

# INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

SECCION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACION

## MECANICA PROBABILISTICA DE LAS GRIETAS AUTO-AFINES EN MATERIALES FRAGILES

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS CON  
ESPECIALIDAD EN INGENIERIA MECANICA PRESENTA

**IVAN ENRIQUE CAMPOS SILVA**

Asesor: Dr. Alexander S. Balankin

Jurado: Dr. Guillermo Urriolagoitia Calderón  
Dr. Luis H. Hernández Gómez  
Dr. Alexander S. Balankin  
Dr. Armando Bravo Ortega  
Dr. Joaquín Oseguera Peña  
Dr. Julio César Gómez Mancilla

**Presidente**  
**Secretario**  
**Primer Vocal**  
**Segundo Vocal**  
**Tercer Vocal**  
**SUPLENTE**

**Asesor Técnico**.....Téc. José Antonio García Macedo.

México D.F., mayo del 2001.

**INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL**

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA**

**SECCION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

**MECÁNICA PROBABILÍSTICA DE LAS GRIETAS AUTO-AFÍNES EN MATERIALES  
FRÁGILES.**

**TESIS QUE PRESENTA**

**IVÁN ENRIQUE CAMPOS SILVA**

**DOCTORADO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN INGENIERIA MECÁNICA**

**MAYO, 2001**

## **DEDICATORIA**

**A Jesús, por ser el alma legendaria del presente trabajo.**

**A María Luisa, mi madre, con todo mi amor, gracias por existir.**

**A mi abuelo, Mario, por su ejemplo de vida, por tener su apoyo, por enseñarme a amar el trabajo.**

**A mi hermana, Marissa, por permitirme compartir tantos sueños e inquietudes, para los decididos nunca es demasiado tarde.**

**A mis compañeros de grupo, gracias por estar en el maravilloso camino de aprender a vivir.**

## **AGRADECIMIENTOS**

Al Dr. Alexander Balankin por tener siempre su apoyo incondicional, por la oportunidad brindada de participar en este proyecto de investigación y tenerlo como ejemplo en el campo de la investigación aplicada.

Al comité de Tesis, al Dr. Armando Bravo por su apoyo externo en la realización de todo el trabajo experimental, al Dr. Guillermo Urriolagoitia por sus observaciones en el trabajo final, al Dr. Luis Héctor Hernández Gómez por sus precisos comentarios y anotaciones que sirvieron para mejorar el trabajo, al Dr. Joaquín Osegura Peña por permitirme trabajar dentro del laboratorio de materiales del I.T.E.S.M.-CEM en momentos cruciales que conllevaban cargas de trabajo muy pesadas, asimismo al Dr. Julio César Gómez Mancilla por sus atinados comentarios que me sirvieron para reflexionar. A todos ellos, gracias por su interés en este proyecto.

A mi amigo, José A. García Macedo, quiero agradecerle su paciencia, su orientación y apoyo incondicional durante los momentos más críticos durante el trabajo experimental, dando lugar a una amistad de trabajo fructífera.

Al Dr. Orlando Susarrey Huerta, por su disposición y compañerismo en los ensayos de tenacidad a la fractura, y a la Profra. Francisca Franco de la Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco por su apoyo en los ensayos de densidad.

Igualmente, agradezco al Instituto Politécnico Nacional, a la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, principalmente a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación por permitirme desarrollar mis estudios de doctorado. Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico en mis estudios de doctorado, así como al Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey – Campus Estado de México por permitirme trabajar en sus instalaciones durante el desarrollo experimental del proyecto.

No quisiera olvidar a Marlah Chandomid y Alejandro Vázquez por su valiosa y gratificante colaboración en los ensayos de densidad real. A José Martínez Trinidad por su apoyo e información cuando no me encontraba en el Instituto.

Finalmente, a mis compañeros de doctorado, profesores y amigos por brindarme su amistad incondicional.

# CONTENIDO

	<b>Pag.</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>10</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>16</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>18</b>
<b>Glosario</b>	<b>20</b>
<b>Resumen</b>	<b>22</b>
<b>Introducción</b>	<b>24</b>
<b>1 Planteamiento y Metodología</b>	<b>26</b>
<b>1.1 Antecedentes</b>	<b>26</b>
• <b>1.1.1 Propiedades mecánicas de los cerámicos</b>	<b>27</b>
• <b>1.1.2 Factores que afectan a la resistencia de los materiales cerámicos</b>	<b>27</b>
• <b>1.1.3 Efectos de grietas en el esfuerzo de un material cerámico</b>	<b>28</b>
• <b>1.2 Objetivo General</b>	<b>30</b>
• <b>1.2.1 Objetivos Particulares</b>	<b>30</b>
• <b>1.3 Metodología</b>	<b>31</b>
• <b>1.3.1 Modelo teórico</b>	<b>31</b>
• <b>1.3.2 Paquete computacional Benoit</b>	<b>33</b>

•	1.3.2.1 El exponente de Hurst	34
•	1.3.2.2 Rango del exponente de Hurst y de la funciones de transformación de trazas	35
•	1.3.2.3 Movimiento fraccional Browniano y ruido fraccional Gaussiano	38
•	1.3.2.4 Descripción de los archivos de datos	40
•	1.3.3 Estudio experimental	41
•	2 Fundamentos de la Mecánica de Fractura Probabilística y del material yeso piedra dental	43
•	2.1 Mecánica de las grietas auto-afines	44
•	2.1.1 Fundamentos de la Mecánica de Fractura Probabilística	45
•	2.1.2 Mecánica Probabilística de grietas auto-afines	48
•	2.2 Yeso piedra dental. Principios básicos	50
•	2.2.1 Fraguado de los productos de yeso. Relación agua polvo	50
•	2.2.2 Resistencia	53
•	3 Estudio experimental de la caracterización del yeso piedra dental. Desarrollo de la confiabilidad del paquete computacional Benoit	56
•	3.1 Diseño Experimental para ensayo de tensión	57
•	3.1.1 Ensayo de tensión en el material yeso piedra dental	57
•	3.1.2 Experimento propuesto	58
•	3.2 Diseño experimental para ensayo de flexión en 3 puntos con muesca (SENB)	60
•	3.2.1 Cálculo de $K_Q$	61

•	3.2.2 Análisis de variables	62
•	3.2.3 Experimento propuesto	63
•	3.2.4 Observación en el Microscopio Electrónico de Barrido	65
•	3.3 Determinación de la densidad real de las piezas sometidas al ensayo de tensión, y flexión en 3 puntos con muesca	65
•	3.4 Desarrollo experimental para demostrar la confiabilidad del paquete Benoit	67
•	3.5 Resultados	69
•	3.5.1 Pruebas de tensión	69
•	3.5.2 Pruebas de tenacidad a la fractura	71
•	3.5.3 Resultados de la observación en el Microscopio Electrónico de Barrido	74
•	3.5.4 Cálculo del coeficiente de rugosidad (Hurst)	77
•	4 Análisis de resultados	80
•	4.1 Distribución de los datos originados en la caracterización mecánica del yeso piedra dental	81
•	4.1.1 Distribuciones de probabilidad	83
•	4.1.2 Densidad real y porosidad. Influencia en las propiedades mecánicas del yeso piedra dental	91
•	4.1.3 Tamaño del cristal en el material yeso piedra dental	97
•	4.2 Ensayo de flexión en 3 puntos con muesca	98
•	4.2.1 Tenacidad efectiva a la fractura	104
•	4.3 Mecánica de las grietas auto-afines	106
•	Conclusiones	109

• <b>Recomendaciones para trabajo futuro</b>	<b>114</b>
• <b>Anexo A</b>	<b>115</b>
• <b>Anexo B</b>	<b>121</b>
• <b>Anexo C</b>	<b>129</b>
• <b>Anexo D</b>	<b>132</b>
• <b>Anexo E</b>	<b>148</b>
• <b>Anexo F</b>	<b>151</b>
• <b>Anexo G</b>	<b>156</b>
• <b>Referencias</b>	<b>163</b>

## Lista de Figuras

**Figura 1.1** (a) Un ejemplo de ruido blanco de Gauss. (b) El ruido blanco es sumado para obtener un movimiento browniano.

**Figura 2.1** Distribución de esfuerzos en el frente de una grieta auto-afín en un sólido elásticamente lineal.

**Figura 3.1** Dimensiones de las probetas de yeso estandarizadas para ensayo de tensión

**Figura 3.2** Dimensiones nominales de probetas de yeso estandarizadas para ensayo de flexión en 3 puntos con muesca.

**Figura 3.3** Diseño del molde para la elaboración de los especímenes de prueba para ensayos de flexión en 3 puntos con muesca.

**Figura 3.4** Curva esfuerzo-deformación característica del yeso piedra dental relación agua/polvo 0.28

**Figuras 3.5 y 3.6** Curva esfuerzo-deformación característica del yeso piedra dental relación agua/polvo 0.31 y 0.40 respectivamente.

**Figura 3.7** Curva esfuerzo deformación molde 3 espesor 10,15,20 y 25 mm, ensayo de flexión en 3 puntos con muesca. Relación agua/polvo 0.31

**Figura 3.8** Sección total de observación de la pieza de yeso dental fracturada por ensayo de tensión. Relación 0.31.

**Figura 3.9** Sección transversal de la pieza de yeso con presencia de cristales del hemihidrato. Magnificación 1000x Rel. 0.31

**Figura 3.10** Sección de zona de fractura del material yeso piedra dental.. Relación 0.31  
Magnificación 25x

**Figura 3.11** Sección de zona de fractura del material yeso piedra dental. Relación 0.31  
Magnificación 1000x.

**Figura 3.12** Sección de la zona de fractura de la pieza de yeso. Relación 0.31.  
Magnificación 5000x.

**Figura 3.13** Sección de la zona de fractura de la pieza de yeso. Relación 0.28.  
Magnificación 5000x.

**Figura 3.14** Sección de la zona de fractura de pieza de yeso piedra dental. Relación  
0.40. Magnificación 5000x.

**Figura 3.15** Perfil de la zona de fractura digitalizada a 600 pps de una placa de yeso  
piedra dental con número 88. Relación agua/polvo 0.31.

**Figura 3.16** Perfil de gráfica de la zona de fractura de la placa de yeso piedra dental  
número 82, para su evaluación en el paquete Benoit.

**Figura 4.1** Distribución logística del esfuerzo máximo en tensión, relación 0.31.

**Figura 4.2** Distribución gamma del Módulo de Young en tensión, relación 0.31.

**Figura 4.3** Distribución normal del esfuerzo máximo en tensión, relación 0.28.

**Figura 4.4** Distribución normal del Módulo de Young en tensión, relación 0.28.

**Figura 4.5** Distribución normal del esfuerzo máximo en tensión, relación 0.40.

**Figura 4.6** Distribución normal del Módulo de Young, relación 0.40.

**Figura 4.7** Distribución log-logistic de la densidad real de las piezas sometidas a  
ensayo de tensión, relación 0.40.

**Figura 4.8** Distribución log-logistic de la densidad real de las piezas sometidas a ensayo de tensión, relación 0.31.

**Figura 4.9** Distribución log-logistic de la densidad real de las piezas sometidas a ensayo de tensión, relación 0.28.

**Figura 4.10** Dependencia funcional del esfuerzo máximo en la porosidad para el yeso piedra dental, relación 0.31. Muestreo 50 probetas.

**Figura 4.11** Dependencia funcional del esfuerzo máximo en la porosidad para el yeso piedra dental, relación 0.40. Muestreo 30 probetas.

**Figura 4.12** Distribución log-logistic del tamaño de cristal en el material yeso piedra dental para tres relaciones diferentes agua/polvo en ensayos de tensión.

**Figura 4.13** Influencia del espesor en la porosidad de las piezas para cinco moldes con diferentes dimensiones.

**Figura 4.14** Influencia del espesor en el valor de  $K_Q$ .

**Figura 4.15** Dependencia funcional de la porosidad en el valor de  $K_Q$ .molde 1.

**Figura 4.16** Dependencia funcional de la porosidad en el valor de  $K_Q$  molde 2.

**Figura 4.17** Dependencia funcional de la porosidad en el valor de  $K_Q$  molde 3.

**Figura 4.18** Dependencia funcional de la porosidad en el valor de  $K_Q$  molde 4.

**Figura 4.19** Dependencia funcional de la porosidad en el valor de  $K_Q$  molde 5.

**Figura 4.20** Dependencia de la tenacidad efectiva a la fractura del tamaño de longitud de muesca en el material yeso piedra dental.

**Figura 4.21** Distribución log-logistic de la tenacidad a la fractura fractal obtenido en el yeso piedra dental.

**Figura D.1** Distribución logistic de la tenacidad a la fractura en molde 1. Relación 0.31.

**Figura D.2** Distribución logistic de la tenacidad a la fractura en molde 2. Relación 0.31.

**Figura D.3** Distribución logistic de la tenacidad a la fractura en molde 3. Relación 0.31.

**Figura D.4** Distribución logistic de la tenacidad a la fractura en molde 4. Relación 0.31.

**Figura D.5** Distribución logistic de la tenacidad a la fractura en molde 5. Relación 0.31.

**Figura D.6** Distribución gamma de la tenacidad a la fractura en molde 5. Relación 0.31.

**Figura D.7** Distribución de Pearson para el esfuerzo máximo en molde 1. Relación 0.31.

**Figura D.8** Distribución log-logistic para el esfuerzo máximo en molde 2. Relación 0.31.

**Figura D.9** Distribución log-logistic para el esfuerzo máximo en molde 3. Relación 0.31.

**Figura D.10** Distribución log-logistic para el esfuerzo máximo en molde 4. Relación 0.31.

**Figura D.11** Distribución de Pearson para el esfuerzo máximo en molde 5. Relación 0.31.

**Figura D.12** Distribución logistic de la densidad real en molde 1. Relación 0.31.

**Figura D.13** Distribución logistic de la densidad real en molde 2. Relación 0.31.

**Figura D.14** Distribución logistic de la densidad real en molde 3. Relación 0.31.

**Figura D.15** Distribución normal de la densidad real en molde 4. Relación 0.31.

**Figura D.16** Distribución logistic de la densidad real en molde 5. Relación 0.31.

**Figura F.1** Distribución normal del exponente promedio de Hurst para placas de yeso piedra dental.

**Figura F.2** Distribución beta del parámetro auto-afín  $\alpha$  para placas de yeso piedra dental.

**Figura F.3** Distribución de Rayleigh para el valor del exponente  $n$  en placas de yeso piedra dental.

**Figura G.1** Molde de elaboración de las piezas para ensayo de tensión en el material yeso piedra dental

**Figura G.2** Piezas resultantes del desmoldeo para el ensayo de tensión. Relaciones agua/polvo 0.28, 0.31 y 0.40

**Figura G.3** Realización del ensayo de tensión en el material yeso piedra dental.

**Figura G.4** Balanza O-Haus 330,

**Figura G.5** Máquina Universal de Ensayos Mecánicos, dispositivo para ensayo de flexión en 3 puntos con presencia de muesca.

**Figura G.6** Dispositivo para ensayo de flexión en 3 puntos con presencia de muesca.

**Figura G.7** Espesores de muestras utilizados en especímenes para ensayo de flexión en 3 puntos con muesca.

**Figura G.8** Dispositivo de observación para el ensayo de flexión en 3 puntos con muesca

**Figura G.9** Fractura del espécimen de prueba.

**Figura G.10** Clasificación de piezas fracturadas en el ensayo de flexión en 3 puntos con muesca.

**Figura G.11** Determinación real de piezas ensayadas por flexión en 3 puntos con presencia de muesca. Inmersión en agua.

## **Lista de Tablas**

**TABLA 1** Rangos y relaciones entre la pendiente beta en un grafico log –log.

**TABLA 2** Porosidad de fraguado del yeso afectada por la proporción A:P.

**TABLA 3** Efecto del secado en la resistencia del yeso.

**TABLA 4** Efectos de la relación agua/polvo y tiempo de mezcla en la resistencia del yeso.

**TABLA 5** Diseño experimental en el material yeso piedra dental para ensayo de tensión.

**TABLA 6** Características generales del yeso piedra dental utilizado en el desarrollo experimental.

**TABLA 7** Diseño experimental en el material yeso piedra dental para ensayo de flexión en 3 puntos con muesca.

**TABLA 8** Dimensión de los moldes para la elaboración de los especimenes de prueba.

**TABLA 9** Valores de  $K_Q$ , esfuerzo máximo y porosidad promedios obtenidos en el ensayo de tenacidad a la fractura para cinco moldes con diferentes dimensiones.

**TABLA 10** Valores del tamaño de cristal promedio para las relaciones agua/polvo del yeso piedra dental.

**TABLA 11** Determinación del coeficiente de rugosidad en placas de yeso piedra dental mediante el empleo del paquete Benoit..

**TABLA 12** Valores promedio del esfuerzo máximo y módulo de Young obtenidos en el material yeso piedra dental.

**TABLA 13** Datos de porosidad obtenidos en las piezas de yeso dental para ensayos de tensión.

**TABLA 14** Resultados de la tenacidad efectiva a la fractura para cinco moldes.

**TABLA A1** Parámetros mecánicos yeso piedra dental relación 0.28.

**TABLA A2** Parámetros mecánicos yeso piedra dental relación 0.31

**TABLA A3** Parámetros mecánicos yeso piedra dental relación 0.40

**TABLA A4** Cálculo de la densidad y porosidad de las piezas de yeso piedra dental 0.28

**TABLA A5** Cálculo de la densidad y porosidad de las piezas de yeso piedra dental relación

**TABLA A6** Determinación de la densidad y porosidad de las piezas de yeso piedra dental relación 0.40

**TABLA B1** Molde 1.

**TABLA B2** Molde 2.

**TABLA B3** Molde 3.

**TABLA B4** Molde 4.

**TABLA B5** Molde 5.

## NOMENCLATURA

**K** factor de intensidad de esfuerzos.

**G** rapidez de liberación de energía en el vértice de la grieta.

**U** energía de deformación con presencia de grieta.

**B** espesor de muestra.

**W** ancho de muestra.

**a<sub>c</sub>** longitud de grieta crítica.

**r** distancia desde el vértice de la grieta.

**λ<sub>o</sub>** límite máximo medible.

**ε<sub>c</sub>** longitud de correlación auto-afín.

**σ<sub>ij</sub>** esfuerzo en el vértice de la grieta.

**d** dimensión del problema elástico considerado.

**H** exponente de Hurst.

**K<sub>f</sub>** Factor de intensidad de esfuerzos fractal.

**r<sub>mf</sub>** rugosidad saturada.

**z<sub>i</sub>** es el i-ésimo valor en el eje coordenado **y** en la corrida de suma

**y<sub>j</sub>** es el j-ésimo valor en el eje coordenado **y** en la traza original.

$\bar{y}$  es el promedio en el eje coordenado **y** en la traza original.

**σ<sub>f</sub>** valor límite de resistencia a la fractura.

**α,β** fases del hemihidrato.

**W<sub>1</sub>,W<sub>2</sub>,W<sub>3</sub>** pesos de las muestras.

**σ,σ<sub>o</sub>** densidad de la pieza con poros y sin poros respectivamente.

**Γ (...)** es la Función Gamma.

**D<sub>λ</sub>** es el coeficiente de difusión de la grieta.

**Φ (D<sub>λ</sub>)** es una función adimensional gobernada por la topografía estadística de los campos probables de la energía de superficie específica y de la rapidez de energía liberada.

**E** es el módulo de Young,

$\langle \gamma(\ell_o) \rangle$  es la densidad de la energía de superficie microscópica.

$\langle K_{FC} \rangle$  es la mediana de la distribución.

**$K_Q$**  Tenacidad a la fractura obtenido por la máquina de pruebas universales.

**$K_C$**  Tenacidad efectiva a la fractura.

**$n$**  valor de ley de potencia.

**$\alpha_i$**  valor utilizado en mecánica de grietas auto afines.

## GLOSARIO

**Dimensión fractal.-** Es la generalización de la idea de dimensión euclidiana de autosimilaridad. Del mismo modo que objetos de dimensión entera pueden escalarse auto-similarmente para reducir o amplificar su tamaño, existen objetos geométricos que pueden escalarse auto-similarmente mediante un factor de escala, que puede expresarse mediante  $N = C r^{-D}$ , donde N es el número de objetos con una dimensión lineal característica mayor que r, C es una constante y D un exponente fraccionario llamado dimensión fractal.

**Dimensión topológica.-** Es la dimensión euclideana, es 0 para un conjunto de puntos, 1 para una curva y 2 para una superficie, etc.

**Factor de intensidad de esfuerzos.-** El parámetro K, en términos generales caracteriza la magnitud del esfuerzo en la vecindad del vértice de la grieta ideal en un material elástico lineal, en términos de una carga aplicada y de la geometría de la estructura.

**Fractal.-** Es un objeto geométrico auto-similar que se caracteriza por su dimensión fractal  $D > d$ .

**Fractura.-** Discontinuidad en el material.

**Fractura frágil.-** Modo de fractura caracterizada por una rápida propagación de la grieta y deformación despreciable.

**Mecánica de la Fractura.-** Análisis del proceso mecánico que provoca que una grieta conduzca a una falla total de la pieza.

**Mecánica de la Fractura lineal elástica.-** Análisis del proceso cuando la extensión de la zona plástica está confinada a una pequeña región al frente del vértice de la grieta y el resto del material presenta sólo deformación elástica.

**Mecánica de la Fractura elasto plástica.-** Análisis del proceso cuando la zona plástica se extiende en todo el ancho de la pieza, pero sigue siendo una región pequeña alrededor del plano de la grieta.

**Esfuerzo máximo.-** Es la resistencia máxima observable en un diagrama esfuerzo-deformación ingenieril.

**Rugosidad auto-afín.-** La forma de la grieta es invariante estadísticamente bajo la transformación  $z(r) \rightarrow \lambda^H z(\lambda r)$ , donde H es el exponente de rugosidad, también llamado exponente de Hurst.

**Tenacidad a la fractura en deformación plana ( $K_{IC}$ ).**- La mínima intensidad de esfuerzo necesario para producir una falla catastrófica. Se puede medir únicamente por encima de un espesor determinado, el cual depende del material.

**Tenacidad a la fractura en esfuerzo plano ( $K_{IC}$ ).**- El valor del esfuerzo necesario para producir falla catastrófica en los componentes con un espesor menor que el requerido para deformación plana.

# MECÁNICA PROBABILÍSTICA DE GRIETAS AUTO-AFÍNES EN MATERIALES FRÁGILES.

## RESUMEN

El presente proyecto de investigación interpreta la caracterización del material yeso piedra dental, en un estudio mecánico y estadístico bajo parámetros de Mecánica de la Fractura y Geometría Fractal.

Ha sido establecido que las superficies de fractura pueden ser consideradas como objetos auto-afines. Este último concepto, es utilizado en teoría de fractales, el cual maneja la simetría en amplio rango de objetos y fenómenos de la naturaleza. La evaluación de un nuevo modelo probabilístico fue interpretado por A. Balankin, el cual es formulado para caracterizar la mecánica de las grietas auto-afines en materiales elasto-plásticos, la funcionalidad del modelo probabilístico fue interpretado con éxito en trabajos anteriores con un material compuesto, papel, y ahora es relacionado con el material cerámico yeso piedra dental (gypsum rock).

La caracterización mecánica del material yeso piedra dental se llevó a cabo en ensayos de tensión y ensayos de flexión en tres puntos con presencia de muesca, bajo tres relaciones diferentes agua/polvo en ensayos de tensión, y una relación agua/polvo de 0.31 para los ensayos de flexión en tres puntos con presencia de muesca; igualmente se determinó la porosidad de todas las piezas sometidas a éstos ensayos, y realizar una interpretación funcional de la densidad con los parámetros mecánicos obtenidos en los ensayos antes mencionados.

La propagación de grietas, su rugosidad, interpretación auto-afín, se desarrolló en placas de yeso piedra dental con un espesor muy delgado, la utilización de paquetes computacionales para una evaluación más precisa del exponente de rugosidad en grietas auto-afines es utilizado en el presente proyecto de investigación.

La verificación de los datos experimentales resultantes del desarrollo experimental se ajustan a diferentes distribuciones de probabilidad. Igualmente se analizan los resultados en cuanto a las implicaciones físicas del problema, y las perspectivas a corto plazo del proyecto.

## **ABSTRACT**

The present research project interprets the characterization of the material plaster dental stone, in a study of mechanical and statistical low parameters of Fracture Mechanics and Fractal Geometry.

It has been established that the fracture surfaces can be considered as self-affine objects. The last concept, it is used in fractal theory, which manages the symmetry in wide range of objects and phenomenon's of the nature. The evaluation of a new probabilistic model was interpreted by A. Balankin which is formulated to characterize the mechanics of self-affine cracks in elastoplastic materials, the functionality of the probabilistic model it was interpreted with success in previous works with a compound material, paper, and now it is related with the material gypsum rock.

The mechanical characterization of the material plaster dental stone carries out with tension test and flexion test in three points with notch presence, under three different relationships sand/water in the tension test, and 0.31 sand/water relation in the flexion test in three points with notch presence, likewise was determinate the porosity from all the specimens subjected to the mechanics test, and carry a functional dependence of the density with the mechanical parameters obtained in the tests.

The propagation of cracks, their roughness, self-affine interpretation, was developed in plates of plaster dental stone with a very thin thickness, the use of computational software verificates the Hurst exponent in self-affine cracks.

The verification of experimental data results of experimental procedure fit different probability distributions who are analyzed. Likewise the results are analyzed for the physical implications of the problem, and the short term perspectives of the research.

## INTRODUCCION

El Programa de Investigación en el Desarrollo de la Mecánica Fractal del Sólido de la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del Instituto Politécnico Nacional, con el apoyo del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey – Campus Estado de México, así como con el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, han establecido una serie de proyectos con el objetivo de analizar, tanto teórica como experimentalmente, la propagación de grietas cuyo interés es un problema tanto científico como tecnológico. Esto ha motivado un interés creciente en cómo las grietas se forman, su constitución y propagación. Por ésta razón, en años recientes, el análisis cuantitativo de superficies de fractura ha sido empleado como parte integral del estudio de la deformación y ruptura de materiales.

Se establece que las superficies de fractura pueden ser consideradas como objetos auto-afines. Este último concepto, es utilizado en teoría de fractales, el cual maneja la simetría en amplio rango de objetos y fenómenos de la naturaleza.

El objetivo general del presente trabajo, es evaluar el modelo probabilístico del Dr. Alexander S. Balankin formulado para caracterizar la mecánica de grietas auto-afines en materiales elasto-plásticos; éste modelo ha funcionado para caracterizar la propagación de grietas en diferentes clases de papel, relacionando el coeficiente de rugosidad de las superficies de fractura (exponente de Hurst) y fomentando un nuevo concepto denominado “tenacidad de fractura fractal”.

Con lo anteriormente expuesto, es importante relacionar el modelo probabilístico y su funcionalidad con diferentes materiales, y en este trabajo se replantea bajo criterios de estudio en materiales ideales frágiles porosos, en lo que se refiere específicamente en el cerámico yeso piedra dental, el cual se presenta un profundo estudio de caracterización mecánica, química y física del material en cuestión.

Así mismo, se analiza la confiabilidad del Paquete Computacional “Benoit” que enfoca las diferentes evaluaciones y métodos para determinar el número fractal en cuerpos de autosimilitud y auto-afines, cuya utilidad va a ser trascendental para la caracterización de las superficies de fractura del yeso piedra dental, pues determinando bajo digitalización de imágenes las superficies en cuestión, es posible la evaluación del exponente de Hurst bajo los criterios que se aplican en este programa de características netamente fractales, y presentando un nuevo concepto denominado tenacidad a la fractura fractal.

# CAPITULO 1

## Planteamiento y Metodología

### 1.1 Antecedentes.

La mecánica de la fractura moderna es un análisis matemático del proceso mecánico que conduce a la propagación de la grieta. La mecánica de la fractura elástica lineal (MFLE) trata a las fracturas como un corte matemático, el cual comienza a moverse cuando una extensión infinitesimal de la grieta libera la energía necesaria para crear una superficie de fractura [1]. Un concepto fundamental para MFLE, basado en la teoría de elasticidad, es el factor de intensidad de esfuerzos  $K$ , propuesto por Irwin [2]. Mientras este concepto fue introducido originalmente encontrando la solución asintótica a un problema elástico con un corte recto, la interpretación física de este parámetro está basado en un concepto más general de “rapidez de liberación de energía” en el vértice de la grieta  $G$ , el cual está asociado con la ley fundamental de conservación de la energía. En el caso de fractura frágil en un sólido elástico lineal, el criterio está basado en los conceptos del factor de intensidad de esfuerzos y la rapidez de liberación de energía los cuales son equivalentes [1]. Un buen número de casos exitosos de la

aplicación de MFLE ha impulsado la permanencia de esta teoría dentro de la comunidad de ingeniería.

Es aparente que la ley de conservación de energía es incuestionable. El modelo continuo elástico lineal también es válido para un amplio rango de materiales frágiles con un comportamiento de esfuerzo-deformación elástico lineal. Así, sólo la representación para cortes rectos de fracturas reales puede estar en duda.

### **1.1.1 Propiedades mecánicas de los cerámicos.**

Considerados en su totalidad como una clase de materiales, los cerámicos son relativamente frágiles. La resistencia a la tensión observada en materiales cerámicos varía enormemente con rangos que van desde valores muy bajos, menores de 100 psi (0.69 MPa) hasta  $10^6$  psi ( $7 \times 10^3$  MPa). Sin embargo, como tal clase de materiales, pocos cerámicos tienen resistencias a la tensión por encima de 25000 psi (172 MPa). Los materiales cerámicos también exhiben grandes diferencias entre las resistencias a la tensión y a la compresión, siendo las resistencias a la compresión normalmente alrededor de 5 y 10 veces más altas que las tensiones [3,4].

### **1.1.2 Factores que afectan a la resistencia de los materiales cerámicos.**

El fallo mecánico de los materiales cerámicos se da principalmente por defectos estructurales. Las causas principales de la fractura en cerámicos han de buscarse en las grietas superficiales producidas durante los procesos de acabado superficial, poros (porosidad), inclusiones y granos grandes producidos durante el procesamiento.

Los poros de los materiales cerámicos frágiles son regiones donde se concentran los esfuerzos, y cuando la tensión en un poro alcanza un valor crítico se forma una grieta y se propaga, al no haber en estos materiales procesos que absorban mucha energía como los que se dan en los metales dúctiles durante la deformación [1-4]. Así, una vez que las grietas empiezan a propagarse, continúan creciendo hasta que ocurre la fractura. Los poros también actúan en detrimento de la resistencia de los materiales cerámicos porque disminuyen el área de sección transversal sobre la que se aplica la

carga y por tanto rebajan la tensión que un material puede soportar. Así, el tamaño y la fracción en volumen de los poros en los cerámicos son factores importantes que afectan su resistencia. La resistencia de un material cerámico está, en consecuencia, determinada por muchos factores, que incluyen la composición química, la microestructura y las condiciones superficiales como factores principales. La temperatura y el entorno también son importantes, así como el tipo de esfuerzo y cómo se aplica. Sin embargo, el fallo de la mayoría de los materiales cerámicos a temperatura ambiente generalmente se origina en las grietas mayores [4].

### 1.1.3 Efectos de grietas en el esfuerzo de un material cerámico.

Si la carga aplicada a una pieza que contiene una grieta es muy alta, la grieta consecuentemente crece y causa su falla por fractura de una manera frágil, esto es, con una pequeña deformación plástica. De la teoría de mecánica de la fractura, una cantidad llamada el factor de intensidad de esfuerzos,  $K$ ; puede ser definida para caracterizar la severidad de la situación de la grieta, en consecuencia, por el tamaño de la misma, el esfuerzo y la geometría.

Cuando un sólido es uniformemente expuesto a esfuerzos elásticos, todas las cadenas en el material son elongadas y el trabajo aplicado por el esfuerzo es convertido a energía elástica que es almacenada en las cadenas del material. Con presencia en la superficie de la pieza de una longitud de grieta  $c$ , se asume que el volumen alrededor de la grieta tiende a relajarse (se presenta relajamiento en los enlaces covalentes del material cerámico y se pierde energía de deformación), por lo que la energía de deformación con presencia de la grieta se establece como:

$$U_{def} = U_o + \frac{V_o \sigma_{app}^2}{2Y} - \frac{\sigma_{app}^2}{2Y} \left[ \frac{\pi c^2 t}{2} \right] \dots\dots(1)$$

Donde  $t$  es el espesor del espécimen. El tercer término representa la energía de deformación relajada en la cercanía de la grieta.

Para formar una grieta de longitud  $\lambda$ , una energía de expansión de

$$U_s = 2\gamma\lambda t \dots\dots\dots(2)$$

es requerida, donde  $\gamma$  es la superficie de energía intrínseca del material. El factor 2 es representado por la formación de nuevas superficies de fractura ocurridos durante el evento. El cambio total de energía en el sistema se establece como:

$$U_{tot} = U_o + \frac{V_o\sigma^2_{app}}{2Y} - \frac{\sigma^2_{app}}{2Y} \left[ \frac{\pi C^2 t}{2} \right] + 2\gamma C t \dots\dots\dots(3)$$

De acuerdo a que la energía de superficie alcance un valor de  $c$  y la energía de deformación un valor de  $c^2$ , la energía total de sistema tenderá a un valor máximo para una cierta longitud de grieta crítica  $c_{crit}$ . Esto es un resultado importante que implica que una extensión de grieta que es más pequeña que  $c_{crit}$  consume mucho mayor energía que la que libera y es estable. En contraste, los defectos que son más grandes que  $c_{crit}$  son inestables por lo que desprende mayor energía que la que consume.

Por lo que de acuerdo a la ecuación (3), podemos desprender la condición de falla como

$$\sigma_f \sqrt{\pi C_{crit}} = \sqrt{2\gamma Y} \dots\dots\dots(4)$$

Esta ecuación predice que la combinación crítica del esfuerzo aplicado y el tamaño del defecto es requerido para causar la falla. La combinación  $\sigma\sqrt{\pi C}$  ocurre tan comúnmente en la discusión de fractura rápida que es abreviada por el símbolo  $K_I$  con unidades  $MPa \cdot m^{1/2}$ , y es referido como el factor de intensidad de esfuerzos. Similarmente, la combinación de términos en la parte derecha de la ecuación (4), comúnmente se refiere a la tenacidad a la fractura  $K_{IC}$ , donde  $K_I \geq K_{IC}$  para que la grieta se propague.

Cuando los mecanismos de disipación de energía, como la deformación plástica en la punta de la grieta, están operando,  $K_{IC}$  es definida como

$$K_{IC} = \sqrt{Y G_c} \dots\dots\dots(5)$$

donde  $G_c$  es la tenacidad del material. Para sólidos frágiles, la tenacidad se aproxima al límite  $G_c = 2\gamma$ . Es necesario apuntar que  $K_{IC}$  es una propiedad del material que tiene una dependencia microestructural.

En resumen: la fractura frágil puede ocurrir en un material cuando el producto del esfuerzo aplicado y la raíz cuadrada de la dimensión del defecto es comparable con la tenacidad de fractura del material.

## **1.2 Objetivo General.**

Estudio de la mecánica probabilística de las grietas auto-afines en materiales frágiles.

### **1.2.1 Objetivos particulares.**

1. Estudio de la Mecánica de la Fractura en grietas auto-afines para materiales frágiles (yeso piedra dental) estableciendo nuevos criterios de fractura relacionados para materiales ideales porosos.
2. Interpretación de los efectos estadísticos de fractura, con la aportación principal de geometría fractal, así como la utilización de paquetes computacionales para la interpretación de las distribuciones de probabilidad para los diferentes parámetros mecánicos de las piezas ensayadas, tamaño de grano del cerámico, densidad real de las piezas y la rugosidad de las grietas en la zona de fractura del material especificado.
3. Relacionar los modelos teóricos y analizando los resultados experimentales, proponer la modificación de la Norma ASTM E-399, para la especificación de dimensiones absolutas de especímenes de prueba en tenacidad a la fractura en materiales elasto-plásticos y frágiles, conllevando un nuevo concepto denominado “tenacidad a la fractura fractal”.

### 1.3 Metodología.

La metodología del proyecto de investigación se divide en tres aspectos fundamentales:

- Modelo teórico.
- Paquetes computacionales.
- Estudio experimental.

#### 1.3.1 Modelo teórico.

Hasta ahora es reconocido que las superficies de fractura pueden ser consideradas como objetos auto-afines [5,6,7]. La rugosidad de la fractura auto-afín lleva a un cambio en el comportamiento del esfuerzo en el vértice de la grieta con un amplio pero delimitado intervalo de escala de longitud [5]:

$$\lambda_0 < r < \varepsilon_C, \dots\dots\dots(6)$$

donde  $r$ , es la distancia desde el vértice de la grieta,  $\lambda_0$  es el límite máximo medible y  $\varepsilon_C$  es la longitud de correlación auto-afín.

La mecánica de las grietas auto-afines en sólidos linealmente elásticos fue desarrollada en trabajos anteriores [8-9]. Esta teoría permite una formulación matemática suficientemente rigurosa que satisface los requerimientos adoptados en mecánica clásica de los sólidos. Además, fue mostrado que el MFLE puede ser tratado como un caso especial de mecánica de las grietas auto-afines [9].

Los problemas de mecánica que involucran grietas auto-afines muestran un comportamiento asintótico en la ley del inverso de la raíz cuadrada del esfuerzo en el vértice de la grieta,

$$\sigma_{ij} \cong \frac{K_I}{\sqrt{r}} \dots\dots\dots(7)$$

la cual se reestablece a distancias  $r \gg \epsilon_C$  del vértice de la grieta, mientras que dentro del intervalo el esfuerzo del vértice de la grieta muestra un comportamiento del tipo ley de potencia:

$$\sigma_{ij} = K_f \left( \frac{r}{\lambda_o} \right)^{-\alpha} \dots\dots\dots (8)$$

donde:

$$\alpha = \frac{dH - (d-1)}{2H} \quad ; \text{ si } H > H^* = \frac{d-1}{d}, \dots\dots\dots (9)$$

ó

$$\alpha = 0; \quad \text{ si } H \leq H^* \dots\dots\dots (10)$$

donde  $d$  es la dimensión del problema elástico que se está considerando,  $H$  es el exponente de la rugosidad de la fractura, también llamado el exponente Hurst, y  $K_f$  es el “factor de intensidad de esfuerzos fractal”.

Este resultado difiere drásticamente de la predicción MFLE para el problema con rugosidad, pero con un perfil de grieta suficientemente liso (diferenciable). Realmente, de acuerdo al principio de Saint Venant, el comportamiento asintótico clásico se restituye a distancias  $r > r_{rmf}$ , donde  $r_{rmf}$  es la amplitud promedio de la rugosidad de la grieta, también llamada “rugosidad saturada” ( $r_{mf}$ ). Para fracturas reales en sólidos frágiles  $r_{rmf} \ll \epsilon_C$ .

Desafortunadamente, el comportamiento del esfuerzo así como el comportamiento clásico (ec. 8 y 9), no pueden ser probados de manera cuantitativa por observaciones experimentales directas, las cuales sólo dan resultados cualitativos. Sin embargo, la validez de las ecs. 8 y 9 pueden ser verificados por comparación entre las predicciones de mecánica de la fractura auto-afín y los resultados de pruebas mecánicas estandarizadas.

### 1.3.2 Paquete computacional Benoit.

Benoit es un programa computacional que permite la medición de las propiedades fractales de una serie de datos utilizando diez métodos de análisis fractal para patrones auto-similares y trazos auto-afines. El generador de trazas para fractales auto-afines es una opción alternativa del programa. Existen igualmente archivos que guardan información detallada sobre los métodos propuestos en el programa. Los datos analizados en el programa pueden ser variados y comprenden desde matemáticas, física, química, biología hasta disciplinas como la economía.

Los métodos para fractales auto-similares no son inmediatamente aplicables para trazos auto-afines. Para ver el porqué de este caso, consideramos la estimación del trazo auto-afín bajo el método de medición por compás. Inmediatamente podemos ver el problema, porque éste método trabaja en un espacio isotrópico, p.e., un espacio donde las coordenadas horizontales y verticales son intercambiables, y la longitud de compás es mantenido sin tener en cuenta esta orientación. El perfil auto-afín, es una relación entre los rangos horizontal y vertical los cuales varían con la escala (esta relación es constante en fractales auto-similares). El nivel significativo de longitud del perfil auto-afín medido por el método de compás es claramente cuestionable.

En consecuencia, ha sido mostrado que si la longitud de compás es mayor que la longitud transversal, la longitud  $N(d)$  medida no es constante, y la dimensión fractal siempre será un número diferente a uno. Bajo longitudes largas con respecto a la escala transversal, la dimensión de una línea auto-afín siempre será uno. Donde la longitud transversal es la longitud donde el rango vertical de la traza es igual al rango horizontal.

Los métodos auto-afines en el paquete computacional Benoit son específicamente utilizados para fractales de las mismas características, y para estimar la dimensión fractal de las propiedades auto-afines de la traza. En la práctica, uno hace la medición de la variación en el rango vertical, o rugosidad, de la figura para una variedad de escalas horizontales; esta operación provee una estimación del exponente de Hurst ( $H$ ),

que puede ser convertido a una dimensión fractal. Para el caso de fractales auto-similares, un rango en el orden de magnitud en la longitud de escalas es necesario para un exámen razonable de invarianza en la escala, y para este caso, se necesita un gran número de puntos en la traza (hablando más de cien). La dimensión obtenida, usando diferentes métodos auto-afines, no necesariamente debe coincidir; para comparar diferentes conjuntos de datos, por lo que es importante siempre especificar el método utilizado para las mediciones de la dimensión fractal.

La notación es designar estas trazas (o perfiles, o series) como un conjunto finito compuesto de las coordenadas “y” únicamente. Las trazas que han de ser analizadas por Benoit han de tener un intervalo constante de muestra  $X$  separando observaciones adyacentes. Podemos hacer notar que se pueden implementar todos los posibles intervalos de muestra utilizando la opción Unidades de Escala para desglosar la traza. Igualmente, esta opción es para impresión y para mostrar propuestas únicamente, no para análisis. En las descripciones de los métodos individuales para estimar la dimensión fractal, los métodos que requieren un intervalo de muestra constante son distinguidos de los que no lo poseen, esta versión de Benoit requiere intervalos constantes de muestra. La interpolación de las series con muestras no uniformes es discordante, una interpolación típica modifica el carácter estadístico de la traza en la manera la cual dificulta su predicción.

### **1.3.2.1 El exponente de Hurst (H).**

Los fractales auto-afines difieren de los fractales auto-similares en que sus partes tienen que ser reescalados por diferentes coordenadas para reensamblar el original. Considerando un fractal auto-similar embebido en un plano x-y, p.e., la curva de Von Koch. Para obtener una copia exacta de el original, podemos tomar una parte o porción de la curva y alargarla ésta por un factor  $r = 3$  igual en el eje x y en el eje y. Consideramos ahora un fractal auto-afín. Si queremos una copia exacta del original, debemos tomar una porción de la curva y alargar ésta por diferentes factores, por ejemplo,  $r_x = 3$  en el eje coordenado x y  $r_y = 2$  en el eje coordenado y.

