Instituto Politécnico Nacional

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada
Unidad Legaria

OBSTÁCULOS DIDÁCTICOS Y EL DISCURSO EXPLICATIVO DE LOS LIBROS DE TEXTO DE CÁLCULO

Tesis que para obtener el grado de
Doctor en Matematica Educativa, presenta

ANA SOLEDAD BRAVO HEREDIA

Director de tesis:
Dr. Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza

Codirector de tesis:
Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

México, D.F., octubre de 2007.

SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 23 del mes de octubre del 2007 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Obstáculos didácticos y el discurso explicativo de los libros de texto de cálculo"

Presentada por la alumna:

BRAVO	HEREDIA	ANA SOLEDAD
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro: | A | 0 | 3 | 0 | 2 | 4 | 9 |

aspirante al grado de:

Doctorado en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dr. Ricardo Cantoral Uriza

Codirector de tesis

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Dr. Apolo Castañeda Alonso

CICATA - IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dr. Gustavo Martínez Sierrra

Dra. Gabriela Buendía Ábalos

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

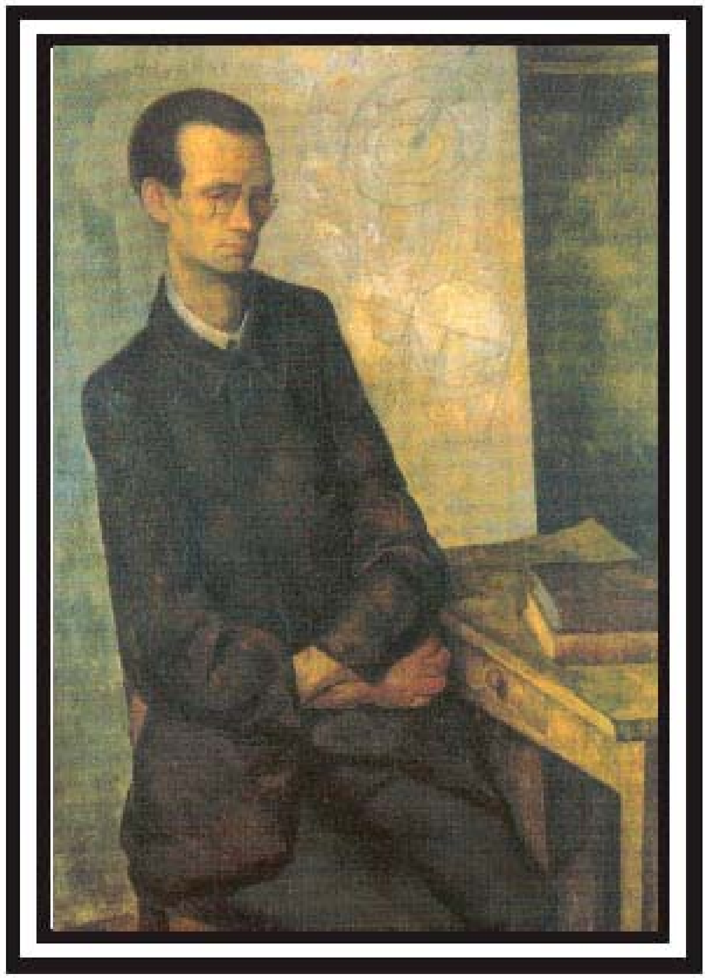
En la Ciudad de México D. F., el día 23 del mes de octubre del año 2007, el (la) que suscribe Ana Soledad Bravo Heredia alumno (a) del Programa de Doctorado en Matemática Educativa con número de registro Ana Soledad Bravo Heredia, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Ricardo Cantoral Uriza y cede los derechos del trabajo intitulado "Obstáculos didácticos y el dicurso explicatio de los textos de cálculo", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección asbravo@correo.xoc.uam.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Soledad Bravo

Ana Soledad Bravo Heredia

OBSTÁCULOS DIDÁCTICOS Y EL DISCURSO EXPLICATIVO DE LOS LIBROS DE TEXTO DE CÁLCULO



In memoriam,

Doña Zoila Aurora Heredia Pando.

Para los seres que más amo:

Andrés y Vladislav

ÍNDICE

OBSTÁCULOS DIDÁCTICOS Y EL DISCURSO EXPLICATIVO DE LOS LIBROS DE TEXTOS DE CÁLCULO

Resumen

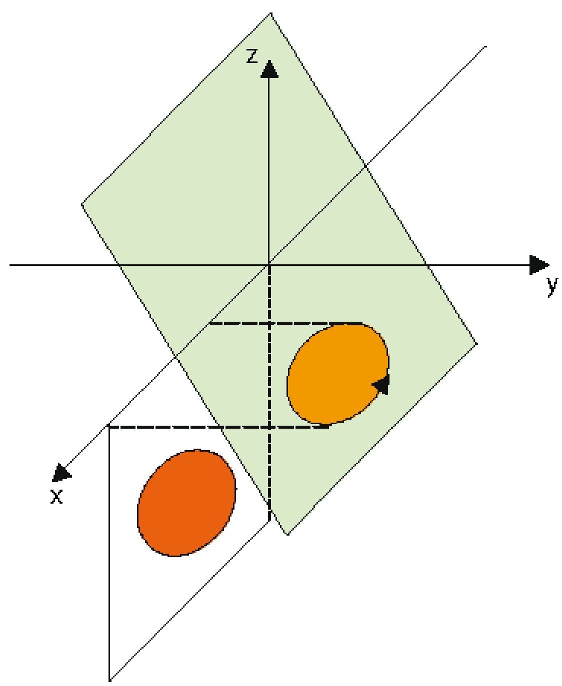
Un objeto cultural tangible para el análisis del discurso matemático escolar lo constituye la figura de libro de texto, dado que es guía imprescindible para la acción didáctica de profesores y alumnos en todo proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En el presente trabajo de tesis se exponen los conceptos centrales de la *Teoría de la transposición didáctica*, el concepto de *Obstáculo didáctico* y la categoría de *Discurso matemático escolar*, elementos que posibilitan la caracterización e identificación de obstáculos didácticos en el discurso explicativo de los textos de Cálculo. Además, como resultado del seguimiento minucioso de las explicaciones del concepto de *Integral de línea*, se reportan de manera concreta los obstáculos más importantes que se identificaron y las características del discurso matemático escolar que se manifiestan explícita o implícitamente en los libros revisados. Finalmente, se hace una propuesta de representaciones gráficas para algunos problemas relacionados con la integral de línea y se presenta un mapa conceptual para este concepto.

Abstract

A tangible cultural object for the analysis of the scholastic mathematical speech constitutes the figure of text book, since she is essential guide for the didactic action of professors and students in all process of education-learning of the mathematics. In the present writing the central concepts of the *Theory of the didactic transposition* are exposed, the concept of *Didactic obstacle* and the category of *Scholastic mathematical speech*, elements that make possible the characterization and identification of didactic obstacles in the explanatory speech of texts of Calcul. In addition, as resulting from the meticulous pursuit of the explanations of the concept of *Integral of line*, they are reported of way makes specific the most important obstacles that the characteristics of the scholastic speech were identified implicitly and mathematical that pronounce explicit or in reviewed books.

Capítulo 1.

Planteamiento del problema



1. Planteamiento del problema

1.1 Introducción

El libro de texto de cálculo juega un papel central en los sistemas de enseñanza superior escolarizada, dado que tiene una influencia significativa en el funcionamiento sistémico del triángulo didáctico: en los *saberes a enseñar*, en la actividad de estudio del alumno y, en la preparación de clases del profesor. En este sentido, el texto homogeniza la práctica de enseñanza-aprendizaje en un sistema escolarizado ya que organiza contenidos, orienta las explicaciones de los profesores y sirve de fuente de estudio para los alumnos. Es por lo anterior que se juzga pertinente y vigente realizar investigaciones orientadas al análisis de textos.

Diversos grupos de investigación abordan el análisis de textos desde distintas perspectivas, el grupo del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa (CINVESTAV – IPN), por ejemplo, ha encontrado nociones importantes para modificar la estructuración de los contenidos del cálculo, como son la *de predicción* (Cantoral, 1990) y la *de convergencia* (Farfán, 1993) entre otros; nociones que a futuro se explican como significados que están presentes en las *prácticas sociales* y en consecuencia pueden modificar al discurso oficial. Los investigadores de este grupo, no sólo han realizado análisis de textos, sino que han elaborado propuestas con acercamientos distintos basados en sus investigaciones: (Alanís et al., 2000). Como señala el profesor Cantoral (1997) *dado que somos una comunidad acostumbrada a la traducción de textos y al uso sistemático de propuestas que no fueron pensadas para nuestros sistemas educativos*, pensamos que, sin hacer a un lado las aportaciones mundiales, es necesario hacer esfuerzos por crear y recrear nuevos acercamientos acordes con nuestra realidad cultural. Este señalamiento nos conduce a la necesidad de analizar los textos en función del aprendizaje, es decir, al amparo de una teoría didáctica.

Nuestro trabajo de investigación comprende el análisis de ocho textos de cálculo que son frecuentemente utilizados en el medio universitario. En la sistematización de nuestro análisis se tomó como punto de partida la categoría de *Discurso matemático escolar*, desarrollada por Cantoral (2001), el concepto de *obstáculo didáctico* de la teoría de *Contrato didáctico* de Brousseau (1986) y la teoría de *Transposición didáctica* de Chevallard (1985). Cabe aclarar que nuestro estudio no es un análisis del discurso desde la lingüística, sino un análisis que tiene por objetivo identificar posibles obstáculos didácticos en la forma en que los textos jerarquizan, organizan y explican los contenidos matemáticos, en nuestro caso el de la integral de línea.

Un antecedente importante de nuestro análisis de textos se ubica en el enunciado de la primera ley de la termodinámica. En la expresión matemática de este principio nos encontramos con el concepto de *diferencial inexacta*, término que en los textos de esta disciplina se utiliza para diferenciar el “cambio infinitesimal” de una función de estado (la diferencial de la energía interna del sistema), del “cambio infinitesimal” de una función de trayectoria (la diferencial inexacta del trabajo o del calor). La explicación matemática de estos dos tipos de diferenciales se centra en la demostración de la condición necesaria para que la diferencial: $dz = Mdx + Ndy$, sea una diferencial exacta, en tal caso, la integral de línea de esta diferencial será independiente de la trayectoria de integración; a partir de esta demostración lo que el lector debe entender es que si la diferencial dz no cumple con la condición de que las derivadas parciales de $M(x, y)$ y $N(x, y)$ sean iguales, entonces esta diferencial es inexacta, lo que significa que la integral de línea de tal diferencial depende de la trayectoria de integración. En los textos de termodinámica revisados, al final de tales argumentos, se sugiere al lector consultar un libro de cálculo avanzado para ahondar en el tema; la sorpresa es que en dichos textos no aparece el nombre ni el símbolo de la diferencial inexacta. Con este problema enfrente se inicia el análisis de la integral de línea en distintos textos del medio escolar superior, y producto de este análisis encontramos la razón por la cual en los manuales de cálculo que revisamos no aparece el concepto de *diferencial inexacta*. Hecho que se expondrá a detalle en el capítulo III.

Lo anterior nos condujo al análisis de libros de texto a fin de caracterizar al discurso explicativo de la integral de línea. Análisis que nos posibilitó: caracterizar el *discurso matemático escolar* plasmado en ellos, la elaboración de un mapa conceptual del concepto de integral de línea, la construcción de propuestas gráficas para significar la integral de línea e, identificar obstáculos didácticos en el discurso explicativo de los textos.

1.2 La intención didáctica de los textos

Los libros de texto tienen una clara intención didáctica, uno de los objetivos de sus autores es que los estudiantes aprendan, como dice el libro de Cálculo de R. Larson, *et al* (1999: v)

> A lo largo de los años, este libro ha liderado el desarrollo de técnicas pedagógicas innovadoras. Desde su primera edición, ha puesto un énfasis especial en la importancia del aprendizaje mediante gráficas, superior, sin duda, al de otros textos de los años setenta y comienzos de los ochenta.

O como también se explicita en el prólogo de *Introducción al cálculo y al análisis matemático* de R. Courant y F. John (1996:)

> Aunque este libro difiere notablemente del original, tanto en forma como en contenido, tiene el mismo propósito: guiar al estudiante directamente a la esencia del tema y capacitarlo para aplicar sus conocimientos. La obra evita el estilo dogmático que oculta la motivación de los conceptos y las raíces que el Cálculo tiene en la realidad intuitiva. Un importante objetivo que se persigue en este libro es mostrar la relación recíproca entre el análisis matemático y sus diversas aplicaciones y destacar el papel de la intuición. Esperamos que cierto énfasis en la precisión no interfiera con este objetivo.

Como podemos apreciar, los autores elaboran textos para explicar contenidos (enseñar) para que el estudiante aprenda. En la estructura de los textos, un elemento importante a destacar es el índice temático, en él se explicitan de manera concreta y clara los contenidos que se abordarán, lo cual significa que los autores *asumen* la existencia de *objetos matemáticos a enseñar*. Esto deshecha la postura constructivista radical que no reconoce la existencia de objetos matemáticos como algo externo al que lo conoce (el estudiante). Desde esta visión, el conocimiento matemático pierde su posible objetividad y depende para su existencia de la inter-subjetividad o del proceso mismo de construcción cognitiva. Sin embargo, en el contexto de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, al negar la existencia de objetos matemáticos a enseñar, estaríamos imposibilitados de establecer programas de estudios con un contenido matemático específico a enseñar. Desde nuestra perspectiva, si bien el aprendizaje de las matemáticas implica una relación dialéctica entre el objeto a enseñar y la construcción cognitiva del estudiante, no negamos la existencia de objetos matemáticos a enseñar, como piezas de conocimiento culturalmente establecido. Sin embargo, nos parece importante asumir que el contenido a enseñar debe involucrar también un conjunto de valores, de objetivos generales y específicos de los contenidos, de habilidades matemáticas, etcétera, porque un listado de temas que no toma en cuenta los procesos cognitivos de los estudiantes se vuelve estéril. Por consiguiente, para realizar un análisis de textos se hace necesaria una epistemología que tome en cuenta la ontología del conocimiento matemático, pero que también considere los procesos cognitivos de los estudiantes. En este sentido, la teoría de la *Transposición didáctica* de Yves Chevallard nos posibilita entender que los contenidos a enseñar son producto de un complejo proceso de aceptación y legitimación social. En este proceso, el conocimiento matemático es transpuesto didácticamente para ser presentado en un libro de texto y en consecuencia cambia la forma en que es explicado y contextualizado.

La elaboración de textos implica inevitablemente asumir la postura de que el conocimiento matemático existe independientemente del que aprende, de aquel que habrá de utilizarlo. Todos los libros de texto especifican su contenido, contenido que es aceptado en el medio escolar como la relación de objetos matemáticos a enseñar. Por otro lado, los autores concientes del sentido didáctico de su obra formulan explicaciones con recursos que desde su punto de vista serán adecuados para el aprendizaje de sus contenidos.

1.3 Problema y Preguntas de investigación

Nuestro problema de investigación consistió en identificar obstáculos didácticos a partir del análisis del discurso explicativo de la integral de línea en los textos de cálculo.

El análisis del discurso explicativo de los textos de Cálculo, para identificar los obstáculos didácticos, estuvo orientado a responder las preguntas de investigación que se presentan a continuación

1) ¿Por qué los textos de termodinámica clásica, en el enunciado de la primera ley, se refieren a la diferencial del trabajo como una *diferencial inexacta*, cuyo símbolo ($đ$) y nombre no se registran en los textos de cálculo?

Los estudiantes de química encuentran en sus textos de Termodinámica clásica el concepto de *diferencial inexacta*, diferencial que explican estableciendo la condición necesaria y suficiente para que una diferencial sea exacta y, como las explicaciones no son suficientes para entender a profundidad la naturaleza de la diferencial inexacta, sugieren que se revisen textos de cálculo o Análisis Matemático. Sin embargo, en estos textos los estudiantes no encontrarán el nombre ni el símbolo que buscan, situación que se convierte en un círculo vicioso poco claro.

2) ¿Existen diferencias sustanciales en el temario y en el discurso explicativo de los libros de texto de cálculo?

El libro de texto sirve -en muchos casos y en muchas instituciones educativas- como base para el diseño de programas de estudio, para la preparación de clases del profesor, y como fuente de información y estudio del alumno. En suma, los textos son un referente importante en el quehacer universitario, es por ello que su elección en el proceso de enseñanza–aprendizaje es central y por tanto los resultados de trabajos de investigación que den cuenta de sus características resulte crucial. El seguimiento de las explicaciones del concepto de integral de línea nos posibilitó caracterizar y clasificar los textos revisados.

3) ¿Por qué en los textos, el teorema de Green se aborda inmediatamente después de demostrar que la integral de línea de las diferenciales exactas y campos vectoriales conservativos son independientes de la trayectoria de integración?

En la mayoría de textos de cálculo y análisis matemático, el teorema de Green se enuncia después de explicar a detalle las condiciones necesarias y suficientes para identificar una forma diferencial lineal como exacta o, en el caso del cálculo vectorial, para identificar a un campo vectorial como conservativo, sin embargo, la fórmula de Green tiene sentido para las formas diferenciales que no son exactas y para campos vectoriales no conservativos.

Estas preguntas guiaron nuestro análisis y a partir de ellas se estableció una caracterización de los textos y se encontró la razón por la cual a las diferenciales del trabajo y del calor se les llama diferenciales inexactas.

1.4 Criterios metodológicos del análisis de textos

Al realizar el seguimiento del discurso explicativo de la integral de línea se tomaron en cuenta los siguientes elementos:

- Secuencia de los siguientes conceptos: la integral indefinida, la integral definida, el teorema fundamental del cálculo.
- Ubicación del tema en el contenido general del texto.
- La forma del discurso explicativo: axiomático, en forma de preguntas y respuestas, confrontación de ideas previas, etc.
- La frecuencia y la forma en que se utilizan los recursos gráficos.
- Los ejemplos resueltos.
- Si existe o no el término diferencial inexacta, $đf(t)$, en los textos de cálculo, término que está presente en los textos termodinámica clásica.

A partir de estos criterios el análisis de los textos nos posibilitó:

a) Ubicar rupturas y vacíos explicativos. Por ejemplo, todos los textos revisados desarrollan el concepto de integral de línea para llegar a explicar y formular: el teorema de la *independencia de trayectoria de la integral de línea* de una *forma diferencial lineal* *exacta*, o de un *campo vectorial conservativo*, para inmediatamente después formular el teorema de Green. Sin embargo, este teorema tiene significado y aplicación, justamente, para formas diferenciales lineales *no-exactas* y para *campos-vectoriales- no- conservativos*.

b) Identificar efectos de la atomización del conocimiento en compartimentos. En los textos, sobre todo los actuales, para explicar la integral de línea se abordan de manera secuencial una serie de conceptos que se introducen sin una pregunta o problema que lo requiera, de tal manera que, al no existir un vínculo necesario entre ellos, éstos aparecen como compartimentos aislados.

c) Ubicar elementos de la postura epistemológica del autor. Tanto en la introducción de cada manual como a lo largo del discurso explicativo se pueden encontrar ideas centrales que denotan una postura epistemológica. Por ejemplo, en el texto de R. Courant, clasificado como formal, encontramos al final de la explicación de la integral de línea de formas diferenciales lineales, lo siguiente:

> La intuición geométrica y la realidad han proporcionado motivación poderosa e ideas guía para el pensamiento matemático constructivo. Sin embargo, con el avance del análisis desde principios del siglo XIX, se ha vuelto una necesidad imperiosa dejar de invocar a la intuición como justificación principal de las consideraciones matemáticas. Nos hemos vuelto cada vez más hacia las demostraciones rigurosas basadas en la precisión robustecida axiomáticamente y los conceptos y procedimientos claramente enunciados. En este desarrollo, la noción de conjunto, en particular de conjunto de puntos, ha jugado un papel primordial y, por ahora, ha sido absorbido en la trama del análisis.

Este párrafo, describe con elocuencia, las características de lo que nosotros denominamos un texto formal, en efecto, durante todo el análisis del concepto de integral de línea de formas diferenciales lineales, se percibe una concatenación axiomática de los conceptos que le ayudarán a definir y abordar el concepto de *conjunto*. La ausencia de gráficas es parte de la concepción epistemológica de R. Courant y de los autores que reescribieron la obra. Si bien se reconoce la geometría como una motivación poderosa que proporcionó ideas para el pensamiento matemático, el discurso de este texto abandona ideas geométricas porque ya no son una justificación de las ideas matemáticas formales.

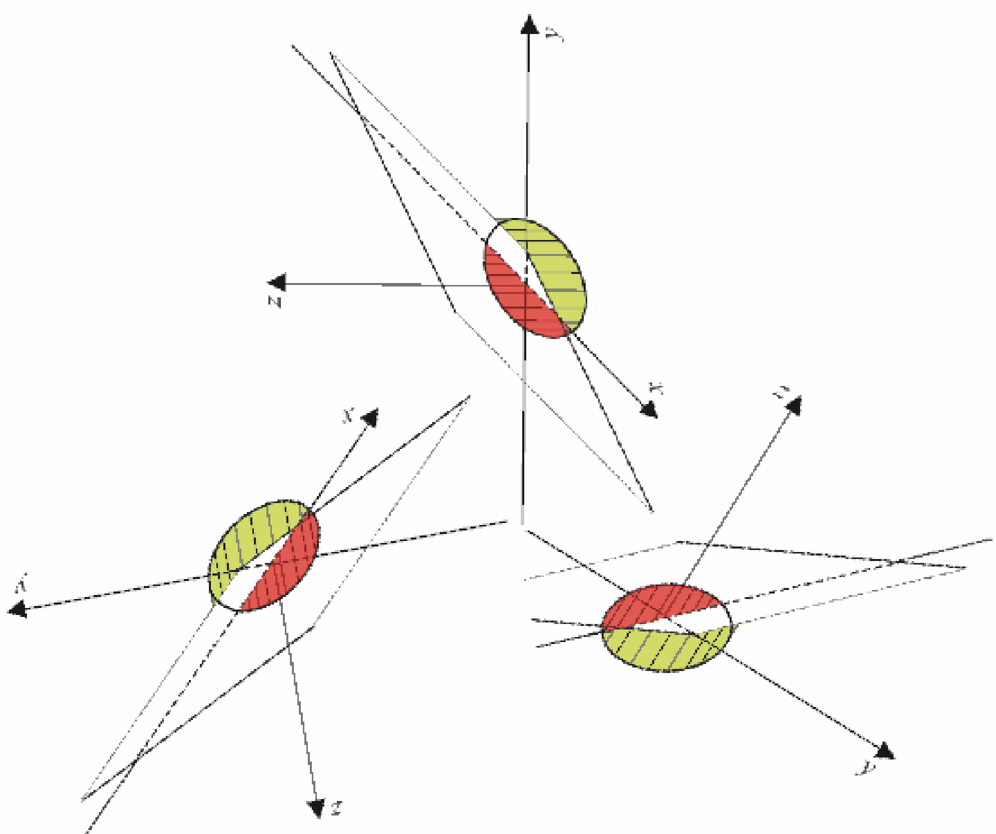
d) Clasificar los textos revisados. De acuerdo con la forma del discurso explicativo se clasificaron los textos revisados en tres categorías: con un discurso formal: *Introducción al cálculo y al análisis matemático,* de Richard Courant (1996), con un discurso algebraico: *Cálculo diferencial e integral*, de William Anthony Granville (1982) y, los actuales (editados en los ochenta y después) con un discurso que mezcla lo formal con el análisis gráfico: *Cálculo* de R. Larson, et al, (1999), *Cálculo con Geometría Analítica* de Thomas G. y R. Finney, (1986), *Cálculo con Geometría Analítica* de E. Sowkowski, 1989, *Cálculo. Trascendentes tempranas* de J. Stewart, (2002).

e) Construir un mapa conceptual. La ubicación de rupturas y vacíos explicativos nos proporcionó elementos para construir un mapa conceptual de la integral de línea en función del integrando y, logrando ubicar en paralelo la *integral de línea* de *formas diferenciales* *lineales exactas* y *no-exactas*, y de *campos conservativos* y *no-conservativos*. Además, se integra a este mapa algunas interpretaciones gráficas relacionadas con este concepto.

f) Buscar la explicación del concepto de diferencial inexacta. En los textos revisados se verificó la ausencia del término *diferencial inexacta*. Pero, a partir del análisis del concepto de integral de línea en el texto de Courant, se construyó una explicación de esta diferencial que tiene nombre y símbolo en los textos de termodinámica clásica.

Capítulo 2.

Marco teórico



2. Marco teórico

2.1 Aspectos generales

El problema de investigación, que nos ocupa, está relacionado con el esfuerzo didáctico de los autores de libros de texto de desarrollar un discurso explicativo de conocimientos matemáticos. Dado que este discurso toma una forma y secuencia determinadas, a través de su análisis se puede caracterizar e identificar algunos obstáculos didácticos en el desarrollo del concepto de *integral de línea* que se utiliza, como ya lo señalamos, en el enunciado matemático del primer principio de la termodinámica para justificar la noción de *diferencial inexacta*.

Para realizar este análisis del discurso explicativo es necesario ubicar y explicar, bajo la Teoría de la Transposición Didáctica, lo siguiente:

- La intención didáctica de los libros de texto.
- La naturaleza de los contenidos.
- La diferencia entre el saber matemático (propio de la comunidad matemática) y el saber matemático en una situación de enseñanza.
- La caracterización del discurso explicativo.

Por otro lado, utilizamos la categoría del *Discurso matemático escolar* para designar el discurso institucionalizado por un complejo entramado social. Podemos observar que muchos textos reproducen los mismos ejemplos y secuencia de explicaciones. También podemos ver, en los editados después de los ochenta, la regularidad de ubicar el concepto de *integral de línea* en el contexto del cálculo vectorial. En este sentido, se considera que existen elementos de un discurso institucionalizado -registrado en libros de texto- que permea el quehacer didáctico y los planes y programas de estudio en las instituciones de enseñanza.

En la enseñanza escolarizada se asume que el conocimiento matemático es susceptible de ser enseñado y aprendido, postulado que también hacen propio los autores. Bajo esta idea, estos autores realizan un esfuerzo didáctico para plasmar en las páginas de sus libros explicaciones que, desde su perspectiva, son adecuadas para el aprendizaje. Sin embargo, en este proceso de *transposición didáctica* pueden surgir *obstáculos* derivados de este mismo esfuerzo didáctico. Por ejemplo, la noción de integral definida, históricamente, surge como uno de los métodos de aproximación de áreas bajo curvas, luego como un proceso inverso a la derivación (Teorema fundamental del cálculo), y posteriormente, como el límite de las sumas de Riemann. Pero, como la definición formal sólo tiene sentido para funciones más complejas y excede los límites de profundidad del texto, los autores se limitan a presentar soluciones de integrales donde la idea implícita es la noción de la integral como un proceso inverso a la derivación. En tal caso, el estudiante se limitará a memorizar la definición porque en términos prácticos no fue utilizada esta herramienta formal y, en consecuencia, no hay elementos para poder significarla.

En los siguientes apartados se exponen los conceptos centrales de la *Teoría de la transposición didáctica*, la categoría de *Discurso matemático escolar* y el concepto de *Obstáculo didáctico*, elementos conceptuales centrales que se utilizaron en el trabajo de análisis del discurso explicativo de manuales de cálculo.

2.2 La teoría de la Transposición Didáctica y los libros de texto

Si asumimos que el conocimiento matemático es una abstracción (una manera de pensar), entonces nos encontramos frente a un problema crucial que es el de su comunicación. Cuando la comunidad matemática produce conocimiento, comunica sus resultados con el propósito de mostrar su relevancia y su validez, de modo que, los matemáticos no reproducen la ruta de pensamiento de su creación, sino que presentan el conocimiento nuevo en forma lo más axiomática posible para que sea factible la verificación de su validez. Esta comunicación da inicio a un proceso de transformación del conocimiento que constituye uno de los objetos de estudio centrales de la Didáctica de la Matemática.

Después, este conocimiento comunicado y validado por la comunidad matemática, sufre otras transformaciones cuando es llevado a la escuela para ser enseñado, es decir, el conocimiento sufre cambios que obedecen a su intención instruccional. Resumiendo, Yves Chevallard (1991) introduce la expresión de *transposición didáctica* para nombrar al proceso de transformación de un conocimiento desde que es "objeto del saber", propio de los matemáticos, pasando después a ser "objeto a enseñar" y llegando a ser por último un "objeto de enseñanza" cuando tiene un tratamiento didáctico. Si bien estas transformaciones se inician en la misma comunidad matemática, nosotros estamos interesados en las modificaciones que tienen un propósito instruccional, esto es, en las transformaciones derivadas del tratamiento didáctico. En este sentido, la teoría de la *Transposición didáctica* de Chevallard nos proporciona categorías conceptuales tales como: el *saber a enseñar* y el *saber enseñado* que para poder realizar el análisis de textos.

Los libros son un material de consulta recurrente para profesores y estudiantes, ya que contienen de manera explícita: índice de temas, explicaciones, demostraciones, ejemplos resueltos, gráficas, etcétera; en consecuencia, en éstos se pueden identificar algunos aspectos relacionados con la transposición que sufre el conocimiento matemático cuando es llevado a la enseñanza escolarizada. Es decir, los textos son un punto esencial a lo largo del proceso de transposición del conocimiento matemático escolar; como señala Jeremy Kilpatrick (1992): ellos *nos proveen de una fuente en la cual algunos de los aspectos de la transposición didáctica pueden ser investigados*.

¿Por qué hay *transposición didáctica*? Porque el funcionamiento didáctico del saber es distinto al funcionamiento académico de su producción. La transposición didáctica sucede cuando elementos del *saber sabio* se transforman en *saber enseñado* . Para Chevallard todo proyecto de enseñanza-aprendizaje escolarizado se constituye con la identificación y designación de contenidos de *saberes* como *contenidos a enseñar*. Por esta razón, este teórico se pregunta: *¿qué es entonces aquello que, en el sistema didáctico, se coloca bajo el estandarte del Saber? ¿qué relación entabla entonces con el "saber sabio", el de los matemáticos?* Éstas son básicamente las preguntas que responde el concepto transposición didáctica. En suma, la transposición didáctica implica un conjunto de procesos que son pues las transformaciones de adaptación que sufre el *saber sabio* (propio de la comunidad matemática) para hacerlo apto a la enseñanza. Chevallard define estos procesos de la siguiente manera:

> La transformación de un contenido de saber preciso en una versión didáctica de este objeto de saber puede denominarse más apropiadamente "transposición didáctica *stricto sensu*". Pero el estudio *científico* del proceso de transposición didáctica (que es una dimensión fundamental de la *didáctica de las matemáticas*) supone tener en cuenta la transposición didáctica *sensu lato*, representada por el esquema
>
> → objeto de saber → objeto a enseñar → objeto de enseñanza
>
> en el que en el primer eslabón marca el paso de lo implícito a lo explícito, de la práctica a la teoría, de lo *preconstruido* a lo *construido*.

En este esquema, podemos ver que la teoría de *Transposición didáctica*, en su sentido más amplio, considera que las transformaciones que sufre el conocimiento matemático empiezan en la misma actividad de la comunidad científica, porque para comunicar resultados de investigación el científico debe suprimir todas las reflexiones inútiles, todo proceso errático, las confusiones, las discusiones con sus pares, etcétera. De esta manera la organización de los conocimientos depende, desde su origen, de las exigencias impuestas a sus autores para su comunicación, en tal caso, el conocimiento producido para comunicarse se despersonaliza, es sacado de su contexto y su tiempo. Es por ello que Chevallard sostiene que *la transposición didáctica se desarrolla en gran parte en la comunidad científica y prosigue en los medios cultivados (más exactamente la noosfera)*.

Como ejemplo del proceso de transposición representado en el esquema, el autor aborda la noción de distancia de la siguiente manera:

- La noción de *distancia* (entre dos puntos) se utiliza espontáneamente "desde siempre";
- el *concepto matemático* de distancia es introducido en 1906 por Maurice Fréchet (objeto de saber matemático);
- en el primer ciclo de la enseñanza secundaria francesa, la noción matemática de distancia, surgida de la definición de Fréchet aparece en 1971 en el programa de clase de cuarto curso (objeto a enseñar);
- su tratamiento didáctico varía con los años a partir de su designación de objeto a enseñar: continúa el "trabajo" de transposición.

En esta ruta esquemática podemos observar que un conocimiento matemático, cuando es introducido en un programa escolar, experimenta transformaciones en el proceso de su tratamiento didáctico, proceso que hace que el *saber a enseñar* sea distinto del *saber enseñado*. En palabras de Chevallard:

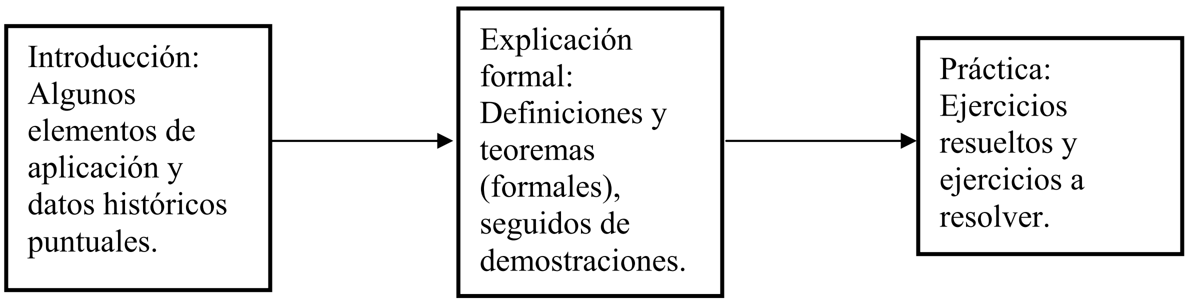
> El saber-tal-como-es-enseñado, el saber enseñado, es necesariamente distinto del saber-inicialmente-designado-como-el-que-debe-ser-enseñado, es saber a enseñar.

Esta diferencia entre el *saber a enseñar* y el *saber enseñado* es central porque se origina por la actividad didáctica del docente. Un conocimiento matemático específico, identificado y validado como un saber a enseñar (por la noosfera), sufre transformaciones producto del funcionamiento del triángulo didáctico (estudiante, profesor, contenidos). Es decir, la diferencia entre el *saber a enseñar* y el *saber enseñado*, incluye en el análisis del proceso de transposición la actividad didáctica del profesor. Pero, el sentido más amplio de la teoría abarca las transformaciones del conocimiento matemático desde lo que se denomina *saber sabio* hasta el *saber enseñado*; como el saber sabio es objeto de estudio de la *epistemología*, el concepto de transposición didáctica al tomar en cuenta el estudio de la génesis y construcción del conocimiento matemático, permite la articulación del análisis epistemológico con el análisis didáctico.

Como se dijo en el párrafo anterior, la *noosfera* es instancia que selecciona los elementos del *saber sabio* para designarlos como *saberes a enseñar*. Para Chevallard, la *noosfera* es la instancia social más inmediata que rodea el sistema de enseñanza y que se enfrenta con los problemas que surgen del encuentro con la sociedad y sus exigencias. En esta esfera social participan (directa o indirectamente y con distintos grados de implicación) diversas personas e instituciones: profesores, matemáticos con interés en la enseñanza, asociaciones de padres, editores y autores de libros de texto, la instancia política decisoria y ejecutiva (en México, la Secretaría de Educación Pública), es decir, el órgano de gobierno del sistema de enseñanza, etcétera. Si bien, en la educación básica, media y media superior, la noosfera es una compleja estructura social, en la educación de superior (en las universidades públicas), dado que son autónomas, la noosfera se reduce a "comisiones académicas" que estructuran los planes y programas de estudio y orientan los métodos de enseñanza. En tal caso, como la experiencia lo indica, los profesores para estructurar los contenidos de los programas de matemáticas recurren a los textos como un elemento central de consulta. Es frecuente encontrar coincidencia de contenidos para carreras similares en universidades distintas.

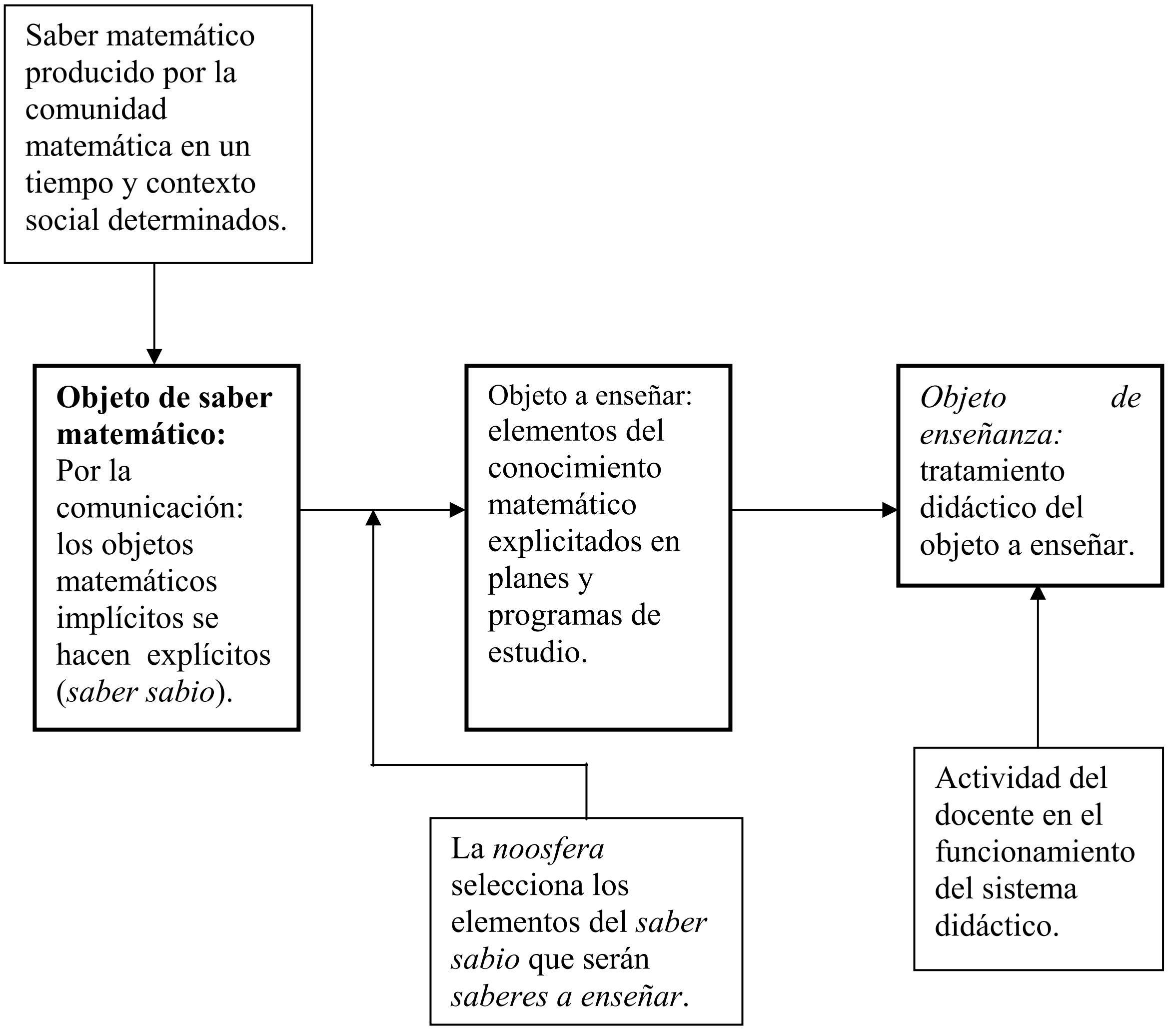
Por lo anterior, actualmente es necesario realizar investigaciones acerca del análisis de libros de cálculo desde distintos enfoques teóricos, porque sólo desde la difusión de resultados de estos trabajos se puede incidir en la modificación y estructuración de manuales con acercamientos didácticos más adecuados. Una pregunta importante y central para los autores de texto, es la que formuló Kilpatrick, en la 58 reunión anual del National Council of Teachers of Mathematics (Seattle, 1980): *Is problem solving bookable?* pregunta que se plantea porque, en dicha reunión, como primera recomendación se proponía la *resolución de problemas* como foco de las matemáticas para los años ochenta; pero cómo poner en la forma lineal y estática de los libros de texto el proceso multidimensional y dinámico de este método. Y dado que la resolución de problemas es un punto central en la actividad matemática, en el artículo *Didactic Transposition in Mathematics Texbooks* (W. Kang y J. Kilpatrick, 1992), esta pregunta se generaliza para el conocimiento matemático: *Is mathematical knowledge bookable?* la respuesta inmediata, desde la experiencia histórica de los procesos de enseñanza-aprendizaje, es positiva; sin embargo, es necesario realizar estudios para dar cuenta de la naturaleza y limitaciones que tiene el conocimiento matemático al ser registrado y explicado (transpuesto didácticamente) en los libros.

