

# **INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL**

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA**

**SECCION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACION**

## **“DINAMICA FRACTAL DE INTERFACES EN MEDIOS POROSOS”**

**TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE DOCTOR EN  
CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN INGENIERIA MECANICA**

**PRESENTA**

**DANIEL MORALES MATAMOROS**

**ASESOR: DR. ALEXANDER S. BALANKIN**

**JURADO:**

<b>PRESIDENTE:</b>	<b>DR. GUILLERMO URRIOLAGOITIA CALDERÓN</b>
<b>SECRETARIO:</b>	<b>DR. LUIS HECTOR HERNANDEZ GOMEZ</b>
<b>PRIMER VOCAL:</b>	<b>DR. ALEXANDER BALANKIN</b>
<b>SEGUNDO VOCAL:</b>	<b>DR. ARMANDO BRAVO ORTEGA</b>
<b>TERCER VOCAL:</b>	<b>DRA. KLAVDIA OLESHKO</b>
<b>SUPLENTE:</b>	<b>DR. VLADIMIR KOZAKOV</b>

**MARZO DEL 2001**

## **DEDICACIONES**

A mis hijos Héctor Daniel, José María y Diego Emilio.

## **AGRADECIMIENTOS**

Este trabajo es producto del esfuerzo personal y la ayuda otorgada por instituciones académicas y federales.

Al Dr. Alexander Balankin por su sapiencia y paciencia durante mi formación como alumno de doctorado; y por encaminarme hacia uno de los campos más fértiles de la ciencia.

Al Instituto Politécnico Nacional, por ser la casa de estudios donde me formé como profesionista.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por el apoyo económico otorgado para realizar mis estudios de Maestría y Doctorado.

Al Instituto Mexicano del Petróleo, por la beca complementaria otorgada, y en especial al Dr. Fernando Castrejón Vacío.

Al Instituto de Geología (UNAM), en especial a la Dra Klaudia Oleshko.

Al Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Estado de México, en especial al Dr. Armando Bravo Ortega.

# CONTENIDO

Dedicaciones	i
Agradecimientos	ii
Citas	iii
Lista de Figuras	iv
Lista de Tablas	ix
Contenido	x
Resumen	1
Abstract	2
Aportaciones	3
Introducción	5
Antecedentes y planteamiento del problema	7
Justificación	10
Objetivos y metas	12
<b>I Teoría de la Percolación</b>	
I.1 Conceptos Básicos	14
I.2 Percolación como un Fenómeno Crítico	19
I.3 Fenómeno de Cruzamiento	22
I.4 Efectos del Tamaño Finito	24
I.5 Percolación por Conquista	26
I.6 Percolación Orientada	28
I.7 Difusión en el Grupo Infinito	29

I.8 Difusión en el Sistema de Percolación	31
<b>II Fractales</b>	
II.1 Fractales Aleatorios: una Trayectoria Aleatoria Imparcial	33
II.2 El Concepto de Longitud Característica	35
II.3 Ecuaciones Funcionales y Dimensión Fractal	36
II.4 Un Modelo: Aglutinación por Difusión Limitada (DLA)	37
II.5 Otras Dimensiones Fractales	39
II.5.1 Dimensión Fractal $d_w$ de una Trayectoria Aleatoria	40
II.5.2 Dimensión Fractal $d_{min} = 1/\bar{v}$ de la Trayectoria Mínima	42
<b>III Superficies e Interfases Fractales</b>	
III.1 Superficies Rugosas en Sólidos	46
III.2 Descripción Auto-afin de Superficies Rugosas	46
III.2.1 Crecimiento de Superficies Rugosas: Hipótesis de Escalamiento Dinámico	50
III.3 Interfases Fractales Fluido-Fluido	52
III.3.1 Digitación Viscosa	52
III.3.2 Flujo Multifásico en Medios Porosos	52
III.4 Fractura Hidráulica	60
III.5 Superficies e Interfases	63
III.5.1 Estructuras Auto-similares	63
III.5.2 Estructuras Auto-afines	65
<b>IV Medios Porosos</b>	
IV.1 Porosidad, Superficie Específica y Tortuosidad	69
IV.2 Saturación de Fluido, Presión Capilar y Angulo de Contacto	70

IV.3	Distribución de Tamaños de Poros	73
IV.4	Propiedades Fractales de los Medios Porosos	74
IV.4.1	Métodos de Absorción	75
IV.4.2	Mediciones de Cuerda-Longitud	76
IV.4.3	Método de la Función de Correlación	79
IV.4.4	Método Espectral	81
IV.4.5	Método de Conteo de Cajas	82
IV.5	Porosidad y Distribución de Tamaños de Poros de Medios Porosos	84
IV.6	El Papel como un Medio Poroso	85
<b>V. Desarrollo Experimental</b>		
V.1	Selección del Material	88
V.2	Preparación de Probetas	88
V.2.1	Pruebas en procesos de Fractura, Quemado e Imbibición	88
V.2.2	Formación de Interfaces en el Proceso de Fractura	89
V.2.3	Crecimiento y Dinámica de Interfaces	90
V.2.4	Foto-Grabación del Crecimiento y Dinámica de Interfaces	91
V.3	Experimentación de Formación de Interfaces	91
V.3.1	Fractura, Quemado e Imbibición	91
V.4	Experimentos de Crecimiento y Dinámica de Interfases	98
V.5	Determinación de la Dimensión Fractal de las Estructuras de los Papeles	100
<b>VI. Análisis y Discusión de Resultados</b>		
VI.1	Experimentos en Fractura Quemado e Imbibición	103
VI.2	Crecimiento y Dinámica de Interfaces	113
VI.3	Dimensión Fractal en Medios Porosos	118

<b>Conclusiones</b>	121
Trabajo a Futuro	123
Referencias	125
Apéndice A	134
Apéndice B	142
Apéndice C	146

# CITAS

No one will be considered scientifically literate tomorrow who is not familiar with fractals

**John Archibald Wheeler**

Fractals are important because they reveal a new area of mathematics directly relevant to the study of Nature.

**Ian Stewart**

Plato sought to explain Nature with five regular solid forms. Newton and Kepler bent Plato's circle into an ellipse. Modern science analysed plato's shapes into particles and waves, and generalised the curves of Newton and Kepler to relative probabilities – still without a single "rough edge". Now, more then two thousands years after Plato, nearly three hundred years after Newton, Benoit B. Mandelbrot has established a discovery that ranks with the laws of regular motion.

**Eugene H. Stanley**

The world that we live is not naturally smooth-edged. The real world has been fashioned with rough edges. Smooth surfaces are the exception in nature. And yet, we have accepted a geometry that only describes shapes rarely – if ever – found in the real world. The geometry of Euclide describes ideal shapes – the sphere, the circle, the cube, the square. Now, these shapes occur in our lives, but they are mostly man-made shapes and not nature-made.

**Benoit Mandelbrot**



# LISTA DE FIGURAS

Número de figura	Página
<b>Figura I-1.</b> Ejemplo de una red cuadrada de 10 x 10, con probabilidad $p = 0.3$ . Los círculos negros representan los sitios ocupados (conductores) y los círculos blancos representan los sitios vacíos aislantes).	14
<b>Figura I-2.</b> Ejemplos de percolación en una red cuadrada de 20 x 20 con $p = 0.1, 0.2, \dots, 0.60$ . Los sitios ocupados representan conductores (puntos negros) y los sitios vacíos representan aislantes (no se muestran). A $p = 0.6$ se presenta el cluster de percolación.	15
<b>Figura I-3.</b> Ejemplo de percolación por enlaces en una red cuadrada de 20 x 20.	16
<b>Figura I 4.</b> Percolación continua: modelo del queso suizo.	19
<b>Figura I-5.</b> Comparación de $S$ y $P_\infty$ con la magnetización $m$ y la susceptibilidad $\chi$ .	21
<b>Figura I-6.</b> Red triangular de tamaño $L$ . La longitud entre enlaces $a$ es unitaria.	25
<b>Figura I-7.</b> Percolación por conquista en una red cuadrada de 5 x 5, (a) tiempo inicial y (b) después de 9 intervalos de tiempo.	27
<b>Figura I-8.</b> Percolación orientada en una red cuadrada abajo del umbral de percolación.	29
<b>Figura II.1a-c.</b> Primeras dos iteraciones en la regla de agregación para construir el fractal no aleatorio triángulo de Sierpinski.	33
<b>Figura II.2 (a)</b> Fractal triángulo de Sierpinski después de cuatro iteraciones. <b>(b)</b> Gráfico log-log de $\rho$ (la fracción de espacio cubierta por triángulos negros) como una función de $L$ (el tamaño lineal del objeto).	34
<b>Figura II.3.</b> (a) Una red cuadrada DLA en el tiempo $t = 1$ mostrando los cuatro sitios de crecimiento, cada uno con una probabilidad de crecimiento $p_i = 1/4$ ; (b) DLA en el tiempo $t = 2$ con seis sitios de crecimiento y sus correspondientes probabilidades de crecimiento $p_i$ .	38
<b>Figura II-4.</b> Un caminante aleatorio de 2500 pasos en un sustrato fractal DLA con 1000 sitios. Los sitios que ha visitado este caminante se muestran coloreados de negro. Este es un ejemplo del problema de la "hormiga en un laberinto" de de Gennes[52].	40
<b>Figura II-5.</b> Ilustración esquemática de la dependencia del desplazamiento cuadrado promedio del número de pasos de un caminante aleatorio en un gráfico de log-log. (a) red euclídeana, (b) un cluster de percolación en el umbral de percolación.	42
<b>Figura II-6.</b> (a) ilustración del significado del hecho que $d_{\min}$ es mayor a 1: si la distancia entre los puntos A y B es el doble, entonces la longitud de la trayectoria más corta aumenta por un factor de $2^{d_{\min}}$ , que es mayor que 2; (b) valores numéricos de $d_{\min}$ por percolación (curva superior) y DLA (curva inferior).	43

- Figura II.7.** Representación esquemática del significado del hecho que  $d_{\min}$  esté arriba de 1: sí la distancia entre los puntos A y B es el doble, entonces la longitud de la trayectoria más corta aumenta por un factor de  $2^{d_{\min}}$ , que es mayor que 2. (b) Valores numéricos de  $d_{\min}$  para percolación (curva superior) y para DLA (curva inferior). **44**
- Figura III-1.** Fractal auto-afin determinísticos. **47**
- Figura III.2.** Diagrama de  $C_h(r)$  en un gráfico log-log en el rango  $a < r < \xi_H$ . **49**
- Figura III-3.** Digitación viscosa característica generada por la inyección de agua en una celda Hele-Shaw radial llenada con una solución polimérica más viscosa. **52**
- Figura III-4.** Representación esquemática de una garganta de radio  $r$  conectada a dos poros  $i$  y  $j$ .  $P_i$  y  $\mu_2$  son la presión y la viscosidad del fluido invasor 2 en el poro  $i$ ,  $P_j$  y  $\mu_1$  son la presión y la viscosidad del fluido desplazado 1 en el poro  $j$ . **54**
- Figura III-5.** (a-c) Resultados de los experimentos realizados por Lenormand et al[78] para varios valores de  $M$  y  $C$ . (a) aire desplazando petróleo:  $\log M = 2.0$ ,  $\log C = -1.0$ . (b) Aire desplazando petróleo muy viscoso:  $\log M = -4.7$ ,  $\log C = -6.3$ . (c) Mercurio desplazando aire:  $\log M = 1.9$ ,  $\log C = -5.9$ . (d-f) Simulaciones numéricas por Lenormand et al. en flujo bifásico en medios porosos con valores de  $M$  y  $C$  muy cercanos a los utilizados en los experimentos. (d)  $\log M = 1.9$ ,  $\log C = -0.9$ . (e)  $\log M = -4.7$ ,  $\log C = -5.7$ . (f)  $\log M = 1.9$ ,  $\log C = -5.9$ . **56**
- Figura III-6.** Diagrama de “fases” para varios regímenes de invasión como una función de los parámetros  $M$  y  $C$ . **57**
- Figura III-7.** Comparación de resultados experimentales y calculados para la función de correlación  $C(r)$  para varios cortes correspondientes a varias alturas  $z$  en el experimento de inyección. En (a) se muestra el dispositivo experimental. **58**
- Figura III-8.** Desarrollo dinámico de un contorno fractal durante la dispersión de glicerol coloreado en glicerol de la misma viscosidad y densidad. **60**
- Figura III-9.** Patrones producidos por la inyección de agua en una pasta de bentonita/agua a concentraciones de (a) 0.008 y, (b) 0.20. **61**
- Figura III-10.** Ejemplo de una grieta obtenida a presión constante en una red cuadrada de  $150 \times 150$  con condiciones frontera libres. **62**
- Figura III-11.** Rompimiento simultáneo de vigas como una función del tiempo. **63**
- Figura III-12.** Ilustración de las diferentes superficies fractales que tienen su origen en la descripción de un cluster de percolación. **64**
- Figura III-13.** Ilustración de un dispositivo experimental para investigar el movimiento de una interfase en un medio poroso. **66**
- Figura III-14.** Modelo DPD para el crecimiento de una interfase. Las celdas “húmedas” están sombreadas, mientras que las celdas “secas” son bloqueadas aleatoriamente con

probabilidad  $p$  (indicadas por O) ó aleatoriamente no bloqueadas con probabilidad  $(1 - p)$  (indicadas por I). (a)  $t = 0$ , (b)  $t = 1$ , (c)  $t = 2$ , y (d)  $t = 3$ . **67**

**Figura III-15.** Mostrada con línea negrita, la trayectoria de fijación se ha formado las celdas bloqueadas con sus vecinos más cercanos y sus próximos vecinos más cercanos para fijar la interfase. **68**

**Figura IV.1** Angulo de contacto formado entre un par de líquidos y la roca. **70**

**Figura IV.2** Curvas típicas de presión de capilaridad. **72**

**Figura IV.3** La distribución de tamaños de rasgos superficiales de una arenisca. **77**

**Figura IV.4** Construcción de la curve de Koch. **84**

**Figura IV.5** Red aleatoria de 2000 fibras uniformes, representando aproximadamente  $1 \text{ cm}^2$  de una capa de fibras. **85**

**Figura V.1.** Configuración de las probetas de papel secante para pruebas de formación de interfaces mediante los procesos de fractura, quemado y flujo de fluidos. **89**

**Figura V.2** Configuración de probetas de papel secante y papel filtro para pruebas dinámica de interfaces. **90**

**Figura V.3** Máquina Instron utilizada en las pruebas de Fractura. **91**

**Figura V-4.** Quemado de una probeta de papel secante en el quemador del horno de una estufa. **92**

**Figura V-5.** Dispositivo empleado en las pruebas de flujo de fluidos y colocación de las probetas. Los anchos de las probetas son, de izquierda a derecha, 12, 16, 24, 32, 48 y 56 mm, respectivamente. **93**

**Figura V.6** Interfaces fractales formadas mediante los procesos de (a) fractura, (b) quemado y (c) flujo de fluidos. **95**

**Figura V.7** Interfaces de fractura para papel filtro poro abierto (a) dirección longitudinal, (b) dirección transversal; poro medio (c) longitudinal, (d) transversal; poro abierto (e) longitudinal, (f) transversal. **97**

**Figura V-8.** Dispositivo empleado en las pruebas de crecimiento y dinámica de interfaces en probetas de papel filtro poro medio. Izquierda: probeta de 50 mm de ancho, derecha: probeta de 100 mm de ancho. **98**

**Figura V.9** Interfaces de crecimiento y dinámica en pruebas de flujo de fluidos en papel filtro para  $W = 100 \text{ mm}$ , (a) dirección paralela a la orientación de las fibras del papel, (b) dirección perpendicular a la orientación de las fibras del papel. Tomadas a un tiempo de 9 min. **99**

**Figura VI.1** Curva de distribución normal de los exponentes de rugosidad local para pruebas de fractura, quemado y imbibición. **105**

**Figura VI.2** Curva de distribución normal de los exponentes de rugosidad global para pruebas de fractura, quemado y imbibición. **106**

**Figura VI.3** Gráfico típico de las variaciones locales del ancho de la interfase con respecto al tamaño de la ventana para papel filtro. **106**

**Figura VI.4** Distribución normal del exponente de rugosidad local para interfaces formadas en experimentos de imbibición en (1) papel filtro y (2) papel secante. **107**

**Figura VI.5** Distribución normal de los valores del exponente de rugosidad global para interfaces formadas en experimentos de fractura en de papel filtro. **108**

**Figura VI.6** Fotografía de una interfase obtenida en pruebas de quemado en papel secante (a) escala de grises, (b) imagen en blanco y negro (1) frente de quemado y (2) frente de flama. **108**

**Figura VI.7** Gráficos de variograma típicos para interfaces de (a) quemado (curvas 1 y 2) y imbibición (curva 3) y (b) para interfaces de flama en probetas de papel secante con ancho  $W = 56$  mm (curva 1) y ancho  $W = 12$  mm (curva 2); (c) gráficos log-log de altura de interfase promedio contra ancho de probeta para interfaces de (1) flama, (2) imbibición y (3) quemado, en papel secante; (d) espectro de potencia para frentes de flama en probetas de diferentes anchos: (1)  $W = 12$  mm y (2)  $W = 56$  mm. **109**

**Figura VI.8** Distribución estadística de los exponentes de escalamiento  $\zeta_1$  (1) y  $\zeta_2$  (2) para frentes de flama y  $\zeta_1 = H$  (3) para frentes de imbibición en papel *secante*. **110**

**Figura VI.9** (a) exponentes de escalamiento (1) global y (2) local; (b) longitud de cruzamiento; (c) espectro de potencia y; (d) exponente de escalamiento del espectro de potencia. **111**

**Figura VI.10** Distribuciones estadísticas de los exponentes de rugosidad local ( $\zeta_1$ ) y global ( $\zeta_2 = \alpha$ ) para frentes de flama en probetas de diferentes anchos  $W$  mm. **112**

**Figura VI.11.** (a)–(d) Fotografías de interfaces en papel filtro orientadas en la dirección perpendicular respecto a la dirección de las fibras de papel; (e)–(h) gráficos correspondientes de  $z(x)$  en tiempos de (a), (e) 900 seg, (b), (f) 925 seg, (c), (g) 1000 seg y (d), (h) 1680 seg (es decir, mayor a  $T_S$ ). **113**

**Figura VI.12.** Dependencias de tiempo típicas de (a) la altura de la región húmeda y (b) el ancho de la interfase para interfaces orientadas paralelas a la dirección de las fibras de papel filtro (los recuadros muestran las partes amplificadas de las gráficas principales; las líneas suaves son ajustes por ley de potencias mediante el método de mínimos cuadrados); (c) tiempo promedio de la saturación de la interfase contra ancho de la probeta para interfaces en la dirección perpendicular (curva 1) y en la dirección paralela (curva 2) con respecto a la dirección de las fibras de papel filtro; (d) espectro de energía del gráfico (b): (—), los datos se ajustaron por el método de mínimos cuadrados. **114**

**Figura VI.13** Los exponentes dinámicos de escalamiento  $\delta$  (exponente de desplazamiento) para papel filtro (curva 1) y para papel secante (curva 2). **116**

- Figura VI.14** Exponente de crecimiento  $\beta$  para pruebas de imbibición en la dirección perpendicular (curvas 1 y 3) y en la dirección paralela (curvas 2 y 4) a la orientación de las fibras del papel, para papel filtro (curvas 3 y 4) y para papel secante (curvas 1 y 2). **117**
- Figura VI.15** Evolución de interfaces en papel filtro poro abierto (a) dirección longitudinal, (b) dirección transversal, en pruebas de imbibición. **118**
- Figura VI.16** Estructuras de papel analizadas por el paquete “Local Fractal Dimension”[133] para la determinación de la dimensión fractal, (a) papel secante, (b) papel filtro poro abierto, (c) papel filtro poro medio. **119**
- Figura A.1.** Distribución normal de los valores de H en el método R/S análisis. **135**
- Figura A.2.** Distribución normal de los valores de H en el método de espectro de potencia. **135**
- Figura A.3.** Distribución normal de los valores de H en el método de rugosidad longitud. **136**
- Figura A.4.** Distribución normal de los valores de H en el método de variograma. **136**
- Figura A.5.** Distribución normal de los valores de H en el método de ondoletas. **137**
- Figura A-6.** Ajuste de la tendencia de la línea para los métodos 1 y 4. **137**
- Figura A.7.** Distribución normal de los valores de H en el método R/S (ajustados). **138**
- Figura A.8.** Distribución normal de los valores de H en el método de variograma (ajustados). **139**
- Figura B.1** Ejemplo del cálculo en un cubo de prueba de lado 12. (a)  $q = 12$ , (b)  $q = 2$ , (c)  $q = 3$ , (d)  $q = 6$ . **143**
- Figura B.2** Dimensión fractal para un punto (P), una línea (L) y una superficie horizontal (S). (a) Representación esquemática de una imagen de un punto y una línea rodeada por valores bajos, (b) dimensión fractal a lo largo de una sección vertical que pasa a través del punto y la línea reportada en la figura (a). **144**

# LISTA DE TABLAS

Número de tabla	Página
<b>Tabla I-1.</b> Umbrales de percolación para varias redes bi- y tridimensionales y el árbol de Cayley.	<b>18</b>
<b>Tabla I-2.</b> Valores exactos y mejor estimados para los exponentes críticos en percolación y magnetismo.	<b>22</b>
<b>Tabla II-1.</b> Una “Rosseta stone” que conecta los fundamentos físicos de (a) un problema eléctrico (rompimiento dieléctrico), (b) un problema de mecánica de fluidos (digitación viscosa), y (c) un problema de difusión (solidificación dendrítica).	<b>39</b>
<b>Tabla IV.1</b> Algunas propiedades de papel glisina con relación a las de celofán.	<b>86</b>
<b>Tabla V-1.</b> Propiedades físicas y mecánicas de papel secante y papel filtro poro medio.	<b>92</b>
<b>Tabla V.2</b> Propiedades físicas y mecánicas para los tres diferentes tipos de papel filtro.	<b>95</b>
<b>Tabla VI.1.</b> Exponentes de rugosidad en interfaces formadas en experimentos de fractura, quemado e imbibición.	<b>104</b>
<b>Tabla VI.2</b> Exponentes de rugosidad global para los diferentes tipos de papel filtro.	<b>107</b>
<b>Tabla VI.3</b> Exponentes de escalamiento para interfaces formadas en papel.	<b>110</b>
<b>Tabla VI.4</b> Exponentes de escalamiento para diferentes comportamientos de interfaces rugosas.	<b>112</b>
<b>Tabla VI.5.</b> Exponentes de escalamiento dinámicos obtenidos en pruebas de imbibición.	<b>116</b>
<b>Tabla VI.6</b> Exponentes de escalamiento dinámico para los tres diferentes tipos de papel filtro.	<b>117</b>
<b>Tabla VI.7</b> Valores obtenidos de dimensión fractal para todos y cada uno de los papeles empleados en el presente trabajo.	<b>120</b>
<b>Tabla A-1.</b> Resultados de la determinación del exponente de Hurst para 300 trazas autoafines usando el paquete Benoit.	<b>134</b>
<b>Tabla A.2.</b> Valores de H ajustados para los métodos 1 y 4.	<b>138</b>

# RESUMEN

En el presente trabajo se estudia la dinámica fractal de formación de interfaces en no-equilibrio en medios heterogéneos, empleando como modelo papel. Por primera vez, se analizan tres procesos diferentes de formación de interfaces, estos son fractura, quemado e imbibición, utilizando el mismo tipo de papel para cada experimento. Además se determinó la dimensión fractal de las estructuras de los papeles empleados en los experimentos.

Cada experimento se repitió al menos 300 veces, empleando probetas con seis anchos diferentes. Esto permitió, por primera vez, no solamente determinar el exponente de rugosidad local ( $H$ ), sino que también el exponente de rugosidad global ( $\alpha$ ). Además, se obtuvieron suficientes resultados para realizar estudios estadísticos de los parámetros que caracterizan la dinámica fractal de formación de interfaces en no-equilibrio en sistemas heterogéneos.

Se demostró que los exponentes críticos que gobiernan la dinámica de formación de interfaces en no-equilibrio en sistemas heterogéneos, no son constantes universales, sino que dependen de la estructura del medio así como de las fluctuaciones temporales del sistema, gobernados por el mecanismo del proceso.

La dinámica fractal de formación de una interfase en no-equilibrio en sistemas heterogéneos es mucho más rico que la dinámica de una interfase auto-afin. También por primera vez se detectó rugosidad intrínseca anormal en grietas orientadas en la dirección de las fibras del papel. Se observó una dinámica anormal no-convencional del frente de fuego. Asimismo, se observó que el crecimiento de una interfase no sigue un comportamiento simple de ley de potencias, sino que representa una dinámica auto-afin, con un exponente de Hurst que coincide con el exponente de crecimiento (en caso de la dinámica de la interfase) o con el exponente de desplazamiento, en el caso de la propagación de la interfase a través del sistema heterogéneo. Por otro lado, el exponente de crecimiento  $\beta$  depende de la orientación en la cual se propague la interfase con respecto a la orientación de las fibras de papel. En cambio, todos los demás exponentes ( $H$ ,  $\alpha$ , y  $\delta$ ) no dependen de la anisotropía del sistema heterogéneo. Además, se observó claramente que los exponentes críticos obtenidos en mismos experimentos con probetas macroscópicamente similares son considerablemente diferentes. Esto es debido a variaciones considerables en la dimensión fractal del papel, lo cual se refleja en las variaciones estadísticas de las propiedades físicas y mecánicas del papel. Finalmente, para un conjunto de pruebas idénticas, los valores obtenidos de los exponentes críticos ( $H$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$ ) conforman una distribución normal.

# ABSTRACT

In this work, the fractal dynamics of far from equilibrium growth phenomena in heterogeneous media is studied. Paper is used as a prototype of the heterogeneous media. The contribution in this field of knowledge is the analysis of three different processes of interface growth, namely fracture, burning and wetting. One kind of paper was used for each process of interface growth. Furthermore, the fractal dimensions of paper used in this work were measured.

Each experiment of rupturing, burning and wetting paper were done at least 300 times, and samples of paper of six different widths were prepared. This allows, at first time, not only determine the local roughness exponent ( $H$ ), but the global roughness exponent ( $\alpha$ ) was also estimated. Nevertheless, we got enough results in order to make statistical analysis of parameters that describe the fractal dynamics of far from equilibrium growth phenomena in heterogeneous systems.

It was shown that the scaling exponents that govern the dynamics of far from equilibrium interface growth in heterogeneous systems are not universal constants. However, they depend on the structure of the media (in this case paper), as well as temporal fluctuations of the heterogeneous system, which are governed by the mechanism of the process (fracture, burning and wetting).

The fractal dynamics of far from equilibrium growth phenomena in heterogeneous systems is more plenty that the dynamics of self-affine interfaces. Never before, intrinsic anomalous crack roughening in rupture lines parallel to the fibre orientation in the paper was reported. Besides, an unconventional anomalous roughening in burning experiments was observed. Also, the growing of an interface does not follow a simple power law behaviour; but it represents a self-affine dynamics, with Hurst exponent that coincide with the grow exponent (in the case of dynamics of interface), or with displacement exponent, in the case of interface propagation through heterogeneous media. The growing exponent,  $\beta$ , depends on the interface front orientation with respect to the fibre direction in the paper, whereas the other exponents ( $H$ ,  $\alpha$  and  $\delta$ ) do not depend on it. Clearly, the scaling exponents measured in same experiments, with samples macroscopically identical, are very different because of long variations in the fractal dimension of paper structure. The latter was evident when were measured physical and mechanical properties of paper. Finally, for a set of identical experiments, the measured values of all scaling exponents ( $H$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\delta$ ) conform a normal distribution.



# APORTACIONES

En el presente trabajo se estudia la dinámica fractal de formación de interfaces en no-equilibrio en medios heterogéneos. El estudio de la formación de interfaces se hace mediante tres mecanismos diferentes: fractura, quemado e imbibición, por primera vez en un tipo de papel; además, también por primera vez se estudia la formación de interfaces para un solo tipo de papel en tres presentaciones diferentes mediante el mecanismo de fractura. Por otro lado, el estudio de la dinámica fractal de interfaces se hace mediante el mecanismo de imbibición. Además, se investiga el efecto de la anisotropía sobre la dinámica fractal de formación de interfaces en medios porosos.

Se desarrolla la metodología para realizar las pruebas de fractura, quemado y imbibición en medios porosos, desde la selección del material prototipo hasta la fotografía de la dinámica fractal de interfaces y determinación de la dimensión fractal de las estructuras de los medios porosos.

Lo más relevante del presente trabajo es lo siguiente: se estudia por primera vez la formación de interfaces fractales en un solo tipo de papel mediante tres mecanismos y la formación de interfaces para un solo tipo de papel con tres presentaciones diferentes mediante un solo mecanismo; se estudia el comportamiento fractal de la imbibición en dos tipos de papel diferente, se investiga el efecto de la anisotropía en la dinámica de interfaces en medios porosos; y se tratan estadísticamente los valores de los exponentes de escalamiento obtenidos experimentalmente.

Las aportaciones más importantes que se logran son las siguientes:

1. Se ha demostrado que el valor del exponente de rugosidad de interfaces fractales,  $H$ , no es un parámetro universal, sino que depende de la estructura del medio poroso, así como del mecanismo específico de formación, tales como fractura, quemado e imbibición.
2. Se ha demostrado que los exponentes dinámicos de la dinámica fractal de interfaces también dependen de la estructura del medio heterogéneo en el cual se propaguen.
3. Se ha demostrado que el exponente dinámico de escalamiento  $\beta$  depende de la orientación en la cual se propague la interfase, aún cuando los exponentes de  $H$  y  $\delta$  no dependan.
4. Se justificó que las variaciones de la dimensión fractal del medio heterogéneo resultan en las variaciones estadísticas de todos los exponentes de escalamiento característicos, de tal manera que los rangos de variación son mucho más grandes que los errores estadísticos.

5. Por primera vez, se ha observado un nuevo tipo de rugosidad anormal no-convencional en experimentos de quemado en medios porosos.

Además, se presentan nuevos hallazgos con relación a los exponentes de comportamiento dinámico de interfaces en pruebas de imbibición y su efecto con la anisotropía. Estos nuevos hallazgos sugieren un cambio radical en los modelos teóricos y experimentales en la dinámica de interfaces. Finalmente, se muestran los valores de dimensión fractal para cada uno de los papeles empleados en el presente estudio, empleándose el método de conteo de cajas.

Específicamente, estos resultados son importantes para desarrollar modelos físicos sencillos que relacionen los exponentes de rugosidad y de comportamiento dinámico de las interfaces con la dimensión fractal de la estructura del sistema, tomando en cuenta la anisotropía. Los resultados de este trabajo son pioneros, tanto para la investigación básica como para la investigación aplicada, debido a que se pueden aplicar a problemas de interés tecnológico e industrial. Un ejemplo de aplicación podría ser la caracterización del comportamiento de imbibición en Yacimientos Naturalmente Fracturados.

Los resultados de este trabajo ya se han publicado en revistas internacionales y presentado en congresos internacionales (ver Apéndice C).

# INTRODUCCION

Los objetos naturales que nos rodean no exhiben geometrías con contornos suaves. En realidad, el mundo natural posee geometrías con contornos rugosos. Los objetos naturales con superficies suaves son la excepción, y hasta ahora, hemos aceptado una geometría que describe geometrías raramente encontradas en el mundo real. La geometría de Euclides describe geometrías ideales – la esfera, el círculo, el cubo, el cuadrado. Sin embargo, estas geometrías son en su mayoría desarrolladas por el hombre, y no desarrolladas por la naturaleza. En resumen, la *naturaleza es desordenada*.

En ningún lugar, excepto en el *supermercado de los teóricos*, se pueden comprar sistemas puros, perfectamente caracterizados e inmaculados geoméricamente. Un ingeniero trabaja en un mundo de compuestos y mezclas. Aún los experimentales, quienes se enfocan en las sustancias más puras, ejemplificado por el crecimiento de cristales, raramente escapan de las travesuras de la naturaleza: los defectos, como son las impurezas y las vacancias. Hay pocos conceptos en la ciencia más elegantes para contemplar que una estructura cristalina periódica perfecta e infinita; y pocos sistemas que no están alejados de la realidad experimental. Así pues, estamos obligados a concebir los sistemas naturales en términos de *estructuras desordenadas*; la variación de geometrías y estructuras a menudo tan mal caracterizadas que deberíamos maldecirlas por ser aleatorias. La morfología de un sistema tiene dos aspectos importantes: la *topología*, la interconectividad de los elementos microscópicos individuales del sistema, y la *geometría*, la forma y tamaño de estos elementos individuales[2].

Se cree que, al menos arriba del nivel de la mecánica cuántica, en la *doctrina del determinismo*, aún existen sistemas *continuos* importantes, en los cuales las descripciones deterministas están más allá de las expectativas. Ejemplos típicos son la difusión y el movimiento browniano donde, en ciertas escalas de longitud, se observa un proceso aleatorio aparente, o *dinámica desordenada*. Así pues, la naturaleza es desordenada tanto en su estructura como en el proceso que desarrolla. Un ejemplo es el flujo de fluido a través de un medio poroso, donde la interrelación entre la estructura desordenada del espacio poroso y la dinámica del movimiento del fluido da lugar a una rica variedad de fenómenos, los cuales serán tratados en el presente trabajo.

Desde hace dos décadas, la percolación se ha empleado para modelar una amplia variedad de fenómenos en *sistemas desordenados*. La percolación nos dice cuando un sistema es *macroscópicamente* abierto para un cierto fenómeno. Por ejemplo, puede decirnos cuando hay circulación de vehículos de un punto de una ciudad a otro, cuando la corriente eléctrica puede fluir de un extremo de una red de conductores eléctricos, al otro extremo, y *cuanto petróleo se puede extraer de un yacimiento petrolero*. El punto en el cual se presenta una transición de percolación

entre un sistema abierto y un sistema cerrado por primera vez, se llama *umbral de percolación* del sistema, y el comportamiento del sistema cercano a este punto es de gran interés e importancia, porque nos indica un valor crítico en el cual se presenta cambio en el comportamiento del sistema. La aplicación de la percolación para el modelado de fenómenos en sistemas desordenados, se basa en los siguientes criterios:

- (i) La aplicación es cuantitativa, en el sentido de que hay una correspondencia cuantitativa entre las predicciones por percolación y los datos experimentales.
- (ii) El problema es de gran interés, o tiene una amplia importancia industrial, tecnológica y científica.
- (iii) Se debe tener un claro entendimiento del problema y cómo aplicar la percolación.

Además, puesto que los conceptos principales de la teoría de la percolación son simples, se pueden escribir programas para simular el proceso de percolación, de manera que también sirve como una introducción a la simulación por computadora.

Entre los mayores logros en años recientes, que han influido significativamente en el entendimiento de estructuras desordenadas y su formación mediante procesos aleatorios, están los conceptos fractales, introducidos y desarrollados por B. B. Mandelbrot[21]. La geometría fractal es un lenguaje matemático empleado para describir geometrías complejas y es especialmente adecuada para las computadoras debido a su naturaleza iterativa.

En general, la geometría fractal es una herramienta que caracteriza cuantitativamente cómo el espacio es ocupado por una curva o geometría particular. La dimensión fractal es un parámetro que describe las cantidades relativas de detalle o "rugosidad" presentes en ciertos intervalos de escala. Entre más tortuosa, compleja y más rica en detalle es la curva, mayor es la dimensión fractal. Sin embargo, la dimensión fractal y la rugosidad no son sinónimos. Generalmente, la rugosidad es una medida de la variación promedio sobre un valor promedio y no está relacionada a la escala o cambios en escala. La dimensión fractal se usa para cuantificar la variación de la longitud, o área, con cambios en la escala. Así pues, la dimensión fractal es una propiedad intensiva y la rugosidad no.

Hoy día, los conceptos de fractales se han aplicado a las ciencias naturales por varias razones:

1. La auto-similaridad y la auto-afinidad son los conceptos que unifican áreas como fractales, ley de potencias y caos. La auto-similaridad, o invarianza bajo cambios de escala o tamaño isotrópico, es un atributo de muchas leyes de la naturaleza y de una infinidad de fenómenos en el mundo que nos rodea. De hecho, la auto-similaridad es una de las simetrías fundamentales que rigen en universo. De igual manera, la auto-afinidad, o invarianza bajo cambios de escala o tamaño anisotrópico, y es un atributo

de muchas superficies e interfaces que se presentan en algunos fenómenos naturales e industriales.

2. La longitud de una curva fractal (así como el área de una superficie fractal) depende de la resolución en la cual se realice la medición y diverge cuando la resolución tiende a infinito.

3. Las curvas fractales son funciones que son continuas, pero no tienen derivada. Esta propiedad se ha observado en algunos fenómenos naturales, tales como el movimiento browniano de una partícula y las trayectorias de las partículas cuánticas, perfiles de fractura, etc. Esta propiedad y su longitud infinita prohíben una descripción completa basada en los números reales ordinarios. Sin embargo, usando análisis no – estándar es posible resolver el problema de la no derivada de los fractales: una clase de curvas no - estándar (cuya parte estándar es el fractal común) se definieron de tal manera que se pueden construir coordenadas curvilíneas a lo largo del fractal.

4. La dimensión fractal puede ser cualquier número real. De manera que este concepto se puede aplicar a varios campos de la física, tal como la teoría de los fenómenos críticos, donde una dimensión no entera se vuelve una necesidad. Uno de los campos más fértiles para el análisis fractal son los fenómenos de fluctuación y el crecimiento de interfaces rugosas en medio desordenados.

6. El concepto de fractales esta estrechamente relacionado a los conceptos de “renormalización de grupos”, “solución auto-similar” y “asíntota intermedia”. De hecho, todos estos conceptos son las aplicaciones más fructíferas de la auto-similaridad.

En resumen, los fractales están caracterizados por poseer detalle infinito, longitud infinita y la ausencia de tersura o *derivada*.

Por otro lado, las estructuras desordenadas y los procesos aleatorios que son auto-similares bajo ciertos intervalos de escala y tiempo son muy comunes en la naturaleza. Se pueden encontrar a escalas muy grandes o a escalas muy pequeñas: en galaxias y paisajes, en agregados y coloides, en superficies rugosas e interfaces, en cerámicos y polímeros, en proteínas u otras macromoléculas. Debido a que la auto-similaridad se presenta en muchos fenómenos naturales, la comunidad científica interesada en este fenómeno es muy grande: desde astrónomos y geocientíficos hasta científicos en materiales y científicos relacionados con las áreas bio-químicas.

## **Antecedentes y Planteamiento del Problema**

Una gran variedad de procesos dinámicos naturales e industriales dan origen a la formación de superficies rugosas. En algunos procesos éstas se crean mediante

la *adición* de materiales. Algunos ejemplos son el crecimiento de cristales, deposición por vapor, electrodeposición, pintado y recubrimiento por rocío y crecimiento biológico. Sin embargo, otros procesos generan superficies rugosas mediante la *eliminación* de material, como la disolución química y la corrosión, el desbastado, la erosión, desgaste y todo tipo de pulido. También existe una tercera clase de procesos, tales como la fractura, o la formación de interfaces entre dos diferentes estados de agregación de la materia, en los cuales las interfaces se forman repentinamente sin la adición o eliminación de material. Así pues, uno de los problemas de mayor reto para científicos e ingenieros es el entendimiento de la formación, el crecimiento y la dinámica de las interfaces rugosas. El interés general en el estudio del crecimiento de interfaces también tiene su importancia en el hecho de que, además de su importancia práctica, la dinámica de las interfaces está estrechamente relacionada a una variedad de problemas equivalentes, incluyendo polímeros orientados en medios desordenados, flujo de fluidos en geometrías porosas, propagación de frentes de fuego, y la dinámica de fluidos agitados.

Cada campo de la ingeniería tiene sus propios métodos para tratar los problemas de su interés. El desarrollo de nuevos métodos con mayor poder de descripción y predicción es uno de los principales objetivos de la ciencia. En el campo del crecimiento de superficies e interfaces se han desarrollado varios métodos análisis que tratan de caracterizar su crecimiento. Los métodos de análisis que se han desarrollado se basan en conceptos de escalamiento, experimentos, modelos discretos y ecuaciones de continuo, los cuales se describen a continuación en forma breve.

Uno de los conceptos modernos empleados en el estudio de varios procesos que dan lugar a interfaces rugosas es el *escalamiento*. Este tiene un poder de predicción increíble, simples manipulaciones nos permiten conectar cantidades y exponentes aparentemente independientes. Muchas cantidades mensurables obedecen a simples *relaciones de escalamiento*. Por ejemplo, se ha encontrado que en algunos sistemas el ancho de la interfase  $w(t)$  obedece a una ley de potencias,  $w(t) \sim t^\beta$ . El ancho eventualmente se satura a un valor que aumenta como una ley de potencias con respecto al tamaño del sistema,  $w(L) \sim L^\alpha$ .

Estudiando tales relaciones de escalamiento se estará en condiciones de definir el concepto de *universalidad* de clases. Este concepto es un producto de la mecánica estadística moderna, y codifica el hecho de que hay pocos factores esenciales que determinan los exponentes que caracterizan el comportamiento de escalamiento. Así pues, sistemas diferentes que a primera vista parece que no tienen ninguna relación entre ellos, se comportan de una manera bastante similar.

Los valores de los exponentes  $\alpha$  y  $\beta$  no dependen de los “detalles” estructurales del sistema. Dentro de este contexto, los exponentes de escalamiento obtenidos en flujo de fluidos coinciden con los exponentes de escalamiento obtenidos en pruebas de quemado, a pesar de que son mecanismos bastante diferentes que conducen a la formación de interfaces.

En muchos campos de la física, los experimentos son la fuerza motriz que conducen a nuevos problemas para la investigación teórica. En el campo del crecimiento de interfaces a veces sucede lo contrario. Por ejemplo, el proceso de formación de superficies rugosas era una cuestión experimental indeseable que se intentaba minimizar. Recientemente, un grupo de experimentalistas se interesó en este “patito feo”, y ahora son los pioneros[71] – mostrando que el mundo real es mucho más rico en mecanismos que conducen a la formación de superficies rugosas.

Con relación a los modelos discretos, el modelado teórico proporciona un parte sustancial de la fuerza motriz detrás de las primeras investigaciones en la morfología de las interfaces. Muchos modelos pueden ser criticados de ser elementales, debido a que el fenómeno que se modelo es bastante simple. Sin embargo, los estudios de simulación representan un puente esencial entre la teoría y los experimentos, y nos permite separar los ingredientes esenciales que determinan la morfología de la interfase, de detalles innecesarios.

Finalmente, con respecto a las ecuaciones de continuo, recientemente, se han introducido herramientas con mucho éxito que ayudan a comprender el comportamiento de varios procesos de crecimiento: las ecuaciones diferenciales estocásticas. Estas describen la interfase a escalas de longitud muy grandes, lo que significa que se desprecian los “detalles” de las escalas de longitud pequeñas, y se enfoca solamente en las propiedades del comportamiento asintótico a escalas grandes.

Una de las primeras tareas en la investigación de un problema nuevo de interfaces es intentar derivar una ecuación de crecimiento continuo. Si ya se cuenta con un modelo discreto para el sistema, entonces deberíamos ser capaces de derivar la ecuación del continuo correspondiente a este modelo. Sin embargo, hay un método alternativo para derivar una ecuación de crecimiento: explotando los principios de simetría. Cada proceso de simetría obedece a algunas simetrías simples. Por ejemplo, las leyes de la física son independientes de donde se defina el punto inicial de crecimiento de la interfase, de tal manera que la ecuación de crecimiento de continuo también debe ser independiente. En la mayoría de los casos las propiedades de escalamiento del sistema y las ecuaciones de continuo se determinan sin ambigüedad por las simetrías del sistema.

Una vez obtenida la ecuación de crecimiento, se pueden hacer predicciones, determinando, por ejemplo, los exponentes de escalamiento y las funciones de escalamiento. Si el proceso de crecimiento se describe mediante una ecuación suficientemente simple, se puede resolver exactamente. Sin embargo, para muchas ecuaciones no existen soluciones exactas, de manera que se deben aplicar varias aproximaciones a fin de obtener un comportamiento de escalamiento. Para este fin se emplea una herramienta poderosa llamada *método de grupo de renormalización*.

No solamente es de interés científico y tecnológico la morfología de las interfaces “pre-formadas”, sino que también la dinámica de cómo la morfología se

desarrollo con respecto al tiempo. Algunas interfaces se forman mediante el proceso de deposición, otras debido a la corrosión o ataque con una solución ácida. Otras interfaces se propagan a través de un medio desordenado. Así pues, un gran número de cuestiones se presentan con el fenómeno de *formación, crecimiento y dinámica* de interfaces.

Al sumergir un pedazo de papel toalla en un fluido, como café, se puede observar como se genera y propaga una interfase. El papel es un material no homogéneo, el prototipo de una roca porosa no homogénea que contiene petróleo. Una diferencia entre el flujo de fluido en el papel toalla y la roca que contiene petróleo es la escala de longitud en la cual el fenómeno se lleva a cabo. Esta diferencia es una ventaja: se puede usar un papel toalla de 20 cm de ancho para ayudar a desarrollar un entendimiento básico del problema que ocurre a una escala de 20 Km. Por ejemplo se puede caracterizar la interfase húmeda-seca empleando leyes de escala, cuya forma se puede predecir mediante modelos simples que capturan el mecanismo esencial que dan lugar a la morfología de la interfase. Este ejercicio de laboratorio es un ejemplo de los muchos que se pueden hacer en sistemas idealizados que dan nueva información en los problemas prácticos de interfases.

Similarmente, si tomamos una hoja de papel y la incendiamos en un extremo, tratando de conservarla horizontal de manera que no genera una flama muy grande, se puede observar como se genera una interfase conforme avanza el frente de la flama. Después de que se ha quemado una parte de papel, observamos la interfase entre la parte quemada y la no-quemada. Se nota que es rugosa, similar a aquella formada cuando sumergimos el papel en café. La pregunta obligada que surge es la siguiente: ¿ésta similitud es una coincidencia o hay algo en común entre estos procesos?

Así pues, el papel se ha vuelto un prototipo importante para estudiar ciertos fenómenos naturales relacionados con la formación, crecimiento y dinámica de interfaces, como son los de fractura, incendios forestales y flujo de fluidos en medios desordenados, por citar unos cuantos, los cuales son de interés industrial y comercial, y además, tecnológico y científico.

## **Justificación**

El crecimiento de interfaces rugosas bajo condiciones de no-equilibrio es un fenómeno muy común en la naturaleza. Ejemplos de tales procesos incluyen la difusión, el quemado, el crecimiento de grietas, fraguado de materiales granulares y flujo de fluidos en medios porosos[8]. Varias observaciones experimentales y simulaciones en computadoras de estos procesos sugieren que aunque la morfología de una interfase en crecimiento depende del mecanismo de su formación, el



comportamiento dinámico y la topografía estadística de diferentes interfaces comparten algunos aspectos de escalamiento universal[71].

Experimentos y observaciones realmente sugieren que muchos sistemas físicos desarrollan espontáneamente correlaciones con el comportamiento de leyes de potencia en el espacio y el tiempo. Estos sistemas, con muchos grados de libertad, generalmente son tan complejos que su comportamiento en escalas grandes no se puede predecir a partir de la dinámica a escala microscópica. Surgen nuevos tipos de comportamientos colectivos y su comprensión representa una de las áreas más desafiantes en la física estadística moderna. La rugosidad de interfaces en crecimiento es sólo uno de los campos en los cuales la invarianza en escala se ha observado como una característica común y básica. La invarianza en escala dinámica de las interfaces en crecimiento, los eventos y la información sobre un amplio intervalo de escalas de longitud y tiempo, se presenta de tal manera que no importa cual es el tamaño de la escala considerado siempre se observa sorprendentemente una riqueza en estructuras.

En muchos casos, el comportamiento de escalamiento espacial se atribuye a la invarianza estadística de las interfaces saturadas bajo la transformación de escala afin ( $\lambda x, \lambda^\alpha z$ ). La invarianza auto-afin implica que  $z(\lambda x) \cong \lambda^\alpha z(x)$ , donde “ $\cong$ ” denota la igualdad en el sentido estadístico, y no hay escala de longitud característica en la interfase en comparación al tamaño del sistema[136]. Por lo tanto, en este caso la magnitud de las fluctuaciones de las alturas locales sobre una ventana de tamaño  $\ell < L$  se mantiene saturada en el tiempo  $t_s \sim L^Z$ , independientemente del tamaño del sistema; es decir,  $h(L, t > t_s) \sim L^\zeta$ , donde el exponente de rugosidad local,  $\zeta = \alpha$ . Si es así, la morfología de una interfase de una grieta es caracterizada por el exponente de rugosidad único,  $0 \leq \alpha = \zeta \equiv H \leq 1$ , el cual se llama comúnmente el exponente de Hurst[66,71]. Este último está relacionado a la dimensión (fractal) local de conteo de cajas de la interfase como  $D_B = 2 - H$ .

Recientemente, la mayor atención se ha puesto en el caso especial de escalamiento dinámico anormal, el cual implica dos exponentes de rugosidad diferentes e independientes,  $H$  y  $\alpha$ , los cuales gobiernan el comportamiento en escala de las fluctuaciones en altura de la interfase en las escalas local,  $\ell \ll \xi(t)$ , y global,  $\ell \gg \xi(t)$ , respectivamente, donde  $\xi(t) \sim t^{1/Z}$  es la longitud de correlación auto-afin. En tal caso, el promedio de la altura de la interfase global se comporta como  $\alpha > H$ , a pesar de eso, el promedio de las fluctuaciones en altura local  $h(\ell \ll W, t)$  no se satura en el tiempo  $t_s \sim L^Z$ , sino que solamente cuando todo el sistema lo hace; es decir,  $t_c = t_s \sim W^Z \gg t_s \sim L^Z$ [71]. De aquí que la magnitud de las fluctuaciones en altura locales en el estado estacionario no solamente son función del tamaño de la ventana, sino que también del tamaño del sistema.

El hecho de que el crecimiento de interfaces en sistemas en no-equilibrio exhibe propiedades de escalamiento complejas no nos dice nada acerca del porqué sucede así. Por lo tanto, un punto crucial para comprender este fenómeno es el origen de la invarianza en escala general de la rugosidad de la interfase. Esto

correspondería a la comprensión del origen de las estructuras fractales y de las propiedades de Criticidad Auto-Organizada (SOC, siglas en inglés), a partir del conocimiento de los procesos físicos microscópicos en la base de estos fenómenos.

Sin embargo, actualmente no existe un formalismo sistemático que trate los procesos de crecimiento en no-equilibrio. Esto implica que los métodos de análisis tradicionales de la mecánica estadística no son los adecuados para describir el fenómeno de crecimiento de interfaces. Sin embargo, el hallazgo que el crecimiento estocástico de superficies exhibe un comportamiento en escalamiento no trivial y que evoluciona naturalmente a un estado estacionario, que no tiene una escala de tiempo o espacio característica, ha conducido al desarrollo de *un método general de escalamiento*[101] para describir el crecimiento de interfaces. Este formalismo, que se base en conceptos generales de invarianza en escala y fractales[21,71] se ha convertido en una herramienta estándar en el estudio del crecimiento de interfaces. En particular, el método de escalamiento dinámico[101] se ha aplicado al estudios de una variedad de modelos teóricos de crecimiento de interfaces, incluyendo deposición balística[134], modelo Eden[84], etc.

## Objetivos y Metas

Los objetivos principales de este trabajo son los siguientes:

- 1) Analizar la dinámica fractal de formación de interfaces en medios heterogéneos asociadas a tres fenómenos diferentes: fractura, quemado e imbibición, con la finalidad de determinar la dependencia de los exponentes críticos de la dimensión fractal de la estructura del medio heterogéneo, así como del mecanismo de formación.
- 2) Estudiar el efecto de la anisotropía del medio en la formación y dinámica de interfaces en medios porosos.

Las metas a alcanzar son las siguientes:

- 1) Estudiar los mecanismos de formación y dinámica de interfaces en medios heterogéneos en no-equilibrio.
- 2) Estudiar la relación entre la dinámica fractal de formación de interfaces y el medio heterogéneo en el cual se desarrollan.
- 3) Descubrir la naturaleza del comportamiento fractal del flujo de fluidos en medios porosos.

La metodología de investigación teórica se basa esencialmente en conceptos básicos de geometría fractal; además de teoría de la percolación, mecánica estadística, teoría de la probabilidad y teoría de los medios porosos.

En el capítulo I se presentan los conceptos básicos de la teoría de la percolación y algunos modelos que se han desarrollado para su aplicación a problemas de interés tecnológico, En el capítulo II se presentan los conceptos básicos de la geometría fractal, algunos modelos de formación de interfaces fractales, y su relación con la teoría de la percolación. En el capítulo III se expone la importancia que tienen los fractales en el estudio de las superficies e interfaces fractales, esencial para este trabajo, y algunos modelos teóricos y experimentales que se han desarrollado a fin de caracterizarlas cuantitativamente. Una revisión sobre algunos métodos empleados para caracterizar la geometría de los medios porosos se presenta en el capítulo IV. Los detalles experimentales desarrollados en este trabajo se presentan en el capítulo V. En el capítulo VI se hace un análisis de los resultados obtenidos, resaltando la importancia de algunos hallazgos obtenidos, que cambiarán la conceptos de los modelos teóricos y experimentales. Finalmente, en el capítulo VI se presentan las conclusiones, algunas recomendaciones y se sugieren trabajos a futuro.

# I ESTADO DEL ARTE

Una gran variedad de procesos dinámicos naturales e industriales dan origen a la formación de superficies rugosas. En algunos procesos las superficies rugosas se crean mediante la *adición* de materiales. Algunos ejemplos son el crecimiento de cristales, deposición por vapor, electrodeposición, pintado y recubrimiento por rocío y crecimiento biológico. Sin embargo, otros procesos generan superficies rugosas mediante la *eliminación* de material, como la disolución química y la corrosión, el desbastado, la erosión, desgaste y todo tipo de pulido. También existe una tercera clase de procesos, tales como la fractura, o la formación de interfaces entre dos diferentes estados de agregación de la materia, en los cuales las interfaces se forman repentinamente sin la adición o eliminación de material. Así pues, uno de los problemas de mayor reto en la para científicos e ingenieros es el entendimiento de la formación, el crecimiento y la dinámica de las interfaces rugosas. El interés general en el estudio del crecimiento de interfaces también tiene su importancia en el hecho de que, además de su importancia práctica, la dinámica de las interfaces está estrechamente relacionada a una variedad de problemas equivalentes, incluyendo polímeros orientados en medios desordenados, flujo de fluidos en geometrías porosas, propagación de frentes de fuego, y la dinámica de fluidos agitados.

Cada campo de la ingeniería tiene sus propios métodos para tratar los problemas de su interés. El desarrollo de nuevos métodos con mayor poder de descripción y predicción es uno de los principales objetivos de la ciencia. En el campo del crecimiento de superficies e interfaces se han desarrollado varios métodos análisis que tratan de caracterizar el crecimiento de las interfaces. Los métodos de análisis que se han desarrollado se basan en conceptos de escalamiento, experimentos, modelos discretos y ecuaciones de continuo.

Uno de los conceptos modernos empleados en el estudio de varios procesos que dan lugar a interfaces rugosas es el *escalamiento*. El escalamiento tiene un poder de predicción increíble, simples manipulaciones nos permiten conectar cantidades y exponentes aparentemente independientes. Muchas cantidades mensurables obedecen a simples *relaciones de escalamiento*. Por ejemplo, se ha encontrado que en algunos sistemas el ancho de la interfase  $w(t)$  obedece a una ley de potencias,  $w(t) \sim t^\beta$ . El ancho eventualmente se satura a un valor que aumenta como una ley de potencias con respecto al tamaño del sistema,  $w(L) \sim L^\alpha$ .

Estudiando tales relaciones de escalamiento se estará en condiciones de definir el concepto de *universalidad* de clases. Este concepto es un producto de la mecánica estadística moderna, y codifica el hecho de que hay pocos factores esenciales que determinan los exponentes que caracterizan el comportamiento de escalamiento. Así pues, sistemas diferentes que a primera vista parece que no tienen ninguna relación entre ellos, se comportan de una manera bastante similar.

Los valores de los exponentes  $\alpha$  y  $\beta$  no dependen de los “detalles” estructurales del sistema. Dentro de este contexto, los exponentes de escalamiento obtenidos en flujo de fluidos coinciden con los exponentes de escalamiento obtenidos en pruebas de quemado, a pesar de que son mecanismos bastante diferentes que conducen a la formación de interfaces.

En muchos campos de la física, los experimentos son la fuerza motriz que conducen a nuevos problemas para la investigación teórica. En el campo del crecimiento de interfaces a veces sucede lo contrario. Por ejemplo, el proceso de formación de superficies rugosas era una cuestión experimental indeseable que se intentaba minimizar. Recientemente, un grupo de experimentalistas se interesó en este “patito feo”, y ahora son los pioneros – mostrando que el mundo real es mucho más rico en mecanismos que conducen a la formación de superficies rugosas. En este trabajo se estudiará la formación de interfaces mediante los mecanismos de fractura, flujo de fluidos y quemado en medios porosos.

Con relación a los modelos discretos, el modelado teórico proporciona una parte sustancial de la fuerza motriz detrás de las primeras investigaciones en la morfología de las interfaces. Muchos modelos pueden ser criticados de ser elementales, debido a que el fenómeno que se modela es bastante simple. Sin embargo, los estudios de simulación representan un puente esencial entre la teoría y los experimentos, y nos permite separar los ingredientes esenciales que determinan la morfología de la interfase, de detalles innecesarios.

Finalmente, con respecto a las ecuaciones de continuo, recientemente, se han introducido herramientas con mucho éxito que ayudan a comprender el comportamiento de varios procesos de crecimiento: las ecuaciones diferenciales estocásticas. Tales ecuaciones describen la interfase a escalas de longitud muy grandes, lo que significa que se desprecian los “detalles” de las escalas de longitud pequeñas, y se enfoca solamente en las propiedades del comportamiento asintótico a escalas grandes.

Una de las primeras tareas en la investigación de un problema nuevo de interfaces es intentar derivar una ecuación de crecimiento continuo. Si ya se cuenta con un modelo discreto para el sistema, entonces deberíamos ser capaces de derivar la ecuación del continuo correspondiente a este modelo.

Hay un método alternativo para derivar una ecuación de crecimiento: explotando los principios de simetría. Cada proceso de simetría obedece a algunas simetrías simples. Por ejemplo, las leyes de la física son independientes de donde se defina el punto inicial de crecimiento de la interfase, de tal manera que la ecuación de crecimiento de continuo también debe ser independiente. En la mayoría de los casos las propiedades de escalamiento del sistema y las ecuaciones de continuo se determinan sin ambigüedad por las simetrías del sistema.

Una vez obtenida la ecuación de crecimiento se deben encontrar predicciones, determinando, por ejemplo, los exponentes de escalamiento y las funciones de

escalamiento. Si el proceso de crecimiento se describe mediante una ecuación suficientemente simple, se puede resolver exactamente. Sin embargo, para muchas ecuaciones no existen soluciones exactas, de manera que se deben aplicar varias aproximaciones a fin de obtener un comportamiento de escalamiento. Para este fin se emplea una herramienta poderosa llamada *método de grupo de renormalización*.

Una de las características de los objetos fractales es que son invariantes en escala; es decir, la geometría es la misma a diferentes escalas de observación. De hecho, muchas superficies e interfaces son ejemplos de fractales auto-afines, los cuales se consideran como "intermedios" entre objetos fractales y objetos no fractales, por la siguiente razón. Cuando se hace un cambio en escala, que sea el mismo en todas direcciones, los objetos auto-afines cambian su morfología. Por otro lado, cuando se hace un cambio en escala, que sea diferente en cada dirección, las interfaces no cambian su morfología. Pero en general se consideran como objetos fractales porque no cambian su morfología antes y después de la transformación.

Por otro lado, muchos estudios teóricos se han dirigido a la comprensión del comportamiento dinámico en escala en el crecimiento de interfases. Los conceptos de escalado dinámico para describir el crecimiento de una interfase se basan en la invarianza en escala anisotrópica de los fractales auto-afines. El comportamiento de escalado dinámico se ha estudiado mediante varios modelos teóricos, incluyendo partículas discretas y simulaciones en computadora. Sin embargo, el problema de la comprensión del aspecto dinámico de crecimiento de interfase no ha sido apoyado por extensos estudios experimentales. La otra parte de este trabajo se enfoca en el estudio de la dinámica fractal de crecimiento de interfases empleando un gran número de probetas de diferentes tipos de papel. También se estudia el efecto de la anisotropía en el crecimiento de la interfase.

# JUSTIFICACION

Desde que B. B. Mandelbrot publicó su libro clásico: “*The Fractal Geometry of Nature*”[I.13], la geometría fractal ha tenido lugar un desarrollo impresionante para describir el comportamiento de muchos fenómenos en la naturaleza. Uno de los primeros fenómenos físicos que se estudiaron dentro del marco de la geometría fractal fue el movimiento browniano de una partícula. Mandelbrot demostró que la trayectoria que sigue una partícula browniana es fractal[I.13]. Por otro lado, la teoría de la percolación, la cual representa el modelo más simple de un sistema desordenado, ha dado lugar a teorías de escala que se fundamentan en exponentes universales[I.1,I.2]. Estos exponentes universales sólo dependen de la dimensión del sistema; no dependen del tipo de estructura (en este caso tipo de red). Además, se ha encontrado una relación entre la teoría de la percolación y la geometría fractal. Esta relación se fundamenta en el hecho que la teoría de la percolación genera estructuras que se pueden caracterizar cuantitativamente mediante la dimensión fractal, y tiene su fundamento matemático al relacionar la dimensión fractal de un grupo auto-similar con los exponentes de escala  $\beta$  y  $\nu$ .

