin{aligned} f_I(z) &= \sum_{n\geqslant 0} z^n \frac{1}{n!}\frac{\partial^n F_{I,J}}{\partial z^n}(0) + \sum_{n\geqslant 0} z^n \frac{1}{n!}\frac{\partial^n G_{I,J}}{\partial z^n}(0)J \\ &= \sum_{n\geqslant 0} z^n \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n (F_{I,J} + G_{I,J}J)}{\partial z^n}(0)\right) \\ &= \sum_{n\geqslant 0} z^n \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(0)\right). \end{aligned}$$

Ahora a causa de la última proposición, se puede transformar esta ecuación como sigue:

$$\begin{aligned}
f_I &= \sum_{n\geqslant 0} z^n \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(0)\right)\\
&= \sum_{n\geqslant 0} z^n \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - I\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]^n f(0)\\
&= \sum_{n\geqslant 0} z^n \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0).
\end{aligned}$$

En particular esto muestra que $f_I(z)$ puede tener una representación en series de z^n con coeficientes $a_n = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0)$, que no dependen de la elección de I. Por lo tanto la representación que se ha encontrado vale para toda $I \in \mathbb{S}$, y de esta manera se concluye la demostración. $\square$

4.7 Corolario *Sea $f : B \longrightarrow \mathbb{H}$ una función regular. Si existe $I \in \mathbb{S}$ tal que $f(L_I) \subseteq L_I$, entonces la expansión en series de f:*

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0),$$

tiene todos sus coeficientes en L_I.

Demostración:

Sea $I \in \mathbb{S}$ tal que $f(L_I) \subseteq L_I$, entonces para cualquier número real x tenemos que $f(x) = f_I(x) \in L_I$.

Por lo tanto $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x) \in L_I$ para todo $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$. $\square$

Capítulo 5

Fórmula Integral de Cauchy

La expansión en serie de potencias, que se ha probado para funciones regulares en la última sección, es el ingrediente clave para demostrar la analogía de varios resultados de la teoí funciones regulares, con la teoría de funciones holomorfas en una variable compleja: como el principio de identidad, del módulo máximo, representación y estimación de Cauchy y los teoremas de Liouville y Morera. Esta sección está dedicada a la prueba de estos resultados.

Primeramente comencemos con una versión del principio de identidad.

5.1 Teorema *Sea $f : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{H}$ una función regular. Denotemos por $Z_f := \{q \in \mathbb{B} : f(q) = 0\}$, es decir el conjunto de ceros de f. Si existe $I \in \mathbb{S}$ tal que $L_I \cap Z_f$ tiene un punto de acumulación, entonces f es la función cero sobre $\mathbb{B}$.*

Demostración:

Sea $I \in \mathbb{S}$, tal que $L_I \cap Z_f$ tiene un punto de acumulación. Sobre $L_I \cap \mathbb{B}$ podemos escribir:

$$f(x + yI) = F_{I,J}(x + yI) + G_{I,J}(x + yI)J,$$

con $F_{I,J}$ y $G_{I,J}$ funciones holomorfas en L_I. Ahora bajo la suposición de que $L_I \cap Z_f$ tiene un punto de acumulación, se deduce que, tanto $F_{I,J}$ como $G_{I,J}$ son idénticamente cero sobre $L_I \cap \mathbb{B}$. Esto implica en particular, que $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que estas derivadas son los coeficientes de la expansión en series de potencias de la función f, se tiene que f es la función cero sobre $\mathbb{B}$.

$\square$

A partir de este último resultado obtenemos el siguiente:

5.2 Corolario *Sean f y g dos funciones regulares sobre la bola $\mathbb{B}$. Si existe $I \in \mathbb{S}$ tal que $f = g$ en un subconjunto de $L_I \cap \mathbb{B}$ teniendo un punto de acumulación en*

$L_I \cap \mathbb{B}$, entonces $f = g$ sobre todo $\mathbb{B}$.

Demostración:

Definamos la función $h(q) := f(q) - g(q)$, para todo $q \in \mathbb{B}$. Entonces la función h satisface las condiciones del teorema anterior, luego h es la función cero, lo que implica que $f = g$.

$\square$

Antes de demostrar el principio del módulo máximo, necesitaremos un resultado previo sobre la propiedad del valor medio.

5.3 Proposición *Si $f : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{H}$ es una función regular, y si $I \in \mathbb{S}$ entonces $f_I : L_I \cap \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{H}$ tiene la propiedad del valor medio.*

Demostración:

Por el Lema 4.3 se puede escribir $f_I(x + yI) = F_{I,J}(x + yI) + G_{I,J}(x + yI)J$. Por lo tanto, para todos los puntos a en $L_I \cap \mathbb{B}$, y para todo $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\Delta(a, r) := \{z \in \mathbb{B} \cap \text{Ł}_I : |z - a| < r\} \subset L_I \cap \mathbb{B}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_I(a + re^{r\theta})d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (F_{I,J}(a + re^{r\theta}) + G_{I,J}(a + re^{r\theta})J)d\theta \\ &= F_{I,J}(a) + G_{I,J}(a)J \\ &= f_I(a).\end{aligned}$$

Así se concluye la demostración.

$\square$

Ahora es posible enunciar y demostrar el principio del módulo máximo para funciones regulares.

5.4 Teorema *Sea $f : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{H}$ una función regular. Si $| f |$ tiene un máximo local en un punto $a \in \mathbb{B}$, entonces f es constante.*

Demostración:

Si $f(a) = 0$ el resultado es trivial. Por lo que supongamos que $f(a) \neq 0$. Multiplicando a f, si es necesario, por un cuaternio, se puede reducir el teorema al caso en que $f(a) > 0$. Entonces sea I la parte normalizada imaginaria de $a = x_0 + y_0 I$, por lo que I es un elemento de $\mathbb{S}$, y consideremos la función f_I. Para $r > 0$ suficientemente pequeño, sea

$$M(r) := \sup\{| f(a + re^{I\theta}) |\}.$$

Por hipótesis, tenemos que $f(a) \geq M(r)$; para todo r suficientemente pequeño. Por otra parte, dado que f_I satisface la propiedad del valor medio, de la proposición precedente, se obtiene inmediatamente que $f_I(a) = M(r)$. se concidera el conjunto de las $z = x + yI$, para r suficientemente pequeño $r = \mid z - a \mid$, de modo que la función $g(z) := \operatorname{Re}(f_I(a) - f_I(z))$ es no negativa. Tenemos que $g(z) = 0$ si y sólo si $f_I(z) = f_I(a)$. Por la propiedad del valor medio, se tiene que:

$$f_I(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_I(a + re^{I\theta}) d\theta,$$

y tomando en cuenta que la parte real canónica de un mapeo holomorfo también satisface la propiedad del valor medio, obtenemos que:

$$g(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(a + re^{I\theta}) d\theta.$$

Al mismo tiempo, se sabe que g es continua y no negativa sobre $\partial\Delta(a, r)$ y obtenemos que $g(a + re^{I\theta}) = 0$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Como una consecuencia, $g(z)$ es idénticamente cero en el disco cerrado, y por tanto $f_I(z) = f_I(a)$, para todo $z \in \overline{\partial\Delta(a, r)}$. Dado que este último conjunto tiene un punto de acumulación en $L_I \cap \mathbb{B}$, usamos el principio de identidad y concluimos con la prueba.

□

Tal vez la consecuencia mas importante del Lema 4.3 es el análogo; para funciones regulares, de la representación, de la fórmula de Cauchy. Para decirlo apropiadamenete, adoptaremos la siguiente notación:

Si $q \in \mathbb{B}$ el elemento

$$I_q := \begin{cases} \frac{Im(q)}{|Im(q)|} \in \mathbb{S}, & \text{si } Im(q) \neq 0 \\ k \in \mathbb{S}, & \text{siendo } k \text{ arbitario, en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Notemos que para cualquier $\zeta \in L_{I_q}$, debido a la proposición 4.1 con $\zeta \neq q$, la identidad $(\zeta - q)^{-1} d\zeta = d\zeta(\zeta - q)^{-1}$ se cumple. De esta manera se puede demostar la fórmula integral de Cauchy.

5.5 Teorema *Sea $f : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{H}$ una función regular, y sea $q \in \mathbb{B}$. Entonces:*

$$f(q) = \frac{1}{2\pi I_q} \int_{\partial\Delta_q(0,r)} \frac{d\zeta}{(\zeta - q)} f(\zeta),$$

donde, $\zeta \in \Delta_q(0, r)$ y $1 > r > 0$ es tal que, $\overline{\Delta_q} := \{x + yI_q : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ está contenida en $\mathbb{B}$ y contiene a q.

Demostración:

El resultado se sigue inmediatamente del Lema 4.3, como indican las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi I_q}\int_{\partial\Delta_q(0,r)}\frac{d\zeta}{\zeta-q}f(\zeta) &= \frac{1}{2\pi I_q}\int_{\partial\Delta_q(0,r)}\frac{d\zeta}{\zeta-q}f_{I_q}(\zeta)\\
&= \frac{1}{2\pi I_q}\int_{\partial\Delta_q(0,r)}\frac{d\zeta}{\zeta-q}(F_{I,J}(\zeta)+G_{I,J}(\zeta)J)\\
&= \frac{1}{2\pi I_q}\int_{\partial\Delta_q(0,r)}\frac{F_{I,J}(\zeta)}{\zeta-q}d\zeta+\left(\frac{1}{2\pi I_q}\int_{\partial\Delta_q(0,r)}\frac{G_{I,J}(\zeta)}{\zeta-q}d\zeta\right)J\\
&= F_{I,J}(q)+G_{I,J}(q)J\\
&= f(q).
\end{aligned}
$$

Que es lo que se quería demostrar.
□

5.6 Observación *Antes de continuar hay que aclarar que aunque la forma en que se escribe la fórmula integral de Cauchy en este trabajo y la forma clásica de la variable compleja son muy parecidas, no se interpretan de la misma manera; ya que en la variable compleja la fórmula integral de Cauchy nos dice cómo se comporta la función en términos de elementos de la frontera de una curva. Mientras que en este caso no se puede hablar del comportamiento de la función sobre una frontera, pues se está variando el plano L_I y es sobre ese plano donde la función restricción se interpreta en términos de la frontera; pero no sobre el dominio de la función original, ya que no existe manera alguna de poder unificar todos los planos L_I.*

5.7 Observación *La observación anterior, no sólo se aplica a la fórmula integral de Cauchy, pues muchos de los resultados de este trabajo se parecen a la forma en que se escriben a la forma clásica de la variable compleja, pero su interpretación es completamene diferente y hay que tener cuidado de no confundir eso.*

Como una consecuencia de este teorema, obtenemos el siguiente:

5.8 Teorema *Sea $f:\mathbb{B}(0,R)\longrightarrow\mathbb{H}$ una función regular, y sean $r<R$, $I\in\mathbb{S}$ y $\partial\Delta_I(0,r):=\{(x+yI):x^2+y^2=r^2\}$. Si $M_I:=\max\{|\ f(q)\ |: q\in\partial\Delta_I(0,r)\}$ y $M:=\inf\{M_I: I\in\mathbb{S}\}$, entonces:*

$\frac{1}{n!}\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0)\right| \leq \frac{M}{r^n}$, *para todo* $n \geq 0$.

