INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FISICA Y MATEMATICAS

Tesis:

Juego De Estrategias Para La Negociación De Un Contrato

Presenta:

Miranda López Daniel Alejandro

Asesor:

Dr. Jose Armando De León Solorzano

Febrero de 2008

RESUMEN

El presente trabajo es un intento mas de conseguir, uno de los objetivos mas deseados por el hombre, la confianza de saber, que es lo que va a ocurrir en una situación de incertidumbre, o dicho en los términos que se manejaran, un cierto nivel de confianza acerca de los resultados de un juego.

Diversas ciencias han tratado de lograr este objetivo para una gran cantidad de problemas. Este proyecto es enfocado a solo una de estos problemas, la negociación para la renovación de un contrato en la que se enfrentan, empresa vs. empleado. Para esto, se requerirá de conceptos básicos de algebra, así como de conceptos de teoría de juegos y tipos de muestreo, los cuales serán desarrollados o mencionados según se requiera y convenga.

Lo que pretende este proyecto es mostrar, que aun hasta en situación de incertidumbre, existe la posibilidad de asegurar un resultado, sin importar lo que nuestro adversario planee hacer. Y mas aun, mostrar que este conflicto, al que llamaremos juego, tiene una solución que es optima para cada una de las partes.

ÍNDICE

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción

Desde el principio de la humanidad, el hombre ha evolucionado por su gran búsqueda de tener más de lo que tiene, ya sea en bienes materiales o en comodidades. Si echamos un vistazo a través tiempo, podemos darnos cuenta de cómo los hombres siempre hemos estado en busca de aquello que sea necesario para estar en ventaja de las demás especies que habitan en conjunto con nosotros en este planeta. Pero aun mas importante, podemos ver como siempre hemos buscado ese punto extra que nos de la ventaja sobre nuestra propia especie.

Es por esta competitividad, que la humanidad se ha podido desarrollar de una forma que otras especies no lograron, debido a que no tienen el arma más fuerte con que fuimos dotados, la racionalidad. La llamo arma, por que gracias a esta racionalidad el hombre a logrado utilizar y transformar los recursos que la naturaleza le dio, no solo para satisfacer sus necesidades, si no también conseguir lo que le sea necesario para sobrepasar a quien se interponga entre el y sus objetivos, los cuales se han modificado y distorsionado con el pasar de los años, ya que después de poder satisfacer sus necesidades, esa búsqueda antes mencionada ha llevado al hombre a perseguir objetivos mas del índole de ambición que del de necesidad, tales como dinero y poder.

Desde entonces se han desarrollado las ciencias, hasta puntos para muchos inimaginables, a tal grado que han logrado el desarrollo de tecnologías que para los pueblos de la antigüedad no eran más que historias de ciencia ficción. Estos objetivos no solo han llevado a crear tecnologías capaces de otorgarle a la humanidad un mejor estilo de vida, sino que, lo han llevado a crear la tecnología suficiente para conseguir su propia destrucción.

Todo lo anterior es una muestra de cómo, la humanidad, esta en una competencia constante en contra de ella misma, por lo que, se ha dividido en diversos grupos que se identifican por perseguir los mismos objetivos, o bien por que todos sus integrantes están bajo el "poder", por así llamarlo, de algún individuo (o grupo menor) que puede satisfacer sus necesidades.

Esta competencia entre grupos que siempre buscan su propio bienestar nos ha obligado a desarrollar métodos (estrategias, armas, etc.), para asegurar una pequeña ventaja en contra de nuestros competidores. Esta lucha de grupos, por así llamarle, puede llegar a ser tan grande como las guerras entre países o las peleas para dominarlos (elecciones), o tan pequeña como la venta de un articulo o un juego de cartas.

1.2 Justificación

En la actualidad esta lucha o competencia entre grupos se puede encontrar en lugares tan cotidianos que nos hemos acostumbrado a vivir dentro de una "competencia constante" con todos y todo lo que nos rodea.

Lamentablemente, esta no es una competencia pareja en todos los casos, ya que en diversas ocasiones existen grupos que no parecen tener debilidad alguna, así como existe su contraparte, grupos que parecen demasiado vulnerables, y es realmente esta razón la que nos lleva a buscar "métodos de pelea" que puedan dar elementos para hacer esta competencia lo mas equitativa que se pueda, y por que no decirlo, cuando se pueda. Ya que existen competencias en las que parece conocerse el resultado de dicha lucha, casi antes de empezarla.

El caso concreto por el cual se realiza este estudio, es el enfrentamiento que tienen dos grupos que cada vez son mas frecuentes, por un lado los trabajadores de alguna empresa, que tienen contratos por un tiempo determinado con esta, y por el otro lado la misma empresa.

Estos dos grupos se enfrentan en una competencia cada cierto periodo de tiempo, el cual esta dado por la duración del contrato antes pactado, para le elaboración de un nuevo contrato el cual puede llegar a variar en muchos aspectos, pero sin duda alguna para este estudio el mas importante es el de la cuestión monetaria. Esta lucha es una de las muestras mas claras de cómo cada uno de los individuos busca su propio bienestar por encima del de su contrario. Por una parte los empleados siempre buscaran poder conseguir un aumento en sus utilidades y por el otro la empresa siempre tratara de reducir lo mas que pueda los costos que le ocasionan las nominas.

El gran problema en esta competencia es que los dos participantes son la mayoría de las veces racionales, siempre y cuando sus intereses no se vea muy afectados claro esta, y por lo tanto no actúan de modo premeditado, es decir, cada vez planean mas sus pasos a seguir dentro de la pelea, por lo que cada uno de ellos tienen que tener mas cautela de lo que piense hacer ya que probablemente su contraparte pueda anticipar sus acciones. Es por eso que encontrar el modo de proporcionar una estrategia a seguir para cada una de las partes de este conflicto se ha convertido en algo primordial, ya que nos ofrece un cierto nivel de seguridad para poder actuar, sin importarnos lo que nuestra contraparte llegue a hacer.

1.3 Objetivo

Proporcionar la estrategia optima para negociar una revisión salarial, mediante la herramienta de la teoría de juegos.

1.4 Importancia De La Teoría De Juegos En Una Empresa

La teoría de juegos describe las situaciones envueltas en conflictos en los cuales el beneficio es afectado por las acciones y contra-reacciones de oponentes inteligentes. Esta es una de la características mas importantes por la que es considerada como una de las herramientas mas útiles para el análisis de toma de decisiones dentro de las empresas, ya que brinda una estrategia a estas, la cual le da un nivel de seguridad acerca del problema al que se esta enfrentando y es por esa razón también por la cual será el arma mas importante que ayudara a conseguir el objetivo.

Es sin duda un modelo para empresas ganadoras o exitosas en un ambiente competitivo: Por ejemplo, existen muchos factores a considerar cuando se hace una oferta importante, entre los cuales están: Establecer y mantener una posición de preferencia como oferente, desarrollar una relación de preferencia por parte de los clientes, de lo que se oferta en sí mismo, y del precio. Aunque este es solo un pequeño ejemplo de la gran gama de problemas en los que puede actuar la teoría de juegos. Enseguida enunciaremos algunos problemas en los que se ha podido aplicar de manera eficaz:

- **El análisis de las negociaciones**. Las negociaciones entre sindicato y empresa, por ejemplo, se pueden analizar como juegos en que las partes tratan de dividir el excedente de la empresa antes de pagar los salarios.
- **El análisis de las licitaciones**. Las empresas y el Estado utilizan procesos de licitación para comprar o vender bienes y servicios. Es importante saber cuales son los mecanismos de licitación adecuados ante cada tipo de licitación y sus debilidades.
- **El comportamiento de las firmas ante la entrada de competencia**. Las firmas pueden ser agresivas frente a la nueva competencia, reduciendo precios y aumentando el gasto publicitario o pueden acomodar la entrada, tratando de llegar a un entendimiento con la firma entrante.
- **Los juegos de atrición**, en los que se evalúa la capacidad para resistir y que permiten evaluar la situación de defensa de un país.
- **Estrategias en comercio internacional**. En el comercio internacional, los gobiernos protegen la producción nacional a costa de las empresas extranjeras,

evaluando el costo que podría tener una posible reacción de los gobiernos extranjeros.

- **Análisis político**. Las reglas electorales alteran las plataformas electorales de los candidatos y se pueden estudiar las consecuencias de distintos tipos de reglas. Un ejemplo en que las predicciones de los modelos teóricos se cumplen es la segunda vuelta electoral del 2000.
- **Evolución de las especies biológicas**. Las especies que conocemos son el producto de un largo proceso de interacciones con otras especies. Los genes y la influencia de estos sobre su comportamiento y características físicas hacen que individuos de una especie tengan distinta capacidad reproductora, con lo que los genes más exitosos en el juego reproductivo son los que sobreviven.

Como se puede ver con estos problemas, la teoría de juegos no solo es utilizada por empresas para las cuestiones económicas, de hecho esta herramienta aparece en diversas disciplinas, aportando métodos de solución o bien estrategias para toma de desiciones. A continuación se mostraran algunas de las disciplinas de las que se ha hablado.

1.5 Aplicación De La Teoría De Juegos En Las Diversas Disciplinas

La teoría de juegos tiene la característica de ser principalmente una categoría de matemáticas aplicadas, pero la mayoría de la investigación fundamental es desempeñada por especialistas en otras áreas. En algunas universidades se enseña y se investiga casi exclusivamente fuera del departamento de matemática.

Esta teoría tiene aplicaciones en numerosas áreas, entre las cuales caben destacar las ciencias económicas, la biología evolutiva, la psicología, las ciencias políticas y la estrategia militar.

1.5.1 Economía y Negocios

Los economistas han usado la teoría de juegos para analizar un amplio abanico de problemas económicos, incluyendo subastas, duopolios, oligopolios, la formación de redes sociales, y sistemas de votaciones. Estas investigaciones normalmente están enfocadas a conjuntos particulares de estrategias conocidos como conceptos de solución. Estos conceptos de solución están basados normalmente en lo requerido por las normas de racionalidad perfecta. Las recompensas de los juegos normalmente representan la utilidad de los jugadores individuales.

Un documento de teoría de juegos en economía empieza presentando un juego que es una abstracción de una situación económica particular. Se eligen una o más soluciones, y el autor demuestra qué conjunto de estrategias corresponden al equilibrio en el juego presentado.

Los economistas y profesores de escuelas de negocios sugieren dos usos principales.

1.5.1.1 Descriptiva

El uso principal es informar acerca del comportamiento de las poblaciones humanas actuales. Algunos investigadores creen que encontrar el equilibrio de los juegos puede predecir cómo se comportarían las poblaciones humanas si se enfrentasen a situaciones análogas al juego estudiado. Esta visión particular de la teoría de juegos se ha criticado en la actualidad. En primer lugar, se le critica porque los supuestos de los teóricos se violan frecuentemente. Los teóricos de juegos pueden suponer jugadores que se comportan siempre racionalmente y actúan para maximizar sus beneficios (el modelo

homo oeconomicus), pero los humanos reales a menudo actúan irracionalmente o racionalmente pero buscando el beneficio de un grupo mayor (altruismo).

Los teóricos de juegos responden comparando sus supuestos con los que se emplean en física. Así, aunque sus supuestos no se mantienen siempre, pueden tratar la teoría de juegos como una idealización razonable, de la misma forma que los modelos usados por los físicos. Sin embargo, este uso de la teoría de juegos se ha seguido criticando porque algunos experimentos han demostrado que los individuos no se comportan según estrategias de equilibrio.

Por otra parte, algunos autores aducen que los equilibrios de Nash no proporcionan predicciones para las poblaciones humanas, sino que proporcionan una explicación de por qué las poblaciones que se comportan según el equilibrio de Nash permanecen en esa conducta. Sin embargo, la cuestión acerca de cuánta gente se comporta así permanece abierta.

Algunos teóricos de juegos han puesto esperanzas en la teoría evolutiva de juegos para resolver esas preocupaciones. Tales modelos presuponen o no racionalidad o una racionalidad acotada en los jugadores. A pesar del nombre, la teoría evolutiva de juegos no presupone necesariamente selección natural en sentido biológico. La teoría evolutiva de juegos incluye las evoluciones biológica y cultural y también modela el aprendizaje individual.

1.5.1.2 Normativa

Por otra parte, algunos matemáticos no ven la teoría de juegos como una herramienta que predice la conducta de los seres humanos, sino como una sugerencia sobre cómo deberían comportarse. Dado que el equilibrio de Nash constituye la mejor respuesta a las acciones de otros jugadores, seguir una estrategia que es parte del equilibrio de Nash parece lo más apropiado. Sin embargo, este uso de la teoría de juegos también ha recibido críticas. En primer lugar, en algunos casos es apropiado jugar según una estrategia ajena al equilibrio si uno espera que los demás también jugarán de acuerdo al equilibrio.

El dilema del prisionero presenta otro contraejemplo potencial. En este juego, si cada jugador persigue su propio beneficio ambos jugadores obtienen un resultado peor que de no haberlo hecho. Algunos matemáticos creen que esto demuestra el fallo de la teoría de juegos como una recomendación de la conducta a seguir.

1.5.2 Ciencias políticas

La Teoría de Juegos no ha tenido el mismo impacto en la ciencia política que en economía. Tal vez esto se deba a que la gente se conduce menos racionalmente cuando lo que está en juego son ideas que cuando lo que está en juego es su dinero. Sin embargo, se ha convertido en un instrumento importante para clarificar la lógica subyacente de un cierto número de problemas más paradigmáticos.

Pero también debemos de recalcar que la investigación en ciencias políticas ha usado resultados de la teoría de juegos. Una explicación de **la teoría de la paz democrática** es que el debate público y abierto en la democracia envía información clara y fiable acerca de las intenciones de los gobiernos hacia otros estados. Por otra parte, es difícil conocer los intereses de los líderes no democráticos, qué privilegios otorgarán y qué promesas mantendrán. Según este razonamiento, habrá desconfianza y poca cooperación si al menos uno de los participantes de una disputa no es una democracia.

1.5.3 Biología

A diferencia del uso de la teoría de juegos en la economía, las recompensas de los juegos en biología se interpretan frecuentemente como adaptación. Además, su estudio se ha enfocado menos en el equilibrio que corresponde a la noción de racionalidad, centrándose en el equilibrio mantenido por las fuerzas evolutivas. El equilibrio mejor conocido en biología se conoce como **estrategia evolutivamente estable**, y fue introducido por primera vez por John Maynard Smith. Aunque su motivación inicial no comportaba los requisitos mentales del equilibrio de Nash, toda estrategia evolutivamente estable es un equilibrio de Nash.

En biología, la teoría de juegos se emplea para entender muchos problemas diferentes. Se usó por primera vez para explicar la evolución (y estabilidad) de las proporciones de sexos 1:1 (mismo número de machos que de hembras). Ronald Fisher sugirió en 1930 que la proporción 1:1 es el resultado de la acción de los individuos tratando de maximizar el número de sus nietos sujetos a la restricción de las fuerzas evolutivas.

