INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Modelos Estocásticos en la Valuación de Activos y Opciones Financieras

TESIS
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

PRESENTA
Silvia Rodríguez Valdez

Director de Tesis
Manuel Robles Bernal

México, D. F. Diciembre del 2008

A mis Padres Aurora Valdez y Rafael Rodríguez quienes día con día se esfuerzan por hacer de mis hermanos y de mí personas de éxito, sin olvidar el profundo amor que depositan en cada una de las actividades que compartimos. Este triunfo es de ambos.

A mis Hermanos Pilar, Gustavo, Rafael y Liz, con todo el cariño, pues han sabido apoyarme en los momentos de flaqueza .

A ti Alejandro por ser el amor de mi vida y por el apoyo incondicional que sin darte cuanta me brindas.

Agradecimientos

A Dios por permiterme llegar a este momento de mi vida, por llenarme de fe y esperanza en los momentos dificíles.

A la Escuela Superior de Física y Matemáticas por llenarme de conocimientos y experiencias maravillosas.

A mi Profesor y Amigo Manuel por haber sido soporte durante toda mi carrera y el tremendo trabajo que compartimos durante la elaboración de esta tesis.

Y a todas las personas que colaborarón para hacer posible este trabajo.

Índice general

Introducción

Los orígenes de los modelos para la valoración de activos y derivados financieros se encuentran en la ecuación de difusión desde 1807. Luego casi 100 años despues, el 29 de marzo de 1900, Louis Bachelier defendió exitosamente su tesis "Theorie de la Spéculation", bajo la supervisión de Henri Poincaré.

En ella proponía un movimiento Browniano como modelo asociado a los precios de las acciones. El objetivo del modelo de Bachelier era determinar el valor de opciones accionarias, y aunque fue un buen principio para esa valoración, la fórmula que dedujo estaba basada en supuestos no realistas, ya que asumía la inexistencia de tasas de interés y utilizaba un proceso estocástico (movimiento browniano) que permitía que los precios de las acciones tomaran valores negativos. Posiblemente ésta fue una razón para que ese modelo fuera olvidado durante mucho tiempo.

Posteriormente, autores como Paul Samuelson y James Boness, se ocuparon de superar algunos de los inconvenientes del modelo de Bachelier, asumiendo la existencia de tasas de interés y una distribución de probabilidad más real para los precios de las acciones; además tuvieron en cuenta que los inversores son adversos al riesgo, y que posiblemente estén dispuestos a asumirlo, pero a cambio de algún premio. En particular, en 1960, el economista norteamericano Samuelson (premio Nobel de economía en 1970) propuso el movimiento browniano geométrico como modelo para los precios que están sujetos a incertidumbre.

En 1964, Boness sugirió una fórmula más cercana a la de Black-Scholes, pero que todavía contaba con una tasa de interés desconocida, que Boness incluía como compensación por el riesgo asociado con el valor de la acción. Para el modelo de Black-Scholes-Merton, el movimiento Browniano geométrico es el modelo básico asociado a los movimientos de los precios. Pero además estos autores tuvieron en cuenta, y esto fue determinante, que el movimiento Browniano está asociado con la teoría matemática avanzada del cálculo estocástico o cálculo de Itô, desarrollado por el matemático japonés Kiyosi Ito desde 1940, que considera aspectos análogos a los del cálculo clásico de Newton y Leibtniz, pero en condiciones aleatorias.

Finalmente en 1973 surge la famosa ecuación de Black-Scholes para calcular el precio de opciones financieras y con ella la teoría moderna de finanzas, basada en el principio de no arbitraje. Su desarrollo desato una enorme cantidad de alcanzes y revoluciono la practica de las finanzas.

Aunque la teoria matemática que usa la formula de Black-Sholes es considerablemente avanzada, es posible derivar y entender el mismo resultado presentado usando sólo matemáticas elementales.

El principal objetivo de esta tesis es, analizar como se modelan tanto los precios de una acción como los precios de un derivado de está, "las opciones de tipo europeo", basados en el arbitraje y cobertura. observando la importancia y el alcance que tiene la matemática en finanzas. Y aunque para esto se hacen supuestos irreales, este contexto nos ayudara a comprender mejor la teoría más general.

Este trabajo consta de tres Capítulos; en el Capítulo 1, se analiza el comportamiento de los precios de una acción y se deducen dos modelos fundamentales para estós, uno en forma discreta Lattice Binomial y otro en forma continua, el modelo de Black-Scholes. En el Capítulo 2 se introduce la teoría necesaria para la comprensión y el desarrollo de la valuación de opciones europeas, y se desarrolla el modelo binomial para valuación de opciones suponiendo que los precios de la acción se modelan como en el Capítulo 1 y finalmente en el Capítulo 3, se analiza y bosqueja como surje y se utiliza la formula de Black-Scholes para valuar un derivado financiero.

Cabe mencionar que en el Capítulo 1 y 3 no se demuestra sólo se utilizan resultados de la teoria de Cálculo estocástico.

Capítulo 1

Modelos Estocásticos en Valuación de Precios

En este capítulo se contempla un estudio de los modelos matemáticos estocásticos que nos permiten analizar la dinámica de los precios de un activo financiero, los modelos discretos de nuestro intéres son el *Modelo Multiplicativo* y el *Lattice Binomial* que por su sencillez es de gran uso en el ámbito financiero. El *modelo de Black-Scholes* nos permite analizar los precios de manera continua y obtener el*Proceso de Itô* de los precios, el cual es un *Movimiento Browniano geométrico.*

1.1. Modelo Aditivo de Precios

Denotemos por $(S_t)_{t\geq 0}$ al proceso de precios de una acción, entonces dada una sucesión de tiempos;

$$t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n$$

para los cuales los precios están dados por

$$S_{t_0}, S_{t_1}, \cdots, S_{t_n}$$

Definición 1.1.1. *Se define el modelo discreto aditivo por la relación*

$$S_{t_{i+1}} = aS_{t_i} + \epsilon_{t_i} \qquad i = 0, 1, 2 \cdots, n$$

donde ϵ_{t_i} *son variables aleatorias mutuamente independientes con la misma distribución las cuales causan la incertidumbre de los precios en cada paso y* $\boldsymbol{a}$ *es una constante (usualmente* $a > 1$*). Para operar este modelo se fija un precio inicial S(0), entonces una vez dada la variable aleatoria* u_0 *se puede determinar* S_1 *y así sucesivamente .*

Asumamos que las ϵ_{t_i} tienen una distribución normal con media $\mu = 0$ y varianza σ^2. Denotaremos esto por:

$$\epsilon_{t_i} \sim N(0, \sigma^2)$$

Al resolver el modelo recursivo tenemos

$$\begin{array}{rcl} S_{t_1} & = & aS(0) + \epsilon_0 \\ S_{t_2} & = & aS_{t_1} + \epsilon_{t_1} \quad = \quad a^2S(0) + a\epsilon_0 + \epsilon_{t_1} \\ \vdots & & \qquad\qquad\quad \vdots \\ S_{t_i} & = & aS_{t_{i-1}} + \epsilon_{t_{i-1}} \quad = \quad a^iS(0) + a^{i-1}\epsilon_0 + \cdots + \epsilon_{t_{i-1}} \end{array}$$

Se tiene que

$$S_{t_i} = a^iS(0) + \sum_{k=0}^{i-1} a^{(i-1)-k}\epsilon_{t_k} \tag{1.1}$$

por lo tanto S_{t_i} tiene una distribución normal con media

$$E[S_{t_i}] = a^iS(0) \tag{1.2}$$

El modelo es inconveniente ya que permite valores negativos de los precios, sin embargo será de gran utilidad para otros modelos en la dinámica de precios.

1.2. Modelo Multiplicativo

El modelo multiplicativo establece la siguiente relación recursiva.

$$S_{t_{i+1}} = u_{t_i} S_{t_i}$$

siendo u_{t_i} variables aleatorias positivas independientes que causan la incertidumbre de los precios, (de hecho $u_{t_i} = \frac{S_{t_{i+1}}}{St_i}$ es la tasa de rendimiento).

Resolviendo la relación recursiva obtenemos.

$$\begin{array}{rclcl}
S_{t_1} & = & u_0 S(0) & & \\
S_{t_2} & = & u_{t_1} S_{t_1} & = & u_{t_1} u_{t_0} S(0) \\
\vdots & & & \vdots & \\
S_{t_i} & = & u_{t_{i-1}} S_{t_{i-1}} & = & u_{t_{i-1}} u_{t_{i-2}} \cdots u_0 S(0)
\end{array}$$

tomando logaritmo natural se tiene:

$$\ln(S_{t_i}) = \ln S(0) + \sum_{k=0}^{i-1} \ln u_{t_i}$$

El logaritmo de precios $\ln S_{t_i}$ toma la forma de un modelo aditivo, donde las variables aleatorias $\omega_{t_i} \doteq \ln u_{t_i}$ son variables aleatorias independientes con distribución normal $N(\nu, \sigma^2)$
Por lo tanto las variables

$$u_{t_i} = e^{\omega_{t_i}}$$

tienen una *distribución log-normal* (ver Apéndice). Analizar el movimiento de precios nos lleva a estudiar el comportamiento en los logaritmo de los precios.

$$S_{t_i} \longrightarrow (lnS_{t_i})$$

Ahora bien

$$E[lnS_{t_i}] = lnS(0) + \sum_{k=0}^{i-1} E[\omega_{t_k}] = lnS(0) + i\nu$$

y su varianza es

$$Var(lnS_{t_i}) = i\sigma^2$$

El proceso $(u_{t_i})_{t\geq 0}$ es un *Movimiento Browniano Geométrico* y las v.a. u_{t_i} tienen una *distribución log-normal* (ver Apéndice) por lo tanto tenemos:

$$E(u_{t_i}) = e^{\nu+\frac{\sigma^2}{2}} \tag{1.3}$$

$$Var(u_{t_i}) = e^{2\nu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right) \tag{1.4}$$

1.3. Lattice Binomial

Como antes se considera el proceso de precios de una acción $(S_t)_{t\geq 0}$, y la sucesión de tiempos.

$$t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n$$

Fijemos un periodo de tiempo τ y supongamos que $t_i - t_{i-1} = \tau$ para $i = 1, ..., n$, es decir en este caso la duración entre los tiempos de la sucesión es la misma.

