



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
UNIDAD PROFESIONAL ADOLFO LÓPEZ MATEOS

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA DE
TELECOMUNICACIONES

TESIS

PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN PLASMA
PRODUCIDAS DE FUENTE EN MOVIMIENTO

Como requisito parcial para la obtención del grado de
Maestro en ciencias en Ingeniería de Telecomunicaciones

PRESENTA

JORGE ENRIQUE VELASCO CRUZ

ASESORADO POR

Dr. VLADIMIR RABINOVITCH LIKHTMAN



MÉXICO D.F., MARZO 2013

A mis padres

Enrique Alejandro Velasco Gil

Y

Hayne Cruz Estudillo

Pilares fundamentales en mi vida

Agradecimientos

La presente tesis es un esfuerzo en el cual, directa o indirectamente, participaron varias personas leyendo, opinando, corrigiendo, teniendo paciencia, dando ánimo, acompañando en los momentos de crisis y en los momentos de felicidad.

Quiero agradecer a mi asesor de tesis el Dr. Vladimir Rabinovitch por haberme dado la oportunidad de realizar esta tesis de maestría, por su apoyo y paciencia durante el desarrollo de esta.

Gracias al Dr. Héctor Oviedo una persona a lo que estimo por su forma de ver la vida y por sus grandes platicas de política.

Al Dr. Raúl Castillo una persona con un gran corazón, paciencia e inteligencia. Gracias por su apoyo y consejos en los momentos difíciles en la realización de esta tesis.

Quiero agradecer a mis amigos de maestría: Sol, Irina, Loyda, Ivonne, Carlos, Gustavo y al capitán Daniel, por su apoyo, las pláticas que tuvimos y el tiempo que compartimos juntos en estos dos años de escuela. Por dejarme entrar en sus vidas, por todos esos momentos tan especiales que pasamos, de los cuales nunca voy a olvidar. Les adeudo la ternura y las palabras de aliento y el abrazo de compartir con todos ustedes la factura que nos presente la vida paso a paso. Le doy gracias a dios por haberlos conocido

A Renata milla por su cariño, apoyo y eterno agradecimiento por el gran amor y la confianza que siempre me brindo, gracias por darme la fuerza para irme superando.

Agradezco de todo corazón a mis padres Alejandro y Hayne, pilares fundamentales en mi vida, a quien jamás encontrare la forma de agradecer su constante apoyo, confianza y apoyo moral que siempre he recibido de ustedes y con el cual he logrado culminar mi esfuerzo, terminando así mi maestría, que es para mí la mejor prueba de cariño y agradecimiento.

A mis hermanos Alejandro y Lorenzo por enseñarme muchas cosas, porque siempre voy a contar con ustedes, porque son personas de buen corazón. Por ser mis acompañantes en esta etapa de mi vida. Muchas gracias por todo su apoyo para alcanzar mi objetivo.

Al término de esta etapa de mi vida, quiero expresar un profundo agradecimiento a quienes con su ayuda, apoyo y comprensión me alentaron a lograr esta hermosa realidad.

Gracias.

Índice general

1. Física de Plasma	5
1.1. Propiedades y parámetros	8
1.2. Generación de energía	12
1.3. Propagación de ondas	13
1.4. Aplicaciones	15
2. Ecuaciones de Maxwell en Medios Dispersivos	18
2.1. Dispersión	18
2.2. Ecuación escalar de onda en medios dispersivos	21
2.3. Ecuaciones de Maxwell en medios dispersivos	23
3. Campo generado por una fuente en movimiento	27
3.1. Análisis asintótico	27
3.2. Representación del campo electromagnético	29
3.3. Efecto Doppler	33

4. Aplicaciones a análisis del plasma	36
4.1. Permitividad en plasma	36
4.2. Relación de dispersión	38
4.3. Velocidad de fase	40
4.4. Velocidad de grupo	42
4.5. Campo electromagnético en plasma	48
5. Ilustraciones numéricas y gráficas	51
6. Conclusiones	58
A. Método de Fase Estacionaria	60

Índice de figuras

1.1. El sol, una inmensa bola de plasma	6
1.2. Trayectoria de partículas en plasma	8
1.3. Temperatura y presión en plasma.	9
1.4. Comparación entre el perfil de temperatura y la concentración de electrones en función de la altura.	10
1.5. Fundamentos de la generación de energía magnetohidrodinámica MHD.	12
1.6. Propagación de onda ordinaria (onda O)	15
2.1. Refracción de la luz a través de un prisma.	19
2.2. Pulso en un medio no dispersivo.	20
3.1. Efecto Doppler de una fuente en movimiento	33
4.1. Permitividad eléctrica.	38
4.2. Velocidad de fase en función de la frecuencia.	39
4.3. Oscilación de los electrones	40

4.4.	Velocidad de fase en plasma.	41
4.5.	Velocidad de fase en plasma (no dispersivo).	42
4.6.	Velocidad de grupo en plasma.	44
4.7.	Comportamiento de ω_p variando la concentración de electrones N_e	45
4.8.	Comportamiento del número de onda $k(\omega)$ en plasma.	47
4.9.	Índice de refracción en plasma	48
4.10.	Representación de una fuente en movimiento	50
5.1.	Comportamiento de ω_s variando la frecuencia de la fuente en un rango de 50 KHz-300 KHz	52
5.2.	Comportamiento de ω_s con variación de velocidad en la fuente	52
5.3.	Tiempo de retardo τ_s variando el tiempo de 10 a 100 s.	53
5.4.	Tiempo de retardo τ_s con variación en la frecuencia de la fuente (304.1 KHz - 1.8 MHz).	54
5.5.	Campo eléctrico con variación de la distancia para una fuente en movimiento en un plasma.	55
5.6.	Campo magnético con variación en el tiempo para una fuente en movimiento en un plasma.	56
5.7.	Campo magnético con variación en la distancia para una fuente en movimiento en un plasma.	57

Objetivo

Obtener nuevos resultados y fórmulas para el efecto Doppler y el campo electromagnético en plasma mediante el análisis de la propagación de ondas producidas por una fuente en movimiento uniforme. Considerando problemas dinámicos en medios dispersivos.

Justificación

El plasma es un ejemplo excelente de cómo leyes físicas muy sencillas pueden dar lugar a comportamientos extremadamente complejos. En un gas sin ionizar, los átomos o moléculas interactúan entre sí sólo mediante choques individuales al azar. Entre ellos no existe otra fuerza atractiva que la gravitatoria, tan débil en este caso, debido a la pequeña masa de los objetos involucrados, que resulta despreciable. La mayoría de estas colisiones son elásticas, es decir, átomos y moléculas rebotan unos contra otros como si fueran bolas de billar. En tales choques, en general, las partículas no cambian: no se rompen, ni se deforman, ni se pegan entre sí. En un plasma, por el contrario, existen multitud de partículas libres con carga eléctrica, y este simple hecho tiene un profundo efecto en el comportamiento del “gas”.

Actualmente se dispone de una gran variedad de sistemas alternativos de comunicaciones para ser utilizados como soporte en los sistemas de transmisión tales como la fibra óptica, las comunicaciones por radiofrecuencia con antenas convencionales de microondas en radio enlaces terrestres, las comunicaciones móviles y satelitales, etc. El problema de la propagación de ondas electromagnéticas producidas por fuentes en movimiento, es un problema de interés en muchas áreas de la ingeniería y la física. Resaltan entre éstas las telecomunicaciones satelitales, las comunicaciones aeroespaciales, la teoría de radares, la física nuclear y la relativista. Debido a los comportamientos colectivos en el plasma por los campos electromagnéticos, se pueden desarrollar una amplia gama de oscilaciones y ondas en las frecuencias acústicas, de radio y ópticas. Estas ondas se pueden dividir en dos grupos. El primer grupo se relaciona con las oscilaciones de los iones. El segundo grupo depende de la oscilación de los electrones. Estas ondas electromagnéticas se propagan en el plasma. Aunque existen resultados que describen dichos procesos de propagación, la mayoría de las investigaciones referentes a este tema consideran

fuentes en medios no dispersivos. La radiación electromagnética de fuentes en movimiento es un problema clásico de electrodinámica. Para medios no dispersivos e isotrópicos la solución de este problema está dada por los potenciales de Lienard-Wiechert. Para medios dispersivos los potenciales de Lienard- Wiechert no son aplicables. La representación de campos con una fuente en movimiento es una herramienta nueva y efectiva para problemas dinámicos en la propagación de ondas electromagnéticas. Lo anterior sirve como argumento para justificar lo que busca este trabajo, que es desarrollar a partir del método de fase estacionaria en medios dispersivos un modelo con el que se pueda determinar y analizar la propagación de ondas producidas por una fuente en movimiento en el plasma, sin importar la concentración de electrones. Para ello se hace necesario el uso de los parámetros del plasma que representan propiedades importantes para analizar el medio.

Resumen

Para el análisis de la propagación de ondas electromagnéticas producidas por una fuente en movimiento en plasma se muestran fórmulas asintóticas empleando el método de fase estacionaria en términos de los tiempos de retardo y corrimientos Doppler, las cuales tienen un significado físico explícito y son muy convenientes para cálculos computacionales del problema. El plasma depende de la concentración de electrones aunque no todos los plasmas tiene la misma. Para considerar la propagación de ondas, se analizaron los parámetros del plasma para cierta concentración de electrones ya que no todas las ondas son propagadas en el medio. Por ello se utilizó un rango de concentración electrones y se observó qué frecuencias se transmitían en el medio. Mediante el uso del software Mathematica se resolvió un sistema de ecuaciones para el tiempo de retardo τ y la frecuencia de retardo ω . Se muestran los resultados numéricos en los cuales se obtiene el comportamiento de los campos en el plasma.

Abstract

For the analysis of the the propagation of electromagnetic waves produced by a source in motion in plasma asymptotic formulas using the stationary phase method are shown in terms of time delay and Doppler shifts, which have an explicit physical meaning and are very convenient for computational calculations of the problem. The plasma depends on the electron concentration but not all plasmas have the same one. In order to consider the wave propagation, the plasma parameters were analyzed for certain concentration of electrons, since not all waves are propagated in the medium. For this purpose, an electron concentration range was used and we observed which frequencies were transmitted in the medium. Using the Mathematica software a system of equations for time delay τ and frequency delay ω was solved. Numerical results are shown where the behavior of the fields in the plasma is obtained.

Introducción

En el estudio de la propagación de las ondas electromagnéticas, las leyes de Maxwell ocupan un lugar primordial para justificar dicha propagación. Partiendo de las leyes de Maxwell, y dependiendo de las características del medio en él que se encuentren las ondas, se derivan diferentes leyes para describir su propagación. El concepto de plasma fue usado por primera vez por Irving Langmuir (1881-1957).

La propagación de ondas electromagnéticas producidas por una fuente en movimiento es un problema de interés en muchos campos de la ingeniería, la física teórica y aplicada. Los resultados de dichas investigaciones hallan aplicación práctica en muchas áreas científico-tecnológicas entre las que podemos destacar las siguientes:

- Comunicaciones Aeroespaciales
- Radares
- Comunicaciones Satelitales
- Ingeniería de plasma
- Radioastronomía
- Física Nuclear
- Física Relativista

Existen numerosas investigaciones referentes al tema de estudio. entre las primeras, se encuentran aquellas relacionadas con la radiación producida por

partículas cargadas en movimiento, particularmente en los bien conocidos resultados de Liénard-Wiechert los cuales describen los campos producidos por una partícula cargada moviéndose con velocidad relativista y los resultados de Larmor para movimiento no relativista, ver [18],[19]. En ambos casos, los campos en el punto r para un instante t producidos por una partícula cargada con trayectoria r_0 y velocidad v , dependen de los campos generados por la partícula en el instante anterior a t conocido como tiempo de retardo $t' = t - \frac{r'}{c}$ debido al tiempo que toma la propagación entre la fuente y el punto donde interesa el campo, donde $r' = |r - r_0(t')|$. Así los potenciales Lienard-Wiechert son conocidos también como potenciales retardados. Sin embargo, estas investigaciones se basan en el movimiento de una fuente en todo el espacio vacío.

Otra de las investigaciones de las fuentes en movimiento analiza el efecto Doppler, el cual es una de las aplicaciones más importante en los radares. El efecto Doppler consiste en el cambio de frecuencia de acuerdo al movimiento relativo entre la fuente y el observador. Este movimiento puede ser de la fuente, del observador o de los dos. Podríamos decir que el efecto Doppler asume la frecuencia de la fuente como una constante pero depende de las velocidades de la fuente y del observador. Por la medida del efecto Doppler es posible determinar la velocidad de aproximación o alejamiento de un objeto con respecto al observador. La radiación de una fuente con una frecuencia ω_0 , de manera general, si $\omega > \omega_0$ la fuente se acerca al receptor y $\omega < \omega_0$ la fuente se aleja del mismo. La frecuencia con que se percibe la radiación de la fuente depende directamente de la velocidad. Entonces es posible determinar la velocidad con que ésta se mueve. Esto ha sido aplicado ampliamente en el diseño de radares para la detección de objetos móviles, en astronomía para determinar el movimiento de objetos astronómicos distantes (corrimiento al rojo), en los sistemas de navegación de los vehículos espaciales, etc. Particularmente en el ámbito de las comunicaciones satelitales, el efecto Doppler es de suma importancia pues es bien sabido el hecho de que la señal que transmite un satélite no geoestacionario difiere en frecuencia con respecto a la señal que recibe una estación terrena, por lo tanto dicho fenómeno debe ser considerado en general siempre que exista movimiento con grandes velocidades por parte de una fuente de radiación.

Otro fenómeno muy interesante, también relacionado con las investigaciones referentes a fuentes con movimiento es el fenómeno de Vavilov-Cherenkov (ver [6], [17], [25]), el cual establece que cuando una partícula cargada se mue-

ve con velocidad constante v a través de un medio transparente, emite ondas electromagnéticas con un espectro continuo y una distribución angular específica. Sin embargo, la radiación con una frecuencia cíclica ω ocurre sólo si la rapidez de la partícula v supera a la velocidad de la luz en un medio transparente dado, esto es $v > c/n(\omega)$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío, y $n(\omega)$ es el índice de refracción para dicho medio, $v_f = c/n(\omega)$ es la velocidad fase. Dicho fenómeno particularmente es la radiación emitida por un medio bajo la influencia del campo producido por una partícula que se mueve en él. Algunas aplicaciones prácticas de este fenómeno son las detección de partículas cargadas de alta energía, detectores de intensidad de rayos cósmicos, detectores de neutrinos, etc. Cabe mencionar que dicho fenómeno es de mucha actualidad como lo demuestran las numerosas publicaciones referentes al tema (ver, por ejemplo [2], [8], [32], [38]).

En lo que respecta a las investigaciones en cuanto a fuentes en movimiento en plasma, cabe mencionar que existen trabajos clásicos, [1], [17], [22], los cuales tratan el problema de la propagación de ondas electromagnéticas en dicho medio pero consideran sólo el problema estacionario. Algunos trabajos de actualidad en torno al tema son [12], [21], [29], [30], [33], los cuales tratan temas como oscilaciones en plasmas complejos, fenómeno que se refiere a la radiación producida por un plasma cuando la velocidad de la carga en movimiento excede la velocidad del sonido en el medio (un fenómeno similar a la radiación Cherenkov pero para el caso acústico). Debe notarse que el efecto de Vavilov-Cherenkov no puede presentarse en un plasma dado que la velocidad de fase de la luz en dicho medio es mayor que la velocidad de fase de la luz en el vacío y entonces, la fuente tendría que viajar más rápido que c . Las aplicaciones del análisis de los mecanismos de propagación en plasma van desde la propagación ionosférica, la comunicación con vehículos aeroespaciales y el diseño de antenas de plasma, hasta la radioastronomía y la física nuclear.

Aunque, como se puede observar, existen numerosas investigaciones en cuanto al tema de fuentes en movimiento debido a su importancia, la mayor parte de ellas trata los fenómenos aislados, o bien medios simples con fuentes en movimiento o medios complejos con fuentes estacionarias.

Por lo tanto el tema de investigación que aborda esta tesis, el cual consiste en el estudio de la propagación de ondas electromagnéticas producidas por una fuente en movimiento en plasma, resulta muy interesante desde el punto

de vista científico-tecnológico.

La tesis se desarrolla de la siguiente manera.

En el Capítulo 1, dado que el plasma es uno de los materiales más complejos en el análisis de sus propiedades y características, se describe de manera general y se presentan las propiedades que lo caracterizan y se comenta sobre la importancia que estos materiales tienen, así como su aportación al conocimiento.

En el Capítulo 2 se presenta la teoría usada en esta tesis: Las ecuaciones de Maxwell para medios dispersivos, se describe de manera general la dispersión, se analiza la ecuación de onda en este medio considerando una fuente en movimiento y se desarrollan las ecuaciones para dicho medio.

En el Capítulo 3 se describe el campo generado por una fuente en movimiento. Se menciona de manera general el efecto Doppler. Se hace una pequeña descripción del análisis asintótico a considerar de nuestra fuente en movimiento y por último se presentan las fórmulas del campo producido por una fuente en movimiento.

En el Capítulo 4 se describen las propiedades y se muestran los comportamientos gráficos del plasma; se considera la concentración de electrones del medio y se analiza que tipos de frecuencias se propagan en el medio. Se muestra el resultado del sistema de ecuaciones de la fase estacionaria para tiempo de retardo y frecuencia de retardo de una fuente en movimiento. Se presentan las expresiones del campo eléctrico y magnético en dicho medio.

Por último se presentan una valorización de los resultados obtenidos teóricamente y las conclusiones correspondientes a las que se han llegado.