Podemos escribir estos factores de escala como  $r_x = r$  ;  $r_y = r^H$  donde H es el exponente de Hurst. En general, tenemos:

$$H = \frac{\log(r_y)}{\log(r_x)} = 0.6309 \dots\dots\dots(11)$$

Hacemos notar que cuando se escribe  $r_y$  como potencia de  $r_x$  , se realiza una relación independiente de cualquier longitud de escala, p.e., una escala invariante.

El exponente de Hurst está relacionado a la dimensión fractal. Se mostrará la relación entre H y la dimensión de caja usando trazos aleatorios auto-afines o perfiles.

### **1.3.2.2 Rango del exponente de Hurst y de las funciones de transformación de trazas.**

El rango del exponente de Hurst implementado en el paquete Benoit es de 0 a 1, donde H=0 para el ruido rosa (la pendiente en la gráfica log-log es 1); H=0.5 para un ruido Browniano (paso) (la pendiente en la gráfica log-log es 2); y H=1 para un ruido negro (la pendiente en la gráfica log-log es 3). El exponente de Hurst ha sido definido para otras partes del espectro de ruido, y es posible mover los ruidos de una parte del espectro a otra utilizando los procedimientos definidos inmediatos.

La tabla 1 muestra los rangos y las relaciones entre la pendiente beta en un gráfico log-log, el exponente de Hurst, el nombre de los ruidos usados en física, y la dimensión fractal D.

**TABLA 1**  
**Rangos y relaciones entre la pendiente beta en un grafico log -log**

<b>Pendiente de la gráfica log-log en el análisis de espectro</b>	<b>Exponente de Hurst</b>	<b>Color de ruido</b>	<b>Dimensión Fractal</b>
-1	0	Azul	2
0	0	blanco	2
1	0	rosa	2
2	0.5	café	1.5
3	1	negro	1

Se expresa que cuando el exponente de Hurst tiene un valor de 0 e igualmente no puede distinguirse entre el color azul, blanco, y el ruido rosa. Si la traza de datos tiene una pendiente entre  $-1$  y  $1$  en la gráfica log-log entonces Benoit no distingue entre ellos y presenta un resultado  $H=0$  y  $D=2$ . Afortunadamente, existen dos transformaciones simples que ajusta la pendiente, por lo tanto a  $H$  y  $D$ . La primera transformación es llamada “Corrida de suma”, cuya serie es:

$$z_i = \sum_{j=1}^i (y_j - \bar{y}) \dots \dots \dots (12)$$

$z_i$  es el  $i$ -ésimo valor en el eje coordenado y en la corrida de suma

$y_j$  es el  $j$ -ésimo valor en el eje coordenado y en la traza original.

$\bar{y}$  es el promedio en el eje coordenado y en la traza original.

El efecto de esta transformación es ajustar la pendiente de las series originales por un factor igual a  $+2$ . Entonces, si la pendiente de la serie de tiempos originales es  $-1$ , la pendiente de la transformación de las series es  $1$ . La transformación trabaja para todos los valores de la pendiente. El usuario predispone encontrar el procedimiento correcto cuando se analiza los patrones de traza auto-afines. Es importante analizar la traza

original utilizando el Método de Poder Espectral (Power Spectral). Es conveniente checar la pendiente (beta) en la gráfica log-log. Si la pendiente es menor a 1, se selecciona la corrida de suma y se transforman los datos de la traza. Entonces se corre la transformación de los datos trazados para medir el exponente de Hurst y la dimensión fractal.

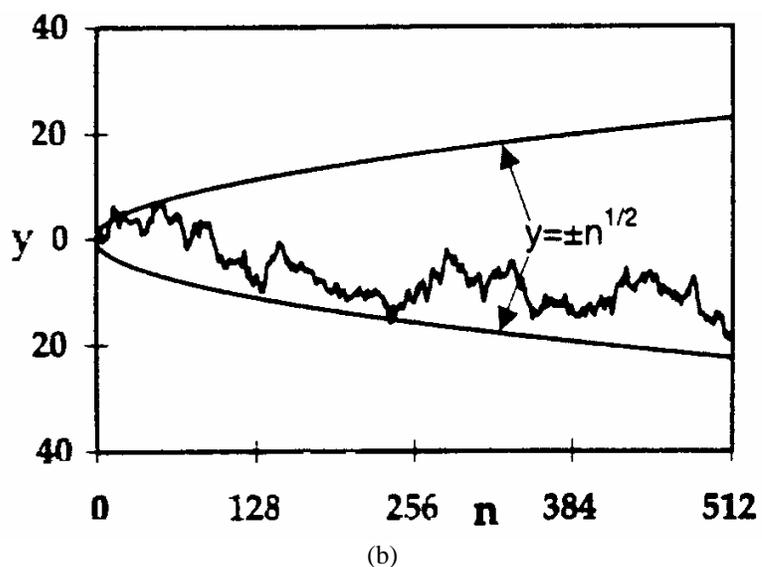
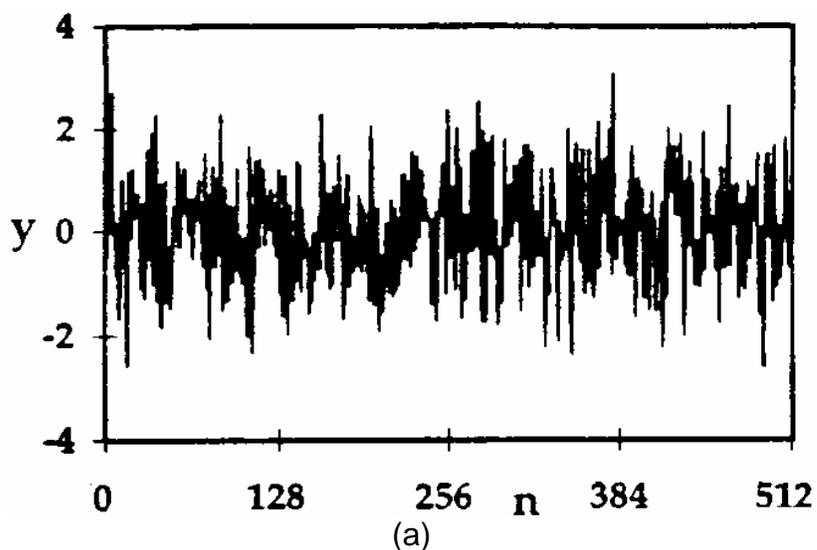


Figura 1.1 (a) Un ejemplo de ruido blanco de Gauss. Los valores adyacentes no están relacionados. (b) El ruido blanco es sumado para obtener un movimiento browniano.

La segunda transformación es llamada “Primera Diferencia”. La primera diferencia de una serie es construída tomando la diferencia entre los puntos adyacentes del eje coordenado **y** en la serie:

$$z_o = y_o - \bar{y} \dots\dots(13)$$

$$z_i = y_i - y_{i-1} + \bar{y} \dots\dots(14)$$

$z_i$  es la *i*-ésimo valor en el eje coordenado **y** en la primera diferencia

$y_i$  es la *i*-ésimo valor en el eje coordenado **y** en la traza original.

$\bar{y}$  es el promedio del valor en el eje coordenado **y** en la traza original.

El efecto de esta transformación es ajustar la pendiente de la serie de tiempos originales por un factor de  $-2$ . Entonces, si la pendiente de la serie de tiempos originales es 3, la pendiente de la serie transformada es 1. En Benoit es posible generar trazos sintéticos con pendiente entre  $-1$  y 1.

### 1.3.2.3 Movimiento fraccional Browniano y ruido fraccional Gaussiano.

Un ejemplo sencillo de aleatoriedad es un trazo rugoso que puede ser un juego de cara o cruz. Considerando un típico juego de volado (en donde existe la misma probabilidad  $p=0.5$  de obtener cara o cruz en cualquier caso). En el juego el jugador gana una unidad de suma cuando cae cara, y pierde la misma unidad cuando cae cruz. El record del jugador de suma/resta es un camino aleatorio, o movimiento browniano, en una dimensión. Esta difiere del movimiento browniano en dos dimensiones: en el caso de una dimensión, el camino aleatorio toma parte en una sola dirección. Esto inmediatamente sugiere que el camino en dos direcciones toma diferentes estatus.

Considerando los valores presentes por el número de caminos aleatorios en una dimensión que comienza desde cero y continua por *N* pasos. Es obvio que el valor promedio del camino aleatorio debe ser igual a cero. Por otra parte, podemos tener una

variedad de resultados, en donde el valor de N se incrementa, y la longitud de caminos aleatorios igualmente crezca. Por lo que el camino aleatorio resulta en pasos donde los valores pueden ser de  $-1$  a  $+1$  con igual probabilidad de  $0.5$ . Esto es un resultado estándar de teoría de la probabilidad en donde la distribución de los valores finales de un camino simple aleatorio después de N pasos es una distribución de Gauss con una varianza que es proporcional a N, y la desviación estándar es proporcional a la raíz cuadrada de N.

El rango típico (p.e., la diferencia entre los valores máximo y mínimo de y) representa un camino aleatorio simple de N pasos. Dicho rango debe ser proporcional a la desviación estándar de la distribución de resultados del camino aleatorio. En otras palabras, un camino simple aleatorio con longitud w en el eje coordenado x, puede ser escrito como la desviación estándar de sus valores  $\sigma(w)$  y el rango vertical R(w) como

$$\sigma(w) \approx R(w) \approx w^{1/2} \dots\dots(15)$$

Esta relación muestra que el movimiento browniano en una dirección es auto-afín. Si el camino aleatorio está compuesto por un largo número de pasos, en donde una pequeña porción puede ser medida con longitud  $w=1/r$  de la original. La pequeña porción cubre un rango vertical que es  $w^{1/2}=1/r^{1/2}$  de la original. En otras partes, el movimiento browniano en una dimensión es un fractal auto-afín con un exponente de Hurst igual a  $0.5$ .

Mandelbrot introduce una extensión del movimiento browniano en una dirección, y lo llamó movimiento fraccional browniano. Este es definido como una función aleatoria con incrementos normalmente distribuidos, pero con una desviación estándar  $s(w)$  y un rango en el eje vertical R(w) que depende de la longitud de la muestra w en el eje horizontal como:

$$\sigma(w) \approx R(w) \approx w^H \dots\dots\dots(16)$$

Los incrementos de el movimiento fraccional browniano están referidos al ruido fraccional gaussiano. Para valores de H entre  $0$  y  $0.5$  valores vecinos del ruido fraccional gaussiano son en correlación negativa; entre  $0.5$  y  $1$  los valores vecinos del ruido fraccional gaussiano son en correlación positiva. Este último concepto significa que, si

en una posición encontramos un valor positivo (o negativo), en la posición vecina es representar y encontrar un valor con el mismo signo que uno con el signo opuesto. La correlación positiva es comúnmente nombrado como persistencia y la correlación negativa como antipersistencia.

Para expresar el exponente de Hurst en base a la dimensión fractal, tomamos una muestra del movimiento fraccional browniano y hacemos una reescala en los ejes coordenados verticales y horizontales para ajustar en una caja unitaria, donde contamos el número de cajas  $N(d)$  que se necesitan para cubrir la traza. Por definición de dimensión de caja  $D_b$ :

$$N(d) = \frac{1}{d^{D_b}} \dots\dots\dots(17)$$

Es posible establecer que una porción de la traza demuestra que el rango horizontal es igual a  $d$  que cubre en el rango vertical promedio igual a  $d^H$ :

$$d^H/d = d^{H-1} \dots\dots\dots(18)$$

por lo que:

$$N(d) = d^{H-2} \dots\dots\dots(19)$$

Combinando (18) y (19) tenemos

$$D_b = 2 - H \dots\dots\dots(20)$$

Esta expresión relaciona el exponente de Hurst y la dimensión fractal de la traza de un fractal auto-afín embebidos en un plano.

#### 1.3.2.4 Descripción de los archivos de datos.

Existen 3 archivos que contienen trazos auto-afines.

1. **sra 03 1000.ts** El archivo contiene trazos de 1000 puntos generados por el método de la suma de aleatoriedad sucesiva con  $H=0.3$  utilizando el generador de trazos auto-afines en Benoit.
2. **sra 07 1000.ts** De la misma característica de sra 03 1000 ts con valor de  $H=0.7$ .

3. **Fourier 05 1000.ts** El archivo contiene el trazo de 1000 puntos generados por el método de Fourier utilizando  $H=0.5$  utilizando el generador de trazos auto-afines en Benoit.

Igualmente Benoit acepta tres formatos para los archivos de datos:

- Archivos bitmap (\*.bmp)
- Archivos de trazos (\*.ts).
- Hojas de trabajo Excel 4.0 (\*.xls).

### 1.3.3 Estudio Experimental.

Se ha llevado a cabo en el material yeso piedra dental la caracterización mecánica especificando principalmente los parámetros mecánicos característicos para materiales cerámicos, bajo tres relaciones diferentes agua/polvo<sup>1</sup> cuyo propósito es establecer si existen diferencias significativas en el estudio de los parámetros mecánicos, así, como poder establecer una relación adecuada agua/polvo para la realización de los ensayos de tenacidad a la fractura en este material.

Para los ensayos de tenacidad a la fractura se realizaron 5 moldes con diferentes dimensiones en ancho, largo y espesor, tomando como base para todos los moldes espesores de 5,10,15,20 y 25 mm, y una relación base agua/polvo de  $0.31^2$

Se presenta en este contexto la caracterización física del material, por lo que se realizaron estudios de la densidad de las piezas elaboradas en los moldes correspondientes posterior a los ensayos de tensión para cada una de las diferentes relaciones agua/polvo. Los ensayos experimentales para determinar la densidad real de las piezas, así como la porosidad presente en cada una de ellas se establece en el procedimiento de la norma ASTM C135-96, e igualmente bajo el método de Blake (1965)<sup>3</sup>.

---

<sup>1</sup> Relaciones agua/polvo utilizadas para la caracterización mecánica del material cerámico son de 0.28, 0.31 y 0.40 respectivamente.

<sup>2</sup> Las dimensiones de las probetas para los ensayos de tenacidad a la fractura se presentan en el Capítulo 3.

<sup>3</sup> El método de Blake está fundamentado principalmente para el estudio de terrones en anales de antropología. Escrito "Conservación de la zona arqueológica de Malinalco, Edo. de México.

Los parámetros mecánicos de las piezas cerámicas sujetas a tensión, a pruebas de tenacidad a la fractura, al estudio de tamaño de grano, a la determinación de la densidad real de los especímenes ensayados son examinados bajo distribuciones probabilísticas que garanticen la confiabilidad de los datos experimentales<sup>4</sup>.

Se estudia la confiabilidad del paquete computacional “Benoit” considerando los métodos de la determinación fractal que contiene el programa para fractales auto-afines, constituyendo un parámetro de rugosidad constante utilizado para los diferentes métodos existentes igual a 0.7, con el objetivo de analizar placas de yeso fracturadas con un espesor menor a 2 mm. cuyas imágenes fueron digitalizadas para su posterior estudio de rugosidad en el paquete mencionado<sup>5</sup>.

---

<sup>4</sup> Las distribuciones son presentadas en el Capítulo 4, al igual la utilización del programa “Risk”.

<sup>5</sup> Los valores obtenidos del coeficiente de rugosidad se presentan en el Capítulo 3, sección 3.5.4.

## **CAPITULO 2**

### **Fundamentos de la Mecánica de Fractura Probabilística y del material yeso piedra dental.**

En el capítulo, se presenta el enfoque teórico de la Mecánica de Fractura Probabilística y el enfoque alternativo a la Mecánica Probabilística de Grietas Auto-afines. Con esto se da una opción en el trabajo para materiales ideales porosos, contribuyendo a una mejor caracterización y comprensión de las trayectorias admisibles de grietas en materiales frágiles en continuación al trabajo presentado por Balankin y Susarrey [21].

En la sección 2.1, se presentan las suposiciones, objetivos y alcances de la nueva función de distribución estadística para grietas auto-afines.

La sección 2.2, presenta los principios fundamentales en el estudio del yeso piedra dental, considerando los factores más importantes que alteran sus propiedades mecánicas, físicas y químicas.

## 2.1 Mecánica de las Grietas Auto-Afines.

Mientras las propiedades de fractura de todos los materiales son estocásticas<sup>6</sup> al menos hasta cierto punto, la aleatoriedad es muy pronunciada para materiales heterogéneos. El efecto de la heterogeneidad de los materiales sobre la mecánica de las grietas ha sido un motivo recurrente de investigación así como un tópico relevante en física estadística. El desorden estructural se manifiesta asimismo como la tendencia de una grieta a seguir una trayectoria tortuosa. A pesar de la naturaleza estocástica, la rugosidad de la grieta posee correlaciones de largo-alcance a lo largo de la trayectoria de la grieta, la cual posee una invariancia de escala estadística auto-afín, dentro de un amplio rango de escalas de longitud. Diversos trabajos han confirmado que la morfología de la superficie de la grieta representa un mosaico complejo de artefactos microestructurales, siendo las características principales: el modo de fractura y, especialmente, la microestructura del material. Con este hecho, ha quedado claro que los patrones aleatorios de fractura deben ser tratados como fractales auto-afines.

Una consecuencia de esto es el hecho de que entre dos puntos A y B en un sólido, existe un conjunto de trayectoria de grietas estadísticamente equivalentes (virtuales) auto-afines, con la misma dimensión fractal que tiene los mismos valores de la longitud verdadera y el promedio de la amplitud de variación. Así que la geometría fractal de las trayectorias de las grietas indica la naturaleza probabilística de la propagación de grietas. Esto significa que una trayectoria real de grietas auto-afines es esencialmente impredecible. El elemento clave de esta impredecibilidad es la incertidumbre acerca de la alternativa real entre una colección de alternativas. La propagación de grietas a lo largo de una trayectoria particular consiste en una secuencia de etapas bien correlacionadas de longitud fija, las cuales son controladas por un criterio de fractura microscópico. El efecto más dramático de la aleatoriedad correlacionada de largo-alcance es el cambio drástico en los esfuerzos en la punta de la grieta, con respecto a aquellos esperados en la vecindad de la grieta recta [22]. En particular, se ha mostrado que la rugosidad fractal de la grieta lleva a un cambio fundamental en el

---

<sup>6</sup> Proceso gobernado por las estructuras auto-organizativas y disipativas en un estado de desequilibrio.

comportamiento de esfuerzos en el vértice de la grieta. Por lo tanto, los conceptos básicos de la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica, como “coeficiente de concentración de esfuerzos” y de “tenacidad a la fractura” no son válidos para la descripción de fracturas reales, aunque pueden ser útiles como aproximaciones simplificadas para algunos casos específicos. También se ha demostrado que la propagación de las grietas está gobernada por un nuevo parámetro denominado “tenacidad a la fractura fractal”, que es una constante del material.

La Mecánica de las grietas auto-afines permite una formulación matemática de suficiente rigor para satisfacer los requerimientos adoptados en Mecánica del Medio Continuo. Asimismo, la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica es un caso especial de la nueva teoría.

### 2.1.1 Fundamentos de la Mecánica de Fractura Probabilística.

El enfoque probabilista de la mecánica de fractura fue iniciado por W. Weibull en 1939. La nueva idea propuesta inmediatamente atrajo el interés y pareció de valor para el entendimiento del efecto del tamaño de la fractura. La teoría estadística de resistencia de Weibull se asemeja a la teoría de fractura de Griffith. Él considero que los ensayos de probetas se comportaban como si estuvieran compuestos de muchas unidades pequeñas con igual volumen, donde cada una posee una resistencia intrínseca a la fractura,  $\sigma_f$ , la cual variaba. La resistencia de cada unidad individual de volumen actúa independientemente de la resistencia del volumen total, la cual proporciona series de modelos llamados “weakest link”. Asumiendo la probabilidad de algún valor  $\sigma_f$  como proporcional a  $(\sigma_f/\sigma_m)^n$ , donde  $\sigma_m$  es la resistencia máxima considerada, y haciendo uso de cálculos estadísticos, se puede obtener un segundo parámetro ( $n$  y  $\sigma_m$ ) que representa la dispersión de los resultados de los ensayos. Ahora, asumiendo una distribución de frecuencia de la resistencia intrínseca,

$$\Phi = 1 - \exp \left[ - \int \left( \frac{\sigma_f}{\sigma_m} \right)^n \frac{dV}{V_m} \right] \dots\dots\dots(21)$$

que actualmente se conoce como la distribución de Weibull, la cual predice las variaciones de la resistencia con respecto a el volumen de prueba y la forma de la probeta. Esto cualitativamente correspondió al comportamiento de fractura observado. De hecho, dió a entender que la fractura total ocurría cuando la evaluación de carga para alguna de las pequeñas unidades de volumen, rebasaba el valor del límite de resistencia a la fractura  $\sigma_f$ . Si se asume además, que la pequeña unidad de volumen no cambiaba en tamaño, en proporción al cambio en las dimensiones de la probeta, se espero una pérdida de la resistencia a la fractura con el incremento en el tamaño de la probeta. Este punto de vista fue conocido como la teoría del peor defecto de Weibull [23].

En [23], se discute una distribución tipo Weibull de las grietas de Griffith en relación a la resistencia a la fractura de metales, que proporciona una descripción específica de la filosofía Weibull-Griffith. Sin embargo, para muchos metales estructurales, las complejidades introducidas por la deformación plástica antes de la fractura hacía relativamente pequeñas las explicaciones de la teoría del peor defecto. En contraste a la fractura, observaciones de deformación plástica y patrones de flujo plástico no mostraron desviaciones significantes de similitudes mecánicas.

La mecánica de fractura contemporánea está basada en el concepto de tenacidad a la fractura en lugar del criterio de esfuerzo. Inicialmente, la función de distribución de esfuerzos de Weibull también fue usada para ajustar datos de tenacidad de materiales, porque ésta ofrece formas apropiadas positivas sesgadas. Sin embargo, este ajuste no era exacto, más bien mostraba una despreciable pero significativa desviación sistemática, porque las bases teóricas de la función de Weibull no se satisfacen completamente en la punta de la grieta. Una función de distribución estadística alternativa para la tenacidad de fractura ha sido sugerida por Neville sobre la base de dos premisas fundamentales: 1) la falla de alguna parte del material cerca de la punta de la grieta conduce a la falla total a lo largo de todo el frente de la grieta; 2) la variabilidad de la resistencia en materiales es debido a la microestructura no homogénea. Recientemente, sin embargo, se puso en claro que el criterio de tenacidad tiene un dominio limitado de validez.

Para simplificar el análisis, se pueden distinguir dos casos extremos de fractura, de acuerdo al papel que juegan los defectos en el proceso de fractura [24]. La modelación de dichos casos requiere esencialmente de diferentes conceptos y formalismos.

Un caso es la llamada fractura cooperativa, puesto que la fractura es principalmente controlada por el daño formado en la punta de la grieta que se propaga, en respuesta a la concentración de esfuerzos. La propagación de la grieta es entonces inseparable de la evolución del daño que acompaña la grieta, a pesar de que, en la formación de daño alrededor de la punta de la grieta, la localización de defectos, tamaños y orientaciones son estocásticos. La naturaleza probabilística de la fractura en este caso es causada por el correspondiente principio de incertidumbre.

En otro extremo está la propagación de la grieta a través de campos de defectos pre-existentes, cuando el cambio en la población es despreciable. Así, las estadísticas de defectos pre-existentes, junto con el campo de esfuerzos, el control de la trayectoria de fractura, así como la velocidad de crecimiento de la grieta. En este caso, la fluctuación espacial de la población de microdefectos está directamente reflejada en las características estocásticas de las superficies de fractura.

Los cálculos de Mecánica de Fractura Probabilística son esencialmente una serie de cálculos de mecánica de fractura determinística, realizados con ciertos parámetros de entrada evaluados de acuerdo a las simulaciones de Monte Carlo o Latin Hypercube. En este sentido, la mecánica de fractura probabilística reemplaza el clásico factor de seguridad por la probabilidad de falla. Ésta es una medida racional de fiabilidad. Esto permite la evaluación simultánea de todos los posibles tipos de falla (de frágil a dúctil) y combina todas las posibles influencias (desde grietas grandes hasta pequeños esfuerzos) en una medición. Al mismo tiempo que la probabilidad de falla es calculada, se pueden calcular factores de sensibilidad, especificando que tan sensible la fiabilidad puede ser incrementada o reducida por los factores individuales efectivos, para que por ejemplo, puedan ser evaluadas medidas para el aseguramiento de calidad o prolongación del tiempo de vida.

### 2.1.2 Mecánica Probabilística de Grietas Auto-afines.

Un enfoque alternativo para la Mecánica de la Fractura Probabilística es el basado en la Mecánica Probabilística de Grietas Auto-afines, desarrollado por A. Balankin [2-11].

El elemento clave de la mecánica probabilística de grietas auto-afines es el concepto de trayectorias admisibles de grietas, propuesto por A. Chudnovsky [24]. La teoría estadística de las trayectorias admisibles de grietas fue desarrollada por Balankin y Susarrey [21]. Demostraron que la probabilidad de que una grieta empezara en un punto dado y se extendiera hasta o a través de la profundidad  $X$ , puede ser calculado como

$$P(X) = \int_0^{\infty} P(Z, X) dZ, \dots \dots \dots (22)$$

donde:

$$P(Z, X) = \sqrt{\frac{H\Gamma^2(H+0.5)}{\pi X^{2H}}} \times \exp\left[-\frac{H\Gamma^2(H+0.5)Z}{X^H}\right] \Phi(D_\lambda) \dots \dots \dots (23)$$

$H$  es el exponente de rugosidad de la grieta,  $\Gamma(\dots)$  es la Función Gamma,  $D_\lambda$  es el coeficiente de difusión de la grieta, y  $\Phi(D_\lambda)$  es una función adimensional gobernada por la topografía estadística de los campos probables de la energía de superficie específica y de la rapidez de energía liberada.

Se demostraron [22,25-27] que el concepto de  $K_{IC}$  debería ser reemplazado por la tenacidad a la fractura fractal definido como:

$$K_{FC} = k \sqrt{\frac{E\langle\gamma(\ell_o)\rangle}{\ell_o}} \left\{ \sqrt{\frac{\xi_c}{\ell_o}} \right\}^D \dots \dots \dots (24)$$

donde:

$$D = \min\left[\frac{d-1}{H}, d\right] \dots \dots \dots (25)$$

K es un coeficiente adimensional, E es el módulo de Young,  $\langle \gamma(\ell_o) \rangle$  es la densidad de la energía de superficie microscópica promedio,  $d$  es la dimensión topológica de la grieta,  $l_o$  es la longitud de corte asociado con la microestructura del material, y  $\xi_c$  es la longitud de correlación auto-afín.

Una grieta auto-afín empieza a crecer cuando el coeficiente de intensidad de esfuerzos fractal,

$$K_f = \sigma L^\alpha, \alpha = dH - (d-1) / 2H \dots \dots \dots (26)$$

Alcanza al valor de la tenacidad de fractura fractal. En contraste con el enfoque determinista, este criterio no define únicamente la trayectoria de la grieta, sino que selecciona un conjunto admisible de trayectorias de grietas estadísticamente equivalentes.

Se encontro [25-27] que la dispersión estadística de la tenacidad de la fractura fractal satisfacía la distribución estadística del tipo log-logistic:

$$P(K_{FC}) = \langle K_{FC} \rangle \frac{K_{FC}^q}{\langle K_{FC} \rangle^q + K_{FC}^q} \dots \dots \dots (27)$$

donde  $\langle K_{FC} \rangle$  es la mediana de la distribución y  $q$  es una función del exponente de rugosidad de la grieta, H.

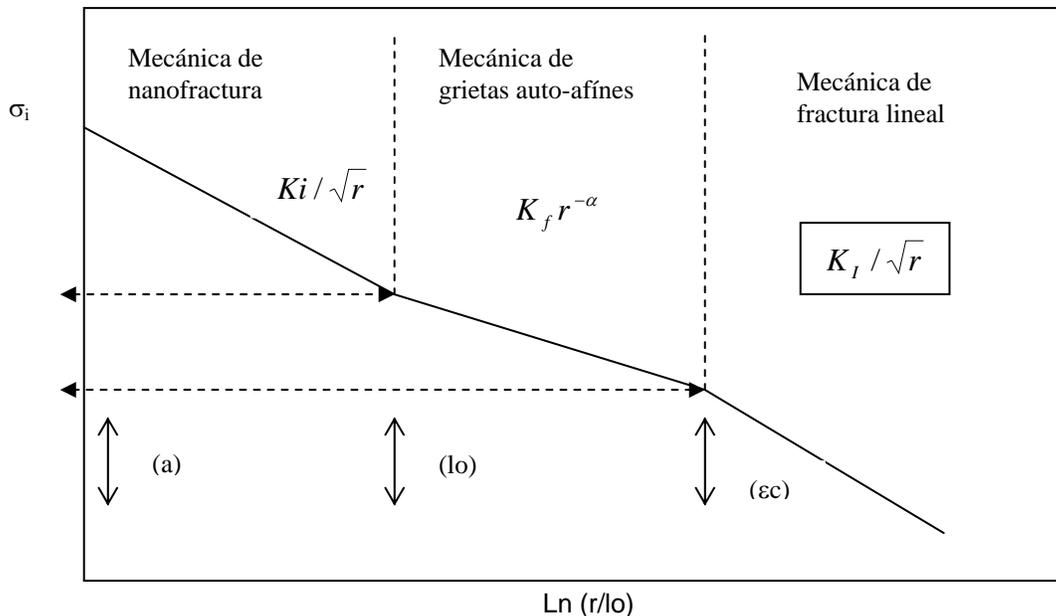
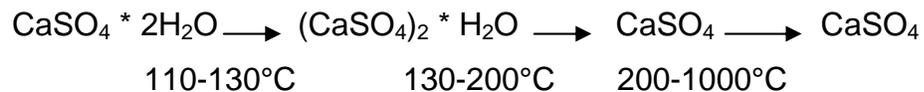


Figura 2.1 Distribución de esfuerzos en el frente de una grieta auto-afín en un sólido elásticamente lineal.

## 2.2 Yeso piedra dental (gypsum rock). Principios básicos.

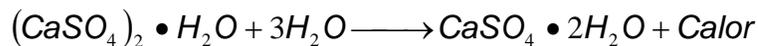
Este material es el resultado de la calcinación del mineral del yeso. En el procesamiento industrial, el yeso se muele y se somete a temperaturas de 110° a 120°C para eliminar parte del agua de cristalización. Esto corresponde al primer paso de la reacción. A medida que el resto del agua de cristalización aumenta, la temperatura se elimina y los productos se forman según lo indicado:



El componente principal de los yesos dentales y del yeso piedra es el sulfato de calcio hemihidratado  $(\text{CaSO}_4)_2 \cdot \text{H}_2\text{O}$ . Según sea la técnica de calcinación, se obtienen diferentes formas de hemihidrato y se denominarán hemihidrato  $\alpha$  o hemihidrato  $\beta$ .

Los yesos dentales disponibles en el comercio constan de una de las formas del hemihidrato. Aunque son productos procesados, contienen pequeñas cantidades adicionales de impurezas, anhidritas hexagonales u ortorrómbicas u ortorrómbicas no convertidos. También es posible agregar otros yesos y sales para controlar el tiempo y la expansión de fraguado.

### 2.2.1 Fraguado de los productos de yeso. Relación Agua-Polvo.



El producto de la reacción es, por supuesto, yeso, y la liberación de calor en la reacción exotérmica equivalente al calor que se usó al principio en la calcinación.

Los diferentes productos que se forman durante la calcinación reaccionan con agua y forman yeso, pero en diferentes grados. Por ejemplo, la anhidrita hexagonal reacciona muy rápido, mientras que la reacción de la anhidrita ortorrómbica, al mezclarse con agua, es posible que requiera de horas. Esto se debe al hecho, de que la anhidrita

ortorrómbica tiene una red cristalina más estable y densa. En cualquier caso, durante la hidratación, se forma una fase de hemihidrato antes del yeso.

La cantidad de agua y hemihidrato debe medirse en forma exacta por peso. La proporción de agua y polvo de hemihidrato suele expresarse como relación agua-polvo o como cociente que se obtiene cuando el peso (o volumen) del agua se divide entre el peso del polvo. La relación se abrevia A:P. Por ejemplo, si se mezclan 100 g de yeso con 60 ml de agua, la relación A:P será de 0.6; si se mezclan 100 g de yeso piedra con 28 ml de agua, la relación A:P será de 0.28.

La relación A:P es un factor muy importante para determinar las propiedades físicas y químicas del producto final del yeso. Por ejemplo, cuanto mayor sea la relación A:P, más largo será el tiempo de fraguado y más frágil el producto del yeso. Aunque la relación A:P varía de una marca en particular de yeso de París o de yeso piedra, las siguientes relaciones son las recomendadas: tipo 2 de París, 0.45 a 0.50; yeso piedra tipo 3, 0.28 a 0.3; yeso piedra tipo 4, 0.22 a 0.24.

A mayor cantidad de agua utilizada para la mezcla, menor será la cantidad de núcleos por unidad de volumen; en consecuencia, se prolonga el tiempo de fraguado. Dentro de los límites prácticos, a mayor tiempo y mayor rapidez de mezcla, más corto será el tiempo de fraguado. Algunos cristales de yeso se forman de inmediato cuando éste se coloca en contacto con el agua. Al empezar la mezcla, aumenta la formación de estos cristales, al mismo tiempo se rompen los cristales con la espátula mezcladora y se distribuyen en la mezcla, con la formación resultante de más núcleos de cristalización. Así, se disminuye el tiempo de fraguado.

El proceso de cristalización es un crecimiento de cristales a partir de núcleos de cristalización. Considerando el entrecruzamiento de cristales del dihidrato, no es difícil imaginar que los cristales que aumentan de tamaño a partir de los núcleos no sólo se entremezclan, sino que se interceptan mutuamente durante el crecimiento. Si el crecimiento de un cristal es interrumpido por otro, en ese punto se produce tensión en la dirección del crecimiento del cristal obstruido. Esta obstrucción y movimiento de los cristales tiene por consecuencia la aparición de microporos. Como en la práctica, el

producto de yeso tiene volumen externo mayor y volumen cristalino menor, se deduce que el material debe ser poroso. Por tanto, la estructura final, inmediatamente después del fraguado, está compuesta de cristales engranados entre los cuales hay microporos y poros que contienen el exceso de agua requerido para la mezcla. Al secarse, se pierde el exceso de agua, y el espacio vacío total aumenta notablemente.

La porosidad del producto fraguado para las diversas proporciones A:P del hemihidrato se puede calcular<sup>7</sup> como se indica en la tabla 2. Se observa que cuanto mayor sea la proporción A:P, mayor será la porosidad. Esto es de esperar, al tener en cuenta que hay menor cantidad de núcleos de cristalización cuando aumenta la proporción A:P. En consecuencia, el entrecruzamiento de los cristales de yeso es menor.

**TABLA 2**  
**Porosidad de fraguado del yeso afectada por la proporción A:P**

<b>Proporción A:P</b>	<b>Porosidad (porcentaje)</b>
0.25	10.3
0.30	15.3
0.35	20.3
0.40	25.3
0.50	35.3
0.60	45.3
1.00	85.3

### 2.2.2 Resistencia.

La resistencia de los productos de yeso por lo general se expresa en términos de resistencia a la compresión, aunque también se considera la resistencia a la tracción, si se quiere estar seguro de una guía satisfactoria de las características totales de resistencia.

Según la teoría del fraguado, la resistencia de un yeso aumenta con rapidez al endurecer el material después del tiempo de fraguado inicial. Sin embargo, el contenido de agua libre del producto de fraguado afecta de manera definitiva su resistencia. Por esta razón, se reconocen dos resistencias de los productos de yeso, la resistencia húmeda y la resistencia seca. La primera se observa cuando el agua en exceso que se requirió para la hidratación del hemihidrato se queda en la muestra de prueba. Cuando la muestra queda libre del exceso de agua, la resistencia que se obtiene es seca. Esta es dos o más veces mayor que la resistencia húmeda; en consecuencia, la diferencia entre las dos tiene una considerable importancia.

El efecto de secado en la resistencia a la compresión del yeso fraguado se muestra en la tabla 3. Es interesante notar que la ganancia relativamente pequeña en resistencia se presenta hasta después de 16 horas. Entre el periodo de 8 y 24 horas, apenas se pierde 0.6% de exceso de agua, y la resistencia se duplica. Un cambio similar en la dureza superficial se lleva a cabo durante el proceso del secado.

Una buena explicación de este efecto es el hecho de que al eliminarse los últimos restos de agua, los cristales finos del yeso se precipitan. Esto sujeta los cristales mayores. Después, si se agrega agua o si está presente en exceso, estos pequeños cristales son los primeros en disolverse, y así se pierden las uniones de refuerzo.

---

<sup>7</sup> El cálculo de la porosidad de las piezas expuestas a ensayos de tensión y tenacidad a la fractura se presentan en el Capítulo 4, sección 4.1.2.

**TABLA 3****Efecto del secado en la resistencia del yeso.**

Periodo de secado (hr)	Resistencia a la compresión (kg/cm <sup>2</sup> )	Resistencia a la compresión (psi)	Pérdida de peso (%)
2	9.6	1400	5.1
4	11.7	1700	11.9
8	11.7	1700	17.4
16	13.0	1900	-----
24	23.3	3400	18.0
48	23.3	3400	18.0
72	23.3	3400	-----

Como ya se dijo, el yeso piedra es poroso por naturaleza y a mayor relación agua-polvo, mayor será la porosidad. Con estas bases, es de esperarse que a mayor relación A:P, menor será la resistencia seca del material fraguado, como lo muestran los datos de la tabla 4. Ya que en caso de mayor porosidad, disminuye el número de cristales por unidad de volumen para un peso determinado del hemihidrato.

La resistencia a la tracción del yeso se ve menos afectada por las variaciones en la relación A:P que la resistencia a la compresión. Sin embargo, los materiales que se mezclan con una relación A:P alta tienen resistencias a la tracción de casi 25% de la correspondiente resistencia a la compresión. Cuando el material se mezcla en proporciones bajas, la resistencia a la tracción es menos del 10% de la respectiva resistencia compresiva.

Es de particular interés notar que en la tabla 4, el tiempo de espatulado afecta a la resistencia del yeso. En general, con un aumento en el tiempo de mezcla, se incrementa la resistencia a un límite que es aproximadamente equivalente a la mezcla manual normal por un minuto. Si el material se sobremezcla, los cristales de yeso formados se rompen y se presenta menor enlace cristalino en el producto final. Una

vez que se determina la relación A:P óptima, según la sugerencia del fabricante como guía, se tienen que usar las mismas proporciones de manera continua.

**TABLA 4**

**Efectos de la relación agua/polvo y tiempo de mezcla en la resistencia del yeso.**

A/P	Tiempo de mezcla (min)	Resistencia a la compresión seca (kg/cm <sup>2</sup> )	Resistencia a la compresión seca (psi)
0.45	0.5	23.4	3400
0.45	1.0	26.2	3800
0.60	1.0	17.9	2600
0.60	2.0	13.8	2000
0.80	1.0	11.0	1600

## **CAPITULO 3**

### **Estudio experimental de la caracterización del yeso piedra dental. Desarrollo de la confiabilidad del paquete computacional Benoit.**

En el presente capítulo, se realiza un análisis del diseño experimental para el material yeso piedra dental obteniendo los parámetros mecánicos representativos en los ensayos de tensión, flexión en tres puntos con muesca (SENB) y ensayos de densidad real para determinación de porosidad en las piezas ensayadas mecánicamente. Igualmente se presenta el método experimental para lo cual se obtuvo la confiabilidad del paquete computacional Benoit.

La sección 3.1 presenta el análisis general de las variables más importantes que rigen el ensayo de tensión del yeso piedra dental con lo cual se define el diseño experimental propuesto.

La sección 3.2 presenta el diseño experimental para el ensayo de flexión en 3 puntos con muesca para el material cerámico con 5 moldes de diferentes dimensiones.

En la sección 3.3 se presenta el método utilizado en la determinación de la densidad real de las piezas fracturadas bajo los ensayos mencionados anteriormente.

La sección 3.4 presenta el desarrollo para demostrar la confiabilidad del paquete computacional Benoit.

La sección 3.5 presenta los resultados obtenidos en el trabajo.

### **3.1 Diseño Experimental. para ensayo de tensión.**

En cualquier caracterización mecánica es indispensable presentar una relación de las variables más importantes que influyen sobre las propiedades mecánicas del material, así como relacionar factores y bloquear otros, esto con el fin de eliminar factores de error que pudieran presentarse.

Se compraron 300 kgs. de material de un solo proveedor para tener un solo lote para las diferentes pruebas que se realizaron. Las variables involucradas en el ensayo de tensión se presentan a continuación.

#### **3.1.1 Ensayo de tensión en el material yeso piedra dental.**

##### **Análisis de variables.**

Las variables más importantes que involucra el ensayo son:

1. Definición de dimensiones de la probeta a ensayar<sup>8</sup>.
2. Construcción de los moldes de vaciado del material<sup>9</sup>.
3. Relación agua/polvo del material, esto con el objetivo de establecer diferentes criterios en base a las propiedades mecánicas del material, y cómo altera la relación sobre ellas.
4. Tiempo de espatulado mecánico.
5. Granulometría del material<sup>10</sup>.
6. Temperatura y humedad.
7. Tiempo de secado<sup>11</sup>
8. Equipo de prueba INSTRON 4505.

---

<sup>8</sup> Las dimensiones de las probetas se establecieron de acuerdo a la norma ASTM E 8M-93

<sup>9</sup> Elaboración y diseño de moldes para ensayos de tensión y flexión en 3 puntos con muesca a cargo del Tec. José A. García.

<sup>10</sup> No se considera la granulometría del material en base polvo, como factor predominante.

<sup>11</sup> El tiempo de secado de las piezas posterior al desmoldeo fue bajo condiciones normales de temperatura ambiente.

9. Tipo de mordazas, que para el caso de cerámicos deben ser planas, sin rugosidad, tipo neumáticas.
10. Celda de carga.
11. Velocidad de desplazamiento.
12. Duración del ensayo.

### 3.1.2 Experimento propuesto.

De acuerdo al análisis de las variables involucradas para la realización de los ensayos de tensión en el material yeso piedra dental se propone el diseño experimental mostrado en la tabla 5. Las variables particulares no se especifican aquí.

