INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN
CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

Inecuaciones: Un Análisis de las Construcciones Mentales de Estudiantes Universitarios

Tesis que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias en Matemática Educativa

PRESENTA:

Karly B. Alvarenga

DIRECTOR DE TESIS :
Ed Dubinsky

CODIRECTOR DE TESIS:
Javier Lezama Andalón

México, Abril de 2006

CGPI-14

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 12:00 horas del día 13 del mes de septiembre del 2005 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Inecuaciones. Un análisis en las construcciones mentales de los universitarios"

Presentada por el alumno:

Barbosa	Alvarenga	Karly
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro:

A	0	3	0	2	4	8

aspirante al grado de:

Doctor en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dr. Ed Dubinsky

Codirector

Dr. Javier Lezama Andalón

CICATA - IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dr. Miguel Angel Aguilar Frutis

Dr. Francisco Cordero Osorio

Dr. Apolo Castañeda Alonso

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

CARTA DE CESION DE DERECHOS

En la ciudad de México, D.F. el día 26 del mes junio del año 2006, el (la) que suscribe Karly Barbosa Alvarenga alumno (a) del Programa de Doctorado en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro A030248 adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada , manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dr. Ed Dubinsky y cede los derechos del trabajo titulado "Inecuaciones: Un análisis de las construcciones mentales de los estudiantes universitarios" al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección karlyba@yahoo.com.br. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Karly Barbosa Alvarenga

Karly Barbosa Alvarenga

ÍNDICE

CAPÍTULO 3

GLOSARIO

Abstracción Reflexiva- mecanismo que nos sirve para extraer o separar una característica de un objeto, a partir no exactamente de los objetos, sino de las acciones que realizamos sobre ellos. La palabra Reflexiva tiene doble connotación: una es reflexionar sobre nuestras acciones, otra es proyectar nuestra acción sobre el plano de las operaciones.

Abordaje ACE- Una metodología de enseñanza estructurada en tres componentes: Actividades en la computadora, trabajos en Clase e Ejercicios de refuerzo.

Construcción mental – Existen variadas definiciones, pero en general se refiere a respecto de la organización de las ideas para intentar comprender algo.

Construcción Acción- Resulta de una operación mental o física repetible que transforma de alguna manera un objeto físico o mental. Son, de manera general, algorítmicas y con estímulos externos.

Construcción Proceso- Resulta de la interiorización, de la reflexión de la Acción. Esta construcción no se deja conducir por los estímulos externos, sino por los internos.

Construcción Objeto- Resulta de la reflexión de las operaciones aplicadas en el proceso, que es dinámico inicialmente, y quien que la posee puede actuar sobre el proceso, puede realizar transformaciones y pensarlo como algo estático, como algo involucrado en sí mismo, es decir encapsulado.

Construcción Esquema- Resulta de la organización de las construcciones acción, objeto y también otros esquemas previamente construidos para formar un nuevo esquema.

Coordinación- Un tipo de abstracción reflexiva. Un acto cognitivo de hacer coincidir dos o más procesos para construir un nuevo proceso; esta coincidencia de procesos puede realizarse por simple concatenación.

Encapsulación- Un tipo de abstracción reflexiva en la cual uno puede pasar de un nivel de comprensión proceso a un nivel objeto. Tal abstracción permite al individuo mirar un proceso como algo cerrado en si mismo con "existencia propia" lo que permite mirarlo como un objeto.

Inecuación- es una relación de desigualdad entre dos expresiones, con por menos una de ellas conteniendo una variable.

Interiorización- Un tipo de abstracción reflexiva. Una construcción de procesos internos como una manera de atribuir sentido a fenómenos observados. Piaget se refiere a esa construcción como "traducción de una sucesión de acciones materiales en un sistema de operaciones interiorizadas". (Piaget apud Dubinsky1991:101)

Interpretación- acto de comprensión, de aprehensión de un concepto bajo todas sus características e interrelaciones.

ISETL- Lenguaje de programación utilizada en la educación con una sintaxis muy parecida con la notación matemática.

Metodología de enseñanza – Conjunto de estrategias diseñadas para la enseñanza y el aprendizaje de algún concepto.

Nivel Intra- es caracterizado por una observación individual en los ítems, aislada de acciones, procesos y objetos de naturaleza similar. Uno no consigue hacer interrelaciones entre los ítems, entre las características del concepto.

Nivel Inter - es caracterizado por la posibilidad de construcción de interrelaciones entre acciones, procesos y objetos de otros conceptos o de lo mismo. Uno es capaz de percibir y utilizar, si es necesario, ítems de naturaleza similar.

Nivel Trans – el individuo construye o empieza a construir una estructura fundamental a través de las interrelaciones obtenidas en otro nivel y ella es entendida como algo que le da armonía, relación lógica o coherencia al esquema.

Teoría APOE- Estructura teórica, basada en las ideas de Piaget, que busca describir cognitivamente la comprensión matemática de un individuo. Es compuesta de 4 elementos: Acción, Proceso, Objeto y Esquema.

Tríada Piagetiana- Niveles de desarrollo de los esquemas: Intra, Inter. y Trans.

RESUMEN

El propósito principal de este trabajo es presentar un conjunto de construcciones mentales o esquemas, que el estudiante puede desarrollar con el fin de comprender el concepto de inecuación. Con base en tal conjunto de construcciones mentales presento una propuesta metodológica de enseñanza para mejorar la enseñanza-aprendizaje de este concepto. Utilizo el paradigma de investigación y desarrollo pedagógico creado por el grupo RUMEC, compuesto por un ciclo con tres etapas para investigación en educación matemática. Una de las etapas de este ciclo se reduce a un análisis teórico del concepto de inecuación según el marco teórico APOE. Éste se basa en las ideas de Piaget adaptadas por Ed Dubinsky para su uso en la enseñanza universitaria. En esta etapa propongo un esquema mental inicial que servirá de referencia para la elaboración y la instrumentación de una primera metodología de enseñanza en un grupo de Cálculo. Colecto y analizo datos obtenidos de esta primera instrumentación y, con base en ello, rehago el esquema mental inicial, elaboro e instrumento una segunda metodología de enseñanza. Los resultados del análisis de los nuevos datos colectados dan origen a un esquema mental final para el concepto de inecuación. Hago también un análisis cuantitativo del aprovechamiento del estudio de inecuaciones entre un grupo de estudiantes que aprendió el contenido según la metodología presentada en este trabajo y un grupo de control, que no tuvo esta enseñaza-aprendizaje. Concluyo que el aprendizaje del concepto de inecuación, de los alumnos que participaron de la metodología de la enseñanza propuesta en este trabajo fue mejor. (Karly, yo dejaría fuera lo que está en rojo, deja que el lector decida si es mejor o no).

ABSTRACT

The main proposal of this work is to present a set of mental constructions or schemes that the student can develop in order to understand the concept of inequality. Based on this set of mental constructions I present my methodological proposal of teaching to improve the teaching-learning of this concept. I use the paradigm of pedagogical investigation and development created by RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) group which is composed of a cycle of three stages for research in mathematics education. One of the stages of this cycle is reduced to the theoretical analysis of the concept of inequality according to the theoretical reference of APOS (Action, Process, Object, Schema). This is based on Piaget's ideas adapted by Ed Dubinsky for their use in the graduate level. In this stage I propose an initial mental scheme which will serve as reference for the elaboration and implementation of a first methodology of teaching in a Calculus class. I gather and analyze the data from this first implementation and redo the mental scheme, elaborate, and implement a second methodology of teaching. The results of the analyses of the new data gathered produced a final mental scheme for the conception of inequality. I also do the quantitative analysis of the improvement of the inequality study between a group of students who learned the contents according to the methodology presented in this work and a control group that did not have the teaching-learning proposal. Through this analysis, I concluded that the learning of the inequality concept by the students who participated in the methodology of teaching proposed in the work, was better.

INTRODUCCIÓN

En 1897, en Zurich, se llevó a cabo el primer Congreso Internacional de Matemáticas. En éste se hicieron públicos los problemas relacionados con la enseñanza de la disciplina. Desde entonces se han sido efectuado varias modificaciones en esta enseñanza. Las investigaciones en matemática educativa, en particular los estudios psicológicos de Piaget, Vergnaud, David Tall y Dubinsky, entre otros, influyeron e influyen en las discusiones en torno de un movimiento que tiene por finalidad el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Para ello se hace necesario un cambio en el modelo de enseñanza *tradicional* en los niveles primario, medio y superior.

Existen propuestas teóricas de cambios en la enseñanza sin instrumentación metodológica, y, otras veces, se tienen instrumentaciones metodológicas de enseñanza sin una fundamentación teórica adecuada. Entiéndase por *tradicional* un tipo de enseñanza que no se fundamenta en una investigación científica en matemática educativa, que sólo está basada en el uso de la pizarra y el gis. Es un proceso imitativo, sin crítica, en el cual las respuestas no son producidas por un individuo, o un grupo de individuos, a partir de reflexiones sobre su acción en una realidad dada. El profesor habla y los alumnos escuchan sin hacer preguntas. Como se puede percibir en los resultados del *Sistema Brasileño de Evaluación de la Enseñanza Básica* (SAEB, por sus siglas en portugués) del *Examen Nacional de Enseñanza Media* (ENEM, por sus siglas en portugués) y del *Programme for International Student Assessment* (PISA), ese tipo de enseñanza, en general, no ha causado efectos reales de avance en el aprendizaje de los conceptos matemáticos, especialmente en la enseñanza-aprendizaje de inecuaciones, que es el concepto matemático aquí investigado.

Las inecuaciones están presentes en muchas áreas del conocimiento, como las matemáticas, la ingeniería, la economía y la computación. En la presente investigación, se abordan sólo inecuaciones polinomiales, racionales y las que implican raíces cuadradas. El examen de enseñanza-aprendizaje de este tema proporciona una oportunidad para observar diversas construcciones mentales de los alumnos, pues la resolución de tales inecuaciones involucra varias nociones que deben concatenarse y ser aplicadas de forma coherente. Entre tales nociones tenemos la estructura de orden de los números reales, la factorización polinomial, interpretación de raíces, funciones, correspondencia 1 a 1 de los números reales con la recta numérica, ecuaciones, gráficos y análisis gráfico de funciones, relaciones de implicación y equivalencia.

Paulo Boero (1998) hace notar la limitación de las técnicas de resolución de inecuaciones que se enseñan tradicionalmente y plantea las siguientes interrogantes relacionadas con la falta de cambios en la enseñanza-aprendizaje de este concepto: ¿Inercia del sistema de enseñanza (profesores, libros de texto...)? ¿Maduración mental de los estudiantes (disciplina de los procedimientos a seguir, contenido lógico)? ¿Facilidad de enseñanza y evaluación? ¿Facilidad para aprender como consecuencia de la reducción de la complejidad del problema de la resolución de inecuaciones a través de su modelación lógico-algebraica? (p. X-4).

El propósito aquí no es responder a estas interrogantes, sino proponer un conjunto de construcciones mentales relativas al aprendizaje del concepto de inecuaciones y una metodología de enseñanza, fundamentada principalmente en el enfoque constructivista, es decir, en las construcciones mentales de los estudiantes respecto de ese concepto.

De acuerdo con Aparecida Mamede (1999), el enfoque constructivista valora las experiencias del estudiante en el medio social mediante el diálogo, la narración, las acciones del sujeto y la asimilación y acomodación recíprocas de los elementos contextuales. Partimos de la reconstrucción del objeto a ser conocido en la temática, tomando en cuenta el universo de la cultura del individuo. En esos presupuestos forma y contenido son indisolubles, y el conocimiento sólo puede ser visto como un *tornarse* y no como *un ser*.

La metodología propuesta involucra también el uso de un lenguaje de programación para aprender matemáticas, ISETL - **I**nteractive **S**et **L**anguage (Dubinsky, 1995), además del empleo de la técnica de grupos colaborativos.

Con frecuencia, la resolución de inecuaciones es emprendida por alumnos de enseñanza media/superior con innumerables errores de concepción, de entendimiento y de empleo de las propiedades del cuerpo ordenado de los números reales. Por propia experiencia en la enseñanza de inecuaciones, y de otros profesores entrevistados informalmente, he llegado a la conclusión de que tales errores son bastante comunes en los diversos cursos que se imparten en los diferentes niveles de enseñanza. Varios factores pueden ser los causantes de tales fallas. Para descubrir algunas de ellas y proponer estrategias pedagógicas alternativas es indispensable recurrir a los resultados de la investigación educativa. La enseñanza-aprendizaje del concepto de inecuaciones ha sido tema de investigaciones recientes, como veremos más adelante al abordar la revisión bibliográfica realizada a lo largo de este trabajo.