Capítulo 1

Física de Plasma

Para nuestros más primitivos antepasados, tanto el Sol en el cielo diurno como las estrellas o la claridad difusa de la Vía Láctea de noche eran objetos claramente diferentes a la tierra que pisaban, desprovista de toda luminosidad propia. Incluso tras comprender con el paso del tiempo la naturaleza de la luz reflejada por la Luna y los planetas, la aparente inmutabilidad de las restantes luces celestiales era un misterio. Por contraste, todos los prodigios luminosos que tenían lugar al alcance de la mano, resultaban ser fenómenos transitorios. Era el caso del relámpago, la aurora boreal, el fuego de San Telmo o la llama de una hoguera (descarga de efecto corona electroluminiscente provocada por la ionización del aire dentro del fuerte campo eléctrico que originan las tormentas eléctricas). Fenómenos todos ellos caracterizados por su calidad efímera, su movilidad, su imprevisibilidad y su color, que nos han intimidado y fascinado por igual desde hace milenios, pero que, aunque también inexplicables, parecían tener poco en común con los fenómenos celestiales. Es tan sólo en nuestra historia reciente cuando todos estos portentos luminosos, tanto los astronómicos como los terrestres, pueden ser descritos con un nombre común, ese nombre es plasma. Un plasma es un estado de la materia dinámico, regido por leyes físicas relativamente sencillas pero que, aplicadas a ingentes cantidades de partículas en movimiento, conducen a una serie de complejos comportamientos que no son fáciles de develar. Ciertamente, no hay resultados fáciles que desentrañar para el ser humano, quizá porque el plasma no es nuestro entorno natural. Sobre nuestro planeta, con la excepción de las capas superiores de la atmósfera, que también pueden

ser consideradas un plasma, las condiciones necesarias para ponerlo de manifiesto ocurren sólo en situaciones muy concretas y generalmente de corta duración. Son situaciones en las que, de forma local, se proporciona a la materia, natural o artificialmente, la energía necesaria para alcanzar ese efímero cuarto estado. Una forma de suministrar esta energía es a través del aumento de la temperatura, pero altísimas temperaturas son necesarias para arrancar electrones de los átomos. La investigación de fenómenos eléctricos. Llevó a entender el mecanismo que hace brillar a la aurora boreal.



Figura 1.1: El sol, una inmensa bola de plasma

Dentro del tubo de una lámpara hay plasma que contiene iones de argón y de mercurio (y también muchos átomos neutros de esos elementos). Cuando se enciende la lámpara, un alto voltaje entre los electrodos de cada extremo del tubo hace que fluyan los electrones. Esos electrones ionizan algunos átomos y forman plasma, que suministra una trayectoria conductora que mantiene fluyendo a la corriente eléctrica. De igual modo, el gas neón de un letrero luminoso se transforma en plasma cuando un bombardeo de electrones ioniza sus átomos.

Las auroras boreal y austral son plasmas brillantes en la atmósfera superior. Las capas de plasma de baja temperatura rodean a toda la tierra. A veces llegan lluvias de electrones del espacio exterior y de los cinturones de

radiación entran por las "ventanas magnéticas" cerca de los polos terrestres, chocando con los estratos de plasma y produciendo luz.

Las capas de plasma, que se extienden unos 80 kilómetros hacia arriba, forman la ionosfera y funcionan como espejos de ondas de radio de baja frecuencia. Las ondas de radio de mayores frecuencias, y las de TV, atraviesan la ionosfera. Es la razón por la que se puede captar estaciones de radio de grandes distancias en la radio AM de baja frecuencia. Esto se debe a que las capas de plasma se asientan y se acercan entre sí, en ausencia de la energía de la luz solar, y en consecuencia son mejores reflectores de las ondas. El estado plasmático todavía lo podemos subdividir en algunos cuantos grupos más:

- **Plasma común:** las capas de electrones de los átomos son parcialmente deterioradas (debido a una alta temperatura o presión). Los electrones libres son responsables de las características plasmáticas de la sustancia en cuestión.
- **Plasma termonuclear:** Las capas electrónicas de los átomos no existen, la sustancia es una mezcla de núcleos "pelados" y electrones libres. En este estado se encuentra el plasma en los núcleos de las estrellas, donde se da lugar la síntesis termonuclear.
- **Plasma de nucleones:** Debido a muy altas temperaturas o presiones, los mismos núcleos atómicos son despedazados. La materia es una mezcla de electrones, protones y neutrones. Los plasmas nucleónicos se manifestaron a los 10^{-5} s después del comienzo del Universo, donde los quarks crearon los primeros protones y neutrones. Encontramos también este tipo de plasma en las capas exteriores de una supernova explotando, donde su comienzo desarrolla una onda de choque de gas presionado. En esta capa por un corto tiempo tienen lugar disturbios en las reacciones termonucleares, que dan lugar a elementos pesados.
- **Plasma de Quarks-gluones:** en altas energías los nucleones mismos se desmenuzan en sus constituyentes: los quarks y los gluones. En ese estado se encontraba la materia quizá hasta el primer décimo de microsegundo después del comienzo del Universo y artificialmente se logró reproducir este estado de la materia en el CERN (Consejo Europeo para la Investigación Nuclear) en el año 2000.

1.1. Propiedades y parámetros

El plasma es un ejemplo excelente de cómo leyes físicas muy sencillas pueden dar lugar a comportamientos extremadamente complejos. En un gas sin ionizar, los átomos o moléculas interactúan entre sí sólo mediante choques individuales al azar. Entre ellos no existe otra fuerza atractiva que la gravitatoria, tan débil en este caso, debido a la pequeña masa de los objetos involucrados, que resulta despreciable. La mayoría de estas colisiones son elásticas, es decir, átomos y moléculas rebotan unos contra otros como si fueran bolas de billar. En tales choques, en general, las partículas no cambian: no se rompen, ni se deforman, ni se pegan entre sí. En un plasma, por el contrario, existen multitud de partículas libres con carga eléctrica (iones y electrones), y este simple hecho tiene un profundo efecto en el comportamiento del gas. Dos partículas cargadas experimentan una fuerza entre ellas proporcional al producto de sus cargas, que disminuye proporcionalmente al inverso del cuadrado de la distancia que las separa ($\frac{1}{d^2}$). Por otra parte, las corrientes eléctricas creadas por las cargas al moverse ocasionan intensos campos magnéticos que interactúan con las demás cargas, con una intensidad que decrece también con $\frac{1}{d^2}$. El efecto combinado de estas fuerzas se manifiesta en el movimiento de las partículas. Las partículas neutras en el seno de un plasma se desplazan siguiendo trayectorias rectilíneas entre choque y choque (Figura 1.2a), mientras que las partículas cargadas seguirán un recorrido determinado por las fuerzas de atracción y repulsión a distancia, intercalado de vez en cuando por los choques individuales (Figura 1.2b).

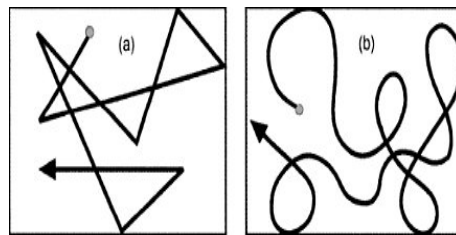


Figura 1.2: Trayectoria de partículas en plasma

Los electrones son los verdaderos protagonistas del plasma, y deben ese protagonismo a un hecho muy simple: tienen la misma cantidad de carga en negativo que un ión en positivo, pero una masa mucho menor. Esto tiene dos repercusiones vitales para el comportamiento del plasma. El primer

punto clave es que las partículas eléctricas reaccionan al campo eléctrico sólo en función de su carga. Es decir, la fuerza eléctrica que empuja (en direcciones opuestas) tanto al ión positivo como al electrón negativo tiene la misma magnitud, pero debido a su poca masa, los electrones experimentan una aceleración mucho mayor, y con ello aumentan su velocidad. El segundo punto clave es qué hacen los electrones con ese exceso de energía cinética. Al considerar el conjunto de electrones y partículas pesadas en un plasma, se entiende que sea difícil establecer el equilibrio entre las respectivas distribuciones de energía. El número de impactos aumenta al aumentar la densidad de partículas, es decir, la presión [11]. Estas dos ideas anteriores permiten establecer una primera clasificación, atendiendo a la temperatura, que engloba buena parte de los plasmas existentes: los plasmas térmicos y los plasmas fríos. Los *plasmas térmicos* poseen mayor grado de ionización y se producen a mayor presión, de forma que el gran número de impactos entre electrones y partículas pesadas (o sea, todo lo que no son electrones) hace que ambas temperaturas se igualen [11]. Los *plasmas fríos* son, en general, plasmas a baja presión y poco ionizados, donde los electrones se caracterizan por tener una temperatura mucho mayor que las partículas pesadas, lo que produce una clara situación de desequilibrio térmico [11]. Pese a la elevadísima temperatura de los electrones, se podría tocar un plasma frío con el dedo sin experimentar siquiera una ligera quemadura. En el siguiente gráfico se puede ver el paso paulatino de una situación a otra en función de la presión.

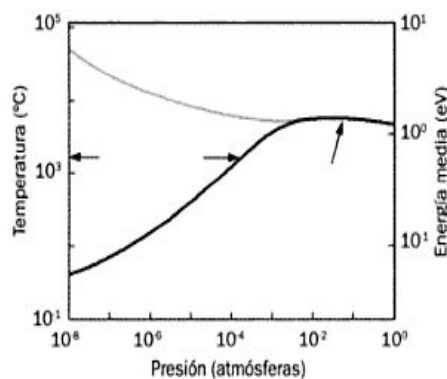


Figura 1.3: Temperatura y presión en plasma.

Esto es lo que hace de estos plasmas un medio muy excitado desde el punto de vista químico. El plasma en condiciones naturales o en equipos de laboratorio se caracteriza por parámetros que difieren en varios órdenes

de magnitud en diferentes casos. Así, la concentración de electrones en un medio interestelar generalmente varía en el intervalo de $10^{-3} \leq N \leq 10$ *electrones/cm³* (el valor $N \sim 10$ se aplica a las nubes de gas interestelar). En la corona solar $10^4 \leq N \leq 3 \cdot 10^8$; en el espacio interplanetario $N \sim 1-10^4$ (este último valor se aplica a las corrientes más poderosas de partículas expulsadas por el sol). En la ionosfera de la tierra $10^3 \leq N \leq 3 \cdot 10^6$. En un aparato para la utilización controlada de reacciones termonucleares $N \sim 10^{15}$, mientras que para un número de dispositivos de descarga de gas típica el valor es $N \sim 10^{12}$. Finalmente, para la concentración de conducción de electrones en metales $N \sim 3 \cdot 10^{22}$ y es precisamente esta concentración la que es pertinente cuando los conceptos de plasma se aplican a los metales [6]. El segundo parámetro que caracteriza al plasma es la concentración de partículas neutras N_m o el grado de ionización $r = N/N_m$. En la ionosfera de la Tierra: en la capa inferior D, $N_m \sim 10^{15}$ y $r \sim 10^{-11} - 10^{-12}$; en la capa E, $N_m \sim 10^{12}$ y $r \sim 10^{-7}$; y en la capa F, $N_m \leq 10^{10}$ y $r \leq 10^{-4}$. Es importante señalar que a pesar de que están sin consolidar, estas

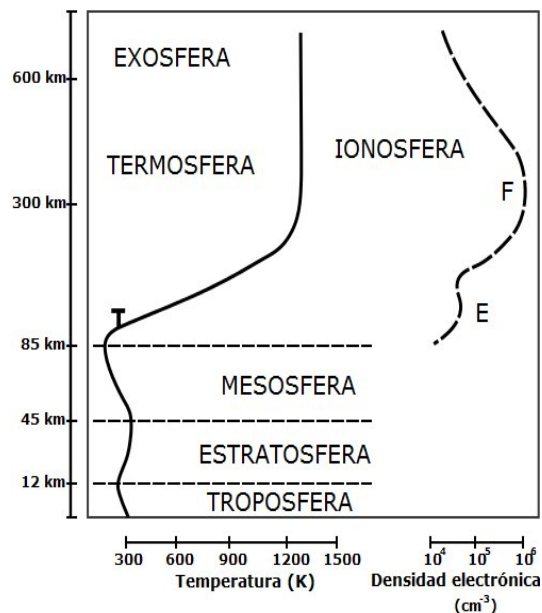


Figura 1.4: Comparación entre el perfil de temperatura y la concentración de electrones en función de la altura.

partículas no son "libres". Cuando las cargas se mueven generan corrientes eléctricas con campos magnéticos, y como resultado, se ven afectadas por los demás campos. Esto rige su comportamiento colectivo con muchos grados de

libertad. Los principales parámetros del plasma son los siguientes:

1. Neutralidad y especies presentes: el plasma está formado por igual número de cargas positivas y negativas, lo que anula la carga total del sistema. Los plasmas más comunes son los formados por electrones e iones. En general puede haber varias especies de iones dentro del plasma, como moléculas ionizadas positivas y otras que han capturado un electrón y aportan una carga negativa.
2. Longitudes: la longitud de Debye o de apantallamiento electromagnético representa la distancia máxima a la cual pueden separarse las cargas en el movimiento térmico de las partículas. Es decir, permite determinar las dimensiones espaciales típicas en las que es posible la desviación de la neutralidad eléctrica. La longitud de Debye está determinada por la densidad electrónica (n) y la temperatura electrónica (T) y viene dada por la relación:

$$\lambda_D = (kT/4\pi ne^2)^{1/2} = 7,43 \times 10^2 T^{1/2} n^{-1/2} \text{cm}.$$

k es la constante de Boltzman.

e es la carga del electrón.

3. Frecuencia de plasma: describe sus tiempos característicos. Supóngase que en un plasma en equilibrio y sin densidades de carga se introduce un pequeño desplazamiento de todos los electrones en una dirección. Estos sentirán la atracción de los iones en la dirección opuesta, se moverán hacia ella y comenzarán a oscilar en torno a la posición original de equilibrio. La frecuencia del plasma de los electrones es:

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}\right)^{1/2}$$

m_e es la masa del electrón.

e es la carga del electrón.

n_e es la densidad del electrones. Físicamente ω_p define una frecuencia mínima por debajo de la cual las ondas electromagnéticas no pueden propagarse en un plasma.

1.2. Generación de energía

En las tres últimas décadas, la investigación sobre la fusión termonuclear ha estado íntimamente ligada al estudio y entendimiento de los plasmas, y en cierto sentido han formado necesariamente una unidad. Se ha tenido que ir desarrollando la física de los plasmas necesaria para avanzar en el diseño y entendimiento de los experimentos de fusión. Un plasma a gran temperatura es lo que escapa de los motores a reacción (los motores cohete). Es un plasma débilmente ionizado pero, cuando se le agregan cantidades pequeñas de sales de potasio o de cesio metálico, se vuelve muy buen conductor, y cuando se dirige hacia un imán genera electricidad. Es la energía MHD, interacción magnetohidrodinámica entre un plasma y un campo magnético. La energía MHD, poco contaminante, está ahora en su etapa de desarrollo, y funciona ya en algunos lugares del mundo. Cabe esperar que aumente más la generación de energía eléctrica con MHD.

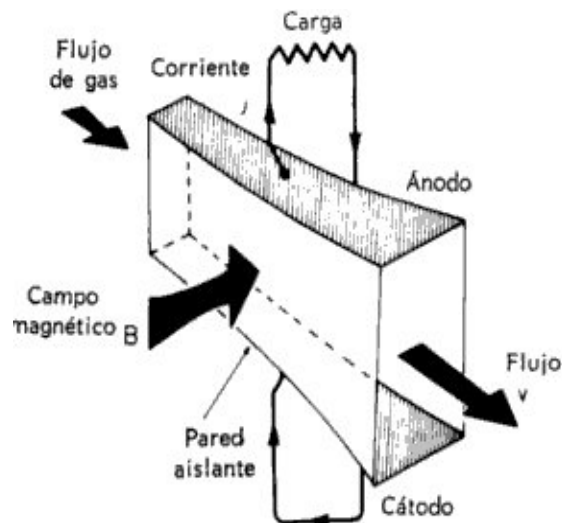


Figura 1.5: Fundamentos de la generación de energía magnetohidrodinámica MHD.

Los plasmas no suelen existir en la naturaleza, salvo en los relámpagos, que son trayectorias estrechas a lo largo de las cuales las moléculas de aire están ionizadas. Los plasmas pueden crearse aplicando un campo eléctrico a un gas a baja presión, como en los tubos fluorescentes o de neón. También puede

crearse plasma calentando un gas neutro hasta temperaturas muy altas. En general, las temperaturas son demasiado altas para aplicarlas externamente, por lo que se calienta el gas internamente inyectando en él iones o electrones de alta velocidad que pueden colisionar con las partículas de gas y aumentar su energía térmica. Los electrones del gas también pueden ser acelerados por campos eléctricos externos.

Los iones procedentes de estos plasmas se emplean en la industria de los semiconductores para grabar superficies y producir otras alteraciones en las propiedades de los materiales. En los plasmas muy calientes, las partículas adquieren energía como para producir reacciones nucleares al colisionar entre sí. Estas reacciones de fusión son la fuente de calor en el núcleo del Sol, y los científicos intentan crear en los laboratorios plasmas artificiales donde las reacciones de fusión puedan producir energía para generar electricidad.

