



**INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL**

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA  
SECCION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACION**

**UNA FORMULACION VARIACIONAL HIBRIDA  
PARA RESOLVER LA ECUACION DE CALOR NO LINEAL GENERAL  
UTILIZANDO EL METODO DEL ELEMENTO FINITO FRONTERA**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE**

**DOCTOR EN CIENCIAS**

**EN INGENIERIA MECANICA**

**PRESENTA:**

**M. EN C. Marco Antonio Gutiérrez  
Villegas**

**Director**

**Dr. José Angel Ortega Herrera**





INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México, D.F. siendo las 16:00 horas del día 18 del mes de Mayo del 2004 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada Por el Colegio de Profesores de Estudios de Po sgrado e Investigación la E. S. I. M. E. de

Para examinar la tesis de grado titulada:

UNA FORMULACION VARIACIONAL HIBRIDA PARA RESOLVER LA ECUACION DE CALOR NO LINEAL GENERAL UTILIZANDO EL METODO DEL ELEMENTO FINITO FRONTERA

Presentada por el alumno:

GUTIERREZ
Apellido paterno

VILLEGAS
materno

MARCO ANTONIO
nombre(s)

Con registro: 0 0 0 2 8 5

aspirante al grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron SU APROBACION DE LA TESIS, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

DR. JOSE ANGEL ORTEGA HERRERA

DR. FERMIN VINIEGRA HEBERLEIN

DR. MANUEL GONZALEZ HERNANDEZ

DR. SERGIO CHAPA VERGARA

DR. SAMUEL ALCANTARA MONTES

DR. IGNACIO CARVAJAL MARISCAL

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

DR. FLORENCIO SANCHEZ SILVA



SECCION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACION



**INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL**  
COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

**CARTA SESION DE DERECHOS**

En la Ciudad de México, Distrito Federal, el día 13 del mes octubre del año 2004 el (la) que suscribe Marco Antonio Gutiérrez Villegas alumno(a) del Programa de Doctorado en Ciencias con especialidad en Ingeniería Mecánica con número de registro 000285 adscrito a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME Unidad Zacatenco, manifiesta que es autor(a) intelectual del presente Trabajo de Tesis bajo la dirección del Doctor José Ángel Ortega Herrera y cede los derechos del trabajo intitulado: Una formulación variacional híbrida para resolver la ecuación de calor no lineal general utilizando el método del elemento finito frontera, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, graficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección: \_\_\_\_\_.

Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Marco Antonio Gutiérrez Villegas  
Nombre y firma

## **MI AGRADECIMIENTO A:**

A mi mamá Minerva Villegas Uribe que siempre se sintió orgullosa por sus hijos, esperando que donde se encuentre me este viendo.

A mi padre Esiquio Gutiérrez Tavera que recuerde que su trabajo es de guiara a sus nietos.

A Mis Hermanos María de Lourdes, Jesús, Blanca Estela, Israel Isaac y Javier Norberto. El sacrificio que realizaron nuestros padres fue para que nos superáramos y nunca se nos obligo a trabajar para sacar los estudios.

A Mis sobrinos Dalila, Miguel, Cesar, Brandon, Roberto, Angélica, Itzayana, Rodolfo, Valeria, Israel, Aylin, Diana, nunca contamos con los recursos necesarios para estudiar, pero su abuelita siempre vio de donde sacar para que nos preparáramos.

A Mis hijos Minerva del Mar Gutiérrez Armenta, Esiquio Martín Gutierrez Armenta, Minerva Gutiérrez y Mi esposa Margarita Armenta Rocha. Todo en esta vida cuesta.

A las siguientes personas que apoyaron en la realización de esta tesis: Arturo Días Vargas, Silvestre Sedas, Elías Romero, Nohemy Najera, Héctor Delfino, Juan C. Apam, Germán Téllez Castillo, Joaquín Hernández. Nunca hay que sentirse menos, ni superiores, siempre hay que ser humilde.

Mi agradecimiento a mis profesores de la primaria Tierra y Libertad, de la secundaria Fernando Montes de "Oca" # 25, y de la Vocacional Narciso Bassol #8, Escuela Superior de Física y Matemáticas.

Al **Instituto Politécnico Nacional** el cual me ha brindado toda la preparación que hasta la fecha tengo.

A mi Director de tesis **Dr. JOSE ANGEL ORTEGA HERRERA**. Pocas personas me encontrado en mi camino que me guiaran, "que los compañeros me preguntaban por el diciendo donde esta tu papá", que para mí es mi segundo papá.

A mis sinodales de doctorado:

Dr. Fermín Viniegra., Dr. Manuel González H., Sergio Chapa V. Samuel Alcántara M., Dr. Ignacio Carvajal M.

De los que son los elegidos tengo el orgullo de estar cerca de ellos, espero seguir viéndolos, así mismo seguir su ejemplo.

Mi agradecimiento a las personas que ya partieron, pero sé que de ese paraíso me están cuidando.

Mi agradecimiento al "**CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGIA**" quien me otorgo una beca para estudiar el doctorado.

## INDICE

SECCIÓN	PAGINA
ÍNDICE	i-iii
ÍNDICE DE FIGURAS	iv
INDICE DE TABLAS	v
SIMBOLOGÍA	vi-viii
RESUMEN	ix
ABSTRACT	ix
INTRODUCCIÓN	x

## INDICE

CAPITULO 1 GENERALIDADES	PAGINA
1.1 Estado del arte	1
1.2 Relación entre transferencia de calor y termodinámica	2
1.3 Importancia de la transferencia de calor en la Ingeniería	3
1.4 Importancia del Métodos Numéricos	3
<b>CAPITULO II MÉTODOS ANALÍTICOS EN LA SOLUCIÓN PARA PROBLEMAS DE CONDUCCIÓN DE CALOR.</b>	<b>5</b>
2.1 Componentes del Flujo.	5
2.2 Formulación Matemática.	7
2.2.1 Cantidad Neta de Calor.	7
2.2.2 Generación de Calor Interno.	9
2.2.3 Incremento en la Energía Interna.	9
2.2.4 Ecuación General de conducción de Calor.	9
2.3 Método de Separación de Variables para la Conducción de Calor Unidimensional en Estado Estable.	15
2.3.1 Placa Plana.	15
2.3.1.1 Analogía entre Flujo de Calor y el Flujo Eléctrico.	17
2.3.2 Paredes Planas Compuestas.	19
2.3.3 Cilindros Huecos.	20
2.3.4 Paredes Cilíndricas Compuestas.	22
2.3.4.1 Paredes Esféricas.	23
2.4 Superficies Extendidas	24
2.4.1 Aletas de Sección Transversal Uniforme.	25
2.4.2 Aletas Rectangulares.	31
2.4.3 Aleta Piramidal	32
2.4.4 Aleta Circunferencial de Espesor Constante.	37
2.5 Métodos de Separación de Variables Condiciones de Calor en Estado Estable Bidimensional.	39
2.5.1 Caso Bidimensional. Placa Rectangular Semi-Infinita.	39
2.5.2 Semicírculo Sólido Largo.	42

2.5.3 Cilindro Sólido.	44
2.5.4 Pared Esférica.	48
2.6 El Método de la Transformada de Kirchoff en el Solución de la Ecuación del Calor No Lineal	51
<b>CAPITULO III SOLUCIONES ANALÍTICAS: MÉTODOS ANALÍTICOS, MÉTODOS VARIACIONALES.</b>	58
3.1 Métodos Analíticos Aproximados.	58
3.1.1 Método Integral.	58
3.2 Calculo Variacional	66
3.2.1 Métodos Variacionales	71
3.2.2 Problemas Tridimensionales.	80
3.2.3 Problemas de Flujo de Calor en Estado Estable en una Dimensión.	82
3.2.4 Método de Ritz	89
3.2.5 Método de Ritz. Conducción de Calor Bidimensional en Estado Estable.	96
3.2.6 Método de Galerkin	101
3.2.7 Método de Kantorovich	109
3.2.8 Comparación de los Métodos Variacionales	113
<b>CAPITULO IV FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL MEF</b>	122
4.0 Introducción	122
4.1 Formulación Variacional del MEF de Problemas Elípticos o de Potencial.	122
4.1.1 Deducción de la funcional de energía para problemas de equilibrio o elípticos bajo condiciones de frontera homogéneas	122
4.1.2 Formulación Variacional del MEF de Problemas Elípticos y Parabólicos en Condiciones de Frontera No Homogéneas.	125
4.1.3 Formulación Variacional del MEF de Problemas Elípticos en Condición de Frontera Naturales.	127
4.2 Formulación Variacional del MEF de problemas Parabólicos o de Propagación.	131
4.2.1 Formulación variacional	133
4.2.2 La ecuación de calor lineal: flujos transitorios lineales.	138
4.3 Flujos transitorios no lineales :La ecuación de calor no lineal	141
4.3.1 El método de la transformada integral finita (transformada de Kirchoff)	141
4.3.2 El MEF-MDF acoplado y la ecuación del calor lineal	142
4.3.3 Formulación Variacional del MEF-MDF	143
<b>CAPITULO V MÉTODO DEL ELEMENTO FRONTERA.</b>	150
5.1 Definición	150
5.2 La Ecuación de Laplace.	158
5.3 Caracterización de las Funciones Armónicas como funciones de Potencial Newtonianas.	164
5.3.1 La Ecuación de Poisson o de Potencial	166
5.3.2 Solución a la ecuación de Poisson Mediante la Función de Green.	168
5.3.3 Solución a la Ecuación de Poisson en Regiones Compactas $\Omega$ .	171
5.4 Formulación del Método del Elemento Frontera en la Solución a las Ecuaciones de Laplace y Poisson.	173
5.5 Elementos de Frontera.	178

5.6 Interpolación por Cuadratura Gaussiana.	186
5.6.1 Elementos Frontera Lineales.	186
5.6.2 Formulación del Método del Elemento Frontera para la Ecuación de Laplace.	190
5.6.2.1 Aplicación.	195
5.6.3 Formulación del Método del Elemento Frontera para la ecuación de Poisson.	197
5.6.3.1 Aplicación.	204
<b>CAPÍTULO VI FORMULACIÓN VARIACIONAL HIBRIDA PARA RESOLVER LA ECUACIÓN DE CALOR NO LINEAL MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FRONTERA</b>	207
6.1 Introducción	207
6.2 La identidad de Green para el operador parabólico de la ecuación del calor	207
6.3 El método del elemento frontera para el caso transitorio lineal	209
6.4 El sistema de ecuaciones de elemento frontera.	212
6.5 Formulación del método del elemento frontera para el caso transitorio no lineal.	216
6.5.1 introducción.	216
6.5.1.1 Planteamiento del problema.	216
6.5.2. El método de la transformada de Kirchhoff	216
Conclusiones	219
Trabajos futuros	220

## ÍNDICE DE FIGURAS

No. DE FIGURA	No. DE PAGINA
2.1.1 Componentes la rapidez de flujo de Calor.	6
2.2.2 Diagrama esquemático para la obtención de la ecuación general de conducción de Calor.	6
2.2.1 Sistema en coordenadas Cilíndricas.	12
2.2.2 Sistema en coordenadas Esféricas.	14
2.3.1 Conducción de calor en estado estable en una placa.	16
2.3.1.1 Muestra la combinación de varios materiales y su analogía con un circuito Eléctrico.	18
2.3.1.2 Muestra la equivalencia de una combinación de materiales de forma Cilíndrica a su analogía Eléctrica.	19
2.3.2 Conducción de calor en estado estable en una pared plana compuesta	19
2.3.3 Tubo compuesto.	22
2.4.1 Aleta en forma de Barra.	25
2.4.2 Ilustración esquemática de las tres condiciones de frontera para una aleta en forma de Barra	27
2.4.3 Aleta Rectangular	31
2.4.4 Aleta Piramidal	32
2.4.5 Aleta Circunferencial.	39
2.5.1 Placa Rectangular semi-infinita	39
2.5.2 Semi- círculo Solidó.	42
2.5.3 Cilindro Solidó a una temperatura entre una de las caras y del resto de la superficie	44
2.5.3 Cilindro Solidó a una temperatura entre una de las caras y del resto de la superficie	47
2.5.3' Comportamiento de la Función de Bessel.	48
2.5.4 Pared Esférica.	48
3.1.1 Definición de la Capa Térmica.	59
3.1.2 Comparación de la solución exacta y la solución aproximada para una región semi-infinita	64
3.2.1 Interpretación Física de los límites dados.	66
3.2.2 Funcional $\tilde{Y}(x) = Y(x) + \varepsilon\eta(x)$ .	68
3.2.1.1 Función $T(x)$ y la función $\tilde{T}(x)$	72
3.2.3.1 Aleta Longitudinal Infinita.	82
3.2.5.1 Conducción de estado estable en aleta bidimensional.	97
3.2.5.1' Isoterma.	98
3.2.6.1 Región de contorno que tienen condiciones de frontera en la forma de un polígono convexo y una región limitada por dos círculos.	106
4.1 Membrana	122
4.2.1.1 Problema Bidimensional.	137
4.2.1.2 Red de elementos finitos.	139

## INDICE DE TABLAS

Involucra el error en el flujo de calor en la superficie	65
Una comparación entre la solución aproximada y exacta del problema	94
Comparación de los métodos analíticos variacionales	121
La región $\bar{\Omega}$ en elementos	139
Temperatura para $t=2$	147
Temperatura para $t=2.4$	147
Temperatura para $t=6$	148
Solución por MEF-MDF acoplado y por el método analítico para $t=2$	148
Solución por MEF-MDF acoplado y por el método analítico para $t=2.4$	149
Solución por MEF-MDF acoplado y por el método analítico para $t=6$	149
Muestra las coordenadas de los puntos de muestra que se analizaron.	196
Muestra la solución usando diferentes elementos.	196
Muestra las coordenadas de los puntos de muestra que se analizaron	205
Muestra la solución usando BEM y FEM	205
Evaluación de los nodos para diferentes elementos para $t=2$	214
Evaluación de los nodos para diferentes tiempos	214
Muestra los valores usando el BEM	217

## SIMBOLOGIA

$q$	Rapidez o flujo de calor
$k$	Conductividad térmica
$A$	Sección transversal que atraviesa el flujo de calor
$dT/ dx$	Gradiente de temperatura con respecto a la posición
$h$	Coefficiente de transferencia de calor por convección
$T_s$	Temperatura de la superficie sólida
$T_\infty$	Temperatura del fluido
$\sigma$	Constante de Boltzmann
$t$	Tiempo
$\hat{n}$	Vector unitario normal a la superficie isotérmica
$\partial T / \partial n$	Cambio diferencial de la temperatura a lo largo de la normal
$q'$	Flujo de calor con generación de calor interna
$\rho$	Densidad del fluido
$c$	Calor específico
$\alpha$	Difusividad térmica ( $k / \rho c$ )
$\partial T / \partial t$	Variación de la temperatura con respecto al tiempo
$\nabla^2 T$	Operador Laplaciano
$\partial T / \partial r$	Variación de la temperatura radialmente
$c_1, c_2$	Constantes de integración
$L$	Longitud del sistema
$R$	Resistencia térmica ( $L / kA$ )
$1 / R$	Conductancia térmica ( $kA / L$ )
$\delta$	Espesor
$P$	Perímetro
$Pdx$	Área de convección
$m^2$	Cambio de variable ( $m^2 = hP / kA$ )
$T, u$	Temperatura
$b$	Ancho de la aleta
$B^2$	Cambio de variable ( $B^2 = 2Lh / k\delta$ )
$I_0, K_0$	Funciones modificadas de Bessel de orden cero
$\lambda$	Constante de integración
$n$	Número entero positivo
$R\phi$	Solución producto para la ecuación de Laplace
$T_z$	Temperatura media radial
$J_0$	Parámetro de la función de Bessel
$\varphi$	Angulo entre el eje $x$ y la proyección de $r$ sobre el plano $xy$ en una esfera
$\varepsilon$	Transformación para los coeficientes de Legendre
$\theta$	Relación de temperaturas
$a, b, c$	Coefficientes polinomiales
$C$	Constante evaluada en la solución exacta
$n(x)$	Función continua
$L$	Lado de la placa

$Y_i$	Es la ordenada que corresponde a $Y_i$
$X_i$	Punto central en una malla o red
$i, j$	Nodo en una malla o red, que representan la temperatura en un punto del sistema
$p$	Punto nodal (i, j, k)
$m$	Nodos vecinos del nodo p
$\Delta t$	Intervalo de tiempo
$U$	Temperatura ( en el Método Explícito de Dirección Alterna )
$B_i$	Número de Biot
$Q$	Cantidad de calor
$L$	Operador lineal de conducción de calor
$[\ ]$	Vector renglón o matriz cuadrada o rectangular
$\{ \}$	Vector columna, aunque en ocasiones se escribe horizontalmente.
$A$	Área de la sección transversal.
$A_n$	Coefficiente " n " del polinomio de interpolación del elemento lineal para el Problema de esfuerzos Térmicos En Tuberías.
$[B]$	Matriz con las derivadas de las funciones de forma.
$D$	Diámetro exterior.
$[D]$	Matriz de propiedades de los elementos.
$e$	Elemento e de la red
$F$	Carga Aplicada.
$[F]$	Matriz de flexibilidades.
$\{f\}$	Vector columna global de fuerzas.
$\{f^{(e)}\}$	Vector columna local de fuerzas.
$\{g\}$	Vector columna gradiente.
$h$	Coefficiente de convección.
$i, j, k$	Nodos i, j, k
$k_{xx}, k_{yy}$	Conductividades térmicas.
$[k]$	Matriz de conductividad global.
$[k^{(e)}]$	Matriz de conductividad del elemento e.
$L$	Longitud del elemento.
$L_i, L_j, L_k$	Coordenadas de área.
MEF	Método del Elemento Finito
TIF	Transforma Integral Finita
MDF	Método de las Diferencias Finitas
$N_i, N_j, N_k$	Funciones de forma.
$T_\infty$	Temperatura del Medio
$T_s$	Temperatura en la superficie.
$\{T\}$	Vector Temperatura
$\Delta^n$	Elemento n de la red.
$\Delta^{(e)}$	Dominio del elemento e.
$\partial\Delta^{(e)}$	Frontera del elemento e.
$\delta$	Operador variacional.
$\{\phi\}$	Vector columna de valores nodales.
$\phi$	Polinomio de interpolación.

$\Omega$	Dominio en estudio
$\partial\Omega$	Frontera del dominio o diferencial del dominio en estudio.
$\tilde{\Omega}$	Dominio discreto.
MEF-MDF	Método del elemento finito y método de las diferencias finitas
BEM	Boundary element method
$W, w$	Función de Green
$\Gamma$	frontera
EIF	Ecuación integral finita
$C(P), C(\varepsilon), \alpha$	Valor que toma EIF según en la posición que se encuentre
$\tilde{C}_j$	Cuerda
$u_0$	Temperatura
$q_0$	Flujo de calor
$u^*$	Temperatura desconocida
$q^*$	Flujo de calor desconocido
$p(\xi, \eta)$	Singularidad en p
$\delta(\xi - x, \eta - y)$	Función de Dirac
$L$	Operador de Laplace, Poisson, Fourier
$L^*$	Operador adjunto
$G$	Función de Green
$G^*$	Función adjunta de Green

## **Resumen**

En diferentes áreas de la Ingeniería el proceso de transferencia de Calor, toma un papel muy importante, ya que debido a este, el equipo diseñado puede sufrir daños considerables. La importancia de la transferencia de Calor en el desarrollo tecnológico por ejemplo en el diseño de aletas, aisladores de calor para tener menos pérdidas entre otras. Al tener este tipo de problemas es bueno realizar un prototipo, el cual será evaluado por técnicas numéricas, las cuales deben de ser confiables y tener una solución al problema rápidamente, en este caso se analizan las técnicas de elemento finito y elemento frontera, para resolver la ecuación no lineal del calor.

## **Abstract**

In different areas of engineering the Heat Transfer process, takes a very important place, since, due to it, the designed equipment can suffer considerable damages. The importance of Heat transfer in the technological development, for example in the design of fins, heat insulators that reduce losses, among others. When this kind of problems present, it is good to carry out a prototype, which will be evaluated using numerical methods, which should be reliable and have a quick solution to the problem, in this case the techniques of finite element and element frontier are analyzed, to solve the non lineal equation of the heat.

## Introducción

En la transferencia del calor como en otras ramas de la ingeniería la solución óptima de un problema, requiere no únicamente de leyes y mecanismos físicos del calor, si no también de fenómenos de transporte que comprenden el comportamiento de los flujos, de la masa y de la energía.

Por otro lado, la importancia de los métodos numéricos en la solución a problemas sobre el fenómeno de la transferencia de calor ha sido relevante en las últimas dos décadas con el avance computacional y la algorítmica que ha permitido prácticamente realizar análisis, diseño, y simulación computacional de un fenómeno físico a una realidad virtual del fenómeno, tal como ha ocurrido en particular del Método del Elemento Finito y elemento finito frontera que representan dos de los métodos más sofisticados y completos en la actualidad en la solución a problemas complejos de la física y de la ingeniería, en particular la solución de la ecuación de calor para fenómenos no lineales y dominios estructurados de una manera compleja como en el caso que nos ocupa.

**Antecedentes:** el fenómeno de la transferencia de calor ha sido estudiado rigurosamente desde el año 1750 por I. Lomonosov, quien estableció las bases Físicas fundamentales de la transferencia de calor, y fue con los trabajos científicos de J. B. Fourier (1800) con la teoría analítica del calor establece la teoría matemática de las leyes de propagación del calor y los trabajos de Sadi Carnot en 1824 Reflexiones sobre la fuerza motriz del calor y sobre las máquinas capaces de desarrollar esta fuerza. Posteriormente los trabajos de Claypeyron en un trabajo publicado utilizó la representación gráfica de los procesos teóricos. Las curvas exotérmicas y adiabáticas conocidas hasta hoy son el resultado de estos trabajos. La ley más importante de la naturaleza que es sobre la ley de conservación de la energía fue establecida hasta 1843 por Mayer conocido como el primer principio de la Termodinámica. De esta manera tanto el desarrollo de la teoría del calor como la termodinámica constituyen aspectos fundamentales en el desarrollo científico y tecnológico. Los resultados de las diversas investigaciones desarrolladas durante 150 años muestran que el fenómeno de la transferencia del calor es un proceso complejo. Actualmente la tecnología moderna contempla un conocimiento, análisis y profundo interdisciplinarias de Termodinámica, Transferencia de calor, Mecánica de Fluidos, Ciencias de los materiales, procesos Metalúrgicos, entre otras, exigiendo un mayor dominio de Técnicas sofisticadas, como Métodos Numéricos y de simulación computacional, modelación Matemática sofisticada, como las Técnicas de descomposición del dominio como son los Métodos del elemento finito y elemento finito frontera.

**Justificación.** Es un hecho de que el desarrollo de tecnologías en la fabricación de nuevos materiales, o de materiales compuestos, de la transferencia de calor, del conocimiento, nos ha llevado a que los fenómenos físicos sean más difíciles de comprender tal como ocurre con el fenómeno de la transferencia de calor lo que nos ha llevado a desarrollar lo que nos ha llevado a desarrollar nuevas técnicas numéricas y computacionales en la solución de estos problemas como es el caso de la ecuación de calor general sobre todo en dominios polimateriales y de geometría arbitraria.

El método del elemento frontera es un método numérico que permite resolver ecuaciones diferenciales parciales no lineales en dominios polimateriales y geometrías complejas, con un gran ahorro de cómputo y económico.

Siendo esta la razón por la cual se propuso formular esta técnica híbrida para la solución numérica de la ecuación general del calor.

**Objetivos.** El objetivo de este trabajo es el de desarrollar una formulación Variacional híbrida del método del elemento frontera para la solución de la ecuación de calor general  $(n+1)$ - dimensional. Hacer un cálculo comparativo de la solución con la obtenida por los métodos clásicos tradicionales como son: el Método de las diferencias finitas, el Método del elemento finito, los métodos variacionales clásicos como el de Ritz-Rayleigh, Galerkin, y Kantorovich, la investigación a realizar es plantear nuevas formulaciones variacionales híbridas en la solución de las ecuaciones diferenciales parciales en particular la ecuación del calor.

**Resultados esperados.** Hasta donde se sabe se [77], [78], [79], se han propuesto algunos métodos de solución numérica o analíticos de la ecuación general de calor.

Transformada integral finita [82], [83], nuestro propósito es de establecer una formulación híbrida del método del elemento frontera basándonos en ventajas que ofrecen algunos métodos como el TIF, MDF, MEF. Y de esta manera tener la ventaja de resolver este tipo de ecuaciones con solo discretizar la frontera del dominio de la solución. Evitando la descomposición de todo el dominio como fue realizado por el método del elemento finito. Cabe mencionar que han aparecido publicados trabajos recientes, sobre este tema utilizando el método DRM (dual reciprocal Method) y el BEM (boundary element Method). En la solución del calor transitoria y para la ecuación sobre materiales con propiedades no lineales publicados en [80], [81], Masaka Tanaka, R. Cholewa resultados con los cuales comparar.

# CAPITULO 1

## GENERALIDADES

### 1.1 ESTADO DEL ARTE

Las partículas que constituyen la materia, se encuentran en movimiento continuo. Este movimiento se percibe como calor. Calor es la energía total contenida en los movimientos moleculares de un determinado cuerpo[1]. La temperatura mide la intensidad del calor, pero no su cantidad. La temperatura, se define como la energía promedio del movimiento de las partículas. Cuando se ponen en contacto dos cuerpos a diferentes temperaturas, se transfiere calor. El proceso por el cual tiene lugar el transporte de la energía se conoce como flujo o **transferencia de calor**. Y al análisis del principio de transferencia de energía, se le conoce como **Teoría del Calor**[2].

La **transferencia de energía** forma parte de la teoría del calor. Esta teoría fue publicada en 1824 en París en un estudio de Sadi Carnot, [3] , “Reflexiones **sobre la fuerza motriz del calor y sobre las máquinas capaces de desarrollar esta fuerza**”. Sin embargo, este trabajo pasó inadvertido, debido a que la comunidad científica de esa época no concedió la importancia que correspondía a esta publicación y nadie prestó atención a las palabras en él contenidas: “ **Para analizar el principio de la obtención de movimiento a partir del calor en toda su extensión, es necesario estudiarlo independientemente de cualquier tipo de agente, así al utilizar razonamientos aplicables no sólo a las máquinas de vapor sino a cualquier máquina térmica imaginable, cualquiera que sea la sustancia puesta en acción y el medio por el cual se actúa sobre ella** “. Carnot murió en el año 1836 sin haber despertado el menor interés a su trabajo.

Posteriormente, en 1834 el trabajo de Carnot, fue reelaborado y publicado por Clapeyron [ 2 ] en la revista de la Escuela Politécnica de París. Esta exposición tuvo un carácter matemático más riguroso, Clapeyron utilizó la representación gráfica de los procesos térmicos. Las curvas isotérmicas y adiabáticas conocidas hoy, son el resultado de estos primeros esfuerzos de Clapeyron.

En la década de 1840 fue formulada la ley que es considerada como la más importante de la naturaleza, **la ley de la Conservación de la Energía**, conocida como **Primer Principio de la Termodinámica**.

En esos mismos años, cuando Mayer [ 2 ] trataba de convencer a el mundo científico sobre la conservación de la energía en calor, en Inglaterra fueron desarrolladas ideas semejantes por Joule [ 2 ], cuyo primer trabajo se dio a conocer en 1841. En este mismo año Mayer calculó por primera vez el **Equivalente mecánico** de calor.

En 1847, las ideas sobre la **conservación de energía** recibieron nuevos desarrollos en los trabajos de Hermann Von Helmholtz [2].

Aún cuando Mayer y Joule descubrieron la relación entre el calor y la energía en la década de 1840. Carnot ya había analizado la transformación del calor en trabajo en 1824.

A principios de los años 1850, las ideas de Carnot fueron plenamente comprendidas. Estas ideas, así como la **Ley de la conservación de la Energía**, descubierta por Mayer en 1843, sirvieron de base a las investigaciones de Thompson y Clausius, [ 2 ] en las cuales tiene su fundamento la termodinámica.

Y. Lomonósov [4] , a mediados de 1750, trabajó extensamente en la teoría del calor, y es quien establece las bases teóricas fundamentales de la transferencia de calor.

Con el desarrollo de la teoría del calor se perfeccionaron sus postulados generales. A principios del siglo XIX la atención principal se dedicó a la transformación del calor en trabajo. En la segunda mitad del siglo XIX los científicos e ingenieros comenzaron a prestarle más atención a los procesos del intercambio térmico. Y es en este periodo que se publica el trabajo de Osborne Reynolds [2]: **Teoría hidrodinámica del intercambio térmico** ( 1874 ), en el que se establece la relación entre los procesos de transferencia de calor y la cantidad de movimiento.

La teoría del calor se constituyó definitivamente como una asignatura científica independiente a principios de 1900. Hoy en día la termodinámica y la transferencia de calor son aspectos fundamentales en el desarrollo científico y tecnológico.

Los resultados de las diversas investigaciones desarrolladas a lo largo de más de 150 años muestran, que la transferencia de calor es un proceso complejo. En la tecnología moderna, actualmente se aplican ideas cada vez más sofisticadas, para la solución a la problemática de la transferencia de calor, la cual genera nuevos problemas, cuya solución analítica es complicada, esto conduce al uso cada vez más generalizado de la computadora como una herramienta de trabajo aplicada a procesos de solución mediante el uso de métodos numéricos.

## **1.2 RELACIÓN ENTRE LA TRANSFERENCIA DE CALOR Y TERMODINÁMICA.**

La termodinámica, es la ciencia que estudia la relación entre el calor y otras formas de energía. Esta ciencia se basa en leyes establecidas experimentalmente. Así la primera Ley de la Termodinámica, establece que la energía no se crea ni se destruye, solamente se transforma de una forma a otra.

Por experiencia se sabe que no es posible un proceso de transferencia de calor de un sistema de menor temperatura a otro de mayor temperatura, es decir, que la transferencia de calor se realiza desde un sistema de mayor temperatura hacia otro de menor temperatura. Este enunciado se conoce como la **Segunda Ley de la Termodinámica**.

Por lo que, a primera vista se podría pensar que los principios de transferencia de calor se derivan de las leyes básicas de la termodinámica, esta es una conclusión errónea, porque la termodinámica, no esta relacionada con los detalles de un proceso, sino más bien, con los estados de equilibrio y las relaciones entre éstos.

Desde un punto de vista termodinámico, la cantidad de calor transferida durante un proceso, simplemente es igual a la diferencia entre el cambio de energía del sistema y el trabajo realizado. Es claro, que en este análisis no se considera ni el mecanismo del flujo de calor ni el tiempo requerido para su transferencia. Solamente se señala la cantidad de calor que cede o toma un sistema durante un proceso, sin considerar cómo o cuando se podría realizar el proceso. Una de las razones por las que se obtiene dicha información a partir de un análisis termodinámico es que no se considera al tiempo como variable.

### **1.3 IMPORTANCIA DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN INGENIERÍA.**

Desde el punto de vista de ingeniería, la determinación de la rapidez en que se transmite calor, constituye la problemática a resolver principalmente. Cuando se plantea como finalidad la factibilidad de diseño de equipo, así como la estimación de su costo y las dimensiones, para su aplicación a transferencia de calor en un tiempo determinado, se debe realizar un análisis detallado de transferencia de calor.

En la transferencia de calor, como en otras ramas de la ingeniería, la solución adecuada de un problema requiere el planteamiento de una hipótesis. Ya que para expresar un problema mediante un modelo matemático susceptible de solución, es necesario hacer algunas aproximaciones. Esto se logra cuando se interpretan los resultados finales, basados en las hipótesis o aproximaciones hechas en el análisis.

La experiencia ha demostrado que el principal requisito para formular una hipótesis correcta en ingeniería, es un completo y amplio conocimiento del fenómeno físico del problema. Debido a esto, en el campo de la transferencia de calor, no únicamente se debe estar familiarizado con las leyes y mecanismos físicos del flujo de calor, sino también con los fenómenos de transporte que comprenden el comportamiento de los fluidos, la masa y la energía.

### **1.4 IMPORTANCIA DE LOS MÉTODOS NUMERICOS.**

Los **métodos como el de las diferencias finitas, método de elemento finito, método de elemento frontera**, son procedimientos de análisis numérico que se emplea en la solución de una amplia variedad de problemas en ingeniería. En la actualidad en varias situaciones es necesario resolver estos problemas obteniendo soluciones exactas, las cuales en algunos casos son difíciles de obtener porque el planteamiento de los modelos matemáticos es complicado, como el caso de transferencia de calor.

Muchos son los métodos aproximados que se han desarrollado para el análisis numérico, el método que más se ha empleado es el de diferencias finitas. Los modelos de diferencias

finitas aplicados a problemas de transferencia de calor, proporcionan una aproximación por puntos de las ecuaciones que rigen el problema. Este modelo (el cual está formado por una ecuaciones diferencial parcial, dado una región esta se parte formando red(rectángulos, cuadrados), dando lugar puntos a los cuales se les llama nodos), se mejora, conforme se emplea una mayor cantidad de puntos (esto no quiere decir que necesariamente necesite tener una cantidad muy grande de puntos para una mejor aproximación por el error de redondeo y la capacidad de la computadora). Por otro lado para el método de elemento finito es parecido, solo que aquí cambia la forma de la red pueden ser triángulos cuadriláteros,.. etc. Con esta facilidad la red se asemeja mas al modelo (la región). Por otra parte el metodo del elemento frontera también tiene una formulación similar al método del elemento finito, solo que aquí se disminuye el numero de elementos a utilizar ya que solo se discretiza la frontera del modelo, con esto se disminuye el tiempo de calculo.

## CAPITULO 2

### METODOS ANALITICOS EN LA SOLUCION A PROBLEMAS DE CONDUCCION DE CALOR

En este capítulo la conducción de calor en una dimensión se generaliza para dos y tres dimensiones, en placas planas, cilindros y esferas. La ecuación de conducción de calor está representada por una ecuación diferencial, sujeta a condiciones de frontera. El objetivo de este capítulo es proporcionar un estudio detallado del significado físico de varios términos de la ecuación de conducción de calor y sus condiciones de frontera, así como también presentar diversos métodos de solución de esta ecuación como el de separación de variables( o método de Fourier) .

#### 2.1 COMPONENTES DEL FLUJO

Para este análisis se considera que la temperatura varía solamente en la dirección x; relacionando el gradiente de temperatura  $\partial T/\partial x$  con el flujo de calor en dirección x por la **ley de Fourier**. En general, la temperatura varía en las direcciones x, y, z. Para determinar la relación de las componentes x, y, z, se considera un sistema isotrópico, es decir, un sistema en el cual la conductividad térmica k es constante.

Los tres flujos de calor  $q_x$ ,  $q_y$  y  $q_z$  se relacionan con los gradientes de temperatura en las direcciones x, y, z, de acuerdo a la ley de Fourier de la siguiente manera:

$$q_x = -K \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.1.1.a)$$

$$q_y = -K \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.1.1.b)$$

$$q_z = -K \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.1.1.c)$$

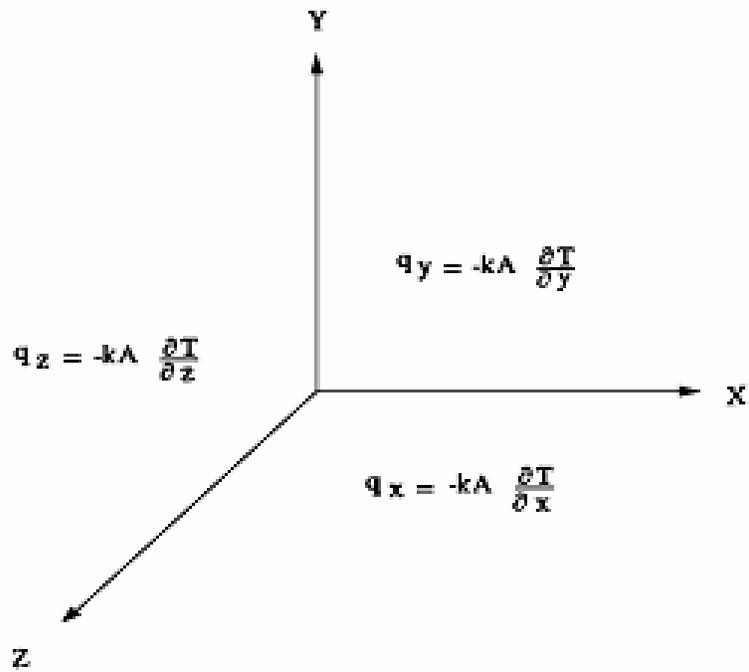


FIGURA. (2.1.1) COMPONENTES DE LA RAPIDEZ DEL FLUJO DE CALOR

La figura (2.1.1) ilustra las tres componentes de la rapidez del flujo de calor por conducción,  $q$ , cuando hay variación de temperatura en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

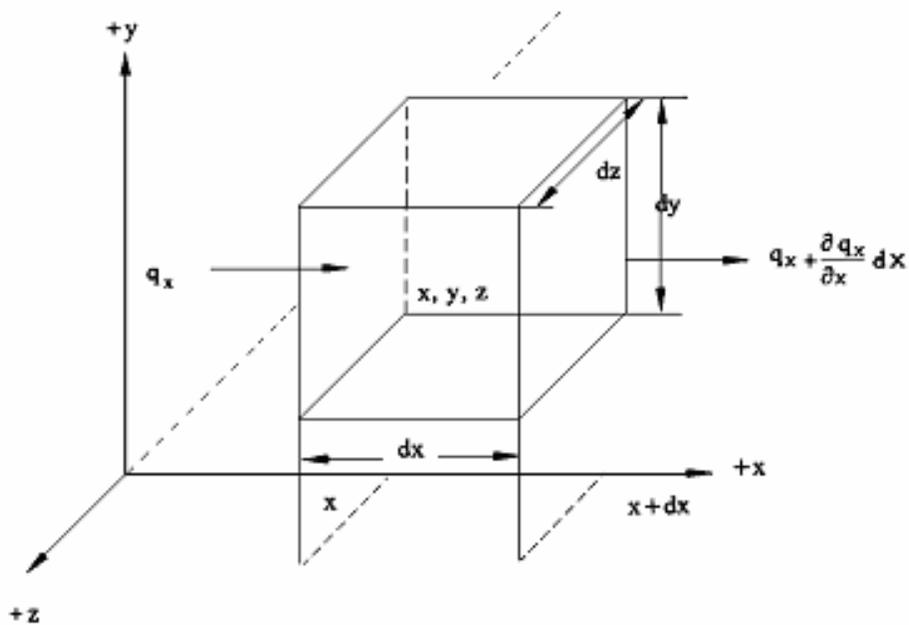


FIGURA. (2.2.1) DIAGRAMA ESQUEMATICO PARA LA OBTENCIÓN DE ECUACIÓN GENERAL DE CONDUCCIÓN DE CALOR

## 2.2 FORMULACION MATEMATICA

Las relaciones de rapidez de flujo de calor analizadas en la sección anterior se pueden calcular si se conocen los gradientes de temperaturas. Estos a su vez se pueden determinar si se conoce la distribución de la temperatura en el sistema. Esta se determina de la solución de la ecuación diferencial que gobierna la conducción de calor con valores en la frontera. Para casos de tres dimensiones el análisis se desarrolla considerando un pequeño volumen de material de un sistema.

El elemento tiene la forma de un paralelepípedo rectangular con sus lados  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  paralelos a los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivamente, como se muestra en la figura (2.2.1).

Para obtener una ecuación que determine la distribución de la temperatura, se realiza un balance de energía en el elemento, en un tiempo  $dt$ , de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \left[ \begin{array}{l} \text{calor que} \\ \text{entra durante} \\ dt \end{array} \right] & + & \left[ \begin{array}{l} \text{calor generado} \\ \text{de fuentes internas} \\ \text{en } dt \end{array} \right] & = & \left[ \begin{array}{l} \text{calor que sale} \\ \text{durante } dt \end{array} \right] & + & \left[ \begin{array}{l} \text{cambio en la} \\ \text{energía interna} \\ \text{en } dt \end{array} \right] \\
 \text{I} & & \text{II} & & \text{III} & & 
 \end{array}$$

### 2.2.1 CANTIDAD NETA DE CALOR

La cantidad neta de calor que entra en el elemento se determina sumando la cantidad de calor ganada en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Si  $q_x$  es la rapidez de flujo de calor en la dirección  $x$ . La cantidad de flujo de calor dentro del elemento que fluye a través de la superficie en dirección  $x$  es:

$$Q_x = q_x \Delta y \Delta z \quad (2.2.1)$$

y la cantidad de flujo de calor a la salida del elemento a través de la superficie  $x + \Delta x$  es:

$$Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x \quad (2.2.2)$$

Por lo tanto, la cantidad neta de flujo de calor que entra al elemento es la diferencia entre la entrada y salida del flujo de calor y se representa:

Cantidad del flujo de calor a la entrada del elemento en dirección x

$$= \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x = -\frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.2.3)$$

Similarmente, la cantidad de calor a la entrada del elemento por conducción en las direcciones y, z son:

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} \Delta y = -\frac{\partial q_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.2.4)$$

$$\frac{\partial Q_z}{\partial z} \Delta z = -\frac{\partial q_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.2.5)$$

La cantidad de calor a la entrada del elemento se obtiene sumando las tres componentes anteriores:

$$I = -\left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.2.6)$$

## 2.2.2 GENERACION DE CALOR INTERNO

Si existen fuentes de energía internas en el sistema, generando calor en una cantidad  $q'$  ( x, y, z, t ) por unidad de tiempo y por volumen, esta cantidad de calor está dada por:

$$II = q' \Delta_x \Delta_y \Delta_z \quad (2.2.7)$$

### 2.2.3 INCREMENTO EN LA ENERGIA INTERNA

En el caso de sólidos y líquidos los calores específicos a presión y volumen constante son iguales, es decir,  $c_p \approx c_v = c$ .

Por lo tanto, el incremento de la cantidad de energía interna se refleja en la cantidad de energía almacenada en el elemento, la cual está dada por:

$$III = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \Delta_x \Delta_y \Delta_z \quad (2.2.8)$$

Donde  $\rho$  y  $c_p$  no varían con el tiempo.

### 2.2.4 ECUACION GENERAL DE CONDUCCION DE CALOR

Sustituyendo las ecuaciones (2.2.8) y (2.2.6) en la ecuación (2.2.1) y dividiendo entre  $\Delta_x \Delta_y \Delta_z$ , se obtiene:

$$\left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q' = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2.9)$$

Sustituyendo las relaciones de las ecuaciones (2.2.1) en la ecuación (2.2.9), se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q' = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2.10)$$

Para el caso en que k es constante se obtiene:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + q' = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2.11)$$

Dividiendo entre k la ecuación (2.2.11), se obtiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q'}{k} = \frac{\rho c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2.11)'$$

Donde:

$$T \equiv T(x, y, z, t) \quad \text{y} \quad q' \equiv q'(x, y, z, t)$$

La ecuación (2.2.10) se conoce como la ecuación **general de conducción de calor** y gobierna la distribución de la temperatura en un sistema.

A continuación se expresan algunos casos especiales de la ecuación (2.2.11)'.

La ecuación (2.2.11)' se puede expresar también como:

$$\nabla^2 T + \frac{q'}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2.12)$$

Donde:

$\nabla^2 T$  : es el operador Laplaciano y se define por:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.2.13)$$

$\alpha$  : Es la difusividad térmica y se define por:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} \quad (2.2.14)$$

k: Conductividad térmica.

c: Calor específico.

$\rho$ : Densidad.

## CASO I.

Si el sistema no tiene fuentes internas de calor,  $q' = 0$ , por lo tanto, la ecuación (2.2.11)' se reduce a la **ecuación de Fourier o ecuación de difusión**:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2.15)$$

### CASO II.

Si el sistema es permanente, la temperatura no varía con el tiempo, es decir,  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$  y con fuentes internas de calor, la ecuación (2.2.11)' se simplifica a la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 T + \frac{q'}{k} = 0 \quad (2.2.16)$$

### CASO III.

Si el sistema es permanente, y sin generación de calor, en este caso  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$  y  $q' = 0$ , la ecuación (2.2.11)' se reduce a la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2.2.17)$$

Si la temperatura varía solamente en una dirección la ecuación (2.2.17) se reduce a:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (2.2.18)$$

La representación de la ecuación (2.2.11)' en un sistema de coordenadas cilíndricas se puede expresar por medio de una transformación de coordenadas. De la figura (2.2.1)

se observa que  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = z$ ,  $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$  y las transformaciones de la primera a la última diferenciación involucrada en la función  $T = T(r, \varphi)$  donde  $r$  y  $\varphi$  son funciones de  $x, y$  &  $z$  se expresan a continuación:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \quad (2.2.19)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial T}{\partial \varphi}$$

$$= \cos \varphi \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\text{sen } \varphi}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \quad (2.2.20)$$

$$= \text{sen } \varphi \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi}$$

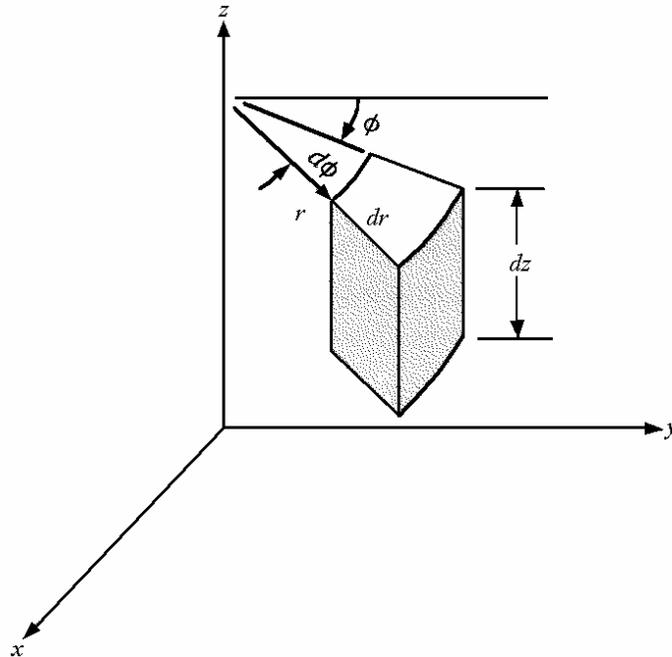


FIGURA. (2.2.1) SISTEMA EN COORDENADAS CILINDRICA  
Para la segunda derivada usaremos el siguiente operador:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( \cos \varphi \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) \\ &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \\ &\quad + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Análogamente tenemos para la componente y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( \sin \varphi \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) \\ &= \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \\ &\quad + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \\ &\quad + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}$$

$$+ \frac{\cos^2 \varphi}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \quad (2.2.24)$$

Sumando (2.2.23) y (2.2.24) y aplicando la identidad  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$  se obtiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.2.25)$$

Por lo tanto, la forma cilíndrica de la ecuación (2.2.15) se expresa por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2.26)$$

Los sistemas de coordenadas rectangulares y esféricas son asociadas por las relaciones:  $x = r \sin \psi \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \psi \sin \varphi$  y  $z = r \cos \psi$  como se muestra en la figura (2.2.2). Siguiendo un procedimiento idéntico en las transformaciones cilíndricas, se obtiene la forma esférica correspondiente a la ecuación (2.2.15), y se describe por:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rT) + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \sin \psi \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2.27)$$

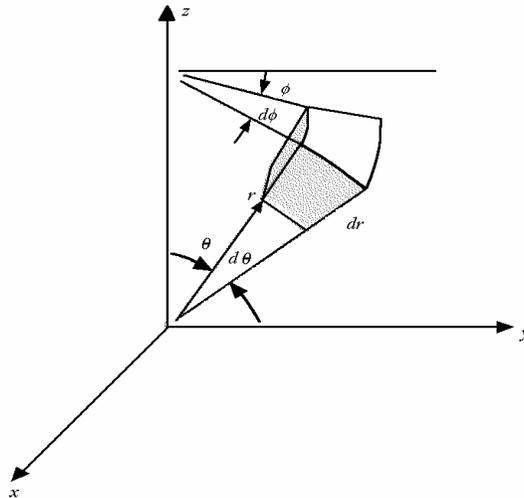


FIGURA. (2.2.2) SISTEMA EN COORDENADAS ESFERICAS

## 2.3 METODO DE SEPARACION DE VARIABLES. PARA LA CONDUCCION DE CALOR UNIDIMENSIONAL EN ESTADO ESTABLE.

Una solución analítica de las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de conducción de calor debe satisfacer tanto a la ecuación general como a las condiciones de frontera especificadas. Una técnica para resolver este tipo de problemas, es el método de Fourier, conocido también como el método de Variables separables.

El método de variables separación. Tal vez, éste es el método sistemático más antiguo para la solución de ciertas clases de ecuaciones diferenciales parciales, habiendo sido usado por D'Alembert, D. Bernulli y Euler, alrededor de 1750, en sus tratados de la ecuación de onda. La aplicación de este método con valores de frontera homogéneos y lineales es bastante directa. Es decir, las ecuaciones diferenciales parciales de conducción de calor en la  $n$ -ésima variable independiente en  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias, en este proceso de separación se introducen  $n-1$  constantes arbitrarias de separación. La solución completa de estas ecuaciones se construye por la superposición lineal de todas las soluciones separadas. Este método de variables separables no es apropiado si el problema no es homogéneo, debido a la presencia de generación de calor interna o a la no-homogeneidad en las condiciones de frontera o a ambas, [5],[19]

### 2.3.1 PLACA PLANA

Para el caso de flujo de calor simple en estado estable a través de una pared plana, el gradiente de temperatura y el flujo de calor no varía con el tiempo y el área de la sección a lo largo de la trayectoria del flujo de calor es uniforme, de acuerdo a la ley de Fourier.

La ecuación y las condiciones de frontera son:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (2.3.1)$$

$$T(x) = T(0) = T_1 \quad \text{para } x=0 \quad (2.3.1)'$$

$$T(x) = T(L) = T_2 \quad \text{para } x=L$$

Integrando la ecuación (2.3.1) se obtiene:

$$T = c_1 x + c_2 \quad (2.3.2)$$

Las constantes  $c_1$  y  $c_2$  se determinan sustituyendo las condiciones de frontera en la ecuación (2.3.2) de la siguiente manera:

Aplicando la primera condición de frontera se obtiene el valor de  $c_2$

$$T_1 = c_1 (0) + c_2$$

por lo tanto:

$$T_1 = c_2 \quad (2.3.3)$$

Aplicando la segunda condición de frontera se obtiene el valor  $c_1$  de la forma siguiente:

$$T_2 = c_1 (L) + T_1 \quad (2.3.4)$$

Sustituyendo los valores  $c_1$  y  $c_2$  en la ecuación (2.3.2) se obtiene la expresión que representa la distribución de la temperatura:

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L} x \quad (2.3.5)$$

o bien:

$$\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{x}{L} \quad (2.3.6)$$

La ecuación (2.3.5) muestra que la distribución de la temperatura en una pared plana bajo las condiciones especificadas es lineal, como se muestra en la figura (2.3.1)

La rapidez de flujo de calor, que se obtiene en la ecuación:

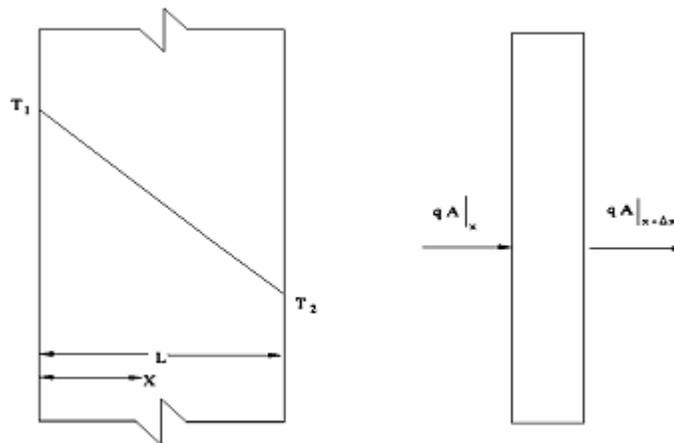


FIGURA. (2.3.1) CONDUCCIÓN DE CALOR EN ESTADO ESTABLE EN UNA PLACA

$$q = -kA \frac{dT}{dx} \quad (2.3.7)$$

Separando variables se tiene:

$$q \int_{x_1}^{x_2} dx = kA \int_{T_2}^{T_1} dT \quad (2.3.8)$$

Sí  $L = x_2 - x_1$

$$q = k \frac{A}{L} (T_1 - T_2) \quad (2.3.9)$$

de otra forma:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L}{kA}}$$

donde:

$\frac{L}{kA}$  es la resistencia térmica y se define por:

$$R = \frac{L}{kA} \quad (2.3.10)$$

Por lo tanto, la ecuación (2.3.9) se escribe de la siguiente manera:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{R} \quad (2.3.11)$$

La cantidad  $\frac{L}{kA}$ , en la ecuación (2.3.10), es la resistencia térmica para una placa o pared plana. La recíproca de esta cantidad,  $\frac{kA}{L}$  se denomina conductancia térmica.

### 2.3.1.1 ANALOGIA ENTRE FLUJO DE CALOR Y EL FLUJO ELECTRICO

Se dice que dos sistemas son análogos cuando ambos obedecen ecuaciones similares y tienen también similares condiciones de frontera. Esto significa que la ecuación que describe el comportamiento de un sistema, puede transformarse en la ecuación para el otro sistema. El flujo de calor a través de una resistencia térmica es análogo al del flujo de corriente directa a través de una resistencia eléctrica.

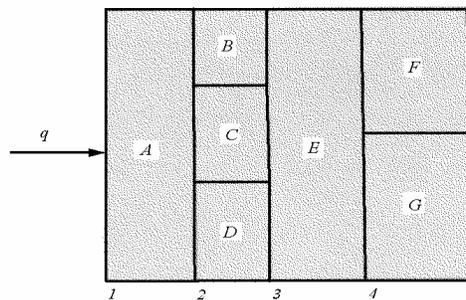
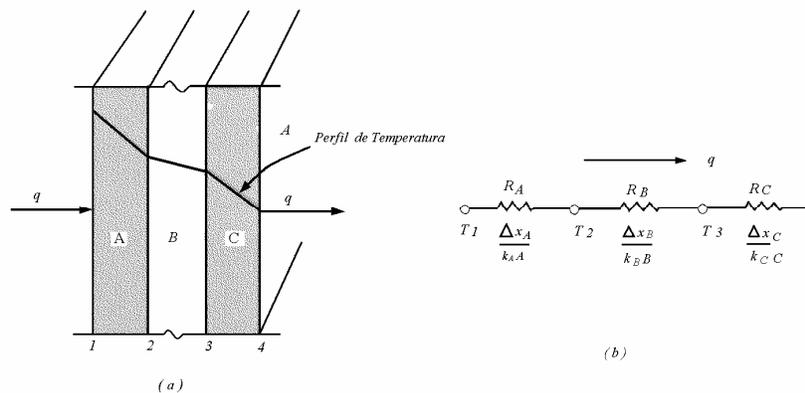
Simplemente cambiando los Símbolos de las variables por ejemplo, el flujo de calor a través de una resistencia térmica es análogo al flujo de corriente directa a través de una resistencia eléctrica, debido a que ambos tipos de flujo obedecen ecuaciones simbólicas. Si

la ecuación de flujo de calor  $q = \frac{\Delta T}{R}$  se sustituye el símbolo del potencial de temperatura

$\Delta T$  por el símbolo del potencial eléctrico (es decir, la diferencia de voltaje  $\Delta E$ ) y el símbolo de la resistencia térmica  $R$  por el símbolo de resistencia eléctrica, se obtiene la

ecuación para la rapidez de flujo de carga eléctrica  $i$ ,  $i = \frac{\Delta E}{R_e}$

Por ejemplo:



(a)

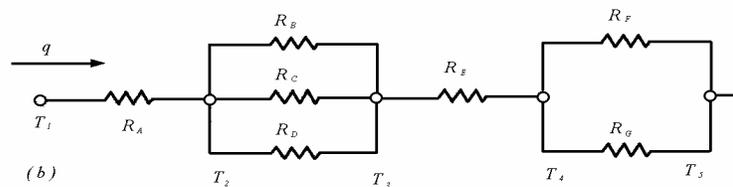


FIGURA. (2.3.1.1) MUESTRA LA COMBINACIÓN DE VARIOS MATERIALES Y SU ANALOGÍA CON UN CIRCUITO ELÉCTRICO

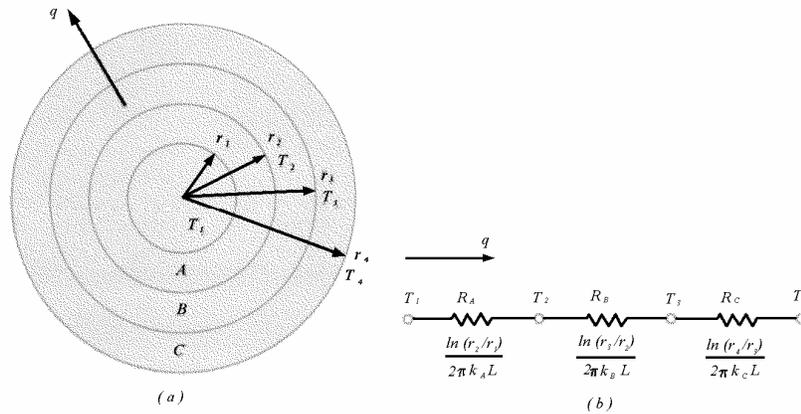


FIGURA. (2.3.1.2) MUESTRA LA EQUIVALENCIA DE UN A COMBINACIÓN DE MATERIALES DE FORMA CILÍNDRICA A SU ANALOGÍA ELÉCTRICA

### 2.3.2 PAREDES PLANAS COMPUESTAS

Para este análisis se considera una pared de tres capas heterogéneas que están unidas estrechamente, como se muestra en la figura (2.3.2), El espesor de la primera es  $\delta_1$ , el de la segunda  $\delta_2$ , el de la tercera  $\delta_3$ , siendo los coeficientes de conductividad térmica,  $k_1, k_2, k_3$ , respectivamente, conociendo las temperaturas  $T_1$  y  $T_4$  de las superficies exteriores de la pared. Las temperaturas de contacto son  $T_2$  y  $T_3$ . De acuerdo con la ecuación (2.3.9), se obtienen las siguientes expresiones:

$$q = \frac{k_1}{\delta_1} (T_1 - T_2) = \frac{k_2}{\delta_2} (T_2 - T_3) = \frac{k_3}{\delta_3} (T_3 - T_4) \quad (2.3.12)$$

La suma de las diferencias de temperaturas entre las dos

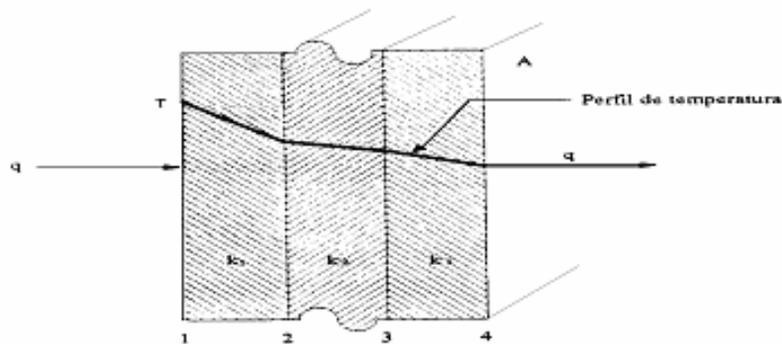


FIGURA. (2.3.2) CONDUCCIÓN DE CALOR EN ESTADO ESTABLE EN UNA PARED PLANA COMPUESTA

Capas internas representan la diferencia total de temperatura entre las capas y se expresa por:

$$T_1 - T_4 = q \left( \frac{\delta_1}{k_1} + \frac{\delta_2}{k_2} + \frac{\delta_3}{k_3} \right) \quad (2.3.13)$$

De esta relación se determina el flujo de calor:

$$q = \frac{T_1 - T_4}{\frac{\delta_1}{k_1} + \frac{\delta_2}{k_2} + \frac{\delta_3}{k_3}} \quad (2.3.14)$$

### 2.3.3 CILINDROS HUECOS

Para la conducción de calor en estado estacionario unidimensional a través de paredes cilíndricas en dirección radial, como se muestra en la figura (2.3.3). Para este caso la ecuación (2.2.26) toma la forma siguiente:

Separando variables e integrando, se obtiene la solución general y se expresa por:

$$T = c_1 \ln |r| + c_2 \quad (2.3.15)$$

Donde:  $c_1$  y  $c_2$  son constantes de integración que se evalúan por las condiciones de frontera siguiente:

$$\begin{aligned} T = T_1 & \quad \text{para } r = r_1 \\ T = T_2 & \quad \text{para } r = r_2 \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Con estas consideraciones se obtiene la solución particular para la distribución de la temperatura de la siguiente manera:

Primero sustituyendo las condiciones de frontera en la ecuación (2.3.15) y se obtiene los valores de  $c_1$  y  $c_2$ .

$$c_1 = \frac{(T_2 - T_1)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (2.3.17)$$

$$c_2 = T_1 - \frac{(T_2 - T_1)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \ln(r_1) \quad (2.3.18)$$

Sustituyendo los valores de  $c_1$  y  $c_2$  en las ecuaciones (2.3.15) se obtiene la siguiente expresión para la distribución de las temperaturas:

$$T = T_1 + \left( \frac{T_2 - T_1}{\text{Ln}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \right) \text{Ln}\left(\frac{r}{r_1}\right) \quad (2.3.19)$$

En estas ecuaciones se observa que la temperatura varía logaritmicamente a través de una pared cilíndrica, en cambio una pared plana varía linealmente.

Para determinar el flujo de calor, aplicamos las ecuaciones de Fourier:

$$q = -kA \frac{\partial T}{\partial r} = -k(2\pi rL) \frac{\partial T}{\partial r} \quad (2.3.20)$$

Donde:

- L: es la longitud axial del tubo
- A: es el área del cilindro de radio r.

Escribiendo la ecuación (2.3.20) en términos de flujo de calor por unidad de longitud, se obtiene:

$$\frac{q}{L} = -k(2\pi r) \frac{\partial T}{\partial r}$$

Separando variables e integrando se obtiene:

$$T_2 - T_1 = \frac{q}{k(2\pi L)} \left( \text{Ln}\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \right) \quad (2.3.21)$$

Donde:

$$\frac{\text{Ln}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi k L} : \quad \text{es la resistencia térmica}$$

La ecuación (2.3.21) nos expresa el flujo de calor radial, en términos de las propiedades geométricas y materiales, y de la diferencia de temperatura.

### 2.3.4 PAREDES CILÍNDRICAS COMPUESTAS

Como en el caso de una pared plana compuesta, se emplea el mismo procedimiento en un tubo compuesto como se muestra en la figura (2.3.3). Este tubo está compuesto de varias cubiertas y de varios materiales. La expresión para determinar el flujo de calor es la siguiente:

$$q = \frac{T_1 - T_4}{\frac{1}{2\pi L k_1} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{2\pi L k_2} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{2\pi L k_3} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)} \quad (2.3.22)$$

Para adicionar las resistencias de los efectos convectivos de un fluido que fluye de la superficie interior a la superficie exterior del tubo, es necesario incluir las áreas correctas por donde atraviesa el flujo. La ecuación para este caso es la siguiente:

$$q = \frac{T_1 - T_4}{\frac{1}{2\pi k_1 L h_1} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{2\pi L k_2} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{2\pi L k_3} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \frac{1}{2\pi L k_3 h_4} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)} \quad (2.3.23)$$

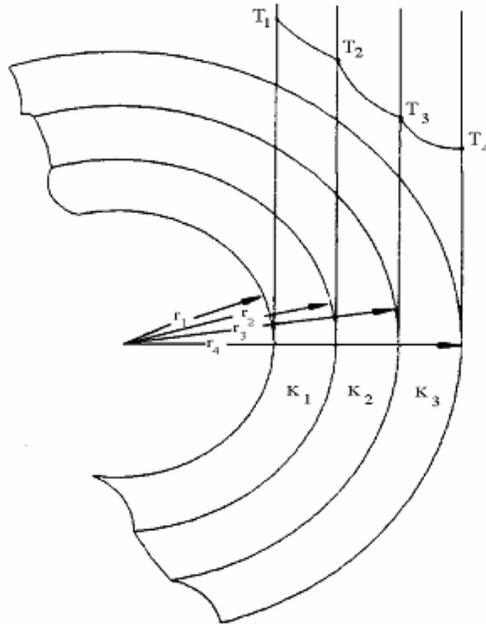


FIGURA. (2.3.3) TUBO COMPUESTO

### 2.3.4.1 PAREDES ESFERICAS

Para el caso esférico, la ecuación de Laplace unidimensional es:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (2.3.24)$$

Derivando se tiene:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \quad (2.3.25)$$

separando variables e integrando, se obtiene:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{c_1}{r^2}$$

De donde:

$$T = -\frac{1}{r} + c_2 \quad (2.3.26)$$

Las condiciones de frontera para este caso son  $T(r_1) = T_1$  y  $T(r_2) = T_2$ , De donde obtenemos las constantes de integración:

$$T(r_1) = -\frac{c_1}{r_1} + c_2 = T_1$$

$$T(r_2) = -\frac{c_1}{r_2} + c_2 = T_2$$

$$c_1 = \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

$$c_2 = -\frac{\frac{T_1}{r_2} - \frac{T_2}{r_1}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

Por lo tanto:

Finalmente para  $T(r)$ :

$$T(r) = -\frac{\frac{T_1}{r_2} - \frac{T_2}{r_1}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} - \frac{\frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}}{r} \quad (2.3.27)$$

La expresión para el flujo radial de calor en un cuerpo esférico es:

$$q = -k A \frac{dT}{dr} \quad (2.3.28)$$

En la cual  $A = 4\pi r^2$  y  $dT/dr$  viene dada por la ecuación (2.3.27). Haciendo estas sustituciones,  $q$  será:

$$q = -k A \left( \frac{T_2 - T_1}{r^2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \right) = 4\pi k r_1 r_2 \left( \frac{T_1 - T_2}{r_1 - r_2} \right) \quad (2.3.29)$$

En forma equivalente se expresa:

$$q = 4\pi k r_1 r_2 \left( \frac{T_1 - T_2}{r_1 - r_2} \right) \quad (2.3.30)$$

De donde observamos que la resistencia térmica para una esfera se expresa por.

$$R_t = \frac{(r_1 - r_2)}{4\pi k r_1 r_2} \quad (2.3.31)$$

## 2.4 SUPERFICIES EXTENDIDAS

En esta sección se analiza la transferencia de calor entre una superficie y un fluido por medio de una superficie extendida en forma de aletas rectangulares, circunferenciales y varias formas de espirales, Estas superficies extendidas comúnmente se encuentra unidas a la superficie de una estructura.

## 2.4.1 ALETAS DE SECCION TRANSVERSAL UNIFORME

Se considera una aleta que tiene la forma de una barra cuya base se adhiere a una pared que tiene una estructura  $T_s$  (ver figura 2.4.1.). La aleta se enfría a lo largo de la superficie por un fluido a la temperatura  $T_\infty$ . La sección transversal es de una área  $A$ , con una conductividad térmica uniforme  $k$ , y el coeficiente de transferencia de calor entre la superficie de la aleta y el fluido es  $h$ . Se supone que la temperatura en cualquier sección transversal de la barra es uniforme, el problema a un flujo de calor unidimensional, [4], [5], [9] y [15].

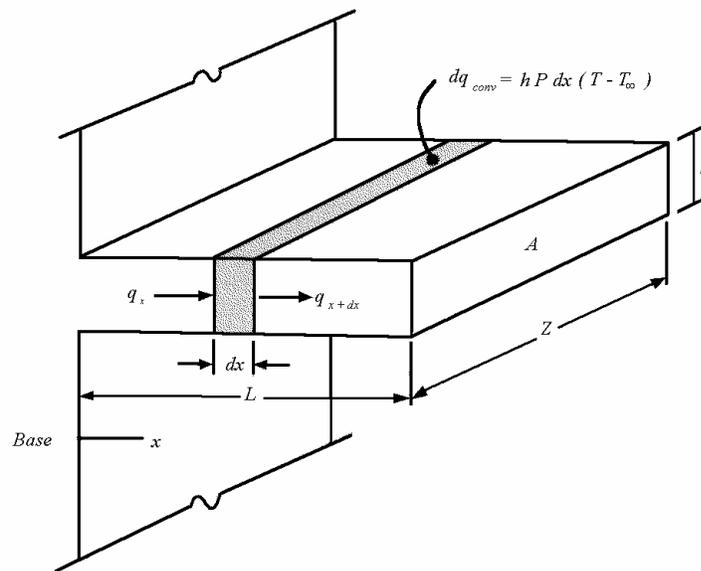


FIGURA. (2.4.1) ALETAS EN FORMA DE BARRA

Realizando un balance de energía se obtiene la ecuación que determina la distribución de la temperatura, para un pequeño elemento de la aleta.

Rapidez de flujo de calor por conducción que entra en el elemento en $x$	=	Rapidez del flujo de calor por conducción que sale del elemento en $(x+dx)$	+	Rapidez de flujo de calor por convección a partir de la superficie entre $x$ y $(x+dx)$	(2.4.1)
--	---	---	---	---	---------

Recuerde que la ecuación definida para el coeficiente de transferencia de calor por convección es:  $q = hA(T_w - T_\infty)$ , la energía que entra en la cara izquierda es  $q_x = -kA \frac{dT}{dx}$

La energía que sale por la cara derecha es  $q_{x+dx} = -kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} = -kA \left( \frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} dx \right)$

Energía perdida por convección es  $hP(T - T_\infty)dx$

Matemáticamente se expresa por:

$$-KA \frac{dT}{dx} = \left[ -KA \frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx} \left( -KA \frac{dT}{dx} \right) dx \right] + hP dx (T - T_{\infty})$$

$$0 = -KA \frac{dT}{dx} + KA \frac{dT}{dx} + KA \frac{d^2T}{dx^2} dx - hP(T - T_{\infty}) dx \quad (2.4.2)$$

Donde:

P: es el perímetro de la barra

A = Pdx: es el área de la superficie entre las secciones x y (x+dx) en contacto con el fluido que rodea la barra (convección)

Por lo tanto la ecuación que se obtiene es:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{KA} (T - T_{\infty}) = 0 \quad (2.4.3)$$

Si  $\frac{hP}{KA} = m^2$  La ecuación (2.4.3) queda de la siguiente forma:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - m^2 (T - T_{\infty}) = 0 \quad (2.4.4)$$

La ecuación (2.4.4) es una forma común de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, [19] siendo la solución general:

$$T - T_{\infty} = c_1 e^{m x} + c_2 e^{-m x} \quad (2.4.5)$$

Donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes de integración. Sus valores se determinan a partir de las siguientes condiciones de frontera:

$$T = T_s \quad \text{cuando } x = 0$$

Sustituyendo la condición anterior en la ecuación (2.4.5) se obtiene:

$$T_s - T_{\infty} = c_1 e^{m(0)} + c_2 e^{-m(0)} = c_1 + c_2 \quad (2.4.6)$$

En el estudio de problemas de transferencia de calor más complejos, a menudo es conveniente desligar las regiones y considerar por separado. Así, la condición de contorno es simplemente una temperatura conocida. Considerando  $x=L$ ,  $T|_{x=L}=T_s$ , en la figura 2.4.2a se muestra esta condición que se conoce como condición de contorno del primer tipo o de Dirichlet. A veces es conveniente aplicar una condición de contorno a una

superficie para la cual se conoce el flujo de calor por unidad de área. Esta se muestra en la figura 2.4.6.b. ,  $-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = q_s$  , que se conoce como condición de contorno del segundo

tipo o de Neumann. Otra situación que se presenta con frecuencia es aquella en que la región adyacente es un fluido, y se quiere describir la transferencia de calor al fluido por medio de la ley de enfriamiento de Newton. En la figura 2.4.2.b

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = h_c(T \Big|_{x=L} - T_e)$$

La figura (2.4.2) ilustra esquemáticamente las condiciones descritas para tres condiciones de frontera.

