



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

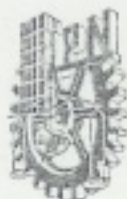
CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México, Distrito Federal, el día 28 del mes mayo del año 2004, el que suscribe Ricardo Hernández De Anda alumno del Programa de Maestría en ciencias en Ingeniería de Telecomunicaciones con número de registro 991196, adscrito a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME Unidad Zacatenco, manifiesta que es autor(a) intelectual del presente Trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Vladislav Kravchenko Cherkasski y cede los derechos del trabajo intitulado: Principio de absorción limite para las ecuaciones de Maxwell en medios homogéneos, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, graficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección: Zacahuitzco 116-404 Col Ma. Del Carmen, C.P. 03540. Deleg. Benito Juárez, correo electrónico ricardo_ha@hotmail.com.

Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Ing. Ricardo Hernández De Anda



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México, D.F. siendo las 12:00 horas del día 13 del mes de Febrero del 2004 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de la E.S.I.M.E. para examinar la tesis de grado titulada:

"PRINCIPIO DE ABSORCION LIMITE PARA LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN MEDIOS HOMOGENEOS"

Presentada por el alumno:

HERNANDEZ
Apellido paterno

DE ANDA
materno

RICARDO
nombre(s)

Con registro:

9	9	1	1	9	6
---	---	---	---	---	---

aspirante al grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

DR. VLADISLAV KRAVCHENKO CHERKASSKI

DR. VLADIMIR RABINOVICH LIKHTMAN

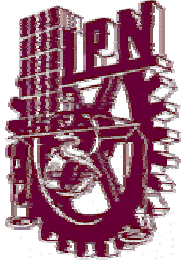
M. EN C. RAUL CASTILLO PEREZ

M. EN C. HECTOR OVIEDO GALDEANO

DR. JOSE LUIS LOPEZ BONILLA

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO


DR. FLORENCIO SANCHEZ SILVA



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL



ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA
MECANICA Y ELECTRICA
UNIDAD ZACATENCO

**PRINCIPIO DE ABSORCION LIMITE
PARA LAS ECUACIONES DE MAXWELL
EN MEDIOS HOMOGENEOS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN
INGENIERIA DE TELECOMUNICACIONES

P R E S E N T A

RICARDO HERNANDEZ DE ANDA

MEXICO, D.F. JUNIO

Principio de absorción límite para las ecuaciones de Maxwell en medios homogéneos

Ricardo Hernández De Anda

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Zacatenco

Sección de Estudios de Posgrado e Investigación

Maestría en Ciencias en Ingeniería de Telecomunicaciones

México. D.F., Junio de 2004

Contenido

0.1	Objetivo	6
0.2	Justificación	6
1	Introducción	7
2	Funciones Generalizadas	9
2.1	Espacio de funciones de prueba D	11
2.2	Functionales	12
2.3	Espacio de funciones generalizadas D^0	13
2.4	Soporte de una función generalizada	16
2.5	Adición y multiplicación por un número y por una función	18
2.6	Desplazamientos, rotaciones y otras transformaciones lineales en el espacio de variables independientes	19
2.7	Funciones de prueba complejas y funciones generalizadas	21
2.8	Diferenciación de una función generalizada	22
2.9	Propiedades de la derivada de una función generalizada	23
2.10	Funciones generalizadas de lento crecimiento	25
2.10.1	Espacio de funciones de prueba S	25
2.10.2	Espacio de funciones generalizadas de lento crecimiento S^0	26

2.10.3	Transformada de Fourier de funciones de prueba S	27
2.10.4	Transformada de Fourier de funciones generalizadas S^0	28
2.10.5	Propiedades de la transformada de Fourier	30
3	Soluciones fundamentales	31
3.1	Solución fundamental de operadores diferenciales	31
3.1.1	Soluciones generalizadas de ecuaciones diferenciales lineales	32
3.2	Soluciones fundamentales	33
3.2.1	Ecuaciones con término independiente (lado derecho)	35
4	Análisis cuaterniónico y principio de absorción límite	37
4.1	Análisis cuaterniónico	37
4.1.1	Cuaterniones reales	37
4.1.2	Cuaterniones complejos	41
4.1.3	El operador diferencial de Moisil-Theodoresco	42
4.1.4	El operador $D + \textcircled{I}$	45
4.2	Factorización del operador de Helmholtz y soluciones fundamentales	45
4.3	Condición de radiación	47
4.4	Principio de absorción límite	49
4.5	Ecuaciones de Maxwell	52
4.5.1	Ecuaciones de Maxwell armónicas en el tiempo	53
4.5.2	Reformulación cuaterniónica de las ecuaciones de Maxwell	55
4.6	Condiciones de radiación de Silver-Müller	58
4.7	Principio de absorción límite para las ecuaciones de Maxwell	59

Resumen

El propósito de este trabajo es aplicar el principio de absorción límite a las ecuaciones de Maxwell como una forma de asegurar la existencia y unicidad de la solución y garantizar que dicha solución sea físicamente significativa.

A partir de la definición del operador de Moisil-Theodoresco se construye el operador $(D\mathcal{S}^{\otimes})$ cuya propiedad de factorizar el operador de Helmholtz nos permite obtener sus soluciones fundamentales $K_{\mathcal{S}^{\otimes}}$, las cuales se utilizan para aplicar el principio de absorción límite al operador $(D\mathcal{S}^{\otimes})$:

A continuación, se normalizan las ecuaciones de Maxwell, partiendo de la forma armónica en el tiempo, y se reescriben como dos ecuaciones cuaterniónicas empleando el operador de Moisil-Theodoresco. El uso de dos funciones cuaterniónicas auxiliares $'$ y \tilde{A} permite representar el sistema de ecuaciones normalizadas de Maxwell mediante dos ecuaciones cuaterniónicas en función del operador $(D\mathcal{S}^{\otimes})$:

Posteriormente se aplica el principio de absorción límite a la relación obtenida de los vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} en función de las funciones cuaterniónicas auxiliares como se expuso con el operador $(D\mathcal{S}^{\otimes})$:

Finalmente, se obtiene la forma del campo electromagnético en dominios no acotados partiendo de la fórmula de Borel-Pompeiu.

Abstract

The aim of this work is to apply the limiting absorption principle to the Maxwell's equations as a mean to ensure the existence and uniqueness of the solution as well as guarantee that this solution has a physical sense.

Starting from the definition of the Moisil-Theodoresco operator, the operator $(D \mathbb{S}^{\otimes})$ is constructed whose property of factorize the Helmholtz operator allows us to obtain its fundamental solutions $K_{\mathbb{S}^{\otimes}}$, which are used to apply the limiting absorption principle to the operator $(D \mathbb{S}^{\otimes})$:

After that, the Maxwell's equations, starting from the time-harmonic representation, are normalized and they can be rewritten in two quaternionic equations using the Moisil-Theodoresco operator. The use of two quaternionic auxiliary functions $\tilde{\mathbf{A}}$ and $\tilde{\mathbf{A}}$ allows us to represent the Maxwell's normalized equations system by means of two quaternionic equations in terms of the operator $(D \mathbb{S}^{\otimes})$:

Afterwards, the limiting absorption principle is applied to the obtained \mathbf{E} and \mathbf{H} vectors expression as it was exposed with the operator $(D \mathbb{S}^{\otimes})$:

Finally, the integral representations for vectors of the electromagnetic field in unbounded domains is obtained starting from the Borel-Pompeiu formula.

0.1 Objetivo

Aplicar el principio de absorción límite a las ecuaciones de Maxwell para medios homogéneos como una forma de asegurar la existencia y unicidad de la solución para garantizar que dicha solución sea físicamente significativa, así como para obtener la forma del campo electromagnético en dominios no acotados.

0.2 Justificación

El estudio de las ecuaciones de Maxwell para las telecomunicaciones reviste una gran importancia ya que los fenómenos que son objeto de estudio de esta área se pueden explicar mediante dichas ecuaciones.

La aplicación del análisis cuaterniónico en la reformulación de las ecuaciones de Maxwell permite obtener resultados que no se obtienen con el método empleado en problemas con valores en la frontera para dominios no acotados, y se pueden obtener representaciones de las soluciones que muestran hechos que con otros métodos no sería posible conseguir.

Es necesario garantizar la existencia y unicidad de las representaciones integrales para dominios no acotados imponiendo restricciones al comportamiento en el infinito como la condición de radiación de Sommerfeld o empleando el principio de absorción límite, cuya aplicación a las ecuaciones de Maxwell es la finalidad de esta tesis.

Capítulo 1

Introducción

El uso del análisis cuaterniónico ha sido una herramienta poderosa en el estudio de problemas de electrodinámica [6], [7], [9], [14], [15]. La reformulación cuaterniónica de las ecuaciones de Maxwell permite un manejo más comprensible de los problemas a considerar [9], [13], [7]. En el caso particular del problema de extendibilidad para el campo electromagnético se busca una solución, en un dominio acotado o no acotado, cuando se conocen los valores de tal campo a lo largo de la frontera del dominio acotado [3] y es necesario garantizar la existencia y unicidad de dicha solución del problema de extendibilidad imponiendo una condición de radiación o utilizando el principio de absorción límite, que es el objetivo del presente trabajo.

Esta tesis se inicia obteniendo las soluciones fundamentales del operador $(D \mathcal{S}^{\otimes})$ partiendo del hecho de que tal operador tiene la propiedad de factorizar el operador de Helmholtz. Posteriormente se aplica el principio de absorción límite al operador $(D \mathcal{S}^{\otimes})$.

De forma subsecuente se presenta la reformulación cuaterniónica de las ecuaciones de Maxwell, a partir de su forma normalizada. Con la ayuda de dos funciones auxiliares cuaterniónicas \mathcal{I} y $\mathcal{I}^{\mathcal{A}}$ es posible representar el sistema de ecuaciones de Maxwell mediante dos ecuaciones cuaterniónicas en función del operador $(D \mathcal{S}^{\otimes})$. Las funciones

\mathbf{E} y \mathbf{H} nos permiten construir una relación con los vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} del campo electromagnético, dicha relación es aprovechada para aplicar el principio de absorción límite a las ecuaciones de Maxwell.

Y finalmente, se expone cómo se obtienen las representaciones integrales para los vectores del campo electromagnético utilizando la fórmula de Borel-Pompeiu.

A continuación se describe brevemente el contenido de los capítulos 2, 3 y 4.

En el capítulo 2 aparecen los conceptos de funciones de prueba D^0 , así como algunas de sus propiedades tales como adición y multiplicación por un número y por una función, algunas transformaciones lineales; se incluye también la definición de derivada de una función generalizada y sus propiedades.

Se introduce el espacio de funciones generalizadas de lento crecimiento S^0 y la definición de la transformada de Fourier para dichas funciones.

En el capítulo 3 se exponen brevemente algunos conceptos sobre soluciones fundamentales de operadores diferenciales lineales que serán útiles posteriormente cuando se analice el operador $(D \otimes \mathbb{R})$:

En el capítulo 4 se exponen conceptos del álgebra de cuaterniones complejos que servirán para introducir el operador de Moisil-Theodoresco, a partir del cual se construye el operador $(D \otimes \mathbb{R})$, el cual es utilizado en la reformulación cuaterniónica de las ecuaciones de Maxwell, donde aparece el vector complejo $\mathbf{E} + i\mathbf{H}$ que fue introducido por Lanczos en 1919 en su tesis doctoral y utilizado en [18] para obtener las ecuaciones de Maxwell a partir de la forma propuesta por Lagrange en 1895. El principio de absorción límite es aplicado al operador $(D \otimes \mathbb{R})$ y posteriormente a las ecuaciones de Maxwell aprovechando las relaciones obtenidas de la reformulación cuaterniónica. Finalmente se obtienen las fórmulas de Stratton-Chu para el campo electromagnético en forma vectorial.

Como capítulo final se presentan las conclusiones obtenidas de este trabajo.

Capítulo 2

Funciones Generalizadas

Las formulaciones de problemas con valores de frontera se caracterizan por el hecho de asumir que sus soluciones son suficientemente suaves y satisfacen la ecuación en cada punto dentro de la región de definición de estos problemas. Dichas soluciones se llaman soluciones clásicas y la formulación del correspondiente problema con valores de frontera se llama formulación clásica. En este sentido, la formulación clásica de un problema asume, por ejemplo, la “suavidad” del término independiente (lado derecho) de una ecuación dentro de su región de definición. Sin embargo, para muchos problemas, como el problema de extendibilidad para el campo electromagnético, estos términos independientes, que caracterizan las perturbaciones externas, tienen singularidades considerables. Por lo tanto, para problemas de ese tipo, la formulación clásica no es suficiente. Para formular dichos problemas, es necesario olvidarse por un momento de la “suavidad” de la solución dentro de la región de definición, e introducir las llamadas soluciones generalizadas. Para encontrar las funciones que son solución de los problemas planteados es necesario generalizar la idea de derivada y de función. Es por eso que es necesario introducir el concepto de función generalizada. En este capítulo se presentan algunos conceptos y características de las funciones generalizadas.

En diferentes cuestiones del análisis resulta necesario interpretar el término “fun-

ción” con diferente grado de generalidad. A veces se consideran funciones continuas, en otros casos es preciso suponer que se trata de funciones diferenciables una o varias veces, etc. Sin embargo, en muchos casos el concepto clásico de función resulta insuficiente, aún en el sentido más general, esto es, como una regla cualquiera que a todo valor de x del campo de definición de esta función pone en correspondencia un número $y = f(x)$. Al aplicar el análisis matemático, tropezamos con situaciones cuando no se puede efectuar alguna operación del análisis, por ejemplo, una función que no tenga derivada, en varios o incluso en todos los puntos, no se puede derivar, si por derivada se entiende una función común y corriente. Las dificultades de este orden se podrían evitar limitándose a considerar solamente las funciones analíticas. Sin embargo, tal restricción del conjunto de funciones admisibles no es, en muchos casos, deseable.

El uso de funciones definidas de acuerdo a la teoría clásica de funciones en la solución de problemas concretos de física presenta una serie de complicaciones que pueden ser superadas con éxito no restringiendo sino ampliando sustancialmente el concepto de función, introduciendo las así llamadas funciones generalizadas. Las funciones generalizadas fueron introducidas como resultado de las investigaciones de Dirac en mecánica cuántica, donde sistemáticamente utilizaba la función $\pm(x)$, que se define más adelante en la página 17.

