



---

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA  
CIENCIAS DE LA TIERRA - UNIDAD TICOMÁN

MODELADO SÍSMICO USANDO TRAZADO DE RAYOS EN  
MEDIOS ANISÓTROPAS

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO GEOFÍSICO

PRESENTA:

CARLA VALERIA PEÑA SAMANO

ASESOR INTERNO:

DR. GERARDO FELIPE RONQUILLO JARILLO

ASESOR EXTERNO:

M.C. ALFONSO GONZALEZ IBARRA

MÉXICO D.F. NOVIEMBRE, 2013.



## RESUMEN

En el marco de los medios isótropos y anisótropos, la presente tesis introduce, analiza y aplica el método de trazado de rayos. Los resultados fueron obtenidos usando el software NORSAR®. La metodología del trazado de rayos establece la generación y construcción de frentes de onda mediante la simulación de una adquisición sísmica, con el propósito de evaluar estas trayectorias y sus atributos, en un medio isótropo y tres medios anisótropos (VTI, HTI y TTI).

Inicialmente se introduce el contexto teórico y matemático básico necesario acerca de la teoría de rayos en un medio isótropo. En seguida se describe la teoría para medios anisótropos. La mayoría de los medios elásticos presentes en el subsuelo, son débilmente anisótropos (Thomsen, 1986), y quedan caracterizados por dos parámetros (épsilon y delta), que son adimensionales. El uso de estos parámetros permite estudiar la mayoría de los fenómenos anisótropos importantes de la geofísica de exploración, los cuales utilizaremos en nuestros tres medios anisótropos.

El trazado de rayos es aplicado en la exploración de objetivos de interés dentro de la industria petrolera. Este ha impulsado grandes cambios en las técnicas de adquisición y procesamiento sísmico.

## ABSTRACT

*In the setting of the isotropic and anisotropic media, this thesis introduces, analyses, and applies the ray tracing method. The results were obtained using the NORSAR® software. Ray tracing methodology establishes the generation and construction of wavefronts through the simulation of seismic acquisition in order to evaluate these trajectories and its attributes, in an isotropic medium and three anisotropic media (VTI, HIT, and TTI)*

*Initially, is introduced the theoretical and basic mathematical context necessary to understand the theory of rays in an isotropic medium. Then the theory for anisotropic media is described. Most of the elastic media in the subsurface are weakly anisotropic (Thomsen. 1986) and are characterized by two unique, dimensionless parameters (epsilon and delta). The use of these parameters allows the study most of the anisotropic important phenomena that takes place in exploration geophysics; these parameters will be used on our three anisotropic media.*

*Ray tracing is applied in the exploration of objectives of interest in the oil industry. It has contributed to generate great advances in acquisition and seismic processing techniques.*

## **AGRADECIMIENTOS**

Principalmente a Dios, que a pesar de todo siempre ha estado conmigo y me llena de bendiciones.

A mi familia a mi abuela Gloria Reyes que siempre me cuidó, a mis padres María y Carlos y especialmente a mis tíos Omar, Flor, Azucena, Daniel, Yuliana y Esmeralda que siempre me apoyaron y creyeron en mí los quiero mucho a todos nunca tendré como agradecerles todo.

A Raúl que ha sido mi novio y amigo durante este tiempo y me brindó un gran apoyo y siempre está a mi lado a su familia que siempre me brindaron las puertas de su hogar.

A mis grandes amigas y amigos de la vida Claudia, Mirna, Gabriela, Diego, Emocheche (Juan Luis), Eduardo, Nohemí y Arlaé a pesar de lo mucho o poco que convivimos siempre han sido sinceros con su amistad.

### **Agradecimientos Especiales**

A mi asesor Dr. Gerardo Ronquillo por todo su aprendizaje y apoyo para el tema y a la motivación para realizar este tema.

A mi asesor M. en C. Alfonso González Ibarra por su gran apoyo y aprendizaje durante este tiempo, la paciencia que siempre me tuvo y a la motivación para realizar este tema.

A la Ing. Gabriela de los Santos por su apoyo en la carrera.

Al Dr. Enrique Coconi por su apoyo y motivaciones durante la carrera.

Al M. en C. Leobardo Salazar Peña por su apoyo y motivaciones durante la carrera.

Al Ing. Jorge Pérez Dimas por las observaciones de este trabajo.

# ÍNDICE

RESUMEN.....	i
<i>ABSTRACT</i> .....	i
AGRADECIMIENTOS.....	ii
OBJETIVO .....	iii
JUSTIFICACIÓN.....	iv
INTRODUCCIÓN.....	v
Capítulo 1.....	1
Teoría de Rayos .....	1
1.1 Introducción .....	1
1.2 Rayos.....	3
1.3 Vector tangente unitario.....	5
1.4 Tiempo de viaje.....	6
1.5 Gradiente.....	7
1.6 Derivada direccional.....	7
1.7 Principio de tiempo mínimo .....	9
1.8 Ecuación Eikonal .....	13
1.9 Ley de Snell.....	15
1.10 Ecuación de rayo .....	17
1.11 Ecuación de rayo para una velocidad lineal a profundidad .....	19
1.12 Trayectorias de rayo para una velocidad lineal a profundidad.....	22
1.13 Tiempo de viaje para la velocidad lineal a profundidad.....	25
1.14 Punto de máxima profundidad.....	25
1.15 Frentes de onda con velocidad lineal a profundidad .....	27
1.16 Dos conjuntos ortogonales circulares .....	29
Capítulo 2.....	32
Fundamentos teóricos de NORSAR.....	32
2.1 Introducción .....	32
2.2 Modelos para trazado de rayos .....	33
2.2.1 Características que necesitan los rayos sobre el modelo.....	33

2.2.2 Las limitaciones en el modelo para el método de trazado de rayos .....	34
2.2.3 Representación del modelo para trazado de rayos .....	34
2.3 Construcción de un frente de onda.....	37
2.3.1 Antecedentes .....	37
2.3.2 Representación de un frente de onda.....	38
2.3.3 Propagación de un frente de onda .....	38
2.3.4 Reflexión y transmisión en las interfaces .....	41
2.3.5 Construcción de un frente de onda y multi-arribos .....	41
2.4 Resultados del trazado de rayos.....	44
2.4.1 Análisis de iluminación sísmica.....	44
2.4.2 Mapas de iluminación .....	45
2. 4. 3 Diagramas de Rosa .....	46
Capítulo 3.....	49
Anisotropía.....	49
3.1 Introducción .....	49
3.2 Anisotropía sísmica .....	50
3.3 Anisotropía en exploración sísmica .....	51
3.4 Tipos de anisotropía.....	55
3.5 Rayos en anisotropía .....	58
3.5.1 Cálculo de rayos y frentes de onda.....	61
Capítulo 4.....	66
Construcción del Modelo y la Geometría de Adquisición.....	66
4.1 Conceptos básicos para una adquisición sísmica.....	66
4.2 Planeación de una adquisición sísmica .....	72
4.3 Definición de horizontes.....	74
4.4 Modelos geológicos.....	80
Capítulo 5.....	82
Aplicación del Trazado de Rayos .....	82
Capítulo 6.....	87
Análisis de Resultados .....	87
6.1 Promedio del ángulo de disparo.....	89
6.2 Promedio de densidad de amplitud .....	91

6.3 Promedio del ángulo de incidencia .....	93
6.4 Promedio del tiempo de viaje.....	96
Conclusiones y Trabajo Futuro .....	103
7.1 Conclusiones .....	103
7.2 Trabajo futuro .....	105
Mnemónicos y Acrónimos .....	106
Lista de Figuras .....	108
Anexos .....	114
Referencias .....	115

## **OBJETIVO**

Entender cuál sería el impacto de la anisotropía (VTI, HTI y TTI) en un modelo geológico teórico con capas planas. Así poder analizar los resultados obtenidos y marcar la diferencia entre un modelo anisótropo respecto a un modelo isótropo.

## **JUSTIFICACIÓN**

Actualmente la industria petrolera ha tenido grandes desafíos en la búsqueda de hidrocarburos, cada vez es más importante tener mayor rigor en la exploración de estos. Esto significa que en la adquisición y procesado de datos sísmicos se consideren mayor número de parámetros, en este caso la anisotropía con la cual podremos obtener un mejor estudio para los nuevos yacimientos.



## INTRODUCCIÓN

El trazado de rayos es muy útil en las diferentes fases de la exploración y producción de petróleo, gas y minerales, incluyendo:

- ✓ Planeación del estudio
- ✓ Análisis de adquisición
- ✓ Análisis de iluminación
- ✓ Interpretación
- ✓ Modelado sísmico 4-D
- ✓ Procesado (migración a profundidad)

El concepto de rayo es extremadamente útil. Los rayos son curvas dibujadas en el espacio, que corresponden a la dirección en la que el flujo de energía se propaga. Dentro de los materiales isotrópico-homogéneos, los rayos son líneas rectas. Además, debido a que la velocidad de propagación es idéntica en todas direcciones, la separación espacial entre dos frentes de onda medida a lo largo de los rayos debe ser la misma en todas partes.

En el caso de la anisotropía es importante considerar que la propagación de la velocidad depende de la dirección de propagación. En la anisotropía el eje de simetría puede variar con la posición del subsuelo (VTI, HTI y TTI). La variación direccional de la velocidad relativa para el eje de simetría es descrita por los parámetros de Thomsen  $\epsilon$  y  $\delta$ .

El trazado de rayos consiste en construir un modelo geológico y diseñar una adquisición sísmica, para poder hacer una simulación de esta. Esta generará los frentes de onda, que se propagarán en las capas del modelo, estas capas pueden contener anisotropía y como resultado del trazado de rayos obtendremos diferentes mapas de iluminación en función de algunos parámetros.

Para este trabajo se realizó un modelo geológico sencillo y una geometría de adquisición teórica con lo cual realizamos nuestro trazado de rayos y como resultado tomamos en cuenta cuatro mapas de iluminación principalmente los cuales se encuentran divididos por offset a cada dos kilómetros:

1. Promedio del ángulo de disparo
2. Densidad de amplitud
3. Promedio del ángulo de incidencia
4. Tiempo de viaje

Los cuáles serán comparados con el modelo isotrópico.



# Capítulo 1

## Teoría de Rayos

### 1.1 Introducción

Un medio homogéneo es un material con propiedades independientes de la posición, así un medio isotrópico es un material con propiedades independientes de la dirección de viaje y un medio anisótropo es un material en el cual las propiedades físicas (como la velocidad) dependen de la dirección. Ahora bien, si tenemos un medio homogéneo-isótropo en este material las propiedades son independientes de la posición y dirección de viaje. Una onda cuando se propaga puede estar representada por una perturbación originada en algún punto dentro de un medio homogéneo-isótropo. En particular, la velocidad es una constante independiente de la dirección en cada punto del medio.

En la figura 1.1, se muestra el ejemplo de un tiro, donde  $S$  es la fuente del tiro, la onda viaja en todas direcciones y a lo largo de la trayectoria va asumiendo la forma de una esfera concéntrica con  $S$  como su centro. Después de intervalos iguales de tiempo, las posiciones de la onda serán igualmente espaciadas y el radio cambiará en incrementos iguales. El quinto frente de onda, representa la posición después de cinco intervalos de tiempo de igual longitud y los puntos  $ABC$  representan el arco esférico de la onda. Si el tiempo total transcurrido es  $t$  y la velocidad es  $v$ , entonces el radio  $SB$  es igual a  $vt$ .

Para este propósito, se define el límite delantero de un frente de onda como la posición que está frente a la región de avance de la perturbación en cualquier instante de tiempo. Detrás de la región delantera del frente de onda, el medio ha sido perturbado. Delante de esta región el medio no presenta perturbaciones. Éste es el efecto físico de la perturbación original, mientras se propaga desde la fuente.

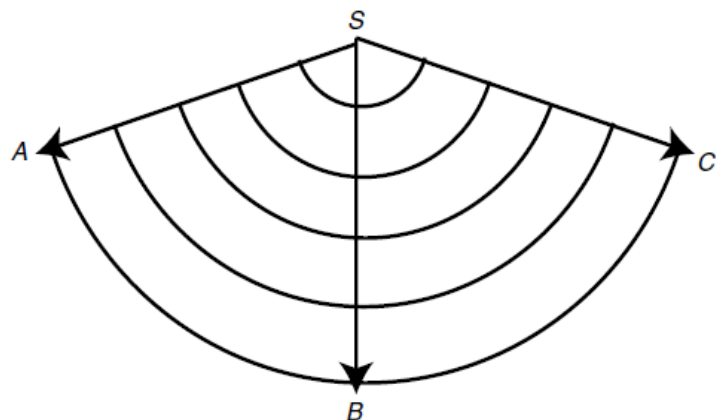


Figura 1.1 Ilustración de un frente de onda y trayectorias radiales desde el punto de la fuente en un medio uniforme (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)

En la figura 1.1, el radio de  $SA$ ,  $SB$  y  $SC$  son la representación de tres trayectorias de rayos asociadas con el frente de onda esférico. Se le puede dar significado físico pensando en ellos como los senderos sobre los cuales la perturbación de la energía viaja desde la fuente  $S$  a cualquier frente de onda. Es evidente en este simple caso que las trayectorias de los rayos están en ángulos rectos con respecto a los frentes de onda. Esta geometría (que es la ortogonalidad de las trayectorias de rayos y frentes de onda) es real para cualquier medio isotrópico aunque éste sea o no homogéneo.

El concepto de rayo es extremadamente útil. Los rayos son curvas dibujadas en el espacio, que corresponden a la dirección en la que el flujo de energía se propaga. En otras palabras los rayos son líneas de flujo. Como tal, el rayo es un elemento matemático en lugar de una entidad física. En la práctica, nosotros podemos producir rayos muy estrechos (por ejemplo, un rayo láser). Recordemos que en un medio isótropo las propiedades físicas tienen el mismo valor cuando se miden en diferentes direcciones y puede ser homogéneo o heterogéneo. En un medio isótropo, los rayos constituyen las trayectorias ortogonales del frente de onda, es decir, que los rayos son normales a los frentes de onda en todos los puntos de intersección. En tal medio, los rayos son

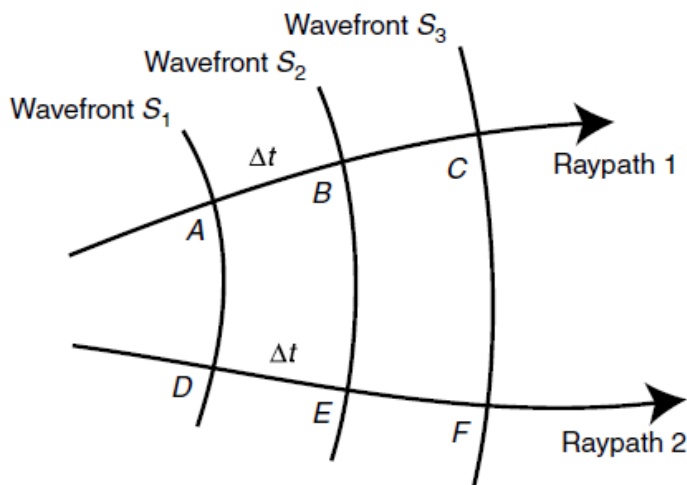


Figura 1.2 Puntos correspondientes (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)

evidentemente paralelos al vector de propagación. Sin embargo, esto deja de ser en el caso de un medio anisótropo (cuyas propiedades varían en función de la dirección).

Dentro de los materiales isótropo-homogéneos, los rayos son líneas rectas, que por simetría, estos no pueden doblar en una dirección preferida porque no existe tal dirección. Además, debido a que la velocidad de propagación es idéntica en

todas direcciones, la separación espacial entre dos frentes de onda medida a lo largo de los rayos debe ser la misma en todas partes. Los puntos en los que un solo rayo intersecta a un conjunto de frentes de onda se les denomina puntos correspondientes, como se muestra en el ejemplo de la Figura 1.2 con las letras A,B y C. Evidentemente, la separación en el tiempo entre dos puntos correspondientes en cualquiera de los frentes de onda es idéntico. En otras

palabras, si el frente de onda  $S_1$  se transforma el frente de onda  $S_2$  después de un tiempo  $\Delta t$ , la distancia entre los puntos correspondientes en cualquier rayo será atravesada en el mismo tiempo  $\Delta t$ .

Esto es cierto incluso si los frentes de onda viajan de un medio isótropo-homogéneo a otro, simplemente significa que cada punto  $S_1$  se puede que sigue la trayectoria de un rayo que llega a  $S_2$  en el tiempo  $\Delta t$ .

## 1.2 Rayos

La velocidad es una variable muy importante en el análisis sísmico. Un ejemplo de esto es, asumir que la Tierra es un medio isótropo y la velocidad sísmica está variando linealmente. Un término con el que se trabaja en sísmica es la lentitud, que está definida como el recíproco de la velocidad. Así, la función de la lentitud está definida por  $n(x, y, z) = 1/v(x, y, z)$ . Debido a que estamos muy acostumbrados a la velocidad, se es un poco difícil acostumbrarse a la lentitud. Por ejemplo, una onda sísmica va con poca rapidez y gran lentitud en las capas superficiales. Pero en las capas profundas la onda sísmica va con gran rapidez y poca lentitud.

En el estudio de las ondas, existe una región de aproximación en que la longitud de onda es más pequeña comparada con las dimensiones de las componentes del sistema involucrado. Esta región de aproximación es estudiada usando los métodos de la geometría óptica, geometría acústica o geometría sísmica. Pero cuando esta característica de la onda no puede ser ignorada, se aplican los métodos de la física óptica, física acústica y física sísmica.

En la física óptica, física acústica y sísmica física, las ondas transportan energía a lo largo de las trayectorias. Un rayo es la trayectoria de la energía que es transmitida a lo largo de un punto a otro. Otro tipo de trayectorias son las llamadas difracciones. Dentro de la aproximación representada por la geometría óptica, geometría acústica o geometría sísmica, las trayectorias de difracción son, descartadas. Por lo tanto, toda la energía viaja a lo largo de los rayos. En la práctica, podemos producir rayos muy estrechos (como, ejemplo un rayo láser) que se puede considerar como una manifestación física de los rayos.

Debido que la longitud de onda de la luz es muy pequeña comparada con el tamaño de los objetos ordinarios, la geometría óptica puede describir el comportamiento de la luz en situaciones comunes. Cuando estudiamos una onda sísmica, la longitud de onda no es muy pequeña en comparación con las capas

geológicas de la Tierra. Sin embargo, el concepto de un rayo sísmico llena una necesidad importante. La sismología geométrica no es tan exacta como la geometría óptica, pero la teoría de rayos puede ser usada para resolver importantes problemas en la geofísica práctica. En particular, las formas populares de la migración prestack se basan en el seguimiento del trazado de rayos en las reflexiones primarias.

Por ejemplo, una persona a la sombra de una casa está protegida de los rayos directos del Sol. Sin embargo, esa persona no está completamente protegida del ruido del tráfico porque las ondas de sonido tienen su longitud de onda más grande y pueden difractarse alrededor de la casa. En otras palabras, la casa no es una sombra para el sonido. La energía sísmica no viaja exclusivamente a lo largo de las trayectorias, ya que parte de la energía puede alcanzar puntos por la difracción aunque la trayectoria del rayo hubiera sido bloqueada. En otras palabras, un obstáculo enterrado no arroja una sombra distinta para las ondas sísmicas. La trayectoria del rayo puede ser representada por una curva paramétrica en el espacio dada por el vector  $r = (x(t), y(t), z(t))$ . El parámetro  $t$  es el tiempo de viaje y  $x(t), y(t), z(t)$  son tres funciones evaluadas en el tiempo.

¿Qué es el trazado de rayos? Cuando una onda se propaga en un medio heterogéneo, el frente de onda cambia de dirección. Los rayos son curvas que trazan el movimiento de un frente de onda en el tiempo. Recordemos la historia de Hansel y Gretel. A medida que entraban al bosque, Hansel dejó migajas en todo el camino, así los niños encontrarían el camino de regreso a casa. El trazado de rayos se puede utilizar para dar marcha atrás a los eventos recibidos dentro de la superficie y ponen su energía en el punto de reflexión. Así describiremos el comportamiento de los rayos en los medios. Simplificaremos las matemáticas, considerando solo dos coordenadas espaciales: horizontal  $x$  y la coordenada de profundidad  $y$ .

Un vector representa la idea geométrica de un segmento orientado, así que un vector es una cantidad que tiene dirección y magnitud. El vector  $r = (x(t), y(t))$  representa la trayectoria del rayo como una función del tiempo de viaje  $t$ . El pie de este vector está en el origen  $(0,0)$  y la punta de flecha está en el punto  $(x(t), y(t))$  en la trayectoria del rayo. Un rayo en 2D a partir de un punto de origen  $(x_0, y_0)$  y que va con una velocidad constante  $v$  en dirección de un ángulo constante  $\theta$  (medido desde la horizontal) tiene la siguiente representación paramétrica:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + vt \cos \theta \\ y(t) &= y_0 + vt \sin \theta \end{aligned} \tag{1}$$

### 1.3 Vector tangente unitario

Ahora encontraremos una expresión para el vector tangente unitario de un rayo sísmico. Tenemos que el vector  $r = (x, y)$  representa a un punto dado en el rayo (Figura 1.3). Como sabemos  $s$  denota la longitud de arco del rayo. Así  $r + dr = (x + dx, y + dy)$  nos da un punto adyacente del mismo rayo. Dado el vector  $dr = (dx, dy)$  es (aproximadamente) un vector tangente del rayo.

La longitud de este vector es  $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ , quien es aproximadamente igual al incremento  $ds$  de la longitud de arco en el rayo. Como resultado del vector tangente del rayo tenemos:

$$u = \frac{dr}{ds} = \frac{dx}{ds}i + \frac{dy}{ds}j = \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right) \quad (2)$$

En esta ecuación,  $i$  y  $j$  son vectores unitarios en dirección horizontal y vertical, respectivamente. En otras palabras, el vector unitario es definido como los vectores que tienen magnitud igual a uno y que tiene dirección lineal a lo largo de los ejes  $x$  y  $y$  respectivamente.

Llegados a este punto tenemos que aclarar los aspectos confusos de los rayos. Habitualmente en el trazado de rayos se mide el ángulo de la línea tangente a la vertical. Este uso se remonta al siglo XVII con la declaración de la ley de Snell. Sin embargo en las matemáticas, lo convencional es medir el ángulo de la línea tangente a la horizontal. La trayectoria de un rayo es una curva a lo largo de la cual la energía sísmica viaja. El vector tangente unitario puede estar escrito como:

$$u = (\cos \theta, \sin \theta) \quad (3)$$

dónde  $\theta$ , es el ángulo del rayo con la horizontal.

Así el vector  $r$  es un punto en la trayectoria del rayo. Un punto espaciado en la trayectoria puede estar representado por el vector  $r + dr$ . Su diferencia sería el vector  $dr$ , que es el vector que conecta a los dos puntos en cuestión. Así la longitud de la trayectoria entre los dos puntos es  $ds$ . El vector tangente unitario a la trayectoria del rayo es el límite  $dr/ds$  como los puntos que se aproximan entre

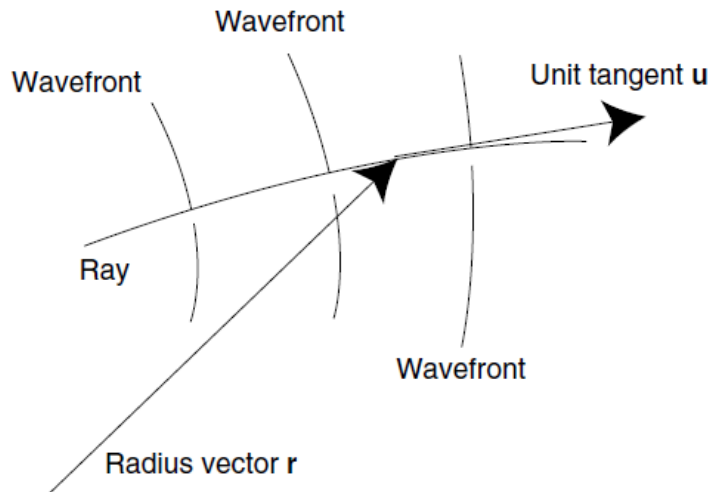


Figura 1.3 Vector tangente unitario para un rayo. El rayo está especificado por el radio del vector desde el origen a un punto en el rayo. Los frentes de onda son ortogonales al rayo (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)

sí. La longitud del vector  $dr$  es aproximadamente igual a la diferencia de longitud de las trayectorias  $ds$ .

Como resultado, el vector  $dr/ds$  es el vector unitario. Así  $\theta$  es el ángulo que la tangente hace con eje horizontal. El vector tangente unitario es entonces  $u = (\cos \theta, \sin \theta)$ .

El vector  $u$  se dirige a lo largo de la tangente a la curva en dirección del incremento de los valores de la longitud de arco  $s$ .

## 1.4 Tiempo de viaje

El tiempo de viaje representa el tiempo que toma la energía sísmica en propagarse, desde la fuente al objetivo dado por un punto  $(x, y)$ . El tiempo de viaje tiene magnitud pero no dirección, y este puede estar representado por una función escalar  $t(x, y)$ . El tiempo de viaje en la superficie se puede graficar contra  $x, y$ . La función del tiempo de viaje puede estar representada por una superficie horizontal con coordenada  $x$  y coordenada  $y$  (profundidad).

Un terreno, representado por un mapa topográfico, puede ser utilizado para visualizar la configuración del tiempo de viaje. Los mapas topográficos proporcionan información acerca de la elevación de la superficie en el terreno sobre el nivel del mar. La elevación se representa en un mapa topográfico con curvas de nivel. El mapa del terreno representa una función escalar. Cada punto en el contorno de línea tiene la misma elevación. En otras palabras, el contorno de línea representa un corte horizontal a través de la superficie, así un conjunto de curvas de nivel indica la forma de la tierra y el intervalo de contorno es la diferencia de la altura entre las curvas de nivel adyacentes.

Un frente de onda es el lugar geométrico de todos los puntos con un tiempo de viaje dado. El contorno de línea  $t(x, y) = T$  representa el frente de onda para un tiempo de viaje  $T$ . De esta manera, tenemos una idea del tiempo de viaje a



través de la superficie a partir de un estudio de curvas de nivel (es decir, mediante un estudio de los frentes de onda). El tiempo de viaje en la superficie se eleva abruptamente donde los frentes de onda se acercan el uno a otro y se eleva de forma suave cuando están separados.

## 1.5 Gradiente

La función del tiempo de viaje es como una colina cuya altura en el punto  $r = (x, y)$  es  $t(x, y)$ . El gradiente de  $t(x, y)$  en un punto dado es un vector que apunta en dirección de la pendiente más pronunciada en ese punto. La magnitud del vector de gradiente da la inclinación de la pendiente. El gradiente depende solo en las derivadas parciales de  $t(x, y)$  evaluadas en un punto. El gradiente es un vector definido por la siguiente ecuación:

$$\text{grad } t = \left( \frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y} \right) = \frac{\partial t}{\partial x} i + \frac{\partial t}{\partial y} j \quad (4)$$

En la ecuación anterior  $i$  y  $j$  son vectores unitarios en las direcciones  $x, y$  respectivamente. El operador del gradiente es el siguiente:

$$\text{grad} \equiv \frac{\partial}{\partial x} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j \quad (5)$$

Es una generalización de la familia del operador de diferenciación. Cuando el operador del gradiente actúa sobre la función  $t(x, y)$ , se produce un vector, es decir, el gradiente.

## 1.6 Derivada direccional

Dada la función  $t(x)$  de una sola variable, la regla de la cadena es:

$$\frac{dt}{d\sigma} = \frac{dt}{dx} \frac{dx}{d\sigma} \quad (6)$$

La regla de la cadena puede ser extendida a funciones de varias variables. En el caso de la función de  $t(x, y)$  es la siguiente:

$$\frac{dt}{d\sigma} = \frac{\partial t}{\partial x} \frac{dx}{d\sigma} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{dy}{d\sigma} \quad (7)$$

La derivada direccional es una generalización de una derivada parcial (Robinson y Clark, 2005). Las derivadas parciales dan la velocidad de cambio del tiempo de viaje en las direcciones de los ejes. La derivada direccional obtiene el índice de cambio en cualquier dirección específica. El tiempo de viaje  $t(x, y)$  depende de los ejes de coordenadas  $(x, y)$ . Podríamos considerar  $y$  como una constante y solo considerar la curva que da la variación de  $t$  con  $x$ . La pendiente  $\partial/\partial x$  de esta curva es denominada la derivada parcial de  $t$  con respecto a  $x$ . Similarmente, nosotros definimos la derivada parcial de  $\partial t/\partial y$ .

En general, queremos saber la pendiente en alguna dirección arbitraria. Recordemos que un vector unitario es un vector con la longitud o magnitud de uno. Podemos convertir cualquier vector en un vector unitario en la misma dirección, dividiendo el vector por su magnitud. Por lo tanto, el vector unitario para la dirección del ángulo  $\gamma$  (medido desde la horizontal) puede estar representado por  $w = (\cos \gamma, \sin \gamma)$ . Si dejamos que  $\sigma$  represente la distancia en la dirección del vector  $w$ , entonces:

$$\frac{dx}{d\sigma} = \cos \gamma \quad \frac{dy}{d\sigma} = \sin \gamma \quad (8)$$

La pendiente de  $t(x, y)$  en dirección de este vector es llamado derivada direccional. La derivada direccional es el promedio de las dos derivadas parciales, siendo la componente del vector unitario direccional. Por lo tanto, la derivada direccional está dada por la regla de la cadena.

$$\frac{\partial t}{\partial \sigma} = \frac{\partial t}{\partial x} \frac{dx}{d\sigma} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{dy}{d\sigma} = \frac{\partial t}{\partial x} \cos \gamma + \frac{\partial t}{\partial y} \sin \gamma = \left( \frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y} \right) \cdot (\cos \gamma, \sin \gamma) \quad (9)$$

Esto muestra que la derivada direccional es un producto punto:

$$\frac{\partial t}{\partial \sigma} = \left( \frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y} \right) \cdot (\cos \gamma, \sin \gamma) = \text{grad } t \cdot w \quad (10)$$

El primer vector es un producto punto y es el gradiente del tiempo de viaje. El segundo vector es un vector unitario en la dirección deseada. Las derivadas parciales son casos especiales de las derivadas direccionales. Por ejemplo,  $\partial t / \partial x$  es una derivada direccional en  $x$ . La derivada direccional puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \sigma} &= \text{grad } t \cdot w = |\text{grad } t| \cdot |w| \cos \alpha \\ &= |\text{grad } t| \cdot \cos \alpha \end{aligned} \quad (11)$$

Donde  $\alpha$  es el ángulo entre el gradiente y el vector direccional. El máximo valor de la derivada direccional es obtenido cuando los puntos del vector direccional como gradiente es,  $\alpha = 0$ . Este valor máximo es igual a la magnitud del gradiente. En otras palabras, el gradiente nos da la dirección de la máxima inclinación. Debido a que la línea de contorno es el nivel, la derivada direccional en dirección de una línea de contorno debe de ser cero. Así, el  $\cos \alpha$  debe de ser cero, entonces,  $\alpha$  mide  $90^\circ$ . Por lo tanto, el vector del gradiente es ortogonal a las líneas de contorno.

Ahora nosotros introducimos un concepto importante, que es, línea de flujo. Un campo vectorial es una regla que asigna un vector a cada punto  $(x, y)$ . Un caso importante es el campo vectorial definido por el gradiente. Al visualizar un campo vectorial, imaginamos que el vector  $\text{grad } t$  unido a cada punto. Por lo tanto, el campo vectorial asigna una dirección y magnitud para cada punto. Si una partícula se mueve hipotéticamente de tal manera que su dirección, en cualquier punto coincide con la dirección del gradiente en ese punto, entonces la curva trazada es llamada línea de flujo. Debido a que la dirección de la línea de flujo está determinada únicamente por el vector de campo, es imposible tener dos direcciones en el mismo punto. Por lo tanto, es imposible tener dos líneas de flujo que se crucen entre sí. Las líneas de contorno asociadas con las líneas de flujo son herramientas importantes para comprender el movimiento de las ondas (Robinson and Clark, 2007).

## 1.7 Principio de tiempo mínimo

El gradiente es un concepto que es familiar para todos los que han escalado una montaña (Figura 1.4). Cuando un escalador sube por la montaña, experimenta una tasa de cambio de elevación. El gradiente es el vector (ya que tiene magnitud y dirección) que apunta en la dirección más inclinada (es decir, la dirección en que la velocidad de cambio es mayor). La magnitud del vector del gradiente es la tasa de cambio de la elevación a lo largo de este camino. Por lo tanto, si el escalador sigue continuamente el gradiente, tomará el camino más empinado a la parte superior de la montaña. Este camino empinado se le conoce como una línea de flujo.

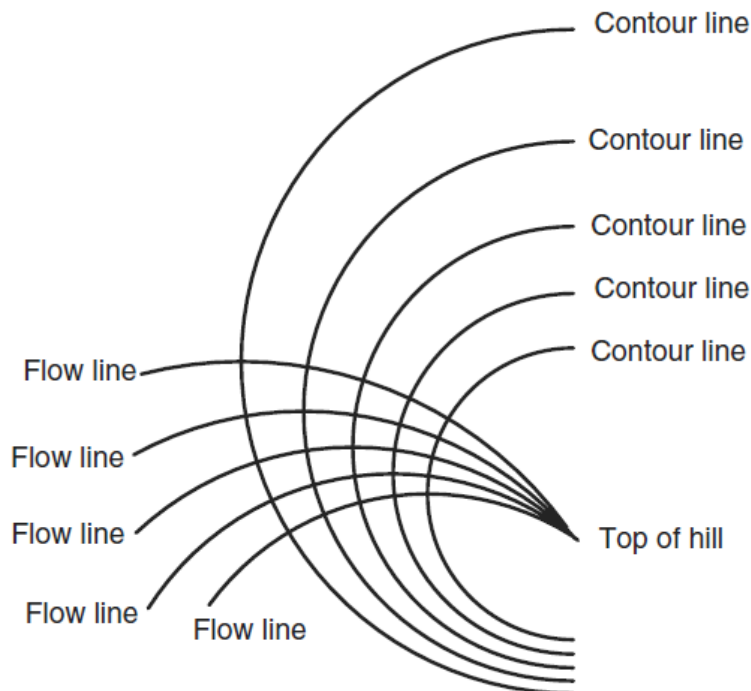


Figura 1.4 Las trayectorias más inclinadas son líneas de flujo. Las trayectorias de nivel son líneas de contorno. Los dos conjuntos son ortogonales. (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)

Usando otra analogía, un esquiador quiere descender por un camino más inclinado para él, desde su posición en la colina. El gradiente negativo es el vector que apunta en la dirección más inclinada colima abajo. Este camino se llama línea de caída. La línea de caída está siempre en dirección del gradiente negativo de la función cuyo gráfico representa la superficie de la colina. La línea de caída y la línea de flujo correspondiente coinciden. La línea de caída puede cambiar de

dirección como el esquiador cuando va colina abajo de una posición a otra. El esquiador siente la línea de caída y sigue las pistas visuales acerca de su ubicación. Los ojos del esquiador pueden detectar cambios locales en la pendiente de la colina. Las piernas del esquiador indican si están en la línea de caída o fuera. Cuando el esquiador está en la línea de caída, el siente la misma presión en ambas piernas. Todas las fuerzas se localizan en una dirección paralela a los esquís. En otras palabras, el esquí de la línea de caída significa que el esquiador sigue la dirección del gradiente negativo hasta el fondo de la colina.

El río Mississippi es un ejemplo geológico, al depositarse arena y limo. El objetivo del río es llegar al Golfo de México en el menor tiempo posible. El río quiere seguir la dirección del gradiente negativo, que es el camino del descenso más agudo. El Mississippi está destinado a seguir la línea de flujo, en el sur de Luisiana que es una península larga y se va estrechando metiéndose al Golfo de México. Sin embargo, el río ha depositado sedimentos sobre un área muy amplia, a medida que continúa transportando y depositando más sedimentos, el río se alarga y sus avances se dirigen hacia el sur. Conforme disminuye la pendiente de su trayectoria, la corriente disminuye y se acumula sedimento en el lecho del río.

Pierre de Fermat (1601-1665) formuló una regla conocida como el Principio de Fermat de tiempo mínimo. Fermat afirmó que la trayectoria de un rayo de luz que viaja entre dos puntos es tal que el tiempo empleado es mínimo. En otras palabras, las trayectorias de rayo son las líneas de flujo. Ahora el Principio de Fermat se expresa como: la trayectoria de un rayo de luz que viaja entre

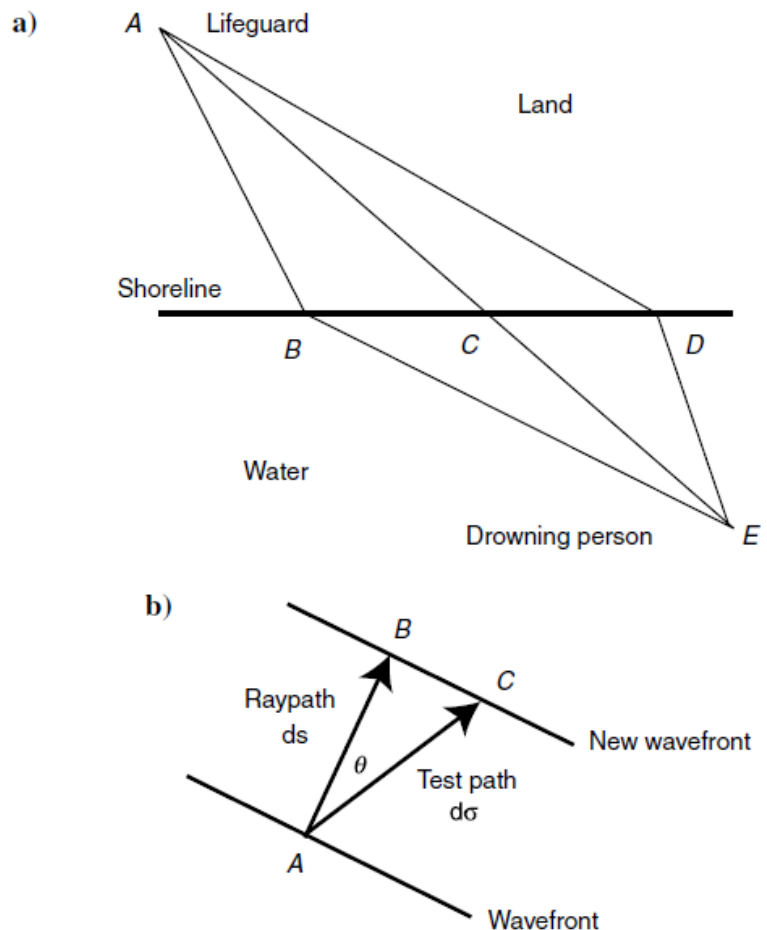


Figura 1.5 a) Para un humano, el camino con el tiempo mínimo es ADE b) La trayectoria del rayo es ortogonal a los frentes de onda. La trayectoria de prueba esta desviada hacia los frentes de onda. (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)

dos puntos cualesquiera es la del tiempo estacionario con respecto a las variaciones de ese camino. Estacionario quiere decir que el tiempo de viaje puede ser un mínimo o puede ser un máximo así como puede ser un punto de inflexión que tiene una tangente horizontal. Más específico, el tiempo de viaje de la trayectoria verdadera (es decir, de la trayectoria de rayo) será igual, en la primera aproximación, el tiempo de viaje de la trayectoria en el vecino más cercano. La energía viaja a lo largo de estas trayectorias vecinas para que llegue a su destino al mismo tiempo por las rutas que difieren solo un poco. Por lo tanto, estas trayectorias vecinas tienden a reforzarse mutuamente. La energía que toma otras trayectorias llegan fuera de fase y por lo tanto tienden a cancelarse. El resultado es que la energía se propaga eficazmente a lo largo de las trayectorias de rayo (es decir, las trayectorias que satisfacen el Principio de Fermat).