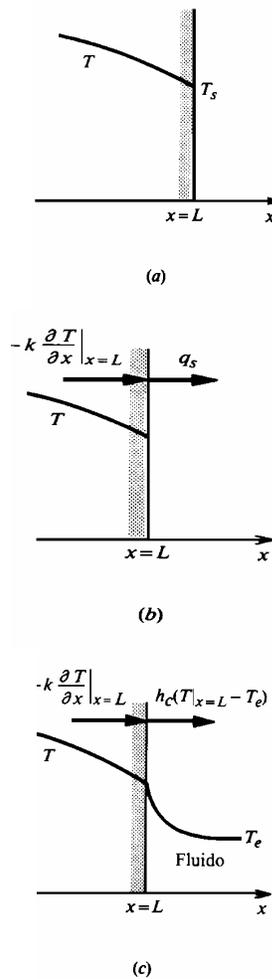


FIGURA. (2. 4. 2) ILUSTRACION ESQUEMÁTICA DE LAS TRES CONDICIONES DE FRONTERA PARA UNA ALETA DE FORMA DE BARRA

## CASO I.

Si la barra es infinitamente larga, su temperatura se aproximará a la temperatura del fluido conforme  $x \rightarrow \infty$ , o  $T = T_\infty$  en  $x \rightarrow \infty$ . Sustituyendo esta condición en la ecuación (2. 4. 5) se obtiene:

$$T - T_\infty = c_1 e^{m\infty} + c_2 e^{-m\infty} \quad (2. 4. 7)$$

La condición de frontera se satisface únicamente si  $c_1 = 0$ . Sustituyendo este valor en la ecuación (2. 4. 6) se tiene:

$$c_2 = T_s - T_\infty$$

Por lo tanto la distribución de la temperatura se convierte en:

$$T - T_\infty = (T_s - T_\infty)e^{-m x} \quad (2. 4. 8)$$

La rapidez del flujo de calor de la aleta al fluido, se puede obtener por dos métodos diferentes. El calor que fluye por condiciones a través de la raíz de la aleta se dé transmitir por convección desde la superficie de la barra hacia el fluido, es decir:

$$q_{aleta} = -kA \left. \frac{dT}{dX} \right|_{x=0} = \int_0^\infty hP(T - T_\infty) dx \quad (2. 4. 9)$$

Derivando la ecuación (2. 4. 8) y sustituyendo el resultado para  $x = 0$  en la ecuación (2. 4. 9), se obtiene:

$$q_{aleta} = -kA \left[ -m(T_s - T_\infty) e^{-m(0)} \right]_{x=0} = \sqrt{hPKA}(T_s - T_\infty) \quad (2.4.10)$$

El mismo resultado se obtiene calculando el flujo de calor por convección desde la superficie de la barra:

$$q_{aleta} = \int_0^\infty hP(T_s - T_\infty) e^{-mx} dx = -\frac{hP}{m} (T_s - T_\infty) e^{-mx} \Big|_0^\infty = \sqrt{hPkA}(T_s - T_\infty) \quad (2.4.11)$$

Las ecuaciones (2. 4. 8) y (2. 4. 11) son aproximaciones razonables de la distribución de la temperatura y de la rapidez del flujo de calor en una aleta finita, si su longitud es muy grande comparada con el área de su sección transversal.

## CASO II.

Si la barra es de longitud finita, pero se desprecia el calor que se pierde por el extremo de la barra, o el extremo de la barra se encuentra aislado, la segunda condición de la frontera requiere que el gradiente de temperatura  $x=L$  sea cero, es decir,  $dT/dx = 0$  para  $x = L$ . Derivando la ecuación (2. 4. 5) y sustituyendo esta condición, se obtiene:

$$c_2 = c_1 e^{2mL} \quad (2. 4. 12)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (2. 4. 6) se obtiene los valores de  $c_1$  y  $c_2$ :

$$c_1 = \frac{T_s - T_\infty}{1 + e^{2mL}} = (T_s - T_\infty) \left[ \frac{e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \right]$$

Y (2.4.13)

$$c_2 = \frac{T_s - T_\infty}{1 + e^{-2mL}} = (T_s - T_\infty) \left[ \frac{e^{mx}}{e^{mL} + e^{-mL}} \right]$$

Por lo tanto, la solución completa es:

$$T - T_\infty = (T_s - T_\infty) \left( \frac{e^{mx}}{1 + e^{2mL}} + \frac{e^{-mx}}{1 + e^{-2mL}} \right) \quad (2.4.14)$$

En forma simplificada:

$$\frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty} = \frac{\cosh m(L - x)}{\cosh(mL)} \quad (2.4.15)$$

La pérdida de calor de la barra se puede determinar con la ecuación (2. 4. 14), sustituyendo el gradiente de temperatura en la base o raíz.

$$\begin{aligned} \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} &= (T_s - T_\infty) m \left( \frac{1}{1 + e^{2mL}} - \frac{1}{1 + e^{-2mL}} \right) \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} \\ &= (T_s - T_\infty) m \left( \frac{e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} - \frac{e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \right) \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

Usando las identidades hiperbólicas

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Reduciendo a un denominador común el paréntesis del segundo miembro, la ecuación anterior se escribe como:

$$\frac{e^{mL} - e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} = \text{Tanh}(mL) \quad (2.4.17)$$

Donde Tanh es la tangente hiperbólica. La rapidez de flujo de calor que se desprende de la barra es:

$$q_{\text{barra}} = -kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = \sqrt{PhkA} (T_s - T_\infty) \text{Tanh}(mL) \quad (2.4.18)$$

### CASO III.

Si el extremo de la barra pierde calor por convección, el calor que fluye por conducción hacia la cara en  $x = L$  debe ser igual al flujo de calor por convección del extremo de la barra al fluido, o sea:

$$-k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = h_L (T_{x=L} - T_\infty) \quad (2.4.19)$$

El coeficiente de transferencia de calor, que en el extremo de la barra  $h_1$ , no es igual al valor de  $h$  sobre la superficie circunferencial de la barra. Sustituyendo para  $T_{x=L}$  y  $(dT/dx)_{x=L}$  de la ecuación (2. 4. 5) se obtiene el flujo de calor:

$$q_{x=L} = -k(C_1 m e^{mx} - C_2 m e^{-mx})_{x=L} = h_L (T_{x=L} - T_\infty) \quad (2.4.20)$$

o

$$C_2 e^{-mL} - C_1 e^{mL} = \frac{h_L}{km} (C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}) \quad (2.4.21)$$

Las ecuaciones (2. 4. 20) y (2. 4. 21) se puede resolver simultáneamente para obtener las constantes  $c_1$  y  $c_2$  en la misma forma que para los casos anteriores. Por lo tanto, la distribución de la temperatura a lo largo de la aleta es:

$$\frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty} = \frac{\cosh m(L - x) + (h_L / mk) \sinh m(L - x)}{\cosh(mL) + (h_L / mk) \sinh mL} \quad (2.4.22)$$

Y el flujo de calor que se desprende de la aleta se expresa por:

$$q_{aleta} = \sqrt{PhAk}(T_s - T_\infty) \frac{\sinh mL + (h_L / mk) \cosh mL}{\cosh mL + (h_L / mk) \sinh mL} \quad (2.4.23)$$

### 2. 4. 2 ALETAS RECTANGULARES

La aleta rectangular de lados rectos (figura 2. 4. 3) se analiza la forma similar que la barra. Si el ancho  $b$  de la aleta es grande comparada con su espesor  $\delta$ ,  $b \gg \delta$ , el perímetro es.

$$P = 2(b + \delta) \cong 2b$$

El área de la sección transversal  $A$  de la aleta es  $A = b\delta$ , y

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA}} = \sqrt{\frac{2h}{k\delta}}$$

El desarrollo de las ecuaciones para la distribución de la temperatura y el flujo de calor en una aleta rectangular, es idéntico de los casos anteriores.

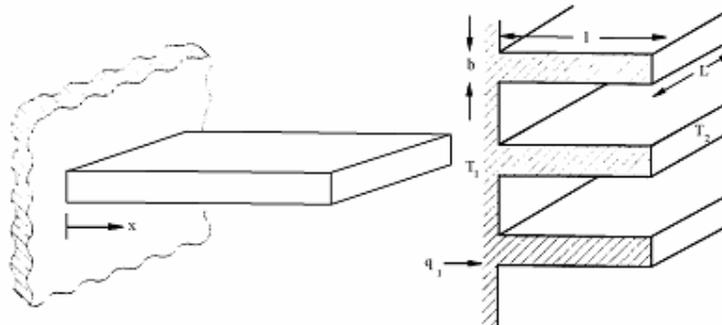


FIGURA. (2.4.3) ALETA RECTANGULAR

### 2. 4. 3 ALETA PIRAMIDAL

La aleta piramidal (figura 2. 4. 4) se aproxima a la forma que proporciona el máximo flujo de calor por unidad de peso. El análisis se basará en el ancho  $b$  y nuevamente se supondrá que la temperatura es solamente una función de  $x$ . Un balance de calor para una sección diferencial de la aleta entre  $x$  y  $x + dx$  conduce a:

$$\frac{d}{dx} \left[ kA \frac{dT(x)}{dx} \right] = hP(T(x) - T_{\infty}) \quad (2.4.24)$$

Mientras que  $A$  y  $P$  son constantes para una barra, ambas son funciones de  $x$  para la aleta piramidal.

Derivando con respecto a  $x$ , la ecuación (2. 4. 24) se convierte en:

$$kA(x) \frac{d^2T(x)}{dx^2} + \frac{dA(x)}{dx} K \frac{dT(x)}{dx} = hP(x)[T(x) - T_{\infty}] \quad (2.4.25)$$

La ecuación (2. 4. 25) es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes variables  $KA(x)$ ,  $K \left[ \frac{dA(x)}{dx} \right]$ ,  $hP(x)$ .

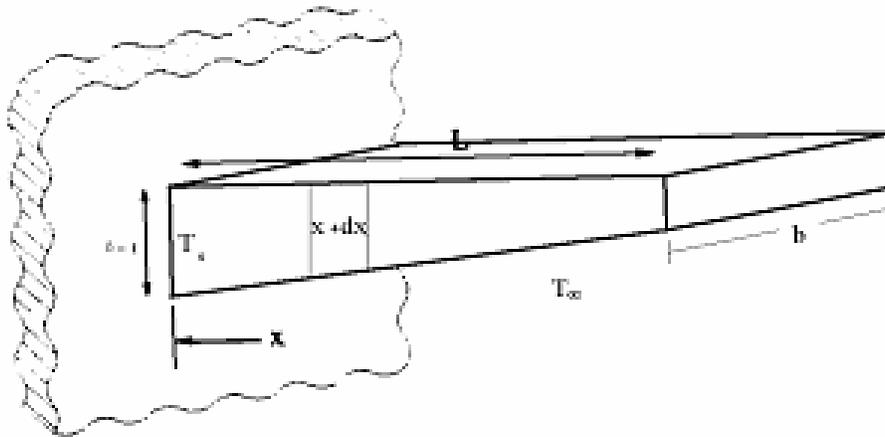


FIGURA. (2.4.4) ALETA PIRAMIDAL

Dividiendo la ecuación (2. 4.25) entre  $kA(x)$  se obtiene:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{(dA(x)/dx)}{A(x)} \frac{dT}{dx} - \frac{hP(x)}{kA(x)}(T - T_\infty) = 0 \quad (2.4.26)$$

Si se desprecia el efecto de los lados, entonces  $P \cong 2b$ , y el área de la sección transversal de la aleta puede obtenerse observando que el espesor de la aleta en cualquier punto  $x$  es igual a  $\delta = t(x/l)$  por lo que  $A = (bt/L)x$ . sustituyendo esta expresión para  $a$  en (2.4.26), se encuentra que:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dT}{dx} - \frac{2Lh}{Ktx}(T - T_\infty) = 0 \quad (2.4.26.1)$$

La ecuación (2. 4. 26.1) se asemeja a una ecuación de Bessel modificada [5],[9] siendo la forma general para cualquier valor de  $n$ :

$$z^2 \frac{d^2y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} - (z^2 + n^2)y = 0 \quad (2.4.27)$$

Esta ecuación tiene las siguientes soluciones dependiendo del valor de  $n$   
Remplazando  $z$  por  $iz$  se tiene:

$$Y=y(z) \left\{ \begin{array}{l} C_1 I_n(z) + C_2 I_{-n}(z) \quad \text{cuando } n \neq 0 \text{ o entero} \\ C_1 I_n(z) + C_2 K_n(z) \quad \text{cuando } n = 0 \text{ o un entero positivo} \end{array} \right\}$$

Cuando la ecuación es de la forma:

$$z^2 \frac{d^2y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (z^2 - n^2)y = 0 \quad (2.4.27.1)$$

Tiene soluciones de la forma:

$$Y=y(z) \left\{ \begin{array}{l} C_1 J_n(z) + C_2 J_{-n}(z) \quad \text{cuando } n \neq 0 \text{ o entero} \\ C_1 J_n(z) + C_2 Y_n(z) \quad \text{cuando } n = 0 \text{ o un entero positivo} \end{array} \right\}$$

Donde

$$J_n(z) = z^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+n}}{2^{2m+n} m!(m-n)!} \quad Y \quad J_{-n}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m-n}}{2^{2m-n} m!(m-n)!}$$

está es llamada función de Bessel de primera clase de orden  $n$ . Si,  $n$  es cero un entero la solución a la ecuación de Bessel esta dada:

$$Y_n(z) = \frac{1}{\text{sen } n\pi} [J_n(z) \cos n\pi - J_{-n}(z)], \quad I_n(z) = i^{-n} J_n(iz) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n}}{m!(m+n)!},$$

$K_n(z) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} (J_n(iz) + iY_n(iz))$  También llamada solución de Bessel de segunda clase. En

resumen si la ecuación diferencial es de la forma  $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(a^2 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0$  para  $n=0$  o

entero tiene como solución  $y=A J_n(ax)+B Y_n(ax)$  donde  $J_n, Y_n$  son funciones de Bessel de orden de primera y segunda clase y la ecuación es de la forma

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(-a^2 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0$$

Admite solución  $y = CI_n(ax) + DK_n(ax)$

Donde  $I_n$  y  $K_n$  son funciones de Bessel modificadas de orden  $n$  de primera y segunda especies, respectivamente.

Las reglas de diferenciación están dadas por

$$\frac{d}{dx} [J_0(ax)] = -aJ_1(ax)$$

$$\frac{d}{dx} [Y_0(ax)] = aY_1(ax)$$

$$\frac{d}{dx} [I_0(ax)] = aI_1(ax)$$

$$\frac{d}{dx} [K_0(ax)] = -aK_1(ax)$$

La ecuación (2. 4. 26) se puede llevar a la forma de la ecuación (2. 4. 27). La solución de este tipo se desarrolla en forma parecida a las funciones de seno y coseno.

Considerando que  $B^2 = 2Lh/ kt$  y que  $y = (T - T_{\infty})$ . Multiplicando la ecuación (2.4.26.1) por  $x^2$ , se obtiene:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - B^2 xy = 0 \quad (2.4.28)$$

La ecuación (2. 4. 28) tiene a la forma requerida para  $n=0$ , excepto por el coeficiente  $-B^2x$ , por lo tanto, se determinara una variable relacionada con  $x$  que modifique este término. Si el coeficiente del término  $B^2x$  es el cuadrado de alguna otra variable, ésta deberá ser proporcional a  $B\sqrt{x}$  raíz cuadrada de  $B^2x$ . Si se supone que esta nueva variable que se designa por designa  $z$ , es igual a una constante,  $c$ , multiplicada por  $B\sqrt{x}$ , al derivar las siguientes relaciones se obtiene:

$$z = cB\sqrt{x} \quad \text{o} \quad x = \frac{z^2}{c^2 B^2} \quad (2.4.29)$$

Por lo tanto,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{cB}{2} x^{-1/2} \quad (2.4.30)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{cB}{2} x^{-1/2} \quad (2.4.31)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{dy}{dz} \frac{cB}{2} x^{-1/2} \right] \quad (2.4.32)$$

$$= \frac{dy}{dz} \frac{cB}{2} \left[ -\frac{1}{2} x^{-3/2} \right] + \frac{d^2 y}{dz^2} \frac{dz}{dx} \frac{cB}{2} x^{-1/2}$$

Sustituyendo las relaciones anteriores en la ecuación (2. 4. 28) se cambia la variable  $x$  por  $z$  y la ecuación resultante es:

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} - \frac{4}{c^2} z^2 y = 0 \quad (2.4.33)$$

Esta ecuación es idéntica a la ecuación modificada de Bessel de orden cero ( $n=0$ ), si  $c^2=4$  o  $z = 2B\sqrt{x}$ . Por lo tanto, la solución general es:

$$Y = (T - T_\infty) = c_1 I_0(2B\sqrt{x}) + c_2 K_0(2B\sqrt{x}) \quad (2.4.34)$$

Donde:

$c_1$  y  $c_2$ : son constantes de integración

$I_0$  y  $K_0$ : función modificada de Bessel de orden cero.

Estos valores se toman del apéndice 2.4.1

$$I_0(0) = 1, \quad K_0(0) = \infty$$

Para evaluar  $c_1$  y  $c_2$  se aplican las condiciones de frontera siguientes:

Primera condición de frontera.

$$T = T_s \quad \text{para} \quad x = L$$

Segunda condición de frontera.

La temperatura de la aleta debe ser finita en cualquier parte. El extremo de la aleta ( $x=0$ ),  $K_0(0)$  tiende a infinito y por lo tanto,  $c_2$  deba ser cero para que la temperatura permanezca finita. Sustituyendo estas condiciones de frontera en la forma usual se obtiene la distribución de la temperatura y se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty} = \frac{I_0(2B\sqrt{x})}{I_0(2B\sqrt{L})} \quad (2.4.35)$$

El flujo de calor de la aleta se obtiene derivando la ecuación (2.4.35), elevando el gradiente de temperatura en la base ( $x = L$ ) y multiplicando el resultado por el área de la base, se tiene:

$$d[I_n(cz)] = I_{n+1}(cz)d(cz)$$

Para  $n = 0$

$$\frac{d[I_0(2B\sqrt{x})]}{dx} = [I_1(2B\sqrt{x})]Bx^{-1/2}$$

Por lo tanto, el flujo de calor de la aleta es:

$$q_{aleta} = KA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = b\sqrt{2hkt}(T_s - T_\infty) \frac{I_1(2B\sqrt{L})}{I_0(2B\sqrt{L})} \quad (2.4.36)$$

Donde t es el grosor.

#### 2. 4. 4 ALETA CIRCUNFERENCIAL DE ESPESOR CONSTANTE

Los cálculos son más complejos en el caso de aletas de sección transversal variables que en el caso de aletas rectas de espesor constante. Consideremos la transmisión de calor por conducción a través de aletas circulares de espesor constante, como se muestra en la figura (2.4.5). El procedimiento para analizar es el siguiente: se supone que el espesor de la aleta es insignificante con respecto a su longitud total, de tal manera que la transferencia de calor por conducción se lleva a cabo solamente en la dirección radial, la diferencia de temperaturas esta dada por  $\theta=T-T_\infty$  ( $T_f = T_\infty$  ,  $\theta_0=T_0$ ) El área normal al vector flujo de calor, se escribe:

$$A = 2\pi r b$$

y el perímetro se expresa por:

$$P = 4\pi r$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.4.24) y reemplazando x por el radio, se obtiene la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{2h}{kb}\theta = 0 \quad (2.4.37)$$

Haciendo los cambios:  $m^2 = \frac{2h}{kb}$  ,  $z=mr$  y  $\frac{1}{r} = \frac{m}{z}$  , las sustituciones

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{dz} m \quad y$$

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} = m^2 \frac{d^2\theta}{dz^2} , \quad \text{así que la ecuación (2.4.37) se convierte en:}$$

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\theta}{dz} - \theta = 0 \quad \text{Que es una ecuación de Bessel.}$$

Las condiciones de frontera son:

$$r = R_1 \quad T = T_0$$

$$r = R_2 \quad \frac{dT}{dr} = 0$$

La solución de la ecuación (2. 4. 37) se obtiene de las funciones de modificadas de Bessel:

$$\theta = C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr)$$

Las funciones  $I_0$  ,  $K_0$  tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \text{en } r=0, & \quad I_0(mr)=1 \text{ y } K_0(mr)=\infty \\ \text{en } r=\infty, & \quad I_0(mr)=\infty \text{ y } K_0(mr)=0 \end{aligned}$$

Se calcularan las constantes usando las condiciones de frontera:

$\theta_0=C_1 I_0(mR_1)+C_2 K_0(mR_1)$  para aplicar la segunda condición de frontera se requiere

diferenciar las funciones:  $\frac{dI_0(x)}{dx} = I_1(x)$  ,  $\frac{dK_0(x)}{dx} = -k_1(x)$  de donde se obtiene

$$\frac{d\theta}{dr} = C_1 m I_1(mr) - C_2 K_1(mr) = 0, \quad \text{se tiene el siguiente sistema de ecuaciones}$$

$$C_1 m I_1(mr) - C_2 K_1(mr) = 0 \quad \text{y} \quad \theta = C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr) \quad \text{de donde } C_1 \text{ y } C_2 \text{ están dadas}$$

por:

$$C_1 = \frac{K_1(mr_2)\theta_0}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr_1)}$$

$$C_2 = \frac{I_1(mr_2)\theta_0}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr_1)}$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{k_1(mr_2)I_0(mr) + I_1(mR_2)k_0(mr)}{k_1(mr_2)I_0(mr_1) + I_1(mR_2)k_0(mr_1)} \quad (2.4.38)$$

Para el flujo de calor se tiene la siguiente expresión:

$$q = -k(2\pi r_1 b) \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=r_1} = 2\pi r_1 k b m \theta \Omega \quad (2.4.39)$$

$$\text{Donde } \Omega = \frac{k_1(mR_2)I_0(mr) + I_1(mR_2)k_0(mr)}{k_1(mR_2)I_0(mR_1) + I_1(mR_2)k_0(mR_1)}$$

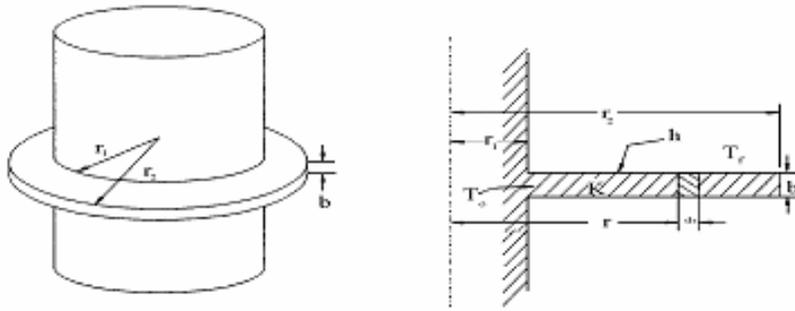


FIGURA. (2.4.5) ALETACIRCUNFERENCIAL

## 2.5 MÉTODOS DE SEPARACIÓN DE VARIABLES DE CONDICIONES DE CALOR EN ESTADO ESTABLE BIDIMENSIONAL.

En la sección anterior se analizaron problemas de conducción de calor en una dimensión en estado estable. Muchos problemas prácticos entran dentro de esta categoría, pero cuando las fronteras son irregulares o cuando la temperatura a lo largo de una frontera no es uniforme, un análisis unidimensional no es satisfactorio.

### 2.5.1 CASO BIDIMENSIONAL. PLACA RECTANGULAR SEMI-INFINITA

Considerando una placa rectangular sin generación de calor como se muestra en la figura (2.5.1.), Con límites  $x = 0$  y  $y = \infty$  se debe mantener una temperatura estable y uniforme, y el cuarto límite  $y = 0$  mantiene una distribución de temperatura permanente pero arbitraria  $T = f(x)$ . La placa se considera relativamente delgada, el gradiente de temperatura  $dT/dz$  se desprecia, y el campo de temperatura está en función de  $x$  y  $y$  únicamente, es decir  $T = T(x, y)$ .

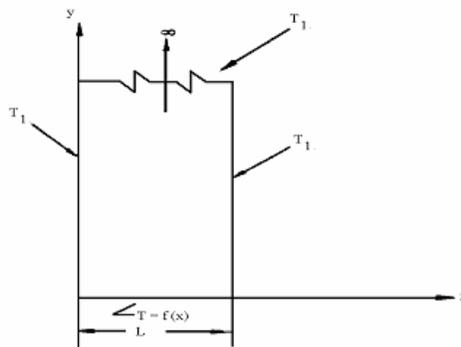


FIGURA (2.5.1) PLACA RECTANGULAR SEMI-INFINITA

Si la placa tiene una conductividad térmica uniforme y sus superficies están aisladas contra el intercambio de calor con los alrededores, la distribución de la temperatura  $T(x, y)$  debe satisfacer la ecuación diferencial parcial de Laplace para dos dimensiones:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.5.1)$$

Las condiciones de frontera que se deben satisfacer son:

$$\begin{aligned} T=0 & \quad \text{para} \quad x=0, L \\ T=0 & \quad y=\infty \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

$$Y = f(x) - T_1 = F(x) \quad y=0$$

La ecuación (2.5.1) es una ecuación lineal y homogénea en derivadas parciales. Generalmente estas ecuaciones se pueden resolver mediante el método de separación de variables, [4], [6], [7], y [19], suponiendo que la solución es un producto de la forma :

$$T = XY \quad (2.5.3)$$

Donde,  $X = X(x)$  y  $Y = Y(y)$ . Sustituyendo la ecuación (2.5.3) en la ecuación (2.5.1), se obtiene:

$$\frac{1}{x} \frac{d^2 x}{dx^2} = -\frac{1}{y} \frac{d^2 y}{dy^2} \quad (2.5.4)$$

En la ecuación (2.5.4) las variables  $x$  &  $y$  se encuentran separadas, con este resultado cada lado de esta ecuación debe ser igual a una constante:  $-\lambda^2$ . Por lo cual, se tiene las dos ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes:

$$\frac{d^2 x}{dx^2} + \lambda^2 x = 0 \quad (2.5.5)$$

y

$$\frac{d^2 y}{dy^2} - \lambda^2 y = 0 \quad (2.5.6)$$

La solución general de la ecuación (2.5.5) es de la forma, donde  $a = \pm i\lambda$  ( $i^2 = -1$ ). De acuerdo a este resultado se tiene:

$$X = c_1 e^{i\lambda x} + c_2 e^{-i\lambda x} \quad (2.5.7)$$

Utilizando las identidades, la solución general para X toma la forma siguiente:

$$X = c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x \quad (2.5.8)$$

La solución general de la ecuación (2.5.6) será:

$$Y = c_3 e^{\lambda y} + c_4 e^{-\lambda y} \quad (2.5.9)$$

Por lo tanto:

$$T = X \cdot Y = T = XY = (c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x)(c_3 e^{\lambda y} + c_4 e^{-\lambda y}) \quad (2.5.10)$$

Donde,  $c_2$ ,  $c_3$  y  $c_4$  son constantes que se deben determinar a partir de las condiciones de frontera. Para la ecuación (2.5.8) se debe de satisfacer la primera condición de frontera de la ecuación (2.5.2), cuando  $T=0$  para  $x=0$ , X se elimina cuando  $x=0$ , por lo que  $c_1=0$ . Por esta misma razón  $c_3=0$ . La solución general XY se reduce en este caso a la forma:

$$T = c e^{-\lambda y} \operatorname{sen} \lambda x \quad (2.5.11)$$

Para satisfacer la segunda condición de frontera de  $T=0$  para  $x=L$ , por lo tanto,  $\operatorname{Sen} \lambda L = 0$  o

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Para cada entero, n, existe una solución diferente y una constante de integración asociada a cada solución. Sumando estas soluciones para todo entero positivo, se tiene la siguiente expresión:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi/L)y} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.5.12)$$

La sumatoria permite la solución de una ecuación diferencial parcial lineal y homogénea. Se observa que la ecuación (2.5.12) también satisface la tercera condición de frontera para  $T=0$  en  $y=\infty$ . Los números n son conocidos como valores propios y cada solución  $T_n$  es llamada función propia. La última condición de frontera exige que  $T = F(x)$  para  $y=0$ , por lo que:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.5.13)$$

Este resultado es conocido como serie de Fourier de la función arbitraria  $F(x)$ , la cual es una serie infinita de senos. En este caso las amplitudes indeterminadas  $C_n$  están dadas por:

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \quad (2.5.14)$$

Las dos constantes de integración  $\lambda$  y  $c$  están determinadas, por lo cual, la solución final es:

$$T(x, y) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n\pi/L)y} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \int_0^L F(x') \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x'\right) dx' \quad (2.5.15)$$

Donde  $x'$  representa la variable de integración para evitar confusión con la variable independiente  $x$ .

## 2.5.2 SEMICÍRCULO SÓLIDO LARGO

Para el análisis de solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones en coordenadas cilíndricas, se considera la distribución de la temperatura  $T(r, \varphi)$  en semicírculo sólido largo limitado por la superficie  $r = r_1$ , teniendo una distribución de temperatura  $T = f(\varphi)$ , y con un diámetro  $2r_1$  manteniendo una temperatura uniforme  $T_0$ , como se muestra en la figura (2.5.2). Si en este caso, la diferencia de temperatura se define como  $T = T - T_0$ , por lo tanto,  $T(r, \varphi)$  debe satisfacer la ecuación diferencial parcial:

$$\nabla^2 T(r, \varphi) = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (2.5.16)$$

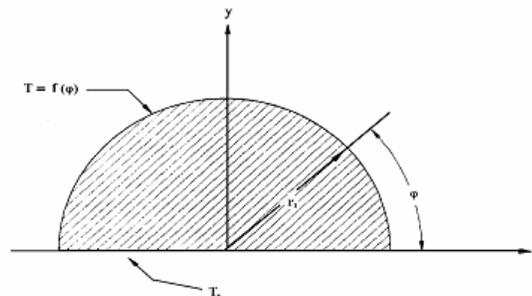


FIGURA. (2.5.2) SEMICÍRCULO SÓLIDO

Y las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} T &= 0 & r &= r & \varphi &= 0, \pi & (2.5.17) \\ T &= F(\varphi) & r &= r_1 & 0 &< \varphi < \pi \end{aligned}$$

Donde  $F(\varphi) = f(\varphi) - T_0$

Suponiendo que la solución es un producto para T en la forma  $T = R\Phi$  donde  $R = R(r)$  y  $\Phi = \Phi(\varphi)$ , la ecuación (2.5.16) se puede separar en dos ecuaciones diferenciales:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dr}{dr} - n^2 R = 0 \quad (2.5.18)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + n^2 \Phi = 0 \quad (2.5.19)$$

La solución general de la ecuación de Euler dada su forma general:

$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha x \frac{dy}{dx} + \beta y = 0$  donde  $\alpha, \beta$  son constantes reales esta ecuación tiene soluciones de la forma  $y = x^r$  así que al sustituir esta en la ecuación anterior tenemos como resultado  $r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$  está es una ecuación de segundo orden que tiene por discriminante  $D = (\alpha-1)^2 - 4\beta$  de este hecho se desprenden tres casos:

caso 1 si  $D > 0$  la solución es  $y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$

caso 2 si  $D = 0$   $y_1 = x^{r_1}$  y  $y_2 = x^{r_1} \ln x$

caso 3 si  $D < 0$  entonces  $r_1 = \lambda + i\mu$   $r_2 = \lambda - i\mu$  y la solución  $y = c_1 x^\lambda \cos(\mu \ln x) + c_2 x^\lambda \sin(\mu \ln x)$

Así que la solución de (2.5.18) esta dada por:

$$R = c_1 r^n + c_2 r^{-n} \quad (2.5.20)$$

y la solución general de la ecuación (2.5.19) esta dada por:

$$\Phi = c_3 \cos(n\varphi) + c_4 \sin(n\varphi) \quad (2.5.21)$$

De donde se tiene:

$$T(r, \varphi) = r^n (A \cos(n\varphi) + B \sin(n\varphi)) + r^{-n} (C \cos(n\varphi) + D \sin(n\varphi)) \quad (2.5.22)$$

Una solución producto  $R\Phi$  de la ecuación de Laplace, [5], [9]

Para una solución apropiada de la ecuación (2.5.22) se usan las condiciones de frontera (2.5.17) se observa que el término  $r^{-n}$  no puede existir si  $T$  permanece finita a medida que  $r$  se aproxima a cero. Por lo cual  $C = 0 = D$ , es claro que  $A = 0$ , si  $T$  desaparece para, entonces  $n = 1, 2, 3, \dots$  y  $B = B_n$ . Esto reduce la solución a:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} B_n r_1^n \sin(n\varphi) \quad 0 < \varphi < \pi \quad (2.5.24)$$

Esta ecuación finalmente satisface la segunda condición de frontera de la ecuación (2.5.17), la cual requiere que:

$$F(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n r_1^n \sin(n\varphi) \quad (2.5.25)$$

Por consiguiente  $B_n$  esta dada por:

$$B_n r_1^n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi \quad (2.5.26)$$

La solución completa se expresa por la siguiente expresión:

$$T = T_0 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{r_1} \right)^n F(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi \quad (2.5.27)$$

### 2.5.3 CILINDRO SOLIDO

Considere el cilindro sólido mostrado en la figura 2.5.3. La superficie lateral y la cara izquierda tiene una temperatura isotérmica ( $T_{\infty}$ ) mientras que la superficie de la cara derecha se mantiene a una misma temperatura ( $T_b$ ).

La ecuación de esta, esta dada por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (2.5.28.0)$$

Y donde las condiciones de frontera están dadas por:

$$T = T_{\infty} \text{ para } z=0 \quad (2.5.28.1a)$$

$$T = T_b \text{ para } z=L \quad (2.5.28.1b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \text{ para } r=0 \quad (2.5.28.1c)$$

$$T=T_{\infty} \text{ para } r=r_0 \quad (2.5.28.1d)$$

La novedad que presenta la tercera ecuación es que la condición de el flujo de calor es cero (2.5.28.1c) ¿cual es el estado que se busca para la distribución de temperatura  $T(r, z)$  sea simétrica alrededor de la línea central.

Las ordenes radiales  $r$  surgen de forma similar a las ordenes de las condiciones de frontera homogéneas.

Sea  $\theta = T-T_{\infty}$ , entonces:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad (2.5.28.2)$$

$$\theta = 0 \text{ para } z = 0 \quad (2.5.28.3a)$$

$$\theta = \theta_b \text{ para } z=L \quad (2.5.28.3b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \text{ para } r=0 \quad (2.5.28.3c)$$

$$\theta = 0 \text{ para } r=r_0 \quad (2.5.28.3d)$$

Utilizando el método de separación de variables  $\theta(r, z) = R(r) Z(z)$  en la ecuación (2.5.28.2)

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + Z'' = 0$$

Este resultado genera dos ecuaciones una para  $R(r)$  y otra para  $Z(z)$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} = -\lambda^2 \quad (2.5.28.5)$$

$$Z'' = \lambda^2 \quad (2.5.28.6)$$

Donde  $\lambda^2$  es una constante positiva. La solución general de la ecuación (2.5.28.6) esta dada por ( $X'' + \lambda^2 X = 0$  tiene soluciones de la forma  $X = C_1 \sinh(\lambda x) + C_2 \cosh(\lambda x)$  para  $\lambda^2$  positiva)

$$Z = C_3 \sinh(\lambda z) + C_4 \cosh(\lambda z) \quad (2.5.28.7)$$

La solución general para la ecuación (2.5.28.5) está dada por:

$$R = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r) \quad (2.5.28.8)$$

$J_0$   $Y_0$ , son las funciones de Bessel de orden cero, donde  $J_0$  es del primer tipo y  $Y_0$  de segundo tipo.

La figura (2.5.3') muestra que  $Y_0$  se vuelve infinito en el centro de la línea y que  $\partial J_0 / \partial r = 0$  en  $r = 0$ . Consecuentemente, las condiciones de frontera en la línea central requieren que  $C_2 = 0$  en la ecuación (2.5.28.8), la condición de frontera al final del lado izquierdo (2.5.28.3a), en el otro lado, requiere que  $C_4 = 0$  en la ecuación (2.5.28.7), combinando los resultados de las ecuaciones (2.5.28.7) y (2.5.28.8) en la expresión del producto  $\theta = R Z$ , obtenemos:

$$\theta = K \sinh(\lambda z) J_0(\lambda r) \quad (2.5.28.9)$$

En esta parte notamos que en el caso especial que  $\lambda=0$ , la solución general,  $\theta=RZ$  degenera en  $\theta_0=K(\ln|r|+A)(z+B)$ , donde  $K$ ,  $A$  y  $B$  son constantes. La condición de frontera en la línea central (2.5.28.3c) requiere que en este caso  $K = 0$ , significa que  $\theta_0=0$ . En conclusión, la contribución de  $\theta_0$  es cero para la solución final  $\theta$ , y lo cual nos permite continuar con el análisis de la ecuación (2.5.28.9), para el cual se tiene  $\lambda \neq 0$ .

La condición de frontera  $r = r_0$  en la ecuación (2.5.28.3d) proporciona los valores característicos del problema  $\theta$ :

$$J_0(\lambda r_0) = 0 \quad (2.5.28.10)$$

Con lo cual se obtiene un número infinito de valores característicos para  $\lambda_n r_0$  ( $n=1,2,\dots$ ) que satisfacen la ecuación (2.5.28.10); el primero de esos valores es  $\lambda_1 r_0 = 2.405$ . La solución  $\theta$  por consiguiente puede ser construida como una serie infinita de  $J_0$  de funciones características:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sinh(\lambda_n z) J_0(\lambda_n r) \quad (2.5.28.11)$$

El paso final es sumar hasta combinar la última condición de frontera ecuación de la ecuación (2.5.28.3b)

$$\theta_b = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sinh(\lambda_n L) J_0(\lambda_n r) \quad (2.5.28.12)$$

Utilizando las propiedades de ortogonalidad de la función  $J_0$ , y usando coordenadas cilíndricas:

$$\int_0^{r_0} r J_0(\lambda_n r) J_0(\lambda_m r) dr = 0 \quad \text{si } m \neq n \quad (2.5.29)$$

Por consiguiente, los coeficientes  $K_n$  de la serie  $\theta$  puede ser identificado cuando se multiplica ambos lados de ecuación (2.5.28.11) por  $r J_0(\lambda_m r)$  e integrando desde  $r = 0$  a  $r = r_0$ . El paso final se omite, por que estas requieren el uso seguro de identidades que existen entre las funciones de Bessel, entonces el resultado para la distribución de temperatura  $\theta(r, z)$  es:

$$\theta = 2\theta_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r) \sinh(\lambda_n z)}{\lambda_n r_0 J_1(\lambda_n r) \sinh(\lambda_n L)} \quad (2.5.30)$$

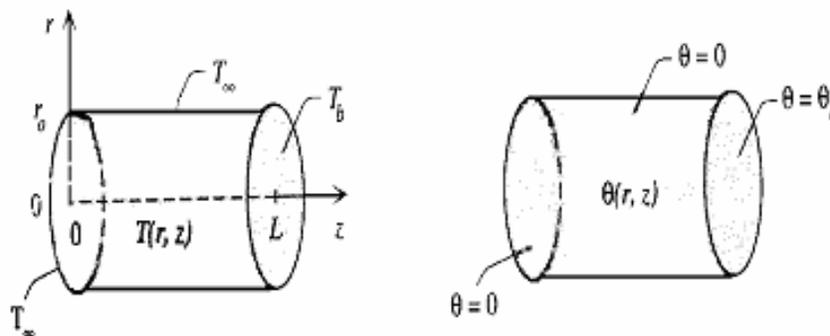


FIGURA. (2.5.3) CILINDRO SÓLIDO A UNA TEMPERATURA DIFERENTE ENTRE UNA DE LAS CARAS Y EL RESTO DE LA SUPERFICIE

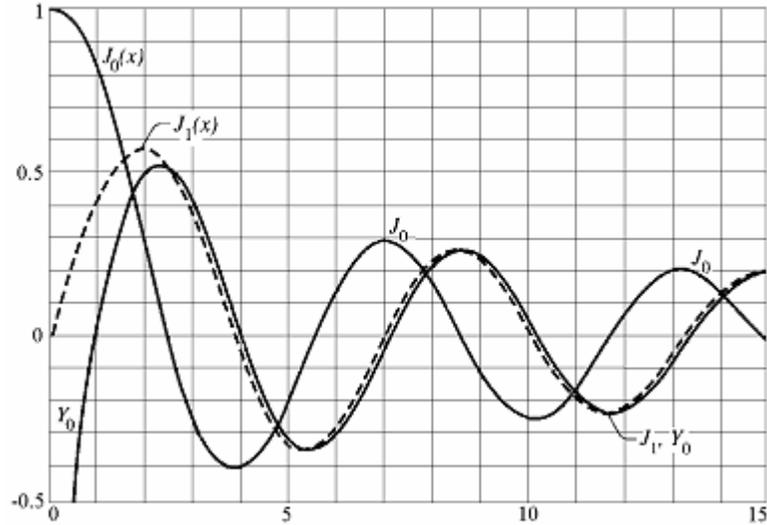


FIGURA. (2.5.3') COMPORTAMIENTO DE LA FUNCION DE BESSEL  $J_0$ ,  $Y_0$  Y  $J_1$

#### 2.5.4. PARED ESFERICA

Para una solución particular de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, cuando la temperatura en una esfera de radio  $c$  es uniforme sobre cada circunferencia horizontal,  $\theta = \theta_c$ , la ecuación se transforma a la forma bidimensional

$$r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} (rT) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0 \quad r < c; 0 < \theta < \pi \quad (2.5.31)$$

Con valores prescritos en la superficie

$$T(c, \theta) = F(\theta) \quad (2.5.32)$$

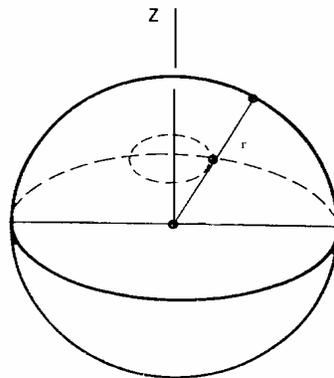


FIGURA. (2.5.4) PARED ESFERICA

Aplicando la separación de variables:

$$T(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r}{R} \frac{dR}{dr} = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} - \frac{1}{\Theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\Theta}{d\theta} \quad (2.5.33)$$

Por lo tanto, se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$r(rR)'' - \lambda R = 0, \quad r < c \quad (2.5.34)$$

y

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \lambda \Theta = 0, \quad 0 < \theta < \pi \quad (2.5.35)$$

ó con la sustitución;  $x = \cos \theta$

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d\Theta}{d\theta} \right] = 0, \quad -1 < x < 1$$

$\lambda$  : El parámetro de separación puede ser uno de los eigenvalores  $\lambda = n(n+1)$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, 4$

La solución general de la ecuación de Euler (2.5.34) se determina por las raíces de la ecuación cuadrática  $a^2 + a - \lambda = 0$ , donde  $a_i = \frac{-1}{2} \pm \left( \frac{1}{4} + \lambda \right)^{\frac{1}{2}}$  para  $i=1,2$  entonces la

solución esta dada como:

$$R = c_1 R^{a_1} + c_2 R^{a_2} \quad (2.5.36)$$

Donde:

$$a_1 = \frac{-1}{2} + \left( \frac{1}{4} + \lambda \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$a_2 = \frac{-1}{2} - \left( \frac{1}{4} + \lambda \right)^{\frac{1}{2}}$$

Si  $a_1=n$  entonces podemos expresar a  $a_2=-(n+1)$  así la solución general de la ecuación (2.5.35) es entonces:

$$R(r, n) = c_1 R^n + c_2 R^{-(n+1)} \quad (2.5.37)$$

En vista del requerimiento de que R permanezca finita en  $r = 0$ , entonces  $R = C_1 r^n$ .

La segunda ecuación diferencial (2.5.35) es una ecuación de Legendre

$$\lambda = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5.38)$$

y la solución es un polinomio de Legendre

$$\Theta = P_n(x), \quad \Theta(\theta) = P_n(\cos \theta) \quad (2.5.39)$$

y satisface las condiciones de frontera.

$$T(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n P_n(\cos \theta), \quad r \leq c \quad (2.5.40)$$

Con las constantes  $B_n$  determinadas por

$$F(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n c^n P_n(\cos \theta), \quad 0 < \theta < \pi \quad (2.5.41)$$

Usando las propiedades de ortogonalización de los polinomios de Legendre, nos lleva a la expresión para los coeficientes en la ecuación anterior con la que usamos las sustituciones

$$\theta = \arccos x \quad \text{y} \quad A_n = B_n c^n$$

entonces la ecuación se convierte en

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x), \quad -1 < x < 1, \quad (2.5.42)$$

donde

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\delta \quad (2.5.43)$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi F(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

de modo que la distribución de temperatura se da por

$$T(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{c}\right)^n P_n(\cos \theta), \quad r \leq c \quad (2.5.44)$$

## 2.6 EL METODO DE LA TRANSFORMADA DE KIRCHHOFF EN EL SOLUCION DE LA ECUACION DEL CALOR NO LINEAL

En esta sección se plantea el problema de resolver la ecuación del calor no lineal cuando la no linealidad de la ecuación viene del hecho de que la conductividad del material es función de la temperatura como es en el caso real. Se presenta un método el cual consiste en modificar la función de la conductividad mediante la transformada de Kirchhoff que permitirá reducir la ecuación a una forma más sencilla la cual se resolverá sin el mayor problema. Esta manera de transformar los términos no lineales de una ecuación diferencial con el fin de reducirla a una ecuación diferencial lineal se le conoce como la transformación de Kirchhoff y es precisamente de lo que trata este trabajo. Esto se ilustra aplicándolo a una barra de longitud  $0 \leq x \leq L = 10\text{cm}$ , que se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme  $T(0, t) = 0^\circ\text{C}$  para tiempo  $t > 0$ .

Mientras que las condiciones de frontera.

$T(0, t) = 0^\circ\text{C}$  y para  $x = L$ ;  $T(L, 0) = 100^\circ\text{C}$ .

Donde se supone que la conductividad térmica depende de la temperatura linealmente:

$$K(T) = K_0(1 + \beta T)$$

Planteamiento General

Se sabe que la ecuación que gobierna el fenómeno de la transferencia de calor, para es:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(K(T)\nabla T) + g \quad (2.6.1)$$

donde  $\rho, C_p, K$  son funciones de la temperatura, y el término fuente de generación de calor es independiente de la temperatura  $g = g(\vec{r}, t)$ .

A fin de resolver este problema, procedemos de la siguiente manera. Se define la transformación  $K(T)$  como:

$$U = U(T) = \int_0^T \frac{K(T')}{K_0} dT' \quad (2.6.2)$$

$T = T(\vec{r}, t)$ , donde

$K_0$  es el valor de la conductividad térmica para  $t = 0$ . (2.6.2) es llamada la transformación de Kirchhoff. Donde  $K(T)$  es función de la temperatura entonces (2.6.1) se puede escribir como:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = K(T) \nabla^2 T + \nabla K(T) \nabla T + g \quad (2.6.3)$$

de donde se obtiene.

$$\nabla K(T) = \frac{dK(T)}{dT} \nabla T \quad (2.6.4)$$

Sustituyendo (4) en (1) y resulta:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = K(T) \nabla^2 T + \frac{dK(T)}{dT} (\nabla T)^2 + g \quad (2.6.5)$$

Con el fin de simplificar (2.6.5) utilizando (2.6.2) y (2.6.4) para la función U(T) a partir de K(T) procedemos como sigue, de la regla de Leibnitz se tiene

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{f(t)}^{g(t)} F(\xi, t) d\xi \right) = \int_{f(t)}^{g(t)} \frac{\partial F(\xi, t)}{\partial t} d\xi + g'(t) F(g(t), t) - f'(t) F(f(t), t) \quad (2.6.6)$$

Aplicándolo a (2.6.2) se tiene

$$\frac{d}{dt} U(T) = \frac{d}{dt} \left( \int_0^T \frac{K(T')}{K_o} dT' \right) = \frac{1}{K_o} \int_0^T \frac{\partial K(T')}{\partial t} dT' + \frac{K(T)}{K_o} \frac{dT}{dt} - (0) \frac{K(0)}{K_o}$$

donde  $\frac{dK(T)}{dt} = 0$  luego

$$\frac{\partial U(T)}{\partial t} = \frac{K(T)}{K_o} \frac{dT}{dt} \quad (2.6.6a)$$

y del teorema fundamental del calculo integral obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_0^T \frac{K(T')}{K_o} dT' \right) = \frac{K(T)}{K_o}$$

resultando

$$\nabla U(T) = \frac{dU(T)}{dT} \nabla T = \frac{K(T)}{K_o} \nabla T \quad (2.6.6b)$$

$$\nabla^2 U(T) = \nabla \left[ \frac{K(T)}{K_o} \nabla T \right] = \frac{1}{K_o} [\nabla K(T) \nabla T + K(T) \nabla^2 T]$$

luego de (2.6.4) se tiene

$$\begin{aligned} \nabla^2 U(T) &= \frac{1}{K_o} \left[ \frac{dK(T)}{dT} \nabla T \nabla T + K(T) \nabla^2 T \right] \\ \nabla^2 U(T) &= \frac{1}{K_o} \left[ \frac{dK(T)}{dT} (\nabla T)^2 + K(T) \nabla^2 T \right] \end{aligned} \quad (2.6.6c)$$

y sustituyendo (2.6.6 a) y (2.6.6c) en (2.6.5) obtenemos

$$\rho C_p \frac{K_o}{K(T)} \frac{\partial U(T)}{\partial t} = K_o \nabla^2 U(T) + g$$

$$\frac{\rho C_p}{K(T)} \frac{\partial U(T)}{\partial t} = \nabla^2 U(T) + \frac{g}{K_o}$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial U(T)}{\partial t} = \nabla^2 U(T) + \frac{g}{K_o}$$

$\alpha = \frac{K(T)}{\rho C_p}$  quedando finalmente

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial U(T)}{\partial t} = \alpha \nabla^2 U(T) + \frac{\alpha}{K_o} g \quad (2.6.7)$$

donde la difusividad térmica  $\alpha$ , es una función de la temperatura. (2.6.7) es una ecuación más simple en su estructura, ya que se supone que la variación de la difusividad térmica, con respecto a la temperatura, es despreciable por lo tanto es una ecuación casi lineal que podrá resolverse sin mayor problema.

Por ejemplo si  $\alpha = cte$ ;  $\alpha = 10$ , con  $g = 0$  tenemos el problema en forma normal, y utilizando el método de Kirzhhoff se tiene:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq 10 \quad (2.6.8)$$

bajo condiciones de frontera

$$T(0,t) = T_o = 0^\circ C \quad t > 0 \quad (2.6.8 a)$$

$$T(10,t) = T_1 = 100^\circ C \quad t > 0 \quad (2.6.8 b)$$

y condición inicial

$$T(x,0) = 0^\circ C \quad \text{para } t = 0 \quad (2.6.8c)$$

Por otro lado resolviendo (2.6.8) por el método de separación de variables separables tenemos:

$$T(x,t) = 100 \left[ \frac{x}{10} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{10} \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{10}} \right] \quad (2.6.9)$$

Para el segundo caso cuando la  $g=0$  y  $\alpha$  la difusividad térmica varia linealmente con respecto a la temperatura (2.6.7) se tiene:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq 10 \quad (2.6.10)$$

bajo condiciones de frontera

$$U(0,t) = U_o = 0^\circ C \quad (2.6.10 a)$$

$$U(L,t) = U_1 = 100 + \frac{\beta}{2} (100)^2 = 100(1 + 50\beta) \quad (2.6.10 b)$$

y condición inicial

$$U(x,0) = 0^\circ C \quad (2.6.10 c)$$

cuya solución es:

$$U(x,t) = 100 \left[ \frac{x}{10} (1 + 50\beta) + 2(1 + 50\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{10} \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{10}} \right] \quad (2.6.11)$$

entonces la transformación de  $U(x,t)$  a  $T(x,t)$  vendrá dada de la siguiente forma:

$$T(x,t) = \frac{1}{\beta} \left[ \sqrt{1 + 2\beta U(x,t)} - 1 \right] \quad (2.6.12)$$

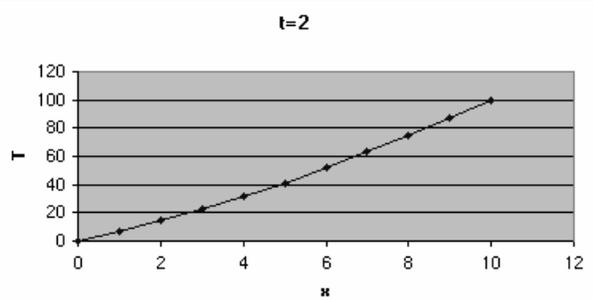
$$T(x,t) = \frac{1}{\beta} \left[ \sqrt{1 + 200\beta \left[ \frac{x}{10} (1 + 50\beta) + 2(1 + 50\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{10} \right) e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{10}} - 1 \right]} \right] \quad (2.6.12)$$

Para los casos en que los valores de  $\alpha=10$ ,  $\beta=0.1$ , son substituidos en la (2.6.11) se tiene la expresi3n de la temperatura como:

$$T(x,t) = 100 \left[ \frac{x}{10} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{10} \right) e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{10}} \right] \quad (2.6.13)$$

**Tabla 2.6.1.**

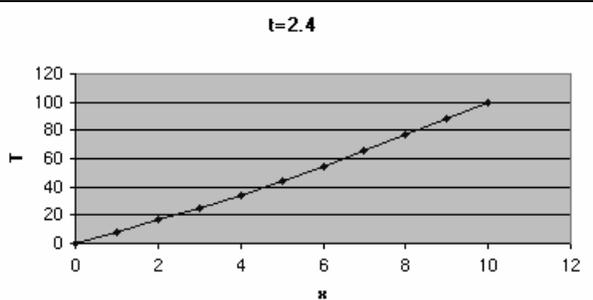
0	0
1	7,2742
2	14,8133
3	22,8569
4	31,5965
5	41,1567
6	51,5826
7	62,8344
8	74,7908
9	87,2604
10	100



**Gráfico 2.6.1.**

**Tabla 2.6.2.**

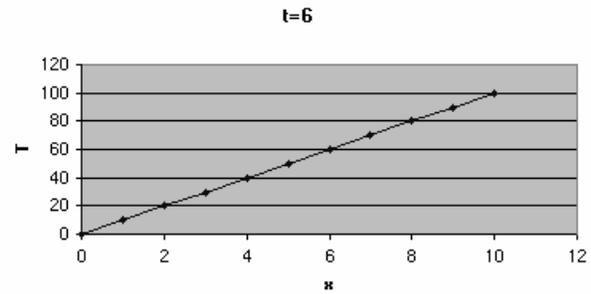
0	0
1	8,1601
2	16,4998
3	25,1815
4	34,3343
5	44,0412
6	54,3314
7	65,1769
8	76,4952
9	88,1572
10	100



**Tabla 2.6.3.**

**Tabla 2.6.3.**

0	0
1	9,9473
2	19,8997
3	29,8619
4	39,8377
5	49,8294
6	59,8377
7	69,862
8	79,8997
9	89,9473
10	100

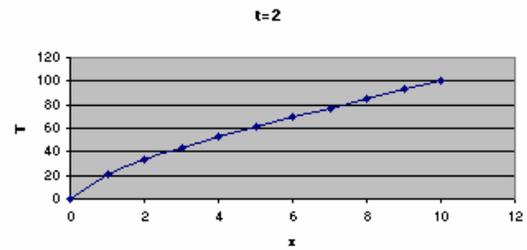
**Gráfica 2.6.3.**

Para el caso cuando la conductividad térmica es variable se tiene de la serie (2.6.12) hasta los primeros tres términos:

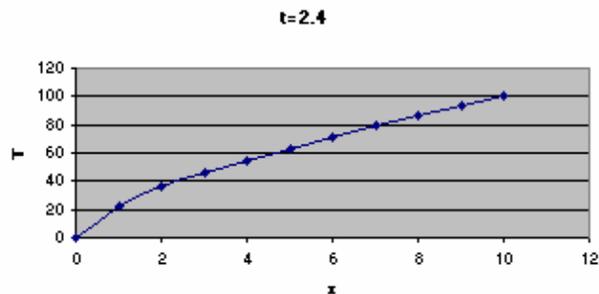
$$T(x,t) = \frac{1}{\beta} \left[ 1 + 200\beta \left[ \frac{x}{10}(1+50\beta) + 2(1+50\beta) \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{10}\right) e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{10}} - 1 \right] \quad (2.6.14)$$

**Tabla 2.6.4.**

0	0
1	21.1915
2	33.3313
3	43.3182
4	52.3826
5	60.9846
6	69.309
7	77.4078
8	85.2623
9	92.8166
10	100

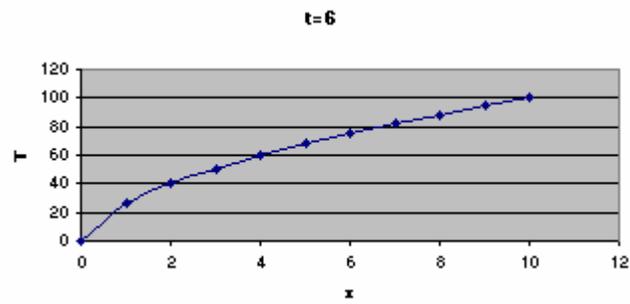
**Gráfica 2.6.4.****Tabla 2.6.5.**

0	0
1	22.8513
2	35.6068
3	45.8729
4	54.9624
5	63.3822
6	71.362
7	79.0013
8	86.3298
9	93.3386
10	100

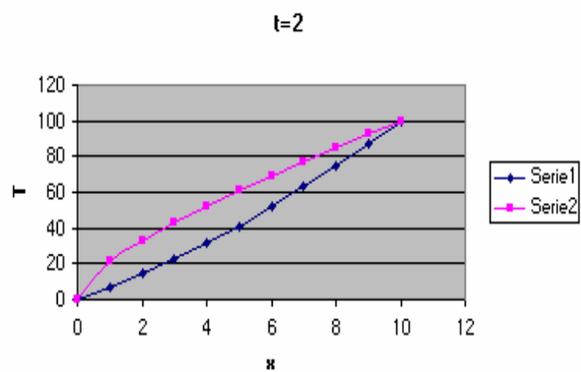
**Gráfica 2.6.5.**

**Tabla 2.6. 6.**

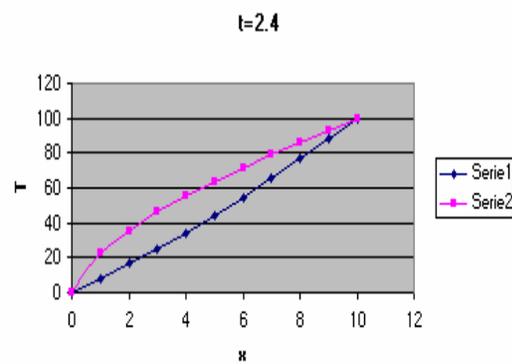
0	0
1	25.9677
2	39.8795
3	50.6913
4	59.8608
5	67.9713
6	75.326
7	82.1056
8	88.4275
9	94.3728
10	100

**Tabla 2.6.7.**

x	ECUACION1	ECUACION2
0	0	0
1	7,2742	21,1915
2	14,8133	33,3313
3	22,8569	43,3182
4	31,5965	52,3826
5	41,1567	60,9846
6	51,5826	69,309
7	62,8344	77,4078
8	74,7908	85,2623
9	87,2604	92,8166
10	100	100

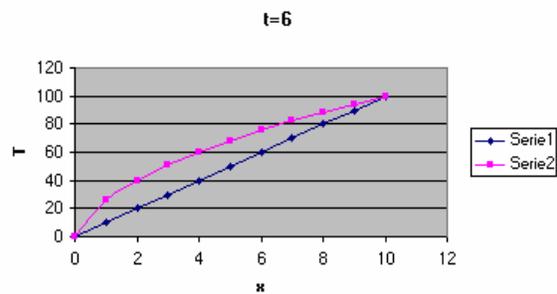
**Tabla 2.6.8.**

x	ECUACION1	ECUACION2
0	0	0
1	8,1601	22,8513
2	16,4998	35,6068
3	25,1815	45,8729
4	34,3343	54,9624
5	44,0412	63,3822
6	54,3314	71,362
7	65,1769	79,0013
8	76,4952	86,3298
9	88,1572	93,3386
10	100	100



**Tabla 2.6.9.**

x	ECUACION1	ECUACION2
0	0	0
1	9,9473	25,9677
2	19,8997	39,8795
3	29,8619	50,6913
4	39,8377	59,8608
5	49,8294	67,9713
6	59,8377	75,326
7	69,862	82,1056
8	79,8997	88,4275
9	89,9473	94,3728
10	100	100

**Grafica 2.6. 9.**

## CAPITULO 3

### SOLUCIONES ANALITICAS: METODOS ANALITICOS, METODOS VARIACIONALES.

#### 3.1 METODOS ANALITICOS APROXIMADOS

Varios métodos aproximados de análisis se han desarrollado para resolver problemas de conducción de calor. En esta sección se presenta el método integral, [9] la formulación variacional que conduce el método de Rayleigh-Ritz [25], Galerkin [57] y el método de Kantorovich [8]. La precisión de una solución aproximada no se puede determinar a menos que los resultados sean comparados con la solución exacta.

##### 3.1.1 METODO INTEGRAL

La aplicación del método integral para la solución de ecuaciones diferenciales parciales es especialmente notable en el trabajo de Von Kármán y Pohlhausen [5] quienes aplicaron el método para el análisis aproximado de capa límite, momento y ecuaciones de energía de la mecánica de fluidos. Así mismo, Landahl [9], [15] lo utilizó en el campo de la biofísica para resolver la ecuación de difusión.

El método es simple, directo y fácil de aplicar a problemas de conducción de calor con valores en la frontera lineales y no lineales. En esta sección se presentan los conceptos básicos relacionados con este método para resolver problemas simples de conducción de calor para sistemas semi-infinitos. Este método se puede aplicar a la solución de problemas estables y transitorios.

A continuación se resumen los pasos básicos en el análisis del método integral a la solución de problemas de conducción de calor en una dimensión en un medio semi-infinito sujeto a condiciones iniciales y de frontera sin generación de calor interna.

1. - La ecuación diferencial de conducción de calor se integra sobre una distancia  $\delta(t)$ , llamada **película térmica** (La distancia desde la pared en que la temperatura todavía está afectada por las condiciones de frontera se denomina  $\delta$ , la " distancia de penetración "L , un requerimiento en L es que  $L > \delta$  ) , para eliminar de la ecuación diferencial la derivada con respecto al tiempo. La película térmica se define como la distancia en la cual ya no existe flujo de calor. Por lo tanto, la distribución de la temperatura inicial permanece sin afectar a  $\delta(t)$ . La ecuación resultante se conoce como la ecuación integral de energía o como balance integral de calor.

- 2.- Se selecciona un perfil apropiado para la distribución de la temperatura sobre la película térmica. Para este propósito se prefiere generalmente un perfil polinomio, en base a las experiencias no se tiene un mejoramiento significativo en la precisión de la solución en la selección de un polinomio mayor de cuarto grado. Los coeficientes del polinomio se determinan en términos del espesor de la película térmica  $\delta(t)$  y de las condiciones de frontera.

3.- Cuando se obtienen el perfil de temperatura se sustituyen en la ecuación integral de energía y se desarrollan las operaciones indicadas, finalmente se obtiene una ecuación diferencial ordinaria para la película térmica  $\delta(t)$ , siendo el tiempo una variable independiente. La solución de esta ecuación diferencial sujeta a condiciones iniciales especificadas como una función del tiempo.

4.- Una vez determinada  $\delta(t)$  del paso 3, la distribución de la temperatura  $T(x, t)$  se conoce como una función del tiempo y de la posición en un medio.

Para ilustrar la aplicación anterior, se considera un problema de conducción de calor transitorio en un medio semi-infinito para  $x > 0$ , una temperatura inicial  $T_i$  y para un tiempo  $t > 0$  la superficie de frontera permanece a una temperatura constante  $T_0$  como se ilustra en la figura (3.1.1.1). La formalicen matemática de este problema esta dada como:

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad \text{En } x > 0, \quad t > 0 \quad (3.1.1.1)$$

$$T(x,t) = T_0 \quad \text{Para } x = 0, \quad t > 0 \quad (3.1.1.2)$$

$$T(x,t) = T_i \quad t = 0, \quad x \geq 0 \quad (3.1.1.3)$$

Este problema se resuelve por el método integral.

1. Primero se integra la ecuación (3.1.1.1) con respecto a la variable  $x$  desde  $x = 0$  a  $x = \delta(t)$ :

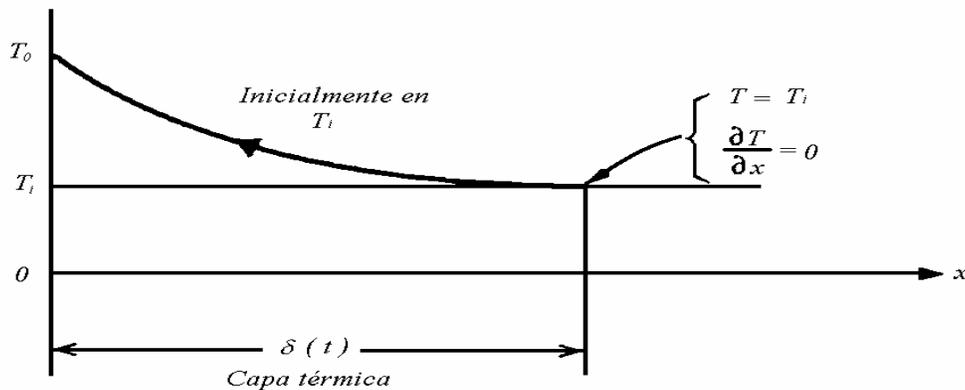


FIGURA. (3.1.1.1) DEFINICIÓN DE LA CAPA TERIMCA

En este tipo de integración usaremos el teorema fundamental para integral de línea que dice que sea  $f(x, y)$  una función en una región abierta que contiene a los puntos  $A(x_0, y_0)$ , y  $B(x_1, y_1)$  si  $f(x, y) = \nabla\phi(x, y)$  en los puntos de esta región entonces para cualquier curva suave por partes,  $C$ , que empiece en  $A$  y termine en  $B$ , y que este por completa en la región  $\int_C f(x, y) dr = \phi(x_1, y_1) - \phi(x_0, y_0)$ . También usaremos la siguiente identidad que relaciona la derivada bajo el operador de integración:

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_{a(x)}^{b(x)} F(x, m) dm \right] = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial F(x, m)}{\partial x} dm + F(x, b(x)) \frac{db(x)}{dx} - F(x, a(x)) \frac{da(x)}{dx}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\delta(t)} - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{\alpha} \int_{x=0}^{\delta(t)} \frac{\partial T}{\partial t} dx \quad (3.1.1.4)$$

La integral del lado derecho cuando se realiza usando las reglas de diferenciación bajo la integración usando

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{x=0}^{x=\delta(t)} T(x, t) dx \right] = \int_{x=0}^{x=\delta(t)} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} dx + T(x, \delta(t)) \frac{d\delta(t)}{dt} - T(x, 0) \frac{dx}{dt} \text{ Pero } dx/dt = 0: \text{ así}$$

se tiene como resultado:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\delta} - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{d}{dt} \left( \int_{x=0}^{\delta(t)} T dx \right) - T \Big|_{x=\delta} \frac{d\delta}{dt} \right] \quad (3.1.1.5)$$

Por la definición de la capa térmica como se ilustra en la figura (3.1.1.1), se obtienen las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\delta} = 0 \quad \text{y} \quad T_{x=\delta} = T_i \quad (3.1.1.6)$$

Por conveniencia en el análisis se define:

$$\theta = \int_{x=0}^{\delta(t)} T(x, t) dx \quad (3.1.1.7)$$

Introduciendo los valores de las ecuaciones (3.1.1.6) y (3.1.1.7) en la ecuación (3.1.1.5) se obtiene:

$$-\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{d}{dt}(\theta - T_i \delta) \quad (3.1.1.8)$$

Esta ecuación se conoce como la **ecuación integral de la energía** [ 7 ] , [ 8 ]

2. Se propone una solución polinomial cúbico para  $T(x, t)$  en la forma:

$$T(x, t) = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad (3.1.1.9)$$

$$\text{en} \quad 0 \leq x \leq \delta(t)$$

Donde los coeficientes están en función del tiempo.

Para determinar estos cuatro coeficientes en términos de  $\delta(t)$  son necesarias cuatro condiciones. Tres de estas condiciones son las condiciones de frontera para  $x = 0$  y para la capa térmica  $x = \delta(t)$ , como:

$$(1) T|_{x=0} = T_0, \quad (2) T|_{x=\delta} = T_i, \quad (3) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\delta} = 0 \quad (3.1.1.10)$$

Evaluando de (3.1.10) en la ecuación (3.1.9)

$$T(x, t)|_{x=0} = a + b(0) + c(0)^2 + d(0)^3 = T_0 \quad \text{de donde } a = T_0 \quad (i)$$

Evaluando de (3.1.10) en la ecuación (3.1.9)

$$T(x, t)|_{x=\delta} = a + b\delta + c\delta^2 + d\delta^3 = T_i \quad (ii)$$

evaluando de (3.6.10) en la ecuación (3.1.9)

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\delta} = (b + 2cx + 3dx^2) \Big|_{x=\delta} = b + 2c\delta + 3d\delta^2 = 0 \quad (iii)$$

Las cuatro condiciones pueden ser derivadas evaluando la ecuación diferencial para  $x = 0$  y considerando  $T = T_0 = \text{constante}$ , por lo tanto, la derivada de la temperatura con respecto al tiempo se elimina en  $x = 0$  y se obtiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.1.1.11)$$

Evaluando (3.1.1.11) en la ecuación (3.1.1.9)

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=\delta} = (2c+6d x)|_{x=0} = 0 \quad \text{por lo tanto } 2c=0 \text{ de donde } c=0 \quad (\text{iv})$$

La cuarta condición se puede obtener evaluando la ecuación diferencial para  $x = \delta(t)$  y considerando que  $T = T_i = \text{cte}$  para  $x = \delta$ .

Se forma ahora con (i), (ii), (iii), y (iv) un sistema de ecuaciones:

- 1)  $a = T_0$
- 2)  $c = 0$
- 3)  $a + b\delta + d\delta^3 = T_i$
- 4)  $b + 3d\delta = 0$

Donde resolviendo este sistema de ecuaciones para a, b, c, y d se tiene:

$$d = -\frac{1}{2} \left( \frac{T_i - T_0}{\delta^3} \right), \quad b = \frac{2}{3} \left( \frac{T_i - T_0}{\delta} \right), \quad \text{al sustituir estos valores en (3.1.1.9) tenemos:}$$

$$T(x,t) = T_0 + \frac{3}{2} \left( \frac{T_i - T_0}{\delta} \right) x + (0)c - \frac{1}{2} \left( \frac{T_i - T_0}{\delta^3} \right) x^3 \quad \text{restando } T_i \text{ a los dos miembros}$$

$$T(x,t) - T_i = (T_0 - T_i) + \frac{3}{2} (T_i - T_0) \left( \frac{x}{\delta} \right) - \frac{1}{2} (T_i - T_0) \left( \frac{x}{\delta} \right)^3 \quad \text{cambia a los demás términos por}$$

$(T_0 - T_i)$  y dividiendo por este término a toda la ecuación:

$$\frac{T(x,t) - T_i}{T_0 - T_i} = 1 - \frac{3}{2} \left( \frac{x}{\delta} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\delta} \right)^3$$

Así la expresión para el perfil de la temperatura está dado por la siguiente forma:

$$\frac{T(x,t)}{T_0 - T_i} = 1 - \frac{3}{2} \frac{x}{\delta} + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\delta} \right)^3 \quad (3.1.1.12)$$

3. Cuando el perfil de la temperatura (3.1.1.12) se sustituye en la ecuación integral de la energía (3.1.1.8), se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria para  $\delta(t)$ :

$$4\alpha = \delta \frac{d\delta}{dt} \quad \text{para } t > 0 \quad (3.1.1.13)$$

Sujeto a:

$$\delta = 0 \quad \text{para } t = 0 \quad (3.1.1.14)$$

La solución de las ecuaciones (usando el método de variables separables) (3.1. 1. 13) y (3.1. 1. 14) esta dado por:

$$\delta (t) = \sqrt{8\alpha t} \quad (3.1.1.15)$$

4. Conociendo  $\delta (t)$ , la distribución de la temperatura  $T (x, t)$  se determina de acuerdo a la ecuación (3. 1. 12) y se obtiene:

$$\frac{T(x,t)-T_1}{T_0-T_1} = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{\delta}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\delta}\right)^3 \quad (3.1.1.16)$$

$$\text{Donde } \delta (t) = \sqrt{8\alpha t} \quad (3.1.1.17)$$

## SOLUCION CON OTROS PERFILES

En el análisis anterior se usa una representación cúbica polinomial para  $T (x, t)$ , aplicando la condición  $x = 0$  para obtener la cuarta condición. Si se utiliza la condición  $T = T_1 = \text{constante}$  para  $x = \delta$  la cuarta condición se deriva de la ecuación (3.1. 1. 11), como:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{x=\delta} = 0 \quad (3.1.1.11)'$$

Sí las ecuaciones (3.1. 1. 10) y (3.1. 1. 11) se sustituyen junto con la condición (3. 1.1. 11)' en la ecuación (3.1. 1. 9), el problema se resuelve por el procedimiento discutido anteriormente, el perfil de temperatura resultante esta dado por:

$$\frac{T(x,t)-T_1}{T_0-T_1} = \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^3 \quad (3.1.1.18)$$

$$\text{Donde } \delta = \sqrt{24\alpha t}$$

Si se usa una representación polinomial de cuarto grado para  $T (x, t)$ , los cinco coeficientes resultantes se determinan de las cinco condiciones dadas y se resuelven de manera similar, el perfil de temperatura, para este caso se representa por:

$$\frac{T(x,t)-T_1}{T_0-T_1} = 1 - 2\left(\frac{x}{\delta}\right) + 2\left(\frac{x}{\delta}\right)^3 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^4 \quad (3.1.1.19)$$

Donde  $\delta(t) = \sqrt{\frac{40}{3}\alpha t}$

Comparación con la solución exacta.

Tres diferentes aproximaciones a la solución, (3.1.1.12), (3.1.1.18), (3.1.1.19).

Otra solución aproximada se puede obtener de una representación polinomial de segundo grado. La pregunta con respecto a estas soluciones aproximadas si son más precisas, no puede ser contestada hasta que las soluciones se comparan con la solución exacta del mismo problema, expresada por:

$$\frac{T(x,t)-T_i}{T_0-T_i} = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right) \quad (3.1.1.20)$$

Donde la función error tiene las siguientes propiedades:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-B^2} dB \quad \operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-B^2} dB = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

$$\operatorname{erf}(0) = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{erf}(\infty) = 1 \quad \frac{d}{dx} [\operatorname{erf}(x)]_{x=0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

Figura (3.1.1.2) muestra la comparación de estas aproximaciones a la distribución de temperaturas con la solución exacta. La concordancia es mejor para valores pequeños del parámetro  $\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$ .