Además, los biólogos han usado la teoría de juegos evolutiva y el concepto de estrategia evolutivamente estable para explicar el surgimiento de la comunicación animal (John Maynard Smith y Harper en el año 2003). El análisis de juegos con señales y otros juegos de comunicación ha proporcionado nuevas interpretaciones acerca de la evolución de la comunicación en los animales.

Finalmente, los biólogos han usado el problema halcón-paloma (también conocido como problema de la gallina) para analizar la conducta combativa y la territorialidad.

1.5.4 Filosofía

La teoría de juegos ha demostrado tener muchos usos en filosofía. A partir de dos trabajos de W.V.O. Quine publicados en 1960 y 1967, David Lewis (1969) usó la teoría de juegos para desarrollar el concepto filosófico de convención. De esta forma, proporcionó el primer análisis del **conocimiento común** y lo empleó en analizar juegos de coordinación. Además, fue el primero en sugerir que se podía entender el significado en términos de juegos de señales. Esta sugerencia se ha seguido por muchos filósofos desde el trabajo de Lewis.

Los especialistas en Teoría de Juegos creen que pueden demostrar formalmente por qué incluso el individuo más egoísta puede descubrir que con frecuencia, cooperar con sus vecinos en una relación a largo plazo redundará en su propio interés ilustrado. Con este fin estudian los equilibrios de juegos con repetición (juegos que los mismos jugadores juegan una y otra vez). Pocas cosas han descubierto en esta área hasta el presente que hubieran sorprendido a David Hume, quien hace ya unos doscientos años articuló los mecanismos esenciales. Estas ideas, sin embargo, están ahora firmemente basadas en modelos formales. Para avanzar más, habrá que esperar progresos en el problema de la selección de equilibrios en juegos con múltiples equilibrios

En ética, algunos autores han intentado continuar la idea de Thomas Hobbes de derivar la moral del interés personal. Dado que juegos como el dilema del prisionero presentan un conflicto aparente entre la moralidad y el interés personal, explicar por qué la cooperación es necesaria para el interés personal es una componente importante de este proyecto. Esta estrategia general es un componente de la idea de contrato social en filosofía política.

Finalmente, otros autores han intentado usar la teoría evolutiva de juegos para explicar el nacimiento de las actitudes humanas ante la moralidad y las conductas animales correspondientes. Estos autores han buscado ejemplos en muchos juegos, incluyendo el dilema del prisionero, la caza del ciervo, y el juego del trato de Nash para explicar la razón del surgimiento de las actitudes acerca de la moral.

1.5.5 Informática y lógica

La teoría de juegos ha empezado a desempeñar un papel importante en la lógica y la informática. Muchas teorías lógicas se asientan en la semántica de juegos. Además, los investigadores de informática han usado juegos para modelar programas que interactúan entre sí.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO

A continuación se dará una breve, pero espero, concisa explicación de cada uno de los conceptos que se requerirán para la resolución de el problema planteado en el capitulo anterior. Para esto se desarrollarán algunos de los conceptos de la teoría de juegos y se explicaran los diferentes tipos de muestreo que se conocen.

2.1 Teoría De Juegos

La Teoría de Juegos se desarrollo con el simple hecho de que un individuo se relacionara con otro u otros. Hoy en día, es fácil enfrentarse cotidianamente a esta teoría, en cualquier momento, tenemos por ejemplo cuando nos inscribimos en un nuevo semestre en la universidad, cuando la directiva toma la decisión sobre el monto que se va a cobrar, la directiva está realizando un juego con sus clientes, en este caso los alumnos. Para el hombre la importancia que representa la Teoría de Juegos es evidente, pues a diario se enfrenta a múltiples situaciones que son juegos.

2.1.2 Introducción A La Teoría De Juegos

Los psicólogos destacan la importancia del juego en la infancia como medio de formar la personalidad y de aprender de forma experimental a relacionarse en sociedad, a resolver problemas y situaciones conflictivas. Todos los juegos, de niños y de adultos, juegos de mesa o juegos deportivos, son modelos de situaciones conflictivas y cooperativas en las que podemos reconocer situaciones y pautas que se repiten con frecuencia en el mundo real.

El estudio de los juegos ha inspirado a científicos de todos los tiempos para el desarrollo de teorías y modelos matemáticos. La estadística es una rama de las matemáticas que surgió precisamente de los cálculos para diseñar estrategias vencedoras en juegos de azar. Conceptos tales como probabilidad, media ponderada y distribución o desviación estándar, son términos acuñados por la estadística matemática y que tienen aplicación en el análisis de juegos de azar o en las frecuentes situaciones sociales y económicas en las que hay que adoptar decisiones y asumir riesgos ante componentes aleatorios.

Pero la Teoría de Juegos tiene una relación muy lejana con la estadística. Su objetivo no es el análisis del azar o de los elementos aleatorios sino de los comportamientos estratégicos de los jugadores. En el mundo real, tanto en las relaciones económicas como en las políticas o sociales, son muy frecuentes las situaciones en las que, al igual que en los juegos, su resultado depende de la conjunción de decisiones de diferentes agentes o jugadores. Se dice de un comportamiento que es estratégico cuando se adopta teniendo en cuenta la influencia conjunta sobre el resultado propio y ajeno de las decisiones propias y ajenas.

La Teoría de Juegos ha alcanzado un alto grado de sofisticación matemática y ha mostrado una gran versatilidad en la resolución de problemas. Muchos campos de la Economía (Equilibrio General, Distribución de Costos, etc.), se han visto beneficiados por las aportaciones de este método de análisis. En el medio siglo transcurrido desde su primera formulación el número de científicos dedicados a su desarrollo no ha cesado de crecer. Y no son sólo economistas y matemáticos sino sociólogos, politólogos, biólogos o psicólogos. Existen también aplicaciones jurídicas: asignación de responsabilidades, adopción de decisiones de pleitear o conciliación, etc.

Hay dos clases de juegos que plantean una problemática muy diferente y requieren una forma de análisis distinta:

1. Si los jugadores pueden comunicarse entre ellos y negociar los resultados se tratará de juegos con transferencia de utilidad (también llamados juegos cooperativos), en los que la problemática se concentra en el análisis de las posibles coaliciones y su estabilidad.

2. En los juegos sin transferencia de utilidad, (también llamados juegos no cooperativos) los jugadores no pueden llegar a acuerdos previos; es el caso de los juegos conocidos como "la guerra de los sexos", el "dilema del prisionero" o el modelo "halcón-paloma".

Los modelos de juegos sin transferencia de utilidad suelen ser bipersonales, es decir, con sólo dos jugadores. Pueden ser simétricos o asimétricos según que los resultados sean idénticos desde el punto de vista de cada jugador. Pueden ser de suma cero, cuando el aumento en las ganancias de un jugador implica una disminución por igual cuantía en las del otro, o de suma no nula en caso contrario, es decir, cuando la suma de las ganancias de los jugadores puede aumentar o disminuir en función de sus decisiones. Cada jugador puede tener opción sólo a dos estrategias, en los juegos biestratégicos, o a muchas. Las estrategias pueden ser puras o mixtas; éstas consisten en asignar a cada estrategia pura una probabilidad dada. En el caso de los juegos con repetición, los que se juegan varias veces seguidas por los mismos jugadores, las estrategias pueden ser también simples o reactivas, si la decisión depende del comportamiento que haya manifestado el contrincante en jugadas anteriores.

Tal vez con esta breve explicación hayan quedado confusos los diferentes conceptos acerca de la Teoría de Juegos, por lo que más adelante se explicara cada uno de ellos con un poco más de detalle.

2.1.3 Historia De La Teoría De Juegos

La primera discusión conocida de la Teoría de Juegos aparece en una carta escrita por James Waldegrave en 1713. En esta carta, Waldegrave proporciona una solución minimax de estrategia mixta a una versión para dos personas de un juego de cartas. Sin embargo no se publicó un análisis teórico de teoría de juegos en general hasta la publicación de "*Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses"*, de Antoine Augustin Cournot en 1838. En este trabajo, Cournot considera un duopolio y presenta una solución que es una versión restringida del equilibrio de Nash.

Aunque el análisis de Cournot es más general que el de Waldegrave, la teoría de juegos realmente no existió como campo de estudio aparte hasta que John von Neumann publicó una serie de artículos en 1928. Estos resultados fueron ampliados más tarde en su libro de 1944, "The *Theory of Games and Economic Behavior"*, escrito junto con Oskar Morgenstern. Este trabajo contiene un método para encontrar soluciones óptimas para juegos de suma cero de dos personas. Durante este período, el trabajo sobre teoría de juegos se centró, sobre todo, en teoría de juegos cooperativos. Este tipo de teoría de juegos analiza las estrategias óptimas para grupos de individuos, asumiendo que pueden establecer acuerdos entre sí acerca de las estrategias más apropiadas.

Von Neumann y Morgenstern investigaron dos planteamientos distintos de la Teoría de Juegos. El primero de ellos, el planteamiento estratégico o no cooperativo. Este planteamiento requiere especificar detalladamente lo que los jugadores pueden y no pueden hacer durante el juego, y después buscar cada jugador una estrategia óptima. Lo que es mejor para un jugador depende de lo que los otros jugadores piensan hacer, y esto a su vez depende de lo que ellos piensan del primer jugador hará. Von Neumann y Morgenstern resolvieron este problema en el caso particular de juegos con dos jugadores cuyos intereses son diametralmente opuestos. A estos juegos se les llama estrictamente competitivos, o de suma cero, porque cualquier ganancia para un jugador siempre se equilibra exactamente por una pérdida correspondiente para el otro jugador. El Ajedrez, el Back gamón y el Póquer son juegos tratados habitualmente como juegos de suma cero. La segunda parte del libro de Von Neumann y Morgenstern, se desarrolla el planteamiento coalicional o cooperativo, en el que buscaron describir la conducta óptima en juegos con muchos jugadores. Puesto que éste es un problema mucho más difícil, no es de sorprender que sus resultados fueran mucho menos precisos que los alcanzados para el caso de suma cero y dos jugadores. En particular, Von Neumann y Morgenstern abandonaron todo intento de especificar estrategias óptimas para jugadores individuales. En lugar de ello se propusieron clasificar los modelos de formación de coaliciones que son consistentes con conductas racionales. La negociación, en cuanto a tal, no jugaba papel alguno en esta teoría. De hecho, hicieron suyo el punto de vista, que había predominado entre los economistas al menos desde la época de Edgeworth, según el cual los problemas de negociación entre dos personas son inherentemente indeterminados.

A principio de los años cincuenta, en una serie de artículos muy famosos el matemático John Nash rompió dos de las barreras que Von Neumann y Morgenstern se había auto-impuesto. En el frente no cooperativo, estos parecen haber pensado que en estrategias la idea de equilibrio, introducida por Cournot en 1832, no era en sí misma una noción adecuada para construir sobre ella una teoría (de aquí que se restringieran a juegos de suma cero). Sin embargo, la formulación general de Nash de la idea de equilibrio hizo ver claramente que una restricción así es innecesaria. Hoy día, la noción de equilibrio de Nash, la cual no es otra cosa que cuando la elección estratégica de cada jugador es la respuesta óptima a las elecciones estratégicas de los otros jugadores. Nash también hizo contribuciones al planteamiento cooperativo de Von Neumann y Morgenstern.

Nash no aceptó la idea de que la Teoría de Juegos debe considerar indeterminados problemas de negociación entre dos personas y procedió a ofrecer argumentos para determinarlos. Sus ideas sobre este tema fueron generalmente incomprendidas y, tal vez como consecuencia de ello, los años que la Teoría de Juegos paso en Babia se gastaron principalmente desarrollando el planteamiento cooperativa de Von Neumann y Morgenstern en direcciones que finalmente resultaron improductivas.

Esa misma década fue el momento en el cual se desarrollaron los conceptos base como: el juego de forma extensiva, el juego ficticio, los juegos repetitivos, y el valor de Shapley. Además, en ese tiempo, aparecieron las primeras aplicaciones de la teoría de juegos en la filosofía y las ciencias políticas.

En 1965, Reinhard Selten introdujo su concepto de solución de los equilibrios perfectos del subjuego, que más adelante refinó el equilibrio de Nash. En 1967 John Harsanyi desarrolló los conceptos de la información completa y de los juegos bayesianos. Él, junto con John Nash y Reinhard Selten, ganaron el Premio Nóbel de Economía en 1994. En la década de 1970 la teoría de juegos se aplicó extensamente a la biología, en gran parte como resultado del trabajo de John Maynard Smith y su concepto estrategia estable evolutiva. Además, los conceptos del equilibrio correlacionado, la perfección del temblor de la mano, y del conocimiento común fueron introducidos y analizados.

En 2005, los teóricos de juegos Thomas Schelling y Robert Aumann ganaron el premio Nóbel de Economía. Schelling trabajó en modelos dinámicos, los primeros ejemplos de la teoría de juegos evolutiva. Por su parte, Aumann contribuyó más a la escuela del equilibrio.

2.1.4 Propiedades Para El Conocimiento Común Del Juego

El Filósofo Hobbes dijo que un hombre se caracteriza por su fortaleza física, sus pasiones, su experiencia y su razón.

Fortaleza Física: esta determina lo que alguien puede o no puede hacer. Un atleta puede planear correr una milla en cuatro minutos, pero sería imposible para la mayoría ejecutar este plan. La Teoría de Juegos incorpora estas consideraciones en las reglas del juego. Esta determina lo que es factible para un jugador. Más exactamente, un jugador queda limitado a escoger en el conjunto de sus estrategias en el juego.

Pasión y Experiencia: estas corresponden a las preferencias y creencias de un jugador. En la mayoría de los casos, ambas deben ser conocimiento común para que sea posible realizar un análisis en términos de la Teoría de Juegos.

Razón: en problemas de decisión unipersonales, los economistas simplemente suponen que los jugadores maximizan sus pagos esperados dadas sus creencias. En un juego las cosas son más complicadas, porque la idea de equilibrio da por supuesto que los jugadores saben algo acerca de cómo razona todo el mundo.

2.1.5 Descripción De Un Juego

Los elementos esenciales de un juego son los jugadores, las acciones, la información, las estrategias, los pagos, los resultados y los equilibrios. La descripción de un juego debe incluir por lo menos a los jugadores, las estrategias y los pagos, que se conforman a partir de las acciones y de la información. A los jugadores, las acciones y los resultados se les denomina colectivamente las reglas del juego y el objetivo del modelador es usar las reglas del juego para determinar el equilibrio. Donde:

Los **Jugadores** son individuos que toman decisiones. La meta de cada jugador es la de aumentar al máximo su utilidad mediante la elección de sus acciones.

Una **acción o movimiento** por un jugador i, a la que se representa por a_i, es una elección que el puede hacer.

El **conjunto de acciones** del jugador i $A_i = (a_i)$, es todo el conjunto de acciones que le son po sibles.

Un **perfil de acción** es un conjunto ordenado de a = (a_i), (i = 1,….., n) de una acción para cada uno de los n jugadores en el juego.

