

**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
UNIDAD PROFESIONAL ZACATENCO**

***SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
E INVESTIGACIÓN***

**“ESTUDIO DEL MODELADO DE LA REGIÓN DE TRANSICIÓN A
FLUJO TURBULENTO PARA SUPERFICIES CONVEXAS”**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA MECÁNICA**

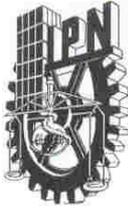
PRESENTA:

ING. HUERTA CHÁVEZ OLIVER MARCEL

DIRECTOR:

DR. TOLEDO VELÁZQUEZ MIGUEL

ENERO 2006



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO**

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D. F. siendo las 12:00 horas del día 27 del mes de Octubre del 2005 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de la E. S. I. M. E. para examinar la tesis de grado titulada:

“ESTUDIO DEL MODELADO DE LA REGION DE TRANSICIÓN A FLUJO TURBULENTO PARA SUPERFICIES CONVEXAS”

Presentada por el alumno:

HUERTA	CHAVEZ	OLIVER MARCEL
Apellido paterno	materno	nombre(s)
		Con registro:
		B 0 3 1 5 3 6

Aspirante al grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACIÓN DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director de tesis

DR. MIGUEL TOLEDO VELAZQUEZ

DR. JOSE ANGEL ORTEGA HERRERA

DRA. CLAUDIA DEL CARMEN GUTIERREZ TORRES

M EN C. GUILIBALDO TOLENTINO ESLAVA

DR. FLORENCIO SANCHEZ SILVA

M EN C. JUAN ABUGABER FRANCIS

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

DR. JAIME ROBLES GARCÍA

SECCION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACION





INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de México, Distrito Federal, el día **12** del mes **NOVIEMBRE** del año **2005**, el (la) que suscribe **HUERTA CHAVEZ OLIVER MARCEL** alumno(a) del Programa de **MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA MECÁNICA CON ESPECIALIDAD EN ENERGÉTICA** con número de registro **B-01535**, adscrito a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME Unidad Zacatenco, manifiesta que es autor(a) intelectual del presente Trabajo de Tesis bajo la dirección del **DR. MIGUEL TOLEDO VELÁZQUEZ** y cede los derechos del trabajo intitulado: **“ESTUDIO DEL MODELADO DE LA REGIÓN DE TRANSICIÓN A FLUJO TURBULENTO SOBRE SUPERRFICIES CONVEXAS”**, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, graficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección: **Lecram_21@hotmail.com**

Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.



Nombre y firma



Este imperfecto trabajo está dedicado a **A. A. P.** por demostrarme la falsedad y el imposible compromiso que se esconde en la terrible palabra de la amistad. Al mi estimado **Erasmó Catarino conde de Poza Rica**, porque a pesar de ser un lobo estepario, me ha compartido muchas cosas importantes de su vida. También **A. A. F. H.** y **S. P. Z. V.** quienes con sus acciones desinteresadas, me ha enseñado la esencia de la razón humana y la abolición de compromisos en el camino hacía la libre intención.

“Si hay un camino, hay un millón y existe el vacío”



Fue tanto mi entusiasmo en esta obra, que por primera ocasión decidí poner nombres, agradeciendo de esta manera, esas pequeñas aportaciones que fueron fundamentales en mi formación. Tal es el caso de instituciones como **COFAA** y **CONACYT**, quienes financiaron económicamente mi educación, al **INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL** que siempre será mi máxima casa de estudios.

Por otro lado, de las personas que me vienen a la mente, me es necesario reconocer a **Eduardo Nava Palomares** y al **Dr. Miguel Toledo Velázquez** profesor investigador del Posgrado de la SEPI-ESIME-ZACATENCO, quienes con su gran apoyo y soporte técnico en los últimos años, han permitido la realización de varios trabajos, entre ellos, la presente obra.

También quiero agradecer, al **M. en C. Alfredo Arias Montaña** subdirector de la ESIME - Ticomán, quien con sus consejos y experiencias compartidas, ha logrado ampliar mis dudas sobre el tema de los modelos de transición en un sentido más crítico y objetivo. A mi estimado **Joel Raúl García Figueroa** con quien dividiendo trabajos, demostramos fuerza como equipo.

Finalmente, al **Dr. Fermín Viniegra Heberlein** profesor catedrático del Posgrado de la SEPI-ESIME-ZACATENCO, por devolverme el entusiasmo en la ciencia de la mecánica de fluidos con la esperanza de lograr alguna aportación útil al conocimiento colectivo y sobre todo, por usurpar la esencia de mi futura vejez.

A todos ellos “MUCHAS GRACIAS”



ÍNDICE	<i>vi</i>
RELACIÓN DE FIGURAS	<i>ix</i>
NOMENCLATURA	<i>x</i>
RESUMEN	<i>xiv</i>
ABSTRACT	<i>xv</i>
INTRODUCCIÓN	1
ESTADO DEL ARTE	3
CAPÍTULO I. CONDICIONES DE TRANSICIÓN	
1.1 Flujos Viscosos	5
1.1.1 Viscosidad	5
1.1.2 Teoría de capa límite	6
1.1.2.1 Transición	7
1.1.2.2 Solución del Coeficiente de fricción laminar	10
1.1.2.3 Solución del Coeficiente de fricción turbulento	11
1.2 Variables que influyen a la transición	12
1.2.1 Gradientes de Presión	13
1.2.2 Compresibilidad	14
1.2.3 Perturbaciones en la corriente libre	15
1.2.4 La Curvatura Geométrica	15
1.2.5 Rugosidad en las Superficies	15
1.2.6 Superficies Calientes o Frías	16
1.2.7 Inyección o Succión de Flujo Másico	17
1.2.8 Separación de Flujos	18



CAPÍTULO II. CLASIFICACIÓN DE LOS MODELOS DE TRANSICIÓN

2.1 Generalidades de los métodos de turbulencia	19
2.2 Clasificación general de los modelos de transición	20
2.2.1 Modelos de Combinación Lineal	20
2.2.2 Modelos Algebraicos	21
2.2.3 Modelos Diferenciales	21
2.3 Modelos diferenciales para transición	23
2.3.1 Modelo de transición en el método estándar $k - \varepsilon$	23
2.3.2 Modelo de transición schmidt - patankar $k - \varepsilon$	25
2.3.3 modelo de transición en el método de wilcox $k - \omega$	27
2.4 Antecedentes de los modelos RANS para transición	28
2.5 Preselección de modelos RANS de dos ecuaciones	30

CAPÍTULO III. GENERALIDADES DE MODELOS RANS

3.1 Generalidades matemáticas de los modelos RANS	31
3.1.1 Ecuaciones básicas	32
3.2 Funciones de transición implementadas en los modelos	35
3.2.1 Bases generales de los modelos de dos ecuaciones	35
3.2.1.1 Modelo de dos ecuaciones $k - \varepsilon$	36
3.2.1.2 Modelo de dos ecuaciones <i>Wilcox</i> $k - \omega$	41
3.3 Dificultades de implementación de la función transición	53

CAPÍTULO IV. SIMULACIONES NUMÉRICAS Y ANÁLISIS

4.1 Casos particulares	53
4.1.1 Simulaciones numéricas sobre perfil NACA 0012	53
4.1.2 Simulaciones numéricas del NACA 0012 montado sobre un	



arco doble de circunferencia	61
4.1.3 Análisis de resultados en conjunto	67
CONCLUSIONES	70
RECOMENDACIONES	72
FUTUROS TRABAJOS	73
REFERENCIAS	74
ANEXOS	77



FIGURA	PÁG.
<i>Fig. 1.1 Desarrollo de la capa límite sobre una placa plana</i>	8
<i>Fig. 1.2 Desarrollo de la transición a flujo turbulento sobre una placa plana</i>	9
<i>Fig. 1.3 Zonas laminar y turbulenta sobre una placa plana</i>	13
<i>Fig.- 4.1 Dominio computacional</i>	58
<i>Fig.- 4.2 Mallado del NACA 0012 a 0°</i>	58
<i>Fig. 4.3 Respuesta de los modelos al coeficiente de fricción para el perfil a 0°</i>	60
<i>Fig. 4.4 Coeficientes de fricción sobre el intradós al variar el ángulo de ataque</i>	61
<i>Fig. 4.5 Coeficiente de fricción sobre extradós en la dirección-x al variar el ángulo de ataque</i>	62
<i>Fig. 4.6 Oscilaciones del Coeficiente de fricción máximos al variar el ángulo de ataque.</i>	63
<i>Fig.- 4.7 Distribución de vorticidades</i>	64
<i>Fig. 4.8 Oscilaciones de coeficientes máximos y mecanismos del modelo de turbulencia.</i>	65
<i>Fig.- 4.9 Mallado del NACA 0010 curvado a 0°</i>	66
<i>Fig. 4.10 Coeficientes de fricción sobre el extradós al variar el ángulo de ataque</i>	67
<i>Fig. 4.11 Coeficientes de fricción sobre el intradós al variar el ángulo de ataque</i>	67
<i>Fig. 4.12 Coeficiente de fricción sobre extradós en la dirección-x al variar el ángulo de ataque</i>	68
<i>Fig. 4.13 Oscilaciones del Coeficiente de fricción al variar el ángulo de ataque</i>	69
<i>Fig.- 4.14 Distribución de vorticidades</i>	70
<i>Fig. 4.15 Oscilaciones de Coeficiente máximos al variar el ángulo de ataque</i>	71
<i>Fig.- 4.16 Distribución de vorticidades y gráficas comparativas del coeficiente de fricción</i>	72



NOMENCLATURA

<i>Símbolo</i>	<i>Descripción</i>
c	<i>Velocidad [m/s]</i>
c_1	<i>Constante de von Karman</i>
f	<i>Cantidad de flujo [Kg./s]</i>
\bar{f}	<i>Flujo promedio [Kg./s]</i>
f'	<i>Fluctuación del flujo [Kg./s]</i>
g_x	<i>Fuerzas de cuerpo [N]</i>
h	<i>Entalpía específica [kJ/Kg.]</i>
k	<i>Energía cinética turbulenta por unidad de masa [m^2/s^2Kg]</i>
k_{th}	<i>Conductividad térmica</i>
l_2	<i>Escala de longitud</i>
p	<i>Presión [Pa]</i>
t	<i>Tiempo [s]</i>
u_i	<i>Velocidad en la dirección i [m/s]</i>
u'_i	<i>Velocidad fluctuando en la dirección i [m/s]</i>
$-u'_i u'_j$	<i>Tensor de esfuerzos de Reynolds [m^2/s^2]</i>
A^+	<i>Parámetro de control de la transición en el modelo $k-\epsilon$</i>



B_1 y B_2	<i>Parámetros empíricos determinados por optimizaciones computacionales</i>
D_ε	<i>Tasa de la difusión turbulenta de disipación</i>
E	<i>Término empírico fuente usado en la ecuación \mathcal{E}</i>
Ma	<i>Número de Mach</i>
P_k y P_ω	<i>Términos de producción por unidad de disipación</i>
P_ε	<i>Tasa de producción de la disipación</i>
Pr	<i>Número de Prandtl</i>
R_T	<i>Número de Reynolds turbulento</i>
R_{T0}	<i>Número de Reynolds turbulento inicial</i>
$R_{T\infty}$	<i>Número de Reynolds turbulento en la corriente libre</i>
R_k	<i>Constante de la versión k-ω para bajos Número de Reynolds</i>
Re_{θ_s}	<i>Número de Reynolds al inicio de la transición</i>
Re_{θ_e}	<i>Número de Reynolds al final de la transición</i>
R_k, R_ω y R_β	<i>Parámetros de control de los coeficientes de cierre en el modelo k-ω</i>
\bar{S}_{ij}	<i>Relación de esfuerzos del flujo promedio</i>
Simbología Griega	Descripción
α, α^*	<i>Funciones de transición en el modelo k-ω</i>



β, β^*	<i>Coeficientes de proporcionalidad en el modelo $k-\omega$</i>
γ_t	<i>Función de transición algebraica</i>
δ_{ij}	<i>Delta de Kroneker</i>
ε	<i>Disipación real de la energía cinética turbulenta</i>
η	<i>Variable en términos del perfil de Blasius</i>
ρ	<i>Densidad [Kg./m³]</i>
μ	<i>Viscosidad dinámica</i>
μ_t	<i>Viscosidad de remolinos</i>
μ_{eff}	<i>Viscosidad efectiva [N-s/m²]</i>
ν_T	<i>Coeficiente de viscosidad cinemática turbulenta [m²/s]</i>
σ_k	<i>Número de Prandtl para la difusión de k</i>
σ_ω	<i>Número de Prandtl para la difusión de ω</i>
σ_k y σ_ω	<i>Coeficientes de cierre en el modelo $k-\omega$</i>
τ_{ij}	<i>Escala de esfuerzos de subgrid</i>
τ	<i>Escala de tiempo turbulento</i>
ω	<i>Cantidad de turbulencia proporcional ε</i>
Φ	<i>Tasa de destrucción turbulenta de disipación</i>

Subíndices

Descripción



eff	<i>Efectivo</i>
ij	<i>Subíndices de tensores</i>
inf	<i>Inferior</i>
$k_{m\acute{a}x}$	<i>Producción máxima de remolinos viscosos</i>
t	<i>Transición</i>
w	<i>Condición en la pared</i>
x, tr	<i>Transición en la dirección x</i>
s	<i>Distancia de la pared a un punto de inflexión</i>
L	<i>longitud</i>
T	<i>Turbulencia</i>
θ_s	<i>Inicio de la transición</i>
θ_e	<i>Fin de la transición</i>
0	<i>Inicial</i>
∞	<i>En la corriente</i>
<i>Superíndices</i>	<i>Descripción</i>
n	<i>Exponente variable</i>
$*$	<i>Cierre de coeficientes</i>
$\`$	<i>Fluctuación</i>
$-$	<i>Promediado</i>



RESUMEN

En esta obra se realizó un estudio de los modelos RANS de turbulencia de dos ecuaciones adaptados con modelos especiales para la predicción del fenómeno de la transición a flujo turbulento. Observando que los modelos $k-\omega$ tiene la habilidad de predecir la transición para números de Reynolds mayores a 500 000 y los $k-\epsilon$ tienen problemas al momento de la implementación de la función de transición. Por otro lado, su carácter estadístico y probabilístico, trae consigo problemas en los valores que asigna a la velocidad fluctuante, por lo que los remolinos viscosos, la producción de energía cinética turbulenta y la intensidad de los vórtices presentan oscilaciones al variar el ángulo de ataque de un perfil aerodinámico simétrico. Los modelos son de bajo costo computacional y sus aproximaciones son burdas, requiriendo de extenuosas correlaciones con datos experimentales y exhaustivas optimizaciones computacionales, para obtener comportamientos adecuados.



ABSTRACT

In this reference work was carried out a study about RANS turbulence models of two equations, adapted with special models to predict the transition to turbulent flow. Whereas the $k-\omega$ models are able to predict the transition to Reynolds numbers over 500 000 while the $k-\varepsilon$ models show problems during the implementation of the transition function. On the other hand, its own statistical and probabilistic nature originates problems in the values assigned to the speed vibration, reason of the oscillation shown by the viscous swirls, the production of turbulent kinetic energy and the vortex intensity during leading edge angle changes of a symmetric streamlining. The models are available at low computational costs and its approximation is coarse and it is necessary to develop extensive correlations with experimental data records and exhaustive optimization with computers to obtain convincing results.



INTRODUCCIÓN

Uno de los fenómenos de mayor importancia en la ingeniería de diseño aerodinámico, es la llamada transición a flujo turbulento. Paul Gostelow[21], profesor catedrático de la Universidad de Leicester, Inglaterra, afirma que aún sigue sin resolverse la física de problemas como la transición alrededor de perfiles aerodinámicos para algún régimen de operación en el que se involucren números de Reynolds mayores a 500 000 dentro de la capa límite.

En la actualidad, números de Reynolds tan elevados tienen aplicaciones de interés tecnológico, en donde la transición es un factor crítico en el diseño aerodinámico de aeronaves de vuelo supersónico (SST), alabes de turbomaquinaria moderna, intercambiadores de calor y cámaras de combustión. La razón principal es, que parámetros como el coeficiente de fricción, la resistencia al avance, la transmisión de calor o la capacidad de mezclado, se ven considerablemente afectados por perturbaciones que se intensifican al paso del flujo por la superficie, en donde los máximos locales en el rozamiento, la temperatura de la pared y la transferencia de calor, ocurren a menudo cerca del final de la región de transición.

Por otro lado, según James A. Fay [21]: "Los flujos turbulentos no se pueden evaluar exclusivamente a partir de predicciones calculadas y su análisis depende de una combinación de datos experimentales y modelos matemáticos"; por lo que gran parte de las investigaciones modernas en la aerodinámica, están dedicadas a una mejor formulación de la turbulencia.

A la fecha, no existe una teoría completa del fenómeno que pueda atacar cualquier problema, esto es debido a que la transición se encuentra en su fase descriptiva, aún lejos del total entendimiento de la física del problema y del desarrollo de los mecanismos matemáticos que sean sensibles a las variables principales que la afectan, por lo que solo podemos hablar de una transición empírica aplica en algunos rangos de números Reynolds.



Por otro lado, la caracterización de ciertos casos, viene de la mano con el desarrollo de técnicas de visualización de flujos y el desarrollo de instrumentación, que son las principales herramientas para comenzar a modelar un fluido matemáticamente, una vez combinadas, son utilizadas para obtener modelos de transición en ciertas condiciones de operación.

En años recientes el adaptar modelos de turbulencia para el estudio de la transición ha surgido como alternativa de predicción del fenómeno, debido a que los mecanismos con que operan estos modelos son sensibles a una pseudo transición antes de iniciar el desarrollo de una capa límite totalmente turbulenta. La particularidad más importante de estos modelos a diferencia de las resoluciones numéricas directas (DNS), es que la transición es interpretada mediante la distribución de la película de fricción desarrollada sobre la geometría y no mediante los gradientes de presión o perfiles de velocidad que están directamente ligados a las curvas de estabilidad.

Debido a la anterior explicación sobre el entorno de la transición, surgió la necesidad de estudiar los modelos RANS adaptados para su pronóstico, sus limitantes y sus proyecciones hacia el futuro. Una de las aportaciones más importantes en este estudio, es que se plantean enfoques de la dirección que está tomando el desarrollo de la transición mediante la incorporación y adaptación de los modelos RANS de dos ecuaciones, su operación e interpretación de las curvas de distribución de la película de fricción en el desarrollo de la transición.

El trabajo está estructurado en cuatro capítulos que brevemente contienen la descripción del fenómeno de la transición y las variables que pueden influir de manera directa, los modelos de transición y sus clasificaciones, así como el desarrollo de algunos modelos de turbulencia de dos ecuaciones y ejemplos de cómo fueron adaptados los modelos de transición para su pronóstico. Por último, algunas pruebas numéricas con sus correspondientes simulaciones sobre superficies convexas y la interpretación de resultados.



ESTADO DEL ARTE

En un estudio experimental Yaras [22] muestra la influencia de los gradientes de presión, del número de Reynolds y de la intensidad de la turbulencia en la corriente libre sobre la localización del inicio de la transición y la separación de la capa límite laminar.

En 1998, Mayle [5] explica el estado real de los avances sobre transición en turbomaquinaria, acepta que en la mayoría de los casos, las correlaciones de los modelos con las mediciones experimentales desvían a diseñadores de los verdaderos logros con los métodos numéricos, esto debido a que modelos empíricos no son capaces de reproducir el comportamiento de la transición fuera de las condiciones de diseño arrojando resultados físicamente inexistentes.

La creciente investigación en Europa [23], deja ver claramente las limitantes cuando la transición es basada en correlaciones empíricas o semi – empíricas contra simulaciones basadas en teorías de estabilidad local o las extremas resoluciones numéricas directas. Pese a estas últimas resoluciones, ellos apuestan por el desarrollo de una transición no-empírica basada en el entendimiento de la física del problema y de los mecanismos de control, identificando y manipulando todos los modos que dominan las perturbaciones y sus interacciones no-lineales en un sistema dinámico complejo.

En años recientes, ha surgido una nueva teoría llamada “Teoría de inestabilidad no local” basada en la parabolización del valor inicial límite complejo. Esta teoría es muy completa en el proceso de la física real para la transición no lineal, ya que pueden ser incluidos los efectos esenciales de las perturbaciones para identificar los mecanismos que la dominan, lo cual la convierte en un modelo no empírico, ya que declarando correctamente las condiciones de frontera es capaz de reproducir la transición sin necesidad de especificar su inicio.



Expertos como Bart A. Singer [2] del centro de investigación Hampton, NASA, afirma que los modelos de las Tensiones de Reynolds llegaron para quedarse, aún sabiendo que poco se ha hecho en el área del modelado de transición y que modelos más simples como los $k-\varepsilon$ con requerimientos adicionales, pueden ser útiles en las soluciones de las ecuaciones de Navier – Stokes para transición con mallas adaptables en configuraciones complicadas.

Para aplicaciones aerodinámicas [6], donde la intensidad de la turbulencia en la corriente libre es baja $< 1.5\%$, las correlaciones de transición empíricas son más efectivas. En un futuro próximo, se espera que con la ayuda de una biblioteca edificada para DNS (Direct Numerical Simulation), los enfoques de tensión de Reynolds sean de buen nivel y puedan enfrentar la transición en aeronaves sumergidas en flujos supersónicos e incluso hipersónicos.

En el caso de las predicciones de la transición para la industria de las turbinas de gas (flujos con gran intensidad de turbulencia en la corriente libre), se recomienda poner más énfasis en el cierre de las ecuaciones de segundo momento (modelando las tensiones de Reynolds). Sobre alabes de turbina, el esquema de los modelos de dos - ecuaciones podría satisfacer, particularmente si se analizan las tensiones y constantes de vorticidad adecuadas para dar un esquema más sensible y apropiado a la curvatura y las deformaciones del campo de velocidad.

Por todo lo anterior y debido a la importancia que representa la región de transición y la separación del flujo, investigaciones experimentales y computacionales tienden a ser mejoradas para el entendimiento de la física del problema.



CAPITULO I

En este capítulo se resumen generalidades de los flujos viscosos y teoría de capa límite, se describe el fenómeno de transición, las condiciones necesarias para que se produzca, sus fases, características físicas y las variables que la influyen.

1.1 FLUJOS VISCOSOS

La complejidad de los flujos viscosos es observada y analizada por el ingeniero alemán Ludwig Prandtl en 1904, él propone un modelo conocido como teoría de capa límite en la que separa en dos regiones principales al flujo. Una de ellas, la más próxima a la superficie es la llamada capa límite, la cual permite una formulación más simplificada de las ecuaciones de Navier-Stokes, ya que en esta delgada capa se concentran los efectos viscosos; fuera de esta, encontramos a la corriente libre, en donde los efectos de la viscosidad son despreciables, por lo que es posible emplear expresiones matemáticas más sencillas para su análisis.

1.1.1 VISCOSIDAD

Una de las propiedades distintivas más importantes dentro de los fluidos es la *viscosidad*, la cual está ligada a la resistencia que opone un fluido a deformarse cuando se le somete a un esfuerzo de corte. Entre los fluidos existe una clasificación general, que es de acuerdo a la relación que existe entre el esfuerzo de corte aplicado y la velocidad de deformación, por lo que esta última, es una medida de la resistencia del fluido a fluir, ya sea por el interior de un conducto o sobre una superficie.

Para el caso de un fluido Newtoniano, característica de suma importancia en la formulación matemática de los modelos RANS (Reynolds Average Navier - Stokes), los esfuerzos viscosos son proporcionales a la relación de deformación del movimiento angular y son expresados en términos de gradientes de velocidad.



Las ecuaciones que gobiernan este tipo de fluidos, se derivan de las ecuaciones diferenciales de cantidad de movimiento al introducir los esfuerzos viscosos.

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \quad (1.2)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] \quad (1.3)$$

Las ecuaciones de esfuerzos viscosos para fluidos newtonianos, son las siguientes:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3} \mu \cdot \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \sigma_{yy} = -p - \frac{2}{3} \mu \cdot \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \sigma_{zz} = -p - \frac{2}{3} \mu \cdot \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

1.1.2 TEORÍA DE CAPA LÍMITE

Es en esta región, donde una capa minúscula de fluido se forma al tener contacto con un cuerpo sólido debido a la viscosidad, comienza a desarrollarse en el borde de ataque de una placa plana un flujo tipo laminar, tal y como se muestra en la figura 1.1. Corriente abajo sigue creciendo suavemente hasta que aparecen las primeras perturbaciones, dando lugar a la zona de transición y posteriormente un salto brusco en el espesor de capa límite debido a la presencia del flujo totalmente turbulento.

