





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
Escuela Superior de  
Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
INGENIERÍA AERONÁUTICA

“MODELO LONGITUDINAL  
DE UNA AERONAVE TRISÓNICA  
TIPO CANARD”

TESIS  
QUE PARA OBTENER EL  
TÍTULO DE INGENIERO EN AERONÁUTICA  
PRESENTA:  
**JONATHAN OMEGA ESCOBEDO ALVA**



Asesores:

Dr. Eduardo Liceaga Castro

M. en C. Héctor Barrón González

M. en C. Rogelio Gerardo Hernández García

México, D.F., MAYO 2006

A mis padres:

*María Enriqueta Alva Alvarado*

*José Vicente Escobedo Gallardo*



# ÍNDICE

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	
1.1. INTRODUCCIÓN	1
1.2. JUSTIFICACIÓN	2
1.3. OBJETIVO GENERAL	2
1.4. OBJETIVOS PARTICULARES	2
1.5. ALCANCE	3
<b>2. ESTADO DEL ARTE</b>	5
<b>3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS</b>	8
3.1. MATEMÁTICAS	9
3.1.1. Espacio de Estados	9
3.1.2. Función de Transferencia	10
3.2. AERODINÁMICA	11
3.2.1. Origen de las Fuerzas Aerodinámicas	11
3.2.2. Arrastre	13
3.2.2.1. Arrastre por Fricción	13
3.2.2.2. Arrastre Parásito Subsónico	13
3.2.2.3. Arrastre Parásito Supersónico	14
3.2.2.4. Arrastre Parásito Transónico	14
3.2.2.5. Arrastre Inducido	14
3.2.3. Sustentación	15
3.2.3.1. Sustentación en la Etapa Subsónica	15
3.2.3.2. Sustentación en la Etapa Transónica	15
3.2.3.3. Sustentación en la Etapa Supersónica	15
3.2.4. Centro Aerodinámico	15
<b>4. MODELO LONGITUDINAL</b>	17
4.1 ECUACIONES DE TRASLACIÓN Y ACTITUD	19

4.2	MODELO LINEAL	20
4.2.1	Expansión de las Series de Taylor	20
4.2.2	Método de Perturbaciones	22
<b>5.</b>	<b>DERIVADAS DE ESTABILIDAD Y CONTROL LONGITUDINALES</b>	<b>32</b>
5.1.	DERIVADAS GRAVITACIONALES	36
5.2.	DERIVADAS AERODINÁMICAS	34
5.2.1	Derivadas de Estabilidad	35
5.2.2	Derivadas de Control	62
<b>6.</b>	<b>EVALUACIÓN DE RESULTADOS</b>	<b>69</b>
<b>7.</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>81</b>
7.1	CONCLUSIONES GENERALES	81
7.2	CONCLUSIONES PARTICULARES	82
<b>8.</b>	<b>TRABAJO FUTURO</b>	<b>84</b>
 <i>APÉNDICES</i>		
<b><u>A</u></b>	<b>TRASLACIÓN Y ACTITUD DE UN CUERPO EN EL ESPACIO</b>	<b>I</b>
<b><u>B</u></b>	<b>CARACTERÍSTICAS DE LA AERONAVE</b>	<b>XII</b>
<b><u>C</u></b>	<b>CARACTERIZACIÓN AERODINÁMICA</b>	<b>XVI</b>
 <i>BIBLIOGRAFÍA</i>		 <b>XXXV</b>



# NOMENCLATURA

$\omega$	Velocidad Angular General
$\alpha_0$	Coefficiente de sustentación a ángulo de ataque cero
$\bar{c}$	Cuerda Aerodinámica Media
$\tau$	Esfuerzo de Corte
$\rho$	Densidad
$q$	Presión Dinámica
$\Lambda$	Flechado
$\alpha$	Ángulo de Ataque
$\lambda$	Conicidad
$\eta$	Eficiencia de la Curva de Sustentación
$\epsilon$	$\epsilon = 90 - \Lambda$
$\mu$	Viscosidad Dinámica
$\hat{c}$	Cuerda
$a$	Referente al Aire
$A$	Referente a la Aeronave
$\bar{a}$	Referente al Ala
Al	Alargamiento
b	Envergadura (m)
$c$	Referente al Canard
$C_D$	Coefficiente de Arrastre
$C_{Df}$	Coefficiente de Arrastre por Fricción
$C_f$	Coefficiente de Esfuerzo de Corte
$C_L$	Coefficiente de Sustentación
$C_{Ldise}$	Coefficiente de Sustentación de Diseño
$C_{L\alpha}$	Curva de Sustentación
$C_p$	Cuerda de Punta
$C_r$	Cuerda de Raíz
d	Diámetro del Fuselaje
D	Arrastre
$D_0$	Arrastre Parásito

$D_i$	Arrastre Inducido
$E$	Referente al Estado estacionario de la aeronave
$e$	Factor de Oswald
$E_{och}$	Factor de eficiencia de Arrastre por Onda de Choque
$f$	Referente al Fuselaje
$F$	Factor de Sustentación del Fuselaje
$FF$	Factor de Forma
$g$	Aceleración de la Gravedad
$h$	Referente a la Superficie Húmeda
$K$	Factor de Proporcionalidad de la Polar
$l$	Longitud
$L$	Sustentación
$m$	Masa (kgm)
$M$	Número de Mach
$M_{cr}$	Número de Mach Crítico
$M_{DD}$	Número de Mach Divergente
$och$	Referente a la Onda de Choque
$p$	Referente al Estado perturbado de la aeronave
$Q$	Factor de Arrastre por Interferencia
$R$	Resultante de Fuerzas Aerodinámicas
$Re$	Número de Reynolds
$Re_l$	Número de Reynolds a una Longitud Determinada
$Re_{tr}$	Número de Reynolds de Transición
$S = S_{ref}$	Superficie de Referencia
$S_p$	Porcentaje de Succión de Borde de Ataque
$T$	Tierra
$t_p$	Espesor del Perfil
$U$	Velocidad de Vuelo
$X_{ca}$	Lugar del centro aerodinámico
$X_{cg}$	Lugar del Centro de Gravedad
$\beta$	$\beta = (1-M)^{1/2}$

$\Lambda_{1/2}$	Flechado a un medio de la cuerda
$\Lambda_{1/4}$	Flechado a un cuarto de la cuerda
$\Lambda_{BA}$	Flechado del borde de ataque
$\mu_M$	Ángulo de Cono de Mach /2
$CAM$	Cuerda Aerodinámica Media
$S_h$	Superficie húmeda
$(\hat{c})_m$	Locación en la cuerda del máximo espesor del perfil
$\Lambda_m$	Flechado del máximo espesor del ala
$\delta$	Deflexión de superficies de control

### Nomenclatura Lineal

Ejes	Posición	Velocidad	Aceleración	Fuerza
$X$	$x$	$U$	$\dot{u}$	$F_x$
$Y$	$y$	$V$	$\dot{v}$	$F_y$
$Z$	$z$	$W$	$\dot{w}$	$F_z$

### Nomenclatura Angular

Ejes	Posición	Velocidad	Momento	Inercia	Producto de Inercia
$X$	$\phi$	$p$	$L(M_x)$	$I_x$	$J_{xy}$
$Y$	$\theta$	$q$	$M(M_y)$	$I_y$	$J_{yz}$
$Z$	$\psi$	$r$	$N(M_z)$	$I_z$	$J_{zx}$

# LISTA DE TABLAS Y FIGURAS

## 9. FIGURAS

3.1.	<i>Modelo típico del espacio de estados.</i>	9
3.2.	<i>Efecto Doppler en el agua con una velocidad relativa, entre el generador de ondas y el fluido.</i>	15
4.1.	<i>Fenómeno no lineal</i>	21
4.2.	<i>Sistemas de Referencia</i>	26
4.3.	<i>Estado Estacionario y Perturbado</i>	26
5.1.	<i>Actitud longitudinal en el estado estacionario</i>	33
5.2.	<i>Actitud longitudinal en el estado perturbado</i>	33
5.3.	<i>Fuerzas gravitacionales en los ejes de la aeronave</i>	34
5.4.	<i>Variación de la relación arrastre-velocidad contra el número de Mach</i>	36
5.5.	<i>Arrastre contra número de Mach del diseño preliminar de aeronave a 5° de ángulo de ataque</i>	37
5.6.	<i>Pendiente de la Curva de Sustentación Contra Número de Mach</i>	39
5.7.	<i>Desplazamiento del centro aerodinámico del ala en función del número de Mach</i>	40
5.8.	<i>Influencia de la fuerza de sustentación del ala, canards y fuselaje en el momento de cabeceo de la aeronave</i>	41
5.9.	<i>Desplazamiento del centro aerodinámico con el incremento de la velocidad</i>	45
5.10.	<i>Movimiento del centro aerodinámico en las superficies canard con respecto al número de Mach</i>	46
5.11.	<i>Fuerzas aerodinámicas después de un disturbio llamado</i>	48
5.12.	<i>Comportamiento del gráfico arrastre contra ángulo de ataque a diferentes números de Mach</i>	72
5.13.	<i>Influencia del número de Mach en la pendiente de la</i>	51

	<i>curva de sustentación</i>	
5.14.	<i>Gráfico de momentos contra ángulo de ataque</i>	52
5.15.	<i>Velocidad de cabeceo a ángulo de ataque cero</i>	55
5.16.	<i>Velocidad de ángulo de ataque a ángulo de cabeceo constante</i>	55
5.17.	<i>Rizo perfecto</i>	55
5.18.	<i>Aeronave en descenso acelerado y actitud fija</i>	56
5.19.	<i>Distribución de la velocidad tangencial con respecto al aire de cabeceo a lo largo del cuerpo de la aeronave</i>	56
5.20.	<i>Fuerzas aerodinámicas en un perfil. Resultante y proyecciones de la resultante paralelas y perpendiculares a la cuerda</i>	57
5.21.	<i>Efecto en el ángulo de incidencia de la superficie canard al tener la aeronave una velocidad de cabeceo</i>	58
5.22.	<i>Control del cabeceo por medio de las superficies canard</i>	63
6.1.	<i>Respuesta en estado transitorio a una deflexión de 6 grados durante un segundo en las superficies canard a .25 de Mach al <math>C_{M\alpha}</math> positivo original de 6.2773</i>	74
6.2.	<i>Respuesta en estado transitorio al deflectar las superficies de control a 6° en un segundo a .25M</i>	74
6.3.	<i>Respuesta en estado transitorio al deflectar las superficies de control a 6° durante un segundo a .5 Mach</i>	75
6.4.	<i>Respuesta en estado transitorio al deflectar las superficies de control a 6° durante un segundo a .75 Mach</i>	75
6.5.	<i>Respuesta en estado transitorio al deflectar las superficies de control a 6° durante un segundo a 1 Mach</i>	76
6.6.	<i>Respuesta en estado transitorio al deflectar las</i>	76

	<i>superficies de control a 6° durante un segundo a 1.25 Mach</i>	
6.7.	<i>Respuesta en estado transitorio al deflectar las superficies de control a 6° durante un segundo a 1.5 Mach</i>	77
6.8.	<i>Respuesta en estado transitorio al deflectar las superficies de control a 6° durante un segundo a 1.75 Mach</i>	77
6.9.	<i>Respuesta en estado transitorio al deflectar las superficies de control a 6° durante un segundo a 2 Mach</i>	78

## 2. TABLAS

5.1	<i>Valores obtenidos de <math>C_{Du}</math> a diferentes números de Mach</i>	38
5.2	<i>Valores de variación de fuerza en el eje z respecto a la velocidad para diferentes números de Mach</i>	39
5.3	<i>Incremento en el coeficiente de momentos con respecto al incremento de velocidad a diferentes números de Mach</i>	47
5.4	<i>Derivadas de fuerza en x con respecto al ángulo de ataque a diferentes números de Mach</i>	50
5.5	<i>Derivada de fuerza en z contra ángulo de ataque a diferentes números de Mach</i>	51
5.6	<i>Variación del coeficiente de momentos contra la variación del ángulo de ataque</i>	54
5.7	<i>Valores a diferentes números de Mach de la variación de la fuerza en z con respecto a la velocidad de cabeceo, cuando la fuerza de sustentación es igual a la fuerza en el eje z de</i>	60

	<i>la aeronave</i>	
5.8	<i>Variación del coeficiente de momentos contra la variación de velocidad de cabeceo a diferentes números de Mach</i>	62
5.9	<i>Variación en el coeficiente de momentos de la aeronave con respecto a las variaciones en deflexión de las superficies canard</i>	64
5.10	<i>Variación de la fuerza en x de la aeronave con respecto a la variación del ángulo de incidencia de las superficies canard</i>	65
5.11	<i>Variación de la fuerza en z con respecto a la variación en ángulo de incidencia de las superficies de control canard</i>	66
6.1	<i>Derivadas de estabilidad y control longitudinales</i>	71
6.2	<i>Valor de las derivadas de estabilidad y control longitudinales para distintos números de Mach, a nivel medio del mar y a condiciones de atmósfera estándar</i>	72

# 1

## INTRODUCCIÓN

Parte del proceso de diseño de aeronaves, incluye el estudio de predicción. Se debe verificar que el diseño satisface los requerimientos de maniobrabilidad y de cualidades de manejo (*handling qualities*).

Con el desarrollo teórico y tecnológico en cálculos computacionales, se puede lograr la predicción de dichas características. Usando herramientas matemáticas, implementadas en computadoras, se puede simular de forma aproximada el vuelo de la aeronave. De esta manera se ahorrarán altos costos en la experimentación al disminuir iteraciones de diseño.

Este tipo de herramientas permiten observar cómo influyen diferentes factores en el vuelo; como condiciones atmosféricas, pesos, configuraciones aerodinámicas, y el sistema de propulsión. Al lograr el estudio de predicción se podrán conocer las limitantes de la configuración aerodinámica, las ventajas y desventajas de ellas, así como también qué modificaciones se pueden hacer en el diseño para obtener ciertos resultados esperados.

## 1.2 JUSTIFICACIÓN

El experto en aerodinámica diseña la aeronave con el objetivo de cumplir con los requisitos de estabilidad y control. Si los requerimientos no se cumplen, entonces, el diseño debe ser modificado según los resultados obtenidos y el criterio del diseñador. Una vez implementados los cambios, se debe volver a evaluar. A esto se le llama iteración de diseño, y aunque estas iteraciones dependen de varios intereses, es decir, del aspecto estructural, velocidad, autonomía, etc. en este caso, el enfoque será únicamente a una iteración provocada por la evaluación de estabilidad y controlabilidad.

Una buena forma de evaluar el comportamiento del vehículo es realizando vuelos de prueba y experimentos en túneles de viento. Sin embargo, aunque el diseñador tenga experiencia, se van a presentar varias iteraciones hasta llegar al diseño final, lo que significa que se llevaría mucho tiempo y dinero si se considera el costo de energía en un túnel de viento o vuelos de prueba. Una solución a esto, lo cual es el objetivo de esta tesis, es obtener una herramienta de evaluación en cuanto estabilidad y control, que permita hacer cuantas iteraciones sean necesarias, y en tiempos muy cortos, únicamente con una computadora personal. Además de presentar un modelo que funciona para implementar el control a la aeronave ya evaluada y aprobada.

El modelo longitudinal aquí logrado deberá ser lo más próximo a la realidad, lo cual debe ser verificado por medio de experimentación.

## 1.3 OBJETIVO GENERAL

Lograr la evaluación de controlabilidad y estabilidad en tres grados de libertad de una aeronave establecida como trisónica de configuración canard, con el fin de obtener resultados preliminares, así como obtener el modelo matemático que sirva para la implementación del control longitudinal de dicha aeronave.

## 1.4 OBJETIVOS PARTICULARES

A partir de las ecuaciones que rigen la dinámica de un vehículo con tres grados de libertad, se determinarán y agregarán a estas, las fuerzas de gravedad, de propulsión y aerodinámicas que actúan sobre la aeronave.

Se debe encontrar un modelo matemático lineal que permita visualizar los movimientos de la aeronave en un plano dimensional al introducir como entrada una deflexión en las superficies de control, para que de esta manera se logre evaluar la estabilidad de la aeronave y estimar su maniobrabilidad y características de manejo.

Las ecuaciones que rigen la dinámica de la aeronave tendrán implícitas en ellas, fuerzas aerodinámicas, de gravedad y de propulsión, que estarán en función del estado de dicho vehículo. Estas ecuaciones serán tres ecuaciones diferenciales. Se debe encontrar la forma de solucionar dichas ecuaciones para lograr la visualización de los movimientos de la aeronave. En el transcurso de dicha solución se debe conocer a detalle el efecto de las tres fuerzas mencionadas que influyen en la dinámica, lo que significa un estudio aerodinámico preliminar que arroje como resultados características aerodinámicas.

Una vez resueltas las ecuaciones, se deben poder observar los efectos en la dinámica longitudinal del vehículo cuando se presenta una deflexión en las superficies de control correspondientes a cualquier magnitud y periodo de tiempo. Lo que provocará una simulación en dos dimensiones del vuelo del diseño preliminar que se presenta en esta tesis.

### 1.5 ALCANCE

En un análisis más completo, es decir, en tres dimensiones con seis grados de libertad existe un acoplamiento entre la dinámica longitudinal y la lateral. Al realizarse el aislamiento de la dinámica longitudinal, los movimientos que se observan pueden variar con la realidad en vuelo, sin embargo funciona para la implementación de un sistema de control longitudinal teniendo un error de desacoplamiento mínimo [11,13]. El propósito es aislar la dinámica longitudinal sin considerar la influencia de los movimientos en otros planos dimensionales. El modelo final permitirá visualizar el vuelo de la aeronave a analizar en un solo plano. Es resumen, al deflectar las superficies de control se observará su:

- Posición de cabeceo,
- Velocidad de cabeceo
- Velocidad lineal sobre el eje axial de la aeronave
- Velocidad lineal sobre el eje vertical de la aeronave
- Ángulo de ataque

Los puntos anteriores son variables de salida que dependen del tiempo las cuales podrán ser observadas con respecto al tiempo. Y son, debido a la forma de la solución de las ecuaciones diferenciales, pequeños incrementos y decrementos de la posición inicial que lleve la aeronave. Lo cual significa que se debe hacer un análisis para diferentes condiciones iniciales de vuelo según lo completo que se requiera del análisis.

Independientemente de la condición anterior, el análisis aerodinámico está limitado a pequeños ángulos de ataque, debido a que la metodología es efectiva cuando se tiene una tendencia lineal, la cual cubre la región de ángulos de ataque en donde se mantiene una variación constante y no se presenta aun el desplome.

La mayoría de los cálculos de aerodinámica siguen la metodología de aproximación a un diseño conceptual de aeronave de Daniel P. Raymer [17].

Al presentarse fuerzas aerodinámicas en la aeronave, ésta sufrirá deformaciones aeroelásticas en su estructura que pueden afectar la dinámica del vehículo. Sin embargo se necesita hacer un estudio minucioso de fenómenos de aeroelasticidad y lograr incorporarlos a las soluciones de las ecuaciones. Lo cual queda fuera del alcance de esta tesis.

Al presentarse un consumo de combustible conforme pasa el tiempo, el centro de gravedad podría recorrerse dependiendo de la configuración y ubicación de los tanques de combustible, en este análisis la posición del centro de gravedad se considera constante.

El peso y el momento de inercia se obtendrán considerando que la aeronave es sólida y homogénea teniendo como densidad la del aluminio. Sin embargo el centro de gravedad se colocará a un cuarto de la cuerda aerodinámica media del ala sobre el eje axial de la aeronave.

La actitud de la aeronave será observada con respecto a la tierra plana. Es decir, considerando como superficie horizontal un plano tangente a la curvatura de la tierra en el punto donde se realiza el vuelo.

Las condiciones de vuelo en el modelo matemático serán fijas. El análisis de vuelo se realiza a nivel medio del mar en condiciones de atmósfera estándar. Los números de Reynolds y todos los valores correspondientes que afecten los resultados serán evaluados en base a la atmósfera estándar. Tales como coeficientes aerodinámicos, y todo lo que respecta a caracterización aerodinámica.

El modelo matemático no será fiable hasta que se realicen experimentos que evalúen lo predicho por esta tesis.

## 2

## ESTADO DEL ARTE

F. W. Manchester fue el primer occidental en investigar analíticamente la estabilidad dinámica de las aeronaves. Estudió el comportamiento de las aeronaves con ayuda de modelos a escala, simplificando los resultados a un grupo de ecuaciones de movimiento en aeronaves simétricas. Él le llamó a las trayectorias de vuelo resultantes fugoides, un nombre que se sigue usando.

En el año del primer vuelo con potencia, en 1903 Bryan y Williams usaron métodos matemáticos convencionales, introdujeron las ecuaciones de movimiento linealizadas que son desde entonces la base del estudio de la dinámica de aeronaves y sus respuestas al control. Después las teorías de los movimientos longitudinal y lateral fueron presentadas por Bryan. Las seis ecuaciones de Euler para el movimiento general de un cuerpo rígido fueron consideradas para analizar pequeñas reacciones del estado estacionario de vuelo de una aeronave con un plano de simetría. Bajo esas consideraciones, las ecuaciones fueron mostradas para ser separadas en dos grupos. Cada grupo relacionado con las variables de movimiento en un solo plano de simetría de la aeronave. Ningún grupo debería tener variables que dependieran del otro, sino que deben de ser tratados de forma separada. Los grupos de ecuaciones separados fueron llamadas simétricas o longitudinales y asimétricas o ecuaciones laterales. Una importante consecuencia en la consideración de pequeñas perturbaciones era que las fuerzas aerodinámicas de la aeronave mostrarían cierta dependencia sobre constantes o “derivadas de estabilidad”, como ellos las llamaron. Bryan sugirió que deberían ser determinadas experimentalmente.

Cerca de 1912 Bairstow y Melvill Jones, del Laboratorio Nacional de Física de Gran Bretaña siguió las ideas de Bryan y desarrolló algunas de las técnicas en el túnel de viento para la medición de las derivadas de estabilidad de modelos a escala. Ellos mostraron sus resultados después de un año de esfuerzos, mostraron cómo las características de los movimientos deberían ser reconocidos de las soluciones matemáticas para la respuesta de lazo abierto (sin controladores) de un diseño preliminar de aeronave al cual midieron y calcularon todas las derivadas. Y crearon una metodología para el proceso del modelado que aún sigue su uso.

La teoría y prácticas experimentales fueron extendidas subsecuentemente para los investigadores originales y otros. Bairstow consideró la estabilidad de movimientos más complicados como una trayectoria en vuelo circular y desarrolló análisis para el movimiento de dirigibles. Él investigó mucho sobre el tema cerca de los años veinte. H. Glavert, quien trabajó en el Laboratorio Nacional de Física en 1914 introdujo las técnicas de Bairstow para túneles de viento y el método de Bryan y Bairstow para el cálculo de la dinámica de estabilidad en los Estados Unidos. Él colaboró en el primer reporte en la NACA NASA el cual trataba sobre respuestas de aeronaves. Glavert calculó las derivadas de estabilidad de una hélice y los movimientos de una aeronave con los elevadores libres. Las mediciones del modelo o el cálculo particular de las derivadas de estabilidad continuaron llamando la atención y se realizó una serie de trabajos de investigación para la medición de derivadas, movimientos en lazo abierto, y la respuesta a controladores. Dichas investigaciones se realizaron en pruebas de vuelo en aeronaves a escala real.

En 1935, cuando la investigación de B. Melvill Jones apareció en la teoría aerodinámica de Durand, la aproximación clásica de Bryan y Baristow fue bien establecida pero muy poco usada. Los resultados de los experimentos en modelos a escala real probaron que la teoría de movimientos infinitesimales, era un método práctico para la predicción de la estabilidad de movimientos y arrojaba resultados útiles para predecir los movimientos de respuesta e implementar el control. El efecto de los diferentes diseños en la configuración de aeronaves típicas ha sido registrado a través de resultados obtenidos en distintos experimentos.

Por ello, los resultados obtenidos no fueron apreciados sólo como ejemplos de valores numéricos específicos, sino de una forma más general, al menos en parte, como una aproximación dada en términos de literales dominantes para las derivadas de estabilidad.

En los análisis hechos en aquella época se tenía la dificultad de obtener el resultado requerido. No era fácil trazar una conexión entre la respuesta final que era registrada y las características específicas de la aeronave, las cuales son representadas por varias derivadas incluidas en las ecuaciones de movimiento.

En ese entonces no existían aún las herramientas suficientes para determinar respuestas a entradas específicas. Aunque no había una metodología específica, las soluciones de  $\lambda$  (como las frecuencias y factores de amortiguamiento) que se obtenían en vuelo era todo lo que se requería. La omisión de ciertos términos, los cuales son relativamente no importantes, provocaba una gran simplificación para hacer que la relación causa efecto pudiese ser determinada con facilidad.

La situación fue cambiando drásticamente durante los próximos diez años. Se introdujo un método con operadores, lo cual redujo la labor del cálculo, y para hacer la técnica tan simple y general como fuera posible, se introdujo una notación adimensional, y se agregó al cálculo, información sobre factores de estabilidad de gráficos convenientes.

Los investigadores aceleraron sus trabajos con la guerra y algunas improvisaciones fueron hechas, como por ejemplo, la importancia de la interferencia entre el ala y el fuselaje y los efectos de los motores en las derivadas de estabilidad, el efecto directo en el balance debido a tener los controles libres, la respuesta a movimientos particulares de controles particulares, como el caso de los frenos aerodinámicos y la influencia de cambios en el diseño sobre el carácter de los movimientos.

Sin embargo, el valor y características de las entradas en forma matemática aún estaban restringidos, no se podía manipular al sistema matemáticamente con entradas fijas, es decir, valores constantes en la deflexión de las superficies de control, sino que se tenían algunas restricciones.

Las superficies de control tenían que estar fijas en los primeros estudios. La programación de las entradas se podía hacer únicamente con funciones simples, como la función paso o rampa. Esto hacía no sólo que los cálculos fuesen laboriosos sino que los resultados estuvieran alejados de la realidad. Además, en vuelo real, las entradas eran más o menos constantes o variantes; eran ejecutadas, ya sea por el piloto o por algún autopiloto.

No fue sino hasta finales de la guerra cuando se lograron útiles herramientas para lograr la conexión entre la respuesta a algunas perturbaciones específicas, así como la operación de controladores y las características de la aeronave que eran representadas por varias derivadas, lo cual se sigue usando hasta la fecha.

Los programas de matemáticas facilitan la resolución de las ecuaciones y ayudan a visualizar los resultados de forma gráfica. Además de que se pueden programar rutinas para lograr la manipulación de las entradas.

Aún ahora, después del trabajo de muchos investigadores en el área de la matemática y mecánica de fluidos, el modelado matemático se sigue haciendo por métodos experimentales o semiempíricos, utilizando datos de experimentos hechos y tabulados en tablas y gráficos de distintas configuraciones aerodinámicas. Dichos experimentos se realizan en vuelo y en modelos a escala en túneles de viento.

## 3

## FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Los fundamentos teóricos necesarios para obtener los resultados que llevan a los objetivos de esta tesis, se muestran en este capítulo. El trabajo más importante en el caso de un modelado matemático lineal es la determinación de las derivadas de estabilidad. La determinación de éstas, implica conocimientos sobre aerodinámica, bien sea para evaluarlas por medio de experimentación o por medios analíticos como es el caso. Es necesario el cálculo de los coeficientes aerodinámicos en las tres etapas sónicas; el coeficiente de arrastre, el coeficiente de sustentación, el de momentos y el estudio de la posición del centro aerodinámico a diferentes ángulos de ataque.

Al referirse a la caracterización aerodinámica de una aeronave trisónica, el análisis aerodinámico debe considerar el fluido a diferentes regímenes y el modo de analizarlos. Mientras que en el caso de un análisis subsónico, no es necesario considerar fenómenos especiales exclusivos de velocidades supersónicas. Para la etapa supersónica y transónica es necesario la consideración de flujo compresible. Para estudiar el arrastre por fricción, el fluido debe considerarse como viscoso, mientras que en la determinación de coeficientes de sustentación no es necesaria la consideración de la viscosidad. Estas consideraciones teóricas fueron tomadas en cuenta para lograr los resultados finales con lo que respecta a datos aerodinámicos.

En este capítulo se muestra un resumen de los fundamentos teóricos empleados para lograr la determinación de las derivadas de estabilidad y control, junto con las fórmulas utilizadas en el cálculo aerodinámico, las cuales son mostradas en el apéndice C junto con las tablas de resultados. Lo anterior en base al análisis de diseños preliminares para lograr una rápida aproximación de las características aerodinámicas de la aeronave [17].

Otro factor importante es el aspecto matemático. El modelo permite la visualización de un fenómeno físico y su variación con respecto al tiempo. Esto se logró con leyes físicas y herramientas matemáticas. Para la comprensión de los métodos del modelado es necesario tener el conocimiento de ciertos procesos matemáticos, como el significado de una función diferencial, que es el caso de las derivadas de estabilidad, la utilidad de la función de transferencia y la utilidad del

espacio de estados, la representación de sistemas lineales en forma matricial, y la forma y utilidad de las ecuaciones diferenciales. Se da un resumen de las bases matemáticas empleadas en esta tesis y lo necesario para comprender el proceso.

### 3.1 MATEMÁTICAS

#### 3.1.1 El Espacio de Estado

En la ingeniería de control, una representación del espacio del estado es el modelo matemático de un sistema físico, con un sistema de variables de entrada, de salida y de estado, relacionadas por ecuaciones diferenciales de primer orden. La representación del espacio del estado (también conocida como el "acercamiento del tiempo-dominio") proporciona una manera conveniente y compacta de modelar y de analizar sistemas con multivariables. La transformada de Laplace se puede utilizar para codificar toda la información sobre un sistema.

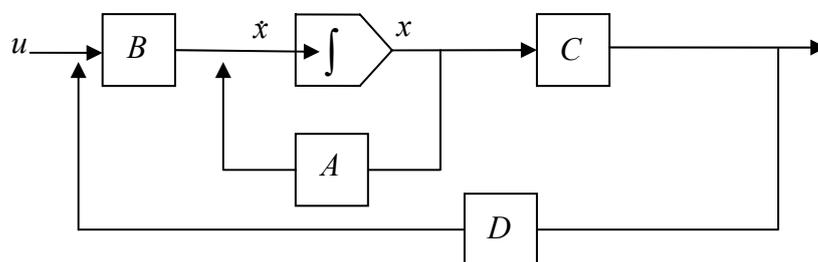
En la ingeniería de control moderna se utiliza el análisis por espacio de estados. De esta forma se puede conocer la evolución que llevan las variables que describen la dinámica y su utilización en sistemas complejos. Así como lograr una simulación de la dinámica del sistema.

Si los sistemas multivariables a los que se aplica la teoría moderna de control presentan un comportamiento dinámico que puede aproximarse por modelos lineales de parámetros constantes, se simplifica mucho su análisis, así como el diseño de los reguladores multivariables.

Básicamente el estado de un sistema es la mínima cantidad de información necesaria en un instante para que conociendo la entrada a partir de ese instante, se pueda determinar la salida en cualquier instante posterior.

En el caso de una aeronave, el estudio de ésta, implica obtener su estado en algún instante determinado. Este estado está descrito por medio de un espacio vectorial [21].

El estado del sistema se puede representar como vector dentro de ese espacio.



*Figura 3.1 Modelo típico del espacio de estados.*

La figura 3.1 es la representación en bloques de la ecuación 3.1 y 3.2 mostradas más adelante. Las variables internas de estado son el subconjunto más pequeño posible de las variables de sistema que pueden representar el estado entero del sistema en cualquier tiempo dado. Las variables del estado deben ser

lineales e independientes; una variable de estado no puede ser una combinación lineal de otras variables de estado. El número mínimo de las variables de estado requeridas para representar un sistema  $p$  dado, es generalmente igual al orden de la ecuación diferencial que define el sistema. Si el sistema se representa en forma de la función de la transferencia, el número mínimo de las variables de estado es igual al denominador de la función de transferencia después de que se haya reducido a una fracción apropiada.

### Sistemas lineales representados por el espacio de estado.

La representación del espacio del estado de un sistema con  $n$  entradas,  $m$  salidas y  $p$  variables de estado se escriben en la forma siguiente:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad 3.1$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad 3.2$$

Donde

$$\dim[A] = p \times p, \dim[B] = p \times n, \dim[C] = m \times p, \dim[D] = m \times n \quad 3.3$$

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} \quad 3.4$$

En donde  $x$  es el vector del estado,  $y$  es el vector de la salida,  $u$  es vector de entrada o de control,  $A$  es la matriz de estado,  $B$  es la matriz de entrada,  $C$  es la matriz de la salida, y  $D$  es matriz de alimentación. Para simplificar,  $D$  es una matriz cero, es decir el sistema se elige para no tener alimentación directa.

### 3.1.2 Función de Transferencia

Una función de transferencia es una representación matemática de la relación entre la entrada y la salida de un sistema lineal invariante de tiempo. La función de transferencia comúnmente es usada en el análisis de entradas y salidas simples de circuitos analógicos. Principalmente es usado en la teoría de los sistemas lineales, invariantes en el tiempo, el tratamiento de señal, la teoría de comunicación, y la teoría de control.

En su forma más simple para señales de tiempo continuo, la función a menudo es escrita como:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad 3.5$$

En donde  $H(s)$  es el símbolo utilizado en la función de transferencia,  $Y(s)$  es la función de salida, y  $X(s)$  es la función de entrada. En sistemas de tiempo discreto, la función de modo similar es escrita como:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad 3.6$$

## 3.2 AERODINÁMICA

### 3.2.1 Origen de Fuerzas Aerodinámicas

#### **Flujos incompresibles y sin rozamiento.**

Estos flujos cumplen el llamado teorema de Bernoulli. El teorema afirma que la energía mecánica total de un flujo incompresible y no viscoso (sin rozamiento) es constante a lo largo de una línea de corriente. Las líneas de corriente son líneas de flujo imaginarias que siempre son paralelas a la dirección del flujo en cada punto, y en el caso de flujo uniforme coinciden con la trayectoria de las partículas individuales del fluido. El teorema de Bernoulli implica una relación entre los efectos de la presión, la velocidad y la gravedad, e indica que la velocidad aumenta cuando la presión disminuye. Este principio es importante para la medida de flujos, y también puede emplearse para predecir la fuerza de sustentación de un ala en vuelo.

#### **Flujos viscosos: movimiento laminar y turbulento.**

Actualmente existen ecuaciones determinadas por dos científicos logradas en su esfuerzo por incluir los efectos de viscosidad en las ecuaciones matemáticas, se les conoce como ecuaciones de Navier-Stokes nombre que surge al juntar los nombres de ambos científicos, y son tan complejas que sólo se pueden resolver de manera exacta para flujos sencillos. Uno de ellos es el de un fluido real que circula a través de una tubería recta. El teorema de Bernoulli no se puede aplicar aquí, porque parte de que la energía mecánica total se disipa como consecuencia del rozamiento viscoso, lo que provoca una caída de presión a lo largo de la tubería. Si el número de Reynolds —que carece de dimensiones y es función de la velocidad, la densidad del fluido y el diámetro de la tubería dividido entre la viscosidad del fluido— es menor de 2100, el flujo a través de la tubería es siempre laminar; cuando los valores son más elevados suele ser turbulento. Los flujos turbulentos no se pueden evaluar únicamente a partir de las predicciones calculadas. Su análisis depende de una combinación de datos experimentales y modelos matemáticos; gran parte de la investigación moderna en mecánica de fluidos está dedicada a una mejor formulación de la turbulencia.

#### **Capa límite.**

Muchos flujos pueden separarse en dos regiones principales. La región próxima a la superficie está formada por una delgada capa llamada capa límite. En

ésta se concentran los efectos viscosos. Fuera de esta capa límite, se pueden desprestigiar los efectos de la viscosidad, y pueden emplearse las ecuaciones matemáticas más sencillas para flujos no viscosos. La teoría de la capa límite ha hecho posible gran parte del desarrollo de las alas de los aviones modernos y del diseño de turbinas de gas y compresores y es ésta la que se emplea para determinar algunos coeficientes de resistencia al avance, utilizando las fórmulas mostradas en el apéndice C.

### **Flujos compresibles**

Uno de los principios básicos del flujo compresible es que la densidad de un gas cambia cuando el gas se ve sometido a grandes cambios de velocidad y presión. Al mismo tiempo, su temperatura también cambia, lo que lleva a problemas de análisis más complejos. El comportamiento de flujo de un gas compresible depende de si la velocidad de flujo es mayor o menor que la velocidad del sonido. El sonido es la propagación de una pequeña perturbación, u onda de presión, dentro de un fluido. Para un gas, la velocidad del sonido es proporcional a la raíz cuadrada de su temperatura absoluta. La velocidad del sonido en el aire a nivel del mar a 20°C (293°K en la escala absoluta), es de unos 344 metros por segundo.

Si la velocidad de flujo es menor que la velocidad del sonido (flujo subsónico), las ondas de presión pueden transmitirse a través de todo el fluido y el flujo que se dirige hacia un objeto llega de forma suave, moldeándose a la forma del vehículo. Por tanto, el flujo subsónico que se dirige hacia el ala de un avión se ajustará con cierta distancia de antelación para fluir suavemente sobre la superficie. En el flujo supersónico, las ondas de presión no pueden viajar corriente arriba para que el flujo se ajuste a la forma con antelación. Por ello, el aire que se dirige hacia el ala de un avión en vuelo supersónico no está preparado para la perturbación que va a causar el ala y tiene que cambiar de dirección repentinamente en la proximidad del ala, lo que conlleva una compresión intensa u onda de choque. Frecuentemente se identifican los flujos supersónicos por su número de Mach, que es el cociente entre la velocidad de flujo y la velocidad del sonido. Por tanto, los flujos supersónicos tienen un número de Mach superior a 1. Las consideraciones de la influencia del número de Mach en el arrastre y la sustentación han sido agregadas a las fórmulas empleadas.

### **Ecuación de Bernoulli.**

Cuándo la velocidad de un fluido en cualquier punto dado permanece constante en el transcurso del tiempo, se dice que el movimiento del fluido es constante. Esto es, en un punto dado cualquiera, en un flujo de régimen estable la velocidad de cada partícula de fluido que pasa es siempre la misma. En cualquier otro punto puede pasar una partícula con una velocidad diferente, pero toda partícula que pase por este segundo punto se comporta allí de la misma manera que se comportaba la primera partícula cuando pasó por este punto. Estas condiciones se pueden conseguir cuando la velocidad del flujo es reducida.

Por otro lado, en un flujo de régimen variable, las velocidades son función del tiempo. En el caso de un flujo turbulento, las velocidades varían desordenadamente tanto de un punto a otro como de un momento a otro. En base a

esto se han deducido las fórmulas que se emplean, para obtener la sustentación y arrastre, de flujo incompresible y no viscoso.

### 3.2.2 Arrastre

Existen diferentes tipos de arrastre, para cada uno son usadas fórmulas diferentes. Para analizar los diferentes tipos de arrastre que sufre una aeronave, se dividen en los siguientes tipos: arrastre por fricción, arrastre parásito subsónico, arrastre parásito transónico, arrastre parásito supersónico y arrastre inducido

#### 3.2.2.1 Arrastre por Fricción

El fluido que se encuentre en el volumen de aire influenciado por la superficie del cuerpo sumergido, provocará el arrastre en la aeronave debido a su viscosidad e inercia, la capa límite puede definir la influencia de este fluido en el arrastre por fuerzas viscosas e inerciales y la magnitud del arrastre es definido por la viscosidad del aire, la rugosidad de la piel de la aeronave, sus dimensiones y su velocidad. El arrastre por fricción, por lo tanto solo será significativo dentro de la capa límite, la masa de aire que se encuentre en zonas mas lejanas de la superficie no tendrá influencia considerable en este tipo de arrastre.