Una función generalizada es una generalización del concepto clásico de función. Esta generalización nos permite expresar en forma matemática conceptos tales como la densidad de un material puntual, la intensidad de una carga puntual o un dipolo, la intensidad de una fuente instantánea puntual, la intensidad de una fuerza aplicada a un punto, etc. Por ejemplo, no es posible medir la densidad de un material en un punto; solamente podemos medir su promedio de densidad en una vecindad suficientemente pequeña de este punto y llamarla la densidad en el punto dado. En general, una función generalizada está definida por sus “valores promedios” en la vecindad de cada

punto.

Sea f una función fija definida sobre la recta e integrable en cada intervalo finito y sea ϕ una función continua que se anula fuera de un intervalo finito, tales funciones se llamarán funciones terminales. A cada función ϕ de este tipo se puede poner en correspondencia mediante la función fija f el número

$$(f; \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx$$

debido a que $\phi(x)$ se anula fuera de un intervalo finito, la integral se toma respecto a este intervalo finito. En otras palabras, la función f se puede considerar como un funcional definido sobre el espacio de funciones terminales.

El conjunto de funciones ϕ se puede escoger de diversas maneras de tal forma que sean adecuadamente “buenas”, sin embargo, conviene sujetar las funciones admisibles ϕ no sólo a las condiciones de continuidad y terminalidad sino también a condiciones suficientemente rígidas de diferenciabilidad.

2.1 Espacio de funciones de prueba D

Debemos definir primero el conjunto de aquellas funciones suficientemente “buenas” sobre las cuales actúan ciertos funcionales. Consideremos el conjunto de funciones de prueba $D = D(\mathbb{R}^n)$ formado por todas las funciones terminales ϕ infinitamente diferenciables en \mathbb{R}^n con soporte compacto¹, lo cual significa que la función se desvanece fuera de alguna región limitada. Las funciones pertenecientes a D , constituyen un espacio lineal con las operaciones habituales de adición de funciones y multiplicación de éstas por números. La convergencia de funciones de prueba se define de la siguiente

¹El soporte de una función continua $\phi(x)$ es la cerradura del conjunto en el cual $\phi(x) \neq 0$. Se representa como $\text{supp } \phi(x)$.

forma:

La sucesión f'_k de elementos de D se llama convergente a la función $f \in D$ si

1. Existe un número $R > 0$ tal que $\text{supp } f'_k \subset \frac{1}{2} U_R$. Donde U_R es una esfera de radio R , es decir, existe un intervalo fuera del cual se anulan todas las f'_k .
2. Para cada $\alpha = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ $D^{\alpha}_k f(x) \rightrightarrows D^{\alpha} f(x)$; $k \rightarrow \infty$. La sucesión $f^{(\alpha)}_k$ de derivadas de orden $|\alpha|$ converge uniformemente en este intervalo a $f^{(\alpha)}$

donde $D^{\alpha} f(x)$ significa la derivada de la función f de orden $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$;

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1; x_2; \dots; x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}; \quad D^0 f(x) = f(x)$$

Un ejemplo de una función que se desvanece para

$$r^{-|\alpha|} = \frac{1}{x_i^2 + a};$$

es

$$f(x; a) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{a^2}{2r^2}\right) & r < a; \\ 0 & r \geq a; \end{cases}$$

2.2 Funcionales

Supongamos un espacio T compuesto de funciones, las funciones definidas sobre el espacio T que asocian cada función en T con un número se llaman funcionales. Algunos ejemplos de funcionales de funciones x , definidas sobre el intervalo $[0; 1]$ son:

1. $F_1(x) = \sup x(t)$;
2. $F_2(x) = \inf x(t)$;

3. $F_3(x) = x(t_0)$; donde $t_0 \in [0; 1]$;
4. $F_4(x) = \int_0^1 \dot{A}[t; x(t)] dt$; donde $\dot{A}(t; s)$ está definida y es continua para todo $0 \leq t \leq 1$ y toda s real;
5. $F_5(x) = x'(t_0)$; donde $t_0 \in [0; 1]$
6. $F_6(x) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2(t)}$;

Los funcionales $F_1; F_2; F_3$ y F_4 están definidos sobre el espacio C de todas las funciones continuas sobre el segmento $[0; 1]$; F_5 está definido sólo para las funciones diferenciables en el punto t_0 y F_6 para aquellas funciones para las cuales la expresión $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2(t)}$ es integrable.

Un funcional F definido sobre un espacio T se llama continuo cuando para todo $\epsilon > 0$ y todo $x_0 \in T$ existe una vecindad U del elemento x_0 tal que

$$|F(x) - F(x_0)| < \epsilon \quad \text{para } x \in U:$$

2.3 Espacio de funciones generalizadas D^0

Cada funcional lineal continuo en el espacio de funciones de prueba D se conoce como una función generalizada en el sentido de Sobolev-Schwartz. Denotaremos como $(f; \varphi)$ el efecto del funcional (función generalizada) f sobre la función de prueba φ : Denotaremos también la función generalizada f como $f(x)$ entendiendo que x es el argumento de la función de prueba sobre la cual el funcional f actúa.

Toda función $f(x)$ integrable en un intervalo finito cualquiera de R^n (localmente sumable) genera una función generalizada, podemos asociar tal función con cada $\varphi(x)$ en D mediante la expresión

$$(f; \varphi) = \int_{-1}^1 f(x) \varphi(x) dx; \tag{2.1}$$

donde la integral se toma realmente sobre la región limitada donde $\varphi(x)$ no se desvanece. Se puede verificar que la expresión (2.1) satisface las siguientes condiciones

1. La función generalizada f es un funcional sobre D ; es decir, un número $(f; \varphi)$ está asociado con cada $\varphi \in D$:
2. La función generalizada f es una función lineal sobre D ; esto es, si $\varphi, \tilde{\varphi} \in D$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} (f; \alpha\varphi + \beta\tilde{\varphi}) &= \int_Z f(x)[\alpha\varphi(x) + \beta\tilde{\varphi}(x)]dx \\ &= \alpha \int_Z f(x)\varphi(x)dx + \beta \int_Z f(x)\tilde{\varphi}(x)dx \\ &= \alpha(f; \varphi) + \beta(f; \tilde{\varphi}): \end{aligned}$$

3. La función generalizada f es un funcional continuo sobre D ; es decir, si la secuencia φ_k tiende a φ cuando $k \rightarrow \infty$ en D , entonces

$$(f; \varphi_k) \rightarrow (f; \varphi); \quad k \rightarrow \infty:$$

La convergencia en D^0 se define de la siguiente forma: la secuencia de funciones generalizadas $f_1; f_2; f_3; \dots$ que pertenecen a D^0 converge a la función generalizada $f \in D^0$ si, $\forall \varphi \in D^0$

$$(f_k; \varphi) \rightarrow (f; \varphi); \quad k \rightarrow \infty \text{ en } D^0:$$

Esta convergencia se llama convergencia débil.

El espacio D^0 es completo; es decir, si la secuencia de funciones $f_1; f_2; f_3; \dots$ que pertenecen a D^0 es tal que para cualquier función de prueba $\varphi \in D$ existe el límite de la secuencia numérica $(f_1; \varphi); (f_2; \varphi); \dots$ entonces existirá una función generalizada única $f \in D^0$, tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f_k; \varphi) = (f; \varphi); \quad \varphi \in D:$$

La prueba de lo anterior se puede encontrar en [5].

Existen otro tipo de funcionales sobre D , por ejemplo, el funcional que asocia con cada $'(x)$ su valor en $x_0 = 0$, es lineal y continuo. Sin embargo este funcional no puede ser escrito en la forma (2.1) con cualquier función localmente sumable $f(x)$. Este funcional se llama función delta, aunque este término es inadecuado puesto que la función delta no es una función en el sentido clásico, y la denotaremos como $\pm(x)$, así

$$(\pm(x); '(x)) = \int_{-1}^1 \pm(x)'(x)dx = '(0):$$

donde $\pm(x)$ se entiende como una función que es igual a cero para todo $x \neq 0$ y se convierte en el infinito en el punto $x = 0$ de manera que

$$\int_{-1}^1 \pm(x)dx = 1:$$

A veces es necesario utilizar la función delta trasladada, o el funcional $\pm(x; x_0)$ definido como

$$(\pm(x; x_0); '(x)) = '(x_0):$$

Consideremos ahora la función $\frac{1}{x}$ que no es integrable en ningún intervalo que contenga el punto cero, sin embargo para cada $' \in D$, la integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}'(x)dx$$

existe y es finita en el sentido del valor principal. En efecto,

$$\int_{-1}^1 '(x)\frac{1}{x}dx = \int_a^b '(x)\frac{1}{x}dx = \int_a^{b'} \frac{(x) - '(0)}{x}dx + \int_a^{b'} \frac{(0)}{x}dx:$$

el intervalo $(a; b)$ es el intervalo fuera del cual $'$ se anula. En la primera de estas integrales bajo el signo de la integral aparece una función acotada, mientras que la

segunda integral es finita. De esta forma, $\frac{1}{x}$ es un funcional sobre D , es decir es una función generalizada.

Aquellas funciones generalizadas que pueden ser representadas de la forma (2.1) se llaman regulares, y todas aquellas en las que no es posible se llaman singulares (por ejemplo la función delta).

2.4 Soporte de una función generalizada

Ya hemos establecido que a una función generalizada no se le pueden asignar valores en puntos aislados. No podemos decir, por ejemplo, que una función generalizada f es igual a cero en el punto x_0 , sin embargo sí podemos decir que la función f es igual a cero en la vecindad U de x_0 .

La función generalizada f se convierte en cero en la región G si $(f; \varphi) = 0$ para toda $\varphi \in D$. Una región es un conjunto abierto conectado, es decir un dominio [21]. Se representa este hecho como: $f = 0$ para $x \in G$. De acuerdo con esta definición, se dice que las funciones generalizadas f y g son iguales en la región G si $f; \varphi = g; \varphi = 0$ para $x \in G$, en este caso representamos la igualdad $f = g$ para $x \in G$. Específicamente, las funciones generalizadas f y g son iguales si para toda $\varphi \in D$ se cumple

$$(f; \varphi) = (g; \varphi):$$

Una función generalizada f pertenece a la clase $C^p(G)$ si en la región G ; ($0 < p < 1$), ésta coincide con la función $f_0(x)$ de la clase $C^p(G)$; esto es, para cualquier $\varphi \in D(G)$

$$(f; \varphi) = \int f_0(x) \varphi(x) dx: \tag{2.2}$$

Lema 1 Lema 2 Sea el espacio R^n cubierto con un sistema contable de vecindades $U(x_k; r_k)$ con centro en x_k y de radio r_k ; $k = 1; 2; \dots$; y en cada vecindad $U(x_k; r_k)$

la función generalizada f coincide con la función generalizada f_k . Entonces f está definida de forma uno-a-uno mediante sus elementos locales f_k :

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{D}$. El conjunto cerrado del soporte de φ está cubierto por un número finito de vecindades $U(x_k; r_k); k = 1; 2; \dots; N; N = N(\varphi)$: Existen funciones $\varphi_k \in \mathcal{D}$ tales que

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x); \quad \text{supp } \varphi_k \subset U(x_k; r_k)$$

consecuentemente,

$$(f; \varphi) = \sum_{k=1}^N (f; \varphi_k) = \sum_{k=1}^N (f_k; \varphi_k) \quad (2.3)$$

esto es, la función generalizada f está definida por sus elementos locales f_k . Ahora probemos la unicidad de f . Sea g otra función generalizada con los mismos elementos locales f_k . Entonces, de acuerdo con (2.3), para cualquier $\varphi \in \mathcal{D}$

$$(f; \varphi) = \sum_{k=1}^N (f_k; \varphi_k) = (g; \varphi)$$

y así $f = g$: ■

Del lema anterior se desprende que para que una función generalizada f se vuelva cero en la región G , es necesario y suficiente que ésta se vuelva cero en en la vecindad de cada punto de esta región.

El conjunto de puntos que no estén en la vecindad de cada punto que hacen que $f \neq 0$ se conoce como soporte de la función f . Se denota como

$$\text{supp } f$$

Si el soporte de f es un conjunto acotado, se dice que la función f tiene un soporte compacto. Si la función f no se desvanece en ninguna vecindad del punto x_0 , entonces el punto x_0 es un punto esencial del funcional f : Si F es un conjunto que contiene el soporte de una función generalizada, entonces se dice que f está concentrado en F :

2.5 Adición y multiplicación por un número y por una función

Consideremos dos funciones generalizadas f y g . Definimos su suma como un funcional en D mediante

$$(f + g; \varphi) = (f; \varphi) + (g; \varphi):$$

De acuerdo con esta definición $f + g$ es también un funcional continuo. En particular si f y g son funcionales regulares que corresponden a las funciones $f(x)$ y $g(x)$, entonces $f + g$ es también un funcional regular y corresponde a $f(x) + g(x)$.

El producto de una función generalizada f por un número \mathbb{R} está definido por

$$(\mathbb{R}f; \varphi) = \mathbb{R}(f; \varphi) = (f; \mathbb{R}\varphi):$$

Claramente se observa que este funcional es también continuo y lineal. Si f es un funcional regular que corresponde a la función localmente sumable $f(x)$, entonces esta operación corresponde a la multiplicación de $f(x)$ por \mathbb{R} .