**TABLA 5**

**Diseño experimental en el material yeso piedra dental para ensayo de tensión.**

<b>Variables independientes</b>	<b>Descripción</b>
Material	Yeso piedra dental
Relación agua/polvo	0.28, 0.31, 0.40 <sup>12</sup>
Tiempo de espatulado mecánico	1 min
Tiempo de secado	1 semana
Temperatura y humedad	Condiciones estándar del laboratorio
Celda de carga	5 kN
Presión de aire sobre mordazas	40 psi
Velocidad de desplazamiento del cabezal	1 mm/min

Las dimensiones de las probetas se presentan en la figura 3.1. Durante las pruebas, las piezas se tensionaron en la máquina de ensayos universales INSTRON 4505, los parámetros de celda de carga, velocidad de desplazamiento del cabezal, así como la

<sup>12</sup> Se realizaron 50 ensayos de tensión en probetas con relación agua/polvo de 0.31, 30 ensayos para la relación agua/polvo de 0.28 y 0.40. La relación de 0.31 es la que nos indica el proveedor del material.

presión ejercida sobre las mordazas se seleccionaron con base en una serie de pruebas preliminares.

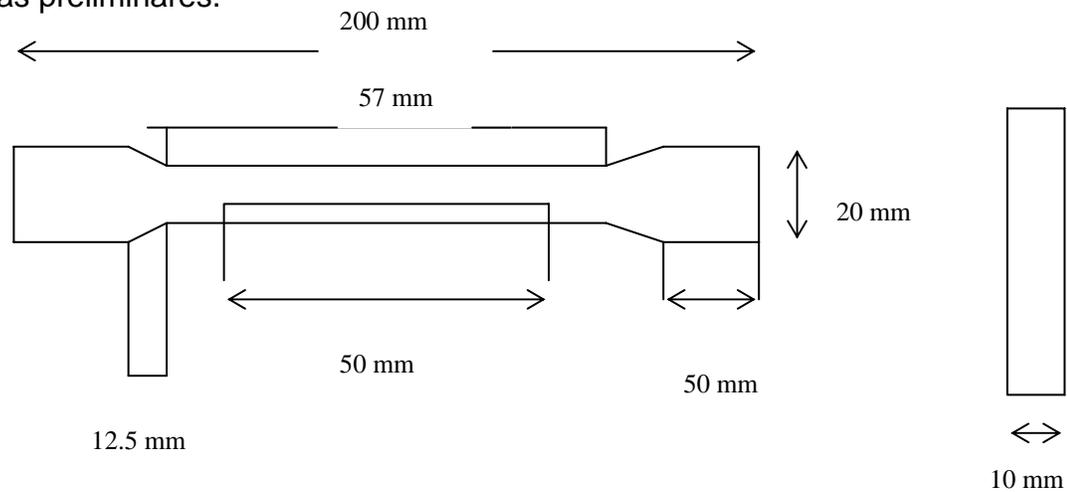


Figura 3.1 Dimensiones de las probetas de yeso estandarizadas para ensayo de tensión

**TABLA 6**  
**Características generales del yeso piedra dental utilizado en el desarrollo experimental.**

Característica	Estipulado por el proveedor
Yeso	Tipo $\alpha$ alta resistencia
Tiempo de fraguado vicat set	10 min
Resistencia a la compresión totalmente seco (kg/cm <sup>2</sup> )	490
Expansión al fraguado después de 2 h	0.1%

Los resultados obtenidos en los ensayos de tensión se presentan en la tabla 12 del Capítulo 4, sección 4.1.1.

### 3.2 Diseño experimental para ensayo de flexión en 3 puntos con muesca (SENB)<sup>13</sup>.

La prueba para determinar la tenacidad a la fractura en deformación plana, denotada por  $K_{IC}$  para el modo I de desplazamiento de abertura de grieta, ha sido normalizada con el fin de obtener resultados reproducibles<sup>14</sup>. La prueba consiste en aplicar carga hasta la fractura a una probeta que contiene una grieta preexistente, usualmente desarrollada por fatiga a partir de una entalla maquinada<sup>15</sup>. El  $K_{IC}$  es determinado a partir del registro de carga ( $P$ ) contra desplazamiento de abertura en la entalla y conociendo el tamaño de la grieta en el punto de fractura y la función  $K$  con respecto al tamaño de grieta.

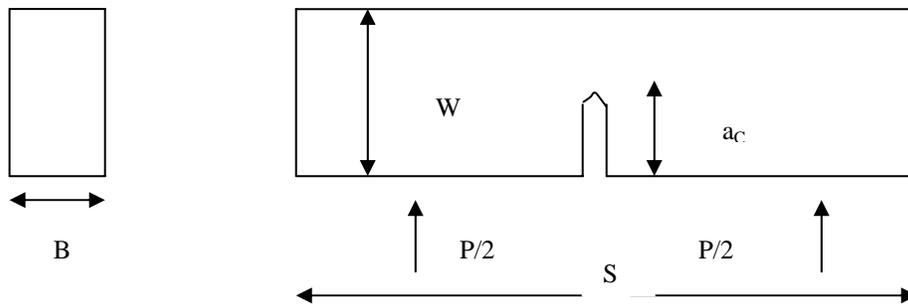


Figura 3.2 Dimensiones nominales de probetas de yeso estandarizadas para ensayo de flexión en 3 puntos con muesca.

Los materiales cerámicos, que poseen una alta fragilidad, las probetas compactas para ensayos de tenacidad a la fractura no son las más recomendadas, debido a la sujeción de mordazas que se tiene con el espécimen. Por ello, la elección de probetas SENB para el material yeso piedra dental.

Para establecer condiciones de lineal elasticidad y deformación plana se debe asegurar que el ancho  $W$  y el espesor  $B$  sean lo suficientemente grandes, de manera que la zona

<sup>13</sup> Single edge notch bend

<sup>14</sup> El procedimiento recomendado aparece en la norma americana ASTM E-399 y la norma británica BS7448; que esencialmente son similares.

plástica sea lo más pequeño posible, en otras palabras el tamaño de la probeta debe asegurar que la contribución de la deformación plástica a la tenacidad sea despreciable. Como el tamaño de la zona plástica depende de  $K$  y  $\sigma_0$  (esfuerzo de fluencia), los requerimientos actuales de tamaño para que una prueba sea válida son establecidos en las siguientes relaciones:

$$B \geq 2.5 \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_0} \right)^2 \dots\dots\dots(28)$$

$$W > 2B$$

$$0.45 < a/W < 0.55$$

Como es imposible determinar inmediatamente después de la prueba si el  $K_{IC}$  obtenido es válido, primero es necesario calcular un valor provisional denotado como  $K_Q$ , a partir de la curva carga contra desplazamiento. El valor  $K_Q$  es calculado con la carga  $P_Q$ , la cual es obtenida comparando el valor de  $P_Q$  obtenido de la intersección de una recta con una pendiente disminuída en un 5% en relación a la pendiente de la curva carga-desplazamiento<sup>16</sup>.

### 3.2.1 Cálculo de $K_Q$ .

Para especímenes en flexión, el cálculo de  $K_Q$  en unidades de  $\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$  se establece como:

$$K_Q = \left( \frac{P_Q S}{BW^{3/2}} \right) \cdot f \left( \frac{a}{W} \right) \dots\dots\dots(29)$$

donde:

$$f \left( \frac{a}{W} \right) = \frac{3 \left( \frac{a}{W} \right)^{1/2} \left[ 1.99 - (a/W)(1 - a/W) \times (2.15 - 3.93a/W + 2.7a^2/W^2) \right]}{2(1 + 2a/W)(1 - a/W)^{3/2}} \dots\dots\dots(30)$$

<sup>15</sup> La longitud de grieta crítica ha sido considerada en el diseño de la muesca, sin necesidad de realizar el ensayo de fatiga recomendado en la norma ASTM E-399.

<sup>16</sup> Las consideraciones planteadas por la norma ASTM E-399, son calculadas directamente por el equipo de la máquina INSTRON 4505 en curvas carga-desplazamiento, para el valor de  $P_Q$ .

donde:

$P_Q$  = carga determinada bajo parámetros de la máquina INSTRON 4505

$B$  = espesor del espécimen (mm)

$S$  = longitud entre rodillos (mm)

$W$  = ancho del espécimen (mm)

$a$  = longitud de grieta (mm)

Es importante resaltar como parámetro de validez de las pruebas a la carga del espécimen en proporción a la velocidad de incremento de la intensidad del esfuerzo, que tiene un rango en norma de 0.55 a 2.75 Mpa\*m<sup>1/2</sup>/s correspondiente a una velocidad de carga para especímenes en donde  $B = 0.5 W$ , al igual que la relación  $P_{max}/P_Q$  en donde la relación debe ser mayor a 1.10,  $P_{max}$  es la carga máxima registrada.

### 3.2.2 Análisis de variables.

Bajo este contexto, las recomendaciones que se derivaron de la sección 3.2.1 plantea las principales variables de procedimiento para la prueba de  $K_{IC}$ .

1. Determinación de las dimensiones críticas de la probeta para la elaboración de 5 moldes con diferente largo, ancho y espesor<sup>17</sup>.
2. Se generan los dibujos de taller<sup>18</sup>.
3. Fabricación de los moldes de acrílico por proceso de maquinado y fresado.
4. Elaboración de probetas de yeso piedra dental para ensayo de flexión en 3 puntos con muesca, la relación agua/polvo utilizada es de 0.31<sup>19</sup>
5. Desmoldeo de piezas y tiempo de secado.
6. Desbaste grueso de la superficie de las probetas en la superficie de aplicación de la carga de flexión<sup>20</sup>.

---

<sup>17</sup> El valor teórico de  $K_{IC}$  utilizado fue de 0.14 MPa\*m<sup>1/2</sup> para yeso piedra dental en el diseño dimensional para los 5 moldes [16].

<sup>18</sup> José A. García Macedo, responsable del diseño de moldes,

<sup>19</sup> Recomendado por el proveedor del material.

7. Desarrollo de prueba de flexión en 3 puntos con muesca en probetas de yeso piedra dental en la máquina INSTRON 4505.
8. Análisis de los diagramas y datos generados por las curvas carga-desplazamiento obtenidas por la máquina INSTRON 4505.
9. Cálculo preliminar de  $K_{IC}$ .
10. Validación de  $K_{IC}$ .

### 3.2.3 Experimento propuesto.

En la tabla 7 se presenta las variables involucradas para la realización del ensayo de flexión en 3 puntos con muesca, propuesta en el diseño experimental. No se especifican las variables particulares.

**TABLA 7**

**Diseño experimental en el material yeso piedra dental para ensayo de flexión en 3 puntos con muesca.**

<b>Variables independientes</b>	<b>Descripción</b>
material	Yeso piedra dental
Relación agua/polvo	0.31
Tiempo de espatulado mecánico	1 min
Tiempo de secado	1 semana
Temperatura y humedad	Condiciones ambientales del laboratorio
Celda de carga utilizada	1 kN
Longitud de apoyo de los rodillos	100,150,200,250 y 300 mm respectivamente <sup>21</sup>
Velocidad de desplazamiento del cabezal	0.5 mm/min

La tabla 8 presenta las dimensiones de los cinco moldes para la elaboración de las piezas que fueron sometidas al ensayo de flexión en 3 puntos con muesca, los moldes

<sup>20</sup> No fue necesario el preagrietamiento de las probetas sometidas a flexión, por el hecho principal que las cuñas de acrílico que genera la muesca tiene la dimensión especificada de longitud crítica ( $a_c$ ).

<sup>21</sup> Dimensiones especificadas para cada molde.

fueron elaborados de material de acrílico, son desmontables y seccionables. Asimismo, las secciones de armazón de los moldes son de 12.5 mm de espesor en forma de L, sobrepuestos para establecer la dimensión de ancho  $W$  para cada molde. En el proceso de fabricación de las probetas, el molde es colocado sobre una base que contiene una cuña que es la que genera la longitud de la muesca  $a_c$ . Posteriormente, el molde es sujetado y afianzado por tornillos que tienen diámetros de 3/4 " con longitudes variables que van de 1.5" a 3.5".

**TABLA 8**

**Dimensión de los moldes para la elaboración de los especímenes de prueba**

Dimensión	Molde 1	Molde 2	Molde 3	Molde 4	Molde 5
Longitud total (L) en mm	150	200	250	300	350
Ancho (W) en mm	25	37.5	50	62.5	70
Espesor (B) en mm	5,10,15,20 y 25				
Longitud de muesca ( $a_c$ ) en mm	13.75	20.62	27.5	34.37	41.25
Ángulo de muesca ( $^\circ$ )	60	60	60	60	60

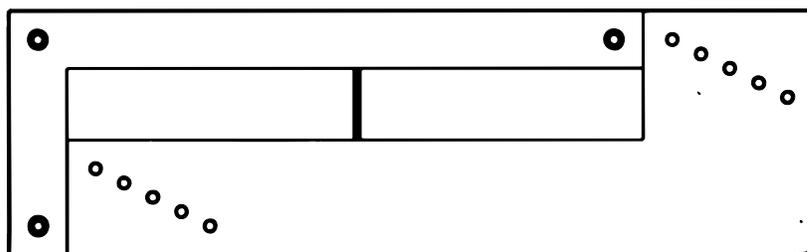


Figura 3.3 Diseño del molde para la elaboración de los especímenes de prueba para ensayos de flexión en 3 puntos con muesca.

### **3.2.4 Observación en el Microscopio Electrónico de Barrido.**

La microestructuras de la superficies de fractura de piezas sometidas al ensayo de tensión de yeso con relación agua/polvo de 0.31, 0.28 y 0.40 fueron observadas tanto en su sección transversal, como en la sección de fractura con la ayuda del equipo Leica Cambridge Ltd 360. Se estipula la observación bajo estas características con el objetivo de analizar dos superficies diferentes y estudiar la morfología de los cristales del hemihidrato, así como el tamaño del cristal promedio para cada relación agua/polvo. Se presentan las observaciones en la sección de resultados.

### **3.3 Determinación de la densidad real de las piezas sometidas al ensayo de tensión, y flexión en 3 puntos con muesca.**

Posterior a la realización de los ensayos de tensión y tenacidad a la fractura de las piezas, éstas se sometieron a la evaluación de la densidad real de cada una de ellas, es decir, 2 segmentos de cada una de ellas haciendo un total de 220 determinaciones de la densidad real para el ensayo de tensión<sup>23</sup>, y de 546 determinaciones de densidad real para el ensayo de flexión en 3 puntos con muesca<sup>24</sup>. Para ello, fue necesario consultar las normas ASTM C 135-96 y ASTM C 604-86, y manuales de anales de Antropología para terrones cerámicos (Blake 1965) [14].

Ello con el fin de analizar si la porosidad era un factor predominante en los resultados obtenidos de las propiedades mecánicas del material para cada relación agua/polvo, principalmente el esfuerzo máximo y el módulo de rigidez, para el ensayo de tensión, y  $K_Q$  con el esfuerzo máximo para los diferentes espesores utilizados en las piezas ensayadas por cada molde en el ensayo de flexión. Se utilizó el principio de Arquímedes, es decir, diferencia de pesos, tanto de la piezas pesadas en el aire, como

---

<sup>23</sup> Para la relación agua/polvo de 0.31 fueron 50 ensayos, 0.28 se realizaron 30 ensayos al igual para la relación de 0.40

de las mismas piezas pesadas en agua. Aquí lo principal era que el material no absorbiera agua durante la determinación del peso en este medio, para que el peso inicial de la muestra pesada en el aire fuera igual al peso de la pieza posterior a la inmersión en agua. Para ello fue necesario investigar algún elemento repelente al agua, que el yeso no absorbiera, pues se utilizó antes como muestreo en las piezas laca para cabello y sellador no dando los resultados esperados.

El método de Blake indica para la determinación real de la densidad de las piezas, que los terrones cerámicos se introduzcan en parafina líquida y posterior al secado realizar la determinación del peso de la muestra + parafina, cuya densidad es de 0.9 gr/cm<sup>3</sup>. Con este método puede calcularse la densidad de la pieza por medio de su masa y volumen. El equipo empleado para determinar el peso de las piezas fue una balanza granataria con precisión de 0.001 g O-Hours 330 g, en el caso de las piezas sometidas al ensayo de tensión, y la balanza Explorer O-Hours 2000g con precisión de 0.001 g para las piezas sometidas al ensayo de tenacidad a la fractura.

El procedimiento es el siguiente:

- a) Peso de la muestra sin parafina (W1).
- b) Peso de la muestra con parafina en el aire (W2).
- c) Peso de la muestra con parafina en el agua (W3).
- d) Establecer la densidad de agua destilada igual a 1 gr/cm<sup>3</sup>,

Con ello fue necesario establecer una fórmula para la determinación de la densidad real de las piezas, cuya función estableciera también la acción de la parafina<sup>25</sup> con la muestra de yeso:

$$\rho = \frac{W_1}{W_2 - W_3 - 0.11M_p} \dots\dots\dots(31)$$

donde M<sub>p</sub> corresponde a la masa de la parafina que es el resultado de W1-W2, el factor de 0.11 es el volumen de parafina que recubre a la pieza.

---

<sup>24</sup> Molde 1 90 ensayos, molde 2 46 ensayos al igual para los 3 moldes restantes.

<sup>25</sup> Densidad de parafina 0.9 g/cm<sup>3</sup>

Con ello el cálculo de la porosidad de las piezas resulta en:

$$P = \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \dots\dots\dots(32)$$

donde P es la porosidad,  $\rho$  y  $\rho_0$  son las densidades del material con poros y sin poros respectivamente. El valor de  $\rho_0$  ha sido tomada para el yeso piedra dental como  $2.31 \text{ gcm}^{-3}$  [11].

### **3.4 Desarrollo experimental para demostrar la confiabilidad del paquete Benoit.**

El programa ha sido de gran utilidad para la interpretación de la dimensión fractal y por consiguiente, para la evaluación del exponente de Hurst. El programa se enfoca en las diferentes evaluaciones y métodos para determinar el número fractal en cuerpos de auto-similitud y auto-afines. Como las grietas se caracterizan como superficies auto-afines, es indispensable verificar la confiabilidad del programa dentro de los métodos de evaluación que maneja. Ellos son cinco:

- Variogram.
- Power Spectrum.
- Roughness Length.
- R/S
- Wavelengths.

El objetivo realmente es enfocarnos cuál de estos cinco métodos conlleva a una mejor evaluación para determinar la rugosidad de la superficie de fractura del yeso, cuyo inicio de evaluación bajo este paquete, fue realizar cien placas de yeso con un espesor de 2 mm aproximadamente con dimensiones de  $16 \times 16 \text{ cm}^2$ , fracturarlas manualmente,

digitalizar la imagen, y posterior hacer la evaluación por el paquete Benoit para determinar el exponente de rugosidad en este material.

Se enfoca entonces en un coeficiente de rugosidad de 0.7 (teórico), el paquete nos brinda miles de trazos auto-afines de acuerdo al número de rugosidad propuesto, ello nos permite capturar 300 trazos los cuales archivamos para su evaluación por los métodos que maneja el programa Benoit, para el caso de determinación del coeficiente de rugosidad. La cantidad de espectros seleccionados nos ayuda principalmente en el estudio probabilístico y estadístico del número seleccionado. Los archivos se guardaron bajo el formato \*.ts.

Los métodos de fractales auto-afines no necesariamente nos daban como resultado el número de rugosidad de 0.7, a pesar de que los espectros estaban bajo ese número, por lo que fue necesario observar la distribución de los 300 datos de acuerdo a los 300 espectros, y determinar con éstos datos experimentales su comportamiento bajo la distribución de probabilidad normal para cada método, y así seleccionar cual de ellos era confiable para caracterizar la superficie de fractura de la placa de yeso.

Si la correlación de datos experimentales con los teóricos ajustados bajo la distribución de probabilidad normal era mayor al 98%, entonces la confiabilidad del programa esta comprobado. Se plantea en la sección de resultados la distribución de probabilidad de los métodos de evaluación del programa para fractales auto-afines para los 300 datos del generador de trazas.

Considerando la confiabilidad del programa, se evaluó la superficie de fractura de las cien placas de yeso, por los métodos de Variogram, R/S y Wavelengths obteniendo un promedio general del coeficiente de Hurst de los tres métodos Lo interesante es que con ello ahorramos tiempo en la evaluación de la topografía de la superficie de fractura<sup>26</sup>. Los resultados se presentan en la sección 3.5.4.

---

<sup>26</sup> Se escanea la superficie de fractura de las placas de yeso, se digitaliza la imagen en tonos blanco y negro con la ayuda del paquete Scion Image y se obtiene un gráfico de perfil de la morfología de fractura, se archiva la imagen en formato \*.ts para su evaluación en el paquete Benoit.

### 3.5 Resultados.

#### 3.5.1 Pruebas de tensión.

Las tablas que contienen los resultados de los ensayos de tensión y flexión en 3 puntos con muesca al igual que los resultados de porosidad se presentan en los Anexos A y B respectivamente.

Las figuras 3.4, 3.5 y 3.6 nos muestran las gráficas representativas esfuerzo-deformación obtenidas para cada relación agua/polvo de las piezas ensayadas, la característica de las curvas nos muestra una curva de un material típicamente frágil en donde el esfuerzo máximo representa el esfuerzo de fractura del material

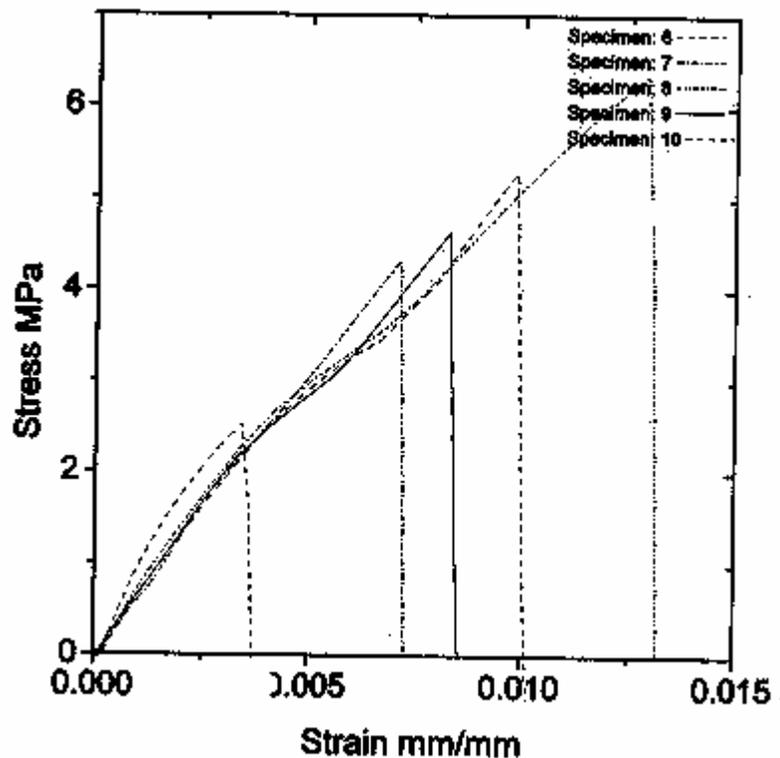
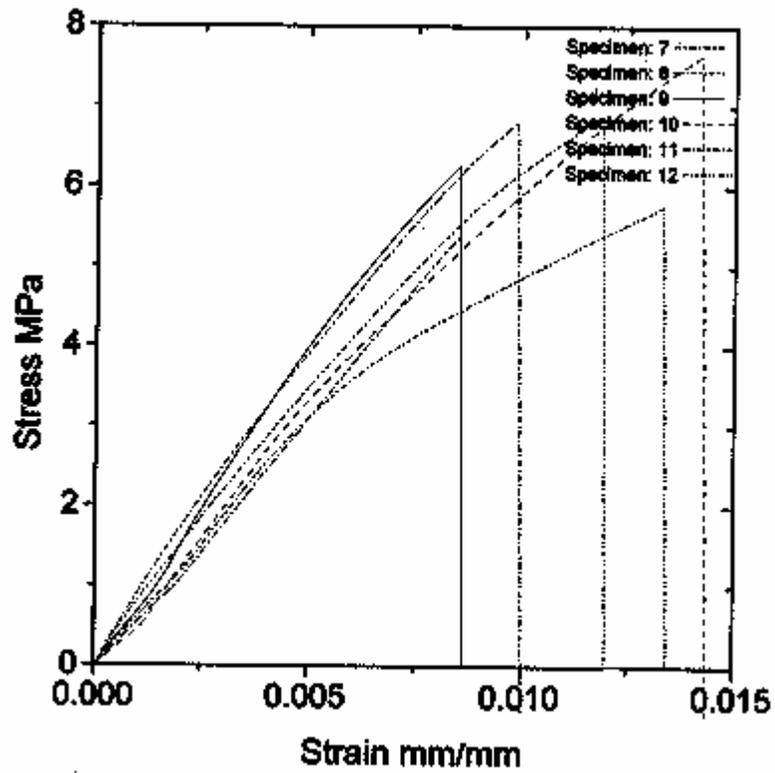
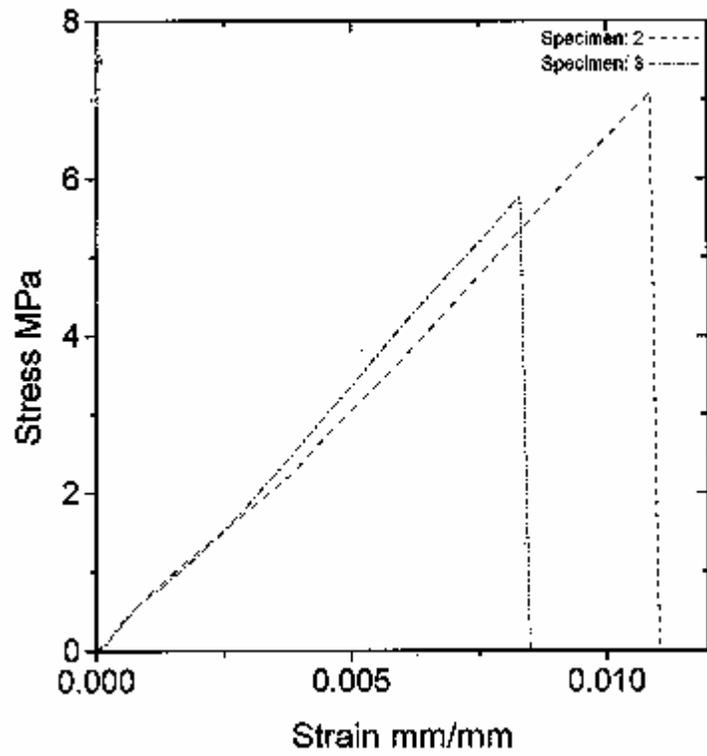


Figura 3.4 Curva esfuerzo-deformación característica del yeso piedra dental relación agua/polvo 0.28



Figuras 3.5 y 3.6 Curva esfuerzo-deformación característica del yeso piedra dental relación agua/polvo 0.31 y 0.40 respectivamente.

Las consideraciones prácticas de estas curvas representativas en base a las tres relaciones agua/polvo, establece que el esfuerzo máximo disminuye conforme aumenta la relación agua/polvo. La teoría establece esta condición, sin embargo, los factores que intervienen en la caracterización mecánica de este material son demasiados, uno de los principales la humedad presente en la sala de pruebas, la cual no era constante, y analizando que el agua constituye uno de los parámetros fundamentales en la conglomeración sólida del yeso, ésta influye drásticamente en las propiedades mecánicas del material; es un factor que no se podía controlar. Con ello, la variabilidad en las gráficas presentes para cada relación.

### 3.5.2 Pruebas de tenacidad a la fractura.

La figura 3.7 nos presenta las curvas obtenidas en el ensayo de flexión en 3 puntos con muesca para el material yeso piedra dental molde 3 con espesores de 10, 15, 20 y 25 mm. de espesor. El inicio de cada curva presenta una extensión que genera el movimiento o juego del cabezal en donde se encuentra la acción de la carga de compresión con la probeta. El cambio de pendiente en las curvas indica el esfuerzo en donde la grieta empieza a propagarse.

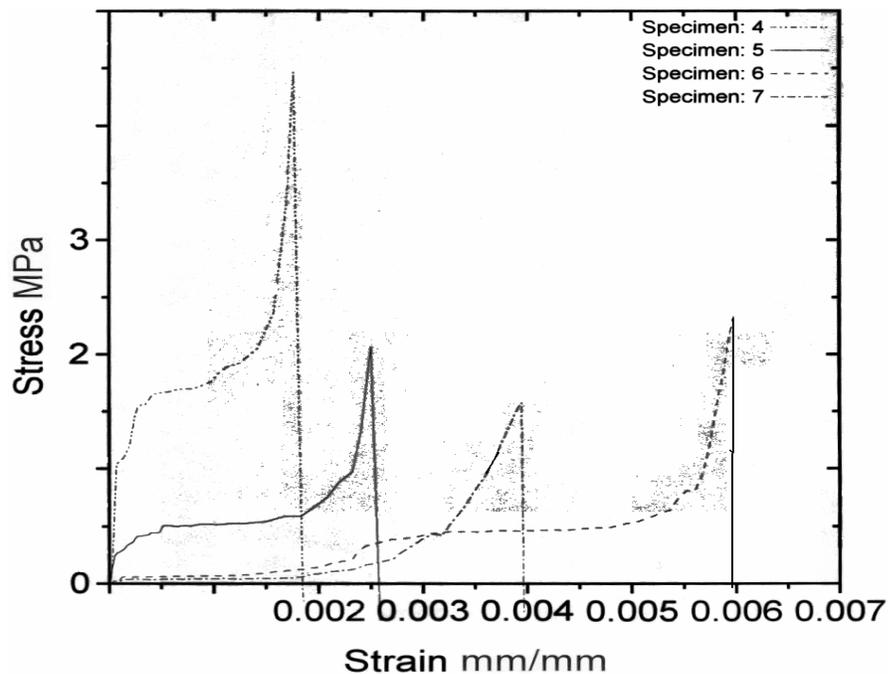


Figura 3.7 Curva esfuerzo deformación molde 3 espesor 10,15,20 y 25 mm, molde 3, ensayo de flexión en 3 puntos con muesca. Relación agua/polvo 0.31

**TABLA 9**

**Valores de  $K_Q$ , esfuerzo máximo y porosidad promedios obtenidos en el ensayo de tenacidad a la fractura para cinco moldes con diferentes dimensiones.**

**Molde 1**

<b>Espesor (mm)</b>	<b>Porosidad</b>	<b>Esfuerzo máximo (MPa)</b>	<b><math>K_Q</math> (MPa*m<sup>1/2</sup>)</b>
<b>5</b>	<b>0.406</b>	<b>4.214</b>	<b>0.210</b>
<b>10</b>	<b>0.262</b>	<b>2.418</b>	<b>0.281</b>
<b>15</b>	<b>0.264</b>	<b>1.132</b>	<b>0.215</b>
<b>20</b>	<b>0.285</b>	<b>0.908</b>	<b>0.233</b>
<b>25</b>	<b>0.271</b>	<b>0.892</b>	<b>0.266</b>

**Molde 2**

<b>Espesor (mm)</b>	<b>Porosidad</b>	<b>Esfuerzo máximo (MPa)</b>	<b><math>K_Q</math> (MPa*m<sup>1/2</sup>)</b>
<b>5</b>	<b>0.434</b>	<b>8.069</b>	<b>0.227</b>
<b>10</b>	<b>0.265</b>	<b>3.479</b>	<b>0.376</b>
<b>15</b>	<b>0.302</b>	<b>2.162</b>	<b>0.351</b>
<b>20</b>	<b>0.299</b>	<b>1.597</b>	<b>0.337</b>
<b>25</b>	<b>0.288</b>	<b>1.110</b>	<b>0.297</b>

**Molde 3**

<b>Espesor (mm)</b>	<b>Porosidad</b>	<b>Esfuerzo máximo (MPa)</b>	<b><math>K_Q</math> (MPa*m<sup>1/2</sup>)</b>
<b>5</b>	<b>0.398</b>	<b>2.870</b>	<b>0.269</b>
<b>10</b>	<b>0.292</b>	<b>2.729</b>	<b>0.363</b>
<b>15</b>	<b>0.289</b>	<b>2.580</b>	<b>0.273</b>
<b>20</b>	<b>0.276</b>	<b>1.600</b>	<b>0.271</b>
<b>25</b>	<b>0.288</b>	<b>1.201</b>	<b>0.264</b>

#### Molde 4

<b>Espesor (mm)</b>	<b>Porosidad</b>	<b>Esfuerzo máximo (MPa)</b>	<b>K<sub>Q</sub> (MPa*m<sup>1/2</sup>)</b>
<b>5</b>	<b>0.470</b>	<b>3.987</b>	<b>0.153</b>
<b>10</b>	<b>0.264</b>	<b>3.775</b>	<b>0.316</b>
<b>15</b>	<b>0.266</b>	<b>1.755</b>	<b>0.247</b>
<b>20</b>	<b>0.268</b>	<b>1.340</b>	<b>0.214</b>
<b>25</b>	<b>0.264</b>	<b>1.287</b>	<b>0.223</b>

#### Molde 5

<b>Espesor (mm)</b>	<b>Porosidad</b>	<b>Esfuerzo máximo (MPa)</b>	<b>K<sub>Q</sub> (MPa*m<sup>1/2</sup>)</b>
<b>5</b>	<b>0.485</b>	<b>4.525</b>	<b>0.225</b>
<b>10</b>	<b>0.294</b>	<b>4.434</b>	<b>0.339</b>
<b>15</b>	<b>0.272</b>	<b>2.659</b>	<b>0.305</b>
<b>20</b>	<b>0.273</b>	<b>0.884</b>	<b>0.154</b>
<b>25</b>	<b>0.261</b>	<b>0.980</b>	<b>0.174</b>

Los valores presentados en la tabla 9 se analizan en el Capítulo 4.

#### TABLA 10

**Valores del tamaño de cristal promedio para las relaciones agua/polvo del yeso piedra dental**

<b>Relación agua/polvo</b>	<b>Tamaño de cristal promedio (micras)</b>
0.28	4.19
0.31	4.26
0.40	3.30

### 3.5.3 Resultados de la observación en el Microscopio Electrónico de Barrido.

La figura 3.8 nos muestra la sección de fractura de una pieza de yeso sometida a fuerzas de tensión, se puede observar la zona de fractura con porosidad en su superficie, a comparación de la parte transversal en donde no existe imperfecciones. Igualmente puede observarse en la parte transversal de la pieza el recubrimiento de una capa de oro, para poder ser observada en el SEM.

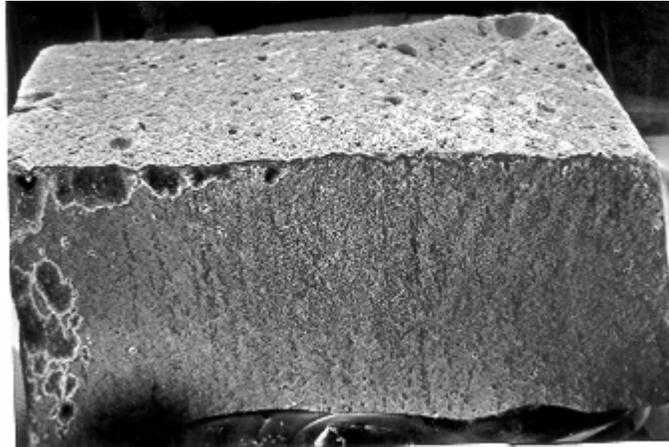


Figura 3.8 Sección total de observación de la pieza de yeso dental fracturada por ensayo de tensión. Relación 0.31. Magnificación 10x

La figura 3.9 muestra la sección transversal de la misma pieza de yeso en donde puede observarse los cristales del hemihidrato en forma caótica y conglomerada, la morfología de los cristales tienen aspecto acicular.

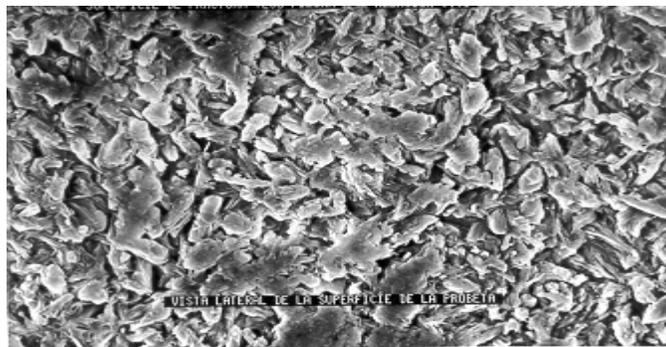


Figura 3.9 Sección transversal de la pieza de yeso con presencia de cristales del hemihidrato en forma conglomerada y acicular. No se observan imperfecciones en la superficie. Magnificación 1000x Rel. 0.31

Las figuras 3.10 y 3.11 nos muestran la superficie de fractura de la pieza de yeso, la superficie presenta porosidad en la superficie con tamaño promedio de 0.5 mm de los poros, asimismo la superficie es rugosa, debido a lo que muestra la figura 3.11 existen cristales del hemidrato cortados por la generación de esta superficie de fractura, puede manifestarse que no existe una gran conglomeración de los cristales en su formación debido a la ausencia de agua en las zonas donde se presentan los poros. A pesar de que es una zona de fractura, se verifica que el material es por naturaleza poroso, como se comenta en capítulos anteriores.

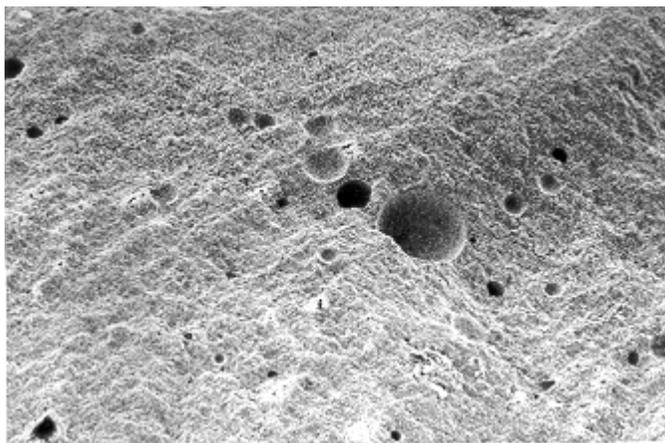


Figura 3.10 Sección de zona de fractura del material yeso piedra dental. Observación de rugosidad en la superficie, con presencia de poros con tamaño promedio de 0.5 mm. Relación 0.31 Magnificación 25x

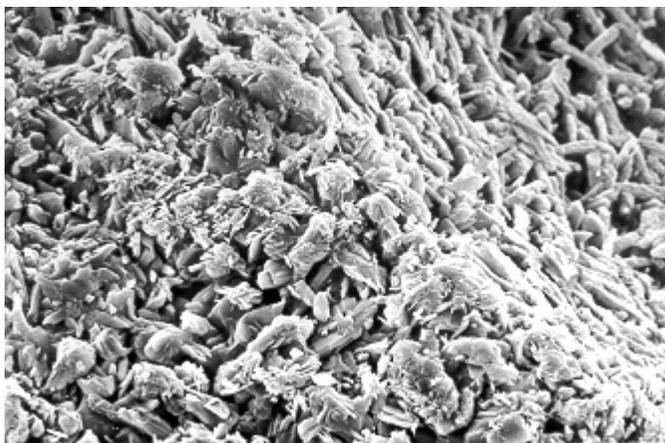


Figura 3.11 Sección de zona de fractura del material yeso piedra dental. Se observa desnivel en la superficie debido a la cercanía a un poro creado en ella. Es posible observar cristales del hemihidrato cortados por la acción de tensión sobre la superficie. Relación 0.31 Magnificación 1000x.

La figura 3.12 nos muestra un acercamiento en la superficie de fractura de la pieza de yeso, en donde puede observarse los cristales del hemihidrato cortados en la parte más externa de la microfotografía, la perspectiva de la foto nos enseña un cierto apilamiento de los cristales para formar el conglomerado. La morfología del cristal es acicular.

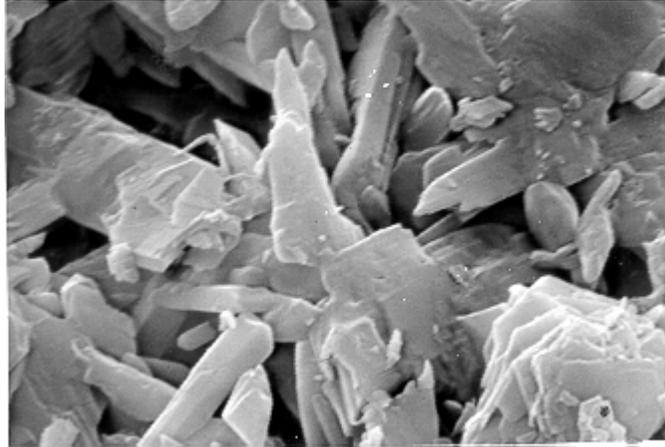


Figura 3.12 Sección de la zona de fractura de la pieza de yeso, existe apilamiento de cristales, así como la observación de cristales cortados en la parte más externa. Relación 0.31. Magnificación 5000x.

Las figuras 3.13 y 3.14 nos muestran las microfotografías del material yeso piedra dental sometido a ensayo de tensión con relaciones agua/polvo de 0.28 y 0.40 respectivamente. Se aprecia la diferencia en la morfología de los cristales del hemihidrato, al igual en el apilamiento de los mismos. Existe igualmente diferencia en el tamaño de los cristales, indicador posible del % de porosidad en las piezas, y la influencia en el parámetro de tenacidad a la fractura. Los resultados del promedio del tamaño de los cristales se presentan en la tabla 10<sup>27</sup>.

---

<sup>27</sup> Se realizaron 50 mediciones del tamaño del cristal para cada relación agua/polvo.



Figura 3.13 Sección de la zona de fractura de la pieza de yeso, existe apilamiento de cristales, así como la observación de cristales cortados en la parte más externa. Relación 0.28. Magnificación 5000x.

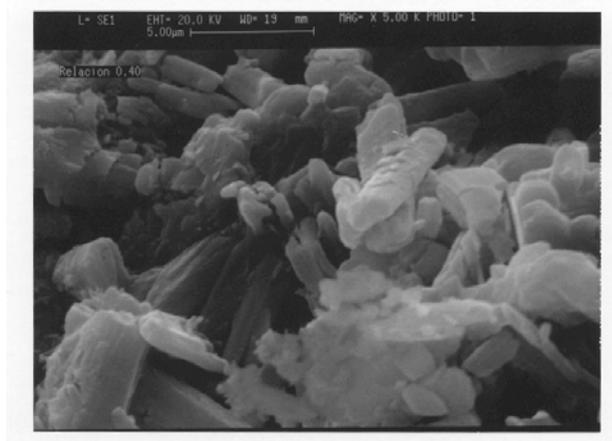


Figura 3.14 Sección de la zona de fractura de pieza de yeso piedra dental, se observa el apilamiento de cristales cortados, con geometría tipo acicular, sin orientación preferente. Relación 0.40. Magnificación 5000x.

### 3.5.4 Cálculo del coeficiente de rugosidad (Hurst).

Las imágenes digitalizadas de las placas de yeso fracturadas manualmente, y evaluadas por el paquete Benoit, para determinar el exponente de rugosidad de este material con relación agua/polvo de 0.31, en donde se establecen 100 imágenes digitalizadas, y se fueron evaluando por los métodos correspondientes que el programa maneja (Variogram, Wavelengths y R/S). Se obtuvo el promedio del exponente de rugosidad para las diferentes imágenes dando como resultado la rugosidad igual a 0.76. La imagen fue escaneada, digitalizada con ayuda del paquete Scion Image, archivada en formato \*.ts y posteriormente su evaluación.