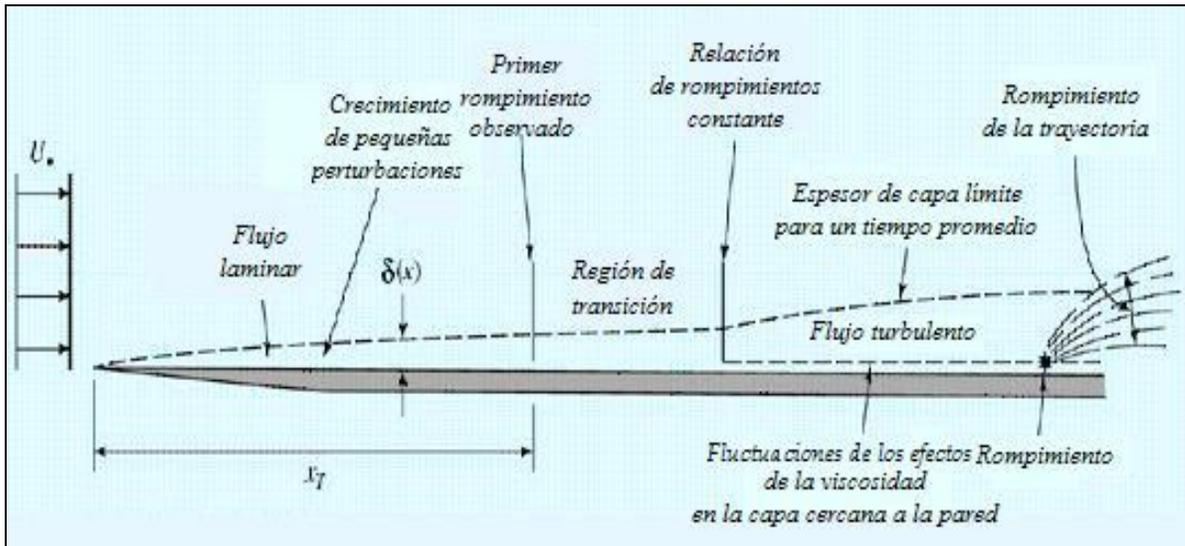


Fig. 1.1 Desarrollo de la capa límite sobre una placa plana

(Imagen tomada de la referencia [18])

La capa límite es afectada todo el tiempo por muchos parámetros, entre ellos el más importante aparte del número de Reynolds, es la distribución de presiones en el flujo exterior. Algunos otros parámetros, serán descritos posteriormente.

1.1.2.1 TRANSICIÓN

La transición se le conoce por los expertos como el inicio de la turbulencia, debido a que en investigaciones experimentales, su comportamiento es intermitente, por lo que asegura que en ocasiones, el flujo laminar coexista con una presencia intermitente y aleatoria de un flujo turbulento. A partir de esto, comienzan a aparecer movimientos transversales que causan cambios en las ecuaciones de cantidad de movimiento porque el flujo deja de ser unidimensional.

Otra consecuencia es que la distribución de velocidades es más uniforme y cada partícula retiene una cantidad de momento en la dirección longitudinal, debido a la existencia de movimientos transversales mientras se lleva a cabo la mezcla.



La transición a flujo turbulento es una región que comienza con las primeras inestabilidades del flujo en el desarrollo de la capa límite corriente abajo, como se ilustra en la figura 1.2. Estas perturbaciones si son lo suficientemente fuertes, convierten al flujo a un modo inestable, dando lugar a la formación de ondas axisimétricas de Tollmien – Schlichting[18], las cuales se van amplificando hasta que se presenta el primer rompimiento de una de las línea de corriente, dando inicio a la región de transición con una formación de vorticidades de estructura tipo Δ , este efecto se superpone en la dirección de la corriente hasta que los vórtices decaen y se da la formación de focos de turbulencia, por último, una vez que el rompimiento de las líneas corriente se vuelve constante, se dice que el flujo es totalmente turbulento y las fluctuaciones en la velocidad tendrán efectos directos sobre la viscosidad cercana a la pared de la placa plana, hasta que aparece el rompimiento en la trayectoria en la corriente turbulenta.

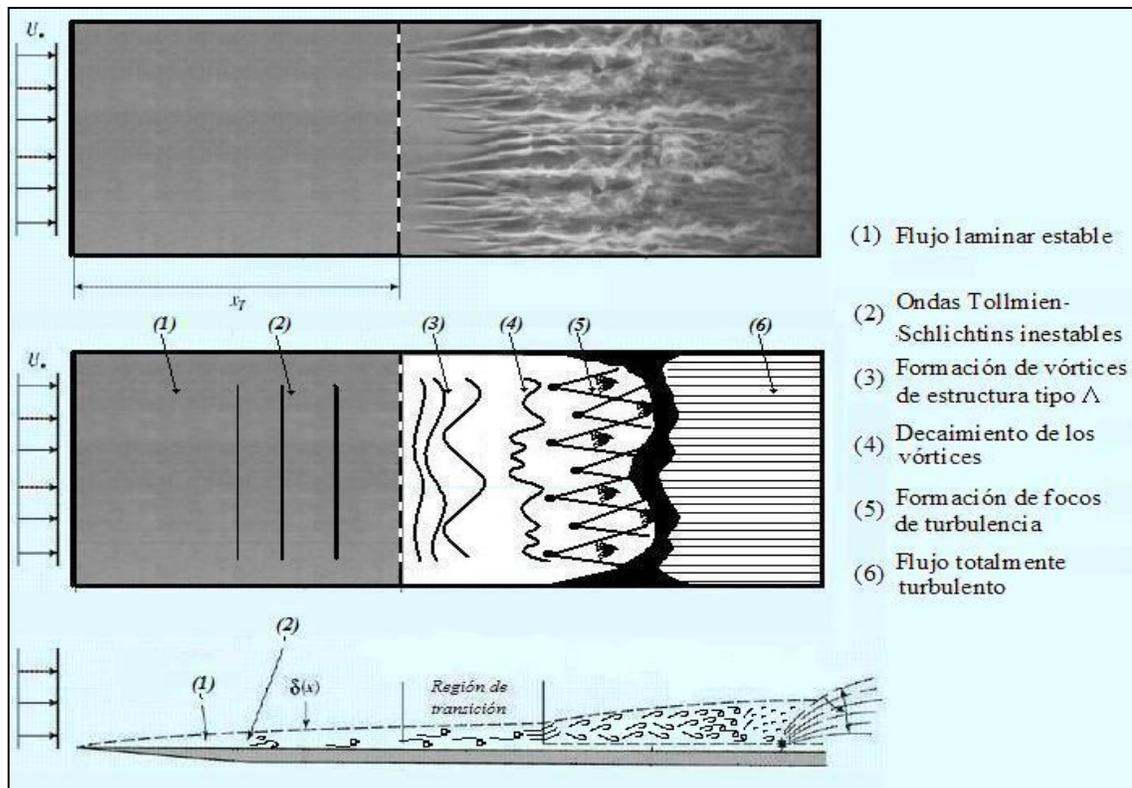


Fig. 1.2 Desarrollo de la transición a flujo turbulento sobre una placa plana

(Imagen basada en las descripciones de las referencias [2], [20] y [21])



Otra característica es que la velocidad y la presión, en un punto fijo en el espacio, no son constantes en un intervalo de tiempo dado, por lo que ambas variables fluctúan dando posibilidades a los modelos RANS de intervenir en la predicción del fenómeno de transición, debido a que estos promedian la velocidad en un intervalo de tiempo suponiendo en un punto un movimiento cuasi-estable y finalmente utilizan este valor promedio como una constante fija en el espacio para realizar el cálculo en las ecuaciones de Navier -Stokes.

Si hablamos de transición, se piensa en un fenómeno complicado que no obedece directamente al principio de inestabilidades y que indirectamente dichas inestabilidades atraviesan por un proceso complejo no lineal y tridimensional, por lo que ni correlaciones laminares, ni correlaciones totalmente turbulentas funcionan correctamente para su predicción. El método empírico más común es la siguiente correlación implícita:

$$1690 \cdot \text{Re}_{x,tr}^{-1/2} = 0.312 \cdot (m + 0.11)^{-0.528} + 4.8 \cdot \delta_{99}^2 \cdot \text{Re}_{x,tr}^{1/2} \cdot T^2 \quad (1.11)$$

Donde $\text{Re}_{x,tr}$ es el Número de Reynolds basado en la velocidad local U de la corriente libre; El parámetro m esta relacionado al gradiente de presiones adimensional en donde $m = 0$ para el gradiente de presión cero; δ_{99} = es el 99% del espesor de la capa límite local; $T = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{k}{U}\right)}$ es la intensidad de la turbulencia local en la corriente libre.

Por otro lado, es necesario mencionar que el número de Reynolds crítico depende fuertemente de las condiciones particulares del caso en estudio y que la transición altera notablemente las leyes de arrastre, ya que en el momento en que inicia, parámetros como la resistencia a la fricción, la resistencia al avance, la transmisión de calor o la capacidad de mezclado se ven considerablemente afectados por perturbaciones, que se intensifican al paso del flujo por la superficie, en donde los máximos locales en el rozamiento, la temperatura de la pared y la transferencia de calor, ocurren a menudo cerca del final de dicha región.



La relevancia del estudio de dicho fenómeno, es que las propiedades de rendimiento operativo tanto en turbinas, cámaras de combustión, como en la siguiente generación de aeronaves serán determinadas en un futuro, por el régimen de transición fijado por las variables del problema.

A continuación, se muestra la solución para determinar los coeficientes de fricción laminar y turbulento, para el caso del placa plana de la figura 1.1.

1.1.2.2 SOLUCIÓN DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN LAMINAR.

El espesor y el coeficiente de fricción de capa límite laminar para el caso de una placa plana, se obtiene de manera analítica mediante las siguientes formulaciones:

Las fuerzas de inercia por unidad de volumen para un fluido tipo newtoniano son aproximadamente igual a $\rho u \cdot (\partial u / \partial x)$. Para una distancia x , $\partial u / \partial x \approx U/x$ por lo que las fuerzas de inercia son del orden de U^2/x .

Las fuerzas de fricción por unidad de volumen para un fluido tipo newtoniano son aproximadamente igual a $\partial \tau / \partial y$; como es el caso laminar son equivalentes a $\mu \cdot \partial^2 u / \partial y^2$, tomando en cuenta que el gradiente es del orden de U/δ , se determina que $\partial \tau / \partial y = \mu \cdot U / \delta^2$ si se hace el balance de fuerzas y se resuelve la expresión para determinar el espesor de capa laminar:

Balance de fuerzas:

$$\mu \frac{U}{\delta^2} \approx \rho \frac{U^2}{x}$$

Espesor de capa límite:

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U}}$$



La constante de proporcionalidad deducida de la solución exacta dada por Blasius, es igual a 5, quedando:

$$\delta = 5 \cdot \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U}} = \frac{5x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (1.4)$$

Los esfuerzos cortantes en la pared pueden ser expresados de la siguiente manera

La solución de los esfuerzos cuando $\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{y=0}$ son igual a:

$$\tau_w = \frac{0.332 \rho U^2}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (1.5)$$

Y el coeficiente de fricción se define como:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (1.6)$$

1.1.2.3 SOLUCIÓN DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN TURBULENTO.

Para el caso del perfil de velocidades se utiliza un exponente empírico 1/7.

$$\frac{u}{V} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} = \eta^{1/7} \quad (1.7)$$

El cual está restringido a las vecindades de la pared, donde la variación de $\partial u / \partial y = \infty$. Debido a esto, no es posible usarlo para la definición de esfuerzos cortantes.

Para el espesor de capa límite turbulenta, este es aproximadamente igual a:

$$\delta = \frac{0.37x}{(\text{Re}_x)^{1/5}} \quad (1.8)$$

Para el caso esfuerzos cortantes, se usa una expresión desarrollada para flujo a través de conductos cilíndricos:

$$\tau_w = 0.332 \rho V^2 \left(\frac{\nu}{V \cdot R} \right)^{1/5} \quad (1.9)$$



Por lo que el coeficiente de fricción es:

$$C_f = \frac{0.0577}{(Re_x)^{1/5}} \quad (1.10)$$

Estas ecuaciones son válidas para Números de Reynolds de $5 \times 10^5 < Re_x < 1 \times 10^7$ con un margen de error del 3%.

Ya una vez obtenidos los espesores, se puede ver claramente que la capa límite turbulenta se desarrolla más rápido que la capa límite laminar. La figura 1.3 muestra de manera clara las zonas de capa límite laminar ($X_T + X'$) y capa límite turbulenta (X_{Turb}), en donde se observa que la primera continúa desarrollándose aún después de que comenzó a formarse la zona turbulenta.

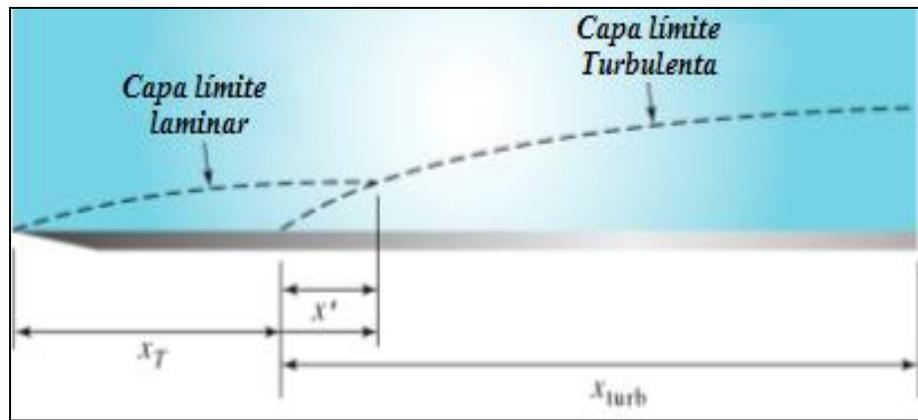


Fig. 1.3 Zonas laminar y turbulenta sobre una placa plana

(Imagen tomada de la referencia [18])

1.2 VARIABLES QUE INFLUYEN EN LA TRANSICIÓN

A continuación se resumen las variables más relevantes que influyen en las características el fenómeno de transición, en donde es necesario mencionar que la mayoría de los modelos que pronostican la transición sólo son sensibles a un número muy limitado de variables que influyen en ella, por lo que a continuación de manera descriptiva y para el entendimiento de la complejidad del fenómeno se enlistaron las más representativas.



1.2.1 GRADIENTES DE PRESIÓN

Por lo general, en la región del cuerpo cilíndrico donde la presión disminuye, aparecen perfiles de velocidad acelerados y el límite de estabilidad es alto, sin aparecer puntos de inflexión, caso contrario cuando la presión aumenta, el flujo se desacelera y el límite de estabilidad es bajo, apareciendo puntos de inflexión.

Aunque se ha demostrado que el límite de estabilidad es fuertemente dependiente de la forma del perfil de velocidad, este último es equivalente a la gran influencia del gradiente de presión. El control del gradiente de presión es de acuerdo a la curvatura del perfil de velocidad definido por la siguiente ecuación:

$$\frac{dP}{dx} = \mu \cdot \left(\frac{d^2U}{dy^2} \right)_w \quad (1.11)$$

La existencia de gradientes de presión adversos como favorables, afectan de manera diferente la zona de transición. Para el caso de gradientes de presión favorable, por lo regular las zonas de transición son largas e incluso se tienen zonas de relaminarización de flujos turbulentos [16]. Los gradientes de presión favorables dentro de la capa laminar retrasan la transición y generan una región más extensa. Los resultados en la teoría de estabilidad lineal pueden explicar el principio del retraso; Narasimha, Subramanian y Badri Narayanan [16] sugieren que estos resultados pueden también explicar la gran extensión de la zona de transición.

Para el caso de gradientes de presión adversos la transición comienzan rápidamente, se extienden por una pequeña distancia y es más bidimensional que la transición de flujos dentro de gradientes de presión cero. La formación de la burbuja de separación laminar en el flujo y la posibilidad de una inestabilidad de la capa de cortadura terminan generando vórtices que son arrastrados y estirados corriente abajo por los gradientes de velocidad elevados.



1.2.2 COMPRESIBILIDAD

Uno de los principios básicos del flujo compresible, es que la densidad de un gas cambia cuando se ve sometido a grandes variaciones de la velocidad o en la presión, al mismo tiempo su temperatura también cambia, lo que lleva a un análisis más complicado. El efecto de la compresibilidad se manifiesta de manera crítica cuando el flujo en la corriente libre es supersónico o hipersónico, trayendo consigo efectos en la transferencia de calor.

Las perturbaciones en la corriente por efecto del número de Mach se pueden dividir en tres categorías, las de flujo subsónico, transónico y supersónico, todas dependiendo de la velocidad relativa entre el flujo de la corriente U_∞ y la velocidad de fase c_T . La condición suficiente para la existencia de una perturbación subsónica inestable en la capa límite es:

$$\left[\frac{d}{dy} \left(\delta \frac{dU}{dy} \right) \right]_{y_s} = 0 \quad (1.12)$$

Donde y_s es la distancia de la pared al punto de inflexión en un flujo incompresible, y_s también es definida como la distancia de la pared a un punto de inflexión generalizado, ya que en este punto, se tiene una perturbación subsónica neutra cuando:

$$c_r = c_s = U(y_s) \quad (1.13)$$

Para el caso de una perturbación transónica neutra:

$$c_r = c_0 = U_\infty - a_\infty \quad (1.14)$$

La influencia del número de Mach en la naturaleza de las ecuaciones de estabilidad y de capa límite, frecuentemente es considerada para números grandes, por ejemplo, para Mach igual a 2, se tiene un efecto dominante en la inestabilidad durante la transición. Esta inestabilidad tiene capas críticas lejos de la pared; por tanto, la típica secuencia de los eventos observados para flujos incompresibles podría no ocurrir, en adición como las



fluctuaciones del número de Mach podrían alcanzar 0.3, en donde el resultado de turbulencia llegaría a ser significativamente diferente a los casos subsónicos [20].

1.2.3 PERTURBACIONES EN LA CORRIENTE LIBRE

Básicamente existen tres tipos de distorsiones que genera la corriente libre turbulenta: la *vorticidad* en la corriente; la generación de *entropía* debida al aumento de temperatura; y por último, la *acústica* debido al aumento de las ondas de presión. Dentro de los túneles de viento subsónico con mallas generadoras de turbulencia, la mayoría de las perturbaciones son por vorticidad, ya que en el caso de túneles de viento transónico y supersónicos, la mayoría son acústicas [2].

El tipo de distorsión dentro de las aplicaciones práctica es particular de cada caso. Las notas de Bushnell [18] para aeronaves subsónicas, muestran que son altamente susceptibles a las perturbaciones acústicas generadas por sus motores y el fuselaje del avión. Para el caso de aeronaves que vuelan a altitudes mayores a los 24 km. cualquier partícula pueden ser fuente de perturbación generadora de vorticidades. Los álabes de turbina dentro del motor de una aeronave, probablemente sean los más propensos a experimentar distorsiones de los tres tipos previamente mencionados.

1.2.4 LA CURVATURA GEOMÉTRICA

La inestabilidad Görtler, es la que se desarrolla en regiones de curvatura de la pared cóncava, es en esencia diferente de las usuales inestabilidades viscosas que se conoce en la transición inicial sobre placas planas. En lugar de que las líneas de corriente viajen libremente, la inestabilidad de Görtler se manifiesta como pares de vórtices contrarrotantes. Estos vórtices alteran el tiempo promedio del perfil de velocidades del flujo mucho antes de que se pueda considerado turbulento. Las diferencias importantes en la física del proceso de transición son posibles en este caso.

1.2.5 RUGOSIDAD EN SUPERFICIES

En muchos casos investigados, la rugosidad tiene simultáneamente un efecto sobre el gradiente de presión, la intensidad de la turbulencia o el número de Mach, la cual la hace considerable y de suma importancia práctica, pero inaccesible a un tratamiento teórico. En



general, todas las superficies tienen algún grado de rugosidad, ejemplos, las articulaciones y los sujetadores, que actúan como elementos de gran rugosidad al presentar discontinuidad en las geometrías, también rayones múltiples, restos de insectos y materiales no homogéneos contribuyen a la distribución de rugosidad.

Los efectos de las imperfecciones de la superficie pueden variar drásticamente, por lo que dependiendo de las características de la rugosidad y su localización, afectan en el crecimiento de la capa límite. Puede decirse que los efectos de la rugosidad favorecen a la transición a flujo turbulento, adelantándola con números de Reynolds relativamente bajos o puede actuar como enlace de inestabilidades primarias y también como una fuente de receptividad para esas distorsiones.

1.2.6 SUPERFICIES CALIENTES O FRÍAS

El calentamiento uniforme dentro de un flujo de agua dentro de la capa límite, tiende a estabilizar el fluido debido a la disminución de la viscosidad cerca de la pared; en aire, la tendencia es contraria. Sin embargo, Masad y Nayfeh [5] muestran que calentando una tira ubicada corriente arriba de la curva de estabilidad neutral, puede en realidad ayudar a estabilizar una parte de la capa límite del aire, presumiblemente porque la capa límite que esta corriente abajo de la sección caliente, ve un relativo enfriamiento de la pared.

Para el caso cuando existe película de enfriamiento en toda la pared, esta actuara como estabilizador de la capa límite, incrementando el valor del número de Reynolds de perturbación neutra, o en su defecto, retrazando el inicio de la transición. Caso contrario, cuando existe calentamiento en toda la pared, esta funciona como una agente desestabilizador.

Los efectos de calentamiento o enfriamiento de superficies en el proceso de transición del flujo son varios, los cuales pueden estabilizar o desestabilizar la capa límite. En el caso de flujos subsónicos, son consecuencia de la dependencia de la viscosidad respecto a la temperatura y del efecto de la misma viscosidad sobre el perfil de velocidades del flujo. La ecuación (1.13) muestra perfil de velocidades en la pared de una placa plana a 0° de incidencia:



$$\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_w = \frac{1}{\mu_w} \left(\frac{d\mu}{dy}\right)_w \left(\frac{dU}{dy}\right)_w \quad (1.15)$$

Si solamente es considerada una diferencia de temperaturas finita $T_w - T_\infty$, tendremos la siguiente relación para el número de Reynolds de estabilidad neutra válida para todo fluido que pase sobre una placa plana:

$$\text{Re}_{\text{inf}} = (\text{Re}_{\text{inf}})_\infty \left[1 + \frac{T_w - T_\infty}{T_\infty} \left(\frac{d\mu}{dT} \frac{T}{\mu} \right)_\infty A_\mu(\text{Pr}_\infty) \right] \quad (1.16)$$

Donde $A_\mu(\text{Pr}_\infty)$ es una función negativa y depende de la consideraciones del flujo. Para $T_w = \text{constante}$ $A_\mu(\text{Pr}_\infty = 8.1) = -1.2$

Los fenómenos de calentamiento y enfriamiento son sumamente complicados para flujos supersónicos. Dentro del flujo supersónico, en las paredes frías generalmente se estabiliza para el primer modo de inestabilidad (el modo que continúa analíticamente del modo subsónico más inestable). Para aplicaciones de turbinas de gas, el calentamiento o enfriamiento de la pared son probablemente de importancia secundaria. Experimentar con alto niveles de corriente libre turbulenta ($T > 1.6\%$) dentro de un flujo subsónico indica que el enfriamiento de pared no afecta ni la ubicación ni la longitud de transición.

1.2.7 INYECCIÓN O SUCCIÓN DE FLUJO MÁSSICO

La inyección de flujo másico es muy común en álabes de turbina, ya que es posible suministrar una película de enfriamiento alrededor del álabe. El fluido es típicamente inyectado cerca del borde de ataque del álabe, donde los gradientes de presión se presentan muy fuertes. Mayle [5] reporta que bajo estas condiciones, ninguna capa límite laminar o turbulenta se presentan, excepto corriente abajo. En presencia de un gradiente de presión favorable, las regiones turbulentas a nivel local excitadas cerca de los huecos de inyección pueden relaminarize y pasar por una transición normal aguas abajo.

El proceso contrario, es la succión de flujo en la pared y llega a ser usado para ayudar a estabilizar la capa límite en flujos suaves y retrasar el inicio de la transición. La optimización, frecuentemente envuelve el uso de una pared de succión cerca de la curva de



estabilidad neutral. Usualmente, la succión no es aplicada dentro de la región de transición, así que la información sólo es válida para en el inicio de la misma.