La **estrategia** s_i del jugador i es una regla que le dice que acción elegir en cada instante del juego, dado su conjunto de información.

El **conjunto de estrategia o espacio de estrategia** S_i = (s_i) del jugador i, es el conjunto de estrategias que tiene a su disposición.

Un **perfil de estrategia** s = ($s_{i,\ldots}$, $s_{n)}$, es un conjunto ordenado que consiste en una estrategia para cada uno de los n jugadores que participan en el juego.

Por **pago** π_i ($s_{i,}$…., s_n) del jugador i, nos referimos ya sea a:

- La utilidad que el jugador i recibe después de que todos los jugadores han elegido sus estrategias y se ha jugado el juego; o
- La utilidad esperada que recibe el jugador i, como una función de las estrategotas elegidas por el y por los otros jugadores.

El **resultado** de un juego es el conjunto de elementos interesantes que el modelador elige de los valores de las acciones, de los pagos y de otras variables después de que se ha jugado el juego

El **conjunto de información** de un jugador no solo incluye la distinción de variables, sino también el conocimiento de las acciones que se han tomado previamente. Ya que el conjunto de información incluye lo que sabe el jugador acerca de las acciones previas de los otros jugadores, la estrategia le dice como reaccionar a sus acciones.

2.1.6 Representación De Juegos

Los juegos estudiados por la teoría de juegos, están bien definidos por objetos matemáticos. Un juego consiste en un conjunto de jugadores, un conjunto de movimientos (o estrategias) disponible para esos jugadores y una especificación de recompensas para cada combinación de estrategias. Hay dos formas comunes de representar a los juegos.

2.2.6.1 Forma Normal O Estratégica De Un Juego

La forma normal (o forma estratégica) de un juego es una **matriz** que muestra los jugadores, las estrategias, y las recompensas. Gráficamente solo se utiliza para juegos bipersonales; uno elige la fila y otro la columna. Cada jugador tiene un conjunto de estrategias, que están especificadas por el número de filas y el número de columnas. Las recompensas se especifican en el interior. El primer número es la recompensa recibida por el jugador de las filas (el *Jugador 1* en nuestro ejemplo); el segundo es la recompensa del jugador de las columnas (el *Jugador 2* en nuestro ejemplo). Si el *jugador 1* elige arriba y el *jugador 2* elige izquierda entonces sus recompensas son 4 y 3, respectivamente.

Cuando un juego se presenta en forma normal, se presupone que todos los jugadores actúan simultáneamente o, al menos, sin saber la elección que toma el otro. Si los jugadores tienen alguna información acerca de las elecciones de otros jugadores el juego se presenta habitualmente en la forma extensiva.

También existe una forma normal reducida. Ésta combina estrategias asociadas con el mismo pago.

	El jugador 2 elige izquierda	*El jugador 2 elige derecha*
El jugador 1 elige arriba	4, 3	-1, -1
El jugador 1 elige abajo	0, 0	3, 4

Un juego en forma normal

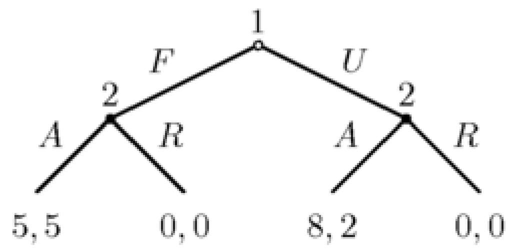
2.2.6.2 Forma Extensiva O De Árbol De Un Juego

La representación de juegos en forma extensiva modela juegos con algún orden que se debe considerar. Los juegos se presentan como árboles (como se muestra a la derecha). Cada vértice o nodo representa un punto donde el jugador toma decisiones. El jugador se especifica por un número situado junto al vértice. Las líneas que parten del vértice representan acciones posibles para el jugador. Las recompensas se especifican en las terminaciones de las ramas del árbol.

En el juego que se muestra en el ejemplo hay dos jugadores. El *jugador 1* mueve primero y elige *F* o *U*. El *jugador 2* ve el movimiento del *jugador 1* y elige *A* o *R*. Si el *jugador 1* elige *U* y entonces el *jugador 2* elige *A*, entonces el *jugador 1* obtiene 8 y el *jugador 2* obtiene 2.

Los juegos en forma extensiva pueden modelar también juegos de movimientos simultáneos. En esos casos se dibuja una línea punteada o un círculo alrededor de dos vértices diferentes para representarlos como parte del mismo conjunto de información (por ejemplo, cuando los jugadores no saben en qué punto se encuentran).

La forma normal da al matemático una notación sencilla para el estudio de los problemas de equilibrio, porque desestima la cuestión de cómo las estrategias son calculadas o, en otras palabras, de cómo el juego es jugado en realidad. La notación conveniente para tratar estas cuestiones, más relevantes para la teoría combinatoria de juegos, es la forma extensiva del juego.



Un juego en forma extensiva

2.1.7 Tipos De Juegos Y Ejemplos

La teoría clasifica los juegos en muchas categorías que determinan qué métodos particulares se pueden aplicar para resolverlos (y, de hecho, también cómo se define "resolución" en una categoría particular). Las categorías comunes incluyen:

2.1.7.1 Juegos Simétricos Y Asimétricos

Un juego simétrico es un juego en el que las recompensas por jugar una estrategia en particular dependen sólo de las estrategias que empleen los otros jugadores y no de quién las juegue. Si las identidades de los jugadores pueden cambiarse sin que cambien las recompensas de las estrategias, entonces el juego es simétrico. Muchos de los juegos 2×2 más estudiados son simétricos. Las representaciones estándar del juego de la gallina, el dilema del prisionero y la caza del ciervo son juegos simétricos.

Los juegos asimétricos más estudiados son los juegos donde no hay conjuntos de estrategias idénticas para ambos jugadores. Por ejemplo, el juego del ultimátum y el juego del dictador tienen diferentes estrategias para cada jugador; no obstante, puede haber juegos asimétricos con estrategias idénticas para cada jugador. Por ejemplo, el juego mostrado a la derecha es asimétrico a pesar de tener conjuntos de estrategias idénticos para ambos jugadores.

	E	***F***
E	1, 2	0, 0
F	0, 0	1, 2

Un juego de asimétrico

2.1.7.2 Juegos De Suma Cero Y De Suma No Cero

En los juegos de *suma cero* el beneficio total para todos los jugadores del juego, en cada combinación de estrategias, siempre suma cero (en otras palabras, un jugador se beneficia solamente a expensas de otros). El ajedrez y el póker son ejemplos de juegos de suma cero, porque se gana exactamente la cantidad que pierde el oponente. Como curiosidad, el fútbol dejó hace unos años de ser de suma cero, pues las victorias reportaban 2 puntos y el empate 1 (considérese que ambos equipos parten inicialmente con 1 punto), mientras que en la actualidad las victorias reportan 3 puntos y el empate 1.

Un juego de suma cero concretamente es un juego en el que los pagos siempre suman cero. En el caso de dos jugadores, la condición es:

$$u_1 (w) + u_2 (w) = 0$$

Para todo w del conjunto de resultados finales. Donde u es una función de utilidad.

La mayoría de los ejemplos reales en negocios y política, al igual que el dilema del prisionero, son juegos de **suma no cero**, porque algunos desenlaces tienen resultados netos mayores o menores que cero. Es decir, la ganancia de un jugador no necesariamente se corresponde con la pérdida de otro. Por ejemplo, un contrato de negocios involucra idealmente un desenlace de suma positiva, donde cada oponente termina en una posición mejor que la que tendría si no se hubiera dado la negociación.

Se puede analizar más fácilmente un juego de suma cero, y cualquier juego se puede transformar en un juego de suma cero añadiendo un jugador "ficticio" adicional ("el tablero" o "la banca"), cuyas pérdidas compensen las ganancias netas de los jugadores.

La matriz de pagos de un juego es una forma conveniente de representación. Por ejemplo, un juego de suma cero de dos jugadores con la matriz que se muestra a la derecha.

	A	*B*	*C*
1	30, -30	-10, 10	20, -20
2	10, -10	20, -20	-20, 20

Juegos de suma cero

	A	*B*	*C*
1	30, -30	-12, 10	25, -20
2	15, -10	20, -25	-20, 25

Juegos de suma no cero

2.1.7.3 Juegos Cooperativos Y No Cooperativos.

Un juego cooperativo se caracteriza por un contrato que puede hacerse cumplir. La teoría de los juegos cooperativos da justificaciones de contratos plausibles. La plausibilidad de un contrato está muy relacionada con la estabilidad.

Dos jugadores negocian qué tanto quieren invertir en un contrato. La teoría de la negociación axiomática nos muestra cuánta inversión es conveniente para nosotros. Por ejemplo, la **solución de Nash para la negociación** demanda que la inversión sea justa y eficiente.

De cualquier forma, podríamos no estar interesados en la justicia y exigir más. De hecho, existe un juego no-cooperativo creado por Ariel Rubinstein consistente en alternar ofertas, que apoya la solución de Nash considerándola la mejor, mediante el llamado equilibrio de Nash.

Podríamos decir que un juego cooperativo es aquel en que los jugadores pueden hacer compromisos obligatorios, a diferencia de un juego no cooperativo, en el que no pueden hacerlos.

La teoría de juegos cooperativos es axiomática y continuamente recurre a la optimización de Pareto, a lo justo, a la equidad. Por el contrario la teoría de juegos no cooperativos posee características económicas y sus conceptos de solución se basan en el hecho que los jugadores maximicen sus propias funciones de utilidad, sujetos a restricciones específicas.

2.1.7.4 Juegos Simultáneos Y Secuenciales

Los juegos simultáneos son juegos en los que los jugadores mueven simultáneamente o en los que éstos desconocen los movimientos anteriores de otros jugadores. Los juegos secuenciales (o dinámicos) son juegos en los que los jugadores posteriores tienen algún conocimiento de las acciones previas. Este conocimiento no necesariamente tiene que ser perfecto; sólo debe consistir en algo de información. Por ejemplo, un jugador puede conocer que un jugador no realizó una acción determinada, pero no saber cuál de las otras acciones disponibles eligió.

La diferencia entre juegos simultáneos y secuenciales se recoge en las representaciones discutidas previamente. La forma normal se usa para representar juegos simultáneos, y la extensiva para representar juegos secuenciales

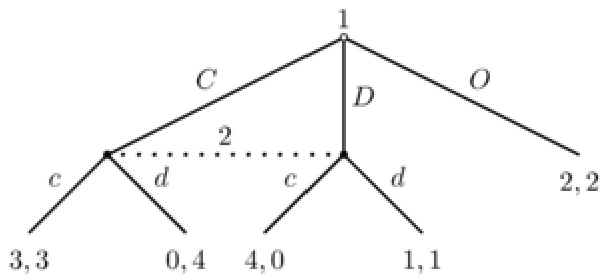
2.1.7.5 Juegos De Información Perfecta

Un subconjunto importante de los juegos secuenciales es el conjunto de los juegos de información perfecta. Un juego es de información perfecta si todos los jugadores conocen los movimientos que han efectuado previamente todos los otros jugadores; así que sólo los juegos secuenciales pueden ser juegos de información perfecta, pues en los juegos simultáneos no todos los jugadores (a menudo ninguno) conocen las acciones del resto. La mayoría de los juegos estudiados en la teoría de juegos son juegos de información imperfecta, aunque algunos juegos interesantes son de información perfecta, incluyendo el juego del ultimátum y el juego del ciempiés. También muchos juegos populares son de información perfecta, incluyendo el ajedrez.

La información perfecta se confunde a menudo con la información completa, que es un concepto similar. La información completa requiere que cada jugador conozca las estrategias y recompensas del resto pero no necesariamente las acciones.

En los juegos de información completa cada jugador tiene la misma "información relevante al juego" que los demás jugadores. El ajedrez y el dilema del prisionero ejemplifican juegos de información completa. Los juegos de información completa ocurren raramente en el mundo real, y los teóricos de los juegos, usualmente los ven sólo como aproximaciones al juego realmente jugado.

John Conway desarrolló una notación para algunos *juegos de información completa* y definió varias operaciones en esos juegos, originalmente para estudiar los finales de go, aunque buena parte de este análisis se enfocó en Nim. Esto devino en la teoría de juegos combinatoria. Descubrió que existe una subclase de esos juegos que pueden ser usados como números, como describió en su libro On Numbers and Games, llegando a la clase muy general de los números surreales.



Un juego de información imperfecta (las líneas punteadas representan la ignorancia de la parte del jugador 2)

2.1.7.6 Juegos De Longitud Infinita

Por razones obvias, los juegos estudiados por los economistas y los juegos del mundo real se finalizan generalmente tras un número finito de movimientos. Los juegos matemáticos puros no tienen estas restricciones y la teoría de conjuntos estudia juegos de infinitos movimientos, donde el ganador no se conoce *hasta* que todos los movimientos se conozcan.

El interés en dicha situación no suele ser decidir cuál es la mejor manera de jugar a un juego, sino simplemente qué jugador tiene una estrategia ganadora (Se puede probar, usando el axioma de elección), que hay juegos —incluso de información perfecta, y donde las únicas recompensas son "perder" y "ganar"— para los que *ningún* jugador tiene una estrategia ganadora.) La existencia de tales estrategias tiene consecuencias importantes en la teoría descriptiva de conjuntos.

2.1.8 Estrategias

Existen diversas clasificaciones de las estrategias que se pueden seguir en un juego, las cuales varían dependiendo del problema que se este tratando y el método de solución que se vaya a utilizar.

2.1.8.1 Estrategias Puras

Una estrategia pura para el jugador i es un plan que especifica una acción para cada uno de los nodos en los que el jugador debería tomar una decisión, si el nodo fuera alcanzado en realidad. Si todos los jugadores de un juego seleccionan una estrategia pura y se mantienen fieles a ella, entonces el desarrollo de un juego sin jugadas de azar queda totalmente determinado.

2.1.8.2 Estrategias Dominantes

Una estrategia s_i es dominante a las demás estrategias si cumple con la condición:

$$\pi\,(s_i\,,t) \;\geq\; \pi_{s \in S}(s, t)$$

Esto significa que para el jugador será mejor usar s_i independientemente de lo que hagan los otros jugadores.

2.1.8.3 Estrategias Mixtas.

Un jugador usa una estrategia mixta cuando elige aleatoriamente una estrategia pura. Por ejemplo, un jugador que dispone de dos estrategias puras podría decidir usar una estrategia pura con probabilidad 1/3 y la otra con probabilidad 2/3.

Concretamente una estrategia mixta para el jugador 1 en un juego bimatricial m x n es un vector columna p, m x 1, de coordenadas no negativas que suman 1 en donde la coordenada p_j ha de ser interpretada como la probabilidad con que se utilizara la estrategia pura s_j. Pero, ¿Porque motivos se puede interesar un jugador racional por una estrategia mixta? Una razón es que una estrategia pura que no es denominada por otra estrategia pura puede estar dominada por una estrategia mixta.

2.1.8.4 Estrategias Reactivas

Cuando un juego se repite varias veces, cada jugador puede adoptar su estrategia en función de las decisiones que haya adoptado antes su oponente. Las estrategias reactivas son las que se adoptan en los juegos con repetición y se definen en función de las decisiones previas de otros jugadores.

El ejemplo más conocido es la estrategia OJO POR OJO (en inglés TIT FOR TAT). Supongamos que dos jugadores repiten de forma indefinida una situación con pagos de forma del Dilema del Prisionero:

DILEMA DEL PRISIONERO MATRIZ DE PAGOS			
		Jugador columna	
		Cooperar	Traicionar
Jugador fila	Cooperar	2º,2º	4º,1º
	Traicionar	1º,4º	3º,3º*

En esta situación la estrategia OJO POR OJO puede quedar definida de la forma siguiente: "En la primera jugada elegiré la estrategia COOPERAR. En las jugadas siguientes elegiré la misma estrategia que haya elegido mi oponente en la jugada anterior". En otras palabras, si el otro coopera, yo cooperaré con él. Si el otro es un traidor, yo seré un traidor".

2.1.9 Conceptos De Solución En Estrategias Puras

Una vez definido lo que es un juego, es necesario encontrar formas de resolverlo, mecanismos que encuentren la forma en que jugadores racionales elegirían jugar el juego. Comenzamos analizando el concepto de equilibrio en estrategias dominantes, porque tiene aplicaciones importantes.

Una estrategia s^*_i del jugador *i* es *mejor respuesta* a s_{-i} (las estrategias de los demás jugadores) si :

$$u_i\,(s^*_i\ ,\ s_{-i}\,) \geq\ u_i\,(s_i\ ,\ s_{-i}\,),\ \text{Para todo } s_i$$

Una estrategia que es mejor respuesta es lo mejor ante una *determinada* elección de los demás jugadores. Una estrategia dominante es mejor respuesta ante *todas* las estrategias de los demás.

Cuando existe una estrategia dominante, los jugadores siempre la usan, porque es lo mejor que pueden hacer, independientemente de lo que hagan los demás jugadores.

La definición de estrategia dominante permite descartar estrategias que nunca serán utilizadas por un jugador racional ya que es peor que otra estrategia, no importando lo que hagan los demás jugadores. Notemos sin embargo que una estrategia que domina a otra no tiene por que ser dominante ya que también puede ser dominada.

2.1.9.1 Equilibrio En Estrategias Dominantes

Las definiciones anteriores nos permiten plantear una primera definición de solución de un juego, ideada por *Von Neumann*.

Una combinación de estrategias $s^* = (s_i^*)^n{}_{i=1}$ es un *equilibrio en estrategias dominantes* si cada s_i^* es dominante.

El concepto de equilibrio en estrategias dominantes es poderoso ya que cuando existe, tiene todas las propiedades posibles: es único y nadie tiene mejores alternativas desde un punto de vista individual. El problema de este concepto de equilibrio es que no todos los juegos tienen un equilibrio en estrategias dominantes. En general los jugadores no disponen de estrategias dominantes así que en el conjunto de juegos posibles, son pocos los que tienen este tipo de equilibrios. Sin embargo, existen juegos muy importantes como el *Dilema del prisionero* que tienen equilibrios en estrategias dominantes.

Como se ha mencionado antes, el equilibrio en estrategias dominantes no siempre existe, porque no siempre los jugadores disponen de estrategias dominantes. Por lo tanto, es conveniente encontrar otro concepto de solución que sea aplicable a todo tipo de juegos, es decir, un tipo de equilibrio que exista en todo juego. El problema de un concepto de equilibrio de este tipo es pueden haber múltiples equilibrios en un juego, lo que implica que es necesario poder seleccionar entre estos. El análisis de muchos juegos no requiere la compleja estructura de la forma extensiva, con su énfasis en la dimensión temporal del juego. En estos casos se usa la *forma normal* del juego.

2.1.9.2 Equilibrio Por Eliminación Iterada De Estrategias Dominadas

Supongamos que partiendo por el jugador 1, eliminamos todas sus estrategias estrictamente dominadas. En el nuevo juego que resulta, eliminamos todas las estrategias estrictamente dominadas del jugador 2 y así sucesivamente. Si, siguiendo este procedimiento, finalmente obtenemos una sola combinación de estrategias, se dice que es un equilibrio por eliminación iterada de estrategias dominadas.

Para dejar un poco mas claro este método lo ejemplificaremos con La batalla del Mar de Bismarck.

En este problema los jugadores son Kenney y Kimura, y cada uno tiene el mismo conjunto de acciones (norte y sur) y los pagos correspondientes se muestran en la siguiente tabla

		Kimura	
		Norte	Sur
Kenney	Norte	2, -3/2	2, -2
	Sur	1, -1	3, -3

En este juego, Kenney se da cuenta que la estrategia *Sur* de Kimura está estrictamente dominada por *Norte*. Eliminando esta estrategia, en el juego reducido que resulta *Norte* es dominante para Kenney.(*Norte, Norte)* es la solución por eliminación iterada de estrategias dominantes.

Lo interesante del concepto de eliminación iterada de estrategias dominadas es que requieren un supuesto de racionalidad de los jugadores. Cuando Kenney elimina la estrategia Sur de Kimura es porque sabe que a Kimura nunca le va a convenir utilizarla, y puede descartarla de su análisis. La solución que nos ofrece el ejemplo anterior es llamada también equilibrio dominante iterativo.

Un **equilibrio dominante iterativo** es un perfil de estrategia que se encuentra eliminando una estrategia dominada del conjunto de estrategia de uno de los jugadores, calculando de nuevo cuales de las restantes estrategias están dominadas, eliminando una de ellas y continuando el proceso hasta que solo queda una estrategia para cada jugador.

2.1.9.3 Puntos Silla

Diremos que un par de estrategias (s, t) es un punto silla de la forma estratégica de un juego estrictamente competitivo si, desde el punto de vista del jugador 1, el resultado v que se deriva de usar (s, t) no es peor que ninguno de los resultados de la columna correspondiente a t y no es mejor que ninguno de la fila correspondiente a ese.

Corolario. La forma estratégica de un juego finito, estrictamente competitivo, de información perfecta y sin jugadas de azar tiene un punto de silla (s,t).

Demostración. Supongamos que el juego tiene el valor v. sea s una estrategia que asegura al jugador 1 un resultado $u_1 \geq v$. ninguna de las entradas en la fila s de la forma estratégica puede ser peor que v para el jugador 1. Sea t una estrategia que asegura al jugador 2 un resultado $u_2 \geq v$. Ninguna de las entradas en la columna t puede ser peor que v para el jugador 2. Puesto que el juego es estrictamente competitivo, cada entrada en la columna t no es mejor que v para el jugador 1. Por tanto, el resultado actual de jugar (s, t) no puede peor ni mejor que v para el jugador 1. Puesto que en esta sección suponemos que los jugadores no son indiferentes respecto a los resultados se sigue que el resultado de jugar (s, t) debe ser v. De aquí se sigue el corolario

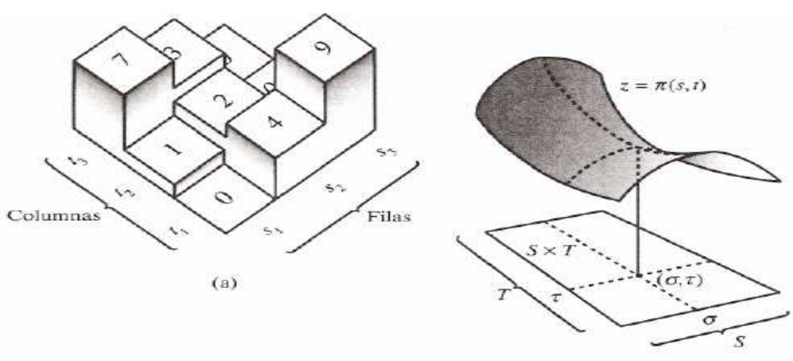
Teorema. Supongamos que la forma estratégica de un juego estrictamente competitivo G tiene un punto silla (s,t) para el cual el resultado correspondiente es v. Entonces G tiene valor v.

Demostración. Puesto que v es el peor resultado de su fila para el jugador 1, este puede forzar para el un resultado por lo menos tan bueno como v jugando s. Puesto que v es el mejor resultado de su columna para el jugador 1, es el peor de su columna para el jugador 2. Luego el jugador 2 puede forzar para el un resultado por lo menos tan bueno como v jugando t.

En pocas palabras tomando π (s , t), donde T es el conjunto de columnas y S el conjunto se filas de la matriz, como el pago o valor del juego que se obtiene eligiendo la casilla (s, t) podemos decir que el par (σ ,τ) es un punto silla de la matriz cuando $\pi(\sigma ,\tau)$ es la mayor casilla de su columna y la menor casilla de su fila en términos matemáticos,

$$\pi(\sigma ,t) \geq \pi(\sigma ,\tau) \geq \pi(s ,\tau)$$

Para todo s de S y para todo t de T.



(a) (b)

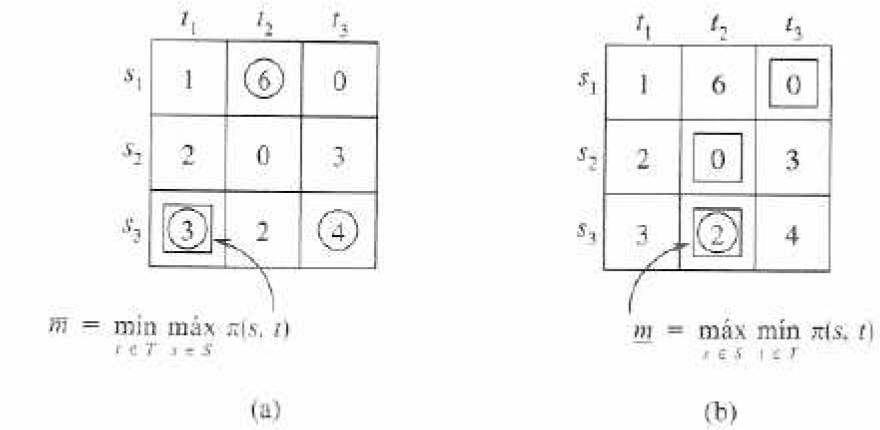
2.1.9.4 Mínimax y Maximin

El teorema del mínimax de Von Neumman es talvez el resultado más famoso de la teoría de juegos. En esta sección explicaremos lo necesario para estudiar el caso en que los jugadores se limitan a utilizar estrategias puras.

Sea S el conjunto de filas de la matriz que se muestra y sea T el conjunto de columnas denominaremos $\pi(s,t)$ como anteriormente lo hemos hecho entonces:

$$\max_{s \in S} \pi(s,t) \quad \text{y} \quad \min_{t \in T} \pi(s,t)$$

son, respectivamente la mayor casilla de la columna t y la menor de la fila s



las casillas mayores de cada columna aparecen dentro de un círculo. Las menores casillas en cada fila aparecen encerradas en un cuadrado. Obsérvese que:

$$\max_{s \in S} \pi(s,t_1) = 3 \quad \min_{t \in T} \pi(s_1,t) = 0,$$

$$\max_{s \in S} \pi(s,t_2) = 6 \quad \min_{t \in T} \pi(s_2,t) = 0,$$

$$\max_{s \in S} \pi(s,t_3) = 4 \quad \min_{t \in T} \pi(s_3,t) = 2,$$

se sigue que :

$$\overline{m} = \min_{t \in T} \{ \max_{s \in S} \pi(s,t) \} = \min \{3,6,4\} = 3,$$

$$\underline{m} = \max_{s \in S} \{ \min_{t \in T} \pi(s,t) \} = \max \{0,0,2\} = 2,$$

La cantidad $\overline{m}$ es el valor minimax de la matriz. La cantidad $\underline{m}$ es el valor maximin de la matriz.

Teorema. $\underline{m} \;\leq\; \overline{m}$

$$\max_{s \in S} \; \min_{t \in T} \; \pi(s, t) \quad \leq \; \max_{s \in S} \pi(s, t) \; .$$

Demostración. Para todo t $\in$ T, min $_{t \in T}$ $\pi(s, t) \quad \leq \quad \pi(s, t)$. Luego :

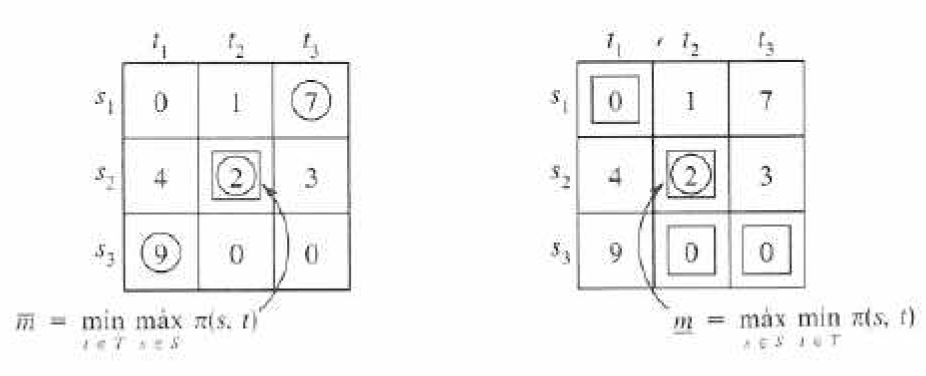
$$\max_{s \in S} \; \min_{t \in T} \; \pi(s, t) \quad \leq \; \max_{s \in S} \pi(s, t) \; .$$

Aplíquese esta desigualdad al valor particular t que pertenece a T que minimice el lado derecho.

En nuestro ejemplo podemos darnos cuenta en que esta desigualdad pude llegar hacer estrictamente menor pero algo de más importancia será cuando se cumpla la condición:

$$\underline{m} \;=\; \overline{m}$$

Para decir algo mas general es necesario de volver a la idea de punto silla, recordemos que los valores maximin y mínimas, de la matriz antes mostrada no son iguales, ya que ningún pago es rodeado por un cuadrado y un circulo al mismo tiempo, por lo tanto podemos decir que la matriz no tiene punto silla. Ahora bien podemos brindar una nueva matriz en la que los valores maximin y minimax sean iguales y que la matriz tenga un punto silla (σ ,τ) para estudiar la igualdad anterior.



(a) (b)

Formalmente

$$\min_{t \in T} \;\; \pi(\sigma\,, t) = \max_{s \in S} \min_{t \in T} \; \pi(s, t) = \; \underline{m}$$

$$\max_{s \in S} \;\; \pi(s\,, \tau) = \min_{t \in T} \; \max_{s \in S} \; \pi(s, t) = \overline{m}$$

Con lo anterior y el siguiente teorema podemos confirmar la relación que existe entre los valores maximin y minimax y el punto silla.

Teorema. Una condición necesaria y suficiente para que (σ , τ) sea un punto silla es que σ y τ queden definidos por las dos ecuaciones anteriores respectivamente y que

$$\underline{m} = \overline{m}$$

Cuando (σ ,τ) es un punto silla,

$$\underline{m} = \pi(\sigma, \tau) = \overline{m}$$

Demostración. Supongamos en primer lugar (σ ,τ) es un punto silla. Asi π(σ , t) ≥ π(σ ,τ) ≥ π(s , τ) para todo s de S y todo t de T. Esto implica que

$$\min_{t \in T} \pi(\sigma, t) \geq \pi(\sigma, \tau) \geq \max_{s \in S} \pi(s, \tau)$$

Y de aqui

$$\underline{m} = \text{máx}_{\sigma \in S} \min_{t \in T} \pi(\sigma, \tau) \geq \min_{t \in T} \pi(\sigma, t) \geq \text{máx}_{s \in S} \pi(s, \tau) \geq \min_{t \in T} \text{máx}_{s \in S} \geq \pi(s, \tau) = \overline{m}$$

Pero el teorema anterior afirma que :

$$\underline{m} \leq \overline{m}$$

Así pues, todos los signos ≥ en la expresión anterior deben ser sustituidos por signos =. Supongamos ahora que:

$$\underline{m} = \overline{m}$$

Debemos mostrar que existe un punto silla (σ ,τ). Escojamos (σ ,τ) que satisfagan a las ecuaciones de minimax y maximin. Entonces dados cualesquiera s de S y t de T

$$\pi(\sigma, t) \geq \min_{t \in T} \pi(\sigma, t) = \underline{m} = \overline{m} = \text{máx}_{s \in S} \pi(s, \tau) \geq \pi(s, \tau).$$

Tomando s = σ y t = τ en esta desigualdad demostramos que

$$\underline{m} = \pi(\sigma, \tau) = \overline{m}$$

Luego se satisface el requisito de punto silla para (σ ,τ).

2.1.9.5 Equilibrio De Nash

El equilibrio de Nash ocupa un lugar central en la teoría de juegos; constituye de alguna manera una *condición mínima de racionalidad individual* ya que, si una combinación de estrategias *no es* un equilibrio de Nash, existe al menos un jugador que puede aumentar sus ganancias cambiando de estrategia, y en consecuencia, ésta se puede considerar difícilmente como una "solución" del modelo en la medida en que el jugador interesado en cambiar descarta su elección, después de conocer la de los otros.

En un juego estrictamente competitivo la condición para que un par (s, t) sea un equilibrio de Nash es que se aun punto silla de la forma estrategia del juego. El que v sea el mejor de su fila hace que s sea una respuesta optima para el jugador 1. en un juego estrictamente competitivo, si v es el peor de su fila para el jugador 1, entonces debe ser el mejor de su fila para el jugador 2. Luego t es una respuesta optima a s para el jugador 2.

La noción de equilibrio de Nash se puede expresar de forma particularmente fácil en forma de funciones de pagos esto equivale a decir que las desigualdades:

$$\pi_1(\sigma , \tau) \geq \pi_1(s , \tau)$$

$$\pi_2(\sigma , \tau) \geq \pi_2(\sigma, t)$$

Se cumple para todas las estrategias puras s y t donde el par (σ , τ) es nuestra respuesta optima y por lo tanto nuestro equilibrio de Nash.

2.1.10 Conceptos de Solución en Estrategias Mixtas

Los conceptos de solución en estrategias mixtas, pueden llegar a ser mas complejas que las puras ya que se necesitara un poco mas de conocimientos acerca de algebra linear, los cuales no se incluyen en el marco teórico por ser básicas.

2.1.10.1 Funciones De Pagos Para Estrategias Mixtas

Al considerar estrategias puras, las funciones de pagos π_1 y π_2 que iban de: $S \times T \rightarrow R$ resultaron útiles. Cuando hay que considerar estrategias mixtas, hay que introducir funciones de pagos mas complicadas $\prod : P \times Q \rightarrow R$. La notación $\prod_i (p, q)$ representa la utilidad esperada del jugador i cuando el jugador 1 usa la estrategia mixta p y el jugador 2 usa la estrategia mixta q. La formula que se obtiene con estos cálculos se puede expresar de forma muy elegante en el caso de dos jugadores donde A y B representan las matrices de pagos de los jugadores 1 y 2 respectivamente y viene dada por:

$$\prod_1 (p, q) = p^T A q$$

$$\prod_2 (p, q) = p^T B q$$

2.1.10.2 Minimax Y Maximin Con Estrategias Mixtas

Este tema es fácil por que solo necesitamos transcribir algunos de los resultados que se demostraron para estrategias puras.

Sea A una matriz de n x m y definamos la función de pagos $\prod$ como lo hicimos anteriormente. Asi, $\prod (p,q)$ es lo que consigue un jugador con matriz de pagos a si el jugador 1 usa la estrategia p y el jugador 2 usa la estrategia mixta q.

Sea $\bar{v}$ el valor minimax de la funcion de pagos $\prod$. Sea $\underline{v}$ su valor maximin. Entonces

$$\min_{q \in Q} \prod (\bar{p}, q) = \max_{p \in P} \min_{q \in Q} \prod (p, q) = \underline{v}$$

$$\text{máx.}_{p \in P} \prod (p, \bar{q}) = \text{mín.}_{q \in Q} \text{máx.}_{p \in P} \prod (p, q) = \bar{v}$$

Donde $\bar{p}$ es la estrategia mixta p de P para la cual mín.$_{q \in Q}$ Π (p, q) es mayor, y $\bar{q}$ es la estrategia mixta q de Q para la cual máx$_{p \in P}$ Π (p, q) es menor. Un punto silla para la función de pagos Π es un par ($\bar{p}$, $\bar{q}$) de estrategias mixtas tales que

$$\Pi\ (\bar{p}, q) \ \geq\ \Pi\ (\bar{p}, \bar{q}) \ \geq\ \Pi\ (p, \bar{q})$$

Para todos los p de P y todos los q de Q.

Si uno piensa en Π (p, q) como la casilla en la fila p y la columna q de un matriz generalizada, entonces los siguientes teoremas no necesitan demostración, pues se obtienen simplemente copiando las de los teoremas que se demostraron para estrategias puras.

Teorema. $\underline{v} \leq \bar{v}$.

Teorema. Una condición necesaria y suficiente para que ($\bar{p}$, $\bar{q}$), sean un punto silla es que vengan dados por $\underline{v}$ y $\bar{v}$ respectivamente y que $\underline{v} = \bar{v}$. Cuando ($\bar{p}$, $\bar{q}$) es un punto silla;

$$\underline{v} = \Pi\ (\bar{p}, \bar{q}) = \bar{v}.$$

Estos resultados conceden importancia al hecho de saber en que circunstancias es ciertos que $\underline{v} = \bar{v}$. El teorema de minimax de Von Neumman dice que si el número de estrategias puras es finito la respuesta es **siempre**. Así pues en juegos finitos, $\underline{v}$ siempre nos dará un nivel de seguridad.

La demostración de este teorema no se incluye ya que supera los límites de este estudio.

2.1.10.3 Punto Y Equilibrio De Nash Para Estrategias Mixtas

Cuando existe un punto silla (σ, τ) para la matriz de pagos de un juego A de suma cero con dos jugadores, sabemos que el valor del juego es necesariamente $v = \pi(\sigma, \tau)$. el jugador 1 se asegura v o algo mejor jugando σ, mientras que el jugador 2 se asegura –v o algo mejor jugando τ. Es sabido que una matriz no siempre tiene un punto silla. Pero el teorema del minimax nos dice que $\underline{v} = \overline{v}$, por tanto, cualquier par $(\overline{p}, \overline{q})$ de estrategias de seguridad para ambos jugadores es un punto silla para la función de pagos de la estrategias mixta $\prod$ es decir;

$$\overline{p}^T A q \geq \overline{p}^T A \overline{q} \geq p^T A \overline{q}$$

Para todo p en P y todo q en Q. el valor del juego es $v = \overline{p}^T A \overline{q}$.

Como se ha dicho la condición para que un par $(\overline{p}, \overline{q})$ de estrategias sean un equilibrio de Nash en un juego de dos jugadores es

$$\prod_1(\overline{p}, \overline{q}) \geq \prod_1(p, \overline{q})$$

$$\prod_2(\overline{p}, \overline{q}) \geq \prod_2(\overline{p}, q)$$

Para todo p en P y todo q en Q. La primera desigualdad expresa el hecho que $\overline{p}$ es una respuesta optima a $\overline{q}$, y la segunda desigualdad expresa que $\overline{q}$ es una respuesta optima a $\overline{p}$.

En un juego de suma cero de dos jugadores, $\prod_1(p, q) = p^T A q$ y $\prod_2(p, q) = -p^T A q$ por lo que la segunda desigualdad se puede reescribir como $-\overline{p}^T A \overline{q} \geq -\overline{p}^T A q$, que es lo mismo que $\overline{p}^T A q \geq \overline{p}^T A \overline{q}$. Y la primera desigualdad puede reescribirse como $\overline{p}^T A \overline{q} \geq p^T A \overline{q}$. El resultado de combinar las desigualdades reescritas es la condición para un punto de silla.

Las conclusiones se resumen en el siguiente teorema:

Teorema. Si A es la matriz de pagos del jugador 1 en un juego de suma cero con dos jugadores entonces las siguientes proposiciones son equivalentes

1. $\overline{p}$ es una estrategia de seguridad para el jugador 1, $\overline{q}$ es una estrategia de seguridad para el jugador 2, y el valor del juego es v = $\overline{p}^{T} A \overline{q}$.
2. El par $(\overline{p}, \overline{q})$ es un punto silla.
3. El par $(\overline{p}, \overline{q})$ es un equilibrio de Nash

2.1.10.4 Cuando Hay Que Jugar Maximin Y Minimax.

El criterio de decisión minimax no es muy deseable cuando se toman decisiones en situaciones de incertidumbre (juegos contra la naturaleza). Pero, es muy razonable en juegos de dos personas con suma constante en donde los oponentes son inteligentes, ya que le ofrece al participante una máxima seguridad, ya que le asegura un resultado mínimo y uno máximo para su oponente, sin importar el comportamiento de este ultimo.

2.2 Tipos De Muestreo

A continuación se dará una breve explicación acerca de los tipos de muestreo existentes, con el propósito de clarificar que tipo y porque se va a usar en este proyecto.

Los autores proponen diferentes criterios de clasificación de los diferentes tipos de muestreo, aunque en general pueden dividirse en dos grandes grupos: métodos de muestreo probabilísticas y métodos de muestreo no probabilísticos.

2.2.1 Métodos De Muestreo Probabilísticos

Los métodos de muestreo probabilísticos son aquellos que se basan en el principio de equiprobabilidad. Es decir, aquellos en los que todos los individuos tienen la misma probabilidad de ser elegidos para formar parte de una muestra y, consiguientemente, todas las posibles muestras de tamaño n tienen la misma probabilidad de ser elegidas. Sólo estos métodos de muestreo probabilísticos nos aseguran la representatividad de la muestra extraída y son, por tanto, los más recomendables. Dentro de los métodos de muestreo probabilísticos encontramos los siguientes tipos:

2.1.1.1 Muestreo Aleatorio Simple

El procedimiento empleado es el siguiente: 1) se asigna un número a cada individuo de la población y 2) a través de algún medio mecánico (bolas dentro de una bolsa, tablas de números aleatorios, números aleatorios generados con una calculadora u ordenador, etc.) se eligen tantos sujetos como sea necesario para completar el tamaño de muestra requerido.

Este procedimiento, atractivo por su simpleza, tiene poca o nula utilidad práctica cuando la población que estamos manejando es muy grande.

2.2.1.2 Muestreo Aleatorio Sistemático

Este procedimiento exige, como el anterior, numerar todos los elementos de la población, pero en lugar de extraer n números aleatorios sólo se extrae uno. Se parte de ese número aleatorio i, que es un número elegido al azar, y los elementos que integran la muestra son los que ocupan los lugares i, i+k, i+2k, i+3k,...,i+(n-1)k, es decir se toman los individuos de k en k, siendo k el resultado de dividir el tamaño de la población entre el tamaño de la muestra: k=N/n. El número i que empleamos como punto de partida será un número al azar entre 1 y k.

El riesgo se este tipo de muestreo está en los casos en que se dan periodicidades en la población ya que al elegir a los miembros de la muestra con una periodicidad constante (k) podemos introducir una homogeneidad que no se da en la población. Imaginemos que estamos seleccionando una muestra sobre listas de 10 individuos en los que los 5 primeros son varones y los 5 últimos mujeres, si empleamos un muestreo aleatorio sistemático con k=10 siempre seleccionaríamos o sólo hombres o sólo mujeres, no podría haber una representación de los dos sexos.

2.2.1.3 Muestreo Aleatorio Estratificado

Trata de obviar las dificultades que presentan los anteriores ya que simplifican los procesos y suelen reducir el error muestral para un tamaño dado de la muestra. Consiste en considerar categorías típicas diferentes entre sí (estratos) que poseen gran homogeneidad respecto a alguna característica (se puede estratificar, por ejemplo, según la profesión, el municipio de residencia, el sexo, el estado civil, etc.). Lo que se pretende con este tipo de muestreo es asegurarse de que todos los estratos de interés estarán representados adecuadamente en la muestra. Cada estrato funciona independientemente, pudiendo aplicarse dentro de ellos el muestreo aleatorio simple o el estratificado para elegir los elementos concretos que formarán parte de la muestra. En ocasiones las dificultades que plantean son demasiado grandes, pues exige un conocimiento detallado de la población. (tamaño geográfico, sexos, edades,...).
La distribución de la muestra en función de los diferentes estratos se denomina afijación, y puede ser de diferentes tipos:

Afijación Simple: A cada estrato le corresponde igual número de elementos muéstrales.

Afijación Proporcional: La distribución se hace de acuerdo con el peso (tamaño) de la población en cada estrato.

Afijación Óptima: Se tiene en cuenta la previsible dispersión de los resultados, de modo que se considera la proporción y la desviación típica. Tiene poca aplicación ya que no se suele conocer la desviación.

2.2.1.4. Muestreo Aleatorio Por Conglomerados

Los métodos presentados hasta ahora están pensados para seleccionar directamente los elementos de la población, es decir, que las unidades muéstrales son los elementos de la población. En el muestreo por conglomerados la unidad muestral es un grupo de elementos de la población que forman una unidad, a la que llamamos conglomerado. Las unidades hospitalarias, los departamentos universitarios, una caja de determinado producto, etc., son conglomerados naturales. En otras ocasiones se pueden utilizar conglomerados no naturales como, por ejemplo, las urnas electorales. Cuando los conglomerados son área geográficas suele hablarse de "muestreo por áreas".

El muestreo por conglomerados consiste en seleccionar aleatoriamente un cierto numero de conglomerados (el necesario para alcanzar el tamaño muestral establecido) y en investigar después todos los elementos pertenecientes a los conglomerados elegidos.