En teoría de la percolación se han desarrollado modelos teóricos para tratar de describir el comportamiento de ciertos fenómenos físicos. Los modelos que más se han aceptado dentro de la comunidad científica son el modelo de *percolación orientada*[V.2] y el modelo de *percolación por conquista*[I.18]. Estos modelos se usan para tratar de describir el comportamiento de un fluido en un medio poroso, o el comportamiento de la propagación de un frente de fuego en un sistema desordenado, entre muchos otros problemas.

En el campo de la propagación de un fluido en un medio poroso se han desarrollado modelos de percolación orientada, en especial el modelo *DPD (Depinning Percolation Directed)*[V.2], para tratar de comprender la dinámica de una interfase que crece en condiciones de no-equilibrio. Recientemente, el interés por entender las propiedades básicas en los procesos de crecimiento de interfases ha aumentado de forma significativa, lo cual ha dado lugar al diseño de estudios experimentales para verificar la aplicabilidad de los varios modelos teóricos a sistemas experimentales. Mientras que muchos modelos experimentales se han inspirado en la teoría KPZ, éstos han fallado en predecir el valor del exponente de rugosidad  $\alpha = 1/2$  y  $\beta = 1/3$  para sistemas  $d + 1$ . En cambio, los datos obtenidos en varios trabajos experimentales[V.1-V.7] reportan que  $\alpha > 1/2$  y  $\beta > 1/3$ . Estos resultados experimentales llevaron a la conclusión que el desorden inherente del sistema afecta de manera inesperada los exponentes de escala. Sin embargo, estos estudios experimentales se han llevado a cabo empleando un solo tipo de material[V.12], y pocas probetas de dicho material (este material generalmente es papel toalla).

En este trabajo se estudian interfases generadas mediante diferentes procesos en probetas de papel. Se emplean dos tipos diferentes de papel (por primera vez). Con este trabajo experimental se analiza la universalidad del exponente de rugosidad. Por otro lado, se estudia la dinámica de interfases que crecen fuera de equilibrio en probetas de papel. Se emplean dos diferentes tipos de papel. Se analiza la dependencia de los

exponentes de escala  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$  con respecto a la anisotropía y al tipo de sistema (en este caso tipo de papel).

Finalmente se puede decir que estos trabajos pueden tener su aplicación práctica en la industria petrolera. Un papel es el prototipo de una roca que contiene petróleo. La única diferencia es la escala en la cual se llevan a cabo los fenómenos; es decir, el flujo de un fluido a través de un papel y el flujo de petróleo a través de una roca porosa. Con estos experimentos se puede obtener mayor información acerca del comportamiento de un fluido en un medio poroso.



# OBJETIVOS

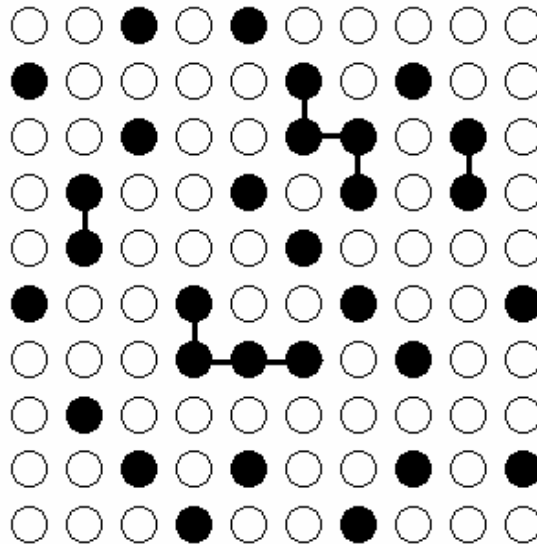
Los objetivos del presente trabajo son los siguientes:

1. Analizar la formación de interfases mediante tres mecanismos diferentes: fractura, quemado y absorción de líquidos en medios porosos.
2. Estudiar la dinámica fractal en el crecimiento de interfases en medios porosos.
3. Estudiar el efecto de la anisotropía en la dinámica fractal de interfases en medios porosos.

# I. PERCOLACION

## 1.1 Conceptos Básicos

Una estructura de percolación representa el modelo más simple de un sistema desordenado[1-3]. Considere una red cuadrada en la que cada sitio se ocupa aleatoriamente con una probabilidad  $p$ , o se encuentra vacío con una probabilidad  $(1-p)$ , como se muestra en la figura I-1. Los sitios ocupados y vacíos pueden representar propiedades físicas muy diferentes. Por ejemplo, considere que los sitios ocupados representan conductores de la electricidad y los sitios vacíos representan aislantes, y que la corriente eléctrica solamente puede fluir entre los vecinos más cercanos de los sitios del conductor (en la figura I-1 los sitios más cercanos se representan mediante una línea que los une).

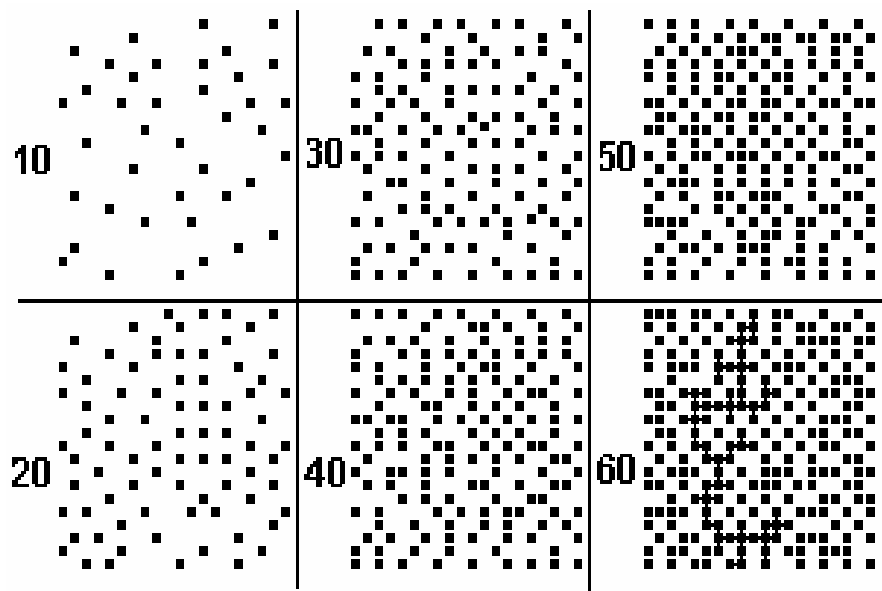


**Figura I-1.** Ejemplo de una red cuadrada de 10 x 10, con probabilidad  $p = 0.3$ . Los círculos negros representan los sitios ocupados (conductores) y los círculos blancos representan los sitios vacíos (aislantes).

A bajas concentraciones de  $p$ , los sitios que representan los conductores pueden estar aislados o bien, pueden formar pequeños clusters de sitios llamados *clusters*. La única condición para que se formen estos clusters es que los sitios se encuentren conectados entre sí por un enlace que representa una trayectoria mínima, de tal manera que pueda fluir corriente eléctrica entre ellos. A bajos valores de  $p$ , la red representa un aislante, puesto que no existe ninguna trayectoria que conecte los bordes opuestos de la red (por ejemplo borde superior con borde inferior). Por otro lado, a altos valores de  $p$ , existen muchas trayectorias que conectan los bordes opuestos de la red; por lo tanto, puede fluir corriente eléctrica a través de toda la red. En este caso la red representa un conductor de la electricidad.

Por lo tanto, existe un valor crítico de concentración, llamado *umbral de percolación*  $p_c$ , cuando por primera vez la corriente eléctrica puede *percolar* de un extremo a otro de la red, como se muestra en la figura I-2. Debajo de este umbral de percolación  $p_c$ , se tiene un aislante, mientras que arriba de  $p_c$  se tiene un conductor. Así pues, se puede decir que este umbral de percolación separa dos fases diferentes: una fase aislante y una fase conductora.

Como una variante del ejemplo anterior, suponga que los sitios ocupados representan superconductores y los sitios vacíos representan conductores, entonces  $p_c$  separa una fase de conducción normal ( $p < p_c$ ) de una fase superconductora, ( $p > p_c$ ).



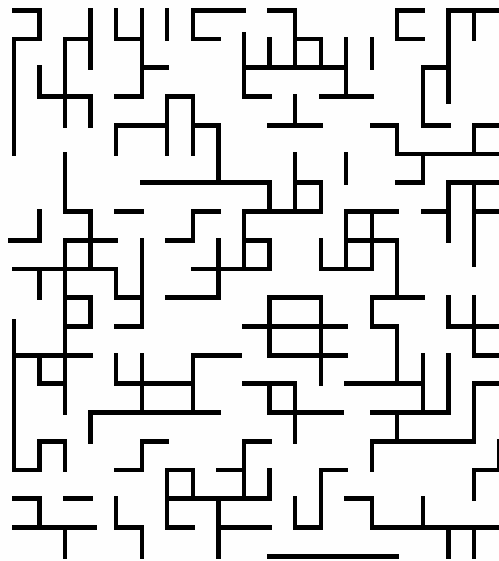
**Figura I-2.** Ejemplos de percolación en una red cuadrada de 20 x 20 con  $p = 0.1, 0.2, \dots, 0.60$ . Los sitios ocupados representan conductores (puntos negros) y los sitios vacíos representan aislantes (no se muestran). A  $p = 0.6$  se presenta el cluster de percolación.

En contraste a las transiciones de fase térmicas más comunes, donde la transición entre dos fases se presenta a una temperatura crítica, la *transición de percolación* que se ha descrito es una *transición de fase geométrica*, la cual se caracteriza por los aspectos geométricos de los clusters grandes en la vecindad de  $p_c$ . Como ya se mencionó, a valores pequeños de  $p$  solamente existen pequeños clusters de sitios ocupados, conforme aumenta la concentración de  $p$ , aumenta el tamaño promedio de los clusters. A una concentración crítica  $p_c$ , aparece un cluster grande, el cual conecta los lados opuestos de la red. A este cluster grande se le llama *cluster infinito*, puesto que su tamaño diverge cuando el tamaño de la red aumenta hasta infinito. Cuando  $p$  aumenta aun más, aumenta la densidad del cluster infinito, debido a que cada vez más y más sitios forman parte del cluster infinito. De acuerdo con esto, el tamaño promedio de los clusters *finitos* disminuye, aquellos que

no pertenecen al cluster infinito. Trivialmente, a  $p = 1$ , todos los sitios pertenecen al cluster infinito.

Hasta el momento, se ha considerado la *percolación por sitios*, donde los sitios de una red se ocupan aleatoriamente. Ahora bien, cuando los enlaces entre los sitios se eligen aleatoriamente, se habla de *percolación por enlaces*. Dos enlaces pertenecen al mismo cluster si están conectados por una trayectoria de enlaces vecinos más cercanos, como se muestra en la figura I-3. La concentración crítica de enlaces separa una fase de clusters finitos de enlaces de una fase con un cluster infinito de enlaces.

Quizás, el ejemplo más común de percolación por enlaces en física es una *red de resistores*, en la cual los cables metálicos de una red regular se cortan aleatoriamente con probabilidad  $q \equiv (1 - p)$ . En este caso,  $q_c$  separa una fase conductora, con un valor bajo de  $q$ , de una fase aislante con un valor alto de  $q$ .



**Figura I-3.** Ejemplo de percolación por enlaces en una red cuadrada de 20 x 20.

La percolación por enlaces puede tener una aplicación práctica en química: el proceso de polimerización[4]. En este proceso pequeñas moléculas pueden formar grandes clusters de moléculas mediante la activación de más y más enlaces entre ellas. Si la probabilidad de activación  $p$  es mayor que la concentración crítica, entonces se formará una red de enlaces químicos que se extenderá en todo el sistema; si por el contrario, la probabilidad de activación  $p$  es menor que la concentración crítica, solamente se formarán macromoléculas de tamaño finito. A este proceso se le llama transición *sólido-gel*. Un ejemplo típico del proceso de *gelación* es la cocción de un huevo en agua, el cual a temperatura ambiente es líquido y al cocerlo se vuelve más sólido, como un gel.

En el campo de la biología, un ejemplo típico puede ser la propagación de una epidemia[5]. En su forma más simple, la epidemia empieza con un enfermo, el cual puede contagiar a sus vecinos más cercanos con una probabilidad  $p$  en un lapso de tiempo. Después de cierto tiempo, el enfermo muere y las personas contagiadas pueden contagiar a otras personas sanas, y así continua el proceso. En este caso, la concentración crítica separa una fase donde la epidemia siempre desaparece lentamente después de un lapso de tiempo finito (a una concentración baja de  $p$ ) de otra fase donde la epidemia puede continuar indefinidamente. Este mismo proceso se puede usar como un modelo para la propagación de incendios forestales[1,6], con la probabilidad de contagio reemplazada por la probabilidad de que un árbol que arde incendie a sus vecinos más cercanos.

Además de estos ejemplos sencillos, se ha encontrado que la teoría de la percolación es útil para describir un gran número de sistemas desordenados en física y química, tales como materiales porosos y amorfos (incluyendo películas delgadas); conductores iónicos desordenados (incluyendo vidrios con mezclas alcalinas, mezclas de dos fases y conductores iónicos dispersos); polímeros ramificados, fragmentación (incluyendo fragmentación nuclear y terremotos); estructuras galácticas y agua super-enfriada[7,8].

Las definiciones de percolación por sitios y percolación por enlaces en una red cuadrada se pueden generalizar fácilmente para cualquier red de  $d$ -dimensiones. En general, en una red cualquiera, un enlace tiene contacto con más vecinos más cercanos que un sitio. Por ejemplo, en una red cuadrada un enlace está conectado a seis enlaces vecinos más cercanos, mientras que un sitio tiene solamente cuatro sitios vecinos más cercanos, en una red triangular un enlace tiene ocho vecinos más cercanos, mientras que un sitio tiene solamente seis vecinos más cercanos. Así pues, es más fácil formar grandes clusters de enlaces que formar grandes clusters de sitios, y como consecuencias, se requiere una concentración más baja de enlaces para formar un cluster que se extienda por toda la red; es decir, en una red cualquiera el umbral de percolación por enlaces es menor que el umbral de percolación por sitios (ver Tabla I-1).

Hasta el momento, se han discutido los problemas de percolación por sitios y percolación por enlaces, en los cuales los sitios (o los enlaces) de una red cualquiera se eligen aleatoriamente. Ahora consideremos el siguiente caso: los sitios se ocupan con una probabilidad  $p$  y los enlaces se ocupan con una probabilidad  $q$ . Dos sitios ocupados pertenecen al mismo cluster si están conectados por una trayectoria de sitios vecinos más cercanos con un enlace ocupado entre ellos. En este caso el problema de percolación se vuelve un problema de percolación por sitios-enlaces. En el caso de  $q = 1$  la percolación por sitios-enlaces se reduce a percolación por sitios, mientras que para el caso de  $p = 1$  el problema se reduce a percolación por enlaces. En general, ambos parámetros caracterizan el estado del sistema. De acuerdo con esto, una *línea crítica* en el espacio  $p$ - $q$  separa ambas fases, para el caso que  $p = 1$  y  $q = 1$  se toman los valores de las concentraciones críticas de enlaces y sitios, respectivamente. La percolación por sitios-enlaces puede ser importante para procesos de gelación y epidemias en medios diluidos.

Quizás, el ejemplo más natural de la percolación es la percolación continua, donde las posiciones de los dos componentes de una mezcla aleatoria no están restringidas a los sitios discretos de una red regular. Como un simple ejemplo, considere una hoja de material conductor perforada aleatoriamente con hoyos circulares, ver figura I-4. Ahora bien, la cantidad importante es la fracción  $p$  de material conductor sobrante. Comparada con la percolación por sitios y la percolación por enlaces, la concentración crítica disminuye aún más:  $p_c \cong 0.312 \pm 0.005$  para  $d = 2$ , cuando todas las perforaciones tienen el mismo radio. Este ejemplo se puede generalizar fácilmente para el caso de 3 dimensiones, donde se generan huecos esféricos aleatoriamente en un cubo, y  $p_c \approx 0.034 \pm 0.007$ . Debido a su similitud con el queso suizo, a este modelo de percolación continua se le llama el modelo del queso suizo. Se emplean modelos similares para describir arenas y otros materiales porosos, donde el radio de las esferas varía.

**Tabla I-1.** Umbrales de percolación para varias redes bi- y tridimensionales y el árbol de Cayley.  
<sup>a</sup>Exacto[10,11], <sup>b</sup>Métodos numéricos[12], <sup>c</sup>Monte Carlo[1], <sup>d</sup>Expansión de series[13], <sup>e</sup>Monte Carlo[14], <sup>f</sup>Expansión de series[15], <sup>g</sup>Métodos numéricos[16], <sup>h</sup>Métodos numéricos[11],

Red	Percolación por:	
	Sitios	Enlaces
Triangular	$1/2^a$	$2\text{sen}(\pi/18)^a$
Cuadrada	$0.592746^{b,h}$	$1/2^a$
Panal	$0.6962^c$	$1-2\text{sen}(\pi/18)^a$
Cubica centrada en las caras	$0.198^c$	$0.119^c$
Cubica centrada en el cuerpo	$0.245^c$	$0.1803^d$
Cúbica simple (1 <sup>er</sup> nn)	$0.31161^{e,g}$	$0.248814^g$
Cubica simple (2 <sup>a</sup> nn)	$0.137^f$	-----
Cúbica simple (3 <sup>er</sup> nn)	$0.097^f$	-----
Arbol de Cayley	$1/(z-1)$	$1/(z-1)$

Antes de finalizar esta sección, es importante que se mencionen los orígenes de la teoría de la percolación. El proceso de percolación primero lo desarrollaron Flory[17] y Stockmayer[18] hace cerca de 50 años, cuando estudiaban el proceso de gelación. Originalmente abordaron el concepto de la propagación de las partículas de un fluido hipotético a través de un medio aleatorio. Los términos fluido y medio se consideraron en su acepción más general; es decir, un fluido podría ser líquido, vapor, flujo de calor, corriente eléctrica, infección, etc. El medio – donde el fluido se transporta – podría ser el espacio poroso de una roca, un arreglo de árboles, o el universo. Hablando en términos generales, la propagación de un fluido a través de un medio desordenado implica algunos elementos aleatorios, pero los mecanismos fundamentales para este fenómeno solamente puede ser uno de dos tipos muy diferentes. En un tipo, la aleatoriedad es debida al *fluido*,: las partículas del fluido deciden por donde ir a través del medio. Como ejemplo de este tipo de mecanismo podemos citar el *proceso de difusión*. En el otro tipo, la aleatoriedad es debida al

*medio*: el medio dicta las trayectorias de las partículas. Esta fue precisamente la nueva situación que consideraron Broadbent y Hammersley en 1957 cuando estudiaban la propagación de fluidos en medios desordenados[19]. A ellos se debe la introducción del término *percolación*. Decidieron llamarlo proceso de percolación porque pensaban que la propagación de un fluido a través de un medio desordenado era muy similar al flujo de café a través de una cafetera (*percolator* en el idioma inglés). A ellos también se debe la introducción de importantes conceptos geométricos y probabilísticos. Los desarrollos de la teoría de transición de fases en años posteriores, en particular el método de expansión de series por Domb (ver [7]) y con la teoría de renomarlización de clusters por Wilson, Fisher y Kadanoff (ver [20]) estimularon en gran medida las actividades de investigación en la transición de percolación geométrica. Los conceptos de fractales introducidos por Mandelbrot[21] han proporcionado nuevas herramientas poderosas, que junto con el desarrollo de computadoras a gran escala, han contribuido significativamente a una mejor comprensión de la teoría de la percolación.

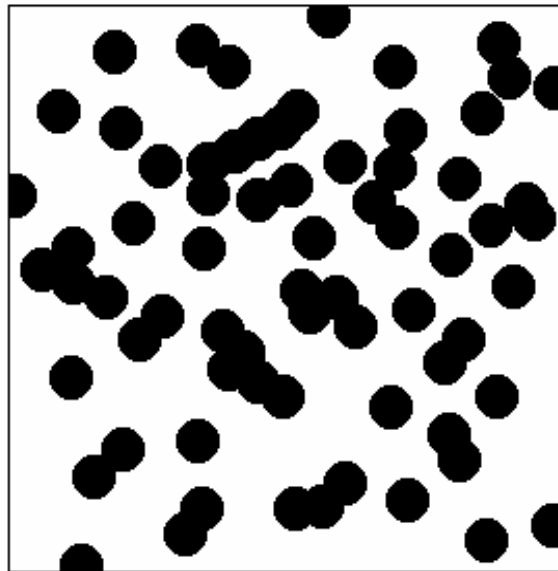


Figura I 4. Percolación continua: modelo del queso suizo.

## I.2 La Percolación como un Fenómeno Crítico.

La transición de percolación es un ejemplo simple de un fenómeno de transición de fase. Es una transición de fase geométrica donde la concentración crítica  $p_c$  separa una fase de clusters finitos ( $p < p_c$ ) de una fase en la que se presenta un cluster infinito ( $p > p_c$ ). Los ejemplos más comunes de transiciones de fase son las transiciones de fase térmica, como la transición sólido/líquido, donde la fase ordenada (fase sólida) cambia a una fase desordenada (fase líquida) a una temperatura crítica,  $T_c$ [22,23].

Otro ejemplo ilustrativo de transición de fase es la transición de fase magnética. A bajas temperaturas algunos materiales exhiben una magnetización espontánea,  $m > 0$ , sin ningún campo externo (fase ferromagnética). Cuando la temperatura aumenta la magnetización espontánea comienza a disminuir y desaparece a una temperatura crítica  $T_c$ . Arriba de  $T_c$ ; es decir, en la fase paramagnética,  $m = 0$ .

La razón del cambio de una fase ferromagnética a una fase paramagnética es la siguiente: un material magnético se compone de momentos magnéticos elementales (spins). Las interacciones entre ellos favorecen un estado ordenado donde todos los spins están orientados paralelamente, mientras que la energía térmica favorece un estado desordenado donde los spins tienen una orientación aleatoria. A bajas temperaturas, la interacción entre ellos domina y se presenta un orden de largo alcance, el cual se manifiesta en una magnetización espontánea con  $m \neq 0$ . Debido a que  $m$  describe el orden del sistema, se le llama *parámetro de orden*. Al aumentar la temperatura  $m(T)$  disminuye y cerca de  $T_c$  exhibe un comportamiento de ley de potencias  $m(T) \sim (T_c - T)^\beta$ . Arriba de  $T_c$  domina la energía térmica, y solamente pueden existir clusters finitos de spins orientados en forma paralela temporalmente, y su orientación aleatoria lleva a una magnetización cero,  $m = 0$ .

En la percolación, la concentración  $p$  de sitios ocupados juega el mismo papel que la temperatura en la transición de fase térmica. Más adelante se verá que como en el caso de las transiciones térmicas, correlaciones de largo alcance controlan la transición de percolación y las cantidades importantes cerca de  $p_c$  se describen mediante leyes de potencias y exponentes críticos.

La transición de percolación se caracteriza por las propiedades geométricas de los clusters cerca de  $p_c$ . Una cantidad importante es la probabilidad de percolación  $P_\infty$ , la cual nos indica la probabilidad de que un sitio (o enlace) pertenezca a un cluster infinito. Para el caso que  $p < p_c$ , solamente existen clusters finitos y  $P_\infty = 0$ ; en cambio, para el caso que  $p > p_c$ , se presenta un cluster infinito y  $P_\infty$  se comporta como la magnetización abajo de  $T_c$ , y aumenta con  $p$  de acuerdo a una ley de potencias:

$$P_\infty \sim (p - p_c)^\beta \quad (I-1)$$

Similarmente a la magnetización,  $P_\infty$  describe el orden en el sistema de percolación y se puede identificar como el *parámetro de orden*.

El tamaño de los clusters *finitos* abajo y arriba de  $p_c$  se caracteriza por la *longitud de correlación*,  $\xi$ . La longitud de correlación se define como la distancia promedio entre dos sitios en el mismo cluster finito. Cuando  $p$  se aproxima a  $p_c$ ,  $\xi$  aumenta de acuerdo a:



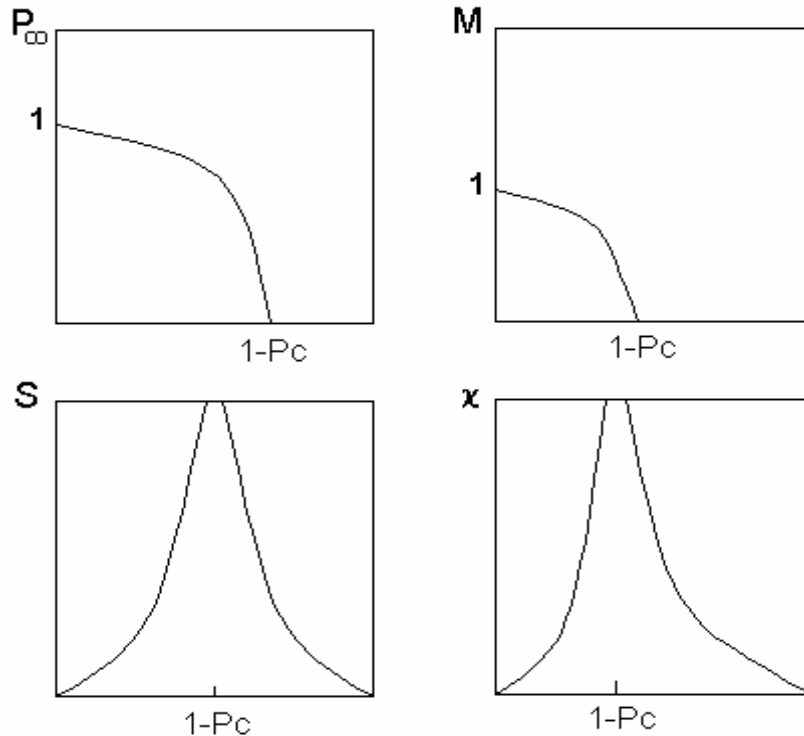
$$\xi \sim |p - p_c|^{-\nu} \quad (I-2)$$

con el mismo exponente  $\nu$  abajo y arriba del umbral. El número promedio de sitios (masa) de un cluster finito también obedece a una ley de potencias:

$$S \sim |p - p_c|^{-\gamma} \quad (I-3)$$

nuevamente, con el mismo exponente  $\gamma$  arriba y debajo de  $p_c$ . Para obtener  $\xi$  y  $S$ , se requieren los promedios de todos los clusters finitos en la red.

Por analogía, las cantidades  $P_\infty$  y  $S$  son semejantes a la magnetización  $m$  y la susceptibilidad  $\chi$  para sistemas magnéticos (ver figura I-5 y Tabla I-2).



**Figura I-5.** Comparación de  $S$  y  $P_\infty$  con la magnetización  $m$  y la susceptibilidad  $\chi$ .

Los exponentes  $\beta$ ,  $\nu$  y  $\gamma$  describen el comportamiento crítico de las cantidades típicas asociadas con la transición de percolación y se les llaman *exponentes críticos*. Los exponentes críticos son universales y no dependen de los detalles estructurales de la red (por ejemplo: red cuadrada, red triangular, red hexagonal, etc.) ni del tipo de percolación (percolación por sitios, percolación por enlaces o percolación continua), sino que solamente depende de la dimensión topológica  $d$  de la red.

Esta propiedad de universalidad es una característica general de las transiciones de fase, donde los parámetros de orden desaparecen continuamente en el punto crítico (transición de fase de segundo orden). Por ejemplo, la magnetización en todos los materiales magnéticos tridimensionales se caracteriza por el mismo exponente  $\beta$ , independientemente de la estructura cristalina o del tipo de interacción entre los spins, siempre y cuando estén en un rango corto.

Los exponentes  $\beta$ ,  $\nu$  y  $\gamma$  no son solamente exponentes críticos que caracterizan la transición de percolación. Por ejemplo, la distribución del tamaño de los clusters de percolación se puede describir mediante otros exponentes:  $\alpha$ ,  $\tau$  y  $\sigma$ . Sin embargo, existen relaciones entre estos exponentes y todos ellos se pueden obtener a partir del conocimiento de sólo dos de ellos.

**Tabla I-2.** Valores exactos y mejor estimados para los exponentes críticos en percolación y magnetismo. <sup>a</sup>Exacto[24,25], <sup>b</sup> simulaciones numéricas[

<b>Percolación</b>	d = 2	d = 3
Parámetro de orden $P_\infty: \beta$	$5/36^a$	$0.417 \pm 0.003^b$
Longitud de correlación $\xi: \nu$	$4/3^a$	$0.875 \pm 0.008^b$
Tamaño promedio de los clusters $S: \gamma$	$43/18^a$	$1.795 \pm 0.005^b$
<b>Magnetismo</b>	d = 2	d = 3
Parámetro de orden $m: \beta$	$1/8$	0.32
Longitud de correlación $\xi: \nu$	1	0.63
Susceptibilidad $\chi: \gamma$	$7/4$	1.24

En la Tabla I-2, se muestran los valores de los exponentes críticos  $\beta$ ,  $\nu$  y  $\gamma$  en percolación para dos y tres dimensiones, respectivamente. Se comparan con los exponentes de la transición de fase magnética.

Los exponentes críticos que hasta el momento se han considerado describen las propiedades geométricas de la transición de percolación. Las propiedades físicas asociadas con la transición fase también exhiben un comportamiento de ley de potencias cerca de  $p_c$  y son caracterizadas por los exponentes críticos. Como algunos ejemplos se pueden citar los siguientes: la conductividad en un resistor aleatorio, o la velocidad de propagación de una epidemia cerca de la probabilidad de infección crítica. Presumiblemente, sus exponentes “dinámicos” generalmente no se pueden relacionar a los exponentes geométricos discutidos anteriormente.

### I.3 Fenómeno de Cruzamiento

La longitud de correlación  $\xi$  es la única escala de longitud característica en percolación. Para  $p > p_c$  la longitud de correlación es finita y se espera un comportamiento diferente en las escalas de longitud  $r < \xi$  y  $r > \xi$ , donde  $r$  representa

el radio de una esfera. En esta sección se presenta una teoría de escalamiento que describe el comportamiento cruzado en varias cantidades tales como  $P_\infty$  (probabilidad de percolación),  $M(r)$  (describe la masa de un cluster dentro de una esfera de radio  $r$ ), y  $M(\ell)$  (describe la masa de un cluster dentro de una distancia química  $\ell$ ). Primero, considérese la probabilidad  $P_\infty$  de que un sitio ocupado pertenezca al cluster infinito. Para determinar  $P_\infty$  se escogen sub-sistemas de tamaño lineal  $r$  y se determina la fracción de sitios en este sistema que pertenecen al cluster infinito. Si  $r \gg \xi$  el sistema se comporta como si  $r = \infty$  y  $P_\infty$  es independiente de  $r$  y se describe mediante  $P_\infty \sim (p - p_c)^\beta$ . Por otro lado, si  $r \ll \xi$  el número de sitios del cluster infinito dentro de un círculo de radio  $r$  es proporcional a  $r^{d_f}$ . El número total de sitios ocupados dentro de  $r$  es proporcional a  $pr^d$ , y de aquí que  $P_\infty \sim r^{d_f-d}$ . Puesto que  $\xi$  es la única longitud característica, se puede asumir que  $P_\infty$  depende de  $r$  y  $\xi$  solamente via la relación  $r/\xi$ . Esto lleva a la siguiente ecuación de escalamiento:

$$P_\infty \sim (p - p_c)^\beta G(r/\xi) \sim \xi^{-\beta/\nu} G(r/\xi) \quad (I-4)$$

La función de escalamiento  $G$  describe el cruzamiento desde  $r/\xi \ll 1$  a  $r/\xi \gg 1$ . A fin de obtener los resultados esperados en los dos umbrales, se debe cumplir que:

$$G(x) \sim \begin{cases} x^{d_f-d}, & x \ll 1, \\ \text{constante.}, & x \gg 1 \end{cases} \quad (I-5)$$

De la ecuación (I-5) se puede determinar cómo la masa promedio  $M$  del cluster infinito escala con  $r$  y  $\xi$  cuando  $p > p_c$ . Puesto que  $M \sim r^d P_\infty(r, \xi)$  la masa promedio del cluster infinito escala como:

$$M \sim r^{d-\beta/\nu} H(r/\xi), \quad H(x) = x^{\beta/\nu} G(x) \quad (I-6)$$

Ahora se considera como  $M$  escala con la longitud química para  $p > p_c$ . Sustituyendo  $r \sim \ell^{\bar{\nu}}$  en (I-6) se obtiene:

$$M \sim \ell^{\bar{\nu}(d-\beta/\nu)} g(\ell/\xi_\ell) \quad (I-7)$$

donde  $\xi_\ell$  es la longitud de correlación en el espacio  $\ell$ . A partir de  $r \sim \ell^{\bar{\nu}}$ , (I-6) y (I-7) se obtiene una función de escalamiento  $g(x)$ :

$$g(x) \sim \begin{cases} \text{constante.}, & x \ll 1, \\ x^{1-\bar{\nu}}, & x \gg 1 \end{cases} \quad (I-8)$$

Las ecuaciones (I-7) y (I-8) generalizan la siguiente ecuación:

$$r \sim \ell^{1/d_{min}} \equiv \ell^{\bar{\nu}}$$

Finalmente, se estudia cómo la distancia Euclídeana promedio  $r$  entre sitios separados por una distancia química fija  $\ell$  escala arriba de  $p_c$ . Mediante argumentos de escalamiento similares a los anteriores se espera que  $r$  escale como

$$r \sim \ell^{\bar{\nu}} f(\ell / \xi_\ell) \quad (I-9)$$

donde

$$f(x) \sim \begin{cases} \text{constante.}, & x \ll 1, \\ x^{1-\bar{\nu}}, & x \gg 1 \end{cases} \quad (I-10)$$

Las ecuaciones (I-9) y (I-10) generalizan  $M(\ell) \sim \ell^{d_\ell}$  para  $p > p_c$ . De acuerdo con esto, a grandes distancias Euclídeanas ( $r > \xi$ ) la distancia química y la distancia Euclídeana tienen la misma métrica y:

$$r \sim \xi_\ell^{\bar{\nu}-1} \ell \sim \xi^{(\bar{\nu}-1)/\bar{\nu}} \ell \sim (p - p_c)^{\nu(1/\bar{\nu}-1)} \ell \quad (I-11)$$

#### I.4 Efectos del Tamaño Finito

Considere un sistema finito; por ejemplo, la que se muestra en la figura I-6, donde cada enlace tiene una longitud unitaria  $a = 1$ . Se espera que las cantidades relevantes dependan de la magnitud de  $L$ . Puesto que la longitud característica del sistema es la longitud de correlación  $\xi$  (la cual ya se definió para un sistema infinito), se espera un comportamiento diferente para  $L/\xi \gg 1$  y para  $L/\xi \ll 1$ .

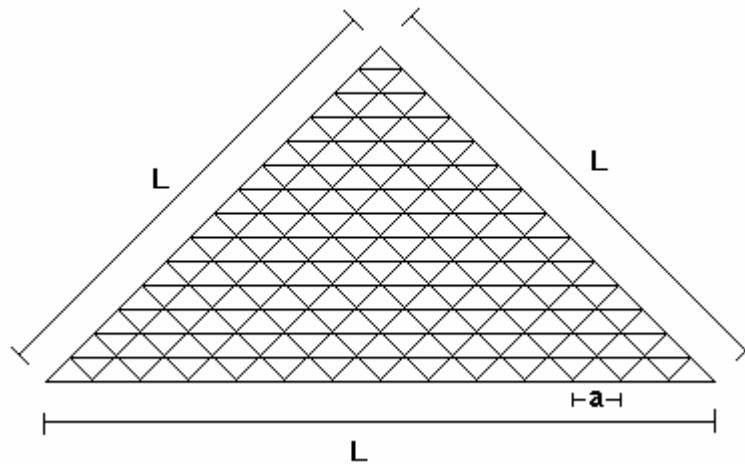
Primero considere nuevamente  $P_\infty$ . Para  $L \gg \xi$ , el sistema se comporta como sí  $L = \infty$ ; es decir,  $P_\infty$  es independiente de  $L$  y se describe mediante  $P_\infty \sim (p - p_c)^\beta$ . Para  $\xi \gg L \gg 1$ , el número de sitios del cluster infinito en la "ventana"  $L \times L$  es proporcional a  $L^{d_f}$ .  $P_\infty$  se obtiene al dividir este resultado por el número total de sitios ocupados en la ventana, el cual es  $pL^d$ , de aquí que  $P_\infty \sim L^{d_f-d}$ . Puesto que  $\xi$  es la única longitud característica,  $P_\infty$  depende de solamente de  $L$  mediante la relación  $L/\xi$ , la cual en analogía a la ecuación (I-4) conduce a la ecuación de escalamiento:

$$P_\infty \sim (p - p_c)^A G(L/\xi) \sim \xi^{-A/\nu} G(L/\xi) \quad (I-12)$$

La función de escalamiento  $G(x)$  describe el cruzamiento desde  $L/\xi \ll 1$  a  $L/\xi \gg 1$ . A fin de obtener los resultados esperados para ambos sistemas, se debe tener  $A = \beta$  y:

$$G(x) \sim \begin{cases} x^{d_f-d}, & \text{para } x \leq 1 \\ \text{constante.}, & \text{para } x \geq 1 \end{cases} \quad (I-13)$$

Para ver las consecuencias de estas relaciones, considere que se van a realizar simulaciones en computadora de  $P_\infty$  en la red triangular, donde la concentración crítica es exactamente  $1/2$  (para percolación por sitios en una red infinita). Se elige una red grande, por decir  $L = 1000$ , y se ocupan aleatoriamente todos los sitios con probabilidad  $p$ . Después se analizan los clusters y se determina el tamaño del cluster infinito (sí existe). Se repiten los cálculos, digamos para 5000 configuraciones de red, y se promedia  $P_\infty$  para todas las configuraciones. Para  $p$  muy arriba del umbral de percolación, donde  $\xi$  es considerablemente más pequeño que  $L = 1000$ , no se nota el tamaño finito de la red. De acuerdo con esto, si uno se aproxima más y más a  $p_c$ ,  $P_\infty$  disminuirá como  $(p - p_c)^\beta$  mientras que  $L \gg \xi$ . Si  $p$  se aproxima a  $p_c$  aún más se alcanzará una concentración de cruzamiento  $p^*$ , donde  $L \sim \xi$ . Entre  $p^*$  y  $p_c$ ,  $L < \xi$  y  $P_\infty$  se mantienen estrictamente constantes en un valor finito.



**Figura I-6.** Red triangular de tamaño  $L$ . La longitud entre enlaces  $a$  es unitaria.

Este comportamiento se puede entender como sigue: en el sistema *finito* de  $10^6$  sitios un pequeño cambio en las concentraciones es equivalente a adicionar o sustraer, sobre el promedio, solamente unos cuantos sitios ocupados, lo cual deja al sistema prácticamente sin cambios. En esta red no se puede ver una diferencia en  $P_\infty$  para  $p = p_c + 10^{-6}$  y  $p = p_c + 10^{-12}$ . Un pequeño cambio en la concentración llega a

ser más efectivo si se toman sistemas más grandes, y para un sistema infinito también ocurren cambios drásticos muy cercano a  $p_c$ . En el ejemplo anterior,  $P_\infty$  disminuye por un factor de  $10^{6\beta}$ , el cual del orden de 10. Es obvio que los efectos del tamaño finito aquí descritos para  $P_\infty$  se presentan también en la distribución de los sitios del cluster  $n_s(p)$  y las otras cantidades relacionadas.

Es conveniente escribir la relación de escalamiento (I-12) de una manera un poco diferente. Multiplicando y dividiendo (I-12) por  $L^{-\beta/\nu}$  se obtiene:

$$P_\infty \sim L^{-\beta/\nu} H(L/\xi) \quad (I-14)$$

donde  $H(x) = G(x)x^{\beta/\nu}$ , como en (I-6).

A partir del escalamiento de tamaños finitos se puede aprender que en principio hay dos maneras de determinar un exponente crítico  $x$  de alguna cantidad  $X$ ,  $X \sim (p - p_c)^{-x}$ , mediante simulaciones en computadora. En vez de determinar  $X$ ; digamos  $P_\infty$  o  $S$ , directamente como una función de  $(p - p_c)$ , uno puede calcular  $X$  exactamente en  $p_c$  para varios tamaños de sistemas. De esta manera uno obtiene  $X \sim L^{x/\nu}$ , y si se conoce  $\nu$  se puede encontrar  $x$ .

Usando simulaciones por computadora, Ziff[27] estudió cómo la concentración crítica depende del tamaño lineal  $L$  del sistema. Encontró que para grandes sistemas en  $d = 2$ :

$$p_c(L) = p_c(\infty) + cte \times L^{-1-1/\nu} \quad (I-15)$$

De aquí que para obtener estimaciones exactas para  $p_c \equiv p_c(\infty)$  se debería graficar  $p_c(L)$  contra  $x = L^{-1-1/\nu}$  y extrapolar para  $x = 0$ .

Un resultado más interesante es aquel de la probabilidad  $R_L(p_c)$  para encontrar un cluster que se extiende por todo el sistema cuando  $p_c$  (en percolación por sitios) se aproxima a  $1/2$  cuando  $L$  tiende a infinito. Puesto que este resultado es el mismo que para la percolación por enlaces, se deduce que  $R_L(p_c)$  es una cantidad universal que depende solamente de la dimensión  $d$  del sistema, y no del tipo de red considerada. Recientemente Stauffer et al [28] obtuvieron evidencias numéricas para apoyar esta hipótesis para percolación en sistemas tridimensionales, donde  $R_L(p_c) \equiv 0.42$ .

## 1.5 Percolación por Conquista

El modelo de percolación por conquista[29,30] se desarrolló para estudiar el desplazamiento de un fluido por otro en un medio poroso[31]. La dinámica de las interfaces es esencial para entender el proceso de desplazamiento en la producción de petróleo, y la percolación por conquista es el modelo más simple con una estructura y dinámica de interfaces no trivial.

Considere que se inyecta un flujo de agua a una roca porosa llena de petróleo. El agua y el petróleo son dos fluidos inmiscibles e incompresibles, es así que el petróleo es desplazado por el agua cuando el agua penetra en la roca. Un medio poroso se puede considerar como una red de poros que están conectados mediante gargantas estrechas. La rapidez de flujo se mantiene constante y tan baja que se pueden despreciar las fuerzas de viscosidad comparadas con las fuerzas de capilaridad. La percolación por conquista es el modelo más simple que describe este proceso dinámico[29,30].

El modelo considera una red regular de tamaño  $L \times L$ , en el cual el petróleo representa el “defensor”. El agua representa el “conquistador” e inicialmente se coloca a lo largo de un borde de la red. Para describir las diferentes resistencias de las gargantas a la conquista por el agua se asigna a cada sitio de la red un número aleatorio entre 0 y 1. La conquista del agua sigue una trayectoria de menor resistencia. A cada intervalo de tiempo el conquistador ocupa los sitios de mayor probabilidad y de esa manera desplaza al petróleo, como se muestra en la figura I-7.

Puesto que el agua y el aceite son fluidos incompresibles e inmiscibles, el petróleo que está rodeado completamente de agua no puede ser conquistado y el petróleo puede quedar atrapado en algunas regiones del medio poroso. Así pues, si en una simulación hecha en Monte Carlo se genera una región de petróleo rodeada de agua, el invasor no puede entrar en esta región.

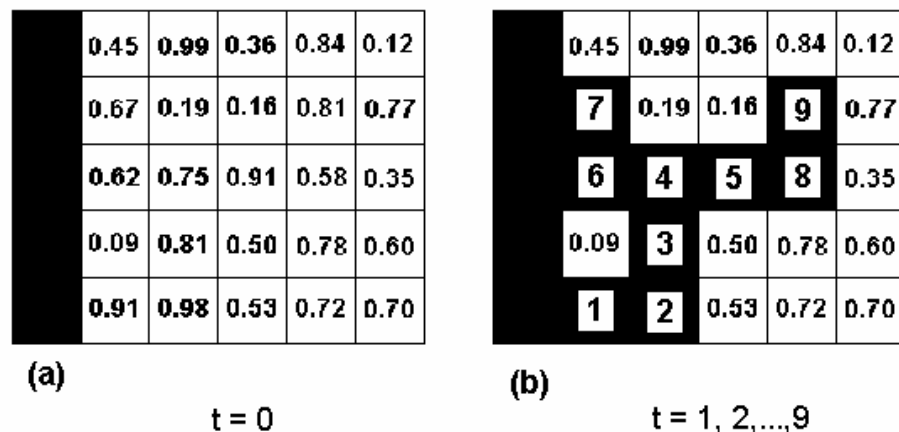


Figura I-7. Percolación por conquista en una red cuadrada de  $5 \times 5$ , (a) tiempo inicial y (b) después de 9 intervalos de tiempo.

Cálculos numéricos la dimensión fractal de los clusters de agua arrojaron un valor de  $d_f \cong 1.82$ [30]. Leonormand y Zarcone[32] realizaron experimentos inyectando lentamente aire en una red bi-dimensional de ductos con glicerina, obteniendo  $d_f \cong 1.8$ , el cual concuerda con los resultados numéricos. Este valor de  $d_f$  sugiere que el modelo de percolación por conquista es una clase de universalidad diferente al de percolación regular. Para sustentar esta conclusión, recientemente se realizaron cálculos numéricos para determinar la dimensión química dando como resultado  $d_\ell = 1.40 \pm 0.07$  (o  $\bar{\nu} = 1/d_{min} \cong 0.77$ )[33].

## I.6 Percolación Orientada

La percolación orientada se puede considerar como un modelo para un incendio forestal bajo la influencia de un fuerte viento en una dirección. Considere el problema de percolación por enlaces en una red cuadrada a una concentración  $p$ , y asigne a cada enlace una flecha de tal manera que los enlaces verticales apunten en la dirección  $y$  positiva y los enlaces horizontales apunten en la dirección  $x$  positiva, como se muestra en la figura I-8. Para ilustrar la percolación orientada considérese ahora que cada enlace es un conductor que transmite corriente eléctrica solamente en las direcciones de las flechas. Existe una concentración crítica  $p_c$  que separa una fase aislante de una fase conductora. La concentración crítica es mayor para este caso que para el caso de percolación clásica (ver figura I-8),  $p_c \cong 0.479$  para una red triangular y  $p_c \cong 0.644701$  para una red cuadrada.

Ahora bien, la estructura de los clusters es marcadamente anisotrópica y existen dos longitudes de correlación características:  $\xi_\perp$  y  $\xi_\parallel$ , llamadas longitud de correlación perpendicular y paralela, respectivamente. La anisotropía se debe al hecho que los clusters a la concentración crítica,  $p_c$ , son objetos auto-afines en vez de ser objetos auto-similares. El comportamiento crítico de ambas longitudes de correlación se describe mediante

$$\xi_\perp \sim |p_c - p|^{-\nu_\perp} \quad (I-16)$$

y

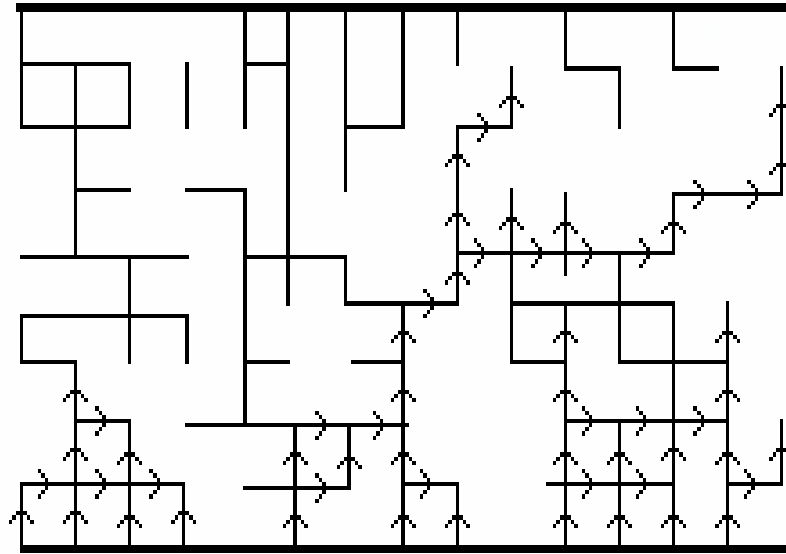
$$\xi_\parallel \sim |p_c - p|^{-\nu_\parallel} \quad (I-17)$$

con  $\nu_\perp \neq \nu_\parallel$ , y ambos son diferentes a partir del exponente  $\nu$ . Usando la teoría de escalamiento, se puede derivar la siguiente:

$$\gamma + 2\beta = (d-1)\nu_\perp + \nu_\parallel \quad (I-18)$$



Sustituyendo los exponentes de campo promedio  $\gamma = \beta = \nu_{\parallel} = 2\nu_{\perp} = 1$  en (I-18) se obtiene la dimensión crítica superior  $d_c = 5$  para percolación orientada[34]. Las mejores estimaciones para los exponentes críticos se han realizado usando 35 términos en el método de series de expansión[35], dando para  $d = 2$ ,  $\nu_{\parallel} = 1.7334 \pm 0.001$ ,  $\nu_{\perp} = 1.0972 \pm 0.0006$ , y  $\gamma = 2.2772 \pm 0.0003$ , sugiriendo los valores racionales  $\nu_{\parallel} = 26/15$ ,  $\nu_{\perp} = 79/72$ , y  $\gamma = 41/18$ . También  $\beta$  y los otros exponentes estáticos difieren de aquellos obtenidos en la percolación clásica.



**Figura I-8.** Percolación orientada en una red cuadrada abajo del umbral de percolación.

Recientemente se han hecho algunos avances al relacionar la percolación orientada con la criticidad autot-organizada[36], y en el cálculo del espectro de su matriz de transferencia[37] y su dimensión fractal[38].

### I.7 Difusión en el Cluster Infinito

El comportamiento por largos periodos de tiempo del desplazamiento cuadrado promedio de un caminante aleatorio en el cluster de percolación infinito se caracteriza por la constante de difusión  $D$ . Es fácil ver que  $D$  esta relacionada a la constante de difusión  $D'$  del sistema de percolación completo: arriba de  $p_c$  la conductividad del sistema de percolación aumenta de acuerdo a  $\sigma \sim (p - p_c)^u$ , de manera que debido a:

$$\sigma = \frac{e^2 n}{k_B T} D$$

la cual es la ecuación de Einstein, también la constante de difusión  $D'$  debe aumentar de esta manera. El desplazamiento cuadrado promedio (y como consecuencia  $D'$ ) se obtiene promediando todos los puntos de inicio posibles de una partícula en el sistema de percolación. Es evidente que solamente aquellas partículas que inician sobre el cluster infinito pueden viajar de un lado al otro del sistema, y por lo tanto contribuir a  $D'$ . Las partículas que inician en un cluster finito no pueden salir del cluster, y por lo tanto no contribuyen a  $D'$ . Por lo que  $D'$  esta relacionada a  $D$  por  $D' = DP_\infty$ , lo que implica que:

$$D \sim (p - p_c)^{\mu - \beta} \sim \xi^{-(\mu - \beta) / \nu} \quad (I - 20)$$

Por otro lado, debido a la presencia de grandes hoyos, cuellos de botella y zonas muertas en el fractal, el movimiento de un caminante aleatorio es interrumpido. Debido a la auto-similaridad, los hoyos, los cuellos de botellas y las zonas muertas se presentan en todas las escalas de longitud, el movimiento del caminante aleatorio es interrumpido en todas las escalas de longitud. La ley de Fick ya no se cumple. En cambio, el desplazamiento cuadrado promedio se describe mediante una ley de potencias más general:

$$\langle r^2(t) \rangle \sim t^{2/d_\omega} \quad (I - 21)$$

donde el nuevo exponente  $d_\omega$  ("exponente de difusión" o "dimensión fractal del caminante aleatorio") es siempre mayor que 2. Si combinamos las ecuaciones (I-20) y (I-21), el desplazamiento cuadrado promedio en el cluster infinito se puede expresar como[39]:

$$\langle r^2(t) \rangle \sim \begin{cases} t^{2/d_\omega} & \text{si } t \ll t_\xi, \\ (p - p_c)^{\mu - \beta} t & \text{si } t \gg t_\xi, \end{cases} \quad (I - 22)$$

donde

$$t_\xi \sim \xi^{d_\omega} \quad (I - 23)$$

describe la escala del tiempo que necesita el caminante aleatorio, sobre el promedio, para explorar el régimen fractal en el cluster. Como  $\xi \sim (p - p_c)^\nu$  es la única escala de longitud aquí,  $t_\xi$  es la única escala de tiempo importante, y se puede tender un puente entre el régimen de tiempos cortos y el régimen de tiempos largos mediante una función de escalamiento  $f(t/t_\xi)$ :

$$\langle r^2(t) \rangle = t^{2/d_\omega} f(t/t_\xi) \quad (I - 24)$$

Para satisfacer (I-22) se requiere que  $f(x) \sim x^0$  para  $x \ll 1$  y  $f(x) \sim x^{1-2/d_\omega}$  para  $x \gg 1$ . La primera relación satisface trivialmente (I-22). La segunda relación da,  $D = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle r^2(t) \rangle / 2dt \sim t_\xi^{2/d_\omega - 1}$ , la cual en conexión con (I-20) y (I-23) da una relación entre  $d_\omega$  y  $\mu$ : [39]:

$$d_\omega = 2 + \frac{\mu - \beta}{\nu} \quad (I-25)$$

Comparando (I-25) con la siguiente ecuación:

$$d_\omega = d_f - d + 2 + \bar{\mu} = d_f + \zeta \quad (I-26)$$

que es la relación de Einstein, se puede expresar el exponente  $\bar{\mu}$  en términos de  $\mu$ :

$$\bar{\mu} = \mu / \nu \quad (I-27)$$

### I.8 Difusión en el Sistema de Percolación.

Para calcular  $\langle r^2(t) \rangle$  en el sistema de percolación (el cual consiste de todos los clusters), se deben promediar todos los puntos iniciales de los caminantes que están uniformemente distribuidos en todos los sitios conductores. Para hacer esto, primero se promedian todas las trayectorias aleatorias que comienzan en clusters de *tamaño fijo*  $s$ , y de esta manera se obtiene el desplazamiento cuadrado promedio  $\langle r_s^2(t) \rangle$  de un caminante aleatorio en un cluster con sitios  $s$ . Luego se promedia  $\langle r_s^2(t) \rangle$  para todos los clusters con sitios  $s$ . Esto se hace fácilmente a la concentración crítica  $p_c$  donde la distribución del tamaño de los clusters  $n_s(p)$  se describe mediante una ley de potencias  $n_s(p) \sim s^{-\tau}$ .

El radio promedio  $R_s$  de todos los clusters con sitios  $s$  se relaciona con  $s$  mediante  $s \sim R_s^{d_f}$ . Siempre y cuando la distancia recorrida por los caminantes aleatorios sea más pequeña que  $R_s$ , la difusión es anormal y  $\langle r_s^2(t) \rangle \sim t^{2/d_\omega}$ . Sin embargo, para periodos de tiempo muy largos, puesto que el caminante aleatorio no puede salir del cluster con sitios  $s$ ,  $\langle r_s^2(t) \rangle$  es limitada por  $R_s^2$ . De aquí, se pueda escribir:

$$\langle r_s^2(t) \rangle \sim \begin{cases} t^{2/d_\omega} & \text{si } t^{2/d_\omega} < R_s^2 \\ R_s^2 & \text{si } t^{2/d_\omega} > R_s^2 \end{cases} \quad (I-28)$$

A partir de  $\langle r_s^2(t) \rangle$  se obtiene el desplazamiento cuadrado promedio total  $\langle r^2(t) \rangle$  promediándolo para todos los clusters:

$$\langle r^2(t) \rangle \sim \sum_{s=1}^{\infty} s n_s(p_c) \langle r_s^2(t) \rangle \sim \sum_{s=1}^{\infty} s^{1-\tau} \langle r_s^2(t) \rangle \quad (I-29)$$

De acuerdo a (I-28) existe para cualquier tiempo fijo  $t$ , un tamaño de cruzamiento  $S_x(t) \sim R_s^{d_f} \sim t^{d_f/d_\omega}$  para  $s < S_x(t)$ ,  $\langle r_s^2(t) \rangle \sim R_s^2$ , mientras que para  $s > S_x(t)$ ,  $\langle r_s^2(t) \rangle \sim t^{2/d_\omega}$ . De acuerdo a esto, (I-29) se puede escribir como:

$$\langle r^2(t) \rangle \sim \sum_{s=1}^{S_x(t)} s^{1-\tau} s^{2/d_f} + \sum_{s=S_x(t)}^{\infty} s^{1-\tau} t^{2/d_\omega} \quad (I-30)$$

El primer término en (I-30) es proporcional a  $[S_x(t)]^{2-\tau+2/d_f}$  y el segundo término es proporcional a  $[S_x(t)]^{2-\tau} t^{2/d_\omega}$ . Puesto que  $S_x(t) \sim t^{d_f/d_\omega}$ , ambos términos escalan lo mismo y se obtiene:

$$\langle r^2(t) \rangle \sim t^{2/d'_\omega} \quad (I-31)$$

con el exponente efectivo  $d'_\omega = 2/[(d_f/d_\omega)(2-\tau+2/d_f)]$ . Usando las relaciones de escalamiento  $\tau = 1 + d/d_f$  y  $d_f = d - \beta/\nu$ , encontramos que:

$$d'_\omega = d_\omega / (1 - \beta/2\nu) \quad (I-32)$$

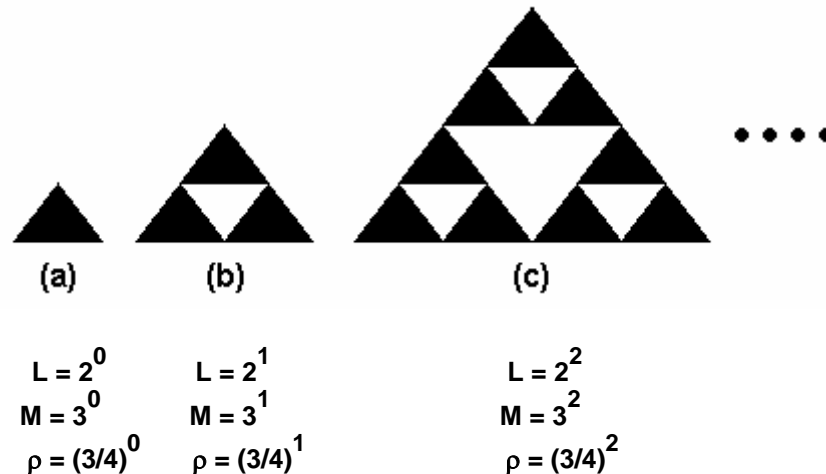
Note que  $d'_\omega > d_\omega$  puesto que los clusters finitos detienen el movimiento del caminante aleatorio. La probabilidad de estar en el origen se puede calcular esencialmente de la misma manera, comenzando con la expresión para clusters finitos con sitios  $s$  y calculando el promedio para todos los clusters.

## I. Teoría de la Percolación

## II. FRACTALES

### II.1 Fractales Aleatorios: Una Trayectoria Aleatorio Imparcial.

Los fractales se pueden dividir en dos categorías: *no-aleatorios* y *aleatorios*. Los fractales en el campo de la física pertenecen a la segunda categoría, pero es menester discutir primero un ejemplo clásico de los fractales no aleatorios: el triángulo de Sierpinski. Para construir este fractal simplemente se itera una *regla de crecimiento*, muy parecido al juego de un niño cuando edifica un castillo con piezas. La unidad básica es un triángulo equilátero, como el que se muestra en la figura II.1. Además, considere que este triángulo tiene una *masa* unitaria ( $M = 1$ ) y una longitud unitaria ( $L = 1$ ).



**Figura II.1a-c.** Primeras dos iteraciones en la regla de agregación para construir el fractal no aleatorio triángulo de Sierpinski[40].