Se puede hacer una estimación del arrastre por fricción determinando el espesor de la capa límite, conociendo la viscosidad del fluido y su resistencia a moverse que entre otros factores impacta directamente en el número de Reynolds. Se puede determinar el espesor de la capa límite con base a la ecuación integral de momento y la ecuación de continuidad. Al mismo tiempo, las características del fluido como viscosidad e inercia y las características de la superficie definen si el flujo es turbulento o laminar, lo cual influye en el arrastre total por fricción. El flujo laminar provoca menor resistencia al avance por fricción que el turbulento. Para poder hacer un análisis de este tipo de arrastre, el arrastre por fricción, deben considerarse en su análisis las teorías correspondientes a flujos externos<sup>Ω</sup> viscosos incompresibles, para que de esta manera se logre obtener la resistencia al avance de la aeronave provocada por la fricción del aire sobre el cuerpo a velocidades subsónicas.[17]

#### 3.2.2.2 Arrastre Parásito Subsónico

Este arrastre es causado por el desprendimiento de la capa límite, lo cual forma una estela al final del cuerpo que genera la resistencia al avance, la cual depende de la presión que se genere en esa estela. Es difícil determinar el valor de la presión, sin embargo existe una metodología para determinar el arrastre por presión [17].

---

<sup>Ω</sup> Un flujo externo es aquel que baña a un cuerpo y no tiene límites de frontera. Es decir, en lugar de ir dentro de un canal, va por fuera de este y no tiene límites o superficies que lo encierren más que el infinito.

La metodología que se emplea para un diseño preliminar es el llamado método de acumulación de componentes, el cual estima el arrastre parásito subsónico de cada componente de la aeronave usando las fórmulas ya determinadas para el arrastre por fricción de una placa

### 3.2.2.3 Arrastre Parásito Supersónico

El arrastre parásito supersónico puede ser calculado en una forma similar al arrastre subsónico, con dos excepciones. Primero, la resistencia al avance supersónica por fricción no incluye ajustes por factor de forma o efectos de interferencia. Y segundo, se agrega un nuevo término conocido como onda de choque. Este análisis toma en cuenta el arrastre por la presión que provoca la formación de la onda de choque.

Existe una regla llamada la regla de las superficies. Según este principio, el aumento abrupto en la resistencia al avance que se produce a velocidades transónicas se debe a la distribución de la superficie total de la sección transversal en cada punto del avión. Estrechando el fuselaje en la zona donde está unido a las alas, la reducción en la sección transversal total del fuselaje y las alas disminuye la resistencia al avance del aparato.

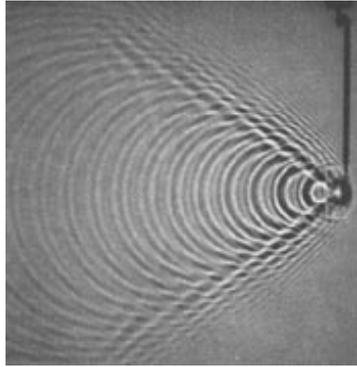
### 3.2.2.4 Arrastre Parásito Transónico

El arrastre parásito transónico sucede en la etapa donde el aumento de arrastre tiene un incremento significativo. Esto sucede aproximadamente de 0.8 a 1.2 de Mach [13]. Y se debe a que en esta etapa es donde se forman las ondas de choque. Es importante determinar cuándo se presenta el número de Mach crítico y el número de Mach divergente

Para un análisis inicial, no a detalle, que es lo que se está buscando en esta tesis, la tendencia del incremento puede ser estimada de forma gráfica, usando algunas reglas que se conocen del comportamiento en el régimen subsónico, transónico y supersónico.

### 3.2.2.5 Arrastre Inducido

Al presentarse la distribución de presiones que ayuda a la sustentación, se genera también una distribución de presiones sobre las partes frontales y traseras del perfil, lo que provoca la diferencia de presiones que origina una fuerza contraria a la del avance, esta fuerza es conocida como arrastre inducido y también está en función del número de Mach.



*Figura 3.2 Efecto Doppler en el Agua análogo al cono de Mach*

### 3.2.3 Sustentación

La sustentación depende del ángulo de ataque de forma directa, sin embargo tiene un valor límite de ángulo de ataque en el cual se deja de generar la sustentación, esto es debido a que las líneas de flujo no pueden seguir remontando la forma del perfil, y no producen más la diferencia de presiones entre superficies. Esto provoca que se utilicen métodos diferentes para determinar la sustentación antes y después de la pérdida, la primera región tiene un comportamiento lineal, sin embargo al presentarse el desplome, la linealidad deja de existir. Por lo tanto los altos ángulos de ataque quedan fuera de los alcances de esta tesis.

#### 3.2.3.1 Sustentación en la Etapa Subsónica

En la etapa subsónica, no existen fenómenos de compresibilidad, por lo tanto la sustentación está en función de algunos factores de eficiencia que depende de la forma del ala y de algunos valores paramétricos del resto de la aeronave.

#### 3.2.3.2 Sustentación en la Etapa Transónica

Para la determinación de la curva  $C_{L\alpha}$  en la etapa transónica no existen métodos sencillos que puedan emplearse en diseños preliminares o en aproximaciones. Una alternativa es dibujar una curva suave que una la etapa subsónica con la supersónica en el gráfico de  $C_{L\alpha}$  contra el número de Mach. Para un ala flechada el régimen transónico se sitúa entre 0.85 y 1.2 de Mach.

#### 3.2.3.3 Sustentación en la Etapa Supersónica

Para que el ala se encuentre completamente en flujo supersónico, el ángulo del cono de Mach debe ser tan grande como el ángulo de borde de ataque de toda el ala, de esta forma el borde de ataque se sumerge en las ondas de choque con alta presión. Es complicado determinar el valor del coeficiente de sustentación analíticamente. Existen trabajos al respecto [18], en donde se logra concluir que la pendiente de la curva de sustentación depende de la relación que haya entre el

ángulo de flechado del ala con el ángulo del cono de Mach. Parten de la ecuación linealizada de movimiento de un flujo no viscoso compresible, y con la ecuación clásica del coeficiente de sustentación logran agregar la influencia de fenómenos de compresibilidad y onda de choque.[17,18]

### 3.2.4 Centro Aerodinámico

Una de las principales características aerodinámicas que afectan el manejo de la aeronave, es el lugar del centro aerodinámico, de esto depende en gran parte la estabilidad longitudinal de una aeronave. El lugar del centro aerodinámico es un factor muy importante para obtener un diseño estable y manejable. Normalmente el centro aerodinámico se sitúa a .25 de la cuerda, pero este valor cambia a la hora de presentarse velocidades supersónicas, y llega a tener valores de .45 de la cuerda. El centro aerodinámico depende de la forma en que esté distribuida la presión sobre la superficie del ala. Debido a la configuración de perfil, en donde por lo regular el máximo espesor está a un cuarto de la cuerda se produce una distribución de presiones que permite ser asignado un punto en donde actúan las fuerzas aerodinámicas. En un análisis en tres dimensiones ese punto puede ser localizado en la cuerda aerodinámica media [17].

Normalmente para la obtención del centro aerodinámico pueden realizarse experimentos en túnel de viento en donde se puede obtener por medio de mediciones la distribución de presiones. Además, una vez obtenido el lugar del centro de gravedad del modelo puede buscarse el centro aerodinámico con ayuda de cálculos de estabilidad estática. De esta y otras maneras se han obtenidos gráficos para alas de diferentes alargamientos y conicidad en diferentes velocidades de vuelo.

Existe una metodología en donde se emplean gráficos, si se tiene un flechado de borde de ataque subsónico se puede hacer una variación de  $C_{L\alpha}$  con respecto a ese flechado. Y si se tiene un flechado supersónico, se hace la variación con respecto al número de Mach, solo con valores mayores a uno.

## 4

## MODELO LONGITUDINAL

Una vez realizado el modelo, se puede obtener una simulación del vuelo de la aeronave diseñada, el usuario puede ordenar el movimiento de las superficies de control y observar los movimientos causados en la aeronave. Dichas simulaciones se pueden emplear, una vez que están completamente validadas, en simuladores de entrenamiento a pilotos para el manejo de alguna aeronave existente e incluso que aún no esté construida.

El modelo está pensado para que pueda ser utilizado en un sistema de control, inclusive en un vehículo no tripulado. El modelo final obtenido en éste trabajo es manipulado desde el software Matlab.

Existen diferentes formas de hacer un modelo que permita dicha simulación. En base al tipo de modelado van a existir ciertas precisiones con la situación real. Se emplean métodos lineales y no lineales, variantes o invariantes con el tiempo. La primera es la forma más fácil de lograr el modelo, pero menos precisa, sin embargo, puede resultar muy útil para observar resultados muy próximos a la realidad, lo suficiente para implementar el control. Aunque tanto el método lineal como el no lineal parten de las mismas leyes, existe una diferencia en el desarrollo de las fórmulas. Por lo regular un sistema no lineal puede ser representado por un sistema lineal equivalente, evitándose la dificultad matemática en su solución. El realizar sistemas lineales equivalentes sólo son válidos para un rango limitado de operación.

Un método muy utilizado en la ingeniería de control en la obtención de un modelo lineal equivalente, es considerar la operación del sistema alrededor de un punto de equilibrio, y se consideran las señales involucradas como pequeñas, lo que limita al sistema a un pequeño rango de estudio.

Los fundamentos de la estabilidad y respuesta dinámica que se usan para análisis no lineal fueron implementados por el trabajo de Bryan y es conocido como método de perturbaciones, con lo cual logra obtener un modelo lineal equivalente. Su formulación fue basada en dos consideraciones: 1) Las fuerzas y momentos aerodinámicos instantáneos dependen únicamente de los valores instantáneos de las variables de movimiento y 2) las fuerzas y momentos aerodinámicos varían linealmente con las variables de movimiento. Este método

se ha estado utilizando desde hace 80 años y se usa aún en el análisis de estabilidad dinámica, control y respuesta de aeronaves.

El desarrollo de modelos matemáticos es una aproximación ampliamente utilizada con el fin de analizar, comprender y predecir el funcionamiento de cualquier sistema en función de las condiciones que rigen su dinámica.

Se va a realizar un modelo que analiza al vehículo en tres grados de libertad, primero en un espacio de dos dimensiones obteniendo solo las variables que lo rigen, y después en otro capítulo se comenzará a implementar las fuerzas aerodinámicas, gravitacionales y de propulsión, analizándolas y resolviendo para así obtener las fórmulas que las describen. En este capítulo se obtendrán tres ecuaciones que describan completamente la dinámica longitudinal, una de ellas describirá la rotación en el eje  $y$ , y las otras dos describirán las dos traslaciones en el eje  $x$  y en el eje  $z$ , esto es llamado también, modelo longitudinal.

## 4.1 ECUACIONES DE TRASLACIÓN Y ACTITUD

El modelo, es regido por la segunda ley de Newton en lo que respecta a traslación. La ecuación del apéndice A.11 puede ser representada por:

$$F_A^T = m_A D^T U_A^T \quad 4.1$$

Como se explica en el apéndice A, la aeronave puede ser compuesta por dos triadas, una cuando la aeronave está en cierta posición y otra cuando ha transcurrido un cambio y se han experimentado incrementos en las fuerzas aplicadas. Al principio las fuerzas en la aeronave estarán equilibradas, o bien, la sumatoria de ellas dará cero. A partir de esta situación de equilibrio se le aplican incrementos a esas fuerzas para romper el equilibrio. Independientemente del sistema de referencia, habrá un cambio en la posición original de la aeronave. La suma del estado final de la aeronave tomará en cuenta el equilibrio más los incrementos.

$$\sum F_A^T = \sum F_E^T + \sum F_P^{E \Omega} \quad 4.2$$

Lo mismo para la sumatoria de momentos

$$\sum M_A^T = \sum M_E^T + \sum M_P^E \quad 4.3$$

En donde  $E$  es la triada del estado estacionario y  $P$  la triada del estado perturbado. Siendo que la sumatoria en estado equilibrado es igual a cero, entonces las ecuaciones 4.2 y 4.3 quedan de la siguiente manera:

$$\sum F_A^T = \sum F_P^E \quad 4.4$$

$$\sum M_A^T = \sum M_P^E \quad 4.5$$

Las ecuaciones que rigen la traslación de un cuerpo en el espacio serán: (ver apéndice A)

---

<sup>Ω</sup> La sumatoria total de fuerzas en este caso es con respecto a la tierra, que es el caso de las fuerzas gravitacionales, sin embargo pueden ser referidas también con respecto al aire.

$$\begin{aligned}
\sum Fx_p^E &= m(\dot{u} + wq - vr) \\
\sum Fy_p^E &= m(\dot{v} + ur - wp) \\
\sum Fz_p^E &= m(\dot{w} + vp - uq)
\end{aligned}
\tag{4.6}$$

En el caso de la actitud, las tres ecuaciones que la rigen serán (ver apéndice C):

$$\begin{aligned}
\sum L_p^E &= pI_x - rJ_{xz} + qr(I_z - I_y) - pqJ_{xz} \\
\sum M_p^E &= qI_y + pr(I_x - I_z) + (p^2 - r^2)J_{xz} \\
\sum N_p^E &= rI_z - pJ_{xz} + pq(I_y - I_x) + qrJ_{xz}
\end{aligned}
\tag{4.7}$$

## 4.2 MODELO LINEAL

Las ecuaciones dinámicas deben ser simplificadas. Además se requiere linealizar las ecuaciones de movimiento a fin de tener ciertas ventajas en su resolución. La ingeniería de control siempre va a necesitar de una representación linealizada del sistema, para estudiarse en forma de función de transferencia o espacio de estados.

El modelo que se busca describe un fenómeno no lineal. El objetivo es simplificar las ecuaciones que describan al fenómeno para que puedan ser resueltas con la menor dificultad posible y al mismo tiempo los resultados que se obtengan, sean lo suficientemente confiables para tener una observación real de la estabilidad, y de esta forma poder manipular correctamente la dinámica del sistema. Para lograr la representación de un sistema lineal se recurre a los trabajos de Taylor quien realiza la linealización de un fenómeno minimizando el campo de análisis, de esta forma un fenómeno no lineal que pudiese ser descrito por un polinomio complejo logra ser convertido en una simple ecuación lineal. De esta forma se logra obtener una representación lineal en el espacio de estado.

### 4.2.1 Expansión de las Series de Taylor

Se puede describir un fenómeno de forma gráfica, que dependa de una sola variable, es decir  $f(x)$ , lo cual arroja una ecuación no lineal graficada en la figura 4.1. Esta ecuación es compleja y su solución es muy complicada, la idea del trabajo de Taylor es analizar cada segmento de la ecuación. Por ejemplo, se puede analizar a la ecuación en los puntos

$$(f(x_0), x_0) \text{ y } (f(x_0 + \Delta x), (x_0 + \Delta x)) \tag{4.8}$$

La ecuación tendrá un comportamiento lineal, pues al tratarse de un segmento cuya longitud tiende a cero, se tendrá prácticamente una línea recta; por

lo tanto una ecuación lineal. En esta ecuación se conocen los datos iniciales, es decir  $(f(x_0), x_0)$ .

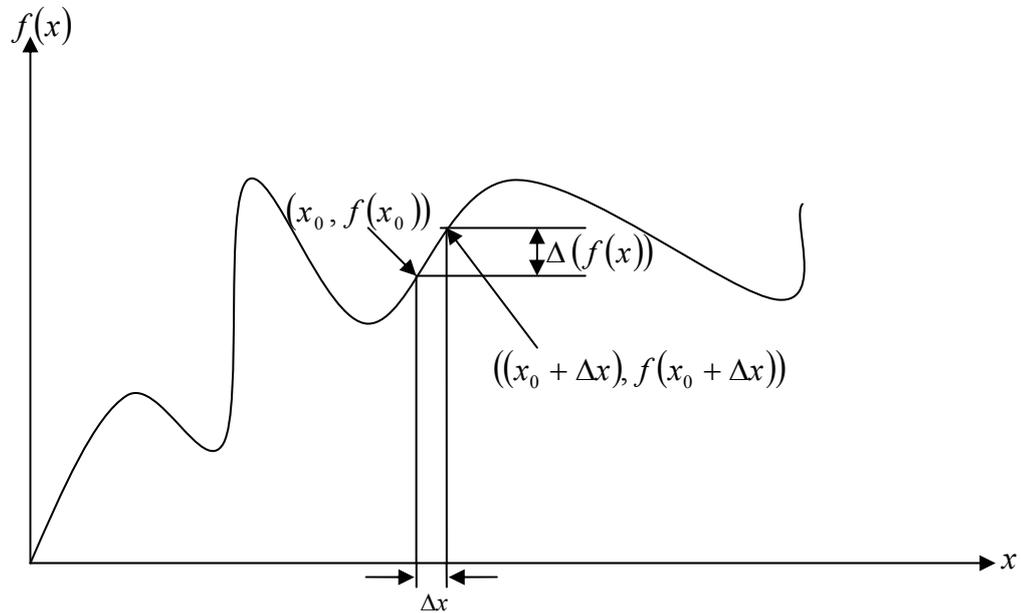


Figura 4.1. Fenómeno no lineal

Lo que interesa es saber cuál será el punto siguiente, es decir, el valor de los puntos  $(f(x_0 + \Delta x), x_0 + \Delta x)$ , en donde se observa claramente que tanto  $f(x_0 + \Delta x)$  como  $(x_0 + \Delta x)$  son iguales al estado inicial conocido, más un pequeño incremento o perturbación a ese estado. Y se obtiene de la siguiente manera:

$$\tan \theta = \frac{\Delta(f(x))}{\Delta x} \quad 4.9$$

$$\Delta(f(x)) = \tan \theta (\Delta x) \quad 4.10$$

Se sustituye la ecuación 4.9 en la 4.10 para obtener:

$$\Delta(f(x)) = \frac{\Delta(f(x))}{\Delta x} (\Delta x) \quad 4.11$$

Siendo lineal el sistema:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta(f(x)) \quad 4.12$$

Sustituyendo 4.11 en 4.12 se obtiene:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{\Delta(f(x))}{\Delta x} \cdot \Delta x \quad 4.13$$

Esta ecuación describe el fenómeno dinámico que está siendo analizado y es la base de este modelo lineal. Se puede apreciar que se tienen a la vista las llamadas derivadas de estabilidad, que son la relación entre el incremento de la variable dependiente y el incremento de una variable independiente, las cuales se verán a detalle más adelante. En base a esta fórmula se introducirá el caso que concierne.

#### 4.2.2 Método de Perturbaciones

Se entiende por perturbación, a cualquier cambio que provoque incrementos de fuerza. Estos tipos de perturbaciones provocan un cambio en la actitud de la aeronave y esto a su vez, genera nuevas perturbaciones. El estado de equilibrio se puede definir como una razón de cambio constante. Por ejemplo, en este caso y desde un punto de vista físico, el estado de equilibrio es aquel en donde no existe ningún cambio en la aeronave, es decir, cuando el vehículo se mantiene en la misma velocidad, dirección y sentido, su masa es constante y no sufre ningún tipo de deformación estructural. Otro caso de estado de equilibrio es cuando esa misma aeronave hace un viraje junto con un descenso, lo que provoca un vuelo con trayectoria en espiral, la aeronave tiene una razón de cambio constante en su actitud, masa constante, y completa rigidez, lo que le permite hacer un patrón de vuelo helicoidal perfecto. Durante el periodo de tiempo en el cual la hélice se mantiene con el mismo paso y diámetro, será una situación de equilibrio, pero si cambia el viraje y/o el descenso la geometría de la hélice cambia, entonces se dice que se ha roto el estado de equilibrio, sin embargo puede volver a entrar a un nuevo estado de equilibrio. El estado que existe entre el estado de equilibrio inicial y final se llama estado transitorio, el cuál es el que se logra visualizar con el método de perturbaciones.

En base a la linealización de Taylor se puede concluir que la aeronave puede estar siempre en un estado de equilibrio, siempre y cuando el tiempo de análisis sea infinitesimal. Esta es la base de la linealización, la cual permite analizar un fenómeno no lineal sin perjudicar la veracidad del resultado. La linealización puede explicarse matemáticamente por medio de la expansión de las series de Taylor, cuyo método es utilizado para lograr el análisis de ecuaciones no lineales en una forma llamada espacio de estados, el cual se utilizará más adelante para la observabilidad y el control.

Así como se obtuvo el valor de la variable dependiente en la ecuación 4.13, se puede obtener el valor de varias variables que conforman un conjunto de ecuaciones y describen el fenómeno total. En el caso de la aeronave, se tendrá el valor de las fuerzas y momentos según las ecuaciones 4.6 y 4.7 como variables dependientes, y como variables independientes, velocidad, aceleración, actitud, deflexión de superficies de control, geometría de la aeronave (G), gravedad y condiciones atmosféricas (At). Todo para lograr el modelado de una situación real de vuelo atmosférico. Matemáticamente se tiene:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = f \left( \left[ \begin{array}{c} G, At, \\ \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \delta p \\ \delta q \\ \delta r \end{bmatrix} \end{array} \right] \right) \quad 4.14$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = f \left( \left[ \begin{array}{c} G, At, \\ \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \delta p \\ \delta q \\ \delta r \end{bmatrix} \end{array} \right] \right) \quad 4.15$$

Las variables  $\delta p$ ,  $\delta q$  y  $\delta r$  se refieren a la influencia de las superficies de control, en las tres velocidades angulares. Las perturbaciones son los incrementos de esas fuerzas y momentos, situados en la ecuación 4.13 como  $\Delta(f(x))$ , que son en este caso  $\Sigma\Delta(F)$  y  $\Sigma\Delta(M)$ . Dichos incrementos son pequeños, y como ya se mencionó limita los alcances del modelado. El término

$$\frac{\Delta(f(x))}{\Delta x}$$

de la ecuación 4.13 es conocida como matriz Jacobiana y es ahí donde se encuentran las derivadas de estabilidad. De acuerdo a eso y a las ecuaciones 4.14 y 4.15, se logra obtener que:

$$\frac{\Delta(f(x))}{\Delta x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial u} & \frac{\partial F_x}{\partial v} & \frac{\partial F_x}{\partial w} & \frac{\partial F_x}{\partial p} & \frac{\partial F_x}{\partial q} & \frac{\partial F_x}{\partial r} & \frac{\partial F_x}{\partial \dot{u}} & \frac{\partial F_x}{\partial \dot{v}} & \frac{\partial F_x}{\partial \dot{w}} & \frac{\partial F_x}{\partial \delta p} & \frac{\partial F_x}{\partial \delta q} & \frac{\partial F_x}{\partial \delta r} \\ \frac{\partial F_y}{\partial u} & \frac{\partial F_y}{\partial v} & \frac{\partial F_y}{\partial w} & \frac{\partial F_y}{\partial p} & \frac{\partial F_y}{\partial q} & \frac{\partial F_y}{\partial r} & \frac{\partial F_y}{\partial \dot{u}} & \frac{\partial F_y}{\partial \dot{v}} & \frac{\partial F_y}{\partial \dot{w}} & \frac{\partial F_y}{\partial \delta p} & \frac{\partial F_y}{\partial \delta q} & \frac{\partial F_y}{\partial \delta r} \\ \frac{\partial F_z}{\partial u} & \frac{\partial F_z}{\partial v} & \frac{\partial F_z}{\partial w} & \frac{\partial F_z}{\partial p} & \frac{\partial F_z}{\partial q} & \frac{\partial F_z}{\partial r} & \frac{\partial F_z}{\partial \dot{u}} & \frac{\partial F_z}{\partial \dot{v}} & \frac{\partial F_z}{\partial \dot{w}} & \frac{\partial F_z}{\partial \delta p} & \frac{\partial F_z}{\partial \delta q} & \frac{\partial F_z}{\partial \delta r} \\ \frac{\partial M_x}{\partial u} & \frac{\partial M_x}{\partial v} & \frac{\partial M_x}{\partial w} & \frac{\partial M_x}{\partial p} & \frac{\partial M_x}{\partial q} & \frac{\partial M_x}{\partial r} & \frac{\partial M_x}{\partial \dot{u}} & \frac{\partial M_x}{\partial \dot{v}} & \frac{\partial M_x}{\partial \dot{w}} & \frac{\partial M_x}{\partial \delta p} & \frac{\partial M_x}{\partial \delta q} & \frac{\partial M_x}{\partial \delta r} \\ \frac{\partial M_y}{\partial u} & \frac{\partial M_y}{\partial v} & \frac{\partial M_y}{\partial w} & \frac{\partial M_y}{\partial p} & \frac{\partial M_y}{\partial q} & \frac{\partial M_y}{\partial r} & \frac{\partial M_y}{\partial \dot{u}} & \frac{\partial M_y}{\partial \dot{v}} & \frac{\partial M_y}{\partial \dot{w}} & \frac{\partial M_y}{\partial \delta p} & \frac{\partial M_y}{\partial \delta q} & \frac{\partial M_y}{\partial \delta r} \\ \frac{\partial M_z}{\partial u} & \frac{\partial M_z}{\partial v} & \frac{\partial M_z}{\partial w} & \frac{\partial M_z}{\partial p} & \frac{\partial M_z}{\partial q} & \frac{\partial M_z}{\partial r} & \frac{\partial M_z}{\partial \dot{u}} & \frac{\partial M_z}{\partial \dot{v}} & \frac{\partial M_z}{\partial \dot{w}} & \frac{\partial M_z}{\partial \delta p} & \frac{\partial M_z}{\partial \delta q} & \frac{\partial M_z}{\partial \delta r} \end{bmatrix} \quad 4.16$$

Sin embargo de estas 72 derivadas de estabilidad y control solo algunas vale la pena analizar. Existen derivadas de estabilidad de alto orden. Es decir que la fuerza puede variar no solo de una de las variables mostradas en las ecuaciones 4.14 y 4.15 sino de más de alguna de ellas y además pueden estar elevadas a la n potencia. Este modelo se limita a las variables de primer orden.

Según Meter H. Zipfel [19] al considerar la configuración de forma plana de esta aeronave las únicas derivadas que vale la pena analizar y que fueron mostradas en la matriz anterior reducen a la matriz a lo siguiente:

$$\left. \frac{\partial(f(x))}{\partial x} \right|_{x_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Fx}{\partial u} & 0 & \frac{\partial Fx}{\partial w} & 0 & \frac{\partial Fx}{\partial q} & 0 & \frac{\partial Fx}{\partial \dot{u}} & 0 & \frac{\partial Fx}{\partial \dot{w}} & 0 & \frac{\partial Fx}{\partial \delta q} & 0 \\ 0 & \frac{\partial Fy}{\partial v} & 0 & \frac{\partial Fy}{\partial p} & 0 & \frac{\partial Fy}{\partial r} & 0 & \frac{\partial Fy}{\partial \dot{v}} & 0 & \frac{\partial Fy}{\partial \delta p} & 0 & \frac{\partial Fx}{\partial \dot{r}} \\ \frac{\partial Fz}{\partial u} & 0 & \frac{\partial Fz}{\partial w} & 0 & \frac{\partial Fz}{\partial q} & 0 & \frac{\partial Fz}{\partial \dot{u}} & 0 & \frac{\partial Fz}{\partial \dot{w}} & 0 & \frac{\partial Fz}{\partial \delta q} & 0 \\ 0 & \frac{\partial Mx}{\partial v} & 0 & \frac{\partial Mx}{\partial p} & 0 & \frac{\partial Mx}{\partial r} & 0 & \frac{\partial Mx}{\partial \dot{v}} & 0 & \frac{\partial Mx}{\partial \delta p} & 0 & \frac{\partial Mx}{\partial \dot{r}} \\ \frac{\partial My}{\partial u} & 0 & \frac{\partial My}{\partial w} & 0 & \frac{\partial My}{\partial q} & 0 & \frac{\partial My}{\partial \dot{u}} & 0 & \frac{\partial My}{\partial \dot{w}} & 0 & \frac{\partial My}{\partial \delta q} & 0 \\ 0 & \frac{\partial Mz}{\partial v} & 0 & \frac{\partial Mz}{\partial p} & 0 & \frac{\partial Mz}{\partial r} & 0 & \frac{\partial Mz}{\partial \dot{v}} & 0 & \frac{\partial Mz}{\partial \delta p} & 0 & \frac{\partial Mz}{\partial \dot{r}} \end{bmatrix} \quad 4.17$$

De una forma más completa:

$$\frac{\Delta(f(x))}{\Delta x} \Delta x = \begin{bmatrix} \frac{\partial Fx}{\partial u} & 0 & \frac{\partial Fx}{\partial w} & 0 & \frac{\partial Fx}{\partial q} & 0 & \frac{\partial Fx}{\partial \dot{u}} & 0 & \frac{\partial Fx}{\partial \dot{w}} & 0 & \frac{\partial Fx}{\partial \delta q} & 0 \\ 0 & \frac{\partial Fy}{\partial v} & 0 & \frac{\partial Fy}{\partial p} & 0 & \frac{\partial Fy}{\partial r} & 0 & \frac{\partial Fy}{\partial \dot{v}} & 0 & \frac{\partial Fy}{\partial \delta p} & 0 & \frac{\partial Fx}{\partial \dot{r}} \\ \frac{\partial Fz}{\partial u} & 0 & \frac{\partial Fz}{\partial w} & 0 & \frac{\partial Fz}{\partial q} & 0 & \frac{\partial Fz}{\partial \dot{u}} & 0 & \frac{\partial Fz}{\partial \dot{w}} & 0 & \frac{\partial Fz}{\partial \delta q} & 0 \\ 0 & \frac{\partial Mx}{\partial v} & 0 & \frac{\partial Mx}{\partial p} & 0 & \frac{\partial Mx}{\partial r} & 0 & \frac{\partial Mx}{\partial \dot{v}} & 0 & \frac{\partial Mx}{\partial \delta p} & 0 & \frac{\partial Mx}{\partial \dot{r}} \\ \frac{\partial My}{\partial u} & 0 & \frac{\partial My}{\partial w} & 0 & \frac{\partial My}{\partial q} & 0 & \frac{\partial My}{\partial \dot{u}} & 0 & \frac{\partial My}{\partial \dot{w}} & 0 & \frac{\partial My}{\partial \delta q} & 0 \\ 0 & \frac{\partial Mz}{\partial v} & 0 & \frac{\partial Mz}{\partial p} & 0 & \frac{\partial Mz}{\partial r} & 0 & \frac{\partial Mz}{\partial \dot{v}} & 0 & \frac{\partial Mz}{\partial \delta p} & 0 & \frac{\partial Mz}{\partial \dot{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \\ u \\ v \\ w \\ \delta p \\ \delta q \\ \dot{r} \end{bmatrix} \quad 4.18$$

La ecuación 4.13 y la figura 4.1 describe a  $x_0$  y  $f(x_0)$  como los puntos de origen o bien el estado estacionario que ya se mencionó al principio. El estado perturbado P es igual al estado estacionario E más el incremento que causa la perturbación de lo cual se tiene que:

$$x_P^E = x_E^T + \Delta x \quad 4.19$$

Donde

$$x_0 = x_E^T \quad 4.20$$

$$\Delta x = x_P^E - x_E^T \quad 4.21$$

De  $x_E^T$  el superíndice indica que T (tierra plana) es el sistema de referencia desde el cual se mide el estado estacionario E, de donde surge un incremento. Tal y como en la nomenclatura que se ha estado utilizando, al ser E el punto de

referencia para el análisis y desde el cual se leen los nuevos parámetros se obtiene que:

$$x_E^T = 0 \quad 4.22$$

$$\Delta x = x_p^E \quad 4.23$$

Tal y como sucede al leer una trayectoria o cualquier vector en sistemas de referencia diferentes, si este sistema de referencia es el estado estacionario (superíndice E) las coordenadas se leerán a partir de éste para obtener el comportamiento en estado perturbado, es por eso que se obtiene el valor de 4.22. Es decir, la ecuación 4.23 define la actitud y traslación de la triada P con respecto a la triada E que son los datos que interesan saber y los resultados que proporciona el método de perturbaciones.

Las triadas P y E de la figura 4.2 son ejes situados en la aeronave de la forma en que se muestra en la figura 4.3. En ambas triadas el punto de intersección de sus ejes está en el centro de gravedad de la aeronave.

Así como  $\Delta x = x_p^E$  también  $\Delta(f(x)) = f(x)_P^E$

De acuerdo a lo anterior la ecuación 4.13 queda definida como:

$$f(x)_P^E = \frac{(f(x))_P^E}{x_p^E} x_p^E \quad 4.24$$

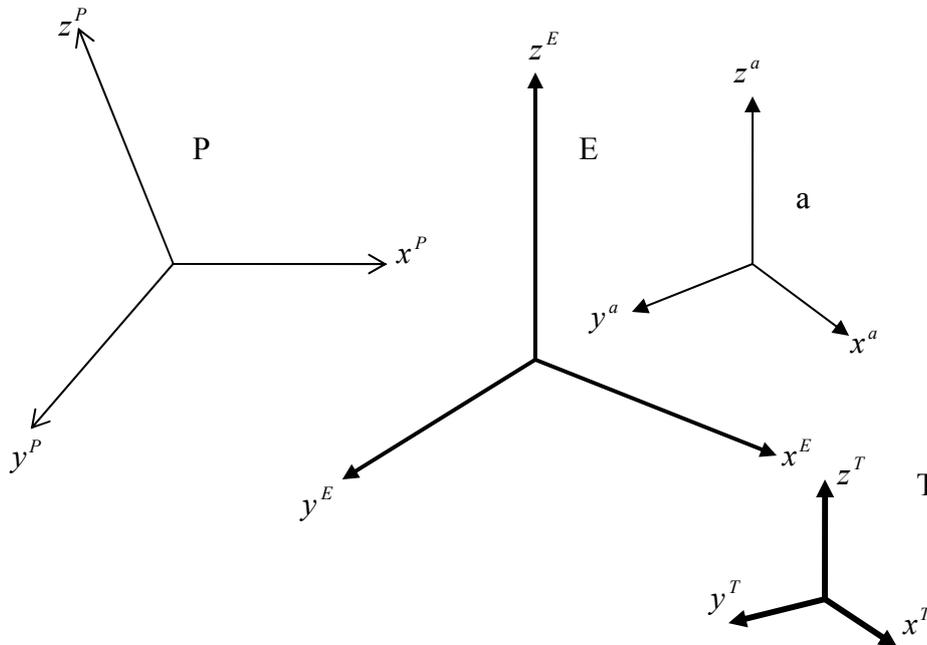


Figura 4.2.-De derecha a izquierda. Triada del sistema de referencia tierra plana, triada del sistema atmósfera, triada del sistema en estado estacionario y triada del sistema en estado perturbado.

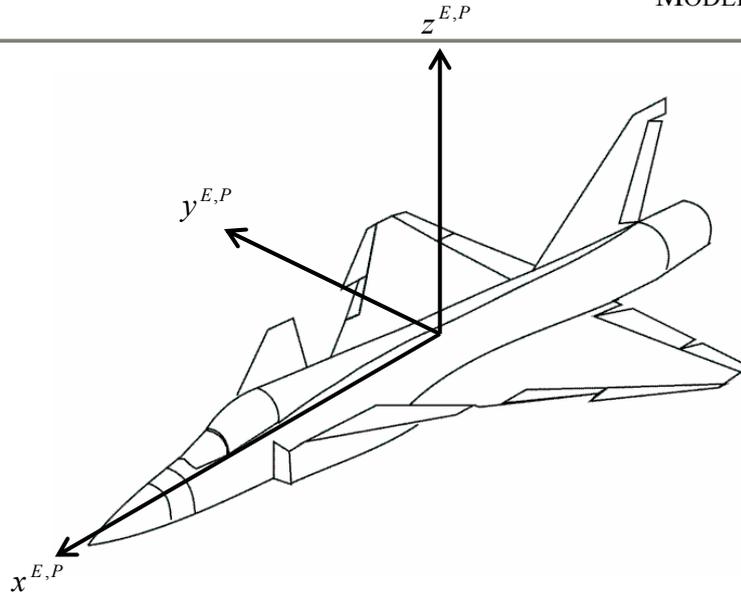


Figura 4.3 Triada del estado estacionario y del estado perturbado en el tiempo igual a cero.

Así como  $x_E^T = 0$  también  $x_E^a = 0$ . Por lo tanto el vector velocidad del viento será axial el eje  $x$  de la triada  $E$ .

Las ecuaciones de fuerzas y momentos van a tener la forma de la ecuación 4.24 por lo tanto se obtendrá lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 F_x &= \Delta F_x = F_{xP}^E & M_x &= \Delta M_x = M_{xP}^E \\
 F_y &= \Delta F_y = F_{yP}^E & M_y &= \Delta M_y = M_{yP}^E \\
 F_z &= \Delta F_z = F_{zP}^E & M_z &= \Delta M_z = M_{zP}^E \\
 U &= \Delta U = u_P^E & \dot{U} &= \Delta \dot{U} = \dot{u}_P^E \\
 V &= \Delta V = v_P^E & \dot{V} &= \Delta \dot{V} = \dot{v}_P^E \\
 W &= \Delta W = w_P^E & \dot{W} &= \Delta \dot{W} = \dot{w}_P^E
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
 P &= \Delta P = p_P^E \\
 Q &= \Delta Q = q_P^E \\
 R &= \Delta R = r_P^E
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores.

$$\begin{aligned}
 \Sigma \Delta F_x &= m(\Delta \dot{U} + (\Delta W)(\Delta Q) - (\Delta V)(\Delta R)) \\
 \Sigma \Delta F_y &= m(\Delta \dot{V} + (\Delta U)(\Delta R) - (\Delta W)(\Delta P)) \\
 \Sigma \Delta F_z &= m(\Delta \dot{W} + (\Delta V)(\Delta P) - (\Delta U)(\Delta Q))
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma \Delta M_x &= \Delta \dot{P} I_x - \Delta \dot{R} J_{xz} + (\Delta \dot{Q})(\Delta R)(I_z - I_y) - (\Delta P)(\Delta Q) J_{xz} \\
\Sigma \Delta M_y &= (\Delta \dot{Q}) I_y + (\Delta P)(\Delta R)(I_x - I_z) + ((\Delta P)(\Delta P) - (\Delta R)(\Delta R)) J_{xz} \\
\Sigma \Delta M_z &= \Delta \dot{R} I_z - \Delta \dot{P} J_{xz} + (\Delta P)(\Delta Q)(I_y - I_x) + (\Delta Q)(\Delta R) J_{xz}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

En las seis ecuaciones 4.27 y 4.28 se ve que existen variables comunes, por lo tanto se tiene un acoplamiento dinámico, lo que provoca que la resolución del sistema de ecuaciones resulte compleja. Parte de la linealización será desacoplar las ecuaciones y de esta manera evitar la dependencia de variables. Al ser estas variables consideradas como pequeñas perturbaciones, los valores son muy pequeños, es decir, dichos valores tienden a cero y al multiplicarse entre ellas se pueden eliminar. En el caso de la sumatoria de fuerzas en el eje  $z$ , se ha comprobado por experimentación que el término  $\Delta U \Delta P$  debe permanecer, a excepción del resto de los productos indicados, para este, el valor de velocidad no se considerará como un incremento sino como el valor de estado estacionario. Esto ayuda al desacople dinámico y el conjunto de ecuaciones 4.27 y 4.28 quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\Sigma \Delta F_x &= m(\Delta \dot{U}) \\
\Sigma \Delta F_y &= m(\Delta \dot{V}) \\
\Sigma \Delta F_z &= m(\Delta \dot{W} - U_E^a(\Delta Q))
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma \Delta M_x &= \Delta \dot{P} I_x - \Delta \dot{R} J_{xz} \\
\Sigma \Delta M_y &= (\Delta \dot{Q}) I_y \\
\Sigma \Delta M_z &= \Delta \dot{R} I_z - \Delta \dot{P} J_{xz}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

El acople dinámico consiste físicamente en que la guiñada, alabeo, cabeceo y traslación de la aeronave están acoplados, sin embargo va a analizarse el fenómeno en dos partes para lograr obtener una solución con mayor facilidad. Se van a desacoplar en dos bloques de ecuaciones. En el primero se presenta un análisis de tres grados de libertad, un momento en el eje  $y$  y dos fuerzas en  $x$  y  $z$ . A lo que se puede nombrar como dinámica longitudinal. El segundo bloque de tres ecuaciones consiste de dos momentos, en los ejes  $z$  y  $x$  y una fuerza en el eje  $y$  equivalente a la dinámica lateral, en tres grados de libertad de la aeronave.