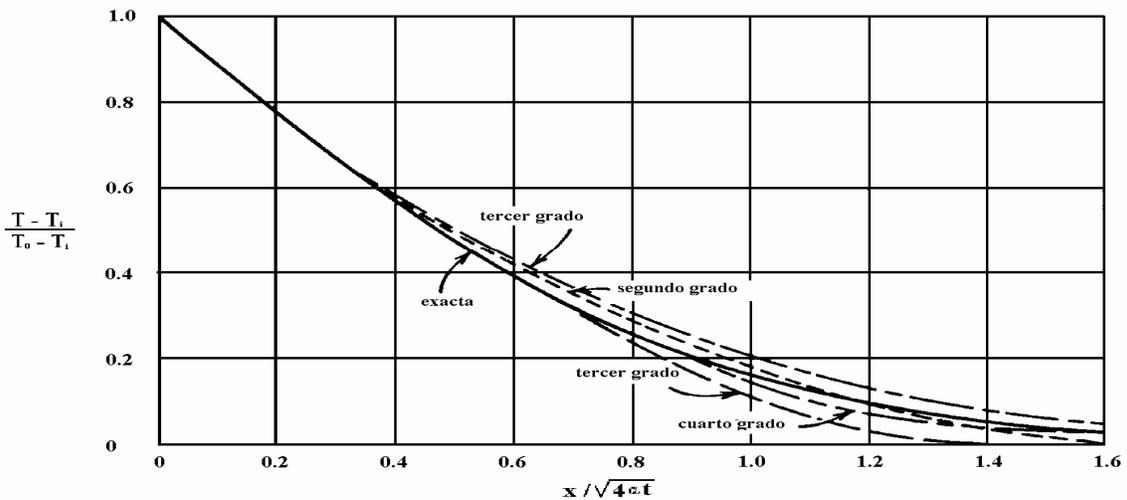


FIGURA (3.1.1.2) COMPARACIÓN DE LA SOLUCION EXACTA Y LA SOLUCION APROXIMADA PARA UNA REGION SEMI-INFINITA

Tabla (3.1.1.1) involucra el error en el flujo de calor en la superficie.

perfil de temperatura exacta	C definida por eq. (3.1.1.21)	porcentaje de error
	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0.565$	0
Aproximación cúbica (eq.3.5.16)	$\frac{3}{2\sqrt{8}} = 0.530$	6
Aproximación cúbica (eq.3.6.18)	$\frac{3}{\sqrt{24}} = 0.612$	8
Aproximación de cuarto grado (eq. 3.6.19)	$\frac{2}{\sqrt{\frac{40}{3}}} = 0.548$	3

La aproximación polinomial de cuarto grado se aproxima mejor a la solución exacta. El polinomial cúbico para la condición  $x = 0$  se aproxima mejor a la solución exacta que la condición  $x = \delta$ .

El flujo de calor en la superficie de frontera  $x = 0$  es una cantidad de interés práctico y para los diferentes perfiles de Temperatura considerados anteriormente se puede expresar en la forma:

$$q(t) = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{k(T_0 - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}} = C \frac{k(T_0 - T_i)}{\sqrt{\alpha t}} \quad (3.1.1.21)$$

Donde  $\frac{d}{dt} \left[ \int_{x=0}^{x=\delta(t)} F(x,t) dx \right] = \int_{x=0}^{x=\delta(t)} \frac{\partial F(x,t)}{\partial t} dx + F(x,\delta(t)) \frac{d\delta(t)}{dt} - F(x,0) \frac{dx}{dt}$  usando esta propiedad de la derivada sobre la integración tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} T(x,t) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x=0}^{\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}} e^{-m^2} \frac{\partial}{\partial x} dm + e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right)^2} \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right)}{dx} \Big|_{x=0} - e^{-\left(\frac{0}{\sqrt{4\alpha t}}\right)^2} \frac{d(0)}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{4\alpha t}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\alpha t}} \end{aligned}$$

De este resultado se llega al resultado de la ecuación (3.1.1.21)

La tabla (3.1.1.1) da los valores de la constante C calculada en la solución exacta y la solución aproximada. La aproximación polinomial de cuarto grado representa el flujo de calor con un error aproximado del 3% el cual es aceptable para la mayoría de aplicaciones en ingeniería.

### 3.2 CALCULO VARIACIONAL

El problema principal en el cálculo variacional es encontrar los valores extremales de una funcional. Dado, por ejemplo, una función de variable independiente  $y = y(x)$ , la condición necesaria para la existencia de valores extremales de esta funcional es que  $dy/dx = 0$ . La condición suficiente para que la funcional tenga un mínimo o un máximo es  $d^2y/dx^2 > 0$  o  $d^2y/dx^2 < 0$  respectivamente, en el punto donde  $dy/dx = 0$ .

En esta sección se presentan problemas clásicos de cálculo variacional los cuales permiten la interpretación física de los límites dados, de la figura (3.2.1) se determina la ecuación de las curvas uniendo dos puntos.

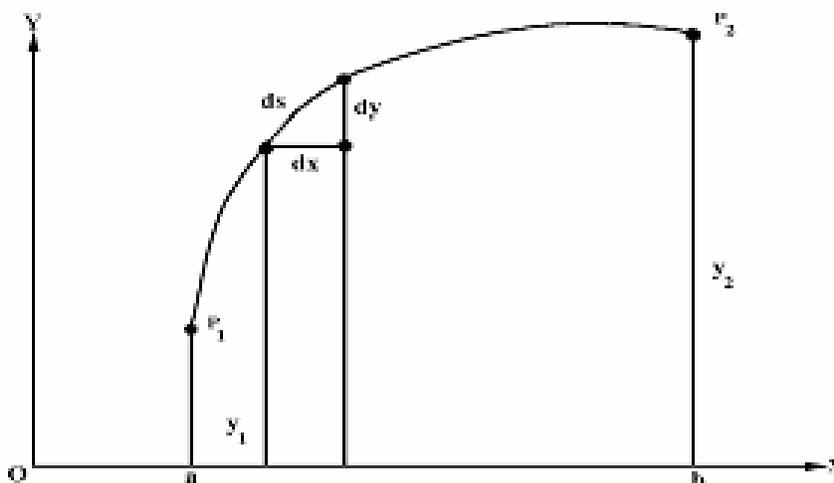


FIGURA. (3.2.1) INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LOS LÍMITES DADOS

El arco diferencial de una curva  $y = y(x)$  se obtiene por:

$$ds = \left[ (dx)^2 + (dy)^2 \right]^{1/2} \quad (3.2.1)$$

La cual se puede arreglar como:

$$ds = (1 + y'^2)^{1/2} \quad (3.2.2)$$

La longitud total de esta curva es:

$$S = \int_a^b (1 + y'^2)^{1/2} dx \quad (3.2.3)$$

Si se desea determinar la curva que pasa por los puntos  $y(a)$  y  $y(b)$ .

Para la solución de este problema, se puede plantear en forma general y determinar el valor mínimo de  $I(x, y, y')$

$$I(x, y, y') = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (3.2.4)$$

donde  $F(x, y, y')$  es una funcional conocida del problema

$$F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$$

Mientras que  $I$  es una función desconocida que se determinará igual que la integral dada. Una función cuyas variables son a la vez funciones, se dice que es una funcional. Así la función (3.2.4) es una funcional. Se desea determinar que la curva  $y(x)$ ,  $I(x, y, y')$  sea un mínimo.

Así, si  $y(x)$  minimiza esta funcional cualquier otra función en la vecindad de  $y(x)$  podrá ser representada por la forma

$$\hat{y} = y(x) + \varepsilon \eta(x) \quad (3.2.4')$$

Donde  $\eta(x)$  es cualquier función continua tal que  $\eta'(x)$  sea continua y  $\eta(a = x_1) = \eta(b = x_2) = 0$  (se anulan en los extremos), y  $\varepsilon$  es un parámetro, como se observa en la figura (3.2.2). Ahora, con  $\eta(x)$  fija, sustituye,  $\hat{y} = y(x) + \varepsilon \eta(x)$ ,  $\hat{y}' = y'(x) + \varepsilon \eta'(x)$ . En la integral (3.2.4), con lo que se obtiene una función de  $\varepsilon$ , ahora se puede escribir en la forma:

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= \int_a^b F(x, \hat{y}, \hat{y}') dx = \\ &= \int_a^b F[x, y(x) + \varepsilon \eta(x), y'(x) + \varepsilon \eta'(x)] dx \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Así cuando  $\varepsilon = 0$  de (3.2.4') se obtiene  $\hat{y} = y(x)$  y como  $y(x)$  hace mínima la integral, sabemos  $I(\varepsilon)$  debe de tener un mínimo en  $\varepsilon = 0$ . Por cálculo elemental. Una condición necesaria para ello es que se anule la derivada. La derivada  $I'(\varepsilon)$  se puede calcular derivando (3.2.5)

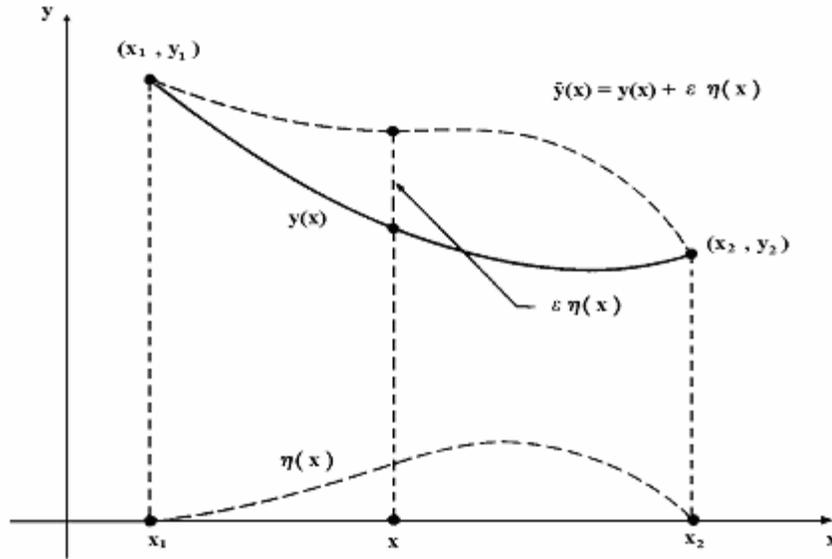


FIGURA. (3.2.2) FUNCIONAL  $\bar{Y} = Y(x) + \varepsilon\eta(x)$

$$\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} = I'(\varepsilon) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(x, \hat{y}, \hat{y}') dx \quad (3.2.6)$$

Por la regla de la cadena para la derivación de funciones para varias variables tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(x, \hat{y}, \hat{y}') = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \hat{y}'} \frac{\partial \hat{y}'}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial \hat{y}} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial \hat{y}'} \eta'(x)$$

Así que (3.2.6) se puede escribir

$$I'(\varepsilon) = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial \hat{y}} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial \hat{y}'} \eta'(x) \right] dx \quad (3.2.7)$$

Pero  $I'(0) = 0$  así que haciendo  $\varepsilon = 0$  en (3.2.7) concluimos que

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial \hat{y}} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial \hat{y}'} \eta'(x) \right] dx = 0 \quad (3.2.8)$$

En esta ecuación la derivada  $\eta'(x)$  aparece junto a la función  $\eta(x)$ . Podemos eliminar  $\eta'(x)$  integrando el segundo término por partes, lo que lleva a

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial \hat{y}'} \eta'(x) dx = \left[ \eta(x) \frac{\partial F}{\partial \hat{y}'} \right]_a^b - \int_a^b \eta(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \hat{y}'} \right) dx = - \int_a^b \eta(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \hat{y}'} \right) dx$$

esto es usando la condición de que  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  por tanto (3.2.8) se expresa como:

$$\int_a^b \eta(x) \left[ \frac{\partial F}{\partial \hat{y}} + \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \hat{y}'} \right) \right] dx = 0 \quad (3.2.9)$$

Nuestro razonamiento hasta este momento está basado en una elección fija de la función  $\eta(x)$ . No obstante, como la integral en (3.2.9) debe de anularse para toda función, concluimos inmediatamente que la expresión entre corchetes debe de ser nula. Esto significa que

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \hat{y}'} \right) - \frac{\partial F}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (3.2.10)$$

La expresión (3.2.10) es la ecuación de Euler. [8], [9] asociada con el problema variacional dado por la ecuación (3.2.5). La condición necesaria para minimizar o maximizar la integral de la ecuación (3.2.4) es que  $F(x, \hat{y}, \hat{y}')$  debe satisfacer la ecuación de Euler correspondiente. Se observa que las derivadas parciales  $\frac{\partial F}{\partial \hat{y}}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial \hat{y}'}$  de la ecuación (3.2.10) se forman suponiendo que  $\hat{y}$ ,  $\hat{y}'$  son variables independientes. Tal como está formulada, la ecuación de Euler (3.2.10) no es muy transparente. Con el fin de interpretarla y convertirla en un instrumento eficaz, empezamos haciendo énfasis en que la derivada parcial

$\frac{\partial F}{\partial \hat{y}}$  y  $\frac{\partial F}{\partial \hat{y}'}$  Tratando a  $x$ ,  $y$  e  $y'$  como variables independientes. En general, sin embargo

$\frac{\partial F}{\partial \hat{y}'}$  es función de  $x$  explícitamente, y también implícitamente a través de  $y$  e  $y'$ , de

modo que el primer término en (3.2.10) se puede desarrollar como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial \hat{y}'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial \hat{y}'} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{\partial F}{\partial \hat{y}'} \right) \frac{dy'}{dx}$$

En consecuencia, la ecuación de Euler es:

$$f_{y'y'} \frac{d^2 y}{dx^2} + f_{y'y} \frac{dy}{dx} + (f_{y'x} + f_y) = 0 \quad (3.2.10')$$

Es una ecuación de segundo orden, a menos que  $f_{y'y'}=0$ , así que en general las extrémales (sus soluciones) constituyen una familia biparamétrica de curvas. Entre éstas, las funciones estacionarias son aquellas para las que los dos parámetros se escogen de manera tal que satisfagan las condiciones de frontera. Una ecuación no lineal (3.2.10') es, generalmente hablando, imposible de resolver, pero hay muchas aplicaciones desembocan en casos especiales que sí son resolubles.

**CASO A.** Si  $x$  e  $y$  están ausentes de la función  $f$ , la ecuación de Euler se reduce a:

$$f_{y'y'} \frac{d^2 y}{d x^2} = 0$$

y si  $f_{y'y'} \neq 0$  tenemos  $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$  e  $y=c_1 x+c_2$ , así que son extrémales todas las rectas

**CASO B.** Si  $x$  está ausente de la función  $f$ , la ecuación de Euler se convierte en:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

que puede integrarse sin dificultad para obtener la ecuación de primer orden

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = c_1$$

Para los extrémales.

**CASO C.** Si  $x$  está ausente de la función  $f$ , la ecuación de Euler puede integrarse, y se llega así a

$$\frac{\partial f}{\partial y'} y' - f = c_1$$

Eso es consecuencia de la identidad

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} y' - f \right) = y' \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} \right] - \frac{\partial f}{\partial x}$$

Ya que  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  y la expresión entre corchetes de la derecha es cero por la ecuación de Euler.

Retornando al problema específico, usando la ecuación (3.2.3) y observando que las variables  $x$  e  $y$  están ausentes de, luego este problema pertenece al Caso A. como

$$f_{y'y'} = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{1}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} \neq 0 \quad (3.2.11)$$

El caso A nos dice que las extrémales son las rectas de la familia biparamétrica:

$$y = c_1 x + c_2 \quad (3.2.12)$$

Donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes.

El problema analizado anteriormente puede ser extendido al caso en que  $y(a)$  sea fijo, es decir, hasta  $x = a$ .  $y$  es arbitrario para  $x = b$ . Ahora, definiendo a  $\eta(x)$  como continuamente diferenciable, la ecuación (3.2.4) se escribe de la siguiente forma:

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \Big|_{x=b} = 0 \quad (3.2.13)$$

Una forma de satisfacer la ecuación (3.2.13) es que los dos términos separadamente sean iguales a cero, mientras que el segundo término  $\eta(b)$  es arbitrario, esto genera la condición para el nuevo problema:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=b} = 0 \quad (3.2.14)$$

Como una simplificación de la ecuación de Euler.

### 3.2.1 METODOS VARIACIONALES

Considere la integral  $I$  de una sola variable independiente  $x$  definida por:

$$I = \int_{x=x_1}^{x_2} F(x, T, T_x) dx \quad (3.2.1.1)$$

Donde el integrando  $F$  es, en general, una función implícita y explícita de coordenada  $x$ , la función  $T \equiv T(x)$  y su derivada con respecto a  $x$ , específicamente,  $T_x \equiv dT / dx$ .

La integral  $I$  es llamada *funcional* porque este valor depende de la función a escoger  $T(x)$ . Claramente, en los casos más generales, la función  $T$  puede depender de más de una variable independiente.

Para el caso unidimensional consideremos la función  $T(x)$  definida en el intervalo  $x_1 < x < x_2$  y las condiciones de frontera de la forma:

$$T(x) = f_1 \quad \text{con } x = x_1 \quad (3.2.1.2a)$$

$$T(x) = f_2 \quad \text{con } x = x_2 \quad (3.2.1.2b)$$

En general, estas condiciones de frontera pueden ser cualquier combinación de las condiciones de frontera de primer, segundo y tercer tipo.

El cálculo variacional se preocupa con la determinación de la función  $T(x)$  tal que nos producirá un extremo (por ejemplo Un máximo o un mínimo) en el valor de la integral  $I$  definida por la ecuación (3.2.1.1) mientras que se satisfagan las condiciones de frontera de (3.2.1.2a,b). Ahora, se mostrarán los pasos básicos involucrados en el cálculo variacional para el caso simple considerado anteriormente.

Hagamos que la función deseada  $T(x)$  que produce un extremo (o un punto estacionario) de la integral  $I$  dada en la ecuación (3.2.1.1) sujeta a las condiciones de frontera de (3.2.2a, b). Supóngase que esta función es alterada por una cantidad infinitesimal a un nuevo valor  $\tilde{T}(x)$  como se ilustra en la figura (3.2.1.1). Hagamos que  $\delta T$  tenga una magnitud alterada en la ubicación de  $x$ , descrita como:

$$\tilde{T}(x) - T(x) = \delta T \equiv \xi \eta(x) \quad (3.2.1.3)$$

Donde  $\tilde{T}(x)$  es llamada función de prueba y el operador  $\delta$  es llamado el operador de variación. Aquí  $\delta T$  representa la variación de la función  $T(x)$  y  $\xi$  es un parámetro de perturbación. La función  $\eta(x)$  es continua y diferenciable con respecto a  $x$ , arbitrario excepto para los requerimientos de la función  $T(x)$  satisfaga las condiciones de frontera en  $x = x_1$  y  $x_2$ . Para este ejemplo en particular, que se ilustra en la figura (3.2.1.1), el valor de  $T(x)$  no produce ningún cambio en las condiciones iniciales  $x_1$  y  $x_2$  especificadas en (3.2.1.2a, b). Éste requisito.

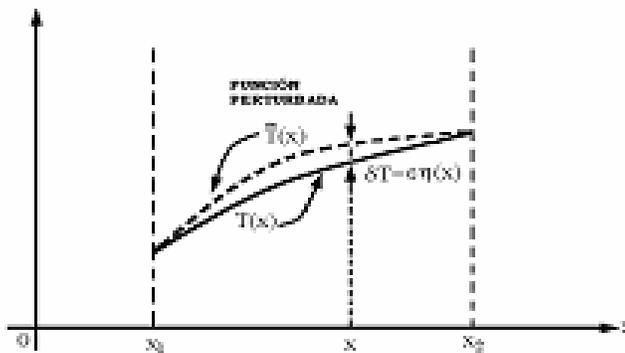


FIGURA (3.2.1.1) FUNCION  $T(x)$  Y LA FUNCION  $\tilde{T}(x)$

Es satisfecho si  $\eta(x)$ , arbitraria al tiempo de inicio, desaparecen para las condiciones de frontera, es decir:

$$\eta(x) = 0 \quad \text{con } x = x_1 \quad (3.2.1.4a)$$

$$\eta(x) = 0 \quad \text{con } x = x_2 \quad (3.2.1.4b)$$

Un cambio en el valor de  $T(x)$  dado por la variación  $\delta T \equiv \xi \eta(x)$  es causa un cambio en el valor de la integral  $I$  dada por una variación  $\delta I$ :

$$\delta I = \delta \left[ \int_{x_1}^{x_2} F dx \right] = \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx \quad (3.2.1.5)$$

Donde la variación del operador  $\delta$  cambia el signo de la integral por que el operador de integración y la derivación se conmutan. La cantidad  $\delta F$  en la ecuación (3.2.1.5) representa la variación de F resultante de un cambio en el valor de T debido a  $\delta T$ ; así se define como:

$$\delta F = F(x, T + \delta T, T_x + \delta T_x) - F(x, T, T_x) \quad (3.2.1.6)$$

Una expansión en series de Taylor se aplica ahora para evaluar  $\delta F$ . Donde F es dependiente de T y  $T_x$ , tomando las derivadas con respecto a T y  $T_x$  en la expansión de la serie de Taylor obtenemos:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial T} \delta T + \frac{\partial F}{\partial T_x} \delta T_x \quad (3.2.1.7a)$$

o

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial T} \xi \eta + \frac{\partial F}{\partial T_x} \xi \eta_x \quad (3.2.1.7b)$$

Donde  $\delta T \equiv \xi \eta$  aquí el término  $\frac{\partial F}{\partial T_x}$  representa la derivada de F con respecto a  $T_x \equiv dT / dx$ .

Introduciendo la ecuación (3.2.1.7a) en la ecuación (3.2.1.5):

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial T} \delta T + \frac{\partial F}{\partial T_x} \delta T_x \right) dx \quad (3.2.1.8)$$

Si T(x) es la función deseada producirá un extremo en la integral I, donde la variación  $\delta I$  de la integral se hace cero, por lo tanto

$$\delta I = 0 \quad (3.2.1.9)$$

Con esta consideración, podemos escribir la ecuación (3.2.1.8) como:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial T} \delta T + \frac{\partial F}{\partial T_x} \delta T_x \right) dx = 0 \quad (3.2.1.10)$$

La función  $T(x)$  satisface las condiciones de frontera (3.2.1.2a, b). Si la función deseada produce un extremo (o punto estacionario) en la integral  $I$  definida por la ecuación (3.2.1.1). El problema de extremo es definido por la ecuación (3.2.1.10) no es recomendable para la determinación de  $T(x)$ ; Por lo que será conveniente realizar una manipulación de esta ecuación para mejorar su manipulación.

El segundo término del lado derecho de la ecuación (3.2.1.10) se obtiene realizando la siguiente consideración:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial T_x} \delta T \right) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial T_x} \right) \delta T + \frac{\partial F}{\partial T_x} \frac{d}{dx} (\delta T) \\ &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial T_x} \right) \delta T + \frac{\partial F}{\partial T_x} \delta \left( \frac{dT}{dx} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial T_x} \right) \delta T + \frac{\partial F}{\partial T_x} \delta T_x \end{aligned}$$

Donde utilizamos la propiedad de que los operadores de diferenciación y la variacional son conmutativos, esto es  $\left( \frac{d}{dx} \right) \delta T = \delta \left( \frac{dT}{dx} \right)$  utilizando este resultado se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial T_x} \delta T_x = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial T_x} \delta T \right) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial T_x} \right) \delta T \quad (3.2.1.11)$$

Introduciendo este resultado en la ecuación (3.2.1.10) se obtiene:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial T_x} \delta T \right) + \frac{\partial F}{\partial T} \delta T - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial T_x} \right) \delta T \right] dx = 0 \quad (3.2.1.12a)$$

Integrando el primer termino:

$$\delta I = \left[ \delta T \frac{\partial F}{\partial T_x} \right]_{x=x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial T} \delta T - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial T_x} \right) \right] \delta T dx = 0 \quad (3.2.1.12b)$$

Así la transformación de la ecuación (3.2.1.10) a la (3.2.1.12b) es equivalente a integrar por partes al segundo término de la ecuación (3.2.1.10).

Note que el primer término del lado derecho de la ecuación (3.2.1.12b) toma en cuenta los efectos de las condiciones de frontera en la función  $T(x)$ , considerando el término de la integral se producirá la expresión deseada para la determinación de  $T(x)$ .

En el presente problema en las condiciones iniciales (3.2.1.2a, b) no se permite ninguna variación de  $T(x)$  en la frontera. Esta condición, implica que  $\delta T \equiv \xi \eta(x) = 0$  en  $x_1$  y  $x_2$  que es equivalente para las condiciones de (3.2.1.3)

Entonces, el primer término de la ecuación (3.2.1.12a, b) se elimina y estableciendo  $\delta T \equiv \xi \eta(x)$  se obtiene:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial T} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial T_x} \right) \right] \xi \eta(x) dx = 0 \quad (3.2.1.13)$$

En esta integral,  $\eta(x)$  es una función arbitraria a excepción de las restricciones impuestas por las ecuaciones (3.2.1.3) en la frontera; así, la ecuación (3.2.1.13) se satisface para todos los valores de  $\eta(x)$  si él integrando del corchete se elimina, i.e.:

$$\frac{\partial F}{\partial T} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial T_x} \right) = 0 \quad (3.2.1.14)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de *Euler-Lagrange* para el problema variacional considerado aquí. Las condiciones de frontera para esta ecuación fueron descritas en la ecuación (3.2.1.2 a, b):

$$T(x) = f_1 \quad \text{con } x = x_1 \quad (3.2.1.15a)$$

$$T(x) = f_2 \quad \text{con } x = x_2 \quad (3.2.1.15b)$$

A continuación se resumirá el proceso variacional: Para determinar la función  $T(x)$  del problema variacional que produce un extremo en la expresión variacional definida en la ecuación (3.2.1.1), sujeta a las condiciones de frontera (3.2.1.2 a, b), se transforma en la solución de la ecuación diferencial (3.2.1.14), sujeta a las mismas condiciones de frontera. Las implicaciones del desarrollo variacional para obtener soluciones aproximadas a los problemas de transferencia de calor aparecerán en el método de Ritz.

**Aplicación.** Considere el problema variacional definido por la integral:

$$I = \int_0^L [p(x)T_x^2 - q(x)T^2 - 2g(x)T] dx \quad (3.2.1.16)$$

sujeta a las condiciones de frontera en  $T(x)$ :

$$T(x) = T_1 \quad \text{con } x = 0 \quad (3.2.1.17a)$$

$$T(x) = T_2 \quad \text{con } x = L \quad (3.2.1.17b)$$

Determine la correspondiente ecuación de Euler-Lagrange.

Solución. Para comparar la ecuación (3.2.1.16) con la forma general descrita en la ecuación (3.2.1.1), encontramos que:

$$F(x, T, T_x) = p(x)T_x^2 - q(x)T^2 - 2g(x)T \quad (3.2.1.18)$$

Donde  $T_x \equiv dT/dx$ . La integral  $I$  de la ecuación (3.2.1.16) llega a ser estacionario si su variación  $\delta I$  se elimina; entonces la expresión para  $\delta I$  se obtiene de la ecuación (3.2.1.12b) como:

$$\delta I = \left[ \delta T \frac{\partial F}{\partial T_x} \right]_{x=0}^L + \int_0^L \left[ \frac{\partial F}{\partial T} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial T_x} \right) \right] \delta T dx = 0 \quad (3.2.1.19)$$

Para la función  $F$  definida en la ecuación (3.2.1.18) todos los términos de esta expresión se evalúan como:

$$\frac{\partial F}{\partial T} = -2q(x)T - 2g(x) \quad (3.2.1.20a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial T_x} = +2p(x)T_x \quad (3.2.1.20b)$$

Introduciendo las ecuaciones (3.7.1.20 a, b) en la ecuación (3.7.1.19) obtenemos:

$$\delta I = 2 \left[ p(x)T_x \delta T \right]_{x=0}^L - 2 \int_0^L \left[ \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dT}{dx} \right) + q(x)T + g(x) \right] \delta T dx = 0 \quad (3.2.1.21a)$$

Aquí, el primer término del lado derecho se elimina porque  $\delta T = 0$  en la frontera donde el valor de la función se prescribe. Entonces:

$$\delta I = -2 \int_0^L \left[ \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dT}{dx} \right) + q(x)T + g(x) \right] \delta T dx = 0 \quad (3.2.1.21b)$$

Donde  $\delta T$  es un término arbitrario de la ecuación que se satisface si él integrando del paréntesis se elimina. Entonces se obtiene la siguiente ecuación de Euler-Lagrange para  $T(x)$ :

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dT}{dx} \right] + q(x)T + g(x) = 0 \quad \text{en } 0 < x < L \quad (3.2.1.22a)$$

sujeta a las siguientes condiciones de frontera:

$$T(x) = T_1 \quad \text{en } x = 0 \quad (3.2.1.22b)$$

$$T(x) = T_2 \quad \text{en } x = L \quad (3.2.1.22c)$$

Note que las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.2.1.22) obtenidas sobre el problema de transferencia de calor en estado estable generan un espacio dependiente de la conductividad térmica. Así la función  $T(x)$  satisface el problema de conducción de calor del rendimiento

estacionario del problema de variación dado por la ecuación (3.2.1.16). En el problema de variación (3.2.1.16) se consideran condiciones de frontera de primer orden en ambas fronteras, dadas por las ecuaciones (3.2.1.17 a, b).

Si las condiciones de frontera (3.2.1.17 a, b) donde ambas son de tipo  $\partial T / \partial x = 0$  o alguna combinación de  $\partial T / \partial x = 0$  y las condiciones de frontera de primer orden, sobre la ecuación de Euler-Lagrange (3.2.1.22a) deberá ser aplicado un cambio apropiado en la condición de frontera. Este resultado se obtiene del hecho de que el primer término del lado derecho de la ecuación (3.2.1.21a) desaparece cuando la función es evaluada en  $\partial T / \partial x = 0$  sobre la frontera.

Considere el siguiente problema de conducción de calor en estado estable.

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + g(x) = 0 \text{ en } 0 < x < L \quad (3.2.1.23)$$

$$-k \frac{dT}{dx} + h_1 T = f_1 \text{ para } x=0 \quad (3.2.1.23a)$$

$$k \frac{dT}{dx} + h_2 T = f_2 \text{ para } x=L \quad (3.2.1.23b)$$

Este caso es tratado usando las ecuaciones de Euler - Lagrange y se determinara la forma variacional para este caso.

Consideremos la ecuación (3.2.1.23) realizando un procedimiento análogo al anterior se escribe

$$\delta I = \int_0^L \left[ \frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + g(x) \right] \delta T \, dx = 0 \quad (3.2.1.24)$$

la integral anterior se puede escribir:

$$\delta I = \int_0^L \frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) \delta T \, dx + \int_0^L g(x) \delta T \, dx = 0 \quad (3.2.1.25)$$

Para encontrar el valor de la primera integral del lado derecho de la igualdad usaremos integración por partes, el cual consista, si se tiene u, v las cuales son derivables.

$$\frac{d}{dx} (u v) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \quad \text{Integrando}$$

$$uv = \int u \frac{dv}{dx} \, dx + \int v \frac{du}{dx} \, dx$$

$$\int u \frac{dv}{dx} \, dx = uv - \int v \frac{du}{dx} \, dx \quad \text{o}$$

$$\int_a^b u \frac{dv}{dx} \, dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \frac{du}{dx} \, dx$$

ahora sea:

$$dv = \frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) dx \quad v = k \frac{dT}{dx} = k T_x$$

$$u = \delta T \quad \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} (\delta T)$$

así que la integral

$$= (k T_x) \delta T \Big|_0^L - \int_0^L (k T_x) \delta \left( \frac{d}{dx} T \right) dx$$

$$= (k T_x) \delta T \Big|_0^L - \int_0^L (k T_x) \delta (T_x) dx$$

$$= (k T_x) \delta T \Big|_0^L - \frac{1}{2} \int_0^L k \delta (T_x^2) dx \quad (3.2.1.26)$$

Donde

$$\frac{d}{dx} (\delta T) = \delta T_x \quad \text{y} \quad T_x \delta (T_x) = \frac{1}{2} \delta (T_x^2)$$

introduciendo el resultado de (3.2.1.26) en (3.2.1.24) se tiene

$$\delta I = k T_x \delta T \Big|_0^L - \frac{1}{2} \int_0^L k \delta (T_x^2) dx + \int_0^L g(x) \delta T dx = 0$$

$$\delta I = k T_x \delta T \Big|_0^L - \frac{1}{2} \int_0^L k \delta (T_x^2 - 2g(x) T) dx \quad (3.2.1.27)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (3.2.1.23 a, b) es evaluado utilizando las condiciones de frontera

$$\frac{dT}{dx} = T_x = \frac{f_1 - h_1 T}{-k} \quad \text{para } x=0$$

$$\frac{dT}{dx} = T_x = \frac{f_2 - h_2 T}{k} \quad \text{para } x=L$$

Así que al evaluar

$$k T_x \delta T \Big|_0^L = k T_x \delta T \Big|_{x=L} - k T_x \delta T \Big|_{x=0}$$

sustituyendo las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} k T_x \delta T \Big|_{x=0}^{x=L} &= k \left( \frac{f_2 - h_2}{k} \Big|_{x=L} \delta T \right) - k \left( \frac{f_1 - h_1}{-k} \Big|_{x=0} \delta T \right) = \\ &= (f_2 \delta T - h_2 T \delta T) \Big|_{x=L} + (f_1 \delta T - h_1 T \delta T) \Big|_{x=0} \\ &= \left( f_2 \delta T - \frac{1}{2} h_2 T \delta (T^2) \right) \Big|_{x=L} + \left( f_1 \delta T - \frac{1}{2} h_1 \delta (T^2) \right) \Big|_{x=0} \quad (3.2.1.28) \\ &= \frac{1}{2} \delta (2 f_2 T - h_2 T^2) \Big|_{x=L} + \frac{1}{2} \delta (f_1 T - h_1 T^2) \Big|_{x=0} \end{aligned}$$

Introduciendo (3.2.1.28) este resultado en la ecuación (3.2.1.27)

$$\delta I = -\frac{1}{2} \delta \left\{ \int_0^L (k T_x^2 - 2 g(x) T) dx + (h_1 T^2 - 2 f_1 T) \Big|_{x=0} + (h_2 T^2 - 2 f_2 T) \Big|_{x=L} \right\} = 0$$

o

$$\delta \left\{ \int_0^L (k T_x^2 - 2 g(x) T) dx + (h_1 T^2 - 2 f_1 T) \Big|_{x=0} + (h_2 T^2 - 2 f_2 T) \Big|_{x=L} \right\} = 0 \quad (3.2.1.29)$$

así la forma variacional está dada por

$$I = \int_0^L (k T_x^2 - 2 g(x) T) dx + (h_1 T^2 - 2 f_1 T) \Big|_{x=0} + (h_2 T^2 - 2 f_2 T) \Big|_{x=L} \quad (3.2.1.30)$$

observe que la forma variacional involucra las condiciones de frontera

### 3.2.2 PROBLEMAS TRIDIMENSIONALES

El procedimiento variacional realizado anteriormente puede ser generalizado para problemas que involucran más variables independientes

En el siguiente análisis se inician con las ecuaciones de Euler-Lagrange en tres dimensiones, sujeta a condiciones de frontera generales y se determinara la expresión equivalente en su forma variacional

Se considera el siguiente problema de transferencia de calor en estado permanente en tres dimensiones, sobre una región R

$$\nabla^2 T(r) + A(r)T(r) + \frac{1}{k} g(r) = 0 \quad \text{en la región R} \quad (3.2.1.31a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} + HT = f(r_s) \quad \text{en la frontera S} \quad (3.2.1.31b)$$

donde  $\frac{\partial}{\partial n}$  es la derivada a lo largo de la normal exterior trazada en la superficie de frontera S.

Para determinar la expresión de variación correspondiente se trata a la ecuación como una ecuación de Euler-Lagrange y se sigue un procedimiento similar al usado en el ejemplo anterior, pero generalizándolo para el caso tridimensional. La variación  $\delta I$  de la funcional  $I$  como

$$\delta I = \int_R \left[ \nabla^2 T + AT + \frac{1}{k} g \right] \delta T dv = 0 \quad (3.2.1.32)$$

el término  $\delta T \nabla^2 T$  puede ser escrito como

$$\delta T \nabla^2 T = \nabla \cdot (\delta T \nabla T) - \nabla (\delta T) \cdot \nabla T \quad (3.2.1.33)$$

Introduciendo esto en la ecuación (3.2.1.32) se obtiene

$$\delta I = \int_R \nabla \cdot (\delta T \nabla T) dv - \int_R \nabla T \cdot \nabla (\delta T) dv + \int_R AT \delta T dv + \frac{1}{k} \int_R g \delta T dv \quad (3.2.1.34)$$

El primer término de esta expresión es escrito en forma alternativa como

$$\int_R \nabla \cdot (\delta T \nabla T) dv = \int_S \delta T \nabla T \cdot n ds = \int_S \delta T \frac{\partial T}{\partial n} ds = \int_S \delta T (f - HT) ds = -\frac{1}{2} \delta \int_S (HT^2 - 2fT) ds \quad (3.2.1.35a)$$

Donde se utilizó la condición de frontera (3.2.1.31b). Los términos restantes se vuelven

$$\int_R \nabla T \cdot \nabla(\delta T) dv = \frac{1}{2} \int_R \delta (\nabla T)^2 dv = \frac{1}{2} \delta \int_R (\nabla T)^2 dv \quad (3.2.1.35b)$$

$$\int_R AT \delta T dv = \frac{1}{2} \int_R A \delta T^2 dv = \frac{1}{2} \int_R AT^2 dv \quad (3.2.1.35c)$$

$$\frac{1}{k} \int_R g \delta T dv = \frac{1}{k} \delta \int_R g T dv \quad (3.2.1.35d)$$

Introduciendo las ecuaciones (3.2.1.35 a, b, c, d) en la (3.2.1.34) se obtiene

$$\delta I = -\frac{1}{2} \delta \left\{ \int_S (HT^2 - 2fT) ds + \int_R \left[ (\nabla T)^2 - AT^2 - \frac{2}{k} gT \right] dv \right\} = 0 \quad (3.2.1.36)$$

ó

$$\delta \left\{ \int_R \left[ (\nabla T)^2 - AT^2 - \frac{2}{k} gT \right] dv + \int_S (HT^2 - 2fT) ds \right\} = 0 \quad (3.2.1.37)$$

Entonces la expresión variacional se obtiene como

$$I = \int_R \left[ (\nabla T)^2 - AT^2 - \frac{2}{k} gT \right] dv + \int_S (HT^2 - 2fT) ds \quad (3.2.1.38)$$

donde  $(\nabla T)^2$  está dada en diferentes sistemas de coordenadas como

$$(\nabla T)^2 \equiv \left( i \frac{\partial T}{\partial x} + j \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \quad \text{en coordenadas rectangulares} \quad (3.2.1.39a)$$

$$= \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2$$

$$(\nabla T)^2 \equiv \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial T}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \quad \text{en coordenadas cilíndricas} \quad (3.2.1.39b)$$

$$(\nabla T)^2 \equiv \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial T}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)^2 \quad \text{en coordenadas esféricas} \quad (3.2.1.39c)$$

Se debe notar que la expresión variacional (3.2.1.38) contiene las condiciones de frontera del problema.

### 3.2.3 PROBLEMAS DE FLUJO DE CALOR EN ESTADO ESTABLE EN UNA DIMENSION

Como por ejemplo, se considera una aleta de longitud finita  $L$ . La temperatura inicial  $T_0$  de la aleta se especifica, la punta de la aleta se encuentra aislada, como se muestra en la figura (3.2.3.1). Determinar la distribución de la temperatura y la transferencia de calor en la aleta por medio del cálculo variacional.

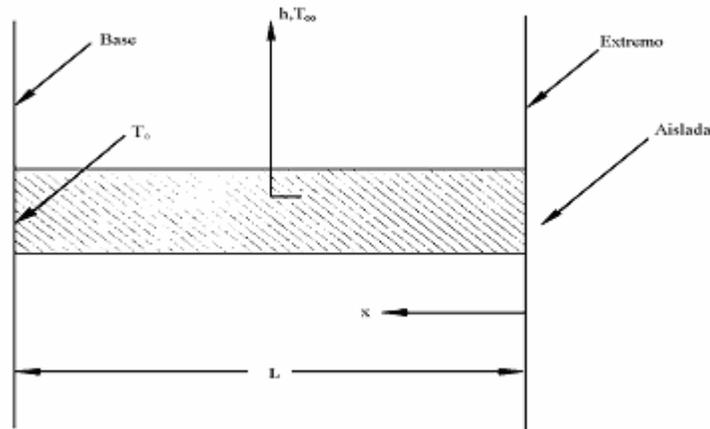


FIGURA (3.2.3.1) ALETA LONGITUDINAL INFINITA

La ecuación diferencial para este problema es:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \quad (3.2.3.1)$$

Siendo sus condiciones de frontera:

$$\frac{d\theta(0)}{dx} = 0 \quad (3.2.3.2)$$

$$\theta(L) = \theta_0 \quad (3.2.3.3)$$

Si se toma la ecuación diferencial de problema (3.2.3.1) y se trata de determinar la funcional  $I(x, \theta, \theta')$  tal que  $\delta I = 0$  con:

$$I(x, \theta, \theta') = \int_0^L \left( \frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta \right) dx$$

Se tendrá que la primera variación es:

$$\delta I(x, \theta, \theta') = \int_0^L \left( \frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 \theta \right) \delta \theta \, dx \quad (3.2.3.4)$$

Integrando el primer término de la ecuación (3.2.3.4) por partes se obtiene:

$$\frac{d\theta}{dx} \delta \theta \Big|_0^L - \int_0^L \left( \frac{d\theta}{dx} \right) \frac{d}{dx} (\delta \theta) \, dx - m^2 \int_0^L \theta \delta \theta \, dx = 0 \quad (3.2.3.5)$$

Y usando la propiedad conmutativa del operador diferencial

$$\frac{d}{dx} (\delta \theta) = \delta \left( \frac{d\theta}{dx} \right)$$

Se tiene para el término

$$I = \int_0^L \left( \frac{d\theta}{dx} \right) \delta \frac{d\theta}{dx} \, dx = \delta \int_0^L \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 \right] \, dx$$

Y observando que:

$$\left( \frac{d\theta}{dx} \right) \delta \left( \frac{d\theta}{dx} \right) = \frac{1}{2} \delta \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2, \quad \theta \delta \theta = \frac{1}{2} \delta \theta^2$$

Reareglando la ecuación (3.2.3.5) da la siguiente forma:

$$\left( \frac{d\theta}{dx} \right) \delta \theta \Big|_0^L - \frac{1}{2} \delta \int_0^L \left[ \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 + m^2 \theta^2 \right] \, dx = 0 \quad (3.2.3.6)$$

Las condiciones de frontera  $\theta = \text{Cte.}$  y  $(d\theta/dx = 0)$  por lo cual el primer término de la ecuación (3.2.3.6) se elimina. Por lo tanto, la forma variacional del problema es:

$$\delta \int_0^L \left[ \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 + m^2 \theta^2 \right] \, dx = 0 \quad (3.2.3.7)$$

La función correspondiente  $I(x, \theta, \theta')$  es

$$I(x, \theta, \theta') = \int_0^L \left[ \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 + m^2 \theta^2 \right] dx \quad (3.2.3.8)$$

Manteniendo aislado el extremo de la aleta pero reemplazando la temperatura base con el flujo de calor especificado

$$q = k \frac{d\theta(L)}{dx} \quad (3.2.3.9)$$

Aplicando la forma variacional de este problema y las condiciones de frontera. Introduciendo las ecuaciones (3.2.3.2) y (3.2.3.9) dentro de la ecuación (3.2.3.6) se encuentra la formulación variacional para el flujo de calor:

$$\frac{q}{k} \delta\theta(L) - \frac{1}{2} \delta \int_0^L \left[ \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 + m^2 \theta^2 \right] dx = 0 \quad (3.2.3.10)$$

$$\delta \left\{ \frac{q}{k} \theta(L) - \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 + m^2 \theta^2 \right] dx \right\} = 0 \quad (3.2.3.11)$$

La ecuación diferencial relaciona a la ecuación diferencial y sus condiciones de frontera separadamente. Mientras que la formulación variacional incluye las condiciones de frontera dentro de la ecuación variacional. Por lo tanto, un problema puede generar diferentes formulaciones variacionales, dependiendo de sus condiciones de frontera.

Considere el siguiente problema de conducción de calor en estado estable.

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + g(x) = 0 \quad \text{en } 0 < x < L \quad (3.2.3.12)$$

$$-k \frac{dT}{dx} + h_1 T = f_1 \quad \text{para } x=0 \quad (3.2.3.13)$$

$$k \frac{dT}{dx} + h_2 T = f_2 \quad \text{para } x=L \quad (3.2.3.14)$$

Este caso es tratado usando las ecuaciones de Euler-Lagrange y se determinara la forma variacional para este.

Consideremos la ecuación (3.2.3.12) realizando un procedimiento análogo al anterior se escribe

$$\delta I = \int_0^L \left[ \frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + g(x) \right] \delta T \, dx = 0 \quad (3.2.3.15)$$

la integral anterior se puede escribir:

$$\delta I = \int_0^L \frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) \delta T \, dx + \int_0^L g(x) \delta T \, dx = 0 \quad (3.2.3.15')$$

Para encontrar el valor de la primera integral del lado derecho de la igualdad usaremos integración por partes, el cual consista, si se tiene  $u, v$  las cuales son derivables.

$$\frac{d}{dx}(u v) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \quad \text{Integrando}$$

$$uv = \int u \frac{dv}{dx} \, dx + \int v \frac{du}{dx} \, dx$$

$$\int u \frac{dv}{dx} \, dx = uv - \int v \frac{du}{dx} \, dx \quad \text{o}$$

$$\int_a^b u \frac{dv}{dx} \, dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \frac{du}{dx} \, dx$$

ahora sea:

$$dv = \frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) dx \quad v = k \frac{dT}{dx} = k T_x$$

$$u = \delta T \quad \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\delta T)$$

Así que la integral

$$\begin{aligned} \int_0^L \left( \frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) \right) \delta T \, dx &= k T_x \delta T \Big|_0^L - \int_0^L k T_x \frac{d}{dx}(\delta T) \, dx \\ &= k T_x \delta T \Big|_0^L - \int_0^L k T_x \delta \left( \frac{dT}{dx} \right) \, dx \\ &= k T_x \delta T \Big|_0^L - \int_0^L k T_x \delta T_x \, dx \\ &= k T_x \delta T \Big|_0^L - \frac{1}{2} \int_0^L k \delta (T_x^2) \, dx \end{aligned} \quad (3.2.3.16)$$

Donde

$$\frac{d}{dx}(\delta T) = \delta T_x \quad \text{y} \quad T_x \delta(T_x) = \frac{1}{2} \delta(T_x^2)$$

introduciendo el resultado de (3.2.3.16) en (3.2.3.15') se tiene;

$$\begin{aligned} \delta I &= K T_x \delta T \Big|_0^L - \frac{1}{2} \int_0^L k \delta(T_x^2) dx + \int_0^L g(x) \delta T dx \\ \delta I &= K T_x \delta T \Big|_0^L - \frac{1}{2} \int_0^L k \delta(T_x^2 - 2g(x) T) dx \end{aligned} \quad (3.2.3.17)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (3.2.3.17) es evaluado utilizando las condiciones de frontera

$$\frac{dT}{dx} = T_x = \frac{f_1 - h_1 T}{-k} \quad \text{para } x=0 \quad (3.2.3.18)$$

$$\frac{dT}{dx} = T_x = \frac{f_2 - h_2 T}{k} \quad \text{para } x=L \quad (3.2.3.18')$$

así que al evaluar

$$k T_x \delta T \Big|_0^L = k T_x \delta T \Big|_{x=L} - k T_x \delta T \Big|_{x=0} \quad (3.2.3.18'')$$

sustituyendo las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} k T_x \delta T \Big|_{x=0}^{x=L} &= k \left( \frac{f_2 - h_2}{k} \Big|_{x=L} \delta T \right) - k \left( \frac{f_1 - h_1}{-k} \Big|_{x=0} \delta T \right) \\ &= (f_2 \delta T - h_2 T \delta T) \Big|_{x=L} + (f_1 \delta T - h_1 T \delta T) \Big|_{x=0} \\ &= \left( f_2 \delta T - \frac{1}{2} h_2 T \delta(T^2) \right) \Big|_{x=L} + \left( f_1 \delta T - \frac{1}{2} h_1 T \delta(T^2) \right) \Big|_{x=0} \\ &= \frac{1}{2} \delta (2 f_2 T - h_2 T^2) \Big|_{x=L} + \frac{1}{2} \delta (f_1 T - h_1 T^2) \Big|_{x=0} \end{aligned} \quad (3.2.3.19)$$

Introduciendo (3.2.3.19) este resultado en la ecuación (3.2.3.17)

$$\delta I = -\frac{1}{2} \delta \left\{ \int_0^L (k T_x^2 - 2g(x)T) dx + (h_1 T^2 - 2f_1 T)_{x=0} + (h_2 T^2 - 2f_2 T)_{x=L} \right\} = 0$$

o

$$\delta \left\{ \int_0^L (k T_x^2 - 2g(x)T) dx + (h_1 T^2 - 2f_1 T)_{x=0} + (h_2 T^2 - 2f_2 T)_{x=L} \right\} = 0$$

así la forma variacional está dada por

$$I = \int_0^L (k T_x^2 - 2g(x)T) dx + (h_1 T^2 - 2f_1 T)_{x=0} + (h_2 T^2 - 2f_2 T)_{x=L} \quad (3.2.3.20)$$

### GENERALIZACION PARA PROBLEMAS EN TRES DIMENSIONES

El procedimiento variacional realizado anteriormente puede ser generalizado para problemas que involucran más variables independientes

En el siguiente análisis se inician con las ecuaciones de Euler-Lagrange en tres dimensiones, sujeta a condiciones de frontera generales y se determinara la expresión equivalente en su forma variacional

Se considera el siguiente problema de transferencia de calor en estado permanente en tres dimensiones. Sobre una región R

$$\nabla^2 T(r) + A(r)T(r) + \frac{1}{k} g(r) \quad (3.2.3.21)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} + HT = f(r_s) \quad \text{en la frontera } S \quad (3.2.3.21)$$

donde  $\frac{\partial}{\partial n}$  es la derivada a lo largo de la normal S en la superficie.

Para determinar la expresión de variación correspondiente se trata a la ecuación como una ecuación de Euler-Lagrange y se sigue un procedimiento similar al usado en el ejemplo anterior, pero generalizándolo para el caso tridimensional. La variación  $\delta I$  de la funcional I como:

$$\delta I = \int_R \left[ \nabla^2 T + AT + \frac{1}{k} g \right] \delta T dv = 0 \quad (3.2.3.22)$$

El término  $\delta T \nabla^2 T$  puede ser escrito como

$$\delta T \nabla^2 T = \nabla \cdot (\delta T \nabla T) - \nabla(\delta T) \cdot \nabla T \quad (3.2.3.23)$$

Introduciendo (3.2.3.23) en la ecuación (3.2.3.22) se obtiene

$$\delta I = \int_R \nabla \cdot (\delta T \nabla T) dv - \int \nabla T \cdot \nabla (\delta T) dv + \int_R AT \delta T dv + \frac{1}{k} \int_R g \delta T dv \quad (3.2.3.24)$$

El primer término de esta expresión es escrito en forma alternativa como:

$$\begin{aligned} \int_R \nabla \cdot (\delta T \nabla T) dv &= \int_S \delta T \nabla T \cdot n ds + \int_S \delta T \frac{\partial T}{\partial n} ds \\ &= \int_S \delta T (f - HT) ds = -\frac{1}{2} \delta \int_S (HT^2 - 2fT) ds \end{aligned} \quad (3.2.3.25)$$

Donde se utilizó la condición de frontera (3.2.3.21). Los términos restantes se vuelven

$$\int_R \nabla T \cdot \nabla (\delta T) dv = \frac{1}{2} \int_R \delta (\nabla T)^2 dv = \frac{1}{2} \delta \int_R (\nabla T)^2 dv \quad (3.2.3.26a)$$

$$\int_R AT \delta T dv = \frac{1}{2} \int_R A \delta T^2 dv = \frac{1}{2} \delta \int_R AT^2 dv \quad (3.2.3.26b)$$

$$\frac{1}{k} \int_R g \delta T dv = \frac{1}{k} \delta \int_R gT dv \quad (3.2.3.26c)$$

Introduciendo las ecuaciones (3.2.3.25), (3.2.3.26) en la (3.2.3.24) se obtiene

$$\delta I = -\frac{1}{2} \delta \left\{ \int_S (HT^2 - 2fT) ds + \int_R \left[ (\nabla T)^2 - AT^2 - \frac{2}{k} gT \right] dv \right\} = 0 \quad (3.2.3.27)$$

ó

$$\delta \left\{ \int_R \left[ (\nabla T)^2 - AT^2 - \frac{2}{k} gT \right] dv + \int_S (HT^2 - 2fT) ds \right\} = 0 \quad (3.2.3.28)$$

Entonces la expresión variacional se obtiene como

$$I = \int_R \left[ (\nabla T)^2 - AT^2 - \frac{2}{k} gT \right] dv + \int_S (HT^2 - 2fT) ds \quad (3.2.3.29)$$

donde  $(\nabla T)^2$  está dada en diferentes sistemas de coordenadas como

$$(\nabla T)^2 \equiv \left( i \frac{\partial T}{\partial x} + j \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2$$

en las coordenadas rectangulares (3.2.3.30)

$$= \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2$$

$$(\nabla T)^2 \equiv \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial T}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2$$

en las coordenadas cilíndricas (3.2.3.31)

$$(\nabla T)^2 \equiv \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial T}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)^2$$

en las coordenadas esféricas (3.2.3.32)

Se debe notar que la expresión variacional (3.2.3.29) contiene las condiciones de frontera del problema.

### 3.2.4 METODO DE RITZ

Cuando la forma variacional equivalente de la ecuación de conducción de calor en estado estable está disponible. El problema puede ser resuelto aproximadamente por un método simple y eficiente propuesto originalmente por Ritz [51,56]. En esta parte utilizaremos este método para resolver problemas de conducción de calor en estado estable en regiones finitas.

Considere el problema en estado estable para una región finita dada por la forma

$$\nabla^2 T(r) + A(r)T(r) + \frac{1}{k} g(r) = 0 \quad \text{en la región R} \quad (3.2.4.1a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n_i} + H_i T = f_i(r_s) \quad \text{sobre la frontera } s_i \quad (3.2.4.1b)$$

Donde  $i = 1, 2, 3, \dots, s$  y  $s$  es el número de superficies frontera continuas de la región R,  $\frac{\partial}{\partial n_i}$  ; es la derivada a lo largo de la normal dibujada hacia afuera de la superficie  $s_i$  de

la región

Hemos ya determinado la forma de variacional equivalente para el caso (3.2.4.1a). Por lo tanto, desde la ecuación (3.2.3.29), se obtiene la expresión variacional correspondiente como:

$$I = \int_R \left[ (\nabla T)^2 - AT^2 - \frac{2}{k} gT \right] dv + \sum_{i=1}^s \int_{s_i} (H_i T^2 - 2f_i T) ds_i \quad (3.2.4.2)$$

Después de:

$$\int_s \equiv \sum_{i=1}^s \int_{s_i}$$

La cual contiene las condiciones de frontera para el problema, la solución exacta de esta expresión variacional es muy difícil. Por otro lado puede ser resuelta en forma aproximada por el método propuesto por Ritz. El primer paso en el análisis del método es la selección de una solución de prueba que contiene un número de parámetros ajustables. La solución de prueba deberá ser elegida de tal manera que satisfaga las condiciones de frontera (3.2.4.1b), por otra parte, para el problema no es necesaria la ecuación diferencial (3.2.4.1a). Con estas consideraciones se elige una solución de prueba  $\tilde{T}_n(r)$  como

$$\tilde{T}_n(r) = \Psi_0(r) + \sum_{j=1}^n c_j \phi_j(r) \quad \text{en la región R} \quad (3.2.4.3)$$

Donde la función  $\Psi_0$  satisface la parte no Homogénea de las condiciones de frontera (3.2.4.1b), es decir

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial n_i} + H_i \Psi_0 = f_i \quad (3.2.4.5)$$

y  $\phi_j$ ,  $j= 1, 2, \dots, n$  son linealmente independientes, conocidas, se eligen funciones apropiadas en la región R que satisfacen la parte homogénea de las condiciones de frontera (3.2.4.1b), es decir

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n_i} + H_i \phi_j = 0 \quad (3.2.4.6)$$

Entonces la solución de prueba (3.2.4.3) satisface las condiciones de frontera (3.2.4.1b) para valores arbitrarios  $C_j$ . Si las condiciones de frontera para el problema son todas homogéneas entonces la función  $\Psi_0$  no es necesaria, sólo las funciones  $\phi_j$  deberán determinarse. Aquí asumimos que las funciones  $\phi_j$  tienen derivadas continuas de primero y segundo orden con respecto al espacio de las variables.

Una vez que la solución de prueba  $\tilde{T}_n(r)$  es estabilizada, la aproximación de Ritz para la determinación de los coeficientes  $C_j$  consiste en introducir la solución de prueba  $\tilde{T}_n(r)$  dentro de la expresión variacional (3.2.4.2) y requiere de

$$\frac{\partial I(C_1, \dots, C_n)}{\partial C_j} = 0 \quad \text{para } j=1, 2, \dots, n \quad (3.2.4.7)$$

De este proceso resultan  $n$  ecuaciones algebraicas para la determinación de  $n$  coeficientes desconocidos  $C_j$  y representan una solución aproximada para el problema de extremos o para el problema de conducción de calor (3.2.4.1a). La solución es aproximada puesto que esta es un punto fijo de la integral  $I(C_1, \dots, C_n)$  sólo para aquellos valores de  $C_j$  que están contenidos en la solución de prueba. Una discusión para la estimación del error en el método de Ritz puede encontrarse en la referencia [52] .

La selección de la familia de funciones  $\phi_j$  es el paso más importante en esta aproximación. Las funciones  $\phi_j$   $j=1, 2, \dots, n$  deberán permanecer a la clase de funciones completas determinadas en la región dada. Esto es, una función se llama completa en el sentido de que cualquier función arbitraria que es continua, junto con sus derivadas parciales en la región considerada, puede ser representada en la forma de una serie infinita, por estas funciones en la región considerada. Las funciones  $\phi_j$  pueden ser polinomiales, funciones trigonométricas, cilíndricas, o funciones esféricas dependiendo de la naturaleza del problema. Una buena aproximación a la solución no será obtenida a no ser incluida una buena aproximación en la selección de funciones. Una discusión de la construcción de las funciones  $\phi_j$  se dará en la siguiente sección.

Cuando la ecuación diferencial original [por ejemplo ecuación (3.2.4.1a) es lineal, resulta un sistema de  $n$  ecuaciones algebraicas para las  $n$  desconocidas  $C_j$ , son lineal, Si el problema original es no lineal, el sistema resultante para las  $n$  ecuaciones es no lineal.

## Aplicación 1

Considere el siguiente problema de conducción de calor en estado estable en una dimensión

$$\frac{d^2T}{dx^2} + AT + Bx = 0 \quad \text{en } 0 < x < 1 \quad (3.2.4.8)$$

$$T=0 \quad \text{para } x=0 \quad \text{y } x=1 \quad (3.2.4.9)$$

Donde A y B son constantes. Se resolverá este problema por el método de Ritz y comparar los resultados exactos y aproximados para A=B=1, la solución a este problema es un caso especial del problema general (3.2.4.1a), por lo tanto la forma variación equivalente es obtenida inmediatamente de la ecuación (3.2.4.2) como:

$$I = \int_{x=0}^{x=1} \left[ \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 - AT^2 - 2BxT \right] dx \quad (3.2.4.10)$$

$$I = \int_{x=0}^{x=1} \left[ \frac{dT}{dx} \right]^2 dx - A \int_{x=0}^{x=1} T^2 dx - 2B \int_{x=0}^{x=1} xT dx \quad (3.2.4.10')$$

Se resolverá este caso usando varias órdenes de aproximación, esto es se usaran un término, dos términos en la solución de prueba.

1. Un término en la solución de prueba. Se elige la solución de prueba como

$$\tilde{T}_1(x) = C_1 \phi_1(x) \quad (3.2.4.11)$$

Donde

$$\phi_1(x) = x(1-x) \quad (3.2.4.12)$$

Claramente,  $\phi_1(x)$  satisface ambas condiciones de frontera (3.2.4.9). Introduciendo esta solución de prueba en la ecuación (3.2.4.10) pero calcularemos la integral por términos usando (3.2.4.10')

$$\tilde{T} = C_1 x(1-x) = C_1(x-x^2) \quad (3.2.4.13)$$

$$\frac{d\tilde{T}}{dx} = C_1(1-2x) \quad (3.2.4.14)$$

$$\left(\frac{d\tilde{T}}{dx}\right)^2 = [C_1(1-2x)]^2 = C_1^2(1-2x)^2 \quad (3.2.4.15)$$

$$\tilde{T}^2 = [C_1x(1-x)]^2 = C_1^2(x-x^2)^2 = C_1^2(x^2 - 2x^3 + x^4) \quad (3.2.4.16)$$

$$x\tilde{T} = C_1(x-x^2)x = C_1(x^2 - x^3) \quad (3.2.4.17)$$

$$\int_{x=0}^{x=1} \left(\frac{d\tilde{T}}{dx}\right)^2 dx = \int_{x=0}^{x=1} C_1^2(1-2x)dx = \frac{C_1^2}{3} \quad (3.2.4.18)$$

$$-A \int_{x=0}^{x=1} \tilde{T}^2 dx = AC_1^2 \int_{x=0}^{x=1} (x^2 - 2x^3 + x^4) dx = \frac{C_1^2 A}{30} \quad (3.2.4.19)$$

$$-2B \int_{x=0}^{x=1} x\tilde{T} dx = -2B \int_{x=0}^{x=1} C_1(x^2 - x^3) dx = -\frac{BC_1}{6} \quad (3.2.4.20)$$

al remplazar estos valores se tiene:

$$I(C_1) = \frac{1}{3}C_1^2 + \frac{C_1^2 A}{30} - \frac{BC_1}{6} \quad (3.2.4.21)$$

$$I(C_1) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{A}{10}\right)C_1^2 - \frac{B}{6}C_1 \quad (3.2.4.22)$$

Ahora derivando  $I(C_1)$  con respecto a  $C_1$  e igualando a cero la derivada tenemos

$$\frac{dI(C_1)}{dC_1} = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{A}{10}\right)C_1 - \frac{B}{6} = 0 \quad (3.2.4.23)$$

de donde encontramos el valor de  $C_1$  el cual esta dado por

$$C_1 = \frac{B}{4\left(1 - \frac{A}{10}\right)} \quad (3.2.4.24)$$

entonces la solución de prueba para un término es

$$\tilde{T}_1(x) = \frac{B}{4\left(1 - \frac{A}{10}\right)} x(1-x) \quad (3.2.4.25)$$

2. Solución de prueba para dos términos. Se elige la solución de prueba como

$$\tilde{T}_2(x) = C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x) \quad (3.2.4.26)$$

donde

$$\phi_1(x) = x(1-x) \quad \text{y} \quad \phi_2(x) = x^2(1-x) \quad (3.2.4.27)$$

ambos  $\phi_1(x)$  y  $\phi_2(x)$  satisfacen las condiciones de frontera (3.2.4.9) introduciendo esta solución de prueba en la ecuación (3.2.4.10) se obtiene  $I(C_1, C_2)$  entonces colocando

$$\frac{dI(C_1, C_2)}{\partial C_j} = 0 \quad J=1, 2, \dots, n \quad (3.2.4.28)$$

se obtienen dos ecuaciones algebraicas para la determinación de los coeficientes  $C_1$  y  $C_2$ , definimos para  $A=B=1$ ,  $C_1 = \frac{71}{369}$  y  $C_2 = \frac{7}{41}$

$$\tilde{T}_2(x) = x(1-x) \left( \frac{71}{369} + \frac{7}{41}x \right) \quad (3.2.4.29)$$

Tabla (3.2.4.1) Una comparación entre la solución aproximada y exacta del problema Anterior.

	T	T <sub>1</sub>	%	T <sub>2</sub>	%
x	Exacto	Aproximado	Error	Aproximado	Error
0.25	0.04400	0.0521	18.4	0.04408	0.18
0.50	0.06974	0.0694	0.48	0.06944	0.43
0.75	0.06005	0.0521	13.2	0.06009	0.06
0.85	0.04282	0.0354	17.3	0.04302	0.46

La solución exacta a este problema esta dada como:

$$T(x) = \frac{B}{A} \left[ \frac{\text{Sin } A^{\frac{1}{2}}x}{\text{Sin } A^{\frac{1}{2}}} - x \right] \quad (3.2.4.30)$$

La tabla (3.2.4.1) presenta la comparación de la solución aproximada usando un y dos términos con la solución exacta, claramente, la exactitud es significativamente mejor usando dos términos en la solución.

Aplicación 2:

Considere el siguiente problema de conducción de calor en estado permanente para un cilindro sólido:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right) T = 0 \quad \text{en } 1 < r < 2 \quad (3.2.4.31)$$

$$T=4 \quad \text{para } r=1 \quad (3.2.4.32)$$

$$T=8 \quad \text{para } r=2 \quad (3.2.4.33)$$

Resolver el problema usando el método de Ritz.

Solución: este problema es un caso especial del problema general (3.2.4.1) por lo tanto la ecuación variacional equivalente es inmediatamente obtenida de la ecuación (3.2.4.2) para los valores fijos de las condiciones de frontera se tiene

$$I = \int_{r=1}^{r=2} \left[ \left( \frac{dT}{dr} \right)^2 - \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right) T^2 \right] r dr \quad (3.2.4.34)$$

Proponemos solo un término en la solución de prueba  $\tilde{T}_1(r)$  como:

$$\tilde{T}_1(r) = C_1 \phi_1(r) + \Psi_0(r) \quad (3.2.4.35)$$

Donde:

$$\phi_1(r) = (r-1)(r-2) \quad \text{y} \quad \Psi_0(r) = 4r \quad (3.2.4.36)$$

Esta solución satisface las condiciones de frontera ((3.2.4.32) y (3.2.4.33) ) sustituyendo esta solución en la forma variacional (3.2.4.34) derivando el resultado de la expresión con respecto a  $C_1$  e igualando a cero obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dc_1} &= 2c_1 \int_{r=1}^{r=2} \left( -r^5 + 6r^4 - 8r^3 - 6r^2 + 18r - 12 + \frac{4}{r} \right) dr \\ &+ 8 \int_{r=1}^{r=2} \left( -r^4 + 3r^3 + r^2 - 6r + 2 \right) dr = 0 \end{aligned} \quad (3.2.4.37)$$

Después de realizar la integración  $c_1$  es determinada como:

$$c_1 = -3.245$$

Entonces la solución aproximada esta dada por:

$$\tilde{T}_1(r) = 3.245(r-1)(2-r) + 4r \quad (3.2.4.38)$$

La solución exacta a este problema es:

$$T(r) = 14.43J_1(r) + 3.008Y_1(r) \quad (3.2.4.39)$$

Una comparación de la solución aproximada con la solución exacta para los puntos  $r = 1, 2, 1.5,$  y  $1.8$  muestra que la concordancia esta dentro del  $0.03\%$  , por lo tanto, en esta aplicación la aproximación a un termino proporciona muy buenos resultados.

### 3.2.5 METODO DE RITZ. CONDUCCION DE CALOR BIDIMENSIONAL EN ESTADO ESTABLE

El método de Ritz para resolver problemas de una dimensión en estado estable, se puede extender a problemas bidimensionales tanto en estado estable como transitorio. Para esta se selecciona una solución aproximada  $\theta(x, y)$  la cuál depende de  $n$  parámetros y tiene la forma de una sucesión  $\{\varphi_n(x, y)\}$  convergente de funciones.

$$\theta(x, y) = \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(x, y) \quad (3.2.5.1)$$

Donde  $\varphi_n(x, y)$  para todos los valores de  $n$  satisface las condiciones de frontera. Si  $\varphi_n(x, y)$  se considera además como un producto de una función de  $x$  y de una función de  $y$  solamente:

$$\varphi_n(x, y) = X_n(x) Y_n(y) \quad (3.2.5.2)$$

Entonces  $X_n(x)$  y  $Y_n(y)$  serán formuladas tales que  $X_n(x)$  satisfaga solamente las condiciones de frontera en la dirección  $x$  y  $Y_n(y)$  solamente las condiciones de frontera en la dirección  $y$ . Por lo que la ecuación (3.2.5.1) se puede expresar como:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=0}^N a_n X_n(x) Y_n(y) \quad (3.2.5.3)$$

### Aplicación 1

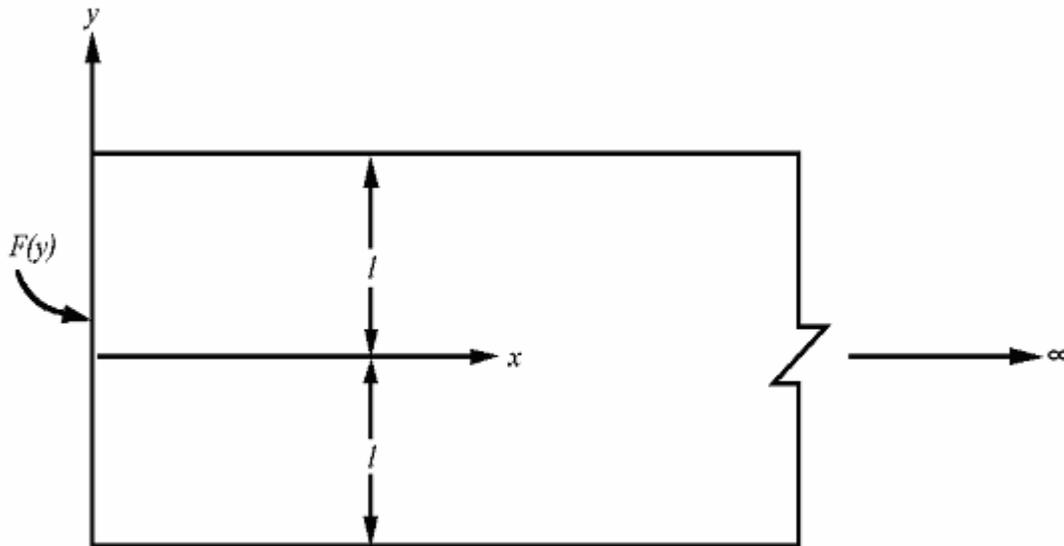


FIGURA. (3.2.5.1) CONDUCCIÓN DE ESTADO ESTABLE EN ALETA BIDIMENCIONAL

Encontrar la distribución de temperatura en estado estable en el alabé bidimensional mostrado en la figura (3.2.5.1). En su base, la temperatura del alabé está dada por  $F(x)$ . Se puede considerar que el coeficiente  $h$  de la superficie es muy grande. El alabé tiene longitud finita y espesor igual a  $2l$ .