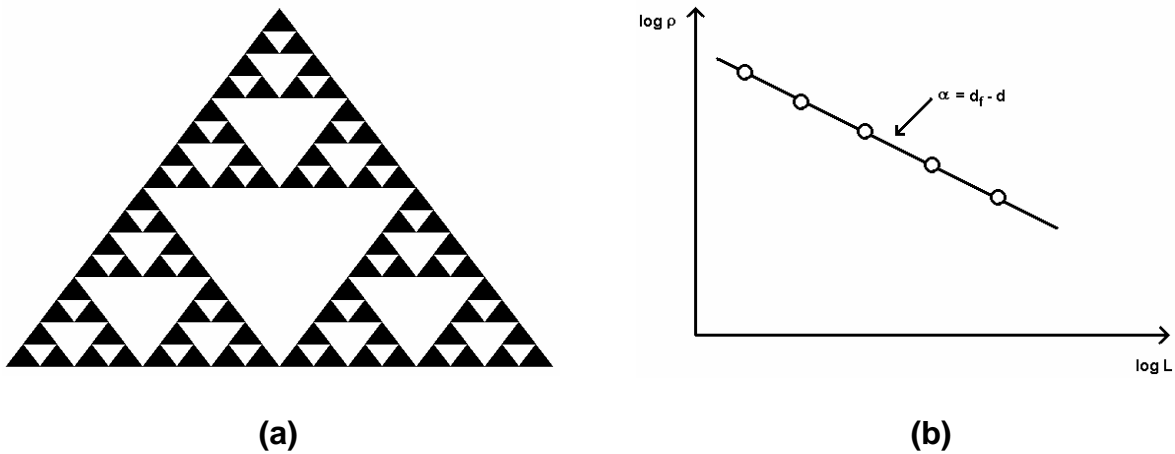
El triángulo de Sierpinski se define operacionalmente como un “proceso de agregación” que se obtiene a partir de un simple proceso de iteraciones. En la etapa uno se juntan tres triángulos de tal manera que se obtiene la estructura que se muestra en la figura II.1-b, un objeto de masa  $M = 3$ , y una arista de  $L = 2$ . El efecto de la etapa uno es generar un objeto con una densidad menor. Si se define la densidad como:

$$\rho(L) \equiv M(L)/L^2 \tag{II-1}$$

entonces la densidad disminuye de 1 a 3/4 como resultado de la primera etapa.

Ahora simplemente iteramos; es decir, se repite la regla una y otra vez *ad infinitum*. Así pues, en la segunda etapa unimos las estructuras de la figura II.1-b

dando como resultado un objeto con  $\rho = (3/4)^2$ . Y así se continua hasta la n-ésima etapa. En la figura II.2-a se muestra la estructura en la cuarta etapa – con 81 triángulos negros y  $27 + 36 + 48 + 64$  triángulos blancos. Una estructura como el triángulo de Sierpinski se ha visto en los mosaicos que forman el piso de la Iglesia de Anagni, Italia, la cual se construyó en 1104. Aunque a este fractal fue bautizado a principios del S. XX por el matemático polaco W. Sierpinski, era universalmente conocido ocho siglos antes por todos los feligreses de esta villa.



**Figura II.2 (a)** Fractal triángulo de Sierpinski después de cuatro iteraciones. **(b)** Gráfico log-log de  $\rho$  (la fracción de espacio cubierta por triángulos negros) como una función de  $L$  (el tamaño lineal del objeto).[41].

Sin embargo, los sistemas reales no se parecen al piso de la Iglesia de Anagni- de hecho, los fractales no aleatorios no se encuentran en la naturaleza. La naturaleza presenta un sinnúmero de ejemplos de objetos que por sí mismos no son fractales, pero que tienen una característica fundamental: si se calcula el *promedio estadístico* de alguna propiedad, digamos la densidad, se encontrará que ésta disminuye linealmente con respecto a la escala de longitud cuando se grafica en un papel log-log. Tales objetos se denominan *fractales aleatorios*, para diferenciarlos de los *fractales geométricos* no-aleatorios, como el mostrado en la figura II.2-a.

Ahora, considere el siguiente problema típico en mecánica estadística. En el tiempo  $t = 0$  una hormiga<sup>§</sup> se deposita en un vértice arbitrario de una red unidimensional infinita con intervalos de longitud unitarios: considere que esta en el punto  $x_{t=0} = 0$ . La hormiga carga una moneda con dos caras, y un reloj. La dinámica de la hormiga es gobernada por la siguiente regla: a cada segundo arroja la moneda. Si la moneda es cara, la hormiga camina al vértice más cercano en la dirección este [ $x_{t=1} = +1$ ]. Si la moneda cae cruz camina al vértice más cercano en la dirección oeste [ $x_{t=1} = -1$ ].

§ El empleo del término “hormiga” para describir un caminante aleatorio se empleó casi universalmente en el campo de la física teórica – quizá la primera referencia a este gracioso animal se da en un artículo de de Gennes (1976), quién formuló con éxito varios problemas generales de física en términos del movimiento de una hormiga “borracha” con reglas de movimiento apropiadas.

Hay *leyes en la naturaleza* que gobiernan la posición de esta hormiga borracha. Por ejemplo, con forme el tiempo avanza, el *promedio* del desplazamiento de la hormiga aumenta monótonicamente. La forma explícita de este aumento está contenida en la siguiente “ley” relativa al *desplazamiento cuadrado medio*:

$$\langle x^2 \rangle_t = t \quad (II-2)$$

La ecuación (II-2) se puede probar por inducción, al demostrar que la ecuación (II-2) implica que  $\langle x^2 \rangle_{t+1} = t+1$ .

Inmediatamente se puede ver que  $\langle x^k \rangle_t = 0$  para todos los enteros *nones* de  $k$ , mientras que  $\langle x^k \rangle_t$  es diferente de cero para enteros *pares* de  $k$ . Por ejemplo, considere  $\langle x^4 \rangle_t$ . Fácilmente se puede verificar que:

$$\langle x^4 \rangle_t = 3t^2 - 2t = 3t^2 \left(1 - \frac{2/3}{t}\right) \quad (II-3)$$

## II.2 El Concepto de Longitud Característica.

Compárense las ecuaciones (II-2) y (II-3). ¿Cuál es el desplazamiento de una hormiga que camina aleatoriamente? Por un lado, se puede identificar este desplazamiento con una longitud  $\zeta_2$  definida mediante:

$$\zeta_2 \equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{t} \quad (II-4)$$

Por otro lado, parece ser razonable identificar este desplazamiento con longitud  $\zeta_4$  definida por:

$$\zeta_4 \equiv \sqrt[4]{\langle x^4 \rangle} = \sqrt[4]{3} \sqrt{t} \left(1 - \frac{2/3}{t}\right)^{1/4} \quad (II-5)$$

El punto importante es que ambas longitudes exhiben el mismo comportamiento asintótico con respecto al tiempo. Al primer exponente se le llama *exponente de escalamiento*, mientras que a los demás exponentes se les llama *correcciones de escalamiento*.

Se puede verificar que los mismos exponentes de escalamiento se encuentran si se considera cualquier longitud  $\zeta_k$  (tal que  $k$  sea par):



$$\zeta_k = \sqrt[k]{\langle x^k \rangle} = A_k \sqrt{t} [1 + B_k t^{-1} + X_k t^{-2} + \dots + O(t^{-k/2+1})]^{1/k} \quad (\text{II-6})$$

La ecuación (II-6) ejemplifica un aspecto general de los sistemas aleatorios: *sin considerar la definición de longitud característica, el mismo exponente de escala describe el comportamiento asintótico*. Se dice que todas las longitudes escalan como la raíz cuadrada del tiempo, esto significa que para cualquier longitud  $\zeta_k$  que se examine,  $\zeta_k$  será el doble siempre y cuando el tiempo haya aumentado por un factor de cuatro. Esta propiedad de escalamiento no se ve afectada por el hecho de que la amplitud  $A_k$  en la ecuación (II-6) depende de  $k$ , puesto que no se investiga acerca del valor absoluto de la longitud  $\zeta_k$  sino que solamente cómo  $\zeta_k$  cambia cuando  $t$  cambia.

### II.3 Ecuaciones Funcionales y Dimensión Fractal.

Se ha visto que una longitud característica  $\xi$  escala como  $\sqrt{t}$ . De igual manera, si  $t(\xi)$  es el tiempo característico para que la hormiga “trace” un dominio de dimensión lineal  $\xi$ , entonces:

$$t \sim \xi^2 \quad (\text{II-7})$$

Más formalmente, para todos los valores positivos del parámetro  $\lambda$  tal que el producto  $\lambda\xi$  sea grande,  $t(\xi)$  obedece a la ecuación asintótica:

$$t(\lambda^{1/2}\xi) \sim \lambda t(\xi) \quad (\text{II-8})$$

A la ecuación (II-8) se le llama *ecuación funcional* porque proporciona una restricción en la forma de la función  $t(\xi)$ . De echo, la ecuación (II-7) es la solución de la ecuación funcional (II-8) en el sentido de que cualquier función  $t(\xi)$  que satisfaga la ecuación (II-8) también satisface (II-7) – se dice que las leyes de potencias son la solución de la ecuación funcional (II-8). Para verificar esto, se nota que si la ecuación (II-8) cumple para todos los valores del parámetro  $\lambda$ , entonces cumple para el caso particular  $\lambda = 1/\xi$ . Con esta sustitución (II-8) se reduce a (II-7).

También se puede verificar directamente que cualquier función  $t(\xi)$  que satisfaga la ecuación (II-7) también satisface la ecuación (II-8). Por lo tanto, la ecuación (II-8) implica la ecuación (II-7) y viceversa. Esta conexión entre el comportamiento de ley de potencias y una operación de simetría, llamada *simetría de escalamiento*, está en la raíz del amplio rango de aplicabilidad de los conceptos fractales en física.

Si se escribe la ecuación (II-6) en la forma:

$$t \sim \xi^{df} \quad (\text{II-9})$$

indica que el exponente de escalamiento  $d_f$  explícitamente refleja la dependencia asintótica de una “masa” característica (el número de puntos en la trayectoria de la hormiga) sobre una longitud característica  $\xi$ . Para un caminante aleatorio  $d_f = 2$ , y en general  $d_f$  es la dimensión fractal de la trayectoria aleatoria.

Si expresamos la ecuación (II-8) en la forma equivalente:

$$t(\lambda\xi) \sim \lambda^{d_f} t(\xi) \quad (\text{II-10})$$

entonces se puede ver que  $d_f$  juega el papel de exponente de escalamiento que gobierna la rapidez a la cual se debe escalar el tiempo si queremos trazar una trayectoria de mayor extensión espacial. Por ejemplo, si se quiere una trayectoria que sea el doble de tamaño, debemos esperar un tiempo  $2^{d_f}$ .

#### II.4 Un Modelo: Aglutinación por Difusión Limitada (DLA)

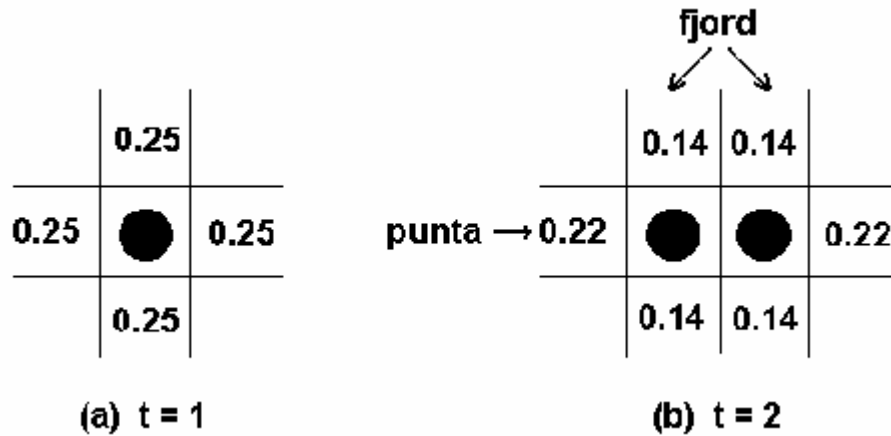
Es un hecho que los fractales abundan. De hecho, casi cualquier objeto donde la aleatoriedad es el factor que determina la estructura se volverá fractal en algún rango de escalas de longitud.

Hoy día, se han reconocido aproximadamente  $10^3$  sistemas fractales en la naturaleza; aunque tiene una década que B. Mandelbrot publicó su libro *The Fractal Geometry of Nature*[21], no se sabía que muchos de estos sistemas eran fractales. La *Aglutinación por Difusión Limitada* (DLA, sus siglas en inglés) tan solo tiene cerca de 50 estructuras fractales en sistemas físicos y actualmente se estudian muchas estructura fractales de la naturaleza mediante DLA[42,43]. Las estructuras DLA surgen en forma natural cuando se estudian muchos fenómenos de interés actual para físicos y químicos, que van desde deposición electroquímica[44] y solidificación dendrítica[45] a varios “fenómenos de rompimiento” tales como rompimiento dieléctrico[46], digitación viscosa[47], disolución química[48] y la cristalización rápida de lava[49].

Como muchos modelos en mecánica estadística, la regla que define el DLA es simple. En el tiempo 1, colocamos en el centro de la pantalla de una computadora un pixel blanco, y liberamos un caminante aleatorio desde la circunferencia de círculo grande concéntrico con el pixel blanco. Los cuatro sitios más próximos al pixel blanco tienen la misma probabilidad  $p_i$  de ser ocupados por el caminante aleatorio (figura II-3) así que se puede escribir:

$$p_i = \frac{1}{4} \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (\text{II-11})$$

La regla es que el caminante aleatorio continúe irreversiblemente hasta alcanzar una posición fija – de ese modo forma un cluster de masa  $M = 2$ .



**Figura II.3.** (a) Una red cuadrada DLA en el tiempo  $t = 1$  mostrando los cuatro sitios de crecimiento, cada uno con una probabilidad de crecimiento  $p_i = 1/4$ ; (b) DLA en el tiempo  $t = 2$  con seis sitios de crecimiento y sus correspondientes probabilidades de crecimiento  $p_i$ [43].

En el tiempo  $t = 2$  hay  $N_p = 6$  sitios posibles, en lo futuro llamados *sitios de crecimiento* (figura II-3-b), pero ahora las probabilidades no son iguales para todos los sitios: cada uno de los sitios de crecimiento de las dos puntas tiene una probabilidad de crecimiento  $p_{max} \cong 0.22$ ; mientras que cada uno de los cuatro sitios de crecimiento restantes tienen una probabilidad  $p_{min} \cong 0.14$ . Puesto que un sitio en la punta tiene un 50% más de probabilidad crecer que un sitio en los lados, es más probable que el siguiente sitio de crecimiento sea un sitio que se encuentra en la punta – es como en el sistema capitalista: el rico se hace más rico. Una de las principales características del modelo DLA es que en vez de enfocarse en los sitios que cada vez son “más ricos”, se enfoca en los fjords que cada vez son “más pobres”.

Sólo debido a que la tercera partícula tiene *más probabilidad* de ocupar una punta esto no significa que la siguiente partícula ocupará una punta. Desde luego, lo más que se puede decir acerca de los clusters es especificar la *distribución de probabilidad de los sitios en crecimiento* – es decir, el conjunto de números,

$$\{p_i\}, \quad i = 1, \dots, N_p \quad (II-12)$$

donde  $p_i$  es la probabilidad de que el sitio del perímetro (“sitio de crecimiento”)  $i$  es el próximo a crecer, y  $N_p$  es el número total de sitios en el perímetro. El reconocimiento de que el conjunto  $\{p_i\}$  esencialmente da la cantidad *máxima* de información que se puede tener acerca del sistema, se relaciona con el hecho acerca de la tremenda

atención que se ha puesto a estas  $p_i$  – y a algunas cantidades análogas a  $p_i$  en varios sistemas estrechamente relacionados.

Hay razones para la ubicuidad de importantes estructuras para el algoritmo DLA. Primero, el fenómeno de aglutinación basado en caminantes aleatorios corresponde a la ecuación de Laplace ( $\nabla^2 \mathcal{I}(r,t) = 0$ ) con la probabilidad  $\mathcal{I}(r,t)$  de que un caminante esté en la posición  $r$  en un tiempo  $t$ . Segundo, hay un rango de fenómenos que a primera vista parece que no tienen *nada que ver con caminantes aleatorios*. Estos incluyen el fenómeno de digitación viscosa, para el cual la presión  $P$  en cualquier punto satisface la ecuación de Laplace (ver Tabla 1.1). De igual manera, el fenómeno de rompimiento dieléctrico, disolución química, electrodeposición, y una variedad de otros fenómenos de desplazamiento pueden ser miembros de *una clase de universalidad* de DLA adecuadamente definida.

**Tabla II-1.** Una “Rosseta stone” que conecta los fundamentos físicos de (a) un problema eléctrico (rompimiento dieléctrico), (b) un problema de mecánica de fluidos (digitación viscosa), y (c) un problema de difusión (solidificación dendrítica)[43].

<b>(a) Eléctrico</b>	<b>(b) Mecánica de fluidos</b>	<b>(c) Solidificación dendrítica</b>
<b>Potencial electrostático:</b> $\phi(r,t)$	<b>Presión:</b> $P(r,t)$	<b>Concentración:</b> $c(r,t)$
<b>Campo eléctrico:</b> $E \propto -\nabla\phi(r,t)$	<b>Velocidad:</b> $V \propto -\nabla P(r,t)$	<b>Velocidad de crecimiento:</b> $V \propto -\nabla c(r,t)$
<b>Conservación:</b> $\nabla \cdot E = 0$	$\nabla \cdot v = 0$	$\nabla \cdot v = 0$
<b>Ecuación de Laplace:</b> $\nabla^2 \phi = 0$	$\nabla^2 P = 0$	$\nabla^2 c = 0$

## II.5 Otras Dimensiones Fractales

Una sola dimensión fractal  $d_f$  no es suficiente para describir todos los objetos fractales. Por ejemplo, la percolación y el DLA tienen una  $d_f = 2.5$  cuando  $d = 3$ , aún cuando cualquier niño inmediatamente puede ver que estos dos fractales son completamente diferentes uno del otro. Se verá que cuando se introduce una nueva dimensión fractal,  $d_{min}$ , para describir la tortuosidad de un fractal, encontramos que  $d_{min}$  tiene valores completamente diferentes para DLA y para percolación.

De hecho, es necesario introducir por lo menos diez dimensiones fractales distintas[50]. Aunque esto puede sonar abrumador, tiene su origen tan naturalmente como los diez exponentes críticos que la mayoría de los estudiantes conoce y usa regularmente. Sólo hasta que se encontró que los exponentes críticos no eran del todo independientes unos de otros, así también las diez dimensiones fractales no son del todo cantidades independientes. En cambio, se relacionan mediante expresiones

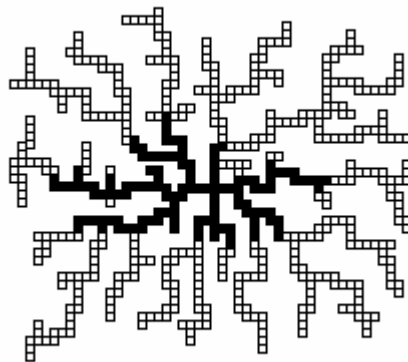
no completamente diferentes a las leyes de escalamiento que relacionan a los exponentes críticos.

### II.5.1 Dimensión Fractal $d_w$ de un Caminante Aleatorio

Supóngase que se desea saber el número promedio de sitios visitados cuando un caminante aleatorio tropieza aleatoriamente sobre un substrato fractal. De Gennes[51] ha llamado a este problema la “hormiga en un laberinto”, pero un “borracho en un gulag” sería más descriptivo de la escena real (figura II-4). Un caminante aleatorio (hormiga borracha o prisionero borracho) se ha colocado en un sitio elegido aleatoriamente, que se colorea de negro. En cada intervalo de tiempo, la hormiga se mueve hacia un sitio más cercano, que después se colorea de negro también. En cada intervalo de tiempo sucesivo  $t$  la hormiga calcula su rango:  $r \equiv \sqrt{\langle r^2 \rangle}$ , que se conoce como el desplazamiento *rms* desde la posición de origen donde se colocó. La dimensión fractal  $d_w$  determina como  $t$  escala con  $r$ .

$$r \sim t^{1/d_w} \quad (\text{II-13})$$

Se puede anticipar que  $d_w$  es considerablemente mayor que 2 puesto que muchos de los vecinos más cercanos en cada intervalo de tiempo no están disponibles para la hormiga, así que está obligada a regresar en la dirección de su posición de origen. De aquí que  $r$  aumente mucho mas lentamente con respecto a  $t$  que para una trayectoria aleatoria sin restricciones, como se muestra en la figura II-5.



**Figura II-4.** Un caminante aleatorio de 2500 pasos en un substrato fractal DLA con 1000 sitios. Los sitios que ha visitado este caminante se muestran coloreados de negro. Este es un ejemplo del problema de la “hormiga en un laberinto” de de Gennes[52].

Ahora puede surgir la pregunta: ¿de qué manera escala el número de sitios visitados (una “masa”) con el tiempo (una “masa” diferente)? La hormiga llena una región del fractal, de tal manera que la masa escala con la dimensión fractal  $d_f$ . La segunda masa escala con la dimensión fractal  $d_w$ . De aquí que el número de sitios visitados escala con el tiempo conforme la relación de las dos dimensiones fractales:

$$\langle s \rangle \sim t^{d_f / d_w} \quad (\text{II-14})$$

A la relación entre las dos dimensiones fractales se le llama *dimensión intrínseca*. La cantidad  $d_f/d_w$  primero la introdujeron Alexander y Orbach[53] (AO) al estudiar de la densidad de los estados de excitación parecidos al fonón sobre un substrato fractal. Definen la dimensión fractón como:

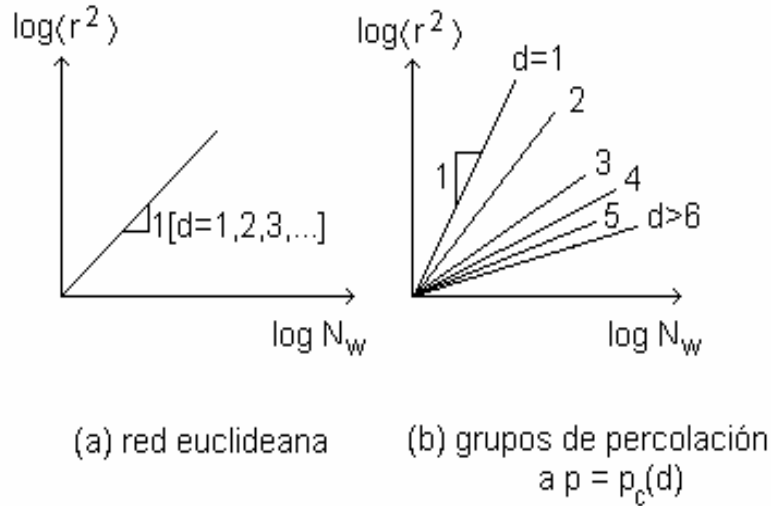
$$d_s \equiv 2d_f / d_w \quad (\text{II-15})$$

Alexander y Orbach tabularon  $d_s$  para fractales de percolación en una red euclídeana  $d$ -dimensional y notaron que mientras que  $d_f$  y  $d_w$  cambian dramáticamente con respecto a  $d$  (abajo de  $d_c = 6$ ),  $d_s$  no cambia. Como consecuencia se llega a la “conjetura OA” que para percolación se puede expresar de la siguiente manera:

$$d_s = 4/3 \quad [2 \leq d \leq 6] \quad (\text{II-16})$$

El término super-universal se acuñó para expresar la posibilidad de que un exponente podría ser independiente, no solamente de los detalles estructurales de la red (como en el caso de la universalidad de clases ordinaria) sino que también de la dimensión topológica de la red. En suma, después de que se dio a conocer la conjetura OA, ésta motivó a la realización de varios cálculos cuidadosos[54,55]. Estudios adicionales comprobaron la posibilidad de que la conjetura OA se pudiera cumplir para otros fenómenos aleatorios, tales como trayectorias aleatorias en clusters DLA[56], o la destrucción por difusión entre caminantes aleatorios que estuviesen restringidos a moverse en un substrato fractal de percolación[57]. Leyvraz y Stanley[58] encontraron condiciones bajo las cuales la conjetura OA podría cumplirse rigurosamente, y se demostró que estas condiciones se cumplían para  $d \geq 6$ .

Conforme los investigadores llegaban a estar intrigados acerca de la conjetura OA, ésta se sometió a pruebas numéricas aún más rigurosas (ver por ejemplo referencia [59]), y eventualmente se llegó a concluir que  $d_s$  era 1%-2% más pequeño que 4/3 (como se indica en la ecuación (II-16)). Es una lástima que la idea de la conjetura OA no funcione, puesto que si funcionase se podría tener una relación entre dos dimensiones fractales:  $d_f$ , la cual describe “estática” y  $d_w$ , la cual describe “dinámica”.



**Figura II-5.** Ilustración esquemática de la dependencia del desplazamiento cuadrado promedio del número de pasos de un caminante aleatorio en un gráfico de log-log. (a) red euclideana, (b) un cluster de percolación en el umbral de percolación[50].

### II.5.2 La Dimensión Fractal $d_{min} \equiv 1/\bar{\nu}$ de la Trayectoria Mínima

Eres un soldado y estás en un campo de batalla infestado de minas. El general X te ordena que lleves un mensaje a su jefe, el General Y, quién se encuentra a 10 Km de distancia, (ver figura II-6). Cumples la orden y te das cuenta que te toma 1 hora. Luego, el General Y te ordena llevar el mismo mensaje a su jefe, el General Z, quién se encuentra a 20 Km de distancia. Es urgente que el mensaje sea entregado en 2 horas. Tu le explicas al ignorante e impaciente General Y que estadísticamente te llevaría más de dos horas viajar el doble la distancia, puesto que cuando las minas se colocaron aleatoriamente (debido a que presumiblemente las tropas enemigas estaban borrachas), formaron clusters de todos los tamaños posibles. La trayectoria mínima entre el General Y y el General Z es una trayectoria convulsionada puesto que deben evitarse estos clusters. Si la “distancia pitagorica”  $r$  es corta, la probabilidad de encontrar un cluster enorme es pequeña. Puesto que el general X y el general Z están separados una distancia  $2R$ , es posible que encuentres clusters de minas mucho más grandes y de aquí que la longitud de tu trayectoria sea *más* del doble. Más precisamente, le dices a tu jefe que la trayectoria mínima  $\ell$  obedece a la siguiente ecuación funcional [60]:

$$\ell(\lambda r) = \lambda^{d_{min}} \ell(r) \tag{II-17}$$

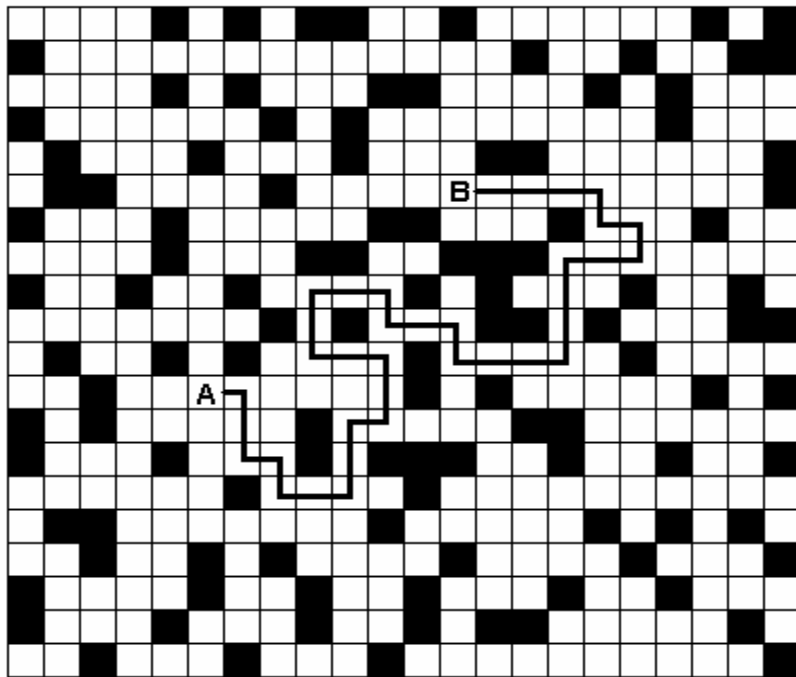
donde  $d_{min} > 1$  (rigurosamente  $9/8$  y  $4/3$ , respectivamente para  $d = 2,3$  en fractales de percolación[61]). La solución se encuentra con  $\lambda = 1/r$ .

$$\ell \sim r^{d_{min}} \tag{II-18}$$

¿Se puede relacionar el exponente  $d_{min}$  con los demás exponentes? Para hacer esto, primero es importante desarrollar algunos resultados para  $d_{min}$ . Para este fin, se ha calculado  $d_{min}$  para varios substratos fractales, incluyendo percolación[61], redes animales[62], DLA [63], y aglutinación cluster-cluster[63]. Se encontró que en todos los casos, excepto en DLA (figura II-7), la  $d_{min}$  aumenta monóticamente con respecto a  $d$  hasta la dimensión crítica  $d_c$ . En  $d \geq d_c$ :

$$d_{min} = 2 \quad [d \geq d_c] \tag{II-19}$$

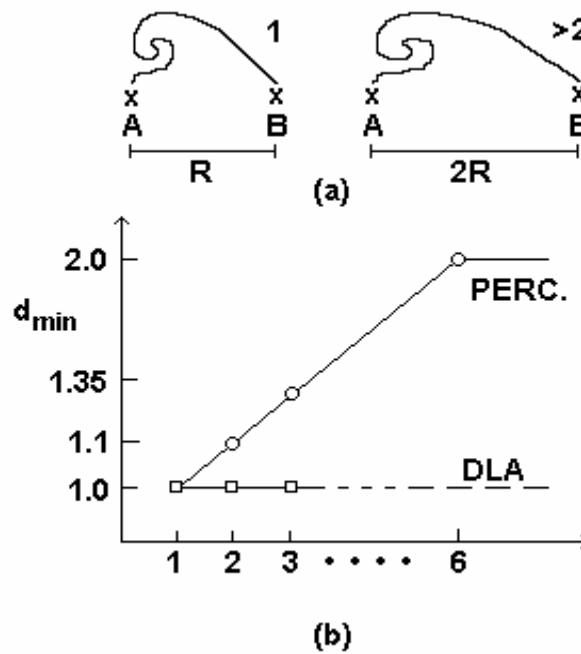
esto significa que la trayectoria mínima entre los dos puntos en un fractal mayor de  $d_c$  tiene la *misma estadística que una trayectoria aleatoria* o cadena Gaussiana. Por lo tanto, se puede entender  $d_c$  de una manera diferente: todos los fractales tienen valores diferentes de  $d_f$ ,  $d_w$ , etc. arriba de  $d_c$  pero todos tienen la misma  $d_{min} = 2$ . Conforme  $d$  disminuye, esto se sigue cumpliendo hasta que  $d = d_c$ , la trayectoria más corta entre los dos puntos es “más directa” que una trayectoria aleatoria, y  $d_{min} < 2$ . Cuando  $d_{min} = 1$  para DLA[62] indica que DLA no tiene una dimensión crítica superior.



**Figura II-6.** (a) ilustración del significado del hecho que  $d_{min}$  es mayor a 1: si la distancia entre los puntos A y B es el doble, entonces la longitud de la trayectoria más corta aumenta por un factor de  $2^{d_{min}}$ , que es mayor que 2; (b) valores numéricos de  $d_{min}$  por percolación (curva superior) y DLA (curva inferior)[63].



Así como la utilidad de  $d_f$  es proporcionar una caracterización cuantitativa de un fractal, así también la utilidad de  $d_w$  es caracterizar la difusión en un substrato fractal (“caminantes aleatorios”). Ahora bien, ¿cuál es la utilidad de  $d_{min}$ ? Claramente,  $d_{min}$  se aplica a los fenómenos físicos que se propagan *eficientemente* de un sitio a otro. En un sentido estricto, se puede decir que  $d_w$  describe la propagación de una trayectoria aleatoria donde volver a ocupar los sitios fractales ya ocupados es posible mientras que  $d_{min}$  describe una manera de evitar volver a ocupar los sitios ya ocupados. El mensajero encuentra una trayectoria mínima del General X al General Y evitando pasar por los sitios ya ocupados desde X a Y, y eligiendo la trayectoria más corta.



**Figura II.7.** Representación esquemática del significado del hecho que  $d_{min}$  esté arriba de 1: si la distancia entre los puntos A y B es el doble, entonces la longitud de la trayectoria más corta aumenta por un factor de  $2^{d_{min}}$ , que es mayor que 2. (b) Valores numéricos de  $d_{min}$  para percolación (curva superior) y para DLA (curva inferior). Esta figura se basa en datos de [64].

Físicamente, esto equivale a imaginar que cada sitio del cluster del fractal tuviese un árbol sobre de él. Si el sistema está cerca al umbral de percolación, entonces los árboles forman un substrato auto-similar para escalas de longitud arriba de la longitud de conectividad  $\xi \sim (p-p_c)^{-\nu}$ . Ahora bien, en el tiempo  $t = 1$  se incendian los árboles sobre los sitios ocupados por el General X. En el tiempo  $t = 2$ , se incendian los árboles en los sitios vecinos de X, y así hasta que después de algún periodo tiempo se incendia el sitio ocupado por el General Y. Este periodo de tiempo es la trayectoria mínima  $\ell$  entre X y Y, y se ha descrito un procedimiento muy

elaborado de determinar  $\ell$ , que consiste en incendiar “cortezas químicas” sucesivas alrededor del General X.

Ahora, se puede introducir una segunda dimensión fractal intrínseca: la “dimensión química”  $d_\ell$ . Supóngase que se pregunta por la masa total de los árboles incendiados en el tiempo  $t$ . A partir de la definición de dimensión fractal  $d_f$ , se tiene que:

$$M(t) \sim r^{d_f} \quad (II-20)$$

donde  $r = r(t)$  es el radio de giración. Si uno se pregunta sobre la dependencia de  $t$  sobre  $M(t)$ , donde  $t = \ell$  es la longitud de la trayectoria mínima entre la “corteza” que se incendia y el origen del fuego. Combinando (II-18) y (II-20), se sigue que[65]:

$$M(\ell) \sim \ell^{d_\ell} \quad [\ell \ll r^{d_{\min}}] \quad (II-21)$$

con

$$d_\ell \equiv d_f / d_{\min}$$

¿Cuál es la rapidez  $v$  con la cual el frente de fuego se propaga? Abajo de  $p_c$  el fuego se localiza en un cluster finito de árboles incendiados, así que  $v = 0$ . Arriba de  $p_c$  se puede propagar sin límite, y  $v$  aumenta rápidamente conforme  $p$  aumenta arriba de  $p_c$  con un exponente  $\psi$  definido como:

$$v = (p - p_c)^\psi \quad (II-22)$$

Se ha usado el símbolo  $\psi$  para sugerir que  $v$  juega el papel de un parámetro de orden en este problema. Claramente, la velocidad está dada por:

$$v = dr / dt = dr / d\ell = (d\ell / dr)^{-1} = r^{1-d_{\min}} = (p - p_c)^{\psi(d_{\min}-1)} \quad (II-23)$$

Combinado (II-22) y (II-23) uno encuentra que:

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi / v = d_{\min} - 1 \quad (II-24)$$

Para  $d = 2$ ,  $d_{\min} - 1 \approx 1/8$ , muy cercano a cero[56,61]. Por lo que el incremento en la rapidez arriba de  $p_c$  es muy alto: un fuego que no se propaga totalmente abajo de  $p_c$  se propagará muy rápido sólo arriba de  $p_c$ .

## III. Superficies e Interfaces Fractales

### III.1 Superficies Rugosas en Sólidos

Esquemáticamente, se pueden distinguir dos tipos de superficies irregulares en sólidos: superficies rugosas y superficies de materiales porosos. En este capítulo se abordan las superficies rugosas, las relacionadas a los medios porosos se describen en el siguiente capítulo.

Los sólidos con superficies rugosas son muy comunes en la naturaleza y se presentan en muchos procesos industriales. Se pueden crear mediante diferentes mecanismos químicos y físicos tales como deposición, corrosión y desgaste, disolución maquinado, y fractura. Sin embargo, en la presente tesis se estudia la formación de superficies rugosas (interfaces fractales) en mecanismos como fractura, quemado y absorción de fluidos. El estudio de estas superficies y sus propiedades físicas y estructurales es de gran interés para muchos propósitos prácticos.

Las superficies rugosas muestran estructuras fractales.. Algunos ejemplos importantes son las superficies de las montañas[21], deposición de películas delgadas, superficies formadas por fractura y la superficie de metales fundidos.

En este capítulo se presentan algunos elementos básicos de la descripción fractal y las principales propiedades de las superficies rugosas: auto-afinidad y las hipótesis de escalamiento en el crecimiento de superficies rugosas.

#### III.1.1 Descripción Auto-afin de Superficies Rugosas.

El término superficie *rugosa* se emplea para una superficie irregular en la cual no hay regiones sobresalientes o donde al menos estas regiones sobresalientes no dominan en las propiedades de escalamiento. El hecho de que las regiones sobresalientes no dominen sobre el comportamiento de escalamiento significa que cuando el tamaño de la superficie aumenta, el peso relativo de estas regiones llega a ser despreciable. Como consecuencia, la superficie se puede describir correctamente mediante una función  $h(r)$ , la cual especifica la "altura" de la superficie en la coordenada  $r(x,y)$  en un plano de referencia apropiado. Por ejemplo, para el relieve de una montaña, el plano de referencia es el nivel del mar y  $h(r)$  es la altitud en la posición  $r$  (latitud y longitud). Las regiones sobresalientes, como las cavernas, se desprecian.

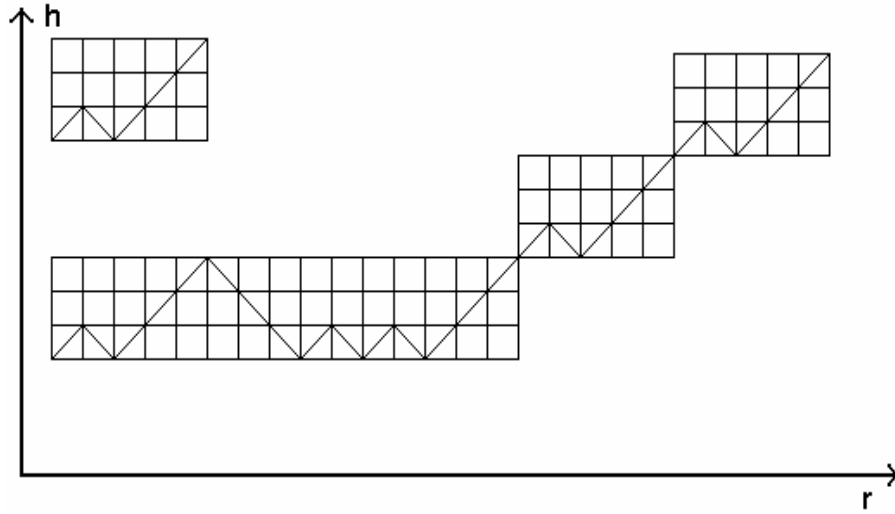
Para muchas superficies rugosas esta función  $h(r)$  es característica de un *fractal auto-afin*. Mandelbrot[21] definió los fractales auto-afines como objetos geométricos que son invariantes (estadísticamente) bajo una dilatación *anisotrópica*

(los fractales auto-similares son invariantes bajo dilatación *isotrópica*, ver figura II.1). Para el caso de los fractales auto-afines esto significa que existe un exponente  $H$  menor que 1 tal que la transformación  $r \rightarrow \lambda r$ ,  $h \rightarrow \lambda^H h$  deja la superficie invariante estadísticamente, como se muestra en la figura III.1. En contraste con el caso de los fractales auto-similares, se deben distinguir dos dimensiones diferentes, una dimensión “global” y una dimensión “local”[66,67]. La dimensión global, la cual se observa arriba de una cierta escala de cruzamiento, es simplemente  $d - 1$ . Esto significa que el fractal auto-afin parece suave a grandes distancias. La dimensión fractal local  $d_f$  se puede determinar por métodos clásicos, tal como el método de conteo de cajas[21,67]. La dimensión local se relaciona con  $H$  mediante:

$$d_f = d - H \quad (d - 1 \leq d_f \leq d) \quad (\text{III} - 1)$$

Note que para el caso de  $H = 1$ , la curva se reduce a una línea recta.

En el ejemplo que se muestra en la figura III-1, la cual es invariante bajo la transformación  $r \rightarrow 5r$  y  $h \rightarrow 3h$ , se obtiene un  $H = \log 3 / \log 5 \cong 0.68$  y una  $d_f \cong 1.32$ .



**Figura III-1.** Fractal auto-afin determinístico.

Además de la dimensión fractal local se necesitan tres longitudes para caracterizar una superficie rugosa de tamaño lateral  $L$ : (1) la *posición promedio* de la superficie (la altura promedio  $\langle h \rangle$  de los puntos en la superficie), (2) su *espesor*  $\sigma$  (la raíz cuadrada promedio de la fluctuación alrededor de la posición promediada), el cual se puede identificar como una longitud de correlación  $\xi_{\perp}$  normal a la superficie:

$$\sigma = \left\langle (h(r_0) - \langle h \rangle)^2 \right\rangle^{1/2} \quad (\text{III} - 2)$$

y (3) una longitud de correlación  $\xi_{||}$  paralela a la superficie.

Como es usual, la longitud de correlación se puede definir a partir de una función de correlación. Conforme la *irregularidad* de la superficie sea caracterizada por las fluctuaciones de  $h(\mathbf{r})$ , se considera la función de *correlación de altura*  $\Gamma_h(\mathbf{r})$ :

$$\Gamma_h(\mathbf{r}) = \langle h(\mathbf{r}_0)h(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) \rangle - \langle h(\mathbf{r}_0) \rangle^2 \quad (\text{III} - 3)$$

donde el promedio se obtiene para todos los vectores  $\mathbf{r}_0$  que se encuentran en el plano de referencia.  $\Gamma_h(\mathbf{r})$  es una función de correlación par en el sentido que relaciona las alturas en dos posiciones  $\mathbf{r}_0$  y  $\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}$ . Tiende a cero cuando las dos alturas se vuelven no-correlacionadas a una distancia del orden de la longitud de correlación  $\xi_{||}$ . La  $\xi_{||}$  se puede determinar a partir del promedio:

$$\xi_{||} = \frac{\int r \Gamma_h dr}{\int \Gamma_h dr} \quad (\text{III} - 4)$$

En vez de  $\Gamma_h(\mathbf{r})$ , a menudo se considera la función de correlación de diferencia de alturas:

$$C_h(\mathbf{r}) = \langle [h(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) - h(\mathbf{r}_0)]^2 \rangle \quad (\text{III} - 5)$$

Las dos funciones se relacionan en forma trivial mediante  $C_h = 2(\sigma^2 - \Gamma_h)$ . Si la superficie es isotrópica en el plano de referencia,  $\Gamma_h(\mathbf{r})$  y  $C_h(\mathbf{r})$  solamente dependen de  $\mathbf{r} = |\mathbf{r}|$ .

Para una superficie rugosa auto-afin  $C_h(\mathbf{r})$  sigue una ley de potencias para pequeñas distancias  $\mathbf{r}$  ( $\mathbf{r} \ll \xi_{||}$ ):

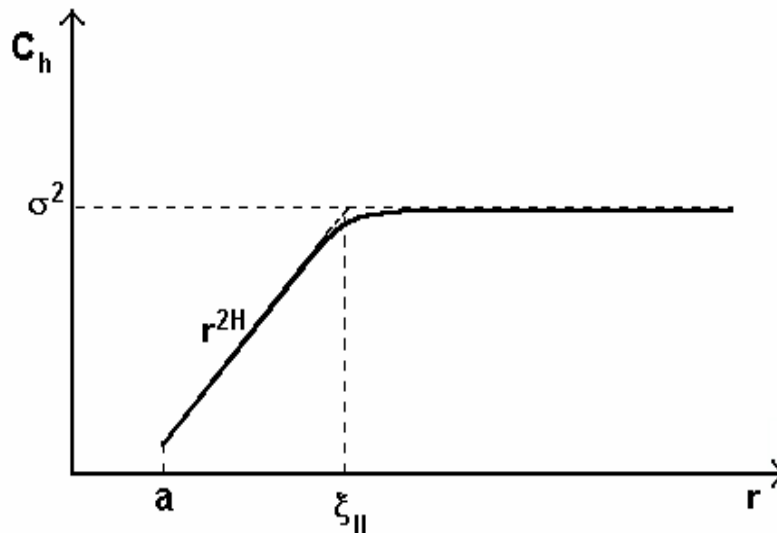
$$C_h(\mathbf{r}) \sim r^{2H} \quad (\text{III} - 6)$$

Este tipo de ley de potencias caracteriza un comportamiento de escalamiento, el cual se debe a la ausencia de una escala de longitud característica abajo de  $\xi_{||}$ . Arriba de  $\xi_{||}$ ,  $\Gamma_h$  tiende a cero y  $C_h$  llega ser una constante, como se muestra en la figura III-2.

Antes de seguir con la descripción de las superficies auto-afines, es menester detenernos en el movimiento browniano fraccional, introducido por Mandelbrot[21]. Considere una trayectoria aleatoria (movimiento browniano) a lo largo de un eje  $h$ . En el tiempo  $t = 0$  el caminante esta en una posición  $h = 0$ . Luego, el caminante camina aleatoriamente para adelante y para atrás, con una longitud de paso constante. La

trayectoria de este caminante se describe mediante una *función browniana*  $h(t)$ , que se parece en mucho a la cordillera de una montaña. (En este caso  $t$  juega el papel de  $r$ ). La función de correlación  $C_h(t)$  para tal perfil es idéntico al desplazamiento cuadrado medio a lo largo del eje  $h$ , y de aquí que  $C_h(t) \sim t$ .

Para generalizar esta simple trayectoria aleatoria, ahora considere una trayectoria aleatoria correlacionada a lo largo de  $h$ . La correlación entre los pasos sucesivos del caminante se elige de tal manera que  $C_h(t) \sim t^{2H}$ , una relación comparable a la ecuación (III-6) para las superficies auto-afines. Esta trayectoria aleatoria generalizada se llama *movimiento browniano fraccional*[21]. El perfil correspondiente  $h(t)$  es un fractal auto-afin con dimensión fractal  $d_f = d - H$  ( $H = 1/2$  y  $d_f = 3/2$  para una trayectoria aleatoria simple). El parámetro  $H$  se llama exponente de Hurst. El exponente de Hurst varía entre 0 y 1. Cuando  $H = 0$ , las alturas  $h$  no están correlacionadas; cuando  $H \rightarrow 1$ , aumenta la probabilidad de que el movimiento browniano fraccional continúe en la misma dirección. De manera más general, los incrementos sucesivos  $\delta h$  entre  $t$  y  $t + \delta t$  son correlacionados negativamente (anti-correlacionados) cuando  $H < 1/2$ , y positivamente correlacionados cuando  $H > 1/2$ .



**Figura III.2.** Diagrama de  $C_h(r)$  en un gráfico log-log en el rango  $a < r < \xi_{II}$ .

El movimiento browniano fraccional se puede generalizar fácilmente para  $d > 2$  dimensiones. La superficie auto-afin generada de esta manera es una función  $h(r)$ , donde  $r$  pertenece ahora a un plano de referencia  $d - 1$ . El movimiento browniano fraccional en  $d = 3$  representa una de las mejores maneras para generar relieves artificiales de montañas y paisajes[68].

Las ecuaciones (III-2–III-6) describen superficies rugosas, las cuales no evolucionan con el tiempo, se consideran a un tiempo fijo. Si se está interesado en el

crecimiento de la superficie, entonces se debe introducir el tiempo en las expresiones anteriores.

### III.1.2 Crecimiento de Superficies Rugosas: La Hipótesis de Escalamiento Dinámico.

En fenómenos de deposición, corrosión o crecimiento, la estructura de la superficie depende del tiempo, y la variación del tiempo se puede estudiar mediante simulaciones numéricas. Recientemente, se han hecho algunos progresos mediante la aplicación de métodos analíticos. Una revisión de los modelos teóricos de crecimiento de superficie se puede encontrar en [69].

Ahora se debe considerar una *función de correlación de alturas dependiente del tiempo*  $C_h(r,t)$ [21,70] (una generalización de III-5), la cual se define como:

$$C_h(r,t) = \left\langle \left[ \bar{h}(r_0 + r, t_0 + t) - \bar{h}(r_0, t_0) \right]^2 \right\rangle \quad (\text{III} - 7)$$

donde  $\bar{h}(r,t) = h(r,t) - \langle h(r,t) \rangle$ . El promedio se toma sobre  $r_0$  y  $t_0$ . En los casos que aquí se consideran, la masa del objeto en crecimiento es compacta (con dimensión  $d$ ) y la altura promedio  $\langle h(t) \rangle$  simplemente se controla por la rapidez de crecimiento (flujo de partículas que llegan a la superficie). A una rapidez de crecimiento constante,  $\langle h(t) \rangle$  varía linealmente con el tiempo.

Ahora bien, se puede definir un ancho  $\sigma(t)$  que dependa del tiempo, el cual juega el papel de una longitud de correlación en la dirección de crecimiento. Debido a la anisotropía de la superficie,  $\sigma(t)$  variará en forma diferente con el tiempo a partir de la longitud de correlación  $\xi_{||}(t)$  paralela a la superficie. Considere que el proceso de crecimiento inicia en una superficie plana en  $t = 0$ . A pequeños tiempos, debido a la ausencia de una escala de tiempo característica, se puede asumir que ambas longitudes de correlación  $\xi_{||}(t)$  y  $\sigma(t)$  se pueden expresar como potencias de  $t$ .

$$\xi_{||}(t) \sim t^{1/z} \quad (\text{III} - 8)$$

y

$$\sigma(t) \sim t^\beta \quad (\text{III} - 9)$$

donde  $z$  es un exponente convencional[71] para efectos de tamaño finito; en general,  $1/z \neq \beta$ . De acuerdo a (III-8) y (III-9), la dependencia del tiempo en la función de correlación  $C_h(r,t)$  (considerando superficies isotrópicas) se conoce en la vecindad de  $r = 0$ : expandiendo (III-7) para  $r = 0$ , se obtiene  $C_h(0,t) = \sigma^2(t) + \sigma^2(0)$ , así que, al menos hasta que  $\xi_{||}(t)$  no alcance a  $L$ :

$$C_h(0,t) \sim t^{2\beta} \quad (\text{III-10})$$

Por otro lado, la dependencia espacial de la función de correlación  $C_h(\mathbf{r},t)$  también se conoce a  $t$  fija, mediante la ecuación (III-6), de tal manera que un comportamiento de escalamiento completo de  $C_h(\mathbf{r},t)$  se puede obtener en principio. A partir de las ecuaciones (III-8, III-9) se puede ver que las dos longitudes de correlación  $\xi_{||}(t)$  y  $\sigma(t)$  se relacionan mediante:

$$\sigma(t) \sim \xi_{||}(t)^{\beta z} \quad (\text{III-11})$$

Como ya se mencionó, las relaciones (III-7, III-8 y III-10) solamente son válidas para *pequeños* tiempos abajo de un tiempo de cruzamiento  $\tau$ , en el cual la longitud de correlación  $\xi_{||}(t)$  alcanza el tamaño  $L$  de la muestra. Experimentalmente se ha observado que las superficies se encuentran con mayor frecuencia en una situación que corresponde a este régimen de tiempos cortos, donde  $\xi_{||}(t)$  es mucha más pequeña que el tamaño lateral  $L$  de la superficie de la muestra.

A  $t = \tau$  se tiene que  $\xi_{||}(t) = L$ , a partir de lo cual se sigue que  $\tau \sim L^z$ . Para tiempos mayores que  $\tau$  el crecimiento exhibirá efectos de tamaño finito de acuerdo a  $\xi_{||}(t)$ , obviamente no puede ser mayor que  $L$ . Remplazando  $\xi_{||}(t)$  por  $L$  en (III-11), se obtiene:

$$\sigma \sim L^\alpha \quad (\text{III-12})$$

donde  $\alpha = \beta z$ . El crecimiento evoluciona en un estado estacionario para el cual no hay una longitud de escala característica abajo de  $L$ : la superficie completa de la muestra se ha vuelto un fractal auto-afin.

Para hacer un puente entre (III-10) y (III-12) se ha propuesto la siguiente expresión de escalamiento:

$$\sigma(L,t) = L^\alpha f\left(\frac{t}{L^z}\right) \quad (\text{III-13a})$$

con

$$f(x) \sim \begin{cases} x^\beta & \text{para } x \ll 1, \\ \text{constante} & \text{para } x \gg 1 \end{cases} \quad (\text{III-13b})$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $z$  están relacionados mediante  $z = \alpha/\beta$  [a partir de (III-9) y (III-12)]. La comparación de  $C_h(\mathbf{r},0)$  con la función de correlación a un tiempo fijo  $C_h(\mathbf{r})$  muestra que el exponente de rugosidad  $\alpha$  es igual al exponente de Hurst,  $H$ . De aquí que  $d_f = d - \alpha$ , y es posible determinar  $d_f$  a partir de la ecuación (III-12).

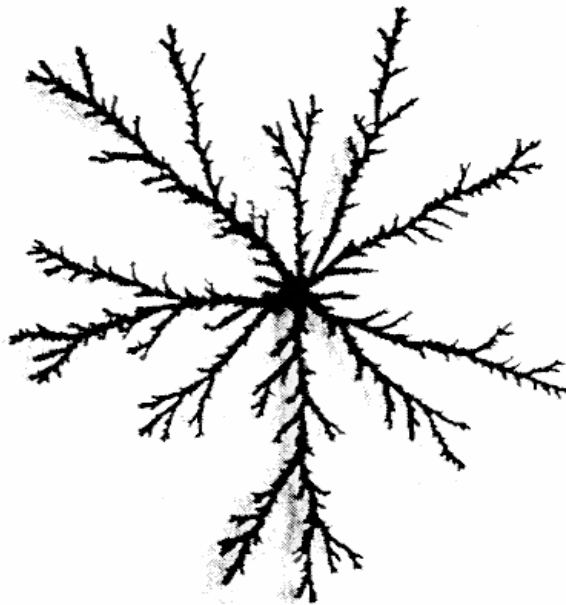


### III.3 Interfaces Fractales Fluido-Fluido.

#### III.3.1 Digitación Viscosa

La digitación viscosa se presenta cuando un fluido de baja viscosidad, como el agua, desplaza a un fluido de alta viscosidad, como el petróleo: el fluido de baja viscosidad forma “huellas dactilares”, las cuales se extienden dentro del fluido de alta viscosidad. Básicamente, esto se debe a que interfase que la interfase entre el fluido de baja viscosidad que empuja contra el fluido de alta viscosidad es inestable: las protuberancias en la interfase causan un aumento en el gradiente de presión delante de la protuberancia en el fluido de alta viscosidad, lo cual tiende a desarrollar aún más la protuberancia[72].

Sin embargo, bajo condiciones experimentales adecuadas se pueden crear figuras fractales, parecidos a los modelos de DLA, como se muestra en la figura III-3. Muy probablemente, la clave para obtener tales estructuras fractales es que la aleatoriedad debe dominar sobre la estabilidad del proceso (como la tensión interfacial)[73]. Las condiciones físicas responsables para esta situación no están completamente entendidas hasta hoy.



**Figura III-3.** Digitación viscosa característica generada por la inyección de agua en una celda Hele-Shaw radial llenada con una solución polimérica más viscosa[73].

#### III.3.2 Flujo Multifásico en Medios Porosos.

Los materiales porosos reales son irregulares, pero en general la porosidad no está directamente relacionada a la geometría fractal. Desde un punto de vista

clásico, un medio poroso se considera homogéneo a escala macroscópica[74]. Sin embargo, muchos medios porosos muestran estructuras fractales en un rango finito de escalas de longitud. Se pueden distinguir tres clases diferentes de estructuras fractales porosas[75]:

- (1) esqueletos fractales (perteneciente a masas fractales).
- (2) estructuras fractales porosas (perteneciente a los fractales porosos) y
- (3) casos donde ni el medio sólido ni el espacio poroso es fractal pero los poros tienen una superficie fractal (superficies fractales).

Los conceptos de geometría fractal se han usado para estudiar diversos objetos porosos a diferentes escalas, que van desde longitudes a escala microscópica, en el caso de aerogels o resinas orgánicas, a escalas de longitud macroscópica en el caso de esponjas, corales, arenas o rocas volcánicas y aún cavernas.

Las propiedades físicas de los medios porosos se han estudiado intensamente[75], pero las cuestiones de porqué y cómo se forman ha sido poco de poco interés. Entre los posibles mecanismos que dan lugar a la porosidad fractal están los siguientes: aglutinación, descomposición espinodal y lixiviación consecutiva, corrosión y fractura[76].

La comprensión del transporte de fluidos en medios porosos es de gran importancia industrial. La recuperación de petróleo, o la prevención de contaminación de mantos acuíferos subterráneos para la agricultura son algunos de los campos de aplicación. Debido a este interés práctico, el flujo multi-fásico en medios porosos ha sido objeto de muchos estudios teóricos y experimentales.

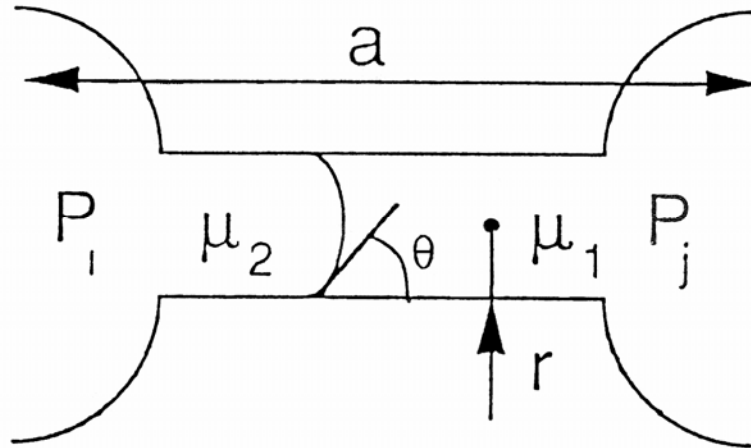
El transporte de un fluido monofásico a través de un medio poroso bien conectado se ve limitado por su *permeabilidad* finita  $k$ , la cual corresponde a la “conductividad” con respecto al transporte del fluido. La permeabilidad  $k$ , la diferencia de presión  $\Delta P$  a través del medio, y la rapidez de flujo volumétrico  $Q$ , se relacionan a través de la ley de Darcy:

$$Q = -\frac{kA}{\mu} \frac{\Delta P}{L} \quad (\text{III-14})$$

donde  $\mu$  es la viscosidad del fluido,  $A$  es el área de la sección transversal, y  $L$  es la longitud del medio en la dirección del fluido. Para un flujo polifásico rige la misma ecuación cuando la permeabilidad es bastante grande, siendo  $\mu$  una viscosidad efectiva. Sin embargo, la permeabilidad puede ser anormal en muchos regímenes de transporte. Así pues, un flujo polifásico se vuelve extremadamente complicado, debido a los huecos (o poros y gargantas), y debido a las irregularidades en la superficie de estos huecos. En este caso la ley de Darcy (III-14) ya no se cumple y pueden aparecer las estructuras fractales en materiales porosos *no fractales*; aun

una distribución aleatoria “estrecha” de tamaños de poro puede inducir estructuras fractales muy complejas.

**a) Caso general: desplazamientos inmiscibles.** Un medio poroso se puede representar esquemáticamente en una red regular, donde los sitios representan los poros y los enlaces representan las gargantas. Los poros y las gargantas se describen por su radio, como se muestra en la figura III-4. Los radios se eligen aleatoriamente, de acuerdo a leyes de distribución dadas que pueden ser diferentes para poros y para gargantas. Luego, la red se caracteriza por cinco parámetros: radio promedio de poros y gargantas, los anchos de sus distribuciones, y la distribución de distancias entre poros. Esto permite una variación independiente de la porosidad (fracción del volumen másico del medio poroso, lo cual corresponde a los poros y las gargantas) y de la permeabilidad.



**Figura III-4.** Representación esquemática de una garganta de radio  $r$  conectada a dos poros  $i$  y  $j$ .  $P_i$  y  $\mu_2$  son la presión y la viscosidad del fluido invasor 2 en el poro  $i$ ,  $P_j$  y  $\mu_1$  son la presión y la viscosidad del fluido desplazado 1 en el poro  $j$ .

Primero, se examina la invasión de poros individuales. Se considera un fluido no-mojable con viscosidad  $\mu_2$  desplazando a un fluido con viscosidad  $\mu_1$ . El fluido 2 puede invadir una garganta  $ij$  (con radio  $r$ ) entre dos poros  $i$  y  $j$  solamente si la diferencia de presión  $P_i - P_j$  es mayor que la presión de capilaridad  $\Pi = 2\gamma \cos\theta / r$  en la interfase entre los dos fluidos ( $\gamma$  es la tensión superficial y  $\theta$  es el ángulo de contacto, el poro  $i$  es ocupado por el fluido no-mojable y el poro  $j$  por el fluido mojable). La rapidez de flujo en la garganta está dada por:

$$Q_s = \frac{\pi r^4}{8a\mu} (P_i - P_j - \Pi) \quad (\text{III} - 15)$$

con la condición que  $\Pi < P_i - P_j$ . La viscosidad efectiva  $\mu$  es la combinación de pesos de las viscosidades  $\mu_1$  y  $\mu_2$ . La ecuación (III-15) muestra que el proceso de transporte

depende fuertemente de los parámetros locales tales como el radio de la garganta o la calidad superficial (a través de  $\theta$ ).

En una red porosa donde todos los poros están conectados, la diferencia de presión  $P_i - P_j$  entre los poros vecinos depende de las velocidades de flujo de todas las demás gargantas. Este es un problema complicado de multi-cuerpos, y se han empleado estudios experimentales y simulaciones por computadora para comprender más sobre los mecanismos de este complicado problema.