Ambos bloques son divididos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\Sigma \Delta F_x &= m(\Delta \dot{U}) \\
\Sigma \Delta F_z &= m(\Delta \dot{W} - U_E^a(\Delta Q)) \\
\Sigma \Delta M_y &= (\Delta \dot{Q}) I_y
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma \Delta F_y &= m(\Delta V) \\
\Sigma \Delta M_x &= \Delta \dot{P}I_x - \Delta \dot{R}J_{xz} \\
\Sigma \Delta M_z &= \Delta \dot{R}I_z - \Delta \dot{P}J_{xz}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Sustituyendo las expansiones de Taylor de la matriz 4.18 en los conjuntos de ecuaciones 4.31 y 4.32 la dinámica completa queda definida para su análisis de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix}
\frac{\partial Fx}{\partial u} & 0 & \frac{\partial Fx}{\partial w} & 0 & \frac{\partial Fx}{\partial q} & 0 & \frac{\partial Fx}{\partial \dot{u}} & 0 & \frac{\partial Fx}{\partial \dot{w}} & 0 & \frac{\partial Fx}{\partial \delta q} & 0 \\
\frac{\partial Fz}{\partial u} & 0 & \frac{\partial Fz}{\partial w} & 0 & \frac{\partial Fz}{\partial q} & 0 & \frac{\partial Fz}{\partial \dot{u}} & 0 & \frac{\partial Fz}{\partial \dot{w}} & 0 & \frac{\partial Fz}{\partial \delta q} & 0 \\
\frac{\partial My}{\partial u} & 0 & \frac{\partial My}{\partial w} & 0 & \frac{\partial My}{\partial q} & 0 & \frac{\partial My}{\partial \dot{u}} & 0 & \frac{\partial My}{\partial \dot{w}} & 0 & \frac{\partial My}{\partial \delta q} & 0 \\
\frac{\partial u}{\partial u} & & \frac{\partial u}{\partial w} & & \frac{\partial u}{\partial q} & & \frac{\partial u}{\partial \dot{u}} & & \frac{\partial u}{\partial \dot{w}} & & \frac{\partial u}{\partial \delta q} & \\
\frac{\partial v}{\partial u} & & \frac{\partial v}{\partial w} & & \frac{\partial v}{\partial q} & & \frac{\partial v}{\partial \dot{u}} & & \frac{\partial v}{\partial \dot{w}} & & \frac{\partial v}{\partial \delta q} & \\
\frac{\partial w}{\partial u} & & \frac{\partial w}{\partial w} & & \frac{\partial w}{\partial q} & & \frac{\partial w}{\partial \dot{u}} & & \frac{\partial w}{\partial \dot{w}} & & \frac{\partial w}{\partial \delta q} & \\
\frac{\partial p}{\partial u} & & \frac{\partial p}{\partial w} & & \frac{\partial p}{\partial q} & & \frac{\partial p}{\partial \dot{u}} & & \frac{\partial p}{\partial \dot{w}} & & \frac{\partial p}{\partial \delta q} & \\
\frac{\partial q}{\partial u} & & \frac{\partial q}{\partial w} & & \frac{\partial q}{\partial q} & & \frac{\partial q}{\partial \dot{u}} & & \frac{\partial q}{\partial \dot{w}} & & \frac{\partial q}{\partial \delta q} & \\
\frac{\partial r}{\partial u} & & \frac{\partial r}{\partial w} & & \frac{\partial r}{\partial q} & & \frac{\partial r}{\partial \dot{u}} & & \frac{\partial r}{\partial \dot{w}} & & \frac{\partial r}{\partial \delta q} & \\
\frac{\partial \dot{u}}{\partial u} & & \frac{\partial \dot{u}}{\partial w} & & \frac{\partial \dot{u}}{\partial q} & & \frac{\partial \dot{u}}{\partial \dot{u}} & & \frac{\partial \dot{u}}{\partial \dot{w}} & & \frac{\partial \dot{u}}{\partial \delta q} & \\
\frac{\partial \dot{w}}{\partial u} & & \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} & & \frac{\partial \dot{w}}{\partial q} & & \frac{\partial \dot{w}}{\partial \dot{u}} & & \frac{\partial \dot{w}}{\partial \dot{w}} & & \frac{\partial \dot{w}}{\partial \delta q} & \\
\frac{\partial \delta p}{\partial u} & & \frac{\partial \delta p}{\partial w} & & \frac{\partial \delta p}{\partial q} & & \frac{\partial \delta p}{\partial \dot{u}} & & \frac{\partial \delta p}{\partial \dot{w}} & & \frac{\partial \delta p}{\partial \delta q} & \\
\frac{\partial \delta q}{\partial u} & & \frac{\partial \delta q}{\partial w} & & \frac{\partial \delta q}{\partial q} & & \frac{\partial \delta q}{\partial \dot{u}} & & \frac{\partial \delta q}{\partial \dot{w}} & & \frac{\partial \delta q}{\partial \delta q} & \\
\frac{\partial \delta r}{\partial u} & & \frac{\partial \delta r}{\partial w} & & \frac{\partial \delta r}{\partial q} & & \frac{\partial \delta r}{\partial \dot{u}} & & \frac{\partial \delta r}{\partial \dot{w}} & & \frac{\partial \delta r}{\partial \delta q} & 
\end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \\ \dot{u} \\ \dot{w} \\ \delta p \\ \delta q \\ \delta r \end{bmatrix}^E = \begin{bmatrix} m(\Delta U) \\ m(\Delta W - U_E^a(\Delta Q)) \\ (\Delta Q)I_y \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

$$\begin{bmatrix}
0 & \frac{\partial Fy}{\partial v} & 0 & \frac{\partial Fy}{\partial p} & 0 & \frac{\partial Fy}{\partial r} & 0 & \frac{\partial Fy}{\partial \dot{v}} & 0 & \frac{\partial Fy}{\partial \delta p} & 0 & \frac{\partial Fx}{\partial \delta r} \\
0 & \frac{\partial Mx}{\partial v} & 0 & \frac{\partial Mx}{\partial p} & 0 & \frac{\partial Mx}{\partial r} & 0 & \frac{\partial Mx}{\partial \dot{v}} & 0 & \frac{\partial Mx}{\partial \delta p} & 0 & \frac{\partial Mx}{\partial \delta r} \\
0 & \frac{\partial Mz}{\partial v} & 0 & \frac{\partial Mz}{\partial p} & 0 & \frac{\partial Mz}{\partial r} & 0 & \frac{\partial Mz}{\partial \dot{v}} & 0 & \frac{\partial Mz}{\partial \delta p} & 0 & \frac{\partial Mz}{\partial \delta r} \\
\frac{\partial u}{\partial v} & & \frac{\partial u}{\partial p} & & \frac{\partial u}{\partial r} & & \frac{\partial u}{\partial \dot{v}} & & \frac{\partial u}{\partial \delta p} & & \frac{\partial u}{\partial \delta r} & \\
\frac{\partial v}{\partial v} & & \frac{\partial v}{\partial p} & & \frac{\partial v}{\partial r} & & \frac{\partial v}{\partial \dot{v}} & & \frac{\partial v}{\partial \delta p} & & \frac{\partial v}{\partial \delta r} & \\
\frac{\partial w}{\partial v} & & \frac{\partial w}{\partial p} & & \frac{\partial w}{\partial r} & & \frac{\partial w}{\partial \dot{v}} & & \frac{\partial w}{\partial \delta p} & & \frac{\partial w}{\partial \delta r} & \\
\frac{\partial p}{\partial v} & & \frac{\partial p}{\partial p} & & \frac{\partial p}{\partial r} & & \frac{\partial p}{\partial \dot{v}} & & \frac{\partial p}{\partial \delta p} & & \frac{\partial p}{\partial \delta r} & \\
\frac{\partial q}{\partial v} & & \frac{\partial q}{\partial p} & & \frac{\partial q}{\partial r} & & \frac{\partial q}{\partial \dot{v}} & & \frac{\partial q}{\partial \delta p} & & \frac{\partial q}{\partial \delta r} & \\
\frac{\partial r}{\partial v} & & \frac{\partial r}{\partial p} & & \frac{\partial r}{\partial r} & & \frac{\partial r}{\partial \dot{v}} & & \frac{\partial r}{\partial \delta p} & & \frac{\partial r}{\partial \delta r} & \\
\frac{\partial \dot{v}}{\partial v} & & \frac{\partial \dot{v}}{\partial p} & & \frac{\partial \dot{v}}{\partial r} & & \frac{\partial \dot{v}}{\partial \dot{v}} & & \frac{\partial \dot{v}}{\partial \delta p} & & \frac{\partial \dot{v}}{\partial \delta r} & \\
\frac{\partial \delta p}{\partial v} & & \frac{\partial \delta p}{\partial p} & & \frac{\partial \delta p}{\partial r} & & \frac{\partial \delta p}{\partial \dot{v}} & & \frac{\partial \delta p}{\partial \delta p} & & \frac{\partial \delta p}{\partial \delta r} & \\
\frac{\partial \delta q}{\partial v} & & \frac{\partial \delta q}{\partial p} & & \frac{\partial \delta q}{\partial r} & & \frac{\partial \delta q}{\partial \dot{v}} & & \frac{\partial \delta q}{\partial \delta p} & & \frac{\partial \delta q}{\partial \delta r} & \\
\frac{\partial \delta r}{\partial v} & & \frac{\partial \delta r}{\partial p} & & \frac{\partial \delta r}{\partial r} & & \frac{\partial \delta r}{\partial \dot{v}} & & \frac{\partial \delta r}{\partial \delta p} & & \frac{\partial \delta r}{\partial \delta r} & 
\end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \\ \dot{u} \\ \dot{w} \\ \delta p \\ \delta q \\ \delta r \end{bmatrix}^E = \begin{bmatrix} m(\Delta V) \\ \Delta PI_x - \Delta RJ_{xz} \\ \Delta RI_z - \Delta PJ_{xz} \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

Al utilizar las expansiones de Taylor para linealizar el fenómeno se obtuvieron las derivadas de estabilidad y control situadas en la matriz Jacobiana. La diferencia entre una y otra, es que las derivadas de control son aquellas que se provocan al mover las superficies de control de la aeronave y afectan directamente a la actitud y las de estabilidad son definidas por las características del diseño de la aeronave y de las condiciones de vuelo.

El bloque de la dinámica lateral no será considerado.

Las derivadas de control deben ser separadas de las derivadas de estabilidad para obtener la forma 4.38, considerando que:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

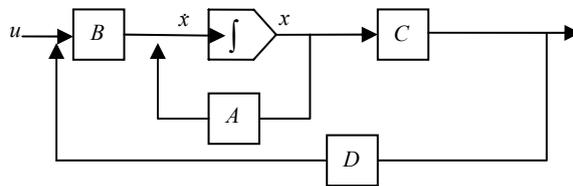
E incluyendo las derivadas inerciales (las únicas fuerzas que dependen de theta) las cuales tienen influencia directa sólo en la fuerza en x y z de la aeronave, se obtiene el conjunto de ecuaciones 4.36.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial u} - m & \frac{\partial F_x}{\partial w} & \frac{\partial F_x}{\partial q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial F_z}{\partial u} & \frac{\partial F_z}{\partial w} - m & \frac{\partial F_z}{\partial q} + mU_E^a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial u} & \frac{\partial M_y}{\partial w} & \frac{\partial M_y}{\partial q} & 0 & 0 & -I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix}^E = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F_x}{\partial u} & -\frac{\partial F_x}{\partial w} & -\frac{\partial F_x}{\partial q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial F_z}{\partial u} & -\frac{\partial F_z}{\partial w} & -\frac{\partial F_z}{\partial q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial M_y}{\partial u} & -\frac{\partial M_y}{\partial w} & -\frac{\partial M_y}{\partial q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \phi \\ \theta \\ \psi \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix}^E + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial F_x}{\partial \dot{\phi}} \\ 0 & -\frac{\partial F_z}{\partial \dot{\theta}} \\ 0 & -\frac{\partial M_y}{\partial \dot{\psi}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \phi \\ \theta \\ \psi \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix}^E \tag{4.36}$$

Eliminando valores y variables nulos para quedar definido solo la dinámica longitudinal se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial u} - m & \frac{\partial F_x}{\partial w} & \frac{\partial F_x}{\partial q} & 0 \\ \frac{\partial F_z}{\partial u} & \frac{\partial F_z}{\partial w} - m & \frac{\partial F_z}{\partial q} + mU_E^a & 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial u} & \frac{\partial M_y}{\partial w} & \frac{\partial M_y}{\partial q} & -I_y \\ \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial w}{\partial w} & \frac{\partial q}{\partial q} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix}^E = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F_x}{\partial u} & -\frac{\partial F_x}{\partial w} & -\frac{\partial F_x}{\partial q} & 0 \\ -\frac{\partial F_z}{\partial u} & -\frac{\partial F_z}{\partial w} & -\frac{\partial F_z}{\partial q} & 0 \\ -\frac{\partial M_y}{\partial u} & -\frac{\partial M_y}{\partial w} & 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial w}{\partial w} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \\ q \end{bmatrix}^E + \begin{bmatrix} -\frac{\partial F_x}{\partial \dot{\theta}} \\ -\frac{\partial F_z}{\partial \dot{\theta}} \\ -\frac{\partial M_y}{\partial \dot{\theta}} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix}^E \tag{4.37}$$

Se agrupa para obtener el conjunto de ecuaciones en la forma necesaria para disponer de la forma del espacio de estados siguiente:



$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ Y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix}^E = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial u} - m & \frac{\partial F_x}{\partial w} & \frac{\partial F_x}{\partial q} & 0 \\ \frac{\partial F_z}{\partial u} & \frac{\partial F_z}{\partial w} - m & \frac{\partial F_z}{\partial q} + mU_E^a & 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial u} & \frac{\partial M_y}{\partial w} & \frac{\partial M_y}{\partial q} & -I_y \\ \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial w}{\partial w} & \frac{\partial q}{\partial q} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{\partial F_x}{\partial u} & -\frac{\partial F_x}{\partial w} & -\frac{\partial F_x}{\partial q} & 0 \\ -\frac{\partial F_z}{\partial u} & -\frac{\partial F_z}{\partial w} & -\frac{\partial F_z}{\partial q} & 0 \\ -\frac{\partial M_y}{\partial u} & -\frac{\partial M_y}{\partial w} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \\ q \end{bmatrix}^E + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial u} - m & \frac{\partial F_x}{\partial w} & \frac{\partial F_x}{\partial q} & 0 \\ \frac{\partial F_z}{\partial u} & \frac{\partial F_z}{\partial w} - m & \frac{\partial F_z}{\partial q} & 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial u} & \frac{\partial M_y}{\partial w} & \frac{\partial M_y}{\partial q} & -I_y \\ \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial w}{\partial w} & \frac{\partial q}{\partial q} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{\partial F_x}{\partial \dot{\theta}} \\ -\frac{\partial F_z}{\partial \dot{\theta}} \\ -\frac{\partial M_y}{\partial \dot{\theta}} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix}^E \tag{4.38}$$

En donde  $x$  punto es un vector que describe las salidas.  $A$  es una matriz en donde se encuentran las derivadas de estabilidad.  $Bu$  es la matriz  $B$  que contiene derivadas de control por el vector  $u$ , que definen la magnitud de las entradas.  $Cx$  es una matriz de una sola fila que define las salidas de interés, es decir, los valores de  $x$  que se requiere observar.

Finalmente adimensionalizando el sistema se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix}_P^E &= \begin{bmatrix} -\frac{mU_E^a}{S_a q} & \frac{\bar{c}_a C_{X_\alpha}}{2U} & \frac{\bar{c}_a C_{X_q}}{2U} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{c}_a C_{Z_\alpha} - \frac{mU_E^a}{S_a q}}{\partial \dot{w}} & \frac{\bar{c}_a C_{Z_q}}{2U_E^a} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{c} C_{M_\alpha}}{2U_E^a} & \frac{\bar{c} C_{M_q}}{2U_E^a} & -\frac{I_y}{S q \bar{c}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -C_{X_u} & -C_{X_\alpha} & -C_W(\cos \theta_E^T) & 0 \\ -C_{Z_u} & -C_{Z_\alpha} & -C_W(\sin \theta_E^T) & 0 \\ -C_{M_u} & -C_{M_\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \\ q \end{bmatrix}_P^E \\
 + \begin{bmatrix} -\frac{mU_E^a}{S_a q} & \frac{\bar{c}_a C_{X_\alpha}}{2U} & \frac{\bar{c}_a C_{X_q}}{2U} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{c}_a C_{Z_\alpha} - \frac{mU_E^a}{S_a q}}{2U_E^a} & \frac{\bar{c}_a C_{Z_q}}{2U_E^a} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{c} C_{M_\alpha}}{2U_E^a} & \frac{\bar{c} C_{M_q}}{2U_E^a} & -\frac{I_y}{S q \bar{c}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{\partial Fx}{\partial \delta q} \\ -\frac{\partial Fz}{\partial \delta q} \\ -\frac{\partial My}{\partial \delta q} \\ 0 \end{bmatrix} [\delta q]_P^E \quad 4.39
 \end{aligned}$$

Este sistema describe la dinámica longitudinal de una aeronave con superficies de control canard. Las ecuaciones están listas para sustituir variables por valores numéricos característicos de cada diseño aerodinámico. Una vez hecho esto, se define el ángulo de las superficies de control y el tiempo que duren deflectadas, y al resolver las ecuaciones con esta entrada, el resultado arrojará las reacciones de la aeronave

## 5

# DERIVADAS DE ESTABILIDAD Y CONTROL LONGITUDINALES

En la sumatoria de fuerzas totales y momentos, existen entidades que al ser multiplicados por las variables que cambian a lo largo del comportamiento del fenómeno, dan como resultado el valor de dicha sumatoria. En base a lo que se ve en las ecuaciones 4.16 y 4.17, las fuerzas y momentos dependen del valor de diferentes variables cambiantes. El propósito de este capítulo es obtener las formas matemáticas de estas entidades llamadas derivadas de estabilidad y control

En el caso de la dinámica longitudinal existen dos fuerzas a analizar en el eje  $x$  y  $z$  además de un momento en  $y$ . La forma en que son originadas puede provenir de tres medios, la fuerza de gravedad, las fuerzas aerodinámicas y las fuerzas de propulsión. Estas fuerzas varían con respecto a los movimientos de la aeronave en estado transitorio y de los valores de entrada proporcionados por las superficies de control, estas variaciones son llamadas también **derivadas de estabilidad y de control**.

## 5.1 DERIVADAS GRAVITACIONALES

La fuerza de gravedad afecta al entrar en acción con la masa del cuerpo, lo que ocasiona que actúen diferentes fuerzas dependiendo de la posición de la aeronave con respecto a la tierra plana. Pero de acuerdo a las consideraciones del tipo de modelo, las fuerzas en los ejes  $x$  y  $y$  varían conforme cambia el ángulo transitorio de cabeceo. Esta variación de la fuerza con respecto al ángulo de cabeceo, está definida como:

$$\frac{\delta F_z}{\delta \theta}, \frac{\delta F_x}{\delta \theta}$$

Y entra en las tres ecuaciones de traslación. Ambas fuerzas son dependientes de la posición de cabeceo debido a que las fuerzas serán axiales a los ejes de la aeronave.

En la figura 5.2 se puede visualizar el valor de  $\theta_p^E$ .

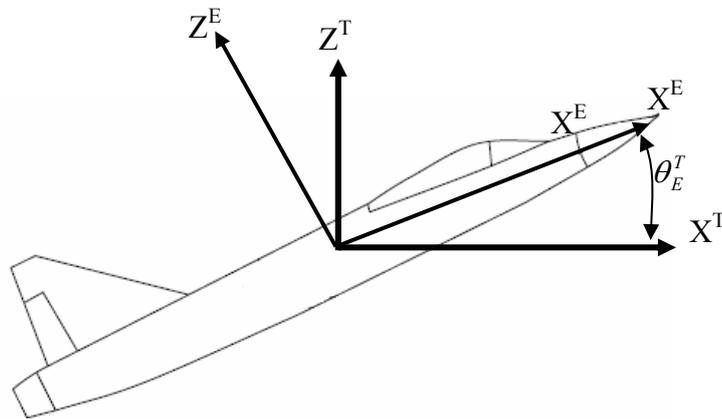


Figura 5.1 Actitud longitudinal en el instante  $t_0 = 0$  (Estado. estacionario)

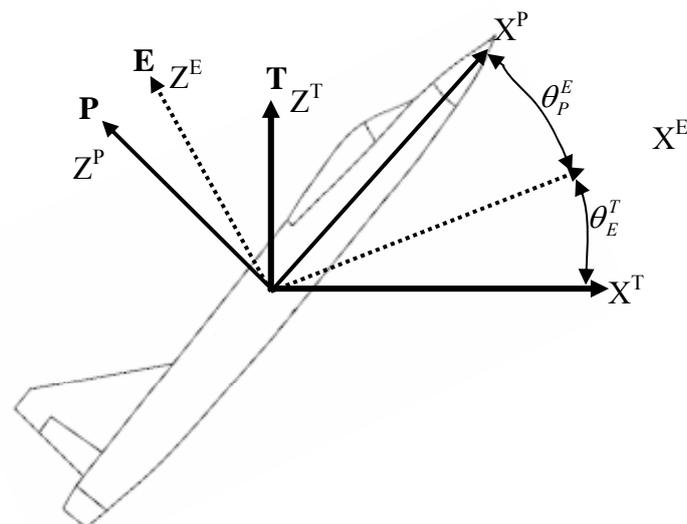


Figura 5.2 Actitud longitudinal en  $t = t_0 + \Delta t$  (Estado. perturbado)

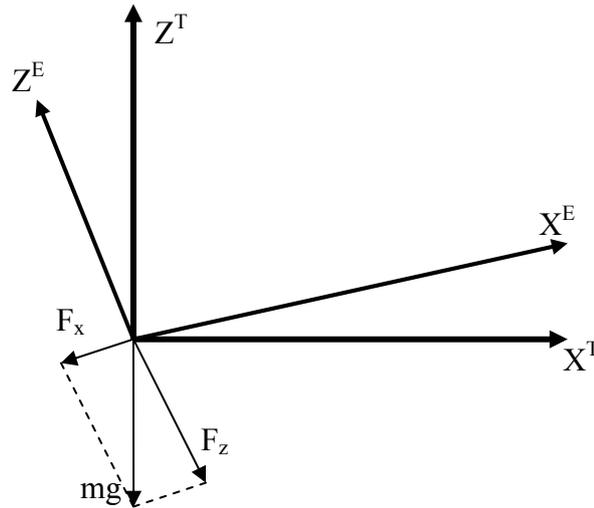


Figura 5.3 Fuerzas gravitacionales sobre la triada E

A pesar de que los resultados que interesan son los correspondientes al vector en estado perturbado, las derivadas de estabilidad inerciales serán analizadas en el estado estacionario. Es decir el valor inicial no será cero, lo que normalmente es considerado para obtener las ecuaciones que determinan a las derivadas de estabilidad. De la figura 5.3 se obtiene lo siguiente:

$$F_x = -mg(\text{sen}\theta_E^T) \quad 5.1$$

$$F_z = -mg(\text{cos}\theta_E^T) \quad 5.2$$

El cambio con respecto a  $\theta_E^T$  será:

$$\frac{\partial F_x}{\partial \theta_E^T} = -mg(\text{cos}\theta_E^T) \quad 5.3$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial \theta_E^T} = mg(\text{sen}\theta_E^T) \quad 5.4$$

De esta forma quedan definidas las derivadas de estabilidad inerciales longitudinales. En donde  $m$  es la masa de la aeronave y  $g$  la aceleración que causa la gravedad.

## 5.2 DERIVADAS AERODINÁMICAS

El análisis de las derivadas de estabilidad y control aerodinámicas es más complicado. Las fuerzas aerodinámicas surgen al haber un cuerpo sumergido en

un fluido teniendo éste una velocidad con respecto a dicho cuerpo. El análisis como ya se mencionó debe efectuarse a partir del estado de equilibrio. Por lo tanto las fuerzas aerodinámicas surgen de la relación entre el cuerpo en estado estacionario y el aire así como en fue el estado estacionario de las derivadas gravitacionales.

### 5.2.1 Derivadas de Estabilidad

**Una fuerza en x que varía conforme la variación de la velocidad en dicho eje representada por**

$$\frac{\partial F_x}{\partial u}$$

Esta fuerza es ocasionada por la diferencia de fuerzas entre la resistencia al avance y la fuerza de empuje. El empuje depende directamente de la velocidad entre la aeronave y el aire debido a los rendimientos del motor. Dichos rendimientos dependen del tipo de motor.

En un motor a hélice de combustión interna alternativo la relación empuje velocidad no es ocasionada directamente por el motor sino por el rendimiento de la hélice, a menos que se cuente con un sistema de alimentación de aire que aproveche la velocidad del vehículo. En el caso de un turbohélice, la variación depende de ambos; de la hélice y del motor. En un motor a reacción, incluyendo motores rotativos y aero-reactores la relación empuje velocidad es directamente por el motor. En el caso del motor a reacción, por lo regular tienen un difusor a la entrada que alinea y desacelera el flujo antes de entrar a la primera etapa de compresión. Este difusor desacelera el flujo para evitar que las ondas de choque bajen el rendimiento en la obtención de empuje. Esto provoca que no haya gran diferencia en la variación del empuje con respecto al número de Mach, por lo tanto dicho valor puede desprejarse En el caso del motor a cohete la atribución a la relación entre empuje y velocidad es nula.

La variación de la relación arrastre-velocidad está determinada por los fenómenos de compresibilidad. Esto provoca que la estabilidad dinámica de la aeronave cambie al pasar en las diferentes etapas; régimen subsónico, transónico y supersónico. En el régimen subsónico la variación es prácticamente nula, pero comienza tener un valor importante en la etapa transónica tal y como se logra ver en la figura 5.4 en donde:

$$C_{D_u} = \frac{\delta C_D}{\delta u} \quad 5.5$$

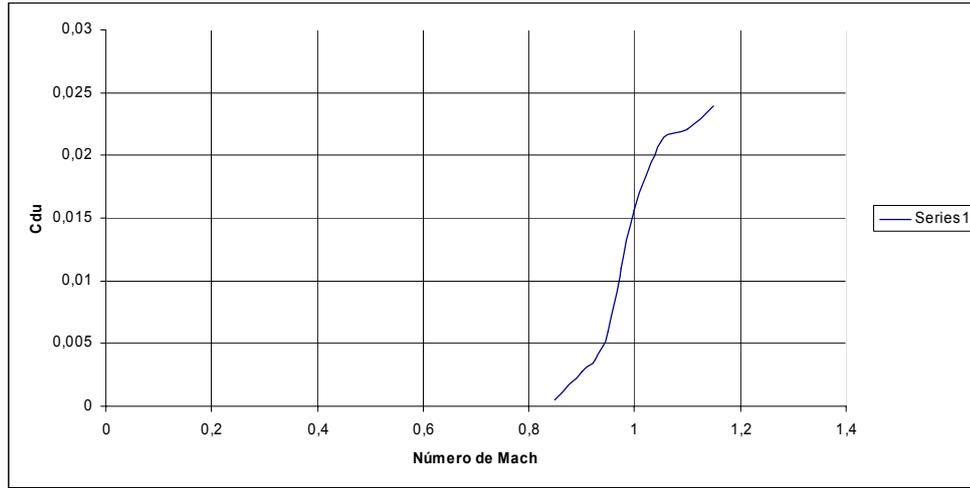


Figura 5.4 Variación de la relación arrastre-velocidad contra el número de Mach obtenida por medio de compendios de datos experimentales [20].

También se puede presentar una variación de fuerzas por velocidad al ocasionarse fenómenos de aeroelasticidad, en donde la velocidad puede llegar a deformar las superficies aerodinámicas y cambiar la dirección de las fuerzas. Pero los alcances de esta tesis se limitan a la consideración de un cuerpo rígido.

La derivada aerodinámica de estabilidad  $C_{Du}$  se determina de la siguiente manera. En base a que la variación de las fuerzas axiales a la aeronave está dada por dos fuerzas encontradas; la del empuje y la de la resistencia al avance, se tiene que;

$$F_x = T - D = T - \left( \frac{1}{2} \rho (U_E^a)^2 C_D S \right) \quad 5.6$$

Se deriva la ecuación 5.6 con respecto a la velocidad  $U_E^a$  y se adimensionaliza:

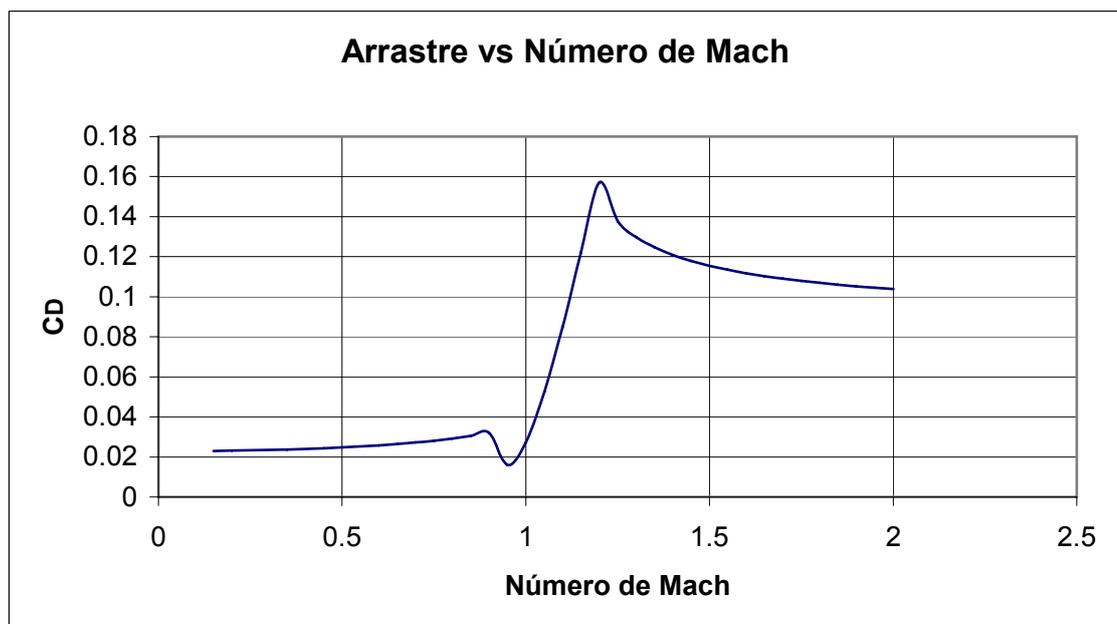
$$\frac{\partial F_x}{\partial U_E^a} = \frac{\partial T}{\partial U_E^a} - \frac{\partial D}{\partial U_E^a} = \frac{\partial T}{\partial U_E^a} - \rho U_E^a S C_D - \left( \frac{1}{2} \rho (U_E^a)^2 \frac{\partial C_D}{\partial U_E^a} S \right) \quad 5.7$$

$$C_{x_u} = \left( \frac{U_E^a}{Sq} \right) \frac{\partial F_x}{\partial U_E^a} = \left( \frac{U_E^a}{Sq} \right) \frac{\partial F_x}{\partial U_E^a} = \left( \frac{U_E^a}{S \left( \frac{1}{2} (U_E^a)^2 \rho \right)} \right) \left[ \frac{\partial T}{\partial U_E^a} - \rho U_E^a S C_D - \left( \frac{1}{2} \rho (U_E^a)^2 \frac{\partial C_D}{\partial U_E^a} S \right) \right] \quad 5.8$$

$$C_{x_u} = \frac{\partial T}{\partial U_E^a} \left( \frac{U_E^a}{Sq} \right) - 2C_D - U_E^a \frac{\partial C_D}{\partial u} \quad 5.9$$

La razón de la adimensionalización es para que en un futuro se pueda validar el modelo matemático o alguna de las derivadas de estabilidad y/o control por medio de modelos físicos de la aeronave construidos a cualquier escala. Además simplifica los cálculos al disminuir el número de variables.

El coeficiente de arrastre será determinado por las fórmulas definidas en el capítulo 3. El coeficiente de arrastre va a depender del régimen de vuelo, y se tendrán distintos valores para régimen subsónico, transónico y supersónico. El arrastre total es la suma del arrastre inducido más el parásito, y el parásito a su vez es la suma del arrastre por fricción, el arrastre por presión y por interferencia. Ambos coeficientes de arrastre dependen del régimen de vuelo. El inducido por el incremento de la sustentación debido a la compresibilidad, el de fricción por el cambio en el número de Reynolds y en la densidad del flujo, además se agrega un valor más de arrastre de magnitud considerable, originado por el choque de la onda sónica. Puede verse graficado el arrastre con respecto a la velocidad de vuelo, considerando que la aeronave vuela con un ángulo de ataque de 5 grados en la figura 5.5.



*Figura 5.5. Arrastre contra número de Mach del diseño preliminar de aeronave a 5° de ángulo de ataque*

El coeficiente de fricción estará en función del número de Reynolds el cual varía para cada parte de la aeronave y para cada velocidad de vuelo. Se determinarán las velocidades a las cuales se obtendrán las características aerodinámicas. Si la velocidad máxima de la aeronave es de 2 Mach, se hará una tabla de velocidades cada .25 de Mach, y se determinarán para cada velocidad su correspondiente valor de arrastre, la variación de arrastre, y la sustitución de estos valores en la ecuación 5.6 para obtener los resultados de la derivada de estabilidad a distintas velocidades. De donde se obtiene la tabla siguiente:

Mach	$C_D$	$C_{Du}$	$C_{Xu}$
0.00	0.0000	0.0000	0.0000
0.25	0.0235	0.0000	-0.0476
0.50	0.0252	0.0000	-0.0542
0.75	0.0292	0.0000	-0.0713
1.00	0.1299	0.0003	-0.3706
1.25	0.1299	0.0007	-0.5428
1.50	0.1135	-0.0002	-0.1424
1.75	0.1070	-0.0001	-0.1719
2.00	0.0573	0.0000	-0.0850

Tabla 5.1 Valores obtenidos de  $C_{Du}$  a diferentes números de Mach

Una variación de fuerza en  $z$  que varía conforme la variación de la velocidad en dicho eje representada por

$$\frac{\partial F_z}{\partial u}$$

Si el motor está alineado con el eje  $x$  de la aeronave. La única fuerza en  $z$  provocada por la velocidad es la sustentación:

$$F_z = L = \frac{1}{2} \rho U_P^E C_L S \quad 5.10$$

Diferenciando y adimensionalizando:

$$\frac{\partial F_z}{\partial U_E^a} = \rho U_E^a S C_L + \frac{\partial C_L}{\partial U_E^a} \frac{1}{2} \rho (U_E^a)^2 S \quad 5.11$$

$$C_{z_u} = \left( \frac{U_E^a}{Sq} \right) \frac{\partial F_z}{\partial U_E^a} = \left( \frac{U_E^a}{S \left( \frac{1}{2} U_E^a \rho \right)} \right) \left( \rho U_E^a S C_L + \frac{\partial C_L}{\partial U_E^a} \frac{1}{2} \rho (U_E^a)^2 S \right) \quad 5.12$$

$$C_{z_u} = 2C_L + U_E^a \frac{\partial C_L}{\partial u} \quad 5.13$$

La forma que tiene la curva de sustentación depende directamente de la densidad del aire, al encontrarse con un fluido compresible el cual aumenta su densidad al presentarse las ondas de choque, y al estar las superficies o parte de las superficies de la aeronave sumergidas en ellas habrá un incremento en la pendiente de la curva de sustentación. Se ha obtenido el valor de ésta para diferentes números de Mach mostrado en la figura 5.6.

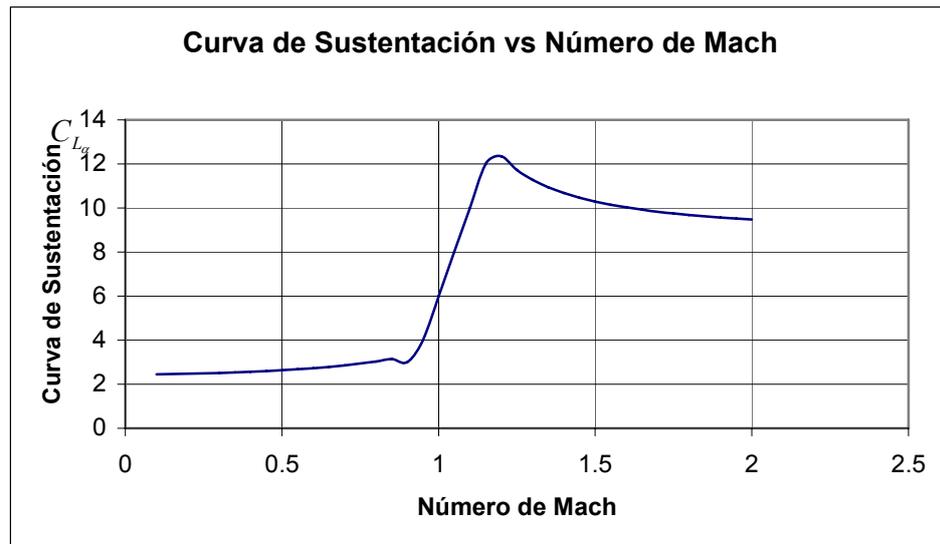


Figura 5.6 Pendiente de la Curva de Sustentación Contra Número de Mach

De la misma forma que en la derivada de estabilidad anterior, se obtendrán datos para números de Mach en intervalos de .25 de 0 hasta 2 de Mach. En la ecuación 5.13, a cada intervalo se le dará el valor de coeficiente de sustentación y de la variación de éste con la velocidad. Todos los valores, se obtuvieron considerando que se vuela a un ángulo de ataque de diseño de 5 grados.

Mach	$CL\alpha$	CL	$C_{Lu}$	$C_{Zu}$
0.25	4.7332	0.8261	0.0002	1.6730
0.5	5.0195	0.8761	0.0006	1.8601
0.75	5.6428	0.9849	0.0014	2.3187
1	6.0000	1.0472	0.0004	2.2358
1.25	11.7231	2.0461	0.0095	8.1534
1.5	10.2942	1.7967	-0.0025	2.3079
1.75	9.7531	1.7022	-0.0010	2.7984
2	9.4724	1.6533	-0.0005	2.9384

Tabla 5.2 Valores de variación de fuerza en el eje z con respecto a la velocidad para diferentes números de Mach

Una variación de momento en y que varía conforme a la variación de la velocidad en dicho eje representada por:

$$\frac{\partial M_y}{\partial u}$$

El coeficiente de momentos está en función directa de la distancia que haya entre los centros aerodinámicos de las superficies que provocan fuerzas de sustentación y arrastre y del lugar del centro de gravedad de la aeronave, además del momento propio de cada superficie provocado por las fuerzas aerodinámicas y su propio centro de gravedad. La velocidad influye en el momento de la aeronave al haber un desplazamiento de los centros aerodinámicos en función del número

de Mach, lo que provoca un cambio de 25% de la cuerda en velocidad subsónica, hasta un 50% de la cuerda aproximadamente para velocidades supersónicas. El movimiento es abrupto en velocidades transónicas, por lo tanto el valor de la derivada de estabilidad será grande en dicho régimen. Una variación del centro aerodinámico en proporción de la cuerda se muestra en la figura 5.7.

Para obtener esta derivada, se debe hacer un estudio del valor del coeficiente de momentos en función de la velocidad de Mach con ángulos de ataque y de incidencia del ala y superficies canard igual a cero. Los resultados de este análisis se presentan en el apéndice C, en donde se utiliza una rápida aproximación para la determinación del centro aerodinámico de diseños preliminares.

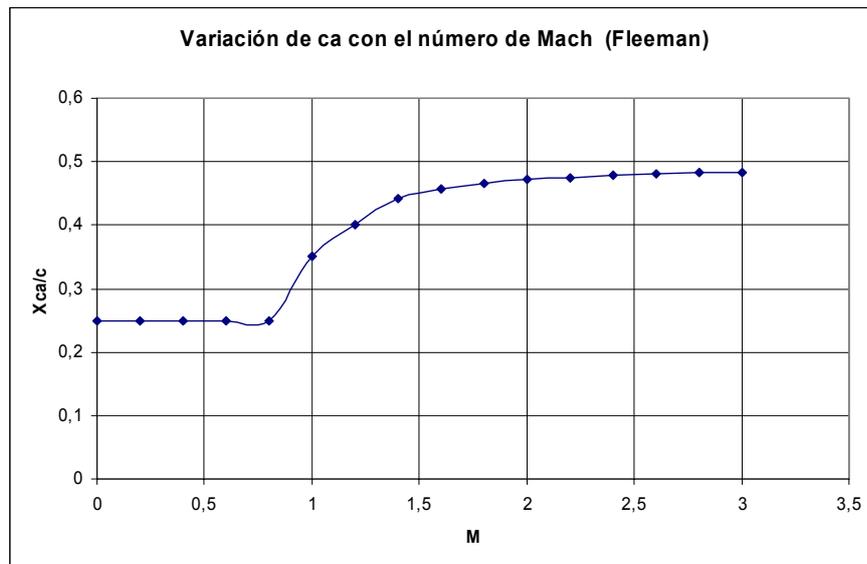


Figura 5.7. Desplazamiento del centro aerodinámico del ala en función del número de Mach según métodos de Fleeman [10]

Dentro del análisis se presentan las fuerzas aerodinámicas; de sustentación y de arrastre como las que ocasionan el momento. Tanto el centro aerodinámico cambia con el número de Mach como el valor de las fuerzas. Si el valor de dichas fuerzas aerodinámicas es afectado por la compresibilidad lograda en velocidades superiores a la del sonido, también aumentará el momento de cabeceo. Entonces, debe ser considerado tanto el movimiento de la posición del centro aerodinámico como el incremento en magnitud de las fuerzas aerodinámicas.