Con el objetivo de presentar un conjunto de construcciones mentales que los estudiantes pueden desarrollar a fin de comprender el concepto de inecuaciones, este trabajo busca responder a las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son los conceptos previos necesarios para la comprensión de inecuaciones?
- ¿Cómo construye o entiende el alumno el concepto de inecuación?
- ¿Cuáles son las estructuras mentales y las conexiones con otros contenidos matemáticos necesarios para la comprensión de la idea de inecuación?
- ¿Cómo puede influir en la resolución de problemas relacionados la interpretación de inecuación?
- ¿Qué resultados surgen del análisis del desempeño de dos grupos de alumnos: uno que tuvo un aprendizaje bajo la enseñanza *tradicional* y otro que aprendió según la propuesta metodológica de enseñanza aquí adoptada?

Para responder a las preguntas planteadas, utilizo la noción de esquema, un instrumento de la teoría **APOE (A**cción, **P**roceso, **O**bjeto y **E**squema). Según esta teoría, un esquema es un modelo de cognición descrito por un conjunto de construcciones mentales denominadas acción, proceso, objeto y otros e**s**quemas.

A medida que la investigación avanzaba, el esquema inicial elaborado fue modificado. Para la elaboración y la reelaboración colecté datos de estudiantes universitarios con diferentes formaciones: estudiantes que aprendieron el concepto de inecuación bajo una enseñanza *tradicional*; y de estudiantes que aprendieron el concepto según dos enfoques de metodología de enseñanza, planificados de forma reflexiva según la idea de esquema.

Las construcciones mentales relativas a determinado concepto pueden variar de acuerdo con el investigador y con los datos colectados. Se tuvo, sin embargo, el cuidado de colectar los más variados datos en la tentativa de abarcar una cantidad significativa de las construcciones mentales que los estudiantes ponen de manifiesto cuando intentan aprender tal concepto. El análisis de los datos fue realizado desde diferentes ángulos, en el intento de obtener una triangulación refinada[1]. Los datos fueron colectados por medio de entrevistas, observaciones directas y pruebas escritas. Y fueron analizados bajo diferentes aspectos.

La teoría APOE, que constituye la referencia teórica de este paradigma de investigación, se basa en las ideas de Piaget adaptadas al estudio de las matemáticas de nivel universitario. El resultado central de esta tesis es la formulación de un esquema para el concepto de inecuación y algunas propuestas para *mejorar* la enseñanza-aprendizaje de este concepto. El objetivo de la teoría APOE no es explorar las ideas de Piaget, sino utilizar un marco teórico basado en algunas de sus ideas.

[1] Lüdke (1986), triangulación (...) “o sea verificación de un dato obtenido a través de diferentes métodos de recolección y diferentes observadores, que se centrarían en los mismos aspectos para efecto de confirmación o no-confirmación sistemática”(p.52).(Traducido del portugués)

La presente investigación fue realizada según el paradigma para investigación y desarrollo pedagógico propuesto por el grupo de investigadores, RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community).

Debido al hecho de que hubo una recolección inicial con alumnos de diferentes cursos, de varios niveles de estudio de cálculo y en varias universidades, existe la posibilidad de una comparación entre el aprendizaje del concepto de inecuación de estudiantes que no tuvieron una metodología especial con los que sí la tuvieron.

En el transcurso de la investigación se hicieron observaciones sobre cómo se enseñan las inecuaciones de acuerdo con la pedagogía *tradicional*, y de cómo el tema es tratado en algunos libros detexto de cálculo diferencial e integral (Leithold, 1994; Swokowski 1994; Münem 1982; Guidorizzi, 1987; Moise, 1972; Ávila, 1982) y artículos, como por ejemplo (King, 1973; Hartzler, 1979; Dobbs y Peterson, 1991; Parish, 1992; Frandsen, 1969; Vandyk, 1990). He constatado, de forma general, que no hay enfoque de resolución en el contexto gráfico; tampoco en los análisis de las transformaciones ejecutadas sobre la inecuación inicial y sus repercusiones sobre el conjunto-solución buscado. No observé actividades didácticas dirigidas a la interpretación del concepto de inecuación en ninguno de los libros revisados, ni en los más utilizados en los cursos de cálculo.

El presente trabajo está formado por los siguientes capítulos:

1. **MARCO TEÓRICO Y BIBLIOGRAFIA COMENTADA**

En este capítulo, expongo el marco teórico y la justificación de su elección. Presento también una bibliografía comentada dividida en cuatro bloques: teoría APOE, álgebra, inecuaciones y tecnologías.

2. **PRIMERA ETAPA DE LA INVESTIGACIÓN**

En este capítulo presento la metodología de investigación, las construcciones mentales observadas inicialmente (esquema inicial), primera metodología de enseñanza y aprendizaje, y los resultados de esta etapa de investigación (esquema intermedio).

3. **SEGUNDA Y ÚLTIMA ETAPA DE LA INVESTIGACIÓN**

En este capítulo presento las características de la metodología de enseñanza utilizada en esa etapa, los resultados del análisis de las construcciones mentales de los estudiantes y el esquema final de inecuaciones. Aquí se presentan los contenidos matemáticos involucrados y las construcciones mentales que el individuo puede desarrollar para entender el concepto de inecuación.

4. **RESULTADOS GENERALES Y CONCLUSIONES**

La constante triangulación de los datos y las dos instrumentaciones, con refinamiento de la metodología y de los esquemas, facultan un buen grado de confianza en los resultados aquí presentados. Observé que el entendimiento del concepto de inecuaciones implica muchos niveles de construcciones mentales, pre-requisitos, conexiones con otros conceptos y las posibles formas de esas conexiones. En este capítulo presento resultados generales y conclusiones finales con relación a dicho entendimiento.

Es necesario observar que las características de los resultados de investigación en educación son diferentes de los resultados matemáticos, son típicamente más sugestivos que definitivos (Schoenfeld, 1994).

Los resultados de esta investigación dan información respecto a los cambios en los esquemas, a las dos instrumentaciones de la metodología especial, al desempeño de los alumnos sometidos a los diferentes tipos de pedagogía y al aprendizaje de las matemáticas propiamente dicho. Así, tales resultados se refieren:

- A la interpretación de una inecuación;

- A las resoluciones gráficas y algebraicas de inecuaciones;
- Al uso de computadoras;
- Al orden y las propiedades de los reales;
- Al desempeño de estudiantes universitarios que participaron en esta investigación; y
- Al aprendizaje de las matemáticas.

La segunda parte del capítulo 4 trata de las conclusiones del presente trabajo, es aquí donde hago un análisis de toda la investigación.

Se incluyen dos anexos:

A: **EJERCICIOS UTILIZADOS EN LA RECOLECCIÓN DE DATOS**

En este anexo presento los ejercicios utilizados en la recolección de datos en todas las etapas de la investigación.

B: **ACTIVIDADES CON USO DE LA COMPUTADORA**

Presento las actividades con uso de la computadora empleadas en las tres etapas de la investigación.

CAPÍTULO 1

MARCO TEÓRICO Y BIBLIOGRAFIA COMENTADA

El presente trabajo tiene como una de sus metas principales detectar y analizar las construcciones mentales de estudiantes universitarios al inicio del ciclo superior, cuando se estudia el concepto de inecuación.

Este primer capítulo tiene como objetivos exponer el método y el marco teórico de investigación utilizados. Se situará el trabajo en el contexto de las investigaciones en matemática educativa en el área de enseñanza-aprendizaje del álgebra, especialmente en lo que se refiere a investigaciones relacionadas con el concepto de inecuaciones y las aplicaciones de la teoría APOE.

El método de investigación utilizado ofrece un espacio para el refinamiento del modelo de construcciones mentales que los estudiantes pueden presentar cuando aprenden inecuaciones, y de la metodología de enseñanza instrumentada. Ofrece, además, un espacio para la predicción de nuevas construcciones mentales.

1.1 MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

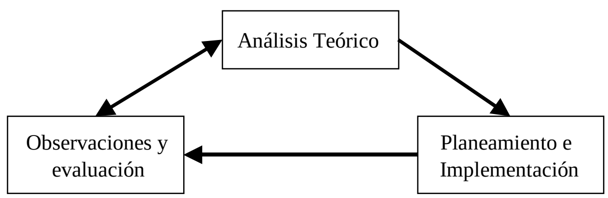
Esta investigación se basa en el método y el desarrollo pedagógicos en matemática educativa creado por el grupo RUMEC (Asiala et. al., 1996; Figura 1). Inicialmente se propone un análisis de las construcciones mentales de los alumnos relativas a la comprensión de cierto concepto. Este análisis fundamenta la elaboración de una metodología que tiene por finalidad impulsar al estudiante a desarrollar las construcciones mentales que propicien la comprensión de dicho concepto matemático.

El método propone una correlación cercana entre la teoría y la práctica en aula: el investigador reflexiona sobre el concepto de su interés, elabora un esquema inicial para este concepto y una metodología de enseñanza basada en este esquema. Enseguida instrumenta la metodología y recolecta datos para evaluar tanto el esquema inicial como la instrucción metodológica instrumentada. Si es necesario, el investigador refina la metodología y repite el ciclo (Figura 1).

En otras palabras, se analiza un problema de aprendizaje, se propone una solución y se evalúa la eficacia de la solución propuesta. Así como el proceso de enseñanza-aprendizaje es dinámico, también el método de investigación y desarrollo pedagógicos debe ser dinámico.

En la Figura 1, presento un diagrama que representa el ciclo, cuyas etapas describo a continuación.

Figura 1



1.1.1 Análisis teórico

El objetivo del análisis teórico es proponer un modelo de cognición, esto es, una descripción de las construcciones mentales que un aprendiz puede hacer para aprender un concepto.

Asiala et. al. (1996), basado en la teoría APOE, proporciona una descripción de lo que significa aprender en matemáticas.

> El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder ante situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social, construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de lidiar con las situaciones (p. 7).

Paso a describir los tipos de construcciones mentales, **acción**, **proceso**, **objeto** y **esquema**, consideradas en la teoría APOE (Asiala, 1996; Dubinsky, 1996; DeVries, 2001)

Una **acción** es una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como algo externo y se realiza como una reacción a sugerencias que dirigen los pasos a seguir, tiende a ser algorítmica por naturaleza. Un individuo que posee una comprensión de una transformación dada puede ejecutar una acción, cuando es necesario, pero no está limitado a operar en el nivel de las acciones. Breindenbach define una acción como "cualquier manipulación, física o mental, repetible que transforma objetos (números, figuras geométricas, conjuntos, etcétera) para obtener objetos" (Breindenbach, 1992: 249).

Como ejemplos de acciones podemos citar las siguientes:

- Resolver una ecuación imitando los pasos de la resolución de una ecuación similar.
- Procurar soluciones de una inecuación sustituyendo valores específicos y verificando si satisfacen o no la inecuación.

Si un individuo limita la comprensión de un concepto a realizar acciones para obtener una transformación dada, entonces decimos que posee una *concepción acción* de dicha transformación. Aunque una acción esté limitada a la construcción de acciones, ésta es crucial al inicio de la comprensión de un concepto (Asiala et. al., 1996:10).

Cuando una acción es repetida muchas veces y el individuo reflexiona sobre ella, puede aprehender tal acción como un **proceso**. Esta construcción interna permite realizar la misma acción sin que necesariamente esté dirigida por estímulos externos.

Un individuo que ha construido un proceso puede describir los pasos del mismo, incluso puede invertirlos sin que haya llevado a cabo los pasos realmente. El individuo está en el nivel de una *concepción proceso* de una transformación dada si su profundidad de comprensión está restringida a pensar en la transformación como proceso.

Como ejemplos de procesos tenemos:

- Un aprendiz que tiene un nivel de concepción proceso de resolución de ecuaciones ejecuta un proceso cuando resuelve una ecuación no necesariamente imitando el procedimiento de resolución de una ecuación similar. En tal caso, puede iniciar la resolución de una ecuación buscando ponerla en una forma que le daría la solución, por ejemplo en forma factorizada. Además, puede describir los pasos necesarios para resolverla sin realmente ejecutarla. Sin embargo, no logra ejecutar una acción en el conjunto solución sin antes determinarlo (DeVries, 2001).
- Un individuo ejecuta un proceso cuando es capaz de pensar en una inecuación como una caja negra que recibe una o más entradas, ejecuta operaciones y produce un valor booleano, es decir, V si la entrada es una solución de la inecuación y F si la entrada no es solución. Por ejemplo, el individuo que percibe una inecuación como un proceso puede utilizar el conjunto-solución para responder si un determinado valor hace que la inecuación sea V o F, no necesitando sustituir ese valor en la inecuación para verificar si es la solución.

Un individuo que reflexiona sobre acciones aplicadas a un proceso específico, es consciente del proceso como un todo; percibe qué transformaciones (acciones o procesos) pueden influir en el proceso, y es capaz de construir realmente tales transformaciones. Entonces se dice que el individuo reconstruyó el proceso como un **objeto** cognitivo, que el proceso fue encapsulado como un objeto. Un individuo posee un nivel de *concepción objeto* de un concepto matemático cuando su comprensión sobre la idea o concepto es tan profunda que trata la idea o el concepto como un objeto. Es capaz de ejecutar acciones en el objeto y, cuando es necesario, también puede desencapsular el objeto y volverlo al proceso que le dio origen.

