INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA

UNIDAD TICOMAN

CIENCIAS DE LA TIERRA

MEMORIA DE EXPERIENCIA PROFESIONAL

“FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS APLICADOS A LA GRAVIMETRÍA”

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO GEOFÍSICO

PRESENTA

HÉCTOR VILLAFRANCO MARTÍNEZ

ASESOR: ING. ROBERTO LOO GUZMÁN

MÉXICO, D.F. NOVIEMBRE DE 2011

México, D. F., a 9 de noviembre de 2011

No. de Oficio: E. P. y T.524.2011

ASUNTO: SE COMUNICA TEMA DE TESIS PROFESIONAL

C. HÉCTOR VILLAFRANCO MARTÍNEZ
PASANTE DE LA CARRERA DE
INGENIERÍA GEOFÍSICA
P R E S E N T E .

A continuación comunico a usted, el tema del trabajo que deberá desarrollar para su examen profesional, por la opción de **MEMORIA DE EXPERIENCIA PROFESIONAL:**

"FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS APLICADOS A LA GRAVIMETRÍA"

Hago de su conocimiento que tiene seis meses a partir de esta fecha para desarrollarlo, de acuerdo al reglamento de Titulación del I. P. N.

A t e n t a m e n t e
"LA TÉCNICA AL SERVICIO DE LA PATRIA"

M. en C. EDUARDO PÉREZ FLORES
SUBDIRECTOR ACADÉMICO

EPFG*mdv.

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
IPN
E S I A
CIENCIAS DE LA TIERRA
• MÉXICO •
UNIDAD TICOMAN
SUBDIRECCIÓN ACADÉMICA

México D. F., a 10 de noviembre de 2011.

M. en C. EDUARDO PÉREZ FLORES
SUBDIRECTOR ACADÉMICO
P R E S E N T E

Por este conducto, hacemos constar que el Tema de Tesis Profesional, por la opción de **Memoria de Experiencia Profesional**, presentado por el pasante de la carrera de **Ingeniería Geofísica**, **C. HÉCTOR VILLAFRANCO MARTÍNEZ,** fue revisado y aprobado por los suscritos considerándolo ampliamente desarrollado, por lo tanto esa Subdirección a su cargo, puede señalar fecha para realizar el Examen Oral.

TITULARES

ING. GABRIELA DE LOS SANTOS CANO

ING. ROBERTO LOO GUZMÁN

ING. BONIFACIO EULOGIO LUNA

M. en C. DIDIER OJEDA GUILLEN

ING. IRAIS MARÍA LIZETTE ORTIZ PRIETO

México D. F., a 31 de octubre de 2011.

No. de Oficio: E. P. y T. 512.2011.

ASUNTO: SE SOLICITA TEMA
DE TESIS Y ASESORIA

ING. GABRIELA DE LOS SANTOS CANO
ING. ROBERTO LOO GUZMÁN
ING. IRAIS MARIA LIZETTE ORTÍZ PRIETO
ING. BONIFACIO EULOGIO LUNA
M. en C. DIDIER OJEDA GUILLEN
PRESENTE.

Con relación a la solicitud de titulación del C. **HÉCTOR VILLAFRANCO MARTÍNEZ**, pasante de la Carrera de **Ingeniería Geofísica**, por la opción de **MEMORIA DE EXPERIENCIA PROFESIONAL** y conforme al artículo No. 8 del Reglamento de Titulación Profesional, solicito a ustedes se sirvan asesorarlo con respecto al informe escrito que deberá desarrollar; del cual posteriormente hará una exposición oral como examen profesional.

Dicho informe será sancionado previamente por la academia correspondiente, y en su caso aprobado por la Subdirección Académica.

Cabe señalar que el informe escrito deberá ser entregado, en esta oficina en un plazo no mayor a seis meses a partir de la fecha del presente.

Atentamente
"LA TÉCNICA AL SERVICIO DE LA PATRIA"

M. en C. EDUARDO PÉREZ FLORES
SUBDIRECTOR ACADÉMICO

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
MEXICO
UNIDAD TICOMAN
SUBDIRECCIÓN ACADÉMICA

C.c.p. Ing. Efrén Murillo Cruz.- Jefe del Departamento de Innovación Educativa.
Interesado

EPF*mdv.

AGRADECIMIENTOS

A LOS CREADORES DE MI VIDA

A MI FAMILIA MATERNA
MI MADRE
MIS HERMANOS
LOS HIJOS DE MIS HERMANOS

A MI FAMILIA MATRIMONIAL
MI ESPOSA
MIS HIJOS
MIS NIETOS

A TODOS LOS COMPAÑEROS QUE ME IMPULSARON

A ELLOS TAN ESPECIALES QUE SABEN ESCUCHAR Y SON MUY HUMANITARIOS
AL ING. EFRÉN MURILLO CRUZ Y
AL ING. ROBERTO LOO GUZMÁN

GRACIAS

RESUMEN

Las matemáticas son una disciplina difícil, abstracta y de actividades mentales que difícilmente se relacionan con la realidad; por lo que las opiniones y expresiones en casi la mayoría de los estudiantes y no estudiantes han sido de rechazo.

Con los conocimientos matemáticos básicos se adquiere la habilidad para describir, desarrollar e interpretar problemas; también se favorece la reconstrucción de la realidad cuando aprende a escuchar argumentos y crear sus propios modelos matemáticos.

La presente tesis es una aplicación de los conceptos matemáticos elementales en el área de la prospección gravimétrica, demostrando así la importancia de un análisis cuantitativo en un área en particular de Ciencias de la Tierra.

Un modelo matemático involucra conceptos que pueden ser amplios, diversos y complejos; esto último se debe a la gran cantidad de conocimientos que los estudiantes han adquirido en su formación académica hasta el momento de iniciar su preparación profesional.

ABSTRACT

Mathematics is difficult and abstract; it requires mental abilities that are non-related with reality thus, the opinions and expressions of students and no students are negative about it.
With a background (basic) of mathematics, one acquire the ability for describing, developing and interpreting problems; also it helps the reconstruction of reality during the process of learning and listening advices necessary for building its own model.

This thesis is an application of the basic mathematics models to gravimetric prospecting area; it shows the importance of a quantitative analysis in a special area of Earth Sciences.

A mathematical model involves concepts that can be complex, this due the great amount of knowledge acquired by the student during its academic process until the moment in which they begin their professional career.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo es un recordatorio a todo estudiante de ciencias, sobre los fundamentos básicos de las matemáticas aplicadas a la Geofísica.

La Geofísica es un producto de varias disciplinas básicas tales como la Física, la Química y las Matemáticas.

La Geofísica como una parte de ciencias de la Tierra, estudia los fenómenos físicos que se verifican sobre toda la Tierra o sobre una parte de ella.

La Geofísica también se puede definir como la ciencia que estudia los campos físicos ligados a la Tierra.

Estos campos físicos tienen entre sí una influencia; ciencias que nacieron independientes como la Gravimetría, Geomagnetismo, y otras, que se ocupan de los campos de gravedad, magnetismo, etcétera.

La Geofísica es una ciencia natural cuyo fin es el estudio de la Tierra, pero emplea el algoritmo matemático como base de estudio; de lo anterior se deduce las relaciones que la Geofísica debe guardar con las Matemáticas.

La Geofísica tiene como fin el estudio de la naturaleza y como medio para realizarlo el algoritmo matemático.

En su sentido más amplio, la Geofísica estudia no sólo el Globo Terrestre, sino la región del espacio que ligada al mismo le acompaña en su movimiento de traslación, incluyendo la Luna.

Esperando les sirva a ustedes, estudiantes de ciencias de la Tierra este humilde trabajo.

Gracias

BASES MATEMÁTICAS

1 Números, variables y álgebra

1.1 Conceptos

La Geofísica, en común con las otras ciencias físicas y otras ciencias aplicadas,comprende:

i) **experimentos**: la observación de fenómenos físicos y la medición de cantidades físicas y

ii) **teoría**: la interpretación de los resultados de los experimentos, la correlación de un conjunto de medidas con otros conjuntos de medidas, el descubrimiento y la aplicación de reglas para racionalizar e interpretar esas correlaciones.

Ambos, experimentos y teoría, suponen la manipulación de números y de los símbolos empleados para representar los números y las cantidades físicas.

La función contiene dos tipos de cantidades .

Constantes: una cantidad cuyo valor es fijo, ejemplo, la constante gravitacional G = 6.67 x $10^{-11}\frac{m^3}{kg \cdot seg^2}$ es una cantidad física constante. Un número constante es cualquier número específico.

Variables: una cantidad que puede tomar cualquier valor dentro de un conjunto de valores permitidos.

Podemos distinguir dos tipos de variables.

variable independiente es una cuyo valor no depende del valor de ninguna otra variable.

variable dependiente su valor depende de los valores de las variables independientes.

Cantidad física: es siempre el producto de dos cantidades, un número y una **unidad**.

Por ejemplo, $\sigma = -0.25\frac{gr}{cm^3}$, el número es –0.25, y la unidad es $\frac{gr}{cm^3}$.

En aplicaciones de matemáticas en ciencias, los números por sí mismos no tienen sentido salvo que se especifiquen las unidades de las cantidades físicas. Es importante saber cuáles son esas unidades, pero las matemáticas no dependen de ellas.

Las unidades obedecen las leyes ordinarias del álgebra y pueden manipularse como números.

Por ejemplo, gal = $10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{seg}^2}$, las unidades son $\frac{\text{m}}{\text{seg}^2}$

1.2 Números reales

El concepto de número, y de contar, se aprende muy pronto en la vida, y casi todas las mediciones en el mundo físico implican de un modo u otro números y cuentas. Los números más sencillos son los **números naturales**, números cardinales o números enteros sin signo. Ejemplo 1, 2, 3, ... , $n-1$

Se comprueba fácilmente que la suma o la multiplicación de dos números naturales siempre da un número natural, mientras que la resta y la división no necesariamente. Por ejemplo: 5 – 3 = 2, pero 5 – 6 no es un número natural. Un conjunto de números para el que la *resta* siempre es válida es el conjunto de los **enteros**, que consiste en todos los números cardinales positivos y negativos más el cero.

$$\ldots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots$$

Las operaciones de suma y resta de enteros tanto positivos como negativos son posibles gracias a las reglas:

$$m + (-n) = m - n$$
$$m - (-n) = m + n$$

de manera que, la resta de un número negativo es equivalente a la suma del correspondiente número positivo.

Ejemplo

$2 + (-3) = 2 - 3 = -1$
$2 - (-3) = 2 + 3 = 5$

La operación de multiplicación es posible gracias a las reglas:

$$(-m) \times (-n) = +(m \times n)$$
$$(-m) \times (+n) = -(m \times n)$$

Ejemplo

$(-2) \times (-3) = 2 \times 3 = 6$
$(2) \times (-3) = -2 \times 3 = -6$

Las letras m y n son símbolos empleados para representar *cualquier* par de enteros. Son **variables enteras** , cuyos valores pertenecen al conjunto (infinito) de los enteros.

La división de un entero por otro no da siempre un entero. Por ejemplo $6 \div 3 = 2$, pero $6 \div 4$ no es un entero. Un conjunto de números para el que la *división* siempre es válida es el conjunto de los **números racionales** , que consiste en todos los números m / n donde m y n son enteros. La expresión m / n se lee "m partido por n" y es la notación común para "m dividido por n". La definición excluye el caso n = 0 porque la división por cero no esta definida, pero incluye el caso de los enteros puesto que un entero m puede escribirse como $m / 1$.

Las reglas para la combinación de números racionales (y, en general, de fracciones) son

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$$

$$\frac{m}{n} \text{ x } \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$$

$$\frac{m}{n} \div \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \text{ x } \frac{q}{p} = \frac{mq}{np}$$

donde , mq significa m x q.

Ejemplo

Suma de fracciones

1) Sume $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$

El número **un medio** es igual a **dos cuartos** y puede ser sumado a **un cuarto** para dar **tres cuartos** :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

El valor de una fracción como 1/2 no cambia si el numerador y el denominador son ambos multiplicados por el mismo número :

$$\frac{1}{2}=\frac{1\,x\,2}{2\,x\,2}=\frac{2}{4}$$

y el método general de sumar fracciones es :

i) hallar un denominador común para las fracciones por sumar ,
ii) expresar todas las fracciones en términos de ese denominador común ,
iii) sumar .

2. Sume $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$

Un denominador común es 3 x 5 = 15 .Por lo tanto

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\,x\,5}{3\,x\,5}+\frac{3\,x\,4}{3\,x\,5}=\frac{10}{15}+\frac{12}{15}=\frac{22}{15}$$

3. Sume $\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{6}$
Un denominador común es 4 x 6 =24 , pero el *mínimo* (menor) denominador común es 12

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=\frac{3}{12}+\frac{10}{12}=\frac{13}{12}$$

Ejemplo Multiplicación de fracciones

$$\frac{2}{3}x\frac{4}{5}=\frac{2\,x\,4}{3\,x\,5}=\frac{8}{15}$$

Ejemplo División de fracciones

$$\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}=\frac{2}{3}x\frac{5}{4}=\frac{10}{12}$$

El número 10/12 puede simplificarse “dividiendo arriba y abajo” por el factor común 2
10/12 = 5/6

Todo número racional es la solución de una ecuación lineal

$$mx = n$$

donde m y n son enteros. La solución de la ecuación es $x = n/m$. Sin embargo , no todos los números son racionales. Por ejemplo, una solución de la ecuación cuadratica

$$x^2 = 2$$

es $x = \sqrt{2}$, la raíz cuadrada positiva de 2 (la otra solución es $-\sqrt{2}$) , y este número no puede escribirse como un número racional $4m/n$. Se dice que es un **número irracional** .

Otros números irracionales se obtienen como soluciones de la ecuación cuadrática más general

$$m\,x^2 + n\,x + p = 0 \ ,$$

donde m , n y p son enteros arbitrarios, así como de otras ecuaciones algebraicas de órdenes superiores . Por ejemplo, una solución de ecuación cúbica

$$x^3 = 2$$

es la raíz cúbica de 2, $\sqrt[3]{2}$. Los números irracionales como $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{2}$ se llaman **sordos** .

Los números racionales e irracionales que se obtienen como soluciones de **ecuaciones algebraicas** del tipo

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n = 0$$

donde a_0 , a_1 , . . . a_n son enteros, se llaman **números algebraicos** . Estos números pueden expresarse de manera exacta mediante un número finito de números racionales y sordos. Existen otros tipos de números que no son algebraicos ; no se obtienen como soluciones de ninguna ecuación algebraica . Esos números son números irracionales llamados **números trascendentes** : “trascienden el poder de los métodos algebraicos” Los más conocidos y más importantes de ellos son el número de Euler e y el número arquimediano π .

Los números racionales y los irracionales forman el **continuo de números** . Todos juntos son llamados los **números reales** .