Se han realizado varios experimentos en redes bi-dimensionales y tri-dimensionales (empaquetamiento aleatorio de canicas de vidrio o de acrílico)[77]. Para realizar experimentos controlados, se han construido medios porosos artificiales. Estudios experimentales y simulaciones por computadora han mostrado que la inyección en medios porosos es gobernada por dos parámetros adimensionales: el cociente de viscosidad  $M = \mu_2 / \mu_1$  y el número de capilaridad  $C$ , el cual es la relación de las fuerzas de viscosidad a las fuerzas de capilaridad:

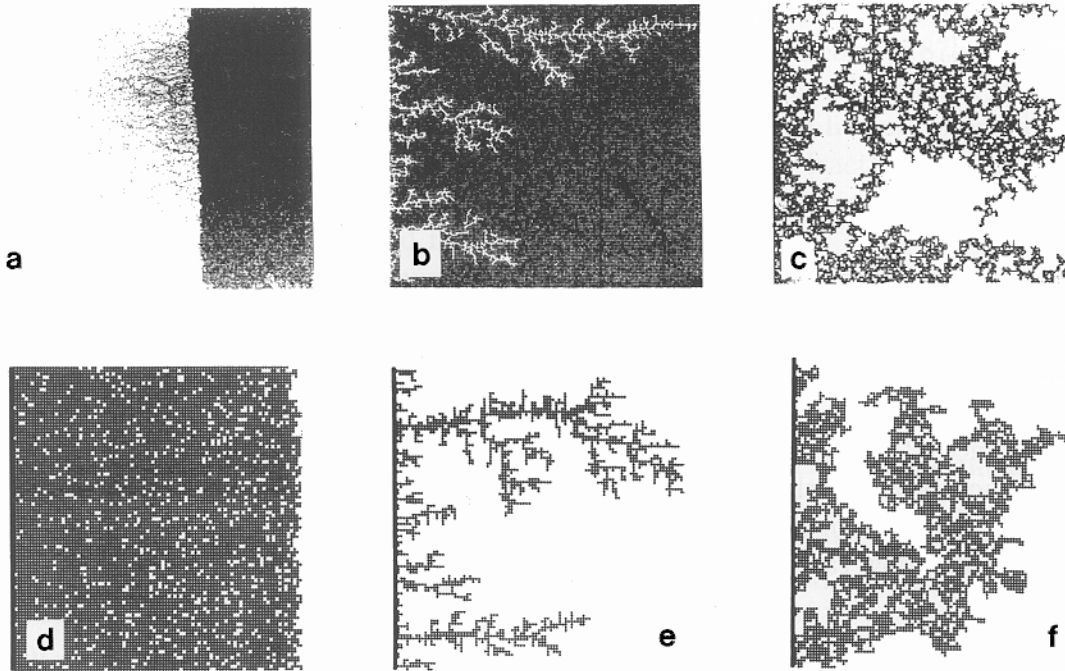
$$C = \frac{Q\mu_2}{A\gamma \cos \theta} \quad (\text{III} - 16)$$

Lenormand et al[78] han encontrado experimentalmente tres principales tipos de morfologías de interfaces dependiendo de los parámetros  $M$  y  $C$ , como se muestra en las figuras III-5 a-c. La figura III-5a corresponde a los valores más altos de  $M$  y  $C$ , y muestra una interfase plana en la escala de unos cuantos poros. A este régimen se le llama el *régimen de desplazamiento estable*: la fuerza dominante proviene de la viscosidad del fluido *inyectado*, y los efectos de la capilaridad y la caída de presión en el fluido desplazado son despreciables. La figura III-5b representa *el régimen de digitación viscosa*. En este caso, la fuerza dominante proviene de la viscosidad del fluido *desplazado* y otra vez, los efectos de la capilaridad y la caída de presión en el fluido desplazado se desprecian. La interfase tiene la estructura de árbol sin marañas. La figura III-5c es un ejemplo del *régimen de digitación por capilaridad*. Ahora, la fuerza principal es debida a la capilaridad. La inyección se realiza a valores muy pequeños de  $C$  correspondiendo a bajas velocidades de flujo  $Q$ . En las regiones de transición se observan situaciones intermedias.

Lenormand et al[79] han plasmado estas observaciones en un diagrama de "fases" en el plano  $(M,C)$ , el cual se muestra en la figura III-6: la región 'a' corresponde al régimen de *desplazamiento estable*, la región 'b' corresponde al régimen de digitación viscosa y la región 'c' corresponde al régimen de *digitación por capilaridad*. El desplazamiento por viscosidad se describe en las regiones 'a' y 'b', en las cuales domina la viscosidad, de tal manera que el crecimiento está gobernado por el gradiente de presión entre la entrada y la salida (efectos no-locales).

Se pueden distinguir tres mecanismos básicos que generan las diferentes estructuras en las regiones 'a', 'b' y 'c':

a) Si  $M$  es grande, el sistema se puede describir mediante *aniquilación por difusión limitada* (anti-DLA)[80], lo que conduce a interfaces no-fractales (región a). En este modelo, se libera una partícula (que representa el fluido invasor) cerca de un agregado compacto (que representa una red porosa llenada con otro fluido). La partícula se mueve aleatoriamente hasta que encuentra un lugar en el agregado, entonces la partícula y el sitio del agregado se eliminan y se libera una nueva partícula.



**Figura III-5.** (a-c) Resultados de los experimentos realizados por Lenormand et al[78] para varios valores de  $M$  y  $C$ . (a) aire desplazando petróleo:  $\log M = 2.0$ ,  $\log C = -1.0$ . (b) Aire desplazando petróleo muy viscoso:  $\log M = -4.7$ ,  $\log C = -6.3$ . (c) Mercurio desplazando aire:  $\log M = 1.9$ ,  $\log C = -5.9$ . (d-f) Simulaciones numéricas por Lenormand et al. en flujo bifásico en medios porosos con valores de  $M$  y  $C$  muy cercanos a los utilizados en los experimentos. (d)  $\log M = 1.9$ ,  $\log C = -0.9$ . (e)  $\log M = -4.7$ ,  $\log C = -5.7$ . (f)  $\log M = 1.9$ ,  $\log C = -5.9$ .

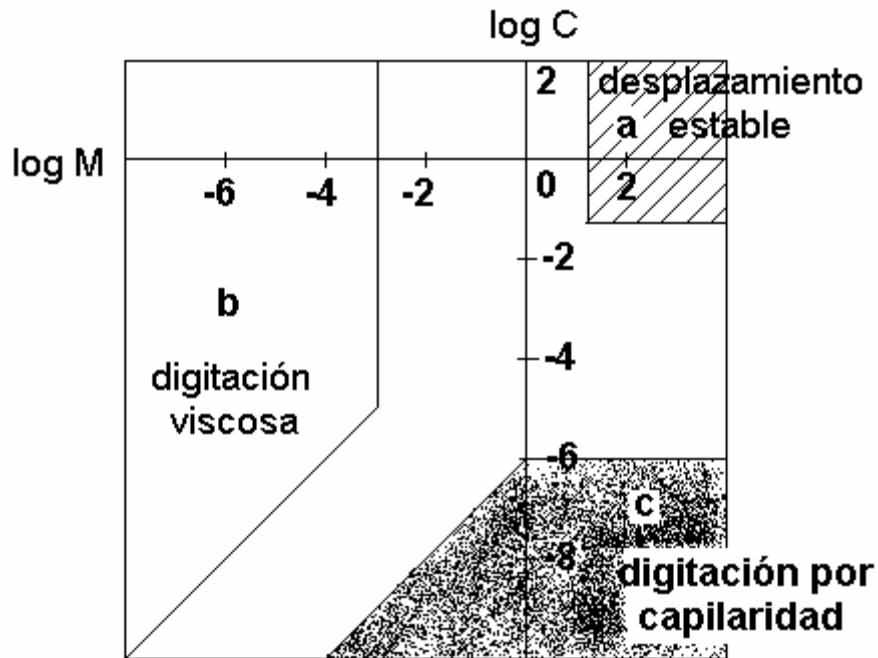
b) Si la relación de viscosidad  $M$  es pequeña (digitación viscosa en la región 'b') el proceso se describe por *aglutinación por difusión limitada* (DLA), y

c) Si dominan las fuerzas de capilaridad, la percolación por invasión describe la baja rapidez de invasión del fluido no-mojable (región 'c'). Los poros son conquistados continuamente; en cada etapa, la invasión procede a través de la garganta de mayor diámetro conectada a la región ya conquistada.

Finalmente, se nota que si el fluido invasor es más mojable que el fluido desplazado, el medio poroso es conquistado homogéneamente. En este caso, se forma una interfase fractal auto-afin entre el fluido conquistador y el fluido desplazado[81].

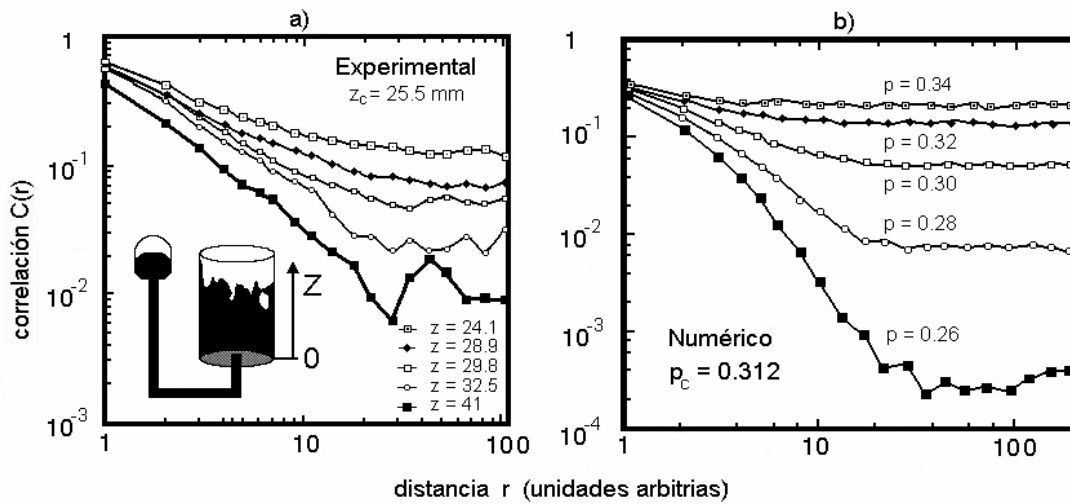
Sin embargo, en varios experimentos bi-dimensionales se encontraron valores entre 0.65 y 0.91 para el exponente de rugosidad  $\alpha$ . Horvath *et al*[81] encontraron  $\alpha \cong 0.81$  a una rapidez de conquista constante en una celda Hele-Shaw bi-dimensional llena con canicas de vidrio; Rubio *et al*[82] obtuvieron  $\alpha = 0.73 \pm 0.03$  en un sistema similar: Por otro lado; Buldyrev *et al*[83] encontraron que  $\alpha = 0.65 \pm 0.05$  en experimentos de inmersión de papel toalla. Para el caso de perfiles de fractura en probetas de papel, se encontraron valores similares al exponente de rugosidad en inmersión de papel[84]. En el caso del crecimiento de colonias de bacterias se encontró un valor de  $\alpha = 0.78$ . La razón de la dispersión de estos valores de  $\alpha$  no está aún completamente entendida. Parece ser que la rugosidad es sensible a las condiciones de flujo (situación en el diagrama de fase, ver figura III-6) y a la existencia de efectos no-locales de presión, y se pueden encontrar cruzamientos entre las varias clases de universalidad.

Finalmente, se deben mencionar algunos estudios sobre invasión de un fluido mojabable por Robbins *et al*[85] quienes encontraron numéricamente un exponente de rugosidad  $\alpha \cong 0.81$ [86]. Otro modelo interesante que se ha propuesto recientemente es el modelo DPD, el cual está relacionado a la percolación orientada[83,86,87]. El modelo arroja un exponente  $\alpha = v_{\perp}/v_{\parallel} \cong 0.63$ , (donde  $v_{\perp}$  y  $v_{\parallel}$  son los exponentes de la longitud de correlación normal y paralela a la superficie rugosa), el cual concuerda con el experimento de inmersión de papel toalla. Havlin *et al*[88] identificaron recientemente el exponente dinámico  $z$  en  $d + 1$  y encontraron que es igual a  $d_{min}$  de percolación isotrópica en  $d$  dimensiones.



**Figura III-6.** Diagrama de “fases” para varios regímenes de invasión como una función de los parámetros  $M$  y  $C$ [79].

**b) Conquista lenta por un fluido no mojable bajo gravedad.** En la mayoría de los sistemas tri-dimensionales, no se puede despreciar la presencia de la gravedad. Esto se ha mostrado en un estudio experimental de conquista lenta de metal de Wood en padecería de vidrio[89]. En este experimento el metal de Wood (una aleación líquida de bajo punto de fusión) se inyecta en el fondo de una columna al vacío con padecería de vidrio de 10 cm de diámetro interior. La rapidez del flujo es baja (unos cuantos mm / hr), de tal manera que las pérdidas de presión viscosa se pueden despreciar, y el número de capilaridad es mucho más pequeño que 1: esto corresponde a la región ‘c’ del diagrama de fases de la figura III-6. Cuando la interfase ha alcanzado una altura dada, se para la inyección y el metal solidifica. Se analizan las secciones horizontales de la interfase correspondientes a las diferentes alturas. Las imágenes son digitalizadas en una red cuadrada de pixeles y los pixeles “conquistados” o “vacíos” se discriminan mediante un procedimiento umbral. Luego, se determina la función de correlación densidad-densidad  $C(r,z)$  de la distribución del metal de Wood en planos horizontales a la altura  $z$ . El resultado se muestra en la figura III-7. A un valor bajo de  $r$ ,  $C(r,z)$  tiene un comportamiento de ley de potencias,  $C \sim r^{D(z)-3}$ , mientras que a un valor grande de  $r$ ,  $C(r,z)$  es vuelve constante, igual a la saturación promedio (concentración de poros conquistados) a una altura  $z$ . El exponente  $D(z)$  juega el papel de una dimensión fractal efectiva.



**Figura III-7.** Comparación de resultados experimentales[89] y calculados[90] para la función de correlación  $C(r)$  para varios cortes correspondientes a varias alturas  $z$  en el experimento de inyección. En (a) se muestra el dispositivo experimental.

Debido a la alta densidad del metal de Wood, en estos experimentos es importante la influencia de la gravedad conforme conduce a una variación lineal de la presión en el metal líquido con respecto a la altura  $z$ . Para modelar este comportamiento, se puede pensar en una simple extensión del modelo de percolación por conquista: *percolación por conquista de gradientes*, donde a una red de tamaño  $L^d$  se le asignan números aleatorios entre  $z/L$  y  $1 + z/L$  a cada enlace. De esta manera, la “resistencia” a la conquista aumenta linealmente con respecto a  $z$ . La conquista empieza a  $z = 0$  y continua como en un proceso clásico de percolación por

conquista. Se espera que la interfase de la región conquistada sea similar a la interfase generada en percolación por gradientes[90], pero contraria a la percolación por gradientes, no hay islas de enlaces conquistados. La región conquistada, corresponde al cluster infinito en percolación.

Gouyet *et al*[91] han estudiado las propiedades de escalamiento de la percolación por gradientes, la cual permite una comprensión cuantitativa de los experimentos anteriores. Por ejemplo, la función de correlación  $C(r,z)$  se ha ajustado a su contraparte en la simulación de percolación por gradiente, como se muestra en la figura III-7. A partir de este ajuste se puede determinar la dimensión fractal  $d_f$  del patrón de crecimiento. Se obtiene  $d_f \cong 2.4$ , cercano al valor  $d_f \cong 2.5$  encontrado en cálculos numéricos.

**c) Fluctuaciones.** Como en el caso de las interfaces por difusión, se pueden observar *fluctuaciones* de todos los tamaños durante el crecimiento de las interfaces por conquista. Ya se ha mostrado que la *percolación por conquista de gradientes* es apropiada para describir la *conquista lenta por un fluido no mojable* en presencia de un campo gravitacional. Como consecuencia, todos los resultados se aplican a las fluctuaciones de la interfase creada durante el proceso de conquista. Entonces, la dinámica de los frentes consiste en explosiones repentinas[91] donde las regiones grandes del medio poroso se pueden conquistar. Se ha propuesto llamarlo “interfase ráfaga” en oposición a “interfase fija” la cual se observa en interfaces auto-afines[92] y la cual tiene un comportamiento de escalamiento diferente.

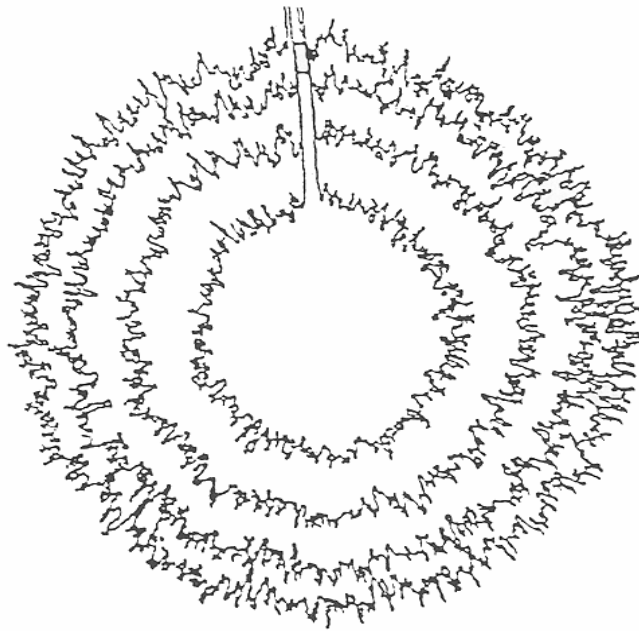
La conquista lenta de un medio poroso pertenece a la clase general de procesos llamados criticalidad auto-organizada[93]. Las “explosiones antes mencionadas” generalmente se llaman “avalanchas” en tales procesos (ver [8]). Como en el caso de las interfaces por difusión, las “perturbaciones” generadas durante la inyección de un fluido, la cual se puede medir presentan dos regímenes: una perturbación blanca de baja frecuencia, y una perturbación Browniana de alta frecuencia, separadas por un cruzamiento que depende del gradiente de presión.

**d) Desplazamiento Miscible en Medios Porosos.** El caso de desplazamientos miscibles en medios porosos se ha investigado en detalle por Maloy *et al*[94]. Estudiaron la estructura de la dispersión hidrodinámica en un sistema poroso bi-dimensional. El experimento se hizo en un modelo poroso bi-dimensional de 40 cm de diámetro que consistió de una capa de canicas de vidrio (de un 1 mm) empaquetadas aleatoriamente entre dos hojas de plástico. Este sistema se llenó con una mezcla de glicerol-agua y el experimento de dispersión se realizó al inyectar una solución de glicerol negro-agua-negrosina en el centro de la muestra. Maloy *et al* encontraron que la concentración de contornos del agente negro son curvas auto-afines[94]. El resultado se muestra en la figura III-8.

El contorno auto-afin, o interfase de dispersión, refleja la distribución de probabilidades donde las trazas terminan de difundirse en el tiempo  $t$ . Su dimensión fractal  $d_f = 1.42 \pm 0.05$ . Este valor indica claramente que esta interfase pertenece a



una clase de universalidad diferente de aquellas interfaces de difusión descritas anteriormente, y consecuentemente tiene un origen diferente.



**Figura III-8.** Desarrollo dinámico de un contorno fractal durante la dispersión de glicerol coloreado en glicerol de la misma viscosidad y densidad[94].

#### III.4 Fractura Hidráulica

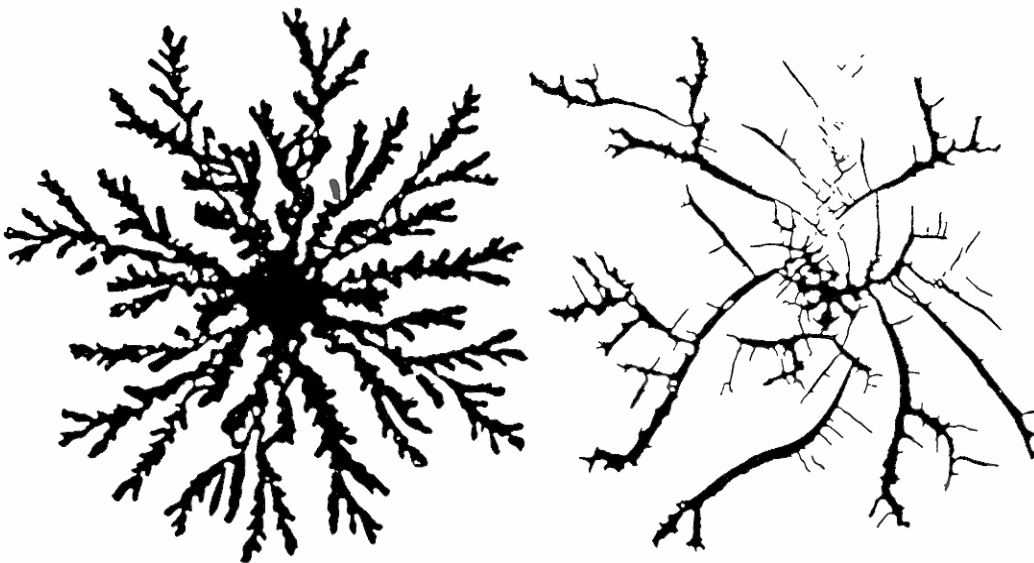
La fractura hidráulica es una tecnología empleada en fractura de suelos para mejorar la recuperación geotérmica o la producción de petróleo. Consiste en inyectar agua a alta presión en un agujero barrenado. En Orléans [95] se realizaron experimentos bi-dimensionales inyectando agua o aire en un hoyo que se encontraba en el centro de una celda Hale-Shaw llena de arcilla. En la figura III-9 se puede observar el patrón de penetración del agua en las arcillas con concentraciones diferentes. En la figura III-9a se tiene digitación viscosa con un radio de curvatura finito en las puntas y en la figura III-9b se ve un agrietamiento. Las puntas de la grieta son agudas debido a que aún para perturbaciones de vectores de onda muy pequeños son inestables. La dimensión fractal para el patrón de la figura III-9a es aproximadamente de 1.6, mientras que para el patrón de la figura III-9b es aproximadamente de 1.4. Si se aumenta la concentración, se puede presenciar una transición de morfología entre los dos patrones, que también dependen de la rapidez de inyección, puesto que la arcilla es un fluido viscoelástico[96].

La innovación interesante en fractura hidráulica es el hecho de que las cargas impuestas externamente, por ejemplo la presión actuando sobre la superficie interna

del hoyo, aumenta conforme la grieta crece y su dirección, que es perpendicular a la superficie, seguirá la orientación de una grieta con morfología fractal. Un modelo de viga simple[97], muestra las consecuencias. En el centro de una red cuadrada con condiciones frontera libres se genera una grieta al eliminar una viga vertical. En cada extremo de la viga eliminada se aplica una fuerza puntual  $p$  en la estructura. Se calculan las fuerzas de equilibrio que actúan a lo largo de cada viga, a lo largo de la superficie de la grieta, mediante un gradiente conjugado y de entre las vigas bajo tracción se elige una aleatoriamente y se elimina. Este modelo se parece al modelo Eden, pero tiene la restricción adicional que los elementos de superficie bajo compresión no se pueden romper. La figura III-10 muestra una grieta típica generada con este modelo. Se puede ver que la abertura de la grieta es mayor para los ramales principales que para los ramales adyacentes. De hecho, el volumen de la grieta aumenta como el cuadrado del radio  $R$  mostrando que el fluido realmente entra en el suelo[97]. Las escalas en gris de la figura III-10 son las diferencias de los eigenvalores del tensor de esfuerzos  $\gamma$ ; por lo tanto, representa el patrón de interferencia observado experimentalmente a través de fotoelasticidad, la densidad de las líneas son una medida de los esfuerzos elásticos. Para la superficie  $S$  de la grieta se encuentra que[97]:

$$S \propto R^{d_f} \quad \text{(III-17)}$$

con una dimensión fractal de  $d_f = 1.56 \pm 0.05$ .



**Figura III-9.** Patrones producidos por la inyección de agua en una pasta de bentonita/agua a concentraciones de (a) 0.008 y, (b) 0.20.[95].

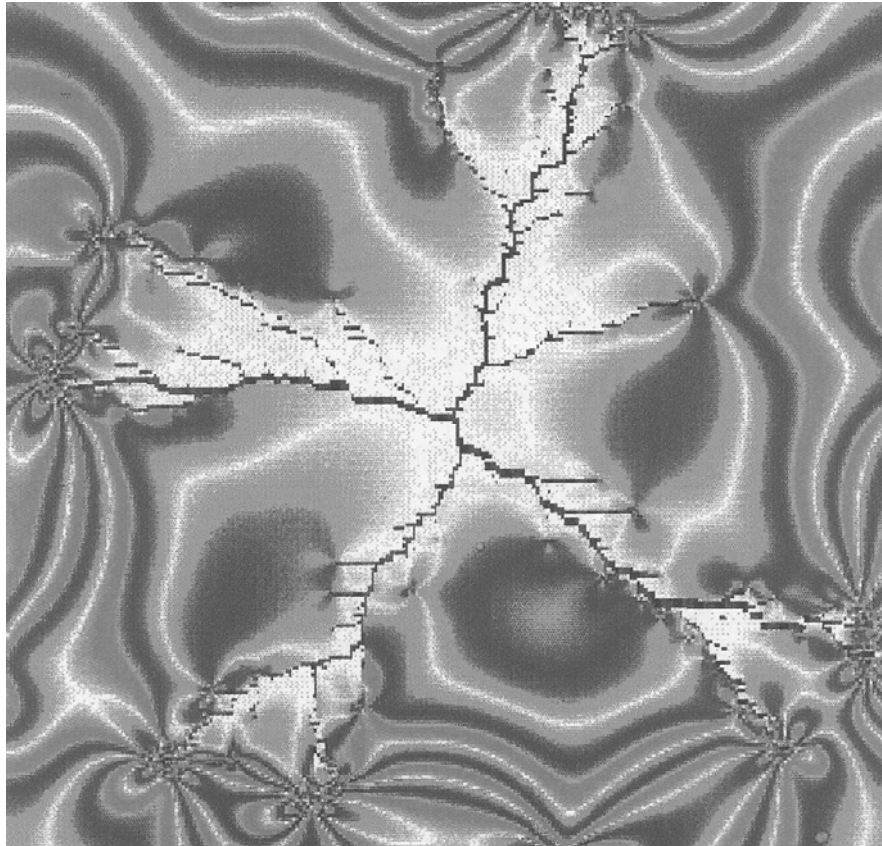
En un modelo más real[98] el fluido se inyecta a una velocidad constante dentro de una grieta de tal manera que durante cada intervalo de tiempo  $\Delta t$  el

### III. Superficies e Interfaces Fractales

volumen de la grieta aumenta  $\Delta V$ . También el desorden inherente se toma en cuenta de manera aleatoria dando a cada viga un umbral de rompimiento de acuerdo a:

$$P(x) = (1 - \alpha)x^\alpha \quad \text{con } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad \alpha > -1 \quad (\text{III-18})$$

donde  $P(x)$  es una distribución de ley de potencias,  $\alpha$  es un parámetro de la distribución que indica el grado de desorden. Como en el caso anterior, se puede calcular la distribución de esfuerzos a una presión fija,  $p_0$ , (es una presión ficticia), empleando un gradiente conjugado. Aprovechando la linealidad de las ecuaciones elásticas, se obtiene una presión real  $p$ , puesto que se conoce el volumen real de la grieta. Todas las vigas sobre la superficie de la grieta que excedan el umbral de la fuerza longitudinal son eliminadas. Si  $\Delta V$  se elige muy pequeña, las vigas se rompen en clusters bien separados o estallidos como se ve en la figura III-11. El tiempo de vida de las explosiones y el tiempo entre rompimientos tienen distribuciones de ley de potencias, esta última corresponde a la ley de Omori[99] para terremotos. En fractura hidráulica estos eventos se pueden registrar mediante emisión acústica[100]. Las grietas tienen una dimensión fractal de aproximadamente 1.4[98] en buen acuerdo con los resultados experimentales[95].



**Figura III-10.** Ejemplo de una grieta obtenida a presión constante en una red cuadrada de 150 x 150 con condiciones frontera libres.

La aparición de los fractales en fractura se formula como un problema de crecimiento similar al de digitación viscosa. Sin embargo, la naturaleza vectorial de la elasticidad, genera patrones muy complejos aún en modelos determinísticos. Por otro lado, la influencia del desorden en fractura es muy significativa porque la fractura es dominada por los momentos extremos de la distribución de las deformaciones locales. En el caso del desorden inherente se dan evidencias de la existencia de leyes de escalamiento en las características de los rompimientos y de multifractalidad sólo antes de que el sistema se separe completamente. Por lo tanto, es posible una formulación del fenómeno de fractura como un fenómeno crítico

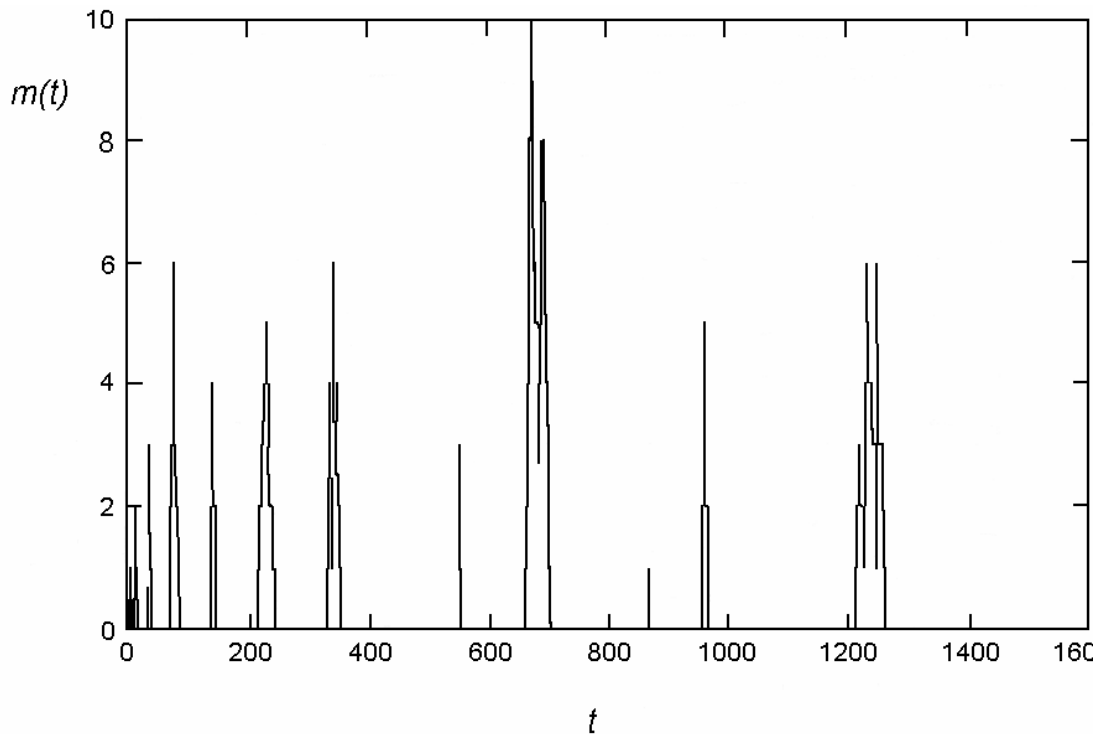


Figura III-11. Rompimiento simultáneo de vigas como una función del tiempo.

## III.5 Superficies e Interfaces

### III.5.1 Estructuras Auto-similares

Ahora se aborda el delicado y fascinante tema de superficies desordenadas. Pero ¿qué significa la superficie de un objeto fractal? De hecho, hay muchas superficies que son diferentes, dependiendo del proceso físico por el cual se formen, como se muestra en la figura III-12. Aún los objetos no-fractales pueden tener superficies fractales (como ya se mencionó); y realmente, el tema de las superficies fractales ha atraído la atención de muchos investigadores[101].

**a) Perímetro total.** Es un resultado riguroso de la percolación  $d$ -dimensional[102] que el número total de los sitios ocupados que forman el perímetro  $N_p$  escala de la misma manera que el número total de sitios que conforman los clusters:

$$N_p \sim N_f \sim L^{d_f} \quad (\text{III} - 19)$$

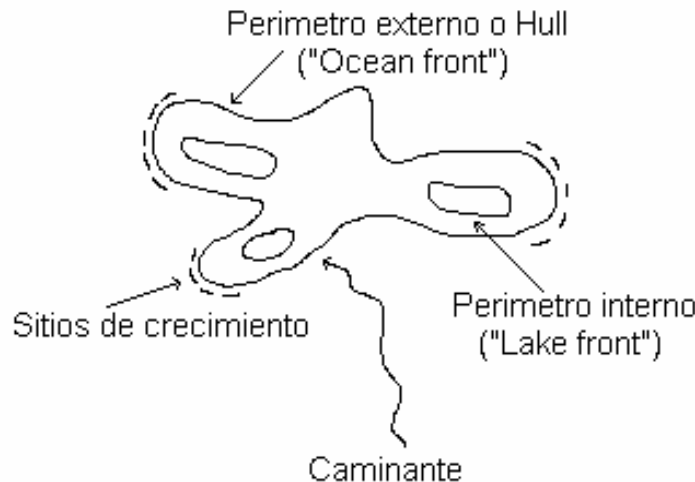
**b) Perímetro externo (hull).** El número total de sitios que conforman la superficie externa (hull), escala con el radio de giración  $r$  como:

$$N_{\text{hull}} \sim r^{d_h} \quad (\text{III} - 20)$$

Para percolación en  $d = 2$ , se ha deducido que[103]:

$$d_h = 1 + d_{\text{rojos}} = 1 + \frac{3}{4} \quad (\text{III} - 21)$$

donde  $d_{\text{rojos}} = 1/\nu = 3/4$  es la dimensión fractal de los enlaces rojos [104].



**Figura III-12.** Ilustración de las diferentes superficies fractales que tienen su origen en la descripción de un cluster de percolación[105].

Para percolación en  $d = 2$ ,  $d_f = 91/48$ ; el hecho que  $d_h < d_f$  significa que la razón de los sitios en el perímetro *externo* entre los sitios en el perímetro *total* se aproxima a cero en el umbral de percolación. Conforme los clusters hacen más grande el perímetro interno (sitios en el "lake front") hundan completamente los sitios del perímetro externo (sitios en el "ocean front").

**c) Perímetro accesible.** Para problemas de percolación en  $d = 2$ , Grossman y Aharony[106] notaron que hay muchas regiones del perímetro externo donde se

formaba un rizo. Por ello introdujeron un nuevo concepto, el *perímetro accesible*, y lo asociaron con una dimensión fractal:

$$N_{ap} \sim r^{d_{ap}} \quad (\text{III} - 22)$$

Sus cálculos indicaron que:

$$d_{ap} \approx \frac{4}{3}$$

### III.5.2 Estructuras Auto-afines

**(a) Auto-afinidad.** La transformación en escala en fractales auto-similares es isotrópica, lo que significa que la dilatación aumenta el tamaño del sistema *uniformemente* en cada dirección espacial. Los objetos fractales que se deben re-escalar usando una transformación *anisotrópica* se llaman fractales *auto-afines*.

*Escalamiento:* para cuantificar superficies desordenadas, en especial una sub-clase de fractales anisotrópicos, descritas por funciones uni-valuadas llamadas *funciones auto-afines*. La analogía de la relación de escalamiento para una función auto-afin se puede formular como:

$$h(x) \cong b^{-\alpha} h(bx) \quad (\text{III} - 23)$$

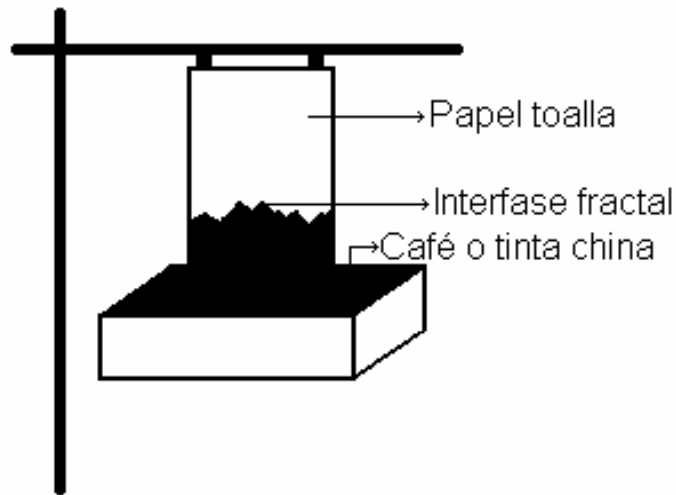
donde  $\alpha$  (en algunos textos denotado por  $H$  o  $\chi$ ) se conoce como el exponente de Hölder o exponente de auto-afin y da una medición cuantitativa de la “rugosidad” de la función  $h(x)$ . Una función auto-afin se debe re-escalar de una manera diferente horizontal y verticalmente: si la función se “alarga” por un factor  $b$  horizontalmente ( $x \rightarrow bx$ ), se debe “alargar” con un factor  $b^\alpha$  verticalmente ( $h \rightarrow b^\alpha h$ ) a fin de que el objeto resultante coincida con el objeto obtenido en la generación previa. Para el caso especial que  $\alpha = 1$ , la transformación es isotrópica y el sistema es auto-similar.

Una consecuencia importante de la ecuación (III-23) atañe con el escalamiento de la diferencia de alturas  $\Delta(\ell) \equiv |h(x_1) - h(x_2)|$  entre los dos puntos separados por una distancia  $\ell \equiv |x_1 - x_2|$ . Para sistemas auto-afines  $\Delta(\ell)$  obedece a la ecuación (III-23). La solución de la “ecuación funcional” (III-23) es una ley de potencias:

$$\Delta \sim \ell^\alpha \quad (\text{III} - 24)$$

**(b) Un ejemplo.** ¡El papel es un material heterogéneo, un prototipo de una roca heterogénea porosa que contiene petróleo! La diferencia entre el flujo de fluido en papel de toalla y la roca que contiene petróleo tiene su origen en las escalas de longitud en las cuales toman lugar estos fenómenos. Esta diferencia es una ventaja:

se puede usar como sistema un papel de toalla de 20 cm de ancho, como se muestra en la figura III-13, para ayudar a desarrollar nuestro entendimiento en el flujo de petróleo en un yacimiento petrolero de 20 km. Por ejemplo, se puede caracterizar la interfase húmeda-seca usando leyes de escala, cuya forma se puede predecir mediante simples modelos que capturan los mecanismos esenciales que contribuyen a la morfología de la interfase. Este simple ejercicio es un ejemplo de algunos de los experimentos que se realizan sobre sistemas idealizados, los cuales están arrojando nueva información en los problemas prácticos de interfaces.

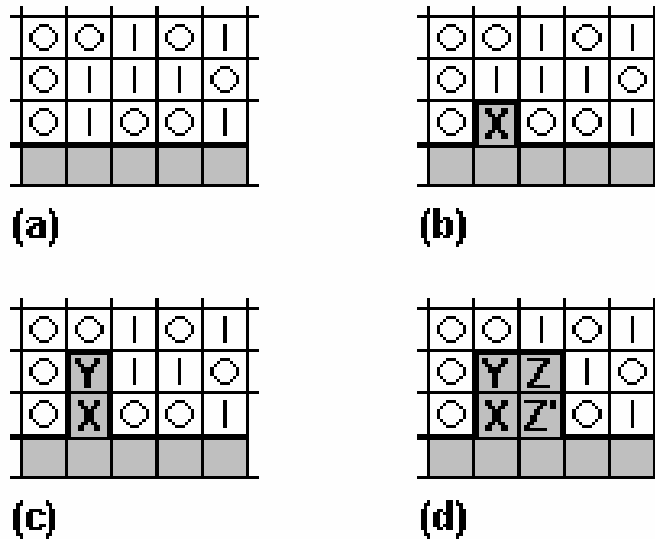


**Figura III-13.** Ilustración de un dispositivo experimental para investigar el movimiento de una interfase en un medio poroso.

**(c) Fijación por percolación orientada.** En esta sección se discute el modelo DPD (Directed Percolation Depinning), el cual tiene un término no-lineal divergente. Los exponentes de escalamiento se pueden obtener exactamente mapeando el problema de la fijación de la interfase sobre una variante de percolación llamada *percolación orientada*. La conexión entre la superficie en crecimiento con el desorden inherente y percolación orientada fue propuesta originalmente por dos estudios independientes[107,108]. Aparentemente, varios modelos diferentes también pertenecen a la misma clase de universalidad[109].

El modelo se define como sigue: sobre una red cuadrada de borde  $L$  (con condiciones frontera periódicas), se bloquea una fracción  $p$  de las celdas que corresponden al desorden inherente. Las celdas bloqueadas tratarán de detener el crecimiento, mientras que la interfase es libre de avanzar sobre celdas no bloqueadas. En  $t = 0$ , la "interfase" es la línea horizontal negra, como se muestra en la figura III-14a. En  $t = 1$  se elige aleatoriamente una celda (etiquetada con  $X$ , como se muestra en la figura III-14b) de entre las celdas no bloqueadas que son los vecinos más cercanos a la interfase. Se "moja" la celda  $X$  y *cualquiera de las celdas que están debajo de ella en la misma columna*. Luego, este proceso se itera. Por ejemplo, la figura III-14c muestra que en  $t = 2$  se elige una segunda celda no

bloqueada, la celda  $Y$ , para mojarla, mientras que la figura III-14d muestra que en  $t = 3$  se moja la celda  $Z$  y también la celda  $Z'$  debajo de ella.



**Figura III-14.** Modelo DPD para el crecimiento de una interfase. Las celdas “húmedas” están sombreadas, mientras que las celdas “secas” son bloqueadas aleatoriamente con probabilidad  $p$  (indicadas por O) ó aleatoriamente no bloqueadas con probabilidad  $(1 - p)$  (indicadas por I). (a)  $t = 0$ , (b)  $t = 1$ , (c)  $t = 2$ , y (d)  $t = 3$ [108].

Para  $p$  debajo de un umbral crítico  $p_c = p_c(L)$  la interfase se propaga sin detenerse, mientras que para  $p$  arriba de  $p_c$  la interfase es fijada por las celdas bloqueadas. La figura III-15 muestra una interfase típica después de que ha parado su crecimiento: esto sucede solo cuando la interfase se extiende mediante una trayectoria completa de celdas bloqueadas conectadas a través de los vecinos más cercanos y los próximos vecinos más cercanos. La definición del modelo excluye aquella trayectoria que tiene regiones sobresalientes, y por lo tanto es equivalente a una trayectoria que se extiende por toda la red cuadrada que va de izquierda a derecha. Tal trayectoria orientada es, de hecho, una trayectoria en un cluster de percolación orientada. Realmente, uno puede mostrar que la interfase fijada en el modelo corresponde al perímetro externo de un cluster de percolación orientada.

Cuando la probabilidad de celdas bloqueadas  $p$  esta arriba de  $p_c$ , el crecimiento de la interfase se detiene por la formación de un cluster de percolación orientada que se extiende a lo largo de todo el sistema,  $L$ . Tal cluster orientado es caracterizado por una longitud de correlación paralela a la interfase,  $\xi_{||}$ , y una longitud de correlación perpendicular a ella,  $\xi_{\perp}$ . Su significado es el siguiente: bloqueando una fracción  $p$  de sitios sobre la red, los sitios bloqueados forman trayectorias orientadas cuya longitud promedio es  $\xi_{||}$  y cuyo ancho es  $\xi_{\perp}$ . Las dos longitudes de correlación divergen en la vecindad de  $p_c$ :



III. Superficies e Interfaces Fractales

$$\xi_{\parallel} \sim |p - p_c|^{-\nu_{\parallel}}, \quad \xi_{\perp} \sim |p - p_c|^{-\nu_{\perp}} \quad (\text{III-25})$$

A partir de cálculos de percolación orientada, se sabe que  $\nu_{\parallel} \cong 1.733$  y  $\nu_{\perp} \cong 1.097$ [108].

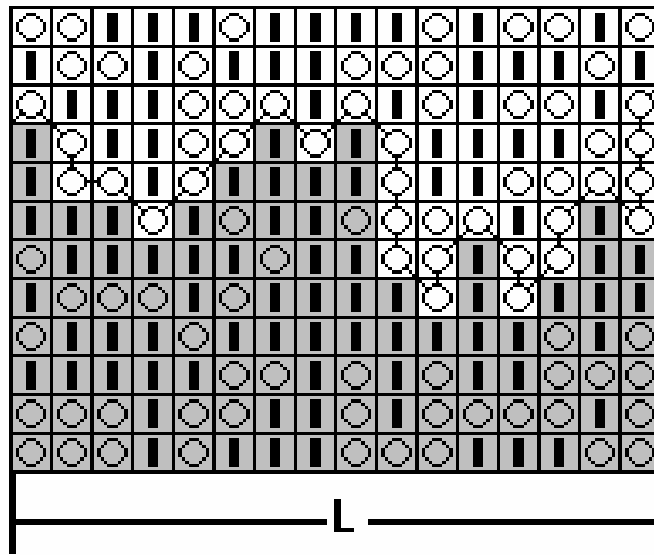
Para  $p \ll p_c$ ,  $\xi_{\parallel} \ll L$ . Las trayectorias orientadas fijan localmente la interfase, pero la interfase se mueve eventualmente con una velocidad promedio diferente de cero avanzando entre las trayectorias bloqueadas. Una trayectoria completa de fijación aparece cuando  $\xi_{\parallel}$  llega a ser igual al tamaño del sistema  $L$ . El ancho  $w$  de tal trayectoria es del orden de  $\xi_{\perp}$ . De aquí que, usando la ecuación (III-25) se pueda obtener el escalamiento del ancho:

$$w \sim \xi_{\perp} \sim |p - p_c|^{-\nu_{\perp}} \sim \xi_{\parallel}^{\nu_{\perp}/\nu_{\parallel}} \sim L^{\nu_{\perp}/\nu_{\parallel}} = L^{\alpha} \quad (\text{III-26})$$

a partir de la cual se obtiene el exponente de rugosidad:

$$\alpha = \frac{\nu_{\perp}}{\nu_{\parallel}} \cong 0.633 \pm 0.001$$

Este resultado ha sido confirmado por estudios numéricos sobre el escalamiento de la interfase fijada. La probabilidad crítica  $p_c$  debe coincidir con la probabilidad crítica del problema fundamental de percolación orientada, dando  $p_c \cong 0.47$ .



**Figura III-15.** Mostrada con línea negra, la trayectoria de fijación se ha formado las celdas bloqueadas con sus vecinos más cercanos y sus próximos vecinos más cercanos para fijar la interfase[108].

## V DESARROLLO EXPERIMENTAL

### V.1 Selección del material

El papel es un material adecuado para estudiar la formación, crecimiento y dinámica de interfaces fractales en medios porosos debido a que es poroso y posee una estructura anisotrópica asociada a la distribución asimétrica de las fibras[129], a pesar de su naturaleza estocástica de la distribución de las fibras, la estructura porosa de los papeles no es aleatoria, sino que posee correlaciones de largo alcance caracterizadas por un comportamiento de ley de potencias de la función de correlación espacio-densidad[130]. Además, diferentes tipos de papel poseen diferente estructura, dando lugar a diferentes distribuciones de poros[129]; esto permite estudiar efectos como el desorden y la anisotropía de estructuras porosas en diferentes procesos de formación, crecimiento y dinámica de interfaces fractales, que son fenómenos de interés científico y tecnológico. Por otro lado, el papel es un material económico y fácil de manejar; además, no se requiere de un equipo muy costoso para preparar las muestras para las pruebas experimentales, solamente se requieren un juego de escuadras, regla, escalímetro, compás, una navaja y una base de material adecuado para realizar los cortes de papel.

Una de las características esenciales que debía poseer el papel para realizar el presente estudio es la fluencia de fluidos de líquidos por largos periodos de tiempo. Después de haber hecho numerosas pruebas en diferentes tipos de papel, se encontró que dos reunían esta característica: papel “secante” y papel “filtro”. El papel filtro presenta tres tipos diferentes, de acuerdo al tamaño de sus poros: poro cerrado, poro medio y poro abierto.

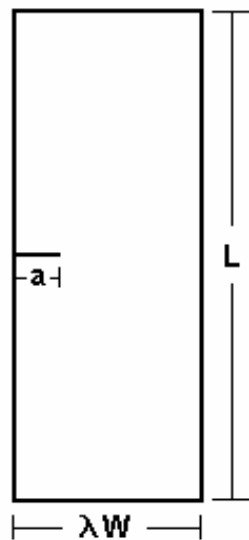
### V.2 Preparación de Probetas

#### V.2.1 Formación de Interfaces en Procesos de Fractura, Quemado y Flujo de Fluidos

El primer candidato para estudiar la formación de interfaces fractales mediante los procesos de fractura, quemado y flujo de fluidos fue el papel secante. Para realizar estos experimentos se prepararon probetas con una longitud  $L$  constante y seis anchos diferentes. Las probetas se cortaron paralelas a la orientación de las fibras de papel (dirección longitudinal). La configuración geométrica de las probetas se muestra en la figura V-1. Las tolerancias dimensionales para las probetas fueron de  $\pm 0.5$  mm.

## V. Desarrollo Experimental

En general, se prepararon 6 series de 50 probetas cada una. La longitud  $L$  de todas las probetas fue de 200 mm (en la dirección perpendicular a la formación de la interfase); el ancho de las probetas variaba de acuerdo a  $\lambda W$ , donde  $W = 12$  mm y  $\lambda = 1.0, 1.333, 2.0, 2.667, 4.0$  y  $4.667$ . Las probetas que se emplearon en las pruebas de fractura sólo se les practicó una muesca del ancho de la navaja con el fin de iniciar la propagación de la grieta; la longitud de la muesca fue de  $a = W/4$  para cada ancho. Las probetas utilizadas en las pruebas de quemado y flujo de fluidos se les practicó una muesca con longitud  $a = 1$  mm. La longitud de la muesca en estos dos últimos casos era de referencia; es decir, altura a la cual el frente de flama o frente húmedo-seco debía llegar. La longitud de la muesca fue la misma para todos los anchos de las probetas en estas pruebas.



**Figura V.1.** Configuración de las probetas de papel secante para pruebas de formación de interfaces mediante los procesos de fractura, quemado y flujo de fluidos.

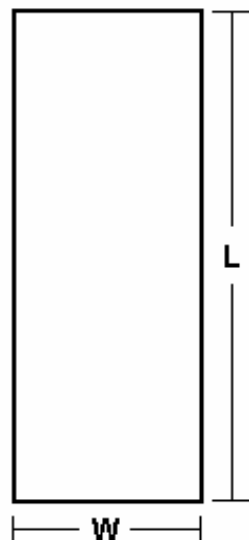
### V.2.2 Formación de Interfaces en el Proceso de Fractura

Durante la realización de las pruebas de formación de interfaces fractales en probetas de papel secante, nos enteramos que el papel filtro tenía tres presentaciones diferentes: 1) poro cerrado, 2) poro medio y, 3) poro abierto. Pensamos que sería interesante estudiar el efecto de la microestructura (en este caso, con relación al tamaño de los poros) en la formación de interfaces fractales. Sin embargo, en este estudio solamente se realizó para el proceso de fractura, debido a cuestiones de tiempo. Se prepararon 30 probetas para cada tipo de papel filtro y para cada dirección con respecto a la orientación de las fibras del papel; es decir, se prepararon 30 probetas de papel filtro poro cerrado en la dirección paralela a la orientación de las fibras del papel (dirección longitudinal) y 30 probetas de papel filtro poro cerrado en la dirección perpendicular a la orientación de las fibras del papel

(dirección transversal). En total se prepararon 180 probetas. La longitud de las probetas  $L$  fue de 200 mm y el ancho  $W$  fue de 110 mm, además, se les practicó una muesca de longitud  $a = 10$  mm: Así pues, el ancho efectivo de fractura fue de 100 mm. La configuración geométrica de estas probetas es similar a la mostrada en la figura V.1, solo varían algunas dimensiones de las probetas. Es importante mencionar que las probetas, tanto de papel secante como de papel filtro, se prepararon a partir de un solo lote de papel, asegurando con esto la homogeneidad en las pruebas experimentales; es decir, si hay una disparidad muy marcada en los resultados experimentales, ésta no se atribuya a otros factores, como son el proveedor, el proceso de fabricación etc.

### V.2.3 Crecimiento y Dinámica de Interfaces

Para estos experimentos se emplearon probetas de papel secante y papel filtro poro medio con longitud  $L = 200$  mm y anchos de  $W_1 = 50$  mm y  $W_2 = 100$  mm, respectivamente. Para el caso de papel secante se prepararon 30 probetas paralelas a la orientación de las fibras de papel (dirección longitudinal) y 30 probetas perpendiculares a la orientación de las fibras (dirección transversal) con ancho  $W_1 = 50$  mm; así también, se cortaron 30 probetas paralelas a la orientación de las fibras de papel (dirección longitudinal) y 30 probetas perpendiculares a la orientación de las fibras (dirección transversal) con ancho  $W_2 = 100$  mm. Lo mismo para papel filtro poro medio. Las tolerancias dimensionales de las probetas fueron de  $\pm 0.5$  mm. En la figura V.2 se muestra esquemáticamente la configuración geométrica de estas probetas.



**Figura V.2** Configuración de probetas de papel secante y papel filtro para pruebas dinámica de interfaces.

### V.2.4 Foto - Grabación del Crecimiento y Dinámica de Interfaces

Finalmente, se prepararon 6 probetas de papel filtro con longitud  $L = 200$  mm y ancho  $W = 100$  mm, cuya configuración se muestra en la figura V.2. En este caso se prepararon 2 probetas de papel filtro poro abierto, una perpendicular a la propagación de la interfase (dirección longitudinal) y otra paralela a la dirección de propagación de la interfase (dirección transversal), respectivamente. Lo mismo se hizo para el papel filtro poro medio y poro cerrado, respectivamente. Pensamos que es importante estudiar la dinámica de interfaces en un mismo papel con diferente estructura porosa, para analizar el comportamiento dinámico de interfaces.

### V.3 Experimentos de Formación de Interfaces

#### V.3.1 Fractura, Quemado y Flujo de fluidos

Las pruebas de fractura para probetas de papel secante se llevaron a cabo en las instalaciones del Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Estado de México. Se utilizó una máquina de pruebas destructivas marca Instron, modelo 4505. Se emplearon unas mordazas especiales para poder sujetar las probetas de papel a fin de evitar el desplazamiento de la probeta, como se muestra en la figura V.3. La velocidad del cabezal en todas las pruebas fue de 5 mm/min. Las condiciones de temperatura estuvieron en el rango de 20°C a 25°C y las condiciones de humedad en el rango de 59% a 63%.



**Figura V.3** Máquina Instron utilizada en las pruebas de Fractura.

## V. Desarrollo Experimental

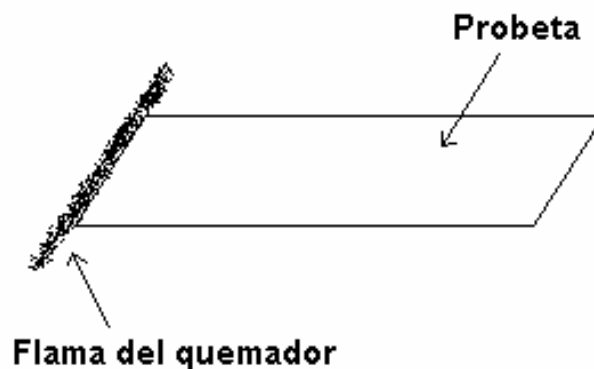
En la Tabla V.1 se muestran algunas propiedades físicas y mecánicas obtenidas durante la etapa del desarrollo experimental. Las propiedades mecánicas se obtuvieron a partir de una población de 100 probetas de papel secante en la dirección paralela a la orientación a las fibras de papel y en la dirección perpendicular a la orientación de las fibras de papel, respectivamente. Los parámetros de espesor y densidad por unidad de área se obtuvieron a partir de una población de 100 probetas.

Las pruebas de quemado se realizaron en el quemador del horno de una estufa doméstica. Durante la prueba, se colocaba un extremo de la probeta en la flama del quemador y paralela a la superficie del piso, con el fin de tratar de obtener un quemado uniforme de la probeta y minimizar la producción de fuego. En la figura V.4 se muestra esquemáticamente la forma en la que se colocaba la probeta al contacto con la flama del quemador.

**Tabla V-1.** Propiedades físicas y mecánicas de papel secante y de papel filtro poro medio.

<b>Papel</b>	<b>Secante</b>		<b>Filtro</b>	
Espesor (mm)	0.34 ± 0.07		0.25 ± 0.04	
Densidad (g/m <sup>2</sup> )	210 ± 18		110 ± 10	
Dirección (respecto a las fibras de papel)	Longitudinal	Transversal	Longitudinal	Transversal
Módulo de Young (MPa)	3350 ± 35	1900 ± 50	3075 ± 50	797 ± 20
Esfuerzo Ultimo (MPa)	20.2 ± 1.1	10.9 ± 0.5	17.5 ± 0.4	4.73 ± 0.35

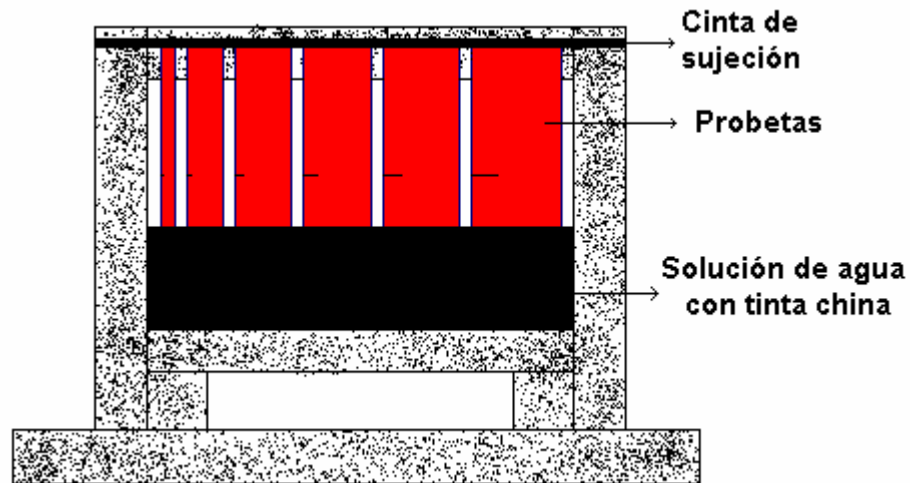
Cuando la flama alcanzaba la marca de la muesca se apagaba inmediatamente el fuego. Al principio se intentó registrar el tiempo de la propagación del frente de fuego, pero el avance del frente de la interfase era tan rápido que prácticamente era imposible observar el crecimiento y la dinámica de la interfase. Sin embargo, el trabajo del crecimiento y dinámica de interfaces en pruebas de quemado se ha dejado para un futuro cercano, debido a que se requiere un dispositivo especial para controlar la combustión y la expulsión de humo, de tal manera que se pueda caracterizar la dinámica de la interfase. Aquí solamente se hace un estudio sobre la formación de la interfase.



**Figura V-4.** Quemado de una probeta de papel secante en el quemador del horno de una estufa.

Las pruebas de flujo de fluidos se realizaron en el dispositivo que se muestra en la figura V-5. Es un dispositivo construido de madera con un recipiente de vidrio que contendrá el fluido. En este caso el fluido es una solución de agua con tinta china, aunque también se pudo haber utilizado café, o aceite para motor. La relación de agua:tinta china para la solución empleada en estas pruebas fue de aproximadamente 4:1.

Las probetas se colocaban en la parte superior del dispositivo adheridas con cinta adhesiva, como se muestra en la figura V-5. Cuando comenzaba a crecer una región húmeda se formaba una interfase rugosa entre las regiones seca y húmeda. Aunque estos experimentos son completamente simples para describir las propiedades de escalamiento de las interfaces rugosas que se forman, es muy complejo caracterizarlas a partir de análisis tradicionales. A escalas de longitud microscópicas el papel exhibe una estructura extremadamente desordenada, formada por fibras que están distribuidas y conectadas aleatoriamente. El fluido se propaga a través de las fibras de papel debido a las fuerzas de capilaridad.



**Figura V-5.** Dispositivo empleado en las pruebas de flujo de fluidos y colocación de las probetas. Los anchos de las probetas son, de izquierda a derecha, 12, 16, 24, 32, 48 y 56 mm, respectivamente.

El avance de la interfase depende de varios factores, como son: la densidad del fluido (la cual depende de la rapidez de evaporación), la densidad y la viscosidad de la suspensión, la gravedad, la temperatura, el tamaño de poros entre fibras, etc. Algunos de estos factores (rapidez de evaporación, gravedad, densidad del fluido) modifican la fuerza motriz que conduce la propagación de la interfase. Los factores como temperatura, humedad y concentración de la solución se variaron; estos cambios afectan el área de la región húmeda, la velocidad de crecimiento de la interfase y el ancho global de la interfase, pero no influyen en las propiedades de escalamiento de la interfase. Cuando la interfase paraba de crecer; es decir, llegaba a un estado de saturación, estado en el cual no se aprecia un cambio en la altura de la interfase, se retiraba y se dejaba al aire libre para su secado.