Además en cada periodo de τ el precio sólo puede tomar uno de estos dos valores, $uS(t_{i-1})$ o $dS(t_{i-1})$ donde $0 < d < 1 < u$. Esto permite representar el comportamiento de los precios por medio de un *lattice*, asumamos que:

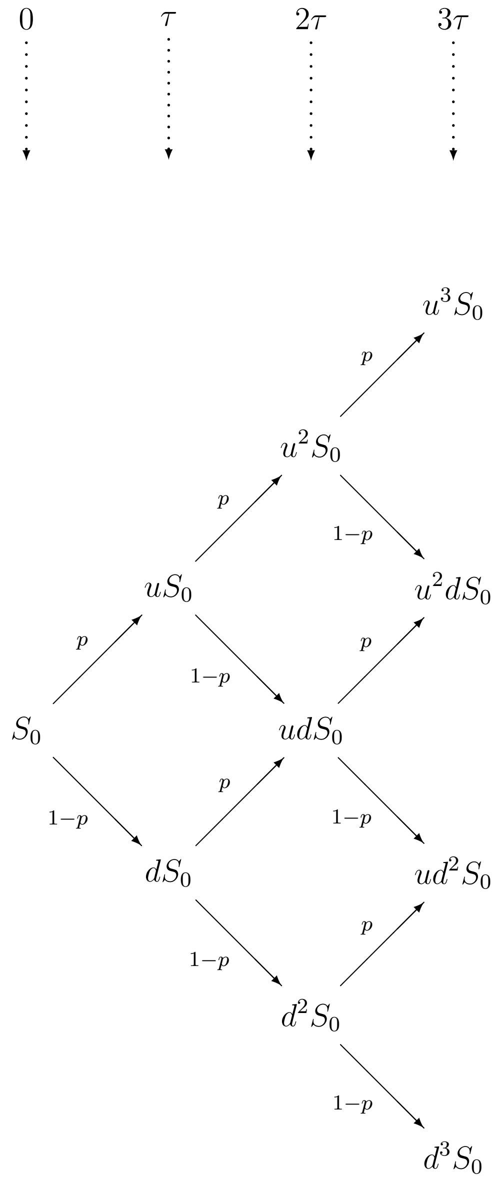
$$p \doteq P(uS_{t_{i-1}} \mid S(t_{i-1}))$$
$$q \doteq 1-p \doteq P(dS_{t_{i-1}} \mid S(t_{i-1}))$$

como;

$$u^{i-k}d^kS(0) \qquad k = 0, 1, \cdots i \quad i = 1, 2, , \cdots \tag{1.5}$$

son los posibles valores de S_{t_i}, entonces la lattice tiene la siguiente forma.

Diagrama de un Lattice Binomial (de periodo τ)



En el periodo i tenemos $i+1$ nodos de precios posibles para la acción.

Para S_{t_i} el precio de la acción en el periodo i se tienen que los posibles valores son:

$$u^k d^{i-k} S(0) \qquad k = 0, 1, \cdots i$$

(que son las posibles trayectorias, note que k representa el número de veces que el precio de la acción subió en i periodos) con probabilidad de que suceda

$$\binom{i}{i-k} p^k q^{i-k}$$

por lo tanto el valor esperado del precio de la acción después de i-periodos con valor inicial $S(0)$ es

$$\begin{aligned} E(S_{t_i}) &= \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{i-k} p^k q^{i-k} u^k d^{i-k} S(0) \\ &= \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{i-k} (pu)^k (qd)^{i-k} S(0) \end{aligned}$$

así

$$E(S_{t_i}) = (pu + qd)^i S(0) \tag{1.6}$$

observamos que

$$\begin{aligned} E(S_{t_i}) &= (pu + qd)^i S(0) \\ &= (pu + qd)(pu + qd)^{i-1} S(0) \\ &= (pu + qd) E(S_{t_{i-1}}) \end{aligned}$$

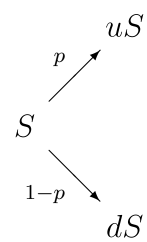
por lo tanto tenemos la relación

$$\boxed{E(S_{t_i}) = (pu + qd) E(S_{t_{i-1}})} \tag{1.7}$$

Para conocer completamente el modelo observemos que debemos estimar los tres parámetros que lo definen a saber u, d y p

1.3.1. Estimación de los parámetros u, d y p del modelo Binomial

Para llevar a cabo la estimación se hará un acercamiento (matching) entre el modelo multiplicativo y el Lattice Binomial[1]. Consideremos un sólo periodo y $S(0) = 1$ esto es valido ya que recordemos que el modelo multiplicativo sólo depende del valor del precio al comienzo y de los valores que tomen las variables aleatoria responsables de la perturbación.



luego S_{t_1} es la v.a. con valores posibles $uS(0) = u$ o $dS(0) = d$
el valor esperado del $\ln S_{t_1}$ es

$$E(\ln S_{t_1}) = p \ln u + (1-p) \ln d$$

y su varianza

$$Var(\ln S_{t_1}) = p \ln^2 u + (1-p) \ln^2 d - (p \ln u + (1-p) \ln d)^2$$

simplificando se tiene

$$Var(\ln S_{t_1}) = p(1-p)(\ln u - \ln d)^2$$

definamos $U \doteq \ln u$ y $D \doteq \ln d$ por lo tanto obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} E(\ln S_{t_1}) &= pU + (1-p)D \\ Var(\ln S_{t_1}) &= p(1-p)(U-D)^2 \end{aligned}$$

La estrategia es buscar un acercamiento entre el *modelo Binomial* y el *Modelo Multiplicativo* igualando sus valores esperados y sus varianzas.

$$
\begin{aligned}
pU + (1-p)D &= \nu\tau && (1.8)\\
p(1-p)(U-D)^2 &= \sigma^2\tau && (1.9)
\end{aligned}
$$

Se tiene un sistema con un grado de libertad, hacemos $D = -U$ (es decir $u = \frac{1}{d}$ entonces

$$
\begin{aligned}
(2p-1)U &= \tau\nu\\
4p(1-p)U^2 &= \tau\sigma^2
\end{aligned}
$$

elevando al cuadrado la primera ecuación y sumando tenemos

$$U^2 = \nu^2\tau^2 + \tau\sigma^2$$

por lo tanto

$$
\begin{aligned}
U &= (\nu^2\tau^2 + \tau\sigma^2)^{\frac{1}{2}}\\
D &= -(\nu^2\tau^2 + \tau\sigma^2)^{\frac{1}{2}}\\
p &= \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{(\sigma^2/(\nu^2\tau)+1))^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
$$

si $\tau \sim 0$ hacemos la siguiente aproximación al despreciar el término τ^2 obteniendo las identidades

$$
\begin{aligned}
u &= e^{\sigma\sqrt{\tau}} && (1.10)\\
d &= e^{-\sigma\sqrt{\tau}} && (1.11)\\
p &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\nu}{\sigma}\sqrt{\tau} && (1.12)
\end{aligned}
$$

Las ecuaciones (1.10), (1.11) y (1.12) dan los valores de los parámetros en el *Modelo Binomial*

Ejemplo: Un activo tiene un precio inicial $S(0) = 100$ con parámetros $\nu = 0{\cdot}15$ y $\sigma = 0{\cdot}30$ consideremos periodos semanales para desarrollar la dinámica de precios, los parámetros son:

$$
\begin{aligned}
u &= e^{\frac{0\cdot 30}{\sqrt{52}}} = 1 \cdot 04248 \\
d &= \frac{1}{u} = 0 \cdot 9592 \\
p &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{0 \cdot 15}{0 \cdot 30}\sqrt{\frac{1}{52}}\right) = 0 \cdot 5346
\end{aligned}
$$

El lattice binomial de precios es:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d, dotted] & \tau \arrow[d, dotted] & 2\tau \arrow[d, dotted] & 3\tau \arrow[d, dotted] \\
{} & {} & {} & {} \\
& & & 113{,}29 \\
& & 108{,}67 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& 104{,}25 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 104{,}25 \\
100 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 100 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& 95{,}93 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 95{,}93 \\
& & 92{,}02 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & & 88{,}27
\end{tikzcd}
$$

1.4. El Modelo de Black-Scholes

El comportamiento aleatorio de los precios de un instrumento financiero se puede ver haciendo una analogía con el movimiento caótico de una partícula (polen) en un medio continuo que esta sujeta a constante choque con las moleculas, así los precios de una acción que están cambiando por las tendencias en los Mercados Financieros y las especulaciones; de ahí que en un principio se proponga un modelo de los precios como un *Movimiento Browniano* sin embargo vemos que existen algunos inconvenientes, por ello se propone el modelo de Black-Scholes. Se utiliza lo que es un *Proceso de Itô* y el importante resultado conocido como el *Lema de Itô*.