En la figura 1.5 se muestra un ejemplo de un salva vidas (A) que ve a una persona que se ahoga en el agua (E). ¿Qué camino debe tomar el salvavidas para rescatar a la persona que se ahoga en el menor tiempo posible? El salva vidas puede estar tentado a tomar el camino ACE en línea recta, ya que representa la distancia mínima que debe correr. Sin embargo, él sabe que puede correr más rápido en la playa que nadar más rápido en el agua. Como resultado de ello, vale la pena ir por el camino AD ya que la distancia para correr por la playa es mayor pero la distancia DE que tendría que nadar es menor. Si corre a D y después nada a E, el salva vidas no minimiza la distancia, pero si minimiza el tiempo requerido para salvar a la persona.

Tomemos un medio isótropo en el que la velocidad varía linealmente, pero no hay ninguna interfaz en la que la reflexión y/o refracción puedan ocurrir. En tal caso, el Principio de Fermat tiene su formulación original (es decir, el tiempo de viaje es mínimo). En la figura 1.5b se da un camino arbitrario entre dos frentes de onda. Este camino arbitrario se llama trayectoria de prueba, así que primero vamos a entender lo que sucede entre dos frentes de onda muy aproximados entre sí. Debido a que los frentes de onda están muy próximos entre sí, podríamos considerar esas partes dentro de esa región tan pequeña como dos líneas rectas paralelas. La trayectoria de prueba AC sería una línea recta entre los dos frentes de onda y AB es una línea de flujo ortogonal a los frentes de onda. Si  $\theta$  es el ángulo entre las dos trayectorias,  $ds$  es igual a la longitud de la línea de flujo y  $d\sigma$  es la longitud de la línea de prueba entonces,  $d\sigma = ds / \cos \theta$ .

En un medio isótropo, el tiempo que toma la energía para atravesar la línea de flujo es  $dt = n ds$ , donde la lentitud  $n$  es definida como el recíproco de velocidad. Asimismo, el tiempo que tarda en recorrer la trayectoria de prueba es:

$$d\tau = nd\sigma = n ds / \cos \theta \quad (12)$$

El tiempo de viaje a lo largo de la línea de flujo entre dos frentes de onda es  $t = \int n ds$ . El tiempo de viaje a lo largo de la trayectoria de prueba es  $\tau = \int (n / \cos \theta) ds$ . Como el  $\cos \theta$  es siempre menor o igual a uno, se tiene que  $t \leq \tau$ . Por lo tanto, el tiempo de viaje a lo largo de la línea de flujo es menor que el tiempo de viaje a lo largo de cualquier trayectoria de prueba excepto a lo largo de la línea de flujo misma. Así, la línea de flujo, es decir, la línea cuya dirección en cualquier punto coincide con la dirección del gradiente, es la trayectoria de tiempo mínimo.

## 1.8 Ecuación Eikonal

Consideremos un frente de onda dado en el tiempo  $t$  y un nuevo frente de onda en el tiempo  $t + dt$ , entonces el tiempo de viaje a lo largo del rayo es  $dt$ . Si  $s$  mide las trayectorias a lo largo de la longitud de un rayo dado, entonces la distancia del viaje en el tiempo  $dt$  es  $ds$ . Los incrementos  $dt$  y  $ds$  están relacionados por la lentitud, es decir,  $dt = n ds$ . Por lo tanto, la derivada direccional en la dirección de la trayectoria del rayo es igual a la lentitud, que es,  $n = dt/ds$ . La derivada direccional en términos de sus componentes se expresa como:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\partial t}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \text{grad } t \cdot \frac{dr}{ds} \quad (13)$$

Ya que  $dr/ds = u$ , la ecuación 13, se convierte en  $dt/ds = \text{grad } t \cdot u$  ó  $n = \text{grad } t \cdot u$ . Fermat requiere que el vector tangente unitario  $u$  tenga la misma dirección que el vector  $\text{grad } t(x, y)$  significa que estos dos vectores están relacionados por el valor escalar  $n(x, y)$ . Esta relación puede ser escrita como:

$$\text{grad } t(x, y) = n(x, y)u(x, y) \quad (14)$$

Esta ecuación es la ecuación eikonal (en forma de vectorial). Se conoce a  $n(x, y)u(x, y)$  como el vector de la trayectoria de rayo. La ecuación eikonal dice que el vector de la trayectoria de rayo es igual al gradiente del tiempo de viaje, el gradiente  $\text{grad } t(x, y)$  describe las líneas de flujo sobre la superficie. Por lo tanto, la ecuación eikonal afirma que el vector de la trayectoria de viaje es una línea de flujo sobre la superficie.

Debido a que  $u$  es un vector unitario en la misma dirección que el gradiente, se sigue que  $n = |\text{grad } t|$ . En otras palabras, la lentitud es igual a la magnitud del

gradiente del tiempo de viaje. Si nosotros tomamos el cuadrado, obtendremos la ecuación eikonal (en forma escalar):

$$n^2 = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 \quad (15)$$

La ecuación eikonal 15, indica que la magnitud del gradiente del tiempo de viaje es igual a la lentitud. (Robinson and Clark, 2003).

La ecuación eikonal 14 nos dice que en cualquier punto, el gradiente del tiempo de viaje es  $n$  veces la lentitud del vector unitario tangente al rayo. Por lo tanto, el gradiente y la tangente van a la misma dirección, debido a que el gradiente es ortogonal al frente de onda y la tangente es a lo largo del rayo, se deduce que el rayo es ortogonal al frente de onda:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}\right) = n(\cos \theta, \sin \theta) \quad (16)$$

El lado izquierdo de la ecuación 16 implica al frente de onda; y el lado derecho implica al rayo. La velocidad es llamada rapidez, el recíproco de la velocidad es la lentitud. En la ecuación anterior, la función  $t(x, y)$  es el tiempo de viaje desde la fuente hasta el punto con las coordenadas  $(x, y)$  y  $n = 1/v(x, y)$  es la lentitud (o velocidad recíproca) en ese punto. La rapidez aparente a lo largo de las direcciones de coordenadas son respectivamente,  $\partial x/\partial t, \partial y/\partial t$ . Así, las lentitudes aparentes a lo largo de las direcciones de las coordenadas son  $\partial t/\partial x, \partial t/\partial y$ . La rapidez real a lo largo de la dirección de la trayectoria de rayo es  $v = ds/dt$ . La lentitud real a lo largo de la dirección de la trayectoria de rayo es  $n = dt/ds$

La ecuación eikonal describe la propagación del tiempo de viaje en un medio isotrópico. Para obtener un valor en la posición inicial, es necesario saber la función de velocidad  $v(x, y)$  en todos los puntos. La ecuación eikonal proporciona el campo del tiempo de viaje  $t(x, y)$  en el medio heterogéneo, como es requerido para la migración y otras necesidades del procesamiento sísmico.

La ecuación eikonal es una reafirmación del Principio de Fermat del tiempo mínimo. En otras palabras, la trayectoria de rayo debe ser una línea de flujo. Una línea de flujo es ortogonal a los frentes de onda. Ésta es una ecuación fundamental que conecta al rayo con el frente de onda. La ecuación eikonal hace que una onda viaje como lo predice el principio de Huygens, fundamentalmente diferente a una partícula-(previsto por Newton). Hamilton percibió que existe una dualidad onda-partícula, que es la base de la matemática en la mecánica cuántica. El trabajo de Hamilton se basa en el Principio de la acción mínima, que es una



formulación más general del Principio del tiempo mínimo (Robinson y Douze, 1985).

Hasta ahora hemos comprendido que la trayectoria de un rayo siempre es perpendicular al tiempo de superficie. Una onda a medida que viaja debe seguir el camino de menor tiempo. Los frentes de onda son como las líneas de contorno en una colina. Es como si midiéramos la altura de la colina. Supongamos que los puntos de rayos van en dirección de las líneas de contorno. En otras palabras, supongamos que la trayectoria del rayo se encuentra contenida directamente en el frente de onda. A medida que la onda se desplaza cierta distancia a lo largo del rayo, necesita tiempo, pero el tiempo es el mismo a lo largo del frente de onda. Por lo tanto, una onda no puede viajar a lo largo de un frente de onda. De esto se deduce que un rayo debe apuntar hacia afuera de un frente de onda.

Ahora si un rayo apunta hacia afuera de un frente de onda. La onda toma el menor tiempo para viajar al nuevo frente de onda. Por isotropía, la velocidad de la onda es la misma en todas direcciones, debido a que el tiempo de viaje es la velocidad multiplicada por la distancia, la onda toma la trayectoria de rayo que va por la distancia más corta. La distancia más corta es a lo largo de la ruta que no tiene ninguna componente a lo largo del frente de onda, es decir, la distancia más corta es a lo largo de la normal al frente de onda. En otras palabras, la trayectoria de rayo debe ser ortogonal (es decir, en ángulo recto) al frente de onda. Así, el vector tangente unitario del rayo  $u$  debe ser ortogonal a los frentes de onda. Por definición, el gradiente es un vector que apunta en dirección ortogonal al frente de onda. Así, el vector tangente unitario del rayo y el gradiente del frente de onda deben apuntar a la misma dirección.

El teorema de Pitágoras es fundamental para la comprensión de la propagación de las ondas en un medio isótropo, en el que el frente de onda se mueve a lo largo de las trayectorias de rayo que siempre son perpendiculares al frente de onda. Por lo tanto, la clave para el movimiento ondulatorio en un medio isótropo es el ángulo recto. Los dos frentes de onda y las trayectorias de rayo revelan la propagación de una onda y cada método tiene sus méritos.

## 1.9 Ley de Snell

Supongamos que tenemos dos medios homogéneo-isótropos separados por una interfaz horizontal (figura 1.6). Se traza un eje en dirección de la profundidad hacia arriba con  $G$ . La capa superficial con poca velocidad (capa 1, con lentitud constante  $n_1$ ) está en el intervalo  $E$  a  $F$ . La capa profunda con alta velocidad (capa 2, con lentitud constante  $n_2$ ) está en el intervalo  $F$  a  $G$ . El rayo EFG comienza en una dirección vertical y llega a la interfaz horizontal en ángulo recto. Una partícula en el rayo acelera cuando pasa de la capa de baja velocidad 1 a la capa de alta velocidad 2. El rayo no se desvía en la interfaz y se desplaza en la capa 2 en la misma dirección vertical. El rayo ABC comienza en una dirección oblicua a la interfaz. Una partícula en el rayo ABC acelera cuando pasa de la capa de baja velocidad 1 a la capa de alta velocidad 2, al igual que la partícula en el rayo EFG. Las partículas de los rayos EFG y ABC experimentan exactamente el mismo contraste en la velocidad, sin embargo, el rayo ABC se desvía en la interfaz. ¿Por qué?

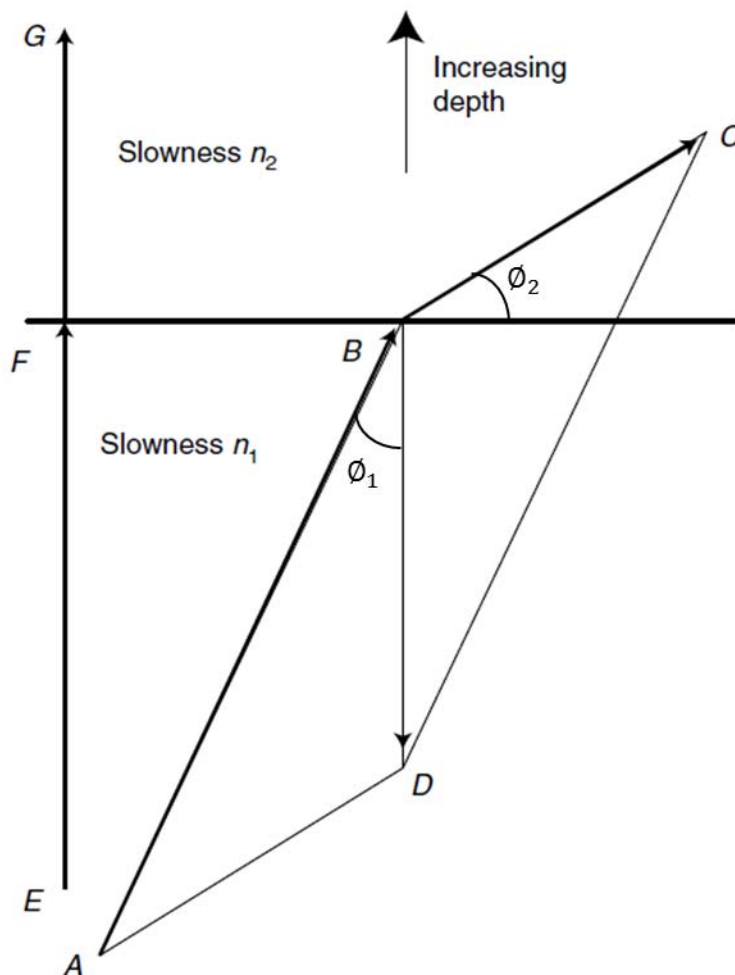


Figura 1.6 El rayo EFG, está en ángulo recto respecto a la interfaz y no se desvía. El rayo ABC, es desviado en la interfaz. (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)

La partícula es como un pequeño avión, que viaja a lo largo de la trayectoria de rayo. El avión es dirigido por las alas, que se extienden en ángulos rectos a cada lado. El ala izquierda entra en la capa de alta velocidad, mientras que el ala derecha se encuentra todavía en la capa de baja velocidad. Esto balancea el avión a la derecha y las curvas de la trayectoria de rayo en la interfaz.

El vector del rayo AB en la capa 1 tiene una longitud  $n_1 \sin \phi_1$  y forma un ángulo  $\phi_1$  con la normal. El vector del rayo BC en la capa 2 tiene una longitud  $n_2 \sin \phi_2$  y forma un ángulo  $\phi_2$  con la normal. Como el rayo ABC es un rayo continuo, el vector del rayo AB debe ser igual en longitud y dirección al vector del rayo BC. Esto implica que  $n_1 \sin \phi_1 = n_2 \sin \phi_2$ , que es la Ley de Snell.

El vector del rayo AB en la capa 1 tiene una longitud  $n_1 \sin \phi_1$  y forma un ángulo  $\phi_1$  con la normal. El vector del rayo BC en la capa 2 tiene una longitud  $n_2 \sin \phi_2$  y forma un ángulo  $\phi_2$  con la normal. Como el rayo ABC es un rayo continuo, el vector del rayo AB debe ser igual en longitud y dirección al vector del rayo BC. Esto implica que  $n_1 \sin \phi_1 = n_2 \sin \phi_2$ , que es la Ley de Snell.

ángulo  $\theta_1$  con la vertical. El vector del rayo BC en la capa 2 tiene una longitud  $n_2$  y forma un ángulo  $\theta_2$  con la vertical. Por la Ley de Snell, nosotros tenemos  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ . Esta ecuación dice que las proyecciones horizontales de los dos vectores son las mismas. Este es un resultado esperado porque la lentitud no cambia en la dirección horizontal. La lentitud cambia en la interfaz en la dirección vertical. El medio superficial tiene una lentitud  $n_1$  y el medio profundo tiene una lentitud más pequeña  $n_2$ . Sin embargo la interfaz es tomada como un nivel, se sigue que la lentitud es constante a lo largo de cualquier línea horizontal, por que  $\partial n / \partial x = 0$ . Sin embargo, la lentitud cambia en la interface. La diferencia de la lentitud en la interfaz es  $n_2 - n_1$ , que es negativo por que  $n_2 < n_1$ . El gradiente de la lentitud en la interfaz es proporcional a  $(n_2 - n_1)j$ . Este vector apunta directamente a la capa de baja velocidad. La diferencia del vector  $BD = BC - AB$  debe ser proporcional al gradiente de la lentitud y por lo tanto el vector  $BD$  debe apuntar hacia abajo. Con esto las trayectorias quedan de la siguiente forma:  $n_1 \cos \theta_1 > n_2 \cos \theta_2$ . En esta sección, hemos anticipado la ecuación de rayo.

## 1.10 Ecuación de rayo

Es necesario entender como un rayo en movimiento viaja a lo largo de una trayectoria en particular, por ejemplo, un rayo sísmico puede saber lo que es una trayectoria extrema en el sentido de la variación. Para ilustrar este problema, consideraremos una onda sísmica que viaja a través de un medio cuya lentitud  $n$  aumente en la dirección de viaje. Debido a que la trayectoria de rayo es paralela a la pendiente de la lentitud, no se somete a una desviación. Sin embargo, si las líneas de contorno de la lentitud forman un ángulo con el rayo, entonces el rayo se desvía, a pesar que de la magnitud de la lentitud en cada punto a lo largo de la trayectoria sea idéntico a la que era antes cuando aún no se desviaba. Esto muestra que la trayectoria de un rayo no se puede explicar únicamente en términos del valor de la lentitud en esa trayectoria. También debemos considerar la lentitud a lo largo de las trayectorias vecinas, es decir, a lo largo de las trayectorias no tomadas.

La explicación de una onda clásica, propuesta por Huygens, resuelve este problema, diciendo que la luz no se propaga en forma de un solo rayo. De acuerdo con la interpretación de una onda, la luz se propaga como un frente de onda que posee un ancho transversal. Si una pequeña sección de un frente de onda se encuentra con el mismo valor que la lentitud a lo largo de su anchura, entonces el rayo no se desviará. Si una pequeña sección del frente de onda se encuentra con

diferentes valores en la lentitud a lo largo de su anchura, entonces el rayo se desvía. La cantidad de difracción depende del gradiente de la lentitud. Un frente de onda se propaga más rápido en el lado donde la lentitud es baja (es decir, donde la velocidad es mayor). Como resultado, el frente de onda gira en la dirección de la lentitud en aumento.

El vector de posición  $\mathbf{r}$  representa siempre un punto específico en la trayectoria del rayo y no cualquier punto arbitrario en el espacio. A medida que aumenta el tiempo,  $\mathbf{r}$  traza la trayectoria de rayo en cuestión. El rayo sísmico en cualquier punto dado sigue la dirección del gradiente del tiempo de viaje  $t(\mathbf{r})$ , sea  $\mathbf{u}$  el vector unitario a lo largo del rayo. El rayo en general seguirá una trayectoria curva y el vector de la trayectoria de rayo  $n \mathbf{u}$  será tangente a la curva de la trayectoria de rayo.

Vamos a obtener la ecuación de rayo, esta ecuación nos dice que la trayectoria de rayo  $n\mathbf{u}$  cambia a lo largo de la curva. La ecuación para el vector tangente unitario es:

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (17)$$

También sabemos que

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right) \quad (18)$$

Por lo tanto, el vector tangente unitario  $u$  es

$$\mathbf{u} = \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right) \quad (19)$$

La lentitud  $n(x, y)$  es una función escalar que depende de la coordenadas  $x$  y  $y$ . Sin embargo, nosotros podemos tener una constante y considerar la curva que da la variación de la lentitud solo con  $x$ . La pendiente de esta curva  $\partial n / \partial x$  es llamada la derivada parcial de la lentitud respecto a  $x$ . La derivada parcial  $\partial n / \partial y$  es definida similarmente. El gradiente de la lentitud en la superficie  $n(x, y)$  es el vector con estas derivadas parciales como componentes, es decir:

$$\text{grad } n = \left( \frac{\partial n}{\partial x}, \frac{\partial n}{\partial y} \right) \quad (20)$$

Nosotros sabemos que el gradiente del tiempo de viajes es:

$$\text{grad } t = \left( \frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y} \right) \quad (21)$$

Recordemos la ecuación eikonal 14, se toma la derivada de la ecuación eikonal con respecto a la longitud de la trayectoria  $s$ , obteniendo:

$$\frac{d}{ds}(n\mathbf{u}) = \frac{d}{ds}(\text{grad } t) \quad (22)$$

En el lado derecho, se intercambian los dos operadores para obtener:

$$\frac{d}{ds}(\text{grad } t) = \text{grad} \left( \frac{dt}{ds} \right) \quad (23)$$

Recordemos que  $\partial t / \partial s$  es la lentitud  $n$ . Por lo tanto, el lado derecho de la ecuación 23 es el gradiente de la lentitud, de modo que puede escribirse como:

$$\frac{d}{ds}(\text{grad } t) = \text{grad} (n) \quad (24)$$

Si juntamos las ecuaciones anteriores, obtenemos la ecuación de rayo

$$\frac{d}{ds}(n\mathbf{u}) = \text{grad } n \quad (25)$$

La ecuación de rayo 25 indica que la razón de cambio de la velocidad del vector de la trayectoria de rayo  $n\mathbf{u}$  es igual al gradiente de la lentitud. Se sabe que la ecuación eikonal 14 menciona que el vector de la trayectoria de rayo es una línea de flujo sobre la superficie en el tiempo de viaje de la capa.

## 1.11 Ecuación de rayo para una velocidad lineal a profundidad

Supongamos que tenemos un medio estratificado 2D con coordenadas  $x$  horizontal y la profundidad con  $y$ . Se trabaja en el primer cuadrante, por lo que la superficie de la tierra es la recta  $y = 0$ . El eje  $y$  en dirección hacia arriba indica la profundidad. Suponemos que  $v_0$  y  $a$  son dos constantes positivas. Así, la velocidad  $v(y) = v_0 + ay$  incrementa linealmente con la profundidad y que no varían con la horizontal  $x$ . De ello se deduce que la lentitud  $n(x, y) = 1/v(x, y)$  disminuye con la profundidad. Por qué:

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{\partial v^{-1}}{\partial y} = -v^{-2} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{a}{v^2} \quad (26)$$

Siguiendo que el gradiente de la lentitud es:

$$\text{grad } n = \left( \frac{\partial n}{\partial x}, \frac{\partial n}{\partial y} \right) = \left( 0, \frac{\partial n}{\partial y} \right) = \left( 0, -\frac{a}{v^2} \right) \quad (27)$$

Se ve que en este caso el gradiente de la lentitud es un vector que siempre apunta a la dirección negativa en el eje de la profundidad. En otras palabras, el gradiente de la lentitud apunta verticalmente hacia la superficie de la tierra.

En teoría de rayos, es conveniente dejar el ángulo  $\theta$  para la dirección positiva del eje  $y$  y la trayectoria del rayo. Así, el vector tangente unitario del rayo es:

$$u = \frac{dr}{ds} = \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right) = (\sin \theta, \cos \theta) \quad (28)$$

Parece extraño ver el  $\sin$  y el  $\cos$  en este orden, pero esto es una trampa incorporada en la teoría de rayos a la cual hay que acostumbrarse. La ecuación de rayo es:

$$\frac{d}{ds}(nu) = \text{grad } n \quad (29)$$

Se convierte en:

$$\frac{d}{ds} = (n(\sin \theta, \cos \theta)) = \left( \frac{\partial n}{\partial x}, \frac{\partial n}{\partial y} \right) \quad (30)$$

Por que  $\partial n / \partial x = 0$ , la primera componente de la ecuación de rayo 30 es:

$$\frac{d}{ds}(n \sin \theta) = 0 \quad (31)$$

Que dice que  $n \sin \theta$  es una constante. Esta constante se designa por  $p$  y es llamada el parámetro de Snell. Así, la primera componente de la ecuación 32 de rayo es llamada la ecuación de Snell.

$$p = n \sin \theta = \text{cte} \quad (32)$$

El seno se refiere a la componente horizontal. La ecuación 32 dice que la componente horizontal del vector de la trayectoria de rayo  $nu$  es el mismo en todos los puntos a lo largo de la trayectoria de rayo. En el punto de disparo, el rayo hace un ángulo  $\theta_0$  con la vertical. Elegimos un punto específico  $(x, y)$  en la trayectoria de rayo y designamos el ángulo por  $\theta$ . La ecuación de Snell dice que:

$$p = \frac{\sin \theta_0}{v_0} = \frac{\sin \theta}{v} \quad (33)$$

La segunda componente de la ecuación de rayo 30 es:

$$\frac{d}{ds}(n \cos \theta) = \frac{\partial n}{\partial y} \quad (34)$$

El coseno se refiere a la componente vertical. Si se aplica el operador de derivada en el lado izquierdo de la ecuación 34, se obtiene:

$$-n \sin \theta \frac{d\theta}{ds} + \cos \theta \frac{dn}{dy} \frac{dy}{ds} = \frac{\partial n}{\partial y} \quad (35)$$

Que da:

$$n \sin \theta \frac{d\theta}{ds} = (\cos^2 \theta - 1) \frac{\partial n}{\partial y} \quad (36)$$

ó

$$n \frac{d\theta}{ds} = -\sin \theta \frac{\partial n}{\partial y} \quad (37)$$

ó

$$\frac{d\theta}{ds} = -\sin \theta \left( -\frac{a}{v^2} \right) \quad (38)$$

De ello se deduce que la segunda componente de la ecuación 34 de rayo da:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{a \sin \theta}{v} = ap = \frac{a \sin \theta_0}{v_0} \quad (39)$$

La primera componente de la ecuación de rayo 31 (ley de Snell) dice que  $p$  es constante. Por lo tanto. La segunda componente de la ecuación de rayo 34 da:

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{1}{pa} = cte \equiv \rho \quad (40)$$

Esta ecuación es la diferencial de un círculo con radio

$$\rho = \frac{1}{ap} = \frac{v_0}{a \sin \theta_0} = cte \quad (41)$$

En conclusión, la solución de la ecuación de rayo nos dice que la trayectoria de rayo es un arco de un círculo con radio  $p$ .

## 1.12 Trayectorias de rayo para una velocidad lineal a profundidad

Las diferencias de una distancia horizontal y una distancia vertical son las siguientes respectivamente:

$$dx = \sin \theta ds = \rho \sin \theta d\theta, \quad dy = \cos \theta ds = \rho \cos \theta d\theta \quad (42)$$

Sea una partícula de energía en el origen  $(x = 0, y = 0)$ , cuya trayectoria forma un ángulo inicial  $\theta_0$  con la vertical. La partícula viaja a lo largo del arco de la circunferencia  $(x, y)$ , donde la trayectoria forma un ángulo  $\theta$  con la vertical, deseamos encontrar las coordenadas  $(x, y)$ . La distancia horizontal está dada por:

$$x = \rho \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta = -\rho \cos \theta + \rho \cos \theta_0 \quad (43)$$

Y la distancia vertical está dada por:

$$y = \rho \int_{\theta_0}^{\theta} \cos \theta d\theta = \rho \sin \theta - \rho \sin \theta_0 \quad (44)$$

La ecuación 43 y 44 son las ecuaciones paramétricas de un círculo (Figura 1.7). El centro de este círculo, con coordenadas:

$$\begin{aligned} C = (x_c, y_c) &= (\rho \cos \theta_0, -\rho \sin \theta_0) = \left( \frac{v_0}{a \sin \theta_0} \cos \theta_0, -\frac{v_0}{a \sin \theta_0} \sin \theta_0 \right) \\ &= \left( \frac{v_0}{a \tan \theta_0}, -\frac{v_0}{a} \right) \end{aligned} \quad (45)$$

En términos del parámetro de Snell  $p$ , el centro es:

$$C = (x_c, y_c) = \left( \frac{1}{a p} \cos \theta_0, -\frac{v_0}{a} \right) = \left( \frac{1}{a p} (1 - p^2 v_0^2)^2, -\frac{v_0}{a} \right) \quad (46)$$



Como observó Slotnick (1959), la trayectoria de un rayo está dada por la ecuación de radio de un círculo  $1/ap$ , cuyo centro está en el punto con coordenadas:

$$x_c = (1 - p^2 v_0^2)^2 / ap, \quad y_c = -v_0/a \quad (47)$$

Debemos tener en cuenta que la coordenada  $y$  del centro es independiente del parámetro  $p$ . Por lo tanto, podemos escribir las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de rayo circular como:

$$x = -\left(\frac{v_0}{a \sin \theta_0}\right) \cos \theta + \frac{v_0}{a \tan \theta_0} \quad y = \left(\frac{v_0}{a \sin \theta_0}\right) \sin \theta + \frac{v_0}{a} \quad (48)$$

Nótese que la componente vertical  $-v_0/a$  no depende del ángulo  $\theta_0$ . Como resultado, la familia de los rayos con la función de velocidad dada se compone de trayectorias circulares que pasan por el origen y tienen sus centros en la recta  $y = -v_0/a$ . La trayectoria de rayo circular comienza en el origen (que es el punto del disparo). La tangente al círculo en el punto del disparo forma un ángulo  $\theta_0$  con el eje  $y$  positivo.

A menudo, sólo se sabe que el rayo pasa a través de un punto determinado, por ejemplo,  $B = (x, y)$ , y se tiene que determinar la ecuación de rayo. Este problema puede ser resuelto como se muestra en la figura 1.8 Dibujemos una línea  $OB$ . El punto medio de esta línea es  $A = (x/2, y/2)$ . El centro de la trayectoria de rayo circular debe de estar en la bisectriz perpendicular de la línea  $OB$  y también debe de estar en la línea horizontal que pasa por el punto  $(0, -v_0/a)$ . La intersección de estas dos líneas de determinación da el centro  $E = (x_E, -v_0/a)$  de la trayectoria de rayo circular. De la geometría, vemos que:

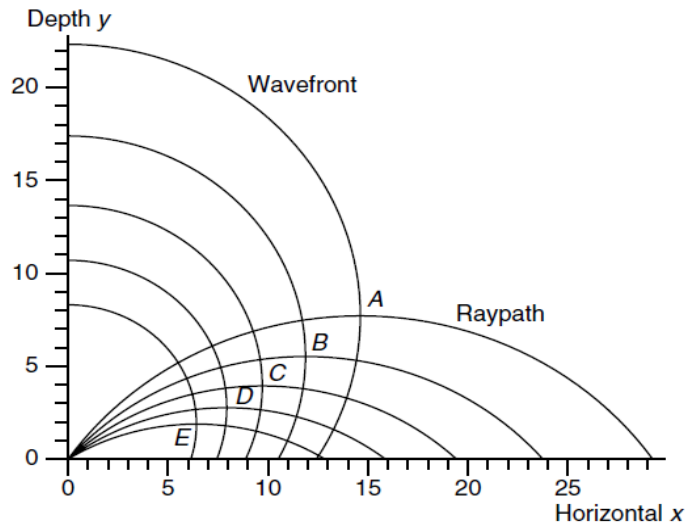


Figura 1.7 Los arcos de los círculos a través del origen representan las trayectorias de rayo con diferentes ángulos iniciales. Los círculos con centros en el eje de profundidad representan frentes de onda con diferentes tiempos de viaje. (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)

$$\begin{aligned}
 x_E = JC = JG + GC = OF + GC \\
 = OF + AG \tan \alpha = \frac{x}{2} + \left(\frac{y}{2} + \frac{v_0}{a}\right) \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{2x} + \frac{v_0 y}{a x}
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

Por lo tanto, hemos determinado el centro de E. El radio es:

$$\rho = OE = \sqrt{OJ^2 + JC^2} = \sqrt{\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{x^2 + y^2}{2x} + \frac{v_0 y}{a x}\right)^2}
 \tag{50}$$

El ángulo inicial de la trayectoria de rayo es:

$$\theta_0 = \arcsin \frac{v_0}{a \rho}
 \tag{51}$$

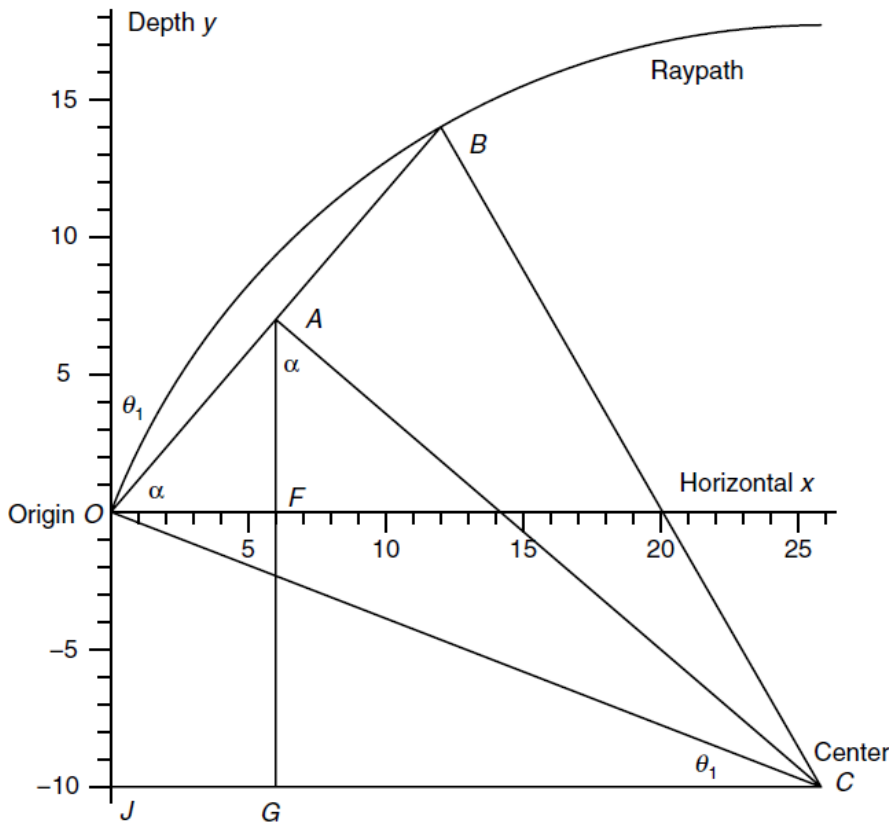


Figura 1.8 Determinación de la ecuación de un rayo que pasa a través de un punto B. Sabiendo que el origen O es también un punto en el rayo. Conectando estos dos puntos OB, pensando que el rayo es un círculo. Por lo tanto, el centro se encuentra en AE. (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)

### 1.13 Tiempo de viaje para la velocidad lineal a profundidad

El tiempo de viaje es:

$$t = \int_{\theta_0/pa}^{\theta/pa} \frac{ds}{v} = \frac{1}{a} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin \theta} \quad (52)$$

La integración da el tiempo de viaje como:

$$t = \left[ \frac{1}{a} \log \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right]_{\theta_0}^{\theta} = \left[ \frac{1}{a} \log \tan \frac{\theta}{2} \right]_{\theta_0}^{\theta} = \frac{1}{a} \log \frac{\tan(\theta/2)}{\tan(\theta_0/2)} \quad (53)$$

Que nos da:

$$at = \log \frac{\tan(\theta/2)}{\tan(\theta_0/2)} \quad (54)$$

Si tomamos el exponencial de ambos lados, se obtiene la ecuación implícita del tiempo de viaje dada por:

$$e^{at} = \frac{\tan(\theta/2)}{\tan(\theta_0/2)} \quad (55)$$

### 1.14 Punto de máxima profundidad

Se han encontrado las ecuaciones paramétricas para la trayectoria de un rayo circular que comienza en el origen y forma un ángulo  $\theta_0$  con el eje positivo  $y$  (Figura 1.9). Esta trayectoria de rayo representa una onda descendente cuyo punto máximo de profundidad es  $D = (x_D, y_D)$  que después regresa a la superficie. La tangente para la trayectoria de rayo es la horizontal en  $D$ . Así, el ángulo con la vertical es  $90^\circ$ , que es,  $\theta = \theta_D = \pi/2$  en el punto de máxima profundidad.

$$x_D = \frac{v_0}{a \tan \theta_0} \quad y_D = \frac{v_0}{a \sin \theta_0} - \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{a} \left( \frac{1}{\sin \theta_0} - 1 \right) \quad (56)$$

Así  $t_D$  denota el tiempo de viaje a lo largo de la trayectoria de rayo desde el origen a un punto máximo de profundidad. En el punto máximo de profundidad, el ángulo es  $\theta = \theta_D = \pi/2$  y la ecuación implícita para el tiempo de viaje  $t_D$  es:

$$e^{at_D} = \frac{\tan \frac{\theta_D}{2}}{\tan \frac{\theta_0}{2}} = \frac{\tan \frac{\pi}{4}}{\tan \frac{\theta_0}{2}} = \frac{1}{\tan \frac{\theta_0}{2}} = \frac{1}{\frac{1 - \cos \theta_0}{\sin \theta_0}} = \frac{\sin \theta_0}{1 - \cos \theta_0} \quad (57)$$