Como ejemplos tenemos:

- Un individuo que es capaz de pensar sobre una función como la suma de dos funciones sin referencia a ejemplos específicos está pensando en ella como un objeto.
- Un individuo que es capaz de analizar implicaciones y equivalencias entre inecuaciones utilizando propiedades de los reales presenta una concepción objeto de inecuaciones. En este caso, el individuo da muestras de estar consciente del proceso como un todo, es capaz de ejecutar acciones aplicando propiedades de los reales y analizando equivalencias.

Un **esquema** para un concepto matemático es una colección individual de acciones, procesos y objetos a la que se pueden agregar otros esquemas previamente construidos. Las diversas construcciones se encuentran conectadas, concientemente o no, en una estructura coherente en la mente del individuo. Esta estructura es considerada cuando se resuelve un problema que involucra al concepto en cuestión, y su coherencia permite al individuo reconocer qué es lo que está en el ámbito del esquema y lo que no está.

Como ejemplos de esquemas tenemos.

- Un individuo tiene un esquema para resolver ecuación lo cual incluye variados métodos para transformarla y una concepción do que significa resolverla.
- Un individuo que presenta un esquema de la Transformada de Laplace es capaz de utilizar su esquema de integración, de función, de series finitas, de cálculos de promedios simples, de derivada y posiblemente otros para calcularla y utilizarla.
- Un estudiante posee un esquema de derivación lo cual coordina varios otros esquemas como el de función y le permite calcular la derivada de una función y utilizarla cuando necesario.

Sigue también algunos ejemplos de una estructura coherente o no.

- Considere los gráficos de las funciones f y g y la siguiente inecuación que se quiere resolver: $f(x)g(x) < 0$. No presenta coherencia al conectar los esquemas de función, de inecuación (bajo el punto de vista de interpretación del conjunto-solución) y de resolución de inecuación en el contexto gráfico un individuo que logra apenas visualizar las posibilidades de los signos de f y g para satisfacer la inecuación, pero que no logra identificar esas posibilidades en los respectivos gráficos trazados en el sistema cartesiano.
- Un individuo demuestra coherencia al diferenciar la resolución de una inecuación, empleando correctamente propiedades de los números reales.

El análisis teórico referido en la Figura 1 consiste en la elaboración de un conjunto de construcciones mentales específicas (esquemas) que los estudiantes pueden desarrollar para entender un concepto matemático, en este caso el concepto de inecuación. Este análisis implica el examen de la comprensión del concepto, es decir, cómo el aprendiz puede construir dicha comprensión; y se fundamenta, en la teoría APOE, en la comprensión de algunos profesores/investigadores y en la observación de un grupo pequeño de estudiantes. El análisis orienta la elaboración y la instrumentación de actividades de aprendizaje (Figura 1).

La Teoría APOE fue desarrollada a partir de una reformulación/adaptación de las ideas de Piaget a la enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario. Dubinsky (1996) comenta sobre algunas dificultades en esa adaptación cuando dice que

> Una dificultad seria para hacer esta transición se apoya en que, en de la teoría de Piaget, el entendimiento conceptual tiene su fuente en la manipulación de objetos físicos. Conforme el nivel matemático de los conceptos aumenta, es necesario, según Piaget, construir objetos nuevos, pero no objetos físicos, sino mentales, y manipularlos con el objetivo de construir las ideas matemáticas (Beth y Piaget, 1966; y Dubinsky, 1996). Un problema importante en la matemática educativa es encontrar substituto apropiado para los objetos físicos.

Y continúa:

> (...) conforme el nivel de sofisticación aumenta, existen menos condiciones de manipulación de objetos físicos para construir las ideas matemáticas. Consecuentemente, el papel del maestro es crear situaciones que promoverán los desarrollos espontáneos que deben suceder; este papel es aún más importante en el nivel universitario que en los niveles elementales (...) (op. cit. p.28).

Existen algunas ideas de Piaget sobre educación que Dubinsky utiliza en sus investigaciones, al igual que los investigadores que fundamentan sus trabajos en el marco teórico que orienta el presente trabajo:

- Concentrarse en los mecanismos mediante los cuales se realiza el desarrollo intelectual. Entre tales mecanismos están la abstracción reflexiva y el binomio desequilibrio/reequilibrio.
- Ayudar a los estudiantes a construir acciones, a captarlas en procesos y a encapsularlas en objetos [1].
- Ayudar a los estudiantes a tomar conciencia de las estructuras que ya construyeron, a conectarlas a los conceptos matemáticos y a hacer construcciones adicionales para tratar situaciones nuevas.
- Poner atención a las voces de los estudiantes, a sus errores y sus aciertos, y tratar de entender su modo de pensar.
- Crear condiciones que sirvan como aliento a los estudiantes en la realización de construcciones mentales para tratar situaciones matemáticas problemáticas.
- Permitir que los estudiantes construyan una base de experiencias para los conceptos antes de enfrentar el formalismo que estructura los conceptos (op. cit. p.28).

[1] Más adelante, en la bibliografía comentada, abundaremos más sobre los conceptos de *abstracción* y *encapsulación.*

1.1.2 - Planeación e instrumentación de instrucciones

En esta etapa se planean y ejecutan estrategias pedagógicas específicas, con el propósito de ayudar a los alumnos a desarrollar las construcciones mentales propuestas en el análisis teórico. En algunas de las actividades realizadas por los alumnos se emplea ISETL, un lenguaje de programación para el aprendizaje de las matemáticas. Éste fue escogido debido a que su sintaxis es muy cercana a la notación matemática, y a que sus comandos y aspectos de programación son relativamente fáciles de aprender. La enseñanza se puede instrumentar desde el enfoque pedagógico denominado ACE [2] – *Actividades, Clase* y *Ejercicios*, cuyos componentes se describen a continuación.

Los alumnos trabajan las *Actividades* en el laboratorio de informática, generalmente en grupos colaborativos. El lenguaje de programación utilizado proporciona un medio ideal para experimentos matemáticos, reflexión y discusión. Las tareas en la computadora son propuestas de forma que ayuden a los estudiantes a desarrollar las construcciones mentales sugeridas por la investigación. Éste es un momento en que los alumnos pueden hacer concretas las ideas abstractas.

Según Dubinsky (1996),

> Estas actividades están planeadas de tal manera que, al realizarlas o intentar realizarlas, el estudiante haga abstracciones reflexivas mediante las cuales se desarrollan las construcciones mentales acciones, procesos y objetos apropiados (Dubinsky,1996:29).

En la *Clase* los estudiantes tienen la oportunidad de volver al asunto, casi siempre en grupos colaborativos. Sin embargo, esta vez usan lápiz y papel y trabajan, en la mayor parte de las veces, basados en las actividades realizadas en la computadora. El instructor conduce las discusiones, proporciona definiciones y explicaciones a partir de las necesidades de los alumnos y de las

---

[2] *Actividad, e*n la etapa de planeación e instrumentación de instrucciones posee el significado dado en el texto, sin embargo, en este trabajo, *actividad* también se usa como sinónimo de *ejercicio.*

cuestiones que vienen surgiendo a lo largo del curso. Es un espacio para que los aprendices se manifiesten sobre lo que ellos piensan acerca del tema.

La parte de *Ejercicios* puede verse como un refuerzo de todo lo que fue aprendido, bajo la forma de una reflexión sobre situaciones por venir. Generalmente, los ejercicios sugeridos son tradicionales. Es un momento extra-clase.

1.1.3 - Observaciones y evaluaciones

La Figura 1 muestra que el análisis teórico sirve de referencia para las observaciones y la evaluación de los datos, así como las observaciones y la evaluación sirven para una posible alteración del análisis teórico, lo que justifica la flecha de doble dirección. Dependiendo de los resultados del análisis de los datos, se refina el análisis teórico.

Los estudiantes son observados cuando trabajan en los problemas matemáticos; la observación se hace utilizando métodos experimentales cualitativos (entrevistas, grabaciones en video, registro de comportamientos) y de análisis documental. Además de eso, se puede recurrir a un análisis cuantitativo de los resultados obtenidos en los cuestionarios aplicados.

Se verifica si el análisis teórico inicial, en el caso del esquema, realmente es satisfactorio, si corresponde a las necesidades del aprendizaje y del desarrollo cognitivo del alumno. Se analiza, también en esta etapa, si los estudiantes aprendieron las ideas matemáticas necesarias para la comprensión del concepto en cuestión. Si es necesario, se rehace el esquema propuesto inicialmente.

En este trabajo, adoptamos el concepto de *desarrollo cognitivo* definido por Armella (1996) como:

> (...) una organización progresiva de las estructuras cognitivas. Un mayor grado de organización de una estructura cognitiva implica un mayor equilibrio de esa estructura. El equilibrio se refiere al

> estado en el cual las estructuras cognitivas de un sujeto han dado y continúan dando los resultados esperados, sin que salga a la superficie ningún tipo de conflicto conceptual. Por ejemplo, ante una perturbación causada por un objeto o un evento que trata de ser asimilado por un esquema, éste se acomoda generando una mejor discriminación de los objetos o los eventos *admisibles* para el esquema, o modificándolo drásticamente hasta el punto de producir un nuevo esquema. Diremos que la conquista de este nuevo nivel de equilibrio es una mudanza cognitiva que identificamos como Aprendizaje (p. 16).

El desarrollo cognitivo puede darse a través de las abstracciones. Si la noción abstraída se da directamente del objeto, como, por ejemplo, la noción del peso, o de color, se trata de una abstracción empírica. La abstracción reflexiva no se da a partir de objetos, sino de la coordinación de acciones realizadas sobre tales objetos.

Para Armella (1996)

> (...) los individuos construyen conceptos y con ellos estructuras conceptuales; a continuación reestructuran estas estructuras para formar esquemas más potentes. Éste es el proceso de organización creciente del sistema cognitivo. En él, la abstracción reflexiva tiene un papel central (p.18).

La teoría APOE considera cinco ejemplos de abstracciones reflexivas como métodos de construcción de conocimiento matemático (Dubinsky, 1991:101):

- **Interiorización**: construcción de procesos internos como una manera de atribuir sentido a fenómenos observados. Piaget se refiere a esa construcción como “traducción de una sucesión de acciones materiales en un sistema de operaciones interiorizadas” (cf. también p.4). Dubinsky ejemplifica:

  > (...) el descubrimiento de que la cantidad de objetos de una colección es independiente del orden en el cual los objetos son dispuestos. En este caso, el niño necesita contar los objetos, reordenarlos y contarlos nuevamente: reordenar y contar, y así sucesivamente. Cada una de esas acciones es

> interiorizada y representada internamente de tal forma que el niño puede reflexionar sobre esas acciones, compararlas y percibir que todas ellas llevan a la misma cantidad de objetos.(p.101)

La interiorización de una acción es una construcción mental de un proceso interno (un todo coherente) referente a una serie de acciones sobre el objeto cognitivo que pueden ser ejecutadas, en la mente, sin necesariamente pasar por todos los pasos específicos (De Vries, 2001).

- **Coordinación**: acto cognitivo de hacer coincidir dos o más procesos para construir un nuevo proceso; esta coincidencia de procesos puede realizarse por simple concatenación.

- **Encapsulación**: conversión de un proceso (dinámico) en un objeto (estático).

- **Generalización**: construcción que se presenta cuando el sujeto aprende a aplicar un esquema pre-existente a una amplia colección de fenómenos. Esto puede ocurrir porque el sujeto se vuelve consciente de la extensa aplicabilidad del esquema. El esquema no cambia, no obstante ahora posee una amplia aplicabilidad.

- **Reversibilidad**: esta construcción está presente cuando el sujeto es capaz de obtener un nuevo proceso invirtiendo un proceso interiorizado.

La enseñanza-aprendizaje de un determinado concepto debe contener actividades que estimulen las abstracciones reflexivas, principalmente aquellas que pueden posibilitar al aluno la presentación de una concepción objeto del concepto.

1.2 - BIBLIOGRAFIA COMENTADA

La bibliografía comentada está divida en cuatro bloques: teoría APOE, álgebra, inecuaciones y tecnologías.

1.2.1 - Teoría APOE

Las tesis y artículos encontrados (con excepción de uno de ellos), que utilizan la teoría APOE o que poseen como objetivo principal analizar las construcciones mentales de los estudiantes cuando aprenden un determinado concepto matemático, presentan las construcciones mentales acción, proceso y objeto sin mencionar los esquemas. En este trabajo he abordado el análisis de esquemas examinando las posibles conexiones del concepto en cuestión con los esquemas de otros conceptos involucrados.

Existen varios artículos publicados que utilizan la teoría APOE, entre los que destacan los siguientes, que considero más importantes para la presente investigación.

