

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

---

---

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

FRENADO POR RADIACIÓN EN LA TEORÍA DE FORD-  
O'CONNELL NO RELATIVISTA

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

LICENCIADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

PRESENTA:

NELSON C. GONZALEZ VELAZQUEZ

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. GONZALO ARES DE PARGA ALVAREZ

MÉXICO, D. F.

JUNIO 2006

FRENADO POR RADIACIÓN EN LA TEORIA DE FORD-  
O'CONNELL NO RELATIVISTA

# ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCION.....	1
CAPITULO I. ECUACIÓN DE ABRAHAM-LORENTZ .....	3
1.1 Potenciales de Liénard y Wiechert .....	3
1.2 Balance de energía-Vector Poynting.....	7
1.3 Fórmula de Larmor.....	9
1.4 Ecuación de Abraham-Lorentz.....	11
1.5 Estudio de la Ecuación de Abraham-Lorentz.....	12
1.6 Conclusión.....	16
CAPITULO II. ECUACION DE FORD-O’CONNELL .....	17
2.1 Introducción.....	17
2.2 Ecuación de Ford-O’Connell... ..	18
2.2.1 Obtención intuitiva de la ecuación.....	18
2.2.2 La radiación.....	19
2.2.3 Conclusión.....	24
CAPITULO III .CONCLUSIÓN DE TESIS.....	25
APÉNDICE.....	26
BIBLIOGRAFÍA.....	38



## INTRODUCCIÓN

Desde que se comprendió que las ecuaciones de Maxwell<sup>1</sup>, describían a los campos electromagnéticos en su totalidad desde un punto de vista clásico, es decir, sin considerar los efectos cuánticos, se interpretó a las ondas de luz como ondas electromagnéticas, se entendió que existía una velocidad de interacción, a saber la velocidad de la luz, y se comprendió que las interacciones electromagnéticas se debían describir por medio de los potenciales conocidos como de Liénard-Wiechert<sup>1</sup>. Estos últimos son potenciales muy parecidos a los de Coulomb y Biot-Savart<sup>1</sup>, pero con la particularidad de incluir el retraso debido a la velocidad de interacción<sup>1</sup>, o sea la velocidad de la luz. Este retraso implica en realidad la existencia de las ondas electromagnéticas pues de otra forma las interacciones serían descritas en forma instantánea.

Por otro lado, si uno utiliza las ecuaciones de Maxwell y realiza un balance de energía, aparece el concepto de flujo de energía, descrito por el vector de Poynting<sup>1</sup>. Cuando se calcula en primera instancia este flujo a través de una superficie esférica que rodea una carga, encuentra el flujo de energía radiada por la partícula y este resultado es conocido como la fórmula de Larmor<sup>1</sup>. Planck<sup>1</sup> utilizó esta última fórmula para encontrar una ecuación de movimiento no relativista que tomara en cuenta tanto a las fuerzas externas como a la reacción de radiación. Esta última intenta describir los efectos sobre la partícula debidos a la pérdida de energía y momento lineal por la radiación emitida por ella misma. Por eso se conoce también como la fuerza de auto frenado. Sin embargo, el resultado no está libre de problemas físicos. En efecto, aparecen soluciones en ciertas circunstancias conocidas como auto aceleraciones o preaceleraciones debido a que la ecuación de movimiento es de tercer orden y no de segundo orden como es normal en mecánica clásica. El resultado fue encontrado por Abraham<sup>2, 1</sup> prácticamente al mismo tiempo que lo hizo Planck, pero este último lo obtuvo considerando el tamaño del electrón como finito y en vez de calcular la radiación emitida, simplemente sumó las auto fuerzas de cada diferencial de carga sobre ellas mismas, considerando los efectos de retraso. No obstante su ecuación contenía otro término proporcional a la aceleración, pero inversamente proporcional al radio del electrón. Cuando se considera al electrón como una partícula puntual, el término diverge.

De hecho han existido muchos modelos que intentan darle una dimensión finita al electrón, aunque ninguno ha sido considerado como físicamente satisfactorio. En efecto, sólo por nombrar alguno de ellos, describamos el intento de asemejar a la masa del electrón con toda la energía electromagnética del campo dando como resultado el radio del electrón. Pero se ha demostrado experimentalmente que el electrón es más pequeño que tal radio. Además de este inconveniente no se ha podido explicar el porqué de la estabilidad del electrón.

La idea más famosa al respecto fue realizada por Poincaré<sup>2</sup>. Sin embargo esta teoría y sus derivados no han sido muy aceptados, pues además existe el inconveniente de que relativísticamente el electrón se deformaría. En 1938, Dirac<sup>3</sup> presentó un trabajo donde calcula los flujos de energía-momentum en forma relativista, encontrando la famosa ecuación de Lorentz-Dirac que en esencia coincide con la ecuación encontrada por Planck y Abraham. Lo interesante aquí es que las auto aceleraciones y preaceleraciones persisten. También hay que señalar que al igual que en el caso de Abraham aparece una renormalización de la masa. Hay que resaltar que en nuestros días la ecuación de Landau- Lifshitz<sup>4</sup> ha tomado mucha fuerza pues al ser una ecuación iterada de la ecuación de Lorentz-Dirac<sup>3</sup>, se convierte en una ecuación diferencial de segundo orden y por lo tanto no presenta los inconvenientes anteriormente señalados. Empero, para pulsos predice una divergencia en la energía radiada. Baylis y Hulschilt<sup>5</sup> han demostrado que para solventar este inconveniente hay que recurrir a la ecuación de Lorentz-Dirac<sup>3</sup> y calcular la fórmula de Larmor<sup>1</sup>. El hecho es que la teoría se vuelve híbrida e indeterminada. Por otro lado, Ford y O'Connell<sup>6, 7, 8, 9,10</sup>, propusieron un modelo de electrón con estructura y utilizando la mecánica cuántica obtuvieron la ecuación conocida actualmente como la de Ford-O'Connell que coincide con el límite clásico de la ecuación de Landau-Lifshitz. Hay que resaltar que las dos últimas ecuaciones provienen de consideraciones físicas distintas pues una considera al electrón como una partícula puntual y la otra con estructura. Sin embargo la idea de Ford y O'Connell nos hace revivir el trabajo de Moniz y Sharp que intenta encontrar una ecuación de movimiento de una partícula cargada por medio de un límite clásico. En el capítulo 1, desarrollaremos la electrodinámica clásica necesaria para entender la deducción de la ecuación de Abraham-Lorentz que es el límite clásico de la de Lorentz-Dirac. Se anexa, en el apéndice, un resumen del trabajo de Moniz y Sharp<sup>11</sup>. En el capítulo 2 se expone, en forma breve y heurística, los resultados de Ford y O'Connell. Compararemos las ideas de estos últimos con las de Baylis y Hulschilt. En particular mostraremos que, siguiendo la teoría de Ford y O'Connell para el caso de una fuerza súbita, se encontrará una mejor manera de interpretar la radiación emitida por una carga. La conclusión consistirá en señalar que la ecuación de movimiento de Ford y O'Connell cumple con todas las especificaciones físicamente requeridas, junto con la nueva interpretación de la razón de radiación, para describir el movimiento de una partícula cargada puntual en forma no relativista.

## CAPITULO I. LA ECUACIÓN DE ABRAHAM-LORENTZ.

Las ecuaciones de Maxwell serán nuestro punto de partida para encontrar los potenciales retardados para una distribución de carga arbitraria y que se mueve en el espacio libre. Estos potenciales denotados por  $\varphi$  y  $\vec{A}$ , conocidos como los potenciales de Liénard y Wiechert<sup>1</sup>, los calcularemos para el caso de una carga puntual acelerada. En este punto será necesario conocer la potencia de energía radiada por la carga puntual y obtendremos esto a través del vector de Pointyng<sup>1</sup>; tal potencia será llamada: "Fórmula de Larmor"<sup>1</sup>. Al final llegaremos a la ecuación de movimiento de Abraham-Lorentz<sup>2</sup>.

### 1.1. Potenciales de Liénard y Wiechert.

En electrostática se trabaja con el potencial eléctrico como herramienta para calcular con más facilidad el campo eléctrico. También en la teoría magnética se tienen potenciales que tienen la finalidad de ahorrar cálculos; estos potenciales son llamados: escalar magnético y vectorial magnético. En este caso intentaremos describir los potenciales escalar eléctrico y vectorial magnético para el caso de una carga puntual acelerada, y como hemos mencionado anteriormente, aplicando las leyes de Maxwell, encontraremos los llamados potenciales de Liénard y Wiechert<sup>1</sup> para una partícula puntual acelerada.

Denotaré con  $\vec{A}$  y  $\varphi$  a los potenciales producidos por la carga puntual acelerada. Más adelante encontraremos la forma explícita de estos potenciales y veremos que son retardados en el tiempo.

Sabemos que la divergencia de  $\vec{B}$  es cero (no hay cargas magnéticas, una de las leyes de Maxwell) entonces siempre podemos encontrar un vector, al que se ha llamado  $\vec{A}$ , tal que su rotacional sea  $\vec{B}$ . Sustituyendo en la ley de inducción electromagnética de Faraday:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial(\nabla \times \vec{A})}{\partial t} = 0, \text{ y sacando el operador } \nabla, \text{ obtenemos:}$$

$$\nabla \times \left[ \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0. \quad (1.1)$$

Como el rotacional del anterior vector es cero, entonces debe existir un campo escalar tal que su gradiente sea tal vector:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \varphi = 0, \text{ o bien } \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (1.2)$$

La ley de Ampere, dice:  $\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}$ . Sustituyendo (1.2) y el hecho de que  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  en esta ley, se llega:

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \vec{A} + \epsilon \frac{\partial \left[ \nabla \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right]}{\partial t} = \vec{J}. \quad (1.3)$$

Considerando la relación con los operadores  $\nabla \times \nabla \times$  y  $\nabla \nabla \cdot - \nabla^2$ , la ecuación (1.3) se transforma en:

$$-\nabla^2 \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \nabla \nabla \cdot \vec{A} + \epsilon \mu \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \vec{J}. \quad (1.4)$$

Si  $\nabla \nabla \cdot \vec{A} + \epsilon \mu \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ , conocida como la norma de Lorentz, la ecuación (1.4) cambia a :

$$-\nabla^2 \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}, \quad (1.5)$$

que es la ecuación de onda no homogénea para  $\vec{A}$ .

