Renormalización de la masa en electrodinámica clásica

Tesis que presenta Martín Ortiz Domínguez
para obtener el título de Licenciado en Física y Matemáticas

Junio 2006

Asesor y Director de Tesis: Gonzalo Ares de Parga

Índice general

Introducción

En esta tesis pretendemos obtener un método para evitar la renormalización de la masa que en 1938 Dirac [1] realizó en su famoso trabajo sobre la ecuación de movimiento de una partícula cargada. En efecto, siempre que se pretende obtener la ecuación de movimiento para una partícula cargada considerando la fuerza de reacción a la radiación se topa uno con el problema de un término infinito que multiplica a una aceleración y por lo tanto se elimina argumentando que la partícula poseé una masa infinita que al incluirla cancela el término infinito citado. Algunas deducciones intuitivas del frenado por radiación evitan el proceso de renormalización. Tal es el caso de la obtención de la ecuación no relativista hecha por Planck [2]. De igualmente, Landau y Lifshitz [3] encuentran una ecuación de movimiento relativista evitando la renormalización. Esta última pretende ser para varios autores Rohrlich [4], Spohn[5] y Ares de Parga [13], la verdadera descripción del movimiento de una partícula cargada en forma clásica. En el caso de Planck [2], evita la renormalización al considerar efectos periódicos y en el caso de Landau y Lifshitz [3] se parte directamente de la ecuación de Lorentz-Dirac [1] la cual ya había sido renormalizada.

Desarrollaremos el método de Lagrange-Gordeyev [6] para poder revisar formalmente los términos que puedan llevar consigo valores infinitos. Sin embargo si recurrimos a la tesis doctoral de Domínguez [8], veremos que este método se utiliza para obtener la ecuación de Abraham-Lorentz en un principio y luego generalizando obtiene la ecuación de Lorentz-Dirac, pero no analiza profundamente la renormalización pues existen términos distintos a los que Dirac [1], obtuvo. En efecto, si revisamos el trabajo de Ares de Parga et al. [10], constataremos que aparece un término multiplicado por $\frac{2}{3}$ que en otros trabajos aparece como $\frac{4}{3}$ y en el caso de Dirac como la unidad. Esto se conoce como la paradoja de los $\frac{4}{3}$ [11]. Nuestro problema indica como ya citamos anteriormente $\frac{2}{3}$. Todo esto nos hace pensar que algo esta mal considerado y por lo tanto revisaremos los cálculos con el mismo método utilizado por Ares de Parga et al. [10], pero poniendo énfasis en la parte de la renormalización. En el primer Capítulo describiremos el método de Lagrange-Gordeyev que encuentra el valor del campo electromagnético como una serie de campos instantáneos. El segundo Capítulo se dedicará a utilizar el método para obtener la ecuación de movimiento y la renormalización de la masa. En el tercer Capítulo, se aplicarán los métodos de los Capítulos 1 y 2, para obtener la ecuación de movimiento de Abraham-Lorentz y calcular el término de renormalización. En la conclusión vincularemos estos resultados con la ecuación de Landau y Lifshitz [3].

Capítulo 1

El método de Lagrange-Gordeyev

En 1975, Gordeyev [6] utilizó un método matemático, que había desarrollado Lagrange, para poder expresar el campo electromagnético debido a una carga eléctrica en cualquier punto del espacio pero expresado por medio de valores instantáneos del movimiento de la partícula; es decir la posición, la velocidad, la aceleración y todas las demás derivadas de la posición con respecto al tiempo. Su intención consistía en desarrollar una física estadística relativista donde al truncar los términos dependientes de las distintas derivadas de la posición diera resultados aproximados pero con la facilidad de acercarse a resultados más exactos. Desgraciadamente la complejidad del método no lo llevo a reportar ningún avance con respecto a la física estadística pero le permitió encontrar de manera sinuosa la ecuación de movimiento de una partícula cargada. De hecho, Ares de Parga et al. [10], lograron obtener en forma más rigurosa dicha ecuación. Veremos en este Capítulo simplemente en que consiste el método en forma y dejando la demostración aparte.

1.1.– Desarrollo de los campos electromagnéticos

Gordeyev logró describir los campos electromagnéticos de la siguiente manera, primero para el campo eléctrico tendremos que

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t) = \sum_{j=0}^{\infty} \overrightarrow{E}_j, \tag{1.1}$$

y para el campo magnético

$$\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r},t) = \sum_{j=0}^{\infty} \overrightarrow{B}_j, \tag{1.2}$$

donde

$$\overrightarrow{E}_j = q(-1)^j \left[-C_j^{-1} \overrightarrow{R} + \sum_{i=0}^{j} \frac{j-i}{j-i+1} C_i^{j-i} \overset{j-i}{\overrightarrow{v}} \right], \tag{1.3}$$

y

$$\overrightarrow{B}_j = (-1)^j \sum_{i=0}^{j} \overrightarrow{B}_i^j, \tag{1.4}$$

siendo

$$\overrightarrow{B}_i^j = q C_i^{j-i-1} \frac{\overrightarrow{R} \times \overset{j-i}{\overrightarrow{v}}}{(j-i)!} + q C_i^{j-i} \sum_{k=0}^{E[(j-i)/2]} \frac{(j-i-2k) \overset{k}{\overrightarrow{v}} \times \overset{j-i-k}{\overrightarrow{v}}}{(k+1)!(j-i-k+1)!}, \tag{1.5}$$

siendo $\overrightarrow{R}$ el vector $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_o(t)$ y $\overrightarrow{r}_o(t)$ describe el movimiento de la partícula al tiempo t y $\overset{j}{\overrightarrow{v}}$ representa a la j-ésima derivada con respecto al tiempo de $\overrightarrow{v} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{r}_o$, es decir,

$$\overset{0}{\overrightarrow{v}} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{r}_o, \qquad \overset{1}{\overrightarrow{v}} = \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{r}_o, \qquad \overset{j}{\overrightarrow{v}} = \frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}} \overrightarrow{r}_o. \tag{1.6}$$

C_l^k se define como

$$C_o^k = \Omega_k, \tag{1.7}$$

y

$$C_l^k = \sum_P \frac{1}{i!j!....h!} \frac{\partial^s \Omega_{k+l}}{\partial v^s} \left(\frac{\overset{1}{\overrightarrow{v}}}{2!} \right)^i \left(\frac{\overset{2}{\overrightarrow{v}}}{3!} \right)^j ... \left(\frac{\overset{q}{\overrightarrow{v}}}{(q+1)!} \right)^h,$$

donde la expresión anterior P denota todas las combinaciones tales que

$$i + 2j + ... + qh = l \tag{1.8}$$

y

$$i + j + ... + h = s.$$

Para simplificar, hemos usado en la Ec. (1.7), la notación del tensor tridimensional siguiente

$$v^s = \underbrace{v_a, v_b, ..v_c}_{P\ veces} \quad \left(\overset{i}{v}\right)^j = \underbrace{\overset{i}{v}_a\overset{i}{v}_b...\overset{i}{v}_c}_{j\ veces}\ a,b,c = 1,\ 2,\ 3 \tag{1.9}$$

y

$$\frac{\partial^s}{\partial v^s} = \underbrace{\frac{\partial^s}{\partial v_a,\ \partial v_b....\partial v_c}}_{s\ veces}.$$