Ayers, Davis, Dubinsky y Lewin (1988) hacen una comparación entre dos grupos de alumnos universitarios con relación al aprendizajes del concepto de composición de funciones. Un grupo aprendió de manera *tradicional*, aunque no aclaran qué entienden por *aprender de manera tradicional*. El otro grupo tuvo un aprendizaje mediante una metodología de enseñanza elaborada con base en las consideraciones respecto a los procesos mentales de aprendizaje de los alumnos. En esta metodología utilizan computadoras, Sistema Unix, y una fundamentación teórica basada en la Epistemologia Piagetiana. Se utiliza la teoría de Piaget por considerarla singularmente apropiada debido a su articulación clara de la conexión entre actividad y representación, y a la ventaja de actividades concretas para desarrollar representaciones adecuadas para conceptos abstractos. Los autores concluyen que el grupo sometido a la metodología de enseñanza que planearon obtuvo un mejor aprovechamiento. El aprovechamiento se midió con un cuestionario cuyo fin era el de detectar la construcción de abstracciones reflexivas.

Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendorf (1997) exploran la comprensión gráfica de estudiantes de cálculo con respecto a la idea de función y su derivada. Presentan un análisis teórico inicial de las construcciones cognitivas necesarias para el entendimiento del tema en cuestión e instrumentan actividades planeadas para ayudar a los alumnos a que formen las construcciones mentales descritas inicialmente. Después de la recolección y el análisis de datos, proponen un análisis epistemológico revisado para la comprensión gráfica de la derivada. También hacen un análisis comparativo de dos grupos de alumnos: un grupo que estudió bajo la propuesta metodológica de enseñanza presentada por los autores y otro grupo que estudió el tema en un curso *tradicional* de cálculo. Este análisis sugiere que un curso basado en la perspectiva teórica presentada por esos autores puede llevar a los estudiantes a un mejor entendimiento del aspecto gráfico de una función y de su derivada comparados con los estudiantes de cursos *tradicionales*.

Breindenbach y otros autores (1992) muestran que, en general, estudiantes universitarios no han mostrado un entendimiento satisfactorio del concepto de función. Utilizan también la teoría APOE para fundamentar el diseño y la instrumentación de una metodología de enseñanza para el concepto de función que hace uso del lenguaje ISETL. Concluyen que los estudiantes que estudiaron bajo esta propuesta metodológica desarrollaran una concepción proceso del concepto de función.

En la investigación respecto a las construcciones mentales de los estudiantes presentes durante el aprendizaje del concepto de inecuación, utilizo las definiciones de concepción acción y proceso de funciones presentadas por esos autores.

Clark y otros (1997) trabajan con el concepto de regla de la cadena. Esos autores presentan un esquema para ese concepto fundamentado en una extensión de la teoría APOE, que incluía la tríada piagetiana (niveles de esquema Intra, Inter y Trans).

Se realiza una descripción inicial de cómo puede aprenderse la regla de la cadena y, basados en esta descripción inicial, los autores intentan interpretar algunas entrevistas realizadas con alumnos de cálculo utilizando la teoría APOE. La insuficiencia de ese instrumento considerado en forma aislada lleva a una extensión de la teoría APOE, la tríada Piagetiana, para incluir una teoría de desarrollo de esquema basada en las ideas de Piaget y Garcia.

La tríada piagetiana proporciona una estructura para que los autores interpreten el entendimiento de los estudiantes frente al concepto de *regla de la cadena* y que clasifiquen sus respuestas en las entrevistas. Los resultados de esta interpretación llevan los autores a rehacer el análisis epistemológico inicial y a concluir que la comprensión de un estudiante sobre el concepto de la regla de la cadena involucra la construcción de un esquema que debe contener por lo menos una concepción proceso de función, de composición y de descomposición de funciones. El esquema de función del individuo debe estar conectado a su propio esquema de diferenciación. Este último debe de incluir una concepción de las reglas de diferenciación, por lo menos al nivel de proceso. Cabe resaltar que el ideal de aprendizaje, en este caso, es que el individuo presente la concepción objeto.

Baker, Cooley y Trigueros (2000) analizan la comprensión de los estudiantes con respecto al esbozo gráfico de una función proveyendo únicamente la 1^{a} y la 2^{a} derivada, límites y continuidad. Se utilizó la tríada piagetiana del desarrollo del esquema, en el contexto de la Teoría APOE para analizar las respuestas de los estudiantes.

El entendimiento de los estudiantes del concepto de integral definida es analizado en el artículo de Czarnocha, Loch, Prabbu y Vidakovick (2001). Ellos también utilizan la Teoría APOE para analizar las respuestas de los estudiantes y hacen una propuesta de cambios de enseñanza y aprendizaje del concepto. Sande (2002) desarrolló un material, basado en la Teoría APOE, para presentar en la Universidad de Ohio, que habla de la comprensión de los estudiantes sobre el concepto de volumen en sólidos de revolución.

Alvarenga (2003) hace un estudio respecto de la enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la Teoría APOE. Meel (2003) presenta una comparación, sobre la evolución de la comprensión matemática, entre los modelos de Pirie y Kieren y la teoría APOE.

Díaz (2002) presenta un trabajo sobre la evaluación del aprendizaje del cálculo desde una perspectiva constructivista. En este trabajo, ella utiliza la propuesta del RUMEC para la evaluación del aprendizaje, la cual involucra innovaciones que incluyen: aprendizaje colaborativo, actividades computacionales, lecturas y discusiones, basadas en acción-proceso-objeto y esquema para estimular la construcción de los conceptos matemáticos.

Existen varios otros artículos, así como algunas tesis de doctorado, que tienen como objetivo principal presentar un análisis epistemológico, basado en la teoría APOE, para algún concepto matemático. Entre ellos cito, por ejemplo, artículos que se relacionan a los siguientes conceptos: Principio de Inducción(Dubinsky,1987,1989), Concepto de Variable (Trigueros,1995,1996,1997), Grupos y Subgrupos (Brown,1997;Dubinsky,1994; Clark,1999), Límites (Cottrill,1996), Secuencias (McDonald, 2000), Permutaciones y Simetrías (Asiala, 1998). Además de esos conceptos, existen otros que fueron explorados en tesis de doctorado, como la transformada de Laplace (Montoya, 1999) y el Teorema Fundamental de Cálculo (Thomas, 1995).

1.2.2 - Álgebra

El tema *enseñanza-aprendizaje de álgebra* es largamente abordado en la literatura de matemática educativa, en dónde se enfocan propuestas de metodología de enseñanza, desempeño de alumnos, justificaciones para los errores más comunes y análisis de estructuras cognitivas de estudiantes.

Kieran (1980, 1981) enfoca la interpretación del signo de igualdad desde la escuela básica hasta el nivel universitario. Resalta que el concepto de equivalencia se trabaja en todos los niveles escolares, pero que su comprensión es difícil. La autora apunta que

> (...) resolver ecuaciones algebraicas implica no sólo la conciencia de la noción de que el lado derecho y el izquierdo de las ecuaciones son expresiones equivalentes (tienen el mismo valor), sino también que cada ecuación puede ser sustituida por otra ecuación equivalente (con la misma solución).
>
> (...) que estas dos nociones de equivalencia pueden ser indistintas para los estudiantes se ve reflejado en los procedimientos que usan para resolver ecuaciones (p. 167).

Kieran (1995) expone un estudio de ecuaciones y su resolución, bajo dos enfoques empleados por alumnos principiantes, es decir presenta la investigación realizada con un grupo de alumnos que fue dividido y clasificado en dos subgrupos de acuerdo con dos enfoques: el aritmético que abordaba las operaciones dadas, resolviendo las ecuaciones por prueba y error; y el algebraico que abordaba la inversa de las operaciones dadas, resolviendo la ecuación transponiendo términos.

El estudio mostró que, después de la instrumentación de una experiencia de enseñanza, los alumnos del grupo de álgebra parecieron haber adquirido la noción de letra como un número e incluso reforzaron esa noción utilizando procedimientos de sustitución para algunas ecuaciones, sin embargo no utilizaron el procedimiento de efectuar la misma operación en los dos miembros. Parecían incapaces de comprenderlo y preferían extender el procedimiento de transposición, utilizándolo siempre que fuera posible. Al final de la experiencia de enseñanza, sólo la mitad de los alumnos utilizaba regularmente el procedimiento de la misma operación en los dos miembros. Curiosamente, eran los alumnos que al inicio empleaban el enfoque aritmético.

Bernard y Cohen (1995), en un trabajo sobre ecuaciones, exponen algunas ideas que tienen aspectos en común con las propuestas metodológicas para la enseñanza de inecuación hechas en el presente trabajo. Estos autores presentan un programa de computación interactivo en el cual el alumno puede probar valores para verificar si éstos son soluciones de una ecuación dada. En el caso del presente trabajo, los estudiantes elaboran un programa que prueba valores en la inecuación y genera tablas de variados tipos. Bernard y Cohen también proponen una actividad para trabajar la noción de equivalencia de ecuaciones. La actividad consiste en la formación de grupos de ecuaciones equivalentes de tal manera que todas las ecuaciones de un mismo grupo tengan el mismo conjunto-solución. No obstante, esta misma idea puede ser utilizada aquí, para inecuaciones, es decir, se pueden elaborar actividades que consistan en la formación de grupos de inecuaciones equivalentes.

Para Usiskin (1995), las diferentes concepciones de álgebra se relacionan con los diferentes usos de las variables. Esas relaciones son presentadas resumidamente en la siguiente tabla:

Concepciones de álgebra	**Uso de las variables**
Aritmética generalizada	Generalizadoras de modelos (traducir, generalizar)
Medio de resolver ciertos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudio de relaciones	Argumentos, parámetros (relacionar, gráficos)
Estructura	Signos arbitrarios en el papel (manipular, justificar)

Usiskin plantea un dilema interesante:

> "deseamos que los alumnos tengan en mente las referencias (generalmente números reales) cuando utilizan las variables. Pero también deseamos que sean capaces de operar con las variables sin tener que volver siempre al nivel de esa referencia" (p.18).

En otras palabras, es necesario que los alumnos trabajen tanto el lado concreto como el abstracto de la idea de variable.

Heid y Kunkle (1995) hacen uso de tablas generadas en la computadora para enfocar el significado de expresiones, ecuaciones e inecuaciones. Afirman que, en el enfoque *tradicional* de resolución de ecuaciones, el concepto de *solución* se ve opacado por el énfasis en el procedimiento. Los autores proponen el uso de tablas para visualizar también el concepto de solución. Se refieren a algunas deficiencias presentadas por los alumnos en cuanto a la comprensión de expresiones algebraicas:

- Deficiencia relacionada con la noción de variación.

- Como las expresiones algebraicas contienen variables que asumen un conjunto de valores, las propias expresiones también asumen un conjunto de valores. No obstante, los alumnos frecuentemente sólo perciben las variables y las expresiones variables como representaciones de números fijos. O sea, un concepto dinámico se reduce a uno estático.
- Comprensión frágil de las ideas comparativas del álgebra. Los alumnos tienen dificultad para distinguir entre ecuaciones (e inecuaciones) y las expresiones que las constituyen.
- Interpretación de la esencia real del álgebra como es la ejecución de secuencias fijas de manipulaciones simbólicas, y no como instrumento matemático para la formulación y la interpretación de problemas.

Mientras los autores proponen el uso del MUMATH para generar tablas de valores que proporcionen al profesor de álgebra la oportunidad de reforzar en el alumno las comprensiones mencionadas, yo he optado por utilizar el lenguaje ISETL, también para generar tablas a fin de enfocar el entendimiento del concepto de solución de una inecuación.

Según Trigueros y Ursini (1996, 1997), el concepto de variable tiene varias facetas e incluye distintos aspectos. Los más importantes son el uso de la variable como incógnita, el uso de la variable como número generalizado y el uso de la variable en una relación funcional.

La conceptualización de la variable como incógnita implica:

- Reconocer e identificar, en un problema, la existencia de algo desconocido que se puede determinar;
- Interpretar el símbolo que aparece en una ecuación como un objeto que puede tomar valores específicos;
- Ser capaz de sustituir la variable por un valor o por valores que satisfacen la ecuación;
- Determinar la incógnita que aparece en las ecuaciones o problemas, ejecutando las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias;

- identificar la incógnita en una situación específica y representarla simbólicamente en una ecuación.

La conceptualización de la variable en una relación funcional implica:

- Reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfico, problema verbal o expresión analítica;
- Determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente;
- Determinar los valores da variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente;
- Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación en cualquiera de sus formas de representación;
- Determinar los intervalos de variación de una d las variables cuando se conocen los intervalos de la otra;
- Expresar los datos de un problema en una relación funcional (tabla, gráfico y/o expresión analítica.

Las mismas autoras (2001) presentan resultados que muestran las posibilidades de aplicar un modelo, modelo *Tres Usos de la Variable-3UV*, en el diagnóstico, el análisis de libros y la planeación didáctico-pedagógica para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de variable. Como complementación a lo anterior, Trigueros y Ursini (2004) trabajan el referido modelo como estructura teórica, para analizar la interpretación, simbolización y manipulación de parámetros en diferentes contextos. Sugieren algunas maneras de interpretar parámetros que llevan a los estudiantes a manejar dichos parámetros con más éxito. En este trabajo se utilizan las ideas de conceptualización de variable como incógnita y de variable en una relación funcional.