1.3. Propagación de ondas

La propagación de ondas electromagnéticas en el plasma, es decir, en gases total o parcialmente ionizados, se encuentra en varios casos. Entre ellos los más importantes son los siguientes:

- Propagación de ondas de radio en las capas superiores de la atmósfera de la tierra (en la ionosfera).
- Propagación de ondas electromagnéticas de baja frecuencia en la ionosfera y en las regiones del espacio interplanetario adyacentes a ella.
- Propagación de las ondas radioeléctricas de origen cósmico en la atmósfera solar, en las nebulosas y en el espacio interestelar e interplanetario investigado por los métodos de la radioastronomía. Esto también puede incluir la propagación de las ondas de radio cuando se toma un punto de referencia en la luna y los planetas, así como en la comunicación con los distantes satélites artificiales de la tierra, los cohetes cósmicos, etc.
- Propagación de baja frecuencia (magnetohidrodinámica y acústica) esto también puede incluir ondas en el espacio.

- La propagación de ondas de plasma en el espacio (corona solar, etc.), así como en la ionosfera.

- La propagación de diversos tipos de ondas electromagnéticas en el plasma creado en condiciones de laboratorio (en el estudio de las cargas de gas, en un aparato para investigar reacciones termonucleares controladas, etc.)

Dado que la materia en el espacio está casi siempre en un estado de plasma, toda la astronomía óptica también se ocupa de saber la propagación de ondas electromagnéticas en plasma. Sin embargo, en la parte óptica del espectro las propiedades básicas específicas del plasma no se manifiestan en las densidades encontradas en las atmósferas estelares. Por esta razón, naturalmente, no investigan ondas en las regiones del espectro de longitud de onda más corta que los infrarrojos [19].

El concepto de plasma es aplicable y fructífero no sólo con respecto a los gases también para para el estudio de ciertas propiedades de los sólidos (óptica de metales, las pérdidas de energía discretas en sólidos, resonancia de ciclotrón en semiconductores). No obstante no nos detendremos en este grupo de fenómenos, ya que pertenecen más al campo de la física de los sólidos.

Del mismo modo que en otros medios anisotrópicos, incluso en el plasma se manifiestan ondas electromagnéticas O (ordinaria) y X (extraordinaria). La onda ordinaria se propaga solamente a frecuencias superiores a la frecuencia de plasma de los electrones. A frecuencias más bajas, el plasma es opaco a la luz (radiación electromagnética). Esto es debido a que los electrones en frecuencias más bajas llegan a percibir y seguir los estímulos externos, vibran y absorben la energía de la onda electromagnética. Este fenómeno es muy conocido para las ondas de radio en nuestra ionosfera. Las ondas de frecuencias más altas penetran en la ionosfera, para ellas es "transparente", mientras que las ondas de baja frecuencia no penetran en modo alguno. Para las ondas extraordinarias el estudio de la penetrabilidad y la transparencia en el plasma es aún más complicada. Para la propagación de ondas en plasma, se espera que los electrones estén libres, es decir, que no haya ninguna fuerza de recuperación debido a núcleos atómicos cercanos.

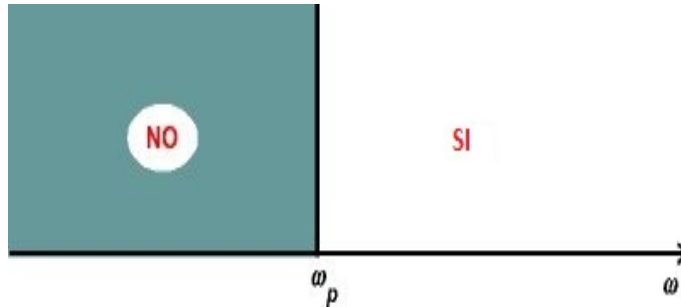


Figura 1.6: Propagación de onda ordinaria (onda O)

1.4. Aplicaciones

Nuestra vida actual se encuentra rodeada de tecnologías que involucran este cuarto estado de la materia altamente energético, caracterizado por temperaturas muy elevadas y con un alto grado de disociación y de ionización [16]. A nivel macroscópico da la sensación de que su comportamiento es estático. Sin embargo, a nivel microscópico existe una notable actividad, sucediendo reacciones de todo tipo como colisiones entre electrones e iones, electrones y partículas neutras, absorción de fotones, etc. Esta actividad hace de un plasma un medio en el que es posible conseguir la realización de determinadas reacciones que no serían posibles, o no suficientemente eficaces, si se utilizaran medios convencionales para su producción, con un menor coste energético y un tiempo de respuesta menor.

Así, el trabajo de investigación en plasmas abarca tanto la física fundamental como las diferentes aplicaciones de tipo científico e industrial de los mismos. Entre las diferentes aplicaciones de los plasmas se encuentran el poder simular en laboratorios las reacciones que tienen lugar en el Sol y en las estrellas; también como fuente de átomos de nitrógeno induciendo reacciones químicas en superficies (nitruración por plasma) y deposición de películas de diamante, dando lugar al endurecimiento de las superficies tratadas; en iluminación, el desarrollo de dispositivos de bajo consumo energético (compañías Philips y Osram, principalmente); como detectores en la identificación de sustancias químicas; como medio esterilizador de instrumentación científica (endoscopios y catéteres) provocando la inactivación de microorganismos adheridos a dicho material; como medio para generar hidrógeno el cuál puede ser utilizado, posteriormente, en las denominadas pilas de combustible; y

otras muchas aplicaciones que pueden encontrarse en la literatura. Algunas de las aplicaciones del plasma a las telecomunicaciones son las siguientes:

- Antena de plasma: es un tipo de antena de radio actualmente en desarrollo en donde el plasma se utiliza en lugar de los elementos metálicos de una antena tradicional. Se puede utilizar tanto para transmisión y recepción [3]. Los primeros ejemplos prácticos utilizaron tubos de descarga para contener el plasma y se conocen como antenas de gas de plasma ionizado. Estas antenas de gas ionizado se pueden encender y apagar y son buenas para el sigilo y resistentes a la guerra electrónica y ataques cibernéticos. Las antenas de plasma de gas ionizado utilizan la física del plasma para formar y dirigir los haces sin la necesidad de arreglos de fase. El ruido térmico de la antena de plasma de gas ionizado es menor que en las antenas metálicas correspondientes a las frecuencias más altas. El plasma tiene muy alta conductividad eléctrica y por ello es posible que las señales de radiofrecuencia viajen a través de él para que actúen como un elemento activo para irradiar las ondas de radio, o para recibirlas. Algunas de las ventajas que poseen las antenas de plasma son las siguientes:
 - Cuando se apaga el generador de plasma, se vuelven no conductoras de gas y por lo tanto se hacen efectivamente invisibles al radar [3].
 - Se pueden ajustar dinámicamente y configurarse para frecuencias, dirección, ancho de banda, ganancia y ancho de haz [5].
 - A frecuencias de satélites, exhiben mucho menos ruido térmico y son capaces de velocidades de datos más rápidas [4].
- Impulsar naves espaciales a velocidades lo bastante altas como para, por ejemplo, reducir de forma drástica el tiempo de viaje de una nave tripulada a Marte, facilitando de igual manera su regreso. Además, proyectando a distancia chorros de plasma de esta clase sería factible expulsar satélites inservibles y demás chatarra de las órbitas que ahora ocupan, y sin necesidad de instalarles ningún dispositivo a esos objetos molestos. De este modo, se podría barrer las órbitas más congestionadas, haciendo mucho más segura y fácil la circulación por ellas de los vehículos espaciales en uso. En su modalidad para expulsar fuera de sus órbitas a satélites inservibles y otros objetos molestos, la estación

orbital equipada con un cañón sería capaz de utilizar un flujo de iones enfocados para empujar satélites muertos y otros desechos hacia la atmósfera terrestre, donde se quemarían durante la reentrada.

- Una fuente de sonido de plasma, también llamado chispas de fuente de sonido o generador de chispa, es un medio que hace sonar pulsos de baja frecuencia bajo el agua. La descarga de chispas bajo el agua produce una burbuja de plasma de alta presión y vapor, que se expande y contrae, haciendo un sonido fuerte. La mayor parte del sonido producido es entre 20 y 200 Hz. Esta fuente se ha usado para sonar (navegación por sonido). También hay planes para utilizarla como un arma no letal contra los buzos [31].

Capítulo 2

Ecuaciones de Maxwell en Medios Dispersivos

En este capítulo se considera el problema de la representación de las ecuaciones de Maxwell en medios dispersivos. Dicha representación tiene aplicación en muchas áreas de la ingeniería así como también en la física teórica y aplicada. En este capítulo se obtienen las fórmulas del campo electromagnético en función de la frecuencia, tomando en cuenta las integrales oscilatorias y las transformadas de Fourier. Se obtienen las ecuaciones de movimiento para el medio. Estas investigaciones tienen un significado muy importante en el área de telecomunicaciones. Los medios de comunicación que tienen tal propiedad se denominan medios dispersivos. Los medios dispersivos juegan un papel importante en una amplia variedad de aplicaciones, por ejemplo guías de onda, estructuras de antena, circuitos integrados, aplicaciones bioelectromagnéticas.

2.1. Dispersión

La dispersión es el fenómeno de separación de ondas de distinta frecuencia al atravesar un material. Todos los medios materiales son más o menos dispersivos. Las diferentes longitudes de onda son refractadas a diferentes ángulos. De esta manera la luz blanca (que es una mezcla de diferentes lon-

gitudes de onda) puede ser separada en los colores que forma el arcoíris. En general los índices de refracción dependen de la longitud de onda de la luz transmitida. La dependencia del índice de refracción en la longitud de onda es llamada dispersión. En general, el índice de refracción de una sustancia disminuye con la longitud de onda incidente.



Figura 2.1: Refracción de la luz a través de un prisma.

La dispersión es consecuencia de la estructura atómica del medio dieléctrico. Los átomos en el medio dieléctrico contienen una carga positiva en el centro y una carga negativa distribuida en el exterior en una región de dimensiones lineales de 0.1 nm.

Si un paquete de onda mantiene su forma mientras viaja, todas las componentes de onda que hacen el paquete deben viajar con la misma rapidez. Esto ocurre si la rapidez de las componentes de onda en un medio dado es independiente de la frecuencia o la longitud de onda. Tal medio es llamado medio no dispersivo.

Cuando la rapidez de onda en un medio dispersivo depende de la frecuencia, un paquete de ondas cambia su forma muy lentamente cuando viaja, cubriendo una considerable distancia como una entidad reconocible. Pero la rapidez del paquete, llamada velocidad de grupo (v_g) no es la misma que la velocidad promedio de las componentes armónicas individuales de las ondas, llamada velocidad de fase (v_f). La velocidad de fase está dada por:

$$v_f = \frac{c}{n(\omega)}.$$

donde $n(\omega)$ es el índice de refracción en el medio.

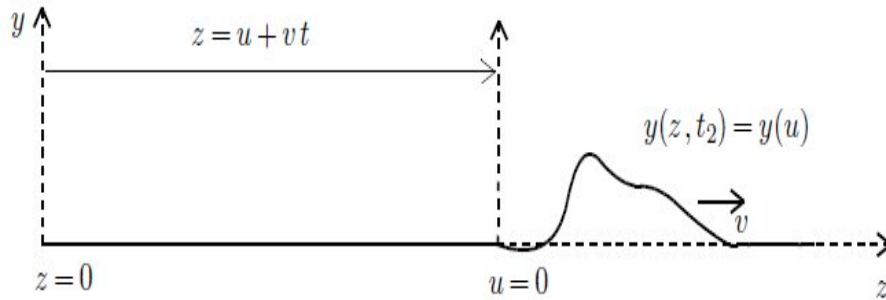
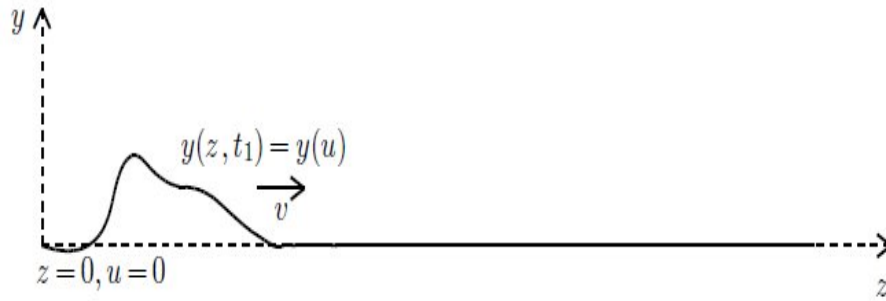


Figura 2.2: Pulso en un medio no dispersivo.

La relación entre la velocidad de fase y la velocidad de grupo está dada por:

$$v_g = c \left(n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right)^{-1}$$

donde:

v_g = velocidad de grupo

c = velocidad de la luz en el vacío

λ = longitud de onda en el vacío.

La velocidad de grupo es frecuentemente considerada como la velocidad a la cual la energía o información es transmitida a través de la onda. En muchos casos esto es cierto y la velocidad de grupo puede ser pensada como la velocidad de la señal de la forma de onda [14].

2.2. Ecuación escalar de onda en medios dispersivos

La permitividad, la permeabilidad y la conductividad pueden ser funciones de la frecuencia, es decir, en algunos materiales el índice de refracción depende de la frecuencia; son los llamados medios dispersivos. Entonces la ecuación de onda ya no es válida tal como se conoce generalmente y es necesario volverla a deducir. Para ello es conveniente hacer una transformada de Fourier a las ecuaciones de Maxwell y operar en el dominio de la frecuencia ω . Para conocer la naturaleza de las ondas, se puede considerar un gran volumen del espacio vacío. Como en el espacio vacío no puede haber fuentes $J = \rho = 0$, las ecuaciones de Maxwell conducen a que el campo eléctrico \mathbf{E} y el campo magnético \mathbf{B} satisfacen la ecuación de onda, que se puede escribir genéricamente como:

$$Au(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \Delta u(x, t) = -f(x, t) \quad (2.1)$$

donde u representa cada una de las componentes de \mathbf{E} o \mathbf{B} y $f(x, t)$ es una fuente.

El movimiento de las ondas en medios no dispersivos, se refiere al movimiento de la onda donde la perturbación de onda no cambia cuando se propaga. En el caso de las ondas armónicas en el medio no dispersivo es

$$u(x, t) = e^{-i\omega t} v(x), f(x, t) = e^{-i\omega t} \varphi(x)$$

donde $v(x)$ y $\varphi(x)$ son las amplitudes de las ondas que se propagan. La ecuación exceptúa la forma

$$(\Delta - k^2)v(x) = \varphi(x), \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (2.2)$$

Para el caso de medios dispersivos, la velocidad de la luz depende de la frecuencia (ω) y el número de onda k está en función de la frecuencia ω , que es $k(\omega) = \frac{\omega}{c(\omega)}$. En este caso la ecuación de onda (2.1) pierde su forma diferencial y puede escribirse en la forma llamada pseudodiferencial

$$(k^2(D_t) - \Delta_x)u(x, t) = f(x, t) \quad (2.3)$$

donde D_t es el operador diferencial y Δ_x es el laplaciano de $u(x, t)$. Aplicando la definición de operadores diferenciales y la transformada inversa de Fourier tenemos:

$$k^2(D_t)\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} k^2(\omega)\hat{\psi}(x, \omega)e^{-i\omega t}d\omega, \quad t \in \mathbb{R}$$

donde

$$\hat{\psi}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \psi(x, t)e^{i\omega t}dt$$

es la transformada de Fourier de ψ .

La ecuación (2.2) después de la transformada de Fourier con respecto al tiempo, viene dada por la ecuación

$$(\Delta_x - k^2(\omega))\hat{u}(x, \omega) = \hat{f}(x, \omega).$$

Es decir, $g_n(x, \omega)$ es la solución fundamental del operador $\Delta_n - k^2(\omega)$ en la dimensión n que satisface el principio de absorción límite para la búsqueda de soluciones a las ecuaciones análogas a la ecuación de Helmholtz [36] si $k^2(\omega)$ es una función real valuada. Por lo tanto la solución de la ecuación (2.1) está dada como

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g_n(x - y, \omega)e^{-i\omega t} \hat{f}(y, \omega)dyd\omega.$$

Considerando casos particulares de esta fórmula tenemos

1. $n=3$

$$u(x, t) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik(\omega)|x-y|-i\omega t}}{|x-y|} \hat{f}(y, \omega)dyd\omega$$

2. $n=2$

$$u(x, t) = \frac{i}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} H_0^1(k(\omega)|x-y|)e^{-i\omega t} \hat{f}(y, \omega)dyd\omega$$

donde H_0^1 , es la función de Henkel.