W. Kang (1990), en un estudio de transposición didáctica en los libros de texto de álgebra (en Estados Unidos), observó que éstos se escriben bajo la suposición de que el conocimiento matemático es enseñado y aprendido a través de un procedimiento de explicación seguido de su práctica. De hecho nosotros, encontramos que de los ocho textos revisados, en nuestra investigación, sólo uno escapa al siguiente esquema general:



Este esquema de tratamiento didáctico, que también prevalece en las aulas, es un producto de la transposición didáctica, que de momento no se puede calificar de “bueno o malo”, sino que la investigación debe mostrar sus alcances y limitaciones.

Con el objetivo de caracterizar y explicar los procesos de cambio que sufre el conocimiento cuando es llevado a los manuales, desarrollamos una extensión del esquema de Chevallard, para con posterioridad, aplicarlo concretamente a los libros de texto.



Los libros de texto de matemáticas cumplen una función didáctica porque tienen una explícita y clara intención de proporcionar situaciones de aprendizaje. Los autores de éstos, a partir de su concepción epistemológica y su experiencia didáctica, organizan contenidos, hacen uso de recursos técnicos y eligen la forma discursiva de presentar sus *contenidos*. En este sentido, los manuales registran: el saber a enseñar y el saber enseñado de la siguiente manera:

saber sabio	saber a enseñar	saber enseñado
El *saber sabio* es el conocimiento validado por la comunidad matemática.	Todos los textos presentan una relación de *saberes a enseñar* bajo el título de **contenido**.	Desarrollan explicaciones de los saberes a enseñar con una **intención didáctica**. Su discurso denota una postura **epistemológica**.

Desde la perspectiva de esta teoría, los libros de texto pueden ser considerados como un típico registro del *saber a enseñar* y el *saber enseñado*. Los autores escriben sus textos desde una postura de profesores, considerando a los estudiantes como sus principales lectores. Ellos esperan que los docentes motiven a los estudiantes a leer el libro, porque desde su intención didáctica, consideran que proporcionan a los maestros: a) explicaciones que pueden ser usadas en clases y, b) ejemplos a resolver dirigidos a los estudiantes. Esto es, los autores registran, de manera explícita, *contenidos a enseñar* y explicaciones de estos contenidos (*saber enseñado*). Justamente, la diferencia entre los libros de texto de matemáticas, de distintos autores, radica en la forma concreta de su *discurso explicativo*. Esta forma del discurso es uno de los elementos que nos permitió clasificar en tres grupos, los ocho textos revisados en el trabajo de investigación.

Según Chevallard, *la exigencia de explicitación discursiva, la "textualización" del saber, conduce primeramente a la delimitación de saberes "parciales", cada uno de los cuales se expresa en un discurso más o menos autónomo*. En otras palabras, la delimitación de contenidos y de la profundidad de las explicaciones es un proceso necesario para comunicar el *saber a enseñar* en los libros. De esta necesaria delimitación del saber se derivan otras transformaciones que se producen en el proceso de transposición, como son:

a) la *desincretización del saber;*
b) la *descontextualización* del saber*;*
c) la *despersonalización* del saber*;*
d) la *programabilidad* de la adquisición del saber.

La explicación de cada una de estas transformaciones serán útiles para caracterizar los *obstáculos didácticos* que identificamos en el análisis de textos.

a) La delimitación del saber conduce al registro de saberes parciales, cada uno de los cuales se explica de manera ficticiamente autónoma. Esto es, la necesidad de darle un tratamiento didáctico al conocimiento matemático que es complejo e intrincado, conduce a la separación de conceptos que están fuertemente imbricados, en este sentido, se produce una segmentación del saber y por ello a este proceso se le denomina *desincretización* del conocimiento. Por ejemplo, Richard Courant dice

> Después de Euler, los autores, uno tras otro, se solidarizaron con la separación entre cálculo diferencial y cálculo integral y, al hacerlo, oscurecieron un punto clave: la reciprocidad entre derivación e integración.*

En este caso, la separación entre el cálculo diferencial e integral, que para muchos profesores y autores de manuales es didácticamente adecuada, para Courant representa una dificultad para entender la reciprocidad entre los procesos de derivación e integración.

En muchos casos, la división de un saber determinado en saberes independientes es visto como didácticamente útil, pero detrás de este argumento está la idea de que el aprendizaje de un complejo objeto matemático es la suma “casi automática” del aprendizaje de sus partes. No obstante, la experiencia muestra que la habilidad de establecer relaciones entre distintos conceptos no es un acto espontáneo.

b) La delimitación del saber implica también un proceso de *descontextualización*, es decir, se desubica al saber de la red de problemáticas y problemas que le dieron sentido en su proceso de creación. En los libros de texto, muchas veces, como se explicó anteriormente para el caso de la integral definida, se dan definiciones formales que fuera del contexto de su creación pierden sentido dado que los problemas resueltos no ameritan tal definición.

c) En general, la comunicación escrita del pensamiento matemático implica la construcción de un discurso despersonalizado (*despersonalización* del saber) en tanto no muestra la dinámica subjetiva (errores, hipótesis no adecuadas, intentos fallidos, etcétera) de su creación y realización, es decir, el sujeto queda fuera de su producción. Este hecho ha producido una visión del aprendizaje para la cual el error es una simple falta, una laguna de conocimiento, y no es visto como una parte constitutiva del proceso de construcción del saber.

d) La puesta en texto del conocimiento matemático implica, además de la delimitación, una secuenciación de los saberes a enseñar, esto es, se establece una exposición de contenidos como una progresión de conocimientos adecuada para el aprendizaje, lo que a su vez implica que el aprendizaje tiene un principio y una secuencia. Sin embargo, el orden de aprendizaje no es isomorfo en relación con el orden de exposición del saber; en palabras de Chevallard, *el aprendizaje del saber no es el calco del texto del saber*. Tal concepción del aprendizaje conduce a la memorización (desprovista de significados) de los contenidos por parte de los estudiantes.

Finalmente, debemos hacer énfasis en que el conocimiento expuesto en los textos tiene un carácter estático. Siempre los estudiantes tienen la percepción de que en los libros está plasmado un conocimiento acabado, con significados únicos y que la tarea es aprender definiciones y demostraciones aunque éstas no tengan ningún sentido práctico ni cuestionamiento lógico.

2.3 Obstáculos epistemológico y didáctico

Es innegable la influencia que ejerció el concepto de *obstáculo epistemológico* en la construcción de teorías didácticas de autores franceses. Este concepto fue postulado por Gastón Bachellard (1985), en la obra *La formación del espíritu científico*, cuya primera edición en español data de 1948. Este filósofo empieza su exposición acerca del obstáculo epistemológico diciendo:

> Cuando se buscan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia, se llega pronto a la convicción de que *hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos*. Y no se trata de considerar obstáculos externos, como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar la debilidad de los sentidos y del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, pausas e inquietudes. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta retroceso, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos.

Lo importante de esta definición de obstáculo es la postura epistemológica del autor acerca de la construcción del conocimiento; él ubica los obstáculos en la relación dialéctica del sujeto cognoscente y su medio. Esta postura supera la discusión entre el formalismo y el positivismo, corrientes filosóficas que vienen desde el idealismo, la primera, y el materialismo, la segunda.

Para Bachellard, conocer significa destruir conocimientos mal hechos, por eso la opinión es un conocimiento siempre errático. Acceder a la ciencia significa romper con explicaciones cómodas, de sentido común. En sus palabras:

> La opinión piensa mal; no piensa: traduce las necesidades en conocimientos. Al designar los objetos por su utilidad, se niega a conocerlos. No se puede basar nada sobre la opinión: antes hay que destruirla. Es el primer obstáculo que hay que superar.

En esta explicación de la opinión como un primer obstáculo, se introducen aspectos subjetivos que se involucran en el acto de conocer, por eso Bachellard considera que descubrir obstáculos epistemológicos, *supone contribuir a crear los rudimentos de un psicoanálisis de la razón*. Algunos obstáculos epistemológicos que él identifica y explica son: *La experiencia primera*, *Obstáculo "realista"*, *Obstáculo "animista"*, *La "libido"*.

La visión de Bachellard va más allá de la epistemología. Él sostiene que el concepto de obstáculo epistemológico, no sólo puede ser una forma de estudiar el desarrollo histórico del pensamiento científico, sino que debería estudiarse en la práctica de la educación. Desde esta perspectiva, el estudiante adquiere conocimiento dejando atrás viejas ideas que se instalaron en su mente desde su práctica cotidiana.

> En la educación, la noción de obstáculo pedagógico también se desconoce. A menudo me ha sorprendido el hecho de que los profesores de ciencias, más incluso que los otros, si cabe, no comprenden que no se comprenda (...). Los profesores de ciencias imaginan que el espíritu empieza como una lección, que siempre es posible rehacer una cultura

> descuidada repitiendo una clase, que se puede comprender una demostración repitiéndola punto por punto.

Estas ideas y el concepto de obstáculo epistemológico fueron retomados y analizados por Jean Piaget y Rolando García en *Psicogénesis e historia de la ciencia* (1982). Ellos coinciden en que los "obstáculos epistemológicos" y "rupturas epistemológicas" están presentes en el desarrollo histórico de las ciencias y en la construcción del conocimiento en el individuo, aunque establecen ciertas diferencias. Esta visión epistemológica plantea un aprendizaje a través de saltos -no de forma continua- y son precisamente los obstáculos quienes se oponen a tales saltos.

Dentro de esta línea de pensamiento, Guy Brousseau (1993) en su teoría de las *Situaciones didácticas*, desarrolla el concepto de obstáculo didáctico, con base, justamente, en las ideas de sus antecesores. Esta teoría busca estudiar, apoyándose en enfoques constructivistas del aprendizaje, las situaciones de apropiación de conocimiento matemático a partir de la adaptación del alumno a ambientes que se le presentan en un inicio como problemáticos.

La postura de Piaget frente al aprendizaje, contraria al dogmatismo escolástico que centra el aprendizaje en el arte de enseñar, descarga al maestro de toda responsabilidad didáctica, ya que concibe el aprendizaje como un proceso de adaptación a un medio que es productor de contradicción, de dificultades, de desequilibrios. Para Brousseau, el aprendizaje depende del maestro porque *un medio sin intenciones didácticas es manifiestamente insuficiente para inducir en el alumno la adquisición de todos los conocimientos culturales que se desea*. Esto es, se pide al maestro provocar en el alumno las adaptaciones deseadas por una elección adecuada de problemas. Un problema específico de un saber sin una indicación intencional se le denomina una *situación a-didáctica*, es decir, la intención didáctica no está explícita, sino que está implícita en la lógica interna del problema. La *situación didáctica* tiene un sentido más amplio, implica la intervención del maestro en la interacción dialéctica del estudiante con los problemas planteados.

De acuerdo con esta teoría, en el funcionamiento de un sistema didáctico (situación didáctica) se dan, no completamente de manera explícita, reglas y estrategias (*contrato didáctico*) del juego que deben cumplir los participantes en relación con los contenidos, además, se hacen suposiciones que pueden o no cumplirse: se supone que el profesor debe crear condiciones para la apropiación del conocimiento (*situaciones a-didácticas*), y se supone que el alumno se apropiará del conocimiento. En concreto, el contrato didáctico es el procedimiento de búsqueda de medios para garantizar la apropiación de conocimientos nuevos por parte del estudiante.

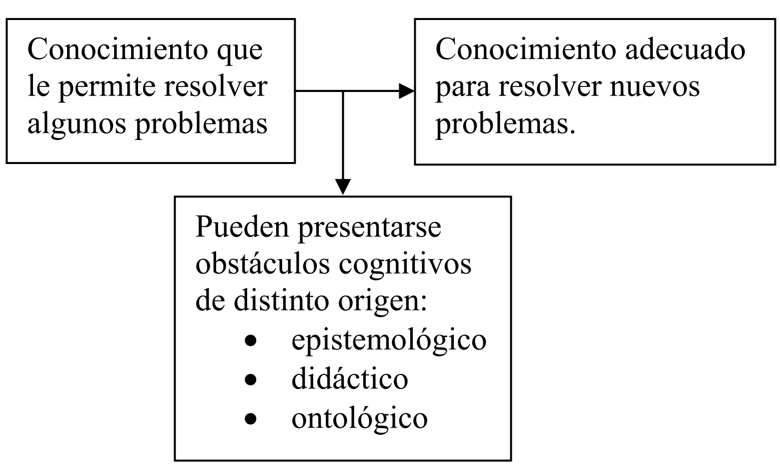
En el proceso de enseñanza-aprendizaje, Brousseau identifica lo que él llama *las paradojas del contrato didáctico*. El profesor debe elegir entre enseñar un saber formal y preciso, despojado de sentido, o enseñar un saber más o menos falso que habrá de rectificar. Si se elige la enseñanza de los conocimientos matemáticos desde una perspectiva formal da como resultado la memorización de definiciones y demostraciones desprovistas de sentido. En cambio, si se elige la enseñanza por adaptación, cuanto más se adapten los estudiantes a las situaciones que les son propuestas, es decir, cuanto mejor comprendan las razones de sus respuestas, será más difícil para ellos, a continuación, cambiar ese saber para volverlo correcto y completarlo; a este hecho el autor llama *inadaptación a la exactitud*. Esta sobreadaptación del "saber" a la solución de una situación particular no es necesariamente un factor favorable a la solución de una situación nueva. Justo en este proceso de adaptaciones a situaciones nuevas se presentan obstáculos, unos que son inevitables y constitutivos del saber, los *obstáculos epistemológicos*, y otros que son el resultado de un sobre esfuerzo didáctico, los *obstáculos didácticos*.

En el proceso de cognición del estudiante, un nuevo conocimiento no sustituye sin más a otro incompleto o erróneo en una nueva situación, sino que ambos entran en interacción. A veces este cambio conceptual da lugar a un conflicto cognitivo que se manifiesta por errores que no son producto del azar, sino que se reproducen y son persistentes. Este tipo de errores son una manifestación de *obstáculos cognitivos*, esto es, los estudiantes en su proceso de aprendizaje muestran dificultades para sustituir un conocimiento que en otras situaciones les permitió resolver satisfactoriamente algunos problemas y que ahora este mismo conocimiento es inadecuado para los nuevos problemas; por ello para Brousseau (1997) *un error no es una falta de conocimiento sino que es en sí un conocimiento*. Estos obstáculos cognitivos los clasifica en:

a) *Obstáculo ontogenético*, debido las limitaciones del sujeto en el momento de su desarrollo.
b) *Obstáculo didáctico*, debido a la elección didáctica dentro de un sistema educativo.
c) *Obstáculo epistemológico*, debido a la propia naturaleza del conocimiento científico.

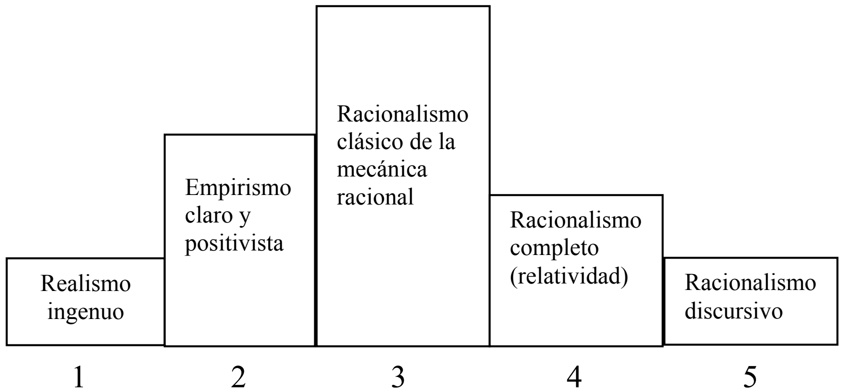
En el trabajo de análisis del discurso explicativo de los manuales de cálculo, nos ocupa de manera central el concepto de *obstáculo didáctico*. Los obstáculos cognitivos (ontológico, didáctico, epistemológico) se ubican dentro de la situación didáctica, es decir, dentro del funcionamiento sistémico del llamado triángulo didáctico.

Resumiendo, los obstáculos cognitivos son las dificultades que manifiesta (errores persistentes) el que aprende cuando enfrenta nuevos problemas para los cuales su conocimiento (anterior) es inadecuado y por tanto requiere un cambio conceptual; esta inadecuación no resulta obvia al individuo y por ello se resiste a corregir o completar su conocimiento. Esquemáticamente podemos expresar lo siguiente:



Es pertinente especificar la diferencia entre los obstáculos epistemológico y didáctico. Bachelard (1984) en *La filosofía del no*, obra en la que propone y desarrolla una epistemología que él llama *racionalismo aplicado*; vincula el concepto de obstáculo epistemológico con la noción de perfil epistemológico. Para ejemplificar este último concepto, propone el diagrama del perfil epistemológico de su concepto de masa.

Figura 1. *Perfil epistemológico de nuestra noción personal de masa.*



En este esquema, el autor quiere mostrar en el eje de las abscisas las filosofías sucesivas que amparan su concepto de masa, y en el eje de las ordenadas, dice *-si pudiera ser exacto- mediría la frecuencia del uso efectivo de la noción*. Para explicar este perfil sostiene que *todo progreso de la filosofía de las ciencias se realiza en el sentido de un racionalismo creciente, eliminando de todas las nociones, el realismo inicial*. En tal sentido, recuerda que la eliminación de las primeras nociones implica obstáculos, por ello dice

> ...podríamos relacionar las nociones de obstáculo epistemológico y de perfil epistemológico, pues un perfil epistemológico conserva la huella de los obstáculos que una cultura debió superar. Los primeros obstáculos, los que se encuentran en los primeros estadios de la cultura, dan lugar a esfuerzos pedagógicos muy claros.

Ana Sierpinska (1992), que lleva el concepto de obstáculo epistemológico al análisis de los conceptos en la matemática, explica:

> La oposición ejercida por los obstáculos al aprendizaje puede ocurrir a nivel de cada individuo, y dichas dificultades que se generan pueden en algunos casos ser muy particulares. No obstante, la caracterización de un obstáculo como epistemológico está vinculada al significado de los conceptos mismos, no son simples resultados de formas particulares de su enseñanza, ni idiosincrásicos, ni algo que le ocurre a una persona o dos; si el obstáculo no es sólo nuestro o tal vez de otras dos personas sino que está más extendido o se ha extendido alguna vez en alguna cultura, es entonces llamado obstáculo epistemológico.

En el caso específico del cálculo, Sierpinska (1987) estudia los obstáculos epistemológicos en la construcción de conceptos relativos a la matemática del cambio y a los procesos infinitos; de hecho, es muy conocido su trabajo sobre el concepto de límite como obstáculo epistemológico. A manera de ejemplo, si el concepto de límite representa un obstáculo epistemológico y dado que este concepto es el sustento formal del concepto de integral, podríamos plantear la hipótesis de que nuestro proceso cognitivo enfrenta obstáculos epistemológicos al transitar por los siguientes significados de la integral:

Integral como una suma de un número infinito de "cantidades infinitamente pequeñas": $\int_a^b df(x)$	Integral como proceso de antiderivación: $\int f'(x)$	Integral como la existencia del límite de las sumas de Riemann: $I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$

Una veta interesante de estudio en investigaciones futuras consiste en identificar el significado de integral que tienen los estudiantes después de un curso de cálculo; para ello se tendrían que diseñar problemas que no expliciten el significado que se requiere para resolver la situación planteada (*situación a-didáctica*).

El reconocimiento de la existencia de obstáculos en el aprendizaje son objeto de estudio en muchas investigaciones, por ejemplo, en una compilación hecha por A. Camilloni (1997), se reportan resultados de trabajos como: *Trabajar los obstáculos para asimilar los conocimientos científicos* (G. Rumelhard), *Construcción de problemas y superación de obstáculos* (M. Fabre y C. Orange), *Identificación de obstáculos por parte de los alumnos* (B. Peterfalvi), etcétera. Todos estos trabajos se refieren específicamente a obstáculos epistemológicos.

El obstáculo didáctico, a diferencia del anterior, se origina por el tratamiento didáctico de un *saber* específico, pero identificar este tipo de obstáculos exige el análisis de la situación didáctica de este saber. En otras palabras, requiere la observación de la puesta en escena de las *situaciones a-didácticas*, en este sentido, no sería adecuado aplicar este concepto al análisis de libros de texto sin reformularlo.

2.4 Transposición didáctica y el obstáculo didáctico en los libros de texto

Es preciso señalar algunas características generales de los libros de texto que nos permitirán fundamentar nuestro análisis con categorías teóricas.

a) Los textos se elaboran con una clara y explícita intención didáctica, esto es, sus autores tienen el propósito de enseñar, y sus lectores el de aprender.

b) Los textos son una fuente central de consulta para la preparación de clases por parte del docente, y de estudio para los alumnos.
c) En los textos se desarrollan explicaciones de *saberes a enseñar* especificados en su contenido.
d) Los autores de los textos eligen y elaboran una forma específica de discurso explicativo de los conceptos. Forma que expresa su experiencia y conocimiento didácticos.

Estas características ubican al libro de texto como un registro de saberes a enseñar y de su tratamiento didáctico (*saber enseñado*). En tal caso, a través del análisis del discurso explicativo de un saber específico, podemos caracterizar la forma como resuelven los procesos inevitables de su comunicación: la *desincretización*, la *descontextualización*, la *despersonalización* y la *programabilidad* del saber.

Desde la teoría de la *Transposición didáctica*, estos procesos no pueden ser calificados como buenos o malos en sí mismos, sino que requieren de una vigilancia epistemológica. Desde nuestra perspectiva, el seguimiento de las explicaciones de un saber específico en los textos nos permite identificar ciertas anomalías que para el lector, que busca entender tal saber, se convierten en obstáculos para poder construir significados más elaborados y completos del concepto en cuestión.

Después de un primer análisis de los manuales de cálculo que se seleccionaron para el presente estudio, se logró tipificar las siguientes anomalías:

a) Rupturas en la secuencia lógica de la explicación. Dada la desincretización del saber, esto es, dado que un saber para ser comunicado necesariamente se descompone en conceptos parciales, si las explicaciones de estos conceptos parciales no se concatenan de manera adecuada y lógica, se producen rupturas.

b) Vacíos explicativos. La despersonalización del saber elimina del discurso preguntas contradictorias, errores, pensamientos alternos, etcétera.; este hecho puede dejar fuera explicaciones que se buscan, como es el caso de la *diferencial inexacta*.

c) Incongruencia entre las definiciones formales y los problemas que se resuelven. La descontextualización del saber puede originar, en algunos casos, que las definiciones formales se expliciten sin plantear siquiera una situación para la cual tengan sentido. Por ejemplo, si las integrales que se presentan a manera de ejemplos se pueden calcular con la noción de integración como un proceso inverso a la derivación, la definición formal como la existencia del límite de las sumas de Riemann quedará como una simple justificación formal del concepto sin ningún significado para el estudiante.

Esta caracterización de los obstáculos didácticos en el discurso explicativo de los libros de texto es una aportación de nuestro estudio.

2.5 El Discurso matemático escolar

La categoría de discurso matemático escolar es introducida por R. Cantoral (1990) para denominar el discurso institucionalizado que goza del consenso de los que participan en la noosfera del sistema escolar. El proceso de difusión de este discurso no termina en las páginas de los libros o de los planes y programas de estudio, sino que se prolonga al interior del aula, mediando la interacción entre estudiantes y profesor. En este estudio se vincula esta categoría con el proceso de transformación didáctica del conocimiento matemático.

Del proceso de transposición didáctica de los saberes relacionados con el pensamiento matemático avanzado, se deriva un *discurso matemático escolar* que es validado y que tiene consenso, aunque con limitadas disidencias, en la comunidad académica de las universidades. Si bien las transformaciones del *saber erudito* se dan en distintas instancias hasta llegar a ser el *saber enseñado*, cabe detenerse en la actividad de la comunidad denominada por Chevallard como noosfera. En esta esfera social que rodea de manera inmediata las instituciones escolarizadas (públicas y privadas) se producen procesos importantes como son: la selección de saberes y sus métodos de enseñanza, la elección de ejercicios y problemas, la forma de jerarquizar los contenidos e, incluso, la influencia de posturas ideológicas y culturales que proceden de realidades distintas a la de México. En este sentido, es necesario advertir que nuestra noosfera (profesores, SEP[*], ANUIES[*], alumnos, autores de textos, padres de los estudiantes, etcétera) tiende a tomar experiencias ajenas al contexto social y cultural, copian perspectivas educativas de Europa o de Estados Unidos, sin una previa evaluación de la realidad sociocultural. En este sentido, Cantoral (Textos de Cálculo...) advierte

> Dado que somos una comunidad acostumbrada a la traducción de textos y al uso sistemático de propuestas que no fueron pensadas para nuestros sistemas educativos, resulta de la mayor importancia estudiar y manejar el proceso de una manera adecuada, que coordine los conocimientos disponibles mundialmente con nuestras particularidades regionales. Por esta razón, las investigaciones en educación matemática que se desarrollen deben jugar un papel protagónico en este proceso.

Si se analiza el discurso explicativo de los libros se pueden detectar sin dificultad: definiciones, ejercicios, problemas, representaciones gráficas, etcétera, que se repiten en textos de distintas latitudes, lo cual nos indica que existe un discurso institucionalizado y consensado a nivel internacional. Por ejemplo, en la mayoría de ellos se utiliza la definición llamada "la integral de Riemann" para dar sustento formal a este objeto matemático, aunque sabemos que existen otras propuestas formales que el medio ha desechado. Otro hecho que da cuenta de este fenómeno es que, en la en la explicación de la integral de línea como una herramienta para calcular áreas limitadas por curvas cerradas simples, en todos los manuales revisados se resuelve la expresión:

$$A = \tfrac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx$$

para calcular el área cerrada por la elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Es sorprendente cómo es que repiten este ejemplo, existiendo otras curvas cerradas que podrían proponerse. Además cabe preguntarse si es necesario el concepto de integral de línea para resolver tal problema, ya que se presenta este cálculo como un recurso para significar la expresión señalada.

Es posible, dado el papel protagónico que juegan los libros de texto en la enseñanza escolarizada, que este mismo problema de calcular el área limitada por la elipse sea propuesto, por parte del docente, en las aulas.
En este sentido, Cantoral refiriéndose a la historia de la enseñanza del cálculo, con base en el estudio de la historia de los textos realizada por Choppin (1980), expresa:

> ...En esta historia, el libro de texto juega un papel protagónico: se constituye como un objeto pluridimensional que puede juzgarse desde diferentes enfoques. Es a la vez apoyo del saber en tanto que impone una distribución y una jerarquía de los conocimientos y contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto de alumnos como de profesores; y es un instrumento de poder dado que contribuye a uniformar la lingüística de la disciplina, a la nivelación cultural y a la propagación de las ideas dominantes.

Detrás del uso indiscriminado de manuales de cálculo traducidos al español, de manera conciente o inconsciente, está la idea de que el aprendizaje del individuo no depende de su contexto sociocultural mediato. Postura que no tiene sustento teórico ni empírico.

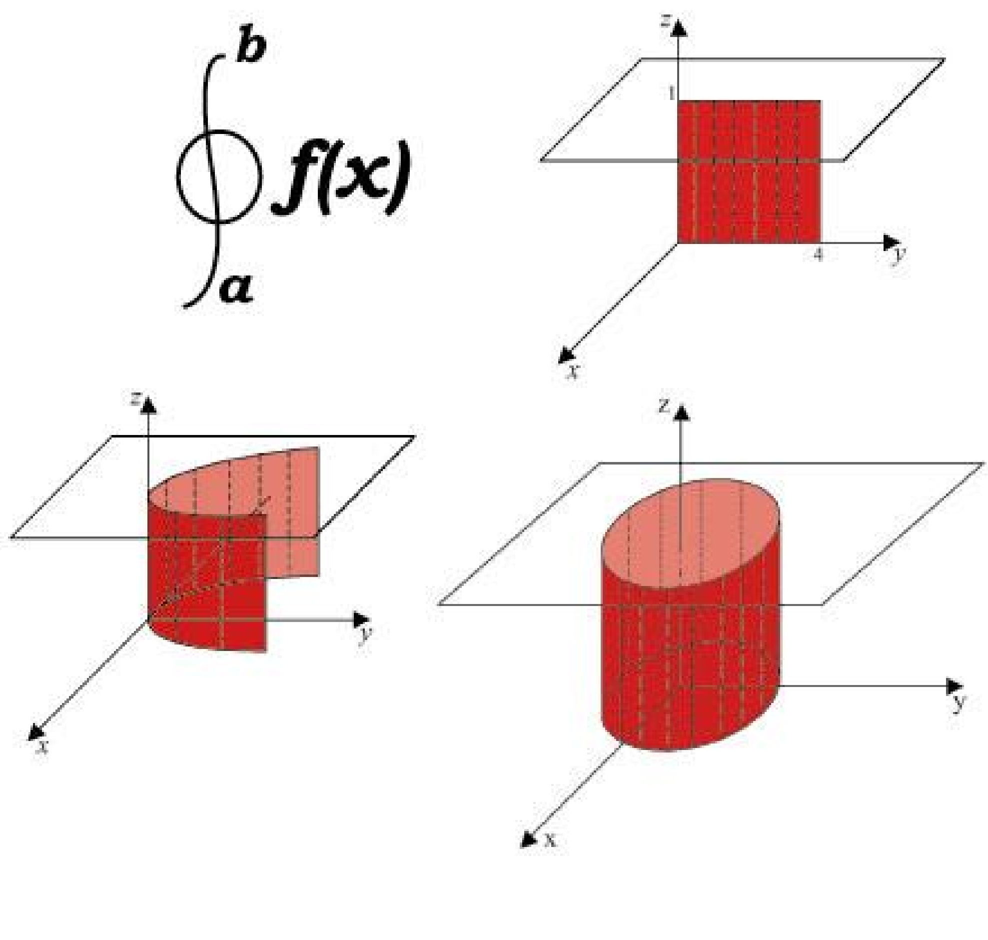
Estamos frente a un problema que debe ser tomado en cuenta, es preciso pensar en propuestas acordes con nuestras necesidades. No se trata de ignorar las propuestas didácticas de otros países, como diría Cantoral:

> No hacemos un llamado a la quema de textos extranjeros ni a cerrarles las puertas a los nuevos, sino más bien señalamos la necesidad de iniciar proyectos para la elaboración de materiales didácticos que tomen en cuenta a los actores directos de la acción educativa, y que incluso atiendan las grandes diferencias regionales que suelen presentarse en nuestros ambientes de enseñanza. Nuestros estudiantes y profesores no son sujetos a-sociales, a-históricos ni pertenecen a sociedades homogéneas. Todo ello merece un esfuerzo mayor y más profundo.

El análisis de textos que se realizó pone en evidencia las limitaciones de este discurso institucionalizado, y que al presentar ciertos obstáculos para el entendimiento de conceptos específicos es una invitación a diseñar nuevos materiales.

Capítulo 3.

Análisis del discurso explicativo de los libros de texto



3. ANÁLISIS DEL DISCURSO EXPLICATIVO DE LOS LIBROS DE TEXTO

3.1 Clasificación de los textos

Como se señaló en el apartado de aspectos metodológicos, después de una primera lectura analítica del discurso explicativo de los conceptos: integral definida, integral indefinida, el teorema fundamental del cálculo y de la integral de línea, se realizó la clasificación de textos tomando en cuenta los siguientes elementos:

- Ubicación del concepto en el contenido general del texto.
- La forma del discurso explicativo: axiomático, en forma de preguntas y respuestas, confrontación de ideas previas, etc.
- La forma en que se utilizan los recursos gráficos.
- Los tipos de ejemplos que se resuelven a lo largo de las explicaciones.

La forma del discurso explicativo de los textos está en relación directa con la época en que éstos se elaboran, por esta razón se clasificaron los textos en los siguientes tres grupos: textos con un discurso algebraico, textos con un discurso formal, y textos editados a finales del siglo XX.

3.1.1 Textos con un discurso formal

La edición revisada del texto *Introducción al cálculo y al análisis matemático* de Richard Courant (1996) es una reescritura realizada por Frizt Jhon de la primera edición alemana (1927). La secuencia de temas es diferente a los demás textos revisados, expone temas de cálculo integral y diferencial de forma alterna. Su discurso pone énfasis en las definiciones formales, razón por la que descalifica, por imprecisa, la noción de integral definida como una "suma de cantidades infinitamente pequeñas", y destaca la precisión de la definición de la integral definida como el límite de las sumas de Riemann para integrar funciones definidas y acotadas. La exposición de contenidos es clásicamente axiomática. La utilización de gráficas es mínima.

El libro *Cálculo Vectorial* de Claudio de Jesús Pita Ruiz (1995), como él mismo señala, es un manual de estudio pero su entendimiento requiere como antecedente un curso de cálculo diferencial e integral de funciones reales de una variable real, junto con algunos resultados elementales sobre sistemas de ecuaciones lineales y matrices.

El lenguaje que utiliza es formal y riguroso, pero el discurso explicativo difiere del texto anterior en la forma de presentar los teoremas y definiciones: 1) propone una definición inicial de la integral de línea de campos vectoriales, 2) presenta una interesante secuencia de problemas resueltos, 3) discute las respuestas de los problemas provocando una serie de preguntas centrales, 4) responde las preguntas planteadas formulando las definiciones y teoremas pertinentes. Es el único texto que presenta una interpretación gráfica de la integral de línea y la resolución de problemas que ameritan tal significado.

3.1.2 Textos con un discurso algebraico

En esta categoría se realizó el seguimiento del discurso explicativo del texto *Cálculo diferencial e integral* de William Anthony Granville (1982). La primera edición en inglés de esta obra data de 1904. Este texto utiliza un lenguaje algebraico en las explicaciones de los conceptos; por ejemplo, en el tratamiento de la derivada y la integral nos encontramos con expresiones como: se suma, se resta, se divide, partes infinitamente pequeñas, y lo más importante es que destaca el significado de la integral definida como un procedimiento de suma. La integral de línea se explica por única vez en el Capítulo XIV "Integral definida". Artículo 146. "Cálculo de área cuando las ecuaciones de la curva se dan en forma paramétrica". Utilización limitada de recursos gráficos.

3.1.3 Textos editados a finales del siglo XX

Los textos revisados que pertenecen a esta categoría son: *Cálculo* de R. Larson et al. (1999), *Cálculo con Geometría Analítica* de Thomas G. y R. Finney (1986), *Cálculo con Geometría Analítica* de E. Sowkowski (1989), *Cálculo. Trascendentes tempranas* de J. Stewart (2002). Estos manuales están editados después de la década de los setenta.

Estos manuales se caracterizan por tener un discurso menos rígido, utilizan frases en lengua natural, fórmulas literales, expresiones en lenguaje formal, figuras geométricas o gráficos cartesianos. Son extensos en temas y páginas, razón por la cual las explicaciones de algunos temas es poco profunda.

Por otro lado, debido al avance de los recursos computacionales y a la idea de que lo gráfico es intuitivo, la utilización de representaciones gráficas es abundante. Un ejemplo representativo es el de Larson que cuenta con dos tomos que suman 1495 páginas y 3,500 gráficas, extensión que obedece, en palabras de los autores, a que *el texto ha puesto énfasis especial en la importancia del aprendizaje mediante gráficas. Asimismo, ha sido uno de los pioneros en incorporar gráficas en dos y tres dimensiones....* Además, en el prólogo del texto, ellos aseguran de que han cuidado minuciosamente la presentación, utilizando un lenguaje matemático preciso.

No obstante lo extenso de estos manuales, no se logra conciliar lo intuitivo (gráfico) con el lenguaje formal y preciso de sus definiciones. Más aún, en el caso específico de la integral de línea, las explicaciones formales no alcanzan la profundidad que requiere el tema, y a pesar de que un objetivo central que argumentan sus autores es el acercamiento gráfico, no muestran una interpretación gráfica de esta integral.

3.2 Análisis del discurso explicativo del Teorema Fundamental del Cálculo

El teorema fundamental del cálculo tiene un análogo para las integrales de línea de funciones de dos o más variables. En el presente trabajo se presenta un significado gráfico que permite significar estos dos teoremas fundamentales. Sin embargo, en los textos de cálculo revisados están ausentes estas interpretaciones gráficas, por esta razón se realizó un análisis -con base en la clasificación presentada- del discurso explicativo de: la integral indefinida, la integral definida, y el teorema fundamental. Estudio que tomó en cuenta: la ubicación del concepto en la secuencia de contenidos, los diferentes significados de los conceptos, las rupturas y vacíos explicativos y la forma en que se utilizan las representaciones gráficas.