1.2.8 SEPARACIÓN DE FLUJOS

La separación de flujos ocurre dentro de los gradientes de presión adversos, donde la cantidad de momento del fluido dentro de la capa límite es insuficiente para superar la variación de la presión. La separación de la capa límite es muy común para flujos laminares, porque no es fácil el transporte del momento a través de la capa límite, como en el caso de flujos turbulentos que suelen transportar grandes cantidades de momento.

Usualmente, una región de flujo laminar separado, pasará por la transición como una capa de cortadura y posteriormente se transformara en un flujo turbulento. La longitud de la región de separación puede ser breve o larga; Pequeñas burbujas tiene solo el efecto local sobre el flujo, mientras que las grandes burbujas interactúan extensivamente con el flujo exterior y modifican significativamente la distribución de presión sobre la superficie. Pequeñas burbujas podrían convertirse en grandes burbujas y posiblemente terminar en pérdidas. Los datos limitados indican que una transición con ambos tipos de burbujas son esencialmente los mismos, con la diferencia en la duración de las grandes burbujas debido a la longitud de la capa de cortadura [20]. Algunos expertos han teorizado que las burbujas grandes pasan por una inestabilidad principal mientras las burbujas pequeñas experimentan una transición de bypass.



CAPÍTULO II

En este capítulo se describen generalidades de los métodos de cálculo para flujo turbulento y se realiza una clasificación de los modelos de transición, se muestran las expresiones matemáticas de algunos modelos de transición diferenciales y se realiza una preselección con la finalidad de analizar su implementación en los modelos de turbulencia del capítulo III.

2.1 GENERALIDADES DE LOS MÉTODOS DE TURBULENCIA

Los métodos para calcular el flujo turbulento son diversos, puede ser desde la resolución numérica directa de las ecuaciones de Navier-Stokes o métodos DNS (Direct Numerical Simulation), en donde todas las escalas espaciales y temporales del movimiento son resueltas numéricamente sin promediados o aproximaciones de manera más precisa; el único modelado que involucra es el asociado con la derivación de las ecuaciones de Navier-Stokes y las condiciones de frontera; los posibles errores de cálculo son los provenientes de las discretizaciones numéricas.

La simulación de grandes remolinos o LES (Large-Eddy Simulation), es otro método para calcular el flujo turbulento, en donde las escalas grandes del movimiento de los remolinos son programadas debido a que las capacidades de transporte de propiedades son más efectivas. En el caso de las escalas pequeñas, tomando en cuenta su mayor homogeneidad y universalidad son las únicas modeladas, esperando que sus formulaciones sean simples y requieran de pocos ajustes.

Por último, los tipos de aproximación que se usan con más frecuencia, son los modelos basados en el promediado de Reynolds de las ecuaciones de Navier-Stokes o modelos RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes equation), estos utilizan métodos estadísticos y probabilísticos, siendo de los más populares en las últimas décadas.



A continuación se realiza una clasificación general de los modelos de transición y se describen sus posibles implementaciones en algún método de cálculo para flujo turbulento.

2.2 CLASIFICACIÓN GENERAL DE LOS MODELOS DE TRANSICIÓN

La clasificación de los modelos de transición, puede incluir desde una técnica numérica hasta el tipo de modelo de turbulencia a utilizar, esto tomando en consideración algunas modificaciones realizadas para enfrentar dicho fenómeno. En ocasiones, también son válidas las combinaciones híbridas de las mejores cualidades de cada modelo para predecir algunos casos particulares. Por otro lado, es necesario hacer hincapié, que el éxito o el fracaso de cualquier propuesta dependerá del esquema utilizado para calcular el flujo turbulento.

Los tres grandes grupos que se describen a continuación, conforman la clasificación más general en que puede caer un modelo de transición.

2.2.1 MODELOS DE COMBINACIÓN LINEAL.

Los modelos de combinación lineal, están basados en la suposición de que el flujo de transición, está compuesto por zonas intermitentes de turbulencia inmersas en un flujo laminar, en otras palabras, es la coexistencia de estados completamente laminares y turbulentos en una región de la capa límite. Bajo esta suposición, el tiempo promedio del campo de flujo, producto de la combinación lineal de flujos se origina donde comienza la transición. Las cantidades respectivas de los flujos, son gobernadas por la intermitencia, la cual esta definida como la fracción del tiempo en que el flujo turbulento actúa dentro de ciertas zonas. El aspecto más difícil de este enfoque es la determinación de una apropiada distribución para la intermitencia. Una característica importante además de favorable en este tipo de modelos, es que puede ser acoplado con cualquier método de cálculo de flujo turbulento.



La suposición básica del modelo ha sido cuestionada en muchas ocasiones por investigadores que afirman que la región de transición, por lo menos en algunos flujos, es más complicada que una mezcla simple de flujos laminar y turbulento.

2.2.2 MODELOS ALGEBRAICOS

Los modelos algebraicos son diseñados para ser incluidos en modelos de turbulencia que usan la suposición de remolinos viscosos. Ellos involucran una modificación de la viscosidad efectiva como:

$$\mu_{eff} = \mu + \gamma_t \mu_t \quad (2.1)$$

Donde γ_t es una función de transición igual a cero antes de que comience la transición e igual a 1 en el momento en que concluye. Modelos diferentes usan varias funciones para representar γ_t . Algunos modelos usan γ_t para aproximar la intermitencia del flujo; en otros modelos γ_t es más grande que 1 en zonas de la región de transición y no puede representar la verdadera intermitencia. El uso de modelos algebraicos es conveniente, porque estos modelos involucran modificaciones más simples comparadas con las de los modelos de remolinos viscosos.

2.2.3 MODELOS DIFERENCIALES

Los modelos diferenciales son relacionados a las ecuaciones fundamentales que gobiernan la mecánica de los fluidos viscosos para el caso de la transición, el fenómeno es frecuentemente guiado con otras modificaciones para números de Reynolds bajos, que son usadas simultáneamente en muchos de los modelos de turbulencia que trabajan con las *ecuaciones de transporte*. La ventaja de dichos modelos es que son fáciles de implementar



en las ecuaciones diferenciales de Navier-Stokes, por lo que en el caso de una resolución numérica directa son más efectivos¹.

A continuación una matriz de clasificación muestra las posibles implementaciones de los modelos de transición en algún método de cálculo para flujos turbulentos.

Tabla 2.1 MATRIZ DE COMBINACIÓN ENTRE MODELOS Y MÉTODOS

	Combinación Lineal	Algebraicos	Diferenciales
Simulación Numérica Directa	X		X
Simulación de grandes remolinos	X	X	X
Transporte de esfuerzos de Reynolds	X	X	X
Transporte de dos ecuaciones	X	X	X
Transporte de una ecuación	X	X	X
Transporte de cero ecuaciones	X	X	
Métodos Integrales	X		

En la Tabla 2.1 se observar que los modelos de transición de combinación lineal, son los más adaptables con cualquier método de turbulencia, no así su facilidad de implementación y control de las cantidades intermitentes del flujo turbulento. Lo anterior es una ventaja que poseen los modelos diferenciales debido a que la mayoría de los métodos de turbulencia están expresados en ecuaciones diferenciales, esto permite una mejor implementación y control de las cantidades de turbulencia en sus razones de cambio, además de una adecuada aplicación de las técnicas numéricas.

En la siguiente sección se describen los modelos diferenciales de transición más populares debido a sus ventajas de implementación y tiempo de pruebas.

¹ Uno de los principales problemas en el desarrollo de modelos de transición, es que en la mayoría de los casos el inicio de la transición debe ser especificada, por comodidad, los modelistas de turbulencia la especifican en el borde de inicio de la geometría o en la zona de máxima presión de succión, provocando una aproximación burda de la película de fricción y de los esfuerzos cortantes.



2.3 MODELOS DIFERENCIALES PARA TRANSICIÓN

En los modelos que a continuación se presentan, las ecuaciones de transporte han sido modificadas para el proceso de transición específicamente. La mayoría de estas modificaciones son empíricas; por lo tanto, pueden ser aplicadas solamente al régimen para el cual las correlaciones han sido formuladas.

Es necesario mencionar que las ecuaciones de transporte relacionadas con los modelos de turbulencia, permiten el paso de una corriente libre turbulenta dentro de la capa límite laminar. Cuando el nivel de turbulencia en la corriente es suficientemente alto, la relación de difusión puede exceder la relación de disipación y activar los mecanismos con que trabaja el método de turbulencia, respondiendo de la misma manera que para un flujo turbulento, así, un pseudo proceso de transición ocurre y el final, es una capa límite totalmente turbulenta.

2.3.1 MODELO DE TRANSICIÓN EN EL MÉTODO ESTÁNDAR $k - \varepsilon$.

Briey [2] implemento el parámetro A^+ en el modelo estándar $k - \varepsilon$ para controlar el proceso de transición como una función interruptor de la escala de longitud de transporte de turbulencia, calculando la mayor parte del flujo con el modelo de $k - \varepsilon$ y utilizó el modelo de una-ecuación de Reynolds para la región cercana a la pared, por lo que definido al parámetro A^+ de la siguiente manera:

$$A^+ = A_t^+ + (300 - A_t^+) \left[1 - \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{\text{Re}_\theta - \text{Re}_{\theta_s}}{\text{Re}_{\theta_s}} \right) \right]^3 \quad (2.2)$$

Donde A_t^+ es el valor total de la turbulencia y Re_{θ_s} es el número de Reynolds al inicio de la transición basado en la densidad del momento. El valor de A^+ para transición, solamente es usado cuando $\text{Re}_{\theta_s} < \text{Re}_\theta < 2\text{Re}_{\theta_s}$. Para el número limitado de casos verificados, el acuerdo es satisfactorio.



Los números de Reynolds para el inicio y fin de la transición, fueron correlacionados mediante un grupo de experimentos llevados a cabo por Abu-Ghannam y Shaw[16] para diferentes flujos incompresibles con gradientes de presión y turbulencia en la corriente libre. Ambos expertos presentaron las siguientes ecuaciones:

$$\text{Inicial} \quad \text{Re}_{\theta_s} = 163 + \exp \left[F(\lambda_\theta) \left(1 - \frac{Tu}{6.91} \right) \right] \quad (2.3)$$

$$\text{Final} \quad \text{Re}_{\theta_e} = 540 + 183.5(R_L \times 10^{-5} - 1.5)(1 - 1.4 - \lambda_\theta) \quad (2.4)$$

Dentro de estas expresiones $\lambda_\theta = (\theta^2 / \nu) dU_e / dx$ y R_L , es un número de Reynolds de longitud dado por

$$R_L = 16.8(\text{Re}_{x_s})^{0.8} \quad (2.5)$$

Donde Re_{x_s} es el número de Reynolds a la distancia x de inicio de la transición. La función $F(\lambda_\theta)$ es dada por:

$$F(\lambda_\theta) = 6.91 + 12.75\lambda_\theta + 63.64\lambda_\theta^2 \quad (\lambda_\theta \leq 0)$$

$$F(\lambda_\theta) = 6.91 + 2.28\lambda_\theta - 12.27\lambda_\theta^2 \quad (\lambda_\theta > 0)$$

Los números de Reynolds inicial y final fueron determinados por mediciones en los experimentos de Abu-Ghannam y Shaw con una prueba fija y variando las condiciones de la corriente libre. Fujisawa, Rodi, y Schönung [2] modifican la forma de A^+ con el propósito de que la relación empírica incluya tanto el inicio como el final de los números de Reynolds de transición.



$$A^+ = A_t^+ + (300 - A_t^+) \left[1 - \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{Re_\theta - Re_{\theta_s}}{Re_{\theta_e} - Re_{\theta_s}} \right) \right]^3 \quad (2.6)$$

Fujisawa, Rodi, y Schönung [2] también usan una condición combinada diferente para los modelos de una y dos ecuación donde:

$$y^+ = 6.1A^+ \sqrt{\frac{u_k^2}{k}} \quad (2.7)$$

Resultados particulares son sorprendentes, esto porque el parámetro A^+ esta basado en la densidad del momento el cual decrece cerca del mínimo número de Stanton en los experimentos para la región laminar. Una evaluación cuidadosa de este resultado, revela que para este caso, la buena comparación es accidental; La correlación de Abu-Ghannam y Shaw, pronostica el inicio de la transición corriente arriba para el mínimo número de Stanton ($Re_\theta \approx 300$ de la correlación; el $Re_\theta \approx 365$ para el mínimo numero de Stanton), este acontecimiento accidental provoca el inicio del modelo de turbulencia lo suficientemente lejos de la corriente arriba, donde la densidad del momento todavía está aumentando, suficiente turbulencia se genera que la densidad del momento nunca disminuye.

Los elementos de fluido cerca del borde de la capa límite son direccionados y el crecimiento local de Re_θ es monitoreado y comparado con el Re_s teórico para los gradientes de presión y los parámetros de la turbulencia de la corriente libre en locación dentro del intervalo de tiempo. Cuando Re_θ excede el valor de Re_s local, ese valor es guardado y usado en la determinación de A^+ para todas las ubicaciones corriente abajo de ese elemento de fluido. Con este modelo, las cantidades de flujo pronosticadas coinciden bien con el experimento sobre la mayor parte de la superficie. Sin embargo, las discrepancias ocurren con las intensidades de turbulencia cerca del borde de ataque los alabes de turbina, porque la capa límite es muy fina en esta área. Tales discrepancias no son problema corriente abajo.



2.3.2 MODELO DE TRANSICIÓN SCHMIDT - PATANKAR $k - \varepsilon$.

Basado en los conocimientos adquirido del estudio comparativo, Schmidt y Patankar[2] hablan de un modelo $k - \varepsilon$ que da indicaciones razonablemente exactas del punto de partida y la extensión de la transición para un numero de casos particulares. Sus modificaciones se ajustan dentro del esquema general de modelos $k - \varepsilon$ para números de Reynolds bajos, además satisfacen dos requisitos adicionales:

1. Existe una región bien definida donde los perfiles de arranque pueden ser especificados con la mínima sensibilidad.
2. Las predicciones de la transición en cuanto a las ubicaciones de inicio y fin coincidieron adecuadamente con las correlaciones de Abu-Ghannam y Shaw [16].

Modificaciones específicas de Schmidt y Patankar son adaptadas por Lam y Bremhorst[2] para formular el modelo estándar $k - \varepsilon$ a números de Reynolds bajos. En lugar de modelar el término de producción de energía cinética turbulenta con la aproximación convencional de remolinos viscosos $P_k = \rho \overline{u'_i u'_j} (\partial \bar{u}_i / \partial x_j)$, Schmidt y Patankar restringen la rapidez de crecimiento del término de producción, al mismo tiempo controlan la relación en que se desarrolla la transición. Sin necesidad de comprender los detalles de los procesos pueden conocer su segundo objetivo con una formulación empírica dónde:

$$\frac{dP_{k \max}}{dt} = B_1 P_k + B_2 \quad (2.8)$$

Donde B_1 y B_2 son parámetros empíricos determinados por la optimización numérica sobre un rango par de la intensidad de la turbulencia desde 0.5 % a 10 %. También se requiere que $P_k = 0$ cuando el número de Reynolds este por debajo de un valor crítico.



Incluso en el modelo sin producción de k dentro de la capa de límite la energía cinética puede ser convectiva en la corriente libre. Schmidt y Patankar también modifican la función interruptor de remolinos viscosos f_μ con el propósito de que nunca exceda la unidad, este cambio permite al modelo $k - \varepsilon$ simular la transición con niveles de turbulencia en la corriente libre de por lo menos el 1 %.

El nuevo modelo de Schmidt y Patankar [2] es insensible a la localización del inicio cuando el número de Reynolds- x inicial es menor a 1000, para estas localizaciones iniciales la solución es también insensible a los perfiles de arranque. Este modelo puede fallar si la densidad del momento laminar disminuye antes de que el modelo de turbulencia entre en vigor.

2.3.3 MODELO DE TRANSICIÓN EN EL MÉTODO DE WILCOX $k - \omega$.

Wilcox modificó su modelo $k-\omega$ para explicar los efectos de transición en el flujo, de la misma manera que Schmidt y Patankar [2], las modificaciones retrasan el inicio de la transición y extienden su longitud. Dentro del modelo de Wilcox, las constantes en la versión estándar del modelo $k-\omega$ son funciones del número de Reynolds turbulento $R_T = k/(\omega\nu)$. En la versión para número de Reynolds alto $\alpha^* = 1$; los usos de versiones nuevas utilizan el siguiente parámetro:

$$\alpha^* = \frac{\alpha_0^* + R_T/R_k}{1 + R_T/R_k} \quad (2.9)$$

Donde $\alpha_0^* = \beta/3$ y $R_k = 6$. Cuando R_T consigue crecer, α^* toma el valor máximo del número de Reynolds. De manera similar α que era igual a 5/9, ahora se va asintóticamente a ese valor; sin embargo, para R_T bajos, α queda determinada por la siguiente relación:



$$\alpha = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{\alpha^*} \cdot \frac{\alpha_0 + R_T/R_\omega}{1 + R_T/R_\omega} \quad (2.10)$$

$$\beta^* = \frac{9}{100} \cdot \frac{5/18 + \left(R_T/R_\beta\right)^4}{1 + \left(R_T/R_\beta\right)^4} \cdot \left(f_{\beta^*}\right) \quad (2.11)$$

Donde $\beta = 3/40 \cdot f_\beta$, $\sigma^* = \sigma = 1/2$, $\alpha_0^* = 1/3 \cdot \beta_0$, $\alpha_0 = 1/9$

$$R_k = 6, \quad R_\omega = 2.7, \quad R_\beta = 8$$

Todos los valores son el resultado de la optimización computada y la comparación con estadística de la subcapa turbulenta. Las tres constantes R_k , R_ω y R_β controlan la relación en que los coeficientes de cierre aproximan sus valores a elevados números de Reynolds pertenecientes a un flujo totalmente turbulento. Nosotros podemos determinar estos valores usando los métodos de perturbación o realizando un análisis de estabilidad en la subcapa viscosa. Dados los valores R_k y R_β hay un valor único de R_ω que toma un valor constante de acuerdo a la ley de pared. Cuando R_β se incrementa crece el valor máximo de k cerca de la pared. Comparando resultados de la subcapa con el método DNS de Manssur, Kim y Moin de 1988 indican que es óptima la elección de los valores de los tres coeficientes.

2.4 ANTECEDENTES DE LOS MODELOS RANS PARA TRANSICIÓN

Los modelos de turbulencia RANS han sido usados para modelar la región de transición por décadas. Launder y Spalding[2] sugirieron que para bajos números de Reynolds el modelo $k - \varepsilon$ tenía así mismo incorporado el criterio de transición.



El pseudo proceso de transición toma en cuenta varios detalles en los cálculos particularmente los perfiles de inicio que varía las cantidades k y ε deben ser los apropiados y la posición de la corriente al ser iniciado el modelo.

Por otro lado, estudios detallados de la física del proceso de transición para elevados niveles de turbulencia en la corriente libre no han establecido la relación de la pseudo transición dentro de los modelos para problemas completamente verdaderos.

Schmidt y Patankar llevaron a cabo pruebas extensas con los modelos $k - \varepsilon$ de Jones - Launder y Lam – Bremhorst [2] para determinar su viabilidad en la simulación de la transición de la capa límite. Ambos concluyeron que para números de Reynolds bajos los modelos $k - \varepsilon$ pueden reproducir algunos aspectos cualitativos de la transición debido a la correspondencia débil entre una capa límite laminar en desarrollo, la sub-capa viscosa, la región de transición del flujo, la capa amortiguadora, además de la región de flujo totalmente turbulento. Posteriormente los modelos fueron evaluados y los especialistas determinaron que:

1. La localización del inicio de la transición pronosticada es moderadamente sensible a los perfiles iniciales para k y ε .

2. Aspectos cualitativos básicos de la transición son correctos como los niveles más altos de turbulencia, además de su temprano inicio; sin embargo, cuando los cálculos comienzan antes con el propósito de que la sensibilidad del modelo ubique la localización de inicio y la disminución de los perfiles, la transición es pronosticada constantemente de modo muy poco realista.

3. La longitud de la zona de transición es significativamente más pequeña que la encontrada de manera experimental. Además de los problemas identificado hasta ahora, Rodi demuestra que los modelos pasan por una zona de transición solo con niveles altos de turbulencia en la corriente libre ($Tu > 1\%$).



El modelo $k-\omega$ ha sido probado para pronosticar la transición de un flujo incomprensible sobre placa plana. Las localizaciones de inicio de la transición como una función de la intensidad de turbulencia en la corriente libre coinciden con los datos de Dryden [18], aunque existe un poco de sensibilidad al valor la corriente libre de ω . La extensión de la región de transición como una función de la localización de inicio de la transición da un paso satisfactorio con los datos de Dhawan y Narasimha [16]. El valor de la corriente libre de ω no afecta la duración de la región de transición aparentemente.

2.5 PRESELECCIÓN DE MODELOS RANS DE DOS ECUACIONES.

Para el Capítulo III, surge la necesidad de acotar el trabajo mediante la preselección de algunos modelos de turbulencia que a consideración del autor son los más adecuados para realizar tal estudio. La viabilidad para obtener estos modelos ya programados, la generalidad de sus ecuaciones, la flexibilidad para modificarlas y los recursos computacionales con que se cuentan, además del tiempo de prueba realizadas sobre el modelo, son los factores más importantes que se tomaron en cuenta.

El tiempo de estudio es reducido si se incluyen solo modelos ya programados con flexibilidad para ser modificado, en este punto, las ecuaciones mas generales son k y ε , por lo que los modelos RANS de dos ecuaciones, son los mas fácil de encontrar programados adecuadamente con opciones para ser ajustados. Por otro lado, los recursos computacionales con que se cuenta, restringen las aplicaciones DNS y la fineza de las mallas para modelos de siete ecuaciones, aumentando la complejidad y tiempo de cálculo.

Por todo lo anterior y debido a su generalidad de aplicación en una amplia variedad de casos, además de reducción de los costos por usos de licencia los modelos de dos ecuaciones con función de transición $k - \varepsilon$ y muy en especial, el modelo wilcox $k - \omega$, fueron los modelos más atractivos para iniciar nuestro estudio, prueba y análisis en los capítulos siguientes.



CAPITULO III

En este capítulo, se plantean las expresiones matemáticas más generales de los modelos RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes equation) de dos ecuaciones para flujos turbulentos y se analiza la implementación de las funciones de transición en las ecuaciones de los modelos de turbulencia preseleccionados en el capítulo anterior.

3.1 GENERALIDADES MATEMATICAS DE LOS MODELOS RANS

El usar modelos RANS para el pronóstico de la transición, no solo resulta práctico, sino económicamente factible debido a los elevados costos computacionales que requieren métodos directos como DNS, además de la facilidad para implementar funciones de transición, es posible modelar casos específicos. Expertos en la materia, aseguran que la idea de usar modelos del promediado de Reynolds de las ecuaciones de Navier – Stokes para predecir la transición, tiene una justificación teórica sólida, debido a que incluyen los términos de esfuerzos viscosos y son capaces de reproducir la física de problemas ingeniéviles particulares.

Es importante hacer hincapié en el esquema estadístico de la turbulencia en que están basados estos modelos, debido a que las cantidades de un flujo promedio son correlacionadas con cantidades fluctuando. Dichas correlaciones aparecen en las ecuaciones de cantidad de movimiento y en los términos de esfuerzos viscosos, por lo que la gran variedad de modelos radica en como son aproximadas tales correlaciones. Por ejemplo, hablando de los modelos de transporte de Reynolds, en donde cada una de las seis componentes de esfuerzos viscosos, pueden responder de manera independiente a las variaciones del flujo, por tal motivo, es necesario que las ecuaciones de transporte también sean modeladas de manera independiente para cada componentes, esto representa un problema sumamente complicado, ya que también deben ser modelados los términos de producción, disipación, transporte y rotación de la turbulencia; para el caso de los modelos de dos ecuaciones diferenciales, estas se resuelven solamente para determinar las escalas de



longitud y de velocidad; para los de una ecuación, solo se resuelve para determinar la escala de velocidad y se usan relaciones algebraicas para determinar la escala de longitud.

3.1.1 ECUACIONES BÁSICAS

Las ecuaciones de Reynolds, se derivan de la combinación de las ecuaciones diferenciales de conservación de la cantidad de movimiento para flujo estacionario tridimensional, sujetas a las de conservación de masa y energía. Tales ecuaciones, son promediadas durante un período de tiempo más grande que el característico usado para las fluctuaciones de las velocidades turbulentas.