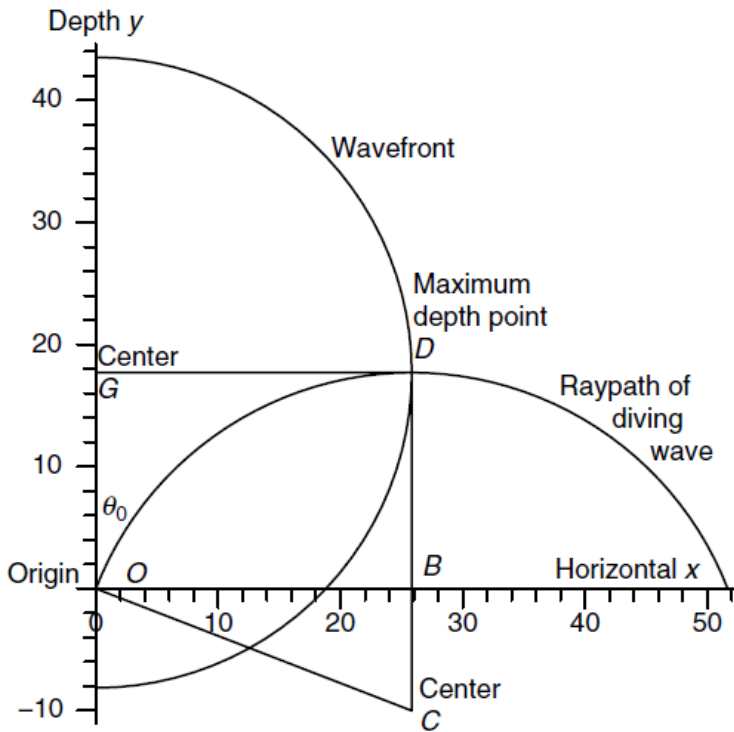


Figura 1.9 Una onda descendente que parte desde de él origen O hasta la máxima profundidad D que regresa al eje horizontal. Esta es llamada onda descendente ya que es dirigida en dirección al subsuelo y se acerca a la superficie sin la reflexión al hacer un cambio de sentido. Debido a que la profundidad se traza hacia arriba, la onda descendente aparece invertida. El frente de onda a través de la máxima profundidad también se muestra. (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)

Que puede estar escrita como:

$$e^{-at_D} = \tan \frac{\theta_0}{2} = \frac{1 - \cos \theta_0}{\sin \theta_0} \quad (58)$$

Estas ecuaciones implícitas implican exponenciales. Hay dos formas comunes para deshacerse de las exponenciales: por logaritmos y funciones hiperbólicas. Elegiremos la segunda donde el coseno hiperbólico se define como

$\cosh u = (e^u + e^{-u})/2$ . De manera similar, el seno hiperbólico se define como  $\sinh u = (e^u - e^{-u})/2$ . Tenemos así:

$$\begin{aligned} \cosh at_D &= \frac{e^{at_D} + e^{-at_D}}{2} = \frac{\frac{\sin \theta_0}{1 - \cos \theta_0} + \frac{1 - \cos \theta_0}{\sin \theta_0}}{2} = \frac{\sin^2 \theta_0 + (1 - \cos \theta_0)^2}{2(1 - \cos \theta_0) \sin \theta_0} \\ &= \frac{1}{\sin \theta_0} \end{aligned} \quad (59)$$

Y similarmente:

$$\sinh at_D = \frac{e^{at_D} - e^{-at_D}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \theta_0}{1 - \cos \theta_0} - \frac{1 - \cos \theta_0}{\sin \theta_0} \right) = \frac{1}{\tan \theta_0} \quad (60)$$

En términos del tiempo de viaje para un punto a la máxima profundidad, es dado por las coordenadas:

$$x_D = \frac{v_0}{a \tan \theta_0} = \frac{v_0}{a} \sinh at_D \quad y_D = \frac{v_0}{a \sin \theta_0} - \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{a} (\cosh at_D - 1) \quad (61)$$

## 1.15 Frentes de onda con velocidad lineal a profundidad

Ahora usando la ecuación eikonal encontraremos los frentes de onda. La ecuación eikonal nos dice que los frentes de onda son ortogonales a las trayectorias de rayo. Vamos a utilizar esta propiedad ortogonal para construir los frentes de onda (Figura 1.10). Para este fin, es ventajoso hacer una relación uno a uno de las trayectorias de rayos y frentes de onda. Por cada punto  $(x, y)$  en el plano, existe una trayectoria de rayo cuya tangente en ese punto es horizontal. Como hemos visto, este punto es la máxima profundidad. Por la ecuación eikonal, la tangente del frente de onda que pasa por ese punto debe ser vertical. El centro de la trayectoria de rayo circular se encuentra verticalmente debajo de ese punto. Vamos a suponer que un frente de onda es circular, de ello se deduce que el centro de este frente de onda debe estar horizontalmente a un lado de este punto. Pero, ¿Dónde está el centro? Debido a que todo es simétrico alrededor del eje vertical, se deduce que el centro de este frente de onda debe de estar en el eje vertical. Por lo tanto, el frente de onda es un círculo con centro y radio, respectivamente, dado por:

$$G = (x_G, y_G) = (0, y_D) = \left(0, \frac{v_0}{a} (\cosh at_D - 1)\right)$$

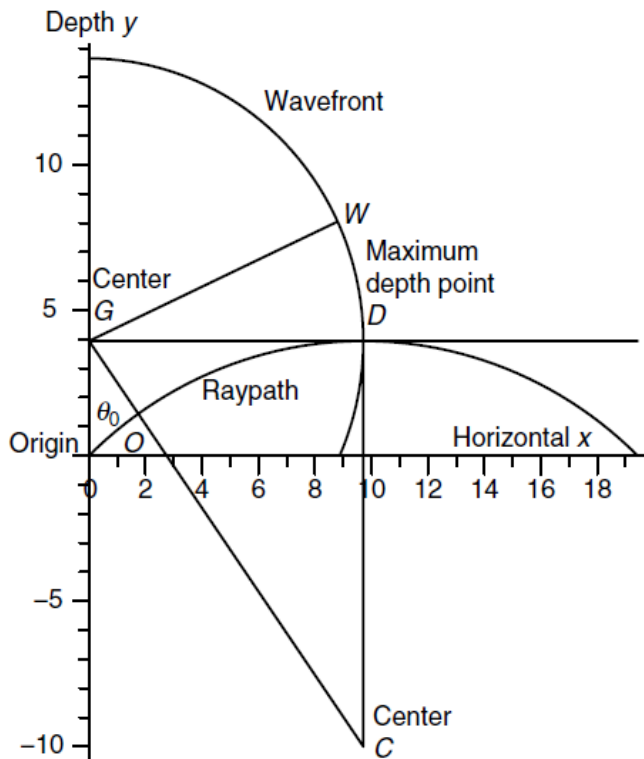
$$r = x_D = \frac{v_0}{a} \sinh at_D \quad (62)$$

Como observó Slotnick (1959), los frentes de onda son círculos cuyos centros están a lo largo del eje  $y$  en los puntos  $(0, (v_0/a)(\cosh at - 1))$  y cuyos radios son  $(v_0/a) \sinh at$  donde  $t$  es el tiempo de viaje correspondiente a cada frente de onda.

Un punto arbitrario  $W = (x_W, y_W)$  en el círculo del frente de onda viene dado por:

$$x_W = r \cos \emptyset = \frac{v_0}{a} \sinh at \cos \emptyset$$

$$y_W = y_G + r \sin \emptyset = \frac{v_0}{a} (\cosh at_D - 1) + \frac{v_0}{a} \sinh at \sin \emptyset \quad (63)$$



Todas las trayectorias de rayo son circulares con centros en la línea horizontal donde la velocidad puede ser cero (Figura 1.11). Todos los frentes de onda son círculos con centros en el eje  $y$  (Figura 1.12). El conjunto de las trayectorias de rayos y el conjunto de los frentes de onda son ortogonales entre sí (figura 1.13).

Figura 1.10 Determinación del centro de un frente de onda circular a través de un punto con profundidad máxima  $D$  (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)

## 1.16 Dos conjuntos ortogonales circulares

Ahora veremos que los rayos y frentes de onda siempre se cruzan en un ángulo recto (Figura 1.14). Los frentes de onda son arcos de círculos, por la ecuación eikonal sabemos que los círculos de los frentes de onda son ortogonales a las trayectorias de rayo. Sea  $H$  el punto de intersección de una trayectoria de rayo (caracterizado por el ángulo inicial  $\theta_1$ ) y un frente de onda (caracterizado por el tiempo de viaje  $t$ ). El centro y el radio del círculo de una trayectoria de rayo son, respectivamente:

$$E = (x_E, y_E) = \left( \frac{v_0}{a \tan \theta_1}, -\frac{v_0}{a} \right) \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{v_0}{a \sin \theta_1} \quad (64)$$

Centro y radio de los frentes de onda dados por:

$$G = (x_G, y_G) = \left( 0, \frac{v_0}{a} (\cosh at - 1) \right)$$

$$r = \frac{v_0}{a} \sinh at \quad (65)$$

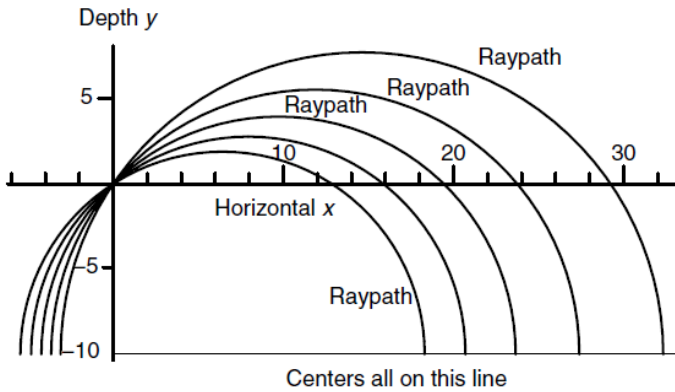


Figura 1.11 Círculos de las trayectorias de rayo que tienen centro en la línea horizontal donde la velocidad será cero. (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)

La distancia entre el punto  $E$  y  $H$  es:

$$EH = \lambda = \frac{v_0}{a \sin \theta_1} \quad (66)$$

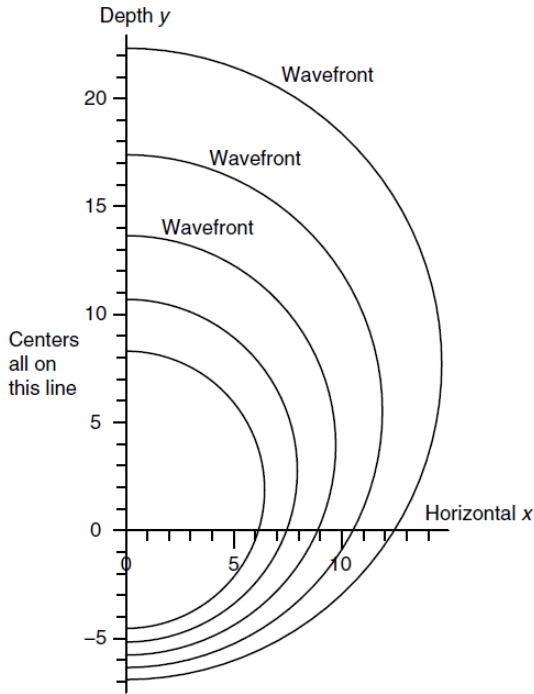


Figura 1.12 Todos los frentes de onda circulares tienen centro en el eje vertical (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)

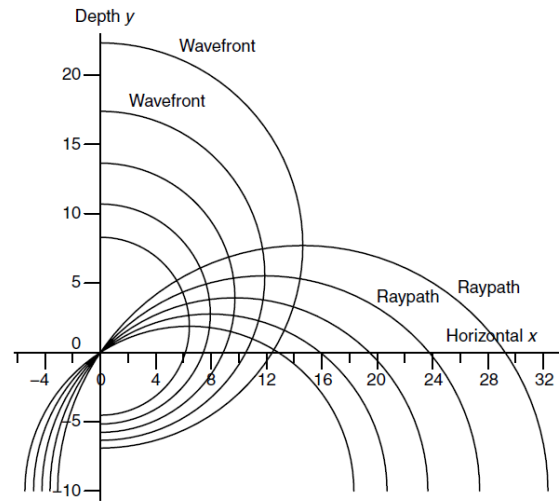


Figura 1.13 Todos los rayos de la Figura 1.11 y los frentes de onda de la Figura 1.12 (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)

La distancia entre el punto G y el punto H es:

$$GH = r = \frac{v_0}{a} \sinh at \quad (67)$$

Por el teorema de Pitágoras tenemos:

$$\begin{aligned} GE^2 &= GL^2 + LE^2 = (y_G - y_E)^2 + x_E^2 = \left[ \frac{v_0}{a} (\cosh at - 1) + \frac{v_0}{a} \right]^2 + \left[ \frac{v_0}{a \tan \theta_1} \right]^2 \\ &= \frac{v_0^2}{a^2} \left[ \cosh^2 at + \frac{1}{\tan^2 \theta_1} \right] \end{aligned} \quad (68)$$



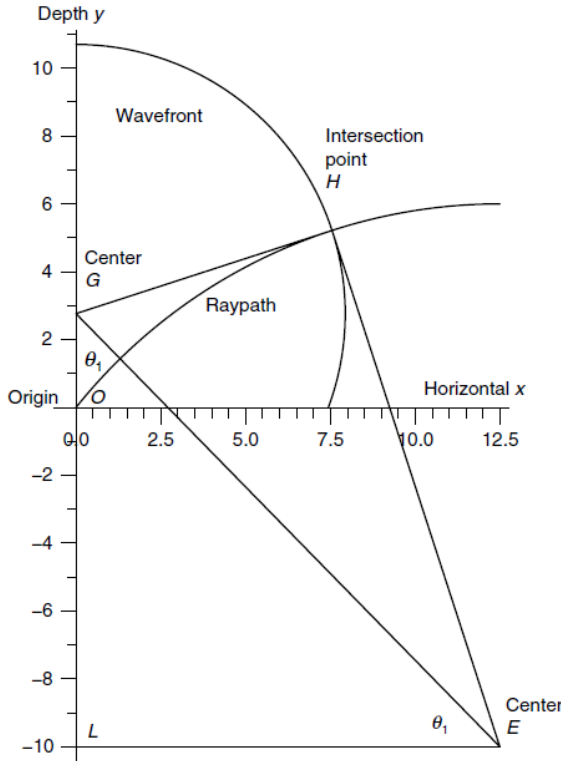


Figura 1.14 Pitágoras nos confirma que los frentes de onda y los rayos son ortogonales (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)

Considerando el triángulo GHE, los dos círculos son ortogonales si y sólo si el triángulo es el adecuado, con el ángulo correcto en H (triángulo rectángulo). Por lo tanto, debemos verificar que  $GH^2 + EH^2 = GE^2$ . Mediante la inserción de los valores anteriores, se obtiene:

$$\left(\frac{v_0}{a} \sinh at\right)^2 + \left(\frac{v_0}{a \sin \theta_1}\right)^2 = \frac{v_0^2}{a^2} \left(\cosh^2 at - \frac{1}{\tan^2 \theta_1}\right) \quad (69)$$

Esta ecuación se reduce a:

$$\sinh^2 at + \frac{1}{\sin^2 \theta_1} = \cosh^2 at - \frac{1}{\tan^2 \theta_1} \quad (70)$$

Que da:

$$\frac{1}{\sin^2 \theta_1} + \frac{1}{\tan^2 \theta_1} = \cosh^2 at - \sinh^2 at \quad (71)$$

El lado derecho y el lado izquierdo de la ecuación 71 son igual a uno, por lo que el teorema de Pitágoras se cumple realmente para el triángulo GHE. Por lo tanto, los círculos del frente de onda y los círculos de las trayectorias de rayo son ortogonales. La pendiente del radio del frente de onda debe ser la misma pendiente del rayo. El centro  $(x_W, y_W)$  del frente de onda debe situarse en el eje  $y$ , de lo contrario, se intersectarían. El radio del frente de onda tiene una dirección  $\mathbf{u} = (\sin \theta, \cos \theta)$  en el punto  $\theta$  del rayo. El radio  $r$  del frente de onda es igual a la distancia en esta dirección del punto H dado en el rayo para el eje  $y$ .

# Capítulo 2

## Fundamentos teóricos de NORSAR

### 2.1 Introducción

Años atrás, geofísicos de la empresa NORSAR comenzaron a desarrollar un nuevo software, con el objetivo final de simular las ondas sísmicas en modelos geológicos 3-D. Se realizaron algunos experimentos con diversas técnicas y con esto fueron trazados y calculados los primeros rayos. Este proyecto quería cubrir la necesidad de una herramienta de modelado 3-D. Una de las motivaciones fue el vínculo entre la interpretación y el modelado, con la posibilidad de integrar la estimación de la velocidad (por ejemplo, tomografía) y la conversión de tiempo a profundidad.

Desde el principio estaba claro que el método de simulación de onda, tendría que ser el trazado de rayos. Con la velocidad de las computadoras de aquellos tiempos, las técnicas de rayos eran las únicas aplicables en modelos 2-D, estas técnicas poseen una serie de propiedades que se adaptan perfectamente a la integración de los modelos e interpretación donde los atributos como el tiempo de viaje, amplitudes, ángulos de incidencia, etc., se podrían obtener de manera explícita. Además, los atributos pueden servir como base para la generación de sismogramas teóricos de rayos, que por ejemplo, podrían utilizarse para evaluar y probar los esquemas de procesamiento 3-D. La ventaja de ser capaz de extraer explícitamente los diferentes efectos de propagación de ondas, como factores de geometría, de reflexión/transmisión efectos en las interfaces, ondas P y S, etc., era muy apreciada. Otra característica del método de rayos es la capacidad de localizar la propagación de energía en el modelo, por lo que el método es particularmente adecuado para aplicaciones en inversión tomográfica. Por otra parte, el trazado de rayos visualiza la propagación de la onda en un modelo ideal, con el fin de comprender mejor las características complejas de las reflexiones sísmicas en medios 3-D más complejos.

Dos cuestiones fundamentales que se abordaron en la primera especificación para las fases del diseño y del modelado sísmico 3-D fueron:

- Un modelo general y flexible para la representación estructural 3-D (capas) con características sísmicas
- Un algoritmo de trazado de rayos eficiente que pueda ser integrado con la representación del modelo, calcular tanto las propiedades cinemáticas y dinámicas del campo de ondas a lo largo de diferentes trayectorias entre la fuente y la posición del receptor

Con respecto a la primera cuestión, se tenía que empezar desde cero. No existían métodos que satisficieran las necesidades, incluso algunas ideas podían ser obtenidas relativamente de una nueva área de gráficos en 3-D. Con respecto a la segunda, en los experimentos utilizaron la teoría de Červený (1997), por ejemplo, para la codificación de los coeficientes de reflexión/transmisión en una interfaz y más tarde Červený y Hron (1980) resultó ser una referencia importante.

La formulación del trazado de rayos dinámico encaja perfectamente en el esquema de modelado, se realizaron búsquedas en: cálculo de los rayos así como los atributos de rayos como la curvatura del frente de onda y amplitudes a lo largo del rayo, incluyendo tanto el viaje a través de las propiedades continuas de las capas y las conversiones en las interfaces del modelo. Los métodos fueron formulados claramente, por lo que los códigos matemáticos fueron sencillos. En particular, el sistema de rayo-centrado de coordenadas era muy adecuado de usar y fácil de interpretar. Es cierto que estas obras básicas de Červený (y por supuesto también obras posteriores) formaron uno de los elementos claves para el trabajo del software. Incluso después de la conversión de un trazado de rayos en dos puntos, en los años ochenta ayudó a la construcción de frentes de onda en los años noventa, las fórmulas de Červený siguen constituyendo el corazón del sistema. En los últimos años han experimentado un crecimiento continuo de las herramientas avanzadas en modelados sísmicos 3-D en la industria petrolera.

## 2.2 Modelos para trazado de rayos

Una parte esencial para el trazado de rayos es el modelo geológico en donde se propagarán los rayos. Hablaremos de tres aspectos diferentes del modelo en trazado de rayos:

1. Características que necesitan los rayos sobre el modelo
2. Las limitaciones en el modelo para el método de trazado de rayos
3. Representación del modelo para trazado de rayos

### 2.2.1 Características que necesitan los rayos sobre el modelo

El deber del modelo es proporcionarle a los rayos información básica sobre el subsuelo. Lo que se solicite tiene que estar bien definido. En cualquier posición del modelo, debe contener los parámetros necesarios, las propiedades del material, por ejemplo el valor de las funciones de las ondas P y S, parámetros de anisotropía, la densidad de los factores de atenuación, etc. El trazado también debe tener información sobre las discontinuidades en las propiedades, es decir, sobre las interfaces del

subsuelo, debe conocerse si hay intersecciones potenciales interfaz-rayo en la zona o si alguna de éstas es normal o curva.

## 2.2.2 Las limitaciones en el modelo para el método de trazado de rayos

La teoría de trazado de rayos impone algunas limitaciones en el modelo del subsuelo (Červený, 1985): para garantizar que los rayos sean válidos, los parámetros del modelo deben ser suavizados y variar muy poco. Lo que realmente cuenta es que se debe suavizar el modelo relativo dentro de la zona de Fresnel entorno a cada rayo (Červený and Soares, 1992). Es difícil utilizar un criterio para preparar un modelo válido, ya que no solo depende de los parámetros del modelo, sino también de los rayos finales entre fuente-receptor.

## 2.2.3 Representación del modelo para trazado de rayos

Diferentes representaciones de modelos han sido desarrolladas para el seguimiento de rayos sísmicos. La más simple es el modelo 1-D con una secuencia vertical de las propiedades del material constante separando con una línea plana las capas horizontales. Un modelo más sencillo es un modelo de capas paralelas, que es una secuencia similar, pero varían lateralmente las propiedades y las interfaces son representadas por mallas. Sin embargo, el modelo para trazado de rayos sísmicos tiene características muy específicas y establece ciertos requisitos que no se pueden satisfacer con modelos hechos para otros fines.

Actualmente el sistema de modelado 3-D (Vinje et al., 1999) se ha estado diseñando y ajustado al modelo de representación del subsuelo, especialmente para el modelo para trazado de rayos sísmicos, éste está diseñado para datos externos que se esperan del modelo y tiene en cuenta las características de trazado de rayos. Un ejemplo de un modelo 3-D en trazado de rayos se muestra en la figura 2.1.

Los datos típicos establecidos para un modelo sísmico se caracterizan por:

- Número de interfaces, que a menudo la naturaleza es compleja
- Las propiedades del material que pueden variar de un modo general en el interior de las capas
- Frecuentemente, los datos están incompletos, en las interfaces y las propiedades

El trazado de rayos requiere:

- La evaluación de las propiedades y la intersección rayo-interfaces

- Suavizado de las propiedades así como de las interfaces

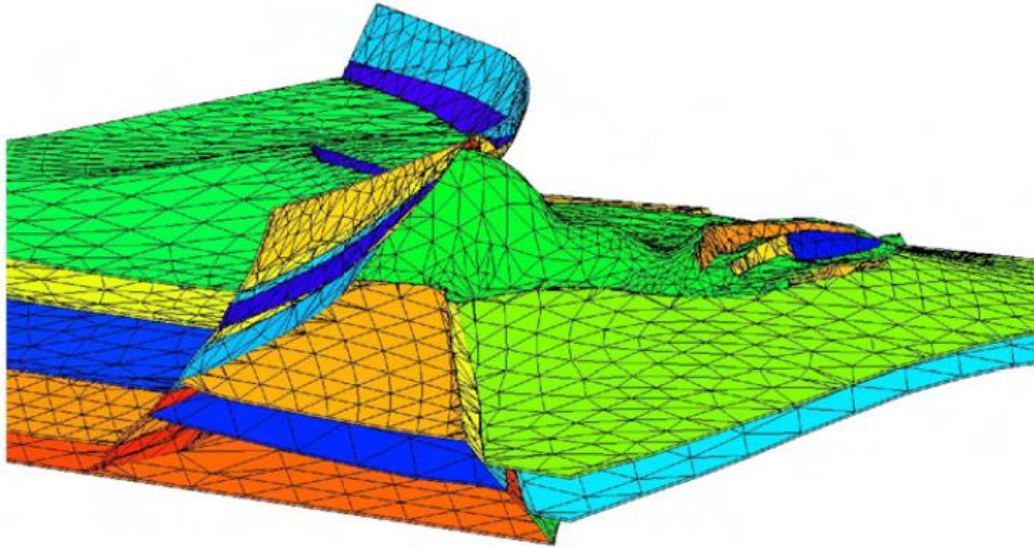


Figura 2.1 Ejemplo de un modelo de trazado de rayos 3D de SEG/EAGE Modelo de sal (Aminzadeh et al., 1997).

En el siguiente ejemplo en el modelo solo hay dos tipos de elementos geométricos: interfaces y propiedades. Una interfaz describe la ubicación de la discontinuidad entre dos capas diferentes (volúmenes, bloques) en el subsuelo. Una propiedad puede representar el material de una capa, velocidad P y S, etc. El siguiente modelo es un sistema simple de interfaz con propiedades figura 2.2.

Cada interfaz se representa como una malla triangular con normales explícitas y curvaturas asociadas a cada nodo. Esta representación combina la flexibilidad de las mallas triangulares con una solución aproximada para la suavidad requerida en el trazado de rayos. El trazado de rayos requiere interfaces suavizadas con la primera y segunda derivada. Sin embargo es muy difícil hacer una representación de la superficie que combine estas propiedades con la flexibilidad para representar interfaces complejas prevalentes en modelos sísmicos. Como parte de la construcción de una interfaz, las normales y las curvaturas en cada nodo se calculan a partir de la forma de la malla circundante y se almacena en el nodo. Las normales y las curvaturas de un punto arbitrario, se interpolan a partir de los valores calculados previamente asociados con los nodos circundantes, con un procedimiento similar descrito por Mallet (1997). Esta representación de las normales y las curvaturas son continuas y suavizadas pero no son estrictamente los valores de la interfaz.

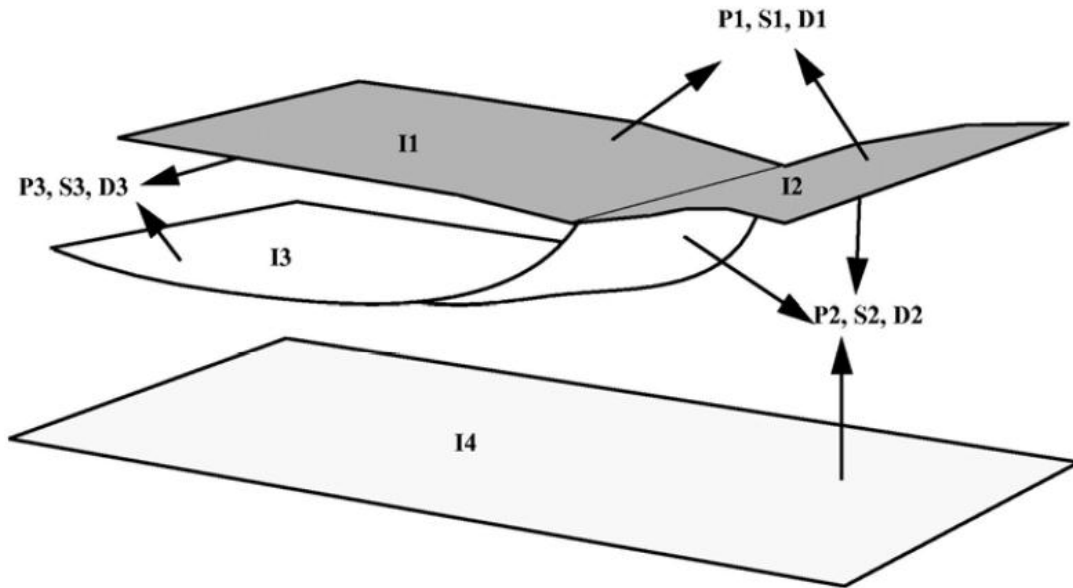


Figura 2.2 Estructura del modelo. De cada lado de cada interfaz está señalado las propiedades del volumen que deberán utilizarse por los rayos desde el lado de la interfaz  $P_i$ ,  $S_i$  y  $D_i$  que son las velocidades de onda P y S, y las funciones de la densidad para el mismo material. Cada interfaz se marca mediante un índice "i" (por ejemplo, I1, I2,...). (Stud. geophys. geod., 46 (2002). 113–164)

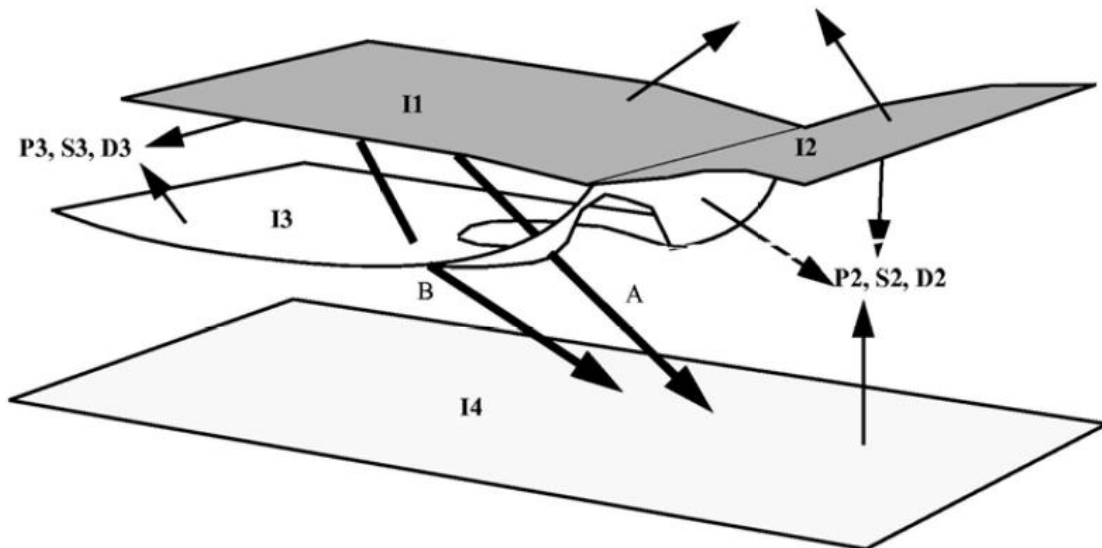


Figura 2.3 Trazado de rayos en un modelo abierto. Observe la interfaz en el espacio blanco donde no hay datos. El rayo "A" a través del espacio sin datos es rechazado. Se inicia en las propiedades #3 por debajo de la interfaz superior, mientras que en la siguiente intersección del rayo en la interfaz inferior, se espera que llegue a través de las propiedades #2. ( Stud. geophys. geod., 46 (2002), 113–164)

Las propiedades son mucho más simples de representar en las interfaces. Cada propiedad para cada capa es una función separada, suavizada y variando lentamente y se representa con una curva tipo spline tri-cúbica.

En casos reales puede haber pequeñas o grandes diferencias, incluso en las interfaces donde se interpretaron los datos faltantes por alguna razón. Para permitir el trazado de rayos en los datos incompletos, se desarrolló un concepto donde el modelo es “abierto” Åstebøl (1994) y Vintaje (1999). Regularmente se ordenan y se rechazan los rayos que han pasado por las partes inválidas, como se observa en la figura 2.3. El concepto de modelo “abierto” permite ahorrar edición que de otro modo se habría requerido para llenar los espacios en blanco.

## 2.3 Construcción de un frente de onda

### 2.3.1 Antecedentes

La construcción de un frente de onda es un método que fue introducido para modelos 2D en un artículo de Vintaje (1993b). La construcción de un frente de onda es una técnica de rayos basada en la teoría convencional de rayos sísmicos, según lo descrito por Červený (1985,2001). La propagación de un frente de onda se basa en el rastreo de un gran número de segmentos cortos de rayos. La idea básica en la construcción de un frente de onda es mantener una densidad uniforme de los rayos durante su propagación. Para controlar la densidad de rayo es común usar criterios basados en i) la distancia entre los rayos vecinos y ii) la separación de las normales del frente de onda relacionada con dichos rayos. La aplicación de estos criterios dentro del frente de onda dará lugar a la creación de nuevos rayos por interpolación.

El método para la construcción de un frente de onda fue desarrollado como consecuencia de los problemas que surgen en el trazado de rayos entre dos puntos cuando se intenta encontrar todos los rayos que se conectan desde la fuente hasta el receptor. Tradicionalmente esto se hace usando algoritmos de disparo o reflexión. En una variante del método de disparo descrito por Červený (1985) un abanico de rayos se traza desde la fuente y la extrapolación paraxial se utiliza para estimar los valores en uno o varios receptores. El problema principal con estas aproximaciones es la falta de control de la divergencia entre los rayos. Por lo tanto la compensación entre la eficiencia y confiabilidad puede ser desfavorable especialmente para modelos complicados en 3-D.

Durante los últimos años la construcción de un frente de onda ha demostrado ser una herramienta muy eficiente en el modelado sísmico e imágenes sísmicas. La ventaja de la construcción de un frente de onda es que se puede usar en el modelado en modelos complejos 3-D en un tiempo razonable y es capaz de encontrar todos los eventos de una sección en los puntos receptores.

La técnica para la construcción de un frente de onda originalmente fue desarrollada para modelos isótropos. Pero actualmente se debe tener en cuenta la anisotropía.

### 2.3.2 Representación de un frente de onda

Anteriormente era esencial encontrar una representación numérica simple y eficiente para la construcción de un frente de onda 3-D. La representación de un frente de onda 3-D es más complicada que un 2-D, donde los rayos están situados lado a lado en un frente de onda 2-D. El término del vecino más cercano es más difícil de definir en un frente de onda 3-D ya que en este los rayos se distribuyen en todas direcciones. Para conectar los rayos en un frente de onda 3-D se define una especie de malla. Este ordenamiento interno de puntos (es decir, los puntos de intersección entre los rayos y los frentes de onda) y las líneas de conexión interna pueden ser denominados como la topología de los frentes de onda. Como se ha mencionado una malla triangular tiene tanto una topología simple y una capacidad de poderse ajustar al estiramiento y torsión de un frente de onda durante su propagación a través de un medio. El proceso de diseño, interpolación y estimación de los parámetros en el punto receptor se hacen de una forma fácil usando esta topología.

### 2.3.3 Propagación de un frente de onda

Las características principales para la construcción de un frente de onda son:

- Generar un primer frente de onda
- Propagación de un frente de onda en un tiempo
- Control de la densidad de los segmentos de rayos en el frente de onda
- Interpolación para encontrar los arribos en los receptores

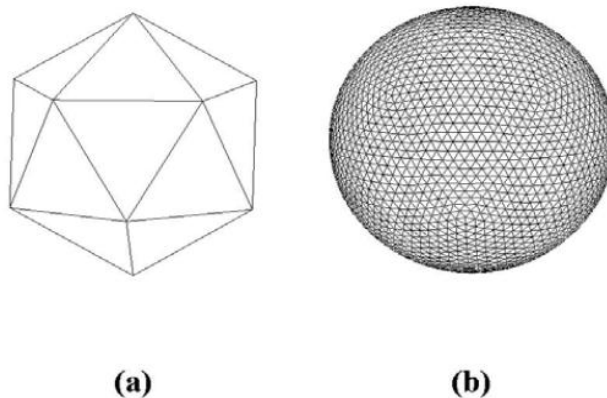


Figura 2.4 El icosaedro (a) describe la malla básica de la fuente puntual. En el (b) vemos cuatro interpolaciones repetidas que ha tenido el icosaedro. Esto conduce a un poliedro que consta de 2562 nodos (rayos), 7680 lados y 5120 triángulos. (Stud. geophys. geod., 46 (2002), 113–164)



Para comenzar el frente de onda es necesario disparar una fuente. Es necesario que la malla triangular tenga los lados y sus triángulos iguales hasta donde sea posible, en este caso un icosaedro es especialmente adecuado. El icosaedro consta de doce vértices, treinta lados y veinte triángulos regulares. Un ejemplo de esto son 12 rayos que viajan desde la fuente y pasan a través de los vértices del icosaedro, creando así la malla triangular deseada. El ángulo entre los rayos dentro de la malla es aproximadamente de  $63.43^\circ$ . La interpolación se repite varias veces para que los segmentos de rayo se cumplan.

El frente de onda es representado por una malla triangular en un tiempo  $t$ . Para la propagación en un medio isótropo cada nodo se caracteriza por el siguiente conjunto de parámetros:

- Posición
- Rayo tangente
- Dirección del rayo
- Tipo de onda (por ejemplo, P o S en un medio isótropo)
- Unidad de la normal del rayo en el sistema de coordenadas
- Los parámetros dinámicos como la matriz de P y Q (Červený, 1985) y los coeficientes de amplitud del rayo de orden cero.

Dado este conjunto de parámetros en un tiempo  $t$ , todos los rayos en el frente de onda son trazados en un tiempo  $\Delta t$  para crear un nuevo frente de onda en un tiempo  $t + \Delta t$ . Una parte del campo de onda es representada en la figura 2.5 que representa dos tiempos sucesivos. Los frentes de onda para dos tiempos ( $t$  and  $t + \Delta t$ ) se mantiene en la memoria para facilitar la interpolación de nuevos rayos y la estimación de datos en los receptores. Todos los rayos en la malla están definidos por un código que determina la secuencia específica de transmisión y reflexión en las interfaces del modelo.

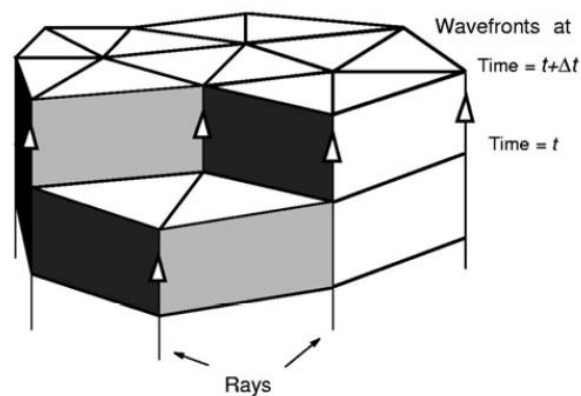


Figura 2.5 Los frentes de onda se propagan a través del modelo mediante el trazado de todos los rayos (del viejo frente de onda al nuevo frente de onda). Los frentes de onda viajan durante dos intervalos de tiempo sucesivos ( $t$  y  $t + \Delta t$ ). (Stud. geophys. geod., 46 (2002), 113–164)

Cuando la divergencia está presente en un campo de onda, las partes del frente de onda se estiran durante su propagación en el medio. Tanto la distancia y la diferencia angular entre las tangentes entre los rayos vecinos aumentan, y la interpolación es necesaria con el fin de mantener cierta densidad de muestreo predefinido para el frente de onda.