3. $n=1$

$$u(x, t) = \frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ik(\omega)|x-y|-i\omega t}}{k(\omega)} \hat{f}(y, \omega)dyd\omega$$

2.3. Ecuaciones de Maxwell en medios dispersivos

Se considera la propagación de ondas electromagnéticas generadas por una fuente en movimiento con velocidad variable en un medio dispersivo e isotrópico con permitividad eléctrica ε y permeabilidad magnética μ , donde estas variables dependerán de la frecuencia ω , esto es $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, $\mu = \mu(\omega)$ [11]. Esto significa que en la representación en el dominio de la frecuencia es posible establecer otras relaciones entre los campos que simplifican la solución. Estas relaciones se denominan leyes o relaciones constitutivas y dependen del medio en el que se desarrollan los fenómenos y de la frecuencia

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{E}}(x, \omega) &= \varepsilon(\omega)\hat{\mathbf{D}}(x, \omega) \\ \hat{\mathbf{H}}(x, \omega) &= \mu(\omega)\hat{\mathbf{B}}(x, \omega)\end{aligned}$$

donde \mathbf{D} es el campo de desplazamiento y \mathbf{B} campo de inducción magnética. Esto significa que las relaciones constitutivas en medios dispersivos tienen la forma del operador

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, t) &= \varepsilon(D_t)\mathbf{D}(x, t) \\ \mathbf{H}(x, t) &= \mu(D_t)\mathbf{B}(x, t)\end{aligned}$$

donde $\varepsilon(D_t)$, $\mu(D_t)$ son los operadores pseudodiferenciales

$$\varepsilon(D_t)u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega)u(x, \omega)e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\mu(D_t)u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\omega)u(x, \omega)e^{-i\omega t} d\omega.$$

Las ecuaciones de Maxwell conducen a ecuaciones de onda acopladas para las amplitudes de los campos eléctrico y magnético. A estas soluciones, que describen la propagación en el espacio de campos variables en el tiempo se les conoce con el nombre de ondas electromagnéticas. Todos los fenómenos electromagnéticos (no cuánticos) se pueden describir a partir de las ecuaciones

de Maxwell [19]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(r, t) = \rho(r, t), \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(r, t) = 0, \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(r, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(r, t) = 0, \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(r, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(r, t) = \mathbf{j}(r, t). \quad (2.7)$$

Se llama fuentes de campo a los sistemas físicos que crean campos en el espacio. En el caso electromagnético, cargas y corrientes eléctricas crean campos. En las ecuaciones de Maxwell las fuentes de campo son entonces:

- ρ : Densidad de carga eléctrica (C/m^3)
- \mathbf{j} : Densidad de corriente (A/m^2)

donde generalmente las incógnitas son los campos vectoriales:

- \mathbf{E} : Campo Eléctrico (V/m),
- \mathbf{D} : Campo de desplazamiento (C/m^2),
- \mathbf{H} : Campo Magnético (A/m),
- \mathbf{B} : Campo de Inducción Magnética (T).

Estos campos conforman el campo electromagnético. Las dos ecuaciones del rotacional (Faraday (2.6) y Maxwell-Ampère (2.7)) aseguran que hay dependencia mutua entre campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo, de manera que en este caso ambos campos están interrelacionados. Sólo en el caso de campos estáticos (que no varían en el tiempo) el campo eléctrico y magnético son independientes entre sí.

Todas las cantidades que intervienen en las ecuaciones de Maxwell son, en general, funciones de la posición y del tiempo.

Las ecuaciones de Maxwell en medios dispersivos son obtenidas por el reemplazamiento de la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética

ε, μ por los operadores $\varepsilon(D_t), \mu(D_t)$. Las ecuaciones de Maxwell en este caso aceptan la siguiente forma

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon(D_t) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mu(D_t) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2.9)$$

$$\varepsilon(D_t) \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (2.11)$$

con la relación entre ρ y \mathbf{j}

$$\nabla \cdot \mathbf{j} - \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2.12)$$

Después de la transformada de Fourier, el sistema de ecuaciones (2.8)-(2.11) queda de la siguiente manera:

$$\nabla \times \hat{\mathbf{H}} = i\varepsilon(\omega)\omega\hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{j}}, \quad (2.13)$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = i\mu(\omega)\omega\hat{\mathbf{H}}, \quad (2.14)$$

$$\varepsilon(\omega)\nabla \cdot \hat{\mathbf{E}} = \hat{\rho}, \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{H}} = 0. \quad (2.16)$$

La ecuación de continuidad queda de la siguiente manera

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{j}} - i\omega\hat{\rho} = 0, \quad (2.17)$$

donde

$$\hat{\mathbf{X}}(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(x, t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.18)$$

es la transformada de Fourier con respecto al tiempo que se entiende en el sentido de las distribuciones. En la forma estándar el sistema de ecuaciones (2.13)-(2.14) se reduce a un par de ecuaciones independientes

$$\nabla \times \nabla \times \hat{\mathbf{E}} - k^2(\omega)\hat{\mathbf{E}} = i\omega\mu(\omega)\hat{\mathbf{j}}, \quad (2.19)$$

$$\nabla \times \nabla \times \hat{\mathbf{H}} - k^2(\omega)\hat{\mathbf{H}} = \nabla \times \hat{\mathbf{j}} \quad (2.20)$$

donde $k(\omega) = \frac{\omega}{c(\omega)}$ y $c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}}$ es la velocidad de fase que depende de ω . Consideremos la ecuación (2.19) y a continuación la identidad vectorial

$$\nabla \times \nabla \times \hat{\mathbf{E}} = -\nabla^2 \hat{\mathbf{E}} + \nabla(\nabla \cdot \hat{\mathbf{E}})$$

y podemos ver que

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{E}} = \varepsilon^{-1}(\omega)\hat{\rho}. \quad (2.21)$$

La ecuación (2.19) la podemos escribir como

$$\begin{aligned} \nabla^2 \hat{\mathbf{E}} + k^2(\omega)\hat{\mathbf{E}} &= \varepsilon^{-1}(\omega)\nabla\hat{\rho} - i\omega\mu(\omega)\hat{\mathbf{j}} \\ &= \mu(\omega)(c^{-2}(\omega)\nabla\hat{\rho} - i\omega\hat{\mathbf{j}}) \\ &= -i\omega\mu(\omega)(\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{k^2(\omega)}\nabla(\nabla \cdot \hat{\mathbf{j}})) \\ &= \mathbf{F}_\omega(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

y la ecuación (2.20) puede escribirse como

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{H}} + k^2(\omega)\hat{\mathbf{H}} = -\nabla \times \hat{\mathbf{j}} = \Phi_\omega(\mathbf{x}) \quad (2.23)$$

Las ecuaciones (2.22) y (2.23) son muy parecidas a la ecuación de Helmholtz no homogénea; son independientes y pueden ser utilizadas para $\hat{\mathbf{E}}$ y $\hat{\mathbf{H}}$. Es decir que la solución a la ecuación de Helmholtz está dada de la siguiente manera

$$g_\omega(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik(\omega)|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|}$$

Esta es la función de Green de espacio libre, donde \mathbf{x} es un vector de posición en \mathfrak{R}^3 . Físicamente, esta función representa el alejamiento de ondas esféricas radiando siempre desde la fuente en el origen [36]. g_ω es la solución fundamental de la ecuación escalar de Helmholtz en la dimensión del espacio $n=3$.

$$\Delta g(\mathbf{x}, \omega) + k^2(\omega)g(\mathbf{x}, \omega) = -\delta(\mathbf{x})$$

(δ es la función delta de Dirac) la cual satisface el principio de absorción límite. Por lo tanto las soluciones de la ecuación (2.22), (2.23) se dan como

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} (g_\omega * \mathbf{F}_\omega)(\mathbf{x}) d\omega \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} (g_\omega * \Phi_\omega)(\mathbf{x}) d\omega \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde la convolución $*$ se entiende en el sentido de la distribución.

Capítulo 3

Campo generado por una fuente en movimiento

El problema bajo consideración es de interés en muchos campos de la ingeniería, la física teórica y aplicada, tales como las radiocomunicaciones, la teoría de radares, comunicaciones satelitales, radioastronomía etc. Los problemas relativos a la propagación de ondas generadas por partículas cargadas en todo el espacio, son ya clásicos en la física. En este capítulo se considera el problema de la propagación de ondas producidas por una fuente en movimiento.

3.1. Análisis asintótico

Se experimenta una fuente en movimiento siempre que haya movimiento relativo entre una fuente de ondas y un observador. Cuando se mueven uno hacia el otro, el observador escucha un sonido a una frecuencia más alta que la de la fuente en ausencia de movimiento relativo. Cuando la fuente y el observador se alejan uno del otro, el segundo escucha una frecuencia más baja que la de la fuente. Para el análisis se consideran las ecuaciones de Maxwell en la forma:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon(D_t) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mu(D_t) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (3.2)$$

$$\varepsilon(D_t) \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (3.4)$$

En el caso cuando las fuentes se encuentran en movimiento, la densidad de carga y la densidad de corriente están dadas por las siguientes expresiones (ver [19])

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) &= A(t) \mathbf{v}(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)), \\ \rho(\mathbf{x}, t) &= A(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

en donde la velocidad de la fuente es $\mathbf{v}(t) = \dot{x}_0(t)$, lo cual es la derivada de la posición de la fuente en movimiento, δ es la función δ estandar, $A(t)$ es la amplitud de la fuente considerada (infinitamente diferenciable delimitada con todas las amplitudes derivadas), x es el vector que describe la posición del punto de observación del campo y x_0 es la trayectoria que describe la fuente en movimiento. Como podemos ver \mathbf{j} y ρ están conectadas por la ecuación de continuidad.

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

la cual nos dice que sólo podrá haber flujo de corriente si la cantidad de carga varía con el paso del tiempo, ya que está disminuyendo o aumentando en proporción a la carga que es usada para alimentar dicha corriente.

Haciendo uso de la definición de convolución para resolver las ecuaciones (2.24), la convolución denotada como $g_\omega * \mathbf{F}_\omega$ y $g_\omega * \Phi_\omega$ queda de la siguiente manera

$$(g_\omega * \mathbf{F}_\omega)(\mathbf{x}) = \frac{-i\omega\mu(\omega)}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau) (I + k^{-2}(\omega) \nabla_x \nabla_x) \frac{e^{i(k(\omega)|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau)| + \omega\tau)}}{|x - x_0(\tau)|} \mathbf{v}(\tau) d\tau.$$

$$(g_\omega * \Phi_\omega)(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau) \nabla_x \times \frac{e^{i(k(\omega)|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau)| + \omega\tau)}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau)|} \mathbf{v}(\tau) d\tau$$

Sustituyendo estos resultados de la convolución a la ecuación (2.24) se obtiene lo siguiente

$$\mathbf{H}(x, t) = \frac{1}{8\pi^2} \int \int_{\mathbb{R}^2} \nabla_x \times \frac{e^{i(k(\omega)|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0(\tau)|-\omega(t-\tau))}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0(\tau)|} \mathbf{v}(\tau) d\omega d\tau \quad (3.6)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{8\pi^2 i} \int \int_{\mathbb{R}^2} A(\tau) \frac{\omega \mu(\omega) e^{i(k(\omega)|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0(\tau)|-\omega(t-\tau))}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0(\tau)|} \mathbf{v}(\tau) d\omega d\tau. \quad (3.7)$$

Para evaluar la analiticidad del integrando con respecto a ω en el medio plano superior \mathcal{C}_+ hacemos la deformación de la línea de integración $(-\infty, \infty)$ con respecto a ω en el contorno $\Gamma_r = (-\infty, -r) \cup \Gamma' \cup (r', +\infty)$, $r > \omega$ donde Γ' está situado en el medio plano complejo superior y evita todas las singularidades del integrando en la recta real. La fase de las integrales dobles es de la forma

$$S(\omega, \tau) = k(\omega)|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0(\tau)| + \omega\tau \quad (3.8)$$

El término de fase en esta función S es estacionario cuando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\omega, \tau)}{\partial \omega} &= \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0(\tau)|}{v_g(\omega)} + \tau \\ \frac{\partial S(\omega, \tau)}{\partial \tau} &= -k(\omega)v(\tau, \mathbf{x}) + \omega. \end{aligned}$$

3.2. Representación del campo electromagnético

Con objeto de obtener una representación para los campos producidos por una fuente en movimiento, es necesario considerar el problema dinámico. En lo que sigue se supone que

$$A(t) = a(t)e^{-i\omega_0 t},$$

donde

$$a(t) = \tilde{a}(t/\lambda)$$

\tilde{a} es infinitamente diferenciable limitada con todas las derivadas de la función, $\omega_0 > 0$ es una eigenfrecuencia de la fuente, $\lambda > 0$ es un parámetro pequeño adimensional que caracteriza la lentitud de las variaciones de la amplitud a , y simultáneamente la lentitud de la aceleración. Suponemos que

$$\mathbf{x}_0(t) = \lambda \mathbf{X}_0(t/\lambda), \quad t \in R \quad (3.9)$$

es un vector de posición de la fuente en movimiento, donde el vector función $\mathbf{X}_0(t)$ tiene un número suficiente de derivadas delimitadas. Es decir $t = \frac{t}{\lambda}$ donde $|T| \leq T_0$, y T_0 es el tiempo escalar del problema, $x = \frac{x}{\lambda}$, donde $|\mathbf{X}| \leq L$ y L es la escala espacial del problema. Si derivamos la ecuación (3.9) se puede ver que se obtiene la velocidad de nuestra fuente quedando de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}_0(t) = \dot{\mathbf{X}}_0(T), \quad |T| \leq T_0.$$

La velocidad es limitada con respecto al tiempo, pero al hacer una segunda derivada se obtiene la aceleración de la fuente, de la forma siguiente

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{x}}_0(t) = \frac{1}{\lambda} \ddot{\mathbf{X}}_0(T),$$

la aceleración es pequeña para una $\lambda > 0$ suficientemente grande. Para reducir las integrales (3.6) y (3.7) a una forma que contenga el parámetro $\lambda > 0$ en la fase, se hace en estas integrales un cambio de escala en las variables siguientes:

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{X}, \quad t = \lambda T, \quad \tau = \lambda \iota.$$

Después de este cambio se obtienen las siguientes fórmulas: para el campo magnético se tiene

$$\bar{\mathbf{H}}_\lambda(\mathbf{X}, T) = \frac{1}{8\pi^2 \lambda} \int \int_{\mathbb{R}^2} \nabla_{\mathbf{X}} \times \frac{e^{i\lambda \bar{S}(T, \mathbf{X}, \omega, \iota)}}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0(\iota)|} \mathbf{V}(\iota) \tilde{a}(\iota) d\omega d\iota$$

donde $\mathbf{V}(\iota) = \dot{\mathbf{X}}_0(\iota)$. Para el campo eléctrico se tiene

$$\bar{\mathbf{E}}_\lambda(x, t) = -\frac{i}{8\pi^2} \int \int_{\mathbb{R}^2} \omega \mu(\omega) \bar{a}(\iota) \frac{e^{i\lambda \bar{S}(T, \mathbf{X}, \omega, \iota)}}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0(\iota)|} \mathbf{V}(\iota) d\omega d\iota \quad (3.10)$$

donde

$$\bar{S}(T, \mathbf{X}, \omega, \iota) = k(\omega) |\mathbf{X} - \mathbf{X}_0(\iota)| - \omega(T - \iota) - \omega_0 \iota \quad (3.11)$$

es la fase de las integrales del campo eléctrico y magnético. Para el cálculo asintótico de $\bar{\mathbf{H}}_\lambda(T, \mathbf{X})$, $\bar{\mathbf{E}}_\lambda(T, \mathbf{X})$ se emplea el método de fase estacionaria (ver apéndice A). Los puntos de la fase estacionaria $\bar{S}(\mathbf{X}, T, \omega, \iota)$ con respecto a (ω, ι) para (T, \mathbf{X}) fijo, son soluciones del sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{S}(T, \mathbf{X}, \omega, \iota)}{\partial \omega} &= \frac{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0(\iota)|}{v_g(\omega)} - (T - \iota) = 0, \\ \frac{\partial \bar{S}(T, \mathbf{X}, \omega, \iota)}{\partial \iota} &= -k(\omega)\mathbf{e}(\mathbf{X}, \iota) \cdot \mathbf{V}(\iota) + (\omega - \omega_0) = 0,\end{aligned}\quad (3.12)$$

donde $v_g(\omega) = \frac{1}{k'(\omega)}$ es la velocidad de grupo del medio,

$$\hat{\mathbf{e}}(\mathbf{X}, \iota) = \frac{\mathbf{X} - \mathbf{X}_0(\iota)}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0(\iota)|}$$

es un vector unitario dirigido desde $\mathbf{X}_0(\iota)$ a \mathbf{X} . Note que

$$V(\iota) = \mathbf{e}(\mathbf{X}, \iota) \cdot \mathbf{V}(\iota) = |\mathbf{V}(\iota)| \cos \varphi(\iota)$$

donde $\varphi(\iota)$ es el ángulo formado entre los vectores $\mathbf{e}(\mathbf{X}, \iota)$ y $\mathbf{V}(\iota)$. Es decir

$$\omega_j = \omega_j(T, \mathbf{X}), \quad \iota_j = \iota_j(T, \mathbf{X})$$

es un punto estacionario no generado de la fase \bar{S} . Es decir (ω_j, ι_j) es solución al sistema de ecuaciones (3.12) si

$$\det \bar{S}''(T, \mathbf{X}, \omega_j, \iota_j) \neq 0,$$

donde

$$\bar{S}''(T, \mathbf{X}, \omega, \iota) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \bar{S}(T, \mathbf{X}, \omega, \iota)}{\partial \omega^2} & \frac{\partial^2 \bar{S}(T, \mathbf{X}, \omega, \iota)}{\partial \omega \partial \tau} \\ \frac{\partial^2 \bar{S}(T, \mathbf{X}, \omega, \iota)}{\partial \omega \partial \tau} & \frac{\partial^2 \bar{S}(T, \mathbf{X}, \omega, \iota)}{\partial \tau^2} \end{pmatrix}$$

es la matriz de Hess de la fase \bar{S} . La contribución del punto estacionario (ω_j, ι_j) en el comportamiento asintótico del campo electromagnético viene dada por las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{H}}_{\lambda, j}(\bar{T}, \bar{\mathbf{X}}) &= \frac{1}{4\pi\lambda^2} \nabla_{\mathbf{X}} \times \left(\frac{e^{i\lambda \bar{S}(T, \mathbf{X}, \omega_j, \iota_j)}}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0(\iota_j)|} \mathbf{V}(\iota_j) \right) \\ &= \frac{e^{\frac{i\pi}{4} \text{sgn} \bar{S}''(T, \mathbf{X}, \omega_j, \iota_j)}}{|\det \bar{S}''(T, \mathbf{X}, \omega_j, \iota_j)|^{1/2}} \bar{a}(\iota_j) + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right),\end{aligned}\quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_{\lambda,j}(\bar{T}, \bar{\mathbf{X}}) &= \frac{1}{4\pi\lambda} \omega_j \mu(\omega_j) \bar{a}(\iota_j) \frac{e^{i\lambda\bar{S}(T, \mathbf{X}, \omega_j, \iota_j)}}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0(\iota_j)|} \\ &\quad \frac{e^{\frac{i\pi}{4} \text{sgn}\bar{S}''(T, \mathbf{X}, \omega_j, \iota_j)}}{|\det\bar{S}''(T, \mathbf{X}, \omega_j, \iota_j)|^{1/2}} V(\iota_j) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde $\text{sgn}\bar{S}''$ es la función signo, que obtiene el signo de cualquier número real que se tome por entrada de \bar{S}'' . $O(\frac{1}{\lambda})$ es una función de admisión de estimación $|O(\frac{1}{\lambda})| \leq C\lambda^{-1}$ para una $\lambda > 0$ grande.