La tabla 11 nos presenta estos resultados. Las figuras posteriores a la tabla presentada nos muestran las imágenes digitalizadas de las placas de yeso fracturadas.

**TABLA 11**  
**Determinación del coeficiente de rugosidad en placas de yeso piedra dental mediante el empleo del paquete Benoit.**

	R/S	Variogram	Wavelengths
<b>Promedio</b>	<b>0.61845</b>	<b>0.90307</b>	<b>0.77217</b>
<b>Mediana</b>	<b>0.5985</b>	<b>0.9215</b>	<b>0.7845</b>
<b>Moda</b>	<b>0.619</b>	<b>0.971</b>	<b>0.826</b>
<b>Desviación Estándar</b>	<b>0.1377</b>	<b>0.0702</b>	<b>0.0895</b>



Figura 3.15 Perfil de la zona de fractura digitalizada a 600 pps de una placa de yeso piedra dental con número 82<sup>28</sup>. Relación agua/polvo 0.31.

Perfil de la zona de fractura de la placa de yeso no. 88

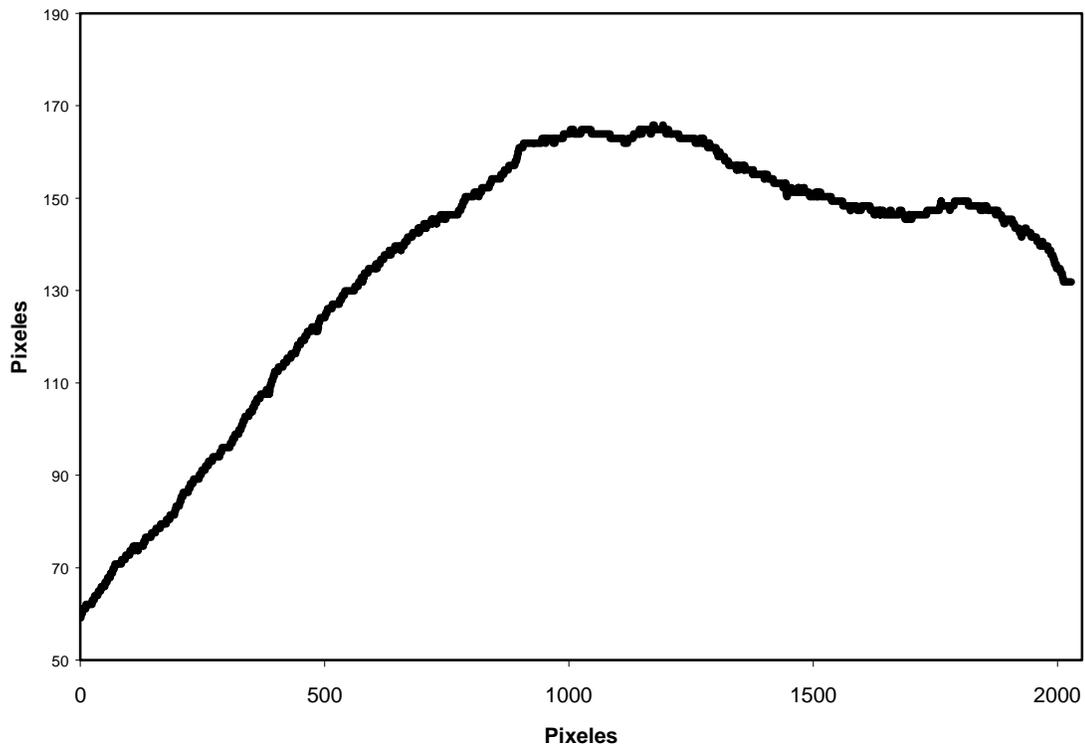


Figura 3.16 Perfil de gráfica de la zona de fractura de la placa de yeso piedra dental número 82, para su evaluación en el paquete Benoit.

Cabe resaltar, que las grietas tomaron diferentes trayectorias, con lo que no se tuvieron perfiles de fractura semejantes. Esto demuestra, que la interpretación de la mecánica de grietas auto-afines, permite una serie de trayectorias admisibles en donde su comportamiento es aleatorio, posee invariancia auto-afín dentro del rango extremadamente amplio de escala de longitud.

---

<sup>28</sup> Los valores de placa corresponden al código empleado para su identificación y su evaluación en el paquete Benoit, La evaluación de las 100 placas por los métodos auto-afines se presentan en el Anexo C.

## **CAPITULO 4**

### **ANALISIS DE RESULTADOS**

En el presente Capítulo se discuten los resultados experimentales obtenidos para la evaluación del material yeso piedra dental, bajo el ensayo de tensión, ensayo de flexión en 3 puntos con muesca, influencia de la densidad real del material sobre los parámetros mecánicos y la interpretación del nuevo concepto de tenacidad a la fractura fractal. La presentación de los datos que son mostrados en este capítulo son originados en el capítulo 3 y en los Anexos A, B, D, E y F.

En la sección 4.1 se analizan los valores obtenidos bajo el ensayo de tensión de las 3 relaciones agua/polvo utilizadas, el criterio de análisis bajo diferentes distribuciones de probabilidad; bajo el mismo criterio el análisis de la densidad real de las piezas y demostrar la relación significativa para el material de sus propiedades mecánicas con los resultados de densidad.

La sección 4.2 analiza los valores de  $K_Q$  obtenidos para los cinco moldes, así como la influencia de la porosidad en el espesor de las muestras y en los parámetros mecánicos, igualmente la tenacidad efectiva a la fractura.

La sección 4.3 proporciona los criterios utilizados para la evaluación del concepto de tenacidad a la fractura fractal, relacionando los valores obtenidos experimentalmente bajo el ensayo SENB y la rugosidad de las placas de yeso.

## 4.1 Distribución de los datos originados en la caracterización mecánica del yeso piedra dental.

Los resultados de las pruebas en los especímenes envuelve mediciones que son sujetas a variaciones, y estos resultados de una serie similar de especímenes nos muestran variaciones entre ellos. Posterior a que las mediciones han sido corregidas por el efecto de errores sistemáticos, es usualmente encontrar que las variaciones son ajustadas considerando una distribución adecuada. Para el caso, en donde existan una gran cantidad de datos, las variaciones en las mediciones y las mediciones de las propiedades han sido encontradas que coinciden con las variaciones correspondientes a las consideraciones teóricas. **Cuando los datos son pocos, la coincidencia no siempre es buena**, pero por conveniencia los conceptos demostrados de la teoría de la probabilidad (para muchos números) son aplicados dando un trabajo aplicado de la utilización de datos.

Los datos presentados en las diferentes secciones de este Capítulo nos muestran un orden aleatorio de ellos, igualmente válidos, la lista de resultados son mencionados como datos no agrupados. Es difícil determinar su distribución y rango en general, por lo que los datos tienen que estar agrupados en orden ascendente, con la finalidad de realizar una distribución en serie. Las magnitudes a analizar son característicos de la evaluación de los materiales cerámicos en pruebas mecánicas, principalmente el esfuerzo máximo y el módulo de rigidez (módulo de Young), para el caso del ensayo de tensión, y  $K_{IC}$  y esfuerzo máximo para el ensayo de flexión en 3 puntos con muesca. Usualmente estas series están representadas por datos homogéneos, y por valores no constantes pero vinculados a una función de frecuencia-distribución. En las pruebas de tensión y tenacidad a la fractura realizados, el empleo de la máquina, el movimiento de mordazas, la presión de aire sobre ellas, movimiento del soporte de carga sobre la pieza, la humedad y la temperatura son usualmente mantenidas entre los límites conocidos (celdas de carga, velocidad de desplazamiento del cabezal, etc.). Las variaciones de las mediciones bajo estos aspectos son minimizados por el propio diseño y uso. Consecuentemente, estos límites (errores) son pequeños en comparación con las variaciones usuales en la medición de las propiedades de

especímen a especímen. Cuando los errores son grandes y sistemáticos, causados por el cambio de temperatura (tomar referencia en la relación agua/polvo 0.28 para el ensayo de tensión), corrección del paquete de almacenamiento de datos en la máquina INSTRON 4505, las correcciones son directamente aplicadas o el procedimiento es usado para bloquear estos factores, o en su caso eliminarlos. Afortunadamente, los datos en las pruebas mecánicas del yeso piedra dental son predominantemente afectadas por la variabilidad de la característica observada (llámese relaciones agua/polvo, dimensiones de las piezas de acuerdo al molde para SENB, etc.).

Es de interés para nuestros ensayos determinar el número de datos que caen por debajo o por arriba de un cierto valor. Por esta razón, es importante establecer la gráfica de frecuencia acumulativa para los datos experimentales de cada relación agua/polvo para la determinación del esfuerzo máximo y el módulo de rigidez correspondiente, igual estos datos experimentales tienen que ser ajustados por una distribución probabilística, y analizar el coeficiente de correlación de los datos experimentales y los datos teóricos ajustados por la función de distribución probabilidad. Obteniendo el coeficiente de correlación podemos interpretar el grado de dispersión entre los valores presentados tanto experimental como teóricamente.

La distribución de probabilidad toma una forma peculiar comúnmente llamada curva de campana. Esta curva representa una línea recta para la distribución de probabilidad cuando la ordenada es graficada en una escala de probabilidad (papel semilog). Las figuras 4.1 a 4.6 nos presentan la distribución de probabilidad del esfuerzo máximo y el módulo de Young obtenido en el ensayo de tensión para la relación de 0.28, 0.40 y 0.31.

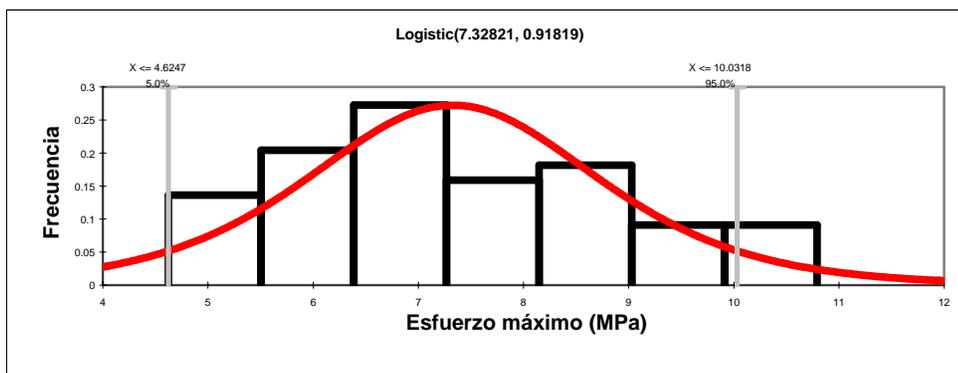
Podemos comprender que la variabilidad en los datos obtenidos son consecuencia de los resultados de los cambios que ocurren en las condiciones en las cuales se hacen las observaciones. Y aunque significativamente las muestras son homogéneas, existen diferencias en la forma de elaboración de las piezas, principalmente a que el material es muy susceptible a la humedad y a la temperatura. En realidad todo el trabajo experimental presentado tiene esta naturaleza y la variabilidad es el común denominador de este problema de naturaleza mecánica.

#### 4.1.1 Distribuciones de probabilidad.

Las distribuciones de frecuencia acumulativa encontradas para cada relación agua/polvo no necesariamente deben ser distribuciones normales, esto en el caso de la relación de 0.31, la cual presenta frecuencias acumulativas del tipo logístico y gamma (llamada igualmente frecuencia acumulativa de valor extremo). Por ello es necesario encontrar la mejor distribución para representar los datos de los parámetros mecánicos del material. Con la ayuda del programa **RISK** apoyamos los resultados de simulación para que éstos sean confiables. El programa nos da la alternativa de encontrar la mejor distribución de probabilidad, mediante la utilización de pruebas de bondad de ajuste más comúnmente utilizadas que nos indican el rango que tiene cada distribución de acuerdo a los datos introducidos. Estas pruebas son de Anderson-Darling, Chi-cuadrada y Kolmogorov-Smirnov. Además, nos presenta de acuerdo a cada distribución, los parámetros de escala y de forma, parámetros estadísticos (media, mediana, moda, etc.) tanto experimentalmente como ajustados teóricamente. El programa facilita realizar estadística descriptiva de datos, graficar diferentes distribuciones, determinar el número de réplicas para correr un modelo de simulación, así como determinar el tamaño de la muestra para toma de tiempos de proceso y transportación.

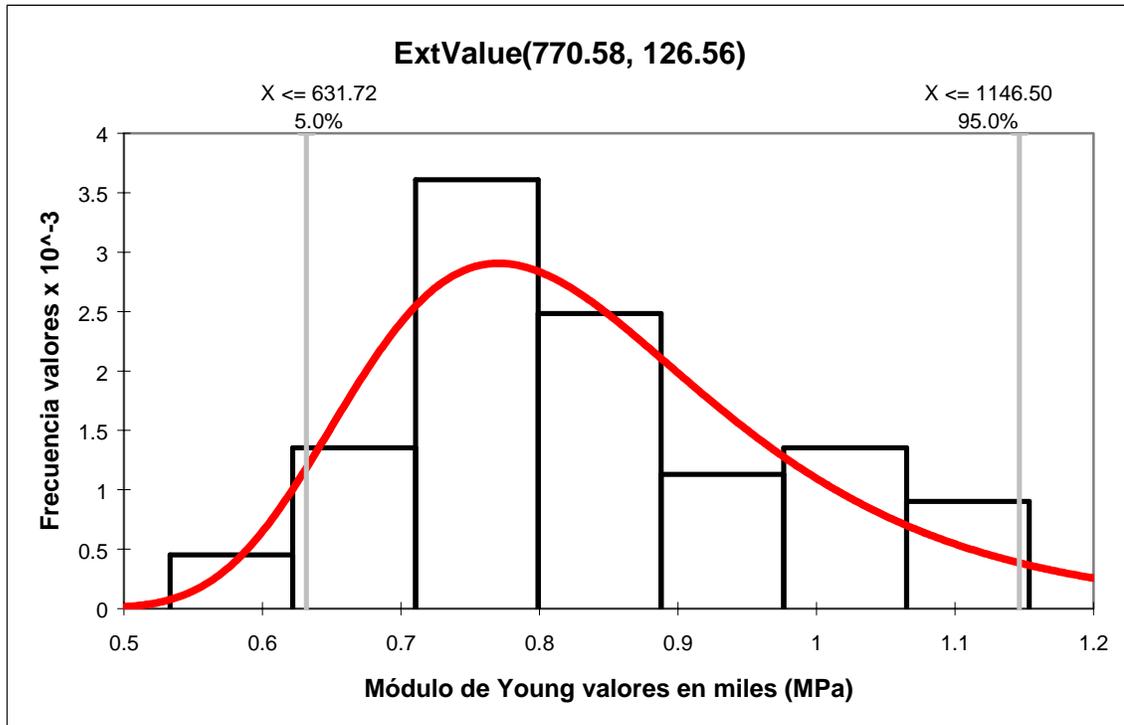
Las curvas de distribución obtenidas teóricamente son de característica unimodal. Existe rigurosamente una simetría en las curvas, que para el caso estudiado corresponden a las expectativas de los datos obtenidos para materiales caracterizados mecánicamente. Incluso en el caso en el que los parámetros mecánicos no estén normalmente distribuidos, la media de la distribución de muestreo, sigue siendo igual a la media del parámetro mecánico analizado. Es decir, la distribución de muestreo de la media se acerca a la normalidad, sin importar la forma de distribución de los parámetros mecánicos. Los estadísticos utilizan la distribución normal como una aproximación a la distribución de muestreo siempre que el tamaño de la muestra sea al menos de 30 (relaciones agua/polvo de 0.28 y 0.40), pero la distribución de muestreo de la media puede ser casi normal con muestras incluso de la mitad de ese tamaño. Por ello el teorema de límite central (en donde la media de la distribución de muestreo será igual a

la media de los parámetros mecánicos) nos permite utilizar la inferencia estadística con respecto a los parámetros mecánicos sin saber nada sobre la forma de la distribución de ese parámetro mecánico más que lo que podamos obtener de la muestra, de ahí la importancia del muestreo de probabilidad. Sin embargo los factores externos a las pruebas mecánicas (sean climatológicos, o la cantidad de agua en el material) pueden influenciar drásticamente en la caracterización del yeso, con lo cual es de importancia bloquear estos factores, sin minimizar la acción que tengan sobre las propiedades del material.



N/A	Chi-Sq	A-D	K-S	N/A	Fit	Input
Test Value	4.4	0.6154	0.1086	Function	RiskLogistic(7.32821, 0.91819)	N/A
P Value	0.7327	0.1 <= p <= 0.25	0.05 <= p <= 0.1	Shift	N/A	N/A
Rank	1	11	10	a	7.32821297	N/A
				b	0.91818533	N/A
				N/A	N/A	N/A
				N/A	N/A	N/A
				N/A	N/A	N/A
				Left X	4.6247	4.6247
				Left P	5.00%	2.00%
						10.031
				Right X	10.0318	8
				Right P	95.00%	94.00%
				Diff. X	5.4071	5.4071
				Diff. P	90.00%	92.00%
				Minimum	#####	4.624
				Maximum	#####	10.792
				Mean	7.32821	7.3996
						8.9260
				Mode	7.32821	[est]
				Median	7.32821	6.975
				Std. Deviation	1.6654	1.5734
				Variance	2.77357	2.426
				Skewness	0	0.3198
				Kurtosis	4.2	2.3076

Figura 4.1 Distribución logística del esfuerzo máximo en tensión, relación 0.31.



N/A	Chi-Sq	A-D	K-S	N/A	Fit	Input
Test Value	2.8	0.4564	0.0833	Function	RiskExtValue(770.58, 126.56)	N/A
P Value	0.9029	> 0.25	> 0.1	Shift	N/A	N/A
Rank	1	6	1	a	770.580739	N/A
C.Val @ 0.75	4.2549	N/A	N/A	b	126.562171	N/A
C.Val @ 0.5	6.3458	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.25	9.0371	0.461	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.15	10.7479	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.1	12.017	0.6195	0.1118	Left X	631.7182	631.7182
C.Val @ 0.05	14.0671	0.7362	0.1213	Left P	5.00%	4.00%
C.Val @ 0.025	16.0128	0.8529	0.1306	Right X	1146.4951	1146.4951
C.Val @ 0.01	18.4753	1.0094	0.1401	Right P	95.00%	98.00%
C.Val @ 0.005	20.2777	N/A	N/A	Diff. X	514.7769	514.7769
C.Val @ 0.001	24.3219	N/A	N/A	Diff. P	90.00%	94.00%
				Minimum	#####	533.22
				Maximum	#####	1153.64
				Mean	843.63	837.8
				Mode	770.58	782.16 [est]
				Median	816.97	803.34
				Std. Deviation	162.32	140.45
				Variance	26348.53	19331.88
				Skewness	1.1395	0.316
				Kurtosis	5.4	2.6123

Figura 4.2 Distribución gamma del Módulo de Young en tensión, relación 0.31.

Hemos visto que las pruebas de hipótesis hacen inferencias respecto a los parámetros mecánicos, como la media. Estas pruebas paramétricas utilizan la estadística paramétrica de muestras que provinieron de los ensayos de tensión que se están realizando. La utilización más importante que tiene el paquete RISK es poder interpretar diferentes distribuciones de probabilidad que ajusten los datos experimentales, que no necesariamente al ser muestras aleatorias grandes no son necesariamente normalmente distribuidas. La ventaja de los métodos no paramétricos que utiliza el programa no requiere que hagamos la suposición de que los parámetros mecánicos están distribuidos en forma de curva normal u otra forma específica, generalmente las pruebas de bondad de ajuste nos permiten probar si existe una diferencia significativa entre una distribución de frecuencia observada y otra frecuencia teórica, son pruebas poderosas que nos dan la alternativa de escoger la mejor distribución<sup>29</sup>, sin necesidad que los datos se agrupen de determinada manera.

**TABLA 12**

**Valores promedio del esfuerzo máximo y módulo de Young obtenidos en el material yeso piedra dental.**

Relación agua/polvo	Esfuerzo máximo promedio (Mpa)	Módulo de Young promedio (Mpa)
0.28	6.8383	759.5715
0.31	7.3995	837.7959
0.40	6.0213	782.5715

El esfuerzo máximo obtenido para la relación de 0.31 coincide con los valores presentados en bibliografía, ésta relación agua/polvo es utilizada para los ensayos de tenacidad a la fractura. Es importante recalcar que el esfuerzo máximo obtenido para la relación agua/polvo de 0.28 no es el pronosticado de acuerdo a la teoría, ya que se encuentra por debajo de las otras dos relaciones, esto puede deberse a la humedad en el material, al proceso de cristalización lenta que se tiene durante el fraguado que origina mayor presencia de porosidad.

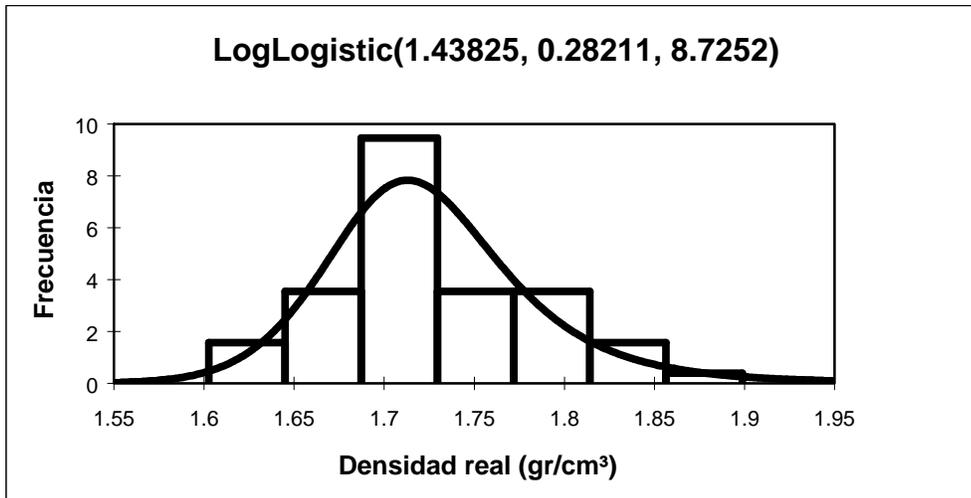
<sup>29</sup> Se presentan en el Anexo C las distribuciones empleadas en este Capítulo.

#### **4.1.2 Densidad real y porosidad. Influencia en las propiedades mecánicas del yeso piedra dental.**

La característica de porosidad en el yeso piedra dental es parte de su naturaleza, principalmente por la influencia drástica del agua en este material. Este defecto superficial es generado durante la elaboración de las piezas de tensión en el proceso de moldeo.

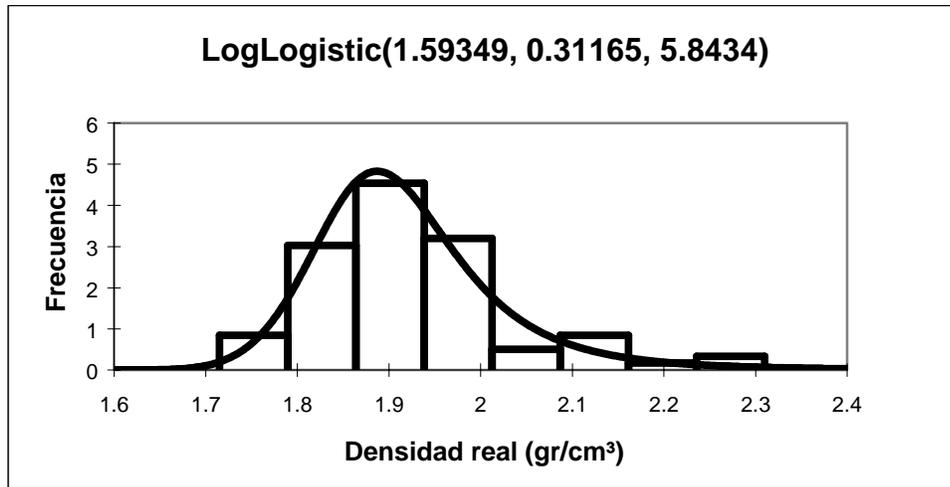
Se establece que los poros dentro de un cerámico reducen el área de sección transversal en donde la carga es aplicada, pero más importante es el hecho que actúan como un concentrador de esfuerzos. La determinación real de las piezas de tensión va relacionado directamente a la porosidad, se establecen distribuciones de probabilidad de los valores experimentales obtenidos para cada relación agua/polvo empleados en los ensayos de tensión. Las distribuciones de probabilidad de la densidad real de las piezas sometidas a ensayos de tensión se ajustan a una distribución de probabilidad log-logistic.

Los valores experimentales ajustados por la función de distribución nos muestran la confiabilidad de los resultados obtenidos. La tabla 15 nos presenta la porosidad experimental para cada relación agua/polvo de las piezas de yeso, y se establece la comparación con los datos presentados en bibliografía.



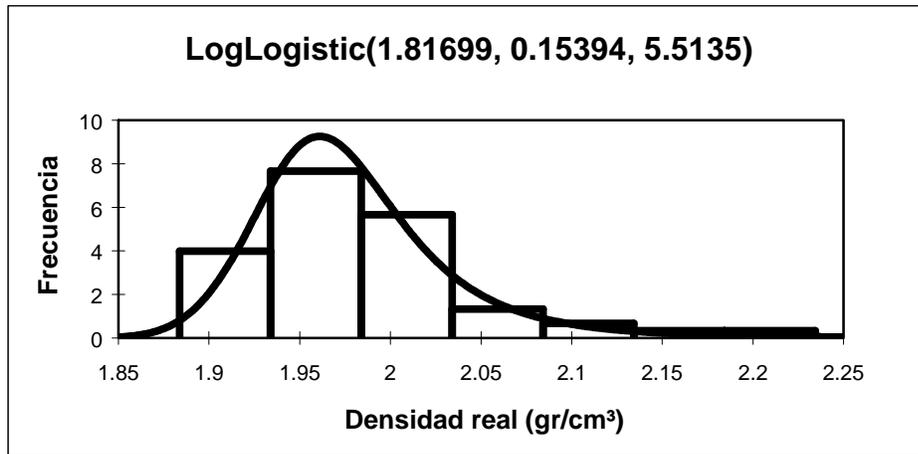
N/A	Fit	Input	N/A	Chi-Sq	A-D	K-S
Formula	LogLogistic	N/A	Test Value	17.1	0.5931	0.0957
Shift	N/A	N/A	P Value	0.0291	N/A	N/A
g	1.438249415	N/A	Rank	6	1	1
b	0.282112912	N/A	C.Val @ 0.75	5.0706	N/A	N/A
a	8.725161767	N/A	C.Val @ 0.5	7.3441	N/A	N/A
N/A	N/A	N/A	C.Val @ 0.25	10.2189	N/A	N/A
N/A	N/A	N/A	C.Val @ 0.15	12.0271	N/A	N/A
Left X	1.6396	1.6396	C.Val @ 0.1	13.3616	N/A	N/A
Left P	5.00%	3.33%	C.Val @ 0.05	15.5073	N/A	N/A
Right X	1.8336	1.8336	C.Val @ 0.025	17.5345	N/A	N/A
Right P	95.00%	96.67%	C.Val @ 0.01	20.0902	N/A	N/A
Diff. X	0.194	0.194	C.Val @ 0.005	21.955	N/A	N/A
Diff. P	90.00%	93.33%	C.Val @ 0.001	26.1245	N/A	N/A
Minimum	1.43825	1.60263				
Maximum	infy	1.89876				
Mean	1.72655	1.72597				
Mode	1.71302	1.69925e				
Median	1.72036	1.71798				
Std. Deviation	0.061551	0.058547				
Variance	0.0037885	0.0033707				
Skewness	0.8004 [est]	0.4662				
Kurtosis	4.5339 [est]	3.1051				

Figura 4.7 Distribución log-logistic de la densidad real de las piezas sometidas a ensayo de tensión, relación 0.40.



N/A	Fit	Input	N/A	Chi-Sq	A-D	K-S
Formula	RiskLogLogistic(1.59349, 0.31165, 5.8434)	N/A	Test Value	14.5	0.3303	0.0721
Shift	N/A	N/A	P Value	0.1056	N/A	N/A
g	1.59348796	N/A	Rank	8	1	1
b	0.311649263	N/A	C.Val @ 0.75	5.8988	N/A	N/A
a	5.843408321	N/A	C.Val @ 0.5	8.3428	N/A	N/A
N/A	N/A	N/A	C.Val @ 0.25	11.3888	N/A	N/A
N/A	N/A	N/A	C.Val @ 0.15	13.288	N/A	N/A
Left X	1.7818	1.7818	C.Val @ 0.1	14.6837	N/A	N/A
Left P	5.00%	5.00%	C.Val @ 0.05	16.919	N/A	N/A
Right X	2.1093	2.1093	C.Val @ 0.025	19.0228	N/A	N/A
Right P	95.00%	93.75%	C.Val @ 0.01	21.666	N/A	N/A
Diff. X	0.3275	0.3275	C.Val @ 0.005	23.5894	N/A	N/A
Diff. P	90.00%	88.75%	C.Val @ 0.001	27.8772	N/A	N/A
Minimum	1.59349	1.71529				
Maximum	inf	2.31				
Mean	1.92067	1.92118				
Mode	1.88724	1.95115e				
Median	1.90514	1.90747				
Std. Deviation	0.108	0.10879				
Variance	0.011665	0.011687				
Skewness	1.2201 [est]	1.3074				
Kurtosis	5.7956 [est]	5.6776				

Figura 4.8 Distribución log-logistic de la densidad real de las piezas sometidas a ensayo de tensión, relación 0.31.



N/A	Fit	Input	N/A	Chi-Sq	A-D	K-S
Formula	LogLogistic(1.81699, 0.15394, 5.5135)	N/A	Test Value	3	0.3766	0.1031
Shift	N/A	N/A	P Value	0.9344	N/A	N/A
g	1.816993897	N/A	Rank	1	1	1
b	0.153944228	N/A	C.Val @ 0.75	5.0706	N/A	N/A
a	5.513480327	N/A	C.Val @ 0.5	7.3441	N/A	N/A
N/A	N/A	N/A	C.Val @ 0.25	10.2189	N/A	N/A
N/A	N/A	N/A	C.Val @ 0.15	12.0271	N/A	N/A
Left X	1.9072	1.9072	C.Val @ 0.1	13.3616	N/A	N/A
Left P	5.00%	6.67%	C.Val @ 0.05	15.5073	N/A	N/A
Right X	2.0796	2.0796	C.Val @ 0.025	17.5345	N/A	N/A
Right P	95.00%	93.33%	C.Val @ 0.01	20.0902	N/A	N/A
Diff. X	0.1724	0.1724	C.Val @ 0.005	21.955	N/A	N/A
Diff. P	90.00%	86.67%	C.Val @ 0.001	26.1245	N/A	N/A
Minimum	1.81699	1.88383				
Maximum	inf	2.2344				
Mean	1.9796	1.98004				
Mode	1.96103	2.03611e				
Median	1.97094	1.97432				
Std. Deviation	0.057352	0.060323				
Variance	0.0032892	0.0035782				
Skewness	1.2988 [est]	1.7378				
Kurtosis	6.0860 [est]	7.8901				

Figura 4.9 Distribución log-logistic de la densidad real de las piezas sometidas a ensayo de tensión, relación 0.28.

**TABLA 13**

**Datos de porosidad obtenidos en las piezas de yeso dental para ensayos de tensión.**

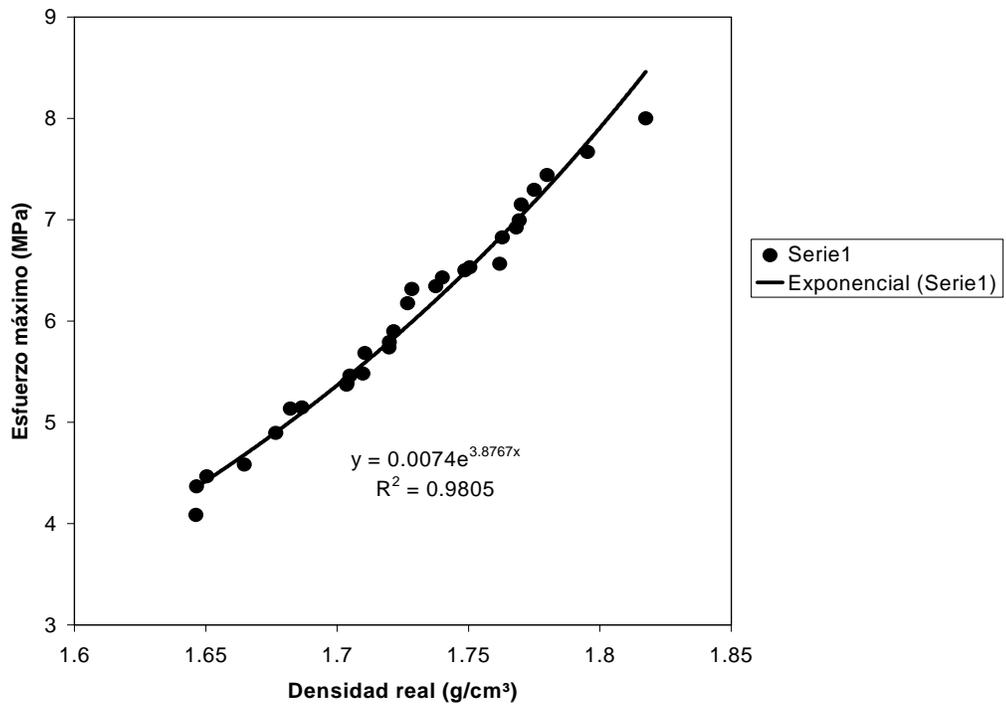
<b>Relación agua/polvo</b>	<b>Porosidad experimental (%)</b>	<b>Datos bibliográficos de porosidad (%) [12]</b>
0.28	14.32	10.3
0.31	16.82	15.3
0.40	25.28	25.3

Estos valores expresan la dispersión de los valores de porosidad para la relación de 0.28, con ello podemos establecer que existiera alguna relación con los bajos valores del esfuerzo máximo que obtuvimos con ésta relación, en comparación con las dos relaciones restantes que concuerdan con lo estipulado en el Capítulo 2.

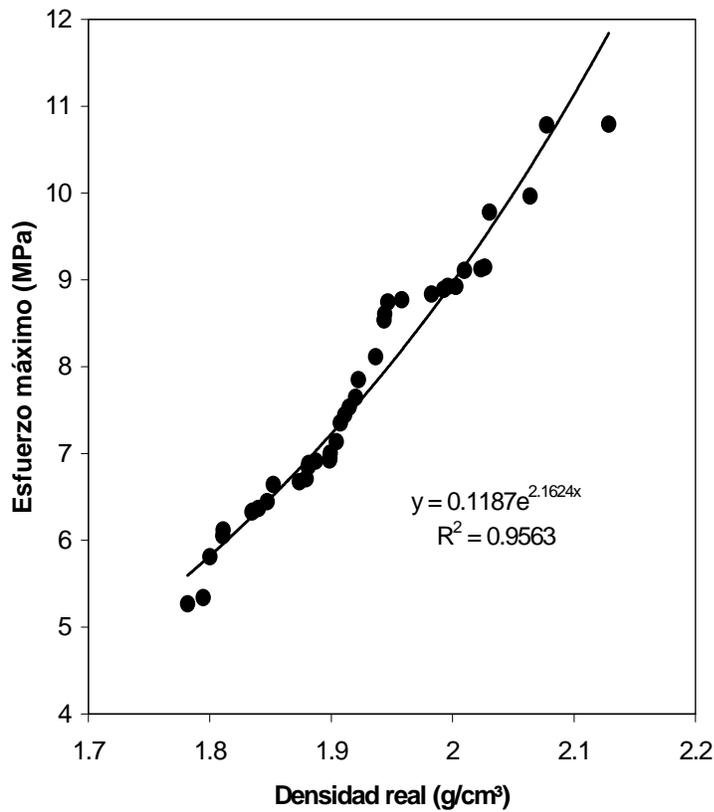
Típicamente el esfuerzo y la porosidad están relacionados por la siguiente relación empírica:

$$\sigma_p = \sigma_o \exp(-BP) \dots \dots \dots (33)$$

donde P,  $\sigma_p$ , y  $\sigma_o$  son, respectivamente, la fracción de volumen ocupada por los poros y el esfuerzo de la muestra con y sin porosidad; B es una constante que depende en la distribución y la morfología de los poros. La dependencia exponencial del esfuerzo en la porosidad es claramente demostrada en las figuras 4.16 y 4.17 para las relaciones agua/polvo de 0.31 y 0.40; ésta dependencia no conlleva un buen ajuste para la relación de 0.28. La dispersión de los resultados refleja la variabilidad en el tamaño del poro, la morfología, y distribución.



Figuras 4.10 y 4.11 Dependencia funcional del esfuerzo máximo en la porosidad para el yeso piedra dental, relación 0.31 y 0.40 respectivamente. Muestreo 50 probetas y 30 probetas.



Usualmente, el esfuerzo asociado con los poros presentes en el material es insuficiente para causar la fractura, y en este caso el rol de los poros es indirecto. Esto se analiza por la presencia de otros defectos superficiales en la vecindad inmediata. Si el poro es mucho más grande que el cristal del hemihidrato, crestas puntiagudas atómicas alrededor de la superficie es formada (observar microestructura de la superficie de fractura en la sección 3.5). El defecto crítico entonces es comparable a la dimensión del poro. La amplia dimensión del poro y el pequeño radio de curvatura en la superficie del poro son los que determinan el efecto del esfuerzo.

#### 4.1.3 Tamaño del cristal en el material yeso piedra dental.

La distribución de probabilidad que interpreta el tamaño del cristal para las tres relaciones agua/polvo del material, asume que el material es homogéneo, con una población simple de defectos internos que no cambian con el tiempo. Igualmente se asume que un solo mecanismo de falla está operando y que los defectos internos están distribuidos aleatoriamente y son muy pequeños en relación al espécimen o dimensión de la probeta de tensión.

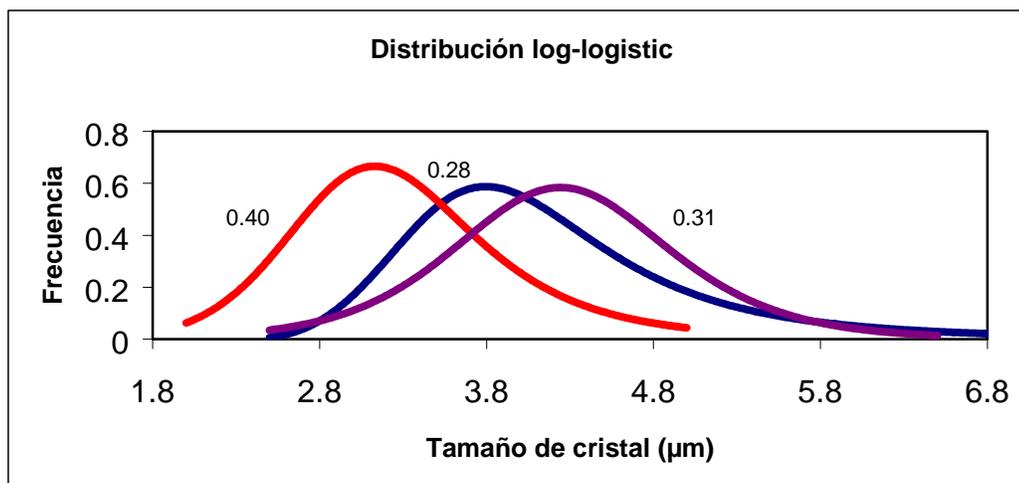


Figura 4.12 Distribución log-logistic del tamaño de cristal en el material yeso piedra dental para tres relaciones diferentes agua/polvo en ensayos de tensión.

#### 4.2.1 Tenacidad efectiva a la fractura.

Los datos experimentales obtenidos en el ensayo de flexión en 3 puntos con presencia de muesca los cuales están estandarizados de acuerdo a la norma ASTM E 399-90 nos sirvieron para calcular la tenacidad efectiva a la fractura,  $K_C = k \sigma_i \sqrt{\ell}$ , donde  $\sigma_i$  es el valor del esfuerzo asociado con la iniciación del crecimiento de la grieta,  $\ell$  es la longitud de la grieta y k es un factor geométrico adimensional que está relacionado a la geometría del problema.

Las distribuciones de probabilidad para la tenacidad efectiva a la fractura de los cinco moldes se aproximan a la distribución logístico.

**TABLA 14**  
**Resultados de la tenacidad efectiva a la fractura para cinco moldes.**

Molde	$\ell$ (m)	$\sqrt{\ell}$ (m <sup>1/2</sup> )	Esfuerzo máximo (MPa)	$K_C$ (MPa*m <sup>1/2</sup> )
1	0.01375	0.1172	1.73	0.20
2	0.02062	0.1435	1.77	0.25
3	0.0275	0.1658	1.59	0.26
4	0.03437	0.1853	1.49	0.27
5	0.04125	0.2031	1.088	0.22

Molde	$\ell$ (m)	$\sqrt{\ell}$ (m <sup>1/2</sup> )	Esfuerzo inicio de propagación de grieta (MPa)	$K_C$ (MPa*m <sup>1/2</sup> )
1	0.01375	0.1172	1.63	0.19
2	0.02062	0.1435	1.58	0.22
3	0.0275	0.1658	1.41	0.23
4	0.03437	0.1853	1.41	0.26
5	0.04125	0.2031	0.96	0.19

La predicción básica del MFLE es que el valor experimental de  $K_C$  será una constante independiente del tamaño de la prueba,  $K_{IC}$ , cuando es medida con pruebas mecánicas estandarizadas. En tal caso, los experimentos sobre piezas similares de diferentes tamaños dará el mismo valor de  $K_C$ , esto es,

$$K_C(\lambda \ell) = K_C(\ell) \dots \dots \dots (34)$$

donde  $\lambda$  es el factor de escala del tamaño de la muestra.

Los datos obtenidos de  $K_C$  del molde 5 notan una dispersión de acuerdo a los cuatro moldes restantes, dimensionalmente es posible establecer la presencia de mayor cantidad de defectos internos en las piezas de yeso los cuales actúan como concentrador de esfuerzos, limitando la validez de  $K_C$ .

