INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada

CICATA
Unidad Legaría

Diseño de un Autómata Celular Del Tipo Difuso

TESIS

Que para obtener el grado de:
Maestro en Tecnología Avanzada

Presenta:
Ing. Raziel Morón Carrales

Directores:

Dr. José de Jesús Medel Juárez

Dr. Pedro Guevara López

México, Distrito Federal, Diciembre del 2007

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA DE CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de México al día 5 del mes de DICIEMBRE del año 2007, el que suscribe Ing. Raziel Morón Carrales alumno del Programa de Posgrado en Tecnología Avanzada con número de registro A050192, adscrito a CICATA-LEGARIA, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. José de Jesús Medel Juárez y el Dr. Pedro Guevara López, y cede los derechos del trabajo intitulado DISEÑO DE UN AUTÓMATA CELULAR DEL TIPO DIFUSO al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección leizarmx@yahoo.com.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Ing. Raziel Morón Carrales

SIP-14

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México, D.F. siendo las 11:00 horas del día 28 del mes de noviembre del 2007 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de ______ para examinar la tesis de grado titulada:

DISEÑO DE UN AUTOMATA CELULAR DIFUSO

Presentada por el alumno:

Morón	Carrales	Raziel
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro: | A | 0 | 5 | 0 | 1 | 9 | 2 |

aspirante al grado de:

Maestría en Tecnología Avanzada

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Directores de tesis

Dr. José de Jesús Medel Juárez

Dr. Pedro Guevara López

Dr. José Antonio Calderón Arenas

Dr. Teodoro Rivera Montalvo

Dr. Miguel Ángel Aguilar Frutis

Dr. José Luis Fernández Muñoz

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

CENTRO DE INVESTIGACION EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGIA AVANZADA DEL IPN

Agradecimientos

A Dios

Por permitirme vivir y lograr todos mis triunfos.

A mis padres

Ya que ellos fueron, son y serán siempre las personas que me han motivado a seguir adelante sin importar las circunstancias.

A Lucy

Por motivarme a seguir cuando ya no podía, y por estar conmigo sin otro interés más que el amor.

A Jacobo

Por ayudarme e impulsarme en todo momento.

Al Dr. Medel

Por recibirme en el momento más crucial de mi formación como investigador y darme la confianza suficiente para conseguir esta obra.

A Lety Cardona

Por tenerme paciencia y darme todo el apoyo que me proporciono en mi estancia en CICATA-Legaria.

Al CIITec y al CICATA U. LEGARIA

Por darme la oportunidad de ingresar a nivel postgrado, continuar y terminar la Maestría en Tecnologías Avanzadas, respectivamente.

Al CONACYT

Por apoyarme en esta etapa de mi vida

A mis compañeros

Por estar conmigo y apoyarme durante mi estancia en el postgrado

A Todos

Mis Familiares, profesores, amigos, compañeros de escuela y de trabajo, que me han apoyado a lo largo de mi vida, a través de sus enseñanzas, amistad y confianza, GRACIAS.

“El éxito no es para quien cree
que puede hacer algo,
sino para quien lo hace”

Anónimo

Índice

Capitulo 3. Lógica Difusa

Capitulo 4. Autómata Celular Difuso

Índice de Figuras y Tablas

Figuras

Nombre **Pag.**

Capitulo 2 Autómata Celular

Capitulo 3 Lógica Difusa

Capitulo 4 Autómata Celular Difuso

Tablas

Nombre **Pag.**

Capitulo 2. Autómata Celular

Capitulo 3. Lógica Difusa

Capitulo 4. Autómata Celular Difuso

Glosario

Autómata: Sistema capaz de generar operaciones y acciones por si mismo.

Autómata Celular: Sistema compuesto por un conjunto de células o celdas que cuentan con un arreglo en una dimensión dada, y son capaz de asemejar o imitar el comportamiento de un sistema complejo.

Caótico: Perteneciente al caos. Confusión de todos los elementos antes de ser ordenados para conformar un universo.

Celda-Estado: Celda dentro de una autómata celular que posee una condición predispuesta o adquirida por evolución del sistema en el que se encuentra.

Célula: Unidad anatómica, fisiológica y genética de todos los seres vivos. Pequeña celda, cavidad o seno. Unidad mínima.

Conjunto: Serie de elementos definidos por una propiedad característica que permite conocer si un elemento determinado pertenece o no a la referida serie.

Conjunto Difuso: Serie de elementos que no cuentan con valores numéricos o matemáticos, sino con variables lingüísticas las cuales tienen un grado de pertenencia al limite superior o inferior del conjunto que se encuentra dentro de un universo.

Determinístico: Perteneciente a Determinación o determinado el cual es la relación de dependencia unilateral entre dos términos. Distinguir, señalar o fijar los términos de una cosa.

Difuso: Elementos que para ser descritos tienen poca precisión ya que dependen de un grado de pertenencia a un objeto o a una variable determinada.

Evolución: Desarrollo de las cosas o de los organismos, por medio del cual pasan gradualmente de un estado a otro. Proceso de cambio de las especies vivientes que desemboca en la aparición de otras distintas a través de la adaptación al medio y la llamada selección natural en la lucha por la supervivencia.

Inferencia: Perteneciente a inferir, el cual se utiliza para distinguir una cosa de otra o para conducir a un resultado.

Implicación: Contradicción, oposición a los términos entre si. Relación o repercusión que entraña una cosa.

Latice: Arreglo de un autómata celular el cual puede estar en una dimensión determinada y puede poseer una longitud indicada.

Lógica Difusa: Sistema matemático que modela funciones no lineales, que convierte unas entradas en salidas acordes con los planteamientos lógicos que usan en el razonamiento aproximado.

Probabilístico: Perteneciente a la probabilidad, la cual es la medida del grado de ocurrencia de un suceso. Para una experiencia cualquiera realizada al azar con un número finito de resultados posibles, y susceptible de ser repetido entre cero y uno.

Reglas: Normas que rigen la conducta y las operaciones en el estudio de una ciencia.

Sistema: Conjunto de cosas u objetos que ordenadamente relacionadas entre si, contribuyen un fin determinado. Conjunto de elementos interdependientes; conjunto de axiomas y reglas que determinan un perfecto desarrollo de sus funciones.

Transición: Cambio repentino de tono o expresión de algún objeto o variable determinada.

t-conorma : Es la función definida por medio de la unión y la intersección de conjuntos difusos, que permiten describirla de una manera dual a través de los operadores máximo y suma algebraica

t-norma : Es la función definida por medio de la unión y la intersección de conjuntos difusos que permiten describirla de una manera dual a través de los operadores mínimo y el producto algebraico

Universo: Conjunto de individuos o elementos que forman parte de un todo.

Variable Lingüística: Es la definición del grado de pertenencia al valor máximo o valor mínimo.

Vecindad: Es el conjunto de celdas que conforman el autómata celular y que se encuentran alrededor de la celda-estado.

Vecino: Celda que se encuentra junto a la celda-estado. Por lo regular estas pueden indicarse por medio de un radio r el cual indica cual es el número de celdas cercanas a la celda-estado en todos sus lados.

Resumen

El estudio de los autómatas celulares a tenido gran relevancia desde que se analizaron cuáles pueden ser sus aplicaciones en diferentes aspectos de la industria y la vida cotidiana. El presente trabajo busca dar a conocer cómo se comporta y se desarrollan los autómatas del tipo difuso, ya que estos son los que pueden ser aplicados para poder tener con mejores resultados ya que no solamente funcionan como sistemas matemáticos, sino que tienen un funcionamiento que quizás es el mas similar al razonamiento humano.

Cuando podamos comprender y manipular este tipo de autómatas celulares, entonces podremos comenzar a entender, analizar y diseñar sistemas que sean capaces de poseer inteligencia artificial, ya que los autómatas celulares difusos son la base para el funcionamiento de sistemas con inteligencia Artificial.

Los aportes principales de este trabajo de tesis son:

- El análisis y la comprensión de que es un autómata celular
- Qué es la lógica difusa y como se comportan los conjuntos difusos
- De qué manera se puede aterrizar la idea de lógica difusa en los sistemas conocidos como autómatas celulares
- El análisis y la comprensión de los autómatas celulares difusos
- Cómo se diseña y se determinan las reglas de transición en un autómata celular difuso

Palabras Clave: *Autómata Celular, Vecindad, Vecino, Latice, Reglas de Transición, Evolución, Lógica Difusa, Conjuntos Difusos, Regla "IF-THEN", Autómata Celular Difuso*

Abstract

The study of the cellular automata had great relevance since it had analyzed that can be your applications in diferent aspect of the industry and the daily life. The present works search for to give know as bears and develop to him the fuzzy cellular automata, since this who can be applied to have with improve results since not only function as mathematical systems, but that have a functioning that maybe it is to the human reasoning.

When we can understand and manipulate this type of cellular automata, then we can begin to understand, analyze, and desing systems that are capable to have Artificial Intelligence, since this the fuzzy cellular automata is the base for functioning for Artificial Intelligence systems.

The main contributions thesis work are:

- To analyze and understand about of what is a cellular automata
- What is the fuzzy logic and as bears the fuzzy sets
- That trained can integrate the idea of the fuzzy logic in a cellular automata system
- To analize and undestand of the fuzzy celluar automata
- How to desing and, how to determinate the transition rules on a fuzzy cellular automata

Key words: *Cellular Automata, Neighbourhood, Neighbour, Laticce, Transition Rules, Evolution, Fuzzy Logic, Fuzzy Sets, IF-THEN Rule, Fuzzy Cellular Autamata*

I

Introducción

Desde siempre el ser humano tiene el interés por saber de qué manera se comportan diferentes tipos de sistemas que se desarrollan en su mundo. Por ejemplo: principalmente cómo se comporta la evolución del hombre mismo, cómo se comporta el ambiente ante diversas variaciones en su mismo sistema, cómo podrían llegar a controlar las enfermedades que van surgiendo con el paso del tiempo, cómo se comportan los sistemas físicos, químicos, biológicos, etc.

Durante mucho tiempo, estudiosos han querido implementar modelos matemáticos con la intención de representar la evolución de dichos sistemas, aunque en muchas ocasiones los resultados de la teoría distan mucho de los obtenidos en la práctica.

Desde la década de los 40´s del siglo pasado, cuando se creo la primer computadora conocida, se comenzó con la idea de generar máquinas capaces de auto-reproducirse y en el mejor de los casos, crear máquinas que tuvieran la capacidad de tener funciones de razonamiento tan complejo que se asemejen al razonamiento humano queriendo dar origen a la inteligencia artificial.

Dadas estas inquietudes del ser humano, se comenzó a trabajar en sistemas que fueran capaces de interpretar el comportamiento de sistemas complejos.

En un principio se pensó en crear una máquina que pudiera auto-reproducirse por si misma, lo cual dio origen a los autómatas celulares. Cuando se dio a conocer esta idea se tomo gran interés en ella por parte de diferentes científicos de todo el mundo, al grado de que se comenzó una gran investigación por conocer de qué manera funcionan y cómo podrían utilizarse en sistemas físicos y matemáticos inicialmente.
Con el paso del tiempo se formularon diferentes tipos de autómatas celulares, los cuales eran cada vez mas complejos, pero sin embargo dependían de la lógica clásica en la cual solo se manejaban 2 estados de transición: un estado alto (1) y un estado bajo (0). Esto para muchos fue una limitante ya que no podían interpretar evoluciones tan simples como lo es la evolución del ser humano.

Dado este problema se comenzó a aplicar un principio que se dio a conocer a principios de los 40´s por el Dr. Zender, el cual fue nombrado como "Fuzzy Logic" o "Lógica Difusa", la cual no maneja valores matemáticos sino variables lingüísticas las cuales buscan describir cosas que el razonamiento humano puede entender, por medio de un lenguaje natural.

Conocido este principio se comenzó a trabajar en la formulación y creación de los llamados autómatas celulares del tipo difuso, los cuales tienen la característica de funcionar en base a principios marcados por la lógica difusa. Ya no manejan solamente valores cerrados entre un 0 y un 1, sino que manejan grados de pertenencia entre los intervalos que van de 0 a 1.

El manejo de este tipo de autómata celular da entrada al manejo de sistemas como son la Inteligencia Artificial, el comportamiento de ciertos sistemas evolutivos como lo son las enfermedades, etc.

Descripción del problema

A pesar de que se ha estudiado mucho sobre este tema, la información que se encuentra disponible aún es limitada, por lo cual se vuelve necesario analizar, formular y crear autómatas celulares difusos para comprender de qué manera se comportan, cómo se llevan a cabo sus transiciones, cuáles son sus condiciones de funcionamiento, etc.

Posterior a ello se puede pensar en dar aplicación a cada tipo de sistema con previo análisis del comportamiento que puede presentar el sistema en cuestión. Por lo anterior se formula los siguientes objetivos para el presente trabajo.

Objetivos

Objetivo General

El presente trabajo tiene por objetivo diseñar un autómata celular del tipo difuso de una dimensión aplicando conceptos de lógica difusa.

Objetivos Específicos

- Comprender el concepto y el comportamiento de los Autómatas Celulares.
- Comprender y aplicar el concepto de Lógica Difusa.
- Aplicar y desarrollar los conceptos de Conjuntos Difusos.
- Aplicar la Lógica Difusa en el concepto de Autómata Celular.
- Crear un Autómata Celular Difuso.
- Comprobar los resultados del autómata Celular Difuso creado.

Justificación

Actualmente los sistemas difusos son utilizados en sistemas inteligentes como lo es en plantas cementeras, plantas depuradoras de agua, sistemas de transporte, en la metalurgia, en los robots industriales, en aviones, etc., por lo cual se vuelve necesario tener mas información con respecto al tema.

Se debe considerar también que estos principios se están empleando en los sistemas neuronales, los cuales comienzan a comprender el funcionamiento del cerebro humano. Es necesario comenzar y aplicar la Inteligencia artificial en sistemas diferentes a los sistemas de computo, por lo cual este trabajo busca dar inicio a la investigación acerca del diseño así como la aplicación de los sistemas inteligentes.

Para poder cumplir con los objetivos marcados anteriormente, el presente trabajo manejara los siguientes temas.

En el capitulo 1 se verán todos los antecedentes referentes con los autómatas celulares indicando cómo nació la idea de dichos sistemas, cómo fueron evolucionando hasta llegar a ser utilizado como el principio para desarrollar la Inteligencia Artificial.

En el capitulo 2 se describirá detalladamente cómo se conforma un autómata celular, cuáles son las características que lo componen, de que manera se comporta, y cómo funcionan las reglas de transición que son las que determinan de que manera evolucionara durante el paso del tiempo t. También se indicará cuáles son los tipos de autómatas celulares más importantes para la investigación de los mismos.

En el capitulo 3 se indicará que es la lógica difusa, como se origino esta idea, de qué manera se comporta la lógica difusa, cuáles son las reglas que la rigen, cuál es su comparación con respecto a la lógica clásica, y cómo se llevan a cabo las operaciones de conjuntos difusos.