Si la fase \bar{S} tiene un conjunto finito de puntos estacionarios, el término principal asintótico del campo electromagnético es la suma de las contribuciones de cada punto estacionario.

Las ecuaciones (3.13) y (3.14) se pueden simplificar si están limitadas por los términos de orden de $O(\frac{1}{\lambda})$ [7]. Volviendo a las variables (\mathbf{x}, t) , tenemos las siguientes fórmulas asintóticas

$$\mathbf{H}_j(\mathbf{x}, t) \sim \frac{1}{4\pi} \nabla_{\mathbf{x}} \times \left(\frac{e^{iS(\mathbf{x}, t, \omega_j, \tau_j)}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau_j)|} v(\tau_j) \right) \frac{a(\tau_j) e^{\frac{i\pi}{4} \text{sgn}S''(\mathbf{x}, t, \omega_j, \tau_j)}}{|\det S''(\mathbf{x}, t, \omega_j, \tau_j)|^2} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{E}_j(\mathbf{x}, t) \sim \frac{\omega_j \mu(\omega_j) a(\tau_j) e^{i(S(t, \mathbf{x}, \omega_j, \tau_j) + \frac{\pi}{4} \text{sgn}S(t, \mathbf{x}, \omega_j, \tau_j))}}{4\pi i |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau_j)| |\det S''(t, \mathbf{x}, \omega_j, \tau_j)|} \quad (3.16)$$

y la fase de los campos electromagnéticos es

$$S(\mathbf{x}, t, \omega, \tau) = k(\omega) |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau)| - \omega(t - \tau) - \omega_0 \tau,$$

donde los puntos estacionarios (ω_j, τ_j) son soluciones del sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\mathbf{x}, t, \omega, \tau)}{\partial \omega} &= \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau)|}{v_g(\omega)} - (t - \tau) = 0, \\ \frac{\partial S(\mathbf{x}, t, \omega, \tau)}{\partial \tau} &= k(\omega) v_e(x, \tau) + (\omega - \omega_0) = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde

$$\begin{aligned} v_e = (\mathbf{x}, \tau) &= \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau)|} \cdot \dot{\mathbf{x}}_0(\tau) \\ &= |v(\tau)| \cos\varphi(\tau). \end{aligned}$$

3.3. Efecto Doppler

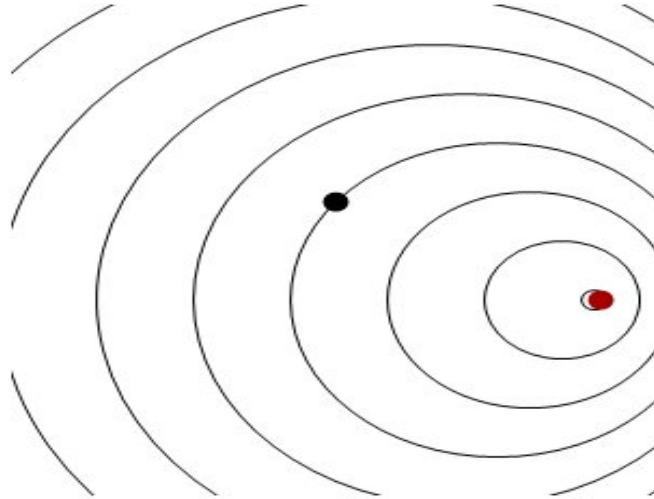


Figura 3.1: Efecto Doppler de una fuente en movimiento

El efecto doppler es un fenómeno en el cual se observa un aparente cambio de la frecuencia cuando hay un movimiento relativo entre la fuente de emisión y el receptor. La diferencia entre la frecuencia emitida y la frecuencia observada, cuando existe un movimiento relativo entre emisor y receptor, es lo que se denomina cambio de frecuencia Doppler o simplemente frecuencia Doppler. Este cambio depende de la velocidad con que se muevan la fuente de emisión, el receptor o ambos, es decir que un incremento en la velocidad relativa entre fuente y receptor causará un mayor cambio en la frecuencia observada. Las ondas sonoras exhiben el efecto Doppler cuando el observador, la fuente, o ambos se mueven con respecto al medio de propagación. En el efecto Doppler la frecuencia observada de la onda es mayor o menor que la frecuencia emitida por la fuente de la onda. Se presenta también un efecto Doppler para las ondas electromagnéticas, pero difiere del efecto Doppler para las ondas sonoras en dos aspectos. El primero: en el efecto Doppler para las ondas sonoras el movimiento respecto al medio es lo más importante porque las ondas sonoras requieren un medio en el cual propagarse. Por el contrario, el medio de propagación no desempeña ninguna función en el efecto Doppler para las ondas electromagnéticas porque las ondas no requieren de un medio para propagarse. El segundo: la rapidez del sonido que aparece en la ecuación del efecto Doppler para el sonido depende del marco de referencia en el

cual se mide. La única ecuación que describe el efecto Doppler de las ondas electromagnéticas está dada por la expresión aproximada

$$f' = f \left(1 \pm \frac{u}{c}\right) \quad \text{si } u \ll c$$

donde f' es la frecuencia observada, f es la frecuencia emitida por la fuente, c es la rapidez de la luz en el vacío, y u es la rapidez relativa del observador y la fuente. El efecto Doppler es un fenómeno de gran importancia en los campos de la física y la ingeniería. Es bien sabido que el efecto Doppler para las ondas electromagnéticas consiste en un corrimiento en frecuencia debido al movimiento relativo entre una fuente de ondas electromagnéticas y un observador, de manera que las frecuencias, la emitida por la fuente y la detectada por el observador no son iguales. El observador detecta una frecuencia mayor que la emitida si él y la fuente se acercan y al contrario si se alejan. Este efecto tiene innumerables campos de aplicación. Entre estos se tiene, la teoría de radares, la radioastronomía, física relativista, etc.

Considerando un punto fijo x , las fórmulas del campo eléctrico y magnético (3.15) y (3.16) obtenidas en el Capítulo 3 pueden escribirse de la siguiente forma [7]

$$\mathbf{W}_j(t) = A_j(t)e^{iF_j(t)} \quad (3.18)$$

donde $A_j(t)$ es una función vectorial, F_j es una función real-valuada tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} F_j(t) = \infty$ Por lo tanto de acuerdo con la teoría de procesamiento de señales[19] $F_j(t)$ es la fase de proceso de la onda $W_j(t)$. La frecuencia instantánea $\omega_{in}^j(t)$ del proceso de onda $W(t)$ es definida como

$$\omega_{in}^j(t) = -F_j'(t). \quad (3.19)$$

Para nuestro caso

$$\begin{aligned} F_j(t) &= S(t, x, \omega_j(t), \tau_j(t)) \\ &= k(\omega_j(t))|x - x_0(\tau_j(t))| - \omega_j(t)(t - \tau_j(t)) - \omega_0\tau_j(t) \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde $(\omega_j(t), \tau_j(t))$ es el punto estacionario de la fase S . Por diferenciación de F_j [24] obtenemos

$$-F_j'(t) = \frac{\partial S(t, x, \omega_j(t), \tau_j(t))}{\partial t} - \frac{\partial S(t, x, \omega_j(t), \tau_j(t))}{\partial \omega} \frac{\partial \omega_j(t)}{\partial t} - \frac{\partial S(t, x, \omega_j(t), \tau_j(t))}{\partial \tau} \frac{\partial \tau_j(t)}{\partial t}.$$

Teniendo en cuenta que $(\omega_j(t), \tau_j(t))$ es el punto estacionario de la fase S , obtenemos que

$$\omega_{in}^j(t) = \omega_j(t)$$

esto implica que la frecuencia instantánea $\omega_{in}^j(t)$ de los modos $H_j(x, t)$, $E_j(x, t)$ para x fijo coincide con $\omega_j(t)$. Por lo tanto el efecto Doppler instantáneo para la frecuencia es

$$\Delta_{in}^j(t) = \omega_j(t) - \omega_0 = k(\omega_j(t))v_e(x, \tau_j(t)).$$

Esta fórmula implica que si $v_e(x, \tau_j(t)) > 0$ (la fuente se mueve hacia el receptor) $\omega_j(t) > \omega_0$, y si $v_e(x, \tau_j(t)) < 0$ (la fuente se aleja del receptor) $\omega_j(t) < \omega_0$. Veamos también que $\tau_j(t)$ es el tiempo de retardo de los modos $H_j(x, t)$, $E_j(x, t)$, es decir el tiempo de excitación del modo j -ésimo que llega al receptor en el punto x en el tiempo t . Por lo tanto el modo del efecto Doppler para el tiempo es

$$\tilde{\Delta}_{in}^j(t) = t - \tau_j(t) = \frac{|x - x_0(\tau_j(t))|}{v_g(\omega_j(t))}.$$

Capítulo 4

Aplicaciones a análisis del plasma

Debido a su estado como libre flujo de partículas cargadas eléctricamente, los plasmas tienen varias características únicas. El número de protones y electrones en un plasma es par, por lo que es eléctricamente neutro, pero debido a que están en un estado de flujo libre, los campos eléctricos y magnéticos tienen efectos únicos en el plasma.

4.1. Permittividad en plasma

En el vacío, la velocidad de fase de una onda electromagnética es:

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Esto puede ser generalizado para la velocidad de fase de las ondas en la materia:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}.$$

En el plasma $\mu = \mu_0$, pero $\epsilon \neq \epsilon_0$

En la mayoría de los casos, la permitividad dieléctrica del plasma ϵ y su conductividad σ están totalmente determinados por el movimiento de los electrones y de los iones. Las contribuciones de ϵ y σ asociadas a la presencia de partículas neutras (átomos, moléculas) se necesitan considerar sólo si el gas es débilmente ionizado. Para calcular ϵ es suficiente con analizar el campo eléctrico en un plasma homogéneo. Si es posible limitar el análisis a un campo homogéneo, es decir, si la dispersión espacial es crucial, entonces será imposible confinarse a usar sólo las características locales del medio. En el caso general, en los cálculos para obtener los parámetros constitutivos del plasma se debe considerar como base la ecuación cinética, es decir considerar la reacción del medio bajo condiciones variables como la concentración de electrones o la temperatura [27]. Considerando la constante dieléctrica de un medio gaseoso se tiene

$$\epsilon = 1 + \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

La fórmula anterior es muy útil para los gases diluidos [16]. Considerando que el plasma es muy similar a un medio gaseoso, se puede obtener la expresión para la constante dieléctrica del plasma haciendo $\omega_0 = 0$ y $n = n_e$. Para la densidad de electrones, se obtiene

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \mu = \mu_0$$

donde ω_p es la frecuencia del plasma, la cual es la frecuencia característica. Para frecuencias superiores a la frecuencia del plasma, la constante dieléctrica de un plasma es menor que la unidad. Por lo tanto, el índice de refracción $n = \sqrt{\epsilon}$ es también menor que la unidad, la cual nos determina la velocidad de la luz al propagarse por un medio. De forma más precisa, el índice de refracción es el cambio de la fase por unidad de longitud, esto es, el número de onda en el medio (k) será n veces más grande que el número de onda en el vacío (k_0).

La Figura 4.1 muestra el comportamiento de la permitividad en función de la frecuencia; en un rango de concentración de electrones $N_e = 10^3 -$

$3 \times 10^6 \text{ e/cm}^3$, con una frecuencia de fuente de 300MHz. Para frecuencias donde la permitividad fuese positiva y se llevase a cabo la propagación fueron considerados de 50 KHz a 300 GHz. Los valores permitividad no varia mucho.

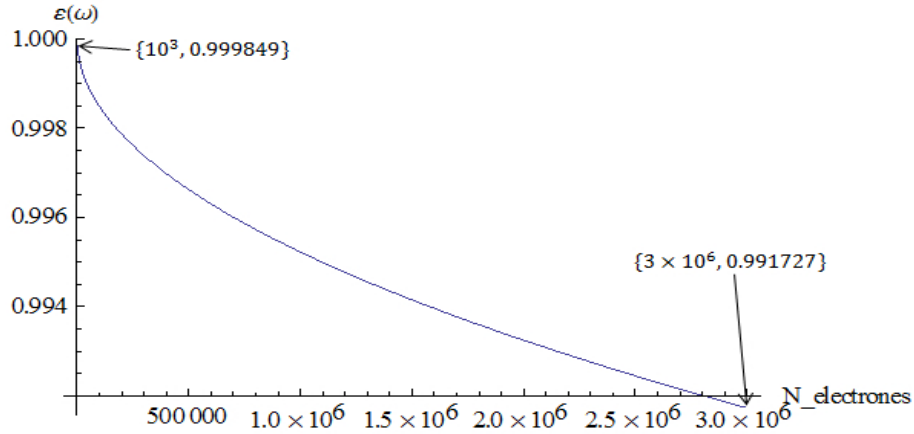


Figura 4.1: Permitividad eléctrica.

Se puede ver en una parte de la gráfica como si se tuviera valores negativos, esto se debe a que el programa ajusta los ejes coordenados.

4.2. Relación de dispersión

La velocidad de fase de las ondas de plasma:

$$\begin{aligned}
 v = \frac{\omega}{k} &= \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \\
 &= \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

En el plasma, ϵ depende de ω y por lo tanto la velocidad de fase depende también de ω . La onda en este caso es dispersiva. Una onda cuadrada contiene la frecuencia fundamental y sus armónicos más altos. Si la velocidad de fase depende de la frecuencia, se extenderá hacia fuera mientras que se propaga.

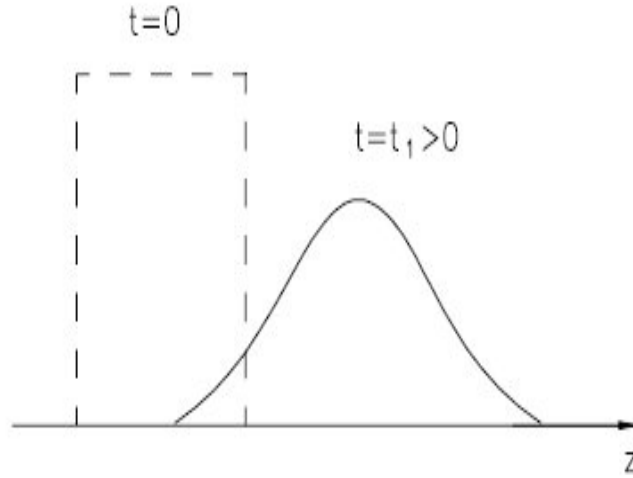


Figura 4.2: Velocidad de fase en función de la frecuencia.

La dependencia de ω en k es llamada relación de dispersión. Resolviendo la ecuación (4.1) para ω

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

$$\omega\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = c^2 k^2.$$

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \tag{4.2}$$

La relación de dispersión de las ondas electromagnéticas en el vacío es una línea recta (no dispersiva) con una pendiente $\tan \alpha = c$, en el plasma debe estar por encima de la línea $\omega = ck$

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2} \geq ck, \quad \text{cuando } k \gg \frac{\omega_p}{c}.$$

pero se acerca a la línea $\omega = ck$ cuando k llega a ser grande porque

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2} \simeq ck.$$

Esto parecería implicar que la alta frecuencia de las ondas electromagnéticas se puede propagar a través de un plasma con una velocidad c/n que es mayor que la velocidad de la luz en el vacío.

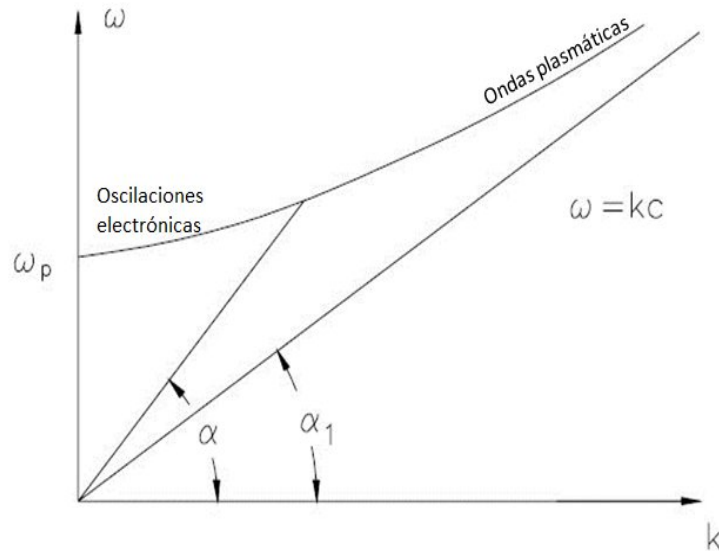


Figura 4.3: Oscilación de los electrones

4.3. Velocidad de fase

Para frecuencias de excitación ω por encima de la frecuencia de plasma ω_p , la ionosfera es un medio dispersivo, y entonces las ondas electromagnéticas son sinusoidales. De acuerdo con la relación de dispersión anterior, la velocidad de fase de ondas de alta frecuencia que se propagan a través de un plasma está dada por

$$v_f^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2},$$

por lo que la velocidad de fase en plasma queda de la siguiente manera:

$$v_f(\omega) = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}.$$

La Figura 4.4 muestra la velocidad de fase dependiente de la frecuencia en el plasma. Aquí $\omega_p = 8.98 \times 10^3 \sqrt{N_e}$, donde el rango de concentración utilizado fue $N_e = 10^3 \text{ e/cm}^3$, en un intervalo de frecuencia 30 KHz a 30 MHz.