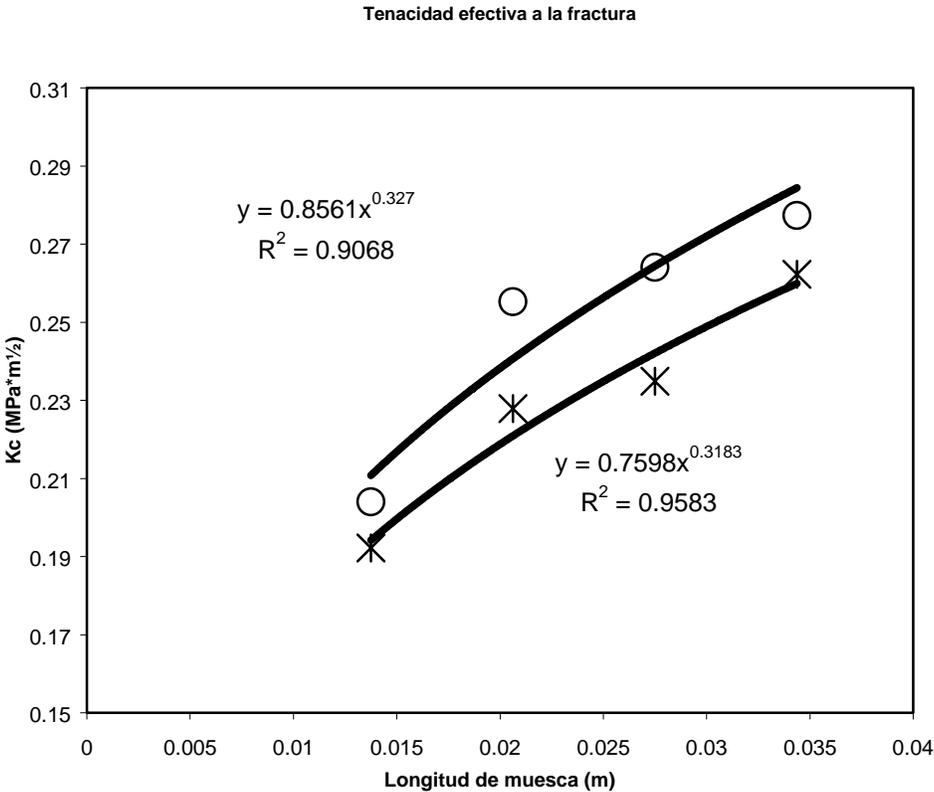


Figura 4.26 Dependencia de la tenacidad efectiva a la fractura del tamaño de longitud de muesca en el material yeso piedra dental. ° Tenacidad efectiva a la fractura calculado a partir del esfuerzo máximo.  
 • Tenacidad efectiva a la fractura calculado a partir del esfuerzo de inicio de propagación de grieta. Moldes 1,2,3 y 4.

Se observa que en contraste con la ecuación (34) del MFLE, tenacidad efectiva a la fractura,  $K_c(\lambda \ell)$ , posee una dependencia de la ley de potencia sobre la longitud de muesca<sup>32</sup>. El valor del exponente  $n$  calculado de acuerdo a ésta ley es de 0.32, resultado que permite demostrar la característica frágil del material.

### 4.3 Mecánica de las grietas auto-afines.

Dentro del marco de la mecánica de las grietas auto-afines, Balankin [8] demostró que la tenacidad efectiva a la fractura se reducirá a

$$K_c(\lambda \ell) = \lambda^{-n} K_c(\ell) \text{ donde } n = \frac{(d-1)(1-H)}{2H} \dots\dots\dots(35)$$

para  $\ell_o < \lambda \ell < \varepsilon_c, \lambda \geq 1$  y  $H > H^*$ . La rapidez de liberación de energía asociada con la propagación de la grieta auto-afín también será medible como  $G_c(\lambda \Delta \ell) = \lambda^{-2n} G_c(\Delta \ell)$  donde  $\Delta \ell$  es el aumento de la longitud de la grieta.

De esta forma las diferencias entre las predicciones de MFLE y la mecánica de las grietas auto-afines se pueden notar fácilmente. Además, la buena medición fractal desarrollada para la geometría de la grieta [21,22] arroja datos para la verificación cuantitativa y la validación de la Ec. (35).

Las placas de yeso piedra dental fueron utilizadas para el estudio del efecto de la rugosidad de la grieta en mecánica de la fractura demostrando una fractura frágil. La determinación de la rugosidad de la grieta fue determinada por el paquete Benoit mediante 3 métodos auto-afines los cuales son presentados en la Tabla 11 del Capítulo 3. El valor promedio del coeficiente de rugosidad  $H$  de las cien placas de yeso fracturadas obtenido es de  $0.76 \pm 0.065$ .

---

<sup>32</sup> la longitud de muesca podemos interpretarla como el factor de escala  $\lambda$ .

De acuerdo a la ecuación (35) con  $d = 3$  y  $H = 0.76 \pm 0.065$ , la tenacidad efectiva a la fractura debería ser graduada o escalada con el exponente  $n = 0.31 \pm 0.11$ <sup>33</sup>. Se encuentra un excelente acuerdo con el valor de  $n = 0.32$  obtenido de datos experimentales para dependencia del  $K_C$  con la longitud de muesca de las probetas.

De esta forma, el criterio de fractura en el intervalo  $\ell_o \langle r \langle \varepsilon_c$  puede ser formulado como

$$K_f \equiv \sigma_\infty \ell^\alpha = K_{fC} \quad (36)$$

donde  $\sigma_\infty$  es el esfuerzo aplicado a una distancia infinita<sup>34</sup>,  $\ell$  es la longitud de proyección de la grieta,  $\alpha$  está definido por la ec. (21)<sup>35</sup> y  $K_{fC}$  es la tenacidad a la fractura fractal. El valor de la tenacidad a la fractura fractal del material yeso piedra dental obtenido se ajusta excelentemente a la distribución log-logistic al igual las pruebas de bondad de ajuste corroboran ésta distribución.

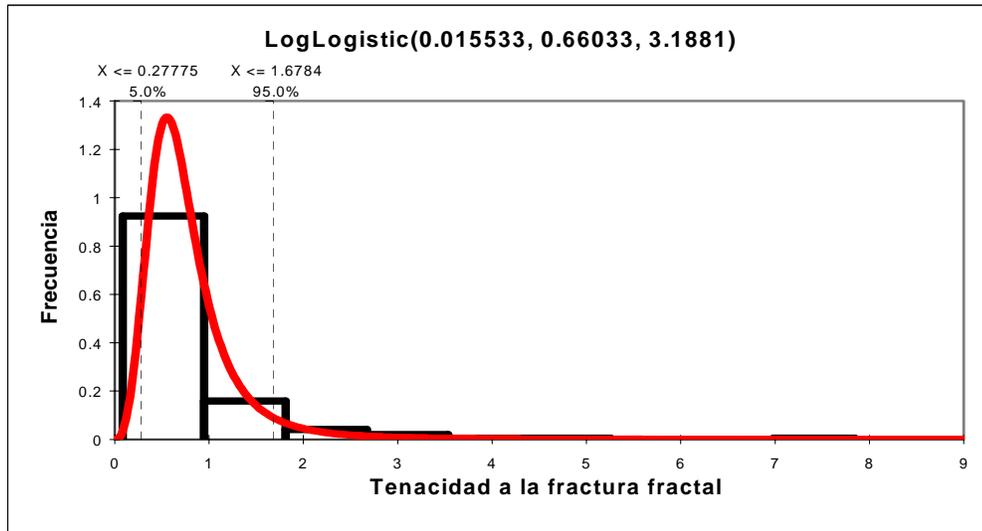
Esta teoría permite una formulación matemática suficientemente rigurosa que satisface los requerimientos adoptados en mecánica clásica de los sólidos. Además, con ello, reconocemos que las superficies de fractura pueden ser consideradas como objetos auto-afines, y que la MFLE puede ser tratado como un caso especial de mecánica de las grietas auto-afines.

---

<sup>33</sup> El Anexo F presenta los valores encontrados de  $n$  para las placas de yeso piedra dental.

<sup>34</sup> El esfuerzo aplicado corresponde al esfuerzo máximo obtenido en los ensayos SENB para los moldes 1,2,3 y 4

<sup>35</sup> Para  $\alpha$  el valor para un problema en tres dimensiones es  $\alpha = 3H-2/2H$ , si  $H \geq 2/3$



N/A	Fit	Input	N/A	Chi-Sq	A-D	K-S
Function	RiskLogLogistic(0.015533, 0.66033, 3.1881)	N/A	Test Value	30.8496	1.3585	0.0702
Shift	N/A	N/A	P Value	0.0092	N/A	N/A
g	1.55E-02	N/A	Rank	1	1	1
b	0.66033214	N/A	C.Val @ 0.75	11.0365	N/A	N/A
a	3.18814453	N/A	C.Val @ 0.5	14.3389	N/A	N/A
N/A	N/A	N/A	C.Val @ 0.25	18.2451	N/A	N/A
N/A	N/A	N/A	C.Val @ 0.15	20.603	N/A	N/A
Left X	0.2778	0.2778	C.Val @ 0.1	22.3071	N/A	N/A
Left P	5.00%	5.31%	C.Val @ 0.05	24.9958	N/A	N/A
Right X	1.6784	1.6784	C.Val @ 0.025	27.4884	N/A	N/A
Right P	95.00%	92.04%	C.Val @ 0.01	30.5779	N/A	N/A
Diff. X	1.4007	1.4007	C.Val @ 0.005	32.8013	N/A	N/A
Diff. P	90.00%	86.73%	C.Val @ 0.001	37.6973	N/A	N/A
Minimum	0.015533	0.086542				
Maximum	#####	7.8446				
Mean	0.79621	0.84711				
Mode	0.55421	0.47141 [est]				
Median	0.67586	0.66067				
Std. Deviation	0.5688	0.76316				
Variance	0.32353	0.57983				
Skewness	2.4013 [est]	4.9282				
Kurtosis	11.7605 [est]	37.6341				

Figura 4.21 Distribución log-logistic de la tenacidad a la fractura fractal obtenido en el yeso piedra dental.

## 4.2 Ensayo de flexión en 3 puntos con muesca.

El análisis cuantitativo del espesor de las muestras en la porosidad y el valor de  $K_Q$  se presentan en las figuras 4.13 y 4.14.

En la figura 4.13 se presenta la influencia del espesor en la porosidad de las piezas en donde a medida que el espesor aumenta la porosidad refleja un valor constante para los cinco moldes, para el espesor más pequeño (5 mm) la porosidad promedio refleja un valor bastante disperso a comparación de las cuatro dimensiones restantes, si consideramos un volumen pequeño de material heterogéneo es más fácil que la concentración de porosidad superficial (no considerando la porosidad interna del material) se incremente en una sección volumétrica pequeña; a comparación de espesores mayores de 5 mm la porosidad tiende a volverse constante en un rango de porosidad de 0.26 a 0.31 en donde la concentración de poros en el material es dispersa en toda la sección de volúmen del material.

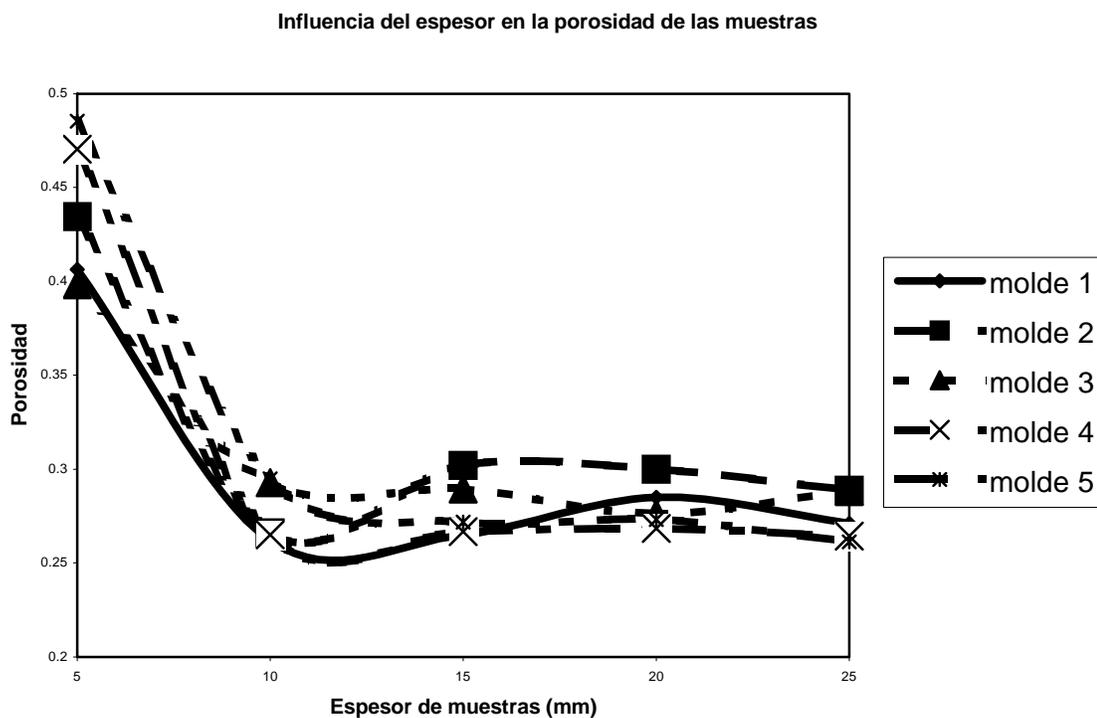


Figura 4.13 Influencia del espesor en la porosidad de las piezas para cinco moldes con diferentes dimensiones.

La figura 4.14 presenta la influencia del espesor sobre el valor de  $K_Q$ , el gráfico presenta las condiciones de esfuerzo y deformación plana para el ensayo de tenacidad a la fractura, en donde el comportamiento se asume lineal-elástico, aplicado únicamente si la zona plástica es pequeña comparada con la longitud de la grieta y el espesor de las muestras para materiales frágiles en este caso.

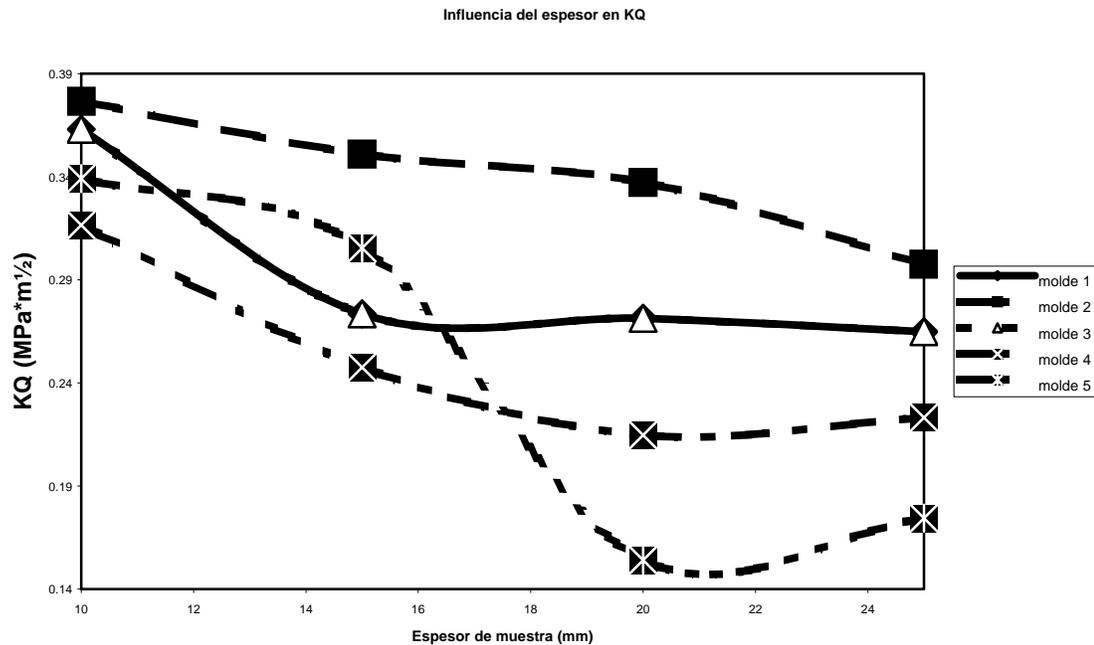


Figura 4.14 Influencia del espesor en el valor de  $K_Q$ .

Se muestra en la figura 4.14 que el mínimo valor de  $K_Q$  se presenta en condiciones de deformación plana, se establece que el menor tamaño de zona plástica y la mayor construcción plástica hacen que la energía global consumida en el proceso de fractura sea menor en condiciones de deformación plana. Se considera a  $K_Q$  como una propiedad del material.

En otras palabras, se asegura que la contribución de la deformación plástica a la tenacidad sea despreciable. Se reafirma la inestabilidad de los valores de  $K_Q$  para el espesor de 5 mm para los cinco moldes, debido principalmente al alto grado de aleatoriedad de los valores de  $K_Q$  encontrados para este espesor, en presencia de esfuerzos planos.

Las figuras 4.15,4.16,4.17,4.18 y 4.19 nos indica la variación del factor de intensidad de esfuerzos con la porosidad, se demuestra en los gráficos la dispersión del valor de  $K_Q$  en mediciones reales. La dependencia funcional es una función potencial que mejor ajusta los datos experimentales, uno de los inconvenientes presentados en las figuras es que solamente la dependencia es en relación a la porosidad y no a la dimensión de poros que se presenta en cada muestra.

Es posible que el inicio de propagación de la grieta es debido a una interacción poro-punta de muesca de la grieta, en donde el factor de intensidad de esfuerzos depende en el material yeso piedra dental (idealmente poroso) de la distribución, morfología y tamaño de los poros presentes, asimismo el poro interactúa como un concentrador de esfuerzos en el material.

Como punto de vista, bajo el marco de que la carga aplicada es de compresión y el material por naturaleza es poroso, los poros y defectos presentes bajo la carga de aplicación simplemente se encierran bajo compresión y éstos tienden a reducir el efecto sobre la propiedad del material en cuestión.

Alternativamente la porosidad (en general la morfología, dimensión y distribución) presente en el material varía considerablemente de pieza a pieza por cada molde, donde es generalmente un largo y disperso estadístico en  $K_Q$ <sup>30</sup> en referencia a la porosidad. Sin embargo, con los argumentos presentados, es factible que la porosidad no tenga una influencia drástica para causar la falla en la pieza, sino directamente es atribuible a la punta de la muesca en la pieza, en donde el defecto es comparable a la dimensión del poro, y la falla es factible haya sido por defectos puntuales<sup>31</sup> en la estructura atómica del material que inicie la propagación de la grieta.

---

<sup>30</sup> Las distribuciones de probabilidad de  $K_Q$  son presentados en el Anexo C.

<sup>31</sup> Corte de cristales, atómicamente encadenados por enlaces covalentes.

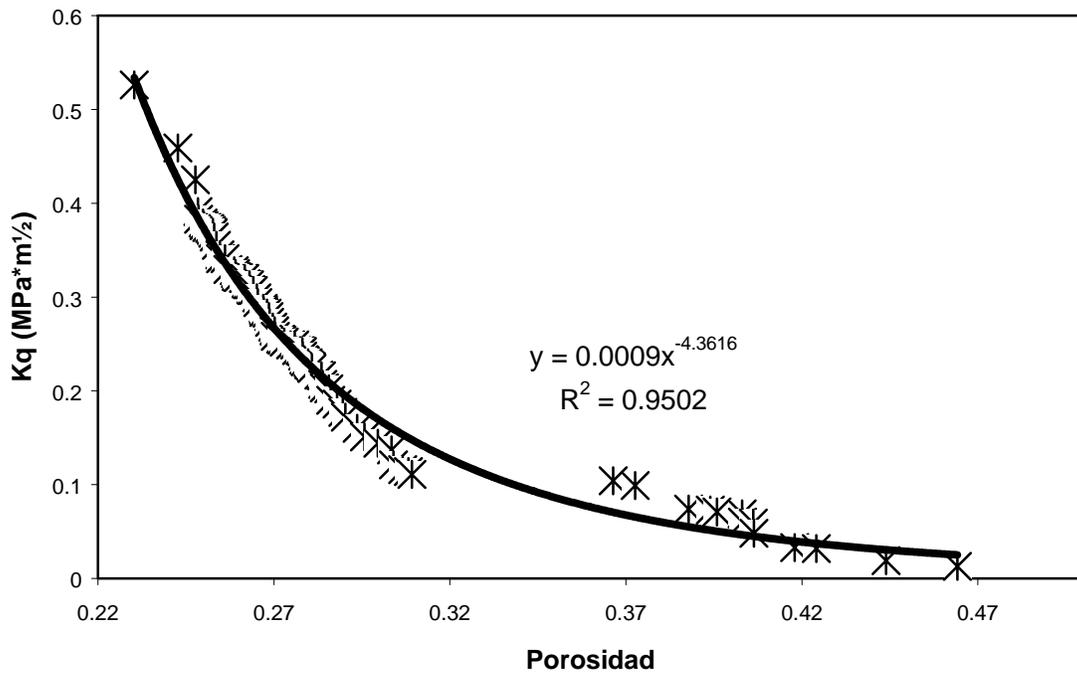


Figura 4.15 Dependencia funcional de la porosidad en  $K_Q$  molde 1

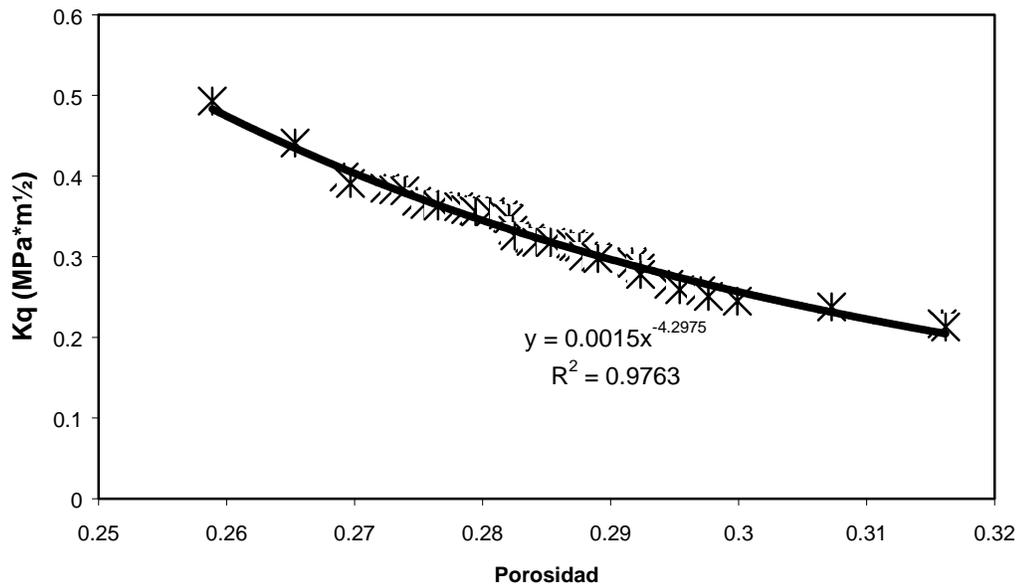


Figura 4.16 Dependencia funcional de la porosidad en  $K_Q$  molde 2

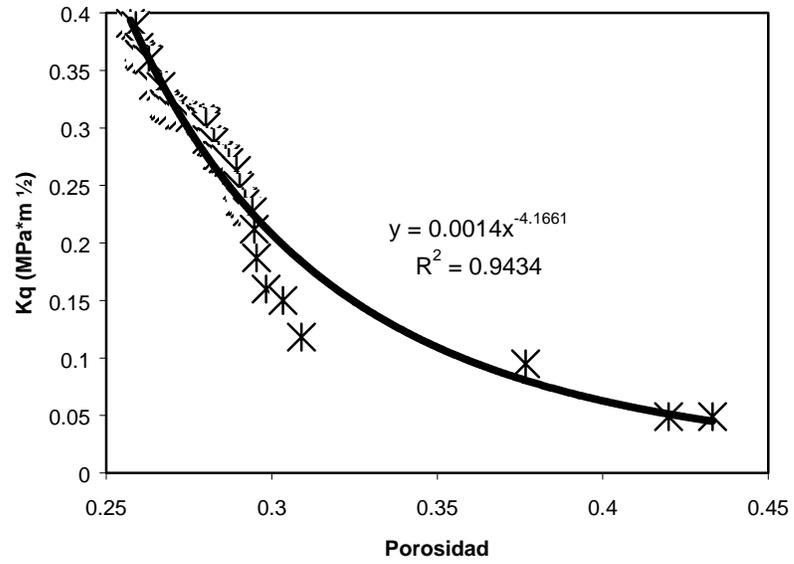


Figura 4.17 Dependencia funcional de la porosidad en  $K_Q$  molde 3

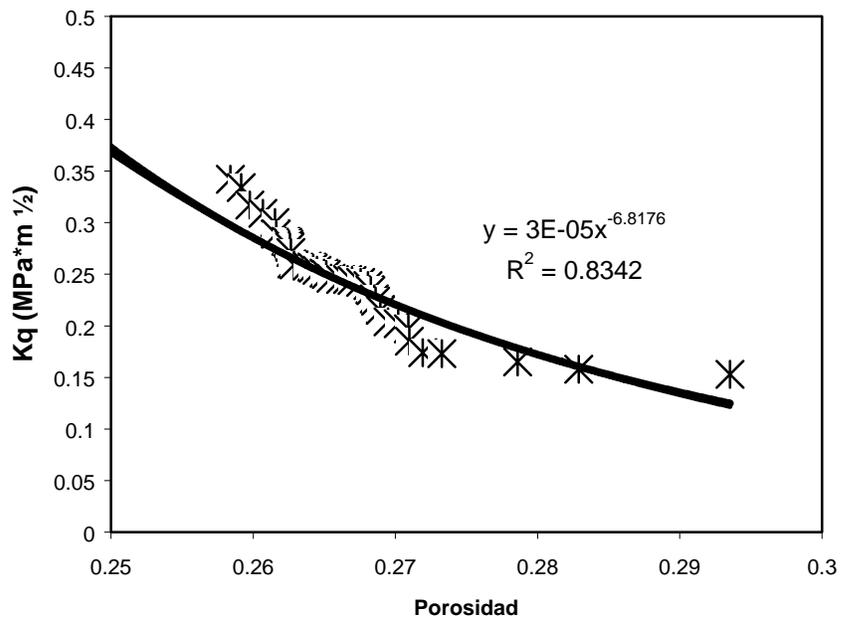


Figura 4.18 Dependencia funcional de la porosidad en  $K_Q$  molde 4

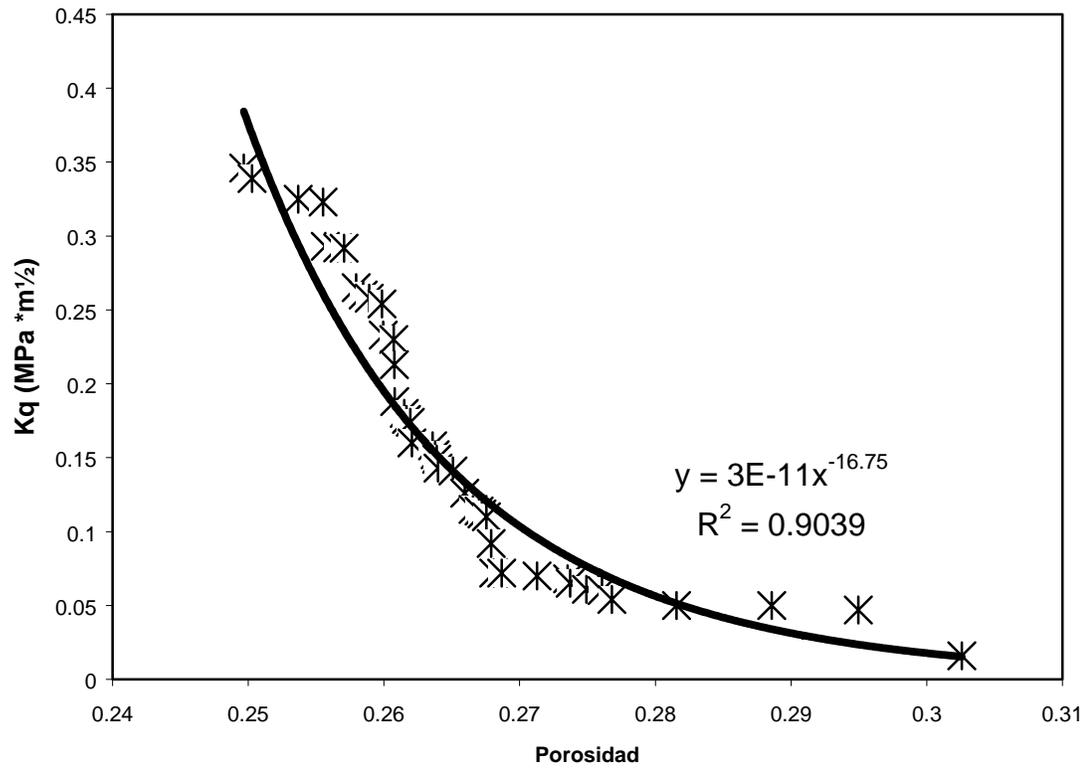


Figura 4.19 Dependencia funcional de la porosidad en K<sub>Q</sub> molde 5

## CONCLUSIONES

El propósito de estudiar los criterios que afectan la caracterización del material yeso piedra dental es el fundamento para poder analizar posteriormente la influencia de las grietas presentes en el material.

La evaluación del material conlleva el establecer condiciones fijas que puedan ayudarnos a bloquear errores sistemáticos presentes durante el método experimental, y así despreciar lo mínimo posible la variabilidad de resultados.

Esto último está sujeto a los defectos superficiales presentes en el material, a las condiciones atmosféricas presentes durante los ensayos, a las condiciones de mezcla agua/polvo del material, por ello es importante considerar una distribución de probabilidad adecuada que ayude a ajustar las variaciones de resultados que corresponden a las expectativas teóricas. Los datos analizados (propiedades mecánicas del material) son considerados aleatorios y homogéneos, aún considerando diferencias en la forma de elaboración de las piezas de yeso y los factores antes mencionados.

Se establece que los datos agrupados presentan una buena distribución, sin embargo, **para los análisis posteriores de tenacidad a la fractura del material, establecemos la relación de agua/polvo de 0.31 como la relación más conveniente, ayudados por las gráficas resultantes en las diferentes distribuciones de probabilidad presentadas por el paquete RISK.** Otro factor importante que ayudó a la determinación de esta relación fue el tiempo de fraguado que facilita la elaboración de

piezas en serie, y en cantidades grandes si lo que necesitamos es tener la mayor cantidad de datos para realizar un análisis probabilístico posterior. Las pruebas de bondad de ajuste utilizados por RISK se presentan para probar la hipótesis de que una distribución empírica sigue una ley de probabilidad particular. Esto concluye que el programa es una herramienta poderosa para determinar cuando no se conoce la distribución de probabilidad de la variable aleatoria bajo estudio, obtenemos la hipótesis de que dicha variable sigue una distribución de probabilidad particular, y no únicamente normal. La elección de la distribución hipotética para ajustar los datos es importante. Algunas veces es necesario comprender la naturaleza del problema físico para elegir una distribución que modele los datos. En ocasiones, la experiencia previa puede sugerir la elección de la distribución. En situaciones en las que no hay experiencia previa o alguna teoría para sugerir una distribución que describa los datos, el investigador debe confiar en otros métodos. La inspección de un histograma de frecuencias puede sugerir a menudo una distribución apropiada. Por ello la gran ayuda del programa RISK, que ahorra éstas interpretaciones, con ayuda del conocimiento del problema, en este caso fractura, particularmente.

La observación de poros en el material establece la naturaleza del mismo, que afecta considerablemente las propiedades mecánicas del material, y se determina que entre mayor sea la relación agua/polvo mayor será la porosidad en éste, y se establece una dependencia exponencial entre el esfuerzo máximo y el % de porosidad en el material, la dispersión de resultados en cuanto al esfuerzo refleja la variabilidad en el tamaño del poro, la morfología y distribución.

Se concluye que el material corresponde a un yeso piedra dental de alta resistencia del tipo 5 cuya relación agua/polvo especificada se encuentra entre 0.31 a 0.40 aproximadamente. Por ello los resultados contradictorios obtenidos bajo la relación de 0.28.

La morfología cristalina del yeso es presentada bajo cristales de hemihidrato en conglomerados apilados, de forma acicular, preferencialmente no orientados constituyendo en términos prácticos una estructura caótica.

Partiendo de lo anterior, se condiciones fijas para los ensayos de tenacidad a la fractura, bajo una relación agua/polvo de 0.31, evitando la humedad en el material posterior al secado, manteniendo un tiempo de espatulado mecánico fijo en 1 minuto, y estableciendo condiciones de trabajo del equipo experimental bajo criterios estandarizados como dependencia de las dimensiones de las piezas sometidas a este ensayo en 3 puntos bajo una carga de compresión con presencia de muesca.

De acuerdo a los resultados obtenidos, resalta la influencia de la dependencia del espesor de las piezas para los cinco moldes con la porosidad obtenida experimentalmente en los ensayos de flexión en 3 puntos con presencia de muesca, la porosidad se dispara en valores para los moldes con espesores de 5 mm, teniendo un valor promedio de porosidad para las dimensiones restantes en cuanto a espesor en un rango de 0.26 a 0.31.

Se resalta la dependencia del espesor en  $K_Q$ , las condiciones de esfuerzo y deformación plana, en donde el mínimo valor de  $K_Q$  se presenta en condiciones de deformación plana para los cinco moldes, considerando a éste como una propiedad del material de acuerdo a la teoría de MFLE.

Es importante establecer la dispersión de los valores de  $K_Q$  en mediciones reales, por lo que el ajuste de las variables aleatorias por distribuciones de probabilidad y pruebas de bondad de ajuste nos permiten tener datos confiables que garantizan el éxito en el desarrollo experimental. Se demuestra la dependencia potencial de la porosidad en los valores de  $K_Q$  obtenidos para los cinco moldes de trabajo. Los datos de los parámetros mecánicos obtenidos del molde 5 (específicamente  $K_Q$ ) tuvieron que ser ajustados por 3 diferentes distribuciones de probabilidad, la dependencia potencial de  $K_Q$  con la porosidad se dispara con la potencia obtenida en comparación con los 4 moldes restantes, con lo se permite reflexionar la interacción de factores internos de defectos que podría deberse al tamaño de poro y su distribución en los especímenes de prueba en dicho molde, caso contrario con el molde 1 en donde los valores de porosidad son altos presumiblemente se deba a que la porosidad externa sea mayor a la porosidad interna, sin descartar el procedimiento tecnológico que incluye diseño de molde e interacciones ambientales, proceso de fraguado, etc.

El inicio de propagación de grieta en los especímenes expuestos a flexión en 3 puntos, podría deberse a una interacción defecto-poro, sin embargo, estableciendo una carga de compresión sobre las piezas, es factible que dicha carga involucre a los defectos internos presentes en el material y la influencia de la porosidad se reduzca considerablemente en el factor de intensidad de esfuerzo. Aún más, se limita el trabajo bajo este contexto pues no fue posible determinar la morfología, distribución y tamaño de los poros presentes en las piezas sometidas a éstos ensayos, en donde necesariamente la influencia de poros presentes tendría una influencia mucho más drástica en los parámetros mecánicos obtenidos experimentalmente.

La tenacidad efectiva a la fractura del material yeso piedra dental obtenida experimentalmente posee una dependencia de la ley de potencia sobre la longitud de muesca, tanto en el esfuerzo de inicio de propagación de grieta, como en el esfuerzo máximo en el ensayo de flexión en 3 puntos con presencia de muesca. Desafortunadamente, el comportamiento del esfuerzo bajo MFLE no puede ser probado de manera cuantitativa por observaciones experimentales directas, las cuales sólo dan resultados cualitativos.

La validez de las ecuaciones de mecánica de grietas auto-afines pueden ser verificados por comparación entre las predicciones de mecánica de la fractura auto-afín y los resultados de pruebas mecánicas estandarizadas, con ello es posible establecer las diferencias entre las predicciones de MFLE y la mecánica de las grietas auto-afines, que ha sido demostrado en trabajos anteriores y en el presente proyecto de investigación, con lo que la teoría auto-afín permite una formulación matemática suficientemente rigurosa que satisface los requerimientos adoptados en mecánica clásica de los sólidos. Se concluye que el comportamiento del esfuerzo del vértice de la grieta en yeso piedra dental es semejante al comportamiento esperado para grietas auto-afines, el cual difiere de la predicción del MFLE. El exponente del comportamiento de esfuerzos del vértice de la grieta es gobernado por el exponente de rugosidad de la fractura  $H$ , y este último depende de las propiedades del material. Para el material yeso piedra dental se obtuvo que la tenacidad a la fractura fractal es una constante igual a  $K_{fC} = 0.84 \pm 0.03 \text{ MPa} \times m^{0.18}$

Es importante enfatizar, que para piezas de dimensión  $L \gg$  a la longitud de correlación auto-afín , la medición de tenacidad debe ser independiente de la dimensión del espécimen. Entonces, para el estándar ASTM se recomendaría incluir la especificación de la dimensión absoluta del espécimen. Dicha especificación puede ser formulada en base a una investigación especial de este problema, que incluya investigaciones fractográficas combinadas con pruebas mecánicas estandarizadas.

Así, este trabajo de investigación continua las bases de la disciplina Mecánica Fractal del Sólido, lo que contempla seguir construyendo modelos matemáticos que revelen la esencia del problema físico, con el desarrollo de la mecánica de las grietas auto-afines para resolver los problemas asociados, principalmente con la formación y propagación de grietas en diversos materiales de ingeniería.

La gran cantidad de datos proporcionados por el generador de trazos auto-afines del paquete Benoit, nos permite establecer la confiabilidad del paquete para poder determinar mediciones posteriores de rugosidad y dimensión fractal de superficies de fractura en diversos materiales.

## Recomendaciones para trabajo futuro.

- Estudio de la morfología, distribución y tamaño de poros.
- Análisis estadístico de la morfología, distribución y tamaño de poros en el factor de intensidad de esfuerzos, y en propiedades mecánicas generales.
- Un nuevo modelo utilizando las bases de MFLE y Mecánica Fractal del Sólido para establecer un criterio en la interacción punta de la muesca-poro.
- Análisis de la superficie de fractura del material, por SEM, microscopía óptica, microscopía atómica y paquetes computacionales.
- Alternativas de materiales con presencia de alta porosidad para establecer una confrontación con el material utilizado en ésta investigación.
- Confrontación teórico-experimental con el modelo probabilístico de grietas auto-afines del Dr. Alexander Balankin, estableciendo los criterios necesarios para determinar la tenacidad a la fractura fractal en otros materiales con características frágiles y poder realizar alguna comparación, si es que existe, con los ensayos anteriormente planteados en la tesis del Dr. Orlando Susarrey Huerta [37] y la presente investigación.
- Propuesta de una investigación más a fondo sobre la utilización completa del programa Benot en sus cinco métodos auto-afines.

## **PUBLICACIONES**

### **ARTICULOS PUBLICADOS**

Intrinsic nature of anomalous crack roughening in an anisotropic brittle composite. Philosophical Magazine Letters, 2000, Vol. 80, No. 3, 165-172.

Fractal Properties of Fractures Surfaces in Steel 1045. International Journal of Fracture 106: L21-L26, 2000.

**NOMBRAMIENTO DEL SISTEMA NACIONAL DE INVESTIGADORES.**

## Referencias

1. G.P. Cherepanov, "*Mechanics of Brittle Fracture*". McGraw Hill, New York (1978).
2. Balankin A.S., Susarrey O., Bravo A., Galicia M.A., "*Mecánica de las grietas autoafines en hojas de papel fragilizado*", Revista Mexicana de Física, V. 45, N 4. pp. 388-392 (1999).
3. Michel Barsoum, "*Fundamentals of Ceramics*", Mc. Graw Hill Series in Materials Science and Engineering.
4. Skinner R., "*Fundamentos de la Ciencia de los Materiales Dentales*"., Mc Graw Hill, novena edición (1990).
5. Balankin A.S., *Synergetics of Deformed Solid*; Department of Defense USSR Press, Moscow (1991).
6. Mandelbrot B.B. "*The Fractal Geometry of Nature*". Freeman: San Francisco, 1982.
7. Balankin A.S. and F. Sandoval, "*Self-affine properties of fracture surfaces*". Revista Mexicana de Física, V. 43, N.4, pp. 545-591 (1997).
8. Balankin A.S. "*The Effect of Fracture Morphology on the Crack Mechanics in Elastic Solids*". International Journal of Fracture, V. 76, pp. R63-R70, 1996.
9. Balankin A.S., "*Quantum-statistical approach to dynamic problems of solid mechanics*", Revista Mexicana de Física. 41, (1995) pp.147-180.
10. A.S. Balankin "*Mechanics of self-affine cracks: the concept of equivalent traction, path integrals and energy release rate*". Revista Mexicana de Física, V. 42, N 2, pp.161-171 (1996).
11. K.K. Schiller, in "*Mechanical properties of non-metallic brittle materials*". Butterworths Scientific, London, (1958).
12. ASTM E 8M-93. "*Standard Test Methods for Tension Testing of Metallic Materials*".
13. ASTM C 135-96. "*Standard Test Method for True Specific Gravity of Refractory Materials by Water Immersion*".
14. Manual "*Anales de Antropología*". Escrito Conservación de la Zona Arqueológica de Malinalco".
15. Encyclopedia of Materials Science and Engineering Volume 2. Pergamon Press.

16. George S. Brady. *"Materials Handbook"*. Mc Graw Hill Book Company. Twelfth Edition.
17. ASTM C 472 Rev A-90. *"Standard Test Methods for Physical Testing of Gypsum, Gypsum Plasters and Gypsum Concrete"*.
18. A.J. Lewry and J. Williamson, *"The setting of gypsum plaster; the development of microstructure and strenght"*. Journal of Materials Science. Vol 29, pp. 5524-8.
19. S.K. Dalui, M. Roychowdhury, K.K. Phani. *"Ultrasonic evaluation of gypsum plaster"*. Journal of Materials Science, Vol 31, pp. 1261-3.
20. J.P. Panakkal, *"Brittish Journal of Non-destructive Test"*. V 34, pp. 529 (1992).
21. Balankin A.S. and Susarrey O., *"A new statistical distribution function for self-affine crack roughness parameters"*. Philosophical Magazine Letters. V. 79, no. 8, pp. 629-637 (1999).
22. Balankin A.S. *"Physics of fracture and mechanics of self-affine cracks"*. Engineering Fracture Mechanics, V. 57, N. 2/3, pp. 135-203 (1997).
23. Balankin A.S. *"Revista Científica Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica"*, N 22, Julio-Agosto 2000. pp. 3-50 (1999).
24. Chudnovski A.; Kunin B., Gorelik M. *"Modeling of brittle fracture based on the concept of crack trajectory ensemble"*. Engineering Fracture Mechanics, V.58, No. 5/6, pp. 437-457 (1997).
25. Balankin A.S. *"Models of self-affine cracks in brittle an ductile materials"*. Philosophical Magazine Letters, V. 74, No. 6, pp. 415-422 (1996).
26. Balankin A.S., Bravo A., Galicia M.A., Susarrey O. *"The effect of self-affine roughness on crack mechanics in elastic solids"*. International Journal of Fracture. V. 79, pp. R63-R68, 1996.
27. Balankin A.S., *"The effect of fracture morphology on the crack mechanics in elastic solids"*. International Journal of Fracture. V. 76, pp. R63-R70 (1996).
28. Norman E. Dowling. *"Mechanical Behavior of Materials"*. Engineering Methods for Deformation, Fracture and Fatigue., Prentice Hall (1993).
29. Richard W. Hertzberg. *"Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials"*. John Wiley and Sons. Third Edition, 1989.
30. ASTM E 399-90. *"Standard Test Method for Plane-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials"*.