1.4.1. Movimiento Browniano Geométrico de los precios

La independecia en sus incrementos hace del Movimiento Browniano (ver Apéndice) un candidato ideal para modelar los precios de una acción, ya que define una familia de incrementos infinitesimales dW_t, distribuidos normalmente, con media cero y varianza dt. Sin embargo sus trayectorias no tienen variación acotada ya que si $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_n = t$ es una partición de [0,t], donde podemos suponer $t_i - t_{i-1} = \frac{t}{n}$ para cada intervalo, entonces:

$$\begin{aligned} E\{\sum_{i=1}^{n} |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|\} &= nE\{|W_{\frac{t}{n}}|\} \\ &= n\sqrt{t/n}E\{|W_1|\} \end{aligned} \tag{1.13}$$

la cual va a ∞ cuando $n \nearrow \infty$.

Entonces la integral con respecto a dW_t no existe en el sentido usual. Sin embargo para un tiempo fijo T, si $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso adaptado (ver Apéndice) a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ del movimiento Browniano, tal que:

$$E\{\int_0^T (X_t)^2 dt\} < \infty \tag{1.14}$$

entonces podemos definir la *integral estocástica* de X_t con respecto al movimiento Browniano (W_t) como:

$$\int_0^t X_s dW_s = \lim_{n \nearrow \infty} \sum_{i=1}^{n} X_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \tag{1.15}$$

Donde el límite es en media cuadrática [2].

Como función del tiempo, la integral estocástica posee otras propiedades tales como la Isometria de It$\hat{o}$ y define una martingala, por mencionar algunas. Para un mejor estudio ver [5].

De lo anterior el incoveniente de ver al movimiento de precios como un Movimiento Browniano. Para evitar estos problemas Black-Scholes proponen un modelo el cual analiza las tasas de rendimiento instantaneas de los precios.

Consideramos el proceso continuo de precios $(S_t)_{t\geq 0}$ tal que en una cantidad de tiempo infinitesimal dt, el rendimiento infinitesimal $\dfrac{dS_t}{S_t}$ tiene media μdt, proporcional a dt con μ la tasa de rendimiento constante y sufre fluctuaciones que son independientes del pasado. Esas fluctuaciones son modeladas por σdW_t donde σ es una constante de volatilidad positiva, y dW_t los incrementos infinitesimales del movimiento Browniano, entonces

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{1.16}$$

representa el rendimiento infinitesimal de los precios de la acción.

El lado derecho de la ecuación diferencial estocástica (1.17) tiene la siguiente interpretación en finanzas. El rendimiento instantaneo de los precios de una acción puede verse como un termino de rendimiento determinado más un termino de riesgo aleatorio, esto suponiendo que no hay pago de dividendos en el intervalo de tiempo que consideramos.

En su forma integral (1.17) es:

$$S_t = S_0 + \mu \int_0^t S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dW_s \tag{1.17}$$

donde la segunda integral es una integral estocástica como en (1.16) y X_0 es el valor inicial, el cual es independiente al movimiento Browniano y cuadrado integrable.

Observemos, que la ecuación (1.17) no tiene sentido, pues mencionamos que el movimiento Browniano no es derivable, sin embargo es una forma representativa de (1.18), la cual tiene sentido por la construcción de la integral estocástica.

Por lo tanto para obtener nuestro modelo de los precios de la acción debemos resolver (1.17).

Observando la ecuación (1.17) es muy tentador escribir $\dfrac{X_t}{X_0}$ explicitamente como la exponencial de $(\mu t + \sigma W_t)$. Sin embargo esto no es correcto porque la regla de la cadena usual no es valida para diferenciales estocásticas. Esta discrepancia es corregida por la formula de Itô la cual se presenta acontinuación, sin embargo se aclara que no se demostrara.

Definición 1.4.1. *Un proceso* $(X_t)_{t\geq 0}$ *es llamado un* Un Proceso de Itô *si está gobernado por una ecuación diferencial estocástica de la forma*

$$dX_t = a\,(X_t, t)\,dt + b\,(X_t, t)\,dW_t$$

donde (W_t) *es un Movimiento Browniano.*

Teorema 1.4.1. Lema de Ito. *Consideremos un Proceso de Ito* $(X_t)_{t\geq 0}$ *y f(x,t) una función de dos variables, dos veces diferenciable entonces el proceso* $(f(X_t, t))_{t\geq 0}$ *satisface la ecuación diferencial estocástica (*de Ito*).*

$$df = \left(a(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} b^2(x,t) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} b(x,t) dW_t$$

Regresando a la ecuación diferencial estocástica para la evolución de los precios de la acción S_t, es natural intuir del cálculo ordinario que el $\log S_t$ podría satisfacer una ecuación que podemos integrar explicitamente. Calculamos la diferencial de $\log S_t$, aplicando la formula de Itô con f(t,x)=logx, $\mu(t,x) = \mu x$ y $\sigma(x,t) = \sigma x$, entonces.

$$dlogS_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t$$

El logaritmo del precio de la acción esta dado por

$$logS_t = logS_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t$$

lo cual produce la siguiente formula para el precio de la acción.

$$S_t = S_0 exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t).$$

El rendimiento $\frac{S_t}{S_0}$ es lognormal, ya que este es:

$$\boxed{\frac{S_t}{S_0} = exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t).} \tag{1.18}$$

es la exponencial de un movimiento Browniano no estandar distribuido normalmente con media $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$ y varianza $\sigma^2 t$ en el tiempo t.

El proceso (S_t) es llamado movimiento Browniano Geométrico. El precio de la acción dado por el movimiento Browniano geométrico satisface la ecuación (1.17).

Note que si S_t es cero en algun tiempo t, entonces será cero para todos los tiempos posteriores. Así en este modelo, la banca rota es un estado permanente. Sin embargo, $\frac{1}{t}W_t$ tiende a cero cuando t tiende a infinito con probabilidad 1, entonces se sigue que si S_0 no es cero entonces S_t no va a cero en un tiempo finito.

.

Capítulo 2

Valuación de Opciones.

El objetivo de este Capítulo es resolver el problema de valuación de derivados financieros en forma discreta en el tiempo para uno y más periodos, suponiendo que los precios de los activos subyacente pueden tratarse con los modelos desarrollados en el Captulo 1. Aunque en el transcurso se hacen supuestos irreales esto nos ayudara a identificar las claves para poder analizar y comprender la solución de este problema de manera continua la cual tratamos en el siguiente capítulo.

2.1. Conceptos básicos

.

Definición 2.1.1. ***Un derivado financiero*** *es un contrato, cuyo valor es función -se deriva- del precio de otro objeto financiero, tales como una acción, una divisa o un producto físico. En todos los casos el activo del cual se deriva el precio, es llamado* ***activo subyacente****.*

Aunque actualmente se utiliza en el mundo una amplísima gama de derivados financieros y múltiples combinaciones entre ellos, los derivados básicos, y más conocidos, siguen siendo las opciones, los forwards, los futuros y los swaps.

Por ejemplo, si se tiene una opción sobre una acción, la opción es el derivado financiero, y el activo subyacente es la acción.

Los llamados productos derivados financieros han sido utilizados con diversos objetivos, pero, dependiendo de la intención que se tenga al utilizarlos, los agentes u operadores que intervienen en su uso siempre se pueden enmarcar para alguno de las siguientes objetivos: **cobertura, especulación o arbitraje**.

El objetivo de la cobertura (hedger) es protejerse del riesgo que se afronta ante potenciales movimientos en un mercado variable. Los especuladores, utilizan los derivados para apostar acerca de la dirección futura de los mercados y tratar de obtener beneficio de esas tendencias "previstas". Para el arbitraje se busca tomar posiciones compensatorias sobre dos o más activos o derivados, asegurándose un beneficio sin riesgo, y aprovechando situaciones coyunturales de los mercados.

2.2. Opciones y algunos tipos de opciones

Quizás el más sencillo de los productos derivados sea una opción ordinaria (compra y venta) en este caso el activo subyacente es una acción.

Definición 2.2.1. *Uno puede adquirir la posibilidad de compra de una acción en el futuro a un precio garantizado. Este derecho sin obligación de comprar en el futuro, se conoce como:* ***Opción de compra (call option)****. El cual tiene estas condiciones:*

En una fecha especificada, denominada ***fecha de expiración (T)****, el comprador de esta opción tiene dos posibilidades no hacer uso de ese derecho (dejar que* ***expire la opción)*** *o hacer uso del derecho* ***(ejercer la opción)****. Si decide ejercer la opción pagara una cantidad preestablecida de dinero al vendedor de la opción, el* ***precio de ejercicio*** *o liquidación* ***(K)****.*

El vendedor del contrato asume la responsabilidad de entregar una acción al comprador en la fecha de expiración si este decide ejercer la opción. Por este derecho el comprador de la opción paga al vendedor una comisión llamada ***prima*** *esto al inicio del contrato.*

Por lo anterior podemos describir que la ganancia neta (pay-off) posible en cuanto al precio de la acción al vencimiento, denotado por S_T, y el precio de ejercicio **K**, es:

$$\text{Ganancia neta de la compra}=max\{S_T - K, 0\}$$

Esta formula para el máximo es igual a $S_T - K$, si $S_T - K$ es positiva, de otro modo el resultado es 0. Se dice que la opción termina **en dinero** si $S_T > K$, **a dinero** si $S_T = K$ o **fuera de dinero** en el caso $S_T < K$. Por lo tanto el comprador sólo ejercera la opción si termina en dinero ya que él tendra la posibilidad de obtener una ganancia de $S_T - K$ si vende en ese instante la acción. De otra manera el no ejercería la opción pues podría comprarla en el mercado a un precio menor que K. Abreviamos esta ganancia neta como: $(S_T - K)^+$ (donde x^+ denota $max\{x, 0\}$)

Existen dos tipos principales de opciones de compra. Hemos explicado una opción que tiene la limitación de que el tenedor puede usarla sólo cuando vence. A este tipo de opción de compra se la conoce como **opción de compra Europea**.