Como podemos ver, la velocidad de fase excede a la velocidad de la luz en el vacío c y la de todas las demás ondas electromagnéticas; pero es diferente

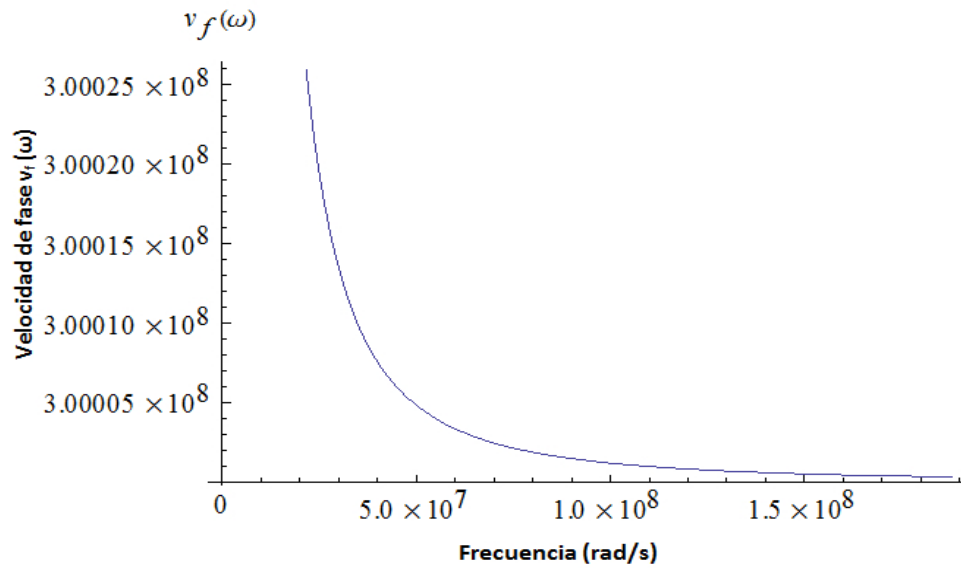


Figura 4.4: Velocidad de fase en plasma.

para distintas frecuencias, esto implica que la forma del pulso se modificará a lo largo de su movimiento. Por lo tanto cumple con la teoría de la física moderna de ser un medio dispersivo [35].

La velocidad de fase realmente excede a c , pero esto no significa que esté en conflicto con la teoría de la relatividad ya que la teoría de la relatividad no prohíbe esto. Lo que teoría de la relatividad dice es que la información no puede viajar a una velocidad mayor que c . Por lo que las ondas de plasma pueden acelerar electrones que se mueven con velocidad casi igual a la velocidad de fase de la onda.

La Figura 4.5 muestra la velocidad de fase dependiente de la frecuencia en el plasma. Con $\omega_p = 8.98 \times 10^3 \sqrt{N_e}$, donde el rango de concentración utilizado fue $N_e = 10^3 e/cm^3$, en un intervalo de frecuencia de 200 THz a 300 THz.

El comportamiento de la velocidad de fase es constante para diferentes frecuencias. De acuerdo a la teoría de física moderna; se dice que es *no dispersivo*[35].

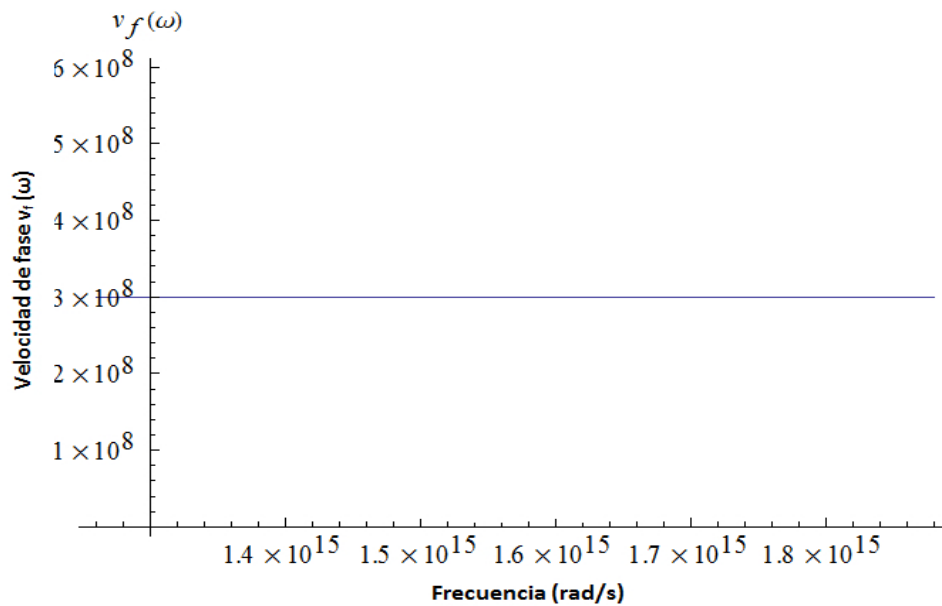


Figura 4.5: Velocidad de fase en plasma (no dispersivo).

La onda se propaga a la velocidad de fase, transportando con ella una densidad de energía. Así que la energía se lleva a una velocidad superior a c . La solución es que no se puede utilizar para enviar información o energía más rápido que la velocidad de la luz.

4.4. Velocidad de grupo

Ahora se tiene que considerar cómo poder transmitir información a través de un plasma por medio de ondas electromagnéticas. La forma más sencilla sería la de enviar una serie de breves pulsos discretos de onda a través del plasma, que puede codificar información en una especie de código Morse. Para construir una onda de pulso de una superposición adecuada de infinitos planos de ondas de diferentes frecuencias y longitudes de ondas, por ejemplo

$$E_z(x, t) = \int F(k) e^{i\phi(k)} dk,$$

donde $\phi(k) = kx - \omega(k)t$ y $\omega(k)$ se determina a partir de la relación de dispersión (4.2). Ahora, resulta que una onda de pulso relativamente corto

sólo puede ser construida a partir de una superposición de ondas planas con una gama relativamente amplia de diferentes valores de k . Por lo tanto, para una onda de pulso corto, el integrando en la fórmula anterior consiste en el producto de una función variable bastante lenta, $F(k)$, y una función rápidamente oscilante, $\exp[i\phi(k)]$. Esta función es rápidamente oscilante porque la fase $\phi(k)$ varía muy rápidamente con k , relativa a $F(k)$ [16]. Se espera que el resultado neto de la integración del producto de una función lentamente variable y una función rápidamente oscilante sea pequeña, ya que las oscilaciones generalmente supondrán una medida de cero. De ello que la integral está dominada por las regiones del k - espacio para las cuales $\phi(k)$ varía menos con k . Por lo tanto, el pico de la onda corresponde muy probablemente a un máximo o mínimo de $\phi(k)$: es decir,

$$\frac{d\phi}{dk} = x - \frac{d\omega}{dk}t = 0.$$

Por lo tanto, se deduce que la velocidad de la onda de pulso está dada por

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

Esta velocidad se denomina velocidad de grupo, y es diferente a la velocidad de fase en medios dispersivos, para lo cual ω no es directamente proporcional a k [14]. El resultado de la discusión anterior es que la información viaja a través de un medio de dispersión en la velocidad de grupo, en lugar de la velocidad de fase. Por lo tanto, la relatividad exige que la velocidad de grupo, en lugar de la velocidad de fase, siempre debe ser inferior a c . Ahora bien, para el plasma la velocidad de grupo de ondas de alta frecuencia que se propagan en el plasma se obtiene de la siguiente manera:

$$\frac{\omega}{k} \frac{d\omega}{dk} = v_f v_g = c^2.$$

Para ondas no dispersivas, por ejemplo ondas electromagnéticas en el vacío, tenemos

$$\omega = ck \quad v_f = v_g = c.$$

Por lo tanto, en el plasma la onda es dispersiva

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c.$$

La Figura 4.6 muestra el comportamiento de la velocidad de grupo en plasma, donde el rango de concentración de electrones es $N_e = 10^3 \text{ e/cm}^3$, con un intervalo de frecuencia 300 KHz a 3000 KHz. Cumple con la condición de ser menor a la velocidad de la luz c ; a frecuencias menores no hay propagación y a frecuencias mayores v_g es una constante.

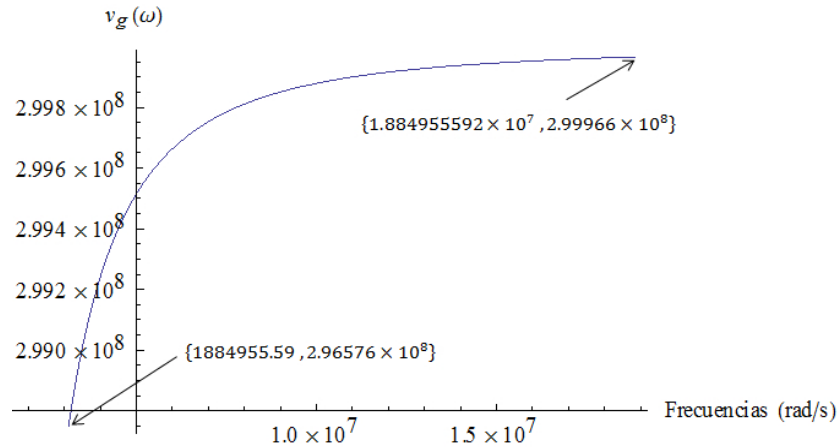


Figura 4.6: Velocidad de grupo en plasma.

La velocidad de grupo es menor que c y por consiguiente, la relación de dispersión es consistente con la relatividad. La propagación de ondas electromagnéticas a través del gas ionizado ha recibido atención considerable durante muchos años. En particular, la reflexión de las ondas de radio y la transmisión desde y a través de la ionosfera se han estudiado ampliamente. La ionosfera se postuló como la capa Kenelly-Heaviside en 1902, y la fórmula para su índice de refracción, ahora conocida como la fórmula Appleton-Hartree fue obtenida en 1930. El problema de la entrada de vehículos de alta velocidad, tales como misiles y cohetes ha generado un considerable interés en los problemas de plasma. Cuando vehículos de alta velocidad entran en la atmósfera, a altas temperaturas y presión en la parte delantera del vehículo, ionizan las moléculas de aire y producen la llamada envoltura de plasma. Los problemas característicos de la antena, la propagación a través del plasma, y la sección transversal del radar son de considerable importancia. También, la antena y las características de propagación de una onda del satélite artificial en la ionosfera son importantes en la comunicación entre el vehículo y la estación en la tierra. Si un campo magnético de dc está presente, se convierte en plasma anisotrópico y éste normalmente se llama magnetoplasma. En la

ausencia de campos magnéticos de corriente, el plasma es isotrópico. Todo plasma tiene una frecuencia característica que delimita su comportamiento como conductor de su comportamiento como dieléctrico: la frecuencia de corte o frecuencia de plasma [4]. Esta frecuencia aumenta proporcionalmente con la raíz cuadrada de la densidad de partículas cargadas. La frecuencia del plasma juega un papel muy importante en la teoría. De la fórmula anterior de ω_p y sustituyendo los valores de m , e y ϵ_0 obtenemos [14]:

$$\omega_p = \begin{cases} 8,98N_e^{1/2} \\ 8,98 \times 10^3 N_e^{1/2} \end{cases} \quad (4.3)$$

La Figura 4.7 muestra el comportamiento de la frecuencia del plasma con una concentración de electrones (N_e) que va desde 10^3 e/cm³ - 3×10^6 e/cm³

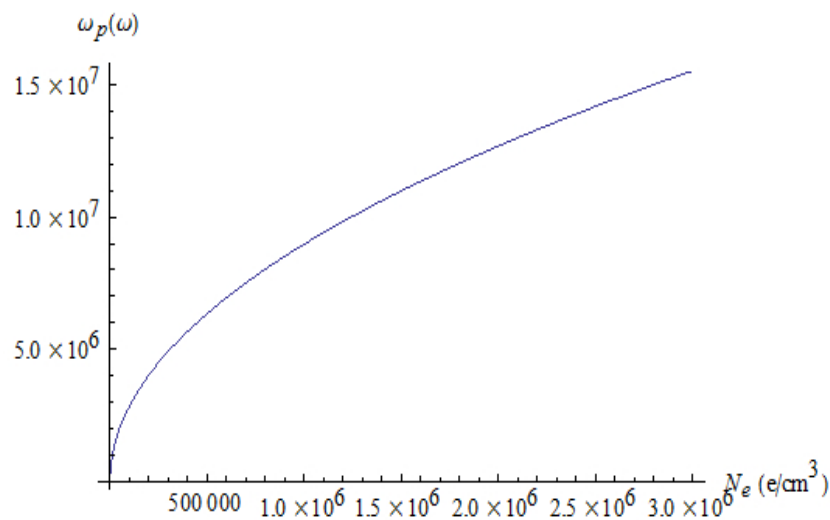


Figura 4.7: Comportamiento de ω_p variando la concentración de electrones N_e .

Estas ondas pueden llegar a frecuencias de radio u ópticas y se relacionan con las ondas electromagnéticas que se propagan en el plasma. La frecuencia del plasma sólo depende de la densidad de electrones N_e . La densidad de electrones libres en la ionosfera terrestre, varía con la altura y con el tiempo.

La recombinación de iones y electrones para formar moléculas neutras continúa después de la puesta del sol, pero la formación de nuevos iones cesa. La densidad de electrones, en consecuencia, decrece por la noche.

De acuerdo con la relación de dispersión (4.2) el número de onda está dado por

$$k(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c_0} \quad (4.4)$$

- Si $\omega > \omega_p$, (como en el vacío) k es real y las ondas se propagan sin decaimientos,
- Si $\omega < \omega_p$, (como en un conductor) k es imaginario, las ondas decaen y las ondas serán reflejadas,
- Si $\omega \ll \omega_p$, $k \simeq i\frac{\omega_p}{c} = i\frac{1}{\delta}$,

donde δ físicamente nos quiere decir que la distancia de atenuación de los campos de RF en el plasma está dada por el "espesor pelicular" (skin-depth) sin colisiones, definida de la siguiente manera

$$\delta = \frac{c}{\omega_p} \approx \frac{1,7cm}{\sqrt{N_e}},$$

donde N_e es la concentración de electrones en unidades de $10^{17}m^{-3}$. Para nuestro caso se consideraron ondas de alta frecuencia electromagnética a través de un plasma. Debido a que cuando la frecuencia de onda ω es menor a la frecuencia del plasma ω_p , tanto la velocidad de fase como la de grupo se convertirían en resultados imaginarios. Esto indica que la onda se atenúa cuando se propaga. Considere, por ejemplo, una onda plana de frecuencia $\omega < \omega_p$. De acuerdo a la relación de dispersión el número de onda asociado está dado por

$$k(\omega) = i\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c_0} = i|k|. \quad (4.5)$$

La Figura 4.8 muestra el comportamiento del número de onda en el plasma; con una concentración de electrones de $N_e = 3 \times 10^8 \text{ e/cm}^3$, con un intervalo de frecuencia de 30 MHz a 300 GHz.

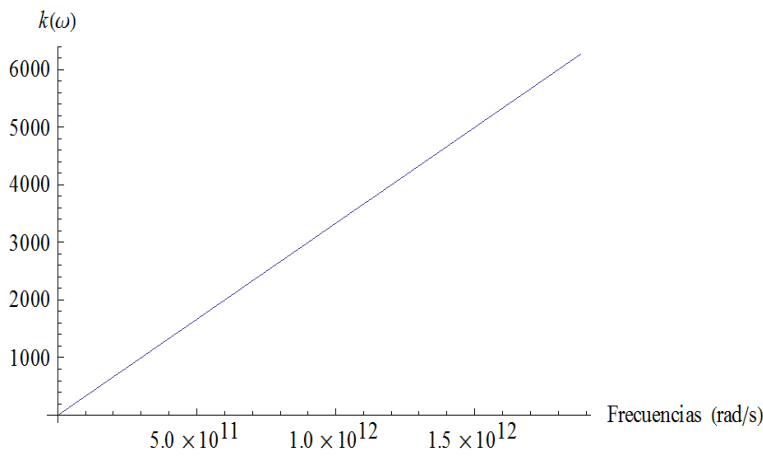


Figura 4.8: Comportamiento del número de onda $k(\omega)$ en plasma.

Como podemos ver, una onda electromagnética de frecuencia menor que la frecuencia del plasma, que es incidente en un plasma no se propagará a través del plasma; en su lugar, se refleja totalmente. Podemos estar seguros de que la onda incidente es reflejada por el plasma, en lugar de absorbida, considerando el flujo de energía de la onda en el plasma. El hecho que la onda se refleje sin transmitirse implica que ejerce una presión sobre el plasma (presión de radiación). Esto se utiliza para confinar plasmas a altísimas temperaturas, usando la presión de radiación como un “envase” de plasma; de otra manera, el plasma caliente vaporizaría cualquier objeto cercano [26].