3.2.1 Textos editados a finales del siglo xx

Como se sabe, el Teorema Fundamental del Cálculo establece una relación central entre la integral definida y la integral indefinida, esto es, relaciona dos significados importantes: la integral como el límite de las sumas de los rectángulos de aproximación y la integral como un proceso de antiderivación. Para establecer este vínculo se pueden elegir distintas secuencias de los temas: integral definida, integral indefinida, teorema fundamental. En los cuatro textos revisados en este grupo, los autores optan por dos secuencias distintas y, en función de esta secuencia, la formulación del teorema fundamental difiere en la forma del enunciado.

🕮 Los textos *Cálculo* de R. Larson et al y *Cálculo con Geometría Analítica* de Thomas G. y R. Finney, eligen la secuencia: integral indefinida, integral definida y teorema fundamental. Por ejemplo, el texto de Larson presenta: Primitivas e integración indefinida, Área, Sumas de Riemann e integrales definidas, El teorema fundamental del Cálculo, Integración por sustitución, Integración numérica.

La necesidad de vincular la derivación con la integración, les conduce a estos autores a explicar primero la integral indefinida como un proceso de antiderivación, por ejemplo, en el texto de Thomas/Finney, se dice: *El conjunto de todas las antiderivadas de f(x) se llama integral indefinida de f respecto a x, y se denota por el símbolo* $\int f(x)dx$.

En el texto de Larson se especifica la naturaleza inversa de la integración y la derivación, a través de las siguientes expresiones

$$\boxed{\int F'(x)dx = F(x) + C}$$

La integración es la “inversa” de la derivación

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)}$$

La derivación es la “inversa” de la integración

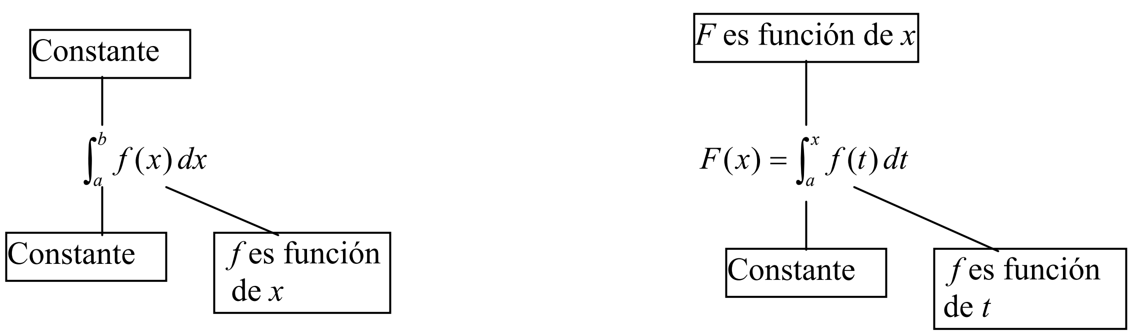
Estas dos ecuaciones permiten obtener fórmulas de integración directamente de las fórmulas de derivación.

Después de las explicaciones de la integral indefinida como proceso inverso a la integración, los autores introducen el concepto de integral definida como el área bajo la curva, con esta idea gráfica llegan a expresar la suma *inferior* y *superior* hasta llegar a la definición de Riemann. Por último, para vincular la integral *indefinida* y la integral *definida* enuncian el Teorema fundamental del cálculo, es decir, ambos textos destacan el hecho de que este teorema permite calcular las integrales definidas sin recurrir al cálculo del límite de las sumas de Riemann. En el texto de Larson se especifica, *supuesta conocida una primitiva de f, disponemos de una forma de calcular integrales definidas que no requiere hallar el límite de una suma*. En este texto, el primer enunciado del teorema fundamental se formula como sigue:

> TEOREMA 4.9 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO
>
> Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y F es una primitiva de f en $[a, b]$, entonces
>
> $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Antes del segundo enunciado de este teorema, proponen un esquema donde se trata la integral indefinida como una integral definida.

Integral definida como un número *Integral definida como una función*



Este esquema tiene la intención de conciliar el proceso de antiderivación con el concepto de integral definida, entendida ésta como una área bajo la curva. Pero atendiendo a la formulación del teorema, la expresión

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,, \quad (1)$$

realmente debería ser formulada como

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (2)$$

porque $F(a)$ no siempre es igual a cero.

Para ilustrar este proceso de integración se recurre a la noción de área bajo la curva y proponen un ejemplo que se sujeta a la expresión (1)

Evaluar la función

$$F(x) = \int_0^x \cos t \; dt$$

en $x = 0,\ \pi/6,\ \pi/4,\ \pi/3$ y $\pi/2$.

Solución: **Podríamos calcular cinco integrales definidas diferentes, una por cada** límite superior dado. Pero es mucho más sencillo fijar x como una constante, por el momento, y aplicar el teorema fundamental del Cálculo para obtener

$$\int_0^x \cos t \; dt = \operatorname{sen} t \Big]_0^x = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} x$$

Ahora, usando $F(x) = \operatorname{sen} x$, podemos llegar a los resultados que recoge la Figura 4.35.

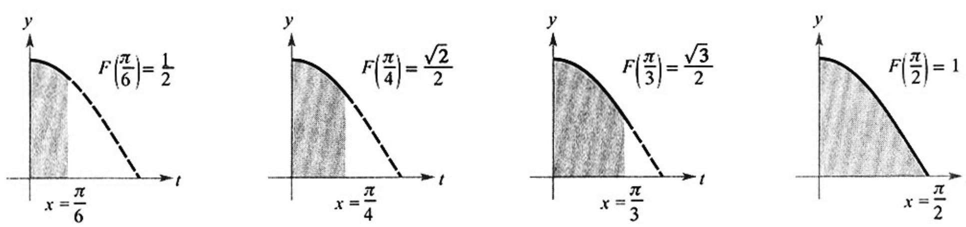


FIGURA 4.35

$F(x) = \int_0^x \cos t \, dt$ es el área bajo la curva $f(t) = \cos t$ entre 0 y x.

Como podemos observar en la explicación de la resolución del ejercicio, se dice: *es mucho más sencillo fijar x como una constante, por el momento*; lo que no queda claro es el momento en que x de constante pasa a ser variable. Luego, para justificar algorítmicamente el ejemplo, llegan a la expresión

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = \frac{d}{dx}[sen\, x] = \frac{d}{dx}\left[\int_0^x \cos t \, dt\right] = \cos x \qquad (3)$$

Si bien en esta ecuación se muestra que el proceso de derivación de la integral, $\int_0^x \cos t\, dt$, da como resultado *cos x*, esto no significa que sea una función, porque x simboliza una constante y no una variable. En los diagramas del ejemplo esta situación es más contradictoria porque se toma como eje de las abscisas a *t*, para luego obtener una primitiva de variable distinta. De nueva cuenta la naturaleza de *x* es ambivalente, pareciera que basta con que se simbolice una constante con la letra "*x*" para que ésta automáticamente se convierta en variable.

Finalmente, después de mostrar el ejemplo, se formula el segundo teorema del cálculo

TEOREMA 4.11 EL SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si *f* es continua en un intervalo abierto *I* que contiene al punto *a*, entonces, para todo *x* de este intervalo,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)$$

En la demostración de este teorema, también aparece la ambivalencia de *x*. Se quiere demostrar que *F'(x) = f(x)*, para lo cual parten de la expresión

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

...

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\right]$$

Luego, resuelven la integral que está dentro de los corchetes con el teorema del valor medio para un real *c*, llegando a lo siguiente

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{\Delta x} f(c)\Delta x\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Como vemos, en las dos últimas igualdades *f*(*c*) -que es un real- se convierte en la función *f(x)*, argumentando de que cuando $\Delta x \to 0$, entonces $c \to x$. Esta explicación, nos remite a una pregunta central: ¿qué significa que la constante *c* (de valor fijo) se aproxima a la variable *x*? Esta cadena de incongruencias conceptuales ha permanecido inamovible en el *discurso matemático escolar*. La necesidad central de estas explicaciones de la integral indefinida a partir de la integral definida radica en que desde la formalidad existe la exigencia de que todos los significados de la integración se sustenten en la definición formal de Riemann.

📖 Los textos *Cálculo con Geometría Analítica* de E. Sowkowski, y *Cálculo. Trascendentes tempranas* de J. Stewart, eligen la secuencia: integral definida, teorema fundamental, integral indefinida, por ejemplo, Stewart presenta su contenido de la forma: Áreas y distancias, Integral definida, Teorema fundamental del cálculo, Integrales indefinidas y teorema del cambio total, Regla de la sustitución, Logaritmo definido como una integral.

La distinta ubicación del teorema fundamental no se puede justificar a partir de hechos históricos, porque la complejidad de los procesos de construcción de estos conceptos no nos permiten ubicarlos de manera lineal, sin embargo, esta manera secuencial de presentar el conocimiento corresponde al proceso de *transposición didáctica*. Tanto la secuencia como el tratamiento didáctico que elige cada autor, evidentemente, no siempre se sustenta en investigaciones desde una perspectiva cognitiva.

Si bien la secuencia de temas es diferente a la de los textos anteriores, los textos de J. Stewart y E. Sowkowski también utilizan el teorema fundamental para poder explicar formalmente el concepto de *integral indefinida*. En la secuencia de contenidos temáticos de estos manuales se construye primero la noción de área, como el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación, y con este significado gráfico llegan a la definición de la integral definida como la existencia del límite de las sumas de Riemann, para luego, con la ayuda del Teorema fundamental del cálculo definir formalmente la integral indefinida.

El primer enunciado del teorema fundamental se formula como una definición de la integral indefinida. Por ejemplo, en el texto de Stewart aparece el primer enunciado como sigue:

> Teorema fundamental del cálculo, primera parte
>
> Si f es continua en $[a, b]$, la función g definida por
>
> $$g(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad a \le x \le b$$
>
> es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y $g'(x) = f(x)$.

En este enunciado aparece la expresión

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \,,$$

la cual debiera escribirse como

$$g(x) - g(a) = \int_a^x f(t)dt$$

Aunque en estos textos la secuencia es distinta, se repiten los mismos argumentos para establecer la conexión entre las integrales indefinidas (como antiderivadas) y las integrales definidas. Esta expresión, que aparece de la misma manera en el texto de Larson, adolece de los mismos defectos señalados en el inciso (a). La segunda parte del teorema se formula de la manera siguiente:

> Teorema fundamental del cálculo, segunda parte
>
> Si *f* es continua en $[a, b]$, entonces
>
> $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
>
> en donde *F* es cualquier antiderivada de *f*, esto es, una función tal que *F*'= *f*.

Después de abordar el teorema fundamental de esta manera, en el apartado titulado "Integrales indefinidas", con letras resaltadas en rojo aparece la aclaración

> Habrá que distinguir con cuidado las integrales definidas de las integrales indefinidas. Una integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es un número, en tanto que una integral indefinida $\int f(x)dx$ es una función (o familia de funciones).

Luego, el texto aclara: *la conexión entre ellas está dada por la parte 2 del teorema fundamental. Si f es continua en [a, b], entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx\Big]_a^b$$

La explicación trata de conciliar dos conceptos que se advierten como sustancialmente diferentes para luego establecer una conexión que no es afortunada porque propicia mayores confusiones. En este sentido habría que distinguir la integración como un proceso y como un objeto (el resultado de la integración).

El *Discurso matemático escolar* oficializado por los textos, en el afán de formalizar la integral indefinida, toma como argumento la expresión de Leibniz para las derivadas,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x),$$

incluso, como vimos, el texto de Larson la utiliza como formulación del teorema fundamental (primera parte). Sin embargo, hay que aclarar que no toda función continua *f*, cumple con esta ecuación, porque la *continuidad* no es condición suficiente para asegurar que la función tenga *primitiva*.

Desde la formalidad, el único concepto definido es el de la *integral definida*, y habría que especificar que para funciones para las cuales existe una familia de primitivas el proceso de integración se simplifica y no es necesario probar la existencia del límite de las sumas de Riemann. Desde nuestro juicio, el que los textos prueben la definición de integral definida para funciones que tienen primitiva es innecesario, la definición tiene sentido y toma significado, justamente, para las funciones que no tienen primitiva. En este sentido, habría que entender la *integral indefinida* como un proceso de antiderivación (un método de cálculo) para encontrar el valor de la integral definida de algunas funciones y no como un concepto paralelo para luego intentar definirla desde la perspectiva de la integral definida.

Integral definida = al límite de las sumas de Riemann

Para las funciones que no tienen primitiva el cálculo de la integral definida implica probar la existencia del límite de las sumas de Riemann

Para funciones que tienen primitiva, o una familia de primitivas, el cálculo de la integral definida se puede realizar encontrando la familia de primitivas de estas funciones.

En suma, el proceso de cálculo de la integral definida para algunas funciones se realiza como un proceso de antiderivación de la función a integrarse.

Consideraciones finales

a) Los cuatro textos, a partir de la idea gráfica de la integral como área bajo la curva, llegan a la definición de la integral definida como el límite de las sumas de Riemann.

b) Estos manuales, aunque en secuencias distintas, explican la integral indefinida como un proceso de antiderivación, pero luego cuando utilizan la expresión $\int_a^x f(t)dt$, utilizan la noción de función "área" para darle un significado que permita la relación con la integral definida.

c) En estos libros se dan dos enunciados del Teorema Fundamental del Cálculo. Si bien hay diferencia en la secuencia, los autores coinciden en dos significados de este teorema: uno, la integración como una operación inversa a la derivación, y el otro, la integral definida como la diferencia de valores de una primitiva en los límites de la integración. Estas nociones se expresan en los textos de la siguiente manera:

- La derivación como proceso inverso a la integración

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x) \quad \text{ó} \quad g(x) = \int_a^x f(t)dt\,, \quad donde\ g'(x) = f(x)$$

- La integral definida como la diferencia de valores de una primitiva

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Es importante señalar que en el afán de unificar las nociones de integral definida e integral indefinida se utiliza el recurso de una función $f(t)$ para poder definir esta última como una integral definida. Hecho que lejos de ser un recurso didáctico adecuado es un *obstáculo didáctico*, porque propicia y profundiza la confusión conceptual entre constante y variable que se hereda del tránsito del álgebra al cálculo.

d) Estos libros se caracterizan por la utilización de gráficas, sin embargo, en ninguno de ellos encontramos una que muestre la parte central del teorema fundamental, que es el siguiente:

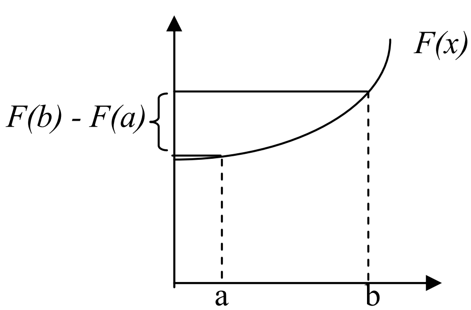
Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,, \quad (1)$$

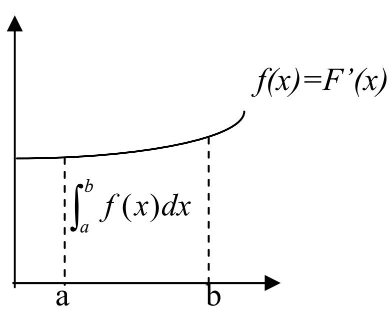
en donde F es cualquier antiderivada de f, esto es, una función tal que $F' = f$.

Desde nuestro punto de vista, los recursos gráficos deben ser utilizados para mostrar lo que la formalidad esconde. En este sentido, la representación gráfica de la expresión (1), sería la siguiente:

F(x) cualquier primitiva de *f(x)*



f(x) es la derivada de *F(x)*



Dos conclusiones fundamentales toman significado desde esta representación gráfica.

- La integral definida de todas las funciones *F'*(x) en el intervalo [a, b], para las cuales la primitiva *F(x)* pasa por los puntos $A[a, F(a)]$ *y* $B[b, F(b)]$, tendrá el mismo valor. Lo que a su vez significa que el área bajo la curva de las funciones *F'*(x), en este mismo intervalo, será también igual.

- Para cualquier función $F(x)$ derivable en el intervalo [a, b], se puede construir una función lineal cuya representación gráfica será una recta que pasa por los puntos *A* y *B*, y que la pendiente de ésta será igual al valor medio de la función *F'*(x).

Esta representación gráfica del teorema fundamental (como veremos cuando se analice el concepto de integral de línea) nos permitirá construir de manera análoga una interpretación gráfica para el teorema de la integral de línea de una forma diferencial exacta, que es un equivalente al teorema fundamental del cálculo.

e) Hay confusión en la definición de la *integral definida*. El texto de Stewart, en un recuadro titulado "Definición de la integral definida", dice: *Si f es una función continua definida para* $a \leq x \leq b$*, [...] Entonces la* ***integral definida de f, desde a hasta b****, es*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x .$$

En el manual de Thomas G. y R. Finney, encontramos un enunciado parecido, pero titulado " Teorema de la existencia de la integral", el cual se enuncia así:

> EXISTENCIA DE LA INTEGRAL DE RIEMANN
>
> Si f es continua en [a, b], entonces
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{norma\to 0} \sum f(c_k)\Delta x_k$$
>
> existe y es el mismo número para cualquier elección de los números c_k.

En el primer caso, la condición de continuidad en [a, b] para la función implica que está definida, en consecuencia es redundante decir *continua definida*. En ambos casos, se asume que la continuidad es garantía de integrabilidad, pero no se explicita que existen casos en que la función aun teniendo discontinuidades de salto, en uno o varios puntos, pueden ser integrables, y justamente para estas funciones, Riemann generalizó la definición de integral de Cauchy como la existencia del límite de las sumas para funciones $f(x)$ definidas y acotadas en un intervalo cerrado [a, b].

Los ejemplos que se muestran resueltos y los que se proponen para su resolución refieren el cálculo de integrales definidas de funciones que tienen primitivas, en tal caso, no hay justificación para llenar los textos de teoremas y definiciones que lo único que hacen es confundir el concepto que se aborda.

f) Dado que el concepto de integral se ha generalizado para resolver integrales de clases muy amplias de funciones ha sufrido múltiples extensiones, es preciso que los libros de texto expliquen las limitaciones de las distintas nociones para poder pasar a definiciones más generales.

g) Más que definiciones precisas se necesita decir de manera clara y coloquial que: para toda función integrando $f(x)$ para la cual existe una primitiva o familia de primitivas ($F(x) + C$), se cumple la relación:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

h) En la mayoría de los casos: la secuencia, la profundidad y la forma del discurso explicativo, repiten formas y explicaciones que se han enquistado en un discurso matemático aceptado por la mayoría de profesores de la comunidad universitaria. Incluso, podemos afirmar que este discurso se ha interiorizado de manera poco consciente y en consecuencia no existe una visión crítica hacia los libros de texto.

3.2.2 Textos con un discurso formal

En esta categoría se analizó el texto *Introducción al cálculo y al análisis matemático* de R. Courant (1996). En éste se abordan primero los conceptos concernientes a la integral para luego explicar el concepto de derivada y, por último, terminar el capítulo con el teorema fundamental. La relación de contenidos del capítulo titulado "Las ideas fundamentales del cálculo integral y diferencial" es: La integral, Ejemplos elementales de integración, Reglas fundamentales de integración, La integral como límite superior (integral indefinida), El logaritmo definido mediante una integral, Función exponencial y potencias, La integral de una potencia arbitraria de *x*, La derivada, La integral, la función primitiva y los teoremas fundamentales del cálculo.

En esta secuencia de contenidos temáticos, se manifiesta con claridad una diferencia con los textos del grupo anterior, el tema de la derivada está después de todos los incisos concernientes a la integral; esto se debe a que el autor tiene la intención explícita de romper la drástica separación entre los temas del cálculo diferencial e integral. En el prólogo a la edición revisada se dice

> Después de Euler, los autores uno, tras otro, se solidarizaron con la separación entre cálculo diferencial y cálculo integral y, al hacerlo, oscurecieron un punto clave: la reciprocidad entre derivación e integración. Fue en 1927, cuando apareció publicada por "Springer-Verlag", la primera edición alemana de la obra de R. Courant "Vorlesungen ubre Differential and Integralrechnung", que se eliminó tal separación y el cálculo se presentó como una disciplina unificada.

Aunque esta edición difiere notablemente del original, conserva esta intención inicial de su autor. Las distintas ediciones de este texto son reproducciones de la reescritura que realizó Fritz John, el cual ya había participado en la edición inglesa de 1939. De los ocho textos revisados y clasificados en tres grupos, éste es el único que aborda la integral antes de la derivada.

Otra diferencia importante es que, si bien destaca como fundamental la relación entre integración y derivación, en los dos enunciados del teorema pone énfasis en la diferencia que existe entre los conceptos de *integral indefinida* y *primitiva* de la función que se integra. Los enunciados del teorema fundamental se formulan para demostrar dos consecuencias del vínculo entre la derivación y la integración:

- La *integral indefinida* $\phi(x)$ de una *función continua* $f(x)$ posee una derivada: $\phi'(x) = f(x)$.

- Toda primitiva $F(x)$ de una función continua $f(x)$ puede ser representada de la forma: $F(x) = c + \phi(x)$.

Antes de formular los teoremas, el texto explica que la integral indefinida $\phi(x)$ está dada por la expresión

$$\phi(x) = \int_{\alpha}^{x} f(u)\, du \qquad (1)$$

Luego, aclara que *puede expresarse cualquier integral indefinida con límite inferior* α' *en términos de* $\phi(x)$*:*

$$\int_{\alpha'}^{x} f(u)\, du = \phi(x) - \phi(\alpha') \qquad (2)$$

Como se ve, cualquier integral indefinida difiere de la integral indefinida especial $\phi(x)$ *sólo por una constante.*

Esta aclaración, que no aparece en los textos del grupo anterior, es una explicación del porqué en la ecuación (1) no aparece $\phi(\alpha)$, como es de esperarse. El autor hace una diferencia entre *cualquier integral indefinida* y la *integral indefinida especial*, diferencia que justifica la expresión (1).

El primer enunciado del teorema fundamental aparece como

> EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO (Primera parte). La *integral indefinida* $\phi(x)$ *de una función continua* $f(x)$ *posee siempre una derivada* $\phi'(x)$ *y, además,*
>
> $$\phi'(x) = f(x).$$
>
> *Esto es, la derivación de la integral indefinida de una función continua reproduce siempre el integrando:*
>
> $$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(u)\, du = f(x).$$

Para el autor el *carácter inverso de las operaciones de derivación e integración es el hecho básico del cálculo.* En este sentido, en el enunciado se afirma que *la derivación de la integral indefinida de una función continua produce siempre el integrando*, sin embargo, vemos que el integrando es *f(u)* y no *f(x)*. Este hecho, que también se da en los textos anteriores, queda sin explicación y por lo tanto cabe hacerse la pregunta: ¿por qué utilizar dos letras distintas para simbolizar la misma variable?

En otro inciso titulado "La función primitiva y su relación con la integral" se formula la segunda parte del teorema fundamental

> TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO. *Toda función primitiva F(x) de una función dada f(x), continua en un intervalo, puede ser representada en la forma*
>
> $$F(x) = c + \phi(x) = c + \int_a^x f(u)\,du,$$
>
> *donde c y a son constantes; y, recíprocamente, para cualesquiera valores constantes de a y c, elegidos arbitrariamente*[1]*, esta expresión representa siempre una función primitiva.*

Este enunciado hace la distinción entre función primitiva *F(x)* de la *integral indefinida especial* $\phi(x)$ y advierte:

> [...] el lector ha de poseer un correcto entendimiento de las interrelaciones de estos conceptos, es absolutamente necesario que tenga en mente que en primera instancia la integración y la inversión de la derivación son dos cosas diferentes, y que es sólo el conocimiento de la relación entre ellas lo que da el derecho de aplicar el término "integral indefinida" también a la función primitiva.

Toda la dificultad radica en que el proceso de antiderivación da como resultado una familia de primitivas y la integral indefinida se define como una sola función especial $\phi(x)$. Es decir, no se admite como concepto de integral indefinida una familia de primitivas sino una sola función. En este sentido el texto argumenta:

> Al usar la notación $\int f(x)dx$ no debe jamás perderse de vista la indeterminación asociada a ella, esto es, el hecho de que el símbolo denota siempre *una* de las funciones primitivas solamente.

Finalmente, en otro inciso titulado: *El uso de la función primitiva para la evaluación de integrales definidas*, se llega a lo siguiente

> *Si F(x) es cualquier función primitiva de la función continua f(x), la integral definida de f(x) entre los límites a y b es igual a la diferencia F(b) – F(a).*
>
> Si se utiliza la relación *F'(x) = f(x)*, esta consecuencia del teorema fundamental puede ser escrita en la forma
>
> $$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b \frac{dF(x)}{dx}\,dx = \int_a^b dF(x)$$

> donde ahora *F(x)* puede ser cualquier función con una derivada continua *F'(x)*, y donde se utiliza la sugestiva notación simbólica $dF(x) = F'(x)\, dx$ de Leibnitz.

Como se puede observar, al igual que en los textos anteriores, el teorema fundamental se utiliza centralmente para definir la integral indefinida.

Cabe destacar que los problemas de aplicación son congruentes con la minuciosidad formal con que se desarrollan las explicaciones. En el prólogo de este manual, explícitamente se argumenta:

> La obra evita el estilo dogmático que oculta la motivación de los conceptos y las raíces que el cálculo tiene en la realidad intuitiva. Un importante objetivo que se persigue en este libro es mostrar la relación recíproca entre el análisis matemático y sus diversas aplicaciones y destacar el papel de la intuición. Esperamos que cierto énfasis en la precisión no interfiera con este objetivo.

Las dos preocupaciones centrales del autor son, por un lado, ser intuitivo en tanto plantea la relación recíproca entre el análisis matemático y sus aplicaciones, y por el otro, le preocupa la precisión de sus definiciones y demostraciones. Esta reflexión plantea una importante interrogante a los investigadores en didáctica de las matemáticas: ¿es posible ser a la vez preciso e intuitivo en el discurso explicativo de los conceptos del cálculo?...Si bien no hay respuestas inmediatas y únicas a esta pregunta, es necesario identificar que para cumplir con tal objetivo habría que conciliar dos hechos inevitables:

- La historia de la matemática muestra que cada avance en la generalización y precisión de los conceptos del cálculo produce definiciones y demostraciones cada vez más formales, en tal caso, las definiciones sin errores nos alejan de las ideas intuitivas que dieron origen a estos conceptos.

- Existe la exigencia social de que los textos deben ser accesibles para la mayoría de estudiantes.

Desde nuestra perspectiva, pensamos que los libros de texto de cálculo deben diseñarse con distintos niveles de formalidad. Además, más que definir, es necesario ubicar cada significado del concepto en relación al tipo de problemas que resuelve. Por ejemplo, en la física, podemos ver que existen problemas que no requieren la teoría de la relatividad para resolverse, y que basta la teoría de Newton para muchos problemas de mecánica. De este modo, creemos que insistir en los libros y en los cursos de cálculo, en definiciones precisas, es pretender usar formalizaciones innecesarias para el tipo de problemas que se resuelve.

Es evidente que para R. Courant el concepto de límite es importante para precisar la noción de *dy o dx* en el proceso de integración. En el siglo XIX la preocupación por el rigor se manifiesta con intensidad. Es innegable que en ese siglo se produce un intenso desarrollo de las matemáticas, caracterizado por una extensión y una diversificación continuas de las distintas ramas de esta disciplina. Según el libro *Historia de las matemáticas* de Jean-Paul Collette (1986) en el siglo XVIII los matemáticos trabajaron para enriquecer el análisis matemático con numerosos algoritmos y descubrimientos interesantes sobre funciones, pero la demostración del Teorema Fundamental del Cálculo siguió siendo imprecisa e intuitiva. Es en 1823 que Cauchy desarrolló el cálculo diferencial e integral sobre la base del concepto de límite. Este hecho originó la idea de haber encontrado fundamentos formales para el cálculo, idea que tuvo las dimensiones de un cambio de paradigma y, en consecuencia, impulsó a la comunidad matemática a abandonar las ideas intuitivas como: "diferencias finitas", "diferencias infinitamente pequeñas", "la integración como suma de elementos infinitesimales", etcétera. Términos, que por cierto, prevalecen hasta nuestros días en textos de otras disciplinas como la Termodinámica (Bravo, 1997).

El manual de Courant, en un apartado titulado "Definición analítica de la integral. Notaciones", argumenta en contra de términos como el "infinitamente pequeño" de la siguiente manera:

> La definición de integral como el límite de una suma condujo a Leibnitz a expresar la integral mediante el siguiente símbolo:
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx.$$
>
> El signo de integral es una modificación del signo de sumatoria en forma de una *S* grande que se usó en la época de Leibnitz. El paso al límite a partir de una subdivisión finita de porciones Δx_i, es indicada mediante el uso de la letra *d* en lugar de Δ. Sin embargo, al utilizarse esta notación no debe tolerarse el misticismo del siglo XVIII de considerar *dx* como un "infinitamente pequeño" o "cantidad infinitesimal", o de considerar la integral como una "suma de un número infinito de cantidades infinitamente pequeñas". Tal concepción está desprovista de significado claro y oscurece lo que anteriormente se ha formulado con precisión.

Para el mencionado historiador de la matemática Collette, la relación entre la función continua y la función diferenciable no estaba comprendida por Cauchy; él cree que toda función continua admite necesariamente una derivada. Es Riemann el que retoma la noción de integral definida de Cauchy y en lugar de postular la continuidad puntual para el integrando, busca funciones más generales y determina las restricciones necesarias para las que pueden existir las integrales de estas funciones. De esta manera llega a la generalización del concepto de integral que engloba las funciones *f(x)* definidas (no necesariamente continuas) y acotadas en un intervalo cerrado [*a, b*].

A diferencia de los otros textos, en el libro de Courant se explica que la definición formal del límite de las sumas de Riemann es necesaria para integrar funciones que presentan discontinuidades de salto, o simplemente algunas discontinuidades, y que estas funciones se definen como *integrables* si existe el límite, y ejemplifica este hecho.
Con el seguimiento del discurso explicativo de los textos especificados al principio se lograron identificar algunos obstáculos y que se explicitan de manera puntual en las consideraciones preliminares que a continuación se exponen.

Consideraciones finales

a) Desde el siglo XVIII surge la necesidad de escribir tratados de cálculo con el fin de que la materia fuera accesible a un público mucho más numeroso que el pequeño círculo intelectual de la época. Es por esto que los autores, desde esa época, están interesados en que el material de sus textos sean accesibles a la mayoría de estudiantes y en consecuencia es importante pensar en elementos intuitivos. Para R. Courant lo intuitivo está en la resolución de problemas aplicados.

b) En conclusión, es innegable que el desarrollo histórico de los conceptos centrales del cálculo han dejado atrás ideas intuitivas que estaban presentes en el surgimiento de los conceptos, porque fueron insuficientes para resolver problemas más complejos; pero es preciso discutir, desde la perspectiva de la didáctica, si la eliminación de las primeras ideas del cálculo son adecuadas para el aprendizaje de la disciplina. Desde nuestro punto de vista, no se trata de eliminar las ideas intuitivas del cálculo sino de presentar sus limitaciones para luego formular definiciones más generales y precisas.

c) Si bien este texto no propone el pensamiento gráfico como un elemento intuitivo, idea que formulan los textos actuales, presenta un ejemplo gráfico del *Teorema fundamental del cálculo integral*. En el apartado donde se explica la integral indefinida de la función, $f(x) = 1/x$, se vincula el proceso de integración con el cálculo de la integral definida de la función sobre el cerrado $[a, b]$ cuando a y b son positivos. Es decir, primero definen la integral indefinida de esta función como

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{u}\, du\,,$$

para luego definir la integral sobre el cerrado $[a, b]$

$$\int_a^b \frac{1}{u}\, du = \ln b - \ln a\,.$$

para significar este proceso, el texto propone las gráficas:

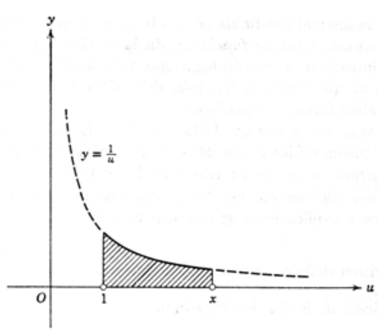


Figura 2.18 Log x representado por un área.

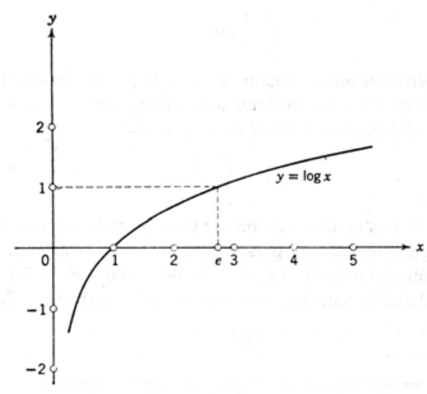


Figura 2.19 El logaritmo natural.

3.2.3 Textos con un discurso algebraico

A este grupo pertenece el texto *Cálculo diferencial e integral* de William Anthony Granville (1982). Los contenidos están divididos en tres partes: Cálculo diferencial, Cálculo integral y Cálculo diferencial e integral. En la segunda parte, los temas que nos interesan se tratan en tres capítulos distintos: el de "Integración de formas elementales ordinarias" aborda la integral como proceso inverso a la derivación y la integral indefinida, en el de "Integral definida" explica la integral como área bajo la curva y la definición de integral definida, y en el de "La integración como suma" presenta el Teorema fundamental del cálculo integral.

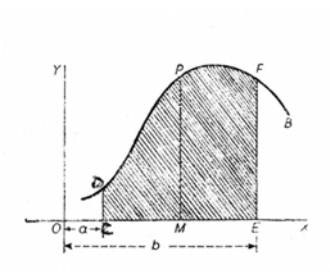
La presentación de los contenidos se expone en *Artículos* (nombre que le da el autor a cada inciso de los capítulos) que siguen una misma numeración desde el principio hasta el final. Cada explicación en un artículo es corta. La forma concreta del discurso explicativo, lo vuelve un texto fácil de abordar.

Los *Artículos* donde se explican la integral indefinida y definida son:

> **127**. **Constante de integración. Integral indefinida**. Del artículo anterior se sigue que
>
> por ser $d(x^3) = 3x^2$, tenemos $\int 3x^2 dx = x^3$
>
> por ser $d(x^3 + 2) = 3x^2$, tenemos $\int 3x^2 dx = x^3 + 2$
>
> por ser $d(x^3 - 7) = 3x^2$, tenemos $\int 3x^2 dx = x^3 - 7$
>
> En general, como
>
> $$d(x^3 + C) = 3x^2\, dx\ ,$$
>
> siendo C una constante cualquiera, tenemos
>
> $$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$
>
> La constante arbitraria *C* se llama *constante de integración* y es una cantidad independiente de la *variable de integración*. Puesto que podemos dar a *C* cuantos valores queramos, se sigue que si una expresión diferencial dada tiene una integral, tiene también una infinidad de integrales que difieren sólo en constantes. Por tanto,
>
> $$\int f'(x)\, dx = f(x) + C$$
>
> y puesto que *C* es desconocida e *indefinida*, la expresión
>
> $$f(x) + C$$
>
> se llama la integral indefinida de $f'(x)dx$.

En esta explicación no se utiliza la expresión $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ para definir la integral indefinida. A la familia de primitivas igual a *f(x) + C* se le da el nombre de integral indefinida. Dado que la preocupación del texto no es la formalización del cálculo sus definiciones se simplifican. En los otros manuales hay una clara preocupación por la exactitud de las definiciones y no se admite como integral indefinida la familia de primitivas como es el caso.

La definición de la integral definida se da de la siguiente manera:

> **142. La integral definida**. Del teorema del Artículo 141 se sigue que si la curva *AB* es el lugar geométrico de $y = \phi(x)$, entonces $du = y\,dx$, o sea,
>
> (1) $\qquad du = \phi(x)\,dx$,
>
> siendo *du* la diferencial del área entre la curva, el eje de las *x* y dos ordenadas. Integrando, obtenemos
>
> 
>
> Fig. 107
>
> $$u = \int \phi(x)\,dx.$$
>
> Si designamos
>
> $\int \phi(x)\,dx$ por $f(x) + C$,
>
> resulta
>
> (2) $\qquad u = f(x) + C.$
>
> Para definir *C*, observamos que $u = 0$ cuando $x = a$. Sustituyendo estos valores en (2) obtenemos
>
> $$0 = f(a) + C,$$
>
> de donde, $\qquad C = -f(a)$
>
> Luego (2) se convierte en
>
> (3) $\qquad u = f(x) - f(a)$
>
> El área que se pide es el valor de *u* en (3) cuando $x = b$.
>
> Luego tenemos
> **(A)** $\qquad$ **Area CEDF = *f(b) − f(a)*.**

Después de esta explicación de la integral definida como el área bajo la curva, enuncia el siguiente teorema:

Teorema. *La diferencia de los valores de* $\int y dx$ *para* x = a *y* x = b *da el área limitada por la curva cuya ordenada es* y*, el eje de las* x *y las ordenadas que corresponden a* x = a *y* x = b.

Esta diferencia se representa por el símbolo

$$(4) \qquad \int_a^b y\, dx \quad o \quad \int_a^b \phi(x)\, dx ,$$

que se lee " la integral desde a hasta b de y dx". [...]

Puesto que (4) tiene siempre un valor *definido*, o puesto que los límites a y b *definen* un valor determinado, se llama *integral definida*. En efecto, si

$$\int \phi(x) dx = f(x) + C$$

entonces

$$\int_a^b \phi(x) dx = \left[f(x) + C\right]_a^b = [f(b) + C] - [f(a) + C],$$

o sea,

$$\int_a^b \phi(x) dx = f(b) - f(a)$$

desapareciendo la *constante de integración*.

Los textos anteriores utilizando la noción de *integral definida* definen la *integral indefinida* como:

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt ,$$

por el contrario, aquí se utiliza la noción de integral indefinida como proceso de antiderivación y con base en esta idea se llega a la expresión para *integral definida*, dada por:

$$\int_a^b \phi(x) dx = f(b) - f(a) .$$

En la introducción del Capítulo XV se dice que hasta ahora se había definido la integración como *la operación inversa de la derivación*, pero que en muchas aplicaciones del *Cálculo integral* es preferible definir la integración como un *procedimiento de suma*, y se afirma lo siguiente

[...]el Cálculo integral se inventó con el fin de calcular el área de las superficies limitadas por curvas, suponiéndose la superficie dividida en "un número infinito de partes infinitamente pequeñas que se llamaban *elementos*, siendo la suma de las áreas de todos estos elementos el área buscada". Históricamente, el signo integral no es otra cosa que la *S* larga, empleada por los primeros autores para indicar la palabra **suma**.