Demostración:

La demostración de este resultado sigue las mismas ideas que en el caso de funciones holomorfas de una variable compleja. Específicamente, la demostración en expansión en series de potencias de una función regular, muestra que, para todo $I \in \mathbb{S}$, se puede escribir

$$\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0) = \frac{1}{2\pi I}\int_{\partial\Delta_I(0,r)} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}} f(\zeta).$$

Por lo tanto, para todo $I \in \mathbb{S}$ podemos escribir:

$$\frac{1}{n!}\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Delta_I(0,r)} \left|\frac{f(\zeta)}{r^{n+1}} d\zeta\right| \leq \frac{1}{2\pi I}\int_{\partial\Delta_I(0,r)} \frac{M_I}{r^{n+1}} d\zeta = \frac{M_I}{r^n}.$$

Tomando el ínfimo para $I \in \mathbb{S}$, en la parte derecha de la desigualdad anterior, queda demostrado el teorema.

□

Ahora se tienen los elementos necesarios para probar el análogo al teorema de Liouville.

5.9 Teorema *Sea* $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ *una función regular. Si* f *es acotada es decir, existe un número real positivo* M *tal que* $\mid f(q) \mid \leq M$, *para todo* $q \in \mathbb{H}$, *entonces* f *es constante.*

Demostración:

De la estimación de Cauchy tenemos que, para algún $r \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\frac{1}{n!}\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0)\right| \leq \frac{M}{r^n},$$

haciendo tender r a infinito, obtenemos que $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y esto implica que $f = f(0)$. De hecho todos los coeficientes de la serie de potencias que representan a f son cero; excepto tal vez para el primer término, lo que implica que la función es constante.

□

Esta sección se cierra con una versión del teorema de Morera.

5.10 Teorema *Sea $f : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{H}$ una función real diferenciable. Si para cada $I \in \mathbb{S}$, la forma diferencial $f(z) = dz$, con $z = x + yI$, $x, y \in \mathbb{R}$; definida sobre $L_I \cap \mathbb{B}$, es cerrada, entonces la función es regular.*

Demostración:

La hipótesis implica; por el teorema clásico de Morera, que cada función f_I : $L_I \cap B \longrightarrow \mathbb{H}$ es holomorfa. Esto concluye con la demostración, en vista de la definición de regularidad dada en este trabajo.

$\square$

Capítulo 6

Lema de Schwarz y la geometría en la bola unitaria

En esta sección se estudia la geometría en la bola unitaria $\mathbb{B} \subset \mathbb{H}$ usando funciones regulares.

Comencemos esta sección probando el análogo al clásico lema de Schwarz.

6.1 Teorema *Sea $f : B \longrightarrow B$ una función regular dada por, $f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n$, con $f(0) = 0$. Entonces para todo $q \in B$, se tiene que:*

$$| f(q) | \leq | q |$$

y

$$| \partial_c f(0) | \leq 1.$$

Más aún, se obtiene la igualdad en las fórmulas anteriores, en un punto $q_1 \in \mathbb{B}$ con $q_1 \neq 0$, si y sólo si $f(q) = qu$, para algún $u \in \mathbb{H}$, tal que $| u |= 1$.

Demostración:

Como $f(0) = 0$ implica que $a_0 = 0$, y así $f(q) = \sum_{n=1}^{\infty} q^n a_n$. Por lo que definimos la función: $g : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{H}$, dada por

$$g(q) := q^{-1} f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n a_{n+1}, \text{ para todo } q \neq 0,$$

la cual es un mapeo regular, además; si el radio de convergencia de la serie de la función f es r, se tiene que la serie de potencias que representa g tienen el mismo radio de convergencia, claramente $r \leq 1$. Elegimos $q \in \mathbb{B}$, $| q |< r < 1$. Entonces por el principio del módulo máximo para funciones regulares, se tiene que:

$$| g(q) | \leq \sup_{|w|=r} | g(w) | = \sup_{|w|=r} \frac{| f(w) |}{|w|} \leq \frac{1}{r}.$$

Haciendo tender $r \to 1$, es decir, al extender la función a toda la bola unitaria, obtenemos que $|g(q)| \leq 1$ sobre $\mathbb{B}$, y como $\partial_c f(0) = g(0)$, se obtiene que $|\partial_c f(0)| \leq 1$. Si asumimos que para algún $p \in \mathbb{B}$, sucede $|f(p)| = |p|$ entonces, para dicho valor p se tiene que:

$$\frac{|f(p)|}{|p|} = |g(p)| = 1,$$

y nuevamente por el principio del módulo máximo para funciones regulares, se obtiene que $g(q) = u$ para todo $q \in \mathbb{B}$ y para un adecuado $u \in \mathbb{H}$ con $|u| = 1$. Por lo tanto se concluye que $q^{-1}f(q) = u$, y así $f(q) = qu$. Similarmente si $|\partial_c f(0)| = 1$, se obtiene que $|g(0)| = 1$ y otra vez se sigue el mismo procedimiento, por lo que se concluye con la demostración.

$\square$

Ahora estudiemos el comportamiento de una función en particular, por medio de la siguiente:

6.2 Proposición *Para cualquier $u \in \mathbb{H}$, con $|u| = 1$, y para cualquier $q_0 \in \mathbb{B}$, el mapeo η definido por:*

$$\eta(q) = u(q - q_0)(1 - \overline{q_o}q)^{-1}$$

es un difeomorfismo de $\mathbb{B}$ sobre $\mathbb{B}$.

Demostración:

Para cualquier $q \in B$ dado, se tiene que:

$$\begin{aligned}
1 - |\eta(q)|^2 &= 1 - (q - q_0)(1 - \overline{q_0}q)^{-1}\overline{(1 - \overline{q_0}q)^{-1}(q - q_0)} \\
&= 1 - (q - q_0)[\overline{(1 - \overline{q_0}q)}(1 - \overline{q_0}q)]^{-1}\overline{(q - q_0)} \\
&= 1 - \frac{(q - q_0)(\overline{q} - \overline{q_0})}{|1 - \overline{q_0}q|^2} \\
&= \frac{(1 - \overline{q_0}q)(1 - \overline{q}q_0) - (\overline{q} - \overline{q_0})(q - q_0)}{|1 - \overline{q_0}q|^2} \\
&= \frac{1 - \overline{q_0}q - \overline{q}q_0 + |q_0|^2|q|^2 - (|q|^2 + |q_0|^2 - \overline{q}q_0 - \overline{q_0}q)}{|1 - \overline{q_0}q|^2} \\
&= \frac{1 - |q_0|^2|q|^2 - |q|^2 - |q_0|^2}{|1 - \overline{q_0}q|^2} \\
&= \frac{1 - |q|^2 - |q_0|^2(1 - |q|^2)}{|1 - \overline{q_0}q|^2} \\
&= \frac{(1 - |q|^2)(1 - |q_0|^2)}{|1 - \overline{q_0}q|^2} > 0.
\end{aligned}$$

Esto implica que $1-|\eta(q)|^2>0$, lo que a su vez implica que $\eta(B)\subseteq B$. Ahora se quiere probar que el mapeo $\delta : B \longrightarrow B$ definido por: $\delta(q) := \overline{u}(q+uq_0)(1+\overline{q_0 u}q)^{-1}$ es la inversa de η.

En efecto, para todo $q \in B$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\delta(\eta(q)) &= \overline{u}[u(q-q_0)(1-\overline{q_0}q)^{-1} + uq_0][1+\overline{q_0}\overline{u}u(q-q_0)(1-\overline{q_0}q)^{-1}]^{-1} \\
&= \left[(q-q_0)\frac{(1-\overline{q}q_0)}{|1-\overline{q_0}q|^2} + q_0][1+\frac{\overline{q_0}(q-q_0)(1-\overline{q}q_0)^{-1}}{|1-\overline{q_0}q|^2}\right]^{-1} \\
&= \left[\frac{(q-q_0)(1-\overline{q}q_0) + q_0(1-\overline{q_0}q)(1-\overline{q}q_0)}{|1-\overline{q_0}q|^2}\right] \\
&\times \left[\frac{(1-\overline{q_0}q)(1-\overline{q}q_0) + \overline{q_0}(q-q_0-|q|^2q_0+q_0\overline{q}q_0)}{|1-\overline{q_0}q|^2}\right]^{-1} \\
&= \left[\frac{q-q_0-|q|^2q_0+q_o\overline{q}q_0+q_0(1-\overline{q_0}q-\overline{q}q_0+|q_0|^2|q|^2)}{|1-\overline{q_0}q|^2}\right] \\
&\times \left[\frac{(1-\overline{q}q_0-|q_0|^2+|q_0|^2\overline{q}q_0)}{|1-\overline{q_0}q|^2}\right]^{-1} \\
&= \left[\frac{q-q_0-|q|^2q_0+q_0\overline{q}q_0+q_0-|q_0|^2q-q_0\overline{q}q_0+q_0|q_0|^2|q|^2}{|1-\overline{q_0}q|^2}\right] \\
&\times \left[\frac{(1-\overline{q}q_0-|q_0|^2(1-\overline{q}q_0))}{|1-\overline{q_0}q|^2}\right]^{-1} \\
&= \left[\frac{q-|q|^2q_0-|q_0|^2q+q_0|q_0|^2|q|^2}{|1-\overline{q_0}q|^2}\right]\left[\frac{(1-|q_0|^2)(1-\overline{q}q_0)}{|1-\overline{q_0}q|^2}\right]^{-1} \\
&= \left[\frac{q(1-|q_0|^2)-q_0|q|^2(1-|q_0|^2)}{|1-\overline{q_0}q|^2}\right]\left[\frac{(1-|q_0|^2)(1-\overline{q}q_0)}{|1-\overline{q_0}q|^2}\right]^{-1} \\
&= \left[\frac{(q-q_0|q|^2)(1-|q_0|^2)}{|1-\overline{q_0}q|^2}\right]\left[\frac{(1-|q_0|^2)(1-\overline{q}q_0)}{|1-\overline{q_0}q|^2}\right]^{-1} \\
&= [(q-q_0|q|^2)][(1-\overline{q}q_0)]^{-1} \\
&= \frac{(q-q_0|q|^2)(1-\overline{q_0}q)}{|1-\overline{q_0}q|^2} \\
&= \frac{(q-q_0|q|^2-q\overline{q_0}q+q|q_0|^2|q|^2)}{|1-\overline{q_0}q|^2} \\
&= \frac{q(1-\overline{q_0}q)-q(1-q_0q)\overline{q}q_0}{|1-\overline{q_0}q|^2} \\
&= \frac{q(1-\overline{q_0}q)(1-\overline{q}q_0)}{|1-\overline{q_0}q|^2} \\
&= q
\end{aligned}
$$

La demostración de la relación $\eta(\delta(q)) = q$ es similar.

□

Dado que la composición de funciones regulares no es necesariamente regular; se tiene que el conjunto de todas las transformaciones birregulares en la bola unitaria abierta en $\mathbb{H}$ no es un grupo bajo la composición. Sin embargo algo se puede decir usando una transformada de tipo Cayley.

Se define el semiespacio derecho cuaterniónico $\mathbb{H}^+$, como $\mathbb{H}^+ := \{q = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3 : x_0 > 0\}$, y definimos la transformada de Cayley como:

$$\Psi(q) := (1-q)^{-1}(1+q).$$

Entonces se tienen los siguientes resultados.

6.3 Lema *La transformada de Cayley es una función regular en $\mathbb{B}$.*

Demostración:

Simplemente hay que observar que:

$$\begin{aligned}\Psi(q) &= (1-q)^{-1}(1+q) \\ &= \frac{1}{1-q} + \frac{q}{1-q} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n + \sum_{n=0}^{\infty}(q^n)q \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n + \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1}.\end{aligned}$$

Es decir la transformada es una suma de dos series regulares y por tanto regular.

□

6.4 Lema *La transformada de Cayley mapea a $\mathbb{B}$ en $\mathbb{H}^+$, es decir $\Psi(\mathbb{B}) \subset \mathbb{H}^+$.*

Demostración:

Por demostar que si $q \in \mathbb{B}$, entonces $Re(\Psi(q)) > 0$. Este resultado se sigue de la Proposición 2.7 y de las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
2Re((1-q)^{-1}(1+q)) &= (1-q)^{-1}(1+q) + \overline{(1+q)(1-q)^{-1}} \\
&= \frac{(1-\overline{q})}{|1-q|^2}(1+q) + (1+\overline{q})\frac{\overline{(1-\overline{q})}}{|1-q|^2} \\
&= \frac{(1-\overline{q})(1+q)}{|1-q|^2}\frac{(1+\overline{q})(1-q)}{|1-q|^2} \\
&= 2\frac{(1-|q|^2)}{|1-q|^2} > 0.
\end{aligned}
$$

Por lo que se concluye con la demostración.

□

6.5 Lema *La función $\Theta : \mathbb{H}^+ \longrightarrow \mathbb{B}$, dada por $\Theta(w) = (w-1)(w+1)^{-1}$ es una función regular y cuya inversa es la transformada de Cayley.*

Demostración:

La regularidad de la función Θ se sigue de la deficnición de función regular, pues para cada $I \in \mathbb{S}$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x} + I\frac{\partial}{\partial y}\right) f(w) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + I\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x+Iy) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} + I\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{x+Iy-1}{(x+Iy)+1}\right) \\
&= \left(\frac{(x+Iy+1)-(x+Iy)}{[(x+Iy)+1]^2}\right) - \left(\frac{-1}{[(x+Iy)+1]^2}\right) \\
&+ I\left[\left(\frac{I(x+Iy+1)-I(x+Iy)}{[(x+Iy)+1]^2}\right) - \left(\frac{-I}{[(x+Iy)+1]^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{[(x+Iy)+1]^2} + I\left(\frac{I}{[(x+Iy)+1]^2}\right) \\
&+ \frac{1}{[(x+Iy)+1]^2} + I\left(\frac{I}{[(x+Iy)+1]^2}\right) \\
&= \frac{1}{[(x+Iy)+1]^2} - \frac{1}{[(x+Iy)+1]^2} + \frac{1}{[(x+Iy)+1]^2} - \frac{1}{[(x+Iy)+1]^2} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

es decir la transformada es una función regular.

Sólo nos resta por demostrar que las funciones Ψ y Θ son inversas entre ellas; es decir, debemos probar que $\Psi(\Theta(w)) = w$ y $\Theta(\Psi(q)) = q$. Así se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Theta(\Psi(q)) &= [(1-q)^{-1}(1+q)-1][(1-q)^{-1}(1+q)+1]^{-1} \\
&= [(1-q)^{-1}+(1-q)^{-1}q-1][(1-q)^{-1}+(1-q)^{-1}+(1-q)^{-1}q+1]^{-1} \\
&= [(1-q)^{-1}(1+q-(1-q))][(1-q)^{-1}(1+q+(1-q))]^{-1} \\
&= [(1-q)^{-1}2q][(1-q)^{-1}2]^{-1} \\
&= q.
\end{aligned}$$

Y por el otro lado se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Psi(\Theta(q)) &= \Psi\left((w-1)(w+1)^{-1}\right) \\
&= [1-(w-1)(w+1)^{-1}]^{-1}[1+(w-1)(w+1)^{-1}] \\
&= [1-(w(w+1)^{-1}-(w+1)^{-1})]^{-1}[1+(w(w+1)^{-1}-(w+1)^{-1})] \\
&= [((w+1)-w+1)(w+1)^{-1}]^{-1}[((w+1)+w-1)(w+1)^{-1}] \\
&= [2(w+1^{-1})]^{-1}[2w(w+1)^{-1}] \\
&= w.
\end{aligned}$$

Por lo que se concluye con la prueba.

□

De la combinación de los lemas anteriores, los cuales fueron demostrados, se obtiene el siguiente resultado.

6.6 Teorema *El semiespacio derecho $\mathbb{H}^+$ es difeomorfo a la bola abierta unitaria $\mathbb{B}$ via la birregularidad de la transformada de Cayley.*

Demostración:

Del Lema 6.4 se tiene que la transformada de Cayley es una función regular y que mapea a la bola unitaria en el espacio semi-derecho cuaterniónico, es decir; $\Psi(B) \subset \mathbb{H}^+$. Y por el Lema 6.6 se tiene que la función $\Theta(w) = (w-1)(w+1)^{-1}$ mapea el espacio semiespacio derecho cuaterniónico en la bola B; es decir $\Theta(\mathbb{H}^+) \subset B$. Θ es regular y es la inversa de la transformada de Cayley. Así se tiene que $\mathbb{B}$ es difeomorfo (con respecto a la C-regularidad) a $\mathbb{H}^+$ mediante la transformada regular de Cayley.

□

Capítulo 7

Ceros en series de potencias cuaterniónicas

Al comienzo de este capítulo, se verá un resultado que se extiende del caso de series de potencias como un resultado análogo de Pogorui y Shapiro (obsérvese [11]). Su resultado fué formulado para polinomios en la variable q, y su prueba fue bastante elaborada. Lo que se proporciona aquí; generaliza el caso para series de potencias, y de paso, ofrece una prueba mas corta del resultado en [11].

La sección se empieza con el siguiente:

7.1 Teorema *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n$ *una serie de potencias cuaterniónica con radio de convergencia* R*. Supongamos que existen* $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ *e* $I, J \in \mathbb{S}$ *con* $I \neq J$ *tales que* $x_0 + y_0 I$ *y* $x_0 + y_0 J$ *pertenecen al disco de convergencia y cumplen que:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_0 + y_0 I)^n a_n = 0 \tag{7.1}$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_0 + y_0 J)^n a_n = 0. \tag{7.2}$$

Entonces para todo $L \in \mathbb{S}$ *se tiene que:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_0 + y_0 L)^n a_n = 0. \tag{7.3}$$

En otras palabras si en la esfera $x_0 + y_0\mathbb{S}$ *existen dos puntos distintos, los cuales son ceros de la serie de potencias, entonces todos los elementos de la esfera* $x_0 + y_0\mathbb{S}$ *son ceros de la serie de potencias.*

Demostración:

Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ fijo y para todo $L \in \mathbb{S}$ se tiene que:

$$(x_0 + y_0 L)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x_0^{n-i} y_o^i L^i = \alpha_n + L\beta_n \tag{7.4}$$

donde

$$\alpha_n = (\sum_{i \equiv 0 (mod 4)} \binom{n}{i} x_0^{n-i} y_0^i - \sum_{i \equiv 2 (mod 4)} \binom{n}{i} x_0^{n-i} y_0^i), \tag{7.5}$$

$$\beta_n = (\sum_{i \equiv 1 (mod 4)} \binom{n}{i} x_0^{n-i} y_0^i - \sum_{i \equiv 3 (mod 4)} \binom{n}{i} x_0^{n-i} y_0^i). \tag{7.6}$$

De las ecuaciones (7.1), (7.2), (7.4) se obtiene que:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + I\beta_n) a_n - \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + J\beta_n) a_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(\alpha_n + I\beta_n) - (\alpha_n + J\beta_n)] a_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (I\beta_n - J\beta_n) a_n \\ &= (I - J)(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n a_n). \end{aligned}$$

Como por hipótesis se tiene que; $I - J \neq 0$, entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n a_n = 0$$

y por (7.1):

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=0}^{\infty}(x_0 + y_0)^n a_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n + I\beta_n)a_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n a_n) + I(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n a_n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n a_n.
\end{aligned}
$$

Ahora, para todo $L \in \mathbb{S}$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(x_0 + Ly_0)^n a_n &= \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n + L\beta_n)a_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n a_n) + L(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n a_n) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Lo que demuestra la afirmación.
□
Ahora se presentan algunas propiedades que refinan al Lema 3.5, y que son de interés independiente como ayudar a entender la geometría de funciones regulares.

7.2 Proposición *Sea f una función regular sobre la bola $\mathbb{B}$. Si existen dos unidades imaginarias distintas I y J en $\mathbb{S}$ tales que $f(L_I) \subset L_I$ y $f(L_J) \subset L_J$, entonces f tiene una representación en series de la forma*

$$
f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n
$$

con coeficientes reales a_n.

Demostración:

Si I y J satisfacen las condiciones de la proposición, se tiene que $f_I(x) = f_J(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, si escribimos:

$$
f_I(x + yI) = f_0(x + yI) + f_1(x + yI)I
$$

y

$$f_J(x+yJ) = g_0(x+yJ) + g_1(x+yJ)J$$

se obtiene que $f_0(x) + f_1(x)I = g_0(x) + g_1(x)J$ y por lo tanto $f_0(x) = g_0(x)$, mientras que $f_1(x) = g_1(x) = 0$. Considérese ahora las funciones $\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $\beta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por $\alpha(x,y) := (f_0(x+yI), f_1(x+yI))$ y $\beta(x,y) := (g_0(x+yJ), g_1(x+yJ))$, de aquí se observa que α y β satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, ya que la función f es regular y en consecuencia f_I y f_J son holomorfas lo que a su vez implica que α y β son funciones holomorfas en sus respectivos planos complejos. Sin embargo ya que coinciden en $y = 0$, por el principio de identidad de la teaía compleja, coinciden en todas partes. Esto implica que $f_I = f_0(x+yI) + f_1(x+yI)I$ y $f_J = g_0(x+yJ) + g_1(x+yJ)J$. Ahora expandemos f en series de potencias; primeramente usando L_I y después usando L_J, se obtiene que:

$$f_I(x+yI) = \sum_{n\geq 0}(x+yI)^n(a_n^0 + a_n^1 I)$$

y

$$f_J(x+yJ) = \sum_{n\geq 0}(x+yJ)^n(a_n^0 + a_n^1 J).$$

Dado que las dos expresiones coinciden cuando escribimos números reales, se obtiene que para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n^0 + a_n^1 I = a_n^0 + a_n^1 J.$$

Esto implica que $a_n^1 = 0$ para todo n, y por lo tanto la representación de la serie tiene coeficientes reales.

$\square$

El Teorema 4.1 señala una curiosa propiedad del conjunto de ceros de una función regular, cuya estructura resulta ser muy diferente del conjunto de ceros de funciones holomorfas. Los ceros son mas bondadosos en el siguiente caso.

7.3 Proposición *Si f tiene una representación en series de la forma $f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n$ con coeficientes reales a_n, entonces todos los ceros reales son aislados, y si $x_0 + y_0 I_0$ es un cero no real (es decir $y_0 \neq 0$), entonces todos los elementos de la esfera $x_0 + y_0\mathbb{S}$ son ceros de f. En particular si f no es la función cero, el conjunto de ceros de la función f consiste de puntos aislados (pertenecientes a $\mathbb{R}$) o esferas.*

Demostración:

Como se estableció en (7.4), para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$(x_0 + y_0 I)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x_0^{n-1} y_0^i I^i = \alpha_n + I\beta_n,$$

donde α_n y β_n son números reales definidos en (7.5) y (7.6). Ahora, si $y_0 \neq 0$ y $(x_0 + y_0 I)$ es un cero de f, se obtiene que:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} (x_0 + y_0 I_0)^n a_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + I_0 \beta_n) a_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a_n + I_0 (\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n a_n), \end{aligned}$$

lo que por hipótesis es real para todo n, así

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a_n = 0 = (\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n a_n)$$

y por tanto, para todo $I \in \mathbb{S}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a_n + I(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (x_0 + y_0 I)^n a_n,$$

es decir, $x_0 + y_0 I$ es un cero de f, para todo $I \in \mathbb{S}$ ó equivalentemente los elementos de la esfera imaginaria con centro en x_0 y radio y_0 son ceros de la función f. Para concluir con la demostación, obsérvese que para todo $I \in \mathbb{S}$ el plano L_I contiene todos los ceros de f y exactamente dos ceros para cada esfera de ceros de f. Como los ceros de f son puntos aislados en L_I a menos que $f \equiv 0$ (según el Teorema 6.1), el conjunto de ceros de f consiste de puntos aislados de f y dos esferas aisladas.

□

Si una función f es una extensión de una función holomorfa de L_I, para algún $I \in \mathbb{S}$, entonces estos ceros también tienen propiedades interesantes; a saber.

7.4 Proposición *Sea f una función regular sobre la bola $\mathbb{B}$, y supóngase que existe una unidad imaginaria $I \in \mathbb{S}$ tal que $f(L_I) \subset L_I$. Si existe una unidad* *imaginaria $J \in \mathbb{S}$ tal que $J \neq I$ y que $f(x_0 + y_0 J) = 0$, entonces $f(x_0 + y_0 \mathbb{S}) = 0$. En particular, si f no es la función cero, el conjunto de ceros de f consiste de puntos aislados de $\mathbb{B}$ (que pertenecen a L_I) ó esferas dentro de $\mathbb{B}$.*

Demostración:

Por el Corolario 5.7 la incluisión $f(L_I) \subset L_I$, implica que f tiene una representación en series de potencias

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n,$$

con coeficientes $a_n \in L_I$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo supuesto y por (7.4) se tiene

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} (x_0 + y_0 J)^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + J\beta_n) a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a_n + J(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n a_n) \tag{7.7}$$

con $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora definamos:

$$A := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a_n$$

y

$$B := \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n a_n.$$

Se obtiene que $A + BJ = 0$ con $A, B \in L_I$. Por lo tanto $A = B = 0$, y se obtiene obviamente que $A + LB = 0$ para todo $L \in \mathbb{S}$. La última parte de la demostración se sigue de las propiedades del conjunto de ceros de funciones holomorfas.

□

Este resultado tiene una curiosa consecuencia que concierne a los ceros de funciones holomorfas. Dado que cualquier función holomorfa f puede ser extendida a una función regular sobre cuaternios; ésto se debe a que cualquier función f en $\mathbb{C}$ siempre está determinada por $f(z) = \alpha_z + i\beta_z$, donde α_z y β_z son números reales que dependen de la función en términos de la variable z, para ver este hecho un poco más claro veamos el siguiente ejemplo:

Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una serie de potencias de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} z^n a_n$, es decir; a cada $z = a + ib \in \mathbb{C}$ le corresponde $f(x+iy) = \sum_{n=0}^{\infty} (x+iy)^n a_n$. Luego entonces sea $F : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ dada por $F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n$, luego para todo $I \in \mathbb{S}$ $f_I = f$, por lo tanto F es regular.

La pregunta de hacer la distinción de cuáles ceros de f permanecen aislados después de la extensión, y cuáles llegan a ser esferas. Para ello realicemos algunos cálculos; así sea $I \in \mathbb{S}$, $\Delta_I(0,R) = \{x+yI : x^2+y^2 < R^2\}$, y sea $f : \Delta_I(0,R) :\longrightarrow \mathbb{R}+\mathbb{R}I$ una función holomorfa. Si para cada $\{r_n\}, \{s_n\} \subset \mathbb{R}$,

$$f(x+yI) = \sum_{n=0}^{\infty}(x+yI)^n(r_n+s_nI)$$

es la expansión en series de potencias de f, entonces $f(x+yI) = 0$ puede escribirse en términos de (7.4) como:

$$(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(r_n+s_nI)) + I(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(r_n+s_nI)) = 0 \tag{7.8}$$

y como:

$$(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n r_n - \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n s_n) + I(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n s_n + \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n r_n) = 0$$

es decir;

$$(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n r_n - \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n s_n) = 0 = (\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n s_n + \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n r_n).$$

7.5 Proposición *Sea $f : \Delta_I :\longrightarrow \mathbb{R}+\mathbb{R}I$ una función holomorfa y sea $\widetilde{f} : B(0,R) \longrightarrow \mathbb{H}$ la extensión regular de f, y sea $\widetilde{f}(x_0+y_0I) = 0$. El cero (x_0+y_0I) de $\widetilde{f}$ no es aislado, o equivalentemente; $\widetilde{f}(x_0+y_0\mathbb{S}) = 0$ si y sólo si $0 = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n r_n = \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n s_n = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n s_n = -\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n r_n$.*

Demostración:

Del hecho de que: $\widetilde{f}(x_0+y_0L)$ para todo $L \in \mathbb{S}$, por (7.7);

$$(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(r_n+s_nI)) = 0.$$

La afirmación se sigue las igualdades que se ven en (7.8).

□

Un resultado más refinado es el siguiente.

7.6 Proposición *Sea f una función diferente de cero, y sea $I \in \mathbb{S}$ tal que $f(L_I) \subset L_I$. Entonces, para todo $J \neq I$, $J \in \mathbb{S}$ se tiene que $f(L_J) \nsubseteq (L_I)^{\perp}$, donde $(L_I)^{\perp}$ es el complemento ortogonal de L_I.*

Demostración:

Primeramente nótese, que por el Corolario 4,7, la condición $f(L_I) \subset L_I$ implica que:

$$f_I(x+yI) = \sum_{n=0}^{\infty} (x+yI)^n (a_n^0 + a_n^1 I).$$

Tomando ahora una unidad imaginaria diferente J; supóngase que $f(L_J) \subset (L_I)^{\perp}$. Por lo que se tiene que:

$$f_J(x+yJ) = \sum_{n=0}^{\infty} (x+yJ)^n (b_n^0 \widetilde{J} + b_n^1 \widetilde{K}),$$

donde la envergadura el plano generado por$\widetilde{J}, \widetilde{K}$ es ortogonal a L_I. Por lo tanto

$$a_n^0 + a_n^1 I = b_n^0 \widetilde{J} + b_n^1 \widetilde{K}$$

y por tanto

$$a_n^0 = a_n^1 = b_n^0 = b_n^1 = 0,$$

lo que implica que f es la función cero, lo que contradice la hipótesis del enunciado.

De esta manera se concluye con la demostración.

□

En la adición se tiene que:

7.7 Proposición *Sea f una función no cero, y sea $I_0 \in \mathbb{S}$ tal que $f(L_{I_0}) \not\subseteq L_{I_0}$. Sea $J \in \mathbb{S}$ cualquier unidad imaginaria ortogonal a I_0 y sean F_0 y G_0 dos funciones holomorfas tales que, $f_{I_0} = F_0 + G_0 J$. Entonces*

1. *G_0 no es idénticamente a la función cero.*
2. *Si existe $q \in L_{I_0}$ tal que $f(q) = 0$, entonces ni F_0 ni G_0 son idénticamente constantes (excepto que F_0 puede ser idénticamente cero).*
3. *Si existe $T \in \mathbb{S}$ con T no ortogonal a I_0 tal que $f(L_T) \subset L_T$, entonces; f no es idénticamente la función cero.*

Demostración:

La demostración de 1 se sigue del hecho de que si la función G_0 fuera cero entonces se tendría que para cualquier $x \in \mathbb{R}$ y $x \in Ł_{I_0}$, entonces $f_{I_0}(x) = F_0(x) \in \mathbb{R} \subset L_{I0}$, lo que sería una contradicción a la hipótesis.

La prueba de 3. se procederá por contradicción.
Si $F_0 \equiv 0$, entonces

$$f_{I_0}(x + yI_0) = \sum_{n=0}^{\infty}(x + yI_0)^n(a_n^0 J + a_n^1 K),$$

donde $K = I_0 J$. Más aun, como $f(L_T) \subset L_T$ se tiene que:

$$f_{I_0}(x + yT) = \sum_{n=0}^{\infty}(x + yT)^n(b_n^0 + b_n^1 T).$$

Ahora, por la unicidad de la expansión de serie cuaterniónica de f se establece que:

$$(a_n^0 J + a_n^1 K) = (b_n^0 + b_n^1 T).$$

Por hipótesis T no es ortogonal a I_0 lo que implica que T no pertenece a $\mathbb{R}J + \mathbb{R}K$ y por tanto

$$a_n^0 = a_n^1 = b_n^0 = b_n^1 = 0,$$

para todo n, contradiciendo la hipótesis de que f no es idénticamente la función cero. $\square$

Finalmente se termina esta sección con un resultado que fue obtenido originalmente de [6].

7.8 Proposición *Sea f una función regular sobre $\mathbb{B}$ con f diferente de la función cero. Para cada unidad imaginaria $I \in \mathbb{S}$, sea $J_I = J$ una unidad imaginaria ortogonal a I, y sean $F_I, G_I : L_I \cap \mathbb{B} \longrightarrow L_I$ funciones holomorfas tales que $f_I = F_I + G_I J$. Entonces:*

1. *$G_I = 0$ sobre L_I para todo I, o a lo más existe una unidad imaginaria I tal que $G_I = 0$ sobre L_I.*

2. *Si $F_{I_1} = 0$ sobre L_{I_1} y $F_{I_2} = 0$ sobre L_{I_2} para $I_1 \neq I_2$, entonces $F_T = 0$ sobre L_T para todos los elementos $T \in \mathbb{R}I_1 + \mathbb{R}I_2$.*

3. *Si existe una unidad imaginaria I tal que $G_I = 0$ sobre L_I (respectivamente $F_I = 0$ sobre L_I), entonces no existe otra unidad I' que no es ortogonal con I tal que $G_{I'} = 0$ sobre $L_{I'}$ (respectivamente $F_{I'} = 0$ sobre $L_{I'}$).*

Demostración:
(1) Si existen dos unidades imaginarias $I_1 \neq I_2$ tales que $G_{I_1} \equiv 0$ sobre L_{I_1} y $G_{I_2} \equiv 0$ sobre L_{I_2}, entonces $F(L_{I_1}) \subset L_{I_1}$ y $F(L_{I_2}) \subset L_{I_2}$, por lo tanto por el Corolario 3.8 se obtiene que

$$f_{I_1}(x+yI_1) = \sum_{n=0}^{\infty}(x+yI_1)^n(a_n^0 + a_n^1 I_1), \quad \textit{sobre} \quad L_{I_1} \cap B$$

y

$$f_{I_2}(x+yI_2) = \sum_{n=0}^{\infty}(x+yI_2)^n(b_n^0 + b_n^1 I_2), \quad \textit{sobre} \quad L_{I_2} \cap B.$$

La unicidad de la expansión en series de potencias de la función f establece que $(a_n^0 + a_n^1 I_1) = (b_n^0 + b_n^1 I_2)$, y por tanto; $a_n^0 = b_n^0$, $a_n^1 = b_n^1 = 0$, para toda n. Por lo tanto, para toda $I \in \mathbb{S}$ la serie

$$f_I(x+yI) = \sum_{n=0}^{\infty}(x+yI)^n a_n^0,$$

tiene valores en L_I, que es $G_I \equiv 0$ sobre L_I.

(2) Si $F_{I_1} \equiv 0$ sobre L_{I_1} y $F_{I_2} \equiv 0$ sobre L_{I_2}, entonces para cada $J \in \mathbb{S}$ perpendicular a I_1 y a I_2, se tiene que:

$$f_{I_1}(x+yI_1) = \sum_{n=0}^{\infty}(x+yI_1)^n(a_n^0 + a_n^1 I_1)J, \quad \textit{sobre} \quad L_{I_1} \cap B$$

y

$$f_{I_2}(x+yI_2) = \sum_{n=0}^{\infty}(x+yI_2)^n(b_n^0 + b_n^1 I_2)J, \quad \textit{sobre} \quad L_{I_2} \cap B.$$

La unicidad de la expansión en series de potencias de la función f implica que $(a_n^0 + a_n^1 I_1)J = (b_n^0 + b_n^1 I_2)J$, y por tanto $a_n^0 = b_n^0$, $a_n^1 = b_n^1 = 0$, para toda n. Ahora para cualquier unidad imaginaria $T \in \mathbb{R}I_1 + \mathbb{R}I_2 \subset (L_J)^{\perp}$ la serie:

$$f_T(x+yT) = \sum_{n=0}^{\infty}(x+yT)^n(a_n^0)J,$$

tiene valores en $\mathbb{R}J + \mathbb{R}(TJ) = (L_J)^{\perp}$, es decir $f_T \equiv 0$ sobre L_T.

(3) Si existen unidades imaginarias $I \neq I'$ tales que $G_I \equiv 0$ sobre L_I y $F_{I'} \equiv 0$ sobre $L_{I'}$, entonces con $J \in \mathbb{S}$ como antes, ambas perpendiculares a I y a I', se sigue (por el Corolario 5.7)

$$f_I(x+yI) = \sum_{n=0}^{\infty}(x+yI)^n(a_n^0 + a_n^1 I), \quad sobre \quad L_I \cap \mathbb{B}$$

y

$$f_{I'}(x+yI^{'}) = \sum_{n=0}^{\infty}(x+yI^{'})^n(b_n^0 + b_n^1 I^{'})J, \quad sobre \quad L_{I'} \cap \mathbb{B}.$$

Dado que $I^{'}$ no es ortogonal con I, entonces $I^{'}J$ no pertenecen a $\mathbb{R}I + \mathbb{R}J$; otra vez por la unicidad de la expansión en series de potencias de la función f se establece que $a_n^0 = b_n^0 = a_n^1 = b_n^1 = 0$, con lo que concluye con la demostración.

$\square$

Capítulo 8

Funciones Regulares en un Álgebra de Clifford

En un reciente trabajo [14], se ve como las ideas de esta tesis se pueden extender a una teoría de series de potencias con coeficientes no sólo cuaterniónicos, sino también octoniónicos para proveer una extensión de la renombrada prueba del Teorema Fundamental del Álgebra de Gauss en el caso de polinomios con coeficientes cuaterniónicos y octoniónicos.

Ahora en esta sección se estudia de una manera semejante a lo que se ha hecho hasta ahora para el caso de funciones definidas sobre un álgebra de Clifford $Cl(0,3)$, con tres generadores.

Para ello comencemos con la siguiente subsección.

8.1. Propiedades Algebraicas de Cl(0,3).

Denotemos por $Cl(0,3)$ el álgebra de Clifford de signatura (0,3). Está álgebra puede ser definida como sigue (véase [2], para ésta y otras definiciones): Sea $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica ortonormal de $\mathbb{R}^3$, con la siguiente relación:

$$e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij}.$$

Un elemento x del álgebra de Clifford $Cl(0,3)$ se escribe de manera única como:

$$x = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_{12}e_1e_2 + x_{13}e_1e_3 + x_{23}e_2e_3 + x_{123}e_1e_2e_3,$$

donde los coeficientes $x_i, x_{ij}, x_{ijk} \in \mathbb{R}$. Así se ve que $Cl(0,3)$ es un espacio real de ocho dimensiones dotado con una estructura multiplicativa. Nótese que el cuadrado de una unidad e_i, e_{ij} es menos uno, mientras que el cuadrado de $e_1e_2e_3$ es uno. Por esta razón, a veces el elemento $e_1e_2e_3$ es llamado seudoescalar. Por lo tanto es apropiado definir el conjunto de los números Cliffordianos reales como $\mathcal{R} := \{x \in Cl(0,3) : x = x_0 + x_{123}e_1e_2e_3\}$ y el conjunto de los números Cliffordianos imaginarios como $\mathcal{I} := \{x \in Cl(0,3) : x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_{12}e_1e_2 + x_{13}e_1e_3 + x_{23}e_2e_3\}$. Con estas definiciones es posible descomponer cualquier elemento de $Cl(0,3)$ como la suma de un elemento en $\mathcal{R}$, es decir su parte real $(\operatorname{Re}(x))$, y un elemento en $\mathcal{I}$, es decir su parte imaginaria $(\operatorname{Im}(x))$.

Por comodidad en los cálculos se redefininen las siguientes notaciones: $e_{ij} := e_ie_j$ con $i, j = 0, 1, 2, 3$ y $e_{123} := e_1e_2e_3$

Usando la tabla de relaciones que se encuentra enseguida, uno puede construir una tabla de multiplicación para $Cl(0,3)$.

	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{13}	e_{23}	e_{123}
e_1	-1	e_1e_2	e_1e_3	-e_2	-e_3	$e_1e_2e_3$	-e_2e_3
e_2	-e_1e_2	-1	e_2e_3	e_1	-$e_1e_2e_3$	-e_3	e_1e_3
e_3	-e_1e_3	-e_2e_3	-1	$e_1e_2e_3$	e_1	e_2	-e_1e_3
e_1e_2	e_2	-e_1	$e_1e_2e_3$	-1	e_2e_3	-e_1e_3	-e_3
e_1e_3	e_3	-$e_1e_2e_3$	-e_1	-e_2e_3	-1	e_1e_2	e_2
e_2e_3	$e_1e_2e_3$	e_3	-e_2	e_1e_3	-e_1e_2	-1	-e_1
$e_1e_2e_3$	-e_2e_3	e_1e_3	-e_1e_2	-e_3	e_2	-e_1	1

Denotemos por $\mathbb{K}$ cualquiera de las siguientes álgebras $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$, $Cl(0,3)$. Para cada una de estas algebras se define, el conjunto de todos los elementos cuyo cuadrado es igual a menos uno, es decir; $\mathbb{S}_{\mathbb{K}} := \{w \in \mathbb{K} : w^2 = -1\}$. Un segundo conjunto de interés para esta teoría es al que llamamos esfera imaginaria y usualmente se denota por $\mathbb{U}_{\mathbb{K}} := \{w \in \mathbb{K} : \operatorname{Re}(w) = 0 \quad y \quad |\operatorname{Im}(w)| = 1\}$.

Un primer e interesante fenómeno que ocurre en el caso del álgebra de Clifford es el hecho de que $\mathbb{S}_{Cl(0,3)}$ está propiamente contenido en $\mathbb{U}_{Cl(0,3)}$ y se demuestra en la siguiente proposición.

8.1.1 Proposición *Un elemento* $x = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_{12}e_1e_2 + x_{13}e_1e_3 + x_{23}e_2e_3 + x_{123}e_1e_2e_3 \in Cl(0,3)$ *pertenece a* $\mathbb{S}_{Cl(0,3)}$ *si y sólo si* $x \in \mathbb{U}_{Cl(0,3)}$ *y satisface que*

$$x_1x_{23} - x_2x_{13} + x_3x_{12} = 0.$$

Demostración:

Sea $x \in Cl(0,3)$ entonces el cuadrado de x está dado por

$$\begin{aligned} x^2 &= x_0^2 + x_{123}^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_{12}^2 - x_{13}^2 - x_{23}^2 \\ &+ 2e_1(x_0x_1 - x_{23}x_{123}) + 2e_2(x_0x_2 + x_{13}x_{123}) \\ &+ 2e_3(x_0x_3 - x_{12}x_{123}) + 2e_1e_2(x_0x_{12} - x_3x_{123}) \\ &+ 2e_1e_3(x_0x_{13} + x_2x_{123}) + 2e_2e_3(x_0x_{23} - x_1x_{123}) \\ &+ 2e_1e_2e_3(x_0x_{123} + x_1x_{23} - x_2x_{13} + x_3x_{12}). \end{aligned}$$

Ahora supongamos que $x \in \mathbb{S}_{Cl(0,3)}$, entonces $x^2 = -1$ y por tanto $x \neq 0$, esto implica que $x \cdot x = -1$, $\Longrightarrow x = -x^{-1} \Longrightarrow x = \frac{\overline{-x}}{|x|}$, $\Longrightarrow |x| = \left|\frac{\overline{x}}{|x|}\right| = 1$ y por tanto $|x| = 1$. Ahora si se tiene que $x^2 = -1$, se obtiene el sistema

$$\begin{cases} x_0^2 + x_{123}^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_{12}^2 - x_{13}^2 - x_{23}^2 = -1, \\ x_0x_1 - x_{23}x_{123} = 0, \\ x_0x_2 + x_{13}x_{123} = 0, \\ x_0x_3 - x_{12}x_{123} = 0, \\ x_0x_{12} - x_3x_{123} = 0, \\ x_0x_{13} + x_2x_{123} = 0, \\ x_0x_{23} - x_1x_{123} = 0, \\ x_0x_{123} + x_1x_{23} - x_2x_{13} + x_3x_{12} = 0. \end{cases}$$

Si suponemos que $x_0 \neq 0$, se pueden resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} x_0x_1 - x_{23}x_{123} = 0, \\ x_0x_2 + x_{13}x_{123} = 0, \\ x_0x_3 - x_{12}x_{123} = 0, \\ x_0x_{12} - x_3x_{123} = 0, \\ x_0x_{13} + x_2x_{123} = 0, \\ x_0x_{23} - x_1x_{123} = 0, \\ x_0x_{123} + x_1x_{23} - x_2x_{13} + x_3x_{12} = 0. \end{cases}$$

y obtener (con $\sigma = (i, j, k)$ una permutación de (1,2,3))

$$x_i = sgn(\sigma)\frac{x_{ij}x_{123}}{x_0}$$

y

$$x_{ij} = sgn(\sigma)\frac{x_i x_{123}}{x_0}.$$

Y estas soluciones implican que

$$x_i = x_i\left(\frac{x_{123}}{x_0}\right)^2,$$

y

$$x_{jk} = x_{jk}\left(\frac{x_{123}}{x_0}\right)^2.$$

Nótese que si $x_0 \neq 0$, es imposible que x_1, x_2, x_3 y x_{13}, x_{23}, x_{12} sean cero, pues si eso sucediece la primera ecuación del sistema nos diría que $x_0^2 + x_{123}^2 = -1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, si $x_0 \neq 0$ se tiene que x_1, x_2, x_3 ó x_{13}, x_{23}, x_{12} deben ser diferentes de cero y las dos soluciones de las ecuaciones implican que $x_0^2 = x_{123}^2$, y en consecuencia $x_{123} \neq 0$ y por lo tanto $x_0^2 + x_{123}^2 = 2x_0^2$.

Si $x_0 = x_{123}$ entonces el sistema se reescribe como

$$\begin{cases} 2x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_{12}^2 - x_{13}^2 - x_{23}^2 = -1, \\ x_1 - x_{23} = 0, \\ x_2 + x_{13} = 0, \\ x_3 - x_{12} = 0, \\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \end{cases}$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $x_0 = 0$, lo que implica que $x_{123} = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_{12}^2 + x_{13}^2 + x_{23}^2 = 1$ y $x_1x_{23} - x_2x_{13} + x_3x_{12} = 0$.

Ahora si $x_0 = -x_{123}$ entonces el sistema se reescribe como

$$\begin{cases} 2x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_{12}^2 - x_{13}^2 - x_{23}^2 = -1, \\ x_1 + x_{23} = 0, \\ x_2 - x_{13} = 0, \\ x_3 + x_{12} = 0, \\ -x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0. \end{cases}$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $x_0 = 0$, lo que implica que $x_{123} = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_{12}^2 + x_{13}^2 + x_{23}^2 = 1$ y $x_1x_{23} - x_2x_{13} + x_3x_{12} = 0$.

Por otra parte si $x \in \mathbb{U}_{Cl(0,3)}$ y $x_1x_{23} - x_2x_{13} + x_3x_{12} = 0$, entonces $x^2 = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_{12}^2 - x_{13}^2 - x_{23}^2 = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_{12}^2 + x_{13}^2 + x_{23}^2) = -1$. Y por tanto $x \in \mathbb{S}_{Cl(0,3)}$.

Lo que concluye con la demostración.

□

8.1.2 Nota *De acuerdo a los cálculos mostrados en la demostración anterior, el conjunto de elementos $w \in Cl(0,3)$ tales que $w^2 = 1$ se reduce a $w = \pm 1$ y $w = \pm e_1e_2e_3$.*

Siguiendo las ideas de este trabajo, se necesita escribir cada elemento del álgebra de Clifford como la suma de un número Cliffordiano real y el producto de un elemento de $\mathbb{S}_{Cl(0,3)}$ con un número Cliffordiano real, a saber:

$$x = (\alpha + \beta e_1e_2e_3) + I(\gamma + \delta e_1e_2e_3)$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son números reales e $I \in \mathbb{S}_{Cl(0,3)}$.

Como se puede ver ésto no siempre es posible, pero el conjunto de excepciones es "pequeño". Para obtener este resultado es necesario realizar unos cálculos previos. Primero nótese que si $w = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_{12}e_1e_2 + x_{13}e_1e_3 + x_{23}e_2e_3$ es un número imaginario Cliffordiano, y $(\gamma + \delta e_1e_2e_3)$ es un número CLiffordiano real, entonces su producto está dado por:

$$\begin{aligned} w(\gamma + \delta e_1e_2e_3) &= e_1(\gamma x_1 - \delta x_{23}) + e_2(\gamma x_2 + \delta x_{13}) + e_3(\gamma x_3 - \delta x_{12}) \\ &+ e_1e_2(\gamma x_{12} - \delta x_3) + e_1e_3(\gamma x_{13} + \delta x_2) \\ &+ e_2e_3(\gamma x_{23} - \delta x_1). \end{aligned} \tag{1}$$

Si, por otra parte, multiplicamos dos números imaginarios Cliffordianos $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_{12}e_1e_2 + x_{13}e_1e_3 + x_{23}e_2e_3$ y $v = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 + y_{12}e_1e_2 + y_{13}e_1e_3 + y_{23}e_2e_3$, se obtiene que

$$\begin{aligned} uv = &-x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_{12}y_{12} - x_{13}y_{13} - x_{23}y_{23} + e_1(x_2y_{12} + x_3y_{13} - \\ &- x_{12}y_2 - x_{13}y_3) + e_2(-x_1y_{12} + x_3y_{23} + x_{12}y_1 - x_{23}y_3) + e_3(-x_1y_{13} - x_2y_{23} + \\ &+ x_{13}y_1 + x_{23}y_2) + e_1e_2(x_1y_2 - x_2y_1 + x_{13}y_{23} - x_{23}y_{13}) + e_1e_3(x_1y_3 - x_3y_1 - \\ &- x_{12}y_{23} + x_{23}y_{12}) + e_2e_3(x_2y_3 - x_3y_2 + x_{12}y_{13} - x_{13}y_{12}) + e_1e_2e_3(x_1y_{23} - x_2y_{13} \\ &+ x_3y_{12} + x_{12}y_3 - x_{13}y_2 + x_{23}y_1). \end{aligned} \tag{2}$$

8.1.3 Proposición *Dado un elemento* $w = x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_{12}e_1e_2+x_{13}e_1e_3+x_{23}e_2e_3$ *en* $\mathfrak{I}$*, existen dos números reales distintos a y b, y un elemento* $I \in \mathbb{S}_{Cl(0,3)}$*, tal que* $w = I(a+be_1e_2e_3)$ *si y sólo si* $(x_1,x_2,x_3) \neq (x_{23},-x_{13},x_{12})$*.*

Demostración: Sea $\lambda = (x_1,x_2,x_3)$ y $\mu = (x_{23},-x_{13},x_{12})$. Para probar el resultado veremos si en las condiciones de abajo es posible encontrar dos números reales γ y δ tales que $w(\gamma+\delta e_1e_2e_3)$ pertenezca a $\mathbb{S}_{Cl(0,3)}$ y $(\gamma+\delta e_1e_2e_3)$ sea invertible en $\mathfrak{R}$. De (1), y por la Proposición 8.1.1, este es un requisito equivalente, para $\epsilon = \frac{\gamma}{\delta}$,

$$(\lambda\mu)^2\epsilon^2 - (|\lambda|^2+|\mu|^2)\epsilon + \lambda\mu = 0.$$

El discriminante de la ecuación anterior es

$$\Delta = (|\lambda|^2 - |\mu|^2)^2 \geq 0$$

y por lo tanto la ecuación siempre tiene solución en ϵ. Nótese que cada solución para cada ϵ da (salvo signo) sólo dos soluciones para el par (γ,δ) por tanto se tiene que $|w(\gamma+\delta e_1e_2e_3)| = 1$. Ahora queremos ver si cualquiera de las soluciones que se acaban de obtener para $\gamma+\delta e_1e_2e_3$ son invertibles. Para esto se intenta resolver

$$(\gamma+\delta e_1e_2e_3)(a+be_1e_2e_3) = 1.$$

Esta ecuación tiene una solución en (a,b) si y sólo si $\gamma^2 \neq \delta^2$ y por tanto $\epsilon^2 \neq \pm 1$. La forma explícita de la solución para ϵ nos muestra que sólo en el caso cuando $\epsilon = \pm 1$ es cuando $\lambda = \pm\mu$.

□

8.1.4 Nota *Una revisión un poco más detallada de la proposición anterior, nos muestra que dado un elemento* $w = x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_{12}e_1e_2+x_{13}e_1e_3+x_{23}e_2e_3$ *en* $\mathfrak{I}$*, con la condición* $(x_1,x_2,x_3) \neq (x_{23},-x_{13},x_{12})$*, entonces existen dos unidades imaginarias I y J y dos posibles parejas* (a,b) *satisfaciendo la conclusión previa a la proposición. En efecto si* $w = I(a+be_1e_2e_3)$*, entonces es cierto que exista* $J \in \mathbb{S}_{Cl(0,3)}$ *tal que* $w = I(a+be_1e_2e_3) = J(b+ae_1e_2e_3)$*. Los cálculos muestran que si* $I = i_1e_1+i_2e_2+i_3e_3+i_{12}e_1e_2+i_{13}e_1e_3+i_{23}e_2e_3$ *y* $J = j_1e_1+j_2e_2+j_3e_3+j_{12}e_1e_2+j_{13}e_1e_3+j_{23}e_2e_3$*, entonces I y J son ortogonales y sus coordenadas están relacionadas por el siguiente sistema*

$$\begin{cases} i_1 = -j_{23} & i_{12} = -j_3, \\ i_2 = j_{13} & i_{13} = j_2, \\ i_3 = -j_{12} & i_{23} = -j_1. \end{cases}$$

Esto último muestra que $J = Ie_1e_2e_3$*, y por lo tanto*

$$I(a + be_1e_2e_3) = Ie_1e_2e_3e_1e_2e_3(a + be_1e_2e_3) = J(b + ae_1e_2e_3).$$

Para desarollar una teoría de funciones sobre $Cl(0,3)$, se necesita probar que, dado $I \in \mathbb{S}_{Cl(0,3)}$ es posible empezar con $1, e_1e_2e_3, I, Ie_1e_2e_3$, elegimos $J \in \mathbb{S}_{Cl(0,3)}$ y completar una base para $Cl(0,3)$ con los vectores $J, Je_1e_2e_3, IJ, IJe_1e_2e_3$. Esto nos dejará ver que cada elemento $w = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_{12}e_1e_2 + x_{13}e_1e_3 + x_{23}e_2e_3 + x_{123}e_1e_2e_3 \in Cl(0,3)$ puede ser representado como

$$x = X_1 + X_2e_1e_2e_3 + X_3I + X_4Ie_1e_2e_3 + X_5J + X_6Je_1e_2e_3 + X_7IJ + X_8IJe_1e_2e_3$$

y, como $Je_1e_2e_3 = e_1e_2e_3J$, se tiene que

$$x = (X_1 + X_2e_1e_2e_3) + I(X_3 + X_4e_1e_2e_3) + [(X_5 + X_6e_1e_2e_3) + I(X_7 + X_8e_1e_2e_3)]J.$$

8.1.5 Proposición *Dados $I \in \mathbb{S}_{Cl(0,3)}$, es posible elejir $J \in \mathbb{S}_{Cl(0,3)}$ tal que J es perpendicular a I y a $Ie_1e_2e_3$. Además, para tal J, el conjunto*

$$B = \{1, e_1e_2e_3, I, Ie_1e_2e_3, J, Je_1e_2e_3, IJ, IJe_1e_2e_3\}$$

es una base para $Cl(0,3)$.

Demostración: La existencia de J con la prescripción perpendicular se tiene como una consecuencia dimensional. Notando esos dos elementos perpendiculares en $\mathbb{S}_{Cl(0,3)}$, el hecho de que el conjunto B es una base es una consecuencia de los cálculos de la Proposición 9.1.1 y las ecuaciones (1) y (2).
$\square$

8.2. Funciones regulares y su expansión en series de potencias

En esta parte del trabajo denotaremos por U el conjunto de todos los números Cliffordianos $x \in Cl(0,3)$, tales que $x = 0$ o $(x_1, x_2, x_3) \neq (x_{23}, -x_{13}, x_{12})$.

8.2.1 Definición *Sea Ω un dominio en U. Una función real diferenciable $f : \Omega \longrightarrow Cl(0,3)$ es llamada regular, si para cada $I \in \mathbb{S}_{Cl(0,3)}$ la función f_I, que está en un plano de Clifford de cuatro dimensiones $L_I := \Re + I\Re := \{(t_1 + t_2e_1e_2e_3) + I(t_3 + t_4e_1e_2e_3)$, satisface sobre $\Omega \bigcap L_I$ el sistema*

$$2D_I f_I = (d_{12} + I d_{34}) f_I = 0,$$

donde $d_{ij} = d_{t_i t_j}$ *indican las respectivas derivadas de* t_i *y* t_j*, es decir*

$$d_{ij} = \frac{\partial}{\partial t_i}\frac{\partial}{\partial t_j}.$$

Contrario a lo que pasa en los casos de Hamilton y Cayley, la elección de la unidad $I \in \mathbb{S}_{Cl(0,3)}$ no es única dado un punto $x \in U$, como se observa en la nota 9.1.4.

Así se necesita analizar cual es la implicación de las dos diferentes representaciones que se pueden tener de un punto dado $x \in U$. Sea x un número de Clifford en U que admite dos representaciones, digamos

$$x = x_I = (t_1 + t_2 e_1 e_2 e_3) + I(t_3 + t_4 e_1 e_2 e_3)$$

y también

$$x = x_K = (t_1 + t_2 e_1 e_2 e_3) + K(t_4 + t_3 e_1 e_2 e_3).$$

Como se tiene que $x = x_I = x_K$, podemos reescribir las igualdades de la siguiente manera

$$x = x_I = (t_1 + I t_3) + (t_2 + I t_4) 4 e_1 e_2 e_3$$

y

$$x = x_K = (t_1 + K t_4) + (t_2 + K t_3) e_1 e_2 e_3.$$

Por la dimensionalidad, se puede encontrar otra unidad $J \in \mathbb{S}_{Cl(0,3)}$, en la esencia de la Proposición 9.1.5 podemos completar en ambos casos las bases generadas por I y la base generada por K. Entonces para que la definición sea consistente se necesita que

$$2D_I f_I = (d_{12} + I d_{34}) f_I(x_I) = 2D_K f_K = (d_{12} + K d_{34}) f_K(x_K) = 0.$$

Para comprender la consecuencia de esta última petición se necesitan expresar los valores de f_I y f_K en términos de las bases de $Cl(0,3)$, para este propósito, escribimos

$$\begin{aligned}
f_I(x_I) &= (f_{00} + f_{01}e_1e_2e_3) + I(f_{10} + f_{11}e_1e_2e_3) + [(g_{00} + g_0e_1e_2e_3)+ \\
&+ I(g_{10} + g_{11}e_1e_2e_3)]J \\
&= (f_{00} + If_{10}) + (f_{01} + If_{11})e_1e_2e_3 + [(g_{00} + Ig_{11}) + (g_{01} + Ig_{10})e_1e_2e_3]J \\
&= F_0 + F_1e_1e_2e_3 + (G_0 + G_1e_1e_2e_3)J.
\end{aligned}$$

Similarmente, teniendo en cuenta la Nota 9.1.4, se tiene que

$$\begin{aligned}
f_K(x_K) &= (f_{00} + f_{01}e_1e_2e_3) + K(f_{10} + f_{11}e_1e_2e_3) + [(g_{00} + g_0e_1e_2e_3)+ \\
&+ K(g_{10} + g_{11}e_1e_2e_3)]J \\
&= (f_{00} + Kf_{10}) + (f_{01} + Kf_{11})e_1e_2e_3 + [(g_{00} + Kg_{11}) + (g_{01} + Kg_{10})e_1e_2e_3]J \\
&= M_0 + M_1e_1e_2e_3 + (N_0 + N_1e_1e_2e_3)J.
\end{aligned}$$

Así, la Definición 6 es equivalente a los siguientes cuatro sistemas de dos dimensiones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} d_{12}f_{00} = d_{34}f_{10}, \\ d_{12}f_{10} = -d_{34}f_{00}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{12}f_{01} = d_{34}f_{11}, \\ d_{12}f_{11} = -d_{34}f_{01}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{12}f_{00} = d_{43}f_{11}, \\ d_{12}f_{11} = -d_{43}f_{00}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{12}f_{01} = d_{43}f_{10}, \\ d_{12}f_{10} = -d_{43}f_{01}. \end{cases}$$

Como una consecuencia de estas últimas relaciones se tiene el siguiente

8.2.2 Teorema *Sea Ω un dominio en U, sea*

$$f = F_0 + F_1e_1e_2e_3 + (G_0 + G_1e_1e_2e_3)J = M_0 + M_1e_1e_2e_3 + (N_0 + N_1e_1e_2e_3)J$$

una función diferenciable en U y sea

$$z_1 = t_1 + It_3, z_2 = t_2 + It_4, w_1 = t_1 + Kt_4, w_2 = t_2 + Kt_3.$$

Entonces f es una función regular sobre Ω si y sólo si F_0, F_1, G_0, G_1 son holomorfas en (z_1, z_2), y M_0, M_1, N_0, N_1 son holomorfas en (w_1, w_2).

Demostración: La demostración de este teorema se desarrolla en los cálculos que preceden al teorema. Pues sólo restaría definir las funciones $f_I = F_0 + F_1e_1e_2e_3 + (G_0 + G_1e_1e_2e_3)J$ y $f_K = M_0 + M_1e_1e_2e_3 + (N_0 + N_1e_1e_2e_3)J$ y seguir los cálculos mostrados con anterioridad.
$\square$

Hay que observar que no hay ejemplos triviales de funciones regulares en este sentido. Por ejemplo, con la misma notación que se ha citado antes, se puede considerar

$$\begin{cases} f_{00} = t_1t_2 - t_3t_4, \\ f_{10} = t_2t_3 + t_1t_4. \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} f_{01} = \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2 - t_3^2 - t_4^2), \\ f_{11} = t_1t_3 + t_2t_4. \end{cases}$$

Se tiene que $F_0 = z_1z_2$, $F_1 = (1/2)(z_1^2 + z_2^2)$, $M_0 = (1/2)(w_1^2 + w_2^2)$, $M_1 = w_1w_2$ satisfacen las condiciones del teorema, y nos ofrecen un ejemplo de una función regular.

Ahora probemos que una función regular puede ser expresada en serie de potencias.

8.2.3 Teorema *Sea f una función regular en U. Para un punto arbitrario $w = z_1 + z_2e_1e_2e_3 \in U$ existen números Cliffordianos a_{mn} tales que*

$$f(z_1 + z_2e_1e_2e_3) = \sum_{m,n \in \mathbb{N}} z_1^m z_2^n a_{mn}$$

donde

$$a_{mn} = \frac{\partial^{m+n} f(0)}{\partial z_1^m \partial z_2^n}.$$

Demostración: El teorema precedente muestra que f se puede escribir como

$$\begin{aligned} f(z_1 + z_2e_1e_2e_3) = & F_0(z_1 + z_2e_1e_2e_3) + F_1(z_1 + z_2e_1e_2e_3) + [G_0(z_1 + z_2e_1e_2e_3) \\ & + G_1(z_1 + z_2e_1e_2e_3)]J, \end{aligned}$$

con F_0, F_1, G_0G_1 funciones holomorfas. Así todas estas funciones tienen una representación en series de potencias y se tiene que

$$\begin{aligned} f(z_1 + z_2e_1e_2e_3) = & \sum_{m,n\in\mathbb{N}} z_1^m z_2^n \frac{\partial^{m+n} F_0(0)}{\partial t_1^m \partial t_2^n} + \sum_{m,n\in\mathbb{N}} z_1^m z_2^n \frac{\partial^{m+n} F_1(0)}{\partial t_1^m \partial t_2^n} e_1e_2e_3 \\ & + \sum_{m,n\in\mathbb{N}} z_1^m z_2^n \frac{\partial^{m+n} G_0(0)}{\partial t_1^m \partial t_2^n} J + \sum_{m,n\in\mathbb{N}} z_1^m z_2^n \frac{\partial^{m+n} G_1(0)}{\partial t_1^m \partial t_2^n} e_1e_2e_3J \\ = & \sum_{m,n\in\mathbb{N}} z_1^m z_2^n \frac{\partial^{m+n} f(0)}{\partial t_1^m \partial t_2^n}. \end{aligned}$$

Dado que los coeficientes de la serie no dependen de la elección de $I \in \mathbb{S}_{Cl(0,3)}$, esto concluye con la demostración.

□

Apéndice A

Apéndice

A.1. Resultados básicos de la variable compleja.

El objetivo de este apéndice es el de presentar algunos de los resultados básicos de la teoría de una variable compleja con el fin de poder ofrecerle al lector, la posibilidad de comparar los resultados propuestos en este trabajo con los resultados de la variable compleja. Dicha comparación es necesaria, ya que los resultados de esta tesis se parecen mucho en la forma que están escritos a los de la variable compleja, pero no tienen las mismas propiedades e incluso representan cosas distintas.

También algunas de las demostraciones de la tesis están basadas en las demostraciones de los resultados de este apéndice, e incluso existen demostraciones de algunos resultados del trabajo que basan su demostración en la aplicación de resultados de la variable compleja.

Antes de empezar a enunciar los resultados de la variable compleja, hay que aclarar que ninguno de los teoremas y proposiciones aqui presentados serán demostrados, ya que estas demostraciones son clásicas y se pueden encontrar en cualquier libro introductorio de una variable compleja o estudiar en cualquier curso de la misma índole.

Dicho lo anterior comencemos con un resultado sobre series de potencias de variable compleja.

A.1 Teorema *(Teorema de Abel) Para cada serie de potencias de la forma* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n$ *existe un número* R*,* $0 \leq R \leq \infty$*, llamado el radio de convergen-*

cia, de tal forma que la serie es absolutamente convergente para todo $z \in \mathbb{C}$, con $\|z\| < R$ y uniformemente convergente para los $z \in \mathbb{C}$, con $\|z\| < \rho < R$. Por otra parte si $|z|$ se encuentra fuera del disco de convergencia, entonces se dice que la serie es divergente.

A.2 Nota *Primeramente recordemos que una funcion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, es holomorfa (analítica) en $\Omega \subset \mathbb{C}$; si cumple alguna de las siguientes condiciones:*

1. *Si la función f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann; o*
2. *Si la función es complejo diferenciable; o*
3. *Si la condición de Morera se cumple en todo Ω; o*
4. *La función se puede expander localmente en una serie de Taylor dentro de Ω.*

Un resultado sobre funciones holomorfas es el siguiente.

A.3 Proposición *Sean f, $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ dos funciones holomorfas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ entonces:*

1. *La función $f \pm g$, es una función holomorfa en Ω.*
2. *La función $f \cdot g$, es una función holomorfa en Ω.*

Como consecuencia de este resultado se tiene que los polinomios son funciones holomorfas, (aunque este resultado es muy conocido; es un resultado fundamdental para los objetivos de este escrito).

Ahora demos una caracterización de las funciones holomorfas.

A.4 Proposición *Sea Ω una región en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función. Entonces f es holomorfa en Ω si $\overline{\partial} f(z) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x+iy) = 0$. Más aun la derivada de la función f en un punto $z \in \Omega$ es $\partial f(z) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x+iy)$*

Ahora enunciemos una característica de las funciones analíticas (holomorfas).

A.5 Teorema *(Teorema de unicidad de funciones analíticas) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región y f una función analítica en Ω. Supóngase que existe $A \subset \Omega$ tal que el derivado de A, es decir; el conjunto de puntos de acumulación de A intersecta a Ω y $f(z) = 0$ para todo $z \in A$, entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$.*

Como consecuencia de este resultado se tiene el siguiente

A.6 Corolario *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *una región y sean* f *y* g *dos funciones analíticas en* Ω*, supóngase que existe* $A \subset \Omega$ *tal que el derivado de* A *intersecta a* Ω *y* $f(z) = g(z)$*, para todo* $z \in A$*, entonces* $f(z) = g(z)$*, para todo* $z \in \Omega$*.*

Denotemos por $\mathfrak{H}(\Omega)$ el conjunto de las funciones holomorfas en Ω, con esta notación podemos enunciar los siguientes resultados. El primero de ellos es un teorema muy importante para la variable compleja.

A.1.1 Teorema *(Fórmula integral de Cauchy) Sea* $f(z)$ *analítica en un dominio simplemente conexo* U *conteniendo un contorno simple cerrado* γ*. Si* z_0 *es cualquier punto interior a* γ*, entonces:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

donde la integral es tomada en dirección contraria a las manecillas del reloj alrededor de γ*.*

Un resultado que nos da una caracterización de funciones constantes es el siguiente

A.7 Teorema *(Teorema del Módulo Máximo) Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *una región y* $f \in \mathfrak{H}(\Omega)$*, supóngase que existe* $z_0 \in \Omega$ *y una vecindad de* z_0 *de radio* δ*;* $V_\delta(z_0)$ *subconjunto de* Ω *tal que* $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ *para todo* $V_\delta(z_0)$*. Entonces* f *es constante en* Ω*.*

Otra caracterización de las funciones constantes es el siguiente.

A.8 Teorema *(Teorema de Liouville)*
Sea $f \in \mathfrak{H}(\mathbb{C})$*, supóngase que* f *está acotada, es decir; existe* $M > 0$ *tal que* $||f(z)|| \leq M$*, para todo* $z \in \mathbb{C}$*, entonces* f *es constante.*

Para finalizar enunciemos el siguiente resultado.

A.9 Teorema *(Teorema de Morera) Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$*, abierto y* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *una función continua en* Ω *tal que para todo disco* $\triangle \subset \Omega$*,* $\int_{\partial\triangle} f(\xi)d\xi = 0$*; entonces* $f \in \mathfrak{H}(\Omega)$*.*

Bibliografía

[1] L. Ahlfors, *Complex Analysis.* McGraw-Hill, 1966.

[2] F. Colombo, I. Sabadin, F. Sommen, D.C Struppa, *Analysis of Dirac Systems and Computational Algebra*, Birkhäuser, 2004.

[3] C.G. Cullen, *An integral theorem for analytic intrinsic on quaternions*, Duke Math. J. 32(1965) 139-148.

[4] R. Fueter, *Die Funktionentheorie der differentialgleichungen* $\Delta u = 0$ *und* $\Delta\Delta u = 0$ *mit vier reellen Variablen*, Comment. Math. Helv. 7(1934) 307-330.

[5] R. Fueter, *Über Hartogs'schen Satz*, Comment. Math. Helv. 12(1939) 75-80.

[6] G. Gentili, D.C. Struppa, *A new approach to Cullen-regular functions of a quaternionic variable*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I 342(2006) 741-744.

[7] V. Kravchenko, M. Shapiro, *Integral Representations for Spatial Models of MAthematical Physics*, Pitman Res. Notes Math., vol. 351, Longman, Harlow, 1996.

[8] G.Laville, I. Ramadanoff, *Holomorphic Cliffordian functions*, Adv. Appl. Clifford Algebras 8(1998) 323-340.

[9] G.Laville, I. Ramadanoff, *Elliptic Cliffordian functions*, Complex Var. Theory Appl.45(2001) 297-318.

[10] H.Leutwiler, *Modified quaternionic analysis in* $\mathbb{R}^3$, Complex Var. Theory Appl. 20(1992) 19-51.

[11] A. Pogorui, M. Shapiro, *On the structure of the set of zeros of quaternionic polynomials*, Complex Var. Theory Appl.49(2004) 379-389.

[12] R. F. Rinehart, *Elements of a theory of intrinsic functions on algebras*, Duke Math. J. 27(1960) 1-19.

[13] A. Sudbery, *Quaternionic analysis*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 85(1979) 199-225.

[14] G. Gentilli, D.C. Struppa, F. Vlacci, *The fundamental theorem of algebra for Hamilton and Cayley numbers*, 2007, Math. Z. Published on line.

[15] G. Gentilli, D.C. Struppa, *A new theory of regular functions of a quaternionic variable*, 2007, Adv. Math., 216, 279-301.

[16] G. Gentilli, D.C. Struppa, *Regular functions on a Clifford algebra*, Complex Var. Theory Appl.53(2008) 475-483.