Evgeny (2002) propone una estructura teórica para el análisis del entendimiento del papel de los símbolos literales basándose en la distinción entre variable libre y limitada. Tal artículo es fijo en la representación paramétrica del plano. Él concluye que los cursos de álgebra no proporcionan una preparación adecuada al estudiante para enfrentar los cursos avanzados de álgebra, pues ofrecen una noción muy limitada de variable. Así, no es posible que una investigación sobre el pensamiento algebraico describa los papeles de los símbolos literales en una sola y simple manera. Además, Bill (2001) resalta que existen muchas situaciones en las que los aprendices necesitan no solamente reconocer diferentes usos de los símbolos literales, pero también los cambios de sus significados.

Herscovics y Linchevski (1991) hacen una investigación basada en la idea de Corte Didáctico; es decir, un punto de demarcación entre álgebra y pre-álgebra, como, por ejemplo, en la ocurrencia de un valor desconocido en ambos lados del símbolo de igualdad, en una ecuación de primer grado (Filloy y Rojano, 1984) y muestran que esa idea es válida, pero que debe de ser redefinida en términos de obstáculos epistemológicos y no de manera matemática. Para Herscovics y Linchevski, Corte Didáctico es la inhabilidad de operar con o en la incógnita. Los mismos autores (1994) presentan un refinamiento de esa demarcación. En esa misma línea de investigación, transición de la aritmética al álgebra, tenemos también, por ejemplo, los trabajos de Cooper y col. (1997), Cortes y col. (1990).

Bloedy-Vinner (1996) estudia los problemas que los estudiantes enfrentan y los errores que cometen en la resolución de expresiones algebraicas. Tales errores son caracterizados según la manera no algebraica de pensamiento y las dificultades en el tratamiento.

Barash (2002) enfoca su estudio en los modelos mentales algorítmicos, procedimientos algebraicos básicos que tienden a ser modelos mentales. Por ejemplo, los estudiantes que conocen la fórmula $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, pueden pensar, inspirados en el modelo de la propiedad distributiva, que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.

Bazzini, Boero y Garuti (2001) trabajan la relación entre el significado y el símbolo de las expresiones algebraicas. Hacen uso de un modelo teórico para interpretar algunos razonamientos algebraicos dinámicos que aparecieron en las resoluciones de los estudiantes.

Las tendencias cognitivas y las interacciones entre la semántica y el análisis de la sintaxis en la producción de errores sintácticos de dos estudiantes son estudiadas por Rojano y col. (2002).

Rubio (2004) prueba que un modelo didáctico basado en el método para resolver expresiones algebraicas, de creciente complejidad, que utiliza un enfoque numérico, fue esencial para desarrollar la habilidad analítica y el uso competente del lenguaje algebraico de los estudiantes de tres diferentes niveles de desempeño en álgebra elemental.

Hallagan (2004) describe los resultados de una investigación en la forma en la que los maestros interpretan las respuestas de los estudiantes cuando realizan tareas que involucran expresiones equivalentes. El estudio de cómo el maestro interpreta el proceso de aprendizaje de sus estudiantes ofrece la posibilidad de planear metodologías de forma que puedan llegar a una verdadera comprensión de las ecuaciones equivalentes.

Con respecto al concepto de función, vale la pena mencionar los siguientes:

Tinoco (2004) presenta una propuesta de enseñanza y aprendizaje del concepto de función y destaca, así como Caraça (1984), la necesidad de estudiar también las razones que determinaron el surgimiento del tal concepto.

Hoch & Dreyfus (2004) hacen un estudio sobre las ecuaciones bajo un enfoque estructural. Para ellos, estructura es un término conveniente para describir algo sobre lo que muchos de nosotros tenemos una vaga concepción, pero que no podemos traducir en palabras. Tal término desempeña un papel muy importante en varios artículos. Para algunos autores, la estructura es utilizada para describir un resultado de construcción, una simetría, una composición de definiciones, teoremas, un método de clasificación, como relación. Ellos comentan que los alumnos de Israel tienen muchas dificultades para trabajar con ecuaciones. Muchas veces no reconocen sus estructuras internas y, cuando las reconocen, no logran utilizarlas.

Tsamir, Tirosh & Tiano (2004) hacen una exploración acerca de cómo varios maestros trabajan erróneamente la resolución de inecuaciones cuadráticas de sus alumnos. Identificaron muchos errores comunes: multiplicar y dividir ambos los lados de una inecuación por un factor no positivo; lidiar con productos de las formas: $a.b > 0 \Rightarrow a > 0$ y $b > 0$, $a.b < 0 \Rightarrow a < 0$ y $b < 0$; tomar decisiones inapropiadas en relación con los conectivos lógicos y rechazar $\{x \mid x = 3\}$, $\Re$ y ϕ como soluciones.

Los mismos autores (2004b) investigan la *percepción de la estructura*[3] en el álgebra, resoluciones de ecuaciones, en el bachillerato. Para ellos, una estructura puede considerarse bajo el punto de vista de un largo análisis de la forma como un entero está compuesto por sus partes. Este análisis describe el sistema de conexiones o relaciones entre las partes. Específicamente en álgebra, una estructura puede ser descrita como un conjunto de habilidades como considerar una expresión algebraica como un entero, reconociendo una sentencia o una expresión algebraica como una anteriormente encontradas, dividir un entero en sub-estructuras, reconocer conexiones entre estructuras, reconocer cuales manipulaciones son posibles de ejecutarse, y cuales son útiles para ejecutarse. Él término *percepción de la estructura* fue utilizado en Linchevski & Sfard (1999) en el sentido de describir fallas de los estudiantes en el uso del conocimiento de estructuras aritméticas en inicio del estudio de álgebra.

Tall (2004) escribió un artículo sobre las contribuciones del foro *Ecuaciones e Inecuaciones Algebraicas* en el PME 28. En este artículo expone que el álgebra puede ser caracterizada en tres niveles: *álgebra estimativa*, *álgebra manipulativa* y *álgebra axiomática*. Sin embargo, el autor no

[3] Structure Sense

menciona que los estudios son muy locales, por lo que son necesarios estudios más globales para la enseñanza y el aprendizaje de ecuaciones e inecuaciones.

Bazzini & Tsamir (2004) plantean algunas preguntas para orientar las discusiones en dicho foro y que son para ellas motivos para investigaciones más profundas:

- ¿Cuáles son las concepciones de los estudiantes acerca de las ecuaciones y de las inecuaciones? ¿Cuáles son los razonamientos típicos correcto e incorrecto más encontrados? ¿Cuáles son los más comunes?
- ¿Cuáles son las posibles causas de los errores?
- ¿Cuál referencia teórica puede utilizarse para analizar el razonamiento acerca de las ecuaciones y las inecuaciones?
- ¿Cuál es el papel del profesor, del contexto, de las diferentes maneras de representación y las tecnologías que promueven la comprensión de los estudiantes?
- ¿Cuáles son las metodologías que mejoran el aprendizaje de esos conceptos?
- ¿Existe una teoría global que involucre la teoría local de ecuaciones e inecuaciones?

Boero & Bazzini (2004) reafirman y extienden algunas ideas presentadas en el Seminario Franco-Italiano sobre la Didáctica del Álgebra, SFIDA, acerca del estudio de las inecuaciones utilizando el concepto de función, la comparación de funciones y sobre la utilidad de las metáforas básicas como componente crucial del pensamiento. Los autores retoman algunas ideas de Gray y Tall (1994) y las orientan a la enseñanza de álgebra, como por ejemplo las ideas de dualidad, de ambigüedad y de flexibilidad, ya sea en la interpretación o en la resolución de una inecuación, son utilizadas en esta investigación.

Caracterizan el pensamiento flexible en términos de la habilidad de moverse entre la interpretación de la notación como el proceso de hacer algo, y como un objeto para operar con y sobre él. Las ideas de los autores respecto a las características cognitivas de los conceptos matemáticos reflejan la creencia de que un profesor de matemáticas debe enfocar la dualidad, la ambigüedad y la flexibilidad inherentes a las representaciones de objetos matemáticos y a los procedimientos de computación, numéricos y algebraicos. Definen los términos de proceso (usados en general como la representación cognitiva de una operación matemática) y procedimiento (algoritmo específico para instrumentar un proceso), y relatan la dicotomía existente entre esos términos. Resaltan que la manera como los símbolos son utilizados desempeña un papel esencial en la discusión entre proceso y concepto, es decir, entre cosas para hacer y cosas para conocer.

Estos autores presentan la idea de *procept* como amalgama de tres componentes: un proceso que produce un objeto matemático, y un símbolo que representa tanto el proceso como el objeto. Resaltan que lo que importa es la habilidad y la flexibilidad del sujeto al lidiar con el cambio cognitivo de proceso matemático a objetos mentales manipulables. Señalan que el proceso cognitivo de formar un objeto (estático), proveniente de un proceso (dinámico), llamado *entification* (Kaput, 1982), *reification* (Sfard, 1989, 1991) y *encapsulation* (Dubinsky, 1991). Los autores Gray y Tall dan preferencia al término *encapsulation*, usado en el presente trabajo como *encapsulación*.

Davis y col. (2002) investigaron el pensamiento algebraico flexible y destacan la necesidad de esa flexibilidad. Sugiere el uso de la máquina de función para ayudar al desarrollo de tal flexibilidad. Según los autores, la definición de flexibilidad abarca la definición de Gray y Tall (1994) y la de Krutetskii (1969) y caracteriza al pensamiento flexible como reversible, estableciendo una relación en dos sentidos, una habilidad de hacer una transición de una asociación directa con la asociación inversa. Respecto al concepto de función son importantes las asociaciones reversibles, el pensamiento proceptual y las conexiones entre diferentes representaciones del concepto: pensamiento conceptual: tablas, gráficos, sintaxis algebraica.

1.2.3 - Inecuaciones

Bazzini (1998) presenta una reflexión didáctica del comportamiento de alumnos de enseñanza media frente al concepto de equivalencia entre inecuaciones y entre ecuaciones. Hace uso del modelo interpretativo del pensamiento algebraico propuesto por Arzarello, Bazzini y Chiappini (1994). Tal modelo incluye la idea de que la distinción entre denotación y sentido de una expresión algebraica es la clave de lectura para el análisis de las dinámicas del pensamiento en la resolución de problemas algebraicos. Denotación, inspirada en las ideas de Frege, es el objeto al cual la expresión se refiere, mientas que el sentido es el modo mediante el cual el objeto está presentado.

Presento, a continuación, tres resultados del análisis de las entrevistas realizadas por Bazzini, relacionados con la equivalencia de ecuaciones y de inecuaciones.

En general, los estudiantes:

- logran definir el significado de equivalencia entre inecuaciones y entre ecuaciones, sin embargo no saben clasificar si las inecuaciones presentadas en una lista de ejercicio son o no equivalentes;
- contestan con seguridad y facilidad a la pregunta sobre qué es una ecuación, pero, con relación a la pregunta sobre qué es una inecuación, ya no logran responder;
- contestan que es posible multiplicar ambos miembros de una inecuación por un mismo valor, sin referirse al cambio de signo de la desigualdad.

Bazzini utilizó algunas ideas presentadas por Linchevski y Sfard (1991), donde se clasifican las inecuaciones y las ecuaciones en equivalentes y transformables (ET); equivalentes y no transformables (EN); y no equivalentes y no transformables (NN). Bazzini observó un pésimo desempeño de los alumnos frente a la clasificación de las inecuaciones. Y concluye que los alumnos no reconocen la invariabilidad de la denotación cuando varia el sentido. La no transformación del sentido algebraico de una inecuación inhibe la capacidad de reconocer la invariabilidad de la denotación. Finaliza el artículo exponiendo que la distinción fregeana entre sentido y denotación de una expresión algebraica puede orientar de forma útil una didáctica para el álgebra. Los resultados obtenidos por Bazzini parecen concordar con los resultados obtenidos por Sfard (1991).

Maurel y Sackur (1998) proponen desdoblar el saber matemático en varios aspectos: nivel I (definiciones, teoremas, demostraciones, cálculos, etcétera); nivel II (no contradicción y necesidad, etcétera) y nivel III, que concierne a la epistemología.

Los dos primeros niveles tratados por las autoras se refieren a los conocimientos que se espera presenten los alumnos provenientes de la propuesta metodológica presentada en el presente trabajo.

A continuación presento ejemplos de conocimientos en estos niveles.

Nivel I:

- Regla de multiplicación en inecuaciones: Si $a > b$, si $x > 0$, entonces $ax > bx$, y si $x < 0$, entonces $ax < bx$;
- método algebraico (signo del binomio, tabla, lectura de la tabla);
- método gráfico (elección de las funciones, esbozo, lectura de las informaciones sobre el gráfico).

Nivel II:

- una inecuación puede resolverse algebraicamente o gráficamente, sin embargo es claro que se debe hallar el mismo resultado para un problema matemático dado independientemente del método de resolución;
- denotación;
- es necesaria la regla algebraica de la multiplicación en una inecuación;

- si hay dos resultados diferentes, éstos deben ser confrontados, si después de la confrontación no se encuentra el mismo resultado y no hay error en las dos resoluciones, entonces los problemas no son equivalentes.