Por ahora la derivada de estabilidad se define como:

$$C_{m_u} = \frac{\partial C_m}{\partial U_E^a} \quad 5.14$$

Según la figura 5.4 la sumatoria de momentos aerodinámicos está dada por:



$$\alpha_E^a = \alpha_{\bar{a}}^A \quad 5.18$$

El subíndice  $c$ , se refiere a la superficie canard,  $f$  al fuselaje, el subíndice  $\bar{a}$  al ala y el subíndice  $A$  indica la aeronave completa.

En base a la figura 5.8 los tres elementos, fuselaje, ala y superficie canard influyen en el momento aerodinámico. Según la ecuación 5.15 la sumatoria de momentos consiste en un momento particular de cada elemento más las fuerzas aerodinámicas que estos provoquen multiplicados por la distancia del centro gravedad al punto donde se ejerce la fuerza, es decir, al centro aerodinámico de la cuerda media ( $\bar{c}$ ). La influencia del ala en el momento de cabeceo de la aeronave es determinada por la sumatoria de fuerzas aerodinámicas de dicha ala multiplicadas cada una por el brazo de palanca, es decir la distancia en  $x$  que hay entre el centro aerodinámico del ala y el centro de gravedad de la aeronave tomando como referencia el borde de ataque del perfil donde se encuentre la cuerda media. Dichas fuerzas aerodinámicas actúan en el centro aerodinámico del ala, la cual, al ser simétrica sobre el eje  $x$ , puede considerarse que sus fuerzas aerodinámicas totales están sobre el eje axial de la aeronave. Las distancias  $X_{cg}$  y  $X_{ac}$  están consideradas como porcentajes de la cuerda divididos por cien. De esta manera si  $X_{ac} = .5$ , significa la mitad de lo que mida la cuerda aerodinámica media. En el caso de la superficie canard,  $X_{cg}$  tiene un valor mayor a 1 al estar situado el centro de gravedad de la aeronave fuera de la cuerda aerodinámica media de la superficie canard.

La sumatoria de momentos causados por el ala en la aeronave quedará definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Sigma M_{\bar{a}} = M_{\bar{a}} + (D \operatorname{sen}(\alpha_{\bar{a}}))_{\bar{a}} ((\bar{c}_{\bar{a}})(X_{cg})_{\bar{a}} - (\bar{c}_{\bar{a}})(X_{ca})_{\bar{a}}) \\ + (L \cos(\alpha_{\bar{a}}))_{\bar{a}} ((\bar{c}_{\bar{a}})(X_{cgA})_{\bar{a}} - (\bar{c}_{\bar{a}})(X_{ca})_{\bar{a}}) \end{aligned} \quad 5.19$$

$$\Sigma M_{\bar{a}} = M_{\bar{a}} + (D \operatorname{sen}(\alpha_{\bar{a}}) + L \cos(\alpha_{\bar{a}}))_{\bar{a}} ((X_{cgA})_{\bar{a}} - (X_{ca})_{\bar{a}})(\bar{c}_{\bar{a}}) \quad 5.20$$

La ecuación anterior considera que el lugar del centro de gravedad del ala y el de la aeronave completa están alineados. También que el centro de gravedad y el centro aerodinámicos del ala se encuentran en la misma coordenada sobre eje  $z$  en caso contrario de que no se cumpla esto último tendría que agregarse:

$$M_{\bar{a}z} = (-D \cos(\alpha_{\bar{a}}))_{\bar{a}} (Z)_{\bar{a}} + (L \operatorname{sen}(\alpha_{\bar{a}}))_{\bar{a}} (Z)_{\bar{a}} = (L \operatorname{sen}(\alpha_{\bar{a}}) - D \cos(\alpha_{\bar{a}}))_{\bar{a}} (Z)_{\bar{a}} \quad 5.21$$

Y se tendría:

$$\begin{aligned} \Sigma M_{\bar{a}} = M_{\bar{a}} + (D \operatorname{sen}(\alpha_{\bar{a}}) + L \cos(\alpha_{\bar{a}}))_{\bar{a}} ((X_{cgA})_{\bar{a}} - (X_{ca})_{\bar{a}})(\bar{c}_{\bar{a}}) \\ + (L \operatorname{sen}(\alpha_{\bar{a}}) - D \cos(\alpha_{\bar{a}}))_{\bar{a}} (Z)_{\bar{a}} \end{aligned} \quad 5.22$$

El estudio de esta derivada de estabilidad consiste en la alteración del momento en base a la velocidad de vuelo, se debe hacer el análisis eliminando otras variables que le provoquen posibles momentos de cabeceos, por lo tanto el análisis se realiza considerando que la aeronave no lleva un ángulo de ataque. Con lo cual se tiene:

$$\alpha_{\bar{a}}^a = 0 \quad 5.23$$

$$\text{sen}(\alpha_{\bar{a}}^a) = 0 \quad 5.24$$

$$\text{cos}(\alpha_{\bar{a}}^a) = 1 \quad 5.25$$

Considerando que no existe una distancia en z que influya en el momento y con las ecuaciones 5.23, 5.24 y 5.25 se tiene:

$$\Sigma M_{\bar{a}} = M_{\bar{a}} + (L)_{\bar{a}} \left( (X_{cgA})_{\bar{a}} - (X_{ca})_{\bar{a}} \right) (\bar{c}_{\bar{a}}) \quad 5.26$$

Como ya se ha mencionado el momento varía con respecto a la velocidad por fenómenos de compresibilidad, y es afectada la fuerza de sustentación y la posición del centro aerodinámico, por lo tanto para obtener dicha variación, la ecuación se convierte en:

$$\Sigma \frac{\partial M_{\bar{a}}}{\partial U_E^a} = \frac{\partial M_{\bar{a}}}{\partial U_E^a} + \left( \frac{\partial L}{\partial U_E^a} \right)_{\bar{a}} \left( (X_{cgA})_{\bar{a}} - \left( \frac{\partial X_{ca}}{\partial U_E^a} \right)_{\bar{a}} \right) (\bar{c}_{\bar{a}}) \quad 5.27$$

Se adimensionaliza considerando que:

$$M = \frac{1}{2} \rho U^2 S C_M \bar{c} \quad 5.28$$

Para obtener:

$$\Sigma \frac{\partial C_{M\bar{a}}}{\partial U_E^a} = \frac{\partial C_{M\bar{a}}}{\partial U_E^a} + \left( \frac{\partial C_L}{\partial U_E^a} \right)_{\bar{a}} \left( (X_{cgA})_{\bar{a}} - \left( \frac{\partial X_{ca}}{\partial U_E^a} \right)_{\bar{a}} \right) \quad 5.29$$

Esta ecuación determina el momento en función de la distancia del centro aerodinámico con respecto al centro de gravedad y los coeficientes aerodinámicos. Para obtener la derivada de estabilidad con respecto a la velocidad, se debe determinar la forma en que la velocidad provoca el desplazamiento del centro aerodinámico del ala. Al presentarse diferentes velocidades no sólo la distancia del centro aerodinámico cambia, sino también los coeficientes de resistencia al avance y de sustentación. Para lo anterior se necesita hacer un análisis aerodinámico para obtener así la fórmula que define a la derivada o bien, obtener los gráficos de variación en base a la fórmula 5.29 contra velocidad. La cual será estudiada de acuerdo al número de Mach, al ser los fenómenos de compresibilidad los que afectan a los coeficientes aerodinámicos y la distancia del centro aerodinámico.

De la misma forma en que se han definido los momentos provocados por el ala se analizarán los de las superficies canard, tomando en cuenta que el tener  $(X_{cg}-X_{ca})$  significa que si el centro aerodinámico está detrás del centro de gravedad de la aeronave, las distancias tendrán signo negativo además de considerar siempre que los vectores de fuerzas de sustentación y arrastre tendrán la consideración tradicional de vector apuntando hacia abajo y a la izquierda, negativo y arriba derecha, positivo, todo esto define un momento negativo o positivo con respecto a la regla de la mano derecha.

El término  $M_{\bar{a}}$  de la ecuación 5.26 se refiere al momento que provoca la misma ala al encontrarse su propio centro de gravedad y su centro aerodinámico distanciados por un brazo de palanca, lo cual provoca un par entre esas dos fuerzas. Por lo regular se busca que esta distancia sea mínima para evitar esfuerzos en la estructura del ala. Se adimensionaliza y entonces se tiene:

$$C_{M_{\bar{a}}} = (C_L)_{\bar{a}} \left( (X_{cg})_{\bar{a}} - (X_{ca})_{\bar{a}} \right) \quad 5.30$$

Que considera que el grosor del ala es lo suficientemente pequeña para no generar momentos provocados por distancias en  $z$ . El término  $(X_{cg})_{\bar{a}}$  indica la distancia en porcentaje de cuerda del centro de gravedad del ala.

El cambio de la ecuación 5.30 con respecto a la velocidad viene dada por:

$$\frac{\partial C_{M_{\bar{a}}}}{\partial U_E^a} = \left( \frac{\partial C_L}{\partial U_E^a} \right)_{\bar{a}} \left( (X_{cg})_{\bar{a}} - \left( \frac{\partial X_{ca}}{\partial U_E^a} \right)_{\bar{a}} \right) \quad 5.31$$

En base a la ecuación 5.16 se sustituye la ecuación 5.31 para tener la influencia total del ala determinada en la ecuación 5.32.

$$\left( \frac{\partial C_{M_{\bar{a}}}}{\partial U_E^a} \right)_{total} = 2 \left( \frac{\partial C_L}{\partial U_E^a} \right)_{\bar{a}} \left( (X_{cg})_{\bar{a}} - \left( \frac{\partial X_{ca}}{\partial U_E^a} \right)_{\bar{a}} \right) \quad 5.32$$

Aplicando las ecuaciones obtenidas de acuerdo a la teoría del capítulo 3 se puede obtener el siguiente gráfico:

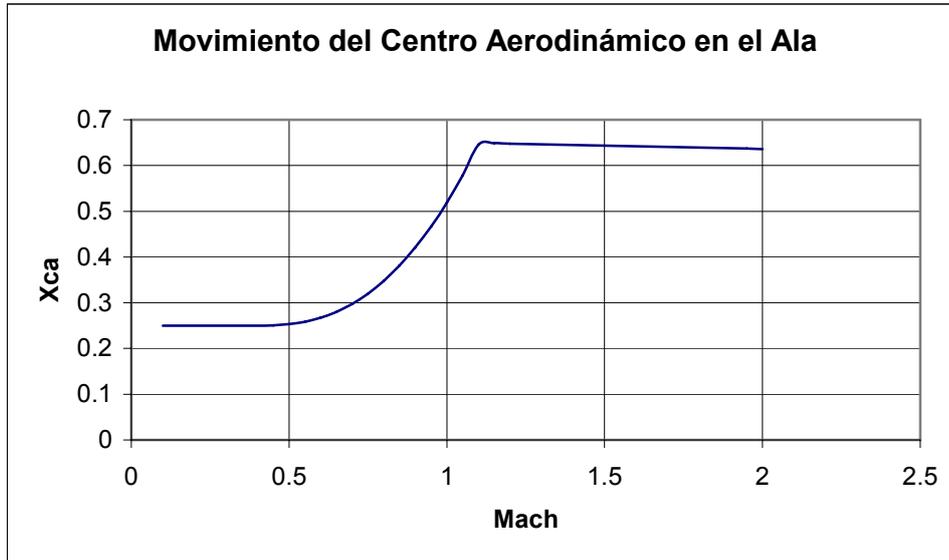


Figura 5.9. Desplazamiento del centro aerodinámico con el incremento de la velocidad

Ahora se agrega la influencia de la superficie canard, la cual tiene un comportamiento igual al del ala, solo que su contribución en el momento será de signo contrario en el caso de que se encuentren en el lado opuesto al centro de gravedad de la aeronave. Esta superficie, al estar frente al centro de gravedad, se puede observar que un efecto de compresibilidad por la velocidad supersónica incrementa la fuerza de sustentación, lo que genera un cabeceo positivo, pero también recorre al centro aerodinámico hacia atrás de la aeronave, lo que disminuye la magnitud del momento. La forma en que esta posición cambia se muestra en la figura 5.10.

Al igual que en el caso del ala se tiene para la superficie canard que

$$\Sigma \frac{\partial C_{Mc}}{\partial U_E^a} = \frac{\partial C_{Mc}}{\partial U_E^a} + \left( \frac{\partial C_L}{\partial U_E^a} \right)_c \left( (X_{cgA})_c - \left( \frac{\partial X_{ca}}{\partial U_E^a} \right)_c \right) \quad 5.33$$

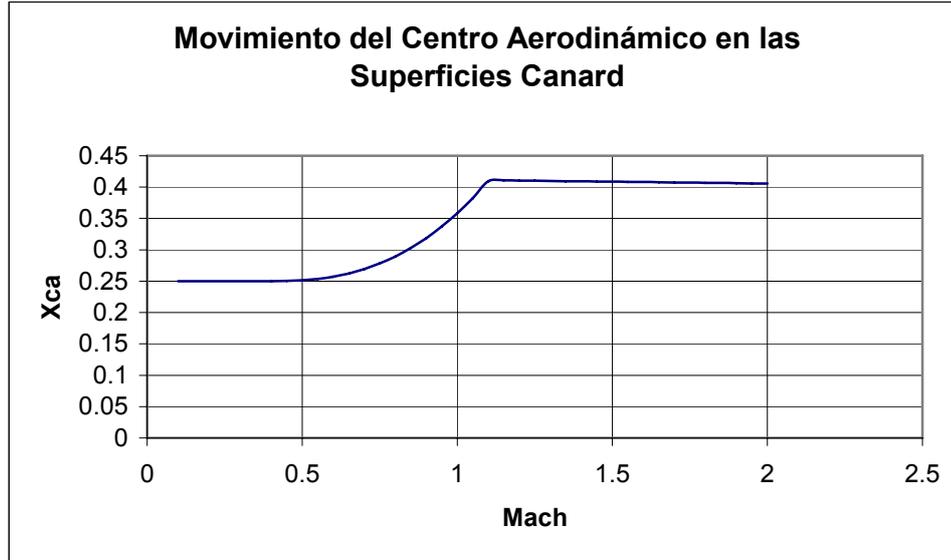


Figura 5.10. Movimiento del centro aerodinámico en la superficie canard con respecto al número de Mach

En este caso el centro de gravedad de la superficie canard no está alineado con el de la aeronave, por lo tanto al sustituir la ecuación desplegada del momento particular del canard se obtiene la ecuación siguiente:

$$\left(\frac{\partial C_{M_c}}{\partial U_E^a}\right)_{total} = \left(\frac{\partial C_L}{\partial U_E^a}\right)_c \left[ \left( (X_{cgA})_c - \left(\frac{\partial X_{ca}}{\partial U_E^a}\right)_c \right) + \left( (X_{cg})_c - \left(\frac{\partial X_{ca}}{\partial U_E^a}\right)_c \right) \right] \quad 5.34$$

La influencia del fuselaje será en este caso mínima considerando su forma y la consideración de las teorías empleadas en donde las perturbaciones serán mínimas. Por lo tanto la ecuación final para la aeronave completa queda definida como:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C_M}{\partial U_E^a}\right)_{total} &= 2 \left(\frac{\partial C_L}{\partial U_E^a}\right)_{\bar{a}} \left( (X_{cg})_{\bar{a}} - \left(\frac{\partial X_{ca}}{\partial u}\right)_{\bar{a}} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial C_L}{\partial U_E^a}\right)_c \left[ \left( (X_{cgA})_c - \left(\frac{\partial X_{ca}}{\partial U_E^a}\right)_c \right) + \left( (X_{cg})_c - \left(\frac{\partial X_{ca}}{\partial U_E^a}\right)_c \right) \right] \end{aligned} \quad 5.35$$

Ahora sustituyendo los valores obtenidos con las ecuaciones del capítulo 3 en la ecuación 5.35 se obtiene la siguiente tabla de resultados:

Mach	$(C_{Lu})_c$	$(\delta X_{ca}/\delta u)_a$	$(\delta X_{ca}/\delta u)_c$	$(C_{Lu})_c$	$C_{Mu}$
0.25	0.0006	0.0001	0.0000	0.0001	0.0479
0.5	0.0014	0.0001	0.0000	0.0003	0.2212
0.75	0.0004	0.0013	0.0004	0.0005	0.3645
1	0.0095	0.0035	0.0010	0.0004	1.9417
1.25	-0.0025	0.0014	0.0004	0.0120	11.6481
1.5	-0.0010	-0.0001	0.0000	-0.0025	-3.2999
1.75	-0.0005	-0.0001	0.0000	-0.0010	-1.5945
2	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0005	-0.8488

Tabla 5.3 Incremento en el coeficiente de momentos con respecto al incremento de velocidad a diferentes números de Mach.

Una variación de fuerza en x que entra en acción cuando hay un incremento en el ángulo de ataque causado por el cambio de  $w_p^E$ . Representado por

$$\frac{\partial F_x}{\partial w}$$

Esta velocidad cambia debido a que al presentarse el cabeceo que rompe el estado de equilibrio, se presenta resistencia al avance causado por el nuevo ángulo de ataque, inducido por los incrementos de velocidad vertical en estado perturbado. Se considera ángulo de ataque a aquel que forma el vector de la velocidad del aire con el eje axial de la aeronave y al cual se le denomina como  $\alpha$  siendo este, al tratarse de dinámica longitudinal, el que se encuentra en el plano xz.

Para convertir  $w_p^E$  en  $\alpha_p^E$  y apoyándose de la figura 5.7 se puede ver que:

$$\frac{w_p^E}{U_E^a} = \tan \alpha_p^E \quad 5.36$$

Al presentarse una componente de velocidad en el eje z el ángulo de ataque se incrementa de la siguiente manera:

En la figura 5.11, se observa que si el eje x de la aeronave es colineal con el vector velocidad:

$$\alpha_E^a = 0 \quad 5.37$$

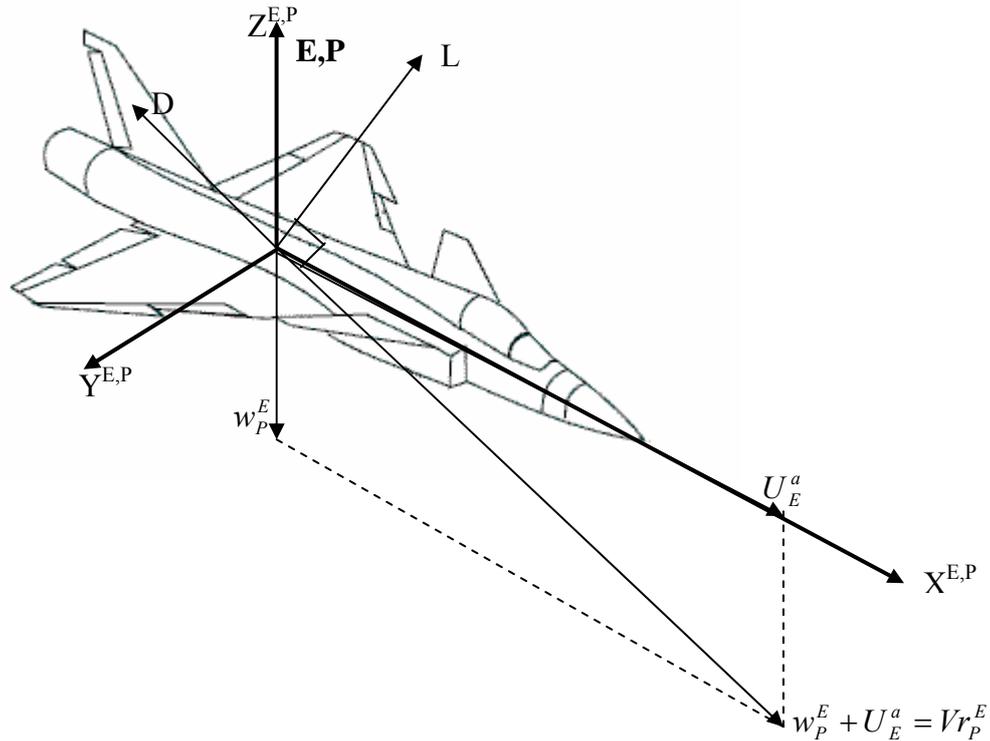


Figura 5.11. Fuerzas aerodinámicas después de un disturbio llamado  $w_P^E$

La determinación de la derivada de estabilidad siempre tiene que ser analizando el estado de equilibrio. Las fuerzas en el estado  $E$  que aparecen sobre el eje  $x$  del cuerpo son:

$$\Sigma F_x = L \operatorname{sen}(\alpha_E^a) - D \cos(\alpha_E^a) \quad 5.38$$

Diferenciando:

$$\frac{\partial F_x}{\partial \alpha_E^a} = \frac{\partial L}{\partial \alpha_E^a} \operatorname{sen}(\alpha_E^a) + L \cos(\alpha_E^a) - \frac{\partial D}{\partial \alpha_E^a} \cos(\alpha_E^a) + D \operatorname{sen}(\alpha_E^a) \quad 5.39$$

Y sustituyendo la ecuación 5.37 se obtiene:

$$\frac{\partial F_x}{\partial \alpha_E^a} = L - \frac{\partial D}{\partial \alpha_E^a} \quad 5.40$$

Adimensionalizando:

$$\left(\frac{1}{Sq}\right) \frac{\partial F_x}{\partial \alpha_E^a} = C_L - \frac{\partial C_D}{\partial \alpha_E^a} \quad 5.41$$

$$C_{x_\alpha} = C_L - \frac{\partial C_D}{\partial \alpha_E^a} \quad 5.42$$

Aunque en la figura 5.11 no se visualiza un ángulo de ataque entre el eje x de la triada P con respecto al eje x de la triada E, es decir, el ángulo de ataque en el estado perturbado, (debido a que la obtención de las derivadas de estabilidad se realiza analizando el estado de equilibrio) se sabe que un incremento en el ángulo de ataque del estado perturbado será el mismo que el del estado estacionario, es decir:

$$\frac{\partial \alpha_E^a}{\partial \alpha_P^E} = 1 \quad 5.43$$

$$\partial \alpha_E^a = \partial \alpha_P^E \quad 5.44$$

Por lo tanto se tiene que:

$$C_{x_\alpha} = C_L - \frac{\partial C_D}{\partial \alpha_P^a} \quad 5.45$$

Al utilizar los valores que ya se tienen calculados con ayuda del capítulo 3 se puede visualizar el comportamiento del valor del arrastre contra el ángulo de ataque a diferentes números de Mach y se indican en el siguiente gráfico:

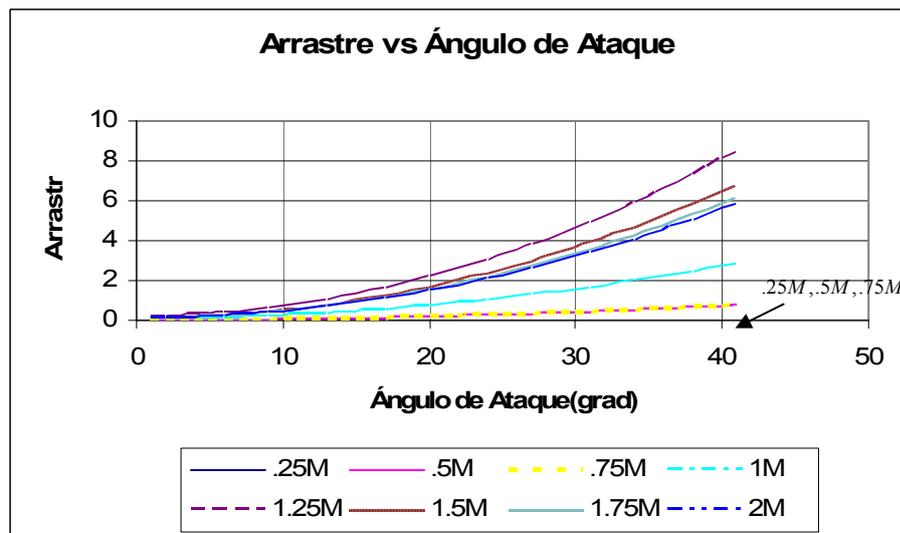


Figura 5.12. Comportamiento del gráfico arrastre contra ángulo de ataque a diferentes números de Mach

Al sustituir los valores del apéndice C en la ecuación 5.45 se obtiene la siguiente tabla de resultados:

Mach	$C_L$	$C_{D\alpha}$	$C_{x\alpha}$
0.25	0.8261	1.01675531	-0.1906
0.5	0.8761	1.09973983	-0.2237
0.75	0.9849	1.28894262	-0.3041
1	1.0472	1.40259239	-0.3554
1.25	2.0461	3.74433266	-1.6983
1.5	1.7967	3.06786995	-1.2712
1.75	1.7022	2.82762435	-1.1254
2	1.6533	2.70647473	-1.0532

Tabla 5.4 Derivadas de fuerza en x con respecto al ángulo de ataque a diferentes números de Mach

Una variación de fuerza en z que entra en acción cuando hay un incremento en el ángulo de ataque causado por el cambio de  $w_p^E$ . Representado por

$$\frac{\partial F_z}{\partial w}$$

Basándose en la figura 5.4 se tiene que:

$$F_z = L \cos(\alpha_E^a) - D \operatorname{sen} \alpha_E^a \quad 5.46$$

Diferenciando

$$\frac{\partial F_z}{\partial \alpha_E^a} = \frac{\partial L}{\partial \alpha_E^a} \cos(\alpha_E^a) - L \operatorname{sen}(\alpha_E^a) - \frac{\partial D}{\partial \alpha_E^a} \operatorname{sen}(\alpha_E^a) - D \cos(\alpha_E^a) \quad 5.47$$

De acuerdo a la ecuación 5.44:

$$\left( \frac{\partial F_z}{\partial \alpha_p^E} \right)_{\alpha_E^a=0} = \frac{\partial L}{\partial \alpha_p^E} - D = \frac{\partial L}{\partial \alpha_p^E} - D \quad 5.48$$

$$C_{z\alpha} = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha_p^E} - C_D \quad 5.49$$

Se puede obtener un gráfico que señale la pendiente de la curva de sustentación por los cálculos hechos en base al capítulo 3 y se muestran en la figura 5.13. Sustituyendo los valores calculados en la ecuación 5.49 se obtiene la siguiente tabla

Mach	$C_{L\alpha}$	$C_D$	$C_{Z\alpha}$
0.25	3.6028	0.0235	3.5792
0.5	5.0195	0.0252	4.9942
0.75	5.6428	0.0292	5.6136
1	6.0000	0.1299	5.8701
1.25	11.7231	0.1299	11.5932
1.5	10.2942	0.1135	10.1808
1.75	9.7531	0.1070	9.6461
2	9.4724	0.0573	9.4152

Tabla 5.5 Derivada de fuerza en z contra ángulo de ataque a diferentes números de Mach

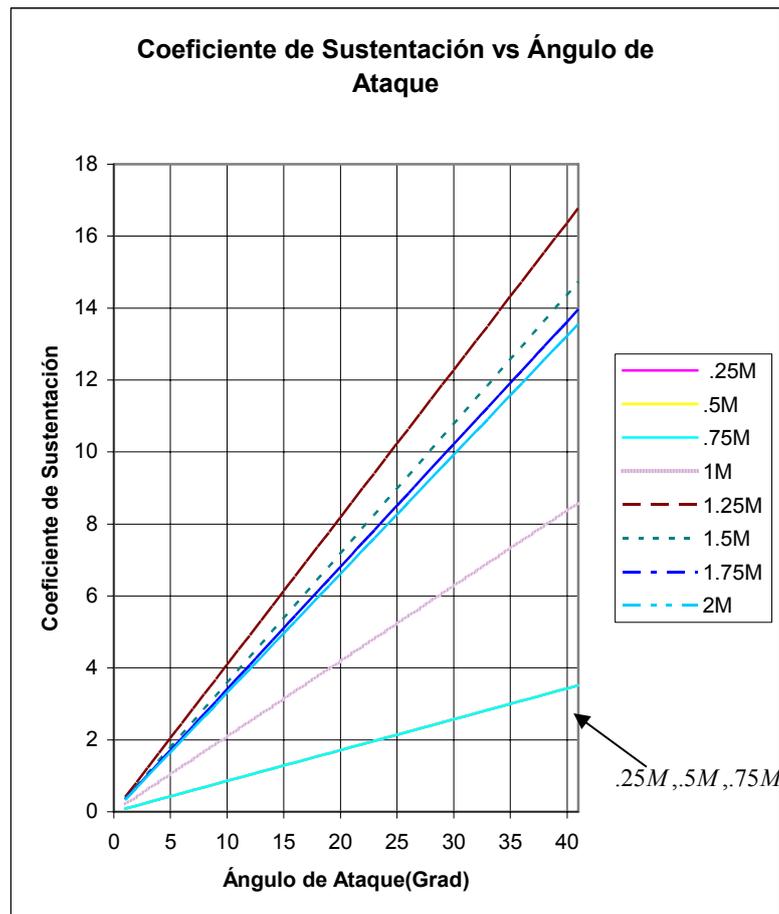


Figura 5.13. Influencia del número de Mach en la pendiente de la curva de sustentación

Una variación de momento en y que entra en acción cuando hay un incremento en el ángulo de ataque causado por el cambio de  $w_p^E$ . Representado por:

$$\frac{\partial M}{\partial w}$$

Esta es la derivada de mayor influencia en la estabilidad del cabeceo. Al aumentar el ángulo de ataque las fuerzas aerodinámicas que provocan momentos

alrededor del centro de gravedad cambian, por lo tanto la sumatoria de los momentos provocados por dichas fuerzas dan como resultado un momento final, el cual provoca el cabeceo. Esta derivada describe la pendiente de una recta que se obtiene experimentalmente al graficar la magnitud de ese momento a diferentes ángulos de ataque.

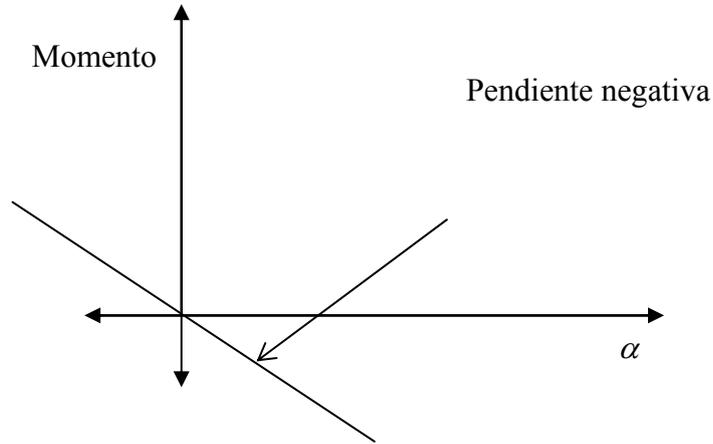


Figura 5.14. Gráfico de momentos contra ángulo de ataque

Este gráfico indica el tipo de estabilidad, si se analiza se puede observar que al aumentar el ángulo de ataque se genera un momento negativo. Al aumentar dicho ángulo, el momento negativo que se provoca, obliga a disminuir ese mismo ángulo de ataque. Este comportamiento es estable, y depende de la pendiente de la recta. Si la pendiente es cero, la estabilidad es indiferente, y si es positiva es inestable. El grado de estabilidad o inestabilidad lo indica la pendiente, es decir la derivada de estabilidad  $C_{M\alpha}$ . La determinación de este gráfico se explicó en el capítulo 3.

Se parte de la ecuación 5.15 y se sustituye la ecuación 5.20 y 5.21 así como también la influencia del fuselaje para obtener la ecuación de equilibrio:

$$\begin{aligned} \Sigma M = & M_{\bar{a}} + (D \operatorname{sen}(\alpha_{\bar{a}}) + L \cos(\alpha_{\bar{a}}))(X_{cg} - X_{ca})_{\bar{a}}(\bar{c}_{\bar{a}}) + M_c \\ & + (D \operatorname{sen}(\alpha_c) + L \cos(\alpha_c))(X_{cg} - X_{ca})_c(\bar{c}_c) + M_f \\ & + (D \operatorname{sen}(\alpha_f) + L \cos(\alpha_f))(X_{cg} - X_{ca})_f(l_f) = 0 \end{aligned} \quad 5.50$$

Se sustituye el valor de  $M_{\bar{a}}$

$$\begin{aligned} \Sigma M = & ((D \operatorname{sen}(\alpha_{\bar{a}}) + L \cos(\alpha_{\bar{a}}))(X_{cg} - X_{ca})_{\bar{a}}(\bar{c}_{\bar{a}})) \\ & + (D \operatorname{sen}(\alpha_{\bar{a}}) + L \cos(\alpha_{\bar{a}}))(X_{cgA} - X_{ca\bar{a}})_{\bar{a}}(\bar{c}_{\bar{a}}) \\ & + ((D \operatorname{sen}(\alpha_c) + L \cos(\alpha_c))(X_{cg} - X_{ca})_c(\bar{c}_c)) \\ & + (D \operatorname{sen}(\alpha_c) + L \cos(\alpha_c))(X_{cgA} - X_{cac})_c(\bar{c}_c) \\ & + ((D \operatorname{sen}(\alpha_f) + L \cos(\alpha_f))(X_{cg} - X_{ca})_f(l_f)) \\ & + (D \operatorname{sen}(\alpha_f) + L \cos(\alpha_f))(X_{cgA} - X_{caf})_f(l_f) = 0 \end{aligned} \quad 5.51$$

Derivando respecto al ángulo de ataque tomando en cuenta a las ecuaciones 5.43 y 5.44 se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\Sigma \frac{\partial M}{\partial \alpha_E^a} = & \left[ \frac{\partial D}{\partial \alpha_E^a} \text{sen}(\alpha_{\bar{a}}) + D \cos(\alpha_{\bar{a}}) + \left( \frac{\partial L}{\partial \alpha_E^a} \cos(\alpha_{\bar{a}}) - L \text{sen}(\alpha_{\bar{a}}) \right) \right] (X_{cg} - X_{ca})_{\bar{a}} (\bar{c}_{\bar{a}}) \\
& + \left[ \frac{\partial D}{\partial \alpha_E^a} \text{sen}(\alpha_{\bar{a}}) + D \cos(\alpha_{\bar{a}}) + \left( \frac{\partial L}{\partial \alpha_E^a} \cos(\alpha_{\bar{a}}) - L \text{sen}(\alpha_{\bar{a}}) \right) \right] (X_{cgA} - X_{ca\bar{a}})_{\bar{a}} (\bar{c}_{\bar{a}}) \\
& + \left[ \frac{\partial D}{\partial \alpha_E^a} \text{sen}(\alpha_c) + D \cos(\alpha_c) + \left( \frac{\partial L}{\partial \alpha_E^a} \cos(\alpha_c) - L \text{sen}(\alpha_c) \right) \right] (X_{cg} - X_{ca})_c (\bar{c}_c) \\
& + \left[ \frac{\partial D}{\partial \alpha_E^a} \text{sen}(\alpha_c) + D \cos(\alpha_c) + \left( \frac{\partial L}{\partial \alpha_E^a} \cos(\alpha_c) - L \text{sen}(\alpha_c) \right) \right] (X_{cgA} - X_{ca}c)_c (\bar{c}_{\bar{a}}) \\
& + \left[ \frac{\partial D}{\partial \alpha_E^a} \text{sen}(\alpha_f) + D \cos(\alpha_f) + \left( \frac{\partial L}{\partial \alpha_E^a} \cos(\alpha_f) - L \text{sen}(\alpha_f) \right) \right] (X_{cg} - X_{ca})_f (l_f) \\
& + \left[ \frac{\partial D}{\partial \alpha_E^a} \text{sen}(\alpha_f) + D \cos(\alpha_f) + \left( \frac{\partial L}{\partial \alpha_E^a} \cos(\alpha_f) - L \text{sen}(\alpha_f) \right) \right] (X_{caA} - X_{cgf})_f (l_f)
\end{aligned} \tag{5.52}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma \frac{\partial M}{\partial \alpha_E^a} = & \left( \frac{\partial D}{\partial \alpha_E^a} \text{sen}(\alpha_{\bar{a}}) + D \cos(\alpha_{\bar{a}}) + \frac{\partial L}{\partial \alpha_E^a} \cos(\alpha_{\bar{a}}) - L \text{sen}(\alpha_{\bar{a}}) \right) \left( (X_{cg} - X_{ca})_{\bar{a}} (\bar{c}_{\bar{a}}) + (X_{cgA} - X_{ca\bar{a}})_{\bar{a}} (\bar{c}_{\bar{a}}) \right) \\
& + \left( \frac{\partial D}{\partial \alpha_E^a} \text{sen}(\alpha_c) + D \cos(\alpha_c) + \frac{\partial L}{\partial \alpha_E^a} \cos(\alpha_c) - L \text{sen}(\alpha_c) \right) \left( (X_{cg} - X_{ca})_c (\bar{c}_c) + (X_{cgA} - X_{ca}c)_c (\bar{c}_{\bar{a}}) \right) \\
& + \left( \frac{\partial D}{\partial \alpha_E^a} \text{sen}(\alpha_f) + D \cos(\alpha_f) + \frac{\partial L}{\partial \alpha_E^a} \cos(\alpha_f) - L \text{sen}(\alpha_f) \right) \left( (X_{cg} - X_{ca})_f (l_f) + (X_{cgA} - X_{caf})_f (l_f) \right)
\end{aligned} \tag{5.53}$$

De acuerdo a 5.23 se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
\Sigma \frac{\partial M}{\partial \alpha_E^a} = & \left( D + \frac{\partial L}{\partial \alpha_E^a} \right) \left( (X_{cg} - X_{ca})_{\bar{a}} (\bar{c}_{\bar{a}}) + (X_{cgA} - X_{ca\bar{a}})_{\bar{a}} (\bar{c}_{\bar{a}}) \right) \\
& + \left( D + \frac{\partial L}{\partial \alpha_E^a} \right) \left( (X_{cg} - X_{ca})_c (\bar{c}_c) + (X_{cgA} - X_{ca}c)_c (\bar{c}_{\bar{a}}) \right) \\
& + \left( D + \frac{\partial L}{\partial \alpha_E^a} \right) \left( (X_{cg} - X_{ca})_f (l_f) + (X_{cgA} - X_{caf})_f (l_f) \right)
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Adimensionalizando se obtiene:

$$\begin{aligned}
\Sigma \frac{\partial M}{\partial \alpha_E^a} = & \left( C_D + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha_E^a} \right) \left( (X_{cg} - X_{ca})_{\bar{a}} + (X_{cgA} - X_{ca\bar{a}})_{\bar{a}} \right) \\
& + \left( C_D + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha_E^a} \right) \left( (X_{cg} - X_{ca})_c + (X_{cgA} - X_{ca}c)_c \right) \\
& + \left( C_D + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha_E^a} \right) \left( (X_{cg} - X_{ca})_f \frac{l_f}{\bar{c}_{\bar{a}}} + (X_{cgA} - X_{caf})_f \frac{l_f}{\bar{c}_{\bar{a}}} \right)
\end{aligned} \tag{5.55}$$

Tomando en cuenta a las ecuaciones 5.16 y 5.17 se puede simplificar. Otra consideración importante es que la teoría del método de perturbaciones limita al análisis a ángulos de ataque pequeños. Debido a la simetría del fuselaje, la influencia de este debido a lo anterior será mínima, por lo tanto puede ser eliminado de la ecuación para finalmente obtener:

$$\begin{aligned} \Sigma M = & 2 \left( C_D + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha_E^a} \right)_{\bar{a}} (X_{cg} - X_{ca})_{\bar{a}} \\ & + \left( C_D + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha_E^a} \right)_c \left( (X_{cg} - X_{ca})_c + (X_{cgA} - X_{cac})_c \right) \end{aligned} \quad 5.56$$

Sustituyendo los valores correspondientes a la ecuación 5.56. Se obtienen finalmente las derivadas de estabilidad del momento con respecto al ángulo de ataque para diferentes números de Mach en la tabla siguiente:

Mach	$C_{M\alpha}$
0.25	6.2773
0.5	6.4529
0.75	5.6305
1	2.2149
1.25	7.3042
1.5	6.7014
1.75	6.5470
2	6.5808

Tabla 5.6 Variación del coeficiente de momentos contra la variación del ángulo de ataque

Variación de la fuerza  $x$  y  $z$  debido a la velocidad de cabeceo y a las aceleraciones verticales

$$\frac{\delta F_x}{\delta q}, \frac{\delta F_z}{\delta q} \text{ y } \frac{\delta F_x}{\delta \dot{\alpha}}, \frac{\delta F_z}{\delta \dot{\alpha}}$$

Respectivamente.