Cuando es asumida la hipótesis de Stokes para un fluido Newtoniano, las ecuaciones de Navier-Stokes pueden ser escritas en su forma tensorial como sigue¹:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] \mu \quad (3.1)$$

Condicionadas a la conservación de la masa y de energía:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (3.2)$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(k_{th} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) + \Phi \quad (3.3)$$

Cuyas incógnitas base son p , u , v y w . Donde p representa la presión; u_i las velocidades u , v y w dependiendo de los subíndices; g_i representa las fuerzas de cuerpo; ρ la

¹ Es importante mencionar, que en este apartado será utilizada la notación tensorial cartesiana; los índices repetidos implican una sumatoria. Los índices del tensor son restringidos a las letras i, j, k, l , y m . El resto de los subíndices aclaran los significados de las variables específicas, el subíndice l indica la dirección respecto a la corriente; el 2, la dirección normal a la pared; el 3, la dirección respecto al espacio.



densidad; μ es la viscosidad; δ_{ij} es la delta de Kroneker; h la entalpía específica; k_{th} es la conductividad térmica y Φ la función de disipación viscosa igual a:

$$\Phi = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \left(\delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) \right] \quad (3.4)$$

Tomando en cuenta que estas formulaciones son aplicables tanto para flujo compresible como incompresible, existen dos caminos comunes para descomponer las variables del flujo. Se ejemplifica el proceso para flujo incompresible, en el cual se descompone cada variable instantánea f , p , u , v y w , en la suma de un valor medio y de una variación, haciendo referencia a la aritmética con variables fluctuantes del Reynolds estándar:

$$f = \bar{f} + f' \quad (3.5)$$

Donde f es la cantidad de flujo, \bar{f} es el promedio y f' su variación. Este valor de \bar{f} puede ser un promedio temporal o de conjunto:

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} f(t) dt \quad (3.6)$$

$\Delta t \rightarrow \infty$

Al promediar el Reynolds estándar, el promedio de una cantidad fluctuando es cero; por lo tanto $\overline{f'} = 0$ se verifica que:

$$\overline{f'} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} f'(t) dt = 0 \quad (3.7)$$

Para caracterizar la fluctuación se utiliza el valor **rms** (“root mean square”):

$$f_{rms} = \sqrt{\overline{f'^2}} = \left[\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} f'^2(t) dt \right]^{1/2} \quad (3.8)$$



Todos los modelos serán discutidos en su forma incompresible e isoentalpica. Por lo que las ecuaciones del promediado de Reynolds pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$\frac{\partial(\rho\bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{u}_i\bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij} \frac{\partial\bar{u}_k}{\partial x_k} \right) - \rho\overline{u'_i u'_j} \right] \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial\bar{u}_k}{\partial x_k} = 0 \quad (3.10)$$

Para flujo incompresible, el término “tensor de esfuerzos de Reynolds” es con frecuencia usado para referirse a la correlación de velocidad $-u'_i u'_j$. Por otro lado, la energía cinética de las fluctuaciones en la velocidad turbulenta para flujo incompresible, es definida como:

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (3.11)$$

En donde la relación de disipación real de k es:

$$\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)} \quad (3.12)$$

El símbolo ε es a menudo definido como la disipación real de la energía turbulenta para turbulencia homogénea. En el caso de flujos compresibles, la disipación real es considerablemente más complicada que:

$$\varepsilon \equiv \nu \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)} \quad (3.13)$$

El término adicional asociado a la relación de disipación $\nu \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}$, es combinado con los términos viscosos de trabajo dentro de la ecuación de energía cinética,



para formar el término de difusión de la energía cinética $\nu(\partial^2 k / \partial x_i \partial x_i)$, como es presentado aquí.

3.2 FUNCIONES DE TRANSICIÓN IMPLEMENTADAS EN LOS MODELOS

En esta sección se desarrollan las expresiones matemáticas de los modelos RANS de dos ecuaciones, con la finalidad de entender como fueron implementadas las funciones de los modelos diferenciales de transición y sus limitantes.

3.2.1 BASES GENERALES DE LOS MODELOS DE DOS ECUACIONES

En este tipo de modelos es usado el modelo de viscosidad de remolinos, en donde el “tensor de esfuerzos de Reynolds” es definido como:

$$-\overline{u'_i u'_j} = 2 \frac{\mu_t}{\rho} \overline{S}_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (3.14)$$

Tomando a:

$$\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.15)$$

\overline{S}_{ij} es la relación de esfuerzos del flujo promedio y el término de la derecha es necesario para la consistencia con la definición de k .

Adentrándonos un poco más en los modelos de dos ecuaciones, llamados así, porque son resueltas las ecuaciones diferenciales para el cálculo de las escalas de longitud y velocidad, las cuales son usadas para definir las viscosidades de remolinos en el modelo general.

Estos modelos asumen que la energía cinética de las fluctuaciones en la velocidad turbulenta, es usada para obtener la escala de velocidad. Caso contrario, existe una variedad de aproximaciones para determinar la escala de longitud, en donde lo más común es el desarrollo de una ecuación de transporte para la energía de disipación ε , ya que siempre



aparece de manera explícita en la ecuación de k . Una aproximación alternativa es la que envuelve la ecuación de transporte para la escala de tiempo turbulento τ , por lo que la escala de longitud turbulenta es proporcional a $k^{1/2}\tau$.

3.2.1.1 MODELO DE DOS ECUACIONES $k - \varepsilon$.

Este modelo fue considerado por su generalidad y extensión en aplicaciones de ingeniería, además de ser el más validado de todos los modelos, es uno de los más flexibles debido a su gran cantidad de variantes, cualidad que lo convierte en un modelo base en nuestro estudio.

Las ecuaciones que gobiernan este tipo de modelos de turbulencia, suelen escribirse como:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \varepsilon + D \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + c_1 f_1 \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) \left(-\overline{u'_i u'_j} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - c_2 f_2 \left(\frac{\varepsilon^2}{k} \right) + E \quad (3.17)$$

Se parte del modelado de la escala de longitud, la cual es aproximada de la siguiente forma:

$$l_2 = f_\mu \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad (3.18)$$

En donde la función f_μ ha sido incluida como una función interruptor para números de Reynolds bajos.

La viscosidad de remolinos esta definida como:

$$\mu_t = \bar{\rho} \nu_t = \bar{\rho} c_\mu k^{1/2} l_2 = \bar{\rho} c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.19)$$



Son identificados y definidos los términos de la ecuación (3.17) de ε para flujo incompresible:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \nu \nabla^2 \varepsilon + P_\varepsilon + D_\varepsilon - \Phi_\varepsilon \quad (3.17a)$$

Donde la tasa de producción de la disipación es:

$$P_\varepsilon \equiv -2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_k}} - 2\nu \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}} - 2\nu \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{u}'_i}{\partial x_k \partial x_j}} - 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_k}{\partial x_m}} \quad (3.20)$$

La tasa de la difusión turbulenta de disipación:

$$D_\varepsilon \equiv -\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_i}{\partial x_m}} \right) - 2\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\frac{\partial p'}{\partial x_m} \frac{\partial u'_k}{\partial x_m}} \right) \quad (3.21)$$

La destrucción turbulenta de disipación:

$$\Phi_\varepsilon \equiv 2\nu^2 \overline{\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_m}} \quad (3.22)$$

Los últimos tres términos de la derecha en la ecuación (3.17a) son modelados necesariamente. Mientras que en la ecuación (3.16) de k , la difusión turbulenta de la energía cinética es aproximada por un modelo gradiente de difusión. El cual puede ser obtenido por la difusión turbulenta de disipación, por lo que D_ε es definida como:

$$D_\varepsilon \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) \quad (3.23)$$

En donde σ_ε es una constante y la producción de disipación es modelada como:

$$P_\varepsilon = c_1 f_1 \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) \overline{(u'_i u'_j)} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (3.24)$$



Para obtener la forma del modelo, la producción de disipación fue asumida proporcional a la producción de energía cinética turbulenta. Donde c_1 es una constante y f_1 es una función interruptor para números de Reynolds bajos².

El análisis dimensional sugiere que la destrucción de disipación sería modelada como:

$$\Phi_\varepsilon = c_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.25)$$

Donde c_2 es una constante y f_2 es otra función interruptor para números de Reynolds bajos. Fuera de la función interruptor, esta expresión es particular para una superficie sólida porque k tiende a cero con $\varepsilon \neq 0$.

El valor de la disipación en una superficie sólida es:

$$\varepsilon|_{y=0} = \nu \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega'}{\partial y} \right)^2 \right]_{y=0} = 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (3.26)$$

La expresión anterior es difícil de manejar numéricamente, porque las condiciones de frontera dependen de la solución de la ecuación k . Algunos investigadores atacan esta dificultad numérica separando la disipación ($\varepsilon = \bar{\varepsilon} + D$; $\bar{\varepsilon}$ satisface una condición homogénea en la pared y D es una función que al igual que el valor de la disipación en la pared tiende a cero. Adicionalmente, un término empírico fuente E es algunas veces considerado en la ecuación de disipación para incrementarla en ciertas áreas del flujo. Cuando todas las partes de las piezas son acomodadas, las ecuaciones del modelo k - ε estándar para flujo incompresible quedan como se menciono al inicio:

² Recientemente, Speziale [2] demostró que la misma expresión para P_ε puede ser obtenida de manera menos rigurosa asumiendo que la producción de disipación es gobernada por el nivel de anisotropía en el tensor de esfuerzos de Reynolds y los gradientes promedio de velocidad.



$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \varepsilon \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + c_1 f_1 \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) \left(-\overline{u'_i u'_j} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - c_2 f_2 \left(\frac{\varepsilon^2}{k} \right) + E \quad (3.28)$$

$$\nu_t = c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.29)$$

En los primeros modelos $k-\varepsilon$ de Launder y Spalding [16] presentaron valores estándar para varias constantes como c_μ , la cual fue determinada por los requerimientos para una región constantes de esfuerzos; c_1 , por el valor de la constante de von Karman; c_2 , de la comparación con resultados experimentales en el decrecimiento de la malla de turbulencia; σ_k y σ_ε por optimización computacional. Estos dos autores tratan de evitar, los problemas de cercanía con la pared para no integrarlos a estas ecuaciones, por lo que asumen alguna forma funcional de soluciones de la región cercana a la pared, que corresponde a la solución en algún punto suficientemente lejos donde los efectos son despreciables.

Jones y Launder direccionan las dificultades de cercanía con la pared y bajos números de Reynolds usando funciones interruptor para multiplicar los valores estándar de c_μ (la cual multiplica la viscosidad de remolinos) y c_2 (multiplica el término singular en la ecuación ε), escogiendo:

$$f_\mu = \exp \left[-2.5 / \left(1 + \frac{R_T}{50} \right) \right] \quad (3.30)$$

$$f_2 = \left[1.0 - 0.3 \exp(-R_T^2) \right] \quad (3.31)$$

Donde el número de Reynolds turbulento es $R_T = k^2 / (\varepsilon \nu)$. Ellos esbozan la disipación $\varepsilon = \bar{\varepsilon} + D$ y usan:



$$D = 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2 \quad (3.32)$$

y como término fuente:

$$E = 2\nu v_t \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_l \partial x_l} \right) \quad (3.33)$$

Para un problema de transición, esta ocurre abruptamente para un número de Reynolds bajo. Una menor variación del modelo de Jones-Launder fue desarrollada por Launder-Sharma [16] dentro del cual la función interruptor fue cambiada por³:

$$f_\mu = \exp \left[-3.4 / \left(1 + \frac{R_T}{50} \right)^2 \right] \quad (3.34)$$

Lam y Bremhorst [2] desarrollaron un conjunto de funciones de pared, para tratar los efectos de número de Reynolds bajo dentro del modelo $k-\varepsilon$. Obteniendo así la siguiente expresión.

$$f_\mu = \left[1 - \exp(-0.0165R_y) \right]^2 \left(1 + \frac{20.5}{R_T} \right) \quad (3.35)$$

Fue encontrada por Patel, Rodi y Scheuerer [16] para hacer buenas aproximaciones dentro de la región viscosa; sin embargo, la elección de $f_2 = 1 - \exp(-R_T^2)$ no se acercó al exponente correcto para las estaciones finales del decrecimiento de turbulencia isotrópica. La función $f_1 = 1 + (0.05/f_\mu)^3$ incremento la disipación y al mismo tiempo decremento el valor máximo de k en la región cercana a la pared. La condición de frontera de pared sobre

³ Este cambio mejoró el modelo considerablemente



la disipación fue tomada de la ecuación k en la frontera ($\varepsilon|_{y=0} = \nu(\partial^2 k / \partial y^2)|_{y=0}$). Patel, Rodi y Scheuerer [16] propusieron que:

$$\left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (3.36)$$

Rodi y Scheuerer [16] usaron esta condición de frontera simplificada en sus cálculos de la región de transición y obtuvieron comportamientos razonablemente buenos comparados con mediciones experimentales. Sin embargo en algunos casos, dicha región era muy corta.

Cerca de la pared es usado el modelo de una ecuación de Norris - Reynold. Esta aproximación reduce la necesidad de una elevada resolución muy cerca de la pared, pero es más empírica porque la distribución de la escala de longitud sería prescrita algebraicamente.

3.2.1.2 MODELO DE DOS ECUACIONES WILCOX $k - \omega$

Uno de los modelos más flexibles al momento de implementar las funciones de transición, es el modelo $k-\omega$ dentro de los modelos RANS de dos ecuaciones. Este modelo tiene algunas ventajas sobre el modelo $k-\varepsilon$, debido a que la ecuación de disipación real ε presenta dos importantes dificultades: la falta de condiciones de frontera natural para ε en la pared y la singularidad del término ε^2/k también en la pared. Debido a esta problemática, el investigador de apellido Wilcox [21] experto en el modelado de la turbulencia, revisando la historia de los modelos $k-\varepsilon$ de 1942 a 1991, se las ingenió para reformular el modelo matemático de ε , en un intento por resolver este problema. Esta nueva reformulación matemática, permite integrar los modelos de transición en las ecuaciones de turbulencia de una manera más fácil, comparado con el modelo $k-\varepsilon$.

Wilcox, primero se decidió por asignar la variable ω a la nueva ecuación de disipación específica, definida como:



$$\omega = \frac{\varepsilon}{\beta^* \cdot k} \quad (3.37)$$

Donde β^* es un coeficiente de proporción.

Para entender como trabaja este modelo, considérese una placa plana, con flujo incompresible para una capa límite bidimensional en las ecuaciones de k y ω como sigue:

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + v_T) \frac{\partial U}{\partial y} \right] \quad (3.38)$$

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = v_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \beta^* \omega k + \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + \sigma^* v_T) \frac{\partial k}{\partial y} \right] \quad (3.39)$$

$$U \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial y} = \alpha \frac{\omega}{k} v_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + \sigma v_T) \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] \quad (3.40)$$

$$v_T = \frac{\alpha^* k}{\omega} \quad (3.41)$$

Para los casos de las ecuaciones de conservación de la energía y viscosidad de remolinos, quedan de la siguiente manera:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i H)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i \hat{\tau}_{ij} + (\mu + \sigma^* \mu_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} - q_j \right) \quad (3.42)$$

Donde:

$$q_j = - \left(\frac{\mu}{Pr_L} + \frac{\mu_T}{Pr_L} \right) \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad (3.43)$$

Ecuación de remolinos viscosos:

$$\frac{\partial(\rho v_t)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j v_t)}{\partial x_j} = \alpha(R_T) \rho \omega (v_{tE} - v_t) \quad (3.44)$$



Esta última ecuación es esencialmente un modelo de relajación, destinado a que almacena los efectos de los remolinos viscosos turbulentos, en un ajuste para los valores de equilibrio local. La parte izquierda es simplemente la derivada lagrangiana de v_t , la cual es controlada por la desviación del equilibrio de dichos remolinos v_{tE} obtenidos por el modelo convencional $k - \omega$.

Las formas completas de los modelos de las ecuaciones k y ω son rescritas en forma tensorial como sigue:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j \partial x_j} + \alpha \frac{\omega}{k} \left(-\overline{u'_i u'_j} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{v_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] - \beta \omega^2 \quad (3.46)$$

La única diferencia con el modelo estándar, es el coeficiente de cierre α^* adicional en la ecuación (3.41). Este coeficiente es igual a 1 en la versión estándar para elevados números de Reynolds. Por otro lado, para mostrar como las ecuaciones de este modelo predicen la transición, es necesario reformular los términos de las ecuaciones (3.38) y (3.39) de la siguiente manera:

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = P_k \beta^* \omega k + \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + \sigma^* v_T) \frac{\partial k}{\partial y} \right] \quad (3.47)$$

$$U \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial y} = P_\omega \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + \sigma v_T) \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] \quad (3.48)$$

Por lo que los términos de producción por unidad de disipación quedan definidos como:



$$P_k = \frac{\alpha^*}{\beta^*} \left(\frac{\partial U / \partial y}{\omega} \right)^2 - 1 \quad (3.49)$$

$$P_\omega = \frac{\alpha \alpha^*}{\beta} \left(\frac{\partial U / \partial y}{\omega} \right)^2 - 1 \quad (3.50)$$

En este punto hay dos observaciones importantes que mencionar: primero, si la energía cinética turbulenta k es cero, la ecuación (3.48) presentara una buena aproximación a la solución exacta, esto es, si los remolinos viscosos se desvanecen, la ecuación ω queda desacoplada de la ecuación k permitiendo una solución no trivial del flujo laminar, con una $v_T = 0$; Segundo, los signos de P_k y P_ω determinan si k y ω son amplificados o reducidos en magnitud. Sin embargo esto no es obvio en las ecuaciones (3.49) y (3.50), debido a estos términos varían con el número de Reynolds a lo largo de la placa.

Reformulando las ecuaciones (3.49) y (3.50) en términos de la transformación de Blasius para capa límite, es posible observar la variación del cambio de signo. Antes de introducir la transformación de Blasius, es necesario determinar una escala apropiada para ω . En este caso, se identifica que el cierre de la capa límite sobre una superficie de placa plana, tiene una relación de disipación específica de acuerdo a $\varepsilon = \beta^* \omega \cdot k$.

$$\omega \rightarrow \frac{6\nu}{\beta y^2} \quad \text{cuando} \quad y \rightarrow 0 \quad (3.51)$$

En término de la variable similar η de Blasius, queda definida:

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu \cdot x / U_\infty}} \quad (3.52)$$

El comportamiento asintótico de ω aproximado en la superficie es:



$$\omega \rightarrow \frac{U_{\infty}}{x} \cdot \frac{6}{\beta_0 \eta^2} \quad \text{para} \quad \eta \rightarrow 0 \quad (3.53)$$

También se observa que U_{∞}/x tiene dimensiones de 1/tiempo, por lo que la escala apropiada para ω en la capa límite de Blasius es dada por $\omega = (U_{\infty}/x) \cdot W(x, \eta)$ donde $W(x, \eta)$ es una función adimensional a ser determinada como parte de la solución. También la velocidad puede ser escrita en términos adimensionales con otra función $U(x, \eta)$, quedando $U = U_{\infty} \cdot U(x, \eta)$. Los términos de producción neta por unidad de disipación quedan:

$$P_k = \frac{\alpha^*}{\beta^*} \text{Re}_x \left(\frac{\partial U / \partial \eta}{W} \right)^2 - 1 \quad (3.54)$$

$$P_{\omega} = \frac{\alpha \alpha^*}{\beta} \text{Re}_x \left(\frac{\partial U / \partial \eta}{W} \right)^2 - 1 \quad (3.55)$$

De esta manera se puede apreciar que tanto P_k como P_{ω} incrementan de manera lineal con el número de Reynolds Re_x . De la solución exacta de $U(\eta)$ y $W(\eta)$ para capa límite de Blasius, el máximo valor de la relación $\partial U / \partial \eta$ para W es:

$$\left(\frac{\partial U / \partial \eta}{W} \right)_{\max} \approx \frac{1}{300} \quad (3.56)$$

El valor preciso de esta relación es función del valor en la corriente libre de ω , el rango es de 0.0025 a 0.0040. el máximo ocurre a la mitad del espesor de capa límite ($y/\delta = 0.56$), con los signos de P_k y P_{ω} podemos especificar los puntos de inicio y fin de la transición, respectivamente. Despejando de la ecuación (3.48), determinamos que el cambio de signo ocurrirá en los siguientes números de Reynolds:



$$(\text{Re}_x)_k = 9 \cdot 10^4 \frac{\beta_0^*}{\alpha^*} \quad (3.57)$$

$$(\text{Re}_x)_\omega = 9 \cdot 10^4 \frac{\beta_0}{\alpha \alpha^*} \quad (3.58)$$

Definiendo las constantes de cierre, los coeficientes σ_k y σ_ω ambos son iguala 2. En la versión para números de Reynolds elevados del modelo, $\alpha = 5/9$; $\alpha^* = 1$; $\beta = 3/40$; $\beta_0^* = 9/100$; $R_{T_0} = 1$; $R_{T_\infty} = 0.01$; De acuerdo con Wilcox, incluso a pesar de comportamientos asintóticos cuando $y \rightarrow 0$ no funciona correctamente (ya que $\overline{u'u'} \sim y^4$ mucho mayor que $\overline{u'u'} \sim y^3$), este modelo pronostica mejor que el $k-\varepsilon$ los perfiles del flujo promedio para flujos con gradiente de presión adverso. Un aspecto importante para investigar, es que Wilcox cree que el comportamiento correcto en la capa defectuosa es más importante que la subcapa.

Usando los valores de las constantes para flujo totalmente turbulento, se encuentra que $(\text{Re}_x)_k = 8,100$ y $(\text{Re}_x)_\omega = 12,462$, de esta manera el inicio del flujo laminar en el borde de ataque del plato plano mostrará la siguiente secuencia de eventos:

1. El cálculo para la región laminar inicia con $k = 0$ dentro de la capa límite y en caso de pequeñas perturbaciones en la corriente k tomará ese valor.
2. Inicialmente $P_k < 0$ y $P_\omega < 0$, debido a que la disipación de ambos en las ecuaciones k y ω exceden la producción de energía cinética turbulenta.
3. En el número de Reynolds crítico, $\text{Re}_{x_c} = 8,100$ el mecanismo de producción sobrepasa al de disipación en la ecuación k . Corriente abajo del punto x_c , la producción excede la disipación en la ecuación k y la energía cinética turbulenta es amplificada. En algún punto del proceso, los remolinos viscosos crecen rápidamente y esto corresponde al inicio de la transición.



4. k continua amplificándose y en $Re_{x_c} = 8,100$ la producción sobrepasa la disipación en la ecuación ω . Por lo que ω se amplifica y continua creciendo hasta encontrar el balance entre producción y disipación en la ecuación k . cuando este balance se conseguido, la transición a flujo turbulento es completada.

Consistente con mediciones experimentales, el proceso entero es sensible a perturbaciones en la corriente libre en la ecuación de k . También hay algo de sensibilidad en ω aunque es más difícil de cuantificar.

Las observaciones siguientes son importantes: Primero, k comienza a crecer en $Re_{x_c} = 8,100$. En contraste, la teoría de estabilidad lineal nos dice que las ondas de Tollmient-Schlichting comienzan a formarse en la capa límite de Blasius a partir de un $Re_{x_c} = 90,000$. Este es conocido como el mínimo número de Reynolds crítico para perturbaciones infinitesimales. De esta manera se encuentra que el modelo predice la transición mucho antes o para un número de Reynolds diez veces menor; Segundo, las ecuaciones (3.57) y (3.58) muestran que la región de transición es controlada por β_0 y $\alpha\alpha^*$; Tercero, la transición podría nunca ocurrir si P_ω llega a ser cero antes que P_k . De esta manera, la transición requiere las condiciones siguientes:

$$\alpha\alpha^* < \alpha^* \beta_0 / \beta_0^* \quad \text{cuando} \quad Re_T \rightarrow 0 \quad (3.59)$$

Donde la cantidad de Re_T es el número de Reynolds turbulento definido por:

$$Re_T = \frac{k}{\omega \cdot \nu} \quad (3.60)$$

Este factor puede ser preservado en cualquier modificación viscosa del modelo, debido a que dichas modificaciones solo dependen del número de Reynolds turbulento, también es independiente de la geometría por donde pasa el flujo, preservando la naturaleza universal del modelo. Con referencia en la ecuación (3.57), para obtener un Reynolds de 90,000 nosotros requerimos:



$$\beta_0^*/\alpha^* \rightarrow 1 \quad \text{cuando} \quad \text{Re}_T \rightarrow 0 \quad (3.61)$$

La consistencia asintótica con el comportamiento exacto de k y disipación $\varepsilon = \beta_0^* k \omega$, aproximándose a la superficie del sólido donde $\chi_k < 0$ y $f_{\beta^*} = 1$. Esto requiere tener $k/y^2 \rightarrow \text{constante}$ y $\varepsilon/k \rightarrow 2\nu/y^2$ cuando $y \rightarrow 0$. El cierre para un límite sólido es el balance de los términos de disipación y difusión molecular en ambas ecuaciones k y ω . La solución cercana a la pared para ω es dada por la ecuación (3.51). La solución para k es de la forma:

$$k/y^n \rightarrow \text{Constante} \quad \text{cuando} \quad y \rightarrow 0 \quad (3.62)$$

Cuando n es dada por:

$$n = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + 24 \frac{\beta_0^*}{\beta_0}} \right] \quad (3.63)$$

De esta manera podemos conseguir el deseado comportamiento asintótico de k con:

$$\beta_0^*/\beta_0 \rightarrow 1/3 \quad \text{cuando} \quad \text{Re}_T \rightarrow 0 \quad (3.64)$$

Con el límite de $\text{Re}_T \rightarrow 0$ es suficiente para conseguir el comportamiento asintótico cuando $y \rightarrow 0$ en los remolinos viscosos, entonces Re_T se desvanece en la superficie del sólido.