1.3 Representación decimal de los números

Éstos son los nueve caracteres de los Indios

9 8 7 6 5 4 3 2 1

con estos mismos nueve caracteres y con este signo 0 , que llaman los árabes sefir , se escribe cualquier número, como se demostrara más abajo .

En el sistema decimal de números, los diez dígitos 0 al 9(numerales ido-arábigos) se utilizan para el cero y los primeros nueve enteros positivos . El décimo entero positivo se representa por 10 . Un entero mayor, como “trescientos setenta y dos” se expresa en la forma

$$300 + 70 + 2 = 3x10^2 + 7x10 + 2$$

y se denota con el símbolo 372 , en el cual el valor de cada dígito depende de su posición dentro del símbolo del número. El sistema decimal tiene **base** 10, y es el único sistema en uso general.

Auque los números racionales pueden siempre expresarse exactamente como cocientes de enteros, esto no ocurre con los números irracionales. Para efectuar los cálculos , todo número que no es entero se expresa convenientemente como una **fracción decimal** , por ejemplo : 5/4 = 1.25 La forma general de una fracción decimal consiste en un entero a la izquierda del punto decimal , la parte entera del número , y uno o más dígitos a la derecha del punto decimal, la parte decimal o fraccionaria del número. El valor de cada dígito viene determinado por su posición . Por ejemplo

$$\begin{aligned} 234.567 &= 200 + 30 + 4 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100} + \frac{7}{1000} \\ &= 2x10^2 + 3x10^1 + 4x10^0 + 5x10^{-1} + 6x10^{-2} + 7x10^{-3} \quad , \end{aligned}$$

donde $10^0 = 1$

Un número con un número finito de dígitos tras (a la derecha de) la coma decimal puede escribirse siempre en forma racional m/n . Por ejemplo 1.234 = 1234 / 1000 . Sin embargo, lo contrario no siempre es cierto. El número 1 /3 no puede expresarse exactamente como una fracción decimal finita :

$$\frac{1}{3} = 0.3333...$$

los puntos suspensivos indican que la fracción debe extenderse de manera indefinida. Redondeando a cuatro cifras decimales, el número tiene por cotas inferior y superior 0.3333 y 0.3334

$$0.3333 < \frac{1}{3} < 0.3334$$

donde el símbolo $<$ significa "menor que" . Otros símbolos del mismo tipo son > para "mayor que" y $\leq$ para "menor o igual que". Otros ejemplos de fracciones decimales que no terminan son

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857..., \qquad \frac{1}{12} = 0.083333333333...$$

En ambos casos se repite indefinidamente una secuencia finita de dígitos tras la coma decimal, ya sea inmediatamente después de la coma decimal, como la secuencia 142857 en 1/7 , o después de un número finito de dígitos previos, como 3 en 1/12. Ésta es una propiedad característica de los números racionales.

Un número irracional no puede ser expresado exactamente. El número $\sqrt{2}$ tiene como valor aproximado con 16 cifras significativas

$$\sqrt{2} = 1.414113562373095...$$

y puede ser calculado hasta cualquier precisión deseada por medio de un método numérico como el de Newton-Raphson . En contraste con el caso racional, los dígitos tras la coma decimal no muestran una secuencia que se repita.

El número arquimediano π

El número π se define como la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro. Es un número trascendente y no puede ser representado exactamente mediante un número finito de dígitos. Su valor ha sido calculado con muchas cifras significativas. Euler lo dio con 127 cifras decimales en 1748. Su valor con 16 cifras significativas es

$$\pi = 3.141592653589793...$$

El valor de π ha sido de importancia práctica desde hace miles de años. Por ejemplo, un Manuscrito egipcio de aproximadamente 1650 a.C.(el papiro Rhind del Museo Británico de Londres) contiene una receta para cálculo del volumen de un silo cilíndrico de la cual se deduce el valor aproximado 256/81 $\approx$ 3.160 Arquímedes usó por primera vez un método para generar aproximaciones precisas, determinando las cotas

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} ,$$

y la cota superior tiene un error de solo 2 partes por mil.

El número e de Euler

El número e se define mediante la "serie infinita"

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$
$$e = 2.718281828459045\ldots$$

la cantidad $n!$ (que se lee "n factorial") se denomina **factorial** de n, y se define para enteros positivos como

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n \,,$$

por ejemplo:

3! = 1 x 2 x 3 = 6
4! = 1 x 2 x 3 x 4 = 24 .

Además, el factorial de cero se de fine como 0! = 1. El valor de e puede calcularse mediante la serie con cualquier precisión deseada. Hermite demostró en 1873 que es un número trascendente.

Ejemplo

Demuestre que la suma de los 10 primeros términos de la serie da un valor aproximado de e que es correcto al menos con 6 cifras significativas.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} + \frac{1}{362880} + \frac{1}{3628800} + \ldots$$

$\approx$ 1 + 1 + 0.5 + 0.1666667 + 0.041667 + 0.008333 + 0.001389 + 0.000198 + 0.000025 + 0.000003 + 0.0000003

$\approx$ 2.71828

Cifras significativas y redondeo

En la práctica, la aritmética que trata sólo con enteros da resultados exactos(salvo que los números sean demasiado grandes para ser escritos). Más generalmente, un número en el sistema decimal se aproxima ya sea con un número dado de decimales, o con un número dado de cifras significativas, y el resultado de una operación aritmética es también aproximado. En la representación en **punto fijo**, todos los números se dan con un número fijo de decimales. Por ejemplo,

3.142

62.358

0.013

1.000

tienen todos 3 cifras decimales. En la representación en **punto flotante**, utilizada más generalmente en ciencias, los números se dan con un número fijo de “cifras significativas”, donde los ceros a la izquierda no cuentan. Por ejemplo,

$3210 = 0.3210 \times 10^4$

$003.210 = 0.3210 \times 10^1$

$0.003210 = 0.3210 \times 10^{-2}$

tienen todos 4 cifras significativas.

Un número cuya representación (decimal) exacta necesita más del número dado de dígitos se reduce de manera sencilla por **truncación**, esto es, suprimiendo o sustituyendo por ceros los dígitos superfluos a la derecha. Por ejemplo, con 4 cifras decimales, o 5 cifras significativas, 3.14159 se trunca a 3.1415. Truncar no es recomendable porque puede conducir a serios errores de cálculo. Una aproximación más sensata(precisa) de π con cinco cifras es 3.1416 y se obtiene por **redondeo**. Las reglas más comúnmente aceptadas para redondear son:

i) Si el primer dígito desechado es *mayor o igual a 5*, el dígito anterior se incrementa en 1 el número es redondeado al alza.

ii) Si el primer dígito desechado es *menor que 5*, el dígito anterior se deja como está. el número es redondeado a la baja. Por ejemplo, para 4, 3, 2 y 1 cifras decimales,

7.36284 es 7.3628 7.363 7.36 7.4

1.4. Números complejos

Las soluciones de ecuaciones algebraicas no son siempre número reales. Por ejemplo, las soluciones de la ecuación

$$x^2 = -1$$

no son ninguno de los números descritos en el Apartado 1.2. Se incorporan al sistema de números definiendo la raíz cuadrada de –1 como un nuevo número que se representa generalmente por el símbolo i con la propiedad

$$i^2 = -1$$

Las dos raíces cuadradas de un número real negativo arbitrario $-x^2$ son ix y $-ix$

Por ejemplo,

$$\sqrt{-16} = \sqrt{16} \times \sqrt{-1} = \pm 4i$$

Estos números se llaman **imaginarios** para distinguirlos de los números reales. Más generalmente, el número

$$z = x + iy$$

donde x e y son reales, se llama un **número complejo**.

1.5. Variables

En los apartados previos hemos usado símbolos(letras) para representar números Arbitrarios. Una cantidad que puede tomar cualquier valor escogido dentro de un conjunto de valores se llama una **variable**. Si $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ es un conjunto de objetos, no necesariamente números, entonces podemos definir mediante ese conjunto una variable x que tenga como valor cualquiera de los miembros del conjunto. El conjunto es el **dominio** de la variable. En teoría de números (reales), los objetos del conjunto son números reales, y una **variable real** puede tener como dominio o bien todo el continuo de los números reales o bien un subconjunto de éste. Si el dominio de la variable x es un intervalo desde a hasta b,

$$a \le x \le b\,,$$

entonces x es una **variable continua** en el intervalo y puede tomar cualquier valor en el intervalo continuo de valores desde a hasta b (incluidos a y b). Si el dominio consiste en un conjunto **discreto** de valores , por ejemplo los n números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, se dice entonces que x es una **variable discreta**. Si el dominio consiste en enteros, x es una **variable entera**.

Si el conjunto consiste en un único valor, entonces se dice que es una variable constante, o sencillamente una **constante**.

En las ciencias físicas se usan variables para representar números y cantidades físicas por igual. Las variables discretas aparecen normalmente cuando los objetos son *contados* por oposición a *medidos*. Típicamente , se emplea una variable discreta para contar y los objetos contados son una muestra de algún conjunto discreto. Sin embargo, a veces una cantidad física puede tener valores que en algunos casos pertenecen a un conjunto discreto y en otros a un conjunto continuo.

La importancia del concepto de variable se debe a que las variables se pueden utilizar para hacer afirmaciones sobre propiedades de conjuntos completos de números (u otros objetos) y a que permiten la formulación de un conjunto de reglas para manipular números. El conjunto de reglas se llama álgebra.

1.6. El álgebra de los números reales

Sean a, b y c variables reales cuyos valores pueden ser cualquier número real. Las reglas básicas para combinar dos números reales, el álgebra de números reales o aritmética, son

i) $a + b = b + a$ (ley conmutativa de la suma)

ii) $ab = ba$ (ley conmutativa de la multiplicación)

iii) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ley asociativa de la suma)

iv) $a(bc) = (ab)c$ (ley asociativa de la multiplicación)

v) $a(b + c) = ab + ac$ (ley distributiva)

Las operaciones de suma y multiplicación, y sus inversas, resta y división, se llaman operaciones aritméticas. Los símbolos +, -, x, y ÷(o bien /) se llaman operadores aritméticos.

El resultado de multiplicar dos números, $ab = a$ x b, se llama producto.

Ejemplo **Leyes de la aritmética** ($a = 2$, $b = 3$, $c = 4$)

i) 2 + 3 = 3 + 2 = 5

ii) 2 x 3 = 3 x 2 = 6

iii) 2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9 , y
(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9

iv) 2 x (3 x 4) = 2 x 12 = 24 , y

(2 x 3) x 4 = 6 x 4 = 24

v) 2 x (3 + 4) = 2 x 7 = 14 , y
(2 x 3) + (2 x 4) = 6 + 8 = 14

Estos ejemplos muestran el convenio de que las expresiones algebraicas(o aritméticas) entre paréntesis deben ser evaluadas primero.

Tres reglas definen las propiedades del cero y de la unidad:

vi) a + 0 = 0 + $a = a$ (suma de cero)

vii) a x 0 = 0 x a = 0 (multiplicación por cero)

viii) a x 1 = 1 x $a = a$ (multiplicación por la unidad)

Ya hemos visto que la resta de un número es lo mismo que la suma de su opuesto, y que la división por un número es lo mismo que multiplicar por su inverso. *Sin embargo* , la división entre cero no esta definida: no hay ningún número cuyo inverso sea cero. El número 1/ a para valores de a positivos, por ejemplo, se hace arbitrariamente grande cuando el valor de a se acerca a cero. Decimos que 1/ a **tiende a infinito** cuando a tiende a cero:

$$\frac{1}{a} \to \infty \quad \text{cuando} \quad a \to 0$$

Aunque representamos "infinito" por el símbolo ∞, no es un número. Si lo fuera, por las leyes de álgebra las ecuaciones 1/0 = ∞ y 2/0 = ∞ implicarían 1 = 2
El **valor absoluto** de un número real a se define como la raíz cuadrada positiva de a^2 , $|a| = +\sqrt{a^2}$ .Es la "magnitud" del número, igual a a si a es positivo, e igual a $-a$ si a es negativo:

$$|a| = +a \quad \text{si} \quad a > 0$$

$$|a| = -a \quad \text{si} \quad a < 0$$

Por ejemplo, $|3| = 3$ y $|-3| = 3$

La ley de los exponentes

Los números se escriben a menudo en la forma a^m, donde a se llama la **base** y m el **exponente**. Por ejemplo, $100 = 10^2$, ó $16 = 2^4$. Cuando el exponente m es un entero positivo, el número a^m se define como la m-ésima potencia de a y , para números reales, a puede ser cualquier número tanto positivo como negativo. Por ejemplo,

$a^3 = a \times a \times a$, $(-a)^3 = (a) \times (a) \times (a) = (-1)^3 \times a^3 = -a^3$

También se puede definir números con exponentes negativos o no enteros, y la regla básica para la combinación de tales números es

ix) $a^m a^n = a^{m+n}$ (ley de los exponentes)

Por ejemplo

$$a^2a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a) = a \times a \times a \times a \times a = a^5$$

Otras reglas suplementarias son

x) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

xi) $\left(a^m\right)^n = \left(a^n\right)^m = a^{m \times n}$

xii) $(ab)^m = a^m b^m$

Las reglas ix y x definen un número con un exponente negativo. Así , si sustituimos n por -n la regla ix nos da $a^m a^{-n} = a^{m-n}$ y comparándolo con la regla x nos muestra que

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Por ejemplo,

$2^5 \times 2^{-2} = 2^{5-2} = 2^3$ por la regla ix,

$\dfrac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3$ por la regla x de manera que $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$. Además, tomar $m = n$ en la regla x nos da

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1$$

y cualquier número elevado a la potencia cero es igual a la unidad.

La regla xi es inmediata si m y n son enteros. Por ejemplo,

$$(2^3)^2 = 2^3 \text{ x } 2^3 = 2^6 = 2^{3x2}\ , \qquad (2^2)^3 = 2^2 \text{ x } 2^2 \text{ x } 2^2 = 2^6 = 2^{2x3}$$

Para exponentes fraccionarios, consideramos

$$2^{1/2} \text{ x } 2^{1/2} = 2^1 = 2$$

De donde se deduce que $2^{1/2} = \sqrt{2}$, la raíz cuadrada de 2.

En general, $a^{1/m}$ es la raíz m-ésima de a ,

$$a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$$

Por ejemplo, $2^{\frac{1}{3}}$ es la raíz cúbica de 2 porque $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^1 = 2$

Para un exponente cualquiera racional, consideramos usando la regla xi

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 8$$

El exponente racional $\frac{m}{n}$ puede considerarse como el producto del entero m y de la fracción $\frac{1}{n}$, y el número resultante puede escribirse ya sea como la raíz n-ésima de la m-ésima potencia o como la m-ésima potencia de la raíz n-ésima:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

o de forma equivalente,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Aunque hemos demostrado las reglas de los exponentes únicamente para exponentes enteros y racionales, se aplican también a los números con exponentes irracionales y, si se permiten números complejos, a todo número escrito en la forma base/exponente. Cuando

m es una variable, a^m se llama función exponencial. Si $x = a^m$, m es el logaritmo en base a de x.