Al presentarse un cabeceo, la velocidad angular de este cabeceo inducirá un nuevo ángulo de ataque en las superficies de la aeronave y al crearse una velocidad de descenso o ascenso manteniendo el ángulo de cabeceo constante esto inducirá un ángulo de ataque sobre la aeronave completa. Al analizar ambas en conjunto queda clara la definición de cada una.

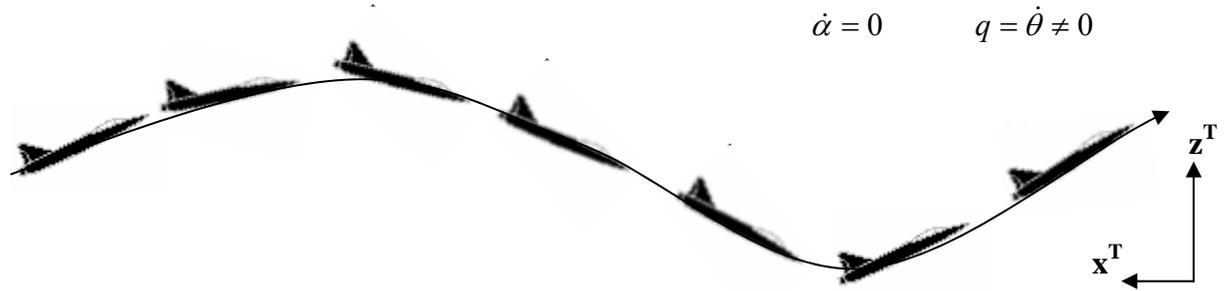


Figura 5.15. Velocidad de cabeceo a ángulo de ataque cero

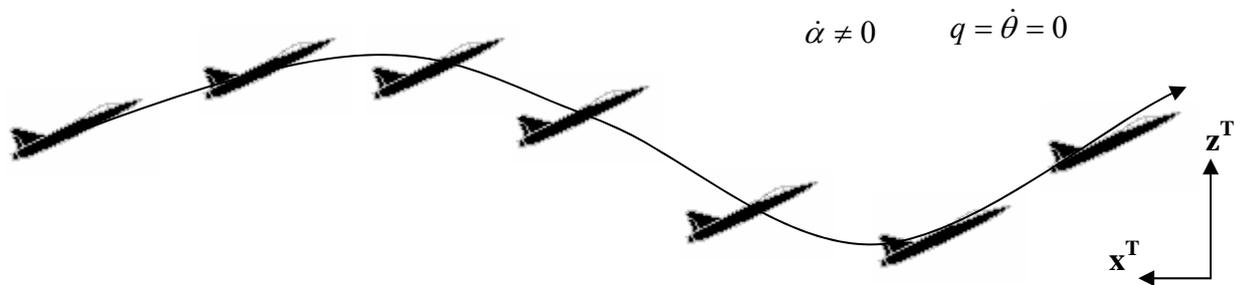


Figura 5.16. Velocidad de ángulo de ataque a ángulo de cabeceo constante.

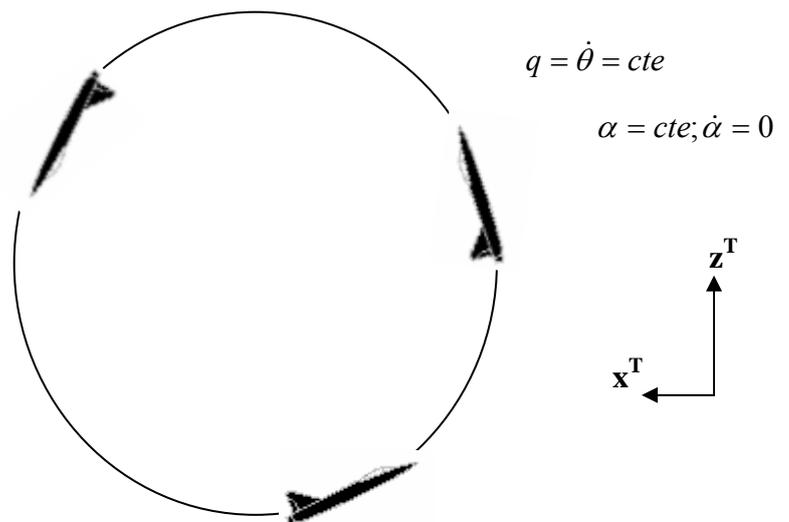


Figura 5.17. Rizo perfecto

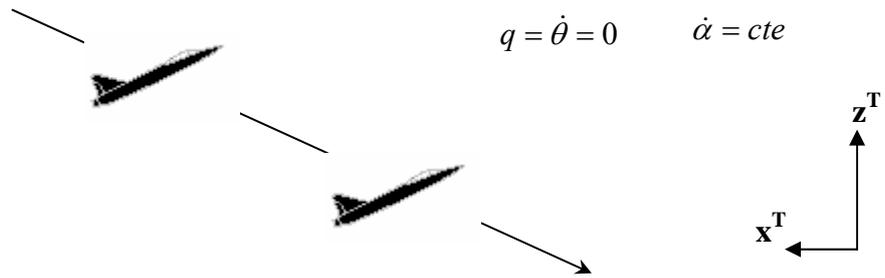


Figura 5.18. Aeronave en descenso acelerado y actitud fija.

Por lo regular, en un vuelo, ambas derivadas pueden ir combinadas. La velocidad de ángulo de ataque consiste en una aeronave cuyo eje axial no coincide con la línea de trayectoria (siempre y cuando el vector viento lo permita), además la trayectoria es variable, y la actitud fija, lo que provoca que el ángulo de ataque tenga una tasa de cambio. En la figura 5.16 se observa que la aeronave tiene diferentes ángulos de ataque en toda su trayectoria. Podría tener un vuelo en donde se mezclan ambos, es decir, la variación de ángulo de ataque se puede presentar teniendo un ángulo de cabeceo variable.

La velocidad de cabeceo consiste en la razón de cambio de la actitud longitudinal de la aeronave (ángulo de cabeceo). Aunque se presenta con respecto a la tierra plana y su análisis de razón de cambio es respecto a esta, induce fuerzas aerodinámicas. La diferencia de las fuerzas aerodinámicas que presenta la velocidad de cabeceo a las de la velocidad de ángulo de ataque es que las primeras afectan de mayor manera en la estabilidad longitudinal.

En base a los movimientos analizados para  $q \neq 0$  se presenta una diferencia entre las superficies aerodinámicas que están detrás del centro de gravedad a las que se encuentran delante.

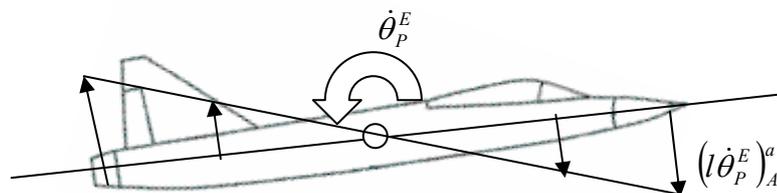


Figura 5.19. Distribución de la velocidad tangencial con respecto al aire que provoca el cabeceo, a lo largo del cuerpo de la aeronave.

En la figura 5.19  $l$  es la longitud de la aeronave, la cual se mide a partir del centro de gravedad y es positiva hacia enfrente de este y negativa hacia atrás. El subíndice  $A$  indica que trata de la triada situada en la aeronave

independientemente de ser el estado perturbado o el de equilibrio. Las velocidades inducidas de la aeronave con respecto al aire serán en el caso de un cabeceo positivo (contrario al de las manecillas del reloj) negativas (hacia abajo) delante del centro de gravedad y positivas detrás de él, lo que provoca ángulos de ataque positivos adelante y ángulos negativos detrás si se ve desde el punto de vista de aire con respecto a aeronave.

Para obtener la derivada de estabilidad se utiliza la regla del análisis de fuerzas en equilibrio. La aeronave será dividida en las tres superficies principales que tienen contribución en la fuerza de sustentación y el arrastre, estas superficies son, el ala, las superficies canard y el fuselaje. Al hablar de fuerzas aerodinámicas en el eje  $x$  de la aeronave se refiere a la proyección de la resultante de sustentación y arrastre sobre el eje  $x$ , tal y como en la figura 5.20

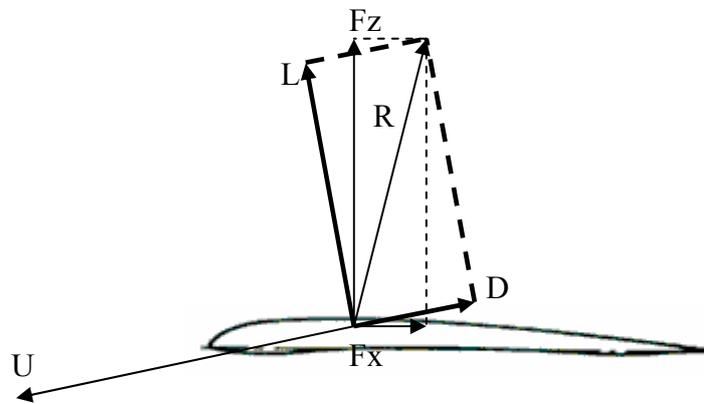


Figura 5.20 Fuerzas aerodinámicas en un perfil. Resultante y proyecciones de la resultante paralelas y perpendiculares a la cuerda.

De la figura se tiene que:

$$F_x = D \cos \alpha - L \sin \alpha \quad 5.57$$

$$F_z = L \cos \alpha + D \sin \alpha \quad 5.58$$

En la condición de equilibrio, las fuerzas que surgen a partir de una velocidad de cabeceo serán únicamente las componentes de la sustentación y de arrastre sobre el eje  $x$  de la aeronave. Originalmente los la sumatoria de las fuerzas en  $x$  son iguales a cero, que serían, empuje, proyección del peso en el eje  $x$ , proyección de arrastre y sustentación en el eje  $x$ , pero al derivar con respecto a la velocidad de cabeceo, considerando que velocidad de cabeceo afecta a la ecuación con un incremento en el ángulo de ataque del estado perturbado; los dos primeros serán cero, por lo tanto se tiene que:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 = & \left( D \cos \alpha_E^a - L \operatorname{sen} \alpha_E^a \right)_{\bar{a}} + \left( D \cos \alpha_E^a - L \operatorname{sen} \alpha_E^a \right)_c \\ & + \left( D \cos \alpha_E^a - L \operatorname{sen} \alpha_E^a \right)_f E + mg \cos \Theta \end{aligned} \quad 5.59$$

Si

$$\alpha_P^E = \Delta \alpha = \frac{\dot{\theta}_P^E l_{ala}}{U_E^a} \quad 5.60$$

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma \partial F_x}{\partial \theta} = 0 = & \frac{\partial}{\partial \theta} \left( D \cos \left( \frac{\dot{\theta}_P^E l_{\bar{a}}}{U_E^a} \right) - L \operatorname{sen} \left( \frac{\dot{\theta}_P^E l_{\bar{a}}}{U_E^a} \right) \right)_{\bar{a}} \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( D \cos \left( \frac{\dot{\theta}_P^E l_c}{U_E^a} \right) - L \operatorname{sen} \left( \frac{\dot{\theta}_P^E l_c}{U_E^a} \right) \right)_c \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( D \cos \left( \frac{\dot{\theta}_P^E l_f}{U_E^a} \right) - L \operatorname{sen} \left( \frac{\dot{\theta}_P^E l_f}{U_E^a} \right) \right)_f \end{aligned} \quad 5.61$$

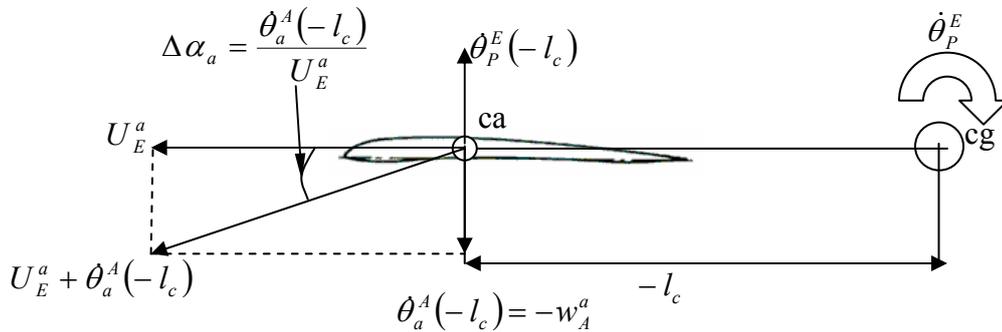


Figura 5.21 Efecto en el ángulo de incidencia de la superficie canard al tener la aeronave una velocidad de cabeceo

En la figura 5.21 debe quedar claro que la velocidad tangencial de la superficie canard provocada por la velocidad angular de cabeceo no es el vector que provoca el ángulo de ataque, pues que el ángulo de ataque es el ángulo entre el aire y la superficie, la velocidad tangencial mencionada se puede *diferenciar* con la siguiente *igualación*:

$$\dot{\theta}_a^A = -\dot{\theta}_A^a = -\dot{\theta}_P^E \quad 5.62$$

El estado estacionario con respecto al perturbado, provocará una velocidad entre el aire y la aeronave, es decir, el vector vertical del estado

estacionario con respecto al perturbado y de la aeronave con el aire serán de la misma magnitud y sentido, pero de diferente dirección.

De acuerdo a la ecuación 5.61 normalmente se analiza por separado cada una de las tres superficies aerodinámicas. La magnitud de la influencia que tienen el ala, la superficie canard y el fuselaje dependen de la distancia que haya de su centro aerodinámico al centro de gravedad de la aeronave completa.

En algunos casos el centro aerodinámico del ala se encuentra muy cerca del centro de gravedad de la aeronave y si junto con eso tiene mucho alargamiento y poco flechado la influencia en esta derivada es muy pequeña, si el fuselaje es largo y su centro de presiones tiene una distancia considerable con respecto al centro de gravedad de la aeronave en conjunto, se analiza en la derivada de estabilidad, de lo contrario no sucede así. Por lo regular al estar analizando un diseño de aeronave ya definido, se observan las tres distancias de interés para esta derivada. Comúnmente, en muchos diseños, la influencia del ala y el fuselaje no son consideradas. Y se concentran únicamente en el análisis de la influencia de la cola o de las superficies canard, según sea el caso

En esta aeronave la influencia del ala es considerable. Para alas con flechado positivo, un incremento adicional en el cambio de ángulo de ataque se produce en función de la estación sobre la longitud del ala en donde se encuentre el punto de análisis. De este hecho resulta un incremento en la sustentación por el ala. Si la superficie del ala es grande con respecto a las superficies de cola o canard, el incremento en la sustentación es considerable y si además tiene un flechado para vuelo supersónico, es de mayor interés el análisis de esta derivada, resultando mínimo la influencia del resto de las superficies.

Las fuerzas totales en el eje  $x$  están dadas por la ecuación 5.57. Parte de la simplificación en el análisis es considerar los ángulos de ataque del estado de equilibrio como pequeños, de lo cual al observar la figura 5.16 se nota que la sustentación es muy parecida a la fuerza en  $z$  (aunque depende mucho del tipo de perfil) y que dicha observación se puede comprobar analíticamente como:

Si  $\alpha \approx 0$  entonces la ecuación 5.57 será.

$$F_x = -D \quad 5.63$$

$$F_z = L \quad 5.64$$

Para lograr la adimensionalización de la ecuación que define la fuerza en  $z$  por velocidad de cabeceo, se observa que las unidades son (Fuerza/(1/s)). Se puede dividir por la superficie del ala y la presión dinámica  $q$  para eliminar las unidades de fuerza, y para eliminar la velocidad angular de cabeceo con unidades de 1/s se multiplica por (velocidad/CAM). Es decir; se multiplica por el siguiente factor:

$$\frac{U_E^a}{Sq\bar{c}} \quad 5.65$$

En cuanto a la influencia del ala en esta derivada, las teorías necesarias para obtener un resultado completo son complicadas y consistiría en considerar el fluido bajo la influencia del ala en movimiento en conjunto con el resto del cuerpo de la aeronave, lo que implica considerar factores de interferencia y la predicción de las fuerzas aerodinámicas obtenidas a partir de un trabajo completo de dinámica de fluidos. O bien con la ayuda de experimentación por medio de túneles de viento.

Existen datos experimentales obtenidos de diferentes geometrías de alas con diferentes geometrías de fuselaje que pueden ayudar en el análisis de estabilidad, sin embargo se necesita encontrar datos que se ajusten a las posibles geometrías a evaluar. Por medio de teorías de mecánica de fluidos se han creado gráficos que están en función del alargamiento del ala. Con ayuda de dichos gráficos y de fórmulas obtenidas por observación se puede dar un valor aproximado de las derivadas de estabilidad de velocidad de cabeceo.

Para determinar un incremento en la sustentación se emplea la siguiente fórmula:

$$C_{z_q} \approx C_{L_q} = \left( \frac{1}{2} - 2ME \right) (C_{L_\alpha})_{\bar{\alpha}} \quad 5.66$$

$ME$  es el margen estático de la aeronave que es la división de la distancia del centro de gravedad a las superficies de control por la cuerda aerodinámica media del ala.

$$ME = \frac{l_{\bar{c}}}{\bar{c}} \quad 5.67$$

El valor de la pendiente de la curva de sustentación del ala que se indica en la ecuación 5.66 se ha determinado ya para diferentes números de Mach sustituyéndolos se obtiene la tabla siguiente.

Mach	$C_{L_q}$
0.25	-2.7660
0.5	-2.9333
0.75	-3.2976
1	-3.5063
1.25	-6.8508
1.5	-6.0158
1.75	-5.6996
2	-5.5355

*Tabla 5.7 Valores a diferentes números de Mach de la variación de la fuerza en z con respecto a la velocidad de cabeceo, cuando la fuerza de sustentación es igual a la fuerza en el eje z de la aeronave.*

Variación del momento en y debido a la velocidad angular de cabeceo.

$$\frac{\delta M}{\delta \dot{\theta}}$$

Al considerarse mínima la influencia de la resistencia al avance al presentarse una razón de cambio en el cabeceo, entonces la única fuerza que influye en el momento de cabeceo es la fuerza de sustentación que tiene igual magnitud que la fuerza en el eje z, por lo tanto el momento será influenciado por esta fuerza y por la distancia a la que se encuentre situado el centro aerodinámico del ala del centro de gravedad de la aeronave más el momento que genere la propia ala.

De acuerdo a observaciones experimentales hechas por diferentes autores [9,10,13,14,17,20] la ecuación de  $C_{Mq}$  es la siguiente:

$$C_{Mq} = \frac{(C_{L\alpha})_M - (C_{L\alpha})_{M_{cr}}}{(C_{L\alpha})_{M=1.2} - (C_{L\alpha})_{M_{cr}}} \left[ (C_{Mq})_{M=1.2} - (C_{Mq})_{M_{cr}} \right] + (C_{Mq})_{M_{cr}} \quad 5.68$$

En la ecuación se observa que se requieren valores para distintos números de Mach como lo indica el subíndice y los cuales ya se han determinado en base al capítulo tres.

Para el valor de la derivada a 1.2 de Mach se tiene [20]:

$$C_{Mq} = C'_{Mq} + ME(C_{Lq})_{1.2} \quad 5.69$$

Para la obtención del primer término de la ecuación 5.69:

$$C'_{Mq} = -\frac{3\pi Al}{16} \left[ G(\beta C)F_7(N) + \frac{16E''(\beta C)}{3} \left( \frac{F_5(N)}{F_{11}(N)} \right) \right] - \left( \frac{d_{cp} - d_{ac}}{\bar{c}} \right) C'_{Lq} \quad 5.70$$

$$+ 2 \left( \frac{d_{cp} - d_{ac}}{\bar{c}} \right)^2 C_{L\alpha}$$

De donde  $(\beta C)$  y  $E''(\beta C)$  son obtenidos del gráfico D-33 del apéndice D.  $F_5(N)$ ,  $F_7(N)$ , y  $F_{11}(N)$  son obtenidos del gráfico D-34. Ambos gráficos se encuentran proporcionados por Blakelock [20].  $d_{ac}$  es la distancia en metros del lugar del centro aerodinámico en el ala, medido desde el borde de ataque de esta.  $d_{cp}$  es dos tercios de la curda de punta.

$$d_{cp} = \frac{2}{3} C_p \quad 5.71$$

Para  $C'_{Lq}$

$$C'_{Lq} = \frac{\pi}{2} Al[3G(\beta C)F_3(N) - 2E''(\beta C)F_4(N)] + 2\left(\frac{d_{cp} - d_{ac}}{\bar{c}}\right)C_{L\alpha} \quad 5.72$$

En la ecuación 5.68 se sustituyen todos los valores ya calculados para determinar el valor final de la derivada su dependencia con el número de Mach entra directamente en la fórmula por el término  $(C_{L\alpha})_M$  con lo cual se obtiene la siguiente tabla:

Mach	$C_{Mq}$
0.25	-6.5299
0.5	-6.5343
0.75	-6.5363
1	-6.5374
1.25	-6.5554
1.5	-6.5509
1.75	-6.5492
2	-6.5483

Tabla 5.8 Variación del coeficiente de momentos contra la variación de velocidad de cabeceo a diferentes números de Mach

**Derivadas que describen la variación de fuerza en x y z, y momento en y debida a una razón de cambio en el ángulo de ataque.**

$$\frac{\delta F_x}{\delta \dot{\alpha}}, \frac{\delta F_z}{\delta \dot{\alpha}}$$

Estas derivadas surgen al haber una tasa de cambio en el ángulo de ataque tal y como sucede en la figura 5.14 en donde se desciende con un movimiento acelerado, lo que provoca que la componente vertical de velocidad varíe y se provoque por lo tanto un ángulo de ataque variante. El valor de esta derivada puede ser pequeño si se considera que las perturbaciones van a ser de baja magnitud. Para un análisis de una aeronave con ascensos y descensos con aceleraciones de magnitud considerables esta derivada viene a ser importante para la determinación de su estabilidad. Sin embargo, en este caso, debido a los alcances se considerará a estas dos derivadas de estabilidad con valor nulo

## 5.2.2 Derivadas de Control

**Momento en y debido a la deflexión de aletas canard**

$$\frac{\partial M}{\partial \delta_c}$$

Las derivadas de control consisten en las relaciones que hay entre momentos contra deflexiones de las superficies de control. Básicamente una superficie de control es empleada para manipular la actitud de la aeronave. Sin embargo pudiesen presentar sustentación en la aeronave así como resistencia al avance. Para obtener una correcta determinación de las derivadas de control debe tenerse en cuenta la configuración de dichos dispositivos. En esta aeronave se presenta un control de cabeceo canard, un control de alabeo por medio del movimiento simultaneo de ambas partes de la superficie canard y un control de guiñada con un timón vertical en la parte trasera de la aeronave. Las dimensiones o lugar exacto no están aún bien definidas. Pues una de las utilidades de esta tesis es poder determinarlo para obtener el lugar óptimo. Se analizarán las derivadas de control longitudinales las cuales son una fuerza en  $x$ , una fuerza en  $z$  y un momento en  $y$ , causado por aquellas superficies que sean necesarias alterar para manipular el cabeceo. En este caso serán las superficies canard. Lo único que se moverá es la superficie canard por completo.

Comenzando de forma general el control de cabeceo se hará como se indica en la figura 23.

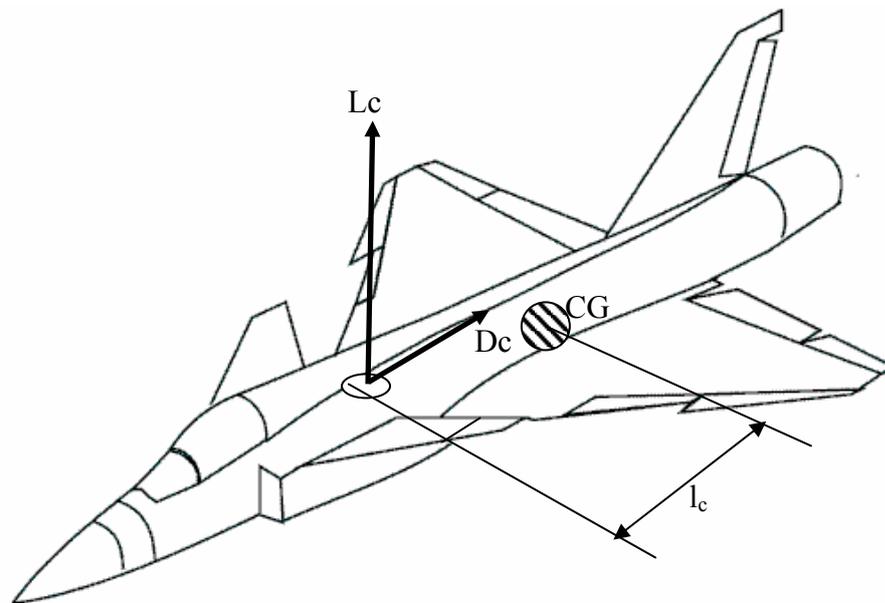


Figura 5.22 Control del cabeceo por medio de las superficies canard

El momento causado por las superficies canard será:

$$M_{c_{total}} = M_c + [L \cos(\delta_c + \alpha_E^a) + D \sin(\delta_c + \alpha_E^a)](l_c) \quad 5.73$$

Siempre y cuando la distancia del CG con el centro aerodinámico de las superficies canard se encuentre a la misma distancia sobre  $Z$ .

$\delta_c$  es el ángulo de incidencia de la superficie canard, o bien el ángulo que hay entre la cuerda del canard y el eje axial de la aeronave.

Se analiza en condiciones de equilibrio, es decir, donde la sumatoria de momentos es igual a cero. Puesto que es una condición de equilibrio; el análisis se realiza sin considerar el ángulo de ataque. Así:

$$\Sigma M_{c_{total}} = M_c + [L_c \cos(\delta_c) - D_c \text{sen}(\delta_c)](l_c) = 0 \quad 5.74$$

Se deriva con respecto al ángulo de incidencia para obtener:

$$\begin{aligned} \Sigma \left( \frac{\partial M_c}{\partial \delta_c} \right)_{total} &= \left[ \frac{\partial L_c}{\partial \delta_c} \cos(\delta_c) - L_c \text{sen}(\delta_c) - \frac{\partial D_c}{\partial \delta_c} \text{sen}(\delta_c) - D_c \cos(\delta_c) \right] \left[ (X_{cg})_c - (X_{ca})_c \right] (\bar{c}_c) \\ &+ \left[ \frac{\partial L_c}{\partial \delta_c} \cos(\delta_c) - L_c \text{sen}(\delta_c) - \frac{\partial D_c}{\partial \delta_c} \text{sen}(\delta_c) - D_c \cos(\delta_c) \right] (l_c) \end{aligned} \quad 5.75$$

Pero antes de pasar al estado perturbado, en el estado estacionario se tiene la siguiente condición.

$$\delta_c = 0 \quad 5.76$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial M}{\partial \delta_c} = \left[ \frac{\partial L}{\partial \delta_c} - D_c \right] \left[ (l_c) + (X_{cg} - X_{ca})_c (\bar{c}_c) \right] \quad 5.77$$

Adimensionalizando:

$$\frac{\partial C_{m_c}}{\partial \delta_c} = \left[ \frac{\partial C_{L_c}}{\partial \delta_c} + C_{D_c} \right] \left[ \frac{(l_c)}{\bar{c}_c} + (X_{cg} - X_{ca}) \right] \quad 5.78$$

Los resultados que arroja esta última fórmula para distintos números de Mach se indican en la siguiente tabla

Mach	$C_{L\delta c}$	$C_{M\delta c}$
0.25	3.3104	7.1187
0.5	3.4284	7.3727
0.75	3.6658	7.7916
1	3.9000	8.3791
1.25	12.7231	26.0976
1.5	11.2942	23.1144
1.75	10.7531	21.9920
2	10.4724	21.4236

Tabla 5.9 Variación en el coeficiente de momentos de la aeronave con respecto a las variaciones en deflexión de las superficies canard

**Fuerza en x debido a la deflexión de aletas canard**

$$\frac{\partial F_x}{\partial \delta_c}$$

La suma de fuerzas en x que está en función de la deflexión de la superficie canard es:

$$F_x = L_c \text{sen}(\delta_c) - D_c \cos(\delta_c) \quad 5.79$$

Derivando y considerando el estado de equilibrio donde  $\delta_c = 0$

$$\frac{\partial F_x}{\partial \delta_c} = \frac{\partial L_c}{\partial \delta_c} \text{sen}(\delta_c) + L_c \cos(\delta_c) - \frac{\partial D_c}{\partial \delta_c} \cos(\delta_c) + D_c \text{sen}(\delta_c) \quad 5.80$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial \delta_c} = L_c - \frac{\partial D_c}{\partial \delta_c} \quad 5.81$$

Adimensionalizando

$$C_{x\delta} = C_{L_c} - \frac{\partial C_{D_c}}{\partial \delta_c} \quad 5.82$$

Dicha ecuación arroja la siguiente tabla de valores:

Mach	$C_{L_c}$	$\delta C_{D_c} / \delta \delta_c$	$C_{x\delta c}$
0.25	0.5777	0.0855188	0.4921
0.5	0.5983	0.09112207	0.5071
0.75	0.6397	0.10292444	0.5368
1	0.6806	0.11526516	0.5653
1.25	2.2202	1.08470342	1.1355
1.5	1.9708	0.8610084	1.1098
1.75	1.8764	0.78301841	1.0934
2	1.8274	0.74402584	1.0834

Tabla 5.10 Variación de la fuerza en x de la aeronave con respecto a la variación del ángulo de incidencia de las superficies canard

**Fuerza en z debido a la deflexión de las aletas canard**

$$\frac{\partial F_z}{\partial \delta_c}$$

Los componentes de las fuerzas aerodinámicas sobre el eje z serán:

$$F_z = L_c \cos(\delta_c) + D_c \text{sen}(\delta_c) \quad 5.83$$

Partiendo de la condición de equilibrio, derivando con respecto al ángulo de incidencia y adimensionalizando se tiene:

$$\frac{\partial F_z}{\partial \delta_c} = \frac{\partial L_c}{\partial \delta_c} \cos(\delta_c) - L_c \text{sen}(\delta_c) + \frac{\partial D_c}{\partial \delta_c} \text{sen}(\delta_c) + D_c \cos(\delta_c) \quad 5.84$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial \delta_c} = \frac{\partial L_c}{\partial \delta_c} + D_c \quad 5.85$$

$$\frac{\partial C_z}{\partial \delta_c} = \frac{\partial C_{L_c}}{\partial \delta_c} + C_{D_c} \quad 5.86$$

Con lo que se obtiene la siguiente tabla:

$C_{L_{dc}}$	$C_{D_c}$	$C_{z\delta_c}$
3.3104	0.0554	3.3658
3.4284	0.0595	3.4879
3.6658	0.0679	3.7337
3.9000	0.2759	4.1759
12.7231	0.6268	13.3499
11.2942	0.5206	11.8148
10.7531	0.4795	11.2325
10.4724	0.4614	10.9338

*Taba 5.11 Variación de la fuerza en z con respecto a la variación en ángulo de incidencia de las superficies de control canard*

## 6

## EVALUACIÓN DE RESULTADOS

El modelo matemático es un conjunto de tres ecuaciones diferenciales ordinarias parciales de primer orden. El linealizado de estas ecuaciones convierte a las funciones diferenciales de cada ecuación en derivadas de estabilidad. Estas derivadas de estabilidad son constantes que se han determinado en el capítulo 4. Cada ecuación diferencial contiene a las derivadas de estabilidad, las cuales varían con respecto a las variables de estado. Al multiplicarse el valor de la variable de estado por las derivadas, surge un valor para la sumatoria de fuerzas. Se completan así los valores de cada variable en la ecuación diferencial. Y la ecuación diferencial se resuelve. Los valores finales de la ecuación, dependen de una entrada dada, en este caso las que se provoquen por las superficies de control. Que básicamente es un incremento de fuerzas y momentos que entra en la sumatoria de las tres ecuaciones.

El conjunto de tres ecuaciones diferenciales debe ser resuelto para lograr visualizar las variables de estado que son de interés. En este caso serán la velocidad de cabeceo, el cabeceo, el ángulo de ataque y la velocidad lineal en el eje  $x$  de la aeronave, todas estas como incrementos en el estado perturbado del estado estacionario.

Un método clásico es convertir las ecuaciones diferenciales a funciones de transferencia, y resolverlas para una entrada dada. Una vez que se ha resuelto se regresan a su forma inicial para poder ver el resultado final de las ecuaciones, que son en general, valores de las variables de estado en función del tiempo.

Estando en la forma función de transferencia se pueden observar características importantes. Por ejemplo, es de interés determinar el comportamiento de la aeronave en su cabeceo, después de mover las superficies de control. El resultado será una oscilación en el giro de la aeronave sobre el eje  $y$ . A partir de la función de transferencia se puede determinar las características esenciales de dicho comportamiento, así como criterios de estabilidad representados por medio de polos y ceros. En casi todas las aeronaves y en la mayoría de las condiciones de vuelo se observará un comportamiento de salida o respuesta similar; un movimiento dividido en dos fases. El primero es un movimiento brusco, corto en el tiempo y de magnitudes considerables que pueden ser llamadas oscilaciones de corto periodo. Después un movimiento largo en el

tiempo de magnitudes menores y de gran amplitud, normalmente de forma repetitiva y en ocasiones tarda demasiado en amortiguarse, en caso de que fuese a ser amortiguado, llamado oscilación fugoide.

Lo que interesa normalmente al controlador es que el primer movimiento arroje la salida requerida y que el segundo sea eliminado lo más rápido posible. El segundo movimiento puede ser eliminado en algunos casos por una nueva entrada, impuesta por el piloto. Sin embargo en caso de que este sea más difícil de controlar como en el caso de aviones cazas, se requerirán de computadoras y servomecanismos que hagan dicho trabajo.

Las características de estas dos reacciones dependen de varios factores. Normalmente las oscilaciones de periodo corto son una reacción directa a las fuerzas y momentos que se agregan al manipular las superficies de control, pero el segundo es una reacción menos directa. Las oscilaciones fugoideas básicamente se provocan por un intercambio de energías, pasando de la energía potencial a energía cinética. La masa, específicamente el momento de inercia de la aeronave, provoca el primer movimiento por energía potencial, y el segundo se provoca por el movimiento de la aeronave dentro del aire, de donde surgen fuerzas aerodinámicas que ponen a la aeronave en la posición anterior.

La oscilación fugoide es marcada por una característica esencial, la cual define el tiempo necesario para que la oscilación amortigüe la mitad de su amplitud, y es una buena medida del amortiguamiento del sistema. El grado de amortiguamiento es muy representativo en las aeronaves y es representada por la siguiente forma:

$$T_{1/2}$$

Los valores de las derivadas de estabilidad están en función del diseño de la aeronave y las condiciones de vuelo. Se muestran sus valores en la tabla 6.1. Los valores finalmente obtenidos serán adimensionales, siendo en radianes todos los datos angulares, y en el caso de velocidades angulares éstas se multiplicarán por factores que conviertan sus unidades a radianes por segundo.

Con ayuda de Matlab, la resolución del conjunto de ecuaciones diferenciales se puede realizar sin el proceso que incluye obtener la función de transferencia. El conjunto de ecuaciones se puede introducir de forma matricial y acomodarlos en la forma espacio de estado. Matlab resuelve las ecuaciones y puede dar las salidas demandadas, integrando con respecto al tiempo se pueden obtener gráficos donde se visualice la respuesta en estado transitorio de las variables de interés. Todos los valores son graficados contra el tiempo, en vuelo atmosférico a nivel del mar, considerando las condiciones de atmósfera estándar y a diferentes velocidades, que abarcan las tres etapas sónicas.

La aeronave y sus características se indican en el apéndice B. Las entradas al sistema, es decir, el valor en magnitud y tiempo de aplicación será el movimiento de las superficies canard indicado en el programa al definir ángulo de deflexión y duración. Su influencia en la reacción del sistema está definida por las derivadas de control, representada por la matriz B, la cual al ser multiplicada por el vector U, que define el grado en que las superficies serán reflectadas y cuyas unidades podrán ser radianes o grados, definirá el valor total de la entrada al sistema.

El vector C define la variable de estado de interés que se visualizará. Finalmente se obtienen los gráficos del estado transitorio para cuatro variables de interés.

Símbolo	Definición	Ecuación
$C_W$		$\frac{-mg}{Sq}$
$C_{x_u}$	$\frac{U_E^a \partial Fx}{Sq \partial u}$	$-2C_D - U_E^a \frac{\partial C_D}{\partial u}$
$C_{z_u}$	$\frac{U_E^a \partial Fz}{Sq \partial u}$	$2C_L + U_E^a \frac{\partial C_L}{\partial u}$
$C_{M_u}$	$\frac{U_E^a \partial M}{Sq \bar{c} \partial u}$	$\left( \frac{\partial C_M}{\partial u} \right)_{total} = 2 \left( \frac{\partial C_L}{\partial u} \right)_{\bar{a}} \left[ (X_{cg})_{\bar{a}} - \left( \frac{\partial X_{ca}}{\partial u} \right)_{\bar{a}} \right] + \left( \frac{\partial C_L}{\partial u} \right)_c \left[ \left[ (X_{cgA})_c - \left( \frac{\partial X_{ca}}{\partial u} \right)_c \right] + \left[ (X_{cg})_c - \left( \frac{\partial X_{ca}}{\partial u} \right)_c \right] \right]$
$C_{x_\alpha}$	$\frac{\partial Fx}{Sq \partial \alpha}$	$C_L - \frac{\partial C_D}{\partial \alpha_p^E}$
$C_{z_\alpha}$	$\frac{\partial Fz}{Sq \partial \alpha}$	$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha_p^E} - C_D$
$C_{M_\alpha}$	$\frac{\partial Fx}{Sq \bar{c} \partial \alpha}$	$\frac{\partial C_M}{\partial \alpha} = 2 \left( C_D + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha_E^a} \right)_{\bar{a}} (X_{cg} - X_{ca})_{\bar{a}} + \left( C_D + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha_E^a} \right)_c \left[ (X_{cg} - X_{ca})_c + (X_{cgA} - X_{cac})_c \right]$
$C_{x_q}$	$\frac{2U_p^a \partial Fx}{Sq \bar{c} \partial \theta}$	0
$C_{z_q}$	$\frac{2U_p^a \partial Fz}{Sq \bar{c} \partial \theta}$	$\left( \frac{1}{2} - 2ME \right) (C_{L_\alpha})_{\bar{a}}$
$C_{M_q}$	$\frac{2U_p^a \partial M}{Sq \bar{c}^2 \partial \theta}$	$\frac{(C_{L_\alpha})_M - (C_{L_\alpha})_{M_{cr}}}{(C_{L_\alpha})_{M=1.2} - (C_{L_\alpha})_{M_{cr}}} \left[ (C_{M_q})_{M=1.2} - (C_{M_q})_{M_{cr}} \right] + (C_{M_q})_{M_{cr}}$
$C_{x_\delta}$	$\frac{\partial Fx}{Sq \partial \delta_c}$	$C_{L_c} - \frac{\partial C_{D_c}}{\partial \delta_c}$
$C_{z_\delta}$	$\frac{\partial Fz}{Sq \partial \delta_c}$	$\frac{\partial C_{L_c}}{\partial \delta_c} + C_{D_c}$
$C_{M_\delta}$	$\frac{\partial M}{Sq \bar{c} \partial \delta_c}$	$\frac{\partial C_{m_c}}{\partial \delta_c} = \left[ \frac{\partial C_{L_c}}{\partial \delta_c} + C_{D_c} \right] \left[ \frac{(l_c)}{\bar{c}_c} + (X_{cg} - X_{ca})_c \right]$

Tabla 6.1 Derivadas de estabilidad y control longitudinales

Mach	$C_{xu}$	$C_{zu}$	$C_{Mu}$	$C_{X\alpha}$	$C_{Z\alpha}$	$C_{M\alpha}$
0,25	-0,0361	1.6730	0,0479	-0,1906	3,5792	6,2773
0,50	-0,0409	1.8601	0,2212	-0,2237	4,9942	6,4529
0,75	-0,0534	2.3187	0,3645	-0,3041	5,6136	5,6305
1,00	-0,6019	2.2358	1,9417	-0,3554	5,8701	2,2149
1,25	-0,9796	8.1534	11,6481	-1,6983	11,5932	7,3042
1,50	-0,2012	2.3079	-3,2999	-1,2712	10,1808	6,7014
1,75	-0,2520	2.7984	-1,5945	-1,1254	9,6461	6,5470
2,00	-0,1241	2.9384	-0,8488	-1,0532	9,4152	6,5808

Mach	$C_{zq}$	$C_{Mq}$	$C_{X\delta c}$	$C_{Z\delta c}$	$C_{M\delta c}$
0,25	-2,7660	-6,5299	0,4921	3.3658	7.1187
0,5	-2,9333	-6,5343	0,5071	3.4879	7.3727
0,75	-3,2976	-6,5363	0,5368	3.7337	7.7916
1	-3,5063	-6,5374	0,5653	4.1759	8.3791
1,25	-6,8508	-6,5554	1,1355	13.3499	26.0976
1,5	-6,0158	-6,5509	1,1098	11.8148	23.1144
1,75	-5,6996	-6,5492	1,0934	11.2325	21.9920
2	-5,5355	-6,5483	1,0834	10.9338	21.4236

Tabla 6.2 Valor de las derivadas de estabilidad y control longitudinales para distintos números de Mach, a nivel medio del mar y a condiciones de atmósfera estándar.