Si se escoge a $\beta_0 = \text{constante}$ para todos los valores de Re_T , las ecuaciones (3.59), (3.61) y (3.64) son suficientes para determinar los valores límite de α^* y β_0^* , el límite superior de $\alpha\alpha^*$ lentamente se desvanece cuando se alcanza el número de Reynolds turbulento. De manera específica, nosotros encontramos que:



$$\left. \begin{aligned} \alpha\alpha^* &< \beta_0 \\ \alpha^* &\rightarrow \beta_0/3 \\ \beta_0^* &\rightarrow \beta_0/3 \end{aligned} \right\} \text{ cuando } \text{Re}_T \rightarrow 0 \quad (3.68)$$

Pruebas numérica con el modelo $k-\omega$ indican que la optima elección de $\alpha\alpha^*$ para capa límite incompresible es:

$$\alpha\alpha^* \rightarrow 0.80\beta_0 \quad \text{cuando } \text{Re}_T \rightarrow 0 \quad (3.66)$$

En 1992, wilcox postula las siguientes dependencias funcionales que garantizan los valores limites en las ecuaciones (3.65) y (3.66):

$$\alpha^* = \frac{\alpha_0^* + \text{Re}_T/R_k}{1 + \text{Re}_T/R_k} \quad (3.67)$$

$$\alpha = \frac{13}{25} \cdot \frac{1}{\alpha^*} \cdot \frac{\alpha_0 + \text{Re}_T/R_\omega}{1 + \text{Re}_T/R_\omega} \quad (3.68)$$

$$\beta^* = \frac{9}{100} \cdot \frac{4/15 + (\text{Re}_T/R_\beta)^4}{1 + (\text{Re}_T/R_\beta)^4} f_{\beta^*} \quad (3.69)$$

$$\beta = 9/125 \cdot f_\beta, \quad \sigma^* = \sigma = 1/2, \quad \alpha_0^* = 1/3 \cdot \beta_0, \quad \alpha_0 = 1/9 \quad (3.70)$$

$$R_\beta = 8, \quad R_k = 6, \quad R_\omega = 2.95 \quad (3.71)$$

Estos tres coeficientes R_β , R_k y R_ω controlan la relación en que los coeficientes de cierre aproximan sus valores a un flujo totalmente turbulento. También es posible determinar sus valores usando los métodos de perturbación o realizando un análisis de estabilidad en la subcapa viscosa. Dados los valores R_β y R_k , hay un valor único de R_ω



que toma un valor constante en la ley de pared. Cuando R_β se incrementa, crece el valor máximo de k cerca de la pared. Comparando resultados de la subcapa con el método DNS de Manssur, Kim y Moin (1988) indican que es óptima la elección de los valores de los tres coeficientes.

INCORPORACIÓN DE LAS FUNCIONES.

Las funciones para número de Reynolds bajo f_u, f_1, f_2, D y E son incorporadas en las ecuaciones por diferentes razones.

La reducción en los esfuerzos cortantes por la función interruptor f_u es el resultado de dos fenómenos independientes: la acción directa de la viscosidad molecular y la influencia de la cercanía de la pared sobre la presión fluctuando.

El fenómeno de cercanía de la pared, es independiente de la viscosidad y no debería ser correlacionado con R_T, R_y o y^+ . Sin embargo, la separación de los dos efectos es difícil, por lo que son generalmente modelados juntos.

Evidencias experimentales sugieren que f_u debería ser asintótica a la unidad cuando $y^+ = 60$, aunque todos los modelos demuestren ser asintóticos más allá de este punto. Por lo tanto, f_u es escogida para coincidir con datos experimentales y estos restringen a la subcapa y zonas intermedias.

f_1 y f_2 son funciones de control, que representan los cambios en la producción y destrucción de ε respectivamente, cuando se tiene cercanía con la pared. Por lo que f_1 incrementa ε en la vecindad de la pared.

La presencia de f_2 es ocasionalmente requerida para estabilizar la solución numérica de la ecuación ε cuando $k \rightarrow 0$, en cualquier caso $f_2 \propto y^2$ cercano a la pared. Es necesario mencionar, que la función esta basada sobre un cambio experimentalmente observado en la ley de decrecimiento de turbulencia isotrópica para un rango de



$k \propto x^{-1.25}$ hasta $k \propto x^{-2.5}$. Por lo que, el efecto de f_2 debería ser restringido a decrecimientos de la intensidad turbulenta (R_T) bajos, típicamente $R_T < 15$.

Por otro lado, las funciones f_1 y f_2 en la ecuación de relación de disipación, deberá ser matemáticamente consistente con el comportamiento requerido en la cercanía de la pared.

La función adicional E es usada para un propósito similar.

El uso de una función de disipación alternativa $\varepsilon = \bar{\varepsilon} + D$, algunas veces elimina la dificultad en el costo de introducción para un problema de precisión, porque $\bar{\varepsilon}$ usualmente varía mucho más rápidamente que ε en la región de la pared.

Todas las funciones y constantes deberán ser afinadas para reproducir las características básicas de flujos limitados en la pared, para una variedad de gradientes de presión. Note que las modificaciones para las versiones de número de Reynolds elevados de los modelos, serán requeridas para flujos de gradientes de presión adverso.

3.3 DIFICULTADES DE IMPLEMENTACIÓN DE LA FUNCIÓN TRANSICIÓN

Para entender las dificultades en la implementación de la función de transición en el modelo estándar k - ε , es necesario realizar un análisis de sus ecuaciones k y ε :

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \nu_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] \quad (3.72)$$

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = C_{\varepsilon 1} \cdot \frac{\varepsilon}{k} \cdot \nu_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] \quad (3.73)$$

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.74)$$



Una diferencia crítica con el modelo $k-\omega$, es que si k es cero, ε deberá también ser cero, para evitar una indeterminación. Tampoco es posible simplificar los remolinos viscoso en la ecuación ε , porque la presencia de k en el denominador del término de disipación de la ecuación ε . El modelo posee una solución de flujo laminar para la relación de ε y k . Si se realiza un cambio de variable:

$$\varepsilon = C_{\mu} k \omega = \beta_{0\mu}^* k \omega \quad (3.75)$$

Y asumimos que $v_T \ll \nu$, resulta la siguiente ecuación de flujo laminar para ω .

$$U \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial y} = (C_{\varepsilon 1} - 1) f_{\mu} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - (C_{\varepsilon 2} - 1) C_{\mu} \omega^2 + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{2\nu}{k} \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (3.76)$$

La ecuación anterior es casi idéntica a la forma de la ecuación (3.40) para $v_T/\nu \rightarrow 0$. La diferencia significativa es el último término de la parte derecha. A excepción del cierre para la superficie cuando k debería ser exactamente cero, este término no parecería tener un efecto significativamente sobre la solución para pequeños valores de k , sin embargo, en una solución numérica productos de los gradientes como variable dependiente son generalmente desestabilizadores y el problema puede agravarse por tener un coeficiente inversamente proporcional al de k . Esto no quiere decir que sea un problema sin solución, sin embargo, establecer las condiciones de inicio claramente es más difícil con el modelo $k-\varepsilon$ que con el modelo $k-\omega$.

Dada la naturaleza de las modificaciones viscosas realizadas sobre el modelo $k-\varepsilon$, es casi imposible generalizarlo, además de que será necesario correlacionarlo con datos experimentales para predecir números de Reynolds de transición reales.



CAPITULO IV

En este capítulo se realiza la evaluación del comportamiento de los modelos de dos ecuaciones $k-\varepsilon$ y $k-\omega$ para dos casos particulares. Se plantea una metodología para utilizar el software comercial FLUENT 6.1, se realiza los cálculos numéricos de la distribución del coeficiente de fricción para interpretar la transición a través del comportamiento de las curvas y por último, se analizan los resultados identificando posibles fallas de los modelos y las variables no consideradas, cuestionando de esta manera su viabilidad en la predicción del fenómeno de transición.

4.1 CASOS PARTICULARES.

Para este apartado se cuenta con información de casos numéricos que han sido utilizados para evaluar el comportamiento de algunos modelos numéricos RANS probados por expertos de la NASA [1], de los cuales se han obtenido resultados importantes en el cálculo del coeficiente de fricción sobre perfiles de la serie NACA de cuatro dígitos.

Tomando como referencia los trabajos de Vincent R. Capece y Max F. Platzer[1], se pretende realizar algunas pruebas con los modelos de turbulencia antes mencionados sobre dos casos particulares del perfil NACA 0012. En ambos casos, se analiza el comportamiento de la distribución del coeficiente de fricción al variar el ángulo de ataque de 0 a 12° con incrementos de un grado y en particular el segundo caso, en donde el mismo perfil NACA 0012 es montado sobre un arco doble de circunferencia con la finalidad de mostrar la influencia de la convexidad de la superficie sobre el coeficiente de fricción.

4.1.1 SIMULACIONES NUMÉRICAS SOBRE PERFIL NACA 0012

Caso 1. Las simulaciones numéricas sobre el perfil NACA 0012 se realizaron para ángulos de ataque de 0 a 12° con incrementos de un grado, buscando correlacionar resultados numéricos de los modelos con los datos obtenidos de la referencia [1] para los casos de 10 y 12°.



Paso cero, primero se realizan corridas sobre el perfil NACA 0012 para un ángulo de ataque de 0° con todos los modelos de turbulencia de una y dos ecuaciones disponibles en el Software, esto con la finalidad de demostrar que no todos los modelos responden al fenómeno de la transición, tal respuesta se verá reflejada en la distribución del coeficiente de fricción sobre la superficie.

Posteriormente se realizó una selección definitiva de los modelos de turbulencia que mejor responden a dicho fenómeno y son aplicados en ambos casos del NACA 0012 para obtener las gráficas del comportamiento. La serie de pasos que a continuación se muestran son el orden lógico para el ingreso de las condiciones de frontera y el inicio de las corridas.

a) Definición del problema y condiciones de frontera:

Aquí se plantean las condiciones de frontera de cada caso describiendo algunos detalles de como son obtenidos los datos numéricos. Primero, se establecen corridas para condiciones de flujo estable en un ángulos de ataque de 0 y 12° con oscilaciones del perfil de $\alpha(t) = 10^\circ + 2^\circ \cdot \text{Sen}(\omega t)$ y una frecuencia de $k = 0.05$, para una corriente libre con número de Mach igual a 0.3 y número de Reynolds de $540\,000$.

b) Geometría:

La geometría es derivada de las ecuaciones del perfil NACA 0012 con 71 puntos para obtener un factor de rugosidad menor al 6% cuyos parámetros geométricos son: una cuerda C de 0.0889 m; un espesor máximo $t_{\text{máx.}} = 0.048 C$; localización del $t_{\text{máx.}} = 0.625 C$; ángulo de combadura $\theta^* = -9.5^\circ$, datos obtenidos de la referencia [1].

c) Malla y dominio computacional:

Para la selección de la malla, es necesario resaltar que investigaciones numéricas aún son requeridas para asegurar la independencia de los resultados con el tipo de malla y el procedimiento de cálculo, saliéndose de nuestro objetivo tal estudio, por lo que se retomó la malla de 271×91 probado por Max F. Platzer [1] en el modelo SIM de transición para el mismo perfil y un dominio computacional rectangular de coordenadas $(1C, -4C)$ y $(3C,$



4C), adicionando con una semi-circunferencia de radio 4C, centrada en (1C,0) tal como se muestra en la figura 4.1. En la figura 4.2 se muestra el mallado utilizado sobre la superficie del perfil NACA 0012 a cero grados.

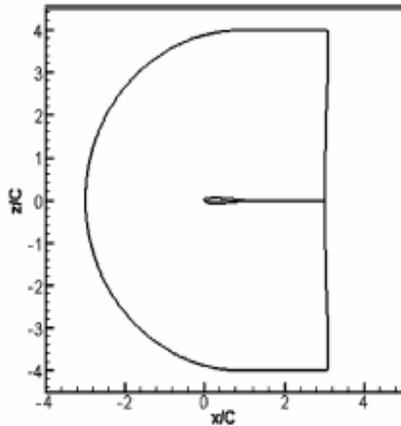


Fig.- 4.1 Dominio computacional

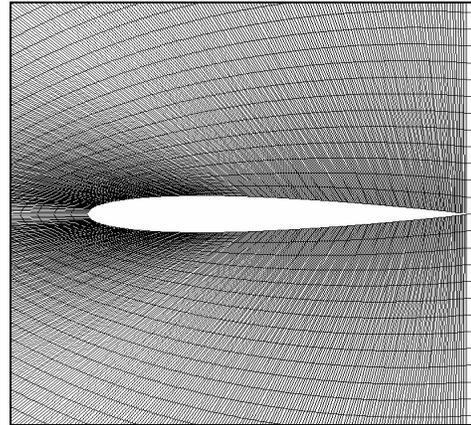


Fig.- 4.2 Mallado del NACA 0012 a 0°

e) Resultados obtenidos.

Todos los resultados serán presentados a través de gráficas, imágenes de contornos y videos¹, con la finalidad de resaltar el comportamiento de las ecuaciones de los modelos de turbulencia y su influencia en el fenómeno de transición². Los resultados de la figura 4.3 son producto de las primeras corridas sobre el perfil NACA 0012 para un ángulo de ataque a 0°. En esta gráfica se muestra de manera clara que no todos los modelos responden al fenómeno de transición y aquellos que responden, pueden ser comparados con la distribución del coeficiente de fricción obtenido por modelo ROE-SA utilizado por Max F. Platzer [1]. De ésta manera es posible seleccionar los modelos que serán utilizados para las pruebas de comportamiento de la transición al variar el ángulo de ataque.

¹ Las tablas de datos de cada gráfica se localizan en el apéndice y los videos se encuentran en un CD de respaldo anexado al trabajo.

² Es necesario mencionar que todos los resultados fueron obtenidos mediante la aplicación del Software Fluent 6.1 cuya descripción de operación y aplicación del programa, se encuentra en los tutoriales de la referencia [22].



Ejemplos claros, son los casos de los modelos Spalart Allmaras (S.A) y $k - \varepsilon$ en todas sus versiones, en donde no existe respuesta alguna o sensibilidad a la transición. En contraste, los modelos $k - \omega$ aún sin función de transición, presentan una débil correspondencia, mientras los modelos $k - \omega$ estándar (1) y SST (2) activada en ambos casos la función de transición responden fuertemente a tales efectos, tomando como referencia los resultados del modelo ROE-SA.

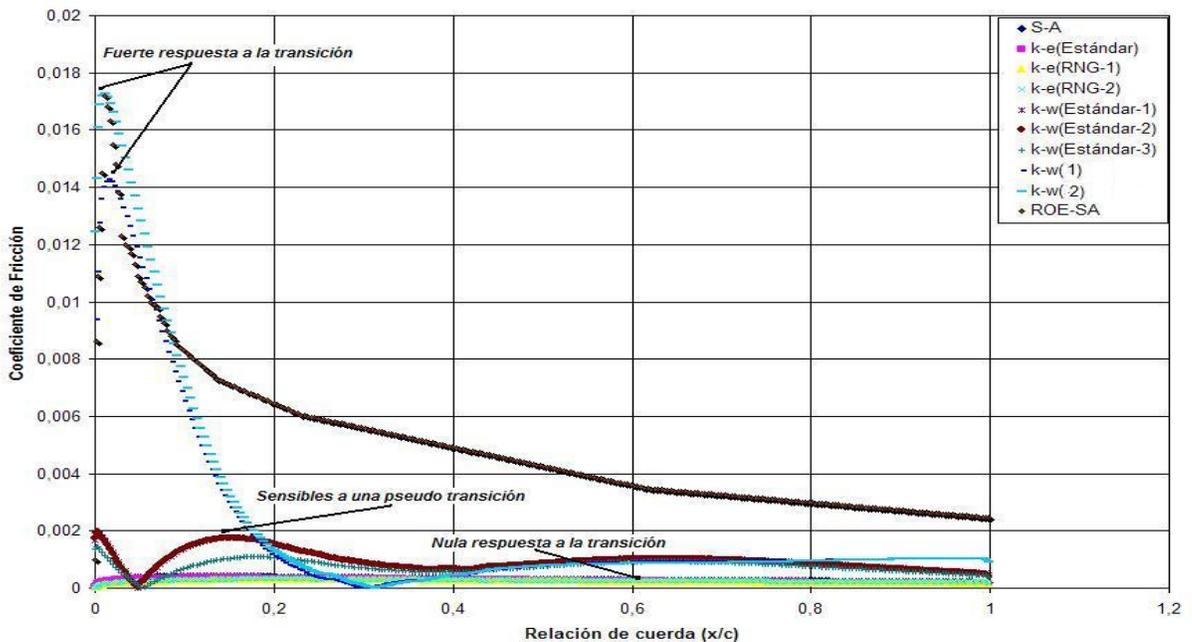


Fig. 4.3 *Respuesta de los modelos al coeficiente de fricción para el perfil a 0°*

Con base a la figura anterior, es posible centrarse en el modelo $k - \omega$ estándar con función de transición para realizar el estudio del comportamiento del coeficiente de fricción al variar el ángulo de ataque, tomando en cuenta que al variar el ángulo de incidencia con respecto al flujo, estamos variando en cierto sentido la curvatura del perfil.

Los resultados que se muestran en la figura 4.4 fueron obtenidos con el modelo $k - \omega$ estándar para flujos en transición (S, F.T.). En esta gráfica se muestra el comportamiento del coeficiente de fricción sobre el intradós del perfil NACA 0012 al variar el ángulo de ataque de 0 a 12° con incrementos de un grado.

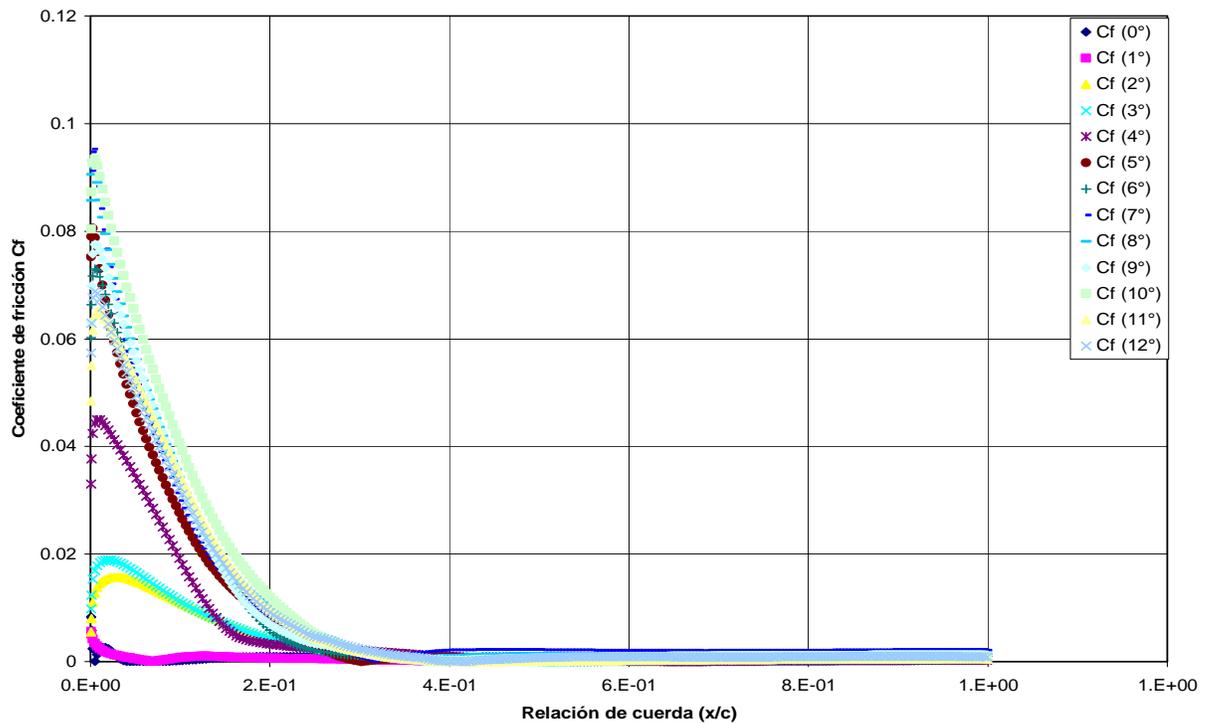


Fig. 4.4 Coeficientes de fricción sobre el intradós al variar el ángulo de ataque

Dicho comportamiento reflejado en las curvas de distribución del coeficiente de fricción para los primeros casos de 0 a 4°, muestra un crecimiento normal y esperado en los valores máximos de la película de fricción, esto debido al incremento en el ángulo de ataque. Llegado los caso de 5 y 6°, los crecimientos son muy notorios comparados con ángulos inferiores en donde aparecen las primeras irregularidades, tales es el caso de la distribución del coeficiente de fricción para 5°, que es mayor que las obtenidas para 6, 9, 11 y 12°, en donde los máximos se localizan en el intervalo de 7 a 10°, con el siguiente orden descendente 7 máxima, 10 y 8°.

Los casos de 11 y 12° se consideran inesperados, debido a que la distribución del coeficiente de fricción fue menor que la obtenida para el caso de 5°, lo que genera un foco de análisis en la forma de operar del modelo, dejando como alternativas el estudio de los mecanismos de la turbulencia para verificar tales oscilaciones en los resultados y por otro lado la experimentación.



La figura 4.5, muestra el comportamiento del coeficiente de fricción sobre la pared del extradós en la dirección x , de manera semejante que para el intradós, las curvas presentan irregularidades, una de ellas es la presencia de una distribución positiva del coeficiente de fricción para el caso de 1° , esto debido a que para el resto de los casos la distribución es negativa, incluyendo la de 0° . Por otro lado, se tiene un crecimiento negativo suave en la distribución del coeficiente de fricción para $0, 2, 3$ y 4° . De igual manera que para el intradós, a partir del caso de 5° comienzan las oscilaciones en la película de fricción, donde en orden decreciente de las curvas quedan de la siguiente manera; 10 como el máximo, $8, 7, 9, 5, 11$ y 12° (ver la sección f)³.