Boero (1998) propone la inclusión del problema didáctico y cognitivo de las inecuaciones en un programa de investigación acerca de este concepto. El autor plantea preguntas relacionadas a las técnicas de resolución de inecuaciones enseñadas tradicionalmente y cuestiona la apatía del sistema de enseñanza de tal concepto que no ha sido eficaz ni satisfactorio. Afirma que los resultados de la investigación que relata dan un testimonio de la falta de flexibilidad de los alumnos en la aplicación de las reglas algebraicas y lógicas y de la incapacidad de huir de los casos reducibles a tales reglas.

Además de eso, el mismo autor se refiere a la falta de exploración de la potencialidad de aprendizaje implícita en el concepto de inecuación, citando, sobretodo, los conceptos de variable y de parámetros.

Malara, Brandoli y Fiori (1999) presentan un análisis del comportamiento de algunos de los estudiantes recién ingresados a la universidad al enfrentarse con el estudio de algunas inecuaciones. Observó que los errores cometidos por los alumnos italianos son muy parecidos a los errores que cometen los alumnos brasileños recién-ingresados a la universidad, tales como:

- Resuelven una inecuación como si fuera una ecuación, transfiriendo técnicas propias de resolución de ecuaciones para resolver inecuaciones. Por ejemplo: dada la inecuación $\frac{x}{x+1} \geq -2x$, los alumnos la ponen automáticamente en la forma $x \geq -2x(x+1)$, tratando el signo de desigualdad como si fuera una igualdad;
- Presentan dificultad en representar números reales en la recta numérica y en la determinación de números reales, ya representados;
- Muchos piensan que $x^2 > 2x$ siempre;

- Presentan como conjunto solución de $x^2 < 4$ la expresión $x < \pm 2$;
- Ponen énfasis en la manipulación algebraica, y no en los conceptos y su interpretación;
- Hacen uso de la siguiente relación, si $\frac{a}{b} > 0$, entonces $a > 0$ y $b > 0$, necesariamente;
- Emplean transformaciones no permitidas en las inecuaciones, sin tener control de la validez de esas transformaciones;
- Presentan muchas dificultades en la resolución y en la interpretación de inecuaciones paramétricas;
- Muchos no logran interpretar o resolver una inecuación del tipo $-7x^2 < \sqrt{7}$;
- No hacen uso de cuantificadores en las respuestas posibles, cuando se trata de la presentación del conjunto solución de las inecuaciones. Ausencia absoluta del cuantificador *para todo*. Ejemplo: un conjunto-solución del tipo $\{\forall \ \mathrm{x} \in \Re / 1 \leq \mathrm{x} \leq 4\}$ es representado simplemente por $1 \leq x \leq 4$.

Linchevski y Sfard (1994) discuten conceptos operacionales/estructurales (proceso/objeto abstracto) y seudo estructurales en el contexto de ecuaciones e inecuaciones. Según la teoría de la reificación, hay una dualidad proceso-objeto inherente a la mayoría de los conceptos matemáticos. El principio básico de esta teoría es que surge primero el concepto operacional (orientado para proceso), y que se desarrollan a continuación los objetos matemáticos (concepciones estructurales) debido a la reificación de los procesos. Algunos de los conceptos utilizados por las autoras son bastante próximos a los utilizados en la teoría APOE.

Linchevski y Sfard (1991) exponen el proceso de enseñanza-aprendizaje de inecuaciones como ocurre en Israel y, con base en esa exposición y en la teoría de la reificación, destacan el desarrollo de la concepción que denominamos seudo estructural. Para las autoras (1994), tal concepción aparece cuando un alumno se muestra:

> (...)incapaz de imaginar entes intangibles (funciones, conjuntos) los cuales se espera que manipule, utiliza figuras y símbolos como un substituto: un gráfico de una función o una

> fórmula algebraica, el nombre de un número, las letras ϕ y x, cada uno de estos signos van a transformarse en una sola cosa, sin representar ninguna otra cosa (un cambio de nombre de una variable lleva, según la mayoría de los estudiantes de secundaria, a una ecuación completamente nueva (Wagner, 1981). En este caso, diremos que el alumno desarrolló un concepto seudo estructural (Linchevski y Sfard, 1994:221).

De acuerdo con las autoras, inecuaciones y ecuaciones son presentadas en Israel como una fórmula proposicional (PF) definidas como:

> Una combinación de símbolos (números, letras, operadores, predicados y paréntesis) que se transforma en una proposición cuando las letras son sustituidas por números.
>
> Toda PF tiene su conjunto-verdad (TS). Cualquiera de dos PFs que tienen el mismo conjunto verdad son denominadas equivalentes. Resolver una ecuación o una inecuación significa encontrar su TS (p.319).

Basándose en este planteamiento, resolver una inecuación es encontrar la PF más simple posible equivalente a la inecuación inicial. Una inecuación es transformada en una inecuación equivalente a través de las llamadas operaciones permitidas.

Para las autoras, este planteamiento, en lugar de guiar a los alumnos seguros del planteamiento operacional para la estructura, los lleva a desarrollar concepciones seudo estructurales. Las autoras hacen un análisis de estas concepciones utilizando pares de PF clasificados como transformables, no transformables, equivalentes y no equivalentes. En sus estudios con estudiantes de entre 15 y 17 años en Jerusalén, las autoras concluyen que:

- la transformabilidad era prácticamente el único método de equivalencia utilizado por los alumnos;
- la decisión respecto al hecho de que una transformación dada sea permitida o no, haya sido tratada de manera arbitraria y no basada en consideraciones sobre procesos y objetos subyacentes;

- la comprensión de la idea de equivalencia por los estudiantes parecía más instrumental que relacional.

Estas dos últimas conclusiones pueden inferirse del análisis realizado en el presente trabajo.

Linchevski y Sfard finalizan afirmando que el método de enseñanza en Israel no parece ser el único responsable de los tipos de concepciones desarrolladas por los alumnos; se puede hacer mucho para evitar el desarrollo de las concepciones seudo estructurales si se pone más énfasis en el planteamiento operacional al inicio del aprendizaje de varios conceptos.

Boero y col. (2001) nos hablan acerca de la naturaleza y la función de algunas metáforas en la enseñanza y el aprendizaje de las inecuaciones, y analiza algunas posibilidades del aumento de la metáfora básica: maneras usuales de pensamiento matemático de los estudiantes. Hacen una investigación con estudiantes de bachillerato y con un estudiante de doctorado en matemáticas. Concluyeron que en los estudios del concepto de inecuaciones existe la necesidad de comprender los conceptos de variabl*e y de función.*

Bazzini y Tsamir (2001, 2001b) presentan una investigación hecha con estudiantes de Israel y de Italia respecto de su forma de resolver tareas como las siguientes:

- Considere el conjunto $S = \{x \in \Re : x = 3\}$ y analice la afirmación:

  S puede ser la solución tanto de una inecuación como de una ecuación. Explique su respuesta.

- Compruebe la siguiente implicación:

  $$ax < 5 \Rightarrow x < \frac{5}{a} \qquad \forall a \in \Re, a \neq 0$$

- Resuelva la inecuación $(a-5)x > 2a-1$, x sendo la variable y a el parámetro.

Tsamir y Bazzini (2002) describen los modelos algorítmicos de resolución de inecuaciones utilizados por los estudiantes. Kieran (2004) presenta un análisis del trabajo de estudiantes en el cual hubo una tentativa de construir significado para la conexión entre inecuación y ecuación en el contexto de problemas de inecuaciones. Sackur (2004) hace una discusión alrededor de lo que los estudiantes aprenden cuando estudian inecuaciones por medio de los gráficos y concluyen que el aprendizaje por este medio añade una dificultad extra: trabajar con funciones. Farfán y Albert (1997) presentan un acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades con el uso de calculadoras. Boero, Bazzini y Garuti (2001) estudian una perspectiva de cognición para la enseñanza y el aprendizaje de problemas que implican inecuaciones.

1.2.4 – Tecnologías

El uso de nuevas tecnologías, en especial computadoras y calculadoras, en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, es un asunto muy discutido y existen muchas investigaciones y libros que garantizan que éstas ayudan a los estudiantes a desarrollar su capacidad para plantear conjeturas, para hacer observaciones y de flexibilidad de raciocinio.

En el libro *Calculus, Concepts and Computers* (Dubinky y col., 1995) se recomienda la enseñanza y el aprendizaje de Cálculo por medio de computadoras. También en Dubinsky (1995b) se presenta el programa ISETL (Interactive Set Language), para el aprendizaje de las matemáticas. El programa instrumenta instrucciones con una sintaxis muy parecida al lenguaje matemático, y vuelve más concretas las ideas abstractas de las matemáticas. Existen muchos trabajos del grupo RUMEC que presentan propuestas de metodologías de aprendizaje incluyendo computadoras.

En Francia, por solicitud del gobierno, un grupo de investigadores de cinco laboratorios analizó 662 artículos que tratan el uso de las tecnologías en la educación, más específicamente el uso en la enseñanza de álgebra (Lagrange et. al., 2001). Su labor fue principalmente elaborar una estructura teórica como método de investigación y experimentación. Esa estructura fue elaborada utilizando varias dimensiones surgidas de una reflexión teórica. Drijvers (2001) hace un análisis del estudio de este grupo francés.

Diego y col. (2004) hacen un estudio de los efectos de la tecnología al hacer conjeturas, uniendo múltiples representaciones en el aprendizaje del concepto de interacción. En la investigación, los estudiantes hicieron interacciones por medio de un software y utilizando calculadoras gráficas. El estudio indicó una preferencia por la computadora.

Cooper y col. (2001) presenta algunos datos que indican la necesidad de los maestros y de los estudiantes de cambiar sus comportamientos frente al uso de las tecnologías. En este artículo se indica que la comprensión matemática a través de la computadora depende del nivel de dificultad de las actividades planeadas; la correlación entre las actividades utilizando la computadora con las actividades en donde no se usan; un conocimiento profundo del profesor sobre las matemáticas involucradas en estas actividades. Afirman que las matemáticas deben favorecer un medio para que los alumnos reflexionen y discutan sobre lo que hicieron y lo que aprendieron.

Pasqualotti y Freitas (2001) presentan un artículo sobre experimentación en el ambiente virtual (AV) para el mejoramiento de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas. En él defienden que el desarrollo del conocimiento encuentra un apoyo importante en los ambientes virtuales que consiste, sobretodo, en no insinuar una expectativa vacía, de recetas y reproducciones sistemáticas. Pero, los AVs pueden instigar el aprender a aprender y el saber pensar en la medida que exigen un buen grado de raciocinio para manipularlos.

Vilarreal (1999) elaboró una tesis de doctorado en la cual busca contestar la pregunta: ¿Cómo caracterizar los procesos de pensamiento de los estudiantes al trabajar cuestiones matemáticas relacionadas con el concepto de derivada en un ambiente computacional? La autora nos dice que la tecnología conduce a la necesidad de cambios en los contenidos matemáticos que son enseñados, en la dinámica del trabajo en el aula y en los papeles desempeñados por profesores y alumnos. La computadora lleva a una reflexión alrededor de nuevos valores y objetivos para la enseñanza de las matemáticas, así como la falta de reflexión sobre su incorporación en el ambiente educacional puede impedir el proceso de construcción del conocimiento.

Además de estos trabajos existen otros que analizan la eficacia del uso de la computadora como un auxiliar en el desarrollo de construcciones mentales matemáticas o proponen la utilización por medio de una metodología planeada: (Andersen, 2001; Moreno-Armella y Trigo, 2001; Forgasz, 2002; Kieran y Hershkowitz, 2001; Alvarenga, 2003;García y col.1995).

CAPÍTULO 2

PRIMERA ETAPA DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo central de este trabajo es describir las construcciones mentales que un estudiante elabora al estudiar el concepto de inecuación; cómo lo utiliza en situaciones que involucran este concepto. Los tipos de inecuaciones utilizados para esta descripción son polinomiales, racionales, y las que involucran raíces cuadradas. En este capítulo presento la metodología de investigación, las construcciones mentales observadas inicialmente, esquema inicial, primera metodología de enseñanza y aprendizaje, y los resultados de esa etapa de investigación: esquema intermedio. Antes especifico lo que significó, al inicio de la investigación, las expresiones *interpretación del concepto de inecuación* y *resolución de inecuaciones*.

El concepto de inecuación puede ser comprendido bajo dos aspectos, que provienen de tipos diferentes de construcciones mentales: *interpretación de inecuación*, esto es, una inecuación vista como un ente matemático que es necesario interpretar, y que es posible manipular empleando determinadas propiedades del conjunto de los números reales, operar, analizar equivalencias, verificar cuáles de los subconjuntos de $\Re$ satisfacen la inecuación; y bajo el punto de vista de *resolución*: qué tipos de transformaciones están permitidas y qué alteraciones sufrió el conjunto-solución después de ellas, cuál es el mejor método para resolver una inecuación específica, y cómo minimizar cálculos.