El espacio de estados tendrá la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{mU_E^a}{S_{\bar{a}}q} & \frac{\bar{c}_{\bar{a}}C_{X\alpha}}{2U} & \frac{\bar{c}_{\bar{a}}C_{Xq}}{2U} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{c}_{\bar{a}}C_{Z\alpha}}{\partial w} - \frac{mU_E^a}{S_{\bar{a}}q} & \frac{\bar{c}_{\bar{a}}C_{Zq}}{2U_E^a} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{c}C_{M\alpha}}{2U_E^a} & \frac{\bar{c}C_{Mq}}{2U_E^a} & -I_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -C_{X_u} & -C_{X_\alpha} & -C_w(\cos\theta_E^T) & 0 \\ -C_{Z_u} & -C_{Z_\alpha} & -C_w(\sin\theta_E^T) & 0 \\ -C_{M_u} & -C_{M_\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \\ q \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -\frac{mU_E^a}{S_{\bar{a}}q} & \frac{\bar{c}_{\bar{a}}C_{X\alpha}}{2U} & \frac{\bar{c}_{\bar{a}}C_{Xq}}{2U} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{c}_{\bar{a}}C_{Z\alpha}}{2U_E^a} - \frac{mU_E^a}{S_{\bar{a}}q} & \frac{\bar{c}_{\bar{a}}C_{Zq}}{2U_E^a} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{c}C_{M\alpha}}{2U_E^a} & \frac{\bar{c}C_{Mq}}{2U_E^a} & -I_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{\partial F_x}{\partial \delta q} \\ -\frac{\partial F_z}{\partial \delta q} \\ -\frac{\partial M_y}{\partial \delta q} \\ 0 \end{bmatrix} [\delta q]$$

Los valores de las derivadas serán sustituidos en las matrices así como las diferentes velocidades de vuelo y las características de la aeronave que sean requeridas, mientras no existan subíndices que indiquen la parte de la aeronave a la que se refiere, se tratará entonces al elemento ala.

En el programa de Matlab existirá la opción de dar los valores de las variables mencionadas.

Las condiciones de vuelo serán fijas debido a que los coeficientes aerodinámicos fueron determinados considerando una condición de vuelo.

La deflexión de aletas será por el lapso de un segundo para poder hacer una evaluación del fenómeno con mayor facilidad.

En un principio se introdujeron los valores que arrojó el diseño de la aeronave, teniendo los resultados que se muestran en la figura 6.1. El valor positivo de la derivada  $C_{M\alpha}$  indica que para cualquier perturbación en el momento de la aeronave esta continuará con la tendencia inestable.

Para poder analizar el modelo matemático a diferentes regímenes de vuelo, se convertirá por conveniencia los valores de  $C_{M\alpha}$  a negativos, haciéndola más estable.

A continuación se observan las reacciones de la aeronave a diferentes números de Mach con las características de entrada que se han mencionado ya.

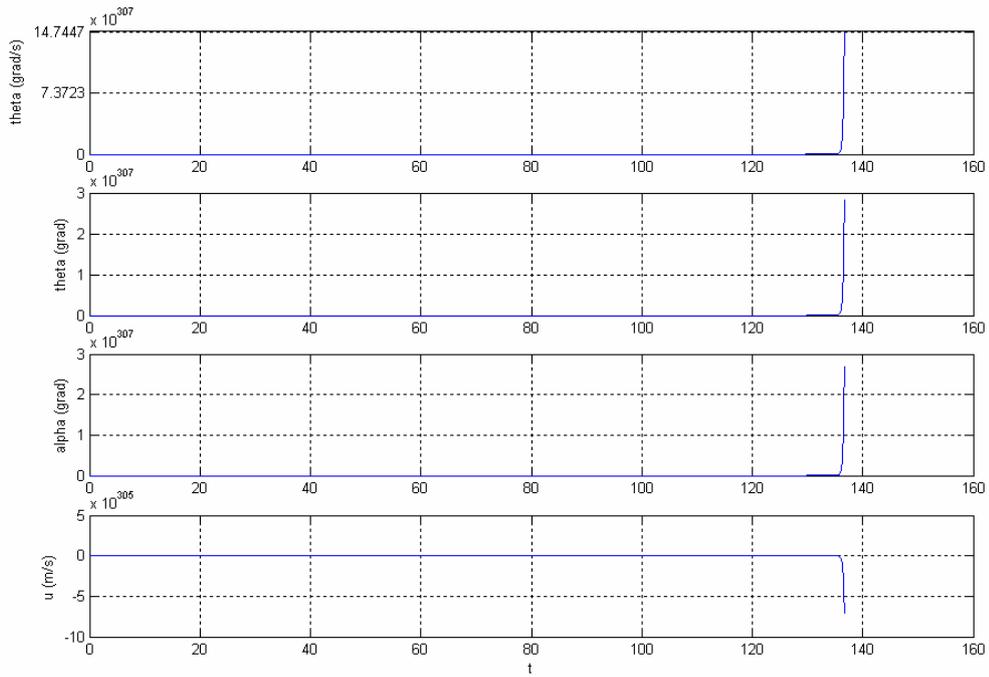


Figura 6.1 Respuesta en estado transitorio a una deflexión de 6 grados durante un segundo en las superficies canard a .25 de Mach al  $C_{M\alpha}$  positivo original de 6.2773

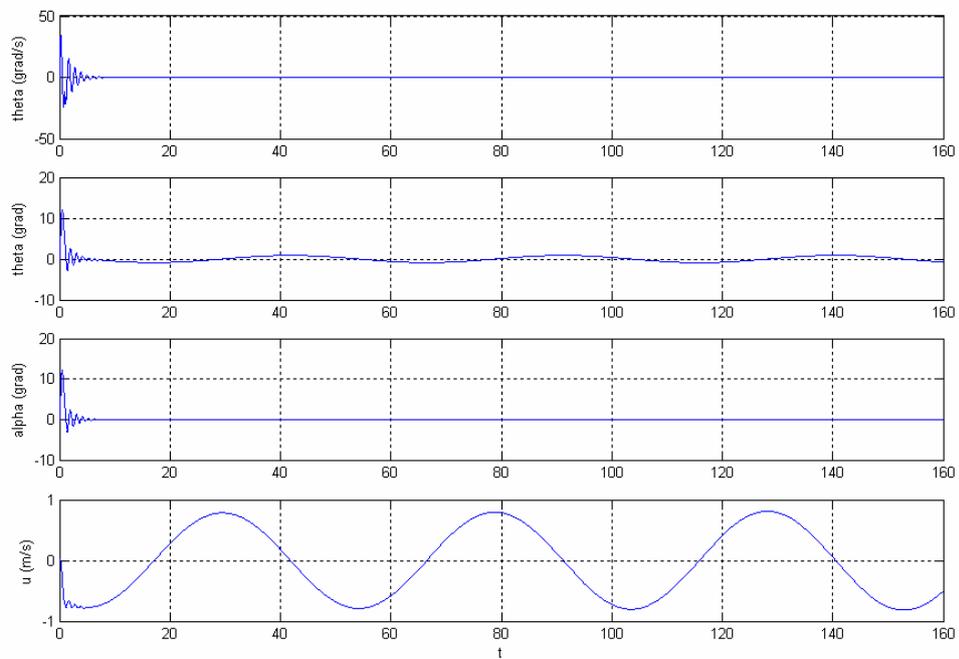


Figura 6.2. Respuesta en estado transitorio al deflectar las superficies de control a  $6^\circ$  durante un segundo a .25 Mach

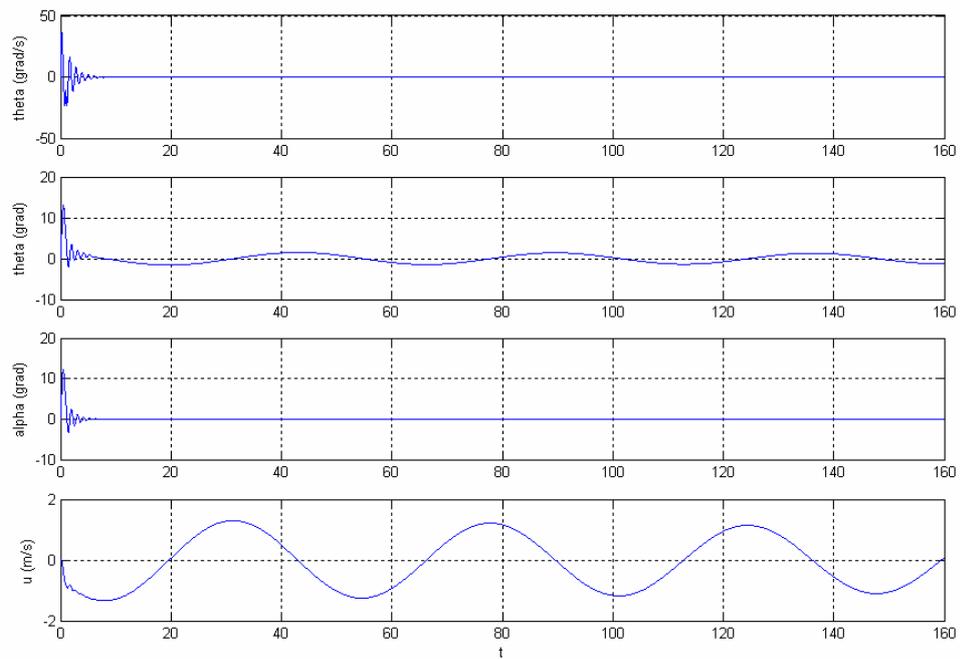


Figura 6.3. Respuesta en estado transitorio al deflectar las superficies de control a  $6^\circ$  durante un segundo a .5 Mach

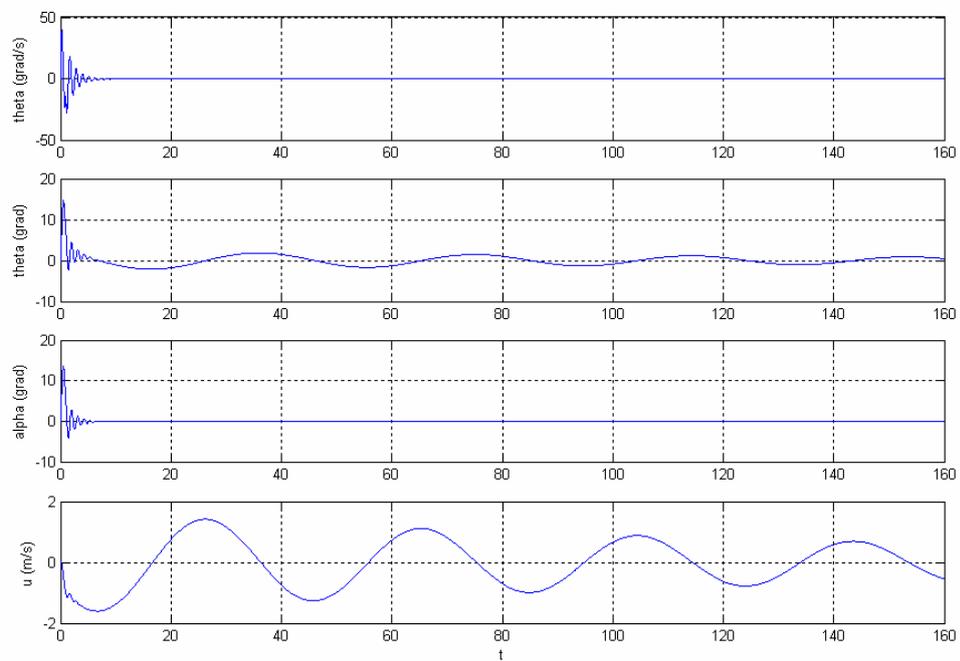


Figura 6.4. Respuesta en estado transitorio al deflectar las superficies de control a  $6^\circ$  durante un segundo a .75 Mach

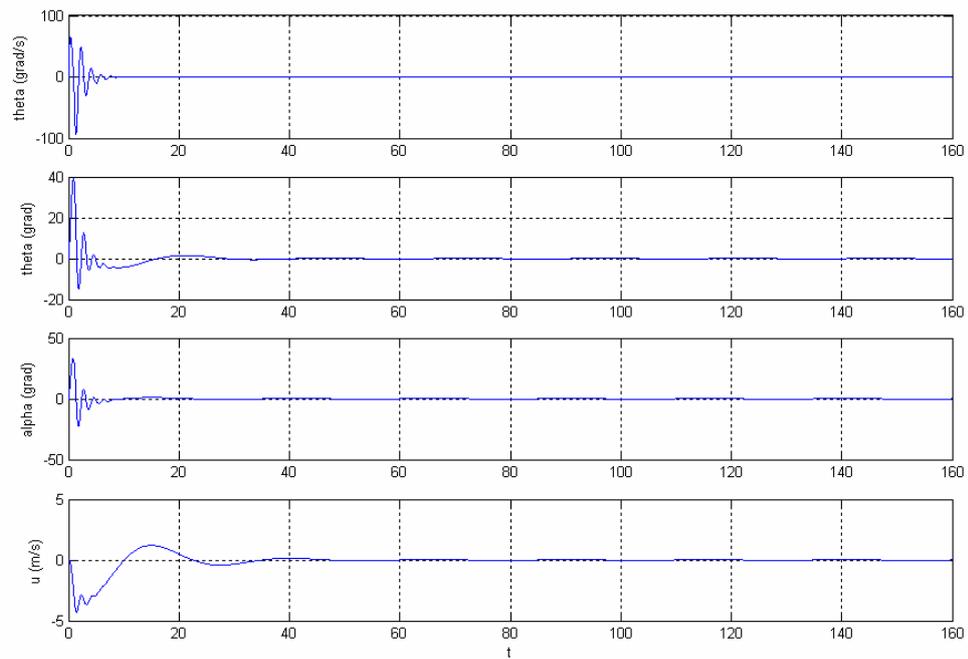


Figura 6.5. Respuesta en estado transitorio al deflectar las superficies de control a  $6^\circ$  durante un segundo a 1 Mach

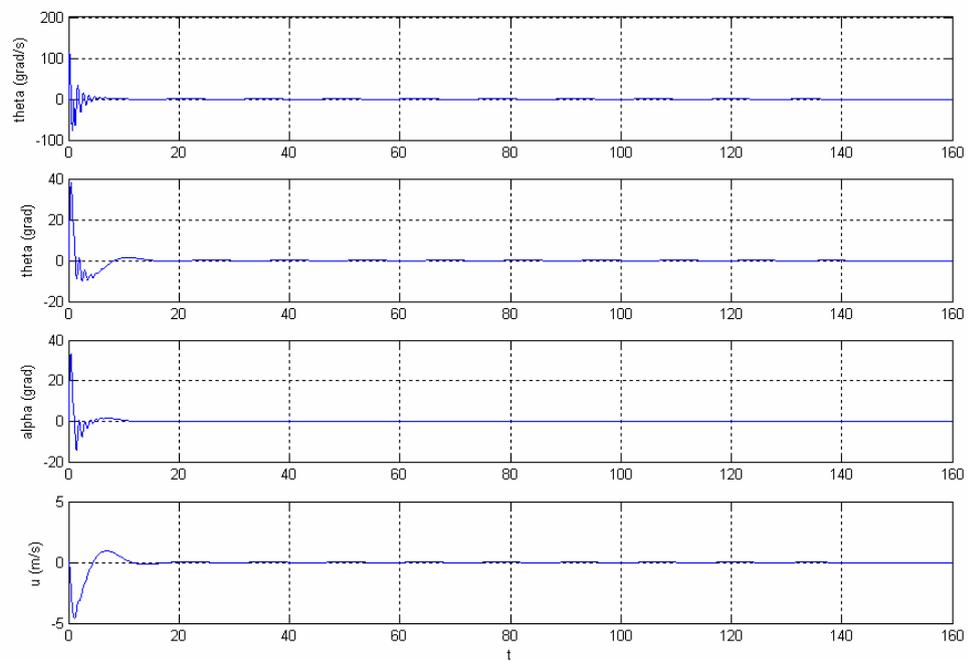


Figura 6.6. Respuesta en estado transitorio al deflectar las superficies de control a  $6^\circ$  durante un segundo a 1.25 Mach

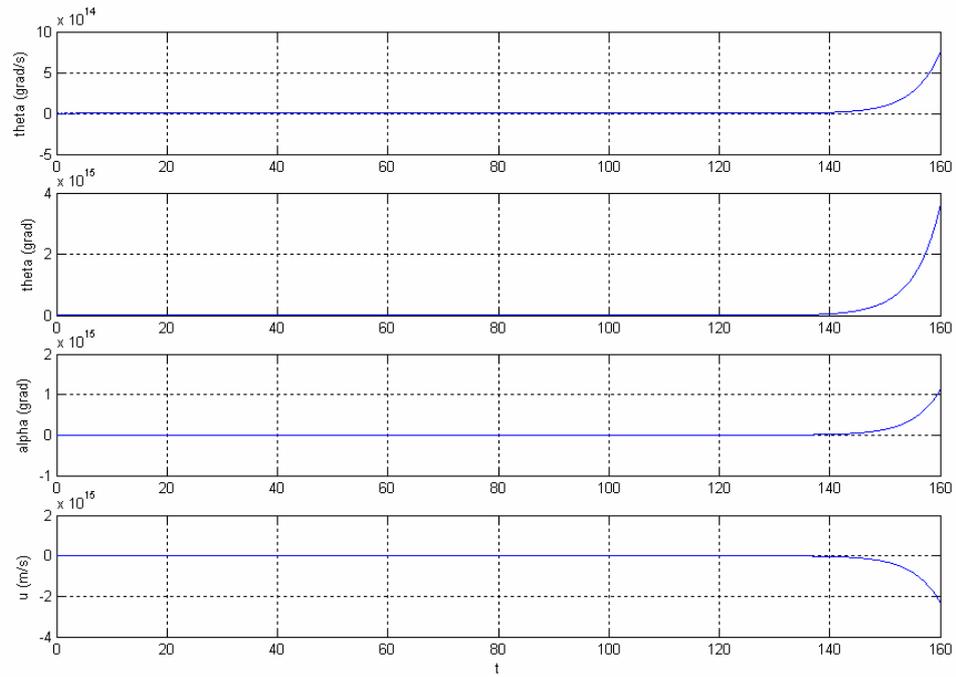


Figura 6.7. Respuesta en estado transitorio al deflectar las superficies de control a  $6^\circ$  durante un segundo a 1.5 Mach

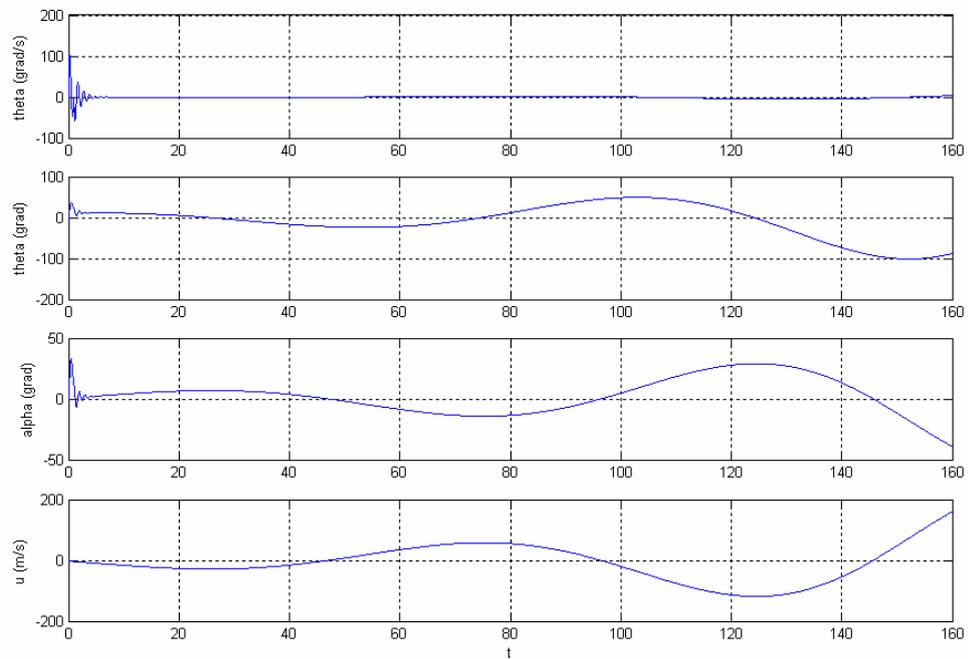


Figura 6.8. Respuesta en estado transitorio al deflectar las superficies de control a  $6^\circ$  durante un segundo a 1.75 Mach

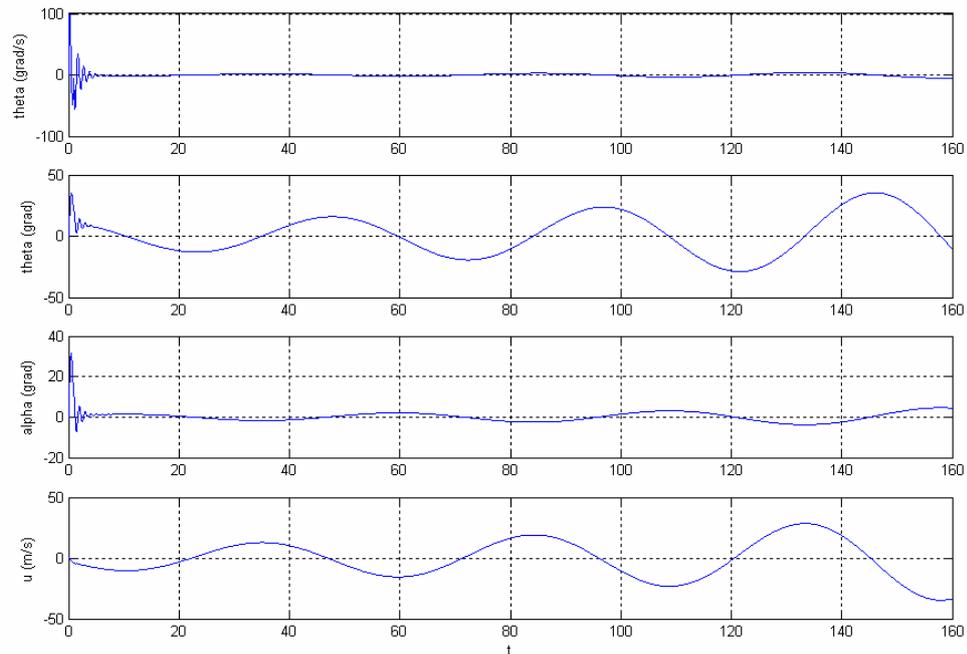


Figura 6.9. Respuesta en estado transitorio al deflectar las superficies de control a  $6^\circ$  durante un segundo a 2 Mach

Una vez que se han convertido los valores que rigen la estabilidad aerodinámica de cabeceo como negativos ( $C_{Ma}$ ), es decir, estables, se puede observar que a .25 de Mach al deflectar las superficies canard a un ángulo positivo de  $6^\circ$  durante un segundo, la velocidad de cabeceo toma un valor máximo de 35 grados por segundo, y después tiene un amortiguamiento grande, llegando a un valor nulo después de 9 segundos y manteniéndose así hasta el final. En el caso de cabeceo, la aeronave logra un máximo de 12 grados, al intentar regresar a su posición de equilibrio pasa por  $-2.8$  grados de cabeceo, para que finalmente llegue a su estado de equilibrio y entrar a la oscilación fugoide después de 10 segundos. La oscilación fugoide, una vez que se ha hecho un acercamiento a sus valores de cresta y valle, parece ir oscilando cada vez con mayor intensidad, pero de forma mínima, lo que significa que después de un tiempo considerable, la aeronave podría perder el control si no se le introduce alguna otra entrada que la estabilice. La velocidad del ángulo de cabeceo provoca un ángulo de ataque máximo de 12 grados, aunque después de 10 segundos, el flujo de aire vuelve a alinearse al eje axial de la aeronave. También habrá una disminución de velocidad menor a 1 metro por segundo, para después tener incrementos y decrementos constantes de velocidad aproximados a 1 metro por segundo.

En el caso de .5 de Mach también se logra un ángulo máximo de cabeceo aproximado de 12 grados, pero las alteraciones en velocidad serán de mayor magnitud.

En .75 de Mach se logra un cabeceo de 2 grados mayor a los anteriores, y las oscilaciones fugoide se van amortiguando conforme pasa el tiempo, en el caso del ángulo de cabeceo, este tiene un valor de 1.87 en el segundo 36 y en el segundo 153 disminuye su valor a .88.

En la etapa supersónica de 1 de Mach, la efectividad de las aletas de control aumentan de gran manera, y el ángulo de cabeceo obtenido ahora será de  $39.3^\circ$ . Entra a la oscilación fugoide casi en el mismo tiempo que en las velocidades anteriores y la magnitud de dichas oscilaciones tienen valores aproximados. El arrastre supersónico muestra su influencia al disminuir la velocidad de vuelo en 5 metros por segundo para entrar de una forma irregular a la oscilación fugoide.

Después de la etapa transónica en 1.25 de Mach, el valor del ángulo de cabeceo máximo logrado sigue siendo parecido al anterior. En el caso de los decrementos de velocidad, estos vienen siendo de la misma magnitud pero menos irregulares. Todas las oscilaciones fugoide disminuyen su magnitud, haciendo influencia el alto valor de las derivadas que dependen de velocidad de cabeceo, cuyo efecto, resulta siendo la amortiguación natural del sistema.

En el caso de 1.5 de Mach, los resultados son interesantes, pues lo que causa la inestabilidad observada, es el valor de la derivada  $C_{Mu}$ , siendo -3.2999. Se hicieron pruebas con el valor de -2.2999 y resultaron valores con las mismas tendencias del resto de los regímenes de vuelo. Después de superar la etapa transónica, en 1.25 de Mach, el valor de la derivada  $C_{Mu}$  aumenta repentinamente, para después disminuir conforme se incrementa la velocidad, al grado de pasar de positiva a negativa, sin embargo desestabiliza a la aeronave cuando toca valores menores a -2.9.

A 1.75 de Mach, la efectividad del control se mantiene muy similar a 1.5 M, sin embargo la oscilación del fugoide en algunas variables, como el ángulo de ataque va aumentando de forma considerable en magnitud, en lugar de amortiguarse de forma natural como en otros casos. La variación en fugoide de ángulo de ataque significa un derrape aerodinámico en el plano longitudinal cada vez de mayor magnitud. La velocidad no tiene incrementos ni decrementos inmediatos sino hasta las oscilaciones de la segunda etapa.

En 2 de Mach la oscilación fugoide de las cuatro variables, sigue aumentando conforme pasa el tiempo, sin embargo, el ángulo de ataque lo hace de forma mínima. A diferencia de 1.75 de Mach, la velocidad de cabeceo, sigue oscilando después de la oscilación de corto periodo.

Todos los valores obtenidos, son de un sistema llamado de lazo abierto, lo cual indica que la reacción del sistema se dejará libre. Siendo así, se puede observar que en algunos casos el regreso al estado de equilibrio se realiza de forma automática, algunas veces en mayor tiempo que en otras. En algunos casos el sistema es inestable en cierta magnitud. Debe realimentarse el sistema, ya sea para mantenerlo siempre en la posición deseada, para aumentar el tiempo de reacción, o simplemente para evitar que se pierda el control.

## 7

## CONCLUSIONES

## 7.1 CONCLUSIONES GENERALES

El modelo matemático logrado es una herramienta práctica para observar la influencia de diferentes características del vuelo de la aeronave.

El modelo es poco confiable, tan es así que no se sabe el grado de confiabilidad, y no se sabrá hasta que el modelo de la aeronave diseñada se construya a escala y se someta a experimentación en túnel de viento o bien, en vuelo.

A priori se puede concluir que el modelo está lejos de indicar las magnitudes de los movimientos de su comportamiento, sin embargo se puede visualizar el tipo de comportamiento y la influencia en él de múltiples características, las cuales podrían ser cambiadas todas a la vez o sólo algunas de ellas. Por ejemplo, si se requiere observar qué comportamiento tiene la aeronave a una altura dada, y compararla con aquel que tenga a nivel del mar, el modelo puede dar resultados útiles que arroje conclusiones que sirvan en la toma de decisiones. O bien, si se está en la etapa preliminar de un diseño de aeronave y no se sabe cuál es la forma y lugar óptimos de las superficies de control, entonces se puede realizar un modelo matemático de este tipo y conocer los resultados que arrojen distintas reacciones.

Una característica importante de conocer en aeronaves de altas velocidades, es la influencia que tiene el vehículo el superar la etapa sónica. Además de verificar una afectación en fuerzas tanto de arrastre como de sustentación, altera de forma significativa la estabilidad y el control. Dichas características pueden ser visualizadas por estos medios.

Un punto desventajoso de este procedimiento es que al realizar un cambio, como por ejemplo, el flechado del ala, se necesita hacer nuevamente el análisis aerodinámico del ala y la aeronave completa. Una buena opción es crear un programa que facilite el procedimiento de la influencia de algún cambio de la aeronave en vuelo.

En el caso de modificar las condiciones de vuelo, no basta con alterar el valor de la densidad en la presión dinámica (como se hacen en algunos trabajos), pues las condiciones atmosféricas afectan todo el análisis aerodinámico en la

determinación de coeficientes debidos a la densidad, temperatura y viscosidad que afectan directamente a dichos resultados.

El proceso de caracterización aerodinámica es rápido, sencillo y poco complicado, lo cual significa que algún cambio se puede lograr sin la inversión de mucho tiempo y esfuerzo.

Un modelo dinámico longitudinal puede ser encontrado en libros e investigaciones ya hechas, y puede utilizarse siempre y cuando se conozca su naturaleza y se esté familiarizado con el proceso de su obtención. Si se conocen los fundamentos, el modelo puede utilizarse prácticamente para cualquier configuración, sin embargo, es importante la coincidencia en planos de simetría del modelo a evaluar y del que fue utilizado para dicho modelo matemático. Lo que se requiere es básicamente las 3 ecuaciones diferenciales de primer orden acomodadas en la forma espacio de estados correctamente adimensionalizadas.

Sin embargo, una vez que se obtiene dicho modelo, el trabajo comienza, el cual consiste en la determinación de las derivadas de estabilidad y control para las características específicas de la aeronave y de sus condiciones de vuelo.

Este modelo no funciona para visualizar una trayectoria de vuelo completa de la aeronave, sino para saber su reacción si se le estimula con alguna entrada dada a una condición de vuelo muy específica y limitada. Sin embargo no asegura dar como resultado las magnitudes precisas de su verdadero comportamiento.

Para obtener un modelo matemático completo y confiable, le única vía es la de la experimentación.

## 7.2 CONCLUSIONES PARTICULARES

La masa de la aeronave y la posición de su centro de gravedad en relación a los centros aerodinámicos, es una característica muy importante que define el tiempo de reacción y la longitud de onda del fugoide. Esto debido a la inercia.

La aeronave diseñada que es de aluminio sólido y no estructurado, tiene un alto momento de inercia, en contra posición, la característica del momento de cabeceo es muy inestable, debido a que el centro aerodinámico del ala se encuentra alineado en las 3 coordenadas con el centro de gravedad de la aeronave completa. Las superficies canard tienen la conicidad y superficies indicadas para provocar una alta efectividad. La alineación del ala con el centro de gravedad, indica que al aumentar la velocidad y superar la etapa subsónica la inestabilidad aumentará, pero al mismo tiempo, la efectividad del control.

Si no existe ángulo de incidencia en las superficies canard, la aeronave aumentará su cabeceo hasta perder completamente el control. Para poder controlarla, se necesitaría una manipulación en las superficies canard rápida y de altas magnitudes. En el caso del análisis de lazo abierto, era necesario, para poder visualizar características importantes del comportamiento de la aeronave, convertir los valores de inestabilidad de cabeceo, en estabilidad, pasándolos de positivos a negativos. De esta forma se pudo apreciar un vuelo relativamente estable y la influencia que tienen algunas derivadas en el vuelo.

En el caso de la derivada  $C_{Mq}$ , ésta incrementa el amortiguamiento de las ondas en el periodo corto (primera fase del movimiento de respuesta), logrando

una controlabilidad más efectiva.  $C_{M\alpha}$  también actúa en el periodo corto y de forma significativa, entre mayor sea su valor, la frecuencia de onda aumenta.  $C_{Xu}$  afecta a la etapa de fugoide, incrementando el amortiguamiento.  $C_{Zu}$  incrementa la frecuencia, en la etapa fugoide. En el caso de  $C_{Mu}$ , al tener cierto valor, menor a -2.9, la aeronave pierde el control, lo cual resulta interesante, y debería ser analizado a detalle en un trabajo futuro.

## 8

## TRABAJO FUTURO

Como se ha visto, es muy posible que no sea suficiente un modelo matemático obtenido a partir de metodologías enteramente analíticas para poder predecir la estabilidad y control de una aeronave. Hasta ahora no se sabe si este modelo particular de una aeronave diseñada esté lejos o cercano de la realidad. La única forma de saberlo, es intentando validar el modelo por medio de experimentación.

Pudiese ser que la validación ocurriera en pasos diferentes. El primero, por ejemplo, sería el validar los valores de la caracterización aerodinámica, incluso por medio de programas de computación de simulación de fluidos. Aunque al final los resultados que arroje este programa deberán ser igualmente validados con experimentos. Si se quisiese validar entonces, la caracterización aerodinámica, la mejor solución es construir el modelo a escala y someterlo a pruebas que arrojen cada coeficiente aerodinámico.

El siguiente paso puede ser validar cada derivada de estabilidad y de control por separado, midiendo las fuerzas y momentos de reacción así como las variables independientes que sean necesarias conocer.

Finalmente, se puede hacer una validación de forma global, donde se evalúa la reacción completa de la aeronave a entradas determinadas, en este caso, deflexión en las superficies canard.

Aplicando una entrada elegida y midiendo con precisión la reacción o salida, se puede realizar una comparación de lo que arroje el espacio de estados visualizado en matlab y de esta forma, observar el error para obtener así una conclusión más precisa del alcance del proceso.

Para obtener información completa de la validez del modelo, es posible que no baste con la opción de la validación global, sino que una vez hecha esta, se deberá particularizar el análisis, para observar cada factor; derivada de estabilidad y control, y coeficiente aerodinámico, y de esta manera obtener una evaluación completa del modelo matemático, y del proceso analítico que se llevó a cabo para su determinación.

# APÉNDICE A

## TRASLACIÓN Y ACTITUD DE UN CUERPO EN EL ESPACIO

Antes de que la aeronave sea considerada como un cuerpo aerodinámico, es un cuerpo en el espacio sometido a leyes físicas, no es sino a partir de estas que se puede incluir la influencia del aire en el vehículo.

Estas seis ecuaciones han sido deducidas ya, y surgen a partir del momento lineal para su uso en modelos matemáticos de sistemas mecánicos. Aunque se pueden encontrar en bibliografías, se muestra a continuación su deducción.

## LEYES FÍSICAS

### Momento Lineal y Su Conservación

La ley de la conservación, en particular la conservación del momento lineal se cumple en la teoría cuántica, que describe los fenómenos atómicos y nucleares, y en la relatividad, que se emplea cuando los sistemas se desplazan a velocidades próximas a la de la luz, llamada la ley de la conservación del momento.

El momento lineal es una propiedad vectorial y es una característica que tiene cualquier partícula en el universo que tenga movimiento, y es igual al producto de su masa por su velocidad.

El momento lineal de un cuerpo es igual a la suma del momento lineal de todas las partículas, pero considerando que el momento lineal es un vector. La obtención del momento lineal de un cuerpo se debe hacer de la siguiente manera.

Es importante tener claro, lo que significa un sistema de referencia. Todo fenómeno depende del punto en que se analice. Esto se verá claramente en la figura A.1.

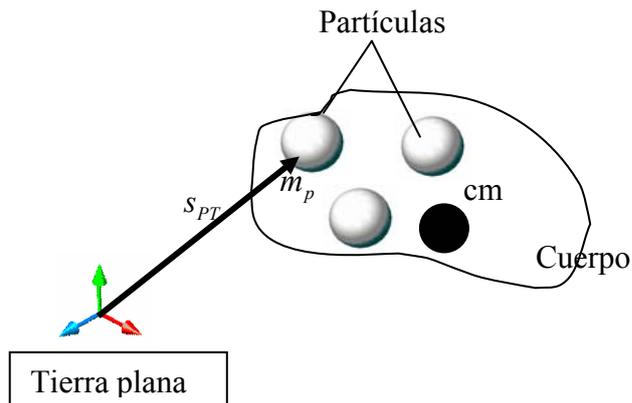


Figura A.1. Momento lineal de una partícula respecto a la tierra plana

Se tiene un cuerpo (C) compuesto por diferentes partículas (p) cada una de ellas tiene un momento lineal con respecto al sistema de referencia, que es llamado tierra plana(T). Lo anterior se describe de esta forma:

$$p_p^T = m_p U_p^T \quad A.1$$

En donde el índice  $p$  es el momento lineal y su superíndice indica el sistema de referencia desde donde se hace el análisis, es decir, desde la tierra plana. El subíndice indica el objeto analizado. Masa es una magnitud escalar a la que solo se le indica en el subíndice el objeto del cual se trata. El índice  $U$  es el

vector velocidad que tiene una nomenclatura en subíndice y superíndice análoga al vector  $p$ .

Se entiende por sistema de referencia “tierra plana” a un sistema de ejes coordenados cuyo eje  $z$  es axial al radio de la tierra y se encuentra situado en algún punto de la superficie.

La ecuación A.1 también se puede escribir de la siguiente forma

$$p_p^T = m_p D^T s_{pT} \quad \text{A.2}$$

En donde  $D^T$  es la razón de cambio respecto a la tierra plana y  $s_{pT}$  es el vector desplazamiento de la partícula medido desde  $T$ , o bien, la coordenada de  $p$  con respecto al sistema  $T$ . El punto de  $p$  también puede ser una triada o bien un sistema de ejes coordenados a partir del cual se midan sus rotaciones y traslaciones respecto a otra triada o sistema de referencia. En el caso de la ecuación A.2 la triada  $p$  no tendrá rotaciones. De acuerdo a lo anterior la nomenclatura de  $s$  utilizada para representar un punto con coordenadas en el sistema, se puede considerar como una relación entre dos triadas sin rotaciones con respecto a una de la otra con la siguiente igualdad.

$$s_{pT} = s_p^T \quad \text{A.3}$$

Ahora, para obtener el momento lineal de todo el cuerpo respecto a la tierra plana y si no se conoce la distancia que tienen las partículas con respecto a ella, se deben sumar el de cada una de las partículas con respecto al centro de masa del cuerpo y después de este punto respecto a la tierra plana. Para simplificar el diagrama se hará considerando que el cuerpo está compuesto de una sola partícula.