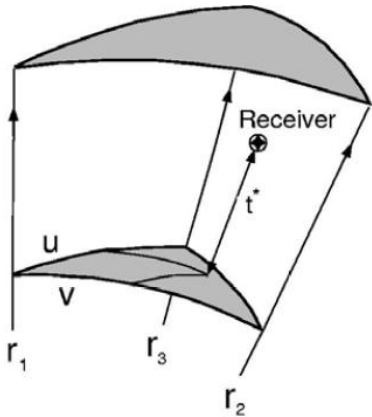
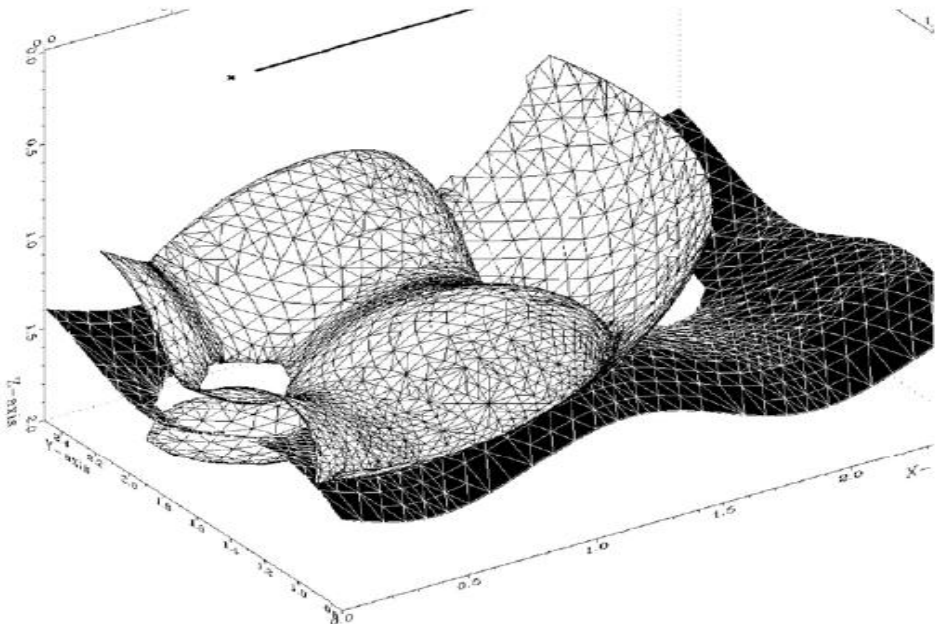


Figura 2.6 Celda de un rayo con un receptor interior. Los datos sísmicos se estiman en el receptor mediante la interpolación a partir de los tres rayos  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$ . (Stud. geophys. geod., 46 (2002), 113–164)

Con el fin de encontrar los arribos en los receptores es necesario un procedimiento que sea capaz de transferir los parámetros sísmicos del frente de onda en movimiento a cada receptor. El volumen entre dos frentes de onda consecutivos se divide en celdas. Estos son cuerpos de forma prismática unidos por tres rayos, cuyo triángulo que los conecta en cada uno de los dos frentes de onda. Los seis extremos de las coordenadas espaciales  $(x, y, z)$  de las celdas del rayo son usadas para construir una celda que contenga por completo los rayos. Algunos receptores pueden estar ubicados dentro de la celda como se muestra en la figura 2.6. Los parámetros sísmicos para este receptor se encuentran interpolados por tres rayos usando una celda con coordenadas  $u, v$  y  $t^*$ , donde  $(u, v)$  son las coordenadas baricéntricas de un receptor y  $t^*$  es el tiempo de viaje desde la celda hasta el receptor.

Figura 2.7 Ejemplo de la construcción de un frente de onda en un modelo abierto. Este frente de onda se refleja desde la interfaz más profunda. La interfaz se representa en negro y el frente de onda en blanco. La interfaz contiene dos áreas no definidas, una de ellas es alcanzada por el frente de onda. (Stud. geophys. geod., 46 (2002), 113–164)



### 2.3.4 Reflexión y transmisión en las interfaces

Como se describió anteriormente un modelo abierto es un concepto práctico para la representación de un modelo geológico real. En la figura 2.7, se construyó un frente de onda en un modelo abierto. La malla triangular posee las mismas características locales como las del frente de onda y puede ser utilizada en el proceso de reflexión y transmisión de un rayo en una interface. Cada vez que es detectada una intersección de un rayo y un triángulo de una interface los siguientes parámetros son obtenidos para el punto de intersección rayo/interface:

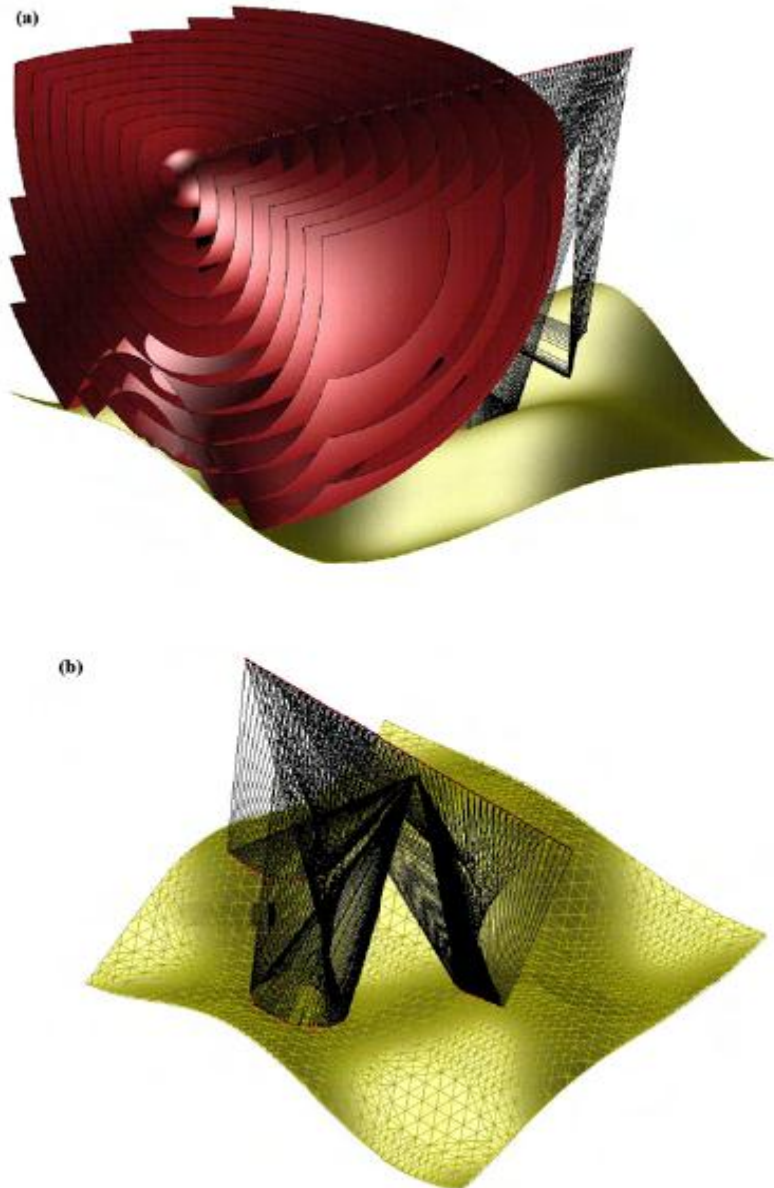
- Posición espacial: ubicado en el plano de los tres vértices del triángulo
- Interfaz normal: interpolada en las tres interfaces normales de los vértices del triángulo
- Interfaz de la matriz de curvatura con coordenadas locales correspondientes: interpolada en las tres matrices de curvatura en los vértices del triángulo

Esta información es suficiente para reflejar y transmitir los rayos en una interfaz, calculando ambos parámetros cinemáticos y dinámicos.

### 2.3.5 Construcción de un frente de onda y multi-arribos

Se considera un modelo con una sola interfaz separada por dos medios isótropo-homogéneos. En la siguiente figura 2.8b la construcción del frente de onda de ese modelo se utiliza para calcular las contribuciones de los reflejos correspondientes a una línea de receptores. La curvatura de la interfaz da lugar a la triplicación del frente de onda, originando así los multi-arribos detectados (más de un evento por receptor). Los ejemplos de la figura 2.8b son representados gráficamente en la figura 2.9. Se observan cuatro parámetros para la línea receptora: tiempo de viaje, ángulo de salida desde la fuente, coeficiente de amplitud y dirección del rayo en los receptores. El bow-tie en la parte inferior de la figura 2.9a es el tiempo de viaje de la energía el cual no podría estar presente en cualquier modelado 2-D. Estos arribos están desplegados en una curva ovalada en dirección de salida que se observa en la gráfica de la Figura 2.9b. En la figura 2.10, el error (en milisegundos) de los cálculos del tiempo de tránsito se representa gráficamente. La figura muestra la diferencia entre los tiempos de viaje calculados por la construcción del frente de onda y el tiempo de viaje del trazado de rayos desde la fuente a cada posición del receptor. Un error máximo de 0.2-0.3 ms, como se muestra en la figura, es lo suficientemente pequeño para la mayoría de aplicaciones geofísicas. Utilizando los datos de tiempo de tránsito y la amplitud de los receptores, se puede calcular un sismograma sintético (figura 2.11), en el cual se puede observar las variaciones de la amplitud y los cambios de fase.

El tiempo que tarda una computadora en la construcción de un frente de onda depende de varios factores como la complejidad del modelo, la toma de muestras de la onda de campo (el cual es controlado por el usuario, que define la densidad de rayos y el tiempo), el tiempo total de propagación y el número de receptores. Una observación general con respecto al tiempo de procesado es que la eficiencia aumenta considerablemente con respecto al número de receptores en el modelo.



Para realizar la simulación de un modelo 3-D real (decenas de disparos y receptores), el trabajo puede ser automáticamente dividido en un número de sub-tareas independientes, con un número de disparos en cada una, que pueden ser distribuidos a un número de ordenadores o nodos en una red. Dentro de cada trabajo en el que se construye un frente de onda paralelo puede aplicarse el principio de similitud de disparo, aprovechando el hecho de que en una rama dada la llegada de los frentes de onda a los receptores, la dirección de salida de un rayo varía muy poco a la siguiente salida. Esto hace posible el uso de una estrategia de frentes de onda sólo en direcciones preseleccionadas para la mayoría de los tiros en el estudio. Esta opción puede disminuir el tiempo de trabajo del CPU drásticamente.

Figura 2.8 Construcción de un frente de onda y trazado de rayos para una línea recta de receptores. (a) La fuente se encuentra en la parte izquierda del modelo en la posición (0.2, 1.25, 0.2) Km. (b) La fuente se encuentra en la posición (1.25, 1.25, 0.2) Km. (Stud. geophys. geod., 46 (2002), 113–164)

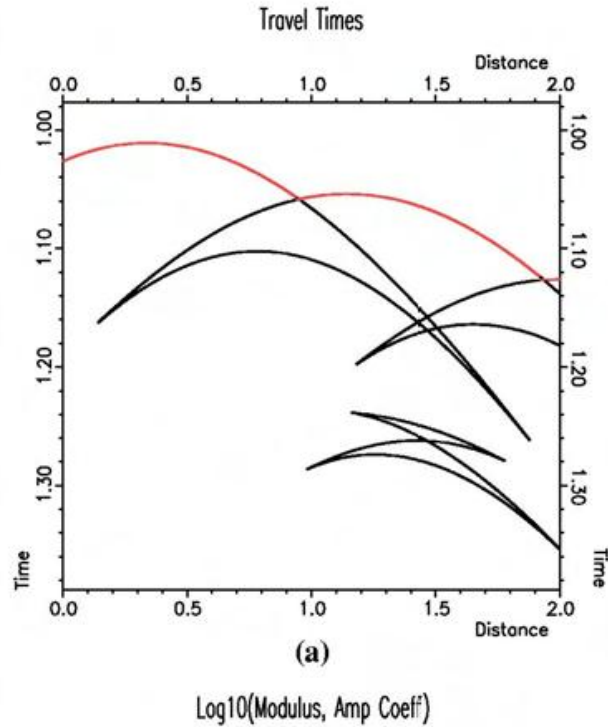


Figura 2.9 Selección de algunos parámetros registrados en la figura 8b. (a) La figura muestra el tiempo de viaje y Log10 del módulo del coeficiente de amplitud (Stud. geophys. geod., 46 (2002) 113–164)

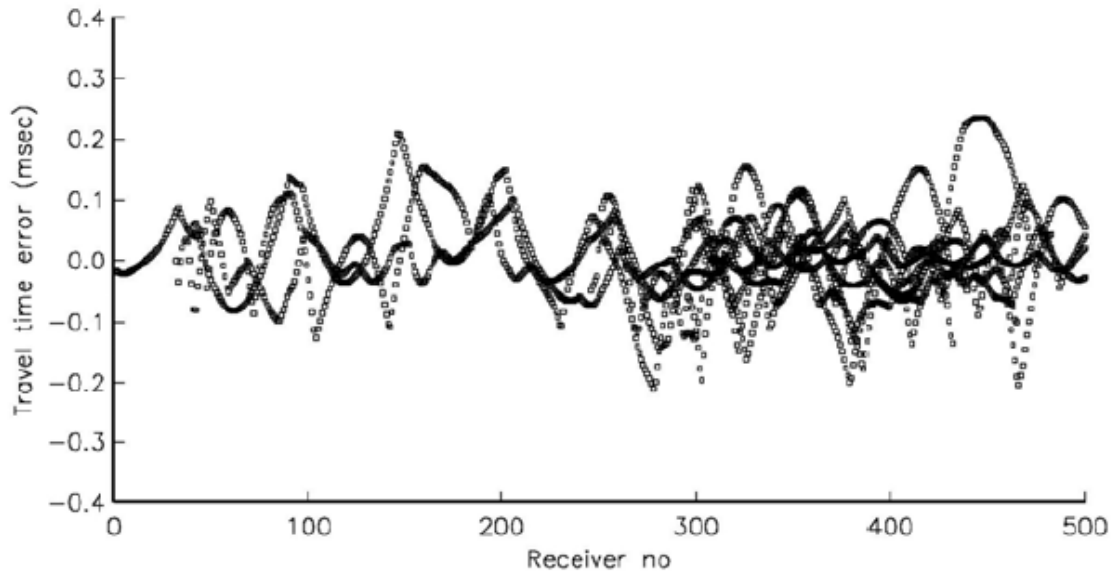


Figura 2.10 Error en el tiempo de viaje correspondiente a la curva de la figura 2.9 La diferencia entre el resultado de la construcción del frente de onda y el rastreo directo entre la fuente y los receptores que se representaron gráficamente. (Stud. geophys. geod., 46 (2002), 113–164)

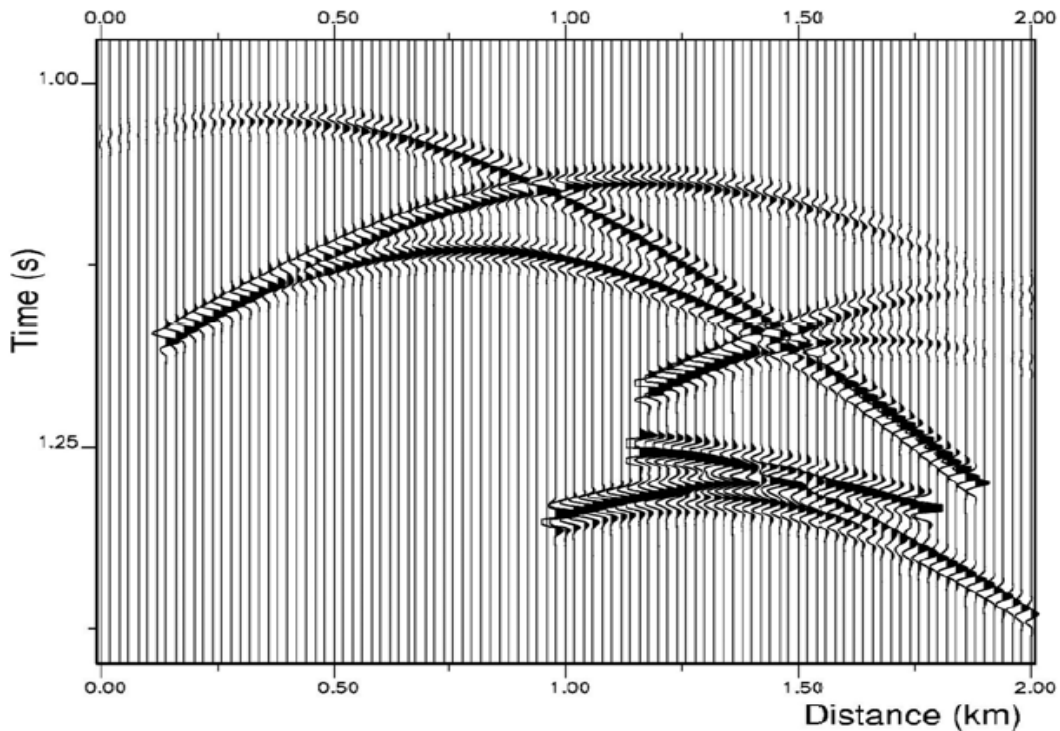


Figura 2.11 Sismograma sintético correspondiente a los datos del evento mostrado en la figura 2.9 (Stud. geophys. geod., 46 (2002), 113–164)

## 2.4 Resultados del trazado de rayos

### 2.4.1 Análisis de iluminación sísmica

En NORSAR hay tres aplicaciones que están disponibles en el análisis sísmico de iluminación en un modelo dado:

- Mapas de iluminación/ Simulación de la migración de amplitud (SMA)
- Diagramas de rosa
- Iluminación de rayo

El mapa de iluminación junto con la simulación de la migración de amplitud está basado en una simulación completa de un estudio sísmico, en NORSAR este es un término específico para la geometría de los receptores y las fuentes. Para un reflector objetivo cada punto de reflexión de la simulación se calcula y se ordena la información en mapas que muestran la distribución de iluminación (cobertura) de algún atributo sísmico a lo largo del reflector.

Con los diagramas de rosa nos centramos en algunos puntos individuales, definidos por el usuario en el subsuelo y en calcular los mapas de cobertura para

potenciales azimut/offsets. Cada uno de estos mapas, es válido para un punto específico y pueden dar indicaciones sobre geometrías favorables o no favorables para estudios reales.

La iluminación de rayos comprende un conjunto de herramientas adicionales para los puntos específicos en el subsuelo, por lo general vinculados a uno o más reflectores objetivos en un modelo dado. En algunos aspectos es similar a un diagrama de rosa, pero los métodos son algo diferentes y la posibilidad de análisis y comprensión de la relación entre el objetivo iluminado y el diseño del estudio son mejorados considerablemente.

## 2.4.2 Mapas de iluminación

Los resultados de la construcción de un frente de onda (tiro trazado) almacena el conjunto de eventos que contienen los atributos de los eventos seleccionados para los rayos que conectan las fuentes con los receptores. Como se muestra en la figura 2.12, estos conjuntos de eventos son utilizados por las funciones de iluminación para generar los mapas de iluminación para el dominio seleccionado en un modelo sísmico.

La siguiente figura muestra esquemáticamente algunas características del mapeo de iluminación. La figura muestra la unidad básica en el mapeo de iluminación, la trayectoria del rayo con el conjunto de atributos asociados, un conjunto puede constar de millones de eventos. Si este se encuentra en el dominio de CRP (punto de receptor común), todas las funciones seleccionadas se asignan a la superficie reflejada, es decir, para el horizonte objetivo. El horizonte objetivo se divide en un número de segmentos, cada segmento tiene un “diámetro de intervalo” definido por el usuario dando una área de superficie específica de dicho segmento.

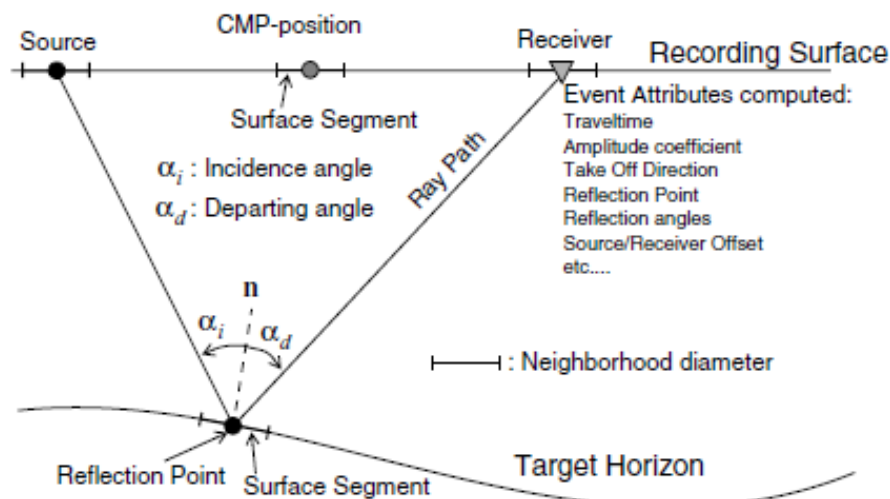


Figura 2.12 Parámetros para mapeo de iluminación (NORSAR-3D User's Guide - Version 5.5)

Un ejemplo de una función de iluminación de mapa es el promedio del ángulo incidente. El valor funcional de la función en el segmento en el punto de reflexión es:

$$\text{Promedio del ángulo incidente} = \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i}{N}$$

Donde  $\alpha_i$  son los ángulos de incidencia de todos los rayos con un punto de reflexión dentro del segmento de la superficie y N es el número de rayos con punto de reflexión en el segmento de la superficie.

Otro ejemplo es la densidad de amplitud:

$$\text{Densidad de amplitud} = \frac{|\sum_{i=1}^N A_i|}{\text{área}}$$

Donde  $A_i$  son los coeficientes de amplitud complejos para los rayos con un punto de reflexión dentro de la superficie.

### 2. 4. 3 Diagramas de Rosa

Los diagramas de rosa pueden ser utilizados en la planeación de un estudio para encontrar rápidamente offsets, azimuts y los tiempos de registro asociados a los puntos específicos (CRP) en el subsuelo.

En este método se calculan los CRP-gather cuando los CRP están en el horizonte objetivo. Los rayos disparados se observan desde un punto específico (básicamente la posición del CRP). Usando los ángulos iniciales en el CRP, los pares fuentes –receptor que iluminan una superficie en específico son ordenados. El resultado es un CRP-gather constituido por rayos regidos por la ley de Snell. Los diferentes atributos se clasifican en el dominio de azimut u offset y dan una estimación del rango de desplazamiento que mejor ilumina el CRP. Los CRP deben ser analizados con el fin de encontrar un diseño de adquisición óptimo para el estudio.

Para crear un diagrama de rosa, es necesario partir de la posición del CRP hacia la malla de receptores como se muestra en la siguiente figura 2.13.

Un diagrama de rosa es un mapa de iluminación en el dominio offset/azimut (Figura abajo), donde se genera un mapa por cada grupo de CRP (representado por un disparo).

Parámetros utilizados en un diagrama de rosa:

- Máxima desviación entre el rayo ideal y el rayo trazado
- Shot-side and receiver-side ray codes
- Disparo y selección de receptors
- Los filtros de los eventos (si es necesario)



- Funciones de iluminación
- Offset y Azimut

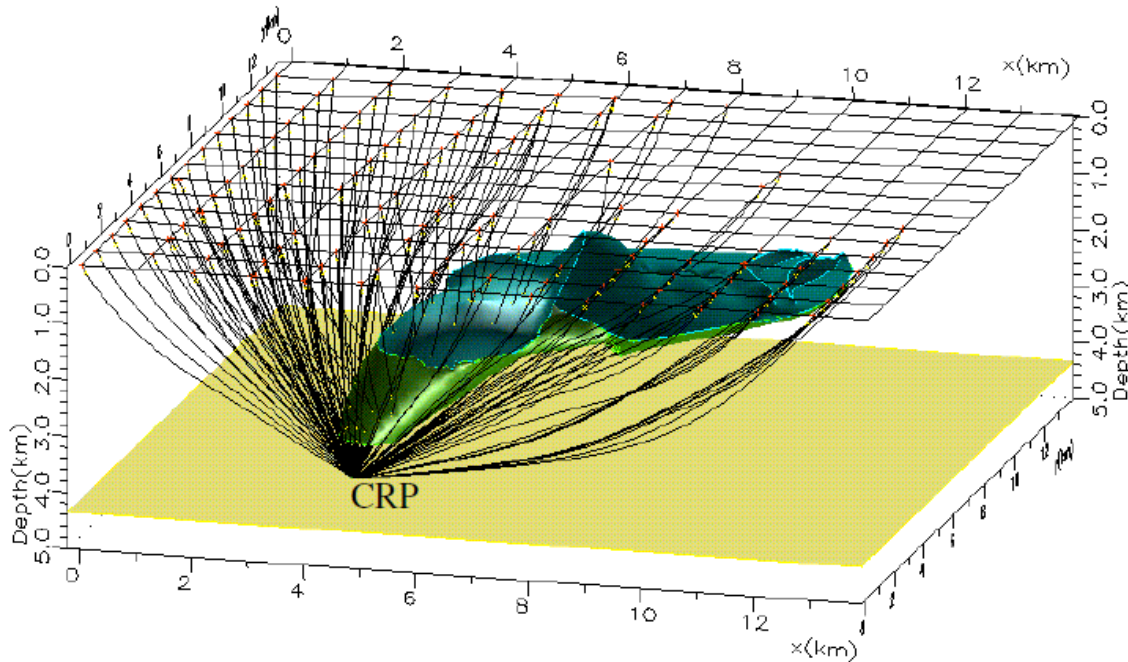


Figura 2.13 Mallado con fuentes y receptores para un CRP (NORSAR-3D User's Guide - Version 5.5)

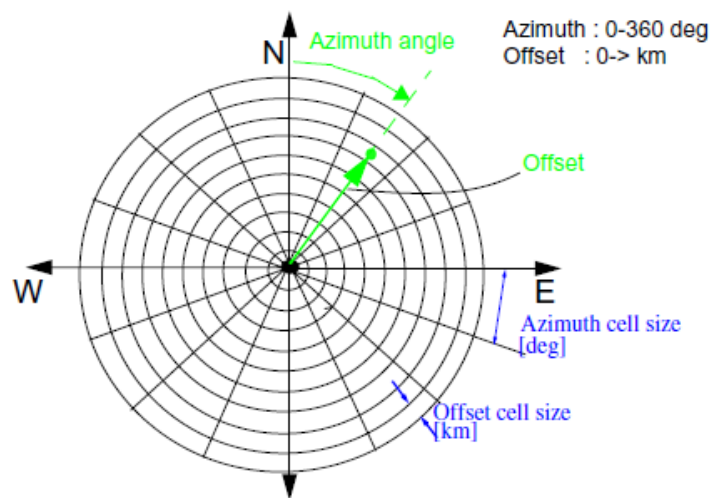


Figura 2.14 División de un diagrama de rosa en el dominio offset-azimut (NORSAR-3D User's Guide - Version 5.5)

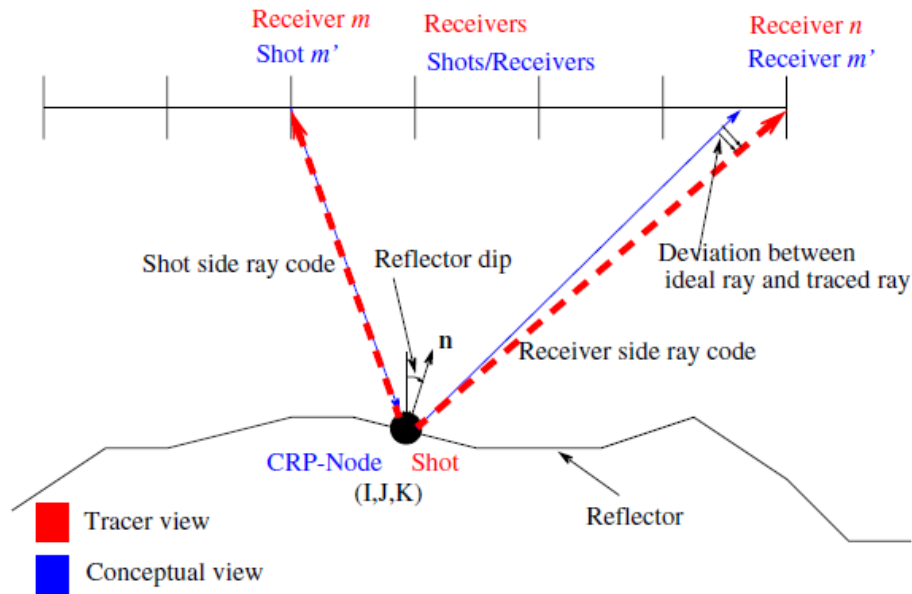


Figura 2.15 Ilustración de los conceptos para la generación de un diagrama de rosa (NORSAR-3D User's Guide - Version 5.5)

El azimut es el ángulo en sentido horario desde el Norte para la componente (x,y) del reflector normal y el buzamiento es cero para un reflector horizontal con una normal que apunta hacia arriba y  $180^\circ$  para un reflector horizontal con una normal que apunta hacia abajo.

El diagrama de rosa es un tipo de mapa de iluminación para un solo punto por debajo de la superficie. Todas las direcciones posibles del estudio y offsets son consideradas y observadas en el diagrama. El diagrama de rosa puede ser usado en la planeación de un estudio para encontrar rápidamente los offsets apropiados, los azimuts y tiempos de registro asociados a puntos particulares en el subsuelo.

# Capítulo 3

## Anisotropía

### 3.1 Introducción

La teoría de la propagación de una onda elástica fue formulada en el siglo XIX, y muy pronto la anisotropía elástica fue tomada en cuenta. Esto sorprendió a los físicos del siglo XX, cuando la anisotropía elástica era considerada un tema que solo interesaba a pocos. Pero la importancia de los pioneros era obvia, estaban interesados en la propagación de la luz y para ellos, la luz era un fenómeno ondulatorio en un éter invisible, intangible, sin embargo elástico. El hecho de que la luz es polarizada transversalmente posee una dificultad, en los medios elásticos-isótropo, siempre se observaron ondas longitudinales además de las ondas transversales. Desde que la teoría predijo que algunas de las características de las ondas en diferentes medios anisótropos (por ejemplo, doble refracción y frentes de onda no esféricos) se quisieron asumir la ausencia de ondas longitudinales ópticas incluso en la anisotropía. Por lo tanto, los primeros artículos sobre la propagación de las ondas elásticas ya tomaban en cuenta la anisotropía. Por ejemplo, Green (1838) fue el primero en utilizar la energía de deformación y apoyó la idea de que podría haber hasta 21 constantes elásticas.

En 1856, Lord Kelvin en su publicación “Elementos de una teoría matemática de la elasticidad”, trata exclusivamente sólidos. Esto no debe ser tomado como una indicación de que no creía en el éter elástico, sino que su interés principal eran los metales en ese momento y por lo tanto necesitaba una base sólida de la teoría de elasticidad. Para este propósito, se inventaron conceptos que llegaron a convertirse de uso común, tales como vectores, espacios vectoriales y tensores. Con estas herramientas, se podría describir el tensor elástico en forma de coordenadas libres.

Kelvin fue el primero en formular la ecuación de onda elástica para medios anisótropos (para un caso simple). Puesto que este logro fue publicado como parte de sus artículos no impactó y se pasó por alto. Por lo tanto hoy en día la solución de la ecuación de onda se atribuye a Christoffel (1877).

Es importante mencionar que algunas propiedades no tensoriales pueden también mostrar anisotropía; como en el caso del límite de elasticidad que puede variar con la dirección del esfuerzo aplicado sin requerir una cantidad tensorial para su representación.

Las propiedades anisótropas son aprovechadas en muchas aplicaciones. En microscopía de luz polarizada, un trozo de cuarzo puede ser utilizado para determinar birrefringencia y señales ópticas. Los cristales líquidos pueden

utilizarse electrónicamente como pantallas, así como los estados líquido-cristalinos muestran ventajas en el procesamiento de polímeros, como en el caso del Kelvin. La conductividad térmica anisótropa en películas delgadas de polímero tiene uso en dispositivos microelectrónicos, como los transductores de estado sólido.

En la actualidad existe una extensa variedad de campos del conocimiento involucrados e interesados directamente en investigar y comprender la naturaleza anisótropa de muchos fenómenos y propiedades de la materia.

### 3.2 Anisotropía sísmica

Se ha dicho que las rocas deben ser tratadas como medios homogéneos, con esto no debe entenderse que estos medios serían isótropos. Muchas rocas pueden, por supuesto, ser consideradas como medios isótropos, pero en algunas capas se llega a observar una orientación de los granos, por otra parte la estructura del medio es generalmente diferente paralela y perpendicular a las capas. La dependencia de las propiedades físicas se muestra por el hecho conocido de que la conductividad de calor en los medios es diferente en direcciones perpendiculares y paralelas a las capas. Se tiene aún otra razón para considerar algunas rocas como medio anisótropo. Las rocas, en particular, las que están a mayor profundidad están sujetas a grandes y no muy uniformes presiones. Sin embargo, se sabe que un cuerpo isótropo bajo presión uniaxial puede y se comporta como una birrefringencia uno (Rudzki, 1895, 520).

En un artículo posterior Rudki (1911) escribió que no había duda de que las rocas fueran anisótropas y calculó una larga lista de razones para esto. Rudzki que había ido más allá de la solución de la onda plana ha intentado la determinación del frente de onda para un medio transversalmente isótropo (TI) (uno con un solo eje de simetría rotacional, por lo que, también es llamada anisotropía polar), pero debido a la pesada dificultad numérica, tuvo que contentarse con calcular sólo unos pocos puntos para tener una idea de su comportamiento a partir de ello una manera de superar las dificultades numéricas y fue el primero en darse cuenta de la posibilidad de la triplicación de un frente de onda SV (figura 3.31).



diferentes observaciones llevaron a dos estudios independientes. La idea que subyace a estas investigaciones es simple: Las fluctuaciones de los parámetros elásticos en una secuencia de capas isotrópicas en una escala más corta que la longitud de onda guía la propagación de una longitud de onda más larga que se rigen por las ecuaciones de un medio anisotrópico sustituto (o secundario). Un medio sustituto corresponde a una secuencia de capas isotrópicas, que por supuesto, es transversalmente isotrópico este término fue utilizado por primera vez por Love en 1982.

En la siguiente figura 3.2 se muestra la superficie con el vector de lentitud (el vector de lentitud tiene la dirección de la normal de la onda y magnitud  $1/v$ ).

El primera imagen de lado izquierdo, que corresponde a una secuencia de capas delgadas de dos tipos de roca con una relación de velocidad de 1:2; en la imagen central a una relación de velocidad de 1:4; y en la imagen más a la derecha a una relación (muy poco realista) de 1:8. En los tres casos, la relación de velocidades  $v_p/v_s$  de los dos tipos de roca es idéntica. Con el conocimiento actual, esto parece ser poco realista, pero hace 50 años esto parecía una buena aproximación. En los tres casos, la superficie de lentitud (y por lo tanto también el frente de onda) de la onda P es casi esférica para ángulos dentro de aproximadamente  $30^\circ$  respecto a la vertical, a pesar de que se desvía sustancialmente para ángulos cercanos a la horizontal.

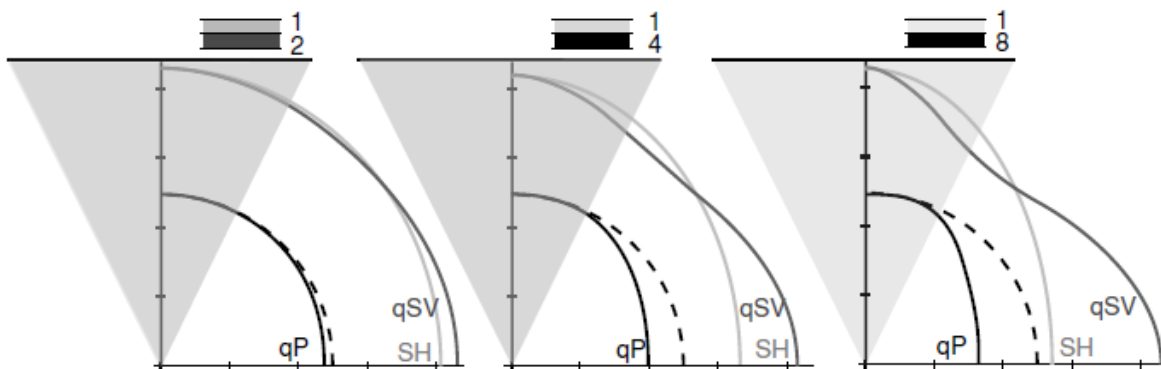


Figura 3.2 las superficies de lentitud (líneas continuas) en medios con capas anisotrópicas inducidas comparadas con las superficies de lentitud de ondas P en medios isotrópicos (líneas discontinuas) con lentitudes idénticas a lo largo de la vertical. Se asume que dos tipos de capas isotrópicas contribuyen igualmente a la secuencia de capas delgadas. En cada capa la proporción de velocidades de las ondas P y S es igual. Los números en la parte superior de cada caso son la proporción de la rigidez de las dos capas (es decir, para densidades idénticas, el cuadrado de las velocidades). Las áreas sombreadas corresponden a la lentitud de la onda P. la primera imagen se refiere a un modelo geológico ideal, las que le siguen corresponden a situaciones geológicas más realistas. (Years of anisotropy in exploration and reservoir seismics: A historical review of concepts and methods Klaus Helbig and Leon Thomsen)

En el caso de un medio elástico anisótropo, las ondas sísmicas, independientemente del tipo, que se propaguen a través de éste, lo harán con diferentes velocidades para cada dirección observada. Esta velocidad característicamente anisótropa implica la existencia de cierta estructura, u orden, en la escala de la longitud de onda sísmica impuesta por diversos fenómenos físicos. En estructuras típicas del subsuelo, la velocidad cambia tanto con respecto a la posición espacial como a la dirección de propagación, lo que consecuentemente genera que el medio resulte heterogéneo y anisótropo. Las nociones de heterogeneidad y anisotropía dependen de la escala, y por esta misma condición un mismo medio o material puede comportarse como heterogéneo para pequeños valores de longitud de onda y como anisótropo para valores grandes de longitud de onda. Como en el caso de la heterogeneidad de pequeña escala, en donde la estratificación fina detectable por registros de pozo puede crear un modelo anisótropo efectivo en el límite de la longitud de onda larga.

La forma del frente de onda depende de la velocidad de grupo (velocidad con la que viaja el tren de ondas) y la velocidad de fase (velocidad con la cual un punto de fase constante viaja perpendicular en dirección normal a la superficie de la onda). Para un medio isótropo, la velocidad de grupo es equivalente a la velocidad de fase ( $V_{grupo} = V_{fase}$ ) mientras que para un medio anisótropo ocurre la dispersión, es decir, la velocidad de fase es distinta a la de grupo ( $V_{grupo} \neq V_{fase}$ ), esto se debe a que la velocidad varía con respecto a la frecuencia.

La anisotropía en secuencias sedimentarias es causada por los siguientes factores primordiales:

- Anisotropía intrínseca debida a orientaciones preferenciales de granos de minerales anisótropos o a la forma misma de los minerales isótropos.
- La estratificación delgada de capas isótropas a pequeña escala comparada con la longitud de onda (donde las capas pueden estar horizontales o inclinadas).
- Fracturas verticales o buzantes o microcracks.
- Esfuerzos no hidrostáticos.

Encontrar anisotropía producida por una combinación de estos factores es algo común. Como ejemplo se pueden mencionar los sistemas de fracturas verticales que pueden desarrollarse en sedimentos finamente estratificados, o los mismos estratos delgados pueden ser intrínsecamente anisótropos. Como

resultado de esto, diferentes formaciones del subsuelo pueden poseer diversas simetrías anisótropas, cada una con su onda de propagación característica.

Thomsen (1986) introdujo una serie de parámetros que se pueden usar para describir un medio con anisotropía. Los parámetros son definidos en términos de los componentes del tensor de rigidez de un medio con anisotropía.

El parámetro  $\alpha$  que representa la velocidad vertical para la onda P.

$$\alpha = \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}} \quad (1a)$$

El parámetro  $\beta$  que representa la velocidad vertical de la onda S.

$$\beta = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \quad (1b)$$

El parámetro  $\delta$  domina la respuesta anisótropa cuando el frente de onda P incidente se propaga paralelamente al eje de simetría. Este parámetro, es totalmente independiente a la velocidad sísmica del medio perpendicular al eje de simetría, y puede tomar tanto valores positivos como negativos. Se puede usar para relacionar el ángulo de fase y grupo (y las velocidades de grupo y fase) dentro de un medio anisótropo y es el parámetro que controla el normal moveout de los arribos de ondas compresionales en una secuencia de capas horizontales (Thomsen, 1986).

$$\delta = \frac{1}{2C_{33}^2} [2(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} + C_{44})(C_{11} + C_{33} - C_{44})] \quad (1c)$$

Para una onda sísmica que pasa a través de un medio con isotropía transversal, el parámetro  $\varepsilon$  domina la velocidad de la onda P cuando se propaga con un ángulo casi perpendicular al eje de simetría. El valor de  $\varepsilon$  representa el porcentaje de la diferencia entre la velocidad horizontal y la velocidad vertical de la onda P. Se puede usar en conjunto con  $\delta$  para relacionar velocidades de grupo y fase dentro de un medio con isotropía transversal (Brittan et. al., 1994).

$$\varepsilon = \frac{C_{11} - C_{33}}{2C_{33}} \quad (1d)$$

El parámetro  $\gamma$  describe la polarización horizontal de la onda de cizalla (onda SH) dentro de un medio con isotropía transversal. Por lo tanto,  $\gamma$  se puede usar de manera convencional para describir la “anisotropía SH” de un medio



donde  $V_{SH\pi/2}$  es la velocidad de la onda SH que es perpendicular al eje de simetría, y  $\beta_0$  es la velocidad de la onda S que es paralela al eje de simetría. Se puede usar para calcular el normal moveout de los arribos de la onda SH y relacionarla con su grupo y fase de ángulos (Thomsen, 1986).

$$\gamma = \frac{C_{66} - C_{44}}{2C_{44}} \quad (1e)$$

Estos parámetros son una combinación de los módulos elásticos, son adimensionales y se reducen a cero en presencia de un medio isótropo.

### 3.4 Tipos de anisotropía

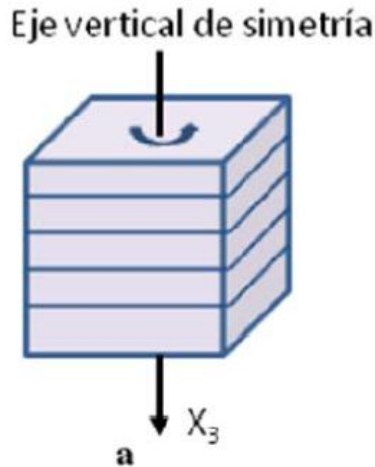
#### a) Isotropía en un plano de simetría (TI)

La isotropía transversal es el tipo más simple de anisotropía. En este caso las propiedades elásticas difieren en una dirección y son las mismas en las otras dos direcciones ortogonales (Thomsen, 1986). La isotropía transversal puede ser vertical o anisotropía polar (VTI) u horizontal o anisotropía azimutal (HTI) dependiendo de si las características físicas que causan la anisotropía aparecen en el plano vertical u horizontal, respectivamente.

Anisotropía polar: Sus propiedades no varían con respecto al azimut pero si varían con respecto al ángulo polar. También es llamada isotropía transversal vertical (VTI). Este tipo de anisotropía está asociada en la mayoría de los casos con lutitas (que aparentemente no presentan estratificación interna y producen isotropía transversal), capas horizontales de menor escala y fracturas verticales en una formación (MacBeth y Lynn, 2000). Para rocas con isotropía transversal vertical, el eje de simetría es vertical y perpendicular al plano de las capas, así que las ondas que se propagan paralelas al plano de la capa tienen mayor velocidad que las que se propagan verticalmente.

La velocidad y la anisotropía en lutitas incrementan con la compactación y la profundidad. Kaarsberg (1959) observó que el grado de la velocidad anisótropa incrementa con la profundidad del soterramiento, esto se lo atribuye al incremento de la alineación de los minerales como resultado del aumento del módulo de bulk.

El tensor elástico de sistema VTI viene dado por (MacBeth y Lynn, 2000) :

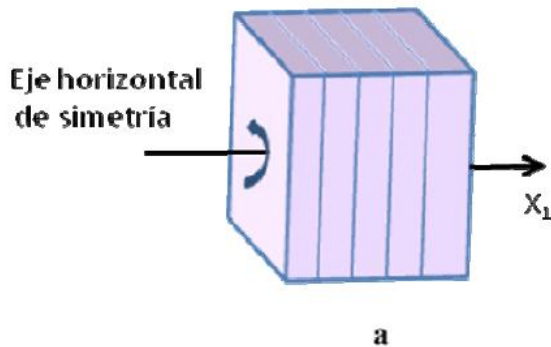


$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix}$$

Donde  $C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$

Figura 3.3 Medio VTI, el eje de simetría es vertical y perpendicular al plano de las capas. Tensor elástico que caracteriza este tipo de medio (Modificado de Cabello, 2007).

Anisotropía azimutal: Consiste en la variación de una o más propiedades de un material homogéneo con respecto al azimut. También es llamado isotropía transversal horizontal (HTI). Este tipo de anisotropía presenta el eje horizontal y perpendicular a la orientación de las fracturas. El tensor elástico de sistema HTI viene dado por (MacBeth y Lynn, 2000):



$$C = \begin{pmatrix} C_{33} & C_{13} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{66} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{44} \end{pmatrix}$$

Donde  $C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$

Figura 3.4 Medio HTI, el eje de simetría es horizontal y perpendicular al plano de fracturas. Tensor que caracteriza el medio HTI (Modificado de Cabello, 2007).

El principal efecto de la isotropía transversal es la distorsión del frente de onda y un moveout no hiperbólico. Estos efectos son pronunciados para la propagación a altos ángulos con respecto a la vertical e incluso podría ser un problema para el procesamiento en el modo convertido de ondas SV. En el más simple de los casos de isotropía transversal, las ondas SH no se encuentran afectadas. Para un sólido anisótropo no es correcto referirse estrictamente a

ondas P o S, debido a que la energía sísmica se propaga con ambas características (Cabello, 2007).

Existen zonas donde la geología es afectada por ciertos eventos, los cuales por ejemplo generan plegamientos, lo que da como resultado que el eje de simetría se encuentre inclinado que puede llegar a medir más de  $45^\circ$  (anisotropía TTI). En general, en el caso de los medios anisótropos el tensor de elasticidad dependerá de la orientación de los modelos TI.

La siguiente figura 3.5 muestra un sistema de coordenadas  $x, y, z$ , y  $x', y', z'$  asociado con los estratos paralelos que corresponden al medio TTI. La relación espacial del medio en relación al sistema de coordenadas  $x, y, z$ , se define por el ángulo  $\theta$  entre los planos  $x, y$ , y  $x', y'$ , es decir, la inclinación. La relación entre el estrés y los tensores de deformación del sistema  $x, y, z$ , son los mismos que en un medio VTI. Para determinar los principios de propagación de una onda en el sistema de coordenadas  $x, y, z$ , se debe de hacer uso de la matriz de cosenos de los ángulos entre  $x, y, z$ , y  $x', y', z'$  (los ángulos se deben medir en la dirección a las agujas del reloj).

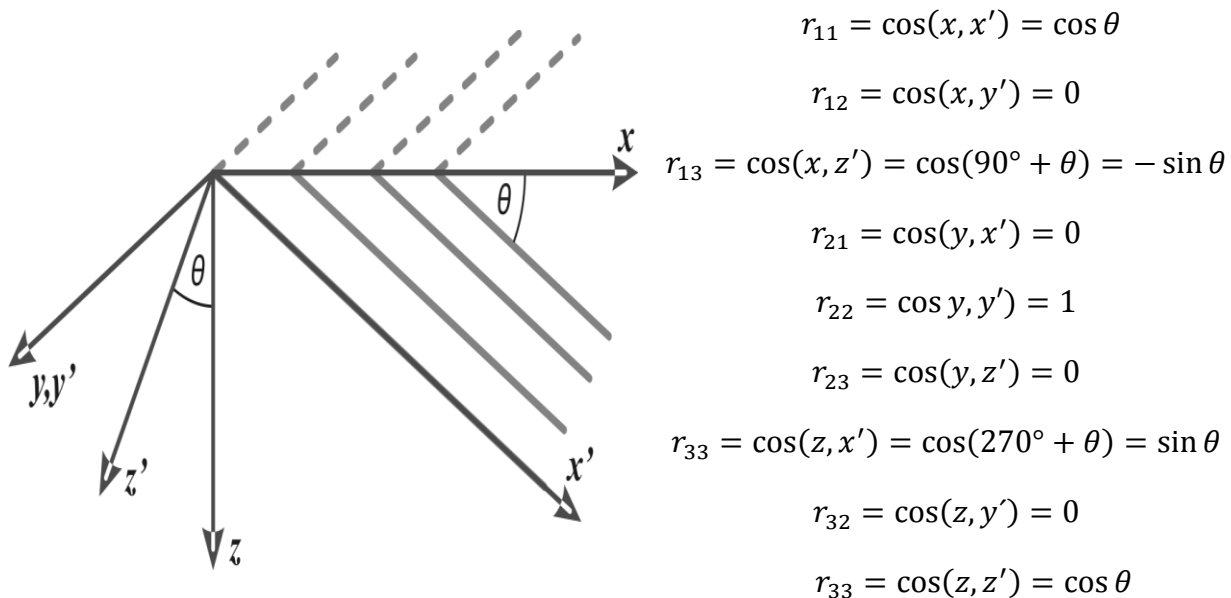


Figura 3.5 Descripción de un modelo TTI y la matriz de los cosenos.

La isotropía transversal produce que las ecuaciones que describen este fenómeno sean simplificadas considerablemente, estableciendo algunas conclusiones básicas, tales como las siguientes:

- Las medidas de anisotropía (contrastes entre la velocidad horizontal y la velocidad vertical) no son relevantes para problemas de propagaciones verticales de la onda P.
- La medida más crítica de anisotropía (denotada por  $\delta$ ) no involucra la velocidad horizontal.
- El uso de la relación de Poisson, en la determinación de las velocidades verticales de onda P y S, puede estimar los esfuerzos horizontales (Thomsen, 1986).

b) Anisotropía de Thomsen o Anisotropía débil

Thomsen (1986) al reunir varios campos medidos con isotropía transversal concluyó que en la mayoría de los casos la anisotropía es débil (el radio es cercano a uno), debido a que los parámetros tienen valores menores 0.2 aun cuando los materiales que lo constituyen son altamente anisótropos.

c) Anisotropía elíptica

Cuando se está en presencia de un medio anisótropo y la onda al propagarse contiene un frente de onda elíptico, se habla de un medio con anisotropía elíptica. Este tipo de medio se puede observar cerca de los ejes de simetría cuando se está en presencia de un medio TI. Esta propiedad es usada por Muir (1990) y Dellinger et al (1993) para aproximar el frente de onda P y SV a una elipse.

Para que el frente de onda represente una elipse, los parámetros de Thomsen  $\epsilon$  y  $\delta$  tienen que ser equivalentes ( $\epsilon=\delta$ ) para pequeños valores de  $\theta$  (Figura 3.6).

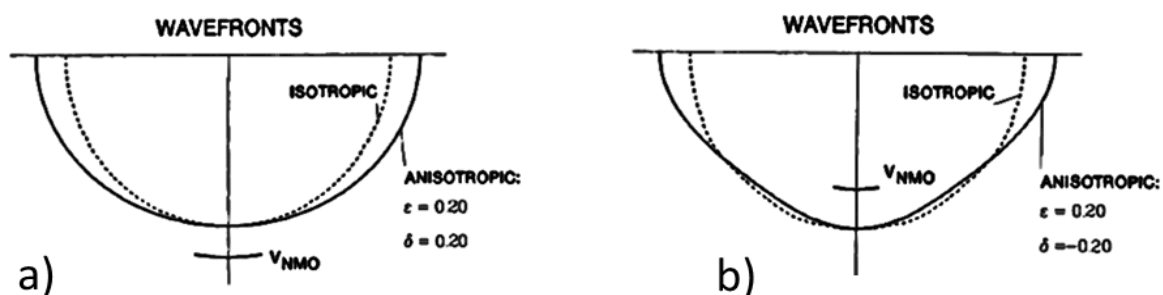


Figura 3.6 a) la figura muestra un frente de onda elíptico ( $\delta = \epsilon$ ) b) la figura indica un frente de onda anisótropo real ( $\delta = -\epsilon$ ). (Modificado de Thomsen, 1986)

Los rayos juegan un papel fundamental en diversas ramas de la física. Por esta razón, no sorprende que existan diferentes enfoques que los pueden definir y para derivar los sistemas de trazado de rayos. El enfoque más general para derivar los sistemas de trazado de rayos sísmicos se basa en la solución de alta frecuencia asintótica de la ecuación de elastodinámica.

El sistema de trazado de rayos es el mismo para todas las ondas que se propagan en un medio anisótropo-heterogéneo. En la teoría de rayos para un medio anisótropo-heterogéneo, un papel muy importante es desempeñado por los eigenvalores de la matriz  $\Gamma_{jk} = p_i p_j c_{ijkl} / \rho$ , donde  $c_{ijkl}$  son los parámetros elásticos,  $\rho$  la densidad y  $p_i$  las componentes del vector de lentitud. Los eigenvalores de la matriz  $\Gamma_{jk}$  pueden escribirse de una forma simple solo para casos de un medio isótropo y en algunos casos simples de anisotropía (por ejemplo, un medio isótropo transversal). Para la mayoría de los medios anisótropos, las expresiones analíticas para los eigenvalores son muy complicadas. Un rayo sísmico es descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que pueden ser resueltas por procedimientos como el método de Runge-Kutta o el método Hamming. En situaciones simples cuando las expresiones analíticas para los eigenvalores de la matriz  $\Gamma_{jk}$  son conocidas, el sistema se reduce a los casos estudiados previamente. Un sistema similar de ecuaciones diferenciales ordinarias para un rayo sísmico en un medio isotrópico no homogéneo ha sido conocido durante algún tiempo y ha ayudado en el estudio de gran variedad de problemas relacionados con la cinemática de las ondas sísmicas en un medio isotrópico no homogéneo.

La propagación de ondas elásticas en un medio no-homogéneo anisótropo ha sido investigada. La ecuación de movimiento en un plano cartesiano puede estar escrita de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( c_{ijkl} \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \right) = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (2)$$

Donde  $t$  es el tiempo,  $\rho$  es la densidad,  $U_j$  son las componentes del vector de desplazamiento  $U$ ,  $c_{ijkl}$  son los parámetros elásticos. Los parámetros elásticos  $c_{ijkl}$ , la densidad  $\rho$  y sus derivadas son funciones continuas de las coordenadas.

Se espera tener la solución de la ecuación de movimiento (2) la cual no es analítica a lo largo de ciertas superficies en movimiento. Estas superficies son llamadas frentes de onda. Supóngase que un frente de onda esta descrito por la ecuación:

$$t = \tau(x_i) \quad (3)$$

Sabemos que en este caso es conveniente buscar la solución en forma de una serie de rayos.

$$U_k(x_i, t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_k^{(n)}(x_i) f_n(t - \tau(x_i)) \quad (4)$$

Donde las funciones  $f_n(\vartheta)$  satisface la relación

$$df_{n+1}(\vartheta)/d\vartheta = f_n(\vartheta) \quad (5)$$

Las series de rayos incluyen las soluciones que son discontinuos en el frente de onda. Esto es a partir de la ecuación 5 que el orden de la discontinuidad de la función  $f_{n+1}$  en un frente de onda (en  $t = \tau$ ) es uno menos que  $f_n$ .

Si la ecuación 4 es sustituida en la ecuación 2 y los coeficientes de las funciones  $f_n(t - \tau)$  en el lado izquierdo y derecho de la ecuación se obtienen un sistema de ecuaciones

$$N(U^{(n)}) - M(U^{(n+1)}) + L(U^{(n-2)}) = 0 \quad (6)$$

Para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , con  $U^{(-1)} = U^{(-2)} = 0$ . Los operadores vectoriales N, M y L son dadas por la formula

$$\left. \begin{aligned} N_j(U^{(n)}) &= \Gamma_{jk} U_k^{(n)} - U_j^{(n)}, \\ M_j(U^{(n)}) &= p_i a_{ijkl} \frac{\partial U_k^{(n)}}{\partial x_l} + \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho a_{ijkl} p_l U_k^{(n)} \right), \\ L_j(U^{(n)}) &= \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho a_{ijkl} \frac{\partial U_k^{(n)}}{\partial x_l} \right), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Donde

$$\Gamma_{jk} = p_i p_l a_{ijkl}, a_{ijkl} = c_{ijkl}/\rho, p_i = \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \quad (8)$$

El sistema de ecuaciones en la ecuación 6 es el sistema básico de ecuaciones de la teoría de rayos para un medio anisótropo-heterogéneo. Este sistema puede ser usado, cuando se saben las condiciones iniciales, para determinar  $\tau(x_i)$  y  $U^{(n)}(x_i)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Antes de resolver la ecuación 6 notemos algunas propiedades de la matriz  $\Gamma_{jk}$ . Sus eigenvalores se pueden determinar cómo raíces de las ecuaciones características

$$\text{Det}(\Gamma_{jk} - G\delta_{jk}) = 0 \quad (9a)$$

Esta ecuación puede ser reescrita en la siguiente forma:

$$G^3 - PG^2 + QG - R = 0 \quad (9b)$$

Donde los valores de P, Q y R son las invariantes de una matriz simétrica  $\Gamma_{jk}$ . Esto es evidente en la ecuación 9b que la matriz  $\Gamma_{jk}$  tiene tres eigenvalores y designaremos  $G_1$ ,  $G_2$  y  $G_3$ . Se sabe que la matriz  $\Gamma_{jk}$  es definida positiva. Por lo tanto, los eigenvalores de  $\Gamma_{jk}$  son siempre reales y positivos. Los eigenvalores de  $G_m(p_i, x_i)$  son funciones homogéneas de segundo orden en  $p_i$ . Usando el teorema de Euler son obtenidas las siguientes ecuaciones:

$$p_i \frac{\partial G_m}{\partial p_i} = 2G_m \quad (m = 1,2,3) \quad (10)$$

Un eigenvector  $g^{(m)}$  corresponde a cada eigenvalores de  $G_m$  de la matriz  $\Gamma_{jk}$ . La matriz  $\Gamma_{jk}$  tiene tres eigenvectores  $g^{(1)}$ ,  $g^{(2)}$  y  $g^{(3)}$ , correspondientes a los tres eigenvalores de  $G_1$ ,  $G_2$  y  $G_3$ , respectivamente. Los eigenvectores de  $g^{(m)}$  pueden ser tomados como vectores unitarios. Si  $G_1 \neq G_2 \neq G_3$  que se pueden determinar de:

$$(\Gamma_{jk} - G_m\delta_{jk})g_k^{(m)} = 0 \quad (11)$$

En el peor de los casos en que dos eigenvalores sean idénticos, la dirección de los eigenvalores correspondientes no puede ser determinada desde 11, solo el plano en el que se sitúan puede ser determinado.

### 3.5.1 Cálculo de rayos y frentes de onda

La ecuación 6 da  $N(U^{(0)}) = 0$  para  $n=0$ , es decir:

$$(\Gamma_{jk} - \delta_{jk})U_k^{(0)} = 0 \quad (12)$$

La ecuación 12 representa un sistema de tres ecuaciones algebraicas  $U_1^{(0)}$ ,  $U_2^{(0)}$  y  $U_3^{(0)}$ . En comparación con la ecuación 9a se ve fácilmente que el sistema de

la ecuación 12 tiene una solución no trivial solo en el caso de que cualquiera de los eigenvalores de la matriz  $\Gamma_{jk}(G_1, G_2 \text{ o } G_3)$  sea igual a uno. Si  $G_1 \neq G_2 \neq G_3$ , la ecuación 12 tiene una solución no trivial in tres casos: (a)  $G_1(p_i, x_i) = 1$  ( $G_2 \neq 1, G_3 \neq 1$ ), (b)  $G_2(p_i, x_i) = 1$  ( $G_1 \neq 1, G_3 \neq 1$ ) y (c)  $G_3(p_i, x_i) = 1$  ( $G_1 \neq 1, G_2 \neq 1$ ).

Cada una de las ecuaciones mencionadas anteriormente

$$G_m = (p_1, p_2, p_3, x_1, x_2, x_3) = 1 \quad (13)$$

Es una ecuación derivada parcial no lineal para  $\tau(x_i)$  que describe la propagación de un frente de onda. Así, en un medio heterogéneo -anisótropo (si  $a_{ijkl}$  y sus derivadas son continuas) tres frentes de onda se pueden propagar independientemente. Uno de ellos corresponde a la llamada onda casi compresional, los otros dos frentes de onda a dos ondas casi cortantes (que son generalmente independientes entre sí). En el caso generado de dos eigenvalores iguales (es decir,  $G_2 = G_3$ ) habrá solo dos frentes de onda independientes.

Si también se utiliza la ecuación 10, las ecuaciones de características correspondientes a la derivada parcial  $G_m(p_i, x_i) = 1$  pueden estar escritas como:

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial G_m}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{1}{2} \frac{\partial G_m}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (14)$$

La dificultad básica en el uso de la ecuación 14, en medios anisótropos se encuentra en el hecho de que las expresiones analíticas para  $G_m$  son muy complicadas (la solución de la ecuación 9b). Por lo tanto, es posible utilizar el sistema de la ecuación 14 sin reordenamientos adicionales solo en las situaciones más simples cuando la ecuación 10 se puede reescribir en una forma factorizada (por ejemplo, como un producto lineal y un factor cuadrático).

Por ejemplo, para la propagación de una onda compresional en un medio isótropo-heterogéneo ( $G_1 = \alpha^2 p_i p_i = 1$ ), el sistema conocido de ecuaciones diferenciales ordinarias es obtenido por la ecuación 14:

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \alpha^2 p_i, \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}.$$

Sin embargo, en la ecuación 14, la expresión analítica para los eigenvalores no necesita ser conocida explícitamente, solo sus derivadas parciales. Las expresiones analíticas para esas derivadas parciales pueden ser escritas sin dificultad, usando las ecuaciones 9a o 9b y el teorema en funciones implícitas. Obtenemos:



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G_m}{\partial p_i} &= h_i(p_j, x_j) = \frac{\partial \Gamma_{jk}}{\partial p_i} D_{jk}/D, \\ \frac{\partial G_m}{\partial x_i} &= H_i(p_j, x_j) = \frac{\partial \Gamma_{jk}}{\partial x_i} D_{jk}/D, \end{aligned} \right\} \quad (15a)$$

Donde

$$\left. \begin{aligned} D_{11} &= (\Gamma_{22} - 1)(\Gamma_{33} - 1) - \Gamma_{23}^2, \\ D_{22} &= (\Gamma_{11} - 1)(\Gamma_{33} - 1) - \Gamma_{13}^2, \\ D_{33} &= (\Gamma_{11} - 1)(\Gamma_{22} - 1) - \Gamma_{12}^2, \\ D_{12} &= D_{21} = \Gamma_{13}\Gamma_{23} - \Gamma_{12}(\Gamma_{33} - 1), \\ D_{13} &= D_{31} = \Gamma_{13}\Gamma_{23} - \Gamma_{13}(\Gamma_{22} - 1), \\ D_{23} &= D_{32} = \Gamma_{12}\Gamma_{13} - \Gamma_{23}(\Gamma_{11} - 1), \\ D &= \text{tr}D_{jk} = D_{11} + D_{22} + D_{33} \end{aligned} \right\} \quad (15b)$$

Al derivar la ecuación 15 se ha tenido en cuenta que  $G_m(p_i, x_i) = 1$ . Las derivadas parciales de  $\Gamma_{jk}$  que están en la ecuación 15 determinan fácilmente a partir de la relación de la ecuación 8 para  $\Gamma_{jk}$ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{jk}}{\partial x_i} &= \frac{\partial a_{ijkl}}{\partial x_i} p_i p_s, \\ \frac{\partial \Gamma_{jk}}{\partial p_i} &= (a_{ijkl} + a_{ijkl}) p_l \end{aligned} \right\} \quad (15c)$$

Usando la ecuación (15 a), (15b) y (15 c), el sistema de la ecuación (14) puede estar reescrita como:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{d\tau} &= a_{ijkl} p_l D_{jk}/D, \\ \frac{dp_i}{d\tau} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial a_{ijkl}}{\partial x_i} p_l p_s D_{jk}/D, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

(i=1,2,3)

Las ecuaciones 16 son el sistema final de las ecuaciones diferenciales ordinarias para características de la ecuación 13 diferencial parcial no lineal. Estas ecuaciones son para rayos sísmicos en medios anisótropos. Cuando usamos las ecuaciones 16 no es necesario saber las expresiones analíticas para los eigenvalores  $G_m$ .

Con el fin de resolver las ecuaciones 16, hay que conocer seis condiciones que determinan las coordenadas del punto en el rayo en el tiempo inicial  $\tau = t_0$  y también las componentes del vector de lentitud en ese punto

Para  $\tau = t_0$

$$x_i = (x_i)_0, p_i = (p_i)_0 \quad (17a)$$

Los valores iniciales  $(x_i)_0$  y  $(p_i)_0$  deben satisfacer la relación

$$G_m = ((x_i)_0, (p_i)_0) = 1 \quad (17b)$$

Si las condiciones iniciales 17a, satisfacen la ecuación 17b, las ecuaciones diferenciales 16 para un rayo sísmico pueden ser resueltas por técnicas numéricas estándar (método Runge-Kutta o Hamming). Así, la construcción de un rayo no presenta alguna dificultad. Como solución de las ecuaciones 16 nosotros obtenemos un rayo, especificado por las condiciones iniciales de la ecuación 17a y 17b, en la forma paramétrica  $x_1 = x_1(\tau)$ ,  $x_2 = x_2(\tau)$ ,  $x_3 = x_3(\tau)$ . El parámetro a lo largo del rayo es  $\tau$  ( $\tau = t$ , donde  $t$  es el tiempo). Los valores de  $x_i$  y  $p_i$  a lo largo del rayo pueden satisfacer la ecuación  $G_m(p_i, x_i) = 1$  en algún tiempo  $t$ .

Si las ecuaciones 16 son bastante similares para los tres tipos de onda quienes se propagan en un medio anisótropo (el casi compresional y los dos de onda cortante), el tipo de onda cuyo rayo se calculará debe de ser especificado mediante condiciones iniciales (ecuación 17b).

El sistema de ecuaciones (16) para el rayo sísmico no puede ser usado si el eigenvalor correspondiente a la onda cuyo rayo será determinado es igual a uno de los otros eigenvalores (en el caso  $D=0$ ). Esta restricción aplica a ambos cuando dos eigenvalores son idénticamente iguales (como en el caso de las ondas de corte en los medios isotrópicos) y en el caso cuando dos eigenvalores son iguales a otros solo en ciertas direcciones (para algunos  $p_i$ ). Estas posibilidades pueden ocurrir en el caso de ondas cuasi-cortantes. El sistema (16) es universal para las ondas cuasi-compresionales,

Las condiciones iniciales (17a) y (17b) especialmente (17b), tienen un papel muy importante en el cálculo de rayos. La condición (17b) determina el tipo de onda la cual está por ser calculada. A manera de cumplir la condición (17b) es útil tomar  $(x_i)_0$  y  $(N_i)_0$  como las condiciones iniciales, donde  $(N_i)_0$  son los cosenos directores de la normal al frente de ondas en el punto  $(x_i)_0$ . Desde los  $(x_i)_0$  y  $(N_i)_0$  conocidos, las tres velocidades normales  $V_1, V_2, V_3$  (correspondiente a las ondas cuasi-compresionales y cuasi-cortantes) pueden ser determinadas por métodos ya conocidos. Sabiendo estos valores, las condiciones iniciales (17a) que

satisfacen a (17b) son fácilmente determinadas, usando la relación  $p_i = N_i/V$ , donde  $V$  es la velocidad.

Tengamos en cuenta los cosenos directores  $(N_i)_0 (i = 1,2,3)$  que pueden ser descritos por dos parámetros, por ejemplo, los dos ángulos de salida. Así esos parámetros serán denotados por  $q_1$  y  $q_2$  respectivamente, y son llamados parámetros de rayo. Si es dado  $(x_i)_0$ , entonces cada rayo es determinado por dos parámetros  $q_1$  y  $q_2$ .

La velocidad normal  $V$  es obtenida de la relación  $V = (p_i p_i)^{-\frac{1}{2}}$  y los cosenos directores de la normal para el frente de onda  $N_i$  por medio de la formula  $N_i = V p_i$ . Si el ángulo entre la dirección del rayo y la normal al frente de onda es denotada por  $v$ , obtenemos la relación  $\cos v = V/v$  de la relación  $p_i v_i = 1$ . Para la construcción de un frente de onda es necesario determinar una serie de rayos que se caracterizan por diferentes parámetros de rayo. Así, los frentes de onda se obtendrán mediante la conexión de los puntos que se encuentran en los rayos a un tiempo  $t$ . La posibilidad de la construcción teórica del tiempo de viaje a lo largo de varios perfiles es evidente.

Hay que destacar que el sistema de ecuaciones 16 permite el cálculo de rayos y las curvas de distancia-tiempo en un medio anisótropo arbitrario (descrita por 21 parámetros elásticos), en tres coordenadas. Puesto que las leyes de reflexión y refracción en medios anisótropos son conocidas, la existencia de interfaces en este medio no debe causar dificultades en su cálculo.

# Capítulo 4

## Construcción del Modelo y la Geometría de Adquisición

### 4.1 Conceptos básicos para una adquisición sísmica

Para la elaboración de un diseño de adquisición sísmica que nos permita tener una imagen con la correcta geometría y disposición de los estratos en el subsuelo, se debe tener en cuenta cierta cantidad de parámetros y variables las cuales se detallaran brevemente. En principio es importante definir el tipo de diseño que se desea establecer en la zona de estudio, existen varios tipos de arreglos que se ajustan a las necesidades y características del área de estudio, entre ellos tenemos el diagonal, radial, pared de bloques, hexagonal, zigzag y ortogonal.

Hay muchos parámetros que son importantes al momento de elaborar un diseño de adquisición sísmica, pero la profundidad del horizonte objetivo es el de mayor influencia, y directamente a este están relacionados los parámetros más significativos del levantamiento como: rango de off-sets (distancias fuente-receptor), tipo y tamaño de fuente, intervalo de muestreo (sample rate), filtros, geófonos y cobertura del área de estudio. Los parámetros de resolución para obtener la imagen del objetivo, están también dentro de los factores a considerar al inicio de un proyecto sísmico.

La geometría sísmica 3-D comprende una cantidad de términos de suma importancia para comprender los fundamentos de la planificación y del diseño de adquisición.

Un estudio de adquisición sísmico debe ser diseñado pensando en la principal zona de interés prospectiva (objetivo geológico principal), esto va a determinar la gestión económica, afectando la selección de parámetros para el estudio 3-D. Así mismo la cobertura, tamaño de bins y rango de offsets están relacionados con el objetivo principal. La dirección de los principales rasgos geológicos, tales como fallas o canales, pueden influenciar en la dirección de las líneas fuentes y receptoras (Cordsen, et al, 2000).

A continuación se definen los términos usados en la adquisición sísmica (figura4.1):

Dirección cross-line: línea ortogonal a las líneas receptoras.

Dirección in-line: líneas paralelas a las líneas receptoras

Línea fuentes es la línea ubicada en superficie, generalmente perpendicular a las líneas receptoras, en la que se encuentran puntos de disparos.

Intervalo de fuente: es la distancia mínima que existe entre puntos consecutivos de tiro. Esta distancia está relacionada con el objetivo del estudio y la resolución deseada. (Cordsen, et al, 2000).

Líneas receptoras: línea a lo largo de la cual se tienden los geófonos a intervalos regulares (intervalo de receptores o RI) (Cordsen, et al, 2000).

Intervalo de receptores: es la distancia que existe entre un grupo de receptores, relacionado directamente con el aliasing espacial. Se considera que mientras menor sea el intervalo entre las estaciones receptoras mayor será la resolución espacial, puesto que la frecuencia máxima adquirida será mayor. (Sheriff., 2002).

Box: Este nombre se aplica para áreas limitadas por dos líneas fuentes adyacentes y dos líneas receptoras adyacentes. El box normalmente representa el área más pequeña de un estudio 3D que contiene las estadísticas del estudio completo. (Cordsen, et al, 2000).

Patch: es el rectángulo de receptores que están encendidos al momento de un disparo (spread) sobre varias líneas receptoras. Varias fuentes pueden tener el mismo patch. El patch se mueve alrededor del estudio 3D para diferentes puntos de tiro.

Template: Es la colección de estaciones receptoras activas más las estaciones fuentes asociadas.

$$\textit{Template} = \textit{Patch} + \textit{Fuentes asociadas}$$

Swath: Es el ancho del área sobre el cual las fuentes están siendo disparadas según la configuración de un template y sin avance cross-line del patch, a menudo con muchos avances in-line. Al final de un swath hay un avance cross-line para iniciar con el siguiente swath.

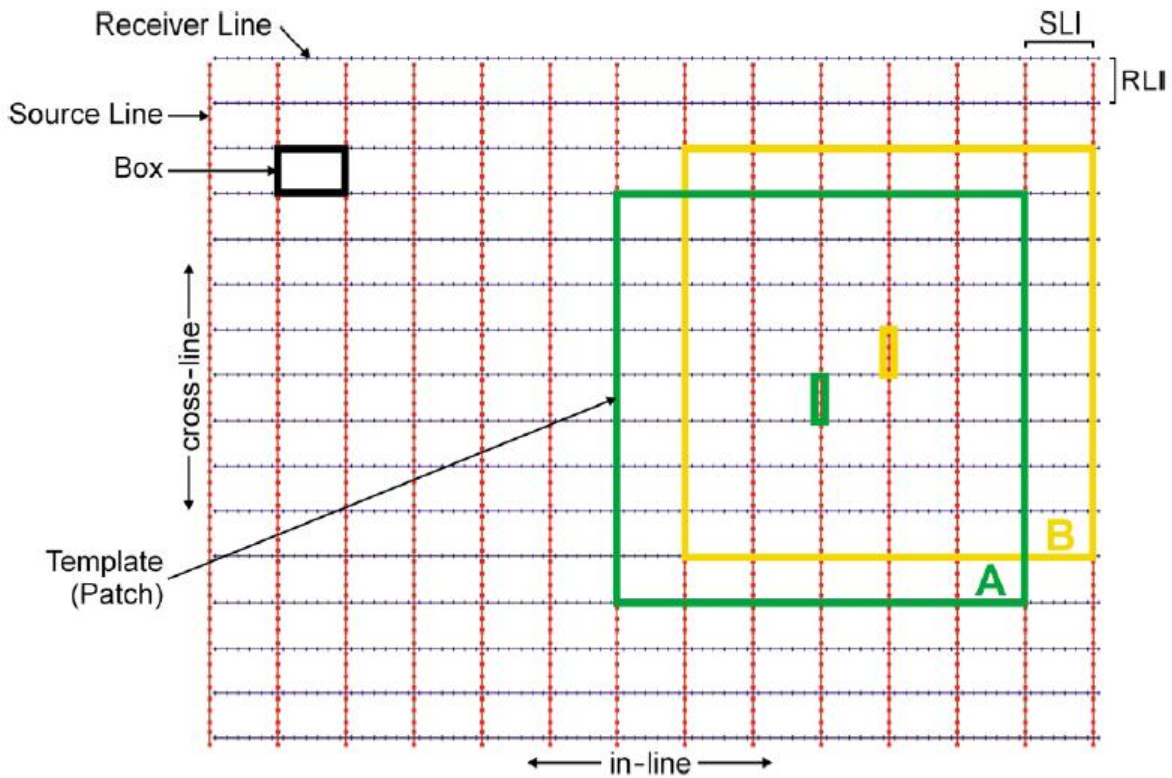


Figura 4.1 Términos para un estudio sísmico (Planning Land 3-D Seismic Surveys, Andreas Cordsen, Mike Galbraith, and John Peirce Edited by Bob A. Hardage Series Editor: Stephen J. Hill Geophysical Developments)

Bin: Es un área usada para agrupar los puntos medios que caen dentro de esta zona. Se puede determinar usualmente por:

$$Bin = (SI/2) \times (RI/2)$$

Dónde:

SI = Intervalo entre fuentes,

RI = Intervalo entre receptores

Todos los puntos medios que caen dentro de esta área (bin), se supone que corresponde al mismo punto medio común, representado por el punto que cae en el centro de este bin. En otras palabras, todas las trazas que están dentro del mismo bin serán apiladas en el CMP (Punto Medio Común).

CMP Bin: un grupo de trazas que comparten el mismo punto medio (CMP bin).

**Super bin:** Un super bin (macro bin, maxi bin), es un área lo suficientemente grande para incorporar un número suficiente de trazas con el fin de tener una buena representación de offsets para la determinación de las velocidades. No debería ser tan grande como para variar la geología dentro de estos límites. No hay un tamaño particular que pueda ser establecido, pero una opción común es (3x3) bins.