En el capitulo 4 se aplicará la teoría de la lógica difusa en los autómatas celulares para dar paso a los autómatas celulares difusos. Se analizará de qué manera se comporta este tipo de autómata celular, cómo se aplican las reglas de transición para este tipos de autómatas celulares, y cómo se comportan durante su evolución. También se indicara cómo se desarrollo el autómata celular que cumplirá con el objetivo general de este trabajo y cuales fueron los resultados obtenidos.

En el capitulo 5 se presentan las conclusiones a las que se llego después de analizar los resultados obtenidos después de experimentar con el autómata celular difuso que fue diseñado.

Límites y Alcances

Este trabajo se limitara únicamente a comprender y desarrollar un autómata celular del tipo difuso, por lo cual los alcances quedaran acotados con respecto a los objetivos tanto generales como específicos marcados en la sección anterior.

- Solo se desarrollarán autómatas celulares de una dimensión
- No se considera el tiempo de evolución
- Las reglas de transición se componen a lo más de tres estados
- No se realiza análisis de estabilidad
- No se observa el grado de complejidad algorítmica

1

Historia de los Autómatas Celulares

1.1 Introducción

En el desarrollo de esta unidad se podrá ver cómo se concibió la idea de armar un sistema capaz de poder representar la evolución de sistemas tan complejos como lo son los sistemas biológicos principalmente.

Se dará una reseña de cuales son las etapas mas importantes durante el desarrollo de los autómatas celulares desde que John von Neumann tuvo la idea de formar este tipo de sistema hasta que *John Horton Conway* y *Martin Gardner* publicaron el primer autómata celular que hasta ahora es el mas conocido como "*Life*" o "*Juego de la Vida*".

1.2 Descripción

Desde siempre el hombre ha intentado controlar su entorno, principalmente sistemas tan complejos como lo son la evolución del mismo ser humano, el comportamiento del medio ambiente, la evolución de seres microscópicos como pueden ser virus y bacterias, hasta llegar al punto de querer hacer que una máquina funcione, actúe y razone de la misma manera que lo hace un ser humano.

A pesar de que han querido asemejar dichos sistemas con otros sistemas como son los mecánicos, eléctricos, electrónicos, etc., no se habían podido encontrar buenos resultados para decir que por fin habían logrado crear un sistema que asemejara fielmente un comportamiento tan complejo como los antes mencionados.

El modelado de la mayoría de los sistemas físicos, eléctricos y electrónicos, esta basado en métodos y expresiones matemáticas, las cuales representan teóricamente el comportamiento de dichos sistemas. Generalmente, para modelar sistemas de naturaleza continua, son utilizadas las ecuaciones diferenciales, las integrales y las variables de estado, entre otras. Algunos procedimientos de discretización y digitalización de sistemas, permiten realizar análisis numéricos sobre modelos aproximados.

Una técnica matemática compleja utilizada para modelar algunos sistemas físicos y mecánicos es el "Método del Elemento Finito (FEM)" cuya finalidad es discretizar espacios de la naturaleza continua, sobre los cuales es posible realizar análisis numéricos para comprender, por medio de un modelo discreto, el comportamiento de sistemas analógicos. No obstante, la complejidad de aplicar el FEM sobre algunos sistemas es tal, que resulta difícil lograr modelos que describan con precisión sus comportamientos. El FEM es de amplia utilización para el análisis de sistemas y espacios físicos-mecánicos donde el objetivo es comprender la resistencia de un material, la dinámica de la partícula y en general el comportamiento y la interacción de los elementos base del sistema espacio; pero quedan aún muchos sistemas complejos y de naturaleza diversa en los cuales no es conveniente aplicar esta técnica, por ejemplo los sistemas químicos, biológicos, evolutivos, genéticos, eléctricos, computacionales e inclusive algunos sistemas mecánicos y físicos. Para el modelamiento de este tipo de sistemas quedan tres opciones:

- Lograr un modelo de naturaleza continua (en aquellos sistemas que sean analógicos).
- Utilizar métodos aproximados de discretización (el cual tiene algunos problemas de digitalización).
- Modelar utilizando un Autómata Celular.

Los Autómatas Celulares son estructuras ideales para construir modelos digitales aproximados de algunos sistemas complejos de naturaleza continua, sin pasar por modelos analógicos. Es posible por ejemplo, lograr sencillos modelos digitales que representen de manera muy eficiente algunas leyes de la física.

1.3 Historia

El modelado de estos sistemas tiene sus orígenes a finales de la década de los 40´s cuando Jhon von Neumann edito y publicó su libro "Theory of Self-reproducing Autómata" (Teoría de la Auto-reproducción de un Autómata). Aunque Jhon von Neumann puso en práctica los Autómatas Celulares estos fueron concebidos en los años 40´s por Konrad Zuse y Stanislaw Ulam. Zuse pensó en los "espacios de cómputo" (computing spaces), como modelos discretos de sistemas físicos. Los aportes de Ulam vinieron al final de los 40´s despúes de haber inventado con Nicholas Metrópolis el Método de Monte Carlo: Método no determinístico usado para realizar una aproximación numérica.

Básicamente la historia de los autómatas celulares se puede clasificar en tres etapas:

1.3.1 Era de *John von Neumann*.

La primer etapa la inicia *John von Neumann*, quien una vez terminada su participación en el desarrollo de la primer computadora "*ENIAC*" (*Electronic Numerical Integrator And Computer*), tenia en mente desarrollar una máquina con la capacidad de construir a partir de si misma otras maquinas iguales (auto-reproducción), considerando para ello el comportamiento complejo de la reproducción. Con la ayuda de su amigo *Stanislaw Ulam*, *von Neumann* implata la teoría de los autómatas celulares en un vector de dos dimensiones ZxZ (donde Z representa el conjunto de enteros). El vector es llamado *espacio de evoluciones* y cada una de las posiciones (llamadas células-estado) en el vector toma un valor del conjunto de estados (que en el caso de ese autómata fue de $|k|=29$). La función de transición que determina el comportamiento del autómata celular utiliza la vecindad de *von Neumann*, que consiste en un elemento central $x(i,j)$ (llamada célula central) y sus vecinos que son las células $x(i,j-1)$, $x(i,j+1)$, $x(i-1,j)$ y $x(i+1,j)$ dentro de un plano; es decir, la célula central y las células que se encuentran mas próximas tanto arriba, abajo, a la izquierda y a la derecha.

1.3.2 Era de Martin Gardner

En 1970, *John Horton Conway* dio a conocer el autómata celular que probablemente sea el más conocido: el Juego de la Vida "*Life*": publicado por *Martin Gardner* en la columna *Mathematical Games* en la revista *Scientific American*. *Life y que* ocupa una cuadricula (latice bidimensional) donde se coloca al inicio un patrón de células "vivas" y "muertas" (representadas con los colores, blanco y negro, respectivamente). La vecindad para cada célula son los ocho vecinos formados por la vecindad de *von Neumann* y las cuatro células de las dos diagonales (esta vecindad se conoce como vecindad de *Moore*). De manera repetida, se aplican simultáneamente sobre todas las células de la cuadrícula las siguientes 3 reglas:

1. Nacimiento: *se reemplaza una célula viva por una muerta: si dicha célula tiene exactamente 3 vecinos vivos*.
2. Muerte: *se reemplaza una célula viva por una muerta: si dicha célula no tiene màs de 1 vecino vivo (muerte por aislamiento) o si tiene mas de 3 vecinos vivos (muerte por sobrepoblación).*
3. Supervivencia: *una célula viva permanecerá en ese estado: si tiene 2 o 3 vecinos vivos.*

Una de las características mas importantes de *Life* es su capacidad de realizar cómputo universal, ya que con una distribución inicial "apropiada" de células vivas y muertas, *Life* se puede convertir en una computadora de propósito general.

1.3.3 Era de Stephen Wolfram

Stephen Wolfram ha realizado numerosas investigaciones sobre el comportamiento cualitativo de los Autómatas Celulares. Con base en su trabajo sobre Autómatas Celulares Unidimensionales (en una dimensión) con 2 o 3 estados, sobre las configuraciones periódicas que se presenten en el Autómata Celular, observó sus evoluciones para configuraciones iniciales aleatorias. Así, dada una serie de reglas de transición, el autómata celular exhibe diferentes comportamientos para diferentes condiciones iniciales.

De esta manera, Wolfram clasificó el comportamiento cualitativo de los autómatas celulares de acuerdo con su evolución. Con lo anterior un autómata celular pertenece a una de las siguientes clases:

- **Clase I.** La evolución lleva a una configuración estable y homogénea, es decir, todas las células terminan por llegar al mismo valor
- **Clase II.** La evolución lleva a un conjunto de estructuras simples que son estables o periódicas
- **Clase III.** La evolución lleva a un patrón caótico.
- **Clase IV.** La evolución lleva a estructuras aisladas que muestran un comportamiento complejo (es decir, ni completamente caótico, ni completamente ordenado, sino en la línea entre uno y otro, este suele ser el tipo de comportamiento más interesante que un sistema dinámico puede presentar, de acuerdo a Wolfram).

1.4 Conclusiones

Seria increíble pensar que un sistema complejo pueda ser representado o simulado por medio de elementos mecánicos, eléctricos u electrónicos con la intención de comprenderlos y predecirlos antes de que lleguen a cierto estado de evolución. Podría ser posible evitar catástrofes naturales, curar enfermedades que son causadas por virus que evolucionan de una manera muy compleja con una velocidad de cambio no determinística, e inclusive crear inteligencia artificial que tratara de describirlos o en el mejor de los casos predecirlos y poder tomar las acciones correctivas correspondientes, siendo hasta ahora condiciones del azar y antiguamente asociadas a Dios.

Si a través de esta forma de describir la evolución de las células se logra equiparar a la evolución de los sistemas biológicos, lo anterior dejaría de ser una ilusión, ya que estos sistemas pueden ser capaces de ofrecer una simulación aproximadamente confiable al comportamiento dinámico de dichos sistemas.

2

Autómata Celular

2.1 Introducción

En este capitulo se verá cuál es la definición de un autómata celular, cómo esta compuesto y de qué manera evoluciona durante el paso del tiempo t. Además se explicará cómo se compone este tipo de sistema, que como se menciono en el capitulo anterior, sirve para modelar sistemas tan complejos como lo son los sistemas evolutivos biológicos, humanos, químicos, entre otros.

Se mencionará cuales son los diferentes tipos de autómatas celulares que actualmente se están estudiando y cuales son las características propias de cada uno de ellos, cómo se comportan y cómo llevan acabo sus transiciones entre tiempo y tiempo.

Se mostrará cómo se compone un autómata celular lineal y se dará un ejemplo de cómo evoluciona con el paso del tiempo.

2.2 Descripción

Un Autómata Celular (AC) no tiene una definición formal, sin embargo esta formado por un conjunto de celdas (o células) que se encuentran en un sistema discreto de forma aleatoria dentro de una dimensión dada. Dichos sistemas se encuentran en un espacio discreto y el tiempo en el que se desenvuelven y evoluciona también es discreto. En estos sistemas, las células que componen el autómata interactúan con sus vecinos en función de las reglas de transición que tengan predispuestas.

Por lo tanto, los AC son sistemas dinámicos discretos, los cuales tienen 3 partes:

1. Una lattice discreta (*L*). Es el arreglo de celdas que tiene el sistema.
2. Una vecindad (*r*). Son las celdas que se encuentran junto a la celda-estado.
3. Las reglas de transición (*f*). Son las funciones de transición local como puede ser: la función de transición celda-estado, o una tabla de transición de la celda-estado.

La unidad fundamental del sistema es la celda, y dicho sistema puede tener una cantidad n de celdas. La celda-estado es la que nos determinará de qué manera se comportará el sistema durante su evolución de acuerdo a una función de transición. En un estado inicial, la celda o célula estado puede ocupar cualquier posición dentro del arreglo del sistema y puede poseer cualquier estado de n estados posibles. Dichos estados deben ser expresados desde un principio, por lo cual para un comportamiento binario solo se tendrán 2 estados: viva y muerta (1 y 0, respectivamente), por lo cual n será 2; cuando se manejen mas estados estos deben ser expresados como $b = n$. Por lo general, la celda-estado se encuentra representada por la letra x.

2.2.1 Lattices (Arreglos del sistema)

Para los casos de arreglos de sistemas en 1 dimensión *(1D)*, las celdas se encuentran ordenadas en una cadena lineal como se muestra en la Fig. 2.1.

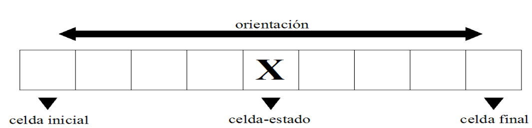


Fig. 2.1 Esquema de un Autómata Celular en 1D

Como se puede observar, las celdas se encuentran orientadas en una línea recta con una celda inicial y una celda final. Debido a que todas las celdas tienen como propiedad la vecindad, esta debe estar dada tanto a lado derecho así como también al lado izquierdo de la celda, por lo cual en este tipo de arreglos se considera que la celda inicial tiene como vecino del lado izquierdo a la celda final, y la celda final tiene como vecino a la derecha a la celda inicial, con lo cual podemos considerar que el arreglo se encuentra en un toroide cíclico (circulo con una cantidad de células) como se muestra en la Fig. 2.2.

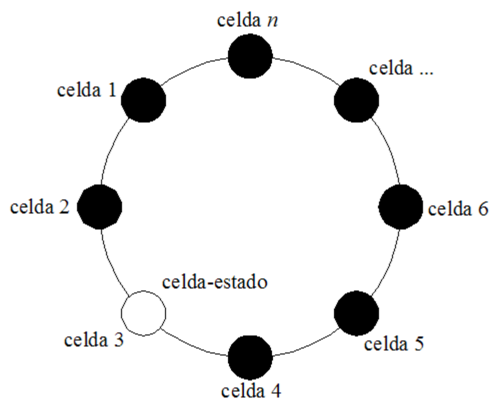


Fig. 2.2 Esquema de conexión entre la celula inicial y la celula final en un arreglo en 1D

En el caso de los arreglos en 2 dimensiones *(2D)*, los arreglos pueden desplazarse en diferentes sentidos esto depende del enlace de la celda. Por lo tanto el sistema pude tener diferentes tipos de arreglos y estos dependenden del tipo de celda que se este manejando; por ejemplo: para una celda cuadrada, nuestro sistema en *2D* tendrá una configuración rectangular o cuadrada (ver la Fig. 2.3.), cuando tenemos una celda triángular el arreglo será de forma triángular, y asi sucesivamente (en el caso de que se tenga lattice ortogonal esta será representada como una lattice común).