## V. Desarrollo Experimental

Las interfaces que se formaron como resultado de las pruebas de fractura, quemado y flujo de fluidos se digitalizaron en un “*scanner*” marca HP, modelo ScanJet 6100C. Los archivos digitalizados se guardaban con extensión *bmp*. Posteriormente, se obtuvieron los perfiles de las imágenes de las interfaces digitalizadas como una función uni-valuada  $z(x)$  usando el paquete Scion Image[131]. Estos perfiles se guardaban con la extensión *ts*. Los archivos con extensión *ts* se podían tratar en ambiente Excel, para posteriormente guardarlos con extensión *xls*. Finalmente, se procedió a calcular el exponente de rugosidad  $H$  para todas y cada una de las interfaces, usando el paquete *Benoit* (fractal Analysis Systems)[132]. En el Apéndice A se muestra como se verifica la confiabilidad del paquete *Benoit* antes de emplearlo en la obtención del exponente de rugosidad de los perfiles de las interfaces; por otro lado, se describen en forma breve los métodos que emplea el paquete *Benoit* para determinar el exponente de Hurst en trazas auto-afines. En las figuras V.6 (a) – (c) se muestran las interfaces que se obtuvieron durante las pruebas realizadas para los procesos de fractura, quemado y flujo de fluidos, respectivamente.



(a)



(b)





(c)

**Figura V.6** Interfaces fractales formadas mediante los procesos de (a) fractura, (b) quemado y (c) flujo de fluidos.

Por otro lado, las pruebas de fractura para los tres diferentes tipos de papel filtro se realizaron en los Laboratorios Pesados de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Zacatenco. Se empleó una máquina marca MTS, modelo 835. Las pruebas se realizaron con una velocidad de cabezal de 5 mm/min y, las condiciones de temperatura y humedad eran similares a aquellas registradas en las pruebas de fractura para el papel secante. De igual manera se emplearon unas mordazas especiales para sujetar las probetas de papel filtro a fin de evitar un desplazamiento de la probeta. En la Tabla V.2 se muestran las propiedades físicas y propiedades mecánicas obtenidas durante las pruebas. Las propiedades mecánicas se obtuvieron de una población de 50 probetas; mientras que las propiedades físicas se obtuvieron de una población de 200 probetas.

**Tabla V.2** Propiedades físicas y propiedades mecánicas para los tres diferentes tipos de papel filtro.

Papel	Porosidad cerrada		Porosidad media		Porosidad abierta	
Espesor (mm)	0.21079 ± 0.0098		0.251 ± 0.0098		0.3209 ± 0.0174	
Densidad (g/m <sup>2</sup> )	102.4 ± 2.97		103.4 ± 1.3		128.4 ± 1.08	
Dirección respecto a las fibras de papel.	Longitudinal	Transversal	Longitudinal	Transversal	Longitudinal	Transversal
E (Mpa)	2021.24± 275.68	747.07± 90.16	1596.83± 168.12	741.28± 36.04	606.32± 48.58	1115.54± 60.74
ε <sub>0.2</sub> (m/m)	0.0131± 0.0013	0.012401± 0.00103	0.012225± 0.0014	0.012479± 0.0008	0.012995± 0.0007	0.012942± 0.00106
σ <sub>0.2</sub> (Mpa)	22.6814± 1.718	7.7742± 1.0684	15.8897± 1.0253	7.7628± 0.6895	6.6544± 0.6909	12.1186± 0.953
ε <sub>rup</sub> (m/m)	0.014941± 0.0017	0.028383± 0.0046	0.0136687± 0.0013	0.027953± 0.0019	0.022358± 0.0029	0.015707± 0.00145
σ <sub>rup</sub> (Mpa)	23.9708± 5.0131	10.3009± 1.1148	16.6170± 1.0561	9.5615±0.863 5	7.8579±0.913 0	12.9162± 0.9672
σ <sub>max</sub> (Mpa)	23.9805± 5.0089	10.5191± 1.0349	16.6575±0.96 40	9.8220± 0.7121	8.0581± 0.7717	12.9934± 0.9743

Para el análisis de los perfiles de fractura se siguió el mismo procedimiento descrito en las pruebas de formación de interfaces fractales en probetas de papel secante. En las figuras V.7 (a) – (f) se muestran las interfaces de fractura para los tres diferentes tipos de papel filtro.

V. Desarrollo Experimental



(a)

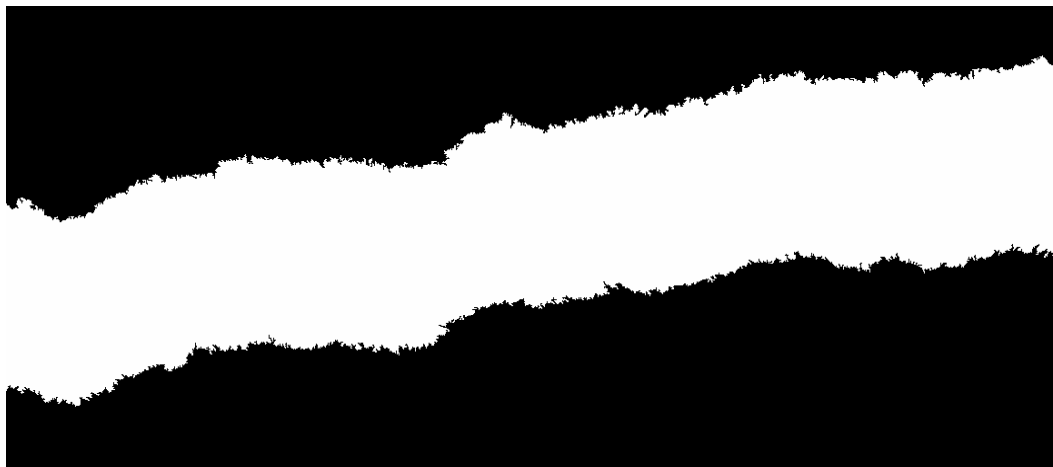


(b)



(c)

V. Desarrollo Experimental



(d)



(e)

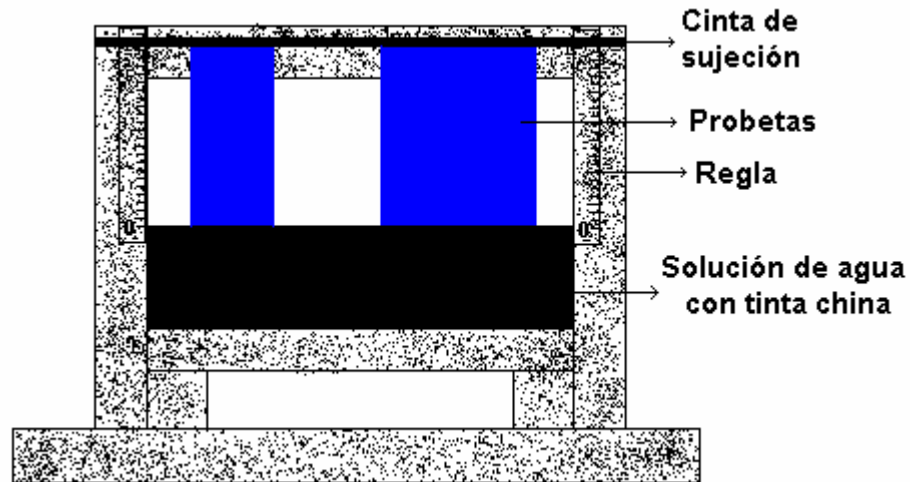


(f)

**Figura V.7** Interfaces de fractura para papel filtro poro abierto (a) dirección longitudinal, (b) dirección transversal; poro medio (c) longitudinal, (d) transversal; poro abierto (e) longitudinal, (f) transversal.

#### IV.4 Experimentos de Crecimiento y Dinámica de Interfaces

Las pruebas de crecimiento y dinámica de interfaces se realizaron en el dispositivo mostrado en la figura V-8. Las probetas se colocaron por pares; es decir, una probeta con ancho de 50 mm y una probeta con ancho de 100 mm, ambas con dirección paralela a la orientación de las fibras del papel (dirección longitudinal). Igual para el caso de las probetas en la dirección transversal. Las probetas se sujetaron de manera similar al caso de las pruebas de flujo de fluidos en papel secante.



**Figura V-8.** Dispositivo empleado en las pruebas de crecimiento y dinámica de interfaces en probetas de papel filtro poro medio. Izquierda: probeta de 50 mm de ancho, derecha: probeta de 100 mm de ancho.

Para registrar el crecimiento de las interfaces, se colocaron en los costados del dispositivo dos reglas de 20 cm, de tal manera que el origen de las reglas coincidiera con el nivel superior de la solución de agua con tinta china, como se muestra en la figura V.8. Una vez que las probetas se introducían a la solución se registraban la cresta  $C(x)$  y el valle  $V(x)$  de la interfase en crecimiento cada 3 min. En total se hicieron diez registros; es decir, durante 30 min. Después se dejó un tiempo más el crecimiento de la interfase hasta la saturación; es decir, cuando ya no se apreciaba un cambio en su altura ni en su ancho. Finalmente, las probetas se cortaban y se secaban con papel higiénico. También se calculó la diferencia entre la cresta y el valle,  $C(x) - V(x)$ . Para caracterizar la dinámica de interfaces se definieron dos exponentes dinámicos: el exponente de desplazamiento  $\delta$ , y el exponente de crecimiento  $\beta$ . El exponente de desplazamiento se definió como la posición de la cresta de la interfase con respecto del tiempo; mientras que el exponente de crecimiento se definió como el desplazamiento del ancho de la interfase con respecto al tiempo.

Además, se fotografió el crecimiento de la interfase a distintos tiempos, con el fin de visualizar en detalle su evolución. Los perfiles de las interfaces se obtuvieron usando el software *Scion Image*[131] como una función uni-valuada  $z(x)$  en formato

*x*/s. A partir de estos perfiles, se determinaron la altura de la región húmeda  $h(t, W) = \max_{x \in W}[z(x, t)]$  y el ancho de la interfase  $w(t, W) = \max_{x \in W}[z(x, t)] - \min_{x \in W}[z(x, t)]$  como funciones del tiempo  $t$  y del ancho de la probeta  $W$ . En la figura V.9 se muestran algunas interfaces que se obtuvieron durante las pruebas de flujo de fluidos en papel filtro.



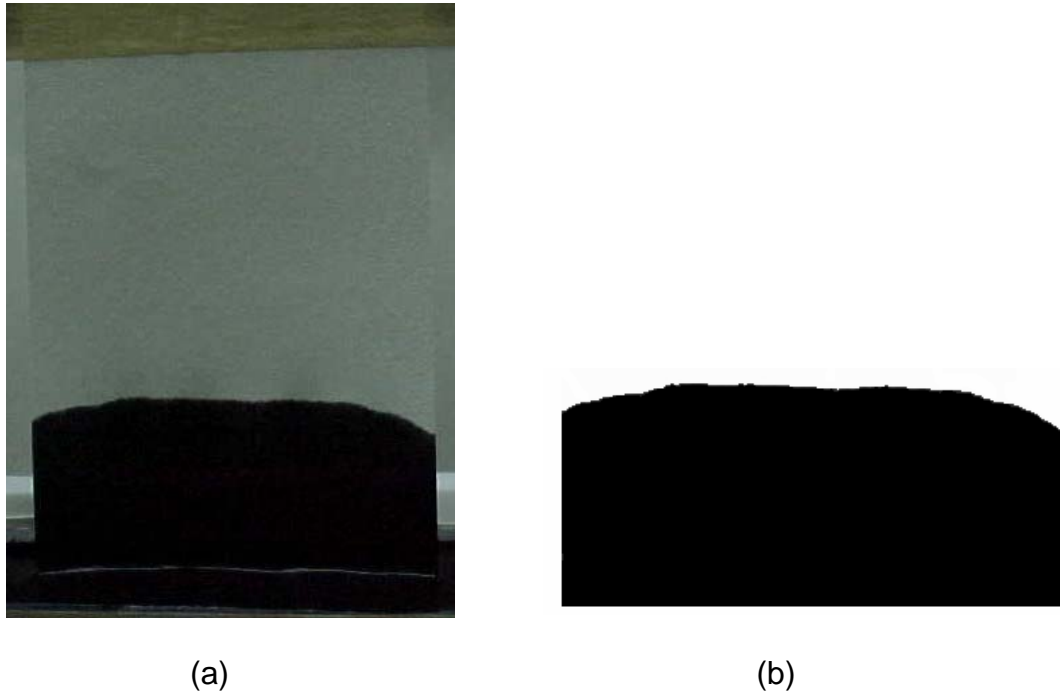
(a)



(b)

**Figura V.9** Interfaces de crecimiento y dinámica en pruebas de flujo de fluidos en papel filtro para  $W = 100$  mm, (a) dirección paralela a la orientación de las fibras del papel, (b) dirección perpendicular a la orientación de las fibras del papel. Tomadas a un tiempo de 9 min.

La foto-grabación del crecimiento y dinámica de interfaces se llevó a cabo con una cámara digital marca SONY, modelo *Digital Mavica*. Se empleó el dispositivo mostrado en la figura V.8 y el experimento se realizó para los tres diferentes tipos de papel filtro, con una probeta por tipo de papel y orientación con respecto a la orientación de las fibras del papel. Se tomaba una fotografía del crecimiento de la interfase cada 30 segundos. La prueba duró en total 15 min. Las tomas se guardaron en archivo *.jpg*, posteriormente se cambiaban a extensión *.bmp*. De manera similar al caso anterior, los perfiles de las interfaces se obtuvieron usando el software *Scion Image*[131] como una función uni-valuada  $z(x)$  en formato *xls*. A partir de estos perfiles, se determinaron la altura de la región húmeda  $h(t, W) = \max_{x \in W}[z(x, t)]$  y el ancho de la interfase  $w(t, W) = \max_{x \in W}[z(x, t)] - \min_{x \in W}[z(x, t)]$  como funciones del tiempo  $t$ . En las figuras 10 (a) – (b) se muestran las interfaces obtenidas experimental y digitalmente, respectivamente. Estas pruebas se hicieron a fin de corroborar los valores de los exponentes de escalamiento obtenidos en las pruebas de crecimiento y dinámica de interfaces.



**Figura V.10** Foto – grabación de interfaces en papel filtro poro cerrado en la dirección paralela a la orientación de las fibras del papel, (a) interfase experimental, (b) interfase digitalizada.

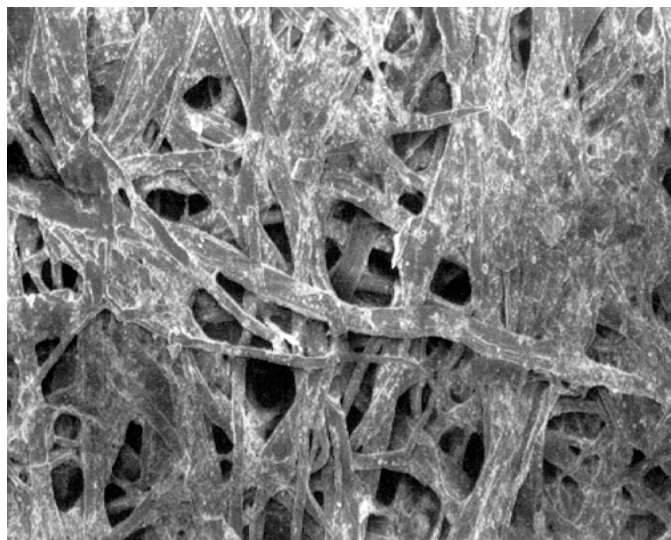
#### IV.5 Determinación de la Dimensión Fractal de las Estructuras de los Papeles

Esta sección experimental se realizó a fin de obtener un parámetro que describa en forma cuantitativa el complejo arreglo geométrico de las estructuras de todos y cada uno de los papeles empleados en este trabajo. Como ya se mencionó, los fractales son estructuras o sistemas desordenados que se pueden describir en términos de una dimensión no-entera, la cual se llama *dimensión fractal* y es una medida de la habilidad de ocupación de espacio del sistema desordenado; es decir, nos indica como la estructura del sistema desordenado se acomoda dentro de un espacio  $d$ -dimensional. En nuestro caso, la dimensión fractal nos indicará la habilidad de ocupación de espacio de las fibras de papel en un plano.

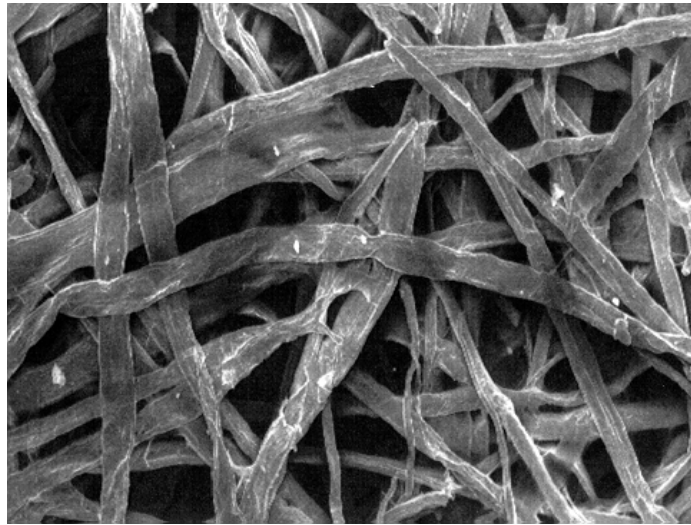
La microscopía electrónica de barrido es una de las técnicas experimentales más empleadas en el campo de la ingeniería y la investigación, para analizar la topografía, la morfología, la composición y la estructura cristalina de los materiales ingenieriles. La topografía se refiere a los aspectos superficiales de un objeto o “como se ve”, su textura, aspectos que se pueden detectar limitados a unos cuantos nanómetros. La morfología describe la forma, tamaño y arreglo de las partículas que conforman el objeto. Con relación a la composición, nos indica los elementos y compuestos que constituyen la muestra y sus proporciones relativas en áreas de aproximadamente  $1 \mu\text{m}$  de diámetro. Por último, la estructura cristalina se refiere al

arreglo de átomos de la muestra y su grado de orden. El microscopio electrónico de barrido (MEB) es un microscopio que usa electrones, en vez de luz, para formar una imagen y tiene muchas ventajas con relación al microscopio óptico. El MEB tiene una gran penetración de campo, lo que permite que una gran cantidad de muestras se enfoquen al mismo tiempo; también produce imágenes con alta resolución, lo que significa que aspectos espaciales importantes que parecen estar juntos, se examinen mejor a altos aumentos; la preparación de las probetas es relativamente fácil, puesto que sólo se requiere que la muestra sea conductora. Sin embargo, se ha reconocido al MEB como una herramienta tan importante en el análisis de materiales, que se ha extendido a otros campos de la ciencia, como la biología, la geología, entre otras. El problema con estas ciencias, es que sus muestras no son conductoras, por lo que han tenido que inventar técnicas alternativas para poder analizarlas, entre la cuales se encuentran las siguientes: dar un baño de oro ó grafito a la superficie de la muestra no-conductora que se desea analizar. Sin embargo, ha nacido una nueva generación de MEB, los llamados MEB de bajo vacío, los cuales estudian muestras con poca o nada conductividad eléctrica sin la necesidad de practicarles un recubrimiento.

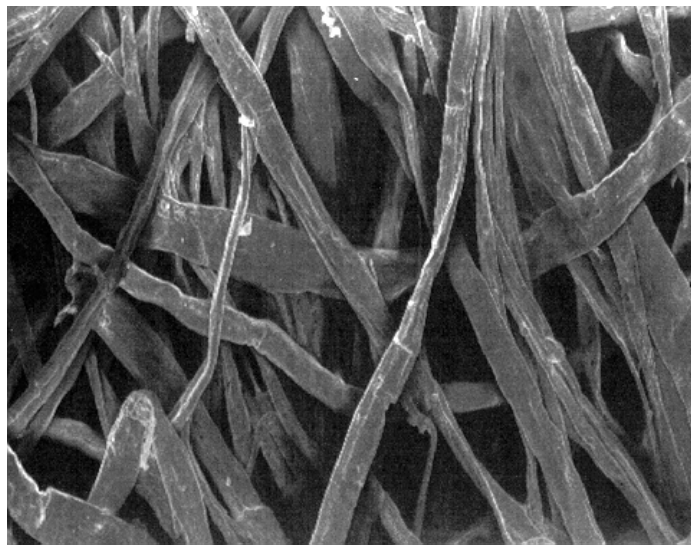
Las pruebas de microscopía electrónica de barrido se realizaron en las instalaciones del Instituto de Biología, UNAM. Se empleó un microscopio electrónico de barrido marca Hitachi de bajo vacío. Se analizó una muestra por papel, cada muestra se observó a aumentos de 50, 100, 200 y 300, respectivamente. Las microfotografías de las estructuras de los papeles se muestran en la figura V.11. Una vez obtenidas las microfotografías de todos y cada uno de los papeles, se procedió a calcular la dimensión fractal mediante un paquete llamado Local Fractal Dimension (LFD), desarrollado por el Dr. J. F. Parrot y la Dra. H. Taud[133]. Las mediciones de la dimensión fractal de las estructuras de los papeles se llevaron a cabo en el Instituto de Geología, bajo la dirección de la Dra. Klavdia Oleshko. En el apéndice B se exponen las bases teóricas en las que se fundamenta el paquete LFD.



(a)



(b)



(c)

**Figura V.11** Microfotografías de las estructuras de papel tomadas en el microscopio electrónico de barrido bajo vacío. (a) papel secante, (b) papel filtro poro medio, (c) papel filtro poro abierto. Las microfotografías se tomaron a 100 X.



## VI ANALISIS Y DISCUSION DE RESULTADOS

Aunque existen muchos ejemplos en la naturaleza de superficies auto-afines, hasta hace poco no se habían realizado estudios experimentales que se dedicaran al estudio de los aspectos fractales del crecimiento de interfaces. Recientemente, el interés se ha enfocado sobre el comportamiento de escalamiento en interfaces que fluctúan aleatoriamente[134,135]. El problema del crecimiento de interfaces fractales es un fenómeno de no-equilibrio, y como tal no se puede tratar con el formalismo tradicional de mecánica estadística. Algunos autores([134,135], y referencias ahí citadas) han elegido el papel como el prototipo de un medio desordenado para estudiar el comportamiento de escalamiento en interfaces fractales; y es importante mencionar la cantidad impresionante de trabajos que se han publicado sobre el tema y lo que se ha avanzado en el desarrollo de modelos teóricos y experimentales para tratar de entender el comportamiento de estas interfaces en medios porosos[134-136].

### VI.1 Pruebas de Fractura, Quemado e Imbibición

El comportamiento de escalamiento de las interfaces fractales se ha estudiado en bajo una gran variedad de modelos que incluyen modelos de simulación discreta[101,137-140], modelos continuos analíticos[141-143] y modelos que toman en cuenta el desorden inherente de la estructura[83,144-148]. Sin embargo, estos estudios teóricos en el comportamiento de escalamiento de las interfaces no han sido apoyados por estudios experimentales. Solamente, un pequeño número de investigaciones experimentales[82,84,144,149-155] se han reportado sobre el tema actualmente, y los resultados experimentales que se han reportado no concuerdan con las predicciones de los estudios teóricos. Por ejemplo, el modelo Eden[156] se propuso originalmente como un modelo de crecimiento de células en sistemas biológicos, y aún en experimentos de crecimiento de dos tipos de bacterias: *Echerichia Coli* y *Bacillus Subtilis*, Vicsek *et al.*[149] obtuvieron un exponente de rugosidad  $\alpha = 0.78$ , un valor mucho más alto que aquel predicho por el modelo Eden de  $\alpha = 0.5$ [152]. Por otro lado, en experimentos de imbibición en papel Barabási *et al.*[144] obtuvieron  $\alpha = 0.63$ , Family *et al.*[150], encontraron un exponente de rugosidad  $0.62 \leq \alpha \leq 0.78$ , y Kwon *et al.*[151] encontraron un exponente de rugosidad de  $\alpha = 0.67$ . Por otro lado, en experimentos de quemado en papel Zhang *et al.*[155] reportaron un exponente de rugosidad de 0.71. Para el caso de experimentos de fractura en papel Kertész *et al.*[84] reportaron un exponente de  $0.63 \leq \alpha \leq 0.72$ . Todos estos valores observados experimentalmente son mucho más altos que el valor de  $\alpha = 0.5$  predicho por la mayoría de los modelos teóricos convencionales[140-148]. Para explicar esta rugosidad anormal, indicada por los valores altos de  $\alpha$ , los investigadores han tomado en cuenta el ruido inherente generado por el desorden

del medio. Esto parece ser una clara indicación de que no es posible la universalidad de clases.

En la Tabla VI.1 se muestran los exponentes de rugosidad de interfaces formadas mediante tres fenómenos diferentes y para dos diferentes tipos de papel, obtenidos en el presente trabajo. Los exponentes de rugosidad globales obtenidos para el caso de papel secante en la dirección longitudinal, concuerdan con aquellos reportados en la literatura[84,150-151], excepto el exponente de rugosidad reportado para pruebas de quemado, cuyo valor es más alto que aquel reportado en[155]. Para el caso de papel filtro, en el cual no se realizaron pruebas de quemado, los exponentes de rugosidad son muy diferentes a aquellos obtenidos para papel secante y los reportados en la literatura. Esto es una clara indicación de que la universalidad de clases de los exponentes de rugosidad no es posible; y como consecuencia la formación de la interfase depende del medio desordenado por el cual se forme.

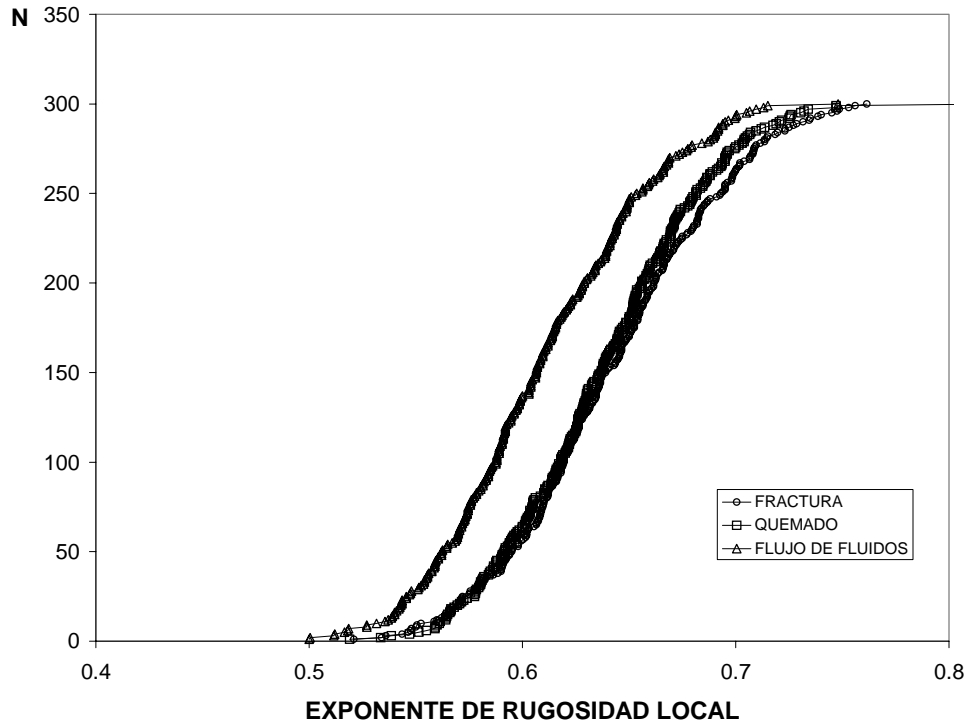
**Tabla VI-1.** Exponentes de rugosidad en interfaces formadas en experimentos de fractura, quemado e imbibición.

Papel		Secante		Filtro	
Dirección (respecto a la fibras del papel)		Longitudinal	Transversal	Longitudinal	Transversal
Exponente de rugosidad local ( $H$ )	Fractura (min/max)	<b>0.640</b> $\pm$ 0.006 (0.519/0.818)	<b>0.639</b> $\pm$ 0.005 (0.52/0.747)	<b>0.755</b> $\pm$ 0.006 (0.634/0.850)	<b>0.740</b> $\pm$ 0.005 0.613/0.825)
	Quemado (min/max)	<b>0.638</b> $\pm$ 0.010 (0.513/0.792)	----- -----	----- -----	----- -----
	Imbibición (min/max)	<b>0.629</b> $\pm$ 0.003 (0.536/0.715)	<b>0.640</b> $\pm$ 0.005 (0.551/0.751)	<b>0.745</b> $\pm$ 0.004 (0.651/0.888)	<b>0.733</b> $\pm$ 0.005 (0.613/0.825)
Exponente de rugosidad global ( $\alpha$ )	Fractura	<b>0.644</b> $\pm$ 0.006	<b>0.662</b> $\pm$ 0.005	<b>0.738</b> $\pm$ 0.008	<b>0.754</b> $\pm$ 0.007
	Quemado	<b>0.825</b> $\pm$ 0.002	-----	-----	-----
	Imbibición	<b>0.635</b> $\pm$ 0.004	<b>0.639</b> $\pm$ 0.005	<b>0.749</b> $\pm$ 0.007	<b>0.751</b> $\pm$ 0.009

De acuerdo a los valores mostrados en la Tabla VI.1, las interfaces en la dirección longitudinal poseen invarianza estadística auto-afin caracterizadas por un único exponente de escala ( $H$ ); es decir,  $\alpha \approx H$ , donde  $\approx$  indica igualdad en el sentido estadístico. Sin embargo, es importante notar que esto no se cumple para el caso del exponente de rugosidad obtenido en pruebas de quemado, y para este caso las interfaces no poseen invarianza estadística auto-afin. Por otro lado, las interfaces en la dirección transversal exhiben “rugosidad anormal” caracterizada por dos exponentes de escala: un exponente de escala local ( $H$ ) y un exponente de escala global ( $\alpha$ ). El exponente de rugosidad global depende del mecanismo de formación de la interfase y de la orientación de la interfase en un medio anisotrópico. Estas observaciones indican que el exponente de escala global  $\alpha$  está gobernado por correlaciones espaciales de largo alcance en estructuras estocásticas, así como por las fluctuaciones temporales (térmicas) en el sistema, mientras que el exponente de rugosidad local depende del desorden inherente en la estructura del papel. Estos resultados indican que la formación de la interfase no depende del mecanismo por el

cual se genere. Además, si hay una diferencia notable en los valores promedio de los exponentes de rugosidad global ( $\alpha$ ) y local ( $H$ ) cuando se trata de diferentes tipos de papel. Estos resultados cuestionan fuertemente el concepto clásico que afirma que el exponente de rugosidad no depende del mecanismo por el cual se forme la interfase ni de los detalles estructurales del sistema[67].

Los exponentes de rugosidad local y global, se ajustan bien a una curva de distribución normal, como se muestra en las figuras VI.1 y VI.2, respectivamente.

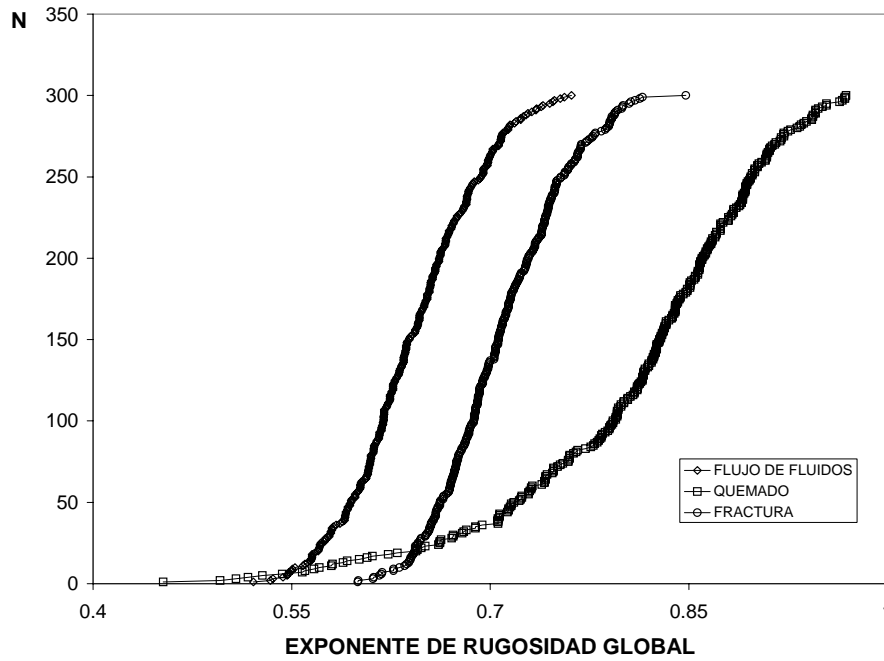


**Figura VI.1** Curva de distribución normal de los exponentes de rugosidad local para pruebas de fractura, quemado y imbibición.

Para el caso de las pruebas de imbibición, el exponente de rugosidad local se determinó para todas las interfaces saturadas por el método de Variograma usando el paquete *Benoit 1.2*[132]. Las variaciones locales de la interfase  $z(x, t = T_s)$ , se promediaron sobre una ventana local de tamaño  $\Delta$ , obedeciendo al siguiente comportamiento de escalamiento:

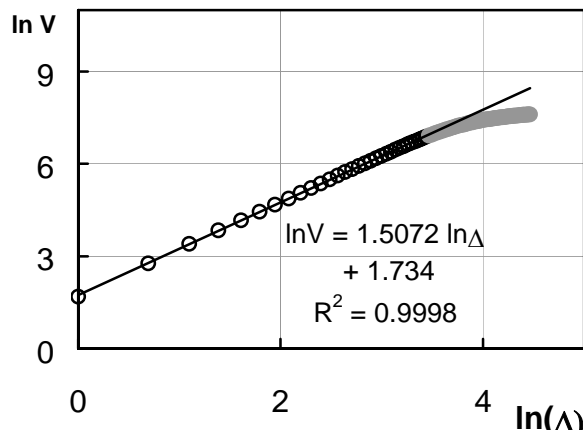
$$V(\Delta) = \langle z^2(x) - z^2(x + \Delta) \rangle_{\Delta} \propto \Delta^{2H}$$

como se muestra en la figura VI.3.

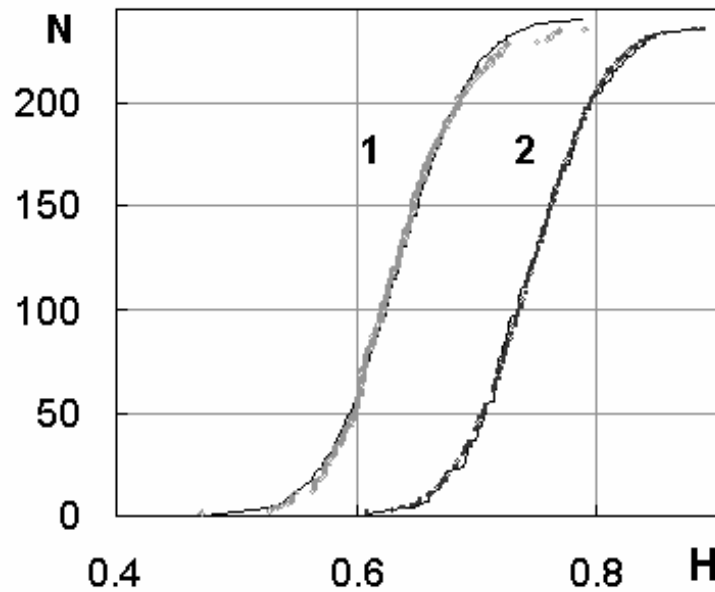


**Figura VI.2** Curva de distribución normal de los exponentes de rugosidad global para pruebas de fractura, quemado y imbibición.

De acuerdo a los datos presentados en la figura VI.4, los valores de  $H$  (medidos para las interfaces formadas en un papel específico) varían aleatoriamente de un experimento a otro, de acuerdo a una curva de distribución normal. Se encontró que el valor promedio del exponente de rugosidad local es independiente del tamaño de la probeta, así como de la orientación de la propagación de la interfase, con respecto a la orientación de las fibras de papel (ver Tabla VI-1). Al mismo tiempo, el exponente de rugosidad es diferente para diferentes tipos de papel, como se muestra en la figura VI.4 y en la Tabla VI-1.



**Figura VI.3** Gráfico típico de las variaciones locales del ancho de la interfase con respecto al tamaño de la ventana para papel filtro.



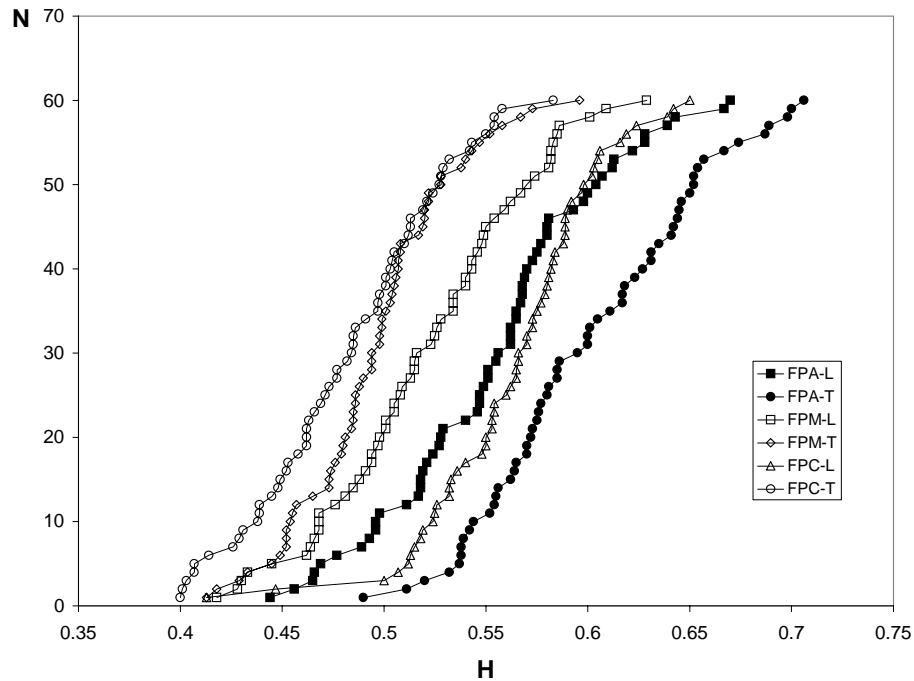
**Figura VI.4** Distribución normal de los valores del exponente de rugosidad local para interfaces formadas en experimentos de imbibición en (1) papel filtro y (2) papel secante.

Con respecto a las pruebas de fractura en los tres diferentes tipos de papel filtro, en la Tabla VI.2 se muestran los resultados obtenidos para los exponentes de rugosidad de las interfaces. Los exponentes de rugosidad se determinaron empleando el método de R/S análisis del paquete *Benoit 1.2*[132].

De acuerdo a los resultados presentados en la Tabla VI-2, el exponente de rugosidad global no depende de la dirección en la cual se forme la interfase; es decir, no hay efecto de la anisotropía, como se comprobó para el papel secante. Por otro lado, comparando los valores de los exponentes de rugosidad, se encontró que en la dirección longitudinal la diferencia entre dichos exponentes no es muy significativa; mientras que en la dirección transversal la diferencia entre dichos exponentes se hace más significativa. Esto parece indicar que en la dirección longitudinal no hay un efecto significativo de la estructura del papel sobre la formación de la interfase; mientras que en la dirección transversal, la formación de la interfase parece depender de la estructura del papel. Esto es, si hay efecto de la anisotropía. De acuerdo a los datos presentados en la figura VI.5, el valor de  $\alpha$  (medidos para las interfaces formadas en un papel específico) varía aleatoriamente de un experimento a otro, de acuerdo a una curva de distribución normal.

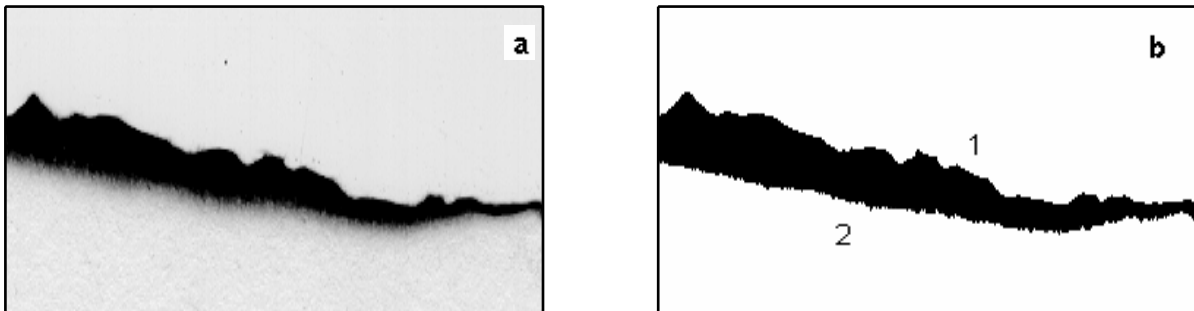
**Tabla VI.2** Exponentes de rugosidad global para los diferentes tipos de papel filtro.

Papel Filtro		Dirección respecto a las fibras	
		Longitudinal	Transversal
Poro abierto	Exponente de rugosidad global ( $\alpha$ )	$0.554 \pm 0.051$	$0.600 \pm 0.051$
Poro medio		$0.520 \pm 0.048$	$0.495 \pm 0.037$
Poro cerrado		$0.563 \pm 0.043$	$0.542 \pm 0.044$



**Figura VI.5** Distribución normal de los valores del exponente de rugosidad global para interfaces formadas en experimentos de fractura en los tres diferentes tipos de papel filtro.

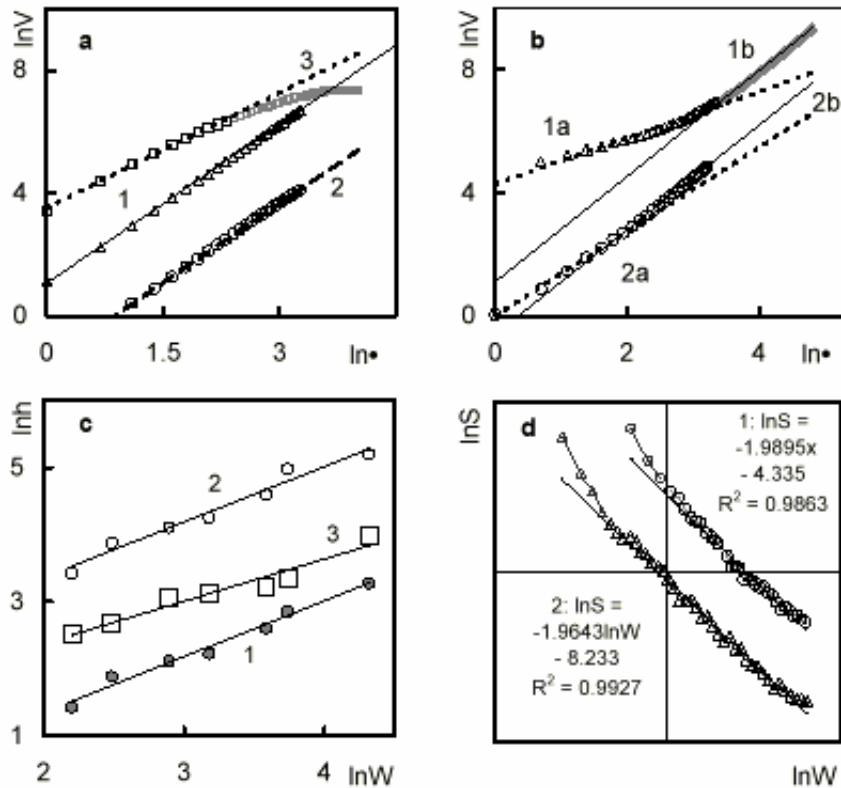
Con respecto a las pruebas de quemado, se debe mencionar que se identificaron dos interfaces: una a la que denominamos frente de flama y otra a la que denominamos frente de quemado. En la figura VI.6 se muestra esquemáticamente unas fotografías de una interfase para papel secante.



**Figura VI.6** Fotografía de una interfase obtenida en pruebas de quemado en papel secante (a) escala de grises, (b) imagen en blanco y negro (1) frente de quemado y (2) frente de flama.

Se encontró que los gráficos de variograma para las interfaces del frente de flama (curvas 1 y 2 en la figura VI.7 (b)) tienen un comportamiento diferente a los gráficos de variograma para las interfaces de los frentes de quemado (curvas 1 y 2 en la figura VI.7 (a)), y a las interfaces de imbibición (curva 3 en la figura VI.7 (a)). Además, el comportamiento de escalamiento del frente de flama presentado en la

figura VI.7 (b) difiere de aquella observada por Zhang et al[155], quienes detectaron un régimen de cruzamiento en la rugosidad del frente de flama (ver [159]).



**Figura VI.7** Gráficos de variograma típicos para interfaces de (a) quemado (curvas 1 y 2) y imbibición (curva 3) y (b) para interfaces de flama en probetas de papel secante con ancho  $W = 56$  mm (curva 1b) y ancho  $W = 12$  mm (curva 2a); (c) gráficos log-log de altura de interfase promedio contra ancho de probeta para interfaces de (1) flama, (2) imbibición y (3) quemado, en papel secante; (d) espectro de potencia para frentes de flama en probetas de diferentes anchos: (1)  $W = 12$  mm y (2)  $W = 56$  mm.

Los frentes de quemado, así como los frentes de imbibición poseen invarianza estadística auto-afin ( $\alpha = \zeta_1$ , comparar las pendientes de las curvas VII (a) y (c) y ver Tabla VI.3); mientras que los frentes de flama exhiben una rugosidad anormal, caracterizada por dos exponentes de escala (bien definidos) en las escalas local ( $\zeta_1$ ) y global ( $\zeta_2 = \alpha > \zeta_1$ ), comparar las pendientes de las curvas VII (b) y (c) y ver Tabla VI.3.

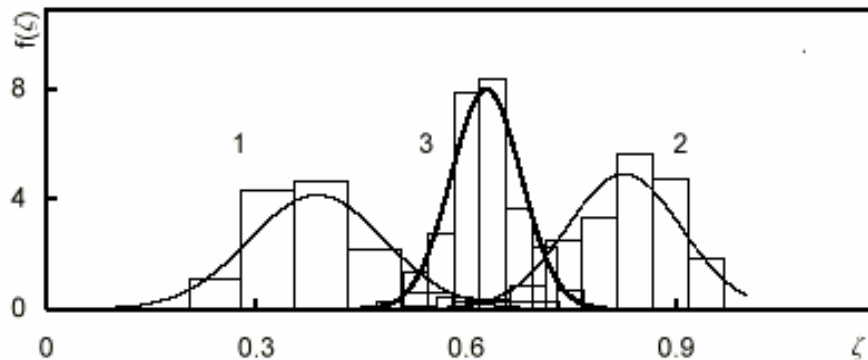
Se encontró que el exponente de rugosidad ( $H = \alpha = \zeta_1$ ) de los frentes de imbibición y quemado no son constantes para un papel específico, en cambio cambian de probeta a probeta en rangos que son muy grandes que los correspondientes al error estadístico para cada probeta. Esto se puede atribuir a las variaciones observadas en el espesor del papel, la densidad por unidad de área y a la dimensión fractal de la estructura de las fibras. Las distribuciones estadísticas de  $H$  también satisfacen una distribución normal con promedios bien diferentes para los

frentes de imbibición y quemado (ver Tabla VI.3). Esto indica que la rugosidad de la interfase depende del mecanismo por el cual se forme la interfase, así como de la estructura del papel[158].

**Tabla VI.3** Exponentes de escalamiento para interfaces formadas en papel.

Interfase	$\zeta_1$	$\zeta_2$	$\alpha$	$\omega$	$2\theta$
Frente de imbibición, papel secante[158]	$0.63 \pm 0.02 = H$	---	$0.63 \pm 0.02 = H$	-----	0
Frente de fuego en papel[159]	0.75	0.5	$= \zeta_2$	0	0
Frente de quemado en papel secante[160]	$0.85 \pm 0.03 = H$	---	$0.83 \pm 0.04 = H$	-----	0
Frente de flama en papel secante[160]	$\zeta_1 \propto W^v < \alpha$	$0.826 = \alpha$	$0.83 \pm 0.03$	$0.84 \approx \alpha$	$-0.397 \pm 0.03 < 0$

Además, los exponentes de rugosidad de los frentes de flama en las escalas local ( $\zeta_1$ ) y global ( $\zeta_2 = \alpha$ ), también cambian de probeta a probeta de acuerdo a una curva de distribución normal, como se muestra en la figura VI.8. Al mismo tiempo, se encontró que la distribución estadística de  $\zeta_2 = \alpha$  para frentes de flama es estadísticamente equivalente a la distribución estadística de  $H$  para frentes de flama, ver Tabla VI.3.



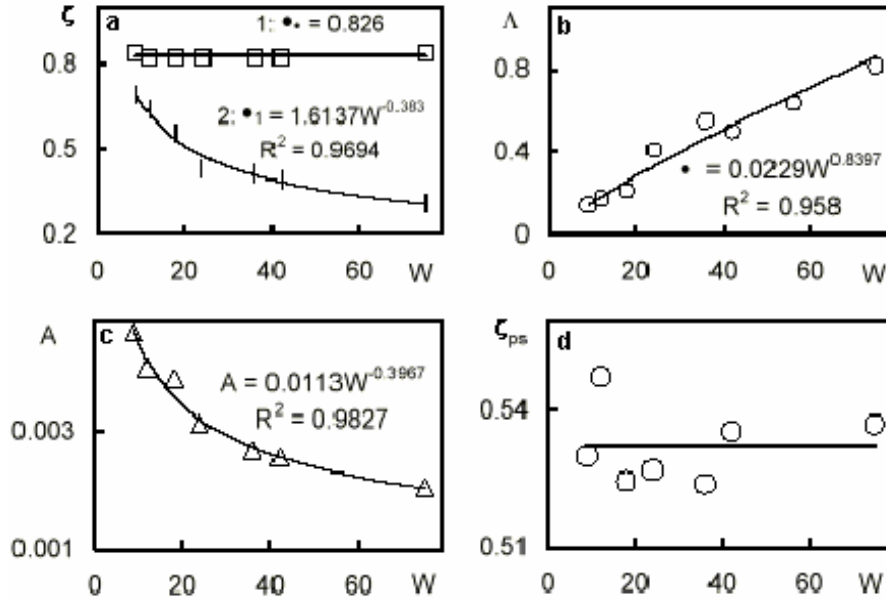
**Figura VI.8** Distribución estadística de los exponentes de escalamiento  $\zeta_1$  (1) y  $\zeta_2$  (2) para frentes de flama y  $\zeta_1 = H$  (3) para frentes de imbibición en papel secante.

Para comprender mejor la naturaleza de la rugosidad anormal del frente de flama, hemos estudiado su espectro de potencia. De acuerdo con esto, hemos observado un comportamiento de escalamiento no-convencional  $S(k) = A(W)k^{-(2\zeta_{PS}+1)}$ , como se muestra en la figura VI.7 (e). Encontramos que  $S(k)$  disminuye al aumentar el ancho de la probeta como: (ver las figuras VI.7 (d) y VI.9 (d)):



$$A = W^{2\theta}, \quad \text{donde } \theta < 0$$

en contraste al comportamiento de escalamiento reportado por López et al[161], esperado para el caso de rugosidad anormal intrínseca. El valor promedio del exponente de escalamiento  $\zeta_{PS}$  difiere del valor promedio de  $\zeta_1$ , así como de  $\zeta_2 = \alpha$ , como se muestra en la figura VI.9 (e).

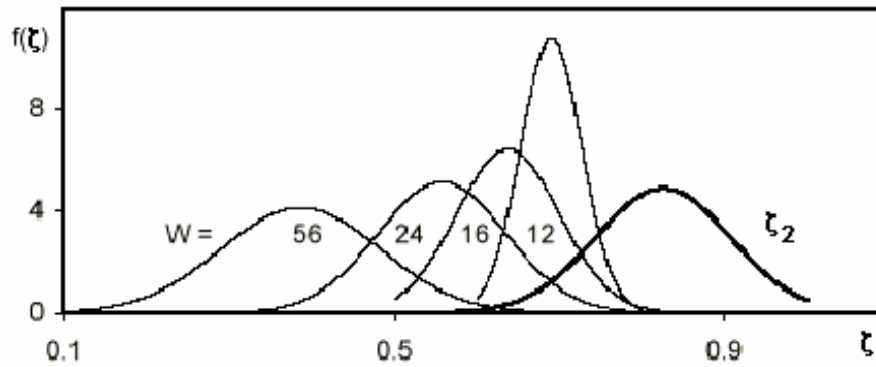


**Figura VI.9** (a) exponentes de escalamiento (1) global y (2) local; (b) longitud de cruzamiento; (c) espectro de potencia y; (d) exponente de escalamiento del espectro de potencia.

Sin embargo, se encontró que el valor promedio del exponente de escalamiento local ( $\zeta_1$ ) del frente de flama no es una constante, pero escala con el ancho de la probeta como  $\zeta_1 \propto W^v$ , donde  $-v$  es igual a  $2\theta$ , como se muestra en las figuras VI.10 y VI.9 ((b) y (d), y la Tabla VI.3. Sin embargo, los exponentes de rugosidad  $\zeta_2$  y  $\zeta_{PS}$  no dependen del ancho de la probeta, como se muestra en las figuras VI.9 (b) y (e). También se notó que la desviación estándar de la distribución estadística de  $\zeta_1$  escala con el ancho de la probeta como  $\sigma(\zeta_1) \propto W^{0.67}$  (ver figura VI.10), mientras que  $\sigma(\zeta_2) \propto W^{0.48}$  y  $\sigma(\zeta_{PS}) \propto W^{0.2}$ .

Además, se encontró que la longitud de cruzamiento que separa los intervalos de escalamiento local y global se incrementa al aumentar el ancho de la probeta como  $\Lambda \propto W^\omega$ , donde se encontró que el exponente  $\omega$  es igual al exponente de rugosidad global; es decir,  $\omega = \alpha = \zeta_2$  (compare los gráficos de las figuras VI.7 (c) VI.9 (c) y ver figura VI.9 (b) y Tabla VI.3).

Hasta dónde se sabe, tal comportamiento de la rugosidad de la interfase no se había observado antes. El hecho de que las propiedades de escalamiento de la flama dependan del tamaño del sistema, aunque las propiedades de escalamiento del frente de flama no, sugiere que la rugosidad del frente de flama en la escala local está gobernada por el flujo convectivo del aire del fuego; mientras que el exponente de rugosidad global está gobernado por la cinética de combustión. La combustión de probetas más anchas producen más calor. Como resultado, el flujo de aire se vuelve más turbulento. El flujo turbulento del aire fragmenta el frente de fuego; el cual se hace más y más rugoso a una microescala ( $\zeta_1$  más pequeño) conforme se desarrolla la turbulencia.



**Figura VI.10** Distribuciones estadísticas de los exponentes de rugosidad local ( $\zeta_1$ ) y global ( $\zeta_2 = \alpha$ ) para frentes de flama en probetas de diferentes anchos  $W$  mm.

En la Tabla VI.4 se muestran los exponentes de escalamiento para diferentes comportamientos de rugosidad de interfaces.

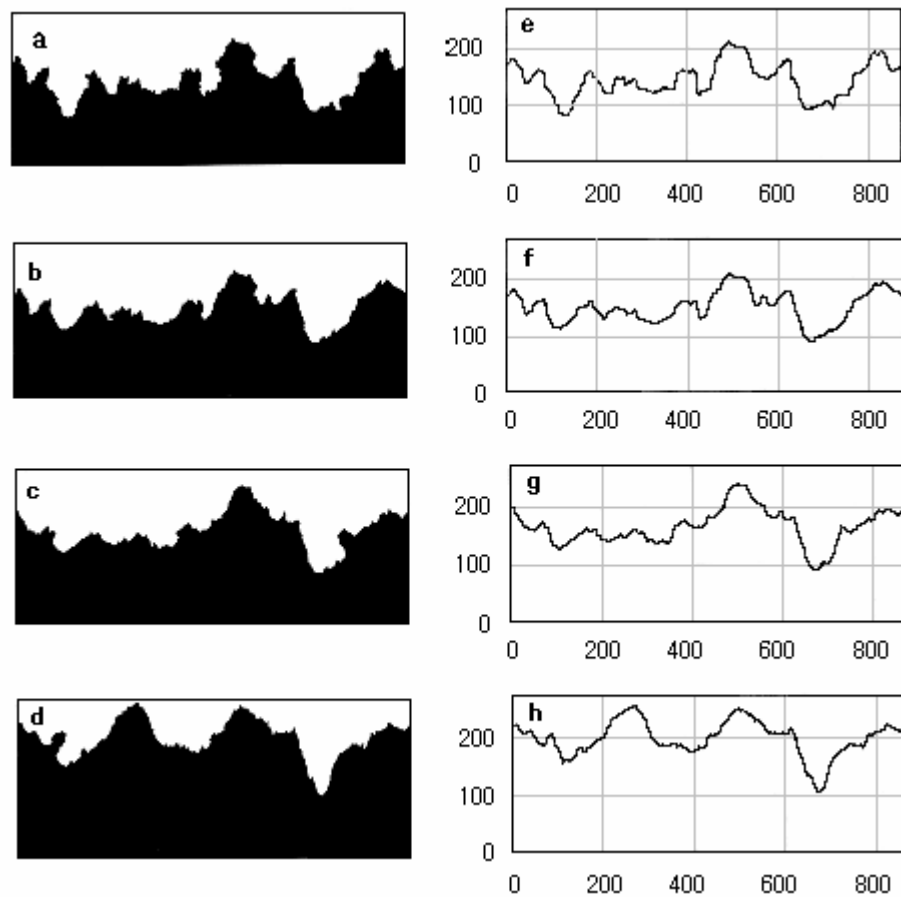
**Tabla VI.4** Exponentes de escalamiento para diferentes comportamientos de interfaces rugosas.

	$\zeta_1$	$\zeta_2$	$\alpha$	$\omega$	$\theta$
<b>Rugosidad estadística auto-afin</b>	$\zeta_1 = H$	-----	$\zeta_1 = H$	-----	0
<b>Super-rugosidad</b>	$\zeta_1 < \alpha$	$\zeta_2 = \alpha$	$\alpha \geq 1$	0	0
<b>Rugosidad anormal intrínseca</b>	$\zeta_1 < \alpha$	$\zeta_2 = \alpha$	$\alpha > 0$	0	$= \alpha - \zeta_1 > 0$
<b>Rugosidad anormal convencional</b>	$\zeta_1 \propto W^{\nu} < \alpha$	$\zeta_2 = \alpha$	$\alpha > 0$	$\omega = \alpha$	$\theta < 0$

## VI.2 Crecimiento y dinámica de interfaces

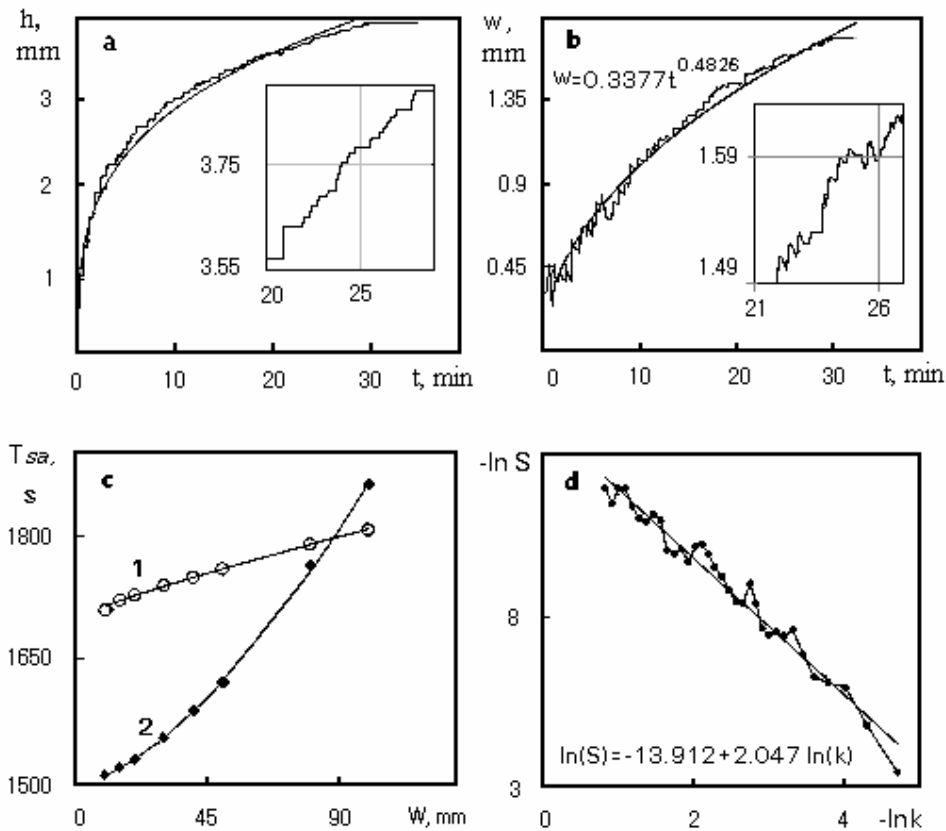
Hasta dónde se sabe, se han reportado pocos estudios experimentales sobre el comportamiento de escalamiento *dinámico* de interfaces fractales auto-afines en crecimiento[150-153]. Horvath *et al*[153] midieron el exponente de crecimiento  $\beta = 0.65$  en un experimento desplazamiento de un fluido por otro. Horvath y Stanley[152] obtuvieron  $\beta = 0.56$  en experimentos de imbibición. Ambos valores son mucho más altos que aquellos predichos por los modelos teóricos,  $0.25 - 0.50$ . Por otro lado, Family *et al*[150] obtuvieron un exponente de crecimiento  $0.29 \leq \beta \leq 0.40$  en experimentos de imbibición en papel, sus valores concuerdan con el valor teórico de  $1/3$  predicho por el modelo Eden[156].