Por otro lado, si reemplazamos la ecuación (1.2) en la ley de Gauss, obtenemos:

$$-\epsilon \left[ \nabla \cdot \nabla \varphi + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = \rho,$$

e intercambiando el orden de la divergencia, la derivada y la condición de Lorentz, se llega a :

$$\nabla^2 \varphi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad (1.6)$$

que es la ecuación de onda no homogénea para  $\varphi$ .



Las ecuaciones de onda (1.5) y (1.6) necesitan ser resueltas para encontrar la forma explícita de los potenciales  $\vec{A}, \varphi$ . Se recurre aquí a la función de Green<sup>1</sup> y, después de varios cálculos, se encuentran la solución:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \iint \frac{\delta(t' + R/c - t)}{R} f(\vec{r}', t') dr'^3 dt', \quad (1.7)$$

$\vec{r}$  es el vector campo, donde se quiere medir a  $\Psi$ ,  $t$  es el instante en que se hace esta medición,  $t'$ , el llamado tiempo de retardo, y  $f(\vec{r}', t')$  es la distribución de fuentes (distribución de cargas o de corrientes);  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$  y  $\vec{r}'$  el punto carga .

La ecuación (1.7) nos da los potenciales  $\vec{A}, \varphi$ , dependiendo de si  $f$  es una distribución de corriente o carga, respectivamente. Estos potenciales son llamados retardados, ya que las ondas electromagnéticas generadas por la aceleración de la distribución de cargas no tienen rapidez infinita y los efectos de los campos llegan al punto campo, retardados.

Los potenciales que dan razón a esta sección se encuentran a través de los potenciales retardados, empero, no sin dificultades. Hasta ahora he tratado de referirme a distribuciones de carga volumétricas, pero en lo sucesivo trataremos con cargas puntuales aceleradas. En realidad la parte central de este trabajo gira en torno a este fenómeno.

Para calcular los potenciales retardados para cargas puntuales partimos entonces de:

$$A_\mu(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \iint \frac{J_\mu(\vec{r}', t')}{R} \delta\left(t' + \frac{R}{c} - t\right) dr'^3 dt', \quad (1.8)$$

donde  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ . Para una carga puntual  $q$  que viaja con velocidad instantánea  $\beta(t)c$  en el punto  $\vec{x}(t)$ , su densidad de carga –corriente es:

$$J_\mu(\vec{r}, t) = qc\beta_\mu \delta[\vec{r} - \vec{x}(t)]. \quad (1.9)$$

Sustituyendo en (1.8), la expresión de (1.9), obtenemos:

$$A_\mu(\vec{r}, t) = e \int \frac{\beta_\mu(t')}{R(t')} \delta\left(t' + \frac{R(t')}{c} - t\right) dt', \quad (1.10)$$

donde  $R(t') = |\vec{r} - x(t')|$ . Si usamos otra propiedad de la función delta de Dirac, a saber:

$$\int g(x) \delta[f(x) - \alpha] dx = \left[ \frac{g(x)}{\frac{df}{dx}} \right]_{f(x)=\alpha}, \quad (1.11)$$

en la ecuación (1.10) y llamamos a  $f(t') = t' + \left[ \frac{R(t')}{c} \right]$ ,  $g(t') = \frac{\beta(t')}{R(t')}$ , y calculando la derivada:

$$\frac{df}{dt} = k = 1 + \frac{1}{c} \frac{dR}{dt'} = 1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}, \quad (1.12)$$

donde  $\hat{n} = \frac{\vec{R}}{R}$ , es el vector unitario que se dirige de la posición ocupada por la carga al punto de observación, llegamos a los potenciales de Liénard-Wiechert<sup>1</sup> para una partícula cargada y puntual:

$$\varphi(\vec{r}, t) = e \left[ \frac{1}{kR} \right]_{t'=t-\frac{R}{c}} \quad (1.13)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = e \left[ \frac{\vec{\beta}}{kR} \right]_{t'=t-\frac{R}{c}}. \quad (1.14)$$

## 1.2. Balance de energía-Vector Poynting.

Consideraremos una distribución continua de cargas y corrientes, el trabajo que se ejerce por unidad de tiempo en un volumen finito  $V$  es:

$$\int_V \vec{J} \cdot \vec{E} d^3x .$$

Esta potencia representa la transformación de la energía electromagnética en mecánica o térmica. Este último hecho provoca una disminución en la energía del campo electromagnético dentro de  $V$ . En seguida procedemos a aplicar las leyes de Maxwell a la ecuación anterior:

Como  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  (Ley de Ampere), podemos despejar  $\vec{J}$ :

$\vec{J} = \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ , y sustituyendo se obtiene:

$$\int_V \vec{J} \cdot \vec{E} d^3x = \int_V \left[ \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] d^3x . \quad (1.15)$$

Utilizando la identidad vectorial siguiente:

$$\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$$

y cambiando  $\vec{F}$  por  $\vec{E}$ ,  $\vec{G}$  por  $\vec{H}$ , llegamos a:

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) .$$

Despejando  $\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H})$ , se tiene:

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) ,$$

que se puede sustituir en el integrando de la ecuación (1.15) :

$$\int_V \vec{J} \cdot \vec{E} d^3x = \int_V \left[ \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] d^3x .$$

Por otro lado, la ley de Faraday dice que  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , entonces, reemplazando en la ecuación anterior, llegamos a:

$$\int_V \vec{J} \cdot \vec{E} d^3x = - \int_V \left[ \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] d^3x . \quad (1.16)$$

Las suposiciones vale la pena hacer aquí, la primera referente a que el medio macroscópico es lineal en sus propiedades eléctricas y magnéticas; la segunda consistente en que la energía electromagnética total es:

$$U = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) . \quad (1.17)$$

Sustituyendo (1.17) en (1.16) y, como V es un volumen arbitrario, se llega a la ley de conservación:

$$-\vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} , \quad (1.18)$$

donde  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ , se conoce como el vector de Poynting, y representa el flujo de energía a través de una superficie por unidad de área. El significado físico de la anterior ecuación es: la variación de la energía con respecto al tiempo contenida en un volumen, más el flujo energético (Vector Poynting) saliente a través de las superficies límite es igual al trabajo negativo realizado por los campos sobre las fuentes interiores a dicho volumen.

### 1.3 Fórmula de Larmor.

En la sección anterior obtuvimos el vector de Poynting que nos permitirá encontrar la radiación emitida por una partícula cargada. A partir de ahora sólo nos interesará el caso de una partícula cargada en el vacío, por lo que solamente analizaremos los campos  $\vec{E}, \vec{B}$ . Para obtener tales campos, partamos de:

$$\varphi = \int \frac{e}{R(t')} \delta \left[ t' + \frac{R(t')}{c} - t \right] dt' ; \quad \vec{A} = \int \frac{e \vec{\beta}_\mu}{R(t')} \delta \left[ t' + \frac{R(t')}{c} - t \right] dt' .$$

Así encontramos a los campos:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = e \left[ \frac{(\hat{n} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{k^3 R^2} \right]_{ret} + \frac{e}{c} \left[ \frac{\hat{n}}{k^3 R} \times \{(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\} \right]_{ret} ; \quad (1.19)$$

y la inducción magnética viene dada por la ecuación:  $\vec{B} = \hat{n} \times \vec{E}$ .

Ya conocidos los campos para la carga puntual, podemos calcular el vector de Poynting empleando la definición de la anterior sección.

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$ , donde  $\vec{E}$  viene dado por la ecuación (1.19) y está dividido en campos de velocidades y aceleración. Si la carga lleva una velocidad pequeña comparada con  $c$  entonces  $\vec{E}$  se transforma en:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = e \left[ \frac{\hat{n}}{k^3 R^2} \right]_{ret} + \frac{e}{c} \left[ \frac{\hat{n}}{k^3 R} \times (\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}}) \right]_{ret} . \quad (1.20)$$

Entonces  $\vec{S} = \vec{E} \times \hat{n} \times \vec{E}$ , es:

$$e \left[ \frac{\hat{n} \times \hat{n}}{k^3 R^2} \right]_{ret} + \frac{e}{c} \left[ \hat{n} \times \left( \frac{\hat{n}}{k^3 R} \times (\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}}) \right) \right]_{ret} = - \frac{e}{c} \left[ \frac{\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}}}{k^3 R} \right]_{ret} , \text{ luego:}$$

$$\vec{S} = - \frac{e^2}{c} \left[ \frac{\hat{n} \times \hat{n} \times \dot{\vec{\beta}}}{k^6 R^3} \right]_{ret} - \frac{e^2}{c^2} \left[ \frac{1}{k^6 R^2} \hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}}) \times (\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}}) \right]_{ret} . \quad (1.21)$$

El segundo término en (1.21) se hace cero pues  $(\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}}) \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}}) = 0$ , y por lo tanto:

$$\vec{S} = -\frac{e^2}{c} \left[ \frac{\hat{n} \times \hat{n} \times \dot{\vec{\beta}}}{k^6 R^3} \right]_{ret} = \frac{e^2}{c} \left[ \frac{\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}}}{k^6 R^3} \right]_{ret}, \text{ y la potencia por ángulo sólido para } v=0 \text{ es:}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 \text{Sen}^2 \Theta, \quad (1.22)$$

donde  $\Theta$  es el ángulo entre  $\hat{n}$  y  $\dot{\vec{v}}$ . Finalmente la potencia total radiada se obtiene integrando (1.22) sobre todos los ángulos sólidos.

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2 \dot{v}^2}{c^3}. \quad (1.23)$$

Este resultado es conocido como la fórmula de Larmor, para una carga acelerada, no relativista.

#### 1.4.-Ecuación de movimiento: Abraham-Lorentz.

La carga acelerada, como ya hemos visto, produce sus propios campos electromagnéticos, sin contar los producidos por fuentes externas en movimiento o estáticas, y emite energía por unidad de tiempo de acuerdo con la fórmula de Larmor; pero sería muy importante obtener una ecuación diferencial que nos describiera el comportamiento de nuestra carga en movimiento. A continuación presento, de manera breve, la forma de llegar a ella y al final encontramos ésta, conocida como ecuación de Abraham-Lorentz.