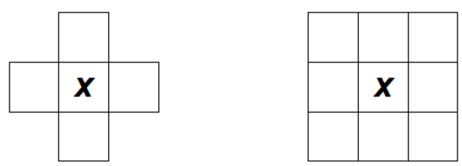


Fig. 2.3 Esquemas de Automatas Celulares en 2D.

Cuando tenemos arreglos en 3 dimensiones *(3D)*, entonces podemos decir que los arreglos más simples están conformados por cubos o prismas rectangulares (ver la Fig. 2.4), aunque estos pueden tomar las formas que cualquiera de nosotros nos podamos imaginar. Por supuesto que en este tipo de arreglos el comportamiento de los autómatas celulares se vuelve más complejo de lo que es en *1D*.

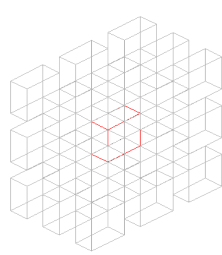
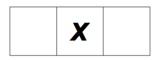


Fig. 2.4 Esquemas de Automatas Celulares en 3D.

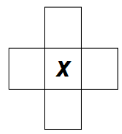
2.2.2 Vecindad

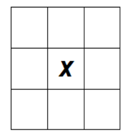
La vecindad de un autómata celular es otra parte muy importante, ya que de ella depende la forma en como se comportará y como irá evolucionando a través del tiempo. *Se le llaman vecinos a las celdas que se encuentran junto a la celda estado en todos sus extremos*, por ejemplo:

Para un Autómata Celular de 1D la celda-estado *x* tendrá 2 vecinos.

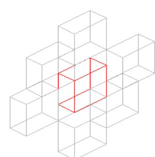


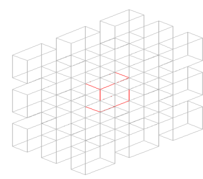
Para un Autómata Celular de 2D la celda-estado *x* puede tener de 4 a 8 vecinos dependiendo del arreglo del sistema.





Para un Autómata Celular de 3D La celda-estado x podrá tener desde 6 hasta 26 vecinos dependiendo del arrerglo del sistema.





**Nota. En el caso de iD con i>2, estos arreglos se cumplen.*

Fig. 2.5 Esquemas de Automatas Celulares en iD i≥1.

La vecindad de un autómata celular puede ser muy diverso, por lo cual se vuelve necesario determinar cuántos vecinos tiene, por lo tanto se debe indicar la lattice del sistema por medio de la letra L, considerando que la celda-estado x es un elemento de la latice, i.e.: $x \in L$. Además, se debe indicar la dimensión en que se encuentra la latice, indicandola con la letra $\boldsymbol{d} \in Z_+$, así como también el radio de vecindad el cual se representa con la letra $\boldsymbol{r} \in Z_+$.

Por ejemplo; para la lattice en $\boldsymbol{d=1}$ y $\boldsymbol{r=1}$ tenemos que el arreglo es el siguiente:

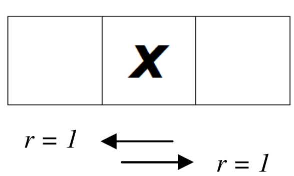


Fig. 2.6 Esquemas de representación de vecindad del Autómata Celular con r=1 en 1D.

Para una lattice $d=2$ y $r=2$, tenemos:

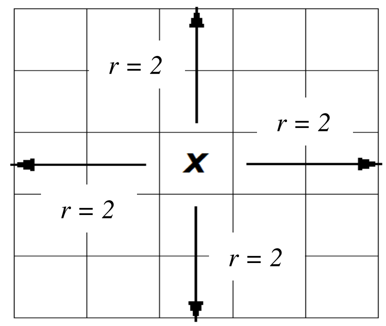


Fig. 2.7 Esquemas de representación de vecindad del Autómata Celular con r=2 en 2D.

Las Figs. 2.6 y 2.7, muestran como es la vecindad de la celda-estado x en su respectiva dimensión.
Esta representación de la celda-estado x_i, la sitúa en el centro del arreglo, no significando que ella deba estar forzosamente en esa posiciòn ya que puede situarce en cualquier punto del arreglo, y este último puede tomar las formas más exóticas que pueda imaginar el lector. Un ejemplo de esto sería el siguiente arreglo en *2D* en la Fig 2.8:

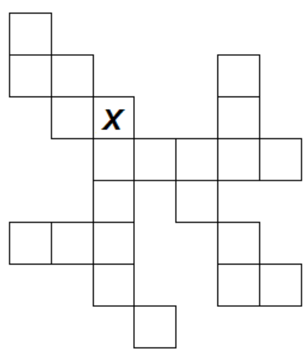


Fig. 2.8 Esquemas de representación de vecindad del Autómata Celular en 2D.

Para poder determinar la vecindad de una celda-estado x_i es común utilizar los vectores unitarios $i,j\in Z_+$, los cuales determinan las posiciones de las celdas vecinas con respecto a la celda-estado y con su número de vecinos *r*. Por ejemplo, la siguiente ecuación $u(x_{i,j})$ representa las posiciones de los vecinos de la celda-estado x_i de acuerdo a su arreglo en 2D, como puede verse en (1) e ilustrativamente en la Fig. 2. 9 .

$$u(x_{i,j})= (x_{i,j-1} , x_{i,j-2} , x_{i+1,j-1} , x_{i+2,j-1} , x_{i-1,j} , x_{i,j+1} , x_{i+1,j+2}). \qquad (1)$$

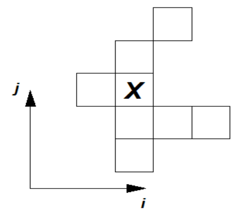


Fig. 2.9 Esquema de representación de vecindad del Autómata Celular en 2D para el arreglo (1).

Cuando desarrollamos la ecuación de la vecindad $u(x)$, es necesario eliminar aquellas ubicaciones que puedan ser redundantes, esto con el objetivo de simplificar los argumentos de las funciones de transición de la celda-estado x_i.

Cabe mencionar que cuando se tiene la latice en *1D*, el valor que se utiliza para ubicación de celdas vecinas puede ser x_i, $i \in Z_+$; cuando el arreglo se presente en *2D* se utilizarán los valores $x_{i,j}$, $i,j \in Z_+$; y cuando se utilicen arreglos en *3D* los valores serán $x_{i,j,k}$, $i,j,k \in Z_+$.

2.2.3 Funciones de transición

Las funciones de transición son las que determinan de qué manera evolucionará el automata celular y esta ligada a las vecindades de la celda-estado. Por tal, la vecindad es el elemtno a través del cual se puede realizar el control de evolución de la celda-estado. Esta influencia puede ser expresada por la alteración de la celda-estado.

Las celdas viven en un tiempo discreto $t = 0, 1, 2, ..., n, n \in Z_+$; donde el estado de la celda x en el tiempo t es expresado simbólicamente por x^t, y el estado de la vecindad queda expresado por $u(x^t)$ o por $(y^t_1, ..., y^t_s)$, donde *s* es el número de celdas-estado que se encuentran dentro de la latice del sistema en el tiempo *t*.

Simbólicamente tenemos que la celda-estado $x^t \in Q$ y que el estado de las vecindades $(y^t_1, ..., y^t_s) \in Q^s$, manienen una relación sobre el conjunto Q, de donde Q es el conjunto finito de celdas que ocupan un lugar dentro de la lattice del sistema.

En base a lo anterior, tenemos que una celda x calcula su siguiente estado dependiendo del estado de sus vecinos en base a :

$$x^{t+1} = f(u(x^t)) = f(y^t_1, ..., y^t_s), \qquad (2)$$

donde: f denota la función de los s-arreglos (función de transición de celda ó funciones de transicion local).

Lo anterior corresponde al mapeo:

$$f : Q^s \Rightarrow Q. \tag{3}$$

Una función f puede ser descrita por una fórmula o por reglas de transiciones de la forma $u(x)^t \Rightarrow x^{t+1}$, o simplemente por una tabla de transiciones de celda-estado. Por ejemplo, el conjunto $Q = \{ 0,1 \}$ de dimensión $d=1$ y con la relación con sus vecinos $u(x_i) = (x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$, podemos determinar la funcion de transicion celda-estado a través de la siguiente relación:

$$x_i^{t+1} = f(u(x_i)^t) = f(x^t_{i-1}, x^t_i, x^t_{i+1}) = x^t_{i-1} + x^t_i + x^t_{i+1}, \tag{4}$$

una alternativa posible de las reglas de transicion de las celdas-estado puede ser expresada de acuerdo a (5)

$$f(x^t_{i-1}, x^t_i, x^t_{i+1}) \Rightarrow x_i^{t+1} \tag{5}$$

con la Tabla 2.1:

000	$\Rightarrow$	0
001	$\Rightarrow$	1
010	$\Rightarrow$	1
011	$\Rightarrow$	0
100	$\Rightarrow$	1
101	$\Rightarrow$	0
110	$\Rightarrow$	0
111	$\Rightarrow$	1

Tabla 2.1 Tabla de reglas de transición de un Autómata Celular lineal de 1D, con r=1

O en la representación por medio de una tabla de celda-estado como la siguiente:

x^t_{i-1}	x^t_i	x^t_{i+1}	$\Rightarrow$	x_i^{t+1}
0	0	0	$\Rightarrow$	0
0	0	1	$\Rightarrow$	1
0	1	0	$\Rightarrow$	1
0	1	1	$\Rightarrow$	0
1	0	0	$\Rightarrow$	1
1	0	1	$\Rightarrow$	0
1	1	0	$\Rightarrow$	0
1	1	1	$\Rightarrow$	1

Tabla 2.2 Tabla de estados de vecindad y reglas de transiciòn de un Automata Celular lineal de 1D con r=1.

En este sentido, un automata celular puede ser definido como una 4-tupla de la forma :

$$U = (\ L,\ Q,\ u,\ f) \qquad (6)$$

Donde L es la latice, Q es el conjunto de posibilidades de la celda-estado, u es la relación con sus vecinos y f es la funciòn de transición.

La configuración de un Autómata Celular esta descrito por el siguiente mapeo

$$C : L \Rightarrow Q, \qquad (7)$$

relación que permite asignar para cada sitio de la lattice un elemento del conjunto celda-estado de Q.
Dentro de la configuración del Autómata Celular de dimensión arbitraria y longitud previamente definida, pueden enconstrarse tres tipos de situaciones:

a) *Tener una configuración completa,*
b) *Tener una configuración no constituible,*
c) *Tener una configuración con relaciones fijas.*

Para realizar una configuración completa se requiere conocer tan solo a los vecinos de la celda-estado así como el conjunto de posibilidades de las celda-estado contenidas en Q; pero en los otros dos tipos de configuraciones es necesario que se definan las funciones de transicion de las celdas-estado.

Por ejemplo, si se tiene una configuración c, con $c \in Q^n$, de un Automata Celular multidimencional de longitud n, con tamaño r, vecindad u y un conjunto de posibilidades de celda-estados en Q, sería completa solo cuando c incluyera todos los posibles estados de sus vecindades, es decir:

$$u : L - L^{s,} \qquad (8)$$
$$\forall \omega \in Q^{s,} \qquad (9)$$
$$\omega \subset c. \qquad (10)$$

En el caso de las configuraciones no construibles (conocidas estas como “El Jardin del Edén”: ya que son inaxesibles por el comportamiento de sus estados de transiciòn durante la evolución del Autómata Celular), el Automata Celular es descrito como

$$U = <L,\ Q,\ u,\ f>, \qquad (11)$$

Ya que no se cuenta con una *c* que lo configure de una manera determinística, al estar evolucionando en el tiempo.

En el caso de la no construible si no existe una configuración c no se tiene una función de transición f hacia las celdas-estado en la configuración c'..

$$c \text{ es no construible} \Leftrightarrow ¡\, \exists c' \in Q^n ,\ \ni f(c') = c. \tag{12}$$

En el caso de las configuraciones fijas, se tiene para todos los casos una c, de tal forma que al realizar una evolución de c a c', se vuelve a tener c

$$c \text{ es fijo} \Leftrightarrow f(c') = c. \tag{13}$$

De manera global se puede expresar a la función de transición por medio de un mapeo:

$$F: Q^n \Rightarrow Q^m \tag{14}$$

que establece una relación entre el conjunto de posibilidades de las celda-estados.

2.3 Automata Celular Lineal.

Para comprender como funcionan los diferentes tipos de autómatas celulares, es necesario conocer de que manera se comporta un Automata Celular Lineal.

Al describir una automata celular lineal es necesario definir un arreglo con $d=1$, $b=2$ y $r=1$, esto significa que las celdas tienen un vecino a la derecha y a la izquierda, y todos juntos forman una vecindad de 3 celdas. Esto puede ilstrarse en el Fig. 2.10., en la cual contamos con 8 celdas por estado, contando basicamente con 8 vecindades de 3 celdas cada una, como se muestra en la Tabla:

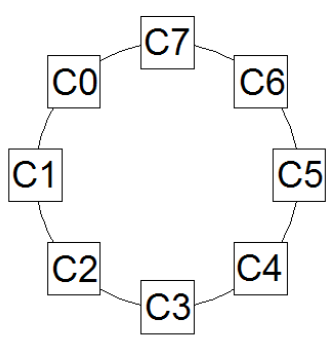


Fig. 2.10 Representación de un autómata lineal

Vecindad	Celdas
0	C7-C0-C1
1	C0-C1-C2
2	C1-C2-C3
3	C2-C3-C4
4	C3-C4-C5
5	C4-C5-C6
6	C5-C6-C7
7	C6-C7-C0

Tabla 2.3. Relación entre vecinos de una autómata celular lineal

Para este caso se tiene una vecindad de longitud 3. El número total de vecindades se define por

$$2r + 1=3, \tag{15}$$

y a su vez, la posibles vecindades se definen como:

$$reglas\_posibles = b^{b2r+1} = 8 \tag{16}$$

Dichas vecindades se pueden comprobar con la siguiente tabla:

Vecindad	**Configuración**
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Tabla 2.4 Relación de vecindades dada la configuración b^{2r+1}.

Por lo cual, un autómata celular con $b=2$ y $r=1$ puede tener de acuerdo a (16) hasta 256 posibles combinaciones en sus reglas de transición. Si se tuviera un autómata celular con $b=3$ y $r=3$, entonces de acuerdo a (16) podemos tener hasta $(3)^{2187}$ posibles combinaciones de reglas de transición. Ya que se cuenta el número de estados y el radio de conexión de un autómata celular,para definir sus reglas de transición las cuales se pueden interpretar de la siguiente manera al considerar a Q={0,1}..

- De acuerdo a la Tabla 2.3 y a la Fig. 2.10, se distribuyen las distintas vecindades en cada peso de la representación binaria de acuerdo a *c*. Ese número representa la regla del autómata celular como se muestra en la siguiente tabla:

K	7	6	5	4	3	2	1	0
Peso p_k	27	26	25	24	23	22	21	20
Vecindad v_k	111	110	101	100	011	010	001	000
Transición t_k	0	0	0	1	0	1	1	0

Tabla 2.5 Regla del autómata celular de acuerdo a la Tabla 2.3.