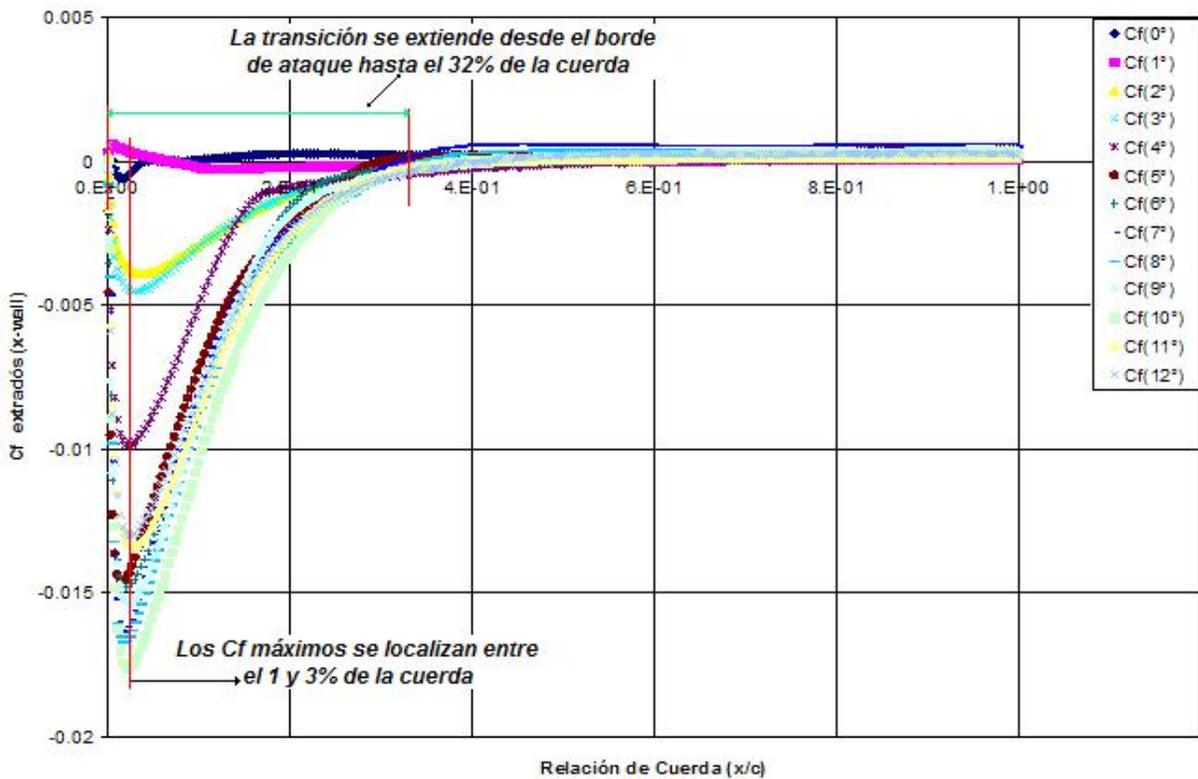


Fig. 4.5 Coeficiente de fricción sobre extradós en la dirección- x al variar el ángulo de ataque

³ La sección f) es el análisis de resultados, los videos de contornos de vorticidad y producción de energía cinética turbulenta k , son de suma importancia para poder comprender las irregularidades en el comportamiento de los resultados.



El comportamiento general del modelo inicialmente concuerda con un esperado crecimiento en la distribución del coeficiente de fricción al variar el ángulo de ataque hasta 5 grados para el intradós y 6 en el caso del extradós. A partir de estos ángulos, el comportamiento se vuelve oscilatorio. La figura 4.6 muestra las oscilaciones de los valores máximos del coeficiente de fricción al variar el ángulo de ataque.

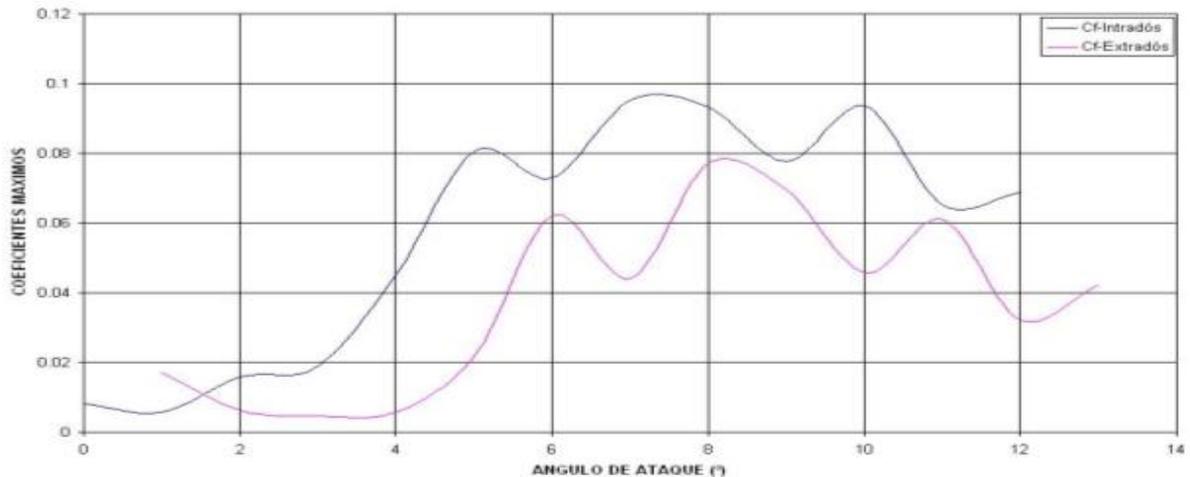


Fig. 4.6 Oscilaciones del Coeficiente de fricción máximos al variar el ángulo de ataque

f) Análisis de los resultados

Una vez detectadas las oscilaciones o irregularidades en los resultados, la extensión de la transición hasta el 32% de la cuerda y la concentración del coeficiente máximo de fricción entre el 1 y 3%, es necesario cambiar de dirección del análisis y no basarnos en la interpretación directa de las gráficas de la distribución del coeficiente de fricción, sino identificar patrones de comportamiento, los mecanismos con que trabaja el modelo y las variables que más influyen. A continuación se presentan los puntos de análisis más significativos:

1. Las concentraciones máximas del coeficiente de fricción en todos los casos, se presentan en el borde de ataque. Esto es debido a que los mecanismos con que opera la distribución de vorticidades para este caso, comienzan a trabajar en el inicio de la geometría (criterio muy general que aplican modelistas de turbulencia pura).



Por lo que la distribución de la película de fricción queda directamente ligada a los puntos de inicio, distribución y concentración de los vórtices. La figura 4.7 muestra las concentraciones de vorticidades en el borde de ataque del perfil y su comportamiento al variar el ángulo.

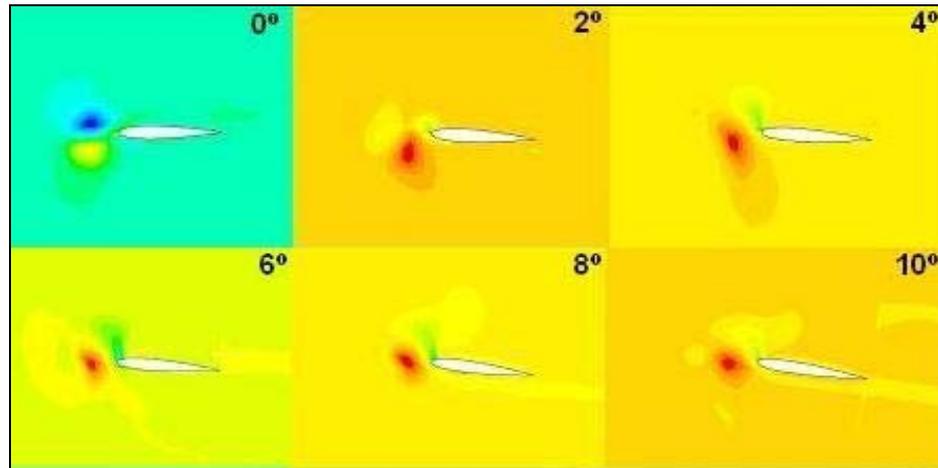


Fig.- 4.7 Distribución de vorticidades

En la figura anterior se observa que para cero grados, los mecanismos del modelo generan dos vórtices contrarrotantes en el borde de ataque que producen una distribución simétrica del coeficiente de fricción, punto válido para este caso. Para el ángulo de 2°, el vórtice inferior rompe en dos al vórtice superior y comienza a empujar a este último desplazándolo sobre la superficie tratando de influenciar la función de pared que presenta el contorno del perfil. Para el resto de los casos, el comportamiento del vórtice inferior es similar que para el caso de 2°.

2. Caídas drásticas en la distribución de los coeficientes de fricción para ángulos mayores a 10° y oscilación de los resultados en la distribución del coeficiente para ángulos mayores a 5 grados es debido a la velocidad fluctuante que utiliza el modelo, producto del promediado de los métodos estadísticos en que esta basado. Esto como se muestra en la figura 4.8 genera oscilaciones en los mecanismos de producción y disipación de la energía cinética turbulenta.

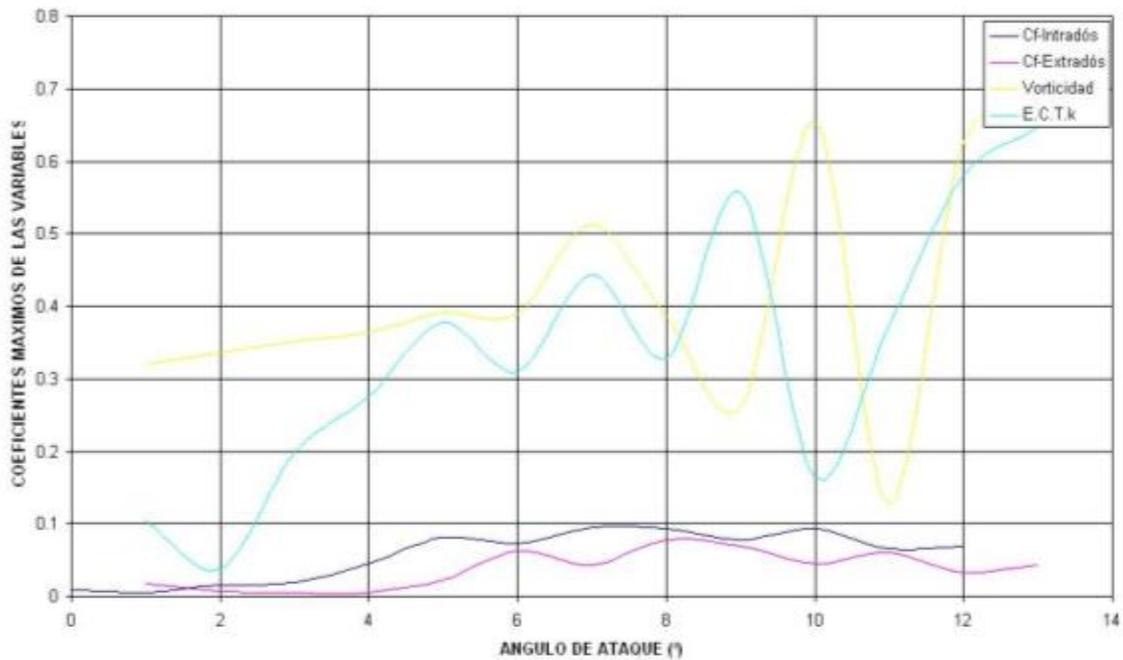


Fig. 4.8 Oscilaciones de coeficientes máximos y mecanismos del modelo de turbulencia

En la figura 4.8, se aprecian claramente las fluctuaciones de la energía cinética turbulenta que es causante de las oscilaciones en la intensidad de los vórtices, esto a su vez de los valores máximos del coeficiente de fricción, no a sí de la distribución de este último que está directamente relacionado con los mecanismos de la distribución de vórtices.

4.1.2 SIMULACIONES NUMÉRICAS DEL NACA 0012 MONTADO SOBRE UN ARCO DOBLE DE CIRCUNFERENCIA

a) Definición del problema y condiciones de frontera:

Caso 2) Las condiciones en que se realizaron las pruebas numéricas sobre el perfil NACA 0012 montado sobre un arco doble de circunferencia, fueron las mismas utilizadas para el caso anterior con la finalidad de mostrar la influencia de la convexidad de la superficie del perfil en el comportamiento del coeficiente de fricción el ángulo de ataque⁴ de 0 a 12° con incrementos de 1°.

⁴ Los incisos a), c) y d) son las mismas condiciones que para el caso anterior.



b) Geometría:

La geometría es derivada de las ecuaciones del perfil NACA 0012 con 71 puntos montado sobre un arco doble de circunferencia, cuyos parámetros geométricos son: una cuerda **C** de 0.0889 m; un espesor máximo $t_{m\acute{a}x.} = 0.048 C$; localización del $t_{m\acute{a}x.} = 0.625 C$; ángulo de combadura $\theta = 36^\circ$, con un radio de trazado = 0.1438 m (ver Anexo 4).

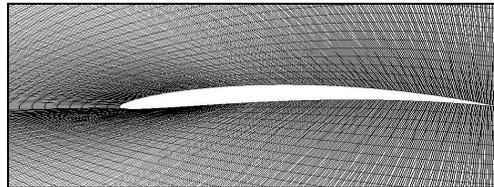


Fig.- 4.9 Mallado del NACA 0010 curvado a 0°

e) Resultados obtenidos

En la figura 4.10 se muestra el comportamiento del coeficiente de fricción sobre el extradós del perfil NACA 0012 montado sobre un arco doble de circunferencia. Las curvas de distribución del coeficiente de fricción permanece constante para el intervalo de 0 a 2° presentando un crecimiento con una pendiente pronunciada en 3° y un suave decremento para 4° donde se mantiene constante hasta 5° y vuelve a ser pronunciada la pendiente hasta alcanzar la máxima distribución de la película de fricción en 7°, a partir de este momento comienzan a caer las curvas de distribución y en 9°, se presenta la mayor inconsistencia del modelo porque su distribución cae por debajo de la de 3°, a partir de 10° la caída es mas suave y la distribución de 12° aparece por debajo de la de 2°.

En la figura 4.11 las curvas de distribución del coeficiente de fricción permanece constante para el intervalo de 0 a 2°, presentando un crecimiento suave a partir del intervalo abierto de 2 a 5° y un crecimiento brusco en 6° donde se alcanza la máxima distribución del coeficiente de fricción, a partir de este momento comienzan a caer las curvas con una pendiente pronunciada hasta 8°, en donde la película de fricción de 8 y 9° están por debajo de la de 4° y en 10° crece ligeramente hasta 11°.

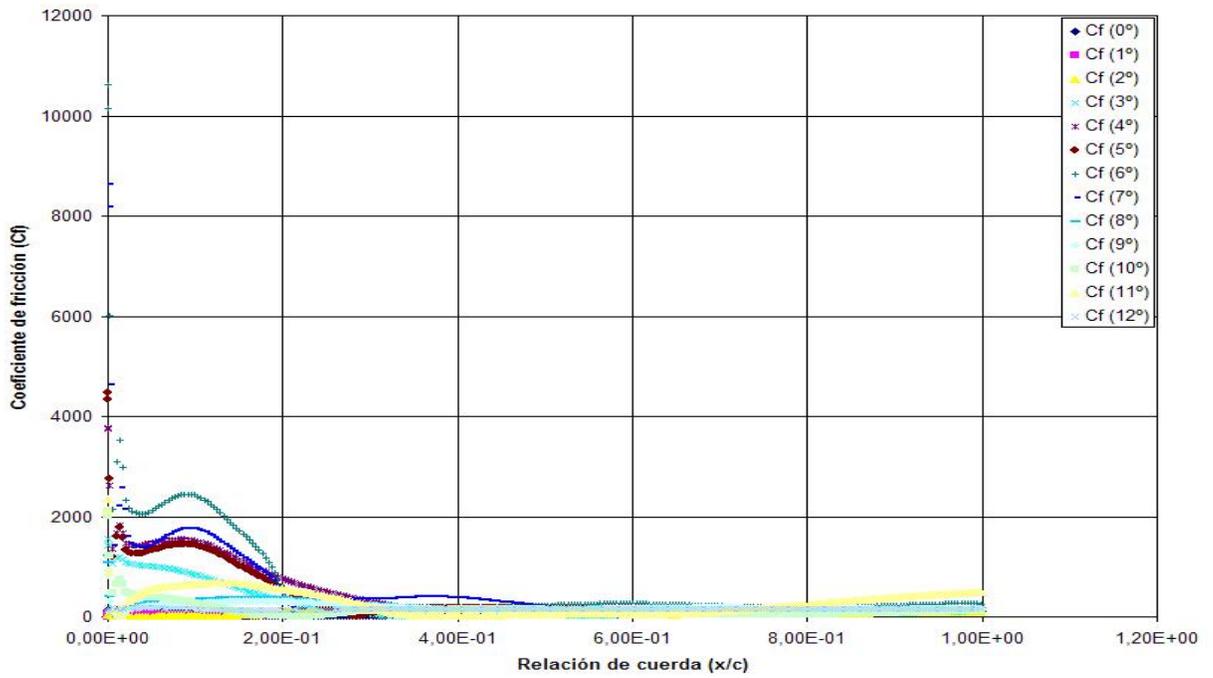


Fig. 4.10 Coeficientes de fricción sobre el extradós al variar el ángulo de ataque

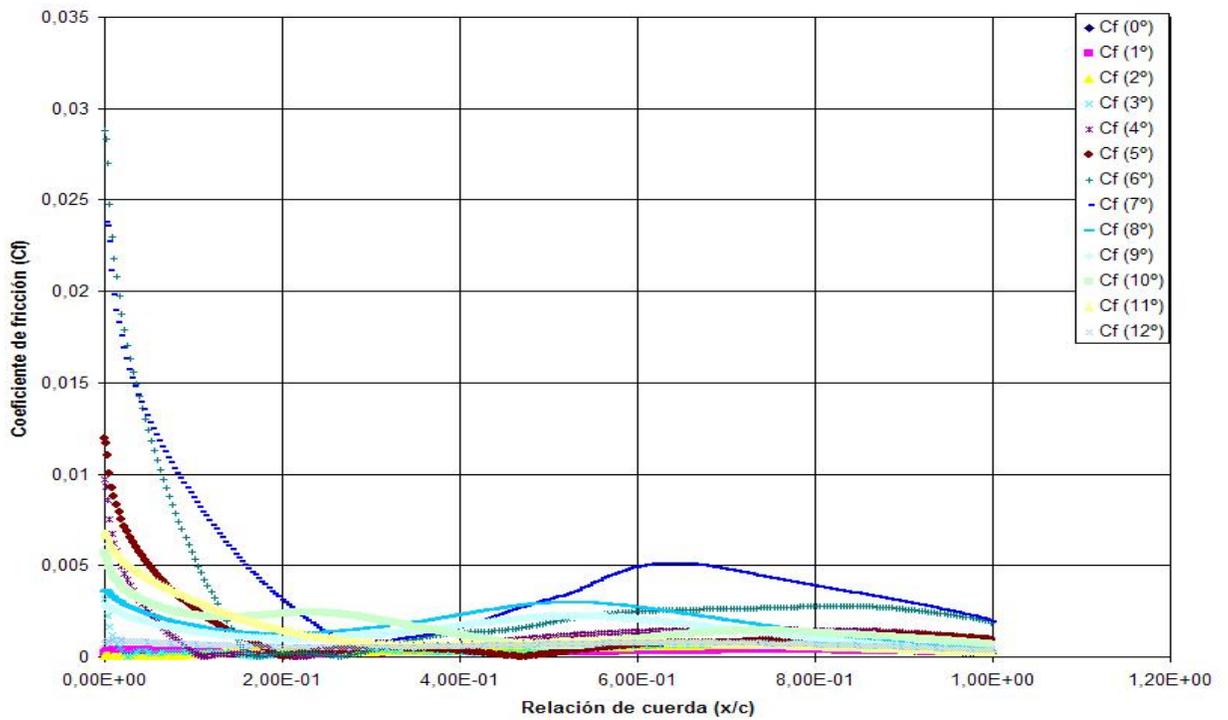


Fig. 4.11 Coeficientes de fricción sobre el intradós al variar el ángulo de ataque



En la figura 4.12 se muestra el comportamiento del coeficiente de fricción sobre la pared del extradós en la dirección x . La transición se extiende desde el borde de ataque hasta el 32% de la cuerda, de tal manera que permanece con la misma longitud que en el caso del perfil simétrico, la gran diferencia es la ubicación del coeficiente de fricción máximo que se desplaza del borde de ataque hasta el 10% de la cuerda. Por otro lado, las curvas de distribución del coeficiente de fricción permanece constante para los primeros casos de 0 a 2° , mostrando un crecimiento negativo a partir de 3° en el siguiente orden $3, 5, 4, 7^\circ$ hasta alcanzar el valor máximo negativo de la película de fricción en 6° , a partir de este momento aparecen las primeras irregularidades ya que las curvas del coeficiente de fricción son positivas para los siguientes ángulos; $12, 9, 8$ y 11° en ese orden van creciendo.

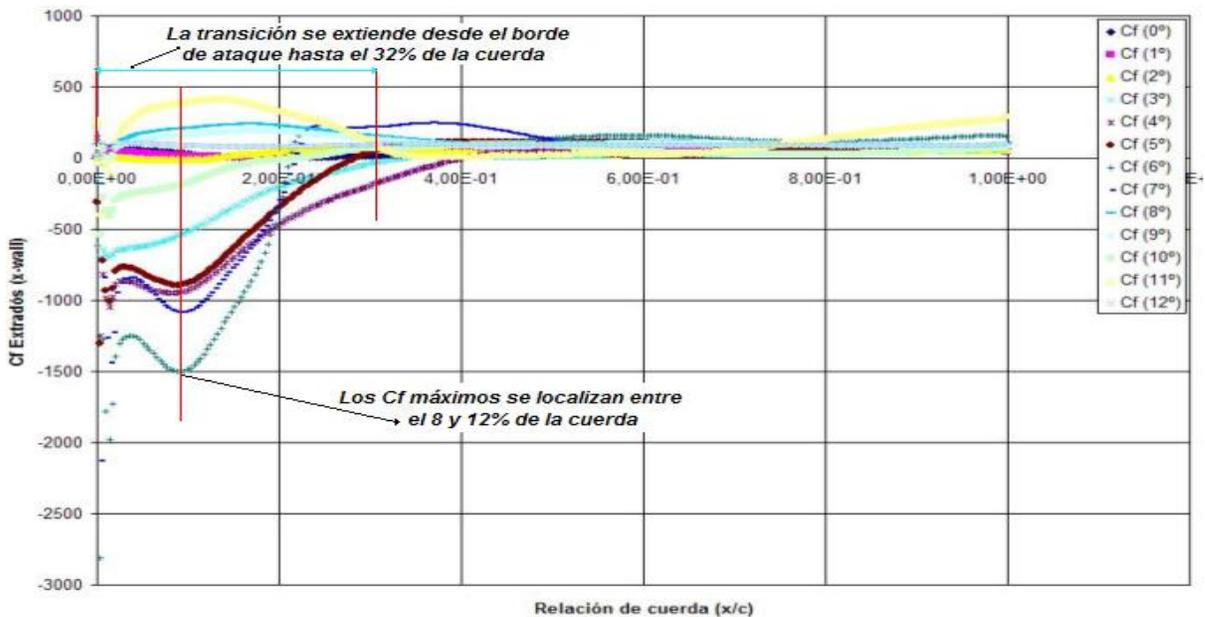


Fig. 4.12 Coeficiente de fricción sobre extradós en la dirección- x al variar el ángulo de ataque

El comportamiento general del modelo, inicialmente concuerda con un esperado crecimiento en la distribución del coeficiente de fricción al variar el ángulo de ataque hasta 7° para el extradós y 6° en los casos del intradós y la pared del extradós en la dirección x . A partir de estos ángulos, el comportamiento se vuelve oscilatorio, la figura 4.13 muestra las oscilaciones de los valores máximos del coeficiente de fricción al variar el ángulo de ataque.

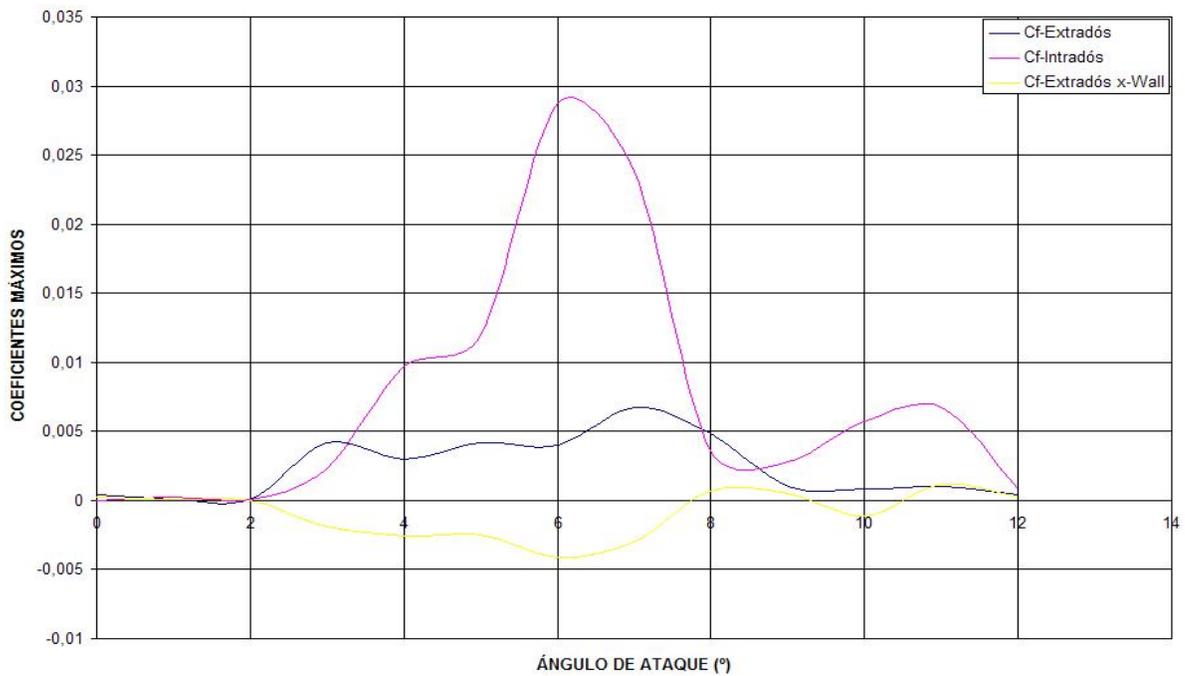


Fig. 4.13 Oscilaciones del Coeficiente de fricción al variar el ángulo de ataque

f) Análisis de los resultados

A continuación se presentan los puntos de análisis más significativos:

1. Las concentraciones máximas del coeficiente de fricción en la figura 4.12 se presentan entre el 8 y 12% de la cuerda. Esto es debido a que los mecanismos con que opera la distribución de vorticidades para este caso, comienzan a trabajar en el inicio de la geometría y se desplazan sobre el extradós del perfil, efecto producido por una mayor convexidad. Por lo que la concentración de los máximos en la película de fricción quedan directamente ligados a los puntos de inicio, distribución y concentración de los vórtices. La figura 4.14, muestra las concentraciones de vorticidades en el borde de ataque del perfil y su comportamiento al variar el ángulo de ataque.