Una partícula de masa  $m$  y carga  $e$  es sometida a una fuerza externa  $\vec{F}_{ext}$ , se mueve según Newton:

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_{ext}, \quad (1.24)$$

al ser acelerada, emite radiación, y su potencia viene dada por la fórmula de Larmor (1.23):

$$P(t) = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\vec{v}}^2.$$

Al perder esta energía por la radiación la partícula sufre un cambio en su movimiento el cual ya no es determinado por (1.24), sino por la siguiente ecuación:

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{fren}. \quad (1.25)$$

Para determinar  $\vec{F}_{fren}$  consideramos el trabajo efectuado por esta fuerza sobre la partícula en el intervalo de tiempo  $t_1 < t < t_2$  y la igualamos a la energía irradiada en este tiempo con signo negativo. Si usamos el resultado de Larmor, tenemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{fren} \cdot \vec{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \vec{a} \cdot \vec{a} dt. \quad (1.26)$$

Realizando la integral del segundo término (por partes) y suponiendo que el movimiento es periódico o que es tal que  $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$  para  $t = t_1$  y  $t = t_2$ , obtenemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \vec{F}_{fren} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\vec{a}} \right) \cdot \vec{v} dt = 0, \text{ entonces la fuerza de frenado es:}$$

$$\vec{F}_{fren} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\vec{a}} = m\tau \dot{\vec{a}}, \quad (1.27)$$

y sustituyendo en (1.25) a (1.27), obtenemos:

$$m \left( \vec{a} - \tau \dot{\vec{a}} \right) = \vec{F}_{ext}, \quad (1.28)$$

que es conocida con el nombre de ecuación de movimiento de Abraham-Lorentz.

### 1.5. Estudio de la ecuación de Abraham-Lorentz

En realidad la deducción de Planck<sup>1</sup> que acabamos de exponer es simplemente un resultado intuitivo. En efecto, la problemática principal es que la fórmula de Larmor<sup>2</sup> no tiene una forma clásica de lo que debiese ser una fuerza de frenado regular. Si uno considera la ecuación de Newton:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{ext} + \vec{f}_{fren} \quad \text{entonces se tiene} \quad m\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v} + \vec{f}_{fren} \cdot \vec{v}$$

Por otro lado, considerando la fórmula de Larmor (la potencia) y la ecuación anterior tendríamos:

$$\text{Potencia} = P(t) = \vec{f}_{fren} \cdot \vec{v} = m\tau a^2.$$

Por lo que no se puede dar una expresión directa de la fuerza de frenado por radiación y por ello Planck intentó expresar la fórmula de Larmor por medio de un promedio que lo llevara a una dependencia de la potencia radiada con la velocidad. Sin embargo el cálculo se debe hacer en forma relativista y aunque Lorentz y von Laue lo habían realizado, nunca quedaron satisfechos de lo obtenido. En 1938, Dirac, utilizando la electrodinámica clásica, obtuvo la ecuación de movimiento para una partícula cargada puntual. La ecuación es:

$$ma^\mu = F^{\mu\nu} v_\nu + \tau \left( \dot{a}^\mu + \frac{1}{c^2} a^2 \right). \quad (1.29)$$

Sin embargo, para obtener el resultado, tuvo que realizar lo que se conoce en nuestros días como el proceso de renormalización de la masa, que consiste en restar un término infinito a la ecuación obtenida. Dicho término multiplica la aceleración y por lo tanto se podría considerar como una masa. Al eliminarlo se obtiene la ecuación de Lorentz-Dirac (Eq.(1.29)). Si nos vamos al caso no relativista la ecuación de Lorentz-Dirac se reduce a la ecuación de Abraham(1.28). La fórmula de Larmor desaparece en la ecuación de Abraham pues es un efecto completamente relativista y la aproximación clásica desprecia tales efectos. Sin embargo subsiste un término que proviene del término de Schott<sup>2, 3</sup> ( $\tau \dot{a}^\mu$ ). Pero la fórmula de Larmor nos indica la energía radiada al infinito.



## Variación de la energía y el momento angular en la trayectoria de una partícula con fuerza de frenado.

En cuanto a la energía de la partícula y su momento angular, al considerar la fuerza de frenado en el recorrido de su órbita, encontramos que aunque sí varían (energía y momento) esto sucede en un tiempo muy grande en comparación al tiempo característico de la órbita en ausencia de fuerza de frenado. Para calcular esta variación primero consideramos el movimiento de la partícula en ausencia de fuerza de frenado y ,segundo, hacemos el cálculo del valor medio, en un intervalo de tiempo, de la energía y el momento. Al final el resultado es una aproximación de la energía y el momento para el caso en que se considere presente la fuerza de frenado. Las ecuaciones siguientes nos muestran estas variaciones:

$\frac{dE}{dt} \approx -\frac{\tau}{m} \left\langle \left( \frac{dV}{dr} \right)^2 \right\rangle$ , donde V es el potencial del campo conservativo en el que se mueve la partícula de masa m.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \approx -\frac{\tau}{m} \left\langle \frac{1}{r} \frac{dV}{dt} \right\rangle \vec{L}.$$

## Las auto aceleraciones de la ecuación de Abraham-Lorentz y la ecuación integro-diferencial de movimiento.

La ecuación (1.28) es de tercer orden con respecto al tiempo y salta a la vista la solución  $ae^{t/\tau}$  que físicamente no existe a menos que  $a = 0$ . En mecánica clásica las ecuaciones son de segundo orden y no de tercer orden. Con todo este inconveniente valdría la pena tener una ecuación que sea de orden correcto, o sea de segundo orden y que no presente soluciones físicamente inexistentes.

Si consideramos una fuerza externa que depende del tiempo  $F(t)$ , la ecuación (1.28) puede ser integrada y podemos poner:

$$\dot{v}(t) = \bar{u}(t)e^{t/\tau}.$$

Si sustituimos esta ecuación en (1.28) y derivamos apropiadamente, obtenemos:

$$m\ddot{u} = -\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \bar{F}(t),$$

y al integrar, suponiendo que no existen soluciones auto aceleradas, es decir  $a = 0$  para  $t = -\infty$ , obtenemos:

$$m\dot{v}(t) = \frac{e^{t/\tau}}{\tau} \int_t^c e^{-t'/\tau} \bar{F}(t') dt'. \quad (1.30)$$

La ecuación anterior es una ecuación equivalente a la de Abraham-Lorentz, pero más útil pues hemos incorporado las condiciones asintóticas al imponer  $a = 0$  para  $t = -\infty$ . Si hacemos el siguiente cambio:

$$s = \frac{1}{\tau}(t' - t),$$

la ecuación (1.30) se transforma:

$$m\dot{v}(t) = \int_0^{\infty} e^{-s} \vec{F}(t + \tau s) ds, \quad (1.31)$$

posteriormente hacemos un desarrollo de Taylor alrededor de  $s = 0$ , llegamos a :

$$m\dot{v}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n \frac{d^n \vec{F}(t)}{dt^n}. \quad (1.32)$$

La ecuación (1.31) viola el principio de causalidad. En efecto, la aceleración de la partícula depende de una fuerza que actúa en un tiempo posterior. Es decir, la partícula se acelera cuando aún la fuerza no ha actuado. Por eso conviene usar el término de “preaceleración”. Así se viola el principio de causa y efecto. Aunque este problema ocurre, debemos decir que en la realidad no es perceptible ya que esto sucede en tiempos de un rango de  $10^{-24} s$  que no es posible medirlo en forma macroscópica. En la figura 1 mostramos gráficamente esto.

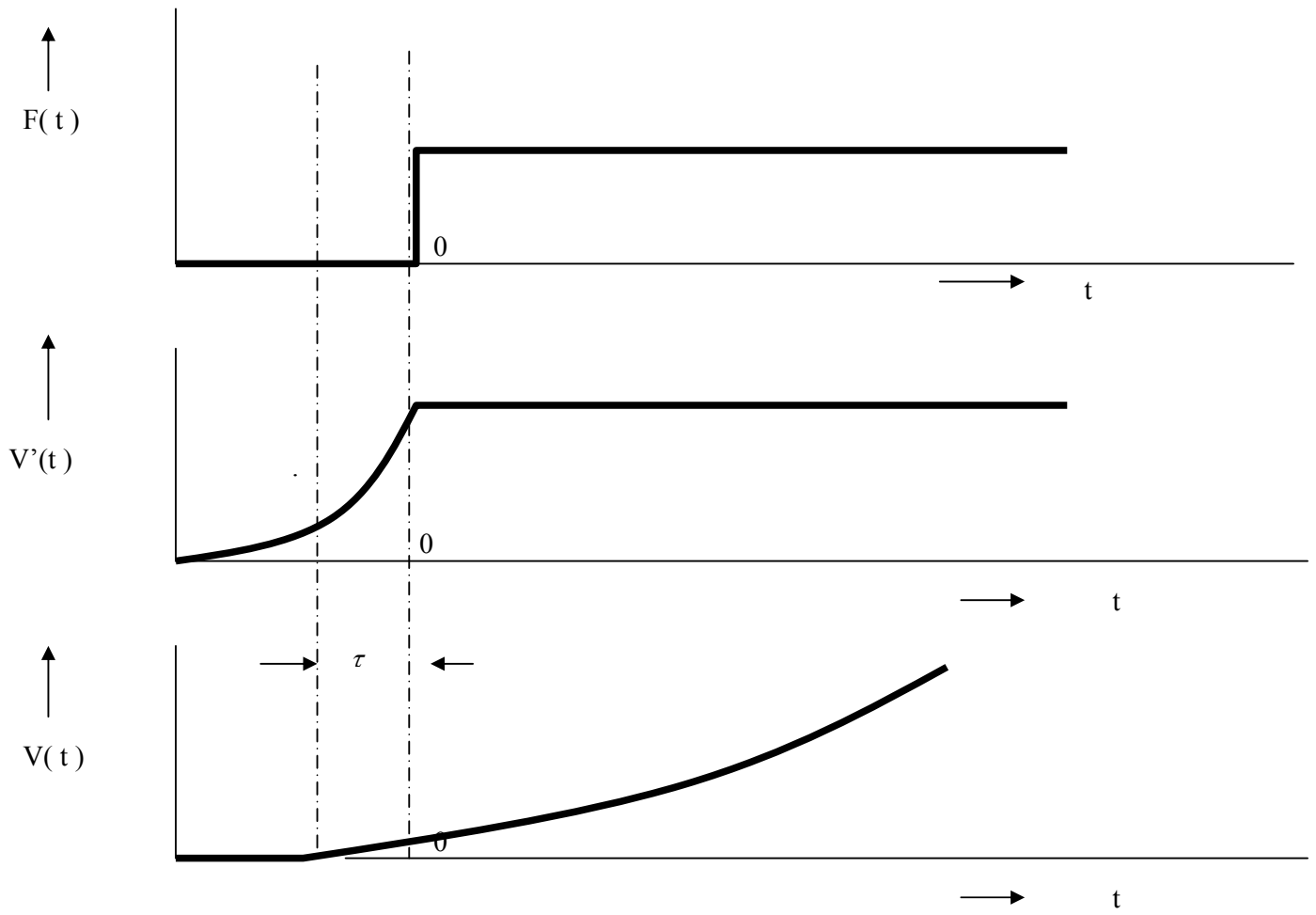


Fig.1.Preaceleración de una partícula cargada.