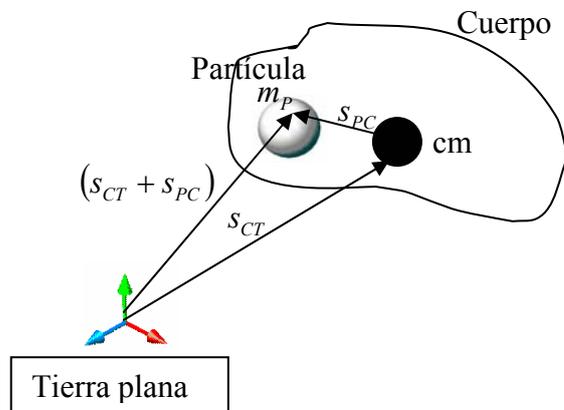


Figura A.2. Momento lineal de un cuerpo con respecto a la tierra plana

Ahora bien, el momento lineal total de todo el cuerpo será:

$$p_C^T = \sum_p m_p (D^T s_{CT} + D^T s_{pC}) \quad \text{A.4}$$

O bien

$$p_C^T = \sum_p m_p (D^T s_{TP}) \quad \text{A.5}$$

### Segunda Ley de Newton

La segunda ley de newton, explica a partir de dónde surgen las fuerzas, teniendo como base la conservación de la energía. Ya se ha hablado de la conservación del momento lineal. Al haber un cambio en el momento lineal, es decir, una razón de cambio, surgirá de esto una fuerza, que está en función de la magnitud de la razón de cambio y de la masa de lo que impacta.

$$D^B p_H^B = D^B (m_H (D^B s_H^B)) \quad \text{A.6}$$

En donde B es el sistema de referencia y H algún cuerpo. Puesto que la masa del cuerpo se mantiene constante:

$$D^B p_H^B = m_H D^B D^B s_H^B \quad \text{A.7}$$

$$D^B p_H^B = m_H D^B U_H^B \quad \text{A.8}$$

$$D^B p_H^B = m_H a_H^B \quad \text{A.9}$$

$$F_H^B = m_H a_H^B \quad \text{A.10}$$

De esta forma se llega a la segunda Ley de Newton a partir del momento lineal. Esta ecuación indica que la fuerza que se provoca depende de la masa del cuerpo y de la razón de cambio de la razón de cambio de su posición.

Una vez comprendida la segunda ley de Newton como una derivación del momento lineal se pueden lograr las tres primeras ecuaciones que describen la traslación de un cuerpo independientemente de su actitud.

Al tener un espacio de tres dimensiones la posición de un cuerpo o partícula se puede representar de la siguiente manera:

$$F_A^T = m_A D^T D^T s_A^T \quad \text{A.11}$$

En donde la letra  $A$  significará aeronave. En la ecuación A.11 se observa que el vector desplazamiento es de la aeronave con respecto al sistema tierra plana. Para que esta segunda ley de Newton se cumpla, los vectores de derivación o de razones de cambio tienen que ser con respecto al mismo sistema de referencia que el del vector desplazamiento. De esta forma se creará, con la primera razón de cambio, una velocidad y con la segunda la aceleración.

La ecuación A.11 puede ser representada por:

$$F_A^T = m_A D^T U_A^T \quad \text{A.12}$$

La aeronave puede ser compuesta por dos triadas, una cuando está en cierta posición y otra cuando ha transcurrido un cambio y se han experimentado incrementos en las fuerzas aplicadas. Al principio las fuerzas en la aeronave estarán equilibradas, o bien, la sumatoria de ellas dará cero. A partir de esta situación de equilibrio se le aplican incrementos a esas fuerzas aplicadas para romper el equilibrio. Independientemente del sistema de referencia, habrá un cambio en la posición original de la aeronave. La suma del estado final de la aeronave tomará en cuenta el equilibrio más los incrementos.

$$\sum F_A^T = \sum F_E^T + \sum F_P^E \quad \text{A.13}$$

Lo mismo para la sumatoria de momentos

$$\sum M_A^T = \sum M_E^T + \sum M_P^E \quad \text{A.14}$$

En donde  $E$  es la triada del estado estacionario y  $P$  la triada del estado perturbado. Siendo que la sumatoria en estado equilibrado da cero, entonces las ecuaciones A.13 y A.14 quedan de la siguiente manera:

$$\sum F_A^T = \sum F_P^E \quad \text{4.15}$$

$$\sum M_A^T = \sum M_P^E \quad \text{4.16}$$

Regresando a la ecuación A.12 la derivación del vector velocidad es una razón de cambio en su magnitud y dirección. El vector velocidad puede ser representado por:

$$1_U U_A^T \quad \text{A.17}$$

En donde  $1_U$  es un vector unitario. De ser así, se tiene la siguiente derivación:

$$D^T U_A^T = \frac{\partial 1_U}{\partial t} U_A^T + 1_U \frac{\partial U_A^T}{\partial t} \quad \text{A.18}$$

La razón de cambio de la dirección del vector es en realidad una rotación. La primera parte de la ecuación A.18 describe una rotación con una tasa de cambio con respecto al tiempo. El vector rota manteniendo fijo su punto de origen. Ese vector tiene una longitud de magnitud  $U$ , por lo tanto tendrá una velocidad tangencial en la punta de:

$$\omega_U \times U_A^T \quad \text{A.19}$$

Por lo tanto, la razón de cambio de dirección de un vector será:

$$\frac{\partial 1_U}{\partial t} U_A^T = \omega_U \times U_A^T \quad \text{A.20}$$

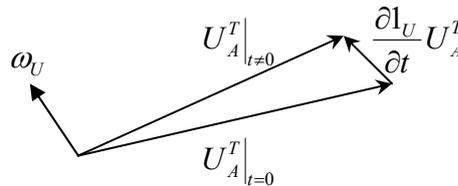


Figura 4.3. Taza de cambio de la dirección del vector velocidad

El segundo término de la ecuación A.18 indica la razón de cambio de la magnitud del vector velocidad, que puede ser representado gráficamente como sigue:

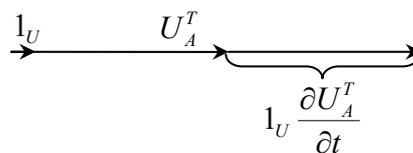


Figura A.4. Taza de cambio en la magnitud del vector velocidad

Ambos términos describen la tasa de cambio en magnitud y dirección de un vector, finalmente la diferenciación de un vector con respecto al tiempo se representa de la forma siguiente:

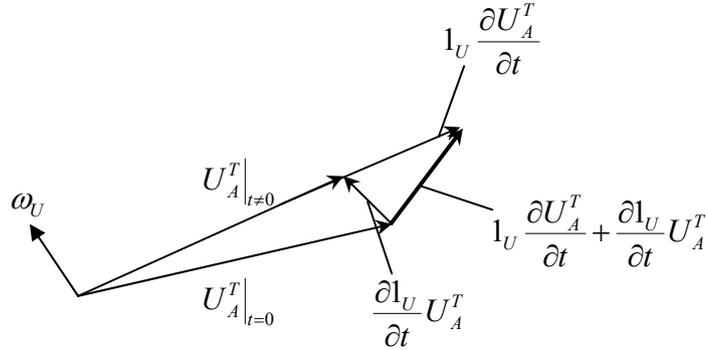


Figura A.5 Taza de cambio en la magnitud y dirección del vector velocidad

Y la ecuación A.18 una vez sustituido los dos términos queda:

$$D^T U_A^T = \omega_U \times U_A^T + 1_U \frac{\partial U_A^T}{\partial t} \quad A.21$$

El primer término de la ecuación A.21 está compuesto por el producto cruz de dos vectores. Ambos tienen las siguientes coordenadas:

$$U_A^T = iu + jv + kw \quad A.22$$

$$\omega_U = ip + jq + kr \quad A.23$$

En donde  $i, j$  y  $k$  son los vectores unitarios en  $x, y$  y  $z$  de la triada de la aeronave

El segundo término de la ecuación A.21 tendrá las siguientes coordenadas:

$$1_U \frac{\partial U_A^T}{\partial t} = i\dot{u} + j\dot{v} + k\dot{w} \quad A.24$$

Se realiza el producto cruz del primer término de la ecuación A.21

$$\omega_U \times U_A^T = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} \quad \text{A.25}$$

$$\omega_U \times U_A^T = i(wq - vr) + j(ur - wp) + k(vp - uq) \quad \text{A.26}$$

Los componentes de la sumatoria de fuerzas en los tres ejes será:

$$\sum F_A^T = i \sum Fx_P^E + j \sum Fy_P^E + k \sum Fz_P^E \quad \text{A.27}$$

En base a la ecuación A.27 y la forma obtenida en la ecuación A.26 y A.24, Se obtiene el valor de las fuerzas para cada eje.

$$\begin{aligned} \sum Fx_A^T &= m(\dot{u} + wq - vr) \\ \sum Fy_A^T &= m(\dot{v} + ur - wp) \\ \sum Fz_A^T &= m(\dot{w} + vp - uq) \end{aligned} \quad \text{4.28}$$

En el caso de los momentos. La sumatoria de estos será la suma de las tazas de cambio de los momentos angulares con respecto al tiempo en cada eje. De forma general se puede escribir como:

$$\sum M_E^T = \sum M_P^E = \frac{\partial H}{\partial t} \quad \text{A.29}$$

La distribución de masa de un cuerpo puede provocar un momento alrededor de su centro de gravedad

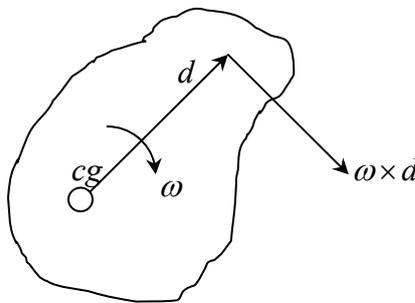


Figura A.6. Cuerpo con una velocidad rotacional alrededor de su centro de gravedad

El momento del elemento de masa será la velocidad tangencial de esta multiplicada por su magnitud.

$$\Delta h = (\omega \times d) \Delta m \quad \text{A.30}$$

Se puede obtener el momento del momento de la ecuación A.30 para obtener el momento angular. La distancia por la que se multiplica será la misma distancia en donde se sitúa el elemento de masa

$$\Delta H = d \times (\omega \times d) \Delta m \quad \text{A.31}$$

Para obtener el momento angular o momento de momentos del cuerpo completo se integran todos los elementos de masa.

Los componentes de la distancia y la velocidad angular y distancia lineal son:

$$\omega = ip + jq + kr \quad \text{A.32}$$

$$d = ix + jy + kz \quad \text{A.33}$$

Y el producto cruz da como resultado

$$\omega \times d = i(zq - yr) + j(xr - zp) + k(yp - xq) \quad \text{A.34}$$

Para el doble producto cruz se obtiene:

$$d \times (\omega \times d) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ zq - yr & xr - zp & yp - xq \end{vmatrix} \quad \text{A.35}$$

$$d \times (\omega \times d) = i[(y^2 + z^2)p - xyq - xzr] + j[(z^2 + x^2)q - yzr - xyp] + k[(x^2 + y^2)r - xzp - yzq] \quad \text{A.36}$$

Se sustituye la ecuación A.36 en la ecuación A.30 integrada para obtener el momento angular para cada eje.

$$\begin{aligned}
H = & \int i[(y^2 + z^2)p - xyq - xzr] \delta m + \int j[(z^2 + x^2)q - yzr - xyp] \delta m \\
& + \int k[(x^2 + y^2)r - xzp - yzq] \delta m
\end{aligned}
\tag{A.37}$$

Se conoce que el valor de los momentos y productos de inercia son:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) \delta m \tag{A.38}$$

$$I_y = \int (z^2 + x^2) \delta m \tag{A.39}$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2) \delta m \tag{4.40}$$

$$J_{xy} = \int xy \delta m \tag{A.41}$$

$$J_{xz} = \int xz \delta m \tag{A.42}$$

$$J_{yz} = \int yz \delta m \tag{A.43}$$

En base a la figura A.9 y la teoría del momento y producto de inercia, la simetría de la aeronave provoca que las ecuaciones A.40 y A.42 se igualen con cero; por lo tanto la ecuación A.37 se reduce de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
H_x &= pI_x - rJ_{xz} \\
H_y &= qI_y \\
H_z &= rI_z - pJ_{xz}
\end{aligned}
\tag{A.44}$$

Como ya antes se ha derivado el vector velocidad, la derivada del vector momento angular de la ecuación A.29 es representado por:

$$\sum M_E^A = \sum M_P^E = 1_H \frac{\partial H}{\partial t} + \omega \times H \tag{A.45}$$

Si se sustituye el conjunto de ecuaciones A.44 en el primer término de la ecuación A.45 se obtiene las siguientes tres ecuaciones.

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_x}{\partial t} &= pI_x - rJ_{xz} \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= qI_y \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} &= rI_z - pJ_{xz}\end{aligned}\tag{A.46}$$

Y el producto cruz del segundo término arroja el siguiente resultado.

$$\omega \times H = i(qH_z - rH_y) + j(rH_x - pH_z) + k(pH_y - qH_x)\tag{A.47}$$

La sumatoria de momentos puede representarse por las sumatoria en cada eje por medio de la ecuación A.48.

$$\sum M_P^E = i \sum L_P^E + j \sum M_P^E + k \sum N_P^E\tag{A.48}$$

Sustituyendo en A.48 las ecuaciones A.46 y A.47 para tener finalmente las tres ecuaciones que rigen la actitud de un cuerpo en el espacio para obtener finalmente:

$$\begin{aligned}\sum L_P^E &= pI_x - rJ_{xz} + qr(I_z - I_y) - pqJ_{xz} \\ \sum M_P^E &= qI_y + pr(I_x - I_z) + (p^2 - r^2)J_{xz} \\ \sum N_P^E &= rI_z - pJ_{xz} + pq(I_y - I_x) + qrJ_{xz}\end{aligned}\tag{A.49}$$

---

# APÉNDICE B

## CARACTERÍSTICAS DE LA AERONAVE

La aeronave se ha diseñado con el fin de predecir su comportamiento en vuelo. No se ha tomado en cuenta la necesidad de cumplir con algún requisito de desempeño ni cubrir alguna necesidad. Su configuración se buscó ser simple, pero con lo necesario para estar dentro de lo requerido para aeronaves trisónicas de control canard. Además de buscar geometrías simples que permitiera la fácil caracterización por métodos analíticos de su aerodinámica, aplicados en las rápidas evaluaciones de diseños preliminares

Las características de dicha aeronave se encuentran en la tabla B.1. El fuselaje buscó ser un cilindro con el frente esférico, para simplificar los cálculos a la hora de determinar el arrastre en velocidades supersónicas. El flechado del ala buscó ser el necesario para que se mantuviera en la parte interna del cono de Mach. Las superficies canard fueron diseñadas con la finalidad de obtener una superficie lo más efectiva posible, buscando una conicidad que aumentara su eficiencia en sustentación. Esto para que a la hora de ejercer la entrada determinada por la deflexión de dicha superficie se obtengan resultados visibles.

La masa de la aeronave se consideró ser la del aluminio, siendo el volumen de la aeronave completa de aluminio sólido. En el caso de una aeronave normal, la parte interna no es sólida sino estructurada pero también con accesorios y elementos útiles para el funcionamiento de la aeronave, tales como el combustible y el mismo motor. El peso total de la aeronave pudiere ser mayor a lo normal, y por lo tanto su momento de inercia puede provocar demasiada resistencia al movimiento, o por el contrario resistencia a regresar a su punto inicial.

Al momento de dibujar las superficies con perfil aerodinámico, estas se dibujaron en dos partes. Una parte sólida sin perfil, pero con las características geométricas requeridas en la forma del ala, y por una piel que cubre la primera parte dando forma al perfil simétrico en el ala. Se usó un mismo perfil para el ala y las superficies canard. En el caso del fuselaje, este es completamente sólido. El centro de gravedad se mantiene cerca de un cuarto de la cuerda aerodinámica media sobre el eje  $x$  de la aeronave, y ligeramente desplazado hacia arriba en el eje  $z$ , con valor cero en el eje  $y$ , debido a su simetría. Para cálculos, de momento e inercia y otros, se consideró estar en la coordenada  $y$  y  $z$  a la mitad del diámetro del fuselaje y a un cuarto de la distancia de la cuerda aerodinámica media del ala en  $x$ . Se consideró también que el centro aerodinámico del ala en velocidades subsónicas será el mismo que la posición del centro de gravedad total de la

aeronave, así como el centro de gravedad particular del ala, por lo que el momento de cabeceo sería únicamente provocado por las superficies canard, hasta que los fenómenos de compresibilidad provoquen el desplazamiento de centros aerodinámicos. Esto puede provocar altos valores de inestabilidad en la aeronave al no tener deflectadas las superficies de control.

La cota del dibujo de la aeronave diseñada es milímetros.

Elemento	Símbolo	Unidades	Valor
<b>Aeronave</b>	M	(kgm)	16865.23
	$I_y$	Kgm m <sup>2</sup>	96227.28
<b>Ala</b>	S	m <sup>2</sup>	27.5688
	$S_h$	m <sup>2</sup>	21.3688
	$C_r$	m	6.2
	$C_p$	m	1
	B	m	7.65966423
	AI		5.27352541
	$\Lambda_{BA}$	Grados	53.6621439
	$\Lambda_{1/4}$	Grados	45.5558812
	$\Lambda_{1/2}$	Grados	39.2034531
CAM	m	4.22592593	
<b>Canard</b>	S	m <sup>2</sup>	2.23941135
	$S_h$	m <sup>2</sup>	1.4050009
	CAM	m	1.08333333
	B	m	3
	$[(X_{cgA})(\bar{c})]_c$	m	2.29126457
<b>Fuselaje</b>	D	m	1
	$I_f$	m	7.5

*Tabla B.1 Valores característicos de la aeronave*

PERFIL	$\alpha_0$	0
<b>NACA 64-006</b>	$\delta c_l / \delta \alpha$	2
	$C_{lmax}$	1.75
	Xca	0.25
	t/c	0.0599

*Tabla B.2 Características del perfil aerodinámico*

---

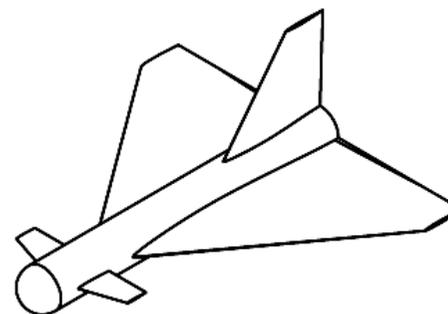
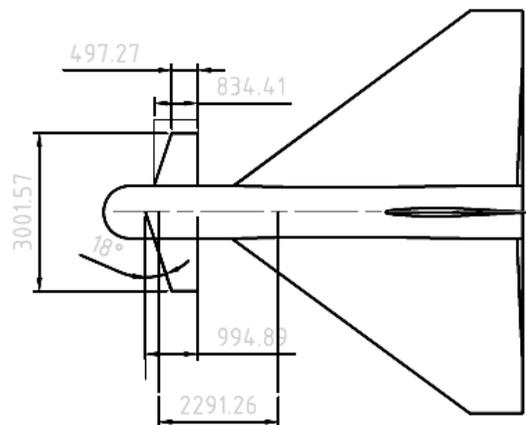
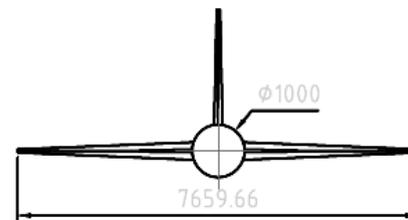
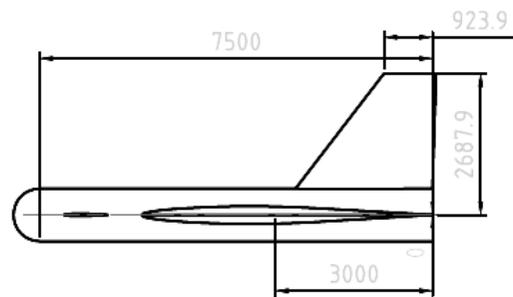
**NACA 64-006**  
(Estaciones y ordenadas dadas en porcentaje de la cuerda del perfil)

x	y	dy/dx
0	0	0
0.5	0.4924	0.4687
0.75	0.5956	0.3687
1.25	0.7511	0.2696
2.5	1.0213	0.1822
5	1.4025	0.13
7.5	1.6897	0.1024
10	1.9236	0.086
15	2.2932	0.0635
20	2.5675	0.0471
25	2.7675	0.0332
30	2.9019	0.0207
35	2.9762	0.009
40	2.9855	-0.0061
45	2.9133	-0.0223
50	2.7686	-0.0348
55	2.5689	-0.0448
60	2.3246	-0.0527
65	2.0439	-0.0593
70	1.7359	-0.064
75	1.4078	-0.0671
80	1.0699	-0.0678
85	0.7353	-0.0654
90	0.4224	-0.0589
95	0.1568	-0.0458
100	0	-0.0018

L.E. radio = 0.249 % de la cuerda

---

*Tabla B.3 Geometría del perfil*



*Dibujo de la aeronave evaluada*

# APÉNDICE C

## CARACTERIZACIÓN AERODINÁMICA

Los resultados obtenidos de la dinámica de la aeronave, dependen directamente de su caracterización aerodinámica. La metodología empleada [17], arrojó tablas de valores y gráficos que se utilizaron para obtener variables del modelo matemático. En este Apéndice se muestran esos valores, comenzando por tablas con las fórmulas empleadas y posteriormente su representación gráfica.

## Tablas

**Arrastre por Fricción**

Mach	Velocidad(m/s)	<b>Ala</b>		<b>Fuselaje</b>	
		Re	C <sub>Df</sub>	Re	C <sub>Df</sub>
		$Re = \frac{\rho Ux}{\mu}$	$C_{Df} = \frac{0.074}{Re_L^{1/5}} - \frac{1740}{Re_L}$	$Re = \frac{\rho Ux}{\mu}$	$C_{Df} = \frac{0.074}{Re_L^{1/5}} - \frac{1740}{Re_L}$
0.1	34.3	9969839.56	0.00277325	17694062.3	0.00252991
0.15	51.45	14954759.3	0.00260181	26541093.5	0.00235797
0.2	68.6	19939679.1	0.00247892	35388124.6	0.00223885
0.25	85.75	24924598.9	0.00238437	44235155.8	0.00214882
0.3	102.9	29909518.7	0.00230812	53082187	0.00207702
0.35	120.05	34894438.5	0.0022446	61929218.1	0.00201765
0.4	137.2	39879358.2	0.00219036	70776249.3	0.00196725
0.45	154.35	44864278	0.0021432	79623280.5	0.00192361
0.5	171.5	49849197.8	0.00210158	88470311.6	0.00188523
0.55	188.65	54834117.6	0.00206441	97317342.8	0.00185105
0.6	205.8	59819037.4	0.0020309	106164374	0.0018203
0.65	222.95	64803957.2	0.00200042	115011405	0.00179239
0.7	240.1	69788876.9	0.00197251	123858436	0.00176688
0.75	257.25	74773796.7	0.0019468	132705467	0.00174341
0.8	274.4	79758716.5	0.00192299	141552499	0.0017217
0.85	291.55	84743636.3	0.00190083	150399530	0.00170153
0.9	308.7	89728556.1	0.00188014	159246561	0.0016827
0.95	325.85	94713475.8	0.00186073	168093592	0.00166506
1	343	99698395.6	0.00184247	176940623	0.00164848
1.05	360.15	104683315	0.00182524	185787654	0.00163284
1.1	377.3	109668235	0.00180894	194634686	0.00161806
1.15	394.45	114653155	0.00179347	203481717	0.00160405
1.2	411.6	119638075	0.00177878	212328748	0.00159074
1.25	428.75	124622995	0.00176478	221175779	0.00157806
1.3	445.9	129607914	0.00175142	230022810	0.00156597
1.35	463.05	134592834	0.00173864	238869841	0.00155442
1.4	480.2	139577754	0.00172641	247716873	0.00154336
1.45	497.35	144562674	0.00171468	256563904	0.00153276
1.5	514.5	149547593	0.00170341	265410935	0.00152259
1.55	531.65	154532513	0.00169258	274257966	0.0015128
1.6	548.8	159517433	0.00168214	283104997	0.00150339
1.65	565.95	164502353	0.00167209	291952028	0.00149431
1.7	583.1	169487273	0.00166238	300799060	0.00148555
1.75	600.25	174472192	0.001653	309646091	0.0014771
1.8	617.4	179457112	0.00164394	318493122	0.00146892
1.85	634.55	184442032	0.00163516	327340153	0.00146101
1.9	651.7	189426952	0.00162666	336187184	0.00145335
1.95	668.85	194411871	0.00161842	345034215	0.00144593
2	686	199396791	0.00161043	353881246	0.00143873

Mach	Velocidad(m/s)	Re $Re = \frac{\rho Ux}{\mu}$	<u>Canard</u>	<u>Empenaje Vertical</u>
			$C_{Df} = \frac{0.074}{Re_L^{1/5}} - \frac{1740}{Re_L}$	$C_{Df} = \frac{0.074}{Re_L^{1/5}} - \frac{1740}{Re_L}$
0.1	34.3	2555809	0.00318933	0.00303208
0.15	51.45	3833713.5	0.00311481	0.00288374
0.2	68.6	5111618	0.00302875	0.00276699
0.25	85.75	6389522.51	0.00294977	0.0026731
0.3	102.9	7667427.01	0.00287978	0.00259538
0.35	120.05	8945331.51	0.00281788	0.00252948
0.4	137.2	10223236	0.00276281	0.00247251
0.45	154.35	11501140.5	0.00271344	0.0024225
0.5	171.5	12779045	0.00266883	0.00237803
0.55	188.65	14056949.5	0.00262825	0.00233808
0.6	205.8	15334854	0.00259109	0.00230188
0.65	222.95	16612758.5	0.00255686	0.00226882
0.7	240.1	17890663	0.00252519	0.00223844
0.75	257.25	19168567.5	0.00249573	0.00221037
0.8	274.4	20446472	0.00246824	0.0021843
0.85	291.55	21724376.5	0.00244247	0.00215998
0.9	308.7	23002281	0.00241825	0.00213722
0.95	325.85	24280185.5	0.00239541	0.00211583
1	343	25558090	0.00237381	0.00209568
1.05	360.15	26835994.5	0.00235334	0.00207663
1.1	377.3	28113899	0.00233389	0.00205858
1.15	394.45	29391803.5	0.00231538	0.00204145
1.2	411.6	30669708	0.00229772	0.00202514
1.25	428.75	31947612.5	0.00228084	0.00200958
1.3	445.9	33225517	0.00226469	0.00199472
1.35	463.05	34503421.5	0.00224921	0.0019805
1.4	480.2	35781326	0.00223434	0.00196688
1.45	497.35	37059230.5	0.00222005	0.0019538
1.5	514.5	38337135	0.0022063	0.00194122
1.55	531.65	39615039.5	0.00219304	0.00192912
1.6	548.8	40892944	0.00218026	0.00191747
1.65	565.95	42170848.5	0.00216791	0.00190622
1.7	583.1	43448753	0.00215597	0.00189536
1.75	600.25	44726657.5	0.00214442	0.00188487
1.8	617.4	46004562	0.00213324	0.00187471
1.85	634.55	47282466.5	0.00212239	0.00186488
1.9	651.7	48560371	0.00211188	0.00185535
1.95	668.85	49838275.5	0.00210167	0.00184611
2	686	51116180	0.00209175	0.00183713

Aeronave Completa

Mach	Velocidad(m/s)	$C_{df\text{total}}$
0.1	34.3	0.011524572
0.15	51.45	0.010958334
0.2	68.6	0.010513513
0.25	85.75	0.010156058

0.3	102.9	0.009860311
0.35	120.05	0.00960961
0.4	137.2	0.009392939
0.45	154.35	0.009202749
0.5	171.5	0.009033678
0.55	188.65	0.0088818
0.6	205.8	0.008744163
0.65	222.95	0.008618496
0.7	240.1	0.00850302
0.75	257.25	0.008396313
0.8	274.4	0.008297226
0.85	291.55	0.008204816
0.9	308.7	0.008118301
0.95	325.85	0.008037024
1	343	0.007960431
1.05	360.15	0.00788805
1.1	377.3	0.007819472
1.15	394.45	0.007754347
1.2	411.6	0.007692367
1.25	428.75	0.007633265
1.3	445.9	0.007576804
1.35	463.05	0.007522776
1.4	480.2	0.007470993
1.45	497.35	0.007421291
1.5	514.5	0.00737352
1.55	531.65	0.007327548
1.6	548.8	0.007283254
1.65	565.95	0.007240528
1.7	583.1	0.007199271
1.75	600.25	0.007159393
1.8	617.4	0.007120812
1.85	634.55	0.007083453
1.9	651.7	0.007047245
1.95	668.85	0.007012126
2	686	0.006978037

**Arrastre por Presión**

Mach	Velocidad (m/s)	<u>Ala</u>	<u>Empenaje Vertical</u>	<u>Empenaje Horizontal</u>
		FF		
		$FF = \left[ 1 + \frac{0.6}{(x/c)_m} \left( \frac{t}{c} \right) + 100 \left( \frac{t}{c} \right)^4 \right] \left[ 1.34 M^{0.18} (\cos \Lambda_m)^{0.28} \right]$		
0.1	34.3	0.89944378	0.9387479	0.96069453
0.15	51.45	0.96754339	1.00982335	1.03343162
0.2	68.6	1.01896536	1.06349237	1.08835535
0.25	85.75	1.06072602	1.1070779	1.13295985
0.3	102.9	1.09611431	1.1440126	1.17075803
0.35	120.05	1.12695421	1.17620014	1.20369807
0.4	137.2	1.15436944	1.20481337	1.23298024
0.45	154.35	1.17910444	1.23062925	1.25939966

0.5	171.5	1.20167942	1.25419071	1.28351196
0.55	188.65	1.22247308	1.27589303	1.30572164
0.6	205.8	1.24177024	1.29603343	1.3263329
0.65	222.95	1.25979078	1.31484144	1.34558062
0.7	240.1	1.27670826	1.33249819	1.36365015
0.75	257.25	1.2926622	1.34914929	1.38069053
0.8	274.4	1.30776653	1.36491365	1.39682344
0.85	291.55	1.3221156	1.37988974	1.41214966
0.9	308.7	1.33578842	1.39416004	1.42675358
0.95	325.85	1.34885191	1.40779439	1.44070667
1	343	1.36136325	1.42085245	1.45407001
1.05	360.15	1.37337171	1.43338566	1.46689623
1.1	377.3	1.38492006	1.44543865	1.479231
1.15	394.45	1.39604569	1.45705046	1.49111428
1.2	411.6	1.40678149	1.46825539	1.50258117
1.25	428.75	1.41715654	1.47908381	1.51366274
1.3	445.9	1.42719668	1.48956268	1.5243866
1.35	463.05	1.436925	1.49971612	1.5347774
1.4	480.2	1.44636222	1.50956573	1.54485728
1.45	497.35	1.45552699	1.51913098	1.55464616
1.5	514.5	1.46443618	1.52842948	1.56416205
1.55	531.65	1.47310508	1.53747721	1.57342129
1.6	548.8	1.48154763	1.54628868	1.58243877
1.65	565.95	1.48977654	1.55487718	1.59122806
1.7	583.1	1.49780345	1.56325486	1.59980159
1.75	600.25	1.50563905	1.57143286	1.60817078
1.8	617.4	1.51329317	1.57942145	1.61634613
1.85	634.55	1.52077489	1.5872301	1.62433734
1.9	651.7	1.52809259	1.59486757	1.63215337
1.95	668.85	1.53525405	1.60234198	1.63980251
2	686	1.54226649	1.60966084	1.64729248

### Arrastre Por Onda de Choque

Mach	$C_{Doch}$
0	
0.2	
0.4	
0.6	
0.82	0
0.9	0.002
1	0.73600846
1.05	1.47201692
1.1	
1.15	

$$(D/q)_{och} = \frac{9\pi}{2} \left( \frac{A_{max}}{l} \right)^2$$

1.2	1.47201692
-----	------------

$$(D/q)_{och2} = E_{och} \left[ 1 - 0.386(M - 1.2)^{0.57} \left( 1 - \frac{\pi \Lambda_{BA}^{0.77}}{100} \right) \right] (D/q)_{och}$$

1.4
1.6

1.8  
2

### **Arraste Spersónico, Corrección de Flujo Turbulento**

<b>Mach</b>	<b>Velocidad(m/s)</b>	<b><u>Ala</u></b>	<b><u>Fuselaje</u></b>	<b><u>Canard</u></b>	<b><u>Empenaje Vertical</u></b>
				$C_{Df} = \frac{0.455}{(\log_{10} Re)^{2.58} (1 + 0.144M^2)^{0.65}}$	
0.1	34.3				
0.15	51.45				
0.2	68.6				
0.25	85.75				
0.3	102.9		0.00230997		
0.35	120.05		0.00225235		
0.4	137.2		0.00220208		
0.45	154.35		0.00215711		
0.5	171.5		0.00211608		
0.55	188.65	0.00225507	0.00207806		
0.6	205.8	0.0022155	0.00204239		
0.65	222.95	0.00217806	0.00200859		
0.7	240.1	0.00214234	0.0019763		
0.75	257.25	0.00210803	0.00194523		
0.8	274.4	0.00207489	0.00191519		
0.85	291.55	0.00204274	0.00188601		
0.9	308.7	0.00201144	0.00185757		
0.95	325.85	0.00198087	0.00182976		
1	343	0.00195095	0.00180251		0.0021492
1.05	360.15	0.0019216	0.00177576		0.00211632
1.1	377.3	0.00189277	0.00174946		0.00208405
1.15	394.45	0.00186441	0.00172357		0.00205235
1.2	411.6	0.0018365	0.00169807	1.47201692	0.00202117
1.25	428.75	0.00180901	0.00167293	1.4384867	0.00199049
1.3	445.9	0.00178191	0.00164814	1.42224052	0.00196027
1.35	463.05	0.0017552	0.00162368	1.40929844	0.0019305
1.4	480.2	0.00172885	0.00159955	1.39812268	0.00190117
1.45	497.35	0.00170287	0.00157573	1.38810004	0.00187226
1.5	514.5	0.00167724	0.00155224	1.37890986	0.00184376
1.55	531.65	0.00165197	0.00152905	1.37035875	0.00181568
1.6	548.8	0.00162705	0.00150617	1.36231917	0.00178799
1.65	565.95	0.00160247	0.00148361	1.35470162	0.00176071
1.7	583.1	0.00157824	0.00146135	1.34744034	0.00173383
1.75	600.25	0.00155436	0.00143941	1.34048528	0.00170735
1.8	617.4	0.00153083	0.00141777	1.33379729	0.00168126
1.85	634.55	0.00150765	0.00139645	1.32734504	0.00165557
1.9	651.7	0.00148481	0.00137545	1.32110297	0.00163028
1.95	668.85	0.00146232	0.00135475	1.31504989	0.00160537
2	686	0.00144018	0.00133437	0.00174265	0.00158087

**Sustentación****Ala**

Mach      Velocidad(m/s)

 $C_{L\alpha}$ 

$$\beta^2 = 1 - M^2 \quad C_{L\alpha} = \frac{2\pi A}{2 + \sqrt{4 + \frac{A^2 \beta^2}{\eta^2} \left(1 + \frac{\tan^2 \Lambda_m}{\beta^2}\right)}} \left(\frac{S_e}{S_{ref}}\right) (F)$$

0.1	34.3	0.99	4.661629792
0.15	51.45	0.9775	4.678380568
0.2	68.6	0.96	4.702143516
0.25	85.75	0.9375	4.733244605
0.3	102.9	0.91	4.772124282
0.35	120.05	0.8775	4.819355746
0.4	137.2	0.84	4.87567013
0.45	154.35	0.7975	4.941990949
0.5	171.5	0.75	5.019481227
0.55	188.65	0.6975	5.109608506
0.6	205.8	0.64	5.214235697
0.65	222.95	0.5775	5.335750243
0.7	240.1	0.51	5.477251747
0.75	257.25	0.4375	5.642831641
0.8	274.4	0.36	5.838003015
0.85	291.55	0.2775	6.070385902
0.9	308.7	0.19	3
0.95	325.85	0.0975	4
1	343	0.99	6

$$\left(\frac{C_L}{\alpha}\right) = \frac{2\pi^2 \frac{\tan \epsilon}{\tan \mu}}{(\pi + \lambda) \sqrt{M^2 - 1}}$$

1.05	360.15		8
1.1	377.3		10
1.15	394.45		12
1.2	411.6		12.34912381
1.25	428.75		11.7231039
1.3	445.9		11.2762313
1.35	463.05		10.94010981
1.4	480.2		10.67770644
1.45	497.35		10.46705705
1.5	514.5		10.29423684
1.55	531.65		10.14995579
1.6	548.8		10.02776092
1.65	565.95		9.923020744
1.7	583.1		9.832319838
1.75	600.25		9.753081388
1.8	617.4		9.683323044
1.85	634.55		9.621493895
1.9	651.7		9.566362603
1.95	668.85		9.516938829
2	686		9.472416858

<b>Canard</b>			
Mach	Velocidad(m/s)	Betha^2	$C_{L\alpha}$
0.1	34.3	0.99	3.279938498
0.15	51.45	0.9775	3.287103423
0.2	68.6	0.96	3.297230869
0.25	85.75	0.9375	3.310420781
0.3	102.9	0.91	3.32680674
0.35	120.05	0.8775	3.346560204
0.4	137.2	0.84	3.369896233
0.45	154.35	0.7975	3.397081108
0.5	171.5	0.75	3.428442445
0.55	188.65	0.6975	3.464382661
0.6	205.8	0.64	3.505397055
0.65	222.95	0.5775	3.552098399
0.7	240.1	0.51	3.605250899
0.75	257.25	0.4375	3.66581804
0.8	274.4	0.36	3.735031584
0.85	291.55	0.2775	3.814493909
0.9	308.7	0.19	3.906334936
0.95	325.85	0.0975	4.013462739
1	343		3.9
1.05	360.15		8
1.1	377.3		11
1.15	394.45		13
1.2	411.6		13.34912381
1.25	428.75		12.7231039
1.3	445.9		12.2762313
1.35	463.05		11.94010981
1.4	480.2		11.67770644
1.45	497.35		11.46705705
1.5	514.5		11.29423684
1.55	531.65		11.14995579
1.6	548.8		11.02776092
1.65	565.95		10.92302074
1.7	583.1		10.83231984
1.75	600.25		10.75308139
1.8	617.4		10.68332304
1.85	634.55		10.62149389
1.9	651.7		10.5663626
1.95	668.85		10.51693883
2	686		10.47241686

### **Arrastre Inducido a 5° de Ángulo de Ataque y S = 0.9**

Mach	<b>Ala</b>				
	$e$	$K_{100}$	$K_0$	$K$	$K=f(e)$
	$e = 4.61(1 - 0.045A^{0.68})$ $(\cos \Lambda_{BA})^{0.15} - 3.1$	$K_{100} = \frac{1}{\pi A}$	$K = \frac{1}{C_{L\alpha}}$	$K = SK_{100} + (1-S)K_0$	$K = \frac{1}{\pi A e}$
0.1	-0.66742989	0.01154599	0.21451725	0.03184312	-
0.15			0.21374918	0.03176631	0.01729918
0.2			0.21266897	0.03165829	