Hemos tratado en detalle la ley de los exponentes porque es una fuente común de errores en las manipulaciones algebraicas.

Ejemplos
La ley de los exponentes

regla	ejemplo
$a^m a^n = a^{m+n}$	$2^3 \text{ x } 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$
	$2^{\frac{3}{4}} \text{ x } 2^{-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}$
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\dfrac{2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}} = 2^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}$
	$\dfrac{2^4}{2^{-2}} = 2^{4-(-2)} = 2^{4+2} = 2^6$
$\left(a^m\right)^n = \left(a^n\right)^m = a^{mn}$	$\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^1 = 2$
	$\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2} \text{ x } \sqrt{2}} = 2^2 = 4$
$(ab)^m = a^m b^m$	$(2 \text{ x } 3)^2 = 2^2 \text{ x } 3^2 = 4 \text{ x } 9 = 36$
	$(-8)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{1}{3}} \text{ x } 8^{\frac{1}{3}} = -2$

Un ejemplo de lo que no hay que hacer
De la regla de los exponentes se deduce que

$$\sqrt{ab} = (ab)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{2}}$$

Por ejemplo,

$$\sqrt{36} = \sqrt{4}\,\sqrt{9} = 2 \text{ x } 3 = 6$$

Pero

$$\sqrt{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}} \neq \sqrt{\boldsymbol{a}} + \sqrt{\boldsymbol{b}}$$

donde $\neq$ significa "no es igual". Por ejemplo,

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \;\text{ y }\; \sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3+4 = 7$$

Este es un error sorprendentemente frecuente

1.7. Unidades

Una cantidad física tiene dos atributos esenciales, **magnitud** y **dimensiones**. Por ejemplo, la cantidad "2 metros" tiene dimensiones de longitud y tiene magnitud igual a dos veces la del metro. El metro es una cantidad física constante que define las dimensiones de la cantidad y proporciona una escala para especificar la magnitud de una longitud arbitraria; es una **unidad** de longitud. En general, una cantidad física es el producto de un número y de una unidad. Toda cantidad física puede expresarse en términos de siete cantidades "fundamentales" cuyos nombres y símbolos aparecen en la Tabla 1.1

Tabla 1.1 Cantidades físicas fundamentales y unidades SI

Cantidad Física	Símbolo para la cantidad	Nombre de la unidad SI	Símbolo de la unidad SI
Longitud	l	metro	m
masa	m	kilogramo	kg
tiempo	t	segundo	s
corriente eléctrica	I	amperio	A
temperatura	T	kelvin	K
cantidad de materia	n	mol	mol
Intensidad lumínica	Iv	candela	cd

Los símbolos en la segunda columna definen las dimensiones de las cantidades físicas fundamentales, y las dimensiones de todas las demás cantidades pueden expresarse en función de ellas. Por ejemplo, la velocidad es la distancia recorrida por unidad de tiempo y tiene dimensiones de longitud dividida entre tiempo, $\frac{l}{t}$. Las dimensiones de una cantidad física son independientes del sistema de unidades utilizado para describir su valor. Todo sistema de unidades debe, sin embargo, ajustarse a las dimensiones. Por ejemplo, en un sistema de unidades en el cual la unidad de longitud es el metro, m, y la unidad de tiempo es el segundo, s, la unidad de velocidad es metro entre segundo, $\frac{m}{s}$. Algunas cantidades físicas no tienen dimensiones. Ese es el caso de una cantidad que es el cociente de dos otras con las mismas dimensiones. Ejemplos de esto son la densidad relativa, la masa molar relativa y la fracción molar. Un ejemplo menos evidente es el ángulo (plano) que se define en términos del cociente entre dos longitudes.

Vimos en el Apartado 1.1 que las unidades obedecen las leyes del álgebra ordinaria. Una de las lecciones del ejemplo es que las dimensiones, y por lo tanto las unidades, a ambos lados de una ecuación tienen que coincidir.

Se utiliza toda una variedad de sistemas de unidades, muchos adaptados a las necesidades de las disciplinas particulares de las ciencias físicas. El sistema recomendado para las ciencias físicas, y para la geofísica en particular, es el Sistema Internacional de Unidades (SI) que se basa en las siete unidades de base cuyos nombres y símbolos se reseñan en la Tabla 1.1. Toda cantidad física tiene una unidad SI determinada por sus dimensiones. La unidad SI de velocidad es el metro entre segundo, $\frac{m}{s} = \mathrm{ms}^{-1}$. Además de las unidades fundamentales, un cierto número de cantidades que son particularmente importantes en las ciencias físicas tienen asignados nombres y símbolos SI. Algunos de estos aparecen en la Tabla 1.2

Tabla 1.2 Unidades SI derivadas con nombres específicos y símbolos

Cantidad física	Nombre	Símbolo	Descripción	
frecuencia	hercio	Hz	eventos entre unidad de tiempo	s^{-1}
fuerza	newton	N	masa por aceleración	$kg\ m\ s^{-2}$
presión	pascal	Pa	fuerza entre unidad de área	$N\ m^{-2}$
energía, trabajo, calor	julio	J	fuerza por distancia	N m
potencia	vatio	W	trabajo entre unidad de tiempo	Js^{-1}
carga eléctrica	culombio	C	corriente por tiempo	A s
potencial eléctrico	voltio	V	trabajo entre unidad de carga	$J\ C^{-1}$
capacitancia eléctrica	faradio	F	carga entre unidad de potencial	$C\ V^{-1}$
resistencia eléctrica	ohmio	Ω	potencial entre unidad de corriente	$V\ A^{-1}$
conductancia eléctrica	siemens	S	corriente entre unidad de potencial	Ω^{-1}
flujo magnético	weber	Wb	trabajo entre unidad de corriente	$J\ A^{-1}$
densidad de flujo magnético	tesla	T	flujo magnético entre unidad de área	$Wb\ m^{-2}$
inductancia	henrio	H	flujo magnético entre unidad de corriente	$Wb\ A^{-1}$
ángulo plano	radián	rad	ángulo subtendido por la unidad de arco en el centro del círculo	1
ángulo sólido	estereorradian	sr	ángulo sólido generado por la unidad de superficie en el centro de la esfera	1

Los múltiplos de diez de las unidades SI tienen nombres formados con los nombres de las unidades y los prefijos reseñados en la Tabla 1.3 Por ejemplo, un picometro es $pm = 10^{-12}$ m , un decímetro es $dm = 10^{-1}$ m.

Cálculos aproximados

A menudo se utilizan las potencias de 10 como una descripción del **orden de magnitud** Por ejemplo, si una longitud A es dos órdenes de magnitud que la longitud B, entonces es unas $10^2 = 100$ veces mayor. En algunos cálculos que involucran una variedad amplia de órdenes de magnitud puede ser de ayuda, para evitar errores, calcular el orden de magnitud de la respuesta antes de embarcarse en todo el cálculo detallado. La manera más sencilla de hacer tal “cálculo del orden de magnitud” es convertir todas las cantidades físicas a unidades SI fundamentales y aproximar la magnitud de cada una por una potencia apropiada de diez, posiblemente multiplicada por un entero. Tales cálculos son a menudo sorprendentemente exactos.

Tabla 1.3 Prefijos SI

Múltiplo	Prefijo	Símbolo	Múltiplo	Prefijo	Símbolo
10	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a

2 Funciones algebraicas

2.1 Conceptos

En general, decimos que una variable dependiente es **función** de la variable o de las variables de las que depende. En este capítulo trataremos las funciones de una variable únicamente.

Sea la variable y una función de la variable x. Por ejemplo, la ecuación

$$y = 2x^2 - 3x + 1 \tag{2.1}$$

nos da y como una función particular de x. Para cada valor de x el valor de y viene dado por el segundo miembro de la ecuación. Esta expresión define una función f

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1 \tag{2.2}$$

cuyo valor para cada valor de x dado es asignado a la variable y (se lee $f(x)$ como "f de x") La función f es la **regla** para calcular y a partir de x.

Una función toma valores numéricos cuando se asignan valores numéricos a las variables.

Ejemplo 2.1 Los valores de la función (2.2) para $x = 2, x = 1$ y $x = 0$ son

$$f(2) = 2(2)^2 - 3(2) + 1$$
$$f(1) = 2(1)^2 - 3(1) + 1$$

$$f(0) = 2(0)^2 - 3(0) + 1$$

Sin embargo, el concepto de función es más general que esto, porque la variable x puede ser sustituida por otra variable, por otra función o por una cantidad más complicada, como un operador diferencial o una matriz.

Ejemplo 2.3 Sustituya la variable x en (2.2) por la variable a

$$f(a) = 2a^2 - 3^a + 1$$

Ejemplo 2.3 Sustituya la variable x en (2.2) por la función $h + 2$

$$\begin{aligned} f(h+2) &= 2(h+2)^2 - 3(h+2) + 1 \\ &= 2(h^2 + 4h + 4) - 3(h+2) + 1 \\ &= 2h^2 + 8h + 8 - 3h - 6 + 1 \\ &= 2h^2 + 5h + 3 \\ &= g(h) \end{aligned}$$

y

$$g(x) = 2x^2 + 5x + 3$$

es una nueva función de x que está relacionada con $f(x)$ a través de $g(x) = f(x + 2)$.

Ejemplo 2.4 Sustituya la variable x en (2.2) por el operador diferencial $\frac{d}{dx}$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{d}{dx}\right) &= 2\left(\frac{d}{dx}\right)^2 - 3\left(\frac{d}{dx}\right) + 1 \\ &= 2\frac{d^2}{dx^2} - 3\frac{d}{dx} + 1 \end{aligned}$$

es un nuevo operador diferencial.

Al calcular el valor de una función puede ser necesario algún cuidado para que la expresión que define la función sea interpretada correctamente. Una función sencilla como (2.2) aparece libre de ambigüedades, como hemos visto en el Ejemplo (2.1), pero incluso un caso tan sencillo admite malas interpretaciones.

Resolución de ambigüedades

La expresión aritmética

2 + 3 x 4

puede resultar ambigua porque su valor depende del orden en el que se combinan los números. Puede ser interpretada como (2 + 3) x 4 = 20, o pude ser interpretada como 2 + (3 x 4) = 14. Las ambigüedades pueden resolverse siempre con un uso adecuado de los paréntesis, como en este ejemplo. ***Ante la duda, utilice paréntesis.***

Si no se usan paréntesis, se pueden evitar las ambigüedades siguiendo las reglas, utilizadas en la programación por ordenador,

i) todo lo que tenga exponente es primero, después la multiplicación y la división,

ii) por ultimo, la suma y la resta

Ejemplo 2.6 Procedencia en las expresiones aritméticas

i) $2 + 3 \times 4$

$$= 2 + (3 \times 4)$$
$$= 2 + 12$$
$$= 14$$

ii) 3×4^2

$$= 3 \times (4^2)$$
$$= 3 \times 16$$
$$= 48$$

iii) $2 + 3 \times 4 \div 6 + 7 \times 2^3$

$$= 2 + (3 \times 4 \div 6) + 7 \times (2^3)$$
$$= 2 + 2 + 7 \times 8$$
$$= 4 + 56$$
$$= 60$$

Decimos que la función dada por la ecuación (2.2) es una función **cuadrática** porque la potencia mayor de x es un cuadrado (en geometría plana, cuadratura es el acto de cuadrar, es decir, de hallar un cuadrado cuya área sea igual a la de una figura dada). Es un ejemplo de una clase general de funciones llamadas polinomios. Otras funciones que son importantes en las ciencias físicas son las funciones trigonométricas, la función exponencial y la función logarítmica.

2.2 Representación gráfica de funciones

Una función real puede visualizarse bien por tabulación, bien por el dibujo de su gráfica. Sea la función

$$y = f(x) = x^2 - 2x - 3$$

Para cada valor de x existe un valor de y. Podemos hacer una tabla, como la Tabla 2.1 dando los valores de y correspondientes a un conjunto de valores de x. Además, puede considerarse que cada par de números (x, y) de la tabla define la posición de un punto en un plano, y puede dibujarse en una gráfica como en la figura 2.1

Tabla 2.1

x	y

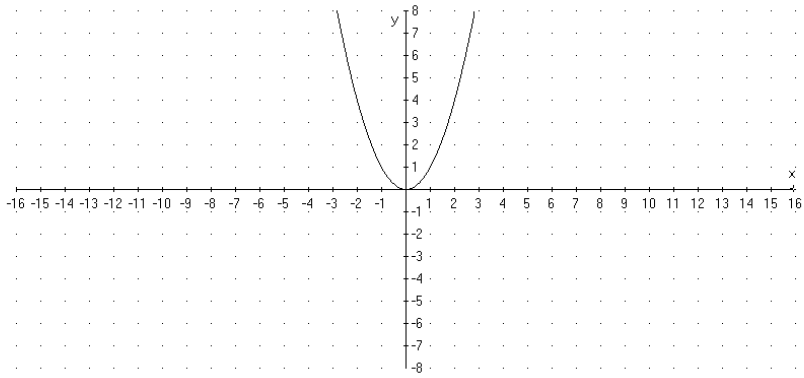


figura 2.1

El sistema de coordenadas cartesianas

La posición de un punto en un plano se especifica de manera única por sus **coordenadas** en un **sistema de coordenadas** dado. El sistema que resulta en general más útil es el sistema (rectangular) de coordenadas cartesianas representado en la Figura 2.2

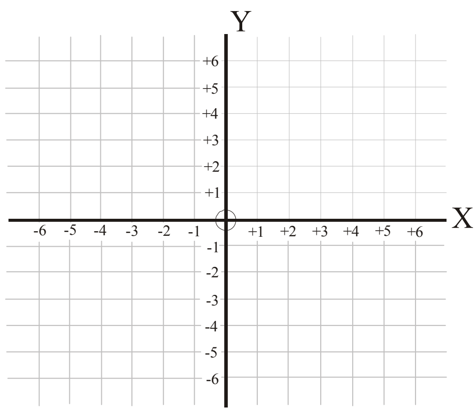


Figura 2.2

2.3 Factorización y simplificación de expresiones

La estructura de una expresión algebraica puede a menudo simplificarse y clarificarse con el procedimiento de **factorización**. Por ejemplo, en la expresión

$$3xy + 6x^2$$

cada término puede escribirse como el producto de $3x$ y otro término:

$$3xy + 6x^2 = (3x) \times y + (3x) \times (2x)$$

La expresión $3x$ es un **factor común**, y la expresión puede escribirse como

$$3xy + 6x^2 = 3x(y + 2x)$$

Esto es una factorización: hemos escrito la expresión algebraica como el producto de los dos factores $(3x)$ y $(y + 2x)$

Ejemplos 2.7 Factorización

i) $2x + 6y = 2(x + 3y)$

ii) $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$

iii) $9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)(3x - 2) = (3x - 2)^2$

iv) $x^2 - 9 = (x + 3)(x + 3)$

La operación inversa a la factorización suele llamarse “desarrollo”. Los casos ii y iv de los ejemplos 2.7 son ejemplos de factorización de una función cuadrática.