## **1.6.Conclusión.**

La ecuación de Lorentz-Dirac describe el movimiento de una partícula cargada sometida a una fuerza. No obstante, presenta dificultades como ya hemos indicado al existir soluciones divergentes y pre-aceleradas. Las preaceleraciones se les resta importancia pues son del orden de  $\tau=10^{-23}$  s para un electrón y como consecuencia de ello cabe dentro de la mecánica cuántica, pues el tiempo de Compton es del orden de  $10^{-22}$  s. Por ello creemos que el problema debe verse como un límite de la mecánica cuántica. Pero lo relacionado con la parte cuántica se evita por no ser nuestro objetivo fundamental, pero en el apéndice hacemos una breve incursión que muestra este punto de vista sumamente interesante pero que llega a situaciones donde las preaceleraciones persisten.

## CAPITULO II. LA ECUACION DE MOVIMIENTO DE FORD-O'CONNELL.

### 2.1. Introducción

En el capítulo anterior y en el apéndice vimos que las ecuaciones de Lorentz-Dirac y de Abraham-Lorentz presentaban soluciones no físicas, a saber: las auto aceleraciones y las preaceleraciones. Esto provocó que aparecieran propuestas alternativas como ya explicamos en la introducción y en el capítulo I. Sin embargo, todas presentan dificultades similares o mayores desde el punto de vista físico.

No obstante, la ecuación de Landau-Lifshitz<sup>4</sup>, en nuestros días, es la más aceptada pues evita el problema de las auto aceleraciones y preaceleraciones. Esta última ecuación ha sido considerada por varios autores simplemente como una buena aproximación, pero para Spohn<sup>12</sup> y Rorhlich<sup>13</sup> representa una solución exacta del problema. Baylis y Hulchild<sup>5</sup> mostraron que para fuerzas del tipo pulso, la ecuación de Landau-Lifshitz<sup>4</sup> predice que la radiación emitida por la partícula es muy grande y en el caso límite de un pulso tipo Heaviside<sup>14</sup> es infinita si se considera la fórmula de Larmor. Ellos interpretan el resultado de la siguiente manera: la ecuación de Landau-Lifshitz se debe utilizar para describir la trayectoria de la partícula cargada pero a la hora de analizar la radiación hay que tomar la ecuación de Lorentz-Dirac para calcular la energía radiada. En muchos casos esto se puede realizar pues las trayectorias descritas por ambas ecuaciones se parecen mucho y simplemente el error que se comete es mínimo y entra dentro de la aproximación cuántica.

Pero existen casos donde las diferencias entre las trayectorias predichas por estas últimas ecuaciones son muy distintas y pierde sentido considerar la trayectoria de la partícula como la predicha por Landau-Lifshitz y al mismo tiempo calcular la energía radiada utilizando la teoría de Lorentz-Dirac. Aparece entonces una problemática asociada a la teoría de Landau-Lifshitz y tenemos que descartarla.

Por otro lado, considerando un modelo no puntual del electrón, Ford y O'Connell<sup>6, 7, 8, 9, 10</sup> lograron encontrar una ecuación no relativista que coincide con la de Landau-Lifshitz en el límite no relativista y que en forma natural predice un término de potencia de radiación distinto al del modelo de Lorentz-Dirac que es la fórmula de Larmor. En este capítulo desarrollaremos este modelo, calcularemos la potencia radiada para un pulso de tipo Heaviside, mostraremos la consistencia de éste y argumentaremos la generalización relativista al modelo puntual del electrón.

## 2.2. La ecuación de Ford y O'Connell

### 2.2.1 Obtención intuitiva de la ecuación.

Si revisamos el artículo de Ford y O'Connell donde llegaron a obtener una ecuación que describa en forma no relativista, el movimiento de una carga finita (o sea no puntual), vemos que se utilizan argumentos cuánticos para deducir la ecuación. Y por ello es una teoría bastante bien aceptada. Sin embargo, aparte de coincidir con la forma no relativista de la ecuación de Landau-Lifshitz, posee la particularidad de proponer una potencia de radiación distinta a la de Larmor. Veamos en forma intuitiva cómo podemos obtener la ecuación de Ford y O'Connell.

En realidad Dirac basó su razonamiento para obtener la ecuación relativista en el tensor de esfuerzos de Maxwell. Este último se define a partir de la fuerza de Lorentz sin considerar una fuerza de frenado. Esto quiere decir que la teoría de Dirac es válida sólo en el caso en que exista una fuerza adicional que obligue a la partícula a moverse bajo la fuerza de Lorentz. Si eliminamos a la fuerza adicional entonces la fuerza de frenado no tiene contrapartida y por lo tanto la partícula cargada no se moverá bajo la ecuación de Lorentz. Pero como tenemos una expresión para la fuerza de frenado por el caso anterior podremos proponer que simplemente se sustituya la aceleración y la hiperaceleración en la ecuación de Lorentz-Dirac por la fuerza aplicada y en el caso no relativista resulta muy sencillo como veremos a continuación.

Partamos de la ecuación de Abraham-Lorentz (1.28):

$$ma = F_{ext} + \tau m \dot{a} ,$$

y sustituyendo la aceleración por la ecuación de Newton obtenemos

$$ma = F_{ext} \Rightarrow \frac{1}{m} \frac{d}{dt} F_{ext} = \frac{da}{dt} \quad \therefore \quad ma = F_{ext} + \tau \frac{dF_{ext}}{dt} ,$$

que coincide con la ecuación de Ford y O'Connell.

Por otra parte, ¿Cuál sería la potencia radiada para esta ecuación? Si regresamos a la técnica de sustituir dentro de la teoría de Abraham la aceleración por la segunda ley de Newton obtenemos que:

$$P_{Larmor} = \tau m a^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F_{ext}}{m} \quad \Rightarrow \quad P_{FO} = \tau \frac{F_{ext}^2}{m} ,$$

que representa la fórmula de potencia radiada de la teoría de Ford y O'Connell.

### 2.2.2 La radiación.

Aunque para problemas donde las trayectorias de la teoría de Abraham-Lorentz y la de Ford y O'Connell se parezcan mucho y el método de Baylis y Hulchild sea válido, existen situaciones que por la gran diferencia de trayectorias no se puede aplicar tal método. Es el caso de una fuerza repentina o tipo salto descrita con ayuda de la función de Heaviside:

$$F = F_o H(t) = F_o \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

La ecuación de Ford y O'Connell se convierte en:

$$ma = F_o H(t) + \tau F_o \frac{d}{dt} H(t) = F_o H(t) + \tau F_o \delta(t),$$

donde la  $\delta$  representa la delta de Dirac y se usó que  $\frac{d}{dt} H = \delta$ .

Solucionando la ecuación cuyas condiciones iniciales para  $t = -\infty$ ,  $x = 0$  y  $v = 0$ , obtenemos que:

$$x(t) = H(t) \left[ \frac{F_o}{2m} t^2 + \frac{1}{m} \tau F_o t \right],$$

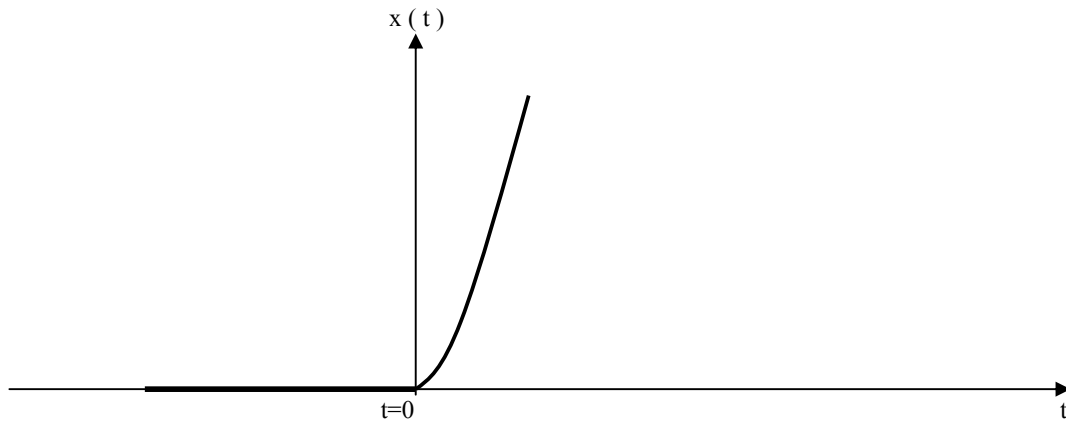
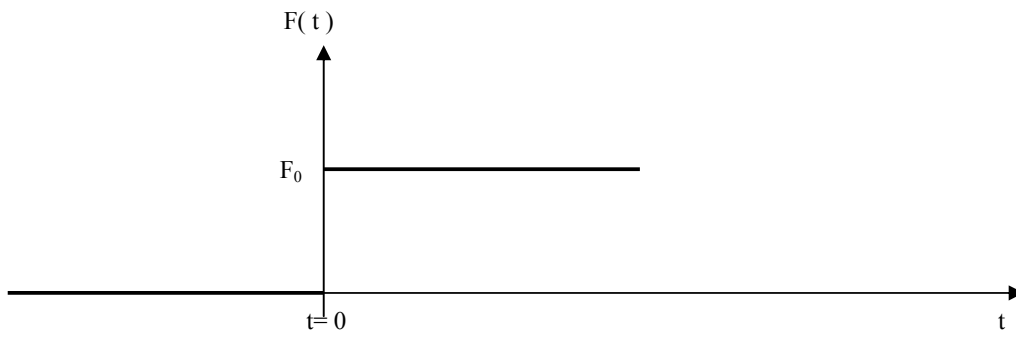
siendo la velocidad:

$$v(t) = \frac{1}{m} H(t) [\tau F_o] + \frac{1}{m} H(t) F_o t,$$

y como consecuencia de ello, la aceleración posee una delta de Dirac, es decir:

$$a(t) = \frac{1}{m} \tau F_o \delta(t) + \frac{1}{m} H(t) F_o.$$

Este resultado se puede analizar gráficamente:





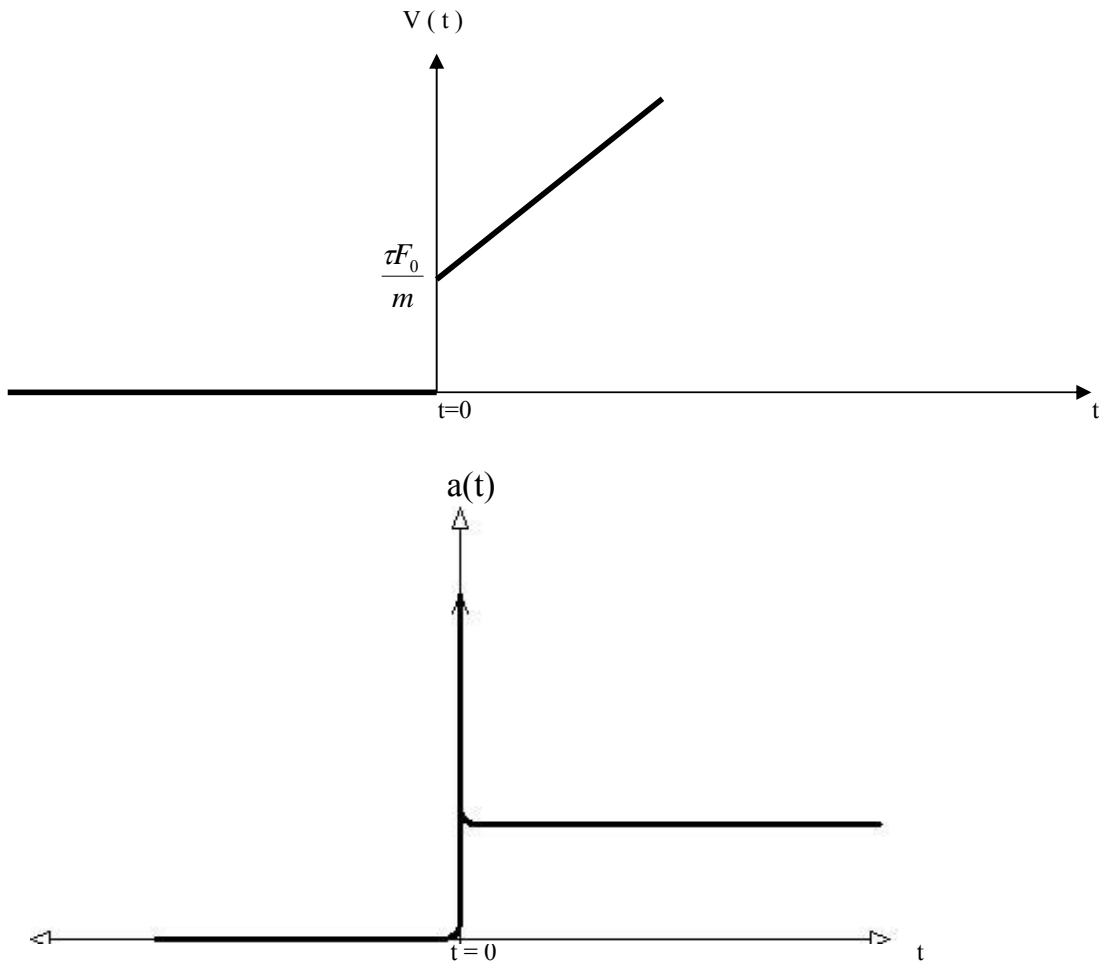
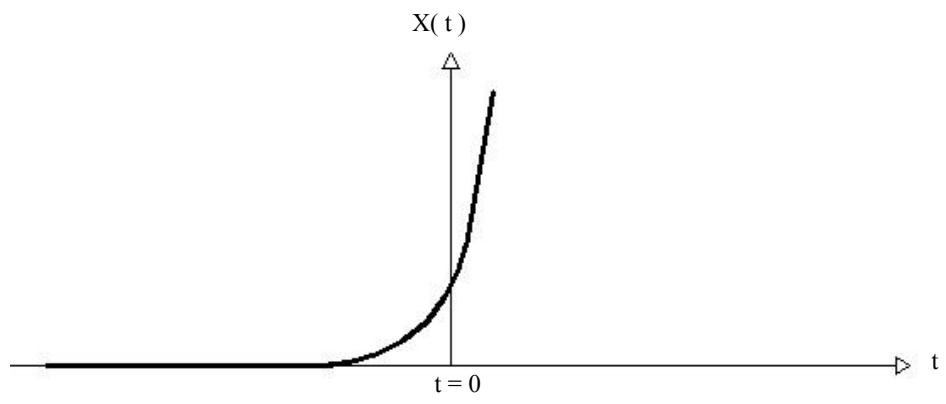
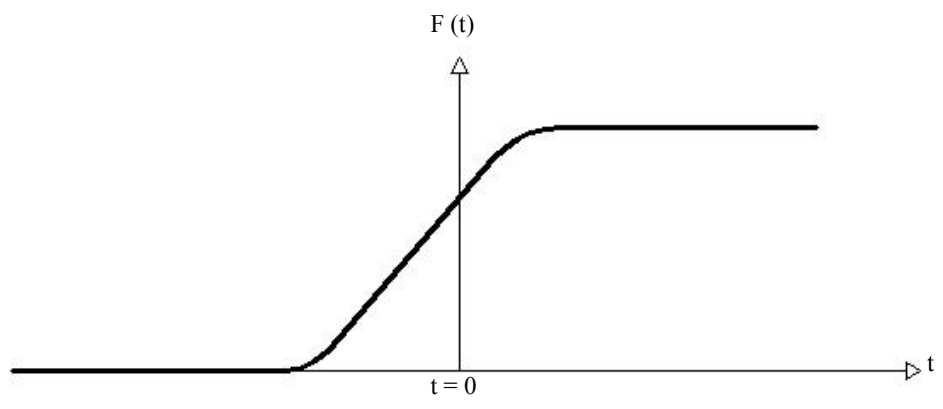


Fig.2. En este grupo de figuras se describe para una fuerza unidimensional de Heaviside el comportamiento de la posición  $x(t)$ , la velocidad  $v(t)$  y la aceleración  $a(t)$  obtenidas a partir de la ecuación de Ford-O'Connell.

Podemos ver que si la fuerza no hubiese sido una función de Heaviside, sino algo más físico, hubiéramos obtenido una solución con una aceleración muy grande (ver gráfica).



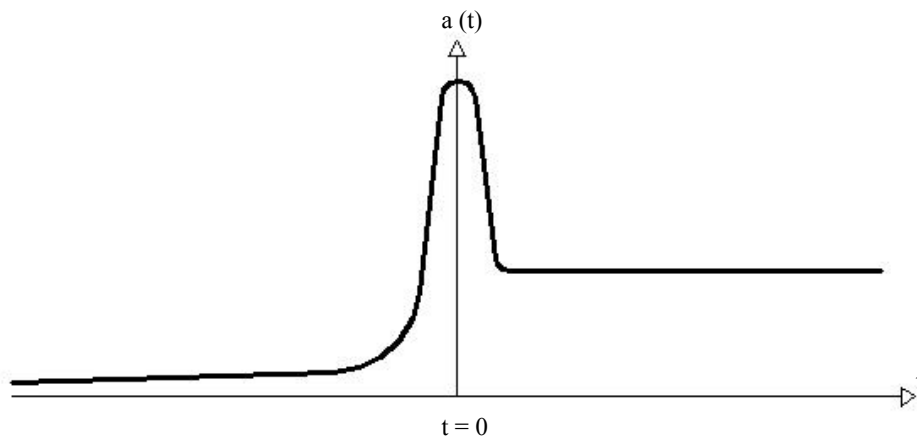
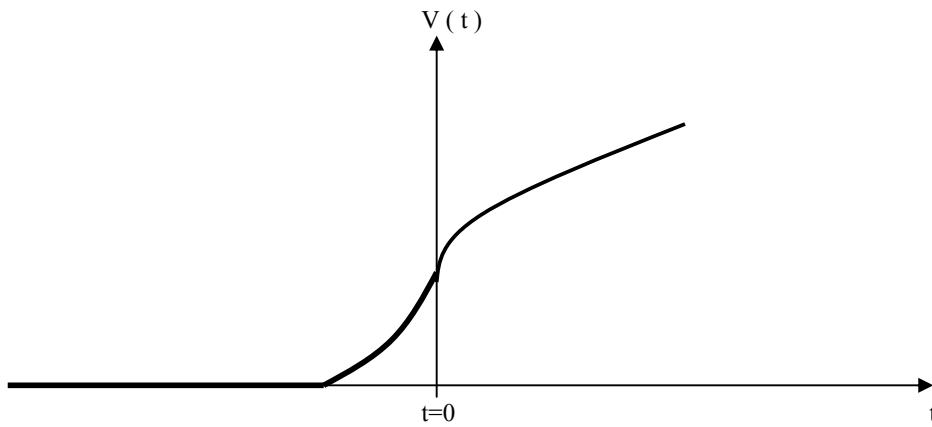


Figura3. En este otro grupo de figuras se muestra el comportamiento de la posición  $x(t)$ , velocidad  $v(t)$  y aceleración  $a(t)$  para una fuerza física unidimensional aceptable al aplicar la ecuación de Ford-O'Connell.

Pero en ambos casos la aceleración presenta una radiación muy grande si tomamos la fórmula de Larmor, pues tendríamos en el caso de Heaviside lo siguiente:

$$P = \pi m a^2 = \pi m \tau F^2 \delta^2(t),$$

que a la hora integrarlo nos daría una energía radiada infinita. Lo cual obviamente no conserva la energía. Sin embargo si tomamos la Potencia de Ford y O'Connell, tenemos:

$$P = \tau \frac{1}{m} F^2 = \tau \frac{1}{m} F_o^2 H^2(t) = \tau \frac{1}{m} F_o^2 H(t) = \tau \frac{1}{m} F_o^2 \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}.$$

Este último resultado predice una energía finita, lo cual es físicamente aceptable.