Recordando que la función $E\left[(j-i)/2\right]$ representa la parte entera de $(j-i)/2$ y que

$$\Omega_k = R^{k-2}\gamma^{k+2}\frac{\left[z+(1+z^2)^{\frac{1}{2}}\right]^k\left[k(1+z^2)^{\frac{1}{2}}-z\right]}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{1.10}$$

donde $z = \gamma\left(\widehat{n}\cdot\overrightarrow{v}\right)$ con $\widehat{n} = \frac{\overrightarrow{R}}{R}$ y $\gamma = \left(1-v^2\right)^{-1/2}$ y habiéndose considerado a la velocidad de la luz $c = 1$. Hay que recalcar varios aspectos: el primero y más importante consiste en notar que este método nos permite calcular el campo electromagnético con cantidades instantáneas. Por otro lado, hay que hacer notar que los campos $\overrightarrow{E}_i$ y $\overrightarrow{B}_i$ son proporcionales a R^{i-2} y que el orden total de las derivadas de la velocidad en $\overrightarrow{E}_i$ y $\overrightarrow{B}_i$ es i. Lo cual nos simplificará muchísimo el cálculo de los flujos de energía que realizaremos para deducir la ecuación de movimiento de una partícula cargada. Queremos hacer notar que debido a la complejidad tensorial presentada para el caso general de velocidades y aceleraciones, nos restrigiremos simplemente a considerar el problema en una dimensión; es decir, consideraremos a la velocidad, aceleraciones y demás derivadas con respecto al tiempo de la posición paralelas. A continuación calcularemos los términos que utilizaremos en el Capítulo 3 para encontrar la ecuación de movimiento.

1.2.– Cálculo de los campos electromagnéticos

La determinación de los campos electromagnéticos será sólo a primer orden en la velocidad y en una dirección, más adelante debemos generalizar para cualquier dirección y velocidad en una forma covariante. Nuestros calculos serán de $\overrightarrow{E}_o$, $\overrightarrow{E}_1$, $\overrightarrow{E}_2$, $\overrightarrow{B}_o$, $\overrightarrow{B}_1$ y $\overrightarrow{B}_2$ a primer orden en la velocidad como ya se mencionó suponiendo que $\overrightarrow{v}//\overrightarrow{a}//\overset{\bullet}{\overrightarrow{a}}$ etc., y $\overrightarrow{v} = v\widehat{k}$. Usaremos los campos, para evaluar integrales de superficie sobre una esfera de radio $R \to 0$ y las contribuciones de los campos $\overrightarrow{E}_i$ y $\overrightarrow{B}_i$, con $i > 2$, desaparecerán. Usando las Ecs. (1.1) y (1.3) para evaluar los campos eléctricos se tiene que,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{E}_o &= -qC_o^{-1}\overrightarrow{R}, \\
\overrightarrow{E}_1 &= -q\left(-C_1^{-1}\overrightarrow{R} + \frac{1}{2}C_o^1\dot{\overrightarrow{v}}\right), \\
\overrightarrow{E}_2 &= q\left(-C_2^{-1}\overrightarrow{R} + \frac{2}{3!}C_o^2\ddot{\overrightarrow{v}} + \frac{1}{2}C_1^1\dot{\overrightarrow{v}}\right),
\end{aligned} \tag{1.11}$$

y para los campos magnéticos, usando las Ecs. (1.2) y (1.4), se tiene

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{B}_o &= \overrightarrow{B}_o^o, \\
\overrightarrow{B}_1 &= -\overrightarrow{B}_o^1 - \overrightarrow{B}_1^1, \\
\overrightarrow{B}_2 &= \overrightarrow{B}_o^2 + \overrightarrow{B}_1^2 + \overrightarrow{B}_2^2.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Hay que señalar que la partícula se mueve en el vacío. Ahora hay que determinar la foma explícta de $\overrightarrow{B}_o^o$, $\overrightarrow{B}_o^1$, $\overrightarrow{B}_1^1$, $\overrightarrow{B}_o^2$ y $\overrightarrow{B}_1^2$. Con ayuda de la Ec. (1.5) llegamos a:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{B}_o^o &= qC_o^{-1}\left(\overrightarrow{R}\times\overrightarrow{v}\right), \\
\overrightarrow{B}_o^1 &= qC_o^o\left(\overrightarrow{R}\times\dot{\overrightarrow{v}}\right), \\
\overrightarrow{B}_1^1 &= qC_1^{-1}\left(\overrightarrow{R}\times\overrightarrow{v}\right), \\
\overrightarrow{B}_o^2 &= \frac{q}{2}C_o^1\left(\overrightarrow{R}\times\ddot{\overrightarrow{v}}\right), \\
\overrightarrow{B}_1^2 &= qC_1^o\left(\overrightarrow{R}\times\dot{\overrightarrow{v}}\right), \\
\overrightarrow{B}_2^2 &= qC_2^{-1}\left(\overrightarrow{R}\times\overrightarrow{v}\right).
\end{aligned} \tag{1.13}$$

De tal manera que sustituyendo las Ecs. (1.13) en las Ecs. (1.12), con $\overrightarrow{R} = R\widehat{n}$ y $\overrightarrow{v} = v\widehat{k}$, se tiene,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{B}_o &= -qC_o^{-1}Rv\ \left(\widehat{k}\times\widehat{n}\right), \qquad (1.14)\\
\overrightarrow{B}_1 &= -q\left(C_o^oR\overset{\bullet}{v}+C_1^{-1}Rv\right)\left(\widehat{k}\times\widehat{n}\right),\\
\overrightarrow{B}_2 &= -q\left(\frac{1}{2}C_o^1R\overset{\bullet\bullet}{v}+C_1^oR\overset{\bullet}{v}+C_2^{-1}Rv\right)\left(\widehat{k}\times\widehat{n}\right).
\end{aligned}$$

Ahora lo que sigue es determinar los coeficientes C_o^{-1}, C_o^o, C_o^1, C_1^{-1}, C_1^o, C_1^1 y C_2^{-1}. Empezando por los coeficientes del tipo $C_{l=o}^k$, con la ayuda de las Ecs. (1.7) y (1.10) se tiene,

$$C_o^{-1}=\Omega_{-1},\quad C_o^o=\Omega_o,\quad C_o^1=\Omega_1,\quad C_o^2=\Omega_2. \qquad (1.15)$$