El índice de refracción n del plasma puede ser real o complejo, dependiendo del valor de la frecuencia ω de la onda; para ondas de alta frecuencia, en que $\omega > \omega_p$, el índice de refracción es real, y las ondas se propagan libremente a través del plasma refractándose; el fenómeno es completamente análogo a la propagación de la luz a través de un cristal; como lo mencionamos anteriormente, en el Capítulo 2, n está definido como el cociente de la velocidad c de un fenómeno ondulatorio como la luz o sonido en el de un medio de referencia respecto a la velocidad de fase (v_f) en dicho medio:

$$\begin{aligned} n &= \frac{c}{v_f} \\ &= \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}. \end{aligned}$$

La Figura 4.9, muestra el comportamiento del índice de refracción con una

concentración de electrones $N_e = 3 \times 10^8 \text{ e/cm}^3$, con un intervalo de frecuencia 30 MHz a 30 GHz

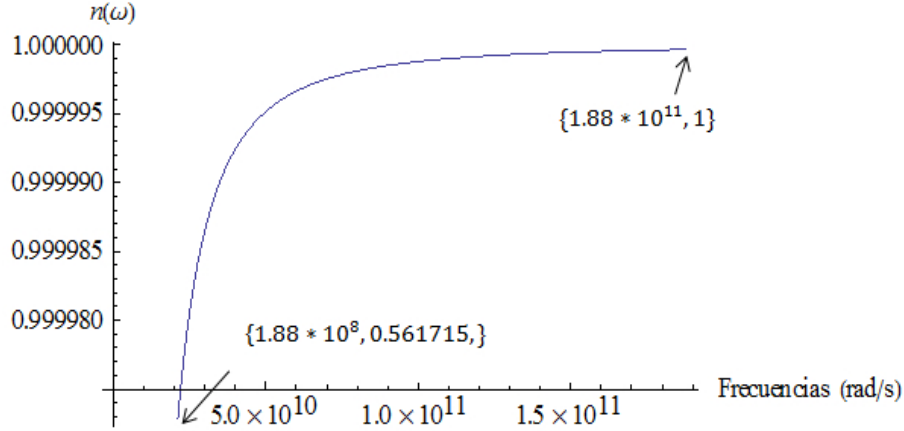


Figura 4.9: Índice de refracción en plasma

El comportamiento de la curva en la Figura 4.8 es un resultado muy importante dentro del límite de alta frecuencia, que va acompañado de muy poca absorción, lo cual es el caso para $\varepsilon \leq 0$. Entonces

$$n \approx \sqrt{\varepsilon} = i\sqrt{|\varepsilon|} \Rightarrow \text{no hay propagación}$$

Entonces la onda se refleja, y esto ocurre para una densidad electrónica crítica, o bien, dada la densidad, para una frecuencia crítica (ω_p). Es por ello que se considera el caso de frecuencias altas $\omega > \omega_p$, porque para frecuencias $\omega \leq \omega_p$ la onda electromagnética no tendrá incidencia en el medio, es decir que no se propagará en el plasma y por lo tanto la fase $S(x, t, \omega, \tau)$ no tendrá puntos estacionarios.

4.5. Campo electromagnético en plasma

Considerando la fase de las integrales vistas en el Capítulo 3, se aplica al plasma considerando el número de onda quedando de la siguiente forma

$$S(x, t, \omega, \tau) = k(\omega)|x - x_0(\tau)| - \omega(t - \tau) - \omega_0\tau. \quad (4.6)$$

Cabe recordar que el término de fase en esta función es estacionario cuando cumple con las derivadas parciales en (3.17). Sustituyendo los valores de la velocidad de grupo correspondiente al medio ($v_g(\omega)$) y el número de onda ($k(\omega)$), se aplican las derivadas parciales del método de fase (3.17) nuestra ecuación de fase (4.6) queda de la siguiente forma

$$\frac{|x - x_0(\tau)|}{c_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} - (t - \tau) = 0, \quad (4.7)$$

$$-\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c_0} v(x, t) + (\omega - \omega_0) = 0 \quad (4.8)$$

donde \mathbf{x} es el vector de posición del receptor
 $\mathbf{x}_0(\tau)$ es el vector de posición de la fuente
 $v(x, t)$ es la velocidad de fuente
 τ es el tiempo de retardo con que llega la señal al receptor
 c_0 velocidad de la luz en el vacío
 ω es la frecuencia que llega al receptor.

Despejando los puntos estacionarios de nuestro sistema de ecuaciones y considerando que v es un vector constante y $v(x, t) = \pm|v|$. Para este caso el sistema queda de la siguiente manera

$$\tau = t - \frac{|x - x_0(\tau)|}{c_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad (4.9)$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c_0} |v|.$$

Resolviendo ambas ecuaciones para τ y ω ; mediante el software Mathematica tenemos

$$\omega_s = \frac{1}{1 - M^2} + (\omega_0 + M \sqrt{\frac{\omega_0^2}{(1 - M^2)} - \omega_p^2}) \quad (4.10)$$

$$\tau_s = \frac{tc^2(\omega_p^2 - \omega^2) - \sqrt{-\omega^2(h^2v^2 - (h^2 + t^2v^2)c^2)\omega + (h^2 + t^2v^2)c^2\omega_p^2}}{(v^2 - c^2)\omega^2 + c^2\omega_p^2}$$

donde $M = \frac{|v|}{c_0} < 1$ es el número de Mach, que define una medida de velocidad relativa entre la fuente y la velocidad de la luz. Para $\omega = \omega_s$ la primera

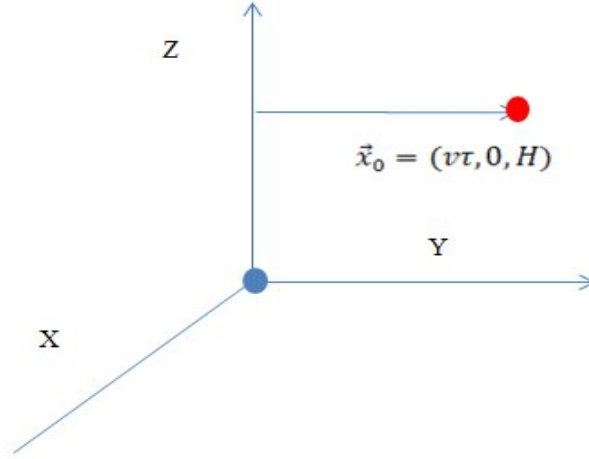


Figura 4.10: Representación de una fuente en movimiento

ecuación de (4.10) tiene una única solución τ_s . Es fácil ver que

$$\det S''(x, t, \omega_s, \tau_s) = -\left(1 + \frac{|v|}{c_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_s^2}}}\right)^2 \quad (4.11)$$

y

$$\text{sgn} S''(x, t, \omega_s, \tau_s) = 0. \quad (4.12)$$

La expresión para el campo eléctrico y magnético, queda de la siguiente manera

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{\omega_s \mu_0 a(\tau_s) e^{i(S(\mathbf{X}, t, \omega_s, \tau_s))}}{4\pi i |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau_s)| \left(1 + \frac{|\mathbf{v}|}{c_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_s^2}}}\right)} \mathbf{v} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{e^{iS(\mathbf{X}, t, \omega_s, \tau_j)}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(\tau_j)|} \mathbf{v} \right) \frac{a(\tau_s)}{\left(1 + \frac{|\mathbf{v}|}{c_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_s^2}}}\right)} \quad (4.14)$$

Capítulo 5

Ilustraciones numéricas y gráficas

Las expresiones definidas en las ecuaciones (4.11) permiten obtener un conjunto de resultados, en los cuales se muestran el comportamiento de τ_s y ω_s que son frecuencias y tiempos de retardo como se había visto anteriormente. Para calcular el comportamiento de las frecuencias ω_s en el plasma, se consideraron los siguientes parámetros

- $v = 4 \times 10^6$ m/s, velocidad de la fuente.
- $c_0 = 3 \times 10^8$ m/s, velocidad de la luz.
- $\omega_p = 8.98 \times 10^3 \sqrt{10^3}$ rad/s, frecuencia del plasma.
- $\omega_0 = 314159.27 - 1884955.59$ rad/s, frecuencia de fuente.

La Figura 5.1 muestra que el comportamiento de ω_s es proporcional a las frecuencias de la fuente. Se puede ver parte de la gráfica como si se tuviera un rango de frecuencias negativas, esto se debe a que el programa ajusta los ejes coordenados debido a las frecuencias que se utilizaron. A partir del rango de frecuencias 50 KHz - 300 KHz se pudieron calcular las frecuencias de retardo en plasma. A frecuencias menores del rango, ω_s es imaginaria, debido a la concentración de electrones utilizada.

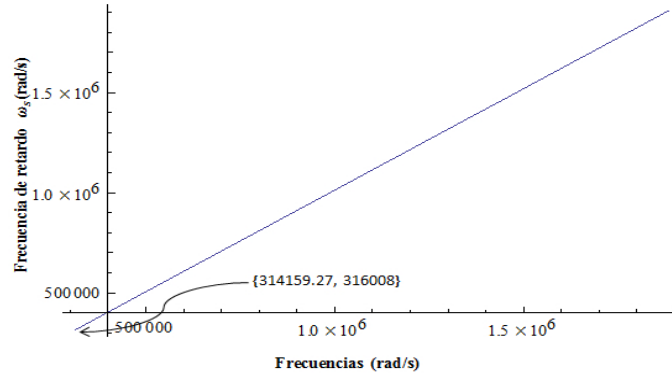


Figura 5.1: Comportamiento de ω_s variando la frecuencia de la fuente en un rango de 50 KHz-300 KHz

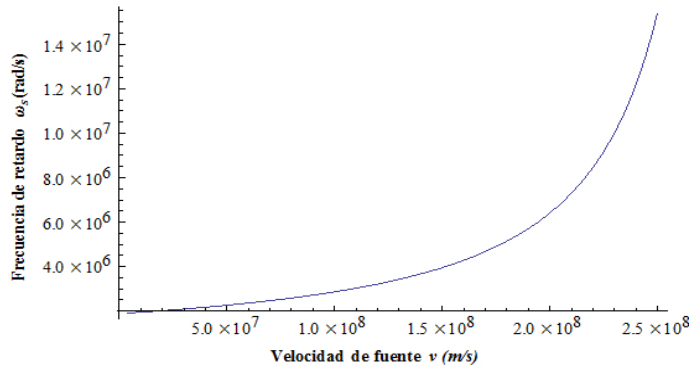


Figura 5.2: Comportamiento de ω_s con variación de velocidad en la fuente

La Figura 5.2 muestra el comportamiento de ω_s considerando los siguientes parámetros

- $v_i = 4 \times 10^6$ - $v_f = 2.5 \times 10^8$ m/s, velocidad inicial (v_i) y velocidad final (v_f) de la fuente.
- $\omega_0 = 1884955.59$ rad/s = 300 KHz, frecuencia de fuente.
- $\omega_p = 8.98 \times 10^3 \sqrt{10^3}$ rad/s, frecuencia del plasma.
- $c_0 = 3 \times 10^8$ m/s, velocidad de la luz.

Podemos ver que el comportamiento de la Figura 5.2 nos dice que la fuente se acerca al observador debido a que cumple con las condiciones del efecto Doppler para la frecuencia instantánea, mencionada en la sección 3.3.

La Figura 5.3 muestra el comportamiento del tiempo de retardo τ_s de la fuente con una trayectoria $x_0 = (v\tau, 0, h)$ considerando los siguientes parámetros

- $v=4\times 10^6$ m/s, velocidad de fuente.
- $h=700$ m, altura de la fuente al observador.
- $\omega_p=8.98\times 10^3\sqrt{10^3}$ rad/s, frecuencia del plasma.
- $\omega_0=1.91014\times 10^6$ rad/s = 304.01 KHz, frecuencia de la fuente.

Entre más grande sea el intervalo de tiempo, el tiempo de retardo irá incrementando.

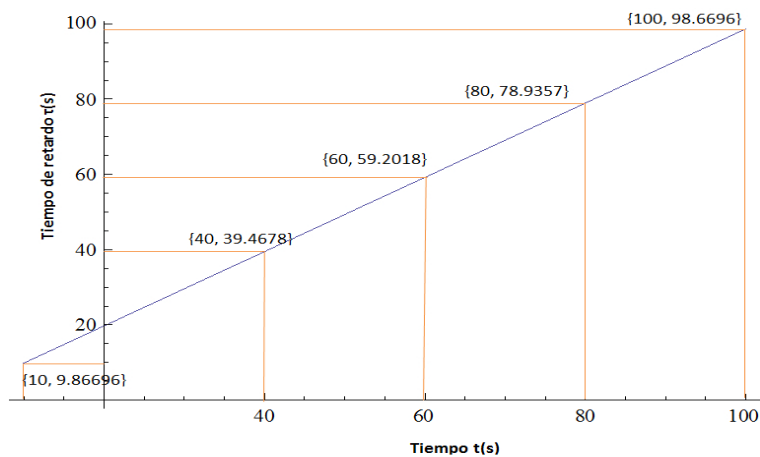


Figura 5.3: Tiempo de retardo τ_s variando el tiempo de 10 a 100 s.

Conforme el sistema avanza, el tiempo de retardo (τ) aumenta, entre más tiempo de recorrido será mayor el tiempo de retardo.

La Figura 5.4 muestra el comportamiento del tiempo τ_s considerando los siguiente parámetros

- $v=4\times 10^6$ m/s, velocidad de fuente.
- $h=700$ m, altura de la fuente al observador.
- $\omega_p=8.98\times 10^3\sqrt{10^3}$ rad/s, frecuencia del plasma.
- $\omega_0=1.91014\times 10^6 - 1.12918770\times 10^7$ rad/s = 304.01 KHz - 1.8 MHz, frecuencia de la fuente.
- $t=200$ s, tiempo de recorrido de la fuente.

A diferentes frecuencias que emite la fuente conforme se mueve, habrá diferentes tiempos de retardo.

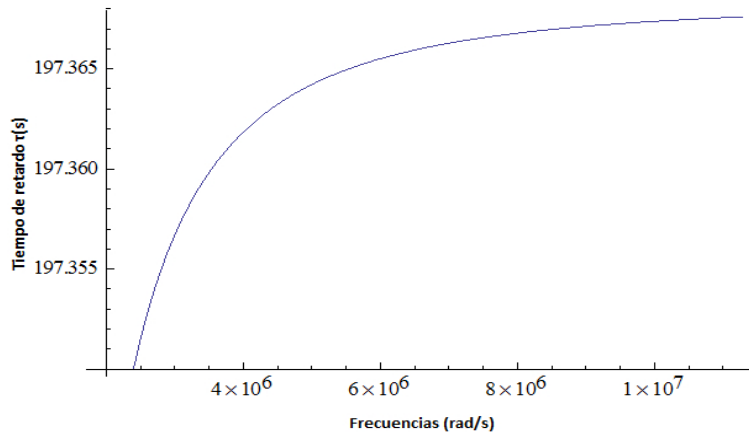


Figura 5.4: Tiempo de retardo τ_s con variación en la frecuencia de la fuente (304.1 KHz - 1.8 MHz).

Las siguientes gráficas muestran el comportamiento del campo electromagnético de las expresiones (4.13) y (4.14). Se observa que el campo depende de la trayectoria, la cual está descrita por $x_0 = (v\tau, 0, h)$.

La Figura 5.5 muestra el comportamiento del campo eléctrico considerando los siguientes parámetros:

- $x=(0,0,0)$, posición del receptor.
- $v = 4 \times 10^6$ m/s, velocidad de fuente.
- $c = 3 \times 10^8$ m/s, velocidad de la luz.
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Tm/A, permeabilidad magnética del vacío.
- $\omega_p=8.98 \times 10^3 \sqrt{10^3}$ rad/s, frecuencia del plasma.
- $\omega_0 = 1,91014 \times 10^6$ rad/s, frecuencia de la fuente

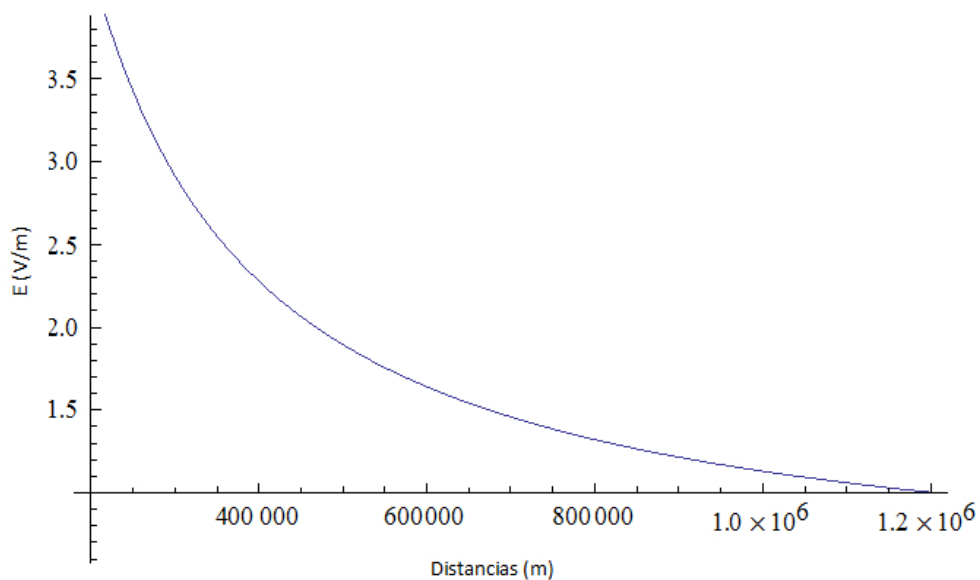


Figura 5.5: Campo eléctrico con variación de la distancia para una fuente en movimiento en un plasma.