Hecha esta aclaración se enuncia el teorema fundamental del cálculo

156. Teorema fundamental del Cálculo integral. Si $\phi(x)$ es la derivada de $f(x)$, se ha demostrado, en el Artículo 142, que el valor de la integral definida

$$(1) \qquad \int_a^b \phi(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

da el área de la superficie limitada por la curva $y = \phi(x)$, el eje de las x y las ordenadas correspondientes a $x = a$ y $x = b$.

En la demostración del teorema se utiliza el mismo discurso de los otros textos, es decir, se construyen gráficamente rectángulos de aproximación y se afirma

[...]la suma de las áreas de estos n rectángulos (área sombreada) es igual, aproximadamente, al área bajo la curva; y *el límite de esta suma* cuando n tiende a infinito y cada parte tiende a cero es, precisamente, el área bajo la curva.
[...]De estas consideraciones vemos que la integral (1) puede mirarse *como el límite de una suma*.

Con esta noción de área bajo la curva se llega a la expresión:

$$\textbf{(A)} \qquad \int_a^b \phi(x)\,dx = \underset{n\to\infty}{lím}[\phi(x_1)\Delta x_1 + \phi(x_2)\Delta x_2 + \phi(x_3)\Delta x_3 + \ldots + \phi(x_n)\Delta x_n]$$

Luego, se dice: *ahora consideremos la igualdad (A) simplemente como un teorema de Análisis matemático, que se puede formular como sigue*

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL. *Sea* $\phi(x)$ *una función continua en el intervalo desde x = a hasta x = b. Divídase este intervalo en n subintervalos cuyas longitudes son* $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, *y elíjanse puntos, uno en cada subintervalo, que tengan las abscisas* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *respectivamente. Considérese la suma*

$$(2) \qquad \phi(x_1)\Delta x_1 + \phi(x_2)\Delta x_2 + \ldots + \phi(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)\Delta x_i.$$

Entonces el valor límite de esta suma cuando n tiende a infinito, y cada subintervalo tiende a cero, es igual al valor de la integral definida

$$\int_a^b \phi(x)\,dx.$$

La igualdad (A) puede abreviarse como sigue:

$$\int_a^b \phi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)\Delta x_i$$

> La importancia de este teorema resulta del hecho de que así podemos calcular, *por integración*, *una magnitud que sea el límite de una suma de la forma (2)*

Esta última afirmación es contraria a la idea de que el teorema fundamental posibilita calcular las *integrales definidas*, de funciones continuas y que tienen primitiva, sin recurrir al cálculo del límite de la suma (2). La definición de la integral como el límite de la sumatoria expresada, justamente posibilita encontrar integrales para funciones más generales y no para funciones que tienen primitivas. La explicación de esta afirmación la encontramos en el siguiente Artículo:

> **26. Funciones derivables**. De la teoría de los límites se deduce que si existe la derivada de una función para cierto valor de la variable independiente, la función misma debe ser continua para aquel valor de la variable.
>
> Sin embargo, la recíproca no es siempre cierta: se han descubierto funciones que son continuas y, a pesar de eso, no tienen derivada. Pero tales funciones no son frecuentes en las Matemáticas aplicadas, y *en este libro se consideran solamente las funciones derivables*, es decir, las funciones que tienen derivada para todos los valores de la variable independiente, con excepción, a lo más, de valores aislados.

En las últimas líneas de esta explicación, se habla de *funciones que tienen derivada para todos los valores de la variable con excepción de valores aislados*, con el término de *valores aislados* se refieren a funciones como $f(x) = 1/x$, la cual en $x = 0$ no está definida. En este sentido, en el discurso de los textos existen imprecisiones respecto al dominio de la función y la continuidad, y la diferencia entre una función continua en [a, b] y una definida en [a, b]. Es decir, la función $f(x) = 1/x$ es continua en su dominio.

Consideraciones finales

a) Cuando Cuachy formaliza el cálculo con el concepto de límite, él piensa que toda función continua admite necesariamente una derivada, es decir, se pensaba que el límite de las sumas expresadas existían para toda función continua. Este hecho permanece en el discurso de este texto.

b) La formulación del teorema fundamental difiere de los otros textos. En ella se define la *integral definida* de una *función continua* como la existencia del límite de las sumas de áreas. Sin embargo, en los otros manuales la parte central del teorema fundamental es la relación que se establece entre la integral definida e indefinida.

c) El tratamiento de los conceptos es más coloquial que formal, no se hacen definiciones precisas ni demostraciones extensas. Mas bien, el discurso pone énfasis en los pasos que deben seguir los lectores para realizar las operaciones de integración.

d) El uso de recursos gráficos es mínimo, sólo se presentan gráficas de los rectángulos aproximativos al área bajo la curva.

3.3 Conclusiones acerca de los conceptos de integral definida, integral indefinida y el teorema fundamental del cálculo integral

Con base a los señalamientos finales de cada grupo de textos se llegó a las siguientes conclusiones finales:

a) Desde la formalidad actual del cálculo, el integrando de una *integral definida* es una función *f(x)*, en tal caso, es importante preguntarse:

- ¿Qué significa "integrabilidad"?
- ¿Qué condiciones debe cumplir la función para afirmar que es integrable?

Ambas preguntas no son sencillas, su respuesta precisa no es posible, las complicaciones surgen por el desarrollo histórico del concepto de integral definida. Es Cauchy, quien en la primera mitad del siglo XIX, llega a la definición de integral definida, para funciones continuas en el intervalo de integración, como el límite de las sumas de áreas de rectángulos mayores y menores bajo la curva. Es decir, para funciones continuas en [*a*, *b*], llega a la expresión:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ . \qquad (1)$$

Sin embargo, para este matemático toda función continua admite necesariamente una derivada. Es Bernhard Rieman (a mediados del siglo XIX) quien retoma la noción de integral definida de Cauchy y en lugar de postular la continuidad puntual para el integrando busca funciones más generales y determina restricciones necesarias para las que pueden existir las integrales de las funciones. De esta manera llega a la generalización del concepto de integral que engloba funciones *f(x)* definidas y acotadas en un intervalo cerrado [*a*, *b*].

Es importante destacar que esta generalización del concepto de integral que fundamenta Riemann, es un cambio de paradigma para el concepto de integral definida. Pero en el proceso de *Transposición didáctica* que sufre el saber matemático al ser llevado a los libros de texto, se originan los siguientes obstáculos didácticos:

- *Rupturas en la secuencia lógica de las explicaciones*, la generalidad de los textos, a pesar de que nombran a Riemann como el autor de la definición (1), omiten explicaciones históricas y ejemplos que muestren este salto cualitativo de la noción de integral.
- *Vacíos explicativos*, en los textos actuales, no mencionan que existen las integrales definidas de funciones continuas pero no derivables, las integrales de funciones que presenten algunas discontinuidades de salto. Entendemos que la integración de tales funciones requieren conocimientos más elevados y específicos; pero si no se explicita que existen, las definiciones formales que presentan no tienen sentido.

- *Incongruencia entre definiciones formales y los problemas que se resuelven*, se define la integral definida con lo que en el cálculo se llaman las sumas de Riemann y en los textos actuales, no se resuelve ningún ejemplo que amerite tal definición.

b) En los textos actuales, se especifican condiciones de la función que se integra sin ejemplos que proporcionen significados a expresiones como:

"Si la función $f(x)$ es continua en el cerrado $[a, b]$ y si $F'(x) = f(x)$ entonces existe la integral definida ", en estos enunciados, ni de casualidad, se explicita que existen funciones que siendo continuas no tienen una primitiva $F(x)$. En tal caso, el estudiante no tiene posibilidad de significar que la continuidad garantiza que la función sea **integrable** pero no que su integración sea posible en términos de un proceso de antiderivación.

Por otro lado, la definición de la integral como el límite de las sumas de Riemann toma sentido si se analizan integrales de funciones *definidas* y *acotadas* (no necesariamente continuas) en un intervalo cerrado. Es decir, las funciones definidas y acotadas constituyen una clase más general de funciones, y que si bien están incluidas las continuas, se debe especificar que no todas las definidas y acotadas son continuas.

c) La identificación de estos obstáculos, permitió la elaboración de un mapa conceptual de la integral definida que orienta y da sentido a las definiciones que aparecen en los textos de manera atomizada y sin ejemplos significativos. En este mapa se organizó el concepto de *integral definida* en relación a la naturaleza de la función del integrando. La virtud de este recurso didáctico es que ubica integrales definidas particulares en una estructura general, de acuerdo a las especificidades de la función integrando. (Ver el mapa en la siguiente página)

INTEGRAL DEFINIDA DE LA FUNCIÓN $f(x)$

Si $f(x)$ está **definida** y **acotada** en el **cerrado** $[a,b]$, entonces la función es integrable si existe el límite de las sumas de Riemann.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta x|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \,.$$

Si $f(x)$ es **continua** en $[a, b]$ entonces existe el límite y por lo tanto la función es integrable.

Si $f(x)$ es **continua** en $[a,b]$ y F es una primitiva de f en $[a,b]$, entonces es integrable

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,.$$

Si $f(x)$ es **continua** en $[a,b]$ pero **no derivable** en ninguna parte, entonces, aun cuando la integración en términos de funciones elementales no es posible en general, la integral existe.

Existen funciones definidas y acotadas pero **no continuas** en $[a,b]$. Por ejemplo:

1) f definida en $[a, b]$, por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional} \\ 1, & x \text{ racional} \end{cases}$$ no es integrable.

2) f definida sobre $[0, 2]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1, \end{cases} \qquad \int_1^2 f(x)dx = 0\,,$$

es integrable

(Spivak, 1992, pp. 353-358).

Si $f(x)$ es **continua** en el **abierto** (a, b), es decir, no están definidas o no son continuas en los puntos extremos, entonces es integrable si el límite de la integral propia,

$$F = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\alpha_\varepsilon}^{\beta_\varepsilon} f(x)dx\,,$$

converge.

Si $f(x)$ es **continua** y **acotada** en el abierto (a,b), entonces el límite existe, es decir la función es integrable. Por ejemplo la integral:

$$\int_0^1 sen\frac{1}{x}dx\,,$$ existe.

(Courant, Vol. I, p. 321)

Si $f(x)$ es **continua** y **no acotada** en el abierto (a,b), entonces la función puede y no puede ser integrable. Por ejemplo:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{x}$, no existe.

2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$, existe.

(Courant, Vol. I, p. 323)

3.4 Análisis del discurso explicativo del concepto Integral de Línea

En cuanto al concepto de integral de línea, los libros de textos revisados difieren en la ubicación en el índice temático y en la forma del discurso explicativo. Recordemos que una de nuestras preguntas de investigación, es encontrar la explicación del por qué el término *diferencial inexacta* no está presente en el discurso de los manuales de cálculo, término que se utiliza en el enunciado de la primera ley de la termodinámica, para diferenciar a la *energía interna* del *calor* y el *trabajo* de un sistema.

En los siguientes apartados expondremos el análisis del discurso explicativo, señalando en cada momento las situaciones que se caracterizan como *obstáculos didácticos*.

3.4.1 Análisis de textos con un discurso formal

Los textos revisados en esta categoría son: *Introducción al cálculo y al análisis matemático* de Richard Courant (1996), *Cálculo vectorial* de Claudio Pita Ruiz (1995). A diferencia de los libros de las otras dos categorías, éstos son los que tratan con mayor minuciosidad y profundidad el tema de la Integral de Línea.

📖 INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO Y AL ANÁLISIS MATEMÁTICO de Richard Courant

Para la exposición del análisis del discurso explicativo que se realizó, conservaremos la secuencia de los apartados e incisos en los que se desarrollan los temas relacionados a la integral de línea; lo cual facilita el señalamiento y la ubicación de los obstáculos didácticos. Los contenidos referidos a la integral de línea se presentan en el Capítulo 4, del Vol. I. Los contenidos temáticos son:

> 4.1 Teoría de curvas planas
> **a.** Representación paramétrica, **b.** Cambios de parámetros, **c.** Movimiento a lo largo de una curva. El tiempo como parámetro. El ejemplo de la cicloide, **d.** Clasificación de curvas. Orientación, **e.** Derivadas, tangentes y normales en representación paramétrica, **f.** La longitud de una curva, **g.** La longitud de arco como parámetro, **h.** Curvatura, **i.** Cambio de ejes de coordenadas. Invariancia, ***j.** Movimiento uniforme en la teoría especial de relatividad, **k.** Integrales que expresan áreas dentro de curvas cerradas, **l.** Centro de masa y momento de una curva, **m.** Área y volumen de una superficie de revolución, **n.** Momento de inercia.

En esta secuencia de temas, el concepto de *integral de línea* aparece por primera vez en el inciso (k) titulado "*Integrales que expresan áreas dentro de curvas cerradas"*, en este apartado, la explicación de esta integral se particulariza estrictamente al problema de *encontrar áreas limitadas por curvas cerradas simples*. El argumento inicial para introducir este concepto es el que la integral definida, $\int_a^b f(x)dx$, no es completamente satisfactoria para expresar áreas dentro de curvas cerradas, por consiguiente, se propone demostrar una fórmula general para calcular dichas áreas:

$$A = -\int_{\alpha}^{\beta} y\,\dot{x}\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} x\,\dot{y}\,dt = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (x\,\dot{y} - y\,\dot{x})dt \qquad (1)$$

Para la demostración de esta fórmula, primero se parametriza la curva C, luego se prueba que la integral

$$A_C = -\int_C y\frac{dx}{dt}dt \qquad (2)$$

depende solamente de C y no de la representación paramétrica particular y se explica que el signo de la integral A_C depende de la orientación del arco. La fórmula (2) sirve para calcular el área dentro de una curva cerrada simple C; pero se dice que se puede calcular el área contenida en curvas orientadas no simples, si se descomponen en arcos simples. Este caso, se ejemplifica con la siguiente gráfica

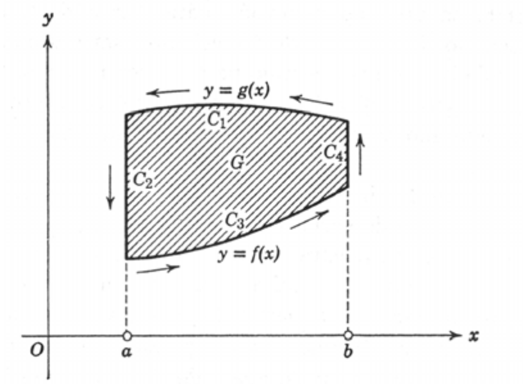


Figura 4.25(*a*) Area de una "celda".

Para este caso, el texto aclara que A_C será igual a la suma de las cuatro A_{C_i}, pero aclara que *las porciones C_2 y C_4 a lo largo de las cuales x es constante no aportan contribución alguna, pues dx/dt = 0. Usando x como parámetro sobre los arcos C_1 y C_3 encontramos*

$$A_C = A_{C_1} + A_{C_3} = -\int_b^a g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx. \quad (3)$$

Según el texto, la expresión (3) demuestra que $A_C = -\int_C ydx$ calcula el área sombreada G (Fig. 4.25) para el caso en que la frontera C se interseque a lo más en dos puntos por paralelas al eje y. Luego argumenta:

> El mismo resultado se obtiene para áreas limitadas por curvas C que sean intersectadas a lo más en dos puntos por paralelas al eje x. Lo único que se necesita es escribir A_C en la forma $\int_C x\,dy$ e intercambiar x e y en el argumento anterior.

Esta afirmación no es del todo correcta porque si en la gráfica (4.25) y en el algoritmo (3) se intercambia *x* e *y*, veremos que la integral nos daría la misma área de la figura pero negativa, en tal caso la fórmula (1) sería igual a cero. Si resolvemos la integral $\int_C x\,dy$, siguiendo el argumento propuesto tendríamos:

$$A_C = A_{C_1} + A_{C_3} = \int_b^a g(y)dy + \int_a^b f(y)dy = -\int_a^b g(y)dy + \int_a^b f(y)dy. \quad (4)$$

Este resultado de la expresión (4) es de signo contrario al de la expresión (3). En concreto, para no entrar en contradicciones es necesario considerar a las funciones "-*y*" y "*x*" como funciones de dos variables.

Como ejemplo de la fórmula (1), se propone calcular el área contenida en la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La solución se presenta en dos pasos:

a.- Primero, se parametrizan las variables: $x = a\cos t, \quad y = b\,\mathrm{sen}\,t, \quad \text{para } 0 \le t \le 2\pi$

b.- Segundo, se aplica la fórmula y se obtiene: $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x\dot{y} - y\dot{x})\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \pi ab$

A partir de la explicación del concepto, de la demostración de la fórmula, de la gráfica y ejemplo resuelto, se identificaron situaciones que son el resultado de una sobre adaptación didáctica del concepto a una situación particular y por ello quedan muchos vacíos explicativos acerca de la fórmula (1).

Consideraciones preliminares

a) Se acota el concepto a una situación completamente particular: *encontrar el área contenida en una curva cerrada simple*, situación que reduce el significado de la integral de línea a una fórmula cuya explicación tiene limitaciones para poder significarla más allá de su uso algorítmico.

b) La demostración y explicación de la fórmula (1) recurre al significado de la *integral definida como área bajo la curva* pero no explica cómo la fórmula $A_C = -\int_C y\,dx$, calcula la diferencia de áreas representadas en la gráfica (4.25) y en la expresión (2). Pareciera que la sola parametrización de las variables hace que la fórmula funcione.

c) No se especifica si las funciones, $-y$ y x, en las integrales $\int_C -y\,dx$, $\int_C x\,dy$, son funciones de una o dos variables independientes. Conceptualmente en realidad se están integrando las funciones: $f(x,y) = x$, $f(x,y) = -y$.

d) El ejemplo se resuelve simplemente como una aplicación algorítmica de la fórmula.

Después de este primer acercamiento al concepto *integral de línea*, éste se retoma en el segundo volumen, Capítulo 1 de la obra. El índice temático sigue el siguiente orden:

> 1.9 Diferenciales e integrales de línea
> **a.** Formas diferenciales lineales, **b.** Integrales de formas diferenciales lineales, **c.** Dependencia de las integrales de línea con respecto a los puntos extremos.
>
> 1.10 El teorema fundamental sobre la integrabilidad de las formas diferenciales lineales
> **a.** Integración de diferenciales totales, **b.** Condiciones necesarias para que las integrales de línea dependan únicamente de los puntos extremos, **c.** Insuficiencia de las condiciones de integrabilidad, **d.** Conjuntos simplemente conexos, **e.** El teorema fundamental.

En el inciso *Formas diferenciales lineales*, se empieza recordando la definición de la *diferencial total du* de una función $u = f(x, y, z)$ como la expresión

$$du = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}dz \quad (1)$$

Luego por la regla de la cadena se expresa la diferencial *du* como

$$du = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)dt \quad (2)$$

esta ecuación, dice el texto, es la diferencial $du = \frac{du}{dt}dt$ de la función u "a lo largo de cualquier curva" representada paramétricamente por

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad (3)$$

Después, se empieza a analizar la *forma diferencial lineal* más general en el espacio *x, y, z* representada por la expresión

$$L = A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz. \quad (4)$$

Se dice que L es una función de seis variables x, y, z, dx, dy, dz, y que es lineal en las "variables diferenciales" dx, dy, dz.

Luego de recordar la definición de la *diferencial total* y haber expresado la *forma diferencial lineal*, el texto vincula estos dos conceptos; a la letra dice:

> Las diferenciales totales *du* de las funciones son las formas diferenciales lineales especiales L que tienen coeficientes de la forma

$$(47)\ \ A = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$$

para una función apropiada $f = f(x, y, z)$. Si una forma diferencial L es la diferencial total de una función, se dice que es una forma diferencial *exacta* o que es *integrable*. No toda forma diferencial es integrable; es necesario que los coeficientes A, B y C de L satisfagan ciertas "condiciones de integrabilidad":

Si los coeficientes A, B, C de la forma diferencial L son de la forma C^1 *(es decir, tienen primeras derivadas continuas) y si L es exacta, entonces se cumplen las ecuaciones:*

$$(48)\quad \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = 0$$

Se analizaron estas afirmaciones con minuciosidad y sólo cuando se terminó el seguimiento del discurso explicativo de todos los incisos del índice temático, se pudo aclarar la confusión de lo que arriba se afirma. Desglosaremos estas afirmaciones para mostrar el problema que se deriva de la *desincretización* de este conocimiento específico

- Si L es la diferencial total de una función $f(x,y,z)$ se dice que es *exacta* o *integrable*.
- No toda diferencial es integrable; es necesario que A, B, C satisfagan ciertas "condiciones de integrabilidad": si A, B, C son de clase C^1 y *L es exacta* entonces se cumplen las condiciones (48)

Como vemos en la segunda parte de este enunciado se dice que para que L sea integrable los coeficientes A, B, C deben cumplir con ciertas condiciones de integrabilidad, y dentro de estas condiciones se pide que L sea exacta, si ya se afirmó que si L es exacta es lo mismo que integrable, no se entiende tal enunciado. Además, si las condiciones (48) son necesarias para probar la posibilidad de que L sea exacta, entonces, decir que *si L es exacta* se cumplen las condiciones (48) es una tautología. Lo que debiera explicarse desde el principio es que se retomará el concepto de diferencial total en función del proceso de integración, hecho que modifica la noción que se tenía de este concepto.

Todas estas afirmaciones confusas se originan porque en las explicaciones anteriores de la *diferencial total*, se afirma que las derivadas parciales de una función de dos o más variables independientes cumplen con las con las condiciones (48). Entonces, al lector le queda la idea de que las condiciones (48) son suficientes para considerar a una *forma diferencial L* como la diferencial total. El problema surge porque **no** para todas las formas diferenciales lineales que cumplen con las condiciones (48) la integral de línea de éstas es independiente de la trayectoria de integración. En otras palabras, las condiciones (48) son **necesarias** pero **no suficientes** para saber si L es una diferencial total, porque las derivadas parciales de una función en un punto dado de su dominio tienen una propiedad local pero cuando se habla de la diferencial exacta o de un campo conservativo, se refiere una propiedad global que garantiza la independencia de trayectoria de la integral de línea.

El problema central de todos los incisos que analizaremos es: dada la *forma diferencial lineal L* ¿cómo saber si es una *diferencial exacta*? Lo que se sabe es que la integral de línea de una diferencial exacta es independiente de la trayectoria de integración (Teorema fundamental de las integrales de línea), pero la tarea central es buscar las condiciones **necesarias** y **suficientes** para A, B, C que me permitan reconocer a L como exacta.

Dada la forma del discurso, las explicaciones aparecen parcializadas y atomizadas, fuera de la pregunta central y general que se formuló. Este hecho impide significar conceptos porque no se sabe con qué objetivo se desarrollan. Por ejemplo: la exigencia de que A, B, C sean de clase C^1, garantiza la continuidad de estas funciones en un conjunto abierto U de R^2, y la existencia de las derivadas cruzadas para probar las condiciones necesarias (pero no suficientes) (48). Pero existen formas *diferenciales lineales exactas* que tienen coeficientes A, B, C de clase C^0, pero en estos casos, no habría posibilidad de probar las condiciones (48). Además, no se explicita que el conjunto de formas diferenciales con coeficientes de clase C^1 incluye a las formas diferenciales *exactas* y a las formas diferenciales *no exactas*.
La existencia de campos vectoriales conservativos **F** de clase C^0, aparece en la definición que se encontró en el texto de Claudio Pita Ruiz (1995). En este manual aparece una definición de *campos conservativos* que dice:

> **Definición**. Al campo $\mathbf{F}: U \subseteq \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$, de clase C^k, $k \geq 0$, definido en el abierto U de R^n, que cumpla con alguna de (y por lo tanto con todas) las condiciones del teorema anterior, se le llama *campo conservativo*, y a la función f: $U \subseteq \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ de clase C^{k+1} tal que $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$, se le llama función potencial.

Por otro lado, el término de "integrable" o "condiciones de integrabilidad", se refiere específicamente a la integración de las formas diferenciales lineales L que cumplen con el *Teorema fundamental de las integrales de línea*. Haciendo un paralelo con la integral definida de una función de una variable (ver mapa conceptual en la página...), es como si llamáramos integrable sólo a las funciones que se integran de acuerdo al *Teorema fundamental del cálculo integral*.

El discurso del texto sigue una estructura axiomática, es decir, las explicaciones son una secuencia afirmativa de enunciados demostrables, esta rigidez no posibilita un discurso con negaciones, razón por la cual no se sabe qué sucede con la integración de formas diferenciales lineales que teniendo coeficientes A, B, C de clase C^1 *no son exactas*, a pesar de que para ellas se aplica el teorema de Green.

Estas confusiones se obviarían si desde el inicio se aclarara el significado de "integrabilidad", y se precisara que las condiciones (48) son necesarias pero no suficientes para reconocer una diferencial como *exacta* o *integrable*. En este caso, el proceso de *desincretización* de la noción de integral de línea produce vacíos explicativos, ya que la exposición secuencial de particularidades desvinculadas del conocimiento general que se desea explicar (el teorema fundamental) hace que los conceptos pierdan significado y sólo aparezcan como aspectos autónomos.

Al final de esta sección, por única vez, se hace referencia a que también se integran formas diferenciales no exactas. Textualmente se dice

> La razón por la que tiene sentido considerar una forma diferencial *L*, incluso cuando no es una diferencial exacta, es que, a lo largo de cualquier curva *C* dada paramétricamente en la forma
>
> $$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$
>
> *L* se transforma en la diferencial
>
> $$L = \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} \right) dt \quad (5)$$
>
> de una función de una sola variable. Esta función, es simplemente la dada por la integral indefinida
>
> $$\int L = \int \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} \right) dt. \quad (6)$$

De estas explicaciones se entiende que existe la integral indefinida de formas diferenciales *L* aún cuando éstas no sean exactas. Resulta que la forma diferencial (5) representa tanto a las diferenciales exactas como a las que no lo son, en consecuencia, la integral indefinida de *L* nos proporcionará una función *f(t)* para *L exacta* y para *L no exacta*. Es decir, la integral indefinida (6) es una función *f*(*t*) que representa: 1) una función "primitiva" especial (*función potencial* en el cálculo vectorial) que dio origen a *L*, 2) una función que no es la "primitiva" de *L*, pero cuya naturaleza queda sin explicación y no se advierte su existencia.

Consideraciones preliminares

a) El término de "integrable" que se utiliza en estas explicaciones, no tiene una explicación precisa. En este caso, la palabra integrable no significa que existe el límite de las sumas de Riemann, sino que la integral de línea de *L* cumpla con el *teorema fundamental de las integrales de línea*, es decir, que sea independiente de la trayectoria de integración.

b) Resulta que, para las formas diferenciales *L*, aún siendo *no exactas*, existe la integral indefinida, hecho que hace más confuso el término de *integrable* como sinónimo de *exacta*.

c) En la explicación de la integral de la forma diferencial lineal *L* como integral indefinida no se precisa que la función *f(t)* que se obtiene, no siempre es la función que dio origen a la forma diferencial lineal *L*. Es decir, no se esclarece la naturaleza de *f(t)* cuando *L no es exacta*.

d) La forma del discurso explicativo sigue un formato tradicional axiomático, razón por la cual no se establecen objetivos globales o nociones centrales que le den significado a los conocimientos particulares que se abordan.

La siguiente sección que tiene por título: "Integrales de línea de formas diferenciales lineales", inicia con explicaciones acerca de las curvas sobre las que se integran las formas diferenciales lineales L. Por ello, el autor aborda las propiedades de los arcos orientados y las curvas cerradas.

Se define un *arco simple* Γ como un conjunto de puntos $P = (x, y, z)$ que pueden representarse paramétricamente en la forma

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad (7)$$

donde φ, ψ, χ son funciones continuas de t para $a \le t \le b$, y diferentes t en este intervalo corresponden a puntos P diferentes. Con estas premisas se llega hasta la definición de un *arco simple orientado* Γ^* . Se dice que Γ^* está orientado *positivamente* con respecto al parámetro t si la orientación corresponde a t creciente, y *negativamente* si corresponde a la t decreciente ($-\Gamma^*$).

Una vez que se explicó detalladamente las curvas de integración se retoma la integral $\int L$ con la intención de llegar a la definición formal de la *integral de línea de una forma diferencial lineal*. Es decir, ahora el texto definirá la integral de la forma diferencial lineal

$$L = A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz.$$

sobre un arco simple orientado Γ^*. Para ello se supone que los coeficientes A, B, C deben ser continuos en una vecindad de Γ^*.

Se toman puntos cualesquiera $P_0, P_1, \ldots, P_n$ de Γ^* que se siguen uno al otro en el orden determinado por la orientación de Γ^*, donde P_0 es el punto inicial y P_n el final de Γ^*, y se forma la suma de Riemann

$$F_n = \sum_{v=0}^{n-1} (A_v \Delta x_v + B_v \Delta y_v + C_v \Delta z_v). \quad (8)$$

donde A_v, B_v, C_v son valores de A, B, C en algún punto Q_v que precede a P_{v+1} y sigue a P_v sobre Γ^* y Δx_v, Δy_v, Δz_v representan a

$$x(P_{v+1}) - x(P_v), \quad y(P_{v+1}) - y(P_v), \quad z(P_{v+1}) - z(P_v)$$

Una vez que se explican cada uno de los términos de la expresión (8), se procede a demostrar que cuando $n \to \infty$ la sucesión de F_n converge a un límite F, siempre que la distancia mayor entre los puntos sucesivos P_v, P_{v+1} tienda a 0. A F se le da el nombre de *integral de la forma L sobre un arco orientado* Γ^* , y se llega a la igualdad

$$F = \int_{\Gamma^*} L = \int_{\Gamma^*} Adx + Bdy + Cdz. \quad (9)$$

Luego, el texto explica: *ya que la definición de integral no se refiere a las representaciones paramétricas, es evidente que la integral no depende de la elección de los parámetros*. Pero dice que, *la demostración de la existencia del límite implicará que la integral se represente por medio de la integral ordinaria de Riemann*

$$\int_{\Gamma^*} L = \varepsilon \int_a^b \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} \right) dt. \quad (10)$$

En esta expresión, el integrando es una función de la única variable t, además, $\varepsilon = +1$ cuando el arco está orientado positivamente y $\varepsilon = -1$, cuando está orientado negativamente. La expresión (10) la rescribe como

$$\int_{\Gamma^*} L = \int_{t_i}^{t_f} \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} \right) dt, \quad (11)$$

donde t_i es el valor inicial del parámetro y t_f el valor para el punto final del arco orientado Γ^*.

Luego se demuestra la existencia de las sumas de Riemann recordando la existencia de la integral definida de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Es decir, si se supuso que coeficientes (A, B, C) de L, son continuos sobre una vecindad de la trayectoria Γ^* entonces se puede afirmar que existe la integral definida de L.

Al finalizar la sección, se dice que la definición de la integral de línea en la fórmula (10) puede extenderse al caso en donde Γ^* sea una *curva simple cerrada orientada*. En este caso, se forma la suma de Riemann seleccionando n puntos P_1, P_2,..., P_n sobre Γ^* que se sigan mutuamente en el orden determinado por la orientación y se pone $P_0 = P_n$ en la expresión (8) para F_n.

Inmediatamente después de esta extensión de la definición, se dice que en el Volumen I se expusieron ejemplos de integrales sobre *curvas orientadas cerradas* en el plano x, y. Se recuerda la fórmula

$$A = \tfrac{1}{2} \int_{\Gamma^*} xdy - ydx\,, \quad (12)$$

esta integral de línea, afirma el texto, *ha representado el área orientada limitada por una curva orientada cerrada* Γ^*.
Al retomar este ejemplo, no se esclarece que el integrando de la fórmula (12) es una forma *diferencial no exacta*.

Consideraciones preliminares

a) La demostración de la existencia del límite de las sumas de Riemann para formas diferenciales lineales que tienen coeficientes (A, B, C) continuos en una vecindad de Γ^*, es una mera formalidad que hay que cumplir, porque a lo largo de cualquier curva Γ dada paramétricamente, L se transforma en la diferencial de una función de una sola variable y su integral indefinida es $f(t)$. Por lo tanto existe la integral definida.

b) En la expresión de la integral de línea como integral definida dada por

$$\int_{\Gamma^*} L = \int_{t_i}^{t_f} \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} \right) dt,$$

el integrando es la diferencial de una función de una sola variable *f(t)*, la cual está dada por la integral indefinida (6), a partir de estas afirmaciones , se puede concluir que para una curva cerrada, donde $P_i = P_f$, la integral definida para cualquier L será igual a cero. Esta afirmación no es cierta para toda L, sólo se cumple para la integral de línea de una *diferencial exacta*. Lo que sucede es que los puntos inicial y final de la trayectoria coinciden, pero el valor del parámetro t es distinto. Lo sorprendente es que cuando L es *exacta* esta integral siempre es igual a 0, pero cuando L es *no exacta* es un real diferente de cero. Sin embargo, este hecho permanece escondido (vacío explicativo), porque el discurso se centra en las formas diferenciales *exactas* y no se explica qué sucede con las integrales de línea de las *no exactas*, a pesar que la forma diferencial que se integra en la expresión (12) es *no exacta*.

Continuamos con el análisis del discurso de los distintos apartados, ahora veremos las explicaciones que se encuentran bajo el título: "Dependencia de las integrales de línea con respecto a los puntos extremos", aquí se demuestra que la integral de línea, $\int_{\Gamma^*} L$, a lo largo de una curva orientada simple Γ^*, que une los puntos A y B, es igual a la diferencia de los valores de una función f en estos puntos, es decir, se demuestra que

$$\int_{\Gamma^*} L = \int_A^B L = f(B) - f(A), \quad (12)$$

donde, el arco Γ^* tiene el punto inicial A y el punto final B.

Para poder llegar a la expresión (12) se parte de la definición de integral de línea como integral definida (11). Se establece que para P_0 fijo inicial puede definirse una función *f(t) = f(P)* a lo largo del arco Γ, por medio de la integral indefinida

$$f(P) = \int_{P_0}^{P} L = \int_{t_0}^{t} \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} \right) dt. \quad (13)$$

Luego tomando a f como una función de la variable independiente t, se tiene

$$\frac{df}{dt} = A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} \quad (14)$$

en consecuencia, la diferencial de la función $f(t)$ estará dada por

$$df = \frac{df}{dt}dt = A\,dx + B\,dy + C\,dz = L \quad (15)$$

El texto explica que la ecuación (15) *expresa la forma diferencial L (que no necesita ser exacta) como la diferencial de una función f; pero tiene que recordarse que esta relación sólo se cumple a lo largo de una curva especial Γ, sobre la cual f está definida.*

En la última afirmación hay una imprecisión, la expresión (15) se cumple para una f no solamente *definida*, sino que debe ser *continua* y *derivable*, de lo contrario no se podría afirmar que f es la integral indefinida, y en ese caso, no se pude aplicar el teorema fundamental del cálculo. Existen funciones definidas para las cuales esta relación no se cumple (ver mapa conceptual de la integral definida).

Luego se sigue con la explicación: *para dos puntos cualesquiera P y P'de Γ se tiene*

$$\int_{P}^{P'} L = f(P') - f(P) \quad (16)$$

Esto se deduce inmediatamente si se expresan las integrales de línea como integrales sobre la variable t y se aplica la relación fundamental entre las integrales definidas e indefinidas (teorema fundamental del cálculo). Entonces, si Γ^* tiene el punto inicial A y el punto final B, se llega a la expresión (12).

Al igual que para las integrales de funciones de una variable, estas explicaciones establecen el vínculo formal entre la integral de línea como *integral definida* y como *integral indefinida* a través del Teorema fundamental del cálculo, este camino prepara el terreno para poder definir la integral de línea con el sustento formal del límite de las sumas de Riemann. De manera esquemática podemos representar este hecho como sigue:

Integral de línea como **integral definida**:

$$\int_{\Gamma^*} L = \int_{t_i}^{t_f} \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} \right) dt.$$

Teorema fundamental del cálculo

Integral de línea como **integral indefinida**:

$$f(P) = \int_{P_0}^{P} L = \int_{t_0}^{t} \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} \right) dt.$$

Este vínculo que se establece, como en el caso de las integrales de funciones de una variable independiente, facilita el cálculo de la integral de línea como integral indefinida, es decir, se encuentra la función *f(t)* para luego reemplazar en esta función los límites de la integración. Pero de nueva cuenta no se especifica que la función *f(t)* representa a dos funciones de distinta naturaleza. Para el caso de la integral de línea de *L exacta*, $f(B) - f(A)$ representa la diferencia de los valores de una función “primitiva” (función potencial en el cálculo vectorial); para el caso de *L no exacta* esta diferencia no tiene un significado preciso ni claro, razón por la cual se ignora en el discurso explicativo de los textos.