Por otro lado, continuando con la determinación de los coeficientes del tipo $C_{l=1}^k$, debemos considerar todas las combinaciones al fijar $l=1$ y sustituyéndola en la primera de las Ecs. (1.8). Los únicos valores que pueden tomar i y j son:

$$\begin{aligned}
i &= 1\\
&\ \text{y}\\
j &= 0.
\end{aligned}$$

Como consecuencia de esto $s=1$, al sustituir estas restricciones en la Ec. (1.7) llegamos a que:

$$C_1^k=\frac{\partial\Omega_{k+1}}{\partial v}\left(\frac{\overset{\bullet}{\overrightarrow{v}}}{2!}\right),$$

con esta generalización tenemos,

$$C_1^{-1}=\frac{\partial\Omega_o}{\partial v}\left(\frac{\overset{\bullet}{v}}{2!}\right),\quad C_1^o=\frac{\partial\Omega_1}{\partial v}\left(\frac{\overset{\bullet}{v}}{2!}\right),\quad C_1^1=\frac{\partial\Omega_2}{\partial v}\left(\frac{\overset{\bullet}{v}}{2!}\right). \qquad (1.16)$$

Por último, para la determinación del coeficiente $C_{l=2}^{-1}$, debemos considerar todas las combinaciones al fijar $l=2$ y sustituyéndola en la primera de las Ecs. (1.8). Los valores que pueden tomar i y j son:

$$\begin{aligned} i &= 2 \\ &\text{y} \\ j &= 0. \end{aligned}$$

Como consecuencia de esto, $s = 2$ o bien para $l = 2$. Los valores que pueden tomar i y j son:

$$\begin{aligned} i &= 0 \\ &\text{y} \\ j &= 1. \end{aligned}$$

Así pués $s = 1$, ahora hay que sustituir estas restricciones en la Ec. (1.7) llegamos a que:

$$C_2^{-1} = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial v^2}\left(\frac{\overset{\bullet}{\overrightarrow{v}}}{2!}\right)^2 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial v}\left(\frac{\overset{\bullet\bullet}{\overrightarrow{v}}}{3!}\right). \tag{1.17}$$

Aún falta determinar la forma explícita de los coeficientes C_l^k en las Ecs (1.16) y (1.17). Esto se logra determinando $\Omega_{-1},\ \Omega_o,\ \Omega_1,\ \Omega_2,\ \frac{d\Omega_o}{dv},\ \frac{d\Omega_1}{dv},\ \frac{d\Omega_2}{dv},\ \frac{d^2\Omega_o}{dv^2}$ y utilizando la Ec. (1.10); es decir:

$$\begin{aligned} \Omega_{-1} &= -\frac{R^{-3}\gamma}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \Omega_o &= -\frac{R^{-2}\gamma^2 z}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \Omega_1 &= -\frac{R^{-1}\gamma^3}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \Omega_2 &= \gamma^4\left(2 + \frac{2z^3+3z}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right), \end{aligned} \tag{1.18}$$

donde hemos considerado que $z = \gamma\left(\widehat{n}\cdot\overrightarrow{v}\right) = \left(1-v^2\right)^{-1/2} v\cos\theta$, $\widehat{n} = \frac{\overrightarrow{R}}{R}$, $\overrightarrow{v} = v\widehat{k}$. Así pués, las Ecs. (1.18) quedan de la siguente manera

$$\begin{aligned}
\Omega_{-1} &= -\frac{R^{-3}\left(1-v^2\right)}{\left(1-v^2+v^2\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}, \\
\Omega_o &= -\frac{R^{-2}v\cos\theta}{\left(1-v^2+v^2\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}, \\
\Omega_1 &= \frac{R^{-1}}{\left(1-v^2+v^2\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}, \\
\Omega_2 &= \gamma^4\left(2+\frac{2v^3\cos^3\theta+3\left(v-v^3\right)\cos\theta}{\left(1-v^2+v^2\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\right).
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Conocemos la forma explícita de Ω_o, Ω_1, Ω_2, de tal manera que

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega_o}{dv} &= -R^{-2}\cos\theta, \\
\frac{d\Omega_1}{dv} &= \frac{3R^{-1}v\sin^2\theta}{\left(1-v^2+v^2\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}, \\
\frac{d\Omega_2}{dv} &= 8v+3\cos\theta, \\
\frac{d^2\Omega_1}{dv^2} &= 3R^{-1}\sin^2\theta.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Ahora sólo considerando los términos a primer orden de la velocidad, de las Ecs. (1.19) y (1.20) se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Omega_{-1} &= -R^{-3}, \\
\Omega_o &= -R^{-2}v\cos\theta, \\
\Omega_1 &= R^{-1}, \\
\Omega_2 &= 2+3v\cos\theta, \\
\frac{d\Omega_o}{dv} &= -R^{-2}\cos\theta, \\
\frac{d\Omega_1}{dv} &= 3R^{-1}v\sin^2\theta, \\
\frac{d\Omega_2}{dv} &= 8v+3\cos\theta, \\
\frac{d^2\Omega_1}{dv^2} &= 3R^{-1}\sin^2\theta.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

De tal manera que sustituyendo las Ecs. (1.21) en las Ecs. (1.15), (1.16) y (1.17), tendremos que

$$\begin{aligned}
C_o^{-1} &= -R^{-3}, \qquad (1.22)\\
C_o^{o} &= -R^{-2} v\cos\theta,\\
C_o^{1} &= R^{-1},\\
C_o^{2} &= 2+3v\cos\theta,\\
C_1^{-1} &= -\frac{\dot{v}\cos\theta}{2R^2},\\
C_1^{o} &= \frac{3}{2}\frac{\dot{v}}{R}\sin^2\theta,\\
C_1^{1} &= (8v+3\cos\theta)\,\frac{\dot{v}}{2!},\\
C_2^{-1} &= \frac{1}{2!}\frac{3}{R}\sin^2\theta\left(\frac{\dot{\vec{v}}}{2!}\right)^2+\frac{3v}{R}\sin^2\theta\left(\frac{\ddot{\vec{v}}}{3!}\right)=\frac{3\sin^2\theta}{2R}\left(\frac{\dot{v}^2}{4}+\frac{v\ddot{v}}{3}\right).
\end{aligned}$$