### 2.2.3 Conclusión

Hemos demostrado que además de predecir resultados con respecto a las trayectorias físicamente aceptables, la propuesta de Ford y O'Connell predice radiaciones finitas y por lo tanto su teoría es aceptablemente física. Hay que hacer notar que uno podría decir que la potencia de Ford y O'Connell debiese ser el término siguiente:

$$\tau \frac{dF}{dt},$$

sin embargo lo mismo se hace en la teoría de Abraham- Lorentz donde en vez de tomar a la potencia como:

$$P = \pi m \frac{da}{dt},$$

se toma a la Fórmula de Larmor. Esto es debido a que si analizamos la teoría de Dirac veremos que la ecuación de Lorentz-Dirac contiene dos términos, uno que corresponde a los campos unidos a la partícula y otro que describe la radiación emitida al infinito por la carga. Este último es el que corresponde a la fórmula de Larmor.

### **CAPITULO III. CONCLUSIÓN DE TESIS.**

Hemos demostrado que el método de Baylis no funciona en general, pues para un caso particular en forma no relativista el método no sirve pues las trayectorias difieren y no se puede aplicar. Por otro lado utilizando la filosofía de Ford y O'Connell se encuentran resultados coherentes y nos lleva a pensar que una generalización de esta teoría para partículas puntuales o no, pueda realizarse en forma relativista. Esto abre un camino nuevo para atacar el problema, pero se deberá encontrar el resultado utilizando mecánica cuántica tal como lo hicieron Ford y O'Connell en su teoría no relativista. Esto implicará revisar arduamente el concepto de tamaño y forma de el electrón pues ciertos aspectos relativistas impiden darle una forma covariante al electrón. Empero creemos haber encontrado una buena propuesta.

## APENDICE

Basaremos este apéndice en el trabajo realizado por Moniz y Sharp<sup>11</sup>, en forma de resumen.

### Teoría Cuántica de la reacción de radiación.

Nuestro plan es primero derivar el operador de Heisenberg de la ecuación de movimiento para un electrón no relativista, incluyendo los términos de fuerza uniforme, y entonces analizamos algunas propiedades de sus soluciones. En otras palabras, queremos estudiar el complemento cuántico de la ecuación de Abraham-Lorentz-Dirac .

Ecuación de movimiento.

Para derivar la ecuación de movimiento, seguimos el procedimiento Abraham-Lorentz para derivar la fuerza uniforme en un electrón, excepto que debemos recordar que tomamos en cuenta el hecho que estamos trabajando con operadores. Para los propósitos de la presente discusión, esto justifica que pongamos atención en el orden de las cantidades no conmutativas.

Nuestro punto de inicio para estos cálculos es el Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2m_0} \left[ \vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{R}) \right]^2 + \frac{1}{8\pi} \int d\vec{r} \left\{ \vec{E}^2(\vec{r}, t) + [\nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t)]^2 \right\} , \quad (1)$$

donde:  $\vec{A}(\vec{R}) = \int d\vec{r} \rho[\vec{r} - \vec{R}(t)] \vec{A}(\vec{r}, t)$  ,y

$$\vec{E} = \vec{E}_{long} + \vec{E}_{trans}$$

Esto describe una partícula cargada no relativista de masa mecánica  $m_0$  y distribución de carga (simetría esférica) [definida como  $\int d\vec{r} \rho(\vec{r} - \vec{R}) = 1$  ] interactuando con un campo electromagnético, calculado en unidades de Coulomb.  $\vec{P}(t)$  y  $\vec{R}(t)$  son, respectivamente, el operador de momento y de posición de Heisenberg de la partícula.

Procediendo en forma estándar, usamos la ecuación (1) para derivar la ecuación de movimiento de Heisenberg y llegar a la forma del operador de la ecuación de fuerza de Lorentz:

$$\frac{d}{dt}(m_o \dot{\vec{R}}) = e\vec{E}(\vec{R}) + \frac{e}{2c} [\dot{\vec{R}} \times \vec{B}(\vec{R}) - \vec{B}(\vec{R}) \times \dot{\vec{R}}], \quad (2)$$

y el operador usual de la ecuación de campo para potenciales electromagnéticos  $\vec{A}$  y  $\phi$  (aquí se escriben en unidades de Lorentz),

$$-\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) = 4\pi e \vec{j}(\vec{r}, t) \quad (3a)$$

$$-\nabla^2 \phi(\vec{r}, t) = 4\pi e \rho(\vec{r}, t) \quad (3b)$$

Escribiendo estas ecuaciones, escribimos la siguiente notación:

$$\vec{B}(\vec{R}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{R}), \quad \vec{E}(\vec{R}) = -\nabla \phi(\vec{R}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{R})}{\partial t}, \quad y$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} [\rho(\vec{r} - \vec{R}(t), \vec{R})]_+ = \text{Operador densidad de corriente de una partícula}$$

Como en el caso clásico, nuestro objetivo es usar la ecuación de campo (3) para eliminar los campos uniformes de la ecuación de fuerza de Lorentz. Para hacer esto, primero observamos que la solución exacta de la ecuación (3), satisfaciendo las condiciones de frontera, puede ser escrita:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_{in}(\vec{r}, t) + \frac{e}{c} \int d\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t'_{ret})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{A}_{in} + \vec{A}_{self}, \dots (4a)$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}, t) + e \int d\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}', t'_{ret})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \phi_{in} + \phi_{self} \dots (4b)$$

donde el tiempo de retardo es dado por  $t'_{ret} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$ . Note que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \vec{A}_{t \rightarrow -\infty} \rightarrow \vec{A}_{in}$ , que es un campo libre.

Podemos relacionar un operador evaluado en el tiempo retardado  $t'_{ret}$  por su valor en el tiempo  $t$  por la fórmula:

$$O(t'_{ret}) = \exp[+iH(t'_{ret} - t)]O(t)\exp[-iH(t'_{ret} - t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|^n}{c^n} (ad^n H)O(t) \quad (5)$$

donde  $(adH)O = [H, O]_-$  y  $(ad^2 H)O = [H, [H, O]_-]_-$ .

En seguida usaremos la expansión ( 5 ) y la ecuación ( 4 ) para evaluar los campos uniformes eléctrico y magnético en la ecuación de fuerza de Lorentz. La forma resultante de la ecuación de movimiento de la mecánica cuántica es :

$$m_o \frac{d^2 \bar{R}(t)}{dt^2} = e \bar{E}_{in} + \frac{e}{2c} \left[ \frac{d\bar{R}}{dt} \times \bar{B}_{in} - \bar{B}_{in} \times \frac{d\bar{R}}{dt} \right] + \frac{2e^2}{3c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n! c^n} \\ \times \iint d\bar{r} d\bar{r}' \frac{1}{2} \left[ \rho(\bar{r} - \bar{R}(t)) |\bar{r} - \bar{r}'|^{n-1}, (ad^{n+1} H) \bar{j}(\bar{r}', t) \right] \quad (6)$$

Escribiendo la ( 6 ), tenemos suprimida las contribuciones del campo magnético. Éstos han sido evaluados y encontrados para ser del orden de  $R'^2/c^2$  veces las contribuciones del campo eléctrico uniforme, como uno esperaría. Tales contribuciones serán despreciables para un electrón lento. Lo mismo es cierto de los términos no lineales asociados con el campo eléctrico uniforme. La declaración de que estos términos son despreciados significa, en el contexto de la mecánica cuántica, que hay un subconjunto de estados de Hilbert para los que los elementos de matriz  $\langle m | R'^2/c^2 | n \rangle$  son “pequeños” y que uno puede trabajar consistentemente para un nivel dado de precisión con este conjunto de estados. Es una suposición crucial de estos cálculos que tal conjunto de estados existan.

La ecuación (6) es el punto inicial para nuestro estudio de la reacción de radiación en mecánica cuántica. La labor principal en estos cálculos consiste en evaluar los conmutadores anidados en la ecuación (6), así que los podemos poner en forma usual. Los detalles pueden ser hallados en la referencia 2, y yo no reproduzco esto aquí. Sin embargo, puede ser instructivo ver que los primeros pocos términos en la series (6) se parecen.

Después de evaluar  $[H, j(r, t)]$ , el término con  $n=0$  en la ecuación ( 6) da:

$$(m_o \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2})_{n=0} = -\frac{2e^2}{3c^2} \langle |\bar{r} - \bar{r}'|^{-1} \rangle \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2}, \text{ con } \langle |\bar{r} - \bar{r}'| \rangle = \iint d\bar{r} d\bar{r}' \rho(\bar{r}) |\bar{r} - \bar{r}'| \rho(\bar{r}').$$

Este es el mismo resultado que el resultado clásico. Similarmente, el término  $n=1$  da:

$$(m_o \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2})_{n=1} = (2e^2/3c^3) \langle 1 \rangle \frac{d^3 \bar{R}}{dt^3}, \text{ que es otra vez la misma que en el caso}$$

clásico. El primer nuevo término cuántico llega cuando  $n=2$  , donde se halla:

$$\left( m_o \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} \right)_{n=2} = -\frac{1}{3c^4} \langle |\bar{r} - \bar{r}'| \rangle \frac{d^4 \bar{R}}{dt^4} - \frac{1}{9c^4} \langle |\bar{r} - \bar{r}'|^{-1} \rangle \left[ 3 \left\{ \left( \frac{d\bar{R}}{dt} \right)^2, \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} \right\} + \left\{ \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} \bullet \frac{d\bar{R}}{dt}, \frac{d\bar{R}}{dt} \right\} + \right]$$



$$+ \left\{ \frac{d\vec{R}}{dt} \bullet \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}, \frac{d\vec{R}}{dt} \right\} + \frac{d\vec{R}}{dt} \bullet \frac{d^3\vec{R}}{dt^3} \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt} \frac{d^3\vec{R}}{dt^3} \bullet \frac{d\vec{R}}{dt} - \frac{8\pi}{3c^2} \frac{\hbar^2}{(m_0c)^2} \left[ \int dr \rho^2(\vec{r}) \right] \frac{d\vec{R}}{dt^2}$$

L denota al radio de carga de la partícula y  $\lambda = \left( \frac{\hbar}{m_0c} \right)$  es la longitud de onda del electrón Compton. Vemos que el nuevo término como  $\left( \frac{1}{L^3} \right)$  cuando  $L \rightarrow 0$  y es  $\sim \left( \frac{\lambda}{L} \right)^2$  veces el término de energía uniforme clásica. Esto sugiere una pequeña corrección a la mecánica cuántica para la energía uniforme si  $\lambda \ll L$ , pero si  $\lambda \gg L$  (límite en carga puntual), uno tendrá la suma de las series.