De aquí se encuentra un número que va a distinguir a la regla,, al estar dado por la suma de los productos de transiciones y sus pesos correspondientes:

$$regla = \sum_{k=0}^{7} p_k t_k \tag{17}$$

Donde p_k son los pesos de la representación binaria y t_k son los valores de transición. Es decir, para el caso de los autómatas binarios, (17) toma la forma:

$$regla = \sum_{k=0}^{7} 2^k t_k \tag{18}$$

El ejemplo de la Tabla 2.4., de acuerdo a (18) nos define a la regla 22 e indica que en aquellas vecindades donde una celda está activa o viva y las demás están inactivas o muertas, entonces cambiará el estado de la celda sobre la cual se consideró la vecindad. Es decir, si se tiene la vecindad *001* respecto de la celda estado x, entonces la transición será a *011*, pero de la misma manera la vecindad *010* pasa a la vecindad *010*, puesto que el cambio de estado se hace para la celda central y, como se ve en la vecindad *010*, su transición mantiene activa a esa celda. La forma de encontrar el número de la regla de acuerdo a (17) y a la Tabla 2.5, es por medio de de (18).

Que al desarrollar (18), de acuerdo a a Tabla 2.5., se tiene:

$$regla = 2^0 t_0 + 2^1 t_1 + 2^2 t_2 + 2^3 t_3 + 2^4 t_4 + 2^5 t_5 + 2^6 t_6 + 2^7 t_7. \tag{19}$$

y que al sustituir los valores de la Tabla 2.5., en (19), se obtiene el número de la regla, el cual es 22.

Esta regla fue propuesta por Wolfram y genera un patrón o carpeta del fractal de Sierpinski, es una versión del Juego de la Vida de Conway en una dimensión.

2.3.1 Representación de la evolución de un autómata celular

En general, los autómatas celulares se presentan como se muestra en la Fig. 2.11, donde las celdas están distribuidas a lo largo de una línea. Hay que recordar que aunque la celda C0 y C7 aparecen sin un vecino, estas están cerradas en un anillo (como puede verse de manera ilustrativa en la Fig. 2.10), por lo cual el vecino a la izquierda de la celda C0 es la celda C7 y viceversa.

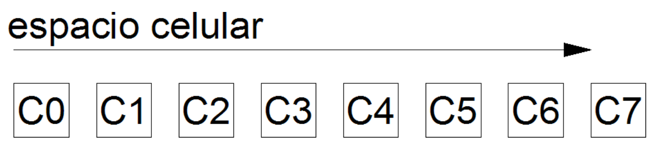


Fig. 2.11 Esquema de arreglo de un autómata celular lineal

La representación de las evoluciones consiste en apilar líneas como la anterior pero en forma de matriz bidimensional que muestren la evolución del autómata celular en unidades de tiempo discretas. Si se presenta la evolución del autómata celular propuesto por Wolfram con un estado inicial *10000000* (la celda C0 inicia activa) entonces se vería de manera ilustrativa en la Fig. 2.12 :

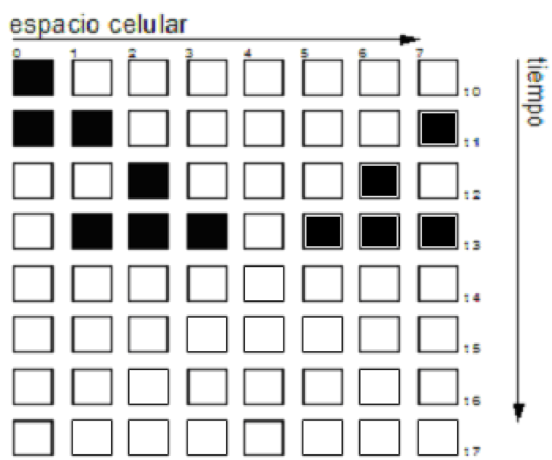


Fig. 2.12 Evolución de un autómata celular de regla 22

En la evolución del autómata celular de la Fig. 2.12, se puede observar que la regla 22 se va aplicando para cada celda de acuerdo a su estado inicial. Después de un tiempo *t4*, la evolución se detiene pues todas las celdas mueren y por tanto ya no hay más actividad, por lo cual se deduce que este autómata celular tienen ciclos y periodos.

Un ciclo de un autómata celular se define como el conjunto de evoluciones entre un mismo estado, es decir partiendo de un estado inicial se llega al mismo después de *n* unidades de tiempo. El periodo es el número de *n* pasos para repetir un ciclo. Para el autómata celular de la Fig. 2.12, el estado inicial 10000000 lo llevo a un estado uniforme después de un periodo $t=8$ en donde todas las celdas están inactivas. Esto lo vuelve un autómata celular de clase I según la clasificación de Wolfram.

Pero, si observáramos el comportamiento de un autómata celular como el anterior ahora con una longitud de 100 celdas durante un tiempo $t=100$, y considerando que la única celda activa es C0, tenemos la evolución que se muestra en la Fig 2.13.

La evolución de este autómata es diferente a pesar de que sus estados iniciales son los mismos y que se utiliza la misma regla. Este autómata tiene un número mayor de vecindades y su evolución lo clasifica dentro de la clase II según Wolfram, ya que cuenta con ciclos de repetición aislados. En la evolución de algunos autómatas existen estados de los cuales provienen otros estados que son conocidos como ancestros.

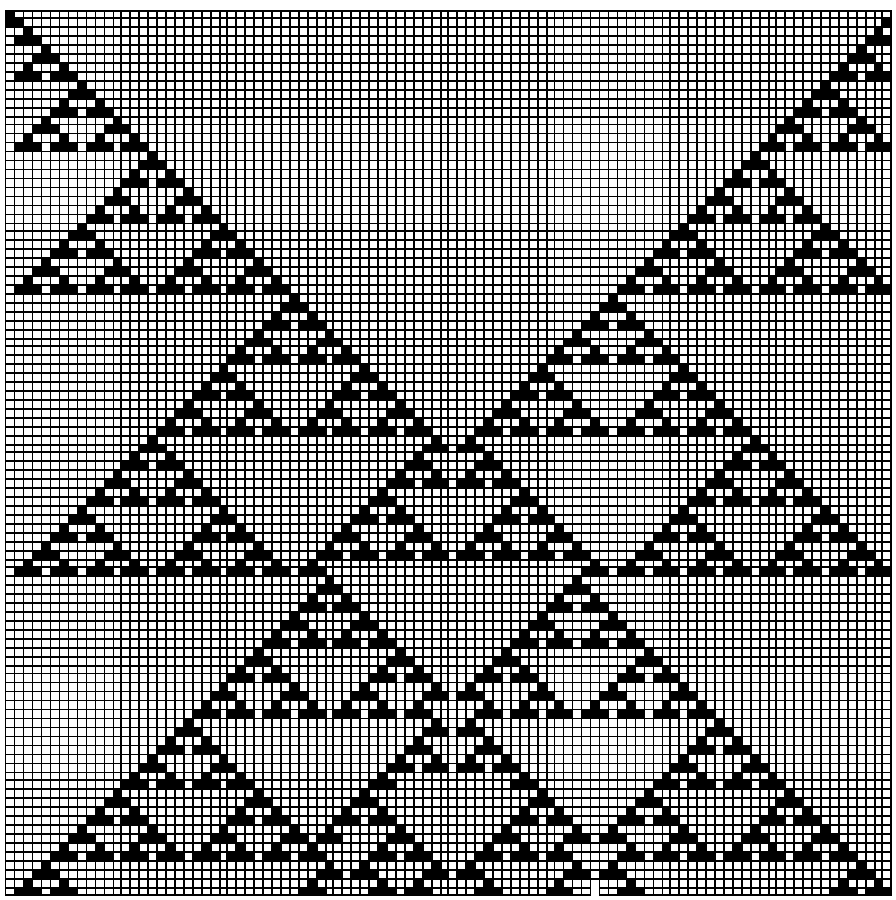


Fig. 2.13 Evolución de un autómata celular con la regla 22, u = 100 y t = 100.

2.4 Tipos deAutomatas Celulares

Existen diferentes tipos de Automatas Celulares, los cuales quedan determinados de acuerdo al tipo de transición de estados que presentan sus celdas. De todos ellos, los mas importantes debido a su aplicación son:

1) Autómata Celular Deterministico
2) Autómata Celular Probabilistico
3) Autómata Celular Difuso

2.4.1 Autómata Celular Determinístico.

La función de transición de la celda-estado de un autómata celular determinístico es tal que para cualquier mapeo tenemos que:

$$\exists f : Q^r \Rightarrow Q,\ \forall l \in Q^r,\ \exists! b \in Q \ni f(\omega) = b \tag{20}$$

con l como la configuración de la vecindad, b los estados posibles de las celdas, r el número de vecinos (tamaño de la vecindad) y Q es el conjunto de los posibles resultados de las celdas-estado. La expresión (20) es una condición determinística del tipo determinística. Al acumular las funciones de transición de un autómata celular como el descrito en (20), nos generara una configuración *DETERMINÍSTICA*, la cual es definida dentro de (11), constituida en una d -dimensión con la lattice integrada por $L\ (\ d \geq 1\ )$, de un conjunto de posibles condiciones de las celdas Q, con vecindad u, una función de transición local f,, es decir:

$$u : L \Rightarrow L^r, \quad f : Q^r \Rightarrow Q. \tag{21}$$

En otras palabras, este autómata celular permite es establecer el siguiente punto donde se localizará la celda-estado x, debido a que el conjunto de estados que están relacionados con el número de vecinos es mapeado al conjunto de celdas-estado de x, por tanto existe un único *b* dentro del conjunto Q, tal que la función de la latice determina su estado.

Alguna veces, eso no es suficiente para caracterizar el estado de la vecindad ya que requiere de una memoria muy larga, pero para algunos subconjuntos de Q los elementos que pueden ser encontrados entre los estados de los vecinos de la vecindad $u(x)$ de la celda-estado x, o por la suma de los estados de las vecindades solo cuando $Q \subset Z_{+} \cup \{0\}$. De esta forma podemos introducir la configuración de los autómatas celulares determinísticos.

Considerando el diagrama de mapeo del conjunto $Q^r : Q = \{0, 1, ..., q\text{-}1\ )$, tenemos:

$|Q| = q$

$$\begin{tikzcd}
\{0, 1, ..., r(q\text{-}1)\} \arrow[dr, "f_T"'] & Q^r \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"] & 2^Q/\{\varnothing\} \arrow[dl, "f_N"] \\
& Q &
\end{tikzcd}$$

Donde β y σ son un mapeo cualquiera, s asigna una configuración $u(x)^t \in Q^r$ con el número $\sigma(u(x)^t) = \Sigma_{y\in u(x)} y^t$. Al mismo tiempo b detecta subconjuntos $\beta(u(x)^t) \subseteq Q$ elementos para que puedan encontrar entre los estados de la vecindad de x en un tiempo t.

2.4.2 Autómata Celular Probabilístico

Hay dos principios principales en los que se basan los autómatas celulares probabilísticos. El primero de estos es la teoría de autómatas celulares propuesta por Von Neumman y la segunda concierne al proceso de interacción local Markov. El proceso de interacción local Markov propuesta por Ligget en 1985, se genera en un tiempo discreto y es de gran interés ya que a sido discutido en una serie de trabajos propuestos por Stavskaya - Pyatecki Shapiro, Dobrushin y Mityushin.

Se considerara a un autómata celular probabilístico como un arreglo finito multidimensional de celdas, un conjunto finito de celdas-estado que evolucionan en un tiempo discreto.

El comportamiento de este tipo de autómata celular, queda descrito por:

$$Q\ \mathrm{FD} \in Q : f(l) = b \in \mathrm{FD}. \tag{22}$$

Donde Q es el conjunto de celdas-estado, l es el latice del sistema, b son los estados posibles de las celdas y FD es la función de distribución que representa el comportamiento del autómata celular.

Analizando la función de distribución de un autómata celular *x*, podemos observar que el comportamiento que presenta tiene diferentes intervalos, para conocer que punto tomará la celda estado podemos valernos de seccionar la curva de la distribución y decir en que intervalo de valores se localizará la celda-estado después de un tiempo t. Esto es lo que hace un autómata celular estocástico, definir en que intervalos podrá localizarse la celda-estado tras un tiempo t determinado.

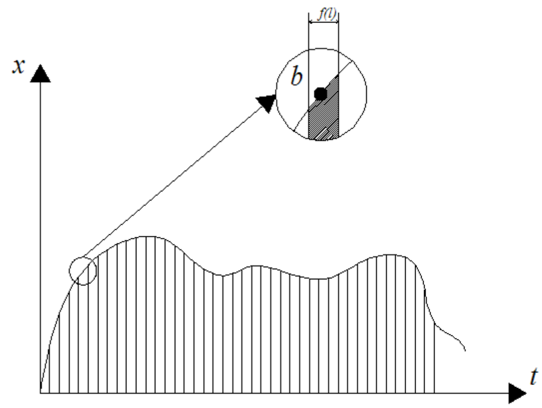


Fig. 2.14 Representación de la función de distribución de un autómata celular estocástico.

2.4.3 Autómata Celular Difuso.

El termino difuso originalmente fue empleado en la teoría del autómata hace mas de 30 años por Wee y Fu, y las personas que obtuvieron resultados muy importantes fueron Santos en 1968, Mizumoto en 1969 y Wechler en 1978. Una de las áreas más recientes de trabajo esta en la difusión neuronal que puede ser considerada como la base de implantación del autómata celular difuso. El trabajo de Shine y Grondin describe un algoritmo paralelo para la realización de un autómata difuso en difusión neuronal, la producción procedente esta escrita en OCCAM y puede ser usada en procesos paralelos difusos.. Investigaciones avanzadas en tecnología VLSI permite diseñar Chips VLSI difusos que pueden aproximar razonamiento dentro de los sistemas de control. Esto nos proporciona una amplia oportunidad de hacer difusión, paralelos sólidos y computadoras neuronales.

Cada celda de este tipo computa su siguiente estado usando una configuración de vecindad pero los cambios con respecto al estado actual se generan en un retardo del tiempo discreto determinado por la vecindad de la celda que le precedía durante el paso del tiempo.