La formulación diferencial de este problema es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (3.2.5.4)$$

y las condiciones de frontera:

$$T(0,y)=F(y) \quad (3.2.5.5)$$

$$T(x,\pm l) = T_\infty \quad (3.2.5.6)$$

$$T(\infty,y)=T_\infty \quad (3.2.5.7)$$

El primer paso para la solución del problema es la transformación de la variable dependiente, haciendo  $\theta=T-T_\infty$ , que no cambia la ecuación dominante aunque reduce a tres de las condiciones de frontera a una forma homogénea. Ahora el nuevo problema en función de  $\theta$ , es:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (3.2.5.8)$$

y las condiciones de frontera:

$$\theta(0, y) = f(y) \quad (3.2.5.9)$$

$$\theta(x, \pm l) = 0 \quad (3.2.5.10)$$

$$\theta(\infty, y) = 0 \quad (3.2.5.11)$$

Este problema lo resolveremos por la técnica Integral. Todas las especificaciones y dimensiones son iguales a las dadas anteriormente. La función  $f(y)$  esta dada por  $\theta(0, y) = \theta_{\text{máx}} [1 - (y/l)^2]$  se supone parabólica (ver figura (3.2.5.1')), después para mayor facilidad se reproduce la figura (3.2.5.1'), la ecuación dominante y las condiciones de frontera son:

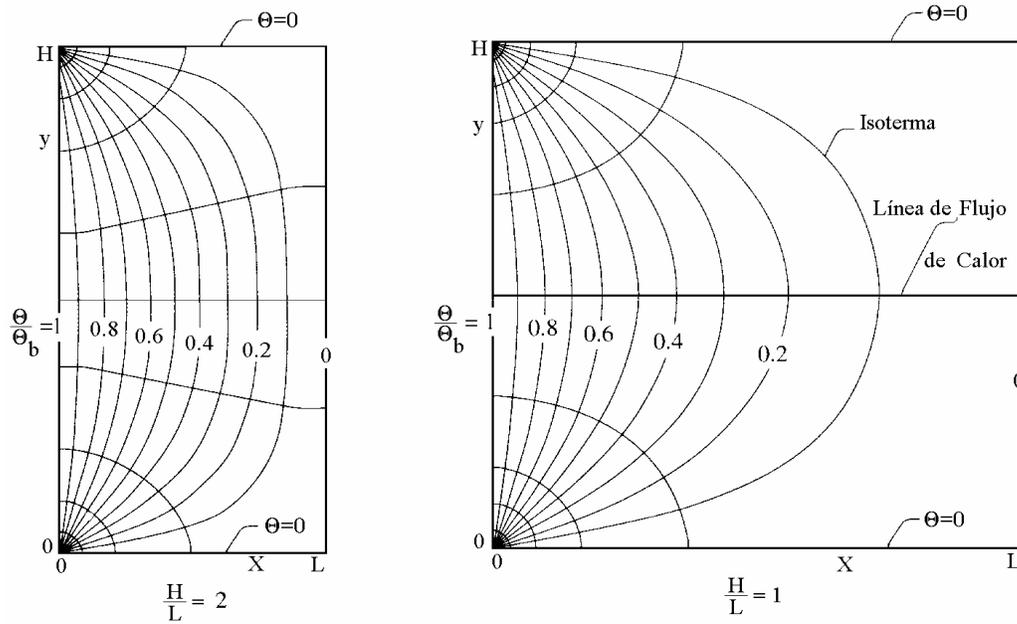


FIGURA. (3.2.5.1') ISOTERMA DE LA FUNCIÓN

$$\Theta = \frac{\sinh[(2n+1)\pi(L-x)/H] \sin[(2n+1)(\pi y/H)]}{\sinh[(2n+1)(\pi L/L)] (2n+1)}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (3.2.5.12)$$

$$\theta(0, y) = f(y) = \theta_{max} \left[ 1 - \left( \frac{y}{l} \right)^2 \right] \quad (3.2.5.13)$$

$$\begin{aligned} \theta(x, \pm l) &= 0 \\ \theta(\infty, y) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.5.14)$$

La técnica integral involucra la resolución de la integral de la ecuación diferencial dominante. Para este caso, la integral que se debe resolver es

$$\int_0^l \int_0^\infty \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) dx dy = 0 \quad (3.2.5.15)$$

Ahora se debe elegir una forma aproximada para la variable dependiente, que satisfaga las condiciones de frontera. Entonces, se hace compatible la forma supuesta de  $\theta(x, y)$  con la ecuación dominante por medio del método de *Ritz*.

Se supone la forma de  $\theta(x, y)$  en las dimensiones  $x$  y  $y$  sujeta a las condiciones de frontera que se deben satisfacer. Para este caso se usa una función cuadrática en la dirección de las  $y$  y una exponencial en la dirección de la  $x$  (ver figura 3.2.5.1'). El perfil de Ritz supuesto es

$$\theta(x, y) = A(l^2 - y^2)e^{-Bx} \quad (3.2.5.16)$$

En donde se requiere que el parámetro  $A$  sea  $\theta_{max} / l^2$  por la condición de frontera en  $x=0$ . En consecuencia, la función que se debe usar es

$$\theta(x, y) = \frac{\theta_{max}}{l^2} (l^2 - y^2) e^{-Bx} \quad (3.2.5.17)$$

El parámetro  $B$  queda determinado al sustituir la ecuación (3.2.5.17) en la relación integral, ecuación (3.2.5.15).

Ahora se desarrolla la integración. La primera integración, término a término, de la ecuación (3.2.5.15) da la expresión

$$\int_0^l \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_0^\infty dy + \int_0^\infty \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_0^l dx = 0 \quad (3.2.5.18)$$

Despejando y resolviendo cada uno de estos términos por separado, usando la ecuación (3.2.5.17), se tiene, para el primero.

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_0^\infty dy &= - \int_0^l \frac{B\theta_{\text{máx}}}{l^2} (l^2 - y^2) e^{-By} \Big|_0^\infty dy \\ &= \frac{B\theta_{\text{máx}}}{l^2} \int_0^l (l^2 - y^2) dy \\ &= \frac{B\theta_{\text{máx}}}{l^2} \left[ l^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^l = \frac{2}{3} Bl\theta_{\text{máx}} \end{aligned} \quad (3.2.5.19)$$

y para el segundo,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_0^l dx &= - \int_0^\infty \theta_{\text{máx}} \frac{2y}{l^2} \Big|_0^l e^{-By} dx \\ &= - \frac{2\theta_{\text{máx}}}{l} \int_0^\infty e^{-By} dx \\ &= - \frac{2\theta_{\text{máx}}}{l} \left[ -\frac{e^{-By}}{B} \right]_0^\infty = - \frac{2\theta_{\text{máx}}}{Bl} \end{aligned} \quad (3.2.5.20)$$

Una vez evaluados estos términos, se puede escribir la ecuación (3.2.5.18)

$$\frac{2}{3} Bl\theta_{\text{máx}} - \frac{2\theta_{\text{máx}}}{Bl} = 0 \quad (3.2.5.21)$$

y se obtiene el valor del parámetro B como:

$$B = \frac{\sqrt{3}}{l}$$

Por lo tanto la solución usando el método de Ritz queda

$$\theta(x, y) = \theta_{\text{máx}} \left( \frac{l^2 - y^2}{l^2} \right) e^{-\sqrt{3}x/l} \quad (3.2.5.22)$$

### 3.2.6 METODO DE GALERKIN

En la sección anterior se presentó el método de Ritz, el cual requiere que la forma variacional equivalente de las ecuaciones diferenciales dominantes debería estar disponible para que este método sea aplicable. En 1915 Galerkin [57] propuso un método de aproximación de solución de problemas de valor de frontera que no requiere la formulación variacional del problema, por lo tanto proporciona una aproximación más clara y general a la solución de problemas de valor de frontera. Es aplicable a la solución de ecuaciones de tipo elíptico, hiperbólico y parabólico, así como a problemas lineales y no lineales. Cuando la forma variacional de un problema de valor de frontera existe, se puede mostrar que los métodos de Ritz y Galerkin son equivalentes y producen resultados idénticos. Por lo tanto, en vez de tratar de desarrollar la forma variacional equivalente para un problema de valor de frontera dado y aplicar el método de Ritz, se puede aplicar el método de Galerkin directamente al problema de valor de frontera. Abajo se presenta la teoría básica y aplicación del método de Galerkin a la solución de problemas de conducción de calor en estado de equilibrio en dominios finitos. El lector deberá consultar las referencias [16, 37, 53-55] para una discusión de la teoría y aplicación del método de Galerkin y las referencias [58-64] para su aplicación en la solución de diversos tipos de problemas de valor de frontera.

La idea básica del método de Galerkin puede ilustrarse refiriéndose al problema de valor de frontera dado por las ecuaciones (3.3.4.1a) considerado en conexión con el método de Ritz. Este problema se escribe más compactamente en la forma:

$$L[T(r)] = 0 \quad \text{en la región } R \quad (3.2.6.1)$$

$$B[T(r_s)] = f(r_s) \quad \text{sobre la frontera } S \quad (3.2.6.2)$$

Donde L es un operador lineal diferencial [por ejemplo:  $L[T] \equiv \nabla^2 T + AT + \left(\frac{1}{k}\right)g$ ] y B es un operador de condición lineal de frontera [por ejemplo:  $B[T] \equiv k\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right) + hT$ ].

Claramente, el problema definido por la ecuación (3.2.6.1). Cubre un rango extenso de problemas de conducción de calor de interés práctico, escogemos una solución de prueba  $\tilde{T}_n(r)$  en la forma:

$$\tilde{T}_n(r) = \Psi_0(r) + \sum_{j=1}^n C_j \phi_j(r) \quad \text{en la región } R \quad (3.2.6.3)$$

Donde la función  $\Psi_0(r)$  satisface la parte no homogénea de las condiciones de frontera (3.2.6.2) y las funciones  $\phi_j(r)$  satisfacen la parte homogénea, es decir

$$B[\Psi_0(r)] = f(r_s) \quad (3.2.6.4)$$

$$B[\phi_j(r)] = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.2.6.5)$$

Si las condiciones de frontera para el problema son todas homogéneas, la función  $\Psi_0(r)$  no se necesita, también es posible transformar las condiciones de frontera no homogéneas a homogéneas. Por ejemplo, en el caso de un problema de dos dimensiones, uno puede definir una variable dependiente nueva  $T^*(x, y)$  tal como

$$T^*(x, y) = T(x, y) + p(x, y) \quad (3.2.6.6)$$

Donde la función  $p(x, y)$  es elegida para que cada superficie de frontera en el lado izquierdo de la ecuación (3.2.6.4) produzca un término que cancele el término no homogéneo  $f(r_s)$  en el lado derecho de la ecuación.

Supóngase funciones apropiadas  $\Psi_0(r)$  y  $\phi_j(r)$ , desde  $j=1, 2, \dots, n$ , son encontradas y la solución de prueba  $\tilde{T}_n(r)$  es construida como se da por la ecuación (3.2.6.3)

Claramente tal como la función de prueba satisface todas las condiciones de frontera para el problema pero no para la ecuación diferencial (3.2.6.1). Si se inserta en la ecuación diferencial (3.2.6.1) un residuo del lado izquierdo por que, solo con la solución exacta es idénticamente igual a cero, y la ecuación diferencial se satisface en cada punto del medio. Para una función de prueba seleccionada que consista de un numero de parámetros ajustables como se dio anteriormente, una buena aproximación de la solución exacta podría considerarse para ser uno de los cuales los coeficientes  $C_j$  son tan ajustados para mantener los residuos tan pequeños como sea posible. El método de Galerkin para la determinación de los coeficientes desconocidos  $C_j$  consiste en requerir promedios considerables de los residuos sobre las regiones consideradas que deberían de eliminarse.

Las funciones considerables se toman para ser las mismas funciones, las cuales son usadas para construir la solución de prueba dada por la ecuación (3.2.6.3) así, el método de Galerkin para la determinación de los coeficientes  $C_j$  esta determinado como:

$$\int_R L[\tilde{T}_n(r)]\phi_j(r)dv = 0 \quad (3.2.6.7)$$

$$\int_R L\left[\Psi_0(r) + \sum_{j=1}^n C_j\phi_j(r)\right]\phi_i(r)dv = 0 \quad i=1,2, \dots, n \quad (3.2.6.8)$$

Esta relación produce un sistema de ecuaciones algebraicas para la determinación de  $n$  coeficientes  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , la expresión dada por la ecuación (3.2.6.7) puede ser interpretada como un equivalente a la ortogonalidad de la expresión  $L[\tilde{T}_n(r)]$  a todas las funciones del sistema. La función, desde  $i=1, 2, \dots, n$ , son considerados completas en la región  $R$ . De esta forma si todas las funciones  $\phi_i(r)$  pertenecientes a este grupo completo están incluidos, el requerimiento dado por la ecuación (3.2.6.7) corresponde a una solución exacta del problema, sin embargo en el método de Galerkin solo un numero finito de estas funciones son consideradas en la ecuación (3.2.6.7) por lo tanto la solución será aproximada.

El método de Galerkin tal como se describe arriba proporciona una aproximación simple y sencilla a la solución de problemas de conducción de calor en estado estable. Cuando el problema de valor de frontera tiene una forma variacional, las soluciones obtenidas por el método de Galerkin como se definen por las ecuaciones (3.2.6.7), (3.2.6.8), y este método

de Ritz definido por las ecuaciones (3.2.4.2), usan la misma solución de prueba (3.2.6.3) se obtienen resultados idénticos. Una discusión de la equivalencia de estos dos métodos, cuando la forma variacional de los problemas existe se da en la referencia [53,pp 279-281] . Por lo tanto el método de Galerkin es preferible al método de Ritz ya que no requiere forma variacional en el problema, en resumen esto se aplica a problemas que no tienen forma variacional.

Un paso importante en la solución de problemas de valor de frontera por el método de Ritz o Galerkin es la construcción de funciones  $\phi_j(r)$  que satisfacen la parte homogénea de las condiciones de frontera para el problema. Ahora presentaremos la construcción de las funciones  $\phi_j(r)$

### CONSTRUCCION DE LAS FUNCIONES $\phi_j(r)$

Las funciones,  $j = 1, 2, \dots, n$  si es posible, deberán pertenecer a la clase de funciones que son completas en la región considerada. Deberían ser continuas en la región y tener derivadas continuas de primer y segundo orden. Pueden ser funciones polinomiales, trigonométricas, circulares o esféricas, pero, estas sólo satisfarán la parte homogénea de las condiciones de frontera para el problema. Un problema para regiones finitas se sujetará a condiciones de frontera de primer, segunda o tercera clase o a sus combinaciones. Enseguida presentaremos algunas formas usuales que ayudan en la construcción de funciones  $\phi_j(r)$  , con  $j = 1, 2, \dots, n$

Que satisfacen la parte homogénea de las condiciones de frontera para el problema.

Para geometrías tales como la de un plano, un cilindro hueco, un rectángulo, etc. y cuyas coordenadas de superficie coinciden con las superficies de frontera, las soluciones básicas se listan en las tablas 2-1, 3-1 y 3-2. Pueden tomarse como las funciones  $\phi_j(r)$  . Por ejemplo para el plano  $0 \leq x \leq L$  , la función  $\phi_j(r)$  , con  $j = 1, 2, \dots, n$  depende de la combinación de condiciones de frontera en  $x = 0$  y  $x = L$ , se puede obtener de la solución básica o elemental listada en la tabla 2-1 tomando sólo la primer  $n$  de las eigenfunciones. De forma similar, para los problemas de un cilindro sólido y un cilindro hueco con simetría cilíndrica, las funciones,  $j = 1, 2, \dots, n$  pueden obtenerse de las tablas 3-1 y 3-2 respectivamente.

Hay muchas situaciones en las cuales las fronteras de la región son irregulares y si el resultado de la solución no se puede construir por la solución elemental buscada en las tablas 2-1, 3-1 y 3-3 que se discuten anteriormente. Ahora describimos otro de los métodos de construcción de funciones  $\phi_j(r)$  que se aplica tanto a fronteras regulares como irregulares.

**Condiciones de frontera de primera clase.** Asumimos que las condiciones de frontera para el problema son todas de primera clase en todas sus fronteras. Permítase, una función  $w(x, y)$  que sea continua en la región  $R$  y tenga derivadas continuas con respecto a  $x$  y a  $y$ , también satisfaga las condiciones sobre:

$$w(x, y) > 0 \text{ dentro de } R \text{ y } w(x, y) = 0 \text{ en la frontera } S \quad (3.2.6.9)$$

Claramente la función  $w(x, y)$  satisface la parte homogénea de las condiciones de frontera de primera clase, para el problema hace que se elimina en las fronteras. Entonces, la función  $\phi_j(x, y)$  para los problemas se pueden construir por los productos de  $w(x, y)$  y varias potencias de  $x$  y  $y$  en la forma

$$\phi_1 = w, \phi_2 = wx, \phi_3 = wy, \phi_4 = wx^2, \phi_5 = wxy, \dots, \quad (3.2.6.10)$$

Las funciones  $\phi_j(x, y)$   $j = 1, 2, \dots, n$  construidas de esta manera satisface la parte homogénea de las condiciones de frontera para el problema, tiene derivadas continuas en  $x$  y  $y$ , y se comprueba en la referencia [53, p.276] que ellas constituye un sistema completo de funciones. Así, el problema se convierte en una determinación de las funciones auxiliares  $w(x, y)$ . Estas funciones pueden determinarse utilizando las ecuaciones de contorno de frontera como se describe a continuación.

1. Para regiones que tienen contorno simple continuo, tales como el círculo, que se tienen

$$F(x, y) = 0 \quad (3.2.6.11)$$

Será la ecuación de contorno. Claramente, la función  $F(x, y)$  es continua y tiene derivadas parciales con respecto a  $x$  y  $y$ . Así la función  $w(x, y)$  puede elegirse como

$$w(x, y) = \pm F(x, y) \quad (3.2.6.12)$$

Por ejemplo, para una región circular de radio  $R$  con centro en el origen, la ecuación de contorno satisface la ecuación

$$F(x, y) = R^2 - x^2 - y^2 = 0 \quad (3.2.6.13a)$$

y la función  $w(x, y)$  se toma como

$$w(x, y) = R^2 - x^2 - y^2 = 0 \quad (3.2.6.13b)$$

2. -Para regiones que tienen contorno de frontera en la forma de polinomio convexo, se tienen las ecuaciones de sus lados en la forma

$$F_1 = a_1x + b_1y + d_1 = 0, F_2 = a_2x + b_2y + d_2 = 0, \dots, F_n = a_nx + b_ny + d_n = 0 \quad (3.2.6.14a)$$

Así, la función  $w(x, y)$  se escoge de la forma

$$w(x, y) = \pm F_1(x, y) F_2(x, y) F_3(x, y) \dots F_n(x, y) \quad (3.2.6.14b)$$

Que elimina a cada punto sobre la frontera y satisface la parte homogénea de las condiciones de frontera de primera clase para la región.

Para geometrías no convexas el problema es más complejo, una discusión sobre este asunto se da en la referencia [53, p278].

Aplicación. Construir la función  $w(x, y)$  como se especifica anteriormente para las cuatro diferentes geometrías mostradas en la figura (3.2.6.1)

Solución. Las ecuaciones para contorno de cada una de las cuatro geometrías mostradas en las figuras ((3.2.6.1) a, b, c, d) están dadas respectivamente como:

$$a-x=0, \quad a+x=0, \quad b-y=0, \quad b+y=0 \quad (3.2.6.15a)$$

$$y-\alpha x=0, \quad y+\beta x=0, \quad L-x=0 \quad (3.2.6.15b)$$

$$x=0, \quad y=0, \quad 1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \quad (3.2.6.15c)$$

$$R_1^2 - x^2 - y^2 = 0, \quad R_2^2 - (x-L)^2 - y^2 = 0 \quad (3.2.6.15d)$$

Entonces las funciones correspondientes  $w(x, y)$  para cada una de las geometrías mostradas en las figuras 3.2.6.1a, b, c, d están respectivamente dadas por

$$w(x, y) = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2) \quad (3.2.6.16a)$$

$$w(x, y) = (y - \alpha x)(y + \beta x)(L - x) \quad (3.2.6.16b)$$

$$w(x, y) = xy \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \quad (3.2.6.16c)$$

$$w(x, y) = (R_1^2 - x^2 - y^2) [R_2^2 - (x - L)^2 - y^2] \quad (3.2.6.16d)$$

Otras condiciones de frontera. Ninguna regla general puede ser colocada para situaciones que involucran diferentes combinaciones de condiciones de frontera de primera, segunda o tercera clase. La función  $\phi_j$  tiene que ser elegida de tal forma que sean continuas así como su derivada y que satisfagan las condiciones de frontera para el problema. Así, la solución de prueba se construye de acuerdo a la combinación lineal de funciones  $\phi_j$ . Ilustraremos este punto con ejemplos específicos.

Considere un problema de conducción de calor en estado estable de una sola dimensión.

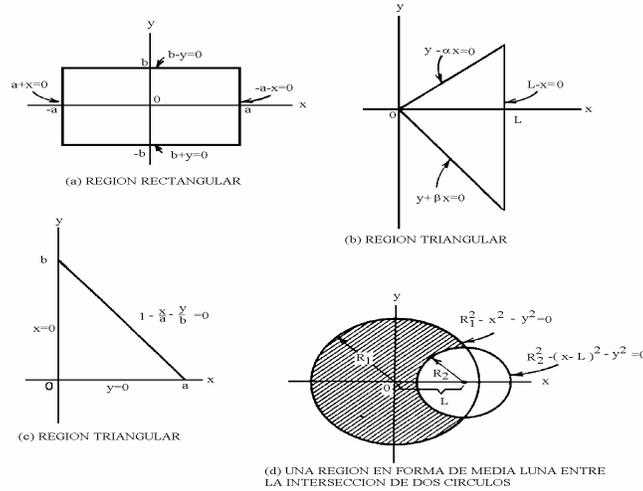


FIGURA. (3.2.6.1) REGION DE CONTORNO QUE TIENEN CONDICIONES DE FRONTERA EN LA FORMA DE UN POLIGONO CONVEXO Y UNA REGION LIMITADA POR DOS CIRCULOS , (a) REGION RECTANGULAR , (b, c) REGION TRIANGULAR ,(d) UNA REGION EN FORMA DE MEDIA LUNA ENTRE LA INTERSECCIÓN DE DOS CIRCULOS

Sujeto a las condiciones de frontera

$$\left[ -\frac{dT}{dx} + h_1 T \right]_{x=0} = 0 \quad y \quad \left[ -\frac{dT}{dx} + h_2 T \right]_{x=L} = 0 \quad (3.2.6.17a)$$

Las funciones  $\phi_j$  pueden ser elegidas como

$$\phi_1 = x^2 \left( x - L - \frac{L}{2 + h_2 L} \right), \quad \phi_2 = (L - x)^2 \left( x + L - \frac{L}{2 + h_1 L} \right)$$

$$y \quad \phi_j = x^j (L - x)^2, \quad j=3, 4, 5, \dots \quad (3.2.6.17b)$$

así, la solución de prueba es construida como

$$\tilde{T}_n(x) = \phi_1 + \phi_2 + \sum_{j=3}^n C_j \phi_j \quad \text{en } 0 \leq x \leq L \quad (3.2.6.17c)$$

Satisface las condiciones de frontera (3.2.6.1a). Los coeficientes  $C_j$  son determinados por el método de Galerkin.

Ahora ilustraremos la aplicación del método de Galerkin.

### Aplicación 1

Resolver la ecuación (3.2.4.8) bajo las condiciones de frontera (3.2.4.9), por el método de Galerkin usando la solución de prueba de un sólo término dada por la ecuación (3.2.4.11) y (3.2.4.12).

Solución. El método de Galerkin definido por la ecuación (3.2.6.7) es aplicado a la solución del problema que se da por las ecuaciones (3.2.4.8) obtenemos

$$\int_{x=0}^l \left[ \frac{d^2 \tilde{T}}{dx^2} + A\tilde{T} + Bx \right] \phi_i(x) dx = 0 \quad (3.2.6.18)$$

y la solución de prueba de un sólo término se toma como

$$\tilde{T}_1(x) = c_1 x(1-x) \quad (3.2.6.19)$$

la solución de la ecuación (3.7.104a) proporciona

$$\tilde{T}_1(x) = \frac{B}{4(1-A/10)} x(1-x) \quad (3.2.6.20)$$

La cuál es exactamente igual a la que se da por la ecuación (3.2.4.25) y que es obtenida por el método de Ritz.

### Aplicación 2

Resolver la ecuación (3.2.4.31) bajo las condiciones (3.2.4.32, 3.2.4.33) por el método de Galerkin utilizando la solución de prueba dada por la ecuación (3.2.4.35).

Solución. El método de Galerkin cuando es aplicado a la solución del problema dada por las ecuaciones (3.2.4.31) proporciona

$$\int_{r=1}^2 \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\tilde{T}}{dr} \right) + \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right) \tilde{T} \right] \phi_i(r) dr = 0 \quad (3.2.6.21a)$$

donde

$$\tilde{T}_1(r) = c_1 \phi_1(r) + \psi_0(r) \quad (3.2.6.21b)$$

$$\phi_1(r) = (r-1)(r-2), \psi_0(r) = 4r \quad (3.2.6.21c)$$

Después de llevar a cabo la operación indicada encontramos  $C_1 = -3.245$  ó

$$\tilde{T}_1(r) = 3.245(r-1)(2-r) + 4r \quad (3.2.6.22)$$

Que es exactamente igual a la que se da por la ecuación (3.2.4.36) y que se obtuvo por el método de Ritz

Aplicación 3.

Resolver el problema de conducción de calor en estado estable en una región rectangular  $(-a, a; -b, b)$  con una generación de calor en un intervalo constante de  $g \text{ w/m}^3$  y las fronteras mantenidas a la temperatura cero, usando el método de Galerkin y comparar el resultado con la solución exacta.

Solución. La formulación matemática del problema es

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{k} g = 0 \text{ en } -a < x < a \text{ y } -b < y < b \quad (3.2.6.23a)$$

$$T = 0 \text{ en } x = \pm a \text{ y } y = \pm b \quad (3.2.6.23b)$$

La solución de este problema por el método de Galerkin, de acuerdo con la ecuación (3.2.6.7) es escrita como

$$\int_{x=-a}^a \int_{y=-b}^b \left[ \frac{d^2 \tilde{T}}{dx^2} + \frac{d^2 \tilde{T}}{dy^2} + \frac{1}{k} g \right] \phi_1(x, y) dx dy = 0 \quad (3.2.6.24a)$$

Consideramos la solución de prueba de un sólo término como

$$\tilde{T}_1(x, y) = c_1 \phi_1(x, y) \quad (3.2.6.24b)$$

donde la función  $\phi_1$  se obtiene por la ecuación (3.2.6.16a) como

$$\phi_1(x, y) = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2) \quad (3.2.6.24c)$$

Introduciendo esta solución de prueba en la ecuación (3.2.6.16a) y desarrollando la integral obtenemos

$$C_1 = \frac{5}{8} \frac{g/k}{a^2 + b^2}$$

Por lo tanto la solución aproximada de un sólo término se transforma en

$$T_1(x, y) = \frac{5}{8} \frac{g/k}{a^2 + b^2} (a^2 - x^2)(b^2 - y^2) \quad (3.2.6.25)$$

La solución exacta para este problema es:

$$T(x, y) = \frac{g}{k} \left[ \frac{a^2 - x^2}{2} \right] - 2a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\beta_n^3} \frac{\cosh\left(\beta_n \frac{y}{b}\right) \cdot \cos\left(\beta_n \frac{x}{a}\right)}{\cosh\left(\beta_n \frac{b}{a}\right)} \quad (3.2.6.26)$$

Donde

$$\beta_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

Para comparar estos dos resultados consideraremos la temperatura central (i.e.,  $x=0, y=0$ ) para el caso en que  $a = b$  y obtenemos:

$$\text{Aproximada} \quad T_1(0,0) = \frac{5}{16} \frac{ga^2}{k} = 0.3125 \frac{ga^2}{k} \quad (3.2.6.27a)$$

$$\text{exacta} \quad T(0,0) = \frac{ga^2}{k} \left[ \frac{1}{2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\beta_n^3 \cosh \beta_n} \right] \quad (3.2.6.27b)$$

El error existente en la solución de un sólo término es alrededor de 6.7 %.

Para la solución de prueba de dos términos, la distribución de temperatura podrá formarse en la forma

$$T_2(x, y) = (C_1 + C_2 x^2)(a^2 - x^2)(b^2 - y^2) \quad (3.2.6.38)$$

Y los cálculos se realizarán de forma similar para determinar los coeficientes  $C_1$  y  $C_2$ .

### 3.2.7 METODO DE KANTOROVICH. [8], [20], [24].

El método de Kantorovich queda en una posición intermedia entre la solución exacta y el método de Ritz.

En la sección anterior se construyó el perfil para dos dimensiones que se expresa por la ecuación (3.2.5.18) especificando las funciones  $X_n(x)$  y  $Y_n(y)$  en las direcciones  $x$  y  $y$ . Sin embargo, en muchos problemas físicos el desarrollo general de la temperatura  $\theta(x, y)$  en una dirección, es decir, en la dirección  $y$ , se puede predecir con mayor precisión que en la otra dirección. Para el mismo caso, el perfil de Ritz puede generalizarse especificando completamente las funciones  $Y_n(y)$ , pero dejando sin especificar la función  $X_n(x)$ , para ser consideradas con condiciones de frontera apropiadas en dirección  $x$ . Este procedimiento constituye la base del Método de Kantorovich.

Aplicación del método de Kantorovich.

Aplicación 1.

Encontrar la distribución de temperatura en estado estable en el alabé bidimensional mostrado en la figura (3.2.6.1). En su base, la temperatura del alabé está dada por  $F(x)$ . Se puede considerar que el coeficiente  $h$  de la superficie es muy grande. El alabé tiene longitud finita y espesor igual a  $2l$ .

La formulación diferencial de este problema es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (3.2.7.1)$$

y las condiciones de frontera:

$$T(0, y) = F(y) \quad (3.2.7.2a)$$

$$T(x, \pm l) = T_\infty \quad (3.2.7.2b)$$

$$T(\infty, y) = T_\infty \quad (3.2.7.2c)$$

El primer paso para la solución del problema es la transformación de la variable dependiente, haciendo  $\theta = T - T_\infty$ , que no cambia la ecuación dominante aunque reduce a tres de las condiciones de frontera a una forma homogénea. Ahora el nuevo problema en función de, es:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (3.2.7.1')$$

y las condiciones de frontera:

$$\theta(0, y) = f(y) \quad (3.2.7.2a')$$

$$\theta(x, \pm l) = 0 \quad (3.2.7.2b')$$

$$\theta(\infty, y) = 0 \quad (3.2.7.2c')$$

Este problema lo resolveremos por la técnica Integral. Todas las especificaciones y dimensiones son iguales a la dada anterior mente. La función  $f(y)$  dada por:  $\theta(0, y) = \theta_{\max}[1 - (y/l)^2]$  se supone parabólica después para mayor facilidad se reproduce la figura 3.2.6.1, la ecuación dominante y las condiciones de frontera son:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (3.2.7.3)$$

$$\theta(0, y) = f(y) = \theta_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{y}{l} \right)^2 \right] \quad (3.2.7.4)$$

$$\begin{aligned} \theta(x, \pm l) &= 0 \\ \theta(\infty, y) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.7.5)$$

La técnica integral involucra la resolución de la integral de la ecuación diferencial dominante. Para este caso, la integral que se debe resolver es

$$\int_0^l \int_0^\infty \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) dx dy = 0 \quad (3.2.7.6)$$

Ahora se debe elegir una forma aproximada para la variable dependiente,  $\theta(x, y)$ , que satisfaga las condiciones de frontera. Entonces, se hace compatible la forma supuesta de  $\theta(x, y)$  con la ecuación dominante por medio del método de Kantorovich.

En el método de Kantorovich el procedimiento es bastante parecido excepto que se supone que la forma funcional para  $\theta(x, y)$  está solamente en una dirección. En este caso, sea la dirección de las  $y$ , y la forma es cuadrática como antes. Ahora el perfil supuesto de Kantorovich es

$$\theta(x, y) = (l^2 - y^2)X(x) \quad (3.2.7.7)$$

En donde se obtiene la función  $X(x)$  de la formulación integral y de las condiciones de frontera. Al sustituir la ecuación (3.2.7.7) en la ecuación (3.2.7.6) se obtiene

$$\int_0^l \int_0^\infty \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_0^l \int_0^\infty [(l^2 - y^2)X'' - 2X] dx dy = 0 \quad (3.2.7.8)$$

La primera integración en la dirección de las  $y$  da

$$\int_0^{\infty} \left[ \left( l^2 y - \frac{y^3}{3} \right) X'' - 2Xy \right] dx = 0 \quad (3.2.7.9)$$

y evaluando los limites, se tiene

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{2}{3} l^3 X'' - 2lX \right] dx = 0 \quad (3.2.7.10)$$

Para que esta integral, evaluada entre los limites 0 e  $\infty$ , sea verdadera en general, él integrando debe ser idénticamente igual a cero. De esa manera se tiene la ecuación diferencial ordinaria

$$X'' - \frac{3}{l^2} X = 0 \quad (3.2.7.11)$$

y las condiciones de frontera son:

$$X(\infty) = 0, \quad X(0) = \frac{\theta_{\text{máx}}}{l^2}$$

La solución a la ecuación (3.2.7.11) es:

$$X = Me^{-\sqrt{3x}/l} + Ne^{\sqrt{3x}/l} \quad (3.2.7.12)$$

Aplicando las condiciones de frontera se obtiene, para las constantes M y N,

$$M = \frac{\theta_{\text{máx}}}{l^2} \quad N = 0$$

En consecuencia se tiene, para la función

$$X(x) = \frac{\theta_{\text{máx}}}{l^2} e^{-\sqrt{3x}/l} \quad (3.2.7.13)$$

y para la solución completa

$$\theta(x, y) = \theta_{\text{máx}} \left( \frac{l^2 - y^2}{l^2} \right) e^{-\sqrt{3}x/l} \quad (3.2.7.14)$$

Se ve que el método de Kantorovich da el mismo resultado, ecuación (3.2.7.14), que el método de Ritz, ecuación (3.2.5.22), para este ejemplo. No siempre dan resultados idénticos los dos métodos.

Se ha mostrado la distinción entre los dos métodos. En el método de Ritz se tiene una suposición razonablemente completa con relación a la forma de la variable dependiente en todas las direcciones. El perfil supuesto incluye al menos un parámetro no especificado. Sustituir el perfil de Ritz en la forma integral de la ecuación dada, da una ecuación algebraica en el parámetro desconocido. La solución se completa resolviendo la ecuación algebraica para determinar este parámetro. En el método de Kantorovich se supone la variable dependiente en solamente una dirección con una función no especificada para describir la variación en la otra dirección. Sustituir este supuesto perfil de Kantorovich en la formulación integral, produce una ecuación diferencial que se debe resolver para completar la solución.

Generalmente el método de Ritz es más rápido; el método de Kantorovich es el más exacto. Sucede que la forma supuesta más general como en el enfoque de Kantorovich da una solución más exacta a costa de un esfuerzo (a veces considerablemente mayor).

En el tratado de Arpaci se da una descripción completa de la técnica integral

### 3.2.8 COMPARACION DE LOS METODOS VARIACIONALES

El objetivo es desarrollar y aplicar los métodos variacionales como son: Ritz, Kantorovich y Galerkin, en la solución numérica a problemas de la ingeniería en particular para determinar la distribución de la temperatura en un calentador eléctrico con generación interna y uniforme. Los resultados numéricos de la solución, se comparan con la solución exacta.

#### 1. INTRODUCCION

Los métodos variacionales clásicos de Ritz, Kantorovich y Galerkin, se basan en la minimización de una funcional asociada al problema dado, que no es otra cosa que la energía total del sistema físico definido. A fin de tomar como ejemplo, consideremos un calentador eléctrico.

Para esta aplicación, se considera un calentador eléctrico de sección transversal rectangular  $(-a, a) \times (-b, b)$  con una fuente de calor interna uniforme (constante) de  $g \text{ w/m}^3$  cuyas fronteras mantenidas a la temperatura cero. Nuestro propósito es determinar la distribución de temperatura.

Para esto se ha considerado la ecuación que gobierna el fenómeno de transferencia de calor del calentador en esta región:

$$[-a, a] \times [-b, b] = R$$

Donde

$$S = (-a, y)U(a, y)U(x, -b)U(x, b)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{k}g = 0 \text{ en } -a < x < a \text{ y } -b < y < b$$

Sujeto a las condiciones de frontera S:

$$T = 0 \text{ en } x = \pm a \text{ y } y = \pm b$$

Que representando en forma de operadores diferenciales se tiene:

$$LT = \nabla^2 T = -\frac{g}{k} \text{ en } R \quad (3.2.8.1)$$

Bajo la condición de frontera:

$$BT = T|_S = 0 \text{ en } S \quad (3.2.8.2)$$

Si multiplicamos a (1.1) por T tenemos:

$$T LT = T \nabla^2 T = -\frac{g}{k} T$$

de donde se tiene:

$$I[T] = \int_R T \left( LT + \frac{g}{k} \right) dR, \quad \text{o sea,}$$

la funcional para la ecuación (1.1) se expresa por:

$$I = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left( \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{g}{k} \right) T dx dy \quad (3.2.8.3)$$

Donde su primera variación viene dada por:

$$\delta I = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{g}{k} \right) \delta T dx dy = 0 \quad (3.2.8.4)$$

distribuyendo el operador de integración se tienen tres integrales:

$$A = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \delta T dx dy \quad B = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \delta T dx dy \quad C = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left( \frac{g}{k} \right) \delta T dx dy$$

Realizando integración por partes en la variable x para A se tiene:

$$\begin{aligned} dv &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx & \text{así } v &= \frac{\partial T}{\partial x} = T_x \\ u &= \delta T & \text{así } \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx} (\delta T) = \delta \left( \frac{d}{dx} T \right) = \delta T_x \\ A &= \int_{-b}^b \left( (\delta T) T_x \Big|_{-a}^a - \int_{-a}^a T_x \delta(T_x) dx \right) dy \end{aligned}$$

Donde el primer termino de estas integrales vale cero por las condiciones de frontera:

$$A = - \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a T_x \delta(T_x) dx dy \quad (3.2.8.5)$$

Usando la identidad:

$$T_x \delta(T_x) = \frac{1}{2} \delta(T_x^2) \quad (3.2.8.6)$$

Sustituida en la ecuación anterior se tiene:

$$A = - \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a \left[ \frac{1}{2} \delta(T_x^2) \right] dx dy \quad (3.2.8.6a)$$

$$A = - \frac{1}{2} \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a \left[ \delta(T_x^2) \right] dx dy \quad (3.2.8.6b)$$

Realizando un procedimiento análogo y usando propiedades de integración iterada [6] se tiene algo similar para la integral B:

$$B = - \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a \left[ \frac{1}{2} \delta(T_y^2) \right] dx dy \quad (3.2.8.7)$$

$$B = - \frac{1}{2} \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a \left[ \delta(T_y^2) \right] dx dy \quad (3.2.8.8)$$

Realizando la suma de las tres integrales e igualando a cero

$$\begin{aligned} \delta I = & - \frac{1}{2} \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a \left[ \delta(T_x^2) \right] dx dy - \frac{1}{2} \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a \left[ \delta(T_y^2) \right] dx dy \\ & + \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a \frac{g}{k} T dx dy = 0 \end{aligned} \quad (3.2.8.9)$$

$$\delta I = \delta \left[ \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 - \frac{2g}{k} T \right] dx dy \right] = 0 \quad (3.2.8.10)$$

De donde la funcional I[T] que hay que minimizar es:

$$I[T] = \int_{-b-a}^b \int_{-b-a}^a \left\{ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 - \frac{2g}{k} T \right\} dx dy \quad (3.2.8.11)$$

Es bien conocido el hecho que las soluciones de la ecuación (3.2.8.1) bajo las condiciones de frontera (3.2.8.2), son los puntos críticos de la funcional Energía (3.4.8.11) por lo que resolver (3.2.8.1) bajo (3.2.8.2), es determinar los puntos críticos de ella.

A fin de determinar los puntos críticos de (3.2.8.11) se selecciona una forma aproximada para la variable dependiente, T(x, y), que satisfaga las condiciones de frontera, por medio

de los métodos de Ritz, Kantorovich y Galerkin. Abordaremos primeramente el método de Ritz

## 2. METODO DE RITZ

En este método se selecciona una solución aproximada  $T(x, y)$  la cual depende de  $N$  parámetros y tiene la forma de una sucesión  $\{\varphi_n(x, y)\}$  convergente de funciones:

$$T(x, y) = \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(x, y) \quad (3.2.8.12)$$

Donde  $\varphi_n(x, y)$  para todos los valores de  $n$  satisfagan las condiciones de frontera. Si  $\varphi_n(x, y)$  se considera además como un producto de una función de  $x$  y de una función  $y$  solamente:

$$\varphi_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) \quad (3.2.8.13)$$

Entonces  $X_n(x)$  y  $Y_n(y)$  serán formuladas de tal forma que  $X_n(x)$  satisfaga solamente las condiciones de frontera en la dirección  $x$  y  $Y_n(y)$  solamente las condiciones de frontera en la dirección  $y$ , por lo que la ecuación (3.2.8.3) se expresa por:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^N a_n X_n(x) Y_n(y) \quad (3.2.8.14)$$

Aplicando el método de Ritz, se considera la función  $T(x, y)$ , de tal manera que satisfice las condiciones de frontera del problema. Para este caso se puede emplear alguna de las siguientes series:

$$1.- T(x, y) = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)(a_0 + a_1x^2 + a_2y^2 + \dots)$$

$$2.- T(x, y) = a_0(a^2 - x^2)(b^2 - y^2) + a_1(a^2 - x^2)^2(b^2 - y^2) + \dots$$

$$3.- T(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$4.- T(x, y) = A(b^2 - y^2)e^{-Bx}$$

Ambas series satisfacen las condiciones de frontera, del problema

Considerándola serie (1) truncada en el primer término donde esta  $a_0$ , para él calculo de la primera aproximación de Ritz:

$$T(x, y) = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)a_0 \quad (3.2.8.15)$$

Y sustituyéndola en la ecuación (1.9) e integrando se obtiene el coeficiente  $a_0$

$$a_0 = \frac{5}{8} \frac{g}{k(a^2 + b^2)} \quad (3.2.8.16)$$

Por lo tanto, el perfil de primer orden de Ritz basado en la formulación variacional se expresa por:

$$T(x, y) = \frac{5}{8} \left( \frac{g}{k(a^2 + b^2)} \right) (a^2 - x^2)(b^2 - y^2) \quad (3.2.8.17)$$

### 3. METODO DE KANTOROVICH

En la sección anterior se construyó el perfil de Ritz para el calentador eléctrico, especificando las funciones  $X_n(x)$  y  $Y_n(y)$  en las direcciones  $x$  y  $y$ . Sin embargo, en muchos problemas físicos el comportamiento general de la temperatura  $T(x, y)$  en una dirección, es decir, en la dirección  $y$ , se puede predecir con mayor precisión que en la otra dirección. Para el mismo caso, el perfil de Ritz puede generalizarse especificando las funciones  $Y_n(y)$ , pero dejando sin especificar la función  $X_n(x)$ , para ser consideradas con condiciones de frontera en la dirección  $x$ . Este procedimiento constituye la base del Método de Kantorovich.

Aplicando el método de Kantorovich, obtener una solución aproximada del problema anterior.

Suponiendo que la temperatura en la dirección  $y$ , es una parábola, mientras que en  $x$ , es  $X(x)$  es desconocida, por lo tanto:

$$T(x, y) = (b^2 - y^2)X(x) \quad (3.2.8.18)$$

La cual satisface las condiciones de frontera del problema en la dirección  $y$ , y se considera como una primera aproximación. Como en el caso anterior solo que ahora la función desconocida es  $Y(y)$ .

$$T(x, y) = (a^2 - x^2)Y(y) \quad (3.2.8.19)$$

Cuando se quiere más precisión en los cálculos puede usar alguna de las siguientes funciones.

$$T(x, y) = (a^2 - x^2)(1 + x^2 + \dots + x^n)Y(y) \quad (3.2.8.20)$$

$$T(x, y) = (a^2 - y^2)(1 + y^2 + \dots + y^n)X(x) \quad (3.2.8.21)$$

Retornando a la solución de problema por el método de Kantorovich, tomando la ecuación (3.2.8.19).

$$T(x, y) = (b^2 - y^2)u(x) \quad (3.2.8.22)$$

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = (b^2 - y^2)u'(x) \quad (3.2.8.23)$$

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial y} = -2yu(x) \quad (3.2.8.24)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (3.2.8.9), se obtiene:

$$I = \int_{-a-b}^a \int^b \left\{ [(b^2 - y^2)u'(x)]^2 + [-2yu(x)]^2 - \frac{2}{k} g(b^2 - y^2)u(x) \right\} dy dx \quad (3.2.8.25)$$

integrando con respecto a y se tiene:

$$I = \int_{-a}^a \left[ \frac{16}{15} b^5 [u'(x)]^2 + \frac{8}{3} b^3 u^2(x) - \frac{8g}{3k} b^3 u(x) \right] dx \quad (3.2.8.26)$$

Ahora usando las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$-\frac{\partial F}{\partial u(x)} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial u'(x)} \right) = 0 \quad (3.2.8.27)$$

Donde F esta dada como:

$$F = [(b^2 - y^2)u'(x)]^2 + [-2yu(x)]^2 - \frac{2}{k} g(b^2 - y^2)u(x) \quad (3.2.8.28)$$

Usando (3.10) en (3.11) y simplificando:

$$u''(x) - \frac{5}{2b^2} u(x) = -\frac{5}{4} \left( \frac{g}{kb^2} \right) \quad (3.2.8.29)$$

Esta ecuación diferencial puede ser resuelta por dos métodos diferentes, coeficientes indeterminados y variación de parámetros.

$$u(x) = \frac{g}{2k} \left( 1 - \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{a}\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b}\right)} \right) \quad (3.2.8.30)$$

Sustituyendo (3.2.8.13) en la ecuación (3.2.8.5) se tiene:

$$T(x, y) = \frac{g}{2k} \left( 1 - \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{a}\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b}\right)} \right) (b^2 - y^2) \quad (3.2.8.31)$$

Para tener una mejor exactitud en la solución utilice:

$$T(x, y) = (b^2 - y^2)u_1(x) + (b^2 - y^2)^2 u_2(x) \quad (3.2.8.32)$$

Realizando un procedimiento análogo al anterior se llega a la siguiente solución:

$$T(x, y) = (b^2 - y^2) \left[ -\frac{\frac{g}{k}}{2 \cosh\left(\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b}\right)} \cosh\left(\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{b}\right) + \frac{1}{2} \frac{g}{k} + \right. \\ \left. (b^2 - y^2) \left[ -\frac{\frac{g}{k}}{16 \cosh\left(\sqrt{\frac{21632}{1215}} \frac{a}{b^2}\right)} \cosh\left(\sqrt{\frac{21632}{1215}} \frac{x}{b^2}\right) + \frac{1}{16} \frac{g}{k} \right] \right] \quad (3.2.8.33)$$

También se puede realizar este cálculo utilizando la siguiente función:

$$T(x, y) = (b^2 - y^2) [X_1(x) + y^2 X_2(x)] \quad (3.2.8.34)$$

#### 4. METODO DE GALERKIN.

A diferencia del Método de Ritz el cual requiere necesariamente la equivalencia variacional, de la ecuación diferencial que gobierna el fenómeno, así como sus condiciones de frontera.

El Método de Galerkin's considera el siguiente problema:

$$L[T(r)] = 0 \quad \text{en } R \quad (3.2.8.35)$$

$$B[T(r_s)] = f(r_s) \quad \text{en la frontera de } S \quad (3.2.8.36)$$

Donde L es el operador diferencial lineal

$$\left[ i, e, L[T] = \nabla^2 T + \Delta T^2 + \left( \frac{1}{k} \right) \right], \text{ donde la función}$$

$\Psi_0(r)$  satisface la parte no homogénea de las condiciones de frontera (3.2.8.36) y la función  $\phi_j(r)$ , satisface la parte homogénea.

$$B[\Psi_0] = f(r_s) \\ j=1,2,\dots, n$$

$$B[\phi_j] = 0$$

El método de Galerkin para la determinación de los coeficientes  $C_j$  es la dada por:

$$\int_R L[T_n(r)] \phi_i(r) dv = 0 \quad (3.2.8.37)$$

$$\int L\left[\Psi_0(r) + \sum_{j=1}^n C_j \phi_j(r)\right] \phi_i(r) dv = 0 \quad (3.2.8.38)$$

Resolver el mismo problema por el método de Galerkin.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{k} g = 0 \quad \text{en } -a < x < a, \quad -b < y < b$$

Sujeto a las condiciones de frontera:

$$T=0 \quad \text{para } x = \pm a \quad \text{y} \quad y = \pm b$$

Se parte de la siguiente forma integral:

$$\int_{x=-a}^{x=b} \int_{y=-b}^b \left[ \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{1}{k} g \right] \phi_i(x, y) dx dy = 0 \quad (3.2.8.39)$$

Donde:

$$T_1(x, y) = C_1 \phi_1(x, y)$$

Y

$$\phi_1(x, y) = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$$

Resolviendo las ecuaciones nos queda:

$$T(x, y) = \frac{5}{8} \left( \frac{g/k}{a^2 + b^2} \right) (a^2 - x^2)(b^2 - y^2) \quad (3.2.8.40)$$

La solución exacta esta dada por la siguiente ecuación:

$$T(x, y) = \frac{g}{k} \left[ \frac{a^2 - x^2}{2} \right] - 2a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cosh\left(B_n \frac{y}{b}\right) * \cosh\left(B_n \frac{b}{a}\right)}{B_n^3 \cosh\left(B_n \frac{b}{a}\right)} \quad (3.2.8.41)$$

Donde:

$$B_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

A fin de comparar los resultados obtenidos mediante la solución numérica de estos métodos presentamos la siguiente tabla.

TABLA DE COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS ANALÍTICOS VARIACIONALES.  
Caso;  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $a = b$

	<i>Valor</i>	<i>% Error</i>
<i>Solución Exacta</i>	<i>0.293</i>	<i>0 %</i>
Ritz	0.3125	6.655290 %
Kantorovich	0.3029854	3.339727 %
Galerkin	0.3125	6.65290 %

$$E \% = \frac{|X_v - X_c|}{|X_v|} * 100$$

## CAPITULO 4

### FORMULACION VARIACIONAL DEL MEF

#### 4.0 Introducción.

En este capítulo se desarrollará la formulación variacional del método del elemento finito para problemas de potencial y de propagación en estado transitorio.

#### 4.1. Formulación Variacional del MEF de Problemas Elípticos o de Potencial.

##### 4.1.2. Formulación Variacional del MEF de Problemas Elípticos y parabólicos en condiciones de frontera no homogéneas.

##### 4.1.3. Formulación Variacional del MEF de Problemas Elípticos en condición de frontera naturales.

#### 4.2 Formulación Variacional del MEF de Problemas Parabólicos o de Propagación.

#### 4.3 El Método Acoplado en la Solución de la Ecuación del Calor No Lineal.

4.1.1 Deduciremos la funcional Energía para problemas de equilibrio o Elípticos bajo condiciones de frontera homogéneas.

deduciendo explícitamente la Energía del Sistema Físico bajo condiciones de frontera Homogéneas. Supongamos que se tiene una membrana en una región  $\bar{\Omega}$  la cual se deflexiona a causa de una carga distribuida en forma continua en todo  $\bar{\Omega}$ , salvo su frontera  $\partial \Omega$ . Si  $\phi(x, y)$ , representa el desplazamiento del punto  $(x, y)$  a causa de  $f(x, y)$

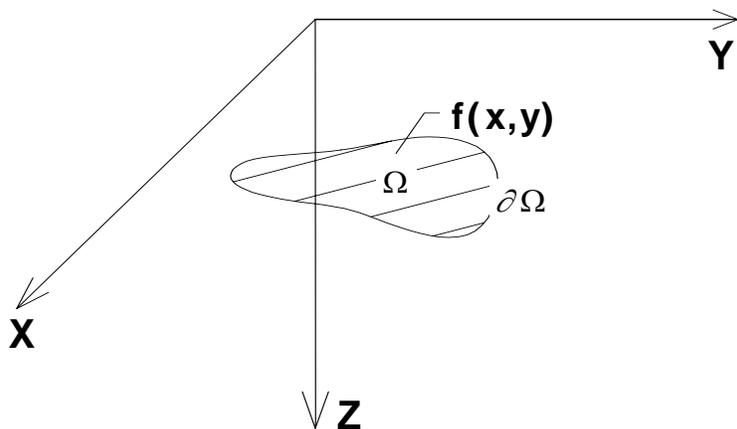


Figura 4.1 Membrana.

Entonces  $\phi(x(s), y(s)) = 0$  a lo largo de Todo  $(x(s), y(s)) \in \partial \Omega$ .

La ecuación diferencial parcial lineal que gobernará este fenómeno es:

$$L\phi = f \quad \text{en } \Omega \quad (4.1.1)$$

$$B\phi = g \quad \text{en } \partial \Omega \quad (4.1.2)$$

donde  $L = -\nabla^2$  es el operador de Poisson

$$y \quad B\phi = \phi|_{\Gamma_1} = 0 \quad ; \quad B\phi = \nabla \phi \cdot \hat{n}|_{\Gamma_2} = 0$$

$$B\phi = \nabla \phi \cdot \hat{n} + \sigma(s)\phi|_{\Gamma_3} = 0 \quad ; \quad \text{donde } \partial \Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

Satisface la condición de Dirichlet, Neumann y Mixta en  $\partial\Omega$ . Si  $f(x, y)$  es la fuerza en  $(x, y)$  y  $\phi(x, y)$  la deformación del punto  $(x, y) \in \Omega$ , entonces  $W(x, y) = f(x, y) \phi(x, y)$  es el trabajo realizado por  $f(x, y)$  en  $(x, y)$ , y el trabajo total  $W$  desarrollado por la fuerza  $f(x, y)$  en reflexionar toda la membrana  $\overline{\Omega}$  es:

$$W = \int_{\Omega} f(x, y) \phi(x, y) d\Omega \quad (4.1.3)$$

$W$  es una funcional, ya que para cada  $\phi$ ,  $f$  fija,

$$W[\phi] = \int_{\Omega} f \cdot \phi d\Omega \quad (4.1.4)$$

De esta manera si tomamos variación de  $W$ , tenemos

$$\delta W = \Delta \int_{\Omega} f \phi d\Omega = \int_{\Omega} f \Delta \phi d\Omega \quad (4.1.5)$$

donde

$$\int_{\Omega} f \Delta \phi d\Omega = \int_{\Omega} L \phi \Delta \phi d\Omega = \int_{\Omega} \Delta \phi L \phi d\Omega = - \int_{\Omega} \Delta \phi \nabla^2 \phi d\Omega \quad (4.1.6)$$

y de la identidad vectorial

$$\nabla^T \cdot (\Delta \phi \nabla \phi) = \nabla^T (\Delta \phi) \cdot \nabla \phi + \Delta \phi \nabla^2 \phi \quad (4.1.7)$$

y de

$$\nabla^T (\Delta \phi) \nabla \phi = \Delta \left( \frac{1}{2} \|\nabla \phi\|^2 \right) \quad (4.1.8)$$

se tiene:

$$\int_{\Omega} f \Delta \phi d\Omega = \int_{\Omega} \Delta \left( \frac{1}{2} \|\nabla \phi\|^2 \right) d\Omega - \int_{\Omega} \nabla^T (\Delta \phi \nabla \phi) d\Omega \quad (4.1.9)$$

y del teorema de la Divergencia de Gauss

$$- \int_{\Omega} \nabla^T \cdot (\Delta \phi \nabla \phi) d\Omega = - \int_{\partial\Omega} \Delta \phi \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right) dS \quad (4.1.10)$$

por lo que

$$\int_{\Omega} f \Delta \phi d\Omega = \int_{\Omega} \Delta \left( \frac{1}{2} \|\nabla \phi\|^2 \right) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \Delta \phi \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right) dS \quad (4.1.11)$$

como  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$  la última integral queda

$$- \int_{\partial\Omega} \Delta \phi \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right) dS = - \int_{\Gamma_1} \Delta \phi \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right) dS - \int_{\Gamma_2} \Delta \phi \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right) dS - \int_{\Gamma_3} \Delta \phi \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right) dS \quad (4.1.12)$$

y dadas las condiciones de frontera del problema, se tiene:

$$-\int_{\Gamma_1} \Delta \phi \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right) dS = 0 \quad ; \text{ Dirichlet}$$

$$-\int_{\Gamma_2} \Delta \phi \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right) dS = 0 \quad ; \text{ Neumann}$$

$$-\int_{\Gamma_3} \Delta \phi \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right) dS = \int_{\Gamma_3} \Delta \phi (\sigma(s) \phi) dS = \int_{\Gamma_3} \sigma(s) \phi(s) \Delta \phi(s) dS \quad (4.1.13)$$

$$\int_{\Gamma_3} \sigma(s) \phi(s) \Delta \phi(s) dS = \int_{\Gamma_3} \sigma(s) \Delta \left( \frac{1}{2} \phi^2 \right) dS = \Delta \int_{\Gamma_3} \frac{\sigma(s)}{2} \phi^2 dS \quad (4.1.14)$$

Así la integral

$$\int_{\Omega} f \Delta \phi d\Omega = \Delta \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \|\nabla \phi\|^2 \right) d\Omega + \Delta \int_{\Gamma_3} \frac{\sigma}{2} \phi^2 dS \quad (4.1.15)$$

Finalmente la expresión

$$\Delta \int_{\Omega} f \cdot \phi d\Omega = \Delta \int_{\Omega} \frac{\|\nabla \phi\|^2}{2} d\Omega + \Delta \int_{\Gamma_3} \frac{\sigma}{2} \phi^2 dS \quad (4.1.16)$$

de donde se tiene:

$$\Delta \left\{ \int_{\Omega} \left( \|\nabla \phi\|^2 - 2f \cdot \phi \right) d\Omega + \int_{\Gamma_3} \frac{\sigma}{2} \phi^2 dS \right\} = 0 \quad (4.1.17)$$

la funcional  $I[\phi]$  definida como:

$$I[\phi] = \int_{\Omega} \left( \|\nabla \phi\|^2 - 2f \cdot \phi \right) d\Omega + \int_{\Gamma_3} \sigma \phi^2 dS \quad (4.1.18)$$

Es tal que su primera variación

$$\Delta I[\phi] = 0 \quad (4.1.19)$$

Esto permite asociar al sistema (4.1.1) bajo (4.1.2) la Energía  $I[\phi]$ .

$$\begin{array}{l} L\phi = f \quad \text{en} \quad \Omega \quad (4.1.1) \\ B\phi = g \quad \text{en} \quad \partial \Omega \quad (4.1.2) \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad I[\phi] \quad (4.1.20)$$

veremos que para el caso Elíptico, autoadjunto y definido positivo, existe una correspondencia biunívoca entre los puntos críticos de  $I[\phi]$  y las soluciones de (4.1.1) bajo (4.1.2). Siendo esta correspondencia la que nos permite resolver a (4.1.1) y (4.1.2) mediante la alternativa de determinar los puntos críticos de  $I[\phi]$ ; es decir resolver la ecuación funcional.

$$\frac{d I[\phi]}{d \phi} = 0 \quad (4.1.21)$$

#### 4.1.2 FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL MEF PARA PROBLEMAS ELÍPTICOS Y PARABÓLICOS EN CONDICIONES DE FRONTERAS NO HOMOGÉNEAS.

A fin de obtener la funcional Energía, para el caso de condiciones de frontera No Homogéneas, consideremos el caso de la deflexión de la membrana donde asumimos el hecho que la frontera es deformada por la acción de la carga  $f(x, y)$  en el interior  $\Omega$  de la membrana  $\bar{\Omega}$ , y que la deformación de  $\partial \Omega$  puede ser expresada en términos del operador diferencial  $B\phi = g(s)$  en  $\partial \Omega$ , como:

$$B\phi = \phi |_{\Gamma_1} = g_1(s) \quad (4.1.2.1) \quad \text{Dirichlet}$$

$$B\phi = \nabla\phi \cdot \hat{n} |_{\Gamma_2} = g_2(s) \quad (4.1.2.2) \quad \text{Neumann}$$

$$B\phi = \nabla\phi \cdot \hat{n} + \sigma(s)\phi |_{\Gamma_2} = g_3(s) \quad (4.1.2.3) \quad \text{Mixta}$$

Problema que puede expresarse como:

$$L\phi = f \quad \text{en} \quad \Omega \quad (4.1.2.4)$$

$$B\phi = g \quad \text{en} \quad \partial \Omega \quad (4.1.2.5)$$

Donde  $f(x, y)$  es variable en  $\Omega$  y  $g(s)$  no es constante en general en  $\partial \Omega$ , reduciendo este problema al problema (4.1.1) bajo (4.1.2) mediante una traslación de  $\phi$  por, donde  $v$  es una función que satisface las condiciones de frontera del problema original (4.1.1), (4.1.2).

$$Bv = g(s) \quad \text{en} \quad \partial \Omega \quad ; \quad g(s) \neq \text{cte.}$$

Sea  $u = \phi - v$  la traslación de  $\phi$  por  $v$ .

Entonces

$$Bu = B\phi - Bv = g(s) - g(s) = 0$$

de manera que  $B$  opera bajo condiciones de frontera homogéneas en  $u$ . En relación al operador  $L$  en  $u$  tenemos:

$$Lu = L(\phi - v) = L\phi - Lv = f - Lv = F \quad \text{en} \quad \Omega.$$

de esta manera el sistema (4.1.2.4) bajo (4.1.2.5) en  $u$  queda reducido a:

$$Lu = F \quad \text{en} \quad \Omega. \quad (4.1.2.6)$$

$$Bu = 0 \quad \text{en} \quad \partial \Omega \quad (4.1.2.7)$$

el cual es equivalente a (4.1.1) bajo (4.1.2) salvo la traslación de  $\phi$  por  $-v$ . De acuerdo a (4.1.1.8) la funcional Energía para (4.1.2.6) bajo (4.1.2.7) será:

$$I[u] = \int_{\Omega} \left( \|\nabla u\|^2 - 2Fu \right) d\Omega + \int_{\partial \Omega = \Gamma_3} \sigma u^2 dS \quad (4.1.2.8)$$

donde solo se ha tomado en cuenta la única condición de frontera que contribuye a la funcional, que es la condición mixta  $\nabla u \cdot \hat{n} + \sigma(s)u = 0$  en  $\Gamma_3 \subset \partial \Omega$ . Como en  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  las condiciones de Dirichlet como Neumann, las integrales

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{u} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right) dS = 0 ; \int_{\Gamma_2} \mathbf{u} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right) dS = 0$$

Se anulan, haremos de cuenta que  $\Gamma_3 = \partial \Omega$ .

Ahora bien a (4.1.2.8) lo expresaremos en función de  $\phi$ , ya que  $v$  es fija en el problema (4.1.2.6), (4.1.2.7).

$I[\mathbf{u}] = I[\phi - v] = I[\phi]$ ; ya que  $v$  es fija.

$\frac{d I[\mathbf{u}]}{d \mathbf{u}} = \frac{d I[\phi]}{d \phi}$ . Para esto expresemos a (4.1.2.8) como:

$$I[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} (\mathbf{u} L \mathbf{u} - 2F\mathbf{u}) d\Omega \quad (4.1.2.9)$$

donde

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} L \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \|\nabla \mathbf{u}\|^2 d\Omega + \int_{\partial \Omega} \mathbf{u} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right) dS \quad (4.1.2.10)$$

$$I[\phi] = \int_{\Omega} \{ (\phi - v) L (\phi - v) - 2(f - Lv)(\phi - v) \} d\Omega$$

$$= \int_{\Omega} \{ \phi L \phi - 2f\phi \} d\Omega + \int_{\Omega} \{ \phi Lv - v L \phi \} d\Omega \quad (4.1.2.11)$$

es decir la funcional de energía  $I[\phi]$  queda:

$$I[\phi] = \int_{\Omega} \{ \phi L \phi - 2f\phi \} d\Omega + \int_{\Omega} \{ \phi Lv - v L \phi \} d\Omega \quad (4.1.2.12)$$

donde  $L$  es el operador de Poisson. Las integrales quedan:

$$\int_{\Omega} \phi L \phi d\Omega = - \int_{\Omega} \phi \nabla^2 \phi d\Omega = \int_{\Omega} \nabla^T \phi \bullet \nabla \phi d\Omega - \int_{\Omega} \nabla(\phi \nabla \phi) d\Omega = \int_{\Omega} \|\nabla \phi\|^2 d\Omega - \int_{\partial \Omega} \phi \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right) ds$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\phi Lv - v L \phi) d\Omega &= \int_{\Omega} (v \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 v) d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla^T v \bullet \nabla \phi - \nabla^T \phi \bullet \nabla v) d\Omega + \int_{\partial \Omega} \left( \phi \left( \frac{\partial v}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right) - v \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right) \right) ds \\ &= \int_{\partial \Omega} \phi \left( \frac{\partial v}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right) ds - \int_{\partial \Omega} v \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right) ds \end{aligned}$$

quedando finalmente

$$I[\phi] = \int_{\Omega} (\|\nabla \mathbf{u}\|^2 - 2f\phi) d\Omega + \int_{\partial \Omega} (\sigma \phi^2 - 2g\phi) dS \quad (4.1.2.13)$$

como la expresión de la energía para este caso de condiciones de frontera no homogéneas. Que es la expresión de la energía para el caso (4.1.2.6) bajo (4.1.2.7).

### 4.1.3. FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL MEF PARA PROBLEMAS ELÍPTICOS EN CONDICIONES DE FRONTERAS NATURALES.

Vamos a considerar en forma mas general al siguiente operador diferencial lineal

$$L\phi = -\nabla^T \cdot (K \nabla \phi) + \rho \phi = f(x, y) \quad (4.1.3.1)$$

en la región  $\Omega \subset \mathfrak{R}^2$ , bajo las siguientes condiciones de frontera

$$B\phi = K \nabla \phi \cdot \hat{n} + \sigma(s) \phi = g(s) \quad \text{en } \partial\Omega \quad (4.1.3.2)$$

Donde  $K(x, y)$  es un tensor definido en  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ . Se deducirá la funcional de energía para este tipo de operadores. En efecto, partiendo del hecho de que la funcional de energía para las ecuaciones diferenciales parciales Elípticas

$$L\phi = -\nabla^T \cdot (K \nabla \phi) = f \quad \text{en } \Omega \quad (4.1.3.3)$$

bajo las siguientes condiciones de frontera

$$B\phi = K \nabla \phi \cdot \hat{n} + \sigma(s) \phi = g \quad \text{en } \partial\Omega \quad (4.1.3.4)$$

Viene expresada como;

$$\begin{aligned} I[\phi] = & \int_{\Omega} \left( \|\nabla \phi\|^2 + \phi \rho \phi - 2f\phi \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} (\phi L u - u L \phi) d\Omega \\ & + \int_{\partial\Omega} (\sigma \phi^2 - 2g\phi) dS \end{aligned} \quad (4.1.3.5)$$

donde  $u$  es una función que satisface a (4.1.3.2).

y

$$\int_{\Omega} \phi L \phi d\Omega = \int_{\Omega} \|\nabla \phi\|^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\sigma \phi^2 - 2g\phi) dS \quad (4.1.3.6)$$

Para esto expresaremos la identidad vectorial y el Teorema de Green generalizado para estos operadores diferenciales  $L[ ]$  y  $B[ ]$ .

$$\nabla^T \cdot (\phi K \cdot \nabla \phi) = \nabla^T \phi \cdot (K \cdot \nabla \phi) + \phi \nabla^T \cdot (K \nabla \phi) \quad (4.1.3.7)$$

que para cualquier par de funciones  $\phi, \psi$ :

$$\nabla^T \cdot (\phi K \nabla \psi) = \nabla^T \phi \cdot (K \nabla \psi) + \phi \nabla^T \cdot (K \nabla \psi) \quad (4.1.3.8)$$

$$\nabla^T \cdot (\psi K \nabla \phi) = \nabla^T \psi \cdot (K \nabla \phi) + \psi \nabla^T \cdot (K \nabla \phi) \quad (4.1.3.9)$$

y asumiendo que el tensor  $K$  es simétrico se tiene:

$$\nabla^T \phi \cdot (K \nabla \psi) = \nabla^T \psi \cdot (K \nabla \phi) \quad (4.1.3.11)$$

Así que restando la ecuación (4.1.3.9) a la ecuación (4.1.3.8) se tiene

$$\nabla^T \cdot (\phi \mathbf{K} \nabla \psi) - \nabla^T \cdot (\psi \mathbf{K} \nabla \phi) = \phi \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla \psi) - \psi \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla \phi) \quad (4.1.3.10)$$

de donde resulta:

$$\int_{\Omega} \nabla^T \cdot (\phi \mathbf{K} \nabla \psi) d\Omega - \int_{\Omega} \nabla^T \cdot (\psi \mathbf{K} \nabla \phi) d\Omega = \int_{\Omega} \phi \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla \psi) d\Omega - \int_{\Omega} \psi \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla \phi) d\Omega \quad (4.1.3.12)$$

Aplicando el teorema de Green a la expresión de la izquierda, se tiene:

$$\int_{\partial\Omega} [\phi (\mathbf{K} \nabla \psi) \cdot \hat{n} - \psi (\mathbf{K} \nabla \phi) \cdot \hat{n}] dS = \int_{\Omega} \phi \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla \psi) d\Omega - \int_{\Omega} \psi \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla \phi) d\Omega \quad (4.1.3.13)$$

Por lo que el teorema de Green generalizado:

$$\int_{\Omega} [\phi \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla \psi) - \psi \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla \phi)] d\Omega = \int_{\partial\Omega} [\phi (\mathbf{K} \nabla \psi) \cdot \hat{n} - \psi (\mathbf{K} \cdot \nabla \phi) \cdot \hat{n}] dS \quad (4.1.3.14)$$

con relación a las condiciones de frontera generalizadas.

$$\mathbf{K} \nabla^T \phi \cdot \hat{n} + \sigma(s) \phi = g(s) \quad \text{en } \partial\Omega \quad (4.1.3.15)$$

que representa a las condiciones de frontera mixtas, y que en casos particulares se tiene:

$$\mathbf{K} \nabla^T \phi \cdot \hat{n} = g(s) \quad ; \quad \sigma(s) = 0 \quad \text{Neumann}$$

y cuando  $\nabla^T \phi \cdot \hat{n} = 0$  en  $\partial\Omega$  se tiene:

$$\phi = \frac{1}{\sigma(s)} g(s) \quad \text{en } \partial\Omega \quad \text{Dirichlet.}$$

Recordemos que la funcional que se obtuvo para el caso en que:

$$\mathbf{L} \phi = f \quad \text{en } \Omega \quad (4.1.3.16)$$

$$\mathbf{B} \phi = g \quad \text{en } \partial\Omega \quad (4.1.3.17)$$

donde el operador  $\mathbf{L} [ ] = -\nabla^2 [ ]$  era el operador de Poisson, fue:

$$\begin{aligned} I[\phi] = & \int_{\Omega} (\|\nabla \phi\|^2 - 2f\phi) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} (\phi \mathbf{L} u - u \mathbf{L} \phi) d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\sigma \phi^2 - 2g\phi) dS \end{aligned} \quad (4.1.3.18)$$

donde

$$\int_{\Omega} \|\nabla \phi\|^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\sigma \phi^2 - 2g\phi) dS = \int_{\Omega} \phi \mathbf{L} \phi d\Omega \quad (4.1.3.19)$$

Así finalmente tenemos:

$$I[\phi] = \int_{\Omega} [\phi L \phi - 2f\phi] d\Omega + \int_{\Omega} [\phi L u - u L \phi] d\Omega \quad (4.1.3.19)$$

Esta funcional será evaluada para el caso en que

$$L \phi = -\nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla \phi) + \rho \phi = f \quad (4.1.3.20)$$

de donde

$$\phi L \phi = -\phi \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla \phi) + \phi \rho \phi = \phi f \quad (4.1.3.21)$$

que substituido en (4.1.3.19) se tiene:

$$\begin{aligned} I[\phi] &= \int_{\Omega} (-\phi \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla \phi) + \phi \rho \phi - 2f\phi) d\Omega + \int_{\Omega} (-\phi \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla u) + \phi \rho u) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} (-u \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla \phi) + u \rho \phi) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} [-\phi \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla \phi) - \phi \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla u) + u \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla \phi)] d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} (\phi \rho \phi - 2f\phi + \phi \rho u - u \rho \phi) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} [-\phi \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla \phi) + u \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla \phi) - \phi \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla u)] d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} (\phi \rho \phi - 2f\phi) d\Omega \end{aligned} \quad (4.1.3.22)$$

luego la expresión de la energía  $I[\phi]$

$$\begin{aligned} I[\phi] &= \int_{\Omega} [-\phi \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla \phi) + \phi \rho \phi - 2f\phi] d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} (u \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla \phi) - \phi \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla u)) d\Omega \end{aligned} \quad (4.1.3.23)$$

Aplicando el teorema de Green a la segunda integral

$$\int_{\Omega} \{u \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla \phi) - \phi \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla u)\} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \{u (\mathbf{K} \nabla \phi \cdot \hat{n}) - \phi (\mathbf{K} \nabla u \cdot \hat{n})\} dS \quad (4.1.3.24)$$

y

$$\int_{\Omega} -\phi \nabla^T \cdot (\mathbf{K} \nabla \phi) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla^T \phi \cdot (\mathbf{K} \nabla \phi) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \phi \cdot (\mathbf{K} \nabla \phi) \cdot \hat{n} dS \quad (4.1.3.25)$$

luego:

$$I[\phi] = \int_{\Omega} \left[ \nabla^T \phi \cdot (K \nabla \phi) + \phi \rho \phi - 2f \phi \right] d\Omega \quad (4.1.3.26)$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \left\{ u (K \nabla \phi \cdot \hat{n}) - \phi (K \nabla u \cdot \hat{n}) \right\} dS - \int_{\partial\Omega} (\phi (K \nabla \phi) \cdot \hat{n}) dS$$

Ahora bien; aplicando las condiciones de frontera generalizadas a la expresión  $I[\phi]$  tenemos:

$$K \nabla \phi \cdot \hat{n} + \sigma(s) \phi = g(s) \quad (4.1.3.27)$$

$$K \nabla u \cdot \hat{n} + \sigma(s) u = g(s) \quad (4.1.3.28)$$

en virtud de que  $u$  satisface las condiciones de frontera del problema, luego tenemos que:

$$u K \nabla \phi \cdot \hat{n} + u \sigma \phi = u g(s)$$

$$\phi K \nabla u \cdot \hat{n} + \phi \sigma u = \phi g(s)$$

Por lo que:

$$u K \nabla \phi \cdot \hat{n} - \phi K \nabla u \cdot \hat{n} = u g - \phi g + u \sigma \phi - \phi \sigma u$$

$$= u g(s) - \phi g(s)$$

mientras que para la expresión

$$\phi (K \nabla \phi \cdot \hat{n}) = \phi g(s) - \phi \sigma \phi$$

De donde se tiene:

$$\int_{\partial\Omega} \left\{ u (K \nabla \phi \cdot \hat{n}) - \phi (K \nabla u \cdot \hat{n}) - \phi (K \nabla \phi) \cdot \hat{n} \right\} dS = \quad (4.1.3.29)$$

$$\int_{\partial\Omega} (-\phi g + \phi \sigma \phi - \phi g) dS = \int_{\partial\Omega} (\sigma \phi^2 - 2g \phi) dS$$

de donde se tiene finalmente:

$$I[\phi] = \int_{\Omega} \left\{ \nabla^T \phi \cdot (K \nabla \phi) + \phi \rho \phi - 2f \phi \right\} d\Omega \quad (4.1.3.30)$$

$$+ \int_{\partial\Omega} (\sigma \phi^2 - 2g \phi) dS$$

donde los términos en  $I[\phi]$  que contribuyen a minimizar la funcional “Energía” son aquellos que contienen a términos en  $\phi$ , hemos prescindido del términos que no contienen a  $\phi$

(4.1.3.30) corresponde a la funcional Energía para problemas Elípticos a condiciones de frontera naturales del operador (4.1.3.20) bajo (4.1.3.14)

## 4.2. FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL MEF DE PROBLEMAS PARABÓLICOS O DE PROPAGACIÓN.

Introducción.