La otra, tiene menos restricciones. Se permite al tenedor ejercerla en cualquier momento previo al vencimiento. Claro una vez ejercida, se liquida el contrato, esta es una **opción de compra Americana**, con este tipo hay posibilidad de obtener una mayor ganancia que con una opción de tipo europeo.

Definición 2.2.2. *Es posible comprar una oportunidad de vender una acción en el futuro a un precio garantizado, incluso si no se es propietario de acción alguna. Este derecho a vender en el futuro se conoce como una* ***opción de venta (put option)****, la cual tiene las siguientes condiciones:*

El comprador de la opción paga al vendedor una prima llamada comisión. En la fecha de vencimiento, el comprador de este contrato puede darle al vendedor una acción o, en forma equivalente, el precio de mercado de una acción.

Si el vendedor del contrato recibe del comprador la acción o su precio, el vendedor tiene que pagar la comisión de ejercicio al comprador en la fecha de vencimiento.

Casi siempre en este caso no ocurre compra-venta, se liquida el contrato mediante pago de la diferencia al comprador, entre el precio de ejercicio y el precio de la acción. De modo que podemos describir la remuneración posible desde el punto de vista del precio de la acción a su vencimiento, S_T y el precio de ejercicio K. Podemos decir que:

$$\text{Remuneración} = max\{K - S_T, 0\} = (K - S_T)^+$$

Aquí una opción de venta americana puede tener una remuneración mayor que la opción de venta europea.

2.3. Arbitraje, portafolios y cobertura.

Sorprendentemente el término **arbitraje** sufre un poco de dicotomía, en un sentido general no técnico, el término a menudo suele usarse como una condición bajo la cual un inversionista garantiza tener un beneficio pase lo que pase.

El uso técnico más comúnmente adoptado del término es un poco diferente.

Definición 2.3.1. *Una oportunidad de arbitraje es una oportunidad del inversionista que garantiza que el resultado no es una perdida y puede (con una probabilidad positiva) que el resultado resulte una ganancia.*

Note que la ganancia no es garantizada sólo la falta de perdida es garantizada. Además nosotros debemos ser muy cuidadosos de como medimos la ganancia.

Por ejemplo si \$100 actuales crecen a \$100.01 en un año. ¿Es esto de verdad una ganancia? ¿De otra forma haríamos esta inversión?. Probablemente no, porque hay indudablemente alternativas libres de riesgo, tal como depositar el dinero en una cuenta de banco que producirá una mejor ganancia.

Como nosotros veremos si una oportunidad de arbitraje existe, entonces los precios se ajustaran para eliminar dicha oportunidad.

Como un ejemplo simple, suponga que el oro se vende a \$380.10 por onza en New york y \$380.20 en Londres, el inversionista puede comprar oro en New York y venderlo en Londres, obteniendo un beneficio de 10 centavos por onza (asumiendo que los costos de transacción no absorben el beneficio). Sin embargo el comprador de oro en New York manejara el precio más grande en New York y el vendedor de oro en Londres manejara el precio más bajo. Resultado: no más arbitraje.

Como una consecuencia de esta tendencia de un mercado en equilibrio libre de arbitraje, asumiremos que no hay oportunidad de arbitraje en nuestros modelos. Es decir se cumple la siguiente:

Ley del precio único: *Es el principio más importante de la valuación en finanzas, establece que en un mercado financiero competitivo, si dos activos son equivalentes, éstos tenderan a tener el mismo valor del mercado. Esta ley se cumple al aplicar el principio de no arbitraje.*

Definición 2.3.2. *Un portafolio es una elección de inversión que consiste en una cantidad de activos y una cantidad de efectivo. Formalmente, definimos un portafolio como una pareja o un punto en R^2 (podemos generalizar a Rn) denotada por:*

$$(a, b)$$

*Donde **a** es el número de unidades de acciones en las que se invierte y **b** es el número de activos libres de riesgo, generalmente bonos.*

.
Si en cada paso tengo a_τ unidades de acción y b_τ unidades de bono, es decir el valor del portafolio en el periodo τ esta dado por:

$$P_\tau = a_\tau S_\tau + b_\tau L_\tau$$

Y en el periodo siguiente debido a las fluctuaciones de los precios:

$$P_{\tau+1} = a_\tau S_{\tau+1} + b_\tau L_{\tau+1}$$

entonces decimos que el portafolio es **autofinanciante** si las únicas modificaciones permitidas despues de $\tau = 0$ son cambiar entre L y S, (L denota el precio del bono). Esta condición impuesta nos permite vender L y comprar S (o al revés) de forma que:

$$P_{\tau+1} = a_{\tau+1} S_{\tau+1} + b_{\tau+1} L_{\tau+1}$$

Restando obtenemos la condición que debe cumplir un portafolio autofinanciante:

$$(a_{\tau+1} - a_\tau) S_{\tau+1} + (b_{\tau+1} - b_\tau) L_{\tau+1} = 0 \tag{2.1}$$

Las opciones fueron usadas primeramente para hacer operaciones compensatorias y para especulaciones. Además las opciones dan una ventaja significativa al dueño o propietario del instrumento financiero es decir permiten cubrirlo de los cambios que el mercado pueda presentar.

Definición 2.3.3. *Por cobertura se entiende una posición en un instrumento financiero que compensa el riesgo asociado con una posición que se ha tomado en otro instrumento.*

Por lo general para formar una cobertura se busca invertir en combinaciones de activos riesgosos con activos no riesgosos, es decir por medio de un portafolio. El método consiste en encontrar una estrategia de cartera que reduzca el resultado de una opción, utilizando la acción en cuestión y un financiamiento libre de riesgo.

En finanzas normalmente se hace mención de posiciones largas y cortas. Cuando se hable de que una parte esta larga en un instrumento se refiere a que esta parte posee el instrumento. De forma alternativa, un inversionista tiene posición larga si se beneficia del incremento en el precio del instrumento generalmente comprar el instrumento establece una posición larga.

En el contexto de opciones se dice que una parte esta corta cuando ha emitido el contrato. Una posición corta involucra vender el activo subyacente; el vendedor en corto se beneficia del decline en el precio del activo subyacente.

Ejemplo. Entonces la opción de compra como protección da la posibilidad al inversionista de comprar en diciembre una acción con precio de ejercicio $85, la cual el día de hoy tiene el valor de $88. Así si el precio de la acción se derrumba el inversionista se encuentra en una posición cubierta. El precio pagado por esta cobertura es el precio de la opción de compra, la cual es actualmente vendida por $1.50. Así un costo total de $1,500 de 100 opciones protegerá una inversión de $88,000 de 100 acciones

2.4. Modelo Binomial Para Valuación de opciones.

De lo anterior surgen dos problemas que tratamos a continuación: el problema de **valuación** y el problema de **cobertura**; en el primero, debemos determinar a $t = 0$, el valor (prima) que debe pagar el comprador de la opción por ella, es decir tenemos que evaluar una ganancia $(S-K)^+$ disponible en la fecha de vencimiento; y en el problema de cobertura, tenemos que ver como el vendedor de la opción que ha cobrado la prima al instante $t = 0$, llegara a producir una ganancia igual a $(S-K)^+$ en la fecha de vencimiento.

Para esto en el transcurso de nuestro análisis hacemos algunos supuestos aunque un poco irreales nos ayudaran a comprender mejor el modelo y a introducir adelante características más generales.

Consideremos la duración de la opción en periodos de tiempo fijos, es decir esta puede durar un periodo, dos periodos, o τ periodos de tiempo.

Primero analicemos el caso cuando la opción dura sólo un periodo.

Como antes tenemos una acción con precio S donde S_0 y S_1 representa su precio al inicio y al final del periodo respectivamente, supongamos que los precios de la acción tienen un comportamiento binomial. Esto es S_1 sólo puede tomar uno de dos valores en el siguiente periodo, S_u si tiene un movimiento ascendente o S_d si hay un movimiento descendente, con $0 < d < 1 < u$.

Considere ademas que tenemos un derivado de nuestra acción con precio V_0 al inicio y V al final del periodo. Como el valor del derivado depende de S_1, diremos que V valdra U si S sube o V valdra D si S baja.

Necesitamos definir un concepto más. **La tasa de interes** sin riesgo la cual será representada por **r**, suponemos que podemos hacer uso de la conseción y recepción de prestamos a corto plazo a esta tasa.