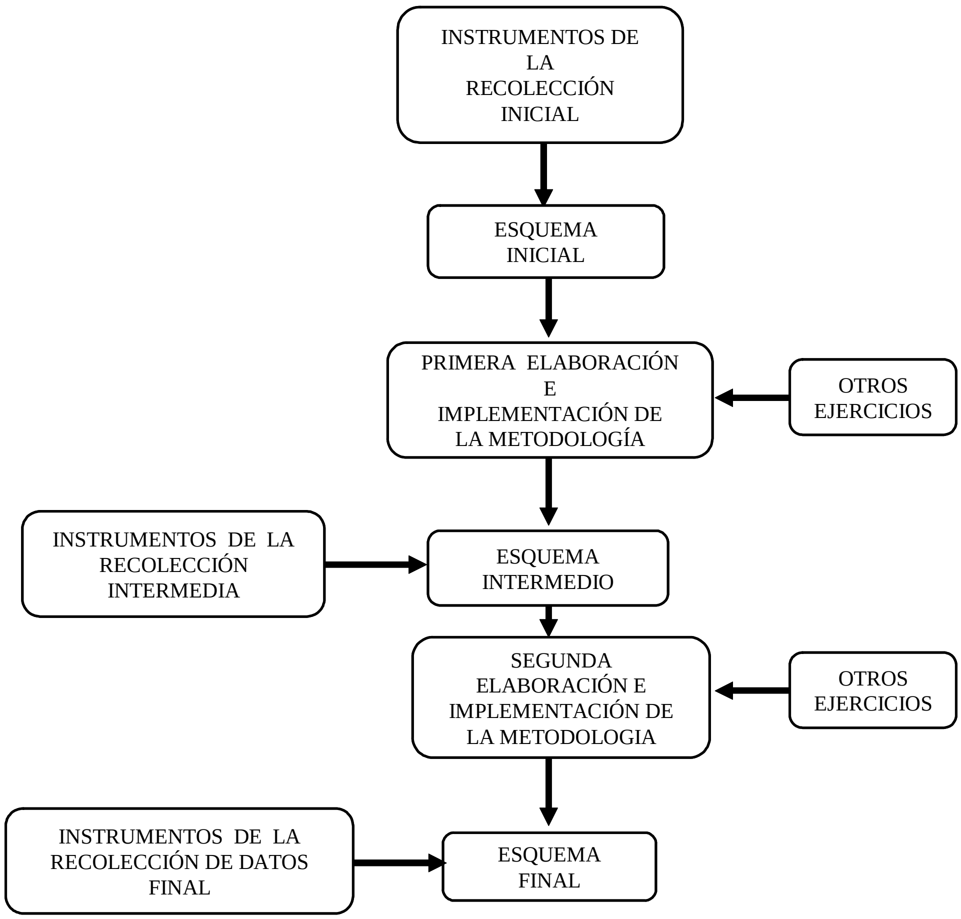
2.1 –LA METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

El paradigma de investigación utilizado se inicia con un análisis teórico de la comprensión del concepto inecuación. En esta investigación, el resultado de ese análisis es el *esquema inicial*, fundamentado en la teoría APOE en una recolección de datos realizada con:

- Un grupo pequeño de 69 alumnos voluntarios de la Universidad Católica de Brasilia y del Centro Universitario UniCEUB: 30% estudiantes de Cálculo I; 35% estudiantes de Cálculo III; 35% distribuidos entre estudiantes del último y penúltimo semestre del curso de Licenciatura en Ciencias Matemáticas que cursaban Análisis de la Recta y Matemática Financiera, respectivamente. De estos últimos, 30% impartían clases en los niveles primario y secundario.
- Profesores universitarios, entrevistados informalmente, con respecto a la enseñanza-aprendizaje del concepto de inecuación.

La recolección inicial, realizada en el primer semestre de 1999, tenía por objetivo obtener datos para fundamentar la elaboración del esquema inicial, que sirvió como referencia para la elaboración de una metodología de enseñanza para el estudio de las inecuaciones. El análisis de los datos recolectados en esa instrumentación llevó a la reelaboración del *esquema inicial*, que dio origen al *esquema intermedio*. Este, por su vez, sirvió de referencia para una segunda implementación de la metodología de enseñanza - segunda etapa de investigación, y, de su refinamiento, surgió el *esquema final* de inecuaciones. En la primera implementación fueron propuestos ejercicios utilizados en la recolección inicial y otros elaborados después del análisis de los datos iniciales. En la segunda implementación hubo algunos ejercicios de la recolección inicial, algunos de los elaborados posteriormente y otros elaborados después del análisis del esquema intermedio. (cf. Figura 2)

Figura 2



El primer levantamiento de datos fue realizado por medio de un cuestionario escrito aplicado a los estudiantes en el horario de clases concedido por sus profesores. Con base en las respuestas, fueron seleccionados para la entrevista tres estudiantes que intentaron resolver el mayor número de preguntas. No obstante, solamente compareció un estudiante del penúltimo semestre del curso de Licenciatura en Ciencias Matemáticas. La entrevista se basó, principalmente, en el cuestionario escrito del estudiante.

El cuestionario inicial poseía ejercicios cuyo objetivo era observar los tipos de resolución algebraicas, de comprensión de resolución gráfica, de comprensión de conjunto-solución, de interpretación de inecuación, con o sin expresiones algebraicas, de expresión cuantificada, “si A, entonces B” y “A si y solamente si B”. Resalto que sólo los ejercicios que encajaban en esa finalidad fueron utilizados en el análisis, pues el test poseía otros ejercicios que no consideré de interés para la investigación. El tiempo dado para la resolución del cuestionario era libre; sin embargo, pocos alumnos realmente se dedicaron a la resolución. Muchos leyeron el cuestionario e intentaron responder algunas preguntas, pero no tuvieron éxito. Observé gran dificultad, y también sorpresa, de los participantes con relación a las preguntas propuestas. Algunos estudiantes salían y comentaban que “nunca habían visto un ejercicio así” o “nunca habían pensado en eso”. Considero los ejercicios sin complejidad, pero muchos exigen interpretación y reflexión, esto es, no eran de resolución automática. La calidad y cantidad de las respuestas a los ejercicios estuvieron por debajo de mis expectativas.

A continuación presento el esquema inicial de inecuación, características de la primera metodología de enseñanza propuesta, los resultados del análisis de los datos y el esquema intermedio.

2.2 - ESQUEMA INICIAL DE INECUACIONES

Estas construcciones fueron las primeras observadas y son resultado del análisis de las soluciones de los ejercicios escritos, de una entrevista, de pláticas informales con otros profesores y del entendimiento de la propia investigadora al respecto del concepto de inecuación.

2.2.1 – Prerrequisitos

Hay algunos prerrequisitos considerados esenciales para que los alumnos comiencen el aprendizaje de inecuaciones en $\Re$ en el nivel de enseñanza considerado en este trabajo:

- Comprender la correspondencia 1-1 entre $\Re$ y un eje orientado con unidad y cero fijos;

- Comprender algunas nociones básicas de conjunto; es decir, algunas operaciones con subconjuntos y su notación, y la utilización de los conectivos “y” y “o”;
- Conocer y aplicar adecuadamente las propiedades de orden de los números reales;
- Familiarizarse con manipulaciones algebraicas básicas, incluyendo manipulación de expresiones polinomiales (de primero y segundo grados), expresiones racionales y expresiones con raíces cuadradas;
- Comprender el significado de implicaciones falsas y verdaderas, así como de recíprocas de implicaciones y de equivalencias;
- Comprender el concepto de función y ser capaz de esbozar gráficos de algunas de ellas, como, por ejemplo, de las funciones lineales y cuadráticas.

Para facilitar la descripción de los componentes del esquema opté por separarlos en dos categorías, inicialmente denominadas *inecuación* y *resolución de inecuaciones*. Las construcciones mentales que están ligadas a la interpretación de inecuación son presentadas en el grupo *inecuación*. No obstante, algunas están también ligadas a las manipulaciones algebraicas realizadas durante un proceso de resolución.

2.2.2 – Construcciones mentales

2.2.2.1 – Construcciones mentales relacionadas con la inecuación

Acción

Un individuo realiza una acción cuando, por ejemplo, atribuye valores específicos a la variable y verifica si satisfacen o no la desigualdad. Es un procedimiento estático. El alumno piensa en un paso por vez.

Proceso

Un individuo que percibe una inecuación como un proceso es capaz de:

- Pensar globalmente, o sea, pensar en una inecuación que recibe uno o más valores numéricos de las variables, ejecuta una o más operaciones con esos valores y retorna valores booleanos. Es un procedimiento dinámico;
- Resolver inecuaciones bajo el punto de vista de funciones, para el caso en que las funciones involucradas son dadas solamente por sus gráficos, sin las expresiones algebraicas;
- Percibir propiedades del conjunto-solución de una inecuación en situaciones en las cuales no se da la información suficiente para resolverla (por ejemplo: saber que 3.6 es solución de $f(x) \leq 0$, ¿qué se puede decir sobre una solución de $f(3x) \leq 0$?).

Objeto

Un individuo que piensa en una inecuación como objeto puede:

- Aplicar propiedades de los números reales para transformar inecuaciones;
- Operar con dos o más inecuaciones;
- Analizar implicaciones y equivalencias entre inecuaciones.

En el caso de resolución de inecuaciones, es necesario agregar otra construcción mental denominada **pre-acción**, pues este tipo de construcciones no encajan en las propuestas por la teoría APOE.

2.2.2.2 - Construcciones mentales relacionadas con la resolución de inecuación

Pre-acción

Un individuo realiza una pre-acción cuando:

- Trata de resolver una inecuación como si fuera una ecuación. Por ejemplo, al transformar $\frac{x+1}{x-4} \leq 3$, la transcribe en la forma $x+1 \leq 3(x-4)$ sin considerar el signo de $(x-4)$. No logra resolverla.
- Emplea manipulaciones algebraicas aleatorias transformando la inecuación sin ningún progreso;

Por ejemplo:

- El individuo realiza transformaciones trasponiendo términos de un lado para el otro de la inecuación de manera cíclica: al intentar resolver $x^4 + 3x < 2x^2$, coloca primero en la forma $3x < 2x^2 - x^4$, después en la forma $3x - 2x^2 < x^4$, o, aún, en la forma $3 - 2x < x^3$, sin concluir nada sobre la solución.
- Al depararse con la resolución de una inecuación que contiene un trinomio del segundo grado, encuentra las raíces y no logra seguir adelante.

Un individuo que posee una *concepción pre-acción* intenta resoluciones de modo aleatorio. Realiza transformaciones, utiliza algoritmos memorizados anteriormente, pero no muestra ningún progreso en la dirección de determinar el conjunto-solución.

Acción

Un individuo realiza una acción cuando resuelve algunos tipos de inecuaciones utilizando algoritmos previamente memorizados o imitando resoluciones de inecuaciones similares; sin embargo, no puede describir el proceso de resolución sin realizarlo y tampoco explica por qué el algoritmo puede aplicarse. Además, es incapaz de verificar si un número es o no solución investigando si pertenece o no al conjunto-solución; requiere, así, sustituir el número en la inecuación.

Proceso

Un individuo que posee una concepción proceso es capaz de:

- Resolver una inecuación, explicando raciocinios y propiedades utilizadas;
- Narrar correctamente el procedimiento de resolución, sin realmente ejecutarlo;
- Hacer uso correcto de estrategias o caminos breves para simplificar la resolución, por ejemplo, resuelve la inecuación $(x-1)^2 > -1$ sin hacer ningún cálculo. Es capaz de reconocer que todo término elevado a un exponente par es positivo y, por eso, el lado izquierdo será siempre mayor que el lado derecho para cualquier número real.
- Verificar si un número es solución o no, investigando si pertenece al conjunto-solución, sin sustituir el número en la inecuación.
- Resolver gráficamente inecuaciones que implican funciones lineales o cuadráticas.

Objeto

Un individuo que concibe una solución de inecuación como objeto es capaz de:

- Utilizar el método de resolución gráfica para resolver inecuaciones que implican otras funciones además de la lineal o la cuadrática.
- Seleccionar un método eficaz para resolver una inecuación comprendiendo las relaciones entre los conjuntos-solución de las inecuaciones transformadas y los muchos procedimientos utilizados para encontrar la solución final. Por ejemplo, al resolver $\sqrt{2+x} \leq x$, elevando ambos miembros al cuadrado, encuentra $2+x \leq x^2$ que posee como conjunto-solución $\{x \in \Re; x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2\}$, que no es el conjunto-solución de la inecuación inicial. Eso ocurre porque no hay equivalencia entre $\sqrt{2+x} \leq x$ y $2+x \leq x^2$. Esto es, si $\sqrt{2+x} \leq x$, entonces $2+x \leq x^2$, pero si $2+x \leq x^2$ no es verdad que $\sqrt{2+x} \leq x$, para todo x real. La equivalencia sólo puede ser establecida cuando se imponen condiciones. En ese caso, hace una intersección del conjunto-solución encontrado inicialmente con el subconjunto proveniente de la restricción necesaria para establecer la equivalencia. Tales condiciones son $2+x \geq 0$ y $x > 0$. Así, $\{x \in \Re ; x \geq 2\}$ es el conjunto-solución final.