En la figura VI.11 (a) – (d) se muestran las interfaces en experimentos de imbibición y los gráficos correspondientes de  $z(x)$  en formato XLS, (e) – (h). Las interfaces de imbibición que se muestran en la figura VI.11, corresponden a los experimentos de imbibición realizados en papel secante en la dirección longitudinal, con respecto a la orientación de las fibras del papel.



**Figura VI.11.** (a)–(d) Fotografías de interfaces en papel filtro orientadas en la dirección perpendicular respecto a la dirección de la fibras de papel; (e)–(h) gráficos correspondientes de  $z(x)$  en tiempos de (a), (e) 900 seg, (b), (f) 925 seg, (c), (g) 1000 seg y (d), (h) 1680 seg (es decir, mayor a  $T_S$ ).

Como se observa en las figuras VI.12 (a) y (b), en las etapas iniciales la altura  $h(t)$  de la región húmeda, en función del tiempo, forma una escalera del diablo; mientras que el ancho de la interfase exhibe un comportamiento dinámico errático y se observan oscilaciones estocásticas en el ancho de la interfase en un intervalo de escala muy pequeño. Sin embargo, su valor promedio aumenta con respecto al tiempo en una escala de tiempo global. Posteriormente,  $h(t)$  alcanza un máximo (ver figura VI.12 (a)) y el ancho de la interfase se satura (ver figura VI.12 (b)). El tiempo de saturación promedio  $T_{Sa} = \langle T_S(W) \rangle_N$  se incrementa al aumentar el ancho de la probeta como  $T_{Sa} = W^z$ , como se muestra en la figura VI.12 (c), donde  $z$  es el exponente dinámico[135].



**Figura VI.12.** Dependencias de tiempo típicas de (a) la altura de la región húmeda y (b) el ancho de la interfase para interfaces orientadas paralelas a la dirección de las fibras de papel filtro (los recuadros muestran las partes amplificadas de las gráficas principales; las líneas suaves son ajustes por ley de potencias mediante el método de mínimos cuadrados); (c) tiempo promedio de la saturación de la interfase contra ancho de la probeta para interfaces en la dirección perpendicular (curva 1) y en la dirección paralela (curva 2) con respecto a la dirección de las fibras de papel filtro; (d) espectro de energía del gráfico (b): (—), los datos se ajustaron por el método de mínimos cuadrados.

El análisis de los gráficos de  $w(t,W)$  en la figura VI.12 (b) muestra que la transformada de Fourier de la función de auto-correlación  $\langle w(t+t,W) w(t,W) \rangle$ , que es el espectro de potencia del comportamiento temporal del ancho de la interfase del

ancho de la interfase, posee un comportamiento de ley de potencias, como se muestra en la figura VI.12 (d). Esto indica que la invarianza auto-afin de  $w(t,W)$  con respecto a la escala del tiempo. Específicamente, para un fractal auto-afin, el espectro de potencia  $S(k,W)$  escala como:

$$S(k,W) \propto k^{-(2\chi+1)}$$

donde  $\chi > 0$  es el exponente de oscilación del ancho de la interfase y  $k$  es un factor de onda. Esto significa que  $w(\lambda t,W) \approx \lambda w(t,W)$ , donde  $\approx$  igualdad en el sentido estadístico.

Por otro lado, se nota que en los gráficos de las figuras VI.12 (a) y (b) se pueden ajustar a un comportamiento asintótico de ley de potencias, que generalmente se aplica en el contexto del escalamiento dinámico[134,135]. Esto es, en la etapa inicial, la altura promedio,  $h_m(t,W) = \{z(x,t)\}_{x \in W} \propto t^\delta$  y  $w \propto t^\beta$ , respectivamente; mientras que en el tiempo de saturación ( $t = T_S$ ) el ancho de la interfase, promediado de un conjunto de probetas idénticas, escala con el ancho de la probeta como  $\{w(W,T_S)\}_N \propto W^\alpha$ , como se muestra en la figura VI.12 (a), donde  $\beta$  es el exponente de crecimiento y  $\alpha$  es el exponente de rugosidad global[134]. Así pues, el comportamiento asintótico del ancho de la interfase, promediado sobre un conjunto de probetas, se puede describir de la misma manera a la adoptada en el marco de escalamiento dinámico[135]:

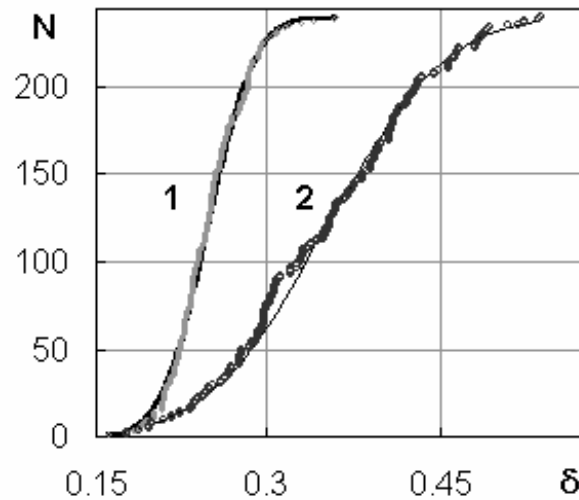
$$\langle w(W,t) \rangle_N \propto W^\alpha f\left(\frac{t}{W_S^z}\right)$$

donde  $f(y)$  es la función de escalamiento de Family-Vicsek, la cual satisface  $f \propto y^\beta$  para  $y \ll 1$ , y  $f \propto 1$ , para  $y \gg 1$ ; también  $z = \alpha / \beta$ . También, se observó que la distribución de muestras de  $w(W,T_S)$  obedece a la función de distribución estadística introducida por [136].

En la Tabla VI.5 se muestran los valores obtenidos de los exponentes de escalamiento dinámicos para papel filtro y papel secante, respectivamente, en la dirección longitudinal (perpendicular a la dirección de propagación de la interfase) y en la dirección transversal (paralela a la dirección de propagación de la interfase). Los exponentes de escalamiento  $\beta$  y  $\delta$  se ajustan a una distribución normal, como se muestra en las figuras VI.13 y VI.14, respectivamente. Se encontró que el valor promedio del exponente de crecimiento  $\beta$  varía con respecto a la orientación de las fibras de papel; es decir, hay un efecto significativo de la anisotropía sobre el valor promedio del exponente de crecimiento; mientras que el valor promedio del exponente de desplazamiento  $\delta$  no depende de la orientación, con respecto a las fibras del papel, en la cual se propague la interfase, ver Tabla VI.5.

**Tabla VI.5.** Exponentes de escalamiento dinámicos obtenidos en pruebas de imbibición.

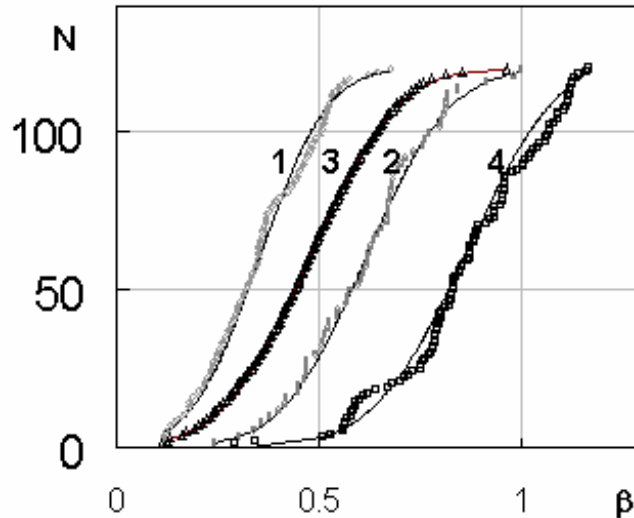
Papel	Filtro		Secante	
	Longitudinal	Transversal	Longitudinal	Transversal
Dirección del flujo				
$\delta$ (Comportamiento de escalamiento) (min/max)	$0.256 \pm 0.01$ (0.195/0.357)	$0.241 \pm 0.01$ (0.172/0.309)	$0.366 \pm 0.03$ (0.232/0.525)	$0.270 \pm 0.04$ (0.128/0.376)
Promedio $\{\beta\}$ (min/max)	0.8642 (0.562/1.161)	0.4739 (0.178/0.955)	0.6131 (0.240/0.997)	0.3502 (0.116/0.764)
Desviación estándar de $\beta$	0.1846	0.1714	0.1630	0.1576

**Figura VI.13** Los exponentes dinámicos de escalamiento  $\delta$  (exponente de desplazamiento) para papel filtro (curva 1) y para papel secante (curva 2).

Además, es pertinente notar que para diferentes tipos de papel, los valores promedio de los exponentes de escalamiento dinámico son diferentes, como se muestra en las figuras VI.13 y VI.14, y en la Tabla VI.5. Por otro lado, a pesar de la fuerte dependencia de  $h(t = T_s)$ ,  $h_m(t = T_s)$  y  $w(t = T_s)$  sobre la humedad del aire, así como de la humedad inicial del papel, se encontró que los valores promedio de los exponentes dinámicos de escalamiento son independientes de las condiciones ambientales (aire y humedad del papel, temperatura y concentración de la solución de agua - tinta china).

En las figuras VI.15 (a) – (b) se muestra la evolución en el crecimiento de las interfaces a diferentes periodos de tiempo, para el caso de papel filtro poro abierto. Como se observa, la morfología de las interfaces es muy rugosa. Esto se puede atribuir a las siguientes razones. A escala microscópica, el papel es un material extremadamente desordenado, formado por fibras que están orientadas, distribuidas

y conectadas aleatoriamente, como se muestra en la figura V.11. El fluido se propaga principalmente por las fuerzas de capilaridad. La naturaleza aleatoria de la red de fibras y las partículas en la suspensión continuamente obstruyen el flujo del fluido. Esto hace que el fluido avance continuamente en una regiones, y no avance en otras.



**Figura VI.14** Exponente de crecimiento  $\beta$  para pruebas de imbibición en la dirección perpendicular (curvas 1 y 3) y en la dirección paralela (curvas 2 y 4) a la orientación de las fibras del papel, para papel filtro (curvas 3 y 4) y para papel secante (curvas 1 y 2).

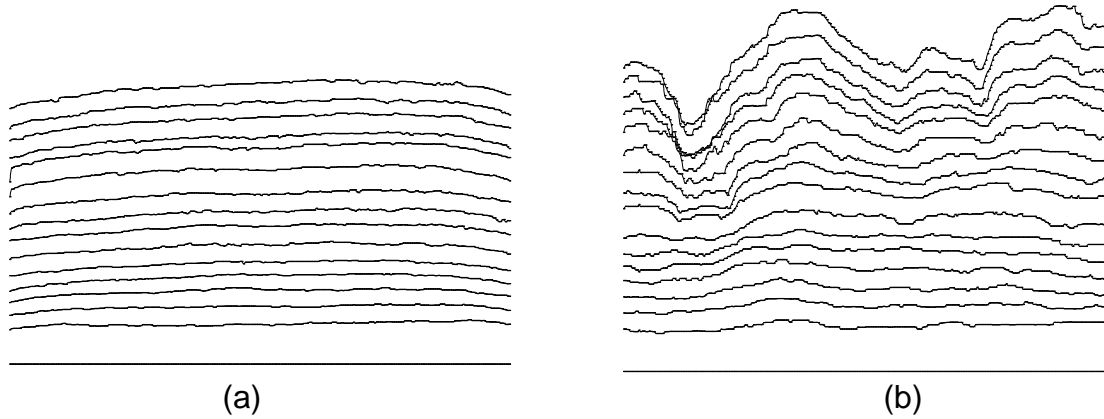
En la Tabla VI.6 se muestran los resultados de los exponentes de escalamiento dinámicos obtenidos en las pruebas de foto-grabación para los tres diferentes tipos de papel filtro en la dirección paralela a la orientación de las fibras del papel (longitudinal) y en la dirección perpendicular a la orientación de las fibras de papel (transversal), respectivamente.

**Tabla VI.6** Exponentes de escalamiento dinámico para los tres diferentes tipos de papel filtro.

Papel filtro	Exponente de crecimiento ( $\beta$ )		Exponente de desplazamiento ( $\delta$ )	
	Longitudinal	Transversal	Longitudinal	Transversal
<b>Porosidad cerrada</b>	0.591	0.3581	0.3664	0.3707
<b>Porosidad media</b>	0.3634	0.5181	0.3279	0.3612
<b>Porosidad cerrada</b>	0.3871	0.2625	0.3893	0.4088

De acuerdo a los resultados reportados en la Tabla VI.6, se confirma de alguna manera que el exponente de desplazamiento  $\delta$  no depende de la dirección en la cual se propague la interfase; es decir, no depende de la anisotropía; en cambio, el exponente de crecimiento  $\beta$  si depende de la orientación en la cual se propague la interfase; es decir, si depende de la anisotropía. Estos hallazgos ya se habían obtenido en los experimentos de papel secante y papel filtro porosidad media[158]. Sin

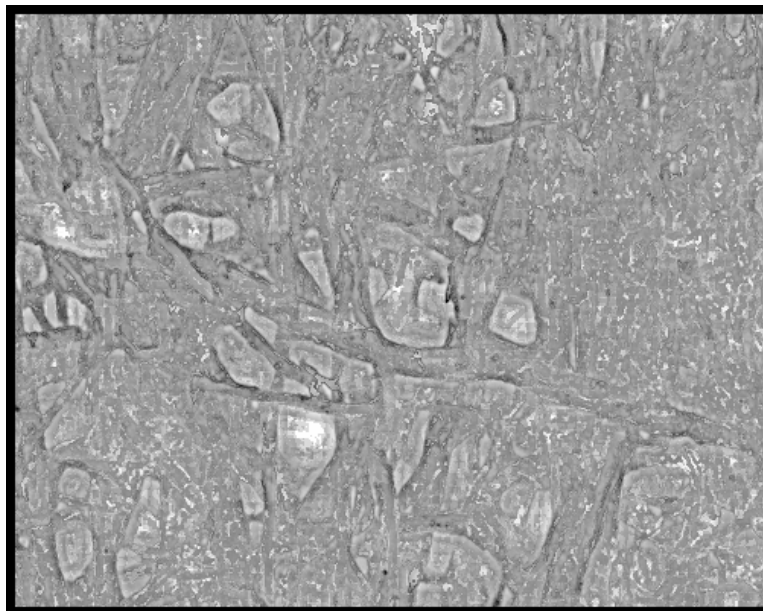
embargo, en un futuro cercano se harán pruebas de la foto-grabación del crecimiento de interfaces para un mayor número de probetas, con el fin de poder establecer resultados más precisos, con el apoyo de los análisis estadísticos.



**Figura VI.15** Evolución de interfaces en papel filtro poro abierto (a) dirección longitudinal, (b) dirección transversal, en pruebas de imbibición.

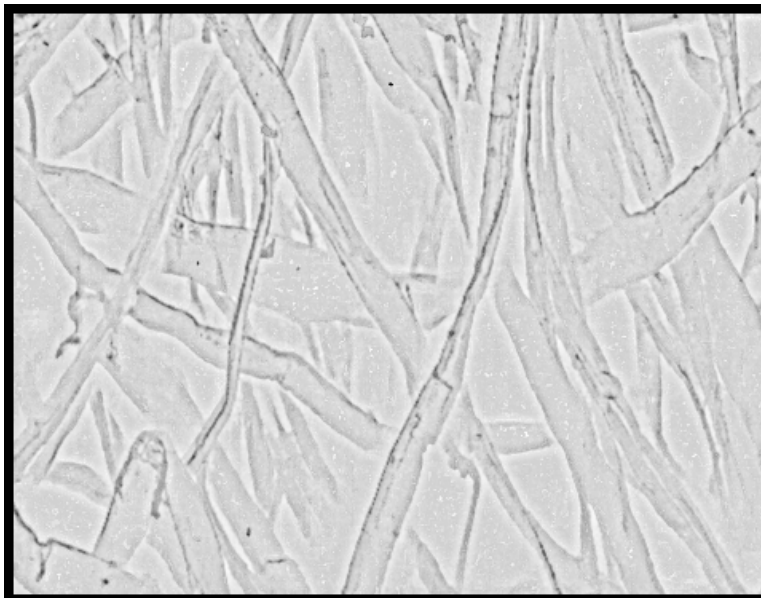
### VI.3 Determinación de la Dimensión Fractal en Medios Porosos

Finalmente, se presentan los valores de la dimensión fractal obtenidos para todos y cada uno de los papeles empleados en este trabajo. En las figuras VI.16 (a) – (c) se muestran las imágenes recuperadas de las estructuras de papel después de realizar la determinación de la dimensión fractal.

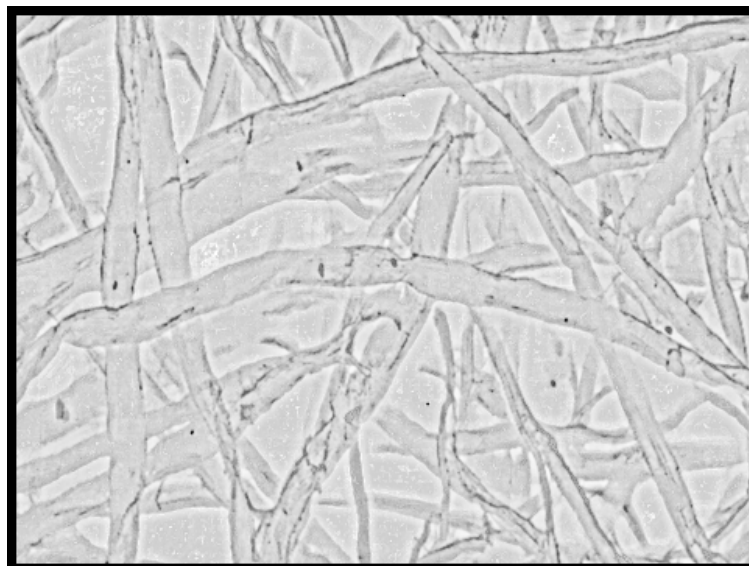




(a)



(b)



(c)

**Figura VI.16** Estructuras de papel analizadas por el paquete “Local Fractal Dimension”[133] para la determinación de la dimensión fractal, (a) papel secante, (b) papel filtro poro abierto, (c) papel filtro poro medio.

Se observa un contraste muy marcado en la morfología del papel secante (figura VI.16 (a)) y las presentaciones de papel filtro (figuras VI.16 (b) y (c)). En cambio la morfología entre las presentaciones de papel filtro poro abierto y poro

medio es muy similar. Esto parece indicar que a simple vista las estructuras de papel filtro se pueden considerar auto-similares. En la Tabla VI.7 se muestran los valores obtenidos de la dimensión fractal de las estructuras de los papeles obtenidas. Como se observa, hay una diferencia entre la dimensión fractal del papel secante y las dimensiones fractales de los papeles filtro. En cambio, los valores son muy cercanos entre los papeles filtro. Esto parece explicar la cercanía de los valores de los exponentes de rugosidad en pruebas de fractura (Tabla VI.2). También, parece indicar que la formación y crecimiento de interfaces depende significativamente del medio en el cual se desarrollen. Además, parece ser que el tamaño de poro no influye significativamente en los valores de los exponentes de escala, así como tampoco en los valores de la dimensión fractal.

**Tabla VI.7** Valores obtenidos de dimensión fractal para todos y cada uno de los papeles empleados en el presente trabajo

<b>Papel</b>	<b>Dimensión fractal</b>
<b>Secante</b>	$2.6487 \pm 0.206$
<b>Filtro poro cerrado</b>	$2.4990 \pm 0.2885$
<b>Filtro poro medio</b>	$2.4911 \pm 0.2840$
<b>Filtro poro abierto</b>	$2.4825 \pm 0.22791$

**Figura VI.11** Distribución normal de los valores de dimensión fractal obtenidos para los diferentes tipos de papel filtro (1) papel secante, (2) papel filtro poro abierto, (3) papel filtro poro medio y (4) papel filtro poro cerrado.

Es importante mencionar que la determinación de la dimensión fractal, solamente se hizo para una muestra de papel, así que se deben tomar estos *resultados preliminares* con la debida reserva. En un futuro cercano, se harán mediciones de dimensión fractal para una población de muestras de papel para corroborar estos resultados preliminares, con la ayuda del tratamiento estadístico de los datos que se obtengan.

## IV. MEDIOS POROSOS

### IV.1 Porosidad, Superficie Específica y Tortuosidad

Tal vez, la propiedad más simple de un sistema poroso es su porosidad  $\phi$ , la cual se define como la fracción volumen de sus poros y/o fracturas. De las propiedades de percolación de un sistema, se distingue el parámetro  $p$ , que es la fracción de sitios (o enlaces) abiertos en un sistema, sin considerar si éstos pueden extenderse hasta la superficie externa del sistema, de la *fracción accesible*  $X^A(p)$  de los sitios (o enlaces) abiertos (la fracción accesible se define como la fracción de enlaces (o sitios) que pertenecen al cluster infinito, el cual si se extiende por todo el sistema). Claramente, siempre se cumple que  $X^A(p) \leq p$ . Similarmente, se debe distinguir la porosidad total  $\phi$  de un sistema, sin considerar si todas las partes del espacio poroso que contribuyen a  $\phi$  se pueden alcanzar, a partir de la porosidad accesible  $\phi_A$ , que se define como la fracción volumen de la parte porosa del sistema que se puede alcanzar desde su superficie externa. En este sentido,  $p$  y  $X^A$  son similares a  $\phi$  y  $\phi_A$ .

La porosidad de un sistema se puede medir por varios métodos. El más simple es un método directo, en el cual se mide el volumen total del sistema. Después el sistema es triturado para eliminar todo el espacio poroso, y se mide el volumen del sólido. Claramente, este método mide la porosidad total del sistema. Uno de los métodos más ampliamente usados para medir la porosidad accesible de un sistema es el método de expansión de gases. En este método el sistema poroso se introduce en un contenedor sellado lleno con un gas tal como el aire. Luego, el contenedor se conecta a un contenedor evacuado, lo cual causa un cambio en la presión del sistema. La porosidad accesible del sistema se estima a partir de la siguiente ecuación:

$$\phi_A = 1 - \frac{V_1}{V_S} - \frac{V_2}{V_S} \frac{P_f}{P_f - P_i} \quad (\text{IV} - 1)$$

donde  $V_1$  es el volumen del contenedor en el cual se introduce el sistema poroso,  $V_2$  es el volumen del contenedor al vacío,  $V_S$  es el volumen de la muestra porosa,  $P_i$  es la presión inicial del sistema, y  $P_f$  es la presión final. Hay otros métodos para medir  $\phi$  y  $\phi_A$  que son discutidos por Collins[110] y Scheidegger[111].

Otra propiedad morfológica de interés es el área superficial específica ( $\Xi$ ) que se define como cociente entre el área superficial de los poros y el volumen total del medio poroso; y por lo tanto, se expresa como el recíproco de una longitud. Hay varios métodos para medir  $\Xi$ , los cuales se discuten por Scheidegger[111]. Por

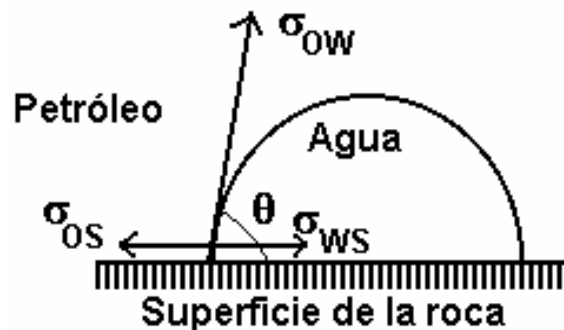
ejemplo, se puede usar una microfotografía de secciones pulidas de una muestra de un medio poroso con suficiente contraste entre los poros y la matriz. A partir de la relación entre mediciones bi-dimensionales (superficiales) y las propiedades del sistema tri-dimensional se puede obtener una estimación de  $\varepsilon$ , como se verá mas tarde. También se pueden usar experimentos de adsorción para medir  $\varepsilon$ , aunque depende del tamaño de las moléculas usadas en la sonda y; por lo tanto, se puede sobre-estimar el valor de  $\varepsilon$ .

Una tercera característica de un medio poroso es su tortuosidad  $T_p$ , que generalmente se define como el cociente de la longitud real de la trayectoria de flujo de una partícula de fluido entre la distancia lineal entre los puntos inicial y final de la partícula en movimiento. Claramente,  $T_p$  depende de la porosidad. Si  $\phi$  es pequeña (cerca del umbral de percolación), entonces  $T_p$  es muy grande. De hecho, se supone que  $T_p$  diverge en el umbral de percolación. En los modelos clásicos de flujo y transporte en medios porosos,  $T_p$  generalmente se trata como un parámetro ajustable.

## IV.2 Saturación de Fluido, Presión Capilar y Angulo de Contacto

Una cantidad importante es la saturación de un fluido que llena parcial o totalmente el volumen vacío de un sistema poroso. La saturación de un fluido es la fracción volumen del espacio vacío que ocupa el fluido. Similar a la porosidad, la saturación de un fluido se puede medir por varios métodos. Por ejemplo, en uno se pesa una muestra porosa antes y después de que se llene con un fluido, a partir de lo cual se puede estimar fácilmente la saturación del fluido.

Ahora, considere la situación en la que una gota de agua se coloca sobre una superficie inmersa en petróleo. Entonces, la interfase entre los dos fluidos intersecta la superficie del sólido a un ángulo  $\theta$ , al cual se le llama *ángulo de contacto*, como se muestra en la figura IV-1.



**Figura IV.1** Angulo de contacto formado entre un par de líquidos y la roca.

#### IV. Medios Porosos

En este sistema se presentan tres tensiones superficiales, que corresponden a dos interfaces fluido-sólido, y a una interfase agua-aceite. Estas tensiones superficiales se relacionan entre sí mediante la ecuación Young-Dupré:

$$\sigma_{ow} \cos \theta = \sigma_{os} - \sigma_{ws} \quad (IV - 2)$$

donde  $\sigma_{os}$  y  $\sigma_{ws}$  son las tensiones superficiales entre el aceite y la superficie sólida, y el agua y la superficie sólida, respectivamente. Si  $\theta < 65^\circ$ , entonces se dice que el sistema es preferencialmente agua-húmedo; mientras que para  $105^\circ < \theta < 180^\circ$  la superficie es petróleo-húmeda. Para  $65^\circ < \theta < 105^\circ$ , se dice que la superficie es *medianamente húmeda*, y no tiene preferencia para ninguno de los dos fluidos.

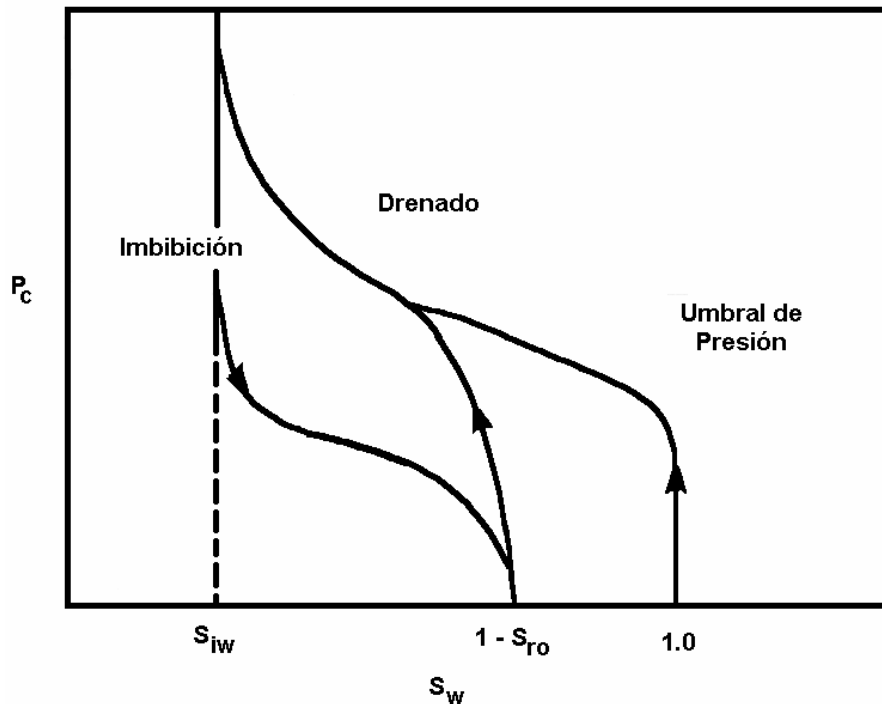
Una cantidad importante para la caracterización de un sistema poroso es la presión de capilaridad  $P_c$ . Suponga que dos fluidos inmiscibles; por ejemplo agua y petróleo, se ponen en contacto en un tubo cilíndrico transparente, y están separados por una interfase. Hay una discontinuidad en el campo de presión conforme uno se mueve a través de la interfase desde una fase a otra. Esto es, si consideramos dos puntos, uno en la fase del agua con una presión  $P_w$  y el otro punto en la fase de petróleo con una presión  $P_o$ . Ambos puntos se encuentran en la vecindad de la interfase, así que  $P_w \neq P_o$ . A la diferencia de presión  $P_c = P_w - P_o$  se le llama *presión de capilaridad* (generalmente, la presión es más alta en un fluido no-mojable, en este caso el petróleo), y se expresa mediante la siguiente ecuación Laplaciana:

$$P_c = \sigma_{ow} \cos \theta \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (IV - 3)$$

donde  $r_1$  y  $r_2$  son los radios principales de curvatura de la interfase. Para una interfase en un tubo cilíndrico  $r_1 = r_2 = r$ , donde  $r$  es el radio del tubo. Si se considera la presión de capilaridad en un sistema simple, tal como un tubo cilíndrico ó cónico, entonces es obvio que  $P_c$  solamente dependería de la cantidad de fluido en el sistema, y por lo tanto de su saturación.

Sin embargo, la situación es diferente en un sistema poroso con muchos poros y/o fracturas de geometría irregular, porque diferentes saturaciones pueden arrojar el mismo  $P_c$  y viceversa, puesto que hay varias interfaces en el sistema en diferentes lugares. Esto es lo que realmente uno encuentra en un experimento al medir  $P_c$  en un sistema poroso. Por ejemplo, suponga que inicialmente se llena el sistema poroso con agua, y luego la expulsamos gradualmente inyectando petróleo en el sistema poroso. En cada etapa del experimento, y para cada valor de saturación de agua  $S_w$ , se tiene una presión de capilaridad correspondiente  $P_c$ . Si se continua este experimento por un largo tiempo, se alcanza un punto donde ya no se expulsa más agua, aunque aún hay residuos de agua en el sistema poroso. La saturación de agua en esta etapa; es decir, en el valor más alto de  $P_c$ , se le llama *saturación irreducible*

$S_{iw}$ , y el proceso de expulsar agua al inyectar petróleo se llama *drenado*. Ahora bien, si iniciamos con el sistema poroso cuando termina la etapa de drenado de agua (en el valor más alto de  $P_c$ ) y se expulsa el petróleo gradualmente mediante la inyección de agua en el sistema, un proceso llamado *imbibición*, se obtiene otra curva de presión de capilaridad – saturación, que es muy diferente de aquella obtenida en el proceso de drenado; y por la tanto, hay *histerésis* en las curvas de presión de capilaridad – saturación. La figura IV.2 muestra un diagrama de presión de capilaridad – saturación típico para los procesos de drenado e imbibición. Como se observa en la figura IV.2, aun cuando  $P_c = 0$ , aún queda algo de petróleo en el sistema. La saturación del petróleo en este punto se llama saturación residual  $R_{ro}$ . Obviamente, el drenado o la imbibición no necesariamente deben empezar en  $S_w = 1$  o en  $S_w = S_{iw}$ , sino que pueden empezar a cualquier saturación intermedia; es decir, se puede tener un drenado secundario, o una imbibición secundaria, y así sucesivamente. Si se realizan tales experimentos, otra vez se encuentra diferentes curvas de presión de capilaridad, como se observa en la figura IV.2.



**Figura IV.2** Curvas típicas de presión de capilaridad.

Las curvas de presión de capilaridad se obtienen por diferentes métodos. Uno de los más populares se basa en la porosimetría por mercurio, y se emplea para medir la distribución de tamaños de un sistema poroso. Otra técnica es el método centrífugo, en el cual una pequeña muestra es saturada con un fluido mojable y se introduce en un contenedor lleno con un fluido no-mojable. Posteriormente, el sistema se somete a rotación a una velocidad angular  $\omega$ . La densidad del fluido

mojable  $\rho_w$  generalmente es mayor que la densidad del fluido no mojable  $\rho_{nw}$ , así que el fluido mojable sale del sistema en el radio exterior. Al mismo tiempo, el fluido mojable es reemplazado por el fluido no-mojable en el radio interior. La presión de capilaridad en el radio interior de rotación  $R_1$  de la muestra se expresa como:

$$P_c = \frac{\omega^2(\rho_w - \rho_{nw})}{2}(R_2^2 - R_1^2) \quad (IV - 4)$$

donde  $R_2$  es el radio exterior de rotación de la muestra donde la presión es la misma para ambas fases; es decir, donde  $P_c = 0$ . Por lo tanto, si cambia la velocidad de rotación  $\omega$ , se expulsarán diferentes cantidades de agua del sistema que se pueden medir, y por lo tanto, se puede obtener el diagrama de presión de capilaridad – saturación. La saturación que se obtiene en el diagrama se usa como una *saturación promedio*, definida como:

$$\langle S_w \rangle (R_2 - R_1) = \int_{R_1}^{R_2} S_w dr \quad (IV - 5)$$

A menudo, la ecuación (IV-5) se reemplaza por una ecuación equivalente desarrollada por Hassler y Brunner[112]

$$\langle S_w \rangle_{P_{c1}} = \int_0^{P_{c1}} S_w(P_c) dP_c \quad (IV - 6)$$

así que si diferenciamos la ecuación (IV-6) se obtiene:

$$\langle S_w \rangle + P_{c1} \frac{d\langle S_w \rangle}{dP_{c1}} = S_w(P_{c1}) \quad (IV - 7)$$

La ecuación (IV-7) se usa para construir una curva de presión de capilaridad – saturación.

### IV.3 Distribución de Tamaños de Poros

Prácticamente, casi todos los libros o artículos acerca de medios porosos mencionan la “distribución de tamaños de poros” de los sistemas porosos, pero a menudo no está claro lo que significa de esta distribución. En un medio poroso que consiste de partículas, los espacios entre ellas se llaman huecos; mientras que si las partículas mismas son poros, entonces los espacios vacíos en las partículas se llaman poros. Sin embargo, una examinación cuidadosa de los medios porosos naturales revela que lo que generalmente se conoce como poros se puede dividir en dos grupos. En el primer grupo están los *cuerpos porosos* donde reside la mayor parte de la porosidad; mientras que en el segundo grupo están las *gargantas porosas*, que son los canales que conectan los cuerpos porosos. Generalmente se

asigna un radio efectivo a los cuerpos porosos y a las gargantas porosas que en realidad no es otra cosa que el radio de esferas que tienen el mismo volumen. Así pues, los cuerpos porosos y las gargantas porosas se definen en términos de aproximar el máximo y mínimo de los radios más grandes inscritos en una esfera. En la representación del espacio poroso en una red, los cuerpos porosos y las gargantas porosas se representan mediante los sitios de la red y los enlaces de la red, respectivamente. Todo el volumen de un cuerpo poroso se puede asignar en el sitio correspondiente; alternativamente puede estar compartido entre los enlaces de la red; así es como se modela el proceso de transporte en medios porosos. Obviamente, si se conoce la distribución de los tamaños de los poros, entonces se puede definir un tamaño de poro promedio. Sin embargo, un método popular, pero empírico, para caracterizar un medio poroso es mediante su *diámetro hidráulico promedio*  $d_H$ , que se define como:

$$d_H = 4 \frac{V_p}{S_p} \quad (IV - 8)$$

donde  $V_p$  y  $S_p$  son el volumen y superficie de los poros, respectivamente. En vista del descubrimiento que el volumen de poros y la superficie de poros tienen propiedades fractales,  $d_H$  no se puede considerar una cantidad fractal como se llegó a pensar, debido a que  $d_H$  no depende de la escala de longitud, y las cantidades fractales son cantidades que dependen de la escala.

La distribución de los tamaños de poros se define como: la *función de densidad de probabilidad* que da la distribución de volumen de poros mediante un tamaño de poro efectivo o característico. Aun esta definición es un poco ambigua, porque si se pudiesen separar los poros, entonces se podría asignar a cada poro un tamaño efectivo, en este caso la distribución de tamaños de poros podría ser similar a la distribución de tamaño de partículas. Pero, debido a que los poros están interconectados, el volumen que se asigne al poro puede depender del método experimental y del modelo de espacio poroso que se emplee para interpretar los datos.

#### IV.4 Propiedades Fractales de los Medios Porosos

El número de coordinación promedio de una roca sedimentaria puede variar entre 4 y 15. Muchos otros tipos de medios porosos; por ejemplo, carbones y membranas, también pueden tener un número de coordinación en el mismo rango. Por lo tanto, lo que distingue los medios porosos naturales, como las rocas, de los demás medios porosos es su geometría; es decir, la geometría y tamaño de sus poros, y sus posibles propiedades fractales. Recientemente, las propiedades fractales de los medios porosos y las rocas fracturadas han atraído la atención de muchos investigadores, y se han desarrollado muchos estudios teóricos y



experimentales, y simulaciones por computadora, en un intento por comprender estos sistemas. En esta sección se describen los principales métodos para determinar las propiedades fractales de los sistemas porosos.

#### IV.4.1 Métodos de Adsorción

Avnir[113] midió las propiedades superficiales de un poro a escala nanométrica usando métodos de adsorción de gases. Encontró que el alcance monomolecular  $n$ ; es decir, moles / peso adsorbente, para varias especies de diferente peso molecular, por tanto diferente alcance superficial por sitio  $\sigma_s$ , satisfacía la siguiente relación:

$$n \sim \delta^{-D_s} = \sigma_s^{-D_s/2} \quad (\text{IV} - 9)$$

donde  $\delta$  es el radio de las esferas de cubrimiento que cubren la superficie. Bajo la consideración que la superficie cubierta por sitio  $\sigma_s$  solamente se determina por las especies de gas absorbido, se reconoció  $D_s$  como la dimensión fractal obtenida por el método de conteo por cajas. Se le llamó la dimensión fractal superficial de los poros, puesto que es una medida de la rugosidad superficial. Para superficies planas  $D_s = 2$ , pero las dimensiones fractales superficiales más altas (cercanas a 3) se han obtenido para varias superficies rugosas. Avnir *et al.*[113] extendieron el rango de análisis más allá del rango molecular estudiando las propiedades de adsorción de superficies fractales en partículas más grandes, y considerando su escalamiento con el tamaño de partícula Euclidiano  $R_p$ . Entonces, se espera que cumpla con la siguiente ecuación:

$$n \sim R_p^{D_s-3} \quad (\text{IV} - 10)$$

si se considera que el área superficial es proporcional a  $R_p^{-D_s}$ , y que el peso de las partículas varía con el volumen de acuerdo a  $R_p^3$ . A fin de medir  $D_s$ , el sistema bajo estudio se separa en varias fracciones. Para cada fracción, el valor aparente de  $n$  de la monocapa se determina por cualquier método conveniente; por ejemplo, adsorción a partir de una solución. Si  $D_s$  está cerca de 3, lo que indica que es un material poroso muy tortuoso, entonces  $n$  es independiente de  $R_p$ . La ecuación (IV-10) también se puede expresar en términos del área superficial *aparente*  $S_a$ :

$$S_a = Nn\sigma_s \sim R_p^{D_s-3} \quad (\text{IV} - 11)$$

donde  $N$  es el número de Avogadro. El rango de auto-similaridad y comportamiento fractal también se puede encontrar con este método. Si se establece una dimensión

fractal  $D_s$  a partir de las mediciones de los valores de las monocapas de las fracciones con diámetro de partículas de  $R_{min}$  a  $R_{max}$ , con una molécula de sección transversal  $\sigma_0$ , entonces  $\sigma_{max} = \sigma_0(R_{max} / R_{min})$ , el rango de auto-similaridad es:

$$\sigma_0 \leq \sigma_s \leq \sigma_{max} \quad (IV - 11)$$

Es claro que a fin de obtener la mayor información de la geometría del tamaño molecular de la superficie, se debe seleccionar un  $\sigma_0$  lo más pequeño posible. Este caso se da en la práctica puesto que se usa nitrógeno o argón (que son elementos con radio atómico pequeño). Observe que  $\sigma_0$  determina la resolución al medir una superficie, si se emplea un  $\sigma_0$  grande, entonces la auto-similaridad debajo de  $\sigma_0$  solamente se puede especular.

Los métodos de adsorción tienen algunas desventajas. De Gennes[114] discutió que el desorden químico de la superficie de los poros es importante, o si la conformación y orientación molecular son funciones de la estructura de la superficie del poro, entonces las estimaciones de  $D_s$  que arrojan los métodos de adsorción son parciales.

#### IV.4.2 Mediciones Cuerda-Longitud

Este método lo desarrollaron Krohn y Thompson[115] y Krohn[116], pero es importante mencionar que estos autores no distinguen entre superficie de poro fractal (dimensionalidad fractal  $D_s$ ) y espacio poroso fractal (dimensionalidad fractal  $D_f$ ). De hecho, Katz y Thompson[117] sostuvieron que para areniscas  $D_s = D_f$ . Se cuentan rasgos de un gran número de líneas horizontales (por ejemplo, una centena o más) mediante una imagen digitalizada de una superficie de fractura, como se muestra en la figura IV.3. Después, el conteo se repite a varios aumentos y en diferentes posiciones. Se inicia seleccionando una región altamente estructurada (es decir, donde la densidad de rasgos es alta) sobre la superficie y se digitalizan las imágenes a diferentes aumentos. Luego, se fija una resolución constante para detectar los rasgos usando un filtro. Después se miden los tamaños de los rasgos, que se definen como la distancia entre máximos locales. Esto genera un histograma, que es linealizado y se coloca en un gráfico log-log. Se puede hacer esto porque se conoce la probabilidad de detectar un rasgo en cada aumento. Krohn y Thompson[115] y Krohn[116] estudiaron el efecto de varios factores sobre la construcción de los histogramas y los gráficos resultantes. Por ejemplo, mostraron que se obtienen las mismas mediciones fractales si se usa un filtro análogo o un filtro digital, que los resultados son independientes de las frecuencias de los filtros, y que los cocientes de señal / ruido no tiene ningún efecto importante en los resultados. Se fija un umbral de amplitud para estar seguro que los rasgos que correspondan al ruido no se tomen en cuenta. Sin embargo, para asegurar una frecuencia de corte constante, el umbral se debe ajustar como una fracción del tamaño de la señal en cada aumento. El tamaño

de la señal se mide contando los rasgos usando un umbral constante, y midiendo la diferencia de la amplitud promedio mínima y máxima para rasgos de un tamaño menor que el corte del filtro. Generalmente, la amplitud se mide para rasgos con tamaños entre  $15 / 512$  y  $20 / 512$  del campo de visión.

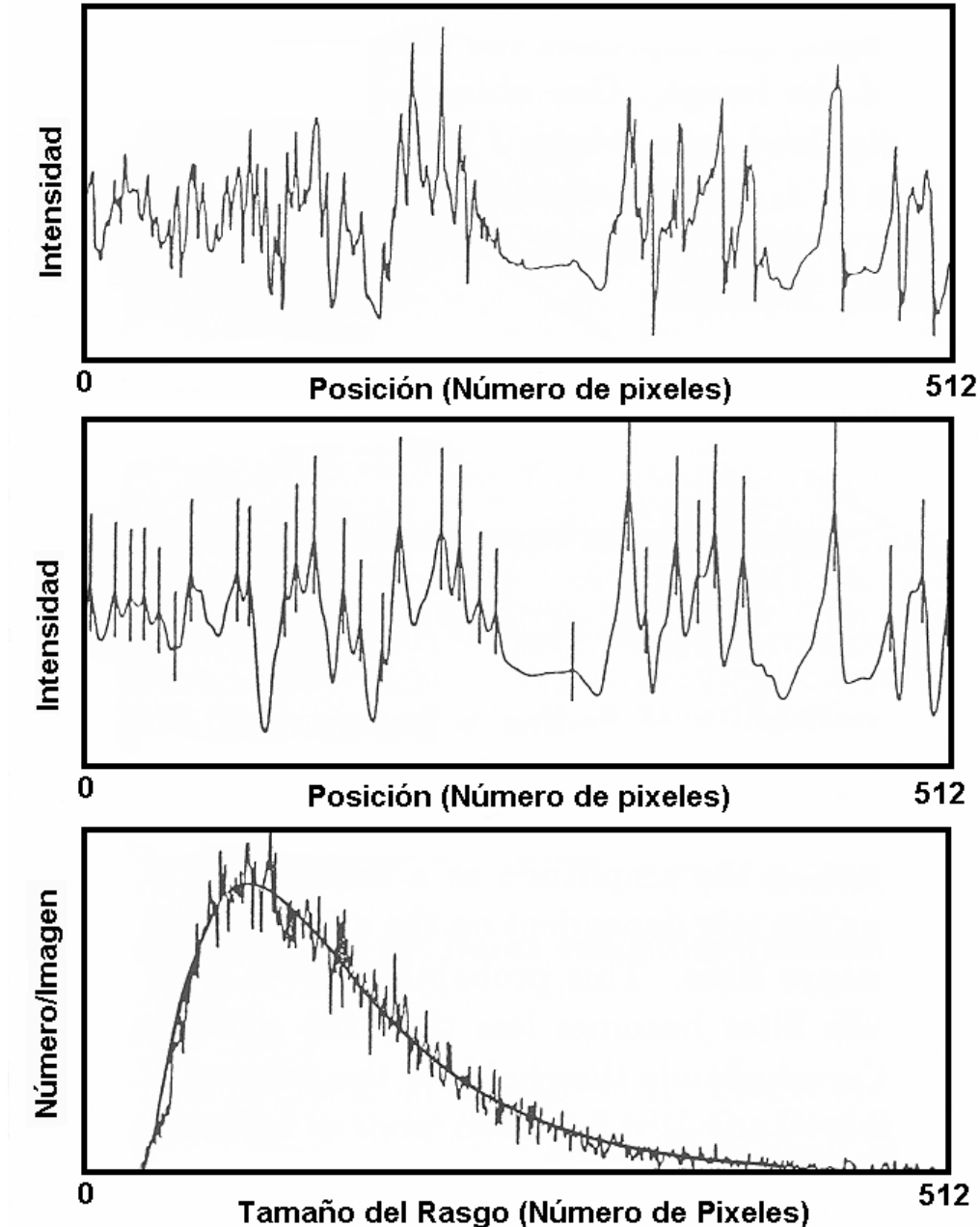


Figura IV.3 La distribución de tamaños de rasgos superficiales (rugosidad) de una arenisca[115].

Esta técnica no depende de la delineación del espacio poroso. Es un método automático, que estadísticamente mide los aspectos estructurales usando imágenes de la superficie tomadas mediante microscopía electrónica de barrido (SEM, siglas en inglés). Un cambio en el contraste en la intensidad de electrones secundarios del

(SEM) que resulta en un máximo local de intensidad, se define como el borde de un rasgo. La técnica permite decidir si los rasgos de un tamaño dado dominan la geometría del espacio poroso. Orford y Whalley[118] también usaron imágenes de SEM para medir la rugosidad de los granos para analizar los resultados en términos de conceptos fractales. Sin embargo, midieron la rugosidad de granos individuales analizando el contorno de los granos; mientras que la técnica de superficies de fractura mide la interfase poro-grano sin aislar granos individuales. Como una consecuencia, la técnica de superficies de fractura arroja un solo valor de dimensión fractal para todas las longitudes de escala, mientras que el análisis fractal de Orford y Whalley[118] no.

La siguiente etapa es analizar la distribución de los rasgos. Para un comportamiento fractal, el número de rasgos contados por centímetro  $N_{cm}(\ell)$  para rasgos de tamaño  $\ell$ , se puede expresar como:

$$N_{cm}(\ell) \sim \ell^{2-D_f} \quad (IV - 12)$$

donde  $\ell_1 \leq \ell \leq \ell_2$ , y  $\ell_1$  y  $\ell_2$  son los límites del comportamiento fractal. Para  $\ell > \ell_2$  las muestras son homogéneas y  $D_f = 3$ , que es el caso si los rasgos geométricos se presentan solamente como ruido aleatorio estadísticamente. Debido a que las mediciones se hacen a partir de imágenes, se expresan los tamaños de los rasgos en términos de pixeles, donde 1 pixel es 1 / 512 de la imagen. Se obtiene una secuencia de intensidades  $I(J)$  para representar los datos digitalizados, donde  $J$  es un pixel en el rango de 1 a 512. Si el borde de un rasgo está en  $J_1$  y el otro borde está en  $J_2$ , entonces el tamaño  $\ell$  del rasgo es  $J_2 - J_1$ . Para cada imagen, el ancho en centímetros del campo de visión es  $12/Ma$ , donde  $Ma$  es el aumento. Por lo tanto:

$$N_{cm}(\ell) = a \left( \frac{12\ell}{512Ma} \right)^{2-D_f} \quad (IV - 13)$$

Sin embargo, el número real de rasgos contados  $N(\ell)$ , se expresa como:

$$N(\ell) = N_{cm}(\ell)P_f(\ell)L(\ell) \quad (IV - 14)$$

donde  $P_f$  es la probabilidad de encontrar un rasgo, y  $L(\ell)$  es la distancia en centímetros sobre la cual se cuentan los rasgos. El filtro digital ajusta  $P_f(\ell)$ , que se puede determinar realizando la transformada de Fourier de la respuesta al impulso y expresando la amplitud como una función de  $L$ . La probabilidad de resolver un rasgo depende directamente de la amplitud del filtro, y es igual a 1 para los tamaños más grandes de los rasgos. La probabilidad se fija a cero para  $\ell < \ell_o$ , donde la amplitud del filtro se vuelve menor que el umbral señal a ruido, a fin de simular el umbral de la amplitud para eliminar el ruido. La expresión final para  $N(\ell)$  es:

$$N(\ell) = aP_f(\ell) \left( \frac{12\ell}{512Ma} \right)^{2-D_f} \left( \frac{12}{Ma} \right) [1 - F(\ell - 1)] \quad (IV - 15).$$

donde  $F(\ell - 1)$  es la fracción del campo de visión ocupado por rasgos de tamaños menores a  $\ell$ :

$$F(\ell - 1) = \frac{1}{512} \sum_{i=1}^{\ell-1} iN(i) \quad (IV - 16)$$

y  $N(i)$  es el número de rasgos de tamaño  $i$ . Por lo tanto, el modelo contiene dos parámetros ajustables: el prefactor  $a$  y la dimensión fractal  $D_f$ .

Las longitudes de las cuerdas que se miden por esta técnica podrían representar estructura poro-superficie o estructura fractura-superficie. El método tiene la desventaja de que en el proceso de fracturación se pueden introducir estructuras no deseables. Así pues, se tiene que estar seguro que se mide una sección de la superficie y no una proyección. La figura IV.3 muestra algunos resultados típicos para arenisca Berea con una porosidad de aproximadamente 20%. Para esta muestra, se encontró que la  $D_f \cong 2.85$ , y  $\ell_2 > 32 \mu\text{m}$ . En general, después de examinar una docena de muestras se encontró que  $D_f$  no es universal y que está en el intervalo de  $2.55 < D_f < 2.85$ .

#### IV.4.3 Método de la Función de Correlación

La medición de las propiedades fractales de un sistema cualquiera en términos de las funciones de auto-correlación, es el método más seguro para establecer si un sistema es fractal o no. En este método se mide la función de auto-correlación densidad – densidad  $C(r)$  a una distancia  $r = |r|$ :

$$C(r) = \frac{1}{V} \sum_{r'} s(r')s(r+r') \quad (IV - 17)$$

donde  $V$  es el volumen del sistema. El origen del sistema de coordenadas está en el espacio poroso,  $s(r) = 1$  si un punto cualquiera a una distancia  $r$  del origen pertenece al espacio poroso, y  $s(r) = 0$  si es lo contrario. Así pues, el significado geométrico de  $C(r)$  es la probabilidad de encontrar un punto dado a una distancia  $r$  en el espacio poroso. Para un sistema  $d$ -dimensional y valores grandes de  $r$  se debe tener  $C(r) \sim r^{D_f - d}$ , y se puede obtener  $D_f$  a partir de un gráfico de  $\log C(r)$  contra  $\log r$ . Fara y Scheidegger[119] fueron los primeros en usar estas propiedades estadísticas para caracterizar los medios porosos. Su método consistió de los siguientes elementos. Se dibuja una línea arbitraria a través de un medio poroso. Los puntos sobre esta línea se definen al darles una longitud de arco  $\kappa$  a partir de un origen

seleccionado arbitrariamente. Ciertos valores de  $\kappa$  corresponden al espacio poroso, mientras que otros valores representan la matriz sólida. Luego, se define una función  $f(\kappa)$  tal que  $f = 1$  si la línea en  $\kappa$  pasa a través del espacio poroso, y  $f = -1$  si la línea en  $\kappa$  pasa a través de la matriz. Es fácil ver que  $\langle f \rangle = 2\phi - 1$ , donde  $\phi$  es la porosidad del medio,  $\langle f^n \rangle = \langle f \rangle$  si  $n$  es non, y  $\langle f^n \rangle = 1$  si  $n$  es par. Luego, se realiza un análisis espectral de  $f$  calculando la transformada de Fourier, a partir de la cual se obtiene algo de información acerca de la estructura del espacio poroso y se puede obtener la matriz sólida. Posteriormente, estas ideas se usaron por otros investigadores para obtener las propiedades fractales de los medios porosos, como se describe a continuación.

Berryman y Blair[120] investigaron las propiedades estadísticas de la función  $s(r)$  usada en la ecuación (IV-17). Si se definen las siguientes cantidades:

$$S_1 = \langle s(\bar{r}) \rangle \quad (IV - 18)$$

$$S_2(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = \langle s(\bar{r} + \bar{r}_1)s(\bar{r} + \bar{r}_2) \rangle \quad (IV - 19)$$

$$S_3(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3) = \langle s(\bar{r} + \bar{r}_1)s(\bar{r} + \bar{r}_2)s(\bar{r} + \bar{r}_3) \rangle \quad (IV - 20)$$

entonces, debido a que dos puntos yacen sobre una línea y tres puntos yacen sobre un plano, se pueden medir estas cantidades usando imágenes de secciones transversales del medio poroso. Si se considera que el medio poroso es macroscópicamente homogéneo e isotrópico, entonces es fácil mostrar que  $S_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = S_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = S_2(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)$ . Sin embargo:

$$S_1 = S_2(0) = \phi \quad (IV - 21)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S_2(\bar{r}) = \phi^2 \quad (IV - 22)$$

$$S_2'(0) = -\frac{\Xi}{4} \quad (IV - 23)$$

donde  $\Xi$  es el área superficial específica. Debye *et al.*[121] fueron los primeros en derivar la ecuación (IV-23).

El siguiente paso, es obtener imágenes del medio poroso a fin de analizarlas. El método tradicional consiste de las siguientes etapas[120]. Las muestras del medio poroso se saturan con una resina de baja densidad, a partir de las cuales se preparan delgadas secciones petrográficas, y luego se pulen. Se emplea un microscopio electrónico de barrido en modo retrodispersión para visualizar las secciones delgadas y producir imágenes de alto contraste entre el espacio poroso y la matriz sólida. Se producen imágenes a diferentes aumentos y luego se digitalizan en un "scanner". Posteriormente, las imágenes se tratan usando técnicas de análisis de imágenes. Las imágenes se binarizan, que representan una aproximación de la imagen real. Estas imágenes binarizadas se usan para calcular varias funciones de correlación.

Katz y Thompson[122] usaron una técnica de microscopía óptica para medir las funciones de correlación. En su método, fotografías en modo de retrodispersión de secciones delgadas pulidas son producidas de tal manera que se obtiene una imagen binaria. Se obtienen dos negativos idénticos en formato de 35 mm, y se colocan en un microscopio óptico para medir la luz transmitida a través de ambas películas. Se mide la intensidad transmitida. La función de correlación  $C(r)$  se calcula como la intensidad transmitida como una función de la distancia relativa entre las dos películas. Debido al pulido la resolución es limitada. Generalmente, el pulido hecho con un abrasivo de  $0.25 \mu m$  deja marcas de  $1 \mu m$  sobre la superficie de la sección delgada.

#### IV.4.4 Método de Espectral

Voss[123] propuso este método. Se aplica a fractales auto-afines, en vez de fractales auto-similares, tales como superficies porosas y volúmenes porosos. Los fractales auto-afines se emplean para describir sistemas que poseen propiedades invariantes en escala diferentes, paralelas y perpendiculares a la superficie. Un conjunto es auto-afin si es invariante bajo una transformación de afinidad,  $x_i \rightarrow \lambda_i x_i$ , donde el parámetro de escalamiento  $\lambda_i$  es distinto para cada dirección. Así pues, tales superficies son anisotrópicas donde la anisotropía se puede deber a causas externas como la gravedad.

Una función  $z(t)$  tiene una transformada de Fourier  $\bar{z}(\omega, T)$  en el intervalo  $0 < t < T$  expresada como:

$$\bar{z}(\omega, T) = \frac{1}{T} \int_0^T z(t) \exp(2\pi i \omega t) dt \quad (IV - 24)$$

y una densidad espectral  $S(\omega)$ :

$$S(\omega) = T |\bar{z}(\omega, T)|^2 \quad \text{conforme } T \rightarrow \infty \quad (IV - 25)$$

Para un fractal auto-afin se tiene:

$$S(\omega) \sim \omega^{-\beta f} \quad (IV - 26)$$

Se puede definir una función de auto-correlación de dos puntos mediante:

$$C(\tau) = \langle z(t)z(t+\tau) \rangle^2 - \langle z(t) \rangle^2 \quad (IV - 27)$$

la cual es un poco similar a  $S_2(r_1, r_2)$  definida en la ecuación (IV-19). Para el caso de un proceso aleatorio y estacionario  $C(\tau)$  se relaciona con  $S(\omega)$  mediante la relación de Wiener-Khintchine:

$$C(\tau) = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos(2\pi\omega\tau) d\omega \quad (\text{IV} - 28)$$

La ecuación (IV-28) también se puede extender para un proceso no-estacionario. Para un fractal auto-afin las ecuaciones (IV-26) y (IV-28) dan:

$$C(\tau) \sim \tau^{\beta_f - 1} \quad (\text{IV} - 29)$$

Por otro lado,  $C(\tau)$  se relaciona con los incrementos cuadrados promedio  $M_i(t)$  de la función  $z(t)$  mediante:

$$M_i(t) = \langle |z(t + \tau) - z(t)|^2 \rangle = 2 \left( \langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2 \right) - 2C(\tau) \quad (\text{IV} - 30)$$

Sí la dimensión fractal de un perfil bi-dimensional es  $D_f$ , entonces la ecuación (IV-30) se emplea para relacionar  $\beta_f$  con  $D_f$  lo que resulta en:

$$D_f = \frac{1}{2}(5 - \beta_f), \quad 1 < \beta_f < 3 \quad (\text{IV} - 31)$$

Hough[124] discutió las condiciones de rigor matemático bajo las cuales se deriva la ecuación (IV-31). Si  $\beta_f > 3$ ,  $D_f = 1$  y no cambia. A diferencia de la ecuación (IV-24), la cual es una transformada de Fourier uni-dimensional, aunque también se puede realizar una transformada de Fourier bi-dimensional y obtener la dimensión fractal de una topografía bi-dimensional. En este caso  $2 < D_f < 3$ , contrario a lo que arroja la ecuación (IV-31),  $1 < D_f < 2$ .