Registremos tales cantidades de dinero en función de un bono suponiendo que éste **inicialmente vale 1 peso**. Entonces el valor del bono en el periodo 1 es de e^r**.**

Para valuar nuestra opción la estrategia es construir un portafolio autofinanciante de la siguiente manera: consiste de a unidades de acciones y **b** unidades de bono. Así el valor, P_0 del portafolio al inicio del periodo esta dado por:

$$P_0 = aS_0 + b$$

Nuestro modelo de acción da dos valores futuros para nuestro portafolio:

$$\text{Estado Superior } P_1 = aS_u + be^r$$
$$\text{Estado inferior } P_1 = aS_d + be^r$$

Ahora realizamos la estrategia más importante en la valuación de opciones, **replicar la opción** con nuestra inversión, esto es hacer

$$aS_u + be^r = U \tag{2.2}$$
$$aS_d + be^r = D \tag{2.3}$$

de modo que el valor de nuestro portafolio, P, es idéntico al valor del derivado al final del periodo.

Debido a que el valor del portafolio y el derivado tienen el mismo valor en al final del período, hoy deben tener el mismo valor. Despues de todo, son indestinguibles, en la fecha futura, pues recordemos que podemos aplicar la **Ley del precio único** , por lo tanto concluimos que:

$$V_0 = aS_0 + b \tag{2.4}$$

Esta expresión para V_0 tiene una forma muy particular una vez que resolvemos el sistema (2,2),(2,3) cuya solución es:

$$a = \frac{U - D}{S_u - S_d} \tag{2.5}$$

$$b = \left[U - \frac{U - D}{S_u - S_d} S_u \right] e^{-r} \tag{2.6}$$

aunque estas expresiones podrian parecer complicadas, generan expresiones más simples para los valores del portafolio, al combinar las tres últimas, comprobamos que:

$$V_0 = aS_0 + (U - aS_u)e^{-r} = \frac{U - D}{S_u - S_d} S_0 + \left[U - \frac{U - D}{S_u - S_d} S_u \right] e^{-r}$$

Separamos los terminos U y D para obtener:

$$\begin{aligned} V_o &= U \left[\frac{S_0}{S_u - S_d} - \frac{S_d}{S_u - S_d} e^{-r} \right] + D \left[- \frac{S_0}{S_u - S_d} + \frac{S_u}{S_u - S_d} e^{-r} \right] \\ &= e^{-r} U \left[\frac{e^r S_0}{S_u - S_d} - \frac{S_d}{S_u - S_d} \right] + e^{-r} D \left[\frac{S_u}{S_u - S_d} - \frac{e^r S_0}{S_u - S_d} \right] \end{aligned}$$

Ahora si observamos hay algo muy especial. El coeficiente U, al ignorar el termino exponencial, es:

$$\begin{aligned}\hat{q} &= \frac{e^r S_0 - S_d}{S_u - S_d} \\ &= \frac{e^r - d}{u - d}\end{aligned}$$

y el coeficiente de D es:

$$\begin{aligned}1 - \hat{q} &= \frac{S_u - e^r S_0}{S_u - S_d} \\ &= \frac{u - e^r}{u - d}\end{aligned}$$

es sólo $1 - \hat{q}$. De modo que el valor de la cartera se simplifica a:

$$\boxed{V_0 = e^{-r}[\hat{q}U + (1 - \hat{q})D]} \tag{2.7}$$

Esta formula nos establece que se obtiene el valor actual de un portafolio al descontar (se conoce a e^r como el factor de descuento) un promedio de valores fututos de portafolio.

En efecto, la formula de $\hat{q}$ serviría como una especie de probabilidad si pudieramos verificar la condición $0 \leqslant \hat{q} \leqslant 1$.

Si $\hat{q}$ fuera negativa, esta acción sería una gran compra. El numerador en $\hat{q}$ sería negativo, de modo que:

$$e^r S_0 < S_d$$

El peor valor futuro de esta acción, S_d, excedería el rendimiento que obtendríamos mediante la inversión inicial de S_0 en el bono. Note que el rendimiento del bono sería $e^r S_0$. Es decir tendriamos la posibilidad de una ganancia segura, pero eso sería demasiado bueno para ser cierto en el mundo real, de la misma forma en el caso $1 - \hat{q}$.

$$1 - \hat{q} = \frac{S_u - e^r S_0}{S_u - S_d}$$

si el numerador fuese negativo, la acción sería un fracaso pues el mejor valor futuro de la acción S_u, no es tan grande como el rendimiento sobre la inversión en un bono inicial de S_0. No habría razón para comprar esa acción.

Por lo tanto, suponemos que $\hat{q}$ es una probabilidad, dicho esto podemos expresar (2.7) como:

$$\boxed{V_0 = e^{-r}[\hat{q}U + (1-\hat{q})D] = e^{-r}E_{\hat{q}}[V_1]} \tag{2.8}$$

El subíndice de la ecuación (2.8) indica que estamos usando **la probabilidad libre de riesgo** "$\hat{q}$".

Ejemplo Una acción tiene un valor corriente de \$60. Despues de un *año* su valor será de \$70 o \$50. La tasa de interés anual es de 5 %. Supongamos que deseamos conocer el precio de dos opciones de compra: una con un precio de ejercicio de \$58; y la otra de \$63.

Solución Segun la formula para $\hat{q}$ tenemos:

$$\hat{q} = \frac{e^r S_0 - S_d}{S_u - S_d}$$

obtenemos:

$$q = \frac{e^{0,05}60 - 50}{70 - 50} = 0{,}65$$

Ahora si una opción de compra tiene un precio de ejercicio de \$58, entonces U=12 y D=0, Por lo tanto el precio de la opción de compra en este caso es de:

$$e^{-,05}[(0{,}65)(12) + (0{,}35)(0)] = 7{,}42$$

Por el contrario si el precio de ejercicio es de \$63 tenemos U=7. El precio de la opción de compra es:

$$e^{-,05}[(0{,}65)(7) + (0{,}35)(0)] = 4{,}33$$

.

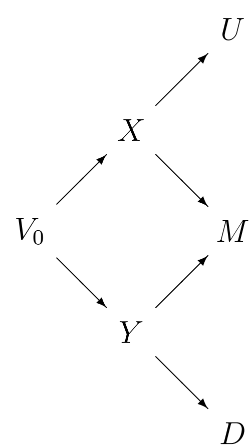
Empleamos una mezcla de inversión entre acciones y efectivo que reproduce el comportamiento de un derivado. Como veremos este enfoque permite que nuestra ecuación se aplique a varios pasos.

2.4.1. Modelo Binomial para más de un periodo.

En la sección anterior resolvimos un sistema 2x2 sin embargo de haber tenido el activo S tres valores posibles (o más) resultarían tres ecuaciones para dos incognitas, lo que en general resulta incompatible (sin solución). En este caso se dice que el mercado es incompleto, y la opción no se puede replicar.

Ahora veamos que podemos extender nuestra valuación a más de un periodo.

La siguiente figura representa una opción de compra de dos periodos.



Como antes asumamos que S_0 representa el precio inicial de la acción, u y d los factores que modifican el precio de la acción segun si hay un movimiento ascendente o descendente respectivamente y K el precio de ejercicio entonces:

$$
\begin{aligned}
U &= max(u^2 S_0 - K, 0) \\
M &= max(udS_0 - K, 0) \\
D &= max(d^2 S_0 - K, 0)
\end{aligned}
$$

Recordando que:

$$\hat{q} = \frac{e^r - d}{u - d} \tag{2.9}$$

entonces podemos encontrar el valor de X y Y como en el caso de un sólo periodo, esto es:

$$
\begin{aligned}
X &= e^{-r}[\hat{q}U + (1 - \hat{q})M] && (2.10) \\
Y &= e^{-r}[\hat{q}M + (1 - \hat{q})D] && (2.11)
\end{aligned}
$$

y finalmente encontramos V_0 aplicando nuevamente la formula de descuento neutral al riesgo.

$$V_0 = e^{-r}[\hat{q}X + (1 - \hat{q}Y] \tag{2.12}$$

Para una lattice con más periodos se usa un procedimiento analogo. Y se encuentra una formula general:

$$\boxed{V_{T-1} = e^{-r} E_{\hat{q}}[V_T]} \tag{2.13}$$

Ejercicio Considere una acción con volatilidad $\sigma = 0{,}20$. El precio actual de la acción es de \$62. La acción no paga dividendos . Una cierta opción de compra sobre esta acción tiene una fecha de expiración en 5 meses apartir de ahora, con un precio de ejercicio de \$60. La tasa de interes actual es de 10 %

calculada mensualmente.

Deseamos determinar el precio teórico de la opción usando la aproximación binomial.

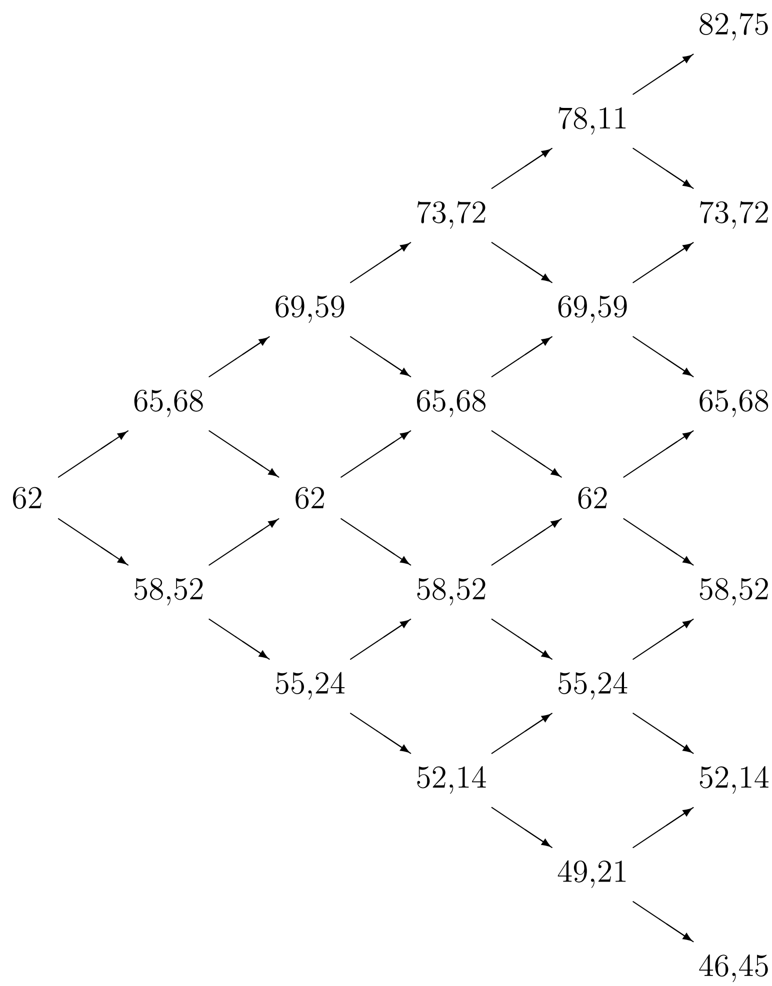
solución
Primero debemos determinar los parámetros del lattice binomial para las fluctuaciones del precio de la acción. Tomamos el periodo de longitud de un mes, lo cual significa $\Delta t = \frac{1}{12}$. Los parámetros son encontrados apartir de las formulas del capítulo 1.

$$\begin{aligned} u &= e^{\sigma}\sqrt{\Delta t} = 1{,}05943 \\ d &= e^{\sigma}\sqrt{\Delta t} = {,}943901 \\ e^{r/12} &= 1{,}00833 \end{aligned}$$

Entonces la probabilidad neutral al riesgo es:

$$\hat{q} = \frac{(e^{r/12} - d)}{u - d} = {,}55770 \tag{2.14}$$

Ahora formamos el lattice binomial correspondiente a los precio de la acción de los siguientes 5 meses. Este lattice se muestra en la siguiente figura.
El lattice binomial de precios es:



Acontinuación calculamos los precios para la opción de compra.

Comenzamos del tiempo final. Este es el máximo de 0 y $S_0 - K$. Por ejemplo, la entrada para el nodo más alto es de $82{,}75 - 60 = 22{,}75$

Los valores para los periodos previos son encontrados por la relación de precios de un periodo simple.

$$V_0 = e^{-r}[\hat{q}U + (1 - \hat{q})D] \tag{2.15}$$

El valor de cualquier nodo es el valor esperado descontado, de dos valores sucesivos. El valor esperado es calculado usando la probabilidad neutral al riesgo $\hat{q}$ y $1 - \hat{q}$, por ejemplo los valores en los nodos más alto son 22,75 y 13,72 entonces el valor para el nodo anterior es:
$(1{,}00833)[(,5577)(22{,}75) + (1 - ,5577)(13{,}72)] = 18{,}60$
y así sucesivamente hasta que finalmente el valor inicial es alcanzado.

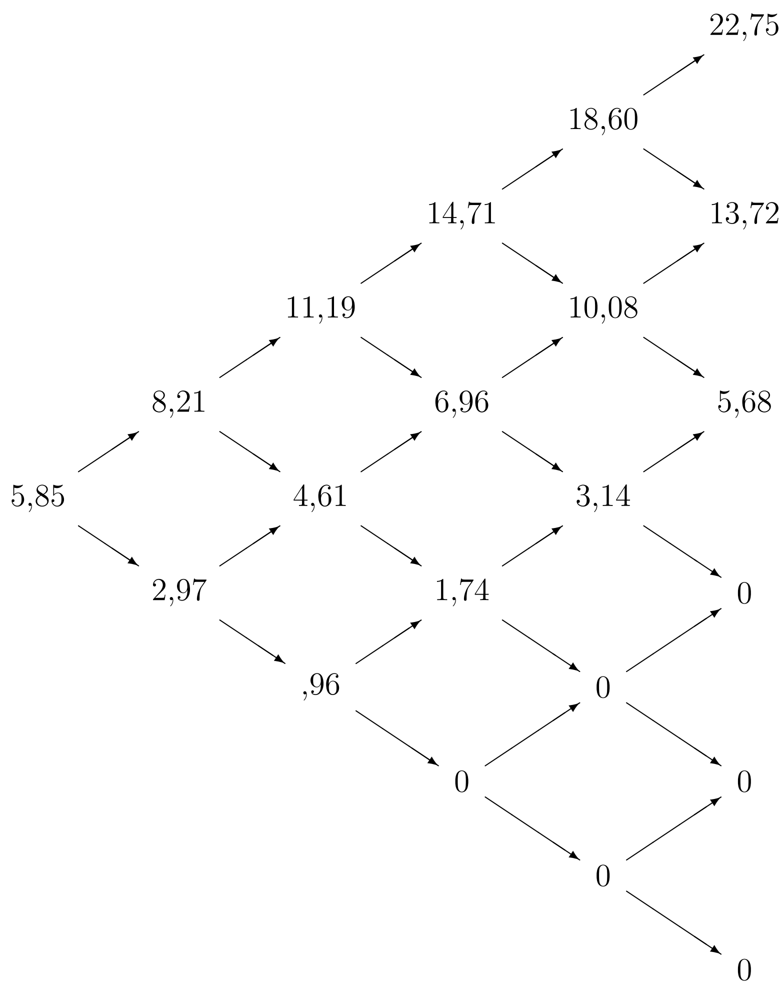
En este caso concluimos que el precio de la opción calculado es $5.85.

Note que el proceso entero es independiente de la tasa de crecimiento de la acción. Este valor sólo depende de p a través del lattice binomial pero esa probabilidad no es usada en el calculo del valor de la opción. Verdaderamente la probabilidad neutral al riesgo es la que se utiliza .

Note sin embargo que esta independencia resulta de que Δt es pequeño en el acercamiento de los parámetros del lattice binomial. Y en la practica esta aproximación es casi invariante (aun para Δt igual a un año).

En la siguiente figura mostramos el lattice formado al calcular el valor de nuestra opción.

Lattice de precios de la opción :



Capítulo 3

Formula de Black-Scholes.

La formula de Black-Scholes nos proporciona otra manera para valuar una opción de compra, y aunque el método anterior nos permite resolver una inmensa cantidad de problemas sobre derivados financieros estos sólo se analizan en forma discreta, sin embargo existen derivados financieros más complejos para los cuales es mejor analizarlos en forma continua.

Además esta alternativa nos proporciona nuevos métodos computacionales y nos prepara para poder entender la teoría moderna de finanzas que surgío con su aparición.

Aunque esta formula se basa en el principio de no arbitraje y en la suposición de que los precios de los activos pueden ser desarrollados por procesos de It$\hat{o}$, conceptualmente su funcionamiento es análogo al del lattice binomial. Es decir con el lattice en cada periodo dos activos disponibles son combinados para construir un portafolio que reproduzca el compotamiento local del derivado, con la formula de Black-Scholes buscamos la combinación de dos activos pero no en cada periodo sino en cada instante.

Para comenzar la presentación de la formula de Black-Scholes supongamos que S representa el precio de un activo financiero, el cual es gobernado por un movimiento Browniano geométrico en el intervalo de tiempo [0,T] descrito por

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \tag{3.1}$$

como en el Capítulo 1 donde W es un proceso Browniano.

Y sea B el valor de un activo libre de riesgo (bono) que satisface:

$$dB = rBdt \tag{3.2}$$

con r la tasa de interes libre de riesgo en el intervalo.

La idea principal del trabajo de Black-Scholes es, que es posible construir un portafolio libre de riesgo compuesto de opciones y acciones, en la ausencia de oportunidades de arbitraje.

La formación de tal portafolio es posible porque en cada instante de tiempo el precio de la opción $f(S,t)$ esta correlacionado con el activo subyacente. Esta dependencia esta dada por $\Delta = \dfrac{\partial f}{\partial S}$ por supuesto es una función del tiempo. En otras palabras, ambas la acción y su derivado dependen de la misma fuente de incertidumbre y por ello del mismo proceso estocástico dado por (3.1). Por lo tanto el proceso estocástico puede ser eliminado por una combinación lineal conveniente de ambos activos.

Para hacer esto más preciso, tomamos la posición del vendedor de la opción de compra Europea. Formamos un portafolio compuesto de:

1. Una posición corta en una opción de compra.

2.-Una posición larga en $\Delta = \dfrac{\partial f}{\partial S}$ unidades del activo subyacente. Note que Δ cambia con el precio de la acción y un ajuste continuo en su posición es requerido.

No conocemos el proceso estocástico que sigue el precio de la opción. Sabemos sin embargo que este depende del precio de la acción y por lo tanto, podemos usar el lema de Itô, entonces;

$$df = (\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2})dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dW. \tag{3.3}$$

El valor de nuestro portafolio es:

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}S$$

y este sigue el proceso estocástico:

$$d\Pi = -df + \frac{\partial f}{\partial S}dS = (-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2})dt. \tag{3.4}$$

Note que el proceso estocástico dW que es la fuente de incertidumbre en la evolución de ambos el precio de la acción y el precio de la opción, no aparece ya en la ecuación. Más aun el termino de la tendencia μ del precio de la acción ha desaparecido tambien. Eliminando el riesgo del portafolio y así tambien las posibilidades de arbitraje,(un inversionista aceptaría poner su dinero en un activo riesgoso sólo si el rendimiento es más grande que en un activo libre de riesgo), luego

$$d\Pi = r\Pi dt = r(-f + \frac{\partial f}{\partial S}S)dt \tag{3.5}$$

de (3.4) y (3.5) obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}rS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = rf. \tag{3.6}$$

La ecuación diferencial de Black-Scholes. Esta es una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden de tipo parábolico.

El logro importante de Black, Merton y Scholes fue mostrar que en mercados ideales, el riesgo asociado con una opción puede cubrirse siempre completamente por una posición en una cantidad adecuada Δ del activo subyacente, (por eso esta estrategía es llamada cobertura Δ) y así el vendedor de una opción no tiene un riesgo adicional. La cobertura puede mantenerse dinámicamente y es autofinanciable, además no genera costos para el vendedor.

Considere un derivado (no necesariamente una opción de compra) de nuestro activo, lo cual significa que su precio es una función de S y t. Si $f(S,t)$ representa la función de precio de este derivado al tiempo t cuando el activo vale S, afirmamos que esta debe satisface la ecuación de Black-Scholes.

Antes de probar lo anterior veamos algunos ejemplos:

Ejemplo1. Consideremos $f(S,t) = S$, pues el activo es un derivado en si mismo, entonces por lo anterior $f(S,t)$ debe satisfacer la formula de Black -Scholes. En efecto con esta elección de f tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \frac{\partial f}{\partial S} = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

sustituyendo en nuestra ecuación obtenemos $rS = rS$ por lo tanto $f(S,t) = S$ es una solución para nuestra ecuación.

Ejemplo 2. Si $f(S,t) = e^{rt}$ es la función del precio de un bono el cual es tambien un derivado del activo entonces $f(S,t) = e^{rt}$ debe satisfacer la ecuación de Black-Scholes, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = re^{rt}, \frac{\partial f}{\partial S} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

luego resulta que al sustituir obtenemos $re^{rt} = re^{rt}$ lo cual muestra que verdaderamente $f(S,t) = e^{rt}$ es solución de la ecuación.

Teorema 3.0.1. *Suponga que el precio de un activo esta gobernado por los procesos de Ito y denotemos por r a la tasa de interes libre de riesgo. Si el derivado del activo tiene una función de precio dada por $f(S,t)$, entonces esta debe satisface la ecuación diferencial parcial:*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} rS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = rf. \tag{3.7}$$

Solución:

Segun el Lema de Ito tenemos que:

$$df = (\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dW \tag{3.8}$$

el cual es un proceso de Ito para el precio del derivado. Este precio fluctua aleatoriamente de la misma manera que el precio del activo S y el movimiento Browniano (W).

Formamos un portafolio de acciones y bonos que repliquen el comportamiento del derivado. En particular en cada tiempo t seleccionamos una cantidad x_t de la acción y una cantidad y_t de bonos, dando un valor total al portafolio de:

$$G(t) = x_t S(t) + y_t B(t). \tag{3.9}$$

deseamos seleccionar x_t y y_t de tal manera que $G(t)$ replique el valor del derivado $f(S,t)$.

El cambio instantaneo en el valor de este portafolio debido a los cambios en el activo es:

$$dG = x_t dS + y_t dB \tag{3.10}$$

Observe en esta expresión que segun el cálculo usual, como x_t y y_t tambien son funciones de t, entonces harian falta el termino, $S(t)dx_t + B(t)dy_t$ sin embargo podemos interpretar dx_t como el cambio del número de acciones en un instante de tiempo, (necesarias para replicar la opción) lo cual no tiene sentido físico real pues no cambiamos el número de acciones en un instante de tiempo pequeño, lo mismo para dy_t por lo tanto podemos eliminar ese termino.

sustituimos (3.1) y (3.2) obteniendo

$$\begin{aligned} dG &= x_t dS + y_t dB \\ &= x_t(\mu S dt + \sigma S dW) + y_t rBdB \\ &= (x_t \mu S + y_t rB)dt + x_t \sigma S dW \end{aligned} \tag{3.11}$$

como queremos que el beneficio del portafolio $G(t)$ se comporte justo igual al beneficio de f realizamos un acercamiento entre los coeficientes de dt y dW de las ecuaciones (3.5) y (3.8), para dW tenemos:

$$x_t = \frac{\partial f}{\partial S} \tag{3.12}$$

Luego como $G = x_t S + y_t B$ y requirimos que $G = F$, entonces:

$$y_t = \frac{1}{B}[f(S,t) - S\frac{\partial f}{\partial S}] \tag{3.13}$$

subtituyendo las expresiones (3.9) y (3.10) en (3.8) y haciendo el acercamiento con el coeficioente de dt en (3.5) obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{1}{B}[f(S,t) - S\frac{\partial f}{\partial S}]rB = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \tag{3.14}$$

o finalmente:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} rS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \tag{3.15}$$

La formula de Black-Scholes. □

Por lo tanto podemos decir que si $f(S,t)$ es la función del precio de algun derivado esta debe satisfacer como condición la formula de Black-Scholes. Además si para S, B se buscan valores para los cuales no se cumpla la ecuación de Black-Scholes, siendo $f(S,t)$ la función de precios de un derivado, se dice que hay alguna oportunidad de arbitraje.

Otra manera de ver a la ecuación de Black-Scholes, es realmente como un instrumento para encontrar la función de precios de varios derivados financieros.

Para esto sólo necesitamos especificar las condiciones de frotera segun el derivado con el que se este trabajando y resolver la ecuación diferencial parcial para encontrar su función de precios.

Los siguientes ejemplos son casos triviales para esta utilidad:

Ejemplo 1. Si la condición de frontera fueran $f(S,T) = S(T)$ es decir el precio del derivado al tiempo T debe ser igual al precio del activo, entonces obtenemos que $f(S,t) = S(t)$ es la función de precio para nuestro derivado tal como intuimos.

Ejemplo 2. Si $f(S,T) = e^{rT}$ es la función de nuestro derivado, es decir el derivado sera un bono entonces, $f(S,t) = e^{rt}$.

3.1. Formula para opciones de compra.

Un ejemplo no trivial es considerar, el precio $V(S,t)$ de una opción de compra europea sobre una acción que no paga dividendos. Segun lo anterior esta debe satisfacer la ecuación de Black-Scholes y las condiciones

$$V(0,t) = 0 \tag{3.16}$$

$$V(S,T) = \max(S-K,0) \tag{3.17}$$

Igual que en física tratamos con un problema de valor final, ya que en el tiempo de maduración $t = T$ conocemos el precio de la opción de compra.
Aunque es usualmente imposible encontrar una solución analítica para la ecuación de Black-Scholes con cualquier derivado, es posible encontrar una solución analítica para una opción de compra Europea, esta solución analítica es de gran uso practico y teórico.

La siguiente solución de la ecuación de Black-Scholes se sigue esencialmente del articulo original de los autores.
Consiste en reducir nuestro problema a una ecuación diferencial parcial de difusión con condiciones a frontera especiales.
Sustituimos:

$$f(S,t) = e^{-r(T-t)}y(u,v) \tag{3.18}$$

$$u = \frac{2\rho}{\sigma^2}(ln\frac{S}{K} + \rho[T-t]) \tag{3.19}$$

$$v = \frac{2}{\sigma^2}\rho^2(T-t) \tag{3.20}$$

$$\rho = r - \frac{\sigma^2}{2} \tag{3.21}$$

Entonces las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial S}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$ y $\frac{\partial f}{\partial t}$ son expresadas atraves de $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, etc. y $y(u,v)$ satisface la ecuación diferencial parcial de difusión.

$$\frac{\partial y(u,v)}{\partial v} = \frac{\partial^2 y(u,v)}{\partial u^2} \tag{3.22}$$

Las condiciones de frontera para una opción de compra en función de u y v se traducen en:

$$y(u,o) = 0 \; si \; u < 0$$
$$K(e^{\frac{u\sigma^2}{2\rho}} - 1) \; si \; u \geq 0$$

Las ecuaciones de difusión son resueltas por la transformada de Furier en la variable espacial

$$y(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} dqe^{iqu} y(q,v).$$

reduciendo (3.23) a una ecuación diferencial ordinaria en v con la solución:

$$y(q,v) = y(q,0)exp(-q^2 v)$$

$y(q,0)$, formalmente esta dada por la transformada de Fourier de las condiciones de frontera en función de u y v la cual sin embargo no se debe seguir explicitamente.

El truco es transformar la solución $y(q,v)$ como función de u por medio de una convolución integral.

$$y(u,v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dwy(w,0)f(u-w) \; con \; f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{v}} exp(\frac{x^2}{4v})$$

haciendo cambio de variable: $z = \dfrac{(w-u)}{\sqrt{2v}}$ obtenemos:

$$y(u,v) = \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int dWe^{-\frac{z^2}{2}} [exp(\frac{\sigma^2}{2\rho}\sqrt{2vz} + u) - 1]$$

sólo falta completar el cuadrado en la exponencial y sustituir todas las cantidades. Esto nos da la ecuación de Black-Scholes para una opción de compra Europea.

$$f(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{3.23}$$

$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ es la distribución normal acumulada:
y sus dos argumentos son dados por:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(\frac{r+\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(\frac{r-\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \end{aligned}$$

Los diferentes terminos de la ecuación tienen las siguientes interpretaciones. Si el termino $e^{-r(T-t)}$ se factoriza:

1.$N(d_2)$ es la probabilidad de ejercer la opción, $P(S_T > K)$ en el mundo neutral al riesgo.