**Midpoint:** Es el punto localizado exactamente en la mitad entre la fuente y un receptor.

**CDP:** son las iniciales de punto medio en profundidad, se utiliza para obtener información redundante de la zona, de tal modo que permita mejorar la relación señal-ruido en el procesamiento de los datos. (Sheriff, R. 2002).

**Fold (cobertura):** La cobertura es el número de trazas que se apilan dentro de un bin de CMP. Una buena cobertura persigue como fin una buena relación señal-ruido. Aunque normalmente se asigna un número promedio de cobertura para cualquier estudio, la cobertura varía de bin a bin y para offset diferentes.

**Relación señal ruido:** es la tasa de energía de la señal sobre el ruido, usualmente abreviada S/N y es directamente proporcional a los lados del bin. De esa manera, un incremento en la selección del tamaño del bin, tendrá un efecto inmediato en la cobertura y por ende en la relación S/N.

**Densidad de disparo:** es la relación que existe entre el número de tiros por unidad de área. La densidad de tiros (puntos fuentes/km<sup>2</sup>), junto con el número de canales (NC) y el tamaño del bin de CMP determinarán completamente la cobertura.

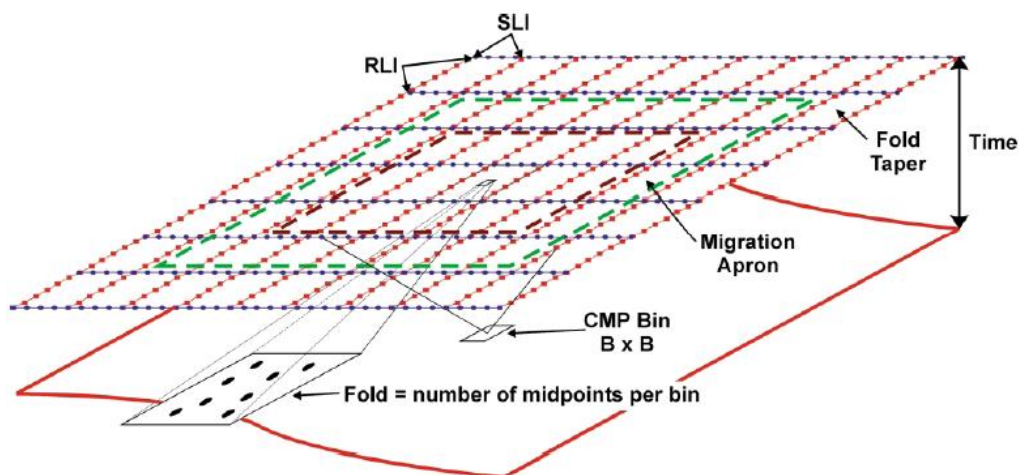


Figura 4.2 Términos para un estudio sísmico 3-D (Planning Land 3-D Seismic Surveys, Andreas Cordsen, Mike Galbraith, and John Peirce Edited by Bob A. Hardage Series Editor: Stephen J. Hill Geophysical Developments)

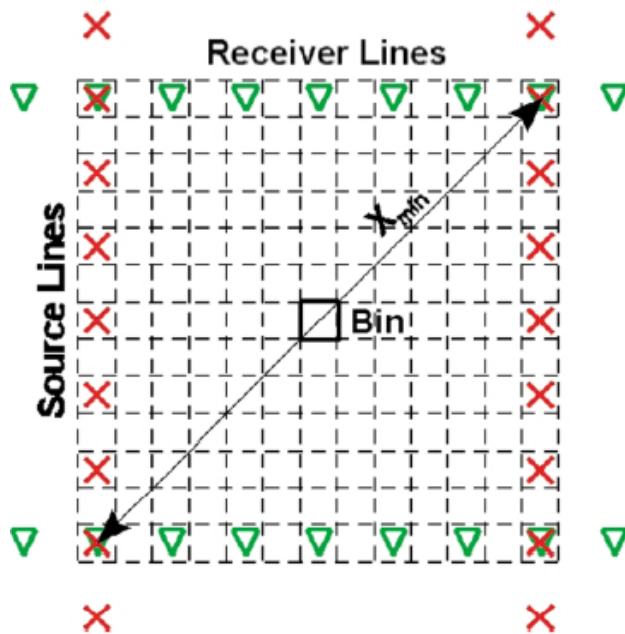


Figura 4.3 Definición de  $X_{min}$  (Planning Land 3-D Seismic Surveys, Andreas Cordsen, Mike Galbraith, and John Peirce Edited by Bob A. Hardage Series Editor: Stephen J. Hill Geophysical Developments)

Offset mínimo más largo: se define como la hipotenusa entre el tiro más lejano y el par de receptores dentro del rectángulo formado por el tiro adyacente y las líneas de receptores. Esta distancia está directamente influenciada por el objetivo somero del levantamiento sísmico, generalmente la distancia mínima ( $X_{min}$ ) debe ser 1 o 1.2 veces menor a la profundidad del horizonte menos profundo. Se puede describir como la hipotenusa del box, (en un levantamiento sísmico ortogonal 3D). La elección de dicha distancia también va a determinar el muestreo que se tenga sobre la sísmica a adquirir, ya que si un marcador poco profundo no es muestreado adecuadamente (debido al mute demasiado

forzado), la interpretación del grupo de datos 3D estará adversamente afectada. (Cordsen, et al, 2000).

Offset máximo: se refiere a la distancia más larga entre par de fuente receptor, siendo aproximadamente igual o mayor a la distancia del objetivo más profundo de la adquisición. Otro factor que interviene en este parámetro, es que debe ser lo suficientemente corto para evitar las deformaciones ocasionadas por la corrección Normal Move Out (stretch) que afecta la forma de la onda y reflexiones de ángulo crítico en el reflector profundo. (Cordsen, et al, 2000).

Azimut: se refiere al ángulo que forma cada par de fuente-receptor con respecto a la normal o norte franco del proyecto, este se mide desde el centro del bin.

Resolución vertical: es la mínima separación vertical que puede lograr un estudio sísmico, expresado ya sea en términos de tiempo de viaje o de profundidad. Una ecuación práctica para establecer la resolución vertical  $R_z$  es:

$$R_z = 0.4 V / f_{max}$$



Dónde:

$V$  = velocidad de intervalo

$f_{max}$  = es la frecuencia máxima en el objetivo

Resolución lateral: la resolución lateral, de forma análoga a la resolución vertical, corresponde al grado de apreciación de la menor distancia posible entre dos puntos, ubicados en un plano horizontal, que se puede lograr en las secciones sísmicas. (Sheriff. 2002).

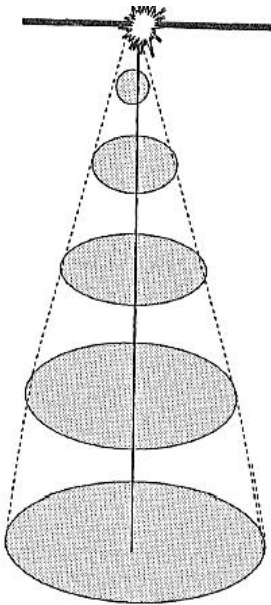


Figura 4.4 Zona de fresnel para la propagación de un frente de onda.

La resolución lateral define el posible tamaño del bin. Antes de la migración, hay dos difracciones que no son resueltas si están más cerca que el primer diámetro de la zona de Fresnel. Comúnmente este diámetro paseé una magnitud de 500m o más y significa el apilamiento del CMP, las fallas cercanas y espaciadas pueden ser descartadas. Después de la migración la resolución lateral depende de la frecuencia máxima que es reflejada desde la zona de interés.

Zona de Fresnel: es el área que es iluminada por el frente de onda, que se expande a medida que profundiza, de manera que la reflexión no es puntual. Esencialmente el frente de onda de la fuente se expande conforme se propaga la profundidad iluminando un área circular con incidencia vertical, en un contexto sísmico esta es la superficie reflectante que contribuye a la reflexión. Cuando se habla de incidencia normal del tren de onda, la zona de Fresnel se puede resumir por la siguiente ecuación (Sheriff, R. 2002).

$$X = \left[ 2\lambda Z + \frac{\lambda^2}{4} \right]^{1/2}$$

La zona de Fresnel depende de la frecuencia de la señal y la velocidad con respecto a la profundidad  $Z$ .

## 4.2 Planeación de una adquisición sísmica

El diseño de una adquisición sísmica depende de diferentes parámetros de entrada y algunas restricciones. El trazado de las líneas de las fuentes y los receptores se debe hacer con la mirada puesta en los resultados esperados. Calcularemos algunos parámetros que constituyen los factores clave para determinar un diseño de adquisición.

El primer paso para diseñar una geometría de adquisición sísmica es establecer cuál es el objetivo de estudio, que seguramente se podrá iluminar con varias geometrías alternativas. De todas las geometrías posibles se escoge aquella que permita tener:

- Cobertura del subsuelo uniforme y adecuado.
- Distribución uniforme de las distancias fuente-receptor de las trazas contribuyentes a cada bin.
- Distribución azimutal uniforme de las trazas contribuyentes a cada bin.

En este estudio realizaremos una geometría ortogonal (donde las líneas receptoras son perpendiculares a las líneas de tiro).

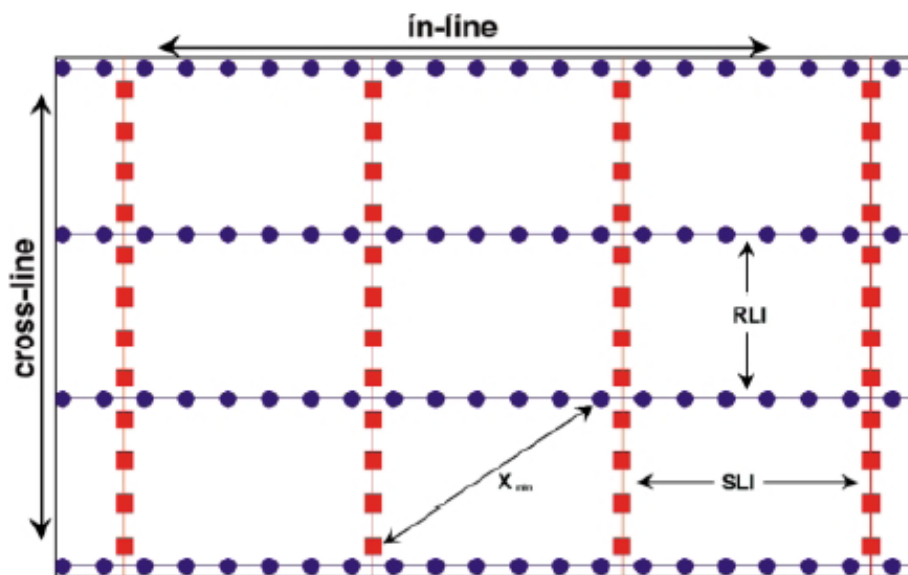


Figura 4.5 Diseño de adquisición con una geometría ortogonal

El levantamiento sísmico se va a realizar en un área de 12 km x 3 km. En el cual tomaremos en cuenta los siguientes parámetros teóricos calculados.

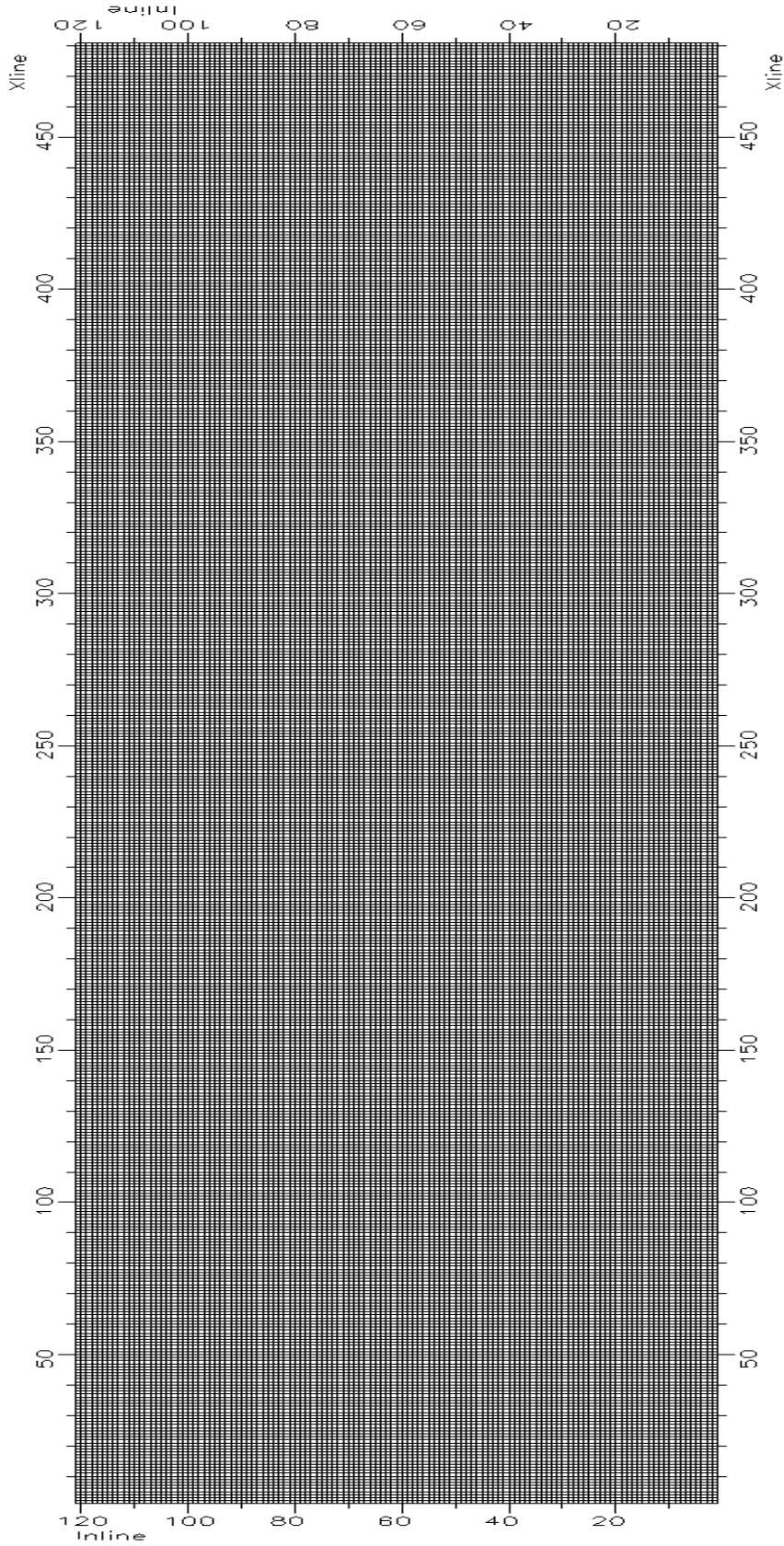
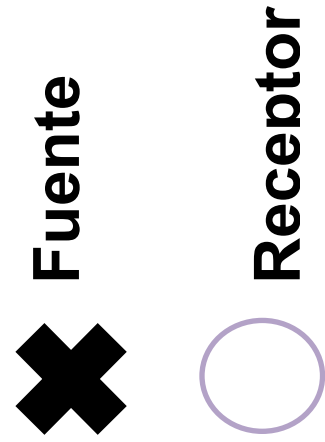


Figura 4.6 Arreglo de fuentes y receptores en un mismo plano NORSAR



### 4.3 Definición de horizontes

La capa superficial es un factor importante en la determinación de offsets. Es de baja velocidad debido a los procesos de erosión e intemperismo. Puede ser muy compleja y estar compuesta por varias capas de distintas velocidades. Para propósitos de diseño en principio se deben considerar tres horizontes:

- El horizonte más somero.
- El horizonte que se desea iluminar.
- El horizonte más profundo

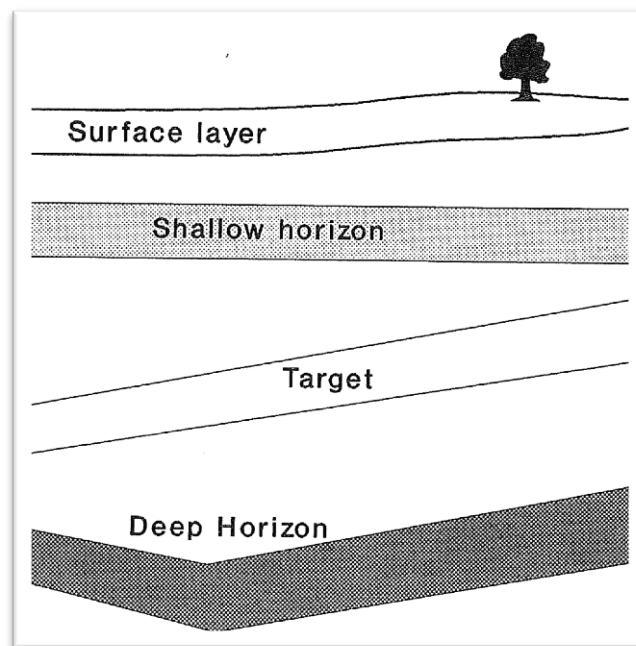


Figura 4.7 Definición de horizontes

La velocidad y la pendiente máxima de cada capa son parámetros iniciales que se pueden tomar de forma aproximada de información de pozos existentes o datos sísmicos previos. Si no se dispone de estos se puede recurrir a pruebas iniciales en el terreno, experiencia acumulada o teorías geológicas del área.

Los datos de la capa superficial se pueden determinar con un sondeo de refracción. La velocidad de esta capa puede ser tan baja como 600 m/s.

El horizonte somero es importante en las etapas de procesamiento e interpretación. Generalmente se usa como referencia y debe quedar bien iluminado por el levantamiento. Una estimación aproximada de la profundidad de este horizonte se puede realizar con la fórmula tiempo – distancia:

$$z_{sh} = 0.5 * t * V_{sh}$$

$t$  = tiempo doble

$V_{sh}$  = velocidad promedio de la capa

Con la profundidad al primer horizonte se puede establecer una condición para el offset al primer receptor.

$$H_{near} < Z_{sh}$$

Otros factores que se deben tomar en cuenta son el ruido de la fuente y la velocidad de la capa superficial. La influencia de estos factores se determina con pruebas de ruido en el campo.

El intervalo entre fuentes determina el porcentaje de apilamiento en el horizonte. En la práctica se acostumbra que el offset más lejano sea igual a la profundidad del horizonte. El offset cercano se toma tan pequeño como el ruido de la fuente lo permita, para tener una buena aproximación al offset cero.

El horizonte objetivo es el horizonte de mayor interés para el levantamiento. Se requiere conocer tiempo y velocidad promedio aproximadas, para hacer una primera estimación de la profundidad a la capa. También es conveniente conocer detalles de la geología, espesor, reflectividad, etc. para estimar el rango de frecuencias requerido para iluminar la superficie.

Para poder distinguir la cima y la base de la capa se requiere tener un espesor de al menos un cuarto de la longitud de onda. También es importante hacer una estimación inicial de cuales frecuencias se propagarán a determinada profundidad, debido a la atenuación dependiente de la frecuencia. En buenas condiciones, a 2 segundos, la frecuencia más alta podría ser 75 Hz. También es importante estimar la pendiente máxima del horizonte objetivo.

El horizonte profundo es, más profundo que la capa objetivo, es importante en la etapa de interpretación. En ocasiones es difícil definirlo, pero en el diseño es conveniente incluirlo como la profundidad máxima a la que se espera obtener buena información. Se requiere el tiempo y la velocidad promedio para calcular la profundidad estimada. Este también tendrá influencia en la longitud de registro, la potencia de la fuente, los filtros instrumentales y el offset máximo.

Un modelo simple que contenga la profundidad y la velocidad promedio a la capa superficial y los horizontes somero, objetivo y profundo; puede ayudar a mejorar un levantamiento. Este modelo simple también clarifica los objetivos del

levantamiento que serán de utilidad en las etapas de procesamiento e interpretación.

Cálculo del tamaño del bin: Definir el tamaño del bin será el primer paso en el diseño de un levantamiento 3D. El muestreo en el subsuelo será la mitad del tamaño del espaciamiento de fuentes y receptores en la superficie.

Si la estructura es compleja, entonces tener una buena cobertura acimutal es importante. Para el análisis de velocidades, el bin debe contener un buen rango de offsets.

Diseño de la plantilla (template): A la hora de realizar la optimización de los parámetros de adquisición sísmica 3D se suelen diseñar primero las componentes más básicas de las geometrías a proponer, hasta llegar a las componentes más complejas de dicho arreglo geométrico; es decir, comenzar a diseñar los parámetros más pequeños hasta completar a plenitud el diseño buscado, capaz de cubrir el área a prospectar. Es por ello que los cálculos expuestos a continuación están referidos a la unidad fundamental (template). Vale destacar que las fórmulas están fundamentadas en una geometría de adquisición ortogonal de tipo línea recta.

Basado en la simetría de un diseño ortogonal y en los cálculos del valor de offset máximo, se estimó el ángulo  $\theta$  del triángulo rectángulo que allí se forma, pues con este ángulo calculado y con la ecuación se podrán iterar distintos valores de distancia de longitud de líneas receptoras y fuente, tratando de mantener el valor offset máximo permitido según el cálculo anteriormente presentado. La ecuación utilizada fue la siguiente:

$$offset\ máximo = \frac{LR}{\cos\left(\tan^{-1}\frac{LF}{LR}\right) * 2} = \frac{12km}{\cos\left(\tan^{-1}\frac{3\ km}{12\ km}\right) * 2} = 6.184\ km$$

Dónde:

LR= longitud de las líneas receptoras

LF= longitud de las líneas de fuentes

Intervalos entre receptores y fuentes: Distancia entre grupos de fuentes y receptores se dedujo del cálculo del bin, ya que ésta no es más que el doble de uno de los lados del bin (para bins cuadrados).

Para calcular nuestro bin nosotros propusimos un intervalo para las líneas de fuentes de 100m y para las líneas receptoras de 25 m.

$$Bin = (SI/2) \times (RI/2) = (100m/2) \times (25m/2) = 625 m^2$$

Dónde:

SI = Intervalo entre fuentes

RI = Intervalo entre receptores

Números de receptores por líneas: Una vez calculada la longitud de las líneas receptoras y el intervalo entre receptores, se puede saber cuántas estaciones se pueden tener a lo largo de una línea.

$$N^{\circ} \text{Recep}/\text{línea} = \frac{LR}{RI} + 1 = \frac{12 \text{ km}}{.025 \text{ km}} + 1 = 480 + 1 = 481$$

Dónde:

LR = longitud de las líneas receptoras

RI = intervalo entre receptores

Para el número de fuentes por línea nos queda lo siguiente:

$$N^{\circ} \text{Fuentes}/\text{línea} = \frac{LS}{SI} + 1 = \frac{3 \text{ km}}{0.1 \text{ km}} + 1 = 31$$

Dónde:

LS = longitud de las líneas receptoras

SI = intervalo entre fuentes

Para esta adquisición con los parámetros calculados quedamos en que, las líneas de fuente se encuentran en las in-line y las líneas receptoras en las cross-line.

Los cálculos de los parámetros físicos para el diseño de adquisición sísmica 3D planteados son teóricos y fundamentados en la iluminación del objetivo geológico principal planteado y delimitado a continuación. Vale destacar que cada una de las variables requeridas en los cálculos para la obtención de los parámetros físicos del diseño, fueron tomados de los resultados que arrojaron la metodología descrita anteriormente.

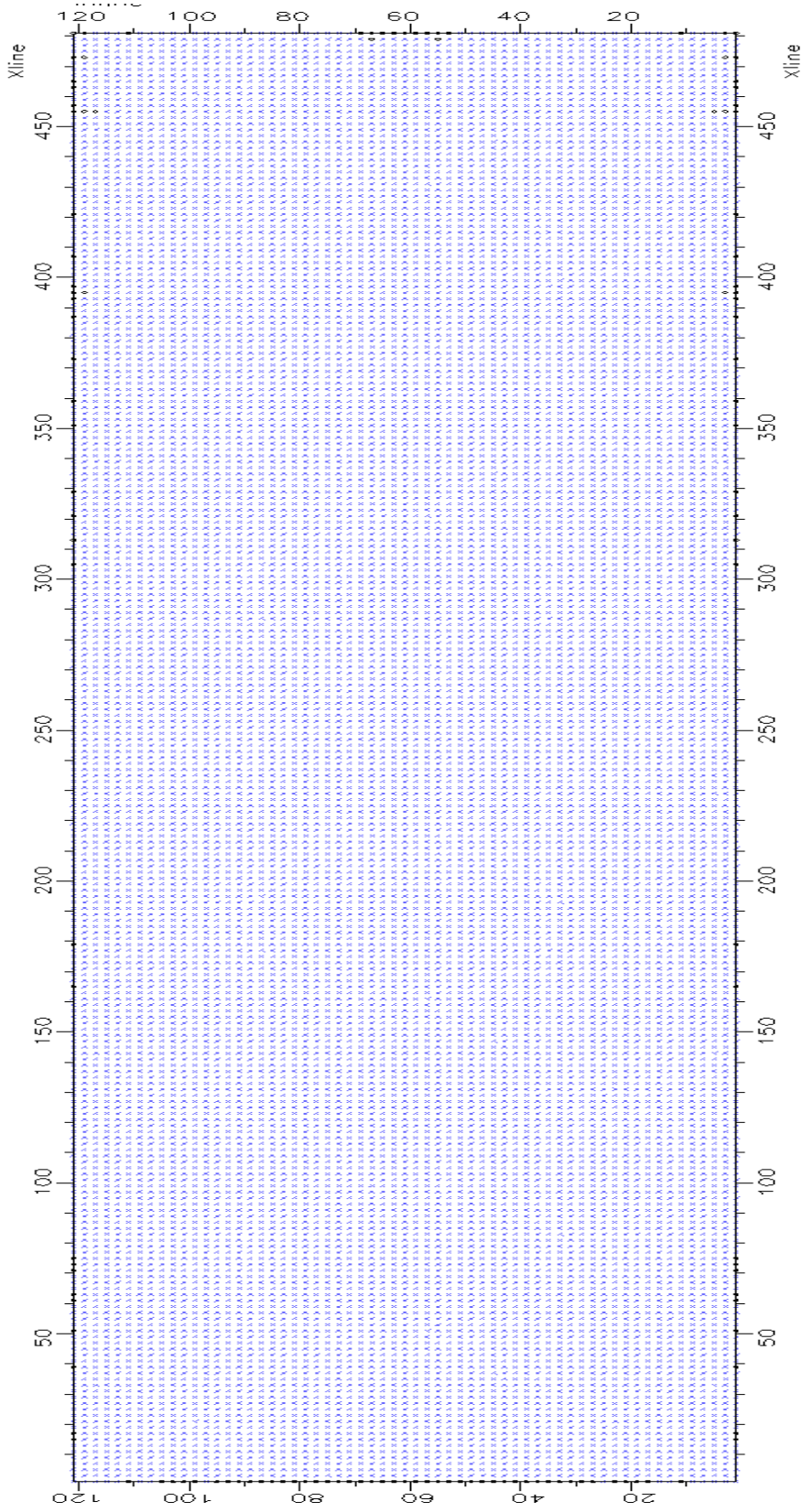
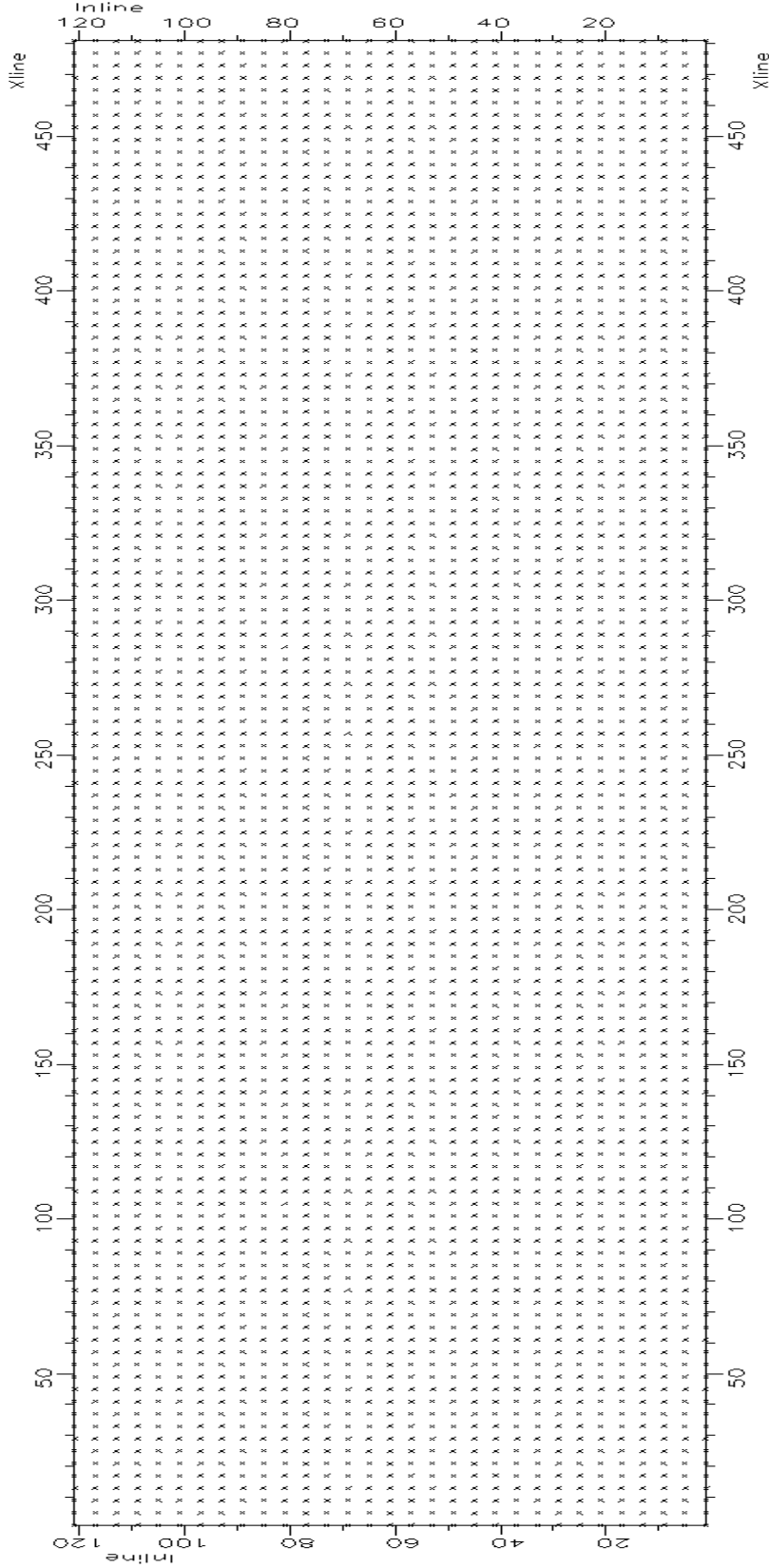


Figura 4.8 Visualización de todos los receptores en nuestra adquisición con NORSAR





**x Fuente**

Figura 4.9 Visualización de todas las fuentes en nuestra adquisición con NOR SAR

### 4.4 Modelos geológicos

Utilizaremos cuatro modelos teóricos, de los cuales uno es isótropo y tres anisótropos (VTI, HTI y TTI). Los cuatro consisten de dos capas isótropas y una anisótropa con los siguientes parámetros:

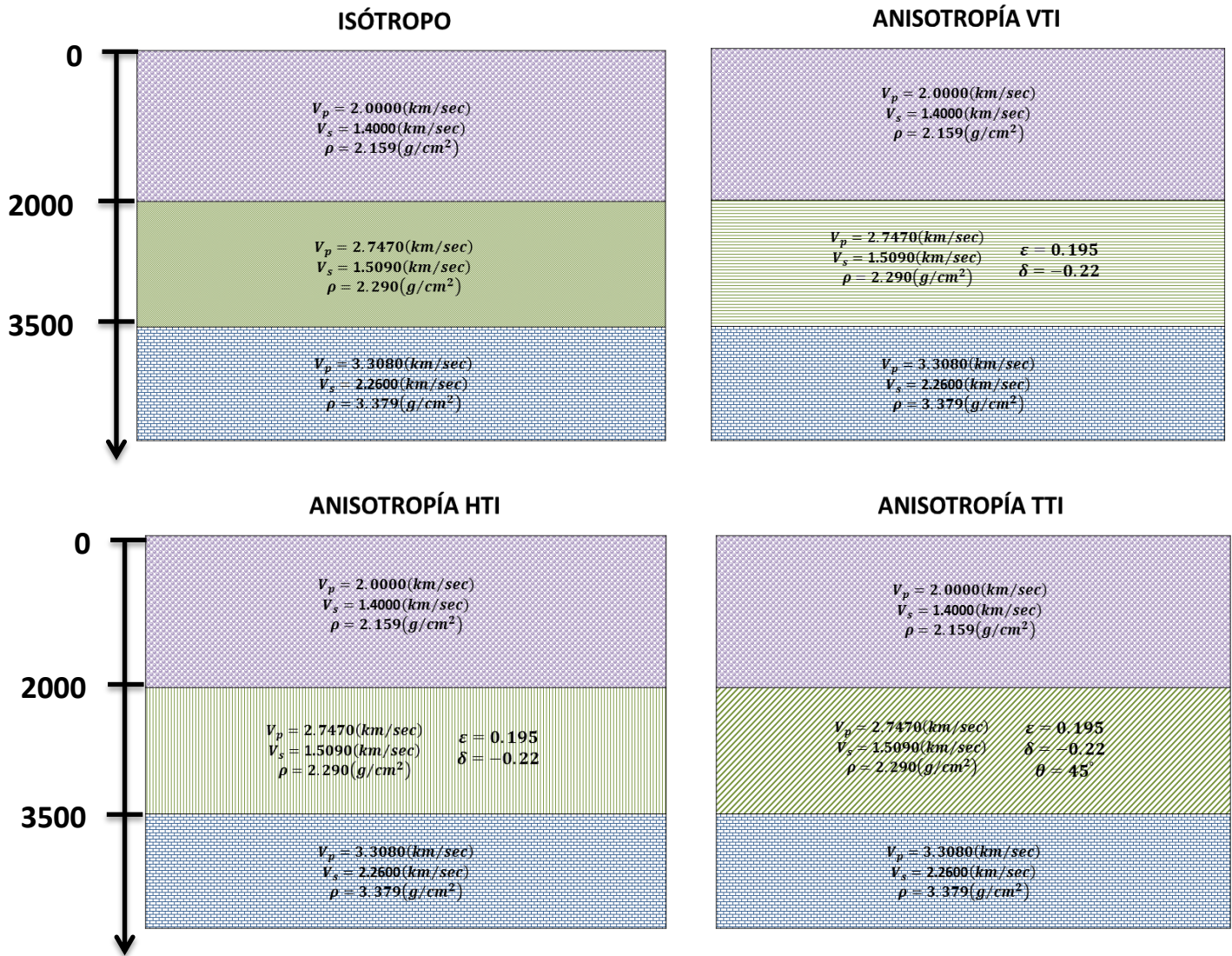


Figura 4.10 Modelos propuestos para el trazado de rayos.

Los modelos solo van a variar en la capa de en medio, que será la capa anisótropa en los tres modelos anisótropos y la cual será nuestro objetivo a analizar con el trazado de rayos. Para esta capa seleccionamos Green River Shale (figura 4.10) debido a sus parámetros de anisotropía. No olvidemos que nuestro modelo es teórico por lo cual solo utilizaremos horizontes planos.

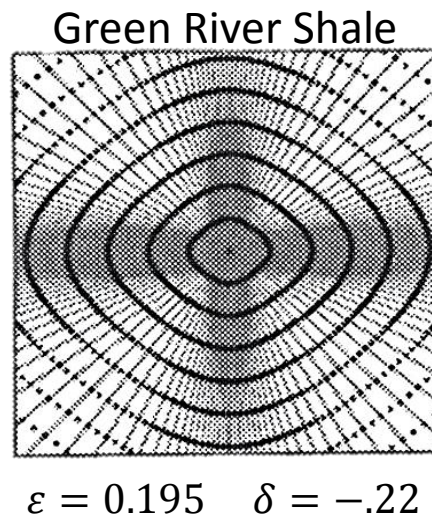


Figura 4.11

Estos modelos también serán generados con ayuda de NORSAR® generando su interfaz, horizonte y bloque para un modelo 3-D, que se explicará en el siguiente capítulo.

# Capítulo 5

## Aplicación del Trazado de Rayos

Con todas las características mencionadas en el Capítulo 4 (parámetros de adquisición y modelo geológico), realizaremos nuestra aplicación con ayuda del software NORSAR®, el cual realiza el trazado de rayos por medio de la construcción de frentes de onda. A continuación se explicara brevemente el flujo de trabajo a seguir (figura 5.3).

Primero delimitaremos nuestra área (x, y, z) para poder construir nuestro modelo geológico, donde generamos nuestras interfaces y horizontes (cabe mencionar que las capas del modelo son completamente planas) figura 5.1 con una vista 3-D. A cada uno de nuestros bloques le asignamos su velocidad P y S, densidad y en el caso de los modelos anisótropos  $\epsilon$  y  $\delta$ , así como la orientación de nuestros ejes (módulo: Model Builder). A continuación se define la geometría de adquisición con los parámetros calculados anteriormente (la cual podemos generar en el módulo Common-Shot Survey Generator).

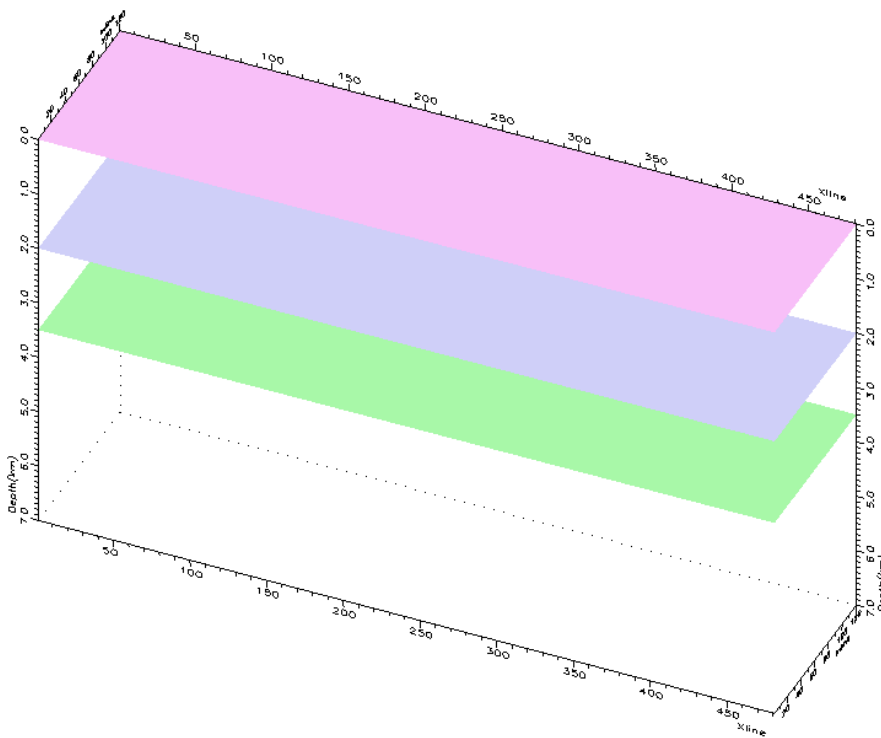


Figura 5.1 Construcción del modelo (interfaces, horizontes y bloques) 3-D con NORSAR®.