Las Figuras 5.6 y 5.7 muestran el comportamiento del campo magnético considerando las siguientes parámetros

- $x=(0,0,0)$, posición del receptor.

- $v = 4 \times 10^6$ m/s, velocidad de fuente.
- $c = 3 \times 10^8$ m/s, velocidad de la luz.
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Tm/A, permeabilidad magnética del vacío.
- $\omega_p = 8.98 \times 10^3 \sqrt{10^3}$ rad/s, frecuencia del plasma.
- $\omega_0 = 1,91014 \times 10^6$ rad/s, frecuencia de la fuente

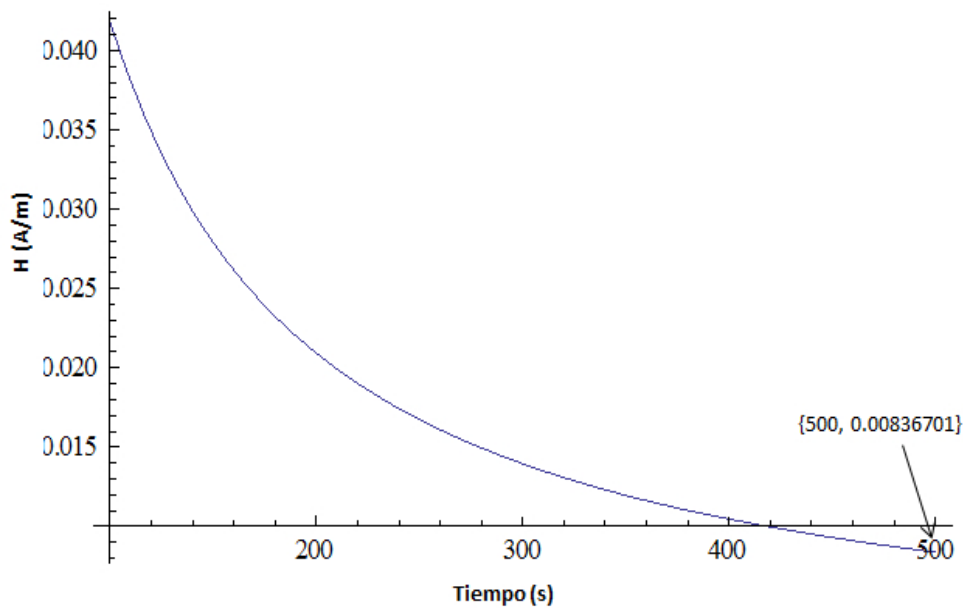


Figura 5.6: Campo magnético con variación en el tiempo para una fuente en movimiento en un plasma.

Las gráficas muestran el comportamiento del campo electromagnético que capta un receptor cuando la fuente está en movimiento. Se observa que el campo depende de la trayectoria de la fuente, la cual está descrita por una ecuación de movimiento. Se tiene un campo que decae conforme la fuente se mueve uniformemente, de acuerdo al efecto Doppler para campos electromagnéticos, entre más se aleja la fuente del observador, menor es el campo electromagnético que recibe nuestro observador en el plasma.

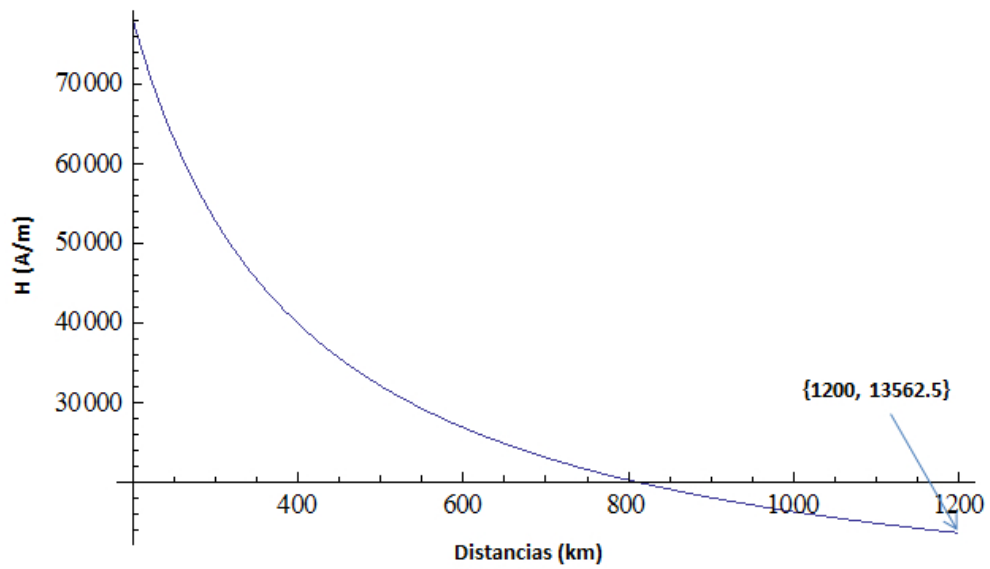


Figura 5.7: Campo magnético con variación en la distancia para una fuente en movimiento en un plasma.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se ha abordado el problema de calcular los campos electromagnéticos producidas por una fuente en movimiento en el plasma. El plasma tiene propiedades similares al estado gaseoso, no posee equilibrio electromagnético, es un buen conductor y sus partículas responden a las interacciones electromagnéticas. Tiene áreas de aplicación muy importantes como descargas de gas, fusión termonuclear controlada, física del espacio, astrofísica moderna, conversión de energía MHD y propulsión iónica, plasma de estado sólido y láseres de gas.

En este caso se hicieron estudios de propagación. Para ello se empleó el método de fase estacionaria con el principio básico del análisis asintótico. Los resultados obtenidos demuestran que el método de fase estacionaria es apropiado para la propagación de onda en plasma considerando un transmisor y un receptor. Es posible ver que para la propagación de ondas fue muy importante aplicar la teoría de medios dispersivos debido a que el plasma tiene el comportamiento de un medio dispersivo. Las propiedades del plasma en función de la frecuencia fueron muy importantes para analizar y conocer la propagación en dicho medio, ya que se ven muy influenciadas por la frecuencia del medio y por la concentración de electrones. La propagación de ondas electromagnéticas producidas por una fuente en movimiento en el plasma tiene muchas aplicaciones en el área de la ingeniería que aún se están dando a conocer, por ello el analizar el medio como dispersivo con el método de fase estacionaria fue de gran importancia para observar los comportamientos de

los parámetros y campos electromagnéticos en el plasma.

Apéndice A

Método de Fase Estacionaria

El método de la fase estacionaria [7] o aproximación de fase estacionaria es un principio básico del análisis asintótico, se aplica a las integrales oscilatorias, una clase de integrales de Fourier del tipo

$$\int g(x)^{iS(x)} dx \tag{A.1}$$

definidas en el espacio n -dimensional \Re^n , donde i es la unidad imaginaria, g es una amplitud y S es una función escalar llamada fase. Aquí g y S son funciones continuamente diferenciables que toman valores reales y satisfacen las siguientes condiciones. La amplitud g es tal que para cada índice α existe C_α tal que

$$|\partial^\alpha g(x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^k, \quad \langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}. \tag{A.2}$$

La fase S es de tal manera que

1. $S(x)$ es real para un $|x|$ lo suficientemente grande,
2. Para todo $|\alpha| \geq 2$ existe $C_\alpha > 0$ tal que $|\partial^\alpha S(x)| \leq C_\alpha$,
3. Existe $C > 0$ y $\rho > 0$ tal que

$$|\nabla S(x)| \geq C|x|^\rho$$

para $|x|$ suficientemente grande.

Note que si $k \geq -n$ la integral (A.1) no existe como absolutamente convergente y se necesita su regularización. Es decir, $\chi \in C_0^\infty(\mathfrak{R}^n)$ y $\chi(\mathbf{x}) = 1$ en una pequeña vecindad del origen. Se propone $\chi_R(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}/R)$.

Proposición Vamos a estimar (A.2) y mantener las condiciones (1)-(3). Entonces existe un límite

$$\mathbf{F} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{R}^n} \chi_R(\mathbf{x}) \mathbf{g}(\mathbf{x}) e^{iS(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \quad (\text{A.3})$$

independiente de la de la función χ .

Demostración Se introduce el operador diferencial L

$$Lu(\mathbf{x}) = (1 + |\nabla S(\mathbf{x})|^2)^{-1} (I - i\nabla S(\mathbf{x}) \cdot \nabla)u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n. \quad (\text{A.4})$$

Puede verse que

$$Le^{iS(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = e^{iS(\mathbf{x}, \mathbf{y})}. \quad (\text{A.5})$$

Es decir que L^τ es la transpuesta del operador diferencial L . Entonces sustituyendo esto en (A.5) y por integración por partes se obtiene

$$\mathbf{F}_R = \int_{\mathfrak{R}^n} \chi_R(\mathbf{x}) \mathbf{g}(\mathbf{x}) e^{iS(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = \int_{\mathfrak{R}^n} (L^\tau)^j (\chi_R(\mathbf{x}) \mathbf{g}(\mathbf{x})) e^{iS(\mathbf{x})} d\mathbf{x}. \quad (\text{A.6})$$

Las condiciones (1) – (3) producen que

$$|(L^\tau)^j (\chi_R(\mathbf{x}) \mathbf{g}(\mathbf{x}))| \leq C_j \langle \mathbf{x} \rangle^{k-\rho j} \quad (\text{A.7})$$

con la constante $C_j > 0$ independiente de $R > 0$. Es decir $j > \frac{k+n}{\rho}$. Entonces la integral de la parte derecha de (A.6) es absolutamente convergente, uniforme con respecto a $R > 0$, y podemos ir al límite para $R \rightarrow \infty$ en (A.6). Por lo tanto el límite en (A.3) existe, es independiente de χ , y

$$\mathbf{F} = \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{F}_R = \int_{\mathfrak{R}^n} (L^\tau)^j \mathbf{g}(\mathbf{x}) e^{iS(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \quad (\text{A.8})$$

donde $j > \frac{k+n}{\rho}$.

La integral definida en (A.8) es llamada oscilatoria. Se considera una integral que depende del parámetro $\lambda > 0$ de la siguiente forma

$$\mathbf{I}_\lambda = \int_{\mathfrak{R}^n} \mathbf{g}(\mathbf{x}) e^{i\lambda S(\mathbf{x})} d\mathbf{x},$$

donde \mathbf{g} , S satisfacen la condición (A.2), (1)-(3), y S es una función real valuada. Queremos decir que \mathbf{x}_0 es un punto estacionario no generado de la fase S si

$$\nabla S(\mathbf{x}_0) = 0,$$

y

$$\det S''(\mathbf{x}_0) \neq 0,$$

donde $S''(\mathbf{x}) = (\frac{\partial^2 S(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j=1}^n$ es la matriz de Hess de la fase S .

Proposición (ver [13], [28]) No existe un conjunto finito de $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ aislados no degenerados de puntos estacionarios de la fase S . Entonces

$$\mathbf{I}_\lambda = \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j(\lambda), \quad (\text{A.9})$$

donde

$$\mathbf{F}_j(\lambda) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{e^{(i\lambda S(\mathbf{x}_j) + \frac{i\pi}{4} \text{sgn} S''(\mathbf{x}_j))}}{|\det S''(\mathbf{x}_j)|^{1/2}} \mathbf{g}(\mathbf{x}_j) \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \quad (\text{A.10})$$

donde $\text{sgn} S''$ es la diferencia entre el numero positivo y negativo del eigenvalor de la matriz $S''(\mathbf{x}_j)$.

Bibliografía

- [1] Abele, M. Radiation in a plasma from a uniformly moving distribution of electric charge, Proceedings of the symposium on electromagnetics and fluid dynamics of gaseous plasma, N.Y. (1961). v. 11, p.p. 153-172.
- [2] Afanasiev, G. N; Kartavenko, V.G; Zrelov, V.P. Fine structure of the Vavilov-Cherenkov radiation, Phys. Rev. E, Dec. 2003. V.68, No. 6, p.p. 066501.1-066501.12.
- [3] Anderson T. R. and Alexeff I. 'Stealth' Antenna Made Of Gas, Impervious To Jamming, APS Division of Plasma Physics annual meeting, Pennsylvania, 2007.
- [4] Anderson T, An Electronically Steerable and Focusing Plasma Reflector Antenna and An Electronically Steerable and Focusing Bank of Plasma Tubes, Haleakala R&D, Inc.
- [5] Anderson T. Plasma Antennas, Artech House, Portland, 2011.
- [6] Bolotovskii, B. B.; Ginzburg V. L. Vavilov-Cherenkov effect and the Doppler effect in the case motion of the sources with velocity exceeding the speed of light in vacuum. Usp. Fiz. Nauk, Apr. 1972. v.106, No. 4, p.p. 577-592.
- [7] Burlak G., Rabinovich V. Time-frequency integrals and stationary phase method in problems of waves propagation from moving sources, SIGMA, 8 (2012), 096, 21 pp.
- [8] Carusotto, I.; Artoni, M.; La Rocca, G. C.; Bassani, F. Slow Group Velocity and Cherenkov Radiation, Phys. Rev. Lett, Jul. 2001. v.87, No. 6, p.p. 064801.1-064801.4.

- [9] D.C. Jenn, Plasma Antennas: Survey of Techniques and the Current State of Art, Naval Postgraduate School, California, 2003.
- [10] D'Alessio J. T. Waves, McGraw-Hill, Inc., New York USA, 2003.
- [11] de los Arcos T., Tanarro I. Plasma: el cuarto estado de la materia, CSIC, 2011.
- [12] Degeling A. W.; Borg, G.G.; Boswell, R. W. Transitions from electrostatics to electromagnetic whistler wave excitation, Phys. Plasmas. May. 2004. v.11, No. 5, p.p. 2144-2155.
- [13] Fedoryuk M. V. Method of the Steepest Descent, Moscú, 1977.
- [14] Felson L. B., Marcuvitz N. Radiation and Scattering and of Waves, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
- [15] Ferrer C., Amigó V. Tecnología de materiales, Universidad Politécnica de Valencia, 2003.
- [16] Fitzpatrick R. Classical Electromagnetism: An intermediate level course, The University of Texas at Austin, 2006.
- [17] Ginzburg V. L. Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma, Moscú, Nauka, 1960.
- [18] Hartemann, F. V. High-Field Electrodynamics. CRC Press, 2000.
- [19] Jackson J.D. Classical Electrodynamics, J. Wiley and Sons, Inc., New York, 1998.
- [20] Kowalski M. Plasma Waste Disposal, Toronto, Ontario 2008.
- [21] Krafft, C; Volokitin, A.S. Interaction of a wave packet with a thin electron beam spiraling in a magnetized plasma, Phys. Plasma, Aug. 2003. v.10, No. 8, p.p. 3093-3102.
- [22] Krall, A.; Trivelpiece. W.; Principles of plasma Physics, Mc Graw Hill, 1973.
- [23] Landau L. D., Lifshitz E. M. Theoretical Physics, Vol. 8, Electrodynamics of Continuous Media, Moscú, Nauka, 1982.

- [24] Landau L.D., E. M. Lifshitz, Theoretical Physics, Vol. 2, Field theory, Moscú, Nauka, 1988.
- [25] Landau, L.D.; Lifschitz, E.M. Field Theory; M. Nauka; 1988.
- [26] Martínez-Aguilar J. Caracterización espectroscópica de un plasma de microondas a presión atmosférica en flujo, Tesis de Doctorado, Departamento de Física, UCO, 2009.
- [27] Miranda J. M., Sierra M. Ingeniería de Microondas, Pearson Educacion, Madrid, 2002.
- [28] N. Blestein, Handelsman R. A. Asymptotic extention of integrals, Dover Publication Ink.. NY, 1975.
- [29] Omura Y; Summers D. Computer simulations of relativistic whistler-mode wave-particle interactions, Phys. Plasmas. Jul. 2004. v.11, No. 7 p.p. 3530-3534.
- [30] Pletzer, A.; Phillips, C.K.; Smithe, D.N. Gabor wave packet method to solve plasma wave equations, Radio Frequency Power in Plasmas: 15th Topical Conference on Radio Frequency. Dec. 2003. v. 694, No. 1, p.p. 503-506.
- [31] Rehn K. W. "Detection and Classification of Moving Objects Using a Stationary, High Resolution Pulse Sonar," master's thesis, The University of Texas at Austin, 1993.
- [32] Rohrlich, Daniel; Aharonov, Yakir. Cherenkov radiation of superluminal particles, Phys. Rev. A. Oct. 2002. v.66, No.4, p.p. 042102.1-042102.7.
- [33] Sauer, K.; Dubinin, E.; McKenzie, J.F. Solitons and oscillitons in complex plasmas, Dusty Plasmas in the New Millennium Conf. 2002. v.649, No. 1, p.p. 220-223.
- [34] Stix, T.H. Waves in Plasma, Springer Verlag, New York, 1992.
- [35] Tipler P. A. Física Moderna, Reverté, Barcelona, 2003.
- [36] Torres-García L. E., Triviño-Macías J. E. Problemas de Frontera para la Ecuación de Helmholtz, Tesis de Maestría, Departamento de Ciencias Básicas, Universidad EAFIT Medellín, 2012.

- [37] Trottenberg, T; Brede, B; Block, D; Piel, A. Resonance cones in a dusty magnetized plasma, Phys. Plasmas. Dec. 2003. v.10, No. 12, p.p. 4627-4632.
- [38] Tyukhtin, A.V. Radiation of a Charge Moving in a Waveguide Filled with a Dielectric Medium Possessing Resonance Dispersion, Tech. Phys. Lett. Jul. 2004. v.30, No. 7, p.p. 605-608.