Consideraciones preliminares

a) Como ya explicamos, en la expresión

$$\int_{\Gamma^*} L = \int_{A}^{B} L = f(B) - f(A),$$

para el caso de *L exacta*, $f(B) - f(A)$ significa la diferencia de valores de la función “primitiva” de *L* (función potencial en el cálculo vectorial) y, para *L no exacta* esta diferencia no tiene significado preciso ni único. Por ejemplo, la integral de línea de

$$L = \tfrac{1}{2}\, xdy - ydx,$$

sobre una curva cerrada simple, no es igual a 0, sino que es igual al área contenida en esa curva. Para este caso concreto se construyó una interpretación gráfica que se expondrá en el capítulo 4 de este trabajo.

b) Es sumamente importante destacar que, en estas últimas explicaciones, la expresión para la diferencial *df(t)*,

$$df = \frac{df}{dt}dt = \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} \right)dt = L\,,$$

representa a dos formas diferenciales lineales L que tienen propiedades totalmente distintas:

- a la forma diferencial lineal ***L*** cuando **es exacta**.
- a la forma diferencial lineal ***L*** cuando **no es exacta**

En la expresión analítica de la diferencial *df* ubicamos justo el momento en que el texto no explicita de manera precisa que este símbolo tiene doble significado. Después de la parametrización de la curva sobre la que se integra, evidentemente se obtiene una diferencial de una función de una variable pero esta función también tiene doble significado. Bien vale la pena explicar este hecho con el siguiente diagrama:

L a lo largo de una curva C dada paramétricamente por

$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t)$

Se transforma en:

$$df = (A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt})dt = L$$

df(t) = L exacta

L es exacta porque es la diferencial total de una función $u = f(x,y,z)$, es decir

$$L = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}dz$$

df(t) = L no exacta

L no es exacta, porque no es la diferencial total de una función $u = f(x,y,z)$, aunque los coeficientes A, B, C tengan primeras derivadas continuas no se pueden expresar como

$$A = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x},\ B = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y},\ C = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$$

c) Con esta última reflexión, queremos poner en evidencia una imprecisión importante del concepto de *integral de línea de formas diferenciales lineales*; el texto de R. Courant no explica que el mismo símbolo, *df(t)*, se utiliza para representar dos formas diferenciales distintas: a L cuando es exacta y, a L cuando no lo es. Para el caso en que L no es la diferencial total de una función $u = f(x, y, z)$, no tiene nombre ni símbolo en los textos de Cálculo, sin embargo, en los manuales de Termodinámica se le llama *diferencial inexacta* y su símbolo varía de acuerdo al autor del texto, podemos encontrar los siguientes: $\delta f(t)$ en el texto ruso de A. I. Gerasimov, et al (1970) , $\not{d}f(t)$ en el texto de Castellan (1998), *d'f(t)* en el texto de L. García-Colín (1976).

d) En termodinámica, la función *f(t)* que se obtiene de la integración de una *forma diferencial exacta* se le llama *función de estado*, para el caso, en el que *f(t)* se obtiene de la integración de una *diferencial inexacta* recibe el nombre de *función de trayectoria*. Este fenómeno, producto de la transposición didáctica, muestra que el discurso matemático escolar, en aras de la precisión y la formalidad, elimina términos y nociones que en otros campos del conocimiento permanecen por su utilidad conceptual. Por ejemplo, en el texto de Fisicoquímica de Ira Levine (1983), se explica:

> La energía interna U es (como P o V o T) una función de estado del sistema. Para cualquier proceso, ΔU depende por ello tan solo de los estados inicial y final del sistema y es independiente del camino seguido para llevar el sistema a esos estados. Si este va del estado 1 al 2 por cualquier proceso, entonces:
>
> $\Delta U = U_2 - U_1$
>
> Un proceso donde el estado final es el mismo que el inicial recibe el nombre de *proceso cíclico*; aquí $U_2 = U_1$, y
>
> $\Delta U = 0$ proceso cíclico
>
> como debe de ser cierto para la variación de cualquier función de estado en un proceso cíclico.
> Al contrario que U, las cantidades q y w no son funciones de estado. Conociendo solamente los estados inicial y final del sistema, no podemos encontrar q o w. El calor q y el trabajo w dependen del camino seguido para ir del estado 1 al 2.

e) Un estudio interesante consistiría en analizar la formulación y explicación matemática de la ley de la conservación de la energía en textos de termodinámica de principios del siglo XX. La primera ley de la termodinámica se establece experimentalmente en 1840, por James Prescott Juole, y con base en los trabajos de Joule, el científico Herman von Helmholtz, en 1947 realiza la primera redacción clara y convincente del principio de conservación de la energía.

Después de definir el concepto de *integral de línea de formas diferenciales lineales* como el límite de las sumas de Riemann, y haber establecido la relación entre la *integral de línea* como *integral definida* y como *integral indefinida*, aparece el apartado: 1.10 El teorema fundamental sobre la integrabilidad de las formas diferenciales lineales. En esta sección se desarrollan incisos con conceptos y teoremas que finalmente conducen a enunciar de manera precisa *El teorema fundamental sobre la integrabilidad de las formas diferenciales lineales*. En resumen, se analizan las condiciones necesarias y suficientes para que la *integral de línea de una forma diferencial lineal* no dependa de la trayectoria de integración o lo que es lo mismo que la *integral de línea de una forma diferencial lineal* sea igual a cero para una trayectoria cerrada.

En el inciso que trata la *Integración de diferenciales totales*, aparece el teorema

> *La integral de una forma diferencial lineal L, que es la diferencial total de una función f, es igual a la diferencia de los valores de f en los puntos extremos y no depende del curso de Γ^* entre esos puntos.*
> Esto es, se obtiene el mismo valor para $\int_{\Gamma^*} L$, para todas las curvas Γ^* que se encuentren en el dominio de f y tengan el mismo punto inicial P_0 y el mismo punto final P_1.

La demostración es muy sencilla, se dice, si la curva cerrada simple Γ^* se divide por los puntos P_0 y P_1 en dos arcos orientados Γ_1^* y Γ_2^*, se tiene

$$\Gamma^* = \Gamma_1^* + \Gamma_2^*,$$

donde, Γ_1^* tiene el punto inicial en P_0 y el punto final en P_1, mientras que Γ_2^* tiene el punto inicial en P_1 y el punto final en P_0. Entonces se tiene

$$\int_{\Gamma^*} L = \int_{\Gamma_1^*} L + \int_{\Gamma_2^*} L = \int_{\Gamma_1^*} L - \int_{-\Gamma_2^*} L, \qquad (17)$$

Si tomamos en cuenta los puntos iniciales y finales de Γ_1^* y Γ_2^*, tenemos

$$\int_{\Gamma^*} L = \int_{\Gamma_1^*} L - \int_{-\Gamma_2^*} L = \int_{P_0}^{P_1} L - \int_{P_0}^{P_1} L\,. \qquad (18)$$

Como se puede deducir, las integrales se anulan en consecuencia, la integral de línea de L (que es la diferencial total de una función f) sobre la curva cerrada simple Γ^*, será igual a cero. Lo grave es que esta misma demostración se puede utilizar para L *no exacta* con coeficientes A, B, C de clase C^1.

El teorema parte de que L es la diferencial total de f, y en consecuencia, queda sin explicación qué sucede con las integrales de línea de las formas diferenciales no exactas, a pesar de que, en el apartado anterior se llega a la expresión (12):

$$\int_{\Gamma^*} L = \int_A^B L = f(B) - f(A),$$

que se aplica para L no necesariamente exacta. Nuevamente aquí aparece el *vacío explicativo* que se viene arrastrando desde los primeros incisos sobre el tema.

Para explicar mejor nuestros argumentos se presentan en el siguiente esquema dos ejemplos: uno, el cálculo de la integral de línea de una forma diferencial exacta, y otro para una diferencial no exacta. Como veremos, a pesar de que no se explican las integrales de línea de formas diferenciales *no exactas*, éstas existen.

Para: *L* = ½ (*xdy* – *ydx*), *no exacta*.	**Para: *L* = ½ (*xdy* + *ydx*), *exacta*.**
La integral de línea parametrizada por: *x* = *a cost*, *y* = *sent*, sería: $\int_{\Gamma^*} L = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + sen^2 t)\,dt = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = ab\pi$	La integral de línea parametrizada por: *x* = *a cost*, *y* = *sent*, sería: $\int_{\Gamma^*} L = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t - sen^2 t)\,dt = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}(\cos^2 t - sen^2 t)\,dt = 0$

El problema surge porque, como ya se dijo con anterioridad, para la integral de línea de *L exacta* y *no exacta* se obtiene $f(B) - f(A)$. Resulta que después de parametrizar la curva sobre la que se integra, *L* se convierte en la diferencial de una función de una sola variable *df(t)*, que es una diferencial que tiene doble naturaleza: 1) cuando *df(t)* es la diferencial total (*exacta*) de $f(t)$ entonces $f(B) - f(A) = 0$, y 2) cuando *df(t)* no es la diferencial total de $f(t)$ entonces $f(B) - f(A) \neq 0$. Como podemos ver, en todo momento se omite la existencia de *df(t) no exacta*.

Consideraciones parciales

a) En el texto, desde el inicio prevalece el vacío explicativo respecto a las formas diferenciales lineales *no exactas*. La confusión surge desde la parametrización de la curva porque se simboliza con *df(t)* lo mismo a una *L exacta* que a una *L no exacta*, y a pesar de haber utilizado una forma diferencial no exacta para encontrar áreas contenidas en curvas cerradas simples, no se habla de ellas.

b) El discurso axiomático deja fuera cualquier explicación de la diferencial no exacta (*inexacta* en termodinámica). Este hecho tuvo y tiene repercusiones que van más allá del cálculo. Como veremos con más detalle en el capítulo III, en los libros de termodinámica clásica las explicaciones matemáticas de la diferencial *inexacta* son bastante confusas, pero además remiten al lector a textos de cálculo avanzado para profundizar en la explicación, sin embargo, éstos no contienen las explicaciones que se buscan. Como se ha visto hasta esta aquí, el proceso de transposición didáctica de la noción de integral de línea, al eliminar el nombre y toda explicación de *formas diferenciales lineales no exactas*, ha creado vacíos explicativos no sólo para la enseñanza del cálculo, sino también para la enseñanza de la termodinámica clásica.

c) Para entender por qué la integral de línea de una *forma diferencial no exacta* depende de la trayectoria de integración, a pesar de la expresión (12), es preciso tener en cuenta que la definición de la integral de línea como integral indefinida dada por:

$$f(P)=\int_{P_0}^{P} L=\int_{t_0}^{t}\left(A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C\frac{dz}{dt}\right)dt\,,$$

es una función *f(t)*, pero, a diferencia de la integral indefinida (primitiva *especial*) de la diferencial de una función de una variable independiente, el símbolo *f(t)* representa a dos funciones de propiedades totalmente distintas:

- A una función "primitiva" $f(x, y, z)$, en tanto los coeficientes A, B, C de la forma diferencial L son las derivadas parciales de esta función:

  $$A=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x},\quad B=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y},\quad C=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\,.$$

  En termodinámica, a estas funciones las llaman *funciones de estado* (por ejemplo: la *energía interna de un sistema*).
- A una función *f(t)* que no es una función "primitiva" $f(x, y, z)$ ya que los coeficientes de L no son las derivadas parciales de esta función. En termodinámica a estas funciones las llaman *funciones de trayectoria* (por ejemplo: el *calor* o el *trabajo*).

d) Para el teorema de *las integrales de línea de las formas diferenciales totales* se construyó una representación gráfica análoga a la gráfica presentada para el teorema fundamental del cálculo.

Si en la integral de línea $\int_{C^*} L$, el integrando es una *forma diferencial lineal exacta*, entonces, de acuerdo a la definición de la integral de línea como *integral indefinida*, obtengo la función *f(t)* que representa exactamente a la función $f(x, y)$ que dió origen a la forma diferencial lineal L. Luego, al vincular en concepto de integral de línea como *integral indefinida* con el de *integral definida* obtengo:

$$\text{(A)}\qquad \int_{C^*} L=\int_{P_i}^{P_f} L=\Delta f(x,y)=f(x_f,y_f)-f(x_i,y_i)\,,$$

donde (x_i, y_i) y (x_f, y_f) son los parámetros del punto inicial P_i y del punto final P_f de la trayectoria de integración.

Este proceso de integración se puede representar con una sencilla gráfica, desde la cual se puede percibir lo que la formalidad no hace explícito. Es decir, si proponemos una superficie que represente a la función $f(x,y)$, al integrar la forma diferencial L, lo que se calcula es el valor de $\Delta f(x, y)$ de la fórmula (A). La gráfica que se propone es la siguiente:

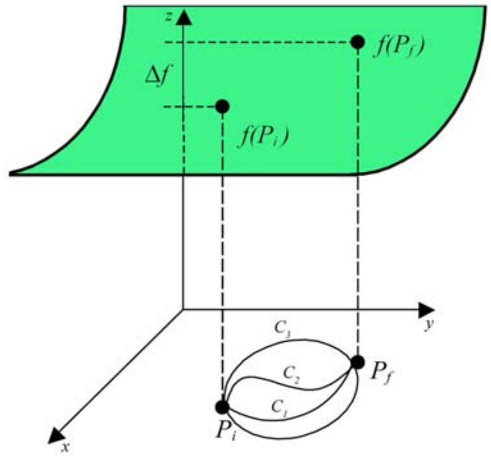


Figura 1. Independencia de trayectoria

En esta gráfica se puede ver con claridad cómo $\Delta f(x, y)$ no dependerá de la curva sobre la que se integra, pues el proceso de integración me dará el mismo Δf para las curvas C_1 y C_2, y para C_3 será igual a 0. Para el caso, de una forma diferencial lineal no exacta, la integral de línea como integral indefinida me da una función *f(t)* que no es la función que dio origen a *L*, es decir, los coeficientes *A*, *B*, *C* no son las derivadas parciales de $f(x, y)$, para estas formas diferenciales la gráfica no aplica.

En la sección anterior se demostró que si *L* es la diferencial total de *f* , entonces la integral de línea de *L* es independiente de la curva de integración y sólo depende de los puntos inicial y final de la tal curva. Ahora, en el inciso "Condiciones necesarias para que las integrales de línea dependan únicamente de los puntos extremos", se demostrará el recíproco del teorema anterior, es decir, la integral de línea es independiente de la elección particular de Γ^* y queda determinada por los puntos inicial y final de esta curva, si y sólo si *L* es la diferencial total de una función $f(x, y, z)$ en *R*. Para lo cual se enuncia el siguiente teorema:

> *La integral de línea $\int L$ tomada sobre un arco simple orientado Γ^* en R es independiente de la elección particular de Γ^* y queda determinada únicamente por los puntos inicial y final de Γ^* si y sólo si L es la diferencial total de una función f(x, y, z) en R.*

Ambos teoremas dejan establecido de que la única condición necesaria y suficiente para que la integral de línea sea independiente de la trayectoria de integración (o su equivalente, que la integral de línea a lo largo de una trayectoria cerrada sea 0) es que *L* sea la diferencial total de la función $f(x, y, z)$.

$$L = df(x, y, z) \ .$$

Para la validez de este teorema se demuestra que los coeficientes A, B, C de la forma diferencial L son las derivadas parciales de f.

Lo sorprendente de todas estas explicaciones vertidas hasta este momento es que sigue sin respuesta la pregunta ¿cómo reconocer que una forma diferencial L es una diferencial total? Desde el inicio, no queda nada claro si la igualdad de las derivadas cruzadas es una condición necesaria y suficiente para afirmar que L es exacta.

Después de muchas páginas ocupadas en las explicaciones anteriores recién, en el inciso "Insuficiencia de las condiciones de integrabilidad", se discute acerca de las condiciones que deben cumplir A, B, C para determinar si L es exacta.

Primero, se discuten las "condiciones de integrabilidad" (la igualdad de las derivadas parciales cruzadas), dadas al inicio

> Ya se han reconocido las condiciones de integrabilidad
>
> $$(69) \qquad \frac{\partial B}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}=0$$
>
> como necesarias para la existencia de una función $u=f(x, y, z)$ con la propiedad de que $L = du$. Una forma que satisfaga (69) recibe el nombre de *cerrada*. De aquí que toda forma exacta es cerrada. Como las integrales de línea sólo pueden ser independientes de la trayectoria particular que une dos puntos cualesquiera cuando L es una diferencial total, se ve que *las condiciones (69) son necesarias, si L depende únicamente de los puntos extremos de la trayectoria de integración*. ¿También son suficientes estas condiciones? ...
>
> El resultado sorprendente es que las condiciones (69) son casi suficientes, pero no lo bastante, para asegurar que L sea la diferencial total de una función u y, por lo tanto asegurar la independencia de $\int L$ de la trayectoria.

Recién en este momento se discute la insuficiencia de las condiciones (69). Para ello se propone analizar la integral de línea de la siguiente forma diferencial:

$$L=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}. \quad (20)$$

Para esta forma diferencial se establece que los coeficientes de L son:

$$A=\frac{-y}{x^2+y^2}, \quad B=\frac{x}{x^2+y^2}, \quad C=0$$

La elección del coeficiente de dz como $C=0$, es porque el autor tiene la intención de abordar las regiones *R simplemente conexas* en el espacio, o lo que el texto de N. Piscunov (1973), llama *dominios regulares* en tres dimensiones.

En efecto para esta forma diferencial las condiciones (69) se cumplen, pero la integral de línea de L sobre un círculo unitario (C*: $x = cos\ t$, $y = sen\ t$, $z = 0$ en el plano x, y, orientado positivamente con respecto a t), no es igual a 0, esto es

$$\int_{C^*} L = \int_0^{2\pi}\left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt}\right)dt = \int_0^{2\pi}\left(sen^2 t + \cos^2 t\right)dt = 2\pi \neq 0\,. \quad (21)$$

A partir de este hecho se concluye que L no es la diferencial total de una función f, es decir, L es *cerrada* pero no *exacta*. Para este caso, se explica que los coeficientes A y B no están definidos para los puntos sobre la recta $x = y = 0$ *(el eje z)* y por ello surge la necesidad de introducir una nueva condición para asegurar que L sea la diferencial total de alguna función $f(x, y, z)$. Textualmente se dice:

> Las identidades (69) por sí mismas no son suficientes pero se vuelven suficientes si se agrega una hipótesis de carácter muy diferente, una hipótesis que se refiere a una propiedad geométrica de la región del espacio en la que se considera L.

Siguiendo con el análisis del ejemplo en cuestión, el texto señala que la forma diferencial (20) se puede representar como la diferencial total de la función:

$$df(x,y,z) = d\,arc\tan\frac{y}{x} = L$$

En efecto, las derivadas parciales de la función $f(x,y,z) = arc\tan\frac{y}{x}$ son iguales a

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 0$$

pero como vimos la integral de línea sobre una curva cerrada simple no es igual a 0. La integral de línea de esta forma diferencial será igual a 0, *sólo si al ir a lo largo de una trayectoria desde P_0 hasta P y regresar a lo largo de otra trayectoria hasta P_0 , se circunda cero veces el eje z*. Es decir, esta integral de línea será igual a cero siempre y cuando la trayectoria se encuentre completamente dentro del dominio de f y de L.

Esto es, para garantizar que la integral de línea de la forma diferencial L sea independiente de la trayectoria de integración, se requiere que los coeficientes ($A = f_x$, $B = f_y$, $C = f_z$) sean funciones continuas en un conjunto abierto **"especial"**. En otras palabras, dada una forma diferencial lineal para asegurar que es una diferencial total, se pide que exista una función f definida donde está definida la forma diferencial; si esto se cumple, entonces, las condiciones (19) son suficientes para asegurar que L es una diferencial *exacta*.

En suma, existen formas diferenciales lineales L con coeficientes de clase C^1 y a pesar de que cumplen con las condiciones (19), la integral de línea de estas formas diferenciales sobre una *curva cerrada simple* no es igual a 0. Esto quiere decir que, para asegurar que la integral de línea de L sea independiente de la trayectoria de integración, se necesita además de las condiciones (19) que el dominio U de las funciones A, B, C sea *simplemente conexo*. Finalmente, se introduce un nuevo inciso, donde se trata la propiedad geométrica que debe cumplir el abierto R para que se catalogue a L como exacta. En esta parte se discute el concepto de *Conjuntos simplemente conexos*.

Preparado el terreno para discutir la naturaleza de la región R donde A, B, C tienen primeras derivadas continuas, se teje una explicación de la noción de *conjunto abierto simplemente conexo a través de trayectorias*. A la letra dice:

> En un conjunto R, así, dos puntos cualesquiera pueden unirse mediante una trayectoria que se encuentre en R y dos trayectorias cualesquiera en R con los mismos puntos extremos pueden deformarse pasando la una a la otra sin mover los puntos extremos y sin dejar R.
>
> Se darán las definiciones precisas de estas nociones [...]

En efecto, luego se explica de manera formal esta noción y se dice que, ejemplos triviales de conjuntos conexos son los *conjuntos convexos* R, como son las esferas y cubos sólidos. Después se regresa al ejemplo del inciso para concluir en que:

> [...] no simplemente conexo es el conjunto R obtenido eliminando el eje z del espacio x, y, z. Aquí las dos trayectorias (semicírculos)
>
> $$x = \cos \pi t, \qquad y = \operatorname{sen} \pi t, \qquad z = 0; \qquad 0 \leq t \leq 1$$
>
> y
>
> $$x = \cos \pi t, \qquad y = -\operatorname{sen} \pi t, \qquad z = 0; \qquad 0 \leq t \leq 1$$
>
> tienen los mismos puntos extremos pero no pueden deformarse una en otra sin cruzar el eje z, que no pertenece a R.

Finalmente, aparece un último inciso donde se enuncia el *Teorema fundamental de las integrales de línea*, en el cual se establecen las condiciones precisas que debe satisfacer la forma diferencial lineal L para que sea *exacta*.

> ***e. El teorema fundamental***
>
> Ahora puede enunciarse la relación entre las nociones de formas diferenciales cerrada y exacta:
>
> *Si los coeficientes de la forma diferencial $L = A\,dx + B\,dy + C\,dz$ tienen primeras derivadas continuas en un conjunto R simplemente conexo y satisfacen las condiciones de integrabilidad*
>
> $$B_z - C_y = 0, \quad C_x - A_z = 0, \quad A_y - B_x = 0 \qquad \text{(75a)}$$
>
> *entonces L es la diferencial total de una función u definida en R:*

$$(75b) \qquad A = u_x, \quad B = u_y, \quad C = u_z$$

Es decir, para que la forma diferencial *cerrada* (que satisfacen las condiciones (19)) sea *exacta* se requiere que el abierto R donde está definida L sea *simplemente conexo*. Esta nueva propiedad geométrica para el abierto R en el que se considera L, es una hipótesis que, coloquialmente hablando, exige que el conjunto abierto R (que es el dominio de f y de L) esté constituido por una sola pieza, es decir que sea *conexo*.

Consideraciones finales

a) El término de "diferencial total" en el contexto de la integral de línea, tiene un significado más restringido del que se le asigna cuando se define diferencial total de funciones de dos o más variables. En este mismo volumen del texto de Courant, se define la diferencial total de la función $u = f(x, y)$ de la siguiente manera:

> Como para las funciones de una variable, a menudo resulta conveniente tener nombre y símbolo especiales para la parte lineal del incremento de una función diferenciable $u = f(x,y)$, el cual se presenta en la fórmula
>
> $$\Delta u = f(x+h, y+k) - f(x,y) = hf_x(x,y) + kf_y(x,y) + \varepsilon\sqrt{h^2+k^2}.$$
>
> Se da el nombre de *diferencial* de la función a esta parte lineal y se escribe
>
> $$(15a) \qquad du = df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$
>
> La diferencial, a veces llamada *diferencial total*, es una función de cuatro variables independientes, a saber, las coordenadas x y y del punto bajo consideración y los incrementos h y k de las variables independientes.[...] Para las variables independientes x y y, a partir de (15a), se encuentra que
>
> $$dx = \frac{\partial x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial x}{\partial y}\Delta y = \Delta x, \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial y}{\partial y}\Delta y = \Delta y.$$
>
> De aquí que, con mayor frecuencia, la diferencial $df(x, y)$ se escriba
>
> $$(15b) \qquad df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy.$$

Para este concepto de *diferencial total*, siendo un concepto de análisis local, no existe el requerimiento de tipo geométrico para el abierto R en que son continuas las derivadas parciales. En este sentido, la noción de *diferencial total*, en el contexto de la integral de línea, tiene una restricción más. Es decir, las *formas diferenciales cerradas* no son *diferenciales totales*, porque sus coeficientes a pesar de cumplir con las condiciones (19), no son continuas en un abierto *simplemente conexo* R, en tal caso no se cumplirá el teorema fundamental de las integrales de línea. Pero en el discurso parcializado de los textos, confunde el hecho de que cuando se define la diferencial total de funciones de dos o más variables, no se introduce un requerimiento acerca del abierto R. En consecuencia el nombre de diferencial total en capítulos anteriores no tiene el significado que ahora se le asigna (ruptura explicativa).

b) La forma diferencial (20) del ejemplo que se presenta para concluir en que las condiciones de integrabilidad (19) son necesarias pero no suficientes, es una *forma diferencial lineal cerrada*; para la cual, la integral de línea sobre cualquier *curva cerrada simple* no siempre es igual a cero. Esquemáticamente podemos explicar el hecho con el siguiente diagrama:

La forma diferencial lineal

$$L = A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz.$$

que tienen coeficientes de la forma

$$A = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$$

es una forma diferencial *cerrada*.

Esta forma *diferencial cerrada* es *total* o *exacta* si el dominio R de las derivadas parciales es un *conjunto simplemente conexo*.

La integral de línea sobre **toda** *curva cerrada simple* será igual a 0.

$$\oint L = 0\,,$$

Esta forma *diferencial cerrada* no es total si el dominio de las derivadas parciales R es un *conjunto no simplemente conexo*.

La integral de línea sobre **toda** *curva cerrada simple* no siempre será igual a 0.

Se sabe desde la física clásica que, la noción de campo conservativo tiene un significado global y no local; de hecho, el nombre de conservativo se debe al principio de la *conservación de la energía*, y el nombre de función potencial se hereda de la *energía* *potencial*. Esta exigencia de la física pasa a la matemática y se construye una nueva condición geométrica para las diferenciales totales y, en consecuencia, la noción de diferencial total se modifica, hecho que no se documenta en el *discurso matemático escolar*.

c) Con base en nuestra interpretación gráfica de la independencia de trayectoria para la integral de línea de una diferencial total, podemos dar una explicación gráfica de porqué la integral de línea de la forma diferencial (20) sobre la circunferencia con centro en (0,0), no es igual a 0. Dado que los recursos gráficos sólo nos posibilitan interpretaciones en el espacio x, y, z, tomaremos esta forma diferencial cerrada (20) para una función potencial de dos variables independientes.
Tenemos a la forma diferencial L, dada por:

$$L = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy, \quad donde: \quad A = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y},$$

para este caso tenemos que $f(x,y) = arc\tan\frac{y}{x}$. Entonces la integral de línea de L sobre el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, significa que queremos encontrar el valor de $\Delta f(x, y)$, cuando se produce un cambio cíclico, a partir de integrar L sobre este círculo. Aquí presentamos la gráfica de la función $f(x,y) = arc\tan\frac{y}{x}$ y de la curva sobre la que se integra $d\,f(x, y)$:

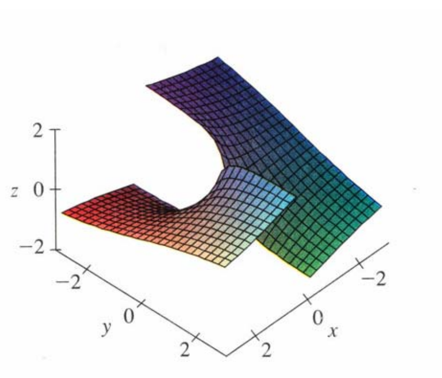


Figura 1

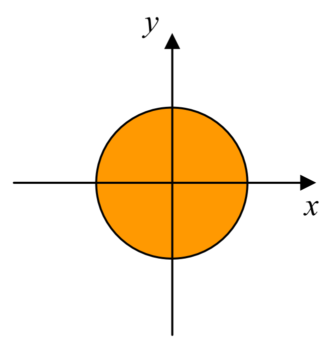


Figura 2

Como se ve, esta función no es continua para todo $x = 0$, en consecuencia, no tiene sentido alguno integrar L (su diferencial *cerrada* $df(x, y)$) sobre el círculo unitario (Fig. 2) con centro en (0, 0). Es decir, la trayectoria C^* no se encuentra completamente en el dominio de $f(x, y)$.

Si bien las representaciones gráficas no son la solución para la didáctica, es vital propiciarlas porque, en muchos casos, las representaciones gráficas muestran lo que la formalidad esconde. Además, Raymond Duval (1993), que se ocupa del estudio de las distintas representaciones de un concepto, dice:

> Si la conceptualización implica una coordinación de registros de representación, entonces el envite principal de los **aprendizajes de base en matemáticas** no puede solamente ser la automatización de ciertas técnicas operatorias (cálculo) sino que debe también ser la coordinación de los diferentes registros de representación que son ahí utilizados.

En este sentido, la representación gráfica (con sus limitaciones) de la *integral de línea* es un referente importante para significar algunas nociones centrales relacionadas con este concepto.

d) Al final de todas estas explicaciones de la integral de línea de formas diferenciales lineales, el texto introduce un *Apéndice* donde se desarrollan temas relacionados con la noción de *conjunto*. Lo interesante son las ideas que el autor expone acerca de la intuición geométrica en la introducción a este apéndice.

> *La intuición geométrica y la realidad han proporcionado motivación poderosa e ideas guía para el pensamiento matemático constructivo. Sin embargo, con el avance del análisis desde principios del siglo XIX, se ha vuelto una necesidad imperiosa dejar de invocar a la intuición como justificación principal de las consideraciones matemáticas. Nos hemos vuelto cada vez más hacia las demostraciones rigurosas basadas en la precisión robustecida axiomáticamente y los conceptos y procedimientos claramente enunciados. En este desarrollo, la noción de conjunto, en particular de conjunto de puntos, ha jugado un papel primordial y, por ahora, ha sido absorbido en la trama del análisis.*

Este párrafo describe con elocuencia las características de la postura epistemológica de Richard Courant y de los autores que rescribieron la obra; la forma del discurso explicativo del concepto de *integral de línea de formas diferenciales lineales* es totalmente axiomático, discurso que descarta cualquier interpretación gráfica de la integral de línea.

e) Finalmente, debemos reconocer la seriedad y minuciosidad con que el texto aborda cada concepto alrededor de la noción de integral de línea, hecho que hizo posible la identificación del momento explicativo en el que las *diferenciales inexactas* quedaron fuera del "discurso matemático escolar". En este sentido es preciso hacer los siguientes señalamientos:

- El hecho de que las ideas geométricas, desde hace muchos años, dejaron de ser argumentos para definir o demostrar conceptos, no es sustento para eliminar del discurso explicativo los acercamientos gráficos. Este texto que supuestamente abandona las justificaciones geométricas, sigue utilizando palabras que pertenecen a la geometría como son: punto, plano, curva, recta, coordenadas, etcétera. Eliminar del cálculo palabras e ideas geométricas tal vez sería posible, pero resultaría un discurso totalmente inaccesible para la mayoría de estudiantes y profesores.

- Si bien se reconoce que las ideas geométricas no son fundamentos para demostraciones formales en el cálculo, desde la matemática educativa, el registro gráfico es necesario para significar nociones. Las representaciones gráficas muestran significados que la formalidad no hace evidentes. Es decir, el recurso gráfico no es justificación ni ilustración o traducción de lo formal, es una manera de pensar, que -según T. Eisenberg y T. Dreyfus (1991)- demanda mayores niveles cognitivos que el pensamiento algorítmico.

📖 CÁLCULO VECTORIAL de Claudio Pita Ruiz (1995)

Este manual, es el que con mayor extensión trata el concepto de integral de línea. El índice temático que presenta es:

Capítulo 7. **Integrales de línea**

Este texto se puede clasificar como un texto formal porque su lenguaje así lo denota, sin embargo, la forma de su discurso no es totalmente axiomático, después de una definición inicial de la *integral de línea de campos vectoriales*, presenta una interesante secuencia de problemas resueltos, cuyas respuestas se analizan provocando preguntas centrales acerca de los múltiples conceptos que se requieren para llegar a formular las condiciones suficientes y necesarias para que un campo vectorial sea conservativo.

Si bien, la secuencia de conceptos es muy parecida a la del texto de R. Courant, hay una diferencia sustancial en la forma del discurso. Las definiciones y teoremas se enuncian como respuestas a las preguntas e inquietudes planteadas después de resolver problemas concretos.

El concepto de *Integrales de línea*, se introduce con la definición general:

Definición. Sea $\mathbf{F}: U \subseteq \mathrm{R}^n \rightarrow \mathrm{R}^n$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, ..., F_n)$ un campo vectorial continuo y sea $\lambda:[a,b] \rightarrow \mathrm{R}^n$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ un camino de clase C^1 cuya traza está contenida en U, es decir, $\lambda([a,b]) \subset U$. La integral de línea del campo **F** a lo largo del (o sobre el) camino λ, se define denotada por

$$\int_\lambda \mathbf{F}, \quad \int_\lambda \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\lambda} \quad \text{o} \quad \int_\lambda F_1(x)dx_1 + F_2(x)dx_2 + ... + F_n(x)dx_n$$

como

$$\int_{\lambda} \mathbf{F} \,.\, d\lambda = \int_{a}^{b} \mathbf{F}(\lambda(t)) \,.\, \lambda'(t)\, d\lambda$$

Con esta definición se inicia una larga secuencia de explicaciones, pero antes se resuelven problemas que invitan a reflexionar sobre los resultados que se obtienen. Aquí reproducimos, de manera simplificada y esquemática, la secuencia de ejemplos y las conclusiones a las que se llega

Ejemplo 1. Se calcula la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (x + y, y)$ a lo largo del camino $\lambda(t) = (t, t^2)$, y λ:[0,1]$\rightarrow$R^2. El resultado es 4/3.

Ejemplo 2. Se calcula la integral de línea del mismo campo vectorial, pero ahora a lo largo del camino $\mu(t) = (kt, k^2t^2)$ donde k es un número positivo, μ:[0, k^{-1}]$\rightarrow$R^2. El resultado es el mismo, igual a 4/3.

Conclusión: la integral de línea tiene la **propiedad (1)** de ser invariante de las reparametrizaciónes del camino sobre la que se integra el campo **F**.

Ejemplo 3. Se integra el mismo campo vectorial pero sobre una trayectoria inversa a la del ejemplo 1, $-\lambda(t) = (1- t, (1- t)^2)$. El resultado es $-$ 4/3

Conclusión: la integral de línea tiene la **propiedad (2)**

$$\int_{\lambda} \mathbf{F} \,.\, \mathrm{d}\lambda = \int_{-\lambda} \mathbf{F} \,.\, \mathrm{d}\lambda$$

es decir, la integral de línea de un campo **F** sobre el camino inverso $-\lambda$ es el negativo de la integral del campo **F** sobre λ.

Después de precisar estas dos propiedades, con el ejemplo que sigue muestra que para trayectorias distintas con los mismos puntos inicial y final la integral de línea del mismo campo vectorial tiene un resultado diferente.

> **Ejemplo 4**. Se calcula la integral de línea del mismo campo de los ejemplos anteriores, pero a lo largo de una nueva trayectoria $\nu(t) = (t, t^3)$, ν**:**[0,1]. El resultado es 5/4

Conclusión: la integral de línea de un mismo campo vectorial a lo largo de caminos distintos pero con puntos inicial $\lambda(a)$ y final $\lambda(b)$ iguales no nos da el mismo resultado. Esto hace suponer que la integral de línea de **F** sobre un camino dado, no sólo depende de los puntos inicial y final del camino, sino de la función misma que lo define.

Ahora muestra otros dos ejemplos donde se observa que para el mismo campo vectorial para dos trayectorias distintas con los mismos puntos inicial y final se obtiene el mismo resultado.

> **Ejemplo 5**. Se calcula la integral de línea de un nuevo campo vectorial **F**(x,y) = $(x + y^2, 2xy)$ sobre la trayectoria del ejemplo 1 ($\lambda(t) = (t, t^2)$, λ:[0,1]). El resultado es 3/2.

> **Ejemplo 6**. Se calcula la integral de línea del mismo campo vectorial del ejemplo 5, pero a lo largo de la trayectoria del ejemplo 4 ($\nu(t) = (t, t^3)$, ν**:**[0,1]). El resultado es 3/2.

Conclusión: Para este campo vectorial se obtiene el mismo resultado para dos caminos distintos pero con los mismos puntos inicial y final.

Después del ejemplo (6), el autor formula una pregunta central:

> [...] ¿la integral de línea de un campo **F** sobre un camino $\lambda:[a,b] \to R^2$ depende sólo de los puntos inicial $\lambda(a)$ y final $\lambda(b)$ del camino λ (como en los ejemplos 5 y 6), ó depende también de la función misma que define al camino (como los ejemplos 1 y 4)? Este es uno de los temas centrales a tratar en la próxima sección de este capítulo.

Antes de pasar al capítulo donde el autor responde esta pregunta, el texto formula un teorema que prueba las propiedades (1) y (2) de las integrales de línea. Luego, aparece otra secuencia de ejemplos, entre ellos, llama la atención uno en el cual se propone el campo un campo vectorial para el cual se calcula la integral de línea sobre una trayectoria cerrada simple.

Ejemplo 11. Consideremos el campo **F**: $R^2 \to R^2 - \{(0,0)\}$ dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

y λ_k sea el camino λ_k: $[0, k\pi] \to R^2$, $\lambda_k(t) = (r \cos t, r \operatorname{sen} t)$, donde $0 < k \leq 2$.
La integral de línea de este campo es igual a $k\pi$.

Conclusión: el resultado no depende de *r*. Este hecho discute el autor en el apartado donde trata aspectos topológicos.

Este campo vectorial en R^2, es equivalente a la forma diferencial *L* (cerrada) que se analiza en el texto de Courant para mostrar que la condición de la igualdad de las derivadas parciales es necesaria pero no suficiente para que *L* sea exacta. En este sentido, este ejemplo lo utiliza este texto para introducir un nuevo apartado "Independencia del camino, campos conservativos y funciones potenciales". Pero antes de discutir las condiciones *necesarias* y *suficientes* para que un campo vectorial sea *conservativo* formula el siguiente teorema:

Teorema 7.4.1 Sea **F**: $U \subseteq R^n \to R^n$ un campo de clase C^k $(k \geq 0)$ definido en el conjunto abierto *U* de R^n. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. **F** es el campo gradiente de una función f: $U \subseteq R^n \to R^n$ de clase C^{k+1}.
2. La integral $\int_\lambda \mathbf{F} \cdot d\lambda$ del campo **F** a lo largo del camino $\lambda:[a,b] \to R^n$ seccionalmente C^1 (tal que $\lambda([a,b]) \subset U$), depende solamente del punto inicial $\lambda(a)$ y final $\lambda(b)$ del camino λ.
3. La integral $\int_\lambda \mathbf{F} \cdot d\lambda$ del campo **F** a lo largo del camino $\lambda:[a,b] \to R^n$ cerrado seccionalmente C^1 (de modo que $\lambda([a,b]) \subset U$) es igual a cero.

Luego, se resuelven otra secuencia de ejemplos donde en cada uno de ellos se especifica si el campo es conservativo o no lo es, en los ejemplos sólo se verifica si se cumple con alguna de las condiciones de este teorema. En este momento se vuelve a discutir el ejemplo (11) para el caso $k = 2$, y se concluye en que la integral de línea de este campo vectorial sobre un camino *cerrado simple* es igual a $2\pi \neq 0$, es decir, no es conservativo.