Con estos parámetros asignados podemos establecer nuestro código de rayo para poder generar el trazado de rayos, el cual debe de contener nuestro horizonte objetivo, en este caso el segundo horizonte, seleccionamos nuestra onda directa P y seleccionamos todas nuestras fuentes y receptores. Para verificar que nuestro código está funcionando correctamente, podemos realizar una prueba con un solo disparo, y visualizar tanto el frente de onda como los rayos que seleccionemos, todo esto es generado en el módulo: Common-Shot Wavefront Tracer (figura 5.2).

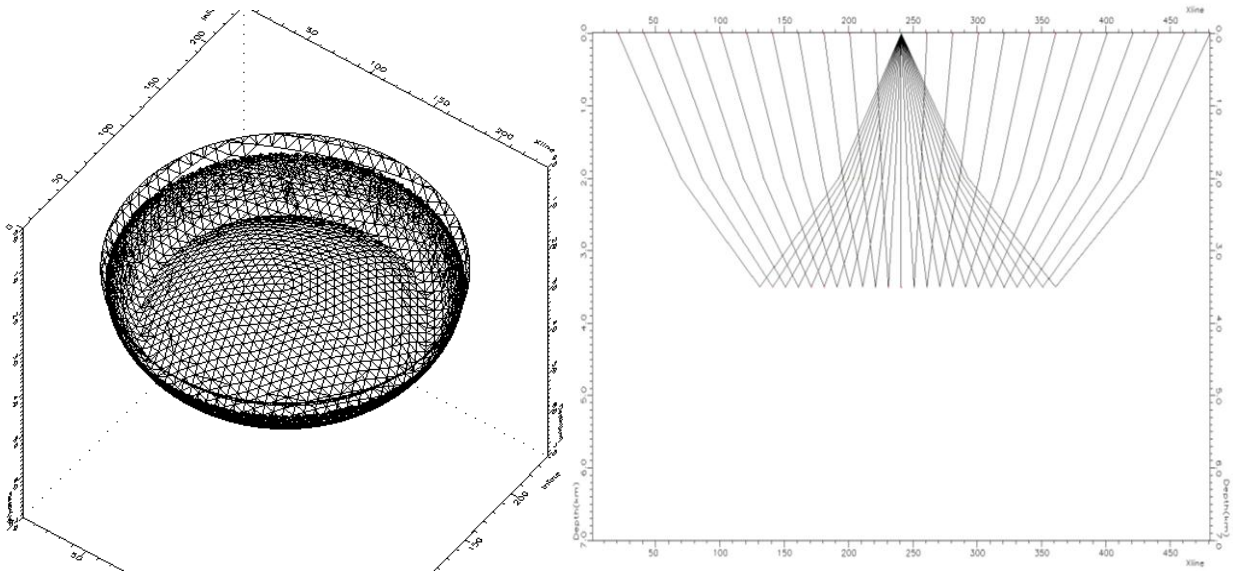


Figura 5.2 a) Frente de onda para un medio isótropo 3-D b) Rayos en un medio isótropo con vista de los ejes (x, z) ambas figuras para un solo tiro central con NORSAR.

En este caso, como nuestra adquisición es teórica, podemos tener un gran número de fuentes y receptores, es necesario guardar nuestro código de rayo en la opción BATCH (módulo: Common Wavefront Tracer Batch). Esta opción nos permite realizar el estudio con el número de procesadores que se tengan disponibles, y dividiendo todos los disparos en el número de trabajos que nos sea conveniente, ya que este proceso puede llegar a durar varias horas debido al número de fuentes - receptores y a la complejidad modelo geológico.

Terminado el proceso anterior, generamos los mapas de iluminación, seleccionando nuestro evento, horizonte objetivo y el tipo de onda que se analizará. Podemos generar los mapas con las propiedades y parámetros, que sean de mayor utilidad (generados y visualizados con el módulo: Illumination Map-SMA).

A continuación explicaremos los diferentes mapas que podemos generar:

- Hit map: este tipo de mapa está disponible para todos los mapas de iluminación a excepción de los mapas generados en un dominio CRP. Cuenta el número de rayos en cada celda.
- Densidad de amplitud: las partes reales e imaginarias de la amplitud (por reflexión P-P) se resumen en las celdas dadas por la posición del evento.

$$\text{Densidad de amplitud} = \frac{|\sum_{i=1}^N A_i|}{\text{area de superficie}}$$

- Ángulo de incidencia: el mínimo, máximo o el promedio del ángulo de incidencia es calculado para todos los eventos en una celda por la posición del evento.

$$\text{Promedio del ángulo de incidencia} = \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i}{N}$$

El ángulo de incidencia en grados es el ángulo del rayo entrante medido con respecto a la normal de la superficie del reflector en el punto de reflexión.

- Cambio de fase: el cambio de fase en grados de la amplitud compleja del rayo durante la reflexión.
- Apertura: este es valor máximo, mínimo o promedio de la distancia en kilómetros, proyectado en un plano (X, Y) entre el CMP y el CRP, para cada celda de la superficie del mapa.
- Tiempo de viaje: es el tiempo en segundos que tarda el rayo en viajar desde la fuente hasta el receptor. El mínimo, el máximo o el promedio se calculan para cada celda de la superficie en el mapa.
- Offset: es la distancia en kilómetros entre la fuente y el receptor. El mínimo, el máximo o el promedio se calculan para cada celda de la superficie en el mapa.
- Módulo de la máxima amplitud: para cada evento, es calculado el módulo de la amplitud compleja. El máximo modulo para todos los eventos en una celda del mapa es calculado y almacenado en esta.

- Distancia CRP para una línea fuente-receptor: la distancia de la componente horizontal en kilómetros entre el punto de reflexión y la línea entre la fuente y el receptor.

En el caso del zero-offset, lo anterior es irrelevante.

El mínimo, máximo o promedio de la distancia es almacenado para cada celda en la superficie del mapa.

- Ángulo de salida de la fuente: el ángulo de salida de la fuente, incide verticalmente. (Hacia abajo =0 grados, Horizontal =90 grados, Hacia arriba =180 grados).

El mínimo, máximo o promedio de la distancia es almacenado para cada celda en la superficie del mapa.

- Ángulo de incidencia del receptor: el ángulo de incidencia del rayo hacia el receptor, incide verticalmente. (Hacia abajo =0 grados, Horizontal =90 grados, Hacia arriba = 180 grados).

El mínimo, máximo o promedio de la distancia es almacenado para cada celda en la superficie del mapa.

- Azimut: el valor máximo y mínimo del azimut en un rango de 0-360°, y la diferencia entre el mínimo y máximo. Nótese que para la diferencia habrá una anomalía en las celdas con azimuts cruzando la línea norte.

Estos mapas son el resultado del trazado de rayos, de los cuales algunos analizaremos y explicaremos más adelante.

Anteriormente explicamos cómo se realiza el trazado de rayos, en la siguiente figura 5.3 podemos observar, la secuencia y las características básicas que se debe aplicar para cada módulo en NORSAR®,

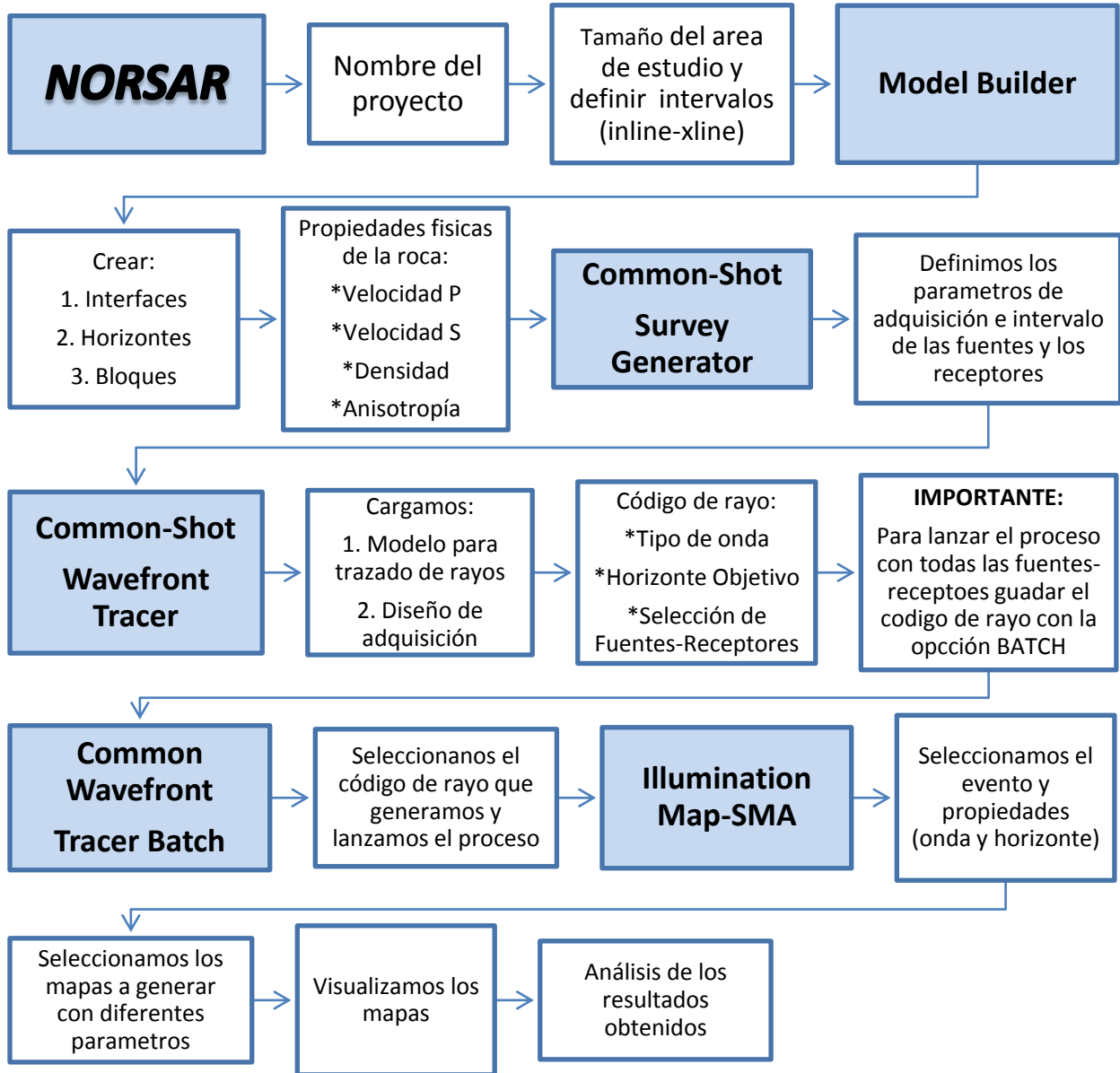


Figura 5.3 Flujo de trabajo para realizar un estudio en NORSAR®



# Capítulo 6

## Análisis de Resultados

A continuación analizaremos los resultados obtenidos, en los cuales solo nos enfocaremos a cuatro tipos de mapas:

1. Promedio del ángulo de disparo
2. Densidad de amplitud
3. Promedio del ángulo de incidencia
4. Tiempo de viaje

Cada modelo anisótropo será analizado con referencia al modelo isótropo y calculando la diferencia entre estos. Se puede observar que cada mapa tiene la misma escala, pero en el caso de las diferencias esta varía con respecto a cada uno. Cabe destacar que por el tipo de adquisición, en cuál tenemos un gran número de fuentes y receptores en los cuatro modelos, obtendremos la misma área de iluminación por los rayos, pero esto no significa que se deban obtener los mismos valores.

Aunque se generaron mapas de iluminación para todas las funciones de iluminación con que cuenta NORSAR®, solo se muestran aquellas que se juzgaron relevantes para los fines de esta tesis.

En las figuras 6.1 a 6.36 se presentan los mapas de iluminación, que serán estudiados en este trabajo ya mencionados anteriormente. Cada una de estas figuras se presenta la composición de cada modelo anisótropo estudiado (VTI, HTI y TTI) con el modelo isótropo. Además se hizo una separación por offset (0-2 km, 2-4 km y 4-6 km). Cada figura contiene tres mapas de iluminación para un rango de offset determinado; el que aparece en la parte superior corresponde al modelo isótropo analizado, el de la parte central corresponde al modelo anisótropo y el de la parte inferior al de la diferencias entre los dos anteriores.

En la tabla 1 se muestra un resumen de los mapas de iluminación, indicando en la figura en la que se encuentran (estas figuras se encuentran al final del trabajo para poder trabajar mejor con ellas).

Offset (km)	0-2				2-4				4-6			
	Promedio del ángulo de disparo	Densidad de amplitud	Promedio del ángulo de incidencia	Tiempo de viaje	Promedio del ángulo de disparo	Densidad de amplitud	Promedio del ángulo de incidencia	Tiempo de viaje	Promedio del ángulo de disparo	Densidad de amplitud	Promedio del ángulo de incidencia	Tiempo de viaje
<b>VTI-ISO</b>	Figura 6.1	Figura 6.10	Figura 6.19	Figura 6.28	Figura 6.4	Figura 6.13	Figura 6.22	Figura 6.31	Figura 6.7	Figura 6.16	Figura 6.25	Figura 6.34
<b>HTI-ISO</b>	Figura 6.2	Figura 6.11	Figura 6.20	Figura 6.29	Figura 6.5	Figura 6.14	Figura 6.23	Figura 6.32	Figura 6.8	Figura 6.17	Figura 6.26	Figura 6.35
<b>TTI-ISO</b>	Figura 6.3	Figura 6.12	Figura 6.21	Figura 6.30	Figura 6.6	Figura 6.15	Figura 6.24	Figura 6.33	Figura 6.9	Figura 6.18	Figura 6.27	Figura 6.36

Tabla 1. Mapas que se van a utilizar

## 6.1 Promedio del ángulo de disparo

### MODELO VTI:

Para el modelo VTI estudiaremos las figuras 6.1, 6.4 y 6.7. Se puede observar que en el offset de 0-2 mantiene una tendencia en la cual los ángulos van a ser mayores con respecto al modelo isótropo. Para el modelo isótropo los ángulos de disparo promedio en la parte central del área de iluminada son del orden de  $9^\circ$  y en VTI del orden de  $11.3^\circ$ , obteniendo una diferencia del orden de  $2^\circ$ .

En la figura 6.4 con offset de 2-4 se observa que el ángulo de disparo promedio presenta también diferencias entre los modelos. Para el modelo isótropo los ángulos promedio en la parte central del área son del orden de  $18^\circ$  y para el modelo VTI del orden de  $20^\circ$ , obteniéndose una diferencia de  $2^\circ$  entre los dos modelos.

En la figura 6.7 con offset de 4-6 se observa que el ángulo de disparo promedio presenta también diferencias entre los modelos. Para el modelo isótropo los ángulos promedio son del orden de  $29^\circ$  y en modelo VTI del orden de  $27^\circ$ , obteniéndose una diferencia de  $-2^\circ$  entre los dos.

Al comparar el comportamiento de los ángulos de disparo promedio al aumentar el offset de 0-2 a 2-4 y 4-6 se observa que para el offset de 0-2 y 2-4 el ángulo de disparo promedio es mayor para el modelo VTI mientras que para el offset de 4-6 la relación se invierte. Este resultado se debe a que a medida que aumenta el offset el rayo tiene una componente de la trayectoria en la dirección horizontal mayor al viajar por el medio VTI.

En todos los modelos veremos como al ir aumentando el offset se va perdiendo área de iluminación, que todos los resultados son promedios y que las escalas de las diferencias son completamente diferentes en cada modelo y cada offset (es importante poner atención en los valores numéricos y no guiarnos con la escala de colores).

### MODELO HTI:

Para el modelo HTI analizaremos las figuras 6.2, 6.5 y 6.8. Para la figura 6.2 con offset de 0-2 se observa que el modelo HTI tiene ángulos mayores que el modelo isótropo. Para el modelo isótropo los ángulos de disparo promedio en la parte central del área iluminada son del orden de  $9^\circ$ , el modelo HTI tiene un promedio del ángulo de disparo del orden de  $11^\circ$ , obteniéndose una diferencia de  $2^\circ$ .

En el caso de la figura 6.5 los ángulos aumentaran teniendo el modelo isótropo un promedio del orden de  $18^\circ$  y en el modelo HTI un promedio del orden de  $21^\circ$ , obteniéndose una diferencia de  $3^\circ$ .

Para el caso del offset de 4-6 figura 6.8 el modelo HTI tiene un promedio en los ángulos de disparo mayores a  $29^\circ$  y el modelo isótropo del orden de  $29^\circ$ , obteniéndose una diferencia de  $5^\circ$ , en este caso podemos observar que la escala de colores quedo pequeña para el caso del modelo HTI, pues se observa que el mapa de iluminación no tiene variación de color indicando que los valores son todos mayores a  $29^\circ$ .

Al comparar el comportamiento de los ángulos de disparo promedio al aumentar el offset de 0-2 a 2-4 y 4-6 las diferencias entre el modelo isótropo y HTI van ir aumentando. Este resultado se debe a que a medida que aumenta el offset el rayo tiene una componente de la trayectoria en dirección horizontal mayor al viajar por el medio HTI.

### **MODELO TTI:**

Para el modelo TTI estudiaremos las figuras 6.3, 6.6 y 6.9. Se puede observar que en el offset de 0-2 figura 6.3 en el modelo isótropo los ángulos de disparo promedio en la parte central del área de iluminada son del orden de  $9^\circ$  y en TTI del orden de  $7^\circ$ , obteniendo una diferencia del orden de  $-2^\circ$ .

En la figura 6.6 con offset de 2-4 se observa que el ángulo de disparo promedio presenta también diferencias entre los modelos. Para el modelo isótropo los ángulos promedio en la parte central del área son del orden de  $18^\circ$  y para el modelo TTI del orden de  $15^\circ$ , obteniéndose una diferencia de  $-3^\circ$  entre los dos modelos.

En la figura 6.9 con offset de 4-6 se observa que el ángulo de disparo promedio presenta también diferencias entre los modelos. Para el modelo isótropo los ángulos promedio son del orden de  $29^\circ$  y en modelo TTI del orden de  $27^\circ$ , obteniéndose una diferencia de  $-2^\circ$  entre los dos.

Al comparar el comportamiento de los ángulos de disparo promedio al aumentar el offset de 0-2 a 2-4 y 4-6 se observa que la diferencia entre los ángulos aumenta del offset 0-2 al offset 2-4 y al pasar del offset 2-4 al offset 4-6 disminuye. Esto se debe a la inclinación del eje de anisotropía en el medio TTI.

Ahora bien, en resumen podemos observar las siguientes diferencias de los modelos anisótropos con respecto al modelo isótropo:

Offset	0-2	2-4	4-6
VTI-ISO	$11^{\circ}-9^{\circ}=2^{\circ}$	$20^{\circ}-18^{\circ}=2^{\circ}$	$27^{\circ}-29^{\circ}=-2^{\circ}$
HTI-ISO	$11^{\circ}-9^{\circ}=2^{\circ}$	$21^{\circ}-18^{\circ}=3^{\circ}$	$>29^{\circ}-29^{\circ}=5^{\circ}$
TTI-ISO	$7^{\circ}-9^{\circ}=-2^{\circ}$	$15^{\circ}-18^{\circ}=-3^{\circ}$	$27^{\circ}-29^{\circ}=-2^{\circ}$

Tabla 6.1 Promedio del ángulo de disparo.

## 6.2 Promedio de densidad de amplitud

### MODELO VTI:

Para el modelo VTI estudiaremos las figuras 6.10, 6.13 y 6.16. Se puede observar que en el offset de 0-2 figura 6.10 mantiene una tendencia en la cual los valores de la densidad de amplitud van a ser mayores con respecto al modelo isótropo. Para el modelo isótropo los valores de la densidad de amplitud promedio en la parte central del área de iluminada son del orden de 19 y en VTI del orden de 25, obteniendo una diferencia del orden de 5.65.

En la figura 6.13 con offset de 2-4 se observa que los valores de la densidad de amplitud presentan también diferencias entre los modelos. Para el modelo isótropo se observan valores del orden de 7 y para el modelo VTI del orden de 15, obteniéndose una diferencia de 8 entre los dos modelos.

En la figura 6.16 con offset de 4-6 se observa que los valores de la densidad de amplitud promedio presentan también diferencias entre los modelos. Para el modelo isótropo los valores son del orden de 28 y en modelo VTI del orden de 13, obteniéndose una diferencia de -15 entre los dos.

Al comparar el comportamiento de la densidad de amplitud promedio al aumentar el offset de 0-2 a 2-4 y 4-6 se observa que para el offset de 0-2 y 2-4 el valor de la densidad de amplitud promedio es mayor para el modelo VTI mientras que para el offset de 4-6 la relación se invierte.

### **MODELO HTI:**

Para el modelo HTI estudiaremos las figuras 6.11, 6.14 y 6.17. Se puede observar que en el offset de 0-2 figura 6.11 mantiene una tendencia en la cual los valores de la densidad de amplitud van a ser menores con respecto al modelo isótropo. Para el modelo isótropo los valores de la densidad de amplitud promedio en la parte central del área de iluminada son del orden de 19 y en HTI del orden de 3, obteniendo una diferencia del orden de -16.

En la figura 6.14 con offset de 2-4 se observa que los valores de la densidad de amplitud presentan también diferencias entre los modelos. Para el modelo isótropo se observan valores del orden de 7 y para el modelo HTI mayores a 15, obteniéndose una diferencia promedio superior a 8 entre los dos modelos. Este mapa de diferencias podemos notar que en el área central se encuentran valores de 15 esto permite inferir que en el modelo HTI los valores de densidad de amplitud pueden llegar a ser del orden de 22. La escala de colores nuevamente queda corta para este modelo.

En la figura 6.17 con offset de 4-6 se observa que los valores de la densidad de amplitud promedio presentan también diferencias entre los modelos. Para el modelo isótropo los valores son del orden de 28 y en modelo HTI del orden de 7, obteniéndose una diferencia de -21 entre los dos.

Al comparar el comportamiento de la densidad de amplitud promedio al aumentar el offset de 0-2 a 2-4 y 4-6 se observa que para el offset de 0-2 y 4-6 el valor de la densidad de amplitud promedio es menor para el modelo HTI mientras que para el offset de 2-4 la relación se invierte, esto indica que para los offset intermedios la densidad de amplitud se comporta de manera opuesta a los offset cortos y largos.

### **MODELO TTI:**

Para el modelo TTI estudiaremos las figuras 6.12, 6.15 y 6.18. Se puede observar que en el offset de 0-2 figura 6.12 mantiene una tendencia en la cual los valores de la densidad de amplitud van a ser menores con respecto al modelo isótropo. Para el modelo isótropo los valores de la densidad de amplitud promedio en la parte central del área de iluminada son del orden de 19 y en TTI del orden de 14, obteniendo una diferencia del orden de -5.

En la figura 6.15 con offset de 2-4 se observa que los valores de la densidad de amplitud presentan también diferencias entre los modelos. Para el modelo isótropo se observan valores del orden de 7 y para el modelo TTI del orden de 11, obteniéndose una diferencia de 4 entre los dos modelos.

En la figura 6.18 con offset de 4-6 se observa que los valores de la densidad de amplitud promedio presentan también diferencias entre los modelos. Para el modelo isótropo los valores son del orden de 28 y en modelo TTI del orden de 3, obteniéndose una diferencia de -25 entre los dos.

Al comparar el comportamiento de la densidad de amplitud promedio al aumentar el offset de 0-2 a 2-4 y 4-6 se observa que para el offset de 0-2 y 4-6 los valores de la densidad de amplitud promedio son menores para el modelo TTI mientras que para el offset de 4-6 la relación se invierte.

Ahora bien, en resumen podemos observar las siguientes diferencias de los modelos anisótropos con respecto al modelo isótropo:

Offset	0-2	2-4	4-6
VTI-ISO	25-19=6	15-7=8	13-28=-15
HTI-ISO	3-19=-16	15-7=8	7-28=-21
TTI-ISO	14-19=-5	11-7=4	3-28=-25

Tabla 6.2 Densidad de amplitud.

### 6.3 Promedio del ángulo de incidencia

#### MODELO VTI:

Para el modelo VTI estudiaremos las figuras 6.19, 6.22 y 6.25. Se puede observar que en el offset de 0-2 figura 6.19 mantiene una tendencia en la cual los ángulos van a ser mayores con respecto al modelo isótropo. Para el modelo isótropo los ángulos de incidencia promedio en la parte central del área de iluminada son del orden de 12° y en VTI mayores a 12°, los cuales no podemos observar debido a que nuestra escala de colores quedó corta para el modelo, diferencia que es del orden de 3° se puede inferir que los ángulos de incidencia promedio para el modelo VTI debe estar alrededor de 15°.

En la figura 6.22 con offset de 2-4 se observa que el ángulo de incidencia promedio presenta también diferencias entre los modelos. Para el modelo isótropo los ángulos promedio en la parte central del área son del orden de 27° y para el

modelo VTI del orden de  $28^\circ$ , obteniéndose una diferencia un poco superior a  $1^\circ$  entre los dos modelos.

En la figura 6.25 con offset de 4-6 se observa que el ángulo de incidencia promedio presenta también diferencias entre los modelos. Para el modelo isótropo los ángulos promedio son del orden de  $42^\circ$  y en modelo VTI del orden de  $37^\circ$ , obteniéndose una diferencia de  $-5^\circ$  entre los dos.

Al comparar el comportamiento de los ángulos de incidencia promedio al aumentar el offset de 0-2 a 2-4 y 4-6 se observa que para el offset de 0-2 y 2-4 el ángulo de incidencia promedio es mayor para el modelo VTI mientras que para el offset de 4-6 la relación se invierte.

### **MODELO HTI:**

Para el modelo HTI estudiaremos las figuras 6.20, 6.23 y 6.26. Se puede observar que en el offset de 0-2 figura 6.20. Para el modelo isótropo los ángulos de incidencia promedio en la parte central del área de iluminada son del orden de  $12^\circ$  y en HTI mayores a  $12^\circ$ , los cuales no podemos observar debido a que nuestra escala de colores quedó corta para el modelo, sin embargo, si se observa la diferencia que es del orden de  $5^\circ$ , se puede inferir que los ángulos de incidencia promedio para el modelo HTI deben de estar alrededor de  $17^\circ$ .

En la figura 6.23 con offset de 2-4 se observa que el ángulo de incidencia promedio presenta también diferencias entre los modelos. Para el modelo isótropo los ángulos promedio en la parte central del área son del orden de  $27^\circ$  y para el modelo HTI mayores a  $28^\circ$ , nuevamente observamos que nuestra escala de colores quedó corta para el modelo HTI, sin embargo, si se observa la diferencia que es del orden de  $9^\circ$ , se puede inferir que los ángulos de incidencia promedio para el modelo HTI deben de estar alrededor de  $36^\circ$ .

En la figura 6.26 con offset de 4-6 se observa que el ángulo de incidencia promedio presenta también diferencias entre los modelos. Para el modelo isótropo los ángulos promedio son del orden de  $42^\circ$  y en modelo HTI mayores a  $42^\circ$ , nuevamente observamos que nuestra escala de colores quedó corta para el modelo HTI, si observamos la diferencia que es de  $7^\circ$ , se puede inferir que los ángulos de incidencia promedio para el modelo HTI deben de estar alrededor de  $49^\circ$ .

Al comparar el comportamiento de los ángulos de incidencia promedio al aumentar el offset de 0-2 a 2-4 y 4-6 se observa que para los tres offset los ángulos de incidencia siempre van a ser mayores para el modelo HTI.



**MODELO TTI:**

Para el modelo VTI estudiaremos las figuras 6.21, 6.24 y 6.27. Se puede observar que en el offset de 0-2 figura 6.21 mantiene una tendencia en la cual los ángulos van a ser menores con respecto al modelo isótropo. Para el modelo isótropo los ángulos de incidencia promedio en la parte central del área iluminada son del orden de 12° y en TTI del orden de 9°, obteniendo una diferencia de aproximadamente -3°.

En la figura 6.24 con offset de 2-4 se observa que el ángulo de incidencia promedio presenta también diferencias entre los modelos. Para el modelo isótropo los ángulos promedio en la parte central del área son del orden de 27° y para el modelo TTI alrededor de 23°, obteniéndose una diferencia de -4° entre los dos modelos.

En la figura 6.27 con offset de 4-6 se observa que el ángulo de incidencia promedio presenta también diferencias entre los modelos. Para el modelo isótropo los ángulos promedio son del orden de 42° y en modelo TTI del orden de 41°, obteniéndose una diferencia de -1° entre los dos.

Al comparar el comportamiento de los ángulos de incidencia promedio al aumentar el offset de 0-2 a 2-4 y 4-6 se observa que para el offset de 0-2 y 2-4 el ángulo de incidencia promedio es menor para el modelo TTI mientras que para el offset de 4-6 se incrementa.

Ahora bien, en resumen podemos observar las siguientes diferencias de los modelos anisótropos con respecto al modelo isótropo:

Offset	0-2	2-4	4-6
<b>VTI-ISO</b>	$>12^{\circ}-12^{\circ}=3^{\circ}$	$28^{\circ}-27^{\circ}=1^{\circ}$	$37^{\circ}-42^{\circ}=-5^{\circ}$
<b>HTI-ISO</b>	$>12^{\circ}-12^{\circ}=5^{\circ}$	$>28^{\circ}-27^{\circ}=9^{\circ}$	$>42^{\circ}-42^{\circ}=7^{\circ}$
<b>TTI-ISO</b>	$9^{\circ}-12^{\circ}=-3^{\circ}$	$23^{\circ}-27^{\circ}=-4^{\circ}$	$41^{\circ}-42^{\circ}=-1^{\circ}$

Tabla 6.3 Promedio de los ángulos de incidencia.

## 6.4 Promedio del tiempo de viaje

### **MODELO VTI:**

Para el modelo VTI estudiaremos las figuras 6.28, 6.31 y 6.34. El modelo VTI va a seguir la misma tendencia de ir disminuyendo gradualmente en los tres offset, que van ir teniendo valores más altos que el modelo ISO. Se puede observar que en el offset de 0-2 figura 6.28 tenemos que el modelo isótropo tiene un tiempo de viaje promedio con los siguientes valores de 3.16 s y para el modelo VTI tenemos un tiempo de viaje promedio con los siguientes valores de 3.17 s, obteniendo una diferencia de 0.01 s entre los dos tiempos de viaje promedio, todos los valores en el promedio de viaje están dados en segundos.

En el caso de la figura 6.31 de offset de 2-4 para el modelo isótropo tenemos un tiempo de viaje promedio alrededor de 3.36 s, mientras que para el modelo VTI tenemos un tiempo de viaje promedio mayor a 3.41 s los cuales no se pueden observar debido a que la escala de colores quedo corta para el modelo, sin embargo, podemos observar una diferencia en el tiempo de viaje promedio de 1.69 s, con lo cual podemos inferir que el modelo VTI el tiempo de viaje promedio es de alrededor de 5 s.

Para el offset de 4-6 figura 6.34 en el modelo isótropo tenemos un tiempo de viaje promedio del orden de 3.78 s y en el modelo VTI un tiempo de viaje promedio de 3.83s, obteniéndose diferencias de 0.05 para los tiempos de viaje promedio.

Podemos observar que el modelo VTI en los tres offset va a tener tiempos de viaje promedio mayores y para el offset de 2-4 estas diferencias serán más evidentes en el tiempo de viaje promedio.

### **MODELO HTI:**

Para este modelo analizaremos las figuras 6.29, 6.32 y 6.35. Es evidente como se observó en modelo VTI como se trata de tiempo de viaje las diferencias serán mínimas. Pero el modelo HTI figura 6.29 en el offset de 0-2 tenemos que el modelo tiene un tiempo de viaje menor de 3.09 s debido a nuestra escala de colores, estos no pueden ser apreciados, sin embargo, podemos intuir que el modelo HTI tiene un tiempo de viaje promedio alrededor de 2.934 s y para el modelo isótropo un tiempo de viaje promedio de 3.16, observando la diferencia de -0.156 s entre los dos tiempos de viaje promedio.

Para el siguiente offset de 2-4 figura 6.32 tenemos un tiempo de viaje promedio de 3.36 para el modelo isótropo y para el modelo HTI un tiempo de viaje promedio del orden de 3.26, obteniéndose diferencias de -0.1 s entre los dos tiempos de viaje promedio.

En el offset de 4-6 figura 6.35 se pueden ver que el tiempo de viaje promedio para el modelo isótropo es del orden de 3.78 s y para el modelo HTI tenemos un tiempo de viaje promedio de 3.79 s, obteniéndose una diferencia de 0.01 s entre los dos tiempos de viaje promedio.

Podemos observar que para el offset de 0-2 y 2-4 que los tiempos de viaje promedio del modelo HTI serán menores que el modelo isótropo y en el offset de 4-6 esta relación se invierte.

### **MODELO TTI:**

Para este modelo analizaremos las figuras 6.30, 6.33 y 6.36. Con respecto a los otros dos modelos el modelo TTI se tienen las diferencias mínimas en los tres offset y en los dos modelos anteriores, aunque en el offset de 0-2 figura 6.30 se nota que es el offset con las diferencias más pequeñas, para el modelo isótropo se tiene un tiempo de viaje promedio de 3.16 s y para el modelo TTI un tiempo de viaje promedio de 3.156 s, con lo cual obtenemos una diferencia de -0.0032 s entre los dos tiempos de viaje promedio.

Para el offset de 2-4 figura 6.33 en el modelo isótropo tenemos un tiempo de viaje promedio del orden de 3.36 s y para el modelo TTI un tiempo de viaje promedio del orden de 3.31 s, obteniendo diferencias de -0.05 s entre los dos tiempos de viaje promedio.

En el offset de 4-6 figura 3.36 se puede ver que para el modelo isótropo se tiene un tiempo de viaje promedio del orden de 3.78 s y para el modelo TTI un tiempo de viaje promedio del orden de 3.66 s, obteniéndose diferencias de -0.115 s entre los dos tiempos de viaje promedio.

En este caso el modelo TTI tiene tiempos de viaje promedio menores que el medio isótropo en el caso de los tres offset.

Ahora bien, en resumen podemos observar las siguientes diferencias de los modelos anisótropos con respecto al modelo isótropo:

Offset	0-2	2-4	4-6
<b>VTI-ISO</b>	$3.17-3.16=0.01$	$>3.41-3.36=1.69$	$3.83-3.78=0.05$
<b>HTI-ISO</b>	$<3.09-3.16=-0.156$	$3.26-3.36=-0.1$	$3.79-3.78=0.01$
<b>TTI-ISO</b>	$3.156-3.16=-0.0032$	$3.31-3.36=-0.05$	$3.66-3.78=-0.115$

Tabla 6.4 Tiempo de viaje promedio.

Recordemos que estos resultados son promedios, por eso al analizar un solo tiro que se encuentra en el área central con una línea de receptores, los resultados son muy similares a los que tenemos en nuestros mapas de iluminación, solo variando muy poco, pero podemos comprobar que se cumple lo antes dicho. Los resultados se muestran con las siguientes diferencias que se pueden observar en las gráficas a continuación.

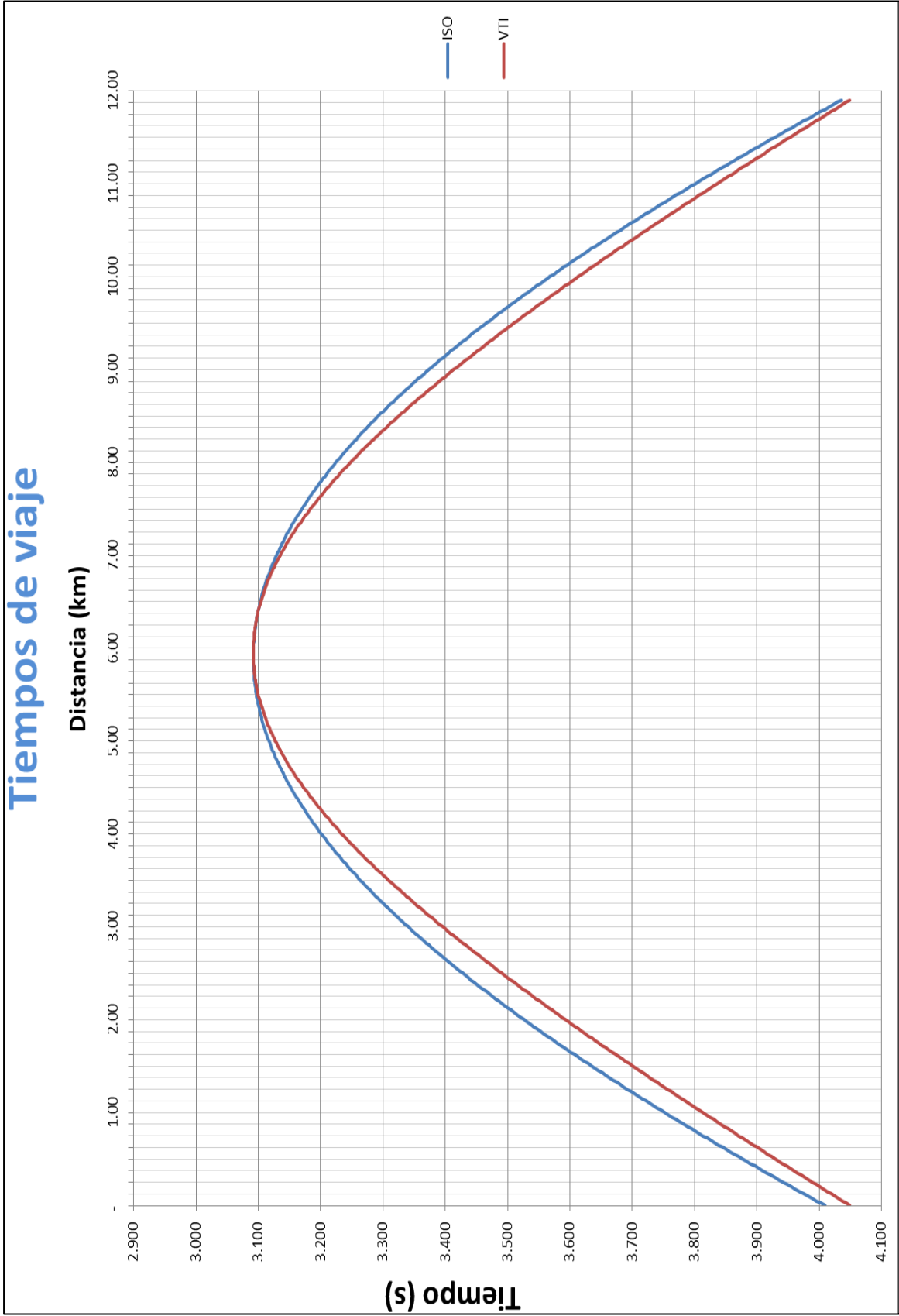


Figura 6.37 Tiempos de viaje para un medio isótropo y un medio VTI de un disparo central del área de estudio.