Por último, sustituyendo las Ecs. (1.22) en las Ecs. (1.11) y (1.14), se tiene,

$$\begin{aligned}
\vec{E}_o &= \frac{q}{R^2}\widehat{n}, \qquad (1.23)\\
\vec{E}_1 &= -\frac{q\dot{v}}{2R}\left[\cos\theta\left(\widehat{n}+\widehat{k}\right)\right],\\
\vec{E}_2 &= -\frac{3q\sin^2\theta}{2}\left(\frac{\dot{v}^2}{4}+\frac{v\ddot{v}}{3}\right)\widehat{n}+\left[\frac{q}{3}\left(2+3v\cos\theta\right)\ddot{v}+q\left(2v+\frac{3}{4}\cos\theta\right)\dot{v}^2\right]\widehat{k},\\
\vec{B}_o &= \frac{qv}{R^2}\left(\widehat{k}\times\widehat{n}\right),\\
\vec{B}_1 &= -\frac{3qv\dot{v}\cos\theta}{2R}\left(\widehat{k}\times\widehat{n}\right),\\
\vec{B}_2 &= -q\left(\frac{\ddot{v}}{2}+\frac{15v\dot{v}^2}{8}\sin^2\theta\dot{v}\right)\left(\widehat{k}\times\widehat{n}\right),
\end{aligned}$$

Es importante mencionar que, de acuerdo con el trabajo hecho por Hartemann y Luhmann [12], también nosotros trabajamos en un sistema de referencia inercial donde $\overrightarrow{v} // \overrightarrow{a} // \dot{\overrightarrow{a}}$ etc. Con esta hipótesis y considerando sólo en los campos electromagnéticos la velocidad a primer orden, no existe ningún problema para generalizar los resultados a una forma covariante, como se hará más adelante.

Capítulo 2

Balance de energía y la ecuación de movimiento

Cada una de esta ecuaciones representan una generalización de algunas observaciones experimentales. Esta ecuación es la ley de Gauss, que a su vez se deduce de la ley de Coulomb

$$\overrightarrow{\nabla} \bullet \overrightarrow{E} = 4\pi\rho. \tag{2.1}$$

La siguiente ecuación representa generalmente el hecho de que nunca se han observado los monopolos magnéticos

$$\overrightarrow{\nabla} \bullet \overrightarrow{B} = 0. \tag{2.2}$$

La siguiente ecuación es la forma diferencial de la ley de inducción electromagnética de Faraday

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = 0. \tag{2.3}$$

Esta ecuación representa una extensión de la ley de Ampère y se conoce como la ley de Ampère-Maxwell

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = \frac{4\pi}{c}\overrightarrow{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}. \tag{2.4}$$

Si se hace el producto escalar de la Ec. (2.4) por $\overrightarrow{E}$ y la ecuación resultante se resta del producto escalar de la Ec. (2.3) por $\overrightarrow{B}$, la ecuación que se obtiene es

$$\overrightarrow{B} \bullet \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} - \overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = -\frac{1}{c}\left(\overrightarrow{B} \bullet \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\left(\overrightarrow{E} \bullet \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right) - \frac{4\pi}{c}\left(\overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{J}\right). \tag{2.5}$$

El lado izquierdo de esta expresión puede convertirse en una divergencia utilizando la identidad

$$\overrightarrow{\nabla} \bullet (\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{G} \bullet \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} - \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{G}, \tag{2.6}$$

para obtener

$$\overrightarrow{\nabla} \bullet (\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}) = -\frac{1}{c}\left(\overrightarrow{B} \bullet \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\left(\overrightarrow{E} \bullet \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right) - \frac{4\pi}{c}\left(\overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{J}\right). \tag{2.7}$$

Las derivadas con respecto al tiempo en el lado derecho de la Ec. (2.7) pueden escribirse como

$$\frac{1}{c}\left(\overrightarrow{E} \bullet \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{c}\left(\overrightarrow{E} \bullet \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{E}\right) = \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{E}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2c}\overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{E}, \tag{2.8}$$

y también

$$\frac{1}{c}\left(\overrightarrow{B} \bullet \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}\right) = \frac{1}{c}\left(\overrightarrow{B} \bullet \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{B}\right) = \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{B}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2c}\overrightarrow{B} \bullet \overrightarrow{B}. \tag{2.9}$$

Sustituyendo las Ecs. (2.8) y (2.9) en la Ec. (2.7) para obtener

$$\overrightarrow{\nabla} \bullet (\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2c}\left(\overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{E} + \overrightarrow{B} \bullet \overrightarrow{B}\right) - \frac{4\pi}{c}\left(\overrightarrow{J} \bullet \overrightarrow{E}\right). \tag{2.10}$$

El primer término del lado derecho es la derivada con respecto al tiempo de la suma de las densidades de energía eléctrica y magnética; el segundo término es, en muchos casos (en particular $\overrightarrow{J} = \sigma\overrightarrow{E}$), exactamente menos la razón de calentamiento por Joule por unidad de volumen. Al integrar sobre un volumen fijo V limitado por la superficie S se tiene

$$\int\limits_V \overrightarrow{\nabla} \bullet \left(\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}\right) dV = -\frac{d}{dt}\int\limits_V \frac{1}{2c}\left(\overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{E} + \overrightarrow{B} \bullet \overrightarrow{B}\right) dV - \frac{4\pi}{c}\int\limits_V \overrightarrow{J} \bullet \overrightarrow{E} dV. \tag{2.11}$$

Aplicando el teorema de la divergencia al lado izquierdo, se obtiene

$$\oint\limits_S \left(\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}\right) \bullet \widehat{n} da = -\frac{d}{dt}\int\limits_V \frac{1}{2c}\left(\overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{E} + \overrightarrow{B} \bullet \overrightarrow{B}\right) dV - \frac{4\pi}{c}\int\limits_V \overrightarrow{J} \bullet \overrightarrow{E} dV. \tag{2.12}$$

Escribiendo de nuevo esta ecuación

$$-\frac{4\pi}{c}\int\limits_V \overrightarrow{J} \bullet \overrightarrow{E} dV = \frac{d}{dt}\int\limits_V \frac{1}{2c}\left(\overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{E} + \overrightarrow{B} \bullet \overrightarrow{B}\right) dV + \oint\limits_S \left(\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}\right) \bullet \widehat{n} da, \tag{2.13}$$

queda claro que el término $\overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{E}$ se compone de dos partes: la razón de cambio de la energía electromagnética almacenada en V y una integral de superficie. El lado izquierdo de la Ec. (2.13) es la potencia transferida al campo electromagnético a través del movimiento de carga libre en el volumen V. Si hay fuentes de fem en V, entonces el lado izquierdo de la Ec. (2.13) es negativo e igual a menos la producción de calor por Joule por unidad de tiempo. Sin embargo, en algunas circunstancias el lado izquierdo de la Ec. (2.13) puede ser positivo. Como la integral de superficie de la Ec. (2.13) contiene sólo los campos eléctricos y magnéticos, es factible interpretar este término como la razón de flujo de la energía a través de la superficie. La Ec. (2.13) expresa, por tanto, la conservación de la energía en volumen fijo V. Regresando a la Ec. (2.10) y haciendo las siguientes abreviaturas

$$\overrightarrow{S} = \frac{c}{4\pi}\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}, \tag{2.14}$$

$$u = \frac{1}{8\pi}\left(\overrightarrow{E} \bullet \overrightarrow{E} + \overrightarrow{B} \bullet \overrightarrow{B}\right). \tag{2.15}$$