Para finalizar con esta exposición de los métodos de muestreo probabilísticos es necesario comentar que ante lo compleja que puede llegar a ser la situación real de muestreo con la que nos enfrentemos es muy común emplear lo que se denomina *muestreo polietápico*. Este tipo de muestreo se caracteriza por operar en sucesivas etapas, empleando en cada una de ellas el método de muestreo probabilístico más adecuado.

2.2.2 Métodos De Muestreo No Probabilísticos

A veces, para estudios exploratorios, el muestreo probabilístico resulta excesivamente costoso y se acude a métodos no probabilísticos, aun siendo conscientes de que no sirven para realizar generalizaciones, pues no se tiene certeza de que la muestra extraída sea representativa, ya que no todos los sujetos de la población tienen la misma probabilidad de ser elegidos. En general se seleccionan a los sujetos siguiendo determinados criterios procurando que la muestra sea representativa.

2.2.2.1 Muestreo Por Cuotas

También denominado en ocasiones "accidental". Se asienta generalmente sobre la base de un buen conocimiento de los estratos de la población y/o de los individuos más "representativos" o "adecuados" para los fines de la investigación. Mantiene, por tanto, semejanzas con el muestreo aleatorio estratificado, pero no tiene el carácter de aleatoriedad de aquél.

En este tipo de muestreo se fijan unas "cuotas" que consisten en un número de individuos que reúnen unas determinadas condiciones, por ejemplo: 20 individuos de 25 a 40 años, de sexo femenino y residentes en Gijón. Una vez determinada la cuota se eligen los primeros que se encuentren que cumplan esas características. Este método se utiliza mucho en las encuestas de opinión.

2.2.2.2 Muestreo Opinático O Intenciona

Este tipo de muestreo se caracteriza por un esfuerzo deliberado de obtener muestras "representativas" mediante la inclusión en la muestra de grupos supuestamente típicos. Es muy frecuente su utilización en sondeos preelectorales de zonas que en anteriores votaciones han marcado tendencias de voto.

2.2.2.3 Muestreo Casual O Incidental

Se trata de un proceso en el que el investigador selecciona directa e intencionadamente los individuos de la población. El caso más frecuente de este procedimiento el utilizar como muestra los individuos a los que se tiene fácil acceso (los profesores de universidad emplean con mucha frecuencia a sus propios alumnos). Un caso particular es el de los voluntarios.

2.2.2.4 Bola De Nieve

Se localiza a algunos individuos, los cuales conducen a otros, y estos a otros, y así hasta conseguir una muestra suficiente. Este tipo se emplea muy frecuentemente cuando se hacen estudios con poblaciones "marginales", delincuentes, sectas, determinados tipos de enfermos, etc.

CAPITULO III

DESARROLLO

Como se planteo al principio de este trabajo, el objetivo es poder brindar una estrategia optima a los trabajadores o a la empresa (dependiendo quien lo use), para negociar su próxima renovación de contrato.

El primer paso a seguir es llevar este problema tan general, el cual seria imposible de resolver, a un problema especifico por lo que lo primero que se debe hacer es seleccionar a los jugadores que participaran en esta negociación.

3.1 Selección de la Empresa.

El proceso de elección de la empresa, que sirviera de modelo para este problema, no fue algo sencillo, debido a que para la mayoría de las empresas el hecho de tener que dar información acerca de cómo habían resultado sus últimas renovaciones de contratos, para poder obtener la información necesaria que se utilizara para planear las futuras estrategias, era demasiado riesgoso, ya que se podía llegar a pensar que esa información podría ser una arma de doble filo. En el sentido en que ellos no sabían si realmente se iban a beneficiar mas de lo que podrían llegar a ser perjudicados.

Es por esta razón que fue imposible conseguir que alguna de las empresas a las que se acudió accediera o se prestaran mejor dicho, para ser el modelo de estudio de este trabajo. Aunque esta hubiera sido una causa primordial para abandonar el proyecto se continúo con este con la ayuda del otro jugador de este juego.

Al comentar el objetivo de este trabajo con algunos de los empleados de diferentes empresas, de las que había tratado de obtener información, note que para la mayoría de ellos este trabajo resultaba muy interesante y que debido a que ellos son el jugador que la mayor parte del tiempo lleva las de perder, este les ofrecería una forma diferente en sus negociaciones a la ya acostumbrada. A pesar de que en diversas empresas habían trabajadores que estaban interesados en cooperar con el proyecto se tuvo que hacer una depuración para encontrar la que realmente pudiera ofrecernos una cantidad de información suficiente, para poder realizar así el planteamiento del problema.

A pesar de que algunos de los empleados cooperaban, la mayoría de estos, de las diversas empresas, no estaba realmente interesados en hacerlo, y existían diversas causas:

- Apatía, con respecto al proyecto.
- Miedo, debido a que casi en todas las empresas les prohíben hablar de cuanto ganan, hasta entre ellos mismos.
- Por razones personales, note que hay gente que le incomoda hablar acerca de lo que gana y no es de extrañarse ya que en una ciudad como esta es difícil confiar en la gente, además de ser peligroso.

Por tanto se opto por seleccionar a la empresa que más datos aportara, y con este criterio se llego a la selección de la empresa, Mexicana de Aviación S.A. de C.V., la que de ahora en adelante será el otro jugador que participara en este juego.

3.2 Recopilación de información

La recopilación de la información es un punto en el que hay que poner bastante atención, ya que dependemos en cierto grado de cuanta y que tan valiosa información hemos adquirido para poder hacer una estimación, que se aproxime lo mas posible a la situación real. Aunque importante, no es algo que pueda llegar a frenar este proyecto, debido a que el tema principal no es mostrar que se puede llegar a dar datos que correspondan ciento por ciento con la realidad, si no que lo más importante es mostrar que si se nos proporciona la información adecuado podemos llegar a cumplir ese objetivo.

Para recopilar los datos necesario para nuestro proyecto se realizo una encuesta, la cual se muestra en el anexo 1al final de este trabajo, que proporciona los cambios que se produjeron en la ultima negociación de contratos, así como de que manera podían explicar la conducta que tomo la empresa en dicha negociación, además claro, de investigar cual fue el propio comportamiento (o estrategia) que habían tomado ellos en la misma.

Podemos decir que por la forma en la que se recopilaron los datos y el modo en que se fueron realizando las encuestas, realizamos un muestreo no probabilística de bola de nieve, por que como ya se menciono anteriormente en este capitulo y en el anterior, esperar hasta poder realizar un muestreo probabilística seria imposible y nada viable para este trabajo.

3.3 Estrategias

Con la información recopilada acerca de las conductas que se habían observado en la negociación, se pudo ver que podían encerrarlas en cuatro diferentes grupos tanto para la empresa como para los empleados.

Estrategias de la empresa:

E_1: Agresiva, ataque sin cuartel

E_2: Razonamiento

E_3: Recursos legales

E_4: Conciliatoria

Estrategias del trabajador:

T_1: Agresiva, sin miedo

T_2: Razonamiento

T_3: Recursos legales

T_4: Pasiva, con miedo

Con la clasificación de estas estrategias podemos ver que nuestro juego tendrá asociada una matriz de 4x4. Ahora debemos de obtener los datos para cada una de las casillas de esta matriz.

3.4 Pagos de la compañía o utilidades de los empleados

Si ponemos un poco de atención a la negociación que estamos estudiando, no es difícil darnos cuenta de que estamos hablando de un **juego de suma cero**, ya que todo lo que se obtenga de ganancia o utilidad para un nuevo contrato será lo que la compañía tendrá que tomar como costo o bien perdida, y viceversa. Por esa razón podemos expresar la forma normal de este juego de negociación como una matriz de pagos, en la que en las filas se expresan las utilidades adquiridas por los trabajadores, y en las columnas los pagos que tendrá que hacer la compañía.

Antes de presentar la matriz de este juego hay un dato mas que debemos de aclarar, y es que los datos de la matriz están dados en tanto por ciento, debido a que para los empleados mas fácil hablar en porcentajes de lo que habían conseguido, que si estuviésemos hablando de cantidades monetarias, las cuales llegaban a incomodar como antes lo habíamos mencionado. Así que, tomando ventaja de esto, se pudo tomar muestra de más trabajadores, ya que no necesitaban tener sueldos dentro de un pequeño intervalo, si no que se pudo tomar trabajadores de casi cualquier clase de ingresos.

Después de esta explicación solo nos queda proporcionar la matriz del juego:

	Estrategias de la compañía				
Estrategias del trabajador		E_1	E_2	E_3	E_4
	T_1	10	16	16.5	18
	T_2	16	15.3	14	16
	T_3	11	12	15	17
	T_4	10	13	12	13

Estos datos han surgido de las encuestas realizadas, y estan contenidos en el anexo 2 al final de este trabajo.

CAPITULO IV

RESULTADOS

El primer paso que se debe dar es el de clasificar bien el problema al que nos estamos enfrentando, por que es claro que para saber como resolver algo, primero debemos de conocerlo.

4.1 Clasificación

En el capitulo anterior ya mostramos que el juego puede ser representado en su **forma normal** (matriz de pagos), además de que es un juego de **suma cero**, pero, todavía hay mas. Podemos decir también que nuestro juego es **simultáneo** ya que las dos partes deben de tomar la decisión de que estrategia tomaran al mismo tiempo. Además de ser **asimétrico y no cooperativo**, ya que los pagos de la empresa no son iguales con las utilidades que obtendría un trabajador, si cambiáramos el lugar de la empresa y el trabajador en la matriz de pagos, y no cooperativos por que en esta negociación se ha notado que cada uno de los participantes busca únicamente su propio bienestar. Y por obvias razones es un **juego finito**.

4.2 Eliminación iterada de estrategias dominadas

Este es el primer método que se aplicara para tratar de encontrar una solución, o mejor dicho un equilibrio, en la matriz antes mostrada.

Al utilizar este método, lo primero que no muestra un reto es el identificar cada una de las estrategias dominantes de cada uno de los jugadores. Si utilizamos la definición que se dio en el marco teórico de estrategias dominantes, esta tarea es realmente sencilla, y nos muestra que este problema contiene por lo menos dos estrategias dominadas:

E_3	domina	E_4
T_2	domina	T_4

Esto quiere decir que al trabajador siempre le convendrá mas utilizar la estrategia T_2 por encima de la estrategia T_4, así como a la empresa siempre le convendrá mas utilizar la estrategia E_3 en lugar de la E_4. De este modo, eliminando las estrategias dominadas obtenemos la siguiente matriz:

	Estrategias de la compañía			
Estrategias del trabajador		E_1	E_2	E_3
	T_1	10	16	16.5
	T_2	16	15.3	14
	T_3	11	12	15

Lamentablemente hasta este punto se puede llagar por este método por que como se puede observar, ya no existen estrategias dominantes, o al menos no en estrategias puras, por lo que trataremos con el siguiente método. Hay que decir que lo que se acaba de hacer no debe tomarse como inútil, ya que, aun cuando no se obtuvo una respuesta exacta, si obtuvimos un problema que puede llegar a ser mas sencillo, debido a que se redujo el numero de opciones.

4.3 Mínimax y maximin en estrategias puras

Ahora, como se hizo en el marco teórico se busca maximizar las mínimas ganancias posibles, y minimizar los máximos costos. De esta manera podemos darnos cuenta de lo siguiente:

	Estrategias de la compañía					
		E_1	E_2	E_3	E_4	Mínimos
Estrategias del trabajador	T_1	10	16	16.5	18	10
	T_2	16	15.3	14	16	14
	T_3	11	12	15	17	11
	T_4	10	13	12	13	10
	máximos	16	16	16.5	18	

Expresando esto mediante las definiciones matemáticas que se conocen obtenemos:

$$\max_{t \in T} \pi(T,E_1) = 16 \qquad \min_{e \in E} \pi(T_1,E) = 10,$$

$$\max_{t \in T} \pi(T,E_2) = 16 \qquad \min_{e \in E} \pi(T_2,E) = 14,$$

$$\max_{t \in T} \pi(T,E_3) = 16.5 \qquad \min_{e \in E} \pi(T_3,E) = 11,$$

$$\max_{t \in T} \pi(T,E_4) = 18 \qquad \min_{e \in E} \pi(T_4,E) = 10,$$

se sigue que :

$$\overline{m} = \min_{e \in E} \{\max_{t \in T} \pi(T, E)\} = \min\{16,16.5,18\} = 16,$$

$$\underline{m} = \max_{t \in T} \{\min_{e \in E} \pi(T, E)\} = \max\{10,14,11\} = 14,$$

Como podemos ver se cumple el teorema de que $\underline{m} \leq \overline{m}$, pero debido a que $\underline{m} \neq \overline{m}$ lo único que podemos deducir es que no tenemos un equilibrio mínimax en estrategias puras, y por ende, tampoco un punto silla en las mismas.

4.4 Mínimax y maximin en estrategias mixtas

Hasta ahora solo hemos podido demostrar que este problema no tiene un punto silla, si trabajamos exclusivamente con estrategias puras, por tanto, debemos de encontrar el equilibrio en estrategias mixtas, el cual, hemos mencionado, sabemos que existe por que lo demuestra el teorema del mínimax de Von Neumann.

Lo primero que debemos hacer es crear las funciones de pago, para la empresa y el trabajador. Estas funciones como vimos en el capitulo II quedaran dadas por:

$$\Pi_{\text{Trabajador}}(p, q) = p^{T} A\, q$$

En donde p es el vector (p_1, p_2, p_3) que representa las probabilidades (1-r-s, r, s) con las que el trabajador elegirá jugar con las estrategias (T_1, T_2, T_3).

Lo anterior nos deja claro que ahora hay que encontrar una estrategia mixta que nos de un cierto nivel de seguridad acerca del pago esperado, que puede obtener el empleado, por lo que, si seguimos el criterio maximin debemos de buscar el maximizar las mínimas ganancias esperadas.