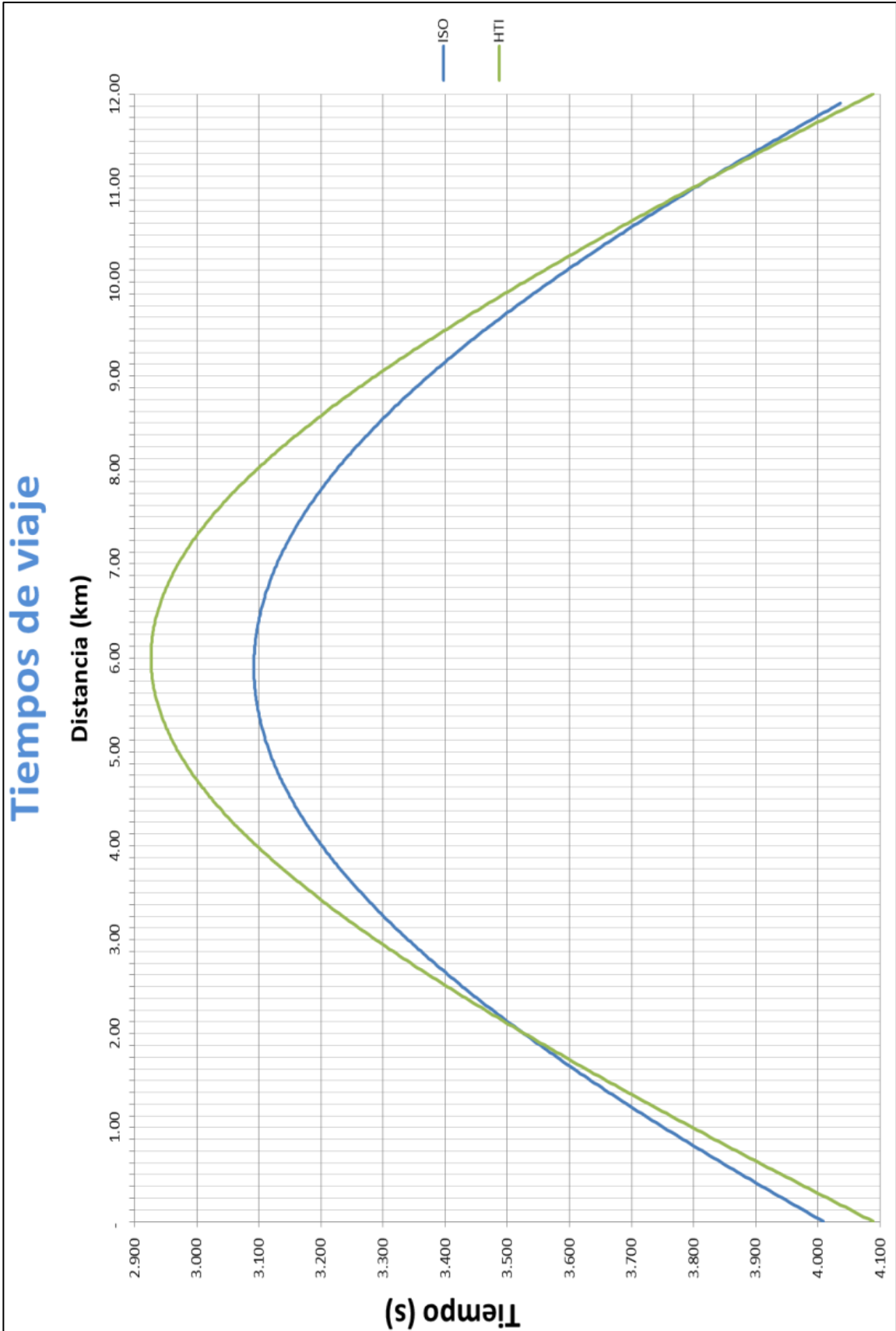


Figura 6.38 Tiempos de viaje para un medio isótropo y un medio HTI de un disparo central del área de estudio.

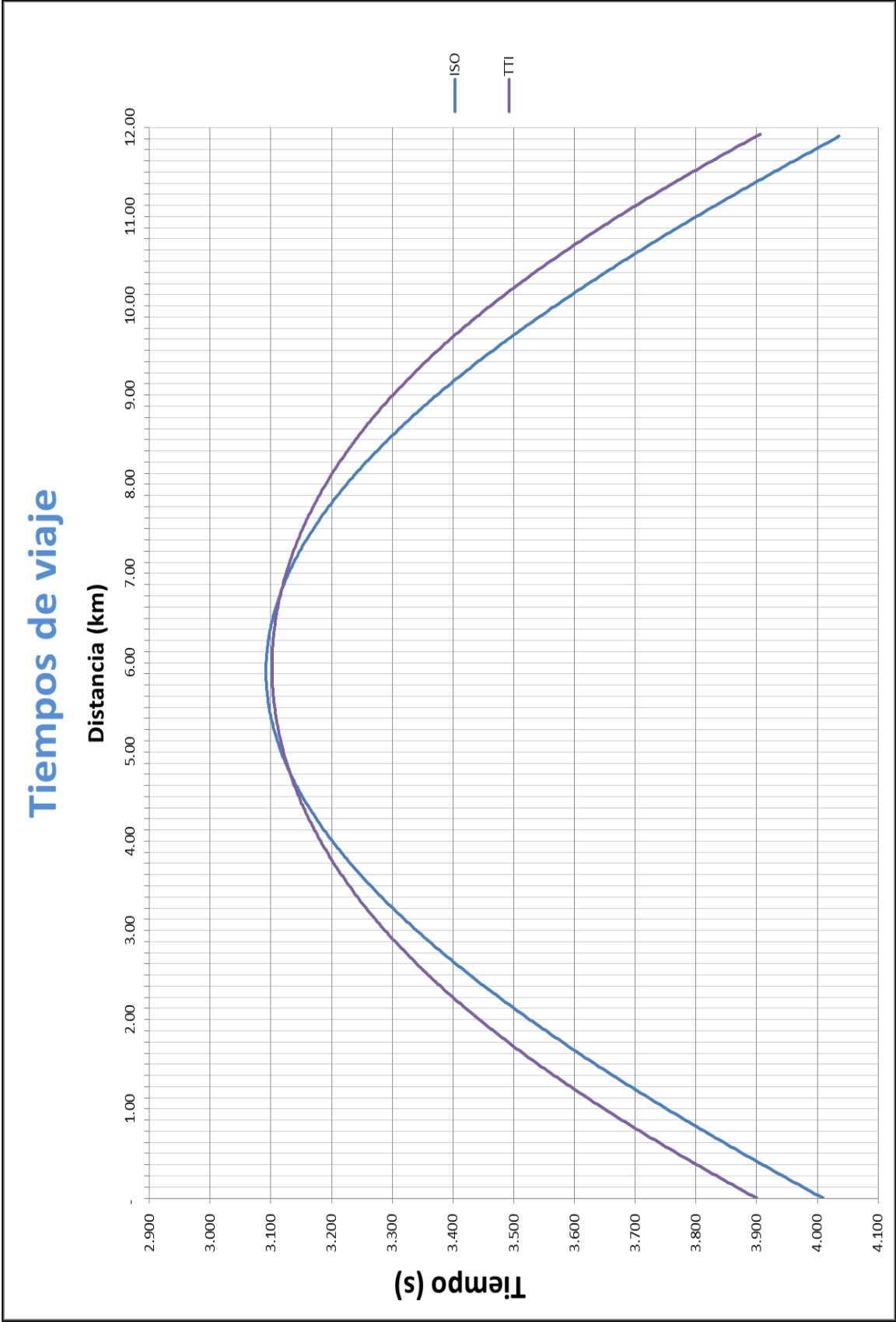


Figura 6.39 Tiempos de viaje para un medio isótropo y un medio TTI de un disparo central del área de estudio.

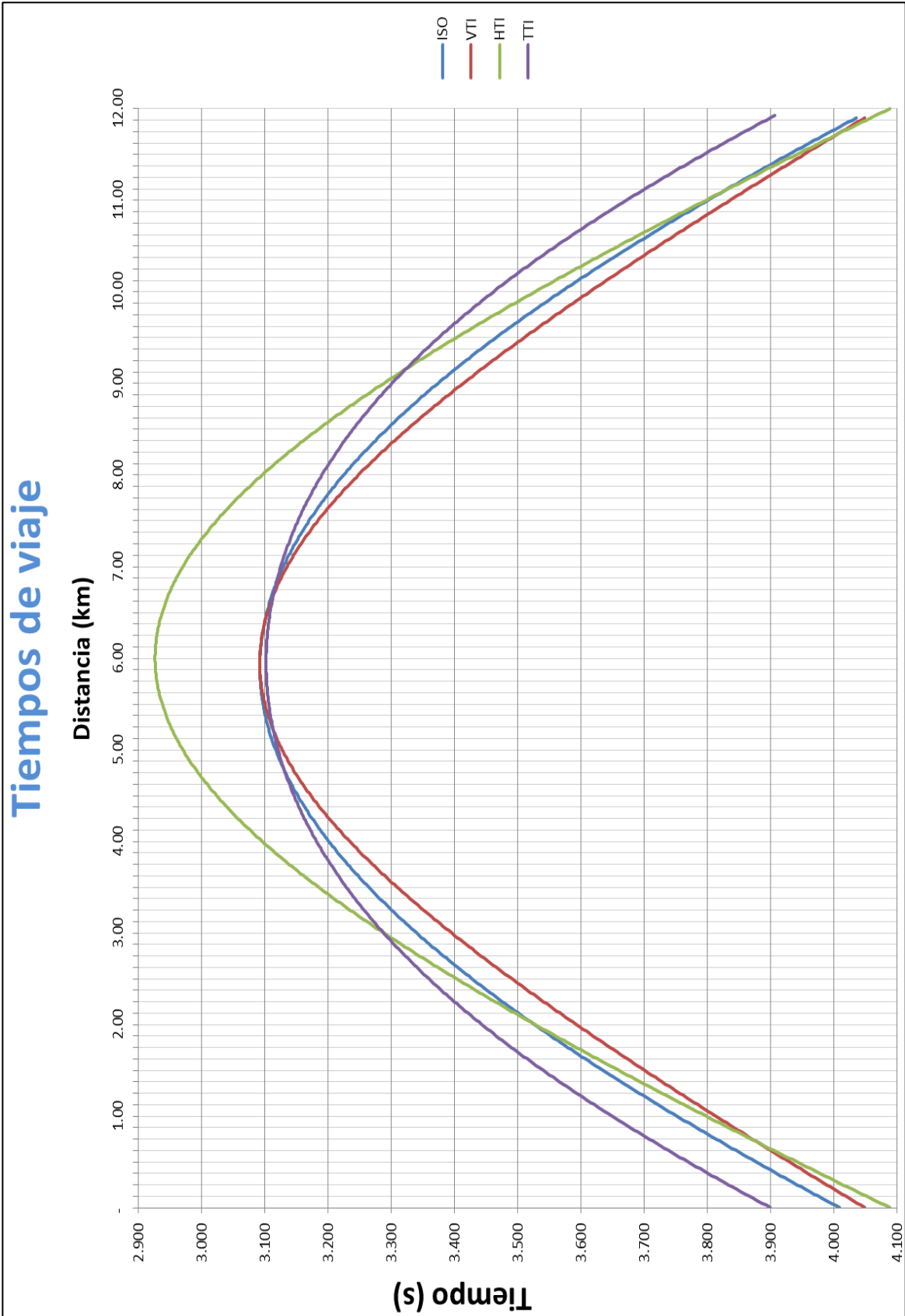


Figura 6.40 Tiempos de viaje para un medio isótropo y tres medios anisótropos VTI, HTI y TTI de un disparo central del área de estudio.



# Capítulo 7

## Conclusiones y Trabajo Futuro

### 7.1 Conclusiones

- ✓ A partir de análisis de las tablas 6.1, 6.2, 6.3 y 6.4 se desprende que:

De la tabla 6.1 en la que se resume el comportamiento del ángulo de disparo para cada modelo anisótropo estudiado, se observa que en el caso del modelo VTI el ángulo es mayor que para el modelo isótropo en los offsets cercanos e intermedios, para los offsets lejanos sucede lo contrario, es decir, el ángulo en el modelo VTI es menor que para el modelo isótropo.

En la misma tabla 6.1 se observa que para el modelo HTI el ángulo de disparo es mayor que en el modelo isótropo para los tres rangos de offset considerados. La diferencia entre los ángulos del modelo HTI y el modelo isótropo aumentan con el offset.

En el último renglón de esta misma tabla 6.1 se resumen los resultados para el modelo TTI al compararlo con el modelo isótropo. En este caso los ángulos de disparo son menores en todos los offsets para el modelo TTI, presentándose la mayor diferencia en los offsets intermedios.

De la tabla 6.2 en la que se resume el comportamiento de la densidad de amplitud para cada modelo anisótropo estudiado, se observa que en el caso del modelo VTI la densidad de amplitud es mayor que para el modelo isótropo en los offsets cercanos e intermedios, para los offsets lejanos sucede lo contrario, es decir, que la densidad de amplitud en el modelo VTI es menor que para el modelo isótropo, presentándose la mayor diferencias en los offsets lejanos.

En la misma tabla 6.2 se observa que para el modelo HTI la densidad de amplitud es mayor para el modelo HTI al compararlo con el modelo isótropo, presentando diferencias menores que el caso de los offsets cercanos y lejanos.

a Figura 6.22 Promedio del ángulo de incidencia para un modelo ISO, VTI y la diferencia VTI-ISO, p ISO con un offset de 2-4

En el último renglón de esta misma tabla 6.2 se resumen los resultados para el modelo TTI al compararlo con el modelo isótropo. En este caso la densidad de amplitud es menor para el modelo TTI con respecto al modelo isótropo en los offsets cercanos y lejanos, pero presentando la mayor diferencia en los offsets lejanos. En los offsets intermedios sucede lo contrario, la densidad de amplitud en el modelo TTI es mayor que para el modelo isótropo.

De la tabla 6.3 en la que se resume el comportamiento de los ángulos de incidencia para cada modelo anisótropo estudiado, se observa que en el caso del modelo VTI el ángulo de incidencia es mayor que para el modelo isótropo en los offsets cercanos e intermedios, para los offsets lejanos sucede lo contrario, es decir, el ángulo de incidencia en el modelo VTI es menor que para el modelo isótropo.

En la misma tabla 6.3 se observa que para el modelo HTI el ángulo de incidencia es mayor que el modelo isótropo para los tres rangos de offset considerados. La diferencia entre los ángulos del modelo HTI será mayor para los offsets intermedios.

En el último renglón de esta misma tabla 6.3 se resumen los resultados para el modelo TTI al compararlo con el modelo isótropo. En este caso los ángulos de incidencia son menores en todos los rangos de offset, presentándose la mayor diferencia en los offsets intermedios.

De la tabla 6.4 en la que se resume el comportamiento del tiempo de viaje para cada modelo anisótropo estudiado, se observa que en el caso del modelo VTI el tiempo de viaje es mayor que para el modelo isótropo en los tres rangos de offset considerados, presentándose la mayor diferencia en los offsets intermedios.

En la misma tabla 6.4 se observa que para el modelo HTI el tiempo de viaje es menor que el modelo isótropo en los offsets cercanos e intermedios, para los offsets lejanos sucede lo contrario, es decir, el tiempo de viaje en el modelo HTI es mayor que para el modelo isótropo.

En el último renglón de esta misma tabla 6.4 se resumen los resultados del modelo TTI al compararlo con el modelo isótropo. En este caso el tiempo de viaje es menor en todos offsets para el modelo TTI, presentándose la mayor diferencia en los offsets lejanos.

- ✓ Es importante considerar la anisotropía cuando se van a realizar estudios de interpretación que tomen en cuenta los ángulos de salida, la densidad de amplitud, los ángulos de incidencia y el tiempo de viaje; ya que observamos

que generan diferencias considerables si únicamente manejamos el medio como isótropo.

- ✓ Para trabajar el trazado de rayos es importante contar con un buen equipo de cómputo debido a que genera una gran cantidad de datos.
- ✓ Tomar en cuenta el trazado de rayos para nuevos estudios dentro de la adquisición y el procesamiento de datos sísmicos.
- ✓ Es importante considerar la anisotropía para estudios de nuevos yacimientos dentro de la adquisición y procesamiento de datos sísmicos ya que esta genera diferencias considerables y de características muy variables.

## 7.2 Trabajo futuro

- ✓ Estudiar modelos con geología un poco más compleja (fallas, capas inclinadas, distintos tipos de roca, etc.).
- ✓ Generar datos sísmicos sintéticos para cada modelo anisótropo, con la intención de evaluar la influencia de los distintos tipos de anisotropía en el procesamiento de datos sísmicos.
- ✓ Usar geometrías reales para realizar el trazado de rayos, ya que en el presente trabajo para poder estudiar mejor el efecto de anisotropía se usó una geometría sencilla desde el punto de vista teórico pero imposible de realizarse en campo.

# Mnemónicos y Acrónimos

---

$\Delta t$	Incremento del tiempo
2-D	Levantamiento 2-D
3-D	Tres dimensiones, hace referencia a un prospecto sísmico de adquisición tridimensional (cubo sísmico) donde las líneas de fuentes y de detectores se encuentran por lo general ortogonales entre sí.
$A_i$	Coefficiente de amplitud
<i>Bow-tie</i>	Un evento cóncavo hacia arriba en los datos sísmicos producidos por un foco enterrado y corregido por la migración adecuada. El centro de la onda produce tres puntos de reflexión. El nombre de este evento fue dado por la aparición en datos no migrados.
CDP	Punto medio en profundidad
CMP	Punto medio común
<i>cross-line</i>	Línea ortogonal a las líneas de receptores
CRP	Punto de receptor común
$f_{max}$	Frecuencia máxima en el objetivo
<i>Fold</i>	Número de puntos medios por cada bin
<i>HTI</i>	De las siglas en inglés Horizontally Transversely Isotropic
<i>ISO</i>	Medio isótropo
<i>in-line</i>	Línea paralela a las líneas de receptores
<i>LF</i>	Línea de fuentes
<i>LR</i>	Línea de receptores
<i>NMO</i>	Normal Move Out
<i>RI</i>	Intervalo de receptores
<i>Rz</i>	Resolución vertical
s	Segundos
S	Disparo (shot)

---

$SH$	Componente de onda-S polarizada en el plano transversal al eje de referencia, también denominada onda-S transversal
$SI$	Intervalo de fuentes
SMA	Simulación de la migración de amplitud
$t$	Tiempo
$T$	Tiempo de arribo
$TI$	Isotropía en un plano de simetría
$TTI$	De las siglas en inglés Tilded Transversely Isotropic
$v$	Velocidad
$V$	Velocidad de intervalo
$V_{fase}$	Velocidad de fase
$V_{grupo}$	Velocidad de grupo
$V_p$	Velocidad de la onda P
$V_s$	Velocidad de la onda S
$V_{sh}$	Velocidad promedio de la capa
$VTI$	De las siglas en inglés Vertically Transversely Isotropic
$X_{max}$	Distancia máxima
$X_{min}$	Distancia mínima
$Z$	Profundidad
$\alpha$	Velocidad vertical de la onda P
$\alpha_i$	Ángulo de incidencia
$\beta$	Velocidad vertical de la onda S
$\gamma$	Describe la polarización de la onda SH
$\delta$	Anisotropía cuando el frente de onda P incidente se propaga paralelamente al eje de simetría
$\varepsilon$	Representa el porcentaje de la diferencia entre la velocidad horizontal y la velocidad vertical

# Lista de Figuras

	Página
Figura 1.1 Ilustración de un frente de onda y trayectorias radiales desde el punto de la fuente en un medio uniforme (Enders A. Robinson and Sven Treitel, Digital Imaging and Deconvolution: The ABCs of Seismic Exploration and Processing, 2008)	1
Figura 1.2 Puntos correspondientes (Enders A. Robinson and Sven Treitel, Digital Imaging and Deconvolution: The ABCs of Seismic Exploration and Processing, 2008)	2
Figura 1.3 Vector tangente unitario para un rayo. El rayo está especificado por el radio del vector desde el origen a un punto en el rayo. Los frentes de onda son ortogonales al rayo (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)	6
Figura 1.4 Las trayectorias más inclinadas son líneas de flujo. Las trayectorias de nivel son líneas de contorno. Los dos conjuntos son ortogonales. (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)	10
Figura 1.5 a) Para un humano, el camino con el tiempo mínimo es ADE. b) La trayectoria del rayo es ortogonal a los frentes de onda. La trayectoria de prueba esta desviada hacia los frentes de onda. (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)	11
Figura 1.6 El rayo EFG, está en ángulo recto respecto a la interfaz y no se desvía. El rayo ABC, es desviado en la interfaz. (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)	16
Figura 1.7 Los arcos de los círculos a través del origen representan las trayectorias de rayo con diferentes ángulos iniciales. Los círculos con centros en el eje de profundidad representan frentes de onda con diferentes tiempos de viaje. (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)	23
Figura 1.8 Determinación de la ecuación de un rayo que pasa a través de un punto B. Sabiendo que el origen O es también un punto en el rayo. Conectando estos dos puntos OB, pensando que el rayo es un círculo. Por lo tanto, el centro se encuentra en AE. (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)	24
Figura 1.9 Una onda de sde de él origen O hasta la máxima profundidad D que regresa al eje horizontal. Esta es llamada onda descendente ya que es dirigida en dirección al subsuelo y se acerca a la superficie sin la reflexión al hacer un cambio de sentido. Debido a que la profundidad se traza hacia arriba, la onda descendente aparece invertida. El frente de onda a través de la máxima profundidad también se muestra. (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)	26
Figura 1.10 Determinación del centro de un frente de onda circular a través de un punto con profundidad máxima D (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)	28
Figura 1.11 Círculos de las trayectorias de rayo que tienen centro en la línea horizontal donde la velocidad será cero. (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)	29

Figura 1.12	Todos los frentes de onda circulares tienen centro en el eje vertical (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)	30
Figura 1.13	Todos los rayos de la Figura 1.11 y los frentes de onda de la Figura 1.12 (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)	30
Figura 1.14	Pitágoras nos confirma que los frentes de onda y los rayos son ortogonales (Enders A. Robinson and Sven Treitel, 2008)	31
Figura 2.1	Ejemplo de un modelo de trazado de rayos 3D de SEG/EAGE Modelo de sal (Aminzadeh et al., 1997).	35
Figura 2.2	Estructura del modelo. De cada lado de cada interfaz está señalado las propiedades del volumen que deberán utilizarse por los rayos desde el lado de la interfaz $P_i$ , $S_i$ y $D_i$ que son las velocidades de onda P y S, y las funciones de la densidad para el mismo material. Cada interfaz se marca mediante un índice "i" (por ejemplo, $I_1, I_2, \dots$ ). (Stud. geophys. geod., 46 (2002), 113–164)	36
Figura 2.3	Trazado de rayos en un modelo abierto. Observe la interfaz en el espacio blanco donde no hay datos. El rayo "A" a través del espacio sin datos es rechazado. Se inicia en las propiedades #3 por debajo de la interfaz superior, mientras que en la siguiente intersección del rayo en la interfaz inferior, se espera que llegue a través de las propiedades #2. ( Stud. geophys. geod., 46 (2002), 113–164)	36
Figura 2.4	El icosaedro (a) describe la malla básica de la fuente puntual. En el (b) vemos cuatro interpolaciones repetidas que ha tenido el icosaedro. Esto conduce a un poliedro que consta de 2562 nodos (rayos), 7680 lados y 5120 triángulos. (Stud. geophys. geod., 46 (2002), 113–164)	38
Figura 2.5	Los frentes de onda se propagan a través del modelo mediante el trazado de todos los rayos (del viejo frente de onda al nuevo frente de onda). Los frentes de onda viajan durante dos intervalos de tiempo sucesivo ( $t$ y $t + \Delta t$ ). (Stud. geophys. geod., 46 (2002), 113–164)	39
Figura 2.6	Celda de un rayo con un receptor interior. Los datos sísmicos se estiman en el receptor mediante la interpolación a partir de los tres rayos $r_1, r_2$ y $r_3$ . (Stud. geophys. geod., 46 (2002), 113–164)	40
Figura 2.7	Ejemplo de la construcción de un frente de onda en un modelo abierto. Este frente de onda se refleja desde la interfaz más profunda. La interfaz se representa en negro y el frente de onda en blanco. La interfaz contiene dos áreas no definidas, una de ellas es alcanzada por el frente de onda. (Stud. geophys. geod., 46 (2002), 113–164)	40
Figura 2.8	Construcción de un frente de onda y trazado de rayos para una línea recta de receptores. (a) La fuente se encuentra en la parte izquierda del modelo en la posición (0.2, 1.25, 0.2) Km. (b) La fuente se encuentra en la posición (1.25, 1.25, 0.2) Km. (Stud. geophys. geod., 46 (2002), 113–164)	42
Figura 2.9	Selección de algunos parámetros registrados en la figura 8b. (a) La figura muestra el tiempo de viaje y $\text{Log}_{10}$ del módulo del coeficiente de amplitud (Stud. geophys. geod., 46 (2002) 113–164)	43

Figura 2.10	Error en el tiempo de viaje correspondiente a la curva de la figura 2.9 La diferencia entre el resultado de la construcción del frente de onda y el rastreo directo entre la fuente y los receptores que se representaron gráficamente. (Stud. geophys. geod., 46 (2002), 113–164)	43
Figura 2.11	Sismograma sintético correspondiente a los datos del evento mostrado en la figura 2.9a. (Stud. geophys. geod., 46 (2002), 113–164)	44
Figura 2.12	Parámetros para mapeo de iluminación (NORSAR-3D User's Guide - Version 5.5)	45
Figura 2.13	Mallado con fuentes y receptores para un CRP (NORSAR-3D User's Guide - Version 5.5)	47
Figura 2.14	División de un diagrama de rosa en el dominio offset-azimut (NORSAR-3D User's Guide - Version 5.5)	47
Figura 2.15	Ilustración de los conceptos para la generación de un diagrama de rosa (NORSAR-3D User's Guide - Version 5.5)	48
Figura 3.1	(Years of anisotropy in exploration and reservoir seismics: A historical review of concepts and methods Klaus Helbig and Leon Thomsen)	51
Figura 3.2	Las superficies de lentitud (líneas continuas) en medios con capas anisotrópicas inducidas comparadas con las superficies de lentitud de ondas P en medios isotrópicos (líneas discontinuas) con lentitudes idénticas a lo largo de la vertical. Se asume que dos tipos de capas isotrópicas contribuyen igualmente a la secuencia de capas delgadas. En cada capa la proporción de velocidades de las ondas P y S es igual. Los números en la parte superior de cada caso son la proporción de la rigidez de las dos capas (es decir, para densidades idénticas, el cuadrado de las velocidades). Las áreas sombreadas corresponden a la lentitud de la onda P. la primera imagen se refiere a un modelo geológico ideal, las que le siguen corresponden a situaciones geológicas más realistas. (Years of anisotropy in exploration and reservoir seismics: A historical review of concepts and methods Klaus Helbig and Leon Thomsen)	52
Figura 3.3	Medio VTI, el eje de simetría es vertical y perpendicular al plano de las capas. Tensor elástico que caracteriza este tipo de medio (Modificado de Cabello, 2007)	56
Figura 3.4	Medio HTI, el eje de simetría es horizontal y perpendicular al plano de fracturas. Tensor que caracteriza el medio HTI (Modificado de Cabello, 2007)	56
Figura 3.5	Descripción de un modelo TTI y la matriz de los cosenos.	57
Figura 3.6	Anisotropía elíptica, el frente de onda representa una elipse (Modificado de Cabello, 2007)	58
Figura 4.1	Términos para un estudio sísmico 3-D (Planning Land 3-D Seismic Surveys, Andreas Cordsen, Mike Galbraith, and John Peirce Edited by Bob A. Hardage Series Editor: Stephen J. Hill Geophysical Developments)	68
Figura 4.2	Términos para un estudio sísmico (Planning Land 3-D Seismic Surveys, Andreas Cordsen, Mike Galbraith, and John Peirce Edited by Bob A. Hardage Series Editor: Stephen J. Hill Geophysical Developments)	69



Figura 4.3	Definición de $X_{min}$ (Planning Land 3-D Seismic Surveys, Andreas Cordsen, Mike Galbraith, and John Peirce Edited by Bob A. Hardage Series Editor: Stephen J. Hill Geophysical Developments)	70
Figura 4.4	Zona de fresnel para la propagación de un frente de onda	71
Figura 4.5	Diseño de adquisición con una geometría ortogonal	72
Figura 4.6	Arreglo de fuentes y receptores en un mismo plano NORSAR	73
Figura 4.7	Definición de horizontes	74
Figura 4.8	Visualización de todos los receptores en nuestra adquisición con NORSAR	78
Figura 4.9	Visualización de todas las fuentes en nuestra adquisición con NORSAR	79
Figura 4.10	Modelos propuestos para el trazado de rayos	80
Figura 4.11	Green River Shale	81
Figura 5.1	Construcción del modelo (interfaces, horizontes y bloques) 3-D con NORSAR.	82
Figura 5.2	a) Frente de onda para un medio isótropo 3-D b) Rayos en un medio isótropo con vista de los ejes (x, z) ambas figuras para un solo tiro central con NORSAR.	83
Figura 5.3	Flujo de trabajo para realizar un estudio en NORSAR®	86
Tabla 1	Mapas que se van a utilizar	88
Figura 6.1	Promedio del ángulo de disparo para un modelo ISO, VTI y la diferencia VTI-ISO con offset de 0-2	Sobre
Figura 6.2	Promedio del ángulo de disparo para un modelo ISO, HTI y la diferencia HTI-ISO con offset de 0-2	Sobre
Figura 6.3	Promedio del ángulo de disparo para un modelo ISO, TTI y la diferencia TTI-ISO con offset de 0-2	Sobre
Figura 6.4	Promedio del ángulo de disparo para un modelo ISO, VTI y la diferencia VTI-ISO con offset de 2-4	Sobre
Figura 6.5	Promedio del ángulo de disparo para un modelo ISO, HTI y la diferencia HTI-ISO con offset de 2-4	Sobre
Figura 6.6	Promedio del ángulo de disparo para un modelo ISO, TTI y la diferencia TTI-ISO con offset de 0-2	Sobre
Figura 6.7	Promedio del ángulo de disparo para un modelo ISO, VTI y la diferencia VTI-ISO con offset de 4-6	Sobre
Figura 6.8	Promedio del ángulo de disparo para un modelo ISO, HTI y la diferencia HTI-ISO con offset de 4-6	Sobre
Figura 6.9	Promedio del ángulo de disparo para un modelo ISO, TTI y la diferencia TTI-ISO con offset de 4-6	Sobre

Figura 6.10	Densidad de amplitud para un modelo ISO, VTI y la diferencia VTI-ISO con un offset de 0-2	Sobre
Figura 6.11	Densidad de amplitud para un modelo ISO, HTI y la diferencia HTI-ISO con un offset de 0-2	Sobre
Figura 6.12	Densidad de amplitud para un modelo ISO, TTI y la diferencia TTI-ISO con un offset de 0-2	Sobre
Figura 6.13	Densidad de amplitud para un modelo ISO, VTI y la diferencia VTI-ISO con un offset de 2-4	Sobre
Figura 6.14	Densidad de amplitud para un modelo ISO, HTI y la diferencia HTI-ISO con un offset de 2-4	Sobre
Figura 6.15	Densidad de amplitud para un modelo ISO, TTI y la diferencia TTI-ISO con un offset de 2-4	Sobre
Figura 6.16	Densidad de amplitud para un modelo ISO, VTI y la diferencia VTI-ISO con un offset de 4-6	Sobre
Figura 6.17	Densidad de amplitud para un modelo ISO, HTI y la diferencia HTI-ISO con un offset de 4-6	Sobre
Figura 6.18	Densidad de amplitud para un modelo ISO, TTI y la diferencia TTI-ISO con un offset de 4-6	Sobre
Figura 6.19	Promedio del ángulo de incidencia para un modelo ISO, VTI y la diferencia VTI-ISO con un offset de 0-2	Sobre
Figura 6.20	Promedio del ángulo de incidencia para un modelo ISO, HTI y la diferencia HTI-ISO con un offset de 0-2	Sobre
Figura 6.21	Promedio del ángulo de incidencia para un modelo ISO, TTI y la diferencia TTI-ISO con un offset de 0-2	Sobre
Figura 6.22	Promedio del ángulo de incidencia para un modelo ISO, VTI y la diferencia VTI-ISO con un offset de 2-4	Sobre
Figura 6.23	Promedio del ángulo de incidencia para un modelo ISO, HTI y la diferencia HTI-ISO con un offset de 2-4	Sobre
Figura 6.24	Promedio del ángulo de incidencia para un modelo ISO, TTI y la diferencia TTI-ISO con un offset de 2-4	Sobre
Figura 6.25	Promedio del ángulo de incidencia para un modelo ISO, VTI y la diferencia VTI-ISO con un offset de 4-6	Sobre
Figura 6.26	Promedio del ángulo de incidencia para un modelo ISO, HTI y la diferencia HTI-ISO con un offset de 4-6	Sobre
Figura 6.27	Promedio del ángulo de incidencia para un modelo ISO, TTI y la diferencia TTI-ISO con un offset de 4-6	Sobre
Figura 6.28	Promedio del tiempo de viaje para un modelo ISO, VTI y la diferencia VTI-ISO con un offset de 0-2	Sobre

Figura 6.29	Promedio del tiempo de viaje para un modelo ISO, HTI y la diferencia HTI-ISO con un offset de 0-2	Sobre
Figura 6.30	Promedio del tiempo de viaje para un modelo ISO, TTI y la diferencia TTI-ISO con un offset de 0-2	Sobre
Figura 6.31	Promedio del tiempo de viaje para un modelo ISO, VTI y la diferencia VTI-ISO con un offset de 2-4	Sobre
Figura 6.32	Promedio del tiempo de viaje para un modelo ISO, HTI y la diferencia HTI-ISO con un offset de 2-4	Sobre
Figura 6.33	Promedio del tiempo de viaje para un modelo ISO, TTI y la diferencia TTI-ISO con un offset de 2-4	Sobre
Figura 6.34	Promedio del tiempo de viaje para un modelo ISO, VTI y la diferencia VTI-ISO con un offset de 4-6	Sobre
Figura 6.35	Promedio del tiempo de viaje para un modelo ISO, HTI y la diferencia HTI-ISO con un offset de 4-6	Sobre
Figura 6.36	Promedio del tiempo de viaje para un modelo ISO, TTI y la diferencia TTI-ISO con un offset de 4-6	Sobre
Figura 6.37	Tiempos de viaje para un medio isótropo y un medio VTI de un disparo central del área de estudio.	99
Figura 6.38	Tiempos de viaje para un medio isótropo y un medio HTI de un disparo central del área de estudio.	100
Figura 6.39	Tiempos de viaje para un medio isótropo y un medio TTI de un disparo central del área de estudio.	101
Figura 6.40	Tiempos de viaje para un medio isótropo y tres medios anisótropos VTI, HTI y TTI de un disparo central del área de estudio.	102
Tabla 6.1	Promedio del ángulo de disparo.	91
Tabla 6.2	Densidad de amplitud.	93
Tabla 6.3	Promedio del ángulo de incidencia.	95
Tabla 6.4	Tiempos de viaje promedio.	98

# Anexos

A-1

Anexo digital de todos los mapas generados.

# Referencias

- Cerveny, V. (1972). Seismic Rays and Ray Intensities in Inhomogeneous Anisotropic Media. Geophys. J. r. astr. Soc. 1-13.
- Cordsen, A., Galbraith, M., Peirce, J. (2000). Planning land 3-D seismic surveys. Society of Exploration Geophysicists (SEG) Books. United States of America.
- Gjøystdal, H., Iversen, E., Laurain, R., Lecomte, I., Vinje, V., Åstebøl K. (2002). Review of Ray Theory Applications in Modelling and Imaging of Seismic Data. Stud. Geophysics 46, 113–164 113 StudiaGeo s.r.o., Prague.
- Grechka, V., Pech, A., Tsvankin, I., Han, B. (2001). Velocity analysis for tilted transversely isotropic media: A physical modeling example. Geophysics, 66, 904-910.
- Helbig, K., Thomsen, L. (2005). 75-plus years of anisotropy in exploration and reservoir seismics: A historical review of concepts and methods. Society of Exploration Geophysicists (SEG). Paper Vol. 7, NO. 6.
- Kostecki, A. (2011). Tilted Transverse Isotropy. Institute of Oil and Gas. Krakow.
- NORSAR 3D (2012). Ray Modelling User´s Guide Version 5.5. Norway.
- Robinson, E., Treitel, S. (2008). Digital Imaging and Deconvolution: The ABCs of Seismic Exploration and Processing. Society of Exploration Geophysicists (SEG) Books. United States of America.
- Sheriff, R. E., Geldart, L. P. (1995). Exploration Seismology, 2<sup>nd</sup> Edition. University Press. United States of America.
- Stone, Dale G. (1998). Designing Seismic Surveys in Two and Three Dimensions. Society of Exploration Geophysicists (SEG) Books. United States of America.
- Thomsen, L. (1986). Weak elastic anisotropy, Geophysics, 51, 1954-1966.