A diferencia del texto de Courant, este texto hace explícito el hecho de que la igualdad de las derivadas parciales son una condición necesaria pero no suficiente para determinar que un campo vectorial sea conservativo y formula el siguiente teorema:

> **Teorema 7.4.2** (Condiciones necesarias para que un campo sea conservativo) Sea $\mathbf{F}$: $U \subseteq \mathrm{R}^n \rightarrow \mathrm{R}^n$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, ..., F_n)$ un campo de clase C^k, $k \geq 1$, definido en el conjunto abierto U de R^n. Si $\mathbf{F}$ es conservativo entonces
>
> $$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(\mathbf{x})$$
>
> para $x \in U$, $1 \leq i < j \leq n$.

Este teorema da pie para comprobar si las derivadas cruzadas de las funciones coordenadas de **F** son iguales. Se comprueba que son iguales y, sin embargo, la integral de línea sobre una trayectoria cerrada simple no da cero sino que es igual a 2π. En este momento se establece que las condiciones (1) son *necesarias* pero no *suficientes* para afirmar que un campo es conservativo.

Los argumentos que vierte el autor para seguir analizando el ejemplo (11) son ilustrativos e interesantes, a la letra dice:

> Un hecho sobre el que llamamos la atención es que la propiedad del campo **F** de ser conservativo, es una propiedad *global*: se pide que haya una función f definida donde está definido el campo **F**, y que en todo U se tenga que **F** es el campo gradiente de f. Por otra parte, la propiedad establecida en el teorema 7.4.2, que está expresada en términos de derivadas parciales de las funciones coordenadas de **F**, es una propiedad *local*: tales derivadas parciales establecen un comportamiento determinado del campo **F** en los alrededores del punto en que ocurre la igualdad de las derivadas parciales. No es extraño pues que, en principio, estas dos propiedades *no sean equivalentes*. Lo que sí podemos esperar que acontezca, en base a la observación hecha en este párrafo, es que la propiedad establecida en el teorema 7.4.2 garantice *localmente* que el campo **F** es conservativo.

Esta explicación aclara lo que en el texto de Courant se caracterizó como un vacío explicativo, esto es, que en el contexto de la integral de línea la forma diferencial lineal debe satisfacer una propiedad **global**, a diferencia del concepto de diferencial total fuera para el análisis local de funciones. De hecho, este manual fue muy significativo para lograr elaborar el mapa conceptual de la *integral de línea* que presentamos en este trabajo en el capítulo 4.

Después de estas aclaraciones el autor define, en un nuevo teorema, a un *campo vectorial localmente conservativo*:

> **Teorema 7.4.3** Sea $\mathbf{F}$: $U \subseteq \mathrm{R}^n \rightarrow \mathrm{R}^n$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, ..., F_n)$ un campo de clase C^k, $k \geq 1$, definido en el abierto U de R^n. Suponga que

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(\mathbf{x})$$

para $x \in U$, $1 \leq i < j \leq n$. Entonces **F** es localmente conservativo.

De la demostración de este teorema, podemos concluir, de que la igualdad de las derivadas parciales asegura la existencia de una *función potencial* $f(x, y)$ de **F** en una bola B_{p}, pero para lograr que la integral de línea del campo vectorial **F** sea independiente del camino sobre el que se integra, se necesita que la imagen del camino λ esté contenida en el *abierto* B_{p} donde está definida la función potencial $f(x, y)$. El autor explica que, *la bola B_p tiene justamente la propiedad de que habiendo dos puntos* **p** y **q** *de ella, la recta que los une queda completamente dentro de la bola*. Por lo tanto, "la forma" del abierto U juega un papel importante en el hecho de que las condiciones de igualdad entre las derivadas parciales de las funciones componentes del campo **F**, sean condiciones suficientes para que el campo sea conservativo.

Luego, hay explicaciones de *conjuntos convexos*, y se concluye en que el conjunto abierto U: $\mathrm{R}^2 - \{(0,0)\}$ del ejemplo (11) no es un conjunto convexo. Bien vale la pena reproducir los comentarios del autor antes de enunciar el teorema central de todos estos contenidos:

> Como ya apuntábamos, la forma del dominio U (su estructura topológica) donde está definido **F** es fundamental para tener la afirmación recíproca del teorema 7.4.2. Ya se vio que si U es convexo, las condiciones mencionadas son suficientes. Sin embargo, esta suficiencia se tiene también con condiciones más generales que la convexidad de U. La propiedad topológica que debe tener U es la de "conexidad simple".
>
> En el espacio R^2, podemos pensar de manera intuitiva un conjunto simplemente conexo como un conjunto que "no tiene hoyos".

En este texto, a diferencia del texto de Courant, al abierto U se le denomina dominio. Este término posibilita un mejor entendimiento de la insuficiencia de las condiciones de igualdad de las derivadas parciales.

> **Teorema 7.4.5** Sea **F**: $U \subseteq \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, ..., F_n)$ un campo de clase C^k, $k \geq 1$, definido en el abierto U de R^n. Una condición necesaria y suficiente para que el campo sea conservativo es que
>
> $$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(\mathbf{x})$$
>
> para $x \in U$, $1 \leq i < j \leq n$. Entonces **F** es localmente conservativo.

Este teorema es el equivalente al que se formula en el texto de Courant para las diferenciales exactas.

Toda la secuencia de ejemplos y explicaciones se centran en definir condiciones necesarias y suficientes para que un campo sea conservativo, pero no se dice nada de los campos no conservativos. A pesar de que en los ejemplos en los que la integral de línea no es independiente del camino de integración se dice que no son conservativos, no existe ninguna explicación puntual de las características de estos campos. Desde nuestro juicio, los campos no conservativos, son para los que la fórmula de Green no es igual a 0.

Al igual que en los otros textos, después de abordar la integral de línea centrada en campos conservativos, el autor formula el teorema de Green. El tema se introduce diciendo: *En esta sección estudiaremos uno de los resultados clásicos del cálculo* R^n *el cual relaciona integrales de línea con integrales dobles*. Pero antes de enunciar el teorema aclara que: *Las dificultades técnicas para precisar el enunciado de este teorema comienzan al tratar de definir con rigor el tipo de regiones* $S \subseteq R^2$ *en las cuales el resultado es válido*.

> **Teorema Teorema de Green** Sea $\mathbf{F}: U \subseteq \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, $\mathbf{F} = (M, N)$ un campo de clase C^1 definido en el abierto U de R^2. Sea $\mathrm{S} \subset U$ una región compacta con su frontera $\partial\mathrm{S}^+$ positivamente orientada. Entonces
>
> $$\int_{\partial S^+} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\lambda} = \int_S \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$
>
> donde λ es un camino seccionalmente C^1 cuya traza es $\partial\mathrm{S}^+$.

Inmediatamente después de este teorema se explicita: *La demostración de este teorema en toda su generalidad, como decíamos anteriormente, cae fuera de los alcances de este libro*. Por lo anterior, se enuncian teoremas para regiones, en palabras del autor, *más o menos decentes*.

Consideraciones finales

a) Es un libro con una estructura de discurso totalmente diferente al de Courant. La forma en que alterna: ejemplos, explicaciones, preguntas, teoremas y definiciones obedecen a una visión constructivista del aprendizaje. De acuerdo con Gil Pérez (1993), las distintas posturas del constructivismo, en una forma u otra, consideran el aprendizaje es un cambio conceptual que contempla las siguientes etapas:

- una fase de elicitación de las concepciones de los alumnos,
- una fase de reestructuración, con la creación de conflictos cognitivos que generen la insatisfacción con dichas concepciones y preparen para la introducción de otros conceptos, y
- una fase de aplicación que proporcione oportunidades a los alumnos para usar las nuevas ideas en diferentes contextos.

En la exposición del concepto de integral de línea Pita sigue esta secuencia de etapas:

- Al inicio, propone ejercicios resueltos con las concepciones con que se cuentan hasta ese momento.
- Luego, formula conclusiones y preguntas que no se pueden responder sin un nuevo conocimiento, es decir, propicia conflictos cognitivos.

- Formula teoremas y definiciones que son el nuevo conocimiento que ayuda a responder las preguntas planteadas.
- Finalmente, propone ejercicios en distintos contextos, donde se aplican los nuevos conocimientos

Esta nueva forma de estructurar el discurso explicativo en el texto, denota que el autor Claudio Pita cuenta con una formación en didáctica de las matemáticas.

b) A pesar de ser un texto con un alto grado de lenguaje formal, explica en lenguaje natural muchos aspectos que la formalidad elimina. Por ejemplo, el hecho de que un campo conservativo modifica la visión de diferencial total que tenía una connotación local.

c) Es el único texto que presenta una interpretación gráfica de las integrales de línea y propone problemas cuya solución necesariamente requiere de esta interpretación.

3.4.2 Textos con un discurso algebraico

Como se especificó en la clasificación de los textos, en esta categoría se analizó el texto: *Cálculo diferencial e integral* de William Anthony Granville (1982). Este libro trata por única vez el concepto de integral de línea en el capítulo que aborda la integral definida, en el apartado "Cálculo de área cuando las ecuaciones de la curva se dan de forma paramétrica". La explicación de esta noción se reduce a proponer una fórmula como un procedimiento algorítmico que calcula áreas contenidas en curvas cerradas simples, cuando éstas se dan de forma paramétrica. El tratamiento es corto y consiste en lo siguiente:

> Sean las ecuaciones de una curva en la forma paramétrica:
>
> $$x = f(t), \quad y = \phi(t).$$
>
> Entonces tenemos que $y = \phi(t)$ y $dx = f'(t)dt$. Por lo tanto,
>
> $$\text{Area} = \int_a^b y\,dx = \int_{t_1}^{t_2} \phi(t) f'(t)\,dt,$$
>
> en donde $t = t_1$ cuando $x = a$ y $t = t_2$ cuando $x = b$.

Luego, se resuelve el mismo ejemplo que presenta el manual de Courant. Sin embargo, aquí la fórmula para calcular el área difiere de la que se utiliza en este texto, fórmula que se expresó como:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (xdy - ydx)$$

Es interesante observar la solución que desarrolla el autor a este cálculo.

EJEMPLO. Hallar el área de la elipse cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = a \cos \phi, \qquad y = b \operatorname{sen} \phi.$$

Solución. Aquí

$$y = b \operatorname{sen} \phi$$
$$dx = - a \operatorname{sen} \phi \, d\phi.$$

Cuando $x = 0$, $\phi = \frac{1}{2}\pi$;
y cuando $x = a$, $\phi = 0$

Sustituyendo estos valores en (1), obtenemos

$$\frac{\text{Area}}{4} = \int_0^a y dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} ab \operatorname{sen}^2 \phi d\phi = \frac{\pi ab}{4}.$$

Luego el área total es igual a πab.

La solución es una aplicación algorítmica de la fórmula propuesta, ni la explicación ni el proceso de solución posibilitan la construcción de algún significado del concepto de *integral de línea*. A pie de página el autor sugiere: *El lector puede ver en tratados de Cálculo más avanzados, la demostración rigurosa de esta sustitución*.

3.4.3 Textos editados a finales del siglo XX

Como se especificó en la clasificación de textos, las obras revisadas en esta categoría son: *Cálculo* de R. Larson, et al. (1999), *Cálculo con Geometría Analítica* de Thomas G. y R. Finney (1986), *Cálculo con Geometría Analítica* de E. Sowkowski (1989), *Cálculo. Trascendentes tempranas* de J. Stewart (2002).

Los contenidos y la forma de las explicaciones de estos manuales son una muestra de la homogenización del *discurso matemático escolar* actual. Este hecho se puede constatar desde los índices del capítulo en que se aborda la noción de *integral de línea* hasta la profundidad y extensión de sus explicaciones. Como muestra de este discurso institucionalizado que se reproduce, no sólo en las páginas de estos manuales sino en los programas de estudio, se presenta la relación temática de los textos Larson, et al., de Sowkowski y de Stewart .

La semejanza en temas y su secuencia es obvia. De manera esquemática presentamos, de acuerdo al integrando, las integrales de línea que abarcan estos libros:

Integrales de línea de funciones de varias variables:

$$\int_C f(x,y)\,ds$$
$$\int_C f(x,y)\,dx$$
$$\int_C f(x,y)\,dy$$

Integrales de línea campos vectoriales:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$

Integrales de línea formas diferenciales lineales:

$$\int_C (M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy)$$

Estos tres tipos de integrales de línea que, de acuerdo al integrando, difieren en su significado, se explican en pocas páginas, de allí que su tratamiento cumpla un rol informativo más que explicativo. Por ejemplo, el texto de Larson et al., destina a estos complejos temas 11 páginas (pp. 1302-1312); el manual de Swokowski 9 páginas (pp. 934-942).

Dado que los textos de esta categoría se parecen en lo esencial, tomaremos la obra de Larson et al. para realizar el seguimiento del discurso explicativo.

En el apartado "Integrales de línea", se introduce el tema con un comentario breve acerca del campo gravitatorio:

> Una propiedad del campo gravitatorio es que, bajo ciertas restricciones, el trabajo realizado por la gravedad sobre un objeto que se mueve de un punto a otro es independiente del camino que siga el objeto. Una de las restricciones es que el **camino** sea una curva suave.

Luego se explica de manera breve las *curvas suaves a trozos* y se desarrolla un ejemplo de parametrización de estas curvas. Después se recuerda las integrales simples y dobles para introducir un nuevo tipo de integrales.

> En las integrales simples
>
> $\int_a^b f(x)\,dx$ Integral sobre el intervalo $[a, b]$
>
> se integraba sobre un intervalo $[a, b]$. En las integrales dobles
>
> $\iint_R f(x,y)\,dA$ Integral sobre una región R
>
> se integraba sobre una región R del plano. En esta sección definiremos un nuevo tipo de integral, llamada la integral de línea,
>
> $\int_C f(x,y)\,ds$ Integral sobre una curva C
>
> en la que se integra sobre una curva C suave a trozos.

Con esta breve preparación del tema y después de resolver de manera aproximada el cálculo de la masa total de un cable se da la siguiente definición:

> DEFINICIÓN DE INTEGRAL DE LÍNEA
>
> Si f está definida en una región que contiene una curva suave C de longitud finita, la **integral de línea de *f* sobre *C*** se define como
>
> $$\int_C f(x,y)\,ds = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i \qquad \textit{Plano}$$
>
> o por
>
> $$\int_C f(x,y,z)\,ds = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i \qquad \textit{Espacio}$$
>
> siempre que el límite exista.

Esta definición de la integral de línea de funciones de dos y tres variables, sólo cumple una exigencia formal del discurso oficializado, porque no se resuelve ningún caso que amerite tal formalidad. En consecuencia antes de presentar ejemplos, los autores advierten:

> [...] la evaluación de una integral de línea es conveniente efectuarla pasando a una integral definida. Se puede demostrar que si *f* es continua el límite anterior existe y tiene el mismo valor para todas las parametrizaciones suaves de C.

Sin mayor explicación, se establece que para calcular una integral de línea sobre una curva plana C dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, se utiliza

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt\ ,$$

y se enuncia el siguiente teorema

> TEOREMA 14.4 CÁLCULO DE UNA INTEGRAL DE LÍNEA COMO INTEGRAL DEFINIDA
>
> Sea f continua en una región que contiene a la curva suave C. Si C viene dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, con $a \le t \le b$, entonces
>
> $$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$
>
> Si C viene dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, con $a \le t \le b$, entonces
>
> $$\int_C f(x,y,z) = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt$$

Este teorema se da sin demostración, sólo se recuerda que si $f(x,y,z) = 1$, entonces, la integral de línea calcula la longitud del arco de la curva C. Acto seguido, se muestran ejemplos de cálculos algorítmicos (sin significado alguno) de integrales de línea sobre curvas parametrizadas.

Sin previa reflexión aparece un nuevo apartado "Integrales de línea de campos vectoriales". En esta sección se argumenta que una de las aplicaciones más importantes de la integral de línea es el cálculo del trabajo realizado sobre un objeto que se mueve en un campo de fuerzas.

> Para ver cómo una integral de línea sirve para calcular el trabajo en un campo de fuerzas **F**, consideremos un objeto que se mueve por una curva C (Figura 14.13). Para hallar el trabajo efectuado por la fuerza basta tener en cuenta la parte de la fuerza que actúa en la misma dirección en que se mueve el objeto (o en la opuesta). Eso significa que en cada punto de C hemos de considerar la proyección $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ del vector fuerza sobre el vector tangente unitario **T**. Sobre un pequeño subarco de longitud Δs_i el incremento de trabajo es
>
> $$\Delta W_i = \text{(fuerza) (distancia)}$$

$$\approx [\mathbf{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot \mathbf{T}(x_i, y_i, z_i)]\, \Delta s_i$$

donde (x_i, y_i, z_i) es un punto de ese subarco. Por lo tanto, el trabajo total viene dado por la integral

$$W = \int_C \mathbf{F}(x,y,z) \,.\, \mathbf{T}(x,y,z)\, ds$$

En esta explicación se comete un error importante, desde el punto de vista de la termodinámica, el símbolo ΔW_i , significaría que un sistema contiene un trabajo inicial y uno final, lo cual no tiene sentido, porque el trabajo es un proceso no un estado.

Después de particularizar la integral de línea al cálculo del trabajo, se generaliza el concepto al de integral de línea de un **campo vectorial** y aparece la definición:

DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL DE LÍNEA DE UN CAMPO VECTORIAL

Sea **F** un campo vectorial continuo definido sobre una curva suave C dada por $\mathbf{r}(t)$, con $a \leq t \leq b$. La integral de línea de **F** sobre C se define como

$$\int_C \mathbf{F} \,.\, d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \,.\, \mathbf{T}\, ds = \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \,.\, \mathbf{r}'(t)\, dt$$

A esta definición le siguen: un ejemplo de cálculo del trabajo realizado por un campo de fuerzas **F** sobre una trayectoria en el espacio x, y, z; y otro, para mostrar que el signo del valor de la integral depende de la orientación de la curva.

Comentarios preliminares

a) Sin mediar explicación alguna se transita de la noción de integral de línea de una función de dos variables independientes a la integral de línea de un campo vectorial. Esto constituye una *ruptura en la secuencia lógica* del discurso, porque las integrales:

$$\int_C f(x,y)ds \qquad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

no tienen el mismo significado ni tratamiento formal.

b) Cuando se introduce el contexto del trabajo como aplicación de la integral de línea, se dice: *sobre un pequeño subarco de longitud Δs_i el incremento del trabajo es ΔW_i*. Esta afirmación es incorrecta en dos sentidos:

- Matemáticamente ΔW_i significa la diferencia de valores del trabajo en dos puntos de la trayectoria, lo cual no tiene sentido porque el trabajo no se define como la función potencial de **F**.
- En la física clásica, sólo cuando el trabajo se realiza en condiciones ideales (sin rozamiento) y en campos conservativos, el concepto "trabajo" coincide con la

noción de energía, la cual sí es conceptualmente la *función potencial* del campo vectorial **F**. De allí que la integral de línea sea un recurso matemático para definir la ley de la conservación de la energía (ver el texto de Pita, pp. 771-776)

c) La expresión correcta para expresar el trabajo cuando un punto se mueve en un campo **F**, a través de una trayectoria del punto *p* al punto *q*, es

$$W_{pq} \approx \sum_{i=1}^{n} \left\| \widetilde{\mathbf{F}}_i \right\| \left\| \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1} \right\|$$

d) En las explicaciones que se vierten en este texto, el contexto del trabajo no aporta compresión, pero si confusión de conceptos, no sólo físicos, sino también matemáticos. En este sentido, contextualizar el conocimiento matemático no siempre es un recurso didáctico adecuado, porque si se carece de conocimientos del contexto (en este caso de física clásica), el concepto matemático se vuelve más incomprensible.

c) Los ejemplos que se resuelven, son una aplicación algorítmica de las definiciones. A diferencia de los textos de Courant y de Pita, los ejercicios que se presentan no aportan ni siquiera dudas.

Regresando al texto, en una nueva sección titulada “Integrales de línea en forma diferencial”, se aborda las integrales de línea de formas diferenciales lineales. Pero, desde el título se percibe la ausencia del significado de estas integrales. Tanto las explicaciones como los ejercicios que resuelven se presentan como una forma de resolver integrales de línea de campos vectoriales.

A partir de la definición de la integral de línea de un campo vectorial, se pasa a la integral de línea de una forma diferencial lineal de la siguiente manera:

> Si **F** es un campo vectorial de la forma **F**(x,y) = M**i** + N**j** , y C viene dada por **r**(t) = x(t)**i** + y(t)**j** , entonces **F.** d**r** se escribe a menudo como Mdx + Ndy.

$$\int_C \mathbf{F}.\, d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}.\frac{dr}{dt}\,dt$$

$$= \int_a^b (M\mathbf{i} + N\mathbf{j}) \,.\, (x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j})\, dt$$

$$= \int_a^b \left(M\frac{dx}{dt} + N\frac{dy}{dt} \right) dt$$

$$= \int_C (M\,dx + N\,dy)$$

Luego se proponen un par de ejemplos que consisten en calcular de manera algorítmica integrales de línea en *forma diferencial*. Para ello se parametriza la forma diferencial y se realiza la integración.

Consideraciones preliminares

a) Se introduce el concepto de integral de línea de una forma diferencial lineal, sin ninguna explicación, sólo se dice que **F.** d**r** se escribe a menudo como $Mdx + N\,dy$. Esto es, no se explica que la integral de $\int_C (M\,dx + N\,dy)$ es parte del estudio de las ecuaciones diferenciales, y en el capítulo en que tratan este tema no se retoma el concepto de integral de línea. Este hecho muestra un proceso de *desincretización* que produce compartimentos aislados sin posibilidad de establecer vínculos entre ellos.

b) En los manuales de esta categoría se abordan: integrales de línea de funciones de dos o más variables, integrales de línea de campos vectoriales e integrales de línea de formas diferenciales lineales; temas que requieren minuciosidad y profundidad para poder significarlos, pero si su tratamiento es superficial, como es el caso ¿cuál es el sentido de abordarlos?

c) El contexto de aplicación de las nociones del cálculo puede jugar un papel importante para el aprendizaje significativo, pero en este caso, la noción trabajo, en lugar de ser un elemento de motivación se vuelve un obstáculo. Para un estudiante sin conocimientos previos de física, lejos de favorecer la comprensión del concepto de integral de línea, este contexto le ocasionará mayores dificultades cognitivas. En los textos de Courant y de Pita, las aplicaciones en la física se consideran como temas que requieren conocimientos más avanzados para entenderlas.

d) Dado que el concepto de integral de línea dentro del análisis vectorial lo convierte en un concepto complejo, los teoremas y definiciones se dan sin demostración ni reflexión, sólo se realizan cálculos algorítmicos de integrales de línea que no aportan explicación alguna a esta noción.

Finalmente, en el apartado “Campos vectoriales conservativos e independencia del camino” se discute el “Teorema fundamental de las integrales de línea”. Antes del enunciado se repite el comentario con que el texto inicia el concepto de integral de línea: el trabajo realizado por el campo gravitatorio sobre un objeto que se mueve entre dos puntos es independiente del camino seguido. Después de retomar esta idea suelta, que no se discute en toda la trama expuesta, se dice: *estudiaremos una importante generalización de este hecho, el teorema fundamental de las integrales de línea*.

TEOREMA 14.5 TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS INTEGRALES DE LÍNEA

Sea C una curva suave a trozos, contenida en una región abierta R, dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \qquad a \leq t \leq b$$

Si $\mathbf{F}(x,y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es conservativo en R, y además M y N son continuas en R, entonces

$$\int_C \mathbf{F}.\, d\mathbf{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

donde f es una función potencial de $\mathbf{F}$, es decir, $\mathbf{F}(x,y) = \nabla f(x,y)$.

A este enunciado le siguen dos ejercicios resueltos: uno para un campo conservativo sobre una trayectoria que está en el plano, y otro, para una trayectoria en el espacio.

Para enunciar el teorema sobre la independencia del camino de las integrales de línea de campos conservativos, simplemente se dice que si **F** es un campo conservativo entonces la integral de línea de este campo es independiente del camino de integración. Luego, sin propiciar alguna necesidad que amerite introducir el concepto de región conexa, se emite una explicación coloquial y errónea de esta región.

TEOREMA 14.6 INDEPENDENCIA DEL CAMINO Y CAMPOS CONSERVATIVOS

Si **F** es continuo en una región abierta y conexa, la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

es independiente del camino si y sólo si **F** es conservativo.

En este teorema la condición de que la región sea abierta y conexa es innecesaria porque si **F** es conservativo su dominio cumple con tales requerimientos. Lo que sucede es que nunca se aborda las *condiciones necesarias* y *suficientes* para que un campo sea conservativo, en tal caso, el conocimiento que se presenta es confuso. En suma, el discurso explicativo se reduce a dar información sesgada y no aporta explicación significativa (al lector) acerca las integrales de línea.

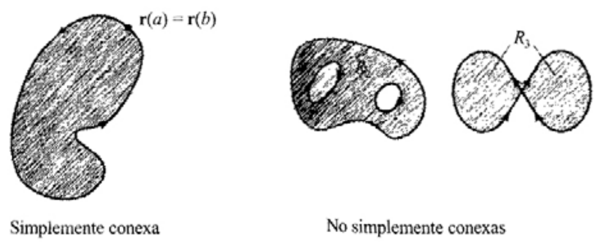
Después de estas explicaciones de las integrales de línea de funciones de dos o más variables, de campos vectoriales y de formas diferenciales lineales, en otra sección del mismo capítulo, presenta el teorema de Green:

TEOREMA 14.8 TEOREMA DE GREEN

Sea una región R del plano simplemente conexa cuyo borde es una curva C suave a trozos y orientada en sentido antihorario. Si M y N tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a R, entonces

$$\int_C Mdx + Ndy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

En este enunciado se exige que la región (cuyo borde es la curva *C*) del plano sobre la que se integra sea *simplemente conexa* y da ejemplos de regiones simplemente conexas con las siguientes gráficas:



Sin embargo, el enunciado del teorema de Green del texto de Pita establece que la condición para la región sobre la que se integra de la siguiente manera: *Sea* $S \subset U$ *una región compacta con su frontera* ∂S^{+} *positivamente orientada*. Es decir, la restricción para la región es que esta sea compacta lo cual es conceptualmente diferente. Como regiones compactas presenta las siguientes gráficas:

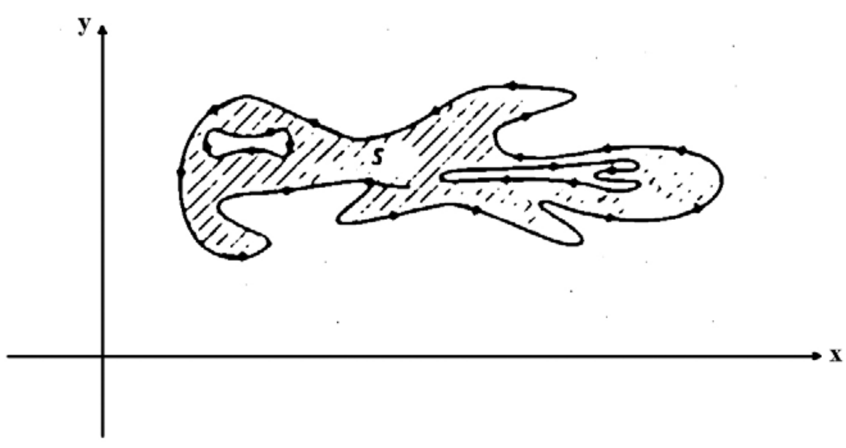


Figura 2. Una región *S* en la que el Teorema de Green es válido.

Como vemos hay contradicción entre las regiones que presenta Larson y las que presenta Claudio Pita como regiones sobre las que es válido el teorema de Green. Es decir, no es equivalente *una región simplemente conexa* a una *región compacta*. Si se quiere evadir el terreno de la topología es mejor exigir, de manera sencilla, que M y N sean continuas en la región abierta R que está limitada por C, como lo hace el texto de James Stewart.

Por otro lado, tanto en el comentario que introduce el teorema como en el mismo enunciado del teorema no se explicita lo que se está integrando. Esto se origina porque si se especificara la naturaleza del integrando, tendrían que establecer el enunciado para campos vectoriales o para formas diferenciales lineales, pero como en su discurso se omite la diferencia entre estos dos contextos, es evidente que el enunciado quede incierto en cuanto al integrando. Razón por la cual el teorema de Green se reduce a un procedimiento algorítmico para encontrar áreas contenidas en curvas simples.

Lo importante de este teorema es que la fórmula de Green siempre será igual a cero para toda *diferencial exacta*. Es decir, el teorema es importante justo para *diferenciales no exactas*. De hecho, este manual propone el cálculo de áreas dentro de curvas cerradas como sigue:

> Un caso interesante ocurre cuando $\partial N/\partial x - \partial M/\partial y = 1$, en tal caso tenemos
>
> $$\begin{aligned}\int_C M dx + N dy &= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_R 1 dA \\ &= \textit{área de la región } R\end{aligned}$$
>
> Entre muchas elecciones posibles de M y N que satisfacen la condición requerida, la elección $M = -y/2$, $N = x/2$ produce la siguiente integral de línea para el área de la región R.

Después de esta explicación se establece el siguiente teorema:

> TEOREMA 14.9 UNA INTEGRAL DE LÍNEA PARA EL ÁREA
>
> Si R es una región del plano acotada por una curva simple C, cerrada y suave a trozos, orientada en sentido antihorario, el área R viene dada por
>
> $$A = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx$$

Como aplicación de este teorema se resuelve el mismo ejercicio que aparece en los textos revisados y es el de calcular el área de una elipse. Tanto en el enunciado como en el ejercicio de aplicación no se especifica la naturaleza del integrando, es decir, no se establece que el integrando es una forma diferencial lineal pero que no es exacta.

En otro ejercicio que titulan *Cálculo del trabajo usando el teorema de Green*, se calcula el trabajo realizado por un campo de fuerzas y se obtiene un resultado diferente a cero, pero llama la atención que no se especifica que esto significa que el campo de fuerzas no es *conservativo*.

Consideraciones finales

a) Dado el bajo nivel de profundidad con que se aborda la noción de integral de línea en estos manuales, el seguimiento de sus explicaciones no aportaron ningún elemento para poder ubicar y entender la diferencia fundamental entre la integral de línea de campos vectoriales conservativos y de campos vectoriales no conservativos.

- La integral de línea de campos conservativos sobre una curva cerrada simple es igual a 0,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

- La integral de línea de campos no conservativos sobre una curva cerrada simple es diferente de 0,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq 0 .$$

b) En las primeras páginas del texto de Larson et. hay una pequeña sección donde los autores presentan las características de la edición que se revisó, en ella dicen:

> Esta edición presenta 3,500 figuras generadas por ordenador, lo que garantiza su realismo, precisión y claridad; este nuevo arte de diseño gráfico ayudará al estudiante a visualizar los conceptos matemáticos sin dificultad. Las superficies y sólidos de figuras tridimensionales complicadas se han creado usando transparencia, perspectiva, iluminación y sombras, de forma que adquieran un aspecto lo más realistaposible.

Sin embargo, para el caso de las integrales de línea, solamente se presentan gráficas que muestran trayectorias y campos vectoriales, pero no se reflexiona acerca del significado gráfico de la integral de línea de funciones de dos variables $f(x,y)$, como el área bajo la curva que forman los valores de la función siguiendo la trayectoria de la integración. Como tampoco se le da interpretación gráfica a la integral de línea donde $f(x,y) = 1$:

$$\int_C 1 ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \text{longitud de arco de la curva } C$$

Para la cual mostramos una interpretación gráfica en el capítulo 5 de este trabajo.

3.5 Conclusiones acerca del concepto de integral de línea y el teorema fundamental de las integrales de línea

En el seguimiento del discurso para ubicar obstáculos didácticos se hicieron señalamientos puntuales en cada momento que se consideró pertinente, en esta parte del trabajo presentamos conclusiones generales para los textos analizados.

a) La presentación axiomática, del texto de R. Courant, ordena los conceptos en una secuencia estricta que elimina del discurso explicaciones que no le son necesarias para demostrar las implicaciones de la integral de línea de las diferenciales exactas. Por ejemplo, para una forma diferencial lineal, después de la parametrización de la curva de integración, con sustento en la regla de la cadena *L*, necesariamente se transforma en *df(t)*, expresión que simboliza dos diferenciales distintas, sin embargo el texto centra sus explicaciones en demostrar las condiciones *necesarias* y *suficientes* para reconocer una *diferencial exacta*. Para las *formas diferenciales lineales no exactas* no existen explicaciones ni ejemplos.

b) La postura epistemológica de R. Courant es muy clara, no recurre a representaciones gráficas porque no las considera un recurso didáctico, sino un obstáculo para la construcción del pensamiento matemático. El autor sostiene que lo gráfico no puede ser demostración ni justificación, con lo cual estamos de acuerdo, pero eso no justifica la eliminación de representaciones gráficas como un recurso que contribuye a la construcción de significados de un concepto. Al respecto, R. Duval en su artículo "Semiosis y noesis" dice:

> A través de la historia podemos observar que la formación del pensamiento matemático es inseparable del desarrollo de símbolos. Por esta razón, en los textos de matemáticas, además del lenguaje natural, se utilizan distintos sistemas de expresión, como son: los variados sistemas de escritura para los números, las notaciones simbólicas para expresar relaciones y operaciones, las figuras geométricas, los gráficos cartesianos, los diagramas, las tablas, etc. Esta utilización de diferentes representaciones semióticos tienen una implicación importante para el desarrollo de actividades cognitivas, porque los distintos sistemas de símbolos deben evocar en los estudiantes significaciones relativas al concepto representado. Es crucial entender la inutilidad de los símbolos y sus manipulaciones cuando no se tiene ningún significado del concepto. Si bien, confundir el concepto representado con su representante puede constituir un obstáculo para el aprendizaje porque el estudiante no podrá establecer otros significados relacionados a otras representaciones, no es la solución dejar de utilizar distintas representaciones del concepto, sino propiciar el tránsito entre estas representaciones lo que favorecerá la actividad cognitiva.

c) En el manual de R. Courant, el desarrollo de las explicaciones del concepto de integral de línea de formas diferenciales lineales es minucioso y aborda con profundidad conceptos que en los textos actuales no están presentes. A partir del análisis de este discurso explicativo que pudimos identificar y entender matemáticamente el significado de una "diferencial inexacta", término que se utiliza en los libros de termodinámica, pero que en los textos de cálculo no aparece (*vacío explicativo*).

d) El manual de Claudio Pita presenta un discurso explicativo que obedece a una visión constructivista del aprendizaje. Este elemento lo vuelve un texto diferente y con mayores alcances explicativos. De hecho, este libro fue significativo para esclarecer y especificar los obstáculos didácticos de los otros textos.

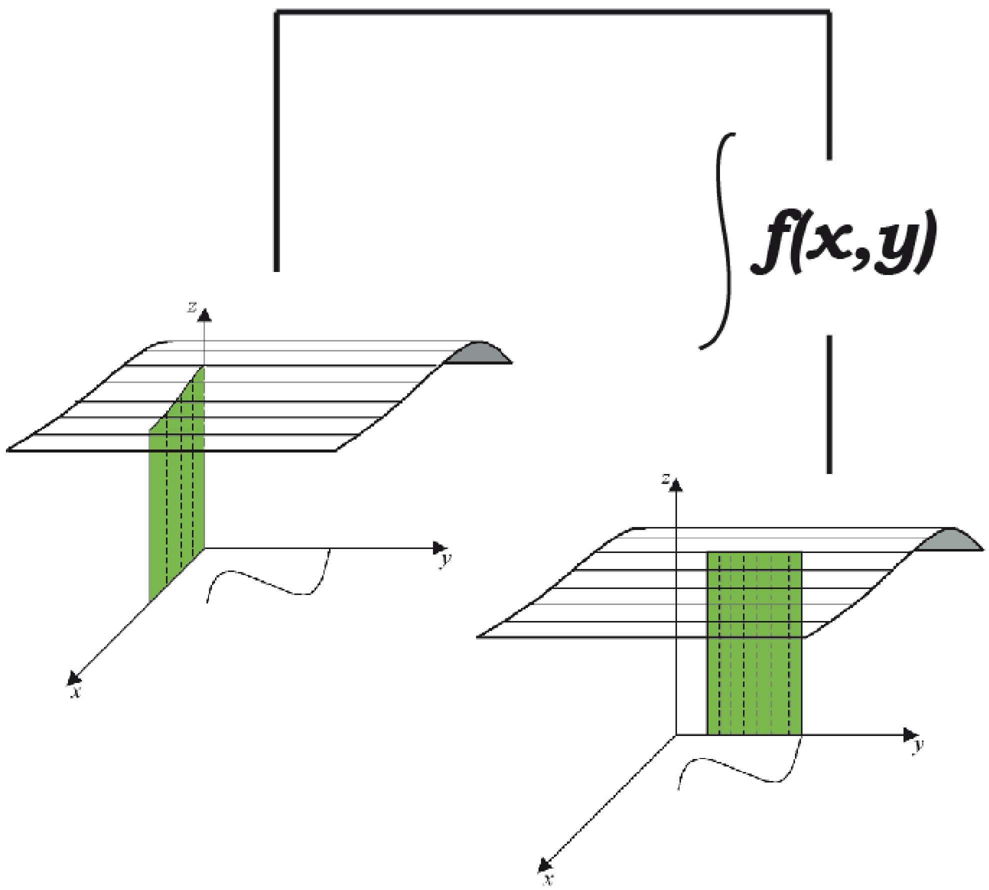
d) De la historia de la matemática se sabe que, en el siglo XVIII las explicaciones y definiciones de los conceptos del cálculo estaban fuertemente impregnados del lenguaje de la geometría, pero como en el siglo XIX, la revisión cada vez más minuciosa de los fundamentos del análisis, reforzada por la difusión de las geometrías no euclídeas, lleva a los geómetras a un análisis crítico de los principios y de los fundamentos de la geometría clásica, esto a su vez, originó el abandono de explicaciones geométricas en los textos de cálculo de principios del siglo XX. Sin embargo, en los textos actuales (segunda mitad del siglo XX), debido al avance de los recursos computacionales y a la influencia de las investigaciones en didáctica de las matemáticas, podemos constatar la recuperación del recurso gráfico como una herramienta didáctica-intuitiva. Pero en estos textos las gráficas solamente juegan un papel ilustrativo y no un recurso didáctico que muestre lo que la formalidad esconde.

e) En los textos clasificados como actuales, el discurso explicativo de las integrales de línea está atomizado y compartamentalizado, de tal suerte que no son textos adecuados para entender la integral de línea. En el mejor de los casos, el lector se quedará con la idea de que la integral de línea es un procedimiento algorítmico para calcular quien sabe qué. De hecho, el seguimiento del discurso de estos textos no aportó elemento alguno para orientar nuestra búsqueda de la *diferencial inexacta*.

f) En general, los textos revisados presentan ejemplos, teoremas, demostraciones y definiciones con el objetivo de establecer las condiciones *necesarias y suficientes* para que un campo **F** sea conservativo. En consecuencia el estudiante se quedará con la idea de que la integral de línea sirve para identificar campos conservativos. Y luego, cuando se encuentre con el teorema de Green debe descontextualizar este concepto porque este teorema tiene sentido justo para campos que no son conservativos. Además, queda fuera del discurso la naturaleza matemática de estos campos.