Dado que el volumen es arbitrario, esto es asignado a la forma de una ecuación diferencial de continuidad o ley de conservación,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \bullet \overrightarrow{S} = -\overrightarrow{J} \bullet \overrightarrow{E}. \tag{2.16}$$

El vector $\overrightarrow{S}$, representa el flujo de energía, es llamado el vector de Poynting. Si denotamos la energía total de las partículas dentro del volumen V como E_{mech} y asumimos que no hay partículas que se mueven a fuera del volumen, tenemos

$$\frac{dE_{mech}}{dt} = \int_V \overrightarrow{J} \bullet \overrightarrow{E} dV. \tag{2.17}$$

Entonces el teorema de Poynting expresa la conservación de la energía para el sistema combinado como

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(E_{mech} + E_{field}\right) = -\oint_S \overrightarrow{S} \bullet \widehat{n} dA, \tag{2.18}$$

donde la energía total de campo dentro del volumen V es

$$E_{field} = \int_V u dV. \tag{2.19}$$

Veremos en el Capítulo 3 que la Ec. (2.18) es inexacta y debe corregirse.

Capítulo 3

Deducción de la ecuación de movimiento y renormalización

Sustituyendo la Ec. (2.16) en la Ec. (2.17), tenemos que

$$\frac{dE_{mech}}{dt} = -\int_V \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \bullet \overrightarrow{S} \right) dV, \tag{3.1}$$

donde $\overrightarrow{J}$, u y $\overrightarrow{S}$ representan la densidad de corriente, la densidad de energía $u = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + B^2\right)$ y el vector de Poynting $\overrightarrow{S} = \frac{c}{4\pi}\left(\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}\right)$. Por otro lado, el cambio de la energía del campo es

$$\frac{dE_{field}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V u \; dV. \tag{3.2}$$

Consideramos que una esfera de radio R y volumen V encierra a la partícula puntual cargada y sigue el movimiento de la misma, si introducimos a la derivada con respecto al tiempo a la integral en la Ec. (3.2) debemos sumar una divergencia de $u\overrightarrow{v}$

$$\frac{dE_{field}}{dt} = \int_V \frac{\partial u}{\partial t} \; dV + \int_V \overrightarrow{\nabla} \bullet \left(u\overrightarrow{v}\right) dV, \tag{3.3}$$

en la Ec. (3.3), $\overrightarrow{v}$ representa la velocidad de cada uno de los elementos diferenciales de volumen dV. Además hemos considerado que la esfera no sufre ninguna deformación y que la velocidad de la partícula coincide con la velocidad $\overrightarrow{v}$ de la esfera. Aplicando el teorema de la divergencia de Gauss al segundo término de la Ec. (3.3), se observa que la velocidad $\overrightarrow{v}$ puede salir de la integral de superficie. Se tiene

$$\frac{dE_{field}}{dt} = \int_V \frac{\partial u}{\partial t}\, dV + \overrightarrow{v} \bullet \oint_S (u)\, d\overrightarrow{A}. \tag{3.4}$$

Se debe aclarar que $d\overrightarrow{A}$ representa el diferencial de área de la superficie cerrada que encierra al volumen V de la esfera. Haciendo un balance de energía, es decir sumando las Ecs. (3.1) y (3.4) se tiene que:

$$\frac{dE_{field}}{dt} + \frac{dE_{mech}}{dt} = -\int_V \left(\overrightarrow{\nabla} \bullet \overrightarrow{S}\right) dV + \overrightarrow{v} \bullet \oint_S (u)\, d\overrightarrow{A}. \tag{3.5}$$

De nueva cuenta aplicando el teorema de la divergencia de Gauss, al primer término de la Ec. (3.5) se tiene que:

$$\frac{dE_{field}}{dt} + \frac{dE_{mech}}{dt} = -\oint_S \overrightarrow{S} \bullet d\overrightarrow{A} + \overrightarrow{v} \bullet \oint_S u d\overrightarrow{A}. \tag{3.6}$$

Determinaremos primero el cambio de la energía del campo como se expresa en la Ec. (3.2). En la expresión de la energía del campo aparece la densidad de energía electromagnética, en donde tendremos que elevar al cuadrado la suma de los campos eléctricos y magnéticos ($\overrightarrow{E}_o$, $\overrightarrow{E}_1$, $\overrightarrow{E}_2$, $\overrightarrow{B}_o$, $\overrightarrow{B}_1$ y $\overrightarrow{B}_2$), de tal manera que se obtendrán términos que multiplican a R^{-4}, R^{-3}, R^{-2}, R^{-1}, R^0, R^1, R^2, R^3, etc. Posteriormente consideraremos el límite cuando $R \rightarrow 0$.

$$\frac{dE_{field}}{dt} = \lim_{R \longrightarrow 0} \frac{d}{dt} \int_0^R u dV = \frac{d}{dt} \lim_{R \longrightarrow 0} \int_0^R u dV. \tag{3.7}$$

La densidad de energía electromagnética esta determinada como ya hemos mencionado por $u = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + B^2\right)$, con lo que llegamos a que:

$$\frac{dE_{field}}{dt} = \lim_{R \longrightarrow 0} \frac{d}{dt} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{R=0}^{R} \left(\frac{q^2 v^2}{8\pi R^4} \sin^2\theta\right) R^2 \sin\theta dR d\theta d\phi. \tag{3.8}$$

Realizando la integral llegamos a que,

$$\frac{dE_{field}}{dt} = -\lim_{R \longrightarrow 0} \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2 v^2}{3}\right) \left[\frac{1}{R}\right]_0^R. \tag{3.9}$$

Esta última Ec. (3.9), es normalmente considerada como nula, sin embargo en realidad está indefinida y por ello no la anularemos por ahora, es decir:

$$I = \frac{dE_{field}}{dt} = -\lim_{R\longrightarrow 0}\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2v^2}{3}\right)\left[\frac{1}{R}\right]_0^R = -\frac{2q^2\dot{v}v}{3}\lim_{R\longrightarrow 0}\left[\frac{1}{R}\right]_0^R. \qquad (3.10)$$

Este término lo analizaremos junto con el proceso de renormalización y en las conclusiones.

3.1.– Ecuación de movimiento de Lorentz-Dirac.

Hay que notar que debemos incluir el campo externo en la Ec. (3.6), esto se hará al final de esta Sección. Por el momento, se calculara sólo los términos que aparecen en el lado derecho de la Ec. (3.6) sin considerar fuerzas externas. Definamos dos cantidades

$$W = \lim_{R\longrightarrow 0} -\oint_S \overrightarrow{S}\bullet d\overrightarrow{A} \qquad\qquad G = \lim_{R\longrightarrow 0}\overrightarrow{v}\bullet\oint_S ud\overrightarrow{A}. \quad (3.11)$$

Comenzaremos por determinar primero a:

$$W = W_{-2} + W_{-1} + W_o.$$

Como se observa en la Ec. (3.11) aparece el vector de Poynting $\overrightarrow{S} = \frac{c}{4\pi}\left(\overrightarrow{E}\times\overrightarrow{B}\right)$, en el límite cuando $R\rightarrow 0$, algunos de los campos eléctricos y magnéticos se anularan, por lo cual, de las Ecs. (1.23), sólo se consideran los productos que no se anulan que acontinuación se mencionan:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E}\times\overrightarrow{B} =& q^2\left[\left(\overrightarrow{E}_o\times\overrightarrow{B}_o\right) + \left(\overrightarrow{E}_o\times\overrightarrow{B}_1 + \overrightarrow{E}_1\times\overrightarrow{B}_o\right)\right.\\ &\left.+\left(\overrightarrow{E}_o\times\overrightarrow{B}_2 + \overrightarrow{E}_1\times\overrightarrow{B}_1 + \overrightarrow{E}_2\times\overrightarrow{B}_o\right)\right].\end{aligned}$$

Hay que mencionar que W_i representa los términos que contienen R^i, es decir,

$$W_{-2} = \lim_{R\longrightarrow 0} - \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} q^2\left(\frac{\overrightarrow{E}_o\times\overrightarrow{B}_o}{4\pi}\right)\bullet\widehat{n}R^2\sin\theta d\theta d\phi, \qquad (3.12)$$

$$W_{-1} = \lim_{R\longrightarrow 0} - \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} q^2 \left(\frac{\overrightarrow{E}_1 \times \overrightarrow{B}_o}{4\pi} + \frac{\overrightarrow{E}_o \times \overrightarrow{B}_1}{4\pi} \right) \bullet \widehat{n} R^2 \sin\theta d\theta d\phi, \quad (3.13)$$

$$W_o = \lim_{R\ \longrightarrow 0} - \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} q^2 \left(\frac{\overrightarrow{E}_o \times \overrightarrow{B}_2}{4\pi} + \frac{\overrightarrow{E}_1 \times \overrightarrow{B}_1}{4\pi} + \frac{\overrightarrow{E}_2 \times \overrightarrow{B}_o}{4\pi} \right) \bullet \widehat{n} R^2 \sin\theta d\theta d\phi. \quad (3.14)$$

Para simplificar las cosas haremos uso de las siguientes identidades:

$\widehat{n} \times \left(\widehat{k} \times \widehat{n}\right) \bullet \widehat{n} = 0,$

$\widehat{k} \times \left(\widehat{k} \times \widehat{n}\right) \bullet \widehat{n} = \widehat{n} \times \widehat{k} \bullet \left(\widehat{k} \times \widehat{n}\right) = - \mid \widehat{k} \times \widehat{n} \mid = - \sin^2\theta.$

De las Ecs. (1.23), se calculan los siguientes productos:

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{E}_o \times \overrightarrow{B}_o\right) \bullet \widehat{n} &= 0, \quad (3.15)\\
\left(\overrightarrow{E}_1 \times \overrightarrow{B}_o\right) \bullet \widehat{n} &= \frac{v\dot{v}}{2R^3} \sin^2\theta,\\
\left(\overrightarrow{E}_o \times \overrightarrow{B}_1\right) \bullet \widehat{n} &= 0,\\
\left(\overrightarrow{E}_o \times \overrightarrow{B}_2\right) \bullet \widehat{n} &= 0,\\
\left(\overrightarrow{E}_1 \times \overrightarrow{B}_1\right) \bullet \widehat{n} &= -\frac{3v\dot{v}^2 \cos\theta}{4R^2} \sin^2\theta,\\
\left(\overrightarrow{E}_2 \times \overrightarrow{B}_o\right) \bullet \widehat{n} &= -\frac{v}{R^2} \left(\frac{2}{3}\dot{v} + \frac{3\dot{v}^2 \cos\theta}{4} \right) \sin^2\theta,
\end{aligned}$$

Sustituyendo las Ecs. (3.15) en las Ecs. (3.12), (3.13) y (3.14), se tiene,

$$\begin{aligned}
W_{-2} &= \mathcal{O}\left(v^2\right), \quad (3.16)\\
W_{-1} &= \lim_{R\longrightarrow 0} - \frac{q^2 \dot{v} v}{3R} + \mathcal{O}\left(v^2\right),\\
W_0 &= q^2 \frac{4}{9} v \ddot{v} + \mathcal{O}\left(v^2\right).
\end{aligned}$$

De tal manera que,

$$W = W_0 + W_{-1} + W_{-2} = \lim_{R \longrightarrow 0} -\frac{q^2 \dot{v} v}{3R} + \frac{4q^2}{9} v \ddot{v} + \mathcal{O}\left(v^2\right). \tag{3.17}$$

Acontinuación calcularemos a:

$$G = G_{-2} + G_{-1} + G_o.$$

Como se observa en la Ec. (3.11) aparece la densidad de energía electromagnética $u = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + B^2\right)$, en el límite cuando $R \rightarrow 0$, algunos de los campos eléctricos y magnéticos se anularan, por lo cual, de las Ecs. (1.23), sólo se consideran los productos que no se anulan que acontinuación se mencionan:

$$E^2 = q^2 \left[\left(E_o^2\right) + \left(2\overrightarrow{E}_o \bullet \overrightarrow{E}_1\right) + \left(E_1^2 + 2\overrightarrow{E}_o \bullet \overrightarrow{E}_2\right)\right],$$

donde G_i representa los términos que contienen a R^i, es decir,

$$\begin{aligned}
G_{-2} &= \lim_{R \longrightarrow 0} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \left(\frac{\overrightarrow{E}_0^2}{8\pi}\right) \left(\overrightarrow{v} \bullet \widehat{n}\right) R^2 \sin\theta d\theta d\phi + \mathcal{O}\left(v^2\right), \qquad (3.18)\\
G_{-2} &= \lim_{R \longrightarrow 0} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \left(\frac{\overrightarrow{E}_0^2}{8\pi}\right) \left(\overrightarrow{v} \bullet \widehat{n}\right) R^2 \sin\theta d\theta d\phi + \mathcal{O}\left(v^2\right),\\
G_{-1} &= \lim_{R \longrightarrow 0} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \left(\frac{2\overrightarrow{E}_o \bullet \overrightarrow{E}_1}{8\pi}\right) \left(\overrightarrow{v} \bullet \widehat{n}\right) R^2 \sin\theta d\theta d\phi + \mathcal{O}\left(v^2\right),\\
G_o &= \lim_{R \longrightarrow 0} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \left(\frac{E_1^2 + 2\overrightarrow{E}_o \bullet \overrightarrow{E}_2}{8\pi}\right) \left(\overrightarrow{v} \bullet \widehat{n}\right) R^2 \sin\theta d\theta d\phi + \mathcal{O}\left(v^2\right).
\end{aligned}$$