31. G. Vekinis, M.F. Ashby, P.W. Beaumont. "*Plaster of Paris as a model material for brittle porous solids*". Journal of Materials Science, V 28, pp. 3221-3227 (1993).
32. Balankin A.S., Morales D., Campos I. "*Intrinsic nature of anomalous crack roughening in an anisotropic composite*". Philosophical Magazine Letters, V. 80, N.3, pp. 165-172 (2000).
33. Balankin A.S., Daniel Morales, Gómez-Mancilla, Orlando Susarrey, Iván Campos, Francisco Sandoval, Armando Bravo, Antonio García, Marco Galicia. "*Fractal properties of fracture surfaces in steel 1045*", International Journal of Fracture, V 106, pp. L21-L26, (2000).
34. Neville D.J. "*A New Statistical Distribution Function for Fracture Toughness*". Proc. Royal Society, London, A 410, pp. 421-442, (1987).
35. Jay L. Devore. "*Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*". International Thomson. Cuarta edición.
36. William W. Hines, Douglas C. Montgomery "*Probabilidad y Estadística para Ingeniería*". CECSA. Tercera edición.
37. Susarrey Huerta Orlando. "*Mecánica de las grietas auto-afines en un material compuesto*". Tesis Doctoral, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Sección de Estudios de Posgrado e Investigación. Agosto, 1999.

## ANEXO A

### Tablas de los resultados obtenidos en los ensayos de tensión, y densidad real para el material yeso piedra dental.

Las tablas A1, A2 y A3 nos presentan los resultados obtenidos durante la realización de los ensayos de tensión al yeso piedra dental con relaciones agua/polvo de 0.28, 0.31 y 0.40.

**TABLA A1**

#### Parámetros mecánicos yeso piedra dental relación 0.28

DESP. MAXIMO (mm)	CARGA MAXIMA (kN)	ESFUERZO MAXIMO (Mpa)	DEF. MAXIMA (mm/mm)	% MAXIMO DE DEF.	MODULO DE YOUNG (Mpa)	ESFUERZO FLUENCIA (Mpa)	TEA (N/mm)
0.545	0.662	5.887	0.011	1.095	882.559	5.125	0.354
0.81	0.988	8.778	0.016	1.633	801.96	6.897	0.743
0.8	0.919	8.165	0.016	1.609	850.736	5.199	0.683
0.463	0.586	5.206	0.009	0.9328	667.512	5.206	0.231
0.518	0.673	5.979	0.01	1.053	762.962	5.658	0.301
1.188	0.864	7.68	0.024	2.379	690.136	5.426	1.014
0.412	0.618	5.497	0.008	0.8424	858.984	5.497	0.226
0.694	0.771	6.853	0.014	1.399	842.486	4.701	0.507
0.654	0.741	6.584	0.013	1.313	908.371	4.572	0.458
0.919	0.876	7.788	0.018	1.841	652.125	5.907	0.766
2.741	0.953	8.469	0.055	5.477	636.229	5.322	3.308
0.711	0.882	7.841	0.014	1.446	746.093	7.494	0.56
0.567	0.752	6.682	0.011	1.153	749.187	6.133	0.348
1.236	0.827	7.355	0.025	2.509	733.369	7.233	1.068
0.166	0.251	7.852	0.003	0.3458	881.371	7.852	0.036
1.17	0.888	7.894	0.023	2.383	677.935	5.18	1.065
0.494	0.598	5.314	0.01	1.019	676.232	4.973	0.245
0.357	0.487	4.331	0.007	0.7324	749.742	4.331	0.141
0.649	0.72	6.4	0.013	1.322	741.502	3.904	0.409
0.415	0.523	4.651	0.008	0.86	682.117	1.253	0.183
0.176	0.288	2.562	0.004	0.3748	1088.875	1.579	0.047
0.59	0.719	6.39	0.012	1.209	671.871	6.221	0.355
0.414	0.437	7.365	0.008	0.8559	700.508	6.547	0.166
1.571	0.999	8.883	0.031	4.005	851.704	7.17	2.489
1.522	1.034	9.188	0.03	3.043	785.864	8.771	1.785
0.271	0.348	8.952	0.005	0.57	780.49	8.897	0.088
0.621	0.717	6.37	0.012	1.272	582.897	6.25	0.366
0.196	0.264	6.325	0.004	0.4114	782.023	6.265	0.048
0.613	0.716	6.363	0.012	1.25	670.174	5.678	0.372
0.249	0.305	7.546	0.005	1.061	674.044	7.546	0.126

**TABLA A2**

**Parámetros mecánicos yeso piedra dental relación 0.31**

Desp. Max. (mm)	P. max. (kN)	Esf. Max. (Mpa)	Def. max.	% Def. max.	Mod. Young (Mpa)	Esf. Fluencia (Mpa)	TEA (N/mm)
0.62	0.725	6.444	0.012	1.258	658.64	5.371	0.377
0.548	0.803	7.138	0.011	1.104	702.44	7.138	0.337
0.419	0.654	5.811	0.008	0.8508	756.221	5.811	0.209
0.523	0.838	7.447	0.01	1.064	844.135	7.447	0.343
0.748	0.994	8.839	0.015	1.501	640.489	8.839	0.604
0.438	0.631	5.606	0.009	0.8807	724.211	5.606	0.212
0.668	1	8.891	0.013	1.338	748.053	8.891	0.512
0.435	0.747	6.644	0.009	0.8772	1111.273	6.155	0.297
0.468	0.827	7.351	0.009	0.9526	1048.967	6.558	0.345
0.836	1.214	10.792	0.017	1.678	735.885	10.739	0.818
0.553	0.969	8.609	0.011	1.119	923.454	8.609	0.431
0.626	1.027	9.127	0.013	1.263	972.537	7.097	0.554
0.778	1.213	10.783	0.016	1.562	886.352	8.165	0.813
0.621	0.96	8.537	0.012	1.247	797.229	8.537	0.458
0.7	1.1	9.78	0.014	1.403	1083.81	5.96	0.661
0.62	1.004	8.926	0.012	1.257	1038.164	6.511	0.535
0.957	1.121	9.964	0.019	1.918	1019.643	5.056	0.985
0.674	1.137	10.103	0.013	1.361	814.169	10.103	0.614
0.441	0.689	6.12	0.009	0.8915	917.457	6.12	0.252
0.405	0.601	5.341	0.008	0.8279	853.28	5.314	0.201
0.528	0.86	7.648	0.011	1.067	803.292	7.648	0.368
0.477	0.788	7.003	0.01	0.9628	1003.764	5.686	0.316
0.684	1.025	9.109	0.014	1.378	777.98	9.109	0.582
0.355	0.593	5.267	0.007	0.7181	999.082	5.267	0.18
0.476	0.883	7.85	0.01	0.9587	1153.642	7.167	0.361
0.742	1.004	8.926	0.015	1.495	740.944	7.931	0.626
0.678	1.029	9.144	0.014	1.363	1007.244	6.317	0.611
0.656	0.987	8.769	0.013	1.324	756.049	8.769	0.529
0.556	0.847	7.533	0.011	1.125	967.813	5.407	0.394
0.838	0.779	6.923	0.017	1.688	834.01	3.751	0.633
0.357	0.537	4.772	0.007	0.7315	1073.878	4.083	0.175
0.678	0.781	6.947	0.014	1.367	706.003	6.222	0.489
0.509	0.688	6.112	0.01	1.026	739.282	6.112	0.292
0.452	0.571	5.078	0.009	0.9178	772.612	4.447	0.213
0.421	0.595	5.287	0.008	0.8549	700.746	5.287	0.198
0.518	0.682	6.064	0.01	1.046	725.297	6.064	0.297
0.817	0.913	8.116	0.016	1.643	791.467	6.392	0.731
0.52	0.52	4.624	0.01	1.053	533.22	4.624	0.216
0.719	0.773	6.874	0.014	1.456	785.771	4.666	0.519
0.696	0.881	7.832	0.014	1.401	837.442	6.409	0.572
0.563	0.751	6.676	0.011	1.142	798.437	6.676	0.294
0.601	0.77	6.847	0.012	1.22	850.355	6.616	0.356
0.604	0.712	6.328	0.012	1.213	757.075	6.328	0.322
0.614	0.777	6.911	0.012	1.238	695.322	6.911	0.348
0.849	0.984	8.743	0.017	1.718	913.18	7.942	0.741
0.485	0.713	6.334	0.01	0.9754	803.382	6.334	0.236
0.545	0.774	6.884	0.011	1.103	782.714	6.884	0.284
0.643	0.681	6.053	0.013	1.301	567.1	6.053	0.305
0.575	0.755	6.708	0.012	1.17	870.536	6.708	0.309
<b>0.491</b>	<b>0.716</b>	<b>6.364</b>	<b>0.01</b>	<b>0.9986</b>	<b>865.751</b>	<b>6.364</b>	<b>0.239</b>

**TABLA A3****Parámetros mecánicos yeso piedra dental relación 0.40**

<b>DESP. ÁXIMO (mm)</b>	<b>CARGA ÁXIMO (kN)</b>	<b>ESFUERZO ÁXIMO (Mpa)</b>	<b>DEF. ÁXIMO (mm/mm)</b>	<b>% ÁXIMO DE DEF.</b>	<b>MODULO DE YOUNG (Mpa)</b>	<b>ESFUERZO FLUENCIA (Mpa)</b>	<b>TEA (N/mm)</b>
0.476	0.821	7.294	0.01	0.9666	989.212	7.277	0.341
0.367	0.551	4.895	0.007	0.741	917.129	4.895	0.17
0.675	0.804	7.149	0.014	1.353	848.881	4.751	0.483
0.455	0.606	5.386	0.009	0.9151	839.537	4.79	0.237
0.586	0.735	6.532	0.012	1.183	667.692	6.532	0.37
0.565	0.731	6.499	0.011	1.136	800.137	6.175	0.366
0.494	0.768	6.824	0.01	1.003	912.181	6.742	0.33
0.671	0.651	5.79	0.013	1.347	655.999	4.819	0.411
0.429	0.711	6.317	0.009	0.8658	956.733	6.317	0.25
0.712	0.863	7.669	0.014	1.438	737.347	6.62	0.539
0.431	0.614	5.46	0.009	0.8665	672.227	5.46	0.199
0.597	0.779	6.923	0.012	1.203	789.428	6.405	0.413
0.475	0.645	5.738	0.01	0.9766	684.215	2.429	0.25
0.416	0.617	5.481	0.008	0.8573	827.059	2.555	0.211
0.307	0.515	4.582	0.006	0.6404	870.035	2.539	0.135
0.51	0.723	6.428	0.01	1.048	805.12	6.394	0.33
0.519	0.714	6.344	0.01	1.056	790.029	6.275	0.318
0.575	0.787	6.995	0.012	1.181	818.387	6.847	0.4
0.685	0.9	8	0.014	1.388	789.322	6.99	0.553
0.692	0.837	7.441	0.014	1.415	679.651	6.885	0.503
0.284	0.46	4.087	0.006	0.5909	783.895	2.688	0.107
0.587	0.738	6.563	0.012	1.205	652.543	1.747	0.357
0.472	0.64	5.685	0.009	0.9741	646.844	1.69	0.243
0.475	0.695	6.176	0.01	0.9813	864.387	6.146	0.282
0.457	0.664	5.898	0.009	0.9295	679.078	5.898	0.243
0.453	0.578	5.134	0.009	0.9349	731.746	5.103	0.219
0.408	0.503	4.467	0.008	0.8315	726.418	4.467	0.178
0.537	0.604	5.37	0.011	1.097	810.425	3.64	0.293
0.404	0.579	5.147	0.008	0.8279	782.8	4.028	0.198
0.358	0.491	4.367	0.007	0.7336	748.689	4.367	0.153

Las tablas A4, A5 y A6 nos muestran el cálculo de la densidad real de las piezas (30 por cada una de acuerdo a las 220 probetas caracterizadas) fracturadas, el % de porosidad para cada una de las relaciones agua/polvo seleccionados.

**TABLA A4**  
**Cálculo de la densidad y porosidad de las piezas de yeso piedra dental 0.28**

W1 (g)	W2 (g)	W3 (g)	M <sub>parafina</sub> (g)	V (cm <sup>3</sup> )	$\rho$ (g/cm <sup>3</sup> )	P	$\rho$ prom.
19.65	21.41	9.45	1.76	10.0064	1.9637432	0.14989472	
31.52	34.6	15.35	3.08	15.8312	1.9910051	0.13809303	1.977374154
25.45	27.6	12.45	2.15	12.7635	1.99396717	0.13681075	
32.52	35.7	15.78	3.18	16.3902	1.98411246	0.14107686	1.989039815
26.71	28.97	12.84	2.26	13.6214	1.96088508	0.151132	
30.55	33.48	14.63	2.93	15.5977	1.9586221	0.15211164	1.959753591
23.02	25.13	11.2	2.11	11.5879	1.98655494	0.14001951	
34.33	37.83	16.4	3.5	17.545	1.95668282	0.15295116	1.971618878
24.15	26.35	11.62	2.2	12.288	1.96533203	0.14920691	
33.15	36.16	15.96	3.01	16.8589	1.96632046	0.14877902	1.965826246
20.52	22.3	10.02	1.78	10.3042	1.99142097	0.137913	
34.2	37.43	16.77	3.23	17.0747	2.00296345	0.13291626	1.997192211
28.06	30.46	13.7	2.4	14.096	1.99063564	0.13825297	
29.67	33.03	14.36	3.36	14.9404	1.98589061	0.1403071	1.988263123
19.35	20.55	9.45	1.2	9.768	1.98095823	0.14244232	
39.07	42.07	19.46	3	19.28	2.02645228	0.12274793	2.003705257
22.62	24.13	10.5	1.51	11.9539	1.89226947	0.18083573	
34.36	37.16	16.2	2.8	17.852	1.92471432	0.16679034	1.908491893
20.06	21.78	9.54	1.72	10.3308	1.94176637	0.1594085	
36.57	39.46	17.92	2.89	18.3321	1.99486147	0.1364236	1.968313921
22.54	24.56	10.74	2.02	11.5778	1.94682928	0.15721676	
33.4	36.31	16.18	2.91	16.8999	1.97634306	0.14444024	1.961586166
25.7	27.86	12.36	2.16	13.1024	1.96147271	0.15087762	
32.46	35.31	15.57	2.85	16.5765	1.95819383	0.15229704	1.959833268
25.53	27.77	12.41	2.24	12.8736	1.98312826	0.14150292	
33.65	36.62	16.14	2.97	17.1833	1.95829672	0.1522525	1.97071249
23.75	25.95	11.48	2.2	12.028	1.97455936	0.1452124	

**TABLA A5**

**Cálculo de la densidad y porosidad de las piezas de yeso piedra dental relación**

**0.31**

W1 (g)	W2 (g)	W3 (g)	M <sub>parafina</sub> (g)	Vol (cm <sup>3</sup> )	ρ (g/cm <sup>3</sup> )	P
18.05	22.44	9.73	4.39	7.8371	2.30314785	0.0029663
40.5	42.43	18.42	1.93	21.8677	1.85204663	0.19824821
30.1	33.15	13.94	3.05	15.8245	1.90211381	0.17657411
26.98	29.7	12.45	2.72	14.2308	1.89588779	0.17926935
32.57	35.77	14.8	3.2	17.418	1.8699047	0.19051745
22.45	24.12	10.31	1.67	11.9563	1.87767119	0.18715533
18.72	20.24	8.55	1.52	10.0028	1.87147599	0.18983724
37.78	40.77	17.6	2.99	19.8511	1.90316909	0.17611728
19.58	20.91	9.25	1.33	10.1837	1.92268036	0.16767084
39.74	42.41	20.86	2.67	18.5863	2.138134	0.07440086
29.5	32.1	12.81	2.6	16.404	1.79834187	0.22149703
25.5	27.28	10.86	1.78	14.4442	1.76541449	0.2357513
19.9	21.38	9.07	1.48	10.6672	1.86553172	0.19241051
37.5	40.27	18.25	2.77	18.9453	1.97938275	0.14312435
36.31	38.36	16.41	2.05	19.6745	1.8455361	0.20106662
18.64	19.93	8.28	1.29	10.2181	1.82421389	0.21029702
35.32	38.04	16.43	2.72	18.5908	1.89986445	0.17754786
21.67	23.44	10.12	1.77	11.3553	1.90835997	0.17387014
20.44	21.99	9.79	1.55	10.4795	1.95047474	0.15563864
36.62	41	17.23	4.38	18.9082	1.93672586	0.16159053
23.03	25.18	10.65	2.15	12.1435	1.89648783	0.1790096
34.88	38.23	16.4	3.35	18.1115	1.92584822	0.16629947
20.25	21.7	9.8	1.45	10.2905	1.96783441	0.14812363
37.82	41.82	17.97	4	19.41	1.94848016	0.15650209
19.17	21.01	9.1	1.84	9.8676	1.94272163	0.15899496
38.93	43.3	20	4.37	18.4493	2.11010716	0.0865337
19.37	21.03	9.15	1.66	10.0374	1.92978261	0.16459627
37.81	41.57	19.3	3.76	18.0964	2.08936584	0.09551262
19.79	21.27	9.3	1.48	10.3272	1.91629871	0.17043346
37.55	40.96	18.18	3.41	18.9949	1.97684642	0.14422233

**TABLA A6**

**Determinación de la densidad y porosidad de las piezas de yeso piedra dental  
relación 0.40**

W1 (g)	W2 (g)	W3 (g)	M <sub>parafoma</sub> (g)	Vol (cm <sup>3</sup> )	$\rho$ (g/cm <sup>3</sup> )	P
16.3	17.32	6.84	1.02	9.3478	1.7437258	0.24514035
33.3	35.7	14.6	2.4	18.436	1.80624864	0.21807418
22.45	24.1	8.74	1.65	13.5285	1.65945966	0.2816192
27.66	29.69	10.5	2.03	16.9367	1.63313987	0.29301304
16.5	17.95	6.63	1.45	9.7105	1.6991916	0.26441922
34.02	36.65	14.85	2.63	18.8807	1.80183997	0.2199827
16.73	18.08	6.91	1.35	9.6715	1.72982474	0.25115812
33.4	36.07	14.64	2.67	18.4663	1.80870017	0.21701291
21.15	23.32	8.53	2.17	12.3813	1.70822127	0.26051027
28.93	31.69	11.6	2.76	17.0264	1.69912606	0.26444759
17.76	19.5	6.95	1.74	10.6186	1.67253687	0.27595807
31.7	34.7	12.73	3	18.64	1.70064378	0.26379057
18.72	20.3	7.4	1.58	11.1462	1.67949615	0.27294539
30.6	33.62	11.72	3.02	18.5478	1.64979135	0.28580461
16.1	17.73	6.55	1.63	9.3707	1.71812138	0.25622451
33.58	35.5	14.02	1.92	19.3488	1.73550815	0.24869777
16.53	18.4	6.01	1.87	10.3143	1.60262936	0.30622106
32.8	37.58	12.96	4.78	19.3142	1.69823239	0.26483446
16.17	17.7	6.6	1.53	9.4017	1.71990172	0.2554538
33.18	36.39	14.56	3.21	18.2669	1.81640016	0.21367959
16.25	18.26	6.16	2.01	9.8689	1.64658675	0.28719188
32.45	34.75	14.5	2.3	17.697	1.83364412	0.20621467
17.3	19.9	6.87	2.6	10.144	1.70544164	0.26171358
33.9	37.36	14.6	3.46	18.9194	1.79181158	0.22432399
23	26.61	9.07	3.61	13.5329	1.69956181	0.26425896
26.9	29.66	10.97	2.76	15.6264	1.72144576	0.25478539
16.93	19.6	6.6	2.67	10.0363	1.68687664	0.26975037
33	37.05	14.1	4.05	18.4545	1.78818174	0.22589535
19.5	22.01	7.7	2.51	11.5239	1.69213547	0.26747382
30.5	34.98	12.25	4.48	17.7572	1.71761314	0.25644453
16.7	18.16	6.92	1.46	9.6194	1.73607502	0.24845237
32.5	36.26	14.97	3.76	17.1164	1.89876376	0.17802435
16.37	17.9	6.7	1.53	9.5017	1.7228496	0.25417766
36.56	37.37	14.2	0.81	22.2709	1.64160407	0.28934889

## **ANEXO B**

### **Tablas de los resultados obtenidos en los ensayos de flexión en 3 puntos con muesca y densidad real para el material yeso piedra dental.**

Las tablas B1,B2,B3,B4 y B5 presentan los resultados obtenidos en las pruebas de tenacidad a la fractura y densidad real para los cinco moldes elaborados para dichos ensayos. Los resultados presentados corresponden a los cinco espesores utilizados en la evaluación, y el no. de pieza presentado sirve para poder determinar un código interno representativo para cada pieza. La relación agua/polvo utilizada es de 0.31.

## TABLA B1

### Molde 1

No.de pieza	Densidad promedio (grcm <sup>-3</sup> )	Porosidad	Esf. Máx.(MPa)	Kq (MPa*m <sup>1/2</sup> )
1	1.705549465	0.261666898	3.044	0.121
2	1.601743363	0.306604605	2.681	0.355
3	1.732130819	0.250159819	2.95	0.391
4	1.696977769	0.265377589	2.349	0.16
5	1.777934585	0.230331348	2.327	0.308
6	1.716530553	0.256913181	1.39	0.069
7	1.730232091	0.250981779	3.968	0.526
8	1.718433217	0.256089516	0.378	0.048
9	1.663445015	0.279893933	2.825	0.374
10	1.721391551	0.254808853	2.437	0.242
11	1.737812825	0.247700076	2.472	0.328
12	1.703637183	0.262494726	2.886	0.383
13	1.704533788	0.262106585	3.464	0.459
14	1.649086539	0.286109724	2.816	0.373
15	1.706200972	0.261384861	0.862	0.114
16	1.749397379	0.242685117	2.451	0.325
17	1.650284998	0.28559091	2.313	0.307
18	1.689101234	0.268787345	2.787	0.369
19	1.725456477	0.253049144	1.398	0.116
20	1.711002605	0.259306232	2.566	0.255
21	1.735723016	0.248604755	1.607	0.32
22	1.727438641	0.252191064	1.738	0.345
23	1.728506043	0.251728986	1.326	0.264
24	1.712284802	0.258751168	1.849	0.368
25	1.732815293	0.24986351	1.158	0.23
26	1.724121185	0.253627192	1.135	0.226
27	1.736155756	0.248417422	1.144	0.202
28	1.685753506	0.270236578	1.169	0.232
29	1.656716836	0.282806565	1.221	0.243
30	1.726342481	0.252665593	0.703	0.104
31	1.693221936	0.267003491	0.761	0.151
32	1.685339767	0.270415685	1.263	0.233
33	1.681912349	0.271899416	0.568	0.074
34	1.701421471	0.263453909	0.369	0.073
35	1.686182699	0.27005078	0.393	0.06
36	1.666581688	0.278536066	0.212	0.013
37	1.669118446	0.277437902	1.174	0.233
38	1.687164848	0.269625607	1.612	0.32
39	1.661715456	0.28064266	1.621	0.322
40	1.661330816	0.280809171	1.621	0.294
41	1.690775698	0.268062468	0.67	0.172

42	1.665853564	0.278851271	0.849	0.225
43	1.665760208	0.278891685	0.813	0.216
44	1.66396349	0.279669485	0.857	0.227
45	1.661628408	0.280680343	1.16	0.307
46	1.675384339	0.274725394	1.03	0.273
47	1.655186869	0.283468888	0.764	0.203
48	1.671328804	0.276481037	0.545	0.144
49	1.667562242	0.278111584	1.181	0.313
50	1.644769804	0.28797844	0.958	0.254
51	1.679633533	0.272885916	0.687	0.228
52	1.693331361	0.266956121	0.995	0.264
53	1.626854281	0.295734077	0.606	0.032
54	1.66813396	0.277864086	1.398	0.371
55	1.618017778	0.299559403	0.913	0.242
56	1.631675529	0.293646957	1.012	0.268
57	1.609059463	0.303437462	0.325	0.019
58	1.595692982	0.309223817	1.054	0.279
59	1.639402764	0.290301834	1.417	0.376
60	1.597983685	0.308232171	0.94	0.249
61	1.607874359	0.303950494	0.97	0.321
62	1.667411405	0.278176881	1.282	0.425
63	1.666462933	0.278587475	0.779	0.258
64	1.709626929	0.259901762	0.717	0.177
65	1.700757481	0.26374135	1.143	0.379
66	1.711529208	0.259078265	1.03	0.341
67	1.721760651	0.254649069	0.573	0.19
68	1.68091262	0.272332199	0.734	0.243
69	1.710125952	0.259685735	0.864	0.286
70	1.726253408	0.252704152	0.968	0.321
71	1.699910821	0.26410787	1.03	0.341
72	1.689611148	0.268566602	0.943	0.313
73	1.641157797	0.289542079	0.752	0.249
74	1.654356906	0.283828179	1.236	0.111
75	1.672740598	0.275869871	0.869	0.288
76	1.702318312	0.263065666	1.009	0.314
77	1.692992752	0.267102705	0.667	0.224
78	1.69750517	0.265149277	0.903	0.299
79	1.662625957	0.280248503	0.562	0.186
80	1.653158751	0.284346861	0.818	0.071
256	1.414077211	0.387845363	1.409	0.059
257	1.449182911	0.37264809	4.307	0.099
258	1.284467237	0.443953577	7.023	0.207
259	1.371735136	0.406175266	4.375	0.2835
260	1.237743646	0.46418024	0.581	0.033
261	1.378877546	0.403083314	4.568	0.231
262	1.378943341	0.403054831	2.067	0.137
263	1.3998875	0.393988095	5.493	0.364

## TABLA B2

### Molde 2

No.de pieza	Densidad promedio (grcm <sup>-3</sup> )	Porosidad	Esf. Máx.(MPa)	Kq (MPa*m <sup>1/2</sup> )
81	1.711958728	0.258892325	4.076	0.441
82	1.679256803	0.273049003	2.882	0.312
83	1.644956133	0.287897778	2.359	0.383
84	1.579629153	0.316177856	1.966	0.319
85	1.688211942	0.269172319	0.986	0.213
86	1.636258404	0.291663029	1.46	0.316
87	1.680868638	0.272351239	1.354	0.179
88	1.636205822	0.291685792	2.369	0.493
89	1.623839706	0.297039088	1.378	0.298
90	1.664453078	0.279457542	1.648	0.356
91	1.653449825	0.284220855	1.627	0.352
92	1.68702551	0.269685926	1.686	0.365
93	1.647264468	0.286898499	1.605	0.347
94	1.658449047	0.28205669	1.768	0.382
95	1.642757125	0.288849729	1.645	0.356
96	1.666256574	0.278676808	1.806	0.391
97	1.697059476	0.265342218	1.623	0.326
98	1.667532995	0.278124245	1.778	0.385
99	1.642416879	0.288997022	1.471	0.318
100	1.657762781	0.282353775	1.673	0.362
101	0.83301989	0.639385329	0.93	0.201
102	1.671268004	0.276507358	1.843	0.399
103	1.673589641	0.27550232	1.708	0.369
104	1.677221366	0.273930144	1.23	0.333
105	1.629561068	0.294562308	0.765	0.207
106	1.645718862	0.287567592	1.157	0.313
107	1.654442317	0.283791205	1.262	0.251
108	1.634671896	0.292349829	1.026	0.278
109	1.646758575	0.2871175	1.342	0.363
110	1.675071696	0.274860737	1.176	0.318
111	1.659452348	0.28162236	0.982	0.266
112	1.634772843	0.292306128	0.955	0.258
113	1.627614823	0.295404838	0.957	0.259
114	1.617243884	0.299894423	1.115	0.301
115	1.658651218	0.28196917	1.2	0.3585
116	1.600228167	0.307260534	1.108	0.3
117	1.622442748	0.297643832	1.059	0.286
118	1.661816198	0.280599049	1.086	0.294
119	1.650923768	0.285314386	1.285	0.348
120	1.664737652	0.27933435	1.32	0.357
121	1.65471389	0.283673641	1.081	0.292

122	1.580265989	0.315902169	0.907	0.245
123	1.657381133	0.28251899	1.194	0.323
265	1.336126962	0.42159006	6.997	0.217
266	1.276199258	0.447532789	9.141	0.238

**TABLA B3**  
**Molde 3**

No.de pieza	Densidad promedio (grcm <sup>-3</sup> )	Porosidad	Esf. Máx.(MPa)	Kq (MPa*m <sup>1/2</sup> )
124	1.63711635	0.291291623	3.314	0.311
125	1.630389291	0.29420377	2.427	0.227
126	1.635710566	0.291900188	2.145	0.2359
127	1.640866935	0.289667993	2.588	0.364
128	1.641640416	0.289333153	2.572	0.362
129	1.692029019	0.267519905	1.974	0.37
130	1.699590248	0.264246646	2.089	0.391
131	1.708199187	0.260519832	1.455	0.273
132	1.69418537	0.26658642	2.074	0.389
133	1.70271213	0.262895182	1.915	0.359
134	1.678919614	0.273194972	1.705	0.319
135	1.674160395	0.27525524	1.627	0.305
136	1.688730801	0.268947705	1.69	0.3167
137	1.658964065	0.281833738	1	0.187
138	1.620899104	0.298312076	0.89	0.16
139	1.6659765	0.278798052	1.472	0.276
140	1.686095584	0.270088492	1.21	0.049
141	1.664382067	0.279488283	1.92	0.36
142	1.654854139	0.283612927	1.471	0.276
143	1.649225781	0.286049445	1.618	0.095
144	1.681443351	0.272102446	1.621	0.304
145	1.667023385	0.278344855	1.796	0.337
146	1.654092616	0.283942591	1.246	0.234
147	1.662989234	0.280091241	1.602	0.118
148	1.6393103	0.290341862	1.642	0.308
149	1.629212354	0.294713267	1.307	0.306
150	1.662192717	0.280436053	1.028	0.049
151	1.658945407	0.281841815	1.283	0.301
152	1.596308128	0.30895752	1.166	0.273
153	1.609157437	0.303395049	1.005	0.236
154	1.691169239	0.267892104	1.066	0.25
155	1.627588375	0.295416288	1.235	0.263
156	1.66305303	0.280063623	1.23	0.288
157	1.634146876	0.29257711	1.321	0.309
158	1.646923186	0.28704624	1.236	0.29

159	1.663051192	0.280064419	0.904	0.212
160	1.650915351	0.28531803	1.058	0.248
161	1.657293997	0.282556711	1.153	0.27
162	1.63883973	0.290545572	1.37	0.306
163	1.309412012	0.433154973	1.433	0.336
164	1.704098035	0.262295223	1.069	0.15
165	1.709447704	0.259979349	1.345	0.315
166	1.709675314	0.259880817	1.228	0.288
167	1.715509475	0.257355206	1.224	0.287

**TABLA B4**  
**Molde 4**

No.de pieza	Densidad promedio (grcm <sup>-3</sup> )	Porosidad	Esf. Máx.(MPa)	Kq (MPa*m <sup>1/2</sup> )
173	1.691933414	0.267561293	4.314	0.362
174	1.361807884	0.410472778	2.654	0.334
175	1.696768912	0.265468003	1.288	0.216
176	1.709927029	0.259771849	1.32	0.276
177	1.703786045	0.262430283	3.236	0.271
178	1.690307696	0.268265067	2.222	0.279
179	1.705804459	0.261556511	1.426	0.239
180	1.687483481	0.26948767	0.985	0.165
181	1.656520219	0.28289168	1.514	0.254
182	1.71308414	0.258405134	1.723	0.289
183	1.631963812	0.293522159	1.483	0.116
184	1.684039519	0.270978563	1.4	0.235
185	1.703134955	0.262712141	1.107	0.185
186	1.705643963	0.26162599	1.46	0.245
187	1.704105415	0.262292028	1.348	0.224
188	1.703470308	0.262566966	1.549	0.26
189	1.690761162	0.268068761	0.942	0.158
190	1.681836816	0.271932114	1.275	0.173
191	1.684188792	0.270913943	1.525	0.256
192	1.695188994	0.266151951	1.492	0.25
193	1.666460565	0.2785885	1.206	0.202
194	1.707845952	0.260672748	1.442	0.242
195	1.688755252	0.26893712	1.142	0.174
196	1.699048406	0.264481209	1.284	0.215
197	1.703607683	0.262507497	1.173	0.197
198	1.693339617	0.266952547	1.324	0.277
199	1.711351991	0.259154982	1.475	0.309
200	1.699878906	0.264121686	1.34	0.281
201	1.697892352	0.264981666	1.348	0.282
202	1.700645528	0.263789815	1.432	0.3
203	1.689744108	0.268509044	1.169	0.245

204	1.67874899	0.273268836	1.166	0.244
205	1.699653832	0.264219121	1.161	0.124
206	1.688746483	0.268940917	1.379	0.289
207	1.703300488	0.262640481	1.096	0.204
208	1.697532531	0.265137433	1.236	0.259
209	1.705883378	0.261522347	1.233	0.258
210	1.694094292	0.266625848	1.226	0.257
211	1.702758057	0.2628753	1.198	0.251
212	1.685858778	0.270191005	1.118	0.234
213	1.747372209	0.243561814	1.08	0.226
214	1.690428301	0.268212857	1.634	0.342
215	1.689505345	0.268612405	1.512	0.317
216	1.703421926	0.262587911	1.326	0.246
269	1.222765344	0.470664353	2.35698	0.153

**TABLA B5**  
**Molde 5**

No.de pieza	Densidad promedio (grcm <sup>-3</sup> )	Porosidad	Esf. Máx.(MPa)	Kq (MPa <sup>m<sup>1/2</sup></sup> )
169	1.733259624	0.249671159	1.69	0.323
170	1.695666473	0.26594525	1.804	0.7
171	1.7004243	0.263885584	1.44	0.293
172	1.70754928	0.260801177	1.225	0.2917
217	1.628671025	0.294947608	4.434	0.339
218	1.692734651	0.267214437	3.013	0.346
219	1.704625148	0.262067036	1.689	0.258
220	1.716199889	0.257056325	1.36	0.26
221	1.670622963	0.276786596	2.305	0.265
222	1.398479868	0.39459746	0.33	0.05
223	1.674916273	0.27492802	0.432	0.065
224	1.67771415	0.273716818	0.115	0.016
225	1.700676716	0.263776313	0.57	0.072
226	1.678157084	0.273525072	0.326	0.05
227	1.690715763	0.268088414	0.56	0.068
228	1.719414349	0.255664784	1.15	0.176
229	1.691137548	0.267905824	0.398	0.054
230	1.689382034	0.268665786	0.321	0.047
231	1.71294924	0.258463532	1.173	0.143
232	1.707758547	0.260710586	0.804	0.114
233	1.659573747	0.281569806	0.647	0.072
234	1.707624772	0.260768497	0.938	0.11
235	1.672282939	0.276067992	0.521	0.06
236	1.68335542	0.27127471	0.932	0.112
237	1.643375013	0.288582246	0.522	0.061

238	1.717267263	0.256594258	1.7	0.325
239	1.697651071	0.265086117	1.524	0.292
240	1.704900318	0.261947914	0.364	0.07
241	1.714141604	0.257947358	1.149	0.213
242	1.70592846	0.261502831	1.329	0.254
243	1.709524426	0.259946136	1.37	0.23
244	1.701100286	0.26359295	1.063	0.149
245	1.693201907	0.267012161	0.867	0.152
246	1.739926207	0.246785192	1.02	0.18
247	1.709753738	0.259846867	0.757	0.141
248	1.711915791	0.258910913	1.373	0.233
249	1.719760654	0.255514869	0.849	0.158
250	1.700227095	0.263970954	0.482	0.092
251	1.694234332	0.266565224	0.982	0.188
252	1.691937571	0.267559493	0.911	0.174
253	1.705592261	0.261648372	0.616	0.115
254	1.731862967	0.250275772	0.838	0.16
255	1.723996909	0.253680992	0.916	0.126

## ANEXO C

### Distribuciones de probabilidad.

Se presentan las funciones de distribución utilizadas en el presente proyecto de investigación.

#### C.1 Distribución normal.

$$y = ke^{-h^2x^2} \dots\dots\dots(c1)$$

que es la función de distribución, donde y es la probabilidad que un error x ocurra, h,k son constantes que determinan la extensión y la altura de la curva respectivamente.

#### C.2 Distribución extreme value.

$$F(x) = \exp\left[-\exp\left(-\frac{x-\alpha}{b}\right)\right] \dots\dots\dots(c2)$$

donde el parámetro  $b \geq 0$ ,  $\alpha$  es la moda y el promedio corresponde  $a - b\Gamma'(1)$  donde  $\Gamma'(1) \cong -0.57721$ .

#### C.3 Distribución beta.

La función de probabilidad beta no tiene una forma cerrada, simplemente se plantean dos parámetros  $\alpha_1, \alpha_2$ , los cuales proporcionan el promedio  $\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$ , y la moda se

establece como  $\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2}$

#### C.4 Distribución de Erlang.

$$f(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}} \sum_{j=0}^{m-1} p_j \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^j}{j!} \dots\dots\dots(c3)$$

se tienen dos parámetros  $m$  y  $\beta$  mayores a cero.

#### C.5 Distribución logistic.

$$F(x) = \frac{1}{1+z} \quad \text{donde} \quad z = \exp[-(x-\alpha)/\beta] \quad (c4)$$

únicamente se tiene un parámetro  $\beta$ .

#### C.6 Distribución log-logistic.

$$F(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{-\alpha}} \dots\dots\dots(c5)$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma$  son parámetros de la función de distribución mayores a cero.

#### C.7 Distribución gamma.

$$F(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} \dots\dots\dots(c6)$$

donde  $r$  y  $\lambda$  son los parámetros de la distribución.

#### C.8 Distribución de Pearson.

$$F(x) = 1 - F_G\left(\frac{1}{x}\right) \dots\dots\dots(c7)$$

donde  $F_G$  es la función gamma, y se tienen parámetros de escala y de forma  $\alpha, \beta$ .

### C.9 Distribución de Poisson.

$$F(x) = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^x \frac{\lambda^j}{j!} \dots\dots\dots(c8)$$

donde se tiene un parámetro  $\lambda$ .

### C.10 Distribución de Rayleigh.

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right) \dots\dots\dots(c9)$$

se tiene un parámetro  $b$  que es mayor a cero.

## ANEXO D

### DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD OBTENIDOS DE ACUERDO A LOS PARÁMETROS MECÁNICOS Y FÍSICOS DEL ENSAYO DE FLEXION EN 3 PUNTOS CON PRESENCIA DE MUESCA.