Capítulo 4.

Mapa conceptual de la integral de línea



4. Mapa conceptual de la integral de línea

Los mapas conceptuales, en su sentido más amplio, son diagramas que indican relaciones entre conceptos. Específicamente, aquéllos pueden ser vistos como diagramas jerárquicos cuyo propósito es reflejar la organización conceptual de una noción compleja por la cantidad de relaciones que requiere su entendimiento.

La comprensión significativa de la noción de integral de línea depende de la naturaleza del integrando y de la trayectoria de integración. Esto es, no podemos generalizar su significado aunque desde la formalidad el proceso de integración se defina como la existencia del límite de las sumas de Riemann. La definición formal del concepto de integral definida esconde las diferencias sustanciales entre los significados de las integrales de línea de:

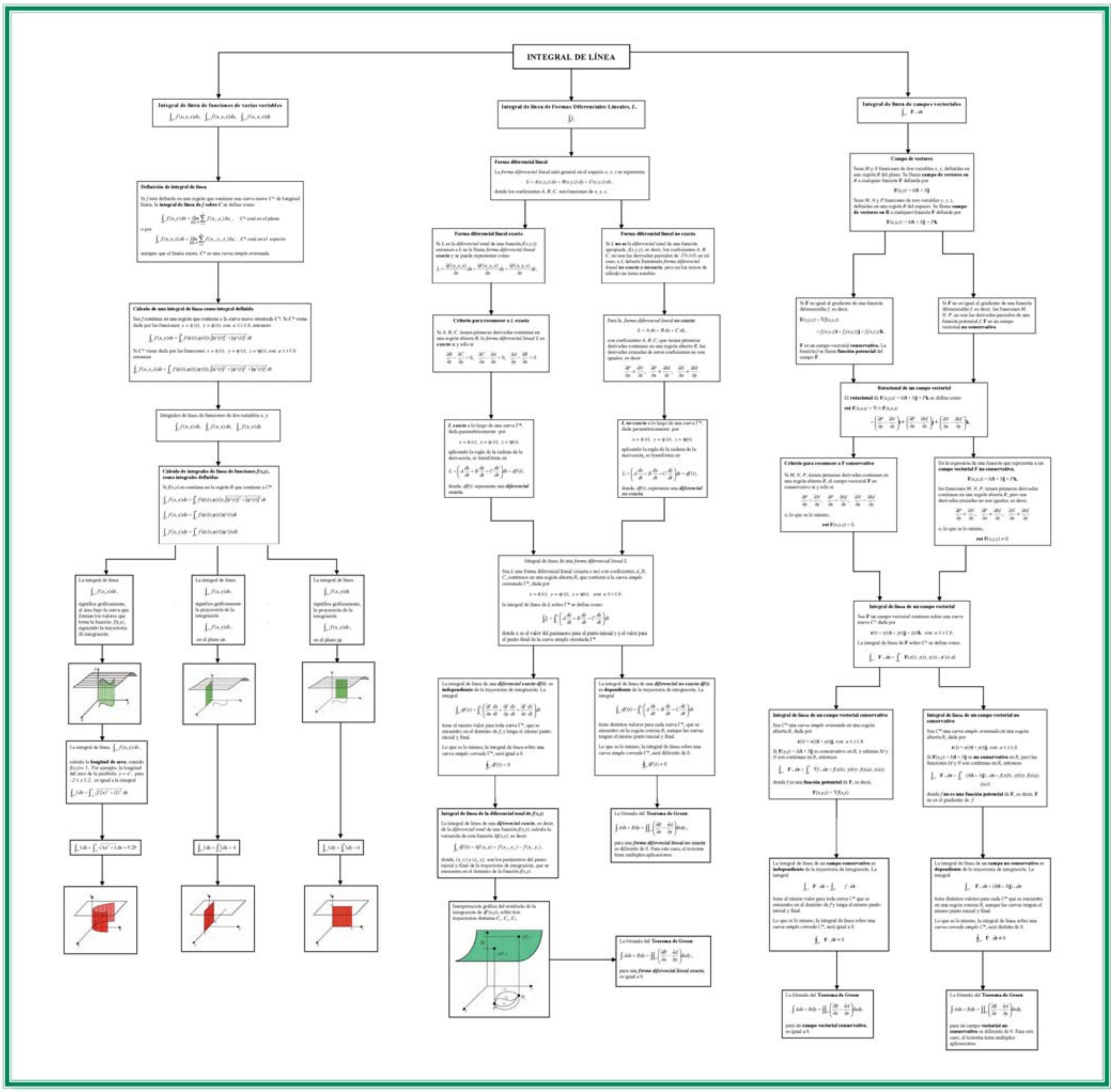
- funciones de dos o mas variables independientes,
- formas diferenciales lineales, y
- campos vectoriales.

Estas diferencias sólo se harán explícitas con un acercamiento gráfico o en el contexto de problemas de otras disciplinas. La construcción del conocimiento matemático a través de la historia nos muestra que la geometría y la física jugaron un papel importante en la generación de las primeras ideas del cálculo. En este sentido, es preciso recuperar las interpretaciones gráficas de los conceptos que fueron abandonadas por la visión formal de la matemática.

En el proceso de transposición didáctica es inevitable la *desincretización* del saber, esto es, se produce un registro de conocimientos parciales, cada uno de los cuales se explican como entes autónomos, fuera de un contexto general. En este sentido, los mapas conceptuales constituyen una estrategia didáctica que revierte este proceso porque establece vínculos entre conceptos organizándolos de manera jerárquica. Además, esta herramienta podría ser una forma clara de explicitar los alcances y las limitaciones de los contenidos que los textos abarcan respecto a un conocimiento específico.

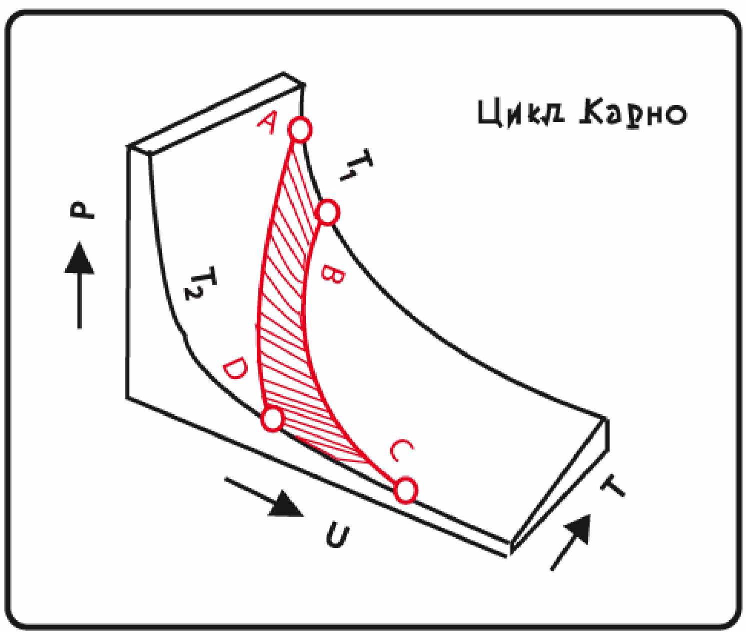
Es importante señalar que, los mapas conceptuales registran necesariamente los obstáculos epistemológicos que son intrínsecos al desarrollo del conocimiento mismo, porque al jerarquizar un conocimiento desde lo general hasta sus particularidades conceptuales se transita por distintos niveles de abstracción que implican una evolución (saltos cualitativos) en los significados y definiciones formales del mismo. En suma, el objetivo central de estos mapas es establecer la estructura lógica interna de la noción que se quiere abordar.

El siguiente mapa que se presenta es el resultado del análisis minucioso del discurso explicativo de varios textos, todas las vertientes de la integral de línea que en él se organizaron no son tratados en un solo manual.


INTEGRAL DE LÍNEA
Integral de línea de funciones de varias variables
Integral de línea de Formas Diferenciales Lineales, L.
Integral de línea de campos vectoriales

Capítulo 5.

La integral de línea y el trabajo en la termodinámica



5. La diferencial inexacta y el enunciado del primer principio de la termodinámica

La termodinámica surge como una ciencia experimental, antes del enunciado de la primera ley de la termodinámica, los experimentos que realiza James Prescott Joule (1842-1867), establecen la equivalencia entre el trabajo mecánico y el calor. Estos experimentos, son cruciales para formular la ley de la conservación de la energía, porque demuestran que la energía no se gasta o desaparece cuando se realiza trabajo mecánico, sino que se transforma en calor. A partir de la equivalencia, entre trabajo mecánico y calor, que se prueba experimentalmente se construye una teoría termodinámica con los recursos del cálculo y, en este caso concreto, es importante el concepto de integral de línea. Sin embargo, las explicaciones y los términos que se utilizan en la termodinámica son excluidos del discurso de los textos de cálculo. En el caso que nos ocupa, podemos ver dos discursos paralelos para referirse a los mismos conceptos, por un lado en la termodinámica hasta la actualidad, aparecen términos como: "cantidad infinitamente pequeña", "cambio elemental", "diferencial inexacta", entre muchos otros, pero en los textos de cálculo este lenguaje desaparece. En el texto de R. Courant, en el apartado donde se define analíticamente la integral, el autor expresa:

> [...] no debe tolerarse el misticismo del siglo XVIII de considerar *dx* como un "infinitamente pequeño" o "cantidad infinitesimal", o de considerar la integral como una "suma de un número infinito de cantidades infinitamente pequeñas". Tal concepción está desprovista de significado claro y oscurece lo que anteriormente se ha formulado con precisión.

Esta clara descalificación del lenguaje inicial del cálculo es producto de su formalización con base al concepto de límite, después de este hecho, dentro de la comunidad matemática se abandonan las primeras ideas de esta disciplina, las cuales en efecto, para problemas donde la complejidad así lo requiere no nos serían propicias. Pero, a partir de las investigaciones en didáctica de las matemáticas se sabe que la enseñanza del cálculo que deshecha las primeras ideas de los conceptos que corresponden a las etapas históricas de su construcción, no logra formar en los estudiantes un pensamiento formal y, en el mejor de los casos, éstos sólo adquieren una habilidad algorítmica. En concreto, el lenguaje formal, preciso y axiomático vuelve inaccesible los conceptos para la mayoría de los estudiantes. Los teoremas y definiciones formales deben pensarse como una meta del aprendizaje de la matemática pero no el inicio.

Por otro lado, a pesar de que en los manuales de cálculo estas ideas intuitivas han desaparecido, en los textos de otras disciplinas se conserva como un lenguaje paralelo. Por ejemplo, en el texto de Fisicoquímica de Ira Levine (1983), como en la mayoría de textos de esta disciplina, encontramos:

> Para un proceso infinitesimal, la ecuación, $\Delta U = q + w$, se transforma en:
>
> $$dU = dq + dw \quad \text{sistema cerrado}$$

> donde, dU es el cambio infinitesimal en la energía del sistema, en un proceso en que se cede al sistema una cantidad infinitesimal de calor dq y se realiza sobre él un trabajo infinitesimal dw.

Incluso, la integral de línea para un proceso cíclico se explica de manera coloquial con las siguientes expresiones:

> El trabajo adiabático total del ciclo $w_{\text{ad.cic}}$ es la suma de los elementos dw para cada una de las partes infinitesimales del ciclo, y esta suma es la integral de línea alrededor del ciclo.

Como se percibe con claridad, en estas explicaciones se utiliza una terminología que en el lenguaje actual de los matemáticos ha desaparecido. Los cambios que se han producido en los conceptos del cálculo las otras disciplinas no los han asimilado porque evidentemente para los problemas que resuelven no les es necesario. Este hecho paradójico tiene serias repercusiones en los estudiantes porque dificulta la integración de los conceptos del cálculo a la construcción de los conceptos básicos de la termodinámica clásica. Además, es una de las causas por las que el estudiante aprende cálculo y termodinámica como dos disciplinas ajenas. En resumen, en muchas disciplinas usuarias de las matemáticas, las primeras ideas y términos del cálculo sobreviven a su formalización. Si se eliminara la terminología matemática "intuitiva" de las explicaciones termodinámicas, éstas se volverían inaccesibles para un estudiante de química.

En suma, en el contexto de la matemática misma y en el contexto de las ciencias aplicadas, existe un discurso paralelo del cálculo que dificulta:

- El aprendizaje del cálculo
- El aprendizaje de la disciplina de aplicación
- La integración de los conceptos del cálculo a la resolución de problemas de otras disciplinas.

5.1 La diferencial inexacta y el primer principio de la termodinámica

En los textos de fisicoquímica, en el enunciado de la primera ley de la termodinámica, se utiliza el término de *diferencial inexacta* para representar una "pequeña cantidad de trabajo" realizado por un sistema o una "pequeña cantidad de calor" que recibe el sistema; el símbolo con el que se representa varía de acuerdo al autor del texto. En la revisión de algunos manuales se encontraron los siguientes: $\delta f(t)$ en el texto ruso de A. I. Gerasimov, et al (1970) , $đf(t)$ en el texto de G. Castellan (1998), $d'f(t)$ en el texto de L. García-Colín (1976). Sin embargo, como se puede ver en el análisis del discurso explicativo de los textos (capítulo 3), el nombre de *diferencial inexacta* y, en consecuencia, su símbolo no aparecen en los textos de cálculo.

Expondremos algunos enunciados de los manuales de termodinámica para visualizar el contexto en el cual se utiliza el término de "diferencial inexacta", el cual no existe en el *discurso matemático escolar del cálculo*. En el libro *Fisicoquímica* de Castellan, que es ampliamente utilizado en las licenciaturas de química, se explica este término de manera coloquial pero matemáticamente confuso, textualmente dice:

> El trabajo total producido en una expansión de V_1 a V_2 es la integral
>
> $$W = \int_1^2 \text{đ}W = \int_{V_1}^{V_2} P_{op} dV \ ,$$
>
> Una vez conocido P_{op} como una función del volumen, la evaluación de la integral sigue los métodos corrientes.
>
> Obsérvese que la integración de la diferencial $\text{đ}W$ no se realiza con los métodos ordinarios. La integral de una diferencial ordinaria *dx* entre límites proporciona una diferencia finita, Δx,
>
> $$\int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1 = \Delta x,$$
>
> pero la integral de $\text{đ}W$ es la suma de pequeñas cantidades de trabajo producidas a lo largo de cada elemento de la trayectoria,
>
> $$\int_1^2 \text{đ}W = W \ ,$$
>
> donde W es la cantidad total de trabajo producido. Esto explica por qué empleamos đ en vez de *d* como es costumbre. La diferencial $\text{đ}W$ es una *diferencial inexacta*, *dx* es una *diferencial exacta*.

En el cálculo de funciones de una variable independiente no tiene sentido hablar de *diferencial exacta*, como vimos en el capítulo anterior este es un concepto que tiene sentido para funciones de varias variables. Entendemos que el alcance de estos libros no posibilitan explicaciones matemáticas de profundidad, sin embargo, pensamos que sus autores carecen de una explicación matemática acertada de este hecho, en consecuencia, repiten un discurso mutilado y confuso producto del *proceso de transposición didáctica*.

Lo que realmente se desea explicar en la cita anterior es que, el trabajo no es la *función potencial* de un *campo de fuerzas*. En el contexto de la física, la función potencial de un campo de fuerzas es la **energía potencial**, es decir, en la expresión:

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = W_{1\to 2} \, ,$$

la función $f(x, y)$ no es el trabajo, sino la energía potencial, pero a la diferencia de valores de esta energía se le llama trabajo. Bajo esta observación $\text{đ}W$ no significa la diferencial de la función trabajo, sino una "pequeña cantidad" de trabajo realizado que en valor –pero no conceptualmente- es igual al cambio de la energía interna del sistema.

En termodinámica un sistema cerrado (que no intercambia masa), se caracteriza por la energía interna del sistema $U(T, V)$ que depende de la temperatura y el volumen, si se produce un cambio de la energía interna ΔU significa que el sistema cedió o recibió energía. El intercambio de energía del sistema con el exterior es en forma de calor y trabajo.

Esta pequeña aclaración es necesaria para seguir analizando este manual. En otro apartado, antes del enunciado del primer principio de la termodinámica se explica:

> El trabajo producido en una transformación cíclica es la suma de las pequeñas cantidades de trabajo $đW$ producidas en cada etapa del ciclo. De forma análoga, el calor transferido desde el entorno en una transformación cíclica es la suma de las pequeñas cantidades de calor $đQ$, transferidas en cada etapa del ciclo. Estas sumas se simbolizan mediante las *integrales cíclicas* de $đW$ y $đQ$:
>
> $$W_{cicl} = \oint đW, \quad Q_{cicl} = \oint đQ.$$
>
> En general, W_{cicl} y Q_{cicl} no son cero, una de las características de las funciones de trayectoria.

En estas líneas se dice que las integrales cíclicas de $đW$ y de $đQ$ *en general no son cero*, pero no se explica por qué. Además se habla de funciones de trayectoria, término no reconocido en los textos de cálculo. Estos dos vacíos conceptuales los explicaremos a la luz del concepto de integral de línea.

Primero, lo que omiten estos textos es que el símbolo $đW$ se utiliza para representar la expresión: $\mathbf{F} \,.\, d\mathbf{r}$ en el contexto del cálculo vectorial. En tal caso, la expresión "en general no son cero" significa que sólo en el caso en que el trabajo se realice por un campo de fuerzas conservativo serán igual a cero, pero para los casos en que el campo de fuerzas no sea conservativo la integral de línea de este campo será diferente de cero.

En este trabajo de investigación, producto del estudio de la integral de línea, se pudo reconstruir la explicación que en los manuales de termodinámica están ausentes:

- Cuando el trabajo es realizado por un campo de fuerzas conservativo se tiene que la integral cíclica es igual a cero:

  $$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint đW = 0$$

- En la termodinámica que es una ciencia experimental, un proceso de trabajo real (no ideal) participan fuerzas no conservativas (la fricción), en este caso la integral cíclica no es igual a cero.

  $$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint đW \neq 0$$

Por otro lado, el término "función de trayectoria" tiene un significado crucial. Resulta que si un sistema cerrado realiza trabajo mecánico real (por tanto es inevitable la fricción), se producirá una disminución de la energía interna del sistema, pero esta energía no se desaparece o se "gasta", sino que se transforma en calor y su valor es equivalente al trabajo que se realizó. En otras palabras, la fricción transformará la energía en calor y su valor dependerá de la trayectoria del desplazamiento.

Matemáticamente para reflexión anterior se encontró la explicación a partir del análisis del texto de Courant. Recordemos parte de las explicaciones de la integral de línea:

> La razón por la que tiene sentido considerar una forma diferencial L, incluso cuando no es una diferencial exacta, es que, a lo largo de cualquier curva C dada paramétricamente en la forma
>
> $$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$
>
> L se transforma en la diferencial
>
> $$L = \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} \right) dt \quad (5)$$
>
> de una función de una sola variable. Esta función, es simplemente la dada por la integral indefinida
>
> $$\int L = \int \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} \right) dt. \quad (6)$$

De estas explicaciones se entiende que existe la integral indefinida $f(t)$ de formas diferenciales L aún cuando éstas no sean exactas, pero esta función tiene dos significados totalmente distintos:

- La integral indefinida $f(t)$ de un campo de fuerzas conservativo es la función potencial de este campo es decir: $\nabla f = \mathbf{F}$.

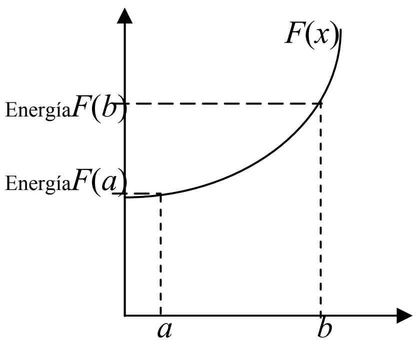
- La integral indefinida $f(t)$ de un campo de fuerzas no conservativo es una función cuya naturaleza no se especifica en los textos de cálculo pero en la termodinámica se llama "función de trayectoria".

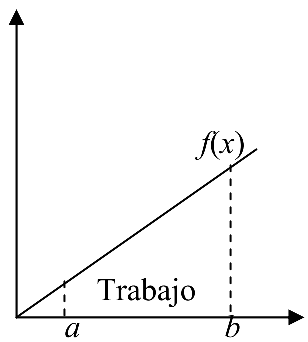
Además de lo señalado, en la fisicoquímica tienen distinto significado el concepto *energía* y los conceptos de *trabajo* y *calor*. Si bien, es permitido decir que el trabajo y el calor son formas de energía, esto no es exacto. El trabajo y el calor, a diferencia de la energía interna de un sistema, son procesos y no estados; en tal sentido, no es correcto decir que un sistema contiene trabajo, sino que realiza trabajo; como tampoco se puede hablar del contenido de calor de un sistema, el calor también es un proceso de intercambio de energía (Bravo, A. S., 1997). En otras palabras un sistema contiene energía interna U pero no contiene trabajo ni calor. Bajo esta perspectiva, en esta disciplina el *área bajo la curva de la función* que se integra es el *trabajo*, pero la *función primitiva* es la *energía*. En términos matemáticos, tenemos que a partir del teorema fundamental del cálculo se establece:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$, y $F(x)$ es la primitiva de esta función, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Delta F(x)\,, \quad (1) \qquad \text{donde } F'(x) = f(x).$$

Como se expuso en el capítulo anterior, la interpretación gráfica de la expresión (1) es la siguiente:





$\Delta F(x)$ – *diferencia de estados* área bajo la curva- *proceso*

En el cálculo, el área bajo la curva de $f(x)$ es lo mismo que $\Delta F(x)$, pero en la termodinámica el área bajo la curva $f(x)$, representa el trabajo (un proceso), pero la diferencia de valores de $F(x)$ representa el cambio de energía (cambio de estado). Por ello, por ejemplo, en el texto *Termodinámica Química* de M. X. Rarapetianz (1975, pp.35-36), se dice que para un proceso isobárico (a presión constante), la integral para calcular el trabajo está dada por:

$$W = \int_1^2 P\,dV = P(V_2 - V_1) = PV_2 - PV_1\,,$$

donde el producto $P(V_2 - V_1)$ es el trabajo realizado por el sistema, pero el producto de PV_2 y PV_1 son la energía interna del sistema en los estados 1 y 2. Esto quiere decir que la primitiva de la función presión P es la función energía interna U. Como ya lo señalamos, en la física la *función potencial* del campo gravitacional es la *energía potencial*.

Ahora analizaremos el discurso del texto *Introducción a la termodinámica clásica* de Leopoldo García-Colín Scherer (1976), este autor antes de explicar la *diferencial inexacta*, establece lo siguiente:

> *La condición necesaria y suficiente para que una forma diferencial sea exacta es que la integral de línea a lo largo de una curva en la región donde está definida, sea independiente de la elección particular de dicha curva:*

$$M(X,Y) = \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)_Y \qquad N(X;Y) = \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)_X .$$

Como M y N son, por hipótesis, funciones continuas

$$\frac{\partial M}{\partial Y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial X\, \partial Y} = \frac{\partial N}{\partial X}$$

y la ecuación (4.20) es una condición necesaria y suficiente[1] para que una forma diferencial de dos variables del tipo (4.19), sea exacta. Si dZ es exacta decimos que Z es una función de punto,[...]

Después de esta explicación, el texto nos recomienda que se revise el segundo volumen del texto de Courant, a la letra dice: “La suficiencia, en este caso, no es trivial de obtener, por ejemplo, ver R. Courant, *Differential and Integral Calculus*, Vol. II”. Es cierto que el texto de Courant trata con minuciosidad el asunto de la suficiencia de la igualdad de las derivadas parciales pero esto no esclarece lo que se pretende, que es entender el significado de la *diferencial inexacta*.

A partir de la condición que establece para una diferencial exacta enuncia un lema cuyo objetivo es demostrar que la diferencial del trabajo $đW$ es inexacta.

LEMA. El trabajo ejecutado o absorbido por un sistema dado no es una diferencial exacta.

En efecto, consideremos un par de coordenadas conjugadas cualesquiera X y Y y seleccionemos arbitrariamente dos estados (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2). Calculemos el trabajo necesario para llevar al sistema de 1 a 2 por tres trayectorias distintas I, II y III (véase la fig. 4.3).

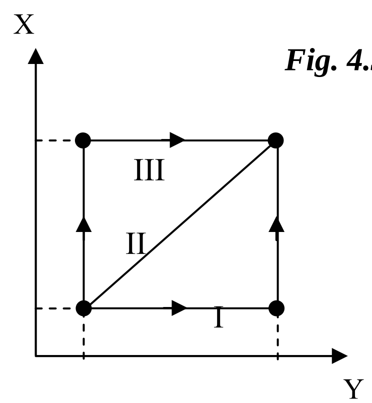


Fig. 4.3

Entonces

$$W_I = \int_{(I)} X\, dY = X_1(Y_2 - Y_1) + \text{cero} = \text{área bajo la curva 1-3}$$

$$W_{II} = \int_{(II)} X\, dY = \frac{(Y_2 - Y_1)(X_2 - X_1)}{2} + X_1(Y_2 - Y_1)$$
$$= \text{área } \Delta\ 123 + \text{área bajo 1-3}$$

$$W_{III} = \int_{(III)} X\, dY = X_2(Y_2 - Y_1) = \text{área bajo la curva 4-2}$$

Claramente

$$W_I \neq W_{II} \neq W_{III}$$

Luego dW es inexacta.

A toda diferencial inexacta de una función la denotaremos por d’ o $đ$.

Este procedimiento demuestra que la diferencial del trabajo es inexacta, pero no elucida que pueden darse dos casos distintos:

a) En el procedimiento de cálculo del trabajo se está considerando el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x,y) = (0, x)$, y tres trayectorias distintas (que tienen el mismo punto inicial y final) sobre el plano x,y. En este caso se calcula la integral de línea de la forma diferencial lineal:

$$L = M\,dx + N\,dy, \text{ donde el coeficiente } M = 0, \text{ y en coeficiente } N = x,$$

en este caso obtenemos la integral de línea $\int_C x\,dy$, la cual evidentemente dependerá de la trayectoria sobre la que se integra porque la forma diferencial lineal *L no es exacta*.

b) Pero si se toma un campo de fuerzas dado por $\mathbf{F}(x, y) = (y, x)$, sobre estas mismas trayectorias, tendríamos la integral de la forma diferencial lineal:

$L = y\ dx + x\ dy$, esta es una forma lineal diferencial lineal *exacta*, en tal caso la integral de línea: $\int_C y\,dx + x\,dy$, será independiente de la trayectoria.

El discurso matemático de los manuales de fisicoquímica presenta vacíos explicativos que en los textos de matemáticas difícilmente podremos elucidar porque en ellos no existen explicaciones de la *diferencial inexacta*, sólo se encontrará definida con precisión la *diferencial exacta*.

En resumen, si nos referimos al concepto específico de *trabajo*, se presentan dos situaciones distintas en función de la naturaleza del campo de fuerzas: a) para el cálculo del trabajo realizado por un campo vectorial conservativo, la integral de línea es independiente de la trayectoria y, b) cuando el campo vectorial no es conservativo, la integral de línea depende de la trayectoria de integración. En estos dos casos el integrando necesariamente es la expresión analítica de un campo vectorial y, si nos ubicamos fuera del cálculo vectorial, entonces el integrando es una forma diferencial lineal.

5.2 Enunciados de la primera ley de la termodinámica.

Lo fundamental del primer principio de la termodinámica es que la energía se conserva, esto se traduce en que si hay una disminución en la energía interna del sistema (termodinámico) no significa que ésta se gasta al realizar trabajo, sino que se transforma en *calor* porque el *trabajo real* es imposible sin fricción. La matematización de este hecho es mucho más compleja que las explicaciones fisicoquímicas, razón por la cual éstas son confusas.

🕮 El enunciado de la primera ley de la termodinámica en el manual de Castellan aparece como sigue:

> *Si un sistema se somete a cualquier transformación cíclica, el trabajo producido en el entorno es igual al calor que fluye desde el entorno*. En términos matemáticos, la primera ley establece que:
>
> $$\oint \text{đ}W = \oint \text{đ}Q \qquad \text{(para todos los ciclos).} \qquad (7.8)$$
>
> Reordenando la ecuación (7.8) es cierta, entonces el teorema matemático exige que el integrando sea la diferencial de alguna propiedad de estado del sistema. Esta propiedad del estado se denomina *energía*, *U*, del sistema y la diferencial es *dU*, definida por:
>
> $$dU = \text{đ}Q - \text{đ}W\ ;$$
>
> tenemos entonces
>
> $$\oint dU = 0 \qquad \text{(para todos los ciclos).}$$

Este enunciado significa que cuando un sistema cerrado realiza trabajo (sobre sus alrededores) en un proceso cíclico, éste será a expensas de la energía externa que recibe de sus alrededores en forma de calor. Es decir no existen motores que produzcan trabajo sin "gasto" de energía. En la termodinámica, teóricamente, un proceso cíclico adiabático es imposible. Es decir, un proceso adiabático donde: $\oint dU = \oint \text{đ}W = 0$ es imposible, incluso en situaciones ideales. Esto significa que no existen motores que produzcan un trabajo neto sobre sus alrededores sin consumo de energía.

Vale la pena reproducir un apartado que el texto titula "Interludio matemático: diferenciales exactas e inexactas"

> Una diferencial exacta se integra hasta una diferencia finita, $\int_1^2 dU = U_2 - U_1$, que es independiente de la trayectoria de integración. La integración de una diferencial inexacta da como resultado una cantidad total, $\int_1^2 \text{đ}Q = Q$, que depende de la trayectoria de integración. La integral cíclica de una diferencial inexacta es, por lo general, diferente de cero.
>
> Obsérvese que el simbolismo ΔQ y ΔW no *tiene significado*. Si ΔW significara algo, este significado sería $W_2 - W_1$; pero el sistema, ya sea en el estado inicial o en el final, no tiene ningún trabajo W_1 o W_2, ni ningún calor Q_1 o Q_2. El trabajo y el calor aparecen durante un cambio de estado. No son propiedades de estado, sino de la trayectoria.

Este interludio matemático es realmente una justificación fisicoquímica de los recursos matemáticos que no están presentes en los textos de cálculo.

📖 En el texto de García-Colín el enunciado se formula de otra manera:

> *Si el estado de un sistema adiabático se cambia mediante transferencia de trabajo con sus alrededores, la cantidad de trabajo requerida depende solamente de los estados final e inicial y no del dispositivo que produzca el trabajo, ni de los estados intermedios por los cuales pasa el sistema.*
>
> Como una consecuencia inmediata de esta ley podemos establecer una definición operacional de la llamada energía interna del sistema que denotaremos por U. En efecto, si dW_{ad} representa el trabajo adiabático transferido al (o por el) sistema en una porción infinitesimal del proceso, entonces, la integral
>
> $$\int_i^f dW_{\text{ad}}$$
>
> no depende de la trayectoria y, por lo tanto, es función solamente de los estados inicial i y final f. Definimos una función U tal que $U_{\text{f}} - U_{\text{i}}$ sea numéricamente igual al trabajo adiabático total transferido entre el sistema y sus alrededores. Entonces
>
> $$U_f - U_i \equiv \int_{\text{i}}^{f} dW_{\text{ad}} = W_{\text{ad}} \, .$$

El autor explica que en un proceso adiabático el sistema realiza trabajo sobre sus alrededores a expensas de su energía interna pero no hace explícito de que en este caso el valor del trabajo será independiente de la trayectoria de integración y que la *función potencial* es la energía interna.

Hay una ruptura en la secuencia lógica del discurso, primero, se expone una "demostración matemática" de que la diferencial del trabajo es una *diferencial inexacta* porque depende de la trayectoria de integración, y luego, en el enunciado de la primera ley (que presenta) el trabajo es independiente de la trayectoria de integración.

Además, para un proceso cíclico en un sistema cerrado el trabajo adiabático estará dado por:

$$\oint dU = \oint dW_{\text{ad}} = 0 \, ,$$

lo que significa que el trabajo realizado será independiente de la trayectoria. De la experiencia se sabe que un sistema adiabático (aislado térmicamente) no puede realizar trabajo neto en un proceso cíclico sin consumo de energía. Es decir, no existen máquinas que puedan crear energía.

📖 En el texto de Ira Levine, encontramos una formulación alternativa de la primera ley que pertenece al matemático Constantino Carathéodory

> En un sistema cerrado, el trabajo w_{ad} $(1 \to 2)$ es el mismo para todas las trayectorias adiabáticas entre los estados 1 y 2.

En este enunciado, que fue formulado en 1909, ya no encontramos símbolos ni alusiones a la diferencial del trabajo y del calor, pensamos que esto se debe a la formación matemática de Constantino Carathéodory. Desde la formalización del cálculo los matemáticos desecharon de su vocabulario términos como: "cantidad infinitesimal de trabajo", "diferencial inexacta". Sin embargo, Levine, a pesar de presentar este enunciado dice:

> Esta forma de expresar la primera ley no aportará nada esencialmente nuevo para nosotros, pero mejora los fundamentos lógicos de la termodinámica y, por tanto, se presenta en esta sección (que puede verse por encima)

En efecto, este enunciado no aporta información pero elimina de su enunciado términos que no son válidos dentro de la comunidad matemática. Tal como lo expresa el autor, el manual abandona este enunciado y regresa a la clásica expresión matemática de este principio termodinámico ($dU = dq + dw$) para seguir con su discurso. Además, ya había una explícita aclaración que decía: *el calor q y el trabajo w dependen del camino seguido para ir del estado 1 al 2*.

Estas rupturas en la secuencia lógica de las explicaciones de los textos no es trivial ni sencilla. Lo que sucede es que las disciplinas usuarias del cálculo construyeron explicaciones y expresiones matemáticas con las primeras ideas del cálculo, la reestructuración de este discurso sería innecesario porque no modificaría los resultados de esta ciencia experimental, lo único que obtendríamos es un discurso formal incomprensible.

5.3 Conclusiones finales

a) Como hemos mostrado en esta parte del trabajo, el discurso matemático de los manuales de fisicoquímica es sustancialmente distinto al discurso formal del cálculo. Las primeras ideas del cálculo como: "cambio infinitesimal", "pequeñas cantidades", "sumas de elementos dW", han desaparecido del discurso matemático formal.

b) Existe una dificultad real para simbolizar una cantidad de trabajo o de calor, porque en fisicoquímica el trabajo y el calor son procesos de intercambio de energía interna del sistema con sus alrededores y no estados energéticos. Es decir, no se puede representar por una función al *trabajo* ni al *calor*.

De la física se sabe que el trabajo es fuerza por distancia, si se tiene que la variación de la magnitud de la fuerza está dada por $f(x)$, entonces el trabajo realizado para un desplazamiento de un punto a a otro b se calcula con la integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = W\ (trabajo)\,,\quad \text{donde } F'(x) = f(x).$$

Pero en esta expresión $F(x)$ no representa a la función trabajo, sino a la función energía potencial. En otras palabras, el valor de la diferencia de la energía potencial es igual al trabajo realizado.

En termodinámica si se tiene una expansión, es decir el volumen del sistema cambia de V_1 a V_2, entonces el trabajo será:

$$\int_{V_1}^{V_2} \text{Presión}\, d\text{V} = U(\text{V}_2) - U(\text{V}_1) = \text{Trabajo},$$

Es decir, matemáticamente, la primitiva de la función presión no es la función trabajo, sino la energía interna del sistema, es decir, $U'(\text{V}) = \text{Presión}$.

c) En el contexto del cálculo vectorial las cosas tienen mayor complejidad. Si tenemos un campo **F**, con funciones coordenadas de clase C^1, entonces para calcular el trabajo realizado sobre una trayectoria $\boldsymbol{\lambda}$, resolvemos la integral de línea de **F** y tendremos dos casos:

- $W = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\lambda} = \int_1^2 grad\, f\, dt = \Delta U$, la integral indefinida $f(t)$ es la función potencial de **F.** En termodinámica a esta función $f(t)$ se le llama función de estado.

- $W = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\lambda} = \int_1^2 df(t) = \Delta U$, la integral indefinida $f(t)$ no es la función potencial de **F.** En termodinámica a esta función $f(t)$ se la llama función de trayectoria.

Como se ha señalado repetidas veces, esta dualidad de la función $f(t)$ no está explicada en los textos de cálculo.

d) Muchos docentes justifican la dificultad del aprendizaje de la termodinámica en que los estudiantes no saben cálculo, argumento que expone Ira Levine en el prólogo de su manual:

> Aunque el tratamiento es profundo, las matemáticas se han mantenido a un nivel razonable, procurando evitar desarrollos de matemática superior, a los cuales el estudiante no está acostumbrado.
>
> Por haber comprobado que muchos estudiantes que tratan de aprender fisicoquímica "chocan" con las matemáticas, he incluido algunos resúmenes breves de aquellos aspectos del cálculo importantes en fisicoquímica. Aunque podría objetarse que los estudiantes debieran conocer estas cosas antes de empezar a estudiar la fisicoquímica, lo cierto es que muchos de ellos han hecho poco uso del cálculo en cursos anteriores y, por tanto, han olvidado la mayoría del cálculo que aprendieron.