#### IV.4.5 Método de Conteo de Cajas

La característica más simple de un fractal es su dimensión fractal  $D_f$ , la cual se define de la siguiente manera. El sistema fractal se cubre con hiper-esferas  $d$ -dimensionales que no se traslapan con un radio Euclideo  $r$ , y se cuenta el número de hiper-esferas  $N(r)$  necesarias para cubrir el sistema fractal. Para un sistema fractal se tiene que:

$$N(r) \sim r^{-D_f} \quad (\text{IV} - 32)$$



donde el símbolo  $\sim$  denota una proporcionalidad asintótica. La ecuación (IV-32) se puede re-escribir como:

$$D_f = \frac{\ln N(r)}{\ln (1/r)} \quad (\text{IV} - 33)$$

Así pues, los objetos Euclidianos tales como la línea recta, el cuadrado o el cubo, siguen los siguientes comportamientos  $N(r) \sim r^{-1}, r^{-2}, r^{-3}$ , respectivamente. Otra manera de definir la dimensión fractal es la siguiente. Se corta un segmento del objeto fractal con dimensión lineal  $L$  y se estudia el volumen  $V(L)$  del sistema conforme  $L$  varía. Si se calcula  $V(L)$  cubriendo el sistema con hiper-esferas de radio unitario, entonces  $V(L) = N(L)$ , donde  $N$  es el número de esferas necesarias para cubrir el sistema. Para un sistema fractal uno encuentra que:

$$N(L) \sim L^{D_f} \quad (\text{IV} - 34)$$

donde  $D_f$  es lo mismo que en la ecuación (IV-32). Note que con esta definición, se considera implícitamente el corte inferior y superior para el comportamiento fractal del sistema; es decir, el radio de las hiper-esferas (corte inferior) y el tamaño lineal del sistema  $L$  (corte superior). Sin embargo, también se puede definir una cantidad adimensional,  $\delta = r / L$ , y re-escribir la ecuación (IV-32) en términos de  $\delta$ . Entonces, se puede escribir  $N(\delta) \sim \delta^{-D_f}$ , donde  $\delta \ll 1$ , y  $N(\delta)$  es el número de hiper-esferas de radio  $\delta L$  que son necesarias para cubrir el sistema. La ventaja de hacer esto, es que se puede usar para *cualquier* sistema fractal, y también para *comparar* varios objetos fractales, puesto que todas las cantidades medibles se escriben de manera adimensional. Este método de calcular la dimensión fractal se llama *método de conteo de cajas*.

Considérese el siguiente ejemplo para ilustrar como se usa este método de conteo de cajas para determinar la dimensión fractal de un objeto fractal. En la Figura IV.4 se muestra la curva de Koch. Esta curva se obtiene a partir de un segmento de línea recta de longitud unitaria que se divide en tres partes iguales (iniciador,  $n = 0$ ). Después se le extrae la tercera parte colocada en la parte media del segmento y se le reemplaza por un triángulo equilátero (generador,  $n = 1$ ). Después, a cada tercio del iniciador se le hace el mismo procedimiento *ad infinitum*. Como se observa, después de  $n$  iteraciones, el sistema se cubre por  $N = 4^n$  segmentos de línea recta, cada segmento con longitud  $r = 3^{-n}$ . Por lo tanto, si se escribe  $N = r^{-D_f}$ , se obtiene:

$$D_f = \frac{\ln 4}{\ln 3} \cong 1.263 \quad (\text{IV} - 35)$$

de manera que  $D_f > d = 1$ . La curva de Koch es un ejemplo de un fractal exacto ó matemático, debido a que auto-similaridad es exacta en cada etapa de su construcción. Hay otro tipo de fractales geométricos que se llaman fractales

estadísticamente auto-similares. Estos sistemas son auto-similares y fractales solamente en el sentido estadístico. Ejemplos de tales fractales son los clusters de percolación, que ya se discutieron en el capítulo I.

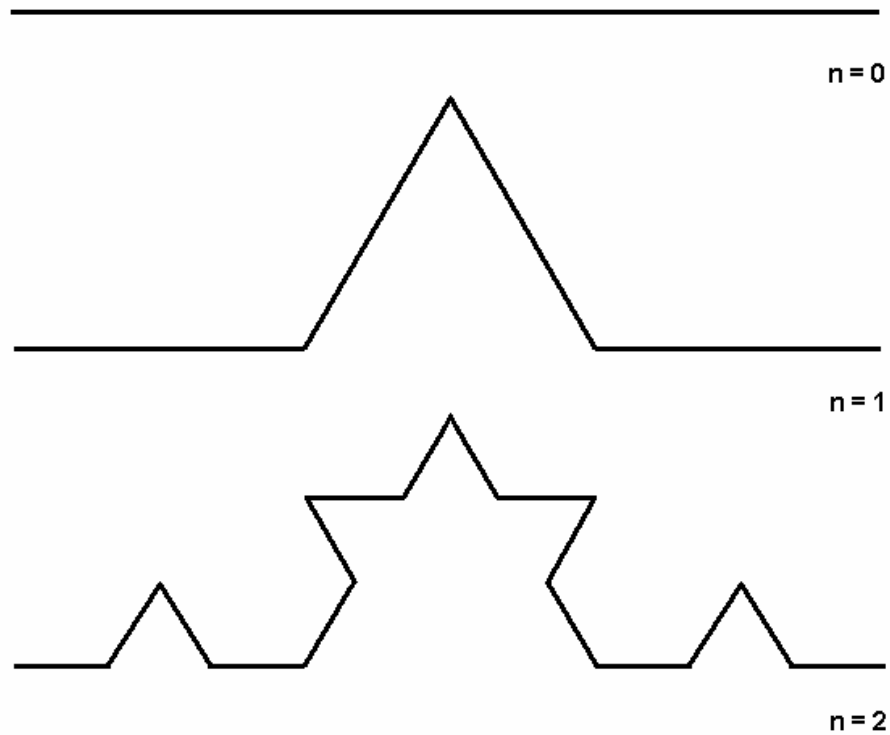


Figura IV.4 Construcción de la curve de Koch.

#### IV.5 Porosidad y Distribución de Tamaños de Poros de Medios Porosos Fractales

Katz y Thompson[122] propusieron que la porosidad de los medios porosos fractales se puede estimar mediante:

$$\phi = c \left( \frac{\ell_1}{\ell_2} \right)^{3-D_f} \quad (\text{IV} - 36)$$

donde  $c$  es una constante de orden unitario, y  $\ell_1$  y  $\ell_2$  son los límites inferior y superior del comportamiento fractal. Las predicciones de esta ecuación parecen coincidir con los valores medidos, indicando así la utilidad de  $D_f$  para estimar la porosidad del medio poroso.

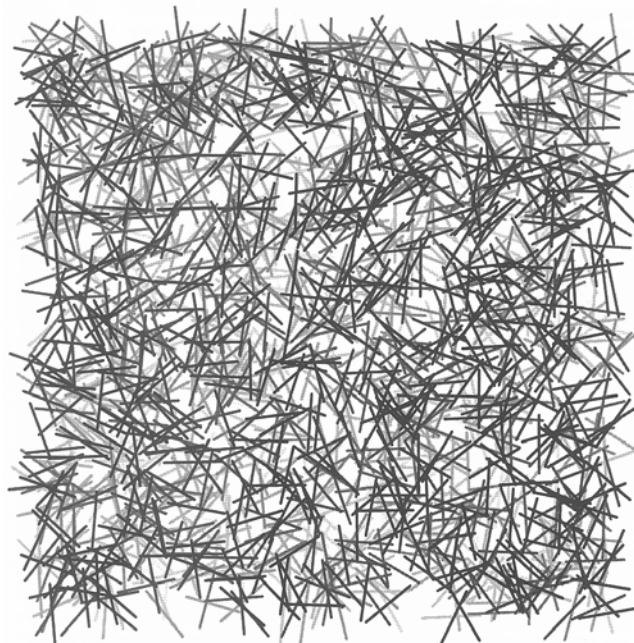
Por otro lado, Pfeifer *et al.*[125] propusieron que para las medios porosos fractales, el volumen total de los poros de diámetro  $\geq 2r$  obedece a:

$$-\frac{dV}{dr} \sim r^{2-D_s} \quad (\text{IV} - 37)$$

a partir de la cual se puede determinar la distribución de tamaño de los poros.

#### IV.6 El Papel como un Medio Poroso

El papel, a diferencia de la mayoría de los materiales manufacturados, tiene la propiedad peculiar que es definitivamente heterogéneo, pero en una manera teóricamente desconocida. Ciertamente, es un reto predecir el comportamiento de una estructura ingenieril que consta de elementos como vigas cuando no se sabe como están organizadas. En cualquier pedazo de papel, se puede ver mediante un microscopio óptico o una radiografía como se encuentra distribuido el material. También, se pueden crear estructuras matemáticas mediante procesos estocásticos, las cuales sirven como patrones de referencia en la modelación de la estructura del papel. En la figura IV.5 se muestra un modelo simulado por computadora de un arreglo aleatorio de 20 000 fibras uniformes. Los modelos estructurales determinísticos son irreales y en cambio, se recurre a los parámetros geométricos estadísticos para caracterizar la estructura del material.



**Figura IV.5** Red aleatoria de 2000 fibras uniformes, representando aproximadamente 1 cm<sup>2</sup> de una capa de fibras.

La presencia de las fibras dá lugar a la heterogeneidad estructural y como consecuencia influye en los efectos físicos del comportamiento del material. Por

ejemplo, una hoja de papel celofán es esencialmente impermeable al aire, pero un papel de composición química, densidad promedio y espesor similares es completamente permeable.

Es importante considerar algunas propiedades físicas relativas de una hoja de papel fabricada a partir de fibras de pura celulosa y una hoja de papel celofán. Ambas hojas consisten de moléculas de celulosa unidas por enlaces de hidrógeno, pero el celofán es bastante homogéneo, mientras que el papel es heterogéneo por sí mismo. La Tabla IV.1 muestra algunos cocientes de propiedades para el celofán y su tipo de papel más cercano, la glisina, en aproximadamente  $30 \text{ g/m}^2$ .

**Tabla IV.1** Algunas propiedades de papel glisina con relación a las de celofán[129].

<b>Propiedad</b>	<b>Glisina/Celofán</b>
Densidad por área	0.94
Espesor	0.96
Densidad	0.99
Resistencia a la tensión (MD)	0.41
Resistencia a la tensión (CD)	0.22
Anisotropía tensil (MD/CD)	1.84
Deformación a la fractura (MD)	0.10
Deformación a la fractura (CD)	0.16
Anisotropía de deformación (MD/CD)	0.64
Transparencia	0.12
Permeabilidad al aire	26573

Lo que puede observar en la Tabla IV.1 es un fuerte contraste en la densidad de fibras, por esto la estructura porosa del papel influye en las propiedades físicas, contra el comportamiento de una celulosa virtualmente continua de densidad similar. La anisotropía se presenta en ambos materiales debido a la orientación preferencial de las fibras y las moléculas. Sin embargo, mientras que es más marcada en la resistencia a la tensión de la glisina, el efecto se revierte en la elongación a la fractura. Es interesante observar que la eficiencia de la glisina y el celofán presentan es bastante alto en el sentido de que ambos papeles alcanzan cerca del 90% de la densidad de masa de celulosa cristalina. El contraste más alto se presenta en el cociente de la permeabilidad del aire entre la glisina y el celofán, con prácticamente la misma densidad y espesor. Esto parece revelar el hecho que el papel debe tener muchos, y presumiblemente complejos, pasajes porosos finos a través de su espesor. Se puede pensar de la estructura, de una manera simple al considerar la situación para un papel aleatorio hecho de las mismas fibras, lo siguiente. La glisina tiene una densidad por unidad de área de aproximadamente  $30 \text{ g/m}^2$ , así que tiene un alcance promedio de aproximadamente 6 fibras. Para un papel aleatorio con el mismo alcance, la probabilidad de que un punto sea cubierto por  $n$  fibras se expresa como:

$$P(\text{alcance} = n \mid \text{alcance promedio} = 6) = e^{-6} \frac{6^n}{n!} \quad (\text{IV} - 38)$$

Así que la probabilidad de que un punto elegido arbitrariamente no sea cubierto por una fibra, y por tanto se encuentre en un hoyo es:

$$P(n = 0) = e^{-6} \approx 0.0025 \quad (\text{IV} - 39)$$

y por tanto, no se espera encontrar muchos hoyos. Por otro lado, la probabilidad de que un punto en una región delgada sea cubierto por no más de dos fibras, es la sumatoria:

$$\sum_{n=0}^2 P(n) \approx 0.06 \quad (\text{IV} - 40)$$

Bliesner[126] mostró experimentalmente que las distribuciones de los tamaños de los poros es casi siempre log-normal, y tiene desviaciones estándar proporcionales al promedio, como lo predicen los modelos teóricos[127]. Finalmente, Oliver y Mason[128] demostraron la importancia que tienen factores como la rugosidad y la porosidad, y la morfología de las fibras en la manera que se propagan los fluidos en el papel, mediante técnicas de microscopía electrónica de barrido.

## REFERENCIAS

1. D. Stauffer, *Introduction to Percolation Theory*, Taylor and Francis, Londres, (1985).
2. M. Sahimi, *Application of Percolation Theory*, Taylor and Francis, Londres, (1993).
3. D. L. Turcotte, *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*, Cambridge University Press, Cambridge, (1992).
4. P. G. de Gennes, *Scaling Concepts in Polymer Physics*, Cornell University Press, Ithaca, (1979).
5. P. Grassberger, *J Phys. A* **18**, L215 (1985); *J. Phys. A* **19**, 1681 (1986).
6. G. Mackay, N. Jan, *J. Phys. A* **17**, L757 (1984).
7. A Collection of Review Articles, *Percolation Structures and Processes*, eds. G. Deutscher, R. Zallen, J. Adler, Adam Hilger, Bristol, (1983).
8. A. Bunde, S. Havlin, eds., *Fractals in Science*, Springer, Heidelberg, (1994)
9. A. Bunde, S. Havlin, eds., *Fractals and Disordered Systems*, Springer, Heidelberg, (1996)
10. J. W. Essam, D. S. Gaunt, A. J. Guttmann, *J. Phys. A* **11**, 1983 (1978). [Citada en ref. 9].
11. R. M. Ziff, *Phys Rev. Lett.* **69**, 2670 (1992). [Citada en ref. 9].
12. R. M. Ziff, B. Sapoval, *J. Phys A* **19**, L1169 (1987). [Citada en ref. 9].
13. M. F. Sykes, M. K. Wilkinson, *J. Phys A* **19**, 3415 (1986). [Citada en ref. 9].
14. P. N. Strenski, R. M. Bradley, J. M. Debierre, *Phys Rev. Lett.* **66**, 133 (1991). [Citada en ref. 9].
15. C. Domb, *Proc. Phys. Soc.* **89**, 859 (1966). [Citada en ref. 9].
16. P. Grassberger, *J Phys. A* **25**, 5867 (1992). [Citada en ref. 9].
17. P. J. Flory, *J. Am. Chem. Soc.* **63**, 3083, 3091, 3096 (1941)
18. W. H. Stockmayer, *J. Chem. Phys.*, **11**, 45 (1943).

## Referencias

19. S. R. Broadbent, J. M. Hammersley, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **53**, 629 (1957).
20. Ver por ejemplo S. K. Ma, *Modern Theory of Critical Phenomena*, Benjamin, Reading (1976).
21. B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco (1992).
22. H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transition and Critical Phenomena* Oxford University, Oxford (1971).
23. C. Domb, J. L. Lebowitz, eds. *Phase Transitions and Critical Phenomena* Academic Press, New York (1972).
24. M. P. M. Den Nijs, *J. Phys.* **12**, 1857, (1979). [Citada en ref. 9].
25. B. Nienhuis, *J. Phys. A* **15**, 199, (1982). [Citada en ref. 9].
26. R. M. Ziff, G. Stell, *unpublished*. [Citada en ref. 9].
27. R. M. Ziff, *Phys Rev. Lett.* **56**, 545 (1986).
28. D. Stauffer, J. Adler, A. Aharony, *J. Phys. A* **27**, L475 (1994).
29. R. Chandler, J. Koplik, K. Lerman, J. F. Willemsen, *J. Fluid Mech.* **119**, 249 (1982).
30. D. Wilkinson, J. F. Willemsen, *J. Phys. A* **16**, 3365 (1983).
31. P. G. De Gennes, E. Guyon, *J. Mech.* **17**, 403 (1978).
32. R. Lenormand, C. Zarcone, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2226 (1985).
33. S. Havlin, B. Trus, H. E. Stanley, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1288 (1984).
34. J. W. Essam, K. De'Bell, J. Adler, *Phys. Rev. B* **33**, 1982 (1986).
35. S. Redner, *Phys. Rev. B* **25**, 3242 (1982).
36. S. P. Obukov, *Phys Rev. Lett.* **65**, 1395 (1990).
37. M. Henkel, H. J. Hermann, *J. Phys. A* **23**, 3719 (1990).
38. B. Hede, J. Kertész, T. Vicsek, *J. Stat. Phys.* **64**, 829 (1991).
39. Y. Gefen, A. Aharony, S. Alexander, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 77 (1983).

## Referencias

40. H. Takayasu, *Fractals in the Physical Sciences*, Manchester Univ. Press, Manchester (1990).
41. H. E. Stanley, *J. Stat. Phys.*, **36**, 843 (1984).
42. T. A. Witten, L. M. Sander, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1400 (1981).
43. H. E. Stanley, *Phil. Mag. B* **56**, 665 (1987).
44. R. M. Brady, R. C. Ball, *Nature* **309**, 225 (1984).
45. E. Ben-Jacob, R. Godbey, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1315 (1985).
46. L. Niemeyer, L. Pietronero, H. J. Weissmann, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1033 (1984).
47. K. J. Maloy, J. Feder, T. Jossang, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2688 (1985).
48. G. Daccord, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 479 (1987).
49. A. D. Fowler, H. E. Stanley, G. Daccord, *Nature* **341**, 134 (1989).
50. H. E. Stanley, N. Ostrowsky, eds. *On Growth and Form: Fractal and Non-Fractal Patterns in Physics* Martinus Nijhoff, Dordrecht (1985).
51. P. G. de Gennes, *La Recherche* **7**, 919 (1976).
52. P. Meakin, H. E. Stanley, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1457 (1983).
53. S. Alexander, R. Orbach, *J. de Phys.* **43**, L625 (1982).
54. R. B. Pandey, D. Stauffer, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 527 (1983).
55. S. Havlin, D. Ben-Avraham, *J. Phys. A* **16**, L483 (1983).
56. P. Meakin, H. E. Stanley, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1457 (1983).
57. P. Meakin, H. E. Stanley, *J Phys. A.* **17**, L173 (1984).
58. F. Leyvraz, H. E. Stanley, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 2048 (1983).
59. S. Havlin, D. Ben-Avraham, *Adv. Phys.* **36**, 695 (1987).
60. R. Pike, H. E. Stanley, *J. Phys. A* **14**, L169 (1981).
61. H. J. Hermann, H. E. Stanley, *J. Phys. A* **21**, L829 (1988).



## Referencias

62. S. Havlin, Z. Djordjevic, I. Majid, H. E. Stanley, G. H. Weiss, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 178 (1984).
63. A. R. Ritzenberg, R. I. Cohen, *Phys. Rev. B* **30**, 4038 (1984).
64. P. Meakin, I. Majid, S. Havlin, H. E. Stanley, *J. Phys. A.* **17**, L975 (1984).
65. R. Pike, H. E. Stanley, *J. Phys. A* **14**, L169 (1981).
66. B. B. Mandelbrot, *Fractals in Physics*, eds. L. Pietronero, E. Tossati, North.Holland, Amsterdam, pp.3 (1986).
67. J. Feder, *Fractals*, Plenum, New York (1988).
68. R. F. Voss, *The Science of Fractal Images*, eds. H. P. Peitgen, D. Saupe (Springer, Berlin Heidelberg 1988), pp. 21.
69. A. Bunde, S. Havlin, eds. *Fractals in Science* (Springer, Berlin 1994).
70. R. F. Voss, *Fundamental Algorithms in Computer Graphics*, eds. R. A. Earnshaw, Springer, Berlin, Heidelberg (1985), pág. 805.
71. T. Vicsek, *Fractal Growth Phenomena*, World Scientific, Singapore (1991).
72. H. Van Damme, *The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry*, eds. D. Avnir, pp. 189, Wiley, New York (1989).
73. J. Nittman, G. Daccord, H. E. Stanley, *Nature* **314**, 141 (1985).
74. F. A. L. Dullien, *Porous Media: Fluid Transport and Pore Structure*, Academic Press, London (1979).
75. P. M. Adler, *The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry*, eds. D. Avnir, pp. 341, Wiley, New York (1989).
76. B. Sapoval, M. Rosso, J. F. Gouyet, *The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry*, eds. D. Avnir, pp. 227, Wiley, New York (1989).
77. T. M. Shaw, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1671 (1987).
78. R. Lenormand, C. Zarcone, A. Sarr, *J. Fluid Mech.* **135**, 337 (1983).
79. R. Lenormand, E. Touboul, C. Zarcone, *J. Fluid Mech.* **189**, 165 (1988).
80. L. Paterson, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1621 (1984).
81. V. K. Horvath, F. Family, T. Viscek, *J. Phys. A* **24**, L25 (1991).

## Referencias

82. M. A. Rubio, C. A. Edwards, A. Dougherty, J. P. Gollub, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 1685 (1989)
83. S. V. Buldyrey, A. L. Barabási, F. Caserta, S. Havlin, H. E. Stanley, T. Viscek, *Phys. Rev. A* **45**, R8313 (1992).
84. J. Kertész, V. K. Horváth, F. Weber, *Fractals* **1**, **67** (1993).
85. N. Martys, M. Cieplak, M. O. Robbins, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1058 (1991).
86. L. H. Tang, H. Leschhorn, *Phys. Rev.* **45**, R8309 (1992).
87. K. Sneppen, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3539 (1992).
88. S. Havlin, L. A. N. Amaral, S. V. Buldrey, S. T. Harrington, H. E. Stanley, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4205 (1995).
89. E. Clément, C. Baudet, E. Guyon, J. P. Hulin, *Phys. D* **20**, 608 (1987).
90. J. P. Hulin, E. Clément, C. Baudet, J. F. Gouyet, M. Rosso, J. P. Hulin, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 333 (1988).
91. J. F. Gouyet, *Physica A* **168**, 581 (1990).
92. J. F. Gouyet, *Soft Order in Physical Systems*, eds. R. Bruinsma, Y. Rabin, Plenum Pub. Corp., New York (1994).
93. P. Bak, C. Tang, K. Weisenfeld, *Phys. Rev. A* **38**, 364 (1988)
94. K. J. Maloy, J. Feder, F. Boger, T. Jossang, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2925 (1988).
95. H. Van Damme, E. Alsac, C. Laroche, *C. R. Acad. Sci., Ser III* **309**, 11(1988)
96. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Elasticity*, Pergamon, Oxford (1960), pp. 130.
97. F. Tzschichholz, H. J. Hermann, H. E. Roman, M. Pfuff, *Phys. Rev. B* **49**, 7056 (1994).
98. F. Tzschichholz, H. J. Hermann, en prensa.
99. F. Omori, *J. Coll. Sci. Imper. Univ. Tokio* **7**, 111 (1993).
100. I. G. Main, P. R. Sammonds y P. G. Meredith, *Geophys. J. Int.* **115**, 367 (1993).
101. F. Family, T. Viscek, *J. Phys. A* **18**, L75 (1985).
102. H. Kunz, B. Souillard, *J. Stat. Phys.* **19**, 77 (1978).

## Referencias

103. B. Sapoval, M. Rosso, J. F. Gouyet, *J. Phys. Lett.* **46**, L149 (1985)
104. H. E. Stanley, *J. Phys.* **10**, L211 (1977).
105. H. E. Stanley, *Scaling Phenomena in Disordered Systems*, eds. R. Pynn, A. Skjeltorp, Plenum, New York (1986).
106. T. Grossmann, A. Aharony, *J. Phys. A* **19**, L745 (1986).
107. L. H. Tang, H. Leschhorn, *Phys. Rev. A* **45**, R8309 (1992).
108. S. V. Buldyrev, A. L. Barabási, F. Caserta, S. Havlin, H. E. Stanley, T. Viscek, *Phys. Rev. A* **45**, R8313 (1992).
109. S. V. Buldyrev, S. Havlin, H. E. Stanley, *Physica A* **200**, 200 (1993).
110. R. E. Collins, *Flow of Fluids Through Porous Media*, Penwell, Tulsa, pp. 196 (1961).
111. A. E. Scheidegger, *The Physics of Flow Through Porous Media*, 3rd. ed., University of Toronto Press, Toronto (1974).
112. G. L. Hassler, E. Brunner, *Trans. AIME* **160**, 114 (1945).
113. D. Avnir, D. Farin, P. Pfeifer, *J. Chem. Phys.* **79**, 3566 (1983).
114. P. G. De Gennes, en *Physics and Disordered Systems*, ed. M Daoud, Plenum, Londres, pp. 227 (1985).
115. C. E. Krohn, A. H. Thompson, *Phys. Rev. B* **33**, pp. 6366 (1986).
116. C. E. Krohn, *J. Geophys. Res. B* **93**, pp. 3286 (1988).
117. A. J. Katz, A. H. Thompson, *Phys. Rev. Lett.* **54**, pp. 1325 (1985).
118. J. D. Orford, W. B. Whalley, *Sedimentology* **30**, pp. 655 (1983).
119. H. D. Fara, A. E. Scheidegger, *J. Geophys. Res.* **66**, pp. 3279 (1061).
120. J. G. Berryman, S. C. Blair, *J. Appl. Phys.* **60**, pp. 1430, (1986).
121. P. Debye, H. R. Anderson, H. Brumberger, *J. Appl. Phys.* **28**, 679 (1957).
122. A. J. Katz, A. H. Thompson, *Phys. Rev. Lett.* **54**, pp. 1325 (1985).
123. R. F. Voss, *Fundamental Algorithms for Computer Graphics*, ed. R. A. Earnshaw, NATO ASI Series, **F17**, pp. 805, Springer, Berlin (1985).

## Referencias

124. S. E. Hough, *Geophys. Res. Lett.* **16**, pp. 449 (1974).
125. P. Pfeifer, D. Avnir, D. Farin, *J. Stat. Phys.* **36**, pp. 699 (1984).
126. W. C. Bliesner, "A Study of the Porous Structure of Fibrous Sheets using Permeability Techniques", *Tappi J.* **4**, pp. 392-400 (1985).
127. H. Corte, E. H. Lloyd, "Fluid Flow Through Paper and Sheet Structure", en **Consolidation of Paper Web** Transactions of the Fundamental Research Symposium, pp. 981-1009 London (1996).
128. J. Oliver, S. Mason, "Scanning Electronic Microscope Studies of Spreading of Liquids on Paper", en Transactions of **Cambridge Symposium**, pp. 428-437 (1973).
129. M. Deng, C. T. J. Dodson, *Paper: An Engineering Stochastic Structure*, Atalanta, TAPPI Press (1994).
130. N. Provatas, M. J. Alava, T. Ala-Nissila, *Phys. Rev. E* **54** pp. R36, (1996).
131. Scion Image, 1999, *Scion Corporation*, [www.trusoft-international.com](http://www.trusoft-international.com).
132. Benoit 1.2, 1999, *Trusoft Int'l, Inc.*, [www.scioncorp.com](http://www.scioncorp.com).
133. F. Parrot, H. Taud , J. L. Palacio, K. Oleshko, L. M. Morales, *Local Fractal Dimension, Urban Textural Detection*, pre-print.
134. A. L. Barabási, H. E. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
135. F. Family, T. Vicsek, *Dynamics of Fractal Surfaces*, World Scientific, Singapore (1991).
136. A. S. Balankin, O. Susarrey, *Phil. Mag. Lett.* **79** pp. 629 (2000).
137. F. Family, *Physica A* **168**, pp. 561 (1990).
138. F. Family, "Rough Surfaces: Scaling Theory and Universality" en *Universalities in Condensed Matter Physics*, eds. R. Jullien, L. Peliti, R. Rammal y N. Boccara, Springer Soc. Phys., Berlin (1988).
139. F. Family, *J. Phys. A* **19**, L441 (1986).
140. P. Meakin, P. Rammanlal, L. M. Sander, R. C. Ball, *Phys. Rev. A* **34**, 5091 (1986).
141. S. F. Edwards, D. R. Wilkinson, *Proc. Roy. Soc. A* **381** pp. 17, London (1982).

## Referencias

142. M. Kadar, G. Parisi, Y. C. Zhang, *Phys. Rev Lett.* **56**, pp.889 (1986).
143. D. Foster, D. R. Nelson, M. J. Stephen, *Phys. Rev A* **16**, pp. 732 (1977).
144. A. L. Barabási, S. V. Buldyrev, S. Havlin, G. Huber, H. E. Stanley, T. Vicsek, "Imbibition in Porous Media: Experiment and Theory" en *Surface Desordering: Growth, Roughening and Phase Transitions*, eds. R. Julien, J. Kertesz, P. Meakin, D. E. Wolf (Nova Science, Cammack, N. Y., 1992), pp. 193.
145. L. A. N. Amaral, A. L. Barabási, S. V. Buldyrev, S. Havlin, H. E. Stanley, *Fractals* **1**, pp. 818 (1993).
146. L. A. N. Amaral, A. L. Barabási, S. V. Buldyrev, S. Havlin, H. E. Stanley, *Phys. Rev. Lett.* **72**, pp. 641 (1994).
147. L. A. N. Amaral, A. L. Barabási, H. A. Makse, H. E. Stanley, *Phys. Rev. E*, **52** pp. 4087 (1995).
148. H. Leschhorn, *Physica A*, **195**, pp. 324 (1993).
149. T. Vicsek, M. Cserzo, V. K. Horvath, *Physica A* **167**, 315 (1990).
150. F. Family, K. C. B. Chan, J. G. Amar, *Surface Desordering: Growth, Roughening and Phase Transitions*, eds. R. Julien, J. Kertesz, P. Meakin, D. E. Wolf, Nova Science, Commack, N. Y (1992), pp. 205.
151. T. H. Kwon, A. E. Hopkins, S. E. O'Donnell, *Phys. Rev. E* **54**, 685 (1996).
152. V. K: Horvath, H. E. Stanley, *Phys. Rev. E* **52**, 5166 (1995).
153. V. K. Horvath, F. Family, T. Vicsek, *J. Phys. A* **24**, L25 (1991).
154. S. He, G. L. M. K. S. Kahanda, P. Z. Wong, *Phys. Rev. Lett.* **69**, pp. 3731 (1992).
155. J. Zhang, Y. C. Zhang, P. Alstrom, M. T. Levinsen, *Physica A* **189**, 383 (1992).
156. M. Eden, "A Two Dimensional Growth Process" en *Proccedinds of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, ed. J. Neyman, University of California Press, Berkeley (1961), pp. 223.
157. R. Jullien, R. Botet, *J. Phys. A* **18**, pp. 2279, (1985).
158. A. S. Balankin, A. Bravo, D. Morales, *Phil. Mag. Lett.*, **80**, No. 7, pp. 503 (2000).
159. L. A. N. Amaral, H. A. Makse, H. E. Stanley, *Phys. Rev. Lett.*, **80** pp. 5706 (1998).

## Referencias

160. A. S. Balankin, D. Morales, *Unconventional Anomalous Roughening in Slow Combustion of Paper*, *Phil. Mag. Lett.* (2000). (aceptado para su publicación).
161. J. M. López, M. A. Rodríguez, R. Cuerno, *Phys. Rev. E* **56**, pp. 3993 (1997).
162. W. Seffens, *Science* **285**, pp. 1228 (1999).

## V. RESULTADOS Y DISCUSION

### V.1 Confiabilidad del Paquete Benoit

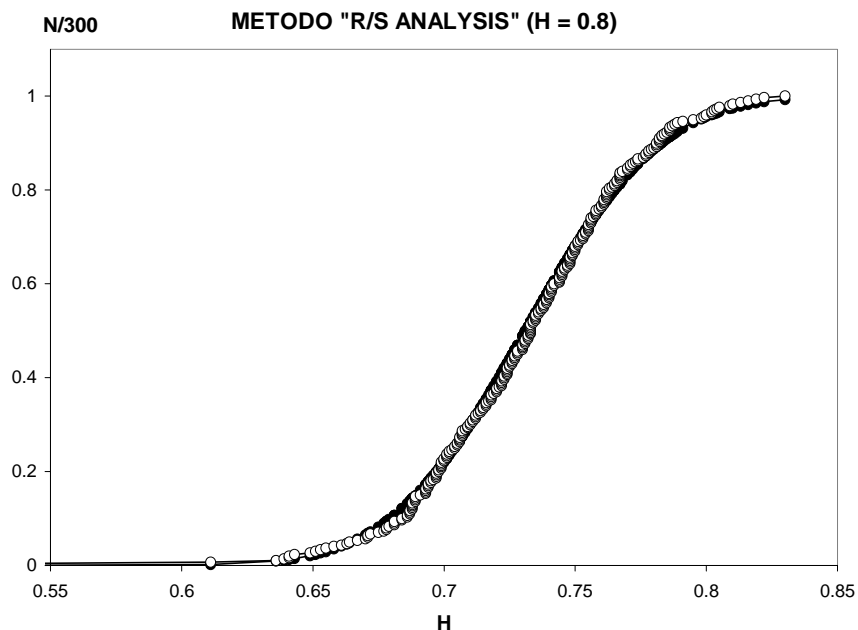
Antes de presentar los resultados de la experimentación, es menester comprobar la confiabilidad del paquete Benoit para evaluar el exponente de Hurst en trazas auto-afines. Aleatoriamente se generaron 300 trazas auto-afines con un exponente de Hurst de 0.8. En la Tabla V-1 se muestran los resultados obtenidos de las evaluaciones de los exponentes de Hurst de las 300 trazas auto-afines.

**Tabla V-1.** Resultados de la determinación del exponente de Hurst para 300 trazas auto-afines usando el paquete Benoit.

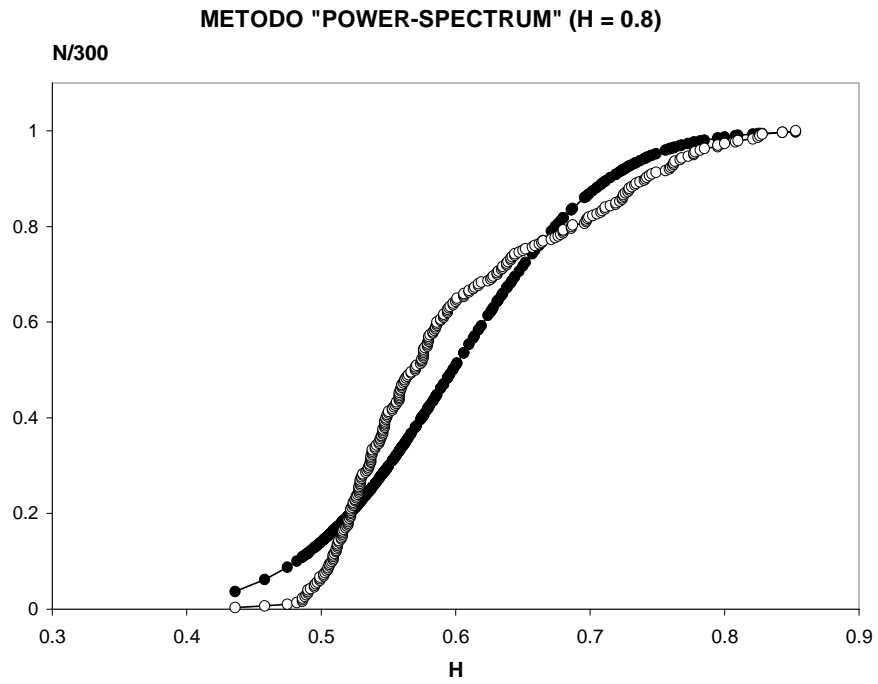
Método	Método 1 <sup>a</sup>	Método 2 <sup>b</sup>	Método 3 <sup>c</sup>	Método 4 <sup>d</sup>	Método 5 <sup>e</sup>
Promedio	0.7311	0.5977	0.7268	0.7182	0.8176
Desv. Est.	0.0403	0.0906	0.0394	0.0583	0.0448
Min.	0.525	0.436	0.576	0.54	0.667
Máx.	0.83	0.853	0.83	0.845	0.949

(a) método “*R/S analysis*”, (b) método “*power-spectrum*”, (c) método “*roughness-length*”, (d) método “*variogram*”, (e) método “*wavelets*”.

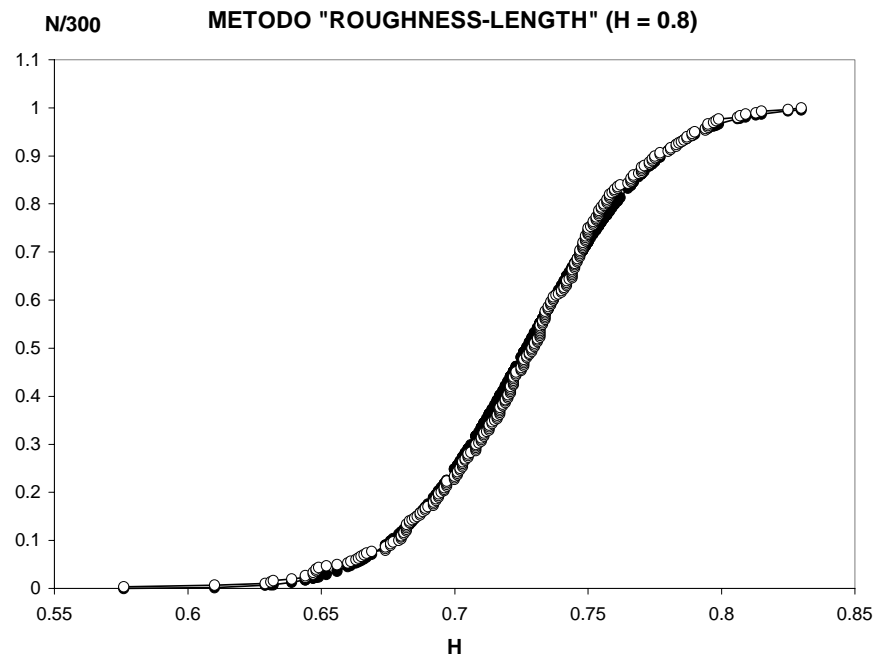
El método que arroja valores más alejados de  $H = 0.8$  es el método 2. Los métodos 1, 3 y 4 arrojan valores muy similares, mientras que el método 5 arroja el valor más cercano a 0.8. En las figuras V-1 a V-5 se observa el comportamiento de los valores de  $H$  obtenidos por cada método en comparación a una curva de distribución normal.



**Figura V-1.** Distribución normal de los valores de H en el método “R/S analysis”.



**Figura V-2.** Distribución normal de los valores de H en el método "power-spectrum".



**Figura V-3.** Distribución normal de los valores de H en el método "roughness-length".



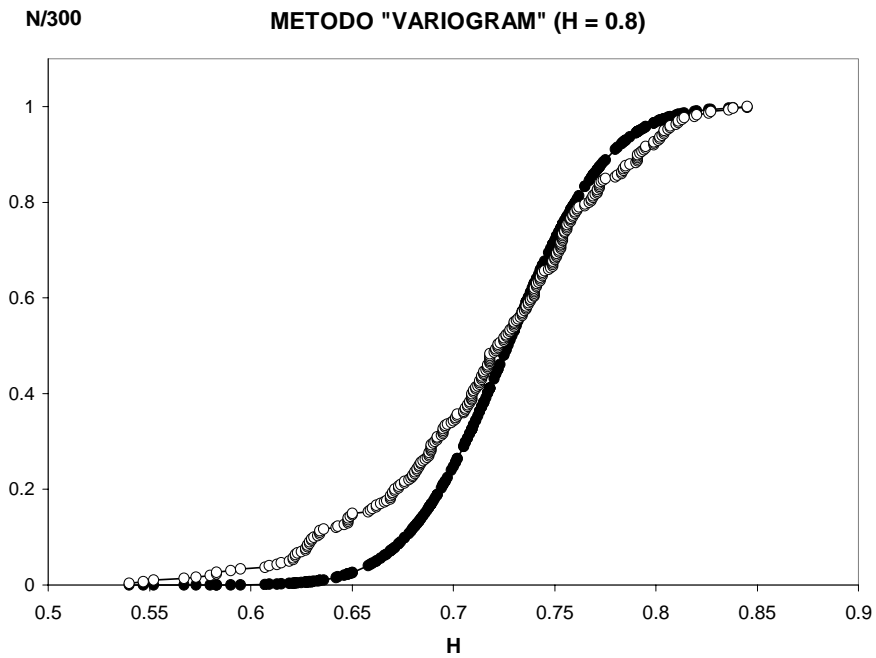


Figura V-4. Distribución normal de los valores de H en el método “variogram”.

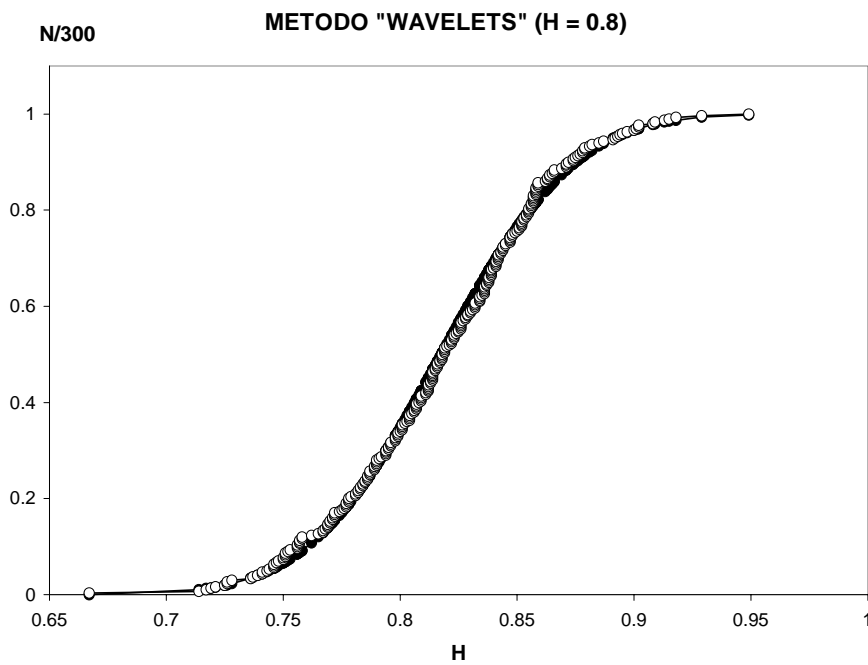
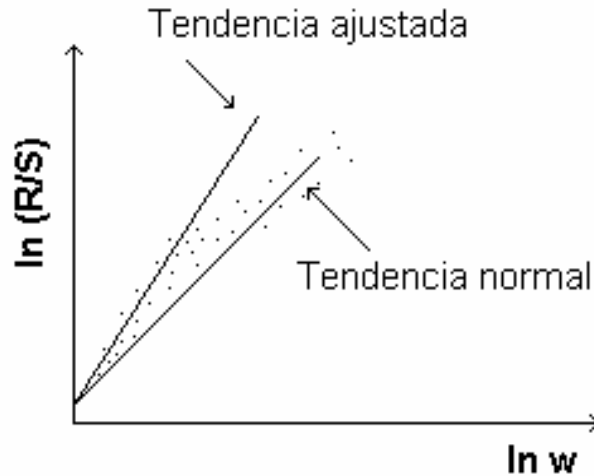


Figura V-5. Distribución normal de los valores de H en el método “variogram”.

Los métodos 1, 3 y 5 se ajustan perfectamente a las curvas de distribución normal, el método 4 solamente tiene un buen ajuste en la parte superior (aproximadamente arriba de 0.73). El método 2 no se ajusta bien. Sin embargo, es posible eliminar algunos puntos que se salen de la tendencia lineal, como se muestra en la figura V-6. Al eliminar estos puntos es posible obtener valores más cercanos a 0.8.



**Figura V-6.** Ajuste de la tendencia de la línea para los métodos 1 y 4.

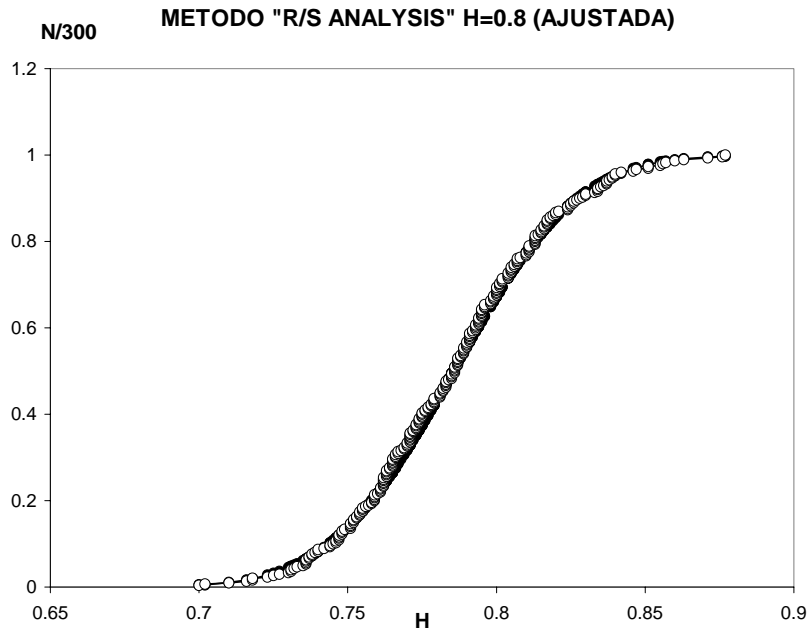
Solamente fue posible hacer este ajuste en los métodos 1 y 4, debido a que presentaban gráficos como se muestra en la figura V-6. Los demás métodos tenían otras formas de ajuste. En la Tabla V-2 se muestran los valores promedio de H ajustados para los métodos 1 y 4.

**Tabla V-2.** Valores de H ajustados para los métodos 1 y 4.

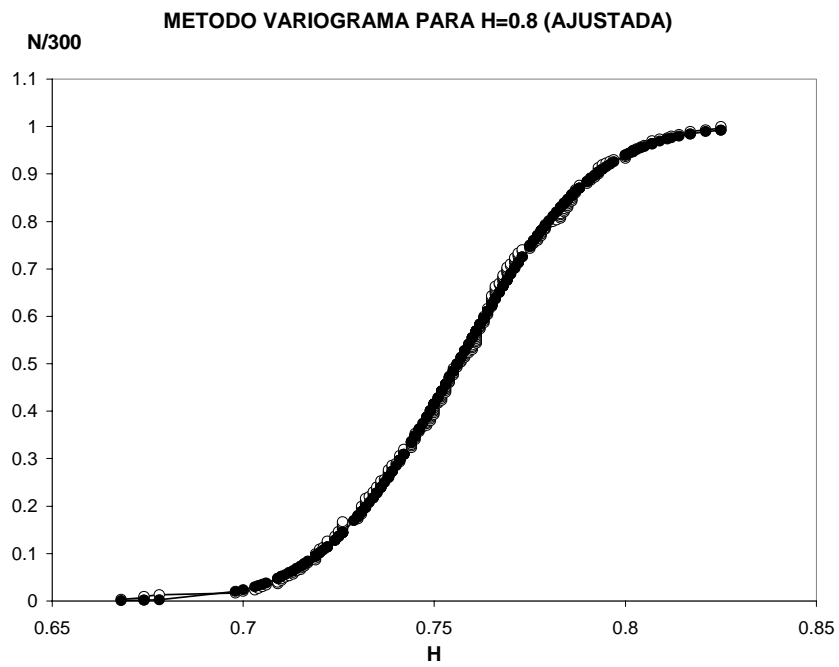
Método	Método 1	Método 4
Promedio	0.7854	0.756
Desv. Est.	0.0326	0.0282
Min.	0.700	0.668
Máx.	0.877	0.825

En las figuras V-7 y V-8 se muestran las curvas de distribución para los métodos 1 y 4. De acuerdo con la Tabla V-2, los valores de H se acercan en gran medida al valor de 0.8 al realizar el ajuste de tendencia. Por otro lado, se observa en las figuras V-7 y V-8 los valores de H se ajustan perfectamente a la curva de distribución normal, siendo el coeficiente de correlación de 0.99935 para el método 1 y de 0.99934 para el método 4. Finalmente, es importante señalar que no es el objetivo del presente trabajo hacer un análisis detallado del paquete Benoit y sus métodos para la determinación del exponente de Hurst en trazas auto-afines; pero si es importante verificar su confiabilidad para poder usarlo sin temor, ya que en el método tradicional para calcular H en trazas auto-afines se requiere de hacer muchos cálculos manuales, lo que requiere de mucho tiempo y esfuerzo.

Como en estos trabajos se realizan bastantes pruebas experimentales es importante buscar alternativas que ayuden a agilizar los cálculos, claro sin perder de vista la confiabilidad de los resultados.



**Figura V-7.** Distribución normal de los valores de H en el método “R/S analysis” (ajustados).



**Figura V-7.** Distribución normal de los valores de H en el método “variogram” (ajustados).

## V.2 Experimentos de Fractura, Quemado y Absorción.

La morfología de las interfases formadas por cada proceso, ver figuras V-9, V-10 y V-11, tienen algo en común: todas presentan superficies rugosas.



**Figura V-9.** Interfase formada en un experimento de fractura en una probeta de papel secante (dirección longitudinal),  $W = 24$  mm.



**Figura V-10.** Interfase formada en un experimento de quemado en una probeta de papel secante (dirección longitudinal),  $W = 24$  mm.



**Figura V-11.** Interfase formada en un experimento de quemado en una probeta de papel secante (dirección longitudinal),  $W = 24$  mm.

En la Tabla V-3 se muestran los resultados de los exponentes de escala para las diferentes interfases de fractura, quemado y absorción de fluidos en probetas de papel secante y papel filtro.

**Tabla V-3.** Exponentes de escala en interfaces formadas en experimentos de fractura, quemado y absorción.

Papel		Secante		Filtro	
Dirección (respecto a la fibras del papel)		Longitudinal	Transversal	Longitudinal	Transversal
Exponente de rugosidad local ( $H$ )	Fractura (min/max)	<b>0.640</b> ± 0.006 (0.519/0.818)	<b>0.639</b> ± 0.005 (0.52/0.747)	<b>0.755</b> ± 0.006 (0.634/0.850)	<b>0.740</b> ± 0.005 (0.613/0.825)
	Quemado (min/max)	<b>0.638</b> ± 0.010 (0.513/0.792)	----- -----	----- -----	----- -----
	Absorción (min/max)	<b>0.629</b> ± 0.003 (0.536/0.715)	<b>0.640</b> ± 0.005 (0.551/0.751)	<b>0.745</b> ± 0.004 (0.651/0.888)	<b>0.740</b> ± 0.005 (0.613/0.825)
Exponente de rugosidad global ( $\alpha$ )	Fractura	<b>0.644</b> ± 0.006	<b>0.662</b> ± 0.005	<b>0.738</b> ± 0.008	<b>0.754</b> ± 0.007
	Quemado	<b>0.825</b> ± 0.002	-----	-----	-----
	Absorción	<b>0.635</b> ± 0.004	<b>0.639</b> ± 0.005	<b>0.749</b> ± 0.007	<b>0.751</b> ± 0.009

En trabajos experimentales realizados recientemente[V.1-V-7] se ha reportado que los resultados experimentales no son consistentes con las predicciones de modelos teóricos. Por ejemplo, el modelo Eden[V.8] se propuso originalmente como un modelo de crecimiento de células en sistemas biológicos, y aún en experimentos de crecimiento de bacterias Viscek et al.[V.3] encontraron un exponente de rugosidad  $\alpha = 0.78$ , un valor muy alto a aquel esperado por el modelo Eden de  $\alpha = 0.5$ . Por otro lado, en experimentos de absorción de papel Barabási et al[V.1-V.2] encontraron un exponente de rugosidad de  $\alpha = 0.63$ , el cual es muy alto en comparación al valor de  $\alpha = 0.5$  predicho por varios modelos teóricos[V.8-V.10]. En experimentos de fractura de papel[V.5] el valor del exponente de rugosidad fue mucho más alto que el valor predicho por modelos teóricos [V.8-V.10]. En este trabajo también se reportan exponentes de rugosidad mayores a aquellos predichos por los modelos teóricos[V.1-V.7] (ver Tabla V-3). Esta discrepancia entre valores predichos por los modelos teóricos y los valores experimentales reportados es que los modelos teóricos no toman en cuenta el desorden inherente que impera en el medio; es decir, la estructura del sistema.

Por otro lado, no hay una diferencia apreciable en el valor promedio del exponente de rugosidad  $\alpha$  en las interfaces generadas mediante diferentes procesos. Estos resultados indican que la formación de la interfase no depende del mecanismo por el cual se genere. Además, el valor promedio del exponente de rugosidad tampoco depende de la orientación de la interfase con respecto a la dirección de las fibras del papel. Sin embargo, si hay una diferencia notable en los valores promedio de los exponentes de rugosidad  $\alpha$  cuando se trata de diferentes tipos de papel. Estos resultados rompen con el esquema clásico de la universalidad del exponente de rugosidad. Dentro del esquema clásico, el valor del exponente de rugosidad es de 0.8.

Las interfaces en la dirección longitudinal poseen invarianza estadística auto-afin caracterizadas por un único exponente de escala ( $H$ ); es decir,  $\alpha = H$ . Mientras que las interfaces en la dirección transversal exhiben “rugosidad anormal” caracterizada por dos exponentes de escala en la escala local ( $H$ ) y en la escala global ( $\alpha$ ). El exponente de rugosidad global depende del mecanismo de formación de la interfase y de la orientación de la interfase en un medio anisotrópico. Estas observaciones indican que el exponente de escala  $\alpha$  está gobernado por correlaciones espaciales de largo alcance en estructuras estocásticas, así como por las fluctuaciones temporales (térmicas) en el sistema, mientras que el exponente de rugosidad local depende del desorden inherente en la estructura del papel.

### V.3 Experimentos de Dinámica de Interfases.

En las figuras V-12 y V-13 se muestran las interfases de los experimentos de dinámica de interfases en probetas de papel secante y papel filtro para las direcciones longitudinal y transversal.



Figura V-12. Interfases formadas en papel secante. a) dirección longitudinal, b) dirección transversal.



Figura V-13. Interfases formadas en papel filtro. a) dirección longitudinal, b) dirección transversal.

Hasta el momento, se han reportado muy pocos estudios experimentales sobre el comportamiento de escalado dinámico en crecimiento de interfases fractales auto-afines[V.4, V.6, V.7]. Sin embargo, los estudios hasta ahora realizados sólo se enfocan a un mismo tipo de

papel. Kwon et al[V.12] han reportado exponente dinámicos de  $\beta = 0.24 \pm 0.02$  y  $\delta = 0.33 \pm 0.02$ . Los modelos teóricos (modelo DPD) reportan valores de  $\beta = 0.70 \pm 0.05$  y  $\delta = 0.70 \pm 0.05$ . Esto indica una discrepancia entre resultados teóricos y resultados experimentales. Por otro lado, Family et al[V.4] reportaron valores experimentales de exponentes dinámicos de  $\beta = 0.29 - 0.40$  y  $\delta = 0.72 - 0.74$ . Los exponentes de escala dinámicos reportados en este trabajo difieren de aquellos reportados en la literatura, como se muestra en la Tabla V-4. Estos resultados indican que el exponente de crecimiento  $\beta$  depende de la anisotropía de sistema y de la estructura inherente del sistema; mientras que el exponente de desplazamiento  $\delta$  no depende de la anisotropía del sistema pero sí de la estructura inherente del sistema.

En todos los casos se encontró que  $H \cong \alpha$  (ver Tabla V-4); es decir, las interfases saturadas son esencialmente auto-afines en naturaleza. Generalmente se cumple que  $0 \leq H \leq \alpha$ , donde la igualdad  $H = \alpha$  es una clara indicación de la invarianza estadística auto-afin de la interfase; mientras que una interfase que presenta “rugosidad anormal” satisface  $0 \leq H < \alpha$ .

**Tabla V-4.** Exponentes de escala dinámicos de interfases formadas en experimentos de absorción.  $\delta$

Papel		Secante		Filtro	
Dirección $\delta$ respecto a las fibras de papel)		Longitudinal	Transversal	Longitudinal	Transversal
Exponente de desplazamiento	Promedio $\{\delta\}$ (min/max)	<b>0.366</b> (0.232/0.524)	<b>0.270</b> (0.128/0.376)	<b>0.256</b> (0.195/0.31)	<b>0.241</b> (0.172/0.31)
	Desv Est. $\{\delta\}$	0.0734	0.0648	0.0322	0.0287
Exponente de crecimiento	Promedio $\{\beta\}$ (min/max)	<b>0.6131</b> (0.24/0.997)	<b>0.3502</b> (0.12/0.764)	<b>0.8642</b> (0.56/1.16)	<b>0.4739</b> (0.178/0.955)
	Desv. Est. $\{\beta\}$	0.1630	0.1576	0.1846	0.1714
Exponente de rugosidad local	H	<b>0.629 <math>\pm</math> 0.003</b>	<b>0.640 <math>\pm</math> 0.005</b>	<b>0.745 <math>\pm</math> 0.004</b>	<b>0.740 <math>\pm</math> 0.006</b>
Exponente de rugosidad global	$\alpha$	<b>0.635 <math>\pm</math> 0.004</b>	<b>0.639 <math>\pm</math> 0.005</b>	<b>0.749 <math>\pm</math> 0.007</b>	<b>0.751 <math>\pm</math> 0.009</b>

Los datos presentados en la figura V-14 indican que el exponente de rugosidad  $H$  (medido en las interfases formadas en cada papel) varía aleatoriamente de un experimento a otro, de acuerdo a una curva de distribución normal. Se encontró que el valor promedio del exponente de rugosidad local ( $H$ ) no depende del ancho de la probeta ni de la orientación en la cual se forma la interfase, ver Tabla V-4. Al mismo tiempo, se encontró que el valor promedio de  $H$  para los dos tipos de papel es completamente diferente, ver figura V-14.

Los exponentes dinámicos de escala medidos también se ajustan a una curva de distribución normal (ver figuras V-15 a-b). Se encontró que el valor promedio del exponente de escala de crecimiento  $\beta$  es diferente; es decir, el valor promedio del exponente de crecimiento es diferente en la dirección longitudinal y en la dirección transversal; mientras que el exponente de desplazamiento  $\delta$  no depende de la orientación en la cual crece la interfase.

**Figura V-14.** Exponentes de Hurst calculados en interfases de (1) papel filtro y (2) papel secante.

**Figura V-15.** (a) exponente de desplazamiento  $\delta$  para (1) papel filtro y (2) papel secante; (b) exponente de crecimiento  $\beta$  en papel filtro (1,2) y papel secante (3,4) en la dirección transversal (1,3) y en la dirección longitudinal (2,4). (La línea continua muestra datos ajustados por una curva de distribución normal).



## CONCLUSIONES

En presente trabajo se estudia la dinámica fractal de formación de interfaces en sistemas heterogéneos lejos de equilibrio, utilizando papel como material modelo.

Por primera vez, se analizan tres diferentes procesos de formación de interfaces (fractura, quemado e imbibición) utilizando los mismos tipos de papel para cada experimento. Además, se determinó la dimensión fractal de la estructura de cada uno de cuatro tipos de papel utilizados en experimentos de formación de interfaces.

Cada experimento (propagación de la grieta, propagación del fuego, y flujo de tinta en papel) se repitió al menos 300 veces para cada tipo de papel, utilizando probetas de 6 anchos diferentes (50 probetas de cada ancho para cada tipo de papel). Esto permitió por primera vez, determinar no solamente el exponente de rugosidad local ( $H$ ), sino que también el exponente de rugosidad global ( $\alpha$ ). Además, por primera vez se obtuvieron resultados suficientes para realizar estudios estadísticos de los parámetros que caracterizan la dinámica de formación de interfaces en sistemas heterogéneos en no-equilibrio.

Específicamente, por primera vez se demostró que los exponentes críticos que gobiernan la dinámica de formación de interfaces en sistemas heterogéneos en no-equilibrio, no son constantes universales, sino que dependen de estructura del medio (papel), así como de fluctuaciones temporales en el sistema, gobernados por el mecanismo del proceso (fractura, quemado e imbibición).