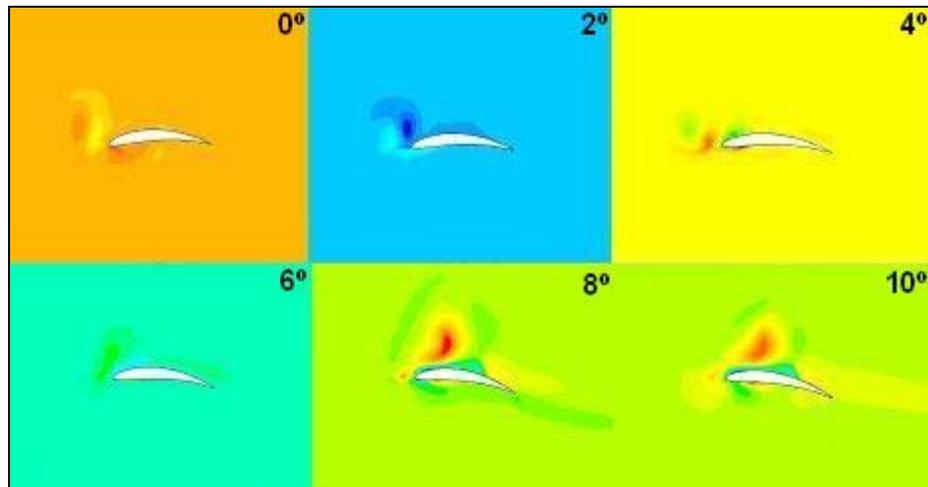


Fig.- 4.14 Distribución de vorticidades

2. En la figura 4.14 se observan dos vórtices asimétricos en el borde de ataque para 0° , uno positivo en el lado de presión o intradós y el otro negativo de menor intensidad en la zona de succión. Al aumentar el ángulo de ataque el vórtice del lado de presión comienza a desplazarse hacia el lado de succión aumentando su intensidad. Para el ángulo de 2° , el vórtice positivo rompe al vórtice negativo y lo desplaza siguiendo la zona de máxima succión en el extradós hasta desvanecerlo en 10° , tratando de influenciar de manera similar que en el caso anterior a la función de pared. A partir de 11° , el vórtice se disuelve por efecto de la separación del flujo y el modelo falla al pronosticar el verdadero coeficiente de fricción.
3. Caídas drásticas en la distribución de los coeficientes de fricción para ángulos mayores a 10° .
4. Oscilación de los resultados en la distribución del coeficiente de fricción para ángulos mayores a 6° . Esto es debido a la velocidad fluctuante que utiliza el modelo, producto del promediado de los métodos estadísticos en que esta basado, generando una intermitencia en los mecanismos de producción y disipación de la energía cinética turbulenta. En la figura 4.15 es posible observar que las oscilaciones en la distribución del coeficiente de fricción, están directamente ligadas a las fluctuaciones en la energía cinética turbulenta.

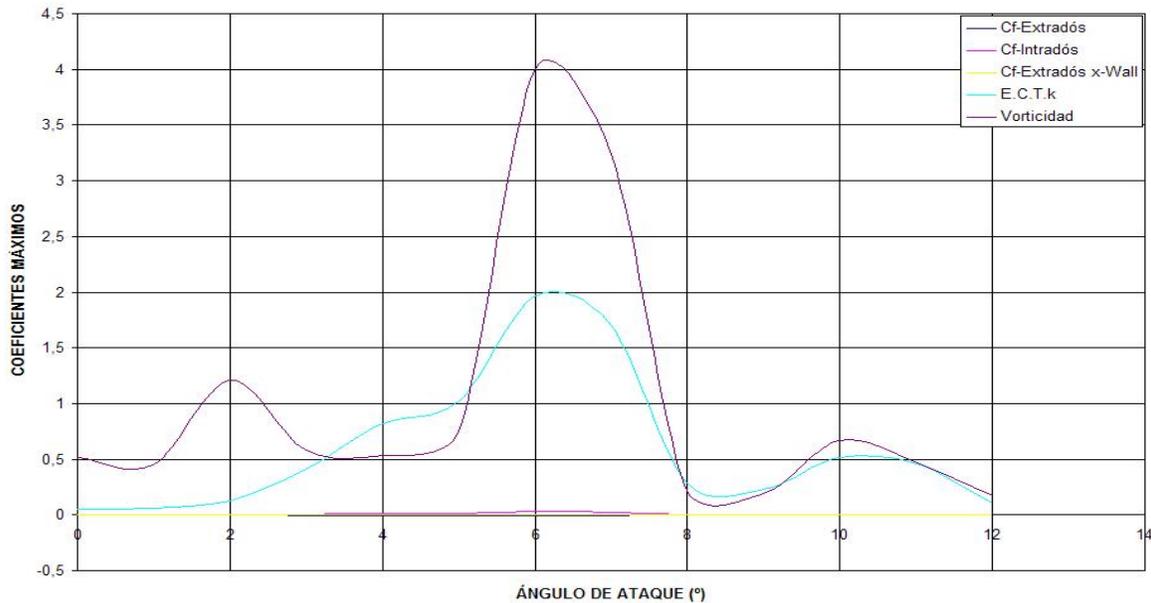


Fig. 4.15 Oscilaciones de Coeficiente máximos al variar el ángulo de ataque

En la figura 4.15 se aprecian claramente las fluctuaciones en la producción de energía cinética turbulenta que genera las oscilaciones en la intensidad de los vórtices.

4.1.3 ANÁLISIS DE RESULTADOS EN CONJUNTO.

La figura 4.16 muestra la correspondencia entre la distribución de vorticidades y el comportamiento del coeficiente de fricción. Las primeras dos filas de la figura corresponden a los contornos de la distribución de vorticidades sobre ambos perfiles y su comportamiento al variar el ángulo de ataque con incrementos de 2°. La tercera y cuarta fila son una comparación entre las curvas de distribución del coeficiente de fricción sobre el intradós y extradós de ambos perfiles respectivamente.

Puntos de análisis más significativos:

1. La distribución de la película de fricción sobre el intradós es mucho más estable para el perfil simétrico en el intervalo de 0 a 4°. A partir de 6° los comportamientos son similares en ambos perfiles con pequeñas oscilaciones producto de la intensidad en los vórtices y a su vez de la producción de la energía cinética turbulenta.



2. En el caso del extradós los comportamientos son muy variados, por un lado, la distribución de vorticidades es controlada por la zona de presión de succión y la convexidad del perfil, esto es debido a que los vórtices sobre el arco doble de circunferencia se desplazan más que en el simétrico.

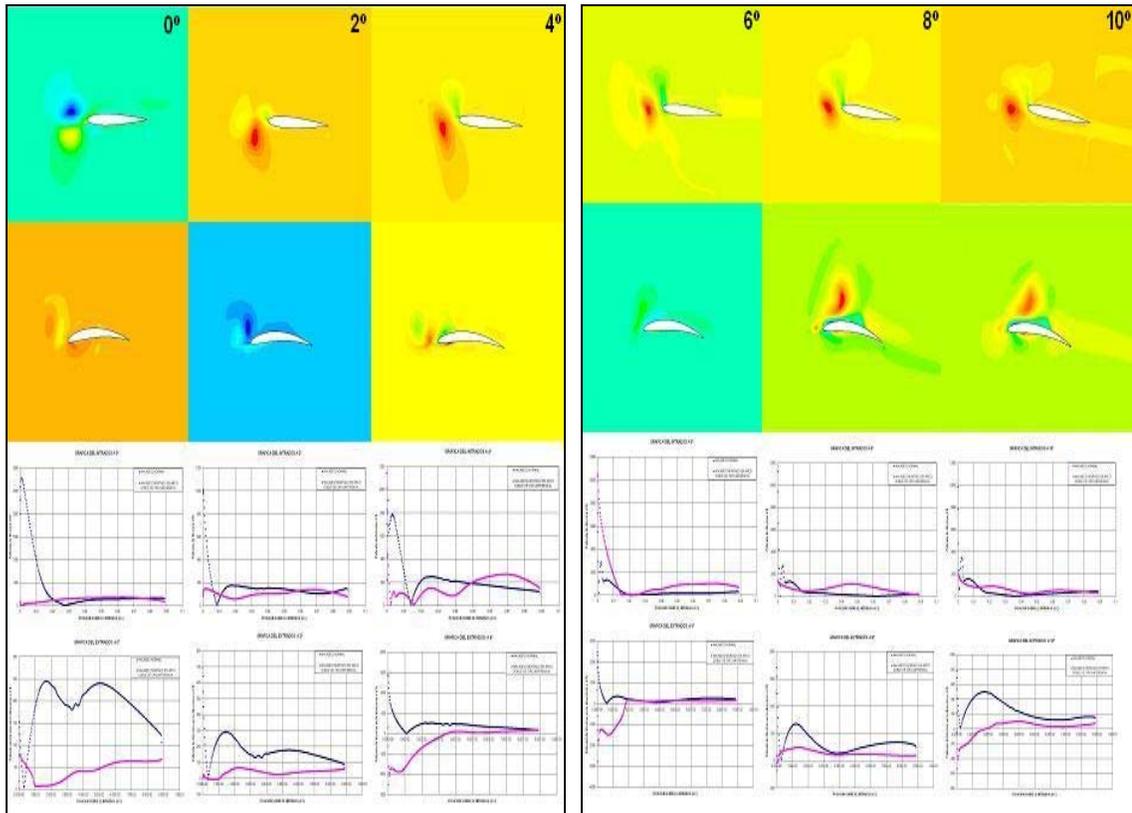


Fig.- 4.16 Distribución de vorticidades y gráficas comparativas del coeficiente de fricción

3. Analizando el perfil simétrico, el cambio de dirección del vector velocidad al llegar al perfil NACA 0012 es máximo y simétrico en 0° debido al radio de curvatura que presenta el perfil en el borde de ataque, por lo que dos vórtices contrarrotantes se posicionan en el borde afectando la función de pared, esto es debido al bajo número de Reynolds que utiliza el modelo para iniciar la transición.
4. Si se aumenta el ángulo de ataque, los vórtices comienzan a desplazarse corriente abajo sobre la superficie del extradós siguiendo la zona de presión de succión.



5. Lo más relevante en este análisis de conjunto es el efecto que representa la curvatura en la ubicación de los vórtices, dejando en claro algunas características de los mecanismos con que opera el modelo $k-\omega$. Las concentraciones de la distribución del coeficiente de fricción aparecen la mayor parte del tiempo entre el borde de ataque y un tercio de la cuerda para ambos perfiles, de tal manera que el único efecto que trae consigo el desplazamiento de los vórtices, es en la ubicación del máximo coeficiente de fricción el cual también tiende a ser desplazado corriente abajo. En la figura 4.12 del perfil NACA0012 montado sobre una arco doble de circunferencia, la concentración del máximo coeficiente de fricción se localiza entre el 8 y 12% de la cuerda, una diferencia clara con el perfil simétrico que se ubica entre el 1 y 3%. Los mecanismos con que opera el modelo son los mismo en ambos casos, solo que es más marcado el desplazamiento del coeficiente de fricción máximo por efecto de una mayor convexidad y debido a los mecanismos que arrastran a los vórtices sobre el extradós.
6. El cambio de dirección del vector velocidad presenta una menor pendiente cada vez que el ángulo de ataque se ve incrementado, lo que hace que se mueva la ubicación del vórtice corriente abajo y al mismo tiempo la localización del coeficiente de fricción máximo, manteniendo la misma longitud de la transición.
7. Sin embargo, el hecho de que la transición se desplace corriente abajo, cualitativamente es incorrecto, ya que los efectos de la convexidad y los incrementos del ángulo de ataque experimentalmente demuestran lo contrario ver referencia [22]. Estas pruebas de visualización y medición con películas de cristal líquido permiten observar que si la única variable fuera el incremento en el ángulo de ataque, la transición se de desplace corriente arriba, en dirección del borde de ataque y su longitud se acorta. En otras palabras, las fluctuaciones en la producción de la energía cinética turbulenta no son el único problema, sino que la posición de inicio y desplazamiento de los vórtices debería ser al contrario.



CONCLUSIONES

Mediante el estudio de los modelos de transición y sus integraciones a los métodos de turbulencia de dos ecuaciones, además del análisis de los resultados obtenidos para ciertos casos del perfil NACA 0012, es posible concluir lo siguiente:

Estos modelos presentan limitantes muy notorias, primero es necesario especificar los números de Reynolds al inicio y fin de la transición para poder posicionar las curvas de la distribución del coeficiente de fricción e interpretar sus resultados en términos cualitativos de la transición. Esto genera una enorme dependencia con el usuario, el cual debe tener experiencia al momento de ajustar los parámetros de control en una correlación con datos experimentales, dejando ver en claro que los modelos no son universales y no solo dependen de las condiciones de inicio o de frontera, sino de la capacidad del investigador.

En el análisis de resultados la concentración de los máximos en la película de fricción quedan directamente ligados a los puntos de inicio, distribución y concentración de los vórtices. La longitud de la transición se extiende del borde de ataque hasta un tercio de la cuerda para ambos perfiles, en el perfil NACA0012 montado sobre una arco doble de circunferencia, la concentración de los valores máximos en el coeficiente de fricción se localizan entre el 8 y 12% de la cuerda, a diferencia con el perfil simétrico que se ubican entre el 1 y 3%. Los mecanismos con que opera el modelo son los mismo en ambos casos, solo que es más marcado el desplazamiento del coeficiente de fricción máximo por efecto de una mayor convexidad en el extradós. El hecho de que las curvas del coeficiente de fricción tiendan a desplazarse corriente abajo siguiendo la ubicación de la distribución de vorticidades al aumentar el ángulo de ataque, genera una inconsistencia con los resultados experimentales [22] que muestran que las curvas se desplazan corriente arriba debido a que el proceso de transición se adelanta para ángulos y convexidades mayores.



Por otro lado, para realizar un análisis a profundidad de los resultados obtenidos, sería necesario llevar a cabo un estudio muy completo de los mecanismos de la producción, disipación y transporte de la turbulencia dentro de las ecuaciones de los modelos RANS, esto debido a que la función de transición se limita a la interacción de la capa límite laminar con una distribución de vórtices aleatoria, gobernada por una viscosidad efectiva, en donde los vórtices cumplen con la función desestabilizadora de llevar una capa límite laminar a una capa turbulenta. Es importante mencionar, que los mecanismos de los modelos RANS son tomados como si se tratase de un flujo totalmente turbulento, por lo que el modelo suele ser sensible a perturbaciones en la corriente y efectos de gradientes de presión en alguna escala de la turbulencia y no al nivel de transición, tomada como una subescala de la turbulencia.

Es importante resaltar, que la transición se encuentra en una fase descriptiva y que en estos modelos de bajo costo computacional, sus aproximaciones suelen ser burdas, además de que difícilmente reproducen la física cualitativa de problemas reales y requieren de extenuosas correlaciones con datos experimentales o exhaustivas optimizaciones computacionales para obtener comportamientos adecuados. Por un lado, esto es debido a su carácter estadístico y probabilístico que trae consigo problemas en los valores que asigna a la velocidad fluctuante, por lo que los remolinos viscosos, la producción de energía cinética turbulenta y la intensidad de los vórtices presentan oscilaciones al variar el ángulo de ataque de un perfil aerodinámico y por otro lado, que el acoplamiento con los modelos de transición no ha sido el adecuado debido a que no se han encontrado los mecanismos reales que producen los incrementos bruscos en los coeficientes de fricción.



RECOMENDACIONES

1. Se recomienda realizar un estudio previo de las capacidades de los modelos a utilizar y sus limitantes al momento de estudiar la transición, primero porque dicho fenómeno se encuentra en una fase descriptiva y no se sabe con exactitud los mecanismos que la dominan, por otro lado se conocen una buena cantidad de variables que afectan a la transición, pero se desconoce como es que se producen los saltos tan bruscos en las mediciones de la distribución del coeficiente de fricción, por lo que es sumamente importante y recomendable retomar la experimentación para conocer y descifrar dicho problema.
2. Que el uso de estos modelos sea moderado y que el usuario este conciente de lo que se desea reproducir numéricamente, puesto que es muy común caer en el error de que el software al resolver las ecuaciones diferenciales de Navier – Stokes, resuelve la física de cualquier problema en el área de fluidos.
3. Siempre es útil tener a la mano resultados de problemas similares o en condiciones de semejanza dinámica, para validar los obtenidos con nuestros modelos.



RECOMENDACIONES



FUTUROS TRABAJOS

- Es posible profundizar los estudios, realizando un análisis más completo de los mecanismos con que trabajan los modelos de turbulencia, en un intento por corregir o compensar los efectos de la velocidad fluctuando, de esta manera sería posible reducir las oscilaciones en los resultados.
- En los modelos RANS adaptados para predecir la transición, aún es necesario especificar los números de Reynolds de inicio y fin, y no en función de la estabilidad del flujo o por efectos de las variables en que se desarrolla, por lo que es necesario, enfocar futuros trabajos en la solución de este problema para reducir su carácter empírico y lograr su universalidad del modelo.
- Al no estar resuelta la física del problema de transición, queda abierta la experimentación para lograr su entendimiento y solución. Existiendo varias técnicas de visualización y medición, como lo son las películas de cristal líquido, sensores de presión, etc.



REFERENCIAS

- [1] Vincent R. Capece and Max F. Platzer “*An Experimental and Computational Investigation of Oscillating Airfoil Unsteady Aerodynamics at Large Mean Incidence*” NASA/CR—2003-212199, March 2003.
- [2] Bart A. Singer “*Modeling the Transition Region*” NASA CR-4492, February 1993.
- [3] Q. Xiao and H. M. Tsai and F. Liu “*Computation of Transonic Diffuser Flows by a Lagged $k-\omega$ Turbulence Model*” JOURNAL OF PROPULSION AND POWER Vol. 19, No. 3, June 2003.
- [4] Chang Wang and Blair Perot “*Prediction of turbulent transition in boundary layers using the turbulent potential model*” JOT JOURNAL OF TURBULENCE, January 2002.
- [5] Mayle, R “*The Role of Laminar-Turbulent Transition in Gas Turbine Engines*” J. Turbo.**113**, 509-537, 1991.
- [6] Hua Shan, Li Jiang and Chaoqun Liu “*Direct numerical simulation of flow separation around a NACA 0012 airfoil*” ELSEVIER Computers & Fluids 1096–1114, July 2005.
- [7] Dindar, M.; Kaynak, U.; “*Effect of Turbulence Modelling on Dynamic Stall of a NACA 0012 Airfoil*”; AIAA Paper 92-0027; January 1992.
- [8] Menter, F.R.; “*Improved Two-Equation $k-\omega$ Turbulence Models for Aerodynamic Flows*”; NASA TM-103975; October 1992.
- [9] Chandrasekhara, M.S., Wilder, M.C., Carr, L.W., “*Reynolds Number Influence on 2-D Compressible Dynamic Stall*”, AIAA 34th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, Jan 15-18, 1996, Reno, NV.
- [10] Hua Shan, Li Jiang and Chaoqun Liu. July 2005 “*Direct numerical simulation of flow separation around a NACA 0012 airfoil*” ELSEVIER Computers & Fluids 1096–1114.



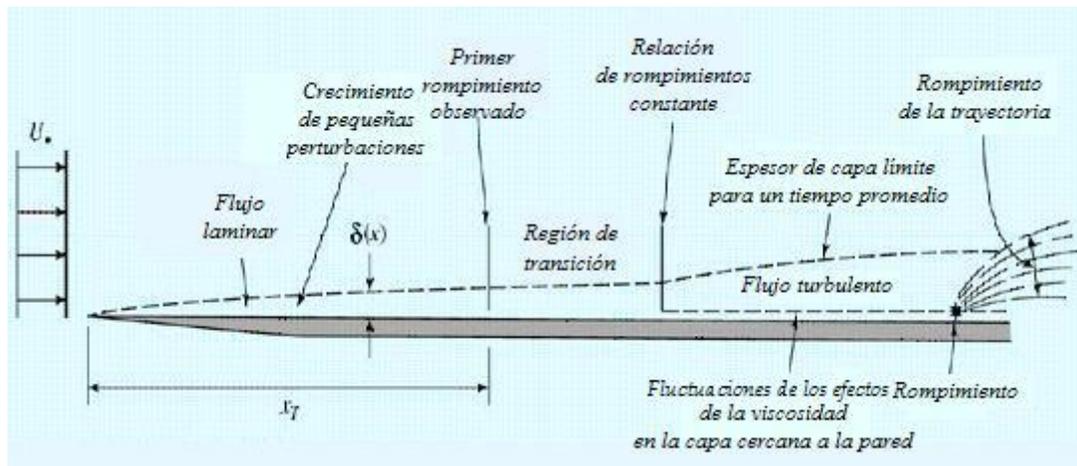
- [11] Alam M, Sandham ND “**Direct numerical simulation of short laminar separation bubbles with turbulent reattachment**”. J Fluid; 410:1–28, March 2000.
- [12] Jiang L, Shan H, Liu C. “**Nonreflecting boundary conditions for DNS in curvilinear coordinates. In: Recent Advances in DNS and LES**”, Proceedings of the Second AFOSR (Air Force Office of Scientific Research) International Conference, Rutgers, New Jersey, June 7–9, 1999.
- [13] Vijgen PMHW, Dodbele SS, Pfenninger W and Holmes BJ. 1988 “**Analysis of wind-tunnel boundary-layer transition experiments on axisymmetric bodies at transonic speeds using compressible boundary-layer stability theory**”. AIAA 88-0008.
- [14] Simon, T., S. Qiu & K. Yuan. “**Measurements in a Transitional Boundary Layer Under Low-Pressure turbine Airfoil Conditions**” NASA-CR 2000-209957 2000.
- [15] Davis, R., J. Carter & E. Reshotko. “**Analysis of Transitional Separation Bubbles on Infinite Swept Wings**” AIAA paper # AIAA-85-1685, 1985.
- [16] Dhawan, S. & R. Narasimha “**Some Properties of Boundary Layer Flow During the Transition from Laminar to Turbulent Motion**” J. Fluid Mech. 3. 418-436, 1958.
- [17] D. R. Buttsworth, S. J. Elston and T. V. Jones. 1998, “**Directional Sensitivity of skin Friction measurements using pneumatic liquid crystal**” IOP Publishing Ltd.
- [18] D. M. Bushnell. “*Notes on initial disturbance fields for the transition problem*” NASP TM 1051, NASA, March 1989.
- [19] B. A. Singer, S. P. G. Dinavahi, and V. Iyer. “*Testing of transition-region models: Test cases and data*”. CR 4371, NASA, May 1991.
- [20] Herrmann Schlichting and Klaus Gesten “*Boundary layer Theory*”. 8th edition, May, 1998.
- [21] Wilcox C. David “*Turbulence Modeling for CFD*”. Second edition July, 1998 DCW Industries, Inc.



REFERENCIAS

- [22] G. Lombardi and M. Morelli “*Shear Sensitive Liquid Crystals in Subsonic and Transonic Wind Tunnel Testing*”. University of Pisa, Italy 1998.

ANEXO 1



GENERALIDADES DE LOS MODELOS RANS



TABLA 3.1 FUNCIONES DE PARED Y CONSTANTES ENCONTRADAS POR DIFERENTES INVESTIGADORES PARA LOS MODELOS DE DOS ECUACIONES k - ε .