Por  $\mathfrak{R}^n$  representamos el espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $\mathfrak{R}$  al campo de los escalares reales.  $\bar{\Omega} \subset \mathfrak{R}^n$  será una región compacta de  $\mathfrak{R}^n$ .  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  donde  $\Omega$  representa su interior y  $\partial\Omega$  su conjunto frontera  $\Gamma^+ = [t_0, \infty)$  representa el conjunto positivo de los reales con  $t_0 \geq 0$ . Al conjunto de funciones  $\phi: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$  de clase  $C^n$  en  $\Omega$  lo denotaremos por  $C^n(\Omega, \mathfrak{R})$ . Así  $C^\infty(\Omega, \mathfrak{R})$  representara al espacio vectorial de las funciones infinitamente diferenciables en  $\Omega$ . Representaremos por  $L$ , la función lineal definida en  $C^n(\Omega, \mathfrak{R})$  a  $\mathfrak{R}$ . es decir si  $u \in C^n(\Omega, \mathfrak{R})$  tenemos  $L: C^n(\Omega, \mathfrak{R}) \rightarrow \mathfrak{R}$  así mismo definimos operadores diferenciales lineales que representan a las ecuaciones diferenciales parciales definidas en  $\Omega$  como en su frontera  $\partial\Omega$ . así la ecuación diferencial no Homogénea

$$k_{xx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_{yy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Q + \lambda \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{en } \Omega \times \Gamma^+ \quad (4.2.1)$$

bajo las siguientes condiciones de frontera

$$k\{\nabla u\} * \hat{n} + \sigma(s) = g(s) \quad \text{en } \partial\Omega \times \Gamma^+ \quad (4.2.2)$$

$k$  es la matriz de las conductividades térmicas  $k_{xx}$ ,  $k_{yy}$  del material,  $Q$  la fuente o sumidero de  $\bar{\Omega}$ ,  $\lambda$  un escalar propiedad física del material,  $\sigma(s)$  el parámetro de pérdida de calor por convección en la frontera de  $\Omega$  y  $g(s)$  los valores a la frontera del problema. De esta manera (4.2.1), (4.2.2), quedaran representados como:

$$L[u] = f(x, y, t) \quad \text{en } \Omega \times \Gamma^+ \quad (4.2.3)$$

$$B[u] = g(s) \quad \text{en } \partial\Omega \times \Gamma^+ \quad (4.2.4)$$

Donde de (4.2.1) se reconoce:

$$L[u] = k_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [u] + k_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [u] \quad \text{y} \quad f(x, y, t) = \left( Q - \lambda \frac{\partial}{\partial t} [u] \right) \quad (4.2.5)$$

mientras que la condición de frontera (4.2.2) como operador diferencial quedara:

$$B[u] = k\{\nabla u\} * \hat{n} + \sigma(s)u = g(s) \quad (4.2.6)$$

donde  $k = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 \\ 0 & k_{yy} \end{bmatrix}$  es la matriz de conductividad térmica del material.

En (4.2.6) distinguimos tres tipos distintos de condiciones de frontera que son a saber:

$$u|_{\Gamma_1} = u_1 \quad \text{en } \Gamma_1 \subseteq \partial\Omega \quad \text{Dirichelet} \quad (4.2.7 \text{ a})$$

$$k\{\nabla u\} * \hat{n}|_{\Gamma_2} = u_2 \quad \text{en } \Gamma_2 \subseteq \partial\Omega \quad \text{Neumann} \quad (4.2.7 \text{ b})$$

$$k\{\nabla u\} * \hat{n} + \sigma(s)u|_{\Gamma_3} = u_3 \quad \text{en } \Gamma_3 \subseteq \partial\Omega \quad \text{Mixta} \quad (4.2.7 \text{ c})$$

donde  $\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$  así finalmente la ecuación diferencial (4.2.1) bajo la condición de frontera (4.2.2) quedara en términos de operadores diferenciales lineales como:

$$L[u] = f \text{ en } \Omega \times I^+ \quad (4.2.8)$$

$$B[u] = g \text{ en } \partial\Omega \times I^+ \quad (4.2.9)$$

observe que los operadores diferenciales lineales  $L[u]$ ,  $B[u]$  y los espacios vectoriales donde estos están definidos se tiene para cada  $u \in C^n(\Omega, \mathfrak{R})$ ,  $n > 2$ , las imágenes de u:

$$L[u] \in C^{n-2}(\Omega, \mathfrak{R})$$

$$B[u] \in C^{n-1}(\partial\Omega, \mathfrak{R})$$

Estos espacios como los operadores diferenciales lineales están relacionados a través de la formulación de Green (teorema de Green). La ecuación (4.2.10) representa un flujo bidimensional lineal y transitorio, con fuente o sumidero Q en  $\bar{\Omega}$ .

$$A(x, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Q + \lambda \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (4.2.10)$$

El objetivo es determinar la distribución de temperatura  $u(x, y, t)$  en forma numérica. Para tal propósito partimos a  $I^+[t_0, \infty)$  en estaciones  $t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k < t_{k+1} < \dots$ , con el fin de evaluar a  $u(x, y, t_k)$  para cada estación  $t_k \geq t_0 \geq 0$ . El método que aquí se propone es un método híbrido entre el método de las diferencias finitas y el método del elemento finito, el primero sirve tan solo para arrancar el sistema en un tiempo inicial  $t_0$  y proveer en diferencias finitas centrales a la velocidad con que cambia el sistema en el instante  $t_k$  y así poder determinar en el instante  $t_k$  con  $k \geq 1$  la temperatura  $u(x, y, t_k)$ , y de nueva cuenta por diferencias finitas centrales calcular el cambio del sistema en  $t_{k+1}$  y por el método del elemento finito calcular  $u(x, y, t_{k+1})$  y así sucesivamente.

Reconociendo en (4.2.10) a  $A(x, y, t) = k_{xx}$ ;  $C(x, y, t) = k_{yy}$ ; donde el término

$B(x, y, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  Ha sido removido bajo una rotación de los ejes x, y. El término Q

representa a la fuente o al sumidero en  $\bar{\Omega}$ , tenemos a (4.2.3) como:

$$L[u] = k_{xx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_{yy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, t) \quad (4.2.11)$$

donde:

$$f(x, y, t) = f(x, y, t) = \left( Q - \lambda \frac{\partial u}{\partial t} \right) \text{ en } \Omega \times I$$

#### 4.2.1 FORMULACIÓN VARIACIONAL.

La energía del sistema planteado por las ecuaciones (4.2.3), (4.2.4), es deducida a partir de la energía potencial y dinámica del sistema (4.2.12) bajo la condición de frontera (4.2.13) :

$$L[u] = f \text{ en } \Omega x I^+ \quad (4.2.1.1)$$

$$B[u] = g \text{ en } \partial\Omega x I^+ \quad (4.2.1.2)$$

cuya expresión de la energía del sistema es:

$$I[u] = \int_{\Omega} \left( K \|\nabla u\|^2 - 2fu \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\sigma u^2 - 2gu) ds \quad (4.2.1.3)$$

ó de otra forma:

$$I[u] = \int_{\Omega} \left[ \{\nabla u\}^T \bullet K \{\nabla u\} - 2fu \right] d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\sigma u^2 - 2gu) ds \quad (4.2.1.3')$$

substituyendo valores en (4.2.1.3) tenemos:

$$I[u] = \int_{\Omega} \left( K \|\nabla\|^2 u^2 - 2(Q - \lambda \frac{\partial u}{\partial t})u \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\sigma u^2 - 2gu) ds \quad (4.2.1.4)$$

$$I[u] = \int_{\Omega} \left[ K_{xx} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2 \left( Q - \lambda \frac{\partial u}{\partial t} \right) u \right] d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\sigma u^2 - 2gu) ds \quad (4.2.1.4')$$

De esta manera resolver al sistema (4.2.1.1), bajo las condiciones (4.2.1.2) es equivalente a determinar los puntos críticos de la funcional de energía (4.2.1.4), es decir, resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{dI[u]}{du} \equiv 0 \quad (4.2.1.5)$$

Para esto resolveremos a (4.2.1.5) en forma numérica. En efecto, sea,

$$P(\bar{\Omega}) = \{\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \dots, \Delta^{(E)}\}$$

Una partición de  $\bar{\Omega}$  en elementos finitos  $\Delta^{(e)}$ , tales que  $\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^E \Delta^{(e)}$  donde  $u^{(e)}$  es el

polinomio de interpolación local en  $\Delta^{(e)}$  y  $\tilde{u} = \sum_{e=1}^E u^{(e)}$  el polinomio de interpolación global

definido en  $\bar{\Omega}$  cuya restricción a  $\Delta^{(e)}$  es el polinomio local; es decir  $\tilde{u}|_{\Delta^{(e)}} = u^{(e)}$  para

cada  $1 \leq e \leq E$ .  $u_1, u_2, \dots, u_p$  representan los valores de  $\tilde{u}$  en cada uno de los nodos de la

red  $P(\tilde{\Omega})$ . La energía global  $I[\tilde{u}] = I$  aproximada de (4.2.1.1) en  $\tilde{\Omega}$ , la cual puede ser

representada como la suma de las energías locales:  $I^{(e)} = \tilde{I}|_{\Delta^{(e)}}$

$$I[\tilde{u}] = I\left[\sum_{e=1}^E u^{(e)}\right] = \sum_{e=1}^E I[u^{(e)}] = \sum_{e=1}^E I^{(e)} = I[u_1, u_2, \dots, u_p] \quad (4.2.1.6)$$

Donde  $u_1, u_2, \dots, u_p$  son los valores nodales de  $\tilde{u}$  sobre los nodos de la red  $P(\tilde{\Omega})$ . De esta manera (4.2.1.5) es equivalente a:

$$\frac{dI[\tilde{u}]}{d\tilde{u}} \equiv 0 \quad (4.2.1.7)$$

- explícitamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial I[\tilde{u}]}{\partial u_1} &\equiv 0 \\ \frac{\partial I[\tilde{u}]}{\partial u_2} &\equiv 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial I[\tilde{u}]}{\partial u_p} &\equiv 0 \end{aligned} \quad (4.2.1.8)$$

Sabemos que (4.2.1.8) conduce a un sistema lineal de p ecuaciones en p incógnitas a saber los p valores nodales. Pasando al lado derecho en (4.2.1.8) todos aquellos términos que no dependan de los valores nodales y quedándose en el lado izquierdo los que dependan de estos se obtiene el sistema mencionado. Planteando (4.2.1.8) para cada uno de los elementos finitos se obtienen respectivamente las matrices locales de rigidez y de fuerza  $[K^{(e)}], \{f^{(e)}\}$  locales.

$$[K^{(e)}]\{u\} = \int_{\Delta^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{u\} d\Omega + \int_{\partial\Delta} h^{(e)} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \{u\} d\Omega \quad (4.2.1.9)$$

$$\{f^{(e)}\} = - \int_{\partial\Delta^{(e)}} q^{(e)} [N^{(e)}]^T ds + \int_{\Delta^{(e)}} Q^{(e)} [N^{(e)}]^T d\Omega + \int_{\partial\Delta^{(e)}} h^{(e)} u [N^{(e)}]^T ds \quad (4.2.1.10)$$

Donde  $q^{(e)}$  es la entrada de calor en la frontera del elemento  $\partial\Delta^{(e)}$  y  $h^{(e)}$  es la pérdida de calor por convección en  $\Delta^{(e)}$  del elemento  $h^{(e)} = \sigma(s)_{\partial\Delta^{(e)}}$ . El término  $Q^{(e)}$  del caso permanente ahora toma el valor  $\left(Q^{(e)} - \lambda^{(e)} \frac{\partial u}{\partial t}\right)$ . Por lo que la derivación de las matrices  $[K^{(e)}], \{f^{(e)}\}$  para el caso de flujo transitorio diferirá tan solo de las matrices  $[K^{(e)}], \{f^{(e)}\}$  de flujo permanente tan solo en  $f = (Q - \lambda \frac{\partial u}{\partial t})$ .

Ahora bien, a fin de derivar la contribución en (4.2.1.9) y (4.2.1.10) de la parte dinámica, para el caso transitorio, denotaremos por  $X_Q$  a:

$$X_Q = \int_{\Omega} u(Q - \lambda \frac{\partial u}{\partial t}) d\Omega$$

que evaluada en  $\tilde{u}$  será:

$$\tilde{X}_Q = - \int_{\Omega} \tilde{u}(Q - \lambda \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}) d\tilde{\Omega} \quad (4.2.1.11)$$

más específicamente hablando

$$\tilde{X}_Q = - \sum_{e=1}^E \int_{\Delta^{(e)}} u^{(e)} (\lambda^{(e)} \frac{\partial u^{(e)}}{\partial t} - Q^{(e)}) d\tilde{\Omega} \quad (4.2.1.12)$$

donde

$$\begin{aligned} (u^{(e)})^T &= ([N^{(e)}] \{U\})^T = \{U\}^T [N^{(e)}]^T \\ \frac{\partial u^{(e)}}{\partial t} &= [N^{(e)}] \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \right\} \end{aligned}$$

de (4.2.1.12) resulta:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_Q &= \sum_{e=1}^E \left( \int_{\Delta^{(e)}} \{U\}^T [N^{(e)}]^T (\lambda^{(e)} [N^{(e)}] \frac{\partial u^{(e)}}{\partial t} - Q^{(e)}) d\tilde{\Omega} \right. \\ \tilde{X}_Q &= \sum_{e=1}^E \lambda^{(e)} \int_{\Delta^{(e)}} [N^{(e)}] \{U\} [N^{(e)}]^T \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \right\} d\tilde{\Omega} - \sum_{e=1}^E Q^{(e)} [N^{(e)}] \{U\} \end{aligned} \quad (4.2.1.13)$$

y derivando (4.2.1.13) con relación a  $\{U\}$ , tenemos:

$$\frac{\partial \tilde{X}_Q}{\partial U} = \sum_{e=1}^E \int_{\Delta^{(e)}} \lambda^{(e)} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \right\} d\tilde{\Omega} - \sum_{e=1}^E Q^{(e)} [N^{(e)}] \quad (4.2.1.15)$$

por lo que el término que se debe agregar a la matriz de rigidez  $[K^{(e)}]$ , es

$$\int_{\Delta^{(e)}} \lambda^{(e)} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] d\tilde{\Omega} \quad (4.2.1.16)$$

Si denotamos como

$$[C^{(e)}] = \int_{\Delta^{(e)}} \lambda^{(e)} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] d\tilde{\Omega} \quad (4.2.1.17)$$

este término será  $[C^{(e)}] \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \right\}$  lo que permitirá expresar en forma matricial a  $[L^{(e)}]$

$$[L^{(e)}] = [K^{(e)}] [C^{(e)}] \quad (4.2.1.18)$$

De esta manera, las matrices de rigidez y de fuerza locales para este caso, quedarán deducidas en (4.2.1.16) y (4.2.1.17). En efecto:

$$\begin{aligned}
[L^{(e)}]\{u\} &= \int_{\Delta^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}]\{u\} d\tilde{\Omega} + \int_{\Delta^{(e)}} h^{(e)} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}]\{u\} d\tilde{\Omega} \\
&+ \int_{\partial\Delta^{(e)}} \lambda^{(e)} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \right\} d\tilde{\Omega}
\end{aligned} \tag{4.2.1.18}'$$

$$\{f^{(e)}\} = - \int_{\partial\Delta^{(e)}} q^{(e)} [N^{(e)}]^T d\tilde{s} + \int_{\Delta^{(e)}} Q^{(e)} [N^{(e)}]^T d\tilde{\Omega} + \int_{\partial\Delta^{(e)}} h^{(e)} u_{\infty} [N^{(e)}]^T d\tilde{s} \tag{4.2.1.19}$$

que en forma simplificada quedarán como:

$$[L^{(e)}] = [K^{(e)}] + [C^{(e)}]$$

Ensamblando las  $[K^{(e)}]$ ,  $\{f^{(e)}\}$  en toda la región  $\tilde{\Omega} = \bigcup_{e=1}^E \Delta^{(e)}$ , se tendrá

$$\sum_{e=1}^E \left[ [K^{(e)}]\{u\} + [C^{(e)}] \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \right\} \right] = \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\} \tag{4.2.1.20}$$

y finalmente obtenemos

$$\left[ [K]\{U\} + [C] \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \right\} \right] = \{f^{(e)}\} \tag{4.2.1.21}$$

donde  $\{U\}^t = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$

(4.2.1.21) es la ecuación matricial del Método del Elemento Finito Híbrido para los fenómenos de propagación de flujos transitorios bidimensionales definidos por (4.2.3), (4.2.7a), (4.2.7b), (4.2.7c).

La determinación de U de la ecuación (4.2.31) es realizada para una distribución de temperatura  $u(x, y, t_k)$  para cada estación  $t_k$ ,  $t_k \geq t_0$ , con  $t_0$  inicial.

En efecto para esto calcularemos la derivada  $\frac{du(x, y, t)}{dt}$  en forma discreta para cada  $t_k$  esto mediante las diferencias finitas centrales en el intervalo  $[t_0, t_e]$ .

$$0 \leq t_0 \leq t_{k-1} < t_k < t_{k+1} \leq t_e \leq \infty$$

Donde  $t_0$  y  $t_e$  representan el estado inicial y el estado en que el fenómeno se hace estacionario o permanente, y  $k=1, 2, \dots, n$  el número de estados desde  $t_0$  a  $t_e$  del sistema, por lo que el intervalo de interés será  $[t_0, t_e]$ . La derivada de  $u(x, y, t)$  de  $t_k$  en diferencias finitas centrales viene dada por:

$$\frac{dU(x, y, t_k)}{dt} = \frac{U(x, y, t_{k+1}) - U(x, y, t_{k-1})}{t_{k+1} - t_{k-1}} \tag{4.2.1.22}$$

Y evaluando a  $U(x, y, t)$  y  $f(x, y, t)$  en  $t_k$  tendremos las expresiones:

$\frac{dU(x, y, t_k)}{dt}$ ,  $U(x, y, t_k)$  y  $f(x, y, t_k)$  que sustituidas en (4.2.1.21) resultan:

$$[K]\{u(x, y, t_k)\} + [C]\left\{\frac{dU(x, y, t_k)}{dt}\right\} = \{f(x, y, t_k)\} \quad (4.2.1.23)$$

de donde:

$$U(x, y, t_k) = \frac{U(x, y, t_{k-1}) - U(x, y, t_{k+1})}{2}$$

$$\dot{f}(x, y, t_k) = \frac{f(x, y, t_{k-1}) - f(x, y, t_{k+1})}{2}$$

Es la temperatura en el instante medio  $t_k$  del intervalo  $[t_{k-1}, t_{k+1}]$ . Además

$$[K]\left[\frac{U(x, y, t_{k+1}) - U(x, y, t_{k-1})}{2}\right] + [C]\left[\frac{U(x, y, t_{k+1}) - U(x, y, t_{k-1})}{2\Delta t}\right]$$

$$= \left\{\frac{f(x, y, t_{k-1}) - f(x, y, t_{k+1})}{2}\right\} \quad (4.2.1.24)$$

de donde (4.2.1.22) quedará como:

$$\frac{1}{2}\left(\left([K] + \frac{1}{\Delta t}[C]\right)U(x, y, t_{k+1})\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{\Delta t}[C] - [K]\right)U(x, y, t_{k-1})\right) + \bar{f}(x, y, t_k) \quad (4.2.1.25)$$

(4.2.1.25) permite iniciar el proceso a partir del estado inicial  $t_0$ ,  $k=1$  para determinar  $U(x, y, t_1)$  y con  $U(x, y, t_1)$  se determina  $U(x, y, t_2)$  y así sucesivamente, hasta que  $t_k=t_e$ .

## 4.2.2 LA ECUACIÓN DE CALOR LINEAL: FLUJOS TRANSITORIOS LINEALES.

Aplicación.

A manera de ejemplo se resolverá un problema bidimensional de difusión de calor como se muestra en la figura (4.2.1.1) donde  $\tilde{\Omega}$  representa un medio bimaterial en condiciones distintas de frontera, así como una fuente de calor constante en el interior. En la figura (4.2.1.1) se tienen dos caras aisladas (condición de frontera del tipo Neumann), en la cara izquierda valores conocidos (condiciones de Dirichlet), en la cara derecha condición de frontera mixta.

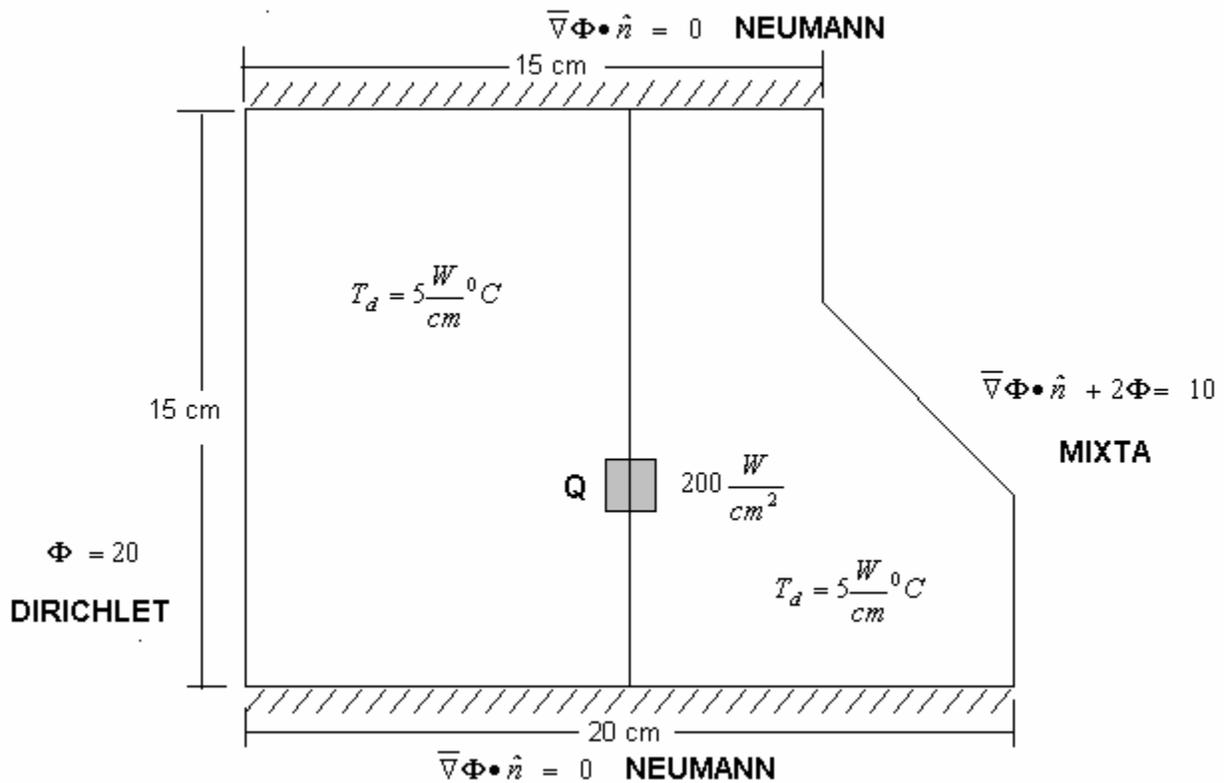


FIGURA. (4.2.1.1)

La red  $P(\tilde{\Omega})$  y el dominio  $\tilde{\Omega} = \bigcup_{e=1}^E \Delta^{(e)}$  se muestran en la figura (4.2.1.2) y la tabla (4.2.1.3) muestra el número de elementos finitos, los vértices  $i, j, k$  por elemento, así como las coordenadas de los nodos. La fuente  $Q$  de  $200 \text{ W/cm}^2$  se encuentra en el nodo 9 de la red.

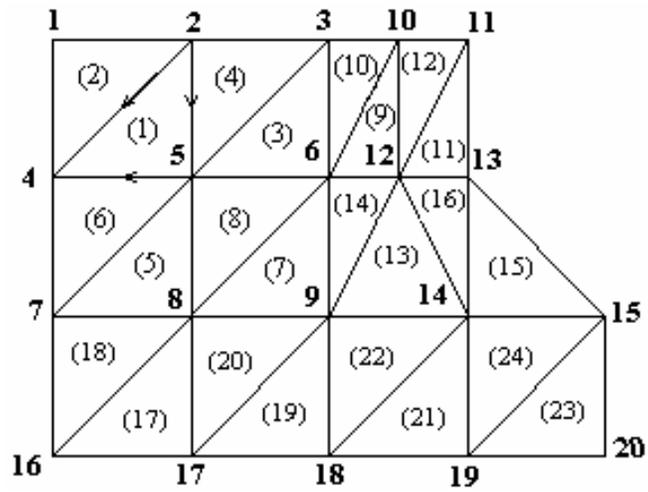


FIGURA. (4.2.1.2) Red de Elementos Finitos

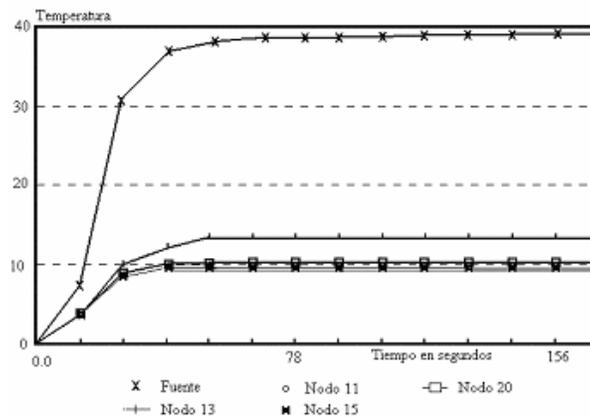
Tabla de la región  $\bar{\Omega}$  en elementos

Elem	NODOS			COORDENADAS DE LOS PUNTOS NODALES/ELEMENTO						
	No.	I	J	K	X(I)	Y(I)	X(J)	Y(J)	X(K)	Y(K)
1	4	5	2		0.0	10.0	5.0	10.0	5.0	15.0
2	4	2	1		0.0	10.0	5.0	15.0	0.0	15.0
3	5	6	3		5.0	10.0	10.0	10.0	10.0	15.0
4	5	3	2		5.0	10.0	10.0	15.0	5.0	15.0
5	7	8	5		0.0	5.0	5.0	5.0	5.0	10.0
6	7	5	4		0.0	5.0	5.0	10.0	0.0	10.0
7	8	9	6		5.0	5.0	10.0	5.0	10.0	10.0
8	8	6	5		5.0	5.0	10.0	10.0	5.0	10.0
9	6	12	10		10.0	10.0	12.5	10.0	12.5	15.0
10	6	10	3		10.0	10.0	12.5	15.0	10.0	15.0
11	12	13	11		12.5	10.0	15.0	10.0	15.0	15.0
12	12	11	10		12.5	10.0	15.0	15.0	12.5	15.0
13	9	14	12		10.0	5.0	15.0	5.0	12.5	10.0
14	9	12	6		10.0	5.0	12.5	10.0	10.0	10.0
15	14	15	13		15.0	5.0	20.0	5.0	15.0	10.0
16	14	13	12		15.0	5.0	15.0	10.0	12.5	10.0
17	16	17	8		0.0	0.0	5.0	0.0	5.0	5.0
18	16	8	7		0.0	0.0	5.0	5.0	0.0	5.0
19	17	18	9		5.0	0.0	10.0	0.0	10.0	5.0
20	17	9	8		5.0	0.0	10.0	5.0	5.0	5.0
21	18	19	14		10.0	0.0	10.0	0.0	15.0	5.0
22	18	14	9		10.0	0.0	10.0	5.0	10.0	5.0
23	19	20	15		15.0	0.0	15.0	0.0	20.0	5.0
24	19	15	14		15.0	0.0	15.0	5.0	15.0	5.0

Tabla (4.2.1.3)

La determinación de la temperatura  $U(x, y, t)$  en cada de los elementos en el centroide viene como se muestra en la grafica (4.2.1.4)

Grafica (4.2.1.4)



### 4.3 FLUJOS TRANSITORIOS NO LINEALES: LA ECUACION DEL CALOR NO LINEAL

En esta sección se resolverá la ecuación del calor no lineal por medio del Método del Elemento Finito (MEF) acoplado con el Método de las Diferencias Finitas a partir de la transformación realizada por Kirchhoff a la ecuación no lineal de esta manera, una vez transformada la ecuación no lineal a una forma mas sencilla se resuelve esta ecuación mediante el MEF-MDF por medio de un algoritmo de paso ascendente respecto al tiempo cuya convergencia a la solución está asegurada por ser un proceso disipativo de energía alcanzando en un tiempo finito su estado estacionario. Este algoritmo computacional se aplica al caso de una barra metálica conductora del calor cuya conductividad térmica es función de la temperatura.

#### 1. INTRODUCCIÓN

El dominio de definición de la ecuación gobernante consiste de una barra metálica cuya conductividad es función de la temperatura la cual es transformada mediante la transformada de Kirchhoff reduciéndola a una ecuación casi lineal respecto al coeficiente de conductividad, la cual es resuelta mediante el método acoplado en cuestión. En efecto considérese una barra de longitud  $0 \leq x \leq L = 10$  cm. de longitud, la cual se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme  $T(0,t) = 0^\circ\text{C}$  para tiempos  $t > 0$ . Mientras que las condiciones de frontera son:  $T(0,t) = 0^\circ\text{C}$  y para  $x=L$   $T(L,0) = 100^\circ\text{C}$ . Además se supone que la conductividad térmica es una función de la temperatura la cual para este caso se supondrá lineal que es el caso simplificado, mas adelante hablaremos del caso general.

#### 4.3.1 EL MÉTODO DE LA TRANSFORMADA INTEGRAL FINITA (TRANSFORMADA DE KIRCHHOFF)

En [2.6] se consideró a la ecuación del calor no lineal general:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(K(T)\nabla T) + g \quad (4.3.1.1)$$

donde:  $\rho, C_p, K$  y  $K(T) = K_0(1 + \beta T)$  son funciones de la temperatura y el término  $T$  de la fuente de generación de calor es independiente de la temperatura  $g = g(\vec{r}, t)$  (4.3.1.1) después de ser transformada por el término  $K(T)$  mediante la transformada de Kirchhoff

$$U = U(T) = \int_0^T \frac{K(T')}{K_0} dT' \quad (4.3.1.2)$$

$T = T(\vec{r}, t)$ , donde  $K_0$  es el valor de la conductividad térmica para  $t=0$ , substituyendo a  $\alpha = \frac{K(T)}{\rho C_p}$  con  $K(T) = K_0(1 + \beta T)$  en la (4.3.1.2) q la ecuación (4.3.1.21) se reduce a:

$$\frac{\partial U(T)}{\partial t} = \alpha \nabla^2 U(T) + \frac{\alpha}{K_0} g \quad (4.3.1.3)$$

(4.3.1.3) es una ecuación casi lineal en el término  $\alpha$  de la difusividad térmica del material que es función lineal de la temperatura. Ahora bien substituyendo los de valores de  $K_0, \beta$  resolvemos por el método de separación de variables a (4.3.1.3) obteniendo:

$$U(x,t) = 100 \left[ \frac{x}{10} (1+50\beta) + 2(1+50\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{10} \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{10}} \right] \quad (4.3.1.4)$$

de (4.3.1.4) se deduce que la transformación que lleva  $U(x,t)$  a  $T(x,t)$  esta determinada por:

$$T(x,t) = \frac{1}{\beta} \left[ \sqrt{1 + 2\beta U(x,t)} - 1 \right] \quad (4.3.1.5)$$

A fin de implementar algún algoritmo computacional acoplado entre el método de elemento finito y el método de las diferencias finitas para resolver la ecuación del calor (4.3.1.1) reducida a (4.3.1.3) procedemos como sigue:

#### 4.3.2 EL MEF-MDF ACOPLADO Y LA ECUACION DEL CALOR LINEAL

La ecuación del calor lineal y transitoria para el caso bidimensional general viene representada por:

$$k_{xx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_{yy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Q + \lambda \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{en } \Omega \times I^+ \quad (4.3.2.1)$$

bajo las siguientes condiciones generales de frontera:

$$k \{ \nabla u \}^* \hat{n} + \sigma(s) = g(s) \quad \text{en } \partial\Omega \times I^+ \quad (4.3.2.2)$$

donde  $k_{xx}, k_{yy}$  son las conductividades del material y  $Q$  la fuente en  $\bar{\Omega}$ ,  $\lambda$  la difusividad térmica del material,  $\sigma(s)$  el coeficiente de la perdida de calor por convección en la frontera de  $\Omega$  y  $g(s)$  los valores prescritos a la frontera del problema. En términos de operadores diferenciales (4.3.2.1), (4.3.2.2) son representadas como:

$$L[u] = f(x, y, t) \quad \text{en } \Omega \times I^+ \quad (4.3.2.3)$$

$$B[u] = g(s) \quad \text{en } \partial\Omega \times I^+ \quad (4.3.2.4)$$

donde los operadores diferenciales vienen dados por:

$$L[u] = k_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [u] + k_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [u]$$

$$f(x, y, t) = \left( Q - \lambda \frac{\partial}{\partial t} [u] \right) \quad (4.3.2.5)$$

y su condición de frontera serán:

$$B[u] = k \{ \nabla u \}^* \hat{n} + \sigma(s) u = g(s) \quad (4.3.2.6)$$

y  $k = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 \\ 0 & k_{yy} \end{bmatrix}$  es la matriz de la conductividad térmica del material.

En (4.3.2.6) se consideran los tres tipos de condiciones de frontera a saber:

$$u|_{\Gamma_1} = u_1 \text{ en } \Gamma_1 \subseteq \partial\Omega \quad \text{Dirichlet} \quad (4.3.2.7a)$$

$$k\{\nabla u\}^* \hat{n}|_{\Gamma_2} = u_2 \text{ en } \Gamma_2 \subseteq \partial\Omega \quad \text{Neumann} \quad (4.3.2.7b)$$

$$k\{\nabla u\}^* \hat{n} + \sigma(s)u|_{\Gamma_3} = u_3 \text{ en } \Gamma_3 \subseteq \partial\Omega \quad \text{Mixta} \quad (4.3.2.7c)$$

donde la frontera de la región es la unión de los tramos indicados..De esta manera la ecuación diferencial (4.3.2.3) bajo la condición de frontera (4.3.2.4) en términos de operadores diferenciales lineales será:

$$L[u] = f \text{ en } \Omega \times I^+ \quad (4.3.2.8)$$

$$B[u] = g \text{ en } \partial\Omega \times I^+ \quad (4.3.2.9)$$

Ahora bien siendo nuestro objetivo determinar la distribución de temperatura  $u(x, y, t)$  en forma numérica determinaremos un algoritmo computacional a partir del método del elemento finito en su forma variacional acoplado con el método de las diferencias finitas.

### 4.3.3 FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL MEF-MDF.

Sabemos que la funcional energía del sistema (4.3.2.8), (4.3.2.9), viene representada por:

$$I[u] = \int_{\Omega} (K\|\nabla\|^2 u^2 - 2fu) d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\sigma u^2 - 2gu) ds \quad (4.3.3.1)$$

donde substituyendo (4.3.2.5) ,(4.3.2.6) en (4.3.3.1) tenemos:

$$I[u] = \int_{\Omega} \left[ K_{xx} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2 \left( Q - \lambda \frac{\partial u}{\partial t} \right) u \right] d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\sigma u^2 - 2gu) ds \quad (4.3.3.2)$$

La solución del sistema (4.3.2.8), bajo (4.3.2.9) se obtiene resolviendo la siguiente ecuación funcional

$$\frac{dI[u]}{du} \equiv 0 \quad (4.3.3.3)$$

Formulación Matricial y Algorítmica del MEF-MDF.

Para resolver (4.3.3.3) en forma numérica se propone a  $\tilde{u} = \sum_{e=1}^E u^{(e)}$ , como polinomio de interpolación global definido en  $\bar{\Omega}$  donde  $u^{(e)}$  es el polinomio local de interpolación para cada elemento finito  $\Delta^{(e)}$  de la red definida en  $\bar{\Omega}$

Así la energía global (4.3.3.1) en forma numérica queda como  $I[\tilde{u}] = I$  en  $\tilde{\Omega}$  la cual viene representada como la suma de las energías locales:  $I^{(e)} = \tilde{I}|_{\Delta^{(e)}}$

$$I[\tilde{u}] = I \left[ \sum_{e=1}^E u^{(e)} \right] = \sum_{e=1}^E I[u^{(e)}] = \sum_{e=1}^E I^{(e)} = I[u_1, u_2, \dots, u_p] \quad (4.3.3.4)$$

donde  $u_1, u_2, \dots, u_p$  son los valores nodales de  $\tilde{u}$  sobre los nodos de la red  $P(\tilde{\Omega})$ . La ecuación (4.3.3.4) representa un sistema lineal de p ecuaciones en p-q incógnitas a saber los p valores nodales menos los q valores prescritos a la frontera. Las matrices locales de rigidez y fuerza  $[K^{(e)}]$ ,  $\{f^{(e)}\}$  locales vienen dadas respectivamente por:

$$[K^{(e)}]\{u\} = \int_{\Delta^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{u\} d\Omega + \int_{\partial\Delta} h^{(e)} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \{u\} d\Omega \quad (4.3.3.5)$$

$$\{f^{(e)}\} = - \int_{\partial\Delta^{(e)}} q^{(e)} [N^{(e)}]^T ds + \int_{\Delta^{(e)}} Q^{(e)} [N^{(e)}]^T d\Omega + \int_{\partial\Delta^{(e)}} h^{(e)} u [N^{(e)}]^T ds \quad (4.3.3.6)$$

donde  $q^{(e)}$  es la entrada de calor en la frontera del elemento  $\partial\Delta^{(e)}$  y  $h^{(e)}$  es la perdida de calor por convección en  $\partial\Delta^{(e)}$  del elemento y  $h^{(e)} = \sigma(s)|_{\partial\Delta^{(e)}}$ . El término  $Q^{(e)}$  que representa

la fuente en  $\Delta^{(e)}$  ahora toma el valor  $\left( Q^{(e)} - \lambda^{(e)} \frac{\partial u}{\partial t} \right)$  por lo que la derivación de las

matrices  $[K^{(e)}]$ ,  $\{f^{(e)}\}$  para el caso de flujo transitorio diferirá tan solo de las matrices  $[K^{(e)}]$ ,  $\{f^{(e)}\}$  de flujo permanente tan solo en el. Término  $f = (Q - \lambda \frac{\partial u}{\partial t})$ .

Ahora bien, a fin de determinar la contribución de la parte dinámica de (4.3.3.5), (4.3.3.6) denotamos por  $X_Q$  evaluada en cada elemento

$$\tilde{X}_Q = - \sum_{e=1}^E \int_{\Delta^{(e)}} u^{(e)} \left( \lambda^{(e)} \frac{\partial u^{(e)}}{\partial t} - Q^{(e)} \right) d\tilde{\Omega} \quad (4.3.3.7)$$

donde

$$\begin{aligned} (u^{(e)})^T &= ([N^{(e)}] \{U\})^T = \{U\}^T [N^{(e)}]^T \\ \frac{\partial u^{(e)}}{\partial t} &= [N^{(e)}] \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \right\} \end{aligned}$$

luego, de (4.3.3.7) resulta:

$$\tilde{X}_Q = \sum_{e=1}^E \lambda^{(e)} \int_{\Delta^{(e)}} [N^{(e)}] \{U\} [N^{(e)}] \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \right\} d\tilde{\Omega} - \sum_{e=1}^E Q^{(e)} [N^{(e)}] \{U\} \quad (4.3.3.8)$$

y derivándola con relación a  $\{U\}$ , tenemos:

$$\frac{\partial \tilde{X}_Q}{\partial U} = \sum_{e=1}^E \int_{\Delta^{(e)}} \lambda^{(e)} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \right\} d\tilde{\Omega} - \sum_{e=1}^E Q^{(e)} [N^{(e)}] \quad (4.3.3.9)$$

por lo que el término que se debe agregar a la matriz de rigidez  $[K^{(e)}]$  es

$$\int_{\Delta^{(e)}} \lambda^{(e)} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] d\tilde{\Omega}. \quad (4.3.3.10)$$

donde

$$[C^{(e)}] = \int_{\Delta^{(e)}} \lambda^{(e)} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] d\tilde{\Omega} \quad (4.3.3.11)$$

será el término  $[C^{(e)}] \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \right\}$  que permitirá expresar en forma matricial a

$$[L^{(e)}] = [K^{(e)}] [C^{(e)}] \quad (4.3.3.12)$$

y de esta manera, las matrices de rigidez y de fuerza locales para este caso quedarán deducidas en (4.3.3.5) y (4.3.3.6). En efecto:

$$\begin{aligned} [L^{(e)}] \{u\} = & \int_{\Delta^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{u\} d\tilde{\Omega} + \\ & \int_{\Delta^{(e)}} h^{(e)} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \{u\} d\tilde{\Omega} + \end{aligned} \quad (4.3.3.13)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Delta^{(e)}} \lambda^{(e)} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \right\} d\tilde{\Omega} \\ \{f^{(e)}\} = & - \int_{\partial\Delta^{(e)}} q^{(e)} [N^{(e)}]^T d\tilde{s} + \int_{\Delta^{(e)}} Q^{(e)} [N^{(e)}]^T d\tilde{\Omega} + \int_{\partial\Delta^{(e)}} h^{(e)} u_{\infty} [N^{(e)}]^T d\tilde{s} \end{aligned} \quad (4.3.3.14)$$

que en forma simplificada quedarán como:

$$[L^{(e)}] = [K^{(e)}] + [C^{(e)}] \quad (4.3.3.15)$$

Ensamblando las  $[K^{(e)}]$ ,  $\{f^{(e)}\}$  en la región se obtendrá

$$\sum_{e=1}^E \left[ [K^{(e)}] \{u\} + [C^{(e)}] \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \right\} \right] = \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\} \quad (4.3.3.16)$$

donde finalmente obtenemos el algoritmo:

$$\left[ [K] \{U\} + [C] \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \right\} \right] = \{f\} \quad (4.3.3.17)$$

de donde se determinara el vector de las temperaturas  $\{U\}^t = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$  del problema.

La expresión (4.3.3.17) representa la ecuación general matricial del MEF-MDF para los fenómenos de propagación de flujos transitorios definidos por (4.3.2.8), (4.3.2.9).

Así, la solución numérica  $u(x, y, t_k)$  de la ecuación (4.3.1.1) bajo (4.3.1.2) vendrá determinada por la solución de (4.3.3.17) en cada estación  $t_k$ ,  $t_k \geq t_0$  iniciando con  $t_0$ .

. La derivada de  $u(x, y, t)$  de  $t_k$  en diferencias finitas centrales viene dada por:

$$\frac{dU(x, y, t_k)}{dt} = \frac{U(x, y, t_{k+1}) - U(x, y, t_{k-1})}{t_{k+1} - t_{k-1}} \quad (4.3.3.18)$$

que sustituidas en (4.3.3.17) resulta:

$$[K]\{u(x, y, t_k)\} + [C]\left\{\frac{dU(x, y, t_k)}{dt}\right\} = \{f(x, y, t_k)\} \quad (4.3.3.19)$$

Finalmente obtenemos la temperatura en el instante medio  $t_k$  del intervalo  $[t_{k-1}, t_{k+1}]$ .

$$U(x, y, t_k) = \frac{U(x, y, t_{k-1}) - U(x, y, t_{k+1})}{2}$$

con el término de entrada en  $t_k$  como

$$f'(x, y, t_k) = \frac{f(x, y, t_{k-1}) - f(x, y, t_{k+1})}{2}$$

donde finalmente (4.3.3.19) queda numéricamente expresada como:

$$\begin{aligned} [K]\left[\frac{U(x, y, t_{k+1}) - U(x, y, t_{k-1})}{2}\right] + [C]\left[\frac{U(x, y, t_{k+1}) - U(x, y, t_{k-1})}{2\Delta t}\right] = \\ \left\{\frac{f(x, y, t_{k-1}) - f(x, y, t_{k+1})}{2}\right\} \end{aligned} \quad (4.3.3.20)$$

de donde se tiene por ultimo al algoritmo computacional procurado:

$$\frac{1}{2}\left(\left([K] + \frac{1}{\Delta t}[C]\right)U(x, y, t_{k+1})\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{\Delta t}[C] - [K]\right)U(x, y, t_{k-1}) + \bar{f}(x, y, t_k)\right) \quad (4.3.3.21)$$

Este algoritmo permite iniciar el proceso a partir del estado inicial  $t_0$ ,  $k = 1$  y calcular a  $U(x, y, t_1)$  y de  $U(x, y, t_1)$  determinar a  $U(x, y, t_2)$  y así sucesivamente, hasta llegar al tiempo  $t_k = t_e$  en que se estaciona el fenómeno.

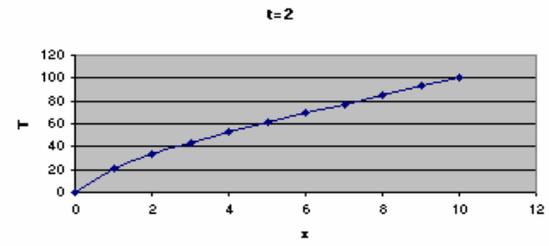
Por último para utilizar este método en forma híbrida primero se debe de transformar la ecuación diferencial parcial no lineal (4.3.1.1) a la forma (4.3.1.3) y después resolverla numéricamente el MEF-MDF en forma directa a la ecuación transformada. Como un resultado de este trabajo se calcula la solución por el método de la trasformada de Kirchhoff y por el método acoplado **MEF-MDF** comparándola mediante sus graficas. Para el primer caso se tienen los siguientes resultados para  $t = 2, 2.4$  y  $6$ , segundos. Sabemos que de (4.3.1.5) la temperatura viene dada por el desarrollo en serie:

$$T(x, t) = \frac{1}{\beta} \left[ \sqrt{1 + 200\beta \left[ \frac{x}{10}(1 + 50\beta) + 2(1 + 50\beta) \right]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{10}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{10}} - 1 \right]$$

para los valores para  $\alpha=10$ ,  $\beta=0.1$  y en la serie hasta los primeros tres términos se obtiene:

**Tabla 4.3.3. 1.**

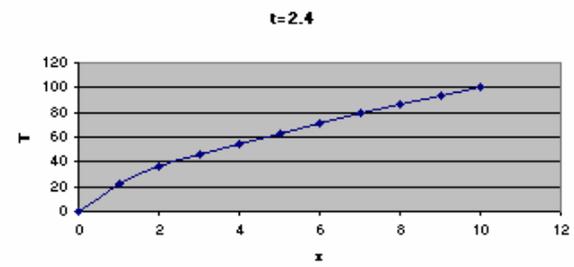
0	0
1	21.1915
2	33.3313
3	43.3182
4	52.3826
5	60.9846
6	69.309
7	77.4078
8	85.2623
9	92.8166
10	100



Gráfica 4.3.3.1.

**Tabla 4.3.3. 2.**

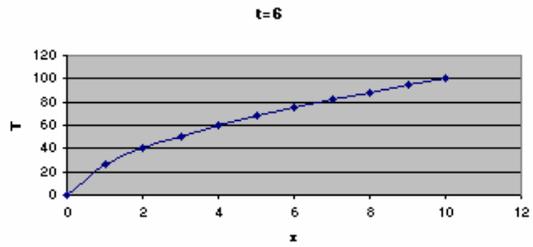
0	0
1	22.8513
2	35.6068
3	45.8729
4	54.9624
5	63.3822
6	71.362
7	79.0013
8	86.3298
9	93.3386
10	100



Gráfica 4.3.3.2.

**Tabla 4.3.3.3.**

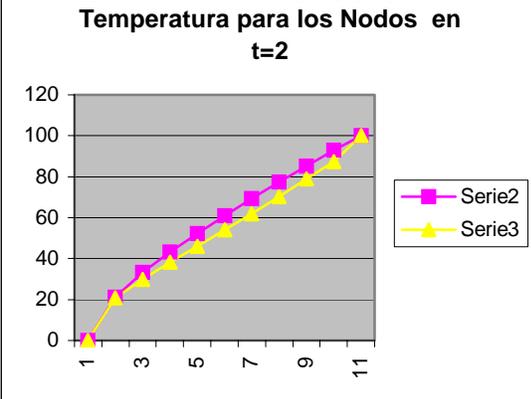
0	0
1	25.9677
2	39.8795
3	50.6913
4	59.8608
5	67.9713
6	75.326
7	82.1056
8	88.4275
9	94.3728
10	100



Gráfica 4.3.3.3.

Tabla 4.3.3.4. Solución por MEF-MDF acoplado y por el método analítico.

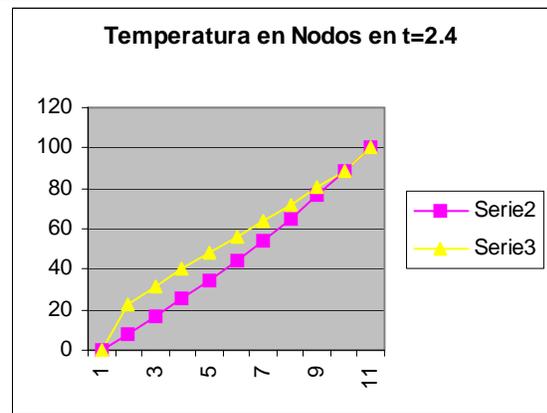
Nodo	Teórica	MEF-MDF
0	0	0
1	21.1915	20.7818128
2	33.3313	29.725055
3	43.3182	38.2286222
4	52.3825	46.1212972
5	60.9846	53.9656158
6	69.309	61.9680485
7	77.4078	70.193516
8	85.2623	79.0325783
9	92.8166	87.2625313
10	100	100



Gráfica 4.3.3.4. Comparativo de las soluciones por MEF-MDF acoplado y por el método analítico

Tabla 4.3.3.5. Comparativo de la solución por el método de Kirchhoff y el MEF-MDF.

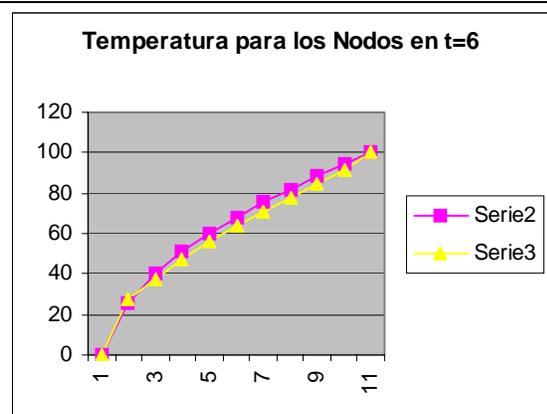
NODO	Kirchhoff	MEF-MDF
0	0	0
1	8.1601	22.3598517
2	16.4998	31.7420651
3	25.1815	40.5291995
4	34.3343	48.5269169
5	44.0412	56.327973
6	54.3314	64.1431049
7	65.1769	72.053641
8	76.4952	80.4322951
9	88.1572	88.2079427
10	100	100



Gráfica 4.3.3.5. Comparativo de los métodos de Kirchhoff y MEF-MDF para  $t = 2.4$ .

Tabla 4.3.3.6. Solución por MEF-MDF acoplado y por el método analítico.

Nodo	Teórica	MEF-MDF
0	0	0
1	25.9677	27.1418901
2	39.8795	37.847675
3	50.6913	47.5030434
4	59.8608	55.8452732
5	67.9713	63.545904
6	75.326	70.8269757
7	82.1056	77.8077445
8	88.4275	84.7924048
9	94.3728	91.0395962
10	100	100



Gráfica 4.3.3.6. Comparativo de la solución por el método de Kirchhoff y el MEF-MDF para  $t = 6$ .

## CAPITULO 5

### METODO DEL ELEMENTO FRONTERA

**5.1 Definición.** Por  $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ , representarán el espacio vectorial  $n$  dimensional de los números reales o complejos,  $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ , representará un dominio compacto en  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{C}^n$ , con interior  $\Omega$  y frontera  $\partial\Omega$ ,  $C^k(\Omega)$  representará el espacio de las funciones  $k$ -diferenciables en  $\Omega$ .  $C^k(\partial\Omega)$  el espacio de las funciones  $k$ -diferenciables en  $\partial\Omega$ .  $C^\infty(\Omega)$ ,  $C^\infty(\partial\Omega)$ , respectivamente son los espacios de funciones diferenciables hasta de orden infinito en  $\Omega$ ,  $\partial\Omega$  respectivamente.  $\mathfrak{R}^\infty, \mathfrak{C}^\infty$ , representaran los espacios vectoriales de las secuencias infinitas  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ , bajo la suma y multiplicación por un escalar, haciendo de  $\mathfrak{R}^\infty, \mathfrak{C}^\infty$  un espacio vectorial de dimensión infinita.

La norma  $\|\cdot\|$  de  $\mathfrak{R}^n, \mathbb{C}^n$  también puede ser extendida a  $\mathfrak{R}^\infty, \mathfrak{C}^\infty$  de la siguiente manera. Sabemos que la norma  $\|\cdot\|$  Euclideana en  $\mathfrak{R}^n$ , viene dada por: Si  $X \in \mathfrak{R}^n$ ,  $X=(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ,  $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ , y que mediante el producto interno definido en  $\mathfrak{R}^n$ , para cualquier par de vectores  $X, Y \in \mathfrak{R}^n$ ,  $X \cdot Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  se puede definir la norma de  $X$ .

$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (5.1.1)$$

También sabemos que la función bilineal  $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  definida por  $\langle X, Y \rangle = X \cdot Y$  define la norma de  $X$ .

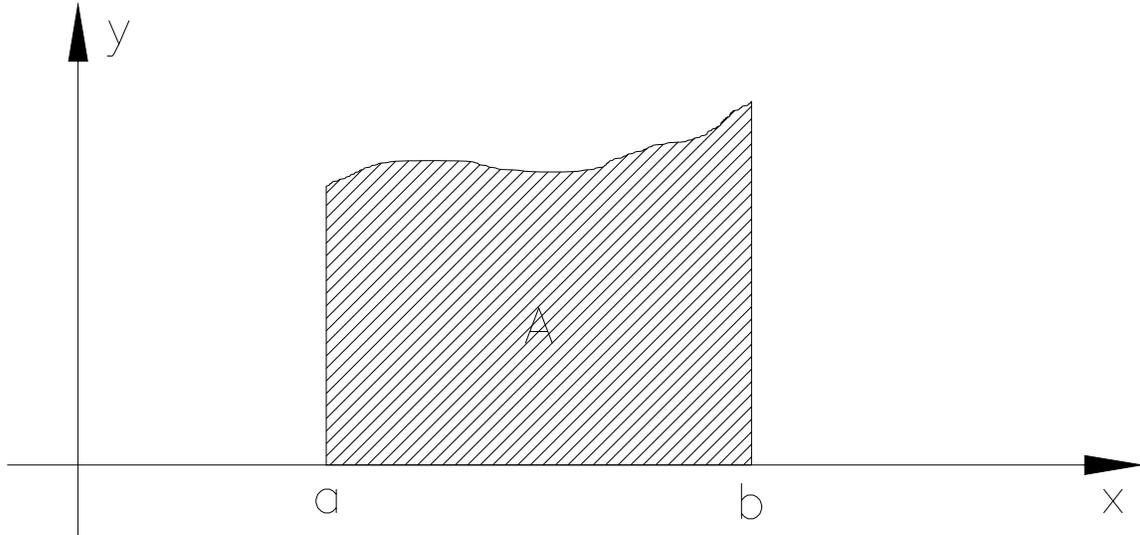
$$\sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{X \cdot X} = \|X\| \quad (5.1.2)$$

Si  $X \in \mathfrak{R}^n$  es un vector de  $\mathfrak{R}^n$  fijo,  $\langle Y, X \rangle = Y \cdot X \forall Y \in \mathfrak{R}^n$ , esta función es lineal en  $\mathfrak{R}^n$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{R}, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{R}^n$ ,

$$\langle \alpha Y_1 + \beta Y_2, X \rangle = \alpha \langle Y_1, X \rangle + \beta \langle Y_2, X \rangle = \alpha Y_1 \cdot X + \beta Y_2 \cdot X \quad (5.1.3)$$

Sea  $C^0(a, b) = \{f : [a, b] \subset \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} \mid \text{Continuas}\}$ . Si  $f \in C^0(a, b)$  entonces existe la Integral Según Riemann de  $f$  en el intervalo  $(a, b)$

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (5.1.4)$$



$C^0(a, b)$  es un espacio vectorial, llamado del espacio de las funciones continuas en el intervalo  $[a, b]$  las cuales son integrables en  $(a, b)$  En este espacio, vale definir un producto interno de la siguiente manera:  $\forall f, g \in C^0(a, b)$  se define a:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = f \cdot g \quad (5.1.5)$$

como la integral del producto puntual de funciones  $f(x), g(x)$  que es nuevamente una función continua en  $[a, b]$  ella es integrable en  $[a, b]$ . Así, este producto interno define una norma  $\|\cdot\|$  en  $C^0(a, b)$ .

$$\|f\|^2 = \int_a^b f(x) \cdot f(x)dx = \int_a^b f^2(x)dx \quad (5.1.6)$$

luego la norma de  $f$  será

$$\|f\| = \left\{ \int_a^b f^2(x)dx \right\}^{1/2} \quad (5.1.7)$$

haciendo de este espacio vectorial  $C^0(a, b)$  un espacio vectorial normado. Los espacios vectoriales normados de dimensión infinita, son llamados de espacios de *Banach*. En particular, el espacio de funciones definidas en  $(a, b)$  que son cuadrado integrables  $\int_a^b f^2(x)dx$  se les denomina  $l_2[a, b]$  el cual es un espacio de *Banach*. Regresando al caso de  $\mathfrak{R}^\infty = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), x_i \in \mathfrak{R}\}$  es un espacio vectorial real de dimensión infinita, vamos a definir una norma de la siguiente manera: Si tomamos a un  $X \in \mathfrak{R}^\infty$ , y generalizamos la norma de  $\mathfrak{R}^n$ , a  $\mathfrak{R}^\infty$ , tomando en cuenta que en general las series pueden no ser convergentes, de allí que; para asegurar que el limite  $\|X\|^2$  exista, debemos de

pedir que la serie  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$  sea convergente. A este espacio (subespacio de  $\mathfrak{R}^{\infty}$ ) de todas las secuencias infinitas  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ , tales que  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$  sean convergentes, lo denominamos  $l_2 \subset \mathfrak{R}^{\infty}$ . Este espacio  $l_2$  es un espacio vectorial de dimensión infinita normado, y por lo tanto es un espacio de *Banach*.

### Los Espacios de Sobolev.

Sea  $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$ , un abierto en  $\mathfrak{R}^n$ , y sea  $u: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ , una función diferenciable en  $\Omega$  se define como el soporte de  $u$ ,  $Sop(u) = \{X \in \Omega | u(X) \neq 0\} \subset \Omega$ . El soporte de  $u$ ,  $Sop(u) \subset \Omega$  es compacto, otros conjuntos como,

$$C_0^{\infty}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathfrak{R} \mid \exists u^k \text{ en } \Omega, k \geq 1, Sop(u) \text{ Compacto} \right\}$$

y por

$$L_2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathfrak{R} \mid \exists \left\{ \int_{\Omega} \|u\|^2 d\Omega \right\}^{1/2} < M \right\} \text{ el espacio de Hilbert.}$$

La norma de  $u$  se define como:

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} |u|^2 d\Omega = \langle u, u \rangle_{L_2(\Omega)}$$

El espacio de *Sobolev*  $W^m(\Omega)$  es el subespacio de funciones del espacio de *Hilbert*  $L_2(\Omega)$  definido como,

$$W^m(\Omega) = \left\{ u \in L_2(\Omega) \mid D^{\alpha} u \in L_2(\Omega); 0 \leq \alpha \leq m \right\}$$

donde la norma generalizada de  $u$  viene definida por,  $\|u\|_m = \left\{ \sum_{0 \leq \alpha \leq m} \|D^{\alpha} u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}$  y con producto interno  $\langle , \rangle : W^m(\Omega) \times W^m(\Omega) \rightarrow \mathfrak{R}$  definido  $\langle u, v \rangle_m = \sum_{0 \leq \alpha \leq m} \langle D^{\alpha} u, D^{\alpha} v \rangle_{L_2(\Omega)}$ .

Así  $\langle u, v \rangle_0 = \langle u, v \rangle_{L_2(\Omega)}$  coincide con el producto interno de  $L_2(\Omega)$ . Definimos como al subespacio

$$W_0^m(\Omega) = \left( \overline{C_0^{\infty}(\Omega)}, \|\cdot\|_m \right) \subset W^m(\Omega) \quad (5.1.8)$$

Ejemplos de Espacios de *Sobolev*.

Para el caso  $n=2$  y  $m=3$  el dominio  $\Omega$  es una placa de base  $a$  y altura  $b$ .

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2$$

Así

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < a; 0 < y < b\} \quad (5.1.9)$$

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists u', u'', \dots, \text{ en } \Omega \exists \text{ Sop}(u) \text{ Compacto}\}$$

$$W^3(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) \mid D^\alpha u \in L_2(\Omega); 0 \leq \alpha \leq 3\} \quad (5.1.10)$$

$u \in L_2(\Omega)$  significa que  $\left\{ \int_\Omega \|u\|^2 d\Omega \right\}^{1/2}$  existe, de manera que si  $u \in W^3(\Omega)$  entonces las integrales

$$\left\{ \int_\Omega \|u\|^2 d\Omega \right\}^{1/2} \text{ y } \left\{ \int_\Omega \|D^\alpha u\|^2 d\Omega \right\}^{1/2}, 0 \leq \alpha \leq 3. \quad (5.1.11)$$

$u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$ , donde cualquiera satisface

$\left\{ \int_0^b \int_0^a \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial x_i^2 \partial x_j} \right\|^2 dx_i dx_j \right\}^{1/2}$  la norma de generalizada  $u \in W^3(\Omega)$  vendrá dada por:

$$\|u\|_3 = \left\{ \sum_{i,j,k=0}^3 \int_0^b \int_0^a \left\| \frac{\partial^k u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|^2 dx_i dx_j \right\}^{1/2} \quad (5.1.12)$$

Si  $u, v \in W^3(\Omega)$ , el producto interno en  $W^3(\Omega)$  será

$$\langle u, v \rangle_3 = \left\{ \sum_{i,j,k=0}^3 \int_0^b \int_0^a \left( \frac{\partial^k u}{\partial x_i \partial x_j} \right) \left( \frac{\partial^k v}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx_i dx_j \right\}^{1/2} \quad (5.1.13)$$

$$\langle u, v \rangle_0 = \left\{ \int_0^b \int_0^a \|uv\|^2 dx_i dx_j \right\}^{1/2} = \langle u, v \rangle_{L_2(\Omega)} \quad (5.1.14)$$

$$W^0(\Omega) = L_2(\Omega) \quad (5.1.15)$$

$$W_0^3(\Omega) = \left( \overline{C_0^\infty(\Omega)}, \|\cdot\|_0 \right) \quad (5.1.16)$$

En lo que sigue, vamos a relacionar los espacios funcionales con los operadores diferenciales y funcionales asociadas a estos operadores definidos en estos espacios. Para

esto hemos tomado un problema básico de la teoría del potencial, o sea las ecuaciones de *Laplace* y de *Poisson*.

Sea  $\bar{\Omega} \subset \mathfrak{R}^n$ , un conjunto cerrado y acotado en  $\mathfrak{R}^n$ , con interior  $\Omega$  y frontera  $\partial\Omega$ .

$$C_2^k(\bar{\Omega}, \mathfrak{R}) = \left\{ u : \bar{\Omega} \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R} \mid \exists u', \dots, u^k \text{ Continua en } \Omega, \int_{\Omega} |u|^2 d\Omega < \infty \right\} \quad (5.1.17)$$

$$C_{2,0}^k(\bar{\Omega}, \mathfrak{R}) = \left\{ u : \bar{\Omega} \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R} \mid \exists u', \dots, u^k \text{ Continua en } \Omega, \int_{\Omega} |u|^2 d\Omega < \infty, u|_{\partial\Omega} = 0, \text{ Sop}(u) \text{ Compacto} \right\} \quad (5.1.18)$$

de esta manera, un operador diferencial lineal  $L$  definido por:

$$L : C_{2,0}^k(\bar{\Omega}, \mathfrak{R}) \rightarrow C_{2,0}^m(\bar{\Omega}, \mathfrak{R}) \quad (5.1.19)$$

como

$$u \mapsto L[u] = -\nabla^2 u \quad (5.1.20)$$

es el operador de *Poisson*.

En  $C_{2,0}^k(\bar{\Omega}, \mathfrak{R})$  se define el producto interno.

$$\forall u, v \in C_{2,0}^k(\bar{\Omega}, \mathfrak{R}), \langle u, v \rangle = \left\{ \int_{\Omega} uv d\Omega \right\}^{1/2} \quad (5.1.21)$$

de esta manera la norma de  $u$  queda definida haciendo  $u = v$  como:

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \int_{\Omega} |u|^2 d\Omega < \infty \quad (5.1.22)$$

haciendo de este espacio  $C_{2,0}^k(\bar{\Omega}, \mathfrak{R})$  un espacio normado (*Hilbert*), de tal manera que el espacio completo  $X = \bar{C}_{2,0}^k(\bar{\Omega}, \mathfrak{R})$  es un espacio de Banach. De esta manera, si en  $X$  esta definiendo un operador lineal  $L : X \rightarrow Y = \bar{C}_{2,0}^m(\bar{\Omega}, \mathfrak{R})$ , podemos asociar a  $L$  ( $L[u]=f$ ) una forma lineal  $B_v(,)$  definida como sigue:

$$B : X \cdot X \rightarrow \mathfrak{R} \quad \forall (u, v) \in X \times X \quad (5.1.23)$$

$$B_v(u) = \frac{1}{2} \langle L[u], v \rangle - \langle f, u \rangle \quad (5.1.24)$$

$$\begin{aligned}
L(\alpha u_1 + \beta u_2, v) &= \frac{1}{2} L(\langle \alpha u_1 + \beta u_2, v \rangle) - \langle f, \alpha u_1 + \beta u_2 \rangle \\
&= \frac{\alpha}{2} L\langle u_1, v \rangle + \frac{\beta}{2} L\langle u_2, v \rangle - \alpha \langle f, u_1 \rangle - \beta \langle f, u_2 \rangle \\
&= \alpha \frac{L}{2} \langle u_1, v \rangle - \alpha \langle f, u_1 \rangle + \beta \frac{L}{2} \langle u_2, v \rangle - \beta \langle f, u_2 \rangle \\
&= \alpha B\langle u_1, v \rangle + \beta B\langle u_2, v \rangle
\end{aligned}$$

esto muestra que es lineal.

$$B(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} L[u] v d\Omega - \int_{\Omega} f u d\Omega = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla^2 u) v d\Omega - \int_{\Omega} f u d\Omega \quad (5.1.25)$$

En la primera integral el integrando  $-(\nabla^2 u)v$  es sustituido por  $(-\nabla^2 u) = \nabla^T v \cdot \nabla u - \nabla^T \cdot (v \nabla u)$  de donde se tiene:

$$\begin{aligned}
B(u, v) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla^T v \cdot \nabla u d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla^T (v \nabla u) d\Omega - \int_{\Omega} f u d\Omega \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla^T v \cdot \nabla u d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} dS - \int_{\Omega} f u d\Omega
\end{aligned} \quad (5.1.26)$$

$$B(u, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} dS - \int_{\Omega} f u d\Omega$$

$$B(u, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^2 - Fu) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} dS \quad (5.1.27)$$

Se define la funcional de energía (5.1.30) del sistema dado por (5.1.29) bajo (5.1.29)

$$Lu = f \text{ en } \Omega \text{ donde} \quad (5.1.28)$$

$$Bu = 0 \text{ en } \partial\Omega \quad (5.1.29)$$

Es el operador de frontera, como:

$$I[u] = 2B(u, u) = \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^2 - 2fu) d\Omega - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} dS \quad (5.1.30)$$

Como  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$  siendo  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  las partes de  $\partial\Omega$  donde las condiciones de frontera homogéneas son de *Dirichlet, Neumann y Mixtas*.

$$u \Big|_{\Gamma_1} = 0 \quad (5.1.31)$$

$$\nabla u \cdot \hat{n} \Big|_{\Gamma_2} = 0 \quad (5.1.32)$$

$$\nabla u \cdot \hat{n} + \sigma(s)u \Big|_{\Gamma_3} = 0 \quad (5.1.33)$$

Así de esta manera, la integral  $\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} dS$  queda como:

$$\int_{\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3} u \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} dS = \int_{\Gamma_1} u \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} dS + \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} dS + \int_{\Gamma_3} u \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} dS = - \int_{\Gamma_3} \sigma(s)u^2 dS \quad (5.1.34)$$

por lo que  $I[u]$  queda

$$I[u] = \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^2 - 2fu) d\Omega + \int_{\partial\Omega = \Gamma_3} \sigma(s)u^2 dS = \int_{\Omega} (uL[u] - 2fu) d\Omega \quad (5.1.35)$$

donde

$$\int_{\Omega} uL[u] d\Omega = \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 d\Omega - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} dS \quad (5.1.36)$$

Esta ultima expresión de  $I[u]$  es la expresión reconocida como la Energía del sistema definida por el operador  $L[\ ]$  bajo la condición de frontera dada  $B[\ ]$ . En resumen, si tenemos una ecuación diferencial definida por el operador diferencial.

$$Lu = f \text{ en } \Omega$$

Bajo la condición de frontera.

$$Bu = G \text{ en } \partial\Omega$$

Donde  $G = 0$ . Entonces  $I[u]$  representa la Energía del sistema (5.1.28) bajo (5.1.29) .

$$I[u] = \int_{\Omega} (uL[u] - 2fu) d\Omega \quad (5.1.37)$$

Se sabe que los puntos críticos de (5.1.37) son las soluciones de (5.1.28) bajo (5.1.29) y recíprocamente las soluciones de (5.1.28) bajo (5.1.29) son los puntos críticos de (5.1.37). Por otro lado de la teoría de las ecuaciones diferenciales la solución de (5.1.28) bajo (5.1.29) es única. De esta manera, el punto crítico de (5.1.37), representa la única solución de la ecuación (5.1.28) bajo (5.1.29). Es decir si se deriva a (5.1.37) se tiene:

La variación de  $I$ , igualándola a cero

$$\delta I[u] = 0$$

o sea

$$\delta \left\{ \int_{\Omega} (uL[u] - 2fu) d\Omega \right\} = 0 \quad (5.1.38)$$

Ahora bien, podremos determinar el punto critico de (5.1.37) y por lo tanto la solución de (5.1.28) bajo (5.1.29). Como la solución de (5.1.38) en la mayoría de los casos no es obtenida en forma exacta, se resolverá en forma numérica. Para esto sea  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  una familia de funciones base para un espacio de funciones  $E^n \subset X$ . Así si  $\tilde{u} \in E^n$  propuesta como:

$$\tilde{u} = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \dots + \alpha_n \phi_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \quad (5.1.39)$$

la energía  $I[u]$  evaluada en  $\tilde{u}$ , será función de las  $\alpha'_s$ ,

$$\begin{aligned} I[\tilde{u}] &= \int_{\Omega} (\tilde{u}L\tilde{u} - 2f\tilde{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \right) L \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \right) d\Omega - \int_{\Omega} 2f \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \int_{\Omega} \phi_i L \phi_j \right\} d\Omega - \int_{\Omega} 2f \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \right) d\Omega \\ &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \int_{\Omega} \phi_i L \phi_j d\Omega - \sum_{i=1}^n 2f \alpha_i \int_{\Omega} \phi_i d\Omega \end{aligned} \quad (5.1.40)$$

Se observa que la energía solo depende de los coeficientes de la solución numérica propuesta es decir;  $I[\tilde{u}] = I[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ , entonces tenemos que

$$\frac{dI[\tilde{u}]}{d\tilde{u}} = 0 \quad (5.1.38)$$

es equivalente al sistema lineal de ecuaciones en derivadas parciales.

$$\begin{aligned} \frac{\partial I[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]}{\partial \alpha_1} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial I[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]}{\partial \alpha_n} &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.41)$$

Explícitamente

$$\alpha_1^2 \int_{\Omega} \phi_1 L \phi_1 d\Omega + \alpha_1 \alpha_2 \int_{\Omega} \phi_1 L \phi_2 d\Omega + \dots + \alpha_1 \alpha_n \int_{\Omega} \phi_1 L \phi_n d\Omega - 2F \alpha_1 \int_{\Omega} \phi_1 d\Omega$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_2 \alpha_1 \int_{\Omega} \phi_2 L \phi_1 d\Omega + \alpha_2^2 \int_{\Omega} \phi_2 L \phi_2 d\Omega + \cdots + \alpha_2 \alpha_n \int_{\Omega} \phi_2 L \phi_n d\Omega - 2F \alpha_2 \int_{\Omega} \phi_2 d\Omega \\
& \quad \vdots \\
& \alpha_n \alpha_1 \int_{\Omega} \phi_n L \phi_1 d\Omega + \alpha_n \alpha_2 \int_{\Omega} \phi_n L \phi_2 d\Omega + \cdots + \alpha_n^2 \int_{\Omega} \phi_n L \phi_n d\Omega - 2F \alpha_n \int_{\Omega} \phi_n d\Omega
\end{aligned}$$

quedando el sistema (5.1.41) lineal como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial \alpha_1} &= 2\alpha_1 \int_{\Omega} \phi_1 L \phi_1 d\Omega + \alpha_2 \int_{\Omega} \phi_1 L \phi_2 d\Omega + \cdots + \alpha_n \int_{\Omega} \phi_1 L \phi_n d\Omega = 2F \int_{\Omega} \phi_1 d\Omega \\
\frac{\partial I}{\partial \alpha_2} &= \alpha_1 \int_{\Omega} \phi_2 L \phi_1 d\Omega + 2\alpha_2 \int_{\Omega} \phi_2 L \phi_2 d\Omega + \cdots + \alpha_n \int_{\Omega} \phi_2 L \phi_n d\Omega = 2F \int_{\Omega} \phi_2 d\Omega \\
& \quad \vdots \\
\frac{\partial I}{\partial \alpha_n} &= \alpha_1 \int_{\Omega} \phi_n L \phi_1 d\Omega + \alpha_2 \int_{\Omega} \phi_n L \phi_2 d\Omega + \cdots + 2\alpha_n \int_{\Omega} \phi_n L \phi_n d\Omega = 2F \int_{\Omega} \phi_n d\Omega
\end{aligned} \tag{5.1.42}$$

Y finalmente (5.1.42) es resuelto para las  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  que sustituidas en  $\tilde{u}$  determinaran a la solución numérica

$$\tilde{u} = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \cdots + \alpha_n \phi_n \tag{5.1.43}$$

que es la solución de (5.1.38) y por lo tanto solución numérica de (5.1.28) bajo (5.1.29) en forma numérica.