Esto es como un procedimiento, realizando término por término la evaluación de la ecuación (6), hasta que uno ha inferido las combinaciones gobernadas por el término general. El resultado es (abandonando todos los términos de orden  $\left( \frac{d\vec{R}/dt}{c} \right)^2$  o comparando los términos principales).

$$m_0 \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}(t) = e\vec{E}_{in} + \frac{e}{2c} \left[ \frac{d\vec{R}}{dt} \times \vec{B}_{in} - \vec{B}_{in} \times \frac{d\vec{R}}{dt} \right] - \frac{2e^2}{3c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!c^n} \vec{A}_n^{n+2} \vec{R}(t) \quad (7)$$

$$A_n = \left[ 1 + \frac{\lambda}{3(n+2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] B_n$$

Con

$$B_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+2k)!} \binom{n+1+2k}{2k} \left( \frac{-\lambda^2}{4} \right)^k \times \iint dr dr' \rho(r) |\vec{r} - \vec{r}'|^{n-1+2k} (\nabla_{r'}^2)^{2k} \rho(\vec{r}')$$

Nosotros usamos la notación de que  $\vec{R}^m(t) = \frac{d^m \vec{R}(t)}{dt^m}$  y ,otra vez ,que  $\lambda = \frac{\hbar}{m_0c}$

Note que cada coeficiente estructural es una serie de potencia en  $(\lambda^2/L^2)$  y que si conservamos únicamente el término  $k=0$  en la serie para  $B_n$ , que corresponde a tomar el limite cuando  $\hbar \rightarrow 0$  de la expresión, recobramos la ecuación de movimiento para una carga clásica extendida.

## Evaluación los coeficientes estructurales.

### Energía uniforme electrostática.

La energía uniforme electrostática, definida como el coeficiente de la aceleración procedente de la fuerza uniforme, es dada por el término  $n=0$  en la serie de la ecuación (7). Específicamente, uno obtiene :

$$\delta m = \frac{2e^2}{3c^2} A_o = \frac{2e^2}{3c^2} \left(1 + \frac{\lambda}{6} \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \Omega_o \quad (8)$$

$$\text{donde } \Omega_o = \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \bar{\rho}(k)^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l!} \left(\frac{\lambda k^2}{2}\right)^{2l} \int \frac{dr}{r} e^{ik \cdot r} r^{2l}$$

y con  $\bar{\rho}(k)$  la transformada de Fourier de  $\rho(r)$ . Haciendo la integral sobre  $r$  y sumando las series obtenemos:

$$\Omega_o = \frac{2}{\pi} \oint_0^{\infty} dk \frac{\bar{\rho}(k)^2}{1 - \lambda^2 k^2 / 4} \quad (9)$$

donde la  $k$ -ésima integral impropia ha sido regularizada tomando el principal valor de Cauchy.

Esta fórmula para la auto energía electrostática tiene un número de importantes características:

(i) Si uno da  $\lambda \rightarrow 0$  en las ecuaciones (8) y (9) y entonces va al punto de carga límite, uno obtiene la expresión divergente para  $\delta m$ . Sin embargo, si uno primero toma el límite de carga puntual [ $\bar{\rho}(k)=1$ ] en (9), manteniendo fija  $\lambda$ , uno obtiene  $\delta m=0$ . Así, conforme este cálculo, uno encuentra que la auto energía electrostática de una carga puntual es cero en electrodinámica cuántica no relativista. Este resultado se suprime. Para mantener estas cosas nosotros acentuamos que no está demandado que este cálculo muestre que la automasa del electrón es finita. Hay contribuciones para esta automasa otras que las tratadas aquí, y estas otras contribuciones pueden ser infinitas. Sin embargo, será más interesante ver que un cálculo no perturbativo esencial, como es éste, nos dirá sobre estas contribuciones.

(ii) Es muy interesante estudiar la auto energía en el caso cuando la partícula tiene un factor de forma convergente, tal como el factor de Yukawa  $\bar{\rho}(k) = (1 + k^2 L^2)^{-1}$ , donde  $L$  es el radio de carga efectiva. Usando las ecuaciones (8) y (9), uno encuentra que el valor máximo para  $\delta m$  ocurre cuando  $L \sim \lambda$ , y que entonces:

$$(\delta m)_{\max} \sim \alpha m_0, \quad (10)$$

donde  $\alpha$  es la constante de estructura. Esto parece ser un resultado físico razonable. Por ejemplo, llevaría cambios de la masa electromagnética en el orden de pocos Mevs si  $m_0$  fue cambiada hasta cerca de cien Mev. Sin embargo, la ecuación (10) excluye la posibilidad de un origen puramente electromagnético para la masa del electrón dentro del marco de la electrodinámica cuántica no relativista.

(iii) Para  $0 < L \ll \lambda$ , la auto energía electrostática puede ser actualmente negativa.

iv) Un conocimiento adicional dentro de estos resultados puede ser obtenido por transformación  $\Omega_0$ , ecuación (9), en coordenadas espaciales. Uno encuentra que :

$$\Omega_0 = \iint dr dr' \rho(r) |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} \left[ 1 + \frac{\lambda^2}{4} \nabla_{r'}^2 \right]^{-1} \rho(r') \quad (11)$$

El operador integral en esta expresión está definida por:

$$\left( 1 + \frac{\lambda^2 \nabla^2}{4} \right)^{-1} \rho(x) = \int dy S_\lambda(x-y) \rho(y) \equiv \rho_{\text{eff}}(x)$$

$$\text{con } S_\lambda(r) = \oint \frac{dk}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{1 - \lambda^2 k^2 / r} = -\frac{\cos(2r/\lambda)}{\pi \lambda^2 r} \quad (12)$$

Así vemos que en estos cálculos, no menos de la física comprendida en la interacción de la partícula cargada con su auto campo cuantizado es sumada en la función spring  $S_\lambda$  que genera una distribución de carga efectiva  $\rho_{\text{eff}}(r)$  que está borrada sobre una longitud de onda Compton. Al respecto, nuestros resultados son muy similares a aquéllos obtenidos muchos años antes por Weiskopf. En su trabajo, sin embargo, la difusión fuera de la distribución de carga fue causado por el par positrón-electrón, ya que en nuestro estricto tratamiento no relativista hay, por supuesto, no positrones.

Finalmente, notaremos que la distribución de carga  $\rho_{\text{eff}}$  genera un potencial escalar efectivo:

$$\phi_{\text{eff}}(r) = \int dr' |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} \rho_{\text{eff}}(\vec{r}'),$$

desde que la auto energía electrostática puede calcularse como:

$$\Omega_0 = \int dr \rho(r) \phi_{\text{eff}}(r).$$

### Los Coeficientes Restantes.

Simplemente afirmo por causalidad que los otros coeficientes estructurales en la ecuación (7) han sido evaluados, y que en el límite de carga puntual uno encuentra:

$$A_n = (-1)^{(n-1)/2} \frac{2n(4n+5)}{3(n+1)(n+2)} (2n-1)!! \lambda^{n-1}, \text{ si } n \text{ es impar}; \quad (13)$$

$$A_n = 0, \text{ si } n \text{ es par.}$$

Así la ecuación de movimiento (7) es en verdad similar en estructura a la de una ecuación para una partícula cargada extendida clásica, con la longitud de onda Compton  $\lambda$ , jugando el rol de parámetro.

### Soluciones de la ecuación de movimiento.

#### Movimiento en la ausencia de fuerzas externas.

Ahora quiero discutir algunas propiedades de las soluciones para la ecuación (7). Primero discutiré el movimiento de un electrón libre, o sea que ninguna fuerza externa está actuando. Esta es la situación en que uno encuentra soluciones auto aceleradas clásicas, y queremos ver qué sucede en el caso de la mecánica cuántica.

Para investigar esta cuestión, tomamos la matriz de elementos de la ecuación de movimiento entre los estados estacionarios exactos y de la Hamiltoniana (1). Nosotros asumimos que entre estos estados hay unos para los cuales los elementos de matriz son insignificantes, y concentraremos nuestra atención para estos estados. Esto es posible debido a la linealidad de (7).

Mientras no conozcamos cómo construir los estados estacionarios exactos del Hamiltoniano (1), conoceremos que para tales estados uno puede escribir :

$$\langle m / R'(t)/n \rangle = \exp(i E_{mn} t / \hbar) \langle m / R'(0)/n \rangle, \text{ con } E_{mn} = E_m - E_n.$$

Veremos que si hubo soluciones auto aceleradas para la ecuación (7), entonces tendremos estados tales que  $\langle m / R'(0)/n \rangle \neq 0$  y para los cuales  $\beta = i E_{mn} / \hbar$  tiene una parte real positiva.

Supongamos que  $\langle m R' ( 0 ) / n \rangle \neq 0$  , y tomando la mencionada matriz de elementos de la ecuación (7) , resulta una serie de potencias en la variable  $\eta = \beta\lambda/c$  :

$$1 = \frac{2}{3} \alpha \eta \sum_{n=1, \text{impar}}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2} \frac{(2n-1)!!}{n!} \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{2n}{n+1} \right) \left( \frac{4n+5}{n+2} \right) \right] \eta^{n-1} \equiv \frac{2}{3} \alpha f(\eta). \quad (14)$$

Escribiendo la ecuación (14) ,tengo factorizado la raíz  $\beta = 0$ . Esto corresponde al movimiento con velocidad constante y es el resultado esperado para un electrón libre. La cuestión es si hay otras soluciones para la ecuación (14), correspondiente a soluciones auto aceleradas o a otros movimientos físicos.

La serie (14) converge para  $|\eta| < 1/2$ . Dentro de su radio de convergencia ,la serie puede ser sumada y uno obtiene :

$$f(\eta) = - ( 4 i / 3 ) [ ( 1 - 2 i \eta )^{-1/2} - ( 1 + 2 i \eta )^{-1/2} ] - ( 7 / 3 \eta ) [ ( 1 - 2 i \eta )^{1/2} + ( 1 + 2 i \eta )^{1/2} - 2 / 7 ] + ( 2 i / 3 \eta^2 ) [ ( 1 - 2 i \eta )^{3/2} - ( 1 + 2 i \eta )^{3/2} ] \quad (15)$$

Así, para examinar la cuestión de las soluciones auto aceleradas, uno debe determinar las raíces de la ecuación :

$$1 = 2/3 \alpha f(\eta), \quad (16)$$

donde  $\alpha$  es la constante de estructura fina y  $f(\eta)$  está dada por la (15).