Un autómata celular difuso esta descrito por la tupla $U = <L, Q, u, f, b>$, donde:

- L es una dimensión d finita de n celdas $d \geq 1, n \geq 2$.
- Q es el universo del discurso.
- $u: L \Rightarrow L \times ... \times L = L^r$, u es la vecindad de dimensión r
- f es la función de transición local, $f : [0, n]^r \Rightarrow [0, n]$
- b es una variable lingüística

Una función f puede ser descrita por medio de una formula difusa, en base a los siguientes términos:

$$\exists\,!\,\{M\} : M_i \subseteq Q \tag{23}$$
$$\exists\,!\,b : f\,(w_i\,) : Q_r \Rightarrow \{M_i\} \tag{24}$$
$$M_i = [\ w_i\ ,\ w_i\ ] \tag{25}$$

donde:

- M_i es el subgrupo estado, de n posibles que se encuentran dentro de Q, $M_i \subseteq Q$
- w_i es el estado máximo de la celda-estado
- w_i es el estado mínimo de la celda-estado

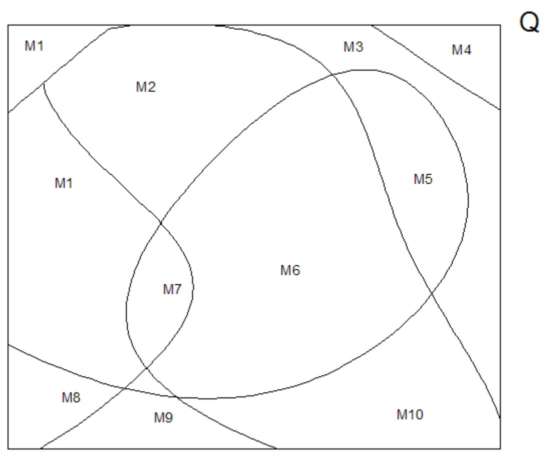


Fig. 2.15 Representación de los estados M_i dentro del conjunto Q

M_i tendrá tantas definiciones de variables lingüísticas como lo permita el conjunto Q.

Mas adelante en el trabajo, se explicara con mas detalle este tipo de autómata celular ya que en el se centra el desarrollo del mismo de este trabajo de tesis.

2.5 Conclusiones

En este capitulo se vieron las características propias de un autómata celular, cómo se construye y de qué manera se comportará durante su evolución. El manejo de las reglas de transición es lo mas importante dentro del autómata celular ya que de ellas depende la forma en cómo se comportara el sistema.

Cuando las reglas de transición son aplicadas de manera eficiente, el autómata celular deja de ser un sistema de demostración y puede pasar a ser una herramienta que nos puede ayudar a comprender el comportamiento de un sistema más complejo que se encuentre en nuestro entorno.

3

Lógica Difusa

3.1 Introducción

En este capitulo se abordarán los términos relacionados sobre la lógica difusa, la cual centra sus principios en la percepción del ser humano ya que en lugar de manejar estados para las celdas, se manejan variables de estado del tipo lingüístico.

Se presentarán las operaciones de conjuntos difusos y las operaciones de lógica difusa, incluyendo la inferencia difusa y las relaciones difusas.

Este tema será necesario para poder desarrollar el concepto de autómata celular difuso.

3.2 Definición.

La lógica difusa conocida como lógica borrosa, se basa en la idea de que "todo es cuestión de grado", o dicho de otra forma utiliza expresiones que no son totalmente ciertas ni totalmente falsas; es decir, se aplica a conceptos que pueden tomar un valor cualquiera de veracidad dentro de un conjunto de valores que oscilan entre dos extremos, la verdad absoluta o la falsedad total. Se fundamenta en los denominados conjuntos borrosos y sistemas de inferencia borrosos que se desarrollan en base a la regla de los concectores lógicos " Si... Entonces... ".

Conviene destacar que lo que es difuso o borroso no es lógica en sí, sino el objeto que estudia y expresa la falta de definición del concepto que se aplica.

Se le considera una rama de la Inteligencia Artificial ya que se utiliza como método de razonamiento similar al pensamiento humano, para que puede procesar información compleja o incierta. Por esto se cree que es posible controlar un sistema por medio de reglas de "sentido común" las cuales se refieren a cantidades indefinidas, describiendo propiedades cualitativas.

Al igual que en un autómata celular, la lógica difusa posee reglas, las cuales son aprendidas por medio de las técnicas adaptivas e acuerdo un criterio previamente establecido y conforme a las condiciones de evolución del entorno en donde se encuentre interactuando.

Entonces, la lógica difusa es definida como un sistema matemático que modela funciones no lineales, que convierte unas entradas en salidas acordes con los planteamientos lógicos que usan el razonamiento aproximado. Permite trabajar con datos numéricos a través de términos lingüísticos; dichos términos son inherentementes a la condiciones de operación del sistema en un medio específico, pero son menos precisos que los datos numéricos aunque en la mayoría de las ocasiones son mas fáciles de entender y utilizar por el pensamiento humano. Dicho sistema descansa en la idea de que no es posible precisar el valor de una variable x sin tan solo conocer el grado de pertenencia a cada uno de los conjuntos en que se ha particionado el rango de la variable. El grado de pertenencia se cuantifica mediante la función de pertenencia f.

3.3 Antecedentes

El concepto de Lógica Difusa fue introducido por el Dr. Lotfi Zadeh en los años 60´s del siglo pasado como medio para modelar la incertidumbre del lenguaje natural ya que la idea de que los elementos sobre los que se construye el pensamiento humano no son números sino etiquetas lingüísticas. Dicho lenguaje permite trasladar sentencias sofisticadas del tipo lingüístico cualitativo (no cuantitativo) a un lenguaje matemático formal a través de la teoría de conjuntos difusos y funciones características asociadas a ellos. Mientras que la motivación original fue ayudar a manejar aspectos imprecisos del mundo real, la práctica temprana de la lógica difusa permitió el desarrollo de aplicaciones en los dieversos sectores del quehacer humano.

Los trabajos del Dr. Zadeh coincidían con obras de pensadores de distintas disciplinas que tenían una visión similar. La paradoja del conjunto de Bertrand Rusell, el principio de incertidumbre de la física cuántica de W. Heisenberg, la teoría de conjuntos vagos de Max Black, sin olvidar la aportación de Jan Lukasiewicz, creador de la lógica multivariada, lo cual influyeron al Dr. Zadeh para que publicara en 1965 su ensayo “Fuzzy Sets” en la revista Informations and Control” y en 1968 “Fuzzy Algorithm” en la misma revista. Mientras que Rusell Black utilizo el término “vaguedad” para referirse a la nueva lógica o para calificar a los conjuntos en la teorización sobre los mismos, Zadeh prefirió el término difuso o borroso para denominar a sus conjuntos y a la lógica en la que apoya su análisis.

En 1994 esta teoría se encontró en la cumbre, sin embargo esta idea no es nueva, ya que sus orígenes son de hace 2,500 años atrás ya que Aristóteles consideraba que existían ciertos grados de veracidad y falsedad, y Platón considero grados de pertenencia.

A pesar de que en un principio la lógica difusa encontró fuerte resistencia entre la comunidad científica, algunos investigadores siguieron las teorías de Zadeh como fueron Bellman, Lakoff, Goguen, Kohout, Smith, Sugeno, Chang, Dunn, Bezdek, Negoita, Mizumoto, Tanaka, Kandel, Zimmermann, etc., los cuales hicieron aportaciones a esta teoría. Durante esta primera década se dio origen a gran parte de la estructuras lógicas, funciones, grupos, operaciones, algoritmos, modelos, etc. Que ahora son utilizados para fundamentar los estudios sobre lógica difusa.

Durante los años 70’s se establecieron varios grupos de investigación con respecto a este tema en diferentes universidades japonesas, y a pesar de que encontraron varias hostilidades, hicieron grandes contribuciones tanto en el desarrollo de la teoría como en sus aplicaciones.

Un avance importante se da en 1974 en el Reino Unido, ya que los Ings. Assilian y Mamdani desarrollan el primer controlador difuso para una máquina de vapor, aunque la primer implantación real de un controlador de este tipo la realizo F. L. Smidth en & Co. en 1980 en una planta cementera en Dinamarca. La empresa Fuji en 1983 implementa la lógica difusa para el control de inyección química en plantas depuradoras de agua en Japón, y en 1987 Hitachi implementa un controlador difuso en el metro de Sendai.

En estos tiempos otro impulso al desarrollo de la lógica difusa fue el creciente interés en las redes neuronales ya que presentaban una gran similitud con los sistemas difusos, la tendencia era buscar relación entre las 2 técnicas y los resultados fueron llamados sistemas neuro-difusos, sistemas difusos que usan métodos de aprendizaje basados en redes neuronales para identificar y optimizar sus parámetros.

Posteriormente en los años 90's hacen su aparición los algoritmos genéticos, con lo cual la lógica difusa toma mas fuerza en el campo de la investigación de los sistemas de control.

3.4 Conjuntos Difusos

Comúnmente podemos observar que la mayoría de los términos son imprecisos, esto quiere decir que no pertenecen completamente a un límite superior o a un límite inferior. Sin embargo, la teoría difusa dice que hay implícito un grado de difusidad entre la descripción de estos términos, en otras palabras, que existen niveles entre el límite máximo y el límite mínimo. Un ejemplo de esto seria el siguiente: Un impacto por golpe puede ser considerado como fuerte (1) o como débil (0), esto es lo que marca la lógica clásica, sin embargo qué pasaría si el impacto que se dio es medio fuerte o medio débil, aquí es donde la lógica difusa maneja términos vagos o imprecisos. Si acotamos los impactos como fuerte (1000 N) y débil (0 N), qué sucede cuando el impacto es de 50 N o de 200 N, cómo lo podemos considerar. El enfoque de la lógica difusa considera que el conjunto "impacto fuerte" es un conjunto que no tiene una frontera clara para pertenecer o no a él, mediante una función que define la transición entre impacto fuerte e impacto débil se asigna a cada valor de impacto fuerte un grado de pertenencia al conjunto entre 1 y 0. De esta forma se puede decir que un impacto de 900 N podría pertenecer al conjunto de impacto fuerte con un grado de 0.9 (o 90%) o un impacto de 200 N puede pertenecer al conjunto de impacto fuerte con un grado de 0.2 (20 %). Por lo tanto la lógica clásica es un caso de límite de la lógica difusa en el que se asigna un grado de pertenencia 1 a los impactos de 5000 N y un grado de pertenencia 0 a los impactos de 0 N.

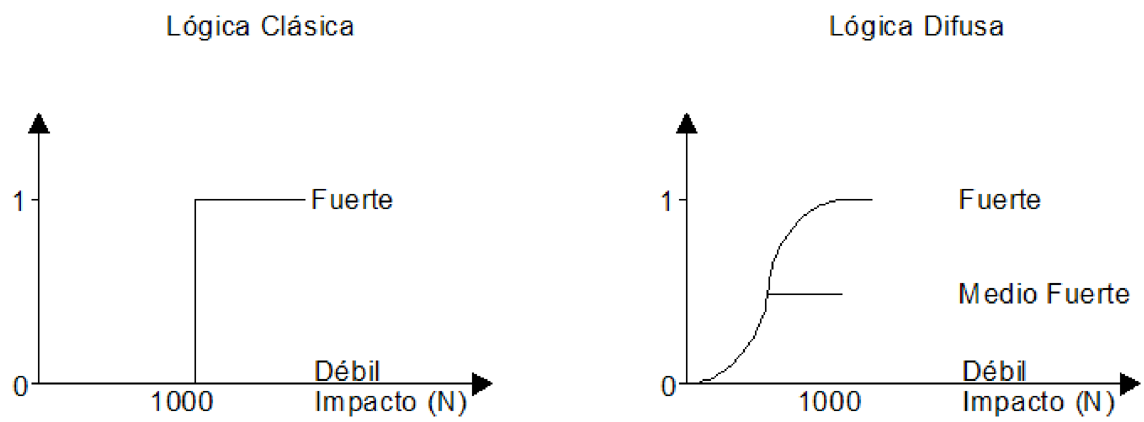


Fig. 3.1 Diferencia entre Lógica Clásica y Lógica Difusa

De tal forma, que se manejen conceptos imprecisos, los cuales son los que gobiernan el mundo real, ya que es muy común hacer aseveraciones como las siguientes:

El día esta cálido,
Esta lloviendo fuerte,
El carro corre rápido,
Las flores huelen bien.

Dichas aseveraciones son relativas con respecto a términos clásicos ya impuestos, pero ¿La imprecisión es un concepto artificial utilizado para aumentar o disminuir en uno o más las propiedades de los fenómenos?, ¿o es una parte intrínseca del fenómeno en si mismo?

Estas son preguntas importantes ya que es la parte fundamental de las medidas de la teoría difusa. La fusificación es independiente de cualquier capacidad para medir, ya que un conjunto difuso es un conjunto que no tiene límites bien definidos. Un conjunto difuso tiene muchas propiedades intrínsecas que afectan la forma del conjunto, su uso y como participa en un modelo. Las propiedades importantes de un conjunto difuso son las concernientes a las dimensiones "verticales" del conjunto difuso (conjunto normalizado) y las dimensiones "horizontales" (conjunto de soporte).

La altura de un conjunto difuso es como máximo un grado de pertenencia y es una cota cercana al concepto de normalización. La superficie de la región de un conjunto difuso es el universo de valores. Es decir un conjunto difuso Q se considera como un conjunto de pares ordenados, en los que el primer componente es un número en el rango [0,1] que denota el grado de pertenencia de un elemento *u* de U en Q, y el segundo componente especifica, quién es ése elemento de *u*. En general los grados de pertenencia son subjetivos en el sentido de que su especificación es una cuestión subjetiva. Se debe aclarar que aunque pueda interpretarse como el grado de verdad de que la expresión u en Q sea cierta: es más natural considerando simplemente como un grado de pertenencia.

Puede notarse que mientras mas próximo está *u* al valor 1, se dice que pertenece más a Q (de modo que 0 y 1 denotan la pertenencia o la no pertenencia completa.)

Así pues, los conjuntos difusos pueden ser considerados como una generalización de los conjuntos clásicos: la teoría clásica de conjuntos marca la pertenencia o no de un elemento en un conjunto y la teoría de conjuntos difusos contempla la pertenencia parcial o en porcentaje del elemento en un conjunto. Esta pertenencia al conjunto se define mediante la función característica asociada al conjunto difuso: para cada valor que pueda tomar un elemento o variable de entrada x, la función característica $f_Q(x)$ proporciona el grado de pertenencia al conjunto Q dentro de un universo U:

$$f_Q(x) = \left\{ \begin{matrix} 1 \text{ si } X \in Q \\ 0 \text{ si } X \notin Q \end{matrix} \right\}$$

Podemos decir que el conjunto Q es matemáticamente equivalente a su función de pertenencia o característica $f_Q(x)$, ya que conocerla es lo mismo que conocer a Q. Un conjunto difuso en el universo de discurso U se caracteriza por una función de pertenencia $f_Q(x)$ que toma valores en el intervalo [0,1], y que puede representarse como un conjunto de pares ordenados de un elemento *x* y valor de pertenencia al conjunto:

$$Q = \{(x, f_Q(x)) : x \in U\}$$

Muchos conceptos de la teoría clásica de conjuntos se pueden hacer extensivos a los conjuntos difusos; otros son excluidos e inherentes a la teoría de conjuntos difusos. Algunos de los más son utilizados son los siguientes:

- El soporte del conjunto difuso Q en el universo de discurso U es un conjunto numérico que contiene todos los elementos de U que tienen un valor de pertenencia distinto de cero en Q:

  $$sop(x) = \{x \in U : f_Q(x) > 0\}$$

  Si el soporte de un conjunto difuso no contiene ningún elemento tendremos un conjunto difuso vacío. Si el soporte de un conjunto difuso es un solo punto tendremos un difuso sencillo.