MODELO	ε_w	C_μ	$C_{1\varepsilon}$	$C_{2\varepsilon}$	σ_k	σ_ε	f_μ
k - ε estándar con f.p.	f. p.	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	1.0
Lam – Bremhorst (Dirichlet)	$\varepsilon = \nu(\partial^2 k / \partial y^2)$	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	$(1 - \exp(-0.0165 \text{Re}_k))^2 (1 + 20.5/\text{Re}_t)$
Lam – Bremhorst (Neumann)	$\partial \varepsilon / \partial y = 0$	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	$(1 - \exp(-0.0165 \text{Re}_k))^2 (1 + 20.5/\text{Re}_t)$
Chien	$\varepsilon = 0$	0.09	1.35	1.8	1.0	1.3	$1 - \exp(-0.0115 y^+)$
Hassid-Poreh	$\varepsilon = 0$	0.09	1.45	2.0	1.0	1.3	$1 - \exp(-0.0015 \text{Re}_t)$
Reynolds	$\varepsilon = \nu(\partial^2 k / \partial y^2)$	0.084	1.0	1.83	1.69	1.3	$1 - \exp(-0.0198 \text{Re}_k)$
Hoffman	$\varepsilon = 0$	0.09	1.81	2.0	2.0	3.0	$\exp(-1.75/(1 + \text{Re}_t/50))$
Jones-Launder	$\varepsilon = 0$	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	$\exp(-2.5/(1 + \text{Re}_t/50))$
To-Humphrey	$\varepsilon = 2\nu(\partial\sqrt{k}/\partial y)^2$	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	$\exp(-2.5/(1 + \text{Re}_t/50))$

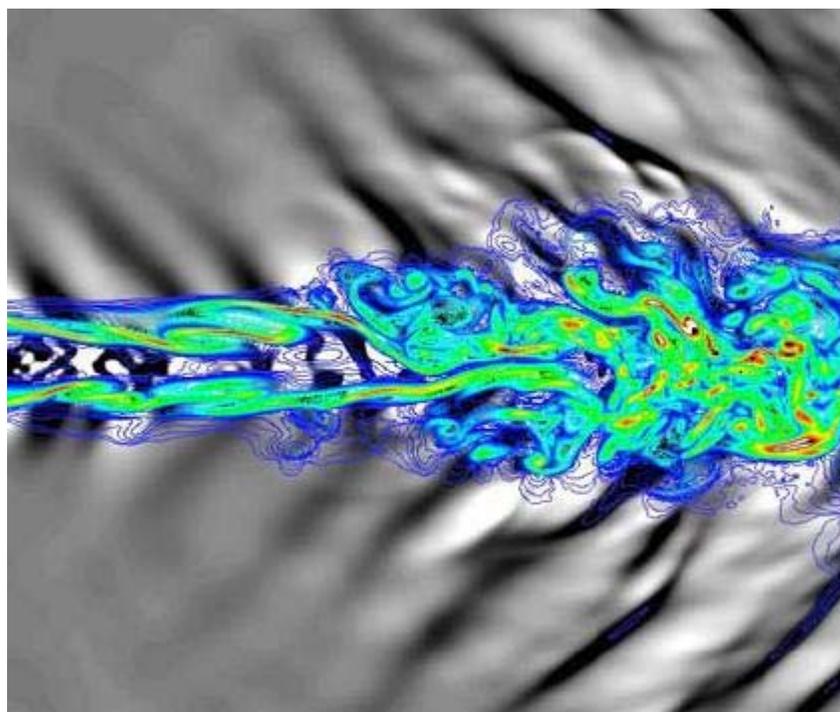


MODELO	f_1	f_2	D	E	σ_T
k - ε estándar con f. p.	1.0	1.0	0	0	1.0
Lam – Bremhorst (Dirichlet)	$1 + (0.05/f_\mu)^3$	$1 - \exp(-\text{Re}_t^2)$	0	0	0.9
Lam – Bremhorst (Neumann)	$1 + (0.05/f_\mu)^3$	$1 - \exp(-\text{Re}_t^2)$	0	0	0.9
Chien	1.0	$1 - (2/9)\exp(-(\text{Re}_t/6)^2)$	$-2\nu(k/y^2)$	$-2(\nu\varepsilon/y^2)\exp(-0.5y^+)$	0.9
Hassid-Poreh	1.0	$1 - 0.3\exp(-\text{Re}_t^2)$	$-2\nu(k/y^2)$	$-2\nu(\partial\sqrt{\varepsilon}/\partial y)^2$	0.9
Reynolds	1.0	$[1 - 0.3\exp(-(\text{Re}_t/3)^2)]f_\mu$	0	0	0.9
Hoffman	1.0	$1 - 0.3\exp(-\text{Re}_t^2)$	$-(\nu/y)(\partial k/\partial y)$	0	0.9
Jones-Launder	1.0	$1 - 0.3\exp(-\text{Re}_t^2)$	$-2\nu(\partial\sqrt{k}/\partial y)^2$	$2\nu\nu_t(\partial^2 u/\partial y^2)^2$	0.9
To-Humphrey	1.0	$(1 - 0.3\exp(-\text{Re}_t^2))f_3$	0	0	0.9



ANEXO 2

ANEXO 2



SIMULACIONES NUMÉRICAS Y ANÁLISIS

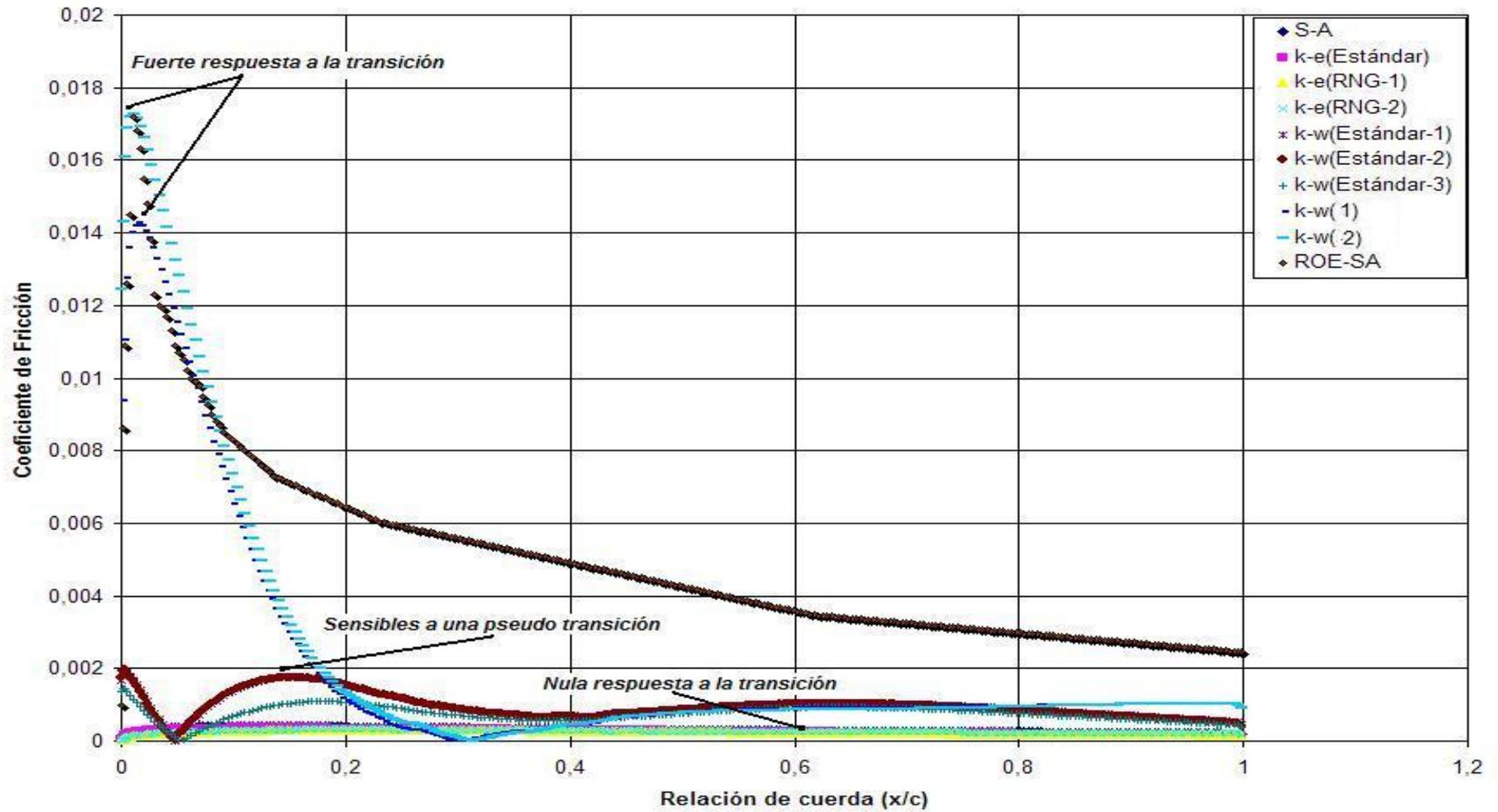


Fig. 4.3 Respuesta de los modelos al coeficiente de fricción para el perfil a 0°

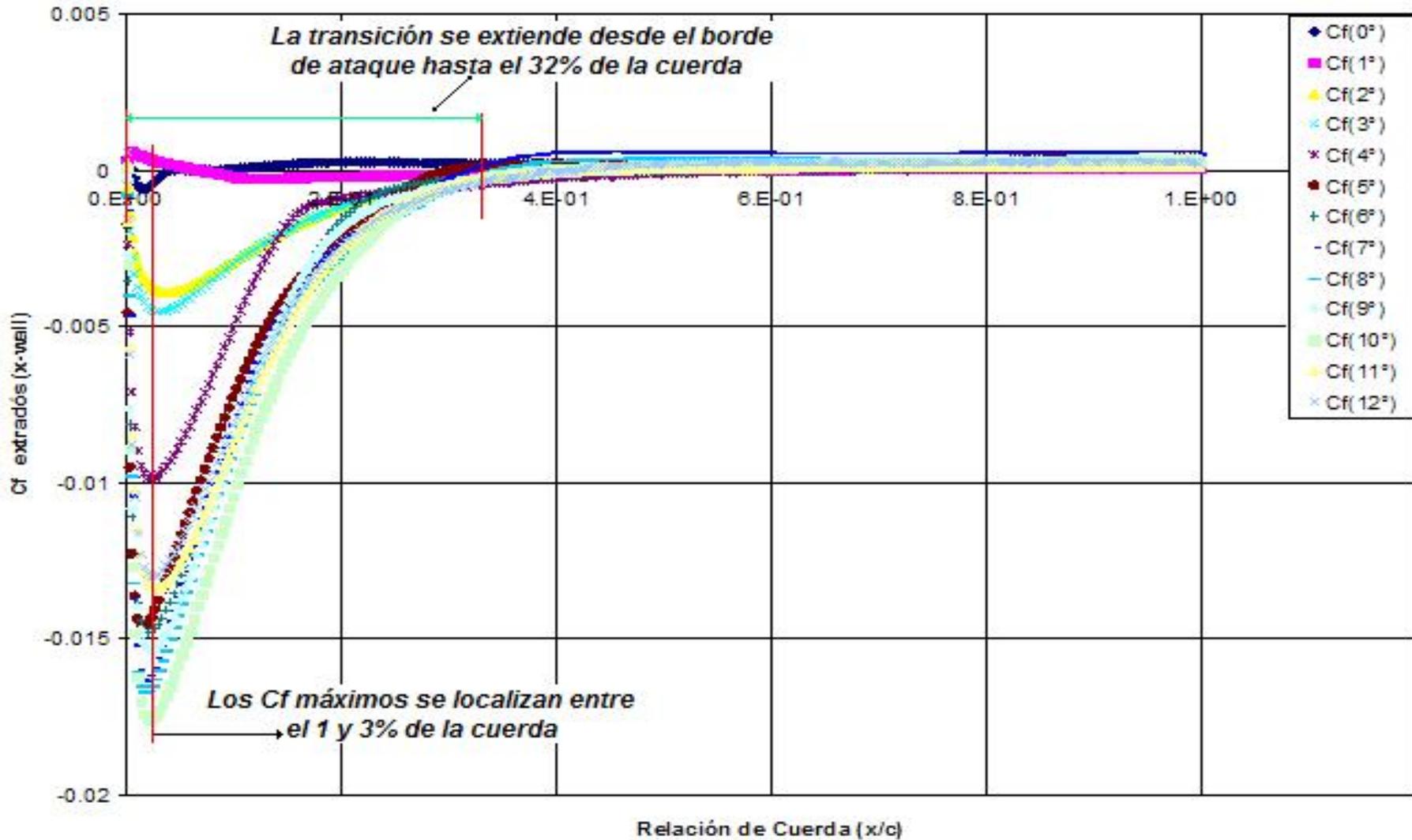


Fig. 4.5 Coeficiente de fricción sobre extradós en la dirección-x al variar el ángulo de ataque

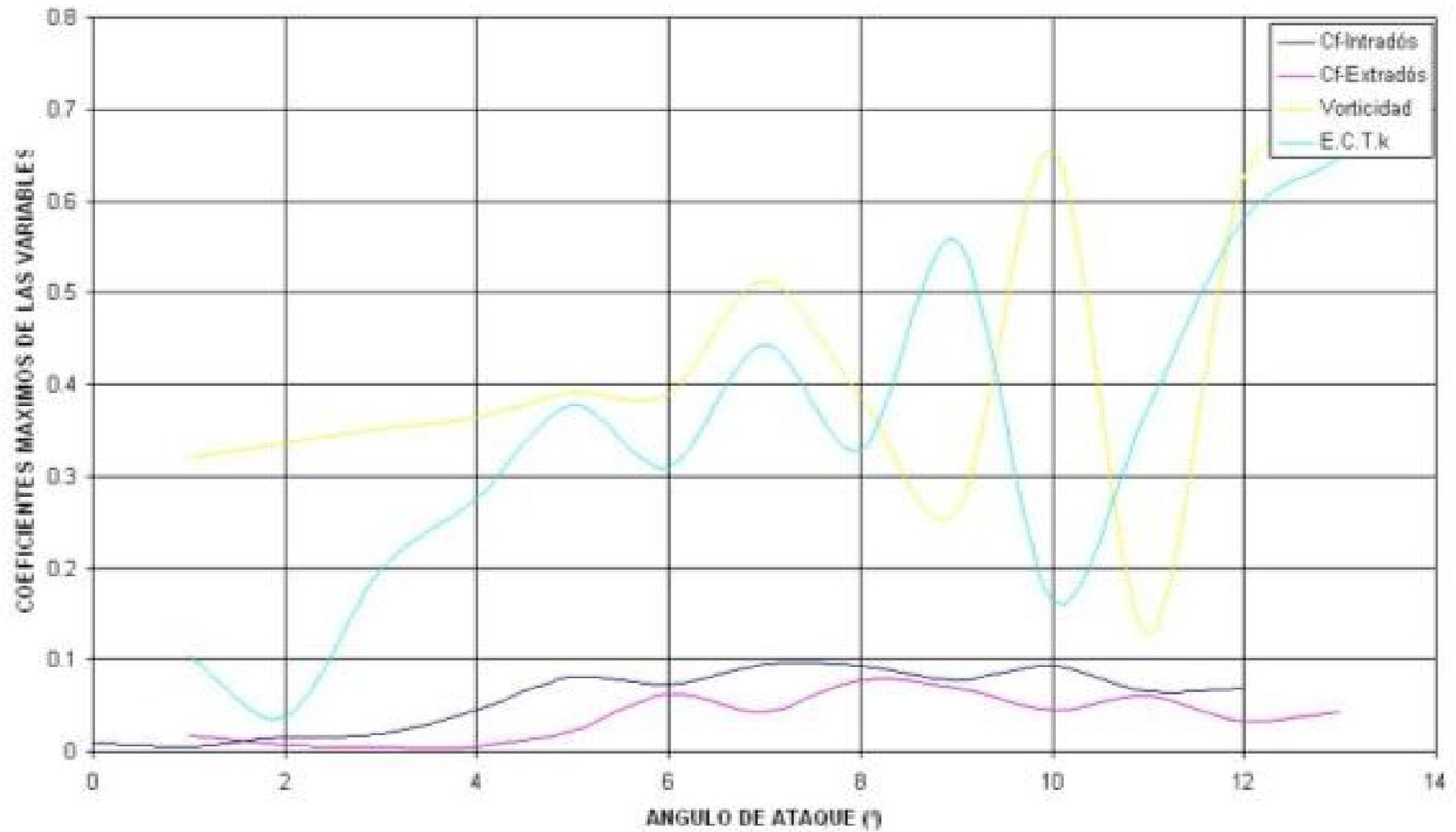


Fig. 4.8 Oscilaciones de coeficientes máximos y mecanismos del modelo de turbulencia

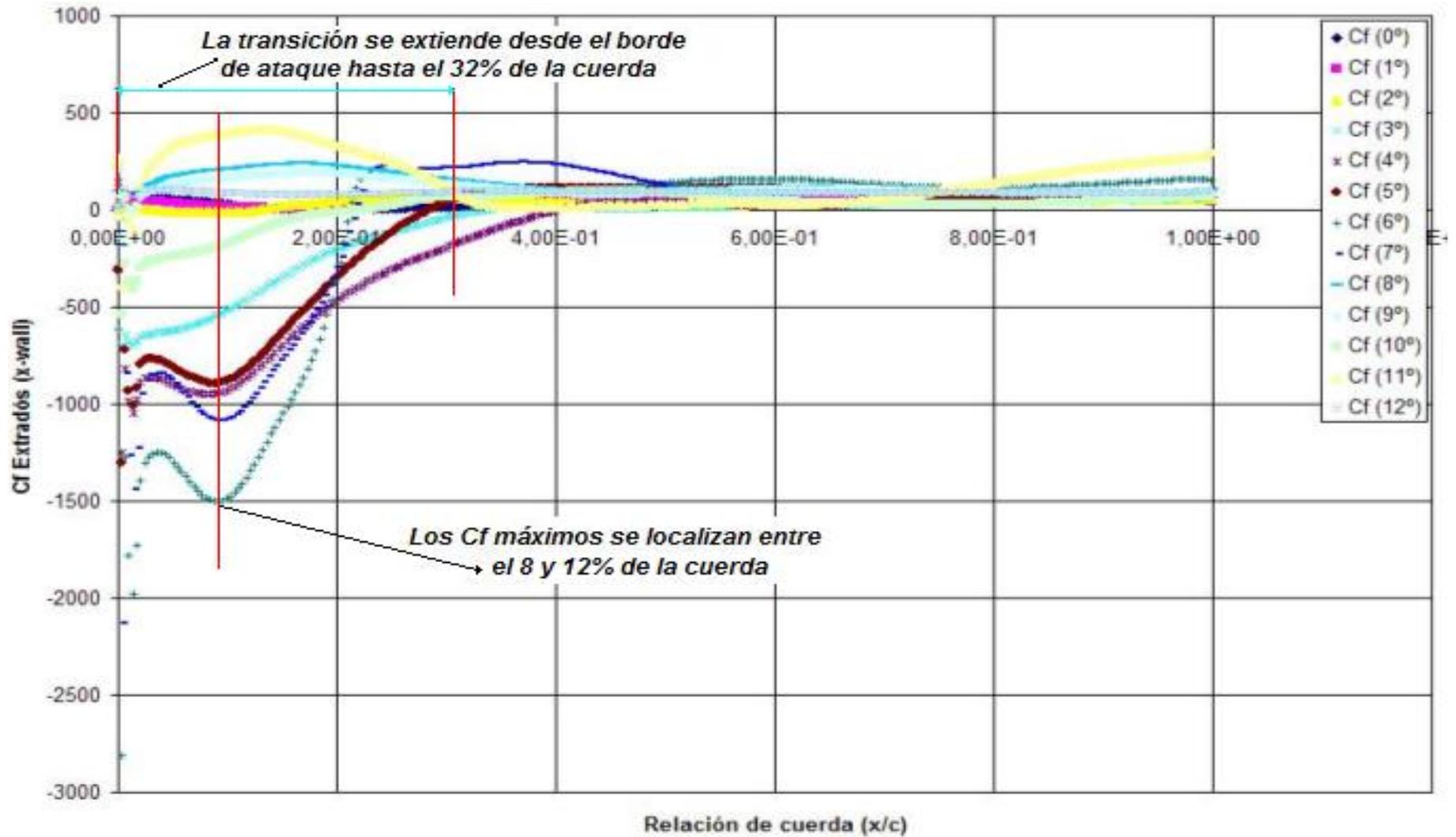


Fig. 4.12 Coeficiente de fricción sobre extradós en la dirección-x al variar el ángulo de ataque

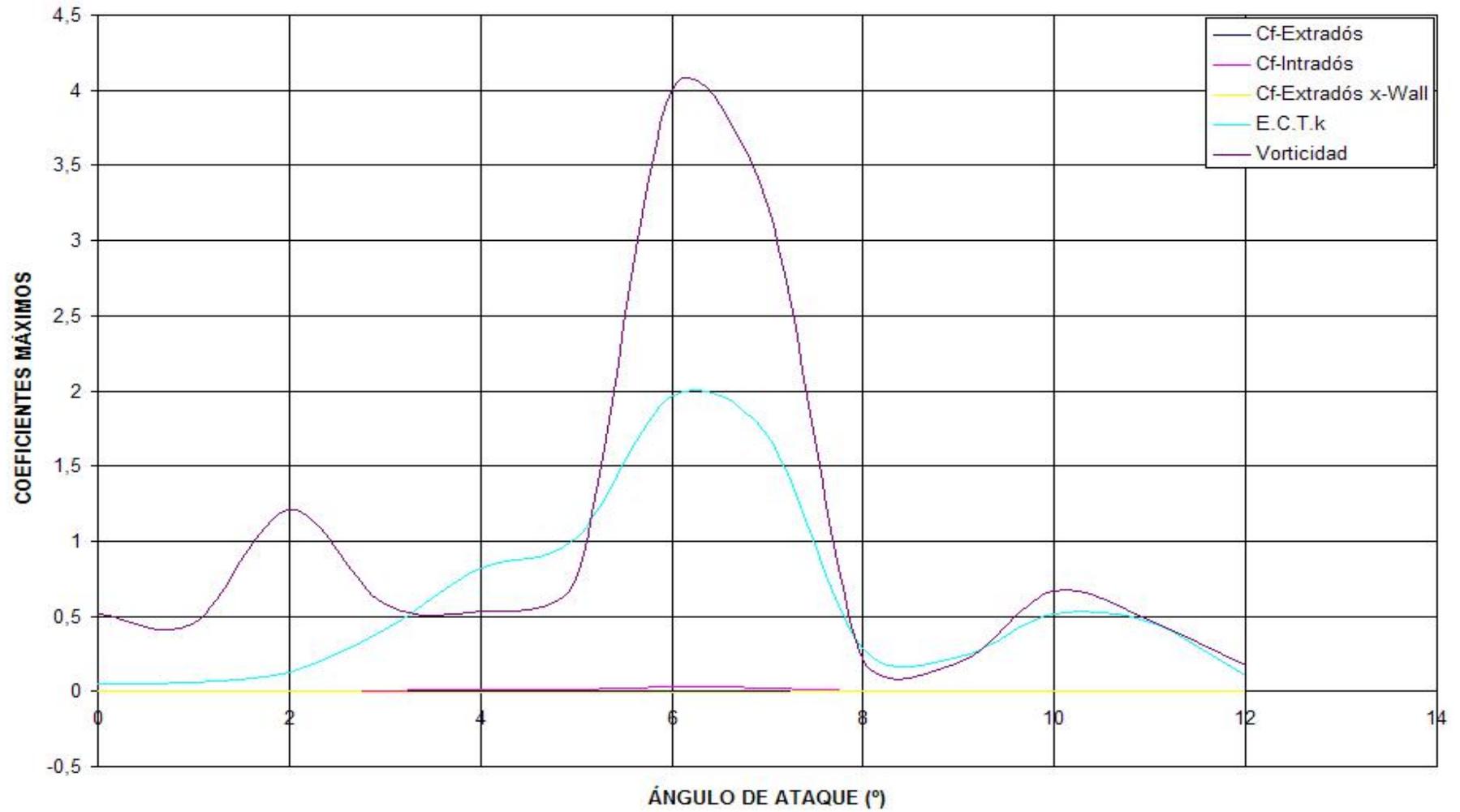


Fig. 4.15 Oscilaciones de Coeficiente máximos al variar el ángulo de ataque