La factorización también se puede usar para simplificar fracciones algebraicas. Por ejemplo,

$$\frac{3xy + 6x^2}{9x + 9xy}$$

numerador y denominador tienen ambos $3x$ como factor común, y pueden ser divididos por ese factor (si x 0) sin modificar el valor de la fracción:

$$\frac{3xy + 6x^2}{9x + 9xy} = \frac{3x(y + 2x)}{3x(3 + 3y)} = \frac{y + 2x}{3 + 3y} = \frac{y + 2x}{3(1 + y)}$$

2.4 Funciones inversas

Dada una función f y la ecuación $y = f(x)$, suele ser posible definir, al menos para algunos valores de x e y, una función g tal que $x = g(y)$. Esta nueva función es la **función inversa** de f y se representa por el símbolo f^{-1} (no confundir con la recíproca $1/f$):

$$\text{si} \quad y = f(x) \quad \text{entonces} \quad x = f^{-1}(y)$$

Ejemplo Si $y = f(x) = 2x + 3$, halle $x = f^{-1}(y)$

$$y = 2x + 3,$$

$$y - 3 = 2x,$$

$$x = \frac{y-3}{2} = f^{-1}(y)$$

En este ejemplo y es una función **univaluada** de x : para cada valor de x existe únicamente un valor de y. Similarmente , x es una función univaluada de y

2.5 Polinomios

La forma general de un polinomio de **grado n** es

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes y n es un entero positivo. Si $n = 0$, la función es la constante a_0 . Los polinomios se escriben a menudo en forma compacta como

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

donde el símbolo $\sum$ representa un sumatorio. La notación nos dice que sumemos los términos $a_i x^i$ en los cuales la variable i va tomando por orden los valores 0, 1, 2, ..., n:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = (a_0 x^0) + (a_1 x^1) + (a_2 x^2) + \ldots + (a_n x^n)$$

$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

(recordando que $x^0 = 1$ y que $x^1 = x$)

Ejemplo

$$\sum_{i=0}^{3} ix^1 = 0 \times x^0 + 1 \times x^1 + 2 \times x^2 + 3 \times x^3$$

$$= x + 2x^2 + 3x^3$$

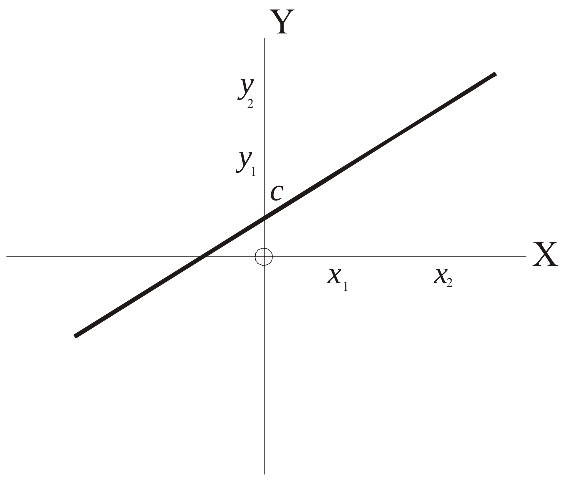
Grado $n = 1$, función lineal

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

Este es el tipo más sencillo de función, y es más conocido en la forma

$$y = mx + c$$

La gráfica de esta función es una línea recta de pendiente m, que corta el eje vertical y (cuando $x = 0$) en el punto $y = c$



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Grado $n = 2$, función cuadrática

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

La función cuadrática se escribe comúnmente como

$$y = ax^2 + bx + c$$

Una gráfica típica se muestra en la Figura 2.1, donde vemos que la curva corta el eje x en dos puntos. Ésas son las raíces de la función cuadrática y son las soluciones de la **ecuación cuadrática**

Si bien es posible factorizar toda una serie de funciones cuadráticas tanteando, siempre se pueden hallar las raíces mediante una formula

$$ax^2 + bx + c = 0$$

para

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$b^2 - 4ac$$

Se denomina **discriminante** de la función cuadrática. La función tiene dos raíces, pero en otras ocasiones puede ser cero o negativo

Polinomio general

Un polinomio de grado n siempre puede factorizarse como el producto de n factores lineales

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

$$= a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

Esto se denomina **teorema fundamental del álgebra**. La función es cero cuando cualquiera de los factores lineales es cero, y los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las n raíces del polinomio.

2.6 Funciones racionales

Ejemplos de funciones racionales son

i) $\dfrac{1}{x}$, ii) $\dfrac{x+2}{x+1}$, iii) $\dfrac{3x^2+2x-1}{x+2}$, iv) $\dfrac{x+1}{3x^2+2x-1}$

En cada caso la función esta definida para todos los valores de x para los cuales el denominador no es cero, ya que la división entre cero no ésta permitida.

2.7 Resolución de sistemas de ecuaciones

Por ejemplo:
Sea la pareja de ecuaciones lineales

$$\text{i)} \qquad x + y = 3$$

$$\text{ii)} \qquad x - y = 1$$

La ecuación i define y como función de x

$$y = 3 - x$$

Mientras que la ecuación ii define y como una segunda función de x

$$y = x - 1$$

Las dos ecuaciones tienen la **solución común** $x = 2$, $y = 1$

En general, una ecuación algebraica con dos variables x e y define una de las variables como función algebraica de la otra y el sistema puede resolverse por método gráfico o algebraico .

3 Funciones trascendentes

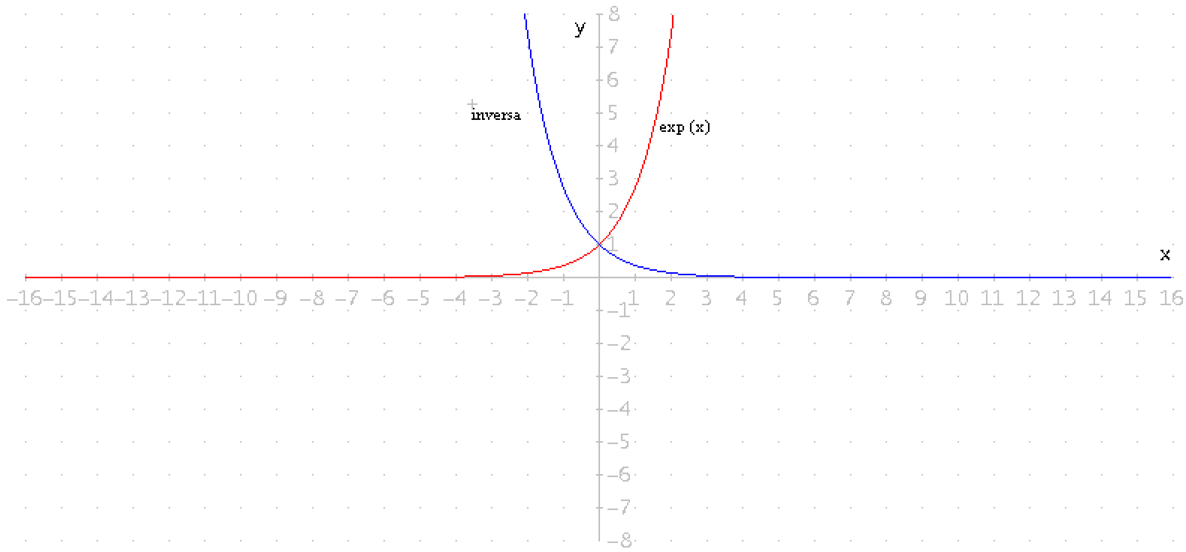
La descripción matemática de los fenómenos físicos a menudo necesita otras funciones además de las algebraicas. En las **funciones trascendentes** la variable independiente figura como exponente, o se halla afectada del signo logaritmo o de cualquiera de los signos que emplea la trigonometría.

3.1 Función exponencial

$$f(x) = a^x$$

Sea a un número real positivo. La función que a cada número real x le hace corresponder la potencia a^x se llama función exponencial de base a y exponente x.

e^x y su inversa e^{-x}



3.2 función logarítmica

$$f(y) = \log_a y$$

La función logarítmica es la función inversa de la exponencial :

si $y = a^x$ entonces $x = \log_a y$

El **logaritmo común** de base 10 es :

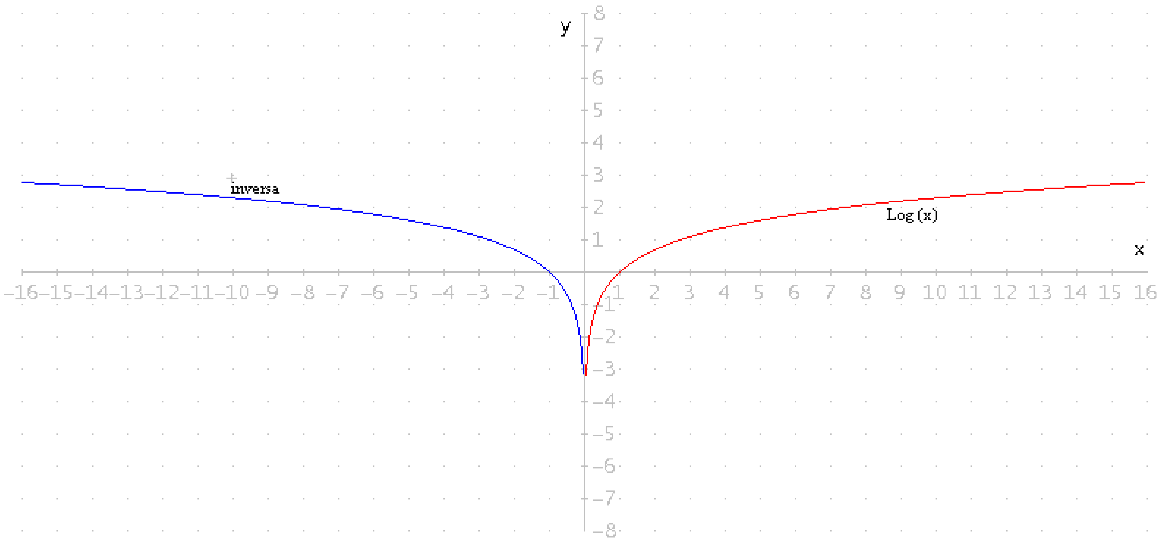
$$y = 10^x, \quad x = \log_{10} \quad y = \log\ y$$

El **logaritmo natural** (o logaritmo neperiano) de base e será:

$$y = e^x, \quad x = \log_e \quad y = \ln\ y$$

Para representar el logaritmo común se usa el símbolo $\log$, para el logaritmo natural se usa el símbolo $\ln$

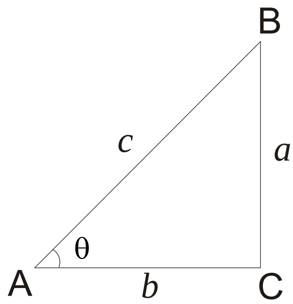
$\log(x)$ y su inversa $\log(-x)$



3.2 Funciones trigonométricas

La trigonometría. Es importante en diseño estructural y arquitectónico, astronomía y navegación. En las ciencias físicas como la Geofísica, son importantes para describir movimientos circulares y movimientos periódicos, incluido el movimiento ondulatorio.

Del triangulo rectángulo se tiene :



$sen\ \theta = \frac{a}{c}$ y su inverso $\cos ec\ \theta = \frac{1}{sen\ \theta}$

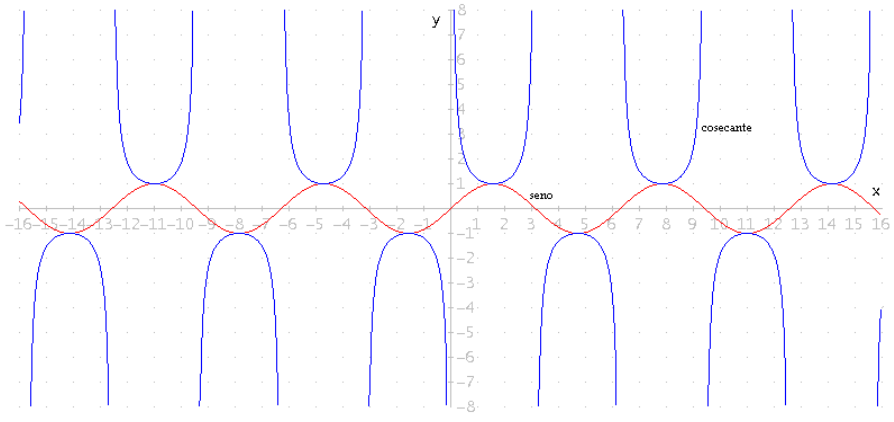
$\cos\ \theta = \frac{b}{c}$ y su inverso $\sec\ \theta = \frac{1}{\cos\ \theta}$

$tg\ \theta = \frac{a}{b}$ y su inverso $\cot g\ \theta = \frac{1}{tg\ \theta}$

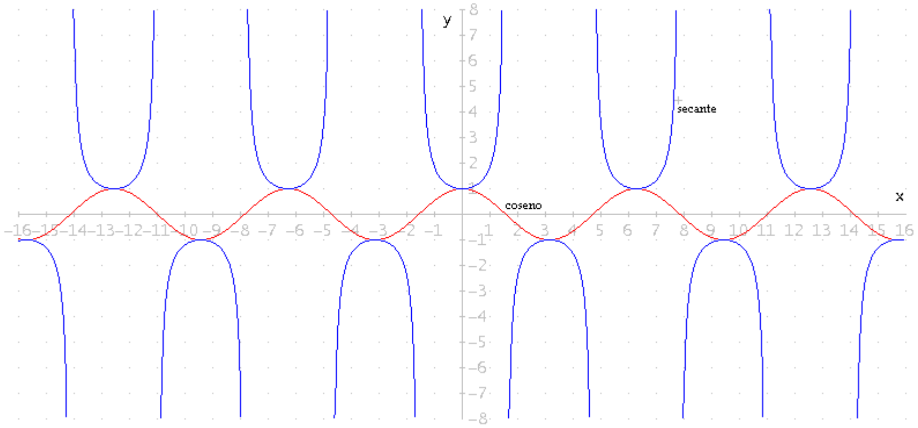
Una de las propiedades más conocidas del triángulo rectángulo es el teorema de Pitágoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

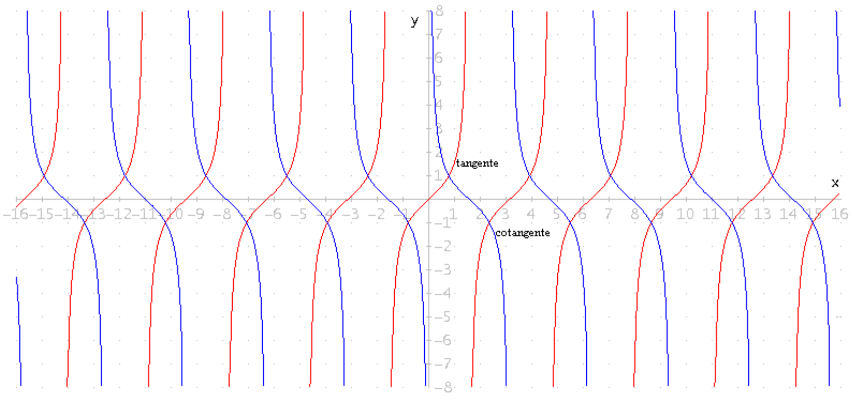
sen x y su función inversa *cosec x*



cos x y su función inversa *sec x*



tg x y su función inversa *cotg x*



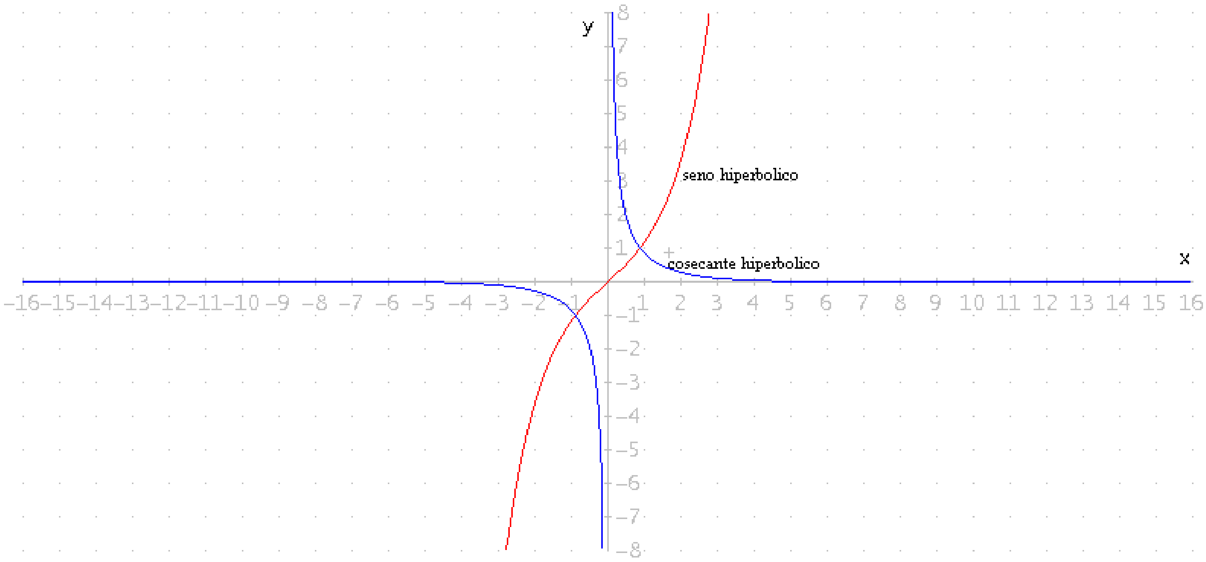
3.3 Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas tienen su origen en geometría en la descripción de las propiedades de la hipérbola.

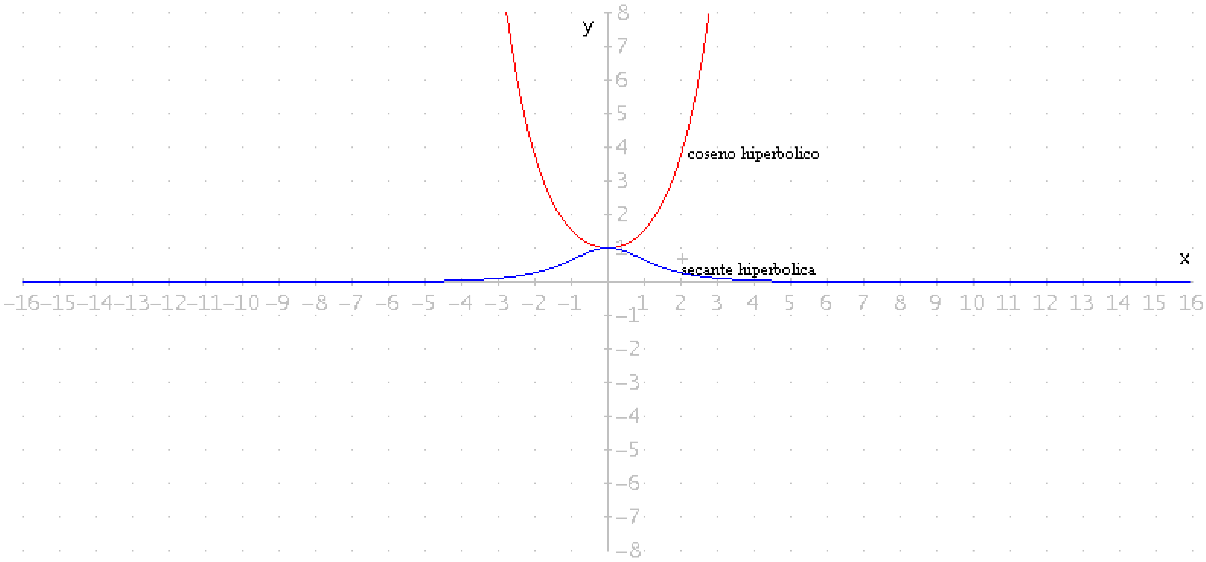
Se define el coseno y el seno hiperbólico a partir de la función exponencial y por último la tangente hiperbólica como :

$senh\ x = (e^x - e^{-x})/2,$ $cosh\ x = (e^x + e^{-x})/2,$ $tgh\ x = (e^x - e^{-x})/ (e^x + e^{-x})$

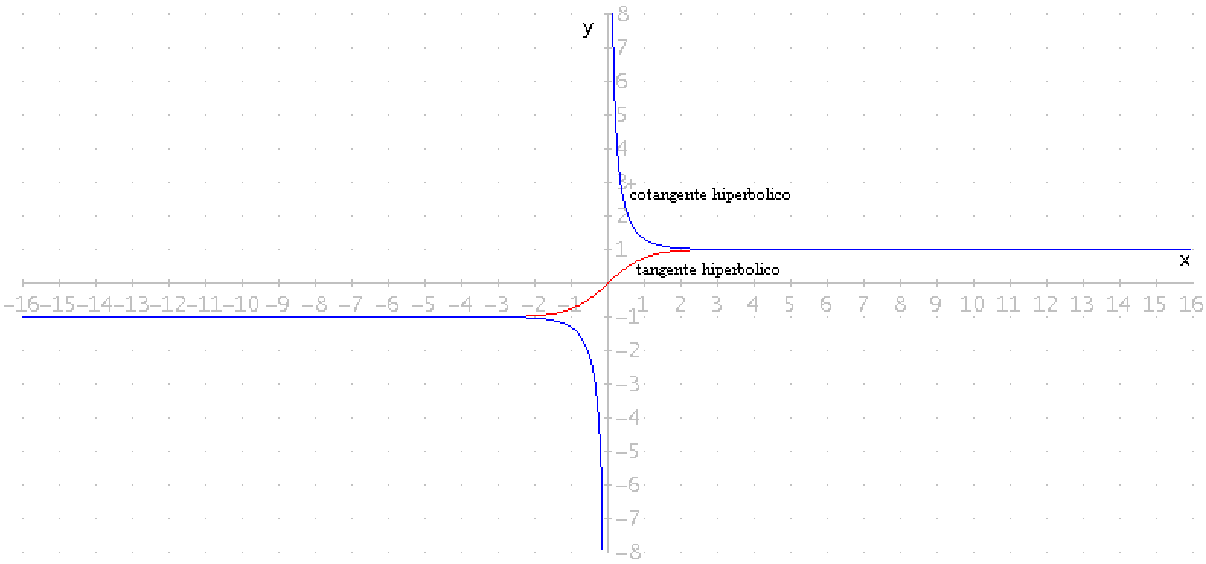
senh (x) y su función inversa *cosech (x)*



cosh (x) y su función inversa *sech (x)*



tgh (x) y su función inversa *cotgh (x)*



EJERCICIOS EN LA EXPLORACIÓN GRAVIMÉTRICA

CILINDRO

G = constante gravitacional $\quad 6.67 \times 10^{-8} \dfrac{cm^3}{gr \cdot seg^2}$

R = radio de la esfera $\quad$ en centímetros , $\quad$ 61000 cm

σ = contraste de densidad $\quad -0.25 \dfrac{gr}{cm^3}$, ejemplo de un domo de sal en roca sedimentaria

z = profundidad del centro del cilindro $\quad$ en centímetros , $\quad$ 122000 cm

x = distancia en superficie $\quad$ en centímetros , $\quad$ 0 cm

g_z = componente vertical $\quad$ en miligal

Formula para calcular la anomalía gravitacional
de un cilindro sólido o hueco enterrado

$$g_z = \frac{2\pi R^2 G \sigma z}{x^2 + z^2}$$

$$g_z = \frac{2(3.1416)(61000)^2(6.67x10^{-8}\ \frac{cm^3}{gr \bullet seg^2})(-0.25\frac{gr}{cm^3})(122000cm)}{(0)^2 + (122000\ cm)^2}$$

vemos que se van simplificando tanto las cantidades como las unidades

ejemplo, $\frac{cm^3}{cm^3} = 1$, $\frac{gr}{gr} = 1$

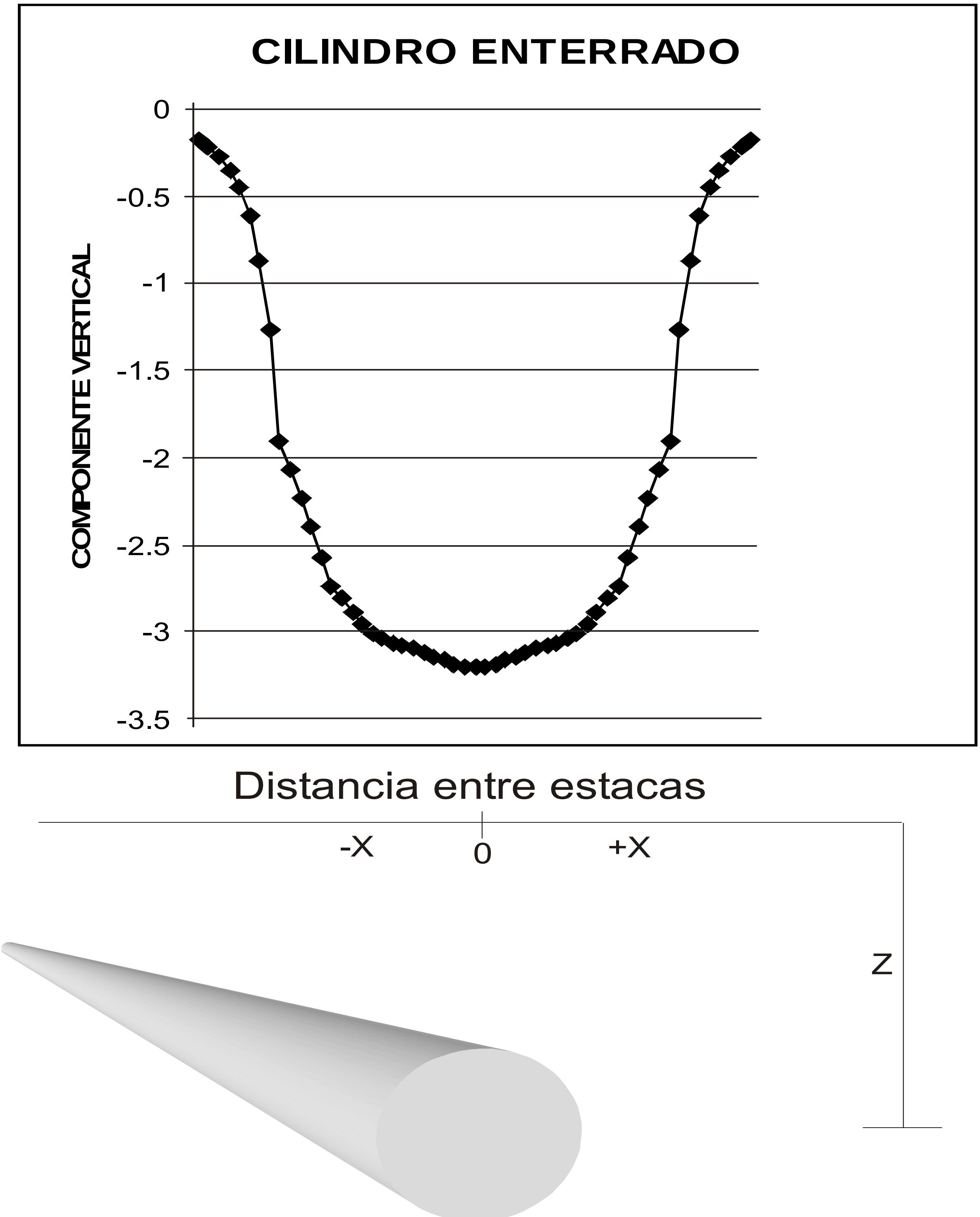
$$g_z = \frac{-(6.283185)(3.721\ x\ 10^9\ cm^2)(1.6675\ x\ 10^{-8}\ \frac{1}{seg^2})(122000\ cm)}{1.4884\ x\ 10^{10}\ cm^2}$$

$$g_z = \frac{-(2.337973\ x\ 10^{10}\ cm^2)(2.03435\ x\ 10^{-3}\ \frac{cm}{seg^2})}{1.4884\ x\ 10^{10}\ cm^2} = \frac{-47562553.73\ \frac{cm^3}{seg^2}}{1.4884\ x\ 10^{10}\ cm^2}$$

$$g_z = -3.195549162\ x\ 10^{-3}\ \frac{\frac{cm^3}{seg^2}}{\frac{cm^2}{1}} = -3.195549\ x\ 10^{-3}\ \frac{cm^3}{seg^2 \bullet cm^2} = -3.195549\ x\ 10^{-3}\ \frac{cm}{seg^2}$$

por conversión de unidades, miligal = $10^{-3}\ \frac{cm}{seg^2}$

g_z = -3. 1955 miligal


CILINDRO ENTERRADO
COMPONENTE VERTICAL
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
Distancia entre estacas
-X
0
+X
Z

ESFERA

G = constante gravitacional $6.67 \times 10^{-8} \ \frac{cm^3}{gr \cdot seg^2}$

R = radio de la esfera en centímetros , 61000 cm

σ = contraste de densidad $-0.25 \frac{gr}{cm^3}$, ejemplo de un domo de sal en roca sedimentaria

z = profundidad del centro en centímetros , 122000 cm

x = distancia en superficie en centímetros , 0 cm

g_z = componente vertical en miligal

Formula para calcular la anomalía gravitacional
de una esfera sólida o hueca enterrada

$$g_z = \frac{4}{3} \ \pi \ R^3 \ \sigma \ G \ \frac{z}{\left(z^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$g_z = \frac{4}{3}\ (3.1416)(61000cm)^3\ (-0.25\frac{gr}{cm^3})(6.67\ x\ 10^{-8}\ \frac{cm^3}{gr\cdot seg^2})\left[\frac{122000\ cm}{\left[(122000\ cm)^2+(0)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$g_z = 4.18879\ (2.269\ x\ 10^{14}\ cm^3)(-1.667\ x\ 10^{-8}\ \frac{1}{seg^2})\left[\frac{122000\ cm}{(122000\ cm)^3}\right]$$

Ley de los exponentes

$$\left((a)^2\right)^{\frac{3}{2}} = (a)^{\frac{2*3}{2}} = (a)^{\frac{6}{2}} = (a)^3$$

$$\therefore a = 122000\ cm$$

vemos que se van simplificando tanto las cantidades como las unidades

ejemplo, $\frac{cm^3}{cm^3} = 1$

$$g_z = -15854185.51\ \frac{cm^3}{seg^2}\left[\frac{122000\ cm}{1.815848\ x10^{15} cm^3}\right]$$

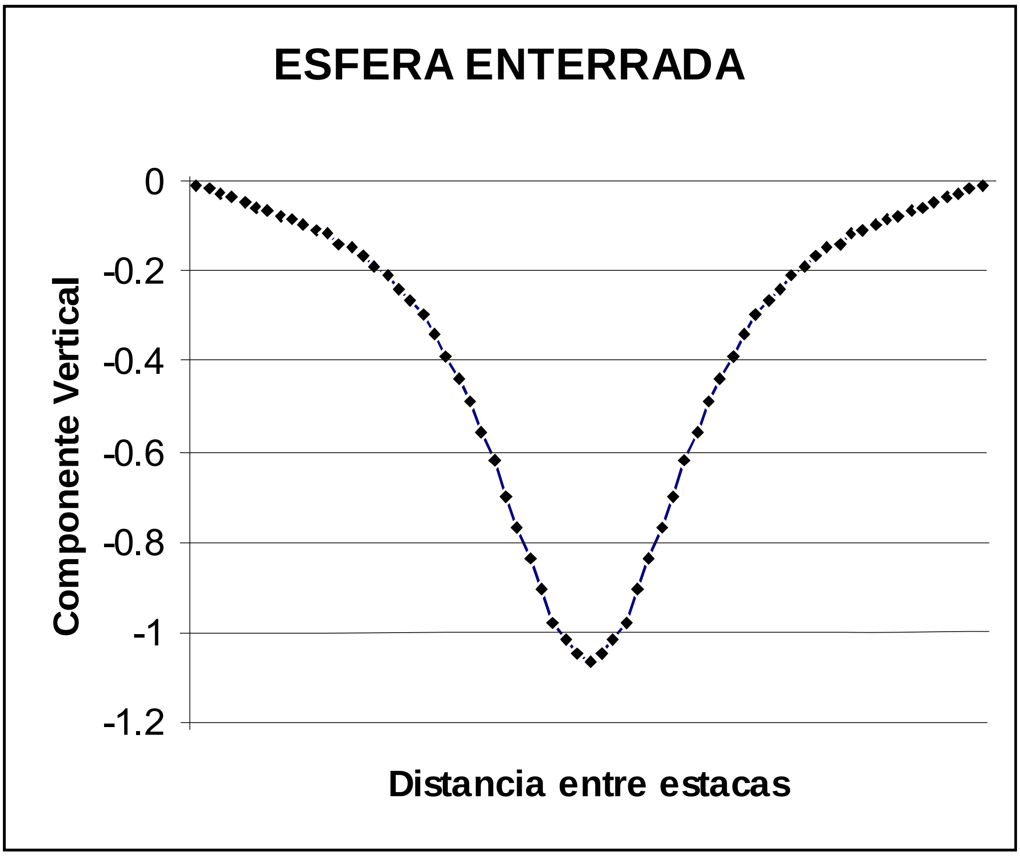
$$g_z = \frac{-1.93421063\ x10^{12}}{1.815848\ x10^{15}}\ \frac{cm}{seg^2}\qquad ,$$

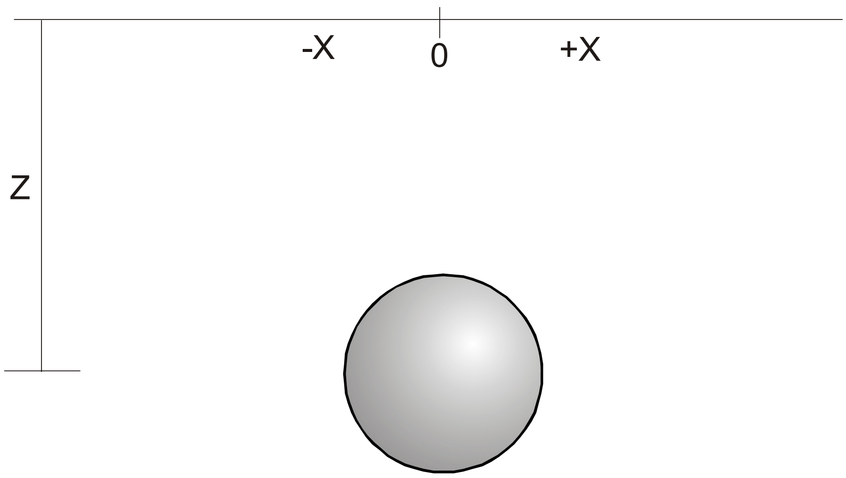
$$g_z = -1.065183117\ x10^{-3}\ \frac{cm}{seg^2}$$

por conversión de unidades

$$miligal = 10^{-3}\ \frac{cm}{seg^2}$$

$$\therefore\ \ g_z = -1.06518\ \ miligal$$


ESFERA ENTERRADA
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
Componente Vertical
Distancia entre estacas


-X
0
+X
Z

EJERCICIOS SOBRE GRAVEDAD

1.- Usando los datos de la Tierra y la Luna, calcular la aceleración gravitacional en la superficie de la Luna como un porcentaje de la que es en la superficie de la Tierra.

Aceleración gravitacional en la Tierra: $a_T = \frac{-GM_T}{R_T{}^2}$

Aceleración gravitacional en la Luna: $a_L = \frac{-Gm_L}{r_L{}^2}$

Se tiene intensidades gravitacionales diferentes en los dos cuerpos celestes ,
por lo tanto se tiene una proporcionalidad ,

$$\text{proporción : } \frac{a_L}{a_T} = \frac{\dfrac{-Gm_L}{(r_L)^2}}{\dfrac{-GM_T}{(R_T)^2}} = \left(\frac{-G}{-G}\right)\left(\frac{m_L}{M_T}\right)\left(\frac{R_T}{r_L}\right)^2 = \frac{\textit{extremos x extremos}}{\textit{medios x medios}} \qquad \left(\frac{-G}{-G}\right) = 1$$

$$\frac{a_L}{a_T} = \frac{m_L (R_T)^2}{M_T (r_L)^2}$$

Insertamos los datos de la Tierra y de la Luna

masa de la Tierra $M_T = 5.974 \text{ x} 10^{24} \text{ kg}$

radio de la Tierra $R_T = 6371 \text{km}$

masa de la Luna $m_L = 0.0735 \text{ x } 10^{24} \text{ kg}$

radio de la Luna $r_L = 1738 \text{ km}$

proporción de masas $$\frac{masa\ Lunar}{masa\ Terrestre} = \frac{m_L}{M_T} = \frac{0.0735\ x\ 10^{24}}{5.974\ x\ 10^{24}} = 0.0123$$

0.0123 proporción con respecto a la masa de la Tierra

de donde : $$\frac{a_L}{a_T} = \frac{m_L (R_T)^2}{M_T (r_L)^2}$$

insertamos valores

$$\frac{a_L}{a_T} = \frac{0.0735 \text{ x } 10^{24}}{5.974 \text{ x } 10^{24}} \ \frac{kg}{kg} \left(\frac{6371}{1738}\right)^2 \ \frac{km^2}{km^2}$$

reducir unidades $\frac{kg}{kg} = 1$, $\frac{km^2}{km^2} = 1$

$$\frac{a_L}{a_T} = 0.0123(3.6657)^2 = 0.0123(13.43741)$$

$$\frac{a_L}{a_T} = 0.165 \text{ proporción}$$

porciento = 0.165 x 100%

La aceleración gravitacional en la Luna es 16.5% de la que es en la superficie de la Tierra.

La gravedad en la Tierra es 9.81 $\frac{m}{seg^2}$, la gravedad Lunar es 1.62 $\frac{m}{seg^2}$

2.- Un campeón olímpico de salto de altura hace un salto de altura de 2.45 m en la Tierra.

¿Qué tan alto puede este campeón saltar en la Luna?

La relación entre velocidad inicial (v_0) , velocidad final (v_f) , aceleración (a) y distancia (d) es

$$v_f = v_0^2 + 2ad$$

En el caso del salto de altura, la velocidad final es cero (se regresa por la gravedad) ,
La distancia es la altura (h) del salto , y la aceleración es (-g) ,
de donde:

$$0 = v_0^2 - 2gh$$

$$-v_0^2 = -2gh$$ multiplicamos ambos miembros por – 1

$$v_0^2 = 2gh$$

La velocidad inicial es la misma en la Luna como en la Tierra ,

velocidad inicial en la Tierra $v_0^2 = 2g_T h_T$

velocidad inicial en la Luna $v_0^2 = 2g_L h_L$

igualamos la velocidades iniciales $v_0^2 = v_0^2$

$$2\ g_L\ h_L = 2\ g_T\ h_T$$

despejamos la altura (h_L) del salto en la Luna $\quad h_L = \dfrac{2g_T h_T}{2g_L}$ $\quad$ reducir términos $\dfrac{2}{2} = 1$

$h_L = \dfrac{g_T h_T}{g_L}$ sustituimos valores $= \left(\dfrac{9.81 \frac{m}{seg^2}}{1.62 \frac{m}{seg^2}} \right) 2.45\ m$ $\quad$ reducir unidades $\dfrac{\frac{m}{seg^2}}{\frac{m}{seg^2}} = 1$

$$h_L = (6.05)\ 2.45\ m$$

$h_L = 14.82\ m$ $\quad$ salto del campeón de altura en la Luna

3.- a)Calcular la velocidad de escape de un objeto en la Tierra, asumiendo una aceleración media gravitacional Terrestre de $9.81\frac{m}{seg^2}$ y el radio medio de la Tierra de 6371 km.

b)¿Cuál es la velocidad de escape del mismo objeto sobre la Luna?

La velocidad de escape (v) de un objeto con masa (m) es alcanzada cuando su energía cinética ($\frac{1}{2}mv^2$) es igual al trabajo requerido para mover el objeto desde la superficie del planeta al infinito, que a su vez es equivalente a su energía potencial sobre la superficie del planeta (masa del planeta M_P, radio del planeta R_P),

así

igualamos $\frac{1}{2}mv^2 = G\frac{mM_P}{R_P}$

despejamos la velocidad de escape $v^2 = \frac{G\frac{mM_P}{R_P}}{\frac{1}{2}m} = \frac{2GmM_P}{mR_P}$ reducimos términos $\frac{m}{m} = 1$

igualamos a su energía potencial $v^2 = \frac{2GM_P}{R_P} = 2g_PR_P$ $v = \sqrt{2g_PR_P}$

a) La velocidad de escape de la Tierra (v_T) ,

usando

$g_T = 9.81 \frac{m}{seg^2}$ gravedad Terrestre ,

R_T= 6371 km =6371000 m radio de la Tierra

será

$v_T = \sqrt{2g_T R_T}$ dando valores $v_T = \sqrt{2\left(9.81 \frac{m}{seg^2}\right)\left(6.371x10^6 m\right)}$ = $\sqrt{12499902 \frac{m^2}{seg^2}}$

$v_T = 11180.29 \frac{m}{seg}$ dividimos entre 1000 para convertir a km $v_T = 11.18029 \frac{km}{seg}$

convertir a minutos 11.18029 x 60 $v_T = 670.8174 \frac{km}{minuto}$

convertir a horas 670.8174 x 60 $v_T = 40249 \frac{km}{hr}$

b) La velocidad de escape de la Luna (v_L)

usando

g_L=1.62 $\frac{m}{seg^2}$ gravedad de la Luna ,

R_L=1738 km = 1.738x10^6 km radio de la Luna

será

$$v_L = \sqrt{2g_L R_L}$$

dando valores

$$v_L = \sqrt{2\left(1.62\,\tfrac{m}{seg^2}\right)\left(1.738 \times 10^6 m\right)} = \sqrt{5631120\,\tfrac{m^2}{seg^2}}$$

v_L = 2372.998 $\frac{m}{seg}$ dividimos entre 1000 para convertir a km $v_L = 2.37299\,\frac{km}{seg}$

convertir a minutos 2.3799 x 60 $v_L = 142.379\,\frac{km}{minuto}$

convertir a horas 142.379 x 60 $v_L = 8542\,\frac{km}{hr}$

4.- El radio ecuatorial de la Tierra es 6378 km y la gravedad en el ecuador es 9.780 $\frac{m}{seg^2}$

Calcular la proporción (m) de la aceleración centrífuga en el ecuador para la aceleración gravitacional en el ecuador .

Si la proporción (m) se escribe como $\frac{1}{k}$, cual es el valor de (k) .