- El punto de cruce de un conjunto difuso es el punto de U cuyo valor de pertenencia al conjunto es igual a 0.5

- Dos conjuntos difusos A y B son iguales si y solo si sus funciones características $f_A(x)$ y $f_B(x)$ son iguales

- El conjunto difuso B contiene al conjunto difuso A, esto es $A \subset B$, si y solo si $f_A(x) \leq f_B(x)$ para todo $x \in U$

La función característica proporciona una medida del grado de similaridad de un elemento de U con el conjunto difuso. La forma de la función característica utilizada, depende del criterio aplicado en la resolución de cada problema y variará en función del punto de vista de cada usuario. La única condición que debe cumplir una función característica es la de tomar valores entre 0 y 1, con continuidad. Las funciones características mas utilizadas por su simplicidad matemática y su manejo son las funciones triangulares, trapezoidales, Gaussianas, sigmoidal, gamma, pi, etc. Conceptualmente existen dos aproximaciones para determinar la función característica asociada a un conjunto: la primera aproximación esta basada en el conocimiento humano de expertos, y la segunda aproximación es utilizar una colección de datos para diseñar la función.

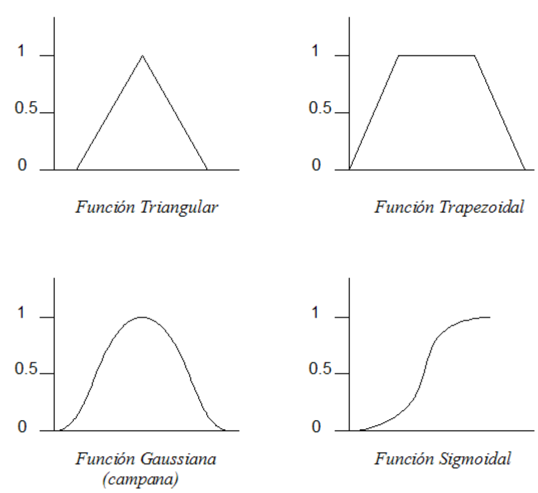


Fig. 3.2 Funciones matemáticas comúnmente utilizadas

El número de funciones características asociada a una misma variable es elegido por el experto: a mayor número de funciones características tendremos mayor resolución pero también mayor complejidad, además estas funciones pueden estar solapadas o no; el hecho de estar solapadas pone de manifiesto un aspecto clave de la lógica difusa: una variable puede pertenecer con diferentes grados a varios conjuntos difusos a la vez.

3.4.1 Operaciones para conjuntos difusos.

Las operaciones de estos conjuntos se basan en la lógica Booleana: los conjuntos son considerados como sistemas binarios con estados alternados entre inclusión y exclusión a un conjunto. La característica de la función refleja este espacio binario.

Esto indica que la función de pertenencia para el conjunto A es cero si x no es un elemento en A y la función de pertenencia es 1 si x es un elemento de A. Dado que existen solamente dos estados, la transición entre estos dos estados es siempre inmediata. La pertenencia de estos conjuntos está siempre totalmente categorizada y no existe ambigüedad acerca de la pertenencia como lo indica la teoría clásica. Existen cuatro operaciones básicas de conjuntos: unión, intersección, complemento y unión exclusiva. Al igual que en los conjuntos convencionales, existen definiciones específicas para combinar y especificar nuevos conjuntos difusos. Este conjunto de funciones teóricas provee las herramientas fundamentales de la lógica. En el caso usual, con las operaciones comunes de intersección, unión y complemento en el universo U se forma un álgebra Booleana; es decir se cumplen las condiciones de asociación, conmutatividad, elementos neutros, ídem potencia, absorción, distribuidad, complemento y las leyes de Morgan.

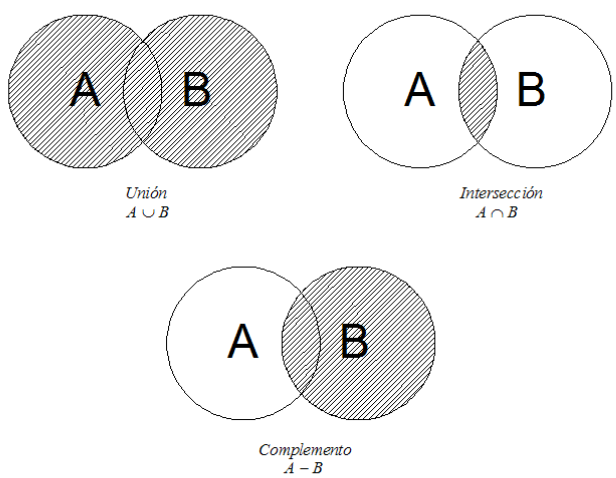


Fig. 3.3 Operaciones Básicas de la Lógica Booleana

Las tres operaciones que se mostraron ilustrativamente en la Fig. 3.3 se pueden extender de varias formas los conjuntos difusos, de modo que al restringirlas a los conjuntos usuales coincidan con las comunes. Estas extensiones resultantes satisfacen en forma general sólo a algunas de las condiciones anteriores, y para mantener el valor de alguna será obligado eliminar otras.

Considerando dos conjuntos difusos A y B y tomando en cuenta las operaciones de la lógica Booleana, para los conjuntos difusos tenemos que las operaciones son:

- El conjunto complemento ($\sim A$) de un conjunto difuso A es aquel cuya función característica viene definida por:

$$f_A(x) = 1 - f_A(x)$$

- La unión de dos conjuntos difusos A y B es un conjunto difuso $A \cup B$ en U cuya función de pertenencia es:

$$f_{A \cup B}(x) = máx\ [f_A(x), f_B(x)]$$

- La intersección de dos conjuntos difusos A y B es un conjunto difuso $A \cap B$ en U con función característica:

$$f_{A \cap B}(x) = mín\ [f_A(x), f_B(x)]$$

También se debe considerar que existen dos leyes fundamentales de la teoría clásica de conjuntos que no se cumplen en la teoría de conjuntos:

- Principio de contradicción (Un conjunto no puede ser 0 y 1 al mismo tiempo)

$$A \cup \sim A = U$$

- Principio de exclusión (Dos elementos distintos del conjunto A no pueden ocupar el mismo lugar)

$$A \cap \sim A = \Phi$$

De hecho una de las formas para describir la diferencia entre la teoría clásica de y la teoría difusa de conjuntos es explicar que estas dos leyes en términos de lógica difusa no se cumplen. En consecuencia, algunas de las teorías derivadas de la teoría de conjuntos como por ejemplo la de la probabilidad será diferentemente planteada, ya que se describirá en términos difusos.

Las funciones que definen la unión y la intersección de conjuntos difusos pueden generalizarse, a condición de cumplir ciertas restricciones. Las funciones que cumplen estas condiciones se conocen como Conorma Triangular (T-Conorma) y Norma Triangular (T-Norma).

- Los principales operadores que cumplen las condiciones para ser t-conormas son el operador máximo y la suma algebraica:

$$f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x)$$

- Los principales operadores que cumplen las condiciones para ser t-normas son el operador mínimo y el producto algebraico:

$$f_{A \cap B}(x) = f_A(x) f_B(x)$$

Dado que los conjuntos difusos no se particionan en el mismo sentido que los conjuntos Boléanos, estas operaciones son aplicadas al nivel de pertenencia así como consecuencia de los conjuntos difusos. Decidir si un valor es o no miembro de cualquier conjunto difuso en particular, requiere de algunas nociones de cómo esta distribuido el conjunto, del universo y de los límites de éste.

3.5 Relaciones Difusas

Una relación difusa representa el grado de presencia o ausencia de asociación, interacción o interconexión entre elementos de dos o más conjuntos difusos. Un ejemplo de estas relaciones queda dado por:

$$R(U, V) = \{((x,y), f_R(x,y)) : (x,y) \in U \times V\}$$
$$f_R(x,y) \in [0,1]$$

donde:

- R es la relación difusa de los universos U y V
- x es un valor mayor que y
- $f_R(x,y)$ es la función de pertenencia donde x pertenece a U y y pertenece a V

Como las relaciones difusas son en si mismas un conjunto difuso en el espacio producto, las operaciones entre conjuntos y los operadores definidos anteriormente también puede ser aplicadas a ellas. Suponiendo que tenemos $R(x,y)$ y $S(x,y)$ dos relaciones en el mismo espacio del producto $U \times V$, la intersección o unión de ambas se define como:

$$f_{R \cap S}(x) = f_R(x,y) * f_S(x,y)$$
$$f_{R \cup S}(x) = f_R(x,y) \oplus f_S(x,y)$$

donde:

- $*$ es cualquier t-norma
- $\oplus$ es cualquier t-conorma

Si consideramos las relaciones difusas R y S que pertenecen a diferentes espacios producto: $R(U,V)$ y $S(V,W)$, y sabiendo que x es mayor que y y y es cercano de z, su composición difusa se define de forma analóga a la composición clásica teniendo en cuenta que en el caso difuso la relación difusa R tiene asociada una función característica $f_R(x,y)$: $(x,y) \in [0,1]$ y la relación difusa S también tiene asociada una función característica $f_S(y,z)$: $(y,z) \in [0,1]$. Entonces $R*S$, cuando R y S pertenecen a universos discretos de discurso, se define como una relación difusa en $U\times V$ cuya función de pertenencia es:

$$f_{R*S}(x,z) = \sup_{y \in V} [\, f_R(x,y) * f_S(y,z) \,]$$

donde:

- sup es el operador máximo
- $*$ es un operador t-norma cualquiera

En función de la t-norma elegida se puede obtener distintas composiciones. Las dos mas usadas son:

- la composición *máx-mín* de las composiciones difusas $R(U,V)$ y $S(V,W)$, es una relación difusa $R*S$ en $U\times W$ definida por la función de pertenencia

$$f_{R*S}(x,z) = \underset{y \in V}{máx,mín} [\, f_R(x,y),\ f_S(y,z) \,]$$
$$(x,z) \in U\times W$$

- la composición máx-product de las relaciones difusas $R(U,V)$ y $S(V,W)$, es una relación difusa $R*S$ en $U\times W$ definida por la función característica

$$f_{R*S}(x,z) = \underset{y \in V}{máx} [\, f_R(x,y),\ f_S(y,z) \,]$$
$$(x,z) \in U\times W.$$

3.6 Inferencia Difusa

Se llama regla difusa al conjunto de proposiciones enlazadas por los conectores lógicos IF-THEN (Si-Entonces) que modelan el problema que se quiere resolver. Una regla difusa simple tiene la forma:

Si u es A entonces v es B

donde:

- A y B son conjuntos difusos
- u y v son los rangos de los conjuntos A y B respectivamente

Una regla expresa un tipo de relación entre los conjuntos A y B cuya función característica sería $f_{A \to B}\ (x,y)$ y representa lo que conocemos como implicación lógica. La elección apropiada de esta función característica esta sujeta a las reglas de la lógica proposicional.

3.6.1 Lógica Proposicional

En la teoría clásica, una proposición sólo puede ser cierta o falsa, no admite términos medios; además las proposiciones pueden combinarse de muchas maneras, utilizando tres operaciones fundamentales:

- Conjunción $(p \wedge q)$: las dos proposiciones son ciertos simultáneamente
- Disyunción $(p \vee q)$: cualquier de los dos proposiciones es cierta
- Implicación $(p \to q)$: el cumplimiento de una de las proposiciones esta condicionada por el cumplimiento de la otra conforme a la regla If-Then.
- Negación $(\sim p)$: invierte el sentido de la proposición.

Estas operaciones se pueden representar por medio de una tabla de verdad:

p	**Q**	**p∧q**	**p∨q**	**p→q**	**~p**
1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1

1 = Verdadero
0 = Falso

Tabla 3.1 Tabla de verdad para las operaciones de Lógica Difusa

Estas operaciones tienen sus equivalencias en la teoría de conjuntos:

Lógica proposicional	**Teoría de Conjuntos**
∧	∩
∨	∪
~	-

Tabla 3.2 Tabla de operaciones equivalentes entre la Lógica Difusa Y Teoría de Conjuntos

Y también tienen equivalencias con los operadores algebraicos:

Lógica Proposicional	Álgebra Booleana
V	1
F	0
$\wedge$	x
$\vee$	+
~	‘
$\leftrightarrow$	=
P,q,r	a,b,c

Tabla 3.3 Tabla de operaciones equivalentes entre la Lógica Difusa y Álgebra Booleana

Una tautología se define como una proposición formada por la combinación de otras proposiciones y cuya verdad es independiente de la certeza o falsedad de las proposiciones que la forman. La tautología más importante para el ámbito de la lógica difusa es:

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim [p \wedge (\sim q)],$$

y que también puede ser expresada como:

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim (p) \vee q$$

La importancia de las tautologías reside en que permitirán expresar la función característica de la relación de implicación $p \rightarrow q$ en términos de sus funciones características:

$$p,\ q,\ \sim p \text{ y } \sim q$$

En la teoría clásica proposicional existen dos reglas importantes de inferencia, el Modus Tollens y el Modus Ponens:

- El Modus Ponens o razonamiento directo puede resumirse de la siguiente forma:

  1.- x es A
  2.- Si x es A entonces y es B
  3.- por consecuencia y es B

El Modus Ponens está asociado a la implicación $A \rightarrow B$ y en términos de la lógica proposicional se expresa:

$$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$$

- El Modus Tollens o razonamiento inverso puede resumirse de la siguiente forma :

1.- y es No B
2.- Si x es A entonces y es B
3.- x es No A

En términos de lógica proposicional esto se expresa:

$$(\sim q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \sim p$$

3.6.2 Implicación difusa

Para describir las nociones básicas de la teoría de conjuntos difusos se estableció un paralelismo con respecto a la teoría clásica, por lo cual también los fundamentos de la teoría lógica difusa parte y toma conceptos fundamentales de la teoría clásica.