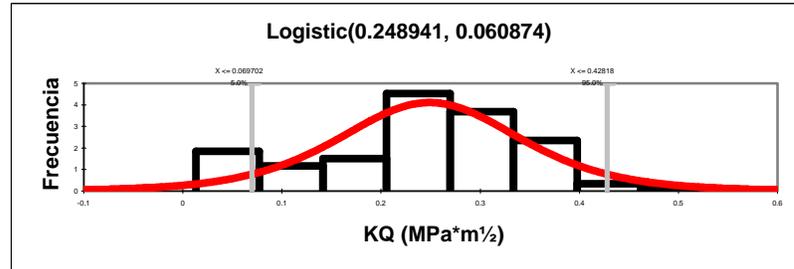
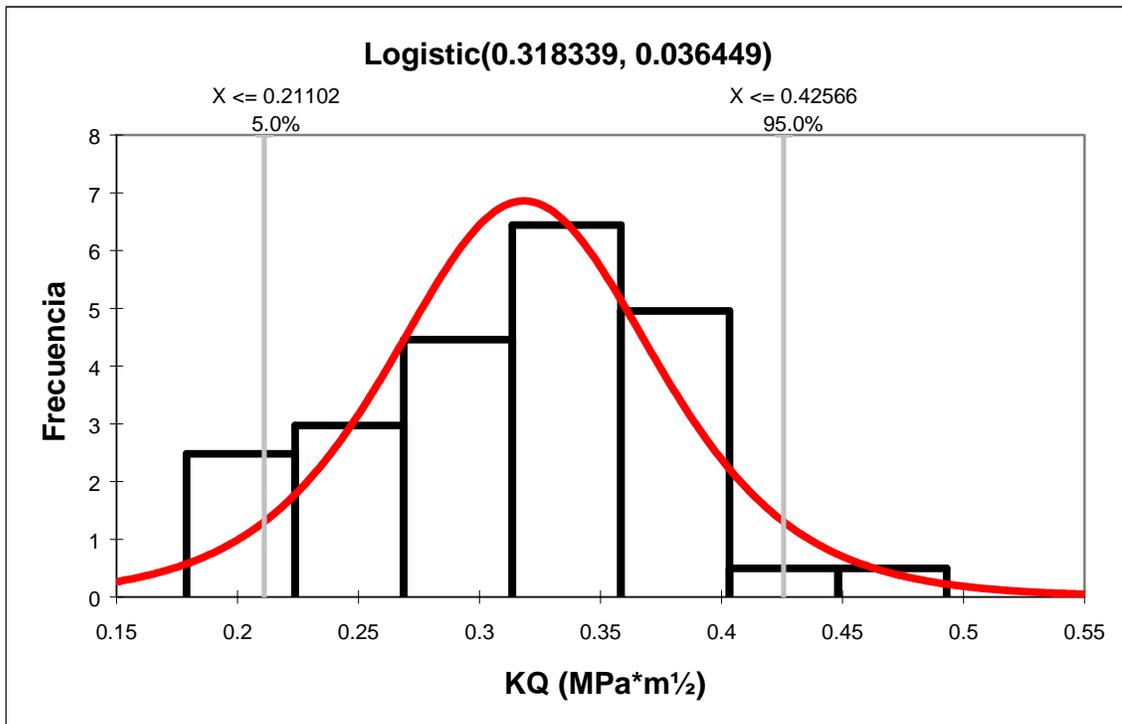


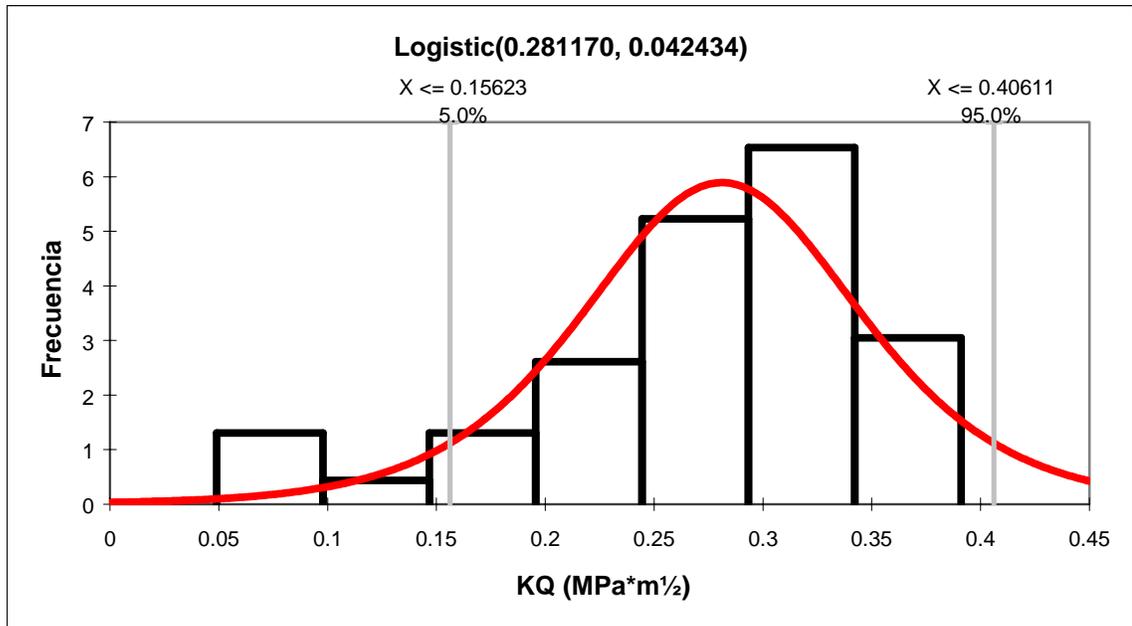
Figura D.1 Distribución logistic de la tenacidad a la fractura en molde 1. Relación 0.31

N/A	Chi-Sq	A-D	K-S	N/A	Fit	Input
Test Value	16.4086	0.8324	0.0764	Function	RiskLogistic(0.248941, 0.060874)	N/A
P Value	0.0885	0.025 <= p <= 0.05	0.05 <= p <= 0.1	Shift	N/A	N/A
Rank	3	1	1	a	0.24894089	N/A
C.Val @ 0.75	6.7372	N/A	N/A	b	0.06087359	N/A
C.Val @ 0.5	9.3418	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.25	12.5489	0.4249	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.15	14.5339	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.1	15.9872	0.6582	0.0737	Left X	0.0697	0.0697
C.Val @ 0.05	18.307	0.7669	0.0804	Left P	5.00%	8.60%
C.Val @ 0.025	20.4832	0.9036	0.085	Right X	0.4282	0.4282
C.Val @ 0.01	23.2093	0.9036	0.092	Right P	95.00%	97.85%
C.Val @ 0.005	25.1882	1.0073	N/A	Diff. X	0.3585	0.3585
C.Val @ 0.001	29.5883	N/A	N/A	Diff. P	90.00%	89.25%
				Minimum	#####	0.013
				Maximum	#####	0.526
				Mean	0.248941	0.24366
				Mode	0.248941	0.23300 [est]
				Median	0.248941	0.249
				Std. Deviation	0.110412	0.10693
				Variance	0.0121909	0.01131
				Skewness	0	-0.2661
				Kurtosis	4.2	2.7287



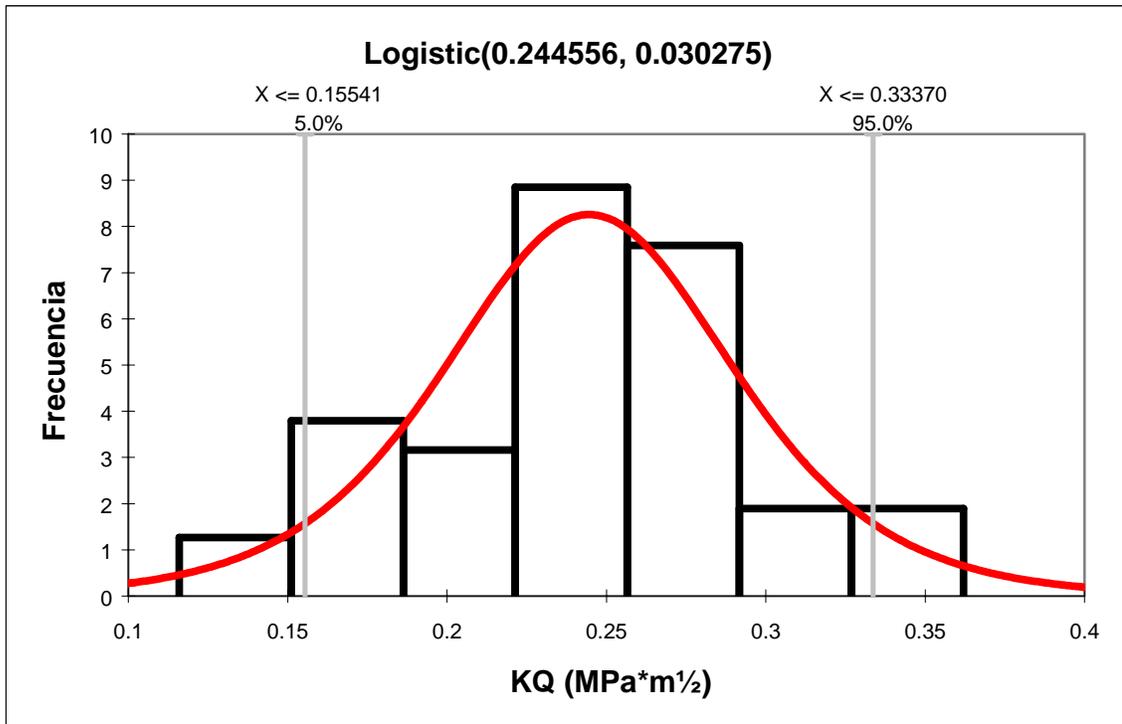
N/A	Chi-Sq	A-D	K-S	N/A	Fit	Input
Test Value	3.1778	0.3097	0.087	Function	RiskLogistic(0.318339, 0.036449)	N/A
P Value	0.8681	> 0.25	> 0.1	Shift	N/A	N/A
Rank	2	1	5a		0.31833876	N/A
C.Val @ 0.75	4.2549	N/A	N/A	b	3.64E-02	N/A
C.Val @ 0.5	6.3458	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.25	9.0371	0.4236	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.15	10.7479	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.1	12.017	0.6564	0.1054	Left X	0.211	0.211
C.Val @ 0.05	14.0671	0.7648	0.1147	Left P	5.00%	6.67%
C.Val @ 0.025	16.0128	0.901	0.1213	Right X	0.4257	0.4257
C.Val @ 0.01	18.4753	0.901	0.131	Right P	95.00%	95.56%
C.Val @ 0.005	20.2777	1.0044	N/A	Diff. X	0.2146	0.2146
C.Val @ 0.001	24.3219	N/A	N/A	Diff. P	90.00%	88.89%
				Minimum	#####	0.179
				Maximum	#####	0.493
				Mean	0.318339	0.31708
				Mode	0.318339	0.31800 [est]
				Median	0.318339	0.318
				Std. Deviation	0.066111	0.065011
				Variance	0.0043707	0.0041325
				Skewness	0	0.0403
				Kurtosis	4.2	3.1102

Figura D.2 Distribución logístico de la tenacidad a la fractura en molde 2. Relación 0.31



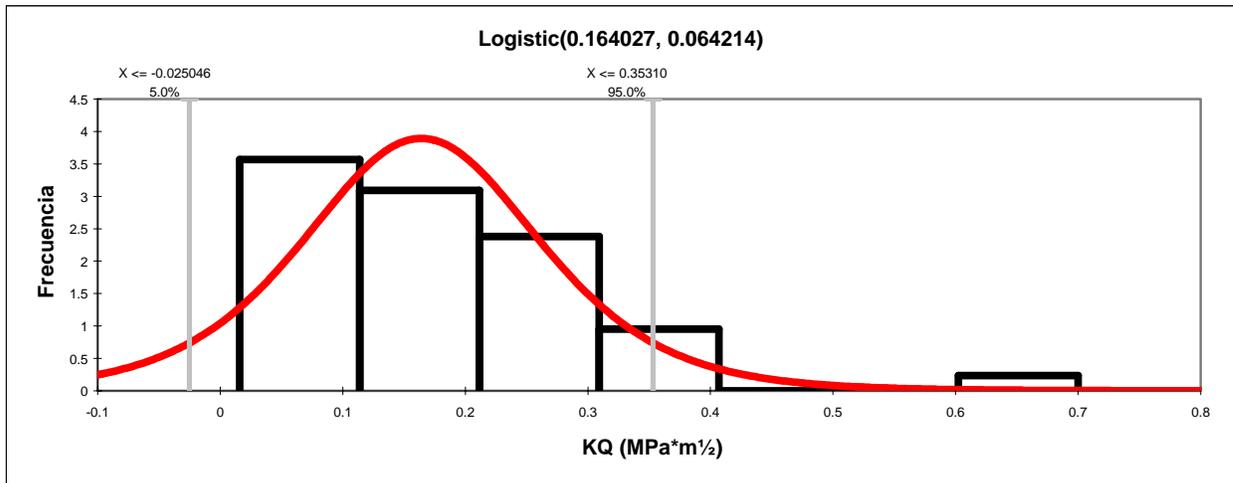
N/A	Chi-Sq	A-D	K-S	N/A	Fit	Input
Test Value	8.6596	0.9306	0.0941	Function	RiskLogistic(0.281170, 0.042434)	N/A
P Value	0.278	0.005 <= p <= 0.01	> 0.1	Shift	N/A	N/A
Rank	1	1	1	a	0.28116977	N/A
C.Val @ 0.75	4.2549	N/A	N/A	b	4.24E-02	N/A
C.Val @ 0.5	6.3458	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.25	9.0371	0.4237	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.15	10.7479	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.1	12.017	0.6565	0.1032	Left X	0.1562	0.1562
C.Val @ 0.05	14.0671	0.7649	0.1123	Left P	5.00%	10.64%
C.Val @ 0.025	16.0128	0.9012	0.1188	Right X	0.4061	0.4061
C.Val @ 0.01	18.4753	0.9012	0.1283	Right P	95.00%	100.00%
C.Val @ 0.005	20.2777	1.0047	N/A	Diff. X	0.2499	0.2499
C.Val @ 0.001	24.3219	N/A	N/A	Diff. P	90.00%	89.36%
				Minimum	#####	0.049
				Maximum	#####	0.391
				Mean	0.28117	0.27154
				Mode	0.28117	0.049000 [est]
				Median	0.28117	0.288
				Std. Deviation	0.076967	0.080779
				Variance	0.0059239	0.0063864
				Skewness	0	-1.1242
				Kurtosis	4.2	4.0169

Figura D.3 Distribución logistic de la tenacidad a la fractura molde 3. Relación 0.31



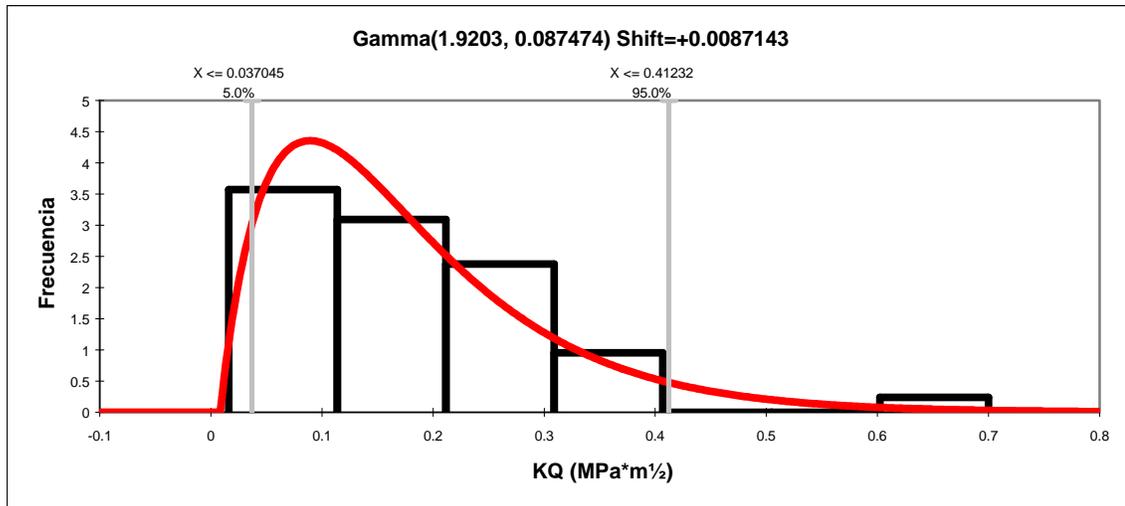
N/A	Chi-Sq	A-D	K-S	N/A	Fit	Input
Test Value	9.2222	0.3011	0.0804	Function	RiskLogistic(0.244556, 0.030275)	N/A
P Value	0.2371	> 0.25	> 0.1	Shift	N/A	N/A
Rank	4	1	1	a	0.24455555	N/A
C.Val @ 0.75	4.2549	N/A	N/A	b	3.03E-02	N/A
C.Val @ 0.5	6.3458	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.25	9.0371	0.4236	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.15	10.7479	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.1	12.017	0.6564	0.1054	Left X	0.1554	0.1554
C.Val @ 0.05	14.0671	0.7648	0.1147	Left P	5.00%	6.67%
C.Val @ 0.025	16.0128	0.901	0.1213	Right X	0.3337	0.3337
C.Val @ 0.01	18.4753	0.901	0.131	Right P	95.00%	93.33%
C.Val @ 0.005	20.2777	1.0044	N/A	Diff. X	0.1783	0.1783
C.Val @ 0.001	24.3219	N/A	N/A	Diff. P	90.00%	86.67%
				Minimum	#####	0.116
				Maximum	#####	0.362
				Mean	0.244556	0.24256
				Mode	0.244556	0.24500 [est]
				Median	0.244556	0.246
				Std. Deviation	0.054914	0.054479
				Variance	0.00301551	0.002902
				Skewness	0	-0.2509
				Kurtosis	4.2	2.9668

Figura D.4 Distribución logistic de la tenacidad a la fractura en molde 4. Relación 0.31



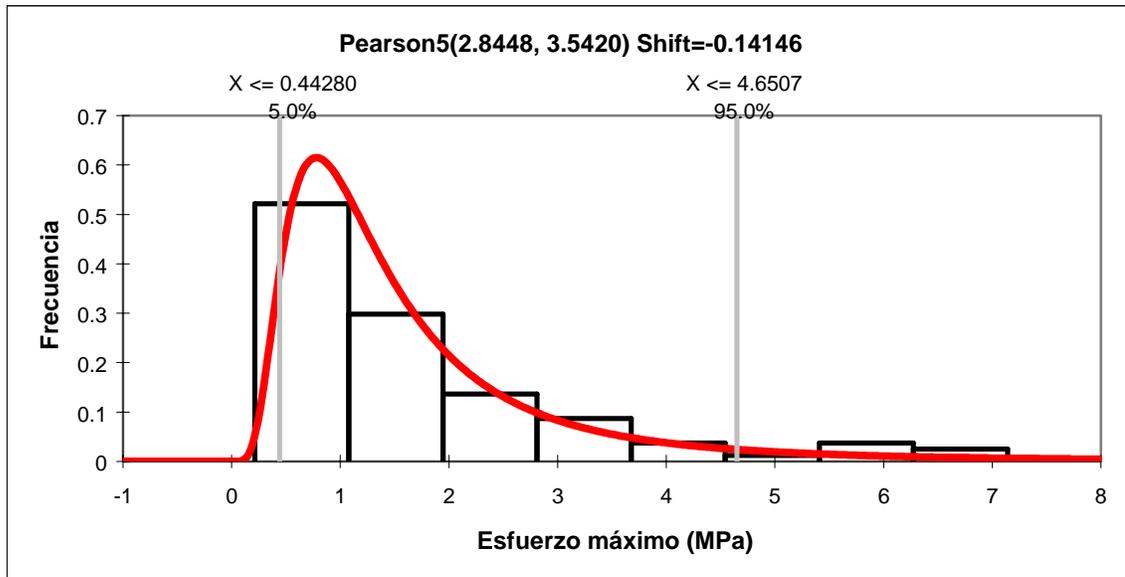
N/A	Chi-Sq	A-D	K-S	N/A	Fit	Input
Test Value	14.8605	0.8052	0.1159	Function	RiskLogistic(0.164027, 0.064214)	N/A
P Value	0.0378	0.025 <= p <= 0.05	0.05 <= p <= 0.1	Shift	N/A	N/A
Rank	11	8	7	a	0.16402739	N/A
C.Val @ 0.75	4.2549	N/A	N/A	b	6.42E-02	N/A
C.Val @ 0.5	6.3458	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.25	9.0371	0.4235	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.15	10.7479	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.1	12.017	0.6562	0.1078	Left X	-0.025	-0.025
C.Val @ 0.05	14.0671	0.7646	0.1173	Left P	5.00%	0.00%
C.Val @ 0.025	16.0128	0.9008	0.124	Right X	0.3531	0.3531
C.Val @ 0.01	18.4753	0.9008	0.1339	Right P	95.00%	97.67%
C.Val @ 0.005	20.2777	1.0042	N/A	Diff. X	0.3781	0.3781
C.Val @ 0.001	24.3219	N/A	N/A	Diff. P	90.00%	97.67%
				Minimum	#####	0.016
				Maximum	#####	0.7
				Mean	0.164027	0.17669
				Mode	0.164027	0.050000 [est]
				Median	0.164027	0.152
				Std. Deviation	0.116471	0.1246
				Variance	0.0135655	0.015164
				Skewness	0	1.7763
				Kurtosis	4.2	8.1972

Figura D.5 Distribución logistic de la tenacidad a la fractura en molde 5. Relación 0.31



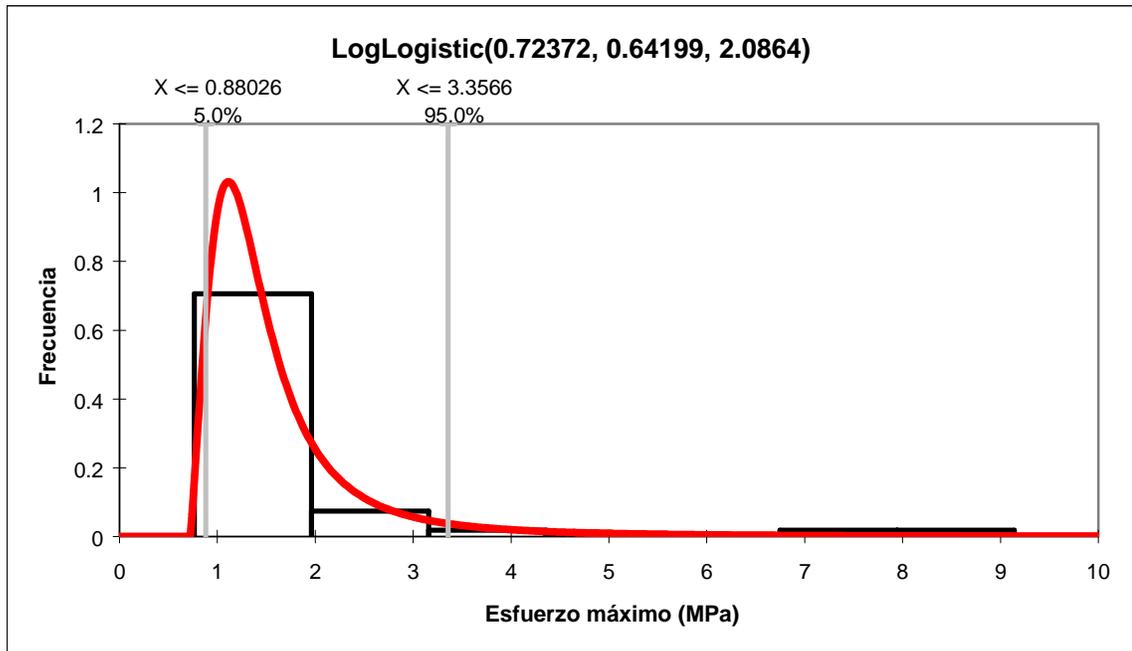
N/A	Chi-Sq	A-D	K-S	N/A	Fit	Input
Test Value	2.9535	0.3718	0.0969	Function	RiskGamma(1.9203, 0.087474, RiskShift(0.0087143))	N/A
P Value	0.8893	N/A	N/A	Shift	8.71E-03	N/A
Rank	3	1	1	a	1.92030635	N/A
C.Val @ 0.75	4.2549	N/A	N/A	b	8.75E-02	N/A
C.Val @ 0.5	6.3458	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.25	9.0371	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.15	10.7479	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.1	12.017	N/A	N/A	Left X	0.037	0.037
C.Val @ 0.05	14.0671	N/A	N/A	Left P	5.00%	2.33%
C.Val @ 0.025	16.0128	N/A	N/A	Right X	0.4123	0.4123
C.Val @ 0.01	18.4753	N/A	N/A	Right P	95.00%	97.67%
C.Val @ 0.005	20.2777	N/A	N/A	Diff. X	0.3753	0.3753
C.Val @ 0.001	24.3219	N/A	N/A	Diff. P	90.00%	95.35%
				Minimum	0.0087143	0.016
				Maximum	#####	0.7
				Mean	0.176691	0.17669
				Mode	0.089217	0.050000
				Median	0.148603	0.152
				Std. Deviation	0.121217	0.1246
				Variance	0.0146935	0.015164
				Skewness	1.4433	1.7763
				Kurtosis	6.1245	8.1972

Figura D.6 Distribución gamma de la tenacidad a la fractura en molde 5. Relación 0.31



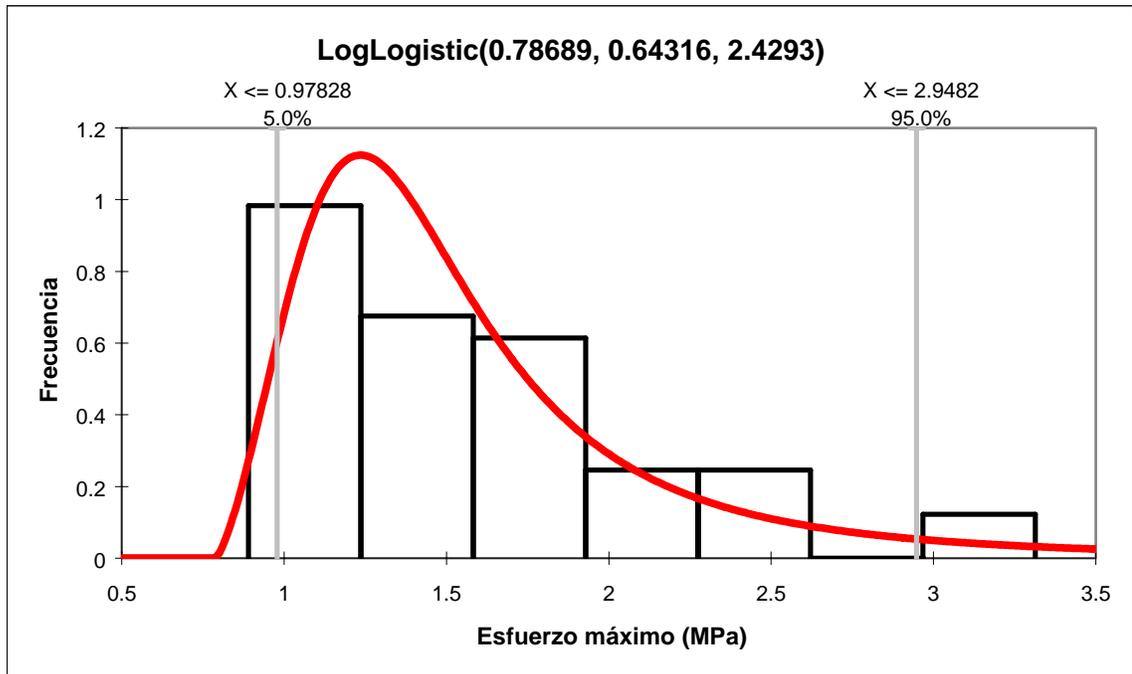
N/A	Chi-Sq	A-D	K-S	N/A	Fit	Input
Test Value	9.3118	0.6325	0.0806	Function	RiskPearson5(2.8448, 3.5420, RiskShift(-0.14146))	N/A
P Value	0.5028	N/A	N/A	Shift	-0.14145794	N/A
Rank	1	1	1	a	2.84475841	N/A
C.Val @ 0.75	6.7372	N/A	N/A	b	3.54201489	N/A
C.Val @ 0.5	9.3418	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.25	12.5489	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.15	14.5339	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.1	15.9872	N/A	N/A	Left X	0.4428	0.4428
C.Val @ 0.05	18.307	N/A	N/A	Left P	5.00%	5.38%
C.Val @ 0.025	20.4832	N/A	N/A	Right X	4.6507	4.6507
C.Val @ 0.01	23.2093	N/A	N/A	Right P	95.00%	94.62%
C.Val @ 0.005	25.1882	N/A	N/A	Diff. X	4.2079	4.2079
C.Val @ 0.001	29.5883	N/A	N/A	Diff. P	90.00%	89.25%
				Minimum	-0.14146	0.212
				Maximum	#####	7.14
				Mean	1.7786	1.7399
				Mode	0.7798	1.0300 [est]
				Median	1.2645	1.16
				Std. Deviation	2.089	1.4679
				Variance	4.364	2.1317
				Skewness	3.2799 [est]	1.9105
				Kurtosis	17.6699 [est]	6.4708

Figura D.7 Distribución de Pearson para el esfuerzo máximo en molde 1. Relación 0.31



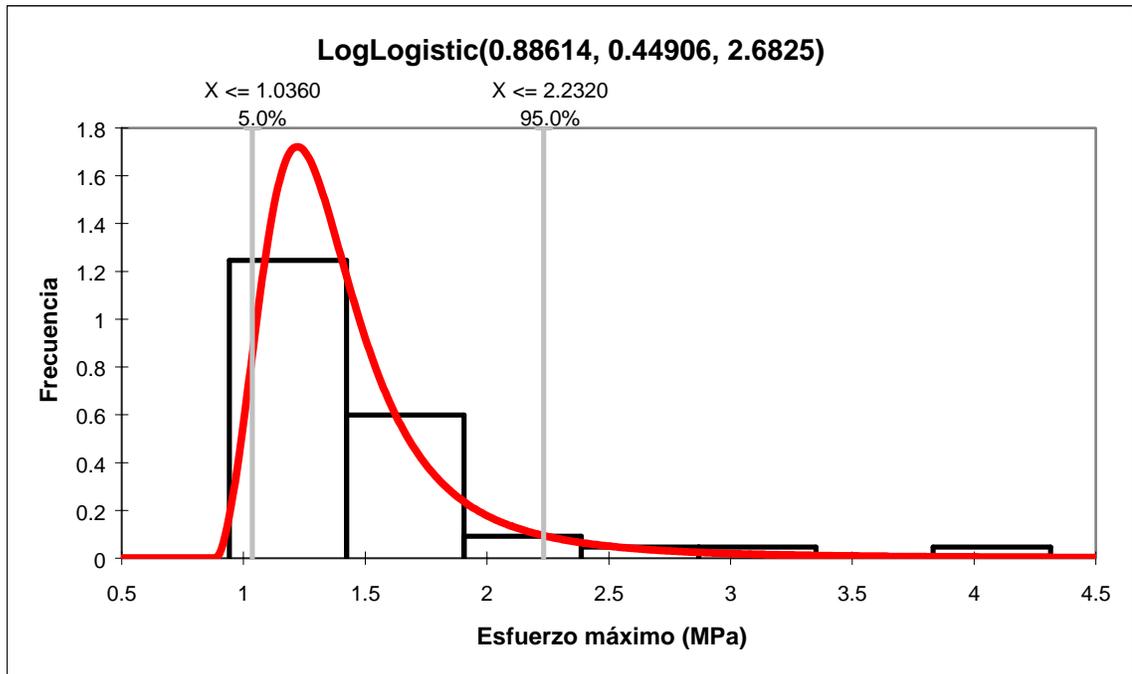
N/A	Chi-Sq	A-D	K-S	N/A	Fit	Input
Test Value	8.8667	0.3128	0.0832	Function	RiskLogLogistic(0.72372, 0.64199, 2.0864)	N/A
P Value	0.2624	N/A	N/A	Shift	N/A	N/A
Rank	2	1	1	g	0.72371946	N/A
C.Val @ 0.75	4.2549	N/A	N/A	b	0.6419949	N/A
C.Val @ 0.5	6.3458	N/A	N/A	a	2.08638536	N/A
C.Val @ 0.25	9.0371	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.15	10.7479	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.1	12.017	N/A	N/A	Left X	0.8803	0.8803
C.Val @ 0.05	14.0671	N/A	N/A	Left P	5.00%	2.22%
C.Val @ 0.025	16.0128	N/A	N/A	Right X	3.3566	3.3566
C.Val @ 0.01	18.4753	N/A	N/A	Right P	95.00%	93.33%
C.Val @ 0.005	20.2777	N/A	N/A	Diff. X	2.4764	2.4764
C.Val @ 0.001	24.3219	N/A	N/A	Diff. P	90.00%	91.11%
				Minimum	0.72372	0.765
				Maximum	#####	9.141
				Mean	1.69246	1.7775
				Mode	1.11293	1.6317 [est]
				Median	1.36571	1.354
				Std. Deviation	2.93782	1.5078
				Variance	8.63081	2.223
				Skewness	3.9613 [est]	3.6691
				Kurtosis	24.0610 [est]	16.7197

Figura D.8 Distribución log-logistic del esfuerzo máximo en molde 2. Relación 0.31



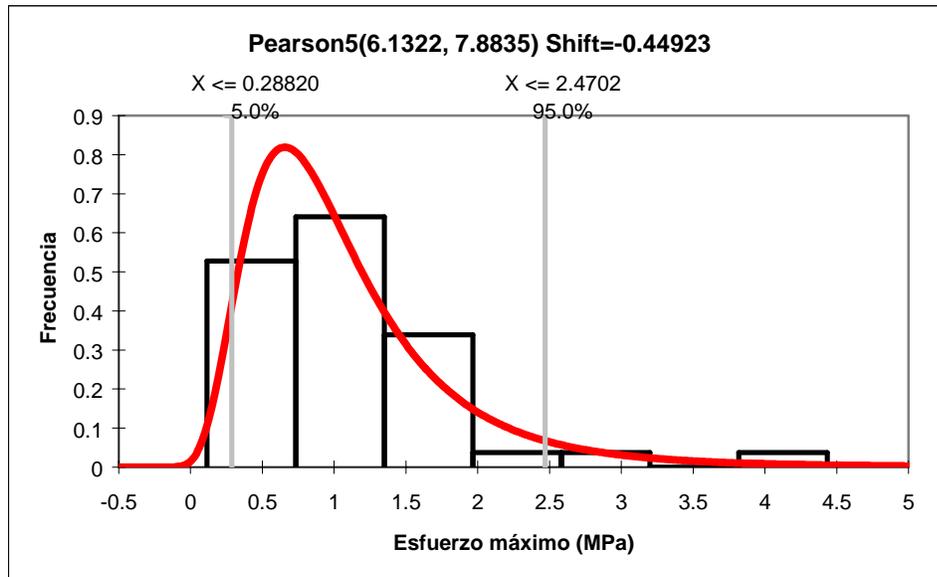
N/A	Chi-Sq	A-D	K-S	N/A	Fit	Input
Test Value	6.9574	0.2	0.0656	Function	RiskLogLogistic(0.78689, 0.64316, 2.4293)	N/A
P Value	0.4333	N/A	N/A	Shift	N/A	N/A
Rank	6	4	4	g	0.7868852	N/A
C.Val @ 0.75	4.2549	N/A	N/A	b	0.64316335	N/A
C.Val @ 0.5	6.3458	N/A	N/A	a	2.42925466	N/A
C.Val @ 0.25	9.0371	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.15	10.7479	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.1	12.017	N/A	N/A	Left X	0.9783	0.9783
C.Val @ 0.05	14.0671	N/A	N/A	Left P	5.00%	4.26%
C.Val @ 0.025	16.0128	N/A	N/A	Right X	2.9482	2.9482
C.Val @ 0.01	18.4753	N/A	N/A	Right P	95.00%	95.74%
C.Val @ 0.005	20.2777	N/A	N/A	Diff. X	1.9699	1.9699
C.Val @ 0.001	24.3219	N/A	N/A	Diff. P	90.00%	91.49%
				Minimum	0.78689	0.89
				Maximum	#####	3.314
				Mean	1.65175	1.5923
				Mode	1.23548	2.4270 [est]
				Median	1.43005	1.433
				Std. Deviation	1.13226	0.57255
				Variance	1.28202	0.32084
				Skewness	3.3103 [est]	1.3484
				Kurtosis	18.3964 [est]	4.5412

Figura D.9 Distribución log-logistic del esfuerzo máximo en molde 3. Relación 0.31



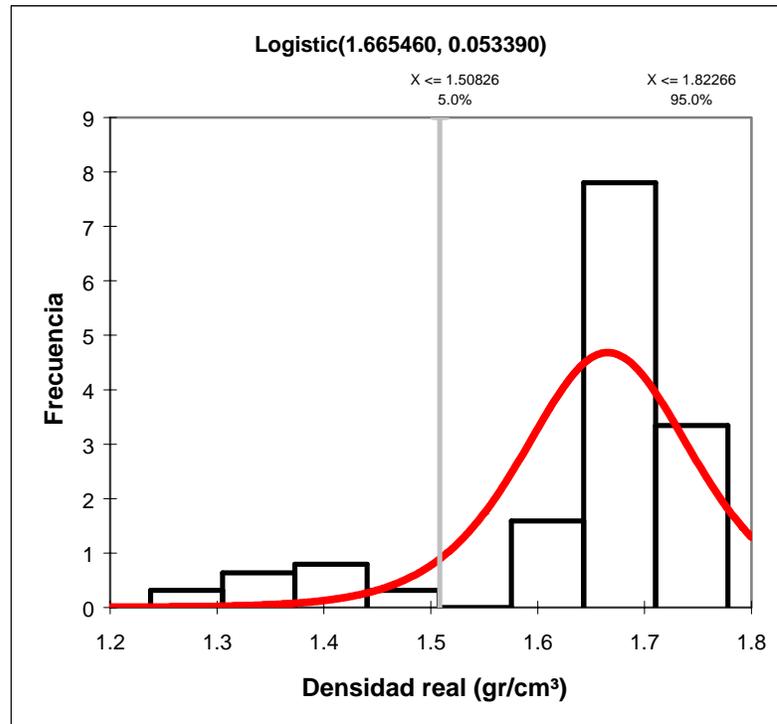
N/A	Chi-Sq	A-D	K-S	N/A	Fit	Input
Test Value	6.7333	0.4899	0.1047	Function	RiskLogLogistic(0.88614, 0.44906, 2.6825)	N/A
P Value	0.4572	N/A	N/A	Shift	N/A	N/A
Rank	3	1	1	g	0.88614468	N/A
C.Val @ 0.75	4.2549	N/A	N/A	b	0.44906395	N/A
C.Val @ 0.5	6.3458	N/A	N/A	a	2.68253219	N/A
C.Val @ 0.25	9.0371	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.15	10.7479	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.1	12.017	N/A	N/A	Left X	1.036	1.036
C.Val @ 0.05	14.0671	N/A	N/A	Left P	5.00%	4.44%
C.Val @ 0.025	16.0128	N/A	N/A	Right X	2.232	2.232
C.Val @ 0.01	18.4753	N/A	N/A	Right P	95.00%	91.11%
C.Val @ 0.005	20.2777	N/A	N/A	Diff. X	1.196	1.196
C.Val @ 0.001	24.3219	N/A	N/A	Diff. P	90.00%	86.67%
				Minimum	0.88614	0.942
				Maximum	#####	4.314
				Mean	1.45705	1.496
				Mode	1.22149	1.3480 [est]
				Median	1.33521	1.34
				Std. Deviation	0.57701	0.60528
				Variance	0.33293	0.35822
				Skewness	2.9426 [est]	3.0401
				Kurtosis	15.5223 [est]	13.0265

Figura D.10 Distribución log-logistic del esfuerzo máximo en molde 4. Relación 0.31



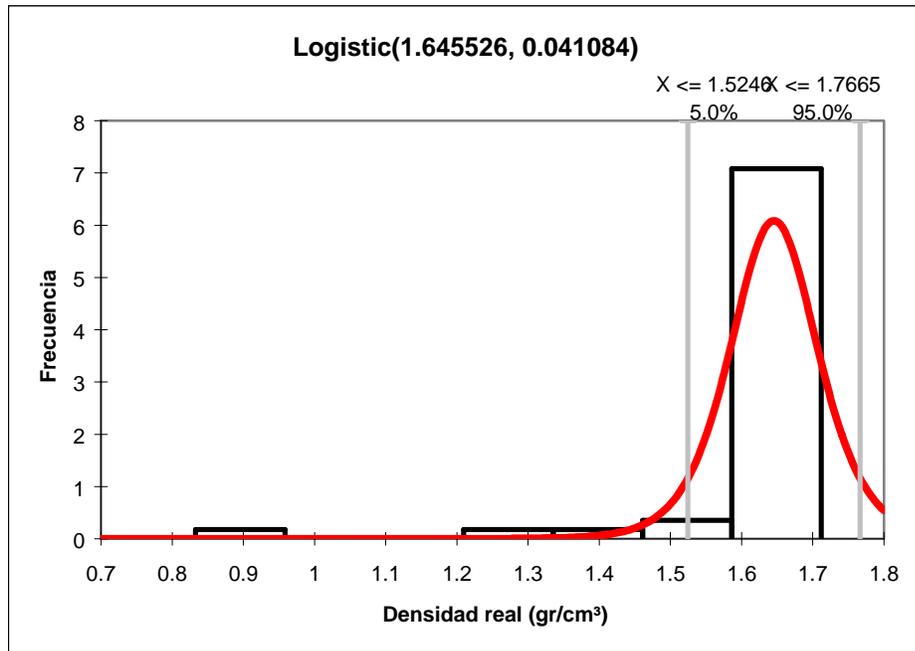
N/A	Chi-Sq	A-D	K-S	N/A	Fit	Input
Test Value	4.814	0.2262	0.0754	Function	RiskPearson5(6.1322, 7.8835, RiskShift(-0.44923))	N/A
P Value	0.6827	N/A	N/A	Shift	-0.44923227	N/A
Rank	4	1	6a		6.13223504	N/A
C.Val @ 0.75	4.2549	N/A	N/A	b	7.88347742	N/A
C.Val @ 0.5	6.3458	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.25	9.0371	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.15	10.7479	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.1	12.017	N/A	N/A	Left X	0.2882	0.2882
C.Val @ 0.05	14.0671	N/A	N/A	Left P	5.00%	2.33%
C.Val @ 0.025	16.0128	N/A	N/A	Right X	2.4702	2.4702
C.Val @ 0.01	18.4753	N/A	N/A	Right P	95.00%	95.35%
C.Val @ 0.005	20.2777	N/A	N/A	Diff. X	2.182	2.182
C.Val @ 0.001	24.3219	N/A	N/A	Diff. P	90.00%	93.02%
				Minimum	-0.44923	0.115
				Maximum	#####	4.434
				Mean	1.0868	1.0886
				Mode	0.6561	1.6930 [est]
				Median	0.90945	0.932
				Std. Deviation	0.75565	0.77476
				Variance	0.571	0.5863
				Skewness	1.7914 [est]	2.2364
				Kurtosis	7.5974 [est]	9.8175

Figura D.11 Distribución de Pearson del esfuerzo máximo en molde 5. Relación 0.31.