## 5.2 LA ECUACION DE LAPLACE

Sea  $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^3$ ,  $\bar{\Omega} \subset \mathfrak{R}^3$  una región abierta o cerrada y acotada tomada como dominio para funciones  $\phi, \psi$  escalares. Nuestro propósito es caracterizar a las soluciones de la ecuación de *Laplace* como las únicas funciones de potencial *Newtonianas*, también conocidas como funciones armónicas. El estudio de este tipo de problemas tiene su importancia entre otras propiedades, la comprensión y alcance de la teoría de los campos vectoriales en el estudio de la Electricidad y el Magnetismo, fluidos ideales o fluidos Newtonianos, flujos permanentes de Calor, ondas estacionarias, entre otros diversos campos de estudio de la Física y ramas de la Ingeniería.

**Definición.** Sea dada una función  $\phi$  definida en  $\bar{\Omega} \subset \mathfrak{R}^3$ , continua en  $\partial\Omega$  y de clase  $C^2(\Omega)$ , ella se dice armónica si satisface a la ecuación  $\nabla^2 \phi \equiv 0$  en  $\Omega$ .

Las funciones  $\phi, \psi, \dots$ , definidas en  $\bar{\Omega}$ , serán supuestas *univaluadas*.

### Principio de Superposición.

Si  $\phi, \psi$  definidas en  $\bar{\Omega}$ , son armónicas en  $\Omega$ , entonces  $C_1\phi + C_2\psi$  es armónica en  $\Omega$ , ya que  $\nabla^2(C_1\phi + C_2\psi) = C_1\nabla^2\phi + C_2\nabla^2\psi = 0$  en  $\Omega$ ,  $C_1\phi + C_2\psi$  continua en  $\partial\Omega$ . Con el fin de caracterizar a las funciones de potencial *Newtoniano*, requerimos de los teoremas de integración de *Stokes*, *Gauss* y *Green* principalmente, denominadas las 3 identidades de *Green*. De acuerdo con esto, sea  $\phi|_{\bar{\Omega}} \rightarrow \mathfrak{R}$ , de clases  $C^2(\Omega), C^0(\partial\Omega)$ .

$$\int_{\Omega} \text{div} \nabla \phi d\Omega = \int_{\partial\Omega} \nabla \phi \cdot \hat{n} dS = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right) dS \quad (5.2.1)$$

que es el teorema de la Divergencia para la función vectorial

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k}. \quad (5.2.2)$$

Si  $\psi|_{\bar{\Omega}} \rightarrow \mathfrak{R}$  es de clase  $C^1(\Omega), C^0(\partial\Omega)$ , la función vectorial  $\psi \nabla \phi$  tiene sus componentes continuas en  $\Omega$ ; es decir es de clase  $C^1(\Omega), C^0(\partial\Omega)$ . El teorema de la Divergencia para este campo es:

$$\int_{\Omega} \text{div}(\psi \nabla \phi) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \psi \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right) dS \quad (5.2.3)$$

Si nosotros desarrollamos al integrando

$$\text{div}(\psi \nabla \phi) = \nabla \psi \nabla \phi + \psi \nabla^2 \phi \quad (5.2.4)$$

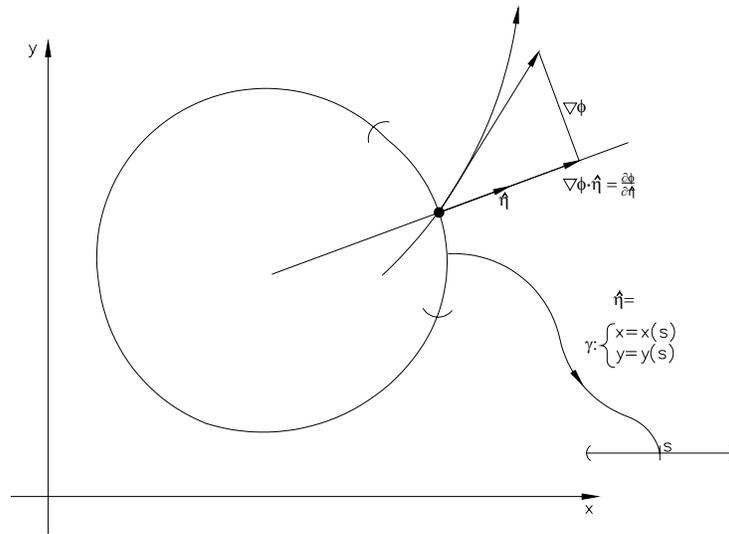
entonces el teorema queda como:

$$\int_{\Omega} \psi \nabla^2 \phi d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla \phi d\Omega = \int_{\partial\Omega} \psi \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right) dS \quad (I) \quad (5.2.5)$$

reconocida como la primera identidad de *Green*. Como una primera aplicación de esta identidad es deducir una propiedad de las funciones armónicas. Si  $\phi$  es armónica y  $\psi = 1$  en  $\bar{\Omega}$ . El teorema dice

$$\int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right) dS = 0 \quad (5.2.6)(1)$$

**Teorema 1.** Si la función  $\phi|_{\bar{\Omega}} \rightarrow \mathfrak{R}$  es armónica en  $\bar{\Omega}$ , entonces la *derivada direccional normal* de  $\phi$  en la frontera tiene contribución total nula.



$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \hat{t}(s); \hat{\eta}(s) = \hat{t}(s) \\ \gamma(s) &= (\dot{x}(s), \dot{y}(s)); \hat{\eta}(s) = (-\dot{y}(s), \dot{x}(s)) \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

**Observación.** El recíproco es verdadero. Es decir, si para toda curva frontera  $\partial\Omega$  de una región regular, la integral

$$\oint_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial\phi}{\partial\hat{\eta}} \right) dS = 0 \quad (5.2.8)$$

Entonces  $\phi$  satisface la ecuación de Laplace  $\nabla^2\phi = 0$  en  $\Omega$ , y por lo tanto  $\phi$  es armónica en  $\bar{\Omega}$ , se tiene:

$$\int_{\Omega} (\nabla\phi)^2 d\Omega = \int_{\partial\Omega} \phi \left( \frac{\partial\phi}{\partial\hat{\eta}} \right) dS \quad (5.2.9)(2)$$

Suponiendo que la condición de frontera de la ecuación de Laplace  $\nabla^2\phi = 0$  en  $\Omega$ ,  $\phi|_{\partial\Omega} = 0$  Dirichlet. Homogénea (denominado problema propio)

$$\int_{\Omega} \|\nabla\phi\|^2 d\Omega = 0 \quad (5.2.10)$$

Como  $\nabla\phi$  continua en  $\Omega$ , se tendrá que  $\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$  en  $\Omega$ , luego  $\phi$  es constante en  $\Omega$ , pero como  $\phi$  es continua en  $\bar{\Omega}$  y  $\phi|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $\phi = 0$  en todo  $\bar{\Omega}$ .

**Teorema 2.** Si  $\phi$  es armónica en  $\bar{\Omega}$  y  $\phi|_{\partial\Omega} = 0$ , entonces  $\phi = 0$  en todo  $\bar{\Omega}$ .

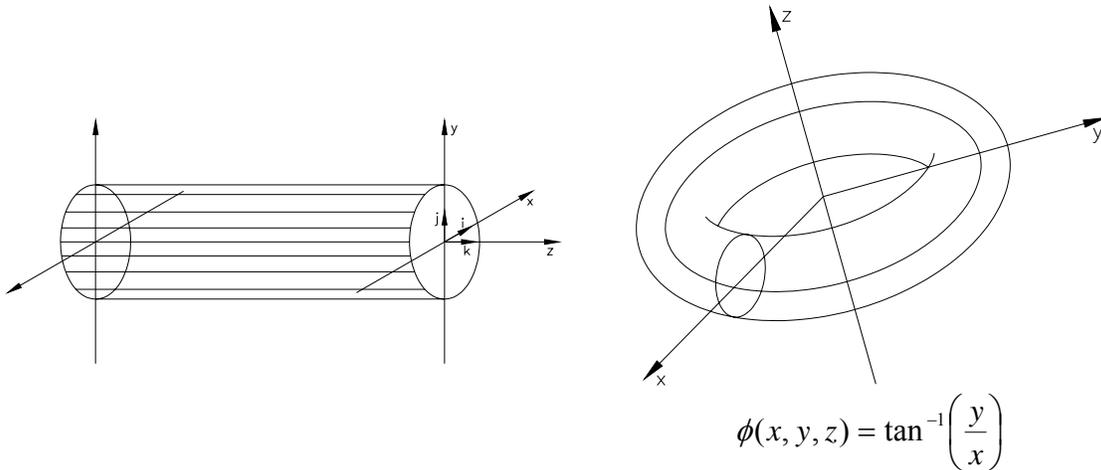
**Teorema 3.** Si  $\phi, \psi$  son armónicas en  $\bar{\Omega}$  con la condición de frontera del tipo *Dirichlet* igual  $\phi|_{\partial\Omega} = \psi|_{\partial\Omega} = g(u, v)$  entonces  $\psi \equiv \phi$  en  $\bar{\Omega}$ . Esto dice que la función  $\phi$  solución de  $\nabla^2 \phi = 0$  en  $\Omega$  con  $\phi|_{\partial\Omega} = g(u, v)$ , ella es *única* o que es unívocamente determinada por sus valores en la frontera  $\partial\Omega$ . En (5.2.9)(2), la integral sobre la frontera  $\partial\Omega$ , es nula si  $\left(\frac{\partial\phi}{\partial\hat{n}}\right) \equiv 0$  en  $\partial\Omega$ . Aquí nuevamente, la integral

$$\int_{\Omega} \|\nabla\phi\|^2 d\Omega = 0 \quad (5.2.11)$$

Siendo  $\nabla\phi$  continua en  $\Omega$ ,  $\nabla\phi = 0 \Rightarrow \phi \equiv c$  en  $\Omega$ .

**Teorema 4.** Si  $\phi$  armónica en  $\Omega$ , y  $\left(\frac{\partial\phi}{\partial\hat{n}}\right) \equiv 0$  en  $\partial\Omega$ . Entonces  $\phi \equiv c$  en  $\bar{\Omega}$ . Esto se tiene de la continuidad de  $\phi$  en  $\bar{\Omega}$ ,  $\phi$  no puede tener dos valores constantes distintos dentro de  $\bar{\Omega}$  y en la frontera  $\partial\Omega$ .

Consideremos un fluido fluyendo dentro de un toro  $T_2 = \bar{\Omega}$ .



Las líneas de flujo son círculos concéntricos teniendo como eje al eje  $z$ . De esta manera no existe flujo a través de su frontera  $\partial\Omega = S$ ; es decir,  $\left(\frac{\partial\phi}{\partial\hat{n}}\right) \equiv 0$  en  $\partial\Omega$ , pero  $\phi(x, y, z)$  no es constante en  $\Omega$  ¡*El potencial no es univaluado!*. Físicamente hablando, el teorema 2, dice que si se tiene un cuerpo  $\bar{\Omega}$  homogéneo, isotrópico y  $\phi(x, y, z)$  es la temperatura a que está el punto  $(x, y, z)$ , este teorema dice que si la temperatura del cuerpo  $\bar{\Omega}$  en la frontera es mantenida  $\phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \phi(u, v) = 0$  en  $\partial\Omega$  no existe un equilibrio

térmico en  $\bar{\Omega}$ , al menos que  $\phi(x, y, z) = 0 \quad \forall (x, y, z) \in \Omega$ . Mientras el teorema 4 dice que si la superficie  $\partial\Omega = S$  del cuerpo es aislada, la única temperatura estacionaria posible del cuerpo, es cuando la temperatura  $\phi(x, y, z)$  es constante en todo  $\Omega$ .

Ahora vamos a suponer que el cuerpo  $\bar{\Omega}$  de superficie  $\partial\Omega = S$ , se encuentra a una temperatura  $\phi(x, y, z)$ ,  $(x, y, z) \in \Omega$ , y que la superficie  $S$  esta constituida de un material que tiene la propiedad de permitir conducir el flujo de calor a través de ella de adentro hacia fuera o viceversa,  $h(s)$  como:

$$-\frac{\partial\phi}{\partial\hat{n}} = h(\phi - \phi_\infty) \quad (5.2.12)$$

Donde  $\phi_\infty$  es la temperatura del medio circundante al cuerpo  $\bar{\Omega}$ . Esta ley fisica es aplicable solo cuando el cuerpo no presenta radiación de allí que  $h \geq 0$  se le conozca como el parámetro de transmisión del calor por convección del cuerpo  $\bar{\Omega}$ , bajo estas circunstancias un estado de equilibrio o estacionario del cuerpo solo es posible cuando  $\phi = \phi_\infty$  en  $\bar{\Omega}$ . Así (5.2.9)

$$\int_{\Omega} \nabla(\phi - \phi_\infty)^2 d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\phi - \phi_\infty) \left( \frac{\partial\phi}{\partial\hat{n}} \right) dS = - \int_{\partial\Omega} (\phi - \phi_\infty)^2 dS \quad (5.2.13)$$

Luego

$$\int_{\Omega} \|\nabla(\phi - \phi_\infty)\|^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\phi - \phi_\infty)^2 dS = 0 \quad (5.2.14)$$

Como  $\|\nabla(\phi - \phi_\infty)\|^2$ ,  $(\phi - \phi_\infty)^2$  continuas en  $\Omega$   $\|\nabla(\phi - \phi_\infty)\|^2 = 0$  y  $(\phi - \phi_\infty)^2 = 0 \Rightarrow \nabla(\phi - \phi_\infty)^2 = 0 \Rightarrow \nabla(\phi - \phi_\infty) = \nabla\phi = 0$ ;  $\phi = \text{cte}$ . Si  $\phi = \text{cte}$  en  $\Omega$  y  $\phi = \phi_\infty$  en  $\partial\Omega \Rightarrow \phi = \phi_\infty$  en  $\Omega$ .

**Teorema 5.** Sea  $\phi$  armónica en  $\bar{\Omega}$ ,

$$\nabla^2\phi = 0 \text{ en } \Omega \quad (5.2.15)$$

Satisfaciendo

$$\nabla\phi \cdot \hat{n} + h\phi = g \text{ en } \partial\Omega \quad (5.2.16)$$

Con  $h, g$  funciones continuas en  $\partial\Omega$ ,  $h \geq 0$ , entonces si  $\psi$  tal que es armónica en  $\bar{\Omega}$ , con  $\nabla\psi \cdot \hat{n} + h\psi = g$  en  $\partial\Omega$  entonces  $\psi = \phi$  en  $\Omega$ .

La unicidad de la solución  $\phi$  de la ecuación de *Laplace* bajo condiciones de frontera mixtas dadas.

Sean  $\phi, \psi$  funciones de clase  $C^2(\Omega)$  y  $C^0(\partial\Omega)$ . Entonces la identidad de *Green* (5.2.5) vale para ambas

$$\int_{\Omega} \psi \nabla^2 \phi d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \phi d\Omega = \int_{\partial\Omega} \psi \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right) dS \quad (5.2.17)$$

$$\int_{\Omega} \phi \nabla^2 \psi d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \psi d\Omega = \int_{\partial\Omega} \phi \left( \frac{\partial \psi}{\partial \hat{n}} \right) dS \quad (5.2.18)$$

Restando (5.2.17) de (5.2.18) se tiene la 2ª identidad.

$$\int_{\Omega} [\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi] d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left[ \phi \left( \frac{\partial \psi}{\partial \hat{n}} \right) - \psi \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right) \right] dS \text{ de Green} \quad (5.2.19)$$

una consecuencia directa de(5.2.19) es:

**Teorema 6.** Si  $\phi, \psi$  son funciones armónicas en  $\bar{\Omega}$ , de clase  $C^2(\Omega)$  y  $C^0(\partial\Omega)$ . Entonces

$$\int_{\partial\Omega} \left[ \phi \left( \frac{\partial \psi}{\partial \hat{n}} \right) - \psi \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right) \right] dS = 0 \quad (5.2.20)$$

El teorema 6 es válido para las funciones  $\phi, \psi$  de clase  $C^2(\Omega)$  y  $C^0(\partial\Omega)$  satisfaciendo la ecuación  $\nabla^2 \phi = k\phi$  en  $\Omega$ .

### Regiones Infinitas $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^3$ .

En todos los casos de las identidades (5.2.5), (5.2.19) de *Green* y de los teoremas 1 al 6, la región  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ , estuvo considerada como *acotada* (Región Finita). A fin de extender la validez de las identidades (5.2.5), (5.2.19) de *Green* a regiones infinitas o ilimitadas, debemos de imponer *ciertas* propiedades que deben de satisfacer las funciones  $\phi, \psi$  en  $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^3$ . Propiedades de acotamiento para *puntos* suficientemente *distantes* medidas desde un punto fijo  $p = (x_0, y_0, z_0)$  con  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ , y  $r$  la función escalar  $\|\phi(r)\|; \|\psi(r)\|, \|\nabla \phi\|, \|\nabla \psi\| \leq M$  para alguna  $M$ .

### 5.3 CARACTERIZACIÓN DE LAS FUNCIONES ARMÓNICAS COMO FUNCIONES DE POTENCIAL NEWTONIANAS.

Cualquier función armónica es una función potencial *Newtoniana*. Esta caracterización la proporciona la *tercera identidad de Green*, la cual vamos a establecer.

Sea  $\bar{\Omega} \subseteq \mathfrak{R}^3$ , o  $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^3$ , una región regular *acotada* o *infinita* y  $p = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ . Si en la identidad (5.2.19),  $\psi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}$  e integrando respecto a  $\xi, \eta, \zeta$  en (5.2.19), además tomando una esfera  $S_\sigma$  con centros en  $P$  y radio  $\sigma$  y removiendo esa esfera  $S_\sigma$  de la región  $\Omega$  tenemos  $\Omega' = \Omega \setminus S_\sigma$  ya que  $\psi(r) = \frac{1}{r}$  es armónica en  $\Omega'$ .

$$\int_{\Omega'} [\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi] d\Omega' = \int_{\partial\Omega'} \left[ \phi \left( \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\eta}} \right) - \psi \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{\eta}} \right) \right] dS' \quad (5.3.1)$$

De donde  $\int_{\Omega'} \phi \nabla^2 \psi d\Omega' = 0$ ;

$$-\int_{\Omega'} \frac{1}{r} \nabla^2 \phi d\Omega' = \int_{\partial\Omega'} \left[ \phi \frac{\partial}{\partial \hat{\eta}} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{\eta}} \right) \right] dS' \quad (5.3.2)$$

$$-\int_{\Omega \setminus S_\sigma} \frac{1}{r} \nabla^2 \phi d\Omega' = \int_{\partial\Omega} \left[ \phi \frac{\partial}{\partial \hat{\eta}} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{\eta}} \right) \right] d\Omega + \int_{\partial S_\sigma} \left[ \phi \frac{\partial}{\partial \hat{\eta}} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{\eta}} \right) \right] dS \quad (5.3.2)$$

Como en  $\partial\Omega$  la normal  $\hat{\eta}$  apunta hacia fuera y en la superficie  $\partial S_r^2$  apunta hacia adentro la última integral sobre la superficie de la esfera  $S_r^2$ ,  $dS$ .

$$\int_{\partial S_r^2} \phi \left( \frac{1}{r^2} \right) dS + \int_{\partial S_r^2} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) dS = \frac{1}{r^2} \int_{\partial S_r^2} \phi dS + \frac{1}{r} \int_{\partial S_r^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) dS = \frac{4\pi r^2}{r^2} \phi + \frac{1}{r} \int_{\partial S_r^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{\eta}} \right) dS \quad (5.3.3)$$

En el límite cuando  $r \rightarrow 0$ , la integral  $\frac{1}{r} \int_{\partial S_r^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{\eta}} \right) dS \rightarrow 0$ ,  $\phi(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow \phi(x, y, z) = \phi(P)$ ,  $\Omega' \rightarrow \Omega$ , luego la (5.2.19) identidad de *Green* para este caso queda.

$$-\int_{\Omega} \frac{1}{r} \nabla^2 \phi d\Omega = 4\pi\phi(P) + \int_{\partial\Omega} \left[ \phi \frac{\partial}{\partial \hat{\eta}} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{\eta}} \right) \right] d\Omega \quad (5.3.4)$$

de donde se obtiene el valor del potencial de  $\phi$  en  $P$ . Reconocida como la 3ª identidad de *Green*.

$$\phi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{r} \right) \nabla^2 \phi d\Omega + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{\eta}} \right) - \phi \frac{\partial}{\partial \hat{\eta}} \left( \frac{1}{r} \right) \right] d\Omega \quad (5.3.5)$$

Aquí se ha supuesto que la integral de volumen es convergente para regiones infinitas y que  $\phi$  es regular a superficie a la infinidad.

En esta tercera identidad de *Green* el primer término representa el potencial de una distribución de volumen  $-\frac{\nabla^2 \phi}{4\pi}$ , el segundo término es el potencial de una densidad de distribución de superficie  $-\frac{\left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{\eta}} \right)}{4\pi}$ , mientras que el tercer término es el potencial de una distribución *doble* de superficie del momento  $-\frac{\phi}{4\pi}$ .

De esto se puede deducir que no *solo* las funciones armónicas son potenciales *Newtonianos*, sino también aquellas funciones que satisfagan ciertas propiedades de diferenciabilidad en regiones regulares infinitas (dentro de una superficie infinita de radio muy grande) y satisfaciendo ciertas propiedades de acotamiento.

**Teorema 7.** Toda función *armónica* en  $\bar{\Omega}$  puede ser representada como la suma de *dos* potenciales, una distribución de potencial simple y de una distribución de potencial doble llamada de densidad *Green* o momento bipolar.

### 5.3.1 LA ECUACION DE POISSON O DE POTENCIAL.

#### Método del Elemento Frontera

Vamos a iniciar con el estudio simple de una carga eléctrica positiva, situada en el origen de coordenadas  $x, y, z$ . La intensidad del campo eléctrico  $\vec{E}$  debido a esta carga, es el vector de magnitud  $\frac{q}{r^2}$ ,  $r^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $r$  el radio a partir del origen al punto  $(x, y, z)$  las componentes escalares de  $\vec{E}(x, y, z)$  son

$$\frac{q}{r^3}x, \frac{q}{r^3}y, \frac{q}{r^3}z, \text{ luego} \quad (5.3.1.1)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{r^3}(qx, qy, qz) \quad (5.3.1.2)$$

Siendo la divergencia un escalar

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\partial q}{\partial x}x + \frac{\partial q}{\partial y}y + \frac{\partial q}{\partial z}z \quad (5.3.1.3)$$

Se tiene:

$$\text{div}(\vec{E}) = q \left[ \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right] = 0 \quad (5.3.1.4)$$

Ahora tenemos una esfera con centro en la carga de radio  $R$  y apliquemos el teorema de la divergencia de *Gauss* a esta situación

$$\int_{\Omega} \text{div}(\vec{E})d\Omega = \int_{\partial\Omega=S_R^2} \vec{E} \cdot \hat{n}dS \quad (5.3.1.5)$$

como  $\vec{E} \cdot \hat{n} = E_{\eta} = \frac{q}{R^2}$  y  $\int_{S_R^2} dS = 4\pi R^2$ , entonces  $\int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \hat{n}dS = \int_{S_R^2} \frac{q}{R^2} dS = 4\pi q$ . Así la integral de la divergencia  $\int_{\Omega} \text{div}(\vec{E})d\Omega$  es diferente de cero.

Como la intensidad del campo  $\vec{E}$  es igual al número de líneas de campo que atraviesan a la superficie de la esfera de radio  $R$ , que divergen desde el origen donde esta la carga  $q$ , este número debe ser igual a  $4\pi q$ .

Si  $\rho(x, y, z) = \frac{dq}{d\Omega}$  es la densidad de carga volumétrica encerrada en el diferencial de volumen  $d\Omega$ , entonces la intensidad del campo debido a esa carga  $dq$  será proporcional al número de líneas que emergen desde  $dq$  y atraviesan una pequeña esfera  $S_R^2$  de centro en  $dq$  y radio  $R$ .

$$\int_{\Omega} \text{div}(\vec{E})d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \hat{n}dS = \int_{\partial\Omega} \vec{E}_\eta dS = \int_{\partial\Omega} \frac{dq}{R^2} dS = \frac{4\pi R^2}{R^2} dq = 4\pi dq \quad (5.3.1.6)$$

$$\int_{\Omega} \text{div}(\vec{E})d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{E}_\eta dS = \int_{\partial\Omega} \frac{dq}{R^2} dS = \frac{4\pi R^2}{R^2} dq = 4\pi dq = 4\pi\rho d\Omega \quad (5.3.1.7)$$

$$\text{Div}(\vec{E}) = \lim_{d\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{d\Omega} \int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \hat{n}dS = 4\pi\rho \quad (5.3.1.8)$$

$$\text{Div}(\vec{E}) = 4\pi\rho \quad (5.3.1.9)$$

Esta ecuación es la ley de *Gauss* diferencial que establece una relación *local* entre la densidad de carga eléctrica y el campo eléctrico  $\vec{E}$ . Para el caso en que el campo eléctrico  $\vec{E}$  sea un campo que solo depende de la posición es un campo potencial, entonces

$$\vec{E} = -\nabla\phi(x, y, z), \text{ luego}$$

$$\text{Div}(\vec{E}) = -\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \right] = -\nabla^2\phi(x, y, z) = 4\pi\rho(x, y, z) \quad (5.3.1.10)$$

$$-\nabla\phi = 4\pi\rho \text{ en } \Omega \quad (5.3.1.11)$$

llamada la Ecuación de *Poisson* para cuando  $\rho \equiv 0$ ,  $\nabla^2\phi \equiv 0$  en la ecuación de *Laplace*.

### 5.3.2 SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE POISSON MEDIANTE LA FUNCIÓN DE GREEN

Del teorema de la divergencia de *Gauss* (Primera identidad de *Green*) para el campo eléctrico  $\vec{E}(x, y, z)$  tenemos:

$$\int_{\Omega} \text{div}(\vec{E})d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{E}_{\eta} dS = \int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \hat{\eta} dS \quad (5.3.2.1)$$

Si tomamos como campo  $\vec{E} = \phi \nabla \psi$

$$\int_{\Omega} \text{div}(\phi \nabla \psi) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \psi d\Omega + \int_{\Omega} \phi \nabla^2 \psi d\Omega \quad (5.3.2.2)$$

$$\int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \hat{\eta} dS = \int_{\partial\Omega} (\phi \nabla \psi) \cdot \hat{\eta} dS = \int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\eta}} dS \quad (5.3.2.3)$$

por lo que el teorema anterior queda:

$$\int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \psi d\Omega + \int_{\Omega} \phi \nabla^2 \psi d\Omega = \int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\eta}} dS \quad (5.3.2.4)$$

Si ahora intercambiamos papeles de  $\phi$  por  $\psi$ , en el teorema tenemos

$$\int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \phi d\Omega + \int_{\Omega} \psi \nabla^2 \phi d\Omega = \int_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial \phi}{\partial \hat{\eta}} dS \quad (5.3.2.5)$$

Restando la segunda expresión de la primera tenemos el Teorema conocido como la (5.2.19) identidad de *Green*

$$\int_{\Omega} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left[ \phi \left( \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\eta}} \right) - \psi \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{\eta}} \right) \right] dS \quad (5.3.2.6)$$

Teorema de integración de *Green*. Ahora veamos como se aplica este teorema en la solución de la ecuación de *Poisson*.

$$-\nabla^2 \phi(x, y, z) = 4\pi\rho(x, y, z) \text{ en } \Omega \quad (5.3.2.7)$$

cuando

$$\phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \phi(u, v) = cte. \text{ en } \partial\Omega \quad (5.3.2.8)$$

Si dividimos al volumen en elementos diferenciables  $d\Omega$  la carga  $\rho d\Omega$  ejercerá un potencial inversamente proporcional a una distancia  $r$ ,  $\frac{\rho d\Omega}{r}$ , luego el potencial total será

$$\phi = \int_{\Omega} \frac{\rho}{r} d\Omega, \text{ pero de la ecuación } \rho(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \phi, \text{ así tenemos}$$

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\nabla^2 \phi}{r} d\Omega \quad (5.3.2.9)$$

que es la solución de la Ecuación de *Poisson*. Esta solución es una solución *intuitiva*, ya que nos basamos en la solución de una carga puntual, pero esta solución la deduciremos rigurosamente de tal forma que incluya a todas las cargas puntuales dentro de  $\bar{\Omega}$ .

En el teorema de *Green*,  $\psi(x, y, z) = \frac{1}{r}$  donde  $r$  es la distancia tomada desde un punto  $P \in \bar{\Omega}$ , y  $\phi(x, y, z)$  el potencial eléctrico. Como el *teorema* de *Green* es valido para campos vectoriales como para dominios arbitrarios  $\bar{\Omega}$  tenemos:

$$\int_{\Omega} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left[ \phi \left( \frac{\partial \psi}{\partial \hat{n}} \right) - \psi \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right) \right] dS \quad (5.3.2.10)$$

$$\int_{\Omega} \left[ \phi \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \nabla^2 \phi \right] d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left[ \phi \frac{\partial}{\partial \hat{n}} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right) \right] dS \quad (5.3.2.11)$$

$\Omega$  es el espacio  $\mathfrak{R}^3$ , salvo una pequeña esfera  $S_R^2$  de radio  $R$  conteniendo en el centro el punto  $P$  donde deseamos calcular el potencial

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = \nabla \left( -\frac{1}{r^2} \right) = \frac{1}{r^3} \text{ para } r \gg 0, \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = 0 \quad (5.3.2.12)$$

luego el lado izquierdo queda como:

$$-\int_{\Omega} \frac{1}{r} \nabla^2 \phi d\Omega \quad (5.3.2.13)$$

En relación al lado derecho será:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{n}} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \text{ (la norma } \hat{n} \text{ afuera signo menos)}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \text{ luego} \quad (5.3.2.14)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\Omega} \left[ \phi \frac{\partial}{\partial \hat{n}} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right) \right] dS = \\
& = \int_{\partial\Omega} \phi \frac{1}{r^2} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} d\Omega = \\
& = \int_{\partial S^2} \phi \frac{1}{r^2} dS + \int_{\partial S^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} dS = \\
& = \frac{1}{R^2} \int_{\partial S^2} \phi dS + \frac{1}{R} \int_{\partial S^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} dS =
\end{aligned} \tag{5.3.2.15}$$

como  $\frac{\int_{\partial S^2} \phi dS}{\int_{\partial S^2} dS} = \tilde{\phi}$ ;  $\frac{\int_{\partial S^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} dS}{\int_{\partial S^2} dS} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r}$  son los promedios de  $\phi$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial r}$ ,  $\tilde{\phi}$ ,  $\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r}$  (5.3.2.16)

$$\frac{1}{R^2} \int_{\partial S^2} \phi dS + \frac{1}{R} \int_{\partial S^2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} dS = 4\pi \tilde{\phi} + 4\pi \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} R \tag{5.3.2.17}$$

queda finalmente como:

$$-\int_{\Omega} \frac{1}{r} \nabla^2 \phi d\Omega = 4\pi \tilde{\phi} + 4\pi R \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} \tag{5.3.2.18}$$

ahora la esfera de radio  $R$ , cuando  $R \rightarrow 0$ , coincide con el punto  $P$ , donde se quiere calcular el potencial  $\phi(P)$ ,  $R \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} \rightarrow 0$  y  $\tilde{\phi} \rightarrow \phi(P)$ . Por lo que

$$\phi(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\nabla^2 \phi}{r} d\Omega \tag{5.3.2.19}$$

es el potencial en cualquier punto  $P \in \Omega$ . Cuando  $\Omega$  no está acotado.

$$\phi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\nabla^2 \phi(x, y, z)}{r} d\Omega \tag{5.3.2.20}$$

$$\phi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{r} \right) \nabla^2 \phi(x, y, z) d\Omega \tag{5.3.2.21}$$

### 5.3.3 SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE POISSON EN REGIONES COMPACTAS $\bar{\Omega}$

Ahora se supondrá que la región  $\bar{\Omega}$  o dominio en el que está definida la ecuación de potencial es una región cerrada y acotada.

$$-\nabla^2\phi(x, y, z) = 4\pi\rho(x, y, z) \text{ en } \Omega \quad (5.3.3.1)$$

Bajo

$$\phi|_{\partial\Omega} = cte \quad (5.3.3.2)$$

De manera que la integral de volumen se hará solo para este dominio  $\bar{\Omega}$  con frontera  $S = \partial\Omega$ , excluyendo en cada caso nuestra esfera  $S_r^2$  infinitesimal de radio  $R$  y que contiene la porción de carga  $dq = \rho d\Omega$ .

Del teorema de *Green* para este caso

$$\int_{\Omega} \left[ \phi \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \nabla^2 \phi \right] d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left[ \phi \frac{\partial}{\partial \hat{n}} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right) \right] dS \quad (5.3.3.3)$$

respecto a la integral  $\int_{\Omega} \phi \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) d\Omega$  se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) d\Omega &= \int_{\partial\Omega} \phi \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \cdot \hat{n} dS = \int_{\partial\Omega} \phi \nabla \left( \frac{1}{r} \right) dS \\ &= - \int_{\partial\Omega=S_r^2} \phi \left( \frac{1}{r^2} \right) dS = - \frac{4\pi r^2}{r^2} \phi = -4\pi\phi \end{aligned} \quad (5.3.3.4)$$

de manera que el teorema de *Green* queda

$$- \int_{\Omega} \frac{\nabla^2 \phi}{r} d\Omega = 4\pi\phi + \int_{\partial\Omega=S_r^2} \left[ \phi \frac{\partial}{\partial \hat{n}} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \right) \right] dS \quad (5.3.3.5)$$

$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ , de donde obtenemos la solución de la ecuación de *Poisson* para regiones  $\bar{\Omega}$  cerradas y acotadas.

$$\phi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{r}\right) \nabla^2 \phi d\Omega - \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \left[ \phi \frac{\partial}{\partial \hat{n}} \left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}}\right) \right] dS \quad (5.3.3.6)$$

llamada de la tercera identidad de *Green*. Esta solución es reconocida como la representación integral de  $\phi(x, y, z)$ .

La función  $\psi(r) = \frac{1}{r}$  supuesta en el 2º teorema de *Green* (Identidad de *Green*)

$$\int_{\Omega} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left[ \phi \left(\frac{\partial \psi}{\partial \hat{n}}\right) - \psi \left(\frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}}\right) \right] dS \quad (5.3.3.7)$$

es una función escalar de ley inversa del radio. En general, las soluciones de la Ecuación de *Laplace*  $\nabla^2 \phi = 0$  en  $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^3$  con

$$\begin{array}{ll} \phi \Big|_{\Gamma_1} = \phi_1(s) & \text{Dirichlet} \\ \nabla \phi \cdot \hat{n} \Big|_{\Gamma_2} = \phi_2(s) & \text{Neumann} \\ \nabla \phi \cdot \hat{n} + \sigma(s)\phi \Big|_{\Gamma_3} = \phi_3(s) & \text{Mixta} \end{array}$$

Toda función  $\phi(x, y, z)$  que satisface a la Ecuación de *Laplace* se dice una función armónica, llamada función de potencial *Newtoniana*, recíprocamente si  $\phi$  es una de las soluciones de la Ecuación de *Laplace*.

$$\nabla^2 \phi = 0 \text{ en } \Omega \text{ bajo} \quad (5.3.3.8)$$

$$\begin{array}{ll} \phi \Big|_{\Gamma_1} = \phi_1(s) & \text{Dirichlet} \\ \nabla \phi \cdot \hat{n} \Big|_{\Gamma_2} = \phi_2(s) & \text{Neumann} \\ \nabla \phi \cdot \hat{n} + \sigma(s)\phi \Big|_{\Gamma_3} = \phi_3(s) & \text{Mixta} \end{array}$$

Son de la forma

$$\phi(r) = a \log r^{2-n} + b; n > 2 \quad (5.3.3.9)$$

#### 5.4 FORMULACION DEL METODO DEL ELEMENTO FRONTERA EN LA SOLUCION A LAS ECUACIONES DE LAPLACE Y POISSON.

Vamos a suponer que una carga puntual se encuentra en un punto  $P = (\xi, \eta)$ ,  $Q = (\xi, \eta, \zeta)$  en  $\Omega \subset \mathfrak{R}^2$  o  $\mathfrak{R}^3$  según sea el caso. Resolveremos la ecuación de Laplace para  $\Omega \subset \mathfrak{R}^2$ . Es decir, resolver la ecuación

$$\nabla^2 \omega = 0 \text{ en } \Omega \quad (5.4.1)$$

donde  $\omega(x, y)$  tiene una singularidad en  $(\xi, \eta) \in \Omega$  de esta manera la ecuación

$$\nabla^2 \omega + \delta(\xi - x, \eta - y) = 0 \text{ en } \Omega \quad (5.4.2)$$

queda satisfecha por la función  $\omega(x, y)$  cuya solución es a siguiente: Debido a que  $\delta = 0$  para  $\xi \neq x$ ,  $\eta \neq y$ . Sea  $\bar{D}_\varepsilon$  un disco cerrado centrado en  $(\xi, \eta)$  de radio  $\varepsilon$ , tomando las coordenadas polares  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  la ecuación en  $\bar{D}_\varepsilon$  queda

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} = -\delta(\xi - r \cos \theta, \eta - r \sin \theta) \quad (5.4.3)$$

pero como  $\delta = 0$  si  $\xi \neq x$ ,  $\eta \neq y$ .

$$r^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} = 0 \text{ en } D_\varepsilon \setminus P \quad (5.4.4)$$

Como la solución de esta ecuación solo depende de  $r$  y no de  $\theta$ , ya que  $\omega$  es constante respecto a  $\theta$ .

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + r \frac{\partial \omega}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Integrándola se tiene  $\omega(r) = -\frac{1}{2\pi} \log r = \frac{1}{2\pi} \log \left( \frac{1}{r} \right)$  reconocida como la función con una singularidad logarítmica en  $(\xi, \eta)$ . De esta manera la solución de  $\nabla^2 \omega + \delta(\xi - x, \eta - y) = 0$  en  $\Omega$  es:

$$\omega(r) = \frac{1}{2\pi} \log r \text{ con } r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \quad (5.4.6)$$

Ahora sea la ecuación

$$\nabla^2 u = 0 \text{ en } \Omega \quad (5.4.7)$$

bajo

$$u|_{\Gamma_1} = g_1(s); \quad \nabla u \cdot \hat{n}|_{\Gamma_2} = g_2(s); \quad (5.4.8)$$

Para resolverla se utiliza la función  $\omega(r)$  como una función de peso.

$$\omega \nabla^2 u = \nabla \omega \cdot \nabla u - \nabla \cdot (\omega \nabla u)$$

$$u \nabla^2 \omega = \nabla u \cdot \nabla \omega - \nabla \cdot (u \nabla \omega)$$

como  $\int_{\Omega} u \nabla^2 \omega d\Omega = -u(P)$  y

$$\nabla u \cdot \nabla \omega = u \nabla^2 \omega + \nabla \cdot (u \nabla \omega)$$

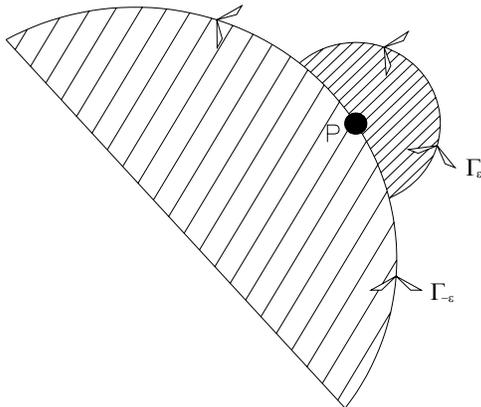
$$\omega \nabla^2 u = u \nabla^2 \omega + \nabla \cdot (u \nabla \omega) - \nabla \cdot (\omega \nabla u)$$

$$0 = \int_{\Omega} \omega \nabla^2 u d\Omega = \int_{\Omega} u \nabla^2 \omega d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (u \nabla \omega) d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\omega \nabla u) d\Omega$$

$$0 = -u(P) + \int_{\partial\Omega} u \left( \frac{\partial \omega}{\partial \hat{\eta}} \right) dS - \int_{\partial\Omega} \omega \left( \frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}} \right) dS$$

$$u(P) + \int_{\partial\Omega} \omega \left( \frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}} \right) dS = \int_{\partial\Omega} u \left( \frac{\partial \omega}{\partial \hat{\eta}} \right) dS \quad (5.4.9)$$

Ecuación Integral de Frontera



Aquí  $P = (\xi, \eta) \in \Omega$ . Hay 3 casos posibles que la singularidad este dentro, frontera o fuera de  $\bar{\Omega}$ . Se abordará el caso en que  $P \in \partial\Omega$ , y se resolverá la ecuación integral de frontera. Para esto tomamos un semidisco  $\bar{D}(P, \varepsilon)$  con centro en  $P$  y radio  $\varepsilon$  y alargamos la región  $\Omega$  a  $\Omega' = \Omega \cup \bar{D}(P, \varepsilon)$  de tal manera que la frontera ahora de  $\Omega'$  sea  $\partial\Omega' = \Gamma_{-\varepsilon} \cup \Gamma_{\varepsilon}$ . La frontera  $\Gamma_{\varepsilon} \bar{D}(P, \varepsilon)$  tiene longitud  $\pi\varepsilon$ ,  $P \in \Omega'$  luego la EIF es valida

$$u(P) + \int_{\partial\Omega'} u \left( \frac{\partial\omega}{\partial\hat{\eta}} \right) dS = \int_{\partial\Omega'} \omega \left( \frac{\partial u}{\partial\hat{\eta}} \right) dS \text{ o sea}$$

$$u(P) + \int_{\Gamma_{-\varepsilon} \cup \Gamma_{\varepsilon}} u \left( \frac{\partial\omega}{\partial\hat{\eta}} \right) dS = \int_{\Gamma_{-\varepsilon} \cup \Gamma_{\varepsilon}} \omega \left( \frac{\partial u}{\partial\hat{\eta}} \right) dS$$

$$u(P) + \int_{\Gamma_{-\varepsilon}} u \left( \frac{\partial\omega}{\partial\hat{\eta}} \right) dS + \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u \left( \frac{\partial\omega}{\partial\hat{\eta}} \right) dS = \int_{\Gamma_{-\varepsilon}} \omega \left( \frac{\partial u}{\partial\hat{\eta}} \right) dS + \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \omega \left( \frac{\partial u}{\partial\hat{\eta}} \right) dS$$

Calculemos las integrales sobre  $\Gamma_{\varepsilon}$

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon}} u \left( \frac{\partial\omega}{\partial\hat{\eta}} \right) dS = \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u \left( \frac{\partial\omega}{\partial r} \right) dS = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u \left( \frac{1}{r} \right) dS = -\frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u dS = -\frac{1}{2\pi\varepsilon} \tilde{u} \pi\varepsilon = -\frac{u}{2}(P)$$

con relación a la integral  $\int_{\Gamma_{\varepsilon}} u \left( \frac{\partial\omega}{\partial\hat{\eta}} \right) dS$  queda:

$$-\int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{1}{2\pi} \log r \left( \frac{\partial u}{\partial\hat{\eta}} \right) dS = -\frac{\log \varepsilon}{2\pi} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \left( \frac{\partial u}{\partial\hat{\eta}} \right) dS = -\frac{\log \varepsilon}{2\pi} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial\hat{\eta}} \right) \pi\varepsilon = -\frac{1}{2} \varepsilon \log \varepsilon \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial\hat{\eta}} \right)$$

haciendo tender  $\varepsilon \rightarrow 0$ , las integrales quedan:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u \left( \frac{\partial\omega}{\partial\hat{\eta}} \right) dS = -\frac{u(P)}{2}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \omega \left( \frac{\partial u}{\partial\hat{\eta}} \right) dS = 0$$

con relación a las integrales sobre  $\Gamma_{-\varepsilon}$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{-\varepsilon}} u \left( \frac{\partial \omega}{\partial \hat{n}} \right) dS = \int_{\partial \Omega} u \left( \frac{\partial \omega}{\partial \hat{n}} \right) dS$$

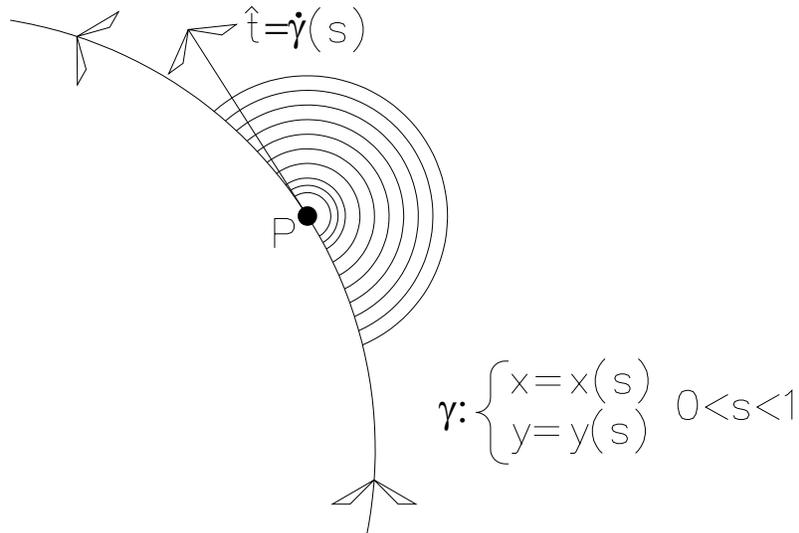
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{-\varepsilon}} \omega \left( \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} \right) dS = \int_{\partial \Omega} \omega \left( \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} \right) dS$$

de esta manera la EIF queda:

$$u(P) + \int_{\partial \Omega} u \left( \frac{\partial \omega}{\partial \hat{n}} \right) dS - \frac{1}{2} u(P) = \int_{\partial \Omega} \omega \left( \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} \right) dS$$

$$\frac{u(P)}{2} + \int_{\partial \Omega} u \left( \frac{\partial \omega}{\partial \hat{n}} \right) dS = \int_{\partial \Omega} \omega \left( \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} \right) dS \quad (5.4.10)$$

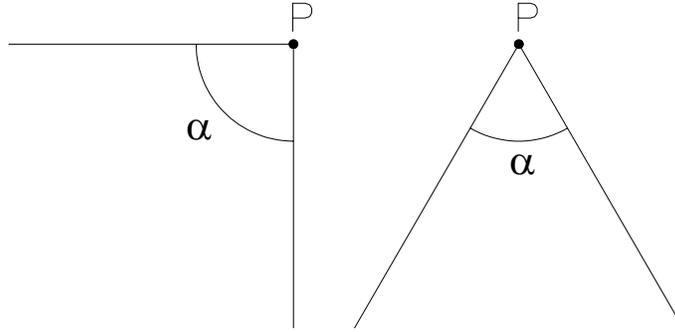
Esta ecuación integral de frontera es válida siempre y cuando la singularidad este en un punto suave de  $\partial \Omega$ ; es decir que exista la tangente a  $\partial \Omega$  en  $P$  a la curva suave  $\gamma$ .



Esto por que a medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , el semidisco  $\bar{D}(P, \varepsilon)$  tiende al punto  $P$  y se va cerrando por ambos lados de  $P$ , antes y después de  $P$ .  $d\gamma = \gamma'(s) ds$ . Si  $\gamma(s)$  es una parametrización de la frontera  $\partial \Omega$ , que contenga a  $P = \gamma(s_0)$

$$\int_{\gamma} u \left( \frac{\partial \omega}{\partial \hat{\eta}} \right) d\gamma = \int_{\gamma} u \left( \frac{\partial \omega}{\partial \hat{\eta}} \right) \gamma ds = \int_{\gamma} u \left( \frac{\partial \omega}{\partial \hat{\eta}} \right) \hat{t}(s) ds$$

Si *ocurre* lo contrario; es decir que en el punto  $P = (\xi, \eta)$  no admita la tangente como es el caso de una esquina o una punta.



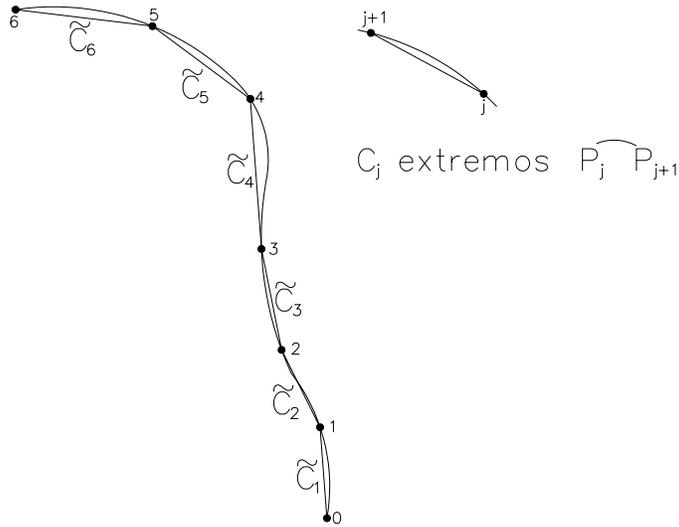
entonces el coeficiente  $C(P)\mu(P)$  debe ser remplazado por  $\frac{\alpha}{2\pi}$  la porción en radianes del ángulo interno a la región  $\Omega$ . Así la *EIF* es:

$$C(P)\mu(P) + \int_{\Gamma} u \left( \frac{\partial \omega}{\partial \hat{\eta}} \right) dS = \int_{\Gamma} \omega \left( \frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}} \right) dS$$

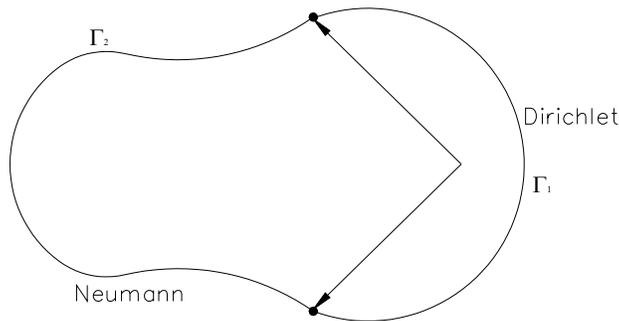
$$C(P) = \begin{cases} 1 & \text{Si } (\xi, \eta) \in \Omega \\ \frac{1}{2} & \text{Si } (\xi, \eta) \in \Omega \text{ y tangente en } (\xi, \eta) \\ \frac{\alpha}{2\pi} & \text{Si } (\xi, \eta) \text{ esquina o punta y } \alpha \angle \text{ interno en } \Omega \end{cases} \quad (5.4.11)$$

### 5.5 ELEMENTOS FRONTERA

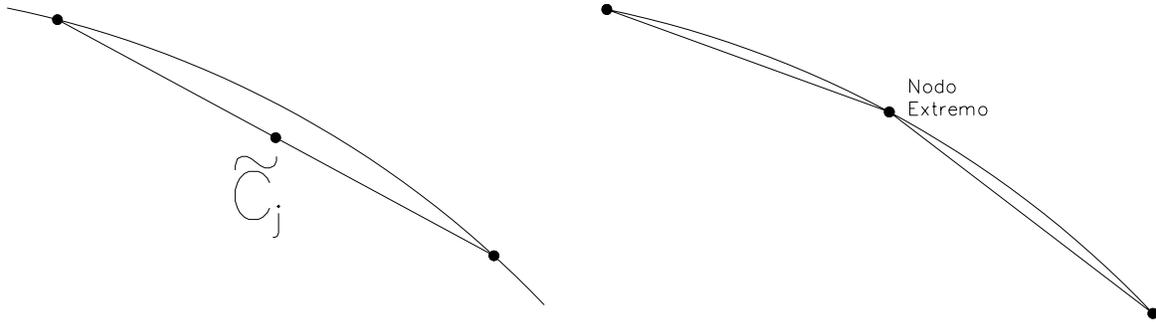
Dada la región  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ , al definir una partición  $\wp(\bar{\Omega}) = \{\Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(E)}\}$ .  $\tilde{\Omega} = \bigcup_{e=1}^E \Delta^{(e)} \approx \bar{\Omega}$  y es esencial definirla  $\partial\tilde{\Omega} = \bigcup_{f=1}^F \Delta^{(f)}$ ; (*no es necesario en  $\Omega$* )  $F \leq E$  la frontera de  $\tilde{\Omega}$ ,  $\partial\tilde{\Omega} \approx \partial\Omega$ . Sea  $\tilde{C}$  una curva poligonal definida en  $\partial\Omega$ , los puntos  $P_{j,j+1} \in \partial\Omega$ ,  $1 \leq j \leq N$  siendo  $C_j$  las aristas o cuerdas de la poligonal  $1 \leq j \leq N$ .



Observaciones a las cuerdas  $\tilde{C}_j$  que serán llamados de elementos frontera. Se llamaran nodos extremos, aquellos que dividen a las porciones de la frontera en que se tienen distintas condiciones de frontera por ejemplo

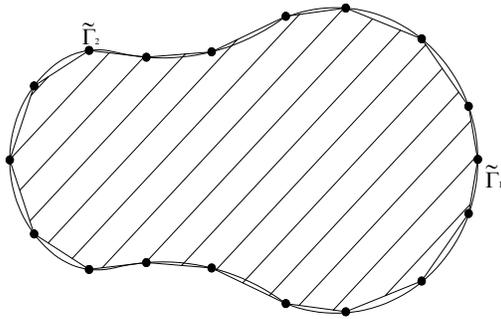


Los nodos al punto que se encuentra en la mitad de una cuerda y un punto extremo con



relación a los *puntos* donde los valores de  $u$  como de  $\frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}}$  son conocidos o desconocidos son llamados de *nodos frontera*, de esta manera, las *cuerdas*  $\tilde{C}_j$ , podrán ser elementos constantes, lineales, cuadráticos, cúbicos, etc.

5.5.1 Los elementos frontera constantes tienen nodo medio, es decir si por la frontera



los valores de  $u$  o  $\frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}}$  son constantes,

las cuerdas  $\tilde{C}_j$  que estén en  $\tilde{\Gamma}_1$  o en  $\tilde{\Gamma}_2$  se puede tomar el punto medio como la singularidad  $(\xi_i, \eta_i) = P_i$ , de tal manera que se podrá plantear una ecuación para cada coeficiente de  $U(P_i)$  o en forma simplificada  $U(i)$ ;  $1 \leq i \leq N$ ,  $N_1 =$  número de cuerdas en que se tiene conocido el valor  $u$  y  $N_2 =$

número de cuerdas en que  $u/\tilde{\Gamma}_1 = u_0$  se tiene  $\frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}}/C_j = q_0$ ;  $\omega|_{\tilde{\Gamma}_{1,2}} = u^*$ ,

$\nabla \omega \cdot \hat{\eta} = \frac{\partial \omega}{\partial \hat{\eta}}|_{\tilde{\Gamma}_{1,2}} = q^*$ , de esta manera la ecuación integral de frontera para la singularidad  $(\xi, \eta) \in \partial \tilde{\Omega}$ , con tangente definida en  $P$  será:

$$\frac{U(P)}{2} + \int_{\partial \tilde{\Omega}} u \left( \frac{\partial \omega}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} = \int_{\partial \tilde{\Omega}} \omega \left( \frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} \quad (5.5.1.1)$$

la cual quedará establecida para  $\partial \tilde{\Omega} = \tilde{\Gamma}_1 \cup \tilde{\Gamma}_2$

$$\frac{U(P)}{2} + \int_{\Gamma_1} u \left( \frac{\partial \omega}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} + \int_{\Gamma_2} u \left( \frac{\partial \omega}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} = \int_{\Gamma_1} \omega \left( \frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} + \int_{\Gamma_2} \omega \left( \frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} \quad (5.5.1.2)$$

Si  $N_1$  representa al número de cuerdas  $\tilde{C}_j$  en que se tiene la condición de frontera del tipo  $\tilde{\Gamma}_1$  y  $N_2$  la del tipo  $\tilde{\Gamma}_2$ ,  $u/\tilde{\Gamma}_1 = u_0$ ;  $u/\tilde{\Gamma}_2 = u$ ;  $\nabla u \cdot \hat{\eta}|_{\tilde{\Gamma}_1} = q$ ;  $\nabla u \cdot \hat{\eta}|_{\tilde{\Gamma}_2} = q_0$ ;  $\omega|_{\tilde{\Gamma}_{1,2}} = u^*$ ,  $\nabla \omega \cdot \hat{\eta}|_{\tilde{\Gamma}_{1,2}} = q^*$  tenemos.

$$\int_{\Gamma_1} u \left( \frac{\partial \omega}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} = \sum_{j=1}^{N_1} \int_{\tilde{C}_j} u_0 q^* d\tilde{S} \quad (5.5.1.3)$$

$$\int_{\Gamma_2} u \left( \frac{\partial \omega}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} = \sum_{j=1}^{N_2} \int_{\tilde{C}_j} u q^* d\tilde{S} \quad (5.5.1.3)$$

$$\int_{\Gamma_1} \omega \left( \frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} = \sum_{j=1}^{N_1} \int_{\tilde{C}_j} u^* q d\tilde{S} \quad (5.5.1.4)$$

$$\int_{\Gamma_2} \omega \left( \frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} = \sum_{j=1}^{N_2} \int_{\tilde{C}_j} u^* q_0 d\tilde{S} \quad (5.5.1.5)$$

luego la EIF para cada  $i$  tomado en cada nodo medio de cada cuerda  $\tilde{C}_j$  quedará

$$\frac{U(P)}{2} + \sum_{j=1}^{N_1} \int_{\tilde{C}_j} u_0 q^* d\tilde{S} + \sum_{j=1}^{N_2} \int_{\tilde{C}_j} u q^* d\tilde{S} = \sum_{j=1}^{N_1} \int_{\tilde{C}_j} u^* q d\tilde{S} + \sum_{j=1}^{N_2} \int_{\tilde{C}_j} u^* q_0 d\tilde{S} \quad (5.5.1.6)$$

$1 \leq i \leq N$ ;  $1 \leq j \leq N$  representará un sistema lineal de ecuaciones con  $N$  incógnitas en los valores de  $u$  y de  $\frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}}$  en aquellas porciones en que se desconoce sus valores, por ejemplo

$u/\tilde{\Gamma}_1 = u_0$  son conocidas, pero  $u/\tilde{\Gamma}_2 = u$  son desconocidas, lo mismo para  $\frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}}|_{\tilde{\Gamma}_2} = q_0$

conocido pero para  $\frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}}|_{\tilde{\Gamma}_1} = q$  se desconocen.

Este sistema puede ser abreviado de la siguiente forma.

$$\frac{U(P)}{2} + \sum_{j=1}^N u_j \int_{\tilde{C}_j} q^* d\tilde{S} = \sum_{j=1}^N q_j \int_{\tilde{C}_j} u^* d\tilde{S} \quad (5.5.1.7)$$

y definiendo a  $\hat{H}_{ij} = \int_{\tilde{C}_j} q^* d\tilde{S}$ ;  $G_{ij} = \int_{\tilde{C}_j} u^* d\tilde{S}$ , la ecuación anterior montada para cada  $i$  en cada cuerda,  $\tilde{C}_j$ ,  $1 \leq i \leq N$ ;  $1 \leq j \leq N$  se tendrá

$$\frac{U(i)}{2} + \sum_{j=1}^N u_j \cdot \hat{H}_{ij} = \sum_{j=1}^N q_j \cdot G_{ij} \quad (5.5.1.8)$$

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} \cdot u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} \cdot q_j \quad (5.5.1.9)$$

donde

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij} & \text{si } i \neq j \\ \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2} & \text{si } i = j \end{cases} \quad (5.5.1.9)$$

De esta manera el sistema quedará

$$HU = GQ \quad (5.5.1.10)$$

$$N = N_1 + N_2$$

donde  $N_1$  valores de  $u$  y  $N_2$  valores de  $\frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}}$  son conocidos, pero  $N_1$  valores de  $\frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}}$  y  $N_2$  valores de  $u$  son desconocidos, o incógnitas a determinar. Una vez determinado estos valores tanto de  $u$  como de  $\frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}}$  en toda la frontera  $\partial\tilde{\Omega} = \tilde{\Gamma}_1 \cup \tilde{\Gamma}_2$ . La ecuación matricial anterior puede ser reordenada pasando todos los valores  $N_1$ ,  $N_2$  desconocidos tanto de  $u$  como de  $\frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}}$  en  $\tilde{\Gamma}_1$  y  $\tilde{\Gamma}_2$  respectivamente de tal manera que se tiene:

$$AX = F \quad (5.5.1.11)$$

donde ahora  $X$  es el vector de las incógnitas de  $u$  y de  $\frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}}$  en  $\tilde{\Gamma}_1$ ,  $\tilde{\Gamma}_2$  respectivamente.

Una vez calculadas las incógnitas  $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}}$  se tiene todos los valores de  $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}}$  en  $\partial\tilde{\Omega}$ , y de aquí podemos a proceder a calcular los valores de  $u$  para cada punto interior de la Red

$\wp(\tilde{\Omega})^*$  de  $\tilde{\Omega}$ , de la siguiente forma.

$$u(i) = \sum_{j=1}^N q_j \cdot G_{ij} - \sum_{j=1}^N u_j \cdot \hat{H}_{ij} \quad (5.5.1.12)$$

para cada nodo de la *Red*. En relación al flujo *interno*  $q_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ;  $q_y = \frac{\partial u}{\partial y}$  o gradiente  $\nabla u$  se obtiene derivando a la expresión  $u(i)$ ,  $\frac{\partial u(i)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u(i)}{\partial y}$  de la ecuación

$$\begin{aligned} u(i) &= \int_{\partial\Omega} \omega \left( \frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} - \int_{\partial\Omega} u \left( \frac{\partial \omega}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} = \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \omega \left( \frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} - \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} u \left( \frac{\partial \omega}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} \\ u(i) &= \int_{\Gamma_1} \omega \left( \frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} + \int_{\Gamma_2} \omega \left( \frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} - \int_{\Gamma_1} u \left( \frac{\partial \omega}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} - \int_{\Gamma_2} u \left( \frac{\partial \omega}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} \quad (5.5.1.13) \\ u(i) &= \int_{\Gamma_1} u^* q d\tilde{S} + \int_{\Gamma_2} u^* q_0 d\tilde{S} - \int_{\Gamma_1} u_0 q^* d\tilde{S} - \int_{\Gamma_2} u q^* d\tilde{S} \end{aligned}$$

$$q_x(i) = \int_{\partial\Omega} q \frac{\partial u^*}{\partial x} d\tilde{S} - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial q^*}{\partial x} d\tilde{S} = \sum_{j=1}^N q_j \left[ \int_{\tilde{c}_j} \left( \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) d\tilde{S} \right] - \sum_{j=1}^N u_j \left[ \int_{\tilde{c}_j} \left( \frac{\partial q^*}{\partial x} \right) d\tilde{S} \right] \quad (5.5.1.14)$$

$$q_y(i) = \int_{\partial\Omega} q \frac{\partial u^*}{\partial y} d\tilde{S} - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial q^*}{\partial y} d\tilde{S} = \sum_{j=1}^N q_j \left[ \int_{\tilde{c}_j} \left( \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) d\tilde{S} \right] - \sum_{j=1}^N u_j \left[ \int_{\tilde{c}_j} \left( \frac{\partial q^*}{\partial y} \right) d\tilde{S} \right] \quad (5.5.1.15)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \log \left( \frac{1}{r} \right) \right] = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (5.5.1.16)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \log \left( \frac{1}{r} \right) \right] = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial y} \quad (5.5.1.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q^*}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \omega \cdot \hat{\eta}) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \cos \theta_1 + \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \cos \theta_2 \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \eta_1 + \frac{\partial r}{\partial y} \eta_2 \right) \right] \end{aligned} \quad (5.5.1.18)$$

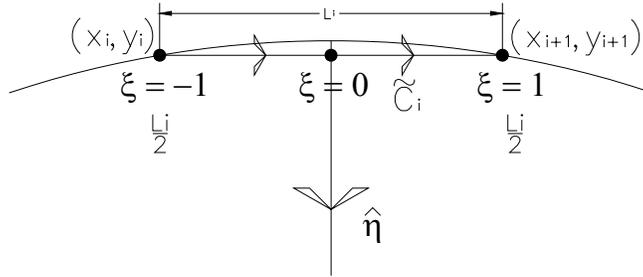
$$\begin{aligned} \frac{\partial q^*}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \omega \cdot \hat{\eta}) = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \cos \theta_1 + \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \cos \theta_2 \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \eta_1 + \frac{\partial r}{\partial y} \eta_2 \right) \right] \end{aligned} \quad (5.5.1.9)$$

Las integraciones en la expresión son calculadas por cuadraturas *Gaussianas*  $q_x(i)$ ,  $q_y(i)$

$$\int_{\tilde{c}_j} \left( \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) d\tilde{S}, \int_{\tilde{c}_j} \left( \frac{\partial q^*}{\partial x} \right) d\tilde{S}, \int_{\tilde{c}_j} \left( \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) d\tilde{S}, \int_{\tilde{c}_j} \left( \frac{\partial q^*}{\partial y} \right) d\tilde{S}$$

lo mismo para las  $\hat{H}_{ij}$ ,  $G_{ij}$ ,  $i \neq j$ ,  $\hat{H}_{ij} = 0$ ,  $\bar{r} \perp \hat{\eta}$ .

Ahora sea  $L_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$  la longitud del elemento  $i$ ,  $r = \frac{\xi L_i}{2}$  donde  $\xi$  es la coordenada natural.



$$G_{ii} = \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{c}_j} \ln \left( \frac{1}{r} \right) dr = \frac{2}{2\pi} \int_0^1 \ln \left( \frac{2}{\xi L_i} \right) \frac{L_i}{2} d\xi = \frac{L_i}{2\pi} \int_0^1 \ln \left( \frac{2}{\xi L_i} \right) d\xi \quad (5.5.1.20)$$

De la integración de

$$\int \ln(x)dx = x \ln x - x$$

aplicándola a

$$\ln \frac{2}{\xi L_i} = \ln(2) - \ln(\xi L_i)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln\left(\frac{2}{\xi L_i}\right) d\xi &= \int_0^1 \ln(2) d\xi - \int_0^1 \ln(\xi L_i) \frac{d\xi}{L_i} = \ln(2) - \left[ \frac{(\xi L_i) \ln(\xi L_i)}{L_i} - \frac{(\xi L_i)}{L_i} \right]_0^1 \\ &= \ln(2) - [\xi \ln(\xi L_i) - \xi]_0^1 = \ln(2) - \ln(L_i) + 1 = \ln\left(\frac{2}{L_i}\right) + 1 \end{aligned} \quad (5.5.1.21)$$

$$\therefore G_{ii} = \frac{L_i}{2\pi} \int_0^1 \ln\left(\frac{2}{\xi L_i}\right) d\xi = \frac{L_i}{2\pi} \left[ \ln\left(\frac{2}{L_i}\right) + 1 \right] \quad (5.5.1.22)$$

En el método de elementos frontera, se ha visto que una vez que resulta la ecuación integral de frontera para cada una de las cuerdas donde se ha asumido la singularidad  $u(i)$ , queda establecido un sistema lineal de ecuaciones para determinar los valores de  $u$

y de  $\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}$  en aquellas cuerdas  $\tilde{C}_j$  que forman la poligonal frontera  $\partial\tilde{\Omega}$ ,  $\tilde{\Gamma}_1$ ,  $\tilde{\Gamma}_2$

respectivamente,  $\frac{\partial u}{\partial \hat{n}} \Big|_{\tilde{\Gamma}_1} = q$ ;  $u \Big|_{\tilde{\Gamma}_1} = u$  donde la función de Green  $\omega(r) = \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1}{r}\right)$  es

evaluada así como  $\frac{\partial \omega}{\partial \hat{n}}$  en cada cuerda  $\tilde{C}_j$  obteniendo una ecuación lineal por cada posición del nodo  $i \in \tilde{C}_j$  (punto medio de  $\tilde{C}_j$ ).

$$C(P)U(i) + \sum_{j=1}^N \int_{\tilde{C}_j} u \frac{\partial \omega}{\partial \hat{n}} d\tilde{S} = \sum_{j=1}^N \int_{\tilde{C}_j} \omega \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} d\tilde{S} \quad (5.5.1.23)$$

$$1 \leq i \leq N; 1 \leq j \leq N, C(P) = \frac{1}{2}.$$

o explícitamente

$$\frac{U(i)}{2} + \int_{\tilde{\Gamma}_1} u_0 q^* d\tilde{S} + \int_{\tilde{\Gamma}_2} u q^* d\tilde{S} = \int_{\tilde{\Gamma}_1} u^* q d\tilde{S} + \int_{\tilde{\Gamma}_2} u^* q_0 d\tilde{S} \quad (5.5.1.24)$$

$$\frac{U(i)}{2} + \sum_{j=1}^{N_1} \int_{\tilde{C}_j} u_0 q^* d\tilde{S} + \sum_{j=1}^{N_2} \int_{\tilde{C}_j} u q^* d\tilde{S} = \sum_{j=1}^{N_1} \int_{\tilde{C}_j} u^* q d\tilde{S} + \sum_{j=1}^{N_2} \int_{\tilde{C}_j} u^* q_0 d\tilde{S} \quad (5.5.1.25)$$

o en forma abreviada

$$\frac{U(i)}{2} + \sum_{j=1}^{N_1} u_j \int_{\tilde{C}_j} q^* d\tilde{S} = \sum_{j=1}^{N_1} q_j \int_{\tilde{C}_j} u^* d\tilde{S} \quad (5.5.1.26)$$

$1 \leq i \leq N$ ;  $1 \leq j \leq N$ , donde los  $u_j$ ,  $q_j$  son en parte desconocidos y los valores de  $\int_{\tilde{C}_j} q^* d\tilde{S}$ , como de  $\int_{\tilde{C}_j} u^* d\tilde{S}$  son proporcionados por los valores de la función  $\omega(r)$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial \hat{\eta}}$  en cada cuerda  $\tilde{C}_j$  para cada posición de  $i$  en el punto medio de cada  $\tilde{C}_j$ . Aquí los  $u_j$ ,  $q_j$  han salido fuera del integrando del hecho de que solo hemos considerado elementos frontera constantes; es decir que  $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \hat{\eta}}$  en cada cuerda respectivamente son constantes, pero en general no es así. Ahora bien, como en el caso general las integraciones se presentan de la siguiente manera

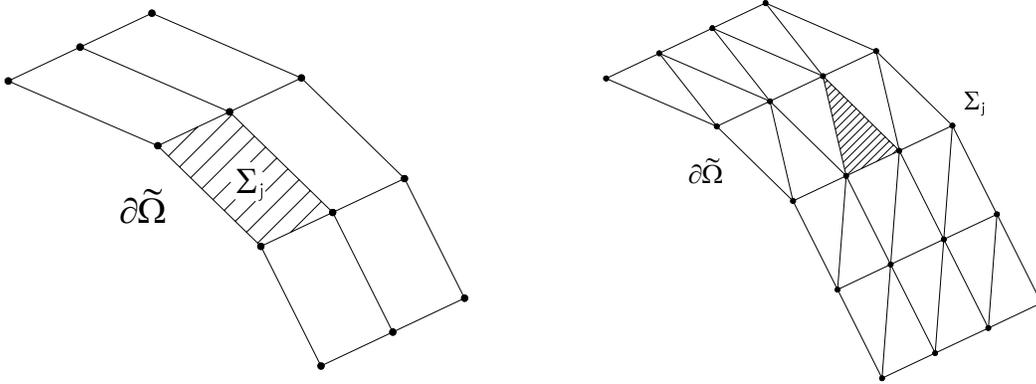
$$\int_{\tilde{C}_j} u^* q d\tilde{S} ; \int_{\tilde{C}_j} q^* u d\tilde{S}$$

donde las funciones  $\omega/\tilde{C}_j = u^*$ ;  $\nabla \omega \cdot \hat{\eta}/\tilde{C}_j = q^*$  son funciones de peso para  $q$  y  $u$  respectivamente, daremos la fórmula de integración por cuadratura *Gaussiana* para el caso general.

## 5.6 INTERPOLACION POR CUADRATURA GAUSSIANA

### 5.6.1 Elementos Frontera Lineales

Caso unidimensional o sea la cuerda  $\tilde{C}_j$  serán intervalos  $a^{+|}b$ ;  $b > a$ , caso bidimensional o sea superficies, los elementos frontera serán triángulos o cuadrángulos que recubren a la superficie frontera de  $\tilde{\Omega}$ .  $\partial\tilde{\Omega} = \bigcup_{f=1}^F \partial\Delta^{(f)}$



De esta manera, se propone determinar la integración por cuadraturas de la integral  $\int_a^b p(x)f(x)dx$ , donde  $p(x)$  es una función de peso  $p(x) > 0$ , y  $f(x)$  es de clase  $C^k(a^{+|}b)$  aquí para nuestro caso, el intervalo  $a^{+|}b$ , sería la cuerda  $\tilde{C}_j$ , (lineal),  $p(x)$  será  $\omega(x)$ , o  $\frac{\partial\omega}{\partial\hat{\eta}}(r)$  el signo caso negativo, queda absorbido por el signo de  $f(x)$ .

De esta manera, si  $f(x)$  es aproximada por un polinomio  $\varphi(x)$  de grado  $n$  en  $a^{+|}b$ ,

$$f(x) = \varphi(x) + R(x) \quad (5.6.1.1)$$

donde  $R(x)$  es el residuo de la aproximación numérica polinomial. De esta manera

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)\varphi(x)dx + \int_a^b p(x)R(x)dx \quad (5.6.1.2)$$

donde la 2ª integral representa la integración numérica y la 3ª integral el valor aproximado del error residual de la integración.

Ahora bien, si  $\varphi(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  es el polinomio de grado  $n$ , y  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , es una partición de  $a \rightarrow b$ , en la cual se conocen los valores de  $f(x)$ ,  $\varphi(x_i) = f(x_i)$ ;  $0 \leq i \leq n$  entonces

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n N_i(x)f(x_i) \quad (5.6.1.3)$$

donde las  $N_i(x)$  son determinadas de los coeficientes  $a_i$  y de los puntos  $x_i$  para el caso de los polinomios de interpolación de *Lagrange*, las  $N_i(x)$  son las funciones de forma, la integración del

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x) \left\{ \sum_{i=0}^n N_i(x)f(x_i) \right\} dx = \sum_{i=0}^n \left\{ \int_a^b p(x)N_i(x)dx \right\} f(x_i) \quad (5.6.1.4)$$

donde

$$\int_a^b p(x)N_i(x)dx = C_i \quad (5.6.1.5)$$

son conocidos para  $0 \leq i \leq n$ .

$$\int_a^b f(x)dx = C_0f(x_0) + C_1f(x_1) + \dots + C_nf(x_n) + \int_a^b p(x)R(f)dx \quad (5.6.1.6)$$

Así la integración numérica por cuadraturas *Gaussianas* con peso  $p(x) > 0$  queda:

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{i=0}^n C_i f(x_i) + R[f] \quad (5.6.1.7)$$

Esta formula de integración contiene el caso de  $\int_a^b f(x)dx$ , ya que redefiniendo al integrando como  $g(x) = \frac{f(x)}{p(x)}$ , tenemos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p(x)g(x)dx = \sum_{i=1}^n d_i g(x_i) + R[g] \quad (5.6.1.8)$$

Enseguida vamos a dar el procedimiento para obtener tanto a los nodos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en el intervalo  $a \text{---} b$ , como a los coeficientes del polinomio que aproxime a  $f(x)$  en  $a \text{---} b$  de grado  $m$ .

Si  $f(x)$  es aproximado por un polinomio de grado  $m$

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (5.6.1.9)$$

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \int_a^b p(x) \left\{ \sum_{k=0}^m a_k x^k \right\} dx = \sum_{k=0}^m a_k \int_a^b p(x) x^k dx = \sum_{i=1}^n C_i f(x_i) \quad (5.6.1.10)$$

Si  $b_k = \int_a^b p(x) x^k dx$ ;  $0 \leq k \leq m$ , y donde  $f(x) = a_m x_i^m + a_{m-1} x_i^{m-1} + \dots + a_1 x_i + a_0$  luego

$$\sum_{i=1}^n C_i (a_m x_i^m + a_{m-1} x_i^{m-1} + \dots + a_1 x_i + a_0) \quad (5.6.1.11)$$

de esta manera la integración numérica queda

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \dots + C_n = b_0 \\ C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n = b_1 \\ C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 + \dots + C_n x_n^2 = b_2 \\ \vdots \\ C_1 x_1^m + C_2 x_2^m + \dots + C_n x_n^m = b_m \end{cases} \quad (5.6.1.12)$$

representa un sistema de  $(m+1)$  ecuaciones, para determinar  $2n$  incógnitas, a saber los  $C_i$ ,  $x_i$  tanto los coeficientes de la cuadratura como los nodos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en  $a \text{---} b$ . De esta manera para que el orden de precisión de la cuadratura sea máximo,  $R[f] = 0$ , se requiere que el polinomio  $f(x)$  sea de grado  $m = 2n - 1$  al menos.

Se ha visto que el residuo  $R[f]$  es un residuo mínimo si  $f(x)$  es aproximada por un polinomio de grado  $2n-1$  o menor. Conduciendo a un sistema de  $2n$  con  $2n$  incógnitas, a

saber; los  $n$  puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , y los  $n$  coeficientes  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Así de esta manera, podemos proponer con los nodos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , un polinomio de grado  $n$ , a saber el producto de todos los factores lineales

$$\varphi_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \quad (5.6.1.13)$$

Ahora bien si  $f(x)$  es tomada por un polinomio de grado  $(2n - 1)$  o menos, el residuo  $R[f] = 0$ . Si dividimos a  $f(x)$  por  $\varphi(x)$ , tenemos que

$$f(x) = \varphi_n(x)q(x) + r(x) \quad (5.6.1.14)$$

donde  $q(x)$ ,  $r(x)$  son polinomios de grado  $n-1$  o menos, de esta manera si aplicamos la fórmula de integración numérica a la función  $\varphi_n(x)q(x)$  tenemos:

$$b_k = \int_a^b p(x)\varphi(x)q(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_a^b p(x)\varphi(x_i)q(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_a^b \{p(x)q(x)dx\}\varphi(x_i) = 0 \quad (5.6.1.15)$$

luego tenemos que de

$$f(x) = \varphi_n(x)q(x) + r(x) \quad (5.6.1.16)$$

$$f(x_i) = \varphi_n(x_i)q(x_i) + r(x_i) = r(x_i) \quad (5.6.1.17)$$

por lo que la formula de integración queda

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x)f(x)dx &= \int_a^b p(x)[\varphi_n(x)q(x) + r(x)]dx = \\ \int_a^b p(x)\varphi_n(x)q(x)dx + \int_a^b p(x)r(x)dx &= \sum_{i=1}^n C_i r(x_i) = \sum_{i=1}^n C_i f(x_i) \end{aligned} \quad (5.6.1.18)$$

## 5.6.2 FORMULACION DEL METODO DEL ELEMENTO FRONTERA PARA LA ECUACION DE LAPLACE.

La Ecuación Integral de Frontera *EIF* para el caso bidimensional en la ecuación de *Laplace*

$$\nabla^2 u = 0 \text{ en } \Omega \quad (5.6.2.1)$$

sujeta a las siguientes condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u|_{\Gamma_1} &= u(s) \text{ Dirichlet} \\ \nabla u \cdot \hat{n}|_{\Gamma_2} &= q(s) \text{ Neumann} \end{aligned} \quad (5.6.2.2)$$

Donde  $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  y la ecuación obtenida es

$$u(p) + \int_{\partial\Omega} u \left( \frac{\partial\omega}{\partial\hat{n}} \right) dS = \int_{\partial\Omega} \omega \left( \frac{\partial u}{\partial\hat{n}} \right) dS \quad (5.6.2.3)$$

donde  $p \in \Omega$ ,  $p = (\xi, \eta)$ ,  $\omega(r) = \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1}{r}\right)$  es la singularidad de  $\omega$  en  $p$ , la cual satisface la ecuación  $\nabla^2 \omega + \delta(\xi - x, \eta - y) = 0$  en  $\Omega$  y  $\delta(\xi - x, \eta - y)$  es la función de  $\delta$ -Dirac. Como en el caso anterior, distinguiremos por

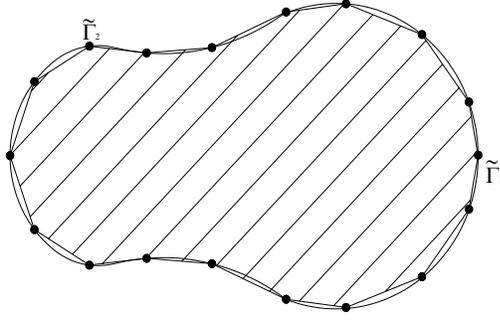
$$\omega/\Gamma_{1,2} = u^*(s) \quad (5.6.2.4)$$

$$\nabla \omega \cdot \hat{n}/\Gamma_{1,2} = q^*(s) \quad (5.6.2.5)$$

$$u/\Gamma_1 = u_0(s); \nabla u \cdot \hat{n}/\Gamma_2 = q_0(s) \text{ conocidos} \quad (5.6.2.6)$$

$$u/\Gamma_2 = u(s); \nabla u \cdot \hat{n}/\Gamma_1 = q(s) \text{ conocidos} \quad (5.6.2.7)$$

De esta manera si la partición de la frontera  $\partial\Omega$ ,  $\wp(\partial\Omega) = \{\Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(F)}\}$ ,  $\partial\tilde{\Omega} \approx \partial\Omega$ ; donde  $\tilde{\Gamma}_1 \approx \Gamma_1$ ;  $\tilde{\Gamma}_2 \approx \Gamma_2$ ;  $N_1 = \#$  cuerdas  $\tilde{C}_i$  tales que  $\tilde{\Gamma}_1 = \bigcup_{j=1}^{N_1} C_j$ ,  $N_2 = \#$  cuerdas  $\tilde{C}_i$  tales que  $\tilde{\Gamma}_2 = \bigcup_{j=1}^{N_2} C_j$ ,  $N = N_1 + N_2$ . Así la *EIF* numérica queda



$$\bar{u}(p_i) + \int_{\partial\tilde{\Omega}} \bar{u} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} = \int_{\partial\tilde{\Omega}} \bar{w} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} \quad (5.6.2.8)$$

o sea

$$\bar{u}(p_i) + \int_{\tilde{\Gamma}_1} \bar{u} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} + \int_{\tilde{\Gamma}_2} \bar{u} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} = \int_{\tilde{\Gamma}_1} \bar{w} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} + \int_{\tilde{\Gamma}_2} \bar{w} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} \quad (5.6.2.9)$$

$$\bar{u}(p_i) + \int_{\substack{N_1 \\ \tilde{U} \\ \tilde{c}_j}} \bar{u} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} + \int_{\substack{N_2 \\ \tilde{U} \\ \tilde{c}_j}} \bar{u} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} = \int_{\substack{N_1 \\ \tilde{U} \\ \tilde{c}_j}} \bar{w} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} + \int_{\substack{N_2 \\ \tilde{U} \\ \tilde{c}_j}} \bar{w} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \hat{\eta}} \right) d\tilde{S} \quad (5.6.2.10)$$

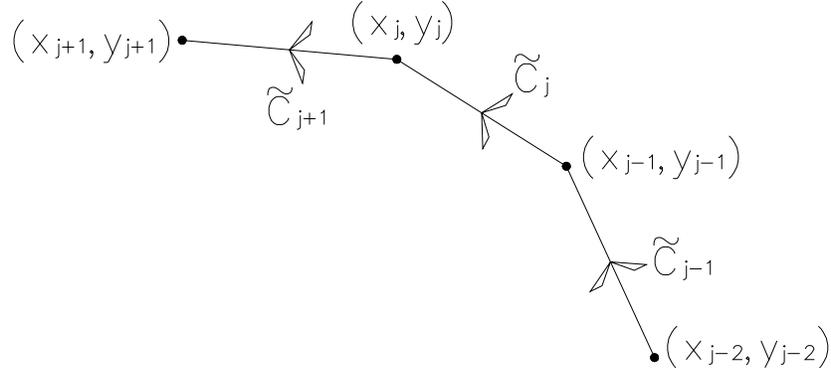
$$\bar{u}(p_i) + \sum_{j=1}^{N_1} \int_{\tilde{c}_j} \bar{u}_0 q(s) d\tilde{S} + \sum_{j=1}^{N_2} \int_{\tilde{c}_j} \bar{u} q_0(s) d\tilde{S} = \sum_{j=1}^{N_1} \int_{\tilde{c}_j} u^* q(s) d\tilde{S} + \sum_{j=1}^{N_2} \int_{\tilde{c}_j} u^* q_0(s) d\tilde{S} \quad (5.6.2.11)$$

de esta manera las cuadraturas sobre las cuerdas  $\tilde{c}_i$  son de cuatro tipo diferentes, a saber

$$\int_{\tilde{c}_j} \bar{u}_0(s) q^*(s) d\tilde{S}; \int_{\tilde{c}_j} \bar{u}(s) q_0(s) d\tilde{S} \quad (5.6.2.12)$$

$$\int_{\tilde{c}_j} \bar{u}^*(s) q(s) d\tilde{S}; \int_{\tilde{c}_j} \bar{u}^*(s) q_0(s) d\tilde{S} \quad (5.6.2.13)$$

donde  $\bar{u}_0(s)$ ,  $q(s)$ ,  $\bar{u}(s)$ ,  $q_0(s)$ ,  $\bar{u}^*(s)$ ,  $q(s)$ ,  $\bar{u}^*(s)$ ,  $q_0(s)$  son funciones lineales en  $S$ .



Las cuales pueden ser integradas por cuadratura utilizando polinomios de interpolación de *Lagrange*, o de *Hermite* u otros según sea el caso.

En efecto si

$$\tilde{u}_j(s) = N_{j-1}^{(j)}(s)U_{j-1} + N_j^{(j)}(s)U_j \quad (5.6.2.14)$$

$$\tilde{q}_j(s) = \frac{\partial \tilde{u}(s)}{\partial \hat{\eta}} = \nabla \tilde{u} \cdot \hat{\eta}(s) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \cos \alpha_j + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \cos \beta_j \quad (5.6.2.15)$$

donde  $\cos \alpha_j$ ;  $\cos \beta_j$  son los cosenos directores de normal en  $\tilde{C}_i$  y  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = q_{jx}(s)$ ;

$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = q_{jy}(s)$  son las componentes del flujo  $q_j(s)$  en  $x$ ,  $y$  respectivamente en la cuerda  $\tilde{C}_i$

como

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial N_{j-1}^{(j)}(s)}{\partial x} U_{j-1} + \frac{\partial N_j^{(j)}(s)}{\partial x} U_j; \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = \frac{\partial N_{j-1}^{(j)}(s)}{\partial y} U_{j-1} + \frac{\partial N_j^{(j)}(s)}{\partial y} U_j \quad (5.6.2.16)$$

son las componentes del flujo  $\tilde{q}_j(x(s), y(s))$ , la derivada normal de  $\tilde{u}(s)$  quedará:

$$\tilde{q}_j(s) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{j-1}^{(j)}(s)}{\partial x} & \frac{\partial N_j^{(j)}(s)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_{j-1}^{(j)}(s)}{\partial y} & \frac{\partial N_j^{(j)}(s)}{\partial y} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{Bmatrix} \cos \alpha_j \\ \cos \beta_j \end{Bmatrix}_{2 \times 1} \quad (5.6.2.17)$$

y de las expresiones obtenidas para  $\tilde{u}_j^*(s)$ ,  $\tilde{q}_j^*(s)$  anteriormente, se calculan los productos de los  $\tilde{u}_0(s) q^*(s)$ ,  $\tilde{u}(s) q_0(s)$ ,  $\tilde{u}^*(s) q(s)$ ,  $\tilde{u}^*(s) q_0(s)$

$$\tilde{q}_j^*(s) = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \hat{\eta}} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} \cos \alpha_j + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} \cos \beta_j \quad (5.6.2.18)$$

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1}{r}\right) \right] = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \log\left(\frac{1}{r}\right) \right] = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \log(r) = -\frac{1}{2\pi r} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right) \quad (5.6.2.19)$$

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1}{r}\right) \right] = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \log\left(\frac{1}{r}\right) \right] = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \log(r) = -\frac{1}{2\pi r} \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right) \quad (5.6.2.19)$$

por lo que  $\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \hat{\eta}}$  quedará

$$\begin{aligned} \tilde{q}_j^*(s) &= \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \hat{\eta}} = -\frac{1}{2\pi r} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right) \cos \alpha_j - \frac{1}{2\pi r} \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right) \cos \beta_j \\ &= -\frac{1}{2\pi r} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right) \cos \alpha_j + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right) \cos \beta_j \right] \end{aligned} \quad (5.6.2.20)$$

por lo que

$$\tilde{q}_j^*(s) = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right) \cos \alpha_j + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right) \cos \beta_j \right] \right\} \quad (5.6.2.21)$$

y del hecho que  $u^*(s) = \omega(r) \Gamma_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1}{r}\right)$  con  $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$  se tendrá la cuadratura

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{c}_j} u_j^* q_j d\tilde{S} &= \int_{\tilde{c}_j} \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1}{r}\right) \frac{-1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right) \cos \alpha_j + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right) \cos \beta_j \right] \right\} d\tilde{S} = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\tilde{c}_j} \left\{ \frac{1}{r} \log\left(\frac{1}{r}\right) \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right) \cos \alpha_j + \frac{1}{r} \log\left(\frac{1}{r}\right) \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right) \cos \beta_j \right\} d\tilde{S} \end{aligned} \quad (5.6.2.22)$$

para el producto  $\tilde{u}_j(s) q_j^*(s)$  se tiene:

$$\tilde{u}_j(s) = N_{j-1}^{(j)}(s)U_{j-1} + N_j^{(j)}(s)U_j = \begin{bmatrix} N_{j-1}^{(j)}(s) & N_j^{(j)}(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{j-1} \\ U_j \end{Bmatrix} \quad (5.6.2.23)$$

$$\tilde{q}_j^*(s) = \nabla \tilde{\omega} \cdot \hat{\eta} / \tilde{C}_j = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right) \cos \alpha_j + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right) \cos \beta_j \right] \right\} \quad (5.6.2.24)$$

por lo que tomando

$$[\tilde{u}_j(s)]^T = \begin{bmatrix} N_{j-1}^{(j)}(s) & N_j^{(j)}(s) \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} U_{j-1} \\ U_j \end{Bmatrix}^T \quad (5.6.2.25)$$

se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{u}_j(s) \tilde{q}_j^*(s) &= -\frac{1}{2\pi} \{U_{j-1} \quad U_j\} \begin{bmatrix} N_{j-1}^{(j)}(s) \\ N_j^{(j)}(s) \end{bmatrix} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right) \quad \frac{1}{r} \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right) \right] \begin{Bmatrix} \cos \alpha_j \\ \cos \beta_j \end{Bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \{U_{j-1} \quad U_j\} \begin{bmatrix} \frac{1}{r} N_{j-1}^{(j)}(s) \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right) & \frac{1}{r} N_{j-1}^{(j)}(s) \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{r} N_j^{(j)}(s) \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right) & \frac{1}{r} N_j^{(j)}(s) \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha_j \\ \cos \beta_j \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.6.2.26)$$

### 5.6.2.1. APLICACIÓN

A manera de aplicación (se resolverá la ecuación de Laplace para este caso  $f(\bar{r}) = 0$ ) se tiene una placa como se muestra en la figura (5.6.2.1.0) con sus condiciones de frontera. La formulación matemática a este problema es:

$$\nabla^2 \phi = f(\bar{x}) \quad \text{en } \Omega \quad (5.6.2.1.0)$$

bajo las condiciones de frontera

$$\phi = 0 \quad \text{en } \Gamma_1 \quad (5.6.2.1.1)$$

$$\phi = 0 \quad \text{en } \Gamma_2 \quad (5.6.2.1.2)$$

$$\phi = 1 \quad \text{en } \Gamma_3 \quad (5.6.2.1.3)$$

$$\phi = 0 \quad \text{en } \Gamma_4 \quad (5.6.2.1.4)$$

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

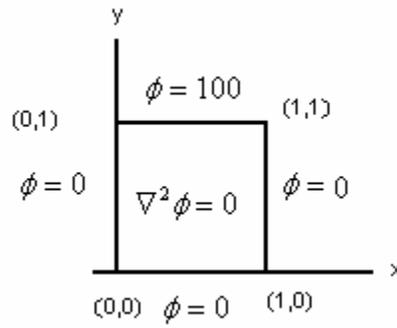
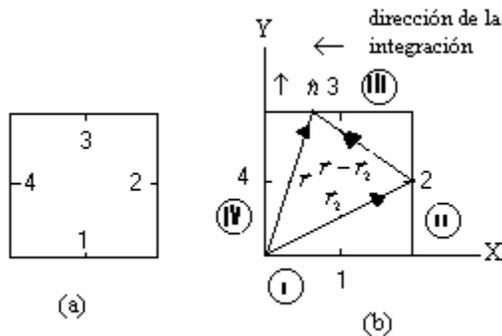


figura 5.6.2.1.0

La solución de este problema usando la técnica del BEM, con un mapeado de cuatro elementos, como se muestra en la figura (a), en la figura (b) se muestra la integración de los términos  $H_{23}$  y  $G_{33}$ .



La tabla 5.6.2.1.1 muestra las coordenadas de los puntos de muestra que se analizaron.

Tabla (5.6.2.1.0)

x	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5
y	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

El programa del BEM se corrió para 4, 16, 32, 64, 128, 256, 512 elementos.

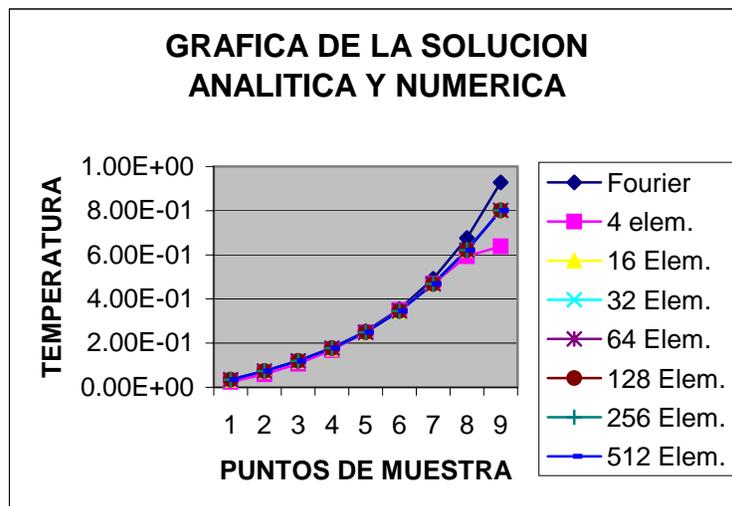
La tabla 5.6.2.1.2 muestra los resultados en cada uno de los puntos de observación la primera correspondiente a la solución analítica del problema.

Tabla (5.6.2.1.2) que muestra la solución.

SoL. Analítica	4 elementos	16 elementos	32 elementos	64 elementos	128 elementos	256 elementos	512 elementos
3.52E-02	2.50E-02	3.44E-02	3.52E-02	3.51E-02	3.51E-02	3.51E-02	3.51E-02
7.39E-02	5.93E-02	7.37E-02	7.37E-02	7.37E-02	7.37E-02	7.37E-02	7.37E-02
1.20E-01	0.1065568	0.1193079	0.1194012	0.1194136	0.1194153	0.1194155	0.1194155
1.78E-01	0.1692349	0.1763859	0.1765137	0.1765291	0.1765311	0.1765314	0.1765314
2.54E-01	0.2496548	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
3.55E-01	0.3498173	0.3458269	0.3454027	0.3453563	0.3453504	0.3453496	0.3453495
4.91E-01	0.4692829	0.4692894	0.4680546	0.4679217	0.4679047	0.4679025	0.4679023
6.76E-01	0.5933385	0.6231958	0.6210684	0.6208275	0.6207966	0.6207927	0.6207922
9.28E-01	0.6389567	0.803593	0.8020406	0.8017339	0.8016952	0.8016902	0.8016896

La grafica (5.6.2.1.2) muestra las soluciones usando cada una de las soluciones tanto analítica como numérica.

Grafica (5.6.2.1.2)



### 5.6.3. FORMULACIÓN DEL MÉTODO DEL ELEMENTO FRONTERA PARA LA ECUACIÓN DE POISSON.

Se tiene la siguiente ecuación diferencial parcial con sus condiciones de frontera.

$$\nabla^2 \phi = f(\bar{x}) \quad \text{en } \Omega \quad (5.6.3.1)$$

$$\phi = \bar{\phi} \quad \text{sobre } S_1 \quad (5.6.3.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \quad \text{sobre } S_2 \quad (5.6.3.3)$$

$$-k \frac{\partial \phi}{\partial n} = h(\phi - \phi_\infty) \quad \text{sobre } S_3 \quad (5.6.3.4)$$

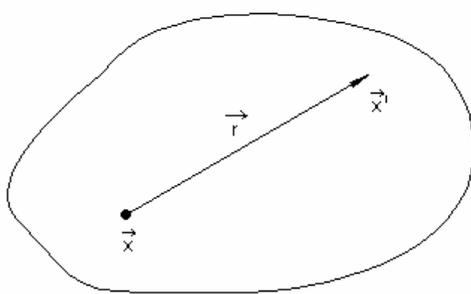
de la segunda identidad de Green. Para  $\varphi_1, \varphi_2$  se tiene

$$\int_{\Omega} (\varphi_1 \nabla^2 \varphi_2 - \varphi_2 \nabla^2 \varphi_1) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left( \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) dS \quad (5.6.3.5)$$

y de la función de Green  $G(\bar{x}, \bar{x}_0)$  ( $\bar{x}' = \bar{x}_0$ ) para este problema se tiene:

$$\nabla^2 G = \delta(\bar{x} - \bar{x}_0) \quad (5.6.3.6)$$

con  $\delta(\bar{x} - \bar{x}_0)$  la función  $\delta$ -Dirac. Conocida como la solución fundamental de (5.6.3.1). La función de Green para un espacio infinito, y un punto  $p(\bar{x})$  singular, es encontrado como

$G = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi r} & \text{para 3-D} \\ \frac{1}{2\pi} \ln r & \text{para 2-D} \end{cases} \quad (5.6.3.7)$	
---	--

donde  $r = |\bar{x}' - \bar{x}| = |\bar{r} - \bar{r}_i|$  don de  $r_i \in \Omega$

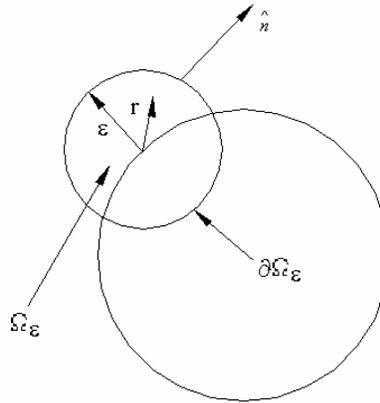
Así la función  $G$  expresado en (5.6.3.7), depende de la dimensión del problema.

$$\nabla^2 G = \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} & \text{en coordenadas cilíndricas} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} & \text{en coordenadas esféricas} \end{cases}$$

observe que

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = 0 \quad \text{excepto } r = 0 \\ \nabla^2 (\ln r) = 0 \quad \text{excepto } r = 0 \end{array} \right\} \text{ es decir } \nabla^2 G = 0 \quad \text{excepto en } r = 0$$

evaluando  $\nabla^2 G(r)$  cerca de  $r = 0$ :



$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^2 G d\Omega &= \int_{\Omega_\epsilon} \nabla^2 G d\Omega = \int_{\partial\Omega_\epsilon} \nabla G \cdot \hat{n} dS = \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial G}{\partial n} dS = \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial G}{\partial r} dS \\ &= \begin{cases} \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon^2} \int_{\partial\Omega_\epsilon} dS = \frac{4\pi\epsilon^2}{4\pi\epsilon^2} = 1 & : 3-D \\ \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} dS = \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{\partial\Omega_\epsilon} dS = \frac{2\pi\epsilon}{2\pi\epsilon} = 1 & : 2-D \end{cases} \end{aligned}$$

si  $\varphi_1 = \phi$  y  $\varphi_2 = G$  es la solución fundamental para un punto singular  $p(\bar{x})$  entonces

$$\nabla^2 G = \delta(\bar{x} - \bar{x}')$$

usando (5.6.3.5) con estas condiciones se tiene que:

$$\int_{\Omega} (\phi \nabla^2 G - G \nabla \phi) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left( \phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \\ \delta(\vec{x} - \vec{x}') & f(\vec{x}') & \end{array} \quad (5.6.3.8)$$

es decir

$$\int_{\Omega} \phi \nabla^2 G d\Omega = \int_{\Omega} f G d\Omega + \int_{\partial\Omega} \left( \phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds$$

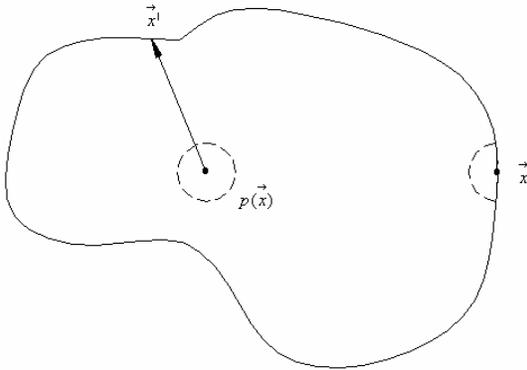
$$\downarrow$$

$$\phi(\vec{x}) \frac{\text{angulo}}{\text{angulototal}} = \alpha \phi(\vec{x}) \quad (5.6.3.9)$$

por lo tanto

$$a \phi(\vec{x}) = \int_{\Omega} f G d\Omega + \int_{\partial\Omega} \left( \phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS \quad (5.6.3.10)$$

la cuál es una ecuación integral con el valor de  $a$  dependiendo de la posición, esto se describe abajo



$$a = \begin{cases} 1 & \text{para un punto interno} \\ \frac{1}{2} & \text{para la frontera} \\ \frac{\alpha}{2\pi} \text{ o } \frac{\alpha}{4\pi} & \text{esquina} \\ \uparrow \quad \uparrow & \\ 2D \quad 3D & \end{cases}$$

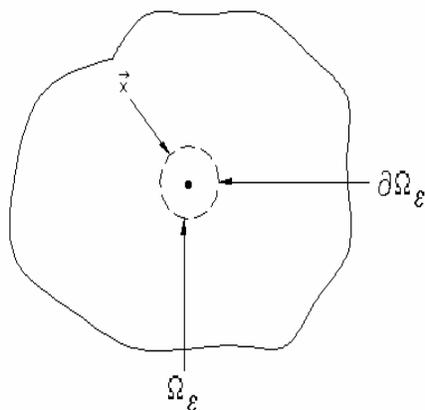
los detalles de estas fórmulas serán demostrados a continuación.

Considere  $\int_{\Omega} \phi \nabla^2 G d\Omega :$

a) para un punto interno

$$\int_{\Omega} \phi(\vec{x}') \nabla^2 G(\vec{x} - \vec{x}') dx' dy' dz'$$

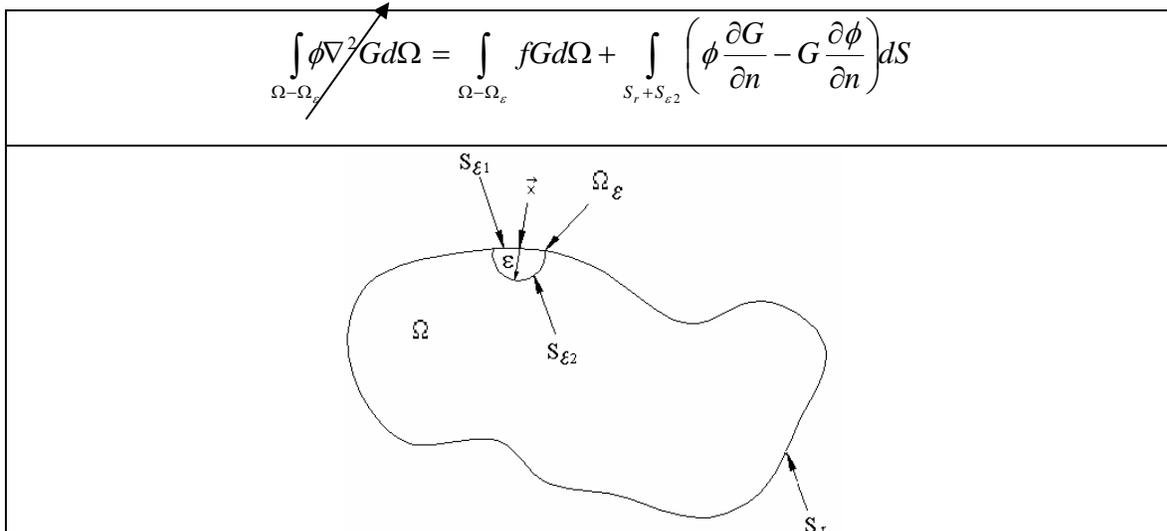
$$= \int_{\Omega_\epsilon} \phi(\bar{x}) \nabla^2 G(\bar{x} - \bar{x}') d\Omega = \phi(\bar{x}) \int_{\Omega_\epsilon} \nabla^2 G d\Omega = \phi(\bar{x})$$



por lo tanto  $a = 1$

b) para un punto en  $\partial\Omega$   
excepto un volumen pequeño  $\Omega_\epsilon$  :

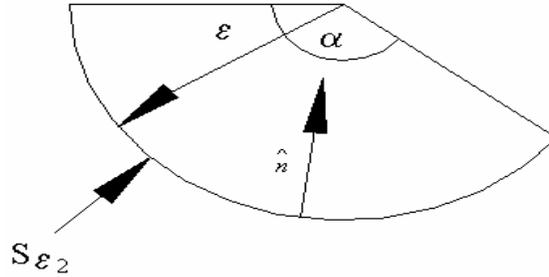
$$\partial(\Omega - \Omega_\epsilon) = S_r + S_{\epsilon 2}$$



Considere

$$\int_{S_{\epsilon 2}} \left( \phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS$$

$$\begin{aligned}
&= \phi(\bar{x}) \int_{S_{\varepsilon^2}} \frac{\partial G}{\partial n} dS - \int_{S_{\varepsilon^2}} G \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \\
&= \phi(\bar{x}) \int_{S_{\varepsilon^2}} \left( -\frac{\partial G}{\partial r} \right) dS - \int_{S_{\varepsilon^2}} G \frac{\partial \phi}{\partial n} dS
\end{aligned}$$



$\alpha$  : ángulo subtended

$$\int_{S_{\varepsilon^2}} \left( -\frac{\partial G}{\partial r} \right) dS = \begin{cases} -\frac{S_{\varepsilon^2}}{4\pi\varepsilon^2} = -\frac{\alpha\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon^2} = -\frac{\alpha}{4\pi} = -a \\ -\frac{S_{\varepsilon^2}}{2\pi\varepsilon^2} = -\frac{\alpha\varepsilon}{2\pi\varepsilon} = -\frac{\alpha}{2\pi} = -a \end{cases}$$

$$\left| \int_{S_{\varepsilon^2}} G \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \right| \leq \left| \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\max} \cdot \int_{S_{\varepsilon^2}} G dS$$

$$\left| \int_{S_{\varepsilon^2}} G \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \right| \leq \left| \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\max} \int_{S_{\varepsilon^2}} G dS = \begin{cases} \left| \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\max} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \alpha\varepsilon \rightarrow 0 \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0 \\ \left| \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\max} \cdot \frac{\ln\varepsilon}{2\pi} \cdot \alpha\varepsilon \rightarrow 0 \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0 \end{cases}$$

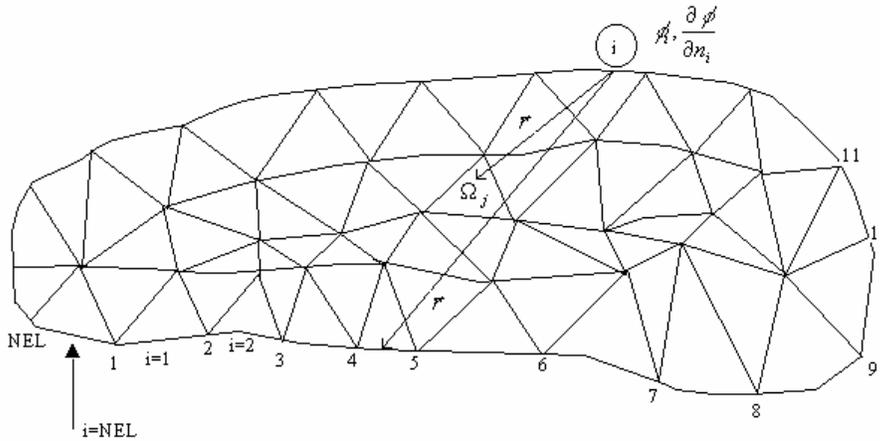
finalmente se tiene

$$a\phi(\bar{x}) = \int_{\Omega - \Omega_\epsilon} fGd\Omega + \int_{S_r} \left( \phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS \quad (5.6.3.11)$$

donde  $a \equiv \frac{\text{angulo } (\alpha)}{\text{angulo total } (4\pi \text{ o } 2\pi)}$

$a = \frac{1}{2}$  en la superficie

la ecuación (5.6.3.11) es una ecuación integral que permite establecer el sistema lineal de ecuaciones sobre las cuerdas o elementos frontera de este problema. Como enseguida veremos



discretización a lo largo de la frontera  $i=1, nel$

discretización del dominio  $i=1, ndominio$

en cada elemento  $\phi_i$  y  $\frac{\partial \phi}{\partial n_i} = q$  se aproximan como constante, en la ecuación (5.6.3.11)

proporcionado:

$$\frac{1}{2} \phi_i = \sum_{j=1}^{ndominio} \int_{\Omega_j} f \cdot \frac{1}{2\pi} \ln r d\Omega + \sum_{j=1}^{nel} \left[ \phi_j \int_{S_j} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \ln r}{\partial n} dS - \frac{\partial \phi}{\partial n_j} \int_{S_j} \frac{1}{2\pi} \ln r dS \right] \quad (5.6.3.12)$$

es decir

$$\pi\phi_i = \sum_{j=1}^{ndo\ min\ io} \int_{\Omega_j} f \cdot \ln rd\Omega + \sum_{j=1}^{nel} \left[ \left( \int_{s_j} \frac{\partial \ln r}{\partial n} dS \right) - \left( \int_{s_j} \ln rdS \right) \frac{\partial \phi}{\partial n_j} \right] \quad (5.6.3.13)$$

Así definimos  $\hat{H}_{ij}$  y  $G_{ij}$

$$\hat{H}_{ij} = - \int_{s_j} \frac{\partial \ln r}{\partial n} dS = - \int_{s_j} \frac{(\bar{r} - \bar{r}_l) \bullet \hat{n}}{\|\bar{r} - \bar{r}_l\|^2} dS \quad (5.6.3.14)$$

$$G_{ij} = - \int_{s_j} \ln rdS = - \int_{s_j} \ln |\bar{r} - \bar{r}_l| dS \quad (5.6.3.15)$$

$\bar{r}_l$  se considera un punto de la frontera.

$$F_{li} = \sum_{j=1}^{ndo\ min\ io} \int_{\Omega_j} f \cdot \ln rd\Omega \quad (5.6.3.16)$$

de donde se establece el sistema lineal de ecuaciones en  $\phi_j$  y  $\frac{\partial \phi}{\partial n_j} = q_j$

$$H_{ij} \phi_j = G_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial n_j} + F_{li} \quad (5.6.3.17)$$

o sea

$$[H]\{\phi\} = [G]\left\{\frac{\partial \phi}{\partial n}\right\} + \{F_{li}\} \quad (5.6.3.18)$$

$$[H]\{\phi\} = [G]\{q\} + \{F_{li}\} \quad (5.6.3.18')$$

donde

$$H_{ij} = \hat{H}_{ij} + \pi\delta_{ij} \quad (5.6.3.19)$$

para evaluar un valor dentro de la región por ejemplo  $\bar{r}_l$  los elementos de  $\langle h \rangle, \langle g \rangle$  se definen:

$$h_e^l = \int_{s_e} \frac{(\bar{r} - \bar{r}_l) \bullet \hat{n}}{\|\bar{r} - \bar{r}_l\|^2} dS \quad \text{y} \quad g_e^l = \int_{s_e} \ln |\bar{r} - \bar{r}_l| dS \quad (5.6.3.20)$$

$$\hat{\phi}(\bar{r}_l) = \frac{1}{2\pi} \langle h \rangle \tilde{\phi} - \frac{1}{2\pi} \langle g \rangle \{ \tilde{q} \} \quad (5.6.3.21)$$

Indicando el índice y supraindice,  $l$  en cada elemento.

### 5.6.3.1 APLICACIÓN

A manera de aplicación (para este caso  $f(\vec{r}) = -1$ , la generación de calor se encuentra en el centro de la placa) se tiene una placa como se muestra en la figura (5.6.3.1.0) con sus condiciones de frontera.

La formulación matemática a este problema es:

$$\nabla^2 \phi = f(\vec{x}) \quad \text{en } \Omega \quad (5.6.3.1.0)$$

bajo las condiciones de frontera:

$$\phi = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_1 \quad (5.6.3.1.1)$$

$$\phi = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_2 \quad (5.6.3.1.2)$$

$$\phi = 1 \quad \text{en} \quad \Gamma_3 \quad (5.6.3.1.3)$$

$$\phi = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_4 \quad (5.6.3.1.4)$$

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

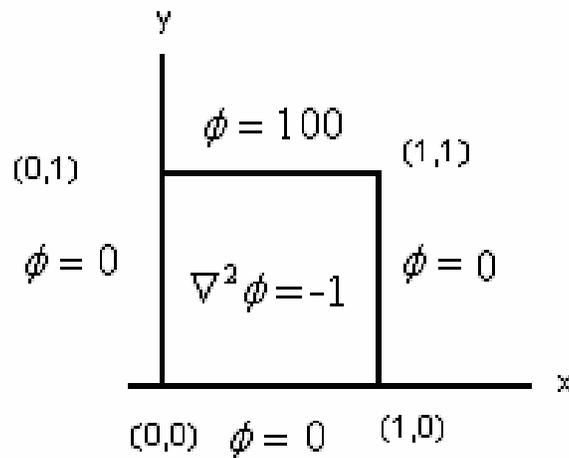
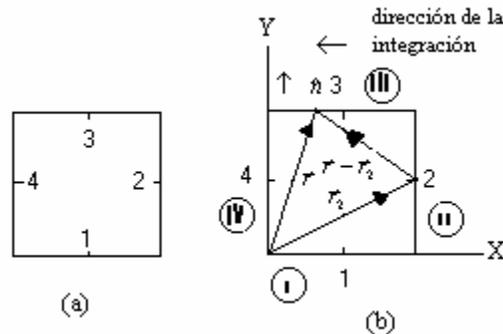


figura 5.6.3.1.0

La solución de este problema usando la técnica del BEM, con un mayado de cuatro elementos, como se muestra en la figura (a), en la figura (b) se muestra la integración de los términos  $H_{23}$  y  $G_{33}$ .



La tabla 5.6.3.1 muestra las coordenadas de los puntos de muestra que se analizaron.

Tabla (5.6.3.1)

NODO	X	Y
1	.25	.25
2	.25	.5
3	.25	.75
4	.5	.25
5	.5	.5
6	.5	.75
7	.75	.25
8	.75	.5
9	.75	.75

El programa del BEM se corrió para 4 elementos, el FEM se utilizó una longitud de malla de 0.25, con 16 elementos.

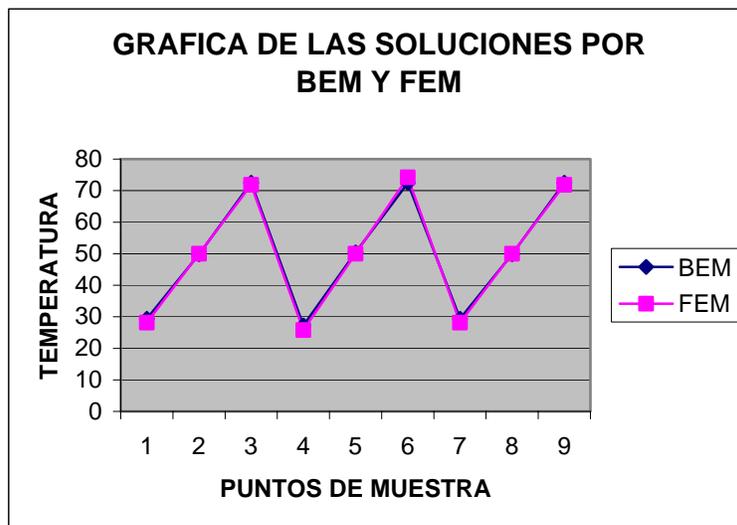
La tabla 5.6.3.2 muestra los resultados en cada uno de los puntos de observación la primera correspondiente a la solución por el BEM y la segunda por el FEM del problema.

Tabla (5.6.3.2) que muestra la solución.

NODO	BEM	FEM
1	29.36791	28.171
2	49.82397	49.986
3	72.48096	71.810
4	27.25472	25.784
5	50.381	49.979
6	72.45338	74.194
7	29.36791	28.171
8	49.82397	49.986
9	72.48096	71.810

La grafica (5.6.3.2) muestra las soluciones usando BEM y FEM

Grafica (5.6.3.2)



## CAPITULO 6

### FORMULACION VARIACIONAL HIBRIDA PARA RESOLVER LA ECUACION DEL CALOR NO LINEAL MEDIANTE EL METODO DE LOS ELEMENTOS FRONTERA

#### 6.1 INTRODUCCION.

En el capitulo 5 se abordo la parte de transferencia de calor en estado estacionario, dando solución a problemas que involucran a las ecuaciones de Laplace y de Poisson usando el BEM. En este capitulo se abordaran problemas en los cuales se involucra el tiempo.

#### 6.2 LA IDENTIDAD DE GREEN PARA EL OPERADOR PARABOLICO DE LA ECUACION DEL CALOR

La distribución de temperatura en un dominio  $\Omega$  con propiedades del material constantes, la ecuación diferencial parcial que gobierna a este fenómeno esta dada por:

$$k\nabla^2 u(x,t) + Q(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \quad (6.2.1)$$

$$-k\nabla^2 u(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = Q(x,t) \quad (6.2.1')$$

cuyas condiciones de frontera e iniciales son:

$$u(x,t) = u^* \in \Gamma_u \quad (6.2.1.a)$$

$$q(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = q^* \in \Gamma_q \quad (6.2.1.b)$$

$$u(x,0) = u_0 \quad (6.2.1.c)$$

Donde  $u^*, q^*$  están dadas en las fronteras respectivas.

Ahora utilizando la notación de operador para (6.2.1') se tiene:

$$L[ ] = \frac{\partial[ ]}{\partial t} - k\nabla^2[ ] \quad (6.2.2)$$

se define como el operador adjunto de (6.2.2) a

$$L^*[ ] = -\frac{\partial[ ]}{\partial t} - k\nabla^2[ ] \quad (6.2.3)$$

Por lo que la segunda identidad de Green queda como:

$$\int_a^b [uL^*(v) - vL(u)] dt = -uv|_a^b \quad (6.2.4)$$

Donde

$$uL^*(v) = u \left[ -\frac{\partial v}{\partial t} - k\nabla^2 v \right] \quad (6.2.5)$$

$$vL(u) = v \left[ \frac{\partial u}{\partial t} - k\nabla^2 u \right] \quad (6.2.6)$$

$$uL^*(v) - vL(u) = v \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial t} + k[v\nabla^2 u - u\nabla^2 v] \quad (6.2.7)$$

Sustituyendo (6.2.7) dentro de la integral de (6.2.4) e integrando volumen y tiempo, y el teorema de Green se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} [uL^*(v) - vL(u)] d\Omega dt &= - \int_{\Omega} uv \Big|_{t_0}^{t_f} d\Omega \\ &+ k \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} [v\nabla u - u\nabla v] d\Gamma dt \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

Si tomamos  $v = w = G(x, t_0, x_0, t)$  en (6.2.8) queda

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} [uL^*(w) - wL(u)] d\Omega dt &= - \int_{\Omega} uw \Big|_{t_0}^{t_f} d\Omega \\ &+ k \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} [w\nabla u - u\nabla w] d\Gamma dt \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

Ahora bien de las propiedades de la función de Green, y de (6.2.9) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} uL^*(w) d\Omega dt - \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} wL(u) d\Omega dt &= - \int_{\Omega} uw \Big|_{t_0}^{t_f} d\Omega \\ &+ k \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} [w\nabla u - u\nabla w] d\Gamma dt \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

donde  $L(u)$  satisface (6.2.1') así que

$$L(u) = Q(x, t) \quad (6.2.11)$$

entonces se tiene

$$\int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} uL^*(w) d\Omega dt - \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega} wQ(x, t) d\Omega dt = - \int_{\Omega} uw \Big|_{t_0}^{t_f} d\Omega + k \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Gamma} [w\nabla u - u\nabla w] d\Gamma dt \quad (6.2.12)$$

si  $w^* = G^*(x, t_0, x_0, t)$  es la función de Green adjunta, entonces la siguiente propiedad se cumple ( $G^*(x, t, x_0, t_0) = G(x, t_0, x_0, t)$  siendo ambos cero para el  $t > t_0$ )

$$\begin{aligned} L[G] &= \delta(x - x_0)\delta(t - t_0) \\ L^*[G^*] &= \delta(x - x_0)\delta(t - t_0) \end{aligned}$$

$$\int_0^{t_{0+}} \int_{\Omega} u \delta(x-x_0) \delta(t-t_0) d\Omega dt - \int_0^{t_{0+}} \int_{\Omega} G(x, t_0, x_0, t) Q(x, t) d\Omega dt =$$

$$\int_{\Omega} u(x, 0) G(x, t_0, x_0, 0) d\Omega + k \int_0^{t_{0+}} \int_{\Gamma} [G(x, t_0, x_0, t) \nabla u - u \nabla G(x, t_0, x_0, t)] d\Gamma dt \quad (6.2.13)$$

Donde  $G = 0$  para  $t > t_0$  aplicando la propiedad de la Delta de Dirac.

$$u(x_0, t_0) = \int_0^{t_0} \int_{\Omega} G(x, t_0, x_0, t) Q(x, t) d\Omega dt +$$

$$\int_{\Omega} u(x, 0) G(x, t_0, x_0, 0) d\Omega + k \int_0^{t_0} \int_{\Gamma} [G(x, t_0, x_0, t) \nabla u - u \nabla G(x, t_0, x_0, t)] d\Gamma dt \quad (6.2.14)$$

Puede mostrarse que los limites  $t_{0+}$  pueden reemplazarse por el  $t_0$ . Ahora intercambiando  $x$  por  $x_0$  y  $t$  con el  $t_0$ . Además, usando la reciprocidad de la función de Green se tiene

$$u(x, t) = \int_0^{t_0} \int_{\Omega} G(x, t, x_0, t_0) Q(x_0, t_0) d\Omega dt +$$

$$\int_{\Omega} u(x_0, 0) G(x, t, x_0, 0) d\Omega + k \int_0^{t_0} \int_{\Gamma} [G(x, t, x_0, t_0) \nabla u - u \nabla G(x, t, x_0, t_0)] d\Gamma dt \quad (6.2.15)$$

Resultando (6.2.15) como ecuación de frontera. Para esta ecuación.

### 6.3 EL METODO DEL ELEMENTO FRONTERA PARA EL CASO TRANSITORIO LINEAL.

La conducción del calor lineal y transitorio viene gobernada por la ecuación dada por:

$$\nabla^2 u(x, t) = \frac{1}{k} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (6.3.1)$$

cuyas condiciones de frontera e iniciales viene dadas por:

$$u(x, t) = u^* \in \Gamma_u \quad (6.3.1.a)$$

$$q(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = q^* \in \Gamma_q \quad (6.3.1.b)$$

$$u(x, 0) = u_0 \quad (6.3.1.c)$$

donde  $u^*, q^*$  son valores conocidos en las fronteras respectivas. La variación en el tiempo de  $t^k$  a  $t^{k+1}$  esta dado por  $t^{k+1} = t^k + \Delta t$ , para pequeños valores de  $\Delta t$ . Así que se puede representar mediante diferencias finitas al término  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$  con respecto del tiempo, se tiene

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{u(x, t_{k+1}) - u(x, t_k)}{\Delta t} \quad (6.3.2)$$

y sustituyéndolo en (6.3.1) obtenemos

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{u(x,t_{k+1}) - u(x,t_k)}{k\Delta t} = \frac{1}{k\Delta t} [u(x,t_{k+1}) - u(x,t_k)] = \nabla^2 u(x,t_{k+1}) \quad (6.3.3)$$

y denotando  $u(x,t_{k+1}) = u^{k+1}$ ,  $u(x,t_k) = u^k$  (6.3.3) se transforma en

$$\nabla^2 u^{k+1} = \frac{u^{k+1}}{k\Delta t} - \frac{u^k}{k\Delta t} \quad (6.3.4)$$

Si  $\lambda = \frac{1}{k\Delta t}$  es sustituida en (6.3.4) se obtiene

$$\nabla^2 u^{k+1} - \lambda u^{k+1} = -\lambda u^k \quad (6.3.5)$$

(6.3.5) es la ecuación Helmholtz modificada, considerando que  $u^* = w = G$  es la solución fundamental de la ecuación de Helmholtz. En términos de operadores diferenciales (6.3.5) queda

$$L[ ] = (\nabla^2 - \lambda)[ ] \quad (6.3.6)$$

$$L[u^{k+1}] = (\nabla^2 - \lambda)[u^{k+1}] = -\lambda u^k \quad (6.3.6')$$

Ahora bien, si tomamos en cuenta las siguientes identidades vectoriales

$$\nabla \bullet (u \nabla w) = u \nabla^2 w + \nabla u \bullet \nabla w \quad (6.3.7)$$

$$\nabla \bullet (w \nabla u) = w \nabla^2 u + \nabla w \bullet \nabla u \quad (6.3.8)$$

Restando (6.3.7) de (6.3.8) se obtiene

$$\nabla[(u \nabla w) - (w \nabla u)] = u \nabla^2 w - w \nabla^2 u \quad (6.3.9)$$

Así (6.3.6) queda como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ u^{k+1} L[w] - w L[u^{k+1}] \right\} d\Omega &= \int_{\Omega} \left\{ u^{k+1} (\nabla^2 - \lambda)[w] - w (\nabla^2 - \lambda)[u^{k+1}] \right\} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left\{ u^{k+1} \nabla^2 w - \lambda u^{k+1} w - w \nabla^2 u^{k+1} + \lambda w u^{k+1} \right\} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left\{ u^{k+1} \nabla^2 w - w \nabla^2 u^{k+1} \right\} d\Omega \quad (6.3.10) \end{aligned}$$

y substituyendo (6.3.9) en (6.3.10) obtenemos

$$\int_{\Omega} \left\{ u^{k+1} \nabla^2 w - w \nabla^2 u^{k+1} \right\} d\Omega = \int_{\Omega} \left\{ (u^{k+1} \nabla w) - (w \nabla u^{k+1}) \right\} d\Omega \quad (6.3.11)$$

Utilizando la ecuación (6.3.6') al lado derecho de (6.3.10) se tiene

$$\int_{\Omega} \left\{ u^{k+1} L(w) - w (-\lambda u^k) \right\} d\Omega = \int_{\Omega} \left\{ (u^{k+1} \nabla w) - (w \nabla u^{k+1}) \right\} d\Omega \quad (6.3.12)$$

Por otro lado del teorema de la divergencia de Gauss y de

$$\int_{\Omega} \left\{ u^{k+1} L(w) + \lambda u^k \right\} d\Omega = \int_{\Gamma} \left\{ (u^{k+1} \nabla w) - (w \nabla u^{k+1}) \right\} d\Gamma \quad (6.3.13)$$

Como  $\nabla^2 w(x, \varepsilon) - \lambda w(x, \varepsilon) = -\delta(x - \varepsilon)$  donde  $w$  es la función de Green y la propiedad de la delta de Dirac.

$$-C(\varepsilon)u^{k+1} = \int_{\Gamma} u^{k+1} \nabla w d\Gamma - \int_{\Gamma} w \nabla u^{k+1} d\Gamma - \lambda \int_{\Omega} w u^k d\Omega \quad (6.3.14)$$

A  $C(\varepsilon)$  se obtuvo en la sección (5.4)

Remplazando  $w = G$  se obtiene finalmente

$$C(\varepsilon)u^{k+1} = -\int_{\Gamma} u^{k+1} \nabla G d\Gamma + \int_{\Gamma} G \nabla u^{k+1} d\Gamma + \lambda \int_{\Omega} G u^k d\Omega \quad (6.3.15)$$

Donde la parte del lado derecho tiene una integral que se integra en todo el dominio: Como el flujo viene dado por  $q^{k+1} = \nabla u^{k+1}$  substituyéndolo en lo anterior se obtiene la ecuación de frontera

$$C(\varepsilon)u^{k+1} + \int_{\Gamma} u^{k+1} \nabla G d\Gamma = \int_{\Gamma} G q^{k+1} d\Gamma + \lambda \int_{\Omega} G u^k d\Omega \quad (6.3.16)$$

aquí  $G$  es la solución fundamental de la ecuación de Helmholtz modificada  $\nabla^2 - \lambda^2$

$$G = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda \|x-x'\|} & \text{en 1D} \\ \frac{1}{2\pi} K_0(-\lambda \|r-r'\|) & \text{en 2D} \\ \frac{e^{-\lambda (\|r-r'\|)}}{4\pi \|r-r'\|} & \text{3D} \end{cases} \quad (6.3.17)$$

Donde  $K_0$  es la función de Bessel modificada de segunda especie de orden cero, con la propiedad que  $K_0'(\varepsilon) = -K_1(\varepsilon)$  así de esta manera  $\nabla G$  se puede expresar como

$$\nabla G = \frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{(2\pi)^2} \lambda K_1(-\lambda \|r-r'\|) \frac{1}{r} r \bullet n.$$

Finalmente la ecuación (6.3.16) es reducida a la forma

$$Hu^{n+1} = \tilde{G}q^{n+1} + \bar{b} \quad (6.3.18)$$

$$H = C(\varepsilon) + \int_{\Gamma} \nabla G d\Gamma, \quad \tilde{G} = \int_{\Gamma} G d\Gamma, \quad \bar{b} = \lambda \int_{\Omega} G u^k d\Omega$$

Obteniendo el siguiente sistema lineal (6.3.19) a resolver.

$$A\bar{x} = \bar{c} \quad (6.3.19)$$

## 6.4 SOLUCION AL SISTEMA DE ECUACIONES DE ELEMENTOS FRONTERA.

En la sección anterior en (6.3.21) se formuló esta en forma matricial, a continuación se dará la formulación pero ahora dando la discretización de la frontera en elementos constantes, usando las funciones de forma como se utilizan en elemento finito.

Sea la ecuación integral:

$$C(\varepsilon)u^{k+1} + \int_{\Gamma} u^{k+1} \nabla G d\Gamma = \int_{\Gamma} G q^{k+1} d\Gamma + \lambda \int_{\Omega} G u^k d\Omega \quad (6.4.1)$$

Donde  $G$  toma los valores según sea la dimensión dada por (6.3.19).

Se supone que se tiene dividida la frontera según sus condiciones como sigue

$u = \bar{u}$  en  $\Gamma_u$  y  $q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}$  en  $\Gamma_q$  como se muestra en la figura (6.4.1)

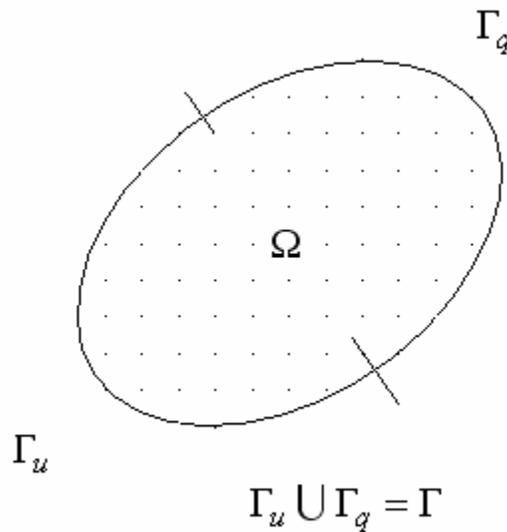


Figura 6.4.1 Condiciones de frontera asociados al problema.

En la figura 6.4.2 se muestra la discretización de la frontera.

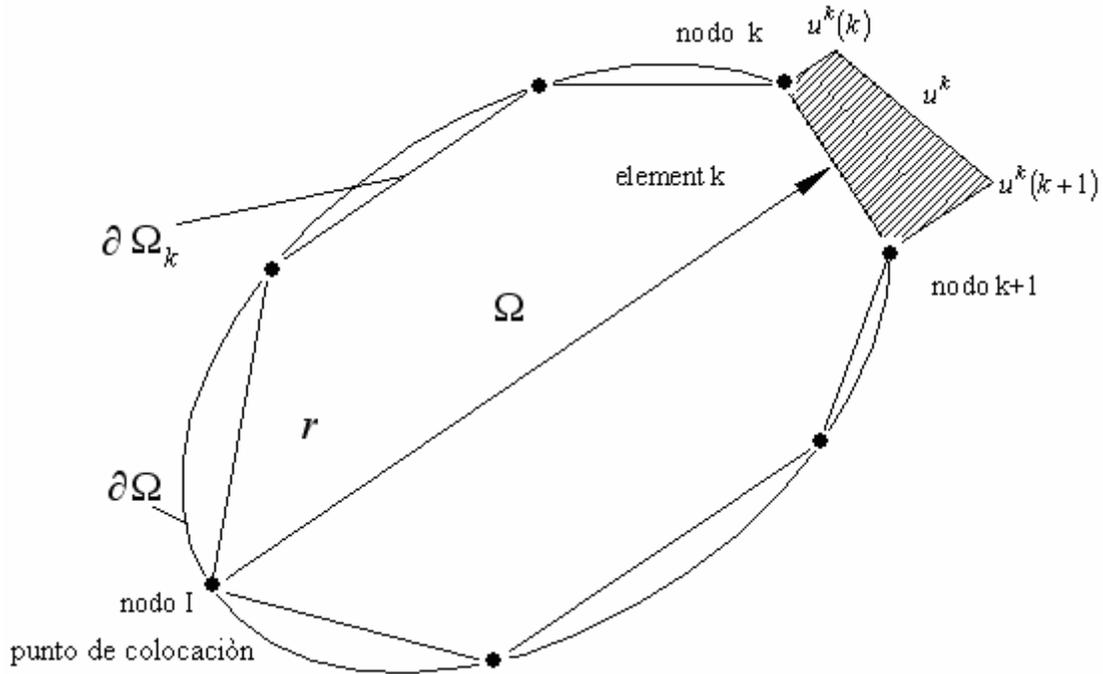


Figura 6.4.2 Discretización de la frontera

Usando elementos lineales continuos y constantes la ecuación de frontera (6.4.1), tomando el valor de  $C(\varepsilon) = \frac{1}{2}$  por que se esta sobre la frontera, se tiene la siguiente forma

$$\frac{1}{2}u^{k+1} + \sum_{j=1}^{nel} \int_{\Gamma_j} u^{k+1} \nabla G d\Gamma = \sum_{j=1}^{nel} \int_{\Gamma_j} G q^{k+1} d\Gamma + \lambda \sum_{j=1}^{ndo\ min\ io} \int_{\Omega} G u^k d\Omega \quad (6.4.2)$$

## RESULTADOS.

Considérese una barra de longitud  $0 \leq x \leq L = 10$  cm. De longitud, la cual se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme  $T(x,0) = 0$  °C para  $t > 0$ . Mientras que las condiciones de frontera son:

$T(0,t) = 0$  °C, y para  $T(L,t) = 100$  °C,  $\alpha = 10 \frac{\text{cm}^2}{\text{seg}}$ , t en segundos, la ecuación que

gobierna este fenómeno es la siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

Bajo las condiciones de frontera

$$T(0,t) = 0 \text{ °C} \quad (1a)$$

$$T(L,t) = 100 \text{ °C} \quad (1b)$$

Condiciones iniciales

$$T(x,0) = 0 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (1c)$$

La solución analítica a la ecuación (1) bajo condiciones de frontera y condición inicial esta dada por:

$$u(x,t) = 100 \left[ \frac{x}{10} + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n (-1)^i e^{-i^2 \pi^2 t / 10} \text{sen} \left( \frac{i \pi x}{10} \right) \right] \quad (2)$$

Usando el método de elemento frontera para diferentes elementos para t=2 se obtuvo la tabla 1:

Tabla 1 evaluación de los nodos para diferentes elementos para t=2

nodo	4 elementos	16 elementos	32 elementos	40 elementos	Fourier
1	8.480399	7.256896	7.27043	7.273416	7.281209
2	16.712776	14.7777566	14.807616	14.812346	14.8246
3	24.463036	22.822996	22.851786	22.856366	22.86819
4	32.493739	31.576529	31.593629	31.596389	31.60349
5	41.087704	41.156744	41.156744	41.156744	41.15674
6	50.524134	51.602584	51.602584	51.582744	51.57564
7	60.690628	62.868378	62.868378	62.834958	62.82314
8	70.075202	74.826722	74.826772	74.791812	74.77956
9	80.849235	87.241605	87.241605	87.261355	87.2534

Ahora usando 40 elementos se construye la tabla 2 para t=2, 2.4, 6 segundos y se observa el comportamiento con el estado estacionario.

Tabla 2 evaluación de los nodos para diferentes tiempos

nodo	t=2 segundos	t=2.4 segundos	t=6 segundos	Estado estacionario
1	7.273416	8.153705	9.93947652	10
2	14.818346	16.489876	19.8874502	20
3	22.856366	25.172049	29.85017499	30
4	31.596389	34.0412	39.8306125	40
5	41.156744	44.0412	49.8293609	50
6	51.582744	54.33708	59.8448128	60
7	62.834958	65.18642	69.8737706	70
8	74.791812	76.505136	79.9119517	80
9	87.261355	88.16369	89.95522069	90

Figura 1 grafica usando diferentes elementos para t=2

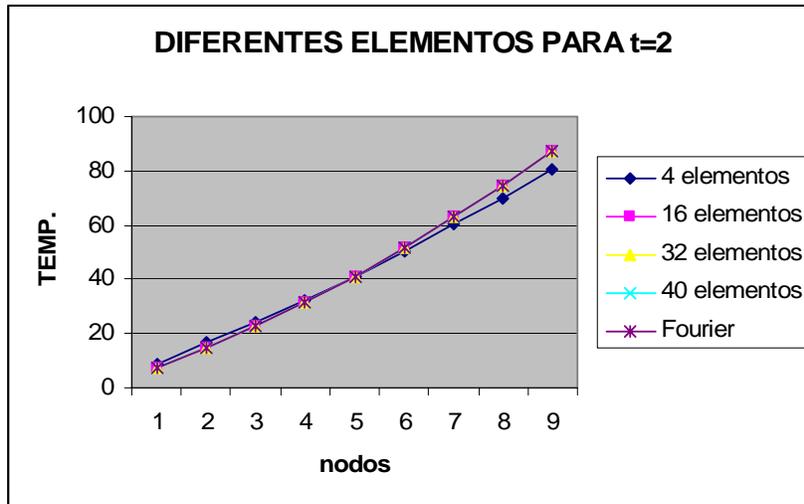
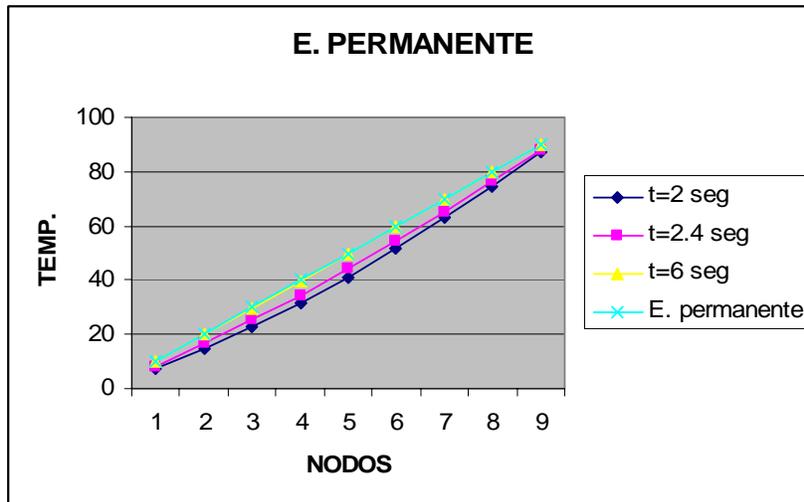


Figura 1 Grafica para diferentes tiempos comparada  
Con el estado permanente usando 40 elementos



## 6.5 FORMULACION DEL METODO DEL ELEMENTO FRONTERA PARA EL CASO TRANSITORIO NO LINEAL.

### 6.5.1 INTRODUCCIÓN

En esta sección se resolverá la ecuación del calor no lineal por medio del Método del Elemento Frontera (BEM), aplicando la transformada de Kirchhoff a la ecuación no lineal la cual se transformara en una forma mas sencilla, la cual se resuelve esta ecuación mediante el BEM. Este algoritmo computacional se aplica al caso de una barra metálica conductora del calor cuya conductividad térmica es función de la temperatura.

#### 6.5.1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El dominio de definición de la ecuación gobernante consiste de una barra metálica cuya conductividad es función de la temperatura la cual es transformada mediante la transformada de Kirchhoff reduciéndola a una ecuación casi lineal respecto al coeficiente de conductividad, la cual es resuelta mediante el método acoplado en cuestión. En efecto considérese una barra de longitud  $0 \leq x \leq L = 10$  cm. de longitud, la cual se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme  $T(0, t) = 0^\circ\text{C}$  para tiempos  $t > 0$ . Mientras que las condiciones de frontera son:  $T(0, t) = 0^\circ\text{C}$  y para  $x = L$   $T(L, 0) = 100^\circ\text{C}$ . Además se supone que la conductividad térmica es una función de la temperatura la cual para este caso se supondrá lineal que es el caso simplificado, mas adelante hablaremos del caso general.