En términos de la teoría difusa la proposición "Si u es A entonces v es B" donde $u \in U$ y $v \in V$, tiene asociada una función característica $f_{A \rightarrow B}(x,y)$ que toma valores en el intervalo $[0,1]$. Es decir, cada una de las reglas o proposiciones If-Then es a su vez un conjunto difuso con su función característica que mide al grado de verdad de la relación de implicación entre x y y. Los ejemplos de las posibles funciones características asociadas de acuerdo a las analogías entre operadores y la tautología antes mencionada, son:

$$f_{A \rightarrow B}(x,y) = 1 - mín\ [\ f_A(x),\ 1 - f_B(y)\ ]$$
$$f_{A \rightarrow B}(x,y) = máx\ [\ 1 - f_A(x),\ f_B(y)\ ]$$
$$f_{A \rightarrow B}(x,y) = 1 - f_A(x)(1 - f_B(y))$$

En la lógica difusa el Modus Ponens (A toda acción hay una reacción) se extiende lo que se llama Modus Ponens Generalizado que puede ejemplificarse como:

1.- u es A^*
2.- Si u es A entonces v es B
3.- por consecuencia v es B^*

tal que el conjunto difuso A^* no tiene que ser necesariamente el mismo que el conjunto difuso A del antecedente de la regla y el conjunto difuso B^* tampoco tiene que ser necesariamente el mismo que el conjunto difuso B que aparece como consecuencia de la regla. En la lógica clásica una regla se ejecuta solo si la primer proposición es exactamente la misma que la anterior y el resultado de cada regla ejecutada es exacto al consecuente; en cambio en la lógica difusa, una regla es ejecutada si existe un grado de similaridad distinto de cero entre la primer proposición y la anterior regla, y el resultado de la ejecución de la regla es un consecuente que tiene un grado de similaridad distinto de cero con el consecuente de la regla.

El Modus Ponens Generalizado es una composición difusa en la que la primera relación difusa es el conjunto difuso A* y que se puede expresar como:

$$f_{B*}(y) = \sup_{x \in A*} [\, f_{A*}(x) * f_{A \rightarrow B}(x,y) \,],$$

teniendo en cuenta que en las aplicaciones de la lógica difusa, la función característica de la implicación se construye con los operadores mínimo y producto, que además de ser los más simples conservan la relación causa-efecto, teniendo dos opciones a elegir:

$$a)\ f_{A \rightarrow B}(x,y) = \text{mín}\, [\, f_A(x), f_B(y) \,],$$
$$b)\ f_{A \rightarrow B}(x,y) = f_A(x) * f_B(y).$$

3.6.3 Reglas Difusas

Una regla difusa base esta formada por un conjunto de reglas establecidas por los conectores If-Then y que pueden ser expresadas de la forma siguiente:

R^m : *Si* u_1 es A_1^m y u_2 es A_2^m y ... y u_n es A_n^m entonces v es B^m

donde $m = 1, 2, 3, ..., M$; y $n = 1, 2, 3, ..., N$ y donde A_i^m y B^m son conjuntos difusos en $U_i \subset \Re$ (números reales) y $V \subset \Re$ respectivamente:

$$u = (u_1, u_2, \ldots , u_n) \in U_1, U_2, \ldots, U_n$$
$$v \in V,\ y \in V$$
$$x = x_1, x_2, \ldots, x_n \in U,$$

son los valores numéricos concretos de u y v.

Se observa que además esta regla tiene la particularidad de que es una regla multi-antecedente: este tipo de reglas que combinan diferentes variables en el antecedente, es el más utilizado en el diseño de sistemas difusos: Un sistema difuso estará formado por varias reglas difusas base con diferentes consecuentes, ya que una regla con multi-antecedentes y multi-consecuentes siempre podrá ser descompuesta en un conjunto de reglas base con multi-antecedentes pero un solo consecuente.

Existen dos caminos para obtener el conjunto de reglas correspondientes a un conjunto de datos numéricos:

- Dejar que los datos establezcan los conjuntos difusos que aparecen en los antecedentes y los consecuentes.
- Predefinir los conjuntos difusos para antecedentes y consecuentes y luego asociar los datos a esos conjuntos.

Para llegar a obtener el conjunto completo de reglas que modelan un problema se puede partir de considerar todas las combinaciones de reglas P_t que es posible establecer teóricamente, entre el número de antecedentes p y el número de conjuntos difusos de entrada A_p considerados para cada antecedente. Así, para cada consecuente, el número teórico de reglas posibles será:

$$P_t = \prod_n A_n \quad \text{para } n = 1, 2, ..., p;$$

Sin embargo entre estas reglas Pt teóricamente posibles para cada consecuente, habrá algunas que no tengan sentido físico y otras que n se ajusten a las características del problema a resolver. Se deberá pues seleccionar, de ente todas las reglas posibles, el conjunto más adecuado al problema que se considera.

3.7 Conclusiones

El uso de la lógica difusa es de gran ayuda para comprender sistemas tan complejos como lo es el razonamiento humano. Como se vio, todo se basa en la regla “todo es cuestión de grado”, que grado de pertenencia tiene una variable lingüística con respecto a un conjunto determinado ya que no solo existen 2 estados en los sistemas reales, sino que existen valores intermedios entre el valor máximo y el valor mínimo de la variable lingüística.

El manejo de los operaciones de conjuntos difusos son necesarios para poder comprender la lógica difusa, pero en el caso de autómatas celulares el principio que se utilizara será el “IF-THEN”, regla se que se explicara y se aplicara en el un autómata celular para dar origen a los autómatas celulares difusos.

4

Autómata Celular Difuso

4.1 Introducción

Coma ya se vio en el capitulo 2, existen diferentes tipos de autómatas celulares dentro de los cuales uno de ellos es el autómata celular difuso (Fuzzy Autómata Celullar). Este autómata tiene como principal característica que funciona en base a reglas de transición gobernadas por los principios de lógica difusa la cual (como se analizo en el capitulo anterior) no maneja solo valores de estados altos y bajos (0,1) sino que existen valores intermedios dentro de el rango de valores [0,1].

Este tipo de autómata celular no solo busca evolucionar en un lapso de tiempo t, sino que es utilizado con el fin de comprender como se comportan los diferentes sistemas reales que componen el mundo real (nuestro entorno).

A pesar de que no existe mucha información con respecto a este tipo de autómata celular, este trabajo busca comenzar a comprenderlo y aplicarlo para un fin especifico, el cual es la descripción de patrones establecidos en base al razonamiento que pueda generar el sistema.

En la práctica, puede confundirse mucho el hecho de que este sistema lo único que hace es comparar lo patrones con otros establecidos en una base de datos, sin embargo este tipo de sistema lo que hará es razonar el patrón que esta analizando para indicarnos de qué se trata o qué es lo que esta analizando, y para cumplir con ello tendrá que describir cual será la siguiente posición de la celda estado dentro del latice del sistema, considerando a la base del conocimiento dentro del comportamiento del sistema en evolución.

4.2 Descripción

Las reglas de evolución del autómata son descritas dentro del espacio del sistema difuso, cumpliendo con condiciones de frontera entre cada una de los rangos previamente establecidos.

La forma en como se llevan a cabo estas reglas de transición es en base al concepto de la lógica difusa conocido como la regla IF-THEN, la cual (como ya se menciono, es utilizada para manejar el razonamiento de un sistema en base a las variables que lo componen. Por ejemplo: En un sistema difuso podemos tener la siguiente afirmación:

IF

Si: el día de hoy es soleado
Si: el día de hoy hay pocas nubes
Si: el día de hoy las nubes son blancas

THEN

Entonces: El día de hoy no lloverá

Como se puede observar en las aseveraciones IF, se pueden tener múltiples variables, las cuales después de analizarlas nos generan una aseveración THEN.

Aplicando esto es un autómata celular difuso, entonces debemos tener en cuenta que conforme sea mayor el número de variables que utilicemos para describir el comportamiento de un sistema, mayor será su precisión de respuesta al medio en el que se encuentra, pero al mismo tiempo, se vuelve mas complejo para utilizar.

Por lo anterior podemos decir que para que un autómata celular sea del tipo difuso será necesario que:

$$3 \geq b \leq a^r$$

donde b es el número de estados que puede tener nuestra celda-estado, y a es el numero de estados posibles limitado por la vecindad r

Así como en el ejemplo que se dio anteriormente, los autómatas celulares difusos manejan variables multi-estado, los cuales están determinados en base a patrones de reconocimiento establecidos por la persona que lo genere. Por ejemplo: en un sistema en 2 dimensiones, el manejo de la tonalidad que presente un objeto es determinado por el creador del autómata celular, el es el que designara cuantos tonos de colores quiere que su autómata celular sea capaz de reconocer.

Cabe mencionar que cuando se manejen *2* tonos (blanco y negro) por lo regular se estará hablando de que el autómata celular no es del tipo difuso.

Cuando se determina cual será la escala de tonalidad (siguiendo el ejemplo anterior) se puede conocer el número de estados que podrá presentar nuestra celda-estado. Si indicáramos un numero $b = 6$ entonces podríamos manejar hasta 6 diferentes tonos ya sea de diferentes colores o de un solo color como se puede ver en la siguiente Fig. 4.1:

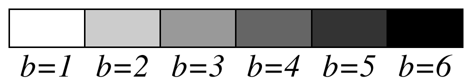


Fig. 4.1. Estados difusos de un autómata

Las reglas de transición que se manejan para los autómatas celulares difusos quedan determinadas en base a patrones de reconocimiento (como se menciono anteriormente) de objetos establecidos. Por ejemplo: si trazáramos una línea recta dentro de una cuadricula, el sistema quedaría como un autómata celular en un tiempo t determinado:

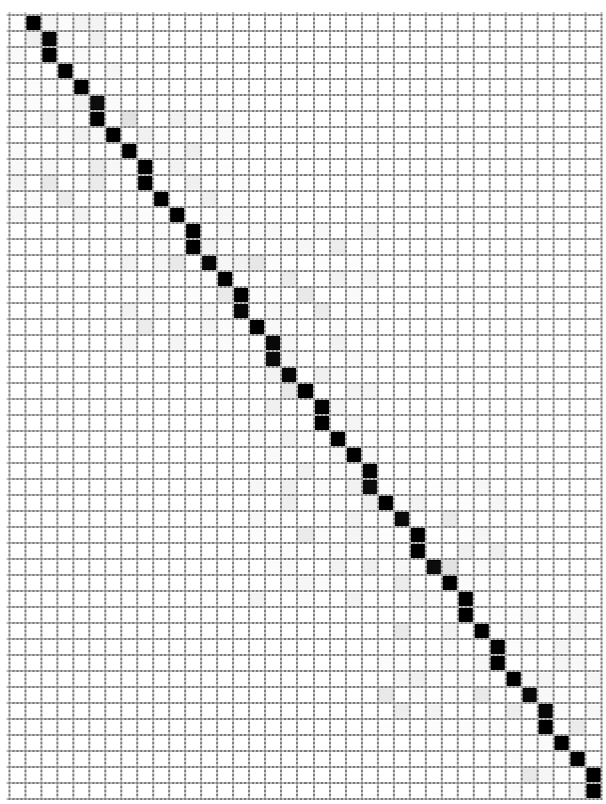


Fig. 4.2. Evolución de los estados difusos de un autómata

Se puede observar que con el paso del tiempo, este autómata celular evoluciona en una línea recta en diagonal. También se puede observar que cada celda puede presentar hasta *3* estados de acuerdo a lo siguiente:

$b = 1$ $b = 2$ $b = 3$

Fig. 4.3. Evolución de los estados difusos de un autómata con tres variables.

Los patrones de evolución que presenta este autómata difuso se vuelven periódicos debido a que conforme avanza el tiempo, se observa que el estado *3* de las celdas toma una forma determinada después de un $t=4$.

Para poder determinar las reglas de transición de este autómata celular se observaran los estados de las celdas determinando primero un rango de vecindad r, que en este caso $r=2$, y considerando la regla *IF-THEN* formulamos la siguiente tabla:

IF										
X^t_{i-2}	1	1	1	2	2	1	1	1	2	1
X^t_{i-1}	1	3	2	1	2	2	3	1	3	1
X^t_{i}	3	2	3	3	2	1	1	2	1	3
X^t_{i+1}	2	2	2	1	2	1	2	1	2	1
X^t_{i+2}	2	2	1	2	1	2	1	3	1	1
THEN										
X_i^{t+1}	2	3	3	1	1	1	1	2	3	2

Tabla 4.1 Reglas de Transición con simbología numérica de la Fig. 4.3

Donde IF son las condiciones de estado de celda en un tiempo $t=0$ y *THEN* es la transición que se generara en un tiempo $t+1$ de acuerdo a las condiciones establecidas.

Siguiendo los patrones establecidos en la Fig. 4.3. entonces la tabla anterior queda de la siguiente manera:

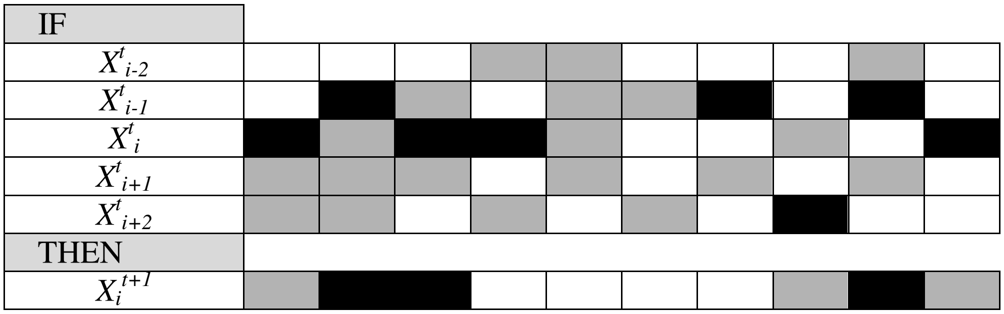


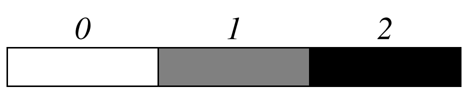
Tabla 4.2 Tabla Reglas de transición con tonalidades de la Figura 4.3

4.3 Características

Como se ha mencionado, para poder desarrollar un autómata celular difuso se tienen que establecer una serie de características, las cuales en el primer caso serán las siguientes:

Dimensión:	$d = 1$
Vecindad:	$r = 1$
Estados posibles:	$b = 3$

De los estados posibles se establecerá como siguiente:



La latice que se manejara será un arreglo de 10 celdas considerando que se encuentran cerradas en forma de toroide:

Fig. 4.4 Grafico representativo de las celdas formando un toroide

Por lo cual las vecindades quedan de la siguiente forma:

Vecindad	Vecinos
0	C9-C0-C1
1	C0-C1-C2
2	C1-C2-C3
3	C2-C3-C4
4	C3-C4-C5
5	C4-C5-C6
6	C5-C6-C7
7	C6-C7-C8
8	C7-C8-C9
9	C8-C9-C0

Tabla 4.3 Relación entre vecinos del Autómata Celular Difuso Propuesto

4.3 Reglas de Transición

En base a los estados anteriores se formulan las reglas de transición como sigue:

Sabiendo que se tienen *3* estados en un intervalo $[0 \rightarrow 1]$ donde:

0 =	*es blanco*	*(Valor Mín)*
0.5 =	*es gris*	
1 =	*es negro*	*(Valor Máx)*

Tabla 4.4 Valores Numéricos de transición máximo y mínimo del Autómata Celular Difuso propuesto

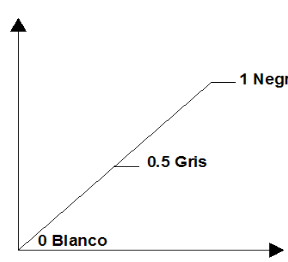


Fig. 4.5 Grafico representativo de los 3 estados de transición

Para designar las reglas de transición se obtendrán los promedios en base a los valores mostrados en la gráfica anterior, y dichos promedios caerán dentro de los valores de la siguiente escala:

Fig. 4.7 Transiciones de la celda-estado del Autómata Celular Difuso

Por lo tanto las reglas de transición quedaran descritas de la siguiente manera:

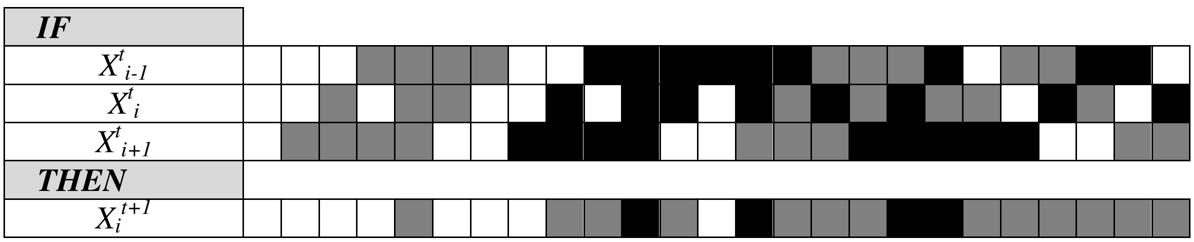


Tabla 4.5 Reglas de transición para el Autómata Celular Difuso Propuesto

4.5 Resultados obtenidos

Para demostrar la evolución que puede tener este autómata celular difuso, se debe considerar cual será el estado inicial de las celdas-estado. Las combinaciones que se pueden tener dentro del estado inicial pueden ser hasta 3^{n-1}, combinaciones. Y dependiendo de estos estados será como se comporte el autómata celular.