Usando las Ecs.(1.23),

$$\begin{aligned}
E_o^2 &= \frac{v}{R^4}\cos\theta, \qquad (3.19)\\
\left(2\overrightarrow{E}_0 \bullet \overrightarrow{E}_1\right)(\overrightarrow{v}\bullet\widehat{n}) &= \frac{2v\dot{v}}{R^3}\cos^2\theta,\\
\left(E_1^2\right)(\overrightarrow{v}\bullet\widehat{n}) &= -\frac{v\dot{v}^2}{4R^2}\left(3\cos^2\theta+1\right)\cos\theta,\\
\left(2\overrightarrow{E}_o \bullet \overrightarrow{E}_2\right)(\overrightarrow{v}\bullet\widehat{n}) &= \left[-\frac{6\sin^2\theta v\dot{v}^2}{8R^2}+\frac{2}{R^2}\left(\frac{2v\ddot{v}}{3}+\frac{3v\dot{v}^2}{4}\cos\theta\right)\cos\theta\right]\cos\theta.
\end{aligned}$$

Sustituyendo las Ecs. (3.19) en (3.18) y después de realizar la integral obtenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned}
G_{-2} &= \mathcal{O}\left(v^2\right), \qquad (3.20)\\
G_{-1} &= \lim_{R\longrightarrow 0} -\frac{q^2\dot{v}v}{3R},\\
G_0 &= \frac{2q^2}{9}v\ddot{v}+\mathcal{O}\left(v^2\right),
\end{aligned}$$

donde G la definimos de la siguente manera:

$$G = G_{-2}+G_{-1}+G_0 = \lim_{R\longrightarrow 0} -\frac{q^2\dot{v}v}{3R}+\frac{2q^2}{9}v\ddot{v}+\mathcal{O}\left(v^2\right). \qquad (3.21)$$

Sumando las Ecs. (3.17) y (3.21) para obtener la razón de cambio de energía mecánica y de campo nos queda de la siguiente manera:

$$\frac{dE_{mech}}{dt}+\frac{dE_{field}}{dt} = W+G = \lim_{R\longrightarrow 0} -\frac{2}{3}\frac{q^2\dot{v}v}{R}+\frac{2}{3}q^2v\ddot{v}+\mathcal{O}\left(v^2\right). \qquad (3.22)$$

Si se considera que la energía perdida debido a la radiación igual al producto de la fuerza de radiación por la velocidad, se obtiene

$$\frac{dE_{mech}}{dt}+\frac{dE_{field}}{dt} = \overrightarrow{f}_{rad}\bullet\overrightarrow{v} = \left(\lim_{R\longrightarrow 0} -\frac{2}{3}\frac{q^2\dot{v}}{R}+\frac{2}{3}q^2\ddot{v}\right)v+\mathcal{O}\left(v^2\right). \qquad (3.23)$$

De tal manera que:

$$f_{rad} = \lim_{R \longrightarrow 0} \left[-\frac{2}{3} \frac{q^2 \dot{v}}{R} + \frac{2q^2 \dot{v}}{3} \left[\frac{1}{R} \right]_0^R \right] + \frac{2}{3} q^2 \ddot{v} + \mathcal{O}\left(v^2\right), \tag{3.24}$$

y realizando una renormalización similar a la que realizó Dirac [1], pero con la singularidad que en este caso estamos eliminado dos términos. Es muy importante hacer notar lo siguiente, si fijamos nuestra atención sólo en el término del límite de la Ec. (3.24)

$$\lim_{R \longrightarrow 0} \left[-\frac{2}{3} \frac{q^2 \dot{v}}{R} + \frac{2q^2 \dot{v}}{3} \left[\frac{1}{R} \right]_0^R \right]$$

y posteriormente, evaluamos el segundo término sólo en el límite superior que es R y no se considera el cero, entonces se eliminaría de manera natural la renormalización. Y si consideramos el cero, la Ec. (3.24) se transformara en:

$$f_{rad} = -\frac{2}{3} \frac{q^2 \dot{v}}{0} + \frac{2}{3} q^2 \ddot{v} + \mathcal{O}\left(v^2\right). \tag{3.25}$$

Hay que hacer notar que la Ec. (3.25) se escribe en forma erronea a proposito por el cero, aunque aparentemente la renormalización es distinta a la de Dirac [1]. Si lo hubieramos hecho en forma directa, considerando que la Ec. (3.2) vale cero, entonces hubiésemos encontrado que:

$$f_{rad} = -\lim_{R \longrightarrow 0} \frac{2}{3} \frac{q^2 \dot{v}}{R} + \frac{2}{3} q^2 \ddot{v} + \mathcal{O}\left(v^2\right), \tag{3.26}$$

que es equivalente al resultado de Dirac [1]. Realizando la renormalización, o sea, eliminando el término $\lim_{R \longrightarrow 0} \frac{2}{3} \frac{q^2 \dot{v}}{R}$, se llega a:

$$\overrightarrow{f}_{rad} = \frac{2}{3} q^2 \ddot{\overrightarrow{v}} + \mathcal{O}\left(v^2\right). \tag{3.27}$$

Hay que recordar que este resultado se obtiene considerando la velocidad y la aceleración de manera paralelas. No obstante, obtenemos una hiperaceleración, se puede concluir de tal manera que la fuerza de radiación a orden cero en la velocidad es

$$\overrightarrow{f}_{rad} = \frac{2}{3} q^2 \ddot{\overrightarrow{v}} + \mathcal{O}\left(v^2\right).$$

Este es el término que fue encontrado por Abraham [9]. Necesitamos poner a la Ec. (3.27), en una forma covariante relativista. Se debe agregar un término, el cuál dará un equilibrio covariante. Donde hemos usado la técnica desarrollada por Rohrlich [4], Barut [14] y Landau y Lifshitz [3], con lo que llegamos a que la Ec. (3.27) se transforma en:

$$f^{\mu}_{rad} = \frac{2}{3}q^2\left(\ddot{v}^{\mu} + a_{\nu}a^{\nu}v^{\mu}\right). \tag{3.28}$$

Debemos comprobar si este resultado se conserva cuando introducimos una fuerza externa ($\overrightarrow{F}_{ext} = q\overrightarrow{E}_{ext}$). Volviendo a realizar los cálculos, y si consideramos que el campo eléctrico externo es paralelo a la velocidad, es decir

$$\overrightarrow{E}_{ext} = E_{ext}\,\widehat{k}, \quad E_{ext} = cte. \tag{3.29}$$