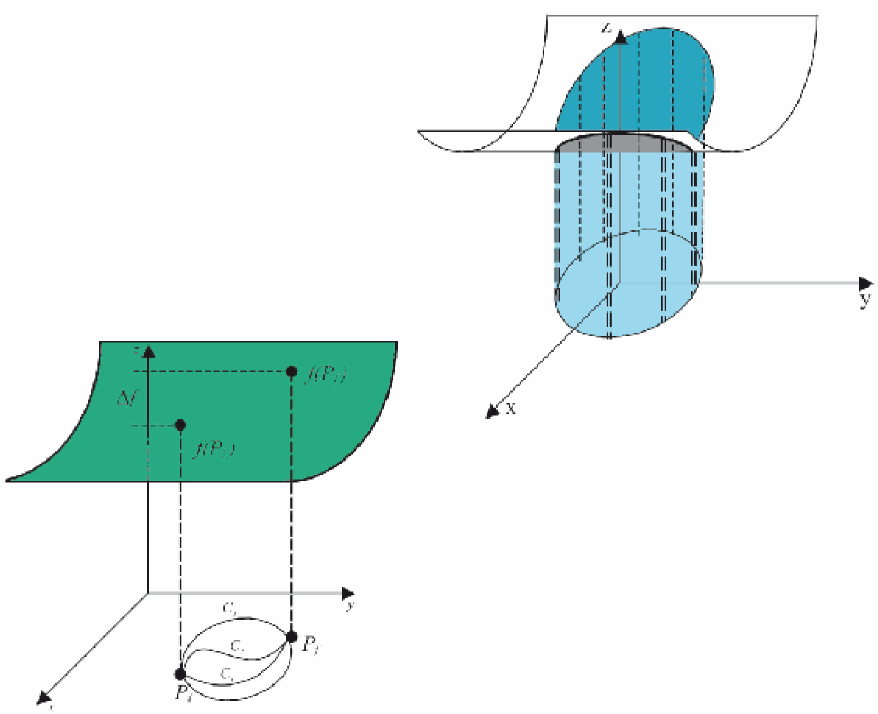
Estos argumentos no tienen ningún sustento desde la cognición, porque ni los profesores ni los autores de textos de fisicoquímica tienen claridad sobre la dificultad de representar el concepto de *trabajo* y de *calor* y mucho menos en sus explicaciones de la integral de línea.

Además, el concepto “diferencial inexacta” que con trivialidad explican no existe en los textos de cálculo.

e) En general, los libros de cálculo han eliminado de sus explicaciones *las formas diferenciales* que no son exactas (*diferenciales inexactas* en termodinámica), a pesar de que en el contexto del enunciado del principio de la conservación de la energía tienen una validez conceptual para diferenciar el trabajo y el calor (*funciones de trayectoria*) de la energía interna (*función de estado*) de un sistema. Este hecho es el resultado de la transposición didáctica que sufre la noción de *integral de línea* cuando es llevado a las páginas de los manuales de cálculo, efecto que obstaculiza la comprensión matemática de este concepto. Asimismo, los vacíos explicativos de los manuales de cálculo se convierten en obstáculos cognitivos para los estudiantes de fisicoquímica porque no encontrarán los términos *diferencial inexacta* y *función de trayectoria* ni sus explicaciones matemáticas. En suma, existe un lenguaje matemático en la matemática sustancialmente distinto al lenguaje matemático de los textos de fisicoquímica.

Capítulo 6.

Propuesta gráfica para la integral de línea



6. Propuesta gráfica para el concepto de integral de línea

En el análisis de los textos se encontraron situaciones, que a nuestro juicio, se pueden esclarecer desde una perspectiva gráfica. Estamos concientes de que tal acercamiento no puede generalizarse para significar la integral de línea de funciones de más de dos variables independientes, pero resuelve algunas preguntas y establece relaciones entre las distintas integrales de línea que se abordan en los textos. Es necesario establecer relaciones entre:

- Integrales de línea de funciones de dos variables: $\int_C f(x,y)\,ds$, $\int_{C^*} f(x,y)\,dx$, $\int_{C^*} f(x,y)\,dy$
- Integral de línea de una diferencial exacta: $\int_{C^*} L$
- Integral de línea de una forma diferencial lineal no exacta: $\int_{C^*} L$

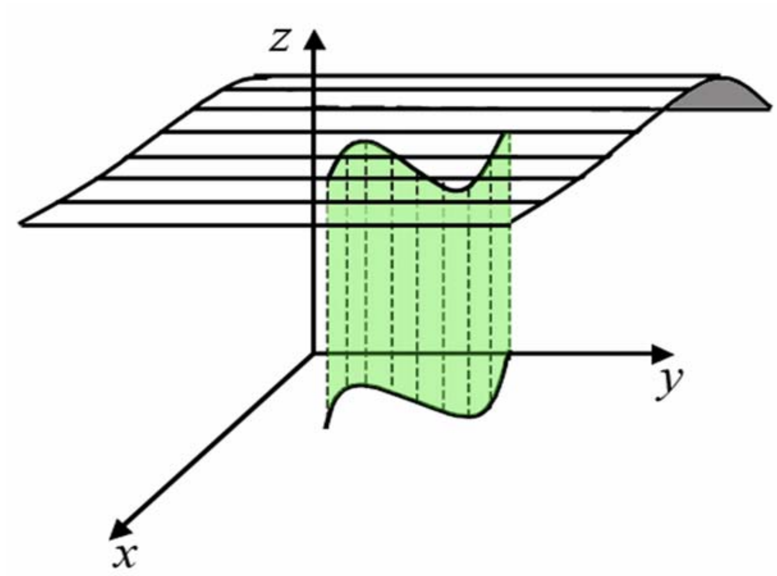
La presentación de las representaciones gráficas desarrolladas para explicar los conceptos relacionados con la integral de línea, se realiza bajo la forma de preguntas y respuestas, porque esta forma de exposición nos permite responder preguntas centrales que en los textos revisados no se explican con claridad. Las explicaciones gráficas que se presentan son sólo para funciones de dos variables independientes.

6.1 Integrales de línea de funciones de dos variables:

$$\int_{C^*} f(x,y)\,ds,\ \int_{C^*} f(x,y)\,dx,\ \int_{C^*} f(x,y)\,dy$$

¿Qué significa $\int_C f(x,y)\,ds$?

Si se tiene una función $f(x, y)$ continua en una región conexa R que contiene la *curva simple orientada* C*****, la integral de línea sobre la trayectoria C significa: el área bajo la curva que forman los valores de la función $f(x, y)$ siguiendo la trayectoria de integración desde el punto A hasta el punto B.



- Las integrales de línea de diferenciales exactas o de campos vectoriales que son el gradiente de una función potencial $f(x, y, z)$, no dependen de la trayectoria de integración.

- Las integrales de línea de diferenciales que no son exactas o de campos vectoriales que no son el gradiente de una función potencial $f(x, y, z)$, dependen de la trayectoria de integración.

En suma, los textos de esta categoría no presentan ninguna ventaja didáctica para explicar la integral de línea, porque en el contexto del análisis vectorial, los recursos del cálculo de funciones de varias variables que son fundamentales, quedan fuera de este contexto.

Además de lo señalado, cabe destacar que siendo abundante el recurso gráfico en estos textos (por ejemplo, en el texto de E. Larson, et al, los autores declaran que la edición que revisamos contiene 3,500 gráficas generadas por ordenador) no encontramos ninguna gráfica que pudiera aportar claridad a las explicaciones o algún significado importante al concepto que nos ocupa.

En general, los textos actuales, con el afán de ser gráficos, aplicativos y precisos, terminan por no explicar a profundidad la integral de línea. Si bien, las definiciones y teoremas se enuncian de manera formal, las explicaciones y ejemplos no cubren las preguntas centrales de este concepto. El objetivo de estos textos: presentar un discurso intuitivo (gráfico) y preciso (formal), se traduce en un discurso híbrido que abandona lo axiomático, que es central en la precisión de las definiciones, y utiliza lo gráfico como un recurso de ilustración, es decir, las gráficas se limitan a mostrar, en la mayoría de los casos, trayectorias y campos vectoriales, pero no una interpretación gráfica de la integral línea como área bajo la curva.

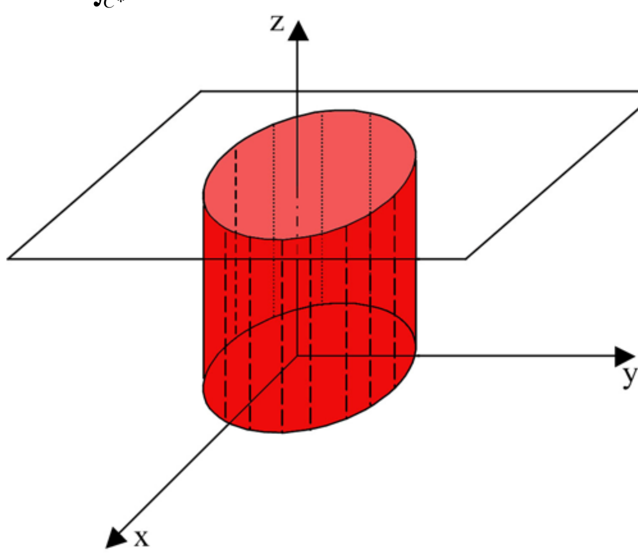
Si bien se pudiera argumentar que se obvia una interpretación gráfica de la integral de línea porque el significado gráfico de la integral definida como el área bajo la curva limita el entendimiento de la integración de *funciones generales*, en estos textos, tanto en el cálculo de la integral de línea como en el cálculo de integrales definidas de funciones de una variable independiente, los ejercicios y problemas que se resuelven se limitan a calcular integrales de funciones diferenciables y se calcula la integral definida con ayuda del Teorema Fundamental del Cálculo; justamente, la integral definida de este tipo de funciones no representa dificultad alguna para ser interpretada como el área bajo la curva.

¿Por qué para $f(x, y) = 1$ la integral de línea calcula la longitud de curva?

$$\int_{C^*} f(x,y)\,ds = longitud\ de\ la\ curva\ C^*$$

La propuesta gráfica para significar el hecho de que si $f(x, y) = 1$ la integral de línea calcula la longitud de curva, es la siguiente:

$$\int_{C^*} f(x,y)\,ds = longitud\ de\ la\ curva\ C^*$$



La integral de línea que calcula la longitud de la curva C^*, en términos gráficos, está calculando el área de la pared del cilindro que tiene como base la circunferencia unitaria C^*, y cuya altura está dada por la función $f(x, y) = 1$, en consecuencia, el área lateral es igual en valor a la longitud de la circunferencia dada.

¿Por qué se parametriza la curva sobre la que se integra?

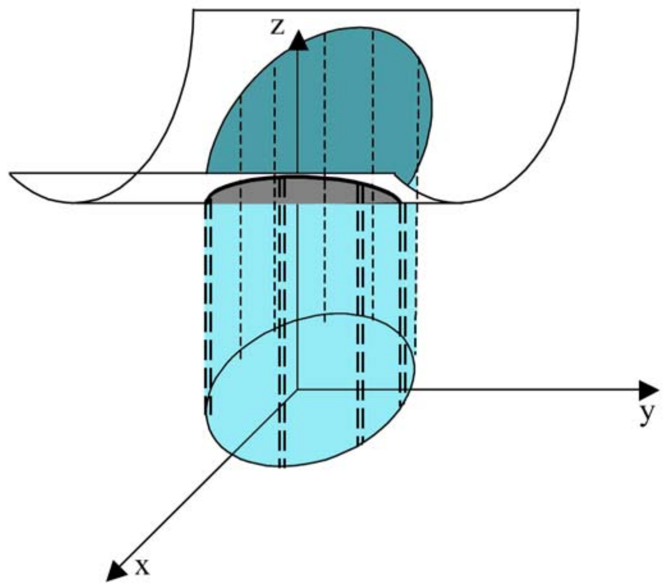
La parametrización no modifica el proceso de integración, sólo que lo simplifica y, además, es posible representar una curva cerrada como función de una sola variable. En suma, es un proceso algorítmico que facilita el cálculo y la explicación de la integral de línea. Por ejemplo, si se quiere calcular la integral de línea de la función $f(x, y) = y^2 + 2$ sobre el círculo unitario: $x^2 + y^2 = 1$, si se parametriza este círculo como:

$x(t) = \cos t, \qquad y(t) = sen\ t \qquad\qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

$dx = -\ sent\ dt, \qquad dy = \cos t\ dt,$

entonces podemos calcular la integral de la siguiente manera:

$$\int_{C^*} (y^2 + 2)\, ds = \int_0^{2\pi} (sen^2 t + 2)\sqrt{[(\cos t)']^2 + [(sent)']^2}\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (sen^2 t + 2)\, dt = 5\pi$$



Nuevamente, podemos observar gráficamente que se está calculando el área lateral del cilindro que tiene una base limitada por la circunferencia: $x^2 + y^2 = 1$, en el plano $x\ y$, y cuya altura está dada por los valores que toma la función, $f(x, y) = y^2+2$, siguiendo la trayectoria de integración. La posibilidad de significar la integral de línea con este recurso gráfico posibilita vincular el concepto de integral de línea de funciones de dos variables independientes con la integral de línea de formas diferenciales lineales, vínculo que está ausente en los textos revisados.

¿Qué significado tienen las integrales $\int_{C^*} f(x,y)\, dx \quad o \quad \int_{C^*} f(x,y)\, dy$?

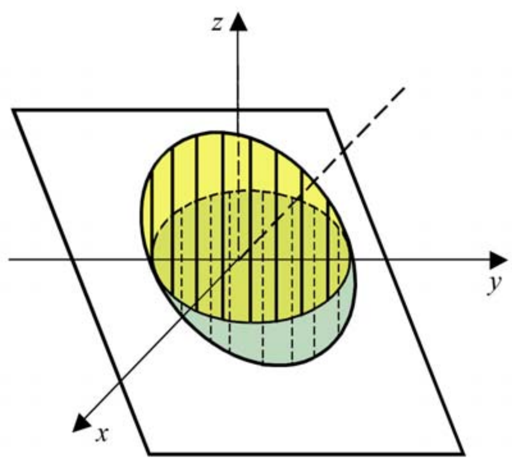
A diferencia de la expresión $\int_{C^*} f(x,y)\, ds$, las integrales $\int_{C^*} f(x,y)\, dx, \int_{C^*} f(x,y)\, dy$, gráficamente, significan el área resultante de la proyección, de la integración de $f(x, y)$ sobre C^*, en el plano $z\ x$ para el primer caso y en el plano $z\ y$ para el segundo.

Graficaremos la integral $\int_{C^*} x\,ds$ y la integral $\int_{C^*} x\,dy$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Algorítmicamente, conviene parametrizar la curva de integración de la siguiente manera

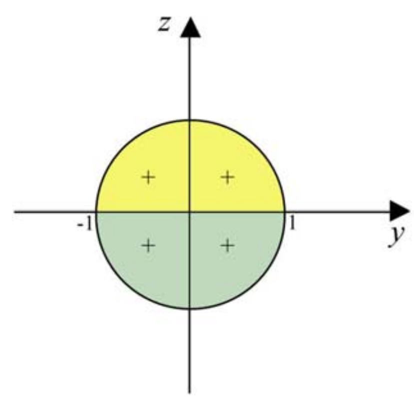
$$x = cos\ t,\ \ y = sen\ t,\ \ dx = -\ sen\ t,\ \ dy = cos\ t;\ \ \ 0 \le t \le 2\pi.$$

$$\int_{C^*} x\,ds = \int_0^{2\pi} \cos t \sqrt{[(\cos t)']^2 + [(sen t)']^2}\,dt$$
$$= [sen t]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_{C^*} x\,dy = \int_0^{2\pi} (\cos t)(\cos t)\,dt$$
$$= [\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4} sen 2t]_0^{2\pi} = \pi$$



Plano z y



Estas gráficas son una posibilidad de vincular las siguientes integrales de línea

Integral de línea de una función $f(x, y)$, siguiendo una trayectoria de integración dada por la curva C^*. $\int_{C^*} f(x, y)\,ds$	$\longleftrightarrow$	Integral de línea de una función $f(x, y)$ respecto a la variación de y. $\int_{C^*} f(x, y)\,dy$

Como podemos observar en la gráfica, la integral $\int_{C^*} x\,ds$ es igual a 0, porque el área lateral amarilla queda encima del plano $x\ y$ (se considera positiva) y, el área lateral verde queda por debajo de este plano (se considera negativa), además, estas dos áreas son iguales.

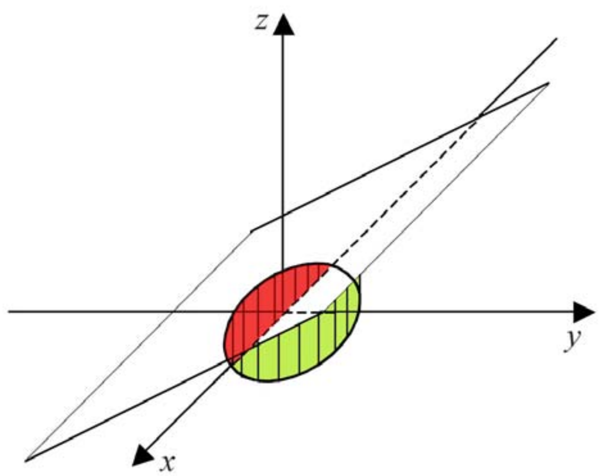
La integral de línea $\int_{C^*} x\,dy$, gráficamente, es la proyección del proceso de integración $\int_{C^*} x\,ds$ sobre el plano *z y*. Es igual a π, porque el área verde siendo negativa se vuelve positiva porque la integración va de 1 a –1 (en contra de las manecillas del reloj).

Ahora graficamos la integral $\int_{C^*} y\,ds$ y la integral $\int_{C^*} y\,dx$ sobre la misma circunferencia del caso anterior.

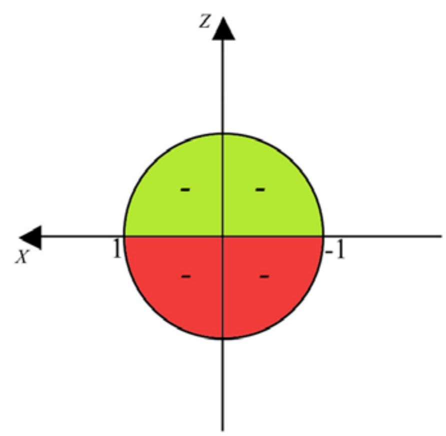
$$x = cos\ t,\ \ y = sen\ t,\ \ dx = -\ sen\ t,\ \ dy = cos\ t;\ \ \ 0 \le t \le 2\pi.$$

$$\int_{C^*} y\,ds = \int_0^{2\pi} sent\sqrt{[(\cos t)']^2 + [(sent)']^2}\,dt$$
$$= [-\cos t]_0^{2\pi} = -1 + 1 = 0$$

$$\int_{C^*} y\,dx = \int_0^{2\pi} (sent)(-sent)\,dt$$
$$= -[\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4}sen2t]_0^{2\pi} = -\pi$$



Plano z x



Toda el área proyectada, en este caso, se representa como negativa, porque el área verde que debería representarse positiva, es negativa porque la integración va de 1 a –1 (en la dirección de las manecillas del reloj).

Estas gráficas vinculan las integrales de línea de funciones, *f*(*x, y*), con la integral de línea de formas diferenciales lineales.

Las integrales de línea de las funciones *f*(*x, y*) = *y*, *f*(*x, y*) = *x*. $\int_{C^*} y\,dx$, $\int_{C^*} x\,dy$	⟷	Integral de línea de la forma diferencial lineal *L= y dx + x dy*. $\int_{C^*} y\,dx + x\,dy$

Como podemos ver, tanto en el cálculo algorítmico como en la interpretación gráfica los resultados de las integrales de línea de las funciones $f(x, y) = x$ y $f(x, y) = y$, son: $\int_{C^*} x\,dy = \pi$, $\int_{C^*} y\,dx = -\pi$, en consecuencia, la integral de línea de esta forma diferencial lineal ($L = ydx + xdy$) sobre una *curva cerrada simple* es igual a cero,

$$\int_{C^*} y\,dx + x\,dy = 0 .$$

6.2 Integrales de línea de formas diferenciales lineales: *L* = *A dx* + *Bdy*

Forma diferencial lineal:

$L = A\,dx + B\,dy$

Diferencial total de una función $f(x, y)$

Los coeficientes A, B son las derivadas parciales de $f(x, y)$

$$L = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

Esta forma diferencial lineal L, a lo largo de una curva C dada paramétricamente por:

$x = \varphi(t)$ y $y = \psi(t)$

se transforma en la diferencial $df(t)$, donde $df(t)$ **es la diferencial total** de una función $f(x, y)$. Por ejemplo:

$$L = ydx + xdy$$

No es una diferencial total de una función $f(x, y)$.

Los coeficientes A, B de L no son las derivadas parciales de una función apropiada $f(x, y)$.

Esta forma diferencial lineal L, a lo largo de una curva C dada paramétricamente por:

$x = \varphi(t)$ y $y = \psi(t)$

se transforma en la diferencial $df(t)$, donde $df(t)$ **no es la diferencial total** de una función $f(x, y)$. Por ejemplo:

$$L = -ydx + xdy$$

¿Si se tiene una forma diferencial lineal *L*, cómo reconocer si es una diferencial total?

La forma diferencial lineal

$$L = Adx + Bdy\,,$$

es la diferencial total de una función $f(x, y)$, si los coeficientes A, B tienen primeras derivadas continuas en una región simplemente conexa R y satisfacen la condición:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

En tal caso, L se puede expresar como

$$L = df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$

En tal caso, la forma diferencial lineal L se llama *exacta*.

¿Por qué la integral de línea de una forma diferencial lineal exacta es independiente de la trayectoria?

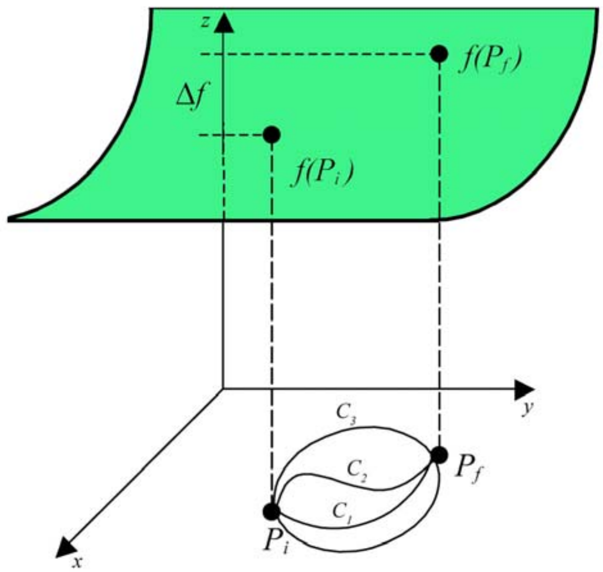
La integral de línea de una diferencial total, $\int_C df(x, y)$, calcula el valor de $\Delta f(x, y)$, es decir, la diferencia entre el valor de la función $f(x, y)$ en el punto final menos el valor de la función en el punto inicial de la trayectoria C^*.

Si una forma diferencial lineal, $L = A\ dx + B\ dy$, es la diferencial total de una función, quiere decir que existe una función potencial $f(x, y)$; en tal caso, la integral de línea de esta diferencial total, $d\,f(x, y)$, es igual a la diferencia de los valores de $f(x, y)$ en los puntos inicial y final de la trayectoria de integración. Esto es, se obtiene el mismo valor para $\int_{C^*} df(x, y)$, para todas las curvas C^* que se encuentren en el dominio de $f(x, y)$ y tengan el mismo punto inicial P_i y el mismo punto final P_f. Esto se puede escribir como

$$\int_{C^*} df(x, y) = f(P_f) - f(P_i)\,,$$

donde, P_i y P_f son los puntos inicial y final de la trayectoria de integración C^*.

La siguiente interpretación gráfica nos muestra el resultado de la integral de línea de la diferencial total $d\,f(x, y)$. En la gráfica de la función $f(x, y)$ se representa $\Delta\, f(x, y)$ para las trayectorias C_1, C_2 que tienen el mismo punto inicial y final y, para la trayectoria cerrada C_3. En suma, la gráfica representa el resultado de la integral de línea de la diferencial total $df(x, y)$ sobre las trayectorias C_1, C_2, C_3.



Como podemos ver en la gráfica:

1. Las integrales de línea de la diferencial total de la función $f(x, y)$, sobre las trayectorias simples C_1 y C_2 tendrán el mismo valor

$$\int_{C_1} df(x,y) = \int_{C_2} df(x,y) = \Delta f(x,y)$$

2. La integral de línea de $d\,f(x, y)$ sobre una trayectoria cerrada simple C_3 será igual a 0, porque $f(P_i) = f(P_f)$

$$\oint df(x,y) = 0$$

Esta interpretación gráfica de la integral de línea de una diferencial total nos permite establecer la relación entre

Teorema Fundamental del Cálculo	↔	Teorema Fundamental de las Integrales de Línea
$\int_a^b df(x) = f(b) - f(a)$, para $f(x)$ continua en el intervalo [a, b]		$\int_{C^*} df(x,y) = f(P_f) - f(P_i)$, donde la curva simple C^*, con punto inicial P_i y punto final P_f, se encuentra en el dominio de $f(x, y)$.

¿Por qué la integral de línea de una forma diferencial lineal *no exacta* depende de la trayectoria de integración?

La integral de línea de una forma diferencial lineal *no exacta*, depende de la trayectoria de integración, porque no existe una función $f(x, y)$ cuya diferencial total sea igual a esta forma diferencial. En consecuencia, la integral de línea de estas formas diferenciales no dan como resultado el valor de $\Delta f(x, y)$, sino que para distintas trayectorias tendrán un valor distinto, o lo que es lo mismo, la integral de línea sobre una trayectoria cerrada simple no será igual a 0. En este caso, los coeficientes A, B de L no son las derivadas parciales de una función adecuada $f(x, y)$, en consecuencia, la integral de línea de esta forma diferencial, no calcula $\Delta f(x, y)$.

La dificultad, que no se explica con claridad en los textos, es el hecho de que la forma diferencial L sobre una curva C*, expresada en forma paramétrica, se transforma en la diferencial de una función de una sola variable t y como resultado obtenemos una expresión para $df(t)$ que representa dos formas diferenciales distintas. En forma esquemática sucede lo siguiente:

Integral de línea de una forma diferencial lineal

$$\int_{C^*} A\,dx + B\,dy$$

La curva simple orientada C* se puede representar paramétricamente por las funciones

$$x = \varphi(t), \quad y = \phi(t)$$

***L* exacta**, por la regla de la cadena de la derivación, se transforma en

$$L = \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} \right) dt = df(t)$$

$df(t)$, representa una *diferencial exacta*.

La integral de línea de la diferencial *exacta* $df(t)$,

$$\int_{C^*} df(t),$$

es *independiente* de la trayectoria de integración

***L* no exacta**, por la regla de la cadena de la derivación, se transforma en

$$L = \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} \right) dt = df(t)$$

$df(t)$, representa una *diferencial no exacta*.

La integral de línea de la diferencial *no exacta* $df(t)$,

$$\int_{C^*} df(t),$$

es *dependiente* de la trayectoria de integración

Este esquema nos permite reconocer la diferencia entre las integrales de línea de diferenciales **exactas** y las integrales de línea de formas diferenciales lineales **no exactas**, pero estas dos formas diferenciales se representan con el mismo símbolo $df(t)$. Cabe recordar que en textos de termodinámica se conserva un símbolo distinto para representar diferenciales "inexactas", símbolo que varía de acuerdo al autor del texto.

¿Por qué la integral de línea $\int_{C^*} ydx + xdy$ sobre una curva cerrada simple es igual a cero?

Esto sucede, porque la forma diferencial lineal, $y\,dx + x\,dy$, es la una diferencial total. Esto se reconoce porque las derivadas parciales cruzadas de los coeficientes A, B son iguales:

$\dfrac{\partial y}{\partial y} = \dfrac{\partial x}{\partial x}$, es decir existe la función $f(x, y) = x\,y$, cuyas derivadas parciales son

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x$$

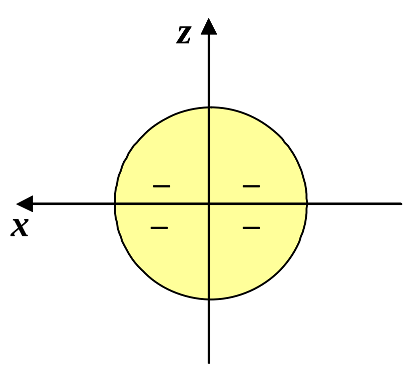
Ya se explicó que la integral de línea de una diferencial exacta sobre una trayectoria cerrada simple es igual a 0. Ahora, utilizaremos la interpretación gráfica de la integral de línea de cada término de esta expresión para demostrar que en efecto es igual a 0, es decir, expresaremos gráficamente lo siguiente

$$\int_{C^*} y\,dx + xdy = \int_{C^*} y\,dx + \int_{C^*} x\,dy$$

Gráficamente, la integral de línea de cada término de la diferencial total, sobre la circunferencia, $x^2 + y^2 = 1$, se puede representar como

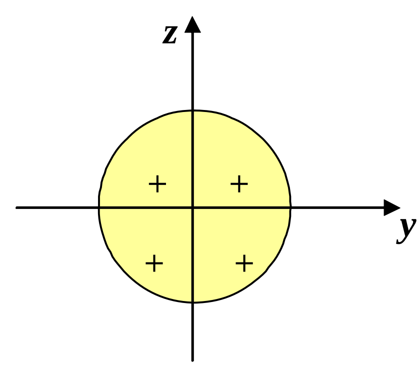
$\int_{C^*} y\,dx = -\pi$

Plano *zx*



$\int_{C^*} x\,dy = \pi$

Plano *zy*



En este caso, tenemos que la integral de línea de la diferencial total, *y dx + x dy*, sobre la circunferencia, $x^2 + y^2 = 1$, es igual a

$$\int_{C^*} y\,dx + x\,dy = 0$$

¿Por qué la integral de línea de la forma diferencial lineal $\int_{C^*} -y dx + x dy$ es igual al área contenida en una curva simple cerrada?

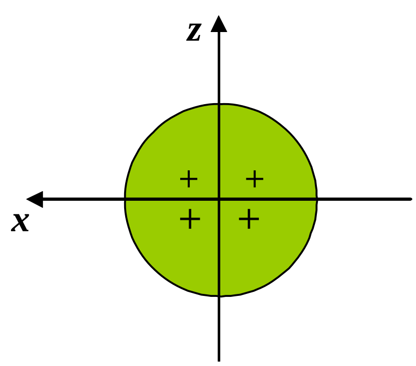
La forma diferencial lineal, *-y dx + x dy*, no es la diferencial total de una función adecuada *f*(*x*, *y*), porque las derivadas cruzadas de sus coeficientes *A, B* no son iguales

$$\frac{\partial(-y)}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial x}{\partial x} = 1$$

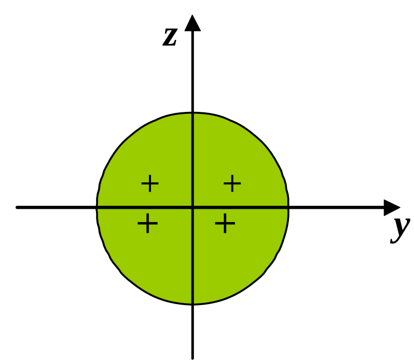
Gráficamente, la integral de línea sobre la circunferencia, $x^2 + y^2 = 1$, de cada término de esta forma diferencial lineal (que no es una diferencial total) se puede representar como

$$\int_{C^*} -y\,dx = \pi \qquad\qquad \int_{C^*} x\,dy = \pi$$

Plano *zx*



Plano *zy*



En este caso, tenemos que la integral de línea de la forma diferencial lineal, *y dx + x dy*, sobre la circunferencia, $x^2 + y^2 = 1$, es igual a

$$\int_{C^*} -y\,dx + x\,dy = 2\pi$$

Estas representaciones gráficas son, también, una significación de la fórmula, $\frac{1}{2}\int_{C^*} -y\,dx + x\,dy = \acute{a}rea$, tratada en todos los textos revisados, para encontrar áreas contenidas en de curvas cerradas simples.

Consideraciones finales

Las gráficas presentadas fueron diseñadas a partir de un proceso de introspección personal. Estas interpretaciones jugaron un papel importante para realizar el seguimiento del discurso explicativo de los textos, y nos posibilitaron una mejor compresión de la integral de línea.

Estos recursos gráficos junto a la reflexión formal de este concepto pueden contribuir a una mejor y más completa imagen mental del concepto de *integral de línea* en los estudiantes.

Comentarios finales

Comentarios finales

En los capítulos anteriores se han expresado comentarios específicos y algunos más generales en relación a los temas de cálculo que se revisaron en los textos. Como se demostró estos manuales reproducen un *discurso matemático escolar*, en el cual se identificaron obstáculos didácticos como: rupturas en la lógica de las explicaciones, vacíos explicativos e incongruencia entre las definiciones formales y los ejemplos que resuelven.

Ahora, haremos una reflexión de carácter epistemológico acerca de la naturaleza del discurso matemático que prevalece en los textos. En las ciencias experimentales, la objetividad y por tanto la validez de los nuevos conceptos y teorías que se construyen se fundamentan en la experimentación y en la tecnología. Pero la matemática es un campo disciplinario que demuestra la validez de sus conceptos en la congruencia lógica de sus axiomas, por lo cual, a medida que los fundamentos del cálculo evolucionaron con la noción de límite, se produjo un salto cualitativo en los significados de los conceptos y se abandonaron las primeras ideas. Sin embargo, en las otras disciplinas algunas de las viejas teorías conviven con las nuevas en tanto resuelven problemas prácticos, por ejemplo, para resolver problemas de mecánica no se recurre a la teoría de la relatividad. En el cálculo, los libros de texto recurren a definiciones formales abandonando los primeros significados de sus conceptos, sin que los problemas que resuelven lo ameriten. Este hecho es de vital importancia desde un ángulo cognitivo, porque se pretende que el estudiante construya un pensamiento formal sin transitar por los primeros significados del cálculo. Es por esto que se debe cuestionar el discurso explicativo de los textos en tanto no justifiquen la formalidad de sus definiciones con la necesidad de resolver problemas que así lo requieran.

En los textos revisados, los autores manifiestan la inquietud de ser precisos e intuitivos, pero debemos señalar que si la preocupación central es definir los conceptos con precisión, más que explicar sus significados, no tiene cabida la intuición. Los recursos gráficos ilustrativos junto con la formalidad del discurso no logran su cometido.

Bibliografía

Bibliografía

Bachelard, G. (1984). *La filosofía del no*. *Ensayo de una filosofía del nuevo espíritu científico*. (Labrune, N. de, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Amorrortu Editores. (Trabajo original publicado en 1940).

Bachelard, G. (1985). *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. (Babini, J., Trad.). México D.F., México: Siglo XXI Editores. (Trabajo original publicado en 1948).

Bravo, A. (1997). *De la representación "đ" a los significados de las diferenciales en termodinámica*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav de IPN, México D.F., México.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des Mathemátiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), pp. 33-115.

Camilloni, A. de (comp.) (1997). *Los obstáculos epistemológicos en la enseñanza*. (Bixio, A., Trad.). Barcelona, España: Editorial Gedisa. (Trabajos originales publicados en los números 24 y 25 de la revista *Aster*).

Cantoral, R. (1990). *Desequilibrio y Equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas*. Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav de IPN, México, D.F., México.

Cantoral, R. (1997). Los textos de cálculo: una visión de las reformas y contrarreformas. *Revista EMA. Investigación e innovación en Educación Matemática*, 2(2), pp.115-131.

Cantoral, R. (2001). Sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos didácticos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 14(1), pp. 64-75.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado* (Gilman, C., Trad.). Argentina: Aique Grupo Editor. (Trabajo original publicado en 1985).

Choppin, A. (1980). L'histoire des manuels sclaires: une approche globale. *Histoire de l'éducation*, 9(4), pp. 1-25.

Duval, R. (1993). Semiosis y Noesis. En Sanchez, E., Cambray, R. y Zubieta, G. (comp.). *Antología de Educación Matemática*, (pp. 118-144). México D.F., México: Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav de IPN.

Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En Zimmermann, W. y Cunnigham S. (Eds.) *Visualization in teaching and learning mathematics*, (pp 25-36). Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

Farfán, R. (1993). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería*. Estudio de caso. Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav de IPN, México, D.F., México.

Kang, W. (1990). *Didactic Transposition of Mathematical Knowledge in Texbooks.* Disertación doctoral no publicada, University of Georgia, Georgia, USA.

Kang, W. y Kilpatrick, J. (1992). Didactic Transposition in Mathematics Textbooks. *For the Learning of Mathematics*. 12(1), pp. 2-7.

Piaget, J. y García, R. (2000). *Psicogénesis e historia de la ciencia* (9ª ed.). México, D.F., México: Siglo XXI Editores.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(1), pp. 5-68.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En Dubinsky, E. y Harel, G. (Eds.) *The concept of function: aspects of epistmology and pedagogy*, (pp. 25-58). Washington, DC, USA: Mathematical Association of America,.

Tall, D. (1991). Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. En Zimmermann, W. y Cunnigham S. (Eds.) *Visualization in teaching and learning mathematics*, (pp 105-119). Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

Libros de texto de matemáticas

Alanís, J., et al (2000). *Elementos de cálculo* (Pre-edición). México, D.F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Courant, R.(1996). *Introducción al cálculo y al análisis matemático*. México, D. F., México: Editorial Limusa. (Trabajo original publicado en 1927).

Granville, W. (1982). *Cálculo diferencial e integral* (Byington, S., Trad.). México, D.F., México: Editorial Limusa. (Trabajo original publicado en 1904).

Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (1999). *Cálculo y geometría analítica* (Abellanas, L., Trad.). Madrid, España: McGraw-Hill.

Pita, C. (1995). *Cálculo vectorial*. México, D.F., México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Piskunov, N. (1973). *Cálculo diferencial e integral* (Medkov, K., Trad.). Moscú, URSS: Editorial Mir.

Spivack, M. (1998). *Calculus. Cálculo infinitesimal* (Frontera, B., Trad.). México, D.F., México: Reverté Ediciones. (Trabajo original publicado en 1967).

Stewart, J. (2002). *Cálculo. Trascendentes tempranas* (Toledo, M., Trad.). México, D.F., México: International Thomson Editores. (Trabajo original publicado en 1999).

Swokowski, E. (1993). *Cálculo con geometría analítica* (Abreu, J. y Oliveró, M., Trads.). México, D.F., México: Grupo Editorial Iberoamérica. (Trabajo original publicado en 1988).

Thomas, G. y Finney, R. (1990). *Cálculo con geometría analítica* (López, M., Trad.). México, D.F., México: Addison-Wesley Iberoamericana. (Trabajo original publicado en 1984)

Libros de texto de fisicoquímica

Castellan, G. (1998). *Fisicoquímica* (Costas, M. y Amador, C., Trads.). Estado de México, México: Addison Wesley Longman de México. (Trabajo original publicado en 1964)

García-Colín, L. (1976). *Introducción a la termodinámica clásica* (2ª ed.). México, D.F., México: Editorial Trillas.

Gerasimov, A. et al. (1970). *Curso de química física*. Moscú, URSS: Editorial "Química". (Versión en ruso).

Levine, I. (1983). *Fisicoquímica* (Gonzalez, A., Trad.). México, D.F., México: McGraw-Hill de México. (Trabajo original publicado en 1978).

Karapetianz, M. (1975). *Termodinámica química*. Moscú, URSS: Editorial "Química". (Versión en ruso).