Considerando un estado inicial como el marcado con $t=0$, tendremos la siguiente evolución.

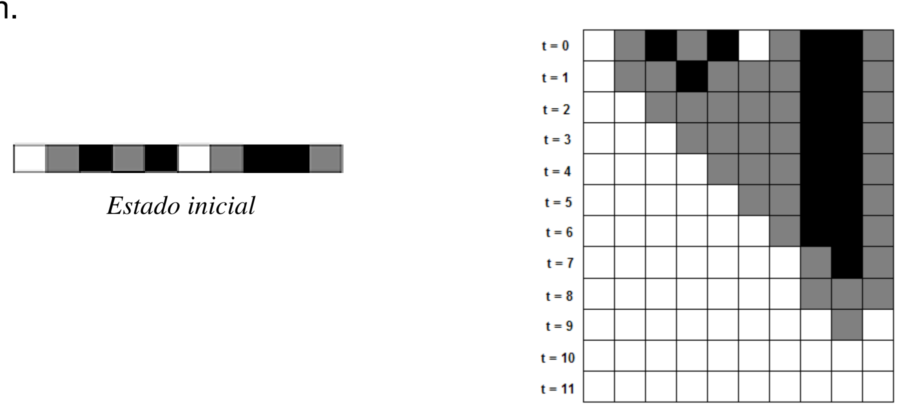


Fig. 4.8 Grafico de evolución del autómata celular difuso 1

Como se puede observar, el autómata celular deja de vivir después de su evolución en un tiempo $t=10$.

Considerando el siguiente estado inicial marcado por $t=0$, tendremos la siguiente evolución.

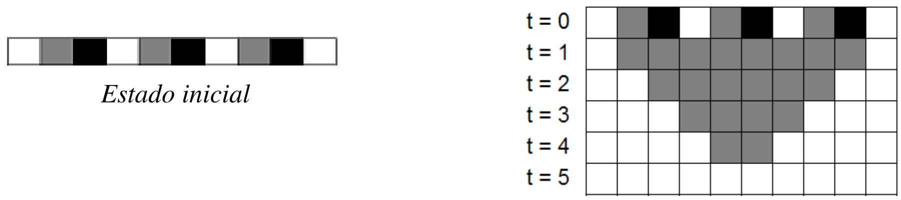


Fig. 4.9 Grafico de evolución del autómata celular difuso 2

En este caso, el autómata celular difuso muere después de un $t=5$.

Para el caso del siguiente estado inicial tenemos:

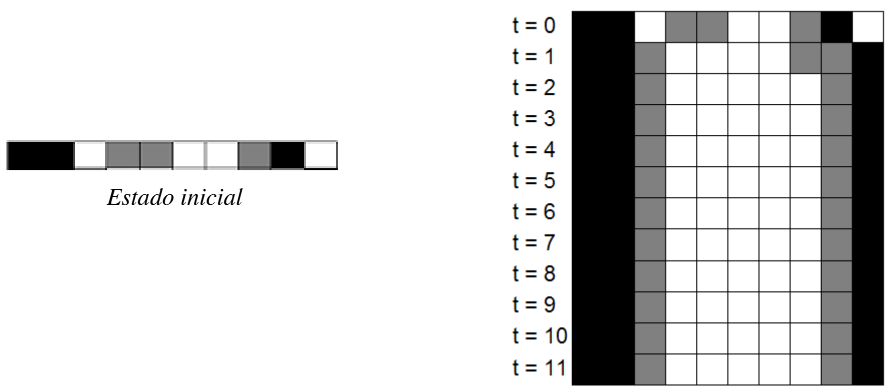


Fig. 4.10 *Grafico de evolución del autómata celular difuso 3*

Este autómata celular se vuelve periódico después del tiempo $t=2$.

Para el caso del siguiente estado inicial tenemos:

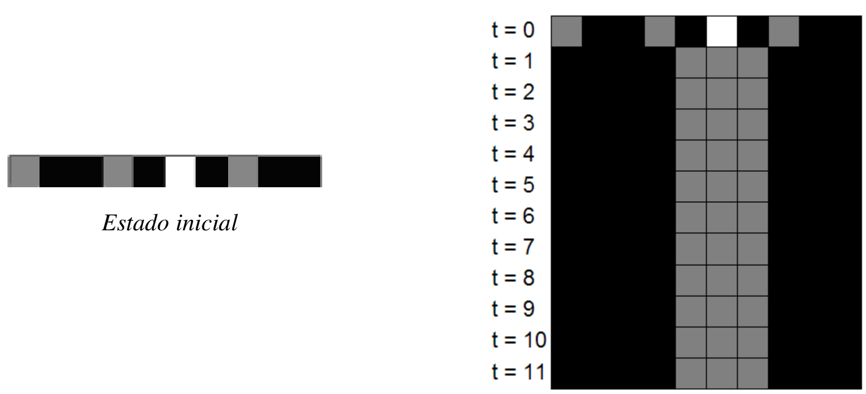


Fig. 4.11 Grafico de evolución del autómata celular difuso 4

Considerando el siguiente estado inicial marcado por $t=0$, tendremos la siguiente evolución.

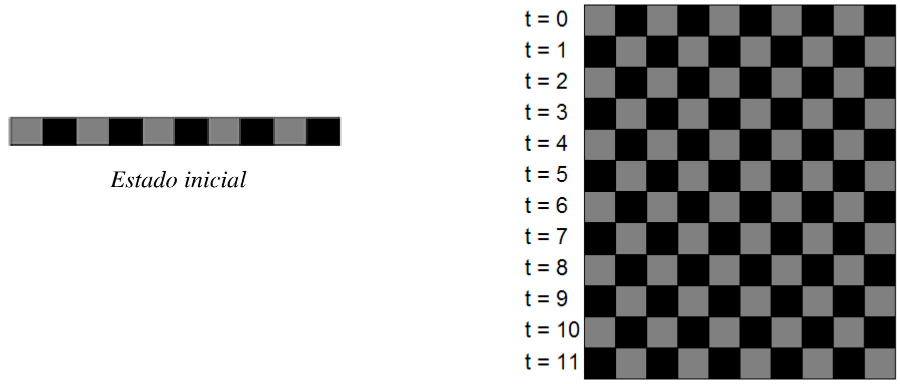


Fig. 4.12 Grafico de evolución del autómata celular difuso 5

Si continuáramos con la evolución hasta un tiempo $t=\infty$, el autómata celular difuso presentaría los mismos estados por lo cual se vuelve cíclico. Cabe mencionar que este tipo de autómata celular se puede considerar lineal ya que solo se manejan 2 estados para cada celda-estado.

Si consideramos otro estado inicial con solo 2 estados posibles entonces podremos observar lo siguiente:

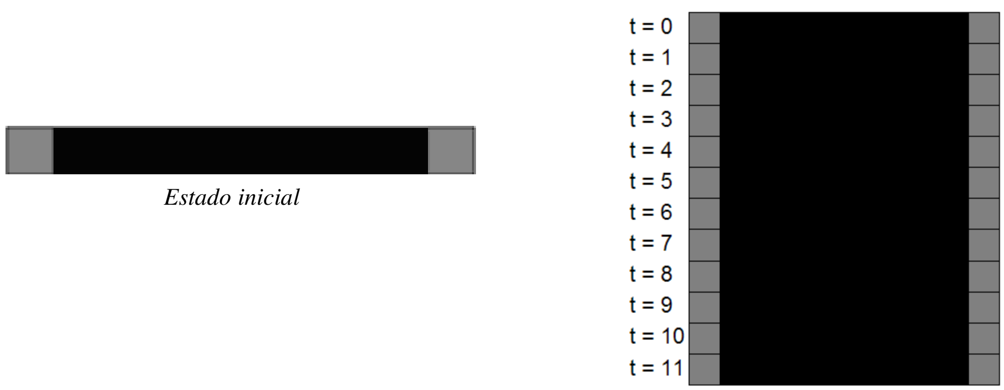


Fig. 4.13 Grafico de evolución del autómata celular difuso 6

En este caso, el estado inicial se mantiene durante toda la evolución del autómata celular, sin sufrir ningún cambio.

Como se pueden observar las evoluciones de este autómata celular difuso, en unos casos el autómata se vuelve cíclico y en otras ocasiones el autómata celular muere después de un tiempo determinado de evolución, usando la misma lógica difusa, pero con diferentes condiciones iniciales.

4.6 Conclusiones

Durante la evolución del autómata celular difuso que se diseño se pudo observar que dependiendo del estado inicial del sistema este mismo puede presentar 3 resultados:

1.- Es sistema evoluciona de tal manera que algunos estados se vuelven cíclicos durante toda su evolución en un tiempo $t=\infty$

2.- El sistema evoluciona y llega un tiempo $t=k$ en el cual el sistema se muere (todas las celdas quedan en color blanco)

3.- El sistema intercambia sus valores entre un tiempo y otro este siendo igual a 1.

Se puede observar que cuando el autómata celular solo maneja 2 posibles estados, este no sufre mayores cambios por lo cual se vuelve cíclico, en cambio cuando se manejan los 3 posibles estados el sistema se acomoda durante un periodo de su evolución y este puede volverse cíclico o puede morir.

II

CONCLUSIONES

Como se a mencionado a lo largo de este trabajo, el manejo de autómatas celulares puede ser de gran aplicación para diferentes campos de la vida diaria. Hablando concretamente de los autómatas celulares difusos, nos puede ayudar a entender el comportamiento de diferentes sistemas evolutivos de la vida real ya que al implementar conceptos de lógica difusa (los cuales contemplan grados de pertenencia a un sistema u otro) se puede entender que estos sistemas pueden llegar a presentar razonamiento lógico.

El uso de sistemas difusos permiten implementar razonamiento lógico al sistema que le sean aplicados, pero no hay que olvidar que dicho razonamiento estará ligado directamente al raciocinio de la persona que esta programando o fabricando el sistema difuso. Posiblemente, en este aspecto el manejo de las reglas difusas tendrían que aplicarse de forma tal que se emplearan reglas establecidas como universales, ya que si se emplean variables lingüísticas muy complejas, el resultado de estas dependerá de la forma de ser y de pensar del programador del autómata celular difuso, de sus costumbres y de los fines para los cuales quiera ser empleado el autómata celular difuso. Lo anterior es considerando el caso de que el autómata celular difuso sea creado y utilizado en la Inteligencia Artificial.

Dependiendo del tipo de aplicación que se le de al autómata celular difuso, serán las reglas de transición que se empleen para describir su evolución, por lo cual se vuelve necesario, si no especializarse, su por lo menos estudiar el comportamiento del sistema complejo que se quiera analizar, esto con el fin de poder crear el sistema que nos de la simulación mas confiable.

III

Trabajos Futuros

Este trabajo deja abierta la posibilidad de desarrollar diferentes trabajos en un futuro, los cuales pueden ser llevados por alumnos de Maestría en Ciencias o Doctorado en Ciencias, los cuales pueden ser los siguientes:

- Aplicar comportamientos de sistemas complejos para describirlos por medio de los autómatas celulares difusos.
- Desarrollar sistemas capaces de predecir la siguiente posición de la celda-estado dentro de un autómata celular difuso.
- Utilizar técnicas de filtrado con la intención de cumplir con el punto anterior.
- Aplicar el razonamiento humano en sistemas de este tipo, con lo cual se conseguirá implementar Inteligencia Artificial a máquinas o robots.
- Analizar la evolución de enfermedades como el SIDA o los diferentes tipos de canceres con la intención de comprender su comportamiento y encontrar una forma de frenarlos

Además de los puntos anteriores, se pueden encontrar muchas otras aplicaciones a los autómatas celulares difusos, estas aplicaciones pueden ser tantas como la imaginación del ser humano las pueda concebir.

IV

Referencias Bibliografías

1. Autómata Celular Estocástico en Lógica Reconfigurable, Trabajo de Tesis, Luis Enrique Mancilla Loeza, CIC-IPN, 2000

2. Identification if Cellular Autómata, Andrew Adamazky, Taylor and Francis Ltd., 1994

3. Complexitu, Hierarchical structures and scaling in phisycs, Baddi R., Politi A., Cambrige University Press, 1997

4. Linear Cellular Automata, McInstosh Harold V., Universidad Automata de Puebla, 1987

5. La Lógica Difusa, Yuliana Corso, http://personales.ya.com/casanchi/mat/difusa01.htm#01 , Porlamar, Venezuela

6. Introducción a la Lógica Difusa, Guillermo Morales, http://delta.cs.cinvestav.mx/~gmorales/ldifll/ldifll.html , (CINVESTAV-IPN)

7. Lógica Difusa, Wikipedia, http://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%B3gica_difusa.html

8. Lógica Difusa-Introducción, http://www.itnuevolaredo.edu.mx/maestros/sis_com/takeyas/Apuntes/Inteligencia%20Artificial/Apuntes/tareas_alumnos/LD/Logica%20Difusa.pdf