Periodo de rotación de la Tierra   T = 24 hr

convertir a minutos   24 x 60 = 1440 minutos

convertir a segundos   1440 x 60 = 86400 seg

T = 86400 seg

Velocidad de rotación de la Tierra ,

desde el enfoque de velocidad angular de la Tierra se tiene:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

recordando el círculo da una vuelta completa en 360° = 2π

insertando valores

$$\omega = \frac{2(3.141592)}{86400}\,\frac{rad}{seg} = 7.2722052 \times 10^{-5}\,\frac{rad}{seg}$$

Aceleración centrífuga (a_c) en el ecuador

$$a_c = \omega^2 r$$

sustituyendo valores

$$a_c = \left(7.272 \times 10^{-5} \tfrac{rad}{seg}\right)^2 \left(6378 \times 10^3 m\right)$$

$$a_c = 5.288496 \times 10^{-9} \left(6378 \times 10^3\right) \tfrac{m}{seg^2}$$

$$a_c = 0.03373 \tfrac{m}{seg^2} = 3.373 \times 10^{-2} \tfrac{m}{seg^2}$$

Gravedad en el ecuador

$$g_T = 9.78 \tfrac{m}{seg^2}$$

Aceleración gravitacional en el ecuador

$$a_T = g_T - a_c$$

Proporción de aceleración

$$m = \frac{a_c}{a_T} = \frac{a_c}{g_T - a_c}$$

colocando valores

$$m = \frac{0.03373\,\frac{m}{seg^2}}{9.78\,\frac{m}{seg^2} - 0.03373\,\frac{m}{seg^2}} = \frac{0.03373\,\frac{m}{seg^2}}{9.7462\,\frac{m}{seg^2}}$$

reducir unidades $\frac{\frac{m}{seg^2}}{\frac{m}{seg^2}} = 1$

$$m = \frac{\frac{0.03373}{0.03373}}{\frac{9.7462}{0.03373}} = \frac{1}{288.94} = \frac{1}{k}$$

por lo tanto k = 288.9

5.- Dado que la duración es de 27.32 días , la gravedad en la Tierra es 9.81 $\frac{m}{seg^2}$ y el radio terrestre es de 6371 km , calcular el radio orbital de la Luna.

Periodo de rotación de la Luna

T_L = 27.32 días

Tarda en dar una vuelta alrededor de la tierra

El día tiene 24 hr. ,

convertimos a minutos 24 x 60 = 1440 min.

convertimos a segundos 1440 x 60 = 86400 seg.

T_L = 27.32 x 86400 ,

T_L = 2360448 seg.

Velocidad de rotación de la Luna:

$$\omega_L = \frac{2\pi}{T_L}$$

$$\omega_L = \frac{2(3.1416)}{2360448}\ \frac{rad}{seg} = \frac{6.283185}{2360448}\ \frac{rad}{seg}$$

$$\omega_L = 2.6618613 \times 10^{-6}\ \frac{rad}{seg}$$

Aceleración centrípeta a una distancia de r_L

$$a_C = \omega_L^{\,2} \cdot r_L$$

Aceleración gravitacional a una distancia r_L

$$a_G = \frac{GM_T}{r_L^{\,2}}$$

Igualamos estas dos aceleraciones

$$\omega_L^{\,2} \cdot r_L = \frac{GM_T}{r_L^{\,2}}$$

Introducimos en la igualdad la unidad $\frac{R_T}{R_T}$

donde R_T es el radio de la Tierra

$$\omega_L^2 R_T \left(\frac{r_L}{R_T}\right) = \frac{GM_T}{R_T^2}\left(\frac{R_T}{r_L}\right)^2 = a_G\left(\frac{R_T}{r_L}\right)^2$$

$$\omega_L^2 R_T \left(\frac{r_L}{R_T}\right) = a_G\left(\frac{R_T}{r_L}\right)^2 = a_G \frac{R_T^2}{r_L^2}$$

$$\omega_L^2 R_T \left(\frac{r_L}{R_T} \right) = a_G \frac{R_T^2}{r_L^2}$$

despejamos el término proporción

$$\frac{r_L}{R_T}$$

$$\frac{\frac{r_L}{R_T}}{\frac{R_T^2}{r_L^2}} = \frac{a_G}{\omega_L^2 R_T}$$

primer miembro : “extremos por extremos resultado arriba y medios por medios resultado abajo”

$$\frac{r_L^2 \cdot r_L}{R_T \cdot R_T^2} = \frac{a_G}{\omega_L^2 R_T} \quad ,$$

siguiendo $\frac{r_L^3}{R_T^3} = \frac{a_G}{\omega_L^2 R_T}$,

resumiendo $\left(\frac{r_L}{R_T} \right)^3 = \frac{a_G}{\omega_L^2 R_T}$

Insertamos valores en el segundo miembro ,

tenemos :

$$\left(\frac{r_L}{R_T}\right)^3 = \frac{9.81\frac{m}{seg^2}}{\left(2.6618613 \text{ x } 10^{-6}\ \frac{rad}{seg}\right)^2\left(6.371 \text{ x } 10^6 \text{ m}\right)}$$

$$\left(\frac{r_L}{R_T}\right)^3 = \frac{9.81\frac{m}{seg^2}}{\left(7.085505 \text{ x } 10^{-12}\ \frac{rad^2}{seg^2}\right)\left(6.371 \text{ x } 10^6 \text{ m}\right)}$$

reducir unidades $\dfrac{\frac{m}{seg^2}}{\frac{m}{seg^2}} = 1$

$$\left(\frac{r_L}{R_T}\right)^3 = \frac{9.81}{4.5141756 \text{ x } 10^{-5}} = 2.173154 \text{ x } 10^5$$

$$\left(\frac{r_L}{R_T}\right)^3 = \sqrt[3]{2.173154} = 60.1215$$

despejamos r_L

$$r_L = R_T(60.1215) = 6.371 \text{ x } 10^6 \text{ m } (60.1215)$$

$$r_L = 383034410.3 \text{ m} = 383034 \text{ km}$$

Radio orbital de la Luna 383034 km

6.- Un satélite de comunicaciones debe ser colocado en una órbita geoestacionaria.

a) ¿Cuál deberá ser el periodo y orientación de la órbita?

b) ¿Cuál es el radio de la órbita?

c) ¿Si una señal de radio se envía al satélite desde un trasmisor a una latitud de 45° N , cual es el menor tiempo necesario de su reflejo para llegar a la Tierra?

a) Una órbita geoestacionaria es aquella en la que el período de rotación del satélite alrededor de la Tierra es igual a la rotación de la Tierra sobre su propio eje . Esta mantiene al satélite “estacionario” por encima de un determinado lugar . La orbita debe estar en el plano del ecuador .

b) El radio de la órbita del satélite se encuentra como en el ejercicio 5 .

Período de rotación del satélite

T_S = 1 día = 24 hr = 86400 seg

Velocidad de rotación.

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2(3.1416)}{86400}\ \frac{\text{rad}}{\text{seg}} = \frac{6.283185}{86400}\ \frac{\text{rad}}{\text{seg}} = 7.2722 \times 10^{-5}\ \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

Aceleración centrípeta a la distancia r_s

$$a_c = \omega_s^2 r_s$$

Aceleración gravitacional a la distancia r_s

$$a_G = \frac{GM_T}{r_s^2}$$

Igualamos las aceleraciones

$$\omega_s^2 r_s = \frac{GM_T}{r_s^2}$$

Por lo tanto:

$$r_s = R_T \cdot \sqrt[3]{\frac{a_G}{\omega_s^2 R_T}}$$

sustituimos valores

$$r_s = 6.371 \times 10^6 \text{ m} \sqrt[3]{\frac{9.81 \frac{m}{seg^2}}{\left(7.2722 \times 10^{-5} \frac{rad}{seg}\right)^2 6.371 \times 10^6 m}}$$

$$r_s = 6.371 \times 10^6 \text{ m} \sqrt[3]{\frac{9.81 \frac{m}{seg^2}}{\left(5.288489 \times 10^{-9} \frac{rad}{seg^2}\right) 6.371 \times 10^6 m}}$$

$r_s = 6.371 \times 10^{6}\ m\ \sqrt[3]{\dfrac{9.81 \frac{m}{seg^2}}{0.033692 \frac{m}{seg^2}}}$ reducir unidades dentro de la raiz $\dfrac{\frac{m}{seg^2}}{\frac{m}{seg^2}} = 1$

$r_s = 6.371 \times 10^{6}\ m\ \sqrt[3]{291.1670426} = 6.371 \times 10^{6}\ m\ (6.62797312)$

$r_s = 42226816\ m$ dividimos entre 1000 $r_s = 42226\ km$

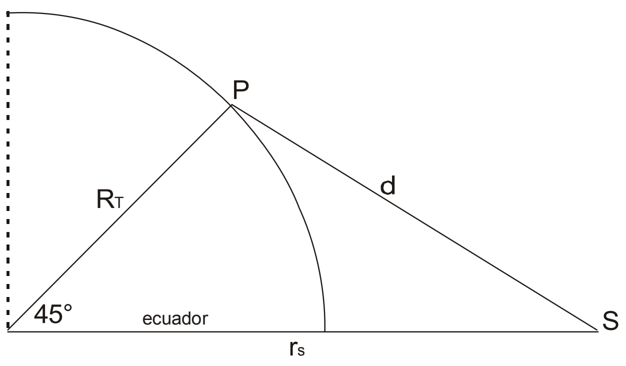
El radio orbital del satélite estacionario es

42226 km aproximadamente 42200 km

c)La reflexión más rápida recorre el camino más corto hacia el satélite desde el punto

de superficie de la Tierra en la 45° N donde el trasmisor y el receptor se encuentran

(punto "P" en el diagrama) ; el satélite esta encima del ecuador (punto "S" en el diagrama).



El lado "d" se resuelve así:

$$d^2 = R_T^2 + r_s^2 - 2R_T\, r_s \cos(45°)$$

insertamos valores

$$d^2 = (6371\,\text{km})^2 + (42226\,\text{km})^2 - 2(6371\,\text{km})(42226\,\text{km})(0.707106)$$

$$d^2 = (40589641\,\text{km}^2) + (17830335076\,\text{km}^2) - 380453922.9\,\text{km}^2$$

$$d^2 = 1823624717\,\text{km}^2 - 380453922.9\,\text{km}^2 =$$

$1443170794\,\text{km}^2$

$$d = \sqrt{1443170794\,\text{km}^2}$$

$$d = 37989\,\text{km}$$

Distancia desde la estación al satélite

37989 km

Velocidad de la luz $c = 299792\ \frac{\text{km}}{\text{seg}}$

El tiempo (t_s) del doble trayecto de la señal es:

$$t_s = 2\frac{d}{c}$$

$$t_s = 2\left(\frac{37989 \text{ km}}{299792 \frac{\text{km}}{\text{seg}}}\right)$$ reducir unidades $\frac{\text{seg} \cdot \text{km}}{\text{km}}$, $\frac{\text{km}}{\text{km}} = 1$

t_s = 2 (0.12671785 seg) t_s = 0.253 seg

7.- Calcular la aceleración centrífuga debido a la rotación terrestre sobre un objeto en reposo en la superficie terrestre de Paris, asumiendo una latitud de 48° 52' N. Expresar el resultado como un porcentaje de la gravedad de atracción sobre el objeto.

Distancia perpendicular de París (latitud λ) al eje de rotación

$r_F = R_T \cos \lambda$ $\quad$ R_T es el radio Terrestre

Convertimos 52 ' a grados

$$\frac{52'}{60^\circ} = 0.866$$

$r_F = 6371 \text{ km} \times \cos(48.866^\circ)$

$r_F = 6371 \text{ km}(0.65781354)$

$r_F = 4190.93 \text{ km} = 4191000 \text{ m}$

Periodo de rotación en París , será igual al periodo de rotación de la Tierra

T = 1 día = 86400 seg , por lo tanto

Velocidad de rotación Terrestre , $\omega_T = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2(3.1416)_{\text{rad}}}{86400_{\text{seg}}} = 7.2722 \times 10^{-5} \ \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$

Aceleración centrífuga debido a la rotación Terrestre en la latitud 48° 52’ N

$$a_c = \omega_T^2\, r_F = \left(7.2722 \times 10^{-5}\ \tfrac{rad}{seg}\right)^2 \left(4191 \times 10^3\, m\right)$$

$$a_c = \left(5.288489 \times 10^{-9}\ \tfrac{rad^2}{seg^2}\right) \left(4191 \times 10^3\, m\right)$$

$$a_c = 0.02216\ \tfrac{m}{seg^2} = 2.216 \times 10^{-2}\ \tfrac{m}{seg^2}$$

Aceleración gravitacional , $a_G \approx g_T \approx 9.81\ \tfrac{m}{seg^2}$

Proporción entre a_c y a_G ,

$$\frac{a_c}{a_G} = \frac{2.216 \times 10^{-2}\ \frac{m}{seg^2}}{9.81\ \frac{m}{seg^2}}$$

reducir unidades $\dfrac{\frac{m}{seg^2}}{\frac{m}{seg^2}} = 1$

proporción = 2.2589×10^{-3} = 0.002259 = 0.00226

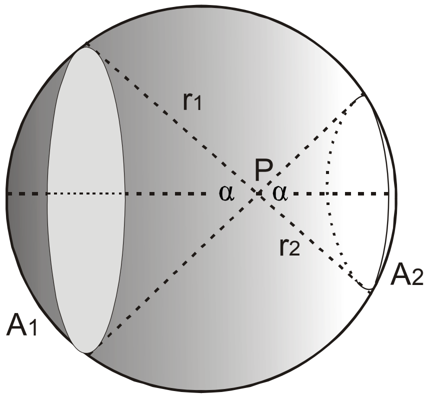
en porcentaje 0.00226 x 100 %

La fracción de atracción gravitacional es :

0.226 %

8.- Un ángulo sólido (Ω) se define como el cociente entre el área (A) de la parte de una superficie esférica generada por el ángulo , dividida entre el cuadrado del radio (r) de la esférica : es decir , $\Omega = \frac{A}{r^2}$.

Demostrar con la ayuda de un diagrama que la aceleración gravitacional en cualquier punto dentro de una delgada capa esférica homogénea es cero.



Sea P cualquier punto dentro de la cáscara esférica hueca. El ángulo α en el punto P genera un elemento de la superficie con área A_1 a una distancia r_1 desde P . Sí el espesor de la capa esférica es (t) y su densidad ρ , el volumen del elemento de superficie es ($A_1 t$) y su masa m_1 es ($\rho A_1 t$) .

El ángulo en P también genera el área A_2 en la superficie opuesta de la esfera a una distancia r_2 desde P .

Este elemento tiene una masa m_2 y es ($\rho A_2 t$) con igual espesor (t) .

La aceleración de la gravedad en P debido al elemento de superficie A_1 es :

$$a_1 = -G\frac{m_1}{r_1^2} = -G\frac{\rho\, A_1\, t}{r_1^2}$$

La aceleración en P debido al elemento de superficie A_2 actúa en la dirección opuesta y es igual a :

$$a_2 = \left(-G\frac{m_2}{r_2^2}\right) = -G\frac{\rho\, A_2\, t}{r_2^2}$$

La aceleración gravitacional neta en el punto P es :

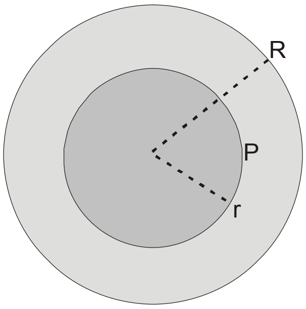
$$a = (a_1 + a_2) = (a_1 + (-a_2))$$

$$a = (a_1 - a_2) = -G\frac{\rho\, A_1\, t}{r_1^2} \quad -G\frac{\rho\, A_2\, t}{r_2^2} = -G\,\rho\, t\left(\frac{A_1}{r_1^2} - \frac{A_2}{r_2^2}\right)$$

$$a = -G\,\rho\, t\,(\alpha - \alpha) = -G\,\rho\, t\,(0)\ , \qquad a = 0$$

Esta relación se mantiene para cualquier tamaño del ángulo α , por lo tanto en cualquier posición dentro del hueco de la corteza esférica la aceleración gravitacional es cero.