Pre-acciones, acciones, procesos, objetos y diversos esquemas de otros conceptos, como los de función y de variable, pueden estar o no conectados en una estructura coherente en la mente del individuo. Si el alumno obtiene dos conjuntos-solución diferentes al resolver una inecuación gráfica y algebraicamente, y no percibe que cometió algún error, aún eligiendo uno de los conjuntos-solución como respuesta, entonces esos aspectos (conjunto-solución, resolución gráfica y algebraica) de su esquema no están conectados de forma coherente.

2.3 – CARACTERÍSTICAS DE LA PRIMERA INSTRUMENTACIÓN DE LA METODOLOGÍA DE ENSEÑANZA

Además de las orientaciones del esquema inicial me orienté también para la elaboración de la metodología de enseñanza, por las siguientes referencias teóricas:

- El aprendizaje de las matemáticas no ocurre de forma lineal como se presenta en los libros de texto;
- Es necesario proponer al estudiante situaciones de desequilibrio;[1]
- Es necesario proponer situaciones de aprendizaje en las cuales el estudiante demuestre flexibilidad mental para hacer interconexiones entre cada esquema, de cada contenido incluido en el concepto de inecuación. Para Gray y Tall flexibilidad de idea, de pensamiento es "mover entre el proceso para realizar una tarea y el concepto a ser mentalmente manipulado como parte de extenso esquema mental" (1994:116);
- Se debe animar a los alumnos a analizar los objetos matemáticos desde diversos ángulos;
- Es esencial intentar percibir lo que pasa en la cabeza de los estudiantes y, para ello, se debe estimularlos a hablar y participar.
- Mirar una teoría, con respecto al concepto de inecuación, de una manera más amplía, más global posible (Tall, 2004).

[1] Desequilibrio en el sentido piagetiano.

- Estudiar el concepto de inecuaciones bajo el punto de vista de las transformaciones que provienen de la aplicación de las propiedades de los números reales.
- Comprender los contenidos que implican el concepto y sus interrelaciones.

La primera instrumentación, elaborada según el enfoque pedagógico ACE (cf. cap.1, p.18), ocurrió en una clase de 45 estudiantes del primer semestre de Ciencias de la Computación de la Universidad Católica de Brasilia, en la disciplina de Cálculo I, del período nocturno, cumpliendo 6 horas/aulas semanales.

Los estudiantes participantes también trabajaban en diferentes labores en un mínimo de 40 horas semanales. Ninguno de ellos mostró los pre-requisitos necesarios para cursar Cálculo I, en especial cuando manifestaban oralmente sus dudas, resolvían los ejercicios escritos, eran entrevistados y discutían en grupos la solución de ejercicios. Ni los participantes de esa etapa ni los de la etapa final sabían que formaban parte de una investigación con objetivo de analizar sus construcciones mentales mediante el aprendizaje de inecuaciones.

El programa de Cálculo I no incluía específicamente el tema de inecuaciones, que fueron estudiadas como parte del tema denominado 'Revisión'. Por ese motivo no hubo el tiempo necesario para un estudio profundo del lenguaje ISETL y de las inecuaciones. Fueron aproximadamente veinte horas de estudio de inecuaciones y funciones, conjuntamente. Los temas tratados no siguieron una secuencia fija de presentación, pero, al inicio, fueron estudiadas desigualdades numéricas y expresiones numéricas, con el objetivo de poner énfasis en la utilización de paréntesis y en la secuencia de operaciones. Después se presentaron las propiedades de los números reales con ejemplos numéricos. Iniciamos las resoluciones algebraicas de inecuaciones de 1^0 y 2^0 grados, empleando las propiedades adecuadas. Paralelamente fueron saliendo algunas soluciones gráficas de las inecuaciones polinomiales de 1^0 y 2^0 grado, con y sin las expresiones algebraicas explícitas. Después se trabajaron inecuaciones racionales y las que involucraban raíces cuadradas.

No se adoptó ningún libro de texto específico, a pesar de que se hayan recomendado algunos como Leithold (1994), Swokowski (1994), Guidorizzi (1987), Ávila (1982). Se elaboraron notas de clase y listas de ejercicios basadas en una separata de la PUC-Rio y en Guidorizzi (1987) que contenían una pequeña discusión sobre proposiciones "A si y sólo si B" y "si A entonces B", propiedades de los números reales, ejemplos de resolución de inecuaciones, indicando las respectivas propiedades empleadas, y ejercicios de desigualdades numéricas. La intención del estudio de las proposiciones fue poner énfasis en las equivalencias, o no, entre las inecuaciones. Pero hubo mucha dificultad por parte de los estudiantes para la comprensión de equivalencias más complejas como las inecuaciones que involucran radicales cuadráticos. El tiempo fue poco y este aspecto no tuvo un trabajo suficiente.

La instrumentación se dio en la época, en el local y con el grupo planeado, sin embargo no esperaba que los estudiantes presentasen tan pocos pre-requisitos.

2.3.1- Enfoque Pedagógico

Como ya se mencionó, según la propuesta del grupo RUMEC, la enseñanza puede ser instrumentada utilizando un enfoque pedagógico particular, denominado ACE (cf. pág.18). Tal enfoque propone que la etapa *Actividades* sea la primera, seguida de la etapa *Clase*, no obstante, en la metodología aquí empleada, estas etapas se dieron paralelamente. Así como en el enfoque ACE, los grupos colaborativos realizaron debates, resolución de ejercicios, seminarios, elaboración de programas en ISETL y una evaluación escrita. Uno de los objetivos de la utilización del método para el grupo colaborativo era propiciar debates más ricos en construcciones mentales, pues, en un mismo grupo, hay, en general, diversas ideas sobre el mismo tema. Existen investigaciones que comprueban que el trabajo en grupos colaborativos proporciona un ambiente de interacción social que aumenta el grado de comprensión (Vidakovic, 1993; Niquini,1997; Jorge,1999; Brumatti, 2002). Los propios alumnos formaban, de manera aleatoria, sus grupos y estos permanecieron sin cambio durante, aproximadamente, dos meses.

Después, a solicitud de algunos estudiantes, hubo cambios de componentes, realizados por la profesora.

El hecho de que el estudio de inecuaciones se haya realizado en conjunto con el estudio de funciones proporcionó una mejor interpretación de las inecuaciones y motivó las soluciones gráficas. De las veinte horas dedicadas a ese tema, en ocho se utilizó la computadora en el laboratorio de computación, los sábados por la tarde.

La estrategia principal de la enseñanza-aprendizaje fue estimular discusiones y debates con el objetivo de que los estudiantes lograsen un nuevo nivel de equilibrio, un cambio cognitiva (cf. el concepto de ‘aprendizaje’, capítulo 1). Ningún contenido era presentado como listo, acabado y aislado. Las respuestas de los alumnos a las preguntas y los estímulos de la profesora conducían el ritmo del estudio y el orden de los contenidos presentados. En un currículo lo cual no hay enfoque sólo en los contenidos pero, también dirigido para la construcción de competencias, la lógica lineal, como puede ser encontrada muchas veces en los libros textos, es desafiada. Pero, la construcción/ampliación de las competencias no se da de forma escalonada, nivel a nivel. Esta construcción se da en red, ampliando el repertorio cognitivo do alumno, instrumentalizando-o para tener éxito en una mayor diversidad de situaciones-problema.

En cuanto al estudio de las equivalencias, la profesora solicitaba ejemplos tanto numéricos como algebraicos del empleo de las propiedades de los reales, de proposiciones, de implicaciones y equivalencias entre inecuaciones, pero pocos estudiantes atendían a lo solicitado. En las discusiones de otros contenidos la participación fue buena. En el estudio de la resolución algebraica, se motivaba primero la interpretación de la inecuación y después su resolución. Las preguntas planteadas inicialmente tenían como una de sus finalidades desarrollar una concepción acción en los estudiantes. Enseguida, la profesora planteaba preguntas cuyas respuestas exigían una mayor abstracción para su interpretación y resolución.

También se dio un poco de la historia del signo de desigualdad, creado por el inglés Thomas Harriot , alrededor de 1585. Pero sus trabajos sólo fueron publicados en 1621 diez años después de su muerte.

2.3.2 – Los ejercicios[2]

La mayoría de los ejercicios fueron propuestos para ser resueltos en grupo. Antes de que los alumnos procedieran a resolver los ejercicios, la profesora resolvía con los alumnos uno o más, dependiendo las necesidades del grupo. Hubo tareas propuestas para realizarse fuera del aula y las correcciones a éstas se hicieron por parte de los propios estudiantes. Se sacaba por sorteo un alumno de cada grupo para la discusión y resolución de tales ejercicios en el pizarrón y cualquier persona del grupo podría interferir en la presentación. El sorteo era realizado pocos minutos antes de la presentación ya que los ejercicios eran dados con una semana de anticipación para que los alumnos se preparasen.

Cuando la metodología fue elaborada, la profesora supuso que los alumnos ya tenían los pre-requisitos necesarios para el entendimiento de ese nuevo tema, porque el estudio de inecuaciones se contempla en el bachillerato y ya habían oído hablar de propiedades de los reales, en la enseñanza básica. Debido al limitado número de horas destinado al estudio de inecuaciones, a la poca determinación de los estudiantes para cambiar sus puntos de vista, a la gran cantidad de errores de conceptos y a los pocos pre-requisitos detectados, no se trabajaron bien algunos aspectos, como el análisis de equivalencia entre inecuaciones.

La resolución de inecuaciones del tipo $\frac{p_1(x)}{q_1(x)} \leq \frac{p_2(x)}{q_2(x)}$, en que p_1, p_2, q_1 e q_2 son polinomios

Reales y $q_1(x) \neq 0$ e $q_2(x) \neq 0$, fue explorada de dos maneras diferentes. Una fue el estudio de la manera como se presenta en la mayoría de los libros de Cálculo, es decir, por medio de análisis

[2] La numeración **I**, en los ejercicios, indica que fueron elaborados para la recolección inicial, pero también fueron aplicados en la primera instrumentación de la metodología y la numeración **II** indica los otros ejercicios elaborados para esa misma instrumentación. El **III** indica los instrumentos de la segunda etapa. Presento todos en el anexo A.

de las condiciones en que se pueden multiplicar los dos miembros por alguna expresión algebraica. Esa resolución tenía como objetivo llamar la atención de los estudiantes hacia las posibles transformaciones permitidas y hacia las propiedades de orden de los reales que las legitiman. Como se especificó anteriormente, en esta etapa no se puso énfasis al análisis de las consecuencias de tales transformaciones para el conjunto-solución de la inecuación inicial.

La segunda forma consistió en efectuar transformaciones de manera que uno de los miembros de la inecuación se vuelva cero, y el otro miembro se reduzca al mismo denominador, para, enseguida, analizar los signos de los términos de la fracción algebraica obtenida. Todos los estudiantes optaron por este último método cuando se trataba de inecuaciones del tipo $\frac{p_1(x)}{q_1(x)} \leq \frac{p_2(x)}{q_2(x)}$. En principio, parecía más un "algoritmo" decorado pelos estudiantes. Sin embargo, algunos supieron explicar el porqué de su elección de este último método, valiéndose de respuestas más completas que las del tipo: "para no cometer errores". Como, por ejemplo, el estudiante Zezé[3], que logra explicar por qué no se puede multiplicar la inecuación por la función $q_1(x)$. La respuesta que presento a continuación se refiere al ejercicio **5Ib**. El objetivo de este ejercicio es verificar la comprensión del empleo de las propiedades de los reales.

5I - Analice las afirmaciones siguientes. Responda verdadero o falso y justifique.

a Todo número real satisface a la inecuación $(x-1)^2 > -1$.

b Para todo número real x, $x \neq 2$, $\frac{x^2+1}{x-2} > 3 \Leftrightarrow x^2+1 > 3(x-2)$

Zezé: Que esta expresión implica que x al cuadrado más uno, mayor que tres que multiplica x menos 2, y ahí ah…, y esa expresión implica otra, una implica a la otra. Sólo que vimos que no es así, porque se trata de que x menos dos es una variable que no sabemos si es positiva, puede asumir valores positivos y negativos, podría alterar el valor de esta desigualdad.

[3] Los nombres de los entrevistados son ficticios.

Los universitarios participantes en esta etapa y la próxima tuvieron muchas dificultades para aplicar e identificar la propiedad de los números reales que se emplea. Preferían resolver inecuaciones de forma automática como venían practicando hasta entonces, sin comprender las raciones que les permitía, o no, emplear determinadas acciones Me sorprendí con esas reacciones, pues creía que no tendrían dificultades en *aceptar* y *comprender* la resolución de las inecuaciones. Después, algunos estudiantes se acostumbraron a la idea de razonar sobre lo que se hacía, qué propiedad de los reales respaldaba su operación. Tal vez eso justifique el hecho de que sólo 2 alumnos presentasen, al final del estudio, una concepción objeto de inecuación e interpretación. En la interpretación y resolución gráfica, también presentaron mucha dificultad y quedó claro el poco entendimiento de funciones, principalmente de gráficos de funciones.

Las inecuