



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

UNIDAD PROFESIONAL “ADOLFO LÓPEZ MATEOS”
SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN
LABORATORIO DE VIBRACIONES Y ROTODINÁMICA

ESTUDIO NUMÉRICO-ANALÍTICO DE LA RESPUESTA VIBRATORIA DE EJES FISURADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
EN LA ESPECIALIDAD DE
INGENIERÍA MECÁNICA

P R E S E N T A

ING. ARMANDO ZAMBRANO REYES

DIRECTOR DE TESIS

DR. VALERY R. NOSSOV

México D.F., 2005



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

CARTA SESION DE DERECHOS

En la Ciudad de México, Distrito Federal, el día 12 del mes abril del año 2005, el (la) que suscribe Ing. Armando Zambrano Reyes alumno(a) del Programa de Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica con número de registro A 030690, adscrito a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME Unidad Zacatenco, manifiesta que es autor(a) intelectual del presente Trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Valery Romanovich Nossov y cede los derechos del trabajo intitulado: ESTUDIO NUMÉRICO-ANALÍTICO DE LA RESPUESTA VIBRATORIA DE EJES FISURADOS, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, graficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección: armandozam@yahoo.com.mx.

Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Ing. Armando Zambrano Reyes

Nombre y firma



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México, D. F. siendo las 17:00 horas del día 5 del mes de Abril del 2005 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de la E. S. I. M. E. para examinar la tesis de grado titulada:

“ESTUDIO NUMÉRICO-ANALÍTICO DE LA RESPUESTA VIBRATORIA DE EJES FISURADOS”

Presentada por el alumno:

ZAMBRANO

REYES

ARMANDO

Apellido paterno

materno

nombre(s)

Con registro:

A	0	3	0	6	9	0
---	---	---	---	---	---	---

Aspirante al grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

DR. VALERY ROMANOVICH NOSSOV

DR. JOSÉ ÁNGEL ORTEGA HERRERA

DR. JULIO CESAR GÓMEZ MANCILLA

DR. GERARDO SILVA NAVARRO

DR. MANUEL VITE TORRES

DR. ORLANDO SUSARREY HUERTA

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

DR. FLORENCIO SÁNCHEZ SILVA



COLEGIO DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACION

Agradecimientos

Quiero expresar un gran sentimiento de gratitud a las siguientes personas.

A mi Director de Tesis, Dr. Valery R. Nossou por su generosidad al brindarme la oportunidad de recurrir a su capacidad y experiencia científica en un marco de confianza, afecto, amistad y permanente disposición, fundamentales para concretar este trabajo.

Al Dr. Julio César Gómez Mancilla por su asesoramiento científico al compartir sus conocimientos y experiencias profesionales, al mismo tiempo contribuyendo en la realización de ésta tesis con sus valiosas revisiones. Quisiera darle gracias también por el apoyo brindado en todo momento, y por aquellas sugerencias desafiantes y acertadas que contribuyeron a darle mejor forma a este proyecto.

A la Comisión Revisora conformada por: Dr. José Ángel Ortega Herrera, Dr. Manuel Vite Torres, Dr. Valery R. Nossou, Dr. Julio César Gómez Mancilla, Dr. Gerardo Silva Navarro y Dr. Orlando Susarrey Huerta por su generosidad científica en la revisión del presente trabajo y sus valiosas críticas al discutir los resultados de esta Tesis.

A los profesores de la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESJME-IPN por brindarme la oportunidad de superarme académicamente e impulsarme para seguir creciendo intelectualmente

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACyT, por otorgarme la beca crédito que permitió mi estancia en el programa de Maestría.

Al Programa Institucional de Formación de Investigadores, PIFI, por el apoyo económico otorgado durante los últimos cuatro semestres que facilitó mi estancia en el programa de Maestría.

Finalmente, a quien más debo agradecer es a mi familia. A mis padres y hermanos por haberme apoyado en cada decisión que he tomado en la vida, siempre sin hacer preguntas e invariablemente con una confianza ciega en mí, además por brindarme un cálido hogar y enseñarme que la perseverancia y el esfuerzo son el camino para lograr los objetivos. A ellos va dedicada esta tesis.

Tabla de contenido

AGRADECIMIENTOS	III
TABLA DE CONTENIDO	V
LISTA DE ILUSTRACIONES	VIII
LISTA DE TABLAS	XIII
NOMENCLATURA	XIII
RESUMEN	XV
ABSTRACT	XVII
OBJETIVO	XIX
JUSTIFICACIÓN	XIX
INTRODUCCIÓN	XXI
1 ANTECEDENTES	1
1.1 PERSPECTIVA HISTÓRICA EN EL CAMPO DE LA ROTODINÁMICA.....	1
1.2 INTRODUCCIÓN AL DIAGNOSTICO Y DETECCIÓN DE EJES AGRIETADOS.....	3
<i>Tipos y causas de grietas en ejes rotatorios</i>	4
<i>Casos recientes de ejes agrietados en turbomáquinas</i>	7
<i>Pruebas para la detección de grietas en rotores</i>	11
<i>Filosofía de reparación</i>	11
1.3 REVISIÓN DE LA LITERATURA.....	12
<i>Métodos basados en vibración</i>	13
<i>Prueba modal</i>	17
<i>Métodos no tradicionales</i>	19
2 MODELO DEL ROTOR DE JEFFCOTT EXTENDIDO DESBALANCEADO Y FISURADO	23
2.1 CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS ROTATORIOS.....	23
2.2 MODELACIÓN DE LA GRIETA.....	24
<i>Modelación del mecanismo de respiro</i>	25
2.3 EL EJE ASIMÉTRICO.....	28
2.4 OBTENCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO.....	30
<i>Ecuaciones con dimensiones del movimiento del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado</i>	32
<i>Ecuaciones con dimensiones del movimiento del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado alrededor de su posición de equilibrio</i>	35
<i>Ecuaciones adimensionales del movimiento del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado</i>	40
3 MÉTODOS DE SOLUCIÓN DEL MODELO DEL ROTOR DE JEFFCOTT EXTENDIDO DESBALANCEADO Y FISURADO	45
3.1 MÉTODO DE SOLUCIÓN NUMÉRICA.....	45
3.2 MÉTODO DE INVESTIGACIÓN NUMÉRICO-ANALÍTICO.....	48
<i>Solución de orden cero – eje integro</i>	48
<i>Aproximación de primer orden – efectos de fisura</i>	50
<i>Aproximación de alto orden. Solución completa – interacción entre la fisura y los desbalances</i>	56
4 SIMULACIONES NUMÉRICAS	57
4.1 INTRODUCCIÓN.....	57
4.2 CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS DEL SISTEMA.....	59
<i>Parámetros del sistema para la configuración I</i>	59
<i>Parámetros del sistema para la configuración II</i>	62
4.3 ANÁLISIS DE LA EVOLUCIÓN ORBITAL.....	63

<i>Configuración I con profundidad de grieta del 25 %</i>	64
4.4 COMPARACIÓN DE LA SOLUCIÓN NUMÉRICA Y LA SOLUCIÓN NUMÉRICA-ANALÍTICA APROXIMADA	68
4.5 ESTUDIO DE LA RESPUESTA DINÁMICA ANALÍTICA	72
<i>Fuentes de los componentes 1X y 2X</i>	72
<i>Análisis de la influencia del ángulo de orientación entre grieta y desbalance sobre la forma de la órbita</i>	73
<i>Análisis de los diagramas de bode para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance</i>	86
<i>Análisis de los diagramas de Bode para diferentes profundidades de grieta</i>	92
<i>Análisis de los diagramas de Bode para diferentes magnitudes de desbalance residual</i>	98
4.6 ANÁLISIS ESPECTRAL	102
<i>Introducción</i>	102
<i>Análisis de Fourier</i>	103
<i>Aliasing</i>	104
<i>Diagramas de espectros</i>	105
4.7 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD	110
<i>Teoría de estabilidad de Floquet</i>	110
<i>Grado de estabilidad del sistema con la configuración I</i>	112
<i>Grado de estabilidad del sistema con la configuración II</i>	119
4.8 COMPARACIÓN DE LOS MECANISMOS DE RESPIRO DE GRIETA Y EL ANÁLISIS DE SU INFLUENCIA EN LAS RESPUESTAS DEL SISTEMA.....	127
5 MODELO DEL ROTOR DE JEFFCOTT EXTENDIDO DESBALANCEADO Y FISURADO SOBRE SOPORTES FLEXIBLES.....	137
5.1 INTRODUCCIÓN.....	137
5.2 OBTENCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO.....	139
<i>Ecuaciones con dimensiones del movimiento del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado sobre soportes flexibles</i>	141
<i>Ecuaciones con dimensiones del movimiento del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado sobre soportes flexibles alrededor de su posición de equilibrio</i>	146
<i>Ecuaciones adimensionales del movimiento del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado</i>	148
6 MÉTODOS DE SOLUCIÓN DEL MODELO DEL ROTOR DE JEFFCOTT EXTENDIDO DESBALANCEADO Y FISURADO SOBRE SOPORTES FLEXIBLES.....	151
6.1 MÉTODO DE SOLUCIÓN NUMÉRICA	151
6.2 MÉTODO DE SOLUCIÓN NUMÉRICA-ANALÍTICA APROXIMADA	155
<i>Solución de orden cero – eje Integro –</i>	155
<i>Aproximación de primer orden – efectos de fisura –</i>	159
<i>Aproximación de alto orden. Solución completa – interacción entre la fisura y los desbalances –</i>	161
CONCLUSIONES	163
TRABAJOS FUTUROS.....	165
GLOSARIO.....	166
REFERENCIAS.....	174
APÉNDICES	183
APÉNDICE A. COEFICIENTES ROTODINÁMICOS	183
<i>Coefficientes rotodinámicos para una chumacera corta, condiciones de Gumbel</i>	183
<i>Coefficientes rotodinámicos para una chumacera infinitamente larga, condiciones de Sommerfeld (2π)</i>	183
<i>Coefficientes rotodinámicos para una chumacera infinitamente larga, condiciones de Gumbel</i>	184
<i>Coefficientes rotodinámicos determinados bajo la Teoría de Warner</i>	184
APÉNDICE B. PROGRAMAS DESARROLLADOS	186
<i>Programa en MATLAB para resolver numericamente el sistema de ecuaciones diferenciales del Modelo del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado</i>	186
<i>Programa en MATLAB para resolver numericamente el sistema de ecuaciones diferenciales del Modelo del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado sobre todo un rango de velocidad</i>	190
<i>Programa en MATLAB para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales del Modelo del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado utilizando la solución numérica-analítica</i>	195

<i>Programa en MATLAB para evaluar la estabilidad del sistema del Modelo del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado</i>	199
<i>Programa en MATLAB para resolver numericamente el sistema de ecuaciones diferenciales del Modelo del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado sobre soportes flexibles</i>	201
<i>Programa en MATLAB para resolver numericamente el sistema de ecuaciones diferenciales del Modelo del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado sobre soportes flexibles sobre todo un rango de velocidad</i>	206
APÉNDICE C. EVOLUCIÓN ORBITAL, CONFIGURACIÓN I	213
<i>Evolución de la órbita de la chumacera alrededor de 1/3 y 1/2 de la resonancia, configuración I, profundidad de grieta 12.5%, $U_d = 0.1$, $\beta = 0^\circ$</i>	213
<i>Evolución de la órbita del disco alrededor de 1/3 y 1/2 de la resonancia, configuración I, profundidad de grieta 12.5%, $U_d = 0.1$, $\beta = 0^\circ$</i>	214
<i>Evolución de la órbita de la chumacera alrededor de 1/3 y 1/2 de la resonancia, configuración I, profundidad de grieta 12.5%, $U_d = 0.1$, $\beta = 180^\circ$</i>	215
<i>Evolución de la órbita del disco alrededor de 1/3 y 1/2 de la resonancia, configuración I, profundidad de grieta 12.5%, $U_d = 0.1$, $\beta = 180^\circ$</i>	216
<i>Evolución de la órbita de la chumacera alrededor de 1/3 y 1/2 de la resonancia, configuración I, profundidad de grieta 50 %, $U_d = 0.1$, $\beta = 0^\circ$</i>	217
<i>Evolución de la órbita del disco alrededor de 1/3 y 1/2 de la resonancia, configuración I, profundidad de grieta 50 %, $U_d = 0.1$, $\beta = 0^\circ$</i>	218
<i>Evolución de la órbita de la chumacera alrededor de 1/3 y 1/2 de la resonancia, configuración I, profundidad de grieta 50 %, $U_d = 0.1$, $\beta = 180^\circ$</i>	219
<i>Evolución de la órbita del disco alrededor de 1/3 y 1/2 de la resonancia, configuración I, profundidad de grieta 50 %, $U_d = 0.1$, $\beta = 180^\circ$</i>	220
APÉNDICE D. SIMULACIONES NUMÉRICAS, CONFIGURACIÓN III	221
<i>Parámetros del sistema para la configuración III</i>	221
<i>Órbitas de la chumacera a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración III, profundidad de grieta 12.5 %</i>	222
<i>Órbitas del disco a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración III, profundidad de grieta 12.5 %</i>	223
<i>Órbitas de la chumacera a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración III, profundidad de grieta 25 %</i>	224
<i>Órbitas del disco a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración III, profundidad de grieta 25 %</i>	225
<i>Órbitas de la chumacera a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración III, profundidad de grieta 50 %</i>	226
<i>Órbitas del disco a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración III, profundidad de grieta 50 %</i>	227
<i>Grado de estabilidad del sistema, configuración III</i>	228
APÉNDICE E. ARTÍCULOS DERIVADOS DE LA PRESENTE INVESTIGACIÓN.....	229

Lista de ilustraciones

Fig. 1-1 Rotor fracturado con grieta transversal.....	3
Fig. 1-2 Rotor de una turbina con grieta transversal.....	6
Fig. 1-3 Espectro de frecuencias obtenido de una máquina con rotor agrietado.....	8
Fig. 1-4 Rotor agrietado de un generador.....	9
Fig. 1-5 Sección transversal del rotor en la localización de la grieta.....	9
Fig. 1-6 Rotor agrietado de una turbina de vapor.....	10
Fig. 1-7 Rotor agrietado en una turbina hidráulica Pelton.....	10
Fig. 1-8 Reparación de rotores por soldadura.....	12
Fig. 2-1 Modelo de rotor rígido.....	23
Fig. 2-2 Modelo de rotor flexible.....	23
Fig. 2-3 Mecanismo de apertura y cierre de la grieta o mecanismo de “respiro” de la grieta.....	25
Fig. 2-4 Función de apertura y cierre de la grieta propuesta por Gasch.....	26
Fig. 2-5 Función de apertura y cierre de la grieta propuesta por Mayes y Davies.....	26
Fig. 2-6 Comparación de las funciones de apertura y cierre de la grieta.....	27
Fig. 2-7 Plano transversal ubicado a la mitad del tramo del eje mostrando las componentes de rigidez del eje en los sistemas de coordenadas fijo y rotatorio.....	28
Fig. 2-8 Plano transversal ubicado a la mitad del tramo del eje mostrando ángulos importantes. ϕ = ángulo entre las direcciones de los desbalances que ocurren entre la chumacera y el disco, β = ángulo entre las direcciones de e_d y ξ	29
Fig. 2-9 Modelo de rotor de Jeffcott.....	31
Fig. 2-10 Modelo del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado.....	31
Fig. 2-11 Balance de las fuerzas en el rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado mostrando los dos planos transversales en donde se derivan las ecuaciones de movimiento.....	32
Fig. 2-12 Proyecciones de la excentricidad sobre los ejes de coordenadas. e = excentricidad del rotor, Ψ = ángulo de posicionamiento (attitude) del rotor.....	34
Fig. 2-13 Distribución de presión en la chumacera.....	36
Fig. 2-14 Representación de los coeficientes rotodinámicos.....	38
Fig. 2-15 Coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento directos y acoplados para una chumacera cilíndrica plana con $L/D = 0.5$	38
Fig. 2-16 Coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento directos y acoplados para una chumacera cilíndrica plana con $L/D = 1$	39
Fig. 4-1 Configuración I en el rotorkit de Bently Nevada.....	59
Fig. 4-2 Configuración II en el Rotorkit de Bently Nevada.....	62
Fig. 4-3 Evolución de las orbitas de las chumaceras alrededor de $1/3$ y $1/2$ de la resonancia. Profundidad 25%, Orientación entre grieta y desbalance $\beta = 0^\circ$, $U_d = 0.1$	64
Fig. 4-4 Evolución de las orbitas del disco alrededor de $1/3$ y $1/2$ de la resonancia. Profundidad 25%, Orientación entre grieta y desbalance $\beta = 0^\circ$, $U_d = 0.1$	65
Fig. 4-5 Evolución de las orbitas de las chumaceras alrededor de $1/3$ y $1/2$ de la resonancia. Profundidad 25%, Orientación entre grieta y desbalance $\beta = 180^\circ$, $U_d = 0.1$	66
Fig. 4-6 Evolución de las orbitas del disco alrededor de $1/3$ y $1/2$ de la resonancia. Profundidad 25%, Orientación entre grieta y desbalance $\beta = 0^\circ$, $U_d = 0.1$	67
Fig. 4-7 Orbitas de la chumacera correspondientes a la solución numérica y la solución numérica-analítica aproximada, configuración I, profundidad de grieta 12.5 %, $\beta = 90^\circ$	68
Fig. 4-8 Orbitas del disco correspondientes a la solución numérica y la solución numérica-analítica aproximada, configuración I, profundidad de grieta 12.5 %, $\beta = 90^\circ$	69
Fig. 4-9 Orbitas de la chumacera correspondientes a la solución numérica y la solución numérica-analítica aproximada, configuración I, profundidad de grieta 25 %, $\beta = 90^\circ$	70
Fig. 4-10 Orbitas del disco correspondientes a la solución numérica y la solución numérica-analítica aproximada, configuración I, profundidad de grieta 25 %, $\beta = 90^\circ$	71
Fig. 4-11 Orbitas de la chumacera a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración I, profundidad de grieta 12.5 %.....	74
Fig. 4-12 Orbitas del disco a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración I, profundidad de grieta 12.5 %.....	75

Fig. 4-13	Orbitas de la chumacera a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración I, profundidad de grieta 25 %	76
Fig. 4-14	Orbitas del disco a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración I, profundidad de grieta 25 %	77
Fig. 4-15	Orbitas de la chumacera a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración I, profundidad de grieta 50 %	78
Fig. 4-16	Orbitas del disco a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración I, profundidad de grieta 50 %	79
Fig. 4-17	Orbitas de la chumacera a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración II, profundidad de grieta 12.5 %	80
Fig. 4-18	Orbitas del disco a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración II, profundidad de grieta 12.5 %	81
Fig. 4-19	Orbitas de la chumacera a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración II, profundidad de grieta 25 %	82
Fig. 4-20	Orbitas del disco a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración II, profundidad de grieta 25 %	83
Fig. 4-21	Orbitas de la chumacera a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración II, profundidad de grieta 50 %	84
Fig. 4-22	Orbitas del disco a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración II, profundidad de grieta 50 %	85
Fig. 4-23	Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración I, profundidad de grieta 12.5 %	87
Fig. 4-24	Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración I, profundidad de grieta 12.5 %	87
Fig. 4-25	Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración I, profundidad de grieta 25 %	87
Fig. 4-26	Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración I, profundidad de grieta 25 %	88
Fig. 4-27	Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración I, profundidad de grieta 50 %	88
Fig. 4-28	Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración I, profundidad de grieta 50 %	88
Fig. 4-29	Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración II, profundidad de grieta 12.5 %	89
Fig. 4-30	Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración II, profundidad de grieta 12.5 %	89
Fig. 4-31	Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración II, profundidad de grieta 25 %	90
Fig. 4-32	Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración II, profundidad de grieta 25 %	90
Fig. 4-33	Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración II, profundidad de grieta 50 %	90
Fig. 4-34	Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración II, profundidad de grieta 50 %	91
Fig. 4-35	Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes profundidades de grieta, configuración I, $\beta = 0^\circ$	92
Fig. 4-36	Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, configuración I, $\beta = 0^\circ$	92
Fig. 4-37	Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes profundidades de grieta, configuración I, $\beta = 90^\circ$	93
Fig. 4-38	Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, configuración I, $\beta = 90^\circ$	93
Fig. 4-39	Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes profundidades de grieta, configuración I, $\beta = 180^\circ$	93
Fig. 4-40	Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, configuración I, $\beta = 180^\circ$	94
Fig. 4-41	Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes profundidades de grieta, configuración I, $\beta = 270^\circ$	94

Fig. 4-42 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, configuración I, $\beta = 270^\circ$	94
Fig. 4-43 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes profundidades de grieta, configuración II, $\beta = 0^\circ$	95
Fig. 4-44 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, configuración II, $\beta = 0^\circ$	95
Fig. 4-45 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes profundidades de grieta, configuración II, $\beta = 90^\circ$	96
Fig. 4-46 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, configuración II, $\beta = 90^\circ$	96
Fig. 4-47 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes profundidades de grieta, configuración II, $\beta = 180^\circ$	96
Fig. 4-48 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, configuración II, $\beta = 180^\circ$	97
Fig. 4-49 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes profundidades de grieta, configuración II, $\beta = 270^\circ$	97
Fig. 4-50 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, configuración I, $\beta = 270^\circ$	97
Fig. 4-51 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes magnitudes de desbalance, configuración I, $\beta = 0^\circ$, profundidad de grieta 25 %.....	98
Fig. 4-52 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes magnitudes de desbalance, configuración I, $\beta = 0^\circ$, profundidad de grieta 25 %.....	99
Fig. 4-53 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes magnitudes de desbalance, configuración I, $\beta = 90^\circ$, profundidad de grieta 25 %.....	99
Fig. 4-54 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes magnitudes de desbalance, configuración I, $\beta = 90^\circ$, profundidad de grieta 25 %.....	99
Fig. 4-55 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes magnitudes de desbalance, configuración I, $\beta = 180^\circ$, profundidad de grieta 25 %.....	100
Fig. 4-56 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes magnitudes de desbalance, configuración I, $\beta = 180^\circ$, profundidad de grieta 25 %.....	100
Fig. 4-57 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes magnitudes de desbalance, configuración I, $\beta = 270^\circ$, profundidad de grieta 25 %.....	100
Fig. 4-58 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes magnitudes de desbalance, configuración I, $\beta = 270^\circ$, profundidad de grieta 25 %.....	101
Fig. 4-59 Vibración global.....	102
Fig. 4-60 Representación tiempo-frecuencia.....	102
Fig. 4-61 Espectro de la señal.....	102
Fig. 4-62 Poder de diagnóstico de un espectro.....	103
Fig. 4-63 Muestreo y espectro discretos.....	103
Fig. 4-64 Paso frecuencial.....	104
Fig. 4-65 Muestreo y espectro discretos.....	104
Fig. 4-66 Resolución frecuencial pobre.....	104
Fig. 4-67 Frecuencia de muestreo pobre.....	104
Fig. 4-68 Órbita, formas de onda y espectros de las chumaceras de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.25$	105
Fig. 4-69 Órbita, formas de onda y espectros del disco de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.25$	105
Fig. 4-70 Órbita, formas de onda y espectros de las chumaceras de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.3$	106
Fig. 4-71 Órbita, formas de onda y espectros del disco de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.3$	106
Fig. 4-72 Órbita, formas de onda y espectros de las chumaceras de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.33$	106
Fig. 4-73 Órbita, formas de onda y espectros del disco de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.33$	106
Fig. 4-74 Órbita, formas de onda y espectros de las chumaceras de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.5$	107

Fig. 4-75	Orbita, formas de onda y espectros del disco de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.5$	107
Fig. 4-76	Orbita, formas de onda y espectros de las chumaceras de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.66$	107
Fig. 4-77	Orbita, formas de onda y espectros del disco de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.66$	107
Fig. 4-78	Orbita, formas de onda y espectros de las chumaceras de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.9$	108
Fig. 4-79	Orbita, formas de onda y espectros del disco de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.9$	108
Fig. 4-80	Orbita, formas de onda y espectros de las chumaceras de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 1.0$	108
Fig. 4-81	Orbita, formas de onda y espectros del disco de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 1.0$	108
Fig. 4-82	Orbita, formas de onda y espectros de las chumaceras de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 1.9$	109
Fig. 4-83	Orbita, formas de onda y espectros del disco de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 1.9$	109
Fig. 4-84	Grado de estabilidad del sistema, configuración I.....	112
Fig. 4-85	Acercamiento a la zona de transición estable-inestable, configuración I.....	113
Fig. 4-86	Orbitas del sistema inestable, configuración I, eje integro, $\Omega = 2.1$	114
Fig. 4-87	Respuestas horizontal y vertical de las chumaceras y el disco y sus respectivos espectros de frecuencia, configuración I, eje integro, $\Omega = 2.1$. Sistema inestable.....	114
Fig. 4-88	Orbitas del sistema al comienzo de la inestabilidad, configuración I, eje integro, $\Omega = 2.07$	115
Fig. 4-89	Respuestas horizontal y vertical de las chumaceras y el disco y sus respectivos espectros de frecuencia, configuración I, eje integro, $\Omega = 2.07$	115
Fig. 4-90	Orbitas del sistema, configuración I, profundidad de grieta 12.5 %, $\Omega = 2.07$	116
Fig. 4-91	Respuestas horizontal y vertical de las chumaceras y el disco y sus respectivos espectros de frecuencia, configuración I, profundidad de grieta 12.5 %, $\Omega = 2.07$	116
Fig. 4-92	Orbitas del sistema, configuración I, profundidad de grieta 25 %, $\Omega = 2.07$	117
Fig. 4-93	Respuestas horizontal y vertical de las chumaceras y el disco y sus respectivos espectros de frecuencia, configuración I, profundidad de grieta 25 %, $\Omega = 2.07$	117
Fig. 4-94	Orbitas del sistema, configuración I, profundidad de grieta 50 %, $\Omega = 2.07$	118
Fig. 4-95	Respuestas horizontal y vertical de las chumaceras y el disco y sus respectivos espectros de frecuencia, configuración I, profundidad de grieta 50 %, $\Omega = 2.07$	118
Fig. 4-96	Grado de estabilidad del sistema, configuración II.....	119
Fig. 4-97	Acercamiento a la zona de transición estable-inestable, configuración II.....	119
Fig. 4-98	Orbitas del sistema al comienzo de la inestabilidad, configuración II, eje integro, $\Omega = 1.69$	120
Fig. 4-99	Respuestas horizontal y vertical de las chumaceras y el disco y sus respectivos espectros de frecuencia, configuración II, eje integro, $\Omega = 1.69$	120
Fig. 4-100	Orbitas del sistema, configuración II, profundidad de grieta 12.5 %, $\Omega = 1.69$	121
Fig. 4-101	Respuestas horizontal y vertical de las chumaceras y el disco y sus respectivos espectros de frecuencia, configuración II, profundidad de grieta 12.5 %, $\Omega = 1.69$	121
Fig. 4-102	Orbitas del sistema, configuración II, profundidad de grieta 25 %, $\Omega = 1.69$	122
Fig. 4-103	Respuestas horizontal y vertical de las chumaceras y el disco y sus respectivos espectros de frecuencia, configuración II, profundidad de grieta 25 %, $\Omega = 1.69$	122
Fig. 4-104	Orbitas del sistema, configuración II, profundidad de grieta 50 %, $\Omega = 1.69$	123
Fig. 4-105	Respuesta horizontal y vertical del disco y sus respectivos espectros de frecuencia, configuración II, profundidad de grieta 50 %, $\Omega = 1.69$	123
Fig. 4-106	Respuestas horizontal y vertical del disco para diferentes profundidades de grieta, mostrando el comienzo de la inestabilidad, configuración II, $\beta = 0^\circ$	124
Fig. 4-107	Respuestas horizontal y vertical de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, mostrando el comienzo de la inestabilidad, configuración II, $\beta = 0^\circ$	124
Fig. 4-108	Respuestas horizontal y vertical del disco para diferentes profundidades de grieta, mostrando el comienzo de la inestabilidad, configuración II, $\beta = 90^\circ$	125
Fig. 4-109	Respuestas horizontal y vertical de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, mostrando el comienzo de la inestabilidad, configuración II, $\beta = 90^\circ$	125

Fig. 4-110 Respuestas horizontal y vertical del disco para diferentes profundidades de grieta, mostrando el comienzo de la inestabilidad, configuración II, $\beta = 180^\circ$	125
Fig. 4-111 Respuestas horizontal y vertical de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, mostrando el comienzo de la inestabilidad, configuración I, $\beta = 180^\circ$	126
Fig. 4-112 Respuestas horizontal y vertical del disco para diferentes profundidades de grieta, mostrando el comienzo de la inestabilidad, configuración II, $\beta = 270^\circ$	126
Fig. 4-113 Respuestas horizontal y vertical de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, mostrando el comienzo de la inestabilidad, configuración II, $\beta = 270^\circ$	126
Fig. 4-114 Orbitas de la chumacera a diferentes resonancias locales comparando las funciones de respiro de la grieta, $\beta = 180^\circ$, profundidad de grieta 12.5 %.....	128
Fig. 4-115 Orbitas del disco a diferentes resonancias locales comparando las funciones de respiro de la grieta, $\beta = 180^\circ$, profundidad de grieta 12.5 %.....	128
Fig. 4-116 Orbitas de la chumacera a diferentes resonancias locales comparando las funciones de respiro de la grieta, $\beta = 180^\circ$, profundidad de grieta 25 %.....	129
Fig. 4-117 Orbitas del disco a diferentes resonancias locales comparando las funciones de respiro de la grieta, $\beta = 180^\circ$, profundidad de grieta 25 %.....	129
Fig. 4-118 Orbitas de la chumacera a diferentes resonancias locales comparando las funciones de respiro de la grieta, $\beta = 180^\circ$, profundidad de grieta 50 %.....	130
Fig. 4-119 Orbitas del disco a diferentes resonancias locales comparando las funciones de respiro de la grieta, $\beta = 180^\circ$, profundidad de grieta 50 %.....	130
Fig. 4-120 Respuestas del disco para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 12.5 %, $\beta = 0^\circ$	131
Fig. 4-121 Respuestas de la chumacera para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 12.5 %, $\beta = 0^\circ$	131
Fig. 4-122 Respuestas del disco para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 12.5 %, $\beta = 180^\circ$	132
Fig. 4-123 Respuestas de la chumacera para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 12.5 %, $\beta = 180^\circ$	132
Fig. 4-124 Respuestas del disco para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 25 %, $\beta = 0^\circ$	132
Fig. 4-125 Respuestas de la chumacera para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 25 %, $\beta = 0^\circ$	133
Fig. 4-126 Respuestas del disco para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 25 %, $\beta = 180^\circ$	133
Fig. 4-127 Respuestas de la para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 25 %, $\beta = 180^\circ$	133
Fig. 4-128 Respuestas del disco para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 50 %, $\beta = 0^\circ$	134
Fig. 4-129 Respuestas de la chumacera para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 50 %, $\beta = 0^\circ$	134
Fig. 4-130 Respuestas del disco para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 50 %, $\beta = 180^\circ$	134
Fig. 4-131 Respuestas de la chumacera para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 50 %, $\beta = 180^\circ$	135
Fig. 5-1 Modelo de rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado sobre soportes flexibles.....	139
Fig. 5-2 Representación esquemática del sistema con soportes flexibles.....	140
Fig. 5-3 Plano transversal localizado a la mitad del tramo del eje mostrando ángulos importantes. ϕ = ángulo entre las direcciones de los desbalances que ocurren en la chumacera (e_j) y el disco (e_d), β = ángulo entre las direcciones de la fisura (ξ) y el desbalance en el disco (e_d).....	142
Fig. 5-4 Representación esquemática de los coeficientes rotodinámicos y la suspensión.....	143
Fig. 5-5 Posiciones de equilibrio dinámico del soporte (O_s), chumaceras (O_j) y disco (O_d). e = excentricidad del rotor, Ψ = ángulo de posicionamiento (attitude) del rotor.....	145

Lista de tablas

Tabla 1 Parámetros del rotorkit de Bently Nevada	59
Tabla 2 Valores ingenieriles de la configuración I.....	60
Tabla 3 Parámetros adimensionales de la configuración I.....	61
Tabla 4 Valores ingenieriles de la configuración II	62
Tabla 5 Parámetros adimensionales de la configuración II.....	62
Tabla 6 Valores ingenieriles de la configuración III.....	221
Tabla 7 Parámetros adimensionales de la configuración III	221

Nomenclatura

- $[A(\Phi)]$ = Matriz periódica de estado.
 c_d = Coeficiente de amortiguamiento externo. [N/m·s]
 $c_{ij} (i,j = x,y)$ = Coeficientes rotodinámicos de amortiguamiento radial. [N/m·s]
 $C_{ij} (i,j = x,y)$ = Coeficientes rotodinámicos de amortiguamiento adimensionalizados, ($= c_r \cdot \omega \cdot c_{ij} / W$)
 c_r = Claro radial. [m]
 c_s = Amortiguamiento del soporte. [N/m·s]
 C_s = Amortiguamiento adimensional del soporte.
 d = Diámetro del eje. [m]
 D = Diámetro de la chumacera. [m]
 D_e = Relación de amortiguamiento externo, ($= c_d / 2 \cdot m \cdot \omega_n$)
 E = Módulo de elasticidad del material del rotor, ($= 200$ GPa)
 e_d, e_j = Excentricidad de desbalance de masa en el disco y chumacera respectivamente. [m]
 f_n = Frecuencia Natural, ($= (1/2 \cdot \pi) \sqrt{(k/m)}$) [Hz]
 f_x, f_y = Fuerzas debidas a la película de fluido lubricante en las chumaceras. [N]
 F_x, F_y = Fuerzas adimensionales por el lubricante. ($= f_x / m \cdot c_r \cdot \omega^2, f_y / m \cdot c_r \cdot \omega^2$)
 g = Aceleración de la gravedad. ($= 9.81$ m/s²)
 $g(t)$ ó $g(\Phi)$ = Función periódica, $0 < g(t) < 1$
 I = Momento de inercia de la sección transversal del eje, ($= \pi \cdot d^4 / 64$) [m⁴]
 k = Rigidez del eje sin fisura. [N/m]
 k_η = Rigidez del eje agrietado en la dirección η , ($= k - g(t) \cdot \Delta k_\eta$) [N/m]
 k_ξ = Rigidez del eje agrietado en la dirección ξ , ($= k - g(t) \cdot \Delta k_\xi$) [N/m]
 $k_{ij} (i,j = x,y)$ = Coeficientes de rigidez radial. [N/m]
 $K_{ij} (i,j = x,y)$ = Coeficientes adimensionales de rigidez radial, ($= c_r \cdot k_{ij} / W$)
 k_s = Rigidez del soporte. [N/m]
 K_s = Rigidez adimensional del soporte. ($= k_s / k$)
 l = Longitud del eje. [m]
 L = Longitud de la chumacera. [m]
 m = Concentración de masa a la mitad del tramo del eje. [Kg]
 m_j = Concentración de masa en la posición de las chumaceras. [Kg]
 m_s = Concentración de masa en el soporte. [Kg]
 O_d = Posición de equilibrio dinámico de la masa en la chumacera.
 O_j = Posición de equilibrio dinámico de la masa a la mitad del rotor.
 O_s = Posición de equilibrio dinámico de la masa en el soporte.

- R = Radio de la chumacera. [m]
 S = Numero de Sommerfeld, ($= D \cdot L \cdot \omega \cdot \mu \cdot (R/c_r)^2 / 2 \cdot \pi \cdot W$)
 S_0 = Número de Sommerfeld fijo, ($= S/\Omega$)
 t = Tiempo. [s]
 T = Periodo. [s]
 U_d = Desbalance adimensional en el disco, ($= e_d/c_r$)
 U_j = Desbalance adimensional en la chumacera, ($= e_j/c_r$)
 W = Carga que soporta una chumacera, ($= (m/2 + m_j)g = m \cdot g (0.5 + \alpha_j)$) [N]
 W_g = Parámetro de gravedad, ($= \delta/c_r$)
 $x_i, y_i (i=d,j,s)$ = Deflexión en coordenadas cartesianas. [m]
 $X_i, Y_j (i=d,j,s)$ = Deflexión adimensional, ($= x_i/c_r, y_i/c_r$)
 $x_{i0}, y_{i0} (i=d,j,s)$ = Posición de estado estable.
 α_j = Relación de masas entre chumacera y disco, ($= m_j/m$)
 α_s = Relación de masa entre soporte y disco, ($= m_s/m$)
 β = Ángulo de orientación relativo entre la fisura y el desbalance. [rad]
 δ = Deflexión estática del eje, ($= m \cdot g/k$) [m]
 $\Delta k_\xi, \Delta k_\eta$ = Mayor cambio de rigidez en las direcciones ξ y η ocasionado por la fisura. [N/m]
 ΔK_ξ = Cambio de rigidez adimensional en la dirección ξ , ($= \Delta k_\xi/k$)
 ΔK_η = Cambio de rigidez adimensional en la dirección η , ($= \Delta k_\eta/k$)
 $\Delta x_i, \Delta y_i (i=d,j,s)$ = Deflexión alrededor de la posición de equilibrio, ($= x_i - x_{i0}, y_i - y_{i0}$) [m]
 $\Delta X_i, \Delta Y_j (i=d,j,s)$ = Deflexión adimensional alrededor de la posición de equilibrio, ($= \Delta x_i/c_r, \Delta y_i/c_r$)
 ϕ = Ángulo entre los vectores desbalance U_d y U_j . [rad]
 Φ = Ángulo de rotación instantáneo, ($= \omega t + \phi + \beta = \tau + \phi + \beta$) [rad]
 $[\Gamma(T)]$ = Matriz de Transición.
 ξ, η = Coordenadas rotatorias fijas al disco, ξ es la dirección de la grieta.
 μ = Viscosidad dinámica del aceite lubricante. [Pa·s]
 μ_r = Valor característico de Floquet.
 π = 3.141592653
 τ = Tiempo adimensional, ($= \omega \cdot t$)
 ω = Frecuencia circular. [rad/s]
 Ω = Relación de velocidades, ($= \omega/\omega_n$)
 ω_n = Velocidad crítica de un rotor sobre soportes rígidos, ($= \sqrt{k/m}$) [rad/s]
 Ψ = Ángulo de posicionamiento ó ángulo de attitude
 $(\dot{\cdot})$ = d/dt
 $(\ddot{\cdot})$ = d^2/dt^2
 $(\dot{\cdot})$ = $d/d\tau$
 $(\ddot{\cdot})$ = $d^2/d\tau^2$
 $[\]$ = Matriz cuadrada.
 $\{ \}$ = Vector columna.

Resumen

Se ha desarrollado una revisión detallada de las varias técnicas de detección de grieta presentadas en las últimas décadas. Puede ser visto que el área de detección de grietas esta activa y continuamente desarrollándose pues están emergiendo técnicas más nuevas mientras se gana un mas claro y profundo entendimiento en los campos de la mecánica de la fractura, simulación y monitoreo. Se enfatiza que el futuro apunta a una metodología de detección flexible, multidisciplinaria y robusta para diversos tipos de rotores. Lo que conducirá a largo plazo a aumentar la total confiabilidad y seguridad de la maquinaria rotatoria en general.

Es desarrollado un innovador modelo matemático del *rotor de Jeffcott extendido*, ideado por Gómez-Mancilla [69], [73], soportado sobre chumaceras hidrodinámicas y afectado por los efectos de la gravedad, en ausencia de desalineamiento, dicho modelo incluye masas en las localizaciones del disco y chumaceras además de una fisura a la mitad del tramo eje. Las masas tanto en el disco como en las chumaceras poseen desbalances y están vibrando alrededor de su posición de equilibrio no trivial. El amortiguamiento del sistema incluye el amortiguamiento externo debido al fluido de trabajo (por ejemplo vapor) dentro del cual se encuentra girando el rotor, y el más significativo, el amortiguamiento viscoso originado por la película de aceite en las chumaceras. La existencia de masas tanto en el disco como en las chumaceras permite realizar varios útiles tipos de análisis, por ejemplo, de un número de combinaciones de desbalance (U_a, U_j) variando las magnitudes y ángulos de fase relativos entre disco y chumacera (β, ϕ) con respecto a la orientación de la grieta (ξ); también considerando varias distribuciones de concentraciones de masa del eje (α_j).

La correcta selección de los parámetros permite que este modelo lineal represente las primeras características modales de máquinas reales y permite caracterizar la evolución orbital y los patrones de vibración en las *resonancias locales**, incluyendo la velocidad crítica. La aparición de resonancias locales, facilita la detección de ejes fisurados durante el arranque ó paro de la máquina.

Para una mayor generalidad el sistema de ecuaciones de movimiento es expresado en parámetros adimensionales. Dicho modelo innovador en su enfoque y derivación consiste en un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes periódicos y en donde el efecto del peso esta explícitamente considerado dentro de las expresiones.

Un novedoso método seminumérico, propuesto por Valery R. Nosov [144], es utilizado para investigar la interacción entre los desbalances de masas siempre presentes en la realidad y la fisura transversal localizada a la mitad del eje; dicha interacción resulta de capital importancia cuando se pretende detectar la presencia de fisuras en el eje rotatorio.

Se estudia la respuesta vibratoria contra velocidad de operación (arranque ó paro de la máquina) a esperar ante diferentes profundidades de la grieta. Varias configuraciones de rotores son estudiados con el fin de caracterizar los patrones de vibración de rotores agrietados y se hace un análisis numérico de la estabilidad lineal del sistema, incluyendo todos los aspectos antes mencionados, mediante la teoría de Floquet.

De la misma forma, la importante orientación angular relativa existente entre el vector desbalance del disco y el eje ξ de la dirección de la grieta, es variada y computada para las diferentes direcciones ortogonales. Según lo visto, la grieta y el desbalance residual (siendo ambos vectores desconocidos) pueden ocultar la presencia de la grieta y hacer difícil el uso de técnicas tradicionales de detección. La existencia de resonancias locales en diversos subarmónicos o súper-armónicos racionales o combinaciones de estos, permite una buena caracterización de los patrones de vibración reduciendo la influencia de la interacción entre vectores desconocidos; por ejemplo, magnitudes y orientaciones del desbalance residual y la fisura del eje.

Para la detección de grieta los resultados indican que en vez de los componentes 1X y 2X, el análisis de las resonancias locales restantes debe tener prioridad, esto debido a la interacción entre la grieta y el desbalance residual y a los múltiples orígenes 2X inducidos. Por lo tanto, se enfatiza el análisis de las resonancias locales y la evolución orbital alrededor de 1/2, 1/3 y 1/4 de la velocidad crítica para las diversas orientaciones entre grieta y desbalance.

* Picos de vibración a fracciones racionales de la velocidad crítica fundamental.

Son analizadas las simulaciones numéricas de las respuestas del sistema rotor-chumaceras que comparan los modelos de respiro de grieta presentados por Gasch [58] y Mayes & Davies [125] Lo anterior en relación a la detección de ejes agrietados y la caracterización del comportamiento del sistema.

Al mismo tiempo, se desarrolla un modelo matemático de un rotor de Jeffcott extendido fisurado a la mitad del eje y soportado por chumaceras hidrodinámicas idénticas sobre soportes que poseen propiedades de rigidez y amortiguamiento, este sistema geoméricamente simétrico incluye masas en las tres localizaciones: disco, chumaceras y soportes. Las masas tanto en el disco como en las chumaceras poseen desbalances y se encuentran vibrando alrededor de su posición de equilibrio no trivial y en ausencia de desalineamiento, considerando además que el efecto de la gravedad es dominante. Para una mayor generalidad el sistema de ecuaciones de movimiento es expresado en parámetros adimensionales. Dicho modelo consiste en un sistema de seis ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes periódicos y en donde el efecto del peso esta explícitamente considerado dentro de las expresiones.

Es desarrollada una solución numérica del presente sistema de rotor que permitirá deducir y determinar patrones de comportamiento confiables como resultado de la interacción entre la fisura y el desbalance. Así mismo, es propuesta una solución analítica aproximada del presente sistema ya que el modelo es capaz de producir muchos patrones de comportamiento difíciles de ser estudiados numéricamente debido al gran consumo de tiempo de cómputo y alta demanda de capacidad de cálculo que un estudio de este tipo requiere.

Con referencia a este último modelo, en la literatura nacional e internacional sobre este tema, no existe un modelo similar que permita estudiar la respuesta vibratoria de un rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado soportado por chumaceras hidrodinámicas sobre soportes flexibles que poseen propiedades de rigidez y amortiguamiento, y de aquí la gran relevancia de este segundo modelo

En rotores con efectos giroscópicos pequeños donde el acoplamiento a otros ejes es flexible, es decir en ausencia de desalineamiento, y en los casos donde la grieta está situada cerca o a la mitad del tramo del eje, los modelos simplificados presentados en este trabajo son suficientemente buenos para la descripción cualitativa de una máquina real que vibra en su primer modo. La clave recae en la apropiada selección de los valores de los parámetros modales que permite la representación adecuada de máquinas reales.

Abstract

A comprehensive review of various crack detection techniques presented in the past decades has been attempted. It can be seen that the area of crack detection is active and continuously evolving because newer techniques are emerging as a clearer and deeper understanding is gained in the fields of fracture mechanics, simulation and condition monitoring. It is emphasized that the future points to a flexible, multidisciplinary and robust detection methodology for different types of rotors. This will lead in a long term to increase the overall reliability and safety of the rotating machinery in general.

A new mathematical model of the extended Jeffcott rotor supported on hydrodynamic journal bearings and affected by the effects of the gravity and without misalignment, improved by Gómez-Mancilla [69], [73], is developed. This model includes masses at the disc and bearings locations, in addition to a crack at or near the shaft mid-span. The masses as much at the disc as at the bearings have unbalances and are vibrating around their nontrivial equilibrium position. The system damping includes the external damping due to the fluid of work (i.e. steam) where the rotor is rotating, and the most significant, the viscous damping originated by the oil film in the bearings. The existence of masses as much at the disc as at the bearings allows to perform several types of useful analysis, for example, a number of unbalance combinations varying the relative magnitudes (U_d , U_j) and phase angles (β , ϕ) between disc and bearings with respect to the crack direction; also considering several shaft lumped mass distributions (α_j).

The proper selection of the modal parameters permits that this linear model represents the first modal characteristics of real machines and allows characterizing the orbital evolution and the vibration patterns at the local resonances, including the critical velocity. The appearance of local resonances facilitates the cracked shaft detection during the machine run-up or shut-down.

For a greater majority, the system of equations of motion is expressed on dimensionless parameters. This model, novel in its approach and derivation, consists of a system of four linear differential equations of second order with periodic coefficients and where the effect of the weight is explicitly considered within the expressions.

A new semi-numerical method, proposed by Valery R. Nosov [144], is used to investigate the interaction between mass unbalances, always present in the reality, and the transversal crack located at the shaft mid-span; this interaction is of capital importance when it is tried to detect the presence of cracks in rotating shafts.

The vibratory response against operation speed (run-up or shut-down) to expect at different crack depths, is studied. Several configurations of rotors are studied with the purpose of characterizing the vibration patterns of cracked rotors. A numerical analysis of linear stability of the system by means of the Floquet Theory, including all the aspects mentioned before, has been done.

In the same way, the important relative angle existing between the unbalance vector of the disc and the axis of the crack direction, is varied and computed for the different orthogonal directions. According to the showed, crack and residual unbalance (both been unknown vectors) can mask the presence of the crack and make the use of traditional detection techniques difficult. The existence of local resonances at diverse rational sub-harmonics or super-harmonics or combinations of these, permit a good characterization of the vibration patterns reducing the influence of the interaction between unknown vectors; for example, residual unbalance and cracked shaft magnitudes and directions.

For the crack detection task the results indicate that instead of the 1X and 2X components, the analysis of the remaining local resonances must have priority, this is due to the interaction between the crack and the residual unbalance and to the 2X multiple induced origins. Therefore, the analysis of the local resonances and orbital evolution around 1/2, 1/3 and 1/4 of the critical resonance for the diverse directions between crack and unbalance, is emphasized

The numerical simulations of the rotor-bearing system responses that compare the breathing crack models presented by Gasch [58] and Mayes & Davies [125] are analyzed. The previous in relation to the cracked shafts detection and the characterization of the system behavior.

Furthermore, a mathematical model of the extended Jeffcott rotor cracked at or near the shaft mid-span and supported on identical hydrodynamic journal bearings on supports that have properties of stiffness and damping, is developed. This geometrically symmetrical system includes masses at the three locations: disc, bearings and supports. The masses as much at the disc as at the bearings have unbalances and are vibrating

around their nontrivial equilibrium position and without misalignment, considering in addition that the effect of the gravity is dominant. For a greater majority the system of equations of motion is expressed in dimensionless parameters. This model consists of a system of six linear differential equations of second order with periodic coefficients and where the effect of the weight is explicitly considered within the expressions.

A numerical solution of the present rotor-bearing system, that will allow to deduce and to determine reliable patterns of behavior as a result of the interaction between crack and unbalance, is developed. Furthermore, an approximated analytical solution of the present system is proposed since the model is able to produce many behavior patterns that are difficult of being studied numerically due to the great consumption of calculation time and to the high demand of calculation capacity that a study of this kind requires.

In reference to this last model, in the national and international literature on this subject does not exist a similar model that allows to study the vibratory response of an unbalanced and cracked extended Jeffcott rotor model supported by hydrodynamic journal bearings on flexible supports that have properties of stiffness and damping, and here the great relevance of this second model

In rotors with small gyroscopic effects where the coupling to other shafts is flexible (misalignment absence) and in the cases where the crack is located close or at the shaft mid-span, the simplified models presented in this work are sufficiently good for the qualitative description of a real machine vibrating at its first mode. The key relays on the appropriate selection of the modal parameter values which allows the proper representation of real machines.

Objetivo

Presentar la derivación de modelos matemáticos lo suficientemente buenos para la descripción cualitativa de una máquina real con eje agrietado y que a través de un cuidadoso análisis ayuden en el propósito de caracterizar la respuesta vibratoria de ejes fisurados, y en el futuro, dirigir estos resultados al desarrollo de una metodología de detección flexible, multidisciplinaria y robusta para diversos tipos de rotores. Lo que conducirá a largo plazo a aumentar la total confiabilidad y seguridad de la maquinaria rotatoria en general al implementar en la industria dicha técnica.

Estudiar la respuesta vibratoria contra velocidad de operación (arranque/paro de la máquina) a esperar ante diferentes profundidades de la grieta.

Investigar la fuerte interacción vibratoria de los efectos de los desbalances residuales en el disco y chumacera con el eje fisurado, de capital importancia cuando se pretende detectar la presencia de fisuras en el eje rotatorio por medio de registro/medidas de la vibración del sistema.

Analizar la presencia de las resonancias locales y la evolución orbital para las diversas orientaciones entre grieta y desbalance.

Justificación

La tendencia actual en la industria es extender la vida útil de la maquinaria rotatoria. En vez de reemplazar máquinas con 20 o 30 años de antigüedad, muchas compañías están usando valoraciones e inspecciones técnicas para operar sus máquinas por encima o más allá de su vida de diseño original. Este es el caso de las turbinas y generadores que son equipos de alto valor para la industria y su integridad es crucial para mantener una generación de energía segura y económica. Uno de los asuntos más importantes a considerar para extender la vida de los turbogeneradores y demás maquinaria rotatoria es la detección de fisuras para prevenir fallas catastróficas [1], [67].

Los ejes se encuentran entre los componentes sujetos a quizás a las más arduas condiciones de trabajo en lo se refiere a equipo rotatorio de alto rendimiento usado en la industria, tales como; compresores de alta velocidad, turbinas del vapor y de gas, generadores, bombas, etc. Aunque generalmente son absolutamente robustos y bien diseñados, los ejes en operación son a veces susceptibles a serios defectos que se desarrollan sin mucho aviso previo evidente. Los ejes son los primeros candidatos a grietas por fatiga debido a la naturaleza rápidamente fluctuante de los esfuerzos de flexión, la presencia de numerosos concentradores de esfuerzo y los posibles defectos de diseño o fabricación. Las amplias variaciones en temperatura y medio ambiente durante la operación también contribuyen a las condiciones que conducen a una eventual falla por fatiga. Las consecuencias de la falta total del eje pueden ser catastróficas con enormes costos en pérdidas de tiempo, consecuente daño al equipo y potencial lesión al personal.

Las máquinas con ejes fisurados serán cada vez más frecuentes en la industria nacional conforme los lapsos entre mantenimientos mayores del equipo rotatorio se incrementen. Afortunadamente en las turbomáquinas una fisura puede crecer de manera estable, sin explotar súbita y catastróficamente, gracias a las altas temperaturas de operación, sin embargo en equipo que opera a temperatura ambiente, una fisura se propaga más rápidamente. En ambos casos, si la fisura no se detecta a tiempo, catástrofes como las ocurridas en otros países, traerán consecuencias muy graves en México.

Es bien sabido que tan catastrófica puede ser la falla de una turbina [1], [198]. En el mejor de los casos la planta puede ser puesta fuera de servicio mientras se llevan a cabo las reparaciones, y en el peor, el incidente puede resultar en la destrucción de la planta y la pérdida de vidas humanas. En los 70's y 80's se presentaron algunas de las más conocidas catástrofes provocadas por la falla de rotores. En 1971 en Japón, un rotor de baja presión falló durante una prueba a alta velocidad, mientras que los casos que involucran la unidad No.2 de Gallatin en USA [198] en 1974 y la unidad No.2 de Irsching en Alemania [1] en 1987 ambos resultaron de la falla de rotores durante operación normal.

Así como el número de incidentes relacionados con rotores fisurados se ha incrementado, también ha ido en aumento la necesidad de detectar a tiempo la presencia de fisuras en los rotores. La razón es simple. Desde el punto de vista económico y de seguridad o simplemente por imagen pública, las compañías no pueden permitirse el lujo de tener un incidente derivado de un rotor fisurado.

La detección temprana de fisuras, es indispensable para asegurar una operación confiable de la maquinaria rotatoria y para la toma de decisiones técnicas relacionadas con la rehabilitación o sustitución del rotor, es importante determinar si el rotor puede seguir operando o es necesario retirarlo de servicio tomando en cuenta el impacto económico que puede representar esto.

Por un lado, los métodos directos de detección de grietas tales como ultrasonido, corrientes parásitas, inspección boroscópica, etc., en la práctica no son fácilmente implementados en línea lo que hace muy caro el análisis de un rotor para la detección de grietas a través de estos métodos debido a que la máquina tiene que llevarse fuera de servicio con las consecuentes pérdidas económicas que esto implica. Como consecuencia, últimamente se ha puesto la atención principalmente en los métodos de monitoreo de vibración en línea para el diagnóstico y detección de grietas. Lo anterior es posible debido a que los patrones de vibración cambian cuando ocurren cambios en el sistema como desalineamiento, desbalance ó como en este caso, la presencia y crecimiento de una grieta, lo cual es reflejado por el cambio de rigidez del sistema.

Consecuentemente, la continuidad en la producción, la preservación del capital invertido, la protección del medio ambiente y la reducción de los costos de operación, solo pueden ser garantizadas a través de un sistema de mantenimiento eficiente que permita la predicción del fallo y la planificación correcta de las actividades de mantenimiento y reparación. Tales objetivos sólo pueden ser garantizados si de manera continua se monitorea la condición de la máquina y sus componentes, si se detectan de manera temprana las posibles irregularidades en la condición operacional de la máquina y si se logra el “disparo” oportuno de la máquina ante la inminencia de una condición peligrosa. Por ello es muy importante una investigación detallada en el comportamiento de un eje rotor fisurado para diagnosticar y prevenir a tiempo las fisuras en el rotor.

La presente investigación no solo presenta un amplio panorama del estado del arte en esta área sino que además muestra el desarrollo de modelos basados físicamente y sus correspondientes análisis matemáticos lineales que proveen una base sustancial en el esfuerzo para la detección de fisuras, ya que proporcionan resultados que se asemejan cualitativamente al comportamiento real y fundamentan las bases para la creación de técnicas para la detección de grietas en línea por monitoreo de vibraciones.

El futuro apunta a una metodología de detección flexible, multidisciplinaria y robusta para diversos tipos de rotores. Esto conducirá a largo plazo a aumentar la total confiabilidad y seguridad de la maquinaria rotatoria en general.

Introducción

La dinámica de la maquinaria rotatoria ha sido investigada extensamente durante el siglo pasado. A finales del siglo XIX y principios del siglo XX, mucha gente en Inglaterra, Alemania y Estados Unidos estudiaron los conceptos fundamentales asociados con sistemas rotodinámicos e investigaron los efectos de muchos tipos de fenómenos presentes en estos sistemas [39], [40], [192]. El material publicado en esta área disminuyó significativamente durante el intervalo que comprende desde el inicio de la Primera Guerra Mundial hasta el fin de la Segunda Guerra Mundial. Con el desarrollo de la turbina de gas como un motor comercialmente viable después de la Segunda Guerra mundial, llegó a ser de vital importancia la necesidad de un mejor entendimiento de la dinámica de sistemas rotatorios de alta velocidad. Subsecuentemente el desarrollo de la computadora digital ayudó en el desarrollo de muchos procedimientos altamente sofisticados para el análisis, simulación, diseño y prueba de sistemas rotatorios.

Maquinas rotatorias, tales como turbinas de vapor, turbinas de gas, compresores, motores de combustión interna, y motores eléctricos, son los componentes más ampliamente usados en sistemas mecánicos. Asimismo, las partes rotatorias de estas maquinas a menudo llegan a ser las principales fuentes de vibración, por lo tanto, un correcto entendimiento del fenómeno vibratorio y un conocimiento suficiente de rotodinámica son esenciales para considerar medios adecuados para la eliminación de vibraciones.

Una de las causas de los accidentes más serios relacionados con la falla de rotores es la presencia de grietas por fatiga [1], [22], [101], [198]. Las grietas se definen como cualquier discontinuidad involuntaria en el material del eje. En un eje horizontal donde la fuerza de la gravedad actúa, fuerzas de tensión intervienen en la parte de abajo del eje y fuerzas de compresión se desarrollan en la parte superior del eje. Cuando el rotor gira, se generan fuerzas periódicas y sobreviene una fisura debido a la fatiga.

Asimismo, cuando los rotores reales giran a alta velocidad bajo condiciones de operación en las cuales actúan cargas de fatiga, la fuerza centrífuga produce esfuerzos que resultan en un estiramiento o crecimiento del rotor. Si los componentes de la maquina están tensionados dentro de la región elástica del material estos regresan a su tamaño original cuando el esfuerzo es removido, pero si el esfuerzo termomecánico es de magnitud suficiente, una pequeña pero finita porción de la vida del rotor se consume [49]. Ciclos termomecánicos adicionales experimentados por el rotor de una turbomáquina durante los transitorios derivados de arranques, paros y/o cambios de carga consumen porciones incrementales de la vida del rotor hasta la fatiga del material y una fisura o fisuras inician, se propagan, y en ultima instancia hacen estallar el rotor. Este es el principal origen de fatiga a ciclos bajos en componentes de turbinas de vapor, ruedas volantes, centrifugadoras médicas, aeronaves y otros equipos que giran a mediana y alta velocidad. Las fisuras podrían ser producidas como resultado de la presencia inherente de fallas o defectos de manufactura en el material. Pueden también desarrollarse fisuras en rotores que han tenido muchas miles de horas sin fallas, debido al efecto de la corrosión, desalineamiento severo, precargas y otros factores.

Un eje agrietado puede pasar desapercibido durante largos periodos de tiempo, favoreciendo el crecimiento estable de la fisura por fatiga vibratoria hasta alcanzar un tamaño crítico, entonces repentinamente ocurre el rompimiento frágil del rotor, toda la masa del eje prácticamente se desmorona en varios pedazos los cuales son proyectados en todas direcciones alcanzando grandes distancias.

Puesto que la detección temprana de fisuras es muy importante para prevenir una catástrofe, desde hace algún tiempo han sido estudiadas las características vibratorias de rotores fisurados en orden de desarrollar sistemas de monitoreo [24], [93], [106], [188].

Las fisuras en máquinas reales tienen varias formas, pero sus características físicas son representadas por un modelo con una fisura tipo media luna [150]. La presencia de de una grieta transversal es considerada mediante la modelación de la variación periódica de la rigidez estructural del rotor, la cual se expresa en función del tiempo. De manera que la rigidez de un eje fisurado difiere dependiendo de la orientación de la fisura. La rigidez del eje fisurado es mínima cuando la fisura abre y máxima cuando la fisura cierra.

Si la vibración debida a cualquier fuerza de desbalance actuando sobre el rotor es mayor que la deflexión estática del rotor debida a la gravedad, la fisura permanecerá abierta o cerrada dependiendo del tamaño y localización de la masa de desbalance. Si la fisura permanece abierta, el eje del rotor es entonces asimétrico y esta condición puede acarrear problemas de estabilidad [191], [80], [68], [70], [53], [55]. Ahora bien, es de mayor importancia en maquinaria rotaria larga, la situación en donde la vibración debida a la fuerza de desbalance

actuando sobre el rotor es mayor que la deflexión estática del rotor debida a la gravedad. En este caso la fisura podrá abrir y cerrar (o “respirar”) debido a la rotación del rotor. Este problema fue inicialmente estudiado por Gasch [58], Mayes y Davies [125], Grabowski y otros.

Dado que las consecuencias de operar una máquina con fractura entrañan un alto riesgo y puede resultar en una catástrofe, ha ido en aumento la necesidad de detectar a tiempo la presencia de fisuras en las máquinas. El desarrollo de modelos basados físicamente [73], [211] y los análisis matemáticos lineales [144], [72], proveen una base sustancial en el esfuerzo para la detección de fisuras, ya que proporcionan resultados que se asemejan cualitativamente al comportamiento real.

En este estudio primeramente es empleado un modelo de rotor de Jeffcott extendido sobre chumaceras lubricadas, en ausencia de desalineamiento, que posee masas y desbalances en el disco y chumaceras, desarrollado por Gómez-Mancilla [73], [65], [69], que permite caracterizar la evolución orbital y los patrones de vibración en las resonancias locales, incluyendo la velocidad crítica. El modelo aquí utilizado incluye los efectos de la gravedad y produce respuestas periódicas incluso en ausencia de excitaciones del desbalance. El amortiguamiento del sistema incluye el amortiguamiento externo debido al fluido de trabajo dentro del cual se encuentra girando el rotor, y el más significativo el amortiguamiento viscoso originado por la película de aceite en las chumaceras.

En dicho modelo [73], resultan un total de cuatro grados de libertad, dos en el disco \mathbf{X}_d , \mathbf{Y}_d , más dos en ambas localizaciones de las chumaceras \mathbf{X}_j , \mathbf{Y}_j . Los desplazamientos diferenciales del cojinete, los ocho coeficientes rotodinámicos y el correspondiente punto geométrico de equilibrio del cojinete ε_{x0} , ε_{y0} , son utilizados para expresar las fuerzas de reacción del cojinete produciendo oscilaciones alrededor de puntos no triviales de equilibrio.

El ángulo de orientación relativo entre el desbalance residual y la grieta y su interacción, afectan drásticamente la respuesta de sistema haciendo la detección de grieta muy difícil [74], [75], [76], [212]. La existencia de resonancias locales en diversos subarmónicos o súper-armónicos racionales o combinaciones de estos, permite una buena caracterización de la vibración reduciendo la influencia de la interacción entre vectores desconocidos [75], [76]; por ejemplo, magnitudes y orientaciones del desbalance residual y fisura del eje. Varias configuraciones de rotores son estudiados con el fin de caracterizar los patrones de vibración de rotores agrietados. Se hace un análisis numérico de la estabilidad lineal del sistema, incluyendo todos los aspectos mencionados, mediante la teoría de Floquet [67], [68], [70].

Son analizadas las simulaciones numéricas de las respuestas del sistema rotor-chumaceras que comparan los modelos de respiro de grieta presentados por Gasch [58] y Mayes & Davies [125] Lo anterior en relación a la detección de ejes agrietados y la caracterización del comportamiento del sistema.

Igualmente, se presenta la derivación del modelo matemático de una máquina de configuración compleja, tal como es el sistema rotor Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado, soportado por chumaceras hidrodinámicas idénticas sobre soportes que poseen propiedades de rigidez y amortiguamiento [211]. Resultan un total de 6 grados de libertad; dos en el disco \mathbf{X}_d , \mathbf{Y}_d , dos en las localizaciones de las chumaceras \mathbf{X}_j , \mathbf{Y}_j y dos más en los soportes \mathbf{X}_s , \mathbf{Y}_s . Aunque el análisis se vuelve más complejo se incluye en este modelo la presencia de desbalances residuales en las localizaciones del disco y las chumaceras. Este modelo con un cuidadoso análisis ayuda en el propósito de caracterizar la respuesta vibratoria de ejes fisurados. Una solución numérica del presente sistema de rotor es utilizada para deducir y determinar patrones de comportamiento confiables ante la interacción entre la fisura y el desbalance. Se emplea una solución analítica aproximada del presente sistema ya que el modelo es capaz de producir muchos patrones de comportamiento difíciles de ser estudiados numéricamente debido al gran consumo de tiempo y alta demanda de capacidad de cálculo que este estudio requiere.

El enfoque matemático para la derivación de las ecuaciones de movimiento es completamente innovador por parte del grupo de investigadores Gómez-Mancilla *et. al* [211], [73] y permite revelar una serie de resonancias locales cuando existe una fisura las cuales caracterizan la vibración y permiten detectar problemas de ejes fracturados [75], [76], [212].

En rotores con efectos giroscópicos pequeños donde el acoplamiento a otros ejes es flexible, es decir en ausencia de desalineamiento, y la grieta está situada cerca o a la mitad del tramo del eje, los presentes modelos simplificados son suficientemente buenos para la descripción cualitativa de una máquina real que vibra en su primer modo.

Capítulo**1****Antecedentes****1.1 Perspectiva histórica en el campo de la rotodinámica**

La investigación en el campo de la rotodinámica se extiende sobre al menos 130 años de historia, comenzando en 1869 con el artículo de Rankine [157] sobre los movimientos giratorios de un rotor. La investigación en este campo progresó significativamente al final del siglo XIX con las contribuciones de Laval y otros. De Laval inventó una turbina de vapor de una etapa y tuvo éxito en su operación. Inicialmente empleó un rotor rígido, pero después utilizó un rotor flexible y mostró que era posible operarlo por encima de la velocidad crítica. (Stodola [185], 1924).

En un principio, la mayor preocupación de los investigadores y diseñadores era predecir la velocidad crítica, porque el primer problema que tenía que enfrentarse en el diseño de maquinaria rotatoria era evitar la resonancia. En 1894, Dunkerley [34] derivó una fórmula experimental que proporcionaba la velocidad crítica más baja de un sistema multirrotor. Él fue el primero en usar el término de velocidad crítica para la velocidad rotatoria resonante. Holtzer [90] propuso en 1921 un método aproximado para calcular las frecuencias naturales y las formas de los modos de vibraciones torsionales.

El primer registro de teoría fundamental de rotodinámica puede ser hallado en un artículo escrito por Jeffcott [100] en 1919. Podemos apreciar la gran contribución de Jeffcott si recordamos que un eje con un disco a la mitad de su longitud es nombrado *rotor de Jeffcott*, especialmente entre los investigadores de Estados Unidos. Este sistema de rotor fundamental simplificado es también llamado el *rotor de Laval*, en honor de De Laval.

Los desarrollos hechos en rotodinámica hasta principios del siglo XX están detallados en la pieza maestra escrita por Stodola [185] en 1924. Este espléndido libro explica casi todo el campo relacionado a turbinas de gas. Entre otras cosas, este libro incluye la dinámica de ejes elásticos con discos, la dinámica de rotores continuos sin considerar los momentos giroscópicos, el balanceo de rotores rígidos, y métodos para determinar valores aproximados de las velocidades críticas de rotores con sección transversal variable.

A partir de entonces, la rotodinámica se expandió para considerar varios otros efectos. Mientras la velocidad de rotación se incrementa por encima de la primera velocidad crítica, la ocurrencia de vibraciones auto excitadas llega a ser un serio problema. En la década de 1920, Newkirk [141] y Kimball [104] en 1924 fueron los primeros en reconocer que la fricción interna del material del eje podría causar un movimiento rotatorio inestable. En 1925, Newkirk y Taylor [142] investigaron una vibración inestable llamada *latigazo de aceite (oil whip)*, el cual se debe a la película de aceite en las chumaceras [91]. Este fenómeno, en el cual la fricción que normalmente amortigua la vibración causa vibraciones auto excitadas, atrajo la atención de varios investigadores.

Más o menos una década después, comenzó el estudio de sistemas con eje asimétrico y sistemas rotatorios asimétricos. Los primeros son sistemas con una diferencia direccional en la rigidez del eje, y los segundos son aquellos con una diferencia direccional en la inercia del rotor. Los rotores de generadores de dos polos y rotores de hélices son ejemplos de tales sistemas. Mientras estas diferencias direccionales rotan con el eje, aparecen términos con coeficientes variables con el tiempo en las ecuaciones gobernantes. Por lo tanto estos sistemas caen dentro de la categoría de sistemas excitados paraméricamente. La principal propiedad característica

de los sistemas asimétricos es la aparición de vibraciones inestables en algunos rangos de velocidad de operación. El reporte de Smith [180] en 1933 es un trabajo pionero en este tema. Varios fenómenos relacionados a las asimetrías de rotores fueron investigados activamente a mediados del siglo XX por Taylor [189] en 1940, Foote *et al.* [47] en 1943, Brosens y Crandall [23] en 1961 y Yamamoto y Ota [203], [204] en 1963 y 1964

La presencia de fenómenos no estacionarios durante el tránsito a través de velocidades críticas ha sido estudiada desde que Lewis [115] reportó en 1932 su investigación sobre el rotor de Jeffcott. Numerosos reportes en este tema son clasificados dentro de dos grupos. Un grupo clasifica los fenómenos no estacionarios que ocurren en un proceso con una aceleración constante y el otro clasifica los fenómenos que ocurren con un torque motriz limitado. En el segundo caso, debe ser considerada la mutua interacción entre el torque motriz y la vibración del eje.

Como el análisis teórico de tales problemas transitorios es mucho más difícil que el de aquellos de vibraciones estacionarias, muchos de los investigadores adoptaron integraciones numéricas. El desarrollo del método asintótico de Mitropol'skii [131] en 1965 fomentó considerablemente la investigación en este campo.

Las vibraciones de rotores con masas continuamente distribuidas fueron igualmente estudiadas. El más simple modelo de rotor continuo que corresponde a la viga de Euler fue el primero en ser estudiado en el libro de Stodola [185] en 1924. En las décadas de 1950 y 1960, Bishop [16], Bishop y Gladwell [17] en 1959, y Bishop y Parkinson [18] en 1965, publicaron una serie de artículos sobre la respuesta al desbalance y el balanceo de un rotor continuo. Eshleman y Eubanks [42] en 1969 derivaron ecuaciones de movimiento más generales considerando los efectos de inercias rotatorias, deformaciones cortantes, y momentos giroscópicos, e investigaron sus efectos.

El procedimiento fundamental y más importante para amortiguar vibraciones perjudiciales es eliminar el desbalance geométrico en el rotor. La técnica de balanceo para un rotor rígido fue establecida en una época relativamente temprana. Una máquina de balanceo práctica basada en esta técnica fue inventada en 1907 (Miwa y Shimomura [132], 1976). La llegada de máquinas rotatorias de alta velocidad hizo necesario el desarrollo de una técnica de balanceo para rotores flexibles. Dos teorías representativas fueron propuestas. Uno fue el método de balanceo modal propuesto en la década de 1950 por Federn [43] en 1957 y Bishop y Gladwell [17] en 1959. El otro es el método de coeficientes de influencia propuesto a principios de la década de 1960 y desarrollado principalmente en los Estados Unidos junto con el progreso de las computadoras.

El anteriormente mencionado latigazo de aceite es representativo de la vibración de rotores inducida por flujo. A mediados del siglo XX, Hori [91] en 1959 triunfó en explicar varias características fundamentales del latigazo de aceite investigando la estabilidad de movimiento de un eje y considerando fuerzas de presión debido a la película de aceite. Prácticamente al mismo tiempo, otros tipos de vibraciones inducidas por flujo atrajeron la atención de varios investigadores. Uno de estos fenómenos fue una vibración auto excitada llamada el *torbellino de vapor* (*steam whirl*). El mecanismo de este tipo de vibración en turbinas fue explicada por Thomas [191] en 1958 y en compresores fue expuesta por Alford [3] en 1965. Estos fenómenos están todavía atrayendo el interés de muchos investigadores por su importancia práctica. La vibración de un rotor hueco conteniendo fluido es un problema relativamente nuevo de vibraciones inducidas por flujo. En 1967, Ehrich [37] reportó que el fluido atrapado en ejes de motores inducía vibraciones asíncronas y también cambiaba la forma de las curvas de resonancia. Un artículo digno de mencionar en este fenómeno es el de Wolf [200] en 1968. Él explicó exitosamente la aparición de un rango de velocidad inestable en una región poscrítica de un sistema rotor conteniendo un fluido no viscoso. Desde entonces, estos tipos de vibraciones auto excitadas han sido estudiados por muchos investigadores.

Mientras que los rotores se hacen más ligeros y las velocidades rotatorias más altas, la aparición de resonancias no lineales como resonancias subarmónicas llegan a ser un serio problema. Yamamoto [201], [202] en 1955 y 1957 estudió varios tipos de resonancias no lineales después de que reportó resonancias subarmónicas debidos a cojinetes de bolas en 1955. Discutió sistemas con no linealidades débiles que pueden ser expresadas por medio de series de potencias de bajo orden. Además de resonancias subarmónicas, también investigó combinación de resonancias (las llamó *summed-and-differential harmonic oscillations*) y combinación de tonos. En la década de 1960, Tondl [192] en 1965 estudió resonancias no lineales debidas a la película de aceite en chumaceras. En 1966, Ehrich [36] reportó resonancias subarmónicas observadas en una turbina de gas de avión. La causa de fuertes no linealidades en turbinas de gas de aviones es el claro radial de los *cojinetes de amortiguamiento por aplastamiento de película* (*squeeze-film damper bearings*). Tiempo después, Ehrich [38], [39] en 1988 y 1991 reportó la aparición de varios tipos de resonancias subarmónicas hasta un muy alto orden y vibraciones caóticas en motores.

En la práctica, en el diseño de maquinaria rotatoria es necesario conocer acertadamente las frecuencias naturales, modos y fuerzas de reacción a desbalances en sistemas rotatorios complejos. Las técnicas representativas usadas para este propósito son el método de matriz de transferencia y el método de elemento finito. En 1945, Prohl [155] usó el método de matriz de transferencia en el análisis de un sistema rotor por expansión del método de Myklestad [138] propuesto en 1944. Este método analítico es particularmente útil para sistemas rotor-chumaceras y se ha desarrollado rápidamente desde la década de 1960 por la contribución de varios investigadores como Lund *et al.* [119]. El método de elemento finito fue primeramente desarrollado en dinámica de estructuras y después usado en varios campos tecnológicos. La primera aplicación del método de elemento finito a un sistema rotor fue hecho por Ruhl y Brooker [163] en 1972. En seguida, en 1976, Nelson y McVaugh [140] lo generalizaron considerando inercias rotatorias, momentos giroscópicos, y fuerzas axiales.

En la década de 1960, fueron encontradas grietas en los rotores de algunas turbinas de vapor. Desde entonces comenzó la investigación en vibraciones de ejes agrietados para prevenir accidentes serios y desarrollar un sistema de diagnóstico de vibraciones para la detección de grietas. En la década de 1970, Gasch [58] en 1976 y Henry y Okan-Avae [88] en 1976 investigaron las vibraciones considerando no linealidades en la rigidez debidas al mecanismo apertura y cierre. Mostraron que una región inestable aparece o desaparece en la mayor velocidad crítica, dependiendo de la dirección del desbalance.

El tema más reciente en el campo de la rotodinámica es el estudio de chumaceras magnéticas, las cuales soportan un rotor sin hacer contacto con él, y amortiguadores activos. Este estudio ha recibido considerable atención desde que Schweitzer [169] reportó su trabajo en 1975.

1.2 Introducción al diagnóstico y detección de ejes agrietados

Los ejes se encuentran entre los componentes sujetos a quizás a las más arduas condiciones de trabajo en lo se refiere a equipo rotatorio de alto rendimiento para uso general usado en plantas de proceso tales como; compresores de alta velocidad, turbinas del vapor y de gas, generadores, bombas, etc. Aunque generalmente son absolutamente robustos y bien diseñados, los ejes en operación son a veces susceptibles a serios defectos que se desarrollan sin mucho aviso previo evidente. Los ejes son los primeros candidatos a grietas de fatiga debido a la naturaleza rápidamente fluctuante de los esfuerzos de flexión, la presencia de numerosos concentradores de esfuerzo y los posibles defectos de diseño o de fabricación. Las grietas se definen como cualquier discontinuidad involuntaria en el material del eje. Las amplias variaciones en temperatura y medio ambiente durante la operación también contribuyen a las condiciones que conducen a una eventual falla por fatiga.



Fig. 1-1 Rotor fracturado con grieta transversal.

Las consecuencias de la falta total del eje pueden ser catastróficas con enormes costos en pérdidas de tiempo, consecuente daño al equipo y potencial lesión al personal [1], [198]. La falla total ocurre cuando el espécimen se ha fracturado totalmente en dos o más porciones. Un defecto o un desperfecto, en contraste, se puede definir arbitrariamente como cualquier característica que hace a un componente menos conveniente para su uso previsto. La operación confiable y segura del equipo confía en el mantenimiento proactivo ayudado por recientes tecnologías de diagnóstico.

Los operadores y el personal de mantenimiento de la maquinaria crítica de la planta están particularmente interesados en la detección temprana de los síntomas que pueden conducir a la falla de ejes en servicio. En materiales dúctiles, tales como aceros de baja/media aleación usados para los ejes de turbomaquinaria, las grietas se inician como minúsculas discontinuidades que crecen de tamaño cuando el eje es sujeto a esfuerzos cíclicos. Es importante detectar estas grietas antes de que alcancen su tamaño crítico y causen la falla total del eje. La presente sección se ocupa de los tipos y las causas de las grietas en rotores y también de los fundamentos sobre la propagación de grietas, seguida por una revisión de la literatura publicada en inglés en las últimas décadas en los campos de detección de grietas en ejes y la valoración de su severidad. También se repasan algunos artículos clásicos debido a su perdurable contribución. Aquellos interesados en un estudio de la literatura no incluida aquí pueden referirse a las excelentes revisiones de la literatura hechas en este tema por Dimarogonas [28], 1996; Gasch [60], 1993; y Wauer [197], 1990.

En ocasiones, los rotores agrietados pueden ser mantenidos en servicio, si no hay rotores de repuesto disponibles, a condición de que la propagación de la grieta sea controlada por un preciso monitoreo de vibración como ha sido reportado por Mayes y Davies [124].

Otras veces, los rotores agrietados pueden ser reparados por soldadura [134] (véase Fig. 1-8), pero en la mayoría de los casos son removidos de servicio definitivamente; para conseguir un entendimiento más profundo sobre la generación de la grieta y el mecanismo de propagación, muchos rotores agrietados finalmente han sido cortados o rotos, para permitir una inspección directa de la superficie agrietada. En pocas ocasiones el rotor agrietado ha sido sujeto a operaciones de experimentación en células de prueba, para analizar exactamente su comportamiento dinámico y su sensibilidad térmica. El comportamiento vibratorio típico de rotores agrietados será ilustrado y comparado contra diversos resultados experimentales publicados en literatura.

Tipos y causas de grietas en ejes rotatorios

El agrietamiento de ejes ocurre debido a diversos mecanismos tales como fatiga a ciclos altos y bajos, o a esfuerzos de corrosión. Se ha observado que existen componentes que contienen grietas que en ocasiones fueron producidas desde el proceso de fabricación, o bien por precargas estáticas y/o dinámicas. Según Bloch [19], Fuchs y Stephens [50], una típica cronología de los eventos que conducen a la falla total por agrietamiento en un material dúctil, es la siguiente:

Iniciación de la grieta. En esta etapa se inician minúsculas discontinuidades en el material no fisurado. Las grietas pueden ser causadas por concentradores mecánicos de esfuerzo, tales como chaveteros agudos, cambios abruptos de sección transversal, ajustes pesados, abolladuras y ranuras, o factores tales como desgaste por fricción y arrastre de material y/o factores metalúrgicos tales como defectos de forja, inclusiones, porosidad y vacíos.

Propagación de la grieta. Durante esta etapa, la discontinuidad crece de tamaño como resultado de las tensiones cíclicas inducidas en el componente. Ciertas condiciones, algunas de las cuales se enumeran a continuación, aceleran la razón de crecimiento de grieta:

- Defectos de funcionamiento, tales como bombeo continuo en compresores, corriente de secuencia negativa o averías de la base en generadores y turbinas acopladas;
- La presencia de esfuerzos residuales o de zonas afectadas por el calor (*Heat Affected Zones, HAZs*) por soldadura en el material del rotor;
- Condiciones metalúrgicas, tales como la presencia de hidrógeno en el acero, elevada temperatura de transición dúctil-frágil (*Ductile-Brittle Transition Temperature, DBTT*) ó precipitación del carburo en aceros de aleación;

- Tensiones térmicas;
- Condiciones ambientales tales como la presencia de un medio corrosivo.

Una grieta se puede propagar a partir de una cierta pequeña imperfección en el material, asimismo, es más probable su aparición en la localización de cambios agudos de diámetro o de la geometría del eje (presencia de agujeros, ranuras para cuñas, hilos de rosca etcétera) y en regiones de alta concentración de esfuerzo, puede ser generada como resultado de corrosión por arrastre de metal ó *fretting corrosion* (en caso de uniones por presión), y al parecer es favorecida por ambientes húmedos y corrosivos [10].

Los esfuerzos y los choques térmicos son también responsables de generar altos factores de intensidad de esfuerzo locales que pueden causar el comienzo de una grieta y su propagación. El estudio de la propagación de grieta, su dirección y velocidad de propagación como función del nivel de esfuerzos son problemas a los cuales se han dedicado muchos estudios en los últimos 40 años dentro del campo que ha sido llamado *Mecánica de la Fractura*. Las grietas se propagan principalmente debido a la fatiga de ciclos bajos y altos.

Una vez que una grieta, aunque pequeña, ha aparecido, altas tensiones y factores de intensidad de esfuerzo se desarrollaran en la extremidad de la grieta y permitirán que la grieta se propague más profundamente. La dirección de propagación es determinada generalmente por la dirección de la tensión máxima o de la resistencia mínima del material.

En ejes rotatorios las grietas se propagan generalmente en un plano perpendicular al eje del rotor, cuando las tensiones de flexión axiales son predominantes. Estas grietas son entonces llamadas grietas transversales. Pero también superficies cónicas y helicoidales de grieta han sido divulgadas en la literatura [10].

En sus inicios la grieta puede tener cualquier orientación, dependiendo de condiciones locales, pero cuando se propaga más profundamente su dirección es principalmente radial y la superficie agrietada, aunque no exactamente, es aproximadamente plana con diminutas curvaturas.

La velocidad de propagación en un eje rotatorio puede cambiar de caso a caso. En la literatura se divulgan tiempos de propagación que van desde 74000 hrs. hasta 101000 hrs. para detectar o sospechar la presencia de una grieta de profundidad peligrosa, pero en otros casos solamente 2500 hrs. de operación han sido suficientes para acrecentar constantemente la grieta [10]. Muy frecuentemente la grieta se mueve por pasos, alternando crecimientos y paros: ambos son reconocibles en el patrón de la superficie agrietada donde son reconocibles las supuestas *líneas de reposo*. Generalmente al acercarse a una profundidad peligrosa, la grieta se propaga más rápidamente, con una velocidad de propagación que aumenta exponencialmente. El crecimiento final hasta una profundidad peligrosa crítica toma a veces solamente pocos días de operación.

En muchos casos puede ser asumido que el crecimiento ocurre discontinuamente en condiciones de operación normales, en las cuales en pocas horas de operación se consumen un millón de ciclos, al menos durante una cierta condición transitoria, tal como el arranque o paro, durante los cuales también algunos esfuerzos térmicos se suman a los comunes esfuerzos de flexión, y donde se experimentan altas amplitudes de vibración debido a condiciones resonantes al cruzar una velocidad crítica.

Falla. El término falla, aplicado a sistemas ingenieriles, puede ser descrito como el no rendimiento de componentes o sistemas debido a alguna deficiencia que limita su vida de servicio. Las fallas son comunes en la industria y pueden ocurrir a cualquiera de las varias etapas como son fabricación, prueba, transportación y servicio. Las fallas pueden ser clasificadas como “*fallas al final de la vida*” (*end-of-life failures*) que son predecibles y para las cuales deben ser tomadas por adelantado acciones preventivas apropiadas, y “*fallas prematuras*” (*premature failures*) que son impredecibles y ocurren sin suficiente o sin advertencia alguna. Estas últimas pueden conducir a un paro de la planta, pérdida de producción y productividad, incendios, explosiones, radiación o fuga de gas, o en casos extremos, podrían terminar en catástrofes resultando en la pérdida de vidas y/o daño a la propiedad y el ambiente. Estas fallas repentinas pueden también afectar adversamente la moral de los trabajadores y su confianza en la seguridad del sistema.

En el caso de rotores de turbomaquinaria la falla ocurre cuando el material que no ha sido afectado por la grieta no puede soportar más las cargas aplicadas. La falla real del material puede ser de una manera frágil o dúctil, dependiendo de las condiciones que prevalecen. La falla ocurre muy rápidamente una vez que la(s) grieta(s) alcanza(n) un tamaño crítico.

Se han encontrado grietas también bajo anillos sujetos a presión en turbinas de vapor, o bajo los rebordes de coples sujetos a presión. En este último caso la posición donde el momento de flexión es generalmente muy pequeño hace la detección de la grieta cada vez más difícil.

Los ejes verticales de las bombas de enfriamiento del reactor de centrales nucleares (*reactor cooling pumps, RCP*) son afectados a menudo por micro-grietas generadas por fatiga térmica en la localización del sello donde se evita el flujo hacia arriba del agua caliente mediante la inyección de la agua fría [9]. La presencia de una manga protectora no es suficiente para evitar totalmente la generación de una gran cantidad de micro-grietas con distribución al azar y una de estas grietas puede entonces convertirse en una grieta transversal. En algunas ocasiones estos ejes han causado fallas catastróficas, algunos otros han sido detenidos y removidos a tiempo. En estos rotores de eje vertical es difícil pronosticar tensiones y velocidades de propagación, porque las tensiones axiales y de flexión son generadas por cargas inmóviles axiales y radiales, que son en general desconocidas, incluso si se han hecho algunos intentos por conocerlas [123]. Los problemas de esta clase de máquinas son supervisados por EPRI (*Electrical Power Research Institute*) durante reuniones periódicas de empresas de servicio y fabricantes [41].



Fig. 1-2 Rotor de una turbina con grieta transversal.

Finalmente, de acuerdo con sus geometrías las grietas se pueden clasificar en términos generales como sigue.

- Grietas perpendiculares al eje geométrico del árbol, conocidas como grietas "transversales". Éstas son las más comunes y serias pues reducen la sección transversal y con ello debilitan el rotor. La mayoría de la investigación en el pasado y en la actualidad se centran en la detección de tales grietas. En ellas se introduce una flexibilidad local en la rigidez del eje debido a la concentración de energía de tensión en la vecindad de la periferia de la grieta.
- Grietas paralelas al eje geométrico del árbol, conocidas como grietas "longitudinales".
- Grietas "inclinadas" (grietas en ángulo al eje geométrico del árbol), también se pueden encontrar pero no con mucha frecuencia. Las grietas inclinadas influyen el comportamiento torsional del rotor de una manera absolutamente similar al efecto de grietas transversales en el comportamiento lateral. Su efecto sobre las vibraciones laterales es menor que el de grietas transversales de severidad comparable. (Ichimonji *et al.* [92], 1994, y Sekhar [172], 1999).
- Grietas que se abren cuando la parte afectada del material se sujeta a esfuerzos de tensión y se cierran cuando se invierte el esfuerzo, conocidas como grietas que "respiran" (*breathing cracks*). La rigidez del componente es más afectada cuando esta bajo tensión. El "respiro" de la grieta da lugar a no linealidades en el comportamiento vibratorio del rotor. Las grietas del eje respiran cuando sus tamaños son pequeños, las velocidades de operación son bajas y las fuerzas radiales son grandes (véase a Sekhar y Prabhu [176], 1998). La mayoría de los esfuerzos en investigación teórica se concentran en las grietas transversales que "respiran" debido a su importancia práctica directa
- Grietas que permanecen siempre abiertas conocidas como grietas "profundas" (*gaping cracks*). Más correctamente llamadas "muecas". Las grietas profundas son fáciles de imitar en un ambiente del laboratorio y por lo tanto la mayoría del trabajo experimental se centra en este tipo particular de la grieta

- Grietas abiertas en la superficie llamadas grietas "superficiales". Pueden ser detectadas normalmente por técnicas tales como tintes penetrantes, o inspección visual
- Grietas que no se muestran en la superficie llamadas grietas "subsuperficiales" (*subsurface cracks*). Técnicas especiales tales como ultrasonido, partículas magnéticas, radiografía o caída de voltaje en el eje son necesarias detectarlas. Las grietas superficiales tienen un mayor efecto en el comportamiento vibratorio de ejes que las grietas subsuperficiales (Subbiah *et al.* [186], 2002).

Casos recientes de ejes agrietados en turbomáquinas

En realidad han existido una gran cantidad de accidentes lamentables relacionados con máquinas rotatorias, especialmente en turbomaquinaria [1], [5], [22], [101], [198], pero sin embargo poco se ha publicado al respecto principalmente por razones de protección a la firma o compañía fabricante de estos equipos así como de las centrales que los operan. Por lo tanto es difícil conseguir información confiable.

La presencia de grietas en la maquinaria de centrales eléctricas y plantas industriales, como turbinas de vapor, generadores y bombas ha sido descubierta en muchos países europeos así como en el este de USA. De acuerdo a Bently [12] durante un periodo de 10 años, dentro de la industria de energía de Estados Unidos, al menos 28 fallas de rotores debido a grietas fueron documentadas. En 1987, Allianz, una compañía de seguros industriales, promovió una conferencia sobre la prevención de fallas catastróficas en la maquinaria rotatoria, en la cual fueron reportados 37 diferentes casos de grietas ocurridas en Europa en los 20 años anteriores [10]. También 16 fallas catastróficas fueron divulgadas, pero solamente muy pocas se podrían atribuir a la presencia y propagación de grietas transversales.

Afortunadamente en México todavía no se han presentado casos graves de accidentes de esta naturaleza; sin embargo, si han existido algunas señales de peligro en algunas centrales de generación de energía eléctrica al observar, durante los periodos de mantenimiento, algunas grietas superficiales y otras embebidas en el cuerpo del rotor [54]. Puesto que la construcción de nuevas plantas de generación de energía en la actualidad se ha detenido y las turbinas existentes están envejeciendo se espera que la aparición de grietas por fatiga en los rotores de tales máquinas se acelere en los años que vienen.

Varios casos de turbinas de vapor y de generadores grandes y pequeños con ejes agrietados son bien documentados ya desde de los últimos años de la década de los 70's [1], [5], [22], [101], [198]. Aunque no están disponibles estadísticas claras en cuanto a el daño exacto causado por los ejes agrietados, el *Electric Power Research Institute, EPRI*, estima pérdidas directas e indirectas (reparaciones, reemplazos y pérdidas de ingresos) de aproximadamente 1 billón de dólares solamente en la industria de energía convencional y atómica. Los casos se extienden desde explosiones catastróficas y espectaculares del rotor, a la detección de grietas en una etapa mucho más temprana, dando por resultado la reparación o el retiro del rotor. Más recientemente, las turbinas de gas, los compresores centrífugos y axiales, las bombas de alimentación de las calderas y las bombas de centrales nucleares se han unido a la lista de las turbomáquinas afectadas por ejes agrietados (Kowal y Ó'Brien [106], 1989; Allen y Bohanick [5], 1990; Brose y Jirinec [22], 1992; Sanderson [167], 1992; Franklin *et al.* [48], 1997; Eisenmann [40], 2000; Jenkins [101], 1985). Gandy y Viswanathan [51] en 2001 estudiaron los resultados de la reparación por soldadura y el subsiguiente tratamiento anti-grieta de rotores agrietados. Varios fabricantes de equipos originales (*Original Equipment Manufacturers, OEMs*) han adoptado diseños especiales de rotor y procedimientos de arranque para reducir al mínimo la posibilidad de agrietamiento del eje en turbinas de vapor grandes (Leyzerovich [114], 1997). Algunos accidentes relevantes son presentados a continuación.

Un caso es la explosión que ocurrió en una turbina de vapor de la central eléctrica de Tennessee Valley Authority Gallatin No. 2 en junio de 1974 habiendo entrado en operación desde mayo de 1959 [198]. El historial de la turbina indica que sufrió 105 arranques en frío y 183 arranques en tibio ó caliente (288 arranques en total). El accidente ocurrió en la sección intermedia-baja presión, lo cual era de esperarse ya que el diámetro y por lo tanto la masa de esta sección es grande. La fractura en el rotor de la turbina tuvo su origen en un defecto de forma elíptica localizado en el plano radial-axial en la región del barreno. El defecto tenía aproximadamente 6.45 mm a lo largo del eje menor de la elipse y 140 mm a lo largo del eje mayor de la elipse, y el centroide del defecto a una distancia de 17.84 mm de la superficie del barreno. La falla se explicó por la interacción de la fatiga de baja frecuencia (por los ciclos de enfriamiento y calentamiento de la turbina) y de la termofluencia del material el cual se encontraba a altas temperaturas y a altos esfuerzos termomecánicos durante un tiempo prolongado. Se

formaron así micro fisuras que al unirse entre sí crearon una grieta mayor que al alcanzar su tamaño crítico se propagó hasta provocar la ruptura final del rotor por fractura frágil. La explosión ocurrió durante el arranque en frío de la turbina produciéndose varios fragmentos del material del rotor. La temperatura en estado permanente en la región donde se originó el defecto estaba entre 413°C y 427°C. El valor de los esfuerzos en estado permanente era de 337.8 MPa y el valor de los esfuerzos pico de 496.4 MPa. El tiempo promedio entre un arranque y paro fue de 368 h [168].

Otro caso es el accidente ocurrido en una central de generación de energía eléctrica en Alemania [1]. El caso ocurrió en un turbo grupo de vapor de 330 MW, construido en 1971, constituido por una turbina de alta presión, una de presión media y dos turbinas de baja presión de doble corriente con condensadores y un generador de 375 MVA. El siniestro ocurrió 10 días después de un paro, en el momento del nuevo arranque; el turbogruppo fue arrancado tras operar el mecanismo de tornaflecha, se abrieron las válvulas de cierre rápido y posteriormente un periodo de precalentamiento de 4 minutos; entonces el turbogruppo se aceleró a 3000 rpm. Inmediatamente antes del sincronizado se produjo la explosión espontánea de la turbina sin previo aviso.

El peso del rotor incluyendo alabes era de 80 toneladas y éste se partió en 30 pedazos; el más grande de 24 toneladas, el cual afortunadamente se incrustó en el piso de la planta, otros dos pedazos de aproximadamente 1 tonelada cayeron en lugares deshabitados a distancias de 1.1 y 1.3 kilómetros de la planta.

Dimarogonas y Papadopoulos [30] narran como en 1983 una turbina de 300 MW de la central eléctrica de Lavrion de la Corporación de Energía Pública de Grecia (*Public Power Corporation of Greece*) tuvo serias vibraciones en la etapa de baja presión (*low-power*, LP). Alstom, el fabricante de la turbina, había sospechado que el desalineamiento sería la causa. Repetidos intentos por alinear la máquina no tuvieron efecto, sino por el contrario fomentaron el deterioro.

Un análisis de la vibración medida con los instrumentos de supervisión de la turbina reveló un espectro como el que se muestra en la Fig. 1-3. Los picos a 100, 150, ...Hz, corresponden a las señales 2X, 3X,... predichas por la teoría. Tales señales sin embargo, son observadas en ambos, desalineamiento y ejes agrietados. La señal 1/2X de 12.5 Hz fue un claro indicador de la existencia de una grieta substancial. La compañía decidió abrir la máquina para inspeccionarla. Una grieta transversal superficial de aproximadamente 120° de ángulo fue encontrada, el rotor fue reparado y regresado a servicio sin más problemas.

Una interesante observación fue que el subarmónico de 12.5 Hz fue más aparente en la sección de alta presión (*high-power*, HP), aunque la grieta fue encontrada en la sección de baja presión, ya que la amplitud sincronía fue tan alta en la etapa de alta presión que la señal subarmónica fue indistinguible en el ruido.

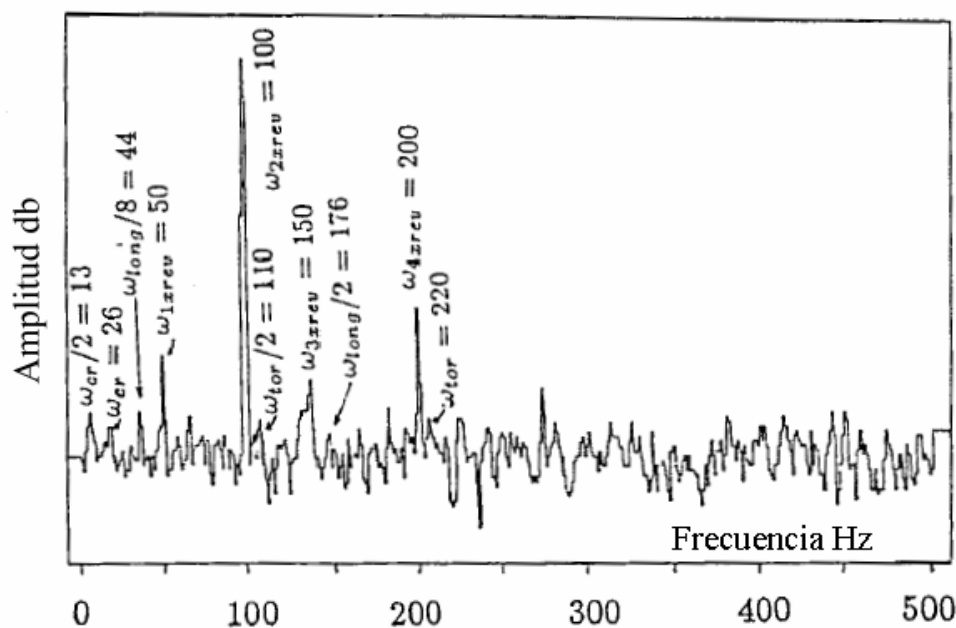


Fig. 1-3 Espectro de frecuencias obtenido de una máquina con rotor agrietado

Otro ejemplo del comportamiento vibratorio del rotor agrietado de un generador (Fig. 1-4) según lo divulgado por Nilsson [143] muestra que la reducción de la amplitud total de vibración no es en absoluto un síntoma de una máquina sana y que la grieta en su etapa final puede propagarse muy rápidamente. En este caso el director de planta tomó la decisión correcta en parar la máquina, a pesar del hecho de que el nivel de vibración era mucho menor entonces que el nivel de alarma; la máquina fue parada y examinada apenas a tiempo antes de una falla catastrófica porque la grieta había cortado ya casi el 50% de la sección (véase Fig. 1-5)

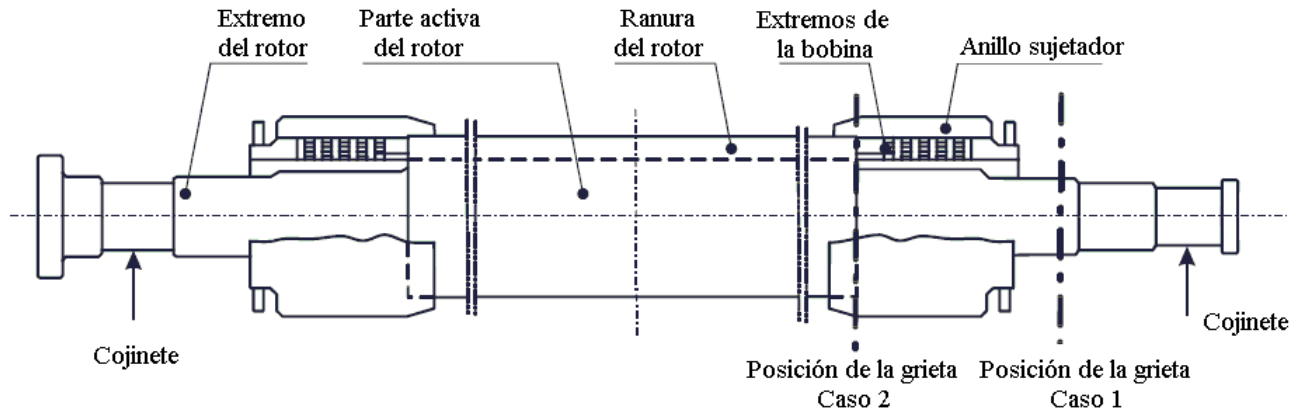


Fig. 1-4 Rotor agrietado de un generador

Algunas lecciones importantes que se obtuvieron de este caso son que por lo general el monitoreo de vibración no es suficiente y que el análisis de la tendencia del componente 2X es la mejor herramienta para descubrir una grieta.

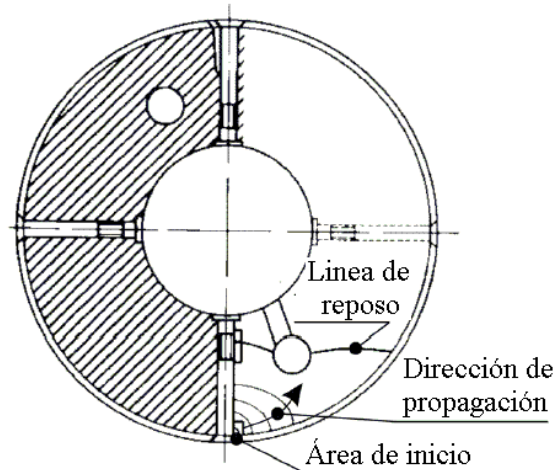


Fig. 1-5 Sección transversal del rotor en la localización de la grieta

El segundo ejemplo es el comportamiento vibratorio de una turbina de vapor (Fig. 1-6) que había sido sometida, por accidente, a un choque térmico [146]. Este ejemplo es sintomático de la sensibilidad térmica de los rotores agrietados; durante los transitorios térmicos el calentamiento de la superficie del rotor tiende a comprimir y cerrar los labios de la grieta, y su enfriamiento tiende a abrirla. El aumento y disminución de la vibración total (principalmente los componentes 1X y 2X) son debidos respectivamente a los transitorios térmicos de enfriamiento y calentamiento. Esta sensibilidad térmica particular es uno de los síntomas más claros y confiables de una grieta transversal en un rotor.

En este caso, la presencia de la grieta fue confirmada a través de su sensibilidad térmica que era analizada durante pruebas de transitorios térmicos realizadas en condiciones de trabajo normales cambiando la temperatura de las bobinas del fluido de enfriamiento (H_2)

La grieta entonces fue encontrada finalmente después de desmontar el rotor y se había desarrollado hasta aproximadamente un 50% del área de la sección.

En este caso del mismo modo que en los anteriores la propagación de la grieta es debida a las tensiones alternantes inducidas en el eje rotatorio por la carga de flexión estática debido al peso y a condiciones de la alineación de las chumaceras.

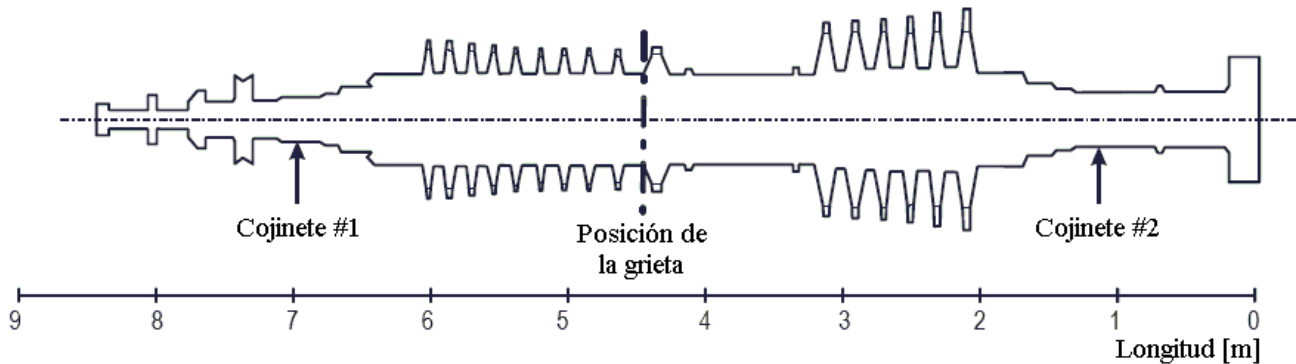


Fig. 1-6 Rotor agrietado de una turbina de vapor

En 1992, Sanderson [167] describió la detección de una grieta propagada en un turbogenerador de 935 MW en una central nuclear poco después de haber sido puesta en servicio. La profundidad de la grieta alcanzó el 25% del diámetro del eje antes de que su presencia pudiera ser confirmada y la máquina fue sacada de servicio. Los factores que ayudaron a identificar la grieta fueron los siguientes:

- Un componente 1X grande y constantemente en aumento debido a que la grieta del eje indujo desbalance, el gradiente de temperatura dentro del rotor era absolutamente grande desde el barreno a la superficie, y la grieta deformó la distribución de esfuerzos térmicos, que dieron lugar a la flexión del eje.
- Una reducción pequeña en la primera y segunda velocidad crítica del generador observada durante el arranque.
- Un componente 2X grande a la mitad de la primera velocidad crítica del generador.
- Primera velocidad crítica partida debido a la asimetría en el rotor normalmente simétrico (generador de cuatro-polos).

Finalmente también las máquinas hidráulicas, pueden ser afectadas por grietas transversales según lo mostrado en Fig. 1-7. La razón de la formación de esta grieta sigue siendo desconocida [10].



Fig. 1-7 Rotor agrietado en una turbina hidráulica Pelton

Pruebas para la detección de grietas en rotores

Una vez que se sospecha de una grieta en un rotor y éste es removido de servicio, puede ser probado de diversas maneras para comprobar la presencia de la grieta y de igual forma su posición y profundidad.

Pruebas dinámicas. Estas pruebas, también llamadas *pruebas de choque*, consisten en medir en diversas posiciones angulares las frecuencias naturales del rotor apoyado sobre cojinetes de rodillos, las frecuencias deben ser independientes de la posición angular en ejes simétricos axialmente y sin defectos. Si en cambio las frecuencias naturales dependen de la posición, esto valida la existencia de una grieta. Frecuencias más bajas corresponden a las posiciones en las cuales la grieta esta abierta, frecuencias más altas a aquellas en las cuales la grieta esta cerrada. Puesto que la variación de la frecuencia natural es pequeña, se debe tener cuidado de tener en todas las diferentes posiciones la misma rigidez de soporte del rodillo y misma superficie de contacto del rodillo y el eje. Combinando las formas modales y las frecuencias naturales medidas por un sistema de acelerómetros empleados en el eje, también se pueden estimar la posición de la grieta y su profundidad, con la ayuda del modelo del eje.

Esta técnica es más difícil de utilizar en generadores con dos polos, que tienen una asimetría axial de rigidez “original” y por lo tanto diversas frecuencias naturales en diversas posiciones angulares, con una variación del componente 2X, de la cual es difícil extraer la contribución de la asimetría inducida por la grieta.

Puesto que las frecuencias naturales son proporcionales a la raíz cuadrada de la rigidez del eje, se sugiere medir las deflexiones estáticas ya que son proporcionales al inverso de la rigidez. Si la rigidez del eje cambia en 1% entre un mínimo (grieta abierta) y un máximo (grieta cerrada), también la desviación cambiará en 1% mientras que la frecuencia natural solamente en cerca del 0.5% aproximadamente. Puesto que las grietas producen cambios más grandes en las deflexiones que en las frecuencias naturales, una exactitud más alta se espera de las medidas de deflexión en vez de las mediciones de las frecuencias naturales.

Pruebas estáticas. Las medidas de las deflexiones estáticas en diversas orientaciones angulares y en diversas posiciones a lo largo del eje permiten evaluar ambos el arco del componente 1X, debido a una grieta abierta, y las deflexiones del componente 2X también generadas por la grieta; ambos tienen un máximo en la correspondencia de la grieta y disminuyen linealmente en la dirección de los cojinetes.

Lo anterior permite identificar la posición de la grieta. Con ayuda del procedimiento de identificación descrito en el párrafo anterior es posible también identificar su profundidad.

Pruebas de tinte penetrante. La superficie del rotor puede ser examinada de grietas que se han propagado de un cierto punto de la superficie visible del rotor. En estos casos puede ser obtenida una imagen clara de la extensión circunferencial de la grieta (véase la Fig. 1-7). Sin embargo, nada se puede decir sobre su profundidad y no se puede obtener información de las grietas que se han desarrollado en las partes que no son visibles desde exterior.

Pruebas de ultrasonido. Esta técnica fue establecida para descubrir grietas invisibles y se basa en enviar ondas ultrasónicas a frecuencias de varios MHz, a partir de un generador de ondas de prueba, sobre la superficie del cuerpo del rotor y observando las ondas reflejadas y/o difractadas. Después de calibrar el receptor por medio de formas y profundidades conocidas de grietas o muescas, este método permite que la grieta sea identificada en forma y profundidad con bastante alta exactitud moviendo las puntas de prueba a lo largo del eje del rotor y circunferencialmente a la superficie del eje.

Filosofía de reparación

Una vez que un componente falla, es importante tomar decisiones en un tiempo crítico (*time-critical decisions*) para regresar el sistema a operación sin mucho retraso. Una de las opciones es reemplazar el componente que ha fallado o esta dañado. Frecuentemente, esta es una opción muy cara y que consume mucho tiempo. Reparar en vez de reemplazar puede lograr una reducción substancial en pérdidas de tiempo y costos. La reparación por soldadura es uno de los métodos más comunes empleados en la industria para rescatar componentes defectuosos, dañados o que han fallado (Fig. 1-8).

Hay ciertas guías y reglas disponibles para reparar componentes grandes y estructuras [122]. La reparación de un componente grande es típicamente de una naturaleza urgente y crítica por que la falla del componente podría tener un efecto devastador en la actividad industrial o financiera de la empresa, pone en peligro o compromete la seguridad humana y tiene un impacto económico serio.

En la mayoría de los casos, la única alternativa para reparar es el reemplazo de una porción substancial del componente o incluso del componente entero [15]. Esto está usualmente asociado con un considerable costo de reemplazo, prolongada interrupción del programa, y además, una considerable carga financiera.

Las reparaciones típicamente requieren llevarse a cabo en campo, bajo condiciones desfavorables y dentro de un marco de tiempo corto lo cual demanda más subjetiva intervención humana en el acto (en contraste a la fabricación de un nuevo componente).

Muchos componentes grandes pueden ser solamente reparados una vez sin enfrentar el riesgo de daño significativo del componente.

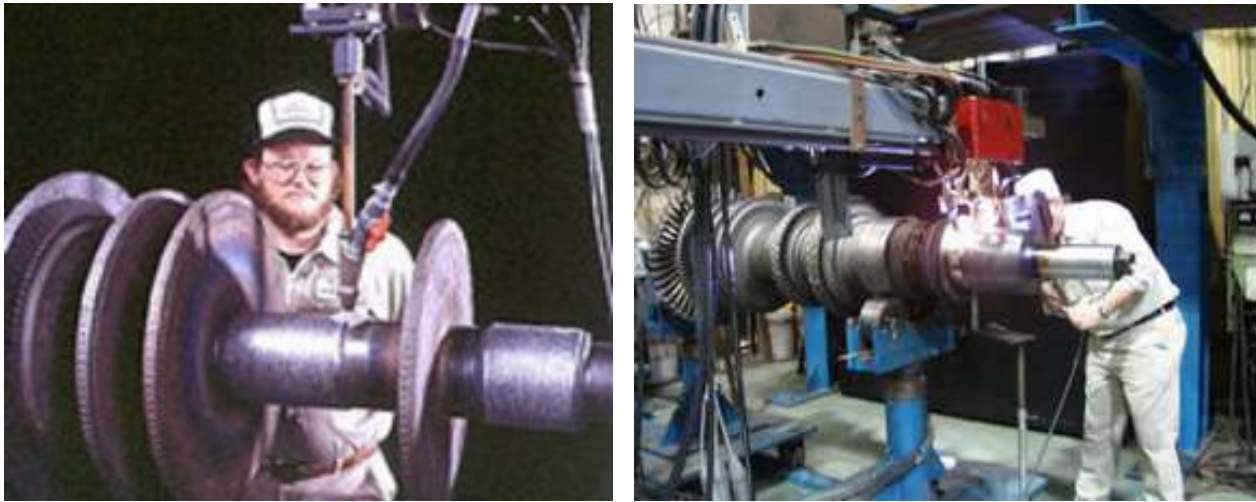


Fig. 1-8 Reparación de rotores por soldadura

Morin *et al.* [134] describen un caso donde un rotor de baja presión de acero CrMoV fue exitosamente reparado usando el proceso de soldadura de arco sumergido (*submerged arc welding*, SAW). Una capa intermedia de material de aporte 5% CrMoV fue inicialmente depositado para inhibir la difusión del carbón y para dar una variación gradual en el coeficiente de expansión térmica. El resto del material de aporte fue de 12% CrMoV. Con el depósito resultante se consiguió que el esfuerzo de ruptura, en la parte reconstruida por soldadura, fuera la misma que en material original CrMoV, y adicionalmente una substancial resistencia a la corrosión y una susceptible reducción al agrietamiento por esfuerzos de corrosión. El esfuerzo de tensión pudo también ser ajustado sobre un alto rango, variando el tratamiento térmico.

Finalmente es necesario resaltar que los procesos tradicionales usados para la detección de grietas, tales como pruebas de ultrasonido y radiación infrarroja no son muy efectivos en el campo debido a los altos niveles de ruido que existen en las complejas estructuras de la maquinaria y debido a la inconveniencia de requerir inspecciones *off-line* con consecuentes pérdidas de producción. Por otro lado, hay varias técnicas de monitoreo en línea como son de vibración, emisiones acústicas y corrientes parásitas (*eddy current*). Cada una de estas técnicas tiene sus propias ventajas y limitaciones. Sin embargo, el análisis de vibración es la técnica más usada por que puede diagnosticar una amplia diversidad de fallas en rotores.

1.3 Revisión de la literatura

La literatura repasada se agrupa ampliamente en tres categorías: (1) métodos basados en vibración; (2) prueba modal; (3) métodos no tradicionales. Una base para clasificar la literatura es presentada antes de la revisión real.

Métodos basados en vibración

Una porción significativa de la literatura publicada en la detección y el diagnóstico de grietas se centra en la técnica del método basado en vibración (*Vibration Based-Method, VBM*). Este se puede subclasificar más a fondo en *métodos basados en señales* y *métodos basados en modelos*.

Métodos basados en señales. Hacen uso del equipo de monitoreo de vibración comúnmente empleado en la industria (tal como puntas de prueba de proximidad, referencia de fase y analizadores de espectro) con o sin los sistemas adicionales, tales como medidores de vibración torsionales, etc. Los datos de vibración en estado estacionario y/o transitorio se analizan contra indicadores conocidos de la presencia de grietas.

Métodos basados en modelos. Se apoyan en modelos analíticos o numéricos para simular el comportamiento de ejes agrietados durante operación y para procurar correlacionar la *firma* de la vibración observada con la presencia de una grieta a localizaciones discretas en el eje.

Varios investigadores (Bently y Muszynska [13], 1986; Allen y Bohanick [5], 1990; Eisenmann [40], 2000) han publicado trabajos en historias de casos de detección de grietas en ejes usando métodos basados en señales. En varios casos, la corrosión por arrastre de metal o *fretting corrosion* †, el desalineamiento y las cargas laterales grandes, han sido identificadas como las causas de grietas de ejes en compresores, generadores, engranajes y bombas de refrigerante de centrales nucleares. En lo que respecta a la técnica de VBM para la detección de grieta, Bently y Muszynska [13], 1986; opinan que las tendencias a cambios en la posición del eje y al constante aumento del componente 1X en estado estable son indicadores confiables. Werner [199], 1993; es también de la opinión que la tendencia del componente 1X es un mejor indicador. Aunque varios otros investigadores han encontrado que el componente 2X es un buen indicador de las grietas en ejes, ya que el componente 2X en la firma de un eje agrietado es debido sobre todo a la rigidez local asimétrica del eje (debido a la grieta) y la presencia de cargas radiales. Sin embargo, el componente 2X es demasiado sensible a otros factores tales como cargas laterales, desalineamiento, asimetría del sistema de apoyo, etc., para poder ser considerado un indicador confiable de grietas.

Varios otros autores recomiendan observar el componente 2X del eje. En 2002, Saavedra y Cuitiño [164] presentaron un análisis teórico y experimental para demostrar que el componente de vibración 2X es un buen indicador para ejes horizontales girando a la mitad del valor de la primera velocidad crítica. De acuerdo con su estudio de mecánica de la fractura, en 1992 Lazzeri *et al.* [107] sugirieron también que monitorear el componente 2X durante la operación de una máquina ayuda a identificar grietas. Del mismo modo se menciona que la observación del componente 2X durante el arranque/paro es más útil que durante la operación en estado estable (Bently y Muszynska [14], 1986).

En 1992, Muszynska *et al.* [137] indican que en el caso de ejes agrietados las vibraciones torsionales son excitadas incluso por fuerzas puramente radiales, tales como desbalance y desalineamiento. Así, el monitoreo de las vibraciones torsionales en muchas máquinas horizontales y verticales puede ayudar a detectar grietas, cuando las frecuencias 8X, 6X, 4X etc. corresponden a la frecuencia torsional más baja. Las vibraciones torsionales son raramente monitoreadas en turbomaquinaria debido a una variedad de razones incluyendo la complejidad que esto implica y la predominante idea en la industria de que no son de gran importancia. Otros autores de igual forma creen que con mejores transductores y mejoras en la tecnología del acondicionamiento de señales, el monitoreo de vibración torsional en turbomáquinas aumentará su uso. En 1999, Dorfman y Trubelja [33] cubrieron exhaustivamente el tema de vibraciones torsionales en turbinas y turbogeneradores de vapor y su aplicación en la detección de grietas. Tratan los aspectos de la instrumentación, la adquisición de datos y el procesamiento de señales del monitoreo de vibraciones torsionales. También cubren los problemas comúnmente encontrados durante las etapas antedichas y sus remedios.

En 1995, Ishida *et al.* [97] sugirieron un indicador alternativo para detectar las grietas en rotores que funcionan en las gamas transcrito y supercrítica. En vez de supervisar los componentes 1X ó 2X, sugieren que, en el rango de $2\omega_c/3$ a $2\omega_c$ (donde ω_c es la velocidad crítica del rotor) sean supervisados los componentes $1/2 X$, $3/2 X$ y $9/2 X$ pues son los más sensibles a mostrar la presencia de grietas. Gasch y Liao [61] patentaron en 1996 un método de detección de grieta basado en orbitas. La señal de vibración del eje se descompone en orbitas

† Tipo de corrosión que resulta del arrastre de una pieza pesada que gira sobre otra

forward y *backward* de frecuencias 1X, 2X y 3X. Estos investigadores opinan que el control continuo de los armónicos *backward*, especialmente durante los transitorios, puede revelar la presencia de grietas. La verificación experimental del método antes mencionado es mostrada en 1992 por Liao y Gasch [116] sobre un banco de ensayo donde se varía la profundidad de grieta. En 1994, Plaut *et al.* [152] investigaron el comportamiento transitorio de un eje agrietado durante la aceleración o desaceleración constante más allá de una velocidad crítica. En esta trabajo, son estudiados ambos tipos, grietas que respiran (*breathing cracks*) y grietas profundas (*gaping cracks*) y se consideran los efectos de la razón de aceleración, profundidad y localización de la grieta, excentricidad, etc. Finalmente, concluyen que la respuesta es reducida al mínimo por la aceleración o desaceleración rápida a través de la zona de la velocidad crítica y la respuesta aumenta con un aumento en la profundidad de la grieta. También advierten que la respuesta transitoria máxima es muy sensible a la posición del desbalance en relación con la grieta. Este fenómeno es aplicado a la detección de grietas por Kavarana y Kirk [103] en 1995. Ellos construyeron un banco de prueba en donde pesos de desbalance conocidos son colocados a diversos ángulos con respecto a una grieta y la respuesta es medida. Se observa que la respuesta es la más alta cuando el desbalance adelanta la grieta por 90° . Basados en estudios analíticos sobre un rotor de Laval con una grieta transversal pequeña que respira, en 1998 Sekhar y Prabhu [176] indicaron que durante el arranque, la respuesta vibratoria de un rotor agrietado es máxima cuando el ángulo entre la grieta y el desbalance es 0° o 180° . Estudiaron los efectos de la razón de aceleración, profundidad de la grieta y la posición del desbalance respecto al comportamiento vibratorio de un rotor agrietado durante el arranque. Además, opinan que el aumento en $1/2$ y $1/3$ de la respuesta crítica es un indicador confiable de la presencia de grietas.

Varios investigadores han presentado trabajos en métodos basados en modelos. En 2000, Bachschmid *et al.* [6], [7] presentaron un robusto método para detectar la posición y la profundidad de grietas en los rotores. Una aproximación de diagnóstico basado en un modelo y un método de identificación de mínimos cuadrados en el dominio de la frecuencia, son utilizados para la localización de la grieta a lo largo del rotor. La profundidad de la grieta es calculada comparando el momento de flexión estático debido al peso del rotor y las condiciones de alineación del cojinete, con el momento de flexión periódico "equivalente" identificado, que simula la grieta. En 1999, Goldman *et al.* [64] analizaron numéricamente la respuesta dinámica de un rotor de Jeffcott con grietas pequeñas, y sacaron varias conclusiones. Las grietas pueden ser detectadas observando la respuesta asíncrona durante la marcha a cocientes de $1/2$, $1/3$ y $1/4$ de la primera velocidad crítica. Además, las grietas del rotor causan giro *backward* en todas las frecuencias (1X, 2X, 3X, 4X, etc.) y cada componente es de forma elíptica. La forma elíptica de las órbitas de la respuesta y las variaciones en el ángulo de fase de las respuestas de un rotor agrietado con respecto al no agrietado, especialmente en la dirección de la gravedad, aumentan con la profundidad de la grieta. Sin embargo, en la gama supercrítica, estos componentes particulares son relativamente insignificantes. Estos autores indican que todas las reglas anteriores son solamente válidas en la región de operación estable para vibraciones pequeñas. En 2003, Guo *et al.* [83] aplicaron el Método de Elemento Finito (*Finite Element Method, FEM*) para estudiar la influencia de grietas en los tres tipos de vibraciones del eje: torsional, axial y lateral. Una matriz completa de rigidez de 12×12 fue considerada para modelar la grieta. Sus estudios indican que las vibraciones torsionales por sí mismas no son los indicadores más confiables de la presencia de grietas, debido a sus magnitudes relativamente pequeñas. En cambio, la presencia de fuertes vibraciones axiales 1X en las excitaciones puramente radiales es un mejor indicador de grietas. Las grietas que respiran producen además componentes 2X y 3X en las vibraciones laterales. En 2002, Mohiuddin y Khulief [133] presentan otro esquema de detección de grieta basado en FEM. En éste, son desarrollados modelos matemáticos del rotor y las ecuaciones del movimiento se resuelven usando varias técnicas (transformaciones de reducción de orden modal, Hamilton, etc.). En 1996, Park [149] trata un observador de estado no lineal diseñado para detectar grietas en ejes. Usando el observador elemental, se establece un estimador de inclinación y se coloca en ciertas posiciones en el eje. Cuando se detecta una grieta en una localización particular, se aplica el procedimiento de valoración de la profundidad. En 1992, Ostachowicz y Krawczuk [145] presentan un modelo matemático para la rigidez de una sección de eje que contiene una grieta transversal profunda. Derivan una matriz de flexibilidad de 5×5 . La matriz de rigidez es derivada a partir de mecánica de la fractura usando factores de intensidad de esfuerzo debido a la grieta, y puede ser observado que la matriz de rigidez posee términos acoplados. Por lo tanto, se puede concluir que las vibraciones torsionales y flexionantes están acopladas. Se asume que la matriz de masa no es afectada por la grieta. Este elemento puede ser utilizado en el análisis de elemento finito de rotores de cualquier complejidad y su comportamiento puede ser previsto en cualquier localización y a cualquier velocidad.

En 1996, Ratan *et al.* [159] definen una cantidad de vector, llamada "residuo" (véase Baruh y Ratan [11], 1993, para detalles adicionales pertenecientes al término residuo), que se calcula de la respuesta medida de la

vibración de un rotor y de las matrices del sistema modeladas. Un valor diferente a cero de esta cantidad en cualquier sección indica la presencia de una grieta. Este método demostró ser capaz de detectar y localizar grietas tan pequeñas como el 4% del diámetro del eje. En 2001, Yang *et al.* [208] estudiaron las características dinámicas del eje agrietado en las regiones subcrítica, transcítica y supercrítica. El método holoespectral es utilizado para estudiar las vibraciones transitorias del rotor. Debido a la extrema sensibilidad de esta técnica, estos autores afirman que puede ser aplicada para detectar grietas incipientes, es decir incluso antes de la verdadera aparición de las grietas. Green y Casey [79] presentaron en 2003 dos técnicas teóricas de análisis. Usando modelos de asimetría global y local, comienzan identificando el blanco característico más conveniente para la detección de grietas. El componente 2X es notado ser el componente primario de la respuesta. También, la velocidad de resonancia 2X es disminuida debido a la grieta. Esto es especialmente útil durante el arranque o paro.

En 1994, Meng y Hanh [127] consideraron términos dependientes del tiempo como fuerzas externas de excitación y analizaron, teórica y numéricamente, la reacción dinámica aproximada de un rotor horizontal agrietado. Para cada componente armónico en estado estacionario, se analizan las amplitudes de giro forward y backward, la forma y la orientación de la órbita elíptica y la amplitud y fase de las señales de respuesta, considerando el efecto del tamaño y localización de la grieta, la velocidad del rotor y el desbalance. Se encuentra que la grieta causa giro backward, cuya amplitud aumenta con la grieta. La influencia de la grieta en la respuesta síncrona del sistema se puede considerar como un desbalance adicional. Dependiendo de la velocidad y de la localización de la grieta, la amplitud de la respuesta difiere a la de un rotor no agrietado. La respuesta asíncrona proporciona evidencia de la grieta en el rango subcrítico pero es demasiado pequeña para ser advertida en la gama supercrítica. Las posibilidades de detección de grieta sobre el rango completo de velocidad incluyen el componente medio adicional de la respuesta (constante), el giro backward de la respuesta, la elipticidad de la órbita, el ángulo entre el eje principal y el eje vertical y la diferencia del ángulo de fase entre las señales de vibración vertical y horizontal.

En 1995, Chan y Lai [25] discuten la simulación basada en elemento finito de un eje con una grieta transversal. Analizan los cuatro casos posibles: (i) eje simétrico no agrietado; (ii) eje simétrico agrietado; (iii) eje asimétrico no agrietado; (iv) eje asimétrico agrietado. Indican que la respuesta de (ii) es muy similar a la de (iii). Ambos muestran resonancia a la mitad del valor de la primera velocidad crítica. Sin embargo, (ii) también muestra resonancia a un tercio de la velocidad crítica lo que (iii) no hace. Asimismo, (ii) y (iv) difieren en que a la mitad de la velocidad crítica, en el caso de (iv) las vibraciones 2X son mucho más grandes que las 1X. Esto puede ser utilizado como un indicador confiable para detectar grietas en ejes de rotores simétricos.

La mayoría de los rotores de turbomaquinaria se apoyan en cojinetes hidrodinámicos. En 1995, Prabhu y Sekhar [154] presentaron un criterio de valoración de la severidad y un método de monitoreo del crecimiento de grieta para ejes agrietados en cojinetes de película fluida (*fluid film bearings*). La presión dinámica máxima en la película de aceite es utilizada como el criterio de objeto. Mientras que la profundidad de la grieta aumenta, la presión dinámica también aumenta. Se reconoce que las mediciones de la presión máxima no son los mejores indicadores debido a la dificultad implicada en su valoración y también debido a su relativa insensibilidad. Varios tipos de cojinetes fueron probados y se observó que los cojinetes de zapatas basculantes (*tilting pad bearings*) son menos sensibles a la creciente presión dinámica debido a las grietas, mientras que los cojinetes del tres lóbulos son los más sensibles. En 1993, Guang y Gasch [80] investigaron la estabilidad de un rotor agrietado apoyado en cojinetes de contacto plano (*journal bearings*) del tipo de dos surcos axiales, de cuatro lóbulos y de cinco zapatas basculantes. Se encuentra que, sin importar el tipo de cojinete usado, el rotor es siempre inestable en cierta gama de velocidades. Para valores grandes del factor de gravedad (una medida de elasticidad del eje) la estabilidad depende de la relación de rigidez (a lo largo de los ejes fuerte y débil), mientras que para valores más pequeños depende de la relación de masa (el cociente de la masa concentrada en el cojinete y la masa concentrada en el centro del eje). En este rango, el eje no es inestable debido a la grieta y su estabilidad depende solamente del tipo de cojinete y de las condiciones de operación.

En 2000, Sekhar [173] presenta una metodología única de detección de grieta basada en la medida del factor Q de un rotor durante su funcionamiento por inercia (*coastdown*). El factor Q se define como el factor de amplificación de cualquier componente de frecuencia seleccionado del *diagrama de Bode* correspondiente según lo determinado por el popular método de "potencia media". Sekhar opina que este parámetro, especialmente para el componente 2X, es el más sensible a la asimetría del eje (es decir grietas) y los cambios repentinos del factor Q durante el *coastdown* son buenos indicadores para la detección de grietas.

En 1993, Soeffker *et al.* [181] aplican la teoría de los exponentes de Lyapunov para sistemas dinámicos no planos en la detección de ejes agrietados. El análisis revela la presencia de movimiento caótico y de atractores

extraños en el caso de un rotor agrietado. Para detectar una grieta y establecer una relación clara entre las grietas del eje en los rotores y los fenómenos inducidos en las vibraciones del eje medidas en los cojinetes, se aplica un método basado en un modelo. De acuerdo con un modelo ficticio del comportamiento en el tiempo de las no linealidades del sistema, diseñan un observador de estado de un sistema dinámico extendido para estimarlos. La teoría es ampliada por Soeffker *et al.* [182] en 1993. Allí, se presenta un nuevo concepto basado en la teoría del control supresor de perturbación, y extendido además para los sistemas no lineales. Se han realizado simulaciones que demuestran el éxito teórico de este método, especialmente para reconstruir fuerzas excitadoras como fuerzas internas causadas por la grieta. Calculando la deformación unitaria relativa de la grieta como el cociente de la deformación unitaria adicional causada por la grieta y la deformación unitaria del elemento intacto, es posible establecer una relación absoluta entre la abertura y el cierre y por lo tanto para la existencia de la grieta, y de igual forma sobre la profundidad de la grieta. Teóricamente, se ha demostrado que es posible detectar una grieta de una profundidad del 5% del radio del rotor que corresponde a cambios muy pequeños de la rigidez.

En 2000, Brandon [20] presenta una revisión de la literatura en vibraciones no lineales de estructuras agrietadas. La suposición de linealidad de estructuras agrietadas según muchos investigadores da lugar a conclusiones inexactas aunque una simplificación excesiva o el estudio de un caso específico son necesarios en el análisis no lineal por razones de cómputo. Las estructuras con desperfectos exhiben un comportamiento "forzado-libre" único, debido a la no linealidad que hace la detección de defectos más fácil. Entre los tópicos discutidos en el artículo están los métodos lineales y sus limitaciones, generación de modelos y ensamblado para el análisis no lineal. El último aspecto es de importancia especial debido a las muchas sutilezas implicadas en modelar una grieta, por ejemplo el hecho de que la grieta esta "conmutando" en el caso de un rotor mientras que no ocurre así en una viga, el impacto del cierre de las grietas, y la interacción entre las caras de las grietas cerradas que conducen a un aumento de la rigidez efectiva. El artículo también se ocupa de los métodos de detección de grieta basados en vibraciones no lineales, por ejemplo con el historial de señales, diagramas de Poincaré, etc. En otro artículo, Roberts y Brandon [161] presentan en 2003 el uso de los estilos distintivos de los transitorios de vibración no lineal para distinguir entre varias causas posibles de malfuncionamiento en turbomaquinaria. Intentan aplicar este principio en el diagnóstico de un generador hidráulico grande. La ocurrencia de aliasing[‡] al muestrear datos de vibración ha evitado una diferenciación exacta entre las causas. Esto subraya la importancia de la apropiada colección de datos, la ausencia de la cual puede conducir a conclusiones erróneas.

En 2002, Subbiah *et al.* [186] presentaron un interesante artículo, aunque no directamente relacionado con la detección de grietas. Hablan del efecto de la torsión en ejes agrietados y de tasas de crecimiento de las grietas. Casi todo el trabajo publicado sobre grietas trata exclusivamente el efecto del momento de flexión en ellas. Subbiah *et al.* utilizaron elementos axi-harmónicos de ocho nodos disponibles en software comercial de análisis de elemento finito (*Finite Element Analysis, FEA*) para modelar una grieta transversal en un eje. Fueron conducidos estudios del desplazamiento cuadro por cuadro y de la energía de tensión. El método desarrollado se puede aplicar a las grietas superficiales y subsuperficiales. Analizan diversos casos con varias longitudes de grieta sujetas a flexión y a torsión. De acuerdo con el estudio, hicieron las siguientes observaciones: (a) las grietas transversales responden sobre todo a la flexión, pero pueden también responder a la torsión dependiendo de su posición; (b) las grietas superficiales tienen un efecto mayor y anticipado que las grietas subsuperficiales.

En 2001, Varé y Andrieux presentaron un artículo para entender mejor el comportamiento de ejes agrietados. Indican que la mayoría de los casos en la literatura disponible pertenecen a casos sobre-simplificados casi inadecuados para su aplicación en la vida real. Los efectos de la temperatura y de la presencia de múltiples grietas necesitan métodos basados en elementos finitos tridimensionales. Mencionan brevemente que los puntos más importantes en la simulación de ejes agrietados son el modelado correcto de la flexibilidad local debida a la grieta y el efecto de la "conmutación" debido a la rotación del eje (por el que se introduce la característica de respiro). Del mismo modo, intentan desarrollar una metodología para modelar y simular las grietas e implementarla en el código ASTER desarrollado por Electricité de France (EDF).

[‡] El aliasing es un fenómeno en el muestreo de señales y en el diseño de experimentos, cuando varias señales continuas que son diferentes llegan a ser indistinguibles cuando son muestreadas. Por lo tanto la señal no se puede reconstruir únicamente de la señal muestreada.

Prueba modal

Entre los métodos disponibles no basados en vibraciones, la prueba modal es la más popular. En este método se emplean para la detección de grieta los cambios en las características modales del sistema tales como cambios en las formas de los modos y frecuencias naturales del sistema, respuesta a la excitación aplicada (con excepción de desbalance) etc., especialmente debidos a la presencia de una grieta. La mayoría de los métodos modales necesitan que el rotor este inmóvil mientras que algunos requieren el rotor funcionando a una fracción de su velocidad de operación. Algunos otros son verdaderos métodos "en línea" y se pueden aplicar a rotores bajo cargas y velocidades normales. Todos los métodos siguientes fueron propuestos después de que se llevaron acabo estudios numéricos o analíticos en modelos matemáticos y, en algunos casos, también subsiguiente verificación experimental en dispositivos de prueba o rotores de tamaño natural.

Varios investigadores han identificado que en ejes agrietados existe un mecanismo de acoplamiento entre diversos tipos de vibraciones, es decir axial, radial y torsional y recomiendan el empleo de este fenómeno para identificar las grietas. En 1991, Collins *et al.* [26] investigaron la excitación por impulsos axiales compresivos sencillos y periódicos aplicados en un extremo de un eje rotatorio agrietado. Cuando fueron aplicados los impulsos periódicos, se observó que el movimiento vertical (perpendicular al eje de simetría del árbol) en ejes no agrietados decayó con tiempo y el espectro de vibración tuvo un solo componente de frecuencia Ω (donde Ω es la frecuencia rotatoria y ωt es la frecuencia de aplicación de los impulsos axiales). En el caso de un eje agrietado, el movimiento vertical no decae y los espectros de frecuencia revelaron, además de la frecuencia de excitación (ωt), componentes ($\omega t - \Omega$) y ($\omega t + \Omega$) adicionales. En 2002, Gounaris y Papadopoulos [78] presentaron un método en donde se aplican excitaciones radiales en un extremo de un eje rotatorio agrietado y los desplazamientos axiales son medidos en el otro extremo. El análisis teórico se realiza para un eje de Timoshenko con una grieta transversal profunda, el cual se modela usando una matriz local de deformación unitaria. Para cada caso son necesarias tres series de frecuencias de excitación y velocidades de rotación del eje. Se desarrollan teóricamente diagramas especiales de contorno para cada sistema rotor-cojinete. Si la respuesta axial se mide en cada corrida, la localización axial y la profundidad de una grieta pueden ser determinadas gráficamente de los contornos anteriormente desarrollados. Dimarogonas y Papadopoulos [29], [30] (1988, 1992) y Papadopoulos y Dimarogonas [147], [148] (1989, 1990) utilizaron una matriz de flexibilidad de 6×6 , previamente desarrollada, para una grieta transversal profunda e identificaron acoplamiento entre las vibraciones de flexión, torsionales y axiales. El análisis se realiza en una viga de Timoshenko, con una grieta profunda y por lo tanto no se consideraron ningunas no linealidades. Además, Papadopoulos y Dimarogonas [147] también hablan del uso de la teoría para detectar una grieta en un rotor de turbina de vapor. En 1992, Goldman y Muszynska [62] estudiaron la respuesta a las excitaciones radiales y torsionales síncronas y asíncronas observadas en un sistema de rotor agrietado. Las excitaciones torsionales se aplican a un rotor experimental agrietado impulsado por motor por medio de un generador alimentado con corrientes de excitación variables. Las excitaciones laterales son aplicadas por un perturbador de fuerza constante. La reducción de la rigidez torsional del eje del sistema (debido a la grieta) podía ser identificada. Los resultados experimentales se comparan al modelo analítico que consiste de un sistema de ecuaciones no lineales sujetas a perturbaciones de pequeño orden. Posteriormente las siguientes conclusiones fueron hechas. Los componentes backward, si se presentan en las vibraciones del eje, pueden ser ignorados con seguridad y solamente los componentes forward necesitan ser considerados pues tienen una relación directa con la grieta del eje. El efecto de las grietas en formas de los modos laterales y torsionales se ha confirmado pero no se ha cuantificado.

En 2001, Ishida *et al.* [98] presentaron un estudio teórico en la detección de grietas excitando el rotor por fuerzas radiales sinusoidales asíncronas. El comportamiento del eje agrietado fue aproximado por un modelo lineal por tramos y un modelo de series de potencias. Se establece que, si el eje estuviera agrietado, serían observadas las siguientes resonancias adicionales en el espectro de vibración:

$$\pm(\Omega - \omega t) = (\Omega + \omega t) = \text{frecuencias de resonancia forward y backward} \quad (1.1)$$

En 1992, Iwatsubo *et al.* [99] presentaron un tratamiento analítico, numérico y experimental de la respuesta de un eje agrietado a fuerzas periódicas excitantes. Además, también investigaron teóricamente la respuesta a un impulso radial. Se demuestra una muy buena correlación entre los componentes de frecuencia previstos en el espectro y los componentes observados. En todos los artículos mencionados arriba, la velocidad

de rotación de los ejes durante la excitación fue mantenida baja y también diferente de las frecuencias naturales del sistema para reducir al mínimo los efectos del desbalance del eje.

En 1995, Sundermeyer y Weaver [187] aplicaron la débil característica no lineal de una viga agrietada para determinar la localización, profundidad y carga de apertura de una grieta transversal. Su estudio se basa en el caso más simple de un sistema de un solo grado de libertad con un resorte bilineal. Debido a la no linealidad, cuando el sistema es excitado por dos fuerzas armónicas de diferentes frecuencias, la respuesta tiene un componente adicional de frecuencia, igual a la diferencia entre las frecuencias de las dos fuerzas excitantes. Este componente es especialmente alto cuando la diferencia corresponde a una frecuencia natural de la viga. Se realiza un estudio paramétrico para determinar el efecto de la profundidad, localización y carga estática de la grieta en su firma característica. Una vez que se desarrollan gráficas completas a partir del estudio paramétrico, la determinación de los detalles se convierte en un problema inverso que puede ser resuelto.

En 2001, Prabhakar *et al.* [153] presentaron un estudio basado en el método de elemento finito sobre la influencia de las grietas profundas y grietas que respiran en la impedancia[§] mecánica de un sistema rotor-chumaceras. Un impulso se aplica en varias localizaciones en un eje rotatorio y se mide la impedancia. Se ha observado que la impedancia en ciertas frecuencias clave reduce perceptiblemente con un aumento en la profundidad de la grieta. Estas frecuencias clave son la frecuencia natural y la frecuencia de operación del rotor. Una grieta que respira es más sensible al cambio de la impedancia que una grieta profunda. De esta manera, Prabhakar *et al.* opinan que la medida sistemática de la impedancia es un método eficaz de detección de grieta. En 1996, Thibault *et al.* [190] patentaron un collarín de unión que facilita la prueba modal de ejes grandes. Los excitadores radiales, torsionales, y otros pueden ser montados en el collarín. Pueden ser fijados en cualquier posición angular sin dar vuelta al enorme eje. Lo mismo puede ser hecho con los transductores de medición de vibración.

Los artículos y las patentes restantes se ocupan del efecto de las grietas en las frecuencias naturales del rotor y formas de los modos. En 1996, Goldman *et al.* [63] examinan la respuesta síncrona de un rotor multimodal agrietado durante procesos transitorios tales como arranques o paros. Una grieta transversal en el rotor es tratada como una singularidad estructural. La flexibilidad local adicional y reducción de masa se complementan a la localización de la grieta. El componente síncrono de la respuesta lateral modificada del rotor es investigado desde el punto de vista de la forma del modo. Los resultados se formulan como sugerencias para perfeccionamientos en la estrategia de diagnóstico vibratorio. En 1992, Hamidi *et al.* [86] desarrollaron dos modelos matemáticos para estudiar los cambios en las frecuencias naturales debido a los cambios en los parámetros estructurales del rotor. Las grietas transversales se modelan como una flexibilidad local en el eje. Los modelos matemáticos de vigas inmóviles se verifican experimentalmente y se extienden para analizar vigas rotatorias. De acuerdo con el estudio, concluyen que la relación de cambio de la frecuencia natural llega a ser rápida cuando la profundidad de la grieta excede cerca de 30% del radio del eje. También se verifica que el cambio en la frecuencia natural no depende de la velocidad de rotación en caso de vigas rotatorias. Torres [188] en 1996 describe un enfoque similar basado en vibración torsional para la detección de grietas. Las frecuencias naturales torsionales de un sistema conducido por motor (bomba, compresor) son determinadas midiendo la corriente trifásica sacada del motor. Las frecuencias observadas son entonces comparadas con una tabla de frecuencias naturales para varias localizaciones y profundidades de grieta obtenida por un exhaustivo estudio de elemento finito del sistema.

En 2000, Lee y Kwon [108] aplicaron la prueba de función direccional de la respuesta de frecuencia (*directional frequency response function, dFRF*) para detectar asimetría o dependencia del ángulo en la rigidez del eje. Este método, aunque es más apropiado para rotores simétricos, puede ser aplicado con alguna modificación a rotores originalmente asimétricos. La magnitud y la fase del dFRF indican la severidad y la localización circunferencial de una grieta. Este método puede ser ejecutado en línea y emplea solamente un excitador y un sensor. En 2000, Lees [111] discute en su artículo métodos generales de detección basados en vibración y varios casos de estudios. Además de las grietas en ejes, se discuten una variedad de otros malfuncionamientos comunes tales como rozamiento, doblamiento del eje, desalineamiento y desbalance. La dinámica de un eje asimétrico montado horizontalmente con una grieta transversal es discutida en otro artículo por Lees y Friswell [112] en 1999. Este estudio es de importancia práctica para muchas máquinas, tales como turbogeneradores de dos polos, etc., que tiene rotores inherentemente asimétricos y sin embargo necesitan ser diagnosticados en cuanto a grietas. Las simulaciones se realizan para la respuesta de esta estructura para los modos libres y fijos. Se demuestra que

§ La impedancia se define como la relación de la magnitud de una fuerza excitadora a la velocidad de respuesta.

como la orientación del rotor se varía, emergen patrones de respuestas complicados debido a la apertura y cierre de la grieta. Esto es debido a la rotación de los ejes principales del árbol. Se demuestra cómo esto podría ser modelado con éxito para establecer una representación consistente del comportamiento de la grieta. Este modelo entonces se utiliza para localizar la grieta y para dar una estimación de su magnitud y comportamiento dinámico. En 1997, Muñoz *et al.* [135] presentan un método off-line para la detección de grieta. La prueba modal debe ser realizada en un rotor apoyado libremente y cualquier cambio inesperado en las frecuencias normales del rotor como mediciones a diversos ángulos indica la presencia de grietas. Muñoz *et al.* afirman que este método puede ser aplicado para detectar grietas de áreas mayores de 2.5% del área de la sección transversal del rotor. En 1996, Tsai y Wang [193] desarrollaron un método que observa el cambio en las frecuencias naturales y las formas de los modos de un eje agrietado y con ello ayuda a determinar el tamaño y la localización de la grieta. Yen y Herman Shen [209] investigan en 1997 el efecto de una grieta transversal en la vibración torsional de ejes. Es utilizado un principio variacional generalizado para formular las ecuaciones de movimiento y las condiciones de límite asociadas, para la vibración libre de un eje agrietado no rotatorio. La respuesta natural del eje libre se calcula entonces con un procedimiento de Galerkin. Los resultados indican un claro cambio en las frecuencias naturales del eje no rotatorio agrietado con respecto a un eje no agrietado. En 2001, Zakhezzi y Malysheva [210] discuten un esquema para la detección de grieta basado en elemento finito. El rotor se modela cuidadosamente para incluir el amortiguamiento del sistema, etc., y se calculan las frecuencias naturales. Un rotor simple con y sin grietas de profundidad y localización variable fue tomado como ejemplo. Más de 600 vectores propios y valores propios se han computado hasta una frecuencia de 1100 hertzios para los diferentes modelos (con y sin grietas). La contribución modal de cada valor propio se ha evaluado para los esfuerzos en los elementos del modelo. Los modos con las tensiones más altas se han seleccionado como los modos de referencia para la observación y las comparaciones. Las pruebas modales se realizan en el rotor real y los modos previamente identificados se supervisan durante los cambios. El renombre de los métodos mencionados puede ser juzgado del gran número de patentes. Miller *et al.* [129], [130] (1990, 1992) y Brook *et al.* [21] (1991) describen métodos de detección de grieta que observan cambios en las frecuencias naturales, formas modales, etc. Rajab *et al.* [156] describen en 1991 un método de detección de grietas usando los cambios en las frecuencias naturales. Por lo menos las tres frecuencias naturales flexionantes más bajas necesitan ser medidas. Un modelo matemático de un eje agrietado ha sido desarrollado usando conceptos de integral J (*J-integral*). Curvas detalladas pueden ser preparadas a partir de resultados analíticos para los cambios en la frecuencia natural para la localización y profundidad de la grieta. En 2001, Maynard *et al.* [126] indicaron que los cambios en las frecuencias naturales laterales no pueden ser un indicador confiable puesto que pueden ser afectados fácilmente por factores no relacionados a las grietas, tales como bloqueo del sello, rozamiento, cambio de la rigidez en la chumacera, etc. Las frecuencias naturales torsionales, por otra parte, no se afectan tan fácilmente. Pueden también ser calculadas con bastante exactitud debido a casi ningún amortiguamiento y consideraciones teóricas más simples. Maynard *et al.* demuestran la viabilidad de usar los cambios en las frecuencias naturales torsionales como indicadores de grietas en ejes. También describen el montaje de transductores/instrumentación y algunos pasos para evitar los errores más comunes debidos a la instrumentación defectuosa, etc.

Métodos no tradicionales

En esta sección son examinados los artículos que tratan de métodos no tradicionales de detección de grietas en ejes, tales como redes neuronales [2], [87], lógica difusa, inspección boroscópica y sofisticadas técnicas de procesamiento de señal, por ejemplo transformada de Wavelet [174], [216] y Wigner-Ville [4], [217], etc. También se repasan aquí los artículos en detección de grieta basados en sistemas automáticos y expertos

Dos artículos se ocupan del problema algo intrigante de estimar el tiempo de reinspección para rotores de turbina grandes. Primeramente Rosard *et al.* [162] en 1994 presentan un sistema de supervisión de grieta en línea instalado en una turbina de vapor para uso general. El sistema mide continuamente los parámetros del vapor en la entrada y a la salida del cilindro de alta presión. Entonces un programa basado en elemento finito computa temperaturas del rotor, las características térmicas y mecánicas del material del rotor, y por lo tanto los esfuerzos de operación y las tasas de crecimiento de grieta correspondientes para varios puntos en el rotor. La información con respecto a las grietas previamente detectadas puede ser introducida al programa, que entonces predice el período seguro de funcionamiento para cualquier condición de operación dada y también el intervalo de tiempo antes de que otra inspección boroscópica exhaustiva sea necesaria. En 1992, Brose y Jirinec [22] calculan el

tiempo de reinspección basado en la sensibilidad y la tasa de crecimiento de grieta observada en una probeta de material idéntico al del rotor. Fueron estudiadas las grietas inducidas por fatiga e inducidas por deslizamiento. El modelo elástico lineal de mecánica de la fractura fue utilizado para grietas por fatiga, mientras que las grietas por deslizamiento fueron evaluadas usando la metodología del parámetro C_I (un parámetro del campo de la fractura por deslizamiento basado en la tasa de liberación de energía de tensión). De acuerdo con el estudio, fue encontrado que el deslizamiento era el mecanismo predominante sobre la fatiga para el crecimiento de grieta y el tiempo de reinspección de un rotor de turbina de 30 años de antigüedad fue propuesto como seis años.

En 2002, Adewusi y Al-Bedoor [2] aplican redes neuronales para la detección de grieta. Las señales experimentales de vibración de rotores con y sin propagación de grieta son utilizadas para entrenar *redes neuronales feedforward*** de múltiples capas usando un algoritmo de propagación hacia atrás (*backpropagation*††). Se afirma que una red de dos neuronas podría detectar una grieta propagándose mientras que una red de tres neuronas podría detectar ambas, grietas propagándose así como grietas no propagándose. En 1988, Dirr y Schmalhorst [32] condujeron experimentos de fatiga por flexión en un eje agrietado inmóvil. Las marcas de playa por fatiga así formadas fueron utilizadas para medir la profundidad de la grieta y la forma real de la sección transversal agrietada. Estos resultados se comparan con los obtenidos usando el método de potencial de CD aplicado a la misma sección transversal agrietada. Se crea un modelo de elemento finito para la región agrietada del rotor usando elementos tridimensionales de 20 nodos. Modelos de eje de diversos tamaños y geometrías pueden entonces ser construidos y se pueden hacer correlaciones entre el potencial de C.D. medido y la profundidad de la grieta. Zhao y Luo [214] discuten en 1989 otro interesante método para detectar grietas. Un par de puntas de prueba de corrientes parásitas diametralmente opuestas se utilizan para tomar los desplazamientos del eje en una localización particular. Entonces las señales de las dos puntas de prueba se suman vectorialmente. Esto remueve la contribución de la vibración del eje. La suma entonces se cambia al dominio de la frecuencia. En el caso de ejes no agrietados, la salida después de que la suma es cero. Por otra parte, es diferente a cero en el caso de ejes agrietados debido a la naturaleza extra-vibratoria de los desplazamientos del eje. Así, las grietas pueden ser detectadas moviendo un par de puntas de prueba a lo largo de la longitud entera del rotor. En 1987, Shiohata *et al.* [177] patentaron un método de detección de grieta basado en el hecho de que las señales de vibración son esencialmente simétricas cuando la máquina está bajo operación constante. Las vibraciones del eje (en la dirección vertical) en cada cojinete continuamente se registran y digitalizan. El área de la mitad superior (positiva) para cada ciclo de la señal es dividida por el área de la mitad inferior (negativa). Los cocientes de área cerca de la unidad indican la ausencia de grietas o de una grieta no propagada. En el caso de una grieta propagándose, los cocientes de área son mayores de 1.06.

Imam *et al.* [93] discuten en 1989 el desarrollo de un sistema automático de detección de grieta en línea basado en histogramas de vibración. El objetivo primario es la detección de grietas cuando son menores del 1% del diámetro del eje. Se indica que, para grietas muy pequeñas, los cambios en la magnitud y la fase del componente 2X son mayores que en cualquier otro componente. Los casos de estado estacionario, arranque, paro y transición de temperatura se supervisan continuamente. El índice del cambio de magnitud y fase del componente de vibración 2X se utiliza para distinguir esta de vibraciones causadas por desalineamiento (Muszynska [136], 1989). La patente de Imam *et al.* [94] en 1993 demuestra el uso de este método. En 1988, Carlson *et al.* [24] emplean una filosofía similar a la de Imam *et al.* [93], pero han extendido el sistema para identificar problemas de rozamiento, doblamiento del eje, desalineamiento y de acoplamiento. Herbert [89] describe en 1987 un método para el análisis posterior de los datos de vibración del coastdown similar al de Imam *et al.* [93]. Herbert indica que los datos del coastdown producen más información que los datos de estado estacionario a cualquier velocidad individual. Él también prueba matemáticamente que una tendencia constantemente en aumento en los componentes 2X y 3X puede ser utilizada para detectar automáticamente los ejes agrietados. En 1992, Zhao y Luo [214] presentan un sistema experto autodidacta basado en lógica difusa para la identificación de grietas. El diagnóstico se basa en el comportamiento vibratorio único de ejes agrietados. La lógica difusa tiene un grupo de reglas para decidir a si una condición de vibración alta es debida a grietas o a otras razones tales como desbalance y desalineamiento. También recibe información del lazo autodidacta cada vez que sus decisiones son invalidadas por un diagnosticador humano. Así, durante un periodo de tiempo, el sistema se adapta completamente al comportamiento e historia pasada de una máquina particular. En 1996, Rieger y El-Shafei [160] presentan una descripción de las tecnologías disponibles para el diagnóstico automático de averías del

** Redes que no tienen ninguna retroalimentación, o simplemente, que no tiene ninguna conexión que forme un bucle.

†† Es una técnica usada para el entrenamiento de redes neuronales. Útil solamente para las redes feedforward.

equipo crítico. Se comparan cuatro tecnologías comúnmente usadas: evaluación de condición basada en datos estadísticos, análisis espectral, diagnóstico usando modelos paramétricos y diagnóstico basado en modelos no paramétricos (lógica difusa, redes neuronales, algoritmos genéticos). Se demuestra cómo cada método es mejor conveniente para un diferente grupo de malfuncionamientos. Rieger y EL-Shafei opinan que un sistema verdaderamente automático debe distinguir entre el monitoreo de condición y el diagnóstico de falla. En el futuro un sistema completo emplearía una combinación de algunas o todas de las cuatro técnicas actualmente usadas.

En 2001, He *et al.* [87] consideraron la detección de grietas en ejes rotatorios como un problema inverso y, basado en algoritmos genéticos, se propuso una estrategia de detección de grieta en rotores. Entonces el esquema de detección de grieta en rotores se formula como un problema de optimización por medio del método de elemento finito (*FEM*) y se utilizan algoritmos genéticos para buscar la solución.

En 2004, Sekhar [175] utiliza la transformada continua de onditas (*Continuous Wavelet Transform, CWT*) para extraer sub-armónicos de la señal de vibración del coastdown en el dominio del tiempo proveniente de las localizaciones de los apoyos de rotores agrietados sobre cojinetes de película fluida. El análisis de tiempo-frecuencia de Wavelets es una técnica de transformación reciente desarrollada para analizar señales no estacionarias en el dominio del tiempo. Los picos subarmónicos característicos, que no pueden ser detectados por la Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform, FFT*) normal debido a la naturaleza no estacionaria de las señales, pueden ser detectados por CWT. El CWT de una función $f(t)$ que varía con el tiempo se define como la suma sobre todo el tiempo de la señal multiplicado por los modelos cambiados de la función de wavelets (Ψ) escalados. Matemáticamente se expresa como sigue:

$$CWT(s, b) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi\left(\frac{t-b}{s}\right) dt \quad (1.2)$$

La onda madre de Morlet ha sido elegida para la presente aplicación. La CWT del coastdown de un rotor detenido desde la gama supercrítica puede mostrar claramente sub-armónicos y puede revelar la presencia de una grieta. En 2002, Zuo *et al.* [216] también emplean la CWT para la detección de grieta. Utilizan el modelo de grieta tipo bisagra y simulan numéricamente el comportamiento de un eje agrietado. Se desarrolla un algoritmo dinámico para detectar ejes agrietados a partir de los datos de vibración muestreados. Según Zuo *et al.*, la frecuencia de muestreo correcta es crítica para transformadas exactas. Sugieren una gama de frecuencia de muestreo de 32-64 veces la velocidad operación del eje. La CWT de un rotor no agrietado o de un rotor matemático modelado exactamente se compara continuamente con el CWT de un rotor operando. El artículo traza las varias diferencias entre los dos, que puede ser aplicada para la detección de grieta.

Feldman y Seibold [44] utilizaron en 1998 la transformada de Hilbert (*Hilbert Transform, HT*) para detectar no linealidades de la vibración medida de un rotor. La transformada de Hilbert convierte la señal en un tipo señal que varía lentamente y un ángulo de la fase. Datos básicos de vibración, tales como rigidez, amortiguamiento del sistema, etc., pueden ser deducidos de esta forma. Algoritmos de identificación, basados en el filtro extendido de Kalman (*Extended Kalman Filter, EKF*) y el método de variables instrumentales pueden ser entonces aplicados a los datos transformados para detectar grietas. El EKF es un algoritmo de identificación en el dominio del tiempo y Seibold *et al.* [170] y Seibold y Weinert [171] demuestran en 1996 que la profundidad de la grieta se puede calcular correctamente, incluso si la información de la medición esta incompleta. La localización es realizada diseñando un banco de EKFs, en el cual cada filtro se afina a una diferente hipótesis de daño, es decir en este caso la localización específica de la grieta. Calculando las probabilidades de las diversas hipótesis, la grieta puede ser localizada y su profundidad puede ser determinada. El procedimiento se aplica a un rotor simulado y también a un banco de pruebas de rotores. Se modela la ecuación dinámica de la respuesta transitoria en un rotor agrietado, basado en el modelo simple de grieta tipo bisagra. Se obtienen del modelo soluciones numéricas simulando el rotor no agrietado y el rotor agrietado.

En 2003, Zou *et al.* [217] utilizaron la transformación de Wigner-Ville, que es otra herramienta para analizar sistemas no lineales no estacionarios. Modelan un rotor de Jeffcott agrietado y obtienen numéricamente la respuesta. Se comparan las características de tiempo-frecuencia del rotor agrietado y del rotor no agrietado, y se propone un nuevo algoritmo para identificar el rotor agrietado usando la distribución de Wigner-Ville. Sobre la transformación del dominio del tiempo al dominio del tiempo-frecuencia, el contenido sub-armónico es claramente visible. Por medio de simulación, es investigada la sensibilidad de la distribución de Wigner-Ville a la variación de la rigidez, y se discute la influencia del desbalance y su ángulo en el rasgo de tiempo-frecuencia.

Capítulo

2

Modelo del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado

2.1 Clasificación de los sistemas rotatorios

En general, las máquinas rotatorias constan de discos de varias formas, ejes cuyos diámetros cambian dependiendo de su longitud y posición, y cojinetes o chumaceras situadas en varias posiciones. El término *rotor* es a menudo usado como el término general para nombrar la parte rotatoria de una máquina. El término opuesto es *estator*, el cual es usado para nombrar la parte estática de una máquina. En el análisis de vibraciones, el complejo sistema rotatorio es simplificado y un conveniente modelo matemático es adoptado. En este proceso de modelación, tenemos que saber cuales parámetros son los más importantes en el sistema.

Las máquinas rotatorias se clasifican de acuerdo a sus características como sigue. Si la deformación del eje rotatorio a lo largo del rango de velocidad de operación es insignificante, es llamado *rotor rígido* (Fig. 2-1). Si el eje se deforma apreciablemente a ciertas velocidades de rotación en el rango de velocidades de operación, es llamado *rotor flexible* (Fig. 2-2). No podemos determinar a cual de estas categorías pertenece el sistema rotatorio considerando solamente sus dimensiones.

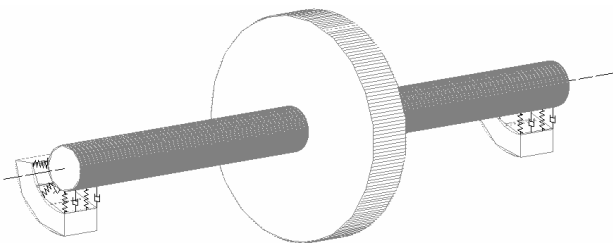


Fig. 2-1 Modelo de rotor rígido

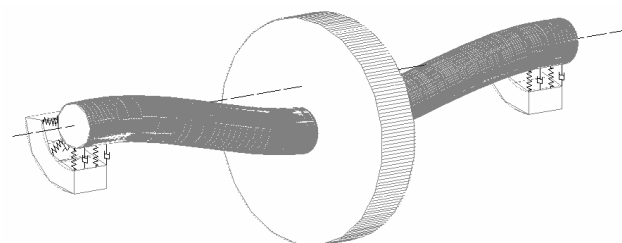


Fig. 2-2 Modelo de rotor flexible

En rotodinámica, las velocidades de rotación que producen respuestas resonantes debido a la excentricidad de masa son llamadas *velocidades críticas*. La deformación de un rotor llega a ser máxima en la vecindad de la velocidad crítica. Por lo tanto, el rango de la velocidad de operación relativo a estas velocidades críticas determina si el rotor es rígido o flexible. Dependiendo del tipo de modelo a discutir, el mismo sistema puede ser considerado como un rotor rígido o flexible.

En algunos modelos, los rotores son considerados rígidos y la distribución de masa de un eje elástico es concentrada en la posición del disco. Este modelo es llamado *sistema de parámetro concentrado* (*lumped-parameter system*). Si se considera un rotor flexible con masa distribuida y rigidez, el modelo es llamado *sistema de parámetro distribuido* (*distributed-parameter system*) o un sistema rotor continuo (*continuous rotor system*).

Los rotores son clasificados algunas veces como de *alta velocidad* o *baja velocidad*. En este caso el término velocidad se refiere a la velocidad angular o a la velocidad periférica. Puesto que las altas velocidades angulares también causan vibraciones, en este trabajo se usa el término velocidad asociado con la velocidad angular. Sin embargo, en ingeniería de cojinetes de bolas, este término se refiere a la velocidad periférica por que esta determina el calentamiento debido a la fricción. El parámetro adimensional llamado valor DN es usado como un índice relacionado con la velocidad periférica. Este valor es dado por la multiplicación del diámetro del eje (mm) y la velocidad de rotación (rpm).

Finalmente, definiendo también de una manera general el término modelo es posible decir que; *Un modelo es un prototipo de algo que es real*. Y recalando los beneficios obtenidos del modelamiento. Un modelo:

- **Es una herramienta de aprendizaje:** permite establecer las relaciones e importancia de los diferentes parámetros en la respuesta del sistema. En este caso, una máquina.
- Permite filtrar aquellos parámetros y condiciones que tienen poca incidencia en la respuesta del sistema
- **Es un medio de discusión:** si dos partes concuerdan en que las hipótesis y parámetros que se usaron para construirlo son válidas y suficientes entonces los resultados serán aceptados por las partes; las limitaciones serán discutidas
- **Es una herramienta de predicción:** es muy fácil realizar análisis de sensibilidad; lo que guiaría el proceso de rediseño o mejoramiento
- Por lo anterior, un modelo puede reducir significativamente los costos de desarrollo o mantenimiento de un sistema y acelerar sustancialmente el proceso de decisión; en nuestro caso, a nivel de diseño o mantenimiento.
- El proceso de construcción del modelo permite un acercamiento al problema que permita resaltar variables que pasarían desapercibidas de otra manera por la complejidad del sistema.

2.2 Modelación de la grieta

Las grietas transversales en ejes afortunadamente no son muy comunes en maquinaria rotatoria pero pueden ser muy peligrosas ya que podrían causar fallas catastróficas cuando no son detectadas a tiempo. Por lo tanto, se requieren modelos confiables para simular el comportamiento dinámico de rotores agrietados. Se ha producido en los últimos 25 años una extensa bibliografía sobre el modelado de grietas en rotores y se han propuesto diversos enfoques para evaluar los cambios en la rigidez del rotor sobre una rotación completa [58] [139], que es el principal efecto en ejes horizontales cargados por la gravedad y cargas constantes.

Las fisuras en máquinas reales tienen varias formas, pero sus características físicas son representadas por un modelo con una fisura tipo media luna [150]. De manera que la rigidez de un eje fisurado difiere dependiendo de la orientación de la fisura. La rigidez del eje fisurado es mínima cuando la fisura abre y máxima cuando la fisura cierra.

Si la vibración debida a cualquier fuerza de desbalance actuando sobre el rotor es mayor que la deflexión estática del rotor debida a la gravedad, la fisura permanecerá abierta o cerrada dependiendo del tamaño y localización de la masa de desbalance. Si la fisura permanece abierta, el eje del rotor es entonces asimétrico y esta condición puede acarrear problemas de estabilidad [191], [80], [68], [70], [53], [55]. Ahora bien, es de mayor importancia en maquinaria rotaria larga, la situación en donde la vibración debida a la fuerza de desbalance actuando sobre el rotor es mayor que la deflexión estática del rotor debida a la gravedad, es decir, las amplitudes de vibración permanecen pequeñas comparadas con el pandeo del rotor debido a su propio peso. En este caso la fisura podrá abrir y cerrar (o “respirar”) debido a la rotación del rotor. Este problema fue inicialmente estudiado por Gasch [58], Mayes y Davies [125], Grabowski y otros.

Afortunadamente este pandeo generalmente es grande, por ejemplo mayor de 1 mm en rotores de turbogeneradores debido a su gran peso (20 o 30 toneladas), permitiendo que este análisis sea válido aún cuando se alcanzan velocidades de rotación grandes en rangos de estabilidad [54].

Modelación del mecanismo de respiro

La presencia de la grieta en el eje rotatorio requiere ser modelada para ser introducida en las ecuaciones de movimiento del sistema. En el presente análisis se considera el efecto de la gravedad como el principal factor para la apertura y cierre de la grieta. En la Fig. 2-3, se puede observar la posición de la grieta en el sistema de referencia, la cual es función del tiempo y cambia en forma periódica durante cada ciclo de rotación del eje; de esta manera, la grieta se abre y cierra continuamente cambiando su rigidez. Este tipo de mecanismo se conoce como “respiro” de la grieta [58].

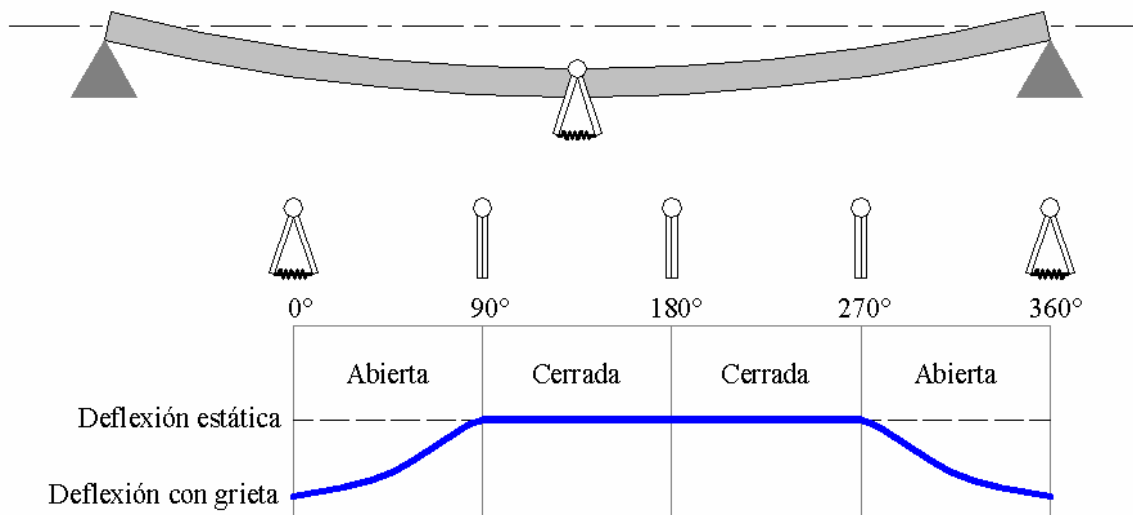


Fig. 2-3 Mecanismo de apertura y cierre de la grieta o mecanismo de “respiro” de la grieta.

Diferentes modelos han sido propuestos para simular el cambio de rigidez en ejes horizontales cargados por la gravedad y otras cargas constantes a lo largo de una rotación completa [58], [139]. Sin embargo la modelación del mecanismo de apertura y cierre de la grieta durante la rotación es compleja dado que depende además de la profundidad de la grieta y de la fricción en las caras de esta [57].

Generalmente en la mayoría de las investigaciones publicadas, la transición de la grieta abierta a cerrada ha sido asumida como una función cuadrada o una ley sinusoidal analítica predefinida que es independiente del contenido armónico real de diversos componentes horizontales y verticales de la variación de deflexión de ejes horizontales agrietados cargados por el peso. Solamente pocos enfoques consideran realísticamente el supuesto mecanismo de respiro de grietas transversales, que es característico de los ejes horizontales y que consiste en el mecanismo de abertura y cierre de la sección agrietada. El mecanismo de respiro puede ser influenciado perceptiblemente por las tensiones térmicas que se presentan durante los transitorios térmicos aplicados a la superficie del rotor por la temperatura del fluido circundante (vapor en el caso de turbinas, gas refrigerante en el caos de los generadores). Un transitorio de enfriamiento abre la grieta mientras que un transitorio de calentamiento la cierra. Este fenómeno causa cambios en las vibraciones del rotor y se puede considerar un síntoma significativo para diagnosticar una grieta.

El verdadero mecanismo de respiro puede ser simulado por medio de modelos de elemento finito no lineales de tres dimensiones, o más sencillamente por un modelo simplificado quasi-lineal de una dimensión.

El mecanismo de respiro es resultado de la resistencia y de la distribución de tensión alrededor del área agrietada, debido a las cargas estáticas, como el peso, las fuerzas de reacción del cojinete etcétera, y de las cargas dinámicas, como el desbalance y la vibración inducida por la distribución de fuerzas de inercia. El modelado exacto del mecanismo de respiro ha sido descuidado generalmente. Cuando las cargas estáticas superan a las dinámicas, el respiro es gobernado por la posición angular del eje con respecto a la dirección inmóvil de la carga, y la grieta abre y cierra otra vez totalmente una vez cada revolución. La transición de rigidez (completa) de la grieta cerrada a la rigidez (débil) de la grieta abierta ha sido considerada abrupta o ha sido representada generalmente por una función cosenoidal dada, pero puede ser calculada gradualmente en un procedimiento iterativo.

La presencia de una grieta transversal es considerada mediante la modelación de la variación periódica de la rigidez estructural del rotor, la cual se expresa en función del tiempo.

Existen algunos modelos propuestos del mecanismo de respiro de la grieta durante el giro del rotor, los cuales están basados en funciones periódicas $g(\Phi)$ de la posición angular de la grieta con respecto al vector de la gravedad. Un buen modelo es el adoptado por Inagaki *et al.* [96] donde el mecanismo de grieta se representa por una función escalón dependiente de los momentos flexionantes. Una función muy similar (ver Fig. 2-4) es presentada por Gasch [58]. En ambos casos, la función adquiere valores de 0 (grieta cerrada, sin cambio en la rigidez) y 1 (grieta abierta, existe el mayor cambio en la rigidez).

Mayes y Davies [125] propusieron una modificación a los modelos anteriores para evitar el cambio brusco de la condición de apertura y cierre de la grieta (ver Fig. 2-5), ya que en la realidad esta transición suele ser suave especialmente en grietas profundas. Ambas funciones (escalón y la suavizada) se presentan en la Fig. 2-6 y están dadas de la siguiente manera.

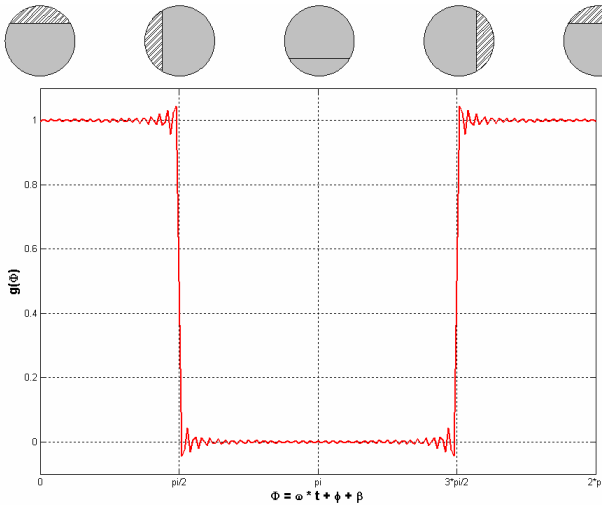


Fig. 2-4 Función de apertura y cierre de la grieta propuesta por Gasch.

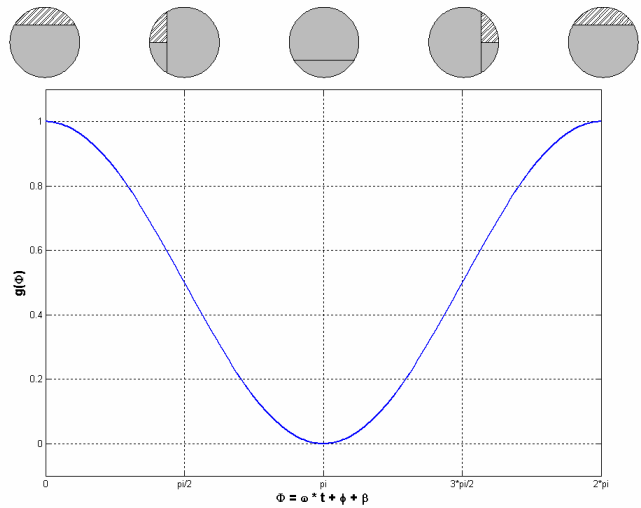


Fig. 2-5 Función de apertura y cierre de la grieta propuesta por Mayes y Davies

Bajo la asunción de un modelo de grieta tipo bisagra (*hinge model*), el respiro de la grieta es descrito por una función rectangular, la cual puede ser escrita como:

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \cos \omega t > 0 \\ 0 & \cos \omega t < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

La función cambia de 1 (abierta) a 0 (cerrada) y puede también ser expresada por una serie de Fourier.

$$g(\Phi) = \left(\frac{2}{\pi} \right) \left(\frac{\pi}{4} + \cos \Phi - \frac{1}{3} \cos 3\Phi + \frac{1}{5} \cos 5\Phi - \frac{1}{7} \cos 7\Phi + \dots \right) \quad (2.2)$$

Alternativamente el modelo atribuido a Mayes y Davies está representado por

$$g(\Phi) = \frac{1 + \cos \Phi}{2} \quad (2.3)$$

Algunos puntos tienen que tomarse en cuenta

- Hay una suave transición de la grieta abriendo y cerrando.
- Los niveles de vibración del rotor agrietado son tan grandes que las fuerzas dinámicas son comparables con el peso.

- Aunque la función de apertura y cierre de la grieta es más ciertamente una función de la profundidad de la grieta y aunque podría variar de grieta en grieta, la influencia de la profundidad de la fisura se omite.
- Se asume que la grieta no produce cambios en la masa, efectos giroscópicos y amortiguamiento.

Experimentalmente las rigideces k_η y k_ξ se obtienen al colocar una carga vertical conocida F hacia abajo y estableciendo las condiciones de frontera de una viga simplemente apoyada y midiendo la deflexión máxima δ en el centro del eje [57]. De lo anterior se obtiene el valor de la rigidez en flexión mediante:

$$k = F / \delta \quad (2.4)$$

Lo anterior es necesario para el cálculo de los parámetros adimensionales ΔK_ξ y ΔK_η empleados en los modelos matemáticos utilizados, y están definidos como:

$$\Delta K_\xi = \frac{k - k_\xi}{k} = \frac{\Delta k_\xi}{k}, \quad \Delta K_\eta = \frac{k - k_\eta}{k} = \frac{\Delta k_\eta}{k} \quad (2.5)$$

Donde: k = rigidez del eje integro, k_ξ = rigidez del eje agrietado en la dirección de la grieta, k_η = rigidez del eje agrietado en la dirección ortogonal a la grieta.

Los parámetros que representan el cambio adimensional de la rigidez ΔK_ξ y ΔK_η disminuyen al aumentar la longitud del eje (para una profundidad de grieta dada) y aumentan con la profundidad de la grieta (para una longitud de eje dada).

Según lo reportado por García-Illescas y Gómez-Mancilla [57], para un eje de cierta longitud se observa una disminución de la rigidez conforme le grieta es más profunda ya sea para $\Phi = 0^\circ$ ó $\Phi = 90^\circ$. Al comparar los casos de $\Phi = 0^\circ$ y $\Phi = 90^\circ$ para cualquier longitud del eje, se observa que el cambio de rigidez con respecto al eje integro es mayor siempre para $\Phi = 0^\circ$; debido a que la grieta se abre o “respira”. Si la grieta se abre solo parcialmente $\Phi = 90^\circ$ entonces el cambio de rigidez es menor.

La presencia de una grieta en un rotor constituye un riesgo que conviene analizar cuidadosamente ya que si ésta encuentra las condiciones para su propagación el resultado podría ser catastrófico.

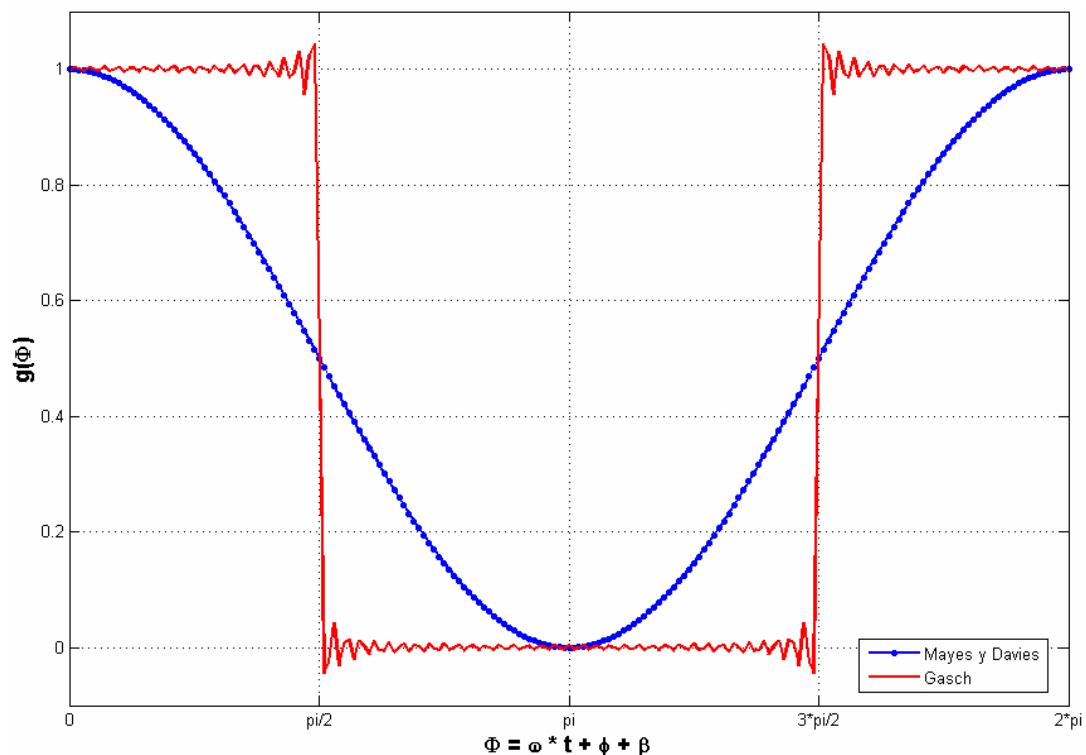


Fig. 2-6 Comparación de las funciones de apertura y cierre de la grieta

2.3 El eje asimétrico

Un eje puede llegar a ser asimétrico cuando una fisura aparece y crece, y es obviamente de interés conocer sus consecuencias. Suponemos que la variación de la rigidez del eje debido a la fisura es solamente una función del tiempo t y que el peso ejerce un efecto dominante, por lo tanto la variación de la rigidez está cambiando periódicamente y este cambio está descrito por la función $g(\Phi)$ o $g(t)$, ($0 < g(\Phi) < 1$) dicha función describe el fenómeno de apertura y cierre de la grieta (respiro).

$$\Phi = \omega t + \phi + \beta \tag{2.6}$$

Donde Φ es el ángulo de rotación instantáneo, ω es la frecuencia de rotación del eje y ϕ y β están representados en la Fig. 2-8.

Las componentes de rigidez del eje fisurado son k_ξ y k_η en el sistema de coordenadas rotatorias, ξ, η fijo al eje. De la misma forma, las componentes de rigidez de un eje íntegro (sin fisura) son $k_x = k_y = k$ en el sistema de coordenadas fijo X, Y . Para determinar las componentes de rigidez del eje agrietado en ambos sistemas (fijo y rotatorio) primeramente se nota que la fuerza actuando en la masa es:

$$F_{el} = -k_\xi \xi i - k_\eta \eta j \tag{2.7}$$

La ecuación anterior puede ser escrita en ambos sistemas coordenados fijo y de referencia usando:

$$\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi \\ -\sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ J \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Donde i, j son vectores unitarios en el sistema de coordenadas rotatorio y I, J son vectores unitarios en el sistema de coordenadas fijo.

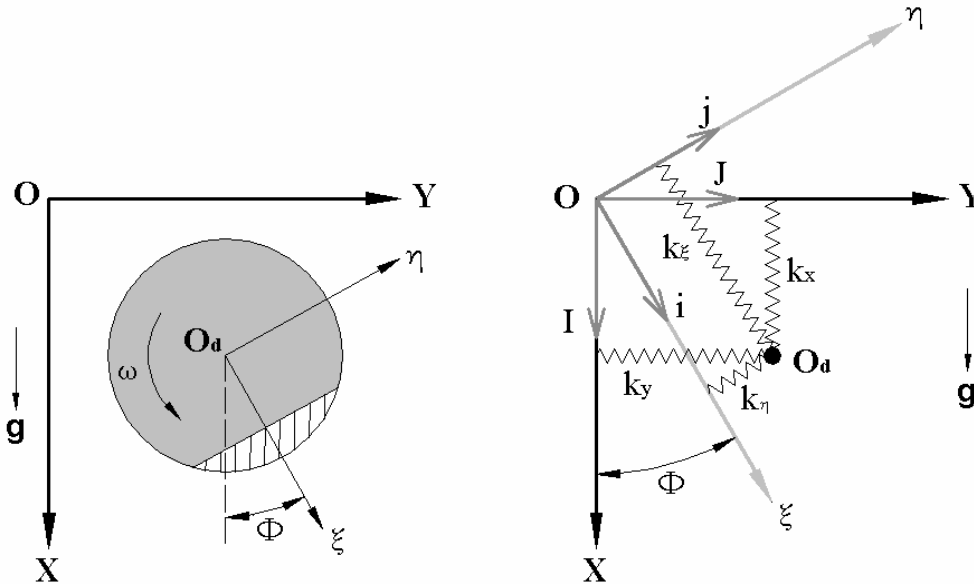


Fig. 2-7 Plano transversal ubicado a la mitad del tramo del eje mostrando las componentes de rigidez del eje en los sistemas de coordenadas fijo y rotatorio

La rigidez del eje cuando la grieta se abre es menor que la rigidez flexionante original (sin grieta) y se representa por k_ξ . Esta situación se observa cuando la grieta está por debajo del eje ($\Phi = 0^\circ$). La rigidez del eje en la dirección a $\Phi = 90^\circ$ de la grieta se representa por k_η y es mayor que la rigidez k_ξ en la dirección de la grieta. Cuando la grieta se encuentra por arriba del eje ($\Phi = 180^\circ$), se considera que no hay cambio en la rigidez y se podría asumir que es similar a la rigidez del eje íntegro k .

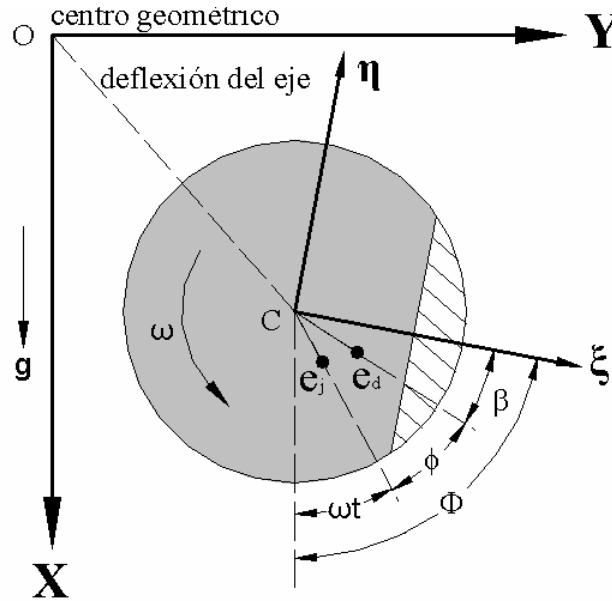


Fig. 2-8 Plano transversal ubicado a la mitad del tramo del eje mostrando ángulos importantes. ϕ = ángulo entre las direcciones de los desbalances que ocurren entre la chumacera y el disco, β = ángulo entre las direcciones de e_d y ξ

Haciendo uso de la matriz de rotación Ec. (2.8) es posible obtener que las componentes de la fuerza en el sistema fijo están dadas por:

$$F_{el} = -k_{\xi}(x \cos \Phi + y \sin \Phi)(\cos \Phi I + \sin \Phi J) - k_{\eta}(y \cos \Phi - x \sin \Phi)(\cos \Phi J + \sin \Phi I). \quad (2.9)$$

Desarrollando las operaciones en la ecuación anterior,

$$F_{el} = -k_{\xi}(x \cos^2 \Phi I + y \sin \Phi \cos \Phi I + x \sin \Phi \cos \Phi J + y \sin^2 \Phi J) - k_{\eta}(y \cos^2 \Phi J - x \sin \Phi \cos \Phi J - y \sin \Phi \cos \Phi I + x \sin^2 \Phi I). \quad (2.10)$$

Finalmente agrupando términos, se obtiene;

$$F_{el} = \left[-k_{\xi}(x \cos^2 \Phi + y \sin \Phi \cos \Phi) - k_{\eta}(x \sin^2 \Phi - y \sin \Phi \cos \Phi) \right] I + \left[-k_{\xi}(y \sin^2 \Phi + x \sin \Phi \cos \Phi) - k_{\eta}(y \cos^2 \Phi - x \sin \Phi \cos \Phi) \right] J. \quad (2.11)$$

Haciendo uso de las siguientes relaciones trigonométricas sencillas:

$$\begin{aligned} \sin 2\Phi &= 2 \sin \Phi \cos \Phi, & \cos 2\Phi &= \cos^2 \Phi - \sin^2 \Phi = 1 - 2 \sin^2 \Phi = 2 \cos^2 \Phi - 1, \\ \sin^2 \Phi &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\Phi, & \cos^2 \Phi &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\Phi, \end{aligned}$$

Se puede reescribir la ecuación (2.11) de la siguiente manera;

$$F_{el} = -\frac{1}{2} \left[(k_{\xi} + k_{\eta})x + (k_{\xi} - k_{\eta})y \sin 2\Phi + (k_{\xi} - k_{\eta})x \cos 2\Phi \right] I - \frac{1}{2} \left[(k_{\xi} + k_{\eta})y + (k_{\xi} - k_{\eta})x \sin 2\Phi - (k_{\xi} - k_{\eta})y \cos 2\Phi \right] J. \quad (2.12)$$

En donde las componentes de rigidez del eje (k_ξ y k_η) en el sistema de coordenadas rotatorias, ξ , η fijo al eje, están dadas respectivamente por:

$$k_\xi = k - g(\Phi)\Delta k_\xi, \quad k_\eta = k - g(\Phi)\Delta k_\eta. \quad (2.13)$$

Donde:

$$\begin{aligned} k &= \text{Rigidez del eje integro (sin fisura)} \\ \Delta k_\xi, \Delta k_\eta &= \text{Mayor cambio de rigidez causado por la fisura en las direcciones } \xi \text{ y } \eta \text{ respectivamente.} \end{aligned}$$

Ahora obteniendo las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} k_\xi + k_\eta &= 2k - g(\Phi)(\Delta k_\xi + \Delta k_\eta) = 2k - g(\Phi)\Delta k_1 \\ k_\xi - k_\eta &= -g(\Phi)(\Delta k_\xi - \Delta k_\eta) = -g(\Phi)\Delta k_2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\text{Donde:} \quad \Delta k_1 = k_\xi + k_\eta, \quad \Delta k_2 = k_\xi - k_\eta. \quad (2.15)$$

Al sustituir las relaciones anteriores Ec.(2.14) en Ec. (2.12) se obtiene:

$$\begin{aligned} F_{el} &= -\frac{1}{2}[(2k - g(\Phi)\Delta k_1)x - g(\Phi)\Delta k_2(y \sin 2\Phi + x \cos 2\Phi)]I - \\ &\quad \frac{1}{2}[(2k - g(\Phi)\Delta k_1)y - g(\Phi)\Delta k_2(x \sin 2\Phi - y \cos 2\Phi)]J. \end{aligned} \quad (2.16)$$

O expresada en sus componentes sobre el sistema de coordenadas fijo, se obtiene:

$$F_{el}^x = -kx + \frac{1}{2}g(\Phi)[(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\Phi)x + (\Delta k_2 \sin 2\Phi)y] \quad (2.17)$$

$$F_{el}^y = -ky + \frac{1}{2}g(\Phi)[(\Delta k_2 \sin 2\Phi)x + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\Phi)y] \quad (2.18)$$

Las proyecciones de la fuerza elástica F_{el} en los dos planos transversales al eje mostrados en la Fig. 2-11 son:

$$F_{el}^x = -k(x_d - x_j) + \frac{g(\Phi)}{2}[(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\Phi)(x_d - x_j) + (\Delta k_2 \sin 2\Phi)(y_d - y_j)], \quad (2.19)$$

$$F_{el}^y = -k(y_d - y_j) + \frac{g(\Phi)}{2}[(\Delta k_2 \sin 2\Phi)(x_d - x_j) + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\Phi)(y_d - y_j)]. \quad (2.20)$$

Donde x_j , y_j = deflexión de la chumacera en coordenadas cartesianas, x_d , y_d = deflexión del disco en coordenadas cartesianas, y donde los superíndices x , y indican a las componentes orientadas según las coordenadas inerciales de la gravedad y perpendicular a esta respectivamente.

2.4 Obtención del modelo matemático

El rotor Jeffcott (Fig. 2-9) es un modelo simplificado de rotor que retiene las características esenciales de modelos de rotores más realistas en las respuestas al desbalance. El arreglo geométrico de este modelo consiste en un disco rígido y plano soportado por un eje flexible, uniforme, isotrópico y sin masa. El disco está localizado a la mitad del eje que está considerado como una viga simplemente soportado por cojinetes.

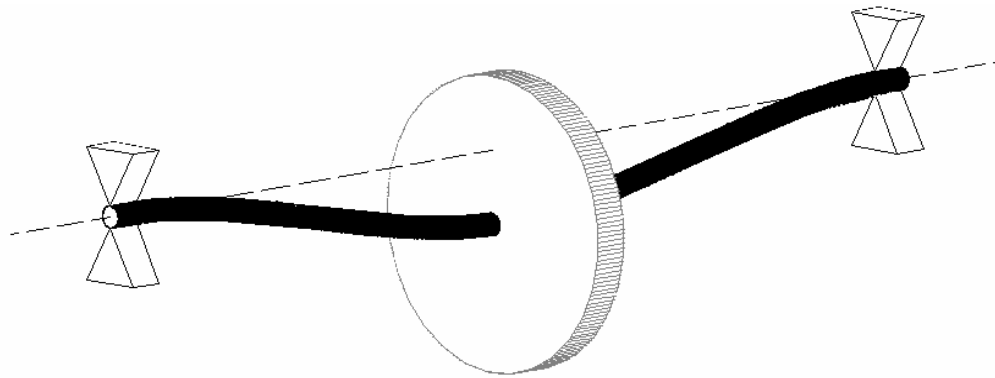


Fig. 2-9 Modelo de rotor de Jeffcott

Aunque es empleado ampliamente, el modelo del rotor Jeffcott es muy simplificado. El presente modelo (Fig. 2-10), llamado modelo del rotor Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado, adicionalmente a lo anterior, considera masas tanto en el disco (la masa del disco es m) localizado a la mitad del eje flexible así como otras dos masas idénticas m_j en los dos soportes extremos, también considera que dichos soportes poseen propiedades de rigidez y amortiguamiento propios de las chumaceras lubricadas. Así, se permite la presencia de dos desbalances vectoriales diferentes U_d, U_j en estas masas.

Para el primer modo crítico, la descripción dinámica cualitativa del modelo previamente mencionado llega a ser excelente, sobre todo si es utilizado conjuntamente con análisis modal experimental.

El modelo tiene las ventajas de los sistemas lineales, sin embargo, el enfoque de equilibrio no trivial propuesto por Gómez-Mancilla [67], [65], [69], [73] produce una respuesta de múltiples frecuencias la cual permite caracterizar los ejes agrietados.

En comparación con el modelo usado por Meng y Gasch [128], el modelo aquí empleado fue extendido para incluir el importante efecto de la gravedad, y el correspondiente punto de equilibrio no trivial.

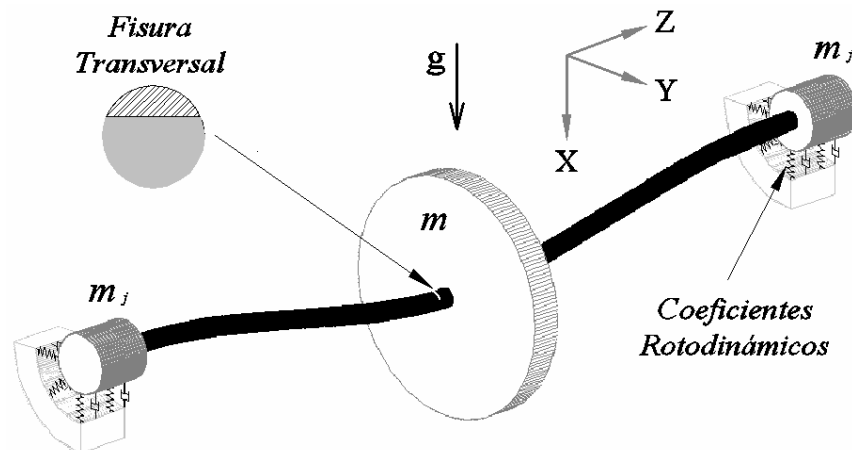


Fig. 2-10 Modelo del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado

En orden de simplificar la derivación de las ecuaciones de movimiento las siguientes asunciones fueron tomadas:

- El sistema es simétrico y soportado en chumaceras hidrodinámicas idénticas.
- Se incluyen masas en las dos localizaciones: disco m y chumaceras m_j . Además, se permite la presencia de vectores desbalance tanto en la localización del disco U_d como en las chumaceras U_j .
- El amortiguamiento en el disco c_d , debido al efecto aerodinámico de su movimiento dentro del aire o fluido de trabajo de la turbomáquina, es del tipo viscoso.
- El efecto de la gravedad es dominante, es decir, las vibraciones permanecen pequeñas en comparación con la deflexión del rotor bajo su propio peso.

- e) Los efectos giroscópicos en el disco son ignorados debido a la simetría del sistema.
- f) Las vibraciones axiales y torsionales del rotor del sistema son ignorados.
- g) Las fuerzas en la película de aceite de las chumaceras hidrodinámicas son determinadas por la ecuación de Reynolds como un lubricante incompresible.
- h) El acoplamiento a otros ejes es flexible, es decir, no se presenta desalineamiento.
- i) Se supone que el eje está fijado a la mitad de su longitud en la ubicación del disco.

Ecuaciones con dimensiones del movimiento del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado.

El balance de las fuerzas en el rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado se presenta en la Fig. 2-11, donde $m \cdot g$ = peso del disco, $m_j \cdot g$ = peso de la masa localizada en la chumacera, $F_{deb,d}$ = fuerza del desbalance del disco, $F_{des,j}$ = fuerza del desbalance en la chumacera, F_{el} = la fuerza elástica del eje, F_x = fuerza de reacción en la dirección X de la película de aceite en la chumacera, F_{fric} = fuerza amortiguadora viscosa.

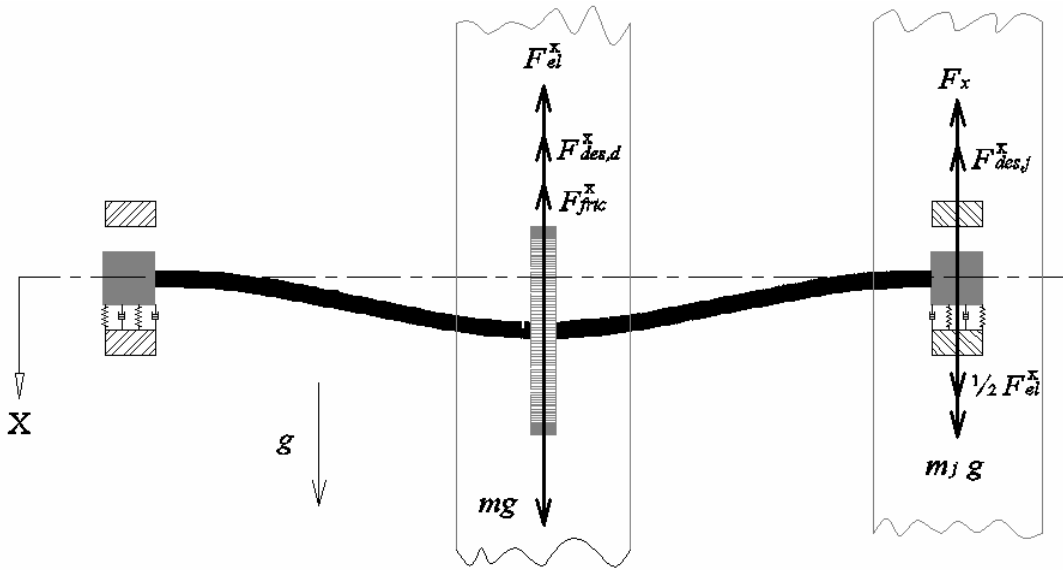


Fig. 2-11 Balance de las fuerzas en el rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado mostrando los dos planos transversales en donde se derivan las ecuaciones de movimiento

A fin de obtener las ecuaciones de movimiento que describen el comportamiento del sistema se aplica la *Segunda Ley de Newton* en la localización del disco y basándose en el balance de fuerzas mostrado en la Fig. 2-11 se obtiene:

$$m\ddot{x}_d = mg + F_{el}^x + F_{des,d}^x + F_{fric}^x, \quad m\ddot{y}_d = F_{el}^y + F_{des,d}^y + F_{fric}^y. \quad (2.21)$$

Las componentes de la fuerza amortiguadora viscosa debida al movimiento del disco dentro del aire o fluido de trabajo de la turbomáquina están dadas por:

$$F_{fric}^x = -c_d \dot{x}_d, \quad F_{fric}^y = -c_d \dot{y}_d. \quad (2.22)$$

Donde \dot{x}_d , \dot{y}_d son las derivadas respecto al tiempo t . Las componentes de la fuerza del desbalance en el disco son:

$$F_{des,d}^x = m\omega^2 (e_d^x \cos \omega t - e_d^y \sin \omega t) = m\omega^2 e_d \cos(\omega t + \phi), \quad (2.23)$$

$$F_{des,d}^y = m\omega^2 (e_d^x \sin \omega t + e_d^y \cos \omega t) = m\omega^2 e_d \sin(\omega t + \phi). \quad (2.24)$$

Así las ecuaciones de movimiento del disco pueden escribirse como:

$$m\ddot{x}_d + c_d \dot{x}_d + k(x_d - x_j) - \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\Phi)(x_d - x_j) + (\Delta k_2 \sin 2\Phi)(y_d - y_j)] = mg + m\omega^2 (e_d^x \cos \omega t - e_d^y \sin \omega t) \quad (2.25)$$

$$m\ddot{y}_d + c_d \dot{y}_d + k(y_d - y_j) - \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta k_2 \sin 2\Phi)(x_d - x_j) + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\Phi)(y_d - y_j)] = m\omega^2 (e_d^y \cos \omega t + e_d^x \sin \omega t). \quad (2.26)$$

La posición de equilibrio dinámico del rotor integral (sin fisura) y sin excitación por desbalance se define por las siguientes relaciones:

$$\Delta k_1 = \Delta k_2 = 0, \quad \dot{y}_j = \ddot{y}_j = 0, \quad \dot{x}_d = \ddot{x}_d = 0, \quad e_d^x = e_d^y = 0. \quad (2.27)$$

Sustituyendo las relaciones dadas por Ec.(2.27) en Ec.(2.25) se obtiene en equilibrio:

$$k(x_{d0} - x_{j0}) = mg. \quad (2.28)$$

Se denota por δ el pandeo del eje: $\delta = x_{d0} - x_{j0}. \quad (2.29)$

Como resultado se obtiene de Ec.(2.28) la siguiente expresión:

$$k\delta = mg, \quad \delta = \frac{mg}{k}. \quad (2.30)$$

Así mismo sustituyendo Ec.(2.27) en Ec.(2.26) tenemos:

$$k(y_{d0} - y_{j0}) = 0, \quad y_{d0} = y_{j0}. \quad (2.31)$$

De la misma manera que para el disco, se procede a aplicar la Segunda Ley de Newton a las chumaceras de lo cual se obtiene las siguientes relaciones:

$$m_j \ddot{x}_j = m_j g - f_x - \frac{F_{el}^x}{2} + F_{des,j}^x, \quad m_j \ddot{y}_j = -f_y - \frac{F_{el}^y}{2} + F_{des,j}^y \quad (2.32)$$

En las ecuaciones anteriores las proyecciones de la fuerza de desbalance de la masa m_j en la chumacera sobre los ejes X y Y son:

$$F_{des,j}^x = m_j \omega^2 e_j \cos \omega t, \quad F_{des,j}^y = m_j \omega^2 e_j \sin \omega t. \quad (2.33)$$

Asimismo, las ecuaciones de movimiento en las chumaceras están dadas por:

$$m_j \ddot{x}_j + f_x - \frac{k}{2}(x_d - x_j) - \frac{g(\Phi)}{4} [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\Phi)(x_d - x_j) + (\Delta k_2 \sin 2\Phi)(y_d - y_j)] = m_j g + m_j \omega^2 e_j \cos \omega t \quad (2.34)$$

$$m_j \ddot{y}_j + f_y - \frac{k}{2}(y_d - y_j) + \frac{g(\Phi)}{4} [(\Delta k_2 \sin 2\Phi)(x_d - x_j) + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\Phi)(y_d - y_j)] = m_j \omega^2 e_j \cos \omega t. \quad (2.35)$$

En la posición de equilibrio dinámico de la chumacera con el rotor íntegro se tiene:

$$\Delta k_1 = \Delta k_2 = 0, \quad e_j = 0, \quad \dot{x}_j = \ddot{x}_j = 0, \quad \dot{y}_j = \ddot{y}_j = 0. \quad (2.36)$$

Sustituyendo la Ec.(2.36) en la Ec.(2.34) y recordando la relación obtenida en Ec.(2.30) se obtiene:

$$f_{x_0} - \frac{k}{2}(x_{d0} - x_{j0}) = m_j g, \quad f_{x_0} = m_j g + \frac{k}{2}(x_{d0} - x_{j0}) = m_j g + \frac{k\delta}{2}, \quad (2.37)$$

$$f_{x_0} = \left(m_j + \frac{m}{2}\right) g. \quad (2.38)$$

Donde el vector f_{x_0} denota las fuerzas de reacción de la película de aceite de la chumacera ante el peso que soporta, sin considerar que el muñón vibra o se desplaza. Asimismo, sustituyendo Ec.(2.36) en Ec.(2.35) se obtiene:

$$f_{y_0} = -\frac{k}{2}(y_{d0} - y_{j0}) \quad (2.39)$$

De la misma forma, al sustituir Ec.(2.31) en la ecuación anterior se puede concluir que;

$$f_{y_0} = 0 \quad (2.40)$$

La posición de equilibrio dinámico O_j de la masa en la chumacera y O_d del disco tienen coordenadas:

$$O_j = (e_{x_0}, e_{y_0}), \quad O_d = (e_{x_0} + \delta, e_{y_0}) \quad (2.41)$$

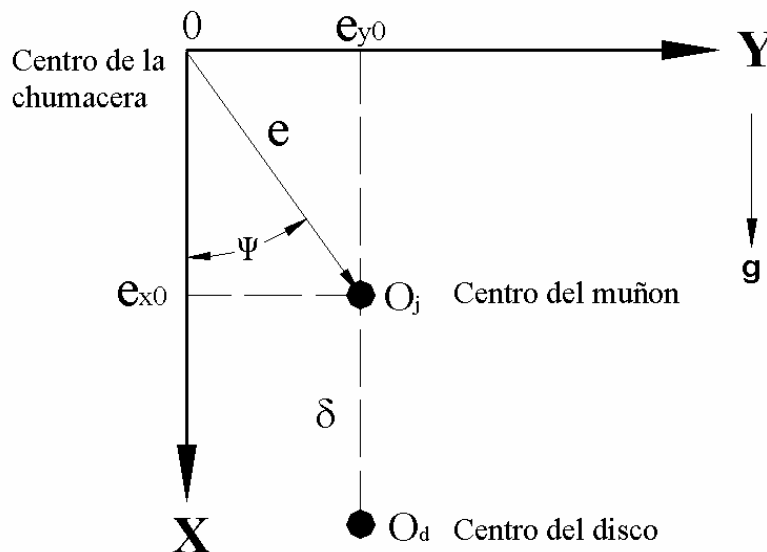


Fig. 2-12 Proyecciones de la excentricidad sobre los ejes de coordenadas. e = excentricidad del rotor, Ψ = ángulo de posicionamiento (attitude) del rotor

Entonces para un rotor integro la posición de equilibrio en las ubicaciones de las chumaceras y el disco respectivamente resultan

$$x_{j0} = e_{x0}, \quad y_{j0} = e_{y0}, \quad x_{d0} = e_{x0} + \delta, \quad y_{d0} = e_{y0}. \quad (2.42)$$

Donde e_{x0} , e_{y0} son las proyecciones de la excentricidad sobre los ejes inerciales X y Y . Dichas proyecciones pueden ser observadas en la Fig. 2-12.

Ecuaciones con dimensiones del movimiento del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado alrededor de su posición de equilibrio

Los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de los centros de rotor y chumacera respecto a sus posiciones de equilibrio pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x_i - x_{i0} & \Delta \dot{x}_i &= \dot{x}_i & \Delta \ddot{x}_i &= \ddot{x}_i \\ \Delta y_i &= y_i - y_{i0} & \Delta \dot{y}_i &= \dot{y}_i & \Delta \ddot{y}_i &= \ddot{y}_i \end{aligned} \quad i = d, j. \quad (2.43)$$

Considerando las relaciones obtenidas en Ec.(2.43) se pueden determinar ahora las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} x_d - x_j &= (\Delta x_d + x_{d0}) - (\Delta x_j + x_{j0}) = \Delta x_d - \Delta x_j + (x_{d0} + x_{j0}) \\ y_d - y_j &= (\Delta y_d + y_{d0}) - (\Delta y_j + y_{j0}) = \Delta y_d - \Delta y_j + (y_{d0} + y_{j0}) \end{aligned}$$

Pero recordando las relaciones dadas en Ec.(2.29) y Ec.(2.31) se obtiene respectivamente

$$x_d - x_j = \Delta x_d - \Delta x_j + \delta, \quad (2.44)$$

$$y_d - y_j = \Delta y_d - \Delta y_j. \quad (2.45)$$

Igualmente sustituyendo las relaciones dadas por Ec.(2.44) y Ec.(2.45) en las ecuaciones de movimiento del disco; Ec.(2.25) y Ec.(2.26), se tiene:

$$\begin{aligned} m\Delta \ddot{x}_d + c_d \Delta \dot{x}_d + k(\Delta x_d - \Delta x_j) + k\delta - \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\Phi)(\Delta x_d - \Delta x_j + \delta) + \\ (\Delta k_2 \sin 2\Phi)(\Delta y_d - \Delta y_j)] = mg + m\omega^2 (e_d^x \cos \omega t - e_d^y \sin \omega t) \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} m\Delta \ddot{y}_d + c_d \Delta \dot{y}_d + k(\Delta y_d - \Delta y_j) - \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta k_2 \sin 2\Phi)(\Delta x_d - \Delta x_j + \delta) + \\ (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\Phi)(\Delta y_d - \Delta y_j)] = m\omega^2 (e_d^x \sin \omega t + e_d^y \cos \omega t). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Es posible simplificar Ec.(2.46) sustituyendo la Ec.(2.30), de tal forma que se obtiene:

$$\begin{aligned} m\Delta \ddot{x}_d + c_d \Delta \dot{x}_d + k(\Delta x_d - \Delta x_j) - \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\Phi)(\Delta x_d - \Delta x_j + \delta) + \\ (\Delta k_2 \sin 2\Phi)(\Delta y_d - \Delta y_j)] = m\omega^2 (e_d^x \cos \omega t - e_d^y \sin \omega t) \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$m_d \Delta \ddot{y}_d + c_d \Delta \dot{y}_d + k (\Delta y_d - \Delta y_j) - \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta k_2 \sin 2\Phi)(\Delta x_d - \Delta x_j + \delta) + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\Phi)(\Delta y_d - \Delta y_j)] = m_d \omega^2 (e_d^x \sin \omega t + e_d^y \cos \omega t). \quad (2.49)$$

De la misma manera que para el disco determinamos ahora las ecuaciones con dimensiones del movimiento de las chumaceras alrededor de su posición de equilibrio.

Debido a la rotación es desarrollada presión de fluido entre el rotor y la chumacera, dicha presión produce una fuerza resultante igual a la carga estática de la chumacera (véase Fig. 2-13). Desviaciones del rotor de esta posición de equilibrio resultan en fuerzas adicionales que, en general, se oponen a estas desviaciones. La película de aceite tiene una acción de resorte.

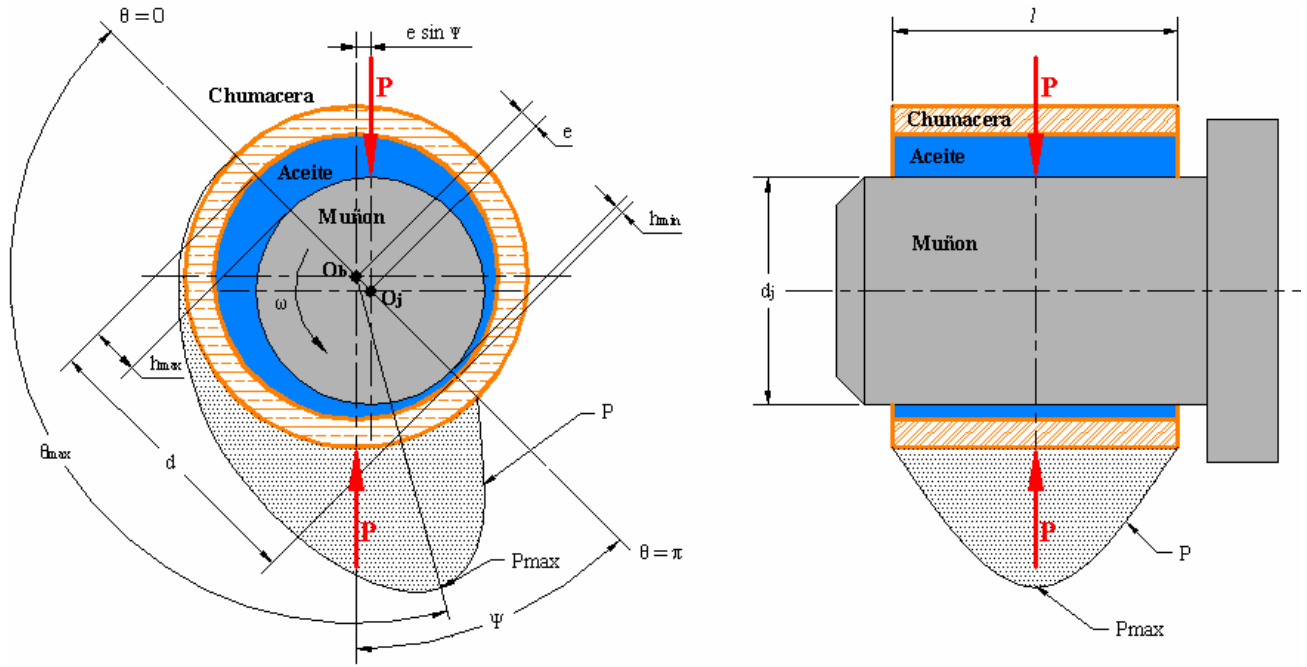


Fig. 2-13 Distribución de presión en la chumacera

La posición de equilibrio estático del rotor bajo la acción de una carga unidireccional, como puede ser la que genera el peso del rotor y/o el empuje radial por engranes, puede ser calculada al igualar los componentes de la carga con las fuerzas de presión integradas sobre la superficie del árbol donde existe película lubricante. Para cuantificarlas, consideramos las componentes vertical y horizontal de estas fuerzas:

$$f_x = f_x(x, \dot{x}, y, \dot{y}), \quad f_y = f_y(x, \dot{x}, y, \dot{y}). \quad (2.50)$$

Las funciones f_x y f_y dependen del diseño de la chumacera, la carga estática, la velocidad angular Ω y otros. Expandiendo estas funciones en series de Taylor, alrededor de la posición de equilibrio

$$f_x = f_{x0} + k_{xx} \Delta x + k_{xy} \Delta y + c_{xx} \Delta \dot{x} + c_{xy} \Delta \dot{y} + 0(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta \dot{x}^2, \Delta \dot{y}^2), \quad (2.51)$$

$$f_y = f_{y0} + k_{yy} \Delta y + k_{yx} \Delta x + c_{yy} \Delta \dot{y} + c_{yx} \Delta \dot{x} + 0(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta \dot{x}^2, \Delta \dot{y}^2). \quad (2.52)$$

Donde los k_{ij} y c_{ij} son llamados coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento, respectivamente, y son funciones de Ω , de la carga estática, y del tipo de chumacera pero son independientes de las perturbaciones Δx , Δy , $\Delta \dot{x}$ y $\Delta \dot{y}$. Si las perturbaciones dinámicas son pequeñas, las fuerzas de la película de

fluido lubricante f_x , f_y pueden ser linealizadas sí como una primera aproximación ignoramos los términos de orden superior en Ecs.(2.51) y (2.52), para finalmente quedar representadas como sigue;

$$f_x = f_{x0} + k_{xx}\Delta x + k_{xy}\Delta y + c_{xx}\Delta \dot{x} + c_{xy}\Delta \dot{y}, \quad (2.53)$$

$$f_y = f_{y0} + k_{yy}\Delta y + k_{yx}\Delta x + c_{yy}\Delta \dot{y} + c_{yx}\Delta \dot{x}. \quad (2.54)$$

Los coeficientes de rigidez y amortiguamiento dependen del *Número de Sommerfeld* S ó de la excentricidad adimensional $\varepsilon = e/c_r$ donde e es el vector de excentricidad y c_r es el claro radial de la chumacera. El número de Sommerfeld es un parámetro adimensional que caracteriza el desempeño de una chumacera, además es función a su vez de ciertos parámetros determinados por el tipo de chumacera (cilíndrica plana, cilíndrica con ranuras axiales, elíptica, dos lóbulos, tres lóbulos, cuatro lóbulos, zapatas basculantes ó “tilting pad”, etc.) y está definido por la siguiente expresión.

$$S = \frac{\mu\omega LD}{2\pi W} \left(\frac{R}{c_r} \right)^2 \quad (2.55)$$

donde :

- c_r = Claro radial. [m]
- D = Diámetro de la chumacera. [m]
- L = Longitud de la chumacera. [m]
- R = Radio de la chumacera, ($= D/2$). [m]
- W = Carga que soporta una chumacera. [N]
- μ = Viscosidad dinámica del aceite lubricante. [Pa·s]
- π = 3.141592653
- ω = Velocidad de rotación. [rad/s]

Analizando la ecuación anterior se aprecia que el número de Sommerfeld es directamente proporcional a la viscosidad dinámica del lubricante μ ; de esta manera se aprecia que las características del sistema son influenciadas por el tipo de lubricante.

Para el caso específico de una chumacera larga e inundada y con el apoyo de algunas sustituciones, para condiciones estáticas, podemos encontrar el número de Sommerfeld en función de la excentricidad:

$$S = \frac{(2 + \varepsilon^2)\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{12\pi^2 \varepsilon}. \quad (2.56)$$

Es importante señalar que la ecuación (2.56) se limita para fines prácticos solo cuando la relación de dimensiones geométricas L/D es mucho mayor a la unidad.

Para el caso de una chumacera larga pero ahora completamente cavitada se tiene que el número de Sommerfeld y su correspondiente ángulo de attitude están definidos respectivamente por:

$$S = \frac{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)}{6\pi\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2}}, \quad \tan \Psi = \frac{\pi\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2\varepsilon}. \quad (2.57)$$

Por otro lado las siguientes ecuaciones corresponden al caso de una chumacera corta y completamente cavitada;

$$S = \frac{(1 - \varepsilon^2)}{\pi(L/D)^2 \varepsilon} \sqrt{\frac{1}{\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2}}, \quad \tan \Psi = \frac{\pi\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{4\varepsilon}. \quad (2.58)$$

Las características rotodinámicas de la turbomaquinaria son influenciadas fuertemente por las chumaceras sobre las cuales los rotores giran. La *chumacera cilíndrica plana* generalmente es un punto central de la literatura internacional que aborda este tema debido a que permite un análisis general del cual se pueden obtener buenas aproximaciones del caso real. La chumacera cilíndrica plana, como la que se muestra en Fig. 2-13, es la chumacera hidrodinámica mas sencilla y es la mas económica de fabricar; como su nombre lo dice su geometría consiste en de un simple cilindro recto.

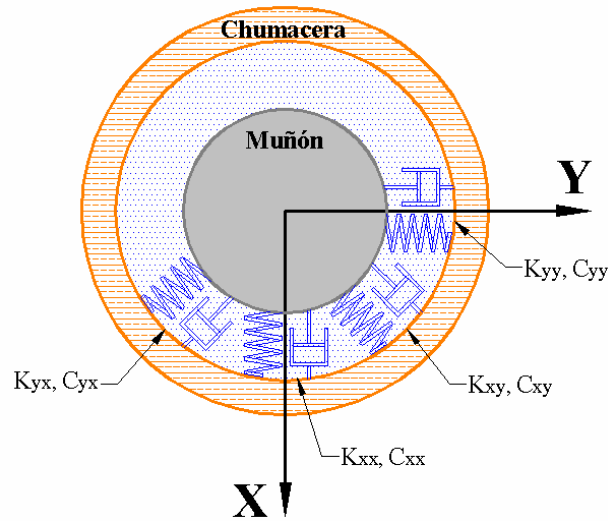


Fig. 2-14 Representación de los coeficientes rotodinámicos

Para calcular los coeficientes de rigidez k_{ij} y de amortiguamiento c_{ij} , algunos investigadores han podido obtener algunas expresiones analíticas (Apéndice A) que matemáticamente modelan las propiedades de rigidez y amortiguamiento de este tipo de chumaceras. En las figuras siguientes se pueden observar las curvas de estos coeficientes, para chumaceras cilíndricas planas, en función del número Sommerfeld para valores de L/D igual a 0.5 y 1.0. Es posible encontrar este tipo de gráficas en literatura especializada en rotodinámica o chumaceras por ejemplo [158], [183] y [195].

Para la determinación de los coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento en esta investigación se emplearon las funciones obtenidas por García-Illescas [54] mediante de un ajuste de curvas a partir de las gráficas de Someya [183] y Vance [195]. García-Illescas realizó un ajuste de curvas mediante mínimos cuadrados de la información obtenida en las referencias anteriores para posteriormente obtener funciones que pudieran ser implementadas en MATLAB [54].

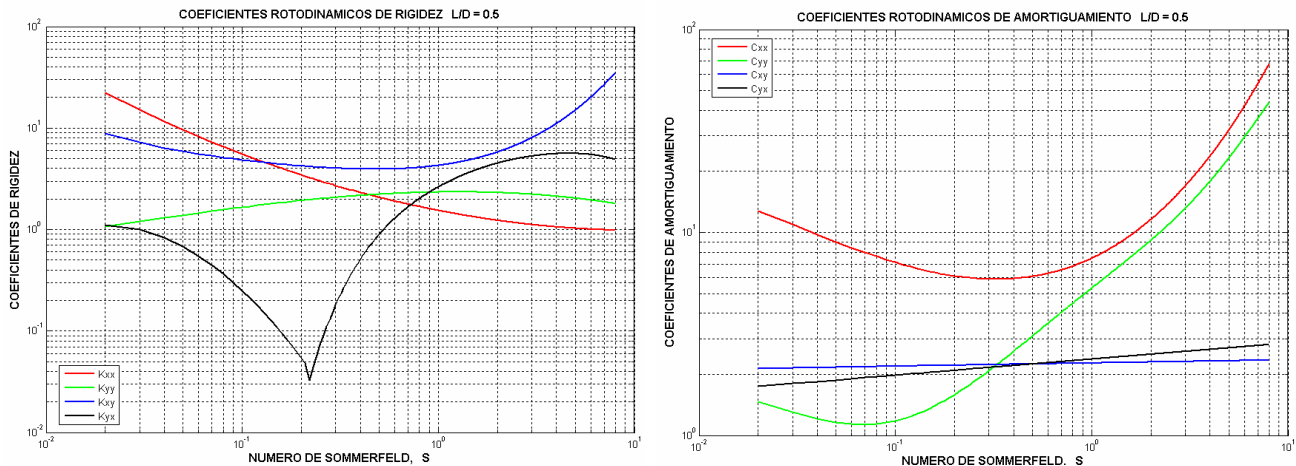


Fig. 2-15 Coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento directos y acoplados para una chumacera cilíndrica plana con $L/D = 0.5$

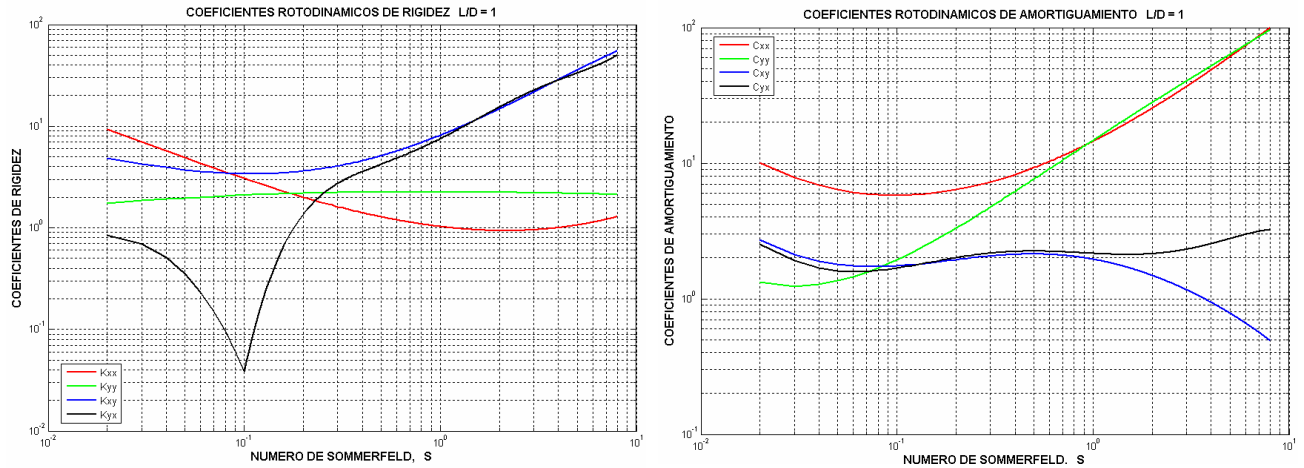


Fig. 2-16 Coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento directos y acoplados para una chumacera cilíndrica plana con $L/D = 1$

Sustituyendo las relaciones dadas por Ecs.(2.43), (2.44), (2.45), (2.53) y (2.54) en las ecuaciones de movimiento de las chumaceras Ecs.(2.34) y (2.35) se tiene:

$$m_j \Delta \ddot{x}_j + f_{x0} + k_{xx} \Delta x_j + k_{yy} \Delta y_j + c_{xx} \Delta \dot{x}_j + c_{xy} \Delta \dot{y}_j - \frac{k}{2} (\Delta x_d - \Delta x_j) - \frac{k}{2} \delta + \frac{g(\Phi)}{4} [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\Phi)(\Delta x_d - \Delta x_j + \delta) + (\Delta k_2 \sin 2\Phi)(\Delta y_d - \Delta y_j)] = m_j g + m_j \omega^2 e_j \cos \omega t \quad (2.59)$$

$$m_j \Delta \ddot{y}_j + f_{y0} + k_{yx} \Delta x_j + k_{yy} \Delta y_j + c_{yx} \Delta \dot{x}_j + c_{yy} \Delta \dot{y}_j - \frac{k}{2} (\Delta y_d - \Delta y_j) + \frac{g(\Phi)}{4} [(\Delta k_2 \sin 2\Phi)(\Delta x_d - \Delta x_j + \delta) + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\Phi)(\Delta y_d - \Delta y_j)] = m_j \omega^2 e_j \sin \omega t \quad (2.60)$$

Es posible simplificar las ecuaciones anteriores sustituyendo las Ecs.(2.38) y (2.40), obteniendo respectivamente de esta manera;

$$m_j \Delta \ddot{x}_j + c_{xx} \Delta \dot{x}_j + c_{xy} \Delta \dot{y}_j + k_{xx} \Delta x_j + k_{yy} \Delta y_j - \frac{k}{2} (\Delta x_d - \Delta x_j) + \frac{g(\Phi)}{4} [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\Phi)(\Delta x_d - \Delta x_j + \delta) + (\Delta k_2 \sin 2\Phi)(\Delta y_d - \Delta y_j)] = m_j \omega^2 e_j \cos \omega t \quad (2.61)$$

$$m_j \Delta \ddot{y}_j + c_{yx} \Delta \dot{x}_j + c_{yy} \Delta \dot{y}_j + k_{yx} \Delta x_j + k_{yy} \Delta y_j + \frac{k}{2} (\Delta y_j - \Delta y_d) + \frac{g(\Phi)}{4} [(\Delta k_2 \sin 2\Phi)(\Delta x_d - \Delta x_j + \delta) + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\Phi)(\Delta y_d - \Delta y_j)] = m_j \omega^2 e_j \sin \omega t \quad (2.62)$$

El sistema de ecuaciones dado por Ecs.(2.48), (2.49), (2.61) y (2.62) representa las ecuaciones de movimiento, con dimensiones, del rotor Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado, alrededor de su posición de equilibrio

Ecuaciones adimensionales del movimiento del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado

Para lograr una mayor generalidad de aplicación y utilidad de este análisis se derivan las ecuaciones adimensionales normalizando las amplitudes de vibración por:

$$c_r = R_b - R_j. \quad (2.63)$$

En la ecuación anterior c_r es el claro radial que representa la diferencia de los radios de la chumacera y del muñón como puede verse en la Fig. 2-13.

Para pasar a las coordenadas adimensionales, los desplazamientos adimensionales de los centros de rotor y chumacera respecto a sus posiciones de equilibrio pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} \Delta X_i &= \frac{\Delta x_i}{c_r}, & \Delta X_i' &= \frac{\Delta \dot{x}_i}{\omega c_r}, & \Delta X_i'' &= \frac{\Delta \ddot{x}_i}{\omega^2 c_r} \\ \Delta Y_i &= \frac{\Delta y_i}{c_r}, & \Delta Y_i' &= \frac{\Delta \dot{y}_i}{\omega c_r}, & \Delta Y_i'' &= \frac{\Delta \ddot{y}_i}{\omega^2 c_r} \end{aligned} \quad i = d, j. \quad (2.64)$$

de donde es posible despejar

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= c_r \Delta X_i, & \Delta \dot{x}_i &= \omega c_r \Delta X_i', & \Delta \ddot{x}_i &= \omega^2 c_r \Delta X_i'' \\ \Delta y_i &= c_r \Delta Y_i, & \Delta \dot{y}_i &= \omega c_r \Delta Y_i', & \Delta \ddot{y}_i &= \omega^2 c_r \Delta Y_i'' \end{aligned} \quad i = d, j. \quad (2.65)$$

Por $\Delta X'$ se expresa la derivada respecto al tiempo adimensional τ y el tiempo adimensional τ y sus derivadas están denotados por:

$$\tau = \omega t, \quad \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt}, \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2}{dt^2}. \quad (2.66)$$

El desbalance adimensional en el disco y las chumaceras estarán dados respectivamente por:

$$U_d^x = \frac{e_d^x}{c_r}, \quad U_d^y = \frac{e_d^y}{c_r}, \quad U_d = \frac{e_d}{c_r}, \quad (2.67)$$

$$U_j = \frac{e_j}{c_r}. \quad (2.68)$$

Sustituyendo la relación dada por Ec.(2.67) en las ecuaciones (2.23) y (2.24) se obtiene:

$$F_{des,d}^x = m\omega^2 c_r (U_d^x \cos \omega t - U_d^y \sin \omega t) = m\omega^2 c_r U_d (\cos \phi \cos \tau - \sin \phi \sin \tau),$$

$$F_{des,d}^y = m\omega^2 c_r (U_d^x \sin \omega t + U_d^y \cos \omega t) = m\omega^2 c_r U_d (\cos \phi \sin \tau + \sin \phi \cos \tau).$$

Las cuales aplicando sencillas identidades trigonométricas quedarán expresadas como:

$$F_{des,d}^x = m\omega^2 c_r U_d \cos(\tau + \phi), \quad F_{des,d}^y = m\omega^2 c_r U_d \sin(\tau + \phi) \quad (2.69)$$

De la misma manera que para el disco, sustituyendo Ec.(2.68) en las ecuaciones dadas por Ec.(2.33), resulta:

$$F_{des,j}^x = m_j \omega^2 c_r U_j \cos \tau \quad F_{des,j}^y = m_j \omega^2 c_r U_j \sin \tau. \quad (2.70)$$

Al sustituir las relaciones Ecs.(2.65), (2.66), (2.69) y (2.70) en el sistema de ecuaciones dado por Ecs.(2.48), (2.49), (2.61) y (2.62), que representa las ecuaciones de movimiento con dimensiones del rotor Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado alrededor de su posición de equilibrio, se obtiene el siguiente sistema:

$$m\omega^2 c_r \Delta X_d'' + c_d \omega c_r \Delta X_d' + kc_r (\Delta X_d - \Delta X_j) - \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\Phi)(c_r \Delta X_d - c_r \Delta X_j + \delta) + (\Delta k_2 \sin 2\Phi)(c_r \Delta Y_d - c_r \Delta Y_j)] = m\omega^2 c_r U_d \cos(\tau + \phi) \quad (2.71)$$

$$m\omega^2 c_r \Delta Y_d'' + c_d \omega c_r \Delta Y_d' + kc_r (\Delta Y_d - \Delta Y_j) - \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta k_2 \sin 2\Phi)(c_r \Delta X_d - c_r \Delta X_j + \delta) + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\Phi)(c_r \Delta Y_d - c_r \Delta Y_j)] = m\omega^2 c_r U_d \sin(\tau + \phi) \quad (2.72)$$

$$m_j \omega^2 c_r \Delta X_j'' + c_{xx} \omega c_r \Delta X_j' + c_{xy} \omega c_r \Delta Y_j' + k_{xx} c_r \Delta X_j + k_{xy} c_r \Delta Y_j - \frac{kc_r}{2} (\Delta X_d - \Delta X_j) + \frac{g(\Phi)}{4} [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\Phi)(c_r \Delta X_d - c_r \Delta X_j + \delta) + (\Delta k_2 \sin 2\Phi)(c_r \Delta Y_d - c_r \Delta Y_j)] = m_j \omega^2 c_r U_j \cos \tau \quad (2.73)$$

$$m_j \omega^2 c_r \Delta Y_j'' + c_{yx} \omega c_r \Delta X_j' + c_{yy} \omega c_r \Delta Y_j' + k_{yx} c_r \Delta X_j + k_{yy} c_r \Delta Y_j - \frac{kc_r}{2} (\Delta Y_d - \Delta Y_j) + \frac{g(\Phi)}{4} [(\Delta k_2 \sin 2\Phi)(c_r \Delta X_d - c_r \Delta X_j + \delta) + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\Phi)(c_r \Delta Y_d - c_r \Delta Y_j)] = m_j \omega^2 c_r U_j \sin \tau \quad (2.74)$$

En este momento en el sistema de ecuaciones anterior, Ecs.(2.71)-(2.74), las coordenadas ya son adimensionales, pero no así sus coeficientes. Ahora para adimensionalizar los coeficientes se dividen todo el sistema entre $k \cdot c_r$, obteniendo como resultado:

$$\frac{m\omega^2}{k} \Delta X_d'' + \frac{c_d \omega}{k} \Delta X_d' + (\Delta X_d - \Delta X_j) - \frac{g(\Phi)}{2} \left[\left(\frac{\Delta k_1}{k} + \frac{\Delta k_2}{k} \cos 2\Phi \right) \left(\Delta X_d - \Delta X_j + \frac{\delta}{c_r} \right) + \frac{\Delta k_2}{k} (\sin 2\Phi) (\Delta Y_d - \Delta Y_j) \right] = \frac{m\omega^2}{k} U_d \cos(\phi + \tau)$$

$$\frac{m\omega^2}{k} \Delta Y_d'' + \frac{c_d \omega}{k} \Delta Y_d' + (\Delta Y_d - \Delta Y_j) - \frac{g(\Phi)}{2} \left[\frac{\Delta k_2}{k} (\sin 2\Phi) \left(\Delta X_d - \Delta X_j + \frac{\delta}{c_r} \right) + \left(\frac{\Delta k_1}{k} - \frac{\Delta k_2}{k} \cos 2\Phi \right) (\Delta Y_d - \Delta Y_j) \right] = \frac{m\omega^2}{k} U_d \sin(\phi + \tau)$$

$$\frac{m_j \omega^2}{k} \Delta X_j'' + \frac{1}{kc_r} (c_{xx} \omega c_r \Delta X_j' + c_{xy} \omega c_r \Delta Y_j' + k_{xx} c_r \Delta X_j + k_{xy} c_r \Delta Y_j) - \frac{(\Delta X_d - \Delta X_j)}{2} + \frac{g(\Phi)}{4} \left[\left(\frac{\Delta k_1}{k} + \frac{\Delta k_2}{k} \cos 2\Phi \right) \left(\Delta X_d - \Delta X_j + \frac{\delta}{c_r} \right) + \frac{\Delta k_2}{k} (\sin 2\Phi) (\Delta Y_d - \Delta Y_j) \right] = \frac{m_j \omega^2}{k} U_j \cos \tau$$

$$\frac{m_j \omega^2}{k} \Delta Y_j'' + \frac{1}{kc_r} (c_{yx} \omega c_r \Delta X_j' + c_{yy} \omega c_r \Delta Y_j' + k_{yx} c_r \Delta X_j + k_{yy} c_r \Delta Y_j) - \frac{(\Delta Y_d - \Delta Y_j)}{2} + \frac{g(\Phi)}{4} \left[\frac{\Delta k_2}{k} (\sin 2\Phi) \left(\Delta X_d - \Delta X_j + \frac{\delta}{c_r} \right) + \left(\frac{\Delta k_1}{k} - \frac{\Delta k_2}{k} \cos 2\Phi \right) (\Delta Y_d - \Delta Y_j) \right] = \frac{m_j \omega^2}{k} U_j \sin \tau$$

La primera frecuencia natural ω_n del sistema con soportes rígidos en los extremos es igual a:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.75)$$

La frecuencia anterior, Ec.(2.75), aunque no es exactamente la correspondiente a este sistema que tiene soportes flexibles será usada para adimensionalizar la velocidad de rotación Ω del sistema.

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}. \quad (2.76)$$

Simplificando los coeficientes de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{m\omega^2}{k} &= \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = \Omega^2, & \frac{c_d\omega}{k} &= \frac{c_d\omega_n}{k} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) = 2D_e\Omega, & \frac{m_j\omega^2}{k} &= \left(\frac{m_j}{m} \right) \frac{m\omega^2}{k} = \alpha_j\Omega^2 \\ \frac{c_{ij}\omega c_r}{kc_r} &= \frac{W}{kc_r} \frac{c_{ij}\omega c_r}{W} = \frac{W_g(1+2\alpha_j)}{2} C_{ij}, & \frac{k_{ij}\omega c_r}{kc_r} &= \frac{W}{kc_r} \frac{k_{ij}c_r}{W} = \frac{W_g(1+2\alpha_j)}{2} K_{ij}, & i, j &= x, y \\ \frac{W}{kc_r} &= \frac{mg(1/2 + \alpha_j)}{kc_r} = \frac{W_g}{2}(1+2\alpha_j) \end{aligned}$$

Donde el amortiguamiento adimensional del disco está dado por:

$$2D_e = \frac{c_d\omega_n}{k} = \frac{c_d}{m\omega_n}. \quad (2.77)$$

El peso adimensional de las chumaceras es:

$$\alpha_j = \frac{m}{m_j}. \quad (2.78)$$

El peso adimensional del disco responsable del pandeo por la gravedad está definido como:

$$W_g = \frac{\delta}{c_r} = \frac{mg}{kc_r} = \frac{g}{\omega_n^2 c_r}, \quad (2.79)$$

La carga que soporta una chumacera se puede determinar de la siguiente manera:

$$W = \left(\frac{m}{2} + m_j \right) g = mg + \left(\frac{1}{2} + \alpha_j \right) \quad (2.80)$$

Finalmente, los coeficientes rotodinámicos adimensionales de rigidez y amortiguamiento están expresados respectivamente como:

$$K_{ij} = \frac{c_r k_{ij}}{W}, \quad C_{ij} = \frac{c_r \omega c_{ij}}{W}, \quad i, j = x, y. \quad (2.81)$$

Sustituyendo las relaciones encontradas anteriormente, el sistema Ecs.(2.71)-(2.74), se puede describir ahora como:

$$\Omega^2 \Delta X_d'' + 2D_e \Omega \Delta X_d' + (\Delta X_d - \Delta X_j) - \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi)(\Delta X_d - \Delta X_j + W_g) + (\Delta K_2 \sin 2\Phi)(\Delta Y_d - \Delta Y_j)] = \Omega^2 U_d \cos(\tau + \phi) \quad (2.82)$$

$$\Omega^2 \Delta Y_d'' + 2D_e \Omega \Delta Y_d' + (\Delta Y_d - \Delta Y_j) - \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_2 \sin 2\Phi)(\Delta X_d - \Delta X_j + W_g) + (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi)(\Delta Y_d - \Delta Y_j)] = \Omega^2 U_d \sin(\tau + \phi) \quad (2.83)$$

$$2\alpha_j \Omega^2 \Delta X_j'' + W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{xx} \Delta X_j' + C_{xy} \Delta Y_j' + K_{xx} \Delta X_j + K_{xy} \Delta Y_j) - (\Delta X_d - \Delta X_j) + \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi)(\Delta X_d - \Delta X_j + W_g) + (\Delta K_2 \sin 2\Phi)(\Delta Y_d - \Delta Y_j)] = 2\alpha_j \Omega^2 U_j \cos \tau \quad (2.84)$$

$$2\alpha_j \Omega^2 \Delta Y_j'' + W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{yx} \Delta X_j' + C_{yy} \Delta Y_j' + K_{yx} \Delta X_j + K_{yy} \Delta Y_j) - (\Delta Y_d - \Delta Y_j) + \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_2 \sin 2\Phi)(\Delta X_d - \Delta X_j + W_g) + (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi)(\Delta Y_d - \Delta Y_j)] = 2\alpha_j \Omega^2 U_j \sin \tau \quad (2.85)$$

El sistema de las Ecs.(2.82), (2.83), (2.84) y (2.85) representa las ecuaciones lineales adimensionales del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado. Dicho modelo innovador en su enfoque y derivación consiste en un sistema de 4 ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes periódicos y en donde el efecto del peso esta explícitamente considerado dentro de las expresiones.

Por último, es útil remarcar las ventajas de expresar el sistema de ecuaciones en forma adimensional. Entre los muchos beneficios que se obtienen al trabajar con parámetros adimensionales se puede mencionar el hecho de que se reduce el número de parámetros a introducir al sistema, un claro ejemplo es el parámetro adimensional α_j que simplifica la labor de introducir los parámetros dimensionales m y m_j , por mencionar solo alguno. Otra conveniencia se halla en que un mismo juego de parámetros del sistema podría representar al mismo tiempo un arreglo experimental de laboratorio ó una configuración de una maquina industrial real, lo que demuestra el beneficio y utilidad del análisis de un sistema expresado en forma adimensional.

Capítulo

3

Métodos de solución del modelo del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado

En este Capítulo se desarrolla una solución numérica del modelo del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado representado por el sistema de 4 ecuaciones diferenciales lineales adimensionales de segundo orden con coeficientes periódicos, Ecs.(2.82), (2.83), (2.84) y (2.85). La transformación de dicho sistema en 8 de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden permite posteriormente la implementación de estas ecuaciones en un programa en MATLAB (Apéndice B). La solución numérica del sistema permite deducir y determinar patrones de comportamiento confiables como resultado de la interacción entre la fisura y el desbalance.

Asimismo, se desarrolla una novedosa solución analítica aproximada del presente sistema ideada por el Director de esta Tesis, Dr. Valery R. Nosov [144]. Dicha solución permite analizar muchos patrones de comportamiento difíciles de ser estudiados numéricamente debido al gran consumo de tiempo de cómputo y la alta demanda de capacidad de cálculo que un estudio de este tipo requiere.

3.1 Método de solución numérica

Realizando las siguientes transformaciones las cuatro ecuaciones diferenciales de segundo orden, Ecs.(2.82), (2.83), (2.84) y (2.85), pueden ser representadas como un sistema de 8 ecuaciones diferenciales de primer orden para su solución numérica. Dicha solución numérica proporciona la respuesta del sistema del modelo de rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado.

$$\begin{aligned} Z_1 &= \Delta X_d, & Z_2 &= \Delta Y_d, & Z_3 &= \Delta X_j, & Z_4 &= \Delta Y_j, \\ Z_5 &= \Delta X_d', & Z_6 &= \Delta Y_d', & Z_7 &= \Delta X_j', & Z_8 &= \Delta Y_j'. \end{aligned} \quad (3.1)$$

De esta forma es posible obtener el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= \Delta X_d' = Z_5, & \dot{Z}_2 &= \Delta Y_d' = Z_6, & \dot{Z}_3 &= \Delta X_j' = Z_7, & \dot{Z}_4 &= \Delta Y_j' = Z_8 \\ \dot{Z}_5 &= \Delta X_d'' = \frac{1}{\Omega^2} \left(-2D_e \Omega Z_5 - (Z_1 - Z_3) + \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi)(Z_1 - Z_3 + W_g) + \right. \\ & \quad \left. (\Delta K_2 \sin 2\Phi)(Z_2 - Z_4)] + \Omega^2 U_d \cos(\tau + \phi) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{Z}_6 = \Delta Y_d'' &= \frac{1}{\Omega^2} \left(-2D_e \Omega Z_6 - (Z_2 - Z_4) + \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_2 \sin 2\Phi)(Z_1 - Z_3 + W_g) + \right. \\ &\quad \left. (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi)(Z_2 - Z_4)] + \Omega^2 U_d \sin(\tau + \phi) \right) \\ \dot{Z}_7 = \Delta X_j'' &= -\frac{1}{2\alpha_j \Omega^2} (W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{xx} Z_7 + C_{xy} Z_8 + K_{xx} Z_3 + K_{xy} Z_4) - (Z_1 - Z_3) + \\ &\quad \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi)(Z_1 - Z_3 + W_g) + (\Delta K_2 \sin 2\Phi)(Z_2 - Z_4)] - 2\alpha_j \Omega^2 U_j \cos \tau) \\ \dot{Z}_8 = \Delta Y_j'' &= -\frac{1}{2\alpha_j \Omega^2} (W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{yx} Z_7 + C_{yy} Z_8 + K_{yx} Z_3 + K_{yy} Z_4) - (Z_2 - Z_4) + \\ &\quad \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_2 \sin 2\Phi)(Z_1 - Z_3 + W_g) + (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi)(Z_2 - Z_4)] - 2\alpha_j \Omega^2 U_j \sin \tau)\end{aligned}$$

Separando términos con factores Z_1, Z_2, \dots, Z_8 se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{Z}_1 &= Z_5, & \dot{Z}_2 &= Z_6, & \dot{Z}_3 &= Z_7, & \dot{Z}_4 &= Z_8 \\ \dot{Z}_5 &= Z_1 \left[\frac{g(\Phi)}{2\Omega^2} (\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi) - \frac{1}{\Omega^2} \right] + Z_2 \left[\frac{g(\Phi)}{2\Omega^2} (\Delta K_2 \sin 2\Phi) \right] + Z_3 \left[-\frac{g(\Phi)}{2\Omega^2} (\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi) + \frac{1}{\Omega^2} \right] + \\ &\quad Z_4 \left[-\frac{g(\Phi)}{2\Omega^2} (\Delta K_2 \sin 2\Phi) \right] + Z_5 \left[-\frac{2D_e}{\Omega} \right] + \left[U_d \cos(\tau + \phi) + \frac{g(\Phi)}{2\Omega^2} (\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi) W_g \right] \\ \dot{Z}_6 &= Z_1 \left[\frac{g(\Phi)}{2\Omega^2} (\Delta K_2 \sin 2\Phi) \right] + Z_2 \left[\frac{g(\Phi)}{2\Omega^2} (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi) - \frac{1}{\Omega^2} \right] + Z_3 \left[-\frac{g(\Phi)}{2\Omega^2} (\Delta K_2 \sin 2\Phi) \right] + \\ &\quad Z_4 \left[\frac{1}{\Omega^2} - \frac{g(\Phi)}{2\Omega^2} (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi) \right] + Z_6 \left[-\frac{2D_e}{\Omega} \right] + \left[U_d \sin(\tau + \phi) + \frac{g(\Phi)}{2\Omega^2} (\Delta K_2 \sin 2\Phi) W_g \right] \\ \dot{Z}_7 &= Z_1 \left[\frac{1}{2\alpha_j \Omega^2} - \frac{g(\Phi)}{4\alpha_j \Omega^2} (\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi) \right] + Z_2 \left[-\frac{g(\Phi)}{4\alpha_j \Omega^2} (\Delta K_2 \sin 2\Phi) \right] + \\ &\quad Z_3 \left[-\frac{1}{2\alpha_j \Omega^2} - \frac{W_g (1 + 2\alpha_j) K_{xx}}{2\alpha_j \Omega^2} + \frac{g(\Phi)}{4\alpha_j \Omega^2} (\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi) \right] + Z_4 \left[-\frac{W_g (1 + 2\alpha_j) K_{xy}}{2\alpha_j \Omega^2} + \frac{g(\Phi)}{4\alpha_j \Omega^2} (\Delta K_2 \sin 2\Phi) \right] + \\ &\quad Z_7 \left[-\frac{W_g (1 + 2\alpha_j) C_{xx}}{2\alpha_j \Omega^2} \right] + Z_8 \left[-\frac{W_g (1 + 2\alpha_j) C_{xy}}{2\alpha_j \Omega^2} \right] + \left[U_j \cos \tau - \frac{g(\Phi)}{4\alpha_j \Omega^2} (\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi) W_g \right] \\ \dot{Z}_8 &= Z_1 \left[-\frac{g(\Phi)}{4\alpha_j \Omega^2} (\Delta K_2 \sin 2\Phi) \right] + Z_2 \left[\frac{1}{2\alpha_j \Omega^2} - \frac{g(\Phi)}{4\alpha_j \Omega^2} (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi) \right] + \\ &\quad Z_3 \left[\frac{g(\Phi)}{4\alpha_j \Omega^2} (\Delta K_2 \sin 2\Phi) - \frac{W_g (1 + 2\alpha_j) K_{yx}}{2\alpha_j \Omega^2} \right] + Z_4 \left[-\frac{1}{2\alpha_j \Omega^2} + \frac{g(\Phi)}{4\alpha_j \Omega^2} (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi) - \frac{W_g (1 + 2\alpha_j) K_{yy}}{2\alpha_j \Omega^2} \right] + \\ &\quad Z_7 \left[-\frac{W_g (1 + 2\alpha_j) C_{yx}}{2\alpha_j \Omega^2} \right] + Z_8 \left[-\frac{W_g (1 + 2\alpha_j) C_{yy}}{2\alpha_j \Omega^2} \right] + \left[U_j \sin \tau - \frac{g(\Phi)}{4\alpha_j \Omega^2} (\Delta K_2 \sin 2\Phi) W_g \right]\end{aligned}$$

Con el fin de simplificar las expresiones anteriores se llevan acabo las siguientes sustituciones:

$$\begin{aligned}P_1(\Phi) &= 1 - \frac{1}{2} g(\Phi) (\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi), & P_2(\Phi) &= 1 - \frac{1}{2} g(\Phi) (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi), \\ Q_1(\Phi) &= \frac{1}{2} g(\Phi) (\Delta K_2 \sin 2\Phi), & W_{ga} &= W_g (1 + 2\alpha_j).\end{aligned}\tag{3.2}$$

En este momento es posible representar el sistema de ocho ecuaciones diferenciales de primer orden en forma matricial de la siguiente manera;

$$\dot{Z} = A(\Phi)Z + B \quad (3.3)$$

Donde la matriz periódica de estado $A(\Phi)$, con periodo $T = 2\pi$ esta descrita por:

$$A(\Phi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{P_1(\Phi)}{\Omega^2} & \frac{Q_1(\Phi)}{\Omega^2} & \frac{P_1(\Phi)}{\Omega^2} & -\frac{Q_1(\Phi)}{\Omega^2} & -\frac{2D_e}{\Omega} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Q_1(\Phi)}{\Omega^2} & -\frac{P_2(\Phi)}{\Omega^2} & -\frac{Q_1(\Phi)}{\Omega^2} & \frac{P_2(\Phi)}{\Omega^2} & 0 & -\frac{2D_e}{\Omega} & 0 & 0 \\ \frac{P_1(\Phi)}{2\alpha_j\Omega^2} & -\frac{Q_1(\Phi)}{2\alpha_j\Omega^2} & -\frac{P_1(\Phi) + W_{ga}K_{xx}}{2\alpha_j\Omega^2} & \frac{Q_1(\Phi) - W_{ga}K_{xy}}{2\alpha_j\Omega^2} & 0 & 0 & -\frac{W_{ga}C_{xx}}{2\alpha_j\Omega} & -\frac{W_{ga}C_{xy}}{2\alpha_j\Omega} \\ -\frac{Q_1(\Phi)}{2\alpha_j\Omega^2} & \frac{P_2(\Phi)}{2\alpha_j\Omega^2} & \frac{Q_1(\Phi) - W_{ga}K_{yx}}{2\alpha_j\Omega^2} & -\frac{P_2(\Phi) + W_{ga}K_{yy}}{2\alpha_j\Omega^2} & 0 & 0 & -\frac{W_{ga}C_{yx}}{2\alpha_j\Omega} & -\frac{W_{ga}C_{yy}}{2\alpha_j\Omega} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

A la par el vector Z y el vector B están dados respectivamente por las siguientes expresiones.

$$Z^T = [Z_1 \quad Z_2 \quad Z_3 \quad Z_4 \quad Z_5 \quad Z_6 \quad Z_7 \quad Z_8] \quad (3.5)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_d \cos(\tau + \phi) + \frac{(1 - P_1(\Phi))W_g}{\Omega^2} \\ U_d \sin(\tau + \phi) + \frac{W_g Q_1(\Phi)}{\Omega^2} \\ U_j \cos \tau - \frac{(1 - P_1(\Phi))W_g}{2\alpha_j\Omega^2} \\ U_j \sin \tau - \frac{W_g Q_1(\Phi)}{2\alpha_j\Omega^2} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Con el fin de dar solución al sistema anterior se desarrollo un programa en el paquete MATLAB (Apéndice B) que permite obtener la respuesta del sistema de ecuaciones del modelo de rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado. En este programa es posible obtener gráficas de las respuestas transitorias del disco (X_d , Y_d) y chumaceras (X_j , Y_j) y sus correspondientes graficas de espectros de frecuencia y ángulos de fase, así como las orbitas descritas por el disco y las chumaceras a esperar ante diferentes; profundidades de grieta (ΔK_g , ΔK_η), magnitudes de desbalance en el disco (U_d) y chumaceras (U_j), orientaciones angulares (β) entre el desbalance residual del disco (U_d) y la dirección de la grieta (ξ), distribuciones de masa (α_j) y velocidades de operación (Ω).

De la misma forma se desarrolló una versión automatizada del programa anterior (Apéndice B) que permite obtener los mismos resultados que el programa anterior pero en todo un rango de velocidades de

operación lo que nos permite obtener diagramas de la respuesta vibratoria del sistema a lo largo de lo que en la practica se podría traducir como un arranque o paro de la máquina.

3.2 Método de investigación numérico-analítico

La investigación de la interacción entre los desbalances de masas y la fisura transversal localizada a la mitad del eje se basa en un modelo lineal dado por Ecs.(2.82), (2.83), (2.84) y (2.85). El modelo completo consiste de cuatro ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes periódicos y su solución analítica cerrada es bastante difícil o tal vez imposible [144].

Se utiliza un novedoso método seminumérico basado en el *Método de Parámetros Pequeños* ideado por el Director de esta Tesis Dr. Valery R. Nosov [144]. En este caso, como parámetros pequeños se consideran dos parámetros ΔK_1 y ΔK_2 , correspondientes a la fisura.

Solución de orden cero – eje integro –

Como aproximación de la solución de orden cero, ΔX_{d0} , ΔY_{d0} , ΔX_{j0} , ΔY_{j0} se toma la respuesta en estado estable del sistema debido solamente al desbalance; es decir soluciones de las Ecs.(2.82), (2.83), (2.84) y (2.85) cuando $\Delta K_1 = 0$ y $\Delta K_2 = 0$ y escritas a continuación.

$$\Omega^2 \Delta X_{d0}'' + 2D_e \Omega \Delta X_{d0}' + (\Delta X_{d0} - \Delta X_{j0}) = \Omega^2 U_d \cos(\tau + \phi) = \Omega^2 (U_d^x \cos \tau - U_d^y \sin \tau) \quad (3.7)$$

$$\Omega^2 \Delta Y_{d0}'' + 2D_e \Omega \Delta Y_{d0}' + (\Delta Y_{d0} - \Delta Y_{j0}) = \Omega^2 U_d \sin(\tau + \phi) = \Omega^2 (U_d^x \sin \tau + U_d^y \cos \tau) \quad (3.8)$$

$$2\alpha_j \Omega^2 \Delta X_{j0}'' + W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{xx} \Delta X_{j0}' + C_{xy} \Delta Y_{j0}' + K_{xx} \Delta X_{j0} + K_{xy} \Delta Y_{j0}) - (\Delta X_{d0} - \Delta X_{j0}) = 2\alpha_j \Omega^2 U_j \cos \tau \quad (3.9)$$

$$2\alpha_j \Omega^2 \Delta Y_{j0}'' + W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{yx} \Delta X_{j0}' + C_{yy} \Delta Y_{j0}' + K_{yx} \Delta X_{j0} + K_{yy} \Delta Y_{j0}) - (\Delta Y_{d0} - \Delta Y_{j0}) = 2\alpha_j \Omega^2 U_j \sin \tau \quad (3.10)$$

Las soluciones en estado estable de las ecuaciones (3.7)-(3.10) tienen la forma:

$$\begin{aligned} \Delta X_{d0} &= Axd0 \cos \tau + Bxd0 \sin \tau + Cxd0 & \Delta Y_{d0} &= Ayd0 \cos \tau + Byd0 \sin \tau + Cyd0 \\ \Delta X_{j0} &= Axj0 \cos \tau + Bxj0 \sin \tau + Cxj0 & \Delta Y_{j0} &= Ayj0 \cos \tau + Byj0 \sin \tau + Cyj0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Derivando y volviendo a derivar las soluciones anteriores resulta:

$$\begin{aligned} \Delta X_{d0} &= Axd0 \cos \tau + Bxd0 \sin \tau + Cxd0 & \Delta Y_{d0} &= Ayd0 \cos \tau + Byd0 \sin \tau + Cyd0 \\ \Delta X_{d0}' &= -Axd0 \sin \tau + Bxd0 \cos \tau & \Delta Y_{d0}' &= -Ayd0 \sin \tau + Byd0 \cos \tau \\ \Delta X_{d0}'' &= -Axd0 \cos \tau - Bxd0 \sin \tau & \Delta Y_{d0}'' &= -Ayd0 \cos \tau - Byd0 \sin \tau \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \Delta X_{j0} &= Axj0 \cos \tau + Bxj0 \sin \tau + Cxj0 & \Delta Y_{j0} &= Ayj0 \cos \tau + Byj0 \sin \tau + Cyj0 \\ \Delta X_{j0}' &= -Axj0 \sin \tau + Bxj0 \cos \tau & \Delta Y_{j0}' &= -Ayj0 \sin \tau + Byj0 \cos \tau \\ \Delta X_{j0}'' &= -Axj0 \cos \tau - Bxj0 \sin \tau & \Delta Y_{j0}'' &= -Ayj0 \cos \tau - Byj0 \sin \tau \end{aligned} \quad (3.13)$$

Sustituyendo las relaciones encontradas, Ecs. (3.12) y (3.13), en el sistema de ecuaciones (3.7)-(3.10) se tiene:

$$\begin{aligned} &\Omega^2 (-Axd0 \cos \tau - Bxd0 \sin \tau) + 2D_e \Omega (-Axd0 \sin \tau + Bxd0 \cos \tau) + \\ &(Axd0 \cos \tau + Bxd0 \sin \tau + Cxd0 - Axj0 \cos \tau - Bxj0 \sin \tau - Cxj0) = \Omega^2 (U_d^x \cos \tau - U_d^y \sin \tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Omega^2 (-Ayd0 \cos \tau - Byd0 \sin \tau) + 2D_e \Omega (-Ayd0 \sin \tau + Byd0 \cos \tau) + \\ & (Ayd0 \cos \tau + Byd0 \sin \tau + Cyd0 - Ayj0 \cos \tau - Byj0 \sin \tau - Cyj0) = \Omega^2 (U_d^x \sin \tau + U_d^y \cos \tau) \\ & 2\alpha_j \Omega^2 (-Axj0 \cos \tau - Bxj0 \sin \tau) + W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{xx} (-Axj0 \sin \tau + Bxj0 \cos \tau) + \\ & C_{xy} (-Ayj0 \sin \tau + Byj0 \cos \tau) + K_{xx} (Axj0 \cos \tau + Bxj0 \sin \tau + Cxj0) + K_{xy} (Ayj0 \cos \tau + Byj0 \sin \tau + Cyj0)) - \\ & (Axd0 \cos \tau + Bxd0 \sin \tau + Cxd0 - Axj0 \cos \tau - Bxj0 \sin \tau - Cxj0) = 2\alpha_j \Omega^2 U_j \cos \tau \\ & 2\alpha_j \Omega^2 (-Ayj0 \cos \tau - Byj0 \sin \tau) + W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{yx} (-Axj0 \sin \tau + Bxj0 \cos \tau) + \\ & C_{yy} (-Ayj0 \sin \tau + Byj0 \cos \tau) + K_{yx} (Axj0 \cos \tau + Bxj0 \sin \tau + Cxj0) + K_{yy} (Ayj0 \cos \tau + Byj0 \sin \tau + Cyj0)) - \\ & (Ayd0 \cos \tau + Byd0 \sin \tau + Cyd0 - Ayj0 \cos \tau - Byj0 \sin \tau - Cyj0) = 2\alpha_j \Omega^2 U_j \sin \tau \end{aligned}$$

Separando en funciones con términos con $\sin \tau$ y $\cos \tau$

$$\begin{aligned} & [-\Omega^2 Axd0 + 2D_e \Omega Bxd0 + Axd0 - Axj0 = \Omega^2 U_d^x] \cos \tau \\ & [-\Omega^2 Bxd0 - 2D_e \Omega Axd0 + Bxd0 - Bxj0 = -\Omega^2 U_d^y] \sin \tau \\ & [-\Omega^2 Ayd0 + 2D_e \Omega Byd0 + Ayd0 - Ayj0 = \Omega^2 U_d^y] \cos \tau \\ & [-\Omega^2 Byd0 - 2D_e \Omega Ayd0 + Byd0 - Byj0 = \Omega^2 U_d^x] \sin \tau \\ & [-2\alpha_j \Omega^2 Axj0 + W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{xx} Bxj0 + C_{xy} Byj0 + K_{xx} Axj0 + K_{xy} Ayj0) + Axj0 - Axd0 = 2\alpha_j \Omega^2 U_j] \cos \tau \\ & [-2\alpha_j \Omega^2 Bxj0 - W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{xx} Axj0 - C_{xy} Ayj0 - K_{xx} Bxj0 - K_{xy} Byj0) + Bxj0 - Bxd0 = 0] \sin \tau \\ & [-2\alpha_j \Omega^2 Ayj0 + W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{yx} Bxj0 + C_{yy} Byj0 + K_{yx} Axj0 + K_{yy} Ayj0) + Ayj0 - Ayd0 = 0] \cos \tau \\ & [-2\alpha_j \Omega^2 Byj0 - W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{yx} Axj0 - C_{yy} Ayj0 - K_{yx} Bxj0 - K_{yy} Byj0) + Byj0 - Byd0 = 2\alpha_j \Omega^2 U_j] \sin \tau \\ & Cxd0 - Cxj0 = 0 \\ & Cyd0 - Cyj0 = 0 \\ & W_g (1 + 2\alpha_j) (K_{xx} Cxj0 + K_{xy} Cyj0) - (Cxd0 - Cxj0) = 0 \\ & W_g (1 + 2\alpha_j) (K_{xy} Cxj0 + K_{yy} Cyj0) - (Cyd0 - Cyj0) = 0 \end{aligned}$$

Las amplitudes en términos con $\sin \tau$ y $\cos \tau$ en Ec.(3.11) forman un vector de dimensión 8.

$$Z_0^T = [Axd0 \quad Bxd0 \quad Ayd0 \quad Byd0 \quad Axj0 \quad Bxj0 \quad Ayj0 \quad Byj0] \quad (3.14)$$

El vector dado por Ec.(3.14) es solución de la ecuación algebraica lineal de orden 8

$$D_0(\Omega)Z_0 = U_0 \quad (3.15)$$

En donde el vector U_0 y la matriz D_0 en Ec.(3.15) están dadas por:

$$U_0^T = [\Omega^2 U_d^x \quad -\Omega^2 U_d^x \quad \Omega^2 U_d^y \quad \Omega^2 U_d^y \quad 2\alpha_j \Omega^2 U_j \quad 0 \quad 0 \quad 2\alpha_j \Omega^2 U_j] \quad (3.16)$$

$$D_0(\Omega) = \begin{bmatrix} (1-\Omega^2) & 2D_e\Omega & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2D_e\Omega & (1-\Omega^2) & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\Omega^2) & 2D_e\Omega & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2D_e\Omega & (1-\Omega^2) & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & d55 & W_{ga}C_{xx} & W_{ga}K_{xy} & W_{ga}C_{xy} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -W_{ga}C_{xx} & d55 & -W_{ga}C_{xy} & K_{xy} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & W_{ga}K_{yx} & W_{ga}C_{yx} & d77 & W_{ga}C_{yy} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -W_{ga}C_{yx} & W_{ga}K_{yx} & -W_{ga}C_{yy} & d77 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Donde: $d55 = 1 - 2\alpha_j\Omega^2 + W_{ga}K_{xx}$, $d77 = 1 - 2\alpha_j\Omega^2 + W_{ga}K_{yy}$

La aproximación de orden cero es numéricamente determinada por la solución de Ec.(3.18) con ayuda del programa MATLAB (Apéndice B). Estas soluciones contienen solamente términos proporcionales a $\sin \tau$, $\cos \tau$ y a algunas constantes. Dicha solución depende de los desbalances presentes en las localizaciones del disco y las chumaceras.

Es necesario tomar en cuenta que los coeficientes rotodinámicos que aparecen en esta ecuación dependen de L/D y el número de Sommerfeld S de una manera suficientemente complicada.

$$\begin{bmatrix} (1-\Omega^2) & 2D_e\Omega & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2D_e\Omega & (1-\Omega^2) & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\Omega^2) & 2D_e\Omega & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2D_e\Omega & (1-\Omega^2) & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & d55 & W_{ga}C_{xx} & W_{ga}K_{xy} & W_{ga}C_{xy} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -W_{ga}C_{xx} & d55 & -W_{ga}C_{xy} & K_{xy} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & W_{ga}K_{yx} & W_{ga}C_{yx} & d77 & W_{ga}C_{yy} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -W_{ga}C_{yx} & W_{ga}K_{yx} & -W_{ga}C_{yy} & d77 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Axd0 \\ Bxd0 \\ Axd0 \\ Byd0 \\ Axj0 \\ Bxj0 \\ Ayj0 \\ Byj0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega^2 U_d^x \\ -\Omega^2 U_d^x \\ \Omega^2 U_d^y \\ \Omega^2 U_d^x \\ 2\alpha_j \Omega^2 U_j \\ 0 \\ 0 \\ 2\alpha_j \Omega^2 U_j \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Así podemos determinar las aproximaciones de orden cero como:

$$\begin{aligned} \Delta X_{d0} &= \sqrt{(Axd0)^2 + (Bxd0)^2} & \Delta X_{j0} &= \sqrt{(Axj0)^2 + (Bxj0)^2} \\ \Delta Y_{d0} &= \sqrt{(Ayd0)^2 + (Byd0)^2} & \Delta Y_{j0} &= \sqrt{(Ayj0)^2 + (Byj0)^2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Aproximación de primer orden – efectos de fisura –

La aproximación de primer orden ΔX_{dt} , ΔY_{dt} , ΔX_{bt} , ΔY_{bt} de las ecuaciones (2.82), (2.83), (2.84) y (2.85) son soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\Omega^2 \Delta X_{d1}'' + 2D_e\Omega \Delta X_{d1}' + (\Delta X_{d1} - \Delta X_{j1}) = f_1(\tau) \quad (3.20)$$

$$\Omega^2 \Delta Y_{d1}'' + 2D_e\Omega \Delta Y_{d1}' + (\Delta Y_{d1} - \Delta Y_{j1}) = f_2(\tau) \quad (3.21)$$

$$\alpha\Omega^2 \Delta X_{j1}'' + C_{xx}\Omega \Delta X_{j1}' + C_{xy}\Omega \Delta Y_{j1}' + K_{xx}\Delta X_{j1} + K_{xy}\Delta Y_{j1} + (\Delta X_{j1} - \Delta X_{d1}) = -f_1(\tau) \quad (3.22)$$

$$\alpha\Omega^2\Delta Y_{j1}'' + C_{yx}\Omega\Delta X_{j1}' + C_{yy}\Omega\Delta Y_{j1}' + K_{yx}\Delta X_{j1} + K_{yy}\Delta Y_{j1} + (\Delta Y_{j1} - \Delta Y_{d1}) = -f_2(\tau) \quad (3.23)$$

Donde:

$$f_1(\tau) = \frac{1}{2}g(\Phi) \left[(\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi)(\Delta X_{d0} - \Delta X_{j0} + W_g) + (\Delta K_2 \sin 2\Phi)(\Delta Y_{d0} - \Delta Y_{j0}) \right] \quad (3.24)$$

$$f_2(\tau) = \frac{1}{2}g(\Phi) \left[(\Delta K_2 \sin 2\Phi)(\Delta X_{d0} - \Delta X_{j0} + W_g) + (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi)(\Delta Y_{d0} - \Delta Y_{j0}) \right] \quad (3.25)$$

En las ecuaciones (3.24) y (3.25) los términos ΔX_{d0} , ΔY_{d0} , ΔX_{j0} , ΔY_{j0} de la aproximación de orden cero fueron determinados antes como soluciones de las ecuaciones (3.7)-(3.10). De aquí que los términos de los lados a mano derecha de estas ecuaciones sean funciones conocidas de τ . Haciendo transformaciones trigonométricas sencillas se obtiene la representación de los lados a mano derecha de las ecuaciones (3.24) y (3.25) como una suma de $\sin n\tau$ y $\cos n\tau$ con $n = 1, 2, 3, 4$ si es usada la función $g(\Phi)$ propuesta por Mayes y Davies [125] dada por Ec.(2.2)..

Retomando las soluciones dadas en Ec.(3.11) es posible obtener las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \Delta X_{d0} - \Delta X_{j0} + W_g &= Axd0 \cos \tau + Bxd0 \sin \tau - Axj0 \cos \tau - Bxj0 \sin \tau + W_g \\ &= W_g + (Axd0 - Axj0) \cos \tau + (Bxd0 - Bxj0) \sin \tau \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \Delta Y_{d0} - \Delta Y_{j0} &= Ayd0 \cos \tau + Byd0 \sin \tau - Ayj0 \cos \tau - Byj0 \sin \tau \\ &= (Ayd0 - Ayj0) \cos \tau + (Byd0 - Byj0) \sin \tau \end{aligned} \quad (3.27)$$

Donde haciendo uso de las siguientes notaciones

$$\begin{aligned} Ax &= Axd0 - Axj0 & Ay &= Ayd0 - Ayj0 \\ Bx &= Bxd0 - Bxj0 & By &= Byd0 - Byj0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

es posible describir las Ecs.(3.26) y (3.27) como:

$$\Delta X_{d0} - \Delta X_{j0} - W_g = W_g + Ax \cos \tau + Bx \sin \tau, \quad \Delta Y_{d0} - \Delta Y_{j0} = Ay \cos \tau + By \sin \tau \quad (3.29)$$

Sustituyendo las Ecs.(3.29) y (2.2) en Ec.(3.24) se obtiene la siguiente expresión::

$$f_1(\tau) = \frac{1 + \cos \Phi}{4} \left[(\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi)(Ax \cos \tau + Bx \sin \tau + W_g) + (\Delta K_2 \sin 2\Phi)(Ay \cos \tau + By \sin \tau) \right]$$

Ahora haciendo las siguientes notaciones

$$K_1 = \frac{\Delta K_1}{4} \quad K_2 = \frac{\Delta K_2}{4} \quad (3.30)$$

Se obtiene:

$$f_1(\tau) = (1 + \cos \Phi) \left[(K_1 + K_2 \cos 2\Phi)(Ax \cos \tau + Bx \sin \tau + W_g) + (K_2 \sin 2\Phi)(Ay \cos \tau + By \sin \tau) \right] \quad (3.31)$$

$$\text{Donde:} \quad \Phi = \omega t + \phi + \beta \quad \text{ó} \quad \Phi = \tau + \phi + \beta \quad (3.32)$$

Sustituyendo Ec.(3.32) en Ec.(3.31) y desarrollando las operaciones indicadas se tiene:

$$\begin{aligned}
f_1(\tau) = & K_1 W_g + \frac{K_1}{2} Ax \cos(\phi + \beta) + \frac{K_2}{4} Ax \cos(\phi + \beta) + \frac{K_2}{4} By \cos(\phi + \beta) + K_1 Ax \cos \tau + K_1 W_g \cos(\tau + \phi + \beta) + \\
& \frac{K_2}{2} W_g \cos(\tau + \phi + \beta) + \frac{K_2}{2} Ax \cos(\tau + 2\phi + 2\beta) + \frac{K_2}{2} By \cos(\tau + 2\phi + 2\beta) + \frac{K_1}{2} Ax \cos(2\tau + \phi + \beta) + \\
& \frac{K_2}{4} Ax \cos(2\tau + \phi + \beta) - \frac{K_2}{4} By \cos(2\tau + \phi + \beta) + K_2 W_g \cos(2\tau + 2\phi + 2\beta) + \frac{K_2}{4} Ax \cos(2\tau + 3\phi + 3\beta) + \\
& \frac{K_2}{4} By \cos(2\tau + 3\phi + 3\beta) + \frac{K_2}{2} Ax \cos(3\tau + 2\phi + 2\beta) - \frac{K_2}{2} By \cos(3\tau + 2\phi + 2\beta) + \frac{K_2}{2} W_g (3\tau + 3\phi + 3\beta) + \\
& \frac{K_2}{4} Ax \cos(4\tau + 3\phi + 3\beta) - \frac{K_2}{4} By \cos(4\tau + 3\phi + 3\beta) - \frac{K_1}{2} Bx \sin(\phi + \beta) + \frac{K_2}{4} Ay \sin(\phi + \beta) - \frac{K_2}{4} Bx \sin(\phi + \beta) + \\
& K_1 Bx \sin \tau + \frac{K_2}{2} Ay \sin(\tau + 2\phi + 2\beta) - \frac{K_2}{2} Bx \sin(\tau + 2\phi + 2\beta) + \frac{K_1}{2} Bx \sin(2\tau + \phi + \beta) + \frac{K_2}{4} Ay \sin(2\tau + \phi + \beta) + \\
& \frac{K_2}{4} Bx \sin(2\tau + \phi + \beta) + \frac{K_2}{4} Ay \sin(2\tau + 3\phi + 3\beta) - \frac{K_2}{4} Bx \sin(2\tau + 3\phi + 3\beta) + \frac{K_2}{2} Ay \sin(3\tau + 2\phi + 2\beta) + \\
& \frac{K_2}{2} Bx \sin(3\tau + 2\phi + 2\beta) + \frac{K_2}{4} Ay \sin(4\tau + 3\phi + 3\beta) + \frac{K_2}{4} Bx \sin(4\tau + 3\phi + 3\beta)
\end{aligned}$$

Ahora, desarrollando las relaciones trigonométricas y representando como una suma de $\sin n\tau$ y $\cos n\tau$

$$\begin{aligned}
f_1(\tau) = & \left[K_1 W_g + \frac{K_1}{2} [Ax \cos(\phi + \beta) - Bx \sin(\phi + \beta)] + \frac{K_2}{4} [(Ax + By) \cos(\phi + \beta) + (Ay - Bx) \sin(\phi + \beta)] \right] + \\
& \left[K_1 [W_g \cos(\phi + \beta) + Ax] + \frac{K_2}{2} [W_g \cos(\phi + \beta) + (Ax + By) \cos(2\phi + 2\beta) + (Ay - Bx) \sin(2\phi + 2\beta)] \right] \cos \tau + \\
& \left[K_1 [Bx - W_g \sin(\phi + \beta)] - \frac{K_2}{2} [W_g \sin(\phi + \beta) + (Ax + By) \sin(2\phi + 2\beta) - (Ay - Bx) \cos(2\phi + 2\beta)] \right] \sin \tau + \\
& \left[\frac{K_1}{2} [Ax \cos(\phi + \beta) + Bx \sin(\phi + \beta)] + K_2 W_g \cos(2\phi + 2\beta) + \right. \\
& \left. \frac{K_2}{4} [(Ax - By) \cos(\phi + \beta) + (Ay + Bx) \sin(\phi + \beta) + (Ax + By) \cos(3\phi + 3\beta) + (Ay - Bx) \sin(3\phi + 3\beta)] \right] \cos 2\tau + \\
& \left[\frac{K_1}{2} [-Ax \sin(\phi + \beta) + Bx \cos(\phi + \beta)] - K_2 W_g \sin(2\phi + 2\beta) - \right. \\
& \left. \frac{K_2}{4} [(Ax - By) \sin(\phi + \beta) - (Ay + Bx) \cos(\phi + \beta) + (Ax + By) \sin(3\phi + 3\beta) - (Ay - Bx) \cos(3\phi + 3\beta)] \right] \sin 2\tau + \\
& \left[\frac{K_2}{2} [(Ax - By) \cos(2\phi + 2\beta) + (Ay + Bx) \sin(2\phi + 2\beta) + W_g \cos(3\phi + 3\beta)] \right] \cos 3\tau + \\
& \left[-\frac{K_2}{2} [(Ax - By) \sin(2\phi + 2\beta) - (Ay + Bx) \cos(2\phi + 2\beta) + W_g \sin(3\phi + 3\beta)] \right] \sin 3\tau + \\
& \left[\frac{K_2}{4} [(Ax - By) \cos(3\phi + 3\beta) + (Ay + Bx) \sin(3\phi + 3\beta)] \right] \cos 4\tau + \\
& \left[\frac{K_2}{4} [(Ay + Bx) \cos(3\phi + 3\beta) - (Ax - By) \sin(3\phi + 3\beta)] \right] \sin 4\tau
\end{aligned}$$

O en forma más compacta

$$f_1(\tau) = Sxd1 + Uxd1 \cos \tau + Vxd1 \sin \tau + Uxd2 \cos 2\tau + Vxd2 \sin 2\tau + Uxd3 \cos 3\tau + Vxd3 \sin 3\tau + Uxd4 \cos 4\tau + Vxd4 \sin 4\tau$$

Donde:

$$\begin{aligned}
Sxd1 &= K_1 W_g + \frac{K_1}{2} [Ax \cos(\phi + \beta) - Bx \sin(\phi + \beta)] + \frac{K_2}{4} [(Ax + By) \cos(\phi + \beta) + (Ay - Bx) \sin(\phi + \beta)] \\
Uxd1 &= K_1 [Ax + W_g \cos(\phi + \beta)] + \frac{K_2}{2} [W_g \cos(\phi + \beta) + (Ax + By) \cos(2\phi + 2\beta) + (Ay - Bx) \sin(2\phi + 2\beta)] \\
Vxd1 &= K_1 [Bx - W_g \sin(\phi + \beta)] - \frac{K_2}{2} [W_g \sin(\phi + \beta) - (Ay - Bx) \cos(2\phi + 2\beta) + (Ax + By) \sin(2\phi + 2\beta)] \\
Uxd2 &= \frac{K_1}{2} [Ax \cos(\phi + \beta) + Bx \sin(\phi + \beta)] + K_2 W_g \cos(2\phi + 2\beta) + \frac{K_2}{4} [(Ax - By) \cos(\phi + \beta) + \\
&\quad (Ay + Bx) \sin(\phi + \beta) + (Ax + By) \cos(3\phi + 3\beta) + (Ay - Bx) \sin(3\phi + 3\beta)] \\
Vxd2 &= \frac{K_1}{2} [-Ax \sin(\phi + \beta) + Bx \cos(\phi + \beta)] - K_2 W_g \sin(2\phi + 2\beta) + \frac{K_2}{4} [(Ay + Bx) \cos(\phi + \beta) - \\
&\quad (Ax - By) \sin(\phi + \beta) + (Ay - Bx) \cos(3\phi + 3\beta) - (Ax + By) \sin(3\phi + 3\beta)] \\
Uxd3 &= \frac{K_2}{2} [(Ax - By) \cos(2\phi + 2\beta) + (Ay + Bx) \sin(2\phi + 2\beta) + W_g \cos(3\phi + 3\beta)] \\
Vxd3 &= \frac{K_2}{2} [(Ay + Bx) \cos(2\phi + 2\beta) - (Ax - By) \sin(2\phi + 2\beta) - W_g \sin(3\phi + 3\beta)] \\
Uxd4 &= \frac{K_2}{4} [(Ax - By) \cos(3\phi + 3\beta) + (Ay + Bx) \sin(3\phi + 3\beta)] \\
Vxd4 &= \frac{K_2}{4} [(Ay + Bx) \cos(3\phi + 3\beta) - (Ax - By) \sin(3\phi + 3\beta)]
\end{aligned} \tag{3.33}$$

De forma similar sustituyendo Ecs.(3.29) y (2.2) en la función dada por Ec.(3.25) se obtiene:

$$f_2(\tau) = \frac{1 + \cos \Phi}{4} [(\Delta K_2 \sin 2\Phi)(Ax \cos \tau + Bx \sin \tau + W_g) + (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi)(Ay \cos \tau + By \sin \tau)]$$

Sustituyendo las relaciones dadas en Ec.(3.30) en la ecuación anterior

$$f_2(\tau) = (1 + \cos \Phi) [(K_2 \sin 2\Phi)(Ax \cos \tau + Bx \sin \tau + W_g) + (K_1 - K_2 \cos 2\Phi)(Ay \cos \tau + By \sin \tau)] \tag{3.34}$$

Sustituyendo Ec.(3.32) en Ec.(3.34) y desarrollando las operaciones se tiene:

$$\begin{aligned}
f_2(\tau) &= \frac{K_1}{2} Ay \cos(\phi + \beta) - \frac{K_2}{4} Ay \cos(\phi + \beta) + \frac{K_2}{4} Bx \cos(\phi + \beta) + K_1 Ay \cos \tau - \frac{K_2}{2} Ay \cos(\tau + 2\phi + 2\beta) + \\
&\quad \frac{K_2}{2} Bx \cos(\tau + 2\phi + 2\beta) + \frac{K_1}{2} Ay \cos(2\tau + \phi + \beta) - \frac{K_2}{4} Ay \cos(2\tau + \phi + \beta) - \frac{K_2}{4} Bx \cos(2\tau + \phi + \beta) - \\
&\quad \frac{K_2}{4} Ay \cos(2\tau + 3\phi + 3\beta) + \frac{K_2}{4} Bx \cos(2\tau + 3\phi + 3\beta) - \frac{K_2}{2} Ay \cos(3\tau + 2\phi + 2\beta) - \frac{K_2}{2} Bx \cos(3\tau + 2\phi + 2\beta) - \\
&\quad \frac{K_2}{4} Ay \cos(4\tau + 3\phi + 3\beta) - \frac{K_2}{4} Bx \cos(4\tau + 3\phi + 3\beta) - \frac{K_1}{2} By \sin(\phi + \beta) + \frac{K_2}{4} Ax \sin(\phi + \beta) + \frac{K_2}{4} By \sin(\phi + \beta) + \\
&\quad K_1 By \sin \tau + \frac{K_2}{2} W_g \sin(\tau + \phi + \beta) + \frac{K_2}{2} Ax \sin(\tau + 2\phi + 2\beta) + \frac{K_2}{2} By \sin(\tau + 2\phi + 2\beta) + \frac{K_1}{2} By \sin(2\tau + \phi + \beta) + \\
&\quad \frac{K_2}{4} Ax \sin(2\tau + \phi + \beta) - \frac{K_2}{4} By \sin(2\tau + \phi + \beta) + K_2 W_g Ay \sin(2\tau + 2\phi + 2\beta) + \frac{K_2}{4} Ax \sin(2\tau + 3\phi + 3\beta) + \\
&\quad \frac{K_2}{4} By \sin(2\tau + 3\phi + 3\beta) + \frac{K_2}{2} Ax \sin(3\tau + 2\phi + 2\beta) - \frac{K_2}{2} By \sin(3\tau + 2\phi + 2\beta) + \frac{K_2}{2} W_g \sin(3\tau + 3\phi + 3\beta) + \\
&\quad \frac{K_2}{4} Ax \sin(4\tau + 3\phi + 3\beta) - \frac{K_2}{4} By \sin(4\tau + 3\phi + 3\beta)
\end{aligned}$$

Ahora, desarrollando las relaciones trigonométricas y representando como una suma de $\sin n\tau$ y $\cos n\tau$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
f_2(\tau) = & \left[\frac{K_1}{2} [Ay \cos(\phi + \beta) - By \sin(\phi + \beta)] + \frac{K_2}{4} [(-Ay + Bx) \cos(\phi + \beta) + (Ax + By) \sin(\phi + \beta)] \right] + \\
& \left[K_1 Ay + \frac{K_2}{2} [W_g \sin(\phi + \beta) + (-Ay + Bx) \cos(2\phi + 2\beta) + (Ax + By) \sin(2\phi + 2\beta)] \right] \cos \tau + \\
& \left[K_1 By + \frac{K_2}{2} [W_g \cos(\phi + \beta) + (Ay - Bx) \sin(2\phi + 2\beta) + (Ax + By) \cos(2\phi + 2\beta)] \right] \sin \tau + \\
& \left[\frac{K_1}{2} [Ay \cos(\phi + \beta) + By \sin(\phi + \beta)] + K_2 W_g \sin(2\phi + 2\beta) + \right. \\
& \left. \frac{K_2}{4} [-(Ay + Bx) \cos(\phi + \beta) + (Ax - By) \sin(\phi + \beta) + (-Ay + Bx) \cos(3\phi + 3\beta) + (Ax + By) \sin(3\phi + 3\beta)] \right] \cos 2\tau + \\
& \left[\frac{K_1}{2} [-Ay \sin(\phi + \beta) + By \cos(\phi + \beta)] + K_2 W_g \cos(2\phi + 2\beta) + \right. \\
& \left. \frac{K_2}{4} [(Ay + Bx) \sin(\phi + \beta) + (Ax - By) \cos(\phi + \beta) + (Ay - Bx) \sin(3\phi + 3\beta) + (Ax + By) \cos(3\phi + 3\beta)] \right] \sin 2\tau + \\
& \left[\frac{K_2}{2} [-(Ay - Bx) \cos(2\phi + 2\beta) + (Ax - By) \sin(2\phi + 2\beta) + W_g \sin(3\phi + 3\beta)] \right] \cos 3\tau + \\
& \left[\frac{K_2}{2} [(Ay + Bx) \sin(2\phi + 2\beta) + (Ax - By) \cos(2\phi + 2\beta) + W_g \cos(3\phi + 3\beta)] \right] \sin 3\tau + \\
& \left[\frac{K_2}{4} [-(Ay + Bx) \cos(3\phi + 3\beta) + (Ax - By) \sin(3\phi + 3\beta)] \right] \cos 4\tau + \\
& \left[\frac{K_2}{4} [(Ay + Bx) \sin(3\phi + 3\beta) + (Ax - By) \cos(3\phi + 3\beta)] \right] \sin 4\tau
\end{aligned}$$

O en una forma más compacta es posible expresar la función anterior como:

$$f_2(\tau) = S_{yd1} + U_{yd1} \cos \tau + V_{yd1} \sin \tau + U_{yd2} \cos 2\tau + V_{yd2} \sin 2\tau + U_{yd3} \cos 3\tau + V_{yd3} \sin 3\tau + U_{yd4} \cos 4\tau + V_{yd4} \sin 4\tau$$

Donde:

$$\begin{aligned}
S_{yd1} &= \frac{K_1}{2} [Ay \cos(\phi + \beta) - By \sin(\phi + \beta)] + \frac{K_2}{4} [(-Ay + Bx) \cos(\phi + \beta) + (Ax + By) \sin(\phi + \beta)] \\
U_{yd1} &= K_1 Ay + \frac{K_2}{2} [W_g \sin(\phi + \beta) + (-Ay + Bx) \cos(2\phi + 2\beta) + (Ax + By) \sin(2\phi + 2\beta)] \\
V_{yd1} &= K_1 By + \frac{K_2}{2} [W_g \cos(\phi + \beta) + (Ax + By) \cos(2\phi + 2\beta) + (Ay - Bx) \sin(2\phi + 2\beta)] \\
U_{yd2} &= \frac{K_1}{2} [Ay \cos(\phi + \beta) + By \sin(\phi + \beta)] + K_2 W_g \sin(2\phi + 2\beta) + \frac{K_2}{4} [-(Ay + Bx) \cos(\phi + \beta) + \\
& \quad (Ax - By) \sin(\phi + \beta) + (-Ay + Bx) \cos(3\phi + 3\beta) + (Ax + By) \sin(3\phi + 3\beta)] \\
V_{yd2} &= \frac{K_1}{2} [-Ay \sin(\phi + \beta) + By \cos(\phi + \beta)] + K_2 W_g \cos(2\phi + 2\beta) + \frac{K_2}{4} [(Ax - By) \cos(\phi + \beta) + \\
& \quad (Ay + Bx) \sin(\phi + \beta) + (Ax + By) \cos(3\phi + 3\beta) + (Ay - Bx) \sin(3\phi + 3\beta)] \tag{3.35} \\
U_{yd3} &= \frac{K_2}{2} [-(Ay - Bx) \cos(2\phi + 2\beta) + (Ax - By) \sin(2\phi + 2\beta) + W_g \sin(3\phi + 3\beta)] \\
V_{yd3} &= \frac{K_2}{2} [(Ax - By) \cos(2\phi + 2\beta) + (Ay + Bx) \sin(2\phi + 2\beta) + W_g \cos(3\phi + 3\beta)]
\end{aligned}$$

$$U_{yd4} = \frac{K_2}{4} \left[-(Ay + Bx) \cos(3\phi + 3\beta) + (Ax - By) \sin(3\phi + 3\beta) \right]$$

$$V_{yd4} = \frac{K_2}{4} \left[(Ax - By) \cos(3\phi + 3\beta) + (Ay + Bx) \sin(3\phi + 3\beta) \right]$$

Las aproximaciones de primer orden ΔX_{dt} , ΔY_{dt} , ΔX_{jt} , ΔY_{jt} deben tener armónicos de 1X a 4X. Por lo tanto las aproximaciones de primer orden en estado estable ΔX_{dt} , ΔY_{dt} , ΔX_{jt} , ΔY_{jt} tienen la forma:

$$\begin{aligned} \Delta X_{d1} &= Cxd1 + Axd1 \cos \tau + Bxd1 \sin \tau + Axd2 \cos 2\tau + Bxd2 \sin 2\tau + \\ &\quad Axd3 \cos 3\tau + Bxd3 \sin 3\tau + Axd4 \cos 4\tau + Bxd4 \sin 4\tau \\ \Delta Y_{d1} &= Cyd1 + Ayd1 \cos \tau + Byd1 \sin \tau + Ayd2 \cos 2\tau + Byd2 \sin 2\tau + \\ &\quad Ayd3 \cos 3\tau + Byd3 \sin 3\tau + Ayd4 \cos 4\tau + Byd4 \sin 4\tau \\ \Delta X_{j1} &= Cxj1 + Axj1 \cos \tau + Bxj1 \sin \tau + Axj2 \cos 2\tau + Bxj2 \sin 2\tau + \\ &\quad Axj3 \cos 3\tau + Bxj3 \sin 3\tau + Axj4 \cos 4\tau + Bxj4 \sin 4\tau \\ \Delta Y_{j1} &= Cyj1 + Ayj1 \cos \tau + Byj1 \sin \tau + Ayj2 \cos 2\tau + Byj2 \sin 2\tau + \\ &\quad Ayj3 \cos 3\tau + Byj3 \sin 3\tau + Ayj4 \cos 4\tau + Byj4 \sin 4\tau \end{aligned} \quad (3.36)$$

Las constantes en la ecuación anterior son soluciones de las ecuaciones,

$$\begin{aligned} Cxd1 - Cxj1 &= Sxd1 \\ Cyd1 - Cyj1 &= Syd1 \\ W_g (1 + 2\alpha_j) (K_{xx} Cxj1 + K_{yy} Cyj1) - (Cxd1 - Cxj1) &= -Sxd1 \\ W_g (1 + 2\alpha_j) (K_{xy} Cxj1 + K_{yx} Cyj1) - (Cyd1 - Cyj1) &= -Syd1 \end{aligned}$$

Las amplitudes de los armónicos 1X, 2X, 3X y 4X presentados en Ec.(3.36) forman cuatro vectores de dimensión 8

$$\begin{aligned} Z_1^T &= [Axd1 \quad Bxd1 \quad Ayd1 \quad Byd1 \quad Axj1 \quad Bxj1 \quad Ayj1 \quad Byj1] \\ Z_2^T &= [Axd2 \quad Bxd2 \quad Ayd2 \quad Byd2 \quad Axj2 \quad Bxj2 \quad Ayj2 \quad Byj2] \\ Z_3^T &= [Axd3 \quad Bxd3 \quad Ayd3 \quad Byd3 \quad Axj3 \quad Bxj3 \quad Ayj3 \quad Byj3] \\ Z_4^T &= [Axd4 \quad Bxd4 \quad Ayd4 \quad Byd4 \quad Axj4 \quad Bxj4 \quad Ayj4 \quad Byj4] \end{aligned} \quad (3.37)$$

Dichos vectores son solución de dimensión 8 de las ecuaciones algebraicas lineales:

$$\begin{aligned} D_1(\Omega)Z_1 &= F_1 & D_2(\Omega)Z_2 &= F_2 \\ D_3(\Omega)Z_3 &= F_3 & D_4(\Omega)Z_4 &= F_4 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Donde las matrices de la ecuación (3.38) son iguales a:

$$\begin{aligned} [D_1(\Omega)] &= [D_0(\Omega)] & [D_2(\Omega)] &= [D_0(2\Omega)] \\ [D_3(\Omega)] &= [D_0(3\Omega)] & [D_4(\Omega)] &= [D_0(4\Omega)] \end{aligned} \quad (3.39)$$

La notación $[D_0(n \Omega)]$, $n = 1, 2, 3, 4$ es usada para indicar que en la matriz (3.17), Ω es reemplazada por $n\Omega$, $n = 1, 2, 3, 4$. Los términos a mano derecha F_n de las ecuaciones (3.38) están dados por:

$$F_n^T = [U_{xdn} \quad V_{xdn} \quad U_{ydn} \quad V_{ydn} \quad -U_{xdn} \quad -V_{xdn} \quad -U_{ydn} \quad -V_{ydn}] \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (3.40)$$

Donde los términos U_{xdn} , V_{xdn} , U_{ydn} , V_{ydn} están dados por las ecuaciones mostradas en Ec.(3.33) y Ec.(3.35). De esta forma las ecuaciones (3.38) con matrices definidas por Ec.(3.39) y términos a mano derecha dados por Ec.(3.40) son resueltos numéricamente usando MATLAB (Apéndice B).

La aproximación de primer orden depende simultáneamente del desbalance y la fisura y por lo tanto permite estudiar la interacción de estos dos fenómenos.

Aproximación de alto orden. Solución completa. – interacción entre la fisura y los desbalances –

La solución completa de las ecuaciones (2.82), (2.83), (2.84) y (2.85) iniciales es tomada ahora como una suma de aproximaciones de orden cero y primer orden. Por lo tanto finalmente la aproximación de la solución de las ecuaciones iniciales (2.82), (2.83), (2.84) y (2.85) será igual a :

$$\begin{aligned} \Delta X_d &= \Delta X_{d0} + \Delta X_{d1} & \Delta X_j &= \Delta X_{j0} + \Delta X_{j1} \\ \Delta Y_d &= \Delta Y_{d0} + \Delta Y_{d1} & \Delta Y_j &= \Delta Y_{j0} + \Delta Y_{j1} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Donde las aproximaciones de primer orden están dadas por:

$$\begin{aligned} \Delta X_{d1} &= \sqrt{(Axd1)^2 + (Bxd1)^2} & \Delta X_{j1} &= \sqrt{(Axj1)^2 + (Bxj1)^2} \\ \Delta Y_{d1} &= \sqrt{(Ayd1)^2 + (Byd1)^2} & \Delta Y_{j1} &= \sqrt{(Ayj1)^2 + (Byj1)^2} \end{aligned}$$

La solución anterior satisface las ecuaciones (2.82), (2.83), (2.84) y (2.85) con una exactitud del orden $O(K_I^2, K_I^2)$. Esta exactitud es suficiente para muchas aplicaciones. Por ejemplo si $\Delta K_I = 0.2$, $\Delta K_2 = 0.2$ entonces $K_I = K_2 = 0.05$ y $K_I^2 = K_2^2 = 0.0025$. Generalmente, las amplitudes de las soluciones (3.41) son menores. De aquí que en este caso la exactitud de la solución será aproximadamente igual a 1%.

Es posible calcular también la aproximación de segundo orden ΔX_{d2} , ΔY_{d2} , ΔX_{j2} , ΔY_{j2} de las ecuaciones (2.82), (2.83), (2.84) y (2.85). Las aproximaciones de segundo orden son solución de las mismas ecuaciones (3.38) donde en los términos del lado derecho las aproximaciones de orden cero ΔX_{d0} , ΔY_{d0} , ΔX_{j0} , ΔY_{j0} son reemplazadas por las aproximaciones de primer orden. ΔX_{d1} , ΔY_{d1} , ΔX_{j1} , ΔY_{j1} .

La aproximación de orden cero depende únicamente del desbalance, pero la aproximación de primer orden depende tanto del desbalance como de la fisura. De aquí que permita el estudio de estos dos fenómenos. En caso de utilizar la función $g(\Phi)$ presentada por Ec.(2.2) la aproximación de primer orden contiene armónicos nX con $n = 1, 2, 3, 4$. Por otro lado la respuesta al desbalance contiene solamente un armónico correspondiente a $1X$. Por lo tanto la interacción de los efectos de los desbalances y la fisura se puede ver solamente en la frecuencia $1X$. La influencia del desbalance en los armónicos $2X$, $3X$ y $4X$ de la respuesta vibratoria completa es suficientemente pequeña y estos armónicos reflejan principalmente los efectos de la pura fisura.

Capítulo**4**

Simulaciones Numéricas

4.1 Introducción

En este Capítulo es realizada una serie de simulaciones numéricas de diversos casos o configuraciones del sistema y se observa fácilmente la influencia del ángulo de orientación β entre la dirección de la grieta y desbalance residual. Dicho ángulo de orientación relativo entre el desbalance residual y la grieta y su interacción, afectan drásticamente la respuesta de sistema haciendo la detección de grieta muy difícil. Sin embargo, la existencia de resonancias locales en diversos sub-armónicos o súper-armónicos racionales o combinaciones de estos, permite una buena caracterización de los patrones o firmas de vibración reduciendo la influencia de la interacción entre vectores desconocidos; como es el caso de las magnitudes y orientaciones del desbalance residual y fisura del eje. El modelo de Gómez-Mancilla [69], [73] tiene las ventajas de los sistemas lineales, sin embargo el enfoque de equilibrio no trivial propuesto produce una respuesta de múltiples frecuencias la cual permite caracterizar ejes agrietados.

A lo largo de este Capítulo se analizan y discuten los resultados simulados numéricamente que tienen como objetivo la detección de grietas y la caracterización de los sistemas agrietados simples interactuando con el desbalance de masa omnipresente. Estos resultados son obtenidos mediante un programa escrito por el autor en MATLAB (Apéndice B) basado en las ecuaciones del sistema Eqs. (2.82), (2.83), (2.84) y (2.85), previamente presentadas. Este programa permite obtener; diagramas orbitales, diagramas de Bode, FFT de las respuestas de vibración y gráficos de la respuesta en el tiempo. Los valores paramétricos normalizados usados en las simulaciones se encuentran comúnmente en la práctica; solamente se muestran y se discuten los resultados más significativos.

Basado en resultados numéricos donde se confrontan la solución numérica contra la solución numérica-analítica aproximada propuesta, se muestra a través de graficas de las respuestas orbitales del disco y chumaceras, que la aproximación implicada en el procedimiento numérico-analítico da una precisión adecuada para propósitos prácticos al investigar la interacción entre los desbalances de masa siempre presentes en la realidad y la fisura transversal localizada a la mitad del tramo del eje.

En las simulaciones numéricas es utilizada una sola grieta a la mitad del tramo del eje con profundidad que va desde 12.5 %, 25 % y 50 % del diámetro del eje. Se presentan graficas de la respuesta vibratoria contra la velocidad de operación (arranque/paro de la máquina) a esperar ante diferentes profundidades de grieta además de que la importante orientación angular relativa existente entre el vector de desbalance del disco y el eje de la grieta, es variado y computado para cada uno de las cuatro direcciones ortogonales principales, a saber $\beta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

Es muy importante mencionar que los valores adimensionales de los parámetros que describen la grieta (ΔK_g y ΔK_n) para las diferentes longitudes de ejes y profundidades de grieta tratados en las configuraciones propuestas en este trabajo, fueron determinados mediante un análisis de elemento finito llevado a cabo por García-Illescas [57] como parte de sus estudios de Doctorado. Para la descripción detallada sobre la obtención de estos valores el lector puede referirse a [57].

Aunque las conclusiones del trabajo pueden aplicarse cualitativamente a diversas configuraciones paramétricas, por razones de espacio se enfatiza solamente en tres configuraciones, según lo dado por Tabla 2, Tabla 6 y Apéndice D respectivamente. Las diferencias básicas entre estos casos son el valor de parámetro de saqueo, W_g ; y α , los cuáles influyen los parámetros de los cojinetes, S_θ , el umbral de estabilidad, y por supuesto, las posiciones de equilibrio no trivial de las localizaciones del disco y los muñones.

El modelo de respiro de grieta para las diferentes profundidades de fisura fue seleccionado de acuerdo a los antecedentes ampliamente divulgados en la literatura que sugieren que el modelo de respiro de forma cuadrada propuesto por Gasch [58] es más conveniente para grietas poco profundas y por otro lado el modelo cosenoidal atribuido a Mayes y Davies [125] es apropiado para grietas profundas. Partiendo de este hecho se seleccionó el modelo de Gasch para obtener las respuestas del sistema con profundidad de grieta de 12.5 % y el modelo de Mayes y Davies para profundidades del 50%; para el caso de profundidad de grieta intermedia (25%) se emplearon indistintamente ambos modelos.

Tener el modelo expresado en valores adimensionales permite generalidad y facilita las comparaciones con casos que se presentan en la ingeniería. Las magnitudes de desbalance en la localización del disco fueron seleccionadas en base a rendir una interacción eficaz entre grieta y desbalance. Ambas configuraciones I y II utilizan $U_d = 0.1$, correspondiente a una interacción similar entre grieta y desbalance para una profundidad de grieta del 50 %, y a una situación en donde el desbalance es un tanto dominante para profundidades de 12.5 % y 25 %, respectivamente. Sin embargo, también se presenta un caso donde manteniendo fija la profundidad de la grieta (25 %) se hace variar la magnitud del desbalance residual desde $U_d = 0, 0.05, 0.1$ y 0.15 . En este análisis se puede observar la influencia de la magnitud del desbalance residual del disco en la respuesta vibratoria de un rotor agrietado; además aunque el caso cuando $U_d = 0$ en la práctica representaría un caso irreal, permite la caracterización de la respuesta vibratoria debida a la sola presencia de la grieta.

El resto de los valores de los parámetros usados de la simulación son los siguientes. Relación de masas en las chumaceras $\alpha_j = 0.1065, 0.0485$ y 0.0526 , correspondientes a una distribución de masa del disco dominante. Los parámetros de carga, $W_g = 1.1415, 1.1133$ y 1.9416 , corresponden a una deflexión dominada por el peso. En las chumaceras los números de Sommerfeld fijos, $S_\theta = 1.3117, 2.0097$ y 1.4967 , corresponden en el primer caso a una relación relativamente flexible de rigidez entre el eje y la chumacera, y a una relación más rígida en los dos últimos casos, respectivamente. Finalmente todos los casos analizados son soportados en chumaceras lubricadas relativamente cortas con $L/D = 0.5$.

Al mismo tiempo se realiza un análisis de estabilidad aplicando la Teoría de Floquet empleando la matriz de transición y se presentan las velocidades del umbral de estabilidad para cada una de las tres configuraciones propuestas. En general, debido a los pequeños valores de grieta $\Delta K_y, \Delta K_z$ usados en estas configuraciones, las velocidades umbrales son determinados sobre todo por el inicio del latiguo de aceite “oil whip” en las chumaceras. También se discute brevemente la importancia relativa de los parámetros del sistema con referencia a la estabilidad del mismo.

Finalmente, se comprueba que contrario a lo divulgado previamente por Friswell [150] y otros investigadores, la selección del modelo de respiro juega un papel importante en la dinámica de los sistemas rotores agrietados. Este hecho es demostrado al final de este Capítulo donde se presentan figuras donde puede observarse como las características de vibración en las resonancias locales son influenciadas por la selección del modelo de respiro, en particular aquellas que ocurren a resonancias locales bajas; es decir, a valores de velocidad de operación pequeños comparados con la velocidad crítica flexionante. También las amplitudes y las formas de las orbitas (registradas en las regularmente instrumentadas localizaciones de las chumaceras) cambian debido a las variaciones de los ángulos de fase de los componentes de frecuencia. En contraste alrededor de la velocidad crítica flexionante, ambos modelos exhiben grandes amplitudes semejantes.

4.2 Cálculo de los parámetros del sistema

Se tomo en cuenta que los análisis se realizaran en función de lo que es posible experimentar en el rotorkit de Bently Nevada del Laboratorio de Vibraciones y Rotodinámica, siendo las siguientes las restricciones o rangos.

Tabla 1 Parámetros del rotorkit de Bently Nevada

Rango de velocidades (rpm)	$0 < \omega < 10000$
Longitud del eje (m)	$0.22 < l < 0.43$
Masa del disco (Kg)	0.8, 1.6 ó 2.4 (correspondiente a 1, 2 ó 3 discos)
Tipo de chumacera	Cilíndrica plana
Relación L/D en chumaceras	1, 0.5
Masa del bodoque (Kg)	0.0427 (para L/D=0.5 ó el doble para L/D=1)
Claro radial (m)	49×10^{-6} ó 71×10^{-6}
Viscosidad del lubricante a 21° C (Pa s)	0.0124 ó 0.058 (Líquido de frenos Bardhal y Lubricante Bently respectivamente)

En base a lo anterior se seleccionaron algunos casos para realizar las simulaciones numéricas de las respuestas transitorias del sistema.

Parámetros del sistema para la configuración I

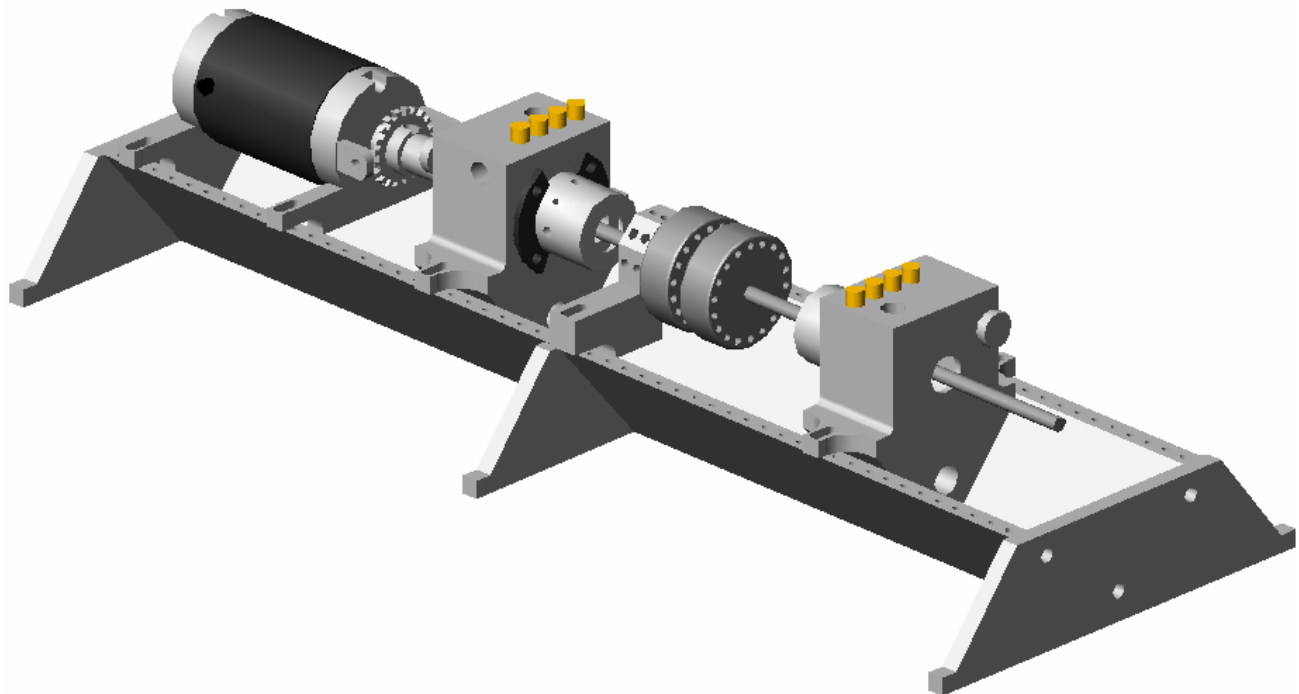


Fig. 4-1 Configuración I en el rotorkit de Bently Nevada

Tabla 2 Valores ingenieriles de la configuración I

Longitud del eje	$l = 0.25 \text{ m}$
Diámetro del eje	$d = 0.01 \text{ m}$
Módulo de elasticidad del material del eje (AISI 4140)	$E = 200 \text{ GPa}$
Masa del disco (2 discos)	$m_d = 1.6 \text{ Kg}$
Masa por unidad de longitud del eje	$m_e = 0.6173 \text{ Kg/m}$
Longitud de la chumacera	$L = 0.0127 \text{ m}$
Diámetro de la chumacera	$D = 0.0254 \text{ m}$
Masa del bodoque	$m_b = 0.0427 \text{ Kg}$
Claro radial en chumaceras	$c_r = 49 \times 10^{-6} \text{ m}$
Viscosidad del lubricante (liquido de frenos Bardahl)	$\mu = 0.0124 \text{ Pa s}$

Cálculo de los parámetros adimensionales

La concentración de masa efectiva en la localización del disco incluye la masa de los discos más la mitad de la masa del eje; $m = m_d + (0.5)(0.6165)l$

$$m = 1.6 + (0.5)(0.6165)(0.25) \quad m = 1.6771 \text{ Kg}$$

De la misma forma, la concentración de masa efectiva en cada una de las chumaceras incluye la masa del bodoque más un cuarto de la masa del eje; $m_j = m_b + (0.25)(0.6165)l$

$$m_j = 0.0427 + (0.25)(0.6165)(0.25) \quad m_j = 0.0812 \text{ Kg}$$

La rigidez del eje integro esta definida por $k = 48EI/l^3$, donde I es el momento de inercia de la sección transversal del eje, en este caso la de una sección transversal circular, donde $I = \pi d^4/64$ obteniéndose

$$I = \frac{\pi(0.01)^4}{64} \quad I = 4.9087 \times 10^{-10} \text{ m}^4$$

$$k = \frac{48(200 \times 10^9)(4.9087 \times 10^{-10})}{(0.25)^3} \quad k = 3.0159 \times 10^5 \text{ N/m}$$

Determinando la velocidad crítica de un rotor sobre soportes rígidos como la raíz cuadrada del cociente de la rigidez del eje integro sobre la concentración de masa efectiva a la mitad del tramo del eje; $\omega_n = \sqrt{k/m}$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3.0159 \times 10^5}{1.6771}} \quad \omega_n = 424.0684 \text{ rad/s} \quad \omega_n = 4049.6 \text{ rpm}$$

Calculando la deflexión estática del eje integro como peso de la masa efectiva concentrada a la mitad del tramo del eje sobre la rigidez del eje integro, $\delta = mg/k$

$$\delta = \frac{(1.6771)(9.81)}{3.0159 \times 10^5} \quad \delta = 5.4550 \times 10^{-5} \text{ m}$$

El parámetro de gravedad está definido como deflexión estática del eje integro sobre el claro radial, $W_g = \delta / c_r$,

$$W_g = \frac{5.4550 \times 10^{-5}}{49 \times 10^{-6}} \quad W_g = 1.1133$$

Calculando la relación de masas como el cociente concentración de masa efectiva en la localización de una de las chumaceras entre la concentración de masa efectiva a la mitad del tramo del eje, $\alpha_j = m / m_j$

$$\alpha_j = \frac{1.6771}{0.0812} \quad \alpha_j = 0.0485$$

Calculando la carga en la chumacera como el peso efectivo en la localización de una de las chumaceras más la mitad del peso efectivo a la mitad del tramo del eje:

$$W = \left(m_j + \frac{m}{2} \right) g \quad \text{ó} \quad W = mg \left(\alpha_j + \frac{1}{2} \right) \quad (4.1)$$

$$W = (1.6771)(9.81) \left(0.0485 + \frac{1}{2} \right) \quad W = 9.0229 \text{ N}$$

Puesto que se sabe que el número de Sommerfeld S cambia con la velocidad de rotación ω , por lo tanto S se hace impracticable para ser utilizado en un sistema adimensional y en el análisis de estabilidad debido a que es difícil separar las influencias de la velocidad de rotación y los parámetros de la chumacera de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento adimensionales. Con el objeto de eliminar este problema, se introduce un número fijo de Sommerfeld S_0 el cual es expresado de la siguiente manera:

$$S_0 = S \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right) = \frac{\mu \omega_c DL}{2\pi W} \left(\frac{R}{c_r} \right)^2 \quad (4.2)$$

O alternativamente $S_0 = S / \Omega$, donde $\Omega = \omega / \omega_n$

$$S_0 = \frac{(0.0124)(424.0684)(0.0254)(0.0127)}{2\pi(9.0229)} \left(\frac{0.0127}{49 \times 10^{-6}} \right)^2 \quad S_0 = 2.0097$$

Ahora, S_0 es entonces el número de Sommerfeld en la velocidad crítica ω_c y no cambia con la velocidad de rotación ya que cada sistema tendrá su propia ω_c . Bajo estas circunstancias los coeficientes de rigidez y amortiguamiento son función ahora del Número de Sommerfeld fijo (S_0) y de la relación de velocidades (Ω)

Tabla 3 Parámetros adimensionales de la configuración I

Parámetro de gravedad	$W_g = 1.1133$
Relación de masas	$\alpha_j = 0.0485$
Número de Sommerfeld fijo	$S_0 = 2.0097$
Profundidad 12.5 %	$\Delta K_\xi = 0.0233, \Delta K_\eta = 0.0078$
Profundidad 25 %	$\Delta K_\xi = 0.0542, \Delta K_\eta = 0.0119$
Profundidad 50 %	$\Delta K_\xi = 0.2302, \Delta K_\eta = 0.0517$

De manera similar se calcularon los parámetros adimensionales de las dos configuraciones propuestas restantes, sin embargo por razones de espacio solo se muestran los resultados obtenidos (Tabla 5 y Tabla 7)

Parámetros del sistema para la configuración II

Tabla 4 Valores ingenieriles de la configuración II

Longitud del eje	$l = 0.35 \text{ m}$
Diámetro del eje	$d = 0.01 \text{ m}$
Módulo de elasticidad del material del eje (AISI 4140)	$E = 200 \text{ GPa}$
Masa del disco (2 discos)	$m_d = 0.8 \text{ Kg}$
Masa por unidad de longitud del eje	$m_e = 0.6173 \text{ Kg/m}$
Longitud de la chumacera	$L = 0.0127 \text{ m}$
Diámetro de la chumacera	$D = 0.0254 \text{ m}$
Masa del bodeque	$m_b = 0.0427 \text{ Kg}$
Claro radial en chumaceras	$c_r = 71 \times 10^{-6} \text{ m}$
Viscosidad del lubricante (liquido de frenos Bardhal)	$\mu = 0.0124 \text{ Pa s}$

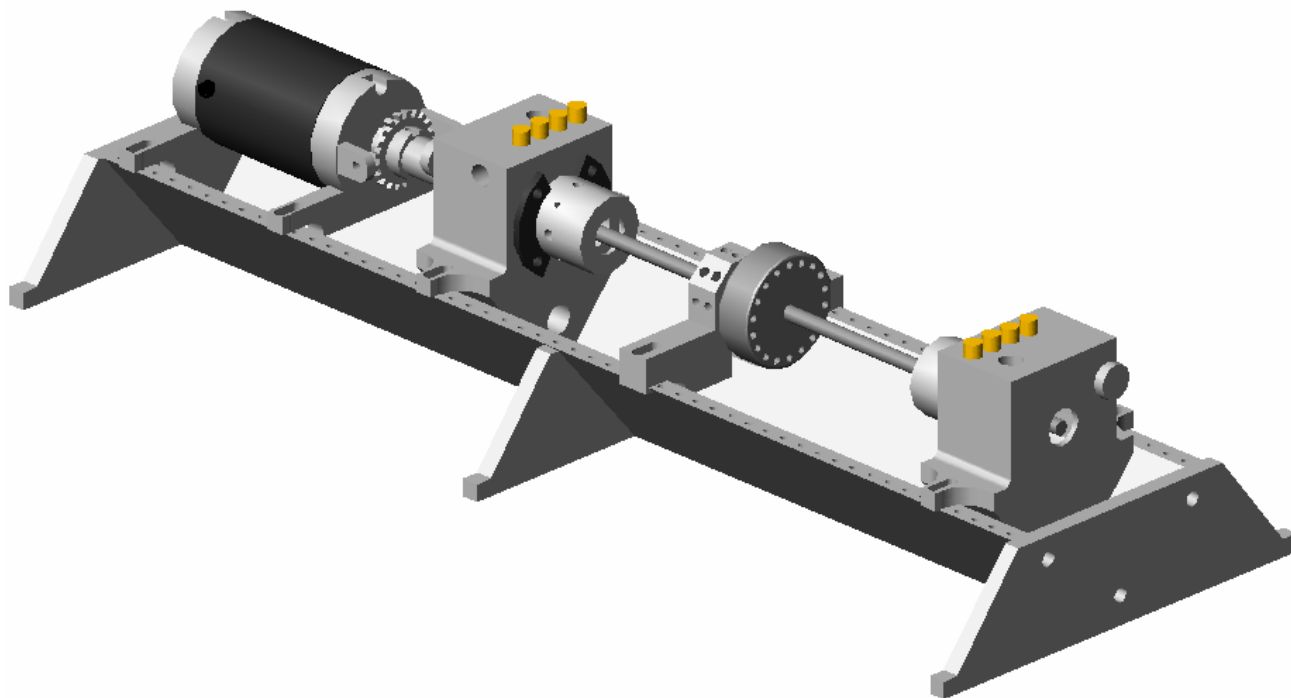


Fig. 4-2 Configuración II en el Rotorkit de Bently Nevada

Tabla 5 Parámetros adimensionales de la configuración II

Parámetro de gravedad	$W_g = 1.1415$
Relación de masas	$\alpha_j = 0.1065$
Número de Sommerfeld fijo	$S_0 = 1.3117$
Profundidad 12.5 %	$\Delta K_\xi = 0.0201, \Delta K_\eta = 0.0063$
Profundidad 25 %	$\Delta K_\xi = 0.0425, \Delta K_\eta = 0.0092$
Profundidad 50 %	$\Delta K_\xi = 0.1784, \Delta K_\eta = 0.0381$

4.3 Análisis de la evolución orbital

Sin duda, la garantía de disponibilidad exigida por las máquinas críticas, presupone el empleo de técnicas de diagnóstico y tecnologías predictivas que garanticen tales propósitos. Los turbogeneradores resultan uno de los mejores ejemplos de este tipo de máquinas, justificándose en estos la instalación de sistemas de monitoreo *on-line*, que aunque muy costosos, son amortizados en un tiempo relativamente breve, dado el incremento drástico de la disponibilidad de las máquinas donde funcionen correcta y eficazmente.

Múltiples son los atributos positivos que caracterizan a los sistemas *on-line* para el monitoreo y análisis de vibraciones en la maquinaria industrial. Sin embargo, en muchas ocasiones estos sacrifican su capacidad de análisis en aras de resumir los resultados de las mediciones, con el ánimo de facilitar al especialista —a un golpe de vista— el chequeo de la evolución de los niveles de vibraciones en la máquina objeto de seguimiento. Por lo tanto, la continuidad en la producción, la preservación del capital invertido, la protección del medio ambiente y la reducción de los costos de operación, solo pueden ser garantizadas a través de un sistema de mantenimiento eficiente que permita la predicción del fallo y la planificación correcta de las actividades de mantenimiento y reparación.

Diversas son las formas en que pueden ser representadas las señales provenientes de los transductores de proximidad, incluyendo los formatos de *Ploteo Polar* y de *Bode*. Sin embargo, la correcta interpretación de la órbita del rotor contribuye de manera decisiva a entender el comportamiento dinámico del rotor, ya sea durante su estado transitorio o estacionario. Al emplear transductores de proximidad, como por ejemplo los transductores de corrientes eddy, estos entregan señales eléctricas proporcionales al movimiento mecánico del rotor, en las cuales se distinguen dos componentes:

- Una componente directa, proporcional a la posición promedio del centro del rotor, con respecto a la posición del transductor.
- Una componente alterna, proporcional al movimiento oscilatorio relativo del rotor con respecto al transductor

Los transductores de proximidad encuentran su mejor aplicación en máquinas con cojinetes de deslizamiento bajo lubricación líquida, tal es el caso de turbinas, compresores y algunos tipos de bombas. El sistema de medición más modesto que pueda ser empleado en este tipo de máquinas, deberá incluir dos transductores de proximidad ubicados ortogonalmente en cada uno de los cojinetes del rotor. Si además de esto se incluye un transductor de referencia, podrá incrementarse de manera significativa el alcance de la actividad de diagnóstico.

Es interés del presente trabajo, la componente alterna a que se hizo referencia anteriormente, por constituir esta la base del *Ploteo Orbital*. Esta componente alterna proveniente del transductor de proximidad, es básicamente una señal periódica, pudiendo ser registrada en cada uno de los dos transductores instalados en cada cojinete. Claro está, aprovechando el transductor de referencia instalado, es posible filtrar la onda temporal, por ejemplo a la frecuencia de rotación.

Ahora bien, la órbita del rotor podrá construirse, si se tiene en cuenta que se dispone de los registros temporales aportados por los dos transductores instalados en posiciones mutuamente ortogonales. Las señales provenientes de cada transductor son generadas de acuerdo con posiciones angulares específicas del rotor, todo lo cual permite cuantificar el movimiento transversal del rotor en el plano de ubicación de los transductores de proximidad. En otras palabras, la órbita se genera ploteando los pares de valores instantáneos $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ o lo que es lo mismo, ploteando \mathbf{X} vs. \mathbf{Y} eliminando el eje de tiempo.

De inestimable valor teórico-práctico resulta el poder disponer de las órbitas en las chumaceras ya que, conociendo la orientación de la órbita en cada cojinete, es posible determinar la configuración que adquiere el rotor vibrando a esta frecuencia. Realmente, la experiencia ha demostrado que los rotores de turbinas, dada su característica de flexibilidad dinámica pueden alcanzar las más disímiles formas de deflexión en operación razón por la cual resulta insuficiente la instalación de transductores de proximidad en posiciones alternas.

Para ilustrar la sensibilidad de la órbita a los cambios debidos a la grieta son presentadas órbitas simuladas alrededor de $1/3$ y $1/2$ de la resonancia haciendo uso del modelo anterior para los valores de orientación entre grieta y desbalance más representativos ($\beta = 0^\circ$ y 180°) y el caso de los parámetros de la configuración I con profundidad de grieta del 25%. Los casos restantes son mostrados en el Apéndice C.

Configuración I con profundidad de grieta del 25 %

Las siguientes figuras muestran las formas orbitales que trazarían 2 sensores colocados en las chumaceras: uno de ellos detectando las amplitudes de vibración en la dirección horizontal (ΔY) y el otro en la dirección vertical (ΔX) correspondientes a la configuración I con $U_d = 0.1$, $\beta = 0^\circ$, y profundidad de grieta del 25 %.

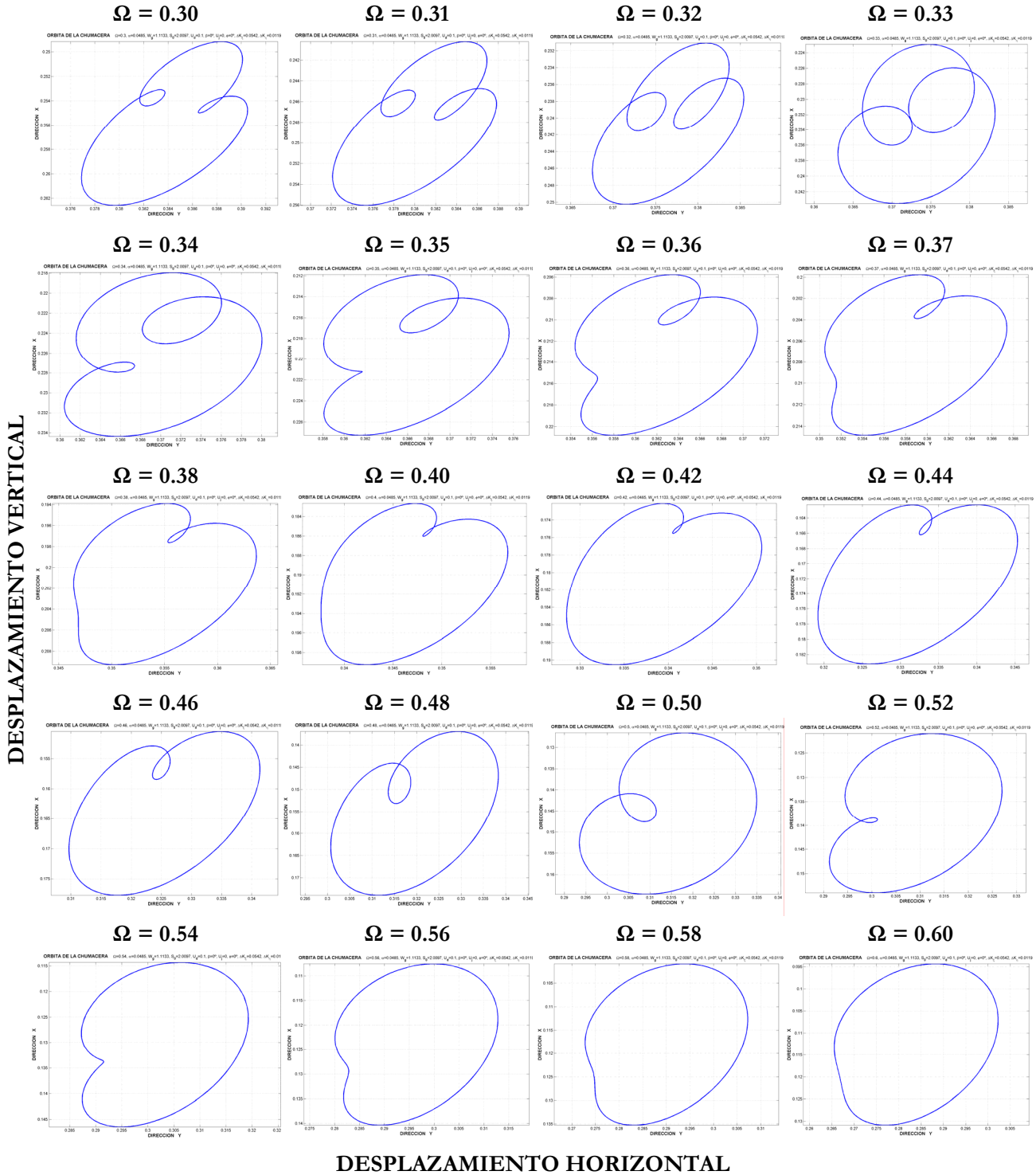


Fig. 4-3 Evolución de las orbitas de las chumaceras alrededor de 1/3 y 1/2 de la resonancia. Profundidad 25%, Orientación entre grieta y desbalance $\beta = 0^\circ$, $U_d = 0.1$.

Aunque el nivel de la vibración en los cojinetes es un orden de magnitud o aún más pequeño, se da preferencia al estudio de la dinámica en estos puntos, puesto que las máquinas en la industria se instrumentan solamente en las localizaciones de las chumaceras. Sin embargo, para tener una mejor perspectiva, también se incluyen gráficas de las orbitas del disco.

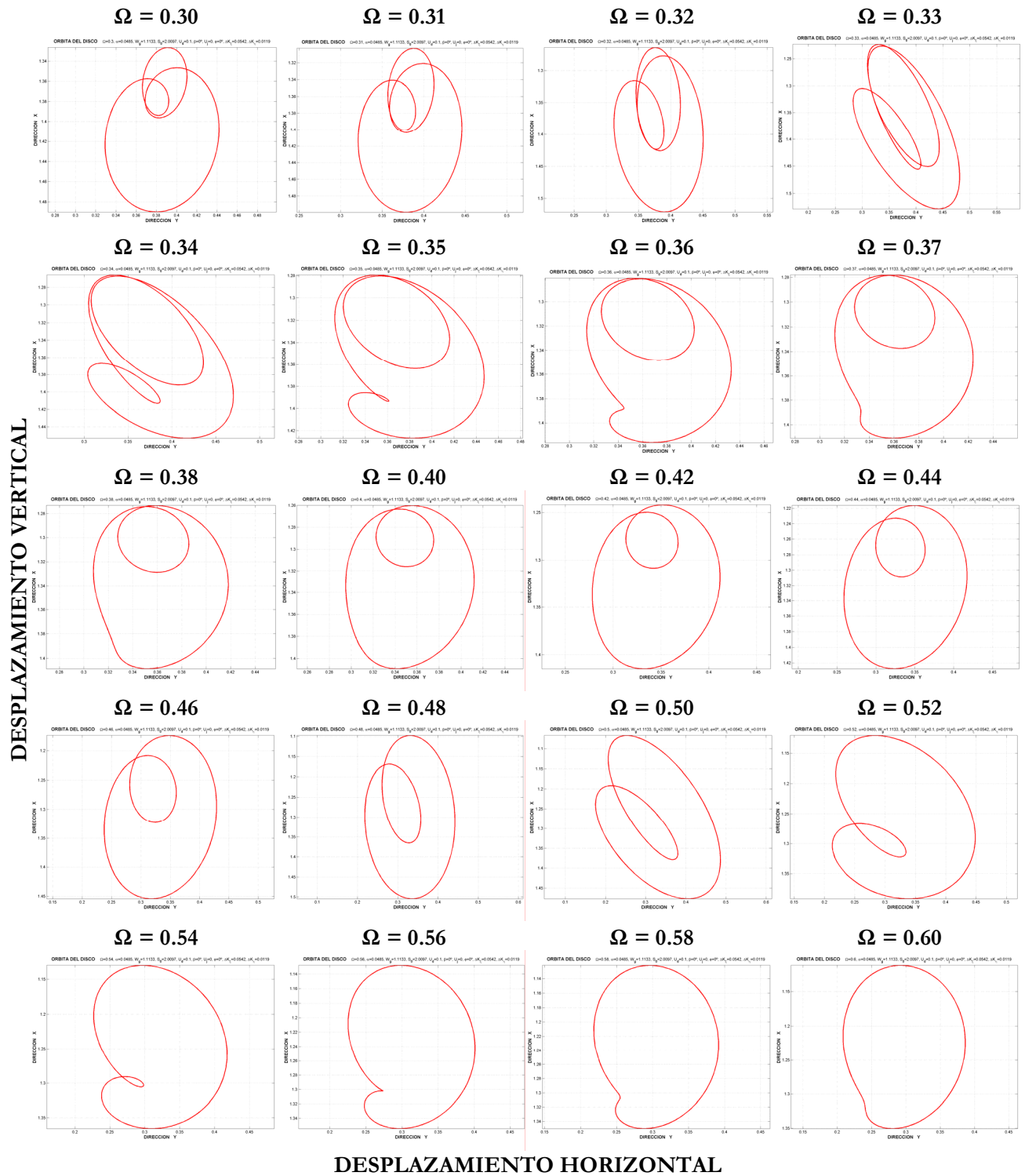


Fig. 4-4 Evolución de las orbitas del disco alrededor de $1/3$ y $1/2$ de la resonancia. Profundidad 25%, Orientación entre grieta y desbalance $\beta = 0^\circ$, $U_d = 0.1$.

El barrido de frecuencia en sistemas agrietados revela cambios en la órbita tanto en magnitud como en la existencia de componentes armónicos, con la evolución de la órbita atribuida en gran parte a la variación de los ángulos de fase de la vibración. El análisis de estas gráficas permite caracterizar la evolución orbital de un rotor fisurado ya que si bajo ciertas condiciones una máquina real presentara una evolución orbital de este tipo podría sugerirnos la presencia de una grieta.

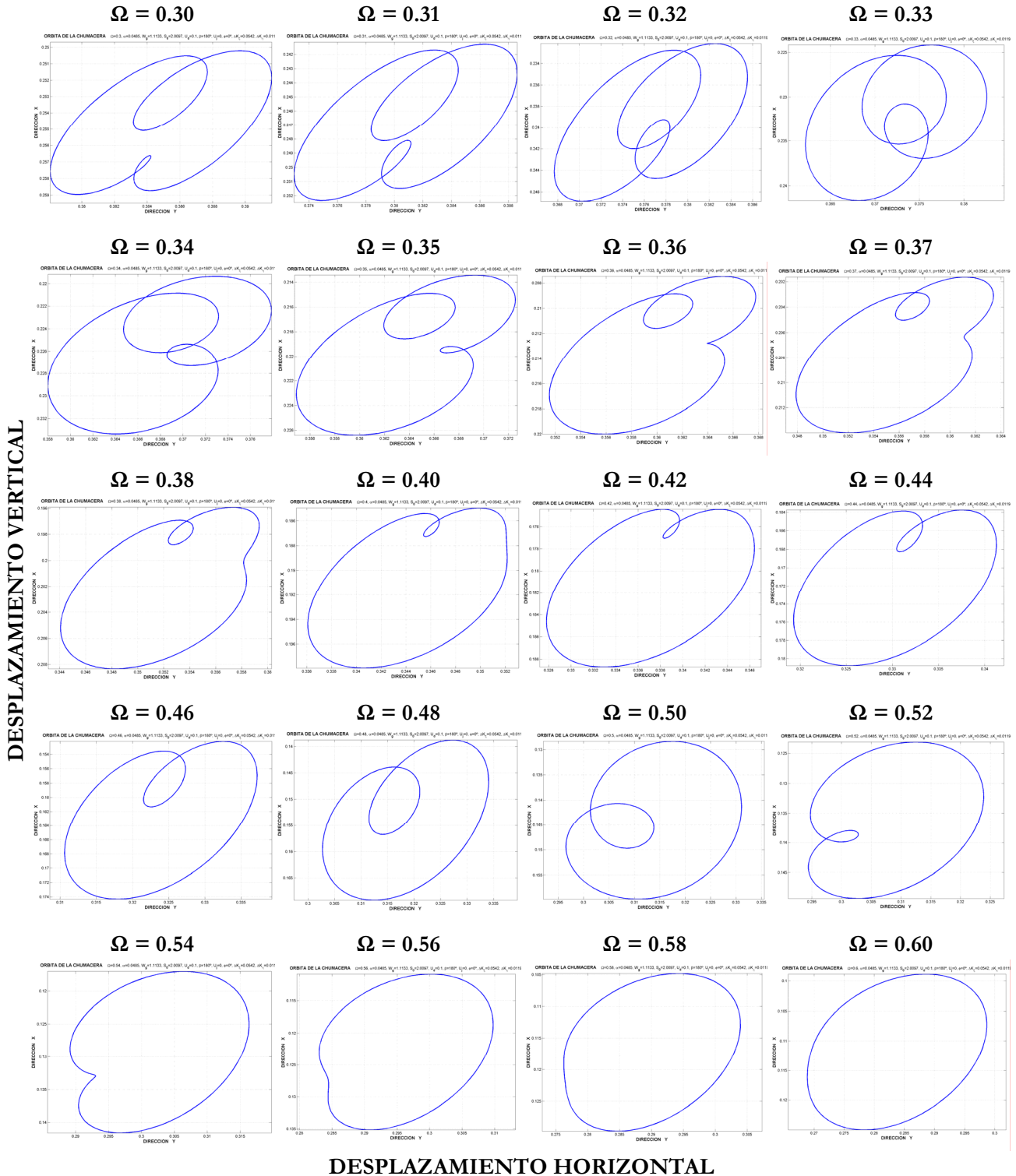


Fig. 4-5 Evolución de las orbitas de las chumaceras alrededor de 1/3 y 1/2 de la resonancia. Profundidad 25%, Orientación entre grieta y desbalance $\beta = 180^\circ$, $U_d = 0.1$.

Puede observarse como las orbitas simuladas para velocidades de rotación cercanas a las resonancias subarmónicas, son afectadas significativamente por la presencia de la grieta ya que las órbitas presentan el típico bucle interno, ampliamente divulgado en la literatura, el cual es consecuencia de la magnificación del componente espectral 2X a esa velocidad, lo que hace posible la detección de ejes agrietados. Asimismo puede observarse que lo anterior es válido aún para diferentes posiciones angulares de la grieta con respecto al desbalance.

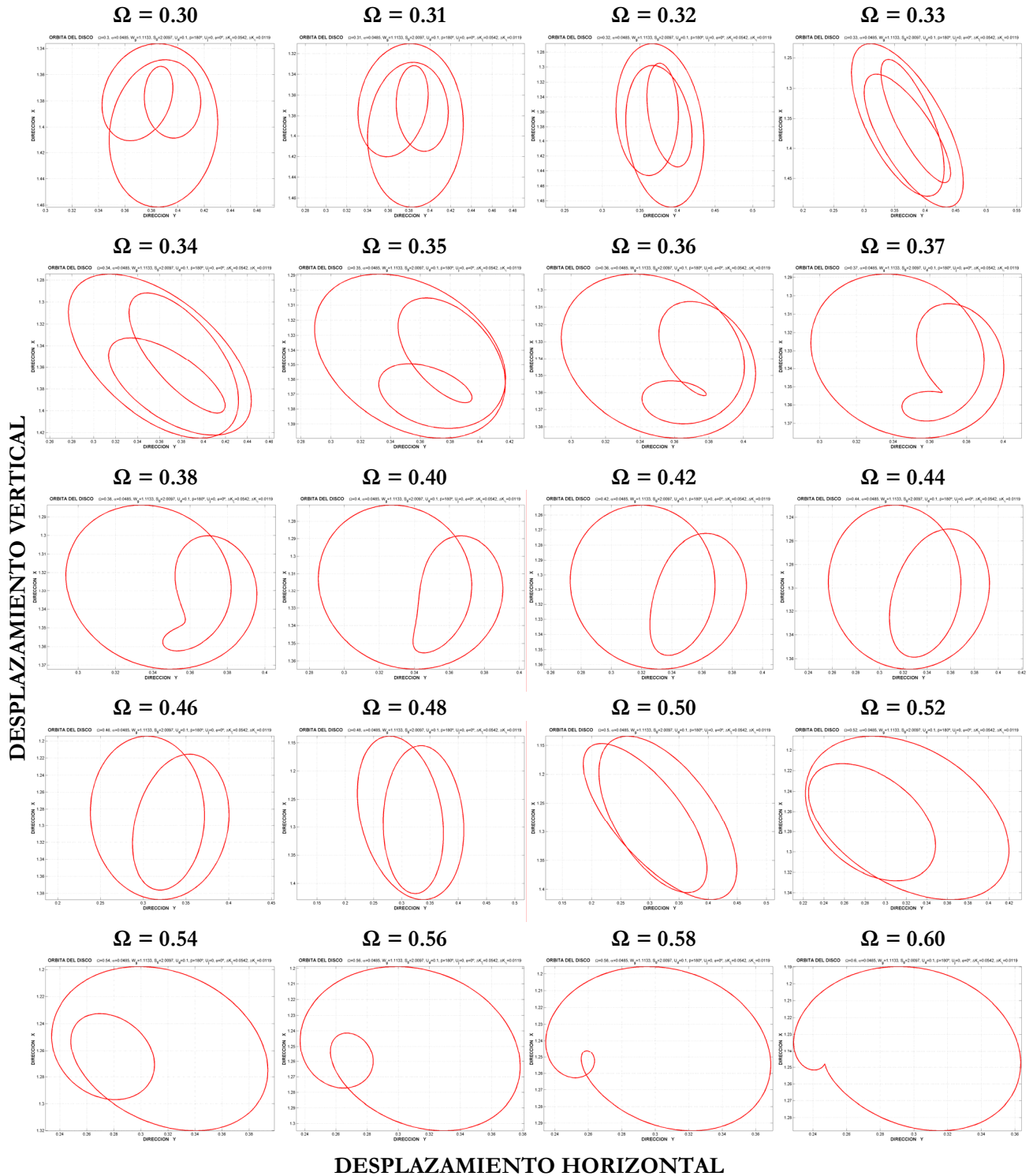


Fig. 4-6 Evolución de las orbitas del disco alrededor de 1/3 y 1/2 de la resonancia. Profundidad 25%, Orientación entre grieta y desbalance $\beta = 0^\circ$, $U_d = 0.1$.

4.4 Comparación de la solución numérica y la solución numérica-analítica aproximada

En las siguientes figuras se ilustra la comparación de las respuestas orbitales del disco y chumaceras, obtenidas mediante una solución estrictamente numérica utilizando un programa en MATLAB (Apéndice B) que hace uso de la subrutina ode 45 basada en el Método de Runge–Kutta de orden 4 y 5 contra la solución numérica-analítica aproximada desarrollada utilizando un novedoso método seminumérico basado en el *Método de Parámetros Pequeños* ideado por el Director de esta Tesis Dr. Valery R. Nosov [144], considerando en este caso como parámetros pequeños los dos parámetros ΔK_1 y ΔK_2 , correspondientes a la fisura.

Las simulaciones numéricas fueron obtenidas para los parámetros propuestos en la configuración I (Tabla 2 y Tabla 3) y profundidades de grieta de 12.5 % y 25 %. El ángulo de orientación relativo entre la dirección de la grieta y el desbalance residual fue establecido como $\beta = 90^\circ$ y la magnitud del desbalance residual en el disco fue tomada como $U_d = 0.05$.

Se puede observar a través de las graficas de las respuestas orbitales del disco y chumaceras que la aproximación implicada en el procedimiento numérico-analítico da una precisión adecuada para propósitos prácticos al investigar la interacción entre los desbalances de masa siempre presentes en la realidad y la fisura transversal localizada a la mitad del tramo del eje.

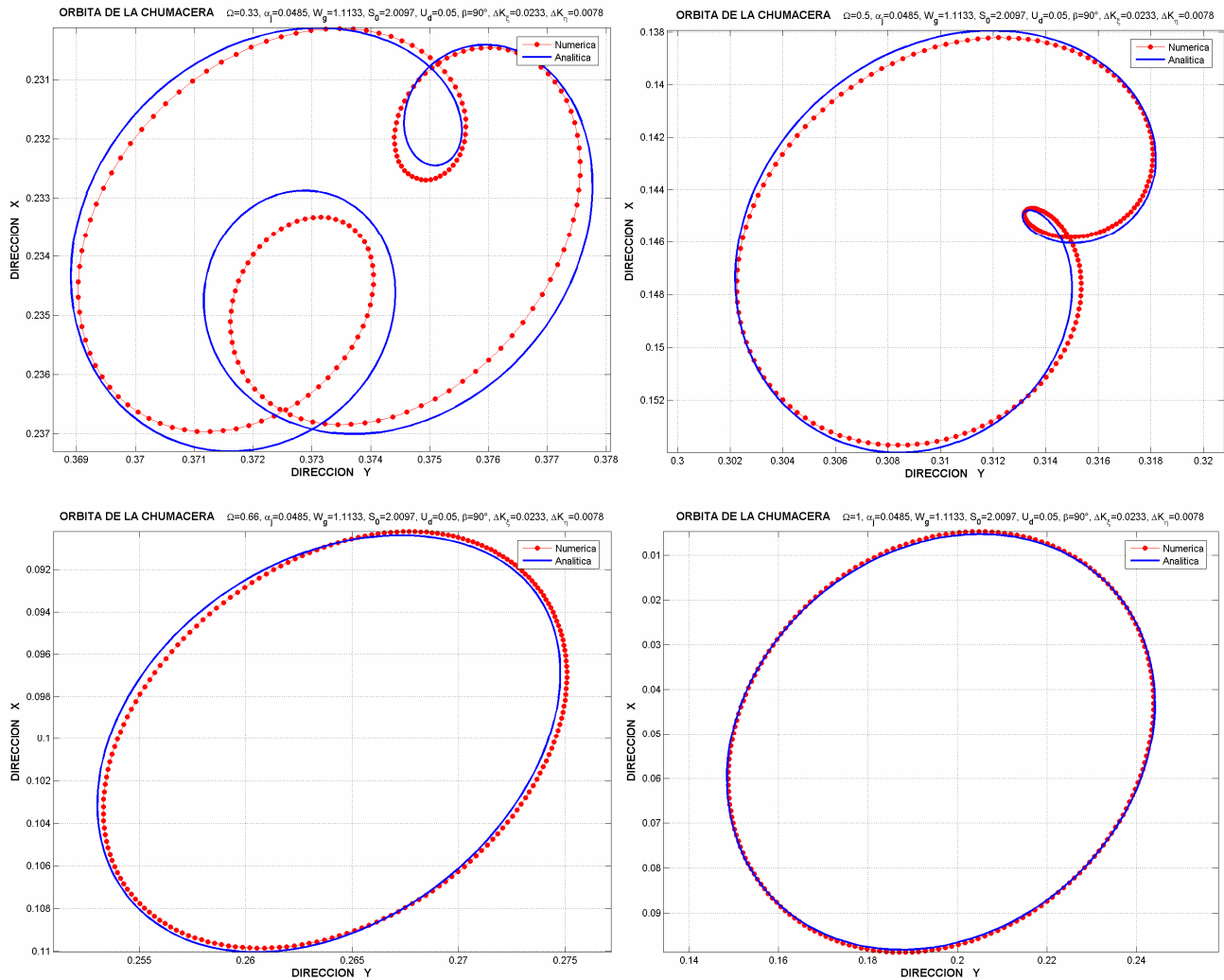


Fig. 4-7 Orbits de la chumacera correspondientes a la solución numérica y la solución numérica-analítica aproximada, configuración I, profundidad de grieta 12.5 %, $\beta = 90^\circ$

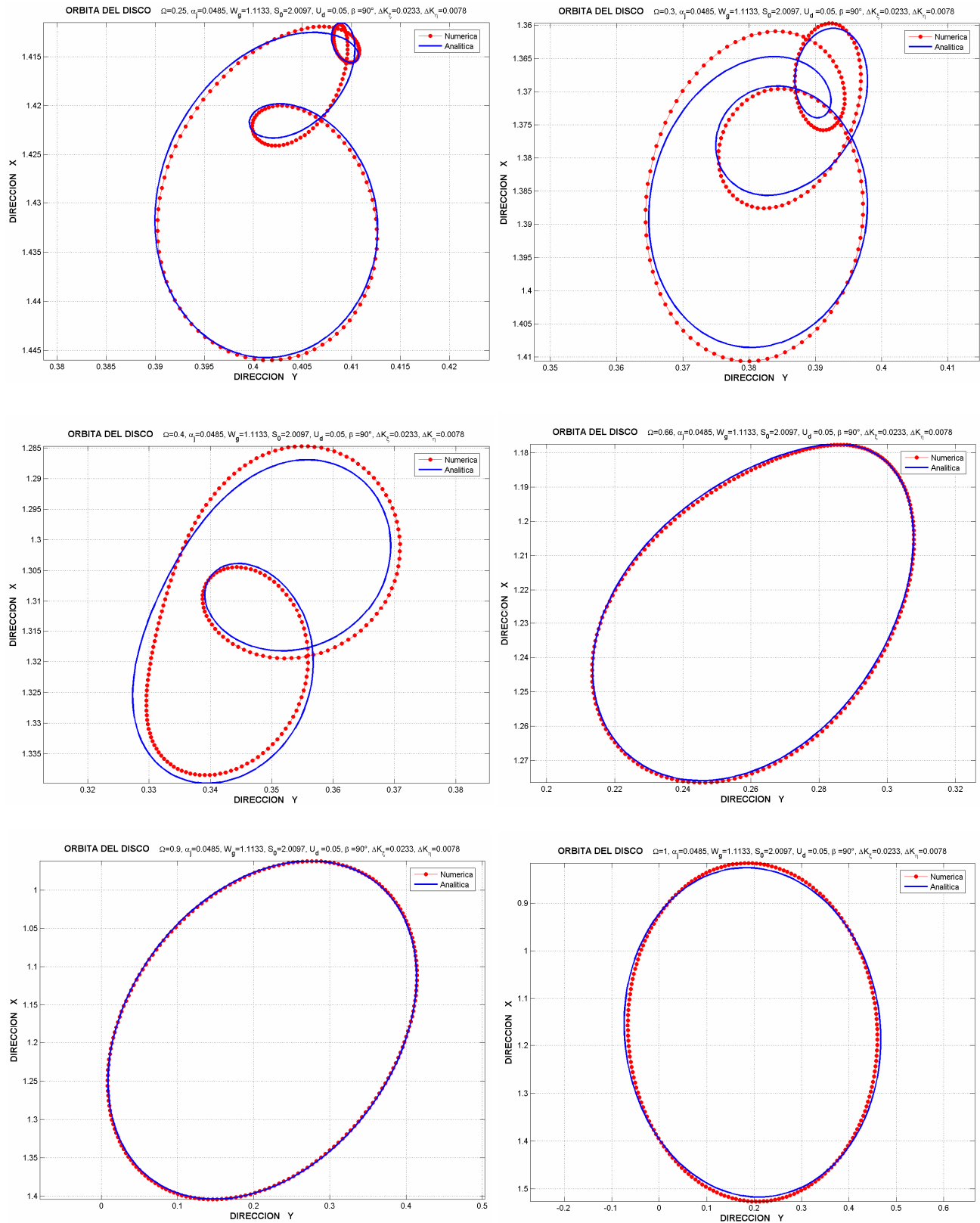


Fig. 4-8 Orbitas del disco correspondientes a la solución numérica y la solución numérica-analítica aproximada, configuración I, profundidad de grieta 12.5 %, $\beta = 90^\circ$

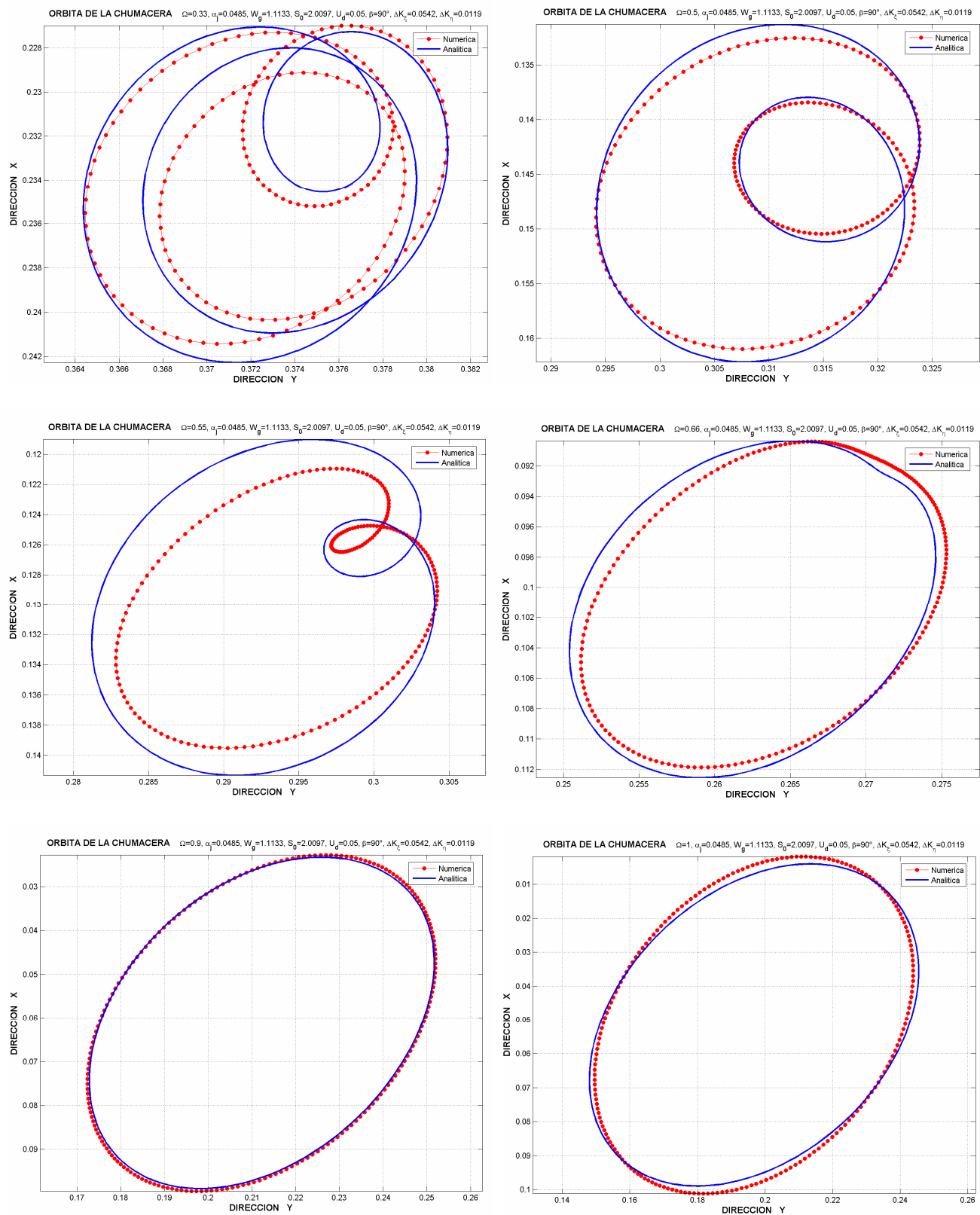


Fig. 4-9 Orbits de la chumacera correspondientes a la solución numérica y la solución numérica-analítica aproximada, configuración I, profundidad de grieta 25 %, $\beta = 90^\circ$

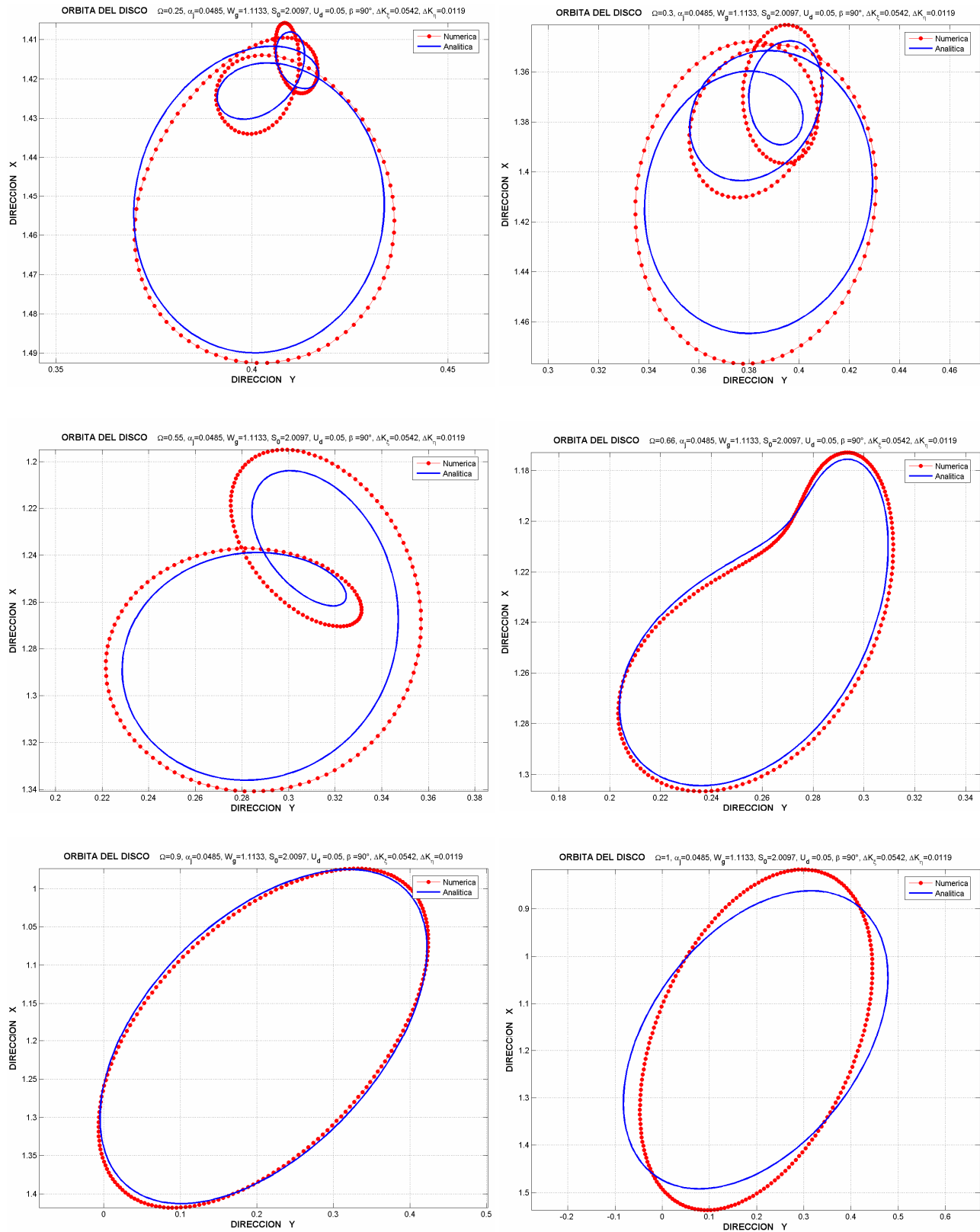


Fig. 4-10 Orbits del disco correspondientes a la solución numérica y la solución numérica-analítica aproximada, configuración I, profundidad de grieta 25 %, $\beta = 90^\circ$

4.5 Estudio de la respuesta dinámica analítica

En la práctica, los componentes más significativos de las respuestas vibratorias laterales de maquinaria rotatoria medidos por transductores de proximidad en las direcciones X y Y , y eventualmente filtradas, son la vibración síncrona $1X$ y la vibración con frecuencia igual a dos veces la velocidad de rotación ó $2X$. La mayor parte de la vibración síncrona $1X$ es debida al desbalance del rotor. Si el rotor está ligeramente desbalanceado, no muy precargado, y es estable (no existen vibraciones inducidas por la película de fluido, rozamiento u otras causas), la vibración $1X$ es el único componente dominante en la respuesta del rotor [12], [13], [14]. Por otra parte, el componente $2X$ aparece en el espectro vibratorio del rotor como resultado principalmente de dos causas:

- No linealidades
- Asimetría en el sistema rotatorio

No linealidades. Principalmente debidas a las no linealidades de las características de rigidez y amortiguamiento propias de las chumaceras lubricadas, y que adquieren mayor importancia cuando las vibraciones laterales del rotor son grandes. Estas deflexiones pueden ser causadas por un gran desbalance, precargas radiales o ambos.

Asimetría en el sistema rotatorio. También llamado anisotropía, principalmente se refiere a la diferencia de la rigidez del rotor en dos direcciones laterales perpendiculares. Por ejemplo, en la dirección “ X ” el eje rotatorio es más débil, y se flexiona más bajo una carga radial dada, y perpendicular a “ X ”, en la dirección “ Y ” el eje es más fuerte, y se flexiona menos bajo la misma fuerza aplicada perpendicularmente a la primera. Esta asimetría en la rigidez del rotor podría ser resultado de causas geométricas, como son sección transversal no circular del rotor, rotor desigualmente restringido por partes empotradas por presión en él, o finalmente como en el caso tratado en esta Tesis, por una grieta en el eje.

Fuentes de los componentes $1X$ y $2X$

El componente $1X$ del espectro de la respuesta vibratoria del rotor es principalmente debido al desbalance. La existencia del componente $2X$ en el espectro es principalmente debido a dos factores:

1. Desalineamiento del eje (incluyendo por engranajes y poleas) y precarga radial resultante, o precarga radial generada por flujo de fluido.
2. Asimetría del eje (como en el caso de ejes agrietados) junto con precarga radial (de desalineamiento, flujo de fluido, gravedad u otros orígenes).

Estos dos casos son físicamente diferentes [136]. En el primer caso, los componentes $1X$ y $2X$ están cercanamente relacionados, puesto que los únicos factores significativos son el desbalance más la precarga radial y la no linealidad de la rigidez del sistema. Debido a la precarga, el eje se ve forzado a rotar en una configuración inclinada. Esto implica el efecto de no linealidad de la rigidez en la respuesta del sistema. El eje rota en el rango de deflexiones donde la rigidez de los soportes también se comporta no linealmente (rigidez de la película de fluido en chumaceras, y sellos en particular). La región de deflexión es determinada por la dirección específica de la fuerza radial de precarga, de esta manera las respuestas del rotor en la dirección horizontal y vertical difieren.

En el segundo caso la precarga también juega un papel importante. No obstante, el segundo componente no es la no linealidad de la rigidez del sistema, sino la anisotropía de la rigidez (asimetría), y solamente de aquellos elementos que están envueltos en movimiento rotatorio (principalmente el rotor).

En ambos casos, la mayor parte del componente $1X$ es producido por el desbalance. En el primer caso, este llega a ser modificado por la precarga radial por ello resultando en desplazamiento del rotor. En estas circunstancias la no linealidad en la rigidez causa no solamente cambios en las magnitudes de la respuesta $1X$, sino que también es responsable de la generación de armónicos más grandes, como componentes vibratorios secundarios. Por eso, en el primer caso, el principal factor de excitación de vibración es solamente desbalance. La precarga y no linealidad modifican la respuesta al desbalance.

En el segundo caso, la situación es diferente. Existe aún desbalance, y la respuesta 1X relacionada al desbalance. La precarga no tiene que ser alta, es decir, no empuja el eje a rangos no lineales de deflexiones. La moderada precarga junto con la anisotropía rotatoria de la rigidez del eje causa otro factor de excitación, independientemente del desbalance. Puesto que la rigidez varía dos veces por revolución del eje, esta excitación tiene una frecuencia 2X. El mecanismo es puramente lineal.

Ahora la cuestión que surge es que tipo orbitas se deben esperar en ambos casos; desalineamiento y eje fisurado. Una diferencia significativa es que en el primer caso las respuestas X y Y no hacen juego, como lo hacen en el segundo caso, y produce orbitas circulares. En el primer caso, los bucles externos en las orbitas son realmente probables. Los bucles internos son característicos de movimientos circulares en la misma dirección que es el caso de ejes agrietados. Puesto que la vibración 1X relacionada al desbalance es “forward” el componente 2X debe ser también “forward” para producir una orbita con un bucle interno.

Cuando el ángulo de fase del componente 2X cambia $\alpha_2 = -90^\circ$, por ejemplo debido al cambio en la dirección de la carga, la forma de la orbita permanece siendo la misma pero el bucle rota 90° . Finalmente, cuando el ángulo de fase del componente 2X cambia a $\alpha_2 = 0^\circ$ el bucle gira otros 90° [136]

Ya que ambas orbitas 1X y 2X son circulares y rotan en la misma dirección, las fases α_1 y α_2 afectan solo la posición del bucle interno. Las magnitudes de las amplitudes, o mejor dicho la magnitud de su relación A_1/A_2 , predice si habrá un bucle interno completo, o solamente una muesca en la orbita 1X. Para $A_1 > 2A_2$, el bucle interno no existe.

Durante el arranque o paro de las máquinas con ejes agrietados ocurren varios picos de resonancia local a fracciones de la velocidad crítica de operación normalizada. Son analizadas las respuestas verticales y horizontales del disco y chumaceras, la evolución orbital alrededor del equilibrio no trivial, umbrales de estabilidad y los diagramas de Bode generados por barrido de la frecuencia mientras se hace variar ortogonalmente la orientación del desbalance para las tres configuraciones de rotores que tienen diferentes influencias entre grieta y desbalance. Resulta que la evolución orbital alrededor de $1/2$, $1/3$ y $1/4$ de la primera resonancia puede ser utilizada para detectar la presencia de grietas en rotores, incluso si la orientación entre grieta y desbalance es desconocida.

Por las razones anteriores, se presentan la evolución y el análisis de las formas orbitales durante el barrido de frecuencia, con especial énfasis en resonancias locales de síncrono, dos y tres veces la frecuencia armónica. Por lo tanto para la inequívoca detección de grieta se recomienda altamente un análisis enfocado en la respuesta de sistema en todas las resonancias locales que ocurren alrededor y por debajo del 45% de la velocidad crítica. Este enfoque de monitoreo no ha sido divulgado previamente en la literatura. El análisis de los diagramas de Bode y las orbitas sobrepuestas validan y refuerzan dicha sugerencia.

Referente a la orientación entre grieta y desbalance este modelo lineal produce interesantes resultados similares a los obtenidos del modelo no lineal de Yamamoto e Ishida [206]; éste último para el caso de la configuración de un rotor vertical agrietado.

Respecto a las formas orbitales, se presentan cuatro orientaciones angulares relativas entre los vectores de la grieta y desbalance ($\beta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$). Una variación significativa de la respuesta tanto en magnitud como en ángulo de fase ocurre debido al ángulo de fase relativo entre los vectores de la grieta y el desbalance de tal modo que afectan las formas de la órbita y su evolución asociada.

Es observado que el componente 2X experimenta un pico cuando la velocidad de rotación coincide con $1/2$ de la frecuencia natural del sistema, conocida como resonancia subarmónica. Algunos autores, como Gasch, creen que este fenómeno puede ser usado como un buen indicador para la detección de grietas.

Análisis de la influencia del ángulo de orientación entre grieta y desbalance sobre la forma de la órbita.

En las siguientes figuras se muestra la gran influencia que ejerce el ángulo de orientación relativo entre la dirección de la grieta (ξ) y el vector de desbalance residual en el disco (U_d) sobre las formas de las orbitas del disco y chumaceras; dichas figuras muestran las respuestas sobrepuestas de la órbita del disco X_d, Y_d y las chumaceras X_j, Y_j en algunas resonancias locales para los cuatro ángulos relativos de orientación ortogonal entre grieta y desbalance $\beta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$; además de la orbita del disco del sistema con eje integro (no fisurado).

El barrido de frecuencia en sistemas agrietados revela cambios en la órbita tanto en magnitud como en la existencia de componentes armónicos, con la evolución de la órbita atribuida en gran parte a la variación de los ángulos de fase de la vibración.

Configuración I con profundidad de grieta del 12.5 %, $U_d = 0.1$

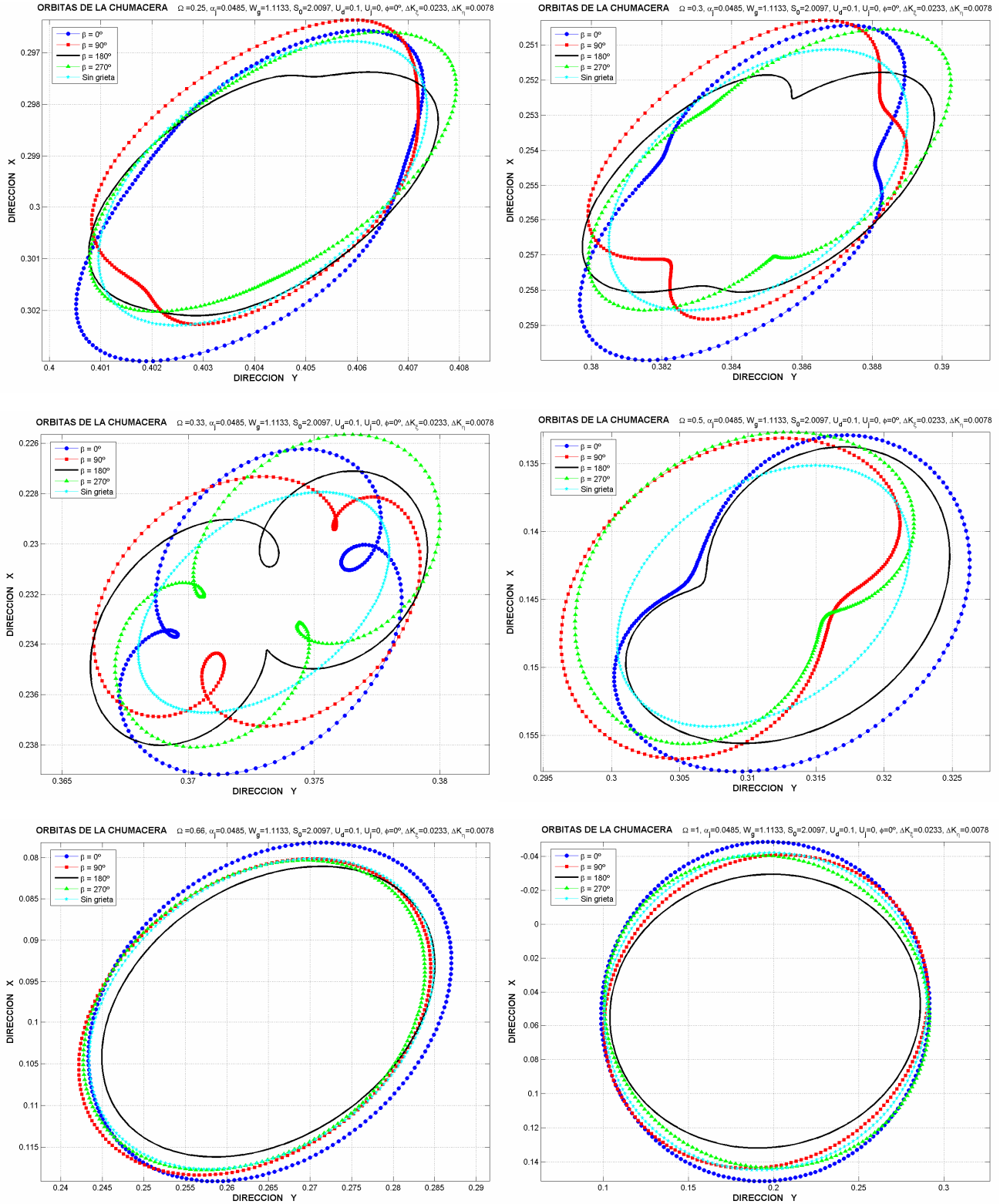


Fig. 4-11 Orbitas de la chumacera a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración I, profundidad de grieta 12.5 %

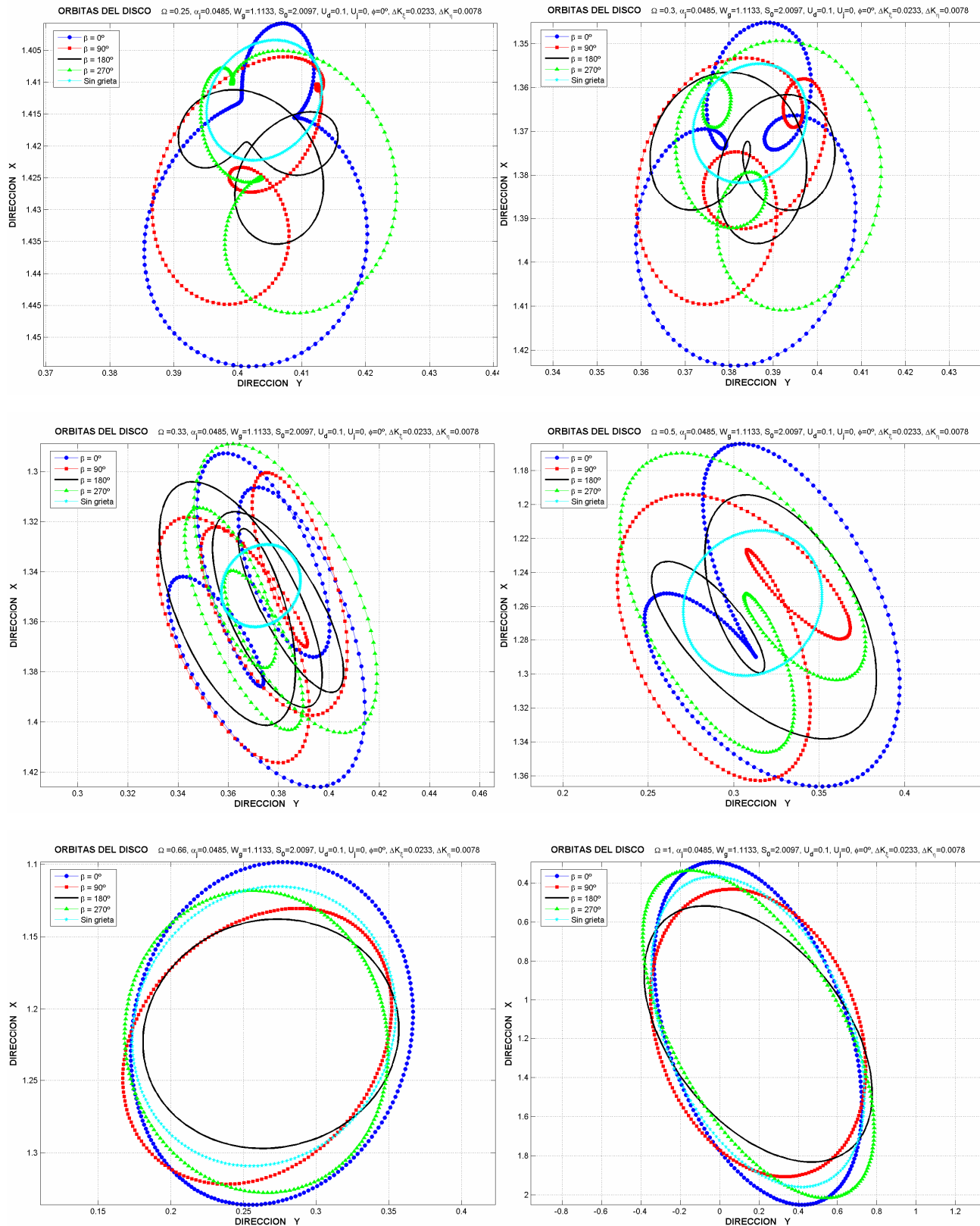


Fig. 4-12 Orbitas del disco a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración I, profundidad de grieta 12.5 %

Configuración I con profundidad de grieta del 25 %, $U_d = 0.1$

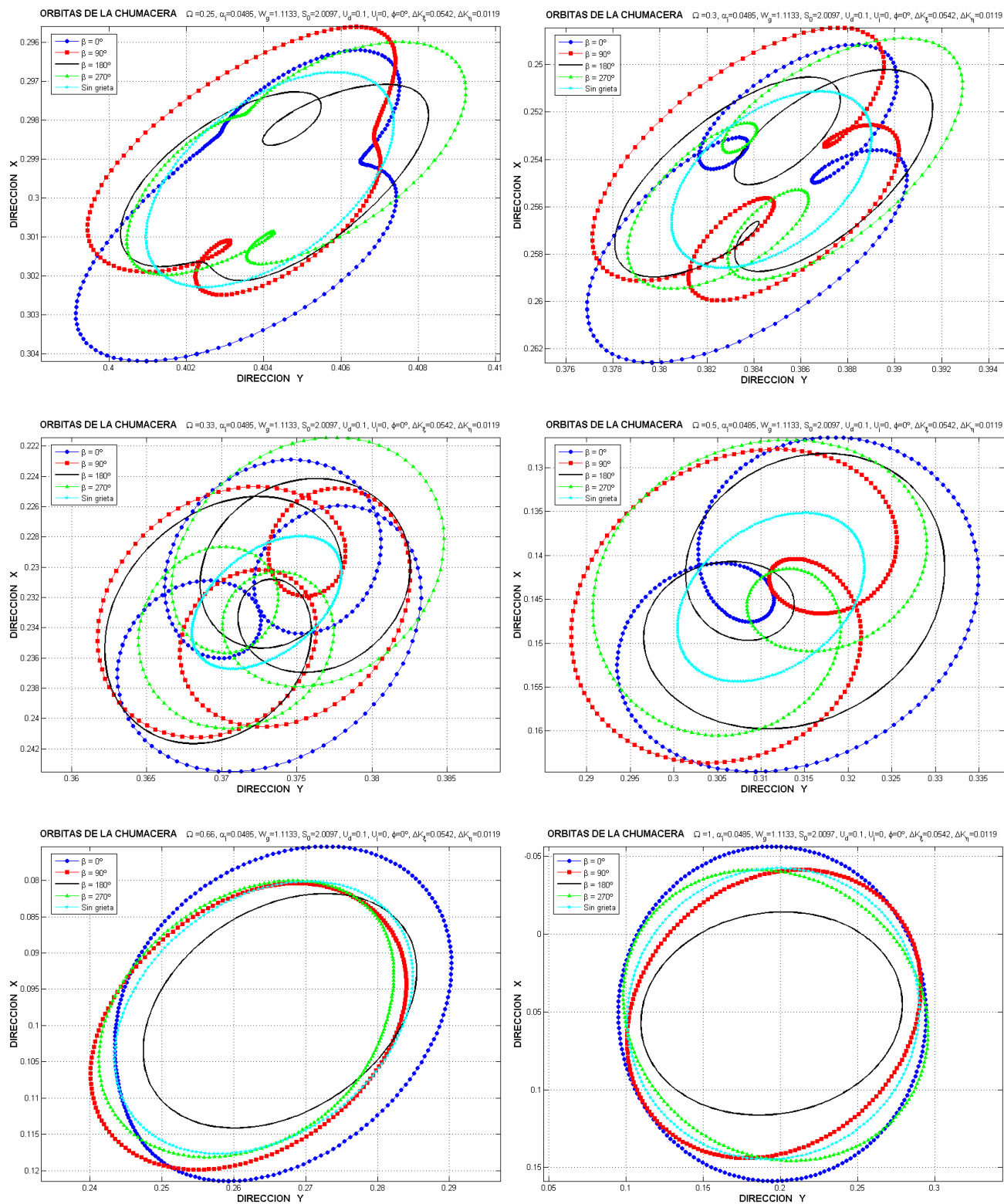


Fig. 4-13 Orbits de la chumacera a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración I, profundidad de grieta 25 %

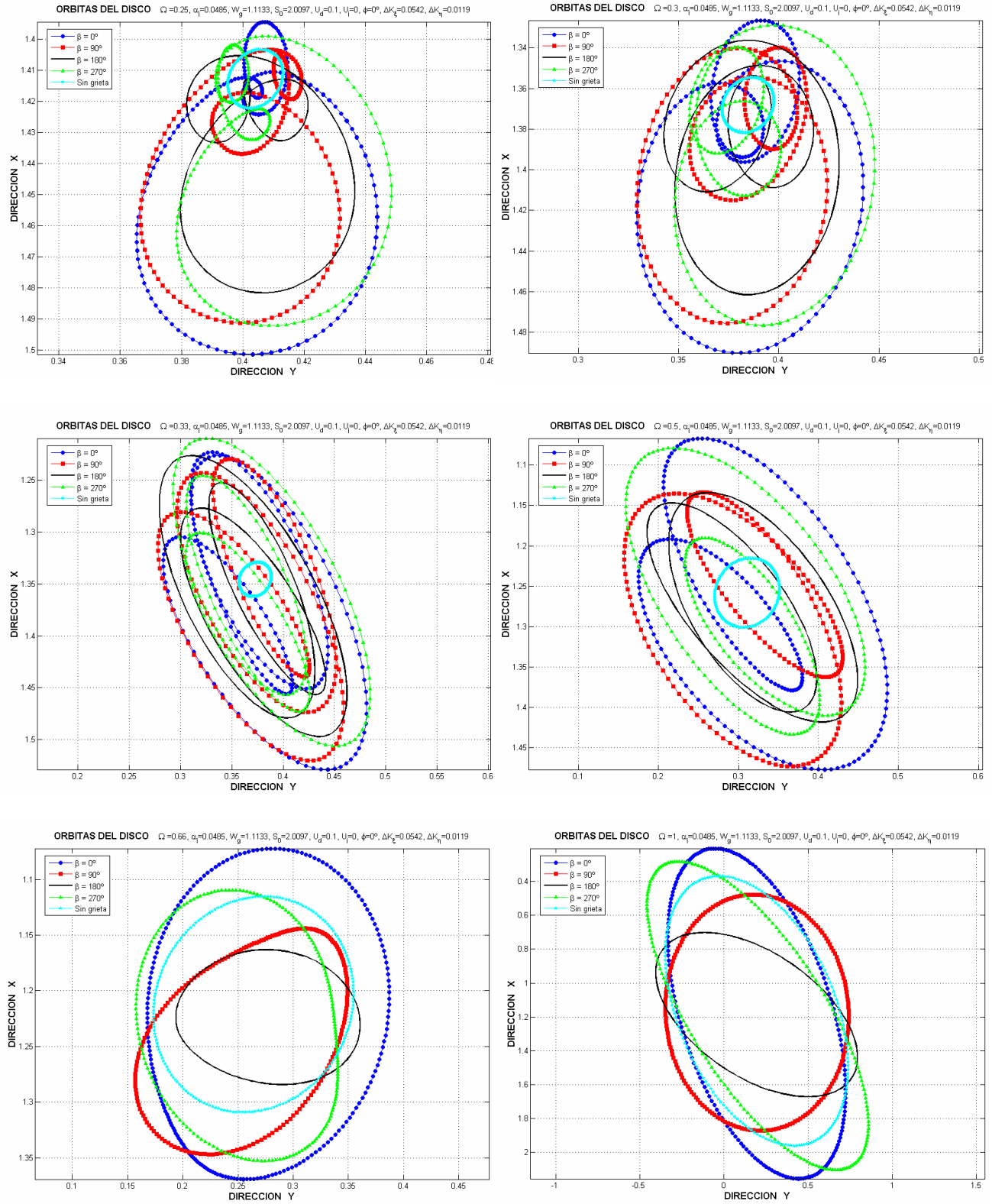


Fig. 4-14 Orbitas del disco a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración I, profundidad de grieta 25 %

Configuración I con profundidad de grieta del 50 %, $U_d = 0.1$

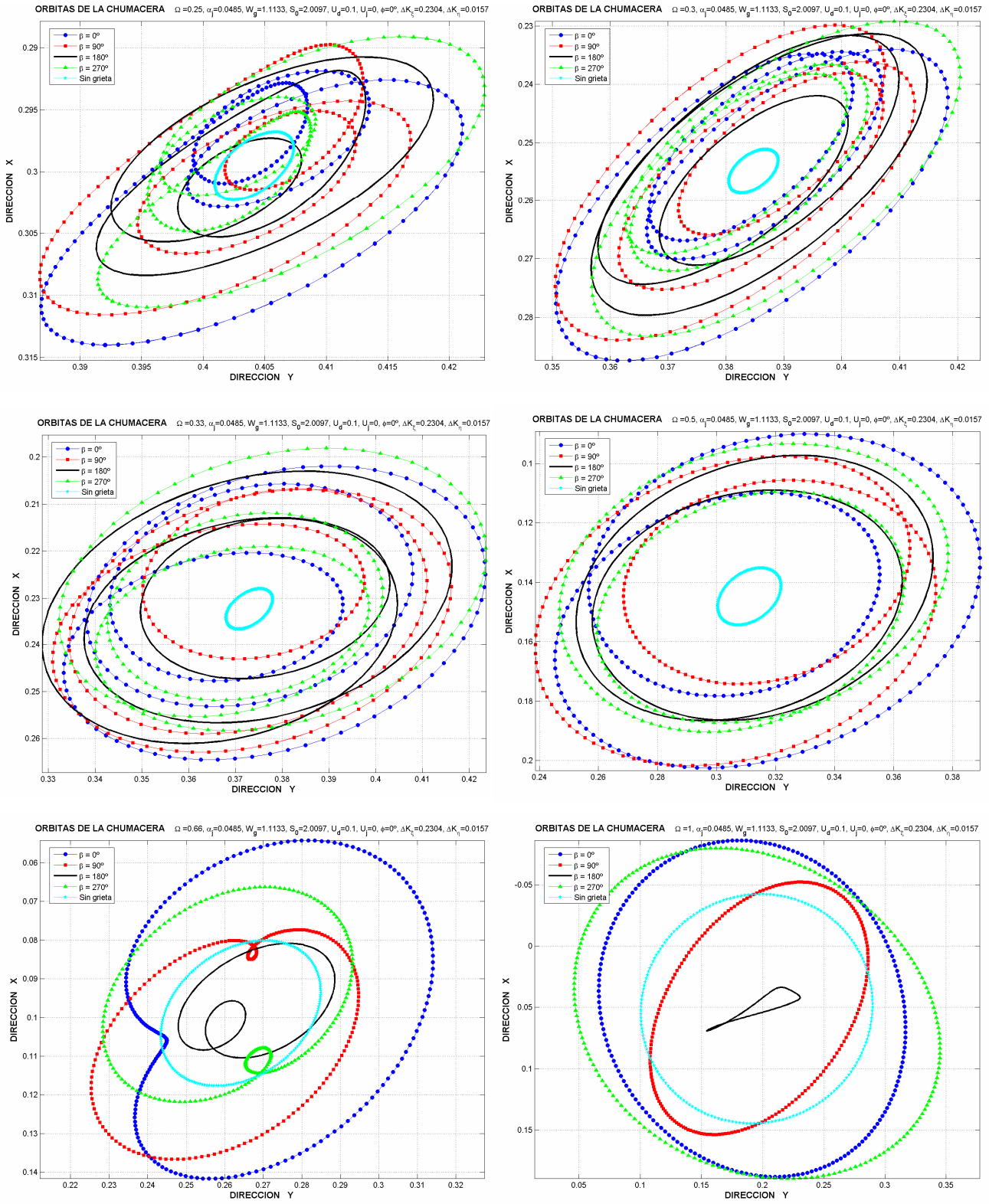


Fig. 4-15 Orbitas de la chumacera a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración I, profundidad de grieta 50 %

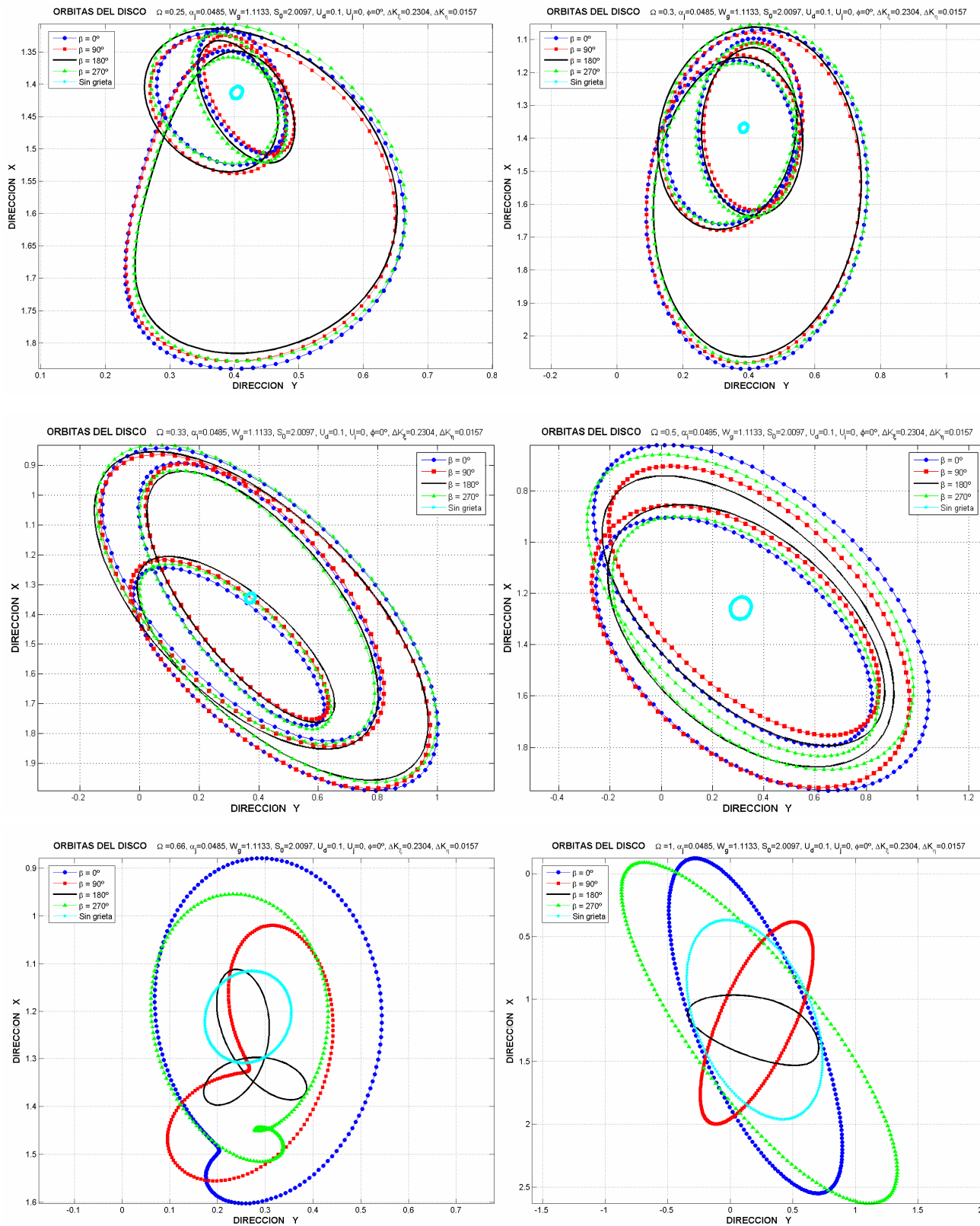


Fig. 4-16 Orbitas del disco a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración I, profundidad de grieta 50 %

Configuración II con profundidad de grieta 12.5 %, $U_d = 0.08$

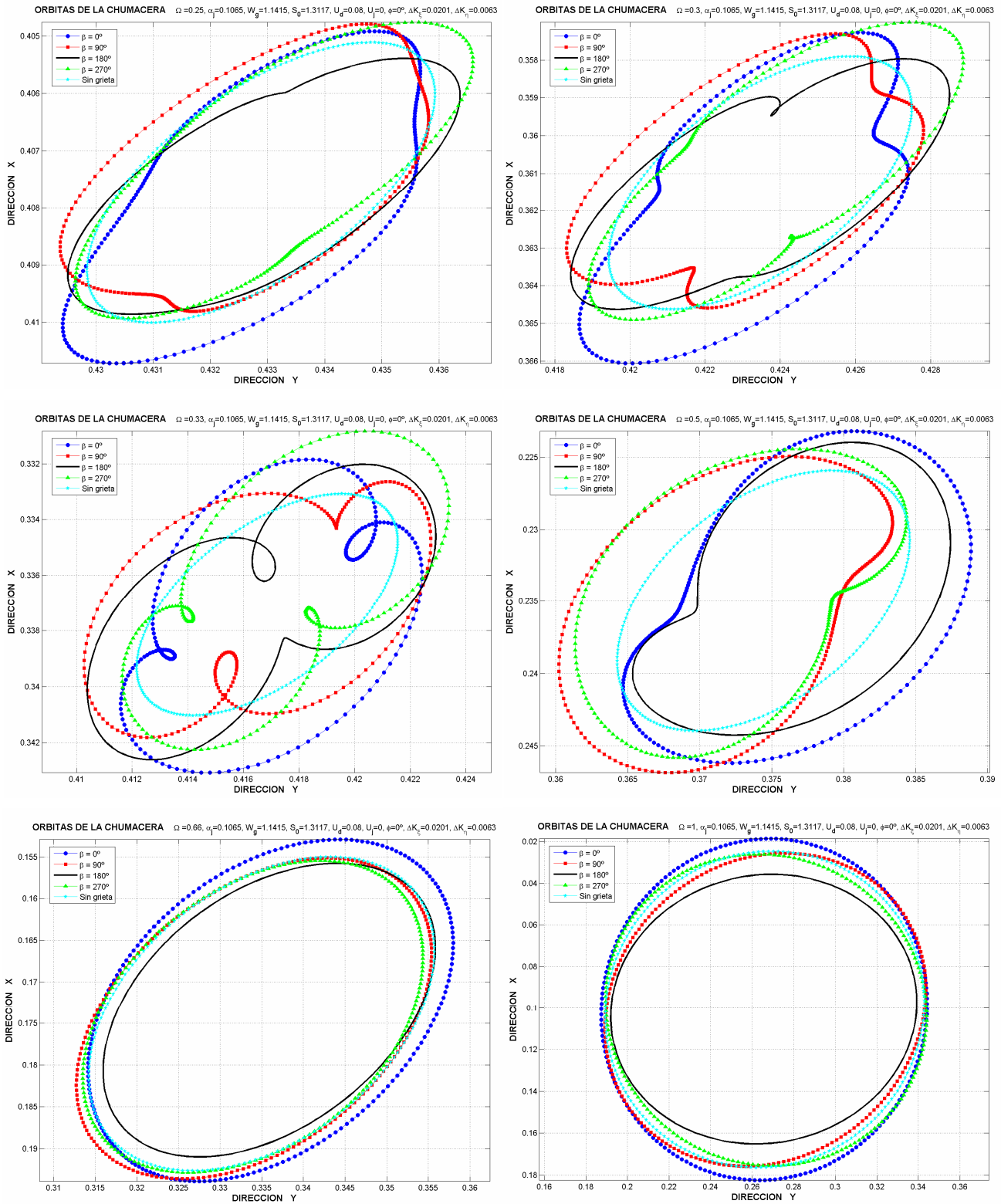


Fig. 4-17 Orbitas de la chumacera a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración II, profundidad de grieta 12.5 %

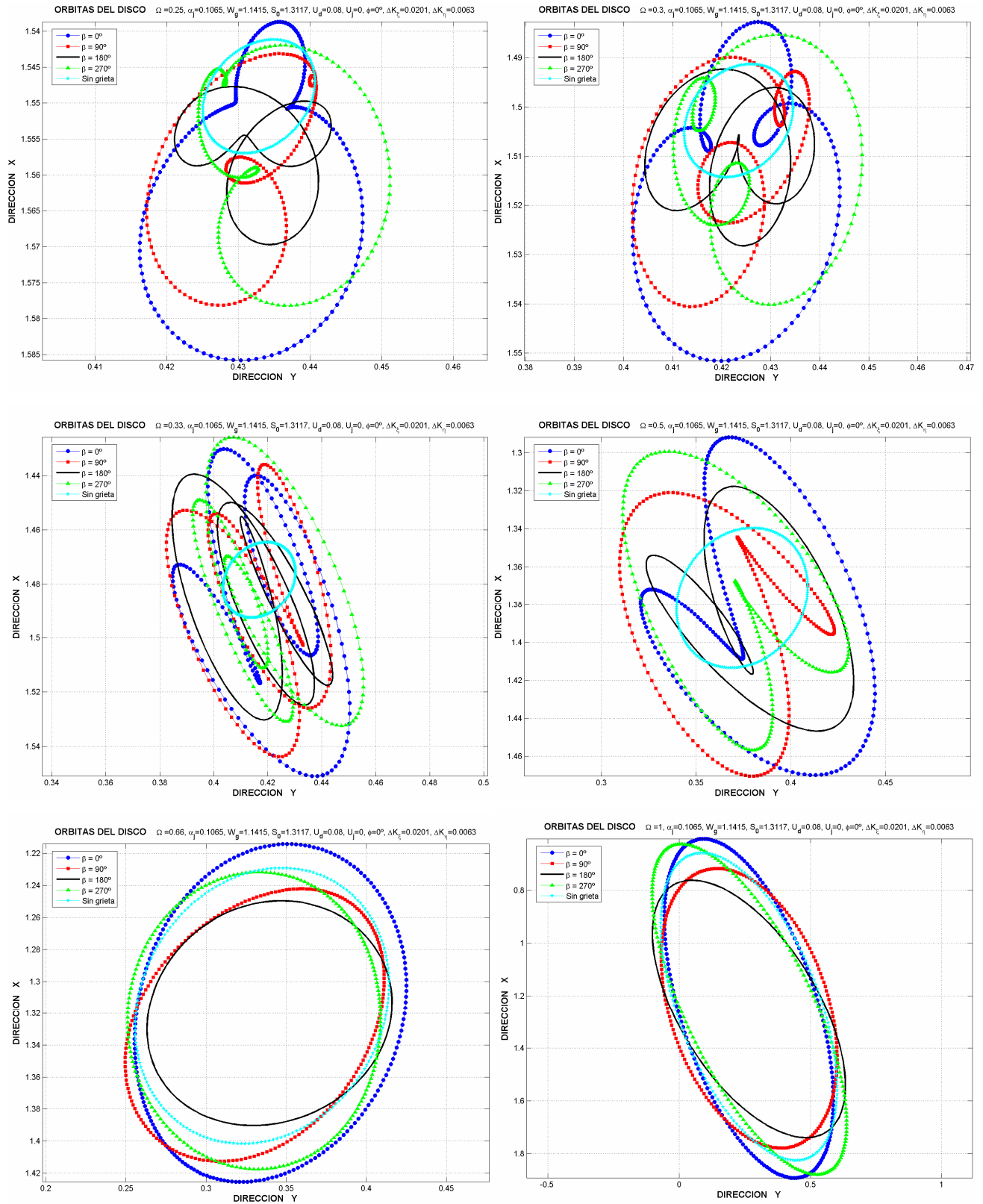


Fig. 4-18 Orbitas del disco a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración II, profundidad de grieta 12.5 %

Configuración II con profundidad de grieta del 25 %, $U_d = 0.08$

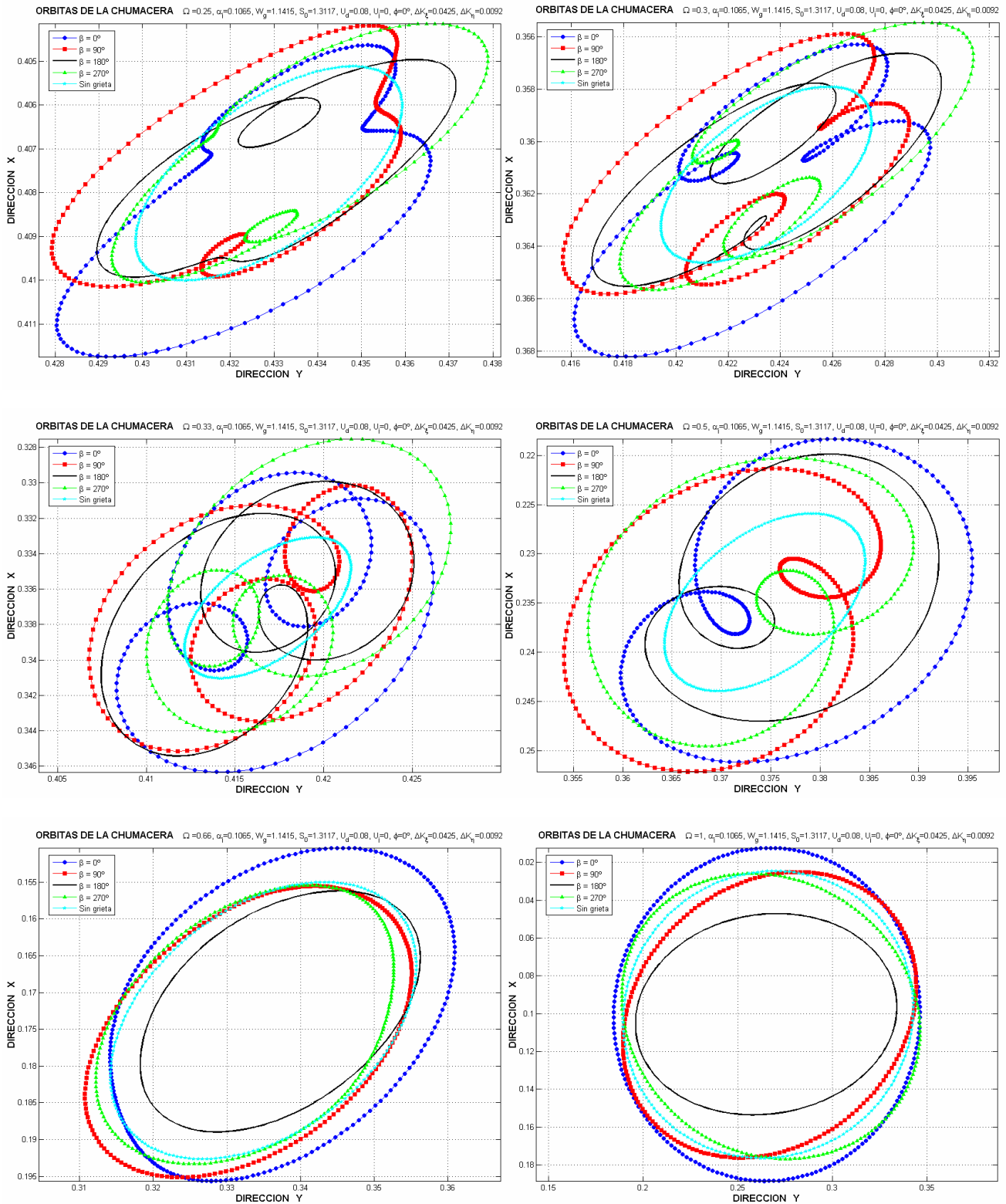


Fig. 4-19 Orbitas de la chumacera a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración II, profundidad de grieta 25 %

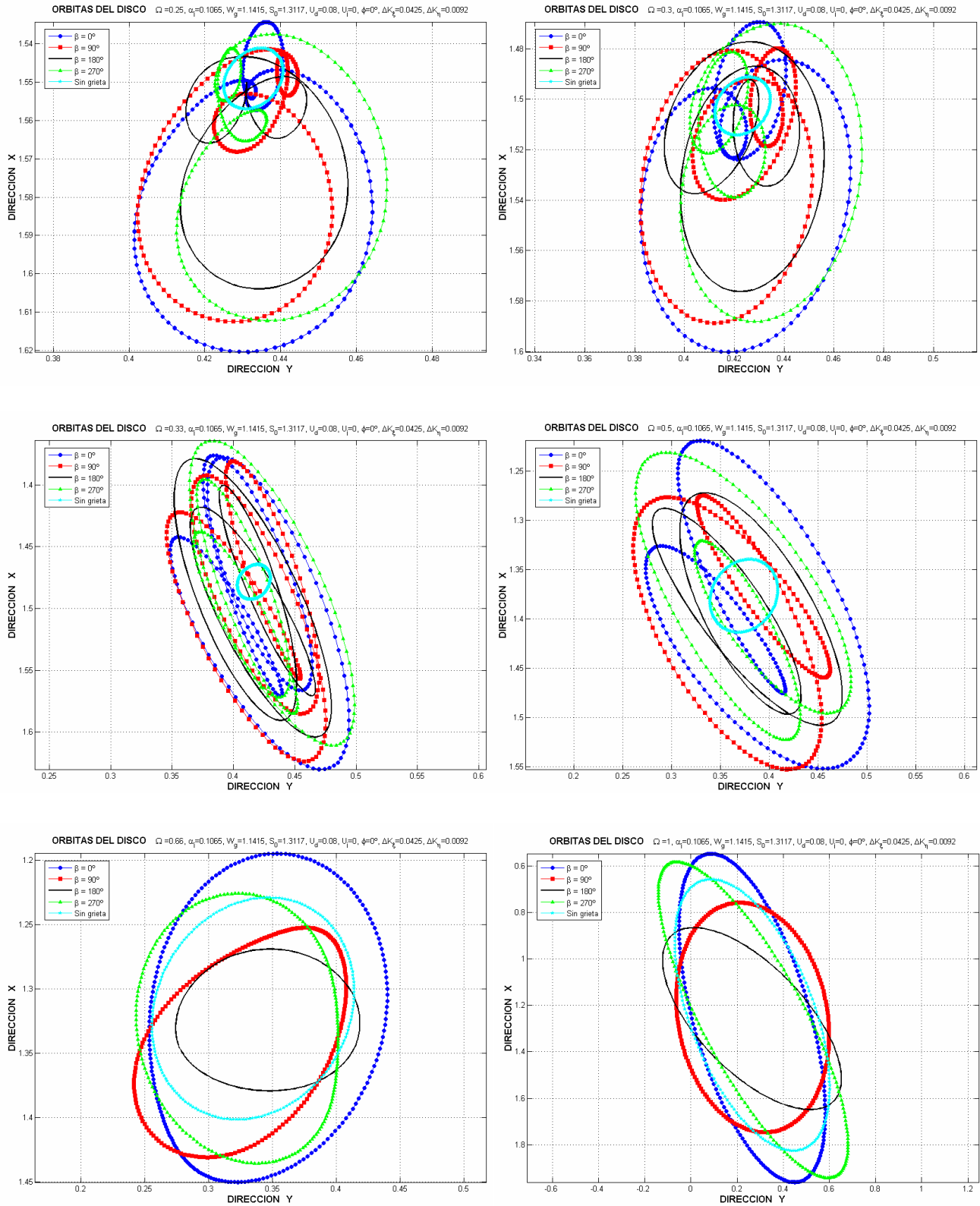


Fig. 4-20 Orbitas del disco a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración II, profundidad de grieta 25 %

Configuración II con profundidad de grieta del 50 %, $U_d = 0.08$

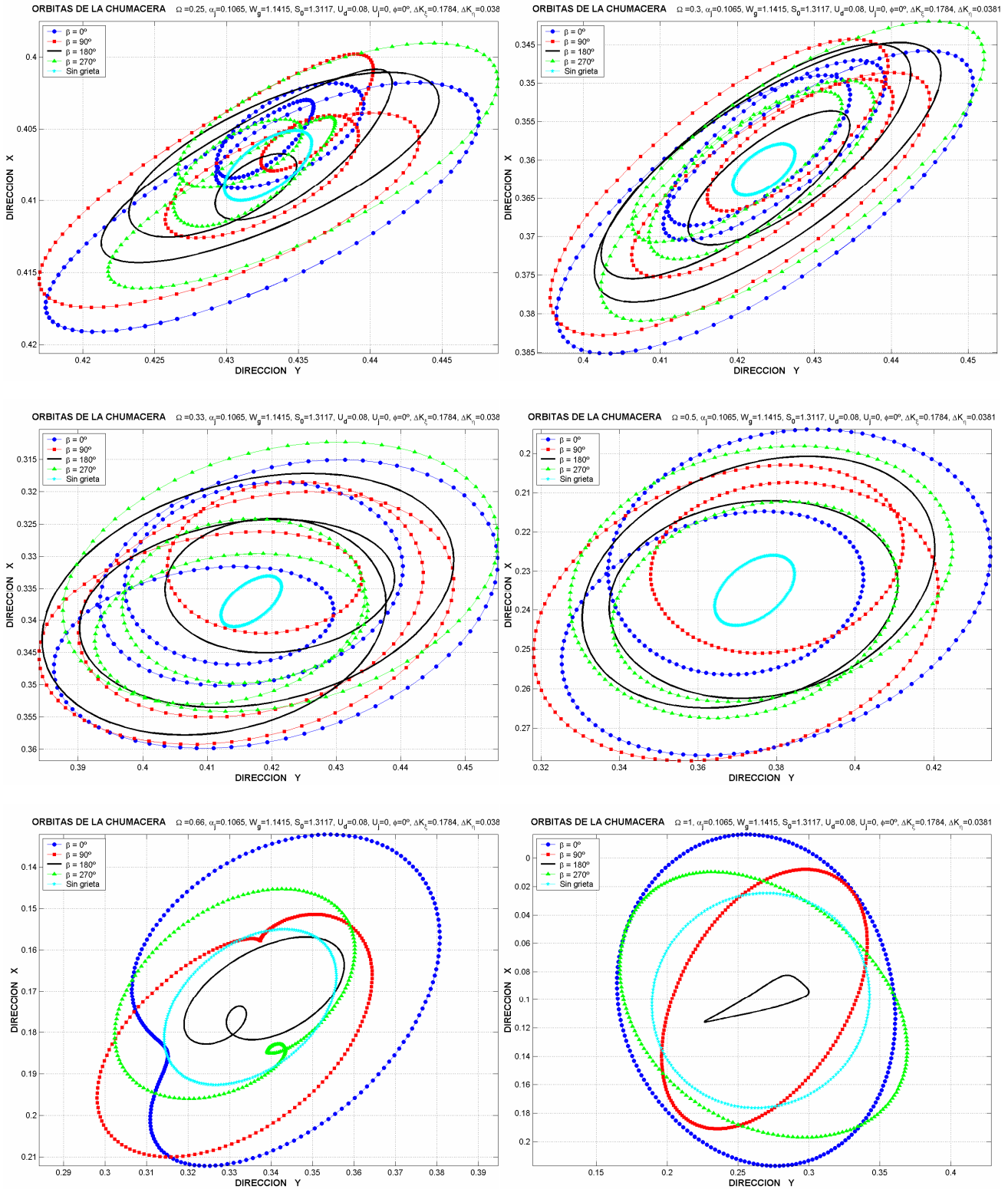


Fig. 4-21 Orbitas de la chumacera a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración II, profundidad de grieta 50 %

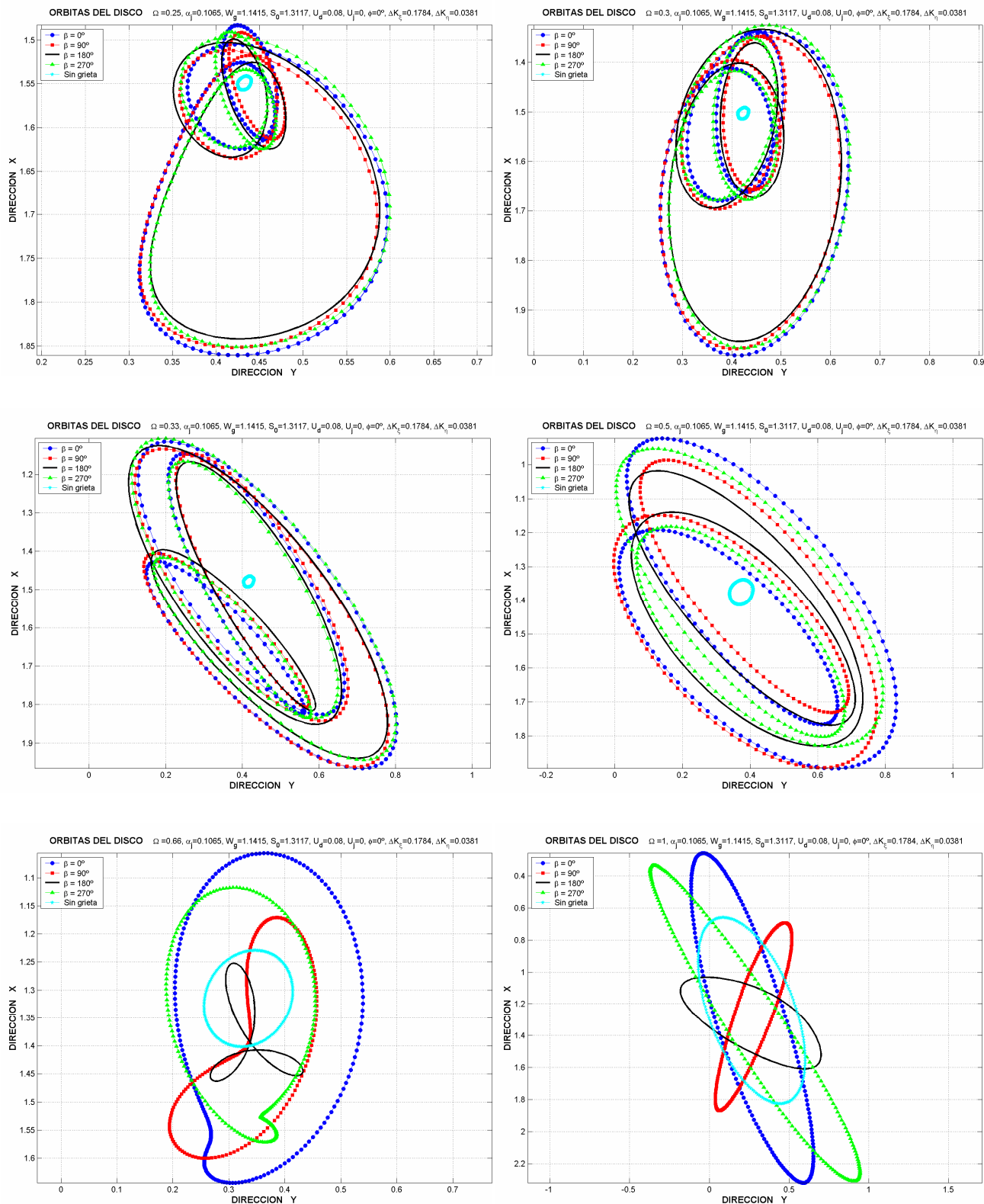


Fig. 4-22 Orbitas del disco a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración II, profundidad de grieta 50 %

Divulgado ampliamente en la literatura el clásico bucle orbital interno a una velocidad $\Omega \approx 0.5$ (sobre todo debido al componente 2X) es prácticamente independiente de la orientación angular β entre la dirección de la grieta y desbalance; vea Fig. 4-12-Fig. 4-22. Por otra parte este modelo también produce el fenómeno de bucles externos-internos y evolución orbital del ángulo del bucle interno alrededor de 1/3 y 1/2 de la primera resonancia, divulgado en la literatura por Sinou y Lees [178], la evolución de los bucles externos-internos es ilustrada en las Fig. 4-14, Fig. 4-18 y Fig. 4-20. Por otra parte, ocurre una variación significativa de la respuesta tanto en magnitud como en ángulo de fase debido al ángulo relativo entre los vectores de la grieta y el desbalance, de tal modo que afectan las formas de las órbitas y su correspondiente evolución.

Según lo esperado, el componente síncrono de la respuesta es el más influenciado por la variación del ángulo β , puede observarse que las amplitudes de vibración alrededor de la resonancia pueden aumentar o inclusive disminuir dependiendo de la orientación entre la grieta y el desbalance. Las orbitas alrededor de la resonancia, tanto en el disco como en las chumaceras, muestran una forma elíptica síncrona producida principalmente por el desbalance. Es importantísimo notar que a la velocidad crítica y a velocidades cercanas a esta, tanto las orbitas del disco como las de las chumaceras muestran notables cambios de orientación debidos a los cambios en los ángulos de fase de las señales ocasionados por la variación del ángulo β , lo cual es importante considerar en la tarea de detección de grietas.

No obstante, la detección de grietas a baja frecuencia (gama sub-crítica de velocidad) es posible, puesto que para parámetros del sistema típicos los valores las amplitudes de las resonancias a fracciones iguales ó menores a la mitad de la velocidad crítica normalizada, son en general significativas. Es decir, para tamaños medianos ó grandes de grieta la vibración y las formas de la órbita a resonancias más bajas son generalmente bastante grandes como para ser medidas, procesadas y analizadas. De este modo la detección de grieta a la mitad del tramo del eje, obstaculizada por la interacción entre desbalance y grieta, llega a ser mucho menos difícil. Note el gran traslape de órbitas que ocurre en todas figuras a resonancias más bajas.

Para grietas incipientes, es preferible la supervisión de vibración en la localización del disco; alternativamente si las medidas se restringen a las localizaciones de las chumaceras, se recomienda hacer un promedio de la amplitud y filtrado de la señal de la respuesta.

Análisis de los diagramas de bode para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance

En las siguientes graficas (Fig. 4-23 a Fig. 4-34) se estudia la respuesta vibratoria contra velocidad de operación (arranque ó paro de la máquina) a esperar ante diferentes profundidades de grieta cuando la importante orientación angular relativa existente entre el vector desbalance del disco y el eje ξ de la dirección de la grieta es variada y computada para las diferentes direcciones ortogonales. Las dos primeras configuraciones de rotores propuestos son estudiadas con el fin de caracterizar los patrones de vibración de rotores agrietados

Según lo visto, la grieta y el desbalance residual (siendo ambos vectores desconocidos) pueden ocultar la presencia de la grieta y hacer difícil el uso de técnicas tradicionales de detección. Sin embargo, la existencia de resonancias locales en diversos subarmónicos o súper-armónicos racionales o combinaciones de estos, permite una buena caracterización de los patrones de vibración reduciendo la influencia de la interacción entre vectores desconocidos; por ejemplo, magnitudes y orientaciones del desbalance residual y fisura del eje. Para la detección de grieta los resultados indican que en vez de los componentes 1X y 2X, el análisis de las resonancias locales restantes debe tener prioridad, esto debido a la interacción entre la grieta y el desbalance residual y a los múltiples orígenes 2X inducidos. Por lo tanto se enfatiza el análisis de las resonancias locales y la evolución orbital alrededor de 1/2, 1/3 y 1/4 de la velocidad crítica para las diversas orientaciones entre grieta y desbalance.

Puesto que la mayoría de las máquinas tienen solamente medidores de vibración en los soportes de los cojinetes, los diagramas de Bode como se muestra en la Fig. 4-24 incluyen las respuestas en la localización de la chumacera en donde el patrón de vibración exhibe amplitudes de resonancias locales de magnitud similar. Alternativamente dependiendo del ángulo β alrededor de la velocidad crítica fundamental las amplitudes exhiben claramente diferencias muy significativas, a veces tan grandes como un orden de magnitud de diferencia (véase la Fig. 4-28). Las variaciones de la amplitud atribuidas a las orientaciones entre desbalance y grieta afectan todas las direcciones octogonales, sin embargo la sensibilidad de la grieta es más fuerte a lo largo de la dirección de la carga fija (peso). Por ejemplo en Fig. 4-25 y Fig. 4-26 compare las amplitudes de vibración ΔX_i y ΔY_i ($i=d, j$),

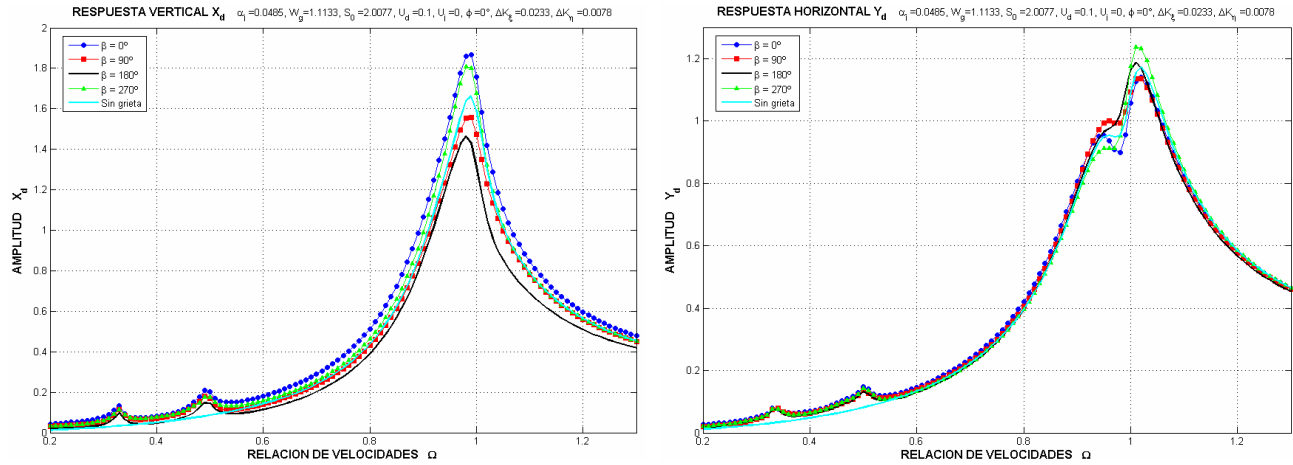


Fig. 4-23 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración I, profundidad de grieta 12.5 %

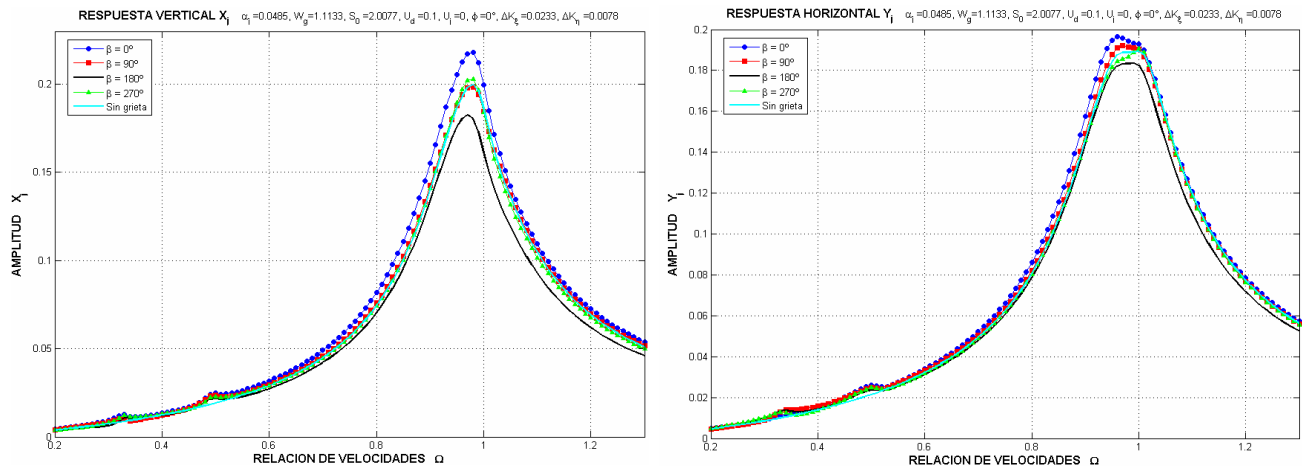


Fig. 4-24 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración I, profundidad de grieta 12.5 %

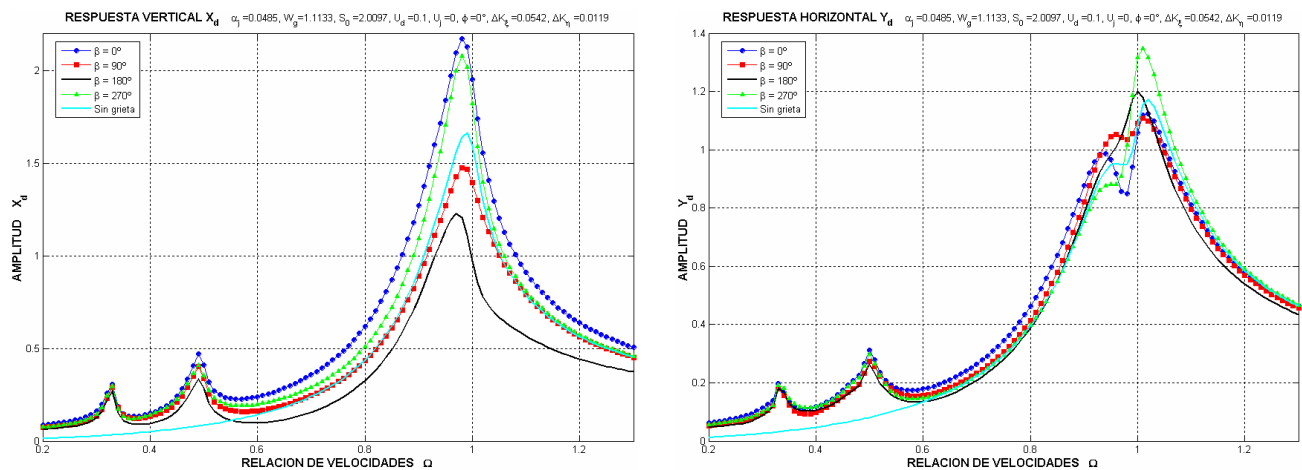


Fig. 4-25 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración I, profundidad de grieta 25 %

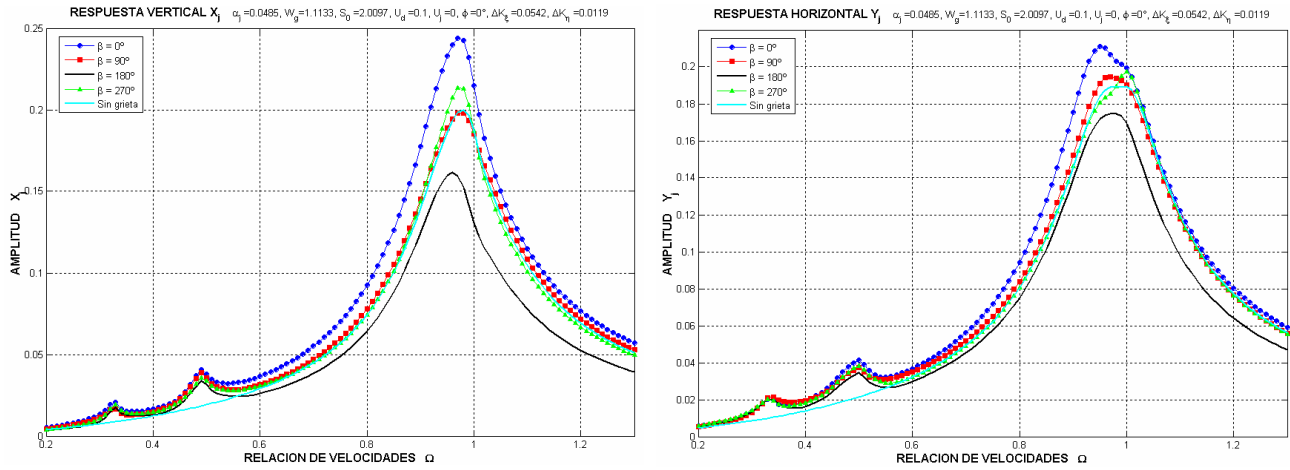


Fig. 4-26 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración I, profundidad de grieta 25 %

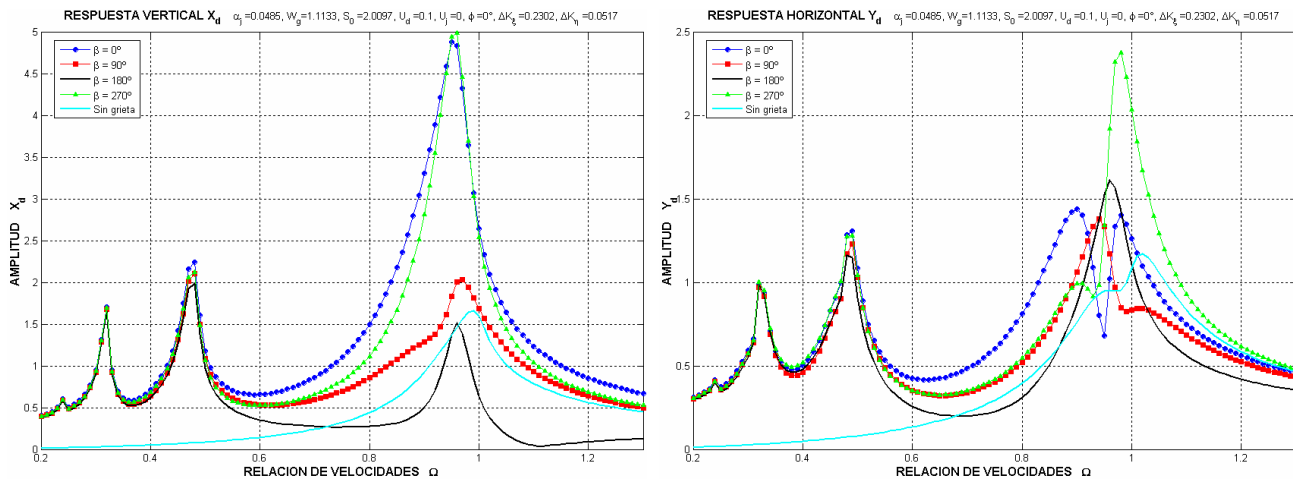


Fig. 4-27 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración I, profundidad de grieta 50 %

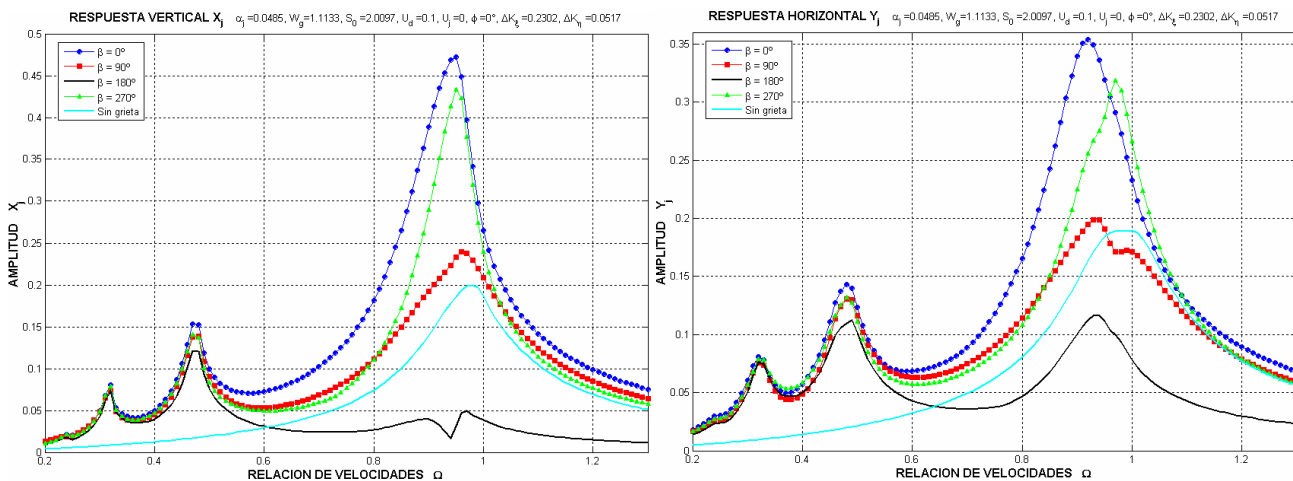


Fig. 4-28 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración I, profundidad de grieta 50 %

En las gráficas anteriores (Fig. 4-23-Fig. 4-28) los picos de resonancia local en ambas direcciones, vertical y horizontal, muestran pequeñas pero significativas diferencias en magnitud para las diferentes orientaciones entre grieta y desbalance; también pueden ser observadas diferencias claras en los dos transductores de vibración ortogonales. Las últimas diferencias pueden ser atribuidas al efecto del peso y a las características asimétricas así como al amortiguamiento existente en las chumaceras.

Se nota una marcada diferencia entre los rotores fracturados y los no fracturados así podemos decir que los rotores fracturados presentan señales de vibración compleja, mientras que las respuestas de vibración de rotores íntegros son señales de vibración prácticamente simple.

Según lo ilustrado en las Fig. 4-23-Fig. 4-28, la grieta y el desbalance residual (ambos siendo vectores desconocidos) pueden enmascarar la presencia de la grieta y hacer las técnicas tradicionales de detección difíciles. Afortunadamente tal interacción afecta sobre todo el componente de frecuencia asociado a la velocidad de operación 1X, y en menor grado el 2X, 3X y 4X. Puesto que el componente 2X también se atribuye al desalineamiento y a otros síntomas, la presencia de 2X no representa inequívocamente la existencia de una grieta.

Diagramas de Bode para la configuración II, $U_d = 0.08$

En las siguientes figuras, se ilustran las amplitudes de vibración horizontales y verticales en el disco y las chumaceras para diferentes profundidades de grieta trazadas como funciones de la frecuencia de operación Ω para las diversas orientaciones ortogonales entre los vectores grieta y desbalance, utilizando la configuración II.

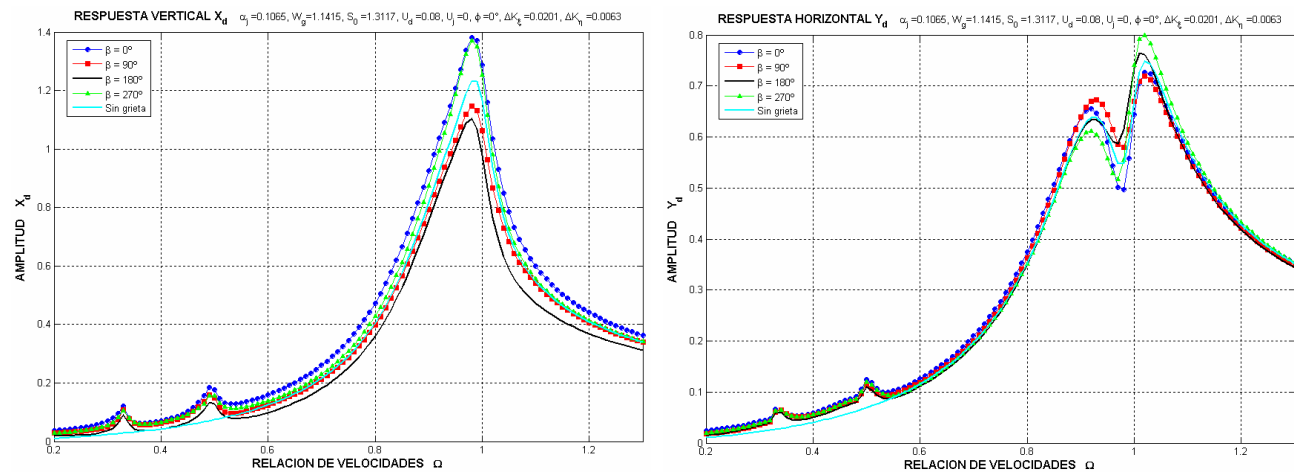


Fig. 4-29 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración II, profundidad de grieta 12.5 %

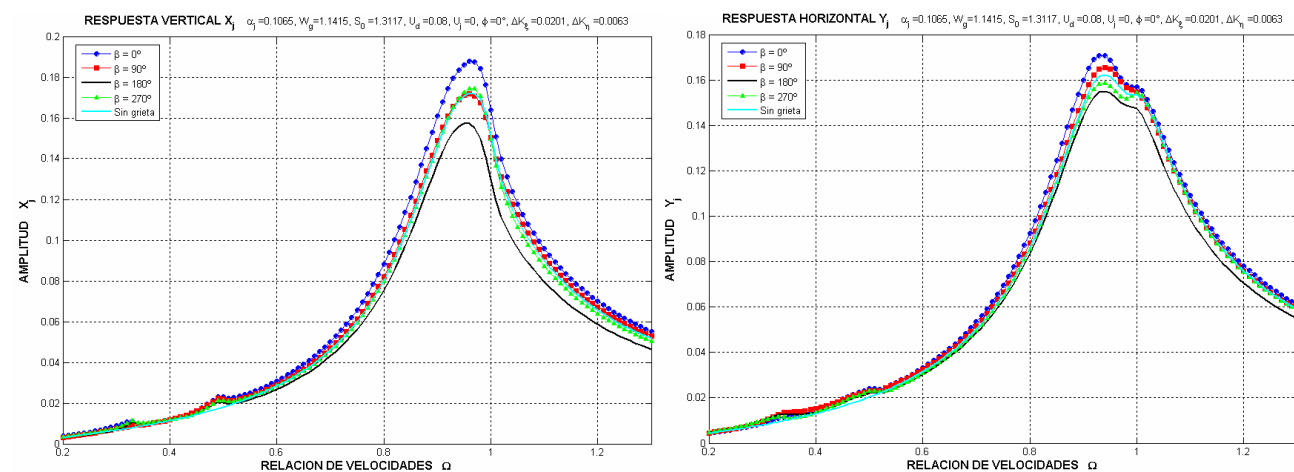


Fig. 4-30 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración II, profundidad de grieta 12.5 %

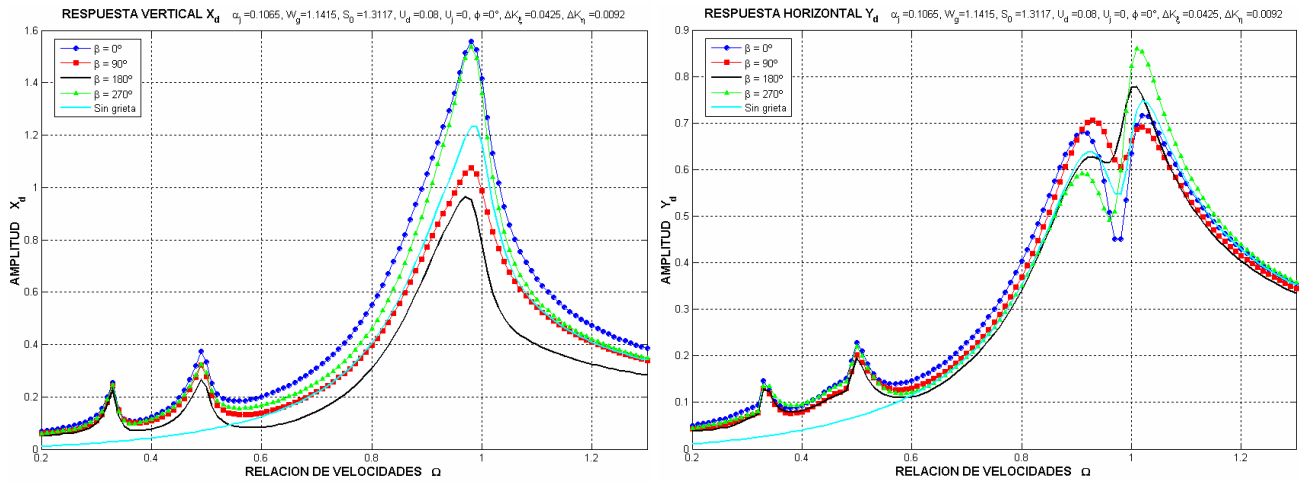


Fig. 4-31 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración II, profundidad de grieta 25 %

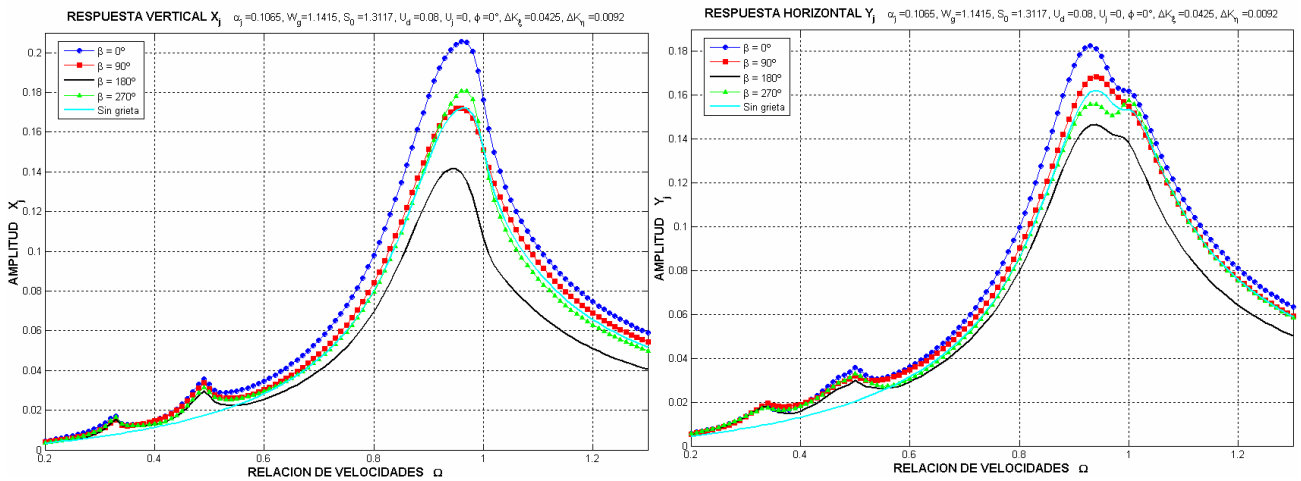


Fig. 4-32 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración II, profundidad de grieta 25 %

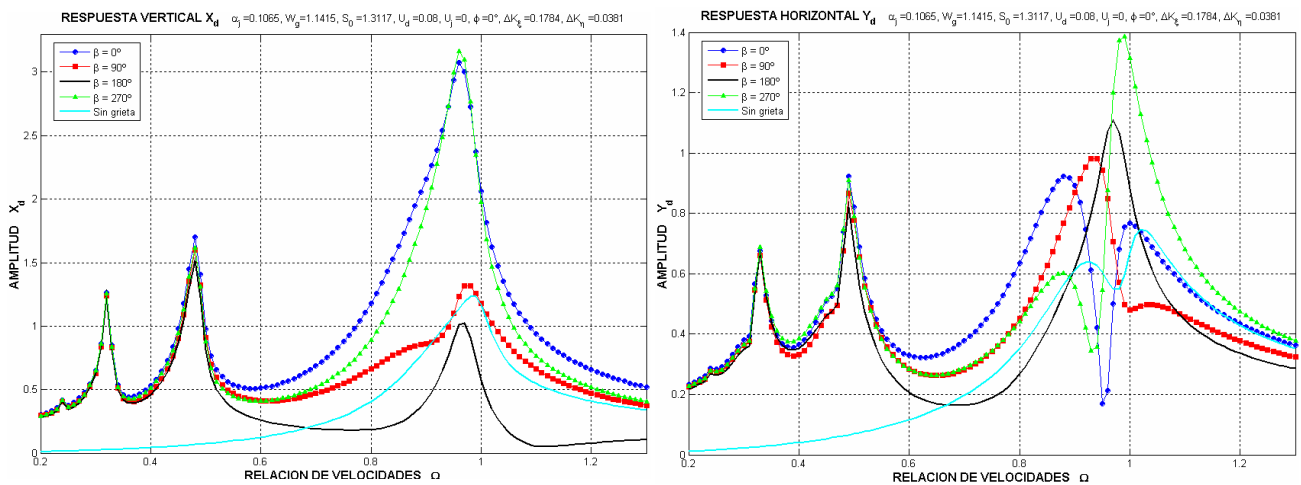


Fig. 4-33 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración II, profundidad de grieta 50 %

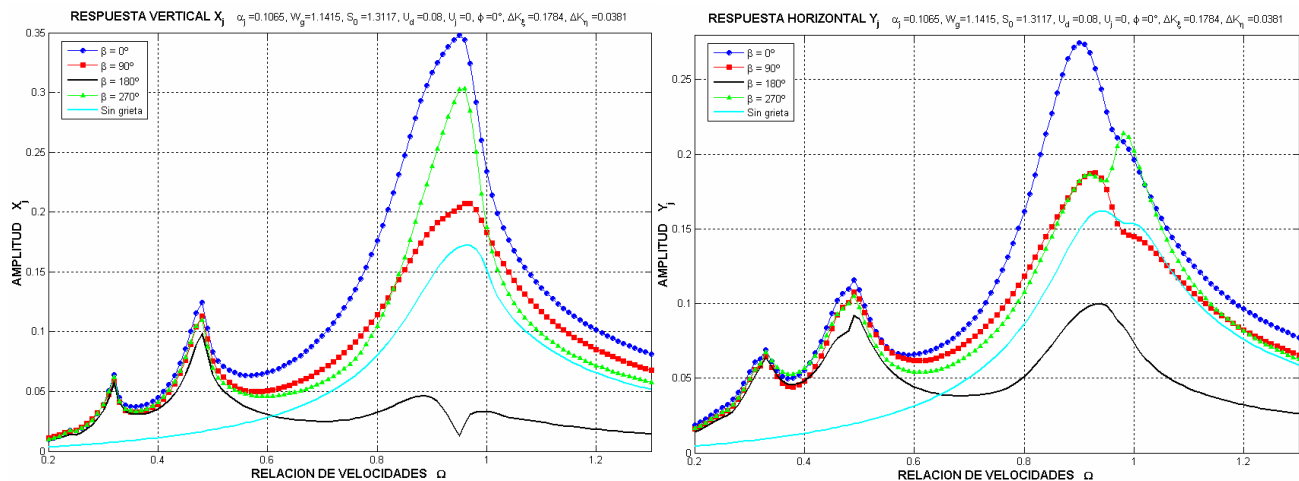


Fig. 4-34 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes valores de orientación entre grieta y desbalance, configuración II, profundidad de grieta 50 %

Según lo esperado, el componente síncrono de la respuesta es el más influenciado por esta variación angular. Resulta bastante interesante notar que la simple reorientación de los ángulos del desbalance residual y de la grieta producen amplitudes de vibración más pequeñas en comparación a una profundidad de grieta exactamente igual. De esta manera, ahora se podrían examinar dos características importantes del sistema agrietado, sus formas de orbitas afectadas por β (Fig. 4-11-Fig. 4-22), así como la evolución de la vibración durante un barrido de frecuencia de operación para el rango de $0.20 < \Omega < 1.3$ (Fig. 4-23-Fig. 4-34)

Es conveniente mencionar una vez más que dependiendo del ángulo de orientación relativo entre los vectores del desbalance y la grieta, sobre todo el componente 1X puede aumentar o incluso disminuir en magnitud, de tal modo que deformara considerablemente las formas de las órbitas en el disco y las chumaceras. Estas amplitudes máximas y mínimas están desfasadas π rad a lo largo de β ; sin embargo tal máximo y mínimo varían en su localización con respecto a la velocidad.

Con excepción de las resonancias locales alrededor de $\Omega \approx 1/2, 1/3$ y $1/4$ cada otro pico de resonancia que ocurre dentro del rango $0.2 < \Omega < 1.3$ exhiben patrones de vibración y órbitas suficientemente distintos. Sin embargo todas las resonancias locales dentro de la gama de frecuencia $0.2 < \Omega < 0.6$, se pueden postprocesar y analizar correctamente para revelar la presencia de la grieta. Por lo tanto, es posible la detección de grietas en frecuencias bajas (rango de velocidad subcrítico), puesto que para parámetros de sistema típicos los valores de las amplitudes de resonancia en fracciones igual o menor que la mitad de la velocidad crítica normalizada, son en general significativos. Es decir, para grietas medianas o largas las magnitudes de vibración y las formas de las órbitas en resonancias más bajas, son generalmente bastante grandes para ser medidas, procesadas y analizadas. De este modo, la detección de la grieta a la mitad del tramo del eje obstaculizada por la interacción entre grieta y desbalance llega a ser mucho menos difícil.

Del análisis previo, son sacados los siguientes síntomas característicos de un rotor agrietado:

- Los componentes espectrales 1X, 2X y 3X, especialmente los primeros dos y sus relativas amplitudes dependerán de proximidad que tengan a una resonancia.
- El componente 1X puede aumentar o incluso disminuir en magnitud, dependiendo del ángulo de orientación relativo entre la grieta y el desbalance del disco.
- Hay resonancias subarmónicas o resonancias locales (picos en la respuesta) cuando la velocidad de rotación coincide con una fracción racional de la velocidad crítica.
- Los resultados muestran que para la mejor excitación de la señal de información, el eje debe de correr a la mitad de la primera velocidad crítica o adquirir señales de vibración durante el arranque o paro del rotor.

Análisis de los diagramas de Bode para diferentes profundidades de grieta

De las siguientes figuras puede observarse que para la mayoría de los casos las amplitudes de las respuestas 1X, 2X, 3X pueden incrementar en relación al tamaño de la grieta con excepción del caso donde el ángulo de orientación relativo entre la dirección de la grieta y el desbalance residual del disco (β) es igual a 180° , en este caso la amplitud de la resonancia 1X disminuye conforme la grieta aumenta en profundidad (Fig. 4-40).

Por otro lado puede inferirse que grietas de profundidad relativa menor que 0.25 (25%) pueden ser identificadas solamente en un ambiente tranquilo y por un observador hábil. Para profundidades por arriba del 25% la identificación es relativamente fácil. Para aplicaciones industriales este nivel de detectabilidad de grieta es bastante adecuado para la mayoría de las aplicaciones. Sin embargo, a través de la toma cuidadosa de mediciones y un buen conocimiento del comportamiento de un eje no agrietado, podría hacerse posible la detección de grietas de profundidad relativa del orden de 0.1.

Diagramas de Bode para la configuración I, $U_d = 0.1$

Las siguientes figuras muestran los diagramas de Bode del disco y chumaceras obtenidos usando los parámetros calculados para la configuración I para diferentes profundidades de grieta.

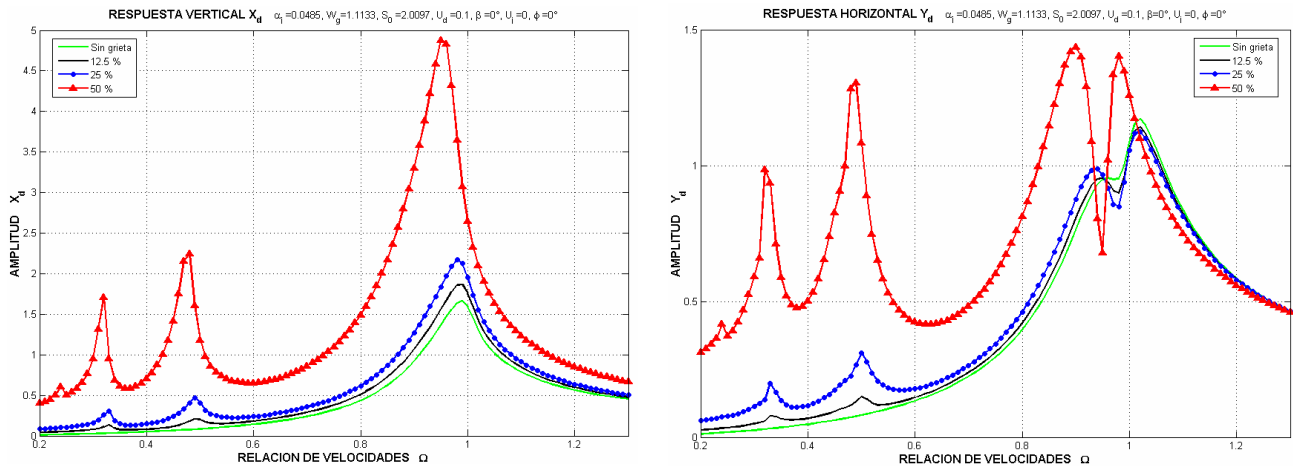


Fig. 4-35 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes profundidades de grieta, configuración I, $\beta = 0^\circ$.

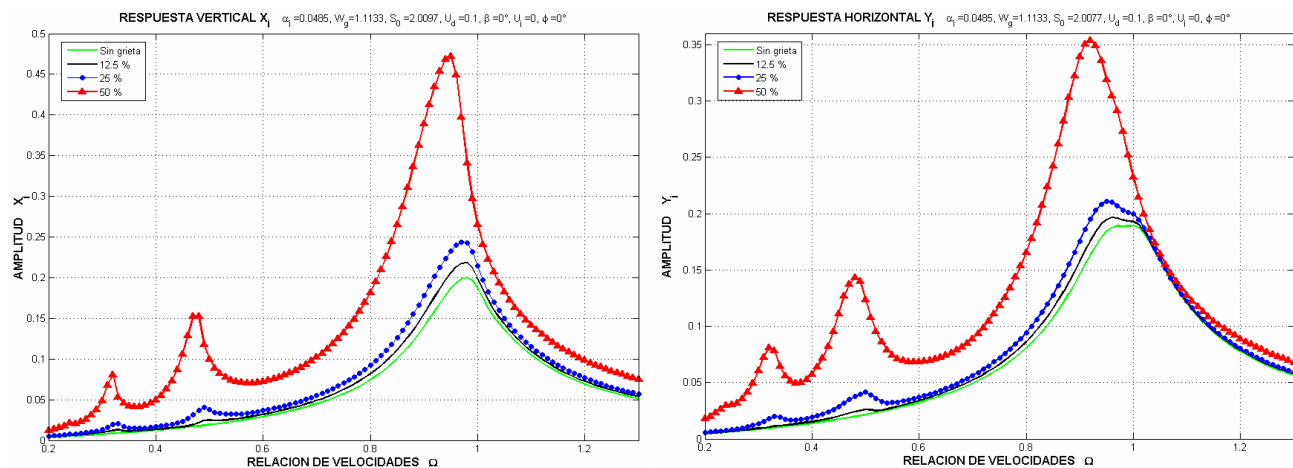


Fig. 4-36 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, configuración I, $\beta = 0^\circ$.

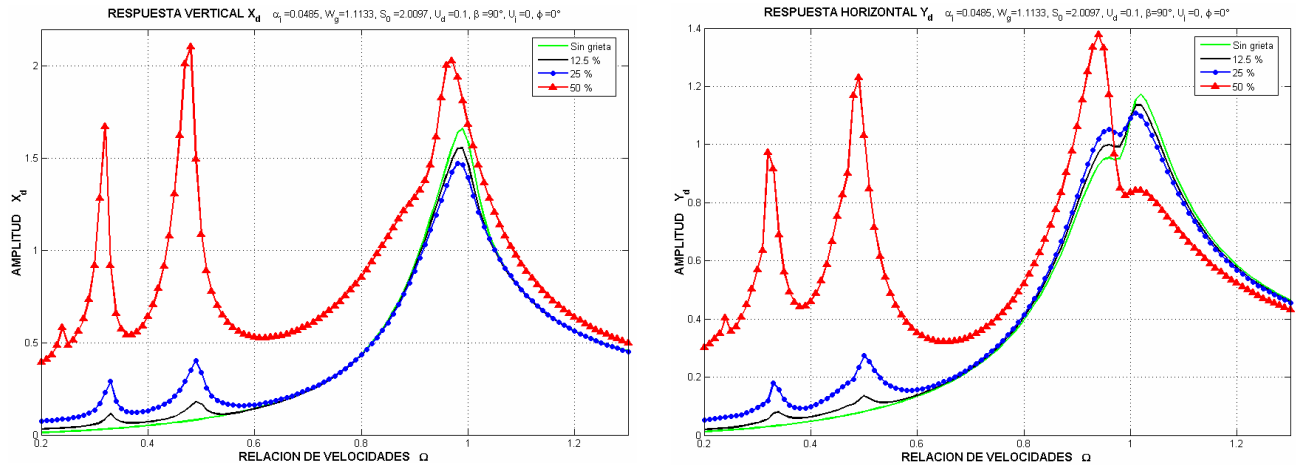


Fig. 4-37 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes profundidades de grieta, configuración I, $\beta = 90^\circ$.

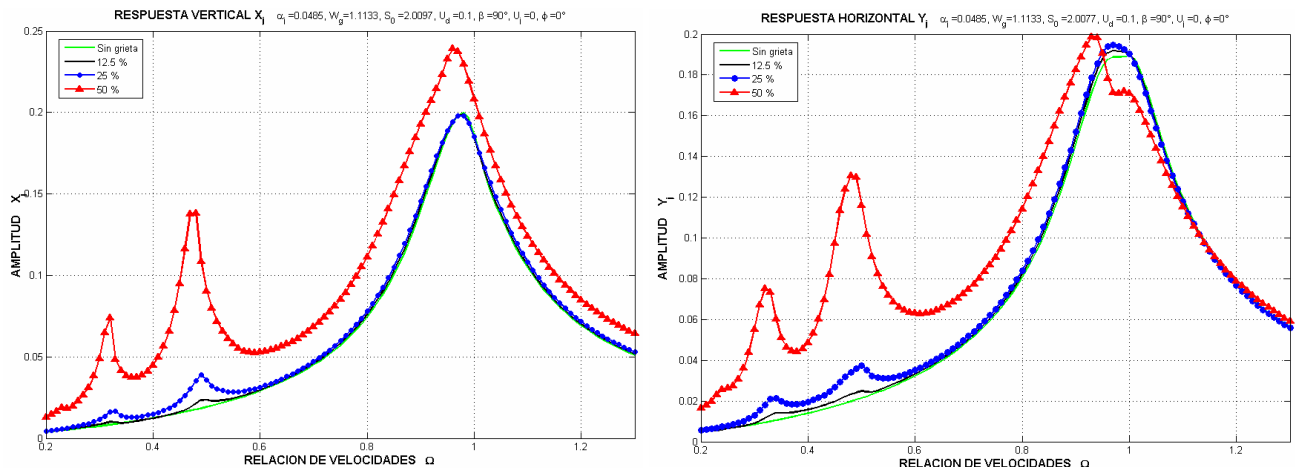


Fig. 4-38 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, configuración I, $\beta = 90^\circ$.

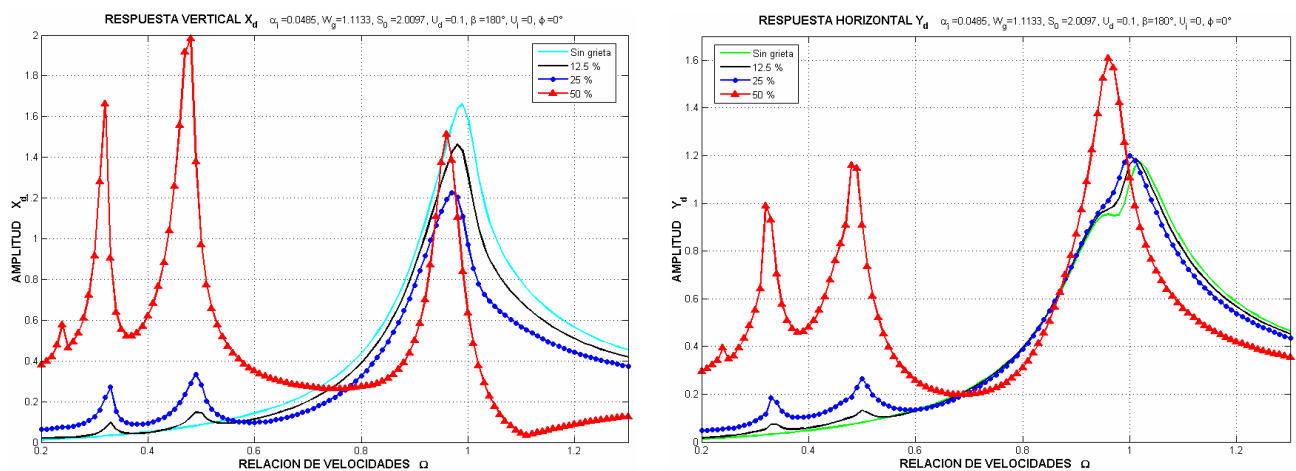


Fig. 4-39 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes profundidades de grieta, configuración I, $\beta = 180^\circ$.

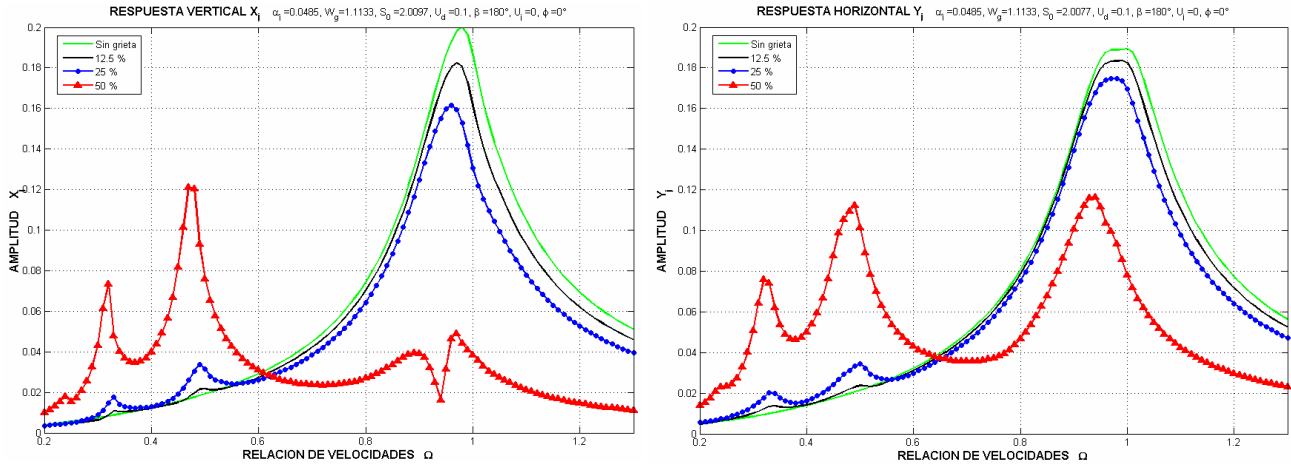


Fig. 4-40 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, configuración I, $\beta = 180^\circ$.

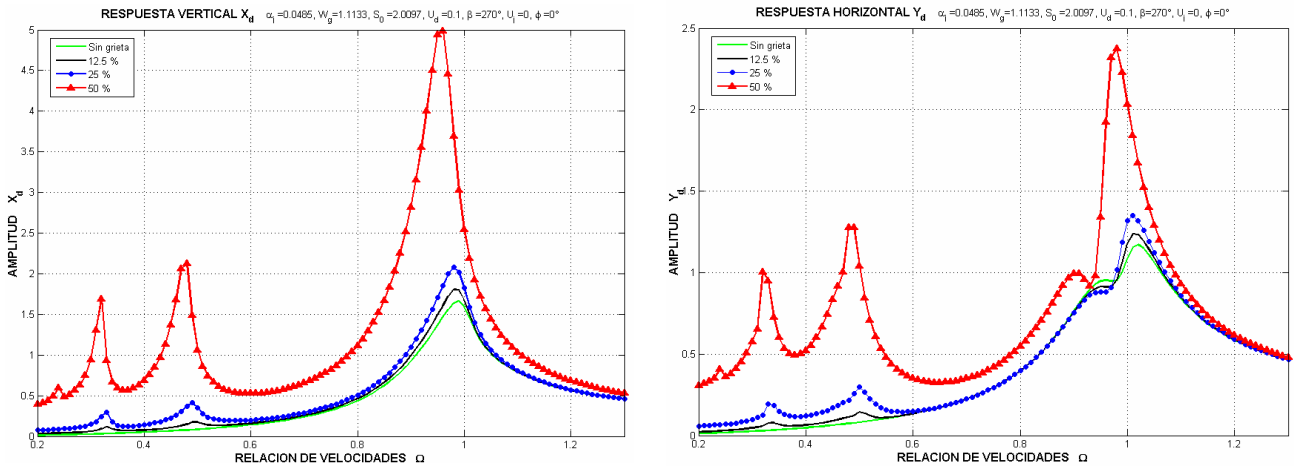


Fig. 4-41 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes profundidades de grieta, configuración I, $\beta = 270^\circ$.

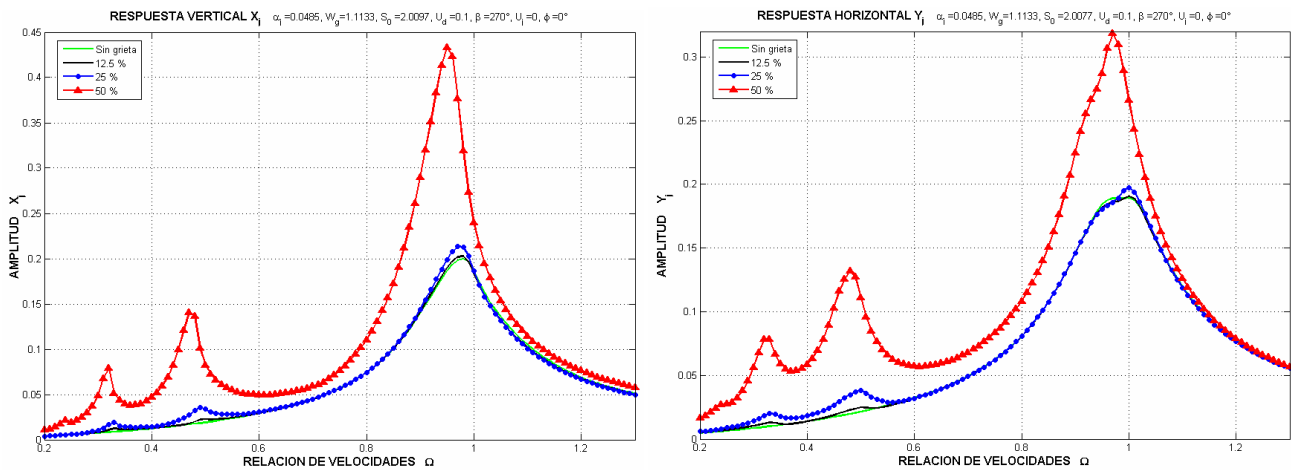


Fig. 4-42 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, configuración I, $\beta = 270^\circ$.

Las figuras anteriores muestran la inexistente presencia de los componentes 2X y 3X para un eje sin grieta mientras que los ejes agrietados muestran componentes 2X y 3X e inclusive 4X de mayor magnitud a medida que aumenta la profundidad de la grieta sin importar la posición del desbalance. Esto corrobora una vez más la importancia de estos componentes en la detección de grietas.

Al aumentar la influencia de la grieta principalmente incrementando la profundidad de ésta o al cambiar la orientación existente entre grieta y desbalance, es evidente que la amplitud de los armónicos de alto orden como son 2X, 3X y 4X se incrementan también. Por lo tanto, los armónicos de alto orden pueden ser considerados como un signo de propagación de grieta.

Puede observarse que en los casos donde la orientación relativa entre la dirección de la grieta y el desbalance residual (β) es igual a 180° la componente 1X disminuye si la profundidad de la grieta es mayor (ver Fig. 4-39 y Fig. 4-40), se tiene que la mayor amplitud corresponde a un eje sin grieta y esta disminuye con una grieta del 12.5 % y así sucesivamente a mayores profundidades. Este efecto es visible alrededor de $\Omega = 1$ que corresponde a la velocidad de resonancia. Para la componente 2X, manifestada como un máximo de amplitud alrededor de $\Omega = 0.5$, no se observa la misma disminución de amplitud sino por lo contrario aumenta si la profundidad de la grieta aumenta

Diagramas de Bode para la configuración II, $U_d = 0.08$

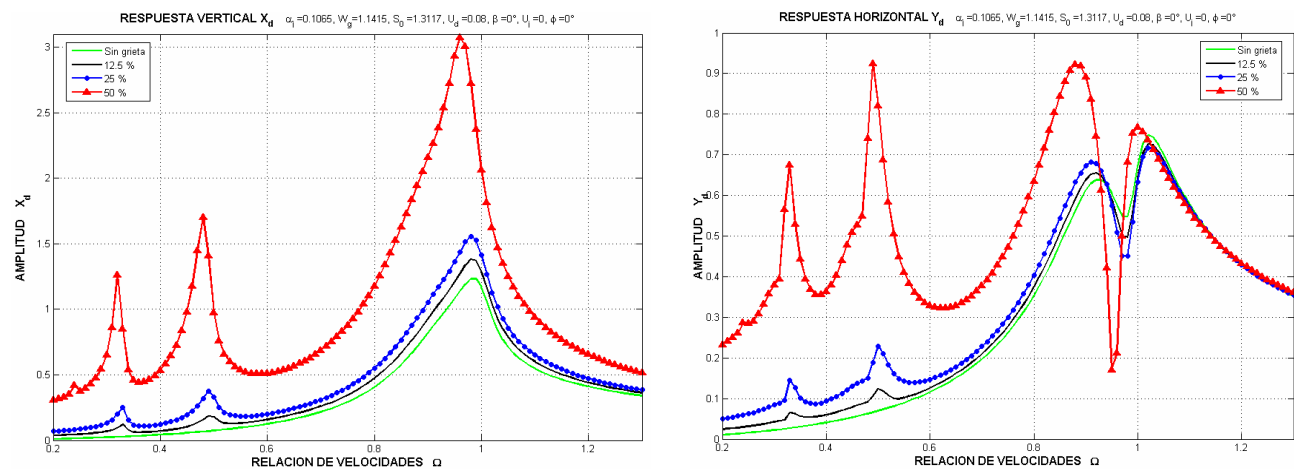


Fig. 4-43 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes profundidades de grieta, configuración II, $\beta = 0^\circ$.

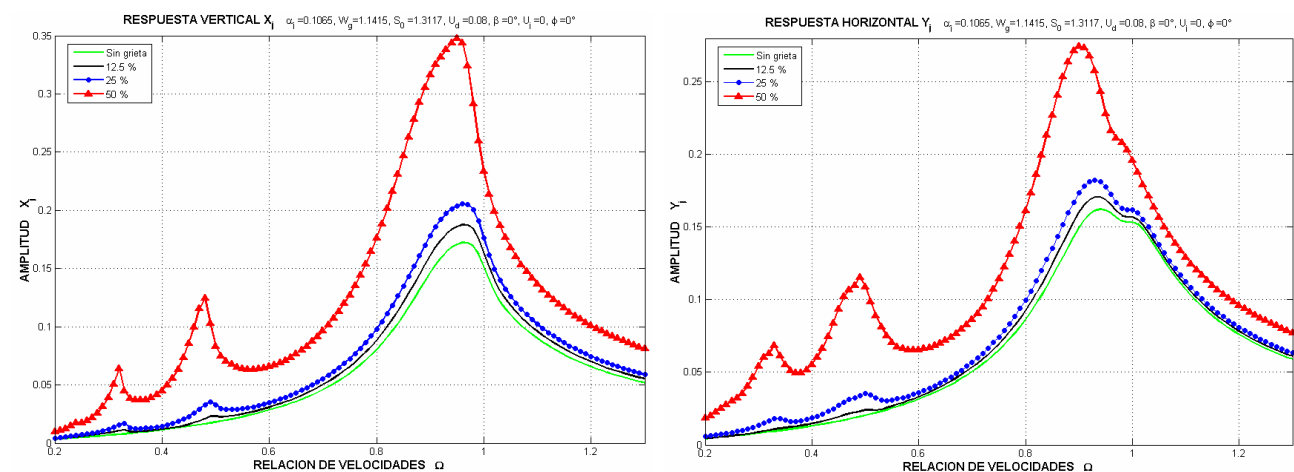


Fig. 4-44 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, configuración II, $\beta = 0^\circ$.

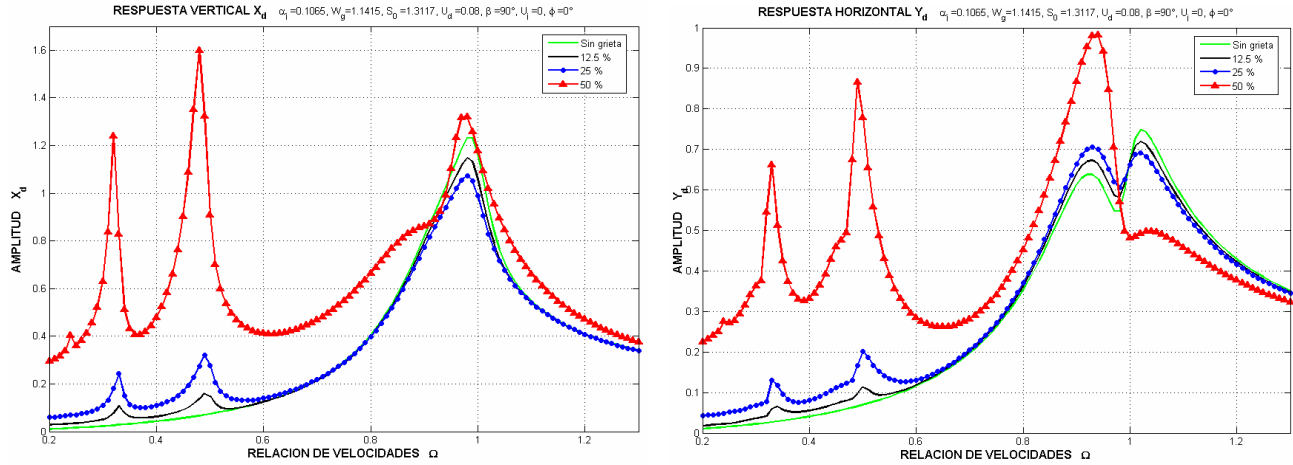


Fig. 4-45 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes profundidades de grieta, configuración II, $\beta = 90^\circ$.

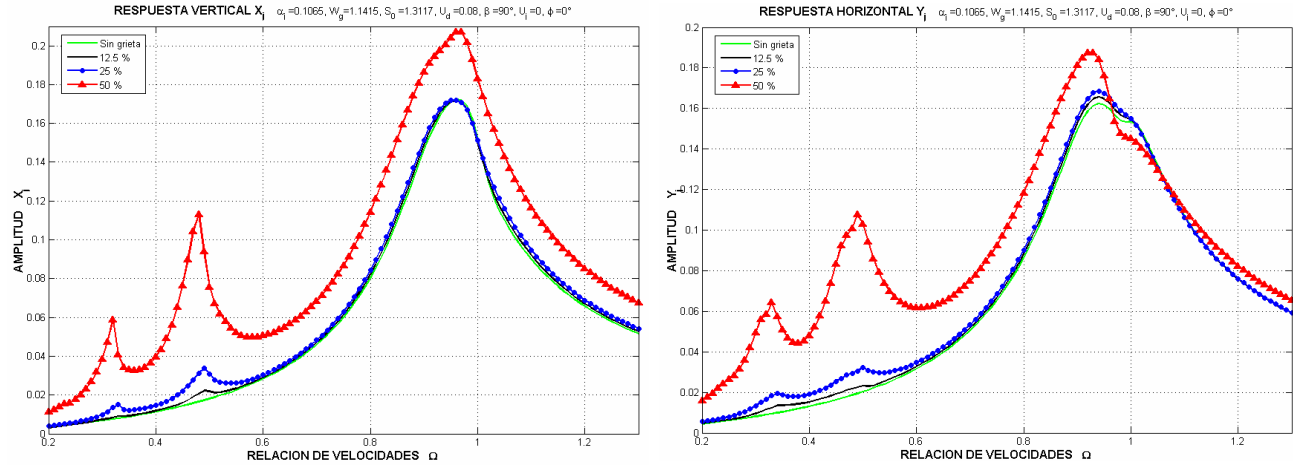


Fig. 4-46 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, configuración II, $\beta = 90^\circ$.

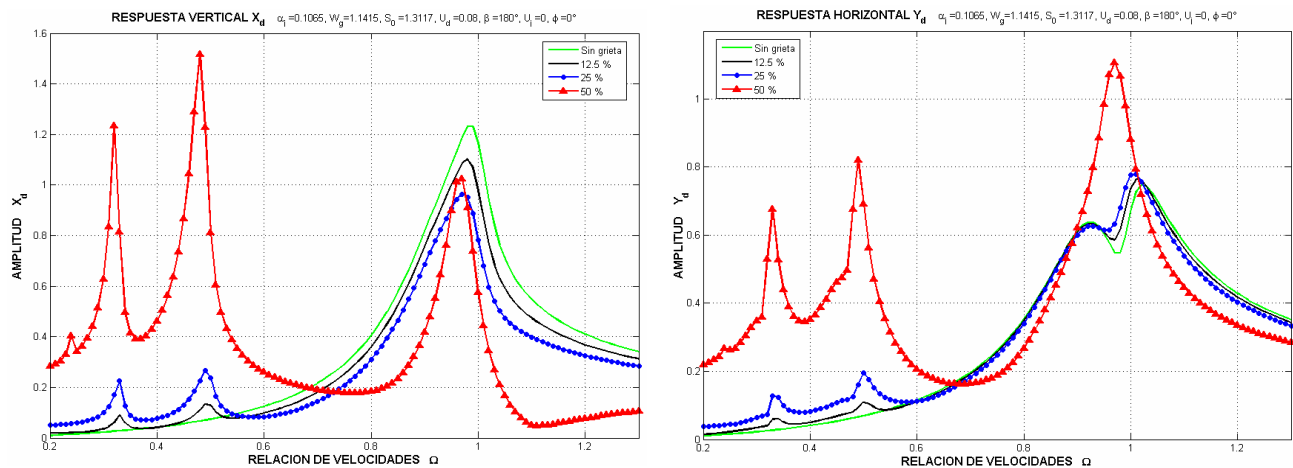


Fig. 4-47 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes profundidades de grieta, configuración II, $\beta = 180^\circ$.

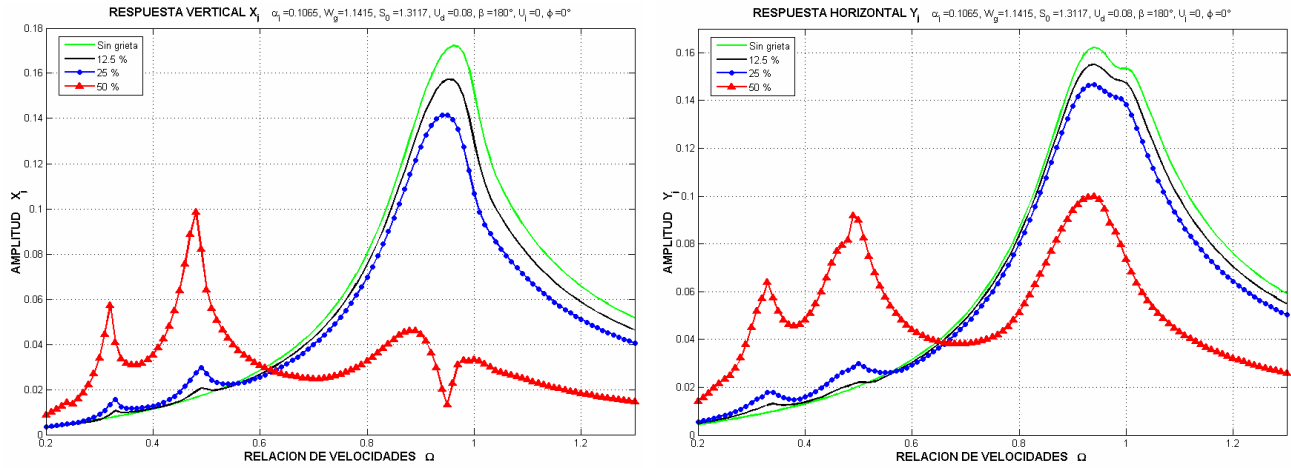


Fig. 4-48 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, configuración II, $\beta = 180^\circ$.

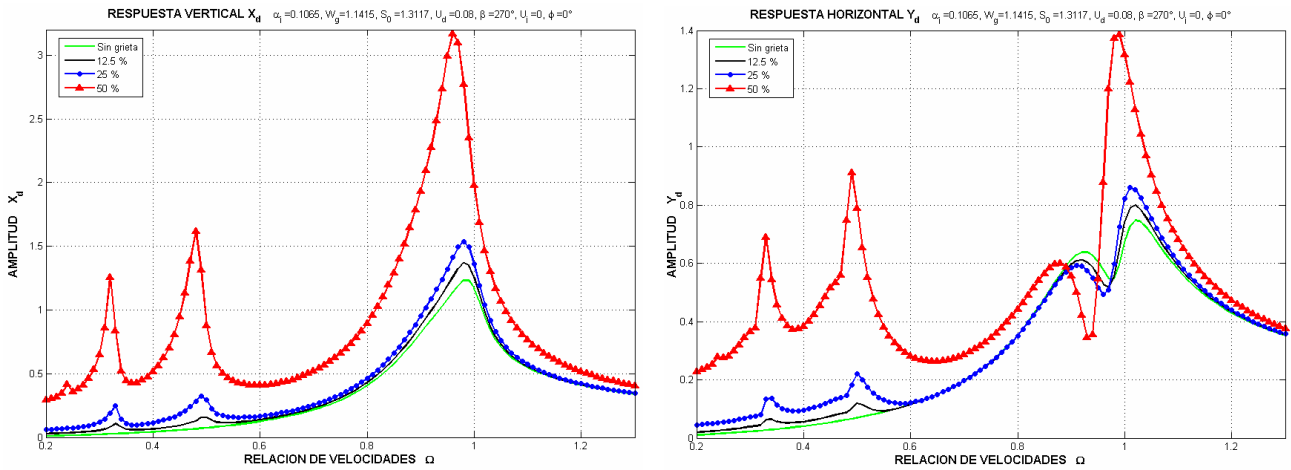


Fig. 4-49 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes profundidades de grieta, configuración II, $\beta = 270^\circ$.

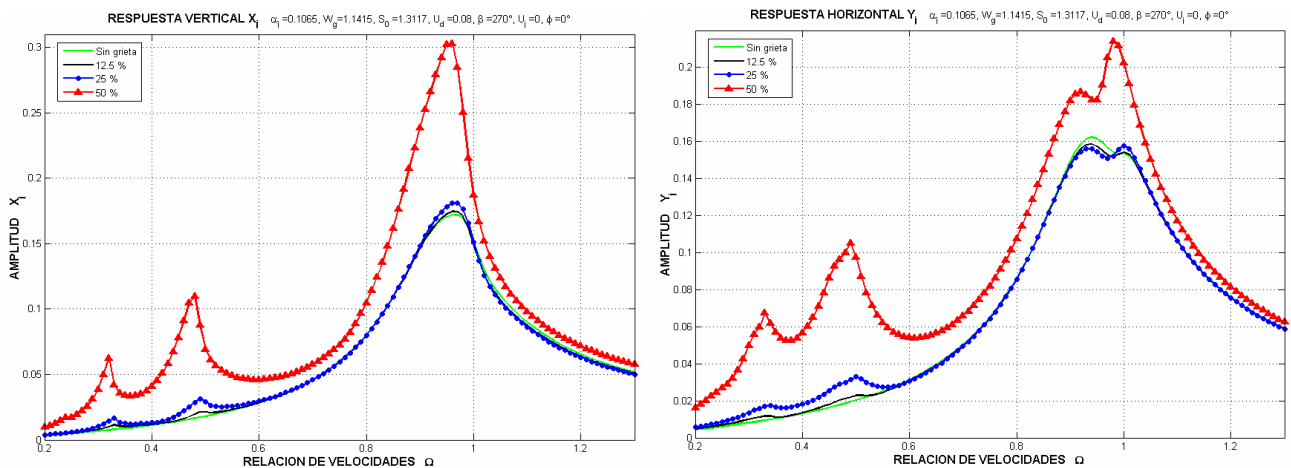


Fig. 4-50 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, configuración I, $\beta = 270^\circ$.

De el análisis de las figuras anteriores es encontrado y presentado en los diagramas de Bode que el comportamiento no lineal de la rigidez del eje aumenta con la profundidad de la grieta, y afecta incluso fuertemente las amplitudes de vibración.

En el caso del eje con la grieta a $\beta=0^\circ$ la componente 1X aumenta de acuerdo con la profundidad de la grieta, así tenemos que para un eje sin grieta corresponde la menor amplitud y esta se incrementa con una grieta de 12.5 % y sucesivamente con mayores profundidades. El efecto más visible se encuentra en $\Omega = 1$, velocidad de resonancia. El efecto contrario se presenta cuando el ángulo $\beta =180^\circ$ ya que cuando se analizan los datos generados para la posición de 180° se puede observar que en este caso la grieta parece ser beneficiosa pues disminuye la amplitud de la vibración conforme se va haciendo más profunda.

Incluso para el sencillo caso de una viga simplemente apoyada los valores ΔK_x y ΔK_y son fuertemente dependientes de los parámetros adimensionales de profundidad de grieta a/d , y en un menor grado a l/d : es decir, la profundidad de grieta y la longitud del eje ambas normalizadas por el diámetro del eje. La rigidez periódica de la viga varía no-linealmente aumentando altamente con la profundidad de la grieta, y disminuyendo suavemente con la longitud del eje [57]. Para detalles adicionales sobre la dependencia de la profundidad de la grieta y la longitud del eje así como la manera en la cual se derivan, el lector puede referirse a [57].

La rigidez del eje aumenta no-linealmente con la profundidad de la grieta, mientras que las amplitudes de las resonancias locales aumentan más drásticamente con tal profundidad de grieta; por ejemplo, variando la profundidad de la grieta dos veces (25% a 50%) aumenta el ΔK_x más de cuatro veces, mientras que las amplitudes a la mitad de la resonancia crítica llegan a ser 5.4 veces más grandes. Lo anterior explica porqué en operación en campo donde se monitorean las vibraciones de los cojinetes, la presencia de una grieta generalmente llega a ser clara solamente después de que alcanza del 30% al 40% del diámetro del eje.

Análisis de los diagramas de Bode para diferentes magnitudes de desbalance residual.

En las siguientes graficas se presenta un caso donde manteniendo fija la profundidad de la grieta (25 %) se hace variar la magnitud del desbalance residual desde $U_d = 0, 0.05, 0.1$ y 0.15 y haciendo uso de los parámetros de la configuración I. En este análisis se puede observar la influencia de la magnitud del desbalance residual del disco en la respuesta vibratoria de un rotor agrietado; además, aunque el caso cuando $U_d = 0$ en la práctica representaría un caso irreal este permite la caracterización de la respuesta vibratoria debida a la sola presencia de la grieta.

A través del análisis de las siguientes figuras (Fig. 4-51-Fig. 4-58) resulta obvio que la vibración debida al desbalance es dominante cuando la fuerza centrífuga es mucho más grande que el disturbio por la grieta. Cuando la fuerza centrífuga es comparable o menor que el efecto de la grieta las propiedades debidas a esta aparecen más marcadamente en la señal vibratoria.

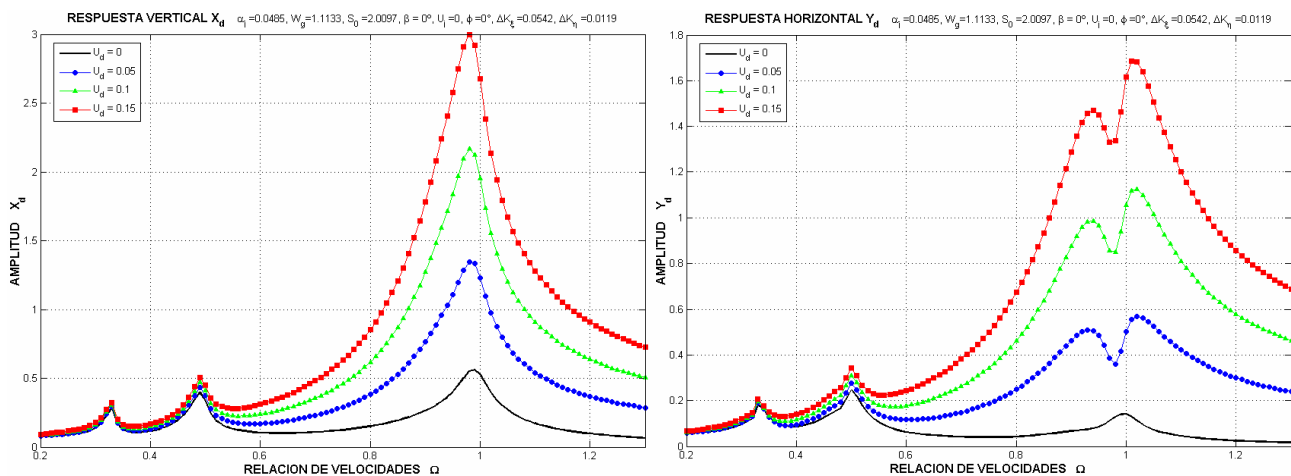


Fig. 4-51 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes magnitudes de desbalance, configuración I, $\beta = 0^\circ$, profundidad de grieta 25 %.

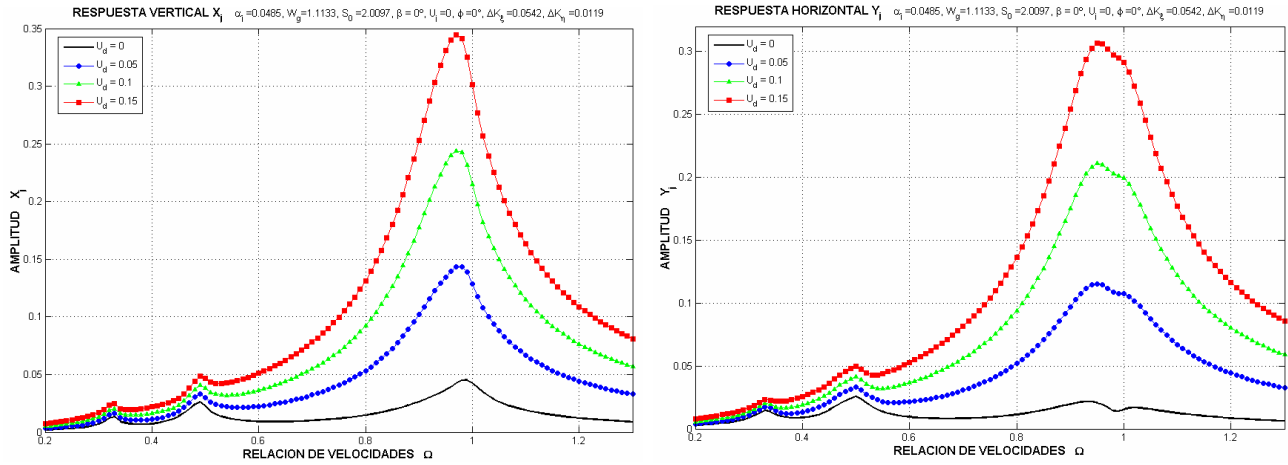


Fig. 4-52 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes magnitudes de desbalance, configuración I, $\beta = 0^\circ$, profundidad de grieta 25 %.

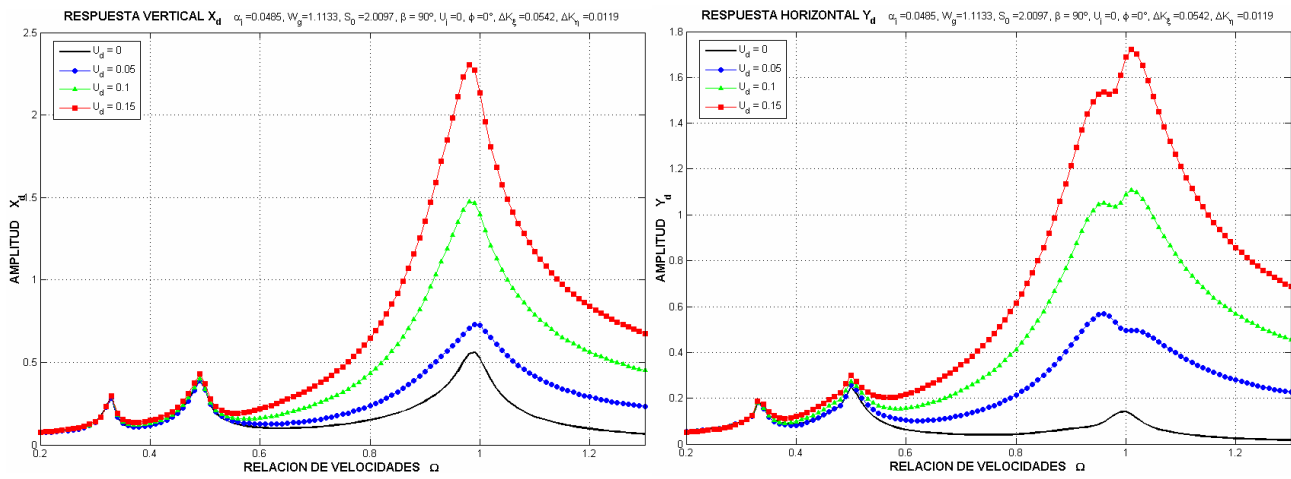


Fig. 4-53 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes magnitudes de desbalance, configuración I, $\beta = 90^\circ$, profundidad de grieta 25 %.

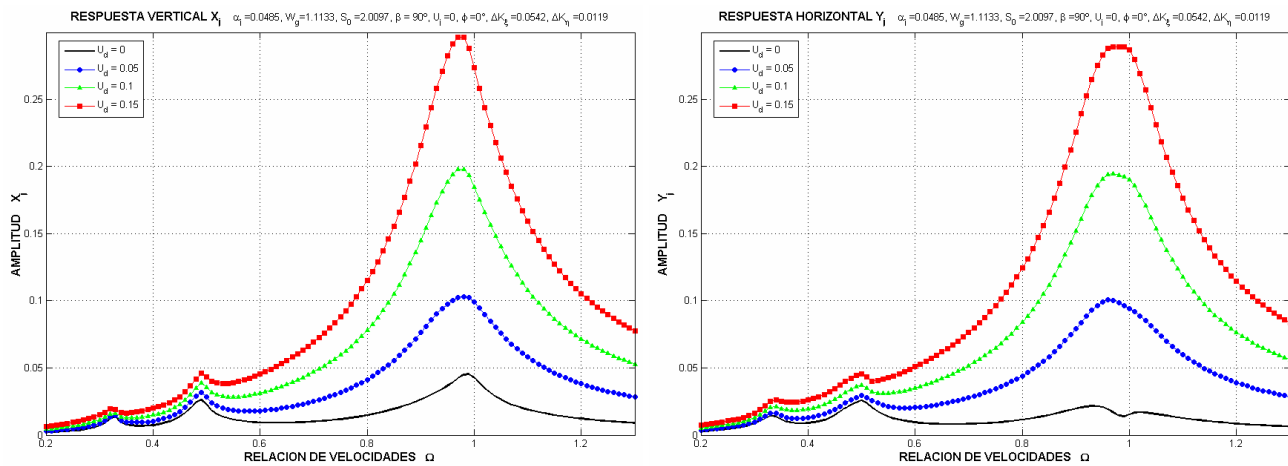


Fig. 4-54 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes magnitudes de desbalance, configuración I, $\beta = 90^\circ$, profundidad de grieta 25 %.

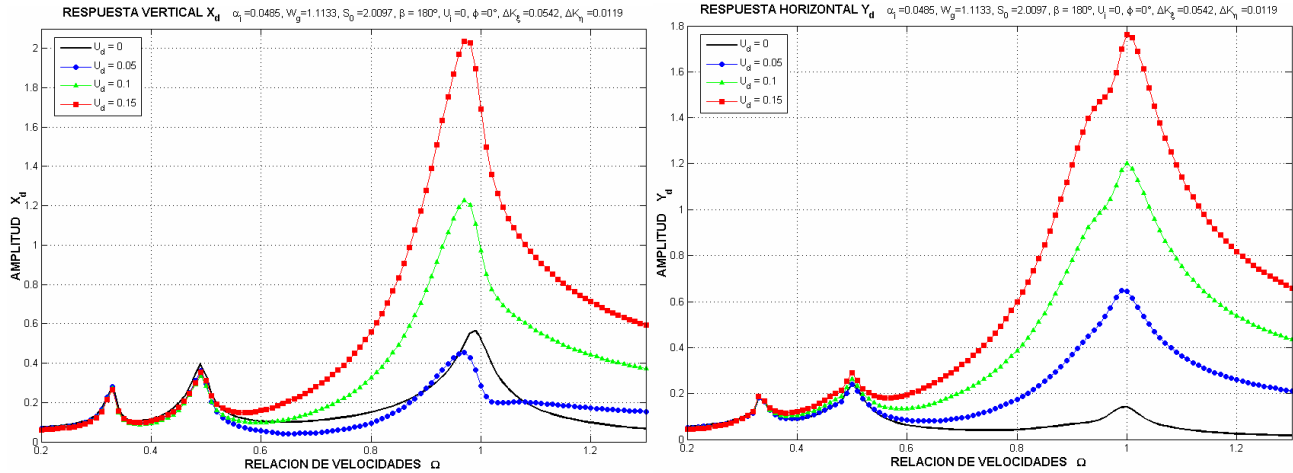


Fig. 4-55 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes magnitudes de desbalance, configuración I, $\beta = 180^\circ$, profundidad de grieta 25 %.

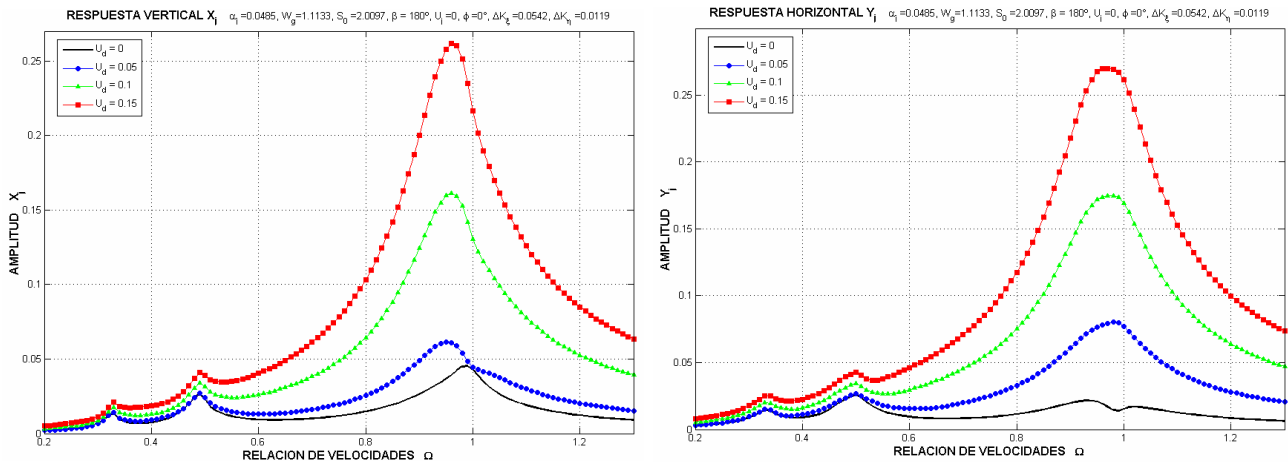


Fig. 4-56 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes magnitudes de desbalance, configuración I, $\beta = 180^\circ$, profundidad de grieta 25 %.

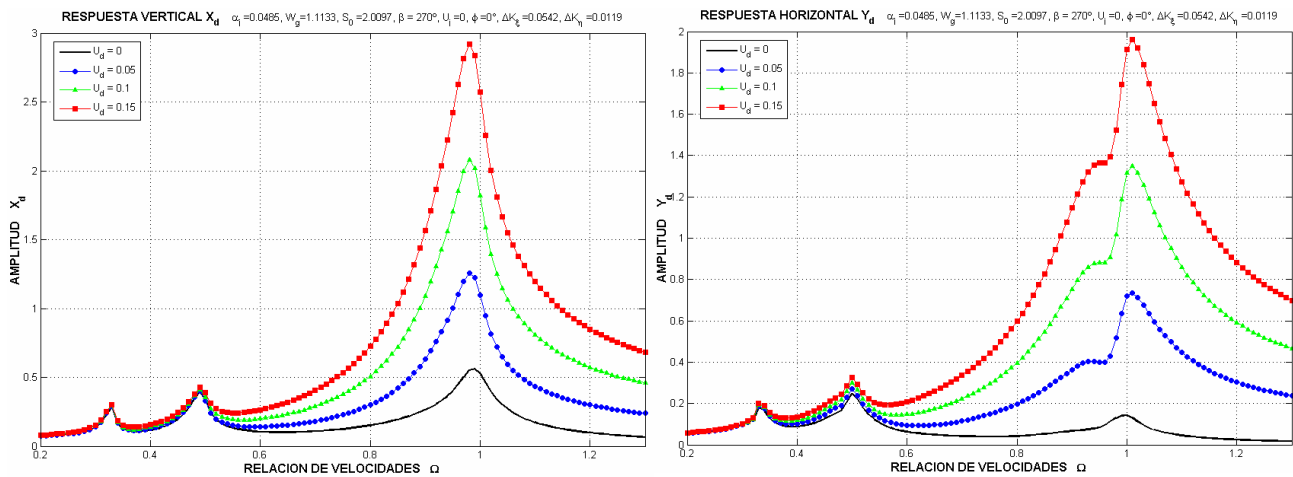


Fig. 4-57 Respuestas horizontales y verticales del disco para diferentes magnitudes de desbalance, configuración I, $\beta = 270^\circ$, profundidad de grieta 25 %.

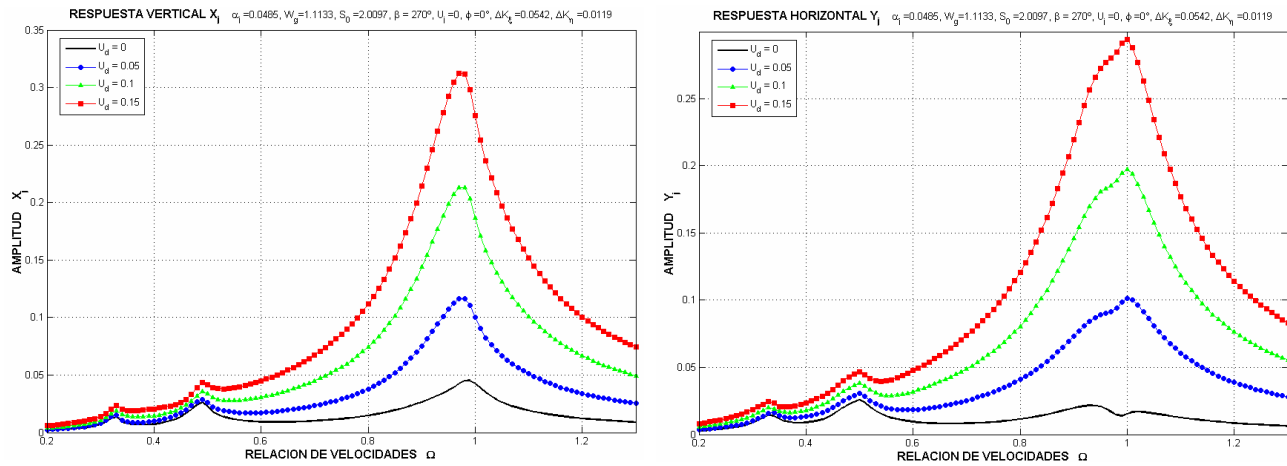


Fig. 4-58 Respuestas horizontales y verticales de la chumacera para diferentes magnitudes de desbalance, configuración I, $\beta = 270^\circ$, profundidad de grieta 25 %.

De acuerdo con los resultados encontrados se propone el empleo de este modelo simple agrietado a la mitad de tramo del eje, para el reconocimiento de patrones de vibración y el uso de un análisis de sensibilidad para estimar la profundidad de la grieta.

Por otra parte, se requieren otros estudios numéricos y experimentales para valuar correctamente la utilidad del análisis de los componentes 2X y 3X de la señal en el fuertemente acoplado rango de frecuencias entre grieta y desbalance ($0.2 < \Omega < 1.3$).

Según lo mostrado en Fig. 4-51-Fig. 4-58 la extracción de los componentes armónicos por FFT, o un análisis espectral similar, realizado a varias relaciones de magnitud entre profundidad de grieta y desbalance y también para cada uno de los principales ángulos de orientación relativa β , determinara la utilidad de los comunes y extensamente usados componentes 2X y 3X dentro de esta importante gama de frecuencia.

En resumen fue encontrado que una fisura puede ser mejor identificada a la velocidad rotacional 2X y 3X. Esto es por que la respuesta debida al desbalance a esta velocidad es mucho menos significativa que a la 1X, dejando la respuesta debido a la grieta mucho más identificable. Además fue reportado que una grieta puede ser reconocida por un análisis de la correspondiente señal de respuesta de vibración.

4.6 Análisis Espectral

Introducción

En el lado derecho de la Fig. 4-59 se aprecia la vibración que es medida en las máquinas. Esta es la suma de diversas causas, entre las que se encuentran el desbalance, el desalineamiento, vibraciones de los engranajes, por ejemplo. Cada una de estos problemas genera señales periódicas cuya frecuencia es característica, lo que permite diagnosticarlas. Aparece entonces el problema de separar las diferentes frecuencias que aparecen en una misma señal (*análisis espectral*).

La misma información pero en un grafico 3D es mostrada en Fig. 4-60. Se aprecia como cada componente de la señal medida puede ser descrita por un valor de amplitud y una frecuencia asociada. Finalmente, la señal es mostrada el dominio frecuencia (Fig. 4-61).

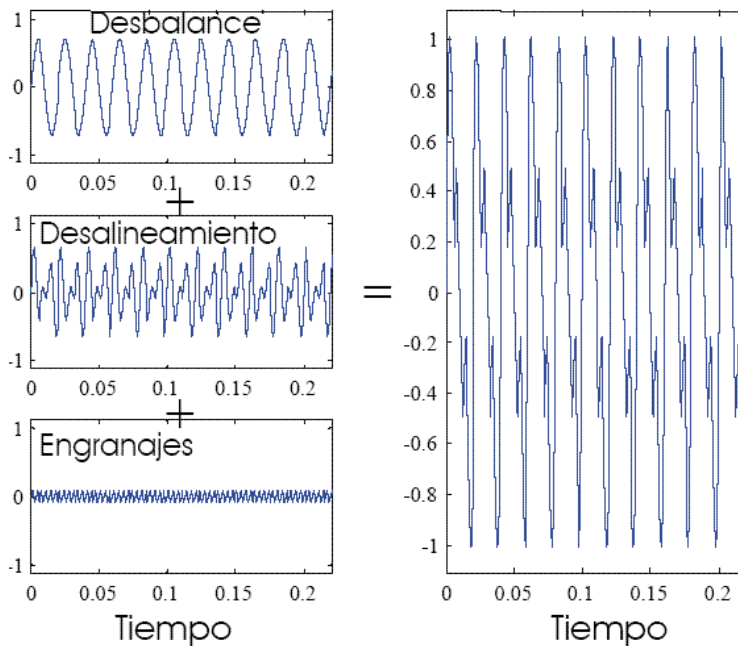


Fig. 4-59 Vibración global

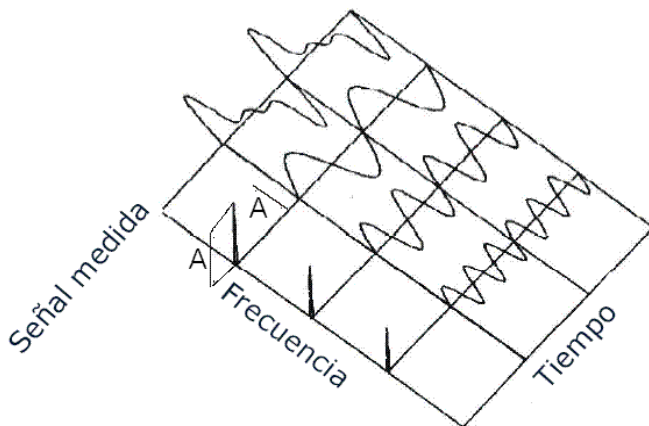


Fig. 4-60 Representación tiempo-frecuencia

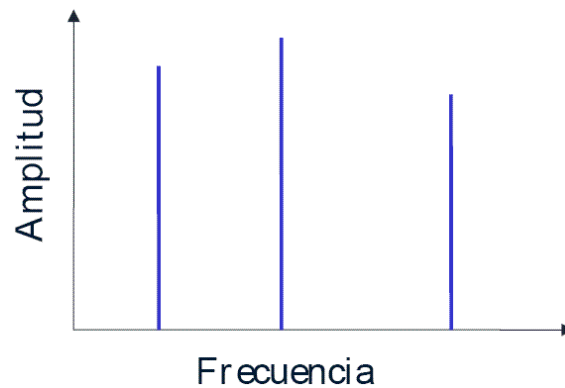


Fig. 4-61 Espectro de la señal

Análisis de Fourier

La herramienta matemática que permite la descomposición de una señal en sus componentes fundamentales es la transformada de Fourier. Esta puede ser continua para señales en $t \in (-\infty, \infty)$ o discreta para señales en $t \in (0, T)$. En la vida real solo se mide durante un cierto periodo de tiempo $[0, T]$ y en forma discreta (véase Fig. 4-64).

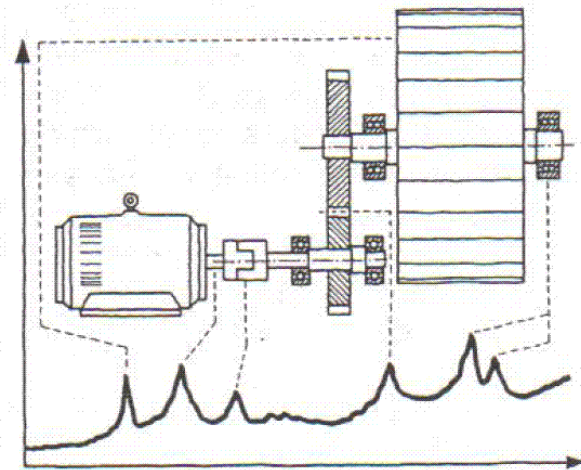


Fig. 4-62 Poder de diagnóstico de un espectro

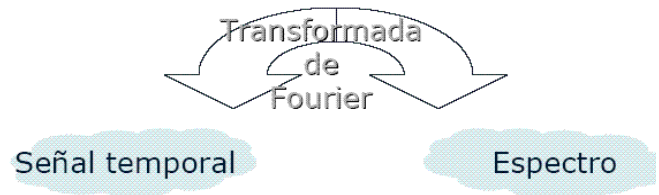


Fig. 4-63 Muestreo y espectro discretos

Nociones básicas

La transformada continua de Fourier para la frecuencia ω se define como:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (4.3)$$

y su inversa por:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (4.4)$$

Nótese que $X(j\omega)$ es una cantidad compleja.

La formula (4.3) permite el uso de frecuencias positivas y negativas. Lo común es que solo las frecuencias positivas tengan sentido físico. En tal caso se utiliza el espectro a un lado.

Si la señal es muestreada N veces cada Δt segundos, entonces k -ésima línea de la transformada discreta de Fourier está definida por:

$$X(k) = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N x(n) e^{-j2\pi k \frac{n}{N}}, \quad k = 1, \dots, N/2 \quad (4.5)$$

$$X(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n) \quad (4.6)$$

Nótese que la componente estática ($f=0$) corresponde al valor promedio.

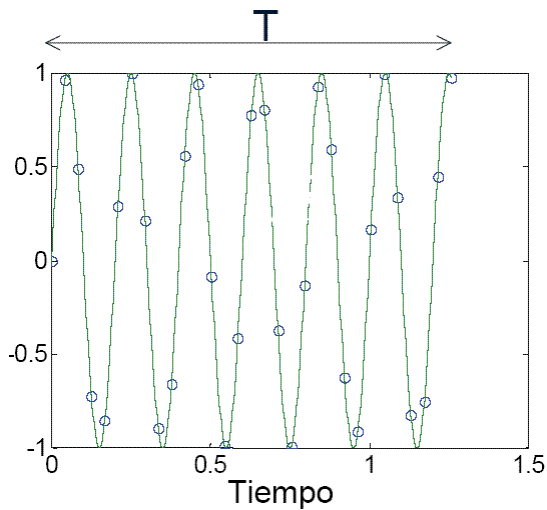


Fig. 4-64 Paso frecuencial

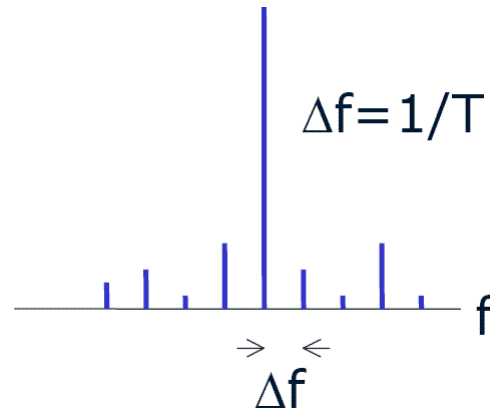


Fig. 4-65 Muestreo y espectro discretos

La frecuencia asociada a la k -ésima línea es k/N . El paso entre líneas (paso frecuencial) está dado por:

$$\Delta f = \frac{1}{T} \tag{4.7}$$

Como se verá a continuación, hay una serie de parámetros que deben ser tomados en cuenta para utilizar adecuadamente el espectro de una señal.

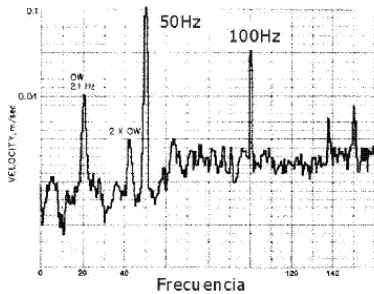


Fig. 4-66 Resolución frecuencial pobre

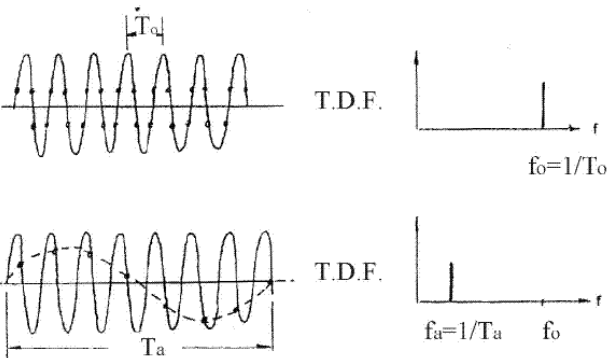
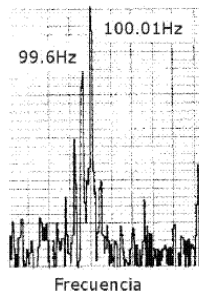


Fig. 4-67 Frecuencia de muestreo pobre

Consecuencia del tiempo de muestreo limitado y la discretización de la señal es que el espectro estará compuesto por un número limitado de líneas, y la distancia entre cada una en frecuencia Δf está dada por Ec. (4.7), donde T es el periodo de muestreo definido por Fig. 4-64. Nótese que no tiene nada que ver con el periodo T_0 de la señal. Mientras más corto es el periodo de muestreo, mayor será el paso en frecuencias. Ello puede suscitar problemas para el diagnostico como se indica en Fig. 4-66, donde 2 componentes de frecuencias muy similares han sido confundidas por un paso frecuencial muy pobre. Al realizar un acercamiento sobre la banda frecuencia sospechosa se logra discriminar.

Aliasing

Un problema que aparece a causa del muestreo discreto es el aliasing, vale decir cuando una componente a alta frecuencia es confundida con una de baja a causa de que la *frecuencia de muestreo* (la velocidad con la que se adquieren puntos de la señal temporal) sea muy baja. El efecto se muestra en Fig. 4-67. Nótese que en el caso superior hay suficientes puntos por cada periodo de la señal para que la transformada discreta de Fourier capte la

componente real f_a . En el caso de la parte inferior hay solo un punto por cada ciclo de la señal; obviamente es imposible recuperar la frecuencia real y la que capta el algoritmo de Fourier es al de la frecuencia fantasma $f_a = 1/T_a$. Como solución al problema se deben tomar 2 medidas:

- Aplicar una frecuencia de muestreo f_s que cumpla con el *teorema de muestreo de Nyquist*, $f_{muestreo} > \lambda f_{max}$ donde λ es una constante mayor que 2 (usualmente se usa 2.56).
- Aplicar un filtro análogo pasa-bajos (o “*anti-aliasing*”) que extraiga todas las componentes superiores a $f_{máx}$.

En la práctica industrial, basta con configurar la frecuencia máxima de análisis del colector para que los filtros (análogos y digitales) se ajusten. Obviamente, al filtrar las componentes superiores se pierde la capacidad de detectar problemas que generen altas frecuencias.

Diagramas de espectros

Puesto que las herramientas de análisis de vibración actuales, usadas en la industria, son los espectros de frecuencia y las formas de onda medidas en las chumaceras. Las siguientes figuras (Fig. 4-69-Fig. 4-83), muestran los resultados de la simulación de los espectros y formas de onda de la repuesta vibratoria del rotor descrito por la configuración I para una profundidad de grieta del 25% y una magnitud de desbalance residual en el disco (U_d) igual a 0.1; además se hace variar la orientaciones entre grieta y desbalance (β) y la velocidad de operación (Ω) Estos espectros presentan componentes a los tres primeros armónicos de la velocidad del rotor 1X, 2X, 3X, y sus amplitudes dependerán de cuan cerca estén de una velocidad crítica.

Sin embargo en la práctica, estos síntomas no son condiciones suficientes para detectar la presencia de una grieta, ya que otros problemas comunes en máquinas rotatorias generan espectros similares, como es el caso del desalineamiento, doblamiento del eje, etc.

Por esta razón es necesario usar el espectro de vibración y la forma de onda como un síntoma discriminatorio para ejes agrietados.

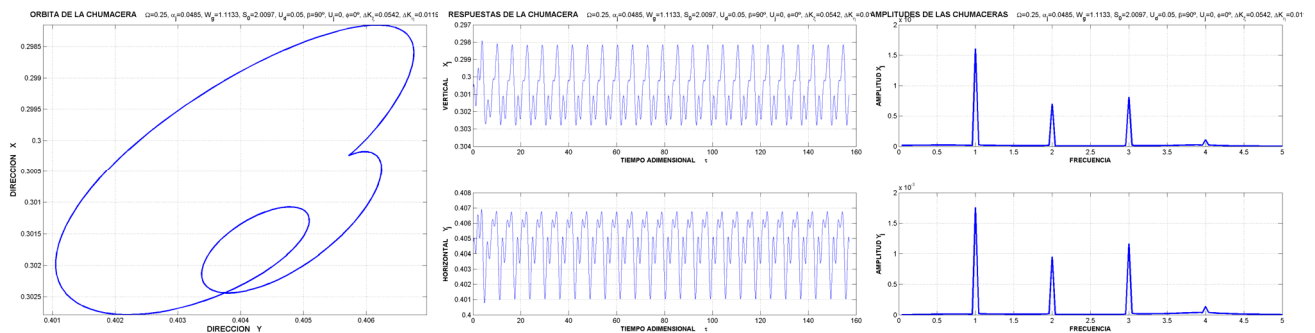


Fig. 4-68 Orbita, formas de onda y espectros de las chumaceras de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.25$

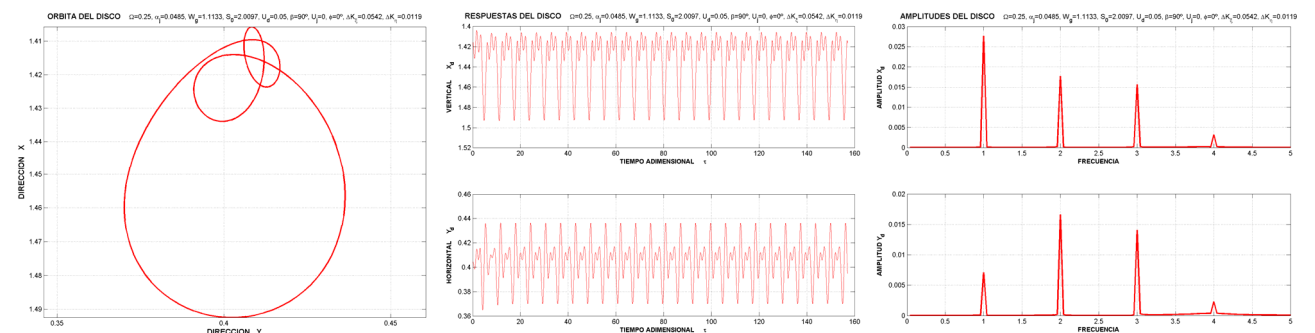


Fig. 4-69 Orbita, formas de onda y espectros del disco de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.25$

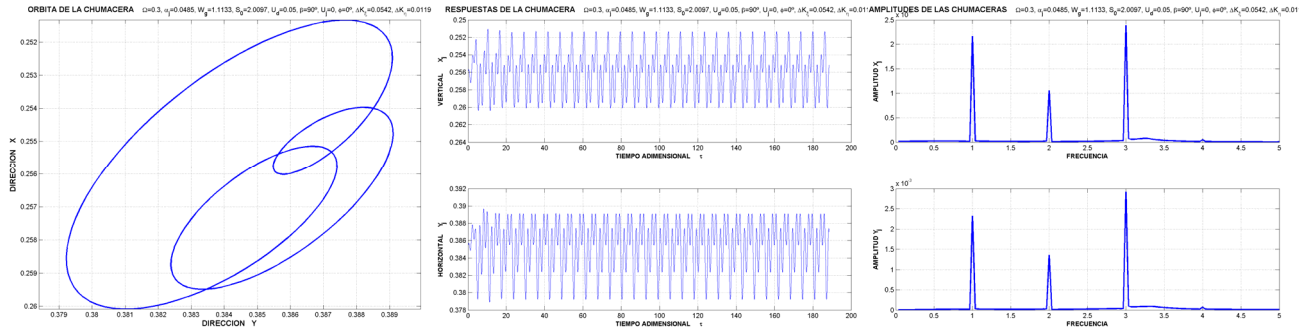


Fig. 4-70 Orbita, formas de onda y espectros de las chumaceras de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.3$

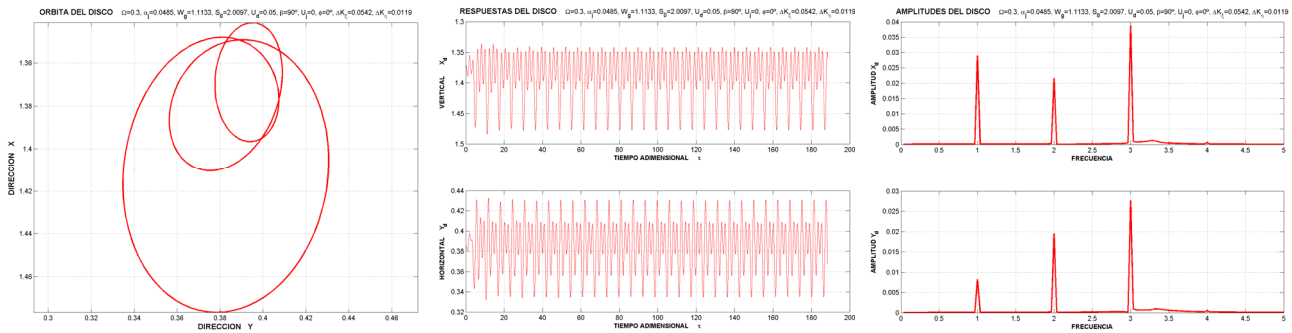


Fig. 4-71 Orbita, formas de onda y espectros del disco de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.3$

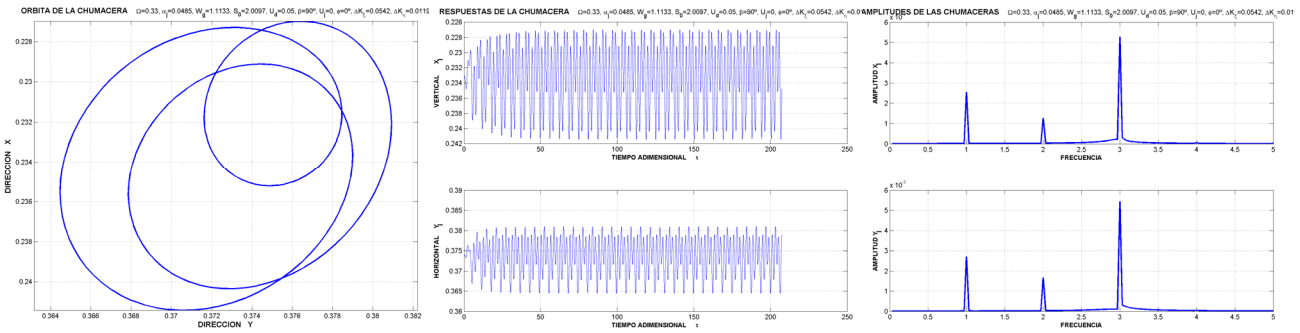


Fig. 4-72 Orbita, formas de onda y espectros de las chumaceras de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.33$

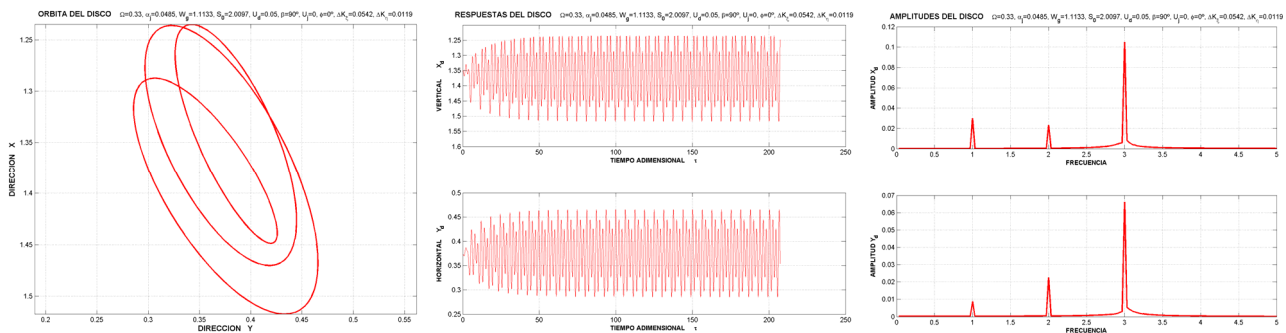


Fig. 4-73 Orbita, formas de onda y espectros del disco de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.33$

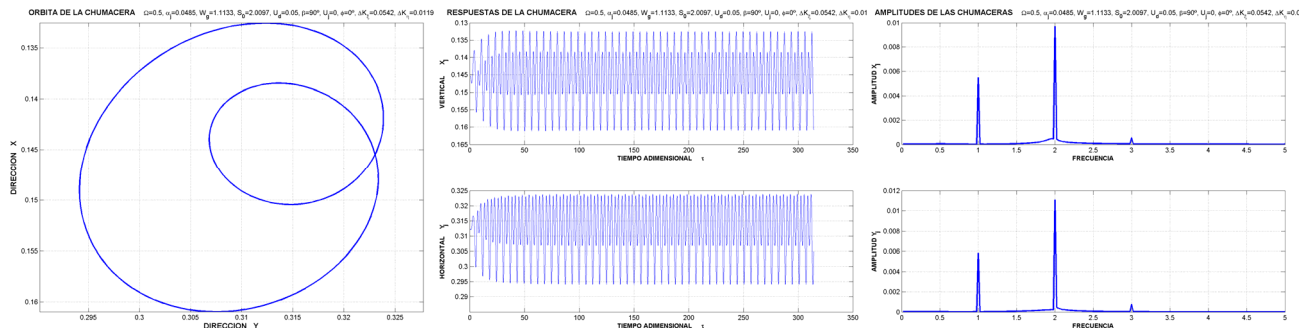


Fig. 4-74 Orbita, formas de onda y espectros de las chumaceras de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.5$

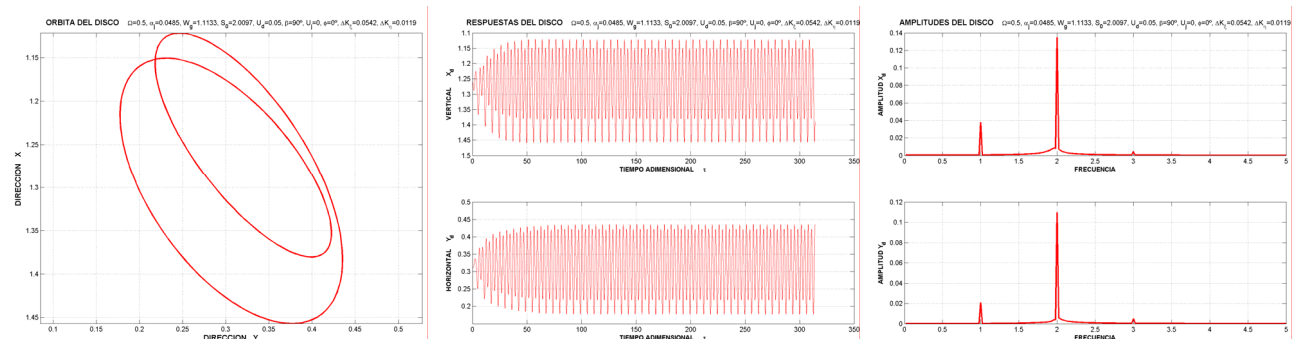


Fig. 4-75 Orbita, formas de onda y espectros del disco de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.5$

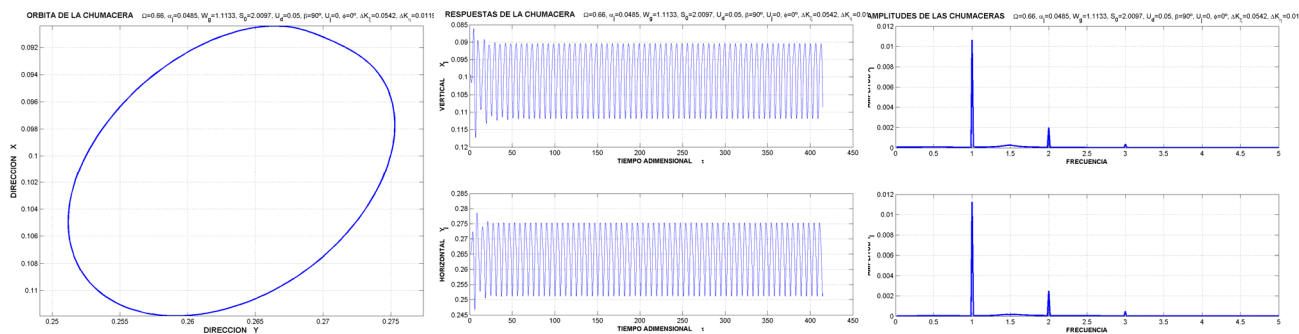


Fig. 4-76 Orbita, formas de onda y espectros de las chumaceras de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.66$

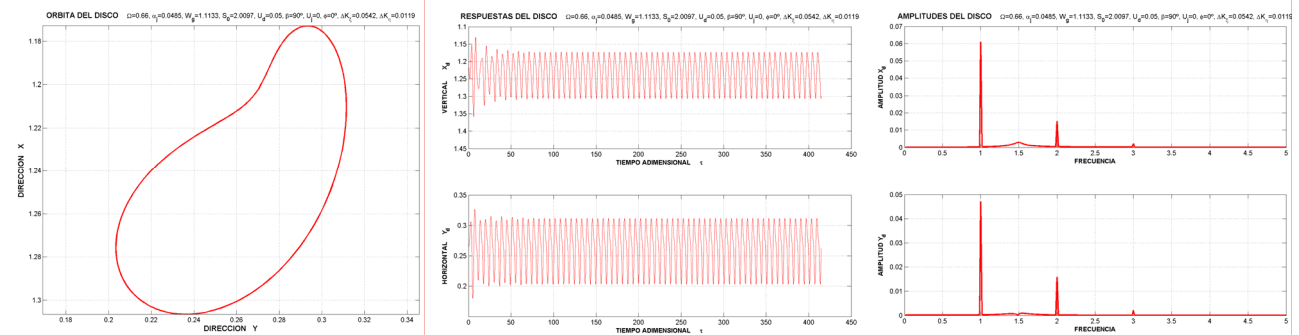


Fig. 4-77 Orbita, formas de onda y espectros del disco de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.66$

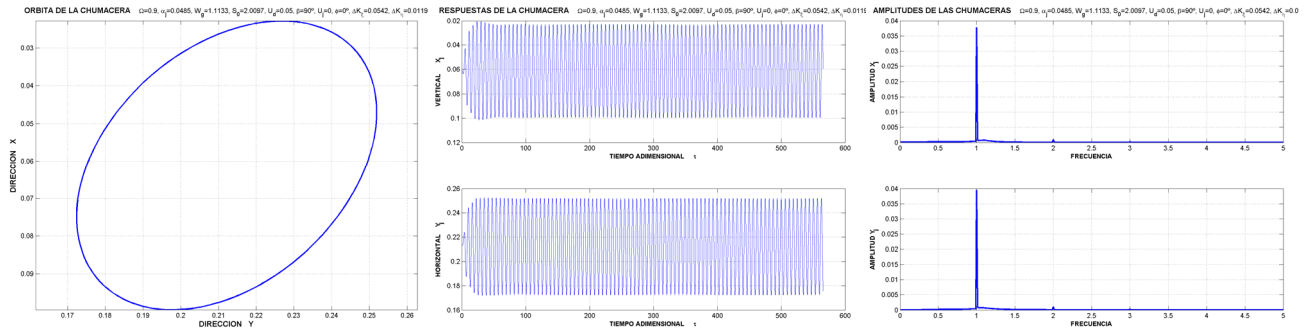


Fig. 4-78 Orbita, formas de onda y espectros de las chumaceras de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.9$

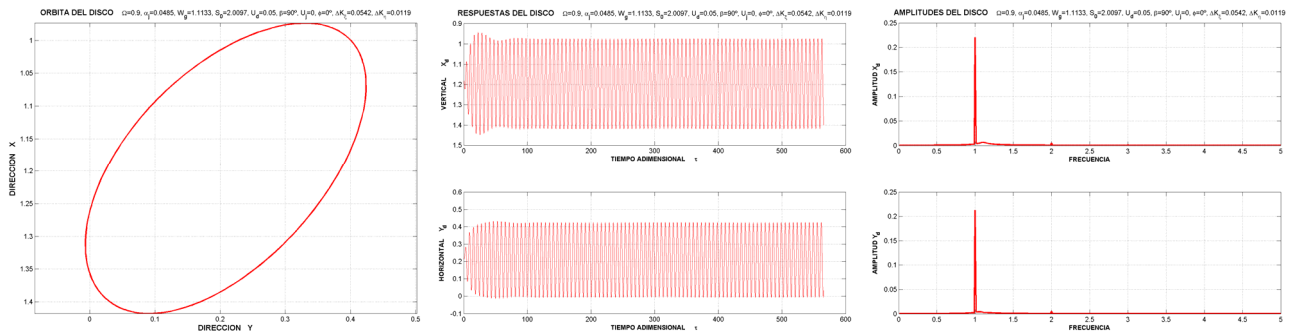


Fig. 4-79 Orbita, formas de onda y espectros del disco de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 0.9$

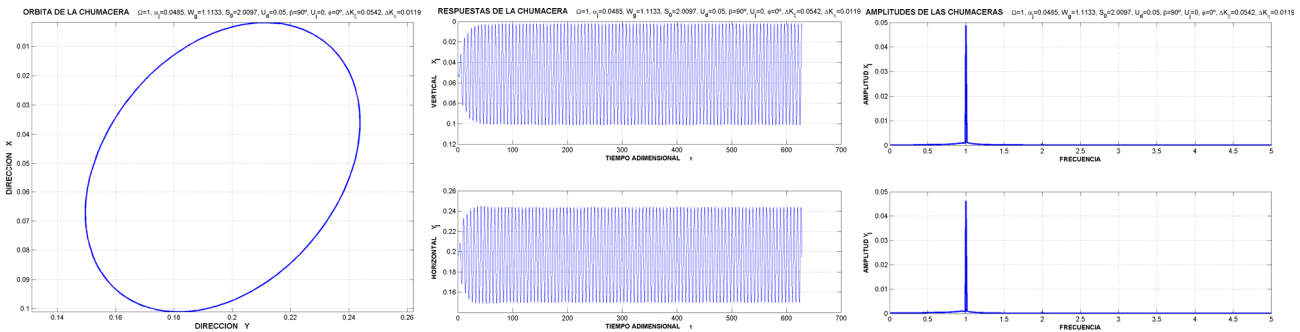


Fig. 4-80 Orbita, formas de onda y espectros de las chumaceras de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 1.0$

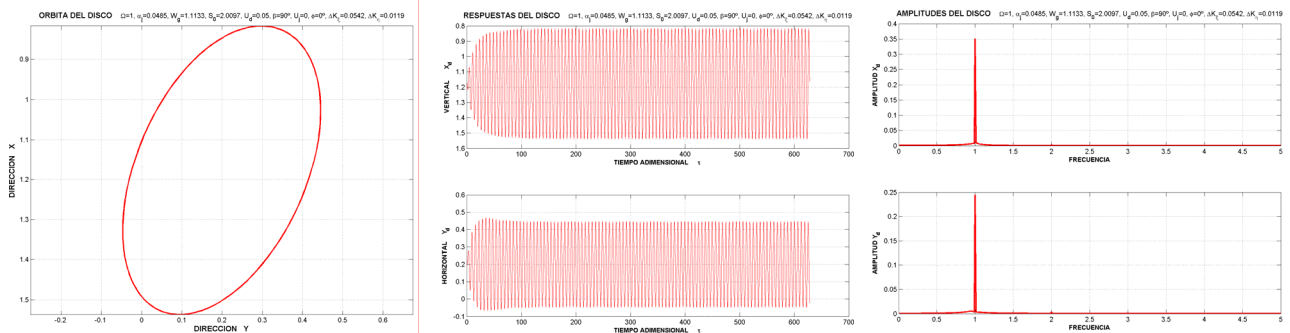


Fig. 4-81 Orbita, formas de onda y espectros del disco de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 1.0$

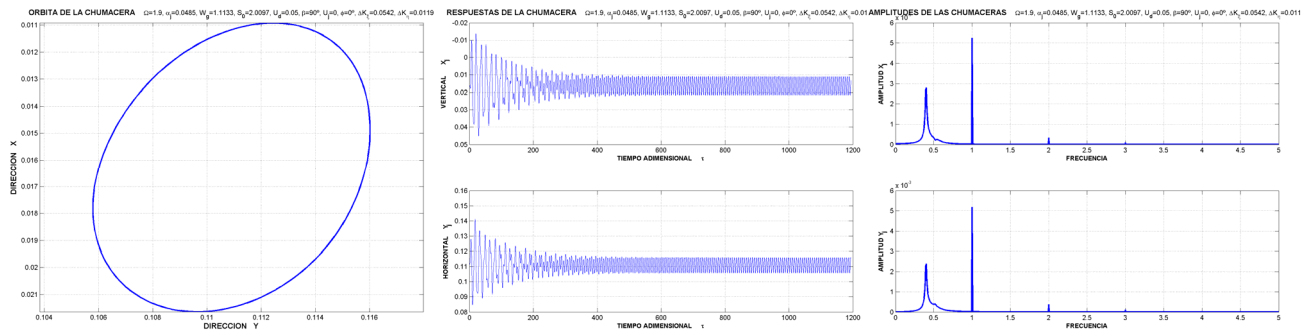


Fig. 4-82 Orbita, formas de onda y espectros de las chumaceras de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 1.9$

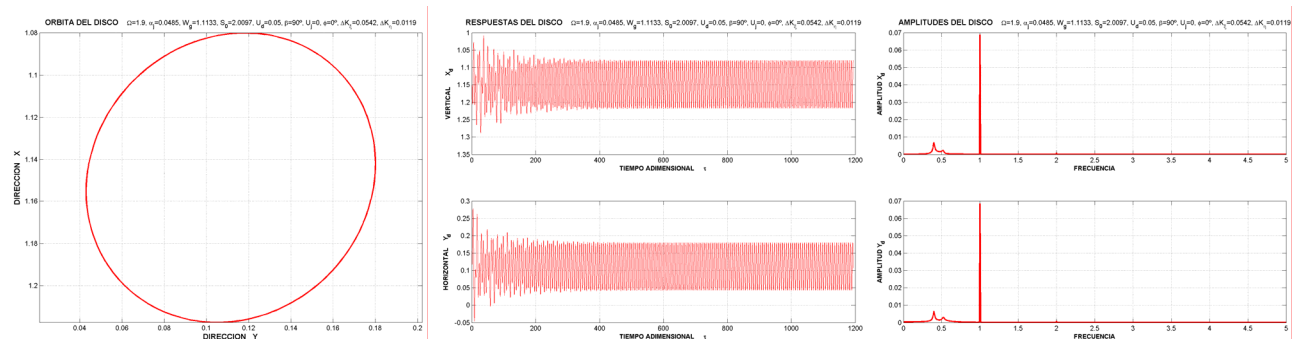


Fig. 4-83 Orbita, formas de onda y espectros del disco de un rotor fisurado. Configuración I, Profundidad de grieta 25%, $\beta = 90^\circ$, $\Omega = 1.9$

En los espectros de Fig. 4-82 y Fig. 4-83 puede observarse, especialmente en las chumaceras, la aparición de un pico alrededor de $0.5X$ indicando el inicio inminente de la inestabilidad, en este caso debido a los pequeños valores de grieta ΔK_y , ΔK_z usados en estas configuraciones, las velocidades umbrales son determinados sobre todo por el inicio del latigüeo de aceite “oil whip” en las chumaceras.

En las figuras anteriores (Fig. 4-68-Fig. 4-83) puede observarse que en el disco las respuestas vibratorias del sistema son mayores que en las chumaceras, esto es debido a que en la localización del disco existe una mayor flexibilidad. A diferencia del rotorkit donde es posible colocar sensores de desplazamiento cerca de la localización del disco, en la vida real, en las turbomáquinas, es imposible colocarlos cerca de los discos donde se encuentran los alabes. Generalmente los sensores se encuentran ubicados en las chumaceras lo que hace difícil la identificación de grietas si la magnitud de los componentes $2X$ y $3X$ capturada en estas posiciones es débil.

Por otro lado, durante la operación transitoria las varias resonancias del sistema son excitadas y en este momento la particular naturaleza del problema se incrementa. De esta manera, los componentes $2X$, $3X$ y $4X$ experimentan un pico y las orbitas presentan una forma típica cuando la velocidad de rotación coincide con $1/2$ (Fig. 4-74 y Fig. 4-75), $1/3$ (Fig. 4-72 y Fig. 4-73) y $1/4$ (Fig. 4-68 y Fig. 4-69) de la primera velocidad crítica, ya que la orbita es muy sensitiva a cualquier cambio de relación de amplitud y fase de los componentes espectrales.

Otra característica observada que representa un importante indicador de la presencia de grietas es que para velocidades de rotación bajas, cuando los efectos del desbalance son despreciables, la vibración $1X$ es debida a la grieta.

Finalmente es importante mencionar que aunque la presencia del componente $2X$ se atribuye a causas menos numerosas, la mera inspección de este componente de vibración será una prueba insuficiente. Por otra parte la existencia de $3X$, $4X$ y la combinación de súper-armónicos se pueden correlacionar más directamente a la presencia de una grieta en un grado igual o aún más grande con respecto al componente $2X$, y es apenas afectado por el desbalance residual.

Entonces se recomienda centrarse en todas las combinaciones de componentes 1, 2, 3 sub y súper armónicos puesto que todos son capaces de inducir lo que ha sido bien llamado resonancias locales según lo demostrado y divulgado por Gómez-Mancilla, *et. al* [73], [75], [76], [77].

4.7 Análisis de estabilidad

Cuando el rotor esta perfectamente balanceado, el centro del muñón ocupa una posición dada dentro de la chumacera a una velocidad dada. Esta posición es llamada el centro de estado estable o *punto de equilibrio*. Este es definido por una razón excentricidad y su correspondiente ángulo de posicionamiento (*attitude*); por ejemplo, con coordenadas polares con respecto al centro de la chumacera y la línea de carga de estado estable.

Un análisis de estabilidad consiste en probar la estabilidad del rotor en el punto de equilibrio, lo que significa que el análisis es llevado a cabo bajo la condición de velocidad constante del rotor. Para probar la estabilidad, se provee al rotor un pequeño movimiento arbitrario con una frecuencia asignada alrededor del centro de estado estable. Si el movimiento impuesto persiste sin cambiar con el tiempo, la frecuencia asignada determina un estado de estabilidad neutral, también llamada *umbral de estabilidad*. Por lo tanto el umbral de frecuencia es un parámetro desconocido del problema, y es encontrado explorando un rango de frecuencias. Dependiendo de la complejidad del sistema, puede existir más de una solución. Un segundo parámetro es la masa del rotor m ; o en otras palabras, a la velocidad dada del rotor y la frecuencia umbral calculada, hay un valor de la masa del rotor para el cual el centro de estado estable es una posición estable neutral.

Es bien conocido que un rotor soportado en chumaceras lubricadas es susceptible a una forma particular de inestabilidad inducida por la película de fluido en las chumaceras [52], [56]. Esta inestabilidad es comúnmente llamada frecuencia fraccional de rotación o *latigazo de aceite* (“oil whip”) y se manifiesta asimismo por una vibración violenta del rotor al pasar por encima de una cierta velocidad del rotor, distinguida como velocidad umbral. Es precisamente el término inestabilidad el que hace referencia a dicho movimiento vibratorio de la maquina, que tiende a incrementar violentamente su amplitud con el tiempo y está limitada únicamente por los disparos automáticos del sistema de protección, impidiendo así su operación normal. La frecuencia de vibración del rotor es hallada ser la mitad o menos de la velocidad del rotor de donde se estima la regla generalmente aceptada de que el latigazo de aceite se desarrolla en el doble de la primera velocidad crítica. Solamente en casos raros ha sido posible operar el rotor más allá de la velocidad umbral.

Por lo tanto, se realiza un análisis de estabilidad aplicando la Teoría de Floquet empleando la matriz de transición y se presentan las velocidades del umbral de estabilidad para cada una de las tres configuraciones propuestas. Debido a los pequeños valores de grieta ΔK_y , ΔK_z usados en estas configuraciones, las velocidades umbrales son determinados sobre todo por el inicio del latigazo de aceite “oil whip” en las chumaceras. También se discute brevemente la importancia relativa de los parámetros del sistema con referencia a la estabilidad del mismo.

Teoría de estabilidad de Floquet

El método más adecuado para tratar con problemas de estabilidad de sistemas periódicos con coeficientes variables es la teoría de Floquet que establece que es suficiente conocer la matriz de transición de estado sobre un periodo de movimiento para determinar la estabilidad del sistema alrededor de la posición de equilibrio $\{X\} = 0$ del sistema periódico [128], [54], [68], [70], [53].

$$\{X\}' = [A(\Phi)]\{X\} \quad (4.8)$$

donde $[A(\Phi)] = [A(\Phi+T)]$ y T es el periodo. La matriz de transición $[\Gamma(T)]$ es definida por:

$$\{X(T)\} = [\Gamma(T)]\{X(0)\} \quad (4.9)$$

En estas definiciones se concluye que $\{X\} = 0$ representa la posición de equilibrio de una órbita cuya forma no importa. El único requisito es que se conozca toda la trayectoria de esa órbita para predecir si después de un periodo, el sistema regresa a su posición ó si cambia [54].

Una vez que la matriz de transición $[\Gamma(T)]$ ha sido obtenida, se calculan los eigenvalores de Floquet del nuevo sistema mediante la siguiente eigenfunción:

$$[\Gamma(T) - \mu_f [I]] = 0 \quad (4.10)$$

Donde μ_f representa los eigenvalores de Floquet y la matriz identidad es $[I]$. La estabilidad de la posición de equilibrio $\{X\} = 0$ del sistema periódico (4.8) puede ser determinada mediante los valores de los eigenvalores de Floquet μ_f . Esto es:

- Si todos $|\mu_f| < 1$ la posición de la órbita $\{X\} = 0$ es estable
 Si uno o más $|\mu_f| > 1$ la posición de la órbita $\{X\} = 0$ es inestable
 Si uno o más $|\mu_f| = 1$ la posición de la órbita es crítica.

Donde $|\mu_f|$ es el módulo de μ_f

$$|\mu_f| = \sqrt{(\text{parte real})^2 + (\text{parte imaginaria})^2}$$

Desafortunadamente no existe un método analítico definido para calcular la matriz de transición $[\Gamma(T)]$. Existen varios métodos numéricos para evaluar dicha matriz por ejemplo, un método empleado para estos fines es el llamado Método de Hsu [128], [54]. A continuación es resumido el Método de Hsu.

El periodo T es dividido en K intervalos definido por Φ_k . El subíndice k es un número entero positivo igual a 1, 2, 3, ..., K con $0 = \Phi_0 < \Phi_1 < \Phi_2 < \dots < \Phi_{K-1} < \Phi_K = T$. El k -ésimo intervalo (Φ_{k-1}, Φ_k) es denotado por τ_k . Entonces se requiere definir una matriz constante en el k -ésimo intervalo definida por:

$$[B_k] = \int_{\Phi_{k-1}}^{\Phi_k} [A(\Phi)] d\Phi \quad \Phi \in \tau_k \quad (4.11)$$

Debe notarse que existirán K matrices $[B_k]$. Finalmente la matriz $[\Gamma(T)]$ se obtiene mediante la siguiente expresión exponencial:

$$[\Gamma(T)] = \prod_{i=1}^K \exp[B_i] \quad (4.12)$$

la cual, al desarrollar en una serie infinita se obtiene:

$$[\Gamma(T)] = \prod_{i=1}^K \left\{ [I] + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[B_i]^j}{j!} \right\} \quad (4.13)$$

El método de análisis de estabilidad aquí descrito, fue implementado en un programa de MATLAB por García-Illescas [54] y adaptado por el autor de esta Tesis para simular numéricamente el presente sistema rotor-chumaceras agrietado.

Lo más importante del criterio de estabilidad de Floquet es comprender el significado de esta teoría [54] entendiéndose el eigenvalor de Floquet μ_f como el factor por el cual una amplitud inicial dada aumenta o disminuye en un periodo de oscilación. De esta manera, este valor proporciona también el grado de estabilidad o inestabilidad del sistema. De aquí que el valor de $\mu_f > 1$ indicará un problema serio de inestabilidad, es decir un eigenvalor de Floquet ligeramente mayor que 1, por ejemplo 1.01, significará que la amplitud aumentará 0.01 veces por cada periodo. Estos comentarios son válidos desde el punto de vista de un análisis lineal.

En la siguiente sección se analizan numéricamente varias configuraciones del sistema rotor-chumaceras sin grieta y con grieta para determinar su comportamiento dinámico y ahora su estabilidad. Es comprobado que la presencia de la grieta tiene una gran influencia en el comportamiento dinámico del sistema, produciendo que la inestabilidad del sistema agrietado se presente a una velocidad menor en comparación al sistema sin grieta.

Grado de estabilidad del sistema de la configuración I

Los resultados obtenidos revelan las condiciones necesarias para que ocurra la inestabilidad lineal del sistema para diferentes profundidades de grieta. Se observa la influencia del fluido lubricante en las chumaceras así como de diversos parámetros como son la flexibilidad del eje, la distribución de masas, la profundidad de la grieta, etc. Sobre la estabilidad dinámica.

Se calcularon los eigenvalores máximos de Floquet para un rango de velocidades de $0.2 \leq \Omega \leq 2.5$. Como ya se explico anteriormente Los eigenvalores de Floquet mayores que 1 indicaran la inestabilidad del sistema. Además del análisis de estabilidad previamente realizado se da una descripción para cada una de las figuras presentadas.

Se observa que la inestabilidad del sistema agrietado se presenta a una velocidad menor que en el sistema sin grieta. Este fenómeno es más evidente al comparar el grado de estabilidad del sistema con profundidad de grieta del 50% contra el del sistema sin grieta.

Para grietas de profundidad incipiente a media (ΔK_x , ΔK_y pequeño) mientras se empleó el análisis anterior la causa dominante para la inestabilidad será el *oil whirl* en la chumacera. Se requiere de grietas de profundidades perceptiblemente grandes, demasiado profundas en el diámetro del eje, para que el sistema se torne inestable debido a la presencia de la grieta. A excepción de los parámetros no-estructurales Ω , D_e y los coeficientes rotodinámicos de las chumaceras, los parámetros estructurales que ejercen una mayor influencia en la estabilidad del sistema son S_0 , W_g y α_j seguidos en importancia por los factores de la grieta ΔK_x , ΔK_y . Por ejemplo, mientras se mantienen todos los parámetros fijos y se hace variar la profundidad de la grieta desde 0% hasta 50% ocasiona una reducción de la velocidad umbral, de $\Omega = 2.06$ para el eje integro a $\Omega = 1.993$ para el eje fisurado al 50%; lo que representa una disminución de poco más del 3% de la gama estable de velocidad (véase Fig. 4-85).

Cabe resaltar que aunque un análisis de estabilidad podría efectivamente ayudar en la tarea de detección de grietas, en realidad un análisis de este tipo requeriría la existencia de una grieta profunda (por ejemplo 50%) para mostrar una disminución significativa del umbral de estabilidad. Sin olvidar el hecho de que el operar el rotor agrietado a altas velocidades podría ser muy peligroso. Lo ideal sería que la presencia de la grieta sea detectada a una velocidad menor.

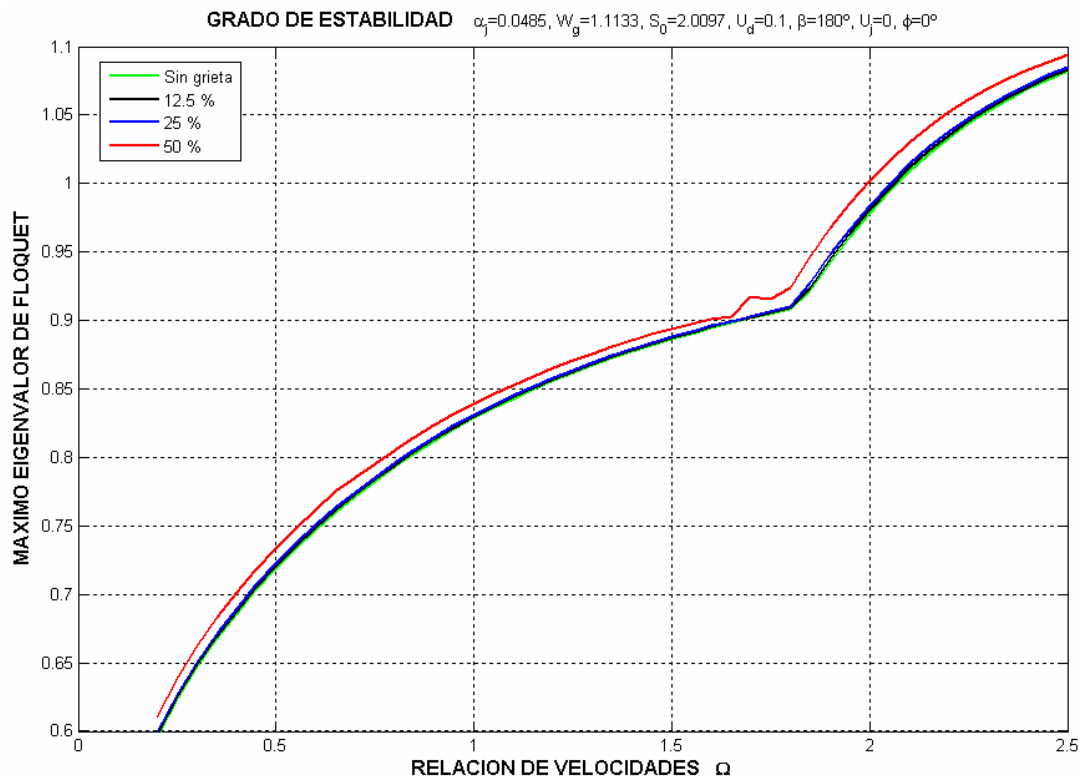


Fig. 4-84 Grado de estabilidad del sistema, configuración I

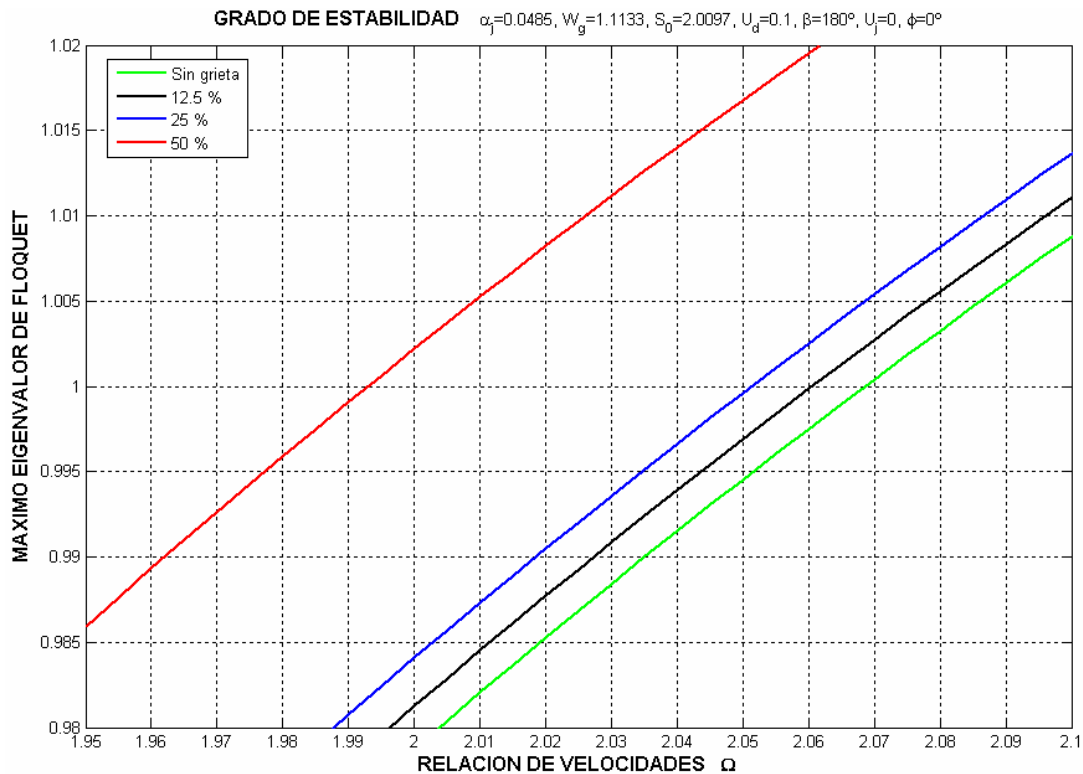


Fig. 4-85 Acercamiento a la zona de transición estable-inestable, configuración I.

En las siguientes figuras se presentan las orbitas del sistema sin grieta (Fig. 4-86 y Fig. 4-87) y con grieta (Fig. 4-90-Fig. 4-97) en condiciones totalmente inestables; es decir, a una velocidad en la que la inestabilidad ya había comenzado mucho antes. En las gráficas se ilustra que existe un crecimiento constante de la respuesta. En un análisis lineal de estabilidad, este valor de amplitud tiende al infinito. Sin embargo en la realidad la amplitud de vibración esta limitada, pero para modelar y simular este fenómeno es requerido un modelo no-lineal el cual ya se encuentra en desarrollo actualmente.

En las figuras Fig. 4-88 y Fig. 4-89 se muestran las respuestas del sistema con eje integro en condiciones donde la inestabilidad inicia. Puede observarse que las firmas de las órbitas son aún uniformes como en el caso de la velocidad crítica, lo cual era de esperarse.

En las figuras Fig. 4-90-Fig. 4-97 se ilustran las respuestas del sistema cuando la profundidad de la grieta se incrementa de 12.5% a 25% y finalmente 50%. A través del análisis de las gráficas puede observarse como la presencia de la grieta provoca que la inestabilidad debida a los efectos del fluido lubricante en las chumaceras, en combinación con los efectos de la grieta, suceda antes en comparación con el sistema sin grieta. Esto se nota al comparar que para un valor de velocidad fijo las respuestas muestran un crecimiento constante que aumenta conforme la profundidad de la grieta aumenta. Es decir, que al aumentar la profundidad de la grieta se adelanta la velocidad en la que la inestabilidad comienza.

En la inestabilidad del sistema, ya sea con o sin grieta, la forma de la orbita presenta un aumento constante de amplitud especialmente en el disco. Sin embargo, en el sistema agrietado para el mismo valor de velocidad es aún mayor el aumento de amplitud.

En los diagramas de espectros, puede observarse la aparición de la frecuencia subsíncrona aproximadamente a 0.5X indicando la inestabilidad. Dicha inestabilidad acontece a una menor velocidad de operación en el caso del rotor fisurado.

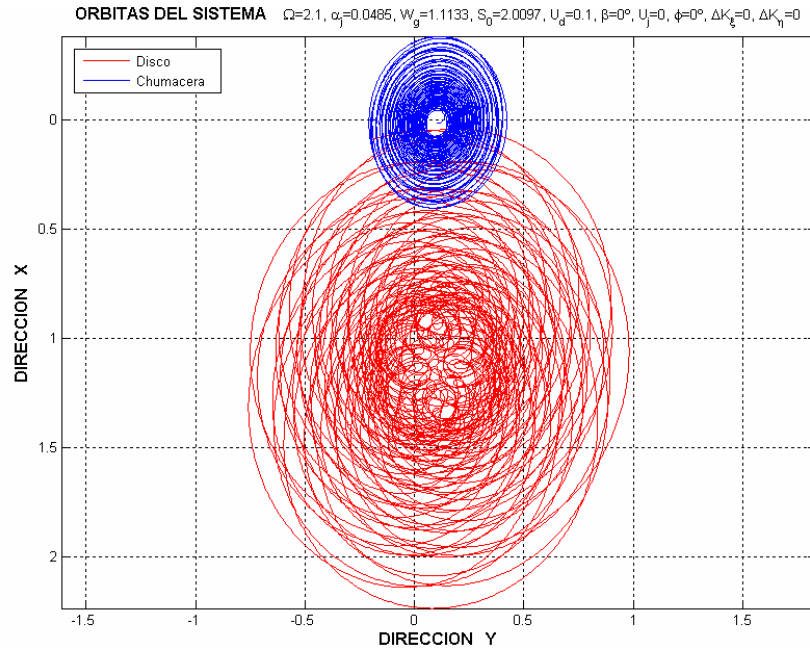


Fig. 4-86 Orbitas del sistema inestable, configuración I, eje entero, $\Omega = 2.1$

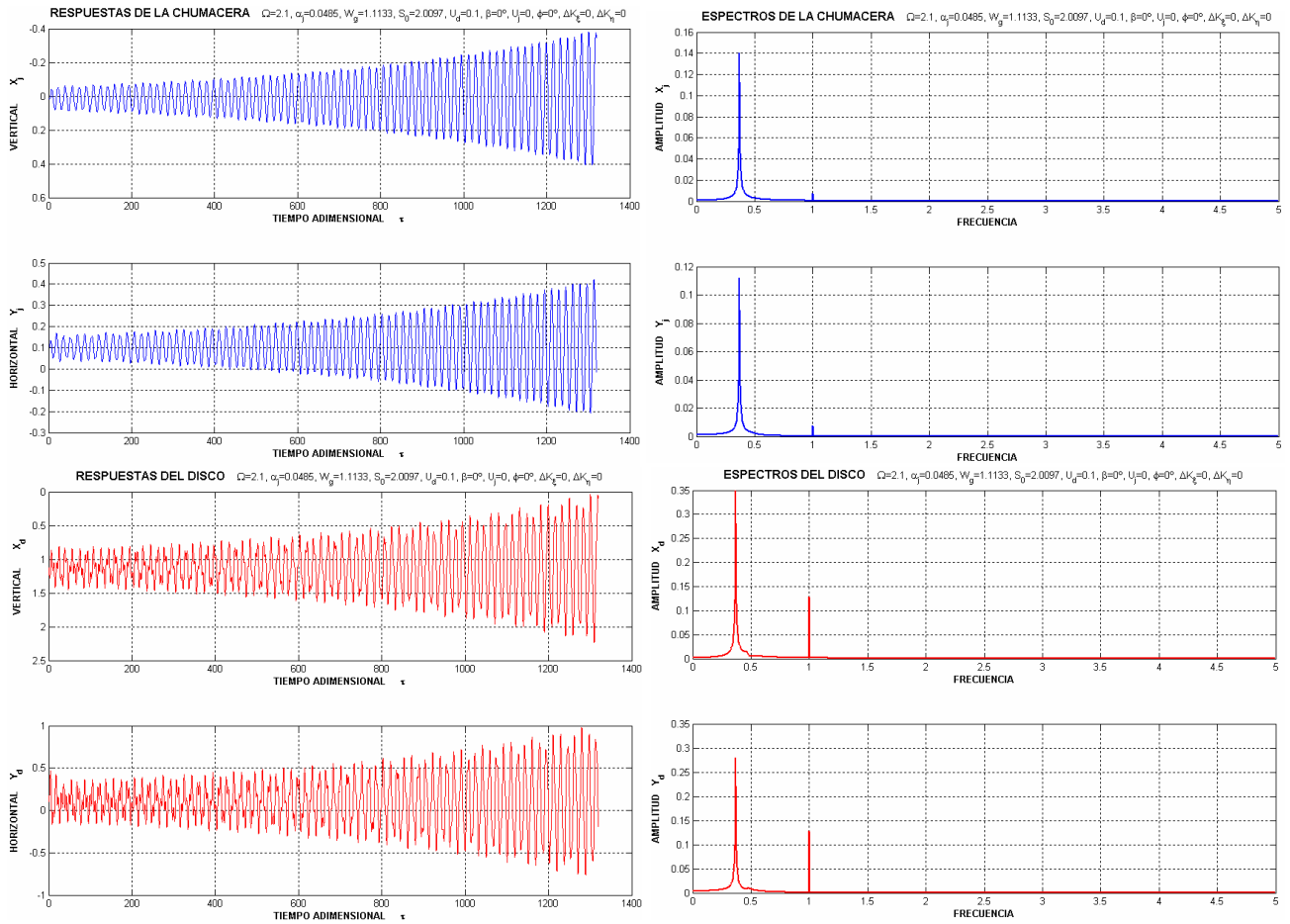


Fig. 4-87 Respuestas horizontal y vertical de las chumaceras y el disco y sus respectivos espectros de frecuencia, configuración I, eje entero, $\Omega = 2.1$. Sistema inestable

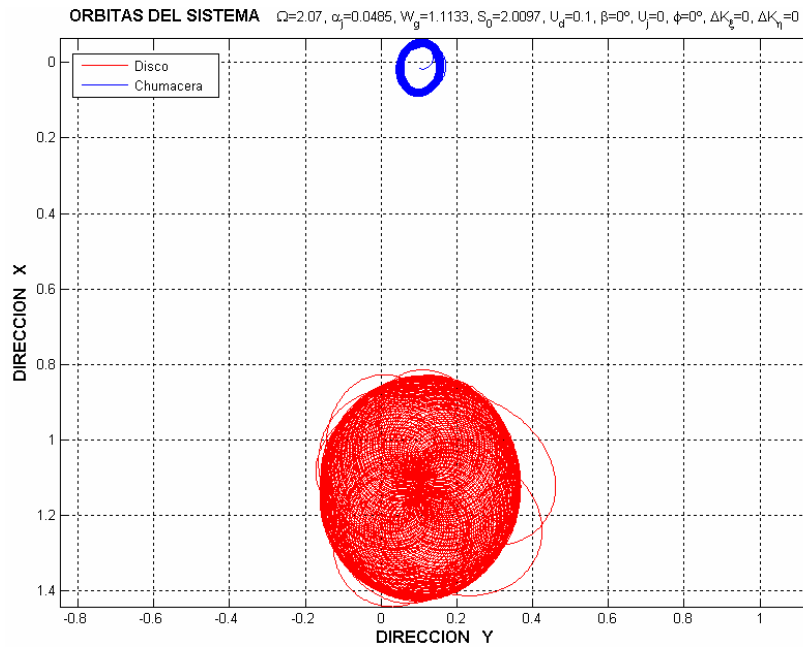


Fig. 4-88 Orbitas del sistema al comienzo de la inestabilidad, configuración I, eje integro, $\Omega = 2.07$

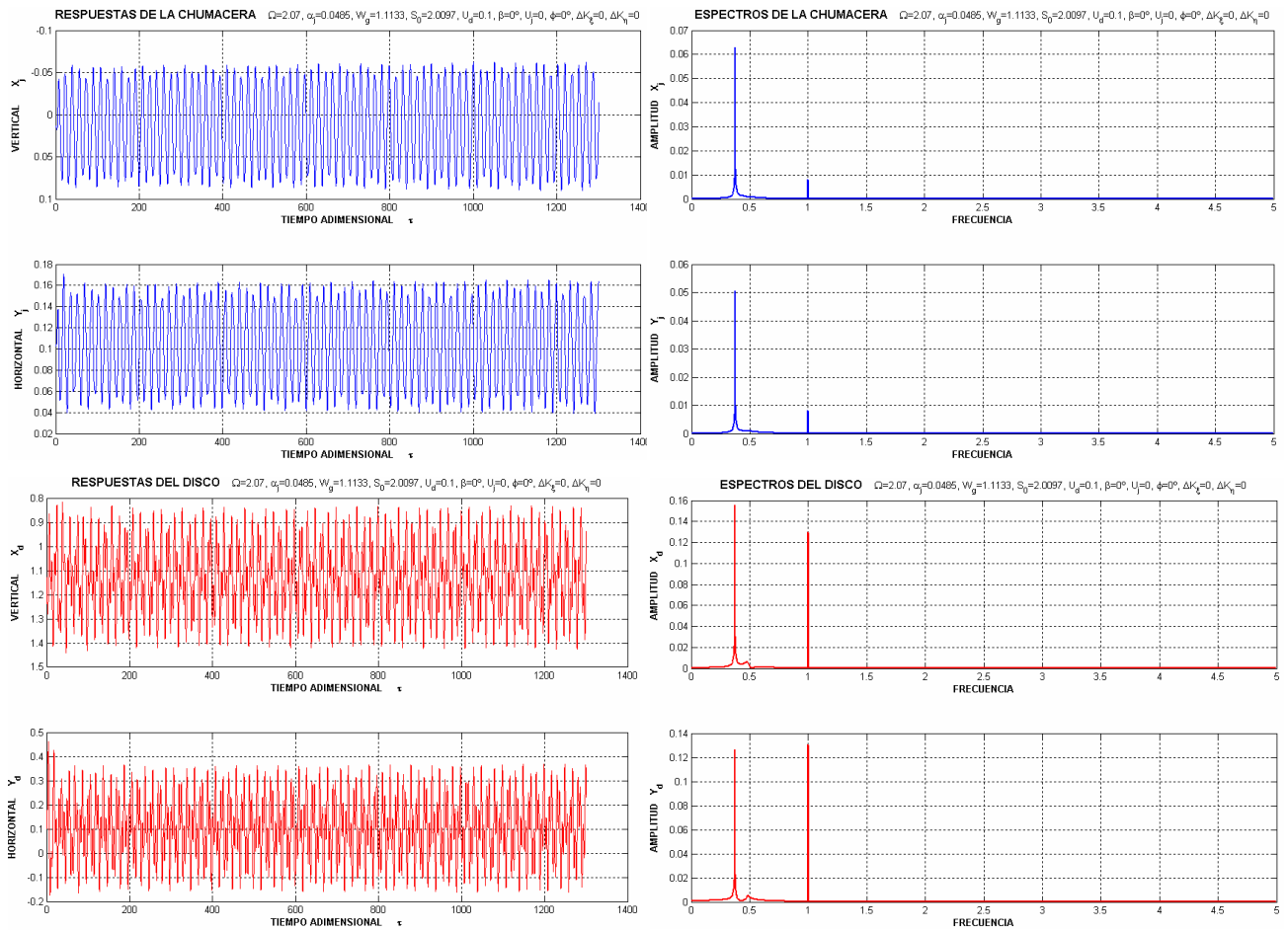


Fig. 4-89 Respuestas horizontal y vertical de las chumaceras y el disco y sus respectivos espectros de frecuencia, configuración I, eje integro, $\Omega = 2.07$

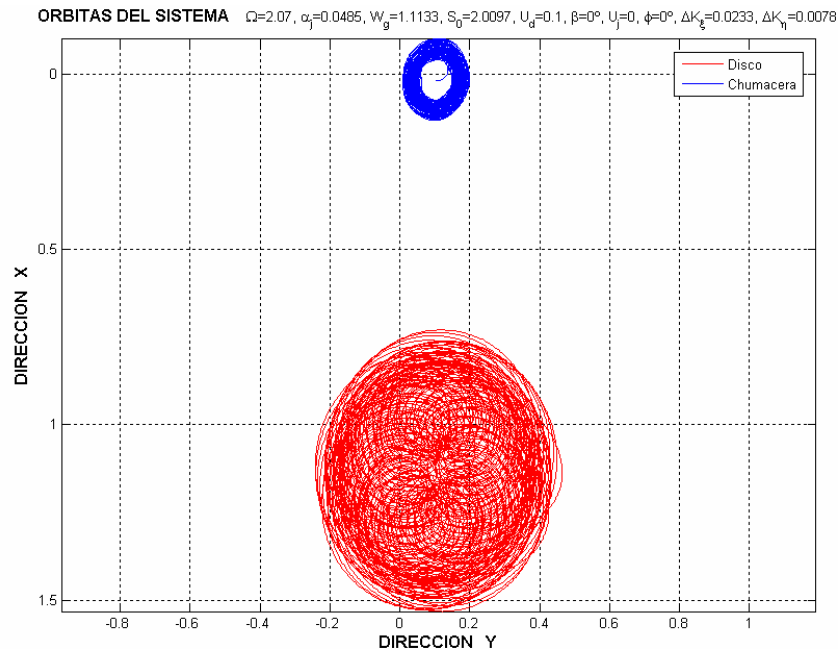


Fig. 4-90 Orbitas del sistema, configuración I, profundidad de grieta 12.5 %, $\Omega = 2.07$

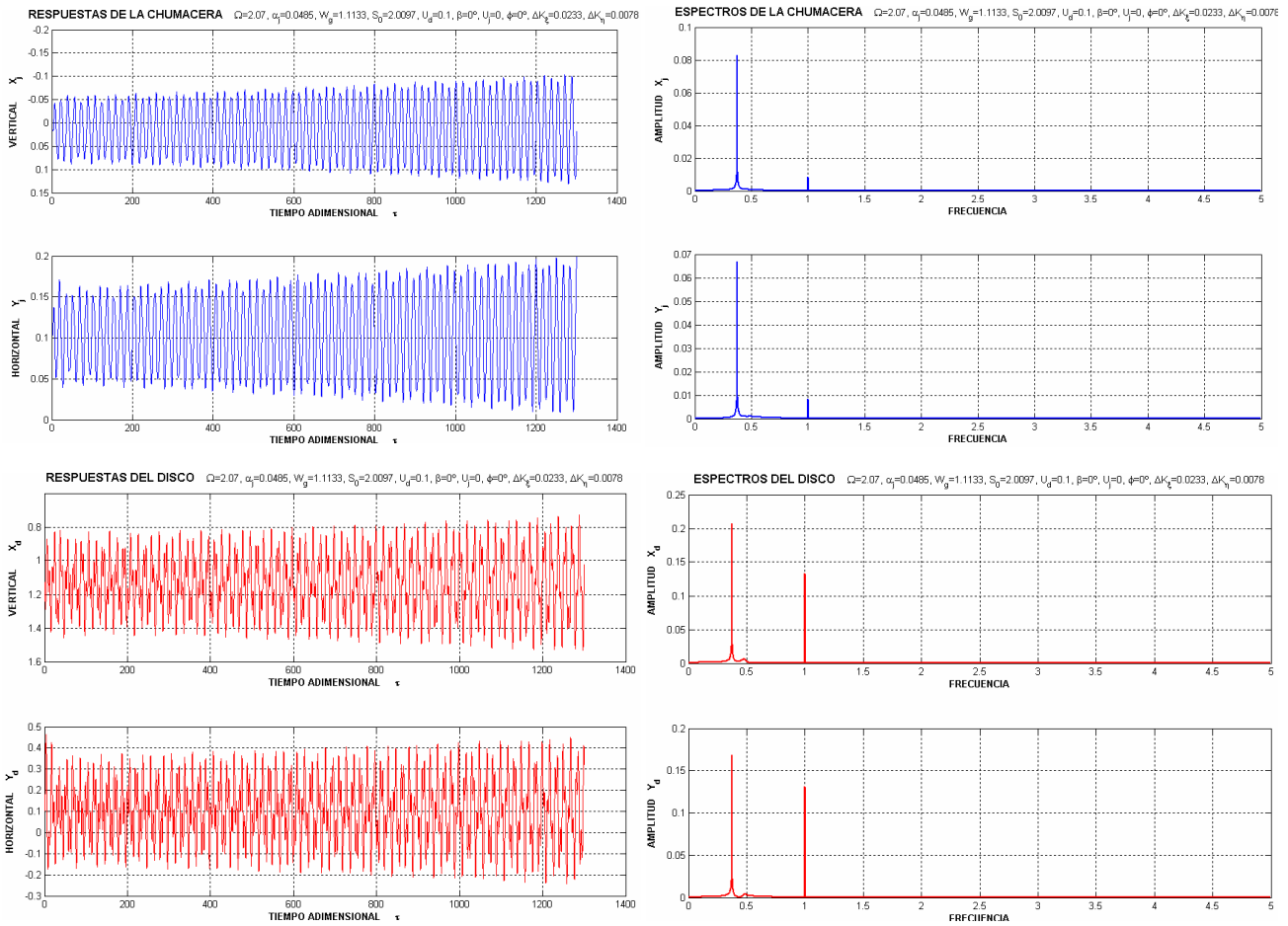


Fig. 4-91 Respuestas horizontal y vertical de las chumaceras y el disco y sus respectivos espectros de frecuencia, configuración I, profundidad de grieta 12.5 %, $\Omega = 2.07$

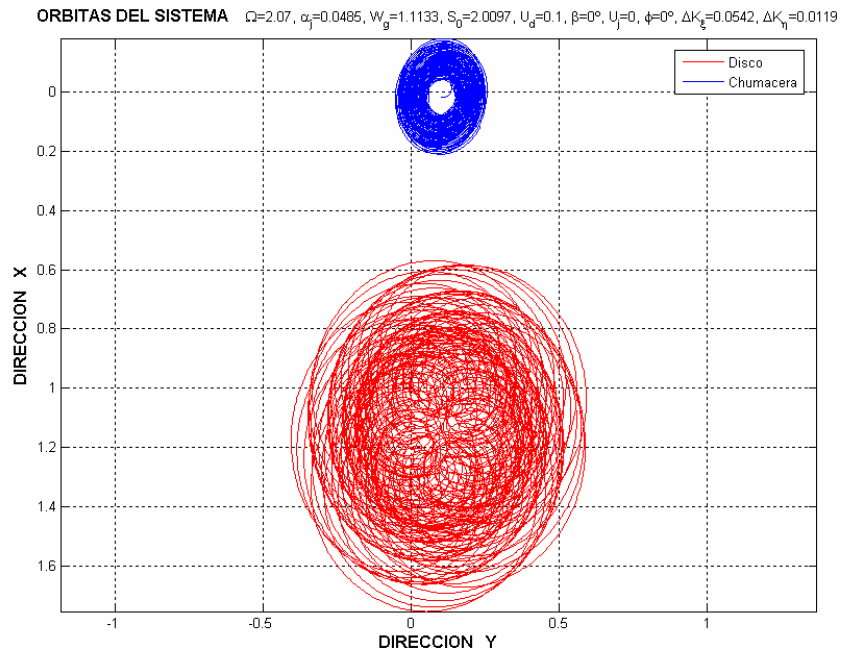


Fig. 4-92 Orbitas del sistema, configuración I, profundidad de grieta 25 %, $\Omega = 2.07$

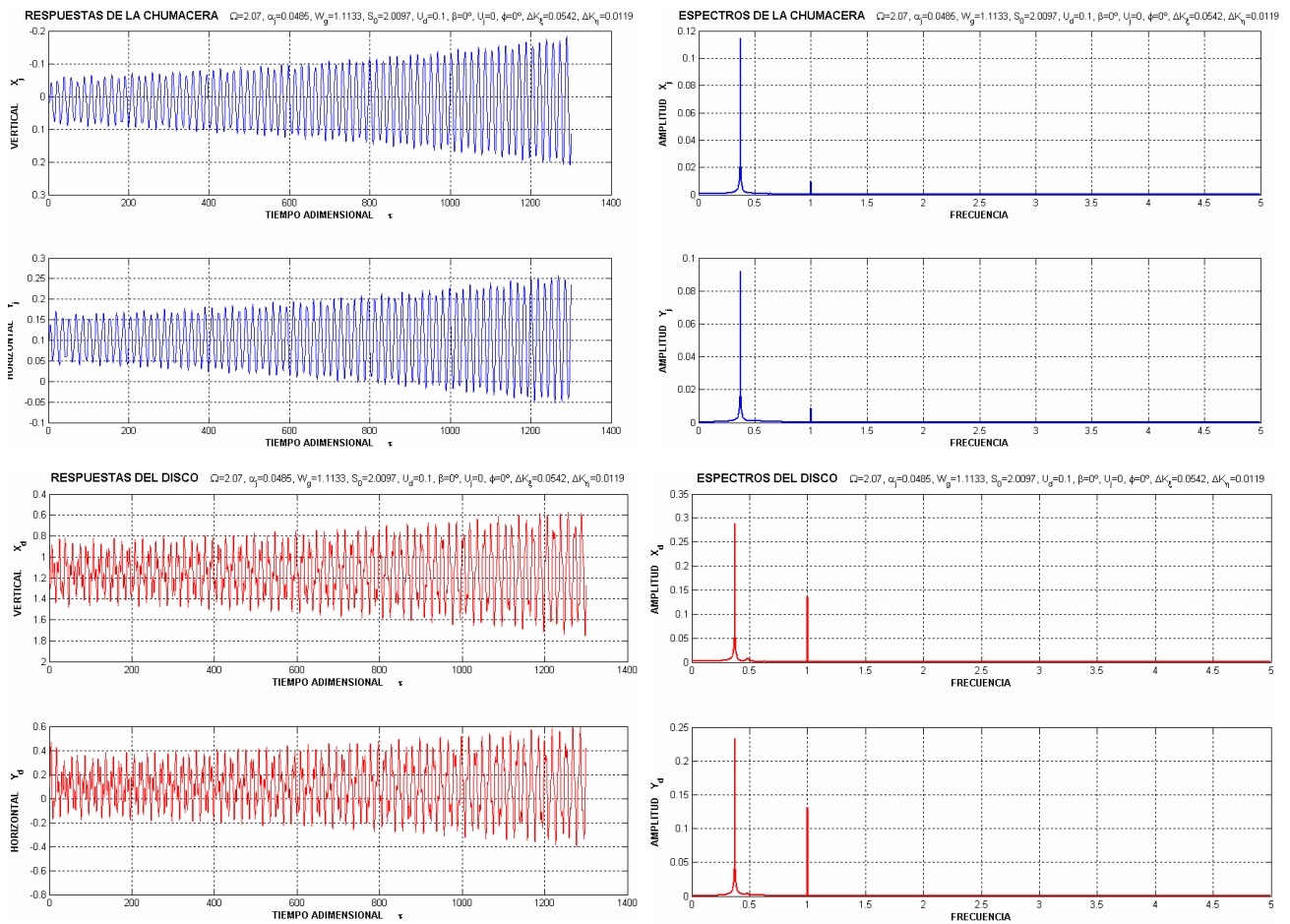


Fig. 4-93 Respuestas horizontal y vertical de las chumaceras y el disco y sus respectivos espectros de frecuencia, configuración I, profundidad de grieta 25 %, $\Omega = 2.07$

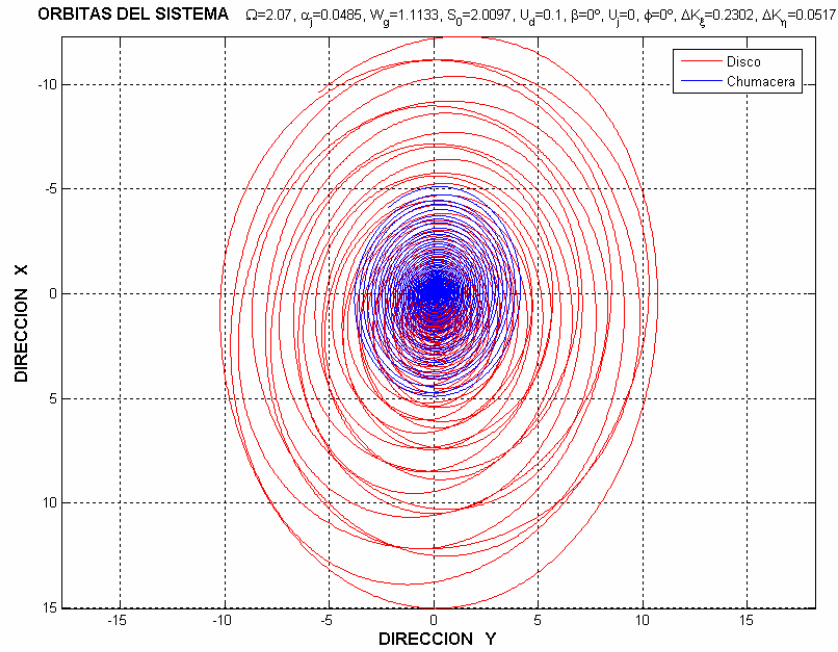


Fig. 4-94 Orbitas del sistema, configuración I, profundidad de grieta 50 %, $\Omega = 2.07$

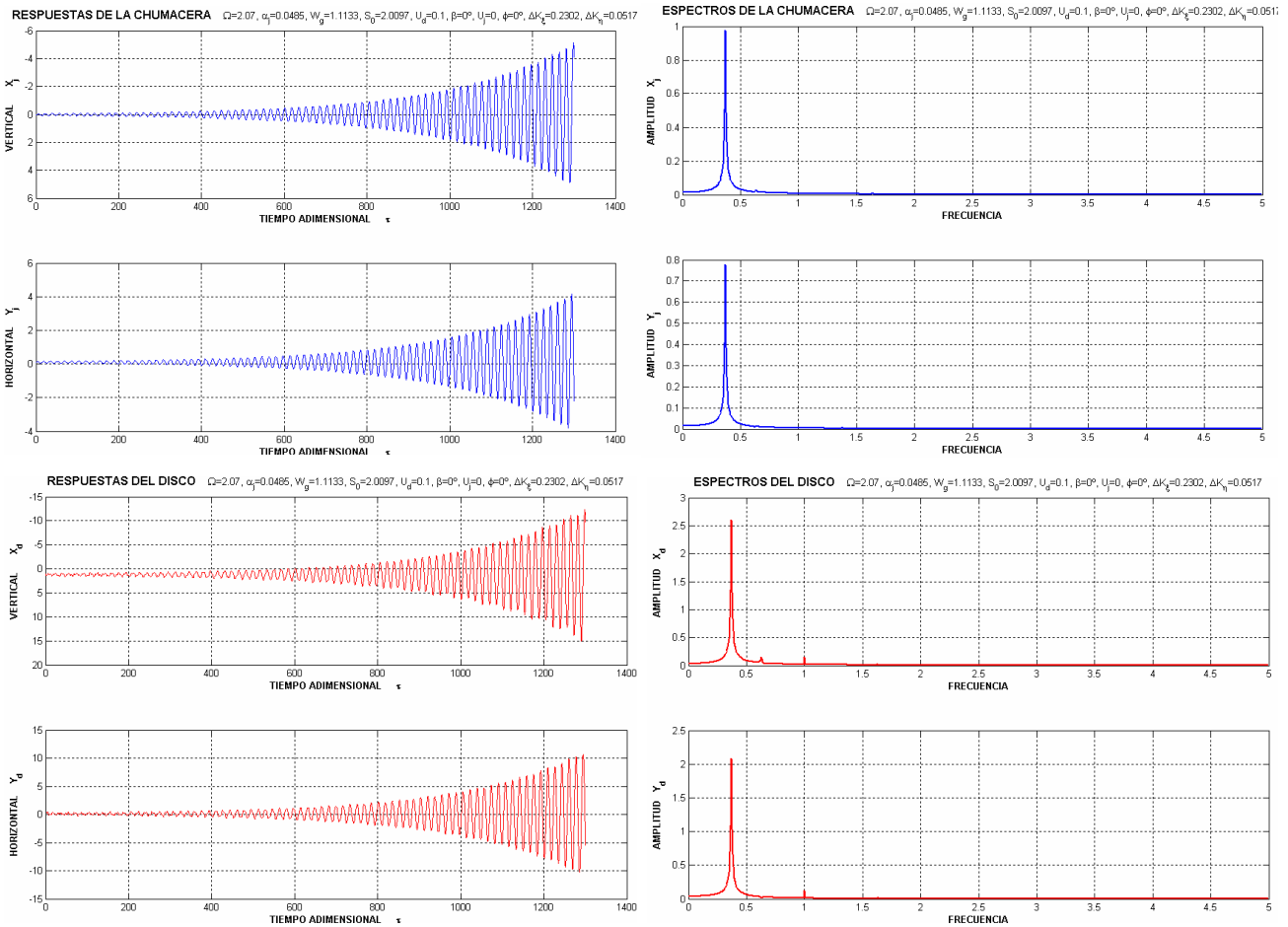


Fig. 4-95 Respuestas horizontal y vertical de las chumaceras y el disco y sus respectivos espectros de frecuencia, configuración I, profundidad de grieta 50 %, $\Omega = 2.07$

Grado de estabilidad del sistema, configuración II

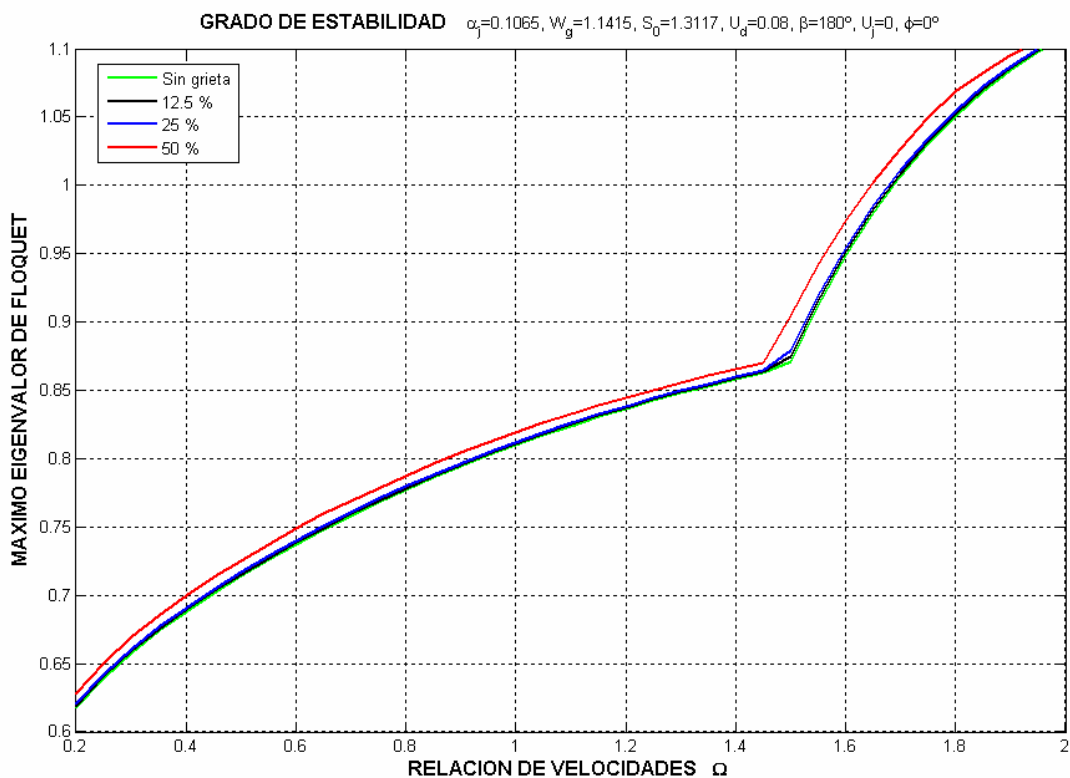


Fig. 4-96 Grado de estabilidad del sistema, configuración II.

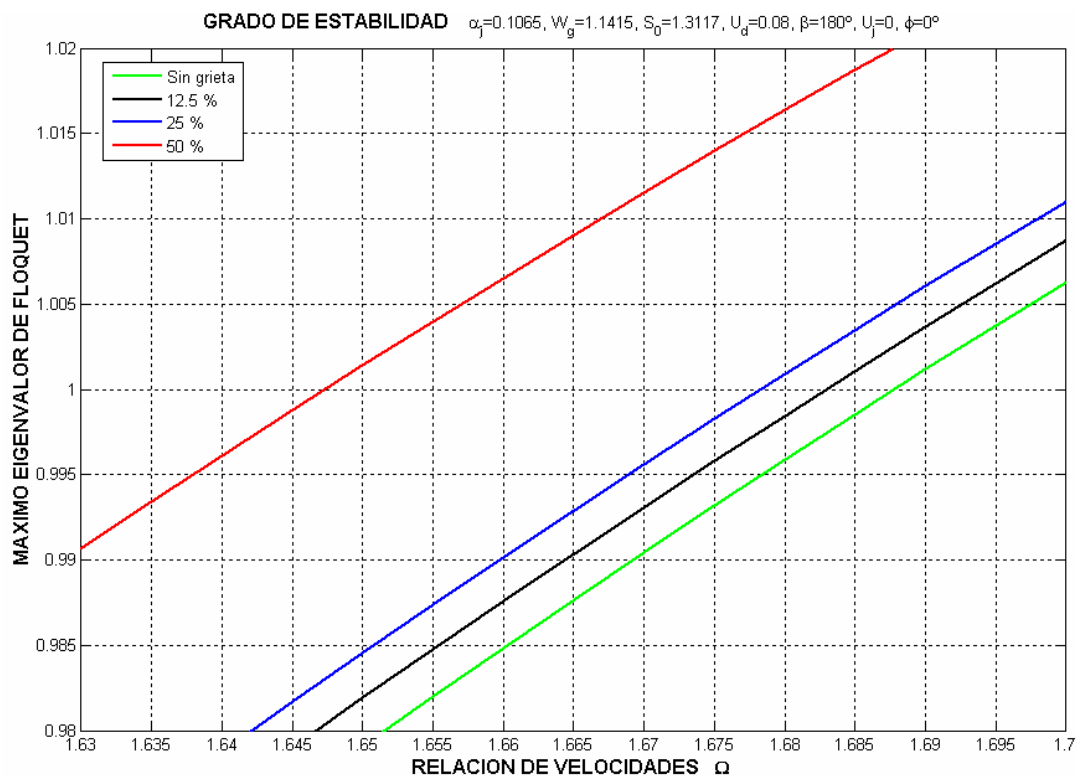


Fig. 4-97 Acercamiento a la zona de transición estable-inestable, configuración II.

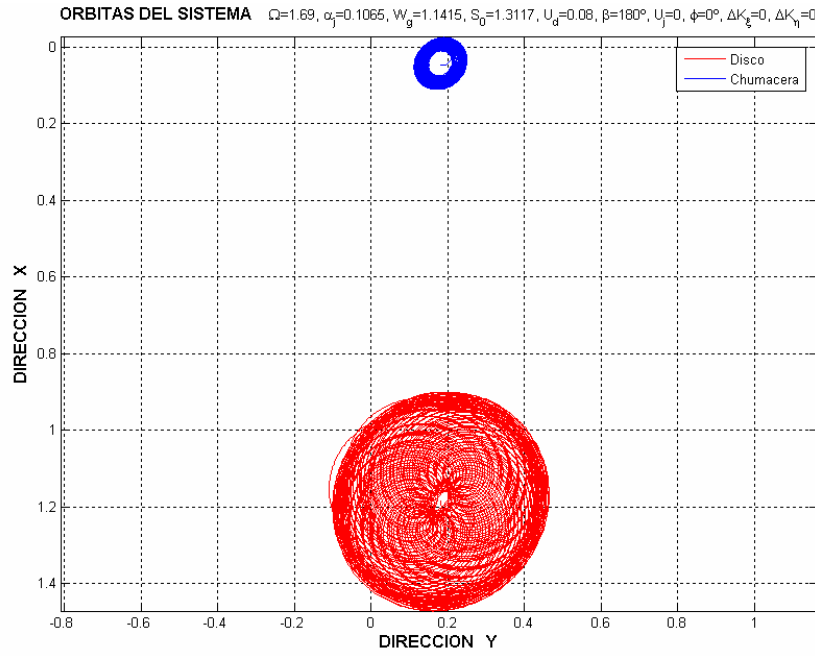


Fig. 4-98 Orbitas del sistema al comienzo de la inestabilidad, configuración II, eje integro, $\Omega = 1.69$

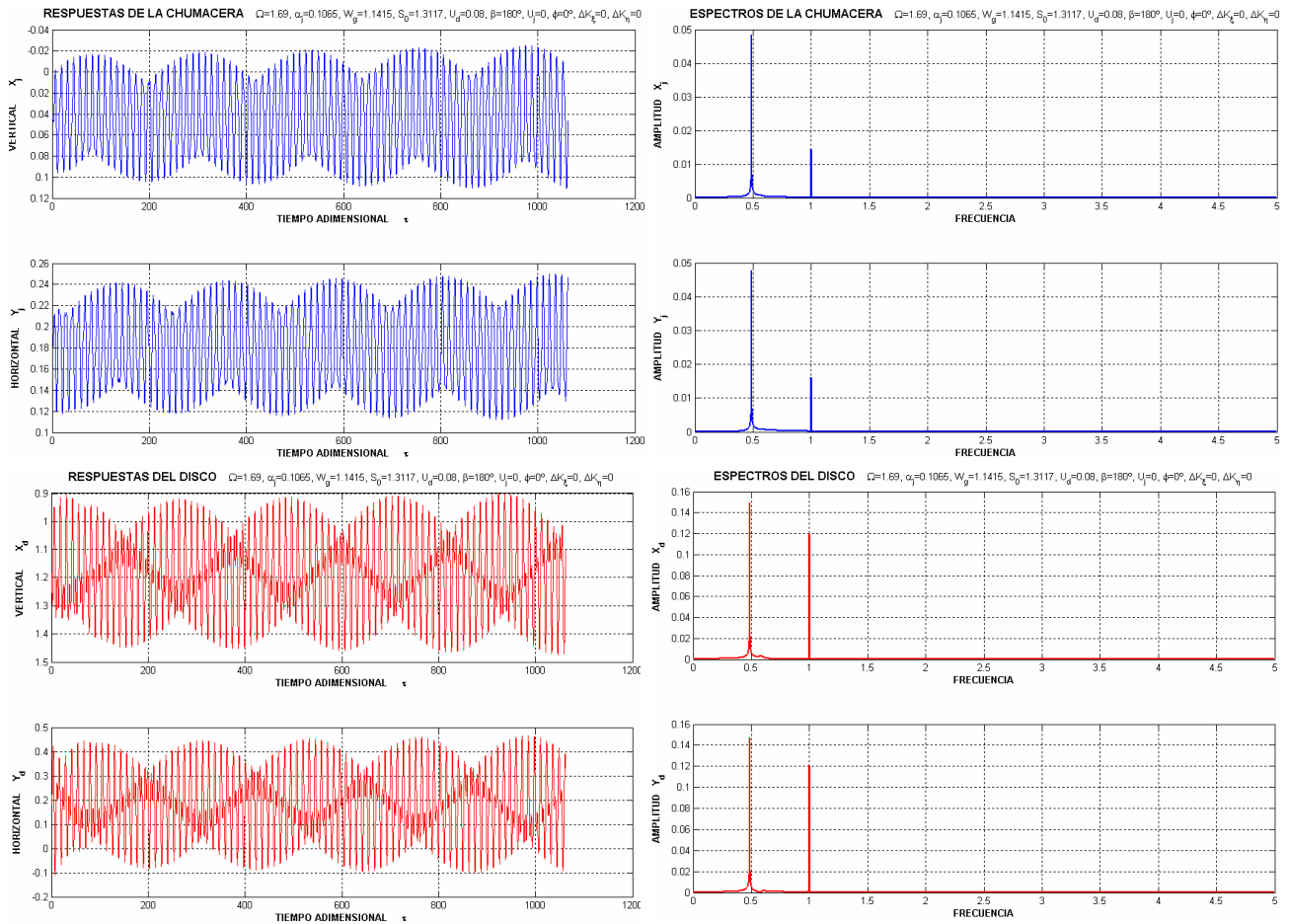


Fig. 4-99 Respuestas horizontal y vertical de las chumaceras y el disco y sus respectivos espectros de frecuencia, configuración II, eje integro, $\Omega = 1.69$

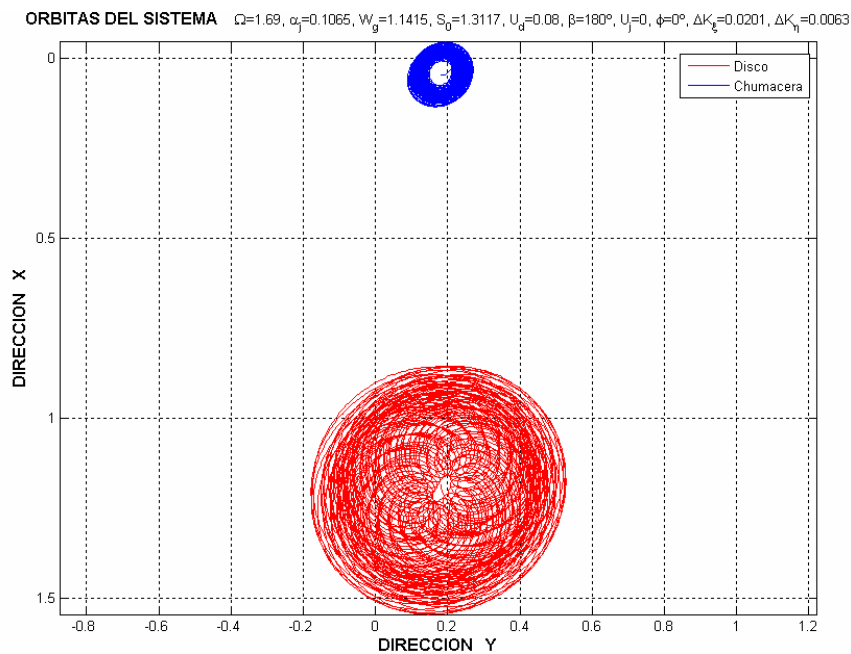


Fig. 4-100 Orbitas del sistema, configuración II, profundidad de grieta 12.5 %, $\Omega = 1.69$

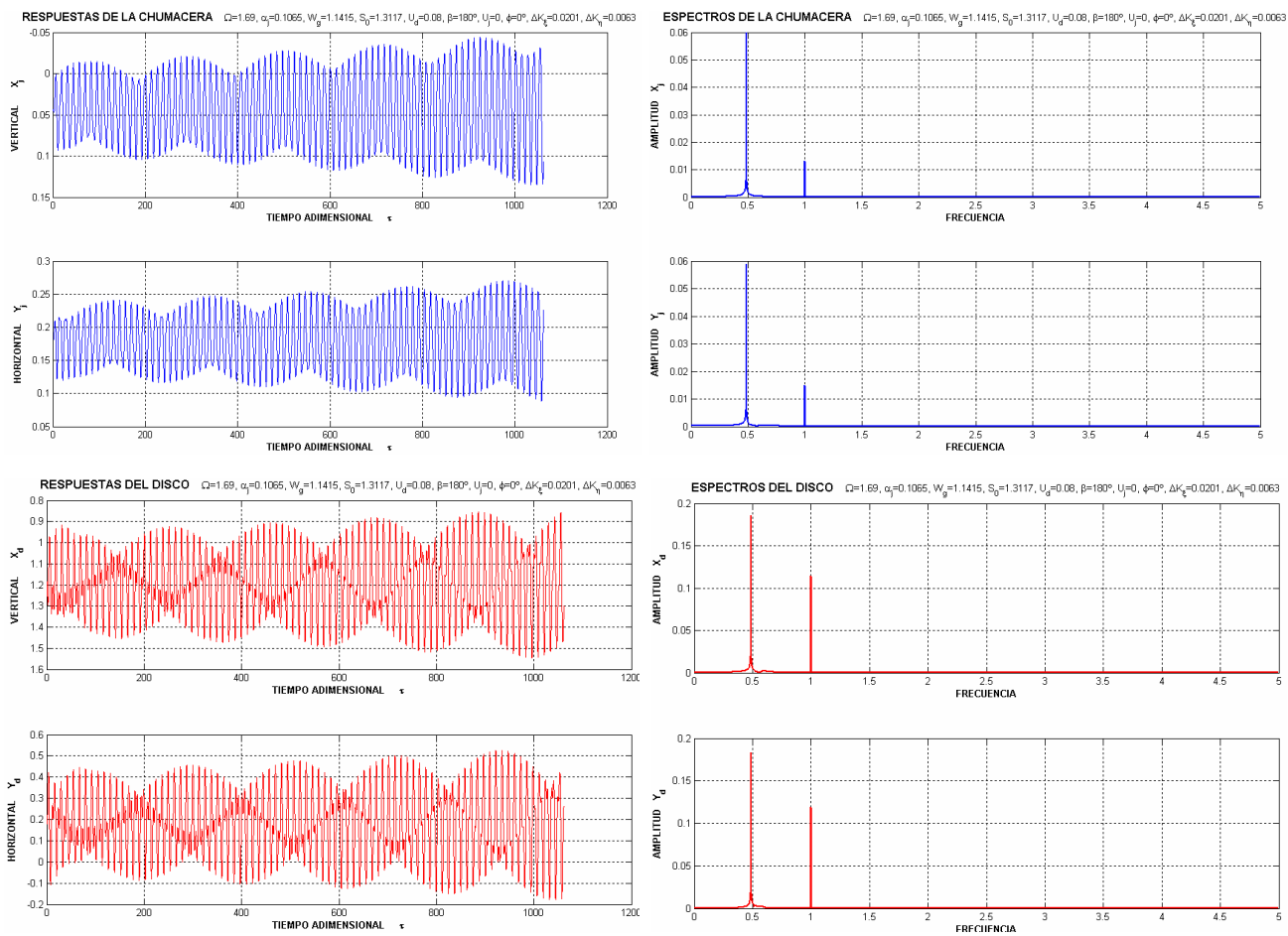


Fig. 4-101 Respuestas horizontal y vertical de las chumaceras y el disco y sus respectivos espectros de frecuencia, configuración II, profundidad de grieta 12.5 %, $\Omega = 1.69$

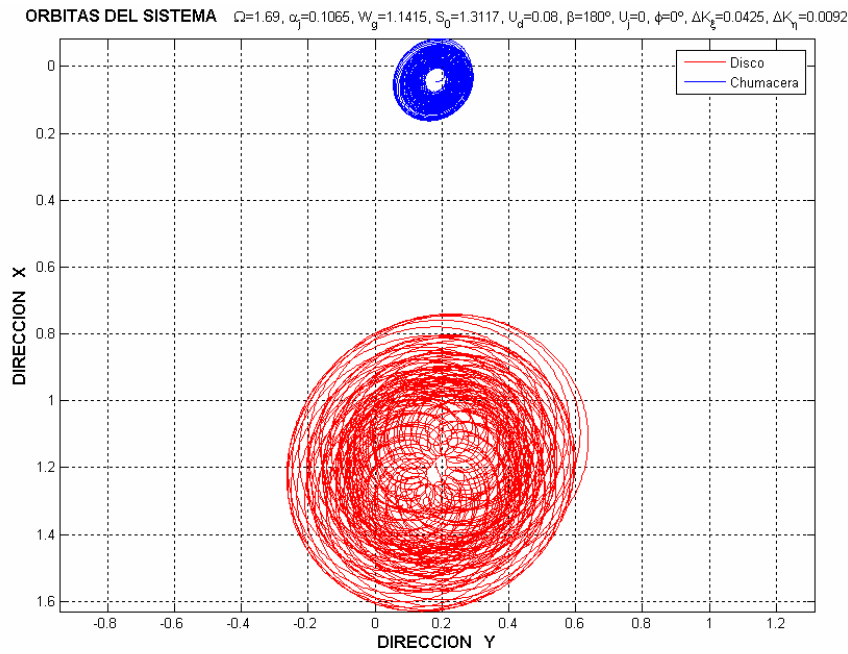


Fig. 4-102 Orbitas del sistema, configuración II, profundidad de grieta 25 %, $\Omega = 1.69$

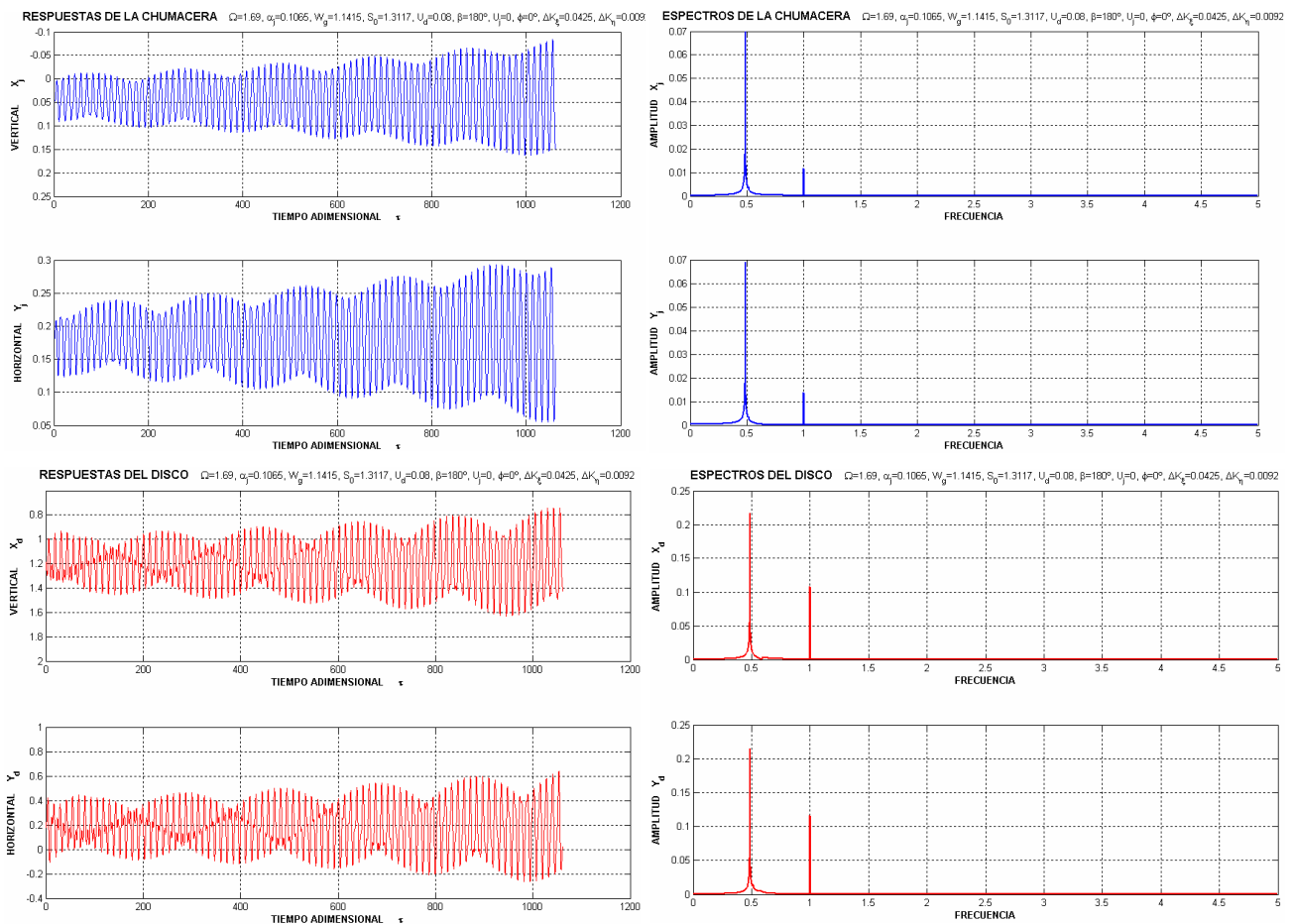


Fig. 4-103 Respuestas horizontal y vertical de las chumaceras y el disco y sus respectivos espectros de frecuencia, configuración II, profundidad de grieta 25 %, $\Omega = 1.69$

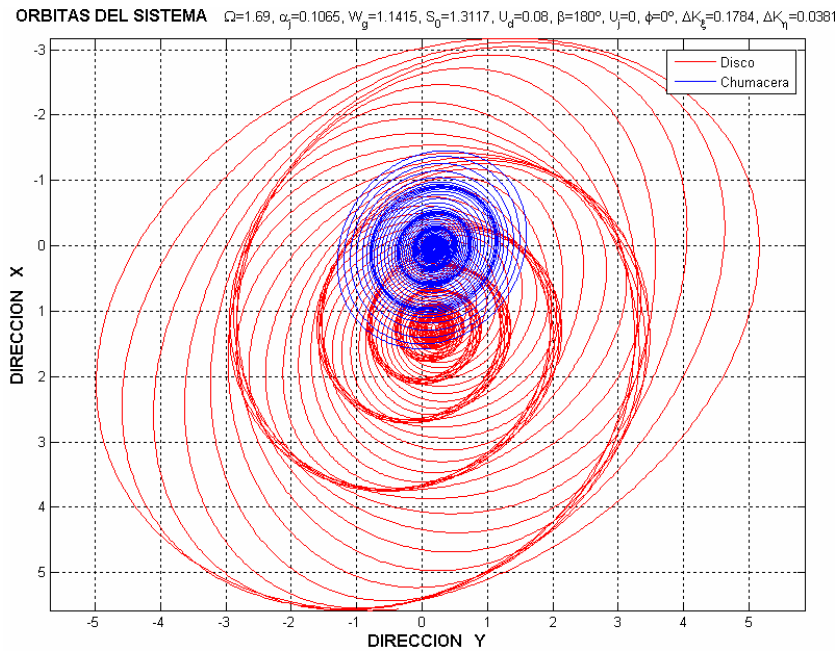


Fig. 4-104 Orbitas del sistema, configuración II, profundidad de grieta 50 %, $\Omega = 1.69$

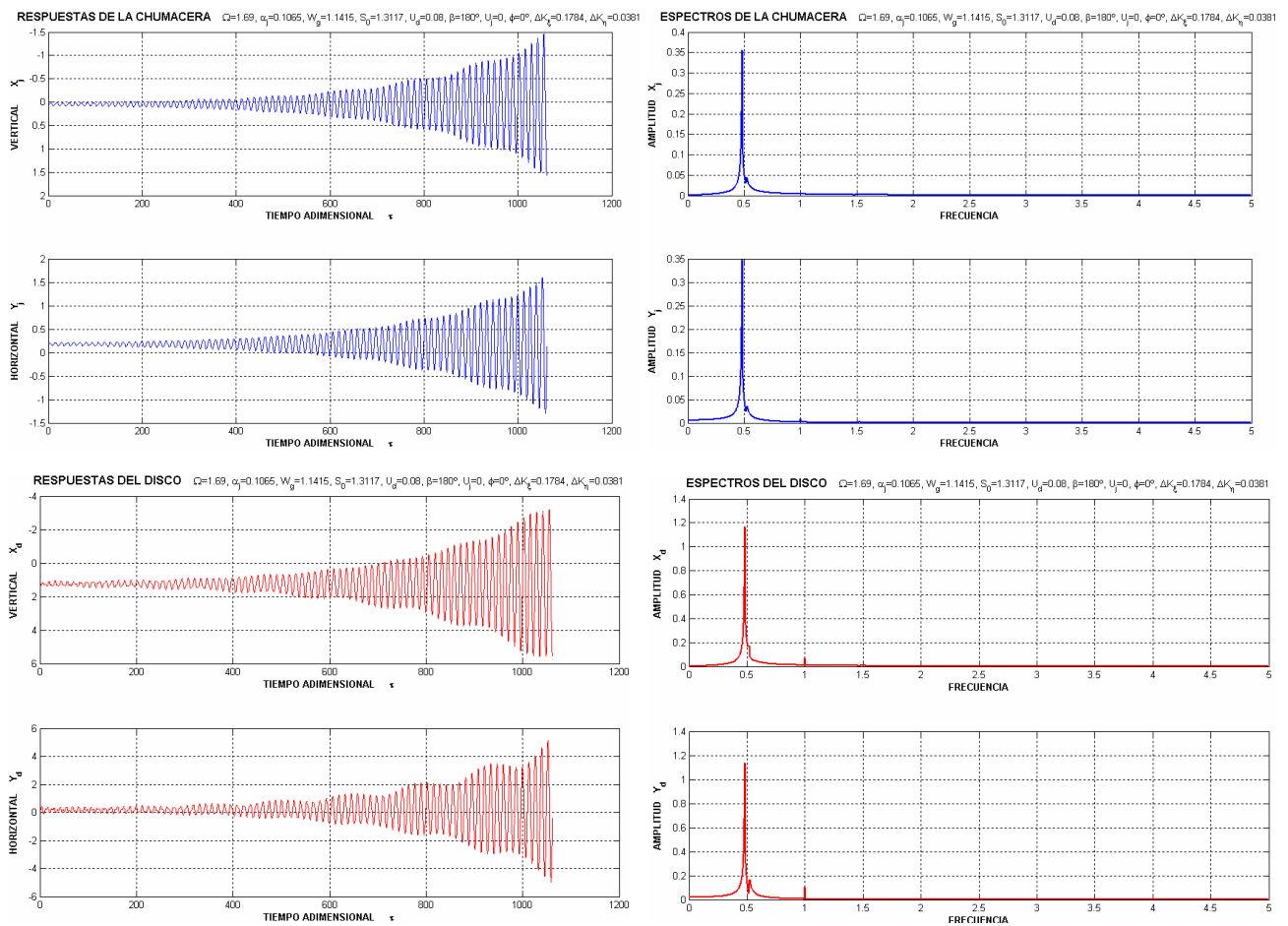


Fig. 4-105 Respuesta horizontal y vertical del disco y sus respectivos espectros de frecuencia, configuración II, profundidad de grieta 50 %, $\Omega = 1.69$

En los siguientes diagramas de Bode se puede observar que el comportamiento de la señal del disco es prácticamente el mismo que se presenta en las chumaceras, cualitativamente hablando. Puede notarse que bajo algunas condiciones la amplitud a la mitad de la velocidad crítica es inclusive mayor que la amplitud obtenida a la velocidad crítica, lo cual ha sido detectado en experimentos llevados a cabo en el Laboratorio de Vibraciones y Rotodinámica sobre el rotorkit de Bently Nevada [121], [54].

En la dirección horizontal los efectos de la vibración del sistema son menos pronunciados, es decir, se facilita más la detección de grietas con los sensores colocados en la dirección vertical (principalmente debido al efecto de la gravedad)

Al analizar los siguientes diagramas de Bode (Fig. 4-106-Fig. 4-113) se nota nuevamente que la presencia de la grieta tiene una gran influencia en el comportamiento dinámico del sistema, produciendo que la inestabilidad del sistema agrietado se presente a una velocidad menor en comparación al sistema sin grieta. Esto es mucho más evidente al observar las respuestas del sistema con profundidad de grieta del 50% y compararlas con las respuestas del sistema con eje integro.

Finalmente cabe mencionar una vez más que las grietas pueden ser detectadas observando la respuesta asíncrona durante la marcha a cocientes de $1/2$, $1/3$ y $1/4$ de la primera velocidad crítica.

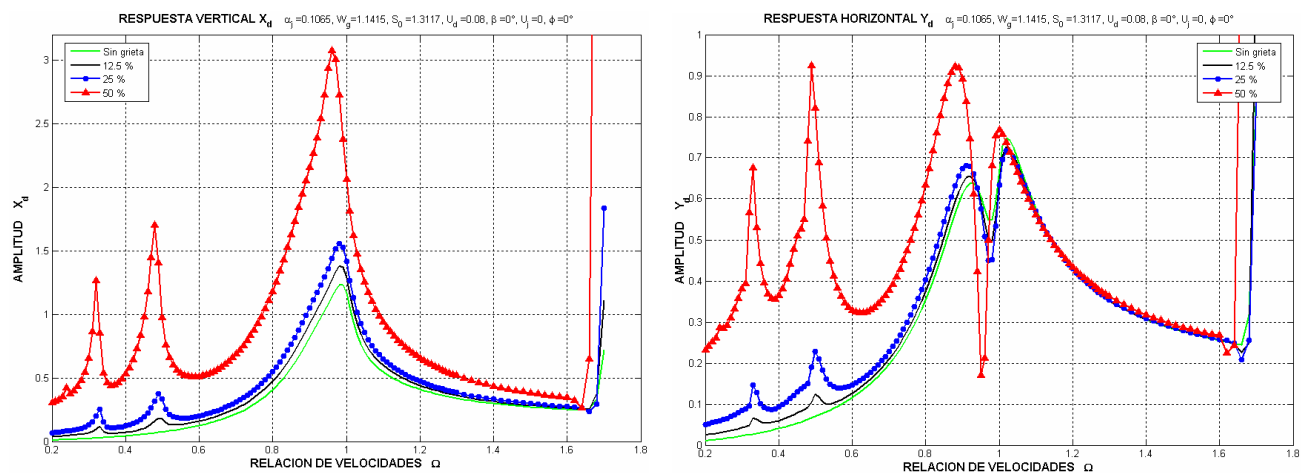


Fig. 4-106 Respuestas horizontal y vertical del disco para diferentes profundidades de grieta, mostrando el comienzo de la inestabilidad, configuración II, $\beta = 0^\circ$.

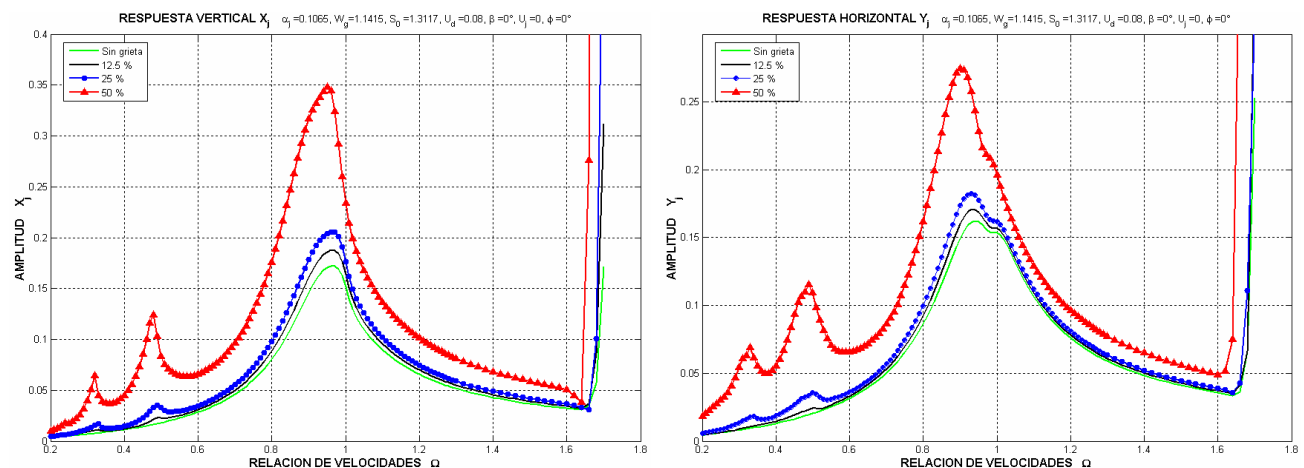


Fig. 4-107 Respuestas horizontal y vertical de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, mostrando el comienzo de la inestabilidad, configuración II, $\beta = 0^\circ$.

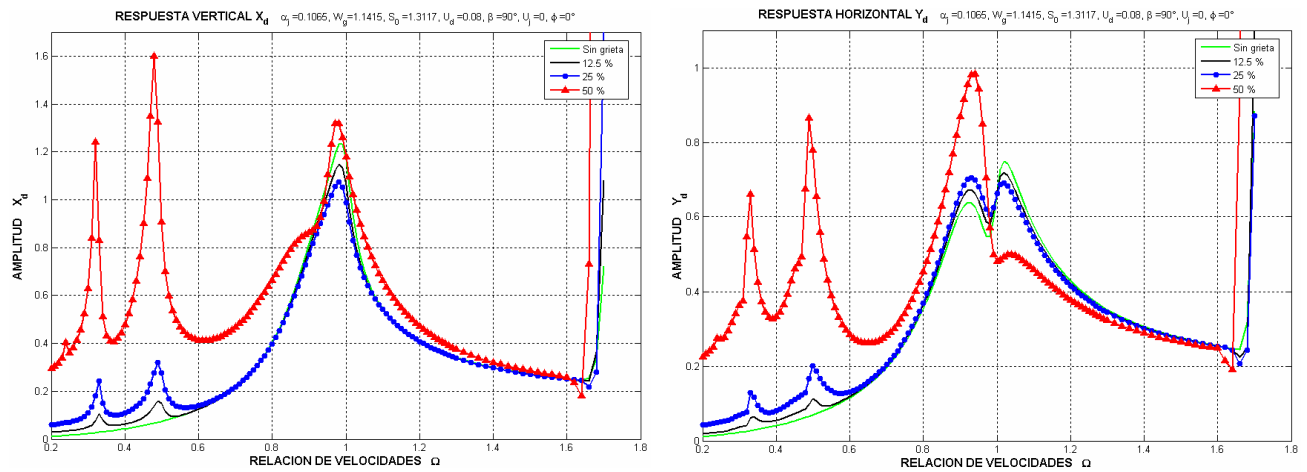


Fig. 4-108 Respuestas horizontal y vertical del disco para diferentes profundidades de grieta, mostrando el comienzo de la inestabilidad, configuración II, $\beta = 90^\circ$.

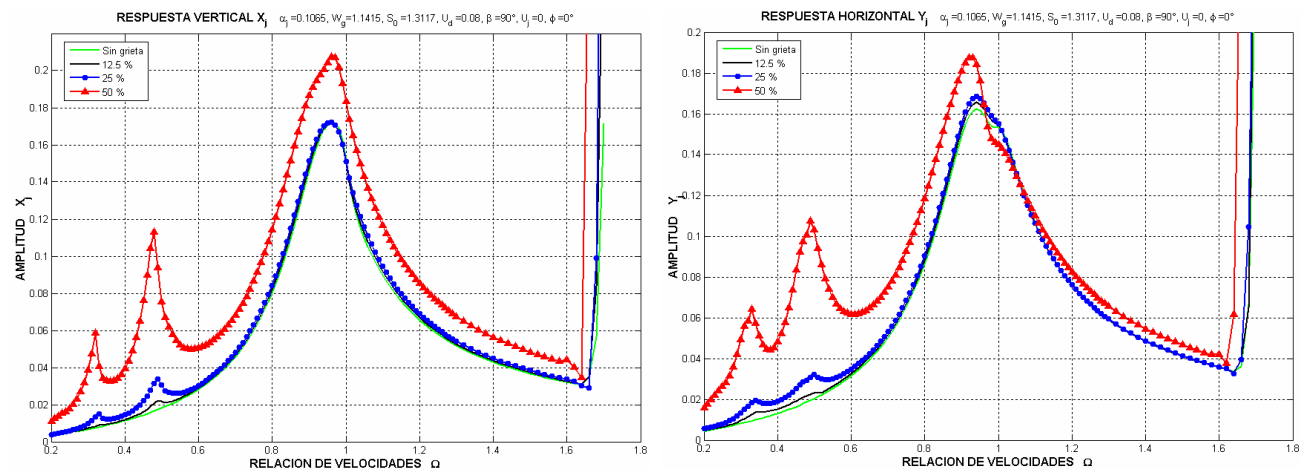


Fig. 4-109 Respuestas horizontal y vertical de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, mostrando el comienzo de la inestabilidad, configuración II, $\beta = 90^\circ$.

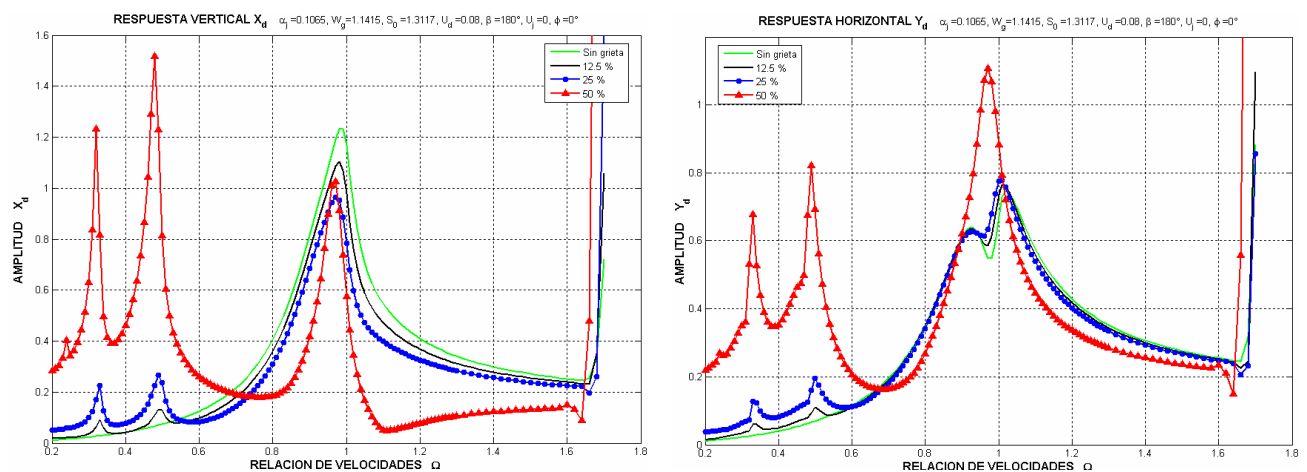


Fig. 4-110 Respuestas horizontal y vertical del disco para diferentes profundidades de grieta, mostrando el comienzo de la inestabilidad, configuración II, $\beta = 180^\circ$.

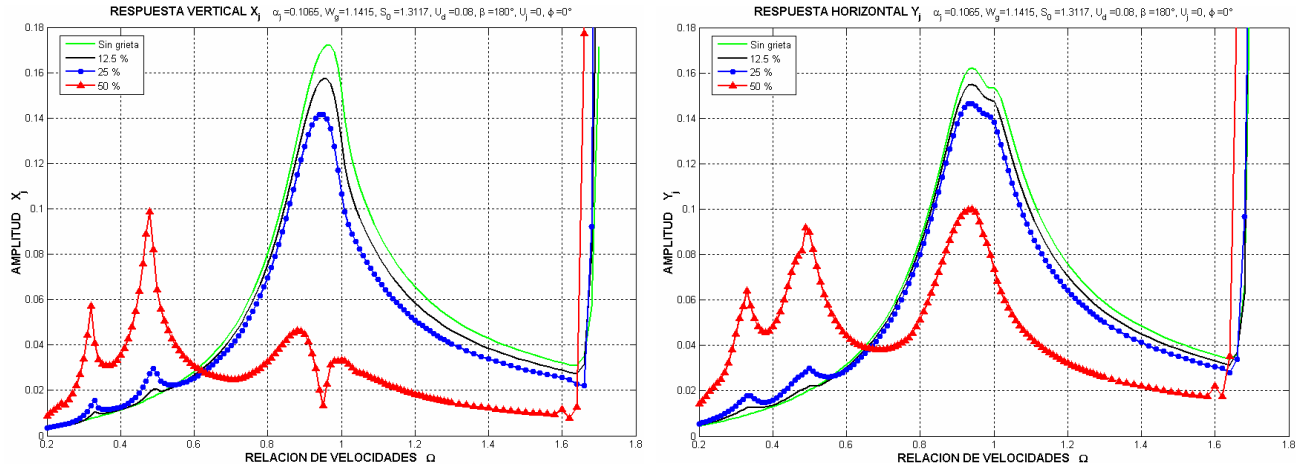


Fig. 4-111 Respuestas horizontal y vertical de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, mostrando el comienzo de la inestabilidad, configuración I, $\beta = 180^\circ$.

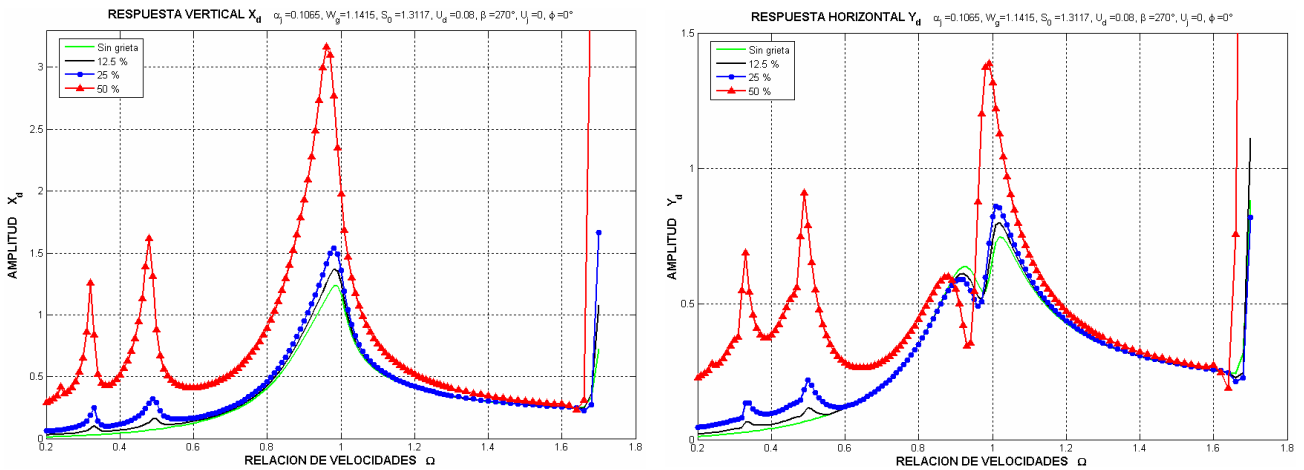


Fig. 4-112 Respuestas horizontal y vertical del disco para diferentes profundidades de grieta, mostrando el comienzo de la inestabilidad, configuración II, $\beta = 270^\circ$.

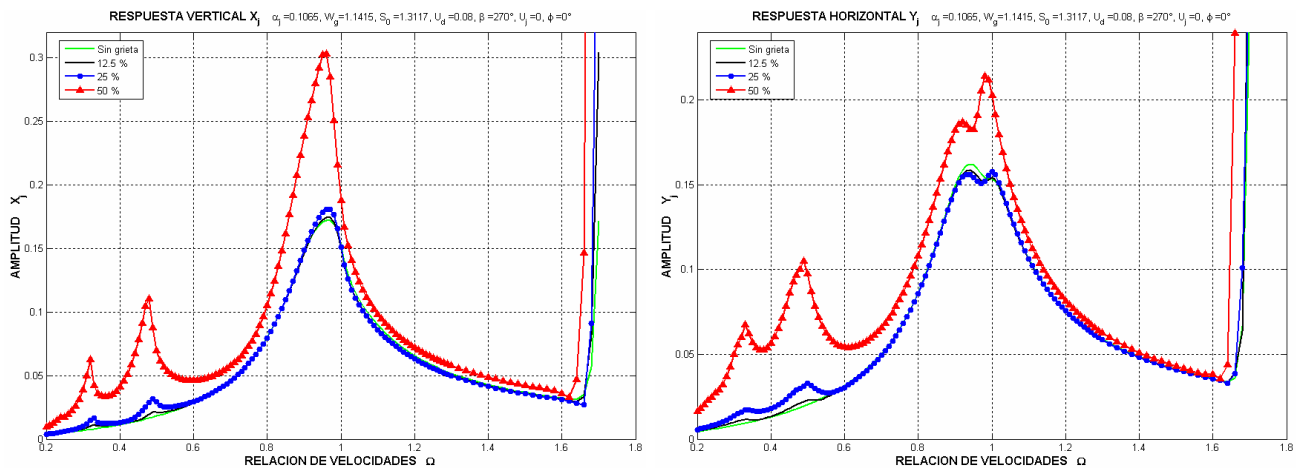


Fig. 4-113 Respuestas horizontal y vertical de la chumacera para diferentes profundidades de grieta, mostrando el comienzo de la inestabilidad, configuración II, $\beta = 270^\circ$.

4.8 Comparación de los mecanismos de respiro de grieta y el análisis de su influencia en las respuestas del sistema

En literatura existen varios mecanismos de respiro de grieta, algunos son simples y otros completos pero complicados. Haciendo un análisis del estado del arte puede concluirse que el impacto efectivo en la respuesta debido a la selección de un modelo específico de respiro de grieta es polémico. Por lo tanto, tienen que ser considerados mecanismos de respiro específicos en la identificación de la grieta puesto que afectan la actuación de los métodos de detección de grieta basados modelos [77]. En general un modelo de respiro se puede aplicar a rotores horizontales dominados por la gravedad independientemente de la clase de soporte del eje.

Existen sofisticados y buenos modelos de respiro, como el propuesto por Bachschmid y Pennacchi [8], capaz de una detallada simulación con muchos grados de libertad, sin embargo el interés de esta sección es solamente el estudio del comportamiento cualitativo general. De allí que solamente se simulan y estudian numéricamente los dos mecanismos de respiro de grieta más simples y se analiza su impacto en la respuesta de sistema rotor-chumaceras. En las siguientes páginas se estudian los dos clásicos y bien conocidos fenómenos de respiro de grieta propuestos por Gasch [58] y Mayes & Davies [125] dados por las Eqs. (4.14) y (4.15) respectivamente e ilustrados en la Fig. 2-6. Se muestra como afectan la respuesta del sistema rotor-chumaceras durante la identificación de la grieta

La variación periódica cuadrada de Gasch implica una gran cantidad de términos armónicos pero es representada truncando la expansión infinita de Fourier.

$$g(\Phi) = \left(\frac{2}{\pi}\right) \left(\frac{\pi}{4} + \cos \Phi - \frac{1}{3} \cos 3\Phi + \frac{1}{5} \cos 5\Phi - \frac{1}{7} \cos 7\Phi + \dots\right) \quad (4.14)$$

Alternativamente el modelo atribuido a Mayes y Davies [125], teniendo un solo término armónico, está representado por:

$$g(\Phi) = \frac{1 + \cos \Phi}{2} \quad (4.15)$$

El modelo rotor-chumaceras, aunque limitado en el número de grados de libertad, es de gran alcance para el análisis cualitativo y proporciona pautas intuitivas del comportamiento de ejes agrietados; el modelo presentado por Gómez-Mancilla [66], [71], [73] es utilizado para probar ambos mecanismos de respiro de grieta. Para enfocarse solamente en la influencia de la grieta esta vez se omite la interacción del desbalance del disco y la grieta.

Aunque las conclusiones de este estudio podrían aplicarse cualitativamente a diversas configuraciones paramétricas, por razones de espacio se enfatiza solamente en las simulaciones con los parámetros de la configuración I, según lo propuesto en el Capítulo 3

Puede observarse que pese a la creencia de algunos investigadores, la selección del modelo de respiro juega un papel importante en la dinámica de los sistemas rotores agrietados, especialmente en las resonancias locales más bajas del sistema afectando perceptiblemente las órbitas y el contenido de la respuesta de frecuencia, y en menor grado las amplitudes de vibración en ocasiones agregando una resonancia local a 1/4 de la frecuencia normalizada y aumentando resonancia a 1/2 X. Se encuentra que la descripción específica del modelo de respiro de grieta puede tener un impacto suave o significativo en las respuestas simuladas del sistema rotor-chumaceras. También, cada término armónico en el modelo de respiro excita tanto su correspondiente componente así como armónicos más altos, agregando más resonancias locales con frecuencias súper-síncronas.

Las figuras Fig. 4-114 y Fig. 4-115 4-119 ilustran las respuestas orbitales en algunas resonancias locales para la configuración I y profundidades de grieta que van del 12.5% al 50% del diámetro del eje; y simulando las dos descripciones de respiro de grieta.

Al analizar estas graficas resulta evidente que la selección del modelo de respiro juega un papel importante en la dinámica de los sistemas rotatorios agrietados.

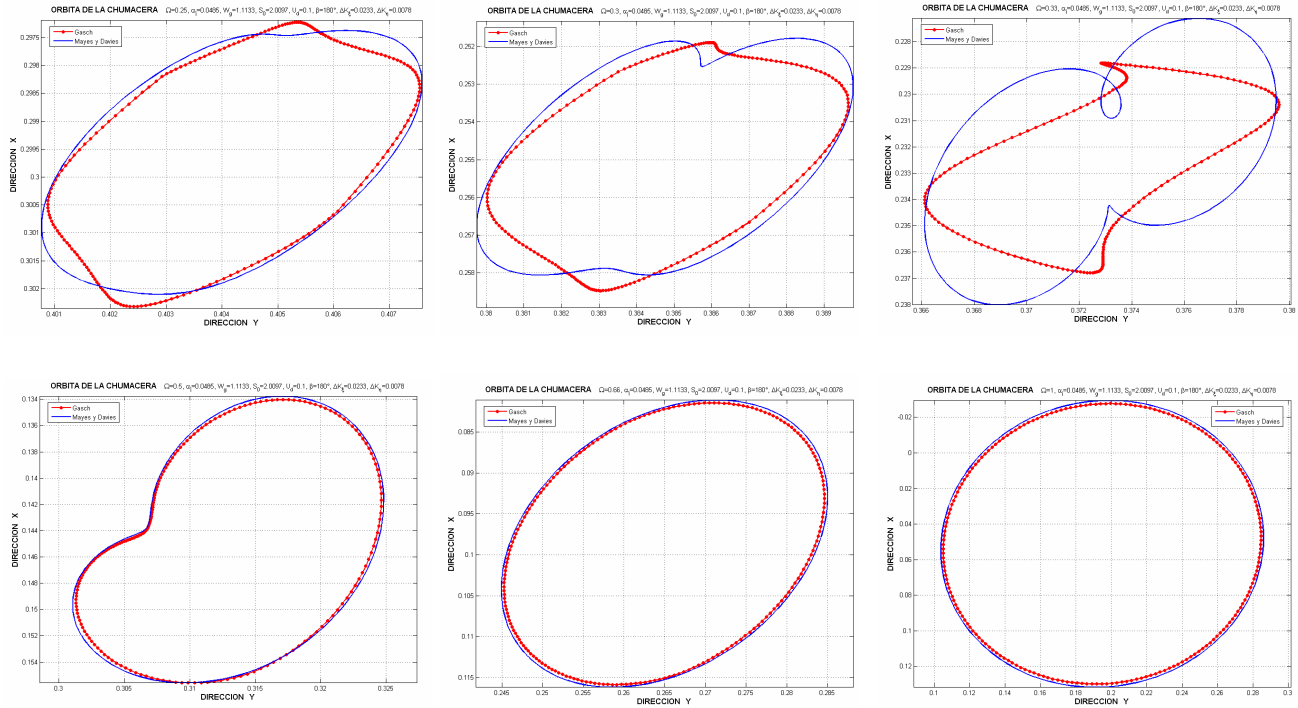


Fig. 4-114 Orbits de la chumacera a diferentes resonancias locales comparando las funciones de respiro de la grieta, $\beta = 180^\circ$, profundidad de grieta 12.5 %

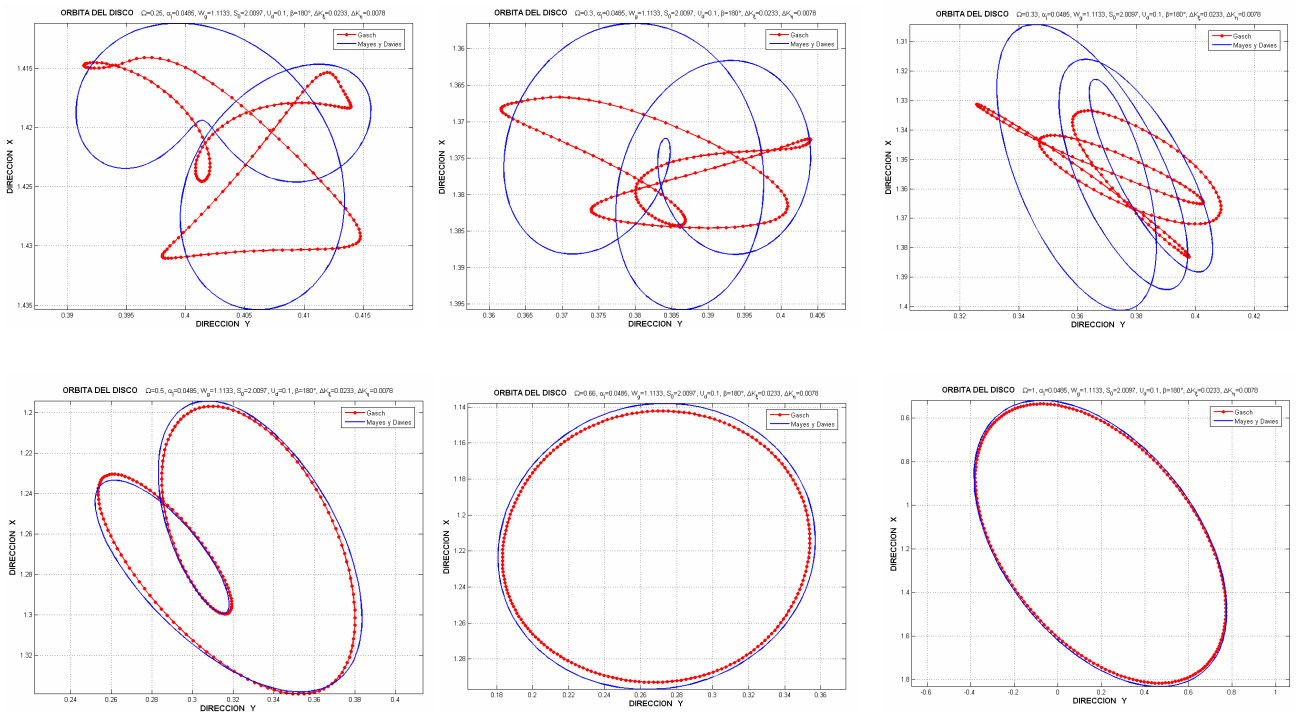


Fig. 4-115 Orbits del disco a diferentes resonancias locales comparando las funciones de respiro de la grieta, $\beta = 180^\circ$, profundidad de grieta 12.5 %

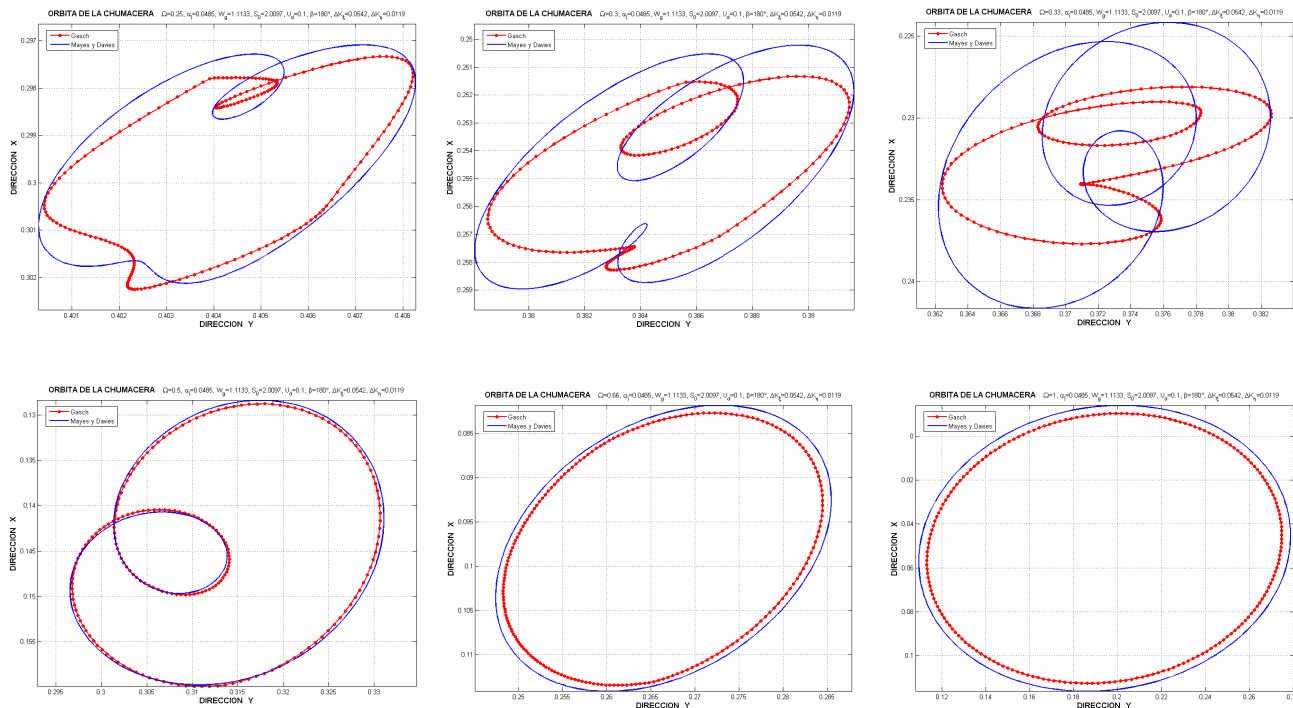


Fig. 4-116 Orbits de la chumacera a diferentes resonancias locales comparando las funciones de respiro de la grieta, $\beta = 180^\circ$, profundidad de grieta 25 %

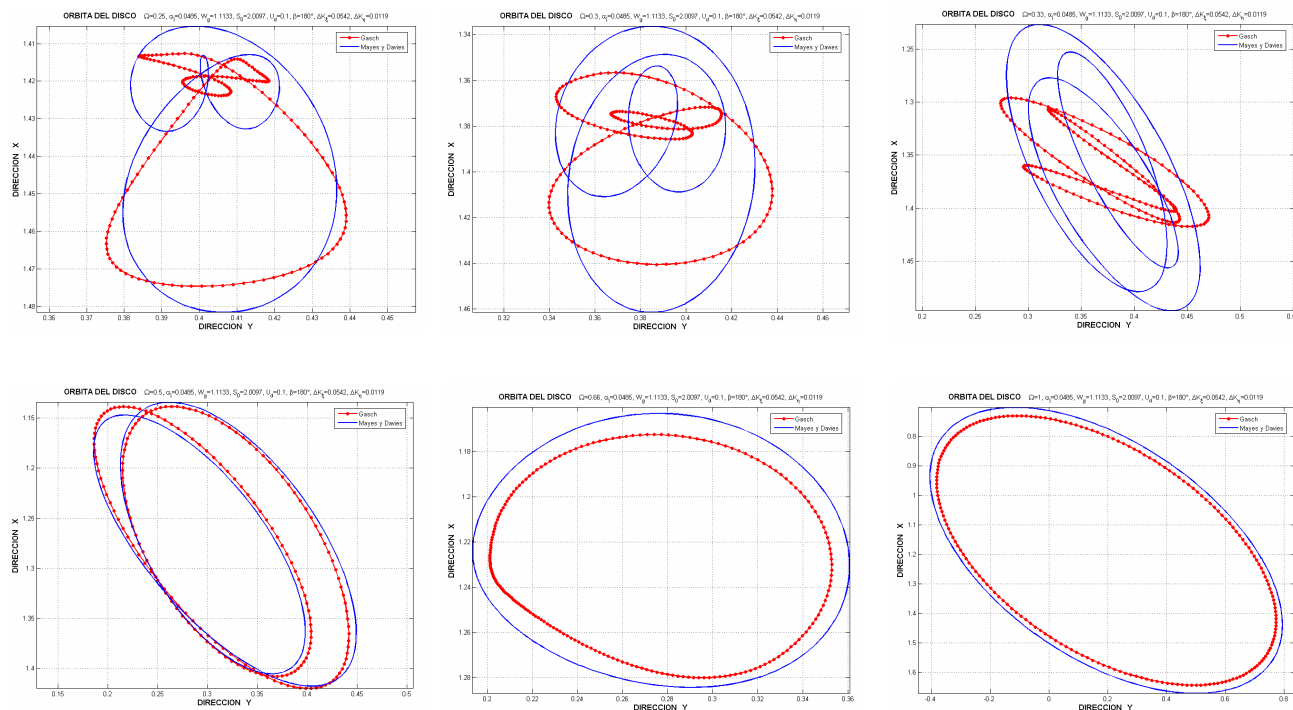


Fig. 4-117 Orbits del disco a diferentes resonancias locales comparando las funciones de respiro de la grieta, $\beta = 180^\circ$, profundidad de grieta 25 %

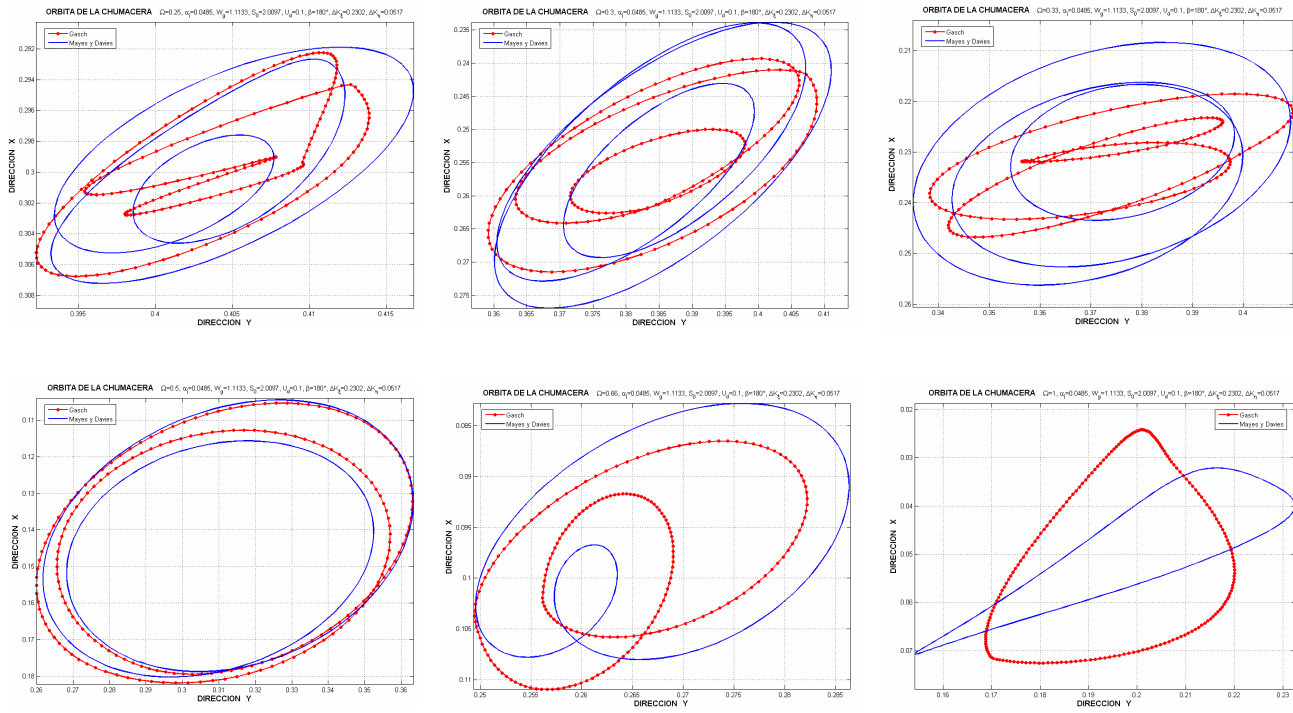


Fig. 4-118 Orbits de la chumacera a diferentes resonancias locales comparando las funciones de respiro de la grieta, $\beta = 180^\circ$, profundidad de grieta 50 %

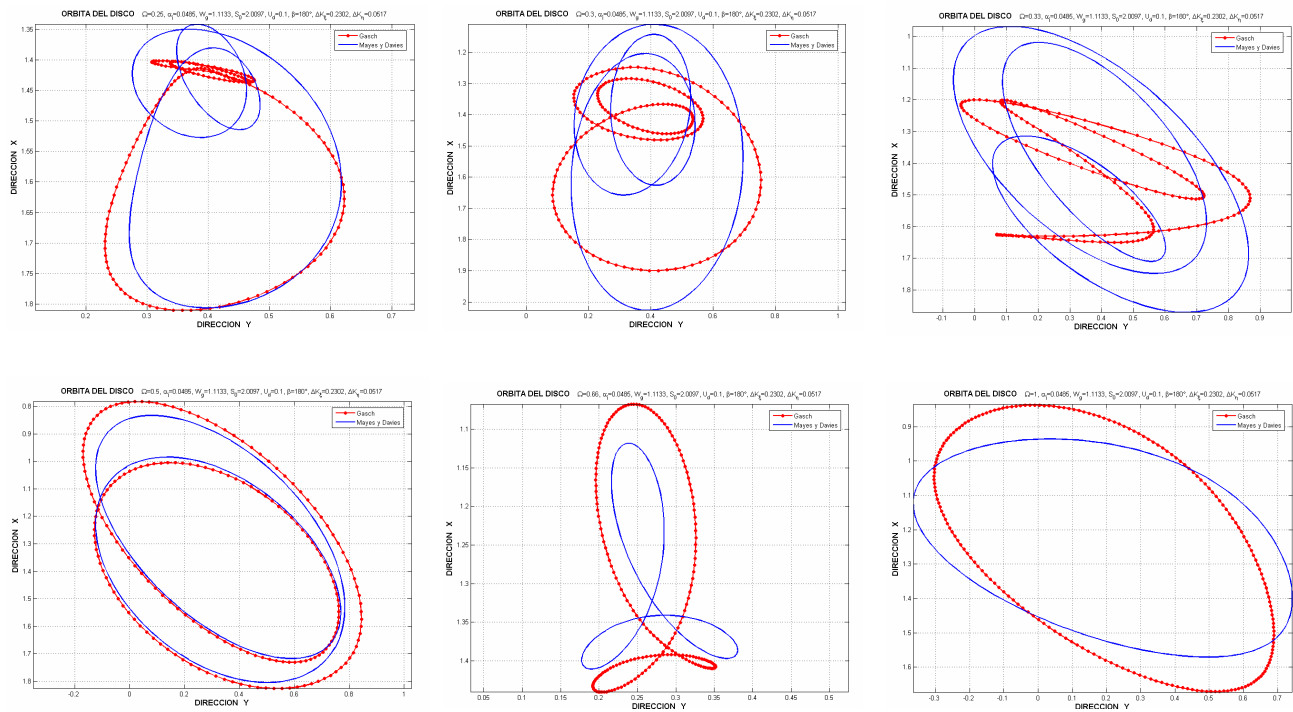


Fig. 4-119 Orbits del disco a diferentes resonancias locales comparando las funciones de respiro de la grieta, $\beta = 180^\circ$, profundidad de grieta 50 %

En las siguientes figuras se ilustran las respuestas de vibración total (directa) del barrido de frecuencia para la configuración I para diferentes profundidades de grieta y para las cuatro orientaciones ortogonales entre desbalance y fisura. Tales respuestas totales de la señal incluyen todos los componentes de frecuencia de la vibración y no refieren solamente al componente síncrono de velocidad $1X$.

Aunque el nivel de la vibración en los cojinetes es un orden de magnitud o aún más pequeño, se da preferencia al estudio de la dinámica en estos puntos, puesto que las máquinas en la industria se instrumentan solamente en las localizaciones de las chumaceras. Sin embargo, para tener una mejor perspectiva, también se incluyen diagramas de la respuesta de vibración del disco.

Puede observarse como las características de vibración en las resonancias locales son influenciadas por el mecanismo de respiro seleccionado, en particular aquellas que ocurren a resonancias locales bajas; es decir, a valores de velocidad de operación pequeñas comparadas con la velocidad crítica flexionante. Para estos típicos modelos simples de respiro de grieta no ocurren picos de resonancia local de amplitud significativa más allá de la primera velocidad crítica.

Puede concluirse que los puntos más importantes en la simulación de ejes agrietados son el modelado correcto de la flexibilidad local debida a la grieta y el efecto de la “conmutación” debida a la rotación del eje (por el que se introduce la característica de respiro)

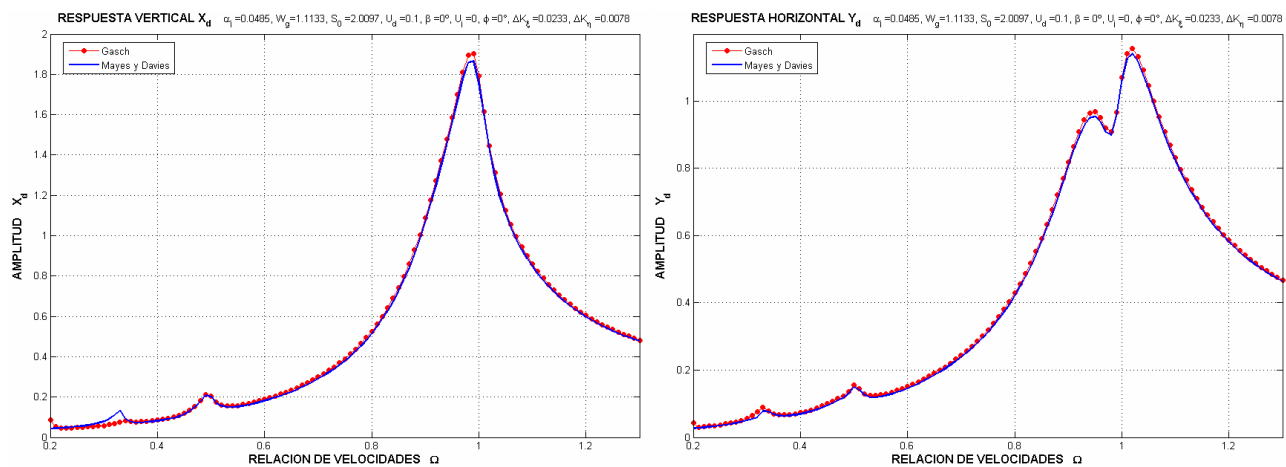


Fig. 4-120 Respuestas del disco para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 12.5 %, $\beta = 0^\circ$.

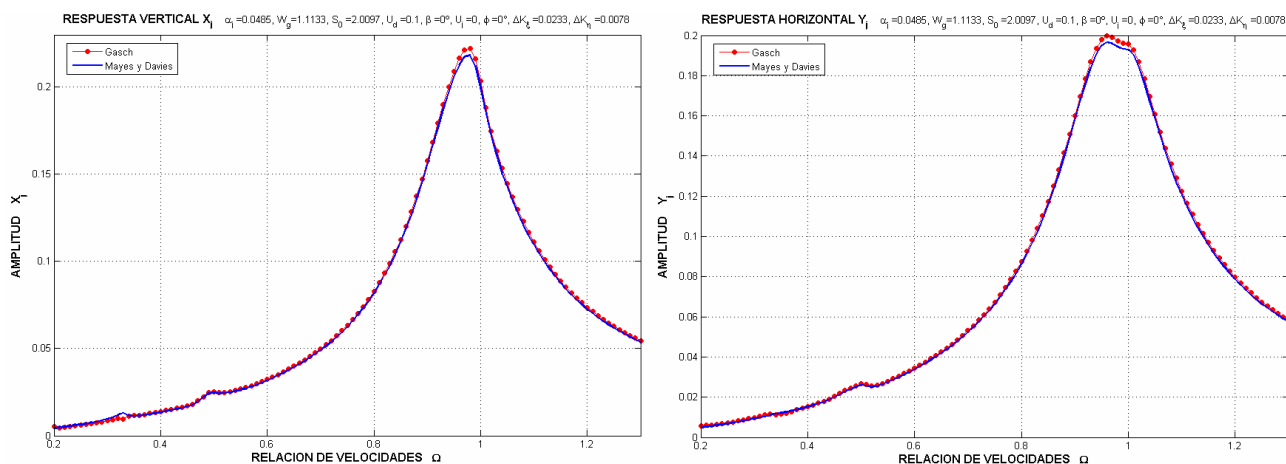


Fig. 4-121 Respuestas de la chumacera para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 12.5 %, $\beta = 0^\circ$.

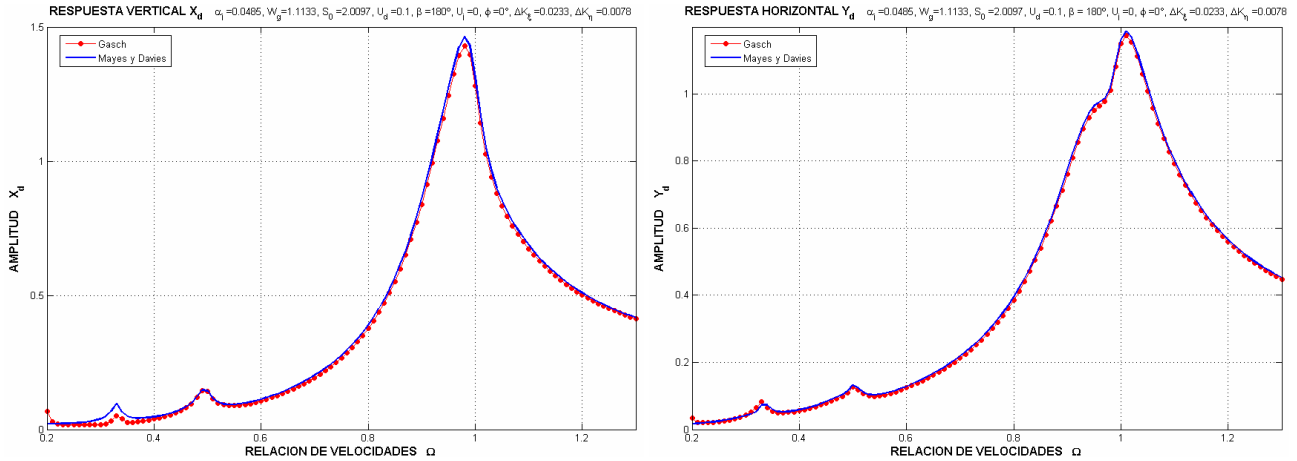


Fig. 4-122 Respuestas del disco para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 12.5 %, $\beta = 180^\circ$.

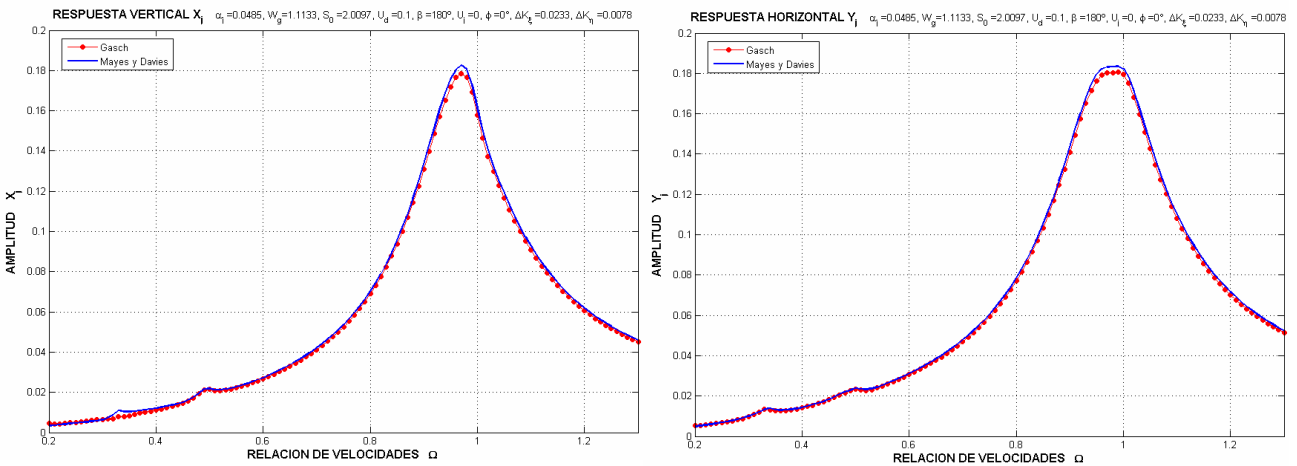


Fig. 4-123 Respuestas de la chumacera para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 12.5 %, $\beta = 180^\circ$.

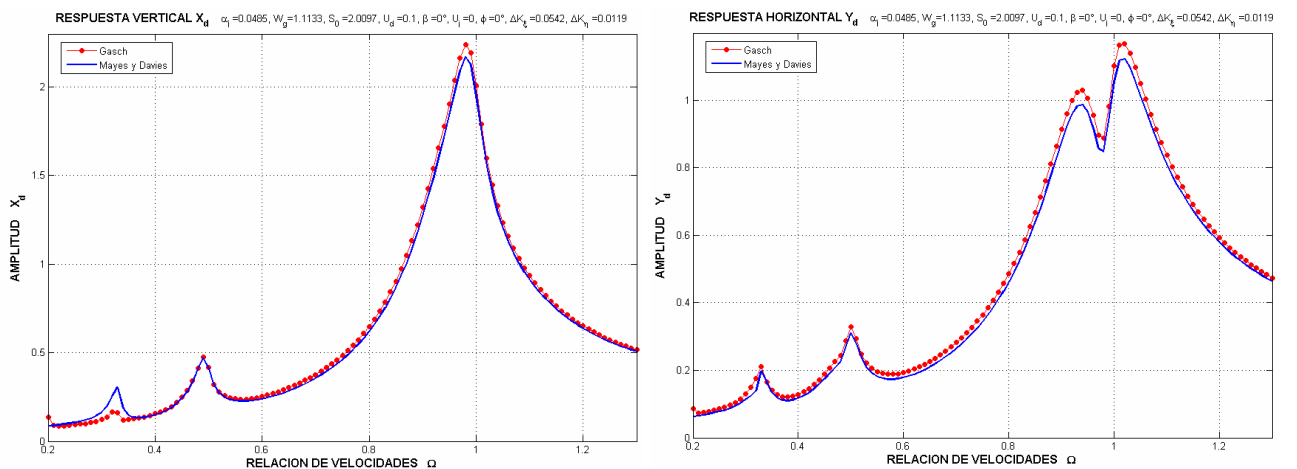


Fig. 4-124 Respuestas del disco para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 25 %, $\beta = 0^\circ$.

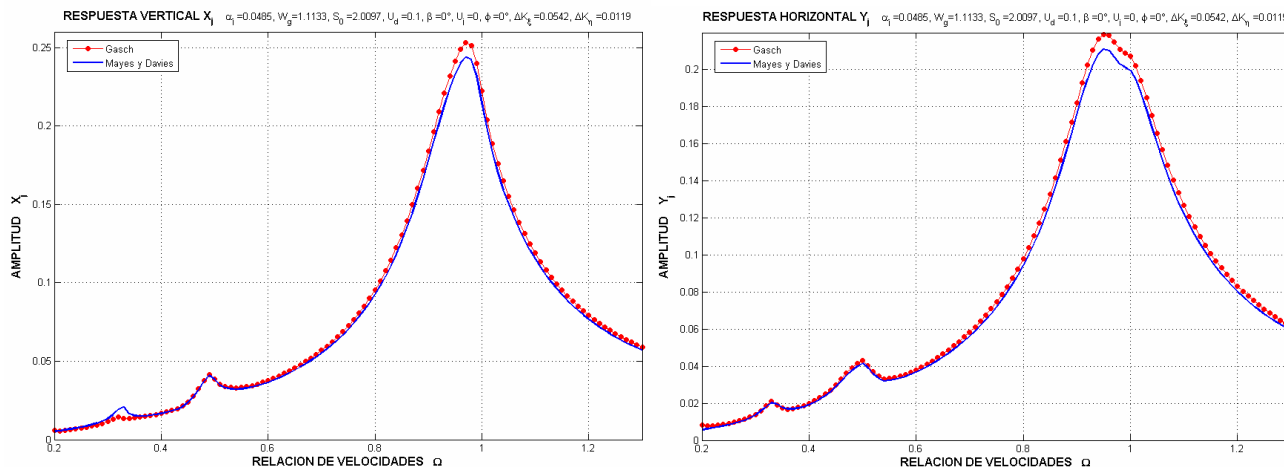


Fig. 4-125 Respuestas de la chumacera para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 25 %, $\beta = 0^\circ$.

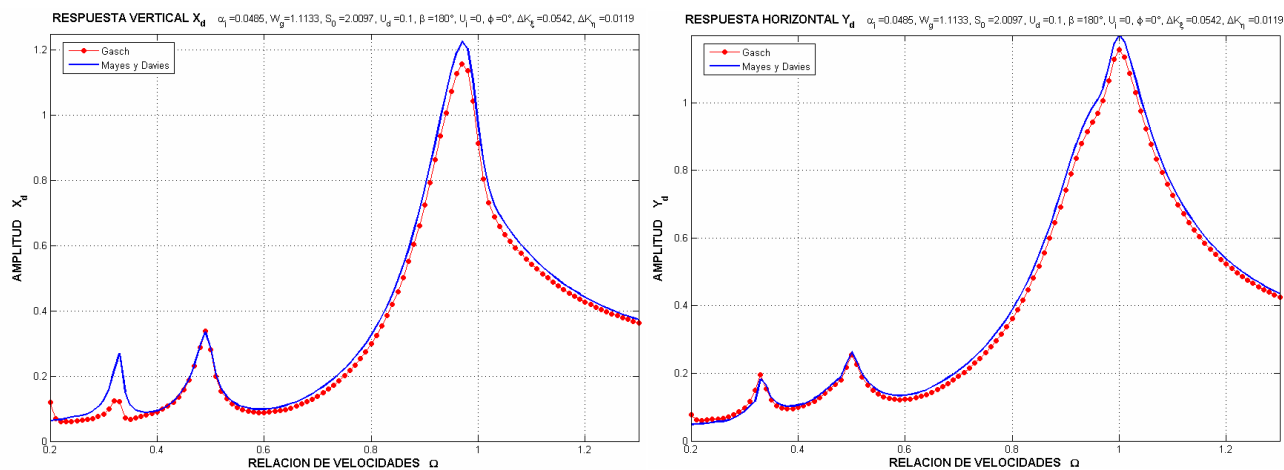


Fig. 4-126 Respuestas del disco para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 25 %, $\beta = 180^\circ$.

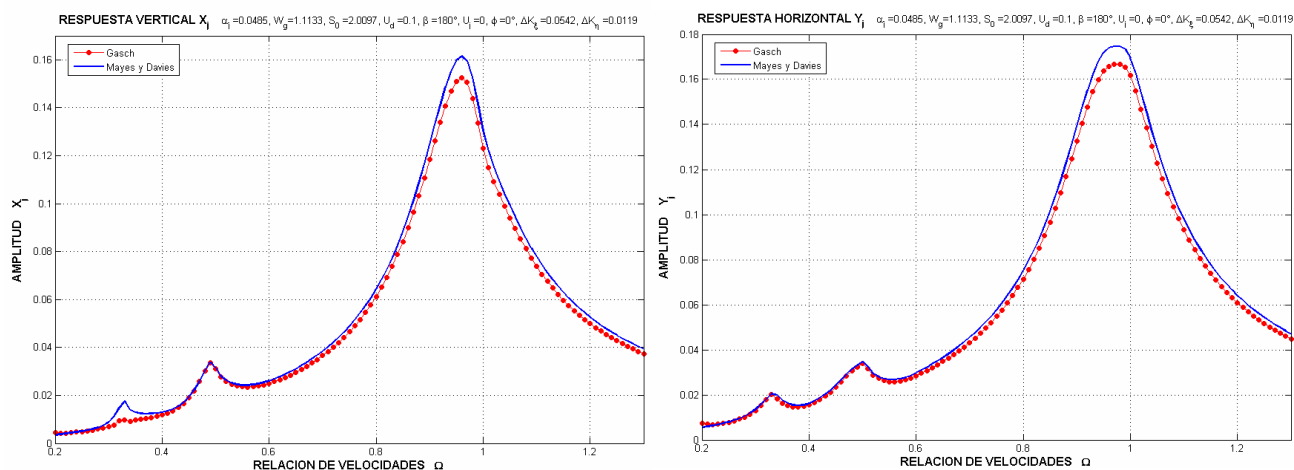


Fig. 4-127 Respuestas de la para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 25 %, $\beta = 180^\circ$.

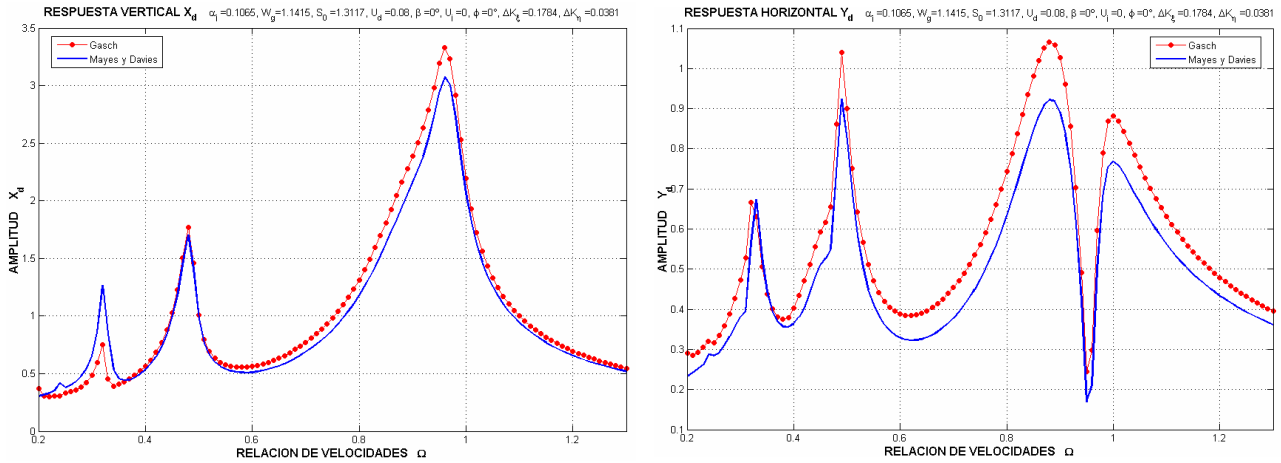


Fig. 4-128 Respuestas del disco para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 50 %, $\beta = 0^\circ$.

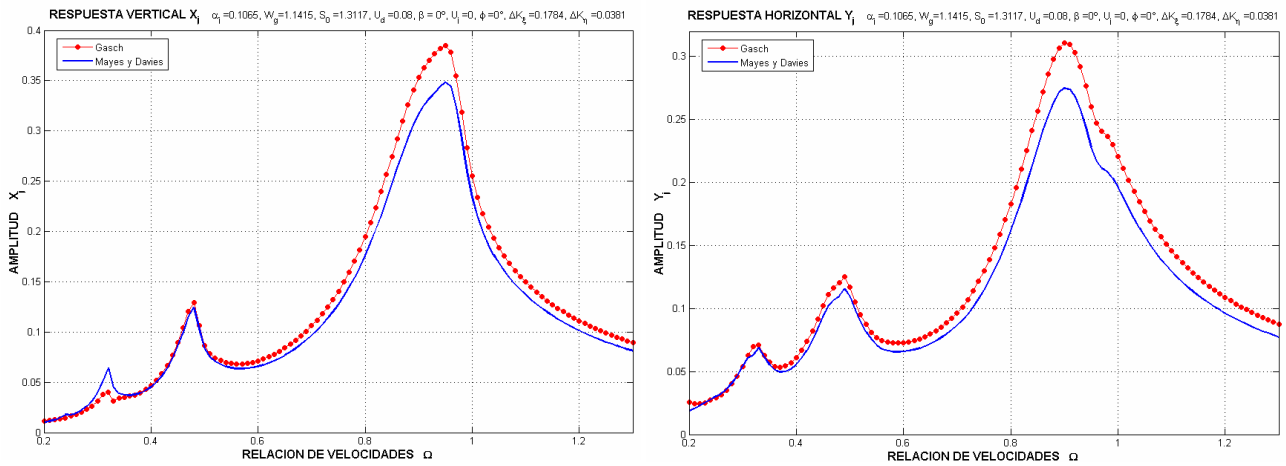


Fig. 4-129 Respuestas de la chumacera para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 50 %, $\beta = 0^\circ$.

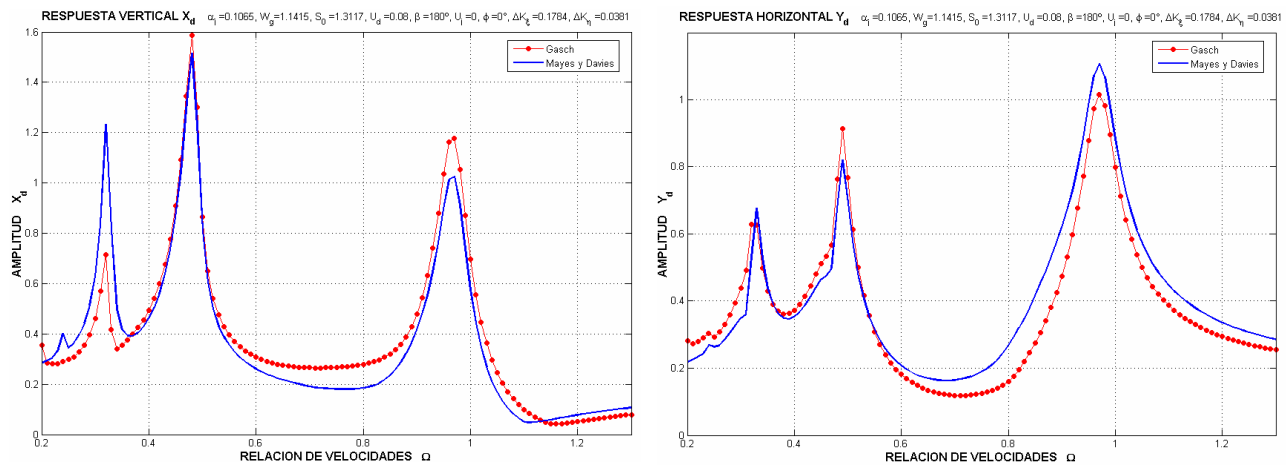


Fig. 4-130 Respuestas del disco para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 50 %, $\beta = 180^\circ$.

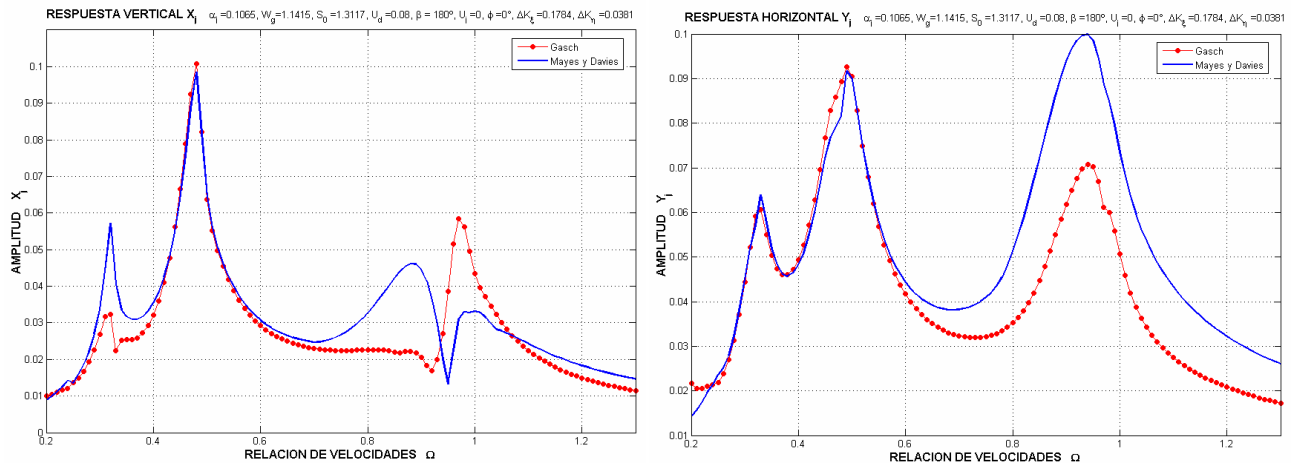


Fig. 4-131 Respuestas de la chumacera para diferentes modelos de respiro de grieta, profundidad de grieta 50 %, $\beta = 180^\circ$.

De las figuras anteriores puede observarse como las características de vibración en las resonancias locales son influenciadas por la selección del modelo de respiro, en particular aquellas que ocurren a resonancias locales bajas; es decir, a valores de velocidad de operación pequeños comparados con la velocidad crítica flexionante. También las amplitudes y las formas de las órbitas (registradas en las regularmente instrumentadas localizaciones de las chumaceras) cambian debido a las variaciones de los ángulos de fase de los componentes de frecuencia. En contraste para pequeños valores de profundidad de grieta, alrededor de la velocidad crítica flexionante, ambos modelos exhiben grandes amplitudes semejantes.

Se observa que la vibración horizontal en los cojinetes, para ambos mecanismos de respiro, indica una evolución rápida de las órbitas de las chumaceras al aproximarse y al pasar la resonancia de la velocidad crítica. Para la profundidad de grieta del 25%, las amplitudes verticales y horizontales de las chumaceras son suficientemente grandes para ser medidas y llamar la atención.

Un trabajo futuro implicaría el análisis de respuestas simuladas con estos dos mecanismos de respiro comparados contra respuestas vibratorias de experimentos de laboratorio acentuando la inspección en los picos de cada resonancia.

Capítulo**5**

Modelo del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado sobre soportes flexibles

5.1 Introducción

El costo de la falla de una turbina típica en una central eléctrica moderna es muy alto, y por lo tanto el desarrollo de técnicas de supervisión de operación para tales máquinas es un campo de investigación activo. La supervisión de operación confía en la medición de vibraciones de la máquina y las usa para localizar y cuantificar averías, esto requiere obviamente un modelo dinámico exacto de la máquina. Igualmente, predicciones exactas de velocidades críticas, respuestas vibratorias y características modales son necesarias para garantizar operaciones seguras. Los típicos modelos del sistema rotor-chumaceras no pueden asegurar soluciones exactas puesto que no toman en cuenta los efectos del soporte.

La tendencia de colocar las turbinas en centrales eléctricas modernas sobre soportes de acero flexibles, nos indica que los soportes ejercen una influencia considerable en la dinámica del sistema. Aunque las características dinámicas de los rotores están generalmente bien entendidas, los soportes en los cuales ellos descansan no lo están.

Puesto que los soportes son a menudo muy flexibles, pueden contribuir considerablemente al comportamiento dinámico del rotor. Dos categorías son usadas para clasificar la flexibilidad del soporte en las direcciones especificadas:

- Soporte rígido
- Soporte flexible

Si la primera frecuencia natural del sistema máquina-soporte en la dirección de la medición es mayor que se frecuencia principal de excitación (en la mayoría de los casos es la frecuencia de rotación) en al menos un 25%, entonces el sistema soporte puede ser considerado rígido en esta dirección.

En algunos casos el sistema soporte-máquina puede ser considerado rígido en una dirección de medición y flexible en la otra dirección. Por ejemplo, la primera frecuencia natural en la dirección vertical puede estar sobre la frecuencia principal de excitación mientras que la frecuencia natural horizontal puede ser considerablemente menor [165]. Tales sistemas serían rígidos en el plano vertical y flexible en el plano horizontal. En estos casos la vibración debe ser evaluada de acuerdo con la clasificación del soporte que corresponda en la dirección de la medición. Si la clase de sistema máquina-soporte no puede ser determinada fácilmente de cálculos y gráficos, se puede determinar por pruebas experimentales.

En general, la complejidad de los soportes supone que no hay modelos disponibles a priori, más bien necesitan ser identificados ya que se sabe que el soporte puede tener un efecto significativo en la dinámica de los sistemas rotor-chumacera. El modelo matemático de la estructura del soporte esencialmente es utilizado para adaptar las ecuaciones de movimiento de los sistemas rotor-chumacera a las ecuaciones de movimiento del sistema rotor-chumaceras-soportes.

Varios estudios han incorporado los efectos del soporte en un análisis del sistema rotor-chumaceras. Kirk y Gunter [105] analizaron las respuestas en estado estable y transitorio del rotor de Jeffcott para chumaceras elásticas montadas en soportes flexibles y amortiguados. Desestimaron la flexibilidad del rotor y los efectos giroscópicos del disco en la formulación de las ecuaciones que gobernaban el movimiento, y proporcionaron condiciones del soporte para reducir al mínimo sus características sobre la amplitud de vibración del rotor y la fuerza transmitida sobre una gama dada de velocidad. Smith [180] estudió el rotor de Jeffcott con amortiguamiento interno para incluir un sistema de soporte sin masa, amortiguado y flexible. Lund [118] y Gunter [81] demostraron que los soportes amortiguados y flexibles pueden mejorar la estabilidad de rotores de alta velocidad. También, Lund y Sternlicht [117], Dworski [35], y Gunter [82] demostraron que se podría alcanzar una reducción significativa en la fuerza transmitida por medio del diseño apropiado de un sistema de soporte. Pilkey *et al.* [151] presentaron un eficiente procedimiento de dos etapas para optimizar sistemas de suspensión de rotores. De estos estudios, pudieron ser encontrados los problemas dinámicos de movimiento asociados con los efectos del soporte sobre la masa, el amortiguamiento, y la rigidez del bien conocido rotor de Jeffcott incluyendo los sistemas soportados por chumaceras.

Gasch [59] se ocupó del eje rotatorio flexible de un turbo-rotor grande por análisis de elemento finito. Gasch introdujo la dinámica del soporte en las ecuaciones del rotor vía las matrices que fueron obtenidas de prueba modal y análisis modal. Vance *et al.* [194] proporcionan la comparación de resultados de predicciones por computadora y medidas experimentales en un aparato de prueba de un sistema rotor-chumacera. Ellos modelaron el sistema rotor-chumaceras para incluir los efectos de la impedancia del soporte usando el método de matriz de transferencia. Stephenson y Rouch [184] han utilizado el método de elemento finito para analizar sistemas rotor-chumaceras-soportes. Proporcionaron un procedimiento usando técnicas de análisis modal, que se podrían aplicar en la medición de funciones de la respuesta de frecuencia para incluir los efectos dinámicos de la estructura del soporte.

En su estudio Kang *et al.* [102] demuestran cómo aplicar el paquete ANSYS, comúnmente usado, para analizar las características dinámicas de los sistemas rotor-chumaceras-soportes. El análisis extiende los modelos de elementos finitos para incluir un gran número de grados de libertad (*degrees of freedom, d.o.f.*) del sistema rotor-chumacera y de la compleja estructura del soporte. También resaltan el uso del elemento de dos nodos MATRIX 27, proporcionado por el paquete, para modelar el disco, el cojinete y la suspensión. Su estudio amplía la discusión sobre la dinámica del soporte del sistema rotor-chumaceras, en éste se consideran tres tipos del soporte; soporte de masa concentrada, soporte de viga continua y soporte tipo placa.

Como se describió anteriormente se ha intentado la modelación de los soportes por elemento finito pero la complejidad de estos, y el hecho de que difieren a menudo substancialmente de los diseños originales hizo que esta técnica generalmente fracasara en la practica [109]. El análisis modal experimental es otra solución posible, pero éste requiere que el rotor sea removido del soporte y que todas las cubiertas permanezcan en el lugar, lo que no es práctico para una central eléctrica existente. Sin embargo, los procedimientos de mantenimiento requieren que los rotores sean detenidos a intervalos regulares y este procedimiento fuerza al soporte a pasar sobre la gama entera de frecuencia de operación. Midiendo la respuesta en los pedestales de los cojinetes (que se realiza ya para propósitos de supervisión de condición) puede ser obtenida una relación de entrada-salida para el soporte.

Lees [110] desarrolló un método de mínimos cuadrados para calcular los parámetros del soporte asumiendo que existe un modelo exacto para el rotor, que el estado de desbalance es conocido de corridas de balanceo y que las matrices dinámicas de rigidez de los cojinetes pueden ser calculadas. Aunque los modelos de chumaceras no están de hecho bien caracterizados, Lees y Friswell [49] demostraron que las estimaciones de los parámetros del soporte son solamente sensibles a las rigideces del cojinete sobre una limitada gama de frecuencias, las cuales pueden ser calculadas.

Feng y Hahn [45] siguieron un enfoque similar pero agregaron información adicional midiendo los desplazamientos del eje. Zanetta [213] también midió los desplazamientos del eje pero incluyó las características del cojinete como parámetros a ser estimados. Aunque es deseable cualquier información adicional en una rutina de valoración de parámetros el equipo necesario para medir estas cantidades existe solamente en las más nuevas centrales eléctricas, y lo deseable es hacer el método aplicable también a una planta más vieja.

Una forma de hacer esto es utilizar las respuestas a la excitación síncrona medidas sobre el soporte en los cojinetes obtenida cuando el rotor se está deteniendo. Smart y Friswell *et al.* [179] discuten la puesta en práctica de tal técnica de valoración, basados en un certero modelo de rotor y el estado de desbalance, y un cierto conocimiento de la dinámica de los cojinetes. En el análisis presentado, los datos medidos consisten en el movimiento de los pedestales del cojinete en las direcciones horizontal y vertical, aunque no necesariamente en ambas direcciones en cada cojinete. Asumiendo que existen buenos modelos para el rotor y los cojinetes, y que el estado de desbalance es conocido.

5.2 Obtención del modelo matemático

El presente modelo Fig. 5-1, consiste en un rotor simétrico flexible soportado en chumaceras hidrodinámicas sobre soportes que poseen propiedades de rigidez (K_s) y amortiguamiento (C_s), como se muestra en la figura, este sistema geoméricamente simétrico incluye masas en las tres localizaciones: disco (m), chumaceras (m_j) y soportes (m_s). Las características dinámicas de las chumaceras son expresadas con cuatro coeficientes de rigidez (K_{ij}) y cuatro de amortiguamiento (C_{ij}), propios de las chumaceras lubricadas.

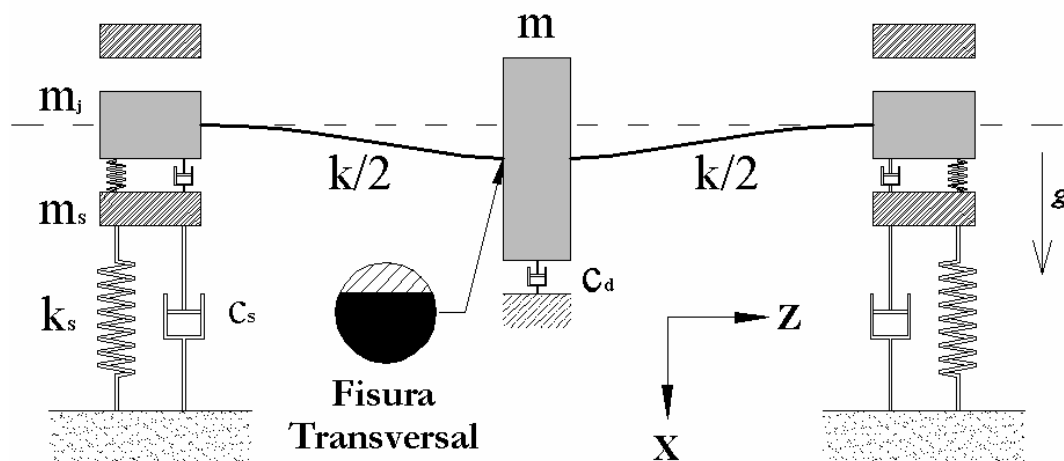


Fig. 5-1 Modelo de rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado sobre soportes flexibles

A diferencia del modelo desarrollado por Gómez-Mancilla *et al.* [66], [69], [73] y el cual ha sido desplegado detalladamente en el Capítulo 2, el modelo del rotor aquí investigado, es un sistema rotor Jeffcott extendido simétricamente soportado por chumaceras hidrodinámicas idénticas sobre soportes que poseen propiedades de rigidez y amortiguamiento [211]. Este tipo de arreglo es ampliamente usado en el control de vibración y la atenuación de transmisión de fuerzas en motores de la industria aeronáutica [84], [85].

En contraste con el modelo inicialmente usado por Gou y Kirk [84], [85], en este trabajo se utiliza la descripción completa de la chumacera sin descuidar ambos coeficientes de rigidez directos ni usando coeficientes de rigidez acoplados perfectamente asimétricos, sin olvidar claro que la principal diferencia esta en la presencia de la fisura transversal a la mitad del eje.

Cabe resaltar que hasta donde el autor tiene conocimiento, en la literatura nacional e internacional sobre este tema, no existe un modelo similar que permita estudiar la respuesta vibratoria de un rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado soportado por chumaceras hidrodinámicas sobre soportes flexibles que poseen propiedades de rigidez y amortiguamiento, y de aquí la gran relevancia de este modelo

Además del amortiguamiento externo del rotor, el uso de soportes flexibles amortiguados es otro método alternativo para proveer amortiguamiento externo a los sistemas rotor-chumaceras [84], [85], [119]. También, este tipo de configuración posee más parámetros que podemos modificar para obtener un diseño más apropiado. Ha sido reconocido que el uso de soportes flexibles amortiguados podría efectivamente mejorar las características dinámicas del rotor como son respuesta al desbalance, transmisión de fuerzas y también la estabilidad del sistema.

En orden de simplificar la derivación de las ecuaciones de movimiento las siguientes asunciones fueron tomadas:

- El sistema es simétrico y soportado en chumaceras hidrodinámicas idénticas sobre soportes que poseen propiedades de rigidez y amortiguamiento con los mismos parámetros.
- Se incluyen masas en las tres localizaciones: disco m y chumaceras m_j y soportes m_s . Además, se permite la presencia de vectores desbalance tanto en la localización del disco U_d como en las chumaceras U_j .
- El amortiguamiento en el disco c_d , debido al efecto aerodinámico de su movimiento dentro del aire o fluido de trabajo de la turbomáquina, es del tipo viscoso.
- El efecto de la gravedad es dominante, es decir, las vibraciones permanecen pequeñas en comparación con la deflexión del rotor bajo su propio peso.
- Los efectos giroscópicos en el disco son ignorados debido a la simetría del sistema.
- Las vibraciones axiales y torsionales del rotor del sistema son ignorados.
- Las fuerzas en la película de aceite de las chumaceras hidrodinámicas son determinadas por la ecuación de Reynolds como un lubricante incompresible.
- El acoplamiento a otros ejes es flexible, es decir, no se presenta desalineamiento.
- Se supone que el eje está fisurado a la mitad de su longitud en la ubicación del disco.

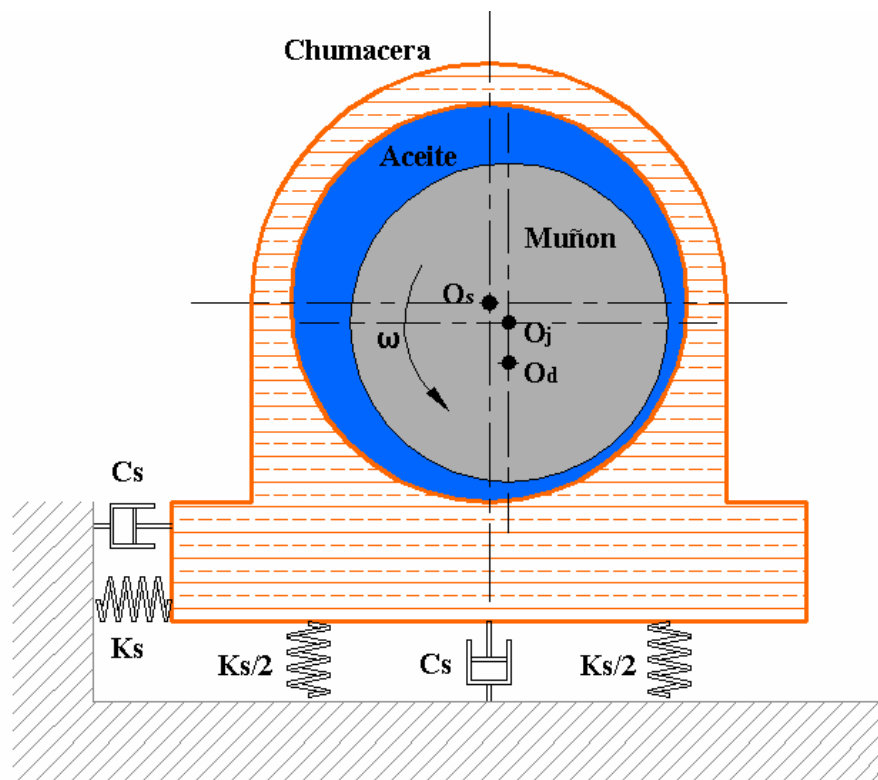


Fig. 5-2 Representación esquemática del sistema con soportes flexibles

Según lo mostrado en la Fig. 5-1, el sistema total de una máquina rotatoria típica se puede dividir en cinco subsistemas; el eje, el disco rotatorio, las chumaceras, la estructura del soporte, y la suspensión. Cada subsistema es modelado por separado y posteriormente estos subsistemas son combinados usando condiciones de compatibilidad junto con coordenadas comunes para dar un modelo de sistema total.

Otras características tales como acoplamiento entre dos ejes en serie, aislamiento de vibración, amortiguación de vibración y actuadores de control para la supresión de la vibración pueden ser eventualmente sobrepuestas al modelo total del sistema. Puesto que éstos están más allá del alcance de esta tesis, no serán consideradas aquí.

Ecuaciones con dimensiones del movimiento del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado sobre soportes flexibles.

Las ecuaciones de movimiento del sistema son derivadas aplicando la Segunda Ley de Newton a cada uno de los tres puntos: disco, chumaceras y soportes. De esta forma, aplicando la Segunda Ley de Newton en la localización del disco obtenemos en la dirección X y Y respectivamente:

$$mg + F_{el}^x + F_{fric}^x + F_{des,d}^x = m\ddot{x}_d, \quad F_{el}^y + F_{fric}^y + F_{des,d}^y = m\ddot{y}_d \quad (5.1)$$

En donde, las componentes de la fuerza amortiguadora viscosa debida al movimiento del disco dentro del aire o fluido de trabajo de la turbomaquinaria están dadas por:

$$F_{fric}^x = -c_d \dot{x}_d, \quad F_{fric}^y = -c_d \dot{y}_d. \quad (5.2)$$

En la ecuación anterior los términos \dot{x}_d, \dot{y}_d son las derivadas respecto al tiempo t . Las componentes de la fuerza del desbalance en el disco son:

$$F_{des,d}^x = 2m_d \omega^2 e_d \cos(\omega t + \phi) = 2m_d \omega^2 (e_d^x \cos \omega t - e_d^y \sin \omega t) \quad (5.3)$$

$$F_{des,d}^y = 2m_d \omega^2 e_d \sin(\omega t + \phi) = 2m_d \omega^2 (e_d^x \sin \omega t + e_d^y \cos \omega t) \quad (5.4)$$

Se supone que la variación de la rigidez del eje debido a la fisura es solamente una función del tiempo t y que el peso ejerce un peso dominante, por lo tanto la variación de la rigidez estará cambiando periódicamente y este cambio estará descrito por la función $g(t) = g(\Phi)$. Las componentes de la fuerza elástica del eje fisurado están dadas por las siguientes ecuaciones. Estas ecuaciones se obtienen al realizar la multiplicación por la matriz de rotación unitaria, necesaria cuando pasamos de una descripción de un sistema de coordenadas rotatorio fijo al eje a el sistema de coordenadas inercial y ya fueron desarrolladas detalladamente en el Capítulo 2 por lo cual ya no se desarrolla en este capítulo.

$$F_{el}^x = -k(x_d - x_j) + \frac{1}{2}g(t)[(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\phi)(x_d - x_j) + (\Delta k_2 \sin 2\phi)(y_d - y_j)] \quad (5.5)$$

$$F_{el}^y = -k(y_d - y_j) + \frac{1}{2}g(t)[(\Delta k_2 \sin 2\phi)(x_d - x_j) + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\phi)(y_d - y_j)] \quad (5.6)$$

Donde x_j, y_j es deflexión de la chumacera en coordenadas cartesianas, x_d, y_d = deflexión del disco en coordenadas cartesianas, y donde los superíndices x, y indican a las componentes orientadas según las coordenadas inerciales de la gravedad y perpendicular a esta respectivamente y k es la rigidez correspondiente a el eje íntegro (sin fisura). Además:

$$\Delta k_1 = \Delta k_\xi + \Delta k_\eta, \quad \Delta k_2 = \Delta k_\xi - \Delta k_\eta. \quad (5.7)$$

Donde $\Delta k_\xi, \Delta k_\eta$ son constantes y representan el mayor cambio de rigidez en las direcciones ξ y η respectivamente originado por la presencia de la fisura en el rotor. Asimismo, $g(t)$ ó $g(\Phi)$ que es la función periódica que describe el fenómeno de apertura y cierre de la grieta (respiro) está dada por:

$$g(t) = g(\Phi) = \frac{1 + \cos \Phi}{2} \quad (5.8)$$

O alternativamente:

$$g(\Phi) = \left(\frac{2}{\pi}\right) \left(\frac{\pi}{4} + \cos \Phi - \frac{1}{3} \cos 3\Phi + \frac{1}{5} \cos 5\Phi - \frac{1}{7} \cos 7\Phi + \dots \right) \quad (5.9)$$

$$\text{donde: } \Phi = \omega t + \phi + \beta = \tau + \phi + \beta \quad (5.10)$$

Donde Φ es el ángulo de rotación instantáneo, ω es la frecuencia de rotación del eje y ϕ y β están presentados en la Fig. 5-3

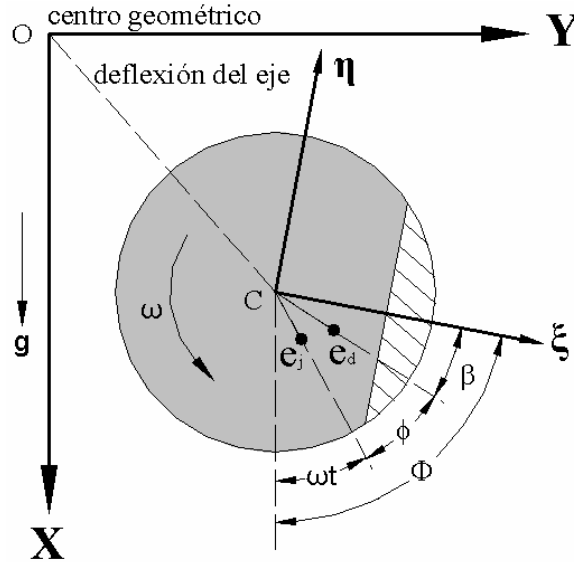


Fig. 5-3 Plano transversal localizado a la mitad del tramo del eje mostrando ángulos importantes. ϕ = ángulo entre las direcciones de los desbalances que ocurren en la chumacera (e_j) y el disco (e_d), β = ángulo entre las direcciones de la fisura (ξ) y el desbalance en el disco (e_d)

De tal forma que al sustituir Ecs.(5.2)-(5.6) en las Ecs.(5.1) las ecuaciones de movimiento para el disco pueden escribirse como:

$$m\ddot{x}_d + c_d \dot{x}_d + k(x_d - x_j) - \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\Phi)(x_d - x_j) + (\Delta k_2 \sin 2\Phi)(y_d - y_j)] = mg + m\omega^2 e_d \cos(\omega t + \phi) \quad (5.11)$$

$$m\ddot{y}_d + c_d \dot{y}_d + k(y_d - y_j) - \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta k_2 \sin 2\Phi)(x_d - x_j) + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\Phi)(y_d - y_j)] = m\omega^2 e_d \sin(\omega t + \phi) \quad (5.12)$$

De la misma forma que para el disco, aplicando la Segunda Ley de Newton en la localización de las chumaceras, se obtiene para la dirección X y Y respectivamente:

$$m_j g - f_x - \frac{1}{2} F_{el}^x + F_{des,j}^x = m_j \ddot{x}_j, \quad -f_y - \frac{1}{2} F_{el}^y + F_{des,j}^y = m_j \ddot{y}_j \quad (5.13)$$

En donde las proyecciones de la fuerza de desbalance de la masa m_j en la chumacera sobre los ejes X y Y son respectivamente:

$$F_{des,j}^x = m_j \omega^2 e_j \cos(\omega t), \quad F_{des,j}^y = m_j \omega^2 e_j \sin(\omega t) \quad (5.14)$$

Debido a la rotación, es desarrollada presión de fluido entre el rotor y la chumacera dicha presión produce una fuerza resultante igual a la carga estática de la chumacera. Desviaciones del rotor de esta posición de equilibrio (ε_{x0} , ε_{y0}) resultan en fuerzas adicionales que en general, se oponen a estas desviaciones. La película de aceite tiene una acción de resorte. Para cuantificar dichas fuerzas, se consideran las componentes vertical y horizontal de estas fuerzas:

$$f_x = f_x(x, \dot{x}, y, \dot{y}), \quad f_y = f_y(x, \dot{x}, y, \dot{y}). \quad (5.15)$$

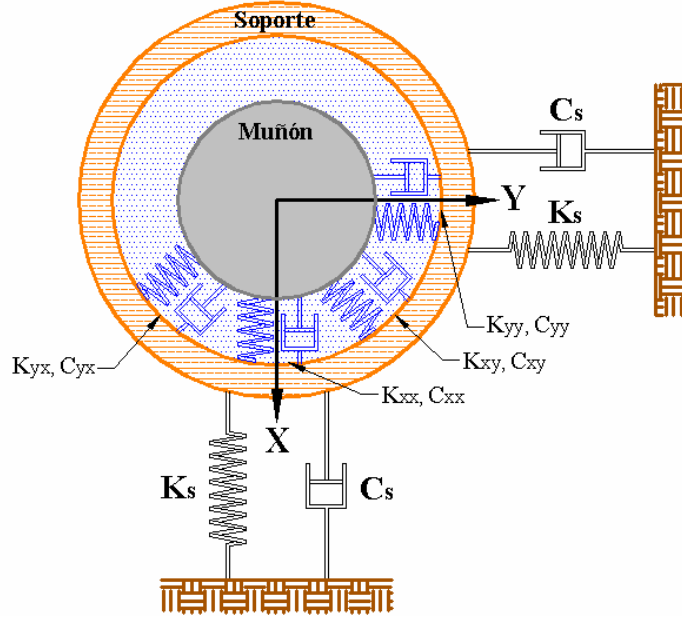


Fig. 5-4 Representación esquemática de los coeficientes rotodinámicos y la suspensión

Las funciones f_x y f_y dependen del diseño de la chumacera, la carga estática, la velocidad angular Ω , y otros. Expandiendo estas funciones en series de Taylor, alrededor de la posición de equilibrio

$$f_x = f_{x0} + k_{xx}\Delta x + k_{xy}\Delta y + c_{xx}\Delta \dot{x} + c_{xy}\Delta \dot{y} + o(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta \dot{x}^2, \Delta \dot{y}^2),$$

$$f_y = f_{y0} + k_{yy}\Delta y + k_{yx}\Delta x + c_{yy}\Delta \dot{y} + c_{yx}\Delta \dot{x} + o(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta \dot{x}^2, \Delta \dot{y}^2),$$

Donde los k_{ij} y c_{ij} ($i, j = x, y$) son llamados coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento, respectivamente, y son funciones de Ω , de la carga estática, y del tipo de chumacera pero son independientes de las perturbaciones Δx , Δy , $\Delta \dot{x}$ y $\Delta \dot{y}$. Como una primera aproximación ignoramos los términos de orden superior en las ecuaciones anteriores. Resultando así, para este caso particular con soportes flexibles, las siguientes expresiones:

$$f_x = f_{x0} + k_{xx}(\Delta x_j - \Delta x_s) + k_{xy}(\Delta y_j - \Delta y_s) + c_{xx}(\Delta \dot{x}_j - \Delta \dot{x}_s) + c_{xy}(\Delta \dot{y}_j - \Delta \dot{y}_s) \quad (5.16)$$

$$f_y = f_{y0} + k_{yy}(\Delta y_j - \Delta y_s) + k_{yx}(\Delta x_j - \Delta x_s) + c_{yy}(\Delta \dot{y}_j - \Delta \dot{y}_s) + c_{yx}(\Delta \dot{x}_j - \Delta \dot{x}_s) \quad (5.17)$$

Sustituyendo las Ecs.(5.14), (5.16) y (5.17) en las Ecs.(5.13) se obtiene para las chumaceras:

$$m_j \ddot{x}_j + F_x - k(x_d - x_j) + \frac{g(\Phi)}{4} [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\Phi)(x_d - x_j) + (\Delta k_2 \sin 2\Phi)(y_d - y_j)] = m_j g + m_j \omega^2 e_j \cos(\omega t) \quad (5.18)$$

$$m_j \ddot{y}_j + F_y - k(y_d - y_j) + \frac{g(\Phi)}{4} [(\Delta k_2 \sin 2\Phi)(x_d - x_j) + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\Phi)(y_d - y_j)] = m_j \omega^2 e_j \sin(\omega t). \quad (5.19)$$

Aplicando la Segunda Ley de Newton en la localización del soporte se obtiene en la dirección \mathbf{X} y \mathbf{Y} respectivamente después de reordenar términos

$$m_s \ddot{x}_s + c_s \dot{x}_s + k_s x_s - f_x = m_s g \quad (5.20)$$

$$m_s \ddot{y}_s + c_s \dot{y}_s + k_s y_s - f_y = 0 \quad (5.21)$$

Sin excitación por desbalance y sin fisura la posición de equilibrio dinámico del rotor integral se define por las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} x_d = x_{d0} & \quad y_d = y_{d0} & \quad \dot{x}_d = \ddot{x}_d = 0 & \quad \dot{y}_d = \ddot{y}_d = 0 & \quad f_x = f_{x0} \\ x_j = x_{j0} & \quad y_j = y_{j0} & \quad \dot{x}_j = \ddot{x}_j = 0 & \quad \dot{y}_j = \ddot{y}_j = 0 & \quad f_y = f_{y0} \\ x_s = x_{s0} & \quad y_s = y_{s0} & \quad \dot{x}_s = \ddot{x}_s = 0 & \quad \dot{y}_s = \ddot{y}_s = 0 & \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\Delta k_1 = \Delta k_2 = 0, \quad \dot{y}_j = \ddot{y}_j = 0, \quad \dot{x}_d = \ddot{x}_d = 0, \quad e_d = e_j = 0 \quad (5.23)$$

Sustituyendo las Ecs.(5.22) y (5.23) en Ec.(5.11), se obtiene:

$$k(x_{d0} - x_{j0}) = mg \quad (5.24)$$

$$\text{Denotando por } \delta \text{ el pandeo del eje} \quad \delta = x_{d0} - x_{j0} \quad (5.25)$$

Entonces de la Ec.(5.24) se puede deducir que;

$$k\delta = mg, \quad \delta = \frac{mg}{k}. \quad (5.26)$$

Asimismo, sustituyendo las relaciones establecidas en las Ecs.(5.22) y (5.23) dentro de la Ec.(5.12), se obtiene:

$$k(y_{d0} - y_{j0}) = 0, \quad y_{d0} - y_{j0} = 0, \quad y_{d0} = y_{j0}. \quad (5.27)$$

Para el caso de las ecuaciones que describen el comportamiento de la chumacera, sustituyendo las Ecs.(5.22) y (5.23) en la Ec.(5.18) para el caso de la dirección \mathbf{X} , se obtiene:

$$f_{x0} - k(x_{d0} - x_{j0}) = m_j g, \quad f_{x0} = mg + m_j g, \quad f_{x0} = (m + m_j) g \quad (5.28)$$

y en el caso de la ecuación en la dirección \mathbf{Y} , sustituyendo las Ecs.(5.22) y (5.23) en Ec.(5.19)

$$f_{y0} - k(y_{d0} - y_{j0}) = 0, \quad f_{y0} = 0 \quad (5.29)$$

De la misma manera, para el caso del soporte, sustituyendo las Ecs.(5.22) y (5.23) en Ec.(5.20) que describe el movimiento del soporte en la dirección \mathbf{X} , resulta:

$$k_s x_{s0} - f_{x0} = m_s g, \quad f_{x0} = k_s x_{s0} - m_s g, \quad (5.30)$$

$$x_{s0} = \frac{(m + m_j + m_s)g}{k_s} \quad (5.31)$$

Sustituyendo las Ecs.(5.22) y (5.23) en Ec.(5.21) que describe el movimiento del soporte en la dirección Y , y haciendo uso de la relación dada por Ec.(5.29) se llega a la siguiente conclusión:

$$k_s y_{s0} - f_{y0} = 0, \quad k_s y_{s0} = 0, \quad y_{s0} = 0 \quad (5.32)$$

Finalmente es posible concluir que la posición de equilibrio dinámico O_s de la masa del soporte tiene coordenadas:

$$O_s = (x_{s0}, 0). \quad (5.33)$$

De la misma manera la posición de equilibrio dinámico O_j de la masa en la chumacera y O_d del disco, tienen respectivamente las coordenadas:

$$O_j = (x_{s0} + e_{x0}, e_{y0}), \quad (5.34)$$

$$O_d = (x_{s0} + e_{x0} + \delta, e_{y0}). \quad (5.35)$$

Entonces para un rotor integro la posición de equilibrio en las ubicaciones de los soportes, chumaceras y el disco respectivamente resultan:

$$x_{s0} = \frac{(m + m_j + m_s)g}{k_s}, \quad y_{s0} = 0 \quad (5.36)$$

$$x_{j0} = x_{s0} + e_{x0}, \quad y_{j0} = e_{y0} \quad (5.37)$$

$$x_{d0} = x_{s0} + e_{x0} + \delta, \quad y_{d0} = e_{y0} \quad (5.38)$$

Donde e_{x0} , e_{y0} son las proyecciones de la excentricidad sobre los ejes inerciales X y Y (Fig. 5-5).

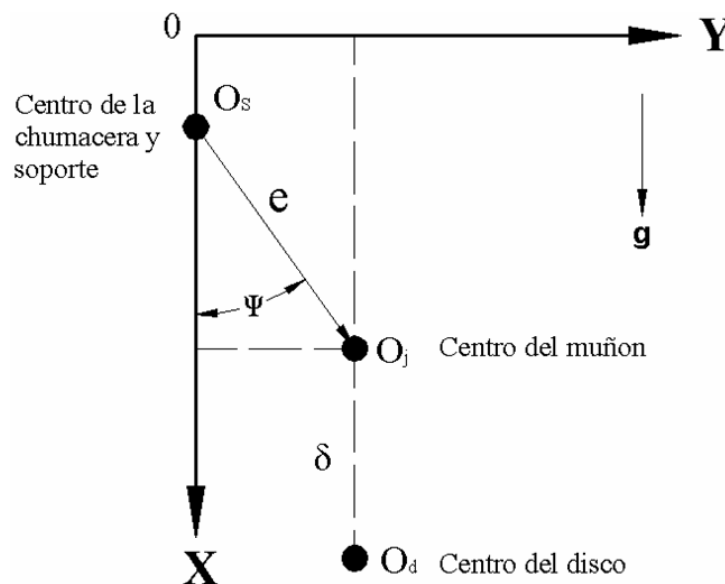


Fig. 5-5 Posiciones de equilibrio dinámico del soporte (O_s), chumaceras (O_j) y disco (O_d).
 e = excentricidad del rotor, Ψ = ángulo de posicionamiento (attitude) del rotor.

Ecuaciones con dimensiones del movimiento del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado sobre soportes flexibles alrededor de su posición de equilibrio

Los desplazamientos del centro del rotor, chumaceras y soportes respecto a sus posiciones de equilibrio pueden ser expresados como:

$$\begin{aligned}\Delta x_d &= x_d - x_{d0} & \Delta x_j &= x_j - x_{j0} & \Delta x_s &= x_s - x_{s0} \\ \Delta y_d &= y_d - y_{d0} & \Delta y_j &= y_j - y_{j0} & \Delta y_s &= y_s - y_{s0}\end{aligned}\quad (5.39)$$

Considerando las ecuaciones anteriores se determinan ahora las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}(x_d - x_j) &= x_{d0} + \Delta x_d - x_{j0} - \Delta x_j = (x_{d0} - x_{j0}) + \Delta x_d - \Delta x_j \\ (y_d - y_j) &= y_{d0} + \Delta y_d - y_{j0} - \Delta y_j = (y_{d0} - y_{j0}) + \Delta y_d - \Delta y_j\end{aligned}$$

Pero recordando las relaciones dadas en Ec.(5.25) y Ec.(5.27) se obtiene respectivamente:

$$(x_d - x_j) = \delta + \Delta x_d - \Delta x_j \quad (5.40)$$

$$(y_d - y_j) = \Delta y_d - \Delta y_j \quad (5.41)$$

De la misma manera las velocidades y aceleraciones del centro del rotor, chumaceras y soportes respecto a sus posiciones de equilibrio pueden ser expresadas como:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_d &= \dot{x}_d & \Delta \dot{x}_j &= \dot{x}_j & \Delta \dot{x}_s &= \dot{x}_s \\ \Delta \dot{y}_d &= \dot{y}_d & \Delta \dot{y}_j &= \dot{y}_j & \Delta \dot{y}_s &= \dot{y}_s \\ \Delta \ddot{x}_d &= \ddot{x}_d & \Delta \ddot{x}_j &= \ddot{x}_j & \Delta \ddot{x}_s &= \ddot{x}_s \\ \Delta \ddot{y}_d &= \ddot{y}_d & \Delta \ddot{y}_j &= \ddot{y}_j & \Delta \ddot{y}_s &= \ddot{y}_s\end{aligned}\quad (5.42)$$

Sustituyendo las relaciones Ecs.(5.39), (5.40), (5.41) y (5.42) en las ecuaciones de movimiento del disco Ecs.(5.11) y (5.12) se obtiene:

$$\begin{aligned}m_d \Delta \ddot{x}_d + c_d \Delta \dot{x}_d - \frac{1}{2} g(\Phi) [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\Phi)(\Delta x_d - \Delta x_j + \delta) + (\Delta k_2 \sin 2\Phi)(\Delta y_d - \Delta y_j)] + \\ k(\Delta x_d - \Delta x_j) + k\delta = m_d g + m_d \omega^2 e_d \cos(\omega t + \phi)\end{aligned}\quad (5.43)$$

$$\begin{aligned}m_d \Delta \ddot{y}_d + c_d \Delta \dot{y}_d - \frac{1}{2} g(\Phi) [(\Delta k_2 \sin 2\Phi)(\Delta x_d - \Delta x_j + \delta) + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\Phi)(\Delta y_d - \Delta y_j)] + \\ k(\Delta y_d - \Delta y_j) = m_d \omega^2 e_d \sin(\omega t + \phi)\end{aligned}\quad (5.44)$$

Empleando la relación dada por Ec.(5.26), se puede reescribir la ecuación Ec.(5.43) como:

$$\begin{aligned}m_d \Delta \ddot{x}_d + c_d \Delta \dot{x}_d - \frac{1}{2} g(\Phi) [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\Phi)(\Delta x_d - \Delta x_j + \delta) + (\Delta k_2 \sin 2\Phi)(\Delta y_d - \Delta y_j)] + \\ k(\Delta x_d - \Delta x_j) = m_d \omega^2 e_d \cos(\omega t + \phi)\end{aligned}\quad (5.45)$$

Igualmente, sustituyendo las relaciones Ecs.(5.39), (5.40), (5.41) y (5.42) en las ecuaciones de movimiento de las chumaceras Ecs.(5.18) y (5.19) se obtiene:

$$m_j \Delta \ddot{x}_j + F_{x0} + k_{xx} (\Delta x_j - \Delta x_s) + k_{xy} (\Delta y_j - \Delta y_s) + c_{xx} (\Delta \dot{x}_j - \Delta \dot{x}_s) + c_{xy} (\Delta \dot{y}_j - \Delta \dot{y}_s) - k (\Delta x_d - \Delta x_j) - k \delta + \frac{g(\Phi)}{4} [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\Phi)(\Delta x_d - \Delta x_j + \delta) + (\Delta k_2 \sin 2\Phi)(\Delta y_d - \Delta y_j)] = m_j g + m_j \omega^2 e_j \cos(\omega t)$$

Haciendo uso de la relación dada por Ec.(5.28) se reduce la ecuación anterior en la forma;

$$m_j \Delta \ddot{x}_j + c_{xx} (\Delta \dot{x}_j - \Delta \dot{x}_s) + c_{xy} (\Delta \dot{y}_j - \Delta \dot{y}_s) + k_{xx} (\Delta x_j - \Delta x_s) + k_{xy} (\Delta y_j - \Delta y_s) - k (\Delta x_d - \Delta x_j) + \frac{g(\Phi)}{4} [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\Phi)(\Delta x_d - \Delta x_j + \delta) + (\Delta k_2 \sin 2\Phi)(\Delta y_d - \Delta y_j)] = m_j \omega^2 e_j \cos(\omega t) \quad (5.46)$$

Y para la ecuación que describe el movimiento en la dirección Y se tiene:

$$m_j \Delta \ddot{y}_j + F_{y0} + k_{yy} (\Delta y_j - \Delta y_s) + k_{yx} (\Delta x_j - \Delta x_s) + c_{yy} (\Delta \dot{y}_j - \Delta \dot{y}_s) + c_{yx} (\Delta \dot{x}_j - \Delta \dot{x}_s) - k (\Delta y_d - \Delta y_j) + \frac{g(\Phi)}{4} [(\Delta k_2 \sin 2\Phi)(\Delta x_d - \Delta x_j + \delta) + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\Phi)(\Delta y_d - \Delta y_j)] = m_j \omega^2 e_j \sin(\omega t)$$

Recordando la relación (5.29) se logra simplificar la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$m_j \Delta \ddot{y}_j + k_{yy} (\Delta y_j - \Delta y_s) + k_{yx} (\Delta x_j - \Delta x_s) + c_{yy} (\Delta \dot{y}_j - \Delta \dot{y}_s) + c_{yx} (\Delta \dot{x}_j - \Delta \dot{x}_s) - k (\Delta y_d - \Delta y_j) + \frac{g(\Phi)}{4} [(\Delta k_2 \sin 2\Phi)(\Delta x_d - \Delta x_j + \delta) + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\Phi)(\Delta y_d - \Delta y_j)] = m_j \omega^2 e_j \sin(\omega t) \quad (5.47)$$

Ahora sustituyendo las relaciones Ecs.(5.39), (5.40), (5.41) y (5.42) en las ecuaciones de movimiento de los soportes Ecs.(5.20) y (5.21) se tiene:

$$m_s \Delta \ddot{x}_s + c_s \Delta \dot{x}_s + k_s \Delta x_s + k_s x_{s0} - F_{x0} - k_{xx} (\Delta x_j - \Delta x_s) - k_{xy} (\Delta y_j - \Delta y_s) - c_{xx} (\Delta \dot{x}_j - \Delta \dot{x}_s) - c_{xy} (\Delta \dot{y}_j - \Delta \dot{y}_s) = m_s g$$

De donde, usando la relación Ec.(5.30), se puede simplificar la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$m_s \Delta \ddot{x}_s + c_s \Delta \dot{x}_s - c_{xx} (\Delta \dot{x}_j - \Delta \dot{x}_s) - c_{xy} (\Delta \dot{y}_j - \Delta \dot{y}_s) - k_{xx} (\Delta x_j - \Delta x_s) - k_{xy} (\Delta y_j - \Delta y_s) + k_s \Delta x_s = 0 \quad (5.48)$$

De la misma forma, para la ecuación que describe el movimiento en la dirección Y se tiene

$$m_s \Delta \ddot{y}_s + c_s \Delta \dot{y}_s + k_s \Delta y_s + k_s y_{s0} - F_{y0} - k_{yy} (\Delta y_j - \Delta y_s) - k_{yx} (\Delta x_j - \Delta x_s) - c_{yy} (\Delta \dot{y}_j - \Delta \dot{y}_s) - c_{yx} (\Delta \dot{x}_j - \Delta \dot{x}_s) = 0$$

Finalmente, retomando las relaciones Ecs.(5.29) y (5.32) se obtiene:

$$m_s \Delta \ddot{y}_s + c_s \Delta \dot{y}_s - c_{yy} (\Delta \dot{y}_j - \Delta \dot{y}_s) - c_{yx} (\Delta \dot{x}_j - \Delta \dot{x}_s) - k_{yy} (\Delta y_j - \Delta y_s) - k_{yx} (\Delta x_j - \Delta x_s) + k_s \Delta y_s = 0 \quad (5.49)$$

El sistema de ecuaciones dado por Ecs.(5.44)-(5.49) representan las ecuaciones de movimiento, con dimensiones, del Rotor Jeffcott Extendido Desbalanceado y Fisurado Sobre Soportes Flexibles alrededor de su posición de equilibrio

Ecuaciones adimensionales del movimiento del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado

Para lograr una mayor generalidad de aplicación y utilidad de este análisis se derivan las ecuaciones adimensionales normalizando a las amplitudes de vibración por:

$$c_r = R_j - R_{gje} , \quad (5.50)$$

donde c_r es el claro radial que representa la diferencia de los radios de la chumacera y del muñón.

Para pasar a las coordenadas adimensionales, los desplazamientos adimensionales de los centros de rotor y chumacera respecto a sus posiciones de equilibrio pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} \Delta X_i &= \frac{\Delta x_i}{c_r} & \Delta \dot{X}_i &= \frac{\Delta \dot{x}_i}{\omega c_r} & \Delta \ddot{X}_i &= \frac{\Delta \ddot{x}_i}{\omega^2 c_r} \\ \Delta Y_i &= \frac{\Delta y_i}{c_r} & \Delta \dot{Y}_i &= \frac{\Delta \dot{y}_i}{\omega c_r} & \Delta \ddot{Y}_i &= \frac{\Delta \ddot{y}_i}{\omega^2 c_r} \end{aligned} \quad i = d, j, s \quad (5.51)$$

De donde es posible despejar

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= c_r \Delta X_i & \Delta \dot{x}_i &= \omega c_r \Delta \dot{X}_i & \Delta \ddot{x}_i &= \omega^2 c_r \Delta \ddot{X}_i \\ \Delta y_i &= c_r \Delta Y_i & \Delta \dot{y}_i &= \omega c_r \Delta \dot{Y}_i & \Delta \ddot{y}_i &= \omega^2 c_r \Delta \ddot{Y}_i \end{aligned} \quad i = d, j, s \quad (5.52)$$

Al sustituir las relaciones Ecs.(5.52), (2.66) en el sistema de ecuaciones dado por Ecs.(5.44)-(5.49) que representa las ecuaciones de movimiento, con dimensiones, del rotor Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado sobre soportes flexibles, alrededor de su posición de equilibrio. Se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} m\omega^2 c_r \Delta X_d'' + c_d \omega c_r \Delta X_d' - \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\Phi)(c_r \Delta X_d - c_r \Delta X_j + \delta) + \\ (\Delta k_2 \sin 2\Phi)(c_r \Delta Y_d - c_r \Delta Y_j)] + k(c_r \Delta X_d - c_r \Delta X_j) = m\omega^2 e_d \cos(\tau + \phi) \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} m\omega^2 c_r \Delta Y_d'' + c_d \omega c_r \Delta Y_d' - \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta k_2 \sin 2\Phi)(c_r \Delta X_d - c_r \Delta X_j + \delta) + \\ (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\Phi)(c_r \Delta Y_d - c_r \Delta Y_j)] + k(c_r \Delta Y_d - c_r \Delta Y_j) = m\omega^2 e_d \sin(\tau + \phi) \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} m_j \omega^2 c_r \Delta X_j'' + \omega c_r c_{xx} (\Delta X_j' - \Delta X_s') + \omega c_r c_{yy} (\Delta Y_j' - \Delta Y_s') + c_r k_{xx} (\Delta X_j - \Delta X_s) + \\ c_r k_{yy} (\Delta Y_j - \Delta Y_s) - c_r k (\Delta X_d - \Delta X_j) + \frac{g(\Phi)}{4} [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\Phi)(c_r \Delta X_d - c_r \Delta X_j + \delta) + \\ (\Delta k_2 \sin 2\Phi)(c_r \Delta Y_d - c_r \Delta Y_j)] = m_j \omega^2 e_j \cos(\tau) \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} m_j \omega^2 c_r \Delta Y_j'' + \omega c_r c_{yy} (\Delta Y_j' - \Delta Y_s') + \omega c_r c_{xx} (\Delta X_j' - \Delta X_s') + c_r k_{yy} (\Delta Y_j - \Delta Y_s) + \\ c_r k_{xx} (\Delta X_j - \Delta X_s) - c_r k (\Delta Y_d - \Delta Y_j) + \frac{g(\Phi)}{4} [(\Delta k_2 \sin 2\Phi)(c_r \Delta X_d - c_r \Delta X_j + \delta) + \\ (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\Phi)(c_r \Delta Y_d - c_r \Delta Y_j)] = m_j \omega^2 e_j \sin(\tau) \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned}
& m_s \omega^2 c_r \Delta X_s'' + \omega c_r c_s \Delta X_s' - \omega c_r c_{xx} (\Delta X_j' - \Delta X_s') - \omega c_r c_{xy} (\Delta Y_j' - \Delta Y_s') - \\
& c_r k_{xx} (\Delta X_j - \Delta X_s) - c_r k_{xy} (\Delta Y_j - \Delta Y_s) + c_r k_s \Delta X_s = 0
\end{aligned} \tag{5.57}$$

$$\begin{aligned}
& m_s \omega^2 c_r \Delta Y_s'' + \omega c_r c_s \Delta Y_s' - \omega c_r c_{yy} (\Delta Y_j' - \Delta Y_s') - \omega c_r c_{yx} (\Delta X_j' - \Delta X_s') - \\
& c_r k_{yy} (\Delta Y_j - \Delta Y_s) - c_r k_{yx} (\Delta X_j - \Delta X_s) + c_r k_s \Delta Y_s = 0
\end{aligned} \tag{5.58}$$

En el sistema de Ecs.(5.53)-(5.58) las coordenadas ya son adimensionales, pero no así sus coeficientes. Ahora para adimensionalizar los coeficientes dividiremos todo el sistema entre kc_r , lo cual resulta:

$$\begin{aligned}
& \frac{m\omega^2}{k} \Delta X_d'' + \frac{c_d \omega}{k} \Delta X_d' - \frac{g(\Phi)}{2} \left[\left(\frac{\Delta k_1}{k} + \frac{\Delta k_2}{k} \cos 2\Phi \right) \left(\Delta X_d - \Delta X_j + \frac{\delta}{c_r} \right) + \right. \\
& \left. \left(\frac{\Delta k_2}{k} \sin 2\Phi \right) (\Delta Y_d - \Delta Y_j) \right] + (\Delta X_d - \Delta X_j) = \frac{m\omega^2}{k} \frac{e_d}{c_r} \cos(\tau + \phi)
\end{aligned} \tag{5.59}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{m\omega^2}{k} \Delta Y_d'' + \frac{c_d \omega}{k} \Delta Y_d' - \frac{g(\Phi)}{2} \left[\left(\frac{\Delta k_2}{k} \sin 2\Phi \right) \left(\Delta X_d - \Delta X_j + \frac{\delta}{c_r} \right) + \right. \\
& \left. \left(\frac{\Delta k_1}{k} - \frac{\Delta k_2}{k} \cos 2\Phi \right) (\Delta Y_d - \Delta Y_j) \right] + (\Delta Y_d - \Delta Y_j) = \frac{m\omega^2}{k} \frac{e_d}{c_r} \sin(\tau + \phi)
\end{aligned} \tag{5.60}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{m_j \omega^2}{k} \Delta X_j'' + \frac{W}{kc_r} \left(\frac{\omega c_r c_{xx}}{W} (\Delta X_j' - \Delta X_s') + \frac{\omega c_r c_{xy}}{W} (\Delta Y_j' - \Delta Y_s') + \frac{c_r k_{xx}}{W} (\Delta X_j - \Delta X_s) + \right. \\
& \left. \frac{c_r k_{xy}}{W} (\Delta Y_j - \Delta Y_s) \right) - (\Delta X_d - \Delta X_j) + \frac{g(\Phi)}{4} \left[\left(\frac{\Delta k_1}{k} + \frac{\Delta k_2}{k} \cos 2\Phi \right) \left(\Delta X_d - \Delta X_j + \frac{\delta}{c_r} \right) + \right. \\
& \left. \left(\frac{\Delta k_2}{k} \sin 2\Phi \right) (\Delta Y_d - \Delta Y_j) \right] = \frac{m_j \omega^2}{k} \frac{e_j}{c_r} \cos(\tau)
\end{aligned} \tag{5.61}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{m_j \omega^2}{k} \Delta Y_j'' + \frac{W}{kc_r} \left(\frac{\omega c_r c_{yy}}{W} (\Delta Y_j' - \Delta Y_s') + \frac{\omega c_r c_{yx}}{W} (\Delta X_j' - \Delta X_s') + \frac{c_r k_{yy}}{W} (\Delta Y_j - \Delta Y_s) + \right. \\
& \left. \frac{c_r k_{yx}}{W} (\Delta X_j - \Delta X_s) \right) - (\Delta Y_d - \Delta Y_j) + \frac{g(\Phi)}{4} \left[\left(\frac{\Delta k_2}{k} \sin 2\Phi \right) \left(\Delta X_d - \Delta X_j + \frac{\delta}{c_r} \right) + \right. \\
& \left. \left(\frac{\Delta k_1}{k} - \frac{\Delta k_2}{k} \cos 2\Phi \right) (\Delta Y_d - \Delta Y_j) \right] = \frac{m_j \omega^2}{k} \frac{e_j}{c_r} \sin(\tau)
\end{aligned} \tag{5.62}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{m_s \omega^2}{k} \Delta X_s'' + \frac{\omega c_s}{k} \Delta X_s' - \frac{W}{kc_r} \left(\frac{\omega c_r c_{xx}}{W} (\Delta X_j' - \Delta X_s') - \frac{\omega c_r c_{xy}}{W} (\Delta Y_j' - \Delta Y_s') - \right. \\
& \left. \frac{c_r k_{xx}}{W} (\Delta X_j - \Delta X_s) - \frac{c_r k_{xy}}{W} (\Delta Y_j - \Delta Y_s) \right) + \frac{k_s}{k} \Delta X_s = 0
\end{aligned} \tag{5.63}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{m_s \omega^2}{k} \Delta Y_s'' + \frac{\omega c_s}{k} \Delta Y_s' - \frac{W}{kc_r} \left(\frac{\omega c_r c_{yy}}{W} (\Delta Y_j' - \Delta Y_s') - \frac{\omega c_r c_{yx}}{W} (\Delta X_j' - \Delta X_s') - \right. \\
& \left. \frac{c_r k_{yy}}{W} (\Delta Y_j - \Delta Y_s) - \frac{c_r k_{yx}}{W} (\Delta X_j - \Delta X_s) \right) + \frac{k_s}{k} \Delta Y_s = 0
\end{aligned} \tag{5.64}$$

El peso adimensional de las chumaceras y los soportes fueron determinados respectivamente como:

$$\alpha_j = \frac{m_j}{m_d} \quad \alpha_s = \frac{m_s}{m_d} \tag{5.65}$$

De donde obtenemos que

$$\frac{m_j \omega^2}{k} = \frac{m_j \omega^2}{k} \frac{m_d}{m_d} = \frac{m_j}{m_d} \frac{m_d \omega^2}{k} = \frac{m_j}{m_d} \frac{\omega^2}{\omega_{nat}^2} = \alpha_j \Omega^2 \quad (5.66)$$

$$\frac{m_s \omega^2}{k} = \frac{m_s \omega^2}{k} \frac{m_d}{m_d} = \frac{m_s}{m_d} \frac{m_d \omega^2}{k} = \frac{m_s}{m_d} \frac{\omega^2}{\omega_{nat}^2} = \alpha_s \Omega^2 \quad (5.67)$$

El amortiguamiento y la rigidez adimensional de los soportes están dados respectivamente por

$$\frac{\omega c_s}{k} = \frac{\omega c_s}{k} \frac{\omega_{nat}}{\omega_{nat}} = \frac{\omega}{\omega_{nat}} \frac{\omega_{nat} c_s}{k} = \Omega C_s \quad (5.68)$$

$$\frac{k_s}{k} = K_s \quad (5.69)$$

Sustituyendo las relaciones encontradas, el sistema se puede describir ahora como:

$$\Omega^2 \Delta X_d'' + 2D_e \Omega \Delta X_d' - \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi)(\Delta X_d - \Delta X_j + W_g) + (\Delta K_2 \sin 2\Phi)(\Delta Y_d - \Delta Y_j)] + (\Delta X_d - \Delta X_j) = \Omega^2 U_d \cos(\tau + \phi) \quad (5.70)$$

$$\Omega^2 \Delta Y_d'' + 2D_e \Omega \Delta Y_d' - \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_2 \sin 2\Phi)(\Delta X_d - \Delta X_j + W_g) + (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi)(\Delta Y_d - \Delta Y_j)] + (\Delta Y_d - \Delta Y_j) = \Omega^2 U_d \sin(\tau + \phi) \quad (5.71)$$

$$2\alpha_j \Omega^2 \Delta X_j'' + W_g (1 + 2\alpha_j) [C_{xx} (\Delta X_j' - \Delta X_s') + C_{xy} (\Delta Y_j' - \Delta Y_s')] + K_{xx} (\Delta X_j - \Delta X_s) + K_{xy} (\Delta Y_j - \Delta Y_s) - (\Delta X_d - \Delta X_j) + \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi)(\Delta X_d - \Delta X_j + W_g) + (\Delta K_2 \sin 2\Phi)(\Delta Y_d - \Delta Y_j)] = 2\alpha_j \Omega^2 U_j \cos(\tau) \quad (5.72)$$

$$2\alpha_j \Omega^2 \Delta Y_j'' + W_g (1 + 2\alpha_j) [C_{yy} (\Delta Y_j' - \Delta Y_s') + C_{yx} (\Delta X_j' - \Delta X_s')] + K_{yy} (\Delta Y_j - \Delta Y_s) + K_{yx} (\Delta X_j - \Delta X_s) - (\Delta Y_d - \Delta Y_j) + \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_2 \sin 2\Phi)(\Delta X_d - \Delta X_j + W_g) + (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi)(\Delta Y_d - \Delta Y_j)] = 2\alpha_j \Omega^2 U_j \sin(\tau) \quad (5.73)$$

$$2\alpha_s \Omega^2 \Delta X_s'' + 2C_s \Omega \Delta X_s' - W_g (1 + 2\alpha_j) [C_{xx} (\Delta X_j' - \Delta X_s') + C_{xy} (\Delta Y_j' - \Delta Y_s')] + K_{xx} (\Delta X_j - \Delta X_s) + K_{xy} (\Delta Y_j - \Delta Y_s) + 2K_s \Delta X_s = 0 \quad (5.74)$$

$$2\alpha_s \Omega^2 \Delta Y_s'' + 2C_s \Omega \Delta Y_s' - W_g (1 + 2\alpha_j) [C_{yy} \Omega (\Delta Y_j' - \Delta Y_s') + C_{yx} \Omega (\Delta X_j' - \Delta X_s')] + K_{yy} (\Delta Y_j - \Delta Y_s) + K_{yx} (\Delta X_j - \Delta X_s) + 2K_s \Delta Y_s = 0 \quad (5.75)$$

El sistema de las Ecs.(5.70)-(5.75) son las ecuaciones lineales adimensionales del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado sobre soportes flexibles. Dicho modelo innovador en su enfoque y derivación consiste en un sistema de 6 ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes periódicos y en donde el efecto del peso esta explícitamente considerado dentro de las expresiones.

Capítulo

6

Métodos de solución del modelo del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado sobre soportes flexibles

6.1 Método de solución numérica

Realizando las siguientes transformaciones las seis ecuaciones diferenciales de segundo orden, Ecs.(5.70)-(5.75), pueden ser representadas como un sistema de 12 ecuaciones diferenciales de primer orden para su solución numérica. Dicha solución numérica proporciona la respuesta del sistema del modelo de rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado sobre soportes flexibles.

$$\begin{aligned} Z_1 &= \Delta X_d, & Z_2 &= \Delta Y_d, & Z_3 &= \Delta X_j, & Z_4 &= \Delta Y_j, & Z_5 &= \Delta X_s, & Z_6 &= \Delta Y_s \\ Z_7 &= \Delta X_d', & Z_8 &= \Delta Y_d', & Z_9 &= \Delta X_j', & Z_{10} &= \Delta Y_j', & Z_{11} &= \Delta X_s', & Z_{12} &= \Delta Y_s' \end{aligned}$$

De esta forma es posible obtener el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= \Delta X_d' = Z_7, & \dot{Z}_2 &= \Delta Y_d' = Z_8, & \dot{Z}_3 &= \Delta X_j' = Z_9, & \dot{Z}_4 &= \Delta Y_j' = Z_{10}, & \dot{Z}_5 &= \Delta X_s' = Z_{11}, & \dot{Z}_6 &= \Delta Y_s' = Z_{12} \\ \dot{Z}_7 &= \Delta X_d'' = \frac{1}{\Omega^2} \left(-2D_e \Omega Z_7 + \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi)(Z_1 - Z_3 + W_g) + \right. \\ &\quad \left. (\Delta K_2 \sin 2\Phi)(Z_2 - Z_4)] - (Z_1 - Z_3) \right) + U_d \cos(\tau + \phi) \\ \dot{Z}_8 &= \Delta Y_d'' = \frac{1}{\Omega^2} \left(-2D_e \Omega Z_8 + \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_2 \sin 2\Phi)(Z_1 - Z_3 + W_g) + \right. \\ &\quad \left. (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi)(Z_2 - Z_4)] - (Z_2 - Z_4) \right) + U_d \sin(\tau + \phi) \\ \dot{Z}_9 &= \Delta X_j'' = -\frac{1}{2\alpha_j \Omega^2} (W_g (1 + 2\alpha_j) [C_{xx} (Z_9 - Z_{11}) + C_{xy} (Z_{10} - Z_{12}) + K_{xx} (Z_3 - Z_5) + K_{xy} (Z_4 - Z_6)]) - \\ &\quad (Z_1 - Z_3) + \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi)(Z_1 - Z_3 + W_g) + (\Delta K_2 \sin 2\Phi)(Z_2 - Z_4)] + U_j \cos(\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{Z}_{10} &= \Delta Y_j'' = -\frac{1}{2\alpha_j\Omega^2} \left(W_g (1+2\alpha_j) \left[C_{yy} (Z_{10} - Z_{12}) + C_{yx} (Z_9 - Z_{11}) + K_{yy} (Z_4 - Z_6) + K_{yx} (Z_3 - Z_5) \right] - \right. \\ &\quad \left. (Z_2 - Z_4) + \frac{g(\Phi)}{2} \left[(\Delta K_2 \sin 2\Phi) (Z_1 - Z_3 + W_g) + (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi) (Z_2 - Z_4) \right] \right) + U_j \sin(\tau) \\ \dot{Z}_{11} &= \Delta X_s' = -\frac{1}{2\alpha_s\Omega^2} \left(2C_s\Omega Z_{11} - W_g (1+2\alpha_j) \left[C_{xx} (Z_9 - Z_{11}) + C_{xy} (Z_{10} - Z_{12}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. K_{xx} (Z_3 - Z_5) + K_{xy} (Z_4 - Z_6) \right] + 2K_s Z_5 \right) \\ \dot{Z}_{12} &= \Delta Y_s' = -\frac{1}{2\alpha_s\Omega^2} \left(2C_s\Omega Z_{12} - W_g (1+2\alpha_j) \left[C_{yy} (Z_{10} - Z_{12}) + C_{yx} (Z_9 - Z_{11}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. K_{yy} (Z_4 - Z_6) + K_{yx} (Z_3 - Z_5) \right] + 2K_s Z_6 \right)\end{aligned}$$

Reordenando términos

$$\begin{aligned}\dot{Z}_1 &= Z_7, \quad \dot{Z}_2 = Z_8, \quad \dot{Z}_3 = Z_9, \quad \dot{Z}_4 = Z_{10}, \quad \dot{Z}_5 = Z_{11}, \quad \dot{Z}_6 = Z_{12} \\ \dot{Z}_7 &= Z_1 \left[\frac{g(\Phi)}{2\Omega^2} (\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi) - \frac{1}{\Omega^2} \right] + Z_2 \left[\frac{g(\Phi)}{2\Omega^2} (\Delta K_2 \sin 2\Phi) \right] - Z_3 \left[\frac{g(\Phi)}{2\Omega^2} (\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi) - \frac{1}{\Omega^2} \right] - \\ &\quad Z_4 \left[\frac{g(\Phi)}{2\Omega^2} (\Delta K_2 \sin 2\Phi) \right] - Z_7 \left[\frac{2D_e}{\Omega} \right] + \left[U_d \cos(\tau + \phi) + \frac{g(\Phi)}{2\Omega^2} (\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi) W_g \right] \\ \dot{Z}_8 &= Z_1 \left[\frac{g(\Phi)}{2\Omega^2} (\Delta K_2 \sin 2\Phi) \right] + Z_2 \left[\frac{g(\Phi)}{2\Omega^2} (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi) - \frac{1}{\Omega^2} \right] - Z_3 \left[\frac{g(\Phi)}{2\Omega^2} (\Delta K_2 \sin 2\Phi) \right] + \\ &\quad Z_4 \left[\frac{1}{\Omega^2} - \frac{g(\Phi)}{2\Omega^2} (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi) \right] - Z_8 \left[\frac{2D_e}{\Omega} \right] + \left[U_d \sin(\tau + \phi) + \frac{g(\Phi)}{2\Omega^2} (\Delta K_2 \sin 2\Phi) W_g \right] \\ \dot{Z}_9 &= Z_1 \left[\frac{1}{2\alpha_j\Omega^2} - \frac{g(\Phi)}{4\alpha_j\Omega^2} (\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi) \right] - Z_2 \left[\frac{g(\Phi)}{4\alpha_j\Omega^2} (\Delta K_2 \sin 2\Phi) \right] + Z_3 \left[-\frac{1}{2\alpha_j\Omega^2} - \frac{K_{xx}W_g(1+2\alpha_j)}{2\alpha_j\Omega^2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{g(\Phi)}{4\alpha_j\Omega^2} (\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi) \right] + Z_4 \left[-\frac{K_{xy}W_g(1+2\alpha_j)}{2\alpha_j\Omega^2} + \frac{g(\Phi)}{4\alpha_j\Omega^2} (\Delta K_2 \sin 2\Phi) \right] + Z_5 \left[\frac{K_{xx}W_g(1+2\alpha_j)}{2\alpha_j\Omega^2} \right] + \\ &\quad Z_6 \left[\frac{K_{xy}W_g(1+2\alpha_j)}{2\alpha_j\Omega^2} \right] - Z_9 \left[\frac{C_{xx}W_g(1+2\alpha_j)}{2\alpha_s\Omega^2} \right] - Z_{10} \left[\frac{C_{xy}W_g(1+2\alpha_j)}{2\alpha_s\Omega^2} \right] + Z_{11} \left[\frac{C_{xx}W_g(1+2\alpha_j)}{2\alpha_s\Omega^2} \right] - \\ &\quad Z_{12} \left[\frac{C_{xy}W_g(1+2\alpha_j)}{2\alpha_s\Omega^2} \right] + \left[U_j \cos \tau - \frac{g(\Phi)}{4\alpha_j\Omega^2} (\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi) W_g \right] \\ \dot{Z}_{10} &= -Z_1 \left[\frac{g(\Phi)}{4\alpha_j\Omega^2} (\Delta K_2 \sin 2\Phi) \right] + Z_2 \left[\frac{1}{2\alpha_j\Omega^2} - \frac{g(\Phi)}{4\alpha_j\Omega^2} (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi) \right] + Z_3 \left[\frac{g(\Phi)}{4\alpha_j\Omega^2} (\Delta K_2 \sin 2\Phi) - \right. \\ &\quad \left. \frac{K_{yx}W_g(1+2\alpha_j)}{2\alpha_j\Omega^2} \right] + Z_4 \left[-\frac{1}{2\alpha_j\Omega^2} + \frac{g(\phi)}{4\alpha_j\Omega^2} (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi) - \frac{K_{yy}W_g(1+2\alpha_j)}{2\alpha_j\Omega^2} \right] + Z_5 \left[\frac{K_{yx}W_g(1+2\alpha_j)}{2\alpha_j\Omega^2} \right] + \\ &\quad Z_6 \left[\frac{K_{xy}W_g(1+2\alpha_j)}{2\alpha_j\Omega^2} \right] - Z_9 \left[\frac{C_{yx}W_g(1+2\alpha_j)}{2\alpha_j\Omega^2} \right] - Z_{10} \left[\frac{C_{yy}W_g(1+2\alpha_j)}{2\alpha_j\Omega^2} \right] + Z_{11} \left[\frac{C_{yx}W_g(1+2\alpha_j)}{2\alpha_j\Omega^2} \right] + \\ &\quad Z_{12} \left[\frac{C_{yy}W_g(1+2\alpha_j)}{2\alpha_j\Omega^2} \right] + \left[U_j \sin \tau - \frac{g(\Phi)}{4\alpha_j\Omega^2} (\Delta K_2 \sin 2\Phi) W_g \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{Z}_{11} &= Z_3 \left[\frac{K_{xx} W_g (1+2\alpha_j)}{2\alpha_s \Omega^2} \right] + Z_4 \left[\frac{K_{xy} W_g (1+2\alpha_j)}{2\alpha_s \Omega^2} \right] - Z_5 \left[\frac{2K_s + K_{xx} W_g (1+2\alpha_j)}{2\alpha_s \Omega^2} \right] - Z_6 \left[\frac{K_{xy} W_g (1+2\alpha_j)}{2\alpha_s \Omega^2} \right] + \\ & Z_9 \left[\frac{C_{xx} W_g (1+2\alpha_j)}{2\alpha_s \Omega^2} \right] + Z_{10} \left[\frac{C_{xy} W_g (1+2\alpha_j)}{2\alpha_s \Omega^2} \right] - Z_{11} \left[\frac{2\Omega C_s + C_{xx} W_g (1+2\alpha_j)}{2\alpha_s \Omega^2} \right] - Z_{12} \left[\frac{C_{xy} W_g (1+2\alpha_j)}{2\alpha_s \Omega^2} \right] \\ \dot{Z}_{12} &= Z_3 \left[\frac{K_{yx} W_g (1+2\alpha_j)}{2\alpha_s \Omega^2} \right] + Z_4 \left[\frac{K_{yy} W_g (1+2\alpha_j)}{2\alpha_s \Omega^2} \right] - Z_5 \left[\frac{K_{yx} W_g (1+2\alpha_j)}{2\alpha_s \Omega^2} \right] - Z_6 \left[\frac{2K_s + K_{yy} W_g (1+2\alpha_j)}{2\alpha_s \Omega^2} \right] + \\ & Z_9 \left[\frac{C_{yx} W_g (1+2\alpha_j)}{2\alpha_s \Omega^2} \right] + Z_{10} \left[\frac{C_{yy} W_g (1+2\alpha_j)}{2\alpha_s \Omega^2} \right] - Z_{11} \left[\frac{C_{yx} W_g (1+2\alpha_j)}{2\alpha_s \Omega^2} \right] - Z_{12} \left[\frac{2\Omega C_s + C_{yy} W_g (1+2\alpha_j)}{2\alpha_s \Omega^2} \right]\end{aligned}$$

Con el fin de simplificar las expresiones anteriores se llevan acabo las siguientes sustituciones:

$$\begin{aligned}P_1(\Phi) &= 1 - \frac{1}{2} g(\Phi) (\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi), & P_2(\Phi) &= 1 - \frac{1}{2} g(\Phi) (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi), \\ Q_1(\Phi) &= \frac{1}{2} g(\Phi) (\Delta K_2 \sin 2\Phi), & W_{ga} &= W_g (1+2\alpha_j).\end{aligned}\tag{6.1}$$

En este momento es posible representar el sistema de ocho ecuaciones diferenciales de primer orden en forma matricial de la siguiente manera;

$$\dot{Z} = A(\Phi)Z + B\tag{6.2}$$

Donde la matriz periódica de estado $A(\Phi)$, el vector Z y el vector B están dados respectivamente por las siguientes expresiones.

$$A(\Phi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-P_1(\Phi)}{\Omega^2} & \frac{Q_1(\Phi)}{\Omega^2} & \frac{P_1(\Phi)}{\Omega^2} & \frac{-Q_1(\Phi)}{\Omega^2} & 0 & 0 \\ \frac{Q_1(\Phi)}{\Omega^2} & \frac{-P_2(\Phi)}{\Omega^2} & \frac{-Q_1(\Phi)}{\Omega^2} & \frac{P_2(\Phi)}{\Omega^2} & 0 & 0 \\ \frac{-P_1(\Phi)}{2\alpha_j \Omega^2} & \frac{-Q_1(\Phi)}{2\alpha_j \Omega^2} & \frac{P_1(\Phi) + W_{ga} K_{xx}}{2\alpha_j \Omega^2} & \frac{Q_1(\Phi) - W_{ga} K_{xy}}{2\alpha_j \Omega^2} & \frac{W_{ga} K_{xx}}{2\alpha_j \Omega^2} & \frac{W_{ga} K_{xy}}{2\alpha_j \Omega^2} \\ \frac{-Q_1(\Phi)}{2\alpha_j \Omega^2} & \frac{P_2(\Phi)}{2\alpha_j \Omega^2} & \frac{Q_1(\Phi) - W_{ga} K_{yx}}{2\alpha_j \Omega^2} & \frac{P_2(\Phi) - W_{ga} K_{yy}}{2\alpha_j \Omega^2} & \frac{W_{ga} K_{yx}}{2\alpha_j \Omega^2} & \frac{W_{ga} K_{yy}}{2\alpha_j \Omega^2} \\ 0 & 0 & \frac{W_{ga} K_{xx}}{2\alpha_s \Omega^2} & \frac{W_{ga} K_{xy}}{2\alpha_s \Omega^2} & \frac{2K_s + W_{ga} K_{xx}}{2\alpha_s \Omega^2} & \frac{-W_{ga} K_{xy}}{2\alpha_s \Omega^2} \\ 0 & 0 & \frac{W_{ga} K_{yx}}{2\alpha_s \Omega^2} & \frac{W_{ga} K_{yy}}{2\alpha_s \Omega^2} & \frac{-W_{ga} K_{yx}}{2\alpha_s \Omega^2} & \frac{2K_s + W_{ga} K_{yy}}{2\alpha_s \Omega^2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \frac{-2De}{\Omega} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{-2De}{\Omega} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{-W_{ga} C_{xx}}{2\alpha_j \Omega^2} & \frac{-W_{ga} C_{xy}}{2\alpha_j \Omega^2} & \frac{W_{ga} C_{xx}}{2\alpha_j \Omega^2} & \frac{W_{ga} C_{xy}}{2\alpha_j \Omega^2} \\
 0 & 0 & \frac{-W_{ga} C_{yx}}{2\alpha_j \Omega^2} & \frac{-W_{ga} C_{yy}}{2\alpha_j \Omega^2} & \frac{W_{ga} C_{yx}}{2\alpha_j \Omega^2} & \frac{W_{ga} C_{yy}}{2\alpha_j \Omega^2} \\
 0 & 0 & \frac{W_{ga} C_{xx}}{2\alpha_s \Omega^2} & \frac{W_{ga} C_{xy}}{2\alpha_s \Omega^2} & -\frac{2\Omega C_s + W_{ga} C_{xx}}{2\alpha_s \Omega^2} & \frac{-W_{ga} C_{xy}}{2\alpha_s \Omega^2} \\
 0 & 0 & \frac{W_{ga} C_{yx}}{2\alpha_s \Omega^2} & \frac{W_{ga} C_{yy}}{2\alpha_s \Omega^2} & \frac{-W_{ga} C_{yx}}{2\alpha_s \Omega^2} & \frac{2\Omega C_s + W_{ga} C_{yy}}{2\alpha_s \Omega^2}
 \end{bmatrix}$$

$$Z^T = [Z_1 \ Z_2 \ Z_3 \ Z_4 \ Z_5 \ Z_6 \ Z_7 \ Z_8 \ Z_9 \ Z_{10} \ Z_{11} \ Z_{12}] \quad (6.3)$$

$$B = \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 U_d \cos(\tau + \phi) + \frac{(1 - P_1(\Phi))W_g}{\Omega^2} \\
 U_d \sin(\tau + \phi) + \frac{Q_1(\Phi)W_g}{\Omega^2} \\
 U_j \cos \tau - \frac{(1 - P_1(\Phi))W_g}{2\alpha_j \Omega^2} \\
 U_j \sin \tau - \frac{Q_1(\Phi)W_g}{2\alpha_j \Omega^2} \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Con el fin de dar solución al sistema anterior se desarrollo un programa en el paquete MATLAB (Apéndice B) que permite obtener la respuesta del sistema de ecuaciones del modelo de rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado. En dicho programa es posible obtener gráficas de las respuestas transitorias del disco (\mathbf{X}_d , \mathbf{Y}_d), chumaceras (\mathbf{X}_j , \mathbf{Y}_j) y soportes (\mathbf{X}_s , \mathbf{Y}_s) y sus correspondientes graficas de espectros de frecuencia y ángulos de fase, así como las orbitas descritas por el disco, chumaceras y los soportes a esperar ante diferentes; profundidades de grieta (ΔK_g , ΔK_n), magnitudes de desbalance en el disco (U_d) y chumaceras (U_j), orientaciones angulares (β) entre el desbalance residual del disco (U_d) y la dirección de la grieta (ξ), distribuciones de masa (α_j y α_s) velocidades de operación (Ω)

De la misma forma se desarrolló una versión automatizada del programa anterior que permite obtener los mismos resultados pero en todo un rango de velocidades de operación lo que permite obtener diagramas de la respuesta vibratoria del sistema a lo largo de lo que en la practica se podría traducir como un arranque o paro de la maquina.

6.2 Método de solución numérica-analítica aproximada

La investigación de la interacción entre los desbalances de masas y la fisura transversal localizada a la mitad del eje se basa en un modelo lineal dado por Ecs.(5.70)-(5.75). El modelo completo consiste de seis ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes periódicos y su solución analítica cerrada es bastante difícil o tal vez imposible.

Solución de orden cero – eje Integro –

Como en el caso del Capítulo 3, se empleará el novedoso método seminumérico ideado por el Director de esta Tesis basado en el *Método de Parámetros Pequeños*. Como parámetro pequeño se consideran dos parámetros ΔK_1 y ΔK_2 . Como aproximación de la solución de orden cero, ΔX_{d0} , ΔY_{d0} , ΔX_{j0} , ΔY_{j0} , ΔX_{s0} , ΔY_{s0} , se toma la respuesta en estado estable del sistema debido al puro desbalance; es decir soluciones de Ecs.(5.70)-(5.75) cuando $\Delta K_1 = 0$ y $\Delta K_2 = 0$ y escritas a continuación.

$$\Omega^2 \Delta X_{d0}'' + 2D_e \Omega \Delta X_{d0}' + (\Delta X_{d0} - \Delta X_{j0}) = \Omega^2 U_d \cos(\tau + \phi) = \Omega^2 (U_d^x \cos \tau - U_d^y \sin \tau) \quad (6.5)$$

$$\Omega^2 \Delta Y_{d0}'' + 2D_e \Omega \Delta Y_{d0}' + (\Delta Y_{d0} - \Delta Y_{j0}) = \Omega^2 U_d \sin(\tau + \phi) = \Omega^2 (U_d^x \sin \tau + U_d^y \cos \tau) \quad (6.6)$$

$$2\alpha_j \Omega^2 \Delta X_{j0}'' + W_g (1 + 2\alpha_j) [C_{xx} (\Delta X_{j0}' - \Delta X_{s0}') + C_{xy} (\Delta Y_{j0}' - \Delta Y_{s0}') + K_{xx} (\Delta X_{j0} - \Delta X_{s0}) + K_{xy} (\Delta Y_{j0} - \Delta Y_{s0})] - (\Delta X_{d0} - \Delta X_{j0}) = 2\alpha_j \Omega^2 U_j \cos \tau \quad (6.7)$$

$$2\alpha_j \Omega^2 \Delta Y_{j0}'' + W_g (1 + 2\alpha_j) [C_{yy} (\Delta Y_{j0}' - \Delta Y_{s0}') + C_{yx} (\Delta X_{j0}' - \Delta X_{s0}') + K_{yy} (\Delta Y_{j0} - \Delta Y_{s0}) + K_{yx} (\Delta X_{j0} - \Delta X_{s0})] - (\Delta Y_{d0} - \Delta Y_{j0}) = 2\alpha_j \Omega^2 U_j \sin \tau \quad (6.8)$$

$$2\alpha_s \Omega^2 \Delta X_{s0}'' + 2C_s \Omega \Delta X_{s0}' - W_g (1 + 2\alpha_j) [C_{xx} (\Delta X_{j0}' - \Delta X_{s0}') + C_{xy} (\Delta Y_{j0}' - \Delta Y_{s0}') + K_{xx} (\Delta X_{j0} - \Delta X_{s0}) + K_{xy} (\Delta Y_{j0} - \Delta Y_{s0})] + 2K_s \Delta X_{s0} = 0 \quad (6.9)$$

$$2\alpha_s \Omega^2 \Delta Y_{s0}'' + 2C_s \Omega \Delta Y_{s0}' - W_g (1 + 2\alpha_j) [C_{yy} (\Delta Y_{j0}' - \Delta Y_{s0}') + C_{yx} (\Delta X_{j0}' - \Delta X_{s0}') + K_{yy} (\Delta Y_{j0} - \Delta Y_{s0}) + K_{yx} (\Delta X_{j0} - \Delta X_{s0})] + 2K_s \Delta Y_{s0} = 0 \quad (6.10)$$

Las soluciones en estado estable de las ecuaciones (5.70)-(5.75) tienen la forma:

$$\begin{aligned} \Delta X_{d0} &= Axd0 \cos \tau + Bxd0 \sin \tau + Cxd0 & \Delta Y_{d0} &= Ayd0 \cos \tau + Byd0 \sin \tau + Cyd0 \\ \Delta X_{j0} &= Axj0 \cos \tau + Bxj0 \sin \tau + Cxj0 & \Delta Y_{j0} &= Ayj0 \cos \tau + Byj0 \sin \tau + Cyj0 \\ \Delta X_{s0} &= Axs0 \cos \tau + Bxs0 \sin \tau + Cxs0 & \Delta Y_{s0} &= Ays0 \cos \tau + Bys0 \sin \tau + Cys0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Derivando y volviendo a derivar las soluciones anteriores:

$$\begin{aligned}
 \Delta X_{d0} &= Axd0 \cos \tau + Bxd0 \sin \tau + Cxd0 & \Delta Y_{d0} &= Ayd0 \cos \tau + Byd0 \sin \tau + Cyd0 \\
 \Delta X_{d0}' &= -Axd0 \sin \tau + Bxd0 \cos \tau & \Delta Y_{d0}' &= -Ayd0 \sin \tau + Byd0 \cos \tau \\
 \Delta X_{d0}'' &= -Axd0 \cos \tau - Bxd0 \sin \tau & \Delta Y_{d0}'' &= -Ayd0 \cos \tau - Byd0 \sin \tau \\
 \\
 \Delta X_{j0} &= Axj0 \cos \tau + Bxj0 \sin \tau + Cxj0 & \Delta Y_{j0} &= Ayj0 \cos \tau + Byj0 \sin \tau + Cyj0 \\
 \Delta X_{j0}' &= -Axj0 \sin \tau + Bxj0 \cos \tau & \Delta Y_{j0}' &= -Ayj0 \sin \tau + Byj0 \cos \tau \\
 \Delta X_{j0}'' &= -Axj0 \cos \tau - Bxj0 \sin \tau & \Delta Y_{j0}'' &= -Ayj0 \cos \tau - Byj0 \sin \tau \\
 \\
 \Delta X_{s0} &= Axs0 \cos \tau + Bxs0 \sin \tau + Cxs0 & \Delta Y_{s0} &= Ays0 \cos \tau + Bys0 \sin \tau + Cys0 \\
 \Delta X_{s0}' &= -Axs0 \sin \tau + Bxs0 \cos \tau & \Delta Y_{s0}' &= -Ays0 \sin \tau + Bys0 \cos \tau \\
 \Delta X_{s0}'' &= -Axs0 \cos \tau - Bxs0 \sin \tau & \Delta Y_{s0}'' &= -Ays0 \cos \tau - Bys0 \sin \tau
 \end{aligned}$$

Sustituyendo las relaciones encontradas en el sistema de ecuaciones (5.70)-(5.75) se obtiene:

$$\Omega^2 (-Axd0 \cos \tau - Bxd0 \sin \tau) + 2D_e \Omega (-Axd0 \sin \tau + Bxd0 \cos \tau) + (Axd0 \cos \tau + Bxd0 \sin \tau + Cxd0 - Axj0 \cos \tau - Bxj0 \sin \tau - Cxj0) = \Omega^2 (U_d^x \cos \tau - U_d^y \sin \tau)$$

$$\Omega^2 (-Ayd0 \cos \tau - Byd0 \sin \tau) + 2D_e \Omega (-Ayd0 \sin \tau + Byd0 \cos \tau) + (Ayd0 \cos \tau + Byd0 \sin \tau + Cyd0 - Ayj0 \cos \tau - Byj0 \sin \tau - Cyj0) = \Omega^2 (U_d^x \sin \tau + U_d^y \cos \tau)$$

$$\begin{aligned}
 &2\alpha_j \Omega^2 (-Axj0 \cos \tau - Bxj0 \sin \tau) + W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{xx} (-Axj0 \sin \tau + Bxj0 \cos \tau + Axs0 \sin \tau - Bxs0 \cos \tau) + \\
 &C_{xy} (-Ayj0 \sin \tau + Byj0 \cos \tau + Ays0 \sin \tau - Bys0 \cos \tau) + K_{xx} (Axj0 \cos \tau + Bxj0 \sin \tau + Cxj0 - Axs0 \cos \tau - \\
 &Bxs0 \sin \tau - Cxs0) + K_{xy} (Ayj0 \cos \tau + Byj0 \sin \tau + Cyj0 - Ays0 \cos \tau - Bys0 \sin \tau - Cys0)) - \\
 &(Axd0 \cos \tau + Bxd0 \sin \tau + Cxd0 - Axj0 \cos \tau - Bxj0 \sin \tau - Cxj0) = 2\alpha_j \Omega^2 U_j \cos \tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2\alpha_j \Omega^2 (-Ayj0 \cos \tau - Byj0 \sin \tau) + W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{yx} (-Axj0 \sin \tau + Bxj0 \cos \tau + Axs0 \sin \tau - Bxs0 \cos \tau) + \\
 &C_{yy} (-Ayj0 \sin \tau + Byj0 \cos \tau + Ays0 \sin \tau - Bys0 \cos \tau) + K_{yx} (Axj0 \cos \tau + Bxj0 \sin \tau + Cxj0 - Axs0 \cos \tau - \\
 &Bxs0 \sin \tau - Cxs0) + K_{yy} (Ayj0 \cos \tau + Byj0 \sin \tau + Cyj0 - Ays0 \cos \tau - Bys0 \sin \tau - Cys0)) - \\
 &(Ayd0 \cos \tau + Byd0 \sin \tau + Cyd0 - Ayj0 \cos \tau - Byj0 \sin \tau - Cyj0) = 2\alpha_j \Omega^2 U_j \cos \tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2\alpha_s \Omega^2 (-Axs0 \cos \tau - Bxs0 \sin \tau) - W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{xx} (-Axj0 \sin \tau + Bxj0 \cos \tau + Axs0 \sin \tau - Bxs0 \cos \tau) + \\
 &C_{xy} (-Ayj0 \sin \tau + Byj0 \cos \tau + Ays0 \sin \tau - Bys0 \cos \tau) + K_{xx} (Axj0 \cos \tau + Bxj0 \sin \tau + Cxj0 - Axs0 \cos \tau - \\
 &Bxs0 \sin \tau - Cxs0) + K_{xy} (Ayj0 \cos \tau + Byj0 \sin \tau + Cyj0 - Ays0 \cos \tau - Bys0 \sin \tau - Cys0)) + \\
 &2\Omega C_s (-Axs0 \sin \tau + Bxs0 \cos \tau) + 2K_s (Axs0 \cos \tau + Bxs0 \sin \tau + Cxs0) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2\alpha_s \Omega^2 (-Ays0 \cos \tau - Bys0 \sin \tau) - W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{yx} (-Axj0 \sin \tau + Bxj0 \cos \tau + Axs0 \sin \tau - Bxs0 \cos \tau) + \\
 &C_{yy} (-Ayj0 \sin \tau + Byj0 \cos \tau + Ays0 \sin \tau - Bys0 \cos \tau) + K_{yx} (Axj0 \cos \tau + Bxj0 \sin \tau + Cxj0 - Axs0 \cos \tau - \\
 &Bxs0 \sin \tau - Cxs0) + K_{yy} (Ayj0 \cos \tau + Byj0 \sin \tau + Cyj0 - Ays0 \cos \tau - Bys0 \sin \tau - Cys0)) + \\
 &2\Omega C_s (-Ays0 \sin \tau + Bys0 \cos \tau) + 2K_s (Ays0 \cos \tau + Bys0 \sin \tau + Cys0) = 0
 \end{aligned}$$

Separando en funciones con términos con $\sin \tau$ y $\cos \tau$

$$\begin{aligned}
& \left[(1 - \Omega^2) Axd0 + 2\Omega D_e Bxd0 - Axj0 = \Omega^2 U_d^x \right] \cos \tau \\
& \left[2\Omega D_e Axd0 + (1 - \Omega^2) Bxd0 + Bxj0 = \Omega^2 U_d^y \right] \sin \tau \\
& \left[(1 - \Omega^2) Axd0 + 2\Omega D_e Byd0 - Axd0 = \Omega^2 U_d^y \right] \cos \tau \\
& \left[-2\Omega D_e Axd0 + (1 - \Omega^2) Byd0 - Byj0 = \Omega^2 U_d^x \right] \sin \tau \\
& \left[(1 - 2\Omega^2 \alpha_j) Axj0 - Axd0 + W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{xx} (Bxj0 - Bxs0) + C_{xy} (Byj0 - Bys0) + K_{xx} (Axj0 - Axs0) + \right. \\
& \left. K_{xy} (Ayd0 - Ays0)) = 2\Omega^2 \alpha_j U_j \right] \cos \tau \\
& \left[(1 - 2\Omega^2 \alpha_j) Bxj0 - Bxd0 - W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{xx} (Axj0 - Axs0) + C_{xy} (Ayd0 - Ays0) - K_{xx} (Bxj0 - Bxs0) - \right. \\
& \left. K_{xy} (Byj0 - Bys0)) = 0 \right] \sin \tau \\
& \left[(1 - 2\Omega^2 \alpha_j) Axd0 - Axd0 + W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{yx} (Bxj0 - Bxs0) + C_{yy} (Byj0 - Bys0) + K_{yx} (Axj0 - Axs0) + \right. \\
& \left. K_{yy} (Ayd0 - Ays0)) = 0 \right] \cos \tau \\
& \left[(1 - 2\Omega^2 \alpha_j) Byd0 - Byd0 - W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{yx} (Axj0 - Axs0) + C_{yy} (Ayd0 - Ays0) - K_{yx} (Bxj0 - Bxs0) - \right. \\
& \left. K_{yy} (Byj0 - Bys0)) = 2\Omega^2 \alpha_j U_j \right] \sin \tau \\
& \left[-2\Omega^2 \alpha_s Axs0 + 2\Omega C_s Bxs0 + 2K_s Axs0 - W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{xx} (Bxj0 - Bxs0) + C_{xy} (Byj0 - Bys0) + K_{xx} (Axj0 - Axs0) + \right. \\
& \left. K_{xy} (Ayd0 - Ays0)) = 0 \right] \cos \tau \\
& \left[-2\Omega^2 \alpha_s Bxs0 - 2\Omega C_s Axs0 + 2K_s Bxs0 + W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{xx} (Axj0 - Axs0) + C_{xy} (Ayd0 - Ays0) - K_{xx} (Bxj0 - Bxs0) - \right. \\
& \left. K_{xy} (Byj0 - Bys0)) = 0 \right] \sin \tau \\
& \left[-2\Omega^2 \alpha_s Ays0 + 2\Omega C_s Bys0 + 2K_s Ays0 - W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{yx} (Bxj0 - Bxs0) + C_{yy} (Byj0 - Bys0) + K_{yx} (Axj0 - Axs0) + \right. \\
& \left. K_{yy} (Ayd0 - Ays0)) = 0 \right] \cos \tau \\
& \left[-2\Omega^2 \alpha_s Bys0 - 2\Omega C_s Ays0 + 2K_s Bys0 + W_g (1 + 2\alpha_j) (C_{yx} (Axj0 - Axs0) + C_{yy} (Ayd0 - Ays0) - K_{yx} (Bxj0 - Bxs0) - \right. \\
& \left. K_{yy} (Byj0 - Bys0)) = 0 \right] \sin \tau
\end{aligned}$$

$$Cxd0 - Cxj0 = 0$$

$$Cyd0 - Cyj0 = 0$$

$$Cxj0 - Cxd0 + W_g (1 + 2\alpha_j) (K_{xx} (Cxj0 - Cxs0) + K_{xy} (Cyd0 - Cys0)) = 0$$

$$Cyd0 - Cyd0 + W_g (1 + 2\alpha_j) (K_{yx} (Cxj0 - Cxs0) + K_{yy} (Cyd0 - Cys0)) = 0$$

$$W_g (1 + 2\alpha_j) (K_{xx} (Cxj0 - Cxs0) + K_{xy} (Cyd0 - Cys0)) - 2K_s Cxs0 = 0$$

$$W_g (1 + 2\alpha_j) (K_{yx} (Cxj0 - Cxs0) + K_{yy} (Cyd0 - Cys0)) - 2K_s Cys0 = 0$$

Las amplitudes en términos con $\sin \tau$, $\cos \tau$ forman un vector de dimensión 12

$$Z_0^T = [Axd0 \ Bxd0 \ Axd0 \ Byd0 \ Axj0 \ Bxj0 \ Ayj0 \ Byj0 \ Axs0 \ Bxs0 \ Ays0 \ Bys0] \quad (6.12)$$

El vector anterior es solución de la ecuación algebraica lineal de orden 12

$$D_0(\Omega)Z_0 = U_0 \quad (6.13)$$

En donde el vector U_0 y la matriz $D_0(\Omega)$ están dadas por:

$$D_0(\Omega) = \begin{bmatrix} d11 & d12 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d12 & d11 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d11 & d12 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d12 & d11 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & d55 & d56 & d57 & d58 & d59 & -d56 & -d57 & -d58 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -d56 & d55 & -d58 & d57 & d56 & d59 & d58 & -d57 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & d75 & d76 & d77 & d78 & -d75 & -d76 & d711 & -d78 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -d76 & d75 & -d78 & d77 & d76 & -d75 & d78 & d711 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d59 & -d56 & -d57 & -d58 & d99 & d910 & d57 & d58 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d56 & d59 & d58 & -d57 & -d910 & d99 & -d58 & d57 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d75 & -d76 & d711 & -d78 & d75 & d76 & d1111 & d1112 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d76 & -d75 & d78 & d711 & -d76 & d75 & -d1112 & d1111 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Donde

$$\begin{aligned} W_{ga} &= W_g(1+2\alpha_j), & d11 &= (1-\Omega^2), & d12 &= 2\Omega D_e, & d55 &= (1-2\Omega^2\alpha_j + K_{xx}W_{ga}), & d56 &= C_{xx}W_{ga}, & d57 &= K_{xy}W_{ga}, \\ d58 &= C_{xy}W_{ga}, & d59 &= -K_{xx}W_{ga}, & d75 &= K_{yx}W_{ga}, & d76 &= C_{yx}W_{ga}, & d77 &= (1-2\Omega^2\alpha_j + K_{yy}W_{ga}), & d78 &= C_{yy}W_{ga}, \\ d711 &= -K_{yy}W_{ga}, & d99 &= (2K_s + K_{xx}W_{ga} - 2\Omega^2\alpha_s), & d910 &= (2\Omega C_s + C_{xx}W_{ga}), & d1111 &= (2K_s + K_{yy}W_{ga} - 2\Omega^2\alpha_s), \\ d1112 &= (2\Omega C_s + C_{yy}W_{ga}) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} d11 & d12 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d12 & d11 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d11 & d12 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d12 & d11 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & d55 & d56 & d57 & d58 & d59 & -d56 & -d57 & -d58 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -d56 & d55 & -d58 & d57 & d56 & d59 & d58 & -d57 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & d75 & d76 & d77 & d78 & -d75 & -d76 & d711 & -d78 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -d76 & d75 & -d78 & d77 & d76 & -d75 & d78 & d711 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d59 & -d56 & -d57 & -d58 & d99 & d910 & d57 & d58 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d56 & d59 & d58 & -d57 & -d910 & d99 & -d58 & d57 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d75 & -d76 & d711 & -d78 & d75 & d76 & d1111 & d1112 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d76 & -d75 & d78 & d711 & -d76 & d75 & -d1112 & d1111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Axd0 \\ Bxd0 \\ Axd0 \\ Byd0 \\ Axj0 \\ Bxj0 \\ Ayj0 \\ Byj0 \\ Axs0 \\ Bxs0 \\ Ays0 \\ Bys0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega^2 U_d^x \\ -\Omega^2 U_d^y \\ \Omega^2 U_d^y \\ \Omega^2 U_d^x \\ 2\Omega^2 \alpha_j U_j \\ 0 \\ 0 \\ 2\Omega^2 \alpha_j U_j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La aproximación de orden cero es numéricamente determinada por la solución de la ecuación anterior con ayuda de un programa elaborado en el paquete MATLAB (Apéndice B). Estas soluciones contienen solamente términos proporcionales a $\sin \tau$, $\cos \tau$ y algunas constantes. Dicha solución depende de los desbalances presentes en las localizaciones del disco y las chumaceras. Es necesario tomar en cuenta que los coeficientes rotodinámicos que aparecen en esta ecuación dependen de L/D y el número de Sommerfeld S de una manera suficientemente complicada. Así es posible determinar las aproximaciones de orden cero como:

$$\begin{aligned} \Delta X_{d0} &= \sqrt{(Axd0)^2 + (Bxd0)^2} & \Delta X_{j0} &= \sqrt{(Axj0)^2 + (Bxj0)^2} & \Delta X_{s0} &= \sqrt{(Axs0)^2 + (Bxs0)^2} \\ \Delta Y_{d0} &= \sqrt{(Ayd0)^2 + (Byd0)^2} & \Delta Y_{j0} &= \sqrt{(Ayj0)^2 + (Byj0)^2} & \Delta Y_{s0} &= \sqrt{(Ays0)^2 + (Bys0)^2} \end{aligned}$$

Aproximación de primer orden – efectos de fisura –

La aproximación de primer orden ΔX_{dt} , ΔY_{dt} , ΔX_{bt} , ΔY_{bt} , ΔX_{st} , ΔY_{st} de las ecuaciones (5.70)-(5.75) son soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\Omega^2 \Delta X_{d1}'' + 2D_e \Omega \Delta X_{d1}' + (\Delta X_{d1} - \Delta X_{j1}) = f_1(\tau) \quad (6.15)$$

$$\Omega^2 \Delta Y_{d1}'' + 2D_e \Omega \Delta Y_{d1}' + (\Delta Y_{d1} - \Delta Y_{j1}) = f_2(\tau) \quad (6.16)$$

$$2\alpha_j \Omega^2 \Delta X_{j1}'' + W_g (1 + 2\alpha_j) [C_{xx} (\Delta X_{j1}' - \Delta X_{s1}') + C_{xy} (\Delta Y_{j1}' - \Delta Y_{s1}') + K_{xx} (\Delta X_{j1} - \Delta X_{s1}) + K_{xy} (\Delta Y_{j1} - \Delta Y_{s1})] - (\Delta X_{d1} - \Delta X_{j1}) = -f_1(\tau) \quad (6.17)$$

$$2\alpha_j \Omega^2 \Delta Y_{j1}'' + W_g (1 + 2\alpha_j) [C_{yy} (\Delta Y_{j1}' - \Delta Y_{s1}') + C_{yx} (\Delta X_{j1}' - \Delta X_{s1}') + K_{yy} (\Delta Y_{j1} - \Delta Y_{s1}) + K_{yx} (\Delta X_{j1} - \Delta X_{s1})] - (\Delta Y_{d1} - \Delta Y_{j1}) = -f_2(\tau) \quad (6.18)$$

$$2\alpha_s \Omega^2 \Delta X_{s1}'' + 2C_s \Omega \Delta X_{s1}' - W_g (1 + 2\alpha_j) [C_{xx} (\Delta X_{j1}' - \Delta X_{s1}') + C_{xy} (\Delta Y_{j1}' - \Delta Y_{s1}') + K_{xx} (\Delta X_{j1} - \Delta X_{s1}) + K_{xy} (\Delta Y_{j1} - \Delta Y_{s1})] + 2K_s \Delta X_{s1} = 0 \quad (6.19)$$

$$2\alpha_s \Omega^2 \Delta Y_{s1}'' + 2C_s \Omega \Delta Y_{s1}' - W_g (1 + 2\alpha_j) [C_{yy} (\Delta Y_{j1}' - \Delta Y_{s1}') + C_{yx} (\Delta X_{j1}' - \Delta X_{s1}') + K_{yy} (\Delta Y_{j1} - \Delta Y_{s1}) + K_{yx} (\Delta X_{j1} - \Delta X_{s1})] + 2K_s \Delta Y_{s1} = 0 \quad (6.20)$$

Donde

$$f_1(\tau) = \frac{1}{2} g(\Phi) [(\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi)(\Delta X_{d0} - \Delta X_{j0} + W_g) + (\Delta K_2 \sin 2\Phi)(\Delta Y_{d0} - \Delta Y_{j0})] \quad (6.21)$$

$$f_2(\tau) = \frac{1}{2} g(\Phi) [(\Delta K_2 \sin 2\Phi)(\Delta X_{d0} - \Delta X_{j0} + W_g) + (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi)(\Delta Y_{d0} - \Delta Y_{j0})] \quad (6.22)$$

En las ecuaciones (6.21) (6.22) los términos ΔX_{d0} , ΔY_{d0} , ΔX_{j0} , ΔY_{j0} , ΔX_{s0} , ΔY_{s0} de la aproximación de orden cero fueron determinados antes como soluciones de las ecuaciones (6.5)-(6.10). De aquí que los términos de los lados a mano derecha de estas ecuaciones sean funciones conocidas de “ τ ”. Haciendo transformaciones trigonométricas sencillas obtenemos la representación de los lados a mano derecha de las ecuaciones (6.21) (6.22) como una suma de $\sin n\tau$, $\cos n\tau$ con $n = 1, 2, 3, 4$ si la función $g(\Phi)$ dada por la ecuación (5.8) es usada. En este caso la función (6.21) es transformada de la siguiente manera.

$$f_1(\tau) = Sxd1 + Uxd1 \cos \tau + Vxd1 \sin \tau + Uxd2 \cos 2\tau + Vxd2 \sin 2\tau + Uxd3 \cos 3\tau + Vxd3 \sin 3\tau + Uxd4 \cos 4\tau + Vxd4 \sin 4\tau$$

Donde; $Sxd1$, $Uxd1$, $Vxd1$, $Uxd2$, $Vxd2$, $Uxd3$, $Vxd3$, $Uxd4$ y $Vxd4$ ya fueron definidos en el Capítulo 3 por las Ecs.(3.33).

De la misma manera la función (6.22) es transformada en la siguiente forma.

$$f_2(\tau) = Syd1 + Uyd1 \cos \tau + Vyd1 \sin \tau + Uyd2 \cos 2\tau + Vyd2 \sin 2\tau + Uyd3 \cos 3\tau + Vyd3 \sin 3\tau + Uyd4 \cos 4\tau + Vyd4 \sin 4\tau$$

Donde: **Syd1**, **Uyd1**, **Vyd1**, **Uyd2**, **Vyd2**, **Uyd3**, **Vyd3**, **Uyd4** y **Vyd4** ya fueron definidos en el Capítulo 3 por las Ecs.(3.35).

Las aproximaciones de primer orden ΔX_{dt} , ΔY_{dt} , ΔX_{bt} , ΔY_{bt} , ΔX_{st} , ΔY_{st} deben tener armónicos de 1X a 4X. Por lo tanto las aproximaciones de primer orden en estado estable tienen la forma:

$$\Delta X_{d1} = Cxd1 + Axd1 \cos \tau + Bxd1 \sin \tau + Axd2 \cos \tau + Bxd2 \sin \tau + Axd3 \cos \tau + Bxd3 \sin \tau + Axd4 \cos \tau + Bxd4 \sin \tau \quad (6.23)$$

$$\Delta Y_{d1} = Cyd1 + Ayd1 \cos \tau + Byd1 \sin \tau + Ayd2 \cos \tau + Byd2 \sin \tau + Ayd3 \cos \tau + Byd3 \sin \tau + Ayd4 \cos \tau + Byd4 \sin \tau \quad (6.24)$$

$$\Delta X_{j1} = Cxj1 + Axj1 \cos \tau + Bxj1 \sin \tau + Axj2 \cos \tau + Bxj2 \sin \tau + Axj3 \cos \tau + Bxj3 \sin \tau + Axj4 \cos \tau + Bxj4 \sin \tau \quad (6.25)$$

$$\Delta Y_{j1} = Cyj1 + Ayj1 \cos \tau + Byj1 \sin \tau + Ayj2 \cos \tau + Byj2 \sin \tau + Ayj3 \cos \tau + Byj3 \sin \tau + Ayj4 \cos \tau + Byj4 \sin \tau \quad (6.26)$$

$$\Delta X_{s1} = Cxs1 + Axs1 \cos \tau + Bxs1 \sin \tau + Axs2 \cos \tau + Bxs2 \sin \tau + Axs3 \cos \tau + Bxs3 \sin \tau + Axs4 \cos \tau + Bxs4 \sin \tau \quad (6.27)$$

$$\Delta Y_{s1} = Cys1 + Ays1 \cos \tau + Bys1 \sin \tau + Ays2 \cos \tau + Bys2 \sin \tau + Ays3 \cos \tau + Bys3 \sin \tau + Ays4 \cos \tau + Bys4 \sin \tau \quad (6.28)$$

Las constantes en las ecuaciones anteriores son soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$Cxd1 - Cxj1 = Sxd1$$

$$Cyd1 - Cyj1 = Syd1$$

$$Cxj1 - Cxd1 + W_g (1 + 2\alpha_j) (K_{xx} (Cxj1 - Cxs1) + K_{xy} (Cyj1 - Cys1)) = -Sxd1$$

$$Cyj1 - Cyd1 + W_g (1 + 2\alpha_j) (K_{yx} (Cxj1 - Cxs1) + K_{yy} (Cyj1 - Cys1)) = -Syd1$$

$$W_g (1 + 2\alpha_j) (K_{xx} (Cxj1 - Cxs1) + K_{xy} (Cyj1 - Cys1)) - 2K_s Cxs1 = 0$$

$$W_g (1 + 2\alpha_j) (K_{yx} (Cxj1 - Cxs1) + K_{yy} (Cyj1 - Cys1)) - 2K_s Cys1 = 0$$

Las amplitudes de los armónicos 1X, 2X, 3X y 4X presentados en Ecs.(6.23)-(6.28) forman 4 vectores de dimensión 12

$$Z_1^T = [Axd1 \ Bxd1 \ Ayd1 \ Byd1 \ Axj1 \ Bxj1 \ Ayd1 \ Byd1 \ Axs1 \ Bxs1 \ Ays1 \ Bys1]$$

$$Z_2^T = [Axd2 \ Bxd2 \ Ayd2 \ Byd2 \ Axj2 \ Bxj2 \ Ayd2 \ Byd2 \ Axs2 \ Bxs2 \ Ays2 \ Bys2]$$

$$Z_3^T = [Axd3 \ Bxd3 \ Ayd3 \ Byd3 \ Axj3 \ Bxj3 \ Ayd3 \ Byd3 \ Axs3 \ Bxs3 \ Ays3 \ Bys3]$$

$$Z_4^T = [Axd4 \ Bxd4 \ Ayd4 \ Byd4 \ Axj4 \ Bxj4 \ Ayd4 \ Byd4 \ Axs4 \ Bxs4 \ Ays4 \ Bys4]$$

Dicho vectores de dimensión 12 son soluciones de las ecuaciones algebraicas lineales

$$D_1(\Omega)Z_1 = F_1 \quad D_2(\Omega)Z_2 = F_2 \quad D_3(\Omega)Z_3 = F_3 \quad D_4(\Omega)Z_4 = F_4 \quad (6.29)$$

Donde las matrices en las ecuaciones anteriores son iguales a.

$$\begin{aligned} [D_1(\Omega)] &= [D_0(\Omega)] & [D_3(\Omega)] &= [D_0(3\Omega)] \\ [D_2(\Omega)] &= [D_0(2\Omega)] & [D_4(\Omega)] &= [D_0(4\Omega)] \end{aligned} \quad (6.30)$$

Donde la notación $[D_0(n\Omega)]$, $n = 1, 2, 3, 4$ es usada para indicar que en la matriz (6.14) Ω es reemplazado por $n\Omega$, $n = 1, 2, 3, 4$.

Los términos F_n a la derecha de las ecuaciones (6.29) están dados por:

$$F_n^T = [U_{xdn} \quad V_{xdn} \quad U_{ydn} \quad V_{ydn} \quad -U_{xdn} \quad -V_{xdn} \quad -U_{ydn} \quad -V_{ydn} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (6.31)$$

Donde los términos U_{xdn} , V_{xdn} , U_{ydn} , V_{ydn} están dados por las ecuaciones mostradas por Ecs.(3.33) y (3.35). De esta forma las ecuaciones (6.29) con matrices definidas por (6.30) y términos a mano derecha dados por (6.31) son resueltos numéricamente por un programa desarrollado en el paquete MATLAB (Apéndice B).

La aproximación de primer orden depende simultáneamente del desbalance y la fisura y por lo tanto permite estudiar la interacción de estos dos fenómenos.

Aproximación de alto orden. Solución completa – interacción entre la fisura y los desbalances –

La solución completa de las ecuaciones (5.70)-(5.75) iniciales es tomada ahora como una suma de aproximaciones de orden cero y de primer orden. Por lo tanto, finalmente la aproximación de la solución de las ecuaciones iniciales (5.70)-(5.75) será igual a:

$$\begin{aligned} \Delta X_d &= \Delta X_{d0} + \Delta X_{d1} & \Delta X_j &= \Delta X_{j0} + \Delta X_{j1} & \Delta X_s &= \Delta X_{s0} + \Delta X_{s1} \\ \Delta Y_d &= \Delta Y_{d0} + \Delta Y_{d1} & \Delta Y_j &= \Delta Y_{j0} + \Delta Y_{j1} & \Delta Y_s &= \Delta Y_{s0} + \Delta Y_{s1} \end{aligned} \quad (6.32)$$

Donde las aproximaciones de primer orden están dadas por:

$$\begin{aligned} \Delta X_{d1} &= \sqrt{(A_{xd1})^2 + (B_{xd1})^2} & \Delta X_{j1} &= \sqrt{(A_{xj1})^2 + (B_{xj1})^2} & \Delta X_{s1} &= \sqrt{(A_{xs1})^2 + (B_{xs1})^2} \\ \Delta Y_{d1} &= \sqrt{(A_{yd1})^2 + (B_{yd1})^2} & \Delta Y_{j1} &= \sqrt{(A_{yj1})^2 + (B_{yj1})^2} & \Delta Y_{s1} &= \sqrt{(A_{ys1})^2 + (B_{ys1})^2} \end{aligned}$$

La solución anterior satisface las ecuaciones (5.70)-(5.75) con una exactitud del orden $O(K_1^2, K_2^2)$. Esta exactitud es suficiente para muchas aplicaciones. Por ejemplo si $\Delta K_1 = 0.2$, $\Delta K_2 = 0.2$ entonces $K_1 = K_2 = 0.05$ y $K_1^2 = K_2^2 = 0.0025$. Generalmente, las amplitudes de las soluciones (6.32) son menores. De aquí que en este caso la exactitud de la solución será aproximadamente igual a 1%.

Es posible calcular también la aproximación de segundo orden ΔX_{d2} , ΔY_{d2} , ΔX_{b2} , ΔY_{b2} , ΔX_{s2} , ΔY_{s2} de las ecuaciones (5.70)-(5.75). Las aproximaciones de segundo orden son solución de las mismas ecuaciones (6.30) donde en los términos del lado derecho las aproximaciones de orden cero ΔX_{d0} , ΔY_{d0} , ΔX_{b0} , ΔY_{b0} , ΔX_{s0} , ΔY_{s0} son reemplazadas por las aproximaciones de primer orden. ΔX_{d1} , ΔY_{d1} , ΔX_{b1} , ΔY_{b1} , ΔX_{s1} , ΔY_{s1} .

La aproximación de orden cero depende únicamente del desbalance, pero la aproximación de primer orden depende tanto del desbalance como de la fisura. De aquí que permita el estudio de estos dos fenómenos. En caso de utilizar la función $g(\Phi)$ presentada por Ec.(5.8) la aproximación de primer orden contiene armónicos nX con $n = 1, 2, 3, 4$. Por otro lado la respuesta al desbalance contiene solamente un armónico correspondiente a $1X$. Por lo tanto la interacción de los efectos de los desbalances y la fisura se puede ver solamente en la frecuencia $1X$. La influencia del desbalance en los armónicos $2X$, $3X$ y $4X$ de la respuesta vibratoria completa es suficientemente pequeña y estos armónicos reflejan principalmente los efectos de la pura fisura.

Conclusiones

Ha sido desarrollada una revisión detallada de las varias técnicas de detección de grieta presentadas en las últimas décadas. De esta revisión se puede ver que el área de detección de grietas esta activa y continuamente desarrollándose. Puesto que están emergiendo técnicas más nuevas conforme se gana un mas claro y profundo entendimiento en los campos de la mecánica de la fractura, simulación y monitoreo. Puede inferirse que el futuro apunta a una metodología de detección flexible, multidisciplinaria y robusta para diversos tipos de rotores. Lo que conducirá a largo plazo a aumentar la total confiabilidad y seguridad de la maquinaria rotatoria en general.

Bajo condiciones de operación en las cuales actúan cargas de fatiga, como fluctuaciones de esfuerzos termomecánicos que experimenta el rotor de una turbomáquina durante los transitorios derivados de paros, arranques y/o cambios de carga, las fisuras podrían ser producidas como resultado de la presencia inherente de fallas o defectos de manufactura en el material. Pueden también desarrollarse fisuras en rotores que han tenido muchas miles de horas sin fallas, debido al efecto de la corrosión, desalineamiento severo, precargas y otros factores.

La detección temprana de fisuras, es indispensable para asegurar una operación confiable de la maquinaria rotatoria y para la toma de decisiones técnicas relacionadas con la rehabilitación o sustitución del rotor, es importante determinar si el rotor puede seguir operando o es necesario retirarlo de servicio tomando en cuenta el impacto económico que puede tener esto.

Por esta razón el desarrollo de modelos basados físicamente y los análisis matemáticos lineales, proveen una base sustancial en el esfuerzo para la detección de fisuras, ya que proporcionan resultados que se asemejan cualitativamente al comportamiento real.

Por lo tanto, se presenta la derivación del modelo matemático de una máquina de configuración simple tal como es el sistema del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado afectado por la gravedad y oscilando alrededor de puntos no triviales de equilibrio, en ausencia de desalineamiento. El modelo posee masas en las localizaciones del disco y las chumaceras lo que permite la existencia de desbalances en ambas posiciones, además de que los soportes del eje poseen las características clásicas de las chumaceras lubricadas. Dicho modelo innovador en su enfoque y derivación, desarrollado por Gómez-Mancilla, efectivamente emula el comportamiento dinámico de ejes fracturados lo que permite caracterizar sus correspondientes evoluciones orbitales y patrones de vibración.

En comparación con el tipo de modelo tradicional usado por Meng y Gasch, el modelo matemático aquí empleado fue extendido para incluir el importante efecto de la gravedad, siempre presente en la realidad especialmente en máquinas de longitud considerable, y el correspondiente punto de equilibrio no trivial. Lo que le permite a este modelo producir respuestas periódicas incluso en ausencia de excitaciones de desbalance.

La detección de grietas es más factible durante barridos de frecuencia como en el caso del paro de la máquina, cuando varias resonancias locales de vibración que ocurren a fracciones racionales de la velocidad crítica fundamental pueden indicar problemas estructurales. Por lo tanto, en la tarea de detección de fisuras, el monitoreo de vibraciones durante el arranque o paro de una máquina es tan importante como el monitoreo en estado estable de operación, especialmente para máquinas tales como motores de aviones los cuales arrancan y paran muy frecuentemente y además operan a altas velocidades.

Primeramente, se puede observar a través de las graficas de las respuestas orbitales del disco y chumaceras que la aproximación implicada en el procedimiento numérico-analítico propuesto da una precisión adecuada para propósitos prácticos al investigar la interacción entre los desbalances de masa siempre presentes en la realidad y la fisura transversal localizada a la mitad del tramo del eje.

Posteriormente, se estudia respuesta vibratoria de los efectos de los desbalances residuales en el disco y chumacera con el eje fisurado, de capital importancia cuando se pretende detectar la presencia de fisuras en ejes rotatorios por medio de registros o medidas de vibración del sistema.

Se analizan los patrones de vibración y la evolución de las órbitas rindiendo útiles resultados. Son trazadas las respuestas verticales y horizontales del disco y chumaceras, la evolución orbital alrededor del equilibrio no trivial y los diagramas de Bode generados por barrido de la frecuencia mientras se hace variar ortogonalmente la orientación del desbalance para una configuración del rotor que tiene diferentes influencias de

grieta y desbalance. Resulta que la evolución orbital alrededor de $1/2$, $1/3$ y $1/4$ de la primera resonancia puede ser utilizada para detectar la presencia de grietas en rotores, incluso si la orientación entre grieta y desbalance es desconocida.

A través de las simulaciones numéricas puede observarse como el ángulo de orientación relativo entre el desbalance residual y la grieta y su interacción, afectan drásticamente la respuesta de sistema haciendo la detección de grieta muy difícil. Sin embargo, la existencia de resonancias locales en diversos sub-armónicos o súper-armónicos racionales o combinaciones de estos, permite una buena caracterización de la vibración reduciendo la influencia de la interacción entre los vectores desconocidos como son el desbalance residual y la fisura del eje.

Se presentan y estudian las gráficas de la respuesta vibratoria contra la velocidad de operación (arranque/paro de la máquina) a esperar ante diferentes profundidades de la grieta. Este método entonces se utiliza para determinar la presencia de una grieta y para dar una estimación de su magnitud y comportamiento dinámico. Puede concluirse que grietas de profundidad relativa menor que 0.25 (25%) pueden ser identificadas solamente en un ambiente tranquilo y por un observador hábil. Sin embargo, para profundidades de grieta por arriba del 25% la identificación es relativamente fácil. Para aplicaciones industriales este nivel de detectabilidad de grieta es bastante adecuado para la mayoría de las aplicaciones. Sin embargo, a través de la toma cuidadosa de mediciones y un buen conocimiento del comportamiento de un eje no agrietado, podría hacerse posible la detección de grietas de profundidad relativa del orden de 0.1.

Para la detección de grieta los resultados indican que en vez de los componentes 1X y 2X, el análisis de las resonancias locales restantes debe tener prioridad, esto debido a la interacción entre la grieta y el desbalance residual y a los múltiples orígenes 2X inducidos.

Pudo notarse también que bajo ciertas condiciones la amplitud de la resonancia local a la mitad de la velocidad crítica puede ser inclusive mayor que la amplitud obtenida a la velocidad de resonancia, lo cual ha sido detectado al experimentar sobre el rotorkit de Bently Nevada del Laboratorio de Vibraciones y Rotodinámica.

Cierta controversia existe al tratar de establecer qué componente es más relevante para la detección de daños, la vibración síncrona 1X o 2X. Para propósitos prácticos, la presencia de la grieta afecta perceptiblemente el componente síncrono 1X y produce un pronóstico confuso debido a su gran dependencia con la magnitud y el ángulo de fase relativo que existe entre los vectores desconocidos de desbalance residual y grieta. Debemos recordar que en situaciones reales las magnitudes y ángulo relativo entre grieta y desbalance no son conocidos a priori. Entonces se recomienda centrarse en todas las combinaciones de componentes 1, 2, 3 sub-súper armónicos puesto que todos son capaces de inducir lo que llamamos las resonancias locales. Por las razones anteriores, se presentan la evolución y el análisis de las formas orbitales durante el barrido de frecuencia, con especial énfasis en resonancias locales de síncrono, dos y tres veces la frecuencia armónica.

En otro análisis se puede observar la influencia de la magnitud del desbalance residual del disco en la respuesta vibratoria de un rotor agrietado; de particular importancia resultó el caso cuando U_d es igual a cero que no obstante que en la práctica representaría un caso ideal, permite la caracterización de la respuesta vibratoria debida a la sola presencia de la grieta.

Cabe resaltar que aunque un análisis de estabilidad podría efectivamente ayudar en la tarea de detección de grietas, en realidad un análisis de este tipo requeriría la existencia de una grieta profunda (por ejemplo 50%) para mostrar una disminución significativa del umbral de estabilidad. Sin olvidar el hecho de que el operar el rotor agrietado a altas velocidades podría ser muy peligroso. Lo ideal sería que la presencia de la grieta sea detectada a una velocidad menor.

Posteriormente, son analizadas las simulaciones numéricas de las respuestas del sistema rotor-chumaceras que comparan los modelos de respiro de grieta presentados por Gasch y Mayes & Davies. Lo anterior en relación a la detección de ejes agrietados y la caracterización del comportamiento del sistema. De las figuras mostradas puede observarse que pese a la creencia de algunos investigadores, las características de vibración en las resonancias locales son influenciadas por la selección del modelo de respiro, en particular aquellas que ocurren a resonancias locales bajas; es decir, a valores de velocidad de operación pequeños comparados con la velocidad crítica flexionante. También las amplitudes y las formas de las orbitas (registradas en las regularmente instrumentadas localizaciones de las chumaceras) cambian debido a las variaciones de los ángulos de fase de los componentes de frecuencia.

Finalmente se presenta la derivación del modelo matemático de una máquina de configuración compleja, tal como es el sistema rotor Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado, soportado por chumaceras hidrodinámicas idénticas sobre soportes que poseen propiedades de rigidez y amortiguamiento. Aunque el análisis se vuelve más complejo se incluye en este modelo la presencia de desbalances residuales en las localizaciones del

disco y las chumaceras. Este modelo con un cuidadoso análisis ayudará en el propósito de caracterizar la respuesta vibratoria de ejes fisurados. La solución numérica del presente sistema de rotor desarrollada por el autor se utilizará para deducir y determinar patrones de comportamiento confiables ante la interacción entre la fisura y el desbalance. Así mismo, la solución analítica aproximada del presente sistema, será de gran utilidad ya que el modelo es capaz de producir muchos patrones de comportamiento difíciles de ser estudiados numéricamente debido al gran consumo de tiempo y alta demanda de capacidad de cálculo que este estudio requiere.

Cabe resaltar que hasta donde el autor tienen conocimiento, en la literatura nacional e internacional sobre este tema, no existe un modelo similar que permita estudiar la respuesta vibratoria de un rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado soportado por chumaceras hidrodinámicas sobre soportes flexibles que poseen propiedades de rigidez y amortiguamiento, y de aquí la gran relevancia de este modelo.

En rotores con efectos giroscópicos pequeños donde el acoplamiento a otros ejes es flexible, es decir en ausencia de desalineamiento, y la grieta está situada cerca o a la mitad del tramo del eje, los modelos simplificados presentados en esta Tesis resultan suficientemente buenos para la descripción cualitativa de una máquina real que vibra en su primer modo. Mediante la apropiada selección de los valores de los parámetros modales, este modelo permite la representación adecuada de máquinas industriales reales.

Por cuestiones de espacio resulta prácticamente imposible relacionar todos los resultados derivados de esta investigación. No obstante, es ineludible destacar que el poder contar con sistemas multicanales para la medición *off-line* en conjunción con sistemas *on-line*, posibilita evaluar la calidad de la medición y evaluar el comportamiento orbital del rotor en múltiples planos de medición. Así mismo, resulta de suma importancia el empleo de transductores de proximidad como eslabón básico en la obtención de información directa sobre el comportamiento dinámico de los rotores.

Trabajos futuros

Resulta fundamental destacar que el trabajo realizado en esta Tesis representa un avance significativo en el campo de detección de ejes fisurados al caracterizar los patrones de vibración y la evolución orbital de ejes agrietados ante diferentes profundidades de grieta y las varias orientaciones angulares relativas entre el vector desbalance del disco y la dirección de la grieta. Sin embargo, son necesarios estudios más profundos y el desarrollo de modelos más completos que permitan a largo plazo implementar en la práctica estos resultados para la detección de grietas en línea a través de una metodología de detección flexible, multidisciplinaria y robusta para los diferentes tipos de rotores.

En el presente modelo no está considerado el efecto del desalineamiento, un factor muy importante en un sistema real, por lo tanto, en trabajos futuros se podría desarrollar un modelo aún más completo que nos permita estudiar el caso de grietas en presencia de desalineamiento.

Además, se requiere que la capacidad de predicción de este modelo sea más ampliamente comparada contra experimentos de laboratorio, analizando amplitudes, resonancias locales significativas, evolución orbital y estabilidad del sistema. Aunque, los resultados experimentales reportados con anterioridad en la literatura indican que los análisis numéricos obtenidos de este modelo son cualitativamente muy semejantes. De acuerdo con estos resultados se propone el empleo de este modelo simple agrietado a la mitad de tramo del eje para el reconocimiento de patrones de vibración y el uso de un análisis de sensibilidad para estimar profundidad de la grieta.

Por otra parte, se requieren otros estudios experimentales y numéricos para valorar correctamente la utilidad del análisis de los componentes 2X y 3X de la señal en el fuertemente acoplado rango de frecuencias entre grieta y desbalance.

Con respecto a los diferentes mecanismos de respiro de grieta, un trabajo futuro implicaría el análisis de respuestas simuladas con estos dos mecanismos de respiro comparados contra respuestas vibratorias de experimentos de laboratorio acentuando la inspección en los picos de cada resonancia.

Puesto que en la mayoría de los trabajos en la literatura disponible pertenecen a casos sobre simplificados casi inadecuados para su aplicación en la vida real. Se propone el desarrollo de un modelo basado en elementos finitos tridimensionales que permita estudiar los efectos de la temperatura y de la presencia de múltiples grietas.

Glosario

Aceleración. La proporción en tiempo del cambio de velocidad generalmente medida en G en el sistema inglés de medición y en metros por segundo cuadrado (m/s^2) en el sistema de normas internacionales. Es interesante ver que la G en realidad no es una unidad de aceleración, pero es la magnitud de la aceleración debida a la gravedad en la superficie de la tierra. Esta causa una cierta complejidad en la conversión de parámetros entre aceleración, velocidad y desplazamiento. El valor de G es de $9.81 m/s^2$.

Acelerómetro. Un transductor, cuya salida eléctrica es directamente proporcional a la aceleración en un rango ancho de frecuencias. La respuesta de alta frecuencia de un acelerómetro está limitada por su resonancia interna mecánica inevitable. La mayoría de los acelerómetros tiene una respuesta hasta uno o dos hertzios y algunos acelerómetros responden hasta una frecuencia cero, lo que a veces se llama respuesta CD.

Aleatorio. Una señal aleatoria contiene energía distribuida en una banda de frecuencias en lugar de ser concentrada en las frecuencias discretas. Las señales aleatorias se llaman ruido aleatorio, y un buen ejemplo es el ruido que se puede oír, cuando un receptor de radio FM es desintonizado. La mayoría de las señales de vibración de máquinas contienen una cierta cantidad de ruido aleatorio aparte de la firma de vibración deseada.

Aliases. Para digitalizar una señal análoga, para procesamiento en instrumentos digitales como los analizadores TRF, primero habrá que recopilar periódicamente muestras de la señal. El ritmo de tomar muestras ocurre a una frecuencia específica llamada la frecuencia de muestreo. Siempre y cuando la frecuencia de muestreo sea más del doble de la frecuencia más alta en la señal, la forma de onda de la que se tomó muestras será una representación correcta de la forma de onda análoga. Si al contrario, la frecuencia de muestreo es inferior al doble de la frecuencia más alta de la que se van a tomar muestras la forma de onda de la que se tomó muestras contendrá componentes extraños que se llaman "aliases". La generación de aliases se llama aliasar.

Alineación. Es una condición en la que los componentes de una máquina son o bien coincidentes, paralelos o perpendiculares, según los requerimientos del diseño. Desalineación es la condición en la que no se logra la coincidencia, o el paralelismo o la perpendicularidad deseada, y eso provoca un desgaste y consumo de energía anormal en la máquina. El procedimiento para corregir la desalineación también se llama "alineación".

Amortiguación Viscosa. La amortiguación viscosa es un tipo de amortiguación mecánica, donde la fuerza de amortiguación es proporcional a la velocidad de vibración, al contrario de la amortiguación de Coulomb, donde la fuerza de amortiguación es constante. Un buen ejemplo de amortiguación viscosa es la amortiguación que proporcionan los amortiguadores en autos. La mayoría de los sistemas mecánicos tienen una combinación de los dos tipos de amortiguación.

Amplitud. La magnitud, o la cantidad de desplazamiento, velocidad o aceleración, medida desde el valor en reposo. La amplitud de una señal de vibración se puede expresar en términos de nivel "pico", nivel "pico a pico" o nivel RPC. Es casi un hecho que la norma para el desplazamiento es "pico a pico", para la velocidad es pico y para la aceleración es RPC.

Análisis de Fourier. Análisis de Fourier es un otro término para análisis de espectro, aunque generalmente se refiere al análisis que usa un analizador TRF.

Análisis de Ordenes. El análisis de órdenes es sencillamente el análisis de frecuencia, donde el eje de frecuencia del espectro se expresa en órdenes de rpm en lugar de en Hz o en rpm.

Armónicos. Armónicos, también llamados series armónicas, son componentes de un espectro, que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Una serie de armónicos en un espectro es el resultado de una señal periódica en la forma de onda. Series armónicas son muy comunes en espectros de vibración de máquinas.

Asíncrono. Es un componente de frecuencia en una firma de vibración, que no es un múltiplo entero de la velocidad de revolución o un armónico de la misma. También se llaman componentes no síncronos. Componentes asíncronos se generan por bandas y rodamientos con elementos rodantes, entre otros.

Atenuación. Atenuación es la reducción de nivel de una señal, cuando pasa a través de un elemento de un circuito, o la reducción en nivel de la energía de vibración, cuando pasa a través de una estructura. La atenuación se mide en Decibeles, pero también se puede medir en porcentajes. Por lo general, la atenuación depende de la frecuencia, eso es la cantidad de atenuación

varía en función de la frecuencia. La atenuación de la energía de vibración en estructuras mecánicas generalmente se aumenta si la frecuencia sube, pero puede ser una función muy compleja de la frecuencia.

Balanceo. Es el ajuste de la distribución de la masa de una parte rotativa de manera que las fuerzas en los rodamientos-debido a efectos centrífugos-se reducen a valores pequeños. El rotor está balanceado si el centro de distribución de masa coincide con el centro de rotación. El balanceo reduce el consumo de energía en las máquinas, reduce los niveles de vibración e incrementa la vida de los rodamientos a veces de manera importante.

Base. La estructura de soporte de la máquina generalmente se llama la base (fundación). Es de vital importancia para una operación correcta de la máquina. Bases con holgura o con grietas son la causa de muchos problemas de máquinas especialmente desalineación.

Casi periódico. Una señal casi periódica es una señal determinista cuyos componentes de frecuencia no son una serie de armónicos, pero son frecuencias discretas. La señal de vibración de una máquina con componentes asíncronos parece una señal casi periódica.

Cavitación. Cavitación es una condición que ocurre muchas veces en bombas y turbinas de agua. Una presión reducida del fluido resultará en la formación de burbujas cerca de la superficie del rotor. Cuando estas burbujas se desploman fuerzas relativamente largas se transmiten al rotor y eventualmente este causará picaduras en la superficie. Cavitación ocurre en bombas, cuando la presión de entrada es demasiado baja. Provoca ruido aleatorio con alta frecuencia en el espectro de la máquina.

Centro de gravedad. En una estructura mecánica, el centro de gravedad es el punto que está dentro de la estructura donde la masa parece estar concentrada. Si estaría suspendido desde el centro de gravedad, la estructura parecería estar en equilibrio, y no podría realizar una rotación debido a la atracción gravitacional. Si el centro de gravedad de un rotor está en su eje de rotación, se dice que el rotor está balanceado estáticamente.

Ciclo. Un periodo completo de una onda periódica se llama un ciclo. Se acostumbraba llamar las unidades para la frecuencia "ciclos por segundo", hasta que la ISO estandarizó la palabra "hertz" en honor de Heinrich Hertz, el científico alemán, que fue uno de los primeros investigadores de la transmisión por ondas radio.

Desbalance. Es una condición de una parte rotativa, donde el centro de masa no esta situado en el centro de rotación. Desbalance de un rotor causa la aplicación de una fuerza centrífuga a la frecuencia del ritmo de rotación en los rodamientos. Si la fuerza es importante, puede reducir de manera significativa la duración de vida de los rodamientos, y puede causar vibración en la máquina. Las fuerzas causadas por el desbalance son proporcionales al cuadrado de las RPM y eso quiere decir que las máquinas de alta velocidad deben ser balanceadas con más precisión que las máquinas de baja velocidad. El desbalance existe en varias formas. El desbalance estático es la condición en la que el eje principal de inercia de un rotor está fuera del eje de rotación, y paralelo a este. Un rotor con desbalance estático buscará una posición con el punto pesado hasta el fondo cuando se le coloca en una arista de presión nivelada. Teóricamente, el desbalance estático se puede corregir agregando una masa de corrección única. El desbalance de un par de fuerzas es la condición en la que el eje principal de inercia intersecta el eje de rotación en el centro de gravedad. Un rotor con desbalance de par de fuerzas será estable en cualquier posición en una arista de presión, pero producirá fuerzas de desbalance fuera de fase, en los rodamientos, cuando está girando. La corrección del desbalance de par de fuerzas necesita dos masas de corrección. El desbalance dinámico es una combinación de los dos tipos anteriores y es el tipo de desbalance que más se encuentra en la práctica. En el desbalance dinámico el eje principal de inercia no corta el eje de rotación pero tampoco es paralelo a éste. La corrección del desbalance dinámico requiere por lo menos dos masas de corrección.

Desplazamiento. En vibración de maquinaria, el desplazamiento es la distancia a la que la vibración provoca a una parte de moverse. Es oscilatorio y se mide en milésimos de pulgada (mils) en el sistema inglés, y en milímetros (mm) en el sistema SI. Por convención popular, las mediciones de desplazamiento se hacen de pico a pico.

Desplazamiento de fase. El desplazamiento de fase de una señal en relación a otra es sencillamente un retraso en tiempo expresado en grados de ángulo, en el que un círculo completo (360 grados) es igual a un ciclo de la señal, o a una revolución del rotor en una máquina rotativa.

Digital. Instrumentos digitales son instrumentos que convierten señales análogas en una serie de números a través de un proceso de muestreo y un convertidor análogo a digital. Después llevan a cabo operaciones en esos números para realizar efectos como igualación, almacenaje de datos, compresión de datos, análisis de frecuencia etc. Este procedimiento en general se llama procesamiento de señales digitales y se caracteriza por algunas ventajas y desventajas. Una ventaja es que la señal convertida se puede manipular, transformar y copiar sin que se introduzca cualquier ruido o distorsión suplementaria. La

desventaja es que la representación digital tal vez no sea representativa de la señal original. Se tiene que vigilar que el ritmo de la toma de muestra sea lo suficientemente alto para codificar toda la información de interés y que no se introduzcan artefactos por medio de alias.

Discreto. Cuando se refiere a un espectro discreto, esto quiere decir que está formado de varios puntos separados en lugar de una forma continua. Un ejemplo de un espectro discreto es una serie de armónicos. Un espectro TRF, que solamente contiene información en frecuencias específicas, (las líneas TRF) es discreto sin tomar en cuenta la señal de entrada. Por ejemplo el verdadero espectro de un transitorio aparece en la pantalla como continuo, pero solamente contiene información en las frecuencias de las líneas TRF. La señal de entrada de un analizador TRF es continua, pero el proceso de muestreo, necesario para implementar el algoritmo TRF la convierte en una forma discreta, con información solamente en los tiempos a los que se tomaron muestras.

Dominio de la frecuencia. La vibración existe en el tiempo, y se dice que está en el dominio del tiempo. La representación de una señal de vibración en el dominio del tiempo es una "forma de onda", y eso es lo que se vería en un osciloscopio. Si la forma de onda está sujeta a un análisis de espectro, el resultado es una gráfica de frecuencia vs. amplitud, llamado un espectro. El espectro está en el dominio de la frecuencia.

Dominio de tiempo. La vibración es una oscilación en posición, como función del tiempo, y se dice que existe en el dominio del tiempo. La señal de un transductor también está en el dominio del tiempo, y cuando se muestra en la pantalla de un osciloscopio, se llama una forma de onda. Aunque la mayor parte del diagnóstico de los problemas de vibración de máquinas se hace vía el análisis de espectro, algunos tipos de información se ven más fácilmente en la forma de onda. Por ejemplo, cuando se busca impactos repetitivos en un rodamiento con elementos rodantes.

Eje de Inercia Principal. En referencia a un rotor el eje principal de inercia es un eje hipotético en el que está ubicado el centro de la masa, y alrededor del cual girará el rotor si estuviera en el espacio libre, sin que sea estorbado por las fuerzas de los rodamientos o por fuerzas de gravitación.

Elaborar Tendencias La elaboración de tendencias consiste en almacenar las firmas de grabación grabadas a tiempos específicos y de apuntar los cambios en los niveles de vibración a las frecuencias forzadas vs tiempo. Una tendencia creciente en el nivel, indica un problema incipiente. La manera más sencilla de utilizar las tendencias en las vibraciones es de establecer un espectro de vibración representativo de una máquina operando normalmente, como punto de referencia. y de comparar esta referencia con espectros que se grabaron más tarde en la misma máquina

Espectro. El espectro es el resultado de transformar la señal del dominio del tiempo en el dominio de la frecuencia. Es la descomposición de una señal de tiempo en una colección de ondas senoidales.

Excentricidad. Excentricidad es la desviación de la circunferencia de una parte como un rotor o una flecha. En los motores eléctricos la excentricidad del rotor provoca una vibración indebida de éste, debido a efectos magnéticos asimétricos. La excentricidad del estator también causará efectos magnéticos, que incrementarán el nivel de la vibración.

Excitación. En un sistema mecánico que está vibrando, la fuerza o las fuerzas que causan la vibración se llaman las fuerzas de excitación. Si un sistema mecánico, como una máquina está excitada a una frecuencia particular, vibrará a esta frecuencia y se podrá sentir la vibración en casi toda la máquina. El análisis de maquinaria hace uso de este hecho básico.

Fase. Fase es una diferencia de tiempo relativa, entre dos señales. Generalmente se mide en unidades de ángulo, en lugar de unidades de tiempo, y solamente tiene sentido si las dos señales que se comparan tienen la misma frecuencia. Un ciclo de una señal periódica representa un círculo completo o 360 grados de ángulo de fase. Una diferencia de 180 grados es una diferencia de medio ciclo. La medición de fase es una medición de dos canales y no tiene sentido cuando solamente se considera una sola señal. En el balanceo de equipo rotativo, la medición de fase, relativa a la posición de la flecha es de una importancia vital, y un impulso de tacómetro derivado de una posición en la flecha, se usa como referencia para el ángulo de fase cero. La fase también es una parte importante de la medición de la respuesta de frecuencia.

Fatiga. Fatiga de metal es una condición en la que un metal pierde su fuerza y al final se rompe cuando se le sujeta a una cantidad demasiado grande de flexiones cerca de su límite de elasticidad.

Firma. La firma, llamada por lo general firma de grabación; es el patrón general de vibración en una máquina. Se dice que la firma de vibración contiene más información acerca de la máquina, que cualquier otra prueba no destructiva podría descubrir.

Flexión. Se dice de una flecha con una curva sencilla circular que está en flexión. En motores eléctricos, una causa de la flexión en la flecha es el calentamiento desigual de las láminas del rotor debido a barras del rotor rotas o cuarteadas. Una flecha con flexión tendrá un alto grado de desbalance si su velocidad sube arriba de la primera velocidad crítica.

Forma de modo. La forma de modo es un patrón específico de vibración ejecutado por un sistema mecánico a una frecuencia específica. Varios patrones de modo serán asociados con varias frecuencias. La técnica experimental de análisis modal descubre esas formas de modo y frecuencias.

Forma de onda. La forma de onda es la forma de una señal en el dominio de tiempo como se ve en la pantalla de un osciloscopio. Es una representación visual o gráfica del valor instantáneo de la señal, trazado contra el tiempo. La inspección de la forma de onda puede a veces proporcionar información acerca de la señal que el espectro de la señal no enseña. Por ejemplo un pico agudo o un impulso y una señal continua que varía de manera aleatoria pueden tener espectros que parecen iguales, aunque sus formas de ondas son completamente diferentes. En la vibración de máquinas, los picos por lo general son causados por impactos mecánicos, y el ruido aleatorio puede ser causado por la degradación de rodamientos en un estado avanzado.

Frecuencia. Frecuencia es el recíproco de tiempo. Si un evento es periódico en el tiempo, eso es, si se repite a intervalos fijos, entonces su frecuencia es uno, dividido entre el intervalo de tiempo. Si un elemento vibrando necesita un décimo de segundo para completar un ciclo, y para regresar a su punto de salida, entonces se define su frecuencia como de 10 ciclos por segundo o 10 hertzios (Hz) Aunque la unidad estándar SI de frecuencia es el Hz, muchas veces, cuando es analizada una vibración, es conveniente expresar la frecuencia en ciclos por minuto, lo que corresponde a rpm. Frecuencia en rpm es sencillamente frecuencia en Hz veces 60. Otra representación común de la frecuencia que se usa en el monitoreo de máquinas son los múltiplos de la velocidad de rotación llamados "ordenes". La frecuencia en ordenes es la frecuencia en rpm dividida entre la velocidad de rotación de la máquina. El segundo orden es el segundo armónico de la velocidad de rotación etc. Esto es especialmente conveniente si la máquina presente variaciones de velocidad, ya que la representación de frecuencias en un espectro será la misma sin tener en cuenta la velocidad. Dos espectros de máquina se pueden comparar más fácilmente si ambos están expresados en órdenes. La conversión del eje de frecuencias en ordenes se llama "normalización de ordenes" y se hace por el programa del monitoreo.

Frecuencia Angular. Es la frecuencia del movimiento senoidal, expresada en proporción del cambio de ángulo. Las unidades son radianes por segundo, y la abreviación es la minúscula griega ω . La frecuencia angular está igual a 2 veces la frecuencia en Hz. Una revolución completa está igual a 2 radianes.

Frecuencia Fundamental. El espectro de una señal periódica consistirá en un componente fundamental en el recíproco del periodo en una serie de armónicos de esa frecuencia. La fundamental también se llama el primer armónico. Es posible tener una señal periódica donde la fundamental es tan baja en nivel que no se puede ver, pero los armónicos todavía estarán a distancias iguales a la frecuencia fundamental.

Frecuencia Natural. La frecuencia natural es la frecuencia a la que un sistema mecánico seguirá vibrando, después que se quita la señal de excitación. A veces se le llama la frecuencia de resonancia pero eso no es correcto, ya que la frecuencia de resonancia es la frecuencia a la que vibraría el sistema, si no hubiera amortiguación.

Frecuencia Natural Amortiguada. Si una estructura mecánica resonante está puesta en movimiento, y después se deja, seguirá oscilando a una frecuencia particular, conocida como la frecuencia natural, o la frecuencia natural amortiguada. Esta estará un poco más baja en frecuencia que la frecuencia de resonancia, que es la frecuencia que tomaría si no hubiera amortiguación. La frecuencia de resonancia también se llama la frecuencia natural no amortiguada.

Grado de Libertad. En la descripción del movimiento de las estructuras, o de los objetos, un grado de libertad es uno de los varios componentes ortogonales que se pueden usar para caracterizar completamente el movimiento. Por ejemplo, un objeto libre en el espacio tiene seis grados de libertad diferentes: se puede trasladar en tres direcciones mutuamente perpendiculares. Cualquier movimiento del objeto, no importa que tan complejo sea, se puede resolver en esos 6 movimientos básicos. Algunos objetos pueden no tener esos seis grados de libertad disponibles. Por ejemplo, un elevador en un cubo de elevador está limitado a un grado de libertad. Cuando se describe el movimiento de una estructura compleja, varias partes pueden estar limitadas de varias maneras, y un gran número de grados de libertad pueden ser necesarios para describir completamente el movimiento general de la estructura. Cuando se lleva a cabo el análisis modal de una estructura, o en realizando el modelo con elementos finitos de una estructura, es común considerar centenares de grados de libertad.

Gráfica de Bode. Es un tipo de gráfica del espectro que consiste en una gráfica de amplitud vs. frecuencia, y una gráfica de la fase vs. la frecuencia. En la mayor parte de los trabajos de análisis de vibración el espectro de fase no es importante. O bien se ignora, y no se graba. En mediciones de vibración a dos canales, como funciones de transferencia o mediciones de respuesta de frecuencia, que se usan para un análisis modal, la fase tiene una importancia vital.

Impedancia Mecánica. La impedancia mecánica de un punto en una estructura es la proporción entre la fuerza aplicada entre este punto y la velocidad resultante en el mismo punto. Es una medida de cuanto una estructura resiste al movimiento cuando se le aplica una fuerza y es el recíproco de la movilidad. La impedancia mecánica de una estructura varía de manera complicada, a medida que varía la frecuencia. En las frecuencias de resonancia la impedancia estará baja, lo que quiere decir que muy poca fuerza se puede aplicar a esas frecuencias. A veces se hacen mediciones de la impedancia mecánica en las bases de máquinas para asegurarse que son las indicadas para las máquinas en cuestión. Por ejemplo, no sería bueno tener una resonancia de base cerca de la velocidad de rotación de la máquina.

Inercia. Inercia es la tendencia de una masa de permanecer estacionaria, cuando no está en movimiento y de permanecer en movimiento cuando se está moviendo. Masa es una medida cuantitativa de inercia.

Latigazo de aceite. El latigazo de aceite es una condición muy destructiva que ocurre a veces en grandes ensamblados con varios rotores operados arriba de velocidades críticas. El latigazo de aceite ocurre cuando el componente de excitación por remolino de aceite llega a una frecuencia igual a la frecuencia natural de la flecha. La resonancia está excitada y el resultado son niveles de vibración muy altos. El latigazo de aceite a veces ocurre al arrancar, en máquinas con flechas largas. Ya que la frecuencia natural que se está excitando es la influencia controladora en el sistema, la frecuencia de la vibración no cambiará a medida que se incrementa la velocidad. Esto en contraste con el sencillo remolino de aceite, cuya frecuencia se cambia con la velocidad de la flecha. Esto proporciona un buen método para la detección de latigazo de aceite.

Linealidad. Se dice que un sistema es lineal, si cumple con las dos siguientes condiciones: si una entrada A resulta en una salida B, y una entrada 2A resulta en una salida 2B, y si la entrada A resulta en la salida B y si la entrada C resulta en la salida D, entonces, las entradas A+C resultarán en una salida B+D. Un sistema lineal no genera señales falsas por si mismo y su frecuencia de salida siempre es la misma que su frecuencia de entrada. Aunque sistemas mecánicos tienden a ser lineales, siempre exhiben no linealidades cuando están funcionando a niveles muy altos.

MEF. MEF quiere decir modelación de elementos finitos, que es una técnica de computadora que modela o simula una estructura mecánica en un programa. Sus características físicas tales como resonancias y flexiones bajo carga son calculadas. El modelo MEF supone que la estructura se puede representar por un gran número de sistemas de resorte-masa con un grado único de libertad. El propósito de la MEF es de llevar a cabo pruebas en una estructura sin tener que construirla y así ahorrar tiempo y dinero. Cuando el modelo en computadora hace lo que el diseñador quiere que haga, solamente en este momento se va a construir la estructura física.

Mils. El mil es la abreviación inglesa de un milésimo de pulgada. El desplazamiento de vibración por lo general se mide en mils en el sistema inglés.

Modo de Vibración. Un modo de vibración es un patrón o forma característica en el que vibrará un sistema mecánico. La mayoría de los sistemas tienen muchos modos de vibración y es la tarea del análisis modal determinar la forma de esos modos. La vibración de una estructura es siempre una combinación o una mezcla de todos los modos de vibración. Pero no todos están excitados al mismo grado. Por ejemplo, si se toca una campana suavemente, lo primero que se va oír es el modo fundamental de vibración, pero si se la toca más fuerte, otros modos son excitados y se oyen los parciales superiores del tono.

Modo de Vibración normal. Un modo de vibración normal de un sistema mecánico es una vibración como está descrito en el párrafo de análisis modal. Es difícil excitar un sistema para que vibre en un solo modo al mismo tiempo a menos que sea un sistema muy sencillo, por lo general todos los modos se excitan por lo menos hasta un cierto grado.

No Lineal. Un proceso no lineal se define como cualquier proceso que viola las reglas de la linealidad. La mayoría de las máquinas funcionando bien son lineales en su respuesta a una excitación de vibración, pero algunas condiciones introducen la no linealidad y eso afecta fuertemente la firma de vibración. Este hecho es la mayor razón por el éxito del monitoreo de vibración como una herramienta para la determinación del estado de la maquinaria. La no linealidad causada por holgura, provoca la generación de armónicos de la velocidad del funcionamiento, y engranes y rodamientos defectuosos generan no linealidades causando la aparición de bandas laterales de la velocidad de funcionamiento en los espectros de vibración.

Normalización. Con relación a los espectros de las máquinas rotativas, la normalización es el procedimiento de dividir los valores de frecuencia del eje x entre la velocidad de rotación de la máquina. Después de este, la velocidad de la máquina aparecerá en una frecuencia de 1, el segundo armónico estará en una frecuencia de 2 etc. Todo lo que se necesita para encontrar los armónicos de la velocidad de rotación es una mirada al espectro, y cualquier otro componente se puede ver fácilmente, especialmente los componentes asíncronos.

Onda. Una onda es un disturbio que se propaga a través de un medio, y que resulta en un movimiento oscilatorio local del medio. Las ondas transmiten energía en el medio y viajan a velocidades características que dependen del medio. La velocidad del sonido es la velocidad de propagación de ondas de presión en el aire. Ondas de sonido son ondas longitudinales lo que quiere decir que la dirección de la propagación es la misma que la dirección de oscilación., del medio. Olas del océano son un ejemplo de ondas transversales, ya que la dirección de la transmisión de la onda es a 90 grados de la dirección del movimiento del agua; la energía se mueve de manera horizontal, pero un corcho flotante sencillamente se mueve desde abajo hacia arriba cuando pasa la ola. Estructuras mecánicas pueden tener dos tipos de ondas de vibración, y esas viajan a velocidades diferentes. El resultado es que la mayoría de este tipo de estructuras cuando están excitados por una fuerza compleja vibrarán en un patrón muy complicado.

Orbita. La órbita es una gráfica de la posición de la línea central del muñón en una chumacera y se mide por dos sondas de proximidad que se montan en el carter del rodamiento, 90 grados aparte uno de otro. Se puede muestrear en un osciloscopio, si las dos salidas de las sondas están conectadas a las entradas horizontales y verticales y es un buen indicador de la presencia de remolino de aceite en el rodamiento.

Ordenes. En máquinas rotativas, ordenes son múltiplos o armónicos de la velocidad de rotación. Cuando se comparan espectros de vibración de máquinas rotativas es conveniente expresar el eje de frecuencias de los espectros en órdenes, especialmente, si la velocidad de la máquina varía entre las mediciones.

Oscilación. Oscilación es otro término para vibración.

Parámetros de Análisis. Las características específicas del análisis de espectro, tales como el rango de frecuencia, la resolución de frecuencia, la función de ventana, el tipo y el número de promedios se llaman parámetros de análisis. Pueden diferir para los puntos individuales de medición.

Peso de Prueba. En la realización del balanceo, que es la determinación y la localización de pesos de balanceo para un rotor, usualmente se sujeta un peso de prueba conocido al rotor y se mide el cambio en el nivel de vibraciones y en la fase que causó la operación.

Pico. El valor pico de una señal es el alejamiento máximo en una dirección del punto cero. El valor actual puede ser desplazamiento, velocidad, o aceleración o se podría expresar como un voltaje. En un espectro, un pico es sencillamente un máximo agudo.

Radial. Radial quiere decir en una dirección hacia el centro de rotación de la flecha o del rotor. En las mediciones de vibración de maquinaria las mediciones radiales se hacen con el transductor orientado de tal manera que su eje sensible está en dirección radial. Las mediciones radiales son las mejores para detectar el desbalance en rotores.

Referencia de fase Clave (Keyphasor). Es un pulso eléctrico o disparador derivado de un punto en una flecha que está girando. Sirve como referencia de fase cero para determinar donde se encuentra el desbalance en un rotor. Keyphasor es una marca comercial de la empresa Bentley Nevada, pero por su uso popular, casi ha llegado a ser un nombre genérico.

Remolino de aceite. Una vibración de una flecha en una chumacera, causada por la película de aceite, moviéndose en la parte interna de la chumacera y moviendo también el gorrón. Este ocurre entre 40 y 48 % de las RPM de la flecha y es asíncrono con la flecha. Puede ser causado por un juego excesivo en la chumacera, y/o por una carga radial insuficiente del rodamiento. El remolino de aceite nunca es deseable, pero si causa latigazo de aceite, la situación se pone mucha más seria.

Resonancia. Es una condición vibratoria en la que coinciden una frecuencia natural y una frecuencia de excitación. La resonancia resulta en una alta vibración y puede llegar a niveles que provocan daños. Es de suma importancia que no se maneje una máquina a una velocidad que corresponde a una frecuencia natural de la estructura.

Respuesta de frecuencia. La respuesta de frecuencia es una característica de un sistema que tiene una respuesta medida que es el resultado de una entrada conocida aplicada. En el caso de una estructura mecánica, la respuesta de frecuencia es el espectro de la vibración de la estructura, dividido entre el espectro de la fuerza de entrada al sistema. Para medir la respuesta de frecuencia de un sistema mecánico, hay que medir los espectros de la fuerza de entrada al sistema y de la respuesta de vibración. Esto se hace más fácilmente con un analizador TRF. Las mediciones de respuesta de frecuencia se usan mucho en el análisis modal de sistemas mecánicos. La función de respuesta de frecuencia es una cantidad tridimensional que consiste en amplitud vs. fase vs. frecuencia. Por eso una gráfica verdadera de ella necesita tres dimensiones, lo que es difícil de representar en papel. Una manera de realizar esto es la llamada gráfica de Bode, que consiste en dos curvas, una de amplitud vs. frecuencia, y una de fase vs. frecuencia. Otra manera de ver la función es de resolver la porción de fase en dos componentes ortogonales, una parte en fase (llamada la parte real) y una parte 90 grados fuera de fase (llamada la parte imaginaria o parte de la cuadratura). A veces se hace una gráfica de esas dos partes una contra la otra, y el resultado es la gráfica Nyquist.

Rodamiento con Película de Aceite. Un rodamiento con película de aceite es una chumacera que soporta la flecha, o el gorrón en una película de aceite delgada. La película de aceite puede ser generada por la rotación del mismo gorrón (rodamiento hidrodinámico) o puede ser generado por presión externa. (Rodamiento hidrostático).

Rotor Rígido. Un rotor rígido es el que no presenta una deformación significativa a su velocidad de funcionamiento. Un rotor rígido se puede corregir con la aplicación de no más de dos masas de corrección, y después de la corrección mantendrá su balance en un rango de velocidades hasta su duración de vida máxima.

Ruido. Estrictamente hablando, el ruido es una señal no deseada pero el término se usa generalmente para indicar una señal aleatoria. El ruido está causado por efectos eléctricos y mecánicos y hay muchos tipos diferentes de ruido.

Señal. En el análisis de vibración, una señal es un voltaje eléctrico o una corriente, análoga de la vibración que se está midiendo. El propósito de la señal generalmente es de ser la parte deseada de la cantidad, y la parte no deseada se llama ruido. La proporción señal/ruido es un parámetro importante en cualquier sistema de medición.

Síncrono. Síncrono literalmente quiere decir al mismo tiempo, pero en análisis de espectro, los componentes síncronos se definen como componentes espectrales que son múltiplos enteros o armónicos de la frecuencia fundamental. En algunos casos pueden existir como múltiplo de una fracción entera de la frecuencia fundamental. En este caso se llaman subarmónicos.

Subarmónico. Los subarmónicos son componentes síncronos en un espectro, que son múltiplos de 1/2, 1/3 o 1/4 de la frecuencia fundamental, primaria. A veces son llamadas componentes subsíncronos. En la forma de vibración de una máquina rotativa, normalmente habrá un componente en la velocidad de rotación, junto con varios armónicos de la velocidad de rotación. Si hay suficiente holgura, en la máquina para que algunas partes estén rechinando, el espectro generalmente tendrá subarmónicos. Armónicos de la mitad de la velocidad de rotación se llaman "subarmónicos de la mitad de la orden".

Tendencia. Una tendencia es una gráfica del nivel de vibración contra el tiempo transcurrido. La tendencia se realiza por la mayoría de los programas de monitoreo de vibración, a partir de datos de vibración almacenados, y por lo general está diseñada para enseñar un nivel de vibración a ciertas frecuencias importantes en un periodo de varios meses o años.

Tensión. Es el extender físicamente de un miembro mecánico, como resultado de una fuerza aplicada. La cantidad de tensión resultante para una fuerza dada depende de la rigidez del material. La tensión es una cantidad sin dimensiones, que se expresa generalmente en "micro tensión", eso es micro pulgadas por pulgada etc.

Transductor. Un transductor es un aparato que convierte un tipo de energía como vibración o sonido en un tipo diferente de energía, generalmente una corriente eléctrica o un voltaje. Transductores son el corazón de sistemas de instrumentación y por lo general son el eslabón más débil. Contribuyen ruido a las señales medidas y generan distorsión, debido a no linealidades. Son sujetos a cambios en su sensibilidad y requieren regularmente una calibración. Algunos tipos de transductores son mucho más confiables y más lineales que otros; un ejemplo es el acelerómetro piezoeléctrico que es el mejor tipo para medición de vibración.

Valor Pico a Pico o Pk-Pk. Cuando se mide el nivel de una forma de onda, de una señal, el valor pico a pico es la diferencia entre el pico positivo más alto y el valor del pico negativo más bajo. En vibración de maquinaria el desplazamiento por lo general se mide en unidades pico a pico.

VdB. VdB es la representación en decibel del nivel de vibración donde la referencia o el nivel cero es 10^{-9} metros por segundo según el SI de unidades. La marina de los E.U.A no reconoce la norma SI y usa un valor de referencia de 10^{-8} metros por segundo. Eso quiere decir que hay una diferencia de nivel de 20 dB entre las mediciones hechas en los dos sistemas con los números de la marina 20 dB más bajos por un nivel dado de velocidad. Los industriales en los E.U.A. usan la norma de la marina.

Vector. Una cantidad vector es una cantidad que tiene una dirección y una magnitud. Por ejemplo, el empuje es un vector, ya que es una fuerza en la dirección axial de la flecha o del rotor.

X. Abreviatura para la velocidad de funcionamiento. X se refiere a la velocidad de la flecha más cercana. De esta manera, una máquina con varias flechas tendrá varios valores para x.

Referencias

- [1] Abinger, R., Hammer, F., Leopold, J., 1989, “El Peor Accidente de una Turbina de Vapor Jamás Ocurrido en Alemania”, *Revista de Catástrofes*, Munich.
- [2] Adewusi, S.A. and Al-Bedoor, B.O., 2002, “Detection of Propagating Cracks in Rotors Using Neural Networks”, *American Society of Mechanical Engineers, Pressure Vessels and Piping Division*, Vancouver, Canada Vol. 447, 71–78.
- [3] Alford, J.S., 1965, “Protecting turbomachinery from self-excited rotor whirl”, *Trans. ASME, J. Eng. Power*, Vol. 87, No. 4, 333-334.
- [4] Anyika-Alugongo, A., Munda-Lange, J., Magona, P.W., 2004, “Time-Frequency Characterization of a Cracked Rotor by Wigner-Ville Distribution and Wavelet Transform”, *Jomo Kenyatta University of Agriculture and Technology*, Nairobi Kenya.
- [5] Allen, J.W. and Bohanick, J.S., 1990, “Cracked Shaft Diagnosis and Detection on Reactor Recirculation Pumps at Grand Gulf Nuclear Station”, *International Exhibition and Conference for the Power Generation Industries – Power-Gen*, May–June, Houston, TX. Vol. 5–6, 1021– 1034.
- [6] Bachschmid, N., Pennacchi, P., Tanzi, E., and Audebert, S., 2000, “Identification of Transverse Cracks in Rotors Systems”, *Proceedings of the 8th International Symposium on Rotating Machinery (ISROMAC-8)*, Hawaii, 26–30 March, 1–11.
- [7] Bachschmid, N., Pennacchi, P., Tanzi, E., and Vania, A., 2000, “Identification of Transverse Crack Position and Depth in Rotor Systems”, *Meccanica*, Vol. 35, No. 6, 563–582.
- [8] Bachschmid, N., Tanzi, E., Pennacchi, P., 2002, “Transverse Crack Modeling Validation in Rotor Systems Including Thermal Effects”, *9th. International Symposium on Transport Phenomena Dynamics of Rotating Machinery ISROMAC-9*, Hawaii.
- [9] Bachschmid, N., Pennacchi, P., Tanzi, E., Verrier, P., Hasnaoui, F. and Aabadi K., 2004, “Crack Detectability in Vertical Axis Cooling Pumps During Operation”, *International Journal of Rotating Machinery*, Vol. 10, No. 2, 2004, pp. 121-133.
- [10] Bachschmid, N., Pennacchi, P., Tanzi, E., Vania, A., 2004, “Cracks in Rotating Shafts: Experimental Behaviour, Modelling and Identification”, *SURVEILLANCE 5 CETIM Senlis*, France, 11-13 October 2004.
- [11] Baruh, H. and Ratan, S., 1993, “Damage Detection in Flexible Structures”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 166, 21–30.
- [12] Bently, D.E., 1986, “Shaft Crack Detection”, *Orbit, Bently Rotor Dynamics Research Corporation*, January 1986.
- [13] Bently, D.E. and Muszynska, A., 1986, “Early Detection of Shaft Cracks on Fluid-Handling Machines”, *Proceedings of the ASME International Symposium on Fluid Machinery Trouble Shooting*, 1986 Winter Annual Meeting, Anaheim, CA, 7–12 December, ASME, Fluids Engineering Division, Vol. 46, 53–58.
- [14] Bently, D.E. and Muszynska, A., 1986, “Detection of Rotor Cracks,” *Proceedings of Texas A&M University 15th Turbomachinery Symposium and Short Courses*, Corpus Christi, TX, November, 129–139.
- [15] Bhaduri, A.K., Albert, S.K., Ray, S.K. and Rodriguez, P., 2003, “Recent Trends in Repair and Refurbishing of Steam Turbine Components”, *Sadhana*, Vol. 28, Parts. 3 and 4, June/August 2003, pp 395-408.
- [16] Bishop, R.E.D., 1959, “Vibration of rotating shafts”, *J. Mech. Eng. Sci.*, Vol. 1, No. 1, 50-65.
- [17] Bishop, R.E.D. and Gladwell, G.M.L., 1959, “The vibration and balancing of an unbalanced flexible rotor”, *J. Mech. Eng. Sci.*, Vol. 1, No. 1, 66-77.
- [18] Bishop, R.E.D., and Parkinson, A.G., 1965, “Second order vibration of flexible shafts”, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, Vol. 259, No. 1095, 1-31.
- [19] Bloch, H.P., 1997, “Machinery Failure Analysis and Troubleshooting”, 3rd Ed., Gulf Publishing, Houston, TX.
- [20] Brandon, J., 2000, “Non-Linear Vibration of Cracked Structures: Perspectives and Horizons”, *Shock and Vibration Digest*, Vol. 32, No. 4, 273–280.
- [21] Brook, W.R. and Miller, W.H., 1991, “Crack Detection Method for Shaft at Rest”, *US Patent No. 5,068,800*.
- [22] Brose, W.R. and Jirinec, M.J., 1992, “East River No. 7 HP Rotor Crack Growth Analysis”, *Proceedings of the American Power Conference*, Illinois Institute of Technology, Chicago, IL, Vol. 54, Pt 2, 1326–1331.
- [23] Brosens, S.H. and Crandall, S.H., 1961, “Whirling of unsymmetrical rotors”, *ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 28, No. 3, 355-362.

- [24] Carlson, G.J., Imam, I., Azzaro, S.H. and Scheibel, J.R., 1988, "Expert System for On-Line Rotor Crack Monitoring and Diagnostic System", *Proceedings of Computer Engineering, ASME*, New York, 361–366.
- [25] Chan, R.K.C. and Lai, T.C., 1995, "Digital Simulation of a Rotating Shaft with a Transverse Crack", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 19, No. 7, 411–420.
- [26] Collins, K.R., Plaut, R.H. and Wauer, J., 1991, "Detection of Cracks in Rotating Timoshenko Beams Using Axial Impulses", *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, Vol. 113, 74–78.
- [27] Davies, W.G.R. and Mayes, I.W., 1984, "The Vibrational Behavior of a Multi-Shaft, Multi-Bearing System in the Presence of a Propagating Transverse Crack", *Transactions of the ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 146-153.
- [28] Dimarogonas, A.D., 1996, "Vibration of Cracked Structures: A State of the Art Review", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 55, 831–857.
- [29] Dimarogonas, A.D. and Papadopoulos, C.A., 1988, "Crack Detection in Turbine Rotors", *Proceedings of 2nd International Symposium on Transport Phenomena Dynamics and Design of Rotating Machinery*, Honolulu, Hawaii, April 3–6, 286–298.
- [30] Dimarogonas, A.D., and Papadopoulos, C.A., 1990, "Diagnosis of Edge Cracks in Rotating Shafts", *4th Incipient Failure Detection Conference, Sheraton Society Hill*, Philadelphia, PA, October 15 – 17, 1990
- [31] Dimarogonas, A.D. and Papadopoulos, C.A., 1992, "Coupled Vibrations of Cracked Shafts", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 114, No. 4, 461–467.
- [32] Dirr, B.O. and Schmalhorst, B.K., 1988, "Crack Depth Analysis of a Rotating Shaft by Vibration Measurement", *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, Vol. 110, No. 2, 158–164.
- [33] Dorfman, L.S. and Trubelja, M., 1999, "Torsional Monitoring of Turbine Generators for Incipient Failure Detection", *Proceedings of 6th Steam Turbine/Generator Workshop*, St. Louis, MI, EPRI Report.
- [34] Dunkerley, S., 1894, "On the whirling and vibration of shaft", *Philos. Trans. R. Soc. London*, Ser. A, Vol. 185, 279-359
- [35] Dworski, J., 1964, "High Speed Rotor Suspension Formed by Fully Floating Hydrodynamic Radial and Thrust Bearings", *Journal of Engineering for Power, Transactions ASME*, Series A 86, 149-160.
- [36] Ehrich, F.F., 1966, "Subharmonic vibration of rotors in bearing clearance", *ASME paper 66-MD-1*, American Society of Mechanical Engineers, New York.
- [37] Ehrich, F.F., 1967, "The influence of trapped fluids on high speed rotor vibration", *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, Vol. 89, Ser. B, No. 4, 806-812.
- [38] Ehrich, F.F., 1988, "High order subharmonic response of high speed rotors in bearing clearance", *Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des.*, Vol. 113, No. 1, 50-56.
- [39] Ehrich, F.F., 1992, "Handbook of Rotordynamics", McGraw-Hill, New York.
- [40] Eisenmann, R.C., 2000, "Machinery Malfunction: Diagnosis and Correction", *Prentice Hall, Englewood Cliffs*.
- [41] EPRI Workshops on Main Coolant Pumps – 1989, 1990, 1991, 1992, 1993, 1994.
- [42] Eshleman, R.L., and Eubanks, R. A., 1969, "On the critical speeds of a continuous rotor", *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, Vol. 91, No. 4, 1180-1188.
- [43] Federn, K., 1957, "Grundlagen einer Systematischen schwingungsentstörung Wellenelastischer Rotoren", *VDI Ver.*, Bd. 24, 9-25.
- [44] Feldman, M. and Seibold, S., 1998, "Damage Diagnosis of Rotors: Application of Hilbert Transform and Multi-Hypothesis Testing", *Reports of the Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik (ITWM)*, No. 2., 1–23.
- [45] Feng, N.S., Hahn, E.J., 1995, "Including Foundation Effects on the Vibration Behavior of Rotating Machinery", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 9, pp 243-256.
- [46] Figueroa-Nazuno, J., Nosov, V., Gómez-Mancilla, García-Illescas, R., 2001, "Crack Shaft and Signal Processing of its Vibration Response", *International Conference on Advanced Materials, ICAM 2001*, Cancun, México, Agosto 2001.
- [47] Foote, W.R., Poritsky, H. and Slade, J.J. Jr., 1943, "Critical speeds of a rotor with unequal shaft flexibilities, mounted in bearings of unequal flexibility, I", *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 10, No. 2, 77-84.
- [48] Franklin, W., Bently, D.E., Goldman, P. and Muszynska, A., 1997, "Early Cracked Shaft Detection in Pumps Using Rotor Lateral Vibration Analysis", *Pumping Machinery, ASME Fluids Division Summer Meeting*, Canada, Vol. 11, 8 pp.

- [49] Friswell M.I. and Lees, A.W., 1996, "Estimation of Forces Exerted on Machine Foundations", *International Conference on Identification in Engineering Systems*, Swansea, pp 793-803.
- [50] Fuchs, H.O. and Stephens, R. I., 2000, "Metal Fatigue in Engineering", 2nd Ed., Wiley, New York.
- [51] Gandy, D., Viswanathan, 2001, "Repair Solutions for Steam and Gas Turbines", *Power Engineering*, Vol. 105, No.3, 42-44.
- [52] García-Illescas, R., Gómez-Mancilla, J.C., Vergara, E., 2000, "Linear Stability Conditions for Cracked Rotating Shafts", *International Materials Research Congress*, Cancun, México, Agosto 2000.
- [53] García-Illescas, R., Gómez-Mancilla, 2000, "Estabilidad Lineal y Respuesta Transitoria de Ejes Rotatorios Fisurados", *5^o Congreso Nacional en Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, México D.F., Noviembre 2000.
- [54] García-Illescas, R., 2001, "Análisis de Vibración para Caracterizar el Comportamiento de Rotores Fracturados Operando en Línea", *Tesis de Maestría en Ciencias, SEPI-ESIME, Instituto Politécnico Nacional*, México, D. F., Octubre 2001.
- [55] García-Illescas, R., 2001, Gómez-Mancilla, J.C., "Respuesta Transitoria y Análisis de Estabilidad Lineal del Sistema Rotor-Chumacera Agrietado", *6^o Congreso Nacional en Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, México D. F., Noviembre 2001.
- [56] García-Illescas, R., Gómez-Mancilla, J.C., Nosssov, V., 2002, "Vibration Analysis in the Characterization of the Dynamic Behavior of Cracked Rotating Shafts", *International Conference on Rotating Machinery, IFToMM*, Sydney, Australia.
- [57] García-Illescas, R., Gómez-Mancilla, J.C., 2004, "Dynamic Behaviour of Cracked Shafts and Signal Processing of its Vibratory Response for Steady Crack Growth Detection", *SURVEILLANCE 5 CETIM Senlis*, France, 11-13 October.
- [58] Gasch, R., 1976, "Dynamic Behavior of a Simple Rotor with a Cross-Sectional Crack", *Proceedings of the International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*, Institute of Mechanical Engineers, 123-128.
- [59] Gasch, R., 1976, "Vibration of Large Turborotors in Fluid-Film Bearing on an Elastic Foundation", *J. S Vib* 47, 53-73.
- [60] Gasch, R., 1993, "A Survey of the Dynamic Behavior of a Simple Rotating Shaft with a Transverse Crack", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 160, No. 2, 313-332.
- [61] Gasch, R. and Liao, M., 1996, "Process for the Early Detection of a Crack in a Rotating Shaft", *US Patent No. 5,533,400*.
- [62] Goldman, P. and Muszynska, A., 1992, "Torsional Vibration Measurements Help in Shaft Crack Diagnosis", *Orbit*, Vol. 13, No. 4, 5-7.
- [63] Goldman, P., Bently, D.E., and Muszynska, A., 1996, "Modal Diagnostics of Rotors with Cracks", *IMEchE Symposium on Nonlinear Dynamics and Control*, Atlanta, GA, Vol. 91, 185-190.
- [64] Goldman, P., Muszynska, A., Bently, D.E., Dayton, K.P., and Garcin, M., 1999, "Application of Perturbation Methodology and Directional Filtering for Early Rotor Crack Detection", *ASME International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition (IGTI 1999)*, Indianapolis, IN, Paper No. 99-GT-225.
- [65] Gómez-Mancilla, J.C., García-Illescas, R., Vergara, E., 2000, "Non Linear Simulated Behavior of Cracked Shafts", *International Materials Research Congress*, Cancun, México, Agosto 2000.
- [66] Gómez-Mancilla, J.C., García-Illescas, R., Balankin, A., Koutcherenko V., 2000, "Ejes Fracturados Simulados Aplicando Nuevo Análisis de su Comportamiento No Lineal", *5^o Congreso Nacional en Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, México D. F., Noviembre 2000.
- [67] Gómez-Mancilla, J.C., Nosssov, V., García-Illescas, R., 2001, "On Line Crack Shaft Detection by Analysis of Unstable Vibration Response", *International Conference on Advanced Materials, ICAM 2001*, Cancun, México, Agosto 2001.
- [68] Gómez-Mancilla, J.C., García-Illescas, R., 2001, "Estabilidad Dinámica y Análisis Experimental de Rotores Fracturados", *6^o Congreso Nacional en Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, México D. F., Noviembre 2001.
- [69] Gómez-Mancilla, J.C., García-Illescas, R., Nosssov V., 2002, "New Modeling Approach for Detection & Behavioral Characterization of Cracked Rotating Shafts", *9th. International Symposium on Transport Phenomena & Dynamics of Rotating Machinery, ISROMAC-9*, Hawaii, USA, February 2002.
- [70] Gómez-Mancilla, J.C., García-Illescas, R., 2002, "Vibration Stability and Experimental Analysis of Cracked Shafts", *9th. Int. Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, ISROMAC-9*, Hawaii, USA, February 2002.
- [71] Gómez-Mancilla, J.C., García-Illescas, R., Nosssov V., 2003, "Detection Of Steady Crack Growth On Rotating Shafts", *Proceedings of 2nd International Symposium on Control and Stability of Rotating Machinery, ISCORMA-2*, Gdansk, Poland.
- [72] Gómez-Mancilla, J.C., Nosssov, V., 2003, "Approximated Analytical Solution of a Cracked Rotor-Bearing System: Experimental Validation", *sent for approval to Journal of Vibration and Acoustics, ASME Trans.*

- [73] Gómez-Mancilla, J.C., Nossov, V., Zambrano-Reyes, A., 2003, “Modelo del Rotor de Jeffcott Extendido Desbalanceado y Fisurado y su Tratamiento Numérico”, *VII Congreso Nacional en Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, México D. F., Noviembre 3-7, 2003.
- [74] Gómez-Mancilla, J.C., Sinou, J.-J., Nossov, V. R., Thouverez, F., Zambrano-Reyes, A., 2004, “The Influence of Crack-Imbalance Orientation and Orbital Evolution for an Extended Cracked Jeffcott Rotor”, *Comptes Rendus Mécanique*, 332 (2004) 955-962, November 2004.
- [75] Gómez-Mancilla, J.C., Zambrano-Reyes A., 2005, “Local Resonance Of Crack-Imbalance Orientations And Orbital Evolution To Detect Rotor Cracks: Part1, Numerical Analysis”, *IMAC XXIII: Conference and Exposition On Structural Dynamics*, January 31-February 3, 2005, Rosen Plaza Hotel Orlando Florida.
- [76] Gómez-Mancilla, J.C., Machorro-López, J., 2005, “Local Resonance Of Crack-Imbalance Orientations And Orbital Evolution To Detect Rotor Cracks: Part 2, Experimental Validation”, *IMAC XXIII: Conference and Exposition On Structural Dynamics*, January 31-February 3, 2005, Rosen Plaza Hotel Orlando Florida.
- [77] Gómez-Mancilla, J.C., Machorro-López, J., Nosov, V.R., 2005, “Crack Breathing Mechanisms in Rotor-Bearings Systems Influencing System Response and Crack Detection”, *ISCORMA-3*, Cleveland, Ohio, 19-23 September 2005.
- [78] Gounaris, G.D. and Papadopoulos, C.A., 2002, “Crack Identification in Rotating Shafts by Coupled Response Measurements”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 69, 339–352.
- [79] Green, I. and Casey, C., 2003, “Crack Detection in a Rotor Dynamic System by Vibration Monitoring – Part I: Analysis”, *IGTI 2003*, Atlanta, GA, Paper No. GT2003-38659.
- [80] Guang, M. and Gasch, R., 1993, “Stability and Stability Degree of a Cracked Flexible Rotor Supported on Journal Bearings”, *Vibration of Rotating Systems, ASME, Design Engineering Division*, Albuquerque, USA, Vol. 60, 315–323.
- [81] Gunter, E.J., 1967, “The Influence of Internal Friction on the Stability of High Speed Rotors”, *Journal of Engineering for Industry, Transactions ASME, Series B* 89, 683-688.
- [82] Gunter, E.J., 1970, “Influence of Flexibly Mounted Rolling Element Bearing on Rotor Response, Part I-Linear Analysis”, *Journal of Lubrication Technology, Transactions ASME, Series F* 92, 59-75..
- [83] Guo, D., Chu, F. and He, Y., 2003, “Vibration Analysis of Rotor with Transverse Surface Cracks”, *IGTI 2003*, Atlanta, GA, Paper No. GT2003-38041.
- [84] Guo, Z. and Kirk R.G., 2003, “Instability Boundary for Rotor-Hydrodynamic Bearing Systems, Part 1: Jeffcott Rotor With External Damping”, *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, October 2003, Vol. 125, 417-422.
- [85] Guo, Z. and Kirk R.G., 2003, “Instability Boundary for Rotor-Hydrodynamic Bearing Systems, Part 2: Rotor with External Flexible Damped Support”, *Journal of Vib. and Acoustics, Trans. of the ASME*, October 2003, Vol. 125, 423-426.
- [86] Hamidi, L., Piaud, J.-B. and Massoud, M., 1992, “A Study of Crack Influence on the Modal Characteristics of Rotors”, *International Conference on Vibrations in Rotating Machinery (ImechE)*, Bath, UK, No. C432/066, 283–288.
- [87] He, Y., Chu, F., Guo, D. and Zhong, B., 2001, “Study on Genetic Algorithms Based Rotor Crack Detection for Rotating Machine”, *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 37, No. 10, 69–74.
- [88] Henry, T.A. and Okah-Avae, B.E., 1976, “Vibrations in cracked shaft”, *Proceedings of the International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*, Institute of Mechanical Engineers, New York, 123-128.
- [89] Herbert, R.G., 1987, “Turbine-Alternator Run-Down Vibration Analysis: Automated Crack Detection”, *ASME Design Engineering Division Publication*, Vol. 2, No. 2, 631–636.
- [90] Holtzer, H., 1921, “Die Berechnung der Drehschwingungen”, *Springer-Verlag*, Berlin.
- [91] Hori, Y., 1959, “A theory of oil whip”, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 26, 189-198.
- [92] Ichimonji, M., Kazao, Y., Watanabe, S. and Nonaka, S., 1994, “Dynamics of a Rotor System with a Slant Crack Under Torsional Vibration”, *Non- Linear and Stochastic Dynamics, American Society of Mechanical Engineers, Applied Mechanics Division*, Chicago, IL, Vol. 192, 81–90.
- [93] Imam, I., Azzaro, S.H., Bankert, R.J. and Scheibel, J., 1989, “Development of an On-Line Rotor Crack Detection and Monitoring System”, *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, Vol. 111, No. 3, 241–250.
- [94] Imam, I., Azzaro, S.H. and Bankert, R. J., 1993, “System and Method for Detecting the Occurrence, Location and Depth of Cracks in Turbine- Generator Rotors”, *US Patent No. 5,258,923*.

- [95] Inagaki, T., Kanki, K. and Shiraki, K., 1979, "Response Analysis of a General Asymmetric Rotor-Bearing", *ASME*, paper 79-DET-84.
- [96] Inagaki, T., Kanki, K. and Shiraki, K., 1981, "Transverse Vibrations of a General Cracked-Rotor Bearing System", *ASME*, paper 81-DET-45.
- [97] Ishida, Y., Hirokawa, K., and Hirose, M., 1995, "Vibrations of a Cracked Rotor: 3/2-Order Super-Subharmonic and One Half-Order Subharmonic Resonances", *Proceedings of 15th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise*, Boston, MA, American Society of Mechanical Engineers, Design Engineering Division, Vol. 84, No. 3, Pt A/1, 605–612.
- [98] Ishida, Y., Inoue, T. and Nishimura, K., 2001, "Detection of a Rotor Crack by a Periodic Excitation", *International Symposium on Stability Control of Rotating Machinery (ISCORMA 2001)*, Minden, NV, 1004–1011.
- [99] Iwatsubo, T., Arii, S. and Oks, A., 1992, "Detection of a Transverse Crack in a Rotor Shaft by Adding External Force", *International Conference on Vibrations in Rotating Machinery (ImechE)*, Bath, UK, No. C432/093, 275–282.
- [100] Jeffcott, H.H., 1919, "The lateral vibration of loaded shafts in the neighborhood of a whirling speed: the effect of want of balance", *Philos. Mag.*, Vol. 37, 304–315.
- [101] Jenkins, L.S., 1985, "Cracked Shaft Detection on Large Vertical Nuclear Reactor Coolant Pump" *NASA Conference Publication* 2409, 253–265.
- [102] Kang, Y., Chang, Y. P., Tsai, J. W., Mu, L.H. and Chang, Y. F., 2000, "An Investigation in Stiffness Effects on Dynamics of Rotor-Bearing-Foundation Systems", *Journal of Sound and Vibration*, 231 (2), 343–374.
- [103] Kavarana, F. H. and Kirk, R.G., 1995, "Cracked Shaft Detection Using the Unbalance Excitation Technique", *ASME DE*, Vol. 84-2, Vol. 3, Pt B, 1001–1007.
- [104] Kimball, A.L., 1924, "Internal friction theory of shaft whirling", *Gen. Electr. Rev.*, Vol. 27, No. 4, 244–251.
- [105] Kirk, R.G., Gunter, E.J., 1972, "The Effect of Support Flexibility and Damping on the Synchronous Response of a Single-Mass Flexible Rotor", *ASME Journal of Engineering for Industries*, 94, 221–232.
- [106] Kowal, M.G. and O'Brien, J.T. Jr., 1989, "Monitoring for Shaft Cracks on Reactor Recirculation Pumps", *Sound and Vibration*, Vol. 23, No. 5, 12–17.
- [107] Lazzeri, L., Cecconi, S., Faravelli, M., Scala, M., and Tolle, E., 1992, "Second Harmonic Vibration Monitoring of a Cracked Shaft in a Turbo-Generator", *Proceedings of the American Power Conference*, Chicago, IL, Vol. 54, Pt 2, 1337–1342.
- [108] Lee, C.-W. and Kwon, K.-S., 2000, "Crack Detection in Rotating Machinery by Modal Testing", *International Conference on Vibrations in Rotating Machinery (ImechE)*, Nottingham, UK, Paper No. C576/ 031/2000, 535.
- [109] Lees, A. W., Simpson, I.C., 1983, "The Dynamics of Turbo-Alternator Foundations", *Conference on steam and gas turbine foundations and shaft alignment*, IMechE, Bury St Edmunds, Paper C6/83, pp 37–44.
- [110] Lees, A. W., 1988, "The Least Squares Method Applied to Identify Rotor/Foundation Parameters", *Proceedings of the International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*, IMechE, Edinburgh, Paper C306/88, pp 209–216.
- [111] Lees, A.W., 2000, "Fault Diagnosis in Rotating Machinery", *Proceedings of the International Modal Analysis Conference (IMAC)*, San Antonio, TX, Vol. 1, 313–319.
- [112] Lees, A.W. and Friswell, M.I., 1999, "Crack Detection in Asymmetric Rotors", *International Conference on Damage Assessment of Structures, DAMAS 99*, Dublin, Ireland, June, 246–255.
- [113] Lees, A.W. and Friswell M.I., 2001, "The Vibration Signature of Chordal Cracks in Asymmetric Rotors", *Proceedings of 19th International Modal Analysis Conference*.
- [114] Leyzerovich, A., 1997, "Large Power Steam Turbines", Vols 1 and 2, Pennwell, Tulsa, OK.
- [115] Lewis, F.M., 1932, "Vibrations During Acceleration Through a Critical Speed", *Trans. ASME*, Vol. 54, 253–261.
- [116] Liao, M. and Gasch, R., 1992, "Crack Detection in Rotating Shafts – An Experimental Study", *International Conference on Vibrations in Rotating Machinery (ImechE)*, Bath, UK, Paper No. C432/106, 289–295.
- [117] Lund, J.W., and Sternlicht, B., 1962, "Rotor-Bearing Dynamics with Emphasis on Attenuation", *Journal of Basic Engineering, Transactions ASME*, Series D 84, 491–502.
- [118] Lund, J.W., 1965, "The Stability of an Elastic Rotor in Journal Bearings with Flexible, Damped Supports", *Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME*, December 1965, 911–920.

- [119] Lund, J.W., and Orcutt, F. K., 1967, "Calculation and Experiments on the Unbalance Response of a Flexible Rotor", *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, Vol. 89, No. 4, 785-795.
- [120] Lund, J.W., 1974, "Stability and Damped Critical Speed of a Flexible Rotor in Fluid-Film Bearings", *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, Vol. 96, No. 2, 509-517.
- [121] Machorro-López, J., Gómez-Mancilla, J., Nossov V., 2004, "Interacción de Desalineamiento, Eje Fisurado y Desbalance en un Sistema Rotor-Chumacera Jeffcott", *8º Congreso Nacional en Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, México D.F., Noviembre 15-19, 2004.
- [122] Malin, V. and Fields, S.F., 1992, "A Balanced Approach to Repair of a Large Structures by Welding", *Welding Journal*, 71:63-72.
- [123] Maxwell, J.H. and Rosario, D.A., 2001, "Using Modeling to Predict Vibration on from a Shaft Crack", *Comadem 2001*, Sept. 2001, pp. 243-250.
- [124] Mayes, I.W. and Davies, W.G.R., 1980, "A Method of Calculating the Vibrational Behaviour of Coupled Rotating Shaft Containing a Transverse Crack", *Vibrations in Rotating Machinery*, Inst. Of Mech. Eng. London, pp. 17-27.
- [125] Mayes, I.W. and Davies, W.G.R., 1984, "Analysis of the Response of a Multi-Rotor-Bearing System Containing a Transverse Crack in a Rotor", *Trans. of the ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 106, 139-145.
- [126] Maynard, K.P., Trethewey, M.W. and Groover, C., 2001, "Application of Torsional Vibration Measurement to Shaft Crack Monitoring in Power Plants", *Proceedings of the 55th Meeting of the Society for Machinery Failure Prevention Technology*, Virginia Beach, VA, April 2-5.
- [127] Meng G. and Hahn, E. J., 1994, "Dynamic Response of a Cracked Rotor with Some Comments on Crack Detection", *ASME*, The Hague, Netherlands, Paper No. 94-GT-029, 1-10.
- [128] Meng, G. and Gasch, R., 2002, "Stability and Stability Degree of a Cracked Flexible Rotor Supported on Journal Bearings", *Trans ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 122, No. 2, 116-125.
- [129] Miller, W.H. and Brook, W.R., 1990, "Shaft Crack Detection Method", *US Patent No. 4,975,855*.
- [130] Miller, W.H. and Brook, W.R., 1992, "Crack Detection Method for Operating Shaft", *US Patent No. 5,159,563*.
- [131] Mitropol'skii, Y.A., 1965, "Problems of the asymptotic theory of nonstationary vibrations", *Israel Program for Science Translations*, Jerusalem.
- [132] Miwa, S., and Shimomura, G., 1976, "Balancing of rotating machinery", Corona Publishing Co., Tokyo.
- [133] Mohiuddin, M.A. and Khulief, Y.A., 2002, "Dynamic Response Analysis of Rotor-Bearing Systems With Cracked Shaft", *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, Vol. 124, No. 4, 690-696.
- [134] Morin, M.D., Faber, G., Kuhnen, G., 1991, "Weld build-up repair of turbine rotors", *Maintenance and repair welding in power plants*, Miami, FL American Welding Society, pp 288-301.
- [135] Muñoz, R.Q., Ramirez, J., Antonio, S. and Kubiak, J. S., 1997, "Rotor Modal Analysis for a Rotor Crack Detection", *Proceedings of the International Modal Analysis Conference (IMAC)*, Bethel, CT, Vol. 1, 877-879.
- [136] Muszynska, A., 1989, "Misalignment and Shaft Crack-Related Phase Relationships for 1X and 2X Vibration Components of Rotor Responses," *Orbit*, Vol. 10, No. 2, 4-8.
- [137] Muszynska, A., Goldman, P. and Bently, D. E., 1992, "Torsional/Lateral Vibration Cross-Coupled Responses Due to Shaft Anisotropy: A New Tool in Shaft Crack Detection", *International Conference on Vibrations in Rotating Machinery (ImechE)*, Bath, UK, Paper No. C432/090, 257-262.
- [138] Myklestad, N.O., 1944, "A new method for calculating natural modes of uncoupled bending vibrations of airplane wings and other types of beams", *J. Aeronaut. Sci.*, Vol. 11, No. 2, 153-162.
- [139] Nataraj Chandrasekhar, 1984, "The simulation of cracked shaft dynamics", *Master Degree Thesis*, Arizona State University.
- [140] Nelson, H.D., and McVaugh, J. M., 1976, "The dynamics of rotor bearing systems, using finite elements", *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, Vol. 98, No. 2, 593-600.
- [141] Newkirk, B.L., 1924, "Shaft Whipping", *General Electric Rev.*, Vol. 27, No. 3, 169-178.
- [142] Newkirk, B.L., and Taylor, H. D., 1925, "Shaft whirling due to oil action in journal bearings", *General Electric Rev.*, Vol. 28, No. 7, 559-568.

- [143] Nilsson, L.R.K., 1982, "On the Vibration Behaviour of a Cracked Rotor", *IFMToMM Intl. Conf. Rotordynamic Problems in Power Plants*, Sept.-Oct. 1982, Rome, Italy, pp.515-524.
- [144] Nossov, V., Gómez-Mancilla, J., 2003, "Approximated Analytical Solution of a Cracked Rotor-Bearing System: Analysis", sent for approval to *Journal of Vibration and Acoustics*, *ASME Trans.*
- [145] Ostachowicz, W.M. and Krawczuk, M., 1992, "Coupled Torsional and Bending Vibrations of a Rotor with an Open Crack", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 62, 191-201.
- [146] Passleva, G. and Pira G., "Cracked Shaft Vibration Sensitivity to Steam Temperature Variations", *IFMToMM Intl. Conf. Rotordynamic Problems in Power Plants*, Sept.-Oct. 1982, Rome, Italy.
- [147] Papadopoulos, C.A. and Dimarogonas, A.D., 1989, "Coupled Vibration of Cracked Shafts", *ASME, Design Engineering Division*, Vol. 18, No. 2, 7-12.
- [148] Papadopoulos, C.A. and Dimarogonas, A.D., 1990, "Diagnosis of Edge Cracks in Rotating Shafts", *EPRI, 4th Incipient Failure Detection Conference, Predictive Maintenance for the 90s*, Philadelphia, PA, October 15-17, 1-26.
- [149] Park, R.-W., 1996, "Crack Detection, Localization and Estimation of the Intensity in a Turbo Rotor", *ASME*, Jakarta, Indonesia, Paper No. 96-TA-031, 1-7.
- [150] Penny, J.E.T. and Friswell M.I., 2003, "Simplified Modeling of Rotor Cracks", *Key Engineering Materials, Trans. Tech Publications*, Switzerland, Vol. 245-246, 223-232.
- [151] Pilkey, W.D., Wang, B.P. and Vannoy, D., 1976, "Efficient Optimal Design of Suspension Systems for Rotating Shafts", *ASME Journal of Engineering for Industries* 1026-1029.
- [152] Plaut, R.H., Andruet, R.H., and Suherman, S., 1994, "Behavior of a Cracked Rotating Shaft During Passage Through a Critical Speed", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 173, No. 5, 577-589.
- [153] Prabhakar, S., Sekhar, A.S., and Mohanty, A.R., 2001, "Detection and Monitoring of Cracks Using Mechanical Impedance of Rotor-Bearing System", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 110, No. 5, 2351-2359.
- [154] Prabhu, B.S. and Sekhar, A.S., 1995, "Severity Estimation of Cracked Shaft Vibrations Within Fluid Film Bearings", *Tribology Transactions*, Vol. 38, No. 3, 583-588.
- [155] Prohl, M.A., 1945, "A general method for calculating critical speeds of flexible rotors", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 12, No. 3, 142-148.
- [156] Rajab, M.D. and Al-Sabeeh, A., 1991, "Vibrational Characteristics of Cracked Shafts", *J. of S. & Vib*, 147, No.3, 465-473.
- [157] Rankine, W.J.M., 1869, "On the centrifugal force of rotating shafts", *Engineer*, Vol. 27, 249-249.
- [158] Rao, J.S., 1991, "Rotordynamics", 2nd Edition, *John Wiley & Sons*, New York.
- [159] Ratan, S., Baruh, H. and Rodriguez, J., 1996, "On-Line Identification and Location of Rotor Cracks", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 194, No. 1, 67-82.
- [160] Rieger, N. and El-Shafei, A., 2003, "Automated Diagnostics of Rotating Machinery", *IGTI 2003*, Atlanta, GA, Paper No. GT2003-38453.
- [161] Roberts, S. and Brandon, J.A., 2003, "Nonlinear Signatures in the Transient Dynamics of Turbo-Machinery", *Key Engineering Materials*, Vol. 245-246, 279-286.
- [162] Rosard, D.D., Reid, S.R. and Blades, J. C., 1994, "Optimizing Maintenance Intervals Using a Turbine Rotor Crack Monitoring Program", *ASME*, Phoenix, AZ, 94-JPGC-PWR-5617, 1-8.
- [163] Ruhl, R.L., and Booker, J.F., 1972, "A finite element model for distributed parameter turborotor system", *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, Vol. 94, No. 1, 126-132.
- [164] Saavedra, P.N. and Cuitino, L.A., 2002, "Vibration Analysis of Rotor for Crack Identification", *Journal of Vibration and Control*, Vol. 8, No. 1, 51-67.
- [165] Saavedra, P.N. and Cuitino, L.A., 2002, "Evaluación de la Severidad Vibratoria", *Universidad de Concepción*.
- [166] Sabnavis, G., Kirk, R.G., Kasarda, M., and Quinn, D., 2004, "Cracked Shaft Detection and Diagnostics: A Literature Review", *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 36, No. 4, July 2004, 287-296, Sage Publications.
- [167] Sanderson, A.F.P., 1992, "The Vibration Behavior of a Large Steam Turbine Generator During Crack Propagation Through the Generator Rotor", *International Conference on Vibrations in Rotating Machinery (ImechE)*, Bath, UK, Paper No. C432/102, 263-273.

- [168] Saxena, A., 1998, “Nonlinear Fracture Mechanics for Engineers”, *CRC Press*.
- [169] Schweitzer, G., 1975, “Stabilization of self-excited rotor vibrations by an active damper”, *Dynamics of rotors*, Springer-Verlag, New York, 472-493.
- [170] Seibold, S. and Weinert, K., 1996, “Time Domain Method for the Localization of Cracks in Rotors”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 195, No. 1, 57–73.
- [171] Seibold, S., Fritzen, C.-P., and Wagner, D., 1996, “Employing Identification Procedures for the Detection of Cracks in Rotors”, *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 11, No. 3–4, 204–215.
- [172] Sekhar, A.S., 1999, “Conditioning Monitoring of a Rotor System Having a Slant Crack in the Shaft”, *Noise and Vibration Worldwide*, Vol. 30, No. 3, 23–31.
- [173] Sekhar, A.S., 2000, “Detection and Monitoring of Cracks in Rotors Through Q Factors”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C*, Vol. 214, No. 7, 949–954.
- [174] Sekhar, A.S., 2003, “Identification of a Crack in a Rotor System Using a Model-based Wavelet Approach”, *Structural Health Monitoring, Sage Publications*, Vol. 2(4), 293-308.
- [175] Sekhar, A.S., 2004, “Detection and Monitoring of Cracks in a Coast-Down Rotor Supported on Fluid Film Bearings”, *Tribology International*, Vol. 37, No. 3, 279–287.
- [176] Sekhar, A.S. and Prabhu, B. S., 1998, “Condition Monitoring of Cracked Rotors Through Transient Response”, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 33, No. 8, 1167–1175.
- [177] Shiohata, K., Satoh, K., Ohmori, M., Kikuchi, K., and Kaneko, R., 1987, “Method of and Apparatus for Detecting Crack Condition”, *US Patent No. 4,635,210*.
- [178] Sinou, J.-J., and Lees, A.W., 2004, “Non-Linear Vibrations in Cracked Rotors”, *8th International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*, September 7-9, 2004, Swansea, United Kingdom.
- [179] Smart, M., Friswell, M.I., Lees, A. W., Prells, U., “The Identification of Turbogenerator Foundation Models from Run-down Data”, *Department of Mechanical Engineering, University of Wales Swansea*, Swansea SA2 8PP UK.
- [180] Smith, D. M., 1933, “The motion of a rotor carried by a flexible shaft in flexible bearings”, *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, Vol. 142, 92-118.
- [181] Soeffker, D., Bajkowski, J., and Mueller, P. C., 1993, “Crack Detection in Turbo Rotors Vibrational Analysis and Fault Detection”, *Vibrations of Rotating Systems*, Vol. 60, 277–286.
- [182] Soeffker, D., Bajkowski, J., and Mueller, P. C., 1993, “Detection of Cracks in Turbo Rotors – A New Observer Based Method”, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, Vol. 115, No. 3, 518–524.
- [183] Someya, T., 1989, “Journal-Bearing Data Book”, *Springer-Verlag*, New York.
- [184] Stephenson, R.W. and Rouch, K E., 1992, “Generating Matrices of the Foundation Structure of a Rotor System from Test Data”, *Journal of Sound and Vibration*, 154, 467-484.
- [185] Stodola, A., 1924, “Damf- und Gas-Turbinen”, Verlag von Julius Springer, Berlin; English Translation, 1927, “Steam and Gas Turbines”, McGraw-Hill, New York.
- [186] Subbiah, R., Montgomery, J., and Banks, R. L., 2002, “Studies on Rotor Cracks Due to Bending and Torsional Effects”, *Proceedings of 6th International Conference on Rotor Dynamics (IFToMM)*, Sydney, Australia, 343–349.
- [187] Sundermeyer, J. N. and Weaver, R. L., 1995, “On Crack Identification and Characterization in a Beam by Non-Linear Vibration Analysis”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 183, No. 5, 857–871.
- [188] Torres, M. R., 1996, “On-Line Shaft Crack Detector”, *US Patent No. 5,479,824*.
- [189] Taylor, H. D., 1940, “Critical speed behavior of unsymmetrical shafts”, *J. Appl. Mech.*, Vol. 7, No. 2, 71-79.
- [190] Thibault, S.E., Miller, W. H., Brook, W.R., Mannix, T. P., 1996, “Multiple Axis Transducer Mounting Collar”, *US Patent No. 5,520,061*.
- [191] Thomas, J.J., 1958, “Instabile Eigenschwingungen von Turbinenlaufnern, Angefacht durch die Spaltstromungen, in Stopfbuchsen und Beschaufungen”, *AEG-Sonderdruck*, 1039-1063.
- [192] Tondl, A. 1965, “Some problems of rotor dynamics”, *Czechoslovak Academy of Sciences*, Prague, Czechoslovakia.
- [193] Tsai, T.C. and Wang, Y.Z., 1996, “Vibration Analysis and Diagnosis of a Cracked Shaft”, *J. of Sound and Vib.* 607–620.

- [194] Vance, J.M., Murphy, B.T. and Tripp, H.A., 1987, "Critical Speeds of Turbomachinery: Computer Predictions vs. Experimental Measurements-Part II: Effect of Tilt-Pad Bearing and Foundation Dynamics", *ASME Journal of Vibration Acoustics, Stress, Reliability in Design*, 109, 8-14.
- [195] Vance, J.M., 1988, "Rotordynamics of Turbomachinery", *John Wiley & Sons*, New York.
- [196] Varé, C. and Andrieux, S., 2001, "Cracked Beam Section Model Applied to Turbine Rotors", *International Symposium on Stability Control of Rotating Machinery (ISCORMA 2001)*, Minden, NV, 4002-4011.
- [197] Wauer, J., 1990, "On the Dynamics of Cracked Rotors: A Literature Survey", *Appl. Mech. Reviews*, Vol. 43, No. 1, 13-17.
- [198] Weisz, D.A., 1977, "Analysis of the Tennessee Valley Authority Gallatin No. 2 Unit Turbine Rotor Burst", *Westinghouse Electric Corporation, American Power Conference*, Chicago.
- [199] Werner, F., 1993, "The Ratio of 2X to 1X Vibration—A Shaft Crack Detection Myth", *Orbit*, Vol. 4, No.3, 11.
- [200] Wolf, J.A., 1968, "Whirl dynamics of a rotor partially filled with liquid", *ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 35. No. 4, 676-682.
- [201] Yamamoto, T., 1955, "On the critical speed of a shaft of sub-harmonic oscillations", *JSME*, Vol. 21, No. 111, 853-858.
- [202] Yamamoto, T., 1957, "On the vibrations of a rotating shaft", *Mem. Fac. Eng. Nagoya Univ.*, Vol. 9, No. 1.
- [203] Yamamoto, T. and Ota, H., 1963, "Unstable Vibrations of the shaft carrying an unsymmetrical rotating body", *Bull JSME*, Vol. 6, No. 23, 404-411.
- [204] Yamamoto, T. and Ota, H., 1964, "On the dynamically unstable vibrations of a shaft carrying an unsymmetrical rotating body", *Bull JSME*, Vol. 31, No. 3, 515-522.
- [205] Yamamoto, T., and Ota, H., 1969, "On the vibrations of a rotating shaft carrying an unsymmetrical rotor", *Mem. Fac. Eng. Nagoya Univ.*, Vol. 21, No. 1, 8-12.
- [206] Yamamoto, T. and Ishida, Y., 2001, "Linear and Nonlinear Rotordynamics: A Modern Treatment with Applications", Ed. John Wiley and Sons.
- [207] Yang, J.D., Zheng, T.S., Zhang, W., Yuan, H.Q. and Wen, B. C., 2004, "The complicated response of a simple rotor with a fatigue crack", *Department of Mechanics and Engineering Sciences, Fudan University*, Shanghai China.
- [208] Yang, W.-X., Qu, L.-S. and Jiang, J.-S., 2001, "Study of the Diagnostic Features of a Rotor with a Transverse Crack", *Insight, Non-Destructive Testing and Condition Monitoring*, Vol. 43, No. 8, 537-545.
- [209] Yen, H.-Y. and Herman Shen, M.-H., 1997, "The Effects of Fatigue Cracks on Free Torsional Vibration of Shafts", *IGTI 1997*, Paper No. 97- GT-249, 8
- [210] Zakhezin, A.M. and Malysheva, T.V., 2001, "Modal Analysis Rotor System for Diagnostics of the Fatigue Crack", *Condition Monitoring Conference 2001*, St Catherine's College, Oxford, UK, June 25-27.
- [211] Zambrano-Reyes, A., Nosov V.R., Gómez-Mancilla, J. C., Sánchez-Silva, F., 2004, "Modelo del Rotor de Jeffcott Extendido Desbalanceado y Fisurado Sobre Soportes Flexibles", *8º Congreso Nacional en Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, México D.F., Noviembre 15-19, 2004.
- [212] Zambrano-Reyes, A., Gómez-Mancilla, J.C., Nosov V. R., Sánchez-Silva, F., 2004, "La Influencia de la Orientación Entre Grieta y Desbalance y la Evolución Orbital para un Rotor de Jeffcott Extendido Fisurado", *8º Congreso Nacional en Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, México D.F., Noviembre 15-19, 2004.
- [213] Zanetta, G.A., 1992, "Identification Methods in the Dynamics of Turbogenerator Rotors", *Conference on Vibrations in rotating machinery*, IMechE, Bath, Paper C432/092, pp 173-181.
- [214] Zhao, M. and Luo, Z. H., 1992, "An Expert System of Crack Monitoring and Diagnosing for Rotating Machines", *Proceedings of Conference on Rotating Machine Dynamics*, Venice, Italy, 84-91.
- [215] Ziebarth, H. and Baumgartner, R.J., 1981, "Early detection of cross-sectional rotor cracks by turbine shaft vibration monitoring techniques", *ASME*, paper 81-JPGC-Pwr-26.
- [216] Zou, J., Chen, J., Pu, Y.P., and Zhong, P., 2002, "On the Wavelet Time-Frequency Analysis Algorithm in Identification of a Cracked Rotor", *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, Vol. 37, No. 3, 239-246.
- [217] Zou, J., Chen, J., Niu, J.C., and Geng, Z.M., 2003, "Application of the Wigner-Ville Distribution to Identification of a Cracked Rotor", *Proceedings of the IMechE, Part C, Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 217, No. 5, 551-556.

Apéndices

Apéndice A. Coeficientes rotodinámicos

Coeficientes rotodinámicos para una chumacera corta, condiciones de Gumbel

$$K_{xx} = \frac{4\pi[2\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]}{(1 - \varepsilon^2)^2[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]} \left(\frac{L}{D}\right)^2$$

$$C_{xx} = \frac{2\pi^2[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]} \left(\frac{L}{D}\right)^2$$

$$K_{yy} = \frac{4\varepsilon\pi[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{(1 - \varepsilon^2)^3[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]} \left(\frac{L}{D}\right)^2$$

$$C_{yy} = \frac{2\pi^2[\pi^2 + 2(24 - \pi^2)\varepsilon^2 + \pi^2\varepsilon^4]}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]} \left(\frac{L}{D}\right)^2$$

$$K_{xy} = \frac{\pi^2[\pi^2(2\varepsilon^2 - 1) + (16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]} \left(\frac{L}{D}\right)^2$$

$$C_{xy} = C_{yx} = \frac{8\varepsilon\pi[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{(1 - \varepsilon^2)^2[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]} \left(\frac{L}{D}\right)^2$$

$$K_{yx} = \frac{\pi^2[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]} \left(\frac{L}{D}\right)^2$$

Coeficientes rotodinámicos para una chumacera infinitamente larga, condiciones de Sommerfeld (2π)

$$K_{xx} = \frac{2[2\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$$

$$C_{xx} = \frac{\pi[\pi^2 - \varepsilon(8 - \pi^2)](2 + \varepsilon^2)\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon(1 + \varepsilon^2)[\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$$

$$K_{yy} = \frac{2[2\pi^2 + (16 - 3\pi^2)\varepsilon^2 + 3\pi^2\varepsilon^4 + 2(4 - \pi^2)\varepsilon^6]}{(2 - \varepsilon^2 - \varepsilon^4)[\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$$

$$C_{yy} = \frac{2\pi[\pi^2 - 8\varepsilon - 2\pi^2\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 + \varepsilon^4(\pi^2 - 6)]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$$

$$K_{xy} = \frac{\pi[\pi^2(2\varepsilon^2 - 1) + (4 - \pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$$

$$C_{xy} = C_{yx} = \frac{2(2 + \varepsilon^2)[\pi^2 + \varepsilon(\pi^2 + 8)]}{(1 + \varepsilon)[\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$$

$$K_{yx} = \frac{\pi\sqrt{1 - \varepsilon^2}[2\pi^2 + (16 - 3\pi^2)\varepsilon^2 + 3\pi^2\varepsilon^4 + 2(4 - \pi^2)\varepsilon^6]}{\varepsilon(2 - \varepsilon^2 - \varepsilon^4)[\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$$

Coefficientes rotodinámicos para una chumacera infinitamente larga, condiciones de Gumbel

$$K_{xx} = \frac{2[2\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$C_{xx} = \frac{\pi(\pi^2 - 8)(2 + \varepsilon^2)\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon[\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$K_{yy} = \frac{2[\pi^2(3\varepsilon^4 + 2) + \varepsilon^2(16 - 3\pi^2) + 2\varepsilon^6(4 - \pi^2)]}{(2 - \varepsilon^2 - \varepsilon^4)[\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$C_{yy} = \frac{2[\pi^4 - 2\varepsilon^2(16 - 6\pi^2 + \pi^4) + \pi^2\varepsilon^4(\pi^2 - 6)]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$K_{xy} = \frac{\pi[\pi^2(2\varepsilon^2 - 1) + \varepsilon^4(4 - \pi^2)]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$C_{xy} = C_{yx} = \frac{2(\pi^2 - 8)(2 + \varepsilon^2)}{[\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$K_{yx} = \frac{\pi\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2(3\varepsilon^4 + 2) + \varepsilon^2(16 - 3\pi^2) + 2\varepsilon^6(4 - \pi^2)]}{\varepsilon(2 - \varepsilon^2 - \varepsilon^4)[\pi^2 + (4 - \pi^2)\varepsilon^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Coefficientes rotodinámicos determinados bajo la Teoría de Warner

$$K_{xx} = \frac{12\pi G_0 \varepsilon [\pi^2(2 - \varepsilon^2) + 4\varepsilon]}{(1 - \varepsilon^2)(2 + \varepsilon^2)[4\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)]}$$

$$K_{xy} = \frac{6\pi^2 G_0 [\pi^2(1 - \varepsilon^2)^2 - 4\varepsilon^4]}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}(2 + \varepsilon^2)[4\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)]}$$

$$K_{yy} = 6\pi \left\{ -\left(\frac{D}{L}\right) \frac{2G_2 \varepsilon^2}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)} + \frac{G_0 [16\varepsilon^2(2 + \varepsilon^4) + 2\varepsilon\pi^2(2 - 3\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4 - 2\varepsilon^6)]}{(1 - \varepsilon^2)^2(2 + \varepsilon^2)^2 [4\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)]} \right\}$$

$$K_{yx} = 6\pi \left\{ \left(\frac{D}{L}\right) \frac{G_2 \pi \varepsilon}{(2 + \varepsilon^2)\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - \frac{G_0 \pi [8\varepsilon^2(2 + \varepsilon^4) + \pi^2(2 - 3\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4 - 2\varepsilon^6)]}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}(2 + \varepsilon^2)^2 [4\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)]} \right\}$$

$$C_{xx} = \frac{12\pi G_0 \varepsilon (4\varepsilon - \pi^2)}{(1 - \varepsilon^2)[4\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)]}$$

$$C_{yy} = 6\pi \left\{ -\left(\frac{D}{L}\right) \frac{2G_4 \omega \varepsilon^2}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)} + \frac{2\pi G_0 [2\varepsilon^2(6 - 2\varepsilon^2 - \varepsilon^4) + \pi^2(1 - \varepsilon^2)^2]}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}(2 + \varepsilon^2)[4\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)]} \right\}$$

$$C_{xy} = C_{yx} = 6\pi \left\{ \left(\frac{D}{L}\right) \frac{G_4 \omega \pi \varepsilon}{(2 + \varepsilon^2)\sqrt{1 - \varepsilon^2}} + \frac{2G_0 \varepsilon [8\varepsilon^2 - \pi^2(2 + 2\varepsilon^2 - \varepsilon^4)]}{(1 - \varepsilon^2)(2 + \varepsilon^2)[4\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)]} \right\}$$

Donde

:

$$(\lambda)_0 = \sqrt{\frac{2\varepsilon^2(2 + \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}(2 + 3\varepsilon^2) - 2(1 - \varepsilon^2)}}$$

$$A = \lambda \frac{L}{D}$$

$$G_0 = \left[1 - \frac{\tanh(A)}{A} \right] = f(\lambda)$$

$$G_1 = \frac{4\sqrt{1-\varepsilon^2}(\varepsilon^4 - 2\varepsilon^2 - 2) + \varepsilon^2(4 + 6\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4) + 8}{\sqrt{2(2 + \varepsilon^2)}}$$

$$G_2 = \frac{G_1}{\lambda^2} \left[\frac{A}{\cosh^2(A)} - \tanh(A) \right]$$

$$G_3 = 2 \left(\frac{2 + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \right) \frac{\varepsilon^2 \left[4 + \varepsilon^2 + \lambda^2(1 - \varepsilon^2) \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^3} \ln \left[\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right] \right) \right]}{\pi\omega\lambda \left[2 + 3\varepsilon^2 - 2\sqrt{1 - \varepsilon^2} \right]}$$

$$G_4 = \frac{G_3}{\lambda^2} \left[\frac{A}{\cosh^2(A)} - \tanh(A) \right]$$

Apéndice B. Programas desarrollados

Programa en MATLAB para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales del Modelo del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado

```
function FrecModel_1N
% FrecModel_1N, Resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales del Modelo de Rotor Jeffcott Extendido desbalanceado y
% fisurado. Utilizando la rutina ode45. Presenta graficas de las respuestas adimensionales del disco (Xd, Yd)
% y chumaceras (Xj, Yj) contra el tiempo adimensional (T). Presenta orbitas del disco, chumaceras y ambas
% orbitas juntas. Presenta graficas de amplitud vs. frecuencia y ángulo de fase vs. frecuencia.
% Elaborado por Ing. Armando Zambrano Reyes. Julio 2004
clc; clear; tic,
global OM alfaj Wg DK1 DK2 De Ud Uj phi beta Kxx Kyy Kxy Kyx Cxx Cyy Cyx Cxy
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Parametros de entrada %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
OM = 0.5; % Relación de velocidades
Wg = 1.1133; % Parámetro de gravedad
alfaj = 0.0485; % Relación de masas del muñón y disco
So = 2.0097; % Número de Sommerfeld fijo
DKe = 0.0542; % Cambio de rigidez adimensional en la dirección de la grieta
DKn = 0.0119; % Cambio de rigidez adimensional en la dirección perpendicular a la grieta
Ud = 0.05; % Desbalance adimensional en el disco
beta = pi; % Angulo entre la dirección de la fisura y el desbalance del disco. (radianes)
De = 0.005; % Relación de amortiguamiento externo
Uj = 0; % Desbalance adimensional en las chumaceras
phi = 0; % Angulo entre los vectores desbalance del disco y la chumacera. (radianes)
L = 0.0127; % Longitud de la chumacera [m]
D = 0.0254; % Diámetro de la chumacera [m]
q = L/D;
tint = [0:pi/100:(OM*200)*pi]; % Intervalo temporal en que se requiere obtener la solución
z0 = [0 0 0 0 0 0 0]; % Condiciones Iniciales
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
DK1=DKe+DKn; DK2=DKe-DKn; S=So*OM;

% Datos tomados del libro de Khonsari p.218, 225-227,
sk(:,1)=[129.7266;63.7582;41.2921;29.7252;22.5403;17.5694;13.8862;11.0306;8.7484;6.8884;5.3551;4.0854;3.0357;2.1750;
1.4802;9339;5226;2353;0631];
sk(:,2)=[ 73.3037;36.0374;23.3433;16.8097;12.7522; 9.9557; 7.8664; 6.2546;4.9661;3.9157;3.0494; 2.3314;1.7371;1.2490;
.8542;.5427;.3071;.1411;.0399];
sk(:,3)=[ 32.9983;16.2271;10.5166; 7.5796; 5.7573; 4.4972; 3.5647; 2.8415;2.2632;1.7913;1.4016; 1.0778;0.8090;0.5873;
.4068;.2631;.1530;.0736;.0228];
sk(:,4)=[ 18.8861;09.2998; 6.0243; 4.3465; 3.3065; 2.5882; 2.0566; 1.6445;1.3149;1.0457;0.8228; 0.6372;0.4825;0.3542;
.2489;.1641;.0980;.0492;.0166];
sk(:,5)=[ 8.7944;04.3273; 2.8100; 2.0322; 1.5514; 1.2200; 0.9752; 0.7855;0.6337;0.5093;0.4059; 0.3192;0.2463;0.1850;
.1338;.0916;.0576;.0312;.0119];
sk(:,6)=[ 4.2911;02.1120; 1.3742; 0.9975; 0.7658; 0.6066; 0.4894; 0.3987;0.3260;0.2663;0.2163; 0.1740;0.1379;0.1068;
.0803;.0575;.0383;.0223;.0094];
sk(:,7)=[ 2.7019;01.3302; 0.8674; 0.6319; 0.4876; 0.3889; 0.3164; 0.2604;0.2156;0.1786;0.1475; 0.1209;0.0979;0.0778;
.0601;.0445;.0308;.0188;.0084];
sk(:,8)=[ 1.5448;00.7628; 0.4998; 0.3667; 0.2855; 0.2303; 0.1900; 0.1589;0.1340;0.1134;0.0959; 0.0807;0.0673;0.0552;
.0442;.0341;.0246;.0158;.0075];
```

```
sk(:,9)=[ 1.1279;00.5588; 0.3678; 0.2715; 0.2130; 0.1733; 0.1444; 0.1221;0.1043;0.0894;0.0767; 0.0656;0.0556;0.0464;
.0379;0.298;0.221;0.145;0.071];
sk(:,10)=[ 0.4759;00.2415; 0.1631; 0.1237; 0.1000; 0.0838; 0.0720; 0.0629;0.0555;0.0493;0.0439; 0.0389;0.0344;0.0299;
.0256;0.211;0.165;0.115;0.061];
```

```
t=[1/8;1/6;1/4;1/3;1/2;3/4;1;1.5;2;4]; eps=0.05:0.05:0.95;
if q < 0.125
    sq=sk(:,1); e=spline(sq,eps,S);
elseif q >= 0.125 & q<=4
    sq=spline(t,sk,q); e=spline(sq,eps,S);
elseif q > 4
    sq=sk(:,10); e=spline(sq,eps,S);
end
psi=atan(pi*sqrt(1-e^2)/(4*e)); ex0=e*cos(psi); ey0=e*sin(psi);
```

% Cálculo de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento de las chumaceras

```
x=log10(S);
```

```
if L/D == .5
```

'%L/D = 0.5 Chumacera Cilíndrica Plana'

```
y1=.1803824*x^2-.3775245*x+.1866873;
y2=-.02760624*x^3-.1464941*x^2+.0298149*x+.3680273;
y3=.1237951*x^3+.5585833*x^2+.4548668*x+.8729334;
y4=-.04423276*x^7-.1764813*x^6-.0538674*x^5+.4092444*x^4+.1801445*x^3-...
.03941816*x^2+.7651717*x+.7261839;
y5=.08002726*x^4+.2859706*x^3+.5137666*x^2+.2534411*x+.6308782;
y6a=-1.272717*x^2-4.362663*x-3.692053;
y6b=-.6423088*x^6+1.24982*x^5-1.244396*x^4+.9244287*x^3-1.162631*x^2+...
1.064639*x+.4200118; y7=.0155*x+.35625; y8=.07894737*x+.3754211; Kxx=10^y1; Kyy=10^y2; Cxx=10^y3;
Cyy=10^y4; Kxy=10^y5; Cxy=10^y7; Cyx=10^y8;
```

```
if S < .22
```

```
    Kyx=10^y6a;
```

```
else
```

```
    Kyx=-10^y6b;
```

```
end
```

```
elseif L/D == 1
```

'%L/D = 1 Chumacera Cilíndrica Plana'

```
y1=.07*x^3+.3135*x^2-.2318*x+.0105;
y2=.0067*x^3-.0304*x^2-.0057*x+.3526;
y3=-.0611*x^3+.2717*x^2+.7312*x+1.1612;
y4=.051*x^4-.0487*x^3-.0396*x^2+.9401*x+1.168;
y5=-.0566*x^4-.128*x^3+.323*x^2+.7729*x+.9098;
y6a=-2.3093*x^3-12.485*x^2-22.727*x-13.973;
y6b=1.1907*x^5-1.1072*x^4-.5305*x^3+.442*x^2+.9676*x+.876;
y7=-.0258*x^6-.0524*x^5+.0928*x^4-.0211*x^3-.4474*x^2-.2586*x+.2904;
y8=-.0911*x^6-.2782*x^5+.0471*x^4+.494*x^3+.0779*x^2-.0746*x+.3337;
Kxx=10^y1; Kyy=10^y2; Cxx=10^y3; Cyy=10^y4; Kxy=10^y5; Cxy=10^y7; Cyx=10^y8;
```

```
if S < .1
```

```
    Kyx=10^y6a;
```

```
else
```

```
    Kyx=-10^y6b;
```

```
end
```

```
end
```

```
[T,z]=ode45(@rig,tint,z0); siz=size(z); ZN=z(siz(1)-400:siz(1),:);
ZN(:,1)=ZN(:,1)+ex0+Wg; ZN(:,2)=ZN(:,2)+ey0; ZN(:,3)=ZN(:,3)+ex0; ZN(:,4)=ZN(:,4)+ey0;
z(:,1)=z(:,1)+ex0+Wg; z(:,2)=z(:,2)+ey0; z(:,3)=z(:,3)+ex0; z(:,4)=z(:,4)+ey0;
```

```

% Graficacion de las Orbitas del sistema.
set(0,'Units','pixels'); scnsz = get(0,'ScreenSize'); figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30])
plot(ZN(:,2),ZN(:,1),'r',ZN(:,4),ZN(:,3),'b'), axis equal; box on; set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bfORBITAS DEL SISTEMA \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),' \alpha_j=',num2str(alfaj),...
      ', W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=', num2str(Ud),' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),...
      '\circ, U_j=',num2str(Uj),' \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),\circ, \Delta K_\xi=',num2str(DKe),...
      '\Delta K_\eta=',num2str(DKn)])
ylabel('DIRECCION X','FontSize',12,'FontWeight','bold'); xlabel('DIRECCION Y','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
legend('DISCO','CHUMACERA',1)

figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); plot(ZN(:,2),ZN(:,1),'r','LineWidth',2); axis equal; box on
set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bfORBITA DEL DISCO \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),' \alpha_j=',num2str(alfaj),...
      ', W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=',num2str(Ud),' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),...
      '\circ, U_j=',num2str(Uj),' \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),\circ, \Delta K_\xi=',num2str(DKe),...
      '\Delta K_\eta=',num2str(DKn)])
ylabel('DIRECCION X','FontSize',12,'FontWeight','bold'); xlabel('DIRECCION Y','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid

figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); plot(ZN(:,4),ZN(:,3),'b','LineWidth',2); axis equal; box on
set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bfORBITA DE LA CHUMACERA \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
      ', \alpha_j=',num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=', num2str(Ud),' \beta=',...
      num2str(round(beta*180/pi)),\circ, U_j=',num2str(Uj),' \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),\circ, \Delta K_\xi=',...
      num2str(DKe),' \Delta K_\eta=',num2str(DKn)])
ylabel('DIRECCION X','FontSize',12,'FontWeight','bold'); xlabel('DIRECCION Y','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid

% Graficacion de las respuestas del sistema.
figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(T,z(:,3),'r'); set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bfRESPUESTAS DE LA CHUMACERA \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),' \alpha_j=',...
      num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=',num2str(Ud),' \beta=',...
      num2str(round(beta*180/pi)),\circ, U_j=',num2str(Uj),' \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),\circ, \Delta K_\xi=',...
      num2str(DKe),' \Delta K_\eta=',num2str(DKn)])
ylabel('VERTICAL X_j','FontWeight','bold'); xlabel('TIEMPO ADIMENSIONAL \tau','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(T,z(:,4),'b'); ylabel('HORIZONTAL Y_j','FontWeight','bold');
xlabel('TIEMPO ADIMENSIONAL \tau','FontWeight','bold'); grid

figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(T,z(:,1),'r'); set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bfRESPUESTAS DEL DISCO \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),' \alpha_j=',...
      num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=', num2str(Ud),' \beta=',...
      num2str(round(beta*180/pi)),\circ, U_j=',num2str(Uj),' \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),\circ, \Delta K_\xi=',...
      num2str(DKe),' \Delta K_\eta=',num2str(DKn)])
ylabel('VERTICAL X_d','FontWeight','bold'); xlabel('TIEMPO ADIMENSIONAL \tau','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(T,z(:,2),'b'); ylabel('HORIZONTAL Y_d','FontWeight','bold');
xlabel('TIEMPO ADIMENSIONAL \tau','FontWeight','bold'); grid

% Analisis frecuencial de las respuestas del sistema.
x = z(:,1);fft=fft(x);n=length(fft);fft(1)=[];X=abs(fft(1:n/40))*2/n;F=(1:n/40)/(n/200);
p=unwrap(angle(fft));p=p(1:n/40)*180/pi;
figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(F,X,'r','LineWidth',2)
title(['\fontsize{12}\bfAMPLITUD Y FASE DE X_d \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),' \alpha_j=',...
      num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=', num2str(Ud),' \beta=',...
      num2str(round(beta*180/pi)),\circ, U_j=',num2str(Uj),' \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),\circ, \Delta K_\xi=',...
      num2str(DKe),' \Delta K_\eta=',num2str(DKn)])
ylabel('AMPLITUD','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(F,p,'b'); ylabel('FASE','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid

x = z(:,2);fft=fft(x);n=length(fft);fft(1)=[];X=abs(fft(1:n/40))*2/n;F=(1:n/40)/(n/200);
p=unwrap(angle(fft));p=p(1:n/40)*180/pi;

```

```
figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(F,X,'r','LineWidth',2)
title(['\fontsize{12}\bfAMPLITUD Y FASE DE Y_d \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM), ', \alpha_j=',...
      num2str(alfaj), ', W_g=',num2str(Wg), ', S_0=',num2str(So), ', U_d=', num2str(Ud), ', \beta=',...
      num2str(round(beta*180/pi)), '^\circ, U_j=',num2str(Uj), ', \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),...
      '^\circ, \Delta K_\xi=',num2str(DKe), ', \Delta K_\eta=',num2str(DKn)])
ylabel('AMPLITUD','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(F,p,'b'); ylabel('FASE','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
```

```
x = z(:,3);fftx=fft(x);n=length(fftx);fftx(1)=[];X=abs(fftx(1:n/40))*2/n;F=(1:n/40)/(n/200);
p=unwrap(angle(fftx));p=p(1:n/40)*180/pi;
figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(F,X,'r','LineWidth',2)
title(['\fontsize{12}\bfAMPLITUD Y FASE DE X_j \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM), ', \alpha_j=',...
      num2str(alfaj), ', W_g=',num2str(Wg), ', S_0=',num2str(So), ', U_d=', num2str(Ud), ', \beta=',...
      num2str(round(beta*180/pi)), '^\circ, U_j=',num2str(Uj), ', \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),...
      '^\circ, \Delta K_\xi=',num2str(DKe), ', \Delta K_\eta=',num2str(DKn)])
ylabel('AMPLITUD','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(F,p,'b'); ylabel('FASE','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
```

```
x = z(:,4);fftx=fft(x);n=length(fftx);fftx(1)=[];X=abs(fftx(1:n/40))*2/n;F=(1:n/40)/(n/200);
p=unwrap(angle(fftx));p=p(1:n/40)*180/pi;
figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(F,X,'r','LineWidth',2)
title(['\fontsize{12}\bfAMPLITUD Y FASE DE Y_j \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM), ', \alpha_j=',...
      num2str(alfaj), ', W_g=',num2str(Wg), ', S_0=',num2str(So), ', U_d=', num2str(Ud), ', \beta=',...
      num2str(round(beta*180/pi)), '^\circ, U_j=',num2str(Uj), ', \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),...
      '^\circ, \Delta K_\xi=',num2str(DKe), ', \Delta K_\eta=',num2str(DKn)])
ylabel('AMPLITUD','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(F,p,'b'); ylabel('FASE','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
clc; toc;
```

```
function dzdt=rig(T,z)
global OM alfaj Wg DK1 DK2 De Ud Uj phi beta Kxx Kyy Kxy Kyx Cxx Cyy Cyx Cxy
Phi=T+phi+beta;
g=(1+cos(Phi))/2;
%g=(2/pi)*(pi/4+cos(Phi)-cos(3*Phi)/3+cos(5*Phi)/5-cos(7*Phi)/7);
%g=(2/pi)*(pi/4+cos(Phi)-cos(3*Phi)/3+cos(5*Phi)/5-cos(7*Phi)/7+cos(9*Phi)/9-cos(11*Phi)/11+...
% cos(13*Phi)/13-cos(15*Phi)/15+cos(17*Phi)/17-cos(19*Phi)/19+cos(21*Phi)/21-cos(23*Phi)/23+...
% cos(25*Phi)/25-cos(27*Phi)/27+cos(29*Phi)/29-cos(31*Phi)/31+cos(33*Phi)/33-cos(35*Phi)/35+...
% cos(37*Phi)/37-cos(39*Phi)/39+cos(41*Phi)/41-cos(43*Phi)/43+cos(45*Phi)/45-cos(47*Phi)/47+...
% cos(49*Phi)/49-cos(51*Phi)/51+cos(53*Phi)/53-cos(55*Phi)/55+cos(57*Phi)/57-cos(59*Phi)/59+...
% cos(61*Phi)/61-cos(63*Phi)/63+cos(65*Phi)/65-cos(67*Phi)/67+cos(69*Phi)/69-cos(71*Phi)/71);
dzdt=zeros(8,1);
dzdt(1)=z(5);
dzdt(2)=z(6);
dzdt(3)=z(7);
dzdt(4)=z(8);
dzdt(5)=Ud*cos(T+phi)-(2*De/OM)*z(5)-(z(1)-z(3))/OM^2+(g/(2*OM^2))*((DK1+DK2*cos(2*Phi))*...
(z(1)-z(3)+Wg)+(DK2*sin(2*Phi))*(z(2)-z(4)));
dzdt(6)=Ud*sin(T+phi)-(2*De/OM)*z(6)-(z(2)-z(4))/OM^2+(g/(2*OM^2))*((DK2*sin(2*Phi))*...
(z(1)-z(3)+Wg)+(DK1-DK2*cos(2*Phi))*(z(2)-z(4)));
dzdt(7)=Uj*cos(T)-(Wg*(1+2*alfaj)/(2*OM^2*alfaj))*(Cxx*z(7)+Cxy*z(8)+Kxx*z(3)+Kxy*z(4)+...
(z(1)-z(3))/(2*OM^2*alfaj)-(g/(4*OM^2*alfaj))*((DK1+DK2*cos(2*Phi))*(z(1)-z(3)+Wg)+(DK2*sin(2*Phi))*(z(2)-z(4)));
dzdt(8)=Uj*sin(T)-(Wg*(1+2*alfaj)/(2*OM^2*alfaj))*(Cyx*z(7)+Cyy*z(8)+Kyx*z(3)+Kyy*z(4)+...
(z(2)-z(4))/(2*OM^2*alfaj)-(g/(4*OM^2*alfaj))*((DK2*sin(2*Phi))*(z(1)-z(3)+Wg)+(DK1-DK2*cos(2*Phi))*(z(2)-z(4)));
```

Programa en MATLAB para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales del Modelo del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado sobre toda un rango de velocidad

```

function AmpModel_1N
% AmpModel_1N, Resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales del Modelo de Rotor Jeffcott Extendido desbalanceado
% y fisurado. Utilizando la rutina ode45. Almacena graficas de las respuestas, graficas de amplitud vs.
% frecuencia, Angulo de fase vs. frecuencia y orbitas del disco y chumaceras para las cuatro orientaciones
% (0°,90°, 180° y 270°) del Angulo beta entre el desbalance del disco y la dirección de la grieta,
% almacenándolas en la carpeta "C:/Orbitas", de una forma organizada. Finalmente obtiene graficas Bode
% para las cuatro orientaciones.
% Elaborado por Ing. Armando Zambrano Reyes. Noviembre 2004
clc; clear; tic,
global OM alfa j Wg DK1 DK2 De Ud Uj phi beta Kxx Kyy Kxy Kyx Cxx Cyy Cyx Cxy
% Parametros de entrada
OMinic = 0.2; OMfin = 1.3; OMinc = 0.01; % Relación de velocidades
Wg = 1.1133; % Parámetro de gravedad
alfa = 0.0485; % Relación de masas del muñón y disco
So = 2.0097; % Número de Sommerfeld fijo
DKe = 0.0542; % Cambio de rigidez adimensional en la dirección de la grieta
DKn = 0.0119; % Cambio de rigidez adimensional en la dirección perpendicular a la grieta
Ud = 0.05; % Desbalance adimensional en el disco
De = 0.005; % Relación de amortiguamiento externo
Uj = 0; % Desbalance adimensional en las chumaceras
phi = 0; % Angulo entre los vectores desbalance del disco y la chumacera. (radianes)
L = 0.0127; % Longitud de la chumacera [m]
D = 0.0254; % Diámetro de la chumacera [m]
q = L/D;
z0 = [0 0 0 0 0 0 0]; % Condiciones Iniciales
DK1=DKe+DKn; DK2=DKe-DKn; j=-5;
for beta=0:pi/2:3*pi/2
    j=j+6;i=0; exiorb=exist('C:/Orbitas');
if exiorb ~= 7
    mkdir ('C:/', 'Orbitas');
end
directory=['Ud',num2str(Ud),'beta',num2str(beta*180/pi)]; mkdir('C:/Orbitas', directory); direc=['C:/Orbitas/', directory];
mkdir(direc,'Disco');mkdir(direc,'Chumacera');mkdir(direc,'Disco&Chum'); mkdir(direc,'RespDisco');
mkdir(direc,'RespChumacera'); mkdir(direc,'FrecDisco');mkdir(direc,'FrecChumacera'); i=0;
for OM=OMinic:OMinc:OMfin
i=i+1; S=So*OM;
% Datos del libro de Khonsari p.218, 225-227,
sk(:,1)=[129.7266;63.7582;41.2921;29.7252;22.5403;17.5694;13.8862;11.0306;8.7484;6.8884;5.3551;4.0854;3.0357;2.1750;
1.4802;9339;5226;2353;0631];
sk(:,2)=[ 73.3037;36.0374;23.3433;16.8097;12.7522; 9.9557; 7.8664; 6.2546;4.9661;3.9157;3.0494; 2.3314;1.7371;1.2490;
.8542;.5427;.3071;.1411;.0399];
sk(:,3)=[ 32.9983;16.2271;10.5166; 7.5796; 5.7573; 4.4972; 3.5647; 2.8415;2.2632;1.7913;1.4016; 1.0778;0.8090;0.5873;
.4068;.2631;.1530;.0736;.0228];
sk(:,4)=[ 18.8861;09.2998; 6.0243; 4.3465; 3.3065; 2.5882; 2.0566; 1.6445;1.3149;1.0457;0.8228; 0.6372;0.4825;0.3542;
.2489;.1641;.0980;.0492;.0166];
sk(:,5)=[ 8.7944;04.3273; 2.8100; 2.0322; 1.5514; 1.2200; 0.9752; 0.7855;0.6337;0.5093;0.4059; 0.3192;0.2463;0.1850;
.1338;.0916;.0576;.0312;.0119];
sk(:,6)=[ 4.2911;02.1120; 1.3742; 0.9975; 0.7658; 0.6066; 0.4894; 0.3987;0.3260;0.2663;0.2163; 0.1740;0.1379;0.1068;
.0803;.0575;.0383;.0223;.0094];

```

```
sk(:,7)=[ 2.7019;01.3302; 0.8674; 0.6319; 0.4876; 0.3889; 0.3164; 0.2604;0.2156;0.1786;0.1475; 0.1209;0.0979;0.0778;
.0601;.0445;.0308;.0188;.0084];
sk(:,8)=[ 1.5448;00.7628; 0.4998; 0.3667; 0.2855; 0.2303; 0.1900; 0.1589;0.1340;0.1134;0.0959; 0.0807;0.0673;0.0552;
.0442;.0341;.0246;.0158;.0075];
sk(:,9)=[ 1.1279;00.5588; 0.3678; 0.2715; 0.2130; 0.1733; 0.1444; 0.1221;0.1043;0.0894;0.0767; 0.0656;0.0556;0.0464;
.0379;.0298;.0221;.0145;.0071];
sk(:,10)=[ 0.4759;00.2415; 0.1631; 0.1237; 0.1000; 0.0838; 0.0720; 0.0629;0.0555;0.0493;0.0439; 0.0389;0.0344;0.0299;
.0256;.0211;.0165;.0115;.0061];
```

```
t=[1/8;1/6;1/4;1/3;1/2;3/4;1;1.5;2;4]; eps=0.05:0.05:0.95;
if q < 0.125
    sq=sk(:,1); e=spline(sq,eps,S);
elseif q >= 0.125 & q<=4
    sq=spline(t,sk,q); e=spline(sq,eps,S);
elseif q > 4
    sq=sk(:,10); e=spline(sq,eps,S);
end
psi=atan(pi*sqrt(1-e^2)/(4*e)); ex0=e*cos(psi); ey0=e*sin(psi);
```

%Cálculo de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento de las chumaceras

```
x=log10(S);
if L/D == .5
    y1=.1803824*x^2-.3775245*x+.1866873;
    y2=-.02760624*x^3-.1464941*x^2+.0298149*x+.3680273;
    y3=.1237951*x^3+.5585833*x^2+.4548668*x+.8729334;
    y4=-.04423276*x^7-.1764813*x^6-.0538674*x^5+.4092444*x^4+.1801445*x^3-...
    .03941816*x^2+.7651717*x+.7261839;
    y5=.08002726*x^4+.2859706*x^3+.5137666*x^2+.2534411*x+.6308782;
    y6a=-1.272717*x^2-4.362663*x-3.692053;
    y6b=-.6423088*x^6+1.24982*x^5-1.244396*x^4+.9244287*x^3-1.162631*x^2+...
    1.064639*x+.4200118; y7=.0155*x+.35625; y8=.07894737*x+.3754211; Kxx=10^y1; Kyy=10^y2; Cxx=10^y3;
    Cyy=10^y4; Kxy=10^y5; Cxy=10^y7; Cyx=10^y8;
    if S < .22
        Kyx=10^y6a;
    else
        Kyx=-10^y6b;
    end
elseif L/D == 1
    y1=.07*x^3+.3135*x^2-.2318*x+.0105;
    y2=.0067*x^3-.0304*x^2-.0057*x+.3526;
    y3=-.0611*x^3+.2717*x^2+.7312*x+1.1612;
    y4=.051*x^4-.0487*x^3-.0396*x^2+.9401*x+1.168;
    y5=-.0566*x^4-.128*x^3+.323*x^2+.7729*x+.9098;
    y6a=-2.3093*x^3-12.485*x^2-22.727*x-13.973;
    y6b=1.1907*x^5-1.1072*x^4-.5305*x^3+.442*x^2+.9676*x+.876;
    y7=-.0258*x^6-.0524*x^5+.0928*x^4-.0211*x^3-.4474*x^2-.2586*x+.2904;
    y8=-.0911*x^6-.2782*x^5+.0471*x^4+.494*x^3+.0779*x^2-.0746*x+.3337;
    Kxx=10^y1; Kyy=10^y2; Cxx=10^y3; Cyy=10^y4; Kxy=10^y5; Cxy=10^y7; Cyx=10^y8;
    if S < .1
        Kyx=10^y6a;
    else
        Kyx=-10^y6b;
    end
end
tint=[0:pi/100:(OM*200)*pi]; %Intervalo temporal en que se requiere obtener la solucion
[T,z]=ode45(@rig,tint,z0); siz=size(z); ZN=z(siz(1)-200:siz(1),:);
ZN(:,1)=ZN(:,1)+ex0+Wg; ZN(:,2)=ZN(:,2)+ey0; ZN(:,3)=ZN(:,3)+ex0; ZN(:,4)=ZN(:,4)+ey0;
z(:,1)=z(:,1)+ex0+Wg; z(:,2)=z(:,2)+ey0; z(:,3)=z(:,3)+ex0; z(:,4)=z(:,4)+ey0;
```



```

%Calculo de amplitudes deltaXd & deltaYd
ampli(i,j)=max(ZN(:,1))-min(ZN(:,1));           % delta Xd = xd maximo - xd minimo
ampli(i,j+1)=max(ZN(:,2))-min(ZN(:,2));         % delta Yd = yd maximo - yd minimo

%Calculo de amplitudes deltaXb & deltaYb
ampli(i,j+3)=max(ZN(:,3))-min(ZN(:,3));         % delta Xj = xj maximo - xj minimo
ampli(i,j+4)=max(ZN(:,4))-min(ZN(:,4));         % delta Yj = yj maximo - yj minimo

set(0,'Units','pixels'); scnsz = get(0,'ScreenSize');

%Trazando las orbitas del sistema
h1=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); plot(ZN(:,2),ZN(:,1),'r',ZN(:,4),ZN(:,3),'b'); axis equal; box on
set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bfORBITAS DEL SISTEMA \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM), ', \alpha_j=',...
      num2str(alfaj), ', W_g=',num2str(Wg), ', S_0=',num2str(So), ', U_d=', num2str(Ud), ', \beta=',...
      num2str(round(beta*180/pi)), '°, U_j=',num2str(Uj), ', \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),...
      '°, \DeltaK_\xi=',num2str(DKe), ', \DeltaK_\eta=',num2str(DKn)])
ylabel('DIRECCION X','FontSize',12,'FontWeight','bold'); xlabel('DIRECCION Y','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
legend('DISCO','CHUMACERA',1); filename=[direc,'/Disco&Chum/OrbD&C_',num2str(i)];
set(gcf,'PaperPositionMode','auto'); saveas(h1,filename,'fig'); saveas(h1,filename,'tif'), close

h2=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); plot(ZN(:,2),ZN(:,1),'r','LineWidth',2); axis equal; box on
set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bfORBITA DEL DISCO \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM), ', \alpha_j=',...
      num2str(alfaj), ', W_g=',num2str(Wg), ', S_0=',num2str(So), ', U_d=', num2str(Ud), ', \beta=',...
      num2str(round(beta*180/pi)), '°, U_j=',num2str(Uj), ', \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),...
      '°, \DeltaK_\xi=',num2str(DKe), ', \DeltaK_\eta=',num2str(DKn)])
ylabel('DIRECCION X','FontSize',12,'FontWeight','bold'); xlabel('DIRECCION Y','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
filename=[direc,'/Disco/OrbD_',num2str(i)]; set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h2,filename,'fig'); saveas(h2,filename,'tif'), close

h3=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); plot(ZN(:,4),ZN(:,3),'b','LineWidth',2); axis equal; box on
set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bfORBITA DE LA CHUMACERA \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM), ', \alpha_j=',...
      num2str(alfaj), ', W_g=',num2str(Wg), ', S_0=',num2str(So), ', U_d=', num2str(Ud), ', \beta=',...
      num2str(round(beta*180/pi)), '°, U_j=',num2str(Uj), ', \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),...
      '°, \DeltaK_\xi=',num2str(DKe), ', \DeltaK_\eta=',num2str(DKn)])
ylabel('DIRECCION X','FontSize',12,'FontWeight','bold'); xlabel('DIRECCION Y','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
filename=[direc,'/Chumacera/OrbCH_',num2str(i)]; set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h3,filename,'fig'); saveas(h3,filename,'tif'), close

% Graficacion de las respuestas del sistema.
h4=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(T,z(:,3),'r'); set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bfRESPUESTAS DE LA CHUMACERA \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM), ', \alpha_j=',...
      num2str(alfaj), ', W_g=',num2str(Wg), ', S_0=',num2str(So), ', U_d=', num2str(Ud), ', \beta=',...
      num2str(round(beta*180/pi)), '°, U_j=',num2str(Uj), ', \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),...
      '°, \DeltaK_\xi=',num2str(DKe), ', \DeltaK_\eta=',num2str(DKn)])
ylabel('VERTICAL X_j','FontWeight','bold'); xlabel('TIEMPO ADIMENSIONAL \tau','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(T,z(:,4),'b'); ylabel('HORIZONTAL Y_j','FontWeight','bold');
xlabel('TIEMPO ADIMENSIONAL \tau','FontWeight','bold'); grid
filename=[direc,'/RespChumacera/CH_',num2str(i)]; set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h4,filename,'fig'); saveas(h4,filename,'tif'), close

h5=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(T,z(:,1),'r'); set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bfRESPUESTAS DEL DISCO \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM), ', \alpha_j=',...
      num2str(alfaj), ', W_g=',num2str(Wg), ', S_0=',num2str(So), ', U_d=', num2str(Ud), ', \beta=',...
      num2str(round(beta*180/pi)), '°, U_j=',num2str(Uj), ', \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),...
      '°, \DeltaK_\xi=',num2str(DKe), ', \DeltaK_\eta=',num2str(DKn)])

```



```
ylabel('VERTICAL X_d','FontWeight','bold'); xlabel('TIEMPO ADIMENSIONAL \tau','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(T,z(:,2),'b'); ylabel('HORIZONTAL Y_d','FontWeight','bold');
xlabel('TIEMPO ADIMENSIONAL \tau','FontWeight','bold'); grid
filename=[direc,'/RespDisco/D_',num2str(i)]; set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h5,filename,'fig'); saveas(h5,filename,'tif'), close
```

% Analisis frecuencial de las respuestas del sistema.

```
x = z(:,1);fftx=fft(x);n=length(fftx);fftx(1)=[];X=abs(fftx(1:n/40))*2/n;F=(1:n/40)/(n/200);
p=unwrap(angle(fftx));p=p(1:n/40)*180/pi;
h6=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(F,X,'r','LineWidth',2)
title(['\fontsize{12}\bfAMPLITUD Y FASE DE X_d \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),', \alpha_j=',...
num2str(alfaj),', W_g=',num2str(Wg),', S_0=',num2str(So),', U_d=', num2str(Ud),', \beta=',...
num2str(round(beta*180/pi)),', U_j=',num2str(Uj),', \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),...
', \Delta K_{\xi}=',num2str(DKe),', \Delta K_{\eta}=',num2str(DKn)])
```

```
ylabel('AMPLITUD','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(F,p,'b'); ylabel('FASE','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
filename=[direc,'/FrecDisco/X_',num2str(i)]; set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h6,filename,'fig'); saveas(h6,filename,'tif'), close
```

```
x = z(:,2);fftx=fft(x);n=length(fftx);fftx(1)=[];X=abs(fftx(1:n/40))*2/n;F=(1:n/40)/(n/200);
p=unwrap(angle(fftx));p=p(1:n/40)*180/pi;
h7=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(F,X,'r','LineWidth',2)
title(['\fontsize{12}\bfAMPLITUD Y FASE DE Y_d \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
', \alpha_j=',num2str(alfaj),', W_g=',num2str(Wg),', S_0=',num2str(So),', U_d=',...
num2str(Ud),', \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),', U_j=',num2str(Uj),...
', \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),', \Delta K_{\xi}=',num2str(DKe),', \Delta K_{\eta}=',num2str(DKn)])
```

```
ylabel('AMPLITUD','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(F,p,'b') ylabel('FASE','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
filename=[direc,'/FrecDisco/Y_',num2str(i)]; set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h7,filename,'fig') saveas(h7,filename,'tif'), close
```

```
x = z(:,3);fftx=fft(x);n=length(fftx);fftx(1)=[];X=abs(fftx(1:n/40))*2/n;F=(1:n/40)/(n/200);
p=unwrap(angle(fftx));p=p(1:n/40)*180/pi;
h8=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(F,X,'r','LineWidth',2)
title(['\fontsize{12}\bfAMPLITUD Y FASE DE X_j \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
', \alpha_j=',num2str(alfaj),', W_g=',num2str(Wg),', S_0=',num2str(So),', U_d=',...
num2str(Ud),', \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),', U_j=',num2str(Uj),...
', \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),', \Delta K_{\xi}=',num2str(DKe),', \Delta K_{\eta}=',num2str(DKn)])
```

```
ylabel('AMPLITUD','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(F,p,'b'); ylabel('FASE','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
filename=[direc,'/FrecChumacera/X_',num2str(i)]; set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h8,filename,'fig'); saveas(h8,filename,'tif'), close
```

```
x = z(:,4);fftx=fft(x);n=length(fftx);fftx(1)=[];X=abs(fftx(1:n/40))*2/n;F=(1:n/40)/(n/200);
p=unwrap(angle(fftx));p=p(1:n/40)*180/pi;
h9=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(F,X,'r','LineWidth',2)
title(['\fontsize{12}\bfAMPLITUD Y FASE DE Y_j \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
', \alpha_j=',num2str(alfaj),', W_g=',num2str(Wg),', S_0=',num2str(So),', U_d=',...
num2str(Ud),', \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),', U_j=',num2str(Uj),...
', \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),', \Delta K_{\xi}=',num2str(DKe),', \Delta K_{\eta}=',num2str(DKn)])
```

```
ylabel('AMPLITUD','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(F,p,'b') ylabel('FASE','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
filename=[direc,'/FrecChumacera/Y_',num2str(i)]; set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h9,filename,'fig'); saveas(h9,filename,'tif'), close; clc
```

end
end

```
directory1=['RespuestasUd',num2str(Ud)]; mkdir('C:/Orbitas',directory1); omeg=OMinic:OMinc:OMfin;
```

```

h10=figure('Position',[1,1,scnsize(3),scnsize(4)-30]); hold on
plot(omeg,ampli(:,1),'-bo','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','b'); plot(omeg,ampli(:,7),'-rs','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','r')
plot(omeg,ampli(:,13),'k','LineWidth',2); plot(omeg,ampli(:,19),'-g^','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','g')
title(['\fontsize{12}\bfRESPUESTA VERTICAL X_d \fontsize{10}\rm\alpha_j =',num2str(alfaj),...
      ', W_g=',num2str(Wg),', S_0 =',num2str(So),', U_d =',num2str(Ud),', U_j =',num2str(Uj)...
      ', \phi =',num2str(round(phi*180/pi)),', \Delta K_\xi =', num2str(DKe),', \Delta K_\eta =',num2str(DKn)])
ylabel('AMPLITUD X_d','FontSize',12,'FontWeight','bold');
xlabel('RELACION DE VELOCIDADES \Omega','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
legend('\beta = 0^\circ,\beta = 90^\circ,\beta = 180^\circ,\beta = 270^\circ,2); hold off
filename=['C:/Orbitas/',directory1,'/Xd'];set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h10,filename,'fig'); saveas(h10,filename,'tif'), close

```

```

h11=figure('Position',[1,1,scnsize(3),scnsize(4)-30]); hold on
plot(omeg,ampli(:,2),'-bo','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','b'); plot(omeg,ampli(:,8),'-rs','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','r')
plot(omeg,ampli(:,14),'k','LineWidth',2); plot(omeg,ampli(:,20),'-g^','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','g')
title(['\fontsize{12}\bfRESPUESTA HORIZONTAL Y_d \fontsize{10}\rm\alpha_j =',num2str(alfaj),...
      ', W_g=',num2str(Wg),', S_0 =',num2str(So),', U_d =',num2str(Ud),', U_j =',num2str(Uj)...
      ', \phi =',num2str(round(phi*180/pi)),', \Delta K_\xi =', num2str(DKe),', \Delta K_\eta =',num2str(DKn)])
ylabel('AMPLITUD Y_d','FontSize',12,'FontWeight','bold');
xlabel('RELACION DE VELOCIDADES \Omega','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
legend('\beta = 0^\circ,\beta = 90^\circ,\beta = 180^\circ,\beta = 270^\circ,2); hold off
filename=['C:/Orbitas/',directory1,'/Yd'];set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h11,filename,'fig'); saveas(h11,filename,'tif'), close

```

```

h12=figure('Position',[1,1,scnsize(3),scnsize(4)-30]); hold on
plot(omeg,ampli(:,4),'-bo','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','b')
plot(omeg,ampli(:,10),'-rs','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','r'); plot(omeg,ampli(:,16),'k','LineWidth',2)
plot(omeg,ampli(:,22),'-g^','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','g')
title(['\fontsize{12}\bfRESPUESTA VERTICAL X_j \fontsize{10}\rm\alpha_j =',num2str(alfaj),...
      ', W_g=',num2str(Wg),', S_0 =',num2str(So),', U_d =',num2str(Ud),', U_j =',num2str(Uj)...
      ', \phi =',num2str(round(phi*180/pi)),', \Delta K_\xi =', num2str(DKe),', \Delta K_\eta =',...
      num2str(DKn)]) ylabel('AMPLITUD X_j','FontSize',12,'FontWeight','bold');
xlabel('RELACION DE VELOCIDADES \Omega','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
legend('\beta = 0^\circ,\beta = 90^\circ,\beta = 180^\circ,\beta = 270^\circ,2) hold off
filename=['C:/Orbitas/',directory1,'/Xj'];set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h12,filename,'fig') saveas(h12,filename,'tif'), close

```

```

h13=figure('Position',[1,1,scnsize(3),scnsize(4)-30]); hold on
plot(omeg,ampli(:,5),'-bo','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','b')
plot(omeg,ampli(:,11),'-rs','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','r'); plot(omeg,ampli(:,17),'k','LineWidth',2)
plot(omeg,ampli(:,23),'-g^','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','g')
title(['\fontsize{12}\bfRESPUESTA HORIZONTAL Y_j \fontsize{10}\rm\alpha_j =',num2str(alfaj),...
      ', W_g=',num2str(Wg),', S_0 =',num2str(So),', U_d =',num2str(Ud),', U_j =',num2str(Uj)...
      ', \phi =',num2str(round(phi*180/pi)),', \Delta K_\xi =', num2str(DKe),', \Delta K_\eta =',num2str(DKn)])
ylabel('AMPLITUD Y_j','FontSize',12,'FontWeight','bold');
xlabel('RELACION DE VELOCIDADES \Omega','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
legend('\beta = 0^\circ,\beta = 90^\circ,\beta = 180^\circ,\beta = 270^\circ,2); hold off
filename=['C:/Orbitas/',directory1,'/Yj'];set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h13,filename,'fig'); saveas(h13,filename,'tif'), close
clc; toc,

```

```
function dzdt=rig(T,z)
```

```
global OM alfaj Wg DK1 DK2 De Ud Uj phi beta Kxx Kyy Kxy Kyx Cxx Cyy Cyx Cxy
```

```
Phi=T+phi+beta;
```

```
g=(1+cos(Phi))/2;
```

```
%g=(2/pi)*(pi/4+cos(Phi)-cos(3*Phi)/3+cos(5*Phi)/5-cos(7*Phi)/7);
```

```
%g=(2/pi)*(pi/4+cos(Phi)-cos(3*Phi)/3+cos(5*Phi)/5-cos(7*Phi)/7+cos(9*Phi)/9-cos(11*Phi)/11+...
```

```
% cos(13*Phi)/13-cos(15*Phi)/15+cos(17*Phi)/17-cos(19*Phi)/19+cos(21*Phi)/21-cos(23*Phi)/23+...
```

```
% cos(25*Phi)/25-cos(27*Phi)/27+cos(29*Phi)/29-cos(31*Phi)/31+cos(33*Phi)/33-cos(35*Phi)/35+...
```

```
% cos(37*Phi)/37-cos(39*Phi)/39+cos(41*Phi)/41-cos(43*Phi)/43+cos(45*Phi)/45-cos(47*Phi)/47+...
% cos(49*Phi)/49-cos(51*Phi)/51+cos(53*Phi)/53-cos(55*Phi)/55+cos(57*Phi)/57-cos(59*Phi)/59+...
% cos(61*Phi)/61-cos(63*Phi)/63+cos(65*Phi)/65-cos(67*Phi)/67+cos(69*Phi)/69-cos(71*Phi)/71);
dzdt=zeros(8,1);
dzdt(1)=z(5);
dzdt(2)=z(6);
dzdt(3)=z(7);
dzdt(4)=z(8);
dzdt(5)=Ud*cos(T+phi)-(2*De/OM)*z(5)-(z(1)-z(3))/OM^2+(g/(2*OM^2))*((DK1+DK2*cos(2*Phi))*...
(z(1)-z(3)+Wg)+(DK2*sin(2*Phi))*(z(2)-z(4)));
dzdt(6)=Ud*sin(T+phi)-(2*De/OM)*z(6)-(z(2)-z(4))/OM^2+(g/(2*OM^2))*((DK2*sin(2*Phi))*...
(z(1)-z(3)+Wg)+(DK1-DK2*cos(2*Phi))*(z(2)-z(4)));
dzdt(7)=Uj*cos(T)-(Wg*(1+2*alfaj)/(2*OM^2*alfaj))*(Cxx*z(7)+Cxy*z(8)+Kxx*z(3)+Kxy*z(4))+...
(z(1)-z(3))/(2*OM^2*alfaj)-(g/(4*OM^2*alfaj))*((DK1+DK2*cos(2*Phi))*(z(1)-z(3)+Wg)+(DK2*sin(2*Phi))*(z(2)-z(4)));
dzdt(8)=Uj*sin(T)-(Wg*(1+2*alfaj)/(2*OM^2*alfaj))*(Cyx*z(7)+Cyy*z(8)+Kyx*z(3)+Kyy*z(4))+...
(z(2)-z(4))/(2*OM^2*alfaj)-(g/(4*OM^2*alfaj))*((DK2*sin(2*Phi))*(z(1)-z(3)+Wg)+(DK1-DK2*cos(2*Phi))*(z(2)-z(4)));
```

Programa en MATLAB para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales del Modelo del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado utilizando la solución numérica-analítica

function Model_1A

% Model_1A, Resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales del Modelo de Rotor Jeffcott Extendido desbalanceado y fisurado. Utilizando una solución aproximada. Presenta orbitas del disco, chumaceras y ambas orbitas juntas.
 % Realiza la comparación entre la solución Numérica y la solución Numérica-Analítica aproximada.
 % Elaborado por Ing. Armando Zambrano Reyes. Julio 2004

clc; clear

global q

%%%

% Parametros de entrada %%

OM = 0.5; % Relación de velocidades
 Wg = 1.1133; % Parámetro de gravedad
 alfaj = 0.0485; % Relación de masas del muñón y disco
 So = 2.0097; % Número de Sommerfeld fijo
 DKc = 0.0542; % Cambio de rigidez adimensional en la dirección de la grieta
 DKn = 0.0119; % Cambio de rigidez adimensional en la dirección perpendicular a la grieta
 Ud = 0.05; % Desbalance adimensional en el disco
 beta = pi; % Angulo entre la dirección de la fisura y el desbalance del disco. (radianes)
 De = 0.005; % Relación de amortiguamiento externo
 Uj = 0; % Desbalance adimensional en las chumaceras
 phi = 0; % Angulo entre los vectores desbalance del disco y la chumacera. (radianes)
 L = 0.0127; % Longitud de la chumacera [m]
 D = 0.0254; % Diámetro de la chumacera [m]

q = L/D;
 %%

DK1=DKc+DKn; DK2=DKc-DKn; S=So*OM; Udx=Ud*cos(phi); Udy=Ud*sin(phi); Wga=(1+2*alfaj)*Wg;

% Datos del libro de Khonsari p.218, 225-227,

sk(:,1)=[129.7266;63.7582;41.2921;29.7252;22.5403;17.5694;13.8862;11.0306;8.7484;6.8884;5.3551;4.0854;3.0357;2.1750;1.4802;9339;5226;2353;0631];
 sk(:,2)=[73.3037;36.0374;23.3433;16.8097;12.7522; 9.9557; 7.8664; 6.2546;4.9661;3.9157;3.0494; 2.3314;1.7371;1.2490; .8542; .5427; .3071; .1411;.0399];
 sk(:,3)=[32.9983;16.2271;10.5166; 7.5796; 5.7573; 4.4972; 3.5647; 2.8415;2.2632;1.7913;1.4016; 1.0778;0.8090;0.5873; .4068;2631;1530;.0736;.0228];

```

sk(:,4)=[ 18.8861;09.2998; 6.0243; 4.3465; 3.3065; 2.5882; 2.0566; 1.6445;1.3149;1.0457;0.8228; 0.6372;0.4825;0.3542;
.2489;1641;0980;0492;0166];
sk(:,5)=[ 8.7944;04.3273; 2.8100; 2.0322; 1.5514; 1.2200; 0.9752; 0.7855;0.6337;0.5093;0.4059; 0.3192;0.2463;0.1850;
.1338;0916;0576;0312;0119];
sk(:,6)=[ 4.2911;02.1120; 1.3742; 0.9975; 0.7658; 0.6066; 0.4894; 0.3987;0.3260;0.2663;0.2163; 0.1740;0.1379;0.1068;
.0803;0575;0383;0223;0094];
sk(:,7)=[ 2.7019;01.3302; 0.8674; 0.6319; 0.4876; 0.3889; 0.3164; 0.2604;0.2156;0.1786;0.1475; 0.1209;0.0979;0.0778;
.0601;0445;0308;0188;0084];
sk(:,8)=[ 1.5448;00.7628; 0.4998; 0.3667; 0.2855; 0.2303; 0.1900; 0.1589;0.1340;0.1134;0.0959; 0.0807;0.0673;0.0552;
.0442;0341;0246;0158;0075];
sk(:,9)=[ 1.1279;00.5588; 0.3678; 0.2715; 0.2130; 0.1733; 0.1444; 0.1221;0.1043;0.0894;0.0767; 0.0656;0.0556;0.0464;
.0379;0298;0221;0145;0071];
sk(:,10)=[ 0.4759;00.2415; 0.1631; 0.1237; 0.1000; 0.0838; 0.0720; 0.0629;0.0555;0.0493;0.0439; 0.0389;0.0344;0.0299;
.0256;0211;0165;0115;0061];

```

```

t=[1/8;1/6;1/4;1/3;1/2;3/4;1;1.5;2;4]; eps=0.05:0.05:0.95;

```

```

if q < 0.125

```

```

    sq=sk(:,1); e=spline(sq,eps,S);

```

```

elseif q >= 0.125 & q<=4

```

```

    sq=spline(t,sk,q); e=spline(sq,eps,S);

```

```

elseif q > 4

```

```

    sq=sk(:,10); e=spline(sq,eps,S);

```

```

end

```

```

psi=atan(pi*sqrt(1-e^2)/(4*e)); ex0=e*cos(psi); ey0=e*sin(psi);

```

```

om=OM; [Kxx,Kxy,Kyx,Kyy,Cxx,Cxy,Cyx,Cyy]= coef(S); d55=1-2*alfaj*om^2+Wga*Kxx; d77=1-2*alfaj*om^2+Wga*Kyy;

```

```

D=[(1-om^2) 2*om*De 0 0 -1 0 0 0;

```

```

    -2*om*De (1-om^2) 0 0 0 -1 0 0;

```

```

    0 0 (1-om^2) 2*om*De 0 0 -1 0;

```

```

    0 0 -2*om*De (1-om^2) 0 0 0 -1;

```

```

    -1 0 0 0 d55 Wga*Cxx Wga*Kxy Wga*Cxy;

```

```

    0 -1 0 0 -Wga*Cxx d55 -Wga*Cxy Wga*Kxy;

```

```

    0 0 -1 0 Wga*Kyx Wga*Cyx d77 Wga*Cyy;

```

```

    0 0 0 -1 -Wga*Cyx Wga*Kyx -Wga*Cyy d77];

```

```

U0=[om^2*Udx;-om^2*Udy;om^2*Udy;om^2*Udx;2*alfaj*om^2*Uj;0;0;2*alfaj*om^2*Uj];

```

```

Z0=inv(D)*U0;K1=DK1/4; K2=DK2/4; B=phi+beta;

```

```

    Ax=Z0(1)-Z0(5); %Ax=Ax0-Axj0

```

```

    Ay=Z0(3)-Z0(7); %Ay=Ay0-Ayj0

```

```

    Bx=Z0(2)-Z0(6); %Bx=Bx0-Bxj0

```

```

    By=Z0(4)-Z0(8); %By=By0-Byj0

```

```

Sxd1=K1*Wg+(K1/2)*(Ax*cos(B)-Bx*sin(B))+(K2/4)*((Ax+By)*cos(B)+(Ay-Bx)*sin(B));

```

```

Uxd1=K1*(Ax+Wg*cos(B))+(K2/2)*(Wg*cos(B)+(Ax+By)*cos(2*B)+(Ay-Bx)*sin(2*B));

```

```

Vxd1=K1*(Bx-Wg*sin(B))+(K2/2)*((Ay-Bx)*cos(2*B)-Wg*sin(B)-(Ax+By)*sin(2*B));

```

```

Uxd2=(K1/2)*(Ax*cos(B)+Bx*sin(B))+K2*Wg*cos(2*B)+(K2/4)*((Ax-By)*cos(B)+(Ax+By)*cos(3*B)+...

```

```

    (Ay+Bx)*sin(B)+(Ay-Bx)*sin(3*B));

```

```

Vxd2=(K1/2)*(Bx*cos(B)-Ax*sin(B))-K2*Wg*sin(2*B)+(K2/4)*((Ay+Bx)*cos(B)+(Ay-Bx)*cos(3*B)-...

```

```

    (Ax-By)*sin(B)-(Ax+By)*sin(3*B));

```

```

Uxd3=(K2/2)*((Ax-By)*cos(2*B)+(Ay+Bx)*sin(2*B)+Wg*cos(3*B));

```

```

Vxd3=(K2/2)*((Ay+Bx)*cos(2*B)-(Ax-By)*sin(2*B)-Wg*sin(3*B));

```

```

Uxd4=(K2/4)*((Ax-By)*cos(3*B)+(Ay+Bx)*sin(3*B));

```

```

    Vxd4=(K2/4)*((Ay+Bx)*cos(3*B)-(Ax-By)*sin(3*B));

```

```

Syd1=(K1/2)*(Ay*cos(B)-By*sin(B))+(K2/4)*((-Ay+Bx)*cos(B)+(Ax+By)*sin(B));

```

```

Uyd1=K1*Ay+(K2/2)*((-Ay+Bx)*cos(2*B)+(Ax+By)*sin(2*B)+Wg*sin(B));

```

```

Vyd1=K1*By+(K2/2)*((Ax+By)*cos(2*B)+(Ay-Bx)*sin(2*B)+Wg*cos(B));

```

```

Uyd2=(K1/2)*(Ay*cos(B)+By*sin(B))+K2*Wg*sin(2*B)+(K2/4)*((-Ay+Bx)*cos(B)+(-Ay+Bx)*cos(3*B)+...

```

```

    (Ax-By)*sin(B)+(Ax+By)*sin(3*B));

```

```

Vyd2=(K1/2)*(By*cos(B)-Ay*sin(B))+K2*Wg*cos(2*B)+(K2/4)*((Ax-By)*cos(B)+(Ay+Bx)*sin(B)+...

```

```

    (Ax+By)*cos(3*B)+(Ay-Bx)*sin(3*B));

```

```

Uyd3=(K2/2)*((-Ay+Bx)*cos(2*B)+(Ax-By)*sin(2*B)+Wg*sin(3*B));

```

```
Vyd3=(K2/2)*((Ax-By)*cos(2*B)+(Ay+Bx)*sin(2*B)+Wg*cos(3*B));
Uyd4=(K2/4)*(-(Ay+Bx)*cos(3*B)+(Ax-By)*sin(3*B));      Vyd4=(K2/4)*((Ax-By)*cos(3*B)+(Ay+Bx)*sin(3*B));

U1=[Uxd1;Vxd1;Uyd1;Vyd1;-Uxd1;-Vxd1;-Uyd1;-Vyd1];      U2=[Uxd2;Vxd2;Uyd2;Vyd2;-Uxd2;-Vxd2;-Uyd2;-Vyd2];
U3=[Uxd3;Vxd3;Uyd3;Vyd3;-Uxd3;-Vxd3;-Uyd3;-Vyd3];      U4=[Uxd4;Vxd4;Uyd4;Vyd4;-Uxd4;-Vxd4;-Uyd4;-Vyd4];
Sd1=[Sxd1;Syd1;-Sxd1;-Syd1];      C1=[1 0 -1 0;0 1 0 -1; -1 0 (Wga*Kxx+1) (Wga*Kxy);0 -1 (Wga*Kyx) (Wga*Kyy+1)];
om=2*OM; S=So*om; [Kxx,Kxy,Kyx,Kyy,Cxx,Cxy,Cyx,Cyy]= coef(S);
d55=1-2*alfaj*om^2+Wga*Kxx; d77=1-2*alfaj*om^2+Wga*Kyy;
D2=[(1-om^2) 2*om*De 0 0 -1 0 0 0;
     -2*om*De (1-om^2) 0 0 0 -1 0 0;
     0 0 (1-om^2) 2*om*De 0 0 -1 0;
     0 0 -2*om*De (1-om^2) 0 0 0 -1;
     -1 0 0 0 d55 Wga*Cxx Wga*Kxy Wga*Cxy;
     0 -1 0 0 -Wga*Cxx d55 -Wga*Cxy Wga*Kxy;
     0 0 -1 0 Wga*Kyx Wga*Cyx d77 Wga*Cyy;
     0 0 0 -1 -Wga*Cyx Wga*Kyx -Wga*Cyy d77];
```

```
om=3*OM; S=So*om; [Kxx,Kxy,Kyx,Kyy,Cxx,Cxy,Cyx,Cyy]= coef(S);
d55=1-2*alfaj*om^2+Wga*Kxx; d77=1-2*alfaj*om^2+Wga*Kyy;
D3=[(1-om^2) 2*om*De 0 0 -1 0 0 0;
     -2*om*De (1-om^2) 0 0 0 -1 0 0;
     0 0 (1-om^2) 2*om*De 0 0 -1 0;
     0 0 -2*om*De (1-om^2) 0 0 0 -1;
     -1 0 0 0 d55 Wga*Cxx Wga*Kxy Wga*Cxy;
     0 -1 0 0 -Wga*Cxx d55 -Wga*Cxy Wga*Kxy;
     0 0 -1 0 Wga*Kyx Wga*Cyx d77 Wga*Cyy;
     0 0 0 -1 -Wga*Cyx Wga*Kyx -Wga*Cyy d77];
```

```
om=4*OM; S=So*om; [Kxx,Kxy,Kyx,Kyy,Cxx,Cxy,Cyx,Cyy]= coef(S);
d55=1-2*alfaj*om^2+Wga*Kxx; d77=1-2*alfaj*om^2+Wga*Kyy;
D4=[(1-om^2) 2*om*De 0 0 -1 0 0 0;
     -2*om*De (1-om^2) 0 0 0 -1 0 0;
     0 0 (1-om^2) 2*om*De 0 0 -1 0;
     0 0 -2*om*De (1-om^2) 0 0 0 -1;
     -1 0 0 0 d55 Wga*Cxx Wga*Kxy Wga*Cxy;
     0 -1 0 0 -Wga*Cxx d55 -Wga*Cxy Wga*Kxy;
     0 0 -1 0 Wga*Kyx Wga*Cyx d77 Wga*Cyy;
     0 0 0 -1 -Wga*Cyx Wga*Kyx -Wga*Cyy d77];
```

```
Z1=inv(D)*U1; Z2=inv(D2)*U2; Z3=inv(D3)*U3; Z4=inv(D4)*U4; C=inv(C1)*Sd1; T=0:pi/100:20*pi;
```

```
DXd0=Z0(1)*cos(T)+Z0(2)*sin(T);      DYd0=Z0(3)*cos(T)+Z0(4)*sin(T);
DXj0=Z0(5)*cos(T)+Z0(6)*sin(T);      DYj0=Z0(7)*cos(T)+Z0(8)*sin(T);
DXd1=C(1)+Z1(1)*cos(T)+Z1(2)*sin(T);  DYd1=C(2)+Z1(3)*cos(T)+Z1(4)*sin(T);
DXj1=C(3)+Z1(5)*cos(T)+Z1(6)*sin(T);  DYj1=C(4)+Z1(7)*cos(T)+Z1(8)*sin(T);
DXd2=Z2(1)*cos(2*T)+Z2(2)*sin(2*T);  DYd2=Z2(3)*cos(2*T)+Z2(4)*sin(2*T);
DXj2=Z2(5)*cos(2*T)+Z2(6)*sin(2*T);  DYj2=Z2(7)*cos(2*T)+Z2(8)*sin(2*T);
DXd3=Z3(1)*cos(3*T)+Z3(2)*sin(3*T);  DYd3=Z3(3)*cos(3*T)+Z3(4)*sin(3*T);
DXj3=Z3(5)*cos(3*T)+Z3(6)*sin(3*T);  DYj3=Z3(7)*cos(3*T)+Z3(8)*sin(3*T);
DXd4=Z4(1)*cos(4*T)+Z4(2)*sin(4*T);  DYd4=Z4(3)*cos(4*T)+Z4(4)*sin(4*T);
DXj4=Z4(5)*cos(4*T)+Z4(6)*sin(4*T);  DYj4=Z4(7)*cos(4*T)+Z4(8)*sin(4*T);
DXd=DXd0+DXd1+DXd2+DXd3+DXd4;      DYd=DYd0+DYd1+DYd2+DYd3+DYd4;
DXj=DXj0+DXj1+DXj2+DXj3+DXj4;      DYj=DYj0+DYj1+DYj2+DYj3+DYj4;
```

```
ZA(1,:)=DXd+ex0+Wg; ZA(2,:)=DYd+ey0; ZA(3,:)=DXj+ex0; ZA(4,:)=DYj+ey0;
load ZN; set(0,'Units','pixels'); scnsz = get(0,'ScreenSize');
%Trazando las orbitas del sistema
h1=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); plot(ZA(:,2),ZA(:,1),'r',ZA(:,4),ZA(:,3),'b'); axis equal; box on
```



```
set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bFORBITAS DEL SISTEMA \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM), ', \alpha_j=',...
      num2str(alfaj), ', W_g=',num2str(Wg), ', S_0=',num2str(So), ', U_d=', num2str(Ud), '\beta=',...
      num2str(round(beta*180/pi)), '°, U_j=',num2str(Uj), ', \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),...
      '°, \DeltaK_\xi=',num2str(DKe), ', \DeltaK_\eta=',num2str(DKn)])
ylabel('DIRECCION X','FontSize',12,'FontWeight','bold'); xlabel('DIRECCION Y','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
legend('DISCO','CHUMACERA',1); filename=[direc,'/Disco&Chum/OrbD&C_',num2str(i)];
set(gcf,'PaperPositionMode','auto'); saveas(h1,filename,'fig'); saveas(h1,filename,'tif'), close
```

```
h2=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); plot(ZA(:,2),ZA(:,1),'r','LineWidth',2); axis equal; box on
set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bFORBITA DEL DISCO \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM), ', \alpha_j=',...
      num2str(alfaj), ', W_g=',num2str(Wg), ', S_0=',num2str(So), ', U_d=', num2str(Ud), '\beta=',...
      num2str(round(beta*180/pi)), '°, U_j=',num2str(Uj), ', \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),...
      '°, \DeltaK_\xi=',num2str(DKe), ', \DeltaK_\eta=',num2str(DKn)])
ylabel('DIRECCION X','FontSize',12,'FontWeight','bold'); xlabel('DIRECCION Y','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
filename=[direc,'/Disco/OrbD_',num2str(i)]; set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h2,filename,'fig'); saveas(h2,filename,'tif'), close
```

```
h3=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); plot(ZA(:,4),ZA(:,3),'b','LineWidth',2); axis equal; box on
set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bFORBITA DE LA CHUMACERA \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM), ', \alpha_j=',...
      num2str(alfaj), ', W_g=',num2str(Wg), ', S_0=',num2str(So), ', U_d=', num2str(Ud), '\beta=',...
      num2str(round(beta*180/pi)), '°, U_j=',num2str(Uj), ', \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),...
      '°, \DeltaK_\xi=',num2str(DKe), ', \DeltaK_\eta=',num2str(DKn)])
ylabel('DIRECCION X','FontSize',12,'FontWeight','bold'); xlabel('DIRECCION Y','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
filename=[direc,'/Chumacera/OrbCH_',num2str(i)]; set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h3,filename,'fig'); saveas(h3,filename,'tif'), close
```

```
figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); hold on
plot(ZN(:,2),ZN(:,1),'-ro','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','r'); plot(ZA(2,:),ZA(1,:),'b','LineWidth',2)
axis equal; box on; set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bFORBITA DEL DISCO \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM), ', \alpha_j=',num2str(alfaj),...
      ', W_g=',num2str(Wg), ', S_0=',num2str(So), '...', 'U_d=',num2str(Ud), '\beta=',num2str(round(beta*180/pi)),...
      '°, \DeltaK_\xi=',num2str(DKe), ', \DeltaK_\eta=',num2str(DKn)])
ylabel('DIRECCION X','FontSize',12,'FontWeight','bold'); xlabel('DIRECCION Y','FontSize',12,'FontWeight','bold');
grid on; legend('Numerica','Analitica',1); hold off
```

```
figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); hold on
plot(ZN(:,4),ZN(:,3),'-ro','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','r'); plot(ZA(4,:),ZA(3,:),'b','LineWidth',2)
axis equal; box on; set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bFORBITA DE LA CHUMACERA \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
      ', \alpha_j=',num2str(alfaj), ', W_g=',num2str(Wg), ', S_0=',num2str(So), '...', 'U_d=',num2str(Ud),...
      '\beta=',num2str(round(beta*180/pi)), '...', '°, \DeltaK_\xi=',num2str(DKe), ', \DeltaK_\eta=',num2str(DKn)])
ylabel('DIRECCION X','FontSize',12,'FontWeight','bold'); xlabel('DIRECCION Y','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
legend('Numerica','Analitica',1); hold off
```

```
function [Kxx,Kxy,Kyx,Kyy,Cxx,Cxy,Cyx,Cyy]= coef(S)
```

```
global q
```

```
if L/D == .5
```

```
    y1= .1803824*x^2-.3775245*x+.1866873;
    y2=-.02760624*x^3-.1464941*x^2+.0298149*x+.3680273;
    y3=.1237951*x^3+.5585833*x^2+.4548668*x+.8729334;
    y4=-.04423276*x^7-.1764813*x^6-.0538674*x^5+.4092444*x^4+.1801445*x^3-...
    .03941816*x^2+.7651717*x+.7261839;
    y5=.08002726*x^4+.2859706*x^3+.5137666*x^2+.2534411*x+.6308782;
    y6a=-1.272717*x^2-4.362663*x-3.692053;
    y6b=-.6423088*x^6+1.24982*x^5-1.244396*x^4+.9244287*x^3-1.162631*x^2+...
```

```

1.064639*x+.4200118; y7=.0155*x+.35625; y8=.07894737*x+.3754211; Kxx=10^y1; Kyy=10^y2; Cxx=10^y3;
Cyy=10^y4; Kxy=10^y5; Cxy=10^y7; Cyx=10^y8;
if S < .22
    Kyx=10^y6a;
else
    Kyx=-10^y6b;
end
elseif L/D == 1
y1=.07*x^3+.3135*x^2-.2318*x+.0105;
y2=.0067*x^3-.0304*x^2-.0057*x+.3526;
y3=-.0611*x^3+.2717*x^2+.7312*x+1.1612;
y4=.051*x^4-.0487*x^3-.0396*x^2+.9401*x+1.168;
y5=-.0566*x^4+.128*x^3+.323*x^2+.7729*x+.9098;
y6a=-2.3093*x^3-12.485*x^2-22.727*x-13.973;
y6b=1.1907*x^5-1.1072*x^4-.5305*x^3+.442*x^2+.9676*x+.876;
y7=-.0258*x^6-.0524*x^5+.0928*x^4-.0211*x^3-.4474*x^2-.2586*x+.2904;
y8=-.0911*x^6-.2782*x^5+.0471*x^4+.494*x^3+.0779*x^2-.0746*x+.3337;
Kxx=10^y1; Kyy=10^y2; Cxx=10^y3; Cyy=10^y4; Kxy=10^y5; Cxy=10^y7; Cyx=10^y8;
if S < .1
    Kyx=10^y6a;
else
    Kyx=-10^y6b;
end
end
end

```

Programa en MATLAB para evaluar la estabilidad del sistema del Modelo del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado

```

% FloquetModel_1a, Analiza la estabilidad del Modelo de Rotor Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado.
%
% Mostrando la grafica de máximo eigenvalor de Floquet contra velocidad de operación adimensional para
% el eje integro y ejes agrietados con profundidad de fisura de 12.5%, 25 % y 50 %. Basado en el programa
% Floquet elaborado por García-Illescas.
% Elaborado por Ing. Armando Zambrano Reyes. Noviembre 2004
clc; clear all
for i1=1:1:4
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Parametros de entrada %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
OMinic=0.2; OMfin=2.5; OMinc=0.05; % Relación de velocidades
Wg = 1.1133; % Parámetro de gravedad
alfaj = 0.0485; % Relación de masas del muñón y disco
So = 2.0097; % Número de Sommerfeld fijo
Ud = 0.05; % Desbalance adimensional en el disco
beta = pi; % Angulo entre la dirección de la fisura y el desbalance del disco. (radianes)
De = 0.005; % Relación de amortiguamiento externo
Uj = 0; % Desbalance adimensional en las chumaceras
phi = 0; % Angulo entre los vectores desbalance del disco y la chumacera. (radianes)
L = 0.0127; % Longitud de la chumacera [m]
D = 0.0254; % Diámetro de la chumacera [m]
q = L/D;
if i1==1 % Sin Grieta
    DKe=0.00001; DKn=0.000001;
elseif i1==2 % Profundidad 12.5 %
    DKe=0.0233; DKn=0.0078;
elseif i1==3 % Profundidad 25 %
    DKe=0.0542; DKn=0.0119;
elseif i1==4 % Profundidad 50 %
    DKe=0.2302; DKn=0.0517;

```

```

end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
DK1=DKe+DKn; DK2=DKe-DKn; T=sym('T'); i=0;
for OM=OMinic:OMinc:OMfin
i=i+1; S=So*OM;
%Cálculo de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento de las chumaceras
x=log10(S);
if L/D == .5
    y1=1.1803824*x^2-.3775245*x+.1866873;
    y2=-.02760624*x^3-.1464941*x^2+.0298149*x+.3680273;
    y3=.1237951*x^3+.5585833*x^2+.4548668*x+.8729334;
    y4=-.04423276*x^7-.1764813*x^6-.0538674*x^5+.4092444*x^4+.1801445*x^3-...
    .03941816*x^2+.7651717*x+.7261839;
    y5=.08002726*x^4+.2859706*x^3+.5137666*x^2+.2534411*x+.6308782;
    y6a=-1.272717*x^2-4.362663*x-3.692053;
    y6b=-.6423088*x^6+1.24982*x^5-1.244396*x^4+.9244287*x^3-1.162631*x^2+...
    1.064639*x+.4200118; y7=.0155*x+.35625; y8=.07894737*x+.3754211; Kxx=10^y1; Kyy=10^y2; Cxx=10^y3;
    Cyy=10^y4; Kxy=10^y5; Cxy=10^y7; Cyx=10^y8;
    if S < .22
        Kyx=10^y6a;
    else
        Kyx=-10^y6b;
    end
elseif L/D == 1
    y1=.07*x^3+.3135*x^2-.2318*x+.0105;
    y2=.0067*x^3-.0304*x^2-.0057*x+.3526;
    y3=-.0611*x^3+.2717*x^2+.7312*x+1.1612;
    y4=.051*x^4-.0487*x^3-.0396*x^2+.9401*x+1.168;
    y5=-.0566*x^4-.128*x^3+.323*x^2+.7729*x+.9098;
    y6a=-2.3093*x^3-12.485*x^2-22.727*x-13.973;
    y6b=1.1907*x^5-1.1072*x^4-.5305*x^3+.442*x^2+.9676*x+.876;
    y7=-.0258*x^6-.0524*x^5+.0928*x^4-.0211*x^3-.4474*x^2-.2586*x+.2904;
    y8=-.0911*x^6-.2782*x^5+.0471*x^4+.494*x^3+.0779*x^2-.0746*x+.3337;
    Kxx=10^y1; Kyy=10^y2; Cxx=10^y3; Cyy=10^y4; Kxy=10^y5; Cxy=10^y7; Cyx=10^y8;
    if S < .1
        Kyx=10^y6a;
    else
        Kyx=-10^y6b;
    end
end
% Analisis de estabilidad de Floquet
Phi=T+phi+beta; g=(1+cos(Phi))/2;
% g=(2/pi)*(pi/4+cos(Phi)-cos(3*Phi))/3+cos(5*Phi)/5-cos(7*Phi)/7+cos(9*Phi)/9-cos(11*Phi)/11+...
% cos(13*Phi)/13-cos(15*Phi)/15+cos(17*Phi)/17-cos(19*Phi)/19+cos(21*Phi)/21-cos(23*Phi)/23+...
% cos(25*Phi)/25-cos(27*Phi)/27+cos(29*Phi)/29-cos(31*Phi)/31+cos(33*Phi)/33-cos(35*Phi)/35+...
% cos(37*Phi)/37-cos(39*Phi)/39+cos(41*Phi)/41-cos(43*Phi)/43+cos(45*Phi)/45-cos(47*Phi)/47+...
% cos(49*Phi)/49-cos(51*Phi)/51+cos(53*Phi)/53-cos(55*Phi)/55+cos(57*Phi)/57-cos(59*Phi)/59+...
% cos(61*Phi)/61-cos(63*Phi)/63+cos(65*Phi)/65-cos(67*Phi)/67+cos(69*Phi)/69-cos(71*Phi)/71);
P1=1-0.5*g*(DK1+DK2*cos(2*Phi)); P2=1-0.5*g*(DK1-DK2*cos(2*Phi)); Q1=0.5*g*DK2*sin(2*Phi);
Wga=Wg*(1+2*alfaj);
% Elementos de la matriz periódica de estado [A]
a51=-P1/OM^2; a52=Q1/OM^2; a53=P1/OM^2; a54=-Q1/OM^2; a55=-2*De/OM;
a61=Q1/OM^2; a62=-P2/OM^2; a63=-Q1/OM^2; a64=P2/OM^2; a66=-2*De/OM;
a71=P1/(2*alfaj*OM^2); a72=-Q1/(2*alfaj*OM^2); a73=-(P1+Wga*Kxx)/(2*alfaj*OM^2);
a74=(Q1-Wga*Kxy)/(2*alfaj*OM^2); a77=-Wga*Cxx/(2*alfaj*OM^2); a78=-Wga*Cxy/(2*alfaj*OM^2);
a81=-Q1/(2*alfaj*OM^2); a82=P2/(2*alfaj*OM^2); a83=(Q1-Wga*Kyx)/(2*alfaj*OM^2);
a84=-(P2+Wga*Kyy)/(2*alfaj*OM^2); a87=-Wga*Cyx/(2*alfaj*OM^2); a88=-Wga*Cyy/(2*alfaj*OM^2);

```



```

% Matriz periódica de estado [A] (con periodo T=2*pi)
A=vpa([0 0 0 0 1 0 0 0;
       0 0 0 0 0 1 0 0;
       0 0 0 0 0 0 1 0;
       0 0 0 0 0 0 0 1;
       a51 a52 a53 a54 a55 0 0 0;
       a61 a62 a63 a64 0 a66 0 0;
       a71 a72 a73 a74 0 0 a77 a78;
       a81 a82 a83 a84 0 0 a87 a88]);
% Cálculo de las matrices Bk donde k=1,2 intervalos integrando entre límites [A]dFI
B1=int(A,T,0,pi); B2=int(A,T,pi,2*pi);
% Cálculo de la matriz de transición [TRANS] (única) mediante Ci = e elevado a Bk
C1=expm(B1);C2=expm(B2); TRANS=C1*C2;
% Cálculo de los eigenvalores de Floquet de la matriz de transición [T]
D=eig(TRANS); % D = vector de eigenvalores
% Determinación de la estabilidad del sistema
DD=abs(D); d=double(DD);
if d(1)<1 & d(2)<1 & d(3)<1 & d(4)<1 & d(5)<1 & d(6)<1 & d(7)<1 & d(8)<1
    'SISTEMA ESTABLE SEGUN FLOQUET!'
elseif d(1)>1 | d(2)>1 | d(3)>1 | d(4)>1 | d(5)>1 | d(6)>1 | d(7)>1 | d(8)>1
    'SISTEMA INESTABLE SEGUN FLOQUET!'
elseif d(1)==1 | d(2)==1 | d(3)==1 | d(4)==1 | d(5)==1 | d(6)==1 | d(7)==1 | d(8)==1
    'SISTEMA EN EL UMBRAL DE ESTABILIDAD SEGUN FLOQUET!'
else
    error('¡Situación Inesperada!')
end
FloquetEigMax(i1,i)=max(d);
end
end
om=OMinc:OMinc:OMfin; set(0,'Units','pixels'); sncsize = get(0,'ScreenSize');
figure('Position',[1,1,sncsize(3),sncsize(4)-30]); hold on
plot(om,FloquetEigMax(1,:),'g','LineWidth',2); plot(om,FloquetEigMax(2,:),'k','LineWidth',2)
plot(om,FloquetEigMax(3,:),'b','LineWidth',2); plot(om,FloquetEigMax(4,:),'r','LineWidth',2)
title(['\fontsize{12}\bfGRADO DE ESTABILIDAD \fontsize{10}\rm\alpha_j=',num2str(alfaj),...
       ', W_g=',num2str(Wg),', S_0=',num2str(So),', U_d=',num2str(Ud),...
       ', \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),', U_j=',num2str(Uj),',... ', \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),'^o'])
ylabel('MAXIMO EIGENVALOR DE FLOQUET','FontSize',12,'FontWeight','bold');
xlabel('RELACION DE VELOCIDADES \Omega','FontSize',12,'FontWeight','bold');
legend('Sin grieta','12.5 %','25 %','50 %',2); grid on; hold off

```

Programa en MATLAB para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales del Modelo del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado sobre soportes flexibles

```

function FrecModel_2N
% FrecModel_2N, Resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales del Modelo de Rotor Jeffcott Extendido desbalanceado y
% fisurado Sobre soportes flexibles. Utilizando la rutina ode45.
% Presenta graficas de las respuestas adimensionales del disco (Xd, Yd),chumaceras (Xj, Yj) y soportes
% (Xs, Ys) contra el tiempo adimensional (T). Presenta orbitas del disco, chumaceras, soportes y ambas
% orbitas juntas. Presenta graficas de amplitud vs. frecuencia y ángulo de fase vs. frecuencia.
% Elaborado por Ing. Armando Zambrano Reyes. Noviembre 2004
clc; clear; tic;
global OM alfaj alfaw Wg DK1 DK2 De Ud Uj phi beta Kxx Kyy Kxy Kyx Cxx Cyy Cyx Cxy Ks Cs
%% Parametros de entrada %%
OM = 0.5; % Relación de velocidades

```

```

Wg = 1.1133;          % Parámetro de gravedad
alfaj = 0.0485;       % Relación de masas del muñón y disco
So = 2.0097;         % Número de Sommerfeld fijo
DKe = 0.0542;        % Cambio de rigidez adimensional en la dirección de la grieta
DKn = 0.0119;        % Cambio de rigidez adimensional en la dirección perpendicular a la grieta
Ud = 0.05;           % Desbalance adimensional en el disco
beta = pi;           % Angulo entre la dirección de la fisura y el desbalance del disco. (radianes)
De = 0.005;          % Relación de amortiguamiento externo
Uj = 0;              % Desbalance adimensional en las chumaceras
phi = 0;             % Angulo entre los vectores desbalance del disco y la chumacera. (radianes)
alfas=1e6;           % Relación de masas del soporte (ms/m)
Ks=1e6;              % Rigidez adimensional del soporte (ks/k)
Cs=0;                % Amortiguamiento adimensional del soporte
L = 0.0127;          % Longitud de la chumacera [m]
D = 0.0254;          % Diámetro de la chumacera [m]
q = L/D;
tint = [0;pi/100:(OM*200)*pi]; % Intervalo temporal en que se requiere obtener la solución
z0=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]; % Condiciones Iniciales
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
DK1=DKe+DKn; DK2=DKe-DKn; S=So*OM;

% Datos tomados del libro de Khonsari p.218, 225-227,
sk(:,1)=[129.7266;63.7582;41.2921;29.7252;22.5403;17.5694;13.8862;11.0306;8.7484;6.8884;5.3551;4.0854;3.0357;2.1750;
1.4802;9339;5226;2353;0631];
sk(:,2)=[ 73.3037;36.0374;23.3433;16.8097;12.7522; 9.9557; 7.8664; 6.2546;4.9661;3.9157;3.0494; 2.3314;1.7371;1.2490;
.8542;5427;.3071;.1411;.0399];
sk(:,3)=[ 32.9983;16.2271;10.5166; 7.5796; 5.7573; 4.4972; 3.5647; 2.8415;2.2632;1.7913;1.4016; 1.0778;0.8090;0.5873;
.4068;.2631;1530;.0736;.0228];
sk(:,4)=[ 18.8861;09.2998; 6.0243; 4.3465; 3.3065; 2.5882; 2.0566; 1.6445;1.3149;1.0457;0.8228; 0.6372;0.4825;0.3542;
.2489;.1641;.0980;.0492;.0166];
sk(:,5)=[ 8.7944;04.3273; 2.8100; 2.0322; 1.5514; 1.2200; 0.9752; 0.7855;0.6337;0.5093;0.4059; 0.3192;0.2463;0.1850;
.1338;.0916;.0576;.0312;.0119];
sk(:,6)=[ 4.2911;02.1120; 1.3742; 0.9975; 0.7658; 0.6066; 0.4894; 0.3987;0.3260;0.2663;0.2163; 0.1740;0.1379;0.1068;
.0803;.0575;.0383;.0223;.0094];
sk(:,7)=[ 2.7019;01.3302; 0.8674; 0.6319; 0.4876; 0.3889; 0.3164; 0.2604;0.2156;0.1786;0.1475; 0.1209;0.0979;0.0778;
.0601;.0445;.0308;.0188;.0084];
sk(:,8)=[ 1.5448;00.7628; 0.4998; 0.3667; 0.2855; 0.2303; 0.1900; 0.1589;0.1340;0.1134;0.0959; 0.0807;0.0673;0.0552;
.0442;.0341;.0246;.0158;.0075];
sk(:,9)=[ 1.1279;00.5588; 0.3678; 0.2715; 0.2130; 0.1733; 0.1444; 0.1221;0.1043;0.0894;0.0767; 0.0656;0.0556;0.0464;
.0379;.0298;.0221;.0145;.0071];
sk(:,10)=[ 0.4759;00.2415; 0.1631; 0.1237; 0.1000; 0.0838; 0.0720; 0.0629;0.0555;0.0493;0.0439; 0.0389;0.0344;0.0299;
.0256;.0211;.0165;.0115;.0061];
t=[1/8;1/6;1/4;1/3;1/2;3/4;1;1.5;2;4]; eps=0.05:0.05:0.95;
if q < 0.125
    sq=sk(:,1); e=spline(sq,eps,S);
elseif q >= 0.125 & q<=4
    sq=spline(t,sk,q); e=spline(sq,eps,S);
elseif q > 4
    sq=sk(:,10); e=spline(sq,eps,S);
end
psi=atan(pi*sqrt(1-e^2)/(4*e)); ex0=e*cos(psi); ey0=e*sin(psi);

% Cálculo de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento de las chumaceras
x=log10(S);
if L/D == .5
    %L/D = 0.5 Chumacera Cilíndrica Plana'
    y1=.1803824*x^2-.3775245*x+.1866873;
    y2=-.02760624*x^3-.1464941*x^2+.0298149*x+.3680273;

```

```

y3=.1237951*x^3+.5585833*x^2+.4548668*x+.8729334;
y4=-.04423276*x^7-.1764813*x^6-.0538674*x^5+.4092444*x^4+.1801445*x^3-...
.03941816*x^2+.7651717*x+.7261839;
y5=.08002726*x^4+.2859706*x^3+.5137666*x^2+.2534411*x+.6308782;
y6a=-1.272717*x^2-4.362663*x-3.692053;
y6b=-.6423088*x^6+1.24982*x^5-1.244396*x^4+.9244287*x^3-1.162631*x^2+...
1.064639*x+.4200118; y7=.0155*x+.35625; y8=.07894737*x+.3754211; Kxx=10^y1; Kyy=10^y2; Cxx=10^y3;
Cyy=10^y4; Kxy=10^y5; Cxy=10^y7; Cyx=10^y8;
if S < .22
    Kyx=10^y6a;
else
    Kyx=-10^y6b;
end
elseif L/D == 1
    %'L/D = 1 Chumacera Cilíndrica Plana'
    y1=.07*x^3+.3135*x^2-.2318*x+.0105;
    y2=.0067*x^3-.0304*x^2-.0057*x+.3526;
    y3=-.0611*x^3+.2717*x^2+.7312*x+1.1612;
    y4=.051*x^4-.0487*x^3-.0396*x^2+.9401*x+1.168;
    y5=-.0566*x^4-.128*x^3+.323*x^2+.7729*x+.9098;
    y6a=-2.3093*x^3-12.485*x^2-22.727*x-13.973;
    y6b=1.1907*x^5-1.1072*x^4-.5305*x^3+.442*x^2+.9676*x+.876;
    y7=-.0258*x^6-.0524*x^5+.0928*x^4-.0211*x^3-.4474*x^2-.2586*x+.2904;
    y8=-.0911*x^6-.2782*x^5+.0471*x^4+.494*x^3+.0779*x^2-.0746*x+.3337;
    Kxx=10^y1; Kyy=10^y2; Cxx=10^y3; Cyy=10^y4; Kxy=10^y5; Cxy=10^y7; Cyx=10^y8;
    if S < .1
        Kyx=10^y6a;
    else
        Kyx=-10^y6b;
    end
end
[T,z]=ode45(@flex,tint,z0); siz=size(z); ZN=z(siz(1)-400:siz(1),:);
ZN(:,1)=ZN(:,1)+ex0+Wg; ZN(:,2)=ZN(:,2)+ey0; ZN(:,3)=ZN(:,3)+ex0; ZN(:,4)=ZN(:,4)+ey0;
z(:,1)=z(:,1)+ex0+Wg; z(:,2)=z(:,2)+ey0; z(:,3)=z(:,3)+ex0; z(:,4)=z(:,4)+ey0;

% Graficacion de las Orbitas del sistema.
set(0,'Units','pixels'); scnsz = get(0,'ScreenSize'); figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30])
plot(ZN(:,2),ZN(:,1),'r',ZN(:,4),ZN(:,3),'b',ZN(:,6),ZN(:,5),'g'); axis equal; box on; set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12} \bfORBITAS DEL SISTEMA \fontsize{10} \rm \Omega=',num2str(OM),...
    '\alpha_j=',num2str(alfaj), '\W_g=',num2str(Wg), '\S_0=',num2str(So), '\U_d=',...
    num2str(Ud), '\beta=',num2str(round(beta*180/pi)), '\U_j=',num2str(Uj),...
    '\phi=',num2str(round(phi*180/pi)), '\DeltaK_\xi=',num2str(DKc), '\DeltaK_\eta=',num2str(DKn)])
ylabel('DIRECCION X','FontSize',12,'FontWeight','bold'); xlabel('DIRECCION Y','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
legend('DISCO','CHUMACERA','SOPORTE',1)

figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); plot(ZN(:,2),ZN(:,1),'r','LineWidth',2);
axis equal; box on; set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12} \bfORBITA DEL DISCO \fontsize{10} \rm \Omega=',num2str(OM),...
    '\alpha_j=',num2str(alfaj), '\W_g=',num2str(Wg), '\S_0=',num2str(So), '\U_d=',...
    num2str(Ud), '\beta=',num2str(round(beta*180/pi)), '\U_j=',num2str(Uj),...
    '\phi=',num2str(round(phi*180/pi)), '\DeltaK_\xi=',num2str(DKc), '\DeltaK_\eta=',num2str(DKn)])
ylabel('DIRECCION X','FontSize',12,'FontWeight','bold'); xlabel('DIRECCION Y','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid

figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); plot(ZN(:,4),ZN(:,3),'b','LineWidth',2)
axis equal; box on; set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12} \bfORBITA DE LA CHUMACERA \fontsize{10} \rm \Omega=',num2str(OM),...
    '\alpha_j=',num2str(alfaj), '\W_g=',num2str(Wg), '\S_0=',num2str(So), '\U_d=',...
    num2str(Ud), '\beta=',num2str(round(beta*180/pi)), '\U_j=',num2str(Uj),...
    '\phi=',num2str(round(phi*180/pi)), '\DeltaK_\xi=',num2str(DKc), '\DeltaK_\eta=',num2str(DKn)])

```

```
ylabel('DIRECCION X','FontSize',12,'FontWeight','bold'); xlabel('DIRECCION Y','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); plot(ZN(:,6),ZN(:,5),'g','LineWidth',2)
axis equal; box on; set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bfORBITA DEL SOPORTE \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
      '\alpha_j=',num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=',...
      num2str(Ud),' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),^\circ, U_j=',num2str(Uj)],... ',
      '\phi=',num2str(round(phi*180/pi)),^\circ, \Delta K_{\xi}=',num2str(DKe), '\Delta K_{\eta}=',num2str(DKn)])
ylabel('DIRECCION X','FontSize',12,'FontWeight','bold'); xlabel('DIRECCION Y','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
```

% Graficacion de las respuestas del sistema.

```
figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(T,z(:,3),'r') set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bfRESPUESTAS DE LA CHUMACERA \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
      '\alpha_j=',num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=',...
      num2str(Ud),' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),^\circ, U_j=',num2str(Uj)],... ',
      '\phi=',num2str(round(phi*180/pi)),^\circ, \Delta K_{\xi}=',num2str(DKe), '\Delta K_{\eta}=',num2str(DKn)])
ylabel('VERTICAL X_j','FontWeight','bold'); xlabel('TIEMPO ADIMENSIONAL \tau','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(T,z(:,4),'b')
ylabel('HORIZONTAL Y_j','FontWeight','bold'); xlabel('TIEMPO ADIMENSIONAL \tau','FontWeight','bold'); grid
```

```
figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(T,z(:,1),'r') set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bfRESPUESTAS DEL DISCO \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
      '\alpha_j=',num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=',...
      num2str(Ud),' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),^\circ, U_j=',num2str(Uj)],... ',
      '\phi=',num2str(round(phi*180/pi)),^\circ, \Delta K_{\xi}=',num2str(DKe), '\Delta K_{\eta}=',num2str(DKn)])
ylabel('VERTICAL X_d','FontWeight','bold'); xlabel('TIEMPO ADIMENSIONAL \tau','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(T,z(:,2),'b')
ylabel('HORIZONTAL Y_d','FontWeight','bold'); xlabel('TIEMPO ADIMENSIONAL \tau','FontWeight','bold'); grid
```

```
figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(T,z(:,5),'r'); set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bfRESPUESTAS DEL SOPORTE \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
      '\alpha_j=',num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=',...
      num2str(Ud),' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),^\circ, U_j=',num2str(Uj)],...
      '\phi=',num2str(round(phi*180/pi)),^\circ, \Delta K_{\xi}=',num2str(DKe), '\Delta K_{\eta}=',num2str(DKn)])
ylabel('VERTICAL X_s','FontWeight','bold'); xlabel('TIEMPO ADIMENSIONAL \tau','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(T,z(:,6),'b')
ylabel('HORIZONTAL Y_s','FontWeight','bold'); xlabel('TIEMPO ADIMENSIONAL \tau','FontWeight','bold'); grid
```

% Analisis frecuencial de las respuestas del sistema.

```
x = z(:,1);fftx=fft(x);n=length(fftx);fftx(1)=[];X=abs(fftx(1:n/40))*2/n;F=(1:n/40)/(n/200);
p=unwrap(angle(fftx));p=p(1:n/40)*180/pi;
figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(F,X,'r','LineWidth',2)
title(['\fontsize{12}\bfAMPLITUD Y FASE DE X_d \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
      '\alpha_j=',num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=',...
      num2str(Ud),' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),^\circ, U_j=',num2str(Uj)],...
      '\phi=',num2str(round(phi*180/pi)),^\circ, \Delta K_{\xi}=',num2str(DKe), '\Delta K_{\eta}=',num2str(DKn)])
ylabel('AMPLITUD','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(F,p,'b'); ylabel('FASE','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
```

```
x = z(:,2);fftx=fft(x);n=length(fftx);fftx(1)=[];X=abs(fftx(1:n/40))*2/n;F=(1:n/40)/(n/200);
p=unwrap(angle(fftx));p=p(1:n/40)*180/pi;
figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(F,X,'r','LineWidth',2)
title(['\fontsize{12}\bfAMPLITUD Y FASE DE Y_d \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
      '\alpha_j=',num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=',...
      num2str(Ud),' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),^\circ, U_j=',num2str(Uj)],...
      '\phi=',num2str(round(phi*180/pi)),^\circ, \Delta K_{\xi}=',num2str(DKe), '\Delta K_{\eta}=',num2str(DKn)])
ylabel('AMPLITUD','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(F,p,'b'); ylabel('FASE','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
```

```
x = z(:,3);fftx=fft(x);n=length(fftx);fftx(1)=[];X=abs(fftx(1:n/40))*2/n;F=(1:n/40)/(n/200);
p=unwrap(angle(fftx));p=p(1:n/40)*180/pi;
figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(F,X,'r','LineWidth',2)
title(['\fontsize{12}\bfAMPLITUD Y FASE DE X_j \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
      '\alpha_j=',num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=',...
      num2str(Ud),' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),^{\circ}, U_j=',num2str(Uj)],...
      '\phi=',num2str(round(phi*180/pi)),^{\circ}, \Delta K_{\xi}=',num2str(DKe),' \Delta K_{\eta}=',num2str(DKn)])
ylabel('AMPLITUD','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(F,p,'b'); ylabel('FASE','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
```

```
x = z(:,4);fftx=fft(x);n=length(fftx);fftx(1)=[];X=abs(fftx(1:n/40))*2/n;F=(1:n/40)/(n/200);
p=unwrap(angle(fftx));p=p(1:n/40)*180/pi;
figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(F,X,'r','LineWidth',2)
title(['\fontsize{12}\bfAMPLITUD Y FASE DE Y_j \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
      '\alpha_j=',num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=',...
      num2str(Ud),' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),^{\circ}, U_j=',num2str(Uj)],...
      '\phi=',num2str(round(phi*180/pi)),^{\circ}, \Delta K_{\xi}=',num2str(DKe),' \Delta K_{\eta}=',num2str(DKn)])
ylabel('AMPLITUD','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(F,p,'b'); ylabel('FASE','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
```

```
x = z(:,5);fftx=fft(x);n=length(fftx);fftx(1)=[];X=abs(fftx(1:n/40))*2/n;F=(1:n/40)/(n/200);
p=unwrap(angle(fftx));p=p(1:n/40)*180/pi;
figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(F,X,'r','LineWidth',2)
title(['\fontsize{12}\bfAMPLITUD Y FASE DE X_s \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
      '\alpha_j=',num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=',...
      num2str(Ud),' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),^{\circ}, U_j=',num2str(Uj)],...
      '\phi=',num2str(round(phi*180/pi)),^{\circ}, \Delta K_{\xi}=',num2str(DKe),' \Delta K_{\eta}=',num2str(DKn)])
ylabel('AMPLITUD','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(F,p,'b'); ylabel('FASE','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
```

```
x = z(:,6);fftx=fft(x);n=length(fftx);fftx(1)=[];X=abs(fftx(1:n/40))*2/n;F=(1:n/40)/(n/200);
p=unwrap(angle(fftx));p=p(1:n/40)*180/pi;
figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(F,X,'r','LineWidth',2)
title(['\fontsize{12}\bfAMPLITUD Y FASE DE Y_s \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
      '\alpha_j=',num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=',...
      num2str(Ud),' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),^{\circ}, U_j=',num2str(Uj)],...
      '\phi=',num2str(round(phi*180/pi)),^{\circ}, \Delta K_{\xi}=',num2str(DKe),' \Delta K_{\eta}=',num2str(DKn)])
ylabel('AMPLITUD','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(F,p,'b'); ylabel('FASE','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid; clc; toc,
```

```
function dzdt=flex(T,z)
global OM alfas alfaj Wg DK1 DK2 De Ud Uj phi beta Kxx Kyy Kxy Kyx Cxx Cyy Cyx Cxy Ks Cs
Phi=T+phi+beta;
g=(1+cos(Phi))/2;
%g=(2/pi)*(pi/4+cos(Phi)-cos(3*Phi)/3+cos(5*Phi)/5-cos(7*Phi)/7);
%g=(2/pi)*(pi/4+cos(Phi)-cos(3*Phi)/3+cos(5*Phi)/5-cos(7*Phi)/7+cos(9*Phi)/9-cos(11*Phi)/11+...
% cos(13*Phi)/13-cos(15*Phi)/15+cos(17*Phi)/17-cos(19*Phi)/19+cos(21*Phi)/21-cos(23*Phi)/23+...
% cos(25*Phi)/25-cos(27*Phi)/27+cos(29*Phi)/29-cos(31*Phi)/31+cos(33*Phi)/33-cos(35*Phi)/35+...
% cos(37*Phi)/37-cos(39*Phi)/39+cos(41*Phi)/41-cos(43*Phi)/43+cos(45*Phi)/45-cos(47*Phi)/47+...
% cos(49*Phi)/49-cos(51*Phi)/51+cos(53*Phi)/53-cos(55*Phi)/55+cos(57*Phi)/57-cos(59*Phi)/59+...
% cos(61*Phi)/61-cos(63*Phi)/63+cos(65*Phi)/65-cos(67*Phi)/67+cos(69*Phi)/69-cos(71*Phi)/71);
dzdt=zeros(12,1);
dzdt(1)=z(7);
dzdt(2)=z(8);
dzdt(3)=z(9);
dzdt(4)=z(10);
dzdt(5)=z(11);
dzdt(6)=z(12);
dzdt(7)=(-1/OM^2)*(2*De*z(7)+(z(1)-z(3))-(g/2)*((DK1+DK2*cos(2*Phi))*(z(1)-z(3))+Wg)+...
```


$$\begin{aligned}
& (DK2*\sin(2*\Phi))*z(2)-z(4))-OM^2*Ud*\cos(\Gamma+\phi); \\
dzdt(8)=(-1/OM^2)*(2*De*z(8)+(z(2)-z(4))-(g/2)*(DK2*\sin(2*\Phi))*z(1)-z(3)+Wg)+... \\
& (DK1-DK2*\cos(2*\Phi))*z(2)-z(4))-OM^2*Ud*\sin(\Gamma+\phi); \\
dzdt(9)=(-1/(2*OM^2*alfaj))*(Wg*(1+2*alfaj)*(Cxx*(z(9)-z(11))+Cxy*(z(10)-z(12))+... \\
& Kxx*(z(3)-z(5))+Kxy*(z(4)-z(6))-(z(1)-z(3))+(g/2)*(DK1+DK2*\cos(2*\Phi))*z(1)-z(3)+Wg)+... \\
& (DK2*\sin(2*\Phi))*z(2)-z(4))-2*OM^2*alfaj*Uj*\cos(\Gamma); \\
dzdt(10)=(-1/(2*OM^2*alfaj))*(Wg*(1+2*alfaj)*(Cyx*(z(9)-z(11))+Cyy*(z(10)-z(12))+... \\
& Kyx*(z(3)-z(5))+Kyy*(z(4)-z(6))-(z(2)-z(4))+(g/2)*(DK2*\sin(2*\Phi))*z(1)-z(3)+Wg)+... \\
& (DK1-DK2*\cos(2*\Phi))*z(2)-z(4))-2*OM^2*alfaj*Uj*\sin(\Gamma); \\
dzdt(11)=(-1/(2*OM^2*alfas))*(2*OM*Cs*z(11)-Wg*(1+2*alfaj)*(Cxx*(z(9)-z(11))+Cxy*(z(10)-z(12))+... \\
& Kxx*(z(3)-z(5))+Kxy*(z(4)-z(6)))+2*Ks*z(5)); \\
dzdt(12)=(-1/(2*OM^2*alfas))*(2*OM*Cs*z(12)-Wg*(1+2*alfaj)*(Cyx*(z(9)-z(11))+Cyy*(z(10)-z(12))+... \\
& Kyx*(z(3)-z(5))+Kyy*(z(4)-z(6)))+2*Ks*z(6));
\end{aligned}$$

Programa en MATLAB para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales del Modelo del rotor de Jeffcott extendido desbalanceado y fisurado sobre soportes flexibles sobre todo un rango de velocidad

function AmpModel_2N

```
% AmpModel_2N, Resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales del Modelo de Rotor Jeffcott extendido desbalanceado y
% fisurado sobre soportes flexibles. Utilizando la rutina ode45.
% Almacena graficas de las respuestas, frecuencias, y orbitas del disco, chumaceras y soportes para las cuatro
% orientaciones ortogonales (0°,90°, 180° y 270°) del ángulo beta entre el desbalance del disco y la
% dirección de la grieta, almacenándolas en la carpeta "C:/Orbitas", de una forma organizada
% Finalmente obtiene graficas BODE para las cuatro orientaciones.
% Elaborado por Ing. Armando Zambrano Reyes. Noviembre 2004
```

```
clc; clear; tic,
```

```
global OM alfaj alfas Wg DK1 DK2 De Ud Uj phi beta Kxx Kyy Kxy Kyx Cxx Cyy Cyx Cxy Ks Cs
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Parametros de entrada %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
OMinic=0.2; OMfin=1.3; OMinc=0.01; % Relación de velocidades
Wg = 1.1133; % Parámetro de gravedad
alfaj = 0.0485; % Relación de masas del muñón y disco
So = 2.0097; % Número de Sommerfeld fijo
DKe = 0.0542; % Cambio de rigidez adimensional en la dirección de la grieta
DKn = 0.0119; % Cambio de rigidez adimensional en la dirección perpendicular a la grieta
Ud = 0.05; % Desbalance adimensional en el disco
De = 0.005; % Relación de amortiguamiento externo
Uj = 0; % Desbalance adimensional en las chumaceras
phi = 0; % Angulo entre los vectores desbalance del disco y la chumacera. (radianes)
alfas=1e6; % Relación de masas del soporte (ms/m)
Ks=1e6; % Rigidez adimensional del soporte (ks/k)
Cs=0; % Amortiguamiento adimensional del soporte
L = 0.0127; % Longitud de la chumacera [m]
D = 0.0254; % Diámetro de la chumacera [m]
q = L/D;
```

```
z0=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]; % Condiciones Iniciales
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
DK1=DKe+DKn; DK2=DKe-DKn; j=-8;
```

```
for beta=0:pi/2:3*pi/2
```

```
j=j+9;i=0;exiorb=exist('C:/Orbitas');
```

```
if exiorb ~ = 7
```

```
mkdir ('C:/', 'Orbitas');
```

```
end
```

```

directory=['Ud',num2str(Ud),'beta',num2str(beta*180/pi)]; mkdir('C:/Orbitas', directory);
direc=['C:/Orbitas/', directory];mkdir(direc,'Disco'); mkdir(direc,'Chumacera');mkdir(direc,'Disco&Chum');
mkdir(direc,'Soporte'); mkdir(direc,'RespDisco');mkdir(direc,'RespChumacera');mkdir(direc,'RespSoporte');
mkdir(direc,'FrecDisco');mkdir(direc,'FrecChumacera');mkdir(direc,'FrecSoporte'); i=0;
for OM=OMinic:OMinc:OMfin
i=i+1; S=So*OM;
% Datos tomados del libro de Khonsari p.218, 225-227,
sk(:,1)=[129.7266;63.7582;41.2921;29.7252;22.5403;17.5694;13.8862;11.0306;8.7484;6.8884;5.3551;4.0854;3.0357;2.1750;
1.4802;9339;.5226;.2353;.0631];
sk(:,2)=[ 73.3037;36.0374;23.3433;16.8097;12.7522; 9.9557; 7.8664; 6.2546;4.9661;3.9157;3.0494; 2.3314;1.7371;1.2490;
.8542;.5427;.3071;.1411;.0399];
sk(:,3)=[ 32.9983;16.2271;10.5166; 7.5796; 5.7573; 4.4972; 3.5647; 2.8415;2.2632;1.7913;1.4016; 1.0778;0.8090;0.5873;
.4068;.2631;.1530;.0736;.0228];
sk(:,4)=[ 18.8861;09.2998; 6.0243; 4.3465; 3.3065; 2.5882; 2.0566; 1.6445;1.3149;1.0457;0.8228; 0.6372;0.4825;0.3542;
.2489;.1641;.0980;.0492;.0166];
sk(:,5)=[ 8.7944;04.3273; 2.8100; 2.0322; 1.5514; 1.2200; 0.9752; 0.7855;0.6337;0.5093;0.4059; 0.3192;0.2463;0.1850;
.1338;.0916;.0576;.0312;.0119];
sk(:,6)=[ 4.2911;02.1120; 1.3742; 0.9975; 0.7658; 0.6066; 0.4894; 0.3987;0.3260;0.2663;0.2163; 0.1740;0.1379;0.1068;
.0803;.0575;.0383;.0223;.0094];
sk(:,7)=[ 2.7019;01.3302; 0.8674; 0.6319; 0.4876; 0.3889; 0.3164; 0.2604;0.2156;0.1786;0.1475; 0.1209;0.0979;0.0778;
.0601;.0445;.0308;.0188;.0084];
sk(:,8)=[ 1.5448;00.7628; 0.4998; 0.3667; 0.2855; 0.2303; 0.1900; 0.1589;0.1340;0.1134;0.0959; 0.0807;0.0673;0.0552;
.0442;.0341;.0246;.0158;.0075];
sk(:,9)=[ 1.1279;00.5588; 0.3678; 0.2715; 0.2130; 0.1733; 0.1444; 0.1221;0.1043;0.0894;0.0767; 0.0656;0.0556;0.0464;
.0379;.0298;.0221;.0145;.0071];
sk(:,10)=[ 0.4759;00.2415; 0.1631; 0.1237; 0.1000; 0.0838; 0.0720; 0.0629;0.0555;0.0493;0.0439; 0.0389;0.0344;0.0299;
.0256;.0211;.0165;.0115;.0061];
t=[1/8;1/6;1/4;1/3;1/2;3/4;1;1.5;2;4]; eps=0.05:0.05:0.95;
if q < 0.125
sq=sk(:,1); e=spline(sq,eps,S);
elseif q >= 0.125 & q<=4
sq=spline(t,sk,q); e=spline(sq,eps,S);
elseif q > 4
sq=sk(:,10); e=spline(sq,eps,S);
end
psi=atan(pi*sqrt(1-e^2)/(4*e)); ex0=e*cos(psi); ey0=e*sin(psi);

% Cálculo de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento de las chumaceras
x=log10(S);
if L/D == .5
%'L/D = 0.5 Chumacera Cilíndrica Plana'
y1=-.1803824*x^2-.3775245*x+.1866873;
y2=-.02760624*x^3-.1464941*x^2+.0298149*x+.3680273;
y3=.1237951*x^3+.5585833*x^2+.4548668*x+.8729334;
y4=-.04423276*x^7-.1764813*x^6-.0538674*x^5+.4092444*x^4+.1801445*x^3-...
.03941816*x^2+.7651717*x+.7261839;
y5=.08002726*x^4+.2859706*x^3+.5137666*x^2+.2534411*x+.6308782;
y6a=-1.272717*x^2-4.362663*x-3.692053;
y6b=-.6423088*x^6+1.24982*x^5-1.244396*x^4+.9244287*x^3-1.162631*x^2+...
1.064639*x+.4200118; y7=.0155*x+.35625; y8=.07894737*x+.3754211; Kxx=10^y1; Kyy=10^y2; Cxx=10^y3;
Cyy=10^y4; Kxy=10^y5; Cxy=10^y7; Cyx=10^y8;
if S < .22
Kyx=10^y6a;
else
Kyx=-10^y6b;
end
elseif L/D == 1
%'L/D = 1 Chumacera Cilíndrica Plana'
y1=.07*x^3+.3135*x^2-.2318*x+.0105;

```

```

y2=.0067*x^3-.0304*x^2-.0057*x+.3526;
y3=-.0611*x^3+.2717*x^2+.7312*x+1.1612;
y4=.051*x^4-.0487*x^3-.0396*x^2+.9401*x+1.168;
y5=-.0566*x^4-.128*x^3+.323*x^2+.7729*x+.9098;
y6a=-2.3093*x^3-12.485*x^2-22.727*x-13.973;
y6b=1.1907*x^5-1.1072*x^4-.5305*x^3+.442*x^2+.9676*x+.876;
y7=-.0258*x^6-.0524*x^5+.0928*x^4-.0211*x^3-.4474*x^2-.2586*x+.2904;
y8=-.0911*x^6-.2782*x^5+.0471*x^4+.494*x^3+.0779*x^2-.0746*x+.3337;
Kxx=10^y1; Kyy=10^y2; Cxx=10^y3; Cyy=10^y4; Kxy=10^y5; Cxy=10^y7; Cyx=10^y8;
if S < .1
    Kyx=10^y6a;
else
    Kyx=-10^y6b;
end
end

tint=[0:pi/100:(OM*200)*pi]; % Intervalo temporal en que se requiere obtener lasolucion
[T,z]=ode45(@flex,tint,z0); siz=size(z); ZN=z(siz(1)-200:siz(1),:);
ZN(:,1)=ZN(:,1)+ex0+Wg; ZN(:,2)=ZN(:,2)+ey0; ZN(:,3)=ZN(:,3)+ex0; ZN(:,4)=ZN(:,4)+ey0;
z(:,1)=z(:,1)+ex0+Wg; z(:,2)=z(:,2)+ey0; z(:,3)=z(:,3)+ex0; z(:,4)=z(:,4)+ey0;

% Calculo de amplitudes deltaXd & deltaYd y su norma
ampli(i,j)=max(ZN(:,1))-min(ZN(:,1)); % delta Xd = xd maximo - xd minimo
ampli(i,j+1)=max(ZN(:,2))-min(ZN(:,2)); % delta Yd = yd maximo - yd minimo
ampli(i,j+2)=max(sqrt(ZN(:,1).^2+ZN(:,2).^2)); % Calculo de la norma sqrt((deltaXd)^2+(delta Yd)^2)
[C,I]=max(sqrt(ZN(:,1).^2+ZN(:,2).^2));ang(i,j)=(atan(ZN(I,1)/ZN(I,2)))*180/pi;
% Calculo de amplitudes deltaXb & deltaYb y su norma
ampli(i,j+3)=max(ZN(:,3))-min(ZN(:,3));
ampli(i,j+4)=max(ZN(:,4))-min(ZN(:,4));
ampli(i,j+5)=max(sqrt(ZN(:,3).^2+ZN(:,4).^2));
[C,I]=max(sqrt(ZN(:,3).^2+ZN(:,4).^2)); ang(i,j+1)=(atan(ZN(I,3)/ZN(I,4)))*180/pi;
%Calculo de amplitudes deltaXs & deltaYs y su norma
ampli(i,j+6)=max(ZN(:,5))-min(ZN(:,5));
ampli(i,j+7)=max(ZN(:,6))-min(ZN(:,6));
ampli(i,j+8)=max(sqrt(ZN(:,5).^2+ZN(:,6).^2));
[C,I]=max(sqrt(ZN(:,5).^2+ZN(:,6).^2)); ang(i,j+2)=(atan(ZN(I,5)/ZN(I,6)))*180/pi;

%Trazando las orbitas del sistema
set(0,'Units','pixels'); scnsz = get(0,'ScreenSize');
h1=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); plot(ZN(:,2),ZN(:,1),'r',ZN(:,4),ZN(:,3),'b',ZN(:,6),ZN(:,5),'k')
axis equal; box on; set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bFORBITAS DEL SISTEMA \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
', \alpha_j=',num2str(alfaj), ' W_g=',num2str(Wg), ' S_0=',num2str(So), ' U_d=',...
num2str(Ud), ' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)), ' U_j=',num2str(Uj)],...
', \phi=',num2str(round(phi*180/pi)), ' \Delta K_{\xi}=',num2str(DKe), ' \Delta K_{\eta}=',num2str(DKn)])
ylabel('DIRECCION X','FontSize',12,'FontWeight','bold'); xlabel('DIRECCION Y','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
legend('DISCO','CHUMACERA','SOPORTE',1)
filename=[direc,'/Disco&Chum/OrbD&C_',num2str(i)]; set(gcf,'PaperPositionMode','auto')
saveas(h1,filename,'fig'); saveas(h1,filename,'tif'), close

h2=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); plot(ZN(:,2),ZN(:,1),'r','LineWidth',2);
axis equal; box on; set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bORBITA DEL DISCO \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
', \alpha_j=',num2str(alfaj), ' W_g=',num2str(Wg), ' S_0=',num2str(So), ' U_d=',...
num2str(Ud), ' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)), ' U_j=',num2str(Uj)],...
', \phi=',num2str(round(phi*180/pi)), ' \Delta K_{\xi}=',num2str(DKe), ' \Delta K_{\eta}=',num2str(DKn)])
ylabel('DIRECCION X','FontSize',12,'FontWeight','bold'); xlabel('DIRECCION Y','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
filename=[direc,'/Disco/OrbD_',num2str(i)]; set(gcf,'PaperPositionMode','auto')
saveas(h2,filename,'fig'); saveas(h2,filename,'tif'), close

```



```
h3=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); plot(ZN(:,4),ZN(:,3),'b','LineWidth',2)
axis equal; box on; set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bfORBITA DE LA CHUMACERA \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
      '\alpha_j=',num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=',...
      num2str(Ud),' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),^{\circ}, U_j=',num2str(Uj)',...
      '\phi=',num2str(round(phi*180/pi)),^{\circ}, \Delta K_{\xi}=',num2str(DKc),' \Delta K_{\eta}=',num2str(DKn)])
ylabel('DIRECCION X','FontSize',12,'FontWeight','bold'); xlabel('DIRECCION Y','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
filename=[direc,'/Chumacera/OrbCH_',num2str(i)]; set(gcf,'PaperPositionMode','auto')
saveas(h3,filename,'fig'); saveas(h3,filename,'tif'), close
```

```
h3a=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); plot(ZN(:,6),ZN(:,5),'k','LineWidth',2)
axis equal; box on; set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bfORBITA DEL SOPORTE \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
      '\alpha_j=',num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=',...
      num2str(Ud),' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),^{\circ}, U_j=',num2str(Uj)',...
      '\phi=',num2str(round(phi*180/pi)),^{\circ}, \Delta K_{\xi}=',num2str(DKc),' \Delta K_{\eta}=',num2str(DKn)])
ylabel('DIRECCION X','FontSize',12,'FontWeight','bold'); xlabel('DIRECCION Y','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
filename=[direc,'/Soporte/OrbSop_',num2str(i)]; set(gcf,'PaperPositionMode','auto')
saveas(h3a,filename,'fig'); saveas(h3a,filename,'tif'), close
```

% Graficacion de las respuestas del sistema.

```
h4=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(T,z(:,3),'r'); set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bfRESPUESTAS DE LA CHUMACERA \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
      '\alpha_j=',num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=',...
      num2str(Ud),' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),^{\circ}, U_j=',num2str(Uj)',...
      '\phi=',num2str(round(phi*180/pi)),^{\circ}, \Delta K_{\xi}=',num2str(DKc),' \Delta K_{\eta}=',num2str(DKn)])
ylabel('VERTICAL X_j','FontWeight','bold'); xlabel('TIEMPO ADIMENSIONAL \tau','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(T,z(:,4),'b')
ylabel('HORIZONTAL Y_j','FontWeight','bold'); xlabel('TIEMPO ADIMENSIONAL \tau','FontWeight','bold'); grid
filename=[direc,'/RespChumacera/CH_',num2str(i)]; set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h4,filename,'fig'); saveas(h4,filename,'tif'), close
```

```
h5=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(T,z(:,1),'r'); set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bfRESPUESTAS DEL DISCO \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
      '\alpha_j=',num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=',...
      num2str(Ud),' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),^{\circ}, U_j=',num2str(Uj)',...
      '\phi=',num2str(round(phi*180/pi)),^{\circ}, \Delta K_{\xi}=',num2str(DKc),' \Delta K_{\eta}=',num2str(DKn)])
ylabel('VERTICAL X_d','FontWeight','bold'); xlabel('TIEMPO ADIMENSIONAL \tau','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(T,z(:,2),'b');
ylabel('HORIZONTAL Y_d','FontWeight','bold'); xlabel('TIEMPO ADIMENSIONAL \tau','FontWeight','bold'); grid
filename=[direc,'/RespDisco/D_',num2str(i)]; set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h5,filename,'fig'); saveas(h5,filename,'tif'), close
```

```
h5a=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(T,z(:,5),'r'); set(gca,'YDir','reverse')
title(['\fontsize{12}\bfRESPUESTAS DEL SOPORTE \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
      '\alpha_j=',num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=',...
      num2str(Ud),' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),^{\circ}, U_j=',num2str(Uj)',...
      '\phi=',num2str(round(phi*180/pi)),^{\circ}, \Delta K_{\xi}=',num2str(DKc),' \Delta K_{\eta}=',num2str(DKn)])
ylabel('VERTICAL X_s','FontWeight','bold'); xlabel('TIEMPO ADIMENSIONAL \tau','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(T,z(:,6),'b')
ylabel('HORIZONTAL Y_s','FontWeight','bold'); xlabel('TIEMPO ADIMENSIONAL \tau','FontWeight','bold'); grid
filename=[direc,'/RespSoporte/S_',num2str(i)]; set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h5a,filename,'fig'); saveas(h5a,filename,'tif'), close
```

% Analisis frecuencial de las respuestas del sistema.

```
x = z(:,1); fftx = fft(x); n=length(fftx); fftx(1)=[]; X=abs(fftx(1:n/40))*2/n; F=(1:n/40)/(n/200);
p=unwrap(angle(fftx)); p=p(1:n/40)*180/pi;
h6=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(F,X,'r','LineWidth',2)
title(['\fontsize{12}\bfAMPLITUD Y FASE DE X_d \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
      '\alpha_j=',num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=',...
      num2str(Ud),' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),^{\circ}, U_j=',num2str(Uj)',...
      '\phi=',num2str(round(phi*180/pi)),^{\circ}, \Delta K_{\xi}=',num2str(DKc),' \Delta K_{\eta}=',num2str(DKn)])
```

```

    ', \alpha_j=',num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=',...
    num2str(Ud),' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),'^{\circ}', U_j=',num2str(Uj)',...
    ', \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),'^{\circ}', \Delta K_{\xi}=',num2str(DKe),' \Delta K_{\eta}=',num2str(DKn))
ylabel('AMPLITUD','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(F,p,'b'); ylabel('FASE','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
filename=[direc,'/FrecDisco/X_',num2str(i)]; set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h6,filename,'fig'); saveas(h6,filename,'tif'), close

```

```

x = z(:,2);fftx=fft(x);n=length(fftx);fftx(1)=[];X=abs(fftx(1:n/40))*2/n;F=(1:n/40)/(n/200);
p=unwrap(angle(fftx));p=p(1:n/40)*180/pi;
h7=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(F,X,'r','LineWidth',2)
title(['\fontsize{12}\bfAMPLITUD Y FASE DE Y_d \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
    ', \alpha_j=',num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=',...
    num2str(Ud),' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),'^{\circ}', U_j=',num2str(Uj)',...
    ', \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),'^{\circ}', \Delta K_{\xi}=',num2str(DKe),' \Delta K_{\eta}=',num2str(DKn))
ylabel('AMPLITUD','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(F,p,'b'); ylabel('FASE','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
filename=[direc,'/FrecDisco/Y_',num2str(i)]; set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h7,filename,'fig'); saveas(h7,filename,'tif'), close

```

```

x = z(:,3);fftx=fft(x);n=length(fftx);fftx(1)=[];X=abs(fftx(1:n/40))*2/n;F=(1:n/40)/(n/200);
p=unwrap(angle(fftx));p=p(1:n/40)*180/pi;
h8=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(F,X,'r','LineWidth',2)
title(['\fontsize{12}\bfAMPLITUD Y FASE DE X_j \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
    ', \alpha_j=',num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=',...
    num2str(Ud),' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),'^{\circ}', U_j=',num2str(Uj)',...
    ', \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),'^{\circ}', \Delta K_{\xi}=',num2str(DKe),' \Delta K_{\eta}=',num2str(DKn))
ylabel('AMPLITUD','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(F,p,'b'); ylabel('FASE','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
filename=[direc,'/FrecChumacera/X_',num2str(i)]; set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h8,filename,'fig'); saveas(h8,filename,'tif'), close

```

```

x = z(:,4);fftx=fft(x);n=length(fftx);fftx(1)=[];X=abs(fftx(1:n/40))*2/n;F=(1:n/40)/(n/200);
p=unwrap(angle(fftx));p=p(1:n/40)*180/pi;
h9=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(F,X,'r','LineWidth',2)
title(['\fontsize{12}\bfAMPLITUD Y FASE DE Y_j \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
    ', \alpha_j=',num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=',...
    num2str(Ud),' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),'^{\circ}', U_j=',num2str(Uj)',...
    ', \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),'^{\circ}', \Delta K_{\xi}=',num2str(DKe),' \Delta K_{\eta}=',num2str(DKn))
ylabel('AMPLITUD','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(F,p,'b'); ylabel('FASE','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
filename=[direc,'/FrecChumacera/Y_',num2str(i)]; set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h9,filename,'fig'); saveas(h9,filename,'tif'), close

```

```

x = z(:,5);fftx=fft(x);n=length(fftx);fftx(1)=[];X=abs(fftx(1:n/40))*2/n;F=(1:n/40)/(n/200);
p=unwrap(angle(fftx));p=p(1:n/40)*180/pi;
h8a=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(F,X,'r','LineWidth',2)
title(['\fontsize{12}\bfAMPLITUD Y FASE DE X_s \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
    ', \alpha_j=',num2str(alfaj),' W_g=',num2str(Wg),' S_0=',num2str(So),' U_d=',...
    num2str(Ud),' \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),'^{\circ}', U_j=',num2str(Uj)',...
    ', \phi=',num2str(round(phi*180/pi)),'^{\circ}', \Delta K_{\xi}=',num2str(DKe),' \Delta K_{\eta}=',num2str(DKn))
ylabel('AMPLITUD','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(F,p,'b'); ylabel('FASE','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
filename=[direc,'/FrecSopote/X_',num2str(i)]; set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h8a,filename,'fig'); saveas(h8a,filename,'tif'), close

```

```

x = z(:,6);fftx=fft(x);n=length(fftx);fftx(1)=[];X=abs(fftx(1:n/40))*2/n;F=(1:n/40)/(n/200);
p=unwrap(angle(fftx));p=p(1:n/40)*180/pi;

```

```

h9a=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); subplot(2,1,1); plot(F,X,'r','LineWidth',2)
title(['\fontsize{12}\bfAMPLITUD Y FASE DE Y_s \fontsize{10}\rm\Omega=',num2str(OM),...
      '\alpha_j=',num2str(alfaj),'\ W_g=',num2str(Wg),'\ S_0=',num2str(So),'\ U_d=',...
      num2str(Ud),'\ \beta=',num2str(round(beta*180/pi)),^\circ, '\ U_j=',num2str(Uj)],...
      '\phi=',num2str(round(phi*180/pi)),^\circ, \DeltaK_\xi=',num2str(DKe), '\DeltaK_\eta=',num2str(DKn)])
ylabel('AMPLITUD','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
subplot(2,1,2); plot(F,p,'b'); ylabel('FASE','FontWeight','bold'); xlabel('FRECUENCIA','FontWeight','bold'); grid
filename=[direc,'/FrecChumacera/Y_',num2str(i)]; set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h9a,filename,'fig'); saveas(h9a,filename,'tif'), close; clc
end
end

directory1=['RespuestasUd',num2str(Ud)]; mkdir('C:/Orbitas',directory1); omeg=OMinic:OMinc:OMfin;
h10=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); hold on
plot(omeg,ampli(:,1),'-bo','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','b');plot(omeg,ampli(:,10),'-rs','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','r')
plot(omeg,ampli(:,19),'k','LineWidth',2); plot(omeg,ampli(:,28),'-g^','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','g')
title(['\fontsize{12}\bfRESPUESTA VERTICAL X_d \fontsize{10}\rm\alpha_j =',num2str(alfaj),...
      '\ W_g=',num2str(Wg),'\ S_0 =',num2str(So),'\ U_d =',num2str(Ud),'\ U_j =',num2str(Uj)...
      '\ \phi =',num2str(round(phi*180/pi)),^\circ, \DeltaK_\xi =',num2str(DKe),'\DeltaK_\eta =',num2str(DKn)])
ylabel('AMPLITUD X_d','FontSize',12,'FontWeight','bold');
xlabel('RELACION DE VELOCIDADES \Omega','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
legend('\beta = 0^\circ,\beta = 90^\circ,\beta = 180^\circ,\beta = 270^\circ,2); hold off
filename=['C:/Orbitas/',directory1,'/Xd']; set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h10,filename,'fig'); saveas(h10,filename,'tif'), close

h11=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); hold on
plot(omeg,ampli(:,2),'-bo','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','b');plot(omeg,ampli(:,11),'-rs','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','r')
plot(omeg,ampli(:,20),'k','LineWidth',2); plot(omeg,ampli(:,29),'-g^','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','g')
title(['\fontsize{12}\bfRESPUESTA HORIZONTAL Y_d \fontsize{10}\rm\alpha_j =',num2str(alfaj),...
      '\ W_g=',num2str(Wg),'\ S_0 =',num2str(So),'\ U_d =',num2str(Ud),'\ U_j =',num2str(Uj)...
      '\ \phi =',num2str(round(phi*180/pi)),^\circ, \DeltaK_\xi =',num2str(DKe),'\DeltaK_\eta =',num2str(DKn)])
ylabel('AMPLITUD Y_d','FontSize',12,'FontWeight','bold');
xlabel('RELACION DE VELOCIDADES \Omega','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
legend('\beta = 0^\circ,\beta = 90^\circ,\beta = 180^\circ,\beta = 270^\circ,2); hold off
filename=['C:/Orbitas/',directory1,'/Yd']; set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h11,filename,'fig'); saveas(h11,filename,'tif'), close

h12=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); hold on
plot(omeg,ampli(:,4),'-bo','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','b');plot(omeg,ampli(:,13),'-rs','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','r')
plot(omeg,ampli(:,22),'k','LineWidth',2); plot(omeg,ampli(:,31),'-g^','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','g')
title(['\fontsize{12}\bfRESPUESTA VERTICAL X_j \fontsize{10}\rm\alpha_j =',num2str(alfaj),...
      '\ W_g=',num2str(Wg),'\ S_0 =',num2str(So),'\ U_d =',num2str(Ud),'\ U_j =',num2str(Uj)...
      '\ \phi =',num2str(round(phi*180/pi)),^\circ, \DeltaK_\xi =',num2str(DKe),'\DeltaK_\eta =',num2str(DKn)])
ylabel('AMPLITUD X_j','FontSize',12,'FontWeight','bold');
xlabel('RELACION DE VELOCIDADES \Omega','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
legend('\beta = 0^\circ,\beta = 90^\circ,\beta = 180^\circ,\beta = 270^\circ,2); hold off
filename=['C:/Orbitas/',directory1,'/Xj'];set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h12,filename,'fig'); saveas(h12,filename,'tif'), close

h13=figure('Position',[1,1,scnsz(3),scnsz(4)-30]); hold on
plot(omeg,ampli(:,5),'-bo','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','b');plot(omeg,ampli(:,14),'-rs','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','r')
plot(omeg,ampli(:,23),'k','LineWidth',2); plot(omeg,ampli(:,32),'-g^','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','g')
title(['\fontsize{12}\bfRESPUESTA HORIZONTAL Y_j \fontsize{10}\rm\alpha_j =',num2str(alfaj),...
      '\ W_g=',num2str(Wg),'\ S_0 =',num2str(So),'\ U_d =',num2str(Ud),'\ U_j =',num2str(Uj)...
      '\ \phi =',num2str(round(phi*180/pi)),^\circ, \DeltaK_\xi =',num2str(DKe),'\DeltaK_\eta =',num2str(DKn)])
ylabel('AMPLITUD Y_j','FontSize',12,'FontWeight','bold');
xlabel('RELACION DE VELOCIDADES \Omega','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
legend('\beta = 0^\circ,\beta = 90^\circ,\beta = 180^\circ,\beta = 270^\circ,2); hold off
filename=['C:/Orbitas/',directory1,'/Yj'];set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size

```

```
saveas(h13,filename,'fig'); saveas(h13,filename,'tif'), close
```

```
h12a=figure('Position',[1,1,scnsize(3),scnsize(4)-30]); hold on
plot(omeg,ampli(:,7),'-bo','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','b');plot(omeg,ampli(:,16),'-rs','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','r')
plot(omeg,ampli(:,25),'k','LineWidth',2); plot(omeg,ampli(:,34),'-g^','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','g')
title(['\fontsize{12}\bfRESPUESTA VERTICAL X_s \fontsize{10}\rm\alpha_j =',num2str(alfaj),...
      '\ W_g=',num2str(Wg),'\ S_0 =',num2str(So),'\ U_d =',num2str(Ud),'\ U_j =',num2str(Uj)...
      '\ \phi =',num2str(round(phi*180/pi)),'\ \Delta K_\xi =', num2str(DKc),'\ \Delta K_\eta =',num2str(DKn)])
ylabel('AMPLITUD X_s','FontSize',12,'FontWeight','bold');
xlabel('RELACION DE VELOCIDADES \Omega','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
legend('\beta = 0^\circ,\beta = 90^\circ,\beta = 180^\circ,\beta = 270^\circ,2)hold off
filename=['C:/Orbitas/',directory1,'/Xs'];set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h12a,filename,'fig'); saveas(h12a,filename,'tif'), close
```

```
h13a=figure('Position',[1,1,scnsize(3),scnsize(4)-30]); hold on
plot(omeg,ampli(:,8),'-bo','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','b');plot(omeg,ampli(:,17),'-rs','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','r')
plot(omeg,ampli(:,26),'k','LineWidth',2); plot(omeg,ampli(:,35),'-g^','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','g')
title(['\fontsize{12}\bfRESPUESTA HORIZONTAL Y_s \fontsize{10}\rm\alpha_j =',num2str(alfaj),...
      '\ W_g=',num2str(Wg),'\ S_0 =',num2str(So),'\ U_d =',num2str(Ud),'\ U_j =',num2str(Uj)...
      '\ \phi =',num2str(round(phi*180/pi)),'\ \Delta K_\xi =',... num2str(DKc),'\ \Delta K_\eta =',num2str(DKn)])
ylabel('AMPLITUD Y_s','FontSize',12,'FontWeight','bold');
xlabel('RELACION DE VELOCIDADES \Omega','FontSize',12,'FontWeight','bold'); grid
legend('\beta = 0^\circ,\beta = 90^\circ,\beta = 180^\circ,\beta = 270^\circ,2); hold off
filename=['C:/Orbitas/',directory1,'/Ys'];set(gcf,'PaperPositionMode','auto') % Use screen size
saveas(h13a,filename,'fig'); saveas(h13a,filename,'tif'), close; clc; toc,
```

```
function dzdt=flex(T,z)
```

```
global OM alfaj Wg DK1 DK2 De Ud Uj phi beta Kxx Kyy Kxy Kyx Cxx Cyy Cyx Cxy Ks Cs
```

```
Phi=T+phi+beta;
```

```
g=(1+cos(Phi))/2;
```

```
%g=(2/pi)*(pi/4+cos(Phi)-cos(3*Phi)/3+cos(5*Phi)/5-cos(7*Phi)/7);
```

```
%g=(2/pi)*(pi/4+cos(Phi)-cos(3*Phi)/3+cos(5*Phi)/5-cos(7*Phi)/7+cos(9*Phi)/9-cos(11*Phi)/11+...
```

```
% cos(13*Phi)/13-cos(15*Phi)/15+cos(17*Phi)/17-cos(19*Phi)/19+cos(21*Phi)/21-cos(23*Phi)/23+...
```

```
% cos(25*Phi)/25-cos(27*Phi)/27+cos(29*Phi)/29-cos(31*Phi)/31+cos(33*Phi)/33-cos(35*Phi)/35+...
```

```
% cos(37*Phi)/37-cos(39*Phi)/39+cos(41*Phi)/41-cos(43*Phi)/43+cos(45*Phi)/45-cos(47*Phi)/47+...
```

```
% cos(49*Phi)/49-cos(51*Phi)/51+cos(53*Phi)/53-cos(55*Phi)/55+cos(57*Phi)/57-cos(59*Phi)/59+...
```

```
% cos(61*Phi)/61-cos(63*Phi)/63+cos(65*Phi)/65-cos(67*Phi)/67+cos(69*Phi)/69-cos(71*Phi)/71);
```

```
dzdt=zeros(12,1);
```

```
dzdt(1)=z(7);
```

```
dzdt(2)=z(8);
```

```
dzdt(3)=z(9);
```

```
dzdt(4)=z(10);
```

```
dzdt(5)=z(11);
```

```
dzdt(6)=z(12);
```

```
dzdt(7)=(-1/OM^2)*(2*De*z(7)+(z(1)-z(3))-(g/2)*((DK1+DK2*cos(2*Phi))*(z(1)-z(3)+Wg)+...
(DK2*sin(2*Phi))*(z(2)-z(4))-OM^2*Ud*cos(T+phi)));
```

```
dzdt(8)=(-1/OM^2)*(2*De*z(8)+(z(2)-z(4))-(g/2)*((DK2*sin(2*Phi))*(z(1)-z(3)+Wg)+...
(DK1-DK2*cos(2*Phi))*(z(2)-z(4))-OM^2*Ud*sin(T+phi)));
```

```
dzdt(9)=(-1/(2*OM^2*alfaj))*(Wg*(1+2*alfaj)*(Cxx*(z(9)-z(11))+Cxy*(z(10)-z(12))+...
Kxx*(z(3)-z(5))+Kxy*(z(4)-z(6)))-(z(1)-z(3))+(g/2)*((DK1+DK2*cos(2*Phi))*(z(1)-z(3)+Wg)+...
(DK2*sin(2*Phi))*(z(2)-z(4)))-2*OM^2*alfaj*Uj*cos(T));
```

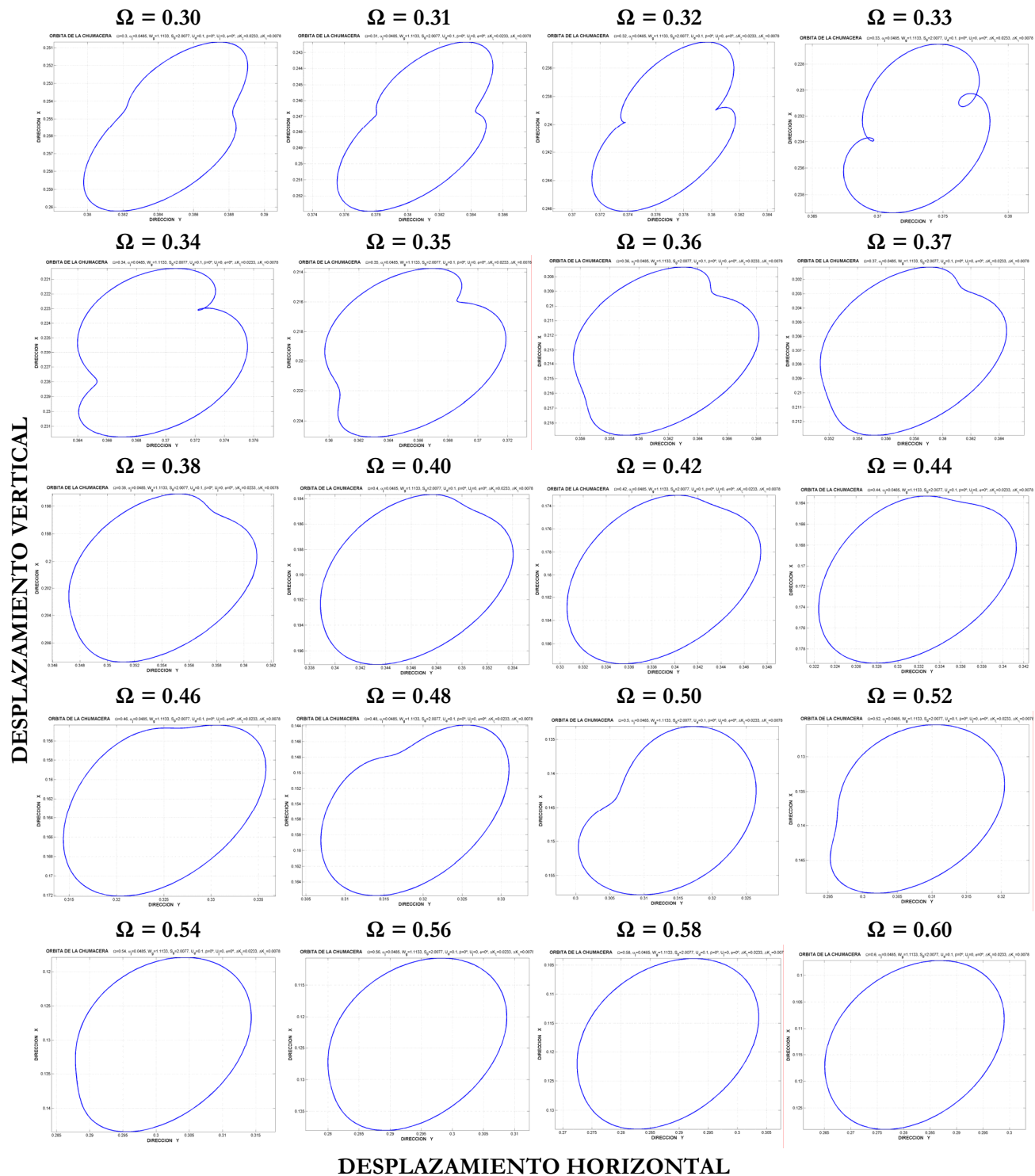
```
dzdt(10)=(-1/(2*OM^2*alfaj))*(Wg*(1+2*alfaj)*(Cyx*(z(9)-z(11))+Cyy*(z(10)-z(12))+...
Kyx*(z(3)-z(5))+Kyy*(z(4)-z(6)))-(z(2)-z(4))+(g/2)*((DK2*sin(2*Phi))*(z(1)-z(3)+Wg)+...
(DK1-DK2*cos(2*Phi))*(z(2)-z(4)))-2*OM^2*alfaj*Uj*sin(T));
```

```
dzdt(11)=(-1/(2*OM^2*alfas))*(2*OM*Cs*z(11)-Wg*(1+2*alfaj)*(Cxx*(z(9)-z(11))+Cxy*(z(10)-z(12))+...
Kxx*(z(3)-z(5))+Kxy*(z(4)-z(6)))+2*Ks*z(5));
```

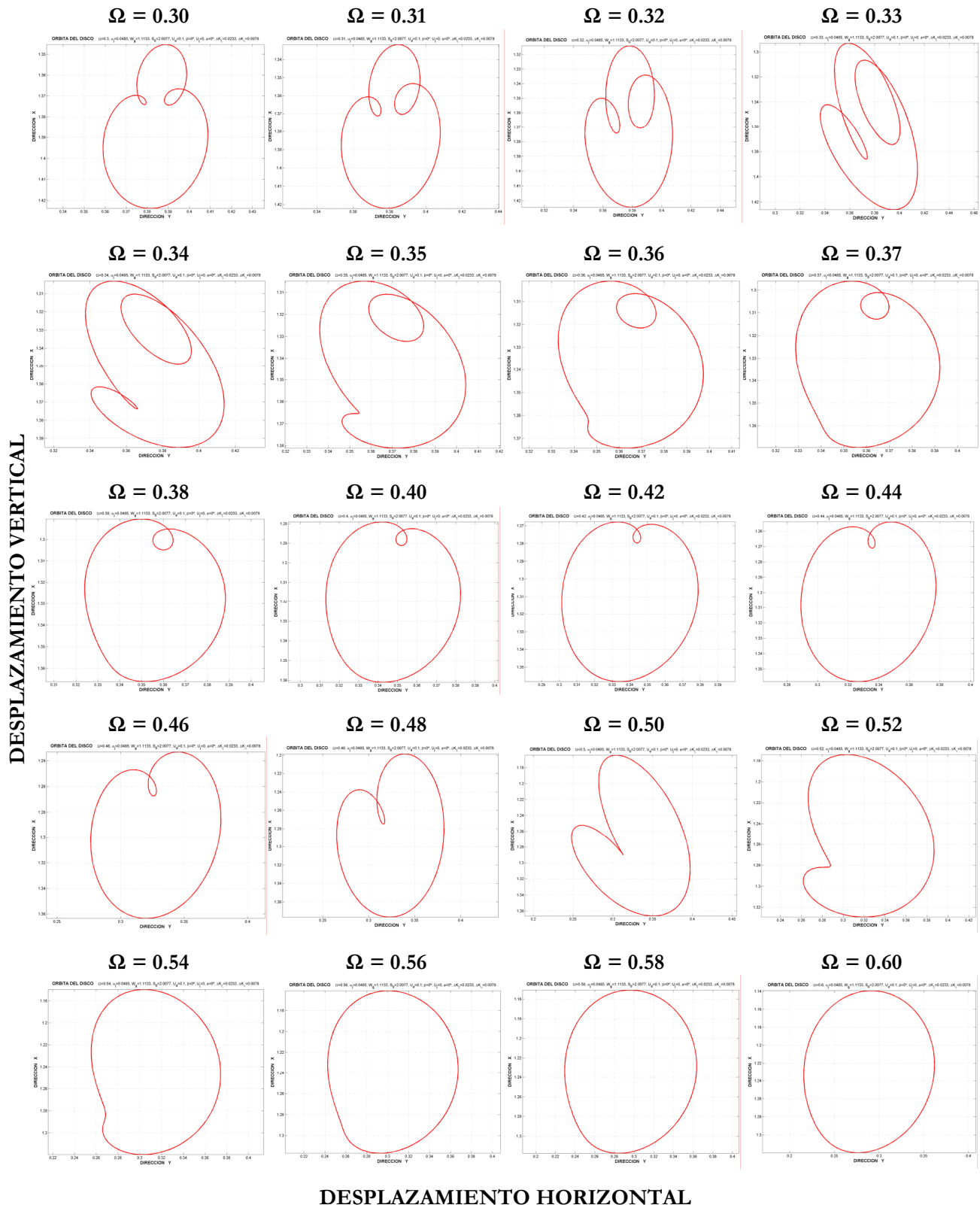
```
dzdt(12)=(-1/(2*OM^2*alfas))*(2*OM*Cs*z(12)-Wg*(1+2*alfaj)*(Cyx*(z(9)-z(11))+Cyy*(z(10)-z(12))+...
Kyx*(z(3)-z(5))+Kyy*(z(4)-z(6)))+2*Ks*z(6));
```


Apéndice C. Evolución orbital, Configuración I

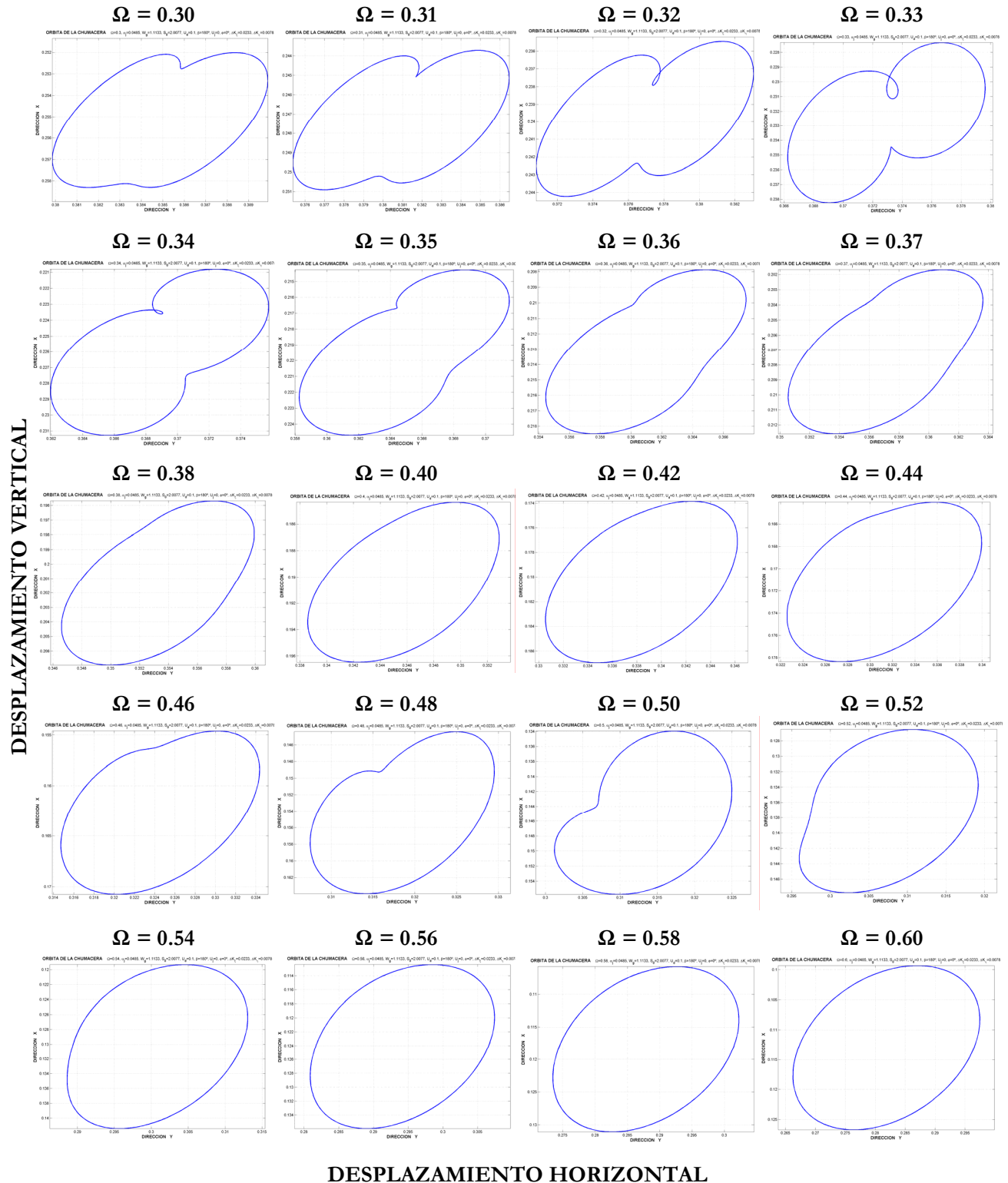
Evolución de la órbita de la chumacera alrededor de 1/3 y 1/2 de la resonancia, configuración I, profundidad de grieta 12.5%, $U_d = 0.1$, $\beta = 0^\circ$



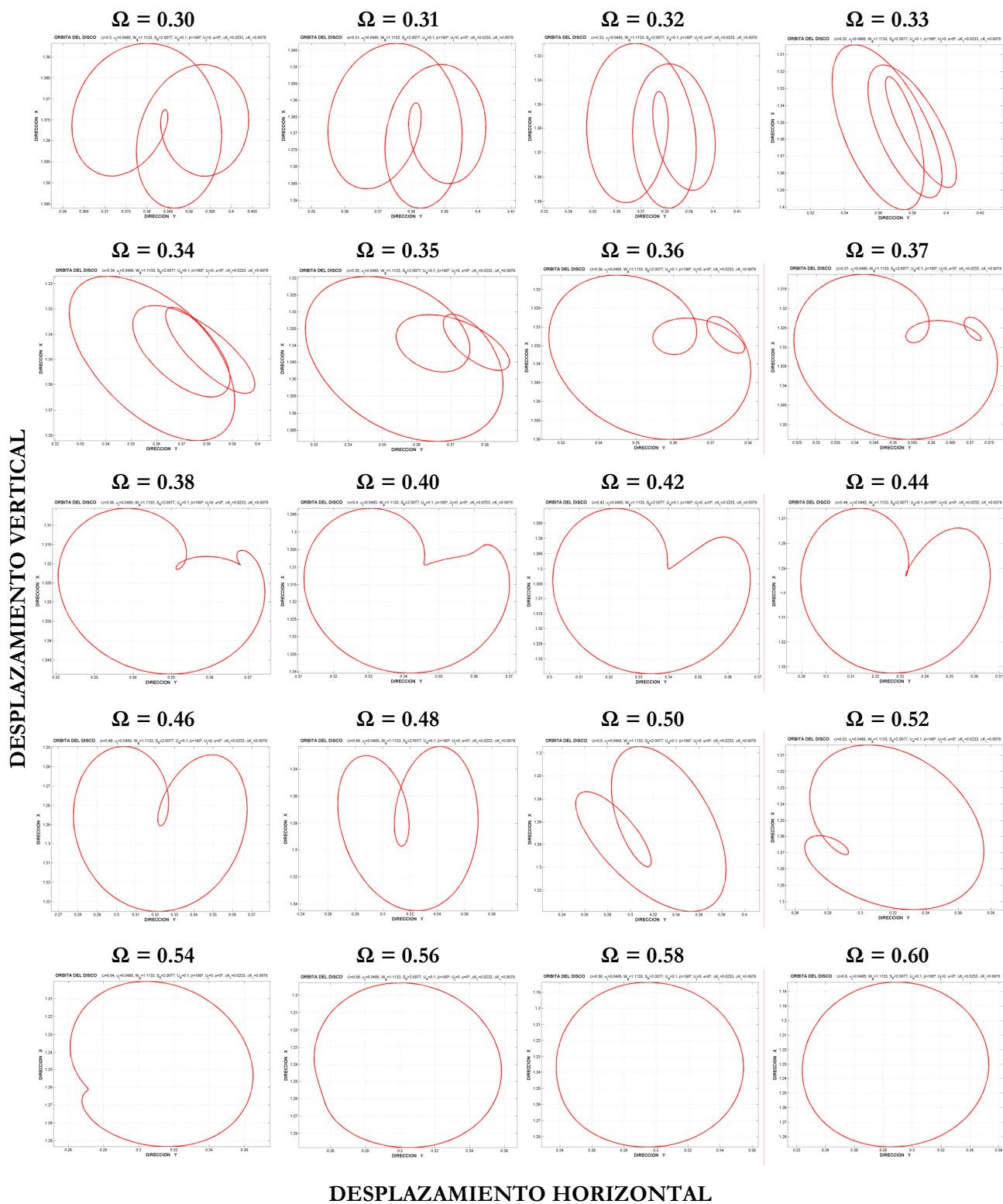
Evolución de la órbita del disco alrededor de 1/3 y 1/2 de la resonancia, configuración I, profundidad de grieta 12.5%, $U_d = 0.1$, $\beta = 0^\circ$



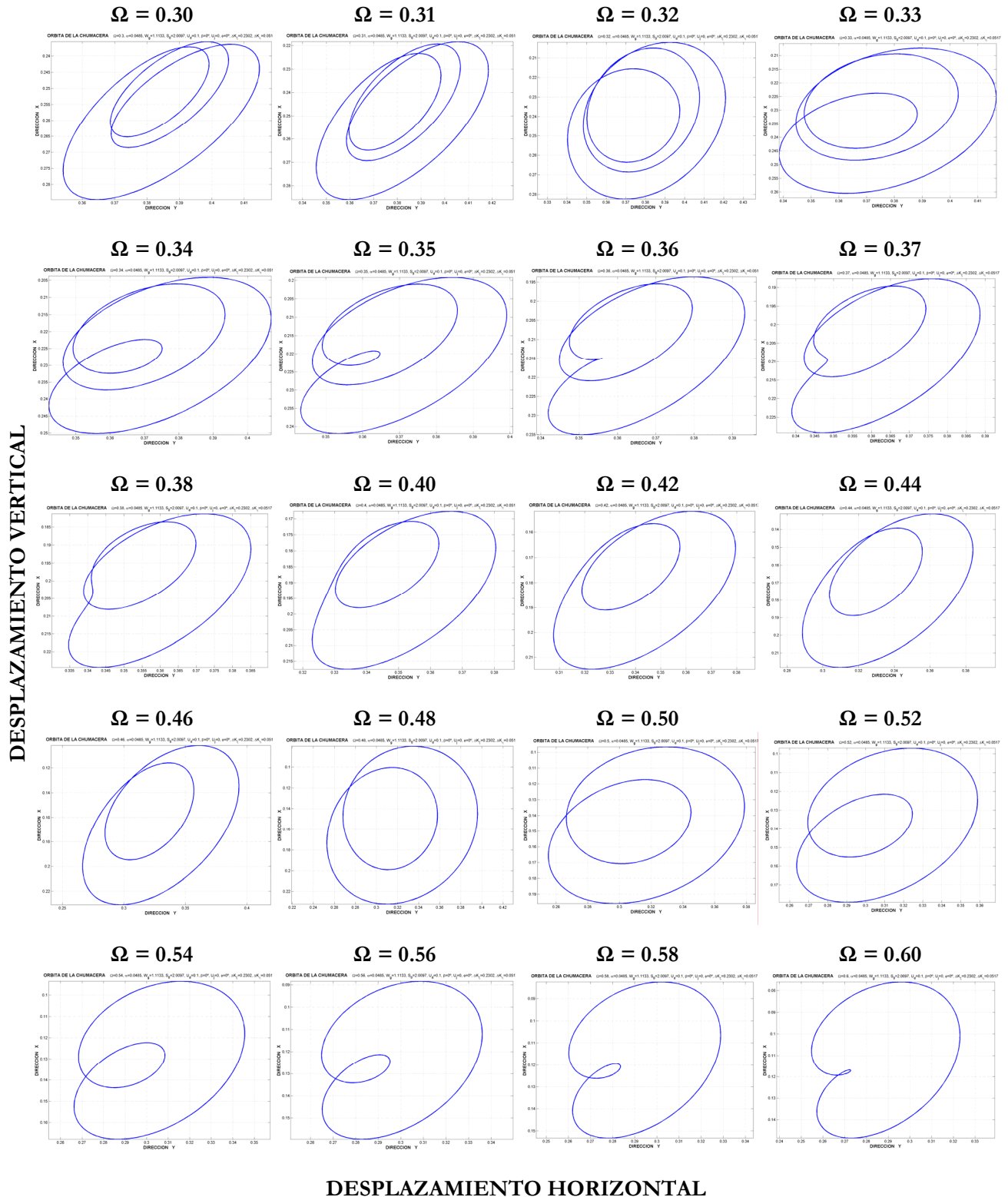
Evolución de la órbita de la chumacera alrededor de 1/3 y 1/2 de la resonancia, configuración I, profundidad de grieta 12.5%, $U_d = 0.1$, $\beta = 180^\circ$



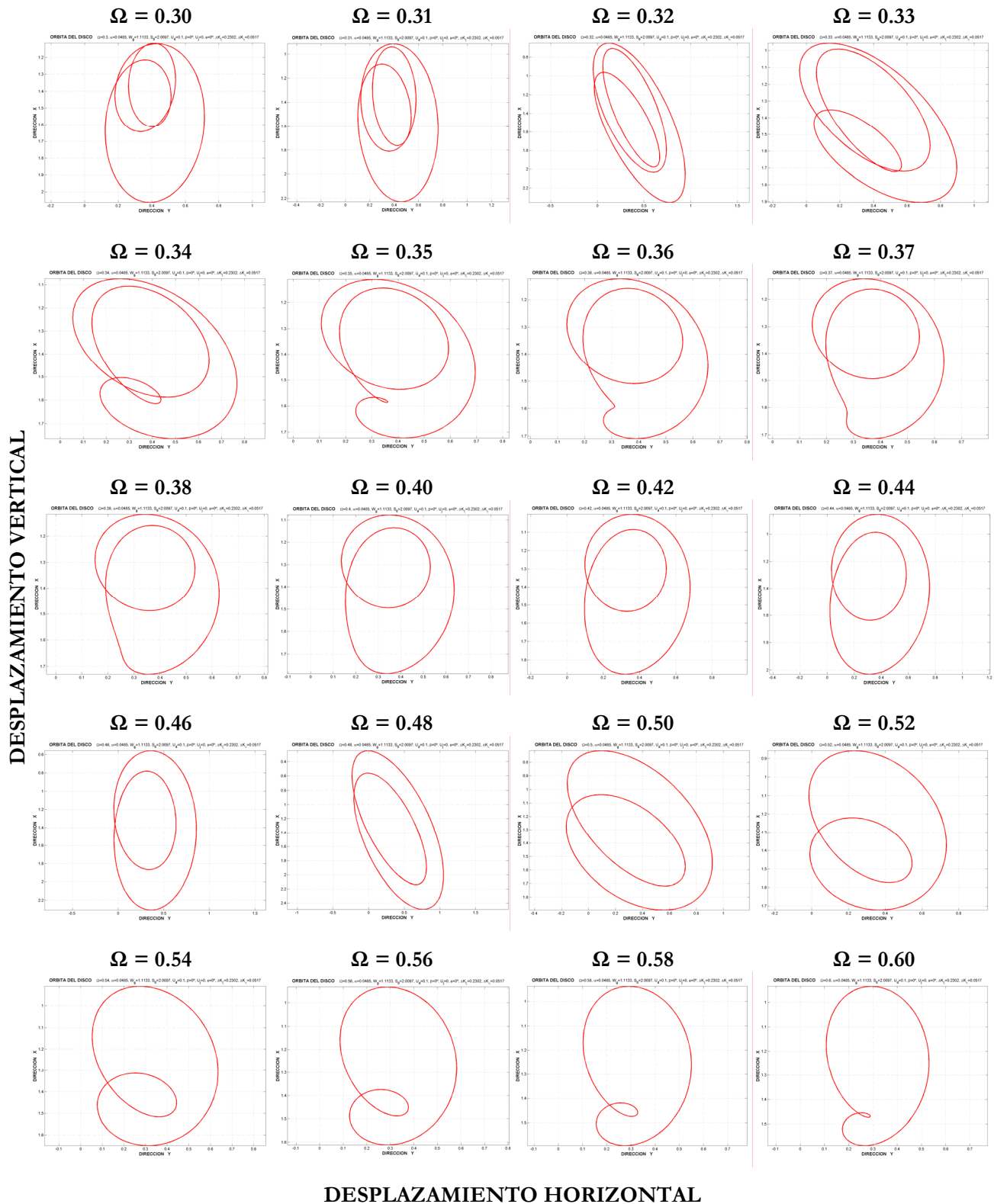
Evolución de la órbita del disco alrededor de 1/3 y 1/2 de la resonancia, configuración I, profundidad de grieta 12.5%, $U_d = 0.1$, $\beta = 180^\circ$



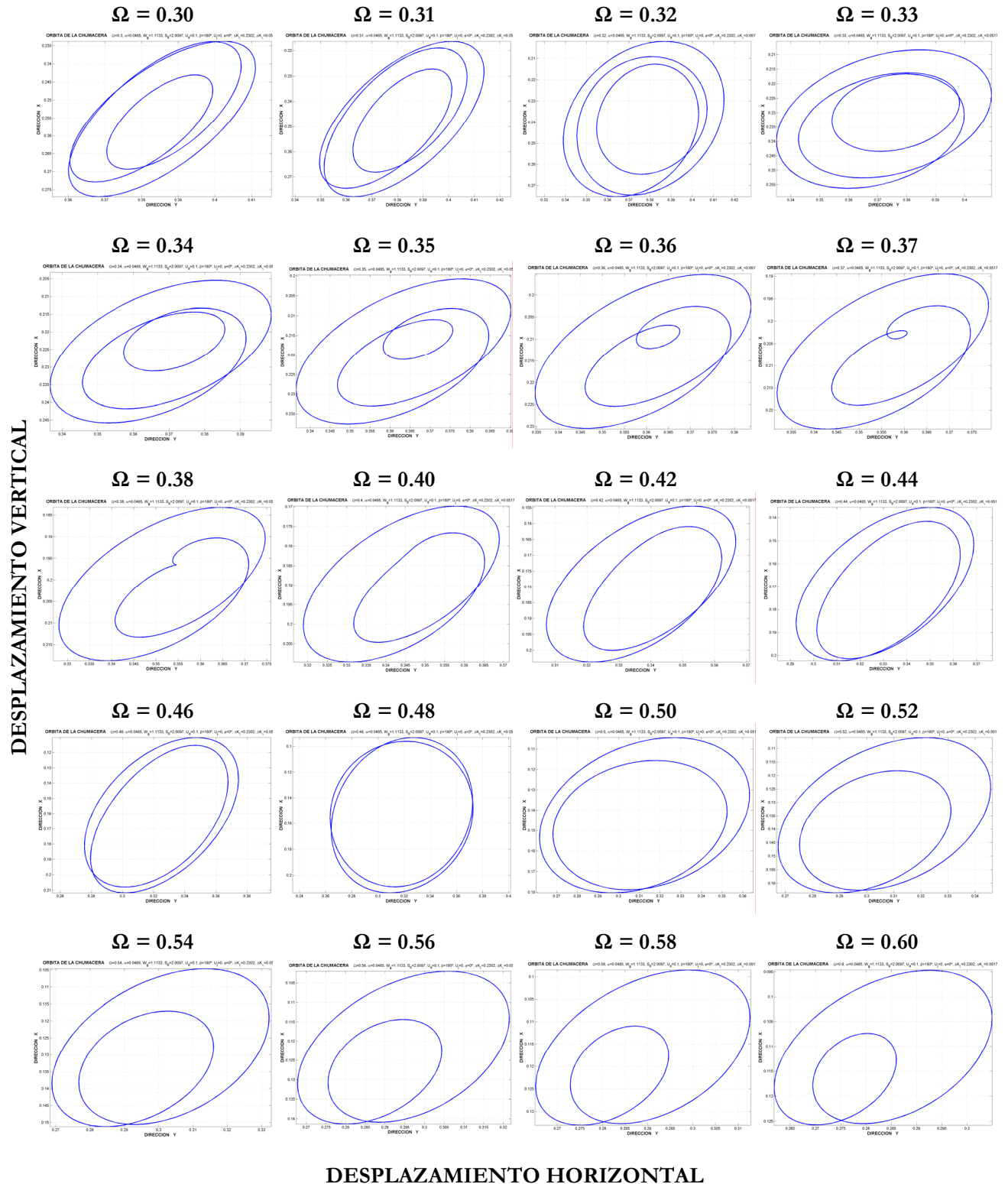
Evolución de la orbita de la chumacera alrededor de 1/3 y 1/2 de la resonancia, configuración I, profundidad de grieta 50 %, $U_d = 0.1$, $\beta = 0^\circ$



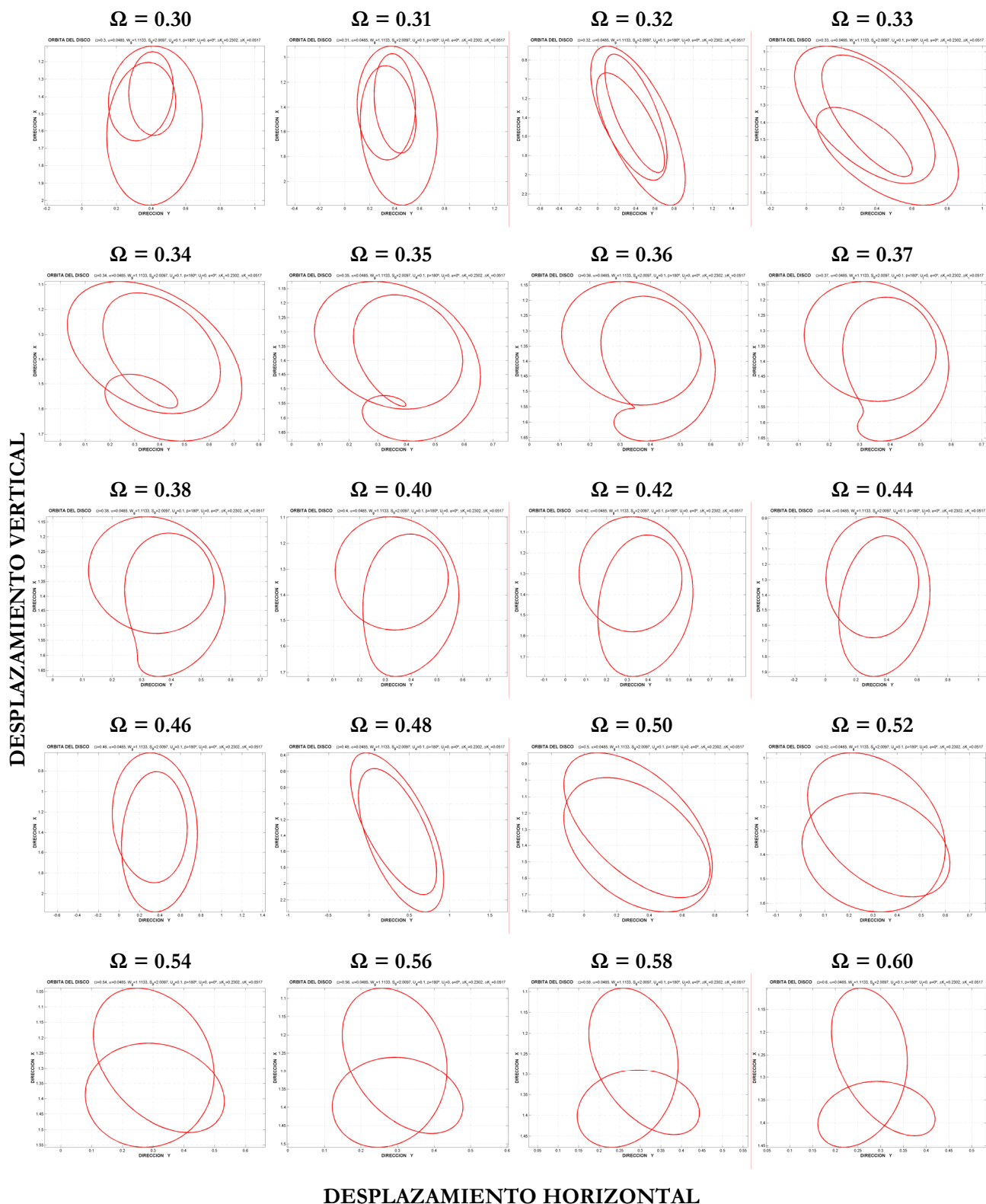
Evolución de la órbita del disco alrededor de 1/3 y 1/2 de la resonancia, configuración I, profundidad de grieta 50 %, $U_d = 0.1$, $\beta = 0^\circ$



Evolución de la órbita de la chumacera alrededor de 1/3 y 1/2 de la resonancia, configuración I, profundidad de grieta 50 %, $U_d = 0.1$, $\beta = 180^\circ$



Evolución de la órbita del disco alrededor de 1/3 y 1/2 de la resonancia, configuración I, profundidad de grieta 50 %, $U_d = 0.1$, $\beta = 180^\circ$



Apéndice D. Simulaciones numéricas, Configuración III

Parámetros del sistema para la configuración III

Tabla 6 Valores ingenieriles de la configuración III

Longitud del eje	$l = 0.3 \text{ m}$
Diámetro del eje	$d = 0.01 \text{ m}$
Módulo de elasticidad del material del eje (AISI 4140)	$E = 200 \text{ GPa}$
Masa del disco (2 discos)	$m_d = 1.6 \text{ Kg}$
Masa por unidad de longitud del eje	$m_e = 0.6165 \text{ Kg/m}$
Longitud de la chumacera	$L = 0.0127 \text{ m}$
Diámetro de la chumacera	$D = 0.0254 \text{ m}$
Masa del bodoque	$m_b = 0.0427 \text{ Kg}$
Claro radial en chumaceras	$c_r = 49 \times 10^{-6} \text{ m}$
Viscosidad del lubricante (liquido de frenos Bardhal)	$\mu = 0.0124 \text{ Pa s}$

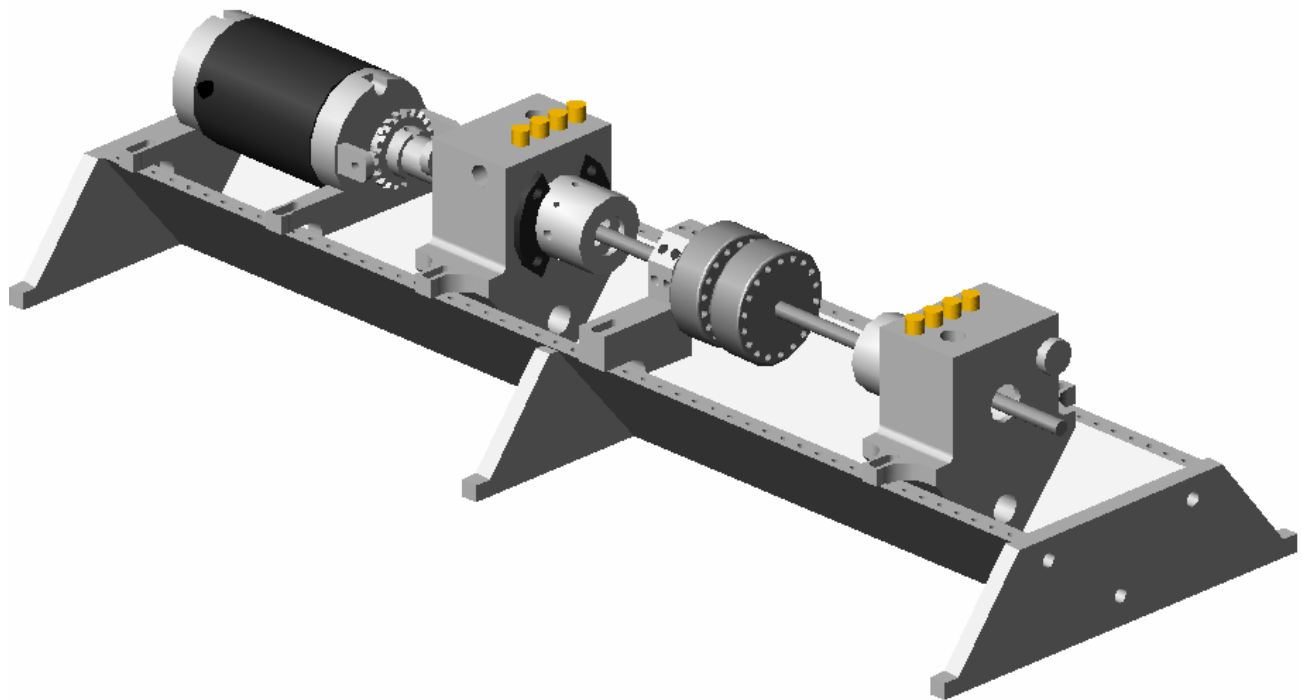
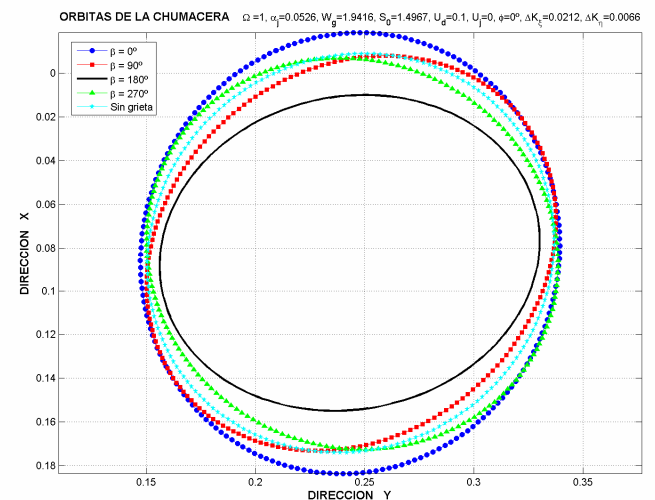
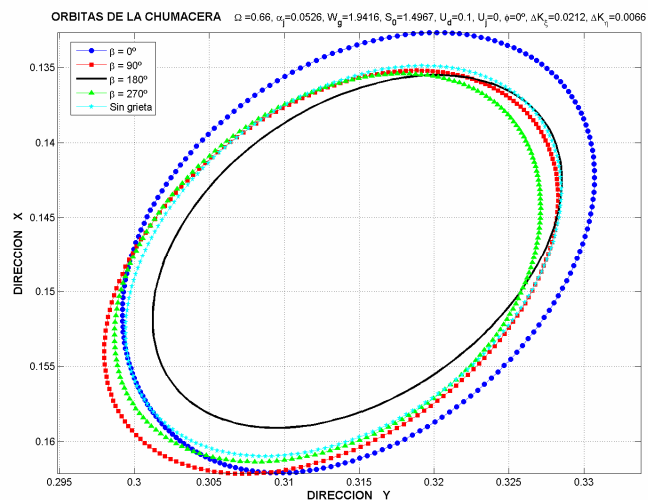
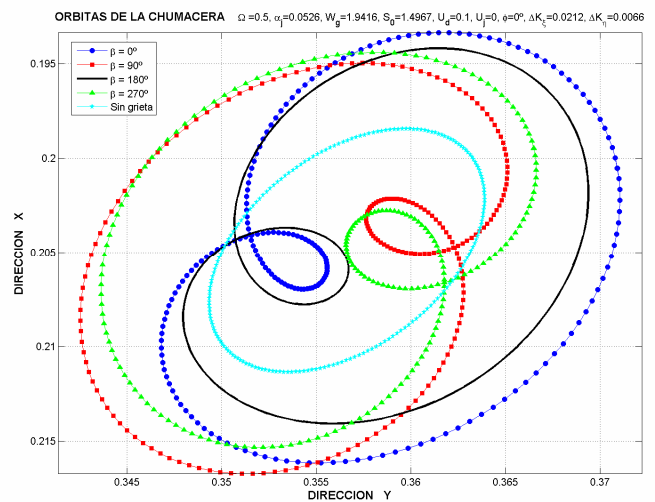
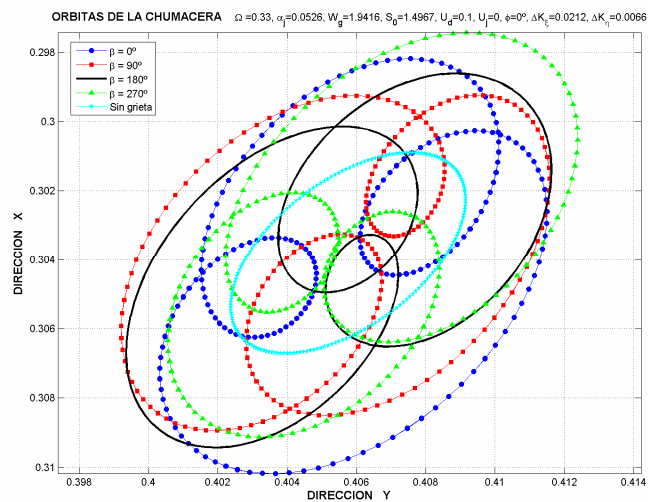
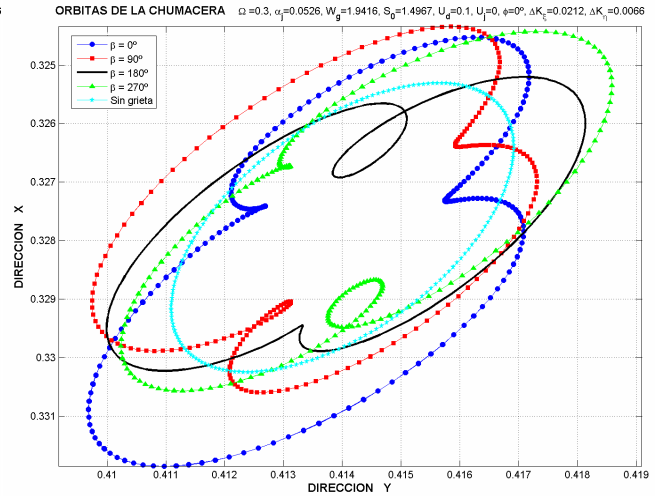
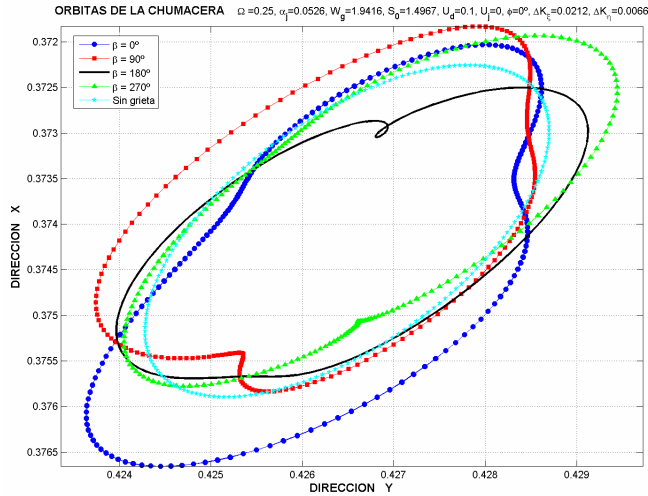


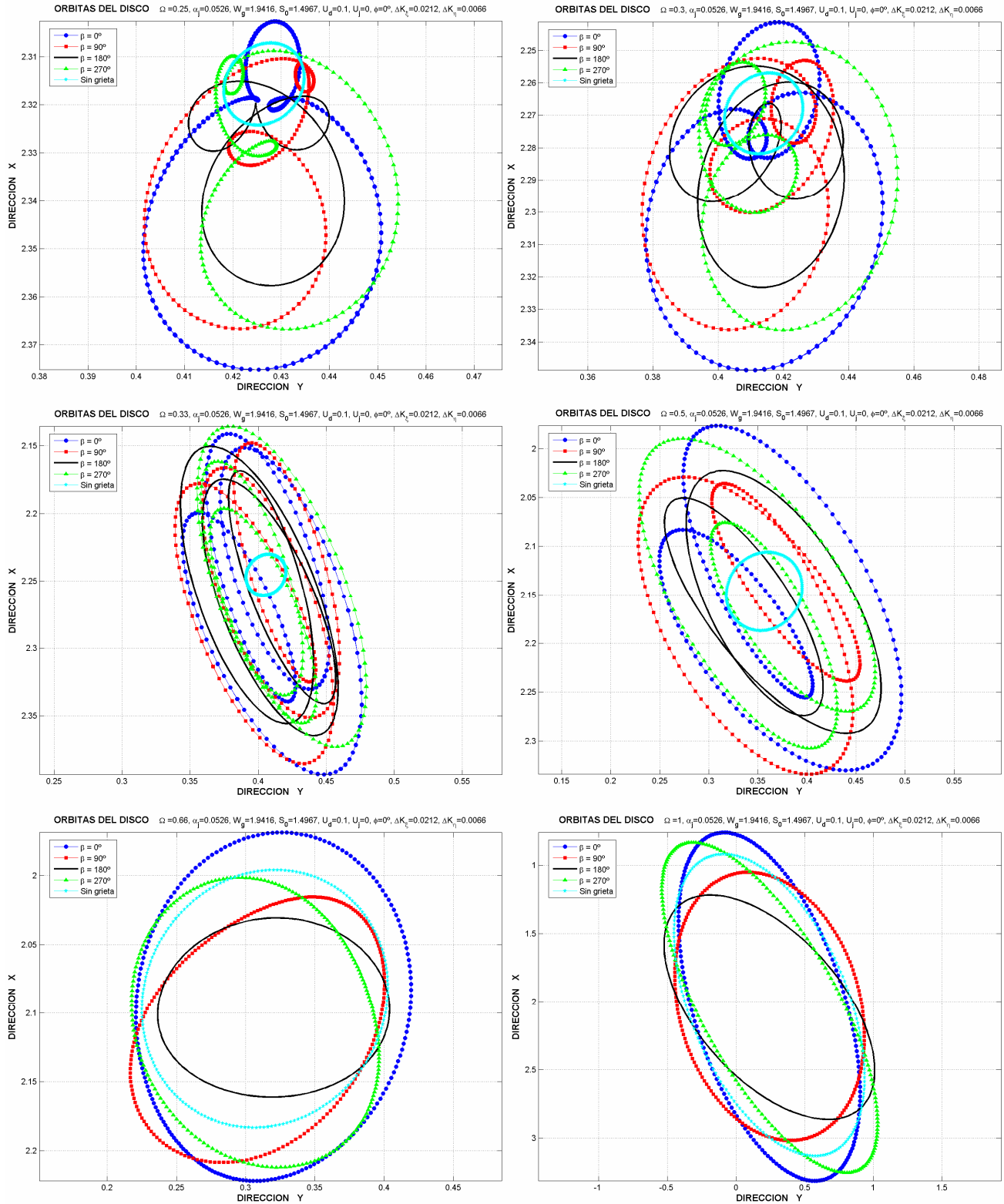
Tabla 7 Parámetros adimensionales de la configuración III

Parámetro de gravedad	$W_g = 1.9416$
Relación de masas	$\alpha_j = 0.0526$
Número de Sommerfeld Fijo	$S_0 = 1.4967$
Profundidad 12.5 %	$\Delta K_\xi = 0.0212, \Delta K_\eta = 0.0066$
Profundidad 25 %	$\Delta K_\xi = 0.0472, \Delta K_\eta = 0.0100$
Profundidad 50 %	$\Delta K_\xi = 0.2006, \Delta K_\eta = 0.0435$

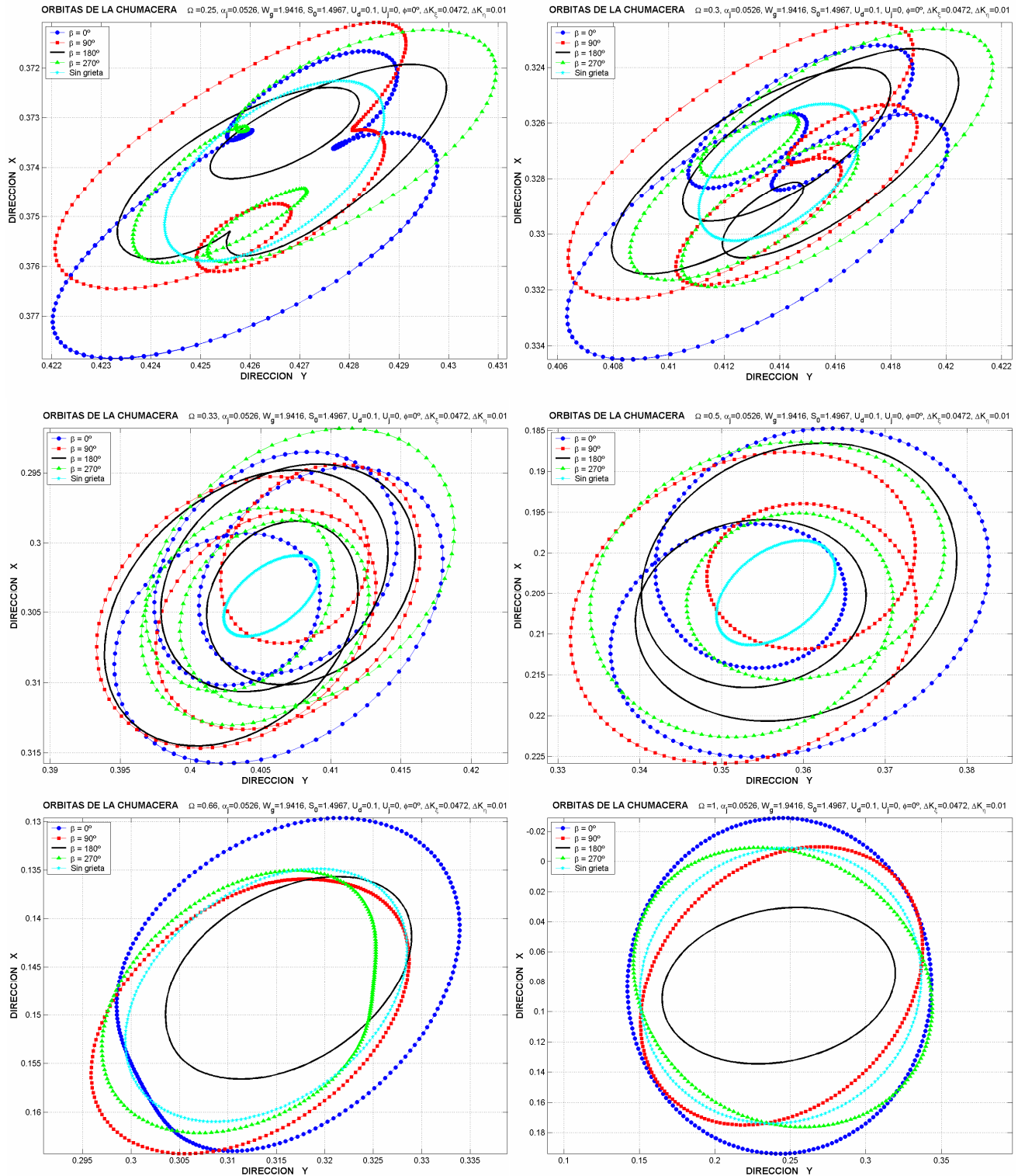
Orbitas de la chumacera a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración III, profundidad de grieta 12.5 %



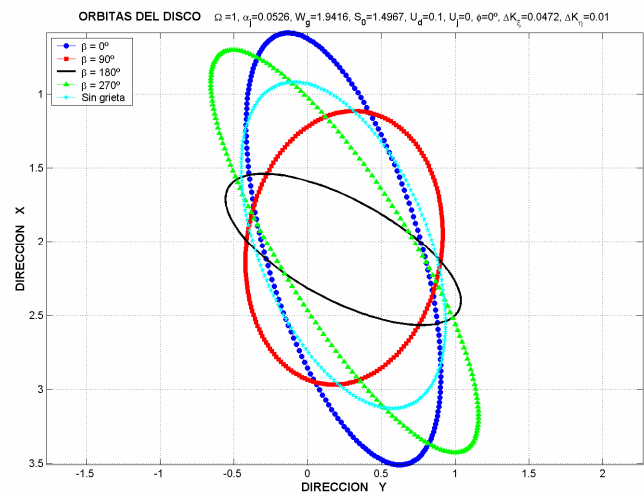
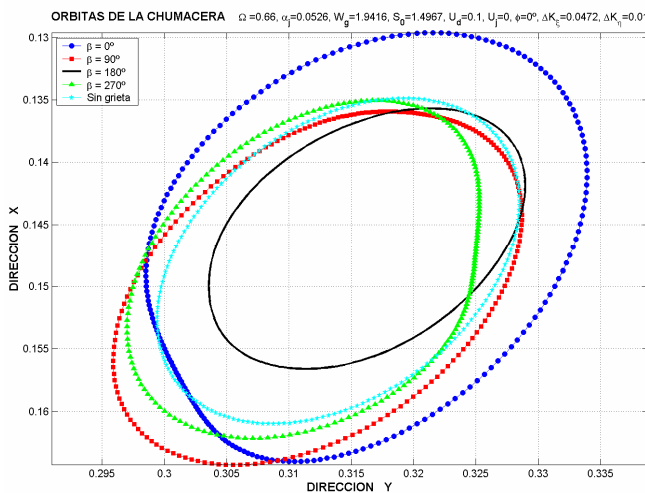
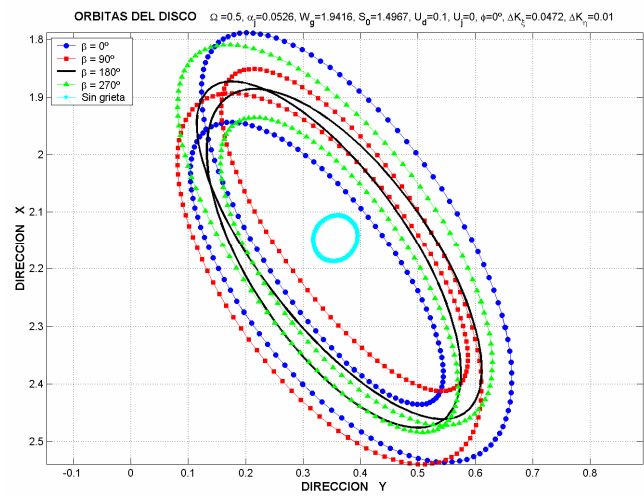
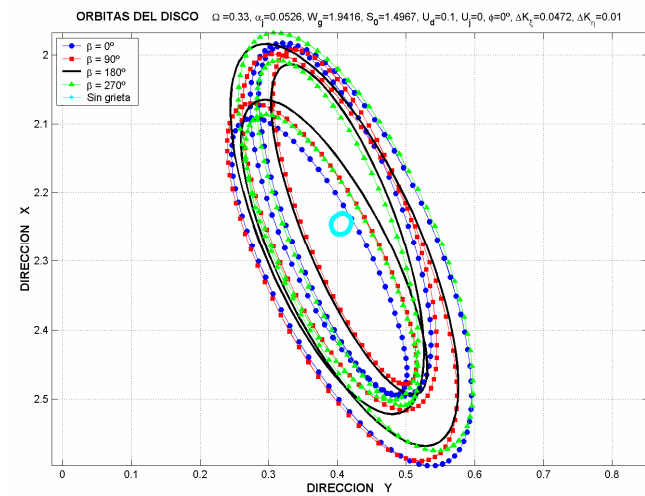
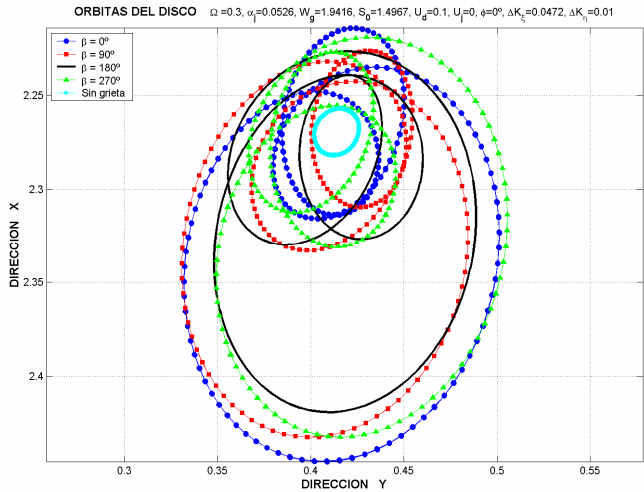
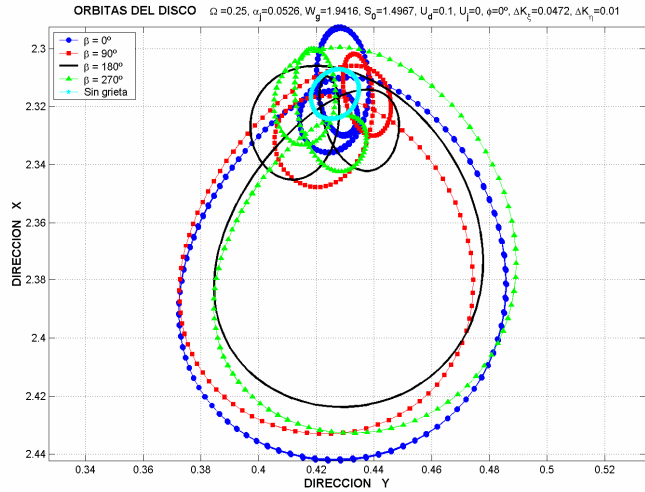
Orbitas del disco a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración III, profundidad de grieta 12.5 %



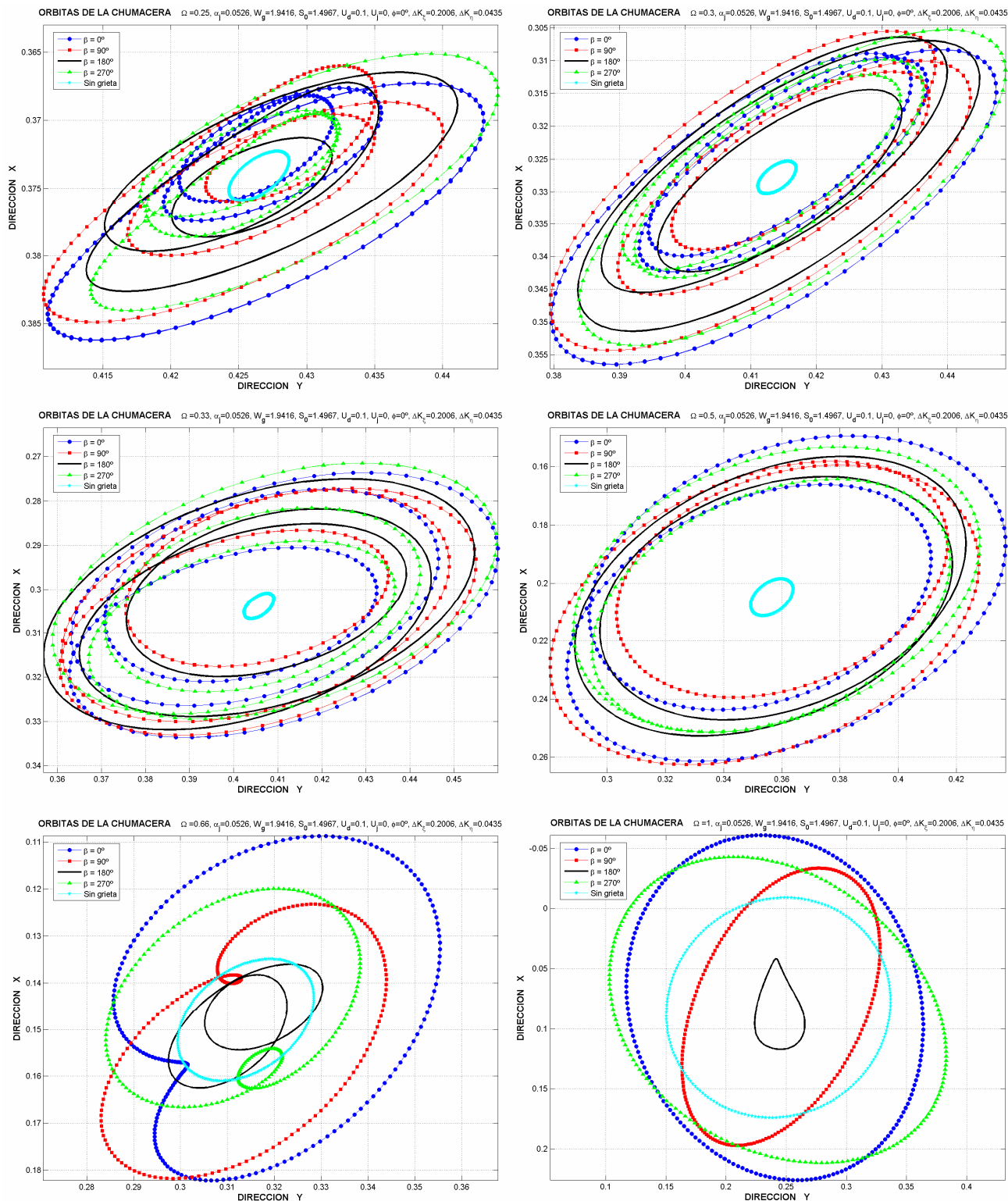
Orbitas de la chumacera a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración III, profundidad de grieta 25 %



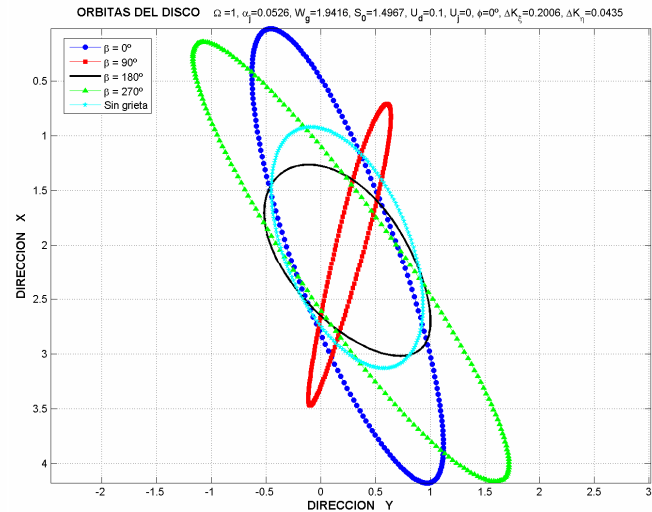
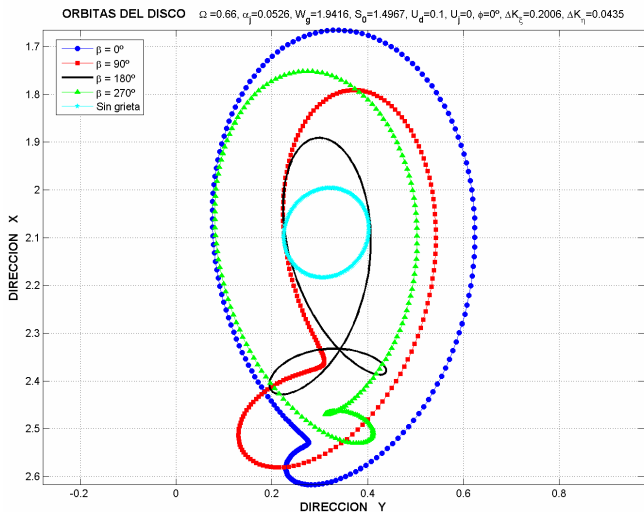
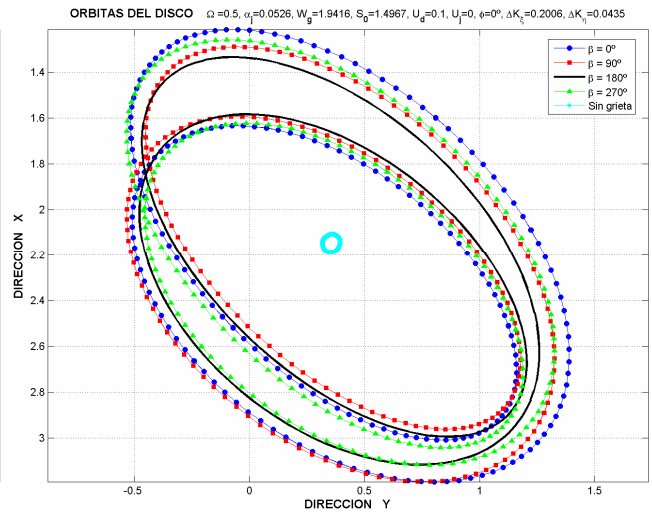
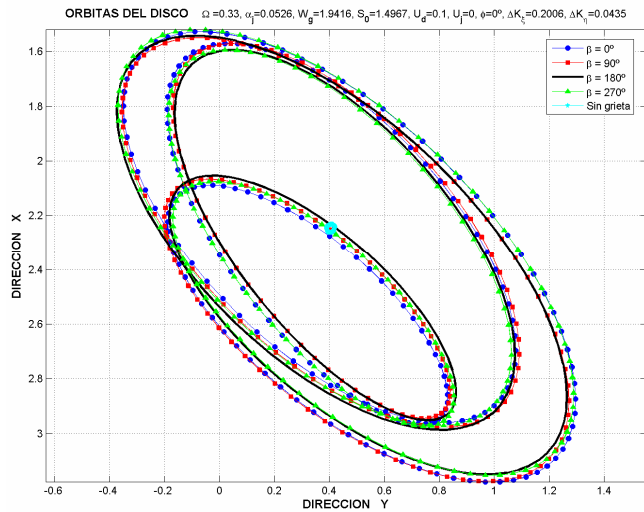
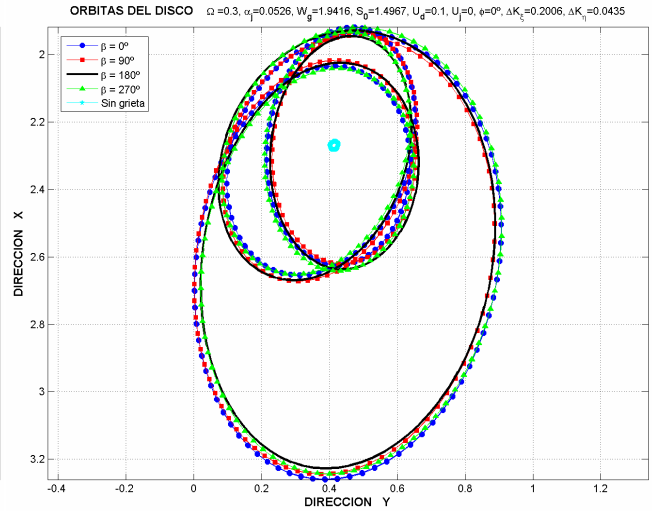
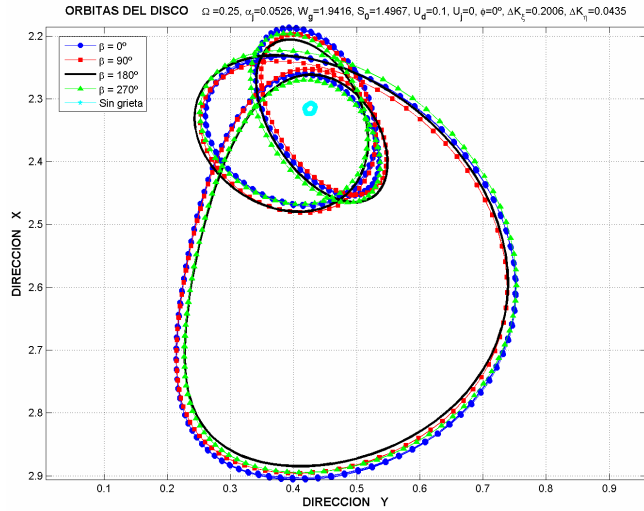
Orbitas del disco a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración III, profundidad de grieta 25 %



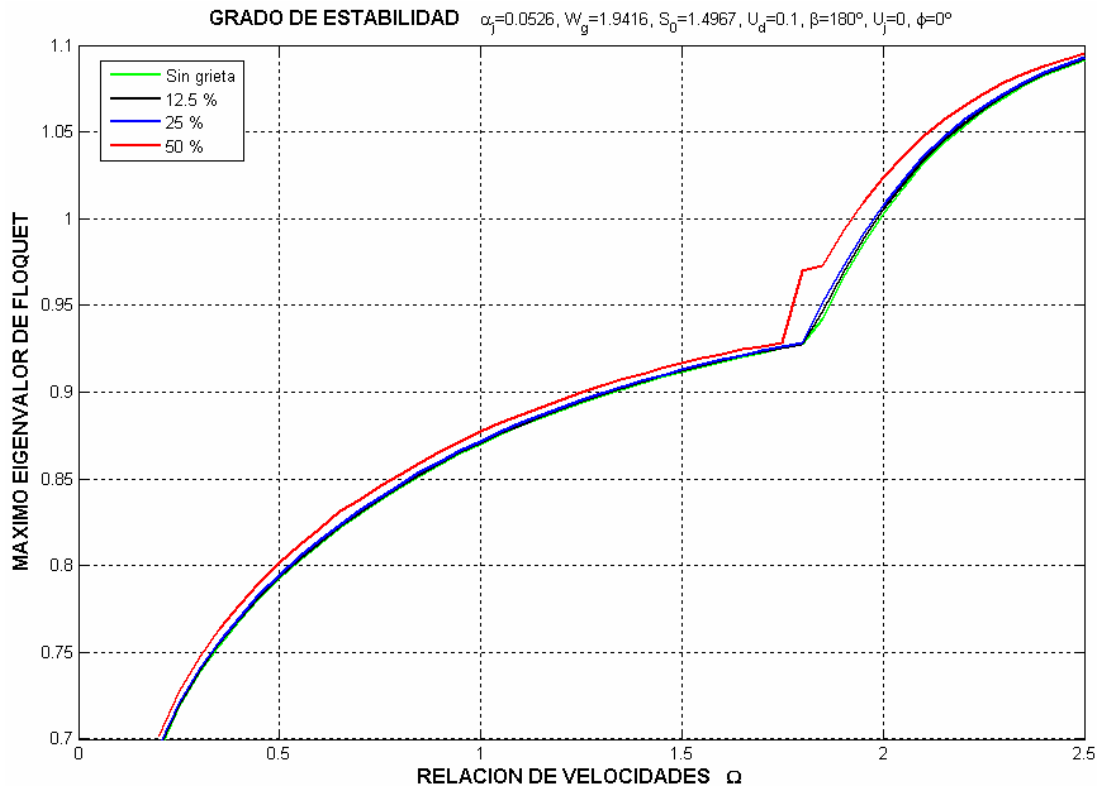
Orbitas de la chumacera a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración III, profundidad de grieta 50 %



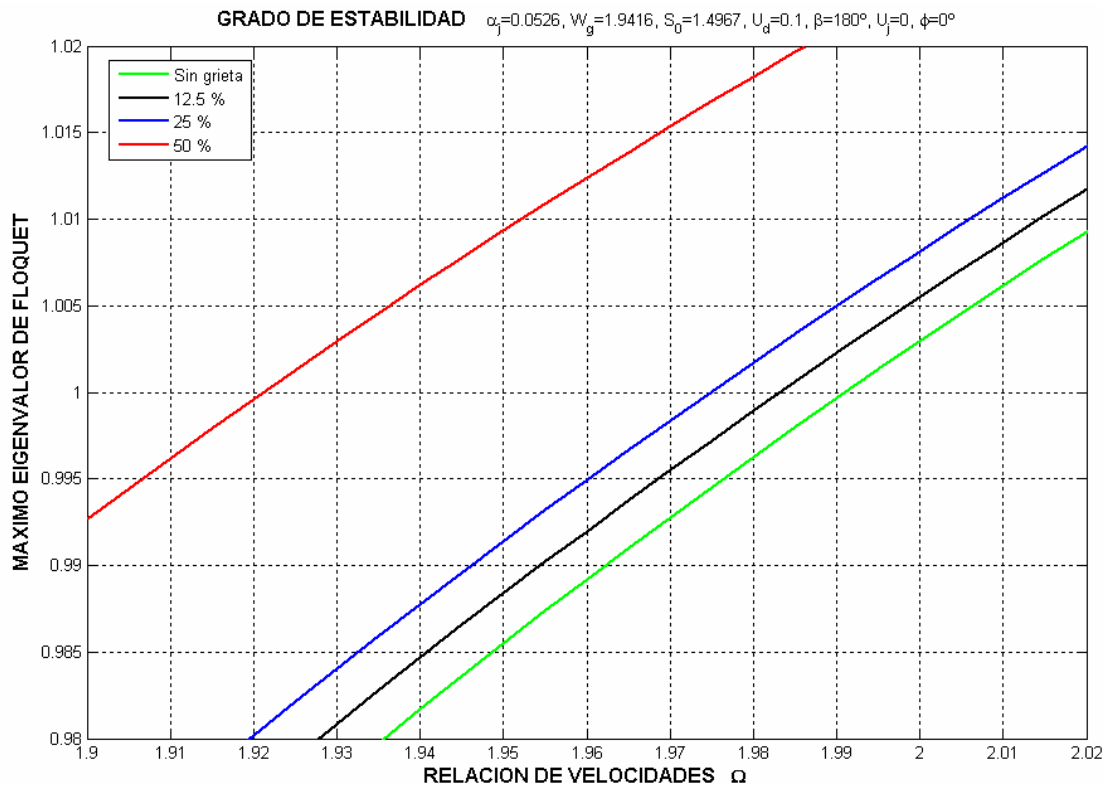
Orbitas del disco a diferentes resonancias locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance, configuración III, profundidad de grieta 50 %



Grado de estabilidad del sistema, configuración III



Acercamiento a la zona de transición estable-inestable.



Apéndice E. Artículos derivados de la presente Investigación

Revista Internacional

- Gómez-Mancilla, J., Sinou, Jean-Jacques, Nosov, V.R., Thouverez, F., Zambrano, A., 2004, “The Influence Of Crack-Imbalance Orientation And Orbital Evolution For An Extended Cracked Jeffcott Rotor”, *Comptes Rendus Mecanique*, November 2004.

Congreso Internacional

- Gómez-Mancilla, J. C., Zambrano-Reyes A., 2005, “Local Resonance of Crack-Imbalance Orientations and Orbital Evolution to Detect Rotor Cracks: Part 1, Numerical Analysis”, *IMAC XXIII: Conference and Exposition On Structural Dynamics*, January 31-February 3, 2005, Rosen Plaza Hotel Orlando Florida.

Congresos Nacionales

- Gómez-Mancilla, J., Nosov, V., Zambrano-Reyes, A., 2003, “Modelo del Rotor de Jeffcott Extendido Desbalanceado y Fisurado y su Tratamiento Numérico”, *VII Congreso Nacional en Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, México D. F., Noviembre 3-7, 2003.
- Zambrano-Reyes, A., Nosov V. R., Gómez-Mancilla, J. C., Sánchez-Silva, F., 2004, “Modelo del Rotor de Jeffcott Extendido Desbalanceado y Fisurado Sobre Soportes Flexibles”, *8º Congreso Nacional en Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, México D.F., Noviembre 15-19, 2004.
- Zambrano-Reyes, A., Gómez-Mancilla, J. C., Nosov V. R., Sánchez-Silva, F., 2004, “La Influencia de la Orientación Entre Grieta y Desbalance y la Evolución Orbital para un Rotor de Jeffcott Extendido Fisurado”, *8º Congreso Nacional en Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, México D.F., Noviembre 15-19, 2004.



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com



C. R. Mecanique 332 (2004) 955–962



COMPTES RENDUS

MECANIQUE

<http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/>

The influence of crack-imbalance orientation and orbital evolution for an extended cracked Jeffcott rotor

J. Gómez-Mancilla^a, Jean-Jacques Sinou^{b,*}, V.R. Nosov^a,
F. Thouverez^b, A. Zambrano^a

^a *Lab. Vibraciones & Rotodinamica ESIME, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., Mexico*

^b *Laboratoire de tribologie et dynamique des systèmes UMR CNRS 5513, équipe dynamique des systèmes et des structures, École centrale de Lyon, 36, avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully, France*

Received 21 July 2004; accepted after revision 28 September 2004

Available online 5 November 2004

Presented by Évariste Sanchez-Palencia

Abstract

Vibration peaks occurring at rational fractions of the fundamental rotating critical speed, here named Local Resonances, facilitate cracked shaft detection during machine shut-down. A modified Jeffcott-rotor on journal bearings accounting for gravity effects and oscillating around nontrivial equilibrium points is employed. Modal parameter selection allows this linear model to represent first mode characteristics of real machines. Orbit evolution and vibration patterns are analyzed, yielding useful results. Crack detection results indicate that, instead of $1x$ and $2x$ components, analysis of the remaining local resonances should have priority; this is due to crack-residual imbalance interaction and to $2x$ multiple induced origins. Therefore, local resonances and orbital evolution around $1/2$, $1/3$ and $1/4$ of the critical speed are emphasized for various crack-imbalance orientations. **To cite this article:** *J. Gómez-Mancilla et al., C. R. Mecanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

Résumé

Influence de l'orientation relative fissure-balourd et évolution orbitale associée pour un rotor Jeffcott fissuré. Les pics de vibration apparaissant au passage des fractions de la vitesse de critique de rotation des systèmes tournants, appelées résonances locales, facilitent la détection de fissures sur les machines. Dans cette étude, un modèle de rotor Jeffcott modifié avec une fissure tournante, comportant des coussinets et prenant en compte les effets de pesanteur et de balourd est présenté. Le choix modal des paramètres permet de représenter les caractéristiques liées au premier mode des machines tournantes usuelles. Les évolutions des vibrations et des orbites du système comportant une fissure sont analysées et permettent d'obtenir des résultats utiles pour la détection des fissures sur les machines tournantes. Ainsi, ces résultats indiquent que, en plus des composants $1x$ et $2x$, l'analyse des autres résonances locales restantes doivent être regardées avec attention du fait de l'interaction possible entre

* Corresponding author.

E-mail address: jean-jacques.sinou@ec-lyon.fr (J.-J. Sinou).

Nomenclature

C_r	bearing radial clearance	K_{ox}, K_{oy}	compensating equilibrium bearing stiffness
$k_{i,j}$ ($i, j = x, y$)	bearing stiffness coefficients;	ΔK_ξ	stiffness change along dir. ξ (= $\Delta k_\xi / ks$)
$c_{i,j}$ ($i, j = x, y$)	bearing damping coefficients	ΔK_η	stiffness change, orthog. dir. η (= $\Delta k_\eta / ks$)
$eu = e_0$	imbalance mass eccentricity;	D_e	external damping (= $cd/2m_d\omega_c$)
$e_{x0} = e_0 \cos \varphi, e_{y0} = e_0 \sin \varphi$		So	fixed Sommerfeld number, = $S/\Omega = DL\omega_c\mu/2\pi W(R/C_r)^2$ with S bearing Sommerfeld number
ks	integral un-cracked shaft stiffness	W_g	gravity sagging parameter (= $\delta s / Cp$) with $\delta s = mg / ks$: static shaft deflection, sagging parameter
$\Delta k_\xi, \Delta k_\eta$	crack stiffness change, directions ξ, η	W_{brg}	$2\alpha W_g$ force load at brg. locations
m_d, m_b	concentrated mass, disc and bearing, responses	φ	angle of imbalance vector <i>w.r.t.</i> x -reference
W	force load on bearing	β	relative angle between crack and imbalance
$\delta s = mg / ks$	static shaft deflection	$\Phi = \omega t + \beta = \tau + \beta$	instantaneous rotating angle
ω	rotor operating speed [rad/s]		
ω_c	rigid support critical speed		
ξ, η	rotating coordinates, ξ crack orientating axis		
α	bearing and disc mass ratio		
U_d	disc mass imbalance ratio magnitude (= eu / Cp)		

les différentes orientations de la fissure et du balourd, et des origines multiples pouvant engendrer la présence des résonances $2x$. Par conséquent les résonances et l'évolution des orbites obtenus autour de $1/2$, $1/3$ et $1/4$ de la vitesse critique sont étudiées pour différentes variations d'angle entre le balourd et l'orientation de la fissure. **Pour citer cet article : J. Gómez-Mancilla et al., C. R. Mécanique 332 (2004).**

© 2004 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

Keywords: Vibrations; Dynamic systems; Rotor dynamics; Crack detection; Local resonance; Extended Jeffcott rotor; Orbital evolution

Mots-clés : Vibrations ; Dynamique des vibrations ; Dynamique des rotors ; Détection des fissures ; Résonance locale ; Modèle de Jeffcott étendu ; Évolution des orbites

1. Introduction

Personal safety, operating costs and increasing overhaul-time intervals motivate research in cracked rotor detection and make structural assessment by monitoring vibration highly convenient. Crack detection is most feasible during frequency sweeps such as machine shut-down, when several local vibration resonances occurring at rational fractions of the fundamental critical speed can indicate structural problems. There has been extensive research on the vibration behaviour of crack rotor and the use of response characteristics to detect cracks [1–9].

In his literature review Gash [3] provided a useful survey on the state of the art in this field. Friswell's team has worked on several interesting topics, among which simplified models for the crack [4] are analyzed. Penny and Friswell conclusion has relevance since the simple harmonic crack breathing function, as proposed by Mayes [2], allows this model to be linear and yet yield similar system behavior as an equivalent and more involved nonlinear model. Baschmichdt and Pennacchi [8] have carefully studied and developed crack modeling, mostly when affected by thermal effects as occur in vertical cooling pumps. For the case of a vertical cracked rotor having significant

gyroscopic effects Yamamoto and Ishida [5] proposed an interesting nonlinear model also capable of analyzing the crack-imbalance orientation effect in the absence of gravity terms. Although for quite different rotor configurations, both works, [5] and the present one, reach similar results concerning the existence of Local Resonances, the masking influence of mass imbalance, and the complex system vibration responses.

In this study, an extended Jeffcott Rotor on lubricated journal bearings having masses and imbalances at disc and bearings developed by Gómez-Mancilla [6,7], is used to characterize orbital evolution and vibration patterns at the local resonances, including the critical speed. The model used here includes gravity and yields periodic responses, even in the absence of imbalance excitations. In rotors with small gyroscopic effects where the coupling to other shafts is flexible, and a crack is located near or at the shaft mid-span, the present simplified model is sufficient for a good qualitative description of actual machine vibrating at its first mode. While using Jeffcott-rotor models, the key relies on the proper selection of the modal parameter values, which allows adequate representation of real machines.

The relative orientation angle between residual imbalance and the crack and their interaction drastically affect the system response, making crack detection very difficult. The existence of Local Resonances at several rational sub-super and combination harmonics permit good vibration characterization reducing the influence of interaction between unknown vectors; i.e., residual imbalance and cracked shaft magnitudes and orientations. Certain controversy exists while establishing which component is more relevant to damage detection, synchronous $1x$ or $2x$ vibration. For practical purposes, crack presence significantly affects the synchronous $1x$ component and renders the prognosis confusing, due to the large dependence on the magnitude and on the relative phase angle existing between the unknown residual imbalance and crack vectors. Recall that in real situations crack-imbalance magnitudes and relative angle are not known a priori. Then the authors recommend to focus on the all combinations of 1, 2, 3 super-sub-harmonic components since all of these are capable of inducing what we call Local Resonances. For the stated reasons, evolution and analysis of orbital shapes due to speed sweep with special emphasis on Local Resonances of synchronous, twice and three times harmonic are presented.

2. Extended Jeffcott rotor

In [6] the mathematical model used is introduced, with a detailed derivation of the equations; its physical configuration is illustrated in Fig. 1. The modified Jeffcott-rotor on journal bearings here used includes gravity, crack and unbalance; then, for self-contained purposes the mathematical equations expressed in dimensionless form and its main characteristics are briefly presented. A total of four degrees of freedom, two at the disc X_d, Y_d , plus two at both bearing locations X_b, Y_b result. Bearing differential displacements, the eight rotordynamic coefficients and the corresponding bearing equilibrium locus $\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}$, are used to express the bearing reaction forces yielding oscillations around nontrivial equilibrium points.

Applying Newton Second Law at the disc location and normalizing each term in accordance to the nomenclature and using the coordinate system as Fig. 1(b) we obtain:

$$\begin{aligned} \Omega^2 \ddot{X}_d + 2D_e \Omega \dot{X}_d + (X_d - X_b) - \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi)(X_d - X_b) + \Delta K_2 \sin 2\Phi(Y_d - Y_b)] \\ = W_g + \Omega^2 U_d \cos(\tau + \varphi_d) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \Omega^2 \ddot{Y}_d + 2D_e \Omega \dot{Y}_d + (Y_d - Y_b) - \frac{g(\Phi)}{2} [\Delta K_2 \sin 2\Phi(X_d - X_b) + (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi)(Y_d - Y_b)] \\ = \Omega^2 U_d \sin(\tau + \varphi_d) \end{aligned} \tag{2}$$

In a similar fashion, force balance and normalization at the bearing locations yields

$$\begin{aligned} \Omega^2 \alpha \ddot{X}_b + \frac{1}{2}(X_b - X_d) - \frac{g(\Phi)}{4} [(\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi)(X_b - X_d) + \Delta K_2 \sin 2\Phi(Y_b - Y_d)] \\ + (K_{xx} \Delta X_b + K_{xy} \Delta Y_b + \Omega C_{xx} \Delta \dot{X}_b + \Omega C_{xy} \Delta \dot{Y}_b) = \Omega^2 \alpha U_b \cos(\tau + \varphi_b) - \frac{W_g}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

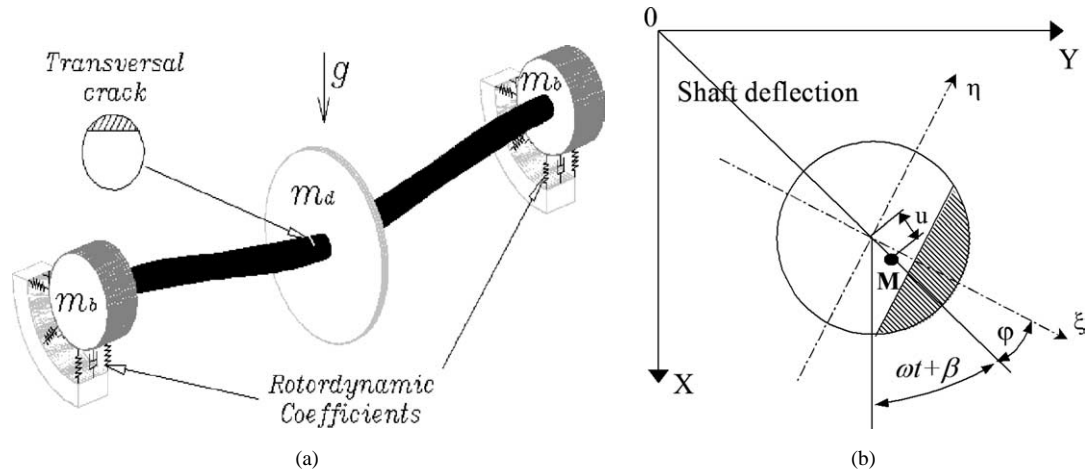


Fig. 1. Modified Jeffcott-rotor showing crack location; gravity load; imbalance and masses at both, disc m_d , and bearings ends m_b ; bearing rotor-dynamic coefficients. (a) Cracked rotor-bearing system; (b) coordinate system crack and disc imbalance.

Fig. 1. Jeffcott rotor étendu montrant la position de la fissure, le balourd, les masses au niveau du disque et des coussinets et la force de gravité (a) Système rotor-coussinet-fissures. (b) Coordonnées du systèmes fissuré et du balourd associé.

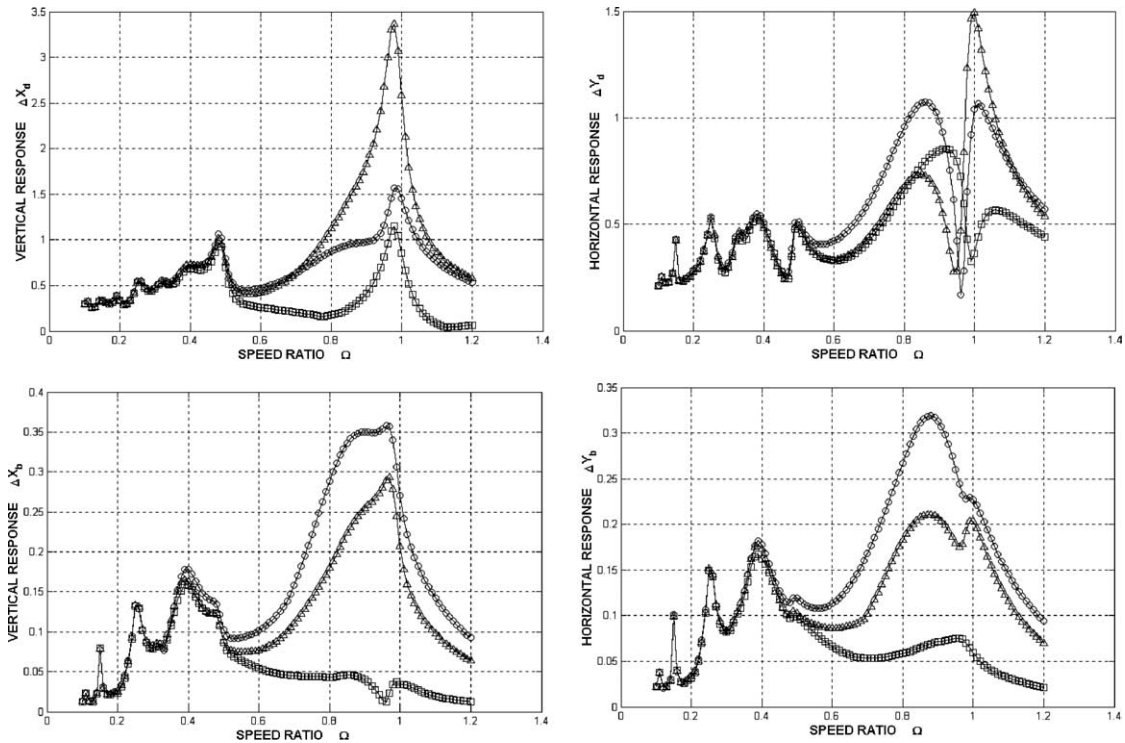


Fig. 2. Vertical and horizontal responses of the disc and of the bearing for various crack-imbalance orientation ($\Phi_d = 0^\circ$: circle, $\Phi_d = 90^\circ$: square, $\Phi_d = 270^\circ$: triangle).

Fig. 2. Responses verticale et horizontale du disque et des coussinets pour différentes valeurs d'orientation entre la fissure et le balourd ($\Phi_d = 0^\circ$: cercle, $\Phi_d = 90^\circ$: carré, $\Phi_d = 270^\circ$: triangle).

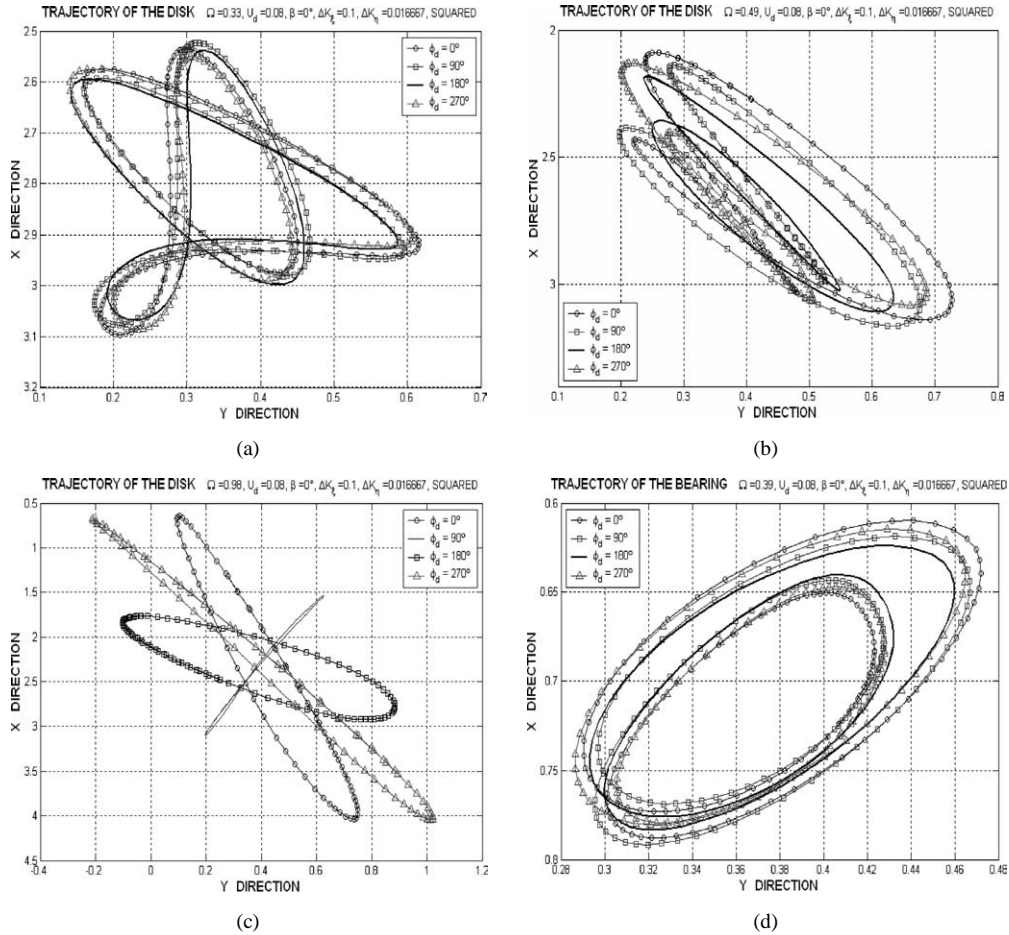


Fig. 3. Orbits at some local resonances for various imbalance-crack orientations $\phi_d = 0, \pi/2, 3\pi/2, 2\pi$. (a) trajectory of the disk for $\Omega = 0.33$, (b) trajectory of the disk for $\Omega = 0.49$, (c) trajectory of the disk for $\Omega = 0.98$, (d) trajectory of the bearing for $\Omega = 0.39$.

Fig. 3. Orbites à différentes résonances locales pour des différentes orientations de fissure et balourd $\phi_d = 0, \pi/2, 3\pi/2, 2\pi$. (a) trajectoire au niveau du disque pour $\Omega = 0.33$, (b) trajectoire au niveau du disque pour $\Omega = 0.49$, (c) trajectoire au niveau du disque pour $\Omega = 0.98$, (d) trajectoire au niveau des coussinets pour $\Omega = 0.39$.

$$\Omega^2 \alpha \ddot{Y}_b + \frac{1}{2}(Y_b - Y_d) - \frac{g(\Phi)}{4} [\Delta K_2 \sin 2\Phi (X_b - X_d) + (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi)(Y_b - Y_d)] + (K_{yy} \Delta Y_b + K_{yx} \Delta X_b + \Omega C_{yy} \Delta \dot{Y}_b + \Omega C_{yx} \Delta \dot{X}_b) = \Omega^2 \alpha U_b \sin(\tau + \varphi_b) \quad (4)$$

where the relevant parameter values are $\Delta X_b = X_b - \varepsilon_{x0}$; $\Delta Y_b = Y_b - \varepsilon_{y0}$; $\Delta X_d = X_d - (\varepsilon_{x0} + W_g)$; $\Delta Y_d = Y_d - \varepsilon_{y0}$; $\Delta K_1 = \Delta K_\xi + \Delta K_\eta$; $\Delta K_2 = \Delta K_\xi - \Delta K_\eta$; $\Phi = \omega t + \varphi_d + \beta = \tau + \varphi_d + \beta$; $W_g = \delta_s / C_r$.

The existence of mass at the disc and at the bearings allows us to perform several types of useful analyses, such as a number of imbalance combinations, varying relative magnitudes and angular phases at the disc-bearing and with respect to the crack orientation; also by varying α , different shaft lumped mass distributions can be accounted for. A simple crack breathing phenomenon such as discussed by Gash [3], typical in weight dominated systems, is assumed:

$$g(\Phi) = \left(\frac{2}{\pi}\right) \left(\frac{\pi}{4} + \cos \Phi - \frac{1}{3} \cos 3\Phi + \frac{1}{5} \cos 5\Phi - \frac{1}{7} \cos 7\Phi + \dots\right) \quad (5)$$

3. Numerical results

A single mid-span crack with medium crack size depth ($\Delta K_\xi = 0.10$ and $\Delta K_\eta = 0.017$) corresponding to 40% of the shaft diameter is used with $U_d = 0.08$, corresponding to similar crack-imbalance interaction. A crack breathing model displaying a squared period, as indicated in Eq. (5) is employed; however, as previously mentioned by Friswell [4], results are lightly depended on the breathing model. The important relative angular orientation existing between the disc imbalance vector and the crack ξ -axis, see Fig. 1, is varied and computed for various orthogonal directions. Rest of the used simulation parameter values are as follows: relative mass at the bearings, $\alpha = 0.50$, corresponding to approximate uniform shaft mass distribution; weight parameters, $W_g = 2.0$, is a weight dominant sag; journal bearing to operating critical speed numbers ratios, $So = 0.90$ corresponding to relatively flexible shaft-bearing support stiffness ratio. The shaft supported on relatively short journal bearings having $L/D = 0.5$ and corresponding bearing dynamic coefficients are employed.

In Fig. 2, horizontal and vertical vibrating amplitudes at disc and bearings plotted as functions of the operating frequency Ω are illustrated for various crack-imbalance vectors orientations. Local resonance peaks in both vertical and horizontal directions show small yet significant differences in magnitude, and the peak occurs at slightly different speeds; also clear differences between orthogonal directions and between disk and bearing locations can be observed. The latter differences can be attributed to weight effects and bearing asymmetric characteristics, as well as damping existing at the bearings. Moreover, a significant variation both on magnitude and phase angle of

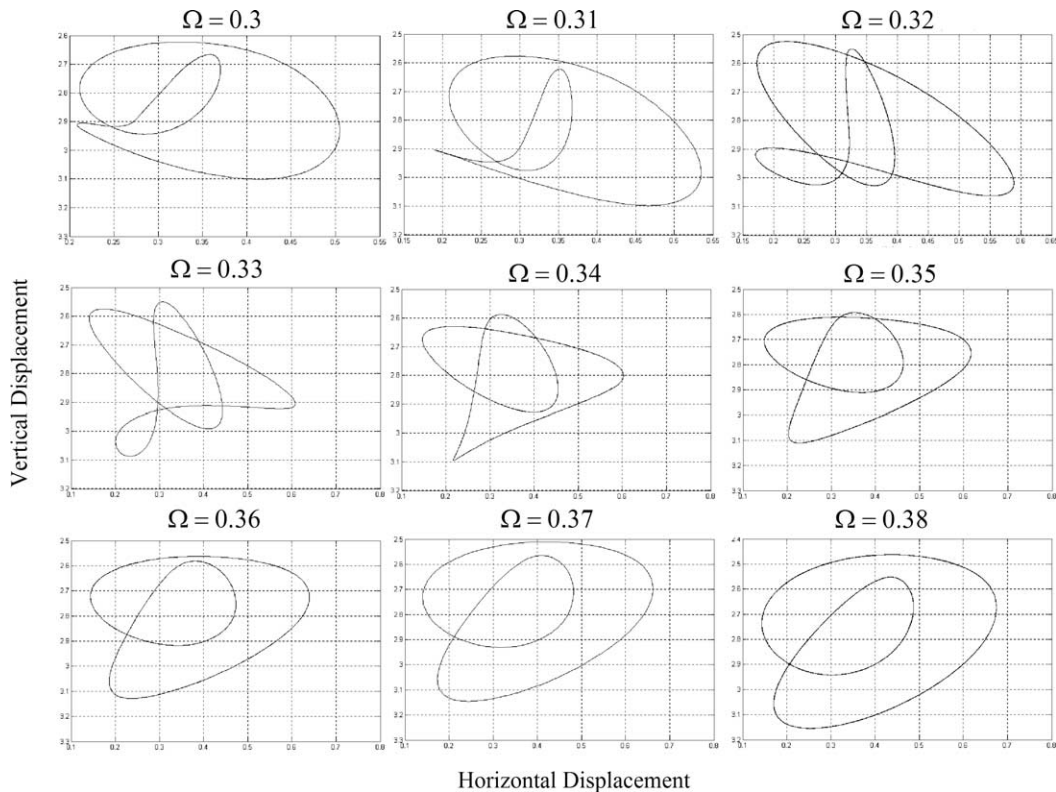


Fig. 4. Orbital evolutions of the disc around one third of the resonance (crack-imbalance orientation $\Phi_d = 270^\circ$).

Fig. 4. Evolutions des orbites au niveau du disque autour du tiers de la résonance (orientation fissure-balourd $\Phi_d = 270^\circ$).

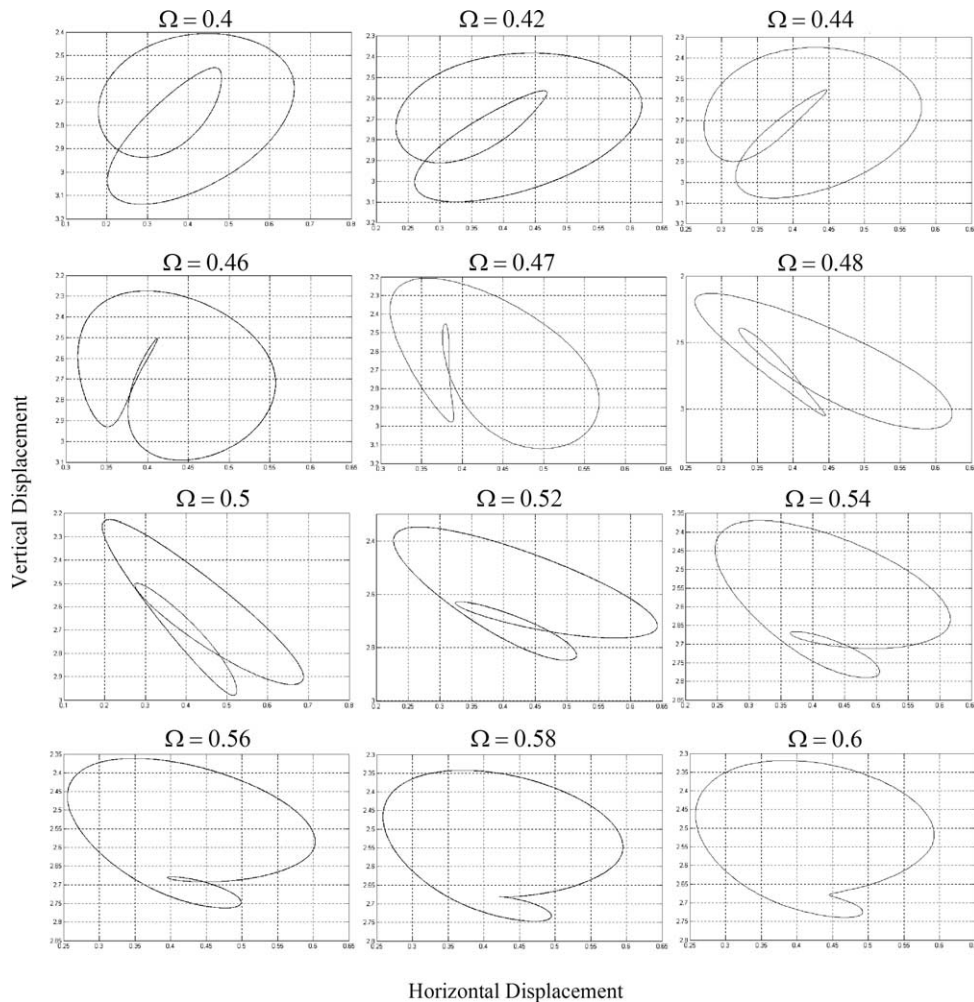


Fig. 5. Orbital evolutions of the disc around half of the resonance (crack-imbalance orientation $\phi_d = 270^\circ$).

Fig. 5. Evolutions des orbites au niveau du disque autour de la moitié de la résonance (orientation fissure-balourd $\phi_d = 270^\circ$).

the response occurs due to the relative phase angle between the crack and the imbalance vectors thereby impacting on the orbit shapes and its associated evolution.

As illustrated by Fig. 2, crack and residual imbalance (both been unknown vectors) can mask the crack's presence and make traditional detection techniques difficult. Unfortunately such interaction mostly affects both, operating speed and twice synchronous frequencies; i.e., $1x$ and $2x$ respectively. Since the $2x$ component is also attributed to misalignment and to other symptoms, the mere presence of $2x$ does not unequivocally mean a crack. Moreover, depending on the relative angle between imbalance and crack vectors ϕ_d , most $1x$ components can increase or even decrease in magnitude, thereby considerably deforming orbit shapes at disc and bearings.

Moreover, disc and bearing orbit responses at some Local Resonances for four crack-imbalance relative orientation angles ($\phi_d = 0, \pi/2, 3\pi/2, 2\pi$) are presented in Fig. 3. In this fashion, two important features of the cracked system can be examined, its orbital shapes affected by the ϕ_d angle, as well as the vibration evolution with the operational frequency sweep for the range $0.3 < \Omega < 0.6$, as illustrated in Figs. 4 and 5. Then, the classical orbital internal loop at speed $\Omega \approx 0.5$ (mostly due to $2x$ component) is practically independent of crack-imbalance angu-

lar orientation, as illustrated in Figs. 3 (b) and (d). On the other hand, this model also produces outside-inside loops phenomena and orbital angle evolution of the internal loop around $1/3$ and $1/2$ of the first resonance, as observed experimentally by Adewusi and Al-Bedoor [9] (Figs. 4 and 5). As expected, the synchronous response component is the most influenced by this angular variation.

Perhaps with the exception of the local resonance around $\Omega \approx \frac{1}{2}$, every other local peak occurring within the range $0.45 < \Omega < 1.20$ displays sufficient dissimilar vibration pattern and orbit; see overlapped orbits in Figs. 3. However all local resonances outside this frequency range, plus the one at $\Omega \approx \frac{1}{2}$, can be properly post-processed and analyzed to reveal the crack presence.

Therefore crack detection at low frequency (sub-critical speed range) is possible, since for typical system parameter values resonance amplitudes at fractions equal/lower than one half the normalized critical speed (i.e., 45%), are in general significant. That is, for medium/larger cracks vibration magnitudes and orbit shapes at lower resonances are generally large enough to be measured, processed and analyzed. In this manner, mid-span crack detection hampering by imbalance-crack interaction becomes much less influential.

4. Conclusion

An extended cracked Jeffcott-rotor, which applies well to simple machines flexibly coupled and supported on journal bearings, where a crack at or near its shaft mid-span exists, and having small gyroscopic effects, is used. The model has advantages of linear systems, yet the nontrivial equilibrium approach yields multi-frequency response which allows characterizing cracked shafts.

During run up/down several Local Resonance peaks at fractions of the operating normalized critical speed occur in cracked shaft machines. Vertical and horizontal responses of the disc and bearings orbital evolution around nontrivial equilibrium and Bode plots generated by frequency sweep and by orthogonally varying the imbalance orientation for a rotor configuration having similar crack-imbalance influences are analyzed. It results that orbital evolution around $1/2$ and $1/3$ of the first resonance can be used to detect rotor cracks, even if the crack-imbalance orientation is unknown.

Acknowledgements

The first author is grateful to École Centrale de Lyon, France, for financial support during his sab-batical year. Work partially sponsored by Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACyT, Project 38711-U. Thanks to S.N.I. and EDI scholarships granted by CONACyT, and Instituto Politécnico Nacional, IPN, respectively. Graduate student Zambrano upgraded program for this study.

References

- [1] J. Wauer, Dynamics of cracked rotors: literature survey, *Appl. Mech. Rev.* 43 (1990) 13–17.
- [2] I.W. Mayes, W.G.R. Davies, Analysis of the response of a multi-rotor-bearing system containing a transverse crack in a rotor, *J. Vib. Acoust.* 106 (1984) 139–145.
- [3] R. Gasch, A survey of the dynamic behavior of a simple rotating shaft with a transverse crack, *J. Sound Vib.* 160 (2) (1993) 313–332.
- [4] J.E.T. Penny, M.I. Friswell, Simplified modeling of rotor cracks, *Key Engrg. Mater.* 245–246 (2003) 223–232.
- [5] T. Yamamoto, Y. Ishida, *Linear and Nonlinear Rotordynamics*, Wiley Ser. Nonlinear Sci., Wiley, 2001.
- [6] J. Gómez-Mancilla, R. García-Illescas, V. Nosov, New modeling approach for detection & behavioural characterization of cracked rotating shafts, in: 9th. Int. Symp. on Transport Phenomena & Dynamics of Rotating Machinery, ISROMAC-9, Hawaii, 2002.
- [7] R. García-Illescas, J. Gómez-Mancilla, V. Nosov, Vibration analysis in the characterization of the dynamic behaviour of cracked rotating shafts, in: Int. Conf. on Rotating Machinery, IFToMM, Sydney, Australia, 2002.
- [8] N. Bachschmid, E. Tanzi, P. Pennacchi, S. Audebert, Transverse crack modeling validation in rotor systems including thermal effects, in: 9th. Int. Symp. on Transport Phenomena Dynamics of Rotating Machinery, ISROMAC-9, Hawaii, 2002.
- [9] S.A. Adewusi, B.O. Al-Bedoor, Experimental study on the vibration of an overhung rotor with a propagating transverse crack, *Shock Vib.* 9 (2002) 91–104.



Local Resonance Of Crack-Imbalance Orientations And Orbital Evolution To Detect Rotor Cracks: Part 1, Numerical Analysis

J.C. Gómez-Mancilla, A. Zambrano-Reyes¹

Laboratorio de Vibraciones & Rotodinámica, SEPI-ESIME, Instituto Politécnico Nacional, Edif.5, 3er Piso, Unidad Profesional Adolfo López Mateos, Zacatenco, Col. Lindavista, C.P. 07738, México D. F., MÉXICO.

Tel (52) 55-5729-6000, Ext. 54737, Fax Ext. 54588. e-mail: jcgomez@ipn.mx

NOMENCLATURE

C_r = bearing radial clearance.

$c_{i,j}$ ($i,j=x,y$) = bearing damping coefficients.

e_d, e_b = imbalance mass at disk & brg. respectively.

$e_{x0}=e_0 \cos\Psi, e_{y0}=e_0 \sin\Psi$ where Ψ is the attitude angle

$k_{i,j}$ ($i,j = x,y$) = bearing stiffness coefficients.

k_s = integral shaft stiffness

$2m_d, m_b$ = concentrated mass, disk & brg. respectively.

t = time

T = period

W = force load on bearing

x, y = displacements in Cartesian coordinates.

δ_s = static shaft deflection, ($=m_d g/k_s$)

$\Delta k_\xi, \Delta k_\eta$ = crack stiffness change, directions ξ, η

ω = rotor operating speed, [rad/s]

ω_c = rigid support critical speed, ($=\sqrt{k_s/m_d}$)

DIMENSIONLESS PARAMETERS

$[A(\Phi)]$ = periodic state matrix.

$C_{i,j}$ ($i,j=x,y$) = bearing damping, ($=C_r \omega C_{ij}/W$)

D_e = dimensionless external damping, ($=c_d/2m_d \omega_c$)

$K_{i,j}$ ($i,j = x,y$) = bearing stiffness, ($=C_r k_{i,j}/W$)

$g(t) = g(\Phi)$ = periodic crack function, $0 < g(t) < 1$.

S = Sommerfeld number, ($=(\mu \omega D L (R/C_r)^2)/(2\pi W)$) where D is the bearing diameter, R is the bearing radius, L is the bearing width and μ is the oil viscosity.

S_0 = fixed Sommerfeld number, ($=S/\Omega$)

U_d, U_b = unbalance parameter, ($=e_d/C_r, (=e_b/C_r)$)

W_g = gravity sagging parameter ($=\delta_s/C_r$);

X, Y = absolute displacements ($=x/C_r, y/C_r$)

α = bearing and disc mass ratio ($=m_b/m_d$)

β = relative angle between crack and imbalance

ξ, η = rotating coordinates, ξ crack orientating axis

ϕ = angle between imbalance vectors U_d and U_b

ΔK_ξ = stiffness change along dir. ξ , ($=\Delta k_\xi/k_s$)

ΔK_η = stiffness change, orthogonal dir. η , ($=\Delta k_\eta/k_s$)

$\Delta K_1 = (\Delta k_\xi + \Delta k_\eta)/k_s, \Delta K_2 = (\Delta k_\xi - \Delta k_\eta)/k_s$

μ_f = Floquet Eigenvalue and $|\mu_f|$ is the modulus of μ_f

Φ = instantaneous rotating angle, ($=\omega t + \phi + \beta = \tau + \phi + \beta$)

τ = dimensionless time, ($=\omega t$)

Ω = operation velocity frequency ratio, ($=\omega/\omega_c$)

$[\Gamma(T)]$ = transition matrix

$()' = (1/\omega)d()/dt$ = dimensionless time derivative

$[]$ = squared matrix ; $\{ \}$ = column matrix

ABSTRACT

Vibration peaks occurring at rational fractions of the fundamental rotating critical speed, here named Local Resonances, facilitate cracked shaft detection during machine shut-down. A modified Jeffcott-rotor on journal bearings accounting for gravity effects and oscillating around nontrivial equilibrium points is employed. Modal parameter selection allows this linear model to represent first mode characteristics of real machines, and yield comparable results to similar non-linear models. Orbit evolution and vibration patterns are analyzed yielding useful results. Unless cracks are unrealistically deep, stability are generally ruled by the common bearing oil-whip limit. For crack detection results (not previously reported) indicate that, instead of 1x and 2x components, analysis of the remaining local resonances should have priority, this is due to crack-residual imbalance interaction and to 2x multiple induced origins. Local resonances at critical speed and around 1/2, 1/3, 1/4 of it, are emphasized; also phase angles variation at post-critical speeds below the stability threshold are important. Extensive simulation analysis validates previous statements.

Keywords: cracked shaft, local resonance, imbalance, extended Jeffcott rotor, stability, orbit, Bode plot

INTRODUCTION

Personal safety, operating costs and increasing overhaul-time intervals motivate research in cracked rotor detection and make structural assessment by monitoring vibration much convenient. Crack detection is most feasible during frequency sweeps such as machine shut-down, when several local vibration resonances occurring at rational fractions of the fundamental critical speed can indicate structural problems.

In his excellent literature review Gash [11] provided a useful survey on the state of the art in this field. On the other hand, direct linking with field experience has been given by Bently and Muszynska [2, 3], mostly contributing in crack detection methodologies. Friswell team has work in several interesting topics among which the simplified models for the crack [8] are analyzed. Penny and Friswell conclusion has relevance since the simple harmonic crack breathing function as proposed by Mayes allows this model to be linear and yet yield similar system behavior as an equivalent and more involved nonlinear model. Bachschmid and Pennacchi [9] have carefully studied and developed crack modeling, mostly when affected by thermal effects as it occurs in vertical cooling pumps. For the case of a vertical cracked rotor having significant gyroscopic effects Yamamoto and Ishida [10] proposed an interesting nonlinear model also capable of analyze the crack-imbalance orientation effect in the absence of gravity terms. Although for quite different rotor configurations both works, [10] and the present one reach similar results concerning the existence of Local Resonances, the masking influence of mass imbalance, and the complex system vibration responses.

An extended Jeffcott Rotor on lubricated journal bearings having masses and imbalances at disc and bearings developed by Gómez-Mancilla [5,7], is used to characterize orbital evolution and vibration patterns at the local resonances, including the critical speed. The model here used includes gravity and yield periodic responses even in the absence of imbalance excitations. In rotors with small gyroscopic effects where the coupling to other shafts is flexible, and a crack is located near or at the shaft mid-span, the present simplified model is sufficiently for good qualitative description of actual machine vibrating at its first mode. While using Jeffcott-rotor models the key relays on proper selecting the modal parameter values, which allows adequate representation for real machines. In addition, experimental modal analysis will help the parameter selection task.

In addition Floquet analysis applying Transition Matrix is performed and stability threshold speeds for each of the three configuration cases are presented. Due to the small ΔK_{ξ} , ΔK_{η} , crack values used in these configurations, speed thresholds are mostly set by onset of oil whip at the support bearings. Discussion about parameter relative importance concerning the system stability is also briefly addressed.

The relative orientation angle between residual imbalance and crack and its interaction drastically affect the system response making crack detection very difficult. Existence of Local Resonances at several rational sub-super and combination harmonics permit good vibration characterization reducing the influence of interaction between unknown vectors; i.e., residual imbalance and cracked shaft magnitudes and orientations. Certain controversy exists while establishing which component is more relevant to damage detection, synchronous 1x or 2x vibration. For practical purposes, crack presence significantly affects the synchronous 1x component and renders confusing prognosis due to its large dependence on the magnitude and on the relative phase angle existing between the known residual imbalance and crack vectors. Recall that in real situations crack-imbalance magnitudes and relative angle are not known a priori.

Although 2x is attributed to less numerous causes, mere inspection of this vibration component will prove insufficient. On the other hand 3x, 4x and combination super-harmonics can be more directly correlated to crack presence in an equal or even larger extent as compared to the 2x component, and it is hardly affected by residual imbalance.

By contrast the authors recommend to focus on the all combinations of 1,2,3 super-sub-harmonic components since all of them are capable of inducing what we call Local Resonances, as shown and reported by Gómez-Mancilla, et-al [5-7]. For the previous reasons evolution and analysis of orbital shapes due to speed sweep with special emphasis on Local Resonances of synchronous, twice and three times harmonic are presented. Therefore for unambiguous crack detection, analysis focusing on the system response at all local resonance peaks occurring around and below 40% of the critical speed is highly recommended. This monitoring approach has not been previously reported in the literature. Bode plots and orbits superposition analyses validated and reinforced the suggestion.

EXTENDED JEFFCOTT ROTOR WITH GRAVITY LOAD

In Ref. [7] the used mathematical model is introduced with detailed derivation of the equations; and its physical configuration is illustrated in Figure 1. Therefore for self-contained purposes the mathematical equations expressed in dimensionless form and its main characteristics are briefly presented. A total of four degrees of freedom, two at the disc X_d, Y_d , plus two at both bearing locations X_b, Y_b result. Bearing differential displacements, the eight rotordynamic coefficients and the corresponding bearing equilibrium locus $\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}$, are used to express the bearing reaction forces yielding oscillations around nontrivial equilibrium points.

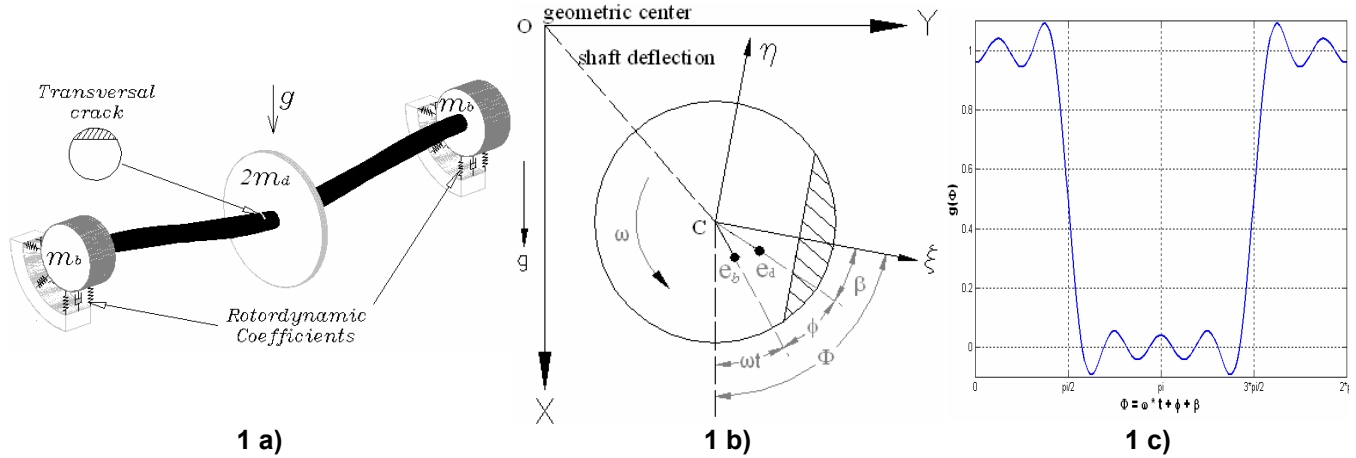


Figure 1. Modified Jeffcott-rotor showing crack location; gravity load; bearing rotordynamic coefficients and imbalance and masses at both, disc $2m_d$, and bearings ends m_b . 1 a) Cracked rotor-bearing system; 1 b) Coordinate system crack and disc imbalance; 1 c) Crack breathing function.

Applying Newton Second Law at the disc location and normalizing each term in accordance to the nomenclature and using the coordinate system as Fig. 1 b) we obtain,

$$\Omega^2 \Delta X_d'' + 2D_e \Omega \Delta X_d' + (\Delta X_d - \Delta X_b) - \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi)(W_g + \Delta X_d - \Delta X_b) + (\Delta K_2 \sin 2\Phi)(\Delta Y_d - \Delta Y_b)] = \Omega^2 U_d \cos(\tau + \phi), \quad (1)$$

$$\Omega^2 \Delta Y_d'' + 2D_e \Omega \Delta Y_d' + (\Delta Y_d - \Delta Y_b) - \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_2 \sin 2\Phi)(\Delta X_d - \Delta X_b + W_g) + (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi)(\Delta Y_d - \Delta Y_b)] = \Omega^2 U_d \sin(\tau + \phi). \quad (2)$$

In a similar fashion, force balance and normalization at the bearing locations yields,

$$\alpha \Omega^2 \Delta X_b'' + \Omega C_{xx} \Delta X_b' + \Omega C_{xy} \Delta Y_b' + K_{xx} \Delta X_b + K_{xy} \Delta Y_b + (\Delta X_b - \Delta X_d) + \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi)(\Delta X_d - \Delta X_b + W_g) + (\Delta K_2 \sin 2\Phi)(\Delta Y_d - \Delta Y_b)] = \alpha \Omega^2 U_b \cos \tau, \quad (3)$$

$$\alpha \Omega^2 \Delta Y_b'' + \Omega C_{yx} \Delta X_b' + \Omega C_{yy} \Delta Y_b' + K_{yx} \Delta X_b + K_{yy} \Delta Y_b + (\Delta Y_b - \Delta Y_d) + \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_2 \sin 2\Phi)(\Delta X_d - \Delta X_b + W_g) + (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi)(\Delta Y_d - \Delta Y_b)] = \alpha \Omega^2 U_b \sin \tau. \quad (4)$$

Where relevant parameter values are,

$$\begin{aligned} \Delta X_b &= X_b - \varepsilon_{x0} & \Delta X_d &= X_d - (\varepsilon_{x0} + W_g) & \Delta K_1 &= \Delta K_\xi + \Delta K_\eta & W_g &= \frac{\delta_s}{c_r}, \\ \Delta Y_b &= Y_b - \varepsilon_{y0} & \Delta Y_d &= Y_d - \varepsilon_{y0} & \Delta K_2 &= \Delta K_\xi - \Delta K_\eta \end{aligned} \quad (5)$$

$$g(t) = g(\Phi) = \frac{1 + \cos \Phi}{2}. \quad (6)$$

Alternatively,

$$g(\Phi) = \left(\frac{2}{\pi} \right) \left(\frac{\pi}{4} + \cos \Phi - \frac{1}{3} \cos 3\Phi + \frac{1}{5} \cos 5\Phi - \frac{1}{7} \cos 7\Phi + \dots \right), \quad (7)$$

$$\Phi = \omega t + \phi + \beta = \tau + \phi + \beta. \quad (8)$$

The existence of mass at the disc and at the bearings allows performing several types of useful analyses such as, a number of imbalance combinations varying relative magnitudes and angular phases at the disc-bearing and with respect to the crack orientation; also by varying a different shaft lumped mass distributions can be accounted for.

A simple crack breathing phenomenon such as discussed by Gash [11], typical in weight dominated systems Eqs.(6,7), is assumed. In contrast to previous reported mathematical models the first author developed this approach, Eqs. (1-4), where its gravity term allows to preferentially exciting cracked characteristics of the system. An additional advantage is that depending on selection for the breathing model, we can have a linear system (using Eq.(6)), or a non-linear one (Eq.(7)). Expressing the model in matrix form,

$$\{\dot{X}\} = [A(\Phi)]\{X\} + \{C\} + \{f(\Phi)\}. \quad (9)$$

Where $\{C\}$ is the constant gravity term responsible for exciting the Local Resonances, and $\{f(\Phi)\}$ represents the imbalance and other periodic excitation terms.

NUMERICAL SIMULATION

A series of numerical simulations are performed and influence of crack-imbalance orientation is easily noted. A computer program written in *MATLAB* by the first author and his students based on the previously presented system equations Eqs.(1-8), simulates orbital plots, Bode Plots, FFT of vibration outputs, time response graphs, etc. The normalized parametric values used in the simulations are commonly found in engineering practice; only meaningful results are shown and discussed.

Parameter Values of Simulations. Having the model expressed in dimensionless values allows for generality and facilitates engineering comparisons. Imbalance magnitudes at the disc location were selected on the basis of yielding effective interaction. Cases 1 and 2 both use $U_d = 0.08$, corresponding to similar crack-imbalance interaction, and to somewhat imbalance dominant situation, respectively. Nevertheless $U_d = 0.02$, represents a system where the small disc imbalance is typically residual in magnitude, therefore in Case 3 both, imbalance and crack are small and effectively interact. A single mid-span crack with medium and small crack size depths, $\Delta K_\xi = 0.10$ and 0.05 ; $\Delta K_\eta = 0.017$ and 0.024 ; corresponding to 40% and 20% of the shaft diameter, respectively, are used. Crack breathing model displaying a squared period, Eq.(7), is employed; yet as previously mentioned by Friswell [9], results are lightly depended on the breathing model. Rest of the used simulation parameter values are as follows. Relative mass at the bearings, $\alpha = 0.50$ and 0.10 , corresponding to mass approximate uniform shaft mass distribution, and to a dominant disc mass distribution, respectively. Weight parameters, $W_g = 2.0$ and 1.0 , correspond to a weight dominant sag, and to medium sagging, respectively. Journal bearing to operating critical speed numbers ratios, $S_0 = 0.90$ and 1.42 , corresponding to relatively flexible shaft-bearing support stiffness ratio, and to a stiffer support ratio, respectively. Finally all analyzed cases are supported on relatively short journal bearings having $L/D = 0.5$. The important relative angular orientation existing between the disc imbalance vector and the crack ξ -axis, see Fig. 1, is varied and computed for each of the four main orthogonal directions, namely $\beta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

SYSTEM STABILITY AND CRACK-IMBALANCE RESPONSE

As presented in Table 1 for each of the three cases under study a Floquet stability analysis considering only matrix $[A(\Phi)]$ of Eq.(9) is calculated. A Matrix Transition approach for the state system equation is used, as given by Meng & Gash [4]. The scheme is next briefly presented recalling periodicity properties,

$$\{\dot{X}\} = [A(\Phi)]\{X\}, \quad (10)$$

$$[A(\Phi)] = [A(\Phi + T)]. \quad (11)$$

Where T is period ($=2\pi$).The transition matrix $[\Gamma(T)]$ is defined as,

$$\{X(T)\} = [\Gamma(T)]\{X(0)\}, \quad (12)$$

$\{X(T)\}$ is the orbit position after one cycle, $\{X(0)\} = \{A(\Phi=0)\}$ represents the initial conditions. After calculating $[\Gamma(T)]$, eigenvalues for the transient system are obtained solving the eigen-problem:

$$[\Gamma(T) - \mu_f [I]] = 0, \quad (13)$$

$|\mu_f|$ are roots of Eq. (13), $f=1,2,\dots,8$, representing a given Floquet multiplier which defines stability of the system: If all $|\mu_f| < 1$ the system is asymptotically stable. If one or more is $|\mu_f| > 1$, then the system is unstable and the state where $|\mu_f| = 1$ represents the linear stability onset.

For incipient to medium crack depths (small ΔK_ξ , ΔK_η) while using the previous analysis it is the bearing oil whirl the dominant cause for the instability, see [5]. Significantly large crack depths, too deep into the shaft diameter, are required for the system to become unstable due to the crack presence.

Excluding non-structural parameters Ω , D_e and the rotor dynamic bearing coefficients, the structural parameters most influencing system stability are S_o , W_g ; next in importance are the crack ΔK_ξ , ΔK_η and α . For example, while keeping all parameter fixed, except variation of the shaft mass distribution as occur with $\alpha = 0.05$, causes a reduction of threshold speed, from $\Omega = 1.7478$ to $\Omega = 1.6485$; nearly 6% decrease of the stable speed range. For enhanced stability analysis a more involved and complex stability method is required.

TABLE 1. System parameter values for the three selected configurations

Param Case	Frequency sweep	Stability threshold	D_e	α	U_b	U_d	β	S_o	W_g	Bearing L/D	Breathing $g(\Phi)$	ΔK_ξ	ΔK_η
Case 1	$0.1 < \Omega < 2.5$	1.7478	0.005	0.5	0	0.08	$0, \pi/2, 3\pi/2, 2\pi$	0.90	2.0	0.5	Quasi squared	0.10	0.017
Case 2	$0.1 < \Omega < 2.5$	1.6650	0.005	0.1	0	0.08	$0, \pi/2, 3\pi/2, 2\pi$	1.42	1.0	0.5	Quasi squared	0.053	0.024
Case 3	$0.1 < \Omega < 2.5$	1.6650	0.005	0.1	0	0.02	$0, \pi/2, 3\pi/2, 2\pi$	1.42	1.0	0.5	Quasi squared	0.053	0.024

In addition to the previously performed stability analysis a description for each of the presented figures is given. Simulated results for Case 1, a flexible shaft system configuration, are given Figure 2: It shows overlapped disc orbit responses X_d , Y_d , at some Local Resonances for four crack-imbalance relative orientation angles, $\beta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Simulated results for Case 3, a semi-rigid shaft system are given Figure 3. Although parameter values for imbalance and crack depths are different, in both cases 1 and 3 crack-imbalance vectors possess magnitudes which similarly affect the responses. In Figure 4, horizontal and vertical vibrating amplitudes at disc and bearings plotted as functions of the operating frequency Ω are illustrated for various crack-imbalance vectors orientations. Local resonance peaks both, in vertical and horizontal directions show small yet significant differences in magnitude, and peak occurs at slightly different speeds; also clear differences at the two orthogonal vibration transducers can be observed. The latter differences can be attributed to weight effect and bearing asymmetric characteristics as well as damping existing at the bearings.

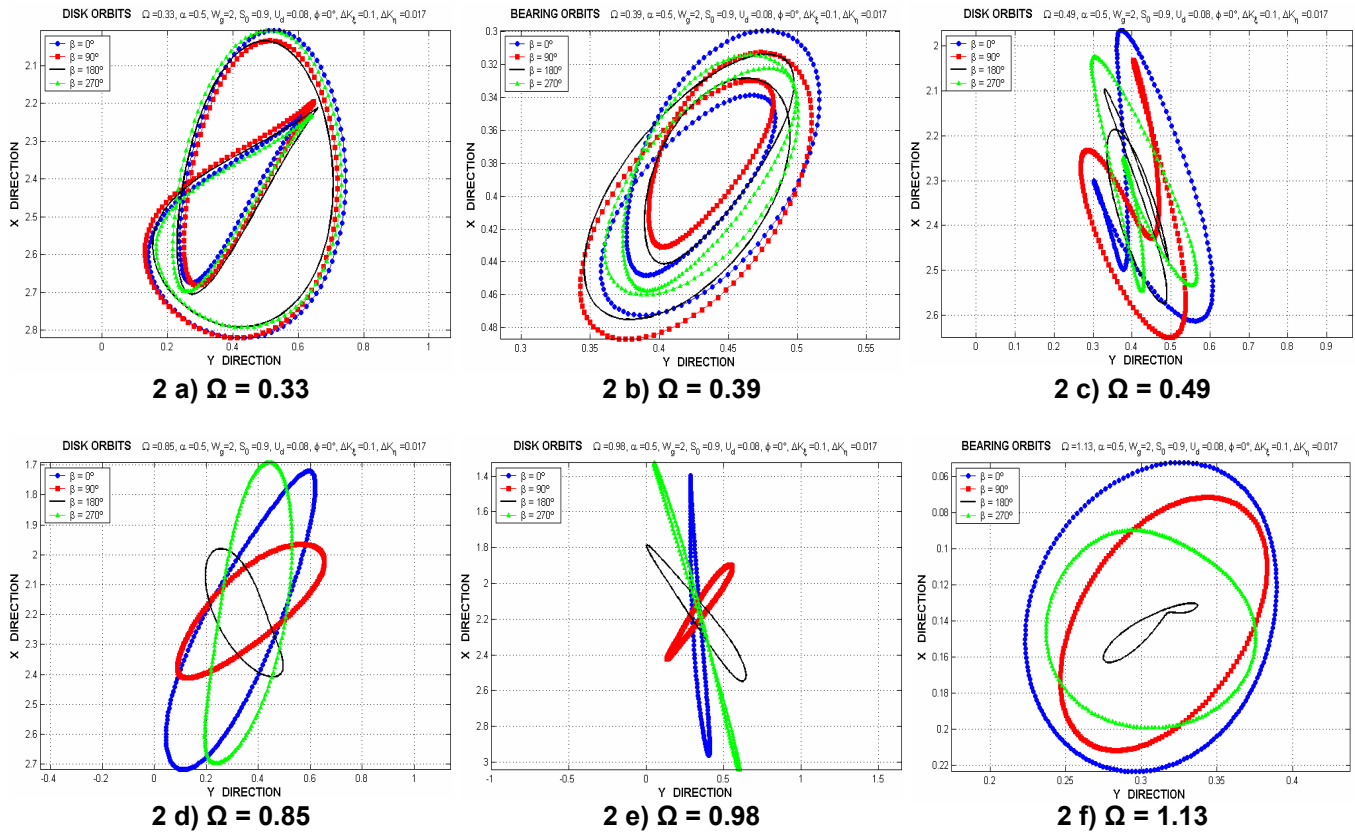


Figure 2. Case 1, flexible shaft configuration at some Local Resonances for similar crack-imbalance magnitudes, $\Delta K_{\xi} = 0.10$, $\Delta K_{\eta} = 0.017$, $U_b = 0.10$; shown overlapped orbit responses X_i , Y_i ($i = d, b$) for angular orientations, $\beta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

Since most of the machines have only vibration probes at the bearing supports, Bode plots as shown in Figs. 4 include response at bearing locations where the vibration displays local resonance amplitudes of similar magnitude. Alternatively depending on angle β around the main critical speed resonance amplitudes clearly display quite significant differences, sometimes as high as an order of magnitude difference.

Concerning the orbital Shapes, four relative angular orientation between the crack and the imbalance vectors β are presented ($\beta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$). A significant variation both, on magnitude and phase angle of the response occurs due to the relative phase angle between the crack and the imbalance vectors thereby impacting on the orbit shapes and in associated evolution.

As expected, the synchronous response component is the most influenced by this angular variation. Interestingly enough, the mere reorientation of residual imbalance and crack angles produce smaller orbital amplitudes in comparison to an exactly equal crack depth. In this fashion, two important features of the cracked system can be examined, its orbital shapes affected by the β angle, as well as the vibration evolution with the operational frequency sweep for the range $0.20 < \Omega < 1.20$

VIBRATION ANALYSIS AND DISCUSSION OF THE RESULTS

In the following we analyze and discuss the numerically simulated results, aiming at crack detection and characterization of simple cracked systems interacting with the ever-present mass imbalance. For a given crack-imbalance angular orientation β , we define the vibration norm as $\Delta V_{i_nor} = (\Delta X_i^2 + \Delta Y_i^2)^{1/2}$, $i = d, b$, for disc or bearing, respectively.

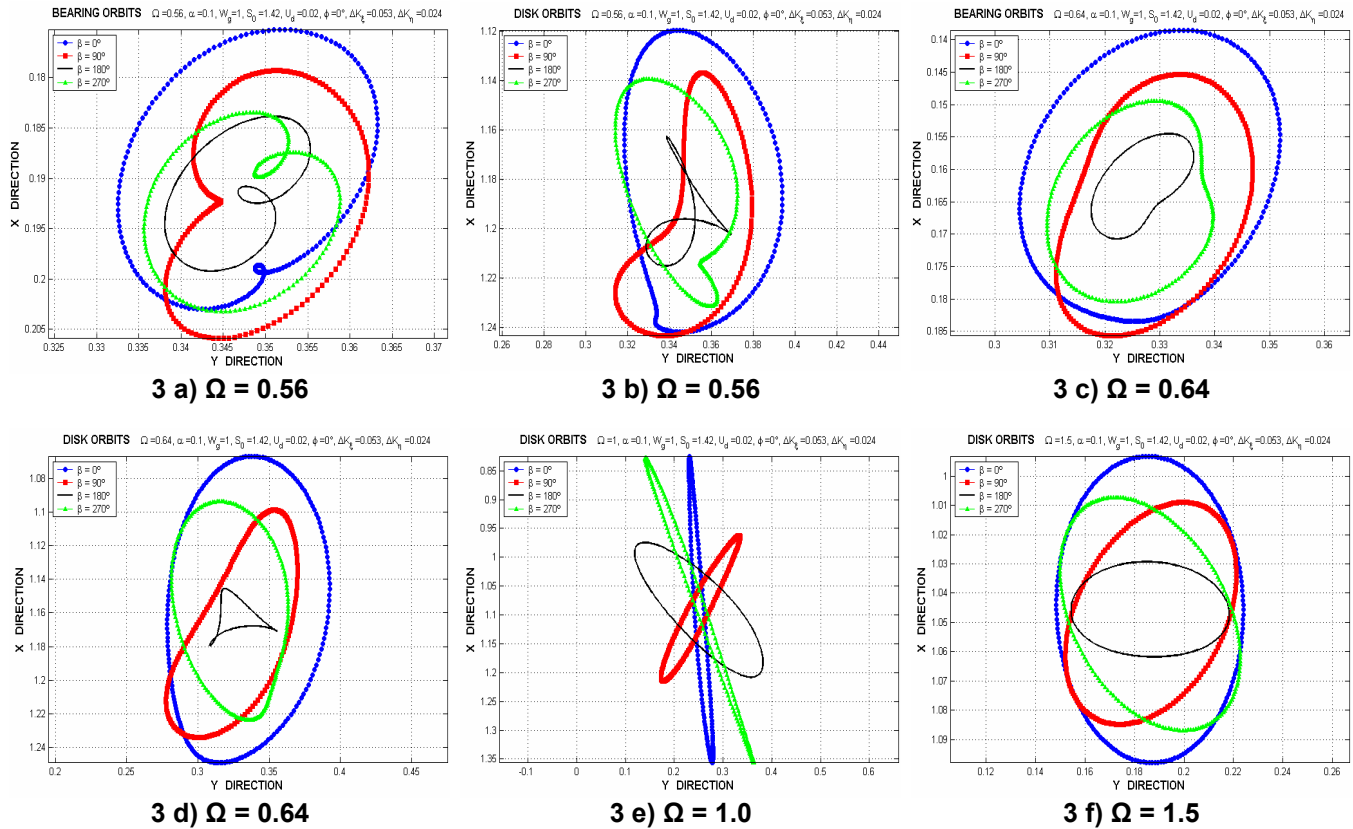


Figure 3. Case 3, semi-rigid shaft configuration at some Local Resonances for similar crack-imbalance magnitudes, $\Delta K_x = 0.05$, $\Delta K_y = 0.02$, $U_b = 0.02$; shown overlapped orbit responses X_i , Y_i ($i = d, b$) for angular orientations, $\beta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

5.1.- As illustrated by Figs. 4, crack and residual imbalance (both been unknown vectors) can mask the crack's presence and make traditional detection techniques difficult. Unfortunately such interaction mostly affects both, operating speed and twice synchronous frequencies; i.e., $1x$ and $2x$ respectively. Since the $2x$ component is also attributed to misalignment and to other symptoms, presence of $2x$ does not unequivocally means a crack. Moreover, depending on the relative angle between imbalance and crack vectors β , mostly $1x$ component can increase or even decrease in magnitude, thereby considerably deform orbit shapes at disc and bearings. That is maximum and minimum amplitudes are π rad apart in β ; nevertheless such maximum-minimum varies in its speed location. For instance, for $\Omega \approx 0.85$ compare Bode disc amplitudes at $\beta = 0$ and π ; by contrast, for $\Omega \approx 1$ compare response amplitudes between $\beta = \pi/2$ and $3\pi/2$.

5.2.- However, crack detection at low frequency (sub-critical speed range) is possible, since for typical system parameter values resonance amplitudes at fractions equal/lower than one half the normalized critical speed (i.e., 40%), are in general significant. That is, for medium/larger cracks vibration magnitudes and orbit shapes at lower resonances are generally large enough to be measured, processed and analyzed. In this manner, mid-span crack detection hampering by imbalance-crack interaction becomes much less influential. Notice the great orbit overlapping in all Figs. 2, 3 occurring at lower resonances.

For incipient cracks, preferentially monitor at disc location; alternatively if measures are restricted to the bearing locations, signal averaging and filtering of the amplitude response is recommended.

5.3.- Amply reported in the literature the classical orbital internal loop at speed $\Omega \approx 0.5$ (mostly due to $2x$ component) is practically independent of crack-imbalance angular orientation, β ; see Figs. 2 b), 2 c). On the other hand this model also produces outside loops, generated only at a few β orientations, as some orbits in Figs. 2, 3, 5 show.

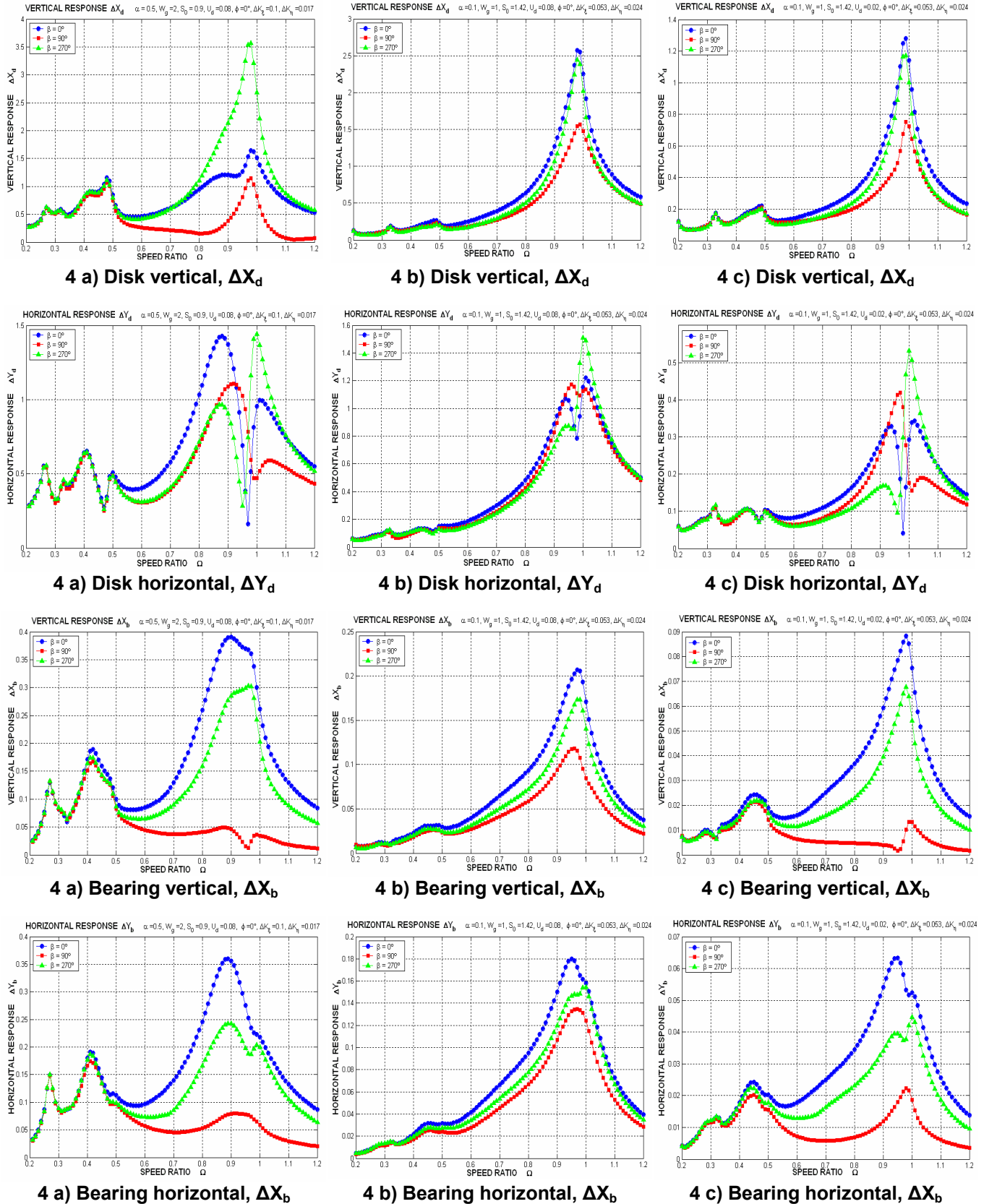
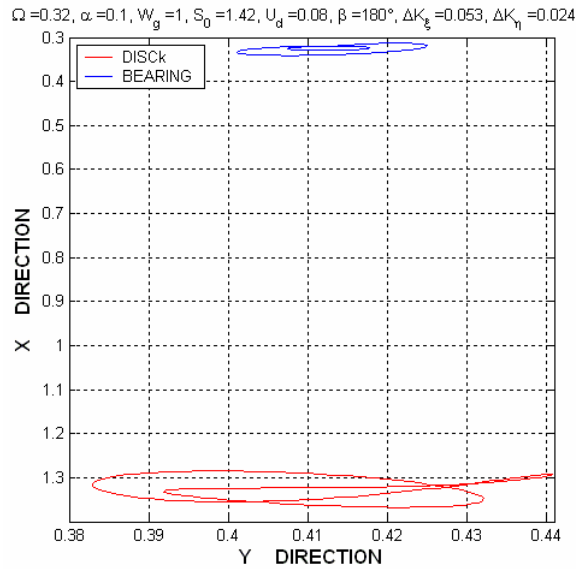
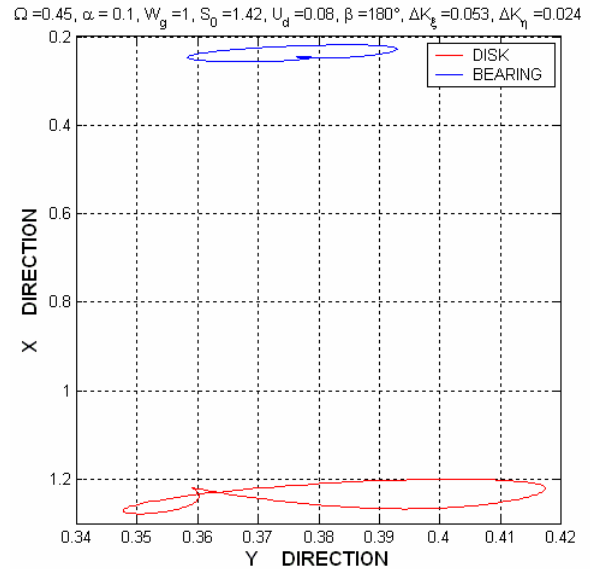


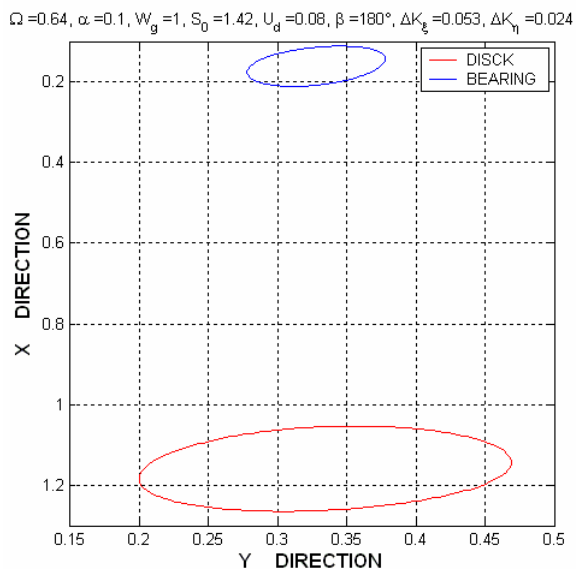
Figure 4. Bode incremental vertical and horizontal vibration responses ΔX_i , ΔY_i ($i=d,b$). Varying crack-imbalance angle orientation, β . 4 a) Case 1; 4 b) Case 2; 4 c) Case 3.



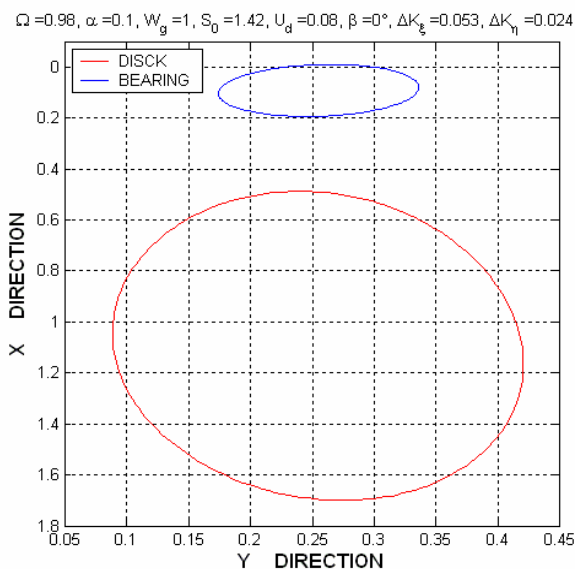
5 a) $\Omega = 0.32, \beta = 180^\circ$



5 b) $\Omega = 0.45, \beta = 90^\circ$



5 c) $\Omega = 0.64, \beta = 180^\circ$



5 d) $\Omega = 0.98, \beta = 0^\circ$

Figure 5. Case 3, Simultaneously disk and bearing orbit responses displaying existence of some external loops. Acceleration of gravity is downwards. — Bearing; — Disk.

5.4.- For typical simple crack breathing models local resonance peaks of significant amplitude do not occur above the first critical speed. Machines supported on simple journal bearings have a clear instability tendency for speeds higher and around $\Omega > 1.6$. Nevertheless for crack detection at post-critical speeds attention should be given to orbit twists; see Figs. 2, 3 and observe orbit patterns evolving with the speed and also due to phase angle variations.

5.5.- Frequency sweep in cracked systems reveals orbit changing both, in magnitude and in harmonic components, with orbit evolution been largely attributed to variation of vibration phase angles. Amplitude variations attributed to imbalance-crack orientations affects all orthogonal directions, yet the crack sensitivity is stronger along direction of the fixed load (gravity weight). For instance, in Fig. 4 compare ΔX_i to ΔY_i , ($i=d,b$), vibration amplitudes.

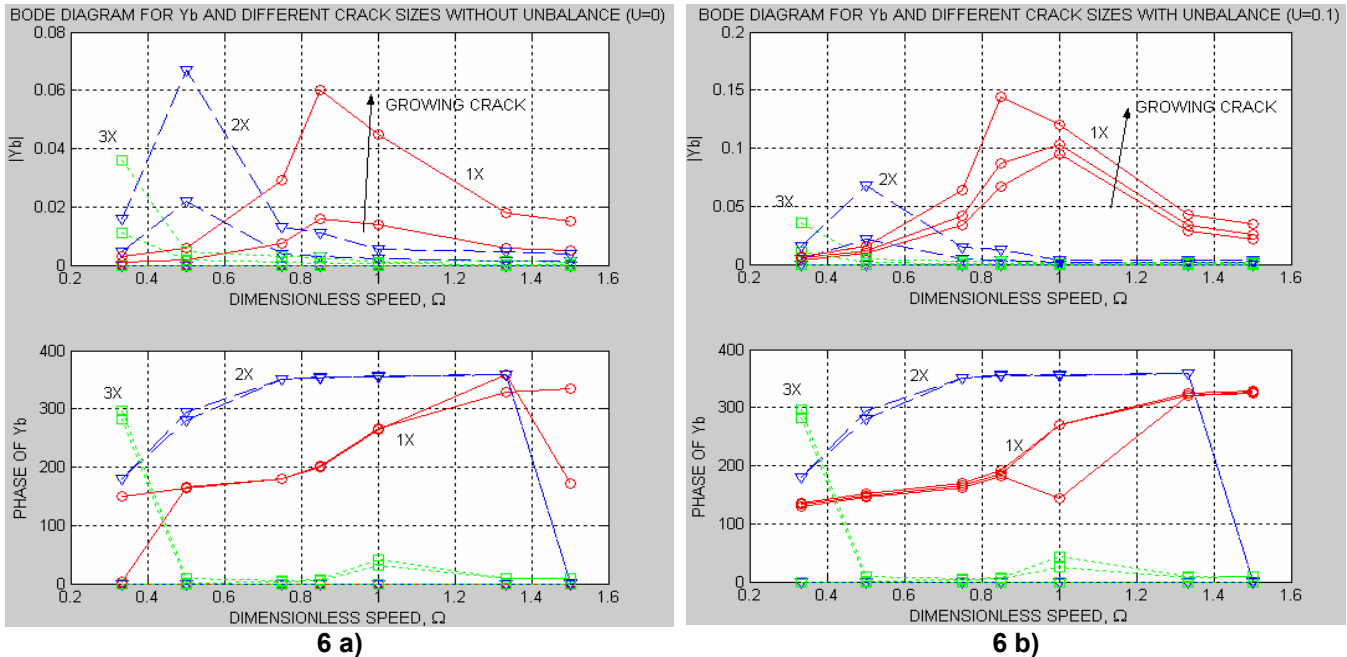


Figure 6. Bode plots for horizontal bearing transducer Y_b as crack depth grows ($\Delta K_\xi = 0, 0.05, 0.15$); note harmonic frequencies extracted by FFT. (see Ref.[7]) a) For no imbalance; b) For imbalance $U_d = 0.1, \beta = 0$

5.6.- Possibly due to lubricant damping, the important half resonance peak at the bearing locations generally shows a speed offset; i.e., half resonance mostly takes place at the disc, whereas at the bearing locations a distinctive similar high peak generally occurs at a slightly smaller resonance frequency. Excluding non-structural parameters Ω , D_e and the rotor dynamic bearing coefficients the structural parameters most influencing system stability are S_o , W_g ; next important are the crack ΔK_ξ , ΔK_η and α . Refer to Figs. 4, 6.

5.7.- Moreover, to correctly assess the usefulness of 2x, 3x synchronous signal components analysis at the heavy crack-imbalance coupling frequency range ($0.5 < \Omega < 1.2$), further experimental and numerical studies are required. As shown in Fig. 6, Ref.[7], extraction of harmonic components by FFT, or similar spectrum analysis, performed at various crack depths-imbalance magnitude ratios, and also for each main relative orientation angles β , should determine the usefulness of the common and widely used 2x, 3x components within this important frequency range.

Based on these results for further development the authors propose employing this simple mid-span cracked shaft model to pattern recognition, and to use mode gradient sensitivity analysis to estimate crack depth.

CONCLUDING REMARKS

An extended cracked Jeffcott-rotor developed by Gómez-Mancilla [5, 7], which applies well to simple machines flexibly coupled and supported on journal bearings where a crack at or near its shaft mid-span exists and having small gyroscopic effects, is used. For the first critical mode, qualitative dynamic description for the previously mentioned model becomes excellent, mostly if used in conjunction with experimental modal analysis.

During run up/down several Local Resonance peaks at fractions of the operating normalized critical speed occur in cracked shaft machines. Orbits evolution around nontrivial equilibrium, Bode plots generated by frequency sweep by orthogonally varying the imbalance orientation and stability thresholds for three different rotor configuration cases are analyzed. Further, concerning crack-imbalance orientation this linear model yields similar interesting results as the Non-linear model of Yamamoto and Ishida [10] does; the latter one for the case of a vertical cracked rotor configuration.

Typical Floquet stability analysis applying Transition Matrix is performed and stability threshold speeds for each of the configuration cases are presented. Due to the small ΔK_{ξ} , ΔK_{η} , crack values used in these configurations, speed stability thresholds are mostly determined by the onset of oil whip at the support bearings. Excluding non-structural parameters Ω , D_e and the rotor dynamic bearing coefficients the structural parameters most influencing system stability are S_o , W_g ; next importantly are the crack ΔK_{ξ} , ΔK_{η} and α parameters.

Recommendations stemming from the analysis having practical interest and aiding detection of mid-span cracked shafts at both frequency ranges, sub-critical and post-critical speeds, are given and discussed.

Yet, at frequencies $0.5 < \Omega < 1.2$, to further evaluate the significance and utility of commonly used 2x, 3x synchronous components analysis, where crack-imbalance coupling is strong, requires further experimental and numerical studies. Extraction of harmonic components by spectrum analysis, similar as those given in Ref.[7] but now varying crack depths-imbalance magnitude ratios and orientation angles β , should assess pros/cons of crack detection based on 2x, 3x components within this frequency range.

ACKNOWLEDGMENTS

Work partially sponsored by *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología*, CONACyT, Project 38711-U. Thanks to S.N.I. and EDI scholarships granted by CONACyT, and *Instituto Politécnico Nacional*, IPN, respectively.

REFERENCES

- [1] Mayes, I. W., Davies, W. G., Analysis of the Response of A Multi-Rotor-Bearing System Containing a Transverse Crack Rotor, Transactions of ASME, Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 106 (1984).
- [2] Bently, D., Shaft Crack Detection Using the Acceptance Region, Orbit, August (1987).
- [3] Muszynska, A., Shaft Crack Detection, Proc.7th Machinery Dynamics Seminar, Edmonton, Canada, (1982).
- [4] Meng, G., Gasch, R., Stability and Stability Degree of a Cracked Flexible Rotor Supported on Journal Bearings. Transactions of ASME, Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 122, No. 2 (2002) 116-125.
- [5] Gómez-Mancilla, J., García-Illescas, R., Nosov, V., New Modeling Approach for Detection & Behavioral Characterization of Cracked Rotating Shafts, 9th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, ISROMAC-9, Hawaii, (2002).
- [6] García-Illescas, R., Gómez-Mancilla, J., Nosov, V., Vibration Analysis in the Characterization of the Dynamic Behaviour of Cracked Rotating Shafts, International Conference on Rotating Machinery, IFToMM, Sydney, Australia, (2002).
- [7] Gómez-Mancilla J., García-Illescas, Nosov V., Detection Of Steady Crack Growth On Rotating Shafts, Proceedings of 2nd International Symposium On Control And Stability Of Rotating Machinery, ISCORMA-2, Gdansk, Poland, Sept. 2003.
- [8] J.E.T. Penny, M.I. Friswell, Simplified Modeling of Rotor Cracks, Key Engineering Materials, Vol. 245-246, (2003), pp. 223-232.
- [9] Bachschmid, N., Tanzi, E., Pennacchi, P., Audebert, S., Transverse Crack Modeling Validation in Rotor Systems Including Thermal Effects, 9th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, ISROMAC-9, Hawaii (2002).
- [10] T. Yamamoto, Y. Ishida, Linear and Nonlinear Rotordynamics, J. Wiley & Sons, Wiley Series in Nonlinear Science, 2001
- [11] Gasch, R., A Survey of the Dynamic Behavior of a Simple Rotating Shaft with a Transverse Crack, Transactions of ASME, Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 160, No. 2 (1993) 313-332.
- [12] A. Bovsunovsky, C. Surace, R. Ruotolo, The Effect of Damping on the Nonlinear Dynamic Behavior of a Cracked Beam on Resonance Super-Resonance Vibrations, Key Engineering Materials, Vol. 245-246, (2003), pp. 97-106.
- [13] Bently Nevada, WinADRE®. Users' Manual, (1997).



SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

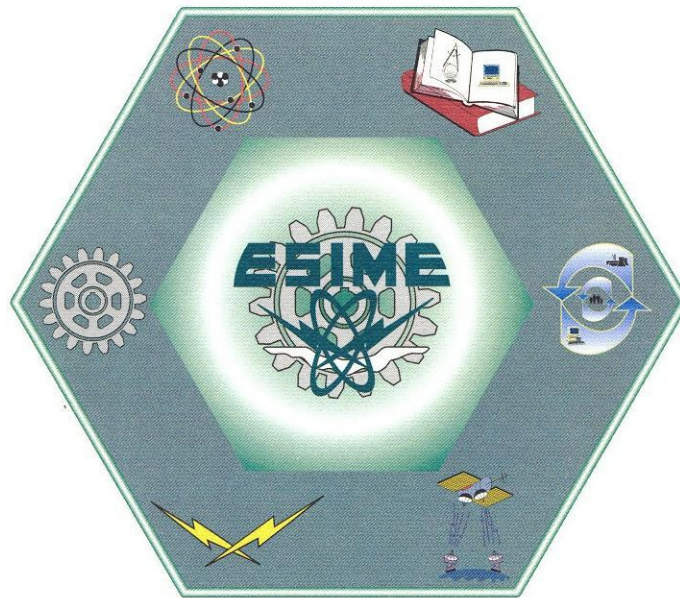
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



7º CONGRESO NACIONAL DE INGENIERÍA ELECTROMECÁNICA Y DE SISTEMAS del 3 al 7 de noviembre de 2003

otorga el presente

DIPLOMA



AL C. ARMANDO ZAMBRANO REYES

POR SU PARTICIPACIÓN CON LA CONFERENCIA

“MODELO DEL ROTOR DE JEFFCOTT EXTENDIDO DESBALANCEADO Y FISURADO Y SU TRATAMIENTO NUMERICO”

México, D.F., a 3 de noviembre de 2003

[Signature of Dr. Florencio Sánchez Silva]

DR. FLORENCIO SÁNCHEZ SILVA Jefe de la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME

[Signature of Dr. Alberto Cornejo Lizarralde]

DR. ALBERTO CORNEJO LIZARRALDE Director de la ESIME Unidad Zacatenco



MODELO DEL ROTOR DE JEFFCOTT EXTENDIDO DESBALANCEADO Y FISURADO Y SU TRATAMIENTO NUMERICO

Gómez-Mancilla J.*, Nossov V.*, Zambrano-Reyes A.

*Instituto Politécnico Nacional, Laboratorio Vibrs. & Rotodinámica
SEPI-ESIME, Edif.5, 3er Piso, Zacatenco, México DF, MÉXICO

Tel (52)5729-6000, ext. 54737, Fax ext. 54588,

e-mail: v_nosov@hotmail.com*

RESUMEN

Esta desarrollado un modelo matemático del *Rotor Jeffcott Extendido* que tiene tres masas y una fisura a la mitad del eje. Las masas tanto en el disco como en las chumaceras poseen desbalances y están vibrando alrededor de una posición de equilibrio. Un método seminumérico basado en el *Método de Parámetro Pequeño* es propuesto para investigar la interacción entre los desbalances de masas siempre presentes en la realidad y la fisura transversal localizada a la mitad del eje; dicha interacción resulta de capital importancia cuando se pretende detectar la presencia de fisuras en el eje rotatorio. Además se presentan gráficas de la respuesta vibratoria contra la velocidad de operación (arranque/paro de la máquina) a esperar ante diferentes profundidades de la grieta.

INTRODUCCIÓN

Cuando los rotores reales (Fig.1) están girando a alta velocidad, la fuerza centrífuga produce esfuerzos que resultan en un estiramiento o crecimiento del rotor.



Fig. 1. Turbina de vapor industrial.

Si los componentes de la maquina están tensionados dentro de la región elástica del material estos regresan a su tamaño original cuando el esfuerzo es removido, pero si el esfuerzo termomecánico es de magnitud suficiente, una pequeña pero finita porción de la vida del rotor se consume. Ciclos termomecánicos por arranques, paros y/o cambios de carga adicionales consumen porciones incrementales de la vida del rotor hasta la fatiga del material y una fisura o fisuras inician, se propagan, y en ultima instancia hacen estallar el rotor. Este es el principal origen de fatiga a ciclos bajos en componentes de turbinas de vapor, ruedas volantes, centrifugadoras médicas, aeronaves y otros equipos que giran a mediana y alta velocidad.

Aunque rara vez ocurre el estallido de un rotor en operación debido a la propagación de fisuras, el

agrietamiento por fatiga de un rotor puede causar un daño catastrófico a las maquinas rotatorias. Por lo tanto, es muy importante una investigación detallada en el comportamiento de un eje rotor fisurado para diagnosticar y prevenir a tiempo las fisuras en el rotor.

El desarrollo de un modelo basado físicamente, provee una base substancial en el esfuerzo para la detección de fisuras. El enfoque matemático para la derivación de las ecuaciones de movimiento es completamente innovador por parte del grupo de investigadores Gómez Mancilla et. al [1,2,12,13] y permite revelar una serie de resonancias locales cuando existe una fisura las cuales caracterizan la vibración y permiten detectar problemas de ejes fracturados.

MODELO DEL ROTOR JEFFCOTT Y EL BALANCE DE LAS FUERZAS

El *Rotor Jeffcott* es un modelo simplificado de rotor que retiene las características esenciales de modelos de rotores más realistas en las respuestas de desbalance. El arreglo geométrico de este modelo consiste en un disco rígido y plano soportado por un eje flexible, uniforme, isotrópico y sin masa. El disco esta localizado a la mitad del eje que esta considerado como una viga simplemente soportado por cojinetes.

Aunque es empleado ampliamente, el modelo del *Rotor Jeffcott* es muy simplificado. El presente modelo (Fig. 2), llamado modelo del *Rotor Jeffcott Extendido Desbalanceado y Fisurado*, adicionalmente a lo anterior considera masas tanto en el disco (la masa del disco es $2m_d$) localizado a la mitad del eje flexible así como otras dos masas idénticas m_b en los dos soportes extremos, también considera que dichos soportes poseen propiedades de rigideces y amortiguamientos propios de las chumaceras lubricadas. Así se permite la presencia de dos desbalances vectoriales diferentes en estas masas y se supone que el eje esta fisurado a la mitad de su longitud en la ubicación del disco.

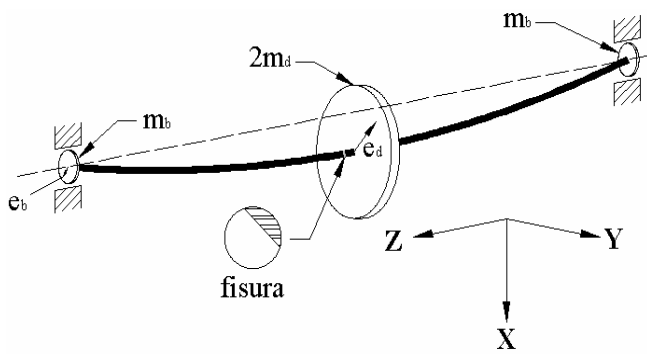


Fig. 2. Modelo del Rotor de Jeffcott Extendido Desbalanceado y Fisurado.

El balance de las fuerzas en el Rotor *Jeffcott Extendido Desbalanceado y Fisurado* esta presentado en la Fig. 3, donde $P_d = 2m_d g$ = peso del disco, $P_b = m_b g$ = peso de la masa localizada en la chumacera, $F_{desb,d}$ = fuerza del desbalance del disco, $F_{desb,b}$ = fuerza del desbalance en la chumacera, F_{el} = la fuerza elástica del eje, F_{fis} = la fuerza elástica debida a la fisura, F_b = fuerza de reacción de la película de aceite en la chumacera, F_{fric} = fuerza amortiguadora viscosa.

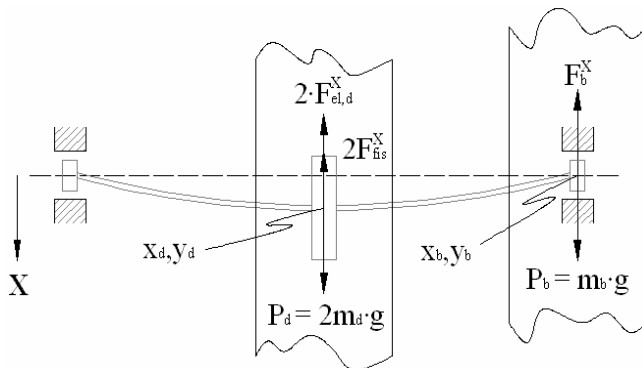


Fig. 3. Balance de las fuerzas en el Rotor *Jeffcott Extendido Desbalanceado y Fisurado* mostrando los dos planos transversales en donde se derivan las ecuaciones de movimiento.

Las proyecciones de la fuerza elástica F_{el} en los dos planos transversales al eje mostrados en la Fig. 3 son:

$$F_{el,d}^x = -k_s(x_d - x_b) \quad (1)$$

$$F_{el,d}^y = -k_s(y_d - y_b) \quad (2)$$

donde x_b, y_b = deflexión de la chumacera en coordenadas cartesianas, x_d, y_d = deflexión del disco en coordenadas cartesianas, y donde los superíndices x, y indican a las componentes orientadas según las coordenadas inerciales de la gravedad y perpendicular a esta respectivamente.

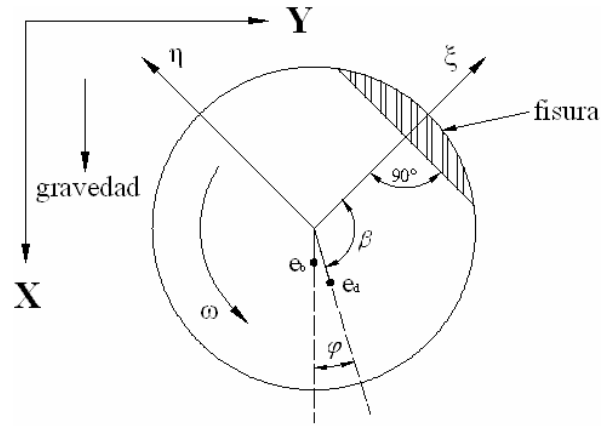


Fig. 4. Plano transversal ubicado a la mitad del tramo del eje mostrando ángulos importantes. ϕ = ángulo entre las direcciones de los desbalances que ocurren entre la chumacera y el disco, β = ángulo entre las direcciones de e_d y ξ

Suponemos que la variación de la rigidez del eje debido a la fisura es solamente una función del tiempo t y que el peso ejerce un efecto dominante, por lo tanto la variación de la rigidez estará cambiando periódicamente y este cambio está descrito por la función $g(\phi(t))$. Las componentes de la fuerza debida a la fisura están dadas por las ecuaciones [5]:

$$F_{fis}^x = \frac{1}{2} g(\phi) [(\Delta k_\xi + \Delta k_\eta) + (\Delta k_\xi - \Delta k_\eta) \cos 2\phi]$$

$$(x_d - x_b) + \frac{1}{2} g(\phi) \sin 2\phi (\Delta k_\xi - \Delta k_\eta) (y_d - y_b) =$$

$$\frac{1}{2} g(\phi) [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\phi)(x_d - x_b) + \Delta k_2 \sin 2\phi (y_d - y_b)] \quad (3)$$

$$F_{fis}^y = \frac{1}{2} g(\phi) [(\Delta k_\xi - \Delta k_\eta) \sin 2\phi] (x_d - x_b) +$$

$$\frac{1}{2} g(\phi) [(\Delta k_\xi + \Delta k_\eta) - (\Delta k_\xi - \Delta k_\eta) \cos 2\phi] (y_d - y_b) =$$

$$\frac{1}{2} g(\phi) [\Delta k_2 \sin 2\phi (x_d - x_b) + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\phi) (y_d - y_b)] \quad (4)$$

donde $\Delta k_\xi, \Delta k_\eta$ son constantes y representan el mayor cambio de rigidez originado por el rotor fisurado; y las Ecs. (3,4) se obtienen al considerar la multiplicación por las matrices de rotación unitaria [R] necesarias cuando pasamos de una descripción en un sistema de coordenadas fijo al eje rotatorio y el sistema de coordenadas inercial.[15]

$$\Delta k_1 = \Delta k_\xi + \Delta k_\eta, \quad \Delta k_2 = \Delta k_\xi - \Delta k_\eta \quad (5)$$

$$\phi = \omega t + \varphi + \beta, \quad g(\phi) = \frac{1 + \cos \phi}{2} \quad (6)$$

donde ω es la frecuencia de rotación del eje y los ángulos φ y β son presentados en la Fig. 4.

ECUACIONES CON DIMENSIONES DEL MOVIMIENTO DEL ROTOR JEFFCOTT EXTENDIDO DESBALANCEADO Y FISURADO.

Aplicando la segunda Ley de Newton para el disco tenemos:

$$2m_d \ddot{x}_d(t) = P_d + 2F_{el,d}^x(t) + 2F_{fis}^x + F_{desb,d}^x(t) + F_{fric}^x \quad (7)$$

$$2m_d \ddot{y}_d(t) = 2F_{el,d}^y(t) + 2F_{fis}^y + F_{desb,d}^y(t) + F_{fric}^y \quad (8)$$

Las componentes de la fuerza amortiguadora viscosa debida a el movimiento del disco dentro del aire o fluido de trabajo de la turbomáquina están dadas por:

$$F_{fric}^x = -c_d \dot{x}_d, \quad F_{fric}^y = -c_d \dot{y}_d \quad (9)$$

donde \dot{x}_d, \dot{y}_d son las derivadas respecto al tiempo "t". Las componentes de la fuerza del desbalance en el disco son:

$$F_{desb,d}^x(t) = 2m_d \omega^2 (e_d^x \cos \omega t - e_d^y \sin \omega t) \quad (10)$$

$$F_{desb,d}^y(t) = 2m_d \omega^2 (e_d^y \cos \omega t + e_d^x \sin \omega t) \quad (11)$$

Así las ecuaciones de movimiento del disco pueden escribirse como:

$$2m_d \ddot{x}_d + c_d \dot{x}_d + 2k_s(x_d - x_b) - g(\phi)[(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\phi)(x_d - x_b) + \Delta k_2 \sin 2\phi(y_d - y_b)] = 2m_d g + 2m_d \omega^2 (e_d^x \cos \omega t - e_d^y \sin \omega t) \quad (12)$$

$$2m_d \ddot{y}_d + c_d \dot{y}_d + 2k_s(y_d - y_b) - g(\phi)[\Delta k_2 \sin 2\phi(x_d - x_b) + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\phi)(y_d - y_b)] = 2m_d \omega^2 (e_d^y \cos \omega t + e_d^x \sin \omega t) \quad (13)$$

donde k_s es la rigidez correspondiente a cada mitad del eje. La posición de equilibrio dinámico del rotor integral (sin fisura) y sin excitación por desbalance se define por las siguientes relaciones:

$$\Delta k_1 = \Delta k_2 = 0, \quad \dot{y} = \ddot{y} = 0 \quad (14)$$

$$\dot{x}_d = \ddot{x}_d = 0, \quad e_d^x = e_d^y = 0$$

Sustituyendo Ec. (14) en Ec.(12) obtenemos en equilibrio:

$$2k_s(x_{d,eq} - x_{b,eq}) = 2m_d g \quad (15)$$

Denotamos por δ el pandeo del eje: $x_{d,eq} - x_{b,eq} = \delta$ entonces:

$$k_s \delta = m_d g, \quad \delta = \frac{m_d g}{k_s} \quad (16)$$

Así mismo sustituyendo la Ec. (14) en la Ec. (13) tenemos:

$$2k_s(y_{d,eq} - y_{b,eq}) = 0, \quad y_{d,eq} = y_{b,eq} \quad (17)$$

De la misma manera que para el disco, aplicando la Segunda Ley de Newton para la chumacera tenemos:

$$m_b \ddot{x}_b(t) = P_b - F_b^x - F_{el}^x + F_{desb,b}^x(t) - F_{fis}^x \quad (18)$$

$$m_b \ddot{y}_b(t) = -F_b^y - F_{el}^y + F_{desb,b}^y(t) - F_{fis}^y \quad (19)$$

donde las proyecciones de la fuerza de desbalance de la masa m_b en la chumacera sobre los ejes X y Y son:

$$F_{desb,b}^x(t) = m_b \omega^2 e_b \cos \omega t \quad (20)$$

$$F_{desb,b}^y(t) = m_b \omega^2 e_b \sin \omega t \quad (21)$$

Así las ecuaciones de movimiento en las chumaceras están dadas por:

$$m_b \ddot{x}_b + k_s(x_b - x_d) - \frac{g(\phi)}{2}[(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\phi)(x_b - x_d) + \Delta k_2 \sin 2\phi(y_b - y_d)] = m_b g - F_b^x + m_b \omega^2 e_b \cos \omega t \quad (22)$$

$$m_b \ddot{y}_b + k_s(y_b - y_d) - \frac{g(\phi)}{2}[\Delta k_2 \sin 2\phi(x_b - x_d) + (\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\phi)(y_b - y_d)] = F_b^y + m_b \omega^2 e_b \sin \omega t \quad (23)$$

En la posición de equilibrio dinámico en la chumacera con el rotor integral tenemos:

$$\Delta k_1 = \Delta k_2 = 0, \quad e_b = 0 \quad (24)$$

$$\dot{x}_b = \ddot{x}_b = 0, \quad \dot{y}_b = \ddot{y}_b = 0$$

Sustituimos Ec. (24) en Ec. (22) y recordando Ec. (16) obtenemos:

$$k_s(x_b - x_d) = -k_s \delta = m_b g - F_{bo}^x(e_{x0}, e_{y0}) \quad (25)$$

$$F_{bo}^x(e_{x0}, e_{y0}) = (m_b + m_d) g \quad (26)$$

donde el vector $F_{bo}(e_{x0}, e_{y0})$ denota las fuerzas de reacción de la chumacera ante el peso que soporta, sin considerar que el muñón vibra o se desplaza. Sustituyendo Ec.(24) en la Ec.(23) tenemos:

$$k_s(y_b - y_d) = F_{bo}^y(e_{x0}, e_{y0}) \quad (27)$$

así, obtendremos:

$$F_{bo}^y(e_{x0}, e_{y0}) = 0 \quad (28)$$

La posición de equilibrio dinámico O_b de la masa en la chumacera tiene coordenadas:

$$O_b = (e_{x0}, e_{y0}) \quad (29)$$

La correspondiente posición de equilibrio dinámico O_d del rotor es:

$$O_d = (e_{x0} + \delta, e_{y0}) \quad (30)$$

Entonces para un rotor integro la posición de equilibrio en las ubicaciones de las chumaceras y el disco respectivamente resultan

$$\begin{aligned} x_{b0} &= e_{x0}, & y_{b0} &= e_{y0}, \\ x_{d0} &= e_{x0} + \delta, & y_{d0} &= e_{y0} \end{aligned} \quad (31)$$

donde e_{x0} , e_{y0} son las proyecciones de la excentricidad sobre los ejes inerciales X y Y (Fig. 5).

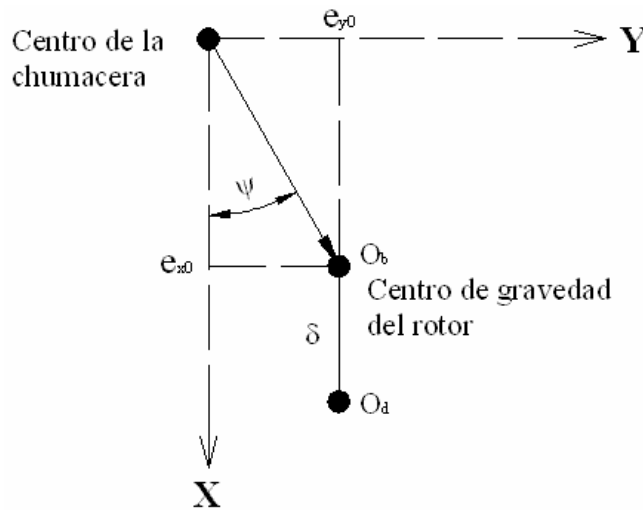


Fig. 5. Proyecciones de la excentricidad sobre los ejes de coordenadas. e = excentricidad del rotor, Ψ = ángulo de posicionamiento (attitude) del rotor

ECUACIONES ADIMENSIONALES DEL MOVIMIENTO DEL ROTOR JEFFCOTT EXTENDIDO DESBALANCEADO Y FISURADO

Para lograr una mayor generalidad de aplicación y utilidad de este análisis derivamos las ecuaciones adimensionales normalizando a las amplitudes de vibración por:

$$c_r = R_b - R_d \quad (32)$$

donde c_r es el claro radial que representa la diferencia de los radios de la chumacera y del disco.

Los desplazamientos adimensionales de los centros de rotor y chumacera respecto a sus posiciones de equilibrio pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} \Delta X_d &= X_d - (\varepsilon_{x0} + W_g) & \Delta X_b &= X_b - \varepsilon_{x0} \\ \Delta Y_d &= Y_d - \varepsilon_{y0} & \Delta Y_b &= Y_b - \varepsilon_{y0} \end{aligned} \quad (33)$$

El peso adimensional del disco responsable del pandeo por la gravedad está definido como:

$$W_g = \frac{\delta}{c_r} = \frac{m_d g}{k_s \cdot c_r} \quad (34)$$

y el tiempo adimensional τ y sus derivadas por :

$$\tau = \omega t, \quad \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt}, \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2}{dt^2} \quad (35)$$

Tomando en cuenta Ec. (33) tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{x_d - x_b}{c_r} &= \Delta X_d - \Delta X_b + \frac{x_{d0} - x_{b0}}{c_r} = \\ \Delta X_d - \Delta X_b + \frac{\delta}{c_r} &= \Delta X_d - \Delta X_b + W_g \end{aligned} \quad (36)$$

$$\frac{y_d - y_b}{c_r} = \Delta Y_d - \Delta Y_b$$

Por X' denotamos a la derivada respecto al tiempo adimensional τ , entonces $\omega X' = \dot{x}$, $\omega^2 X'' = \ddot{x}$.

La primer frecuencia natural ω_{nat} del sistema con soportes rígidos en los extremos es igual a:

$$\omega_{nat} = \sqrt{\frac{k_s}{m_d}} \quad (37)$$

La frecuencia anterior Ec. (37) aunque no es exactamente la correspondiente a este sistema que tiene soportes flexibles será usada para adimensionalizar la velocidad de rotación Ω del sistema.

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{nat}} \quad (38)$$

Dividimos las Ec.(12), (13) por $2k_s c_r$ y reemplazamos las derivadas respecto al tiempo t por las derivadas respecto al tiempo adimensional τ . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{m_d \omega^2}{k_s} \frac{X_d''}{c_r} + \frac{c_d \omega}{2k_s} \frac{X_d'}{c_r} + \frac{x_d - x_b}{c_r} - \\ \frac{g(\phi)}{2} \left[\left(\frac{\Delta k_1}{k_s} + \frac{\Delta k_2}{k_s} \cos 2\phi \right) \frac{x_d - x_b}{c_r} + \frac{\Delta k_2}{k_s} \sin 2\phi \frac{y_d - y_b}{c_r} \right] = \\ \frac{m_d g}{k_s c_r} + \frac{m_d \omega^2}{k_s} \left(\frac{e_d^x}{c_r} \cos \omega t - \frac{e_d^y}{c_r} \sin \omega t \right) \end{aligned} \quad (12')$$

$$\frac{m_d \omega^2 Y_d''}{k_s} + \frac{c_d \omega Y_d'}{2k_s c_r} + \frac{y_d - y_b}{c_r} - \frac{g(\phi)}{2} \left[\frac{\Delta k_2}{k_s} \sin 2\phi \frac{x_d - x_b}{c_r} + \left(\frac{\Delta k_1}{k_s} - \frac{\Delta k_2}{2} \cos 2\phi \right) \left(\frac{y_d - y_b}{c_r} \right) \right] = \frac{m_d \omega^2}{k_s} \left(\frac{e_d^y}{c_r} \cos \omega t + \frac{e_d^x}{c_r} \sin \omega t \right) \quad (13')$$

De las Ec.(12'), (13'), (33) y (38) obtenemos las siguientes ecuaciones adimensionales del movimiento del disco del *Rotor Jeffcott Extendido Desbalanceado y Fisurado*:

$$\Omega^2 \Delta X_d'' + 2D_e \Omega \Delta X_d' + (\Delta X_d - \Delta X_b) - \frac{g(\phi)}{2} [(\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\phi)(W_g + \Delta X_d - \Delta X_b) + \Delta K_2 \sin 2\phi(\Delta Y_d - \Delta Y_b)] = \Omega^2 (U_x \cos \tau - U_y \sin \tau) \quad (39)$$

$$\Omega^2 \Delta Y_d'' + 2D_e \Omega \Delta Y_d' + (\Delta Y_d - \Delta Y_b) - \frac{g(\phi)}{2} [(\Delta K_2 \sin 2\phi (W_g + \Delta X_d - \Delta X_b) + (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\phi)(\Delta Y_d - \Delta Y_b))] = \Omega^2 (U_x \sin \tau + U_y \cos \tau) \quad (40)$$

donde

$$2D_e = \frac{c_d \omega_{nat}}{2k_s} = \frac{c_d}{2m_d \omega_{nat}}, \quad \Delta K_1 = \frac{\Delta k_1}{k_s}, \quad \Delta K_2 = \frac{\Delta k_2}{k_s} \quad (41)$$

son el amortiguamiento adimensional del disco y las rigideces adimensionales relacionadas con la fisura, respectivamente.

De la misma manera que para el disco, dividiendo la Ec.(22) y Ec.(23) por $k_s c_r$, derivamos para las chumaceras también desbalanceadas la Ec.(22') y Ec.(23'):

$$\frac{m_b}{m_d} \frac{m_d}{k_s} \omega^2 \frac{X_b''}{c_r} + \frac{x_b - x_d}{c_r} - \frac{g(\phi)}{2} \left[\left(\frac{\Delta k_1}{k_s} + \frac{\Delta k_2}{k_s} \cos 2\phi \right) \frac{x_b - x_d}{c_r} + \frac{\Delta k_2}{k_s} \sin 2\phi \frac{y_b - y_d}{c_r} \right] = \frac{m_d g}{k_s c_r} \frac{m_b}{m_d} - \frac{F_b^x}{k_s c_r} + \frac{m_b}{m_d} \frac{m_d}{k_s} \omega^2 \frac{e_b^x}{c_r} \cos \tau \quad (22')$$

$$\frac{m_b}{m_d} \frac{m_d}{k_s} \omega^2 \frac{Y_b''}{c_r} + \frac{y_b - y_d}{c_r} - \frac{g(\phi)}{2} \left[\frac{\Delta k_2}{k_s} \sin 2\phi \frac{x_b - x_d}{c_r} + \left(\frac{\Delta k_1}{k_s} + \frac{\Delta k_2}{k_s} \cos 2\phi \right) \left(\frac{y_b - y_d}{c_r} \right) \right] = \frac{F_b^y}{k_s c_r} + \frac{m_b}{m_d} \frac{m_d}{k_s} \omega^2 \frac{e_b^y}{c_r} \sin \tau \quad (23')$$

Descomponemos las fuerzas hidrodinámicas de las chumaceras F_b^x, F_b^y en Series de Taylor acerca de la posición de equilibrio

$$F_b^x(x_b, y_b, \dot{x}_b, \dot{y}_b) = F_b^x(x_{b0}, y_{b0}, 0, 0) + k_{xx}(x_b - x_{b0}) + k_{xy}(y_b - y_{b0}) + c_{xx}\dot{x}_b + c_{xy}\dot{y}_b + H.O.T. \quad (42)$$

$$F_b^y(x_b, y_b, \dot{x}_b, \dot{y}_b) = F_b^y(x_{b0}, y_{b0}, 0, 0) + k_{yx}(x_b - x_{b0}) + k_{yy}(y_b - y_{b0}) + c_{yx}\dot{x}_b + c_{yy}\dot{y}_b + H.O.T.$$

donde k_{ij}, c_{ij} son los típicos coeficientes rotodinámicos de la chumacera y $H.O.T.$ son los términos de orden superior a 2.

Utilizando las Ec.(26), (28) así como las notaciones precedentes que obtuvimos en las Ec.(22') y Ec.(23'), tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\alpha \Omega^2 \Delta X_b'' + (\Delta X_b - \Delta X_d) - \frac{g(\phi)}{2} [(\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\phi)(\Delta X_b - \Delta X_d - W_g) + \Delta K_2 \sin 2\phi(\Delta Y_b - \Delta Y_d)] + K_{xx}\Delta X_b + K_{xy}\Delta Y_b + \Omega C_{xx}\Delta X_b' + \Omega C_{xy}\Delta Y_b' = \alpha \Omega^2 U_b \cos \tau \quad (43)$$

$$\alpha \Omega^2 \Delta Y_b'' + (\Delta Y_b - \Delta Y_d) - \frac{g(\phi)}{2} [\Delta K_2 \sin 2\phi(\Delta X_b - \Delta X_d - W_g) + (\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\phi)(\Delta Y_b - \Delta Y_d)] + K_{yx}\Delta X_b + K_{yy}\Delta Y_b + \Omega C_{yx}\Delta X_b' + \Omega C_{yy}\Delta Y_b' = \alpha \Omega^2 U_b \sin \tau \quad (44)$$

$$\text{donde: } \alpha = \frac{m_b}{m_d}, \quad U_b = \frac{e_b}{c_r}, \quad K_{i,j} = \frac{k_{i,j}}{k_s}, \quad i, j = x, y \quad (45)$$

son el peso adimensional de la chumacera, los coeficientes rotodinámicos adimensionales y el desbalance adimensional en la chumacera, respectivamente.

El sistema de las Ecs. (39), (40), (43), (44) son las ecuaciones lineales adimensionales del *Rotor de Jeffcott Extendido Desbalanceado y Fisurado*. Dicho modelo innovador en su enfoque y derivación consiste en un sistema de orden 8 de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos y en donde el efecto del peso esta explícitamente considerado dentro de las expresiones.

MÉTODO DE INVESTIGACIÓN NUMÉRICA

La investigación de la interacción entre los desbalances de masas y la fisura transversal localizada a la mitad del eje se basa en un modelo lineal dado por Ecs. (39), (40), (43), (44). El modelo completo consiste de cuatro ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes periódicos y su solución analítica cerrada es bastante difícil o tal vez imposible.

Utilizaremos un método seminumérico basado en el *Método de Parámetro Pequeño*. Como parámetro pequeño nosotros consideramos dos parámetros ΔK_1 y ΔK_2 . Como aproximación de la solución de orden cero, $X_{d0}, Y_{d0}, X_{b0}, Y_{b0}$, consideramos la respuesta en estado estable del sistema debido al puro desbalance; es decir soluciones de Ecs. (39), (40), (43), (44) cuando $\Delta K_1 = 0$ y $\Delta K_2 = 0$ y escritas a continuación.

$$\Omega^2 \Delta X_{d0}'' + 2D_e \Omega \Delta X_{d0}' + (\Delta X_{d0} - \Delta X_{b0}) = \Omega^2 (U_x \cos \tau - U_y \sin \tau) \quad (46)$$

$$\Omega^2 \Delta Y_{d0}'' + 2D_e \Omega \Delta Y_{d0}' + (\Delta Y_{d0} - \Delta Y_{b0}) = \Omega^2 (U_x \sin \tau + U_y \cos \tau) \quad (47)$$

$$\alpha \Omega^2 \Delta X_{b0}'' + (\Delta X_{b0} - \Delta X_{d0}) + K_{xx} \Delta X_{b0} + K_{xy} \Delta Y_{b0} + \Omega C_{xx} \Delta X_{b0}' + \Omega C_{xy} \Delta Y_{b0}' = \alpha \Omega^2 U_b \cos \tau \quad (48)$$

$$\alpha \Omega^2 \Delta Y_{b0}'' + (\Delta Y_{b0} - \Delta Y_{d0}) + K_{0x} \varepsilon_{x0} + K_{xx} \Delta X_{b0} + K_{xy} \Delta Y_{b0} + \Omega C_{xx} \Delta X_{b0}' + \Omega C_{xy} \Delta Y_{b0}' = \alpha \Omega^2 U_b \sin \tau \quad (49)$$

Las soluciones de orden cero son determinadas numéricamente solucionando el sistema correspondiente de ecuaciones por medio del programa MATLAB. Estas soluciones contienen solamente términos proporcionales a $\sin \tau$, $\cos \tau$ y a algunas constantes.

Posteriormente las aproximaciones de primer orden X_{d1} , Y_{d1} , X_{b1} , Y_{b1} son soluciones de las ecuaciones siguientes:

$$\Omega^2 \Delta X_{d1}'' + 2D_e \Omega \Delta X_{d1}' + (\Delta X_{d1} - \Delta X_{b1}) = \frac{g(\phi)}{2} [(\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\phi)(W_g + \Delta X_{d0} - \Delta X_{b0}) + \Delta K_2 \sin 2\phi(\Delta Y_{d0} - \Delta Y_{b0})] \quad (50)$$

$$\Omega^2 \Delta Y_{d1}'' + 2D_e \Omega \Delta Y_{d1}' + (\Delta Y_{d1} - \Delta Y_{b1}) = \frac{g(\phi)}{2} [(\Delta K_2 \sin 2\phi)(W_g + \Delta X_{d0} - \Delta X_{b0}) + (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\phi)(\Delta Y_{d0} - \Delta Y_{b0})] \quad (51)$$

$$\alpha \Omega^2 \Delta X_{b1}'' + (\Delta X_{b1} - \Delta X_{d1}) + (K_{0x} \varepsilon_{x0} + K_{xx} \Delta X_{b1} + K_{xy} \Delta Y_{b1} + \Omega C_{xx} \Delta X_{b1}' + \Omega C_{xy} \Delta Y_{b1}') = \frac{g(\phi)}{2} [(\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\phi)(\Delta X_{b0} - \Delta X_{d0} - W_g) + \Delta K_2 \sin 2\phi(\Delta Y_{b0} - \Delta Y_{d0})] \quad (52)$$

$$\alpha \Omega^2 \Delta Y_{b1}'' + (\Delta Y_{b1} - \Delta Y_{d1}) + (K_{0x} \varepsilon_{x0} + K_{xx} \Delta X_{b1} + K_{xy} \Delta Y_{b1} + \Omega C_{xx} \Delta X_{b1}' + \Omega C_{xy} \Delta Y_{b1}') = \frac{g(\phi)}{2} [(\Delta K_2 \sin 2\phi)(\Delta X_{b0} - \Delta X_{d0} - W_g) + (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\phi)(\Delta Y_{b0} - \Delta Y_{d0})] \quad (53)$$

En las Ecs.(50)-(53) los términos X_{d0} , Y_{d0} , X_{b0} , Y_{b0} de la aproximación cero son determinados antes como soluciones de las Ec.(46)-(49). Por lo tanto, los lados derechos de estas ecuaciones son una función conocida de Ω . Haciendo simples transformaciones trigonométricas obtenemos la representación de los lados derechos como una suma de $\sin k\tau$, $\cos k\tau$ con $k = 1, 2, 3, 4$ si la función $g(\phi)$ expresada en Ec. (6) se utiliza.

La aproximación de primer orden depende simultáneamente del desbalance y la fisura y por lo tanto permite estudiar la interacción de estos dos fenómenos. La

solución completa de Ecs. (39), (40), (43), (44) iniciales es tomada ahora como una suma de aproximaciones de cero y primer orden.

En caso de utilizar la función $g(\phi)$ presentada por la Ec.(6) la aproximación de primer orden contiene armónicos con $k = 1, 2, 3, 4$ u otros. Por otro lado la respuesta al desbalance contiene solamente un armónico correspondiente a $1X$. Por lo tanto la interacción de los efectos de los desbalances y la fisura se puede ver solamente en la frecuencia $1X$. Todos los otros armónicos (superarmónicos en este caso) de la respuesta vibratoria completa reflejan los efectos de la pura fisura solamente.

Se muestra a continuación una gráfica (Fig. 6) donde se puede observar la influencia del ángulo de fisura (β) sobre la amplitud de vibración del disco fisurado. También se presentan gráficas (Fig.7 y Fig. 8) de la respuesta vibratoria a esperar contra la velocidad de operación ante diferentes profundidades de la grieta, en la Fig. 7, $\Delta K_1 = 0.1$, $\Delta K_2 = 0.08$ y en la Fig. 8, $\Delta K_1 = 0.5$, $\Delta K_2 = 0.4$. Ambas figuras fueron determinadas bajo las siguientes parámetros, $m_d = 2$, $m_b = 0.5$, $q = L/D = 1$, $\Omega = 1.05$, $S = 0.3825$, $U_b = 0.4$, $U_0 = 0.1$, $\beta = \pi/2$.

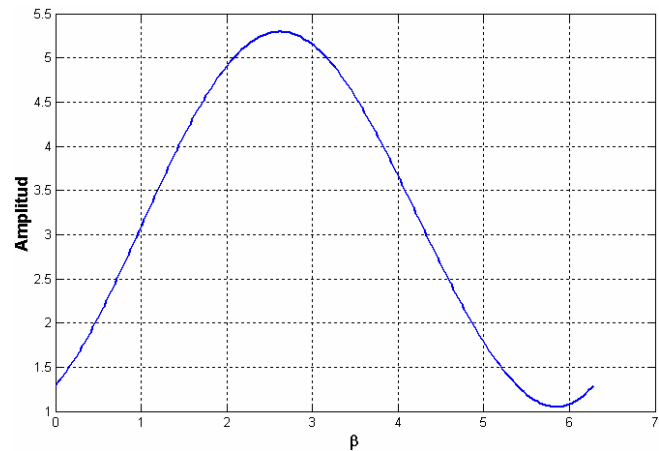


Fig. 6 Influencia del ángulo de fisura (β) sobre la amplitud de vibración del disco fisurado.

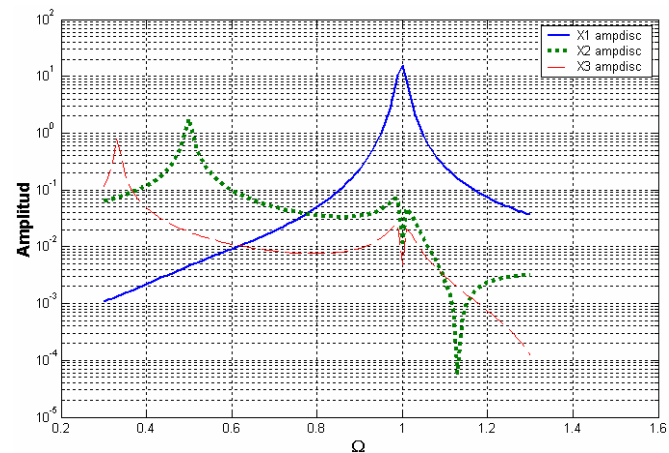


Fig. 7 Comparación de X amplitudes a esperar del disco fisurado contra relación de velocidad de operación Ω . Para este caso $\Delta K_1 = 0.1$, $\Delta K_2 = 0.08$.

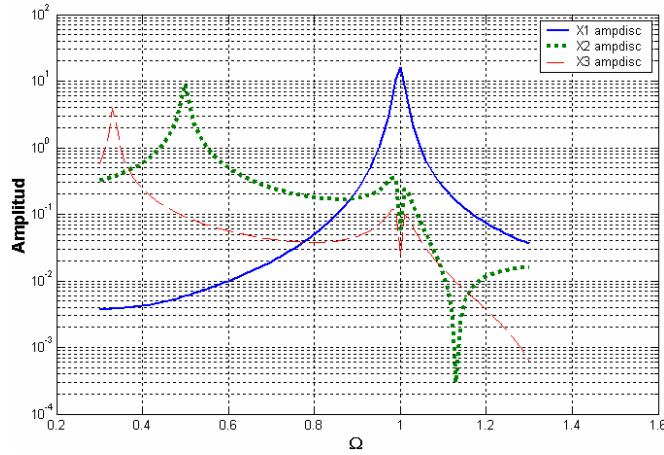


Fig. 8 Comparación de X amplitudes a esperar del disco fisurado contra relación de velocidad de operación Ω . Para este caso $\Delta K_1 = 0.5, \Delta K_2 = 0.4$.

CONCLUSIONES

Se presenta la derivación del modelo matemático de una máquina de configuración simple, tal como es el sistema *Rotor Jeffcott Extendido* desbalanceado y fisurado, en donde los soportes del eje poseen las características clásicas de chumacera lubricada. También en esta investigación se estudia la fuerte interacción vibratoria de los efectos de los desbalances residuales en el disco y chumacera con el eje fisurado, de capital importancia cuando se pretende detectar la presencia de fisuras en el eje rotatorio por medio de registro/medidas de la vibración del sistema.

En referencia a este y otros trabajos [1,2,3,12,13] realizados por los autores se muestra como uno de los principales métodos de detección de fisura muy en boga en el campo, *Acceptance Region*, resulta de utilidad marginal. Lo anterior debido al desconocimiento apriori de los vectores de desbalance residual y de orientación de la potencial fisura.

La solución cerrada del sistema de ecuaciones con coeficientes periodicos resulta muy difícil y por lo tanto el *Método de Parámetro Pequeño* se utiliza en un esquema semi-numérico para obtener la respuesta característica de este sistema dinámico fisurado. Se presentan unas gráficas de la respuesta vibratoria contra la velocidad de operación (arranque/paro de la máquina) a esperar ante diferentes profundidades de la grieta.

REFERENCIAS

1. Gómez-Mancilla J., García-Illescas R., Nossov V., New Modeling Approach for Detection & Behavioral Characterization of Cracked Rotating Shafts, *9th. Int. Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, ISROMAC-9*, Honolulu, Hawaii, U.S.A., (2002).
2. García-Illescas R., Gómez-Mancilla J., Nossov V., Vibration Analysis in the Characterization of the Dynamic Behaviour of Cracked Rotating Shafts, *International Conference on Rotating Machinery, IFToMM*, Sydney, Australia, (2002).

3. *ISCORMA-2*, Poland, 2003.
4. Bently D, Shaft Crack Detection Using the Acceptance Region, *Orbit*, August 1987.
5. Dimarogonas, AD, Vibration of Cracked Structures, A State of the Art Review, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 55, No. 5, pp. 831-857, (1996).
6. Meng G., Gasch R., Stability and Stability Degree of a Cracked Flexible Rotor Supported on Journal Bearings. *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 122, No. 2, (2002), pp. 116-125.
7. Gasch R., A Survey of the Dynamic Behavior of a Simple Rotating Shaft with a Transverse Crack, *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 160, No. 2, pp. 313-332, (1993).
8. Bachschmid N., Tanzi E., Pennacchi P., Audebert S., Transverse Crack Modeling and Validation in Rotor Systems Including Thermal Effects, *9th. Int. Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, ISROMAC-9*, Honolulu, Hawaii, U.S.A., (2002).
9. Mayes I. W., Davies W. G., Analysis of the Response of A Multi-Rotor-Bearing System Containing a Transverse Crack Rotor, *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, Stress & Real in Design, Vol. 106, (1984).
10. Kucherenko, Valeri V., Gómez-Mancilla, J., Bifurcations of an Exactly Solvable Model of Rotordynamics, *International Journal of Bifurcation & Chaos*, Vol. 10, No. 12, Dec., (2000).
11. Muszynska, A., Shaft Crack Detection, Proc. 7th. *Machinery Dynamics Seminar*, Edmonton, Canada, 1982.
12. Bently Nevada, WinADRE®. Users' Manual, (1997).
13. Nossov V., Gómez-Mancilla J., Approximated Analytical Solution of a Cracked Rotor-Bearing System: Analysis, sent for approval to *Journal of Vibration and Acoustics, ASME Trans.*, (2003).
14. Gómez-Mancilla J., Nossov V., Approximated Analytical Solution of a Cracked Rotor-Bearing System: Experimental Validation, sent for approval to *Journal of Vibration and Acoustics, ASME Trans.*, (2003).
15. Sawicky.

NOMENCLATURA

- c_d = coeficiente de amortiguamiento externo.
- c_{ij} ($i,j = x,y$) = coeficiente de amortiguamiento radial.
- C_{ij} ($i,j = x,y$) = amortiguamiento adimensional .
- c_r = claro radial.
- D_e = relación de amortiguamiento externo.
- e_b = desbalance en la chumacera.
- e_d = desbalance en el disco.
- $F_{el,d}$ = fuerza elástica del disco.

F_{fs} = fuerza debido a la fisura.
 F^x, F^y = fuerzas hidrodinámicas adimensionales
 $g(\phi)$ = función periódica, $0 < g(t) < 1$, $(= (1 + \cos\phi)/2)$
 k_s = rigidez del eje no fisurado.
 $\Delta k_\xi, \Delta k_\eta$ = mayor cambio de rigidez en las direcciones ξ y η causado por la fisura.
 $\Delta K_1 = (\Delta k_\xi + \Delta k_\eta)/k_s$
 $\Delta K_2 = (\Delta k_\xi - \Delta k_\eta)/k_s$
 k_{ij} ($i, j = x, y$) = coeficiente de rigidez radial.
 K_{ij} ($i, j = x, y$) = rigidez adimensional.
 m_b, m_d = concentración de masa en la posición de la chumacera y a la mitad del rotor respectivamente
 O_b = posición de equilibrio dinámico de la masa en la chumacera
 O_d = posición de equilibrio dinámico de la masa en el rotor
 S = número de Sommerfeld
 t = tiempo.

U_b = parámetro de desbalance en la chumacera ($= e_b/c_r$)
 W_g = parámetro de gravedad ($= \delta/c_r$)
 x_b, y_b = deflexión de la chumacera en coordenadas cartesianas
 x_d, y_d = deflexión del disco en coordenadas cartesianas.
 α = relación de masa ($= m_b/m_d$)
 β = ángulo de fisura, es el ángulo entre las direcciones de e_d y ξ
 ξ, η = coordenadas rotacionales fijas al cuerpo, ξ esta en la dirección de la fisura.
 $\tau = \omega t$, tiempo adimensional
 φ = ángulo entre las direcciones de los desbalances en la chumacera y el disco.
 $\phi = \omega t + \varphi + \beta$
 ω = velocidad de operación del rotor
 ω_{nat} = frecuencia natural del disco ($= (k_s/m_d)^{1/2}$)
 Ω = relación de velocidad ($= \omega / \omega_{nat}$)



SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

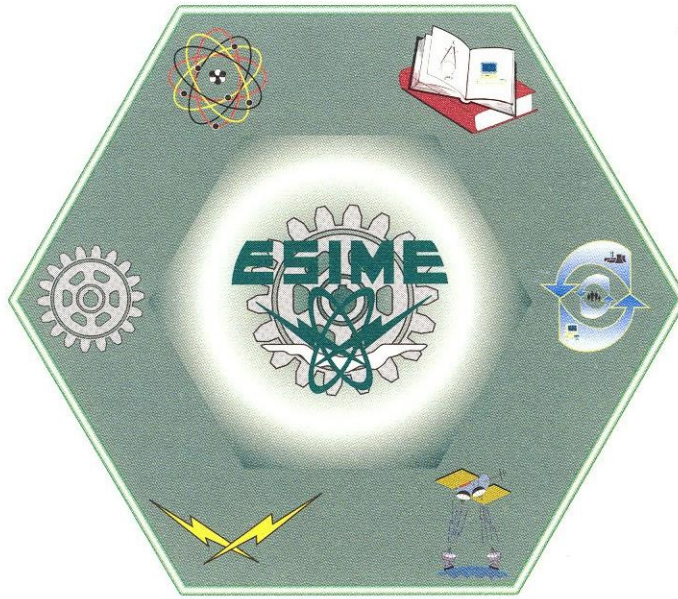
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



8º CONGRESO NACIONAL DE INGENIERÍA ELECTROMECÁNICA Y DE SISTEMAS del 15 al 19 de noviembre de 2004

otorga el presente

DIPLOMA



A: ARMANDO ZAMBRANO REYES

"POR SU PARTICIPACIÓN COMO PONENTE"

MODELO DEL ROTOR DE JEFFCOTT EXTENDIDO, DESBALANCEADO Y FISURADO SOBRE SOPORTES FLEXIBLES

México, D.F., a 15 de noviembre de 2004

[Signature]

DR. FLORENCIO SÁNCHEZ SILVA Jefe de la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME

[Signature]

M. EN C. JESÚS REYES GARCÍA Director de la ESIME Unidad Zacatenco

MODELO DEL ROTOR DE JEFFCOTT EXTENDIDO DESBALANCEADO Y FISURADO SOBRE SOPORTES FLEXIBLES

Zambrano-Reyes A. *, Nosov V. R., Gómez-Mancilla J.C., Sánchez-Silva F.

Instituto Politécnico Nacional, Laboratorio de Vibraciones y Rotodinámica
SEPI-ESIME, Edif.5, 3er Piso, Zacatenco, México DF, MÉXICO
Tel. 555729-6000, Ext. 54737, Fax Ext. 54588

*Estudiante de postgrado SEPI-ESIME IPN

e-mail: armando zam@yahoo.com.mx*

RESUMEN

El propósito de este trabajo es desarrollar un modelo matemático de un Rotor de Jeffcott Extendido fisurado a la mitad del eje y soportado por chumaceras hidrodinámicas idénticas sobre soportes que poseen propiedades de rigidez y amortiguamiento, este sistema geoméricamente simétrico incluye masas en las tres localizaciones: disco, chumaceras y soportes. Las masas tanto en el disco como en las chumaceras poseen desbalances y se encuentran vibrando alrededor de su posición de equilibrio, considerando además que el efecto de la gravedad es dominante. Para una mayor generalidad el sistema de ecuaciones de movimiento es expresado en parámetros adimensionales. Dicho modelo innovador en su enfoque y derivación consiste en un sistema de 6 ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes periódicos y en donde el efecto del peso esta explícitamente considerado dentro de las expresiones.

INTRODUCCIÓN

La tendencia actual en la industria es extender la vida útil de la maquinaria rotatoria. En vez de reemplazar maquinas con 20 o 30 años de antigüedad, muchas compañías están usando valoraciones e inspecciones técnicas para operar sus máquinas por encima o más allá de su vida de diseño original. Este es el caso de las turbinas y generadores que son equipos de alto valor para la industria y su integridad es crucial para mantener una generación de energía segura y económica. Uno de los asuntos más importantes a considerar para extender la vida de los turbogeneradores y demás maquinaria rotatoria es la detección de fisuras para prevenir fallas catastróficas.

Es bien sabido que tan catastrófica puede ser la falla de una turbina. En el mejor de los casos la planta puede ser puesta fuera de servicio mientras se llevan acabo las reparaciones, y en el peor, el incidente puede resultar en la destrucción de la planta y la pérdida de vidas humanas.

En los 70's y 80's se presentaron algunas de las más conocidas catástrofes provocadas por la falla de rotores. En 1971 en Japón, un rotor de baja presión falló durante una prueba a alta velocidad, mientras que los casos que involucran la unidad No.2 de Gallatin en USA en 1974 y la unidad No.2 de Irsching en Alemania en 1987 ambos resultaron de la falla de rotores durante operación normal.

Así como el número de incidentes relacionados con rotores fisurados se ha incrementado, también ha ido en aumento la necesidad de detectar a tiempo la presencia de fisuras en los rotores. La razón es simple. Desde el punto de vista económico y de seguridad o simplemente por imagen pública, las compañías no pueden permitirse el lujo de tener un incidente derivado de un rotor fisurado.

En la tarea de detección de fisuras, el monitoreo de vibraciones durante el arranque o paro de una máquina es tan importante como el monitoreo en estado estable de operación, especialmente para máquinas tales como motores

de aviones los cuales arrancan y paran muy frecuentemente y, además, operan a altas velocidades.

Un eje agrietado puede pasar desapercibido durante largos periodos de tiempo, favoreciendo el crecimiento estable de la fisura por fatiga vibratoria hasta alcanzar un tamaño crítico, entonces repentinamente ocurre el rompimiento frágil del rotor, toda la masa del eje prácticamente se desmorona en varios pedazos los cuales son proyectados en todas direcciones alcanzando grandes distancias.

Bajo condiciones de operación en las cuales actúan cargas de fatiga, como las fluctuaciones de esfuerzos termomecánicos que experimenta el rotor de una turbomáquina durante los transitorios derivados de paros, arranques y/o cambios de carga, las fisuras podrían ser producidas como resultado de la presencia inherente de fallas o defectos de manufactura en el material. Pueden también desarrollarse fisuras en rotores que han tenido muchas miles de horas sin fallas, debido al efecto de la corrosión, desalineamiento severo, precargas y otros factores.

La detección temprana de fisuras, es indispensable para asegurar una operación confiable de la maquinaria rotatoria y para la toma de decisiones técnicas relacionadas con la rehabilitación o sustitución del rotor, es importante determinar si el rotor puede seguir operando o es necesario retirarlo de servicio tomando en cuenta el impacto económico que puede tener esto.

Por esta razón el desarrollo de modelos basados físicamente y los análisis matemáticos lineales, proveen una base sustancial en el esfuerzo para la detección de fisuras, ya que proporcionan resultados que se asemejan cualitativamente al comportamiento real.

A diferencia del modelo inicialmente usado por Kirk [1], en este trabajo se utiliza la descripción completa de la chumacera sin descuidar ambos coeficientes de rigidez directos ni usando coeficientes de rigidez acoplados

perfectamente asimétricos, sin olvidar claro la presencia de la fisura transversal a la mitad del eje.

Cabe resaltar que hasta donde los autores tienen conocimiento, en la literatura nacional e internacional sobre este tema, no existe un modelo similar que permita estudiar la respuesta vibratoria de un Rotor de Jeffcott Extendido Desbalanceado y fisurado soportado por chumaceras hidrodinámicas sobre soportes flexibles que poseen propiedades de rigidez y amortiguamiento, y de aquí la gran relevancia de este modelo

MODELO DEL SISTEMA

A diferencia del modelo desarrollado por los autores en un trabajo anterior [2], el modelo del rotor aquí investigado Fig. 1, es un sistema Rotor Jeffcott Extendido simétricamente soportado por chumaceras hidrodinámicas idénticas sobre soportes que poseen propiedades de rigidez y amortiguamiento. Este tipo de arreglo es ampliamente usado en el control de vibración y la atenuación de transmisión de fuerzas en motores de la industria aeronáutica.

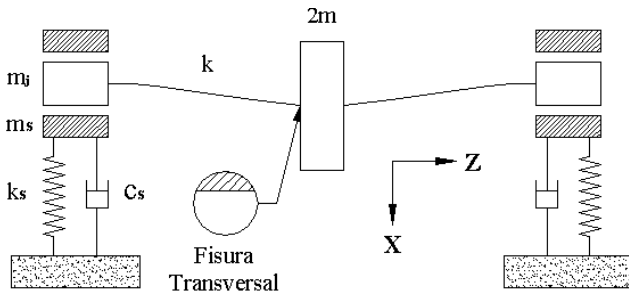


Fig. 1 Diagrama Esquemático del Modelo del Rotor de Jeffcott Extendido Desbalanceado y Fisurado Sobre Soportes Flexibles.

En orden de simplificar la derivación de las ecuaciones de movimiento las siguientes asunciones fueron tomadas:

- El sistema es simétrico y soportado en dos chumaceras hidrodinámicas idénticas sobre soportes que poseen propiedades de rigidez y amortiguamiento con los mismos parámetros.
- Se incluyen masas en las tres localizaciones: disco, chumaceras y soportes. Además, se permite la presencia de vectores desbalance tanto en la localización del disco como en las chumaceras.
- El amortiguamiento en el disco, debido al efecto aerodinámico de su movimiento dentro del aire o fluido de trabajo de la turbomáquina, es del tipo viscoso.
- El efecto de la gravedad es dominante, es decir, las vibraciones permanecen pequeñas en comparación con la deflexión del rotor bajo su propio peso.
- Los efectos giroscópicos en el disco son ignorados debido a la simetría del sistema.
- Las vibraciones axiales y torsionales del rotor del sistema son ignorados.

- Las fuerzas en la película de aceite de las chumaceras hidrodinámicas son determinadas por la ecuación de Reynolds como un lubricante incompresible.

Además del amortiguamiento externo del rotor, el uso de soportes flexibles amortiguados es otro método alternativo para proveer amortiguamiento externo a los sistemas rotor-chumaceras. También, este tipo de configuración posee más parámetros que podemos modificar para obtener un diseño más apropiado. Ha sido reconocido que el uso de soportes flexibles amortiguados podría efectivamente mejorar las características dinámicas del rotor como son respuesta al desbalance, transmisión de fuerzas y también la estabilidad del sistema.

ECUACIONES GENERALES DE MOVIMIENTO

Aplicando la Segunda Ley de Newton a cada uno de los tres puntos: disco, chumaceras y soportes, las ecuaciones de movimiento del sistema son derivadas.

Aplicando la Segunda Ley de Newton para el disco, obtenemos en la dirección X y Y , respectivamente:

$$\begin{aligned} 2mg + 2F_{el}^x + 2F_{fric}^x + 2F_{des,d}^x &= 2m\ddot{x}_d, \\ 2F_{el}^y + 2F_{fric}^y + F_{des,d}^y &= 2m\ddot{y}_d, \end{aligned} \quad (1)$$

en donde, las componentes de la fuerza amortiguadora viscosa debida al movimiento del disco dentro del aire o fluido de trabajo de la turbomáquina están dadas por:

$$F_{fric}^x = -c_d \dot{x}_d, \quad F_{fric}^y = -c_d \dot{y}_d, \quad (2)$$

donde \dot{x}_d, \dot{y}_d son las derivadas respecto al tiempo "t".

Las componentes de la fuerza del desbalance en el disco son:

$$F_{des,d}^x = 2m\omega^2 (e_d^x \cos \omega t - e_d^y \sin \omega t), \quad (3)$$

$$F_{des,d}^y = 2m\omega^2 e_d \cos(\omega t + \varphi),$$

$$F_{des,d}^y = 2m\omega^2 (e_d^y \cos \omega t + e_d^x \sin \omega t), \quad (4)$$

$$F_{des,d}^x = 2m\omega^2 e_d \sin(\omega t + \varphi).$$

Suponemos que la variación de la rigidez del eje debido a la fisura es solamente una función del tiempo "t" y que el peso ejerce un peso dominante, por lo tanto la variación de la rigidez estará cambiando periódicamente y este cambio estará descrito por la función $g(t)$. Las componentes de la fuerza elástica del eje fisurado están dadas por las Ecs.(5-6), estas ecuaciones se obtienen al realizar la multiplicación por la matriz de rotación unitaria, necesaria cuando pasamos de una descripción de un sistema de coordenadas rotatorio fijo al eje a el sistema de coordenadas inercial. [5,6]

$$\begin{aligned} F_{el}^x &= -k(x_d - x_j) + \frac{1}{2}g(t)[(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\phi) \\ & (x_d - x_j) + (\Delta k_2 \sin 2\phi)(y_d - y_j)], \end{aligned} \quad (5)$$

$$F_{el}^y = -k(y_d - y_j) + \frac{1}{2}g(t)[(\Delta k_2 \sin 2\phi)(x_d - x_j) + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\phi)(y_d - y_j)], \quad (6)$$

donde x_j, y_j = deflexión de la chumacera en coordenadas cartesianas, x_d, y_d = deflexión del disco en coordenadas cartesianas, y donde los superíndices x, y indican a las componentes orientadas según las coordenadas inerciales de la gravedad y perpendicular a esta respectivamente, k es la rigidez correspondiente a cada mitad del eje.

$$\Delta k_1 = \Delta k_\xi + \Delta k_\eta, \quad \Delta k_2 = \Delta k_\xi - \Delta k_\eta, \quad (7)$$

$$\phi = \omega t + \varphi + \beta, \quad g(t) = g(\phi) = \frac{1 + \cos \phi}{2}, \quad (8)$$

donde $\Delta k_\xi, \Delta k_\eta$ son constantes y representan el mayor cambio de rigidez en las direcciones ξ y η respectivamente originado por la presencia de la fisura en el rotor, $g(t)$ ó $g(\phi)$ es una función periódica que describe el fenómeno de apertura y cierre de la grieta (respiro), $0 < g(\phi) < 1$, donde ϕ es el ángulo de rotación instantáneo, ω es la frecuencia de rotación del eje y φ y β están presentados en la Fig. 2.

Así que al sustituir las Ecs. (2)-(6) en Ec. (1) tenemos que para el disco, las ecuaciones de movimiento pueden escribirse como:

$$m\ddot{x}_d + c_d\dot{x}_d + k(x_d - x_j) - \frac{1}{2}g(t)[(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\phi)(x_d - x_j) + (\Delta k_2 \sin 2\phi)(y_d - y_j)] = mg + m\omega^2 e_d \cos(\omega t + \varphi), \quad (9)$$

$$m\ddot{y}_d + c_d\dot{y}_d + k(y_d - y_j) - \frac{1}{2}g(t)[(\Delta k_2 \sin 2\phi)(x_d - x_j) + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\phi)(y_d - y_j)] = m\omega^2 e_d \sin(\omega t + \varphi). \quad (10)$$

De la misma forma que para el disco, aplicando la Segunda Ley de Newton para las chumaceras, obtenemos para la dirección X y Y respectivamente:

$$m_j g - f_x - F_{el}^x + F_{des,j}^x = m_j \ddot{x}_j, \quad -f_y - F_{el}^y + F_{des,j}^y = m_j \ddot{y}_j, \quad (11)$$

en donde las proyecciones de la fuerza de desbalance de la masa m_b en la chumacera sobre los ejes X y Y son:

$$F_{des,j}^x = m_j \omega^2 e_j \cos(\omega t), \quad F_{des,j}^y = m_j \omega^2 e_j \sin(\omega t). \quad (12)$$

Debido a la rotación, es desarrollada presión de fluido entre el rotor y la chumacera dicha presión produce una fuerza resultante igual a la carga estática de la chumacera. Desviaciones del rotor de esta posición de equilibrio ($\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}$) resultan en fuerzas adicionales que en general, se oponen a estas desviaciones. La película de aceite tiene una acción de resorte.

Para cuantificarlas, consideramos las componentes vertical y horizontal de estas fuerzas:

$$f_x = f_x(x, \dot{x}, y, \dot{y}), \quad f_y = f_y(x, \dot{x}, y, \dot{y}). \quad (13)$$

Las funciones f_x y f_y dependen del diseño de la chumacera, la carga estática, la velocidad angular Ω , y otros. Expandiendo estas funciones en series de Taylor, alrededor de la posición de equilibrio

$$f_x = f_{x0} + k_{xx}\Delta x + k_{xy}\Delta y + c_{xx}\Delta \dot{x} + c_{xy}\Delta \dot{y} + o(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta \dot{x}^2, \Delta \dot{y}^2),$$

$$f_y = f_{y0} + k_{yy}\Delta y + k_{yx}\Delta x + c_{yy}\Delta \dot{y} + c_{yx}\Delta \dot{x} + o(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta \dot{x}^2, \Delta \dot{y}^2),$$

donde los k_{ij} y c_{ij} ($i, j = x, y$) son llamados coeficientes rotodinámicos de rigidez y amortiguamiento, respectivamente, y son funciones de Ω , de la carga estática, y del tipo de chumacera pero son independientes de las perturbaciones $\Delta x, \Delta y, \Delta \dot{x}$ y $\Delta \dot{y}$. Como una primera aproximación ignoramos los términos de orden superior en las ecuaciones anteriores. Resultando así:

$$f_x = f_{x0} + k_{xx}(\Delta x_j - \Delta x_s) + k_{xy}(\Delta y_j - \Delta y_s) + c_{xx}(\Delta \dot{x}_j - \Delta \dot{x}_s) + c_{xy}(\Delta \dot{y}_j - \Delta \dot{y}_s), \quad (14)$$

$$f_y = f_{y0} + k_{yy}(\Delta y_j - \Delta y_s) + k_{yx}(\Delta x_j - \Delta x_s) + c_{yy}(\Delta \dot{y}_j - \Delta \dot{y}_s) + c_{yx}(\Delta \dot{x}_j - \Delta \dot{x}_s). \quad (15)$$

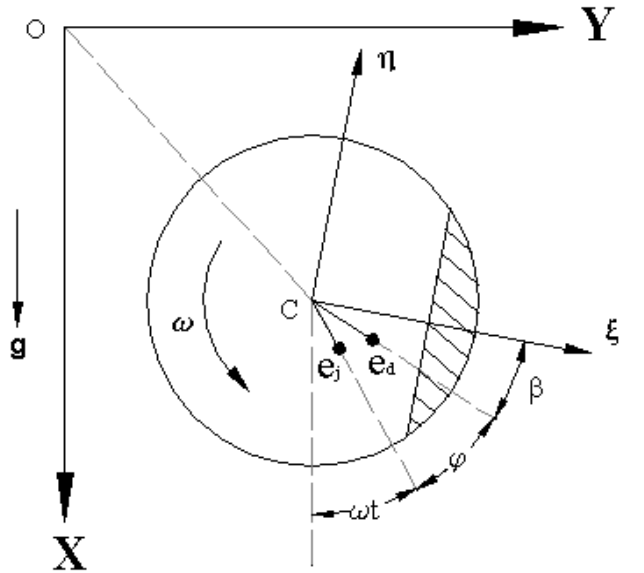


Fig. 2 Plano transversal localizado a la mitad del tramo del eje mostrando ángulos importantes. φ = ángulo entre las direcciones de los desbalances que ocurren la chumacera (e_j) y el disco (e_d), β = ángulo entre las direcciones del desbalance en el disco (e_d) y la fisura (ξ)

Sustituyendo Ecs. (5), (6) y (12) en Ec. (11) obtenemos para las chumaceras:

$$m_j \ddot{x}_j + f_x - k(x_d - x_j) + \frac{1}{2} g(t) [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\phi) (x_d - x_j) + (\Delta k_2 \sin 2\phi)(y_d - y_j)] = m_j g + m_j \omega^2 e_j \cos(\omega t), \quad (16)$$

$$m_j \ddot{y}_j + f_y - k(y_d - y_j) + \frac{1}{2} g(t) [(\Delta k_2 \sin 2\phi) (x_d - x_j) + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\phi)(y_d - y_j)] = m_j \omega^2 e_j \sin(\omega t). \quad (17)$$

Aplicando la Segunda Ley de Newton para el soporte, obtenemos en la dirección X y Y respectivamente

$$m_s \ddot{x}_s + c_s \dot{x}_s + k_s x_s - f_x = m_s g, \quad (18)$$

$$m_s \ddot{y}_s + c_s \dot{y}_s + k_s y_s - f_y = 0. \quad (19)$$

En la posición de equilibrio dinámico del rotor, sin excitación por desbalance y sin fisura, tenemos

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i0} & \dot{x}_i &= \dot{x}_i = 0 & f_x &= f_{x0} \\ y_i &= y_{i0} & \dot{y}_i &= \dot{y}_i = 0 & f_y &= f_{y0} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\Delta k_1 = \Delta k_2 = 0, \quad e_d = e_j = 0, \quad (21)$$

donde $i = d, j, s$. Ahora sustituyendo Ecs. (20) y (21) en Ec. (9), tenemos:

$$k(x_{d0} - x_{j0}) = mg.$$

Denotamos por δ el pando del eje

$$\delta = x_{d0} - x_{j0}, \quad (22)$$

entonces:

$$k\delta = mg, \quad \delta = \frac{mg}{k}. \quad (23)$$

Así mismo sustituyendo Ecs. (20) y (21) en Ec. (10), tenemos:

$$k(y_{d0} - y_{j0}) = 0, \quad y_{d0} - y_{j0} = 0, \quad y_{d0} = y_{j0}. \quad (24)$$

Para el caso de la chumacera, sustituyendo Ecs. (20) y (21) en Ec. (16), tenemos:

$$f_{x0} - k(x_{d0} - x_{j0}) = m_j g,$$

$$f_{x0} = mg + m_j g, \quad f_{x0} = (m + m_j) g, \quad (25)$$

y en el caso de la ecuación en la dirección Y , sustituyendo Ecs. (20) y (21) en Ec. (17)

$$f_{y0} - k(y_{d0} - y_{j0}) = 0, \quad f_{y0} = 0. \quad (26)$$

De la misma manera para el caso del soporte, sustituyendo Ecs. (20) y (21) en Ec. (18), resulta:

$$k_s x_{s0} - f_{x0} = m_s g, \quad f_{x0} = k_s x_{s0} - m_s g, \quad (27)$$

$$x_{s0} = \frac{(m + m_j + m_s) g}{k_s}. \quad (28)$$

Sustituyendo Ecs. (20) y (21) en Ec. (19), obtenemos:

$$k_s y_{s0} - f_{y0} = 0,$$

recordando el resultado de la Ec. (26), podemos obtener que:

$$k_s y_{s0} = 0, \quad y_{s0} = 0. \quad (29)$$

Finalmente podemos concluir que la posición de equilibrio dinámico O_s de la masa del soporte tiene coordenadas:

$$O_s = (x_{s0}, 0). \quad (30)$$

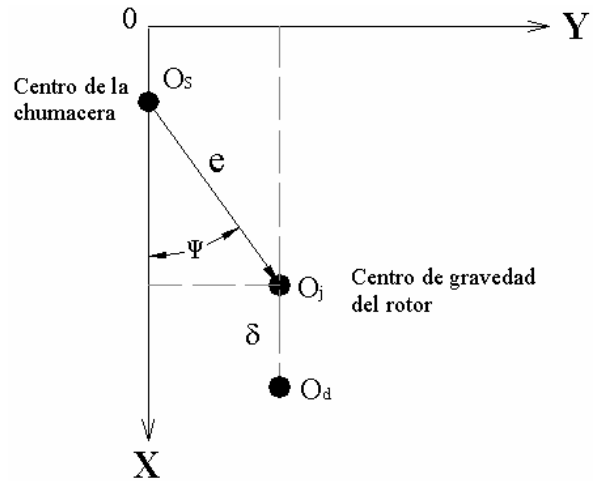


Fig. 3 Posiciones de equilibrio dinámico de la chumacera y del soporte (O_s), chumaceras (O_j) y disco (O_d). e = excentricidad del rotor, Ψ = ángulo de posicionamiento (attitude) del rotor.

De la misma manera la posición de equilibrio dinámico O_j de la masa en la chumacera y O_d del disco, tienen respectivamente las coordenadas:

$$O_j = (x_{s0} + e_{x0}, e_{y0}), \quad (31)$$

$$O_d = (x_{s0} + e_{x0} + \delta, e_{y0}). \quad (32)$$

Entonces para un rotor integro la posición de equilibrio en las ubicaciones de los soportes, chumaceras y el disco respectivamente resultan:

$$\begin{aligned} x_{s0} &= \frac{(m + m_j + m_s)g}{k_s}, & y_{s0} &= 0, \\ x_{j0} &= x_{s0} + e_{x0}, & y_{j0} &= e_{y0}, \\ x_{d0} &= x_{s0} + e_{x0} + \delta, & y_{d0} &= e_{y0}, \end{aligned}$$

donde e_{x0} , e_{y0} son las proyecciones de la excentricidad sobre los ejes inerciales X y Y (Fig. 3).

ECUACIONES DE MOVIMIENTO ALREDEDOR DE LA POSICIÓN DE EQUILIBRIO.

Los desplazamientos del centro del rotor, chumaceras y soportes respecto a sus posiciones de equilibrio pueden ser expresadas como:

$$\begin{aligned} \Delta x_d &= x_d - x_{d0}, & \Delta x_j &= x_j - x_{j0}, & \Delta x_s &= x_s - x_{s0}, \\ \Delta y_d &= y_d - y_{d0}, & \Delta y_j &= y_j - y_{j0}, & \Delta y_s &= y_s - y_{s0}. \end{aligned} \quad (33)$$

De la misma manera las velocidades y aceleraciones del centro del rotor, chumaceras y soportes respecto a sus posiciones de equilibrio pueden ser expresadas como:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_i &= \dot{x}_i, & \Delta \ddot{x}_i &= \ddot{x}_i, \\ \Delta \dot{y}_i &= \dot{y}_i, & \Delta \ddot{y}_i &= \ddot{y}_i, \end{aligned} \quad i = s, j, d. \quad (34)$$

Sustituyendo las relaciones dadas por Ecs. (33) y (34) en las ecuaciones de movimiento del disco Ecs.(9) y (10), y empleando la relación dada por Ec. (23) al momento de simplificar la Ec. (9), tenemos:

$$\begin{aligned} m\Delta \ddot{x}_d + c_d \Delta \dot{x}_d - \frac{1}{2}g(t) [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\phi)(\Delta x_d - \Delta x_j + \delta) + \\ (\Delta k_2 \sin 2\phi)(\Delta y_d - \Delta y_j)] + k(\Delta x_d - \Delta x_j) = m\omega^2 e_d \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} m\Delta \ddot{y}_d + c_d \Delta \dot{y}_d - \frac{1}{2}g(t) [(\Delta k_2 \sin 2\phi)(\Delta x_d - \Delta x_j + \delta) + (\Delta k_1 - \\ \Delta k_2 \cos 2\phi)(\Delta y_d - \Delta y_j)] + k(\Delta y_d - \Delta y_j) = m\omega^2 e_d \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (36)$$

De la misma manera sustituyendo las relaciones dadas por Ecs. (33) y (34) en Ec. (16) que describe el movimiento de las chumaceras en la dirección X , y empleando Ec. (25) para simplificar, obtenemos:

$$\begin{aligned} m_j \Delta \ddot{x}_j + c_{xx}(\Delta \dot{x}_j - \Delta \dot{x}_s) + c_{xy}(\Delta \dot{y}_j - \Delta \dot{y}_s) + k_{xx}(\Delta x_j - \Delta x_s) + \\ k_{xy}(\Delta y_j - \Delta y_s) - k(\Delta x_d - \Delta x_j) + \frac{1}{2}g(t) [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\phi) \\ (\Delta x_d - \Delta x_j + \delta) + (\Delta k_2 \sin 2\phi)(\Delta y_d - \Delta y_j)] = m_j \omega^2 e_j \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (37)$$

Para la ecuación que describe el movimiento en la dirección Y tenemos que al sustituir Ecs. (33) y (34) en la Ec.(17) y empleando la relación dada por Ec.(26) tenemos:

$$\begin{aligned} m_j \Delta \ddot{y}_j + c_{yy}(\Delta \dot{y}_j - \Delta \dot{y}_s) + c_{yx}(\Delta \dot{x}_j - \Delta \dot{x}_s) + \\ k_{yy}(\Delta y_j - \Delta y_s) + k_{yx}(\Delta x_j - \Delta x_s) - k(\Delta y_d - \Delta y_j) + \\ \frac{1}{2}g(t) [(\Delta k_2 \sin 2\phi)(\Delta x_d - \Delta x_j + \delta) + \\ (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\phi)(\Delta y_d - \Delta y_j)] = m_j \omega^2 e_j \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (38)$$

Ahora sustituyendo las relaciones dadas en Ecs. (33) y (34) en las ecuaciones de movimiento de los soportes Ecs. (18), (19) tenemos para el caso del movimiento en la dirección X y haciendo uso de la Ec. (27)

$$\begin{aligned} m_s \Delta \ddot{x}_s + c_s \Delta \dot{x}_s - c_{xx}(\Delta \dot{x}_j - \Delta \dot{x}_s) - c_{xy}(\Delta \dot{y}_j - \Delta \dot{y}_s) - \\ k_{xx}(\Delta x_j - \Delta x_s) - k_{xy}(\Delta y_j - \Delta y_s) + k_s \Delta x_s = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Para el caso del movimiento en la dirección Y y haciendo uso de las Ecs. (26) y (29)

$$\begin{aligned} m_s \Delta \ddot{y}_s + c_s \Delta \dot{y}_s - c_{yy}(\Delta \dot{y}_j - \Delta \dot{y}_s) - c_{yx}(\Delta \dot{x}_j - \Delta \dot{x}_s) - \\ k_{yy}(\Delta y_j - \Delta y_s) - k_{yx}(\Delta x_j - \Delta x_s) + k_s \Delta y_s = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

El sistema de ecuaciones dado por Ecs. (35)-(40) representan las ecuaciones de movimiento, con dimensiones, del Rotor Jeffcott Extendido Desbalanceado y Fisurado Sobre Soportes Flexibles alrededor de su posición de equilibrio

ECUACIONES ADIMENSIONALES DE MOVIMIENTO ALREDEDOR DE LA POSICIÓN DE EQUILIBRIO

Para lograr una mayor generalidad de aplicación y utilidad de este análisis derivamos las ecuaciones adimensionales normalizando a las amplitudes de vibración por:

$$c_r = R_j - R_{eje}, \quad (41)$$

donde c_r es el claro radial que representa la diferencia de los radios de la chumacera y del eje.

Para pasar a las coordenadas adimensionales, los desplazamientos adimensionales de los centros de rotor y chumacera respecto a sus posiciones de equilibrio pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} \Delta X_i &= \frac{\Delta x_i}{c_r}, & \Delta X_i' &= \frac{\Delta \dot{x}_i}{\omega c_r}, & \Delta X_i'' &= \frac{\Delta \ddot{x}_i}{\omega^2 c_r}, \\ \Delta Y_i &= \frac{\Delta y_i}{c_r}, & \Delta Y_i' &= \frac{\Delta \dot{y}_i}{\omega c_r}, & \Delta Y_i'' &= \frac{\Delta \ddot{y}_i}{\omega^2 c_r}, \end{aligned} \quad (42)$$

donde: $i = d, j, s$.

Por $\Delta X'$ denotamos a la derivada respecto al tiempo adimensional " τ ". Y el tiempo adimensional " τ " y sus derivadas están denotados por:

$$\tau = \omega t, \quad (43)$$

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt}, \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2}{dt^2}. \quad (44)$$

Al sustituir las Ecs. (42) y (43) en el sistema de ecuaciones dado por Ecs.(35) -(40) que representa las ecuaciones de movimiento, con dimensiones, del Rotor Jeffcott Extendido Desbalanceado y Fisurado Sobre Soportes Flexibles, alrededor de su posición de equilibrio, obtenemos el siguiente sistema:

$$m\omega^2 c_r \Delta X_d'' + c_d \omega c_r \Delta X_d' - \frac{1}{2} g(t) [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\phi) (c_r \Delta X_d - c_r \Delta X_j + \delta) + (\Delta k_2 \sin 2\phi) (c_r \Delta Y_d - c_r \Delta Y_j)] + k (c_r \Delta X_d - c_r \Delta X_j) = m\omega^2 e_d \cos(\tau + \varphi), \quad (45)$$

$$m\omega^2 c_r \Delta Y_d'' + c_d \omega c_r \Delta Y_d' - \frac{1}{2} g(t) [(\Delta k_2 \sin 2\phi) (c_r \Delta X_d - c_r \Delta X_j + \delta) + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\phi) (c_r \Delta Y_d - c_r \Delta Y_j)] + k (c_r \Delta Y_d - c_r \Delta Y_j) = m\omega^2 e_d \sin(\tau + \varphi), \quad (46)$$

$$m_j \omega^2 c_r \Delta X_j'' + \omega c_r c_{xx} (\Delta X_j' - \Delta X_s') + \omega c_r c_{yy} (\Delta Y_j' - \Delta Y_s') + c_r k_{xx} (\Delta X_j - \Delta X_s) + c_r k_{yy} (\Delta Y_j - \Delta Y_s) - c_r k (\Delta X_d - \Delta X_j) + \frac{1}{2} g(t) [(\Delta k_1 + \Delta k_2 \cos 2\phi) (c_r \Delta X_d - c_r \Delta X_j + \delta) + (\Delta k_2 \sin 2\phi) (c_r \Delta Y_d - c_r \Delta Y_j)] = m_j \omega^2 e_j \cos(\tau), \quad (47)$$

$$m_j \omega^2 c_r \Delta Y_j'' + \omega c_r c_{yy} (\Delta Y_j' - \Delta Y_s') + \omega c_r c_{yx} (\Delta X_j' - \Delta X_s') + c_r k_{yy} (\Delta Y_j - \Delta Y_s) + c_r k_{yx} (\Delta X_j - \Delta X_s) - c_r k (\Delta Y_d - \Delta Y_j) + \frac{1}{2} g(t) [(\Delta k_2 \sin 2\phi) (c_r \Delta X_d - c_r \Delta X_j + \delta) + (\Delta k_1 - \Delta k_2 \cos 2\phi) (c_r \Delta Y_d - c_r \Delta Y_j)] = m_j \omega^2 e_j \sin(\tau), \quad (48)$$

$$m_s \omega^2 c_r \Delta X_s'' + \omega c_r c_s \Delta X_s' - \omega c_r c_{xx} (\Delta X_j' - \Delta X_s') - \omega c_r c_{yy} (\Delta Y_j' - \Delta Y_s') - c_r k_{xx} (\Delta X_j - \Delta X_s) - c_r k_{yy} (\Delta Y_j - \Delta Y_s) + c_r k_s \Delta X_s = 0, \quad (49)$$

$$m_x \omega^2 c_r \Delta Y_s'' + \omega c_r c_s \Delta Y_s' - \omega c_r c_{yy} (\Delta Y_j' - \Delta Y_s') - \omega c_r c_{yx} (\Delta X_j' - \Delta X_s') - c_r k_{yy} (\Delta Y_j - \Delta Y_s) - c_r k_{yx} (\Delta X_j - \Delta X_s) + c_r k_s \Delta Y_s = 0. \quad (50)$$

En el sistema de ecuaciones Ecs.(45)-(50) las coordenadas ya son adimensionales, pero no así sus coeficientes. Ahora para adimensionalizar los coeficientes dividiremos todo el sistema Ecs. (45)-(50) entre $k c_r$, de donde resulta:

$$\Omega^2 \Delta X_d'' + 2D_e \Omega \Delta X_d' - \frac{1}{2} g(t) [(\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\phi) (\Delta X_d - \Delta X_j + W_g) + (\Delta K_2 \sin 2\phi) (\Delta Y_d - \Delta Y_j)] + (\Delta X_d - \Delta X_j) = \Omega^2 U_d \cos(\tau + \varphi), \quad (51)$$

$$\Omega^2 \Delta Y_d'' + 2D_e \Omega \Delta Y_d' - \frac{1}{2} g(t) [(\Delta K_2 \sin 2\phi) (\Delta X_d - \Delta X_j + W_g) + (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\phi) (\Delta Y_d - \Delta Y_j)] + (\Delta Y_d - \Delta Y_j) = \Omega^2 U_d \sin(\tau + \varphi), \quad (52)$$

$$\alpha_j \Omega^2 \Delta X_j'' + C_{xx} \Omega (\Delta X_j' - \Delta X_s') + C_{yy} \Omega (\Delta Y_j' - \Delta Y_s') + K_{xx} (\Delta X_j - \Delta X_s) + K_{yy} (\Delta Y_j - \Delta Y_s) - (\Delta X_d - \Delta X_j) + \frac{1}{2} g(t) [(\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\phi) (\Delta X_d - \Delta X_j + W_g) + (\Delta K_2 \sin 2\phi) (\Delta Y_d - \Delta Y_j)] = \alpha_j \Omega^2 U_j \cos(\tau), \quad (53)$$

$$\alpha_j \Omega^2 \Delta Y_j'' + C_{yy} \Omega (\Delta Y_j' - \Delta Y_s') + C_{yx} \Omega (\Delta X_j' - \Delta X_s') + K_{yy} (\Delta Y_j - \Delta Y_s) + K_{yx} (\Delta X_j - \Delta X_s) - (\Delta Y_d - \Delta Y_j) + \frac{1}{2} g(t) [(\Delta K_2 \sin 2\phi) (\Delta X_d - \Delta X_j + W_g) + (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\phi) (\Delta Y_d - \Delta Y_j)] = \alpha_j \Omega^2 U_j \sin(\tau), \quad (54)$$

$$\alpha_s \Omega^2 \Delta X_s'' + C_s \Omega \Delta X_s' - C_{xx} \Omega (\Delta X_j' - \Delta X_s') - C_{yy} \Omega (\Delta Y_j' - \Delta Y_s') - K_{xx} (\Delta X_j - \Delta X_s) - K_{yy} (\Delta Y_j - \Delta Y_s) + K_s \Delta X_s = 0, \quad (55)$$

$$\alpha_s \Omega^2 \Delta Y_s'' + C_s \Omega \Delta Y_s' - C_{yy} \Omega (\Delta Y_j' - \Delta Y_s') - C_{yx} \Omega (\Delta X_j' - \Delta X_s') - K_{yy} (\Delta Y_j - \Delta Y_s) - K_{yx} (\Delta X_j - \Delta X_s) + K_s \Delta Y_s = 0. \quad (56)$$

El desbalance adimensional en el disco y las chumaceras estará dado respectivamente por:

$$U_d = \frac{e_d}{c_r}, \quad U_j = \frac{e_j}{c_r}. \quad (57)$$

La primera frecuencia natural ω_{nat} del sistema con soportes rígidos en los extremos es igual a:

$$\omega_{nat} = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (58)$$

La frecuencia definida por Ec. (58) aunque no es exactamente la correspondiente a este sistema que tiene soportes flexibles será usada para adimensionalizar la velocidad de rotación del sistema.

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{nat}}. \quad (59)$$

El amortiguamiento adimensional del disco está dado por:

$$2D_e \Omega = \frac{c_d \omega_{nat}}{k} \Omega = \frac{c_d \omega}{k} \frac{\omega_{nat}}{\omega_{nat}} = \frac{c_d \omega}{k}. \quad (60)$$

El peso adimensional de las chumaceras y los soportes fueron determinados respectivamente como:

$$\alpha_j = \frac{m_j}{m}, \quad \alpha_s = \frac{m_s}{m}, \quad (61)$$

de donde obtenemos que

$$\alpha_j \Omega^2 = \frac{m_j \omega^2}{m \omega_{nat}^2} = \frac{m_j m \omega^2}{m k} = \frac{m_j \omega^2 m}{k m} = \frac{m_j \omega^2}{k}, \quad (62)$$

$$\alpha_s \Omega^2 = \frac{m_s \omega^2}{m \omega_{nat}^2} = \frac{m_s m \omega^2}{m k} = \frac{m_s \omega^2 m}{k m} = \frac{m_s \omega^2}{k}, \quad (63)$$

Los coeficientes rotodinámicos adimensionales de rigidez y amortiguamiento están expresados respectivamente como:

$$K_{ij} = \frac{k_{ij}}{k}, \quad (64)$$

$$\Omega C_{ij} = \frac{\omega}{\omega_{nat}} \frac{\omega_{nat} c_{ij}}{k} = \frac{\omega c_{ij}}{k} \frac{\omega_{nat}}{\omega_{nat}} = \frac{\omega c_{ij}}{k}, \quad (65)$$

donde $i, j = x, y$

El peso adimensional del disco responsable del pando por la gravedad está definido como:

$$W_g = \frac{\delta}{c_r} = \frac{m_d g}{k_s \cdot c_r}. \quad (66)$$

El amortiguamiento y la rigidez adimensional de los soportes están dados respectivamente por

$$\Omega C_s = \frac{\omega}{\omega_{nat}} \frac{\omega_{nat} c_s}{k} = \frac{\omega c_s}{k} \frac{\omega_{nat}}{\omega_{nat}} = \frac{\omega c_s}{k}, \quad (67)$$

$$K_s = \frac{k_s}{k}. \quad (68)$$

De la misma manera determinamos

$$\Delta K_1 = \frac{\Delta k_1}{k}, \quad \Delta K_2 = \frac{\Delta k_2}{k}. \quad (69)$$

El sistema de las Ecs. (51)-(56) son las ecuaciones lineales adimensionales del Rotor de Jeffcott Extendido Desbalanceado y Fisurado Sobre Soportes Flexibles. Dicho modelo innovador en su enfoque y derivación consiste en un sistema de 6 ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes periódicos y en donde el efecto del peso está explícitamente considerado dentro de las expresiones.

CONCLUSIONES

Dado que las consecuencias de operar una máquina con fractura entraña un alto riesgo y puede resultar en una catástrofe, ha ido en aumento la necesidad de detectar a tiempo la presencia de fisuras en las máquinas. El desarrollo de modelos basados físicamente y los análisis matemáticos lineales, proveen una base sustancial en el esfuerzo para la detección de fisuras, ya que proporcionan resultados que se asemejan cualitativamente al comportamiento real.

Se presenta la derivación del modelo matemático de una máquina de configuración compleja, tal como es el sistema Rotor Jeffcott Extendido desbalanceado y fisurado, soportado por chumaceras hidrodinámicas idénticas sobre soportes que poseen propiedades de rigidez y amortiguamiento. Aunque el análisis se vuelve más complejo se incluye en este modelo la presencia de desbalances residuales en las localizaciones del disco y las chumaceras. Este modelo con un cuidadoso análisis ayudará en el propósito de caracterizar la respuesta vibratoria de ejes fisurados. Una solución numérica del presente sistema de rotor desarrollada por los autores se utilizará para deducir y determinar patrones de comportamiento confiables ante la interacción entre la fisura y el desbalance. Una solución analítica aproximada del presente sistema sería útil ya que el modelo es capaz de producir muchos patrones de comportamiento difíciles de ser estudiados numéricamente debido al gran consumo de tiempo y alta demanda de capacidad de cálculo que este estudio requiere.

En la literatura nacional e internacional sobre este tema, no existe un modelo similar que permita estudiar la respuesta vibratoria de un Rotor de Jeffcott Extendido Desbalanceado y fisurado soportado por chumaceras hidrodinámicas sobre soportes flexibles que poseen propiedades de rigidez y amortiguamiento, y de aquí la gran relevancia de este modelo

REFERENCIAS

1. Zenglin Guo and R. Gordon Kirk, Instability Boundary for Rotor-Hydrodynamic Bearing Systems, Part 2: Rotor With External Flexible Damped Support, *Journal of Vibration and Acoustics*, October 2003, Vol. 125, pp. 423-426.
2. Gomez-Mancilla J., Nosov V., Zambrano-Reyes A., Modelo del Rotor de Jeffcott Extendido Desbalanceado y Fisurado y su Tratamiento Numérico, *VII Congreso Nacional en Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, México D.F., 3 al 7 de noviembre de 2003.
3. García-Illescas R., Gómez-Mancilla J., Nosov V., Vibration Analysis in the Characterization of the

Dynamic Behavior of Cracked Rotating Shafts, *International Conference on Rotating Machinery, IFToMM*, Sydney, Australia, (2002).

4. Gómez-Mancilla J., García-Illescas R., Nosov V., New Modeling Approach for Detection & Behavioral Characterization of Cracked Rotating Shafts, 9th. *International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, ISROMAC-9*, Honolulu, Hawaii, U.S.A., (2002).
5. Lalanne Michel, Ferraris Guy, Rotodynamics Prediction in Engineering, 2nd Edition, Ed. John Wiley and Sons, Chapter 10.
6. Meng G., Gasch R., Stability and Stability Degree of a Cracked Flexible Rotor Supported on Journal Bearings. *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 122, No. 2, (2002), pp. 116-125.
7. Gasch R., A Survey of the Dynamic Behavior of a Simple Rotating Shaft with a Transverse Crack, *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 160, No. 2, pp. 313-332, (1993).
8. Mayes I. W., Davies W. G., Analysis of the Response of A Multi-Rotor-Bearing System Containing a Transverse Crack Rotor, *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, Stress & Real in Design, Vol. 106, (1984).
9. J. Gómez-Mancilla, J-J. Sinou, V.R. Nosov, F. Thouverez, A. Zambrano-Reyes, The Influence Of Crack-Imbalance Orientation And Orbital Evolution For An Extended Cracked Jeffcott Rotor, *Comptes Rendus Mecanique*, Julio 2004.
10. J.C. Gomez-Mancilla, A. Zambrano, Local Resonance Analysis of Crack-imbalance Orientations and Orbital Evolution to Detect Rotor Cracks, IMAC XXIII: Conference and Exposition On Structural Dynamics, January 31-February 3, 2005, Rosen Plaza Hotel Orlando Florida.
11. J.C. Gomez-Mancilla, J. Machorro-Lopez, Local Resonance Analysis of Crack-imbalance Orientations and Orbital Evolution to Detect Mid-span Rotor Cracks: Part 2, Experimental Validation, IMAC XXIII: Conference and Exposition On Structural Dynamics, January 31-February 3, 2005, Rosen Plaza Hotel Orlando Florida.

NOMENCLATURA

c_d = coeficiente de amortiguamiento externo.
 c_{ij} ($i,j = x,y$) = coeficiente de amortiguamiento radial.
 C_{ij} ($i,j = x,y$) = coeficientes rotodinámicos de amortiguamiento adimensionalizados.
 c_r = claro radial.
 c_s = amortiguamiento del soporte.
 D = diámetro del eje.
 $2D_e$ = relación de amortiguamiento externo.
 e_d, e_j = desbalance en el disco y chumacera respectivamente
 F_{el} = fuerza elástica del eje fisurado.
 f^s, f^r = fuerzas hidrodinámicas

$g(\phi)$ = función periódica, $0 < g(t) < 1$, ($= (1 + \cos\phi)/2$)
 k = rigidez del eje no fisurado.
 k_s = rigidez del soporte.
 K_s = rigidez adimensional del soporte. ($= k_s/k$)
 $\Delta k_\xi, \Delta k_\eta$ = mayor cambio de rigidez en las direcciones ξ y η causado por la fisura.
 $\Delta K_1 = (\Delta k_\xi + \Delta k_\eta)/k$
 $\Delta K_2 = (\Delta k_\xi - \Delta k_\eta)/k$
 k_{ij} ($i,j = x,y$) = coeficientes rotodinámicos de rigidez.
 K_{ij} ($i,j = x,y$) = coeficientes rotodinámicos de rigidez adimensionalizados. ($= k_{ij}/k$)
 L = Longitud de la chumacera.
 m_j = concentración de masa en la posición de la chumacera
 $2m$ = concentración de masa a la mitad del rotor
 m_s = concentración de masa en el soporte
 O_j = posición de equilibrio dinámico de la masa en la chumacera
 O_d = posición de equilibrio dinámico de la masa a la mitad del rotor
 O_s = posición de equilibrio dinámico de la masa en el soporte
 S = numero de Sommerfeld, ($= DL\omega\mu (R/C_r)^2 / 2\pi W$)
 S_o = Número de Sommerfeld fijo, ($= S/\Omega$)
 t = tiempo.
 U_d = desbalance adimensional en el disco ($= e_d/c_r$)
 U_j = desbalance adimensional en la chumacera ($= e_j/c_r$)
 W_g = parámetro de gravedad ($= \delta/c_r$)
 x_j, y_j = deflexión de la chumacera en coordenadas cartesianas
 x_d, y_d = deflexión del disco en coordenadas cartesianas.
 x_s, y_s = deflexión del soporte en coordenadas cartesianas.
 α_j = relación de masa de las chumaceras ($= m_j/m$)
 α_s = relación de masa de del soporte ($= m_s/m$)
 β = ángulo de fisura, entre las direcciones de e_d y ξ
 δ = deflexión estática del eje ($= mg/k$)
 ξ, η = coordenadas rotacionales fijas al cuerpo, ξ esta en la dirección de la fisura.
 τ = tiempo adimensional ($= \omega t$)
 ϕ = ángulo entre las direcciones de los desbalances en la chumacera y el disco.
 ϕ = ángulo de rotación instantáneo ($= \omega t + \phi + \beta$)
 ω = velocidad de operación del rotor
 ω_{nat} = frecuencia natural del sistema con soportes rígidos
 Ω = relación de velocidad ($= \omega/\omega_{nat}$)
 $(\dot{\cdot}) = d/dt, (\ddot{\cdot}) = d^2/dt^2$

AGRADECIMIENTOS

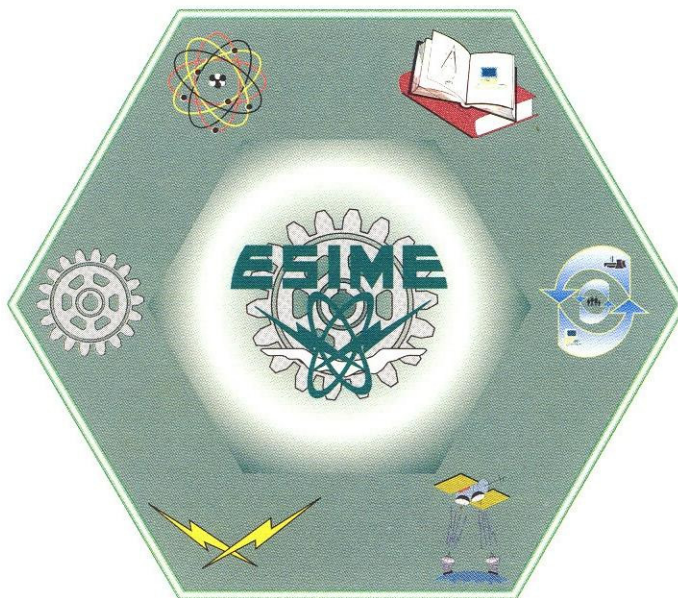
Se agradece al *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACyT*, por el apoyo otorgado a través del Proyecto 38711-U. Se agradecen también las becas *S.N.I.* y *EDI* otorgadas por *CONACyT*, e *Instituto Politécnico Nacional, IPN*, respectivamente

El estudiante de postgrado Armando Zambrano agradece al *CONACyT* y a *PIFI* por el apoyo económico otorgado para la realización de sus estudios de maestría.

8^o
CONGRESO NACIONAL
DE INGENIERÍA ELECTROMECÁNICA Y DE SISTEMAS
del 15 al 19 de noviembre de 2004

otorga el presente

DIPLOMA



AL ING. ARMANDO ZAMBRANO REYES
"POR SU PARTICIPACIÓN EN LA PONENCIA"

LA INFLUENCIA DE LA ORIENTACIÓN ENTRE GRIETA
Y DESBALANCE Y LA EVOLUCIÓN ORBITAL, PARA UN
ROTOR DE JEFFCOTT EXTENDIDO FISURADO

México, D.F., a 15 de noviembre de 2004



DR. FLORENCIO SÁNCHEZ SILVA
Jefe de la Sección de Estudios de Posgrado
e Investigación de la ESIME



M. EN C. JESÚS REYES GARCÍA
Director de la ESIME Unidad Zacatenco

LA INFLUENCIA DE LA ORIENTACIÓN ENTRE GRIETA Y DESBALANCE Y LA EVOLUCIÓN ORBITAL PARA UN ROTOR DE JEFFCOTT EXTENDIDO FISURADO

Zambrano-Reyes A.*, Gómez-Mancilla J.C., Nosov V. R., Sánchez-Silva F.

Instituto Politécnico Nacional, Laboratorio de Vibraciones y Rotodinámica
SEPI-ESIME, Edif.5, 3er Piso, Zacatenco, México DF, MÉXICO

Tel 555729-6000, Ext. 54737, Fax Ext. 54588

*Estudiante de postgrado SEPI-ESIME IPN

e-mail: armandoam@yahoo.com.mx*

RESUMEN

La aparición de picos de vibración a fracciones racionales de la velocidad crítica fundamental, aquí nombradas *Resonancias Locales*, facilita la detección de ejes fisurados durante el paro de la máquina. En este trabajo es empleado un modelo modificado de Rotor Jeffcott sobre chumaceras hidrodinámicas afectado por los efectos de la gravedad y oscilando alrededor de puntos no triviales de equilibrio, en ausencia del desalineamiento. La correcta selección de los parámetros permite que este modelo lineal represente las primeras características modales de máquinas reales. Se analizan los patrones de vibración y la evolución de las órbitas rindiendo útiles resultados. Para la detección de grieta los resultados indican que en vez de los componentes $1x$ y $2x$, el análisis de las *Resonancias Locales* restantes debe tener prioridad, esto debido a la interacción entre la grieta y el desbalance residual y a los múltiples orígenes $2x$ inducidos. Por lo tanto se enfatiza el análisis de las *Resonancias Locales* y la evolución orbital alrededor de $1/2$, $1/3$ y $1/4$ de la velocidad crítica para las diversas orientaciones entre grieta y desbalance.

INTRODUCCIÓN

La seguridad personal, los altos costos de operación y el aumento en los intervalos de tiempo de reparación motivan la investigación en la detección de grietas en ejes rotatorios y hacen más conveniente la valoración estructural por monitoreo de la vibración. La detección de grietas es más factible durante barridos de frecuencia como en el caso del paro de la máquina, cuando varias *Resonancias Locales* de vibración que ocurren a fracciones racionales de la velocidad crítica fundamental pueden indicar problemas estructurales. Ha habido amplia investigación sobre el comportamiento vibratorio de un rotor fisurado y el uso de las características de la respuesta para detectar las grietas [1-19].

En su revisión de la literatura Gash [7] proporcionó un útil análisis del estado del arte en este campo. Por otro lado, Friswell y su equipo tienen trabajos en varios interesantes tópicos en uno de los cuales se analizan los diferentes modelos simplificados de respiro de la grieta [8]. La conclusión de Penny y Friswell tiene importancia puesto que la función armónica simple de respiro de la grieta como la propuesta por Mayes [2,3] permite que este modelo sea lineal y, sin embargo, producir un comportamiento del sistema similar al de un modelo no lineal equivalente y más complicado. Bachschmid y Pennacchi [13] cuidadosamente han estudiado y desarrollado modelado de grietas, sobre todo cuando están perturbadas por efectos térmicos como ocurre en el caso de las bombas de refrigeración verticales.

Para el caso de un rotor agrietado vertical teniendo significativos efectos giroscópicos Yamamoto e Ishida [9] propusieron un interesante modelo no lineal capaz también de analizar el efecto de la orientación entre grieta y desbalance en ausencia de los efectos de la gravedad.

Aunque para configuraciones de rotor absolutamente diferentes ambos trabajos, [9] y el presente, alcanzan resultados similares referentes a la existencia de *Resonancias Locales*, la influencia ocultante del desbalance y las complejas respuestas de vibración del sistema.

En este estudio, es empleado un modelo de Rotor de Jeffcott extendido sobre chumaceras lubricadas que posee masas y desbalances en el disco y chumaceras, desarrollado por Gómez-Mancilla [10,12], que permite caracterizar la evolución orbital y los patrones de vibración en las *Resonancias Locales*, incluyendo la velocidad crítica. El modelo aquí utilizado incluye los efectos de la gravedad y produce respuestas periódicas incluso en ausencia de excitaciones del desbalance.

En rotores con efectos giroscópicos pequeños donde el acoplamiento a otros ejes es flexible, es decir en ausencia de desalineamiento, y la grieta está situada cerca o a la mitad del tramo del eje, el presente modelo simplificado es suficientemente bueno para la descripción cualitativa de una máquina real que vibra en su primer modo. Mientras usemos modelos de Rotor de Jeffcott la clave recae en la apropiada selección de los valores de los parámetros modales, que permite la representación adecuada de máquinas reales.

El ángulo de orientación relativo entre el desbalance residual y la grieta y su interacción, afectan drásticamente la respuesta de sistema haciendo la detección de grieta muy difícil. La existencia de *Resonancias Locales* en diversos sub-armónicos o súper-armónicos racionales o combinaciones de estos, permite una buena caracterización de la vibración reduciendo la influencia de la interacción entre vectores desconocidos; por ejemplo, magnitudes y orientaciones del desbalance residual y fisura del eje.

Cierta controversia existe al tratar de establecer qué componente es más relevante para la detección de daños, la vibración sincrónica $1x$ o $2x$. Para propósitos prácticos, la presencia de la grieta afecta perceptiblemente el componente sincrónico $1x$ y produce un pronóstico confuso debido a su gran dependencia con la magnitud y el ángulo de fase relativo que existe entre los vectores desconocidos de desbalance residual y grieta. Debemos recordar que en situaciones reales las magnitudes y ángulo relativo entre grieta y desbalance no son conocidos a priori. Entonces los autores recomiendan centrarse en todas las combinaciones de componentes $1, 2, 3$ sub-súper armónicos puesto que todos son capaces de inducir lo que llamamos las *Resonancias Locales*. Por las razones anteriores, se presentan la evolución y el análisis de las formas orbitales durante el barrido de frecuencia, con especial énfasis en *Resonancias Locales* de sincrónico, dos y tres veces la frecuencia armónica.

En comparación con el tipo de modelo tradicional usado por Meng y Gash [6], el modelo matemático aquí empleado fue extendido para incluir el importante efecto de la gravedad, siempre presente en la realidad especialmente en máquinas de longitud considerable, y el correspondiente punto de equilibrio no trivial.

La capacidad de predicción de este modelo es comparada contra experimentos de laboratorio en Ref. [17], analizando amplitudes, resonancias locales significativas, evolución orbital y estabilidad del sistema. Los resultados indican que los análisis numéricos obtenidos de este modelo son cualitativamente muy semejantes a los resultados experimentales.

ROTOR EXTENDIDO DE JEFFCOTT

El modelo matemático aquí empleado, cuya configuración física se ilustra en la Figura 1, es presentado en la referencia [10], mostrando detalladamente la derivación de las ecuaciones. El rotor Jeffcott modificado sobre chumaceras lubricadas aquí usado incluye los efectos de la gravedad, grieta y desbalance; de todas formas, por propósitos de autonomía se presentan brevemente las ecuaciones matemáticas expresadas en forma adimensional y sus características principales. Resultan un total de cuatro grados de libertad, dos en el disco X_d, Y_d , más dos en ambas

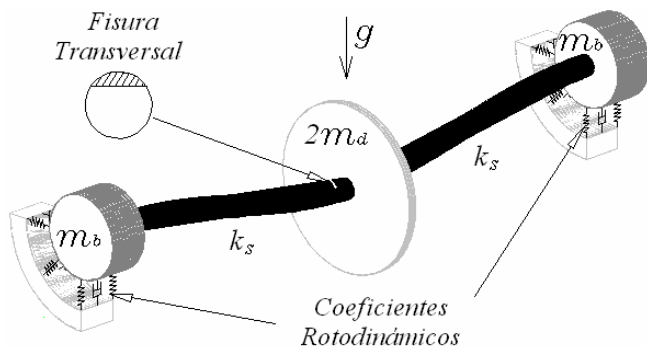


Figura 1. Rotor de Jeffcott modificado mostrando la localización de la grieta, el efecto de la gravedad, masas en chumaceras $2m_b$ y disco m_d y los coeficientes rotodinámicos.

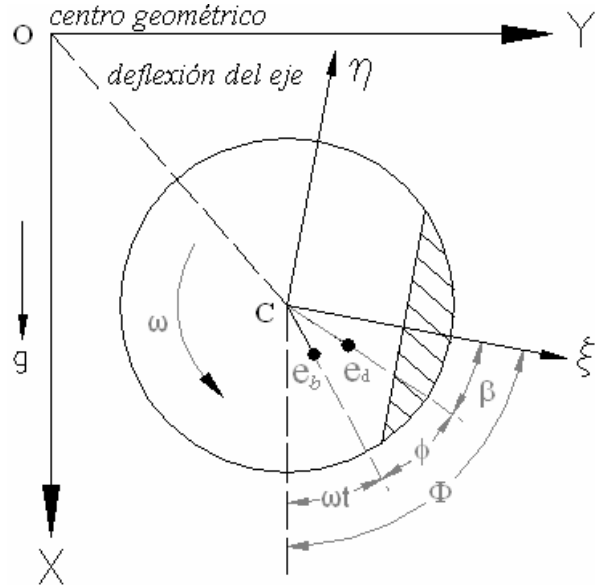


Figura 2. Sección del eje donde se ubica la fractura transversal; se ilustran el par de sistemas de coordenadas, inerciales y rotatorias y la descripción del desbalance.

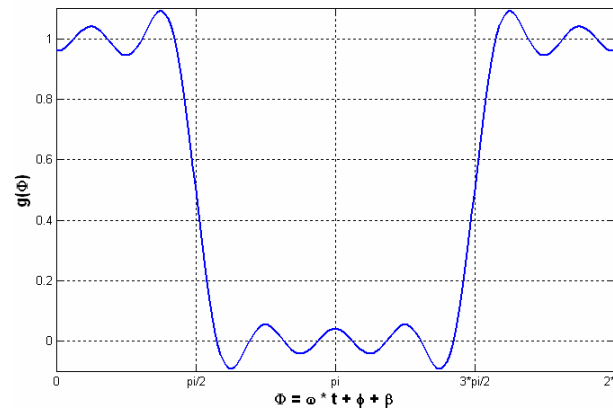


Figura 3a. Función de "respiro" de la grieta

localizaciones de las chumaceras X_b, Y_b . Los desplazamientos diferenciales del cojinete, los ocho coeficientes rotodinámicos y el correspondiente punto geométrico de equilibrio del cojinete $\epsilon_{x0}, \epsilon_{y0}$, son utilizados para expresar las fuerzas de reacción del cojinete produciendo oscilaciones alrededor de puntos no triviales de equilibrio.

Aplicando la Segunda Ley de Newton en la localización del disco y normalizando cada término de acuerdo a la nomenclatura y usando el sistema de coordenadas mostrado en la Figura 2, obtenemos:

$$\Omega^2 \Delta X_d'' + 2D_e \Omega \Delta X_d' + (\Delta X_d - \Delta X_b) - \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi) (W_g + \Delta X_d - \Delta X_b) + (\Delta K_2 \sin 2\Phi)(\Delta Y_d - \Delta Y_b)] = \Omega^2 U_d \cos(\tau + \phi) \quad (1)$$

$$\Omega^2 \Delta Y_d'' + 2D_e \Omega \Delta Y_d' + (\Delta Y_d - \Delta Y_b) - \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_2 \sin 2\Phi)(\Delta X_d - \Delta X_b + W_g) + (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi)(\Delta Y_d - \Delta Y_b)] = \Omega^2 U_d \sin(\tau + \phi) \quad (2)$$

De manera similar, haciendo balance de fuerzas en las localizaciones de las chumaceras y normalizando obtenemos:

$$\alpha \Omega^2 \Delta X_b'' + \Omega C_{xx} \Delta X_b' + \Omega C_{yy} \Delta Y_b' + K_{xx} \Delta X_b + K_{yy} \Delta Y_b + (\Delta X_b - \Delta X_d) + \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_1 + \Delta K_2 \cos 2\Phi)(\Delta X_d - \Delta X_b + W_g) + (\Delta K_2 \sin 2\Phi)(\Delta Y_d - \Delta Y_b)] = \alpha \Omega^2 U_b \cos \tau \quad (3)$$

$$\alpha \Omega^2 \Delta Y_b'' + \Omega C_{yx} \Delta X_b' + \Omega C_{yy} \Delta Y_b' + K_{yx} \Delta X_b + K_{yy} \Delta Y_b + (\Delta Y_b - \Delta Y_d) + \frac{g(\Phi)}{2} [(\Delta K_2 \sin 2\Phi)(\Delta X_d - \Delta X_b + W_g) + (\Delta K_1 - \Delta K_2 \cos 2\Phi)(\Delta Y_d - \Delta Y_b)] = \alpha \Omega^2 U_b \sin \tau \quad (4)$$

Donde los valores de los parámetros más relevantes son:

$$\begin{aligned} \Delta X_b &= X_b - \varepsilon_{x0}, & \Delta Y_b &= Y_b - \varepsilon_{y0}, & \Delta X_d &= X_d - (\varepsilon_{x0} - W_g), \\ \Delta Y_d &= Y_d - \varepsilon_{y0}, & \Delta K_1 &= \Delta K_\xi + \Delta K_\eta, & \Delta K_2 &= \Delta K_\xi - \Delta K_\eta, \\ W_g &= \delta_s / C_r, & \Phi &= \omega t + \phi + \beta = \tau + \phi + \beta. \end{aligned}$$

La existencia de masas tanto en el disco como en las chumaceras permite realizar varios útiles tipos de análisis, por ejemplo, de un número de combinaciones de desbalance variando las magnitudes y ángulos de fase relativos entre disco y chumacera con respecto a la orientación de la grieta; también se pueden considerar varias distribuciones de concentraciones de masa del eje (α). Se asume un fenómeno simple de respiro de la grieta tal como el discutido por Gash [7], típico en sistemas dominados por el peso.

$$g(\Phi) = \left(\frac{2}{\pi} \right) \left(\frac{\pi}{4} + \cos \Phi - \frac{1}{3} \cos 3\Phi + \frac{1}{5} \cos 5\Phi - \frac{1}{7} \cos 7\Phi + \dots \right) \quad (5)$$

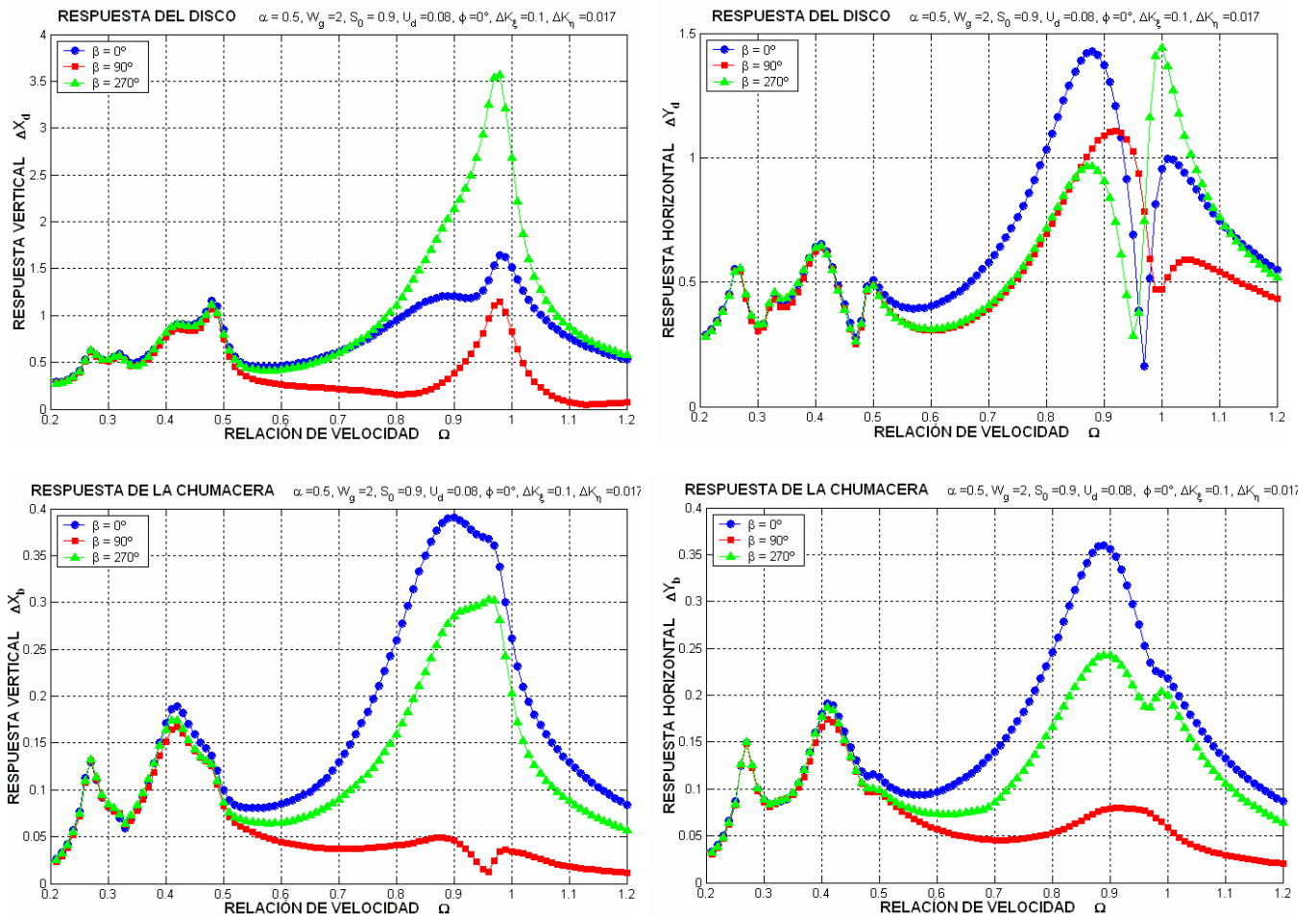


Figura 4. Respuestas Horizontales y Verticales del Disco y de las Chumaceras para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance ($\beta = 0^\circ$: círculo, $\beta = 90^\circ$: cuadrado, $\beta = 270^\circ$: triángulo)

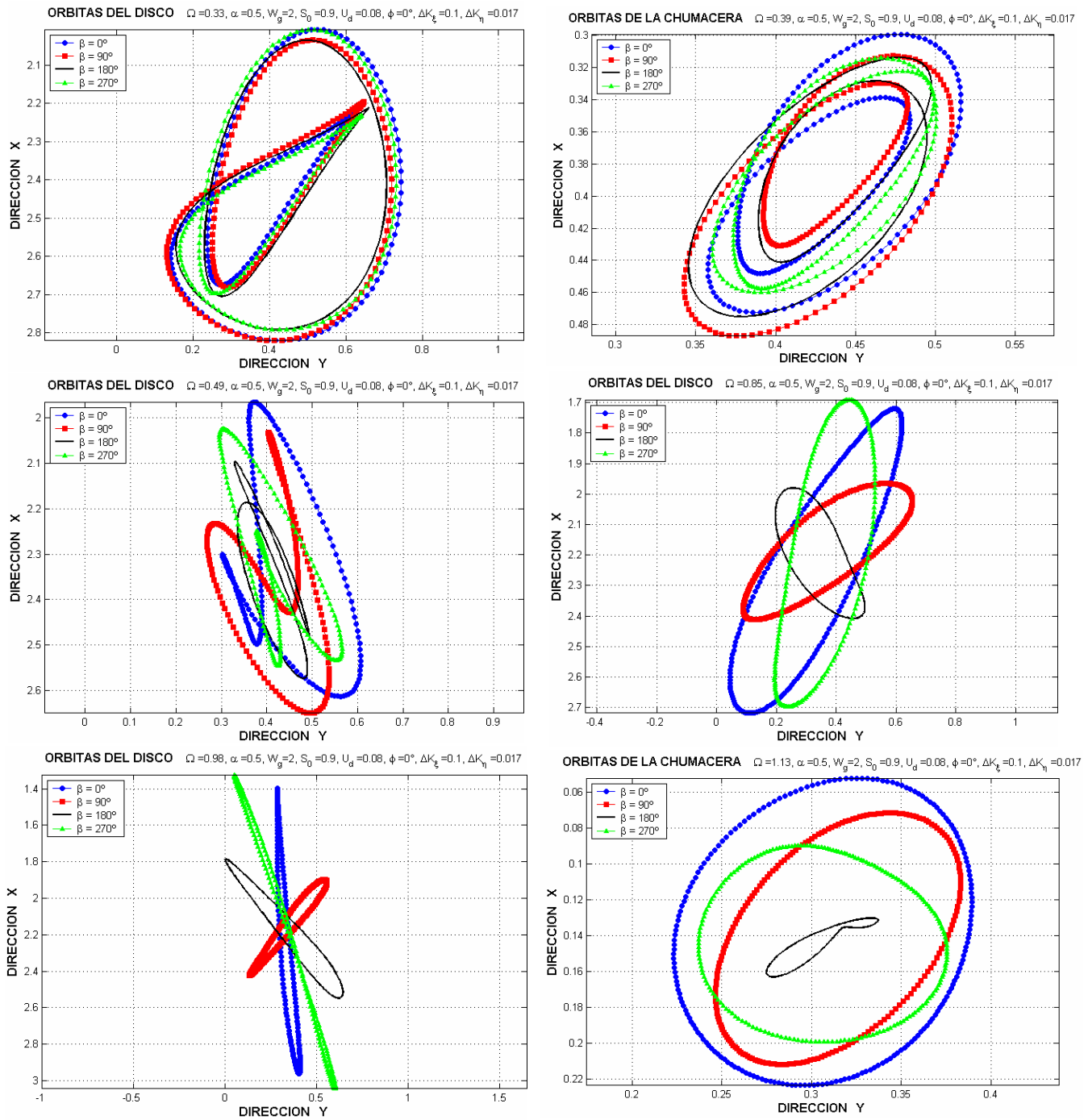


Figura 5. Orbitas a diferentes Resonancias Locales para diferentes valores de orientación entre la fisura y el desbalance. ($\beta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$)

RESULTADOS NUMÉRICOS

Se vale de una sola grieta a la mitad del tramo del eje con un tamaño de profundidad medio ($\Delta K_\xi = 0.10$ y $\Delta K_\eta = 0.017$) que corresponde al 35% del diámetro del eje, tomando en cuenta que este valor puede diferir para los mismos valores de $\Delta K_\xi, \Delta K_\eta$ dependiendo de parámetros tales como la longitud del eje, y con $U_d = 0.08$, propio de una interacción similar entre grieta y desbalance.

Es empleado un modelo de respiro de la grieta que exhibe un período con forma cuadrada, como el indicado en Ec. (5); teniendo en cuenta que según lo mencionado previamente por Friswell [8], los resultados son ligeramente dependientes del modelo de respiro.

La importante orientación angular relativa que existe entre el vector desbalance del disco y el eje ξ de la grieta, véase la Figura 2, es variada y computada para las diferentes direcciones ortogonales. El resto de los valores

de los parámetros usados en la simulación están dados como sigue: relación de masas en disco y chumaceras, $\alpha = 0.50$, correspondiente a una distribución aproximadamente uniforme en la masa del eje; parámetro de carga, $W_g = 2.0$, que representa un pandeo dominado por el peso; chumaceras operando a razones de la velocidad crítica, $S_0 = 0.90$ que corresponde a una razón de la rigidez de soporte eje-chumacera relativamente flexible. El eje esta apoyado en chumaceras relativamente cortas que tienen $L/D = 0.5$ y son empleados los correspondientes coeficientes dinámicos de la chumacera.

En la Figura 3, se ilustran las amplitudes de vibración horizontales y verticales en el disco y las chumaceras trazadas como funciones de la frecuencia de operación Ω para las diversas orientaciones ortogonales entre los vectores grieta y desbalance.

Se puede observar como los picos de *Resonancia Local* en ambas direcciones, horizontal y vertical, muestran pequeñas pero, sin embargo, significativas diferencias en magnitud, y como el pico ocurre a velocidades ligeramente diferentes; también pueden ser observadas claras diferencias entre las diferentes direcciones ortogonales y entre las localizaciones del disco y de las chumaceras.

Las últimas diferencias se pueden atribuir al efecto de peso y a las características asimétricas de la chumacera así como al amortiguamiento existente en estas. Por otra parte, ocurre una variación significativa de la respuesta tanto en magnitud como en ángulo de fase debido al ángulo relativo entre los vectores de la grieta y el desbalance, de tal modo que afectan las formas de las órbitas y su correspondiente evolución.

Según lo ilustrado en la Figura 3, la grieta y el desbalance residual (siendo ambos vectores desconocidos) pueden ocultar la presencia de la grieta y hacer difícil el uso de técnicas tradicionales de detección. Desgraciadamente tal interacción afecta normalmente ambas frecuencias, la velocidad de operación y la dos veces sincrónica, es decir, $1x$ y $2x$ respectivamente. Puesto que el componente $2x$ también se atribuye al desalineamiento y a otros síntomas, la mera presencia de $2x$ no significa inequívocamente una grieta.

Por otra parte, dependiendo del ángulo relativo entre los vectores del desbalance y de la grieta β , generalmente el componente $1x$ puede aumentar o incluso disminuir en magnitud, con ello deformando considerablemente las formas de la órbita en el disco y las chumaceras.

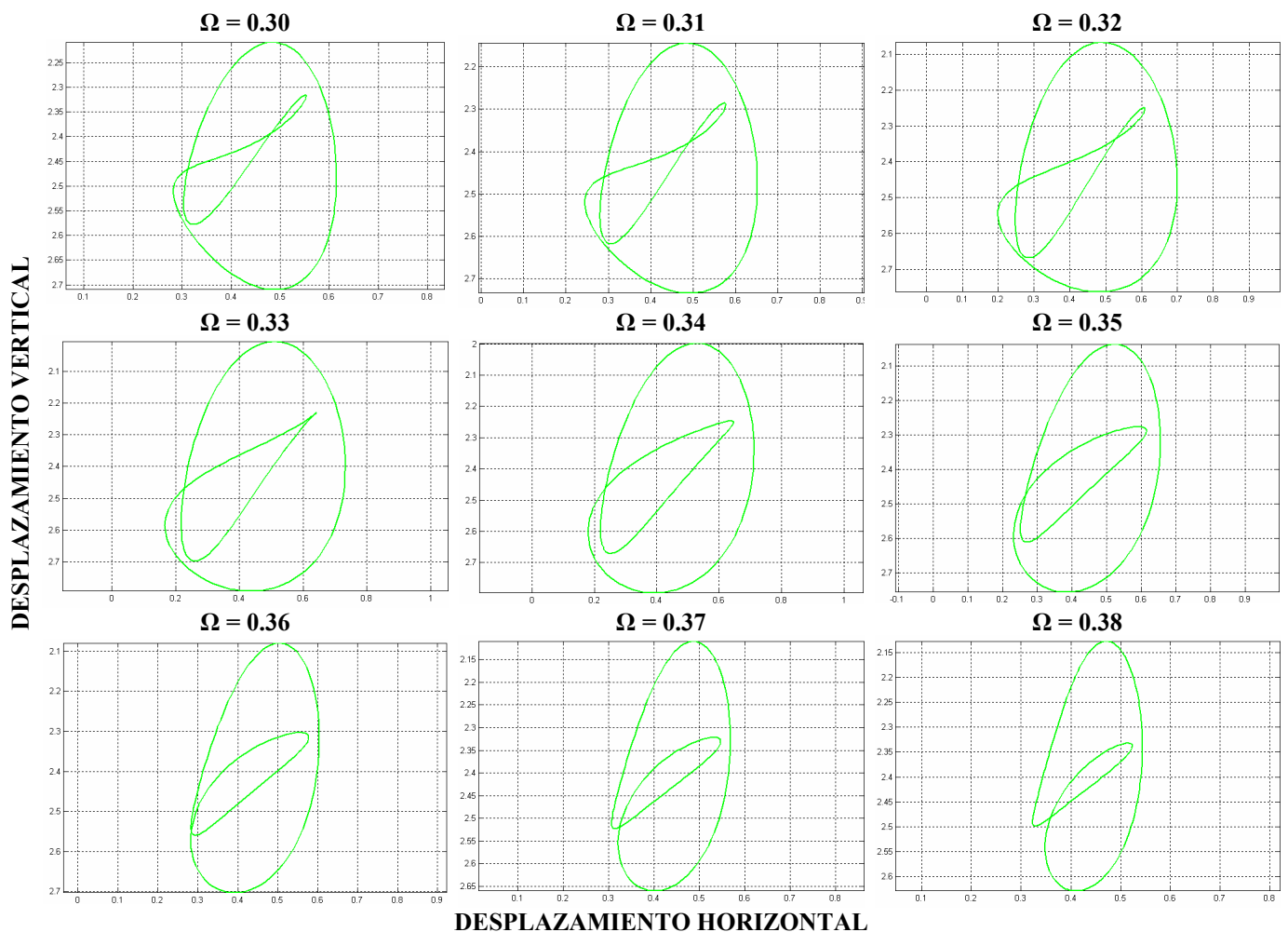
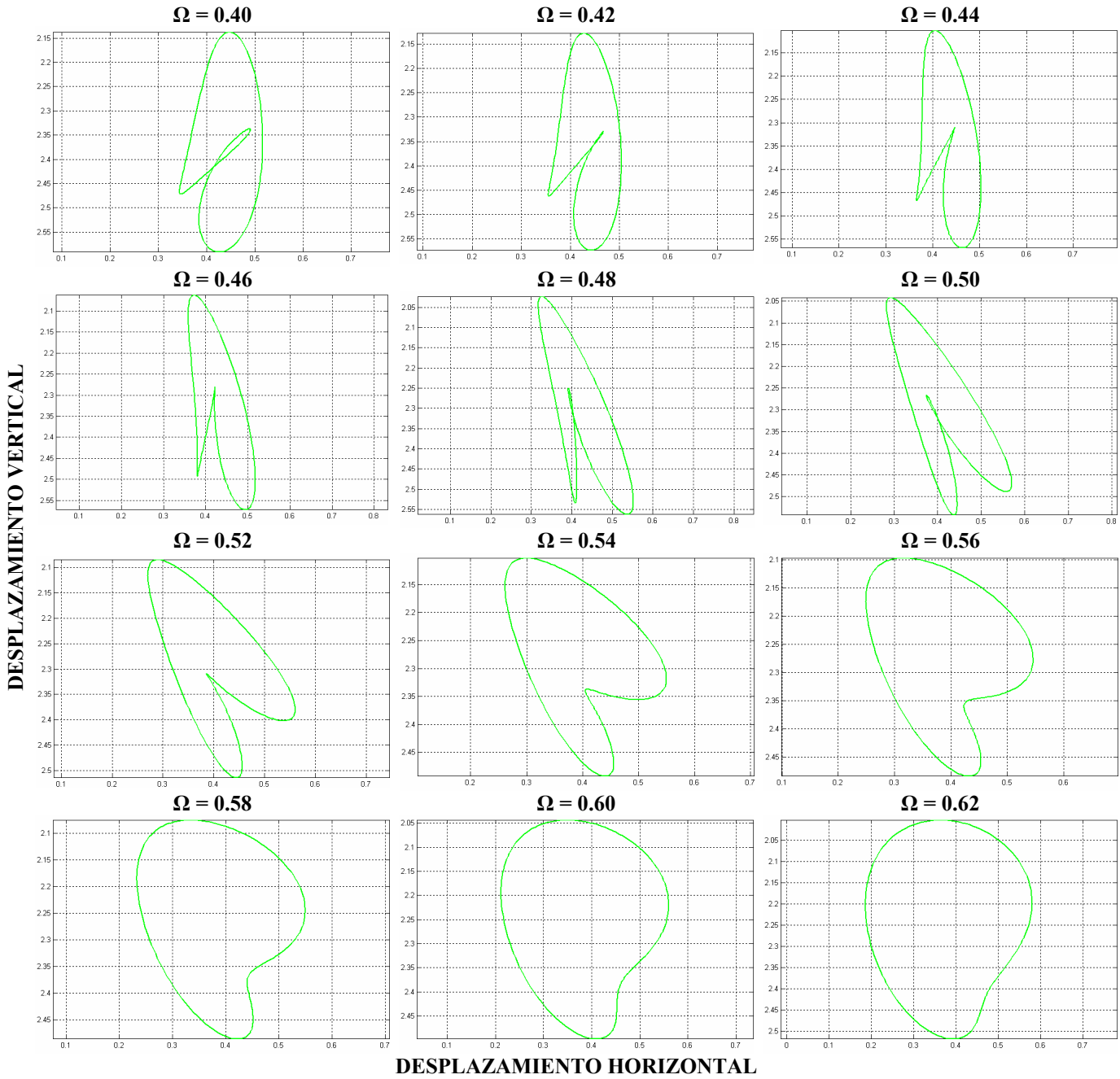


Figura 6. Evolución de la órbita del disco alrededor de un tercio de la resonancia. (Orientación grieta-desbalance $\beta = 270^\circ$)



**Figura 6. Evolución de la órbita del disco alrededor de la mitad de la resonancia.
(Orientación grieta-desbalance $\beta = 270^\circ$)**

Además, en la Figura 4 se presentan la respuesta orbital del disco y chumacera en algunas *Resonancias Locales* para cuatro orientaciones del ángulo relativo entre grieta y desbalance ($\beta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$). De esta manera, pueden ser examinadas dos características importantes del sistema fisurado, sus formas de órbita afectadas por el ángulo β , así como la evolución de la respuesta vibratoria con el barrido de la frecuencia de operación, como se ilustra en las Figuras 5 y 6, para el intervalo $0.3 < \Omega < 0.6$. Entonces, el clásico bucle orbital interno a velocidad $\Omega \approx 0.5$ (sobre todo debido al componente $2x$) es prácticamente independiente de la

orientación angular entre grieta y desbalance, según lo ilustrado en la Figura 4.

Por otra parte este modelo también produce el fenómeno de bucles externos-internos y evolución orbital del ángulo del bucle interno alrededor de $1/3$ y $1/2$ de la primera resonancia, divulgado en la literatura por Sinou y Lees [12], la evolución de los bucles externos-internos es ilustrada en las Figuras 4, 5 y 6. Según lo esperado, el componente síncrono de la respuesta es el más influenciado por esta variación angular. Quizás con excepción de la *Resonancia Local* alrededor de $\Omega \approx 1/2$, cada otro pico local que ocurre dentro del rango $0.45 < \Omega < 1.20$ exhiben patrones de

vibración y órbita suficientemente distintos; vea las órbitas traslapadas en la Figura 4. Sin embargo todas las *Resonancias Locales* fuera de esta gama de frecuencia, más la que se presenta en $\Omega \approx 1/2$, se pueden postprocesar y analizar correctamente para revelar la presencia de la grieta. Por lo tanto, es posible la detección de grietas en frecuencias bajas (rango de velocidad subcrítico), puesto que para parámetros de sistema típicos los valores de las amplitudes de resonancia en fracciones igual o menor que la mitad de la velocidad crítica normalizada (por ejemplo, 45%), son en general significativos. Es decir, para grietas medianas o largas las magnitudes de vibración y las formas de las órbitas en resonancias más bajas, son generalmente bastante grandes para ser medidas, procesadas y analizadas. De este modo, la detección de la grieta a la mitad del tramo del eje obstaculizada por la interacción entre grieta y desbalance llega a ser mucho menos difícil.

Actualmente se desarrolla experimentación en el Laboratorio de Vibraciones y Rotodinámica a fin de probar la eficiencia de este modelo para detectar fisuras con un menor porcentaje de profundidad, que en cierto sentido son más realistas.

En el presente modelo no está considerado el efecto del desalineamiento, un factor muy importante en un sistema real, por lo tanto, en trabajos futuros se desarrollará un modelo aún más completo que nos permita estudiar el caso de grietas en presencia de desalineamiento.

CONCLUSIONES

Se utiliza un rotor de Jeffcott extendido agrietado, el cual se aplica bien a máquinas simples flexiblemente acopladas y soportadas en chumaceras lubricadas, en donde existe una grieta en o cerca de la mitad del tramo del eje, al mismo tiempo teniendo pequeños efectos giroscópicos.

El modelo tiene las ventajas de los sistemas lineales, sin embargo, el enfoque de equilibrio no trivial propuesto por Gómez-Mancilla produce una respuesta de múltiples frecuencias la cual permite caracterizar los ejes agrietados.

En comparación con el modelo usado por Meng y Gash [6], el modelo aquí empleado fue extendido para incluir el importante efecto de la gravedad, y el correspondiente punto de equilibrio no trivial.

Durante el arranque o paro de máquinas con ejes agrietados ocurren varios picos de *Resonancia Local* a fracciones de la velocidad crítica de operación normalizada. Son analizadas las respuestas verticales y horizontales del disco y chumaceras, la evolución orbital alrededor del equilibrio no trivial y los diagramas de Bode generados por barrido de la frecuencia mientras se hace variar ortogonalmente la orientación del desbalance para una configuración del rotor que tiene influencias similares de grieta y desbalance. Resulta que la evolución orbital alrededor de 1/2, 1/3 y 1/4 de la primera resonancia puede ser utilizada para detectar la presencia de grietas en rotores, incluso si la orientación entre grieta y desbalance es desconocida.

La capacidad de predicción de este modelo puede ser comparada contra experimentos de laboratorio en Ref. [17], analizando amplitudes, resonancias locales significativas, evolución orbital y estabilidad del sistema. Los resultados

indican que los análisis numéricos obtenidos de este modelo son cualitativamente muy semejantes a los resultados experimentales.

REFERENCIAS

1. J. Wauer. Dynamics of Cracked Rotors: Literature Survey. *Applied Mechanics Review*, 43, 13-17 (1990).
2. I.W. Mayes and W.G.R. Davies. Analysis of the Response of a Multi-Rotor-Bearing System Containing a Transverse Crack in a Rotor. *Transactions of the ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 106, 139-145 (1984).
3. W. G. R. Davies and I. W. Mayes. The Vibrational Behavior of a Multi-Shaft, Multi-Bearing System in the Presence of a Propagating Transverse Crack. *Transactions of the ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design* 106, 146-153 (1984).
4. A.W. Lees and M.I. Friswell. The Vibration Signature of Chordal Cracks in Asymmetric Rotors. *Proceedings of 19th International Modal Analysis Conference*. (2001).
5. J. Wauer. Dynamics of Cracked Rotors: Literature Survey, *Applied Mechanics Review*, 43, 13-17 (1990).
6. G. Meng and R. Gasch, Stability and Stability Degree of a Cracked Flexible Rotor Supported on Journal Bearings. *Trans ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 122, No. 2 (2002) 116-125.
7. R. Gasch. A Survey of the Dynamic Behavior of a Simple Rotating Shaft with a Transverse Crack, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 160(2), 313-332 (1993).
8. J.E.T. Penny and M.I. Friswell, Simplified Modeling of Rotor Cracks, *Key Engineering Materials*, Vol. 245-246, 223-232 (2003).
9. T. Yamamoto and Y. Ishida, *Linear and Nonlinear Rotordynamics*, J. Wiley & Sons, Wiley Series in Nonlinear Science (2001).
10. J. Gómez-Mancilla, R.García-Illescas, V. Nosov. New Modeling Approach for Detection & Behavioral Characterization of Cracked Rotating Shafts. *9th. Int. Symp. on Transport Phenomena & Dynamics of Rotating Machinery, ISROMAC-9*, Hawaii, (2002).
11. R. García-Illescas, J. Gómez-Mancilla, V. Nosov. Vibration Analysis in the Characterization of the Dynamic Behaviour of Cracked Rotating Shafts, *Int. Conf. on Rotating Machinery, IFToMM*, Sydney, Australia, (2002).
12. Gómez-Mancilla J., García-Illescas, Nosov V., Detection Of Steady Crack Growth On Rotating Shafts, *Proc. of 2nd International Symposium on Control and Stability of Rotating Machinery, ISCORMA-2*, Gdansk, Poland, Sept. 2003.
13. Bachschmid N., Tanzi, E., Pennacchi, P., Audebert, S., Transverse Crack Modeling Validation in Rotor Systems Including Thermal Effects, *9th. Int. Symp. on Transport Phenomena Dynamics of Rotating Machinery ISROMAC-9*, Hawaii (2002).
14. J-J. Sinou, and A.W. Lees, Non-Linear Vibrations in Cracked Rotors, *8th International Conference on*

Vibrations in Rotating Machinery, September 7-9, 2004, Swansea, United Kingdom.

15. Gomez-Mancilla J., Nosov V., Zambrano-Reyes A., Modelo del Rotor de Jeffcott Extendido Desbalanceado y Fisurado y su Tratamiento Numérico, *VII Congreso Nacional en Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, México D.F., 3 al 7 de noviembre de 2003.
16. J. Gómez-Mancilla, J-J. Sinou, V.R. Nosov, F. Thouverez, A. Zambrano-Reyes, The Influence Of Crack-Imbalance Orientation And Orbital Evolution For An Extended Cracked Jeffcott Rotor, *Comptes Rendus Mecanique*, Julio 2004.
17. Machorro-López J., Gómez-Mancilla J., Nosov V., Interacción De Desalineamiento, Eje Fisurado Y Desbalance En Un Sistema Rotor-Chumacera Jeffcott, *8º Congreso Nacional en Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, México D.F., 15 al 19 de noviembre de 2004.
18. J.C. Gomez-Mancilla, A. Zambrano, Local Resonance Analysis of Crack-imbalance Orientations and Orbital Evolution to Detect Rotor Cracks, IMAC XXIII: Conference and Exposition On Structural Dynamics, January 31-February 3, 2005, Rosen Plaza Hotel Orlando Florida.
19. J.C. Gomez-Mancilla, J. Machorro-Lopez, Local Resonance Analysis of Crack-imbalance Orientations and Orbital Evolution to Detect Mid-span Rotor Cracks: Part 2, Experimental Validation, IMAC XXIII: Conference and Exposition On Structural Dynamics, January 31-February 3, 2005, Rosen Plaza Hotel Orlando Florida.

NOMENCLATURA

C_r = claro radial
 c_{ij} ($i,j = x,y$) = coeficientes de amortiguamiento radial
 D = diámetro del eje.
 D_e = relación de amortiguamiento externo ($= c_d / 2m_d\omega_c$)
 e_d = excentricidad de desbalance de masa en el disco
 $g(\phi)$ = función periódica, $0 < g(t) < 1$

$\Delta k_\xi, \Delta k_\eta$ = mayor cambio de rigidez en las direcciones ξ, η ocasionado por la fisura.

ΔK_ξ = cambio de rigidez adimensional en ξ ($= \Delta k_\xi / k_s$)

ΔK_η = cambio de rigidez adimensional en η , ($= \Delta k_\eta / k_s$)

k_{ij} ($i,j = x,y$) = coeficientes de rigidez radial

k_s = rigidez correspondiente a cada mitad del eje sin fisura

L = Longitud de la chumacera.

$m_b, 2m_d$ = concentración de masa en la posición de las chumaceras y a la mitad del tramo del eje respectivamente

S = numero de Sommerfeld, ($= DL\omega\mu(R/C_r)^2 / 2\pi W$)

S_o = Número de Sommerfeld fijo, ($= S/\Omega$)

t = tiempo [seg]

U_d = desbalance adimensional en el disco ($= e_d / C_r$)

U_b = desbalance adimensional en la chumacera ($= e_b / C_r$)

W = carga que soporta una chumacera

W_g = parámetro de gravedad ($= \delta / C_r$)

α = relación de masas en disco y chumaceras ($= m_b / m_d$)

τ = tiempo adimensional ($= \omega t$)

ϕ = ángulo entre los vectores desbalance U_d y U_b

β = ángulo relativo entre la fisura y el desbalance [rad]

δ = deflexión estática del eje ($= m_d g / k_s$)

ξ, η = coordenadas rotatorias, fijas al disco, ξ es la dirección de la grieta

Φ = ángulo de rotación instantáneo ($= \omega t + \beta = \tau + \beta$)

Ω = relación de velocidad ($= \omega / \omega_c$)

ω = velocidad de operación del rotor [rad/s]

ω_c = velocidad crítica de un rotor sobre soportes rígidos

$(\dot{\cdot})$ = d/dt

$(\dot{\cdot})$ = $d/d\tau$

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialmente patrocinado por el *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACyT*, a través del Proyecto 38711-U. Se agradecen también las becas *S.N.I.* y *EDI* otorgadas por *CONACyT*, e *Instituto Politécnico Nacional, IPN*, respectivamente

El estudiante de postgrado Armando Zambrano agradece al *CONACyT* y a *PIFI* por el apoyo económico otorgado para la realización de sus estudios de maestría.