Aquí tienes que encontrar:

- i) Para valores físicos de la constante de estructura fina, de hecho para todo  $\alpha \leq 1$ , la ecuación (16) no tiene raíces dentro del radio de convergencia  $|\eta| = 1/2$ .
- ii) Para  $\alpha$  grandes, interpretados ambos como un límite semiclásico, uno obtiene una raíz real de la ecuación (16) para  $|\eta| < 1/2$ . De hecho, que uno hallará en este caso una pequeña expansión de  $\hbar$  alrededor de la solución autoacelerada clásica:

$$\beta \approx ( 1 / \tau ) [ 1 + (\text{Coeficiente numérico}) \hbar^2 + \dots ] = ( 1 / \tau ) [ 1 + (\text{coeficiente numérico}) ( 1 / \alpha )^2 + \dots ] \quad ( 17 ), \quad \text{donde } \tau = 2e^2 / 3mc^2 .$$

- iii) Los regímenes de  $\alpha$  pequeña o grande están separados en que hay un valor crítico de  $\alpha$ ,  $\alpha_{\text{crit}} > 1$ , tal que :

$$d\eta/d\alpha \Big|_{\alpha \rightarrow \alpha_{crit}} \rightarrow \infty .$$

Este comportamiento es semejante a una fase de transición de primer orden, y expresa que el radio de convergencia de la ecuación (17) no puede incluir el valor físico de  $\alpha$ .

Así el análisis de las raíces de la ecuación (16) muestra que las soluciones auto aceleradas no están presentes en la electrodinámica no relativista para valores físicos de  $\alpha$ . Nuestro conocimiento de este resultado es que la interacción de una partícula puntual cargada con su campo uniforme cuantizado genera una distribución de carga efectiva que se extiende sobre una longitud de onda Compton (12). Esta estructura está reflejada en la ecuación de movimiento de la partícula, resultado en una forma para la ecuación de movimiento de la mecánica cuántica para una carga puntual [(7) y (13)] que es similar a una carga clásica extendida. Un análisis serio indica que una partícula clásica cargada de suficiente tamaño (radio de carga > radio del electrón clásico) no exhibe el aspecto de las soluciones auto aceleradas.

Es también interesante preguntarse acerca del significado de la condición  $|\eta| < 1/2$ . Recordando varias definiciones vemos que:

$$E_{mm} < 1/2 m c^2. \tag{18}$$

Esta condición representa una restricción sobre los eigenestados de energía de partícula más campo, entre que uno puede consistentemente evaluar la matriz de elementos (17), y expresar el hecho que nuestros resultados están limitados al dominio no relativista. Es importante que el criterio (18) está generado por las ecuaciones dinámicas mismas.

### **Fuerzas externas.**

Ahora consideraremos como el electrón se mueve en respuesta a una fuerza externa dependiente del tiempo  $t$ ,  $F(t)$ . Si otra vez despreciamos el campo interior, la ecuación de movimiento puede ser resuelta por transformada de Fourier y la solución puede escribirse en la forma:

$$m_0 \ddot{\mathbf{R}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t-t') F(t') \tag{19}$$

La función  $G(t-t')$  es dada por:

$$G(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-c/2\lambda}^{c/2\lambda} dw \frac{\exp[iw(t-t')]}{1 - \frac{2}{3}\alpha f(iw\lambda/c)} \quad (20)$$

En la ecuación (20) la función  $f(iw\lambda/c)$  está definida por (15).

Para derivar las ecuaciones (19) y (20) requerimos que  $F(w)$  desaparezca para  $|w| > c/2\lambda$ . Esto es debido a que la serie definida  $f(iw\lambda/c)$  no converge excepto que  $|w| < c/2\lambda$ . Esta condición está por supuesto estrechamente relacionada con la derivada anterior,  $E_{\text{min}} < 1/2mc^2$ , como requiere el movimiento no relativista, y también se sigue directamente de la condición que la fuerza aplicada cambia por una cantidad pequeña en el tiempo requerido por la luz al atravesar una longitud de onda Compton.

No es difícil ver que la función respuesta (20) no permite observar la preaceleración si  $\alpha \ll 1$ . Una evaluación aproximada de (20) muestra que la función de respuesta cuántica está extendida alrededor del origen ( $t=t'$ ) con una anchura mínima dada por el tiempo característico  $\nabla T \sim 2\lambda/c$ . Este tiempo está determinado conjuntamente por el principio de incertidumbre y la ecuación de movimiento (a través de la condición  $w < c/2\lambda$ ), y el tiempo en que la partícula empieza a moverse en respuesta para que la fuerza aplicada no pueda ser determinada más precisamente que  $\Delta T$ . La escala de tiempo para la preaceleración, por otro lado, es:

$$\tau \sim (e^2/mc^3) = \alpha(\lambda/c) \ll \Delta T.$$

Si  $\alpha \ll 1$ , así que ahí puede no estar la violación de causalidad. Note, sin embargo, que esta conclusión no se sigue si  $\alpha \sim 1$ .

Si la fuerza es interrumpida en una frecuencia pequeña comparada con  $c/\lambda$ , el límite correspondiente de (19) puede ser obtenido por expansión del denominador de la función de respuesta (20). Uno encuentra que :

$$m_0 \ddot{R}(t) = \ddot{F}(t) + \tau \dot{\ddot{F}}(t) + \dots = \int_0^\infty ds e^{-s} \ddot{F}(t+s\tau) \quad (21)$$

Así, en el régimen clásico, las ecuaciones (19) y (20) dan el mismo resultado que la solución para la clásica ecuación de Lorentz-Dirac que resulta cuando las soluciones auto aceleradas son eliminadas por ley. El punto interesante es que las ecuaciones (19) y (20) localizan un límite, originado de la teoría cuántica, en la aplicación de la solución clásica.

## **La discusión de la correspondencia entre la electrodinámica clásica y cuántica.**

Hemos estudiado la teoría cuántica de una partícula cargada no relativista acoplada a un campo electromagnético cuantizado. Este modelo, que hemos llamado “electrodinámica cuántica no relativista”, está definido por el Hamiltoniano (1).

Nosotros hemos mencionado que la electrodinámica clásica no relativista se manifiesta internamente describiendo el movimiento de partículas cargadas extendidas. Sin embargo, tomando el límite de carga puntual de la teoría de carga extendida clásica resulta un conjunto de ecuaciones cuyas soluciones muestran la conducta de auto aceleradas y preaceleradas. En mecánica cuántica, de otro modo, la teoría de punto de carga es consistente, mostrando ningún comportamiento auto acelerado u observable causal. Además, el límite de correspondencia de las soluciones de la ecuación de movimiento de la mecánica cuántica reproduce estas propiedades, y únicamente estas propiedades de las soluciones de la ecuación clásica Lorentz-Dirac que son físicamente razonables. Así, una imagen consistente de un electrón puntual clásico emerge como el límite correspondiente de un electrón puntual cuántico, pero no como el límite puntual de una carga extendida clásica.



## **Conclusiones de D.H. Sharp.**

En conclusión, quiero mencionar algunas preguntas que supongo en este trabajo. El modelo estudiado aquí, basado en el Hamiltoniano (1), carece de invariancia relativista. Consecuentemente, la no completa consistencia para este modelo puede ser reclamada. Mas aún, nosotros no conocemos para cuáles de nuestras conclusiones acerca de la consistencia de la electrodinámica cuántica no relativista continúe dependiendo de la electrodinámica cuántica relativista. Así, un intento para extender nuestros cálculos en el dominio de la teoría de campo relativista completo es claramente importante.

Otro punto concerniente es el hecho que, recordando nuestros cálculos, la electrodinámica cuántica no relativista aparentemente muestra el comportamiento auto acelerado y preacelerado si la constante de estructura fina fue menor que 1. Esto sugiere un límite superior sobre  $\alpha$ . ¿Es este límite real, o desaparece si más física, tal como la creación de un par, fuese incluida en el modelo? ¿Si el límite es real, que propiedad general de la teoría está siendo revelada?

Finalmente, como ha sido recientemente enfatizado por Grotch y Kazes, es muy instructivo comprender más claramente las relaciones entre nuestro método de cálculo y la teoría de perturbación estándar. Algunos progresos han sido hechos en esta cuestión. En efecto muy diferentes suposiciones y aproximaciones fundamentan los dos métodos. Hay, entonces, una razón no particular porque los resultados obtenidos de estos dos métodos coinciden en algún orden dado de aproximación. No voy a entrar en detalles acerca de este trabajo aquí, ya que es discutido en otro sitio.

Pero sobre todo notamos que el fenómeno de auto aceleraciones y de preaceleraciones no fue erradicado pues se partió de la propia teoría de Dirac.

## ***Bibliografía.***

1.J.D.Jackson,Classical Electrodynamics, Wiley, New York(1962) Capítulo 1, 5 , 6 , 12 y 14.

2.F.Rohrlich,Classical Charged Particles(Addison-Wesley Publishing Company, Reading Massachusetts,1965) Chaps.5 and 6.

3.P.A.M.Dirac,Proc.Roy.Soc A 167,148 (1938).

4.L.D.Landau and E.M.Lifshitz, The Classical Theory of Fields,2<sup>nd</sup> Ed.Pergamon,London,76(1962).

5.W.E.Baylis and J.Huschilt,Phys.Lett.A 301,7(2002).

6.G.W.Ford and R.F.O'Connell,Phys.Lett.A 157,4-5,217(1991).

7.G.W.Ford and R.F. O'Connell,Phys.Rev.A 44,10,6386(1991).

8.G.W.Ford and R.F. O'Connell,Phys.Lett.A 158,31(1991).

9.R.F.O'Connell,Phys.Lett.A 313,491(2003).

10.G.W.Ford,R.F.O'Connell,Phys.Lett.A 174,182(1993).

11.D.H.Sharp,Radiation Reaction in Nonrelativistic Quantum Theory .Lett.127 a 140.

12.H.Spohn,Europhys.Lett.50,287(2000).

13.F.Rohrlich,Am.J.Phys.68,1109(2000).

14.Mary L.Boas,Mathematical Methods in the Physical Sciences,Wiley,New York (1966).