### 6.5.2 REDUCCION DEL CASO NO LINEAL AL LINEAL MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE KIRCHHOFF

En la sección (2.6) se consideró a la ecuación del calor no lineal general:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(K(T)\nabla T) + g \quad (6.5.2.1)$$

donde:  $\rho, C_p, K$  y  $K(T) = K_0(1 + \beta T)$  son funciones de la temperatura y el término  $T$  de la fuente de generación de calor es independiente de la temperatura  $g = g(\vec{r}, t)$  (6.5.2.1) después de ser transformada por el término  $K(T)$  mediante la transformada de Kirchhoff

$$U = U(T) = \int_0^T \frac{K(T')}{K_0} dT' \quad (6.5.2.2)$$

$T = T(\vec{r}, t)$ , donde  $K_0$  es el valor de la conductividad térmica para  $t = 0$ , substituyendo a

$\alpha = \frac{K(T)}{\rho C_p}$  con  $K(T) = K_0(1 + \beta T)$  en la (6.5.2.2) q la ecuación (6.5.2.1) se reduce a:

$$\frac{\partial U(T)}{\partial t} = \alpha \nabla^2 U(T) + \frac{\alpha}{K_0} g \quad (6.5.2.3)$$

(6.5.2.3) es una ecuación casi lineal en el término  $\alpha$  de la difusividad térmica del material que es función lineal de la temperatura. Ahora bien substituyendo los de valores de  $K_0, \beta$  resolvemos por el método de separación de variables a (6.5.2.3) obteniendo:

$$U(x,t) = 100 \left[ \frac{x}{10} (1+50\beta) + 2(1+50\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{10} \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{10}} \right] \quad (5.6.2.4)$$

de (5.6.2.4) se deduce que la transformación que lleva  $U(x,t)$  a  $T(x,t)$  esta determinada por:

$$T(x,t) = \frac{1}{\beta} \left[ \sqrt{1 + 2\beta U(x,t)} - 1 \right] \quad (5.6.2.5)$$

A fin de implementar algún algoritmo computacional entre el método de elemento frontera para resolver la ecuación del calor (6.5.2.1) reducida a (6.5.2.3) procedemos como sigue:

Dado que (6.5.2.3) es una ecuación lineal en la sección (6.3) se realizo la metodología para convertirla en una ecuación de frontera (6.3.18) que esta dada por:

$$C(\varepsilon) u^{k+1} + \int_{\Gamma} u^{k+1} \nabla G d\Gamma = \int_{\Gamma} G q^{k+1} d\Gamma + \lambda \int_{\Omega} G u^k d\Omega \quad (5.6.2.5)$$

Usando elementos lineales continuos y constantes la ecuación de frontera (5.6.2.5),

tomando el valor de  $C(\varepsilon) = \frac{1}{2}$  por que se esta sobre la frontera, se tiene la siguiente forma

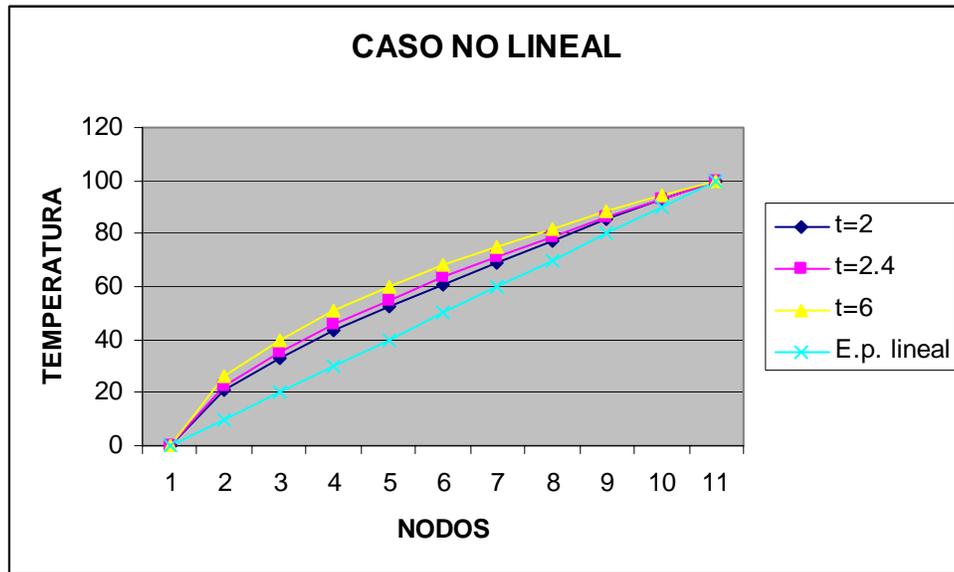
$$\frac{1}{2} u^{k+1} + \sum_{j=1}^{nel} \int_{\Gamma_j} u^{k+1} \nabla G d\Gamma = \sum_{j=1}^{nel} \int_{\Gamma_j} G q^{k+1} d\Gamma + \lambda \sum_{j=1}^{ndo} \int_{\Omega} G u^k d\Omega \quad (6.4.2)$$

Que aplicando este resultado al problema en cuestión se obtiene el siguiente resultado.

Tabla 6.5.2.1 muestra los valores obtenidos usando el BEM

nodo	t=2	t=2.4	t=6	E.p. lineal
0	0	0	0	0
1	21.1899009	22.8396803	25.9546545	10
2	33.3299148	35.5936961	39.8647573	20
3	43.3175761	45.8627414	50.6796589	30
4	52.3824228	54.6911431	59.8546598	40
5	60.9845707	63.3821777	67.971298	50
6	69.3094757	71.3661453	75.3309881	60
7	77.4082088	79.0076985	82.1132589	70
8	85.262886	86.3359555	88.4349237	80
9	92.8171318	93.3423572	94.3773274	90
10	100	100	100	100

Figura. 6.5.2.1 Solución grafica de los datos obtenidos



## RESULTADOS Y RECOMENDACIONES

En este trabajo se logro un estudio completo del fenómeno de la transferencia de calor en el sentido de presentar la mayoría de métodos analíticos y numéricos que se han desarrollado en la solución de la ecuación general de calor y proponiendo una nueva formulación híbrida del método del elemento frontera con el método de la transformada de Kirchhoff, método esencial en la transformación de la ecuación de calor no lineal a una ecuación lineal y para esta resolviéndola con el método del elemento frontera valiéndose también del método de las diferencias finitas.

La formulación del método mencionado se ha presentado tratando de utilizar adecuadamente otros métodos eficientemente comprobados con el fin de convalidarse los resultados esperados de la solución numérica encontrada.

Esto se fue haciendo mediante tablas numéricas y graficas de solución encontradas por otros métodos numéricos conocidos comparadas con la solución encontrada híbrida por la formulación numérica propuesta como nueva resultando en todos los casos comparados como satisfactoria y con ciertas ventajas en cuanto a su aplicación ;por ejemplo se pueden resolver ecuaciones no lineales de propagación con fronteras polimateriales, sin importar el interior del cuerpo que se trate, la geometría de la frontera puede ser complicada, pero puede ser aproximada por cuerdas (elementos frontera) mas generales, elementos isoparamétricos, en una o varias dimensiones, lo único que se modificara será el sistema lineal de elementos frontera, usando interpolación de Lagrange, Hermite, Chevshev, por otro tipo distinto de cuadraturas gaussianas por las cuadraturas correspondientes al tipo de interpolación de los elementos frontera.

Pero el algoritmo de la formulación híbrida se mantendrá como general e independiente del tipo de interpolación numérica propuesta de los elementos frontera y esto es de hecho la contribución original de este trabajo.

**Recomendaciones a futuro.** Se pretende continuar desarrollándose esta investigación para problemas de transferencia de calor en cuerpos anisotrópicos, fenómenos no lineales de la transferencia del calor en cuerpos con fronteras de diferentes materiales y de geometría no convencional como por ejemplo el diseño de recintos tridimensionales que deben de ser acondicionados, equipos de atmósfera controlada, refrigeración cámaras de combustión, diseño de hornos, calderas, tratamientos térmicos, procesos de vulcanización, secadores solares, entre otros fenómenos, todos aquellos que son gobernados por la ecuación de transferencia del calor ya sea por conducción, convección o de radiación, la ecuación es la misma, las condiciones del mismo tipo y por ende de la formulación híbrida propuesta se mantiene como general por lo que resta bastante trabajo que desarrollar en cuanto a resolver la ecuación del calor para casos específicos o particulares a sus aplicaciones. Por último cabe mencionar que en la medida que se fue desarrollando este trabajo se fueron presentando en foros nacionales, los resultados encontrados, dejando para la presentación del mismo la contribución original del mismo, párrafos 6 y 6.5 que se enviarán a publicar a una revista especializada.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Asimov Isaac, Introducción a la ciencia, Plaza & Janes, S. A. España, 1982.
- [2] Ya Smorodinski, La Temperatura, Editorial MIR- URSS, 1983.
- [3] Carnot Sadi, Reflexiones sobre la Potencia Motriz del Fuego, IPN, México, 1976.
- [4] Kreit Frank, Principios de Transferencia de Calor, Hierro Hnos., Sucesores, S. A., México, 1970.
- [5] Sneider P. J., Conduction Heat Transfer, Addison Wesley, USA, 1955.
- [6] Carslaw H. S., Conduction of Heat in Solids, Claredon Press - Oxford, Great Britain, 1986.
- [7] Jacob M, Heat Transfer, Vol.1, John Wiley & Sons, New York, 1949.
- [8] Arpacı V, Conduction Heat Transfer, Addison-Wesley, USA, 1966.
- [9] Ozizik Necati, Heat Conduction, John Wiley and Sons, New York, 1980.
- [10] Eckert Robert, Analysis of Heat and Mass Transfer, McGraw-Hill, Japan, 1972.
- [11] Chapman Alan J., Heat Transfer, MacMillan Company. USA, 1978.
- [12] McAdams W. H. Transmisión de Calor. McGraw Hill Book Company. USA, 1973.
- [13] Isachenko V. I., Osipava V. Sukomel, Heat transfer, Editorial Mir, Moscú, 1978.
- [14] Kern Donald, Extend Surface Heat Transfer, McGraw Hill Book Company, New York, 1972.
- [15] Karlekar B. V. Transferencia de Calor, Interamericana, México, 1985.
- [16] Welty James R., Transferencia de Calor Aplicada a la Ingeniería, Limusa, México, 1984.
- [17] Manrique José A., Transferencia de Calor, Editorial Harla, México, 1984.
- [18] Adams J. Alan, Computer-Aided Heat Transfer Analysis, McGraw Hill Book Company. USA, 1973.
- [19] Willie C. Ray, Advanced Engineering Mathematics, MacGaw Hill, Japan, 1975.
- [20] Courant & Gilbert, Methods of Mathematical Physics, Vol. I, John Wiley & Sons, USA, 1989.
- [21] Clive L., Shames, Mechanics Solid, A Variational Approach, MacGraw Hill, USA, 1973.
- [22] Reddy J.N. A Introduction to the Finite Element Method, McGraw Hill, USA, 1984.
- [23] Arfken George, Mathematical Methods for Physicists, Academy Press, USA, 1985.
- [24] Krasnov M.L., Makarenko G. I., Cálculo Variational, Editorial Mir, URSS, 1976.
- [25] Smith G. D. Numerical Solution of Partial Differential Equations Finite Difference Methods, Oxford, USA, 1978.
- [26] Clausing A. M., Numerical Methods in Heat Transfer, Vol. I, Journal Mathematics, USA, 1984.
- [27] M.L. James, Smith G.M., Métodos Numéricos Aplicados a la Computación Digital con FORTRAN, Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A, México, 1987.
- [28] H. W. Reddick, F. H. Miller, Matemáticas Superiores para Ingenieros, Continental, S. A., España, 1965
- [29] Carnahan B., Luther H.A., Applied Numerical Methods, John Wiley an Sons, New

York, 1969.

- [30] Noye John, Numerical Simulation of Fluid Motion, North Holland Publishing, Amsterdam, 1976.
- [31] Pankatar Suchas V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, MacGraw Hill Book Company, USA, 1980.
- [32] Eriksson & Suden B. Transient Conduction a Rotating Cylindrical Shell Exposed to an incident time Varing Heat Flux, Computational Mechanics Publications, U K, 1994.
- [33] Schlichting H. Boundary Layer Theory, McGraw Hill Book, New York, 1968.
- [34] Charles A. Hall. Numerical Analysis Of Partial Differential Equations Printice Hall pp151 -152
- [35] Ruel V. Churchill. Variable Compleja y Aplicaciones (4<sup>a</sup> Edición), M<sup>c</sup> Grae-Hill, pp225-299.
- [36] Murray R. Spiegel. Teoria y Problemas de Variable Compleja. Pp253-300
- [37] Adrian Benjan Heat Transfer , John Wiley & Sons, Inc. 1993
- [38] Irwin Transferencia de Calor, M<sup>c</sup> Graw Hill, 1995
- [39] Stanley M. Walas, Modeling with Diferential Equations in Chemical Engineering, BUTTERWORTH-Heinemann, 1991
- [40] José Angel Ortega Herrera. Análisis del Elemento Finito y sus Aplicaciones en la Ingeniería Sección de Graduados de E.S.I.M.E. 1996
- [41] Rita Águilar o. Análisis Numérico de la transferencia de calor en Ingeniería. Serie ciencias e Ingeniería. I.P.N 1994.
- [40] Israel Saucedo Meza Tesis de Maestría : Análisis de Fatiga Mediante el Método de elemento finito. E.S.I.M.E 1997.
- [41] Paquete Computacional ANSYS ver 5.0
- [42] Segerlin .D Larry j. Applied Finite Element Analysis ,New York Jhon Wiley & Sons, Inc.
- [43] Alfred Gray, Modern Diferential Geometry of curves and surfaces. CRC. Press 1996
- [44] Patrick Knupp, Stanly Steimberg Fundamentals of Grid Genetations CRC press 1993
- [45] Les Piegel. Fundamental Developments of Computer Aided Geometry Modeling. Academic Press 1993
- [46] L.C. Wrobel, C.A Brebbia. Bounary Element Methods in Heat Transfer Computational Mechanical Publications Elsevier Applied Science 1992.
- [47] J.N Ready, Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering, M<sup>c</sup> Graw-Hill International 1986
- [48] David GriffThs. The Mathematical Basis of Finite Element Methods, Clavendon Press, Oxford 1984
- [49] J.F Botha, G:F: Finder , Fundamental Concepts In The Numerical Solutions of Differential Ecuation, Jhon Wiley & Sons 1983
- [50] P.L George. Automatic Mesh Generation, John Wiley & Sons 1991
- [51] Borna Szabó , Ivo Babuska Finite Element Method. John Wiley & Sons 1991.
- [52] C.A Brebbia Bounary Element Thechniquess In computer Aided Engeneering. Martinus Nijhoff Publishers 1994
- [53] C.A. Brebbia J. Domínguez Bounary Bounary Elements and Introductory course CMP M<sup>c</sup> Graw-Hill

- [54] Angel Ortega y L. Hector Hernández, Análisis Del Elemento finito Y sus aplicaciones a la Ingeniería, Serie en Ciencias e Ingeniería vol 6 1990.
- [55] Angel Ortega y R. Magdaleno R. Análisis y Diseño en Ingeniería Auxiliado por Computadora. Serie en Ciencias e Ingeniería V 10 1991.
- [56] M. Necati. Ozisik, Heat Conduction (Wiley, New York, 1980).
- [57] M. Necati. Ozisik, Boundary Value Problems of heat Conduction (Dover Publication,inc.,New York 1989).
- [58] R.Haberman. Elementary applied Partial Differential Equation, PH. 1998.
- [59]D.Zwillinger.Handbook of Differential Equations. Academic Press.1997.
- [60] W.A. Strauss. Partial Differential Equations. An Introduction. John Wiley 1992.
- [61]J.Kevorkian.Partial Differential equations. Analytical Solution Techniques.Wadsworth Brooks.1990.
- [62] R.V. Churchill. Operational Mathematics. Mc Graw Hill.1994.
- [63] I.A. Sneddon. The Use of Integral Transforms Mc Graw Hill 1972.
- [64] W.F. Ames. Nonlinear Partial Differential Equations. Academic Press.1965.
- [65] Haberman, Elementary applied Partial Differential Equation, PH.
- [66] J.I. Frankel, Brian Vick, An exact Methodology for Solvin Nonlinear Diffusion Equations Base on Integral Transforms. Applied Numerical Mathematical 3(1987) 467-477 (north-holland)
- [67] A. Aziz and J. Y. Benzie, Application of perturbation techniques to heat-transfer problems with variable thermal properties, Internal. J. Heat Mass Transfer, 19(1976) 271-275.
- [68] B. Vujanovic, Application of optimal linearization method to the heat transfer problem, Internal. J. Heat Mass Transfer, 16(1973) 1111-1117.
- [69] M. Imber, Thermally symmetric nonlinear heat transfer in solids, J. Heat Transfer 13 (1981) 745-752.
- [70] A. Muzzio, Approximate solution for convective fins with variable thermal conductivity, J. Heat transfer, 8 (1976) 680-682.
- [71] S. H. Cho and J. E. Sunderland, Phase charge problems with the temperature-dependent thermal conductivity, J. Heat Transfer 8 (1974) 214-217.
- [72] J. D. Lambert, computational Methods in ordinary Differential Equations(Wiley, New York, 1973).
- [73] L. W. Johnson and R. D. Riess, Numerical Analysis (Addison-Wesley, Reading M. A , 1982).
- [74]L. C. Wrobel and C.A. Brebbia, boundary element Methods in heat transfer, Computational Mechanics Publications Southhampton Boston
- [75] C.A. Brebbia and J. Dominguez, boundary elements An Introductory Course, Computational Mechanics Publications Southhampton Boston
- [76] G. Steven Gipson, boundary element Fundamentals, Computational Mechanics Publications Southhampton Boston
- [77] Masaka Tanaka, R. cholewa, Advances in boundary element Techniques 2003

- [78] M. Tanaka, W. Chen, coupling dual reciprocity Bem and Differential quadrature method for time-dependent diffusion problems
- [79] Masaka Tanaka, Toshiro Matsumoto and Susumu, Takakuwa, DRM applied to the time-stepping BEM for transient heat conduction
- [80] Toshiro Matsumoto and M. Tanaka, A boundary integral treatment of domain integral term for initial condiction in time-domain boundary element method for diffusion equation
- [81] Ryszard Bialecki, Eduardo Divo and Alain Kassab, Unknown time dependent heat flux boundary condition reconstruction using a BEM-base inverse algoritmo
- [82]
- [83]

## APENDICE 2

Clasificación de las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden.  
Sea la ecuación

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F = G$$

G=0 ecuación Homogénea

Ecuación **Hiperbólica** (si  $B^2 - 4AC > 0$ ) por ejemplo la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Ecuación **Parabólicas** (si  $B^2 - 4AC = 0$ ) por ejemplo la ecuación de difusión

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Ecuaciones **Elípticas** (si  $B^2 - 4AC < 0$ ) por ejemplo la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y)$$

Si  $\rho(x, y) = 0$  se reduce a la ecuación de Laplace  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

## APENDICE 3.1

Identidades vectoriales

$$\nabla(\psi \nabla \phi) = \psi \nabla^2 \phi + (\nabla \psi) \cdot (\nabla \phi) \quad (1)$$

$$\nabla(\phi \nabla \psi) = \phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) \quad (2)$$

Ecuación fundamental del calculo variacional donde J esta definida en forma integral

$$J = \int f(t, y, \dot{y}) dt, \quad (1)$$

donde

$$\dot{y} \equiv \frac{dy}{dt}, \quad (2)$$

Entonces J tiene un valor estacionario si la ecuación diferencia de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \quad (2)$$

Satisface. Si se denota la derivada con respecto del tiempo  $\dot{y}$  es remplazada por la derivada especial denotada por  $y_x$ , la ecuación queda

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_x} = 0. \quad (4)$$

Para tres variables independientes (Arfken 1985, pp. 924-944), la ecuación generalizada es

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial u_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial u_z} = 0. \quad (5)$$

## APENDICE 3.2

Teorema de Gauss-identidades de Green

Donde  $\nabla$  es la divergencia,  $\nabla$  es el gradiente,  $\nabla^2$  es el Laplaciano, del Teorema de la divergencia

$$\int_V (\nabla \cdot F) dV = \int_S F \cdot da \quad (1)$$

$$\int_S \phi (\nabla \psi) \cdot da = \int_V [\phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)] dV \quad \text{primera identidad de Green}$$

sustrayendo 2 de 1 de las identidades vectoriales

$$\nabla (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) = \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi$$

$$\int_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot da = \int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV \quad \text{segunda identidad de}$$

## APENDICE 5.1

si  $u$  tiene primeras derivadas parciales continuas y es armónica en una región entonces la tercera identidad de Green esta dada por:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left[ \ln\left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left[ \ln\left(\frac{1}{r}\right) \right] \right] ds$$

(Kaplan 1991, p. 361).

Para el operador de Laplace  $\nabla^2 u = 0$  la función de Green  $G$  aplicada a este operador da como resultado  $\nabla^2 G - \delta(x - \varepsilon, y - \eta) = 0$

Propiedades de la Delta de Dirac

$$\delta(x - \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq \varepsilon \\ \infty & \text{si } x = \varepsilon \end{cases}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon) \delta(x - \varepsilon) d\varepsilon$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - \varepsilon) d\varepsilon$$

$$L[G(x, \varepsilon)] = \delta(x - \varepsilon)$$

$$G(x_1, x_2) = G(x_2, x_1) \text{ propiedad de simetría}$$

## APENDICE 5.2

### TEOREMA DE LA CUADRATURA DE EULER.

Dada una función continua  $f(x)$  en  $[a, b]$ ,  $p(x)$  definida en  $[a, b]$  continua y  $p(x) > 0$ , la integral de  $\int_a^b p(x)f(x)dx$  alcanza su grado de error mínimo por cuadratura si  $f(x)$  es aproximada por un polinomio de grado  $2n - 1$  o menos.

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^n C_i f(x_i) + R[f]$$

donde los coeficientes  $C_1, C_2, \dots, C_n$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son determinados de un sistema de  $2n$  ecuaciones en  $2n$  incógnitas y  $\varphi_n(x)$  es el polinomio  $f(x) = \varphi_n(x)q(x) + r(x)$  de grado  $n$ ;  $\varphi_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$  tal que

$$\int_a^b p(x)q(x)\varphi_n(x)dx = 0$$

es ortogonal a todo  $q(x)$  de grado  $n-1$  o menos.

Una aplicación importante de la fórmula de integración por cuadratura *Gaussiana*, es cuando se integra numéricamente utilizando polinomios de interpolación de *Lagrange*. Sea  $f(x)$  continua en  $[a, b]$ ,  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  nodos en  $[a, b]$ ,  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

$$\tilde{\phi}(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

tal que  $\tilde{\phi}(x) = f(x_i) = \Phi_i$ , así tenemos que del sistema de  $(n+1)x(n+1)$  incógnitas  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , se tiene  $\tilde{\phi}(x)$  en función de los valores  $\Phi_i$ ,

$$\tilde{\phi}(x) = N_0(x)\Phi_0 + N_1(x)\Phi_1 + \dots + N_n(x)\Phi_n$$

donde las funciones de forma  $N_i(x)$  son polinomios de grado  $n$ , cuyas raíces son todas  $x_j, j \neq i$

$$\hat{N}_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{Det}; 0 \leq i \leq n$$

$Det =$  Determinante de Vardemonde

$$\tilde{\phi}(x) = \sum_{i=0}^n \hat{N}_i(x) f(x_i)$$

$$\begin{aligned} I[f] &= \int_a^b p(x) f(x) dx = \int_a^b p(x) \tilde{\phi}(x) dx = \int_a^b p(x) \left\{ \sum_{i=0}^n \hat{N}_i(x) f(x_i) \right\} dx \\ &= \sum_{i=0}^n \left\{ \int_a^b p(x) \hat{N}_i(x) dx \right\} f(x_i) = \sum_{i=0}^n C_i f(x_i) \end{aligned}$$

Si

$$\hat{N}_i(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega'_n(x_i)} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x-x_i)\omega'_n(x_i)}$$

los  $C_i = \frac{1}{\omega'_n(x_i)} \int_a^b \frac{p(x)\omega_n(x)}{(x-x_i)} dx; 0 \leq i \leq n$  en  $a \stackrel{|}{-} b$ , son los coeficientes  $C_i$  conocidos como los coeficientes de *Christoffel-Darboux*.

Aplicaciones: Cuadraturas con coeficientes iguales. Sea  $f$  continua en  $[a, b]$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $p(x) = 1$ .

$$I_n[f] = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \alpha_n f(x_i) = \alpha_n \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

Si  $f(x) \equiv 1$ ,  $I_n[f] = \alpha_n n$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) = \alpha_n n \quad \therefore$$

los coeficientes son

$$\alpha_n = \frac{(b-a)}{n}$$

Con el fin de determinar los nodos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de tal forma que el error de las cuadratura sea mínimo; estableceremos un sistema de  $n$  condiciones en la cuadratura  $I_n[x^r] = I[x^r]$ ,  $r = 1, 2, \dots, m$

$$\alpha_n \sum_{i=1}^n x_i^r = \int_a^b x_i^r dx = \frac{x_i^{r+1}}{r+1} \Big|_a^b = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}$$

$r = 1, 2, \dots, n$ .

Si esas  $n$  ecuaciones tienen  $n$  soluciones reales  $x_i$ , entonces el error de la cuadratura es mínimo  $n = 1$ ,  $I_1[f] = \alpha_1 f(x_1)$

$$\alpha_1 x_1 = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = \frac{(b+a)(b-a)}{2}$$

$\alpha_1 = (b-a)$ ;  $x_1 = \frac{(b+a)}{2}$  punto medio de  $a \stackrel{|}{\dashv} b$  por lo tanto

$$I_1[f] = \alpha_1 f(x_1) = (b-a) f\left(\frac{b+a}{2}\right)$$

la cual es exacta para funciones lineales en  $a \stackrel{|}{\dashv} b$ ,  $f(x) = cx + d$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b (cx + d)dx &= \int_a^b cxdx + \int_a^b ddx = c \frac{x^2}{2} \Big|_a^b + dx \Big|_a^b = \frac{c(b^2 - a^2)}{2} + (b-a)d \\ &= \frac{c(b+a)(b-a)}{2} + (b-a)d = (b-a) \left[ c \frac{(b+a)}{2} + d \right] = \alpha_1 f(x_1) \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{b+a}{2}.$$

Para el caso  $n = 2$ ,

$$I_2[f] = \int_a^b f(x)dx = \alpha_2 \sum_{j=1}^2 f(x_j) = \alpha_2 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

Del sistema de condiciones impuesta a  $I_2[x_j^r] = I[x_j^r]$  se tiene:  $r = 1, 2$

$$I_2[x_j] = \alpha_2 x_1 + \alpha_2 x_2 = \frac{1}{1+1} (b^{1+1} - a^{1+1}) = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$$

$$I_2[x_j^2] = \alpha_2 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = \frac{1}{2+1} (b^{2+1} - a^{2+1}) = \frac{1}{3} (b^3 - a^3)$$

$$x_1 = \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}; \quad x_2 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

los nodos  $x_1, x_2$  son colocados simétricos al centro del intervalo  $[a, b]$ . En general, la solución del sistema;

$$\alpha_n \sum_{j=1}^n x_j^r = \frac{1}{r+1} (b^{r+1} - a^{r+1}) \quad r = 1, 2, \dots, n$$

determina al polinomio

$$\tilde{\phi}_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

cuyas raíces son los nodos  $x_j$  requeridos.

Si se expresa al polinomio como:

$$\tilde{\phi}_n(x) = x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \cdots + \sigma_{n-1} x + \sigma_n$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ \sigma_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n \\ &\vdots \\ \sigma_n &= (-1)^n x_1 x_2 \cdots x_n \end{aligned}$$

pero como  $S_r = x_1^r + x_2^r + \dots + x_n^r$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$  se obtiene por las condiciones sobre  $x_j^r$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} S_1 + \sigma_1 &= 0 \\ S_2 + S_1\sigma_1 + 2\sigma_2 &= 0 \\ &\vdots \\ S_n + S_{n-1}\sigma_1 + \dots + S_n\sigma_{n-1} + n\sigma_n &= 0 \end{aligned}$$

De esta manera, la determinación de los nodos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , se reduce a determinar las raíces del polinomio  $\tilde{\phi}_n(x) = \sum_{j=0}^n \sigma_j X^{n-j}$ ;  $\sigma_0 = 1$ , donde los coeficientes  $\sigma_j$ ; son determinados de las relaciones  $S_j$ .

La expresión del residuo  $R[f]$  de la fórmula de integración de la cuadratura *Gaussiana* es posible

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^n C_i f(x_i) + R[f]$$

donde

$$C_i = \int_a^b \frac{p(x)\tilde{\phi}_n(x)}{(x-x_i)\phi_n'(x_i)} dx$$

Coeficientes de *Christoffel-Darboux*

También los coeficientes pueden ser obtenidos explícitamente cuando se utilizan polinomios de interpolación de Hermite pasando por los valores  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ , donde  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , raíces de  $\tilde{\phi}_n(x)$ ; y la derivada de  $f$  valuada en  $f'(x_1), f'(x_2), \dots, f'(x_n)$ .

Si  $H(x)$  denota el polinomio de *Hermite*,

$$f(x) = H(x) + (x-x_1)^2(x-x_2)^2 \dots (x-x_n)^2 f(x_1, x_1, x_1, x_2, x_2, \dots, x_n, x_n)$$

donde  $H(x)$  es de grado  $2n-1$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x)f(x)dx &= \int_a^b p(x)H(x)dx + \int_a^b p(x)\tilde{\phi}_n^2(x)f(x_1, x_1, x_1, x_2, x_2, \dots, x_n, x_n)dx = \\ &= \sum_{i=1}^n C_i H(x_i) + \int_a^b p(x)\tilde{\phi}_n^2(x)f(x_1, x_1, x_1, x_2, x_2, \dots, x_n, x_n)dx \end{aligned}$$

$$R[f] = \int_a^b p(x) \tilde{\phi}_n^2(x) f(x_1, x_1, x_1, x_2, x_2, \dots, x_n, x_n) dx$$

como  $p(x) > 0$ ,  $\tilde{\phi}_n^2(x) > 0$ ,  $p(x)\tilde{\phi}_n^2(x)$  no cambia de signo en  $[a, b]$ , existen  $\xi, \eta \in (a, b)$  tales que

$$R[f] = f(\xi, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n) \frac{f^{2n}(\eta)}{(2n)!} \int_a^b p(x) \tilde{\phi}_n^2(x) dx$$

### Teorema del valor medio iterativo

Para el caso  $p(x) = 1$ , el residuo  $R[f]$  queda:

$$R[f] = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{[(2n)!]^3 (2n+1)} f^{2n}(\xi)$$

la Fórmula de integración *Gaussiana* se realiza de hecho en el intervalo  $[-1, 1]$ , transformando el intervalo  $[a, b]$  en  $[-1, 1]$  mediante las coordenadas.

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t; \quad -1 \leq t \leq 1$$

De esta manera la fórmula de integración *Gaussiana* para polinomios de *Hermite* queda:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n C_i f(x_i) + \frac{(2)^{2n+1} (n!)^4}{[(2n)!]^3 (2n+1)} f^{2n}(\xi); \quad \xi \in (-1, 1)$$

Ejemplos.

$$\eta = 1, \quad x_1 = 0; \quad \frac{1}{2} C_1^{(1)} = 1; \quad R_1 = \frac{1}{3} f''(\xi)$$

$$\eta = 2$$

$$-x_1 = x_2 = 0.5773502691896258$$

$$\frac{1}{2} C_1^{(2)} = \frac{1}{2} C_2^{(2)} = \frac{1}{2}; \quad R_2 = \frac{1}{135} f^{(4)}(\xi)$$

$$\eta = 3$$

$$-x_1 = x_3 = 0.7745966692414834, \quad x_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}C_1^{(3)} = \frac{1}{2}C_3^{(3)} = \frac{5}{18}; \frac{1}{2}C_2^{(3)} = \frac{4}{9}; R_3 = \frac{1}{15750} f^{(6)}(\xi)$$

existen tablas de los valores de  $x_1, x_2, \dots, x_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, 7, \dots$  y de los coeficientes  $C_1^{(1)}$ ,  $C_1^{(2)}$ ,  $C_2^{(2)}$ ,  $C_1^{(3)}$ ,  $C_2^{(3)}$ ,  $C_3^{(3)}$ ,  $\dots$ ,  $C_1^{(k)}$ ,  $C_2^{(k)}$ ,  $\dots$ ,  $C_k^{(k)}$  en general cuando se consideran todos los cambios de  $f(x)$  en  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , hasta de orden  $k$ .

### APENDICE 5.3

#### PROGRAM BEM

```

=====
!
!           METODO DE ELEMENTO FRONTERA
!           APLICADO A
!   LA ECUACION DE LAPLACE (ECUACION DE CALOR EN ESTADO
!ESTACIONARIO )
!           ELEMENTOS CONSTANTES
!
=====
      IMPLICIT REAL*8 ( A-H , O-Z )
      PARAMETER (MXE=60,MXI=20,INTEPT=4, ND=2)
      DIMENSION
      XE(ND), YE(ND), SAI(INTEPT), W(INTEPT), G(MXE,MXE), F(MXE,MXE), A(MXE,M
      XE), C(MXE), X(MXE), Y(MXE), NODEX(MXE,ND)
      , IELTYPE(MXE), BV(MXE), QN(MXE), H(MXE), RHS(MXE), XI(MXI), YI(MXI),
      HI(MXI), CI(MXI)

===== INICIANDO EL PROCESAMIENTO =====
!
      C1 = - 1./ ( 8.* DATAN( 1.D0) )
      CALL GREGLA ( INTEPT, SAI, W )
===== LEYENDO DATO =====
!
      CALL INPUT (ND,MXE,MXI,NE,NODEX,IELTYPE,BV,X,Y,NIPT,XI,YI)
!   ...TIPO(I)=1 ---> TEMPERATURA PREESCRITA
!   ...TIPO(I)=2 ---> FLUJO DE CALOR PREESCRITA
===== ARREGLO DE VALORES EN LA FRONTERA=====
!
      CALL BVARRANG ( MXE, NE, IELTYPE, BV, H, QN )
===== FORMACION DE MATRIZ G,F Y VECTORE C =====
!
      CALL MATRIX ( ND,MXE,C1,INTEPT,SAI,W,NE,NODEX,X,Y,XE,YE,G,F,C)
===== FORMACION DE MATRIZ A Y VECTORES RHS =====
!
      CALL FORM ( MXE, G,F,C,NE,IELTYPE,RHS,H,QN, A )
===== EMPEZANDO A RESOLVER A . X = C =====

```

```

!
  CALL SYSTEM ( MXE , NE, A , RHS )
!===== SOLUCION =====
!
  CALL SORTSOLN ( MXE, NE, IELTYPE, RHS, H, QN )
!===== PUNTOS INTERNOS =====
!
  CALL DOMAIN ( INTEPT,ND,MXE,MXI,C1,NIPT,NE,SAI,W,XI,YI, NODEX,
X,Y, H,QN, HI, CI, XE, YE )
!===== IMPRIMIENDO RESULTADO =====
  CALL ECHOSOLN(
MXE,MXI,NE,ND,NIPT,NODEX,X,Y,IELTYPE,H,QN,XI,YI,HI,CI, C)
  STOP ' TERMINACION NORMAL '
  END
!
!
  SUBROUTINE SORTSOLN ( MXE, NE, IELTYPE, RHS, H, QN )
  IMPLICIT REAL*8 ( A-H , O-Z )
  DIMENSION IELTYPE(MXE),RHS(MXE),QN(MXE),H(MXE)
  DO I = 1 , NE
  IF ( IELTYPE(I) .EQ. 1 ) QN(I) = RHS(I)
  IF ( IELTYPE(I) .EQ. 2 ) H(I) = RHS(I)
  END DO
  RETURN
  END
!
!
  SUBROUTINE BVARRANG ( MXE, NE, IELTYPE, BV, H, QN )
  IMPLICIT REAL*8 ( A-H , O-Z )
  DIMENSION IELTYPE(MXE),BV(MXE),QN(MXE),H(MXE)
  DO I = 1 , NE
  IF ( IELTYPE(I) .EQ. 1 ) H(I) = BV(I)
  IF ( IELTYPE(I) .EQ. 2 ) QN(I) = BV(I)
  END DO
  RETURN
  END
!
!
  SUBROUTINE FORM ( MXE, G,F,C,NE,IELTYPE,RHS,H,QN, A )
  IMPLICIT REAL*8 ( A-H , O-Z )
  DIMENSION
G(MXE,MXE),F(MXE,MXE),A(MXE,MXE),C(MXE),IELTYPE(MXE),QN(MXE),H(
MXE),RHS(MXE)
!
  DO I = 1 , NE
  F(I,I) = F(I,I) - C(I)

```

```

RHS(I) = 0.D0
END DO
!
DO J = 1 , NE
IF ( IELTYPE(J) .EQ. 1 ) THEN
DO I = 1 , NE
A(I,J) = G(I,J)
RHS(I) = RHS(I) + F(I,J) * H(J)
END DO
END IF
IF ( IELTYPE(J) .EQ. 2 ) THEN
DO I = 1 , NE
A(I,J) = - F(I,J)
RHS(I) = RHS(I) - G(I,J) * QN(J)
END DO
END IF
END DO
RETURN
END
!
!
SUBROUTINE MATRIX (ND,MXE,C1,INTEPT,SAI,W,NE,NODEX,X,Y,XE,YE,
G,F,C)
IMPLICIT REAL*8 ( A-H , O-Z )
DIMENSION
G(MXE,MXE),F(MXE,MXE),C(MXE),X(MXE),Y(MXE),XE(ND),YE(ND),SAI(INTE
PT),W(INTEPT) , NODEX(MXE,ND)
!----- BORRANDO MATRIZ G(I,J) Y F(I,J) Y C(I)
DO I = 1 , NE
C(I) = 0.D0
DO J = 1 , NE
G(I,J) = 0.D0
F(I,J) = 0.D0
END DO
END DO
! ..... (XP,YP) = CORDENADAS DEL PUNTO DE OBSERVACION
DO IOBSERV = 1 , NE
XP = ( X(NODEX(IOBSERV,1)) + X(NODEX(IOBSERV,2)) ) / 2.
YP = ( Y(NODEX(IOBSERV,1)) + Y(NODEX(IOBSERV,2)) ) / 2.
DO ICURREN = 1 , NE
DO I = 1 , ND
XE(I) = X(NODEX(ICURREN,I))
YE(I) = Y(NODEX(ICURREN,I))
END DO
!----- INTEGRAL EN UN ELEMENTO
IF ( IOBSERV .EQ. ICURREN ) THEN

```

```

CALL FINE ( ND, C1, XE, YE, GE, FE )
ELSE
CALL INTE ( INTEPT,ND, XP, YP, C1, XE, YE, SAI, W, GE, FE )
END IF
!----- FORMACION DE MATRIZ
G(IOBSERV,ICURREN) = GE
F(IOBSERV,ICURREN) = FE
!----- TERMINOS DE EVALUACION LIBRES
C(IOBSERV) = C(IOBSERV) + FE
END DO
END DO
RETURN
END
!
!
SUBROUTINE INPUT
(ND,MXE,MXI,NE,NODEX,IELTYPE,BV,X,Y,NIPT,XI,YI)
IMPLICIT REAL*8 ( A-H , O-Z )
DIMENSION
X(MXE),Y(MXE),IELTYPE(MXE),BV(MXE),NODEX(MXE,ND),XI(MXI),YI(MXI)
OPEN ( 1, FILE='mar12.txt', STATUS='OLD' )
READ (1,*) NE
DO IEL = 1 , NE
READ (1,*) I,(NODEX(I,J),J=1,ND),IELTYPE(I), BV(I)
END DO
DO I = 1 , NE
READ (1,*) NODE, X(NODE), Y(NODE)
END DO
READ (1,*) NIPT
IF ( NIPT .GE. 1 ) THEN
DO J = 1 , NIPT
READ (1,*) I, XI(I), YI(I)
END DO
END IF
CLOSE (1)
RETURN
END
!
!
SUBROUTINE FINE ( ND, C1, XE, YE, GE, FE )
IMPLICIT REAL*8 ( A-H , O-Z )
DIMENSION XE(ND), YE(ND)
FE = 0.D0
DX = XE(2) - XE(1)
DY = YE(2) - YE(1)
DS = DSQRT ( DX*DX + DY*DY )

```

```

GE = DS*C1 * ( DLOG(DS/2.D0) - 1.D0 )
RETURN
END
!
!
SUBROUTINE INTE (INTEPT, ND, XP, YP, C1, XE, YE, SAI,W, GE,FE )
IMPLICIT REAL*8 ( A-H , O-Z )
DIMENSION XE(ND), YE(ND), SAI(INTEPT), W(INTEPT)
GE = 0.D0
FE = 0.D0
DX = XE(2) - XE(1)
DY = YE(2) - YE(1)
DS = DSQRT ( DX*DX + DY*DY )
DETJ = DS/2.D0
XM = ( XE(2) + XE(1) ) /2.D0
YM = ( YE(2) + YE(1) ) /2.D0
!
DO IGAUSS = 1 , INTEPT
XGAUSS = DX/2.D0*SAI(IGAUSS) + XM
YGAUSS = DY/2.D0*SAI(IGAUSS) + YM
RX = XGAUSS - XP
RY = YGAUSS - YP
R = DSQRT ( RX*RX + RY*RY )
!----- INTEGRACION DE G(R)
GE = GE + DLOG(R) * W(IGAUSS)
!----- INTEGRACION DE F(R)
FE = FE + ( RX*DY - RY*DX ) / (R*R) * W(IGAUSS)
END DO
GE = C1 * DETJ * GE
FE = -C1 * DETJ /DS * FE
RETURN
END
!
!
SUBROUTINE DOMAIN (
INTEPT,ND,MXE,MXI,C1,NIPT,NE,SAI,W,XI,YI,NODEX,X,Y,H,QN,HI, CI, XE, YE
)
IMPLICIT REAL*8 ( A-H , O-Z )
DIMENSION NODEX(MXE,ND), SAI(INTEPT), W(INTEPT),XI(MXI),YI(MXI),
X(MXE),Y(MXE),H(MXE),QN(MXE),XE(ND),YE(ND),HI(MXI), CI(MXI)
!
IF ( NIPT .EQ. 0 ) RETURN
!
DO INSIDE = 1 , NIPT
XP = XI(INSIDE)
YP = YI(INSIDE)

```

```

SUM = 0.D0
C = 0.D0
DO IEL = 1 , NE
DO I = 1 , ND
XE(I) = X( NODEX( IEL, I ) )
YE(I) = Y( NODEX( IEL, I ) )
END DO
CALL INTE (INTEPT,ND,XP,YP,C1,XE,YE,SAI,W, G,F )
C = C + F
SUM = SUM + F*H( IEL ) - G*QN( IEL )
END DO
CI(INSIDE) = C
HI(INSIDE) = SUM
END DO
RETURN
END
!
!
SUBROUTINE ECHOSOLN(
MXE,MXI,NE,ND,NIPT,NODEX,X,Y,IELTYPE,H,QN,XI, YI, HI,CI, C )
IMPLICIT REAL*8 ( A-H , O-Z )
DIMENSION X(MXE), Y(MXE), XI(MXI), YI(MXI), HI(MXI),CI(MXI),
NODEX(MXE,ND), IELTYPE(MXE), H(MXE), QN(MXE), C(MXE)
CHARACTER*9 BC
OPEN ( 1, FILE='SOLUTION.BEM', STATUS='UNKNOWN' )
WRITE(1,*)' =====ANALISIS TRANSFERENCIA DE CALOR EN
ESTADO ESTACIONARIO ====='
WRITE(1,*)' ===== BEM USANDO ELEMENTOS CONSTANTES ===='
WRITE(1,*)' == METODO CONVENCIONAL: [C]{H}+[G]{Q}-[F]{H}={0} =='
WRITE(1,*)
WRITE(1,*)
WRITE(1,*)
!-----INTRODUCIENDO CODENADAS Y B.C. (CONDICIONES DE FRONTERA)
WRITE (1,*)' =CORDENADAS NODALES Y CONDICIONES EN LA
FRONTERA ='
WRITE (1,101)
101 FORMAT (/ 3X,"EL#",7X,"X1",14X,"Y1",14X,"X2",14X,"Y2",14X,"BC"/1X,
79("-" ) )
DO IEL = 1 , NE
X1 = X(NODEX( IEL, 1 ))
Y1 = Y(NODEX( IEL, 1 ))
X2 = X(NODEX( IEL, 2 ))
Y2 = Y(NODEX( IEL, 2 ))
IF ( IELTYPE( IEL ) .EQ. 1 ) THEN
BC ='DIRICHLET'
ELSE

```

```

BC ='NUEMANN'
END IF
WRITE (1,100) IEL, X1, Y1, X2, Y2, BC
100 FORMAT ( 1X, I5, 4G16.7,1X, A9 )
END DO
!----- SOLUCIONES EN LA FRONTERA
WRITE(1,*)
WRITE(1,*)
WRITE(1,*)
WRITE(1,*)'==== SOLUCION Y PRESCRIPCION DE VALORES ==== '
WRITE (1,201)
201 FORMAT (/ 3X,"EL#",7X," H",14X,"Qn" ,14X," C" / 1X, 53("-"))
DO IEL = 1 , NE
WRITE(1,200) IEL, H(IEI), QN(IEI), C(IEI)
200 FORMAT ( 1X, I5, 3G16.7 )
END DO
!----- VALORES INTERNOS
WRITE(1,*)
WRITE(1,*)
WRITE(1,*)
WRITE(1,*)'=== VALORES POTENCIALES Y PUNTOS INTERNOS === '
WRITE (1,301)
301 FORMAT (/ 5X,"I",7X,"XI",14X,"YI",11X,"CI*HI",14X,"CI"/1X,69("-"))
DO I = 1 , NIPT
WRITE(1,300) I, XI(I), YI(I), HI(I), CI(I)
300 FORMAT ( 1X, I5, 4G16.7 )
END DO
CLOSE (1)
RETURN
END
!
!
SUBROUTINE GREGLA ( N , SAI , W )
IMPLICIT REAL*8 ( A-H , O-Z )
DIMENSION SAI(N) , W(N)
IF ( N .LT. 2 ) STOP'N<2'
IF ( N .GT. 6 ) STOP'N>6'
GO TO ( 99, 20, 30, 40, 50, 60 ) , N
99 STOP
20 SAI(1) = DSQRT(3.D0)/3.D0
W(1) = 1.D0
GO TO 88
30 SAI(1) = DSQRT(15.D0)/5.D0
SAI(2) = 0.D0
W(1) = 5.D0/ 9.D0
W(2) = 8.D0/ 9.D0

```

```

GO TO 88
40 SAI(1) = 0.33998104358485D0
   SAI(2) = 0.86113631159405D0
   W(1) = 0.65214515486254D0
   W(2) = 0.34785484513745D0
   GO TO 88
50 SAI(1) = 0.90617984593866D0
   SAI(2) = 0.53846931010568D0
   SAI(3) = 0.D0
   W(1) = 0.23692688505619D0
   W(2) = 0.47862867049937D0
   W(3) = 5.12D0 / 9.D0
   GO TO 88
60 SAI(1) = 0.23861918608320D0
   SAI(2) = 0.66120938646626D0
   SAI(3) = 0.93246951420315D0
   W(1) = 0.46791393457269D0
   W(2) = 0.36076157304814D0
   W(3) = 0.17132449237917D0
88 NN = N / 2
   DO 11 I = 1 , NN
   J = N - I + 1
   SAI(J) = - SAI(I)
   W(J) = W(I)
11 CONTINUE
   RETURN
   END
!
!
SUBROUTINE SYSTEM ( MXN , N , A , C )
IMPLICIT REAL*8 ( A-H , O-Z )
DIMENSION A (MXN , MXN ) , C (MXN)
N1 = N - 1
DO 40 K = 1 , N1
L = K + 1
DO 20 I = L , N
P = A (I,K) / A (K,K)
DO 30 J = L , N
30 A (I,J) = A (I,J) - P * A ( K , J )
C ( I ) = C ( I ) - P * C ( K )
20 CONTINUE
40 CONTINUE
!---- REGRESANDO SUSTITUCION
C (N) = C (N) / A (N,N)
DO 60 K = 1 , N1
I = N - K

```

```

L = I + 1
P = C ( I )
DO 50 J = L , N
50 P = P - C ( J ) * A ( I,J)
  C ( I ) = P / A ( I,I)
60 CONTINUE
  RETURN
  END

```

#### APENDICE 5.4

```

PROGRAM REDBEM
! PROGRAMA PARA GENERAR LAS CUERDAS
! JUNTO CON SUS CONDICIONES DE FRONTERA
; TAMBIEN SE INTRODUCE LA INFORMACION DE LOS PUNTOS INTERNOS

DIMENSION A1(1000),XINT(100),YINT(100)
OPEN(10,FILE='SAL1.TXT')
WRITE(*,*)' DAME EL NUMERO DE ELEMENTOS N'
READ(*,*)N
WRITE(10,*)N

  WRITE(*,*)'PRIMERA FRONTERA'
  WRITE(*,*)'DAL EL TIPO PARA LA PRIMERA FRONTERA T=1 TEMPERATURA
  T=2 FLUJO CAN CANTIDAD'
  READ(*,*)KT,CANT
  M1=N/4
  DO I=1,M1
  J=I
  K=I+1
  WRITE(10,*)I,J,K,KT,CANT
  ENDDO

  !RITE(10,*)N,N,1

  WRITE(*,*)'DAL EL TIPO PARA LA PRIMERA FRONTERA T=1 TEMPERATURA
  T=2 FLUJO CAN CANTIDAD'
  READ(*,*)KT,CANT

  M2=2*M1

  DO I=M1+1,M2
  J=I
  K=I+1

```

```
WRITE(10,*)I,J,K,KT,CANT  
ENDDO
```

```
WRITE(*,*)'TERSERA FRONTERA'
```

```
WRITE(*,*)'DAL EL TIPO PARA LA PRIMERA FRONTERA T=1 TEMPERATURA  
T=2 FLUJO CAN CANTIDAD'
```

```
READ(*,*)KT,CANT
```

```
M3=3*M1
```

```
DO I=M2+1,M3
```

```
J=I
```

```
K=I+1
```

```
WRITE(10,*)I,J,K,KT,CANT
```

```
ENDDO
```

```
WRITE(*,*)'CUARTA FRONTERA'
```

```
WRITE(*,*)'DAL EL TIPO PARA LA PRIMERA FRONTERA T=1 TEMPERATURA  
T=2 FLUJO CAN CANTIDAD'
```

```
READ(*,*)KT,CANT
```

```
M4=4*M1
```

```
DO I=M3+1,M4-1
```

```
J=I
```

```
K=I+1
```

```
WRITE(10,*)I,J,K,KT,CANT
```

```
ENDDO
```

```
K=1
```

```
WRITE(10,*)N,M4,K,KT, CANT
```

```
! PRIMER LASO DEL CUADRADO
```

```
N1=N/4
```

```
J1=0
```

```
H=1/(N1*1.)
```

```
C1=0
```

```
DO I=0,N1
```

```
A1(I)=H*I
```

```
J1=J1+1
```

```
WRITE(10,*)J1,A1(I),C1
```

```
ENDDO
```

```
!SEGUNDO LADO DEL CUADRADO
```

```
J2=J1
```

```
C2=1
```

```

DO I=1,N1
A1(I)=H*I
J2=J2+1
WRITE(10,*)J2,C2,A1(I)
ENDDO
! TERCER LADO DEL CUADRADO
J3=J2
      C3=1
DO I=1,N1
A1(I)=1-H*I
J3=J3+1
WRITE(10,*)J3,A1(I),C3
ENDDO
!CUARTOLADO DELCUADRADO
C4=0
J4=J3
DO I=1,N1-1
A1(I)=1-H*I
J4=J4+1
WRITE(10,*)J4,C4,A1(I)
ENDDO
WRITE(*,*)'NUMERO DE PUNTOS INTERIORES'
READ(*,*)L
WRITE(10,*)L
DO I=1,L
READ(*,*)XINT(I),YINT(I)
WRITE(10,*)I,XINT(I),YINT(I)
ENDDO

CLOSE(10)
STOP
END

```

## APÉNDICE 6.1

Operador de Sturm-Liouville

$$\left[ L = \frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} \right) + q \right]$$

$$\int_a^b [uL(v) - vL(u)] dx = p \left( u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right)$$

el Laplaciano para tres dimensiones ( $L = \nabla^2$ )

$$\int_{\Omega} [uL(v) - vL(u)] d\Omega = \int_{\Gamma} (u\nabla v - v\nabla u) d\Gamma$$

## APENDICE 6.2

### 9 Función de Green para la ecuación de calor

se quiere resolver la ecuación de calor con posible fuente de calor que dependa del tiempo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\nabla^2 u + Q(x, t) \quad 6.1$$

sujeta a las condiciones iniciales  $u(x, 0) = g(x)$ . Se puede analizar este problema en una, dos o tres dimensiones. En esta parte no se especifica la región geometría o la posibilidad de condiciones de frontera no homogéneas. Estos pueden ser tres términos no homogéneos: la fuente  $Q(x, t)$ , la condición inicial, y las condiciones de frontera.

Definimos la función de Green  $G(x, t; x_0, t_0)$  como la solución de

$$\frac{\partial G}{\partial t} = k\nabla^2 G + \delta(x - x_0)\delta(t - t_0) \quad 6.2$$

en la misma región con las condiciones de frontera homogéneas relacionadas. puesto que la función de Green representa la respuesta de la temperatura en  $t$  (en el tiempo  $t$ ) debido a una fuente térmica concentrada en  $x_0$  (en el tiempo  $t_0$ ), insistiremos que ésta función de Green es cero antes de que actúe la fuente:

$$G(x, t; x_0, t_0) = 0 \quad \text{para } t < t_0 \quad 6.3$$

El principio de casualidad.

Además, demostramos que solamente el lapso de tiempo  $t - t_0$  (del tiempo transcurrido a partir del tiempo de la iniciación  $t = t_0$ ) es necesario.

$$G(x, t; x_0, t_0) = G(x, t - t_0; x_0, 0) \quad 6.4$$

la propiedad de traslación. La ecuación (6.4) es demostrada dejando  $T = t - t_0$  en el caso que la función de Green  $G(x, t, x_0, t_0)$  satisface

$$\frac{\partial G}{\partial T} = k\nabla^2 G + \delta(x - x_0)\delta(T) \text{ con } G = 0 \text{ para } T < 0$$

ésta es exacto la respuesta debido a una fuente concentrada en  $x = x_0$  en  $T=0$ , implicando (6.4)

posponemos hasta más adelante el cálculo real de la función de Green por ahora, asumiremos que la función de Green está dada y preguntar cómo representar la temperatura  $u(x, t)$  en los términos de la función de Green.

6.2 la ecuación de calor no tiene función adjunta natural.

Para demostrar cómo este problema se relaciona con otros discutidos en este libro, introducimos la notación linear del operador.

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - k\nabla^2 \quad 6.5$$

llamado calor o a operador de la difusión. En problemas anteriores la relación entre la solución del problema no homogéneos y su función de Green era operador basado, el Laplaciano, y lo más recientemente posible el operador de la onda. Componen al operador L del calor de dos partes.  $\nabla^2$  es analizada fácilmente por el fórmula del Green para el Laplaciano, sin embargo, tan inofensivo como aparece  $\frac{\partial}{\partial t}$ , es mucho más difícil de analizar que cualesquiera de los otros operadores anteriores. para ilustrar la dificultad por los primeros derivados, considere

$$L = \frac{\partial}{\partial t}$$

para operadores de segundo orden Sturm-Liouville, a operadores, integraciones elementales radican en la fórmula del Green que la misma idea para  $L = \frac{\partial}{\partial t}$  no se trabajará en detalle,

$$\int [uL(v) - vL(u)]dt = \int \left( u \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial u}{\partial t} \right) dt$$

no se puede simplificar, allí no hay una fórmula para evaluar  $\int [uL(v) - vL(u)]dt$ . el operador  $\frac{\partial}{\partial t}$  no es el mismo adjunto. En lugar de otro, por la integración por partes estándar,

$$\int_a^b uL(v)dt = \int_a^b u \frac{\partial v}{\partial t} dt = uv|_a^b - \int_a^b v \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

y así

$$\int_a^b \left( u \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial t} \right) dt = uv|_a^b \quad 6.6$$

para el operador  $L = \frac{\partial}{\partial t}$  se define el operador adjunto

$$L^* = -\frac{\partial}{\partial t} \quad 6.7$$

tenemos integrar sobre todo el espacio y de un cierto  $t = t_i$  del tiempo a otro  $t = t_f$  del tiempo tenemos usando (6.6) para los términos del  $\frac{\partial}{\partial t}$  y la formula de Green

$(\int_{\Omega} [uL(v) - vL(u)] d\Omega = \int_{\Gamma} (u\nabla v - v\nabla u) d\Gamma)$  para el operador  $\nabla^2$ . La “contribución de frontera”, son de dos tipos, la parte espacial (sobre  $\oint$ ) y una parte temporal (en el tiempo inicial  $t_i$  y tiempo final  $t_f$ ). Si  $u$  y  $v$  satisfacen la misma condición homogéneas de frontera (del tipo generalmente), entonces las contribuciones espaciales desaparecen.

$$\oint (v\nabla u - u\nabla v) dS = 0$$

#### 6.4 función de Green adjunta

en orden de eventualidad deriva un fórmula de la representación para el  $u(x,t)$  en términos de la función de Green  $G(x,t;x_0,t_0)$ , nosotros debemos considerar el resumir de varias fuentes mide el tiempo así, nosotros consideran la función del Green de fuente variable.

$$G(x,t_1,x_1,t) = G(x,-t,x_1,-t_1)$$

donde se ha utilizado la propiedad de traslación. por causalidad, éstos son cero si  $t > t_1$

$$G(x,t_1,x_1,t) = 0 \quad \text{para } t > t_1 \quad 6.14$$

dejando el  $\tau = -t$ , vemos que la función  $G(x,t_1,x_1,t)$  de Green de fuente variable satisface

$$\left( -\frac{\partial}{\partial t} - k\nabla^2 \right) G(x,t_1,x_1,t) = \delta(x-x_1)\delta(t-t_1) \quad 6.15$$

así como el principio de casualidad fuente variable (6.14). El operador del calor  $L$  no ocurre. en lugar, el operador  $L^*$  del calor del adjunto aparece:

$$L^*[G(x,t_1,x_1,t)] = \delta(x-x_1)\delta(t-t_1) \quad 6.16$$

vemos que  $G(x,t_1,x_1,t)$  es la función de Green para el operador adjunto del calor ( con fuente variable principio de casualidad). A veces se llama la función de Green adjunta,  $G^*(x,t_1,x_1,t)$ . Sin embargo, es innecesario calcularla o utilizar siempre, entonces

$$G^*(x,t,x_1,t_1) = G(x,t_1,x_1,t) \quad 6.17$$

y ambos son cero para el  $t > t_1$

de (6.6)

$$\int_a^b [uL^*(v) - vL(u)] dt = -uv \Big|_a^b \quad 9.8$$

esta es análoga a la formula de Green.

ahora volvemos al problema no homogéneo del calor:

$$L(u) = Q(x, t) \quad 6.9$$

$$L[G] = \delta(x - x_0)\delta(t - t_0) \quad 6.10$$

donde

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - k\nabla^2 \quad 6.11$$

para la ecuación de calor no homogénea, nuestros resultados son más complicados puesto que debemos introducir al operador adjunto,

$$L^* = -\frac{\partial}{\partial t} - k\nabla^2 \quad 6.12$$

por calculo directo

$$uL^*(v) - vL(u) = -u \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial u}{\partial t} + k(v\nabla^2 u - u\nabla^2 v)$$

y así

$$\int_{t_i}^{t_f} \int_{\Omega} [uL^*(v) - vL(u)] d\Omega dt = -\int_{\Omega} uv \Big|_{t_i}^{t_f} d\Omega + k \int_{t_i}^{t_f} \int_{\Gamma} (v\nabla u - u\nabla v) d\Gamma dt \quad 6.13$$

fuente variable o función de Green adjunta,  $v = G(x, t_0; x_0, t)$  usando la definición de la ecuación diferencial (6.9) y (6.10), formula de Green (6.13) se convierte

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_0+} \iiint [u\delta(x - x_0)\delta(t - t_0) - G(x, t_0; x_0, t)Q(x, t)] d^3x dt \\ &= \iiint u(x, 0)G(x, t_0; x_0, 0) d^3x \\ &+ k \int_0^{t_0+} \oint [G(x, t_0; x_0, t)\nabla u - u\nabla G(x, t_0; x_0, t)] \cdot \hat{n} dS dt \end{aligned}$$

desde entonces  $G=0$  para  $t > t_0$ . El solucionar para  $u$ , obtenemos

$$\begin{aligned} u(x_0, t_0) &= \int_0^{t_0} \iiint G(x, t_0; x_0, t)Q(x, t) d^3x dt \\ &+ \iiint u(x, 0)G(x, t_0; x_0, 0) d^3x dt \\ &+ k \int_0^{t_0} \oint [G(x, t_0; x_0, t)\nabla u - u\nabla G(x, t_0; x_0, t)] \cdot \hat{n} dS dt \end{aligned}$$

puede ser demostrado que los límites  $t_{0+}$  se pueden sustituir por  $t_0$ , ahora (como antes) intercambiamos  $x$  con  $x_0$  y  $t$  con  $t_0$ . Además, nosotros utilizamos reciprocidad y derivamos

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_0^t \iiint G(x,t;x_0,t_0) Q(x_0,t_0) d^3x_0 dt_0 \\
&+ k \int_0^t \oiint [G(x,t;x_0,t_0) \nabla_{x_0} u - u(x_0,t_0) \nabla_{x_0} G(x,t;x_0,t_0)] \cdot \hat{n} dS_0 dt_0
\end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned}
L(u) &= \delta(x-x_0) \delta(t-t_0) & L^*(v) &= \delta(x-x_1) \delta(t-t_1) \\
u &= 0 \text{ para } t < t_0 & v &= 0 \text{ para } t > t_1
\end{aligned}$$

la ecuación (6.14) ilustra cómo la temperatura  $u(x,t)$  es afectado por los tres términos no homogéneos. La función de Green  $G(x,t;x_0,t_0)$  es la función de influencia para el termino de la fuente  $Q(x_0,t_0)$ , así como para el  $u(x_0,0)$  inicial de la distribución de la temperatura (si evaluamos la función de Green en  $t_0=0$ , como es absolutamente razonable). Además, las condiciones de frontera no homogéneas son consideradas por el término  $+k \int_0^t \oiint [G \nabla_{x_0} u - u(x_0,t_0) \nabla_{x_0} G] \cdot \hat{n} dS_0 dt_0$ . la ecuación (6.14) ilustra el principio de la causalidad; en el tiempo  $t$ , las fuentes y las condiciones de frontera tenga un efecto solamente para el  $t_0 < t$ . La ecuación (6.14) generaliza el resultado obtenido por el método de expiación de ingen funciones.

#### Reciprocidad

Derivamos una fórmula de la reciprocidad. Aquí, hay algunas diferencias pequeñas debido a la ocurrencia del operador del adjunto en fórmula Green (6.13). en (9.13) introducimos

$$u = G(x,t;x_0,t_0) \tag{6.18}$$

$$v = G(x,t_1;x_1,t) \tag{6.19}$$

el último que es demostrado para fuente variable o función de Green adjunta. así, las características que definen para  $u$  y  $v$  son:

$L(u) = \delta(x-x_0) \delta(t-t_0)$	$L^*(v) = \delta(x-x_1) \delta(t-t_1)$
$u = 0 \text{ para } t < t_0$	$v = 0 \text{ para } t > t_1$

Integramos  $t = -\infty$  a  $t = \infty$ , [ es decir,  $t_i = -\infty$  a  $t_f = \infty$  ] obteniendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \iiint [G(x, t; x_0, t_0) \delta(x - x_1) \delta(t - t_1) - G(x, t_1; x_1, t) \delta(x - x_0) \delta(t - t_0)] d^3 x dt$$

$$= - \iiint G(x, t; x_0, t_0) G(x, t_1; x_1, t) \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} d^3 x$$

Puesto que  $u$  y  $v$  ambos satisfacen las mismas condiciones de frontera homogéneas, de modo que

$$\oiint (v \nabla u - u \nabla v) \cdot n dS$$

desaparece las contribuciones también desaparecen en  $t = \pm\infty$  debido a la causalidad usando las características de la función del delta del Dirac, nosotros obtenemos la reciprocidad:

$$G(x_1, t_1; x_0, t_0) = G(x_0, t_0; x_1, t_1)$$

como hemos demostrado para la ecuación de onda, intercambiar las posiciones de la fuente y de la localización no altera las respuestas si los tiempos transcurridos de las fuentes son iguales. en este sentido la función de Green para la ecuación del calor (difusión) es simétrico.

### 9.8 función de Green para la ecuación del calor en un dominio semi-infinito

Obtenemos la función de Green necesitada para solucionar la ecuación no homogénea del calor en intervalo semi-infinito, en una dimensión ( $x > 0$ ), conforme a una condición de frontera no homogénea en  $x = 0$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u + Q(x, t) \quad x > 0 \quad (6.31)$$

$$\text{Bc: } u(0, t) = A(t) \quad (6.32)$$

$$\text{Ic: } u(x, 0) = f(x) \quad (6.33)$$

la función de Green es determinada por el método de las imágenes

$$G(x, t; x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-t_0)}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4k(t-t_0)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+x_0)^2}{4k(t-t_0)}\right] \right\}$$

observamos que la condición de límite en  $x = 0$  está, satisfecha automáticamente

6.9 función de Green para la ecuación del calor en un dominio finito ( $0 < x < L$ ), la función de Green para la ecuación del calor por el método de extensiones del eingenfunciones con las condiciones de frontera cero en ambos extremos

$$G(x, t, x_0, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{n\pi x_0}{L} e^{-k(n\pi/L)^2(t-t_0)} \quad (6.35)$$

podemos obtener una representación alternativa para esta función de Green utilizando el método de imágenes.

por simetría, las condiciones de frontera en  $x = 0$  y en el  $x = L$  son satisfechas si las fuentes concentradas positivas están situadas en  $x = x_0 + 2nL$  y las fuentes concentradas negativas están situadas en  $x = -x_0 + 2nL$  (para todos los números enteros

$n, -\infty < n < \infty$ ). Usando el espacio infinito de la función de Green, tenemos una representación alternativa de la función de Green para una barra unidimensional:

$$G(x, t; x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-t_0)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4k(t-t_0)}\right] - \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4k(t-t_0)}\right] \right\}$$
 cada forma tiene su propia ventaja. La expansión de las eigenfunciones, (9.35), es una serie infinita que converge rápidamente si  $\frac{(t-t_0)k}{L^2}$  es grande. es así el más útil para  $t \gg t_0$ . en realidad, si  $t \gg t_0$ ,

$$G(x, t, x_0, t_0) \approx \frac{2}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x_0}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) e^{-k(n\pi/L)^2(t-t_0)}$$

sin embargo, si el tiempo transcurrido  $t - t_0$  es pequeño, entonces muchos términos de la serie infinita son necesarios.

Usando el método de imágenes, la función de Green también es representada por una serie infinita (9.36). El espacio infinito de la función de Green (para una  $t$  fija) exponencial se decae lejos de la posición de la fuente.

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-t_0)}} \exp\left(-\left\{\frac{(x-x_0)^2}{4k(t-t_0)}\right\}\right)$$

se decae en espacios muy bruscamente si  $t$  está cerca de  $t_0$ , si  $t$  está cerca de  $t_0$ , entonces solo las fuentes cercanas localizadas en  $x$  son importantes; las fuentes muy lejanas no serán muy importantes (si  $t$  es cercano a  $t_0$ ), las fuentes de las imágenes pueden ser ignoradas si  $t$  es cercano a  $t_0$  (y si  $x$  o  $x_0$  no es ningún cercano a la frontera 0 o L, como aproximación,

$$G(x, t; x_0, t_0) \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-t_0)}} \exp\left(-\left\{\frac{(x-x_0)^2}{4k(t-t_0)}\right\}\right)$$

si  $t$  cerca de  $t_0$  la función de Green con fronteras se puede aproximar (en regiones lejos de las fronteras) por el espacio infinito de funciones de Green.

Esto significa que por tiempos pequeños las fronteras puede ser descuidado (lejos de la frontera)

para ser más exacto, el efecto de cada fuente de la imagen es mucho más pequeño que la fuente real si  $\left(\frac{L^2}{k(t-t_0)}\right)$  es grande. Esto rinde una comprensión mejor de una

aproximación del "tiempo pequeño"

la función de Green puede ser aproximada por un espacio infinito de funciones de Green

si  $t - t_0$  es pequeño (es decir  $t - t_0 \ll \frac{L^2}{k}$ , donde  $\frac{L^2}{k}$  este cociente de cantidades físicamente medibles) alternativamente, esta aproximación es válida para una "barra larga" en el sentido que  $L \gg \sqrt{k(t-t_0)}$ .

En resumen, la producción del método de la imagen a la serie infinita rápidamente convergente para la función de Green si  $\frac{L^2}{k(t-t_0)} \gg 1$ , mientras que la extensión del eigenfunction rinde una representación infinita rápidamente convergente de la serie de la función de Green si  $\frac{L^2}{k(t-t_0)} \ll 1$

si  $\frac{L^2}{k(t-t_0)}$  es ni pequeño ni grande, entonces las dos extensiones son competitivas, pero ambas requieren por lo menos un número moderado de términos.

### APENDICE 6.3

Calculo del límite  $\xi \rightarrow \Gamma$

Para localizar el punto de carga en la frontera, primero ajustamos la frontera tal que contiene el punto dentro de un círculo de radio  $\epsilon$  de acuerdo a la figura 1.

$$\Gamma' = (\Gamma' - \Gamma_\epsilon) \cup \Gamma_\epsilon$$

así el punto  $\xi$  que está dentro del dominio y la ecuación de frontera todavía es válida.

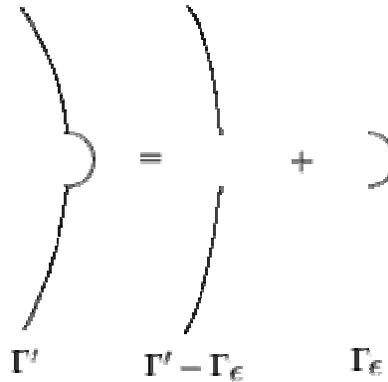


Figura 1. Extensión de la frontera por un círculo

La integración a lo largo de  $\epsilon$ -círculo es parametrizado por

$$d\Gamma_\epsilon = \epsilon d\varphi$$

Ver figura 2. Además la norma

$$|\bar{x} - \bar{\xi}| = \epsilon$$

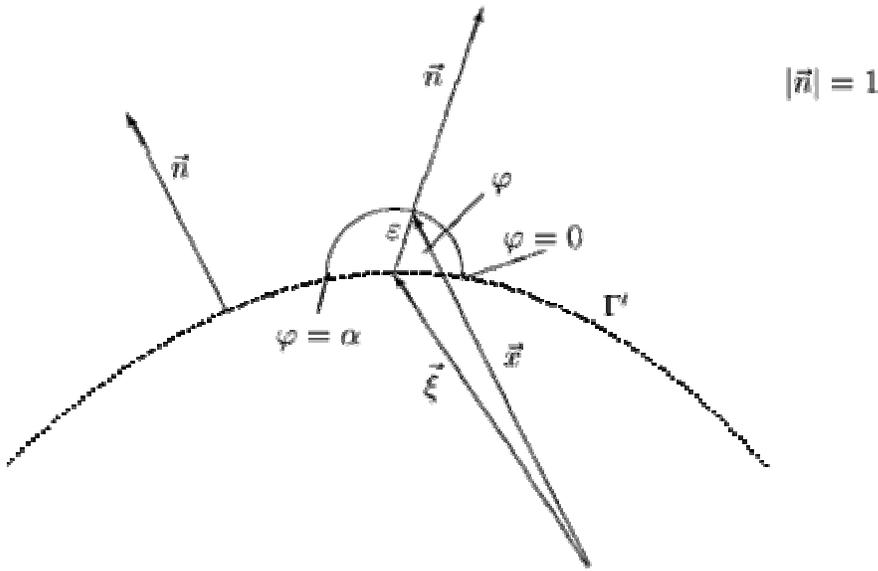


Figura 2. La geometría por acomodar el punto de carga en la frontera el valor del límite tomando EIF en la frontera puede ser ahora calculado. Para  $\int q u^* d\Gamma$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma'} q \frac{\ln|\bar{x} - \bar{\xi}|}{2\pi} d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma' - \varepsilon} q \frac{\ln|\bar{x} - \bar{\xi}|}{2\pi} d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} q \frac{\ln|\bar{x} - \bar{\xi}|}{2\pi} d\Gamma$$

en el límite, el primer integral es débilmente singular. Con las eq. (17,18) y la regla de L'HOSPITAL, el último integrando en la eq. (19) los resultados en una contribución desapareciendo

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} q \frac{\ln|\bar{x} - \bar{\xi}|}{2\pi} d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} q (\ln \varepsilon) \varepsilon d\varphi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} q \frac{(\ln \varepsilon)'}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)'} d\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} -q \varepsilon d\varphi = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \varepsilon [\alpha - 0] = 0 \end{aligned}$$

La integral  $\int u q^* d\Gamma$  las primicias a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma'} \frac{(\bar{x} - \bar{\xi}) \cdot \bar{n}}{2\pi |\bar{x} - \bar{\xi}|^2} u(\bar{x}) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma' - \varepsilon} \frac{(\bar{x} - \bar{\xi}) \cdot \bar{n}}{2\pi |\bar{x} - \bar{\xi}|^2} u(\bar{x}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(\bar{x} - \bar{\xi}) \cdot \bar{n}}{2\pi |\bar{x} - \bar{\xi}|^2} u(\bar{x}) d\Gamma \quad (21)$$

la primera integral en Eq. (21) es un integral fuertemente singular calculado por el valor principal de Cauchy. Para la segunda integral

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(\bar{x} - \bar{\xi}) \bar{n}}{2\pi |\bar{x} - \bar{\xi}|^2} u(\bar{x}) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} u(\bar{x}) \left( \frac{\varepsilon}{2\pi \varepsilon^2} \right) \varepsilon d\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} u(\bar{x}) \left( \frac{1}{2\pi} \right) d\varphi = \frac{\alpha u(\bar{\xi})}{2\pi}$$

Sumando estos resultados y insertándolos en la eq.(8) se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned} u(\bar{\xi}) &= \frac{\alpha}{2\pi} u(\bar{\xi}) + \int_{\Gamma} u(\bar{x}) \frac{(\bar{x} - \bar{\xi})^* \bar{n}}{2\pi |\bar{x} - \bar{\xi}|^2} d\Gamma - \int_{\Gamma} q(\bar{x}) \frac{\ln |\bar{x} - \bar{\xi}|}{2\pi} d\Gamma \\ \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) u(\bar{\xi}) + \int_{\Gamma} q^*(\bar{x}, \bar{\xi}) u(\bar{x}) d\Gamma &= \int_{\Gamma} u(\bar{x}, \bar{\xi}) q(\bar{x}) d\Gamma \\ C(\bar{\xi}) &= \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

el factorizan  $C(\bar{\xi})$  es llamado el factor de frontera y denota la fracción de  $u(\bar{\xi})$  en  $\Omega$  como

$$C(\bar{\xi}) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{2\pi} & \text{si } \bar{\xi} \in \Gamma \\ 1 & \text{si } \bar{\xi} \notin \Gamma, \in \Omega \\ 0 & \text{para } \bar{\xi} \notin \Gamma, \notin \Omega \end{cases}$$