0.25	0.21127157	0.03151855
0.3	0.20955028	0.03134642
0.35	0.20749661	0.03114105
0.4	0.20510001	0.03090139
0.45	0.2023476	0.03062615
0.5	0.19922378	0.03031377
0.55	0.19570971	0.02996236
0.6	0.19178266	0.02956966
0.65	0.18741507	0.0291329
0.7	0.18257331	0.02864872
0.75	0.17721599	0.02811299
0.8	0.17129145	0.02752054
0.85	0.16473417	0.02686481
0.9	0.33333333	0.04372473
0.95	0.25	0.03539139
1	0.16666667	0.02705806
1.05	0.125	0.02289139
1.1	0.1	0.02039139
1.15	0.08333333	0.01872473
1.2	0.08097741	0.01848913
1.25	0.08530164	0.01892156
1.3	0.08868211	0.0192596
1.35	0.09140676	0.01953207
1.4	0.09365307	0.0197567
1.45	0.09553784	0.01994518
1.5	0.09714173	0.02010557
1.55	0.0985226	0.02024365
1.6	0.09972316	0.02036371
1.65	0.10077576	0.02046897
1.7	0.1017054	0.02056193
1.75	0.1025317	0.02064456
1.8	0.10327033	0.02071843
1.85	0.10393396	0.02078479
1.9	0.10453294	0.02084469
1.95	0.1050758	0.02089897
2	0.10556968	0.02094836

Mach	Velocida (m/s)	$C_{Di}$ a 5°
		$C_{Di} = KC_L^2$
0.1	34.3	0.02107809
0.15	51.45	0.02117864
0.2	68.6	0.02132158
0.25	85.75	0.0215092
0.3	102.9	0.02174461
0.35	120.05	0.02203187
0.4	137.2	0.02237623
0.45	154.35	0.02278434
0.5	171.5	0.02326472
0.55	188.65	0.02382821
0.6	205.8	0.02448882
0.65	222.95	0.02526474

---

0.7	240.1	0.02618007
0.75	257.25	0.02726726
0.8	274.4	0.02857102
0.85	291.55	0.03015481
0.9	308.7	0.01198698
0.95	325.85	0.01724876
1	343	0.02967149
1.05	360.15	0.04462645
1.1	377.3	0.06211365
1.15	394.45	0.08213309
1.2	411.6	0.08588731
1.25	428.75	0.07921041
1.3	445.9	0.07459599
1.35	463.05	0.07120849
1.4	480.2	0.06861365
1.45	497.35	0.06656214
1.5	514.5	0.06490001
1.55	531.65	0.06352685
1.6	548.8	0.0623742
1.65	565.95	0.06139372
1.7	583.1	0.06055027
1.75	600.25	0.05981768
1.8	617.4	0.05917602
1.85	634.55	0.05860988
1.9	651.7	0.0581071
1.95	668.85	0.05765801
2	686	0.05725479

Mach	e	K100	<u>Canard</u>			C <sub>Di</sub> a 5°
			K0	K	K=f(e)	
0.1	1.11769613	0.14213965	0.30488377	0.15841406	0.127172	0.05191171
0.15			0.30421921	0.1583476		0.05211688
0.2			0.3032848	0.15825416		0.05240757
0.25			0.3020764	0.15813332		0.05278736
0.3			0.30058855	0.15798454		0.05326107
0.35			0.29881429	0.15780711		0.05383492
0.4			0.29674504	0.15760019		0.05451675
0.45			0.29437036	0.15736272		0.05531639
0.5			0.29167764	0.15709345		0.05624604
0.55			0.28865172	0.15679086		0.05732085
0.6			0.28527439	0.15645312		0.0585597
0.65			0.28152373	0.15607806		0.05998629
0.7			0.27737321	0.155663		0.06163063
0.75			0.27279041	0.15520472		0.06353118
0.8			0.26773535	0.15469922		0.06573806
0.85			0.26215798	0.15414148		0.06831775
0.9			0.25599443	0.15352513		0.07136062
0.95			0.2491614	0.15284182		0.07499302
1			0.25641026	0.15356671		0.07114862
1.05			0.125	0.14042568		0.27375792
1.1			0.09090909	0.13701659		0.50500853
1.15			0.07692308	0.13561799		0.69814268

1.2	0.07491128	0.13541681	0.73505237
1.25	0.07859717	0.1357854	0.66954443
1.3	0.08145822	0.13607151	0.62465108
1.35	0.08375132	0.13630082	0.59190945
1.4	0.08563325	0.13648901	0.56696071
1.45	0.08720633	0.13664632	0.54732093
1.5	0.08854073	0.13677976	0.53146637
1.55	0.08968645	0.13689433	0.51840828
1.6	0.09068024	0.13699371	0.50747597
1.65	0.09154977	0.13708066	0.49819789
1.7	0.09231633	0.13715732	0.49023251
1.75	0.0929966	0.13722534	0.48332624
1.8	0.09360383	0.13728607	0.47728673
1.85	0.09414871	0.13734056	0.47196542
1.9	0.09463995	0.13738968	0.46724569
1.95	0.0950847	0.13743415	0.46303471
2	0.09548894	0.13747458	0.45925767

### Arrastre Parásito Final

Mach      Velocidad  
(m/s)

$C_{D0}$  total

$$(C_{D_0})_{\text{Subsónico}} = \frac{\sum(C_{Df} FFS_h)}{S}, C_{D_{0ss}} = \frac{\sum(C_{Dfc} S_{hc})}{S_{ref}} + C_{D_{och}}$$

0.1	34.3	0.00203186
0.15	51.45	0.0020305
0.2	68.6	0.00202332
0.25	85.75	0.00201515
0.3	102.9	0.00200717
0.35	120.05	0.00199967
0.4	137.2	0.00199272
0.45	154.35	0.00198628
0.5	171.5	0.00198031
0.55	188.65	0.00197476
0.6	205.8	0.00196959
0.65	222.95	0.00196476
0.7	240.1	0.00196022
0.75	257.25	0.00195595
0.8	274.4	0.00195192
0.85	291.55	0.00194811
0.9	308.7	0.00394449
0.95	325.85	0.01
1	343	0.023
1.05	360.15	0.04
1.1	377.3	0.06
1.15	394.45	0.075
1.2	411.6	0.05186581
1.25	428.75	0.05069523
1.3	445.9	0.05011764
1.35	463.05	0.04965365
1.4	480.2	0.0492505

---

1.45	497.35	0.04888718
1.5	514.5	0.04855266
1.55	531.65	0.04824033
1.6	548.8	0.0479458
1.65	565.95	0.04766601
1.7	583.1	0.0473987
1.75	600.25	0.04714215
1.8	617.4	0.04689503
1.85	634.55	0.04665625
1.9	651.7	0.04642493
1.95	668.85	0.04620037
2	686	0.04598193

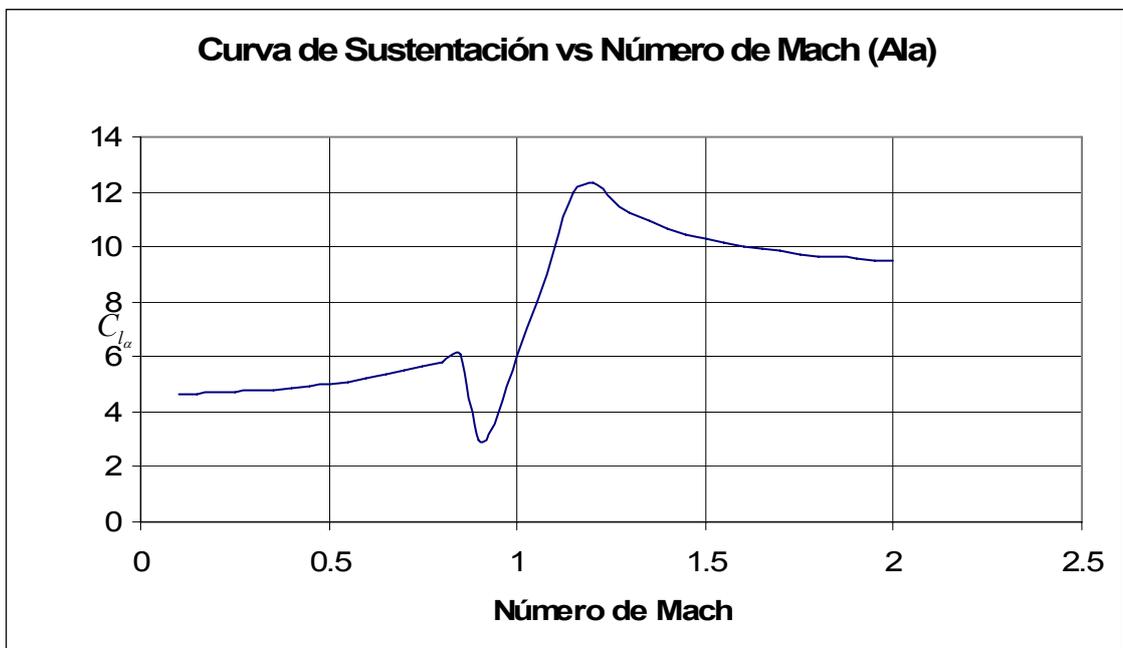
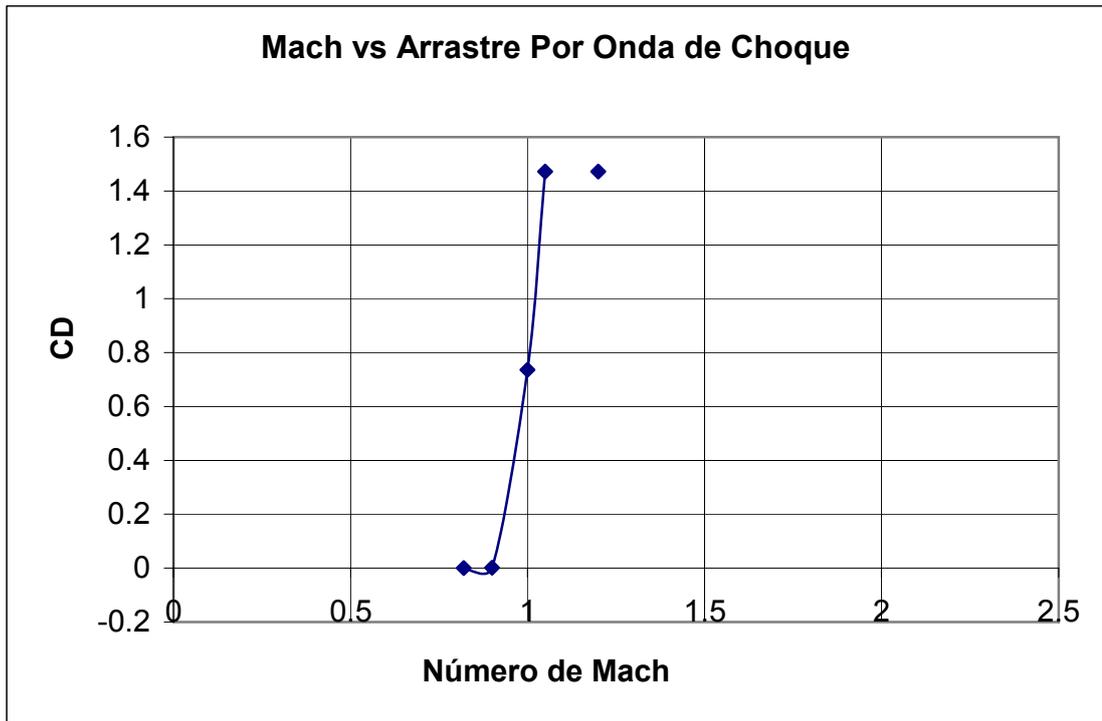
**Arrastre Total Final a  $\alpha=5^\circ$** 

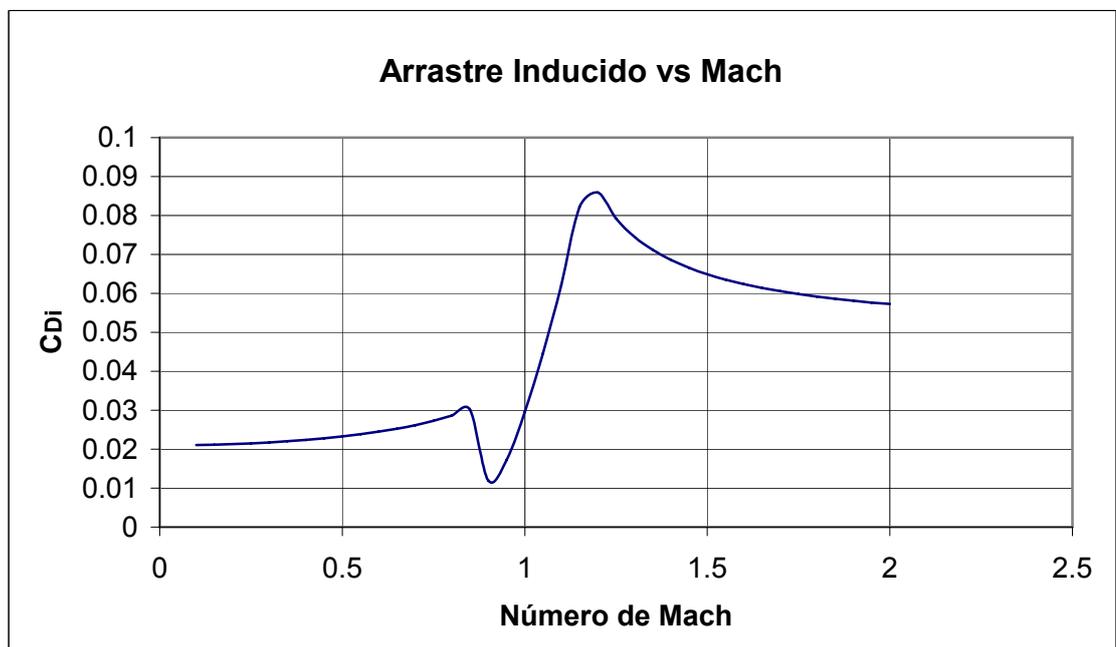
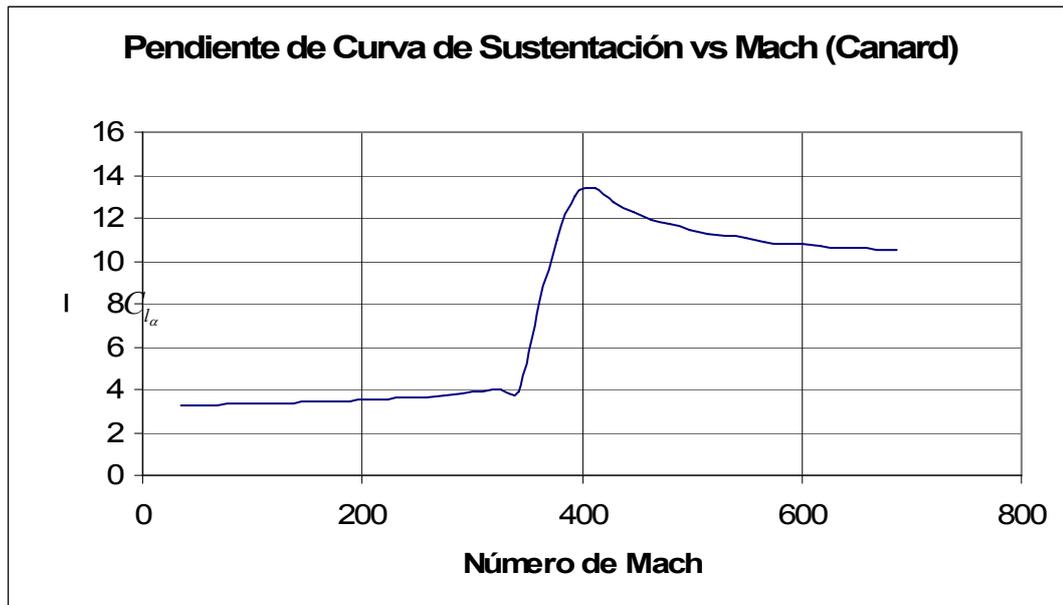
<b>Mach</b>	<b>Velocidad</b>	<b><math>C_{D\alpha=5^\circ}</math></b>
0.1	34.3	0.02310996
0.15	51.45	0.02320914
0.2	68.6	0.0233449
0.25	85.75	0.02352435
0.3	102.9	0.02375178
0.35	120.05	0.02403155
0.4	137.2	0.02436894
0.45	154.35	0.02477062
0.5	171.5	0.02524503
0.55	188.65	0.02580298
0.6	205.8	0.02645841
0.65	222.95	0.0272295
0.7	240.1	0.0281403
0.75	257.25	0.02922321
0.8	274.4	0.03052294
0.85	291.55	0.03210292
0.9	308.7	0.01593147
0.95	325.85	0.02724876
1	343	0.05267149
1.05	360.15	0.08462645
1.1	377.3	0.12211365
1.15	394.45	0.15713309
1.2	411.6	0.13775313
1.25	428.75	0.12990564
1.3	445.9	0.12471363
1.35	463.05	0.12086214
1.4	480.2	0.11786416
1.45	497.35	0.11544931
1.5	514.5	0.11345268
1.55	531.65	0.11176718
1.6	548.8	0.11032001
1.65	565.95	0.10905973
1.7	583.1	0.10794897
1.75	600.25	0.10695983
1.8	617.4	0.10607105
1.85	634.55	0.10526612
1.9	651.7	0.10453204

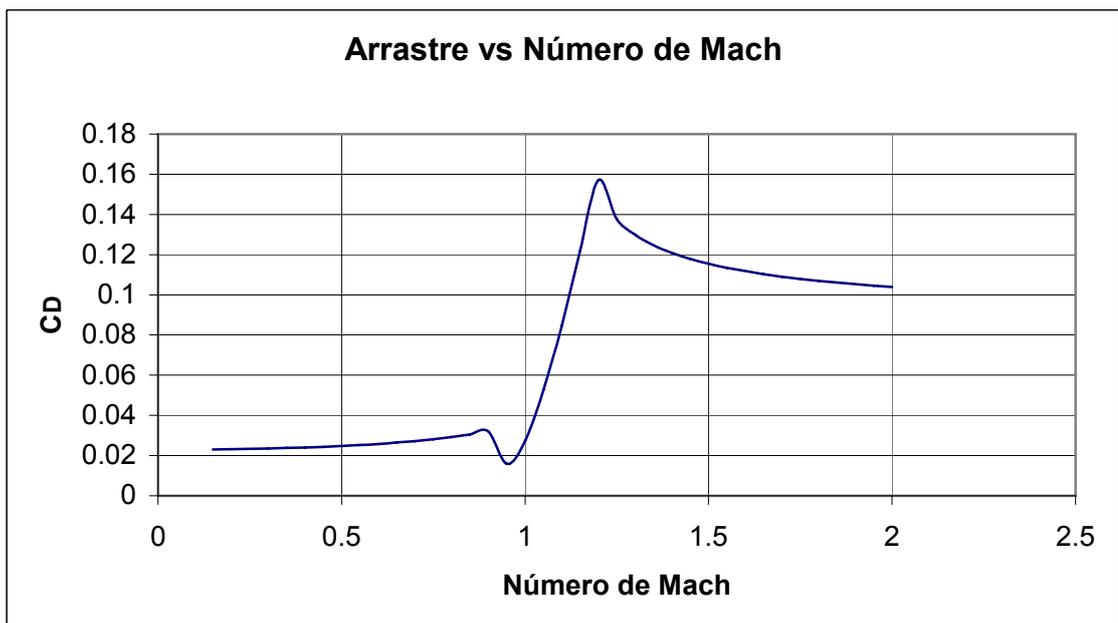
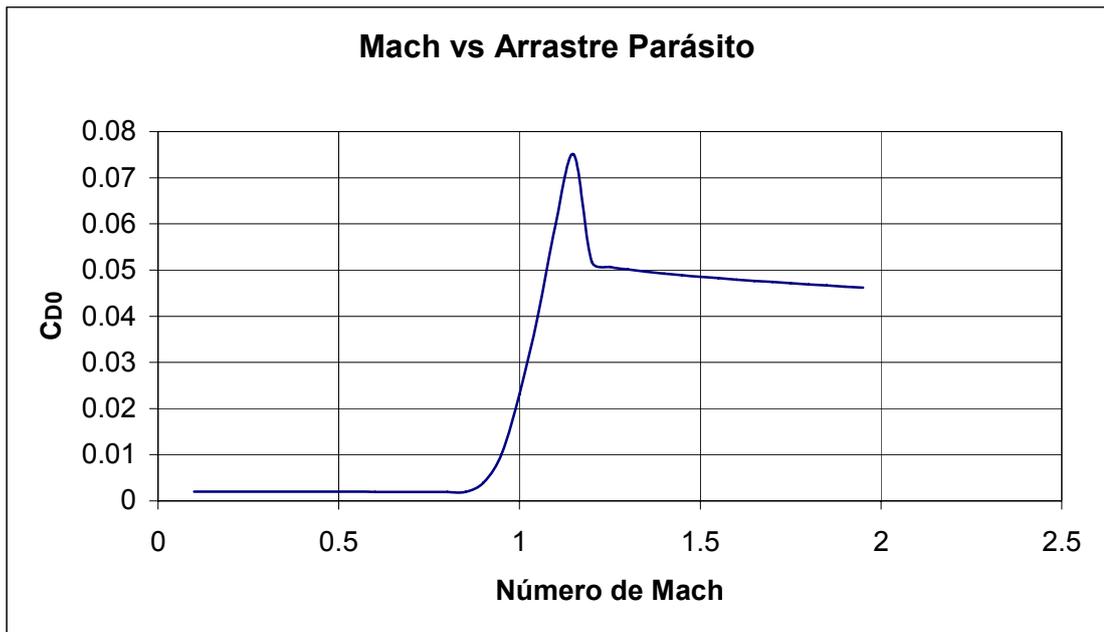
1.95	668.85	0.10385838
2	686	0.10323672

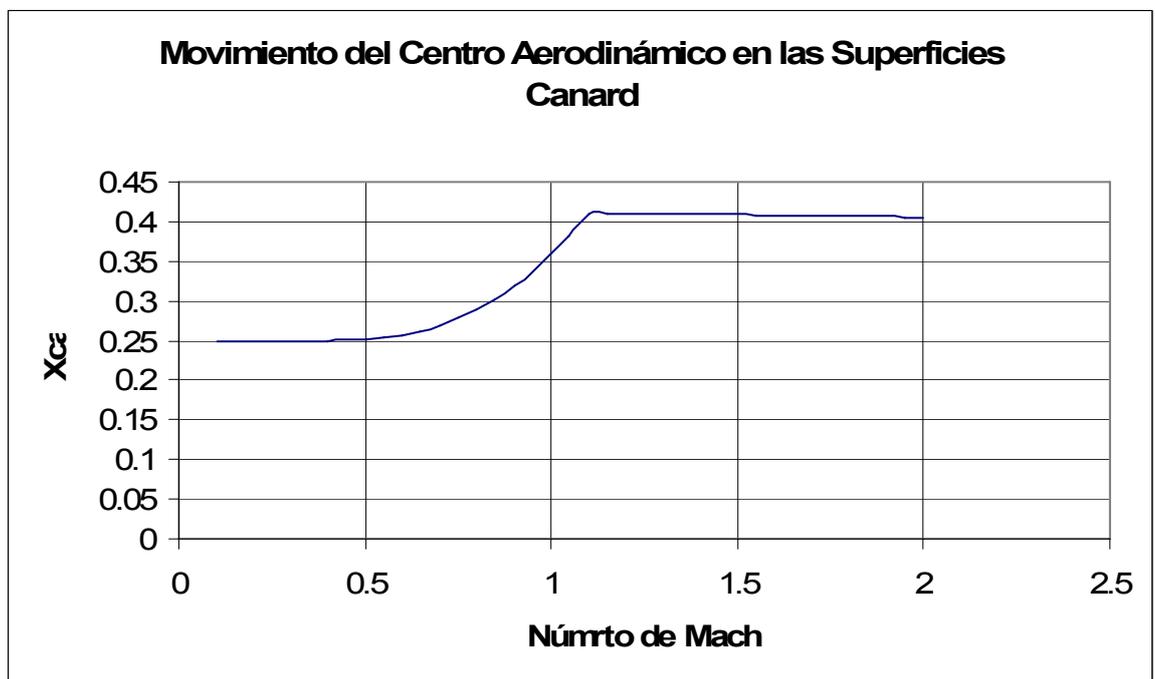
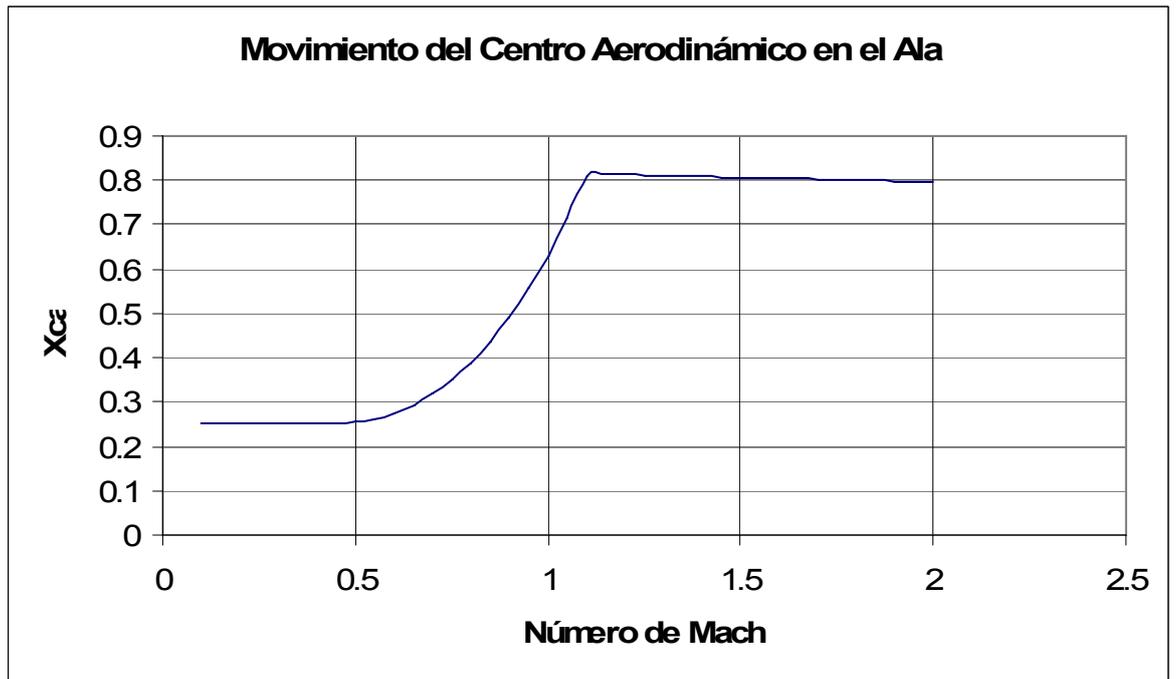
<b>Movimiento del Centro Aerodinámico</b>				
Mach	Velocidad	$\Delta x_{ca}$	Xca(Ala)	Xca(canard)
$\Delta X_{ca} = 0.26(M - 0.4)^{2.5}$				
0.1	34.3	0	0.25	0.25
0.15	51.45	0	0.25	0.25
0.2	68.6	0	0.25	0.25
0.25	85.75	0	0.25	0.25
0.3	102.9	0	0.25	0.25
0.35	120.05	0	0.25	0.25
0.4	137.2	0	0.25	0.25
0.45	154.35	0.000145344	0.25076315	0.2502175
0.5	171.5	0.000822192	0.254317	0.25123038
0.55	188.65	0.002265695	0.26189626	0.25339054
0.6	205.8	0.004651021	0.27442065	0.2569601
0.65	222.95	0.008125	0.29266112	0.26215879
0.7	240.1	0.012816708	0.31729541	0.26917977
0.75	257.25	0.018842714	0.34893555	0.27819749
0.8	274.4	0.02631015	0.38814407	0.28937225
0.85	291.55	0.035318694	0.43544433	0.30285323
0.9	308.7	0.045961941	0.49132776	0.31878049
0.95	325.85	0.058328401	0.5562591	0.33728649
1	343	0.072502248	0.6306803	0.35849717
1.05	360.15	0.088563901	0.71501362	0.38253289
1.1	377.3	0.106590487	0.80966401	0.40950907
$\Delta X_{ca} = 0.112 - 0.004M$				
1.15	394.45	0.1074	0.81391444	0.41072048
1.2	411.6	0.1072	0.81286432	0.41042119
1.25	428.75	0.107	0.8118142	0.41012189
1.3	445.9	0.1068	0.81076408	0.4098226
1.35	463.05	0.1066	0.80971396	0.40952331
1.4	480.2	0.1064	0.80866384	0.40922401
1.45	497.35	0.1062	0.80761372	0.40892472
1.5	514.5	0.106	0.8065636	0.40862543
1.55	531.65	0.1058	0.80551348	0.40832613
1.6	548.8	0.1056	0.80446336	0.40802684
1.65	565.95	0.1054	0.80341324	0.40772755
1.7	583.1	0.1052	0.80236312	0.40742825
1.75	600.25	0.105	0.801313	0.40712896
1.8	617.4	0.1048	0.80026288	0.40682967
1.85	634.55	0.1046	0.79921276	0.40653037
1.9	651.7	0.1044	0.79816264	0.40623108
1.95	668.85	0.1042	0.79711252	0.40593179
2	686	0.104	0.7960624	0.40563249

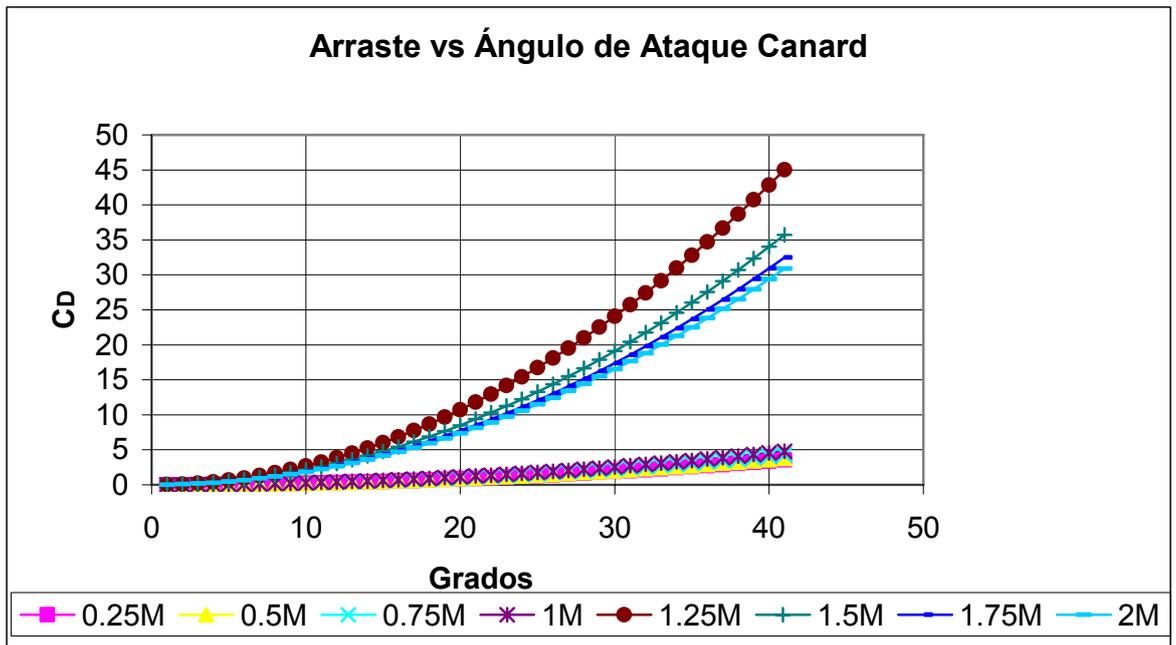
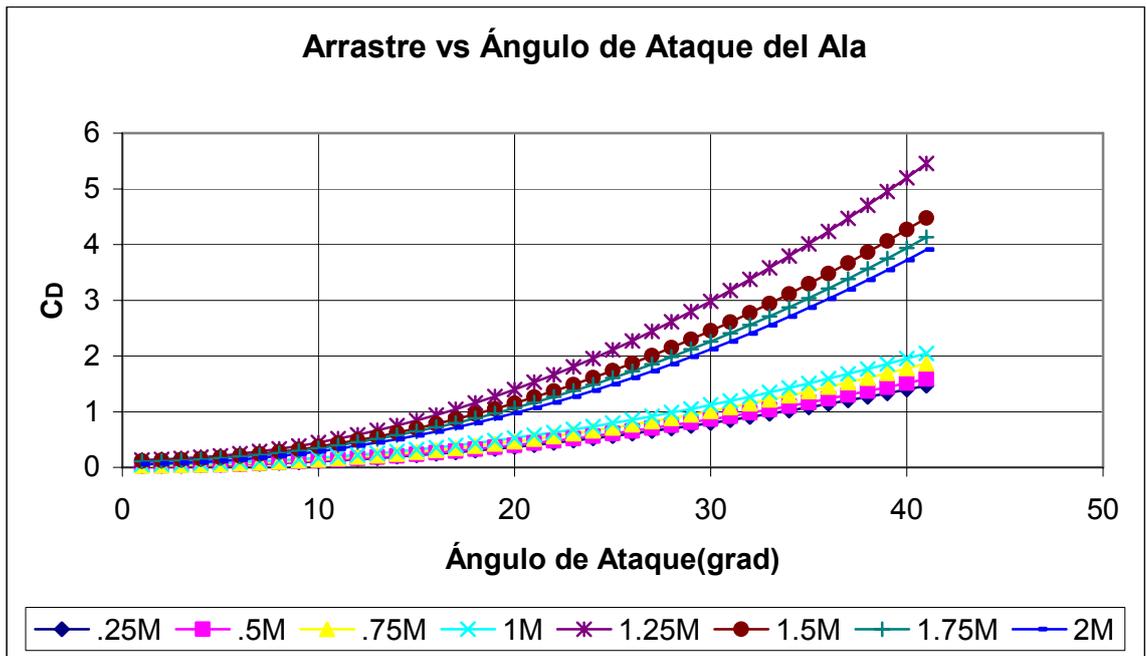
## Gráficos

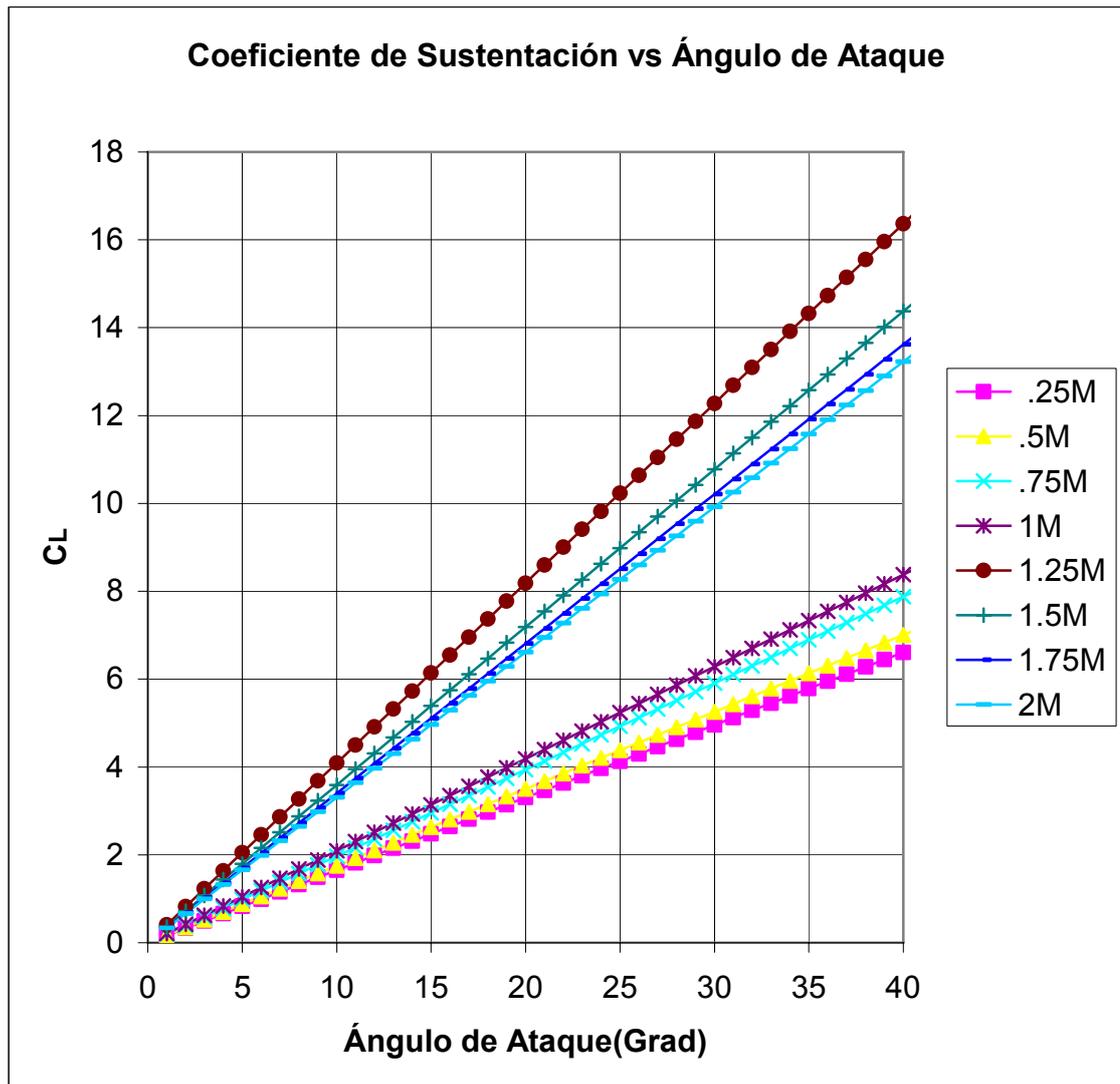












---

# BIBLIOGRAFÍA

- 1 Jack N. Nielsen "Missile Aerodynamics", Mc Graw Hill, New York, 1960,
- 2 L. M. Milne Thomson "Theoretical Aerodynamics", U.S.A. ,1966
- 3 Richard von Mises "Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow", Dover Publications, 1958
- 4 Holt Ashley, Marten Landahl "Aerodynamic of Wings And Bodies", Dover Publications, 1985
- 5 S. Chin "Missile Configuration Design", McGraw-Hill, New York, 1961
- 6 Edited by Michel R. Mendenhall "Tactical Missile Aerodynamics: Prediction Methodology Volume 142"  
AIAA
- 7 N. F. Krasnov "Aerodinámica en Preguntas Y Problemas"
- 8 William C. Pitts, Jack N. Nielsen y George E. Kaattari "Lift And Center Of Pressure Of Wing-Body-Tail Combinations at Subsonic, Transonic, and Supersonic Speeds" Technical Report 1307 NACA.
- 9 John R. Sprwiter "The Aerodynamic forces on Slender Plane And Cruciform-Wing And Body Combinations" Technical Report 962 NACA
- 10 Fleeman, E.L., "Tactical Missile Design," AIAA, Reston, VA, 2001
- 11 Brian L. Stevens and Frank L. Lewis "Aircraft Control and Simulation", Wiley, U.S.A., 2003
- 12 Michel J. Hensch, "Tactical Missile Aerodynamics: General Topics Vol. 141", AIAA
- 13 Bandu N. Pamadi "Performance, Stability, Dynamics and Control of Airplanes, AIAA, Reston Virginia, 2004
- 14 Bernard Etkin y Lloyd duff Reis "Dynamics of Flight. Stability and Control", Wiley and Sons Inc., U.S.A., 1995
- 15 Stanley I. Grossman "Álgebra Lineal", Mc Graw Hill, U.S.A., 1999
- 16 McCormick Aerodynamics, Aeronautics and Flight Mechanics, Wiley & Sons, New York, 1994
- 17 Daniel P. Raymer "Aircraft Design: A Conceptual Approach", AIAA, Reston Virginia, 1999
- 18 Clinton E. Brown "Lift and Drag Of Thin Triangular Wings at Supersonic Speeds" Technical Report No. 839 NACA
- 19 Peter H. Zipfel "Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamic", AIAA, New York, 2000
- 20 John H. Blakelock. "Automatic Control of Aircraft and Missiles". Second Edition, Wiley & Sons, U.S.A., 1991
- 21 Sergio Domínguez, Pascual Campoy, José María Sebastián, Agustín Jiménez "Control en el Espacio de Estado", Prentice Hall, España, 2001
- 22 Martín Cuesta Álvarez "Motores de Reacción, Tecnología y Operación de Vuelo" Quinta Edición, Paraninfo, Madrid España, 2003