No hay una forma natural de definir el producto de dos funciones generalizadas arbitrarias. Sin embargo, es posible definir el producto de una función generalizada f por una función infinitamente diferenciable $a(x)$. Una función $\varphi(x) \in D$ es una función $\tilde{A}(x) = a(x)\varphi(x)$ en D . Más aún, si la secuencia de funciones $\varphi_k(x)$ converge a $\varphi(x)$ cuando $k \rightarrow \infty$, entonces la secuencia $a(x)\varphi_k(x)$ cuando $k \rightarrow \infty$ converge a $a(x)\varphi(x)$. Definamos el funcional af como

$$(af; \varphi) = (f; a\varphi):$$

Para el funcional regular f correspondiente a la función $f(x)$, la multiplicación

por $a(x)$ corresponde a la multiplicación de $f(x)$ por $a(x)$. Para este caso tenemos

$$\begin{aligned} (af; ') &= (f; a') = \int_Z f(x)[a(x)' (x)] dx \\ &= \int_Z [a(x)f(x)]' (x) dx: \end{aligned}$$

2.6 Desplazamientos, rotaciones y otras transformaciones lineales en el espacio de variables independientes

Para $h > 0$, la función $f(x \pm h)$ se llama el desplazamiento a la derecha de $f(x)$ una distancia h . Para el caso de funciones de n variables, sea u una transformación lineal no singular en el espacio de R^n y sea u^{-1} su inverso. Entonces la operación correspondiente u sobre la función $f(x)$ está definida como

$$uf(x) = f(u^{-1}x): \quad (2.4)$$

Este concepto se puede extender a las funciones generalizadas. Obsérvese que si $' (x)$ está en D , entonces también $' (ux)$ lo está. Asumiendo que $f(x)$ sea localmente sumable y que $' (x) \in D$ obtenemos

$$(uf(x); ' (x)) = (f(u^{-1}x); ' (x)) = \int_Z f(u^{-1}x)' (x) dx:$$

Haciendo la sustitución $y = u^{-1}x$, entonces $x = uy$, y en la integral podemos escribir $dx = |j| dy$, donde $|j|$ es el valor absoluto del determinante de la matriz de transformación. Entonces

$$(uf(x); ' (x)) = |j| \int_Z f(y)' (uy) dy = |j| (f(x); ' (ux)):$$

De esta ecuación definimos la operación u aplicada a una función generalizada de la siguiente forma. Definimos uf como un funcional tal que

$$(uf; \cdot) = \int_{\mathbb{R}^n} (f; \cdot)(ux) dx \quad (2.5)$$

podemos escribir (2.5) de la forma

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f(u^{-1}x); \cdot)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x); \cdot(ux) dx:$$

donde f es cualquier función generalizada. Podemos obtener una ecuación particular para transformaciones unimodulares, como aquellas con determinante 1, en particular para rotaciones

$$(f(u^{-1}x); \cdot)(x) \stackrel{\sim}{=} (uf; \cdot) = (f; \cdot)(ux):$$

Ejemplos.

1. Desplazamiento por el vector h . Aquí $ux = x + h$. El desplazamiento de la función generalizada f por el vector h está dado por

$$(uf; \cdot) = (f; \cdot)(ux) = (f; \cdot)(x + h):$$

Esta fórmula puede ser escrita también en la siguiente forma

$$(f(x - h); \cdot) = (f; \cdot)(x + h);$$

o de la forma

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x - h); \cdot(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x); \cdot(x + h) dx:$$

2. Reflexión en el origen. Aquí $ux = -x$. La reflexión de una función generalizada f está dada por

$$(f(-x); \cdot)(x) \stackrel{\sim}{=} (uf; \cdot) = (f; \cdot)(-x);$$

o

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(-x); \cdot(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x); \cdot(-x) dx:$$

3. Transformación semejante. Aquí $ux = \otimes x$. La transformación semejante de una función generalizada está dada por

$$(f(u^{-1}x); \cdot(x)) \sim (uf; \cdot) = \otimes^n(f(x); \cdot(\otimes x));$$

La función generalizada f es invariante con respecto a la operación u si $uf = f$.

2.7 Funciones de prueba complejas y funciones generalizadas

Definamos ahora las funciones de prueba complejas como funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto que toman valores complejos. Así las funciones generalizadas complejas son funcionales lineales que, en general, toman valores complejos en el espacio de funciones de prueba complejas.

Con cada función compleja localmente sumable $f(x)$ asociamos el funcional

$$(f; \cdot) = \int_Z \overline{f(x)} \cdot(x) dx;$$

donde la barra denota el conjugado complejo.

Como anteriormente se hizo, denotaremos el espacio de funciones de prueba como $D = D(C^n)$ y el espacio de funciones generalizadas como $D^0 = D^0(C^n)$:

La adición y multiplicación por un número complejo en D^0 está dada por

$$(f_1 + f_2; \cdot) = (f_1; \cdot) + (f_2; \cdot);$$

$$(\otimes f; \cdot) = \otimes(f; \cdot) = (f; \otimes \cdot);$$

La multiplicación por una función infinitamente diferenciable $a(x)$ está dada por

$$(a(x)f; \cdot) = (f; \overline{a(x)} \cdot(x));$$

Por cada función generalizada f existe una función generalizada \bar{f} definida mediante

$$(f; \cdot) = \overline{(f; \cdot)}:$$

2.8 Diferenciación de una función generalizada

No todas las funciones son diferenciables en el sentido usual, sin embargo, las funciones generalizadas tienen siempre derivadas de cualquier orden, las cuales también son funciones generalizadas.

Sea $f(x)$ una función continua con derivada de primer orden en el sentido usual, la derivada de la función generalizada f se define como

$$(f^0; \cdot) = \int_{i-1}^{i+1} f^0(x) \cdot(x) dx:$$

Integrando por partes y teniendo en cuenta que $\cdot(x) \in D$, esto es, fuera de algún intervalo $[a; b]$, esta se desvanece, obtenemos

$$(f^0; \cdot) = f(x) \cdot(x) \Big|_{i-1}^{i+1} - \int_{i-1}^{i+1} f(x) \cdot^0(x) dx = (f; i \cdot^0):$$

De acuerdo con la notación utilizada anteriormente podemos escribir f^0 en la siguiente forma

$$\int f^0(x) \cdot(x) dx = \int f(x) \cdot^0(x) dx:$$

o en una forma más general podemos decir que si $f \in C^p$, y para cualquier $\mathbb{R}^j; j \leq p$, y $\cdot \in D$ la derivada de orden \mathbb{R} de una función generalizada f está dada por

$$(D^{\mathbb{R}} f; \cdot) = \int D^{\mathbb{R}} f(x) \cdot(x) dx = (i-1)^{j^{\mathbb{R}}} \int f(x) D^{\mathbb{R}} \cdot(x) dx = (i-1)^{j^{\mathbb{R}}} (f; D^{\mathbb{R}} \cdot);$$

donde $D^{\mathbb{R}} f(x)$ significa la derivada de la función f de orden $j^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}_1 + \mathbb{R}_2 + \dots + \mathbb{R}_n$;

$$D^{\otimes} f(x) = \frac{\partial^{j^{\otimes}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\otimes_1} \partial x_2^{\otimes_2} \dots \partial x_n^{\otimes_n}}; \quad D^0 f(x) = f(x):$$

2.9 Propiedades de la derivada de una función generalizada

1. Cualquier función generalizada es infinitamente diferenciable. Si $f \in D^0$; entonces $f' \in D^0$ y también $f'' \in D^0$ y así sucesivamente.
2. El resultado de una derivada no depende del orden de diferenciación. Por ejemplo

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = D^{(1;1)} f; \quad (2.6)$$

donde $D^{(1;1)}$ significa la primera derivada con respecto a x_1 y x_2 :

Para cualquier $f \in D$, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \right):$$

De la ecuación (2.6) tenemos en general que

$$D^{\otimes+} f = D^{\otimes} (D^- f) = D^- (D^{\otimes} f):$$

donde $j^{\otimes} = \otimes_1 + \otimes_2 + \dots + \otimes_n$ y $j^- = -_1 + -_2 + \dots + -_n$:

3. Fórmula de diferenciación de Leibnitz'. En el producto de una función infinitamente diferenciable $a(x)$ con una función generalizada f , la fórmula de diferenciación de Leibnitz'

$$(af)^{\otimes} = a^{\otimes} f + af^{\otimes}$$

y así

$$\begin{aligned}
 ((af)^0; ') &= \sum_i (af; ' ^0) = \sum_i (f; a' ^0) = \sum_i (f; (a')^0) \sum_i a'^0 \\
 &= \sum_i (f; (a')^0) + (f; a'^0) = (f^0; a') + (a^0 f; ') \\
 &= (af^0; ') + (a^0 f; ') = (af^0 + a^0 f; '):
 \end{aligned}$$

4. Si la función generalizada $f = 0$ para $x \in G$, entonces también $D^{\otimes} f = 0$ para $x \in G$. Esto es $\text{supp } D^{\otimes} f \subseteq \text{supp } f$:

De hecho, si $' \in D(G)$ entonces $D^{\otimes} ' \in D(G)$ y así

$$(D^{\otimes} f; ') = (\sum_j (-1)^{j^{\otimes}} (f; D^{\otimes} ')) = 0; \quad ' \in D(G):$$

lo cual muestra que $D^{\otimes} f = 0$ para $x \in G$:

5. La operación de diferenciación es continua de D^0 a D^0 : Esto es, si para toda $f_k \rightarrow f$ cuando $k \rightarrow \infty$ en D^0 , entonces $D^{\otimes} f_k \rightarrow D^{\otimes} f$ cuando $k \rightarrow \infty$ en D^0 :

En efecto, de acuerdo con la definición de convergencia en el espacio D^0 , para toda $' \in D$ tenemos

$$(D^{\otimes} f_k; ') = (\sum_j (-1)^{j^{\otimes}} (f_k; D^{\otimes} ')) \rightarrow (\sum_j (-1)^{j^{\otimes}} (f; D^{\otimes} ')) = (D^{\otimes} f; '); \quad k \rightarrow \infty$$

lo cual muestra que $D^{\otimes} f_k \rightarrow D^{\otimes} f$ cuando $k \rightarrow \infty$ en D^0 :

Ejemplo.

Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \geq 0; \\ 0 & \text{para } x < 0; \end{cases}$$

esta función define el funcional lineal

$$(f(x); \varphi(x)) = \int_0^1 \varphi(x) dx:$$

De acuerdo con la definición de la derivada de una función generalizada, tenemos

$$(f'(x); \varphi(x)) = - (f(x); \varphi'(x)) = - \int_0^1 \varphi'(x) dx = \varphi(0):$$

puesto que φ es igual a cero en el infinito. Por consiguiente, la derivada de la función escalón, es la función delta.

2.10 Funciones generalizadas de lento crecimiento

2.10.1 Espacio de funciones de prueba S

Definamos el conjunto de funciones de prueba $S = S(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de todas las funciones de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ infinitamente diferenciables que, junto con sus derivadas, decrece más rápido que cualquier potencia de $\frac{1}{|x|}$ cuando $|x| \rightarrow \infty$. La secuencia de funciones $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ que pertenecen a S converge a la función $\varphi \in S$, $\varphi_k \rightarrow \varphi$ cuando $k \rightarrow \infty$ en S , si para toda $\varphi \in S$ y $\varphi_k \in S$

$$\varphi_k \rightarrow \varphi \text{ en } S \iff \varphi_k \rightarrow \varphi \text{ en } D; \quad k \rightarrow \infty: \quad (2.7)$$

Podemos ver que S es un espacio lineal, y más aún $D \subset S$ y de la convergencia en D tenemos la convergencia en S . De hecho, si $\varphi_k \rightarrow \varphi$ cuando $k \rightarrow \infty$ en D , entonces puesto que los soportes de φ_k están limitados independientemente de k , el resultado (2.7) es válido para toda $\varphi \in S$ y $\varphi_k \in S$, lo cual significa que $\varphi_k \rightarrow \varphi$ cuando $k \rightarrow \infty$ en S .

Sin embargo, S no coincide con D ; por ejemplo, la función $e^{-|x|^2}$ pertenece a S pero no pertenece a D .

2.10.2 Espacio de funciones generalizadas de lento crecimiento

S^0

Cada funcional lineal sobre el espacio de funciones de prueba S se conoce como función generalizada de lento crecimiento. Denotemos por $S^0 = S^0(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de todas las funciones generalizadas de lento crecimiento. Así como en las definiciones anteriores, una secuencia de funcionales $f_1; f_2; \dots$ que pertenecen a S^0 convergen a la función generalizada $f \in S^0$, $f_k \rightarrow f$ cuando $k \rightarrow \infty$ en S^0 , si para cualquier $\phi \in S$; $(f_k; \phi) \rightarrow (f; \phi)$, cuando $k \rightarrow \infty$. De esta definición podemos observar que $S^0 \supseteq D^0$ y de la convergencia en S^0 tenemos la convergencia en D^0 .

Si $f \in S^0$, entonces $f \in D^0$, a partir de que $D^0 \supseteq S$ y la convergencia en S , tenemos la convergencia en D .

Ejemplos de funciones generalizadas de lento crecimiento

1. Si $f(x)$ es una función integrable polinomial de lento crecimiento en el infinito, es decir, para un cierto número $m \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| (1 + |x|)^m dx < \infty$$

entonces ésta define un funcional regular que pertenece a S^0 .

Sin embargo, no todas las funciones localmente integrables definen una función generalizada de lento crecimiento, por ejemplo, $e^x \notin S^0(\mathbb{R}^1)$: Pero por otro lado, no todas las funciones localmente integrables que pertenecen a S^0 tienen un crecimiento polinomial. Por ejemplo, la función $(\cos e^x)^0 = \int_{-\infty}^x \cos e^x \sin e^x dx$ no es de crecimiento polinomial, no obstante define una función que pertenece a S^0 de acuerdo con la fórmula

$$(\cos e^x)^0; \phi = \int_{-\infty}^{\infty} \cos e^x \phi(x) dx; \quad \phi \in S:$$

2. Si f es una función generalizada finita que pertenece a D^0 con soporte compacto, entonces ésta es continua sobre S en forma única como un elemento que pertenece a S^0 de acuerdo con:

$$(f; \varphi) = (f; \varphi'); \quad \varphi' \in S$$

donde $\varphi' \in D$ y $\varphi' = 1$ en la vecindad del soporte de f : De hecho, el funcional lineal $(f; \varphi')$, que está del lado derecho en la ecuación anterior, es continuo en S : Si $\varphi'_k \rightarrow \varphi'$ cuando $k \rightarrow \infty$ en S , entonces $(f; \varphi'_k) \rightarrow (f; \varphi')$ cuando $k \rightarrow \infty$ en D y así

$$(f; \varphi'_k) \rightarrow (f; \varphi'); \quad k \rightarrow \infty:$$

3. Si $f \in S^0$, entonces cada derivada $D^{\alpha} f \in S^0$. Puesto que la operación de diferenciación D^{α} es continua de S a S , el lado derecho de la ecuación

$$(D^{\alpha} f; \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f; D^{\alpha} \varphi)$$

es un funcional continuo en S :

2.10.3 Transformada de Fourier de funciones de prueba S

Puesto que las funciones de prueba S son integrables en \mathbb{R}^n ; la transformada de Fourier para estas funciones está definida como:

$$F[\hat{A}](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{A}(x) e^{i(\xi; x)} dx; \quad \hat{A} \in S$$

La transformada de Fourier $F[\hat{A}]$ de la función $\hat{A} \in S$ es una función integrable y continuamente diferenciable sobre \mathbb{R}^n , entonces la función $\hat{A}(x)$ puede ser expresada en términos de su transformada de Fourier $F[\hat{A}](\xi)$ mediante la transformada inversa de Fourier F^{-1} :

$$\hat{A}(x) = F^{-1}[F[\hat{A}]] = F[F^{-1}[\hat{A}]] \quad (2.8)$$

donde

$$\begin{aligned}
 F^{-1}[\tilde{A}](x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{A}(\xi) e^{i(\xi, x)} d\xi = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^n} F[\tilde{A}](i \cdot x) = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{A}(i \cdot \xi) e^{i(\xi, x)} d\xi = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^n} F[\tilde{A}(i \cdot \xi)]: \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

Podemos ver de las ecuaciones (2.8) y (2.9) que cada función $\tilde{A} \in S'$ es una transformada de Fourier de la función $\tilde{A} = F^{-1}[\tilde{A}]$ que pertenece a S , $\tilde{A} = F[\tilde{A}]$, y si $F[\tilde{A}] = 0$, entonces $\tilde{A} = 0$. Esto significa que la transformada de Fourier F mapea de S a S' de uno a uno mutuamente.

2.10.4 Transformada de Fourier de funciones generalizadas S^0

Sea $f(x)$ una función integrable sobre \mathbb{R}^n , entonces su transformada de Fourier

$$F[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i(\xi, x)} dx; \quad \|F[f]\| \cdot \|f\| < 1$$

es una función continua en \mathbb{R}^n y define una función generalizada que pertenece a S^0 ;

$$(F[f]; \tilde{A}) = \int_{\mathbb{R}^n} F[f](\xi) \tilde{A}(\xi) d\xi; \quad \tilde{A} \in S^0: \tag{2.10}$$

Haciendo un cambio en el orden de integración, podemos transformar la integral (2.10):

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} F[f](\xi) \overline{A(\xi)} d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx \overline{A(\xi)} d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{A(\xi)} e^{i\xi x} d\xi dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) F[\overline{A}](x) dx
\end{aligned}$$

es decir,

$$(F[f]; \overline{A}) = (f; F[\overline{A}]); \quad \overline{A} \in S; \quad f \in S^0; \quad (2.11)$$

Introduzcamos ahora la transformada inversa de Fourier en S^0 denotada por F^{-1} :

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(i \cdot x)]; \quad f \in S^0; \quad (2.12)$$

Demostremos ahora que la transformación F^{-1} es la operación inversa de la transformada de Fourier F , es decir:

$$F^{-1}[F[f]] = f; \quad F[F^{-1}[f]] = f; \quad f \in S^0; \quad (2.13)$$

De las ecuaciones (2.8)-(2.12) tenemos que para toda $f \in S'$ se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned}
 (F^{-1}[F[f]])(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} (F[F[f]])(x) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^n} (F[f])(F^{-1}[x]) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^n} (F[f])(F^{-1}[x]) \\
 &= (f)(x) \\
 &= (f)(F^{-1}[F^{-1}[x]]) = (f)(x)
 \end{aligned}$$

De la ecuación (2.13) podemos observar que cada función generalizada $f \in S'$ es una transformada de Fourier de la función generalizada $g = F^{-1}[f]$ que pertenece a S' , $f = F[g]$, y si $F[f] = 0$, entonces también $f = 0$. Esto significa que las transformadas de Fourier F y F^{-1} mapean de S' a S' mutuamente de uno a uno.

2.10.5 Propiedades de la transformada de Fourier

1. Diferenciabilidad de la transformada de Fourier. Si $f \in S'$, entonces

$$D^\alpha F[f] = F[(ix)^\alpha f]; \tag{2.14}$$

2. Transformada de una derivada. Si $f \in S'$, entonces

$$F[D^\alpha f] = (i\xi)^\alpha F[f]; \tag{2.15}$$

Capítulo 3

Soluciones fundamentales

En este capítulo la teoría de funciones generalizadas es aplicada a la solución de problemas con valores de frontera incluyendo condiciones iniciales que involucran fuentes actuando momentáneamente. La solución puede ser encontrada sumando las perturbaciones producidas por cada punto de la fuente distribuida de tal forma que la solución se da en como una convolución de la solución fundamental con el término independiente de la ecuación dada.

3.1 Solución fundamental de operadores diferenciales

La transformada de Fourier se aplica para construir la solución fundamental de los operadores diferenciales cuando tienen coeficientes constantes. Naturalmente, solamente las soluciones fundamentales de lento crecimiento pueden ser obtenidas de esta forma.

3.1.1 Soluciones generalizadas de ecuaciones diferenciales lineales

Sea

$$\sum_{j=0}^m a_j(x) D^j u = f(x); \quad f \in D^0 \quad (3.1)$$

una ecuación diferencial lineal de orden m con coeficientes $a_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Introduzcamos el operador diferencial

$$L(x; D) = \sum_{j=0}^m a_j(x) D^j$$

donde

$$D = \frac{\partial}{\partial x_1}; \frac{\partial}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial}{\partial x_n} :$$

podemos reescribir esta ecuación en la forma

$$L(x; D)u = f(x); \quad (3.2)$$

Cada función generalizada $u \in D^0$ que satisface esta ecuación en la región G en el sentido generalizado, esto es, para cualquier $\varphi \in D; \text{supp } \varphi \subset G$

$$(L(x; D)u; \varphi) = (f; \varphi) \quad (3.3)$$

se conoce como la solución generalizada de la ecuación (3.1) en la región G . La ecuación (3.3) tiene el mismo efecto que la ecuación

$$(u; L^*(x; D)\varphi) = (f; \varphi); \quad \varphi \in D(G) \quad (3.4)$$

donde

$$L^*(x; D)\varphi = \sum_{j=0}^m (j!)^j D^j (a_j \varphi) \quad (3.5)$$

de hecho,

$$\begin{aligned}
 (L(x; D)u; ') &= \int_{j \in \mathbb{N}^n} a_{\otimes} D^{\otimes} u; ' A = \int_{j \in \mathbb{N}^n} (a_{\otimes} D^{\otimes} u; ') \\
 &= \int_{j \in \mathbb{N}^n} (D^{\otimes} u; a_{\otimes} ') = \int_{j \in \mathbb{N}^n} (i - 1)^{j \otimes j} (u; D^{\otimes} (a_{\otimes} ')) \\
 &= \int_{j \in \mathbb{N}^n} (i - 1)^{j \otimes j} D^{\otimes} (a_{\otimes} ') A = (u; L^{\otimes}(x; D) ') :
 \end{aligned}$$

Queda claro que cada solución clásica es también una función generalizada.

Lema 3 Si la función generalizada $u(x)$ de la ecuación (3.1) en la región G pertenece a la clase $C^m(G)$ y $f \in C(G)$, entonces es también la solución clásica de esta ecuación en la región G :

Demostración. Puesto que $u \in D^0 \setminus C^m(G)$, las derivadas clásicas y generalizadas de la función u de orden m o mayor coinciden en la región G . Ya que u es la solución generalizada de la ecuación (3.1) en la región G , entonces la función $L(x; D)u; f$ la cual es continua en G se desvanece en la región G en el sentido de las funciones generalizadas. $L(x; D)u(x); f(x) = 0$ en todos los puntos de la región G , por lo tanto u satisface la ecuación (3.1) en la región G en el sentido clásico. ■

3.2 Soluciones fundamentales

Sea L un operador con coeficientes constantes $a_{\otimes}(x) = a_{\otimes}$:

$$L(D) = \int_{j \in \mathbb{N}^n} a_{\otimes} D^{\otimes}; \quad L^{\otimes}(D) = L(i - D); \quad (3.6)$$

La función generalizada $G \in D^0$ la cual satisface la ecuación

$$L(D)G = \delta(x) \quad (3.7)$$

en \mathbb{R}^n se llama la solución fundamental del operador diferencial $L(D)$.

La solución fundamental $G(x)$ del operador $L(D)$; generalmente, no es única; está definida aproximadamente como el término $G_0(x)$, el cual es una solución arbitraria de la ecuación homogénea $L(D)G_0 = 0$.

De hecho, la función generalizada $G(x)+G_0(x)$ es también una función fundamental del operador $L(D)$;

$$L(D)(G + G_0) = L(D)G + L(D)G_0 = \pm(x):$$

Lema 4 Para que la función generalizada $G \in S^0$ sea la solución fundamental del operador $L(D)$, es necesario y suficiente que su transformada de Fourier $F[G]$ satisfaga la ecuación

$$L(i \cdot)F[G] = 1 \tag{3.8}$$

donde

$$L(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$$

Demostración. Sea $G \in S^0$ la solución fundamental del operador $L(D)$. Aplicando la transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación (3.7), obtenemos

$$F[L(D)G] = F[\pm] = 1 \tag{3.9}$$

Considerando las propiedades de la transformada de una derivada, tenemos

$$\begin{aligned} F[L(D)G] &= F \left[\sum_{j=0}^n a_j D^j G \right] = \sum_{j=0}^n a_j F[D^j G] \\ &= \sum_{j=0}^n a_j (i \cdot)^j F[G] = L(i \cdot)F[G]: \end{aligned} \tag{3.10}$$

De esta ecuación y de la ecuación (3.9) se desprende que $F[G]$ satisface la ecuación (3.8).

Por el contrario, si $G \in S^0$ satisface la ecuación (3.9), entonces por la ecuación (3.10), G satisface la ecuación (3.9), de donde se desprende que G satisface la ecuación (3.7); esto es, la solución fundamental del operador $L(D)$. ■

3.2.1 Ecuaciones con término independiente (lado derecho)

Mediante la solución $G(x)$ del operador $L(D)$ es posible construir la solución de la ecuación

$$L(D)u = f(x) \quad (3.11)$$

con una función arbitraria en el lado derecho.

Teorema 5 Sea $f \in D^0$ tal que la convolución $G * f$ existe en D^0 . Entonces la solución de la ecuación (3.11) existe en D^0 y está dada por

$$u = G * f \quad (3.12)$$

Esta solución es única en la clase de funciones generalizadas pertenecientes a D^0 para la cual la convolución con G existe.

Demostración. Utilizando la fórmula de diferenciación de una convolución y tomando en cuenta la ecuación (3.7), obtenemos

$$\begin{aligned} L(D)(G * f) &= \sum_{j=0}^n a_j D^j (G * f) \\ &= \sum_{j=0}^n a_j D^j G * f = L(D)G * f = \delta * f = f \end{aligned}$$

Así la fórmula $u = G * f$ nos da la solución de la ecuación (3.11). Ahora debemos probar la unicidad de la solución de la ecuación (3.11) en la clase de funciones generalizadas pertenecientes a D^0 para la cual la convolución con G existe en D^0 . Para

esto es suficiente establecer que la ecuación homogénea correspondiente

$$L(D)u = 0$$

tiene solamente una solución cero en esta clase. Aunque de hecho

$$u = u \ast \pm = u \ast L(D)G = L(D)u \ast G = 0$$

Así, el teorema está demostrado. ■

Corolario 6 Si $u \in D^0$ y la convolución $u \ast G$ existe en D^0 , entonces la ecuación

$$u = L(D)u \ast G$$

es válida.

Observación 7 Significado físico de la solución $u = G \ast f$.

Representemos la fuente $F(x)$ en la forma de una suma de fuentes puntuales $f(\ast)\pm(x_j \ast)$;

$$f(x) = \pm \ast f = \int_Z f(\ast)\pm(x_j \ast) d\ast$$

En virtud de (3.7), cada fuente puntual $f(\ast)\pm(x_j \ast)$ define la influencia de $f(\ast)\pm(x_j \ast)$: Así la solución

$$u(x) = G \ast f = \int_Z f(\ast)G(x_j \ast) d\ast$$

es la superposición de estas influencias.

Capítulo 4

Análisis cuaterniónico y principio de absorción límite

4.1 Análisis cuaterniónico

4.1.1 Cuaterniones reales

Un cuaternión puede ser considerado como un número en \mathbb{R}^4 que está representado como una combinación lineal de los elementos de una base ortonormal.

$$q = q_0 i_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3: \quad (4.1)$$

Donde q_0 , q_1 , q_2 y q_3 son las componentes del cuaternión q y son números reales. Podemos decir que dos cuaterniones son iguales si y solo si tienen exactamente las mismas componentes:

$$p = q \quad \text{si y solo si} \quad p_k = q_k; \quad k = 1; 2; 3:$$

La suma de dos cuaterniones p y q está definida como la suma de las componentes

correspondientes:

$$p + q = \sum_{k=0}^3 (p_k + q_k) i_k. \quad (4.2)$$

Sin embargo, la diferencia entre un cuaternión y un vector en \mathbb{R}^4 es la definición de la multiplicación cuaterniónica. El elemento i_0 es considerado como la unidad, esto es $i_0 = 1$. Los otros tres elementos de la base ortonormal son considerados como unidades imaginarias:

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1. \quad (4.3)$$

Los productos de elementos diferentes de la base están definidos de la siguiente forma:

$$i_1 \circ i_2 = -i_3 \quad i_2 \circ i_1 = i_3, \quad (4.4)$$

$$i_2 \circ i_3 = -i_1 \quad i_3 \circ i_2 = i_1, \quad (4.5)$$

$$i_3 \circ i_1 = -i_2 \quad i_1 \circ i_3 = i_2. \quad (4.6)$$

Así, las igualdades (4.3)-(4.6) definen completamente la multiplicación de dos cuaterniones. De esta forma

$$\begin{aligned} p \circ q &= (p_0 i_0 + p_1 i_1 + p_2 i_2 + p_3 i_3) (q_0 i_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3) = \\ &= (p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3) i_0 + \\ &\quad (p_1 q_0 + p_0 q_1 + p_2 q_3 - p_3 q_2) i_1 + \\ &\quad (p_2 q_0 + p_0 q_2 + p_3 q_1 - p_1 q_3) i_2 + \\ &\quad (p_3 q_0 + p_0 q_3 + p_1 q_2 - p_2 q_1) i_3. \end{aligned} \quad (4.7)$$

En la representación vectorial de un cuaternión, si $q = \sum_{k=0}^3 q_k i_k$, entonces q_0 es la parte escalar de q y es indicada como $Sc(q)$ y $\sum_{k=1}^3 q_k i_k$ es la parte vectorial de

q y se denota como $\text{Vec}(q)$ o \mathbf{l}_q . Cada cuaternión q es una suma de un escalar q_0 y de un vector \mathbf{l}_q :

$$q = \text{Sc}(q) + \text{Vec}(q) = q_0 + \mathbf{l}_q.$$

Utilizando las definiciones de los productos escalar y vectorial se puede reescribir el producto cuaterniónico en forma vectorial:

$$p \epsilon q = p_0 q_0 - \mathbf{h}(\mathbf{l}_p; \mathbf{l}_q) + p_0 \mathbf{l}_q + \mathbf{l}_p q_0 + [\mathbf{l}_p \wedge \mathbf{l}_q]. \quad (4.8)$$

Donde

$$\mathbf{h}(\mathbf{l}_p; \mathbf{l}_q) = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$$

y

$$[\mathbf{l}_p \wedge \mathbf{l}_q] = \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & i_1 & i_2 & i_3 \\ - & p_1 & p_2 & p_3 \\ - & q_1 & q_2 & q_3 \\ - & - & - & - \end{bmatrix}$$

Obsérvese que

$$\text{Sc}(p \epsilon q) = p_0 q_0 - \mathbf{h}(\mathbf{l}_p; \mathbf{l}_q)$$

y

$$\text{Vec}(p \epsilon q) = p_0 \mathbf{l}_q + \mathbf{l}_p q_0 + [\mathbf{l}_p \wedge \mathbf{l}_q]:$$

Un importante corolario de (4.8) es que el producto de dos cuaterniones puramente vectoriales es un cuaternión completo cuya parte escalar no es cero sino es igual al producto escalar de los dos vectores con el signo menos

$$\mathbf{l}_p \epsilon \mathbf{l}_q = - \mathbf{h}(\mathbf{l}_p; \mathbf{l}_q) + [\mathbf{l}_p \wedge \mathbf{l}_q].$$

Definamos el conjugado del cuaternión $q = q_0 + \mathbf{l}_q$ como el cuaternión $\bar{q} = q_0 - \mathbf{l}_q$. De la definición anterior se desprende una importante propiedad de la conjugación

cuaterniónica:

$$\overline{p \wr q} = q \wr p:$$

De (4.7) obtenemos la siguiente propiedad:

$$q \wr q = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 =: |q|^2. \quad (4.9)$$

Así, $\text{Sc}(p \wr q) = 0$ si y solo si los vectores p y q son ortogonales, y $\text{Vec}(p \wr q) = 0$ si y solo si son colineales. Obsérvese que

$$|p|^2 = p \wr p = i \cdot |p| \cdot |p| \cdot i = |p|^2. \quad (4.10)$$

La expresión (4.9) es un número real y representa el cuadrado de la distancia desde el origen al punto con coordenadas $(q_0; q_1; q_2; q_3)$ en el espacio Euclideo de cuatro dimensiones. Así, para factorizar la distancia al cuadrado en dos dimensiones necesitamos la unidad imaginaria compleja i . En tres o cuatro dimensiones necesitamos las tres unidades imaginarias $i_1; i_2$ e i_3 :

Otra importante conclusión que se puede obtener de (4.9) es que para cada cuaternión q diferente de cero, existe su inverso y está dado por

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}.$$

Obsérvese que $jp \wr qj = |p| \wr |q|$, y que

$$jp \wr qj^2 = pq \wr \overline{pq} = pq\overline{q} \wr p = p|q|^2 \overline{p} = p\overline{p} \wr |q|^2 = |p|^2 \wr |q|^2:$$

Es importante mencionar que todas las leyes del álgebra son válidas en el caso cuaterniónico con una sola excepción: la multiplicación cuaterniónica no es conmutativa. Así el conjunto de los cuaterniones reales se denota como $H(\mathbb{R})$.

4.1.2 Cuaterniones complejos

Un cuaternión complejo se define de la misma forma que en el caso de los cuaterniones reales (4.1), solo que todas las componentes son números complejos, un cuaternión complejo q tiene la siguiente forma:

$$q = q_0 i_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3$$

donde q_0, q_1, q_2 y q_3 son números complejos. Los cuaterniones complejos son llamados también bicuaterniones. La unidad imaginaria i por definición conmuta con las unidades imaginarias cuaterniónicas $i_k; k = 1; 2; 3$ y esto se define de la siguiente forma

$$i \zeta i_k = i_k \zeta i; \quad k = 1; 2; 3.$$

El conjunto de los cuaterniones complejos se representa como $H(\mathbb{C})$ y cualquier cuaternión complejo $q \in H(\mathbb{C})$ se puede representar como $q = \text{Re } q + i \text{Im } q$, donde $\text{Re } q = \sum_{k=0}^3 \text{Re } q_k i_k$ y $\text{Im } q = \sum_{k=0}^3 \text{Im } q_k i_k$ pertenecen a $H(\mathbb{C})$.

Si el producto de dos cuaterniones complejos a y b es cero pero a y b no son cero, entonces a y b se llaman divisores de cero. Denotemos el conjunto de todos los divisores de cero en $H(\mathbb{C})$ como G :

$$G := \{a \in H(\mathbb{C}) \mid a \neq 0; \exists b \neq 0 : a \zeta b = 0\} \quad (4.11)$$

Si un cuaternión a es divisor de cero, entonces a^{-1} no existe. La demostración de esto es muy simple. Asumamos que $a \in G$, esto es, existe tal $b \neq 0$ que $a \zeta b = 0$ y asumimos que a^{-1} existe. Entonces $a^{-1} a = 1$: Multiplicamos esta igualdad por b : $a^{-1} a b = b$, de donde obtenemos inmediatamente la contradicción $0 = b$. Así, los divisores de cero no son invertibles. El siguiente lema proporciona una descripción más detallada de G .

Lema 8 (Estructura del conjunto de divisores de cero). Sea $a \in H(\mathbb{C})$ y $a \neq 0$. Las siguientes relaciones son equivalentes:

1. $a \in G$.
2. $a \bar{a} = 0$.
3. $a_0^2 = |a|^2$.
4. $a^2 = 2a_0a = 2|a|a$.

Las demostraciones de lo anterior se pueden encontrar en [13].

Si $a \in G$ y $a_0 \neq 0$ entonces de acuerdo con el punto 4 del lema anterior, el cuaternión complejo $c := \frac{1}{2a_0}a$ es idempotente, esto es $c^2 = c$.

En el caso de los cuaterniones complejos el módulo definido por (4.9) no nos da información sobre los valores absolutos de sus componentes, es por eso que se utiliza frecuentemente otro tipo de módulo.:

$$|q|_c := \sqrt{|q_0|^2 + |q_1|^2 + |q_2|^2 + |q_3|^2} \quad (4.12)$$

donde $|q_k|^2 = q_k \bar{q}_k$ y “*” significa conjugación compleja.

4.1.3 El operador diferencial de Moisil-Theodoresco

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y $f \in C^1(\Omega; H(\mathbb{C}))$, donde Ω es un dominio abierto acotado en \mathbb{R}^3 con frontera $\Gamma := \partial\Omega$. El operador de Moisil-Theodoresco se define de la siguiente forma:

$$Df := \sum_{k=1}^3 i_k \partial_k f$$

donde $\partial_k := \frac{\partial}{\partial x_k}$. Consideremos la acción del operador D en forma más explícita

$$\begin{aligned}
Df &= (i_1@_1 + i_2@_2 + i_3@_3)(f_0 + f_1i_1 + f_2i_2 + f_3i_3) = \\
&= (i_1@_1f_0 + i_2@_2f_0 + i_3@_3f_0) + (@_1f_1 + @_2f_2 + @_3f_3) + \\
&\quad + ((@_2f_3 - @_3f_2)i_1 + (@_3f_1 - @_1f_3)i_2 + (@_1f_2 - @_2f_1)i_3).
\end{aligned}$$

La expresión en el primer paréntesis es precisamente el gradiente de la función f_0 :

$$\text{grad } f_0 = (i_1@_1 + i_2@_2 + i_3@_3)f_0.$$

El segundo paréntesis contiene la divergencia del vector \mathbf{f} :

$$\text{div } \mathbf{f} = @_1f_1 + @_2f_2 + @_3f_3.$$

Finalmente el tercer paréntesis representa el rotacional de \mathbf{f} :

$$\text{rot } \mathbf{f} = (@_2f_3 - @_3f_2)i_1 + (@_3f_1 - @_1f_3)i_2 + (@_1f_2 - @_2f_1)i_3.$$

Por consiguiente,

$$Df = i_1 \text{div } \mathbf{f} + \text{grad } f_0 + \text{rot } \mathbf{f}. \quad (4.13)$$

El resultado de la acción del operador D sobre la función bicuaterniónica f es un cuaternión complejo cuya parte escalar es igual a $i_1 \text{div } \mathbf{f}$ y cuya parte vectorial es la suma $\text{grad } f_0 + \text{rot } \mathbf{f}$:

$$\text{Sc}(Df) = i_1 \text{div } \mathbf{f},$$

$$\text{Vec}(Df) = \text{grad } f_0 + \text{rot } \mathbf{f}.$$

Los tres operadores diferenciales principales del cálculo vectorial están contenidos en el operador cuaterniónico D .

La ecuación

$$Df = 0 \tag{4.14}$$

es equivalente al sistema

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = 0; \tag{4.15}$$

$$\operatorname{grad} f_0 + \operatorname{rot} \mathbf{f} = 0; \tag{4.16}$$

llamado sistema de Moisil-Theodoresco.

Utilizando (4.10) se obtiene la siguiente propiedad del operador D

$$D^2 = \Delta; \tag{4.17}$$

donde $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ es el operador de Laplace usual. Esta propiedad garantiza que cada componente de la función f que satisface (4.14) es una función armónica.

Teorema 9 [9] (Regla generalizada de Leibniz) Sea $f, g \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$, donde Ω es un dominio en \mathbb{R}^3 . Entonces

$$D[f \cdot g] = D[f] \cdot g + \bar{f} \cdot D[g] + 2(\operatorname{Sc}(fD))[g],$$

donde

$$(\operatorname{Sc}(fD))[g] := \sum_{k=1}^3 f_k \partial_k g;$$

Si $\operatorname{Vec}(f) = 0$, es decir $f = f_0$, entonces

$$D[f_0 \cdot g] = D[f_0] \cdot g + f_0 \cdot D[g].$$

Nótese que el operador de Moisil-Theodoresco fue introducido actuando por la izquierda. El operador correspondiente que actúa por la derecha se denota como D_r :

$$D_r f := \sum_{k=1}^3 \partial_k f i_k. \tag{4.18}$$

En forma vectorial la aplicación de D_r se puede representar como

$$D_r f = \mathbf{j} \operatorname{div} \mathbf{f} + \operatorname{grad} f_0 - \mathbf{j} \operatorname{rot} \mathbf{f} :$$

y toda la teoría correspondiente puede ser desarrollada para D_r exactamente como para D .

4.1.4 El operador $D + \mathbb{R}I$

Consideremos ahora el operador $D_{\mathbb{R}} := D + \mathbb{R}I$, donde \mathbb{R} es una constante compleja arbitraria e I es el operador identidad. La adición de \mathbb{R} permite ampliar el espectro de aplicaciones de las técnicas del análisis cuaterniónico. Asumiremos que $\operatorname{Im} \mathbb{R} \neq 0$:

4.2 Factorización del operador de Helmholtz y soluciones fundamentales

El operador $D_{\mathbb{R}}$ está relacionado con el operador de Helmholtz $\Delta + \mathbb{R}^2 I$ mediante la siguiente factorización

$$\Delta + \mathbb{R}^2 = \mathbf{j} (D + \mathbb{R})(D - \mathbf{j} \mathbb{R}) = \mathbf{j} D_{\mathbb{R}} D_{-\mathbf{j} \mathbb{R}} \quad (4.19)$$

La igualdad (4.19) significa que cualquier función que satisface la ecuación

$$D_{\mathbb{R}} f = 0 \quad (4.20)$$

o

$$D_{-\mathbf{j} \mathbb{R}} f = 0 \quad (4.21)$$

también satisface la ecuación de Helmholtz

$$\mathbf{j} \Delta + \mathbb{R}^2 f = 0 \quad (4.22)$$

Otro corolario importante de (4.19) es la posibilidad de calcular las soluciones fundamentales de los operadores D_{\otimes} y $D_{i \otimes}$. Supongamos que $\#$ es una solución fundamental del operador de Helmholtz:

$$i \Delta + \otimes^2 \# = \pm.$$

Entonces, utilizando la factorización (4.19) obtenemos que la función

$$K_{\otimes} := i (D - i a) \# \quad (4.23)$$

es una solución fundamental de D_{\otimes} y la función

$$K_{i \otimes} := i (D + a) \# \quad (4.24)$$

es una solución fundamental de $D_{i \otimes}$, es decir

$$D_{\otimes} K_{\otimes} = \pm \quad (4.25)$$

Normalmente, la elección de una solución fundamental única está relacionada con su significado físico. En el caso del operador de Helmholtz asumimos que $\text{Im } \otimes > 0$ y la solución fundamental tiene la siguiente forma

$$\#(x) = i \frac{e^{i \otimes |x|}}{4 \sqrt{\otimes} |x|} \quad (4.26)$$

y representa una onda que se aleja (que decrece en el infinito) generada por una fuente puntual situada en el origen. Otra posible solución es $i e^{i \otimes |x|} / (4 \sqrt{\otimes} |x|)$, pero si $\text{Im } \otimes < 0$, ésta crece exponencialmente en el infinito y por esta razón no sirve para describir campos en una parte finita del espacio. Como se verá más adelante el problema es distinguir el comportamiento en el infinito de estas dos soluciones fundamentales en el caso cuando $\text{Im } \otimes = 0$. Esta dificultad es salvada con la ayuda de la llamada condición de radiación que se discutirá con más detalle posteriormente. Seleccionamos

la solución (4.26) debido al significado físico para la construcción de soluciones fundamentales para los operadores D_{μ} y $D_{i\mu}$: Substituyendo la función (4.26) en la igualdad (4.23) obtenemos que

$$K_{\mu}(x) = i \operatorname{grad} \#(x) + \mu \#(x) = \mu + \frac{x}{|x|^2} i \frac{x}{|x|} \#(x); \quad (4.27)$$

donde $x := \sum_{k=1}^3 x_k i_k$. Substituyendo (4.26) en la igualdad (4.24) encontramos la solución fundamental del operador $D_{i\mu}$:

$$K_{i\mu}(x) = i \operatorname{grad} \#(x) i \#(x) = i \mu + \frac{x}{|x|^2} i \frac{x}{|x|} \#(x). \quad (4.28)$$

4.3 Condición de radiación

Consideremos la ecuación de Helmholtz

$$(\Delta + \mu^2)u(x) = \pm(x); \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (4.29)$$

que define matemáticamente la solución fundamental del operador de Helmholtz. Debido a que (4.29) describe una onda monocromática producida por una fuente situada en el origen, es necesario que $u(x)$ decrezca en el infinito para que tenga un sentido físico. Suponiendo que $\operatorname{Im} \mu > 0$ no es difícil ver (aplicando la transformada de Fourier a (4.29) que la única solución de (4.29) que satisface este requerimiento es la función generalizada $u = \#$ definida por (4.26). La situación cambia cuando $\operatorname{Im} \mu = 0$. En este caso hay dos soluciones de (4.29) que decrecen en el infinito

$$u^+(x) := i \frac{e^{i\mu|x|}}{4\pi|x|} \quad \text{y} \quad u^-(x) := i \frac{e^{-i\mu|x|}}{4\pi|x|};$$

Sin embargo, la unicidad de la solución fundamental es crucial para asegurar que la unicidad de las representaciones integrales y de las soluciones de problemas con valores de frontera sean físicamente significativas.

Para obtener una solución única de (4.29) en el caso cuando $\text{Im } \mu = 0$ se impone la condición de radiación en el infinito. Para la ecuación de Helmholtz, ésta fue propuesta por Sommerfeld y tiene la siguiente forma, se requiere que u satisfaga la igualdad asintótica

$$\frac{\partial u(x)}{\partial |x|} - i\mu u(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right); \text{ cuando } |x| \rightarrow \infty; \quad (4.30)$$

Se puede verificar que esta condición es cumplida por u^+ pero no por u^- :

En el caso del operador D_μ se tiene una situación similar. Cuando $\text{Im } \mu = 0$ la ecuación

$$D_\mu K(x) = \pm(x); \quad x \in \mathbb{R}^3$$

admite dos soluciones (de acuerdo con (4.27)) obtenidas mediante la aplicación del operador $\pm D_\mu$ a las soluciones fundamentales del operador de Helmholtz u^+ y u^- respectivamente

$$K^\pm(x) = \mu \left(\frac{x}{|x|^2} \pm i\mu \frac{x}{|x|} \right) \psi u^\pm(x);$$

Para omitir una de esas posibilidades se impone la siguiente condición de radiación

$$\mu \left(\frac{x}{|x|^2} \pm i\mu \frac{x}{|x|} \right) \psi K(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right); \text{ cuando } |x| \rightarrow \infty; \quad (4.31)$$

Veamos qué sucede con la función K^+ . Consideremos

$$\begin{aligned} & i\mu \left(\frac{x}{|x|^2} + i\mu \frac{x}{|x|} \right) \psi \left(\mu \left(\frac{x}{|x|^2} + i\mu \frac{x}{|x|} \right) \psi \frac{e^{i\mu|x|}}{4|x|} \right) = \\ & = i\mu \left(\frac{x}{|x|} \frac{1 + i\mu|x|}{|x|} \right) \psi \left(\mu \left(\frac{x}{|x|} \frac{1 + i\mu|x|}{|x|} \right) \psi \frac{e^{i\mu|x|}}{4|x|} \right) = \\ & = i\mu^2 + \frac{(1 + i\mu|x|)^2}{|x|^2} \psi \frac{e^{i\mu|x|}}{4|x|} = i\frac{1}{|x|^2} + \frac{2i\mu}{|x|} \psi \frac{e^{i\mu|x|}}{4|x|}; \end{aligned}$$

La función decrece en el infinito como $O(1=|x|^2)$ y de esta forma (4.31) se cumple con K^+ : El mismo procedimiento muestra que K^i no satisface (4.31).

Las notaciones $o(g)$ y $O(g)$ se usan para describir el comportamiento de una función deseada $f(x)$ con respecto a una función conocida $g(x)$ cuando $x \rightarrow \infty$. Cuando $f(x) = o(g(x))$, decimos que f es de orden menor que g , decir f decrece más rápido que g cuando $x \rightarrow \infty$, y se denota como $f(x) = o(g(x))$: Y cuando $|f(x) = g(x)|$ es acotado, entonces decimos que f es de orden no mayor al de g , esto es, f decrece a la misma velocidad que g cuando $x \rightarrow \infty$, y se escribe como $f(x) = O(g(x))$.

4.4 Principio de absorción límite

Otra posibilidad para tratar la unicidad de la solución fundamental de la ecuación (4.29) asegurando que es físicamente significativa, es la relacionada con el principio de absorción límite. Este principio consiste en suponer que existe una pequeña absorción en el medio, caracterizada por un parámetro pequeño ϵ .

Aplicando este principio a la ecuación (4.25) para el caso $(D + \epsilon)K_\epsilon = \pm$, ésta tiene la forma

$$(D + \epsilon + i^2)U = \pm \quad (4.32)$$

donde U es la solución fundamental para esta ecuación y además es única.

Demostración. Supongamos que U_1 y U_2 son soluciones fundamentales de la ecuación (4.32) en el espacio de las funciones de lento crecimiento.

Para que la solución U sea única en el espacio de las funciones de lento crecimiento, es necesario y suficiente que la correspondiente ecuación homogénea tenga solamente una solución cero en dicho espacio. Si aplicamos la transformada de Fourier a la

ecuación homogénea

$$(D + \alpha + i^2)U = 0$$

tenemos

$$F[(D + \alpha + i^2)U] = (i \lambda + \alpha + i^2)F[U] = 0$$

La parte vectorial de $i \lambda + \alpha + i^2$ al cuadrado no es igual a la parte escalar al cuadrado, esto es

$$\lambda^2 \notin (\alpha + i^2)^2$$

por lo tanto no es un divisor de cero y su inverso existe

$$i \lambda + \alpha + i^2 \in \mathbb{C}$$

Como la transformada de Fourier mapea de uno a uno, entonces $F[U] = 0$ puede tener solo una solución, por lo tanto la solución $U = 0$, es la única solución.

Si aplicamos la transformada de Fourier a las ecuaciones $(D + \alpha + i^2)U_1 = \pm$ y $(D + \alpha + i^2)U_2 = \pm$; obtenemos

$$(i \lambda + \alpha + i^2)F[U_1] = \pm$$

$$(i \lambda + \alpha + i^2)F[U_2] = \pm$$

y la linealidad de la transformada y su dominio implica que

$$(i \lambda + \alpha + i^2)F[U_1 - U_2] = 0$$

y como el inverso de $i \lambda + \alpha + i^2$ existe

$$F[U_1 - U_2] = 0$$

por lo tanto

$$U_1 \text{ y } U_2 = 0$$

con lo que queda demostrada la unicidad de la solución. ■

Sin embargo nos interesa aplicar el principio de absorción límite para la ecuación (4.32) pero no solo para \pm ; sino para cualquier función. Entonces para la siguiente ecuación

$$(D + a)f = g \quad (4.33)$$

la solución f existe en S^0 para cualquier función generalizada g y puede ser representada como

$$f = K_{\otimes} \ast g \quad (4.34)$$

aplicando el principio de absorción límite a la ecuación (4.33) tenemos

$$(D + \otimes + i^2)f_2 = g \quad (4.35)$$

cuya solución tiene la siguiente forma

$$f_2 = K_{\otimes+i^2} \ast g: \quad (4.36)$$

Esta convolución puede escribirse como

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \int_{\mathbb{Z}} K_{\otimes+i^2}(x \text{ y } y) \ast g(y) dy \\ &= i \frac{1}{4!} \int_{\mathbb{Z}} (\otimes + i^2 + \frac{x \text{ y}}{jx \text{ y} j^2} \\ &\quad i (i \otimes i^2) \frac{x \text{ y}}{jx \text{ y} j} \frac{e^{i(\otimes+i^2)jx \text{ y} j}}{jx \text{ y} j} \ast g(y) dy: \end{aligned} \quad (4.37)$$

Aplicando el límite a (4.37) cuando $\epsilon \rightarrow 0$, obtenemos la solución de (4.33). Por lo tanto la solución de la ecuación (4.33) es el límite de la solución de la ecuación (4.35) cuando se considera la absorción ϵ , cuando $\epsilon \rightarrow 0$

$$(\mathbf{D} + \epsilon + i^2) \mathbf{f}_2 = \mathbf{g};$$

Además es única y cumple con las condiciones de radiación.

4.5 Ecuaciones de Maxwell

Toda la enorme diversidad de fenómenos electromagnéticos se reduce a las cuatro ecuaciones de Maxwell, las cuales son axiomas de la teoría electromagnética:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}; \quad (4.38)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (4.39)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho; \quad (4.40)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0; \quad (4.41)$$

donde \mathbf{E} es la intensidad del campo eléctrico en Volt / m, \mathbf{H} es la intensidad del campo magnético en Amper / m, \mathbf{D} es el vector de inducción eléctrica en Coulomb / m², \mathbf{B} es el vector de inducción magnética en Tesla = Volt s / m², ρ es la densidad de carga volumétrica en Coulomb / m³ y \mathbf{j} es la densidad de corriente en Amper / m²:

Las ecuaciones de Maxwell son consideradas también junto con las llamadas ecuaciones materiales, las cuales describen las relaciones entre los vectores de inducción y los vectores de campo. Podemos decir que tienen la siguiente forma

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E \quad (4.42)$$

y

$$B = \mu_0 \mu_r H \quad (4.43)$$

donde ϵ_0 es la permitividad del espacio libre medida en Farad / m y μ_0 es la permeabilidad del espacio libre medida en Henry / m; las cantidades adimensionales ϵ_r y μ_r son llamadas permitividad y permeabilidad respectivamente. Los coeficientes $\epsilon := \epsilon_0 \epsilon_r$ y $\mu := \mu_0 \mu_r$ son respectivamente la permitividad y la permeabilidad absolutas.

4.5.1 Ecuaciones de Maxwell armónicas en el tiempo

Usando la transformada de Fourier cualquier campo electromagnético puede ser representado como una superposición infinita de campos armónicos. Un campo electromagnético armónico en el tiempo tiene la siguiente forma

$$E(x; t) = \text{Re}(\underline{E}(x)e^{i\omega t}) \quad (4.44)$$

y

$$H(x; t) = \text{Re}(\underline{H}(x)e^{i\omega t}) \quad (4.45)$$

donde los vectores \underline{E} y \underline{H} dependen solamente de las variables espaciales $x = (x_1; x_2; x_3)$ y toda la dependencia del tiempo se expresa en el factor $e^{i\omega t}$. \underline{E} y \underline{H} son vectores complejos y son llamados amplitudes complejas del campo electromagnético; ω es la frecuencia de las oscilaciones.

Substituyendo (4.44) y (4.45) en las ecuaciones de Maxwell (4.38)-(4.41) obtenemos las ecuaciones para las amplitudes complejas \underline{E} y \underline{H} (las cantidades $\frac{1}{2}$ y

\mathbf{j} que caracterizan a las fuentes se asumen, también como armónicas en el tiempo:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}; t) = \text{Re}(\mathbf{u}(\mathbf{x})e^{i\omega t}), \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}; t) = \text{Re}(\mathbf{j}(\mathbf{x})e^{i\omega t}):$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = i\omega \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{j}; \quad (4.46)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{H}; \quad (4.47)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad (4.48)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0; \quad (4.49)$$

Aplicando la divergencia a (4.46) y usando (4.48) obtenemos una relación entre \mathbf{u} y \mathbf{j} :

$$\text{div } \mathbf{j} - i\omega \rho = 0; \quad (4.50)$$

El medio se supone homogéneo y comúnmente ϵ_0 y μ_0 se consideran cantidades complejas.

Consideremos ahora las siguientes notaciones

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D}; \quad (4.51)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{H}; \quad (4.52)$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{j}; \quad (4.53)$$

aplicando el rotacional a (4.52) tenemos

$$\begin{aligned}
\text{rot } H &= \frac{1}{\rho_{\pi}} \text{rot } H = \frac{1}{\rho_{\pi}} \left(i \nabla \cdot E + j \nabla \cdot H \right) \\
&= i \nabla \cdot \frac{1}{\rho_{\pi}} E + \frac{1}{\rho_{\pi}} j \\
&= i \nabla \cdot \rho_{\pi} E + j
\end{aligned} \tag{4.54}$$

y haciendo lo mismo con (4.51)

$$\text{rot } E = \frac{1}{\rho_{\pi}} \nabla \times E = i \nabla \cdot H = i \nabla \cdot H \tag{4.55}$$

4.5.2 Reformulación cuaterniónica de las ecuaciones de Maxwell

Denotemos $\mathbb{R} := \sqrt{\rho_{\pi}}$, cuya raíz cuadrada se escoge de tal forma que $\text{Im } \mathbb{R} = 0$. Entonces podemos escribir las ecuaciones de Maxwell normalizadas de la siguiente forma

$$\text{rot } H = i \mathbb{R} E + j \tag{4.56}$$

$$\text{rot } E = i \mathbb{R} H \tag{4.57}$$

$$\text{div } E = \frac{1}{\rho_{\pi}} \tag{4.58}$$

$$\text{div } H = 0 \tag{4.59}$$

Las ecuaciones (4.56)-(4.59) se pueden reescribir como dos ecuaciones cuaterniónicas empleando (4.13):

$$DE = i^{\otimes} H_i \frac{1}{2} \rho_{\tau}; \quad (4.60)$$

$$DH = i^{\otimes} E + j; \quad (4.61)$$

Introduzcamos las siguientes funciones bicuaterniónicas cuya parte escalar es cero

$$l := i^{\otimes} E + i^{\otimes} H = i^{\otimes} \rho_{\tau E} + i^{\otimes} \rho_{\pi H} \quad (4.62)$$

y

$$l_{\bar{A}} := i^{\otimes} E + i^{\otimes} H = i^{\otimes} \rho_{\tau E} + i^{\otimes} \rho_{\pi H}; \quad (4.63)$$

Aplicando (4.13) a l obtenemos:

$$\begin{aligned} D l &= i^{\otimes} \rho_{\tau} DE + i^{\otimes} \rho_{\pi} DH = i^{\otimes} \rho_{\pi} H + i^{\otimes} \frac{1}{2} i^{\otimes} \rho_{\tau E} + i^{\otimes} \rho_{\pi} j \\ &= i^{\otimes} l + i^{\otimes} \frac{1}{2} + i^{\otimes} j; \end{aligned}$$

Por lo tanto l satisface la ecuación

$$(D_i - i^{\otimes}) l = \text{div } l_j + i^{\otimes} j; \quad (4.64)$$

Análogamente $l_{\bar{A}}$ satisface la ecuación

$$(\mathbf{D} + \mathbb{R}) \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{j} \operatorname{div} \mathbf{l}_j + \mathbb{R} \mathbf{l}_j \quad (4.65)$$

Estas dos últimas ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones de Maxwell (4.56)-(4.59).

Para las ecuaciones de Maxwell dependientes del tiempo en el vacío

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t};$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t};$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0;$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

es posible encontrar un par de soluciones duales \mathbf{E}^0 y \mathbf{H}^0 cuya relación con los campos originales \mathbf{E} y \mathbf{H} es la siguiente:

$$\mathbf{H}^0 + i\mathbf{E}^0 = e^{i\mu}(\mathbf{H} + i\mathbf{E})$$

donde μ es un ángulo de rotación, de tal manera que los campos duales \mathbf{E}^0 y \mathbf{H}^0 tienen la siguiente forma

$$\mathbf{E}^0 = \mathbf{H} \cos \mu + \mathbf{E} \operatorname{sen} \mu$$

y

$$\mathbf{H}^0 = \mathbf{H} \operatorname{sen} \mu - \mathbf{E} \cos \mu:$$

Esta operación no representa una rotación ordinaria en el espacio de tres dimensiones, como en el caso de una onda polarizada, sino que significa que cada componente del tensor de energía permanece invariable. Esto es, la energía del campo electromagnético se conserva. A esta rotación se le llama rotación de dualidades [17] y [19].

4.6 Condiciones de radiación de Silver-Müller

Así como para la ecuación de Helmholtz existe la condición de radiación propuesta por Sommerfeld para garantizar la unicidad de la solución y que ésta decazca en el infinito, para caracterizar el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones de Maxwell en el infinito se imponen las llamadas condiciones de radiación de Silver-Müller

$$\mathbf{E} \in \frac{x}{jx} + W\mathbf{H} = o\left(\frac{1}{jx}\right); \quad |x| \rightarrow \infty; \quad (4.66)$$

y

$$\mathbf{H} \in \frac{x}{jx} - W\mathbf{E} = o\left(\frac{1}{jx}\right); \quad |x| \rightarrow \infty; \quad (4.67)$$

donde W es la impedancia intrínseca de onda del medio definida como $W = \sqrt{\mu/\epsilon}$ y está dada en ohms. En [3] se muestra que si el campo \mathbf{E}, \mathbf{H} satisface (4.66) entonces la otra forma de la condición de radiación de Silver-Müller también es válida.

Consideremos ahora la condición de radiación [9]

$$\left(1 + \frac{ix}{jx}\right) f(x) = o\left(\frac{1}{jx}\right)$$

aplicada a \mathbf{E} y a \mathbf{H} . Tenemos

$$\left(1 + \frac{ix}{jx}\right) \mathbf{E}(x) = o\left(\frac{1}{jx}\right); \quad |x| \rightarrow \infty;$$

y

$$\left(1 + \frac{ix}{jx}\right) \mathbf{H}(x) = o\left(\frac{1}{jx}\right); \quad |x| \rightarrow \infty;$$

De (4.62) y (4.63) podemos construir las siguientes relaciones para \mathbf{E} y \mathbf{H}

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2i} \left(\mathbf{H} - \mathbf{E} \right)$$

y

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2i} \left(\mathbf{E} + \mathbf{H} \right)$$

y obtener

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= i \frac{1}{2i!} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{A} + \frac{1}{|\mathbf{x}|} \mathbf{A} + o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) = i \frac{1}{2i!} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{A} + \frac{1}{|\mathbf{x}|} \mathbf{A} + o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \\ &= i \frac{1}{2i!} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{A} + \frac{1}{|\mathbf{x}|} \mathbf{A} + o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right); \end{aligned}$$

de donde obtenemos (4.67). Haciendo lo mismo para \mathbf{H} obtenemos (4.66):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{2i!} \frac{i\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{A} + \frac{1}{|\mathbf{x}|} \mathbf{A} + o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) = \frac{1}{2i!} \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} \mathbf{A} + \frac{1}{|\mathbf{x}|} \mathbf{A} + o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \\ &= \frac{1}{W} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{E} + \frac{1}{|\mathbf{x}|} \mathbf{A} + o\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right); \end{aligned}$$

De lo anterior podemos observar que si el campo \mathbf{E}, \mathbf{H} satisface las condiciones de radiación de Silver-Müller, también satisface las condición de radiación de Sommerfeld. Para determinar el comportamiento en el infinito de las soluciones de las ecuaciones de Maxwell es suficiente con imponer una de las condiciones (4.66)-(4.67).

4.7 Principio de absorción límite para las ecuaciones de Maxwell

Consideremos la absorción 2 para las ecuaciones de Maxwell (4.56)-(4.59)

$$\text{rot } \mathbf{H}_2 = i(\mathbb{R} + i^2)\mathbf{E}_2 + \mathbf{j} \quad (4.68)$$

$$\text{rot } \mathbf{E}_2 = i(\mathbb{R} + i^2)\mathbf{H}_2 \quad (4.69)$$

cuya equivalencia en forma cuaterniónica utilizando ahora las siguientes funciones

bicuaterniónicas

$$\mathbf{F} = \mathbf{j} E + i\mathbf{H} \quad (4.70)$$

y

$$\mathbf{A} = E + i\mathbf{H} \quad (4.71)$$

es la siguiente

$$(\mathbf{D} + (\epsilon + i^2)) \mathbf{F} = \mathbf{j} + \text{div } \mathbf{j} \quad (4.72)$$

$$(\mathbf{D} + (\epsilon + i^2)) \mathbf{A} = \mathbf{j} + \text{div } \mathbf{j} : \quad (4.73)$$

La solución de las ecuaciones (4.72) y (4.73) se puede expresar de la siguiente forma

$$\mathbf{F} = K_{\epsilon} (\mathbf{j} + \text{div } \mathbf{j}) \quad (4.74)$$

$$\mathbf{A} = K_{\epsilon} (\mathbf{j} + \text{div } \mathbf{j}) : \quad (4.75)$$

Si consideramos la absorción α en las soluciones anteriores tenemos

$$\mathbf{F}_z = K_{\epsilon+i^2\alpha} (\mathbf{j} + \text{div } \mathbf{j}) \quad (4.76)$$

$$\mathbf{A}_z = K_{\epsilon+i^2\alpha} (\mathbf{j} + \text{div } \mathbf{j}) \quad (4.77)$$

Las convoluciones (4.76) y (4.77) se pueden escribir en forma integral como sigue:

$$\mathbf{F}_z = \int_Z [(K_{\epsilon+i^2\alpha}) (\mathbf{j} + \text{div } \mathbf{j})] dy \quad (4.78)$$

$$\mathbf{A}_z = \int_Z \epsilon_i K_{\epsilon+i^2\alpha} (\mathbf{j} + \text{div } \mathbf{j}) dy : \quad (4.79)$$

Las cantidades $\frac{1}{2}$ y j que caracterizan las fuentes se asumen como armónicas en el tiempo, por lo que solo dependen de la variable espacial $x = (x_1; x_2; x_3)$.

Entonces substituyendo (4.27) y (4.50) en (4.78) obtenemos

$$h_z(x) = \int_{\mu}^Z \mu \left[i^{\otimes} + i^2 + \frac{x_i y}{j x_i y j^2} i (i^{\otimes} i^2) \frac{x_i y}{j x_i y j} \#(x_i y) \right]_{ij(x_i y) + \frac{i!}{\pi} \frac{1}{2}(x_i y)} dy$$

y en forma análoga para (4.79) tenemos

$$\tilde{A}_z(x) = \int_{\mu}^Z \mu \left[i^{\otimes} + i^2 + \frac{x_i y}{j x_i y j^2} i (i^{\otimes} i^2) \frac{x_i y}{j x_i y j} \#(x_i y) \right]_{ij(x_i y) + \frac{i!}{\pi} \frac{1}{2}(x_i y)} dy$$

donde $\#(x)$ está definida por (4.26).

Nos interesa que la parte escalar de las integrales anteriores sea cero, puesto que esto nos permite aplicar el límite a h_z y a \tilde{A}_z cuando $\mu \rightarrow 0$ y obtener lo siguiente

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} h_z = \int_{\mu}^Z \mu \left[i^{\otimes} + i^2 + \frac{x_i y}{j x_i y j^2} i (i^{\otimes} i^2) \frac{x_i y}{j x_i y j} \#(x_i y) \right]_{ij(x_i y) + \frac{i!}{\pi} \frac{1}{2}(x_i y)} dy$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \tilde{A}_z = \int_{\mu}^Z \mu \left[i^{\otimes} + i^2 + \frac{x_i y}{j x_i y j^2} i (i^{\otimes} i^2) \frac{x_i y}{j x_i y j} \#(x_i y) \right]_{ij(x_i y) + \frac{i!}{\pi} \frac{1}{2}(x_i y)} dy :$$

Resolviendo los límites anteriores, cuando $\mu \rightarrow 0$, obtenemos las soluciones h y \tilde{A} de las ecuaciones (4.72) y (4.73) respectivamente.

A partir de las expresiones (4.70) y (4.71) se puede determinar una relación con los vectores E y H mediante las siguientes combinaciones

$$H = \frac{1}{2i} \mathbf{b}^3 + \mathbf{A}^{\prime} \quad (4.80)$$

$$E = i \frac{1}{2} \mathbf{b}^3 - i \mathbf{A}^{\prime} \quad (4.81)$$

Sin embargo nos interesa aplicar el principio de absorción límite al campo electromagnético. Ya establecimos anteriormente que el límite, cuando $\epsilon \rightarrow 0$, de \mathbf{b}_2 y \mathbf{A}_2 es igual a \mathbf{b} y a \mathbf{A} respectivamente. De esta forma, utilizando las relaciones (4.80) y (4.81) podemos decir lo siguiente

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_2 = \frac{1}{2i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{b}_2^3 + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{A}_2^{\prime} = \frac{1}{2i} \mathbf{b}^3 + \mathbf{A}^{\prime} = H$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E_2 = i \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{b}_2^3 - i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{A}_2^{\prime} = i \frac{1}{2} \mathbf{b}^3 - i \mathbf{A}^{\prime} = E$$

Proposición 10 (Principio de absorción límite para el campo electromagnético). Las soluciones E y H de las ecuaciones de Maxwell (4.56)-(4.59) son el límite de las soluciones E_2 y H_2 de las ecuaciones (4.68) y (4.69), cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Es decir, los vectores del campo electromagnético E y H cuando se considera la absorción, son los mismos vectores que cuando no se considera.

$$H = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_2$$

$$E = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} E_2$$

El principio de absorción límite permite obtener una solución de las ecuaciones de Maxwell, considerando su comportamiento en el infinito. Es posible demostrar que el principio de absorción límite es equivalente a las condiciones de radiación de Silver-Müller.

Para poder asegurar la unicidad de las soluciones de las ecuaciones de Maxwell es necesario determinar primero que la parte escalar de dichas soluciones es cero. Para ésto regresemos a las ecuaciones (4.64) y (4.65) que son equivalentes al sistema de ecuaciones (4.46)-(4.49). El proceso de diagonalización de las ecuaciones (4.64) y (4.65) puede ser escrito de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \text{rot} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = B_{\otimes}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & D + \otimes \end{pmatrix} B_{\otimes} \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix};$$

donde

$$B_{\otimes} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \text{rot} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_{\otimes}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para obtener las representaciones integrales para los vectores del campo electromagnético es necesario utilizar la fórmula de Borel-Pompeiu.

Teorema 11 (Fórmula cuaterniónica de Borel-Pompeiu).

Sea $f \in C^1(\Omega; H(\mathbb{C})) \setminus C(\bar{\Omega}; H(\mathbb{C}))$. Entonces

Teorema 12

$$K_{\otimes}[f](x) + T_{\otimes} D_a[f](x) = f(x); \quad \forall x \in \Omega;$$

Así como también de los siguientes operadores integrales

$$T_{\otimes}[f](x) := \int_{\Omega} K_{\otimes}(x, y) f(y) dy; \quad x \in \mathbb{R}^3; \quad (4.82)$$

$$K_{\otimes}[f](x) := \int_{\Gamma} K_{\otimes}(x, y) \mathbf{h}(y) f(y) d\Gamma_y; \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma; \quad (4.83)$$

Las ecuaciones (4.64) y (4.65) se pueden reescribir de la siguiente forma utilizando la fórmula de Borel-Pompeiu

$$\mathbf{t} = T_{i \otimes}(\operatorname{div} \mathbf{l}_j + \otimes \mathbf{l}_j) + K_{i \otimes} \mathbf{t}; \quad (4.84)$$

$$\mathbf{l}_{\tilde{A}} = T_{\otimes}(i \operatorname{div} \mathbf{l}_j + \otimes \mathbf{l}_j) + K_{\otimes} \mathbf{l}_{\tilde{A}}; \quad (4.85)$$

Reescribiendo (4.84) y (4.85) para el campo electromagnético obtenemos:

$$i \mathbf{l} \mathbf{E} + \otimes \mathbf{H} = T_{i \otimes}(\operatorname{div} \mathbf{l}_j + \otimes \mathbf{l}_j) + K_{i \otimes}(i \mathbf{l} \mathbf{E} + \otimes \mathbf{H});$$

$$i \mathbf{l} \mathbf{E} + \otimes \mathbf{H} = T_{\otimes}(i \operatorname{div} \mathbf{l}_j + \otimes \mathbf{l}_j) + K_{\otimes}(i \mathbf{l} \mathbf{E} + \otimes \mathbf{H});$$

o, de forma equivalente

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2i \mathbf{l}} (i \mathbf{l} (K_{\otimes} + K_{i \otimes}) \mathbf{E} + \otimes (K_{\otimes} i - K_{i \otimes}) \mathbf{H} \\ i (T_{\otimes} + T_{i \otimes}) \operatorname{div} \mathbf{l}_j + \otimes (T_{\otimes} i - T_{i \otimes}) \mathbf{l}_j); \quad (4.86)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2 \otimes} (\otimes (K_{\otimes} + K_{i \otimes}) \mathbf{H} + i \mathbf{l} (K_{\otimes} i - K_{i \otimes}) \mathbf{E} \\ i (T_{\otimes} i - T_{i \otimes}) \operatorname{div} \mathbf{l}_j + \otimes (T_{\otimes} i - T_{i \otimes}) \mathbf{l}_j); \quad (4.87)$$

Para comparar las dos últimas igualdades con algunas fórmulas conocidas de la teoría electromagnética, (4.86) y (4.87) deben ser reescritas en términos vectoriales. Recordemos que

$$\begin{aligned}
K_{S^{\otimes}} \mathbb{I} f(x) &= \int_{\Gamma} f(S^{\otimes} \#(x_i, y)) \mathbb{D}_{\mathbb{H}} \mathbb{I} f(y); \mathbb{I} f(y) \in [\text{grad}_x \#(x_i, y) \in \mathbb{H}(y)]; \mathbb{I} f(y) \in E \\
&\quad \cdot \mathbb{I} \#(x_i, y) \mathbb{H} \mathbb{I} f(y) \in \mathbb{I} f(y) \mathbb{I} \mathbb{H} \text{grad}_x \#(x_i, y); \mathbb{I} f(y) \mathbb{I} \mathbb{H} \\
&\quad + \mathbb{H} [\text{grad}_x \#(x_i, y) \in \mathbb{H}(y)] \in \mathbb{I} f(y) \mathbb{I} \text{gd}\Gamma_y;
\end{aligned}$$

De esta forma explícita de la integral cuaterniónica obtenemos las siguientes combinaciones necesarias

$$\begin{aligned}
(K_{\otimes} + K_{\mathbb{I} \otimes}) \mathbb{I} f(x) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} f_{\mathbb{I}} \mathbb{D}_{\mathbb{H}} \mathbb{I} f(y) \in [\text{grad}_x \#(x_i, y) \in \mathbb{H}(y)]; \mathbb{I} f(y) \in E \\
&\quad \mathbb{I} \mathbb{H} \text{grad}_x \#(x_i, y); \mathbb{I} f(y) \mathbb{I} \mathbb{H} \\
&\quad + \mathbb{H} [\text{grad}_x \#(x_i, y) \in \mathbb{H}(y)] \in \mathbb{I} f(y) \mathbb{I} \text{gd}\Gamma_y;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(K_{\otimes} \mathbb{I} K_{\mathbb{I} \otimes}) \mathbb{I} f(x) &= \frac{1}{2^{\otimes}} \int_{\Gamma} f \#(x_i, y) \mathbb{D}_{\mathbb{H}} \mathbb{I} f(y) \in E \\
&\quad \mathbb{I} \#(x_i, y) \mathbb{H} \mathbb{I} f(y) \in \mathbb{I} f(y) \mathbb{I} \text{gd}\Gamma_y;
\end{aligned}$$

Razonando de forma similar obtenemos las representaciones explícitas para las combinaciones necesarias de los operadores T_{\otimes} y $T_{\mathbb{I} \otimes}$:

$$\begin{aligned}
(T_{\otimes} + T_{i \otimes})f_0(x) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \text{grad}_x \#(x_i y) f_0(y) dy; \\
(T_{\otimes i} + T_{i \otimes})f_0(x) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \#(x_i y) f_0(y) dy; \\
(T_{\otimes} + T_{i \otimes})\underline{l}f(x) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} f \text{grad}_x \#(x_i y); \underline{l}f(y) i_i [\text{grad}_x \#(x_i y) \in \underline{l}f] g dy; \\
(T_{\otimes i} + T_{i \otimes})\underline{l}f(x) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \#(x_i y) \underline{l}f(y) dy;
\end{aligned}$$

Usando todas estas combinaciones obtenemos las siguientes representaciones integrales para el campo electromagnético

$$\begin{aligned}
\underline{l}E(x) &= \int_{\Gamma} f_i h[\text{grad}_x \#(x_i y) \in \underline{l}h(y)]; \underline{l}E(y) i \\
&\quad + \int_{\Gamma} h \text{grad}_x \#(x_i y); \underline{l}h(y) i \underline{l}E(y) + [[\text{grad}_x \#(x_i y) \in \underline{l}h(y)] \in \underline{l}E(y)] g d\Gamma_y \\
&\quad + i!^{-1} \int_{\Gamma} f_i \#(x_i y) h \underline{l}h(y); \underline{l}H(y) i + \#(x_i y) [\underline{l}h(y) \in \underline{l}H(y)] g d\Gamma_y \\
&\quad + \int_{\Omega} f \frac{1}{i!^n} \text{grad}_x \#(x_i y) \text{div} \underline{l}j(y) i i!^{-1} \#(x_i y) \underline{l}j(y) g dy;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(x) &= \int_{\Gamma} f_i h[\text{grad}_x \#(x_i, y) \in h(y)]; H(y) \\
&+ \int_{\Gamma} h \text{grad}_x \#(x_i, y); h(y) H(y) + [[\text{grad}_x \#(x_i, y) \in h(y)] \in H(y)] \text{gd}\Gamma_y \\
&+ \int_{\Gamma} i! \int_{\Gamma} f_i \#(x_i, y) h h(y); E(y) + \#(x_i, y) [h(y) \in E(y)] \text{gd}\Gamma_y \\
&+ \int_{\Omega} f \#(x_i, y) \text{div } l_j(y) + h \text{grad}_x \#(x_i, y); l_j(y) + [\text{grad}_x \#(x_i, y) \in l_j] \text{gd}y;
\end{aligned}$$

Separando las partes escalar y vectorial en las últimas dos igualdades obtenemos las siguientes cuatro ecuaciones.

$$\int_{\Gamma} f h[\text{grad}_x \#(x_i, y) \in h(y)]; E(y) + \int_{\Gamma} i! \int_{\Gamma} \#(x_i, y) h h(y); H(y) \text{gd}\Gamma_y = 0; \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} f h[\text{grad}_x \#(x_i, y) \in h(y)]; H(y) + \int_{\Gamma} i! \int_{\Gamma} \#(x_i, y) h h(y); E(y) \text{gd}\Gamma_y \\
& = \int_{\Omega} f \#(x_i, y) \text{div } l_j(y) + \int_{\Omega} h \text{grad}_x \#(x_i, y); l_j(y) \text{gd}y;
\end{aligned} \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned}
E(x) &= \int_{\Gamma} f_i h \text{grad}_x \#(x_i, y); h(y) E(y) \\
&+ [[\text{grad}_x \#(x_i, y) \in h(y)] \in E(y)] + \int_{\Gamma} i! \int_{\Gamma} \#(x_i, y) [h(y) \in H(y)] \text{gd}\Gamma_y \\
&+ \int_{\Omega} f \frac{1}{i!} \text{grad}_x \#(x_i, y) \text{div } l_j(y) + \int_{\Omega} i! \int_{\Omega} \#(x_i, y) l_j(y) \text{gd}y;
\end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{x}) = & \int_{\Gamma} \mathbf{f}_i \mathbf{n} \text{grad}_{\mathbf{x}} \#(\mathbf{x}_i \mathbf{y}); \mathbf{h}(\mathbf{y}) \mathbf{H}(\mathbf{y}) + [[\text{grad}_{\mathbf{x}} \#(\mathbf{x}_i \mathbf{y}) \mathbf{E} \mathbf{h}(\mathbf{y})] \mathbf{E} \mathbf{H}(\mathbf{y})] \\
& + i! \mathbf{n} \#(\mathbf{x}_i \mathbf{y}) [\mathbf{h}(\mathbf{y}) \mathbf{E} \mathbf{E}(\mathbf{y})] \text{gd} \Gamma_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega} [\text{grad}_{\mathbf{x}} \#(\mathbf{x}_i \mathbf{y}) \mathbf{E} \mathbf{J}(\mathbf{y})] \text{d}\mathbf{y};
\end{aligned}
\tag{4.91}$$

Las últimas dos igualdades representan uno de los hechos teóricos centrales de la electrodinámica moderna, las fórmulas de Stratton-Chu, las cuales tienen muchas aplicaciones útiles en diferentes tipos de problemas con valores de frontera para las ecuaciones de Maxwell. Las igualdades (4.88) y (4.89) aseguran que cualquier vector \mathbf{E} y \mathbf{H} que satisfaga tales condiciones, será solución de las ecuaciones (4.46)-(4.49). Estas condiciones pueden ser obtenidas precisamente debido a que la multiplicación de dos cuaterniones puramente vectoriales es un cuaternión completo cuya parte escalar es distinta de cero.

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

El uso del análisis cuaterniónico en el estudio de los problemas de electrodinámica ha sido una herramienta muy poderosa. Sobre todo cuando los problemas a considerar no pueden ser reducidos a dos dimensiones, lo cual es una de las ventajas del análisis cuaterniónico, ya que por un lado, nos permite obviar las dificultades que implica el análisis vectorial, y por otro, es posible obtener representaciones análogas a las del análisis complejo y con el mismo alcance, con lo que es factible conseguir resultados en forma más clara o poder reescribir el problema considerado de un modo más sencillo para llevarlo a la forma de problemas conocidos donde ya se tienen las soluciones.

Dependiendo de la naturaleza del fenómeno a estudiar es posible utilizar un conjunto diferente de elementos del análisis hipercomplejo como los octoniones, siempre y cuando el álgebra de este conjunto satisfaga las necesidades requeridas para el análisis de dicho problema. Por ejemplo la no conmutatividad de la multiplicación está presente en muchos casos de la física matemática, hecho que para el caso del campo electromagnético es representado mediante el álgebra de cuaterniones.

Otra ventaja del análisis hipercomplejo es la factibilidad de poder establecer un vínculo entre las diferentes áreas de la ciencia en cuyo estudio sea posible la aplicación de dicho análisis, como por ejemplo la relación que existe entre el sistema de ecuaciones

de Maxwell y la ecuación de Dirac.

Para la resolución de las ecuaciones de Maxwell existen diferentes procedimientos, sin embargo la aplicación del análisis cuaterniónico simplifica el problema ya que es posible reformular dichas ecuaciones en dos ecuaciones cuaterniónicas cuya solución es más simple y permite establecer una relación sencilla con los vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} .

El estudio de problemas con valores de frontera es importante dentro de la ingeniería en Telecomunicaciones debido a que dentro de éstos se encuentra una amplia gama de aplicaciones, es por eso que es importante establecer restricciones que permitan garantizar la existencia y unicidad de las soluciones. La aplicación del principio de absorción límite es una forma de condicionar el comportamiento de las soluciones en el infinito, y para el caso de las ecuaciones de Maxwell, la reformulación cuaterniónica de éstas permite ver de una manera más sencilla que la solución de las ecuaciones de Maxwell sin considerar la absorción es el límite de la solución considerando la absorción cuando ésta tiende a cero. Se puede observar en las representaciones integrales de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} que es mucho más complejo la aplicación del principio de absorción límite en esta forma.

Y finalmente, se recomienda extender el resultado obtenido a las ecuaciones de Maxwell para medios no homogéneos.

Bibliografía

- [1] Castillo, P.,R., Aplicación del análisis cuaterniónico a los problemas de frontera para las ecuaciones de Maxwell en los dominios no acotados, Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional, México, D.F., 2001.
- [2] Colton, D., Kress, R., Inverse acoustic electromagnetic scattering theory, Berlin: Springer, 1992.
- [3] Colton, D., Kress, R., Integral equation methods in scattering theory, John Wiley & Sons, 1983.
- [4] Felsen, L., Marcuvitz, N., Radiation and scattering waves, IEEE Press, 1994.
- [5] Gelfand, I., Shilov, G.E., Generalized functions, v. 1, Academic Press, 1964.
- [6] Gürlebeck K., Sprössig, W., Quaternionic and Clifford calculus for physicist and engineers, John Wiley & Sons, 1997.
- [7] Imaeda, K., A new formulation of classical electrodynamics, Nuovo Cimento, 1976, v. 32 B, p. 138.
- [8] Kolmogorov, A. N., Fomin, S.V., Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional, Editorial Mir Moscú, 1975.
- [9] Kravchenko, V.V., Applied quaternionic analysis, Heldermann Verlag, 2003.

- [10] Kravchenko, V.V., Elementos del análisis moderno y teoría electromagnética, Serie técnica Matemáticas aplicadas, SCT, 1996.
- [11] Kravchenko, V.V., Quaternionic diagonalization of Maxwell's equations, Telecommunications and radio engineering, 2001, v. 56, No. 4 and 5.
- [12] Kravchenko, V.V., Castillo, P.,R., An analogue of the Sommerfeld radiation condition for the Dirac operator, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2002, v. 25, No. 16-18, 1383-1394.
- [13] Kravchenko, V.V., Shapiro, M.V., Integral representations for spatial models of mathematical physics, Addison Wesley Longman Ltd, 1996.
- [14] Kravchenko, V.V., Shapiro, M.V., Helmholtz Operator with a quaternionic wave number and associated function theory, Deformation of Mathematical Structures, II, Ed. by J. Lawrynowicz, Kluwer Academic Publishers, 1994, p. 101-128.
- [15] Kravchenko, V.V., Shapiro, M.V., Quaternionic time-harmonic Maxwell operator, Journal of physics A, 1995, v. 28, 5017-5031.
- [16] Kudriavstev, L. D., Curso de análisis matemático, Editorial Mir Moscú, 1983.
- [17] Landau, L.D., Lifshitz, E.M., The classical theory of fields, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1962.
- [18] Lanczos, C., The variational principles of mechanics, 4th ed., University of Toronto Press, 1970.
- [19] Misner, C.W., Wheeler, J.A., Classical physics as geometry, Annals of physics, vol. 2, 1957, p. 525.

[20] Simon, R., Whinney, J., Fields and waves in communication electronics, John Wiley & Sons, 1985.

[21] Vladimirov, V.S., Equations of mathematical physics, Marcel Dekker, Inc. 1971.