9.- Suponiendo que la aceleración gravitacional dentro de una corteza esférica homogénea es cero, demostrar que la aceleración gravitacional al interior de una esfera sólida uniformemente homogénea es proporcional a la distancia desde su centro.



Sea P un punto dentro de una esfera sólida de uniforme densidad ρ y radio R en la distancia r desde su centro . La aceleración de la gravedad en el punto P tiene dos fuentes:

1) La parte interior de la esfera sólida entre P y el centro ,

2) La parte externa entre P y la superficie . Esta parte exterior puede ser subdividida en numerosas finas capas esféricas concéntricas . Debido a que P se encuentra dentro de cada depósito , que experimenta una aceleración neta de cero en cada una .
Así , la aceleración de la gravedad en P debido a la parte externa de la esfera es cero .

La aceleración en P debido a la masa m(r) de la parte interior de la esfera de radio r es :

$$a_G = -G\frac{m(r)}{r^2}$$

recordemos que , masa = volumen x densidad

el volumen será el de una esfera $\frac{4}{3}\pi r^3$

la densidad será ρ de donde ,

masa = $\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\rho$

sustituyendo ,

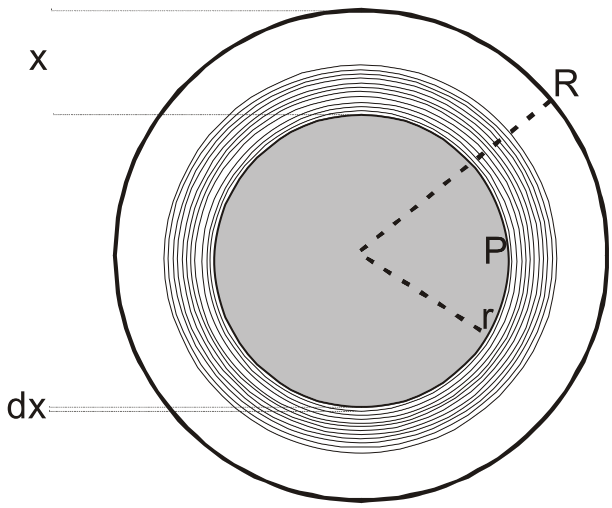
$a_G = -G\frac{\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right)}{r^2}$ reducir términos $\frac{r^3}{r^2} = r^{3\text{-}2} = r^1 = r$

Por lo tanto , la aceleración gravitacional al interior de una esfera sólida uniformemente homogénea es proporcional a la distancia de su centro .

$a_G = -\frac{4}{3}\pi G \rho r$

10.- Demostrar que el potencial gravitacional U_G al interior de una esfera sólida uniformemente homogénea de radio R en una distancia r desde su centro esta dada por :

$$U_G = -\frac{2\pi}{3} G \rho \left(3R^2 - r^2\right)$$



En este problema se considera las contribuciones al potencial U_G , tanto del potencial de la parte de la esfera interna de radio r (que llamaremos, U_1) , como el potencial de la parte entre r y R (que llamaremos, U_2) .

El potencial U_1 debido a la esfera interna es fácil de calcular : la aceleración gravitacional dentro de la esfera sólida desde su centro a la distancia r se obtiene derivando U_1 con respecto a la derivada de r .

$U_1 = -G\frac{m(r)}{r}$ potencial de la esfera interna

$a_G = -G\frac{m(r)}{r^2}$ aceleración gravitacional de la esfera interna

$a_G = -\frac{dU_1}{dr}$ derivada del potencial

$$a_G = -\left(\frac{d\left(-G\frac{m(r)}{r}\right)}{dr}\right) = -\left(-Gm(r)\left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dr}\right)\right) = -\left(-Gm(r)\left(-\frac{1}{r^2}\right)\right) = -\left(G\frac{m(r)}{r^2}\right)$$

$$a_G = -G\frac{m(r)}{r^2}$$

regresando

$$U_1 = -G\frac{m(r)}{r}$$

masa = volumen de la esfera x densidad

$$\text{masa} = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\rho$$

$$U_1 = -G\frac{\left(\frac{4}{3}\pi\, r^3\right)\rho}{r}$$

reducir términos $\frac{r^3}{r} = r^{3\text{-}1} = r^2$

$$U_1 = -\frac{4}{3}\pi\, G\, \rho\, r^2$$

potencial gravitacional de la esfera interna

La atracción gravitacional en un punto P dentro de una cáscara delgada homogénea es cero , como se demuestra en ejercicio 9 . Debido a que la aceleración es la derivada del potencial , el potencial gravitacional de la cáscara debe ser constante en todo su interior , y este debe ser igual al potencial de su superficie (de otro modo no habría una discontinuidad del potencial cuyo gradiente infinito daría una aceleración infinita) . Por lo tanto el potencial en P de una delgada cáscara de radio x , y espesor dx , donde x se encuentra entre r y R , es

$$dU_2 = -G\frac{m(x)}{x}$$

$d(v) = 4\,\pi\, x^2\, dx$ volumen del espesor de una esfera hueca por derivación

masa = volumen x densidad

masa = $4\,\pi\,\rho\, x^2\, dx$

sustituyendo

$$dU_2 = -G\frac{4\,\pi\,\rho\,x^2\,dx}{x}$$ reducir términos $\frac{x^2}{x} = x^{2\text{-}1} = x^1 = x$

$$dU_2 = -4\,\pi\,G\,\rho\,x\,dx$$

Integrando a través de las capas finas entre r y R :

$$U_2 = \int_r^R -4\,\pi\,G\,\rho\,x\,dx$$

$$U_2 = -4\,\pi\,G\,\rho\int_r^R x\,dx$$ recordar $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

$$U_2 = -4\,\pi\,G\,\rho\left(\frac{x^2}{2}\right)_r^R$$

$$U_2 = -4\,\pi\,G\,\rho\left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right) \;=\; -\frac{4}{2}\,\pi\,G\,\rho\left(R^2 - r^2\right)$$

$$U_2 = -2\,\pi\,G\,\rho\left(R^2 - r^2\right)$$

Combinando las dos contribuciones , el potencial gravitacional U_G al interior de la esfera sólida a la distancia r desde su centro es :

$$U_G = U_1 + U_2$$

$$U_G = -\frac{4}{3}\pi G \rho r^2 + \left(-2\pi G \rho \left(R^2 - r^2\right)\right)$$

$$U_G = -\frac{4}{3}\pi G \rho r^2 - 2\pi G \rho \left(R^2 - r^2\right)$$

$$U_G = -\frac{4}{3}\pi G \rho r^2 - 2\pi G \rho R^2 + 2\pi G \rho r^2$$

se acomodan términos semejantes

$$U_G = -\frac{4}{3}\pi G \rho r^2 + 2\pi G \rho r^2 - 2\pi G \rho R^2$$

reducir términos $-\frac{4}{3} + 2 = -\frac{4}{3} + \frac{6}{3} = +\frac{2}{3}$

$$U_G = \frac{2}{3}\pi G \rho r^2 - 2\pi G \rho R^2$$

factorizar términos $\frac{2}{3} \times 3 = 2$

$$U_G = \frac{2}{3}\pi G \rho \left(r^2 - 3R^2\right)$$

También

aplicando Ley de los signos

$$U_G = -\frac{2}{3}\pi G \rho \left(3R^2 - r^2\right)$$

C O N C L U S I O N E S

Los números fueron arreglados y puestos en grandes unidades, usualmente por el empleo de los dedos de la mano o de ambas manos.

El concepto de número surgió como consecuencia de la necesidad práctica de contar los objetos. En principio se contaba con ayuda de los medios disponibles: dedos, piedras, etc.

La antigua escritura era, como los jeroglíficos, una colección de ideogramas, como son nuestros signos actuales +, -, /, x, etc., los cuales son también ideogramas.

Con el aparecer de nuevos mecanismos para resolver operaciones con signos, números y letras, se da origen a los algoritmos matemáticos.

Con los breves párrafos anteriores nos damos una idea de que tan importante son las matemáticas en su desarrollo cotidiano y científico del ser humano.

El campo de aplicación de las matemáticas se amplia constantemente.

El crecimiento de las aplicaciones es una de las evidencias de la existencia y fortalecimiento de las relaciones de las matemáticas con otras ciencias.

Las matemáticas no solo se desarrollan bajo la acción de otras ciencias.

Esta circunstancia ha dado lugar a llamarle a las matemáticas "la reina y servidora de todas las ciencias"

Los ejercicios relacionados con gravimetría en este trabajo permiten a los estudiantes de Ciencias de la Tierra, tener una mejor idea sobre lo que es los efectos de la gravedad.

Se compara la gravedad Terrestre con la gravedad Lunar.

Se presenta un problema de velocidad de escape.

Otro se relaciona con el posicionamiento de un satélite de comunicaciones.

Te invito a ti Estudiante de Ciencias a enterarte del desarrollo matemático que se presenta aquí en estos ejercicios relacionados con la Geofísica.

CURRICULUM VITAE

DATOS PERSONALES

NOMBRE	HÉCTOR VILLAFRANCO MARTÍNEZ
DOMICILIO	RESERVADO
LUGAR Y FECHA DE NACIMIENTO	RESERVADO
ESTADO CIVIL	CASADO
REGISTRO FEDERAL DE CONTRIBUYENTES	RESERVADO
CURP	RESERVADO
CARTILLA DEL S.M.N.	RESERVADO
NÚMERO DE SEGURO SOCIAL	RESERVADO
CARTA PASANTE DE INGENIERIA GEOFÍSICA I. P. N.	RESERVADO
CERTIFICADO DE NIVELACION PEDAGÓGICA DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN NORMAL S.E.P.	RESERVADO

DATOS FAMILIARES

PADRE	**RESERVADO**
FINADO	
MADRE	**RESERVADO**
LUGAR Y FECHA DE NACIMIENTO	**RESERVADO**
ESPOSA	**RESERVADO**
LUGAR Y FECHA DE NACIMIENTO	**RESERVADO**
HIJA	**RESERVADO**
LUGAR Y FECHA DE NACIMIENTO	**RESERVADO**
HIJO	**RESERVADO**
LUGAR Y FECHA DE NACIMIENTO	**RESERVADO**

DATOS PROFESIONALES

PRIMARIA	**CERTIFICADO**
SECUNDARIA	**CERTIFICADO**
MEDIA SUPERIOR	**CERTIFICADO**
SUPERIOR	**CONSTANCIA DE PASANTE**
PEDAGÓGICO	**CERTIFICADO**

CURSOS

IDIOMAS	**INGLES 20% CONVERSACION 90% TRADUCCION**
COMPUTACION	**MANEJO DE DATOS EN PAQUETERIA WINDOWS OFFICE.**
DIBUJO TÉCNICO	**DIBUJO ARQUITECTONICO, MECANICO Y DE FORMATO**
CURSO INTRODUCTORIO DE FORMACIÓN DOCENTE	**COLEGIO NACIONAL DE EDUCACIÓN PROFESIONAL TÉCNICA MÉXICO D.F. 1987**
INTRODUCCIÓN A LA COMPUTACIÓN	**SECRETARIA DE EDUCACIÓN PÚBLICA MÉXICO D.F. 1995**
EDITOR DE GRÁFICOS	**SECRETARIA DE EDUCACIÓN PÚBLICA MÉXICO D.F. 2000**

EXPERIENCIA LABORAL

INDUSTRIA DE TELECOMUNICACIONES INDETEL	***DIBUJANTE***	**DIBUJO DE PLANOS ELECTRICOS, DIBUJO LINEAL Y DE FORMATO 1973**
COMISION PARA EL APROVECHAMIENTO DE AGUAS SALINAS CAAS	***SERVICIO SOCIAL***	**DIBUJO LINEAL Y DE FORMATO 1974**
CONSEJO DE RECURSOS MINERALES	***SERVICIO SOCIAL***	**COLABORANDO EN TODOS LOS PROYECTOS DE GEOFISICA DEL DEPARTAMENTO DE METODOS ELECTRICOS Y ELECTROMAGNETICOS DE LA GERENCIA DE EXPLORACION GEOFISICA. ANALIZANDO DATOS EN COMPUTADORA Y UTILIZANDO PROGRAMAS DE COMPUTACION. ABRIL-OCTUBRE 1981**

COMPAÑÍA MEXICANA DE EXPLORACIONES, S.A.	***AYUDANTE CALCULISTA***	**METODO GRAVIMETRICO SEPTIEMBRE-ABRIL 1982-1983**
	AYUDANTE OBSERVADOR	**METODO MAGNETOTELURICO COMPUTADORA PERSONAL (Hewlett Packard 9810) LENGUAJE BASIC MAYO-SEPTIEMBRE 1983**
	COORDINADOR DE BRIGADA	**METODO MAGNETOTELURICO OCTUBRE –JULIO 1983-1984**
	ANALISTA DE DATOS	**METODO MAGNETOTELURICO COMPUTADORA PERSONAL (Hewlett-Packard 9810) LENGUAJE BASIC 1984-1985**
	CALCULISTA	**METODO SISMOLÓGICO SEPTIEMBRE 1985**
CONALEP	***PROFESOR***	**MATEMATICAS, FISICA, TALLER DE DIBUJO 1986-1993**
CONALEP	***PROFESOR***	**MATEMATICAS, FISICA, TALLER DE DIBUJO 1994**
SECRETARIA DE EDUCACIÓN PÚBLICA S.E.P.	***PROFESOR***	**MATEMATICAS NIVEL DE ESCUELA SECUNDARIA 1994-2010.**

LIBROS CONSULTADOS

William Lowrie , Fundamentals of Geophysics , second edition , 2007 , Cambridge University Press

Milton B. Dobrin , Introducción a la prospección Geofísica , Ediciones Omega, 1975

Luis Lozano Calvo, Introducción a la Geofísica, Editorial Paraninfo, 1972

B. M. Yavorski , A. A. Detlaf , Manual de física para ingenieros y estudiantes , Editorial Mir, 1977

Erich Steiner, Matemáticas para las ciencias aplicadas, Editorial Reverté, S. A. 2005

I. Bronshtein, K. Semendiaev, Manual de Matemáticas para ingenieros y estudiantes, Editorial Mir, 1977

Dirk Jan Struik, Historia Concisa de las Matemáticas, Editorial I. P. N., 1980
del Instituto Politécnico Nacional

K. Ríbnikov, Historia de las Matemáticas, Editorial Mir, 1987