De manera análoga al cálculo de W, se calcula W_{ext}, y considerando sólo el término que no se anula cuando $R \to 0$, es decir,

$$W_{ext} = -\lim_{R\longrightarrow 0}\frac{1}{4\pi}\oint\left(\overrightarrow{E}_{ext}\times\overrightarrow{B}_{o}\right)\bullet d\overrightarrow{A} + \mathcal{O}\left(v^2\right). \tag{3.30}$$

Sustituyendo $\overrightarrow{B}_o$ de las Ecs. (1.23) en la Ec. (3.30),

$$W_{ext} = -\lim_{R\longrightarrow 0}\frac{q}{4\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\left\{\left(E_{ext}\widehat{k}\right)\times\left[\frac{v}{R^2}\left(\widehat{k}\times\widehat{n}\right)\right]\right\}\bullet\widehat{n}R^2\sin\theta d\theta d\phi. \tag{3.31}$$

Realizando la integral llegamos a que

$$W_{ext} = \frac{2}{3}qvE_{ext} + \mathcal{O}\left(v^2\right). \tag{3.32}$$

De manera análoga al cálculo de G, se calcula G_{ext}, y considerando sólo el término que no se anula cuando $R \to 0$, es decir,

$$G_{ext} = \lim_{R\longrightarrow 0}\frac{1}{8\pi}\oint 2\left(\overrightarrow{E}_{ext}\bullet q\overrightarrow{E}_0\right)\overrightarrow{v}\bullet d\overrightarrow{A} + \mathcal{O}\left(v^2\right). \tag{3.33}$$

Sustituyendo el campo $\overrightarrow{E}_o$ de las Ecs. (1.23), en la Ec. (3.33),

$$G_{ext} = \lim_{R\longrightarrow 0}\frac{v}{4\pi}\oint\left[\left(E_{ext}\widehat{k}\right)\bullet\left(\frac{q}{R^2}\widehat{n}\right)\right]\left(\widehat{k}\bullet\widehat{n}\right)R^2\sin\theta d\theta d\phi + \mathcal{O}\left(v^2\right).$$

realizando la integral llegamos a que

$$G_{ext} = \frac{qv}{3} E_{ext} + \mathcal{O}\left(v^2\right). \tag{3.34}$$

de tal manera que sumando las Ecs. (3.32) y (3.34) obtenemos que:

$$W_{ext} + G_{ext} = qvE_{ext} + \mathcal{O}\left(v^2\right). \tag{3.35}$$

Por consiguiente, usando las Ecs. (3.27) y (3.35), y generalizando para cualquier dirección de la fuerza, llegamos a:

$$m\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{v} = \left(\overrightarrow{f}_{ext} + \overrightarrow{f}_{rad}\right) \bullet \overrightarrow{v} = q\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{E}_{ext} + \frac{2}{3}q^2 \ddot{\overrightarrow{v}} \bullet \overrightarrow{v} + \mathcal{O}\left(v^2\right), \tag{3.36}$$

es decir

$$m\overrightarrow{a} = q\overrightarrow{E}_{ext} + \frac{2}{3}q^2 \ddot{\overrightarrow{v}} + \mathcal{O}\left(v^2\right). \tag{3.37}$$

Esta es la ecuación de Abraham-Lorentz. Si se generaliza a una forma covariante tomando la filosofía de proyecciones y equilibrio, el resultado es la ecuación de Lorentz-Dirac.

$$ma^\mu = F^{\mu\nu}v_\nu + \frac{2}{3}q^2\left(\ddot{v}^\mu + a_\nu a^\nu v^\mu\right). \tag{3.38}$$

A pesar de haber considerado las correcciones en las integrales debido al movimiento v, se obtiene el mismo proceso de renormalización.

Conclusión

Hemos encontrado el resultado que encontró Dirac[1] utilizando el método de Lagrange-Gordeyev [6]. No solamente nosotros lo hemos hecho, en la literatura existen un buen número de deducciones alternas. Sin embargo este método permite afirmar que la renormalización de la masa no proviene de considerar campos avanzados y retardados sino sólo de los campos retardados. Cabe hacer notar que últimamente la ecuación de Landau y Lifshitz [3] ha sido considerada como una buena propuesta para describir el movimiento de una partícula cargada. Más aún, para Spohn [5] y Rohrlich [4] representa la forma correcta de describir el movimiento de una partícula cargada sin espín. Ares de Parga [13] ha demostrado no solamente que la ecuación de Landau y Lifshitz [3] es la correcta sino que los campos de radiación dependen de las fuerzas aplicadas de origen electromagnético. Como consecuencia de ello la fórmula de Larmor [7] generalizada debe sustituirse por otra expresión que sólo depende de los campos aplicados. Por ello el infinito que se encuentra no debe existir pues los campos aplicados no divergen. Sin embargo tanto la deducción de Spohn [5] como la de Ares de Parga [13] parten de la ecuación de Dirac [1]. El trabajo por realizar consiste en retomar los cálculos de ambos y hacerlos compatibles para no realizar una renormalización.

Bibliografía

[1] P. A. M. Dirac Proc. R. Soc. London, 1er A, 167 (1938) 148.

[2] M.Planck, Ann. Phys. (Leipzig) 63 (1887) 419.

[3] L. Landau and E. Lifshitz, Classical Theory of Fields (Addison Wesley, Mass.) sec. 76 (1951).

[4] F. Rohrlich, Am. J. Phys. 68, 12, (2000) 1109.

[5] H. Spohn, Europhys. Lett., 50, 3 (2000) 287.

[6] A. N. Gordeyev, J. Phys. A: Math. Gen., 8,7 (1975) 1048.

[7] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, Second Edition, Pags. 654-660.

[8] S. Domínguez, Tesis Doctoral, Estudio del movimiento de una partícula cargada en un campo electromagnético.

[9] M. Abraham, Ann. Phys. (Leipzig) 10 (1903) 105.

[10] G. Ares de Parga, R. Mares y S. Domínguez, Nuovo Cimento B, 116 (2000) 85.

[11] I. Campos and J. L. Jiménez, Phys. Rev. D, 33 (1986) 607.

[12] F. V. Hartemann and N. C. Luhmann, Jr., Phys. Rev. Lett., 74, 7 (1995) 1107.

[13] G. Ares de Parga, A physical deduction of an equivalent Landau and Lifshitz equation of motion. A new expression for the Large distance radiation rate of energy, por publicarse en el 2006 en Foundation of Physics.

[14] A. O. Barut, Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles (Dover Publications, Inc., New York) Chap. 5 (1980) 18.

[15] T. H. Boyer, Phys. Rev. D. 25 (1982) 3246.

[16] F. Rohrlich, Phys. Rev. D. 3251.