Entre los resultados más importantes deben destacarse los siguientes:

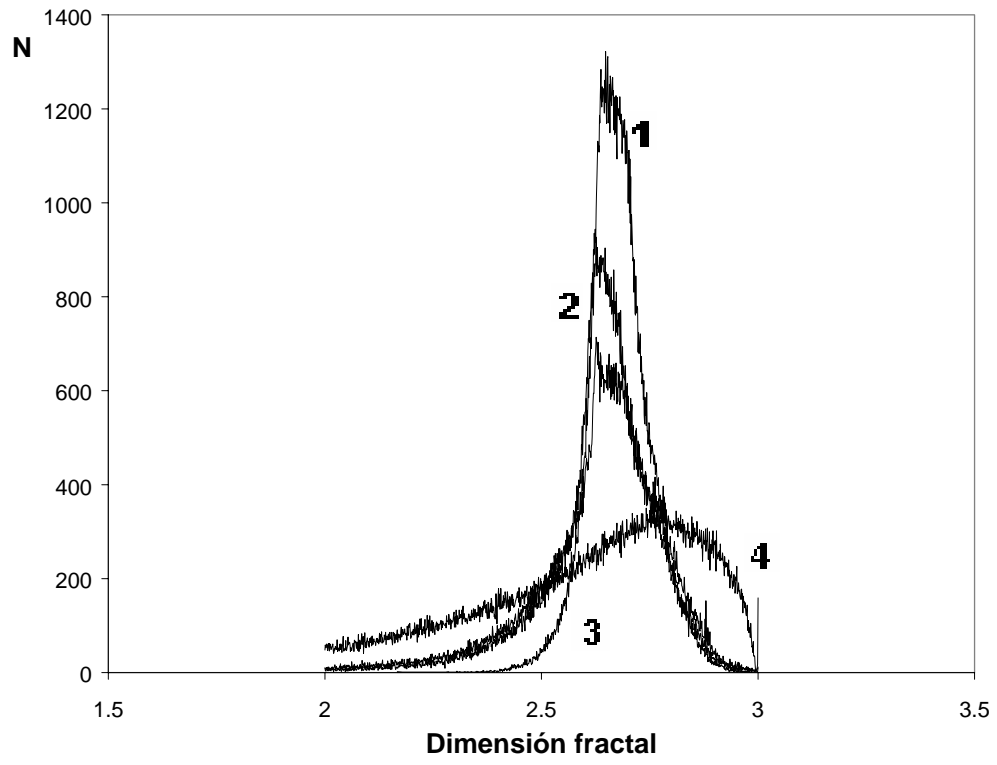
1. Por primera vez, se ha demostrado que la dinámica fractal de formación de interfaces en sistemas heterogéneos en no-equilibrio es mucho más rico que la dinámica de una interfase auto-afín. Específicamente, por primera vez, detectamos rugosidad intrínsecamente anómala de grietas orientadas en la dirección de fibras en papel.
2. Además, por primera vez observamos una dinámica anómala no-convencional del frente de fuego. Este último, es significativamente diferente a todos los mecanismos de formación de interfaces rugosas, discutidos anteriormente en la literatura. Este hallazgo puede ser esencial para una modelación adecuada de la propagación del fuego en sistemas heterogéneos, tal como un bosque.
3. Por primera vez, se observó que el crecimiento de la interfase no sigue un comportamiento de simple ley de potencias, sino que representa una dinámica auto-afín, con un exponente de Hurst que coincide con el exponente de crecimiento (en

caso de dinámica de interfase), o con el exponente de desplazamiento, en caso de propagación de la interfase a través de sistemas heterogéneos. Específicamente, observamos que el flujo del fluido a través del papel da lugar a oscilaciones temporales erráticas en el ancho de interfase. Estas oscilaciones poseen invarianza estadística auto-afín en el tiempo con exponente de escalamiento  $\chi$  hasta el tiempo de saturación  $T_S \propto W^z$ , donde  $z$  es el exponente dinámico. Al mismo tiempo, el comportamiento del ancho de la interfase satisface el escalamiento dinámico de tipo Family-Vicsek con exponente de crecimiento  $\beta$ .

4. Por primera vez, se demostró que el exponente de crecimiento ( $\beta$ ) de la interfase depende de la orientación en la cual se propague la interfase con respecto a la orientación preferible de las fibras de papel, cuando todos los demás exponentes ( $H$ ,  $\alpha$ , y  $\delta$ ) no dependen de la anisotropía del sistema heterogéneo. Este hallazgo sugiere un cambio radical en la concepción teórica de la dinámica de interfaces en sistemas heterogéneos en no-equilibrio.

5. Por primera vez, se observó claramente que los exponentes críticos obtenidos en mismos experimentos con probetas macroscópicamente similares (del mismo tipo de papel) son considerablemente diferentes, debido a considerables variaciones en dimensión fractal del papel. Esto último se refleja en las variaciones estadísticas de las propiedades físicas y mecánicas del papel. Para un conjunto de pruebas experimentales idénticas, los valores medidos del exponente de rugosidad conforman una distribución normal, así como también los demás exponentes críticos.

Los resultados obtenidos en el presente trabajo son de gran importancia para el entendimiento básico de física de procesos que conducen a formación de interfaces rugosas en sistemas heterogéneos en no-equilibrio. Además, estos resultados se pueden emplear para el desarrollo de modelos de procesos de importancia industrial, tal como extracción de petróleo de yacimientos naturalmente fracturados, entre otros.



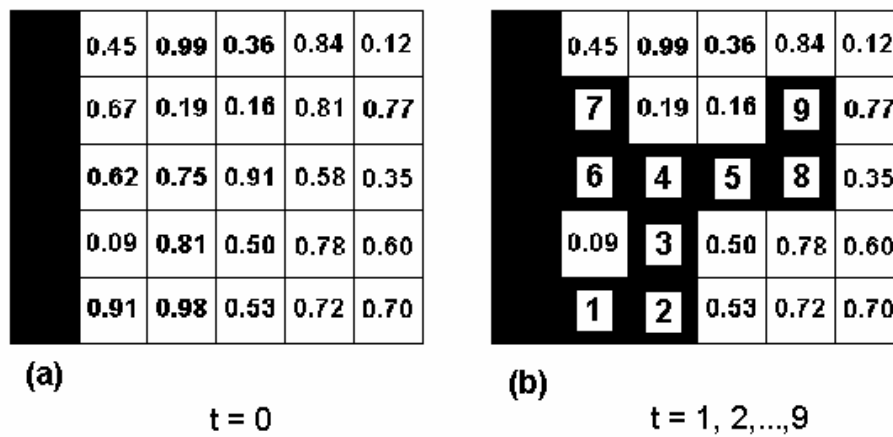


Figura I-7. Percolación por conquista en una red cuadrada de 5 x 5, (a) tiempo inicial y (b) después de 9 intervalos de tiempo.



(a)



(b)



(c)

**Figura V.6** Interfaces fractales formadas mediante los procesos de (a) fractura, (b) quemado y (c) absorción.



(a)



(b)

**Figura V.9** Interfaces de crecimiento y dinámica en pruebas de absorción en papel filtro para  $W = 100$  mm, (a) dirección paralela a la orientación de las fibras del papel, (b) dirección perpendicular a la orientación de las fibras del papel. Tomadas a un tiempo de 9 min.

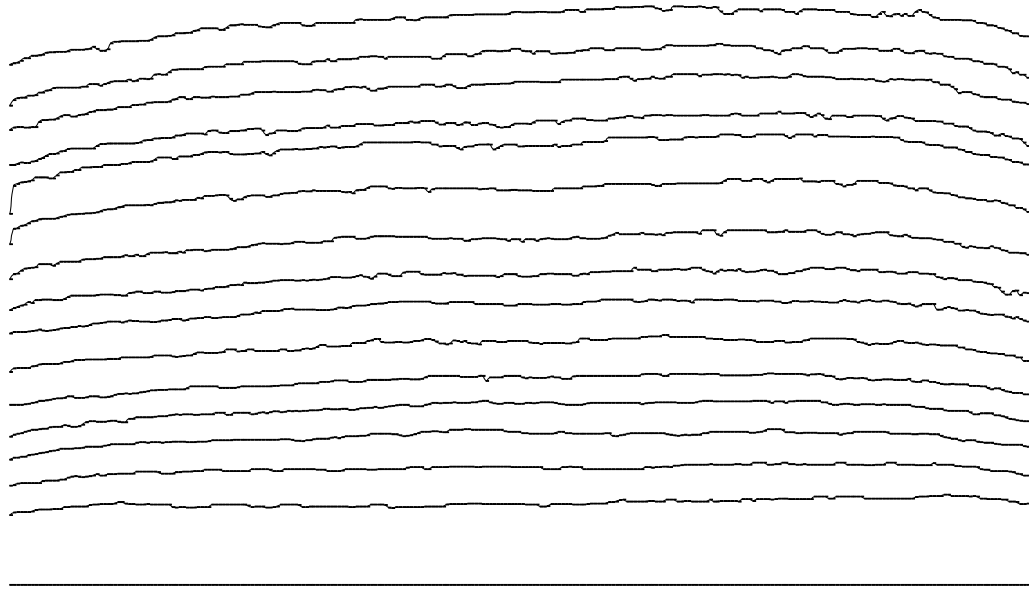


(a)

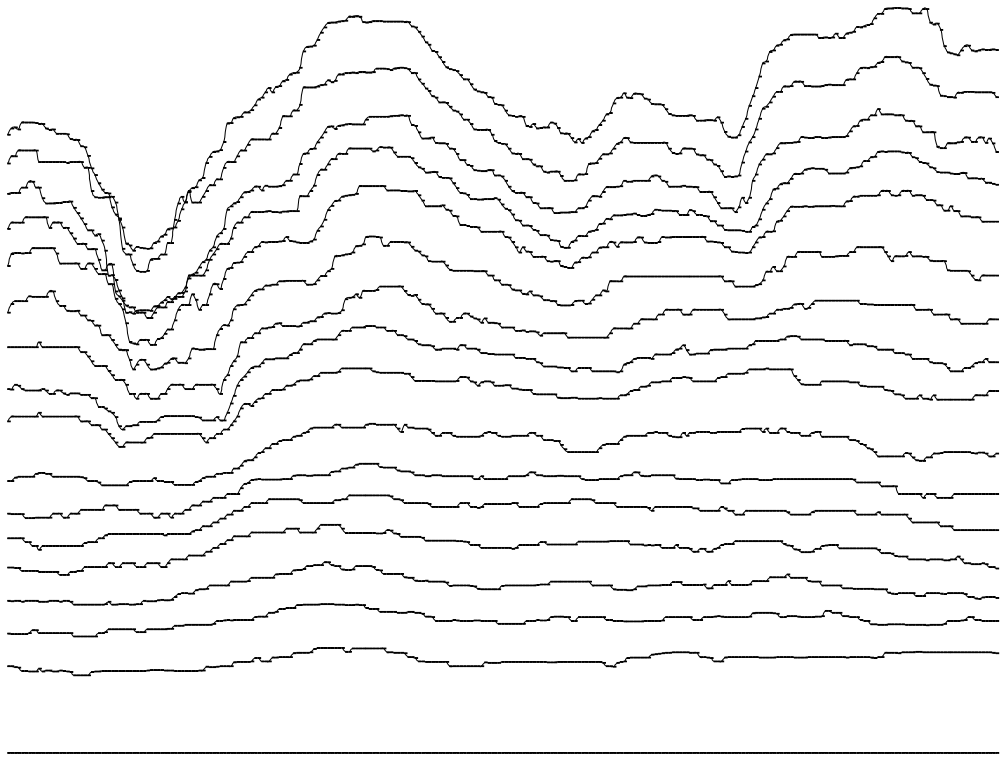


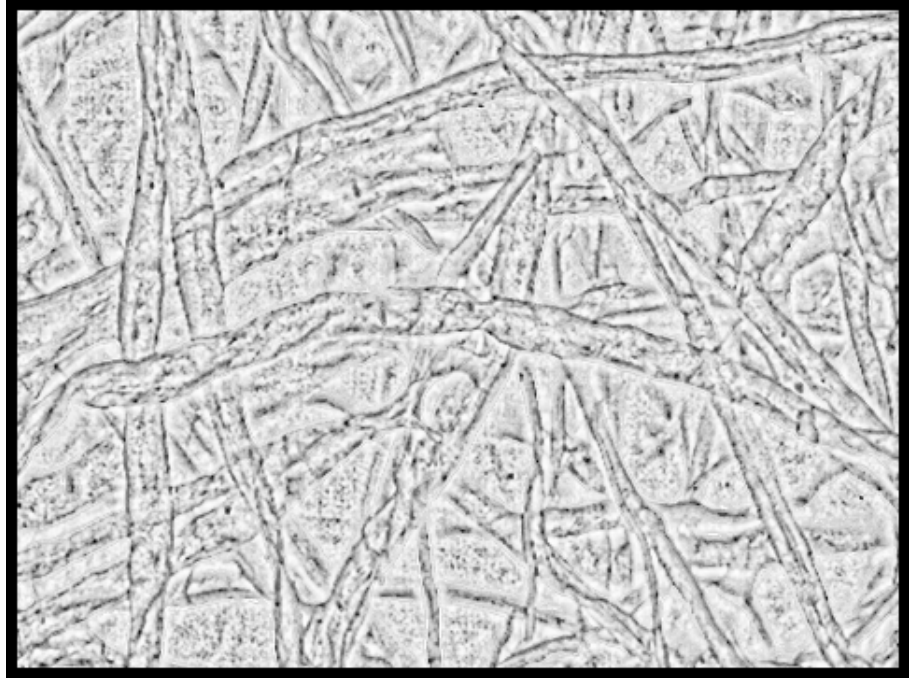
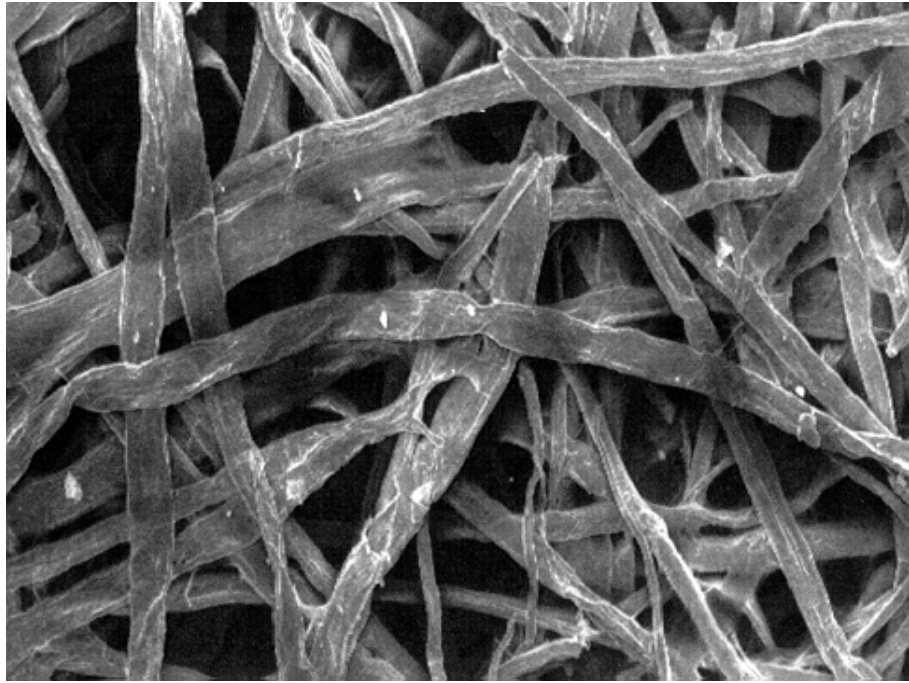
(b)

**Figura V.10** Foto – grabación de interfaces en papel filtro poro cerrado en la dirección paralela a la orientación de las fibras del papel, (a) interfase experimental, (b) interfase digitalizada.

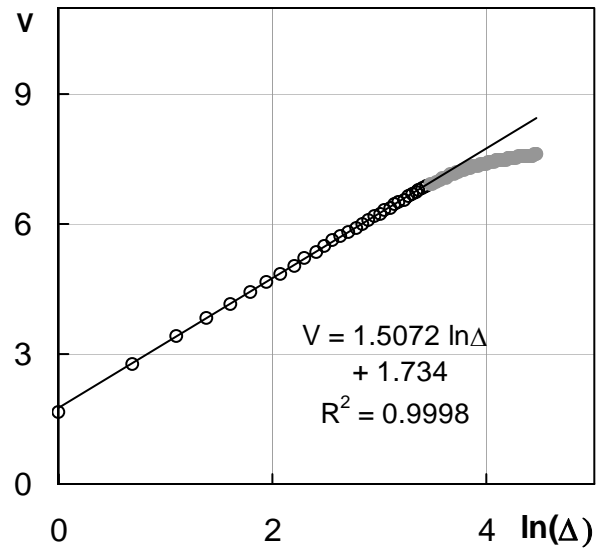




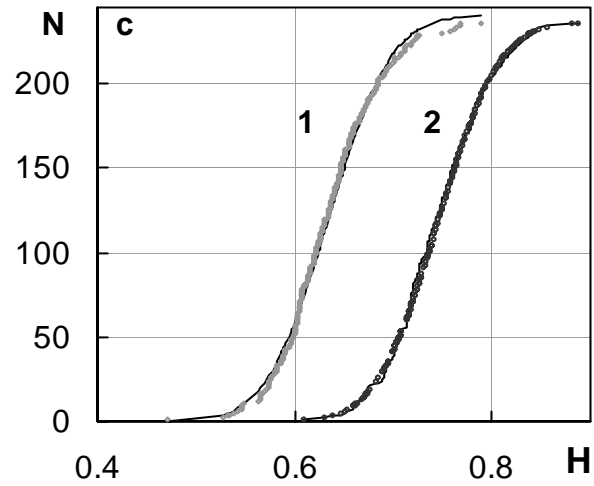




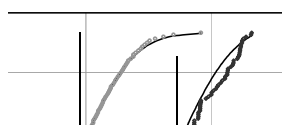
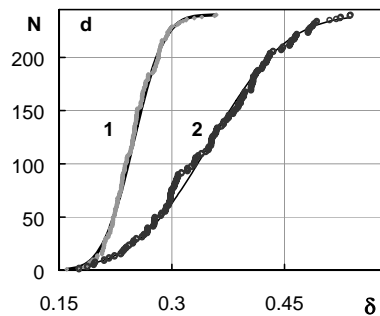
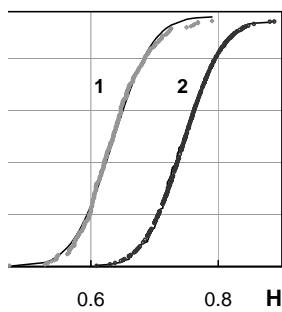
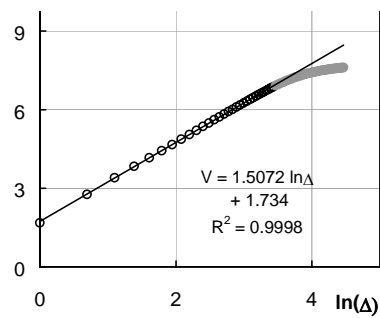


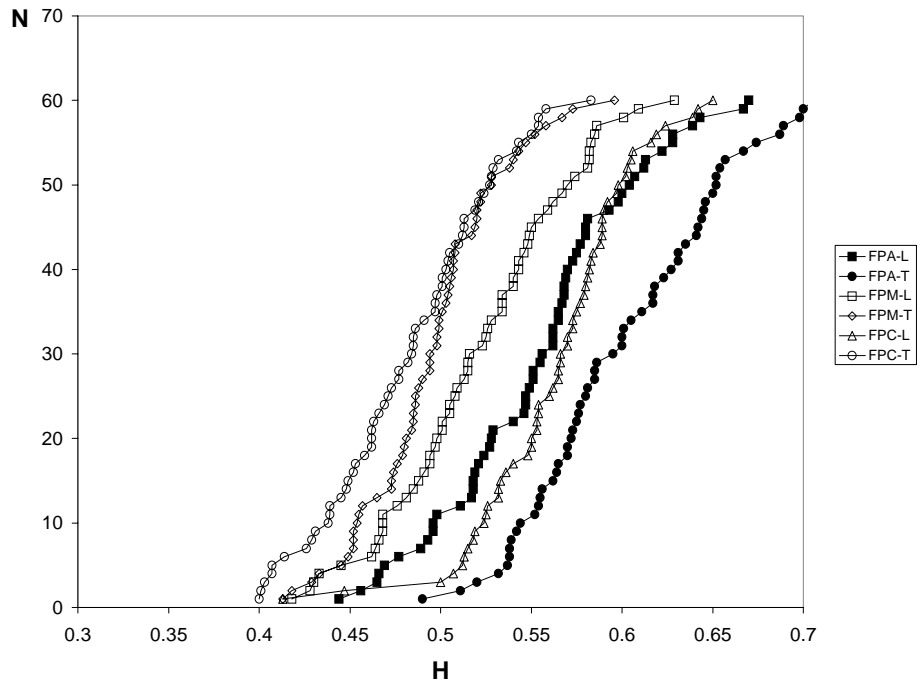


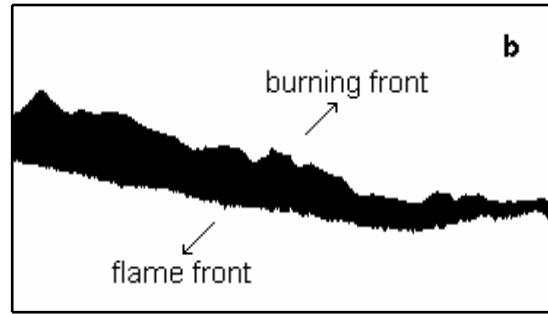
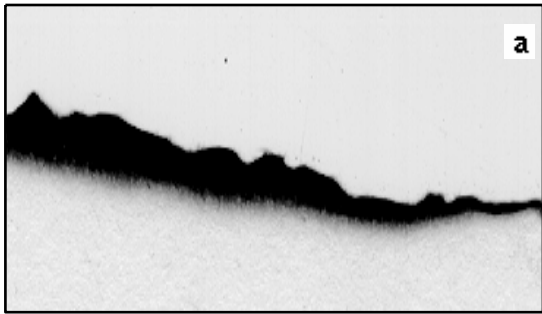
**Figura VI.1** Gráfico típico de las variaciones locales del ancho de la interfase con respecto al tamaño de la ventana para papel filtro.

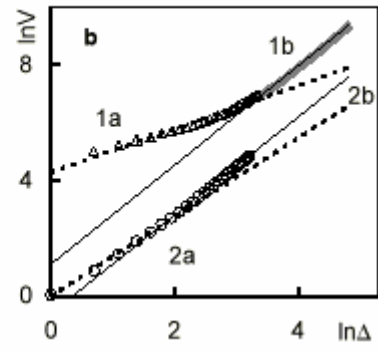
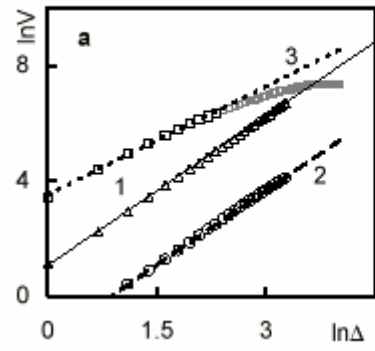


**Figura VI.2** Distribución normal de los valores del exponente de rugosidad local para interfaces formadas en experimentos de flujo de fluidos en (1) papel filtro y (2) papel secante.

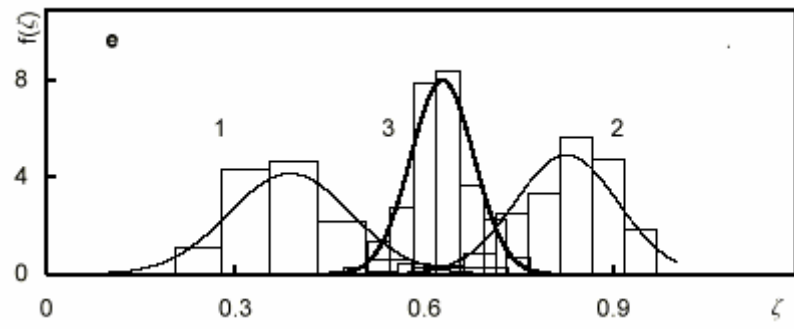


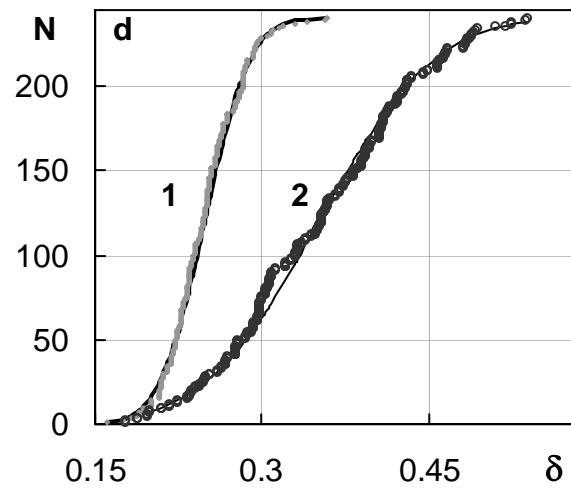


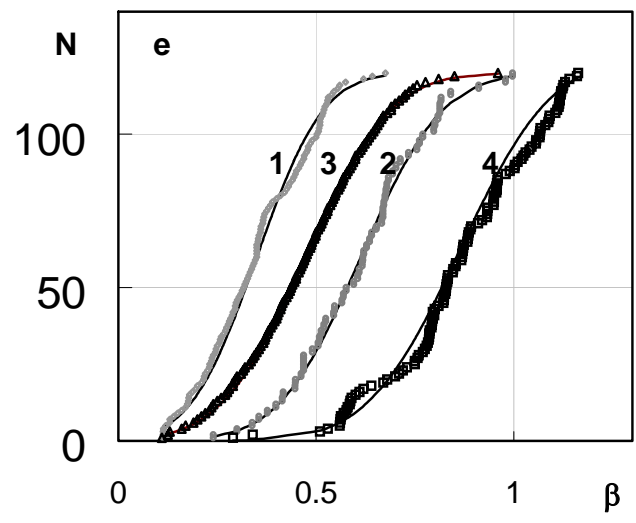












**Tabla VI-1.** Exponentes de rugosidad en interfaces formadas en experimentos de fractura, quemado y flujo de fluidos.

Papel		Secante		Filtro	
Dirección (respecto a la fibras del papel)		Longitudinal	Transversal	Longitudinal	Transversal
Exponente de rugosidad local (H)	Fractura (min/max)	<b>0.640</b> ± 0.006 (0.519/0.818)	<b>0.639</b> ± 0.005 (0.52/0.747)	<b>0.755</b> ± 0.006 (0.634/0.850)	<b>0.740</b> ± 0.005 (0.613/0.825)
	Quemado (min/max)	<b>0.638</b> ± 0.010 (0.513/0.792)	----- -----	----- -----	----- -----
	Absorción (min/max)	<b>0.629</b> ± 0.003 (0.536/0.715)	<b>0.640</b> ± 0.005 (0.551/0.751)	<b>0.745</b> ± 0.004 (0.651/0.888)	<b>0.740</b> ± 0.005 (0.613/0.825)
Exponente de rugosidad global (α)	Fractura	<b>0.644</b> ± 0.006	<b>0.662</b> ± 0.005	<b>0.738</b> ± 0.008	<b>0.754</b> ± 0.007
	Quemado	<b>0.825</b> ± 0.002	-----	-----	-----
	Absorción	<b>0.635</b> ± 0.004	<b>0.639</b> ± 0.005	<b>0.749</b> ± 0.007	<b>0.751</b> ± 0.009

**Tabla VI.2** Exponentes de rugosidad global para los diferentes tipos de papel filtro

<b>Papel Filtro</b>	<b>Dirección respecto a las fibras</b>	
	Longitudinal	Transversal
<b>Poros abiertos</b>	0.5541±0.051	0.6007±0.051
<b>Poros medios</b>	0.5204±0.048	0.4954±0.037
<b>Poros cerrados</b>	0.5633±0.043	0.4825±0.044

**Tabla VI.4.** Exponentes de escalamiento dinámicos obtenidos en pruebas de flujo de fluidos.

Papel	Filtro		Secante	
Dirección del flujo	Longitudinal	Transversal	Longitudinal	Transversal
$\delta$ (Comportamiento de escalamiento) (min/max)	$0.256 \pm 0.01$ (0.195/0.357)	$0.241 \pm 0.01$ (0.172/0.309)	$0.366 \pm 0.03$ (0.232/0.525)	$0.270 \pm 0.04$ (0.128/0.376)
Promedio{ $\beta$ } (min/max) Desviación estándar de $\beta$	0.8642 (0.562/1.161) 0.1846	0.4739 (0.178/0.955) 0.1714	0.6131 (0.240/0.997) 0.1630	0.3502 (0.116/0.764) 0.1576

# APENDICE A

## PAQUETE BENOIT 1.2

Es bien sabido que antes de usar un paquete para análisis en algún trabajo serio de investigación, se debe comprobar su confiabilidad, y además, conocer la manera como trabaja; es decir, la manera en que lleva a cabo las operaciones internamente. Esto evitaría problemas en el sentido de interpretar los resultados que se obtienen, además de poder encontrar con cierta facilidad donde se encuentra el posible error, si los resultados están fuera de la realidad. Así pues, antes usar el paquete Benoit (Fractal System Analysis) para analizar las interfaces formadas por los fenómenos de fractura, quemado y flujo de fluidos, se procedió a comprobar la confiabilidad del paquete. Para iniciar este trabajo, se generaron 300 trazas auto-afines con un exponente de Hurst de 0.8. Las trazas generadas, por el mismo paquete, se guardaron en formato XLS. Posteriormente, se calculaba nuevamente el exponente de rugosidad de las trazas auto-afines con los cinco métodos que presenta el paquete, a decir: método R/S análisis, método de espectro de potencia, método de rugosidad-longitud, método de variograma y método de ondoletas, los cuáles se describirán más adelante. En la Tabla A-1 se muestran los resultados obtenidos de las evaluaciones de los exponentes de Hurst de las 300 trazas auto-afines.

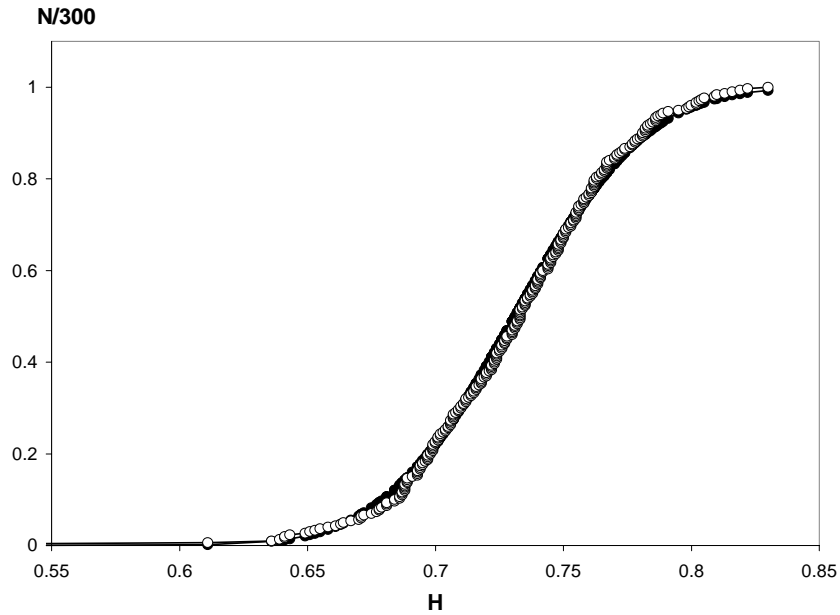
**Tabla A.1.** Resultados de la determinación del exponente de Hurst para 300 trazas auto-afines usando el paquete Benoit.

<b>Método</b>	Método 1 <sup>a</sup>	Método 2 <sup>b</sup>	Método 3 <sup>c</sup>	Método 4 <sup>d</sup>	Método 5 <sup>e</sup>
<b>Promedio</b>	0.7311	0.5977	0.7268	0.7182	0.8176
<b>Desv. Est.</b>	0.0403	0.0906	0.0394	0.0583	0.0448
<b>Min.</b>	0.525	0.436	0.576	0.54	0.667
<b>Máx.</b>	0.83	0.853	0.83	0.845	0.949

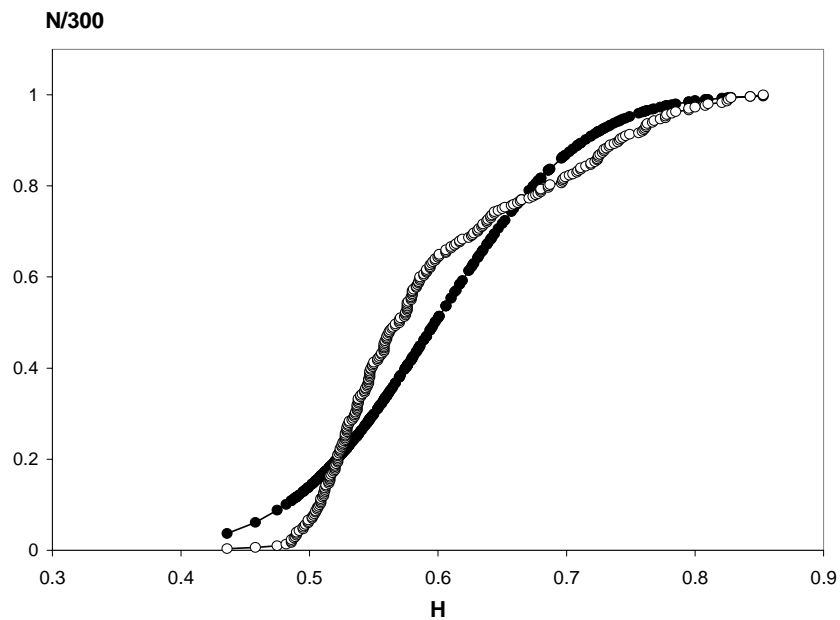
(a) método R/S análisis, (b) método espectro de potencia, (c) método rugosidad-longitud, (d) método de variograma y, (e) método de ondoletas.

Cómo se observa en la Tabla A-1, el método que arroja valores más alejados de  $H = 0.8$  es el método 2; mientras que los métodos 1, 3 y 4 arrojan valores muy similares; finalmente, el método 5 arroja el valor más cercano a 0.8. Sin embargo, creemos que esta discrepancia en los valores de los exponentes de Hurst se debe a que el paquete genera las trazas auto-afines aleatoriamente, lo que indica que el valor alimentado de  $H = 0.8$  no es absoluto y, por lo tanto, tiene un margen de error, como lo muestran las curvas de distribución que se presentan más adelante. Esto hace pensar, a primera vista, que el paquete no es adecuado para realizar los análisis de las interfaces experimentales obtenidas en el presente trabajo. Sin embargo, más allá de la duda que existe de que el paquete no es adecuado para fines de investigación seria, al menos hemos comprobado en una forma precisa, y tal

vez no exacta, que existe una diferencia entre los diferentes exponentes de rugosidad de las diferentes interfaces presentadas en este trabajo. En las figuras A-1 - 5 se presentan los valores de  $H$  obtenidos por cada método, los cuales siguen se ajustan a una curva de distribución normal.

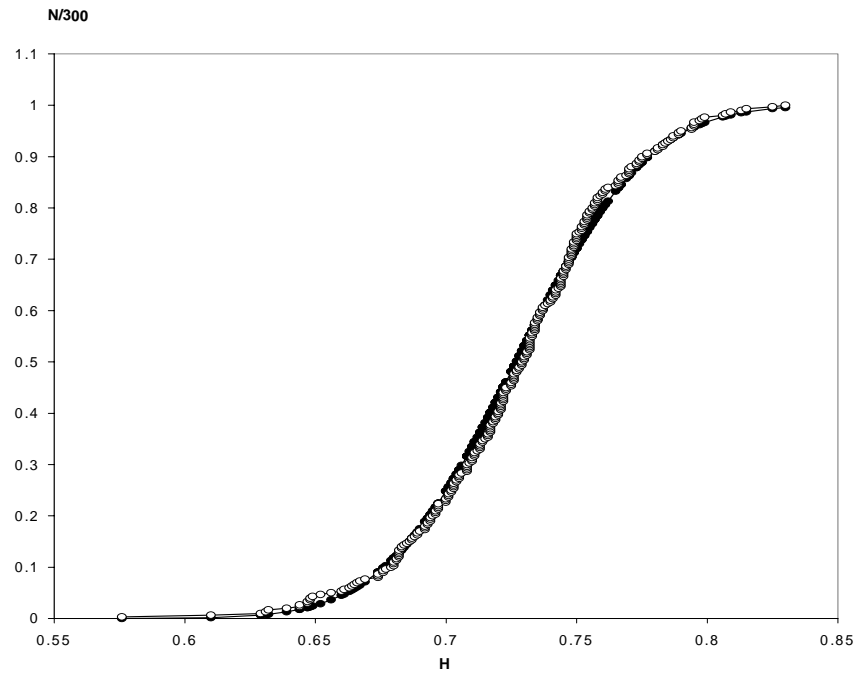


**Figura A.1.** Distribución normal de los valores de  $H$  en el método R/S análisis.

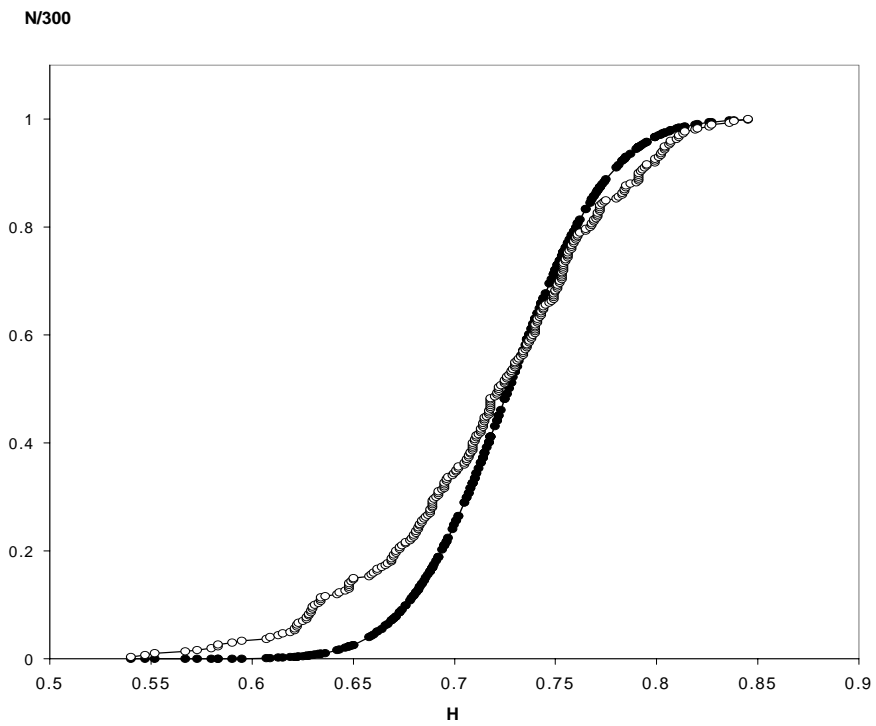


**Figura A.2.** Distribución normal de los valores de  $H$  en el método de espectro de potencia.

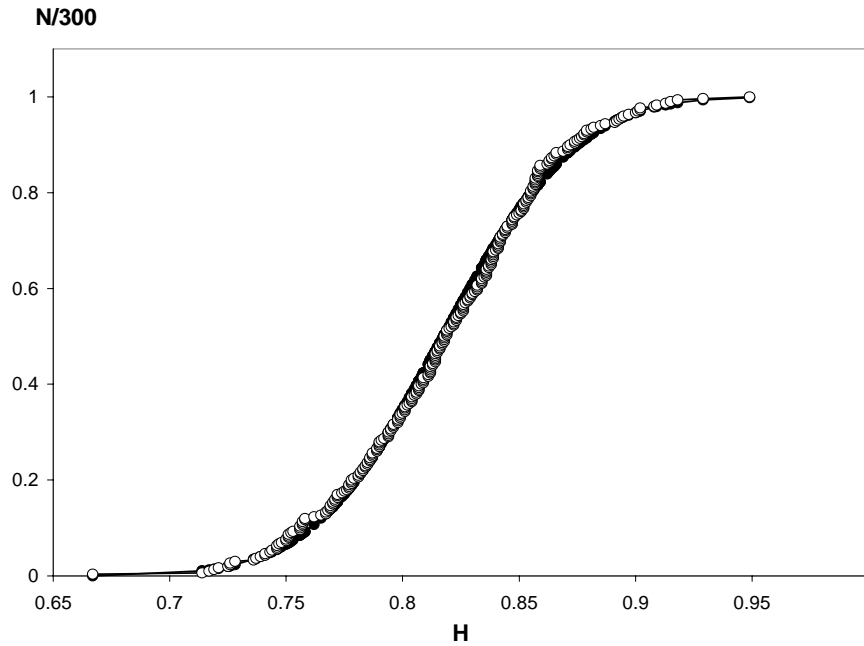




**Figura A.3.** Distribución normal de los valores de H en el método de rugosidad longitud.

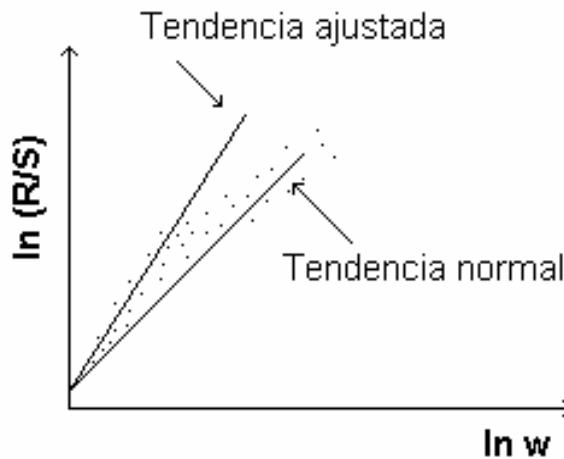


**Figura A.4.** Distribución normal de los valores de H en el método de variograma.



**Figura A.5.** Distribución normal de los valores de H en el método de ondoletas.

Como se puede observar, los métodos que mejor se ajustan a las curvas de distribución normal son los métodos 1, 3 y 5. El método 4 solamente tiene un buen ajuste en la parte superior (aproximadamente arriba de 0.73). El método 2 no se ajusta bien. Sin embargo, para obtener mejores resultados en relación a los valores del exponente de rugosidad de las trazas auto-afines, aplicamos la eliminación de los puntos de la derecha que se salen de una tendencia lineal, como se muestra en la figura V-6. Al eliminar estos puntos es posible obtener valores más cercanos a 0.8.



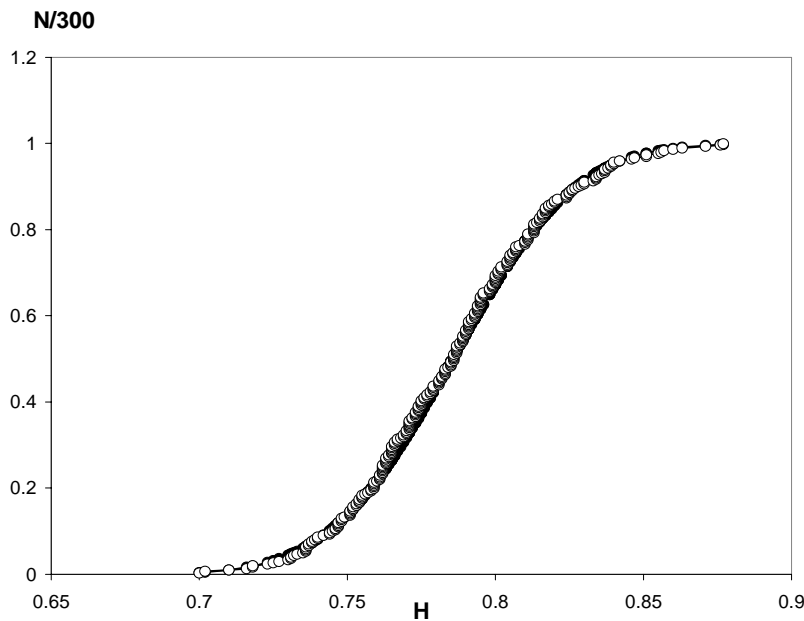
**Figura A-6.** Ajuste de la tendencia de la línea para los métodos 1 y 4.

De esta manera, fue posible obtener valores más cercanos al exponente de rugosidad  $H = 0.8$ . Cabe mencionar que este tipo de ajuste solo se aplicó a los métodos 1 y 4, los demás métodos tenían otras formas de ajuste un poco más complejas. En la Tabla A-2 se muestran los valores promedio de  $H$  ajustados para los métodos 1 y 4.

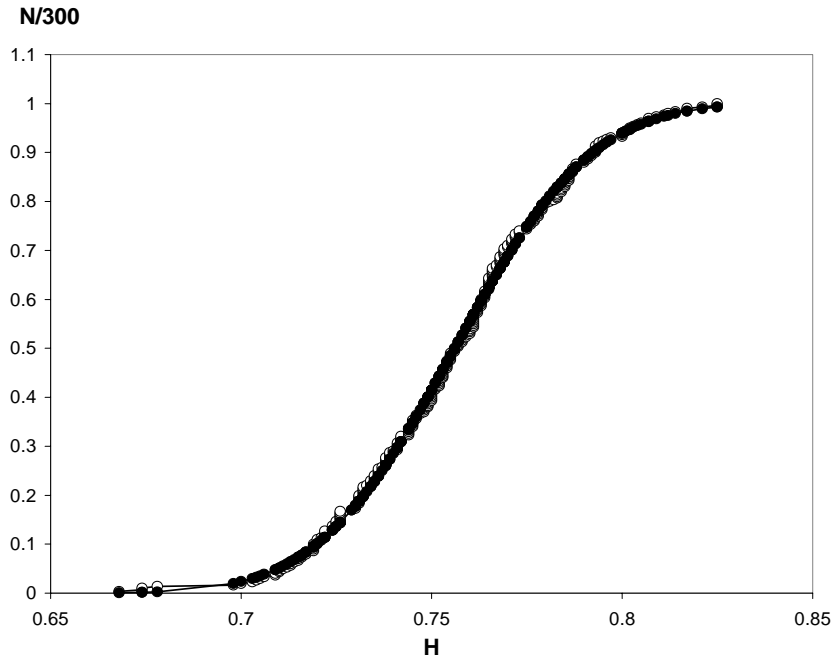
**Tabla A.2.** Valores de  $H$  ajustados para los métodos 1 y 4.

Método	Método 1	Método 4
<b>Promedio</b>	0.7854	0.756
<b>Desv. Est.</b>	0.0326	0.0282
<b>Min.</b>	0.700	0.668
<b>Máx.</b>	0.877	0.825

Como se observa de la Tabla A-2, los valores obtenidos se acercan bastante al valor teórico de  $H = 0.8$  al realizar el ajuste en la tendencia. En las figuras A-7 y A-8 se muestran las curvas de distribución para los métodos 1 y 4. Por otro lado, se observa en las figuras A-7 y A-8 los valores del exponente de rugosidad se ajustan perfectamente a la curva de distribución normal, siendo el coeficiente de correlación de 0.99935 para el método 1 y de 0.99934 para el método 4, respectivamente. Por último, y no menos importante, los métodos tradicionales para calcular el exponente de rugosidad requieren de mucho trabajo manual y una cantidad impresionante de cálculos. Esta fue otra de las razones que no llevaron a emplear el paquete Benoit. Como en este tipo de trabajos se realizan bastantes pruebas experimentales es importante buscar alternativas que ayuden a agilizar los cálculos, claro sin perder de vista la confiabilidad de los resultados.



**Figura A.7.** Distribución normal de los valores de  $H$  en el método R/S análisis (ajustados).



**Figura A.8.** Distribución normal de los valores de  $H$  en el método de variograma (ajustados).

Benoit (Fractal Analysis System) es un paquete que determina la dimensión fractal ( $d_f$ ) de fractales auto-similares y el exponente de rugosidad ( $H$ ) para trazas auto-afines. Para determinar el exponente de rugosidad de trazas auto-afines, Benoit emplea varios métodos. Sin embargo, solo se describirán el método R/S análisis y el método de variograma, debido a que son los métodos con los que se obtuvieron valores más confiables.

### 1. Método R/S Análisis

Considere un intervalo, o “ventana”, de longitud  $w$  en una traza. Dentro de este intervalo se pueden definir dos cantidades:

$R(w)$ : rango de valores de  $y$  en el intervalo considerado. El rango se mide con respecto a una tendencia en la ventana, donde la tendencia se estima simplemente mediante una línea recta que conecta el punto inicial con el punto final de la traza dentro de la ventana. Así se obtiene la tendencia promedio en la ventana.

$S(w)$ : la desviación estándar de las primeras diferencias  $dy$  de los valores de  $y$  dentro de la ventana. Las primeras diferencias de las  $y$ 's se definen como las diferencias entre los valores de  $y$  en alguna posición de  $x$  y  $y$  en alguna posición previa sobre el eje  $x$ :

$$dy(x) = y(x) - y(x - dx) \quad (A - 1)$$

donde  $dx$  es el intervalo entre dos valores consecutivos de  $x$ .

Para una medición confiable de  $S(w)$  se requieren datos con un intervalo constante porque la diferencia esperada entre los valores sucesivos de  $y$  es función de la distancia que los separa.  $S(w)$  se emplea en el método  $R/S$  para normalizar el rango  $R(w)$  para permitir comparaciones de diferentes conjuntos de datos; si no se emplea  $S(w)$ , el rango  $R(w)$  se puede calcular sobre conjuntos de datos que tienen un intervalo no constante.

$R/S(w)$ : se define como:

$$R/S(w) = \left\langle \frac{R(w)}{S(w)} \right\rangle \quad (A - 2)$$

donde  $w$  es la longitud de la ventana y los corchetes en ángulo denotan promedio. La base del método es que, debido a la auto-afinidad, se espera que el rango tomado por los valores de  $y$  en una ventana de longitud  $w$  sea proporcional a la longitud de la ventana por una potencia igual al exponente de Hurst,  $H$ ; es decir:

$$R/S(w) = w^H \quad (A - 3)$$

En la práctica, para una ventana de longitud cualquiera  $w$ , se subdivide en intervalos de longitud  $w$ , se miden  $R(w)$  y  $S(w)$  para cada intervalo, y se calcula  $R/S(w)$  como un cociente promedio  $R(w)/S(w)$ , como se indica en (A-2). Este proceso se repite para varias longitudes de ventana y se grafica  $\log R/S(w)$  contra  $\log w$ . La pendiente de este gráfico es el exponente de Hurst.

#### 4. Método de Variograma

Se define variograma (también conocido como varianza de incrementos) como el valor esperado de la diferencia de cuadrados entre dos valores de  $y$  en una traza separada por una distancia  $w$ . En otras palabras, el variograma  $V(w)$  de una serie  $y(x)$  se calcula como sigue:

$$V(w) = \left\langle [y(x) - y(x + w)]^2 \right\rangle \quad (A - 4)$$

es decir,  $V(w)$  es el promedio de la diferencia de cuadrados entre dos puntos separados por una distancia  $w$ .

Para obtener la relación entre el variograma  $V(w)$  y el exponente de Hurst  $H$ , considere lo que pasa en una traza de movimiento browniano. Si se toma un intervalo de longitud igual a  $w$ , el valor de la diferencia entre  $y(w)$  y  $y(0)$  se distribuirá

normalmente con una varianza  $s(w)^2$  (donde  $s$  es la desviación estándar) que es proporcional a  $w^{2H}$ . Ahora, si se toma la diferencia de cuadrados, el valor esperado va a ser igual a  $s(w)^2$ , de tal manera que se puede escribir:

$$V(w) \sim w^{2H} \quad (A-5)$$

En la práctica, para estimar  $H$  se calcula  $V(w)$  como el promedio de la diferencia de cuadrados entre todos los pares de puntos separados por una distancia  $w$ , ecuación (A-4), para varias ventanas de diferentes longitudes, y se grafica el  $\log V(w)$  contra el  $\log w$ . Si la traza es auto-afin el gráfico debería ser una línea recta cuya pendiente es  $2H$ . La dimensión fractal de la trazase se puede calcular a partir de la relación de exponente de Hurst ( $H$ ) y la dimensión fractal  $D_v$ :

$$D_v = 2 - H \quad (A-6)$$

donde  $D_v$  es la dimensión fractal estimada a partir del variograma.

Seffens[162] ha hecho un análisis constructivo sobre las ventajas y desventajas que presenta el paquete Benoit; y las disciplinas en las cuales se emplea.

## APENDICE B

### PAQUETE “LOCAL FRACTAL DIMENSION”

En esta sección se describen los fundamentos teóricos que en los que se basa el paquete empleado para determinar la dimensión fractal de las estructuras de los medios porosos empleados en este trabajo.

Considere un cubo de tamaño  $s \times s \times s$  centrado en un pixel cualquiera, el volumen correspondiente a la superficie se define por un conjunto de voxeles. Un voxel es un cubo elemental cuyas aristas son iguales a la arista de un pixel. Así pues, cada punto  $(i,j)$  del cubo contiene un número  $vs(i,j)$  de voxeles comprendidos entre 0 y  $s$ . El número total de voxeles que describe el volumen es igual a:

$$Vs = \sum_{i=1,s} \sum_{j=1,s} vs(i,j)$$

$vs(i,j)$  se calcula de la siguiente manera:

$$vs(i,j) = \begin{cases} T(i,j) & \text{si } 1 < T(i,j) < s \\ s & \text{si } T(i,j) \geq s \\ 0 & \text{si } T(i,j) \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{donde } T(i,j) = \left( \frac{I(i,j) - I_c}{ps} \times h \right) + \frac{s}{2} \quad (2)$$

donde  $I(i,j)$  es un tono de gris en la imagen original,  $I_c$  es el valor del pixel central,  $ps$  es el tamaño del pixel,  $h$  es un coeficiente usado para definir la altitud del intervalo, como se describirá más adelante, y  $s$  es el tamaño del cubo.

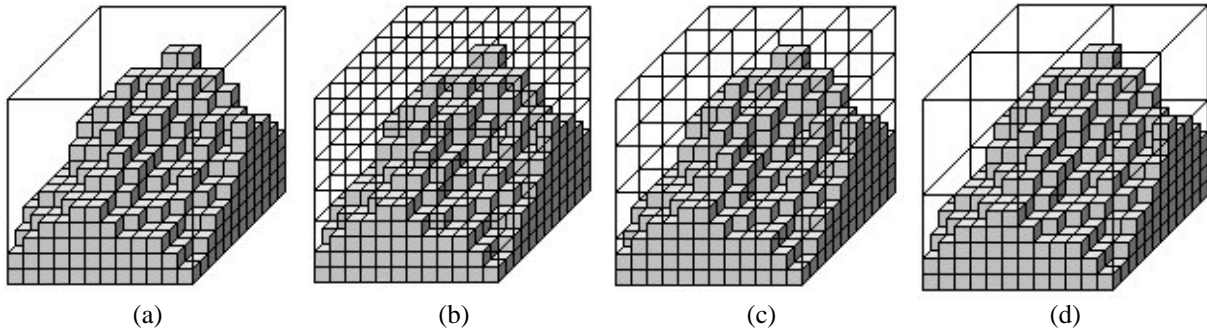
El cubo se divide en cajas de tamaño  $q$  que varía entre 1 y  $s/2$ , como se muestra en la figura B.1. Cada una de estas cajas se considera ocupada cuando la caja contiene al menos un voxel. Entonces, el máximo de  $vs(i,j)/q$  involucrado en cada celda se define por el tamaño  $q$  de la malla.

El cálculo se hace de la manera siguiente:

$$Ns = \sum_{i,j=1,s/q} \text{Max}\{Vs(i \times q - m, j \times q - m)\} \quad 0 \leq m < q$$

donde Max es una función que calculo de entero máximo.

La dimensión fractal corresponde a la inversa de la pendiente  $S = \ln(q) / \ln(Ns)$ , donde  $s$  es el tamaño de la caja y  $Ns$  es el número total de cajas ocupadas. Cuando se calcula la pendiente, se calcula su coeficiente de correlación  $R^2$ .



**Figura B.1** Ejemplo del cálculo en un cubo de prueba de lado 12. (a)  $q = 12$ , (b)  $q = 2$ , (c)  $q = 3$ , (d)  $q = 6$ .

La estimación de la dimensión fractal depende de varios factores que se discuten más adelante.

Conforme el punto central estudiado es por definición localizado en medio del cubo de prueba, un punto aislado rodeado por valores bajos genera una línea vertical y una línea genera un plano vertical. La pendiente se expresa mediante las siguientes relaciones:  $y = -x$ ,  $y = -2x$ , con  $R^2 = 1$ . De la misma manera, una superficie horizontal genera un volumen que ocupa la mitad del cubo de prueba y la dimensión fractal es igual a 3 y  $R^2 = 1$ , como se muestra en la figura B.2. De hecho, el tratamiento mide el volumen descrito por esta superficie y no registra un fractal igual a 2. Cuando el volumen presenta irregularidades, disminuye su dimensión fractal.

### Variación del Coeficiente $h$

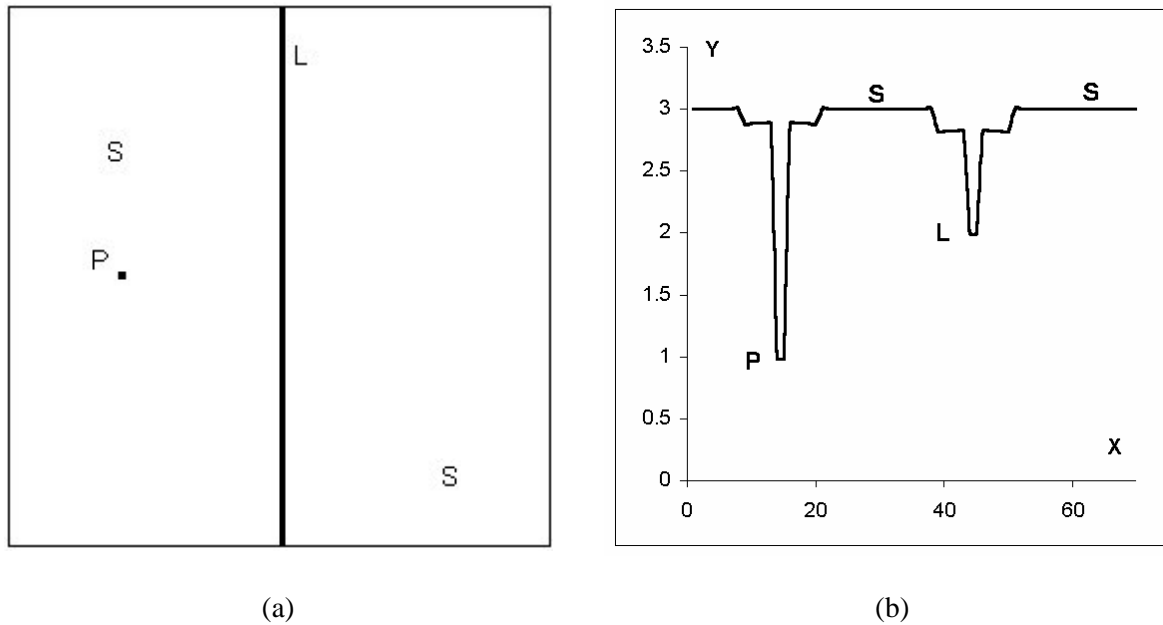
Puesto que la escala de grises y un sistema de coordenadas  $x - y$  no tienen la misma unidad de medición, el tamaño de un pixel se considera de 1. El volumen dentro del cubo depende del coeficiente  $h$  y de la variación del nivel de grises  $I(i,j) - I_c$ . Altos valores de  $h$  acentúan esta variación, y la rugosidad de la superficie, puesto que el peso del primer término de la ecuación (B-2) se vuelve más importante que el segundo ( $s/2$ ). Por el contrario, bajos valores de  $h$  generan superficies suaves, debido a que el segundo término en la fórmula es el que domina. Así pues, es posible ajustar el valor de  $h$  a la naturaleza de la superficie y al nivel de información deseada.

### Ventana Deslizante y Rango de Tamaños de Malla

Es posible usar diferentes tamaños de ventanas deslizadas; por ejemplo 12, 24. Un tamaño par y con divisores exactos (hasta  $q/2$ ) dan una pendiente  $S$  regular.



Las ventanas deslizantes con un tamaño no registran una pequeña desviación de la pendiente  $S$  calculada para geometrías regulares (una línea, una superficie plana y un volumen), aún si las proporciones se respetan. Sin embargo, se obtienen resultados similares cuando los resultados se normalizan. La razón de este comportamiento es que los divisores exactos usados para definir el rango de tamaños de malla  $q$ , nunca corresponden a un valor medio de la arista de una ventana no y solamente una porción de la pendiente se toma en cuenta durante los cálculos de la dimensión fractal.



**Figura B.2** Dimensión fractal para un punto (P), una línea (L) y una superficie horizontal (S). (a) Representación esquemática de una imagen de un punto y una línea rodeada por valores bajos, (b) dimensión fractal a lo largo de una sección vertical que pasa a través del punto y la línea reportada en la figura (a).

Cuando se aplica un patrón cúbico de  $12 \times 12 \times 12$ , se obtienen cinco divisores exactos (1, 2, 3, 4 y 6) con tamaños de  $q$  alcanzando un valor máximo de  $q/2$ , excluyendo cualquier efecto de frontera. En el segundo patrón cúbico ( $24 \times 24 \times 24$ ) se obtienen siete divisores exactos (1, 2, 3, 4, 6, 8 y 12). Los experimentos de calibración sobre un punto P y una línea L, tienen éxito con los tamaños de cubos mencionados, muestran que usando los divisores 1, 2, 3, y 6 en el primer caso y los divisores 1, 2, 3, 6 y 12,  $R2 = 1$  y la pendiente no registra ninguna distorsión experimental (figura B.2).

### Definición del Centro de una Ventana Par

El cálculo se hace para cada punto superficial dentro de una ventana deslizante centrada en el pixel bajo estudio. Como ya se mencionó, los resultados obtenidos son estadísticamente más congruentes para un tamaño par que para un tamaño non. Sin embargo, en el primer caso, es necesario definir el concepto de

centro, puesto que el punto bajo estudio no podría estar localizado exactamente en el centro, sino que en una de las cuatro puntos que rodean el centro de un patrón cúbico de  $12 \times 12 \times 12$ . El uso de uno de estos cuatro puntos conduce a una ligera desviación del resultado. Por lo tanto, es posible calcular la dimensión fractal local, ya sea tomando en cuenta cada uno de estos cuatro píxeles, con el riesgo de alterar un poco el resultado del promedio calculado, o definiendo el valor del centro como el promedio de los cuatro píxeles localizados en el centro de la ventana. Se recomienda usar la segunda alternativa, con el fin de evitar alterar y minimizar los costos de cálculo.

## **APENDICE C**

### **PUBLICACIONES Y CONGRESOS**