2.$KN(d_2)$ es la cantidad esperada de dinero para pagarse bajo el contrato de opción.

3. $SN(d_1)e^{-r(T-t)}$ es la ganancia esperada bajo el contrato de la opción.

4. La diferencia de estos terminos con $KN(d_2)$ es la ganancia esperada de la opción. El factor $e^{-r(T-t)}$ descuenta esta ganancia, realizado al tiempo de maduración T, bajo el presente día t. El precio de la opción es precisamente la diferencia de estos descuentos.

Esta interpretación es consistente con el modelo de precio de un activo el cual nos da la relación de riesgo y retorno en un mercado en equilibrio.

Hay algunos casos limites interesantes de nuestra formula (3.24) Si $S \gg K$ la opción se ejerce casi seguramente, además si, d_1 y $d_2 \longrightarrow \infty$, entonces $N(d_1, 2) \longrightarrow 1$ y la ecuación se reduce a:

$$f(S,t) = S - Ke^{-r(T-t)} \tag{3.24}$$

Note que S debe ser exponencialmente más grande comparado con K para que nuestro resultado se cumpla.

Si $\sigma \longrightarrow 0$, la acción tiende a reducir su riesgo. En la ecuación (3.24) deben considerarse dos casos. Si $\ln \frac{S}{K} + r(T-t) > 0$, $d_1, d_2 \longrightarrow \infty, N(d_i) \longrightarrow 1$ $i = i, 2$ y (3.25) sigue cumpliendoce.

Por otro lado si $\ln \frac{S}{K} + r(T-t) < 0$, $d_{1,\,2} \longrightarrow -\infty, N(d_i) \longrightarrow 0$,$i = i, 2$ entonces $f(S,t) \longrightarrow 0$. Considerando ambos casos juntos tenemos:

$$V(S,t) = max(S - Ke^{-r(T-t)}, 0).$$

Finalmente consideremos un ejemplo que fue considerado en el capítulo 2 con el lattice binomial y veamos la diferencia entre los resultados.

Ejemplo: Consideremos el ejemplo del capítulo 2. La opción de compra es a 5 meses sobre un activo subyacente con precio actual de \$62 y una volatilidad de 20 %. El precio de ejercicio es de \$60 y la tasa de interes es de 10 %. Como S=\$62, K=\$60, $\sigma = 0{,}20$ y $r = 1{,}1$, al aplicar la formula tenemos que:

$$d_1 = 0{,}641287$$

y

$$d_1 - 0{,}2\sqrt{\frac{5}{12}} = 0{,}64128 - 0{,}129099 = 0{,}512188$$

Los valores correspondientes de la distribución normal para estos resultados son.

$$N(0{,}641287) = 0{,}739332$$

y

$$N(0{,}512188) = 0{,}695740$$

Por lo tanto el valor de la opción de compra obtenido por medio de la formula de valuación de Black-Scholes es:

$$V_o = 62(0{,}7393) - 60(0{,}959)(0{,}695740) = 5{,}805$$

este valor es muy cercano al obtenido con el modelo binomial, $V_0 = 5{,}85$

Con lo anterior corroboramos que los dos distintos enfoques para valuación de opciones arrojan resultados cercanos.

Conclusiones

En el transcurso de este trabajo, modelamos el comportamiento de los precios tanto de una acción como de una opción de compra de tipo europeo, con distintos modelos, en particular en el Capítulo 1 el Lattice Binomial y el modelo de Black-Scholes.

Apesar de que estos modelos en la práctica arrojan resultados similares, observamos que para el modelo de Black-Scholes se necesita una teoría más general y por ello con mayor dificultad. Entonces podríamos preguntarnos, Cuál es la ventaja del modelo de Black-Scholes?. En respuesta a esta pregunta observamos que en el transcurso de este trabajo se hacen suposiciones irreales tales como; eliminar el pago de dividendos, considerar una tasa de rendimiento y una volatilidad constante, lo cual hace que nuestros resultados no se apeguen a los de la realidad, entonces, el modelo de Black-Scholes permite eliminar estas limitaciones y en lugar de considerar a la volatilidad y a la tasa de rendimiento constantes con este modelo podemos considerarlas como funciones del tiempo. Por lo tanto concluimos que con este modelo pueden mejorarse los resultados.

Sin embargo en la práctica aun se utiliza más el Lattice Binomial quizá sea por su sencillez, o por el desconocimiento de otro modelo alternativo.
De manera análoga para la valuación de opciones de tipo europeo concluimos que si se buscan resultados cercanos a la realidad bajo condiciones no limitadas, la formula de Black-Scholes es la mejor Opción. Por otro lado si lo que se busca es un modelo practico se opta por el modelo binomial, pero se sugiere que sea por periodos cortos.
Finalmente cabe mencionar que esto es sólo una pequeña parte del enorme mundo de problemas reales que pueden modelarse por medio de la teoría matemática.

Apéndice A

Procesos de Wiener o Movimiento Browniano

El *Proceso de Wiener* es el Modelo Matemático que explica el fenómeno físico llamado *Movimiento Browniano*, el cuál ha sido utilizado con éxito en el ámbito financiero al analizar el comportamiento de los precios de los instrumentos financieros.

Definición A.0.1. *El Proceso Continuo* $(W(t)_{t\geq 0}$ *es llamado un* Proceso de Wiener *(Movimiento Browniano) con* volatilidad $\sigma > 0$ *si satisface:*

- $W(0) = 0 \quad c.s.$
- $W(t)$ tiene una distribución normal con media cero y varianza $\sigma^2 t$

$$W(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$$

- Es un proceso de *incrementos estacionarios* es decir si $s < t$ entonces $W(t) - W(s)$ tiene una distribución normal con media cero y varianza $\sigma^2(t-s)$

$$W(t) \sim N(0, \sigma^2(t-s))$$

- Es un proceso de *incrementos independientes* es decir

$$Si\ t_1 < t_2 < \cdots < t_n$$

entonces

$$W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \cdots W(t_n) - W(t_{n-1})$$

son v.a. independientes

Si denotamos por $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ al espacio de probabilidad donde definimos a nuestro movimiento Browniano.

La familia creciente de σ-algebras $\mathcal{F}_t$ generada por $(W_s)_{s \leq t}$ (la información de W hasta el tiempo t) y todos los conjuntos de probabilidad cero en $\mathcal{F}$ es llamada la filtración natural del movimiento Browniano.

Un proceso estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ es *adaptado* a la filtración $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$ si la variable aleatoria X_t es $\mathcal{F}_t$-medible para cualquier t. Decimos que (X_t) es $\mathcal{F}_t$-adaptado [2].

El Movimiento Browniano es la base de construcción fundamental para una conexión propia de procesos más generales. Estas generalizaciones son obtenidas insertando ruido blanco[5] en ecuaciones diferenciales ordinarias.

La extención mas simple de este tipo es el **proceso de wiener generalizado**, el cual es de la forma.

$$dx(t) = adt + bdW \tag{A.1}$$

$$\tag{A.2}$$

Donde $x(t)$ es una variable aleatoria para cada t, W es un proceso de wiener a y b son constantes.

Un proceso de wiener generalizado es especialmente importante por que este tiene una solución analitica (la cual podemos encontrar integrando estocasticamente ambos lados.)

Especificamente la solución esta dada por:

$$x(t) = x(0) + at + bW(t) \tag{A.3}$$

Un **proceso de ito** es algo a un más general. Tal proceso es descrito por una ecuación de la forma.

$$dx\,(t) = a\,(x,t)\,dt + b\,(x,t)\,dW.$$

Como antes W denota un proceso de wiener . Ahora sin embargo los coeficientes $a\,(x,t)$ y $b\,(x,t)$ puden depender de x y de t, y en general su solución no puede escribirse en forma analtíca .

A.1. Distribución Log-normal

Definición A.1.1. *La variable aleatoria Y tiene una distribución* Log-Normal *si la v.a. $X \doteq LnY$ tiene una distribución* Normal.

$$X = LnY \;\longleftrightarrow Y = e^X$$

es decir una v.a. es log-normal *si es la exponencial de una v.a. nornal*

su función de densidad es:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2\sigma^2}(lny-\nu)^2)} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

donde la v.a. X tiene una distribución normal con media ν y varianza σ^2

$$X \sim N(x,,\nu,\sigma^2)$$

La función generatriz de momentos de la normal es

$$m(t) = E(e^{tX}) = e^{\nu t + \frac{\sigma^2 t}{2}}$$

tenemos que $Y = e^X$ por lo tanto dado que $E(Y) = E(e^X) = m(1)$ entonces

$$E(Y) = e^{\nu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

el segundo momento de Y es $E(Y^2) = E(e^{2X}) = e^{2\nu + 2\sigma^2}$
por lo tanto

$$Var(Y) = e^{2\nu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

Bibliografía

[1] LUENBERGER David,G., *Investment Science*, Oxford University, New York, 1998.

[2] FOUQUE, Jean Pierre., *Derivatives in financial markets with stochastic volatility*, Cambridge [England] ; New York : Cambridge University Press, 2000.

[3] STAMPFLI Joseph, Goodman Victor, *The Mathematics of Finance*, Indiana University, Editorial Thomson, 2001

[4] VOIT Johannes , *The Statistical Mechanics of Financial Markets*,Third Edition, Editorial Spriger, 2005.

[5] BAXTER Martin, Rennie Ancrew, *Financial Calculus. An introduction to derivative pricing*, Cambridge University Press, Third reprited, 2001.