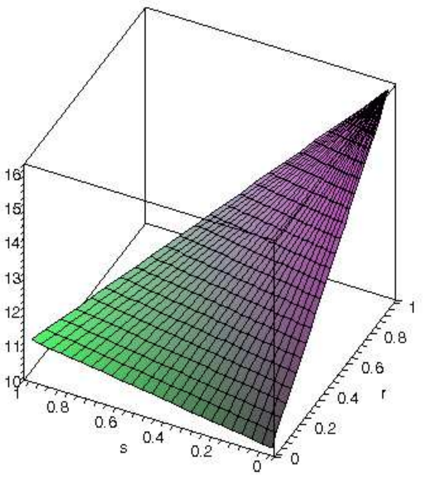
Podemos ver que si el empleado decide utilizar la esta estrategia mixta se enfrentara tres posibles estrategias de la compañía:

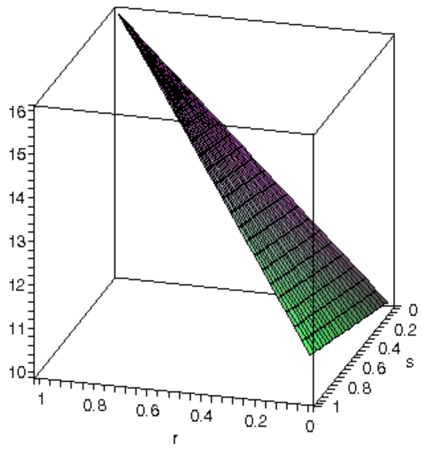
$$\Pi_{\text{Trabajador}}(p, E_1) = 10(1-r-s) + 16r + 11s$$

la cual podemos ver que es un plano que podemos también expresar de la siguiente forma:

$$\Pi_{\text{Trabajador}}(p, E_1) - 6r - s = 10$$

Y que se comporta como se muestra en la grafica:



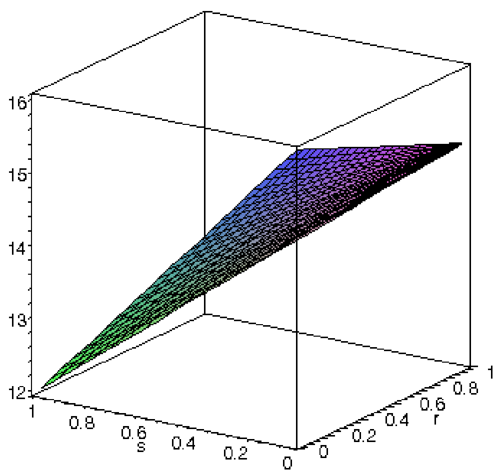


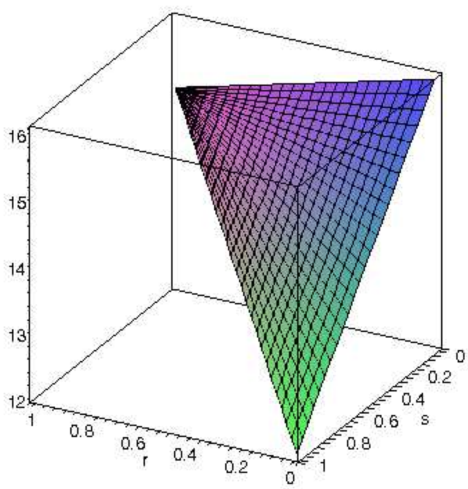
Si se observa cuidadosamente la grafica esta delimitada por los puntos en que: $r \geq 0$, $s \geq 0$ y $s + r \leq 1$, ya que fuera de esta región los puntos encontrados no tienen sentido para nuestro estudio. De la misma manera podemos trabajos con los dos escenarios faltantes.

$$\prod_{\text{Trabajador}} (p, E_2) = 16(1\text{-}r\text{-}s) + 15r + 12s$$

la cual tiene por ecuación del plano y grafica:

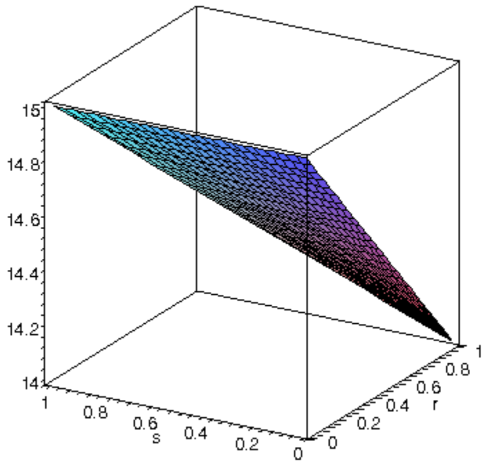
$$\prod_{\text{Trabajador}} (p, E_2) + r + 4s = 16$$

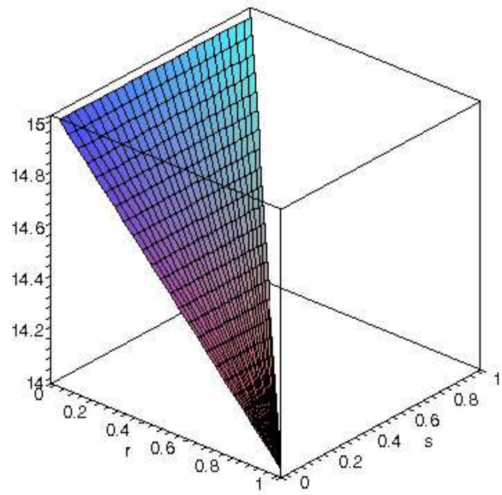




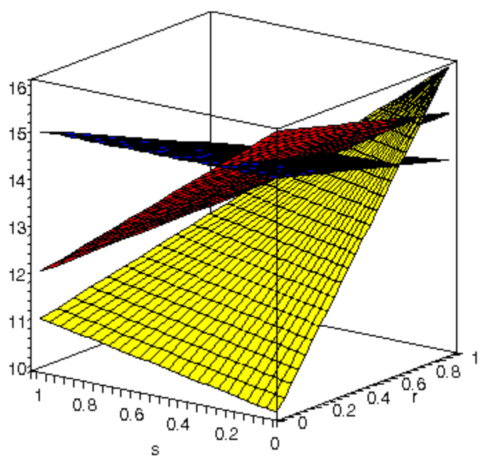
$\prod$ $_{\text{Trabajador}}$ (p, E_3) = 15(1-r-s) + 14r + 15s, la cual tiene por ecuación del plano y grafica:

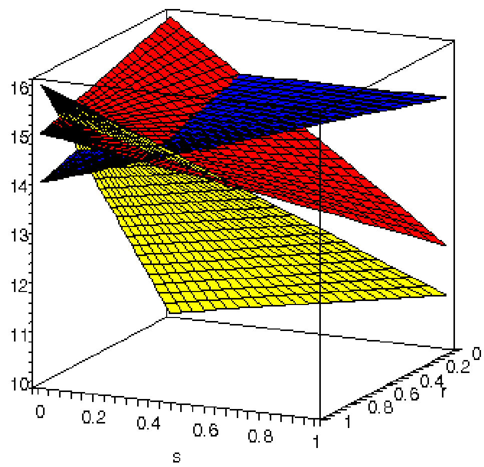
$$\prod{}_{\text{Trabajador}}(p, E_3) + r = 10$$

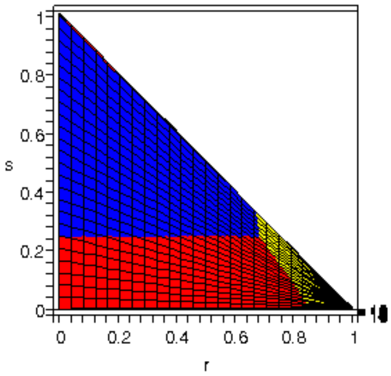


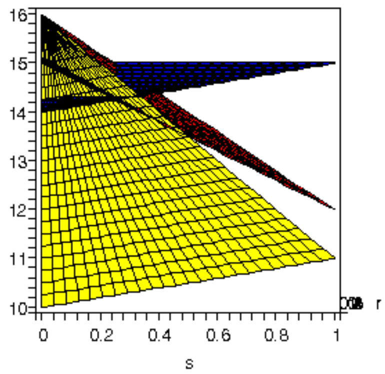


Si graficamos los planos de las tres posibles situaciones a las que puede enfrentarse nuestro trabajador, podemos ver estos planos se intersectan, y esas intersecciones son el punto que mas nos interesa, ya que, es en esos puntos en donde uno puede encontrar la estrategia que es indiferente a las estrategias del jugador contrario, por que es en estos puntos es donde la utilidad esperada será igual sin importar cual sea la estrategia opuesta. Estos puntos pueden observarse si graficamos los tres planos en el mismo espacio de coordenadas:









Como estamos tratando de resolver para el trabajador en lo que estamos interesados es en las partes inferiores de los planos, ya que representan los menores ingresos que puede obtener este. Ahora bien recordemos que nos encontramos en un procedimiento maximin, por tanto, más que esos puntos mínimos, buscamos el punto en el que se maximiza nuestra mínima utilidad esperada. Matemáticamente hablando buscamos los puntos que cumplan con la condición.

$$\Pi_{\text{Trabajador}}(p, q) = \Pi_{\text{Trabajador}}(p, E_1) = \Pi_{\text{Trabajador}}(p, E_2) = \Pi_{\text{Trabajador}}(p, E_3)$$

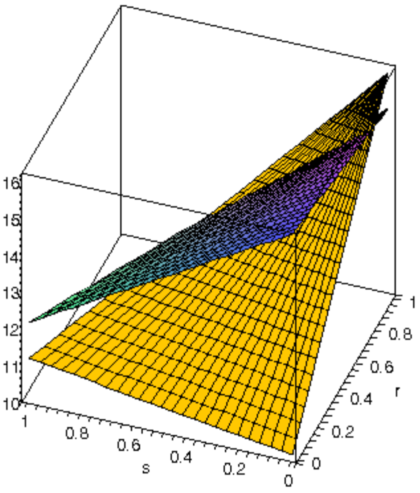
Gracias a esto podemos volver a plantear las ecuaciones de los planos como:

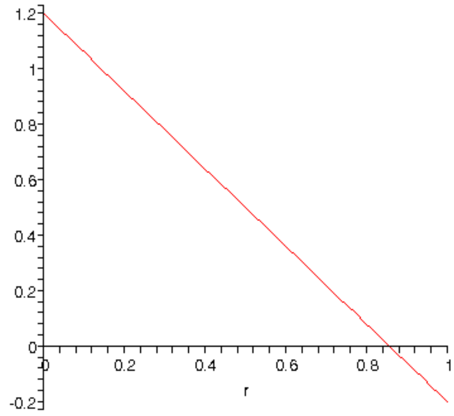
$$\Pi_{\text{Trabajador}} - 6r - s = 10$$
$$\Pi_{\text{Trabajador}} + r + 4s = 16$$
$$\Pi_{\text{Trabajador}} + r = 10$$

Generando de esta manera una matriz de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que resulta relativamente fácil de resolver. Para ver un poco mas grafica la solución, y por lo mismo mas clara, se utilizara el método Gauss-Seydel.

Primero buscaremos la proyección de la intersección de los planos correspondientes a las estrategias E_1 y E_2, la cual es la recta que se encuentra en el plano RS.

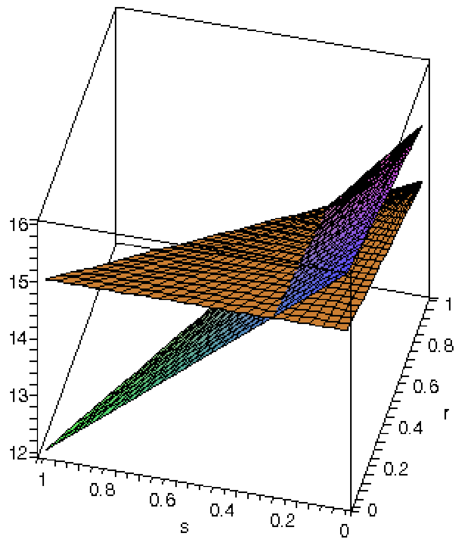
$$-7r - 5s = -6$$

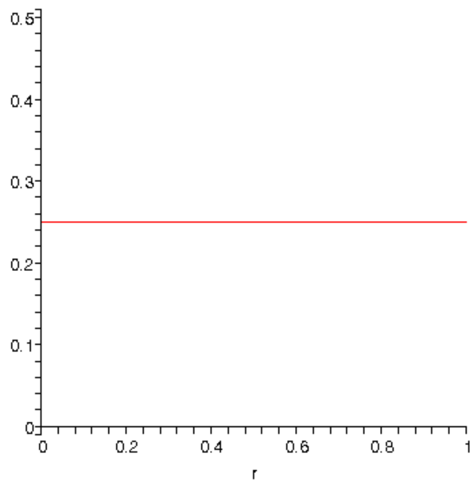




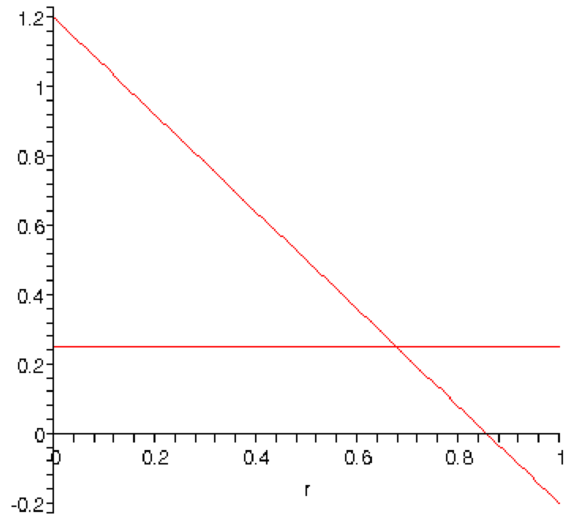
De la misma manera se puede encontrar la proyección correspondiente a las estrategias E_2 y E_3, donde se genera una recta con la siguiente ecuación y grafica:

$$s = \frac{1}{4}$$





Desde este punto hemos encontrado el valor de una de las incógnitas, pero para dejarlo aun mas claro y poder terminar con el procedimiento procederemos a encontrar los puntos en los que se intersecan los tres planos, que serán los mismos puntos en los que lo hacen las dos rectas obtenidas. Esto se realizara igualando las ecuaciones de las rectas que se obtuvieron.



La igualación de las dos ecuaciones nos arroja como resultado, el mismo que se comprueba fácilmente en la grafica, que los valores de las incógnitas quedan dados:

$$r = \frac{19}{28}$$

$$s = \frac{7}{28}$$

Ya conociendo estos valores podemos obtener el valor de la coordenada p_1 del vector definido anteriormente, donde $p_1 = 1 - r - s$, por tanto:

$$p_1 = \frac{2}{28}$$

Con esto, podemos decir que el vector de probabilidades que representa una estrategia de seguridad para el trabajador esta dado por:

$$\overline{p} = \begin{pmatrix} \text{p1} \\ \text{p2} \\ \text{p3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - r - s \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/28 \\ 19/28 \\ 7/28 \end{pmatrix}$$

De igual forma, podemos regresar a alguna de las ecuaciones de los planos para sustituir los valores de s y r para obtener la utilidad esperada que el trabajador obtendrá si utiliza esta estrategia de seguridad. Esto último nos lleva a encontrar que:

$$\Pi_{\text{Trabajador}}(\overline{p}, q) = 14\frac{9}{28}$$

Lo que significa que se obtendría un aumento esperado, de aproximadamente 14.3% en la próxima renovación de contrato y no menos.

Un dato aun mas importante para nuestro análisis, aun más que este resultado, es el hecho de recordar, que desde el momento en que empezamos a desarrollar el procedimiento lo que buscamos era el valor que maximizara las mínimas ganancias esperadas, y eso fue lo que nos trajo hasta este punto, por lo tanto, podemos concluir que el valor que se obtuvo con esta estrategia mixta es:

$$\underline{v} = \max_{p \in P} \min_{q \in Q} \Pi_{\text{Trabajador}}(p, q) = \min_{q \in Q} \Pi(\overline{p}, q) = \Pi_{\text{Trabajador}}(\overline{p}, q)$$

o sea, el valor maximin, el valor de $\overline{p}$ para el cual $\min_{q \in Q} \Pi(\overline{p}, q)$ es mayor.

Con esto se podría dar por terminado el problema, ya que nos estamos enfocando en resolver para el trabajador, pero una forma de concretar este estudio seria el analizar que pasa con nuestro otro jugador el cual también esta interesado en obtener su máximo pago esperado.

Ahora pongámonos en el lado de la empresa, a esta no le interesa dar un gran aumento a sus empleados, si no por el contrario, entre menor sea este gasto que tendrá que hacer, sus utilidades se verán menos afectadas. Por esto podemos proceder de la misma forma que se utilizo para el trabajador.

Lo primero que se debe hacer es plantear la función de pagos de la empresa:

$$\Pi_{\text{Empresa}}(p, q) = p^{T} A\, q$$

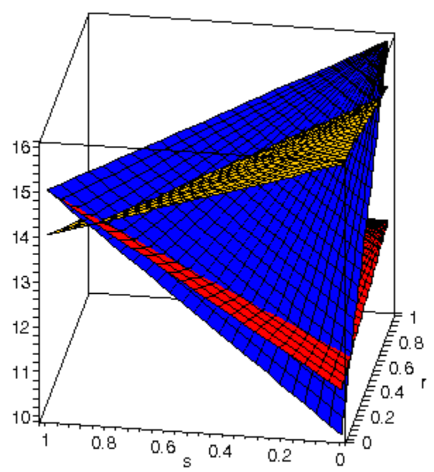
En donde q es el vector (q_1, q_2, q_3) que representa las probabilidades (1-r-s, r, s) con las que el trabajador elegirá jugar con las estrategias (E_1, E_2, E_3). Notemos que en este caso la matriz de pagos es la misma ya que se trata de un juego de suma cero, y por tanto esta matriz se interpretara como, los pagos que tendrá que realizar la empresa.

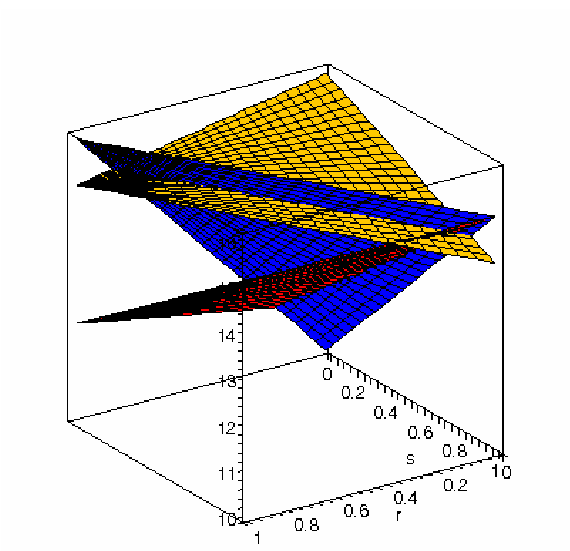
Ahora, como se vio antes, la empresa también se enfrenta a tres posibles escenarios, que son cada una de las estrategias del trabajador:

$$\Pi_{\text{Empresa}}(T_1, q) = 10(1\text{-}r\text{-}s) + 16r + 15s$$
$$\Pi_{\text{Empresa}}(T_2, q) = 16(1\text{-}r\text{-}s) + 15r + 14s$$
$$\Pi_{\text{Empresa}}(T_3, q) = 11(1\text{-}r\text{-}s) + 12r + 15s$$

Que tienen las siguientes graficas y ecuaciones

$$\Pi_{\text{Empresa}}(T_1, q) - 6r - 5s = 10$$
$$\Pi_{\text{Empresa}}(T_2, q) + r + 2s = 16$$
$$\Pi_{\text{Empresa}}(T3, q) - r - 4s = 11$$





Se puede ver que estas graficas cumplen con las mismas condiciones de s y r que cumplían las graficas del trabajador, en lo único que diferenciaremos los problemas es que, como se menciono, no buscaremos maximizar una mínima ganancia, si no por el contrario, estamos buscando el minimizar una máxima pérdida. Con esto se debe de entender que esta ocasión debemos fijar nuestra atención en los puntos que maximizan las perdidas, que por la naturaleza de nuestra matriz, son los puntos superiores de la grafica, así que, debemos encontrar el punto o puntos que minimizan esta perdida, o sea la estrategia mixta q que sea indiferente a cualquier estrategia del trabajador.

Aunque estos problemas suenen totalmente diferentes las graficas nos hacen ver que los puntos en los que estamos interesados son los mismos con lo que trabajamos en el caso anterior, los puntos que satisfacen que:

$$\Pi_{\text{Empresa}}(p, q) = \Pi_{\text{Empresa}}(T_1, q) = \Pi_{\text{Empresa}}(T_2, q) = \Pi_{\text{Empresa}}(T_3, q)$$

Por lo que podemos volver a escribir el sistema como:

$$\Pi_{\text{Empresa}} - 6r - 5s = 10$$

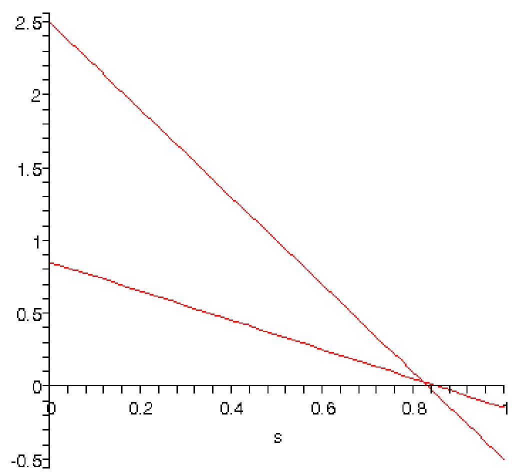
$$\Pi_{\text{Empresa}} + r + 2s = 16$$

$$\Pi_{\text{Empresa}} - r - 4s = 11$$

Si seguimos con el procedimiento antes planteado, podemos llegar a las siguientes dos ecuaciones de rectas en el plano RS:

$$-7r - 7s = -6$$

$$2r + 2s = 5$$



De igualar las ecuaciones podemos encontrar el punto de intersección que se muestra en la grafica. Y haciendo las sustituciones en los lugares correspondientes obtenemos:

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} \text{q1} \\ \text{q2} \\ \text{q3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-r-s \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/28 \\ 1/28 \\ 23/28 \end{pmatrix}$$

$$\prod_{\text{Empresa}} (\text{p}, \bar{q}) = 14\frac{9}{28}$$

Lo que significa que se obtendría un pago esperado, de aproximadamente 14.3% en la próxima renovación de contrato y no más.

Con el mismo razonamiento que se hizo para el valor maximin llagamos encontrar que lo que se obtuvo es el valor mínimax que viene dado por:

$$\bar{v} = \underset{q \in Q}{\text{mín}} \ \underset{p \in P}{\text{máx}} \prod (\text{p, q}) = \underset{p \in P}{\text{máx}} \prod (\text{p}, \bar{q}) = \prod_{\text{Empresa}} (\text{p}, \bar{q})$$

Con esta última igualdad hemos llaga tal vez al punto crucial de nuestro trabajo, por que si comparamos los valores mínimax y maximin obtenidos podemos verificar que:

$$\underline{v} = \bar{v}$$

Y puesto que $(\bar{p}, \bar{q})$ conforman un par de estrategias de seguridad para el trabajador y la empresa respectivamente, podemos decir que $\prod(\bar{p}, \bar{q})$ es un punto silla de este problema.

Y mas aun, dado que $(\bar{p}, \bar{q})$ son las estrategias de seguridad de nuestros jugadores en este juego y $\underline{v} = \prod(\bar{p}, \bar{q}) = \bar{v}$, o expresado en palabras, $\prod(\bar{p}, \bar{q})$ es un punto silla, podemos decir que este punto es un **Equilibrio de Nash**

Una última forma de asegurarnos que todo es correcto, seria realizar el producto de matrices que nos define el valor del juego:

$$\Pi_{\text{Trabajador}}(\bar{p}, \bar{q}) = \Pi_{\text{Empresa}}(\bar{p}, \bar{q}) = p^{T} A\, q$$

Donde:

$$p^{T} A\, q = \begin{pmatrix} 2/28 & 19/28 & 7/28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 16 & 15 \\ 16 & 15 & 14 \\ 11 & 12 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/28 \\ 1/28 \\ 23/28 \end{pmatrix} = 14\frac{9}{28}$$

Ahora si podemos decir que el valor de este juego es $= 14\frac{9}{28}$ con el equilibrio de Nash dado por las estrategias $(\bar{p}, \bar{q})$.

CAPITULO V

CONCLUSIONES

Se de antemano que los resultados de esta tesis serán criticados, debido a que, en ningún lugar se puede actuar exactamente como lo sugiere el problema que se haga, y también que ningún gerente reaccionaria de buen modo si se le dice que esta planeando utilizar una estrategia mixta para se renovación de contrato, pero, lo importante de este método de solución no es el tratar de predecir el futuro, por que aunque ese es el propósito de muchas materias, hasta los modelos de estadística mas avanzados tienen problemas en esto, debido a que al igual que en la Física y otras materias se han hecho supuestos que rara vez en la vida real se encuentran, por lo que el propósito es mostrar una forma de actuar ante una situación de incertidumbre, tratando así de lograr la seguridad de un resultado dentro de un menor rango de datos que el que se hubiese obtenido sin la ayuda de este procedimiento.

Con los datos que se obtuvieron, tal vez no obtengamos resultados iguales a los obtenidos en Mexicana de Aviación, pero recordemos que este trabajo se llevo a cabo con un muestreo no probabilistico, lo que aumenta en cierto grado el margen de error, así que, como a pesar de eso los datos obtenidos son muy cercanos a los verdaderos se puede decir que si la empresa se interesara en emplear este método, los resultados que podría obtener serian mas acertados que los dados en este estudio tal vez, por que esta cuenta con los recursos para obtener la información requerida.

Los datos obtenidos, fueron dados a saber a los voluntarios de este experimento, los cuales comentaron que realmente los que se comportaron mas parecido al vector $\bar{p}$ obtuvieron una ganancia parecida a $(\bar{p}, \bar{q})$

CAPITULO VI

BIBLIOGRAFÍA Y ANEXOS

Ken Binmore, Teoría de Juegos, traducción: Antoni Malet
Editorial. McGraw-Hill
Londres, 1982 y Universidad de Michigan.

Eric Rasmusen, Juegos e Información, Una introducción a la teoría de juegos, 1989
Basil Blackwell, Cambridge, Massachussets, EUA, y Oxford, Reino Unido.
Editorial. Fondo de Cultura Económica

Dennos D. Wackerly, William Mendelhal III, Richard L. Sheaffer,
Estadística Matemática con Aplicaciones.
Editorial. Thomson
6a. edicion, 2002

http://www.eumed.net/

http://www.monografias.com/trabajos5/teorideju/teorideju.shtml#intro

http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Teor%C3%ADa_de_juegos

http://www.gestiopolis.com/

http://www.Tutorial de Muestreo 2_- Tipos de muestreo.htm.

Curso de Organización Industrial
R. Fischer
Otoño 2000

http://www.econlink.com.ar/definicion/teoriadejuegos.shtml

ANEXO 1

ENCUESTA

Objetivo: esta encuesta será utilizada para recabar información para el desarrollo de una tesis elaborada en la Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM). Esta tesis tiene como objetivo proporcionar a los trabajadores, tanto en contrataciones como en renovaciones de contratos, la actitud que debe de tomar para asegurar una máxima ganancia o minimizar una perdida.

Si en las siguientes preguntas no tienes la confianza de proporcionar tu salario real puedes utilizar un porcentaje de este.

Nota: recuerda que un cambio porcentual en tu salario se calcula como sigue;

$$\text{Porcentaje} = \frac{\text{salario final} - \text{salario inicial}}{\text{Salario inicial}} \times 100\%$$

Que actitud tomo la empresa en tu última renovación de contrato o contratación:

R=

Que actitud tomaste en tu última renovación de contrato o contratación:

R=

Cual fue la oferta que planteo la empresa en base a la actitud que tomo (*si vas a usar % y no tienes un salario inicial por ser nueva contratación utiliza en vez de este la oferta de la empresa, por lo tanto esta respuesta seria 0%*)

R=

Cual fue tu petición en base a la actitud que tomaste

R=

Después de tu petición la empresa cambio de actitud, que actitud tomo

R=

Después de las negociaciones cual fue el resultado final

R=

* Los porcentajes negativos deben expresarse como tal

Gracias por tu cooperación, estos datos serán confidenciales además de anónimos. Si este proyecto funciona nos proporcionara una perspectiva de cómo actuar ante la empresa en esta situación.

ANEXO 2

T1 vs E1	T1 vs E2	T1 vs E3	T1 vs E4	T2 vs E1	T2 vs E2	T2 vs E3	T2 vs E4
10.9	15	17	17	16	14	14	16
11	17	17	17	17	14	13.5	16
8	17	15	17	17	16	13.5	17
9	17	16	18	16	15.5	15	17
11	14	16	19	16	15.8	15	15
11.1	14.5	17	20	15.5	15.5	15	16
9.6	17	15.5	19	15.5	15.5	17	16
9.8	17	16.5	20	15.5	15.5	13	17
10.2	15	17	17	16	14	13	15.5
10.1	15.8	17	17	16	16	13	16.5
11	16		18	17	15.5	14	17
10.1			18	16	15.5	12.5	17
9.8			17	16	15.5	14	16
9.7				15	15.5		15.5
9.75				15.5			15.5
9.95							15
9.8							15
9.75							15.5
9.6							
10.00789	**15.93636**	**16.4**	**18**	**16**	**15.27142**	**14.038461**	**16.0277778**

T3 vs E1	T3 vs E2	T3 vs E3	T3 vs E4	T4 vs E1	T4 vs E2	T4 vs E3	T4 vs E4
12	12	14	17	11	13	13	14
9	14	16	17	11.1	12	11.1	11
11	14	17	18	9.6	15.5	12	11
11.1	13	16	17	9.8	12	13	13
9.6	14	16	18	10.2	12.5	10.5	12
9.8	12	15.5	18	10.1	12	11	13
10.2	9	15.5	17.5	11	13	11	13
10.1	11	15.5	17.5	10.1	13	10.1	14
11	11.1	16	16	9.8	15	12	14
10.1	13	16	16	9.7	15.5	11	13.5
9.8	12.5	14	15.5	9.75	13	12.5	13.5
9.7	10.2	16	18	9.95	13	10.5	13.5
9.75	12	16	17.5	9.8	14	12	13.5
9.95	11	15	16	9.75	13	12	13
9.8	10.1	15.5	16	9.6	12	12.5	
12	11	13	17	9.5	12	12.5	
11.5	12	13	17	9	12	13.5	
12.5	13	14	17.5	10		12.5	
13.5	9.95	13	15			14	
14		14	17.5				
14	14	14					
10.9714286	**11.9425**	**15**	**16.95**	**9.98611111**	**13.088235**	**11.93157**	**13**