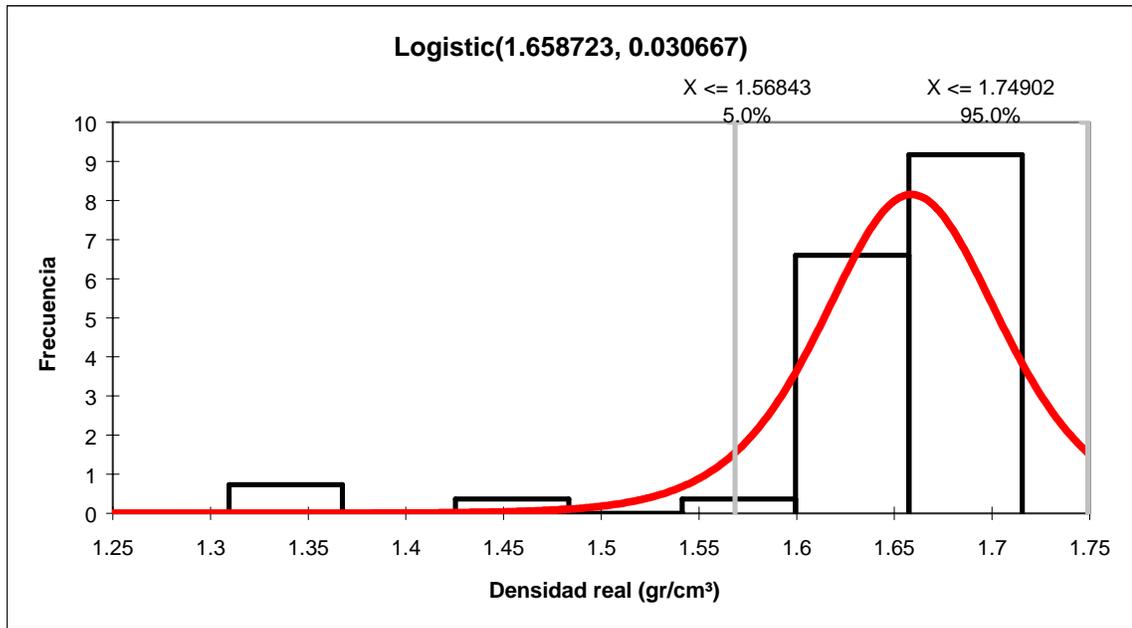
N/A	Chi-Sq	A-D	K-S	N/A	Fit	Input
Test Value	53.3118	7.5874	0.1835	Function	RiskLogistic(1.665460, 0.053390)	N/A
P Value	6.52E-08	< 0.005	< 0.01	Shift	N/A	N/A
Rank	1	1	1	a	1.66546012	N/A
C.Val @ 0.75	6.7372	N/A	N/A	b	5.34E-02	N/A
C.Val @ 0.5	9.3418	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.25	12.5489	0.4249	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.15	14.5339	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.1	15.9872	0.6582	0.0737	Left X	1.5083	1.5083
C.Val @ 0.05	18.307	0.7669	0.0804	Left P	5.00%	13.98%
C.Val @ 0.025	20.4832	0.9036	0.085	Right X	1.8227	1.8227
C.Val @ 0.01	23.2093	0.9036	0.092	Right P	95.00%	100.00%
C.Val @ 0.005	25.1882	1.0073	N/A	Diff. X	0.3144	0.3144
C.Val @ 0.001	29.5883	N/A	N/A	Diff. P	90.00%	86.02%
				Minimum	#####	1.23774
				Maximum	#####	1.77793
				Mean	1.66546	1.64045
				Mode	1.66546	1.69318 [est]
				Median	1.66546	1.67538
				Std. Deviation	0.096839	0.11686
				Variance	0.0093778	0.013509
				Skewness	0	-1.8727
				Kurtosis	4.2	5.4669

Figura D.12 Distribución logístic de la densidad real en molde 1. Relación 0.31



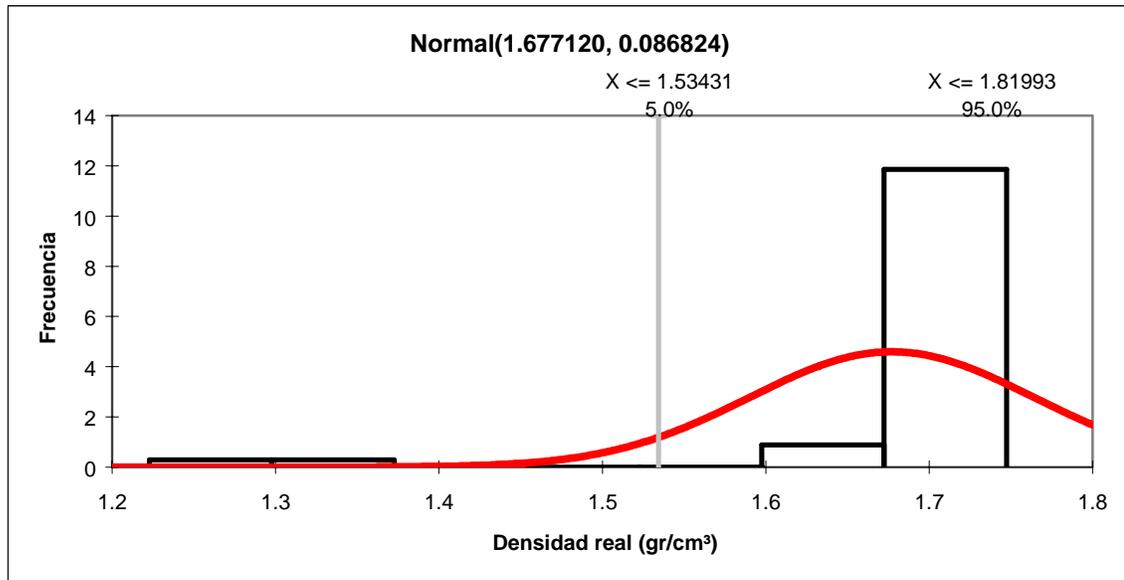
N/A	Chi-Sq	A-D	K-S	N/A	Fit	Input
Test Value	34.8222	5.0361	0.2169	Function	RiskLogistic(1.645526, 0.041084)	N/A
P Value	1.21E-05	< 0.005	< 0.01	Shift	N/A	N/A
Rank	1	1	1	a	1.64552627	N/A
C.Val @ 0.75	4.2549	N/A	N/A	b	0.04108423	N/A
C.Val @ 0.5	6.3458	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.25	9.0371	0.4236	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.15	10.7479	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.1	12.017	0.6564	0.1054	Left X	1.5246	1.5246
C.Val @ 0.05	14.0671	0.7648	0.1147	Left P	5.00%	6.67%
C.Val @ 0.025	16.0128	0.901	0.1213	Right X	1.7665	1.7665
C.Val @ 0.01	18.4753	0.901	0.131	Right P	95.00%	100.00%
C.Val @ 0.005	20.2777	1.0044	N/A	Diff. X	0.2419	0.2419
C.Val @ 0.001	24.3219	N/A	N/A	Diff. P	90.00%	93.33%
				Minimum	#####	0.83302
				Maximum	#####	1.71196
				Mean	1.645526	1.61799
				Mode	1.645526	1.65885 [est]
				Median	1.645526	1.65345
				Std. Deviation	0.074519	0.1423
				Variance	0.005553	0.019799
				Skewness	0	-4.3214
				Kurtosis	4.2	22.6715

Figura D.13 Distribución logistic de la densidad real en molde 2. Relación 0.31.



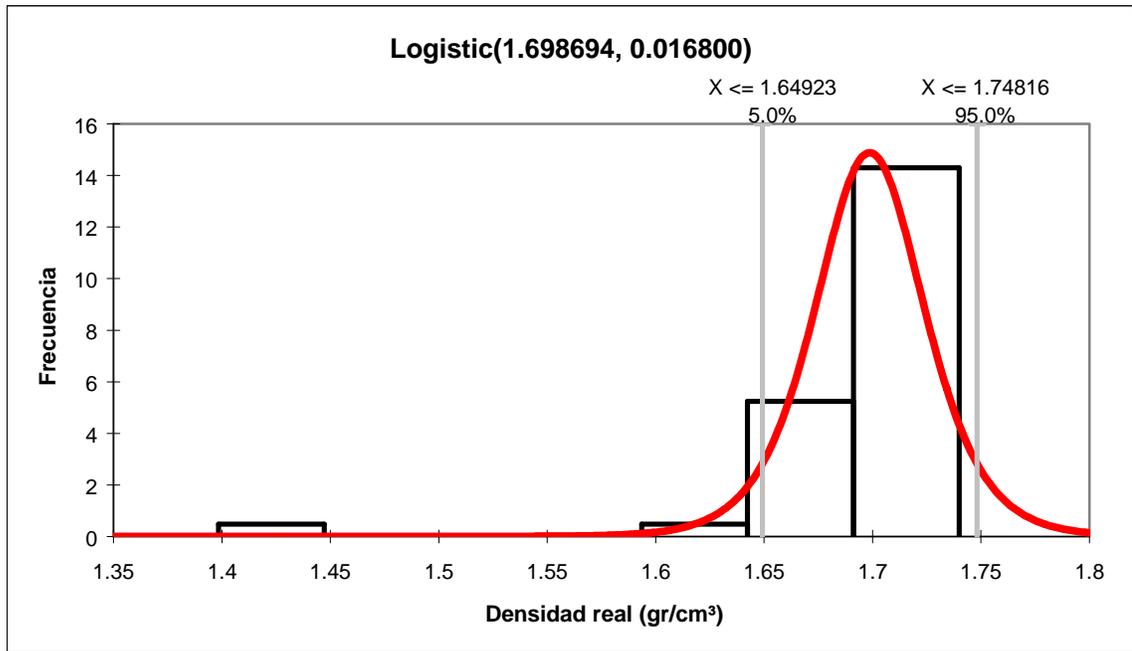
N/A	Chi-Sq	A-D	K-S	N/A	Fit	Input
Test Value	16.4894	2.2664	0.1383	Function	RiskLogistic(1.658723, 0.030667)	N/A
P Value	0.021	< 0.005	< 0.01	Shift	N/A	N/A
Rank	1	1	1	a	1.65872324	N/A
C.Val @ 0.75	4.2549	N/A	N/A	b	3.07E-02	N/A
C.Val @ 0.5	6.3458	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.25	9.0371	0.4237	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.15	10.7479	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.1	12.017	0.6565	0.1032	Left X	1.5684	1.5684
C.Val @ 0.05	14.0671	0.7649	0.1123	Left P	5.00%	6.38%
C.Val @ 0.025	16.0128	0.9012	0.1188	Right X	1.749	1.749
C.Val @ 0.01	18.4753	0.9012	0.1283	Right P	95.00%	100.00%
C.Val @ 0.005	20.2777	1.0047	N/A	Diff. X	0.1806	0.1806
C.Val @ 0.001	24.3219	N/A	N/A	Diff. P	90.00%	93.62%
				Minimum	#####	1.30941
				Maximum	#####	1.71551
				Mean	1.658723	1.6447
				Mode	1.658723	1.66303 [est]
				Median	1.658723	1.65896
				Std. Deviation	0.055623	0.08103
				Variance	0.00309393	0.0064262
				Skewness	0	-2.9743
				Kurtosis	4.2	11.942

Figura D.14 Distribución logistic de la densidad real en molde 3. Relación 0.31



N/A	Fit	Input	N/A	Chi-Sq	A-D	K-S
Function	RiskNormal(1.677120, 0.086824)	N/A	Test Value	147.5333	10.8711	0.3964
Shift	N/A	N/A	P Value	0	< 0.005	< 0.01
m	1.67711994	N/A	Rank	3	1	1
s	8.68E-02	N/A	C.Val @ 0.75	4.2549	N/A	N/A
N/A	N/A	N/A	C.Val @ 0.5	6.3458	N/A	N/A
N/A	N/A	N/A	C.Val @ 0.25	9.0371	0.4618	N/A
N/A	N/A	N/A	C.Val @ 0.15	10.7479	0.5512	0.1136
Left X	1.5343	1.5343	C.Val @ 0.1	12.017	0.62	0.12
Left P	5.00%	4.44%	C.Val @ 0.05	14.0671	0.7389	0.1311
Right X	1.8199	1.8199	C.Val @ 0.025	16.0128	0.8578	0.1458
Right P	95.00%	100.00%	C.Val @ 0.01	18.4753	1.0169	0.1517
Diff. X	0.2856	0.2856	C.Val @ 0.005	20.2777	1.1388	N/A
Diff. P	90.00%	95.56%	C.Val @ 0.001	24.3219	N/A	N/A
Minimum	#####	1.22277				
Maximum	#####	1.74737				
Mean	1.67712	1.67712				
Mode	1.67712	1.70329 [est]				
Median	1.67712	1.69677				
Std. Deviation	0.086824	0.086824				
Variance	0.0075383	0.0073708				
Skewness	0	-4.3694				
Kurtosis	3	21.4918				

Figura D.15 Distribución normal de la densidad real en molde 4. Relación 0.31



N/A	Chi-Sq	A-D	K-S	N/A	Fit	Input
Test Value	8.907	1.4616	0.1323	Function	RiskLogistic(1.698694, 0.016800)	N/A
P Value	0.2594	< 0.005	0.01 <= p <= 0.025	Shift	N/A	N/A
Rank	1	1	1	a	1.69869362	N/A
C.Val @ 0.75	4.2549	N/A	N/A	b	1.68E-02	N/A
C.Val @ 0.5	6.3458	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.25	9.0371	0.4235	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.15	10.7479	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
C.Val @ 0.1	12.017	0.6562	0.1078	Left X	1.6492	1.6492
C.Val @ 0.05	14.0671	0.7646	0.1173	Left P	5.00%	6.98%
C.Val @ 0.025	16.0128	0.9008	0.124	Right X	1.7482	1.7482
C.Val @ 0.01	18.4753	0.9008	0.1339	Right P	95.00%	100.00%
C.Val @ 0.005	20.2777	1.0042	N/A	Diff. X	0.0989	0.0989
C.Val @ 0.001	24.3219	N/A	N/A	Diff. P	90.00%	93.02%
				Minimum	#####	1.39848
				Maximum	#####	1.73993
				Mean	1.698694	1.6914
				Mode	1.698694	1.70764 [est]
				Median	1.698694	1.70068
				Std. Deviation	0.030471	0.050774
				Variance	0.00092849	0.0025181
				Skewness	0	-4.6221
				Kurtosis	4.2	27.1416

Figura D.16 Distribución logistic de la densidad real en molde 5. Relación 0.31

## ANEXO E

### Valores obtenidos en las placas de yeso piedra dental por el paquete Benoit.

No.	R/S	Variogram	Wavelengths
1	0.619	0.841	0.701
2	0.619	0.649	0.794
3	0.621	0.971	0.844
4	0.723	0.956	0.778
5	0.696	0.919	0.819
6	0.881	0.895	0.717
7	0.447	0.968	0.823
8	0.702	0.956	0.755
9	0.791	0.884	0.725
10	0.651	0.923	0.826
11	0.595	0.965	0.8
12	0.477	0.922	0.712
13	0.697	0.977	0.886
14	0.678	0.932	0.81
15	0.506	0.948	0.682
16	0.587	0.97	0.878
17	0.729	0.958	0.85
18	0.465	0.943	0.725
19	0.442	0.928	0.765
20	0.777	0.894	0.855
21	0.769	0.891	0.766
22	0.731	0.797	0.809
23	0.986	0.917	0.77
24	0.724	0.878	0.758
25	0.659	0.92	0.87
26	0.55	0.971	0.925
27	0.508	0.985	0.94
28	0.791	0.907	0.63
29	0.552	0.922	0.826
30	0.706	0.835	0.865
31	0.652	0.971	0.77
32	0.686	0.954	0.814
33	0.447	0.94	0.855
34	0.625	0.902	0.798
35	0.926	0.874	0.877
36	0.929	0.905	0.737
37	0.59	0.933	0.729
38	0.796	0.984	0.926
39	0.907	0.881	0.737
40	0.584	0.807	0.71
41	0.555	0.826	0.683
42	0.838	0.876	0.997

43	0.643	0.899	0.844
44	0.539	0.752	0.713
45	0.829	0.833	0.707
46	0.534	0.879	0.545
47	0.431	0.948	0.84
48	0.629	0.655	0.598
49	0.66	0.949	0.628
50	0.815	0.977	0.716
51	0.42	0.9	0.731
52	0.599	0.898	0.786
53	0.542	0.942	0.783
54	0.621	0.897	0.717
55	0.798	0.963	0.861
56	0.824	0.966	0.864
57	0.607	0.931	0.798
58	0.634	0.956	0.762
59	0.635	0.921	0.831
60	0.559	0.939	0.681
61	0.647	0.876	0.796
62	0.451	0.911	0.802
63	0.402	0.983	0.864
64	0.538	0.94	0.82
65	0.632	0.922	0.61
66	0.818	0.939	0.788
67	0.453	0.967	0.794
68	0.749	0.979	0.917
69	0.6	0.96	0.78
70	0.81	0.983	0.843
71	0.462	0.975	0.839
72	0.54	0.985	0.893
73	0.598	0.889	0.502
74	0.558	0.798	0.775
75	0.559	0.739	0.714
76	0.796	0.836	0.784
77	0.406	0.802	0.765
78	0.5	0.886	0.797
79	0.471	0.945	0.824
80	0.494	0.972	0.577
81	0.496	0.733	0.783
82	0.427	0.904	0.749
83	0.64	0.871	0.827
84	0.553	0.944	0.808
85	0.426	0.89	0.742
86	0.585	0.961	0.79
87	0.53	0.757	0.628
88	0.518	0.842	0.812
89	0.59	0.88	0.721
90	0.566	0.962	0.813
91	0.433	0.961	0.745
92	0.545	0.95	0.826

93	0.599	0.804	0.675
94	0.585	0.848	0.623
95	0.843	0.814	0.682
96	0.335	0.951	0.784
97	0.593	0.831	0.785
98	0.46	0.871	0.514
99	0.579	0.834	0.686
100	0.525	0.932	0.798
<b>Promedio</b>	<b>0.61845</b>	<b>0.90307</b>	<b>0.77217</b>
<b>Mediana</b>	<b>0.5985</b>	<b>0.9215</b>	<b>0.7845</b>
<b>Moda</b>	<b>0.619</b>	<b>0.971</b>	<b>0.826</b>
<b>Desv. Est.</b>	<b>0.13774258</b>	<b>0.07021241</b>	<b>0.08951486</b>

## ANEXO F

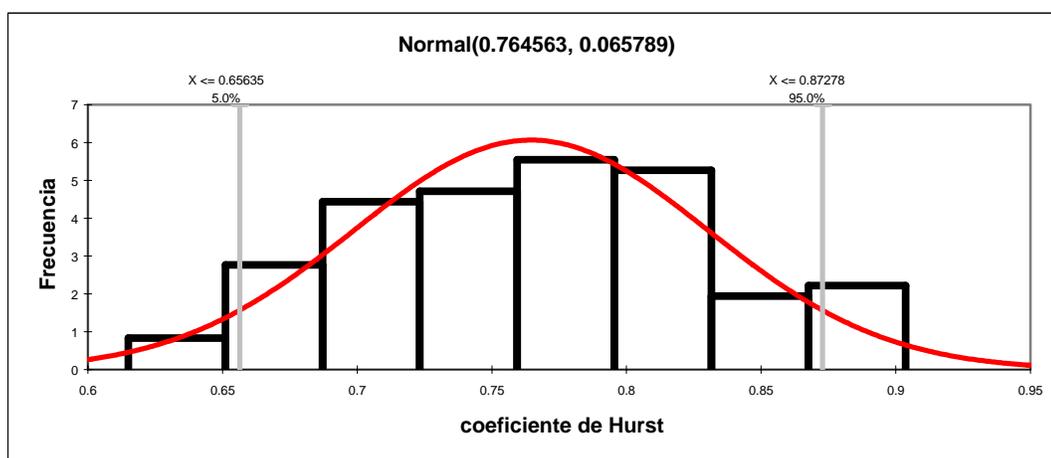
**Valores del exponente promedio de Hurst, del exponente  $n$ , y del parámetro auto-afín  $\alpha$ .**

<b>coeficiente de Hurst (H)</b>	<b>parámetro auto-afín alfa</b>	<b>n</b>
0.720333333	0.111753818	0.38824618
0.687333333	0.045101843	0.45489816
0.812	0.268472906	0.23152709
0.819	0.278998779	0.22100122
0.811333333	0.26746097	0.23253903
0.831	0.296630566	0.20336943
0.746	0.159517426	0.34048257
0.804333333	0.256734356	0.24326564
0.8	0.25	0.25
0.8	0.25	0.25
0.786666667	0.228813559	0.27118644
0.703666667	0.078872572	0.42112743
0.853333333	0.328125	0.171875
0.806666667	0.260330579	0.23966942
0.712	0.095505618	0.40449438
0.811666667	0.267967146	0.23203285
0.845666667	0.317500985	0.18249901
0.711	0.093530239	0.40646976
0.711666667	0.094847775	0.40515222
0.842	0.312351544	0.18764846
0.808666667	0.263396538	0.23660346
0.779	0.216302953	0.28369705
0.891	0.377665544	0.12233446
0.786666667	0.228813559	0.27118644
0.816333333	0.275010208	0.22498979
0.815333333	0.273507768	0.22649223
0.811	0.266954377	0.23304562
0.776	0.211340206	0.28865979
0.766666667	0.195652174	0.30434783
0.802	0.253117207	0.24688279
0.797666667	0.246343502	0.2536565
0.818	0.277506112	0.22249389
0.747333333	0.16190901	0.33809099
0.775	0.209677419	0.29032258
0.892333333	0.379342548	0.12065745
0.857	0.333138856	0.16686114
0.750666667	0.167850799	0.3321492
0.902	0.39135255	0.10864745
0.841666667	0.311881188	0.18811881
0.700333333	0.07210852	0.42789148
0.688	0.046511628	0.45348837
0.903666667	0.39339727	0.10660273

0.795333333	0.242665549	0.25733445
0.668	0.002994012	0.49700599
0.789666667	0.233642887	0.26635711
0.652666667	-0.032175689	0.53217569
0.739666667	0.148039658	0.35196034
0.627333333	-0.094048884	0.59404888
0.745666667	0.158918194	0.34108181
0.836	0.303827751	0.19617225
0.683666667	0.037298879	0.46270112
0.761	0.185939553	0.31406045
0.755666667	0.176665196	0.3233348
0.745	0.157718121	0.34228188
0.874	0.35583524	0.14416476
0.884666667	0.369630746	0.13036925
0.778666667	0.215753425	0.28424658
0.784	0.224489796	0.2755102
0.795666667	0.243192292	0.25680771
0.726333333	0.123221661	0.37677834
0.773	0.206338939	0.29366106
0.721333333	0.113678373	0.38632163
0.749666667	0.166073811	0.33392619
0.766	0.194516971	0.30548303
0.721333333	0.113678373	0.38632163
0.848333333	0.321218075	0.17878193
0.738	0.14498645	0.35501355
0.881666667	0.365784499	0.1342155
0.78	0.217948718	0.28205128
0.878666667	0.361911988	0.13808801
0.758666667	0.181898067	0.31810193
0.806	0.259305211	0.24069479
0.663	-0.008295626	0.50829563
0.710333333	0.09221023	0.40778977
0.670666667	0.008946322	0.49105368
0.805333333	0.258278146	0.24172185
0.657666667	-0.020527116	0.52052712
0.727666667	0.125744388	0.37425561
0.746666667	0.160714286	0.33928571
0.681	0.031571219	0.46842878
0.670666667	0.008946322	0.49105368
0.693333333	0.057692308	0.44230769
0.779333333	0.21685201	0.28314799
0.768333333	0.198481562	0.30151844
0.686	0.042274052	0.45772595
0.778666667	0.215753425	0.28424658
0.638333333	-0.066579634	0.56657963
0.724	0.11878453	0.38121547
0.730333333	0.130762209	0.36923779
0.780333333	0.218496369	0.28150363
0.713	0.097475456	0.40252454
0.773666667	0.207453684	0.29254632

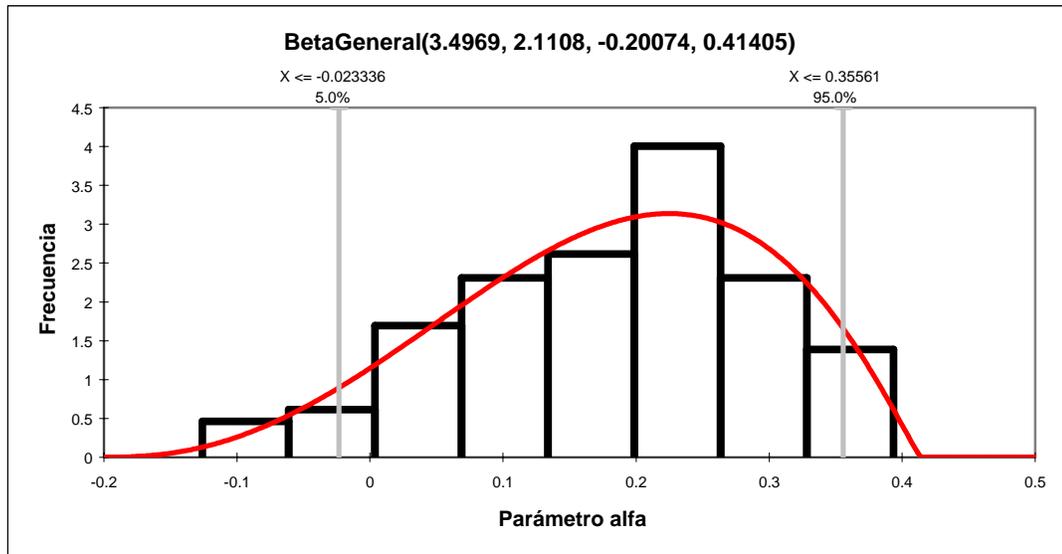
0.692666667	0.056304139	0.44369586
0.685333333	0.040856031	0.45914397
0.779666667	0.217400599	0.2825994
0.69	0.050724638	0.44927536
0.736333333	0.141919421	0.35808058
0.615	-0.12601626	0.62601626
0.699666667	0.070747975	0.42925202
0.751666667	0.16962306	0.33037694
<b>0.764563333<sup>a</sup></b>	<b>0.182328372<sup>a</sup></b>	<b>0.317672<sup>a</sup></b>
<b>0.770666667<sup>b</sup></b>	<b>0.202410251<sup>b</sup></b>	<b>0.29758975<sup>b</sup></b>
<b>0.8<sup>c</sup></b>	<b>0.25<sup>c</sup></b>	<b>0.25<sup>c</sup></b>
<b>0.065789272<sup>d</sup></b>	<b>0.114917778<sup>d</sup></b>	<b>0.11491778<sup>d</sup></b>

<sup>a</sup> promedio, <sup>b</sup> mediana, <sup>c</sup> moda, <sup>d</sup> desviación estándar.



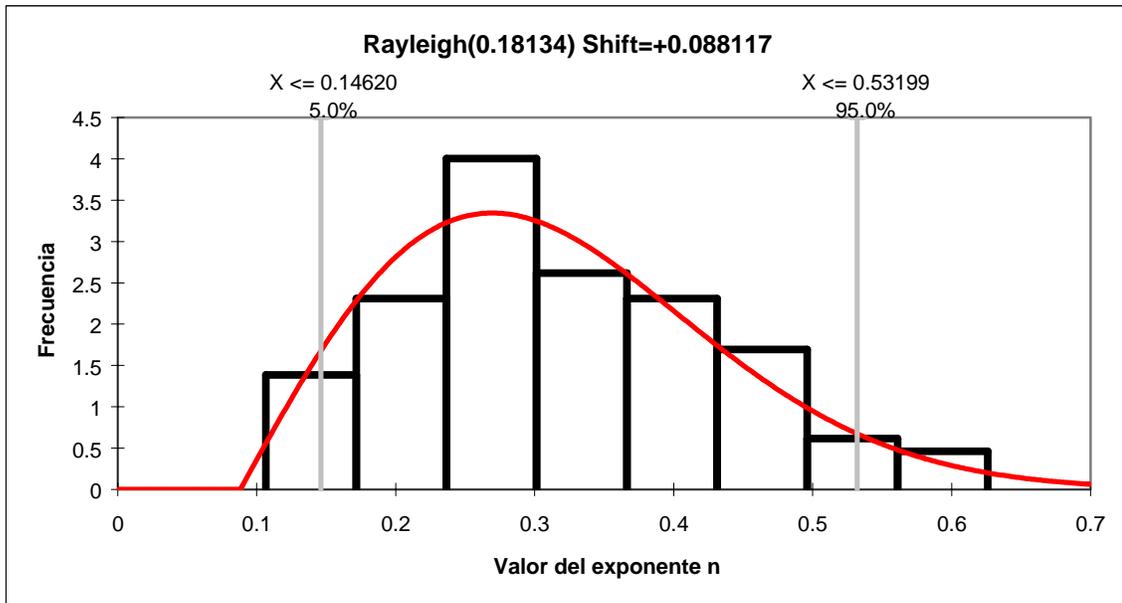
N/A	Fit	Input	N/A	Chi-Sq	A-D	K-S
Function	RiskNormal(0.764563, 0.065789)	N/A	Test Value	8.68	0.264	0.051
Shift	N/A	N/A	P Value	0.5627	> 0.25	> 0.15
m	0.764563333	N/A	Rank	6	2	1
s	0.065789272	N/A	C.Val @ 0.75	6.7372	N/A	N/A
N/A	N/A	N/A	C.Val @ 0.5	9.3418	N/A	N/A
N/A	N/A	N/A	C.Val @ 0.25	12.5489	0.4664	N/A
N/A	N/A	N/A	C.Val @ 0.15	14.5339	0.5567	0.0769
Left X	0.6563	0.6563	C.Val @ 0.1	15.9872	0.6262	0.0813
Left P	0.05	0.04	C.Val @ 0.05	18.307	0.7462	0.0888
Right X	0.8728	0.8728	C.Val @ 0.025	20.4832	0.8663	0.0988
Right P	0.95	0.92	C.Val @ 0.01	23.2093	1.0271	0.1027
Diff. X	0.2164	0.2164	C.Val @ 0.005	25.1882	1.1501	N/A
Diff. P	0.9	0.88	C.Val @ 0.001	29.5883	N/A	N/A
Minimum	#¿NOMBRE?	0.615				
Maximum	#¿NOMBRE?	0.90367				
Mean	0.764563	0.76456				
Mode	0.764563	0.67067 [est]				
Median	0.764563	0.77067				
Std. Deviation	0.065789	0.065789				
Variance	0.0043282	0.0042849				
Skewness	0	0.0358				
Kurtosis	3	2.4826				

Figura F.1 Distribución normal del exponente promedio de Hurst para placas de yeso piedra dental.



N/A	Fit	Input	N/A	Chi-Sq	A-D	K-S
Function	RiskBetaGeneral(3.4969, 2.1108, -0.20074, 0.41405)	N/A	Test Value	4.94	0.3287	0.0726
Shift	N/A	N/A	P Value	0.8951	N/A	N/A
a1	3.49692883	N/A	Rank	1	1	3
a2	2.1108376	N/A	C.Val @ 0.75	6.7372	N/A	N/A
min	-0.20074409	N/A	C.Val @ 0.5	9.3418	N/A	N/A
max	0.41404925	N/A	C.Val @ 0.25	12.5489	N/A	N/A
N/A	N/A	N/A	C.Val @ 0.15	14.5339	N/A	N/A
Left X	-0.0233	-0.0233	C.Val @ 0.1	15.9872	N/A	N/A
Left P	5.00%	4.00%	C.Val @ 0.05	18.307	N/A	N/A
Right X	0.3556	0.3556	C.Val @ 0.025	20.4832	N/A	N/A
Right P	95.00%	92.00%	C.Val @ 0.01	23.2093	N/A	N/A
Diff. X	0.3789	0.3789	C.Val @ 0.005	25.1882	N/A	N/A
Diff. P	90.00%	88.00%	C.Val @ 0.001	29.5883	N/A	N/A
Minimum	-0.20074	-0.12602				
Maximum	0.41405	0.3934				
Mean	0.18263	0.18233				
Mode	0.22475	0.0089463 [est]				
Median	0.19222	0.20241				
Std. Deviation	0.11587	0.11492				
Variance	0.013427	0.013074				
Skewness	-0.3448	-0.3507				
Kurtosis	2.4605	2.6559				

Figura F.2 Distribución beta del parámetro auto-afín  $\alpha$  para placas de yeso piedra dental.



N/A	Fit	Input	N/A	Chi-Sq	A-D	K-S
Function	RiskRayleigh(0.18134, RiskShift(0.088117))	N/A	Test Value	4.28	0.4186	0.0755
Shift	8.81E-02	N/A	P Value	0.9338	N/A	N/A
b	0.18134147	N/A	Rank	1	8	10
N/A	N/A	N/A	C.Val @ 0.75	6.7372	N/A	N/A
N/A	N/A	N/A	C.Val @ 0.5	9.3418	N/A	N/A
N/A	N/A	N/A	C.Val @ 0.25	12.5489	N/A	N/A
N/A	N/A	N/A	C.Val @ 0.15	14.5339	N/A	N/A
Left X	0.1462	0.1462	C.Val @ 0.1	15.9872	N/A	N/A
Left P	5.00%	8.00%	C.Val @ 0.05	18.307	N/A	N/A
Right X	0.532	0.532	C.Val @ 0.025	20.4832	N/A	N/A
Right P	95.00%	96.00%	C.Val @ 0.01	23.2093	N/A	N/A
Diff. X	0.3858	0.3858	C.Val @ 0.005	25.1882	N/A	N/A
Diff. P	90.00%	88.00%	C.Val @ 0.001	29.5883	N/A	N/A
Minimum	0.088117	0.1066				
Maximum	#####	0.62602				
Mean	0.31539	0.31767				
Mode	0.26946	0.25000 [est]				
Median	0.30163	0.29759				
Std. Deviation	0.1188	0.11492				
Variance	0.014114	0.013074				
Skewness	0.6311	0.3507				
Kurtosis	3.2451	2.6559				

Figura F.3 Distribución de Rayleigh para el valor del exponente  $n$  en placas de yeso piedra dental.

## ANEXO G

### Desarrollo experimental del ensayo de tensión, flexión en 3 puntos con muesca y determinación de la densidad real de las piezas.

En este Anexo, se presentan los diferentes etapas del desarrollo experimental en el proyecto de investigación del material yeso piedra dental, explicando el proceso para cada etapa de experimentación, y sus inconvenientes.



Figura G.1 Molde de elaboración de las piezas para ensayo de tensión en el material yeso piedra dental.

La figura G.1 nos muestra el molde de elaboración de las piezas para ensayo de tensión del material cerámico utilizado en el proyecto, éste molde es de aluminio, desmontable en dos piezas, con una base fija de atornillamiento, diseñado por el Tec. Antonio García Macedo, y maquinado en el laboratorio de Manufactura del ITESM-CEM. Fue necesario implementar el diseño antes mencionado, pues el desmoldeo se dificultaba cuando se utilizó un molde previamente elaborado de una sola pieza, en donde se utilizaba grasa como desmoldeante que interfiere drásticamente en las propiedades mecánicas del material. En el segundo molde se elaboraron las 110 piezas para los ensayos de tensión, bajo las 3 diferentes relaciones agua/polvo, las cuales se

presentan en la figura G.2. La figura G.3 nos presenta el dispositivo de tensión en las pruebas realizadas al material, se cuentan con mordazas planas, lisas y bajo presión de aire para colocar las piezas en la máquina universal de ensayos INSTRON 4505, alineadas axialmente a la aplicación de carga con duración de ensayo aproximadamente de dos minutos.



Figura G.2 Piezas resultantes del desmoldeo para el ensayo de tensión. Relaciones agua/polvo 0.28, 0.31 y 0.40



Figura G.3 Realización del ensayo de tensión en el material yeso piedra dental.

Posterior al ensayo de tensión, en las piezas se estableció un código de identificación para poder realizar el ensayo de densidad real. El equipo empleado para este ensayo

fue una balanza mecánica 330 O-Haus con precisión de 0.001 grs. que se encuentra en el laboratorio de Materiales de la U.A.M.-A a cargo de la Profra. Francisca Franco, es importante el tipo de balanza, por el hecho, de identificar el peso de la pieza dentro de agua, por lo que el dispositivo tiende a implementarse bajo condiciones en donde no afecte la inmersión de la pieza en agua destilada con las paredes del recipiente que contiene el agua. El repelente de agua utilizado fue parafina china, en estado líquido para sumergir la pieza en este elemento, cabe hacer notar, que el incremento de masa de la pieza posterior a la inmersión en parafina fue de 2 grs. aproximadamente. La figura G.4 nos muestra la explicación anterior.

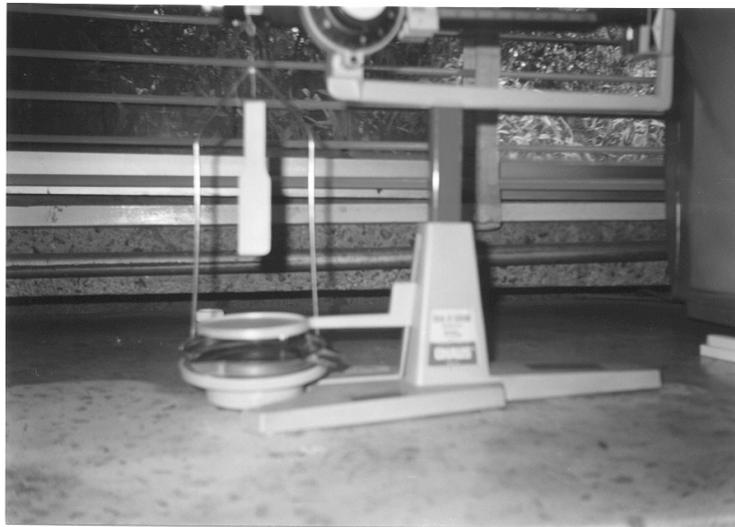


Figura G.4 Balanza O-Haus 330, nos presenta la colocación de las piezas de fractura del material yeso piedra dental para la realización del ensayo de densidad real.

La figura G.5 presenta el equipo para la realización del ensayo de flexión en 3 puntos con presencia de muesca en el material yeso piedra dental, el equipo consta de un soporte que contiene 2 rodillos móviles que proporcionan la longitud de apoyo de las piezas, este soporte es colocado en la parte fija de la máquina; en el cabezal de la máquina, se encuentra el rodillo de carga compresiva, de la misma dimensión de los rodillos móviles que interactúa con el espécimen que va a ser sometido al ensayo.



Figura G.5 Máquina Universal de Ensayos Mecánicos, dispositivo para ensayo de flexión en 3 puntos con presencia de muesca.

Una vista más amplia del dispositivo se presenta en la figura G.6, en donde se muestra el dispositivo que permite centrar los especímenes en relación con la aplicación de la carga compresiva.

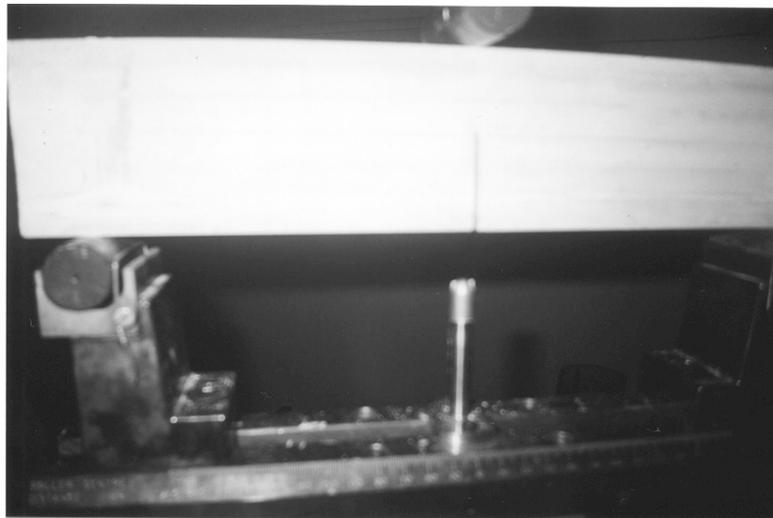


Figura G.6 Dispositivo para ensayo de flexión en 3 puntos con presencia de muesca, es posible mostrar la longitud entre rodillos, el rodillo de carga, así como el dispositivo que nos permite alinear la muesca de la probeta en relación con la carga aplicada.

La elaboración de piezas para los ensayos de flexión, fueron determinados bajo la norma ASTM E-399, para cinco diferentes moldes, con dimensiones específicas para cada molde en cuanto a la longitud y ancho de la probeta, haciendo variación del espesor de muestra en 5, 10, 15, 20 y 25 mm. Se realizaron en total 284 piezas, distribuidas de la siguiente manera:

Molde 1 100 piezas, molde 2 46 piezas, molde 3 46 piezas, molde 4 46 piezas y molde 5 46 piezas<sup>36</sup>. El dispositivo de observación para el ensayo de flexión, es colocar un microscopio óptico con un sistema de cámara, en donde se conecta a una pantalla de observación que filma el inicio de propagación de la grieta. Esto fue auxiliado por un sistema de soporte móvil en donde se colocó el microscopio, y un soporte fijo detrás de la muestra en donde se colocó el sistema de iluminación.

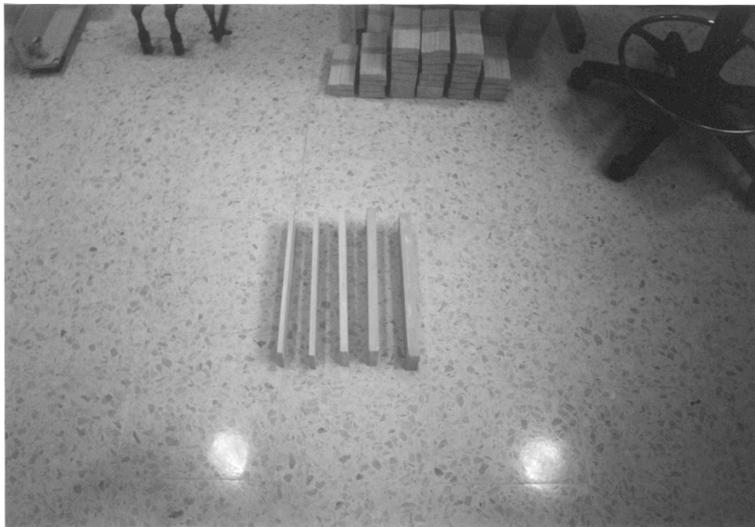


Figura G.7 Espesores de muestras utilizados en especímenes para ensayo de flexión en 3 puntos con muesca.

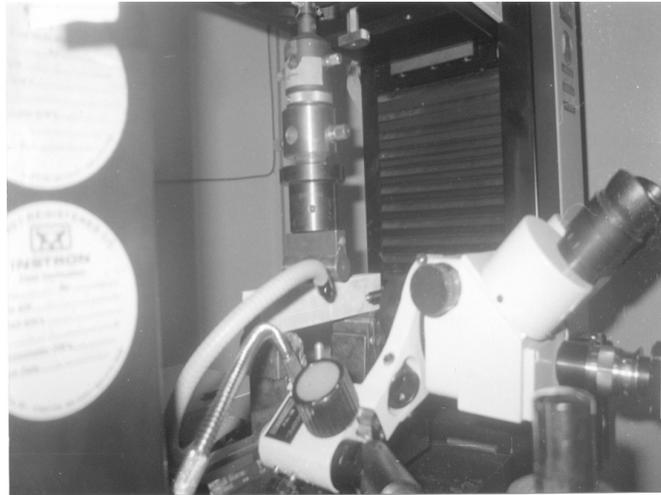


Figura G.8 Dispositivo de observación para el ensayo de flexión en 3 puntos con muesca. Se observa el microscopio óptico en primera instancia, y en segundo plano el sistema de iluminación colocado en la zona de muesca del espécimen.

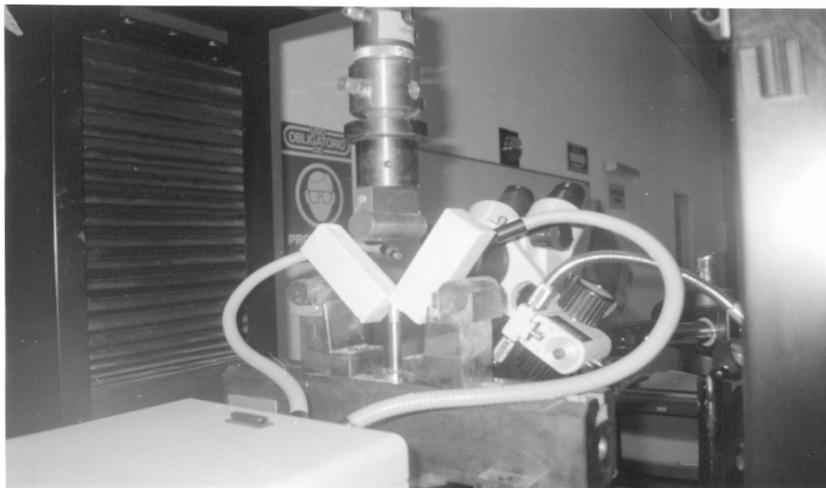


Figura G.9 Fractura del espécimen de prueba, podemos ver en segundo plano la pantalla en donde se observa el crecimiento de grieta, en primer plano el sistema de iluminación.

Posterior a los ensayos, se realizó nuevamente la clasificación de las probetas para la realización de los ensayos de densidad real de las piezas. El equipo de determinación real de la densidad de las piezas, se realizó en la báscula digital Explorer 2000 O-Haus

---

<sup>36</sup> De las 46 piezas presentadas, 20 son de 20 mm de espesor, 20 de 25 mm de espesor y 2 piezas por los espesores de 5, 10 y 15 mm. En el molde 1, son 20 piezas por cada espesor.

con precisión de 0.001 grs., lo cual facilitó la interpretación exacta de los pesos en cada sección de las piezas fracturadas.



Figura G.10 Clasificación de piezas fracturadas en el ensayo de flexión en 3 puntos con muesca. Cinco diferentes moldes para ensayo de densidad real.



Figura G.11 Determinación real de piezas ensayadas por flexión en 3 puntos con presencia de muesca. Inmersión en agua.