Instituto Politécnico Nacional

Centro de Investigación en Ciencia
Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN

Relación entre las concepciones del maestro y el aprendizaje de los alumnos en el caso de las desigualdades. Un estado del arte

Tesis que para obtener el grado de
Maestra en Ciencias
en Matemática Educativa

Presenta:
Mariangela Borello

Directores de tesis:

Dra. Rosa María Farfán Márquez

Dr. Javier Lezama Andalón

México D.F., marzo del 2007

SIP-14

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 23 del mes de enero del 2007 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Relación entre las concepciones del maestro y el aprendizaje de los alumnos en el caso de las desigualdades. Un estado del arte."

Presentada por la alumna:

Borello		Mariangela
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro:

B	0	5	1	5	7	3

aspirante al grado de:

Maestro en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dra. Rosa María Farfán Márquez

Director de tesis

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

CICATA - IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dra. Gisela Montiel Espinosa

Dra. Rocío Alejandra Muñoz Hernández

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 29 del mes de marzo del año 2007, el (la) que suscribe Mariangela Borello alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro B051573, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dra. Rosa María Farfán Márquez y cede los derechos del trabajo intitulado "Relación entre las concepciones del maestro y el aprendizaje de los alumnos en el caso de las desigualdades. Un estado del arte", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección mborello@gmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Mariangela Borello

Mariangela Borello

Índice

Glosario

Conceptos:

Desigualdad (o inecuación): Es la relación ente dos expresiones a través de los símbolos de mayor ($>$) – mayor igual ($\geq$), menor ($<$) – menor igual ($\leq$). Puede contener una o más incógnitas.

Ingeniería Didáctica: es una forma de trabajo en que el trabajo del investigador se ve en analogía con la actividad del ingeniero. Dicha actividad se se basa en conocimientos científicos y que acepta someterse a un control de naturaleza científica. También tiene que afrontar elementos complejos (no depurados por la ciencia y de los que la ciencia no puede o no quiere hacerse cargo) que se abordaran con todos los medios disponibles.

Reproducibilidad de Situaciones Didácticas: Se trata de un fenómeno didáctico para el cual las investigaciones se centraron en la repetición de situaciones didácticas, trabajadas con la metodología de la ingeniería didáctica.

Socioepistemología: (del latín *socialis* y el griego επιστήμη, *episteme*, "conocimiento" o "saber", y λόγος, *logos*, "razonamiento" o "discurso")es una rama de la epistemología que consiste en una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemológica del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados a los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza.

Teoría de Situaciones Didácticas: Teoría que propone el estudio de las condiciones en las que se constituyen los conocimientos matemáticos y en la que se considera que el control de esas condiciones permitirá reproducir y optimizar los procesos de adquisición escolar del conocimiento.

Siglas

ENP: Escuela Nacional Preparatoria

IPN: Instituto Politécnico Nacional

SEP: Secretaría de Educación Pública

CCH: Colegio de Ciencias y Humanidades

PREPATEC: Preparatoria del Tecnológico de Monterrey

UNAM: Universidad Nacional Autónoma de México

Cuadros, diagramas e imágenes

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación orientada a estudiar la relación entre las convicciones del maestro y el aprendizaje de los alumnos y hace hincapié en el tema de las desigualdades. La investigación –que se coloca bajo el marco teórico de la teoría de la reproducibilidad de situaciones didácticas, que concierne al contexto de la socioepistemología– pretende ofrecer, a través de sus resultados, herramientas de ayuda que permitan encontrar enfoques metodológicos y soportes didácticos para los maestros, a fin de apoyarlos en la toma de decisiones adecuadas a la complejidad de los problemas que se les presentan. A tal fin hemos efectuado una revisión bibliográfica acerca del papel del profesor en las dinámicas de aprendizaje, tomando en cuenta algunos trabajos que hacen referencia a las creencias y convicciones de los maestros universitarios y otros trabajos relacionados con el papel del maestro en el contexto de una situación didáctica. Sucesivamente hemos examinado varios elementos con relación a la enseñanza de las desigualdades. En lo particular: cumplimos un análisis de lo que nos pareció más interesante y significativo relativamente a la literatura acerca de la didáctica de las inecuaciones; analizamos los currícula de las principales instituciones educativas mexicanas; examinamos el enfoque con que se trata el tema de desigualdades en varios libros de texto de uso común en México; analizamos el currículo “en acción” tomando en cuenta los resultados de un cuestionario –que se les aplicó a varios maestros de México e Italia– y entrevistas informales con alumnos universitarios de primer semestre, a fin de investigar acerca de la realidad de nuestras aulas.

Abstract

This work is part of a research oriented to study the relationship between teacher's believes and students' learning, making emphasis in the argument of inequations. The research –placed into de theory of reproducibility of didactic situations, related with the context of socioepistemolgy– wants to offer, with its results, tools to find methodological approaches and didactic supports for teachers, to help them seeking the optimal decisions for the complexity of the problems they have. For this reason we realized a bibliographic overview about teacher's role into the learning relations, considering works related with university teachers' beliefs and convictions and works related with teacher's role in the context of didactical settings. Next we examined various elements referred to the teaching of inequations. Most of all: we realized an analysis of what we think is more interesting and important within the literature about the didactic of inequations; we analyzed the curricula of the most important mexican educative institutions; we examined the didactical approach of inequations in some books accustomed in Mexico; we analyzed the curriculum "in action", considering the results of a questionnaire –applied to various mexican and italian teachers– and some informal interviews with students studying the first term of college, in order to investigate the reality of our classes.

Introducción

A lo largo de los años que nos hemos dedicado a la docencia de las matemáticas, siempre nos hemos preguntado cuál es aquel factor que pone al estudiante en la postura para que aprenda. Es experiencia común de cualquier hombre darse cuenta de que el fenómeno del conocimiento acontece sólo en presencia de un interés previo, es decir, el conocimiento se da sólo si se mueve la libertad. ¿Cómo, entonces, un maestro puede despertar en sus alumnos el interés hacia las matemáticas? Sin duda, no existen mecanismos que garanticen el conocimiento, pero es posible individualizar unos elementos que puedan contribuir a una mejor comprensión de los factores que intervienen en el proceso de aprendizaje, y ayudar en el quehacer matemático.

La problemática a que se refiere el presente proyecto radica en *afrontar* desde un punto de vista científico cómo las convicciones del maestro constituyen un elemento que influye en las posibilidades de aprendizaje de los alumnos. Cuando hablamos de *convicciones* del maestro, hacemos referencia a aquel conjunto de prejuicios consolidados –por la pertenencia del sujeto a cierto contexto social y cultural– con la que un ser humano enfrenta la realidad y toma una postura hacia ella.

Usualmente la labor docente requiere, específicamente en matemáticas, del enfrentamiento con muchos aspectos, entre los cuales identificamos como prioritarios:

- ✓ El conocimiento epistemológico del tema matemático específico
- ✓ La colocación contextual en un currículo específico
- ✓ El contexto social de proveniencia de los alumnos y sus antecedentes matemáticos

- ✓ La postura y las aptitudes de los alumnos frente al tema particular y a las matemáticas en general
- ✓ Las restricciones dependientes de la estructura del currículo o de la institución escolar

Nuestra intención es comprobar cómo frente a estos y otros aspectos el profesor toma una postura que es consecuencia de su concepción hacia la realidad, en particular frente a las matemáticas.

La relevancia de este fenómeno con respecto a un proceso de reproducibilidad de situaciones didácticas se puede claramente ver en la tesis doctoral *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*, de J. Lezama (2003), de la cual proponemos un interesante pasaje que se encuentra en las *Conclusiones generales*: “El profesor juega un papel determinante en el proceso de reproducción de situaciones didácticas, ya que es el polo del sistema didáctico que requiere ser más activo y flexible, pues vive la situación didáctica, la discute, analiza y critica. Debe modificar su mirada sobre ella, pues tendrá que reformularla para sus estudiantes y posteriormente acompañarlos cuando éstos la trabajen. Tal actividad exige en el profesor habilidades que van más allá del dominio disciplinar. Además son tantos los aspectos que el profesor deberá cubrir que es muy fácil que en alguno de ellos falle. En estas múltiples actividades podemos observar cómo se ponen en acción las concepciones del profesor sobre su actividad como profesor, así como las concepciones que tiene de los alumnos, por las decisiones que toma para llevar a los estudiantes a la situación” (Lezama, 2003).

Como saber matemático de referencia tomaremos el estudio de las desigualdades, uno de los temas fundamentales en la parte de las matemáticas que comúnmente se llama *precálculo*. Su desarrollo puede llevarse a cabo en distintas formas, pero lo que hemos podido observar durante nuestros años de práctica docente (tanto en Italia como en México) es que el enfoque dominante siempre ha sido aquel que podemos definir como *mecanicista*, es decir, una manera de tratar el tema donde predomina el aspecto de técnicas de cálculo algebraico (que normalmente tienen un nivel de significación bajo para el alumno), en detrimento de un enfoque gráfico que puede posibilitar una comprensión significativa del tema, basada en el concepto de función, un elemento clave en cualquier curso de cálculo, ya sea básico o avanzado.

El fin último de nuestra investigación será desarrollar un análisis preliminar acerca de las convicciones del maestro sobre la enseñanza de las inecuaciones para, sucesivamente, profundizar nuestro trabajo a través de la predisposición y puesta en escena de una ingeniería didáctica a fin de crear un instrumento que ofrezca a los maestros enfoques metodológicos y soportes didácticos, para apoyarlos en la toma de decisiones adecuadas a la complejidad de los problemas que se les presentan.

Nuestro trabajo se coloca en el marco teórico de la *socioepistemología* –así como se desarrolla por el grupo de investigación de enseñanza superior del Cinvestav IPN– y del fenómeno didáctico que se denomina *reproducibilidad* (Artigue, 1984, 1986; Lezama 2003), en el contexto de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1983, 1986, 1997; Chevallard, 1995).

En el Capítulo 1 presentaremos los aspectos sobresalientes de aquellos enfoques que, dentro de la Matemática Educativa, constituyen nuestro marco teórico de referencia y demostraremos cómo dichas teorías representan para nosotros el mejor punto de vista para desarrollar nuestra investigación.

En el Capítulo 2 presentaremos nuestra revisión bibliográfica acerca del papel del profesor en las dinámicas de aprendizaje. En particular tomaremos en cuenta algunos trabajos que hacen referencia a las creencias y convicciones de los maestros universitarios –pues nuestra investigación considera un tema que abarca la enseñanza media superior y superior– y otros trabajos relacionados con el papel del maestro en el contexto de una situación didáctica.

El Capítulo 3 constituye un poco el “alma” de nuestro trabajo ya que en ello vamos a examinar varios elementos con relación a la enseñanza de las desigualdades. En lo particular: cumpliremos un análisis de lo que nos ha parecido más interesante y significativo relativamente a la literatura acerca de la didáctica de las inecuaciones; analizaremos los currícula de las principales instituciones educativas mexicanas; examinaremos el enfoque con que se trata el tema de desigualdades por varios libros de texto de uso común en México sea a nivel bachillerato, sea a nivel Superior para los cursos de precálculo o de matemáticas remediales; analizaremos el currículo "en acción" tomando en cuenta los resultados de un cuestionario –que se les aplicó a varios maestros de México e Italia– y entrevistas informales con alumnos universitarios de primer semestre, a fin de investigar acerca de la realidad de nuestras aulas; por último daremos una rápida explicación del sistema escolar italiano y de sus currícula a fin de aprovechar nuestra experiencia didáctica en ambos países y tener así un espectro más amplio de datos y elementos a considerar.

Por último, en el Capítulo 4 expondremos algunas consideraciones finales en las que se explicarán nuestras conclusiones, observaciones y las líneas guía de nuestro trabajo a futuro que prevé la construcción de una ingeniería didáctica que se apoya en el análisis preliminar –que consiste prioritariamente en nuestro trabajo actual– a fin de diseñar un instrumento didáctico que pueda constituir un punto de partida para un cambio de la práctica docente acerca del tema de las desigualdades.

1. Marco Teórico

2.1 Un enfoque socioepistemológico

El enfoque teórico de esta investigación se sitúa en la parte de la matemática educativa que se conoce como socioepistemología, la cual es desarrollada por el grupo de investigación de enseñanza superior del Cinvestav IPN.

En lo particular nos acercaremos a dicho enfoque a través de varios trabajos publicados por el Dr. Ricardo Cantoral y por la Dra. Rosa María Farfán (2002, 2003) a fin de colocar el acercamiento socioepistemológico en el ámbito del discurso de la matemática educativa.

La matemática educativa responde prioritariamente a la necesidad de implementar modificaciones educativas en el campo particular de las matemáticas con base en diseños mejor adaptados a las prácticas escolares y se ocupa del estudio sistemático de los efectos de tales procesos.

Dicho estudio se puede considerar relativamente reciente y, en lo especifico de México, cabe decir que tendrá apenas unas décadas.

En términos generales se puede afirmar que la matemática educativa es una disciplina del conocimiento cuyo origen se remonta a la segunda mitad del siglo veinte y que se ocupa del estudio de los fenómenos didácticos que se relacionan al saber matemático.

Los autores asumen como problemática central la evolución del estudio de los fenómenos didácticos, así como se van dando cuando los saberes matemáticos constituidos socialmente, en ámbitos no escolares, se introducen al sistema escolar. Este fenómeno produce inevitablemente una serie de modificaciones de dichos saberes que afectan directamente su estructura así como su funcionalidad, de tal manera que se ven afectadas también las relaciones que se establecen entre alumnos y maestros.

Cuando, como en nuestra investigación, se consideran saberes especializados, se puede observar cómo su proceso de incorporación plantea, tanto desde el punto de vista teórico como práctico, problemáticas importantes que necesitan para su estudio, de acercamientos metodológicos y teóricos adecuados.

Para comprender los mecanismos de la adaptación del saber matemático y del saber científico a las prácticas tanto de los docentes como de sus alumnos, resulta necesario llevar a cabo estudios cuyo enfoque requiere de una incesante interacción entre la elaboración teórica y la evidencia empírica; para ello resulta fundamental un trabajo de investigación sobre la formación de profesores y sobre las condiciones de la enseñanza en las aulas escolares y los laboratorios. Todo esto para aclarar las condiciones en las que acontece el aprendizaje de ideas complejas en una situación escolar, a fin de aprovechar dicho conocimiento para mejorar los procesos educativos.

En las últimas décadas ha crecido el interés de muchos matemáticos profesionales hacia los aspectos didácticos y educativos, así como la madurez de varias comunidades de investigación en el ámbito de las matemáticas educativas. Ambos fenómenos han propiciado que se desarrolle el estudio de los procesos del pensamiento avanzado relativos a temas matemáticos de la educación superior.

En este marco se atendieron varios aspectos, entre los que destacan: el papel que juegan las acciones del profesor en el aprendizaje de sus alumnos, o la modalidad con la que los diálogos afectan los procesos de desarrollo del pensamiento. Esto produjo la incorporación de estudios sobre el pensamiento del profesor a fin de conocer las formas en las que el docente conduce los procesos de negociación del significado con sus alumnos.

Otro aspecto importante ha sido la aproximación cognitiva de Freudenthal quién introduce un nuevo paradigma de investigación que modifica su objeto y su método de estudio a través de las siguientes preguntas: "¿Cómo aprenden las personas? ¿Cómo podemos aprender a observar procesos de aprendizaje?"

Una de las pretensiones de esta aproximación fue que estos estudios cognitivos, además de explicar cómo se aprenden las matemáticas, pudiesen contribuir en la articulación de los principios que plasman los futuros diseños curriculares.

Para ello, los autores subrayan cómo el desempeño de los estudiantes no puede reducirse a la dimensión cognitiva "pues las relaciones que ellos mantienen con los objetos matemáticos están condicionadas por las representaciones que se forjan más globalmente sobre lo que es la actividad matemática, de sus ideas de lo que es el aprendizaje de las matemáticas, de su posición con relación de las matemáticas y más globalmente incluso, de su status como alumno" (Cantoral y Farfán, 2003).

La vida de cada alumno en las instituciones (escuela, sistema educativo, clase, familia, ambiente social con todas las organizaciones humanas que lo constituyen) inevitablemente influencia sus procesos de pensamiento, cosa que nos introduce a una nueva forma de abordar el problema que considera la complejidad del sistema en el que viven los fenómenos didácticos y toma en cuenta distintos polos (el saber, quién aprende y quién enseña en determinado contexto), buscando sus relaciones mutuas a fin de ofrecer una explicación para los fenómenos didácticos que caracterizan el hecho educativo.

También se tiene que tomar en cuenta el hecho que, particularmente cuando se haga referencia a la enseñanza superior, "la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, de donde a su vez adquiere sentido y significación" (Cantoral y Farfán, 2003).

La línea de investigación que hace referencia al grupo de investigación del Área de Educación Superior del DME a la que pertenecen los autores, considera necesario "el dotar a la investigación de una aproximación sistémica y situada, que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza" (Cantoral y Farfán, 2003). A esta aproximación múltiple se le ha dado el nombre de *acercamiento socioepistemológico*.

Actualmente en este marco se desarrollan varios estudios:

- los curriculares, en donde se busca determinar cuáles deben ser los contenidos por enseñar,
- las actividades que acompañan el aprendizaje a través de las cuales se busca mejorar los métodos de enseñanza,
- la transmisión oral del conocimiento,
- los procesos cognitivos,
- la motivación y creación de actitudes positivas.
- los recursos que refuerzan el proceso de enseñanza (materiales educativos, calculadoras y computadoras, medios audiovisuales)
- la vida del conocimiento en la escuela, es decir la influencia que el sistema escolar ejerce en los aprendizajes,
- las matemáticas que se aprenden en y fuera de la escuela
- el papel de los medios de comunicación, los entornos familiares o gregarios con los grupos de estudiantes.
- el sistema escolar a fin de conocer el rumbo y sentido de las decisiones políticas o sociales que modifican al funcionamiento del sistema educativo.

Lo que acabamos de exponer nos indica de forma clara que el acercamiento socioepistemológico se caracteriza por considerar el fenómeno del aprendizaje bajo una visión global. Sin embargo se trata de un enfoque que quiere tomar en cuenta todos los elementos que de alguna manera se relacionan con el fenómeno del aprendizaje, considerando el conocimiento matemático que se quiere transmitir en un contexto lo más amplio posible.

Es por esta razón que hemos decidido llevar a cabo nuestra investigación cobijándonos en este marco. Sin embargo el maestro ha forjado sus concepciones en un determinado contexto que se caracteriza por una multiplicidad de elementos entre los cuales el ámbito social (sistema escolar, familia y otras agrupaciones) que contribuye en la formación de sus concepciones y en general de su postura frente de la realidad que lo rodea de la que hacen parte la escuela, los alumnos y los conocimientos que quiere transmitir.

2.2 Una mirada a la teoría de la reproducibilidad de situaciones didácticas

La Matemática Educativa consiste en una disciplina que va tomando en cuenta muchos problemas y factores relacionados: de hecho se trata de una disciplina eminentemente social y por esto se trabaja desde múltiples paradigmas y uno de estos es, como ya hemos visto, la socioepistemología.

En este enfoque vamos a considerar el fenómeno didáctico llamado reproducibilidad. Dicho fenómeno consiste en detectar aquellos factores que posibilitan el logro de los propósitos didácticos de una misma clase, cuando se repiten en diferentes escenarios.

“Las investigaciones sobre reproducibilidad no sólo tienen un carácter práctico, al hacer un análisis de los aspectos a considerar cuando se elaboran dispositivos didácticos para intervenir en un sistema didáctico determinado, sino también tienen un carácter de investigación básica, ya que han permitido conocer la relevancia de las estructuras de dichos dispositivos y muy especialmente nos introducen a modelar la actividad del profesor y, con ello, al reconocimiento de su labor fundamental para alcanzar los propósitos didácticos" (Lezama, 2005)

Resulta sumamente interesante tomar en cuenta el pasaje de Brousseau en que el autor se hace dos preguntas que nos ayudan a entrar en la problemática asociada al fenómeno de la reproducibilidad e identificar los elementos adecuados para la caracterización de dicho fenómeno.

"El hecho de reproducir situaciones de aprendizaje provoca una pregunta que es esencial para la didáctica: ¿qué es lo que realmente se reproduce? (…) Un profesor que reproduce la misma historia, la misma sucesión de actividades y las mismas declaraciones de su parte y de parte de sus alumnos, ¿ha reproducido el mismo hecho didáctico que ha producido los mismos efectos desde el punto de vista del sentido? (…) Saber lo que se reproduce en una situación de enseñanza es justamente el objetivo de la didáctica; no es un resultado de la observación, sino el de un análisis que se apoya en el conocimiento de los fenómenos que definen lo que dejan invariable" (Brousseau, 1986)

En este sentido la reproducibilidad constituye un elemento importante relativo a la reflexión acerca de los hallazgos de la Matemática Educativa. A este propósito Joshua (1996) discute lo que es un resultado en el campo de la Matemática Educativa tomando en cuenta tres condiciones:

a) que la investigación se base en datos empíricos fruto de una observación, un análisis y una experimentación;
b) que la teoría didáctica sepa distinguir los fenómenos regulares de los contingentes y como aparecen y se relacionan los unos con los otros;
c) que se pase de datos de observación a datos experimentales en sentido estricto, es decir, que haya producción de fenómenos.

Joshua se pregunta si estas condiciones están presentes en la didáctica de las matemáticas y apunta como la más problemática a la reproducibilidad.

Dicha afirmación se fundamenta en las investigaciones de Artigue (1984) según la cual la reproducibilidad, en sentido estricto, nunca se puede asegurar en la didáctica.

De hecho podemos darnos cuenta que ella no depende solamente de los elementos internos al diseño sino que también entran en juego factores externos que se tienen que identificar y atender[1].

La metodología con la que se lleva a cabo una investigación en el marco del fenómeno de la reproducibilidad es la ingeniería didáctica[2]
Lezama (2005) observa como la investigación sobre la reproducibilidad está ligada a la necesidad de acercar los hallazgos de las investigaciones a la realidad de las instituciones escolares. Por lo tanto resulta fundamental preguntarse cómo comunicar los productos de investigación y cómo dichos productos podrán tomarse en cuenta por los maestros en su práctica docente. También resulta fundamental interrogarse acerca de las modalidades que puedan garantizar “la estabilidad de los efectos didácticos en una actividad de clase, o en el uso de un texto, de una ingeniería didáctica o de una propuesta curricular” (Lezama, 2005) y acerca de la validez de los hallazgos que surgen de las experimentaciones didácticas.

---

[1] Para una revisión detallada de los estudios de reproducibilidad remitimos a:
Lezama J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas.* Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav, México
Lezama J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 8 (3), 339-362

[2] La *ingeniería didáctica* es una forma de trabajo que se basa en conocimientos científicos y que acepta someterse a un control de naturaleza científica. También tiene que afrontar elementos complejos (no depurados por la ciencia y de los que la ciencia no puede o no quiere hacerse cargo) que se abordaran con todos los medios disponibles.
Se utiliza el término ingeniería didáctica como producción de situaciones de enseñanza-aprendizaje (también puede utilizarse como metodología de investigación) y desde aquí se puede hablar de ingeniería didáctica cómo “un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un *profesor-ingeniero* con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos” (Ruiz, 2001). Se trata por lo tanto de un *producto*, resultado de un análisis *a priori*, y de un *proceso* que evoluciona en las interacciones entre los alumnos y el profesor (reacciones de los alumnos, elecciones del profesor).
En consonancia con la perspectiva con la que Brousseau (1998) considera la didáctica de las matemáticas cómo “el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto” se pueden distinguir tres dimensiones relativas a los procesos de construcción de una ingeniería didáctica: *dimensión epistemológica* (asociada a la característica del saber matemático en cuestión); *dimensión cognitiva* (asociada a las características cognitivas de los alumnos); *dimensión didáctica* (asociada a las características del sistema de enseñanza).

Si nos ponemos bajo el enfoque socioepistemológico, todo esto va a mostrarse particularmente relevante ya que debe de tomar en cuenta muchos factores de naturaleza diferente y considerar el hecho que “la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia de donde, a su vez, adquieren sentido y significación” (Cantoral y Farfán, 2003). Sin embargo resultará necesario estructurar las actividades y las prácticas de aprendizaje de una forma que va a contrastar con el discurso escolar convencional.

En su tesis doctoral Lezama (2003) se pregunta qué tipo de fenómenos pueden esperarse que aparezcan cuando se repite una situación didáctica, diseñada con un propósito específico, aplicada por diferentes profesores o un mismo profesor en diferentes escenarios con la intención de lograr su reproducibilidad. Además, se reconoce como fundamental darse cuenta en cuáles de estos fenómenos se puede lograr la reproducibilidad y en cuáles no, así como determinar cuáles son predecibles y cuáles no.

Cuando se considera que una experiencia didáctica particular ha demostrado ser exitosa, es inevitable buscar cómo extenderla a la comunidad y ver si se pueden hallar mecanismos no autoritarios o visibles para compartir estas experiencias y prácticas de enseñanza. Por supuesto, se debe considerar que una situación didáctica acontece en un contexto en el que están involucrados profesores y alumnos, lo cual tiene que tomar en cuenta una enorme cantidad de factores relacionados con la actividad humana. Sin embargo, a partir de la experiencia, se identificaron “algunos fenómenos que emergen cuando se repite una situación didáctica en distintos escenarios”.

Entre los aspectos subrayados, se pone en evidencia cómo el profesor juega un papel determinante en el proceso de reproducción de situaciones didácticas. Es él quien debe modificar su mirada sobre la situación didáctica porque tendrá que reformularla para los estudiantes y acompañarlos cuando la trabajen. Tal actividad exige que el profesor tenga habilidades que van más allá del dominio disciplinar.

Finalmente, por las decisiones que toma con el fin de llevar a los estudiantes a la situación, se puede observar cómo las concepciones del profesor actúan no sólo en su actividad, sino que también influencian las concepciones de los alumnos.

Es propiamente por estas reflexiones que se nos ha hecho particularmente interesante el fenómeno de la reproducibilidad ya que en su marco queremos buscar elementos estables que nos permitan intervenir en las decisiones del profesor al momento de sus elecciones en una forma no coercitiva, sino provocándolo a ponerse en discusión a si mismo y entonces a las metodologías que para él ya se han vuelto una costumbre consolidada.

En nuestro trabajo queremos investigar si existen elementos que puedan definirse regulares tanto en las concepciones de los profesores como en las respuestas de los alumnos a los estímulos que las elecciones de los maestros provocan.

En lo específico queremos detectar los elementos que aparecen con más frecuencia en la postura de los maestros acerca de la enseñanza de las desigualdades para diseñar una ingeniería didáctica que ponga en evidencia dichos aspectos a fin de comprobar cómo ellos afectan la toma de postura de los docentes y sus decisiones frente a las respuestas de los alumnos. Sucesivamente tomaremos en cuenta esos elementos para construir un instrumento didáctico que favorezca y propicie una metodología de enseñanza de las desigualdades innovadora y eficaz.

2. El papel del profesor en las dinámicas de aprendizaje: antecedentes y revisión bibliográfica

2. 1. Introducción

En un proceso educativo tres son los actores principales: el educador, el educando y el saber a enseñar.

Sin embargo quién tiene en sus manos la responsabilidad de la educación es el adulto que, aún cuando no quiera, es quién guía al joven, quién le transmite lo que tiene o no tiene sentido. Este proceso normalmente acontece de forma implícita a través de las elecciones que el docente cumple cuando imparte su asignatura o cuando toma una determinada postura frente de una situación problemática relacionada con el desempeño de su labor profesional.

En nuestra investigación queremos indagar cómo todos aquellos elementos que constituyen las convicciones o creencias del profesor influyen en la manera en la que imparte su clase afectando, con sus elecciones y su postura, el aprendizaje de sus alumnos.

Estamos convencidos que este aspecto no se puede eliminar, en cuanto pertenece a la esfera de la libertad de la persona y por eso es un factor imprescindible en cualquier fenómeno educativo que consideramos el encuentro entre dos libertades: la libertad del educando junto con aquella del educador (Giussani, 2006)

Sin embargo, reconocemos que los factores que pueden describir al profesor son muchos y que algunos de ellos no caben en el marco de una investigación de Matemática Educativa. Queremos entonces acotar nuestro trabajo considerando al profesor cómo alguien que pertenece a un determinado contexto socio-cultural; que tiene una cierta idea –es decir creencias y convicciones– acerca de las matemáticas en general y de las desigualdades; intenta transmitir un saber –las desigualdades– a sus alumnos.

Entraremos a este punto en lo específico de la enseñanza de las matemáticas proponiendo así un primer acercamiento a nuestro tema.

Crespo y Ponteville (2001) plantean la hipótesis de que el docente de matemática enseña la disciplina basándose en sus ideas acerca de ella y en cómo debería de ser aprendida por los alumnos.

Una de las concepciones más en boga es la que ve las matemáticas cómo un conjunto de procesos y resultados precisos cosa que implica que la enseñanza sea instruir los alumnos en habilidades (Thompson, 1992).

De grande interés resulta el trabajo de Hersh (1986), quien habla de la matemática como de una construcción social contrastando de tal forma aquella visión que reduce las matemáticas a unas cuantas técnicas resolutorias. Contestando a la pregunta "¿de qué se trata con las matemáticas?", afirma que la matemática es algo que tiene que ver con las ideas. El autor desafía la afirmación según la cual el conocimiento matemático es *a priori* e infalible y considera el conocimiento matemático así cómo el de las ciencias naturales cuyos alcances ya no son verdades inmutables, sino algo que puede cambiar.

Hersh (1986) subraya que saber matemática es: “hacer matemática”. Lo que caracteriza la disciplina es “hacer”, es decir, las actividades creativas y los procesos generadores.

Si consideramos las matemáticas “en acción” veremos que, para muchos matemáticos de clara fama así como matemáticos educativos, su enseñanza se da a partir de “situaciones problema” que piden que se pongan en juego razonamiento, pensamiento creativo, saber inventar, comunicar y verificar ideas a través de la reflexión y de la argumentación. Todo esto representa un contraste con aquella visión de la enseñanza de las matemáticas cuyo objetivo es la memorización de conceptos y procesos resolutivos que, sin embargo, son importantes, pero que deben ser “conquistados” por el alumno que debe llegar a ellos mediante procesos significativos, es decir, descubrirlos en acción.

Los cambios en las modalidades con las que se imparte una clase de matemáticas dependen de cada docente y de sus concepciones personales.

Resulta interesante observar cómo el análisis de la naturaleza de las relaciones entre las creencias y las concepciones así como el actuar, indique un sistema de creencias y concepciones cómo algo dinámico, que puede cambiar a la luz de la experiencia. Dicha relación tiene una naturaleza dialéctica y no se limita a una relación causa y efecto.

Además cabe observar cómo existe una interacción entre las concepciones del docente y las de sus alumnos debido a que el docente es el principal mediador entre un conocimiento matemático y los alumnos. Por lo tanto resulta natural que las concepciones y creencias del maestro se transmitan al estudiante a través de la modalidad con la que lleva las clases. (Thompson, 1992)

Lo que queremos alcanzar en este trabajo será por lo tanto profundizar en el conocimiento de aquellos elementos que juegan un papel determinante en las elecciones del maestro relativos a su didáctica y, en lo específico, a la didáctica de las desigualdades para, sucesivamente, ofrecer herramientas de ayuda que permitan encontrar enfoques metodológicos y soportes didácticos, a fin de apoyar a los maestros en la toma de decisiones adecuadas a la complejidad de los problemas que se les presentan.

Esto porque estamos convencidos que será a través de lo específico de su trabajo, que el maestro podrá empezar a cuestionarse y a movilizarse hasta llegar a la esfera de sus convicciones más profundas. Frente al hecho de que su enseñanza no produce los frutos deseados –en el alumno no se produce un aprendizaje significativo y por lo tanto no se despierta en él ningún interés y ninguna pasión hacia la disciplina– el maestro se verá obligado a cuestionar su manera de dar la clase. Nuestro trabajo quiere colocarse a este nivel, proporcionando al maestro herramientas que le permitan recorrer un camino nuevo, distinto de lo usual, no dejándolo solo con su decepción.

Partiendo del hecho que nuestro trabajo se va a dirigir a maestros de nivel superior y medio superior y quiere llegar a construir un instrumento que propicie cambios en la didáctica de las desigualdades, la revisión bibliográfica acerca de las relaciones entre las convicciones de los maestros y el aprendizaje de los alumnos se ha enfocado alrededor de dos ejes principales:

- los estudios realizados en las últimas décadas acerca de los maestros universitarios y de sus creencias
- el papel del maestro en el contexto de una situación didáctica

2.2. Los maestros universitarios y sus creencias y convicciones

En las últimas décadas se han llevado a cabo varios estudios sobre las creencias de los maestros a fin de entender de mejor manera la práctica educativa. El objetivo de estos estudios ha sido conocer y comprender para propiciar y desarrollar estrategias de cambio en las creencias y lograr cambios duraderos y de fondo en la educación (Macotela, Flores y Seda, 2001).

En sus investigaciones Knowles (1994) y Pajeras (1992) (citados por Macotela, Flores y Seda, 2001) reiteran que las creencias de la escuela y de la enseñanza se establecen muy temprano en la vida del individuo a través de sus mismas experiencias escolares. Por esto resultan ser muy resistentes al cambio aún cuando el docente haya estudiado en escuelas de formación para profesores. Hollingsworth (1989) y Lortie (1975) (citados por Macotela, Flores y Seda, 2001) señalan cómo las creencias pueden ser la causa del perpetuarse de prácticas educativas arcaicas y poco efectivas.

En relación a la educación superior las políticas educativas prevén el desarrollo y la aplicación de proyectos para la formación inicial y continua del profesor universitario.

Dichas políticas suelen considerar al docente cómo a un profesionista de la educación (Sánchez, 2002) tomando en cuenta sólo de manera marginal el hecho que un profesor, novel o con años de experiencia, inevitablemente tendrá sus propias convicciones y creencias que se enfrentan con un alumnado que, a este punto de su vida, llega a tener un bagaje de experiencia escolar que determina otras convicciones y creencias que se reflejan en actitudes positivas o negativas. Esta situación hace la tarea educativa paradójicamente más complicada que a los niveles escolares básicos en los que el alumno se encuentra en una postura naturalmente abierta y llena de curiosidad. El desafío al que está llamado el docente es muy grande y pone a descubierto lo que realmente le interesa, es decir sus convicciones más profundas.

En Gonzáles (2004) se nos acuerda que para la UNESCO (1998) la Educación Superior Contemporánea tiene la misión de "formar profesionales altamente capacitados que actúen como ciudadanos responsables, competentes y comprometidos con el desarrollo social" para ello se hace necesario pensar en una educación del profesorado desde una perspectiva humanista es decir concibiendo al profesor como una persona que lleva a cabo su desarrollo profesional como dimensión de su desarrollo personal.

Por esta razón los programas de formación del profesorado universitario deben "potenciar el *desarrollo integral* del profesor como persona, a través del reconocimiento de la necesaria unidad del pensar, el sentir y el actuar del profesor en el ejercicio de la docencia, es decir, de sus conocimientos, habilidades, actitudes, motivos y valores en la regulación de su actuación profesional".

Estos estudios ponen en relieve la grande importancia de las creencias y las convicciones y nos permiten poner en evidencia los siguientes factores:

- creencias y convicciones son elementos muy resistentes al cambio ya que se forman en el individuo en la misma escuela;
- esto propicia que en los niveles medio superior y superior la tarea educativa sea más complicada que en los niveles inferiores pues los alumnos ya han madurado sus propias creencias y convicciones y éstas van enfrentándose con las creencias y convicciones de los maestros.

(Macotela, Flores y Seda, 2001)

2. 3. El papel del maestro en una situación didáctica

Brousseau (1988) reflexiona sobre el rol del maestro en los procesos de aprendizaje apoyándose en su experiencia cómo investigador en el ámbito de la didáctica de las matemáticas con niños de primaria.

La primera tarea del maestro consiste en la re-contextualización y re-personalización del saber a fin de buscar situaciones que den sentido a los conocimientos por enseñar.

Se trata de hacer vivir el conocimiento a los alumnos, provocarlo como *respuesta razonable* a una situación familiar. Sucesivamente se tratará de transformar dicha *respuesta razonable* en *hecho cognitivo*.

Se trata de un trabajo en el que el docente tiene que proponerle al alumno una situación de aprendizaje en la que pueda producir sus conocimientos como respuesta personal a una pregunta y los haga funcionar o los modifique como respuesta a las exigencias del medio y no a un deseo del maestro. Es este punto él que hace la significación del conocimiento completamente diferente y, por esta razón, es importante que el maestro trabaje de tal manera que el alumno olvide los presupuestos didácticos de la situación –inevitablemente condicionados por la intención y los deseos del maestro–. Esto se logra a través de una construcción epistemológica cognitiva intencional en la que la resolución del problema se vuelve responsabilidad del alumno que debe hacerse cargo de obtener un cierto resultado.

De todas formas, la aceptación por parte del alumno de su responsabilidad personal sólo es un prólogo necesario para el aprendizaje. Sólo cuando esto acontezca el alumno tendrá una justificación adecuada a su responsabilidad que le permite asumir el aprendizaje y escapar de la culpabilidad. Por esta razón, cuando el alumno no logra superar las dificultades y relacionar su acción con el resultado obtenido, es el maestro quien debe renegociar la responsabilidad a fin de no provocar sentimientos de culpabilidad e injusticia que se volverían perjudiciales para los aprendizajes futuros.

Un elemento muy importante consiste en la libertad del alumno de construir su conocimiento: si una situación lleva al alumno a la solución como por un carril obligado esto le impide utilizar sus virtudes. Se trata entonces de determinar la justa distancia entre la determinación por parte de la situación y lo que el alumno debe hacer. Todo esto para que el alumno llegue a descubrir el sentido de los conocimientos.

A lado del trabajo para propiciar un aprendizaje significativo, una fase esencial del proceso didáctico consiste en la *institucionalización* no sólo del conocimiento sino también del sentido. Ésta es una de las tareas más difíciles que le toca al maestro porque pide desarraigar la idea de que sentido y forma puedan vivir separados, cosa tristemente común en la enseñanza.

Otro rol que le compete al maestro consiste en asumir una epistemología. Cuando enseña un saber el maestro sugiere también cómo utilizarlo y esto revela su posición epistemológica. Dicha posición es la que más rápidamente adopta el alumno ya que el mensaje permanece implícito o aun inconsciente.

Brousseau concluye afirmando que el maestro es una especie de actor que inventa su juego en el momento y en función de una trama y que, para lograr esto, necesita de libertad y creatividad en su acción. Se trata entonces de distinguir entre lo que en una situación, el docente no puede modificar, y aquello sobre lo que puede dirigir su talento personal.

Resulta de particular interés considerar todas aquellas investigaciones relacionadas con el tema de la reproducibilidad, iniciadas a partir de 1984, que han puesto en evidencia el papel fundamental que juega el maestro en las dinámicas de aprendizaje.

Brousseau (1986) se pregunta qué es lo que realmente se reproduce en una situación de aprendizaje y si un profesor que reproduzca la "misma historia" (actividades, declaraciones, etc.) reproduce también el mismo "hecho didáctico", es decir, algo que haya producido "los mismos efectos desde el punto de vista del sentido".

Artigue (1984) propone construir un modelo para caracterizar la reproducibilidad como fenómeno didáctico a fin de poderlo estudiar, explicar y simular. De igual modo, afirma que el profesor juega un papel esencial dentro del fenómeno de reproducibilidad porque es él quien conoce el propósito didáctico de la situación, los posibles obstáculos y soluciones, al igual que el control del tiempo escolar (1986).

Grenier (1989) afirma que “las elecciones (concientes o no) y decisiones del profesor [...] son sustentadas por las representaciones que el profesor tiene de sus alumnos, pero también sobre el aprendizaje y el saber. Al tener una preocupación de reproducibilidad de situaciones didácticas no se puede hacer economía en el estudio del polo *profesor* del sistema didáctico”. Esta investigación no sólo muestra las dificultades para lograr un efecto didáctico estable cuando la situación didáctica cambie de escenario, sino también hace notar la relevancia del papel del profesor al momento de tomar decisiones que permitan el cumplimiento del objetivo de la situación, ya que plantea la importancia de las representaciones que hace el profesor, concernientes a los alumnos, al saber y al aprendizaje.

Perrin Glorian (1993) dice que es necesario considerar el polo del *profesor* como un elemento fundamental en el ámbito de estudios de reproducibilidad. Su investigación da a conocer que llevar una ingeniería didáctica diseñada para un escenario a otro muy distinto produce inevitablemente un fracaso, debido a las interpretaciones de los profesores sobre las actividades y a las características de los grupos.

Arsac, Balacheff y Mante (1992) desarrollan una investigación que quiere dar un carácter científico al fenómeno de la reproducibilidad de situaciones didácticas. En su trabajo, las investigadoras parten de la hipótesis de que la conducta del profesor en la clase condiciona la transmisión didáctica.

En un artículo sobre las interacciones del sistema didáctico en escenarios de educación a distancia, Farfán y Montiel (2005) se preguntan qué puede pasar con el fenómeno de la interacción cuando maestro y alumno no se pueden ver ni hablar. Concluyen que el contrato didáctico se puede considerar como categoría teórica invariante, es decir, como un instrumento de análisis independiente del escenario.

Estos estudios nos proporcionan elementos muy valiosos para precisar los factores que debemos de considerar cuando hablamos del rol del profesor en las dinámicas de aprendizaje.

El maestro es quien toma decisiones (Grenier, 1989) e interpreta (Perrin Glorian, 1993). Por otro lado su conducta condiciona la transmisión didáctica (Arsac, Balacheff y Mante, 1992). De hecho el profesor es quien sabe dónde llevar a los alumnos y cómo llevarlos pero, en el mismo tiempo, tiene que favorecer su libertad y creatividad a fin de propiciar el descubrimiento del sentido de los conocimientos (Brousseau, 1988)

Con base en estos elementos, es nuestra intención llevar a cabo un estudio que nos permita individuar factores de reproducibilidad relativos a la conducta del profesor, para construir una propuesta didáctica que hace hincapié en estos factores, a fin de lograr la construcción de un instrumento didáctico que pueda considerarse un apoyo real para el desempeño del quehacer cotidiano de los docentes.

3. Las desigualdades: un estado del arte

3. 1. Introducción

En su ponencia en el congreso ítalo-francés SFIDA XI, Boero afirma que “las inecuaciones constituyen un sujeto *paradigmático* para un debate sobre la investigación en la didáctica de las matemáticas –sobre todo a propósito de su dependencia o no de las herramientas y de los métodos de otras disciplinas, en particular de la psicología–”. (Boero, 98)

En nuestra experiencia hemos podido percatarnos de la importancia del tema ya que resulta difícil encajarlo en una única técnica de resolución ya que deberían de haber muchas técnicas diferentes para las diferentes tipologías de desigualdades. Por esta razón nos pareció que las desigualdades representan un importante punto de referencia para investigar cómo el maestro hace sus elecciones ya que se debe de enfrentar con un argumento que requiere mucha flexibilidad en la forma del razonamiento, y esto bajo cualquier enfoque que se quiera cobijar.

Además tenemos que tomar en cuenta que en los últimos años los alumnos encuentran muchas dificultades en desarrollar razonamientos abstractos y por esto se les dificulta cada vez más aquel enfoque lógico-algebraico que ha caracterizado los estudios de sus maestros. Por lo tanto los docentes están llamados a interrogarse acerca de la metodología de enseñanza de las desigualdades y tienen la tarea de buscar nuevos caminos para favorecer el aprendizaje de sus alumnos. También este aspecto resulta muy interesante a fin de investigar acerca de la postura del maestro como elemento que influye en las dinámicas de aprendizaje de los alumnos.

Sin duda resultaría también muy interesante profundizar en aquellos aspectos de la historia de las matemáticas y la historia de la enseñanza de las matemáticas a fin de adquirir conocimientos acerca de la constitución histórica de un saber concerniente a las “inecuaciones” en el sentido de las matemáticas de los matemáticos y a propósito de la constitución del objeto “inecuaciones” en la matemática escolar de los distintos países. Pero hasta la fecha no se han desarrollado investigaciones en este sentido y los objetivos de nuestro trabajo no nos permiten enfocarnos ahora en un estudio tan amplio y profundo cual sería una investigación histórica, pero sí reconocemos la importancia de tener conocimientos en este marco y, por esta razón, nos reservamos la posibilidad de investigar en esta dirección en algún momento sucesivo.

En este capítulo se reporta el trabajo de investigación relativo al Discurso Matemático Escolar acerca de las desigualdades. Dicho trabajo se desarrolla tomando en cuenta los puntos siguientes:

1. El análisis de la literatura que nos pareció más interesante acerca de la didáctica de las desigualdades.
2. El análisis de los currícula de las principales instituciones educativas mexicanas enfocándonos específicamente sobre el tema de desigualdades.
3. El análisis de varios libros de texto que se utilizan en las preparatorias o en los cursos de precálculo de nivel superior de México, relativamente al tema de las desigualdades
4. El análisis de los resultados de un cuestionario –que se les propuso a varios maestros de México e Italia– y entrevistas informales con alumnos universitarios de primer semestre, a fin de investigar acerca de lo que pasa en nuestras aulas .
5. Una rápida explicación del sistema escolar italiano y de sus currícula a fin de poder desarrollar nuestro trabajo aprovechando nuestra experiencia didáctica en ambos países.

3. 2. Revisión bibliográfica

Las desigualdades en el marco de la teoría APOE

Barbosa (2003) coloca su investigación en el marco de la Teoría APOE. La autora plantea que para obtener un mejoramiento tanto de la enseñanza como del aprendizaje de las matemáticas, se necesita un cambio en el modelo de enseñanza tradicional[1].

Objetivo del trabajo de la autora es la presentación de algunas de las construcciones mentales (*esquema*[2]) que un estudiante puede desarrollar para comprender el concepto de desigualdad.

Para ello se consideran las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Cuáles son los conceptos previos necesarios para comprender el concepto de inecuación?
2. ¿Cómo construye o entiende un alumno el concepto de inecuación?
3. ¿Cuáles son las estructuras mentales y las conexiones con otros contenidos matemáticos necesarios para la comprensión de la idea de inecuación?
4. ¿Cómo puede influir la interpretación de inecuación en la resolución de problemas que implican el concepto?

Se empieza analizando dos acciones: *interpretar una inecuación* y *resolver una inecuación*

Interpretar una inecuación:

- Implica haber asimilado los conceptos de variable real y de conjunto solución. Este último podrá determinarse mediante *gráficos* cuando la inecuación se presente como una relación entre expresiones

[1] "sistema pedagógico que no se fundamenta en una investigación científica en educación matemática y que no ha logrado avances en el aprendizaje de los conceptos matemáticos" (Barbosa, 2003)
[2] Se hace referencia a la teoría APOE. "Un esquema, para un cierto concepto matemático, abarca una colección de objetos a la que se puedan agregar otros esquemas previamente construidos" (Barbosa, 2003).

algebraicas que se interpreta como una relación entre funciones.

- Se perjudica la correcta interpretación de una inecuación si el universo numérico y el dominio de las propiedades de los números reales como cuerpo ordenado resultan muy limitados
- Implica considerar la inecuación cómo un ente matemático que se puede manipular ocupando propiedades de los números reales como operar, analizar equivalencias y verificar cuáles de los subconjuntos de **R** cumplen la inecuación.

Resolver una inecuación:

- Consiste en determinar el conjunto solución o su descripción más simple posible.
- Cuando se proceda bajo un enfoque algebraico se trata de hacer transformaciones que se basan en las propiedades de los números reales y tener en cuenta las equivalencias entre las inecuaciones que se van obteniendo.
- Desde el punto de vista gráfico la inecuación se deberá de interpretar como una relación entre funciones, cosa que implica la construcción de sus gráficos y la individuación del conjunto solución a través de ellos. A veces se necesitará también la manipulación algebraica como paso preliminar.
- El conocimiento bien fundamentado de los pasos anteriores permitirá escoger la metodología de resolución más adecuada a una desigualdad específica. Es importante observar cómo la resolución en el contexto gráfico, en muchos casos, sirve para intuir o también para encontrar el conjunto solución, siendo aún necesaria, dentro de algunas situaciones, la resolución algebraica.

Además de saber utilizar las transformaciones adecuadas a resolver una especifica inecuación, es necesario que el estudiante entienda las condiciones y las razones por las que tales transformaciones se emplean y por qué funcionan. Todo esto implica el establecimiento de relaciones entre diversas inecuaciones transformadas, equivalentes o no, y favorece la capacidad de usar flexiblemente el concepto de inecuación.

Los dos tipos de comprensión, interpretación y resolución, pueden nacer en conjunto y lo ideal sería que el estudiante sea capaz de trabajar simultáneamente con la interpretación y la resolución de la inecuación; pero de hecho es posible encontrar estudiantes que, "aún sin interpretar una inecuación, tienen ciertas construcciones mentales que les permiten resolver varios tipos de inecuaciones principalmente en el contexto algebraico, pero de forma mecánica, ya que imitan procedimientos memorizados". O bien estudiantes que "consiguen resolver una inecuación en un contexto gráfico, independientemente de la comprensión algebraica" (Barbosa, 2003).

Los prerrequisitos necesarios para interpretar y resolver una inecuación son:

- ✓ En el contexto algebraico
    1. Establecer una correspondencia biunívoca entre **R** y la recta real.
    2. Comprender el concepto de variable (como incógnita, número real y en una relación funcional)
    3. Relacionar subconjuntos de **R** por medio de operaciones elementales como unión e intersección de intervalos y del uso de los conectivos *y*, *o.*
    4. Reconocer y usar oportunamente las propiedades del cuerpo ordenado de los números reales.
    5. Comprender el significado de implicaciones falsas y verdaderas y usar correctamente proposiciones como *si y sólo si*.
    6. Comprender los cuantificadores universales *para todo* y *existe*.
- ✓ En el contexto gráfico
    1. Saber graficar algunas funciones elementales como lineales, cuadráticas, cúbicas simples, raíz cuadrada, $y = \frac{1}{x}$.
    2. Leer e interpretar gráficas aún sin conocer su expresión algebraica

El esquema de función representa algo imprescindible para entender el concepto de inecuación y, por lo tanto, "hay que valorar las oportunidades de estudio de ese concepto para el desarrollo del pensamiento matemático y cambiar la manera de enseñar las inecuaciones" (Barbosa, 2003) proponiendo actividades, basadas en el esquema de inecuación, que involucran no sólo la interpretación y la resolución algebraica sino también resoluciones gráficas que favorezcan una cierta flexibilidad de pensamiento al considerar las dos visiones relacionadas.

Para profundizar en los puntos más relevantes del trabajo de Barbosa es interesante tomar en cuenta lo que dice Acuña (2001) en un artículo titulado *Concepciones de graficación, el orden entre las coordenadas de los puntos del plano cartesiano*.

La autora empieza observando como, a pesar de que la graficación de ecuaciones es parte de los currícula de los niveles medio básico y medio superior, el uso y la interpretación que los estudiantes hacen de las gráficas en si misma "enfrenta problemas que se observan incluso en los niveles universitarios." (Acuña, 2001).

Una de las causas que se identifican como fuente de error en el aprendizaje e interpretación de las gráficas consiste en el hecho de que se enseña a graficar casi exclusivamente con el método de tabulación.

En la enseñanza actual de las matemáticas se considera importante no sólo conocer las diferentes representaciones (gráfica y algebraica) del objeto matemático sino también la posibilidad de establecer relaciones entre ellos.

Unas de las primeras relaciones que se establece entre los objetos geométricos del plano es la que se refiere a ordenadas y abscisas de los puntos graficados. Es interesante observar como esto pertenece al conocimiento que el estudiante tiene sobre el orden en la recta real.

Aún si todavía no se sabe cómo se desarrolla el proceso de aprendizaje de la graficación, sin duda resulta evidente que la apariencia juega un papel fundamental "debido a que es la base de la aprehensión perceptiva, es decir, el primer acercamiento a la tarea de graficación" Acuña (2001).

A pesar de la dificultad que se hace evidente en establecer relaciones entre distintos representantes del mismo objeto matemático como las representaciones gráfica y algebraica, es importante darse cuenta de que la graficación se puede considerar "como un proceso que tiende un puente de significados que contribuye a la construcción de los significados asociados a los objetos matemáticos estudiados" Acuña (2001).

En concreto:
La relación de orden entre ordenadas o abscisas sobre la gráfica toma sentido respecto al marco de referencia analítico que está formado por los ejes coordenados.

La escala puede ser distinta por cada eje: esto no afecta las relaciones entre los objetos graficados pero afecta la apariencia de la gráfica (esto puede representar un obstáculo adicional)

La comparación entre ordenadas o abscisas puede desarrollarse cómo:

- comparación de orden (se apoya en la oposición de los segmentos)
- por medio de las coordenadas respectivas
- transito de una estrategia a otra

El orden sobre la recta es un antecedente para el trabajo sobre el plano.

La posición de los puntos sobre el plano requiere instrucciones de las dos coordenadas de cada punto al mismo tiempo.

Surgen conflictos en el momento del aprendizaje de los números negativos (significado práctico de la magnitud y números con signo). De aquí se ve que el estudiante sólo se mueve correctamente en el primer cuadrante.

Funciones y desigualdades

Farfán y Albert (1997) afirman que la dificultad técnica obstaculiza la comprensión de las desigualdades y su enseñanza, "reduciendo su presentación escolar a unos cuantos ejemplos complejos a fin de completar el programa establecido. Por otra parte, las habilidades algebraicas y lógicas que desarrolla la minoría no contribuyen de manera substancial a un posterior estudio del cálculo". Sin embargo, el propósito de este trabajo es "el cambio del contexto protagónico de la discusión", empezando con el tratamiento del tema en el contexto gráfico para finalmente llegar al contexto algebraico, "cuyo fin es el de apoyar argumentaciones o construcciones gráficas". La intención del estudio es "contribuir con sugerencias al mejoramiento de las acciones de enseñanza de las matemáticas", favoreciendo "acciones de enseñanza que propicien aprendizajes más significativos".

Para ello los autores enfocan el tema apoyándose prioritariamente en el elemento gráfico llevando al alumno a la necesidad de desarrollar un trabajo algebraico para poder aprovechar las metodologías gráficas aprendidas.

En su trabajo *Un estudio de funciones pretextando la resolución de desigualdades* (2000) Farfán observa cómo la enseñanza de las funciones tiende a sobrevalorar los procedimientos analíticos y la algoritmización, dejando de lado los argumentos visuales, entre otras causas por no considerarlos como matemáticos, o bien, por la concepción que de la matemática y de su enseñanza se tenga, sin considerar, por ejemplo, la estructura cognitiva de los estudiantes a los que se dirige.

A ello se aúna el contracto didáctico establecido que, como parte de la negociación impide que el estatus del profesor se demerite; si éste no resuelve satisfactoriamente los problemas planteados en el curso, el recurso algorítmico permitirá subsanar decorosamente lo establecido en el contrato, aligerando y eliminando dificultades intrínsecas al contenido matemático.

Otro enfoque, mismos problemas

Boero (1997, 1998, 1999) realiza un estudio en el que quiere analizar los elementos de la “tradición” italiana con respecto al tema de inecuaciones y las dificultades que surgen en su enseñanza a fin de encontrar elementos de ayuda para mejorar la didáctica.

El autor se pregunta a qué “tecnología[3]” se hace referencia y por qué razones las desigualdades se introducen y persisten en la tradición cultural italiana. Aún si no hay estudios relativos a la historia de la enseñanza de las desigualdades en Italia, su impresión es que se trata de una tradición vieja ya presente desde hace un siglo.

Las técnicas que se enseñan resultan muy limitadas y actualmente no representan salidas directas y evidentes para la aplicación en otras ciencias o materias escolares, ni para las profesiones, menos aún para las matemáticas de los matemáticos.

Resulta muy interesante observar como dichas técnicas tienen una persistencia muy fuerte en la enseñanza (también en el caso de los programas experimentales que las excluyen explícitamente). Para ello, el autor se pregunta el porque de dicho fenómeno y plantea algunas hipótesis: la inercia del sistema de enseñanza (maestros, manuales, padres,…), el reconocerle a las desigualdades una función de encuadramiento mental de los estudiantes (disciplina de los procesos a seguir, contenido lógico), una cierta facilitación de los procesos de enseñanza y de evaluación o del aprendizaje por medio de la reducción de la complejidad del problema “resolver una inecuación” a través de su reducción a un modelo lógico-algebraico.

Podemos distinguir dos tipos de consecuencias de esta situación de la enseñanza: la falta de capacidad para tratar desigualdades no estándar y el no

[3] El autor define la “tecnología” cómo “reflexión y estudio de técnicas como objetos culturales”.

aprovechamiento de las potencialidades de aprendizaje implícitas en el sujeto "inecuación".

Boero observa cómo en un contexto favorable –es decir, "alumnos no condicionados por las técnicas reducidas a la complejidad de las operaciones mentales y con una amplia experiencia en el tratamiento de problemas que ponen en juego la exploración dinámica de las situaciones problemáticas y el *pensamiento transformacional*" (Simon, 1996 citado por Boero, 1998)– los alumnos pueden producir estrategias muy diferentes, en las que la dialéctica local-global, como por otro lado la dialéctica algebraico-analítico/gráfico, producen éxitos favorables.

Otro elemento a considerar consiste en el papel que ha tenido el cambio radical aportado por la difusión de las calculadoras gráficas y de las computadoras. Estas pueden volver a meter en discusión las tradiciones de los países en los que el enfoque lógico-algebraico de las inecuaciones es dominante.

En relación a los respectivos alcances de los enfoques lógico-algebraico y funcional, se debe de considerar una perspectiva de "desarrollo" –es decir en términos de pérdidas y ganancias con respecto al desarrollo intelectual en el dominio matemático– de uno y otro enfoque.

Por ejemplo podemos ver cómo la adopción masiva y pasiva por parte de los estudiantes (en el enfoque lógico-algebraico) de tablas de "concordancia de signos" no se puede justificar sólo por la confianza de los esquemas, pues lo que pasa es que los alumnos tienen una dificultad real en gestionar el tratamiento lógico-algebraico de una manera consciente. Dichas tablas carecen (al nivel de la aplicación) de toda la componente de la actividad lógica que pertenece únicamente a la dimensión "tecnológica", es decir de justificación teórica de la herramienta. Sin embargo se puede erigir la hipótesis que al enfoque lógico-algebraico le haga falta la posibilitad de reconstrucción de las etapas exploratorias y dinámicas que se manifiestan de forma así frecuente entre los alumnos primerizos en el campo de las inecuaciones.

Por lo contrario, en el acercamiento funcional la necesaria gestión de las variables pide un recurso considerable e inevitable a la cuantificación lógica.

Boero considera que las inecuaciones funcionales representan un medio privilegiado:

- para los estudiantes, pues permiten acercarse a unos aspectos muy importantes del origen de las funciones;
- para los docentes, a fin de entender los progresos de los estudiantes bajo algunos aspectos e intervenir sobre sus dificultades relacionadas con este punto;
- para los investigadores, a fin de entender mejor los pasos intelectuales que los estudiantes necesitan o pueden llevar a cabo a fin de llegar a dominar el concepto de función.

Sin embargo el autor remarca la importancia de las preferencias personales relativamente al corte “algebraico” o al corte “gráfico”: algunos estudiantes representan casos extremos en el sentido del “trabajo algebraico” mientras que otros trabajan a través de la visualización de las componentes gráficas y otros manifiestan una actitud aún diferente –con una relación muy estricta entre el análisis algebraico de las componentes de los polinomios y dinámico visual-cuantitativo (“equilibrio”)–. Estos comportamientos sugieren la idea de que los perfiles intelectuales para llegar al origen de las funciones en lo que tiene que ver con las inecuaciones funcionales, pueden variar según el sujeto y que la escuela debe de ofrecer la oportunidad de practicar las diferentes actitudes así que la comparación entre diferentes estrategias se vuelve entonces la elección didáctica más importante.

En su trabajo Bazzini (1997) pone en evidencia la confusión que se da entre la denotación (objeto al que hace referencia una específica expresión simbólica) y el conjunto de las soluciones que tienen que ver con el significado (manera con que se presenta un objeto). En las matemáticas el significado se da por las distintas reglas de computación y la autora observa cómo en la didáctica se le atribuye muy poca importancia a la diferenciación entre estos dos aspectos.

Un aspecto típico de este fenómeno se ejemplifica en el reporte de Bazzini (1999). Aquí la autora observa que normalmente se aprenden primero las ecuaciones y luego las desigualdades. Esto provoca en muchos estudiantes el establecimiento de analogías incorrectas que se apoyan en la semejanza con que se presentan las dos operaciones en los que no se verifica la aplicabilidad de los procesos que se van eligiendo. La autora sugiere de tratar paralelamente ecuaciones y desigualdades.

Gallo y Battú (1997) observan cómo en la didáctica de las desigualdades se ocupan técnicas sin significados, es decir, modelos rígidos que se aplican en forma correcta pero impropia. Se observa una confusión entre el concepto de ecuación y él de desigualdad de tal manera que para resolver desigualdades se aplican los mismos modelos de las ecuaciones.

En su artículo Malara, Brandoli y Fiori (1999) presentan los resultados de pruebas aplicadas a estudiantes recién ingresados en la universidad relativos al estudio de las desigualdades. El objetivo es checar la naturaleza del control que los estudiantes logran ejercer sobre el sentido de las desigualdades. Lo que se observa –en un contexto en que se le da mucho énfasis al estudio de las desigualdades a nivel de escuela secundaria superior– es la presencia de lagunas conceptuales, actitudes estereotipadas en los procesos resolutivos, falta de control de los significados de las notaciones algebraicas y una capacidad muy reducida de coordinar los distintos lenguajes algebraico, verbal y gráfico.

En particular se observa:

- una cierta confusión entre la estructura aditiva y la multiplicativa en los distintos ámbitos numéricos, el predominio del ámbito numérico de los naturales sobre los demás conjuntos numéricos, la escasa conceptualización de las propiedades fundamentales del concepto de campo ordenado;
- la imposibilidad de controlar el significado de relaciones expresadas en el lenguaje algebraico y la persistencia de la utilización de técnicas estándar aunque en casos particulares cuya solución puede ser trivial;

- una cierta facilidad con el lenguaje gráfico pero no adecuadamente coordinado a los lenguajes algebraico y verbal.

3. 3. Análisis de los currícula

Hemos podido examinar los currícula de distintas instituciones educativas de México

- a nivel bachillerato (ENP y CCH UNAM, Bachillerato SEP, IPN-Dirección Media Superior, PREPATEC)
- a nivel licenciatura (en instituciones y carreras cuyo currículo prevé un curso de precalculo: TEC de Monterrey, UIA)

En todas las introducciones a los planes de estudio en las que se declaran sus políticas educativas, las distintas instituciones hacen referencia (de una forma más o menos explícita) a la teoría constructivista y, con respecto a la didáctica, el enfoque nunca es de tipo memorístico y se pone énfasis en el significado de los conceptos y en los procedimientos.

> **CCH**: "la concepción de la matemática conlleva una intención del para qué queremos enseñarla y cómo contribuye a la formación de un sujeto capaz de buscar y adquirir por si mismo nuevos conocimientos, además de analizar e interpretar el mundo que lo rodea de manera reflexiva, analítica, sistemática y **constructiva**."… se quiere privilegiar un enfoque no memorístico en el que se ponga énfasis al significado de los conceptos y a los procedimientos, en el manejo de estrategias, en la integración de conocimientos, en el tránsito de un registro a otro y en el desarrollo de habilidades matemáticas como "la generalización (…), formalizar "Material Matemático" (…); reversibilidad de pensamiento (…); flexibilidad de pensamiento (…); visualización espacial (…)".

SEP: Sin embargo el enfoque es el que considera la matemática como una herramienta poderosa para los demás campos del conocimiento humano. "…el conocimiento matemático **debe ser construido por los estudiantes** a través de la mediación del docente con el propósito de desarrollar un marco conceptual adecuado que le permita lograr un aprendizaje significativo." Para ello se invita a un trabajo que siga haciendo referencia a situaciones de interés para los alumnos.

Analizando detalladamente los planes de estudio de dichas instituciones pudimos observar que nunca se considera el tema "desigualdades".

ENP: "la tendencia metodológica de este programa (programa de Matemática 1, ndr.) es constituirse en una etapa intermedia del desarrollo curricular de la enseñanza de las Matemáticas en el bachillerato y de tránsito progresivo de una enseñanza lineal y algorítmica a una **enseñanza de construcción**." El enfoque metodológico con él que se quiere enfrentar la disciplina se orienta hacia un aprendizaje basado en la solución de problemas. En particular se pide que el alumno pueda resolver e interpretar "problemas de ésta y otras disciplinas, principalmente de la Física, la Química, la Economía, que se resuelven en términos de una ecuación, una desigualdad o un sistema de ecuaciones o un sistema de desigualdades."

IPN-Dirección Media Superior: "El Álgebra contribuirá a que los educandos pongan en práctica los conocimientos adquiridos en el ejercicio del pensamiento espíritu crítico logrando que, a través del razonamiento matemático, resuelvan problemas, con el fin de que puedan participar en forma consciente en el mejoramiento de la tecnología, su entorno y el desarrollo humano. (…) El docente que imparte esta asignatura deberá contar con una aptitud pedagógica y dominio de las técnicas necesarias para el ejercicio docente, con experiencia mínima de un año en docencia, conocer, sin ser experto la psicología del adolescente, el razonamiento verbal, manejar las TIC's, y las técnicas de resolución de problemas, **ser facilitador del**

aprendizaje; proporcionar soluciones a problemáticas dentro del aula, fomentar la cultura e inducir al estudiante a la investigación.”

PREPATEC: **“**Es pues, a través de una participación activa, como los estudiantes construyen nuevos y relevantes conocimientos que influyen en su formación y derivan en la responsabilidad y el compromiso por su propio aprendizaje, a la vez que desarrollan las habilidades requeridas en su formación profesional.”[4]

En lo específico, las tres instituciones insertan el tema de desigualdades en el primer año de curso (ENP: IV año, PREPATEC: II semestre) y se limitan a estudiar desigualdades algebraicas de primero y segundo grado y sistemas de desigualdades de primer grado en dos incógnitas.

ENP:

Estructuración listada del programa

…………

Séptima Unidad: Ecuaciones y desigualdades. En esta unidad se estudian los métodos para resolver ecuaciones y desigualdades. Se resuelven problemas planteados como una ecuación o una desigualdad de primero o de segundo grado en una variable, pretendiendo que el alumno infiera que hay situaciones de su entorno que se expresan en términos de una sola variable con una o más soluciones posibles, pero que también existen acontecimientos que requieren, para representarse, de más de una variable como se tratará en La siguiente unidad.

Octava Unidad: Sistemas de ecuaciones y de desigualdades. En esta unidad se resuelven algebraicamente sistemas de dos y tres ecuaciones lineales con tres variables, así como problemas expresados como tales. Se resuelven sistemas de dos desigualdades de primer grado en dos variables y los problemas expresados como un sistema de desigualdades.

Cuadro 3.1

[4] Se toma del *Modelo Educativo* del Tec en la sección *Enseñanza y Aprendizaje* (https://portal2www.itesm.mx/servlet/page?_pageid=329&_dad=portal30&_schema=PORTAL30&p_portal=4&p_servicio=1&p_objeto=169&p_campus_liga=0&p_url=1)

Contenido del programa

a) Séptima Unidad: Ecuaciones y desigualdades.

b) Propósitos:

Que el alumno sea capaz de plantear problemas de su entorno cuya solución se obtenga a partir de la resolución de una ecuación o de una desigualdad de primero y segundo grado. Que interprete el resultado obtenido.

…………

HORAS	CONTENIDO	DESCRIPCIÓN DEL CONTENIDO	ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS (actividades de aprendizaje)	BIBLIOGRAFÍA
	Desigualdad de primer grado en una variable y sus propiedades.	Se revisarán las propiedades de orden y se abordará el concepto de desigualdad. Se resolverán desigualdades de primer grado, indicando paso a paso la propiedad aplicada. Se graficará el conjunto solución que las satisface. Resaltar que la solución de una ecuación es uno o varios puntos mientras que para una desigualdad la solución es un intervalo.	Planteará, resolverá e interpretará problemas del tipo: Cierto panecillo tiene diez calorías menos que el doble de las que contiene una rebanada de pan blanco. Juntos contienen un mínimo de 185 calorías. Hallar el menor número posible de calorías de la rebanada de pan. Representará gráficamente el intervalo solución.	
	Desigualdad de segundo grado. Resolución de una desigualdad de segundo grado.	Se abordará el concepto de desigualdad de segundo grado y se establecerán las condiciones para resolverla. La solución, que podrá ser por factorización o a partir de las propiedades de orden, se graficará en la recta numérica. Se abordará que otra manera de encontrar la solución es resolverla como igualdad e ir probando que valores la satisfacen. Se determinará en la recta el conjunto solución que puede ser un punto, uno o dos intervalos o el conjunto vacío.	Resolverá problemas que conduzcan a plantear una desigualdad cuadrática en una variable, por ejemplo: Si las ganancias de una pequeña empresa son $-x^2 + 160x - 4800$, determine el número de unidades x que producirán ganancias por lo menos de 1200.	

Cuadro 3.2

a) Octava Unidad: Sistemas de ecuaciones y de desigualdades.

b) Propósitos:

Que el alumno sea capaz de plantear problemas de su entorno cuya solución se obtenga a partir de resolver un sistema de ecuaciones o de desigualdades. Que interprete el resultado obtenido.

…..

Solución de un sistema de dos desigualdades de primer grado en dos variables,	Se abordará el método gráfico para resolver un sistema de dos desigualdades de primer grado en dos o más variables.	Resolverá gráficamente sistemas de desigualdades como: $y < 2x + 3$ y $x + y > 3$. Resolverá problemas del tipo: Un agente está arreglando un viaje en esquís. Puede llevar un máximo de 10 personas y ha decidido que deben ir por lo menos 4 hombres y 3 mujeres. Su ganancia será de \$ 10 por cada mujer y de \$15 por cada hombre. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres le producirán la mayor ganancia.

Cuadro 3.3

c) Bibliografía:

Básica:
1.De Oteyza, Elena et al., *Álgebra.* México, Prentice Hall, 1996.
2.Smith, Charles et al., *Álgebra.* México, Iberoamericana, 1992.
3.Dolciani, Mary P. et al., *Álgebra moderna I y 2.* México, Publicaciones Cultural, S.A., 1993.

Complementaria:
4.Lovaglia, Florence et al., *Álgebra.* México, Harla, 1981.
5.Swokowski, Earl W., *Álgebra universitaria.* México, Cecsa, 1992.
6.Fuller, Gordon, *Álgebra elemental.* México, Cecsa, 1994.
7.Nichols, Eugene, *Álgebra moderna.* México, Cecsa, 199 I.
8.Rich, Barnet, *Álgebra elemental.* México, McGraw-Hill, 1994.
9.Allen, R. Ángel, *Álgebra intermedia.* México, Prentice Hall, 1992.
10.Vance, Elbridge, P., *Introducción a la Matemática moderna.* México, Fondo Educativo Interamericano, S.A., 1991.
11.Drooyan, Irving et al., *Elementos de Álgebra para bachillerato.* México, Limusa, 1994.
12.Lehmann, Charles H., *Álgebra.* México, Limusa, 1995.

Cuadro 3.4

IPN-Dirección Media Superior:

Contenido y estructuración del programa

RESULTADO DE APRENDIZAJE PROPUESTO (RAP) 4: Aplicar la desigualdad lineal en la resolución de problemas.		**Tiempo estimado para obtener el RAP**	**5 hrs**
ACTIVIDADES PROPUESTAS		**RECURSOS DIDÁCTICOS PROPUESTOS**	
DE APRENDIZAJE	**DE ENSEÑANZA**	**REFERENCIAS DOCUMENTALES**	**MEDIOS Y MATERIALES EDUCATIVOS DE APOYO**
• Identificar la diferencia entre ecuación y desigualdad lineal. • Aplicar las propiedades de las desigualdades para su solución. • Realizar actividades participativas y cooperativas. • Identificar la diferencia entre desigualdades con una y dos variables. • Interpretar gráficamente la solución de las desigualdades. • Reolver problemas.	• Inducir al tema mediante el planteamiento de un problema. • Guiar a la elaboración de un mapa conceptual. • Comparar el mapa conceptual de desigualdad con el de ecuación lineal. • Presentar ejemplos de desigualdades con una y dos incógnitas. • Fomentar la participación tanto individual como grupal en la solución de problemas.	• Problemario con ejercicios desarrollado por el profesor.	• Acetatos • Pizarrón • Plumones o guises. • Borrador. • Calculadora graficadora y Programable • Cañón y un paquete de graficación.

Cuadro 3.5

Bibliografía:

Las referencias bibliográficas que se indican no hacen referencia a cada tema sino de dan como referencia para todo el curso de Álgebra.

REFERENCIAS DOCUMENTALES

No.	TÍTULO DEL DOCUMENTO	TIPO			DATOS DEL DOCUMENTO											CLASIFICACIÓN	
		Libro	Antologia	Otro (especifique)	AUTOR (ES)	EDITORIAL	AÑO DE PUBLICACIÓN 98	99	00	01	02	03	04	05	06	BASICO	CONSULTA
1	Álgebra, Libro del Estudiante	X			Academia Institucional de Matemáticas	I.P.N.								X		X	
2	Álgebra con Aplicaciones	X			Phillips, et al.	Oxford								X		X	
3	Álgebra, trigonometría y geometría Analítica	X			Smith, et, al.	Pearson								X		X	
4	Álgebra Intermedia	X			Gustavson, David R.	Thompson								X		X	
5	Algebra y trigonometría y Geometría Analítica	X			Louis Leithold	Oxford								X		X	
6	Pre-algebra	X			O´Daffey	Addison-Wesley	X									X	
7	Álgebra	X			Salazar, Ludwing	Publicaciones Cultural.								X			X
8	Algebra Superior	X			Spiegel, Murria R.	Mc. Graw Hill								X			X
9	Algebra	X			Barnett, Raymond	Mc. Graw Hill								X			X
10	Álgebra	X			Ortiz Campos	Publicaciones Cultural								X			X
11	Algebra	X			J. A Cuellar C.	Mc. Graw Hill								X			X
12	Aritmética y Algebra	X			Samuel Fuenlabrada	Mc. Graw Hill								X			X
13	Aritmética	X			Simón Mochón Cohén	Mc. Graw Hill							X				X
14	Fundamentos de Matemáticas	X			Kramer,A.	Mc Gaw Hill							X				X
15	Algebra y Trigonometría	X			Swokowski	Thompson											X
16	Guía para el usuario y manual de consulta	X			Key Curriculum Press	Key Curriculum Press							X				X
17	Matemáticas		X		Materiales didácticos SEP	SEP						X					X

Cuadro 3.6

PÁGINAS ELECTRÓNICAS

Página Web No.	DIRECCIÓN ELECTRÓNICA	DATOS DE LA PAGINA													CLASIFICACION	
		CONTENIDO PRINCIPAL Texto	Simulaciones	Imágenes	Otro	CONTENIDO VIGENTE HASTA 05	06	07	08	09	10	11	12	13	BASICO	CONSULTA
1	http://www.te.ipn.mx/webTE3/RECURSOS/asignatures/index.htm	X	X	X		X									X	
2	http://www.pntic.mec.es/Descartes/index.html	X	X	X		X									X	
3	http://math.exeter.edu/rparris/				X	X									X	
4	http://www.keypress.com/sketchpad/				X	X									X	
5	http://cmap.ihmc.us/				X	X										X
6	http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/indexactiv.htm	X	X	X		X										X
7	http://www8.pair.com/ksoft/	X	X	X		X										X
8	http://es.wikipedia.org/wiki/Categor%C3%ADa:Matem%C3%A1ticas	X		X						X						X
9	http://www.matematicas.net/paraiso/materia.php?id=ap_algebra				X						X					X
10	http://www.sectormatematica.cl/apuntes.htm	X			X						X					X
11	http://www.elprisma.com/apuntes/apuntes.asp?categoria=704	X							X							X
12	http://www.mathpower.com/tutorial.htm		X								X					X

Cuadro 3.7

PREPATEC:

Objetivos generales:

El alumno:

……

- Establecerá las diferencias entre ecuaciones y desigualdades.
- Resolverá desigualdades interpretando su solución en la recta numérica.
- …..
- Será capaz de resolver ecuaciones y desigualdades que involucren el valor absoluto.

Cuadro 3.8

Programa sintético:

TEMAS	HORAS DE CLASE
1. Ecuaciones lineales	10
2. Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas	10
3. Sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas	5
4. Radicales	10
5. Números complejos	7
6. Ecuaciones cuadráticas y polinomiales	20
8. Desigualdades	10
9. Valor absoluto	5
10. Exámenes parciales	***3***
TOTALES	**80**

Cuadro 3.9

Programa analítico:

7. Desigualdades.

7.1 7.1 7.1 Introducción y representación de conjuntos.

7.2 7.2 7.2 Definir la unión e intersección de conjuntos.

7.3 7.3 7.3 Realizar operaciones de unión e intersección entre conjuntos.

7.4 7.4 7.4 Identificar una desigualdad lineal.

7.4.1 7.4.1 7.4.1 Enunciar y comprender las propiedades de las desigualdades.

7.4.2 7.4.2 7.4.2 Conocer y utilizar la notación y simbología de desigualdades e intervalos para representar la solución de desigualdades.

7.4.3 7.4.3 7.4.3 Efectuar operaciones de unión e intersección con intervalos dados y representar la solución en la recta numérica.

7.4.4 7.4.4 7.4.4 Resolver desigualdades lineales y representar su solución en notación de conjunto e intervalo.

7.4.5 7.4.5 7.4.5 Resolver desigualdades cuadráticas.

....

8.4 Expresar las desigualdades lineales con valor absoluto como desigualdades compuestas.

Bibliografía:

Sobel Max, Norbert Lerner. Álgebra. México. Prentice Hall. 1996.
Baldor, A. Álgebra. México. Publicaciones Cultural. 1988

Silva y Lazo. Fundamentos de matemáticas. Sexta Edición. Editorial Limusa

Barnett Ziegler Byleen, Álgebra, VI edición Mc Graw Hill

Cuadro 3.10

Relativamente a las instituciones universitarias (hemos considerado especificadamente el Tec de Monterrey y la Universidad Iberoamericana) cabe decir que en el curso propedéutico al estudio del cálculo se prevé un repaso del programa de la preparatoria y por lo tanto el repaso hace referencia a las desigualdades lineales con 1 y 2 incógnitas y a las desigualdades de segundo grado (con 1 incógnita).

3. 4. Análisis de algunos libros de texto

Hemos examinado varios libros de texto que se ocupan en las instituciones escolares de México.

La mayoría de ellos se limitan a ecuaciones de primer y segundo grado.

Las desigualdades de I grado se resuelven a través de las propiedades de orden, las de segundo grado se trabajan casi siempre con el método de factorización pero luego se sigue con metodologías algebraicas o bien con el método de los valores muestra. Nunca las técnicas están fundamentadas y se explican por medio de ejemplos.

Lo mismo pasa cuando se tocan las desigualdades de grado mayor a 2 o fraccionarias.

Es interesante ver como algunos textos universitarios, después abordar el tema de las desigualdades así como acabamos de decir, al momento de utilizarlas para estudiar la monotonía de una función dan por descontado que el alumno entienda la relación entre el signo de una función y una desigualdad.

Para llevar a cabo nuestro análisis, hemos tomado en cuenta los siguientes factores:

- el peso que se le da al tema de desigualdades con respeto a los demás temas que se tratan en el texto;
- cómo se define la desigualdad;
- como se plantea el tema y, en especial: si el enfoque es gráfico y/o algebraico; qué quiere decir resolver una desigualdad;
- las tipologías de desigualdades que se consideran.

<u>Baldor – Álgebra – Edición Publicación Cultural (1997)</u>

bibliografía complementaria PrepaTec

El enfoque es completamente algebraico.
Sólo se dedica un capítulo al tema de desigualdades y sólo trata las desigualdades de primer grado.

Define el ser mayor o menor que de esta manera: “Una cantidad *a* es mayor que otra cantidad *b* cuando la diferencia es positiva. (….) Una cantidad *a* es menor que otra cantidad *b* cuando la diferencia es negativa”

Luego introduce los símbolos de mayor y menor y define que es una desigualdad (“una expresión que indica que una cantidad es mayor o menor que otra”), sus miembros, los términos, el sentido.

Enuncia las propiedades de las desigualdades (propiedades de orden) y sus consecuencias operativas (ejemplo: si cambio el signo de ambos miembros de la desigualdad también cambia su sentido)

Se define la inecuación como una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas) y que sólo se verifica para determinados valores de las incógnitas.

Dice que quiere decir resolver una inecuación (“hallar los valores de las incógnitas que satisfacen la inecuación”) y para resolverlas (sólo se trata de inecuaciones de primer grado) pone ejemplos en los que aplica las propiedades anteriormente enunciadas.

Luego pasa a examinar las ecuaciones simultaneas (siempre de primer grado). Define las inecuaciones simultaneas cómo “inecuaciones que tienen soluciones comunes”. Como técnica resolutiva se adopta la siguiente. Se resuelven las inecuaciones involucradas por separado y luego se “intuye” la solución común. (ejemplo: la primera desigualdad tiene como solución $x<2$ y la segunda $x<4$ entonces “la solución común es $x<2$, ya que todo valor de x menor que 2 evidentemente es menor que 4”)

De Oteyeza E. Hernández C., Lam E. – Álgebra - Pearson Educación, 1996

Bibliografía ENP

Desigualdades:

✓ Por medio de los números en la recta numérica explica los conceptos *de mayor de, menor de* y luego se enuncian las propiedades de orden

- pone unos ejemplos con desigualdades lineales y luego pasa a desigualdades cuadráticas que resuelve completando el cuadrado o por formula general y luego factorizando. Aquí considera que un producto es positivo cuando ambos factores son positivos o negativos de aquí saca las soluciones dejando implícito el cómo resolver dos desigualdades simultaneas.

- Después de haber visto las consecuencias de las propiedades de orden resuelve a desigualdades fraccionarias. Trabaja resolviendo la desigualdad eliminando su denominador y luego checa los dos casos “denominador mayor o menor a cero” y de aquí saca las soluciones. Todo se hace sin explicaciones. Sólo por medio de ejemplos

– Pone algunos ejemplos de problemas aplicativos (los mismos que se pueden ve con ecuaciones)

Pasamos al siguiente apartado: Desigualdades y valor absoluto. Aquí necesita de las desigualdades para resolver ecuaciones y desigualdades con el valor absoluto.

El apartado sucesivo es. Desigualdades y recta

Aquí sólo se tratan las desigualdades lineales en dos incógnitas:

- se grafica la recta y se expresa en forma implícita así que se pueda fácilmente entender que parte del plano le corresponde a $y < mx + b$ o $y > mx + b$

- Todo se trabaja por medio de ejemplos

Silva – Lazo Fundamentos de Matemáticas – Limusa (VI edición, 2005)

Matemáticas Remédiales - Tec

Empieza con unas cuantas definiciones: cuándo un número real es igual a cero, positivo o negativo; cuando un número es positivo o negativo; cuando un número real es mayor o menor de otro número. Luego se pasa a las propiedades de orden que se enuncian y demuestran.

En este punto se introduce la palabra desigualdad y, contemporáneamente, los intervalos abiertos, semiabiertos y cerrados: "Sean $x, a, b \in$Reales, diremos que *x* está entre *a* y *b* si y sólo si $a < x$ y $x < b$ donde esto se puede representar por la siguiente desigualdad continua: $a < x < b$ (…) Este tipo de desigualdad denotará un intervalo abierto que se define de la siguiente manera: *"Definición*:………"

A cada definición se le hace corresponder una recta numérica (que, por cómo se representa, podría mejor representar a dos semirrectas orientadas cuyo origen coincide: en nuestra opinión esto puede ser fuente de confusión al momento de trabajar con valores negativos)

Se pasa a *resolver* una desigualdad: primero dice qué quiere decir, luego pone algunos ejemplos de desigualdades

- Lineales por las que pide resolver y representar la solución en una recta numérica y en forma de intervalo.
  En todos los pasos de resolución se reclaman las propiedades anteriormente demostradas.

- Simultáneas de la forma $a < mx + b < c$: se resuelve de dos formas diferentes:
  - Separando las dos desigualdades y resolviéndolas como $a < mx + b$ y $mx + b < c$: la modalidad con la que se determina una solución única se deja implícita.
  - Trabajando contemporáneamente sobre los tres miembros de la desigualdad: de esta manera se llega naturalmente al resultado único.

- Fraccionarias. Aquí se trabaja eliminando el denominador y tomando en cuenta las dos diferentes hipótesis por las que el denominador es positivo o negativo.

- Cuadráticas: se explica brevemente la metodología de resolución: se expresa la desigualdad de manera que del lado derecho sólo esté el cero, se factoriza (directamente o por fórmula general) y luego:

  - si la desigualdad es >0 se toman en cuenta los dos casos: $factor_1>0$ y $factor_2>0$ junto con $factor_1<0$ y $factor_2<0$ que constituyen dos parejas de desigualdades simultaneas

- si la desigualdad es <0 se toman en cuenta los dos casos: *factor*$_1$*>0* y *factor*$_2$*<0* junto con *factor*$_1$*<0* y *factor*$_2$*>0* que constituyen dos parejas de desigualdades simultaneas

Es interesante observar como aquí para resolver las desigualdades simultáneas se introduce una representación gráfica que permite determinar el resultado final

Ej: $x \geq \frac{1}{2}$ y $x \geq -3$ entonces

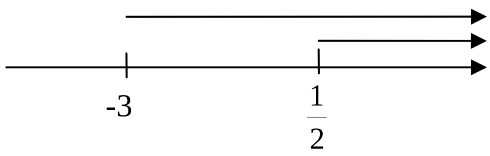
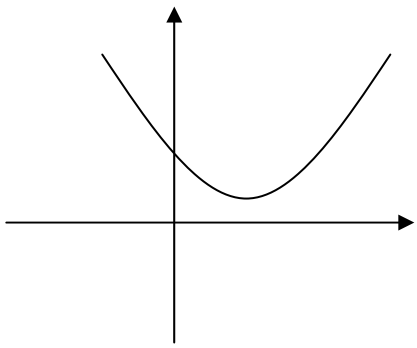


Fig. 3.1

Luego, poniendo ejemplos por los que no se puede factorizar (no hay raíces reales), pasa a interpretar la desigualdad gráficamente introduciendo la parábola (que ya se vio anteriormente): si la ecuación no tiene raíces reales entonces la parábola no corta el eje *x* y por lo tanto la gráfica está "por encima del eje de las *x* o por debajo del eje de las *x*. Entonces para este tipo de ecuaciones se tiene una de las siguientes situaciones:

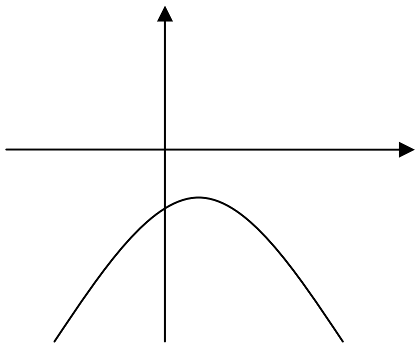


$f(x) > 0$

Fig. 3.2

La función es positiva para todo valor *x* en los reales.

Así: Si $f(x) > 0$, su solución es $(-\infty, \infty)$, o si $f(x) < 0$, su solución es Φ



$f(x) < 0$

Fig. 3.3

La función es negativa para todo valor *x* en los reales.
Así:

Si $f(x) > 0$, su solución es $\{\phi\}$ o si $f(x) < 0$, su solución es $(-\infty, \infty)$"

Valor absoluto:

- Define el valor absoluto
- Enuncia y demuestra teoremas sobre valor absoluto y desigualdades $\begin{pmatrix} |x| < a \Rightarrow ...... \\ |x| > a \Rightarrow ..... \end{pmatrix}$
- Resuelve ecuaciones y desigualdades apoyándose en la definición y en los teoremas.

Barnett Ziegler Byleen – Álgebra – VI edición – Mc Graw Hill

PrepaTec

Capitulo 2

Sección 2: Desigualdades lineales

Introduce el significado del los símbolos de desigualdad “>*: es mayor que*” y “<*: es menor que*” y se define precisamente el concepto.

Luego se da la interpretación geométrica de dichos símbolos sobre la recta real y se define que es un intervalo y luego se ve la notación de intervalos (abierto, semiabierto, cerrado). A este propósito se definen las operaciones de unión e intersección y se aplican a los intervalos.

Luego se pasa a resolver las desigualdades lineales y cómo primera cosa se determina qué es la solución de una desigualdad (conjunto solución) y se define que son las desigualdades equivalentes.

Luego se enuncian las propiedades de las desigualdades (las que anteriormente llamamos propiedades de orden) y se aplican para resolver desigualdades lineales. La solución siempre se proporciona por medio del conjunto solución (expresado ocupando los símbolos > y < o los intervalos) y de su gráfica.

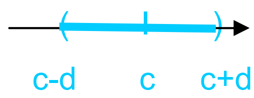
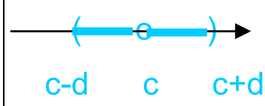
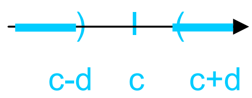
Sección 3 – Valor absoluto en ecuaciones y desigualdades

Se define geométricamente el valor absoluto (distancia) para luego llegar a su definición formal. Se proporcionan ecuaciones y desigualdades con valor absoluto que se interpretan geométricamente.

Ejemplo. Si se define $d(A,B) = |b-a| \Rightarrow |x-1| = 2$ representa los puntos (*x*) de la recta real cuya distancia de 1 es 2.

Aprovechando esta interpretación geométrica se construye una tabla para resolver las ecuaciones y desigualdades con valor absoluto.

En particular, relativo a las desigualdades encontramos:

Forma (*d* > 0)	**Interpretación geométrica**	**Solución**	**Gráfica**
$\lvert x-c \rvert < d$	La distancia entre *x* y *c* es menor que *d*	$(c-d, c+d)$	
$0 < \lvert x-c \rvert < d$	La distancia entre *x* y *c* es menor que *d*, pero $x \neq c$	$(c-d, 0) \cup (0, c+d)$	
$\lvert x-c \rvert > d$	La distancia entre *x* y *c* es mayor que *d*	$(-\infty, c-d) \cup (+\infty, c+d)$	

Tab. 3.1

Nunca se toman en cuenta situaciones del tipo: $\lvert ax+b \rvert <> cx+d$.

<u>Sección 8: Desigualdades polinomiales y racionales</u>

La sección empieza declarando que se tratarán exclusivamente desigualdades polinomiales simples (cuadráticas además de las lineales que ya se estudiaron) y racionales cuyos numeradores y denominadores son polinomios de grado uno o dos.

Luego se hace referencia a un capítulo sucesivo en el que se ve como factorizar y sacar las raíces de un polinomio de grado cualquiera.

- Con respecto a las desigualdades cuadráticas se enuncia el teorema:

"Signo de un polinomio en una recta numérica real: Un polinomio diferente de 0, tendrá un signo constante (ya sea siempre positivo o siempre negativo)

dentro de cada intervalo determinado por sus raíces reales dibujadas en una recta numérica. Si un polinomio no tiene raíces reales, entonces el polinomio puede ser positivo sobre toda la recta numérica real, o negativo sobre toda la recta numérica real".

Apoyándose en este teorema (que no se demuestra) se determinan los intervalos en los que el polinomio tiene signo constante. Se determina el signo de cada intervalo por medio de un *número de prueba*.
Se pone un ejemplo y luego se pone como síntesis lo siguiente.

Pasos a seguir para la solución de desigualdades polinomiales

Paso 1: Escriba la desigualdad polinomial en la forma estándar (es decir, una forma donde el lado derecho está igualado a 0)

Paso 2: Encuentre todas las raíces reales del polinomio (el lado izquierdo de la forma estándar)

Paso 3: Grafique las raíces reales en una recta numérica, y divida éstas en intervalos.

Paso 4: Elija una prueba numérica (que sea fácil de calcular) en cada intervalo, y evalúe el polinomio para cada número (es útil hacer una pequeña tabla)

Paso 5. Use los resultados del paso 4 para construir un cuadro de signos en donde se muestre el signo del polinomio en cada intervalo.

Paso 6: A partir del cuadro de signos, escriba abajo la solución de la desigualdad polinomial original (y dibuje la gráfica si se requiere).

- Con respecto a las desigualdades racionales lo primero es definir qué es una desigualdad racional en forma estándar ($\frac{P}{Q} < 0$ ó $\frac{P}{Q} > 0$, donde *P* y *Q* son polinomios distintos de 0) y luego se enuncia (sin demostrar) el siguiente teorema que incluye el teorema que utilizamos para las desigualdades cuadráticas.

Signo de una expresión racional en una recta numérica real: La expresión racional $\frac{P}{Q}$*, donde P y Q son polinomios distintos de cero, tendrá un signo constante (ya sea siempre positivo o siempre negativo) dentro de cada intervalo determinado por las raíces reales de P y Q dibujadas sobre una recta numérica, Si ni P ni Q tienen raíces reales, entonces la expresión racional* $\frac{P}{Q}$ *puede ser positiva sobre toda la recta numérica real o negativa sobre toda la recta numérica real.*

Se pone un ejemplo en el que se aplica dicho teorema para determinar el signo de una desigualdad racional y se subraya que las raíces del polinomio denominador nunca se tendrán que tomar en la solución porque $\frac{P}{Q}$ no estría definido en las raíces de *Q*.

Los textos que siguen pertenecen a varias bibliografías complementarias de cursos de Precálculo (normalmente llamados Métodos Cuantitativos I o Taller de Matemáticas dirigidos a estudiantes de Licenciatura de la Universidad Iberoamericana – Campus Ciudad de México)

Sobel Lerner – Precálculo. Quinta edición – Pearson 2004

Objetivo es “presentar los conceptos y las habilidades esenciales que deben desarrollarse en el álgebra así como el análisis de las funciones que se necesitarán en los estudios posteriores en matemática” (cuarta de portada)

Cáp. 1 – Fundamentos de álgebra

Se dedica un apartado a las desigualdades de I grado.

- Primero se establece la relación de orden sobre la recta real ("mayor de" es equivalente a "a la derecha de", "menor de" es equivalente a "al izquierda de")

- Luego introduce las propiedades de orden. Lo hace poniendo ejemplos como el siguiente (pág.18)

$$\left.\begin{array}{l} 8 < 12 \quad \Rightarrow \quad 2\cdot 8 < 2\cdot 12 \ \ \textbf{esto es} \ \ 16 < 24 \\ 20 > -15 \ \ \Rightarrow \ \ \frac{1}{5}\cdot 20 > \frac{1}{5}\cdot(-15) \ \ \textbf{esto es} \ \ \mathbf{4} > \mathbf{-3} \end{array}\right\} \text{El sentido se conserva}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5 < 6 \ \ \Rightarrow \ \ -2\cdot 5 < -2\cdot 6 \ \ \textbf{esto es} \ \ \mathbf{-}10 > -12 \\ 6 > -4 \ \ \Rightarrow \ \ -\frac{1}{2}\cdot 6 < -\frac{1}{2}\cdot(-4) \ \ \textbf{esto es} \ \ \mathbf{-3} < \mathbf{2} \end{array}\right\} \text{El sentido se invierte}$$

Éstos son ejemplos de la siguiente propiedad:

PROPIEDAD DE ORDEN DE LA MULTIPLICACIÓN

Para todos los números reales *a*, *b* y *c*

Si $a < b$ y c es positivo $\Rightarrow ac < bc$

Si $a < b$ y c es negativo $\Rightarrow ac > bc$

Tab. 3.2

Cáp. 2 – Funciones lineales y cuadráticas con aplicaciones

Se da la definición de función (como relación entre conjuntos) y se ven las representaciones algebraica y por tabulación: no se considera la representación gráfica.

El siguiente apartado empieza afirmando "Se puede obtener una gran cantidad de información acerca de una relación funcional si se estudia su gráfica. Uno de los objetivos fundamentales de este curso es familiarizar al estudiante con las gráficas de algunas funciones importantes, así como desarrollar los procedimientos básicos de graficación." (pág. 95)

Luego:

- Introduce el plano cartesiano: abscisa, ordenada, coordenadas, cuadrantes.
  Es interesante (y, de verdad, ¡asombra!) observar que los ejes coordenados se representan como dos semirrectas orientadas que tienen el mismo origen: esto es elemento de confusión porque atribuye sentido positivo a ambas semirrectas.

  Es decir:

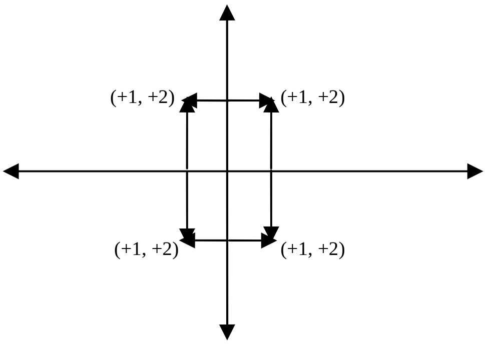


Fig. 3.4

- Define la gráfica de una ecuación estableciendo la relación entre la representación gráfica y la algebraica.

- Define la ecuación lineal (recta) y aprovecha la idea de relación entre las variables para definir la razón de cambio, la pendiente, etc.

El siguiente apartado trata las funciones lineales definidas en un intervalo específico y hace hincapié en la relación que se da entre Dominio (un cierto intervalo sobre *x*) y Rango que le corresponde (sobre *y*).

Este enfoque constituye una ayuda en relacionar oportunamente abscisa y ordenada, manejando intervalos permitiendo entender que considerar el intervalo de las $x \in [a,b]$ en el plano es diferente que considerarlo sobre una recta.

Sucesivamente se encuentra un apartado sobre la “Graficación de las funciones cuadráticas”.
Aquí se introduce la parábola (de manera no rigurosa): se tabulan unos puntos y se grafica $y = x^2$, luego se trabaja (desplazamiento, dilatación, contracción, completar el cuadrado) sobre dicha función para llegar a la gráfica de $y = ax^2 + bx + c, \quad \forall a,b,c \in \Re$ y a la fórmula general para resolver una ecuación de II grado.

<u>Cáp. 3 – Funciones polinomiales y racionales</u>

Tabulando algunos puntos y prosiguiendo por reducción se llega a graficar $y = x^3$ y luego se modifica por desplazamientos. Análogamente se procede con las demás funciones polinomiales (aún si de hecho sólo se ve la de IV grado)

En este estudio de la gráfica se hace referencia a la idea de signo de la función: $f(x) > 0$ ó $f(x) < 0 \Leftrightarrow y > 0$ ó $\mathrm{y} < 0$

Sucesivamente se pasa a las hipérbolas de tipo $y = \frac{k}{x}$ y de aquí a la hipérbola homográfica.

Se introducen intuitivamente los conceptos de asíntotas (horizontales y verticales) y la idea de *tender a*.

Después de esto se ve en el detalle cómo determinar el signo de una función (polinomial o racional).
Se empieza con las funciones cuadráticas poniendo el siguiente ejemplo:
$f(x) = x^2 - 7x + 10$ “ya que $(x-2)(x-5) = 0$ si, y sólo si, $x = 2$ o $x = 5$ necesitamos considerar los demás valores posibles de *x*.
Primero vemos que los números 2 y 5 determinan tres intervalos

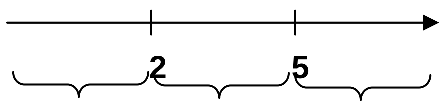


Fig. 3.5

Para establecer los signos de $f(x)$ seleccionamos un valor de prueba conveniente, dentro de cada intervalo, como sigue.

$(-\infty,2)$: valor de prueba: $x = 0$ entonces $x-2<0,\ \ x-5<0$ y $(x-2)(x-5)>0$

$(2,5)$: valor de prueba: $x = 3$ entonces $x-2>0,\ \ x-5<0$ y $(x-2)(x-5)<0$

$(5,+\infty)$: valor de prueba: $x = 6$ entonces $x-2>0,\ \ x-5>0$ y $(x-2)(x-5)>0$

Estos valores se pueden resumir en la siguiente tabla de signos:

Intervalos	$(-\infty,2)$	$(2,5)$	$(5,+\infty)$
Signo de $(x-2)$	**-**	**+**	**+**
Signo de $(x-5)$	**-**	**-**	**+**
Signo de $(x-2)(x-5)$	**+**	**-**	**+**

Tab. 3.3

Se repite el mismo proceso para monomios de grado mayor a 2 y en la tabla se añade un renglón en el que se especifica la posición de la gráfica de dicha función polinomial con respecto al eje *x*.

Se pone como ejemplo la función: $f(x)=x^3+4x^2-x-4$ cuya tabla de signos proporciona la siguiente información:

Intervalos	$(-\infty,-4)$	$(-4,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
Signo de $(x+4)$	**-**	**+**	**+**	**+**
Signo de $(x+1)$	**-**	**-**	**+**	**+**
Signo de $(x-1)$	**-**	**-**	**-**	**+**
Signo de $f(x)$	**-**	**+**	**-**	**+**
Posición de la curva en relación con el eje *x*	Abajo	Arriba	Abajo	Arriba

Tab. 3.4

Se pasa a considerar las funciones racionales y se pone como ejemplo la función. $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-3x-4}$.

Se determinan sus coordenadas al origen, se buscan las asíntotas verticales, horizontales (los métodos son empíricos y no adecuadamente fundamentados ni siquiera intuitivamente) y, finalmente, se va a determinar una tabla de signos explicando lo siguiente: "Los números para los cuales el numerador o el denominador son iguales a cero son -1, 2, 4. Determinan los cuatro intervalos en la tabla de los signos de *f.*"(Pág.193)

Sucesivamente se aplica dicho método para resolver una desigualdad pero nunca se hace explicito que resolver $f(x)>0$ ó $f(x)<0$ es equivalente a determinar los intervalos de *x* por los que *y* es >0 ó <0 y tampoco se explicita que se puede interpretar la misma tabla independientemente de la idea de función sino sólo cómo multiplicación ó división de dos cantidades $f(x)$ y $g(x)$ por las que se determina el signo en cada intervalo y que entonces proporciona el signo de $f(x)\cdot g(x)$ ó $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Ayra Lardner – Matemáticas Aplicadas, Tercera edición – Prentice Hall, 1994

En el capitulo que titula "Desigualdades" se empieza viendo conjuntos e intervalos (abiertos, semiabiertos, cerrados) y la relación de orden sobre la recta ("mayor" se entiende como "está a la derecha", "menor" se entiende como "está a la izquierda").

También en este texto la recta real se representa cómo la unión de dos semirrectas
($\longleftrightarrow$) lo que no ayuda a manejar correctamente los números negativos.

Se pasa a tratar las desigualdades lineales de una variable. Se establecen las propiedades de orden, primero proporcionando el enunciado y un ejemplo y luego demostrándolas.
Para estudiar las desigualdades cuadráticas se procede factorizando y estudiando el signo de cada factor al que sigue el signo del producto.

"$x^2 + 3x - 4 < 0$ factorizando el lado izquierdo obtenemos $(x-1)(x+4) < 0$. La expresión $(x-1)(x+4)$ es el producto de los números $x-1$ y $x+4$. Se requiere que el producto sea negativo, de modo que uno de estos factores debe ser positivo mientras que el otro debe ser negativo. Por lo tanto es claro que debemos examinar los signos de estos dos factores.

$(x-1)$ es positivo cuando $x > 1$ y es negativo si $x < 1$.
$(x+4)$ es positivo cuando $x > -4$ y es negativo si $x < -4$.

$(x-1)$ - + + + + + + + + + + +
$(x+4)$ - - - - - - - - - - + + + + + + + + + + + + + + + + + + +

- 4 **1**

Figura 6

Fig. 3.6

Los valores de *x* que determinan los signos de los factores aparecen en la Figura 6. En el intervalo $-4 < x < 1$ un factor es positivo y otro negativo. Si $x < -4$ ambos factores son negativos por lo cual el producto es positivo. Cuando $x > 1$, ambos factores son positivos, por lo que otra vez su producto es positivo. Por lo tanto, concluimos que la desigualdad $(x-1)(x+4) < 0$ es satisfecha cuando $-4 < x < 1$ y para ningún otro valor de *x*." (Pág.95)

En el siguiente capítulo se relaciona la ecuación lineal con la recta y aquí se define la relación entre gráfica de una ecuación en dos incógnitas y soluciones de la ecuación que la representa. "La gráfica de una ecuación con dos incógnitas, tales como *x* y *y*, es el conjunto de todos aquellos puntos cuyas coordenadas (x, y) satisfacen la ecuación.” (pág. 113)

Mucho más adelante, para estudiar el signo de la derivada prima, recupera el método visto para resolver desigualdades cuadráticas pero se da por descontado que el alumno entienda la relación entre el signo de una función y una desigualdad.

Haeussler Paul – Matemáticas para administración y economía, decima edición , Pearson 2003

La exposición de dicho texto es muy parecida a la de Sobel Ayra

Desigualdades lineales:
Se introduce la relación de orden sobre la recta real: “Usaremos las palabras números reales y puntos de manera indistinta ya que existe una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos que están sobre una recta” (Pág. 70)

Como en los demás textos examinados se hace corresponder el símbolo de mayor con “estar a la derecha” y el símbolo menor con “estar a la izquierda” y se enuncian las propiedades de orden que se aplican a la resolución de desigualdades lineales.
Nunca se tratan desigualdades de orden superior.

Introduciendo las gráficas de las funciones elementales se establece la relación entre gráfica de una función y soluciones de la ecuación que la representa.

Finalmente cuando, después de muchos capítulos, se trabaja con las gráficas de funciones para determinar si una función es creciente o decreciente, se necesita establecer el signo de la derivada prima y se esto se hace factorizando y estudiando el signo de cada factor (o, si se trata de una función racional, de Numerador y Denominador) y luego de la función. Este método se aplica pero su explicación se da por descontada.

Desde el examen de los planes de estudio y de los libros de texto resulta evidente que el tema de desigualdades no se considera esencial para la formación matemática de un alumno.

Dentro de los tres años de preparatoria el tema sólo aparece el primer año cuando se estudia el álgebra y se le dedican pocas horas.
El enfoque es entonces eminentemente algebraico y –por falta de tiempo– se limita a la adquisición de unas cuantas técnicas operativas que propician un aprendizaje memorístico y no significativo. Cuando se hace referencia a algún elemento gráfico y al concepto de función se da por descontado que el alumno conozca la relación entre ecuación y función.

3. 5. Los currícula en acción

Para conocer algo acerca de los currícula vividos, es decir, cómo los maestros aplican lo que prevén los currícula en su enseñanza, hemos pensado proponer a varios maestros un cuestionario a fin de testar algunos elementos clave para la enseñanza de las desigualdades.

Hemos aplicado dicho cuestionario a maestros mexicanos –que trabajan en distintas instituciones a nivel superior o medio superior– e italianos –que trabajan a nivel medio superior–.

El cuestionario es una secuencia de preguntas cuyo objetivo es estudiar cuáles son las concepciones de los profesores acerca de las desigualdades y cómo enfocan el tema a sus alumnos.

Hemos propuesto el cuestionario a 15 maestros mexicanos y a 15 maestros italianos. A pesar de que la mayoría de dichos maestros se puedan considerar docentes de vanguardia, es decir que cuidan su trabajo y tienen disponibilidad a cuestionarse acerca de las metodologías que normalmente utilizan, hemos obtenido un número de respuestas reducido. En lo específico me han contestado 9 maestros mexicanos y 6 maestros italianos.

Analizaremos las respuestas a cada pregunta sintetizando las respuestas más frecuentes y/o significativas y, cuando resulta necesario, distinguiendo entre las respuestas de maestros mexicanos y aquellas de maestros italianos.

Las preguntas son las siguientes:

1. ¿Qué es para ti una desigualdad (o inecuación)?
   En esta pregunta queremos analizar cómo los docentes definen una desigualdad para ver hasta que punto las dificultades que se encuentran en los alumnos son el fruto de una confusión en los mismos docentes.
2. ¿Has impartido alguna vez el tema de desigualdades? ¿A qué nivel escolar?
   Aquí queremos saber cuáles entre los maestros entrevistados han impartido el tema de las desigualdades y cuáles sólo lo utilizan como conocimiento previo.
3. ¿Piensas que las desigualdades representen un tema importante en el ámbito de las matemáticas? ¿Por qué?
   En esta pregunta intentamos descubrir qué idea tienen los maestros acerca de las desigualdades pidiéndoles explicar porque conciben el tema importante o no a fin de mostrar la postura personal de cada quien.
4. ¿En qué parte de las matemáticas identificas alguna función importante de las desigualdades?
   Esta pregunta representa una profundización de la anterior y nos indica en que ramas de las matemáticas los maestros ocupan (o ocuparían) las desigualdades.
5. ¿Cómo enfocas el tema de desigualdades en tu enseñanza? ¿Qué tipología de desigualdades ves con tus alumnos?

En esta pregunta queremos investigar las distintas metodologías de enseñanza del tema. Aquí es posible entender si los maestros están dispuestos a dedicar tiempo y energías para que los alumnos aprendan o si se conforman con un aprendizaje memorístico y mecánico.

6. ¿Qué dificultades has tenido en impartirles el tema a tus alumnos?
   Desde las respuestas a esta pregunta podemos detectar lo que los maestros reputan importante que los alumnos aprendan.
7. ¿Has logrado superarlas? ¿Cómo?
   Se trata de una profundización de la pregunta anterior en la que se busca conocer los intentos de los maestros a fin de mejorar el aprendizaje de sus alumnos.

Para cada pregunta anexamos una bitácora que sintetiza las respuestas más relevantes y algunos comentarios de orden general.

Pregunta 1:

¿Qué es para ti una desigualdad (o inecuación)?		
	Maestros mexicanos	**Maestros italianos**
1	***Una inecuación o desigualdad es aquella expresión en la cual se relacionan dos o más expresiones por medio de una desigualdad (<, >, ≤, ≥).***	……
2	……..	……
3	……. ***El método para solucionar estás inecuaciones lineales son muy similares a las de las ecuaciones lineales, no obstante la solución de una desigualdad es generalmente un conjunto infinito***.	……
4	***Es una ecuación que tiene un signo de desigualdad en lugar de uno de igualdad***. ***Sin embargo, no tiene las mismas propiedades.***	…….
5	……..	No entiendo si esta pregunta es para saber

		como yo definiría de forma correcta desde el punto de vista matemático una desigualdad o bien como intento de dar a entender la idea de inecuación a los estudiantes. En realidad la respuesta debería de ser idéntica pero, ***ya desde hace años, cuando explico a los estudiantes me veo obligada a dar pocas definiciones, a utilizar expresiones menos rigurosas y tal vez no del todo correctas a fin de lograr trasmitir un concepto***. Se que es algo decepcionante pero…. Creo que en este cuestionario el interés consista en conocer como intento trasmitir a los alumnos la idea de desigualdad. ***Insisto en el hecho que resolver una inecuación en una/dos variable/es significa*** determinar el subconjunto de R/R^2 que cumple la desigualdad dada. Empiezo con la sustitución de valores al azar a la/las variable/es y veo si estos verifican la desigualdad que se obtiene; luego una vez que se ha establecido que proceder por intentos al azar es incómodo, pretendo hacerlos razonar sobre el texto de la inecuación para buscar de forma más sistemática los valores que la cumplen. Introduzco la idea de resolución gráfica casi de inmediato cómo ayuda en el intento de buscar la solución mentalmente.
6	La definición a la que me reconduzco siempre es la que considera ***desigualdad e inecuación como una expresión algebraica en la que aparece algún símbolo de desigualdad (<,>,≤,≥). Es una***	Una inecuación es una relación entre dos o más variables, que en las matemáticas llamamos x, y, z,…., pero en la vida de todos los días tienen diferentes nombres. ¡En lo cotidiano es más probable tener que

	definición correspondiente a la de igualdad y ecuación (una expresión algebraica en la que comparece el símbolo de igualdad (=)). Por lo general, sin embargo, diferencio desigualdad e inecuación: inecuación tiene variables (como la ecuación con respecto a la igualdad). …..	resolver inecuaciones que ecuaciones! Quisiera que mi sueldo estuviera > de aquello de…. Quisiera gastar menos de….y tener….
7	Relacionada con la ecuación. La ecuación tiene una respuesta única mientras que la respuesta de una desigualdad es un conjunto (muchas respuestas)	
8	Relacionada con las ecuaciones. La diferencia está en la naturaleza de las soluciones	
9	….	

Tab. 3.5

Examinando las respuestas obtenidas se me han hecho evidentes tres cuestiones.

- En el uso común se ocupan indistintamente la palabra *desigualdad* y la palabra *inecuación*. Al momento de intentar una definición se ve cómo la palabra *desigualdad* resulte inadecuada ya que sólo hace referencia a una situación “de desequilibrio” entre dos expresiones algebraicas, mientras que la palabra *inecuación* hace referencia a algo más, así como se ve bien explicado en una de las definiciones que obtuvimos del cuestionario: *Una inecuación o desigualdad es aquella expresión en la cual se relacionan dos o más expresiones por medio de una desigualdad (<, >, ≤, ≥).*

  Este fenómeno no se observa en el caso de los maestros italianos porque las palabras *desigualdad* e *inecuación* (diseguaglianza e disequazione) siempre han mantenido sus diferentes significados y nunca se han ocupado como sinónimos.

- Algunas de las definiciones propuestas relacionan la inecuación con la ecuación dando a entender que se trata de operaciones con la misma naturaleza aunque no tengan las mismas propiedades. (*Es una ecuación que tiene un signo de desigualdad en lugar de uno de igualdad. Sin embargo, no tiene las mismas propiedades - Es una definición correspondiente a la de igualdad y ecuación - El método para solucionar estás inecuaciones lineales son muy similares a las de las ecuaciones lineales, no obstante la solución de una desigualdad es generalmente un conjunto infinito*). (cf. Bazzini, 1997).

  En las respuestas de los maestros italianos ninguna definición hace referencia a las ecuaciones y todas las definiciones giran alrededor de las palabras *desigualdad* e *inecuación* aunque si veremos asomarse dicha concepción de inecuación como ecuación "generalizada" al momento de hablar de los procesos resolutivos. (cf. Bazzini, 1999, Gallo y Battú, 1997).

- La última cita del apartado anterior (*El método para solucionar estás inecuaciones lineales son muy similares a las de las ecuaciones lineales, no obstante la solución de una desigualdad es generalmente un conjunto infinito*.) nos introduce a otro aspecto en él que emerge como algunos maestros definen la inecuación a través de las metodologías de resolución.

  Una docente italiana subraya como lo que se le explica a los estudiantes haya tenido que alejarse de la definición formal porque las definiciones constituyen un obstáculo al darse a entender por los alumnos *(ya desde hace años, cuando explico a los estudiantes me veo obligada a dar pocas definiciones, a utilizar expresiones menos rigurosas y tal vez no del todo correctas a fin de lograr trasmitir un concepto)*. Dicha observación resulta muy interesante porque es una clara señal de un fenómeno de alejamiento de la matemática escolar desde la matemática de los matemáticos (cf. Boero, 1997) y tiene como consecuencia el renunciar a definir la naturaleza del objeto matemático sustituyéndola con las metodologías de resolución *(Insisto en el hecho que resolver una inecuación en una/dos variable/es significa…).*

Pregunta 2:

	¿Has impartido alguna vez el tema de desigualdades? **¿A qué nivel escolar?**	
	Maestros mexicanos	**Maestros italianos**
1	Si, a nivel superior	Si, en bachillerato con enfoque científico (Liceo Scientifico)
2	Si, en el bachillerato	Si, en bachillerato con enfoque científico (Liceo Scientifico)
3	Si, A nivel de preparatoria y secundaria	Si, en bachillerato con enfoque científico (Liceo Scientifico)
4	No	Si, en bachillerato con enfoque científico (Liceo Scientifico)
5	Si, a nivel superior	Si, en bachillerato con enfoque científico (Liceo Scientifico)
6	Si, en preparatoria y carrera	Si, en bachillerato con enfoque científico (Liceo Scientifico)
7	Si, a nivel superior	
8	Si, en prepa abierta y a nivel superior	
9	Si, a nivel superior	

Tab. 3.6

Todos los docentes han impartido el tema de desigualdades o las ocupan regularmente en otros temas relacionados. Todos los docentes hacen referencia a un contexto académico de nivel superior o medio superior.

Pregunta 3:

	¿Piensas que las desigualdades representen un tema importante en el ámbito de las matemáticas? **¿Por qué?**	
	Maestros mexicanos	**Maestros italianos**
1	***Porque su tratamiento es similar pero no igual a como trabajaríamos con una ecuación, desde lo que son los despejes,***	…..

	hasta la interpretación de las soluciones	
2	Porque aparecen frecuentemente en la resolución de problemas.	Si porque se encuentran seguido en muchos campos y tipologías de problemas.
3	… herramienta de análisis para estudiar la extensión de las funciones (Dominio y Rango). También nos ayuda a tener una representación gráfica del comportamiento de una función en particular.	…..
4	***Se utilizan en muchas aplicaciones y problemas.***	Si, porque ***ayudan en darse cuenta de la diferencia entre igualdad e desigualdad***; piden razonamientos no triviales sobre todo cuando se consideran desigualdades fraccionarias o sistemas de desigualdades.
5	***Es parte de los tópicos de precálculo, necesarios para enlazar el álgebra y la trigonometría, con temas como funciones y sus gráficas, y posteriormente con el Cálculo.*** … Es un tema muy rico conceptualmente, ya que puede englobar distintas representaciones semióticas, para resolver desigualdades	Si, porque ***representan una posibilidad de conexión entre los aspectos gráfico y algebraico*** y son necesarias para afrontar el estudio del análisis matemático.
6	Por ser un instrumento imprescindible en el Cálculo.	Si, porque ***obligan a los muchachos a reflexionar en las elecciones operativas que tiene que hacer a fin de buscar el proceso resolutivo más eficiente.*** ….
7	Facilitan el razonamiento y tienen muchas aplicaciones	
8	….	
9	Se necesitan en el Cálculo	

Tab. 3.7

Todos juzgan importante el tema de desigualdades.
Muchos maestros afirman que el tema es importante por sus aplicaciones *(Se utilizan en muchas aplicaciones y problemas)* (cf. Boero, 1997); otros relacionan su importancia a la relación con las ecuaciones (*su tratamiento es similar pero no igual a como trabajaríamos con una ecuación, desde lo que son los despejes, hasta la interpretación de las soluciones; ayudan en darse cuenta de la diferencia entre igualdad y desigualdad*). (cf. Bazzini, 1999, Gallo Battú, 1997).

Otros las ven como una herramienta introductoria al análisis matemático y al concepto de función *(representan una posibilidad de conexión entre los aspectos gráfico y algebraico; es parte de los tópicos de precálculo, necesarios para enlazar el álgebra y la trigonometría, con temas como funciones y sus gráficas, y posteriormente con el Cálculo.)*
Otros aprecian el hecho que el trabajo con las desigualdades favorece la capacidad de razonamiento *(obligan a los muchachos a reflexionar en las elecciones operativas que tiene que hacer a fin de buscar el proceso resolutivo más eficiente).* (cf. Barbosa, 2003).
Por lo general no hay diferencia entre los comentarios de los maestros mexicanos e italianos: en ambos casos la mayoría de las respuestas evidencian que las inecuaciones se consideran importantes únicamente para sus aplicaciones a otros temas que los estudiantes encontraran más adelante en sus estudios. Sólo una minoría le reconoce una validez ligada al desarrollo de las habilidades lógico-deductivas (es decir, la capacidad de razonamiento)
Sin embargo se percibe una fuerte diferencia entre los currícula de los dos países por las temáticas a las que se hace referencia.

Pregunta 4:

¿En qué parte de las matemáticas identificas alguna función importante de las desigualdades?		
	Maestros mexicanos	**Maestros italianos**
1	Por ejemplo en el curso de Cálculo Diferencial e Integral, … para que el	Álgebra (inecuaciones de I y II grado), funciones exponenciales y logarítmicas,

	alumno encuentre el dominio y el rango de diferentes funciones.	estudio de función[5] en Análisis Matemático, construcción de modelos matemáticos.
2	En la Investigación de Operaciones. …	Estudio de una función.
3	La misma función lineal, … las funciones cuadráticas …	En el estudio de una función en Análisis Matemático y, por lo general, en la resolución de problemas.
4	En Programación Lineal ….	Para el estudio del dominio de una función; en la comparación entre dos funciones (ej: senx > cosx , lnx < x); en la determinación de los entornos de un punto.
5	En Precálculo, para ubicar el dominio y rango de una función En Precálculo, el comparar dos funciones y determinar en qué intervalo es mayor o menor una que otra En Álgebra Lineal, en la solución de sistemas de desigualdades lineales En matemáticas aplicadas, en particular en Programación Lineal, para precisar el espacio factible de soluciones, etc.	Análisis Matemático, PL
6	En el estudio de los conjuntos numéricos y sus propiedades, en el cálculo, en la geometría analítica.	En cualquier lado, ***siempre son útiles para desarrollar las habilidades lógicas.***
7	Problemas económicos y administrativos, PL	
8	Problemas de aplicación, PL	
9	Cálculo (dominio, def. límite) problemas de aplicación (ámbito económico, PL)	

Tab. 3.8

Los temas a los que la mayoría de los maestros hacen referencia son relativos a la programación lineal, al cálculo (prioritariamente para determinar el dominio

[5] Cuando en Italia se hace referencia al “Estudio de una función se entiende la determinación de todo lo que puede permitirnos determinar su gráfica con precisión, es decir: dominio, intersecciones con los ejes coordenados, signo, asíntotas, monotonía, máximos y mínimos, concavidad, puntos de inflexión.

de una función pero también aparece el problema de la comparación de funciones y la determinación de entornos) y problemas que piden alguna modelización. Una maestra comenta que las desigualdades *siempre son útiles para desarrollar las habilidades lógicas.*

Pregunta 5:

¿Cómo enfocas el tema de desigualdades en tu enseñanza? ¿Qué tipología de desigualdades ves con tus alumnos?		
	Maestros mexicanos	**Maestros italianos**
1	… inecuaciones de primer y segundo grado, así como inecuaciones en las cuales interviene el valor absoluto. El enfoque que le doy es relacionado a sus carreras, …	Inecuaciones de I grado: la inecuación es una balanza en desequilibrio; se introducen las propiedades de orden. Inecuaciones de II grado: gráfica de la parábola. Signo de funciones polinomiales y fraccionarias: tabla para combinar el signo de cada factor. Inecuaciones exponenciales y logarítmicas: dominio y propiedades de los operadores exponencial y logaritmo. Desigualdades irracionales y trigonométricas: método gráfico.[6]
2	…	Ocupo prioritariamente el método gráfico cuando sea posible … Para todos los demás tipos ocupo el método algebraico.
3	…	Por lo general ocupo tanto el método algebraico como el gráfico…
4	….	Ocupo el método gráfico. …
5	Las abordo algebraica y gráficamente, tratando de fluir entre ambas representaciones en los dos sentidos.	Ocupo tanto el método algebraico así como el gráfico. ….

[6] En un Bachillerato de enfoque Científico italiano (Liceo Scientifico), a lo largo de los cinco años de curso se ven todo tipos de desigualdades: algebraicas (de primer y segundo grado, de grado superior al segundo, sistemas, fraccionarias, irracionales, con valor absoluto) y trascendentes (trigonométricas, exponenciales y logarítmicas). Por esta razón no repito las tipología de inecuaciones que los maestros imparten a sus alumnos ya que todos hacen lo mismo.

	Estudiamos desigualdades de primero y segundo grado; con valor absoluto; sistemas de desigualdades lineales con una incógnita; y desigualdades racionales con una variable.	Insisto mucho sobre las desigualdades que se pueden resolver mentalmente así como $x^2+2<0$, $3^x>0$,…. y pretendo que las resuelvan rápidamente, sin cálculos inútiles. … También insisto mucho sobre la diferencia entre menor y menor-igual, mayor-mayor-igual.
6	Cuando trabajaba en preparatoria, en Italia, enfocaba el tema desde varios puntos de vista y analizaba las conexiones entre los varios enfoques. … Ahora, en la universidad, me toca casi cada año repasar las inecuaciones. Repaso todos los métodos, aunque la gran mayoría de los estudiantes conoce y se limita a utilizar el método de valores críticos e inspección. A nivel universitario extiendo el tema a las desigualdades trigonométricas y con otras funciones, de preferencia con el método gráfico y comparación de curvas.	No ocupo un método único, me gusta que los muchachos vean los recorridos, reflexionen acerca de las estrategias a utilizar. Impartir las inecuaciones también me permite regresar cíclicamente sobre argumentos ya desarrollados (gráficas de funciones canónicas…), jugar con las funciones, regresar a los obstáculos (inecuaciones irracionales, con valor absoluto).
7	Empiezo subrayando la diferencia entre ecuaciones y desigualdades y la necesidad de pensar en intervalos. Luego veo las propiedades de orden y las desigualdades de primer grado. Paso a desigualdades … y las veo con el método algebraico y el de los signos (inspección de los intervalos de signo). Luego paso a las desigualdades de segundo grado y las veo por medio de la factorización con el método de signos y luego cuando paso a funciones ya veo el signo directamente.	

8	Empiezo con desigualdades lineales y subrayo la diferencia con las ecuaciones. … Veo los teoremas de orden y luego para las ecuaciones lineales de una sola variable ocupo el método algebraico. Las desigualdades lineales en dos variables las veo con el método gráfico. …	
9	Empiezo con los teoremas de orden y trato las desigualdades de primer grado con método algebraico. Para las desigualdades de segundo grado o fraccionarias les hago determinar los puntos críticos y luego hacemos la inspección del signo en cada intervalo. Cuando vemos las funciones (parábola) les hago ver el aspecto gráfico.	

Tab. 3.9

Aquí se ve de forma clara la gran diferencia entre los currícula de Italia y los de México.

Los docentes italianos ven todo tipo de desigualdad: lineales, cuadráticas, de grado superior al segundo, fraccionarias, sistemas, irracionales, con valor absoluto, trigonométricas, logarítmicas, exponenciales. (cf. Boero, 1997, 1999). Los métodos para resolver cada tipo de desigualdad pueden ser muy diferentes pero resulta interesante cómo todos los maestros ocupan alternativamente el método algebraico y el método gráfico con el pasaje de un registro semiótico a otro a fin de favorecer un aprendizaje significativo y no sólo memorístico. (cf., Farfán, 2000, Acuña, 2001, Barbosa, 2003).

En México –cuando los currícula prevén se trate el tema de las desigualdades– sólo se ven desigualdades lineales, cuadráticas, sistemas y con valor absoluto. Sin embargo, muchos maestros subrayan la importancia de la introducción del método gráfico, aún si algunas veces esto se limita al uso de valores muestra en intervalos establecidos. De hecho este método puede resultar muy práctico ya que se puede ocupar para todo tipo de desigualdades, pero, para que se entienda bien, se necesita un buen nivel de conocimiento acerca del tema de funciones.

Pregunta 6:

¿Qué dificultades has tenido en impartirles el tema a tus alumnos?		
	Maestros mexicanos	**Maestros italianos**
1	… una de ellas es que los alumnos hacen despejes iguales a cómo los hacen con una ecuación …	Cuando enseñaba las inecuaciones irracionales y trigonométricas con los métodos clásicos (algebraicos), los conceptos se quedaban muy poco tiempo. …
2	Al establecer las *reglas* o *leyes* que las gobiernan. Al declarar una solución en forma de intervalo (abierto o cerrado).	Es un argumento que los alumnos encuentran bastante aburrido. Muchas veces no se queda clara la diferencia entre ecuación e inecuación.
3	… identificar el sentido de los símbolos, …expresarlo gráficamente sobre todo las funciones cuadráticas.	Dificultades en distinguir las diferentes tipologías y entonces resolver la inecuación con el método correcto; dificultades en comprender el sentido de las soluciones como intervalos de valores.
4	... Les cuesta trabajo pensar que en R^2 la desigualdad divide al plano en dos. También ***quieren usar las mismas propiedades de la igualdad y algunas no se pueden.*** …	Entender los diferentes métodos resolutivos para las inecuaciones fraccionarias y los sistemas.
5	En las habilidades de manejo de	***La mayor dificultad consiste en que***

	sintaxis algebraica; en el tránsito en ambos sentidos, de la representaciones algebraicas y graficas	***los estudiantes tienen la tendencia a aplicar reglas preconstituidas sin razonar acerca de lo que se les pide.*** … Confusión que los estudiantes hacen entre resolver un sistema o una desigualdad fraccionaria. …
6	Incapacidad a factorizar, ***rechazo de los métodos nuevos para limitarse al método de puntos críticos e inspección*** … El método gráfico es más interesante para ellos, sin embargo no le dedican la atención necesaria.	… Los muchachos ***tienen la tendencia a encajar todo, a resolver de forma mecánica sin reflexionar***, y con las inecuaciones esto no está bien.
7	Dificultad en el manejo algebraico. Flojera al momento de razonar. Confusión con las ecuaciones.	
8	Confusión en la aplicación de las reglas algebraicas y con el uso del simbolismo.	
9	Dificultad con el simbolismo porque se confunden con las ecuaciones.	

Tab. 3.10

Examinando las dificultades que los docentes mencionan se pueden observar varios problemas comunes entre las situaciones de México e Italia.

El primero es de orden general y consiste en el hecho que a los alumnos les cuesta trabajo razonar críticamente *(La mayor dificultad consiste en que los estudiantes tienen la tendencia a aplicar reglas preconstituidas sin razonar acerca de lo que se les pide)* (cf. Boero, 1998, Barbosa, 2003). Este problema es fuente de varias dificultades cómo la de escoger el método de resolución más adecuado para cada tipo de desigualdad, pasar de un registro semiótico a otro (gráfico-algebraico), interpretar las soluciones como intervalos abiertos o cerrados (o bien la diferencia entre mayor-menor y mayor o igual-menor y menor igual).

Lo más común para los alumnos es buscar esquemas que les permitan resolver los problemas que se les proporcionan en forma mecánica *(tienen la tendencia a encajar todo, a resolver de forma mecánica sin reflexionar)* (cf. Boero, 1998). Todo esto propicia la confusión entre ecuaciones e inecuaciones (los símbolos son diferentes pero *quieren usar las mismas propiedades de la igualdad y algunas no se pueden*) (cf. Bazzini, 1999, Gallo y Battú, 1997), el *rechazo de los métodos nuevos para limitarse al método de puntos críticos e inspección*, la confusión entre la metodología de resolución de los sistemas de desigualdades y de las desigualdades fraccionarias (problemática que se da prioritariamente en Italia donde dichas tipología de desigualdades es de uso común).

Además se detectan dificultades en el manejo del álgebra básica (despejo, factorización) que impiden un trabajo correcto desde el punto de vista del desarrollo algebraico, aún cuando se consideran casos simples. (cf. Barbosa, 2003).

Desde el análisis de las respuestas a dicha pregunta se observa de forma clara cómo independientemente del nivel de profundización requerido, los estudiantes tienen una postura de rechazo frente a un tema en que es difícil encontrar un esquema preconfeccionado válido para todos los casos. Tal vez sea por esto que en México se ha desarrollado el método de la determinación de los "*puntos críticos e inspección*" con valores muestra que –si se saben resolver las ecuaciones– permite resolver cualquier tipo de desigualdad de una forma mecánica. Esto sucede cuando, como en la mayoría de los casos, dicho método no se basa en el estudio del signo de una función, el cual se fundamenta en el concepto –aunque intuitivo– de de continuidad.

En Italia no hay tradición de este método y con frecuencias las diferentes tipologías de desigualdades se ven a través de técnicas resolutivas de tipo mecánico-memorístico, generando confusión en todos aquellos estudiantes que no aprenden a reflexionar en los pasos que van haciendo. (cf. Boero,1997, 1998, Malara, Brandolini, Fiori, 1999).

Pregunta 7:

¿Has logrado superarlas?		
	Maestros mexicanos	**Maestros italianos**
1	No puedo decir que no, pero tampoco puedo decir que si, es decir, les hago la aclaración de que no estamos trabajando con ecuaciones …	… he optado por el método gráfico, basado en: dominio, gráfica de la función y continuidad (aunque cuando todavía no he definido bien el concepto de función continua).
2	Si, o al menos eso creo. Permitiendo a los alumnos explorar distintas soluciones para *descubrir* las leyes de esas desigualdades. …	Parcialmente. Distribuyendo a lo largo de los años las distintas inecuaciones sin acumular muchas al mismo tiempo; utilizando, por cuanto es posible, la computadora para la resolución gráfica.
3	Si. Vemos varios ejemplos y casos, es importante verlo algebraicamente y compararlo gráficamente. …	Parcialmente. En muchos casos la resolución con método gráfico facilita la comprensión, además la discusión de las ecuaciones como caso particular de inecuación abre al estudiante un “punto de vista” diferente … Finalmente para superar las dificultades es necesario pedir a los estudiantes que hagan muchos ejercicios…
4	Espero que sí!!!! Pongo un énfasis especial … recalcando las diferencias con respecto a la igualdad.	Pocas veces. Busco poner en evidencia la lógica de la resolución y no una regla que se tiene que aprender de memoria, sobre todo cuando no se entiende la razón.
5	Parcialmente, con secuencias de aprendizaje; trabajo con concursos diarios	En parte. … insisto mucho en las inecuaciones inmediatas. Por ejemplo, propongo la regla para resolver las inecuaciones irracionales solamente al final, después de haber pedido a los

		alumnos que resolvieran muchas inecuaciones de forma intuitiva e inmediata … o con la ayuda de la gráfica. …
6	A veces. Con mucha paciencia y tiempo. Si no tengo tiempo, acepto el solo método de puntos críticos e inspección	No de manera completa … Depende de los grupos, de los muchachos. … insisto y tarde o temprano… las aprenden. He aprendido a conocer los obstáculos y en la enseñanza me quedo más en sus puntos débiles, les digo en dónde van a “resbalar”, en donde tienen que poner atención, que tipologías de errores han hecho sus predecesores (pero ya se que ellos también los harán)
7	No siempre. Pidiendo más ejercicio e intentando hacerlos razonar en la clase.	
8	Parcialmente. Pidiendo que hagan mucho ejercicio.	
9	Parcialmente. Les pido repetir muchos ejercicios.	

Tab. 3.11

Todos los maestros declaran haber resuelto parcialmente sus dificultades.

Algunos dedicándole al tema tiempo y paciencia, otros a través de un trabajo hecho por secuencias oportunamente construidas a fin de reforzar algunos conceptos clave en los alumnos –como por ejemplo la diferencia entre ecuación y desigualdad o el método gráfico– habituándolos a razonar y no sólo aplicar esquemas.

En Italia donde se ven muchas desigualdades sea algebraicas que trascendentes, se intenta retomar cada año escolar una tipología de desigualdad diferente para comunicar un método que se va consolidando a lo largo de los años.

Además de los resultados de dicho cuestionario hemos podido entrevistar informalmente algunos alumnos universitarios de primer semestre que cursaron con nosotros materias propedéuticas al cálculo.

De estas entrevistas nos parece poder afirmar que la mayoría de los maestros de nivel preparatoria se limitan a una exposición que se enfoca únicamente en el álgebra, utilizando una metodología de trabajo en la que sólo se examinan unos cuantos casos que llevan a técnicas resolutivas de sello memorístico. Por esta razón la mayoría de los estudiantes no se acuerda nada del tema (de hecho algunos nunca lo han visto, así como dictan algunos de los currícula que examinamos) y, los que recuerdan algo, sólo hacen referencia al método de la determinación de valores críticos e inspección con valores muestras, aplicado de forma mecánica. Muy pocos son los alumnos que manejan de forma "consciente" las desigualdades que han estudiado en preparatoria, demostrando haber logrado un aprendizaje significativo del tema. (cf. Boero, 1997, 1998, Malara, Brandolini, Fiori, 1999).

3. 6. Una mirada a la situación italiana

En los distintos países el objeto "inecuaciones" alude temas y técnicas que pueden ser bastante diferentes. Por ejemplo, en la tradición italiana y de otros países europeos, los aspectos "algebraico" y "lógico" parecen ser dominantes; esto justifica cómo el peso de las inecuaciones polinomiales de segundo grado que se tratan por reducción a $Q(x)>0$ y el uso de técnicas como la "tabla de signos", el uso de la parábola para discutir las inecuaciones polinomiales de segundo grado tengan un peso para nada marginal.

En la tradición de Estados Unidos el aspecto “funcional” de las inecuaciones es muy importante; frecuentes son las inecuaciones con otras funciones que las polinomiales; las técnicas de resolución recurren extensivamente a la geometría analítica y al concepto de “variable”. Probablemente esto depende del hecho que en las escuelas estadounidenses bajo el nombre de “álgebra” se cobija una parte importante de la geometría analítica y el estudio de las funciones propedéuticas al análisis matemático. (Boero, 1999)

Por lo que tiene que ver específicamente con la situación italiana es necesario conocer la estructura del sistema escolar del país.

Los estudios de un alumno de escuela primaria (*elementare*) tienen una duración de cinco años y los de un alumno de escuela secundaria (*media inferiore*) de tres años. El bachillerato (*media superiore*) dura cinco años y se divide en bachillerato profesional, técnico y liceo. La obligación escolar termina a los 16 años (acaba de aprobarse una ley que sube la obligación escolar de los 15 a los 16 años).

Los bachilleratos profesionales y técnicos tienen como fin preparar al alumno a una profesión (más o menos calificada) mientras que el liceo quiere preparar al alumno a los estudios de carácter superior (universitario). El liceo se divide en distintas especialidades a fin de favorecer que los alumnos empiecen a profundizar aquellas disciplinas que más les interesan o hacia las cuales tienen mejores aptitudes. El liceo puede ser *Scientifico* (de corte científico), *Classico* (de corte humanístico con el estudio de las letras clásicas), *Linguistico* (en que se estudian tres idiomas extranjeros), *Artistico* (enfocado hacia las disciplinas pictóricas o arquitectónicas), *Socio-psico-pedagogico* (cuyo enfoque está dirigido hacia las ciencias sociales y en especial hacia la pedagogía).
Al término del bachillerato hay un examen final (preparado por la Secretaría de Educación). La tipología de escuela *medio-superiore* cursada no constituye un vínculo para la sucesiva elección de la carrera universitaria.

El currículum de Matemáticas más “fuerte” es él del Liceo Scientifico aunque en todos los bachilleratos se le pone empeño a la disciplina.

Relativamente al tema de las desigualdades en los primeros dos años de curso se ven desigualdades lineales y cuadráticas y –dependiendo la tipología del bachillerato– desigualdades polinomiales de grado mayor a dos, sistemas de desigualdades y desigualdades fraccionarias. En los Liceos *Scientifico*, *Classico* y en algún bachillerato técnico se le pone también mucho énfasis a las desigualdades trigonométricas, exponenciales y logarítmicas –que se estudian entre el tercero y el quinto año–.

Los maestros consideran el tema cómo muy importante y lo retoman a lo largo de todos los cinco años del bachillerato[7].

Relativamente al enfoque con que se trata el tema normalmente prevalece el enfoque lógico-algebraico aún si en las últimas décadas se han ido considerando metodologías que toman en cuenta el aspecto gráfico-visual sin todavía llegar a poner explícitamente en juego la relación entre desigualdades y funciones.

En nuestra experiencia de enseñanza en Italia en un *Liceo Scientifico*[8] nos hemos dado cuenta de lo siguiente:

- El tema de desigualdades tiene una tradición muy fuerte y por esto los maestros hacen mucho énfasis en ello aunque cuando los nuevos currícula (experimentales, pero ya bastante difundidos en el país) no lo prevén.
- En los últimos años muchos maestros –los que más se han dejado interrogar por los cambios sociales que inevitablemente se reflejan en el universo escolar– han empezado a valorar las metodologías gráficas, particularmente con respecto a las desigualdades irracionales, trigonométricas, logarítmicas y exponenciales. Esto logra un aprendizaje significativo por parte de muchos alumnos y no se limita a un estéril

[7] Es importante observar que en Italia es usual trabajar con el criterio de la continuidad didáctica según el cual el mismo maestro trabaja con el mismo grupo: a nivel primaria y secundaria a lo largo de todos los años de estudio, en el bachillerato es usual tener un maestro en los primeros dos años y otro en los últimos tres. Sin embargo, existen situaciones específicas en las que el maestro es el mismo a lo largo de todo el ciclo de bachillerato.
[8] Liceo Scientifico Statale "G. Bruno" di Torino

aprendizaje de técnicas memorísticas que los estudiantes normalmente no retienen.

- Los maestros consideran importante el tema de desigualdades por que aparece en los currícula (reales y ocultos) y se ocupa en temas de análisis matemático como dominio y signo de una función. También se reconoce el valor de las desigualdades al momento de construir modelos matemáticos, que pero casi no se ven a nivel de escuela *media superiore* –sólo se ven ejemplos de programación lineal en escuelas técnicas de corte económico-administrativo–.

Lo que se hizo evidente en la comparación entre México e Italia relativamente al tema de las desigualdades es que los dos países siguen una diferente tradición de la que todavía no se conocen los orígenes.

Relativamente en Italia, Boero (1998) declara no conocer la historia de las desigualdades en el país pero tiene la impresión de que se trate de una tradición vieja existente desde hace un siglo.

A este tema se le da mucho énfasis y se estudia durante los 5 años del bachillerato –al menos en donde el programa de matemáticas es un programa "fuerte" – lo que educa a los estudiantes en una cierta manera de pensar y de operar.

Aunque en los últimos años el enfoque algebraico ha ido cediéndole el paso al enfoque gráfico, con o sin el auxilio de software para graficar, esto nunca se despega totalmente del aspecto algebraico que va a complementar los elementos gráficos. Esta manera de trabajar aprovecha las facilitaciones que ofrecen las herramientas visuales y, al mismo tiempo, permite que sean los estudiantes quienes se enteran de la necesidad de los procesos algebraicos para llegar a las soluciones. Este proceso favorece un aprendizaje significativo y el formarse de una manera de pensar ágil y abierta.

Un elemento de grande ayuda con respecto al cambio que se va dando en la manera de impartir el tema de desigualdades, es la investigación en el ámbito educativo que no se ha desarrollado tanto desde el punto de vista estrictamente académico sino en la práctica (sólo en años recientes las universidades han empezado a ocuparse de didáctica). Esto quiere decir que cada año muchos docentes trabajan para escribir y editar nuevos libros de texto proponiendo así a los demás su experiencia y su metodología de trabajo. Dichos textos representan una herramienta valiosa que favorece el diálogo entre los docentes que, cada año, tienen que evaluar los nuevos textos para proponerlos a sus estudiantes.

Esta gran riqueza de material didáctico, presente en el mercado, nos ayuda a entender el por qué los maestros no le hacen mucho caso a los currícula. De hecho ellos se apoyan en los textos de su preferencia –que supuestamente tendrían que basarse en los currícula– y estos, junto con la experiencia de los colegas mayores, van constituyendo lo que antes se ha definido currículo oculto.

Es cierto que muchos docentes manifiestan una fuerte resistencia a cualquier tipo de cambio y siguen dando el tema de las desigualdades prioritariamente según el enfoque lógico-algebraico aburriendo a sus alumnos y propiciando casos como los que relata Boero (1997) en donde estudiantes de primer semestre de una facultad científica que cursan Matemáticas I, no logran resolver las desigualdades que no tienen el aspecto convencional al que están acostumbrados. Hechos como esto nos permiten entender cómo, si el aprendizaje no es significativo, aunque si el tema se trata a lo largo de cinco años de estudios, sólo se quedan algunos procesos y técnicas memorísticos que demuestran su debilidad frente a problemas que se plantean en una forma diferente de lo habitual.

Analizando los cuestionarios que he propuesto a los maestros italianos hemos podido observar que para ellos las desigualdades representan algo al que no se puede renunciar aunque se cuestionan acerca de la real importancia del tema y de la manera de enseñarlo.

Las dificultades que detectan consisten prioritariamente en observar el aburrimiento de los alumnos frente al enfoque algebraico y la confusión entre ecuaciones y desigualdades. Estos hechos los han llevado a cambiar su método de trabajo valorando más el aspecto gráfico-visual hasta llegar a conectar las desigualdades con el signo de una función, aunque si nunca dejan completamente el aspecto algebraico. De esta forma han logrado superar, por lo menos en parte, las dificultades de aprendizaje de los alumnos y han podido aprovechar este método a lo largo de los cinco años de bachillerato logrando reforzar el concepto de desigualdad, empezando por las desigualdades lineales a una incógnita, hasta llegar a las desigualdades irracionales, trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.

4. Consideraciones finales

4.1. Conclusiones

Dentro de nuestro trabajo hemos podido empezar a comprobar cómo las convicciones del maestro influyen en la naturaleza del aprendizaje de los alumnos.

En la revisión bibliográfica hemos visto que dichas convicciones pueden tener orígenes distintos que van desde la concepción que el adulto tiene: de si mismo, de su profesión, de la importancia y el significado que le da a la educación –entendida aquí en su sentido amplio–; hasta llegar a las mediaciones culturales relacionadas con las matemáticas que alcanzan a los maestros a través del discurso matemático escolar que empieza en las instituciones en las que ellos mismos han estudiado y llega hasta las escuelas en las que actualmente desempeñan su labor docente. (cf. Thompson, 1992, Macotela, Flores y Seda, 2001, Crespo y Ponteville, 2002)

En nuestra investigación hemos podido enterarnos de la profunda diferencia entre el discurso matemático escolar sobre el tema de las inecuaciones, en los dos países, México e Italia, en los que decidimos llevar a cabo nuestro estudio.

En México los currícula prevén que las desigualdades sólo se vean en el curso de Álgebra que normalmente le corresponde al primer año del bachillerato y se consideran prioritariamente desigualdades de primero y segundo grado. En Italia las desigualdades se estudian a lo largo de los primeros cuatro años del bachillerato (de manera especial en el Liceo Scientifico pero también en bachilleratos de otra naturaleza) y se consideran desigualdades de todo tipo (algebraicas: polinomiales, fraccionarias, irracionales y trascendentes: logarítmicas, exponenciales y trigonométricas).

Sin embargo, a pesar de todas estas diferencias, ha sido interesante observar cómo en ambos países se presentan problemáticas afines.

Tanto en Italia como en México los alumnos tienden a confundir ecuaciones e inecuaciones. Este problema tiene raíces muy profundas ya que pensamos radique prioritariamente en no entender el significado real de los símbolos de igualdad o de desigualdad. Demasiadas veces nos encontramos con alumnos que atribuyen al símbolo de igualdad (=) el mismo sentido del símbolo de implicación ($\Rightarrow$) –es decir, de “esto” sigue “aquello”–. De esta manera, cuando se pasa a las inecuaciones y se introducen los nuevos símbolos –mayor (>) y menor (<), mayor-igual ($\geq$) y menor-igual ($\leq$)– los alumnos no tienen los elementos para comprender la diferencia entre ellos y el símbolo de igualdad, así que se limitan a aprender memoristicamente algunas técnicas de resolución y nunca entienden hasta el fondo lo que están haciendo. Esto propicia la confusión entre las dos “operaciones” –ecuación e inecuación– cuya notación es parecida, aún si su sentido es profundamente distinto (cf. Bazzini, 1997, 1999, Gallo y Battú, 1997).

En el análisis de las entrevistas que pudimos hacer a varios maestros mexicanos e italianos, se puede ver como muchas veces se hace referencia a la dificultad de los alumnos en distinguir entre ecuaciones e inecuaciones. Sin embargo, es interesante observar como los mismos maestros son los que hablan de dos “objetos” parecidos que siguen reglas diferentes. Esto nos permite entender cómo la diferencia intrínseca entre los dos “objetos” es algo en que los maestros mismos no han reflexionado, ni profundizado.

Otra dificultad común entre los dos países consiste en el hecho de que los alumnos tienen la actitud de buscar técnicas de sello memorístico a fin de resolver los varios ejercicios que se les proponen. En los dos países las técnicas son diferentes (debido a la diferencia entre los currícula) pero la postura es la misma.

Consecuencia de todo esto es que los estudiantes mexicanos llegan a la Universidad sin tener ningún conocimiento acerca de las desigualdades, mientras que sus compañeros italianos llegan con un enorme bagaje de técnicas que les causan mucha confusión y que les impiden reconocer y resolver correctamente casos triviales. (cf. Boero, 1997, 1998, Malara, Brandoli y Fiori, 1999)

También frente a esta dificultad es nuestra opinión –fundamentada en las investigaciones de Boero (1997, 1998, 1999), Farfán y Albert (1997) y Farfán (2000)– que la responsabilidad de dicha actitud se deba de atribuir en parte a los maestros.

Las motivaciones para las que el maestro se conforma con que los alumnos aprendan algunas técnicas de forma mecánica, son varias: la falta de tiempo, la facilitación de los procesos de enseñanza y evaluación o la necesidad de encuadrar mentalmente a los alumnos.

Sin embargo, atrás de todas estas motivaciones está el hecho de que, si el maestro empieza a pedir a sus alumnos trabajar razonando en lo que están haciendo y no sólo mecánicamente, inevitablemente tendrá que enfrentarse con una cierta "impopularidad", es decir, tendrá que luchar para que los estudiantes se hagan disponibles a entender verdaderamente las cosas de las que se habla y no se limiten a aprender técnicas. Es un hecho que la postura que prevé que, frente al aprendizaje, el alumno se pregunte el porque de las cosas –lo que debería de ser natural– se ha vuelto cada vez más extraña.

En este sentido, es cierto que los maestros no son ayudados por el contexto social y cultural donde desempeñan su trabajo: vivimos en una sociedad en la que se ha vuelto un valor todo lo que se puede obtener de forma inmediata, fácil y divertida así que la propuesta de un trabajo de reflexión y de esfuerzo ya no encuentra un terreno fértil. Además las instituciones escolares se alejan cada día más de una preocupación hacia el aspecto educativo, ya que tienen que enfrentar los nuevos retos de la competencia a fin de adquirir alumnos y salir con buenas evaluaciones en el mercado.

Sin embargo, esta dificultad en el uso de la razón no afecta solamente a nuestros jóvenes. Pensando en algunas platicas tenidas con varios maestros a lo largo de nuestros años de práctica docente, podemos afirmar que, la gran mayoría de las veces, son los adultos los que demuestran su falta de disponibilidad al emprender alguna forma de lucha en contra de esta actitud. Causa de esto es el intento de evitar los problemas que se tienen que enfrentar y el trabajo adicional que se tiene que hacer cuando se pide un cambio de método a los alumnos.

Todo lo que acabamos de decir tiene incidencias muy amplias en el campo educativo que, tal vez, no entra específicamente en lo que le compete a la investigación en Matemática Educativa. Sin embargo, dichos factores deben de tomarse en cuenta pues constituyen el escenario en que nos movemos, ya que las matemáticas –como se muestra en las investigaciones socioepistemológicas– se aprenden dentro de un contexto que no puede ignorar los aspectos sociales y culturales en los que se desarrolla el discurso matemático escolar.

Entrando en lo específico del tema matemático con que hemos querido llevar a cabo nuestra investigación acerca de la influencia de las convicciones del maestro en el aprendizaje –es decir el tema de las inecuaciones (o desigualdades)– nuestra revisión bibliográfica, así como la gran mayoría de las entrevistas a los maestros, nos han confirmado la importancia del método gráfico en la enseñanza de las inecuaciones. (Farfán y Albert, 1997, Boero 1997, 1998, 1999, Farfán, 2000, Acuña, 2001, Barbosa, 2003)

Es nuestro parecer que la importancia de dicho método radique en los siguientes elementos prioritarios:

- El acercamiento visual resulta “natural” para los alumnos de las nuevas generaciones, ya que viven inmersos en un contexto socio-cultural en que prevalece la cultura de la imagen en detrimento de aquellas habilidades ligadas a la capacidad de abstraer y de reflexionar.

- El enfoque gráfico cambia la centración de la actividad matemática pues lleva inevitablemente a trabajar con funciones acercando el concepto de inecuación al objeto función y, en lo particular, al signo de una función. Esto permite desarrollar un trabajo sobre el concepto de función que no se limita a una repetición memorística de su definición y, al mismo tiempo, favorece en el alumno una real comprensión de los símbolos de desigualdad e igualdad, en el momento en que aprende a “moverse” en el plano cartesiano relacionando correctamente la abscisa y la ordenada de los puntos de la función.

  Cuando se logra llevar a cabo un buen trabajo bajo este enfoque el alumno llega a relacionar los distintos registros semióticos con los que puede resolver una inecuación.

  Este aspecto facilita que los estudiantes mismos se den cuenta de la necesidad de conocer cómo afrontar el aspecto algebraico de algunas inecuaciones, para llevarlas a una forma que se pueda manejar de modo sencillo por vía gráfica (cf. Farfán y Albert, 1997), favoreciendo de tal manera que sean ellos mismos los que quieren aprender técnicas algebraicas.

- Una vez que se logre alcanzar todo esto, se vuelve posible que cada estudiante pueda escoger libremente las técnicas y los caminos de resolución que más le resultan congeniales (cf. Boero, 1997, 1999). Es nuestro parecer que este alcance se configura cómo algo muy importante, ya que favorece un aprendizaje y una forma de razonamiento creativo que contrasta la idea –tristemente muy difundida– que las matemáticas sólo tratan de técnicas y que no tienen que ver con nada de todo lo que es creativo.

4.2. Observaciones y trabajo a futuro

Tenemos la intención de seguir profundizando nuestra investigación a fin de construir un instrumento que pueda representar una “provocación” para los maestros para cambiar o, por lo menos, poner en discusión la manera con la que imparten el tema de las inecuaciones.

Dicho instrumento quiere representar un punto de enlace entre el trabajo de quienes investigan en el campo de las matemáticas educativas y el mundo de los maestros.

A tal propósito es interesante retomar los trabajos de Vinner (1995), Oliveira y Ponte (1997), Ponte (2004) en los que –con respecto a la formación de los maestros– se manifiesta la inquietud acerca de cómo transferir el trabajo de los investigadores a los maestros que desempeñan su labor docente en nuestras instituciones escolares. Se trata de un problema de dimensiones muy amplias ya que no se ha todavía investigado mucho acerca de ello y que se enfrenta con preguntas cómo: ¿qué es lo que se debe de transmitir a los maestros? ¿quién lo hace?

Esta problemática es muy importante, ya que constituye un obstáculo para la apropiación por parte de los maestros de aquellos saberes que nacen en el ámbito de la investigación en Matemática Educativa y cuyo objetivo es, entre otros, lograr la modificación de la práctica docente.

Las dificultades que se van a encontrar cuando se quiere crear un contacto entre el mundo de los investigadores y el mundo de los maestros son muchas y de distinta naturaleza.

Los maestros suelen recibir las innovaciones que vienen de la investigación en el campo de la Matemática Educativa en el ámbito de cursos de actualización que demasiadas veces consideran cómo algo totalmente inútil a que están obligados a asistir por las instituciones en las que trabajan. Sin embargo, la mayoría de los maestros considera que ya no necesitan dichos cursos, pues han terminado sus estudios y su “entrenamiento” para ejercer la profesión docente. Atrás de esta postura seguramente se encuentra una determinada concepción del propio trabajo y de las mismas matemáticas, concepciones que por cierto se forman en un contexto socio-cultural en que la figura del maestro está descalificada –y por lo tanto no se le da una adecuada recompensa salarial– y en donde las matemáticas se consideran cómo algo difícil y, al fondo, sin sentido ya que no tienen aplicaciones inmediatas.

Es un hecho que hasta los maestros, que podemos definir de vanguardia –nos referimos a todos los que tienen una preocupación educativa sincera y por esto están dispuestos a cuestionar su propia manera de actuar– nunca o casi nunca son alcanzados por el trabajo de los investigadores, ya que los cursos de actualización difícilmente se imparten en una forma que facilite la puesta en práctica de lo que se comunica. Esto puede deberse a dos causas: primero al hecho que muchas veces dichos cursos se limitan a un enfoque teórico, que se queda lejos del quehacer de un maestro; segundo a que, cuando se propone algo novedoso, esto casi siempre implica cambios que necesitan el apoyo de las instituciones escolares que demasiadas veces no tienen los recursos y/o la voluntad de dejar que sus maestros experimenten nuevas técnicas y modalidades.

Frente a la pregunta de cómo nuestro trabajo de investigación puede llegar a los maestros para apoyarlos en su quehacer cotidiano hasta llevarlos a cambiar sus prácticas habituales, no tenemos la pretensión de ofrecer una respuesta, sino queremos intentar algo que pueda por lo menos contribuir a la investigación del tema.

Lo que concretamente queremos hacer es intentar llevar los descubrimientos fruto de nuestra investigación a nivel de un instrumento didáctico que pueda utilizarse en la realidad de nuestras aulas provocando a los maestros para que se cuestionen acerca de su manera de actuar y puedan encontrar en dicho instrumento un apoyo concreto para empezar a modificar algo en su práctica docente cotidiana. Es evidente que esta herramienta se ofrece a la libertad individual de cada docente y no tiene la pretensión, y tampoco la intención, de sustituirse el cuestionamiento individual de cada uno acerca de su propio trabajo y de la manera de llevarlo adelante.

Para lograr todo esto tendremos que profundizar el análisis preliminar que constituye el presente trabajo investigando acerca de la historia de la didáctica de las desigualdades en algunos países.

Nuestro interés radica prioritariamente en descubrir cómo se ha llegado a la determinación de los currícula actuales –oficiales y ocultos– ya que representan el elemento que más determina la naturaleza del trabajo sobre el tema de inecuaciones en las aulas de México y de Italia.

Sucesivamente se podrá implementar una ingeniería didáctica que considere nuestros estudios previos como punto de partida para la fase de planeación. Esto debido que en nuestro trabajo actual –y en lo que tenemos la intención de investigar en un próximo futuro– se han estudiado las concepciones de los docentes, con particular atención al tema de las desigualdades, considerando las cuatro dimensiones epistemológica, cognitiva, didáctica y socio-cultural.

En la fase de diseño de nuestra ingeniería iremos definiendo aquellas variables didácticas que demuestran cómo la toma de decisión del profesor afecta el proceso cognitivo de sus alumnos y cómo ésta se fundamenta en las convicciones previas del profesor. Este estudio prevé la introducción de variables de control que pongan en evidencia ambos aspectos. A este propósito será particularmente interesante enfocar nuestra atención en la respuesta de los alumnos a problemas que involucren la relación entre una expresión algebraica y una gráfica en el plano cartesiano.

Otro aspecto relevante que se tendrá que tomar en cuenta al momento del diseño, será la necesidad de reproducir la ingeniería en escenarios diferentes que individualicen aquellos elementos que se pueden denominar invariantes. Este último aspecto requiere que se tome en cuenta, además de los factores estándar (la dimensión epistemológica, cognitiva y didáctica) la dimensión sociocultural, que nos permitirá atender la importancia cultural de las matemáticas en el contexto social actual, tanto de México como de Italia, ya que dicho aspecto representa sin duda un elemento que inevitablemente condiciona la comunicación y la apropiación de los diferentes contenidos.

Por otro lado, la parte predictiva buscará explicitar los comportamientos y posturas que se espera producir y observar, a fin de comprobar aquellas hipótesis planteadas en el análisis a priori.

En lo específico queremos sacar al descubierto:

- las “debilidades” de los mismos maestros acerca del tema de las desigualdades, que consisten finalmente en la falta de comprensión de su importancia desde punto de vista conceptual. Esta concepción es propiamente la que se produce como consecuencia al hecho que el tema casi no se imparte (en México) o bien se imparte de forma más o menos detallada, pero según un enfoque de sello memorístico.

- el rechazo o la dificultad por parte de los maestros en operar un cambio en las metodologías que ellos mismos han aprendido y que ya no se pueden ocupar tal cual con los alumnos de hoy.

A través de la puesta en escena de dicha ingeniería y de la sucesiva fase de validación, se van a establecer aquellos elementos que se pueden reproducir y que constituirán, por lo tanto, una base para la predisposición de un instrumento didáctico que pueda facilitar al profesor, al momento de impartir el tema de las inecuaciones, ayudándole a tomar conciencia de su importancia conceptual y del contexto socio-cultural en que se encuentra desempeñando su trabajo por medio de algunas sugerencias didáctico-metodológicas acerca de cómo organizar su enseñanza.

Bibliografía

Acuña, C. (2001). Concepciones de graficación, el orden entre las coordenadas de los puntos del plano cartesiano. *Relime 4* (3), 203-217.

Arsac, G.; Balacheff, N., & Mante, M. (1992). Teacher's role and reproducibility of didactical situations*. Educational Studies in Mathematics 23*, 5-29.

Artigue, M. (1984). *Contributions à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques. Divers travaux de mathématiques et de didactique des mathématiques*. Thèse de Doctorat d'état, Université Paris VII.

Artigue, M. (1986). Ètude de la dynamique d'une situation de classe: une approche de la reproductibilité. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7* (1), 5-62.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación, la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. & Perrin-Glorian, M. J. (1991). Didactic engineering, research and development tool: some theoretical problems linked to this duality. *For the Learning of Mathematics 11* (1), 13-18.

Ayra, J. & Lardner, R. Matemáticas Aplicadas. III edición. Prentice Hall, 1994

Baldor, A. Álgebra. XXI edición. Cultural, 2004

Barbosa, K. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Relime 6* (3), 199-219.

Barnett; Ziegler & Byleen, Álgebra, VI edición Mc Graw Hill

Bazzini, L. (1997). Riflessioni didattiche sul concetto di equivalenza per equazioni e disequazioni. En J. Philippe & M. Laurel (Eds.), *Actes de Seminaires-SFIDA X* (pp. 39-43). (Vol. III)-l'IREM de Nice, France.

Bazzini, L. (1999). Disequazioni : il ruolo del segno. En J. Philippe & M. Laurel (Eds.), *Actes de Seminaires-SFIDA XII* (pp. 7-12). (Vol. III)-l'IREM de Nice, France.

Boero, P. (1997). Inéquations: aspects didactiques, épistémologiques et cognitifs. En J. Philippe & M. Laurel (Eds.), *Actes de Seminaires-SFIDA X* (pp. 3-7). (Vol. III)-l'IREM de Nice, France.

Boero, P. (1998). Inéquations: pour une recherche pluridisciplinaire. En J. Philippe & M. Laurel (Eds.), *Actes de Seminaires-SFIDA XI* (pp. 47-51). (Vol. III)-l'IREM de Nice, France.

Boero, P. & Garauti, R. (1999). Les inéquations fonctionelles : lieu de développement et d'étude de la maîtrise des fonctions. En J. Philippe & M. Laurel (Eds.), *Actes de Seminaires-SFIDA XII* (pp. 3-6). (Vol. III)-l'IREM de Nice, France.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problèmes en mathematiques. Recherches en Didactique des Mathematiques. Vol. 4. n. 2. pp. 165-198.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques in Revue "Recherches en didactique des Mathématiques" vol 7.2 pp 33-115.

Brousseau, G. (1988): Fundamentos de didáctica de la matemática. Universidad de Zaragoza.

Brousseau, G. (1993). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. En E. Sánchez y B. G. Zubieta (Eds.), *Lecturas en didáctica de las matemáticas. Escuela francesa*. México: DME-Cinvestav [traducción de *Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques 7* (2), 33-115].

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra e I. Saiz (Comps.), *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 65-94). Barcelona, España: Paidós.

Brousseau, G. (1994). Problèmes et résultats de didactique des mathématiques. *ICMI Study 94*.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Genoble, France: La Pensée Sauvage.

Cantoral, R. & Farfán, R. M. (2003). Matemática educativa: una visión de su evolución*. Relime 6* (1), 27-40.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2005). La sensibilité a la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques 24* (2-3).

Cantoral, R. & Ferrari, M (2004). Uno studio socioepistemologico sulla predizione*,* en *La Matematica e la sua Didattica*, *Bologna, Pitagora Editrice*.- 2 (33 - 70)

Chevallard, Y. (1982). *Sur l'ingénierie didactique*. Texte préparé pour la Deuxième Ecole d' Etè de Didactique des Mathématiques. Orleáns, France.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires, Argentina: Aique (Col. Psicología Cognitiva y Educación).

Chevallard, Y. (1995). La fonction professorale: esquisse d'un modèle didactique. En R. Noirfalise et M. J. Perrin (Eds), *Actes de la VIII Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 82-122). Clermont-Ferrand, France: IREM.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques 17* (3), 17-54.

Chevallard, Y.; Bosch, M. & Gascón, J. (1995). *Estudiar matemáticas, El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona-España: Horsori-ICE Universitat de Barcelona.

Crespo, C. & Ponteville, C., (2001). Pensar en matemática para enseñar matemática. Reporte de investigación presentado en la XV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa RELME 15. Buenos Aires (Argentina), julio 2001.

De Oteyeza E.; Hernández C. & Lam E. – Álgebra - Pearson Educación, 1996

Farfán, R. M. (2000). Un estudio de funciones pretextando la resolución de desigualdades. En Cantoral R. et al., *Desarrollo del pensamiento matemático*. Trillas, México

Farfán, R. M. (2002). Matemática Educativa: un camino entre filiaciones y rupturas. En *Delgado Rubí J. M. (Ed): Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 16. Tomo 1. Chile, Lorena Impresiones (pp. 5-10).*

Farfán, R. M.; Albert, A. (1997). *Un acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades*. México: Grupo Editorial Iberoamérica (Cuadernos Didácticos, Vol. 3).

Farfán, R. M.; Montiel, G. (2005). Uno studio sulle interazioni del sistema didattico negli scenari di educazuone a distanza. *La Matematica e la sua Didattica 1*.

Gallo y Battú (1997). Quali modelli e controlli intervengono laborando su disequazioni?. En J. Philippe & M. Laurel (Eds.), *Actes de Seminaires-SFIDA X* (pp. 25-37). (Vol. III)-l'IREM de Nice, France.

Grenier, D. (1989). - Construction et étude d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale : éléments d'analyse du fonctionnement de la théorie de situations, *Recherches en Didactique des Mathématiques 10* (1), 5-60

Giussani, L. Educar es un riesgo. Almadía, México, 2006

Gonzáles V. (2004) El profesorado universitario: su concepción y formación como modelo de actuación ética y profesional. En *Revista Iberoamericana de Educación,* sección "De los lectores", http://www.campus-oei.org/revista/deloslectores/741Gonzales258.PDF, Madrid, OEI

Haeussler, P. Matemáticas para administración y economía, decima edición, Pearson 2003

Hersh, R. (1986). Some proposals for revisiting the philosophy of mathematics. En E. Tymoczko (Ed). *New directions in the philosophy of mathematics.* Boston, Birkhauser. 9-28

Johsua, S. (1996). Qu'est-ce qu'un <<Résultat>> en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques 16* (2), 197-220.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Tesis de doctorado, Cinvestav, México.

Lezama, J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 8 (3), 339-362

Macotela, S.; Flores, R. & Seda, I. (2001). Las Creencias de Docentes Mexicanos sobre el Papel de la Escuela y del Maestro. En OEI - Revista Iberoamericana de Educación, http://www.oie.es/revista.htm [julio 2001, 8].

Malara, N. A.; Brandoli, M. T. & Fiori, C. (1999). Comportamenti di studenti in ingresso all'universitá di fronte allo studio de disequazioni. En J. Philippe & M. Laurel (Eds.), *Actes de Seminaires-SFIDA XII* (pp. 13-28). (Vol. III)-l'IREM de Nice, France .

Margolinas, C., et Perrin-Glorian, M. J. (1997). Des recherches visant à modéliser le rôle de l'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques 17* (3), 7-16.

Oliveira, H., & Ponte, J. P. (1997). Investigação sobre concepções, saberes e desenvolvimento profissional dos professores de matemática. Actas do SIEM VII (pp. 3-23), Lisboa: APM

Perrin-Glorian, M. J. (1993). Questions didactiques soulevèes a partir de l'ensegnement des mathématiques dans des classes <<faibles>>. *Recherches en Didactique des Mathématiques 13* (12), 5-118.

Ponte, J. P. (2004). A formação matemática do professor: Uma agenda com questões para reflexão e investigação (intervenção no Painel "A Matemática e diferentes modelos de formação"). In A. Borralho, C. Monteiro, R. Espadeiro (Eds), A Matemática na formação do professor (pp. 71-74). Lisboa: Secção de Educação e Matemática da SPCE

Ruiz, L. (2001). Ingeniería didáctica. Construcción y análisis de situaciones de enseñanza-aprendizaje. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 14. (pp. 122-130). Grupo Editorial Iberoamérica y CLAME. México.

Sánchez J.A. (2002). Formación inicial para la docencia universitaria – OEI – Revista Iberoamericana de Educación, sección "De los lectores", http://www.rieoei.org/deloslectores/sanchez.PDF , Madrid, OEI

Sobel, M. & Lerner, R. Precálculo. V edición – Pearson 2004

Silva, J. M.& Lazo, A. Fundamentos de Matemáticas. VI edición. Limusa , 2005

Thompson, A. (1992). Teacher beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En *D. A. Grows. Handbook of Research of Mathematic Teaching and Learning.* Mac Millan Publishing Co, New York

Vinner, S. (1995). Teaching mathematics as an educational task: Teachers' views about some aspects of their professional lives. Proceedings of PME XIX (Vol. 3, pp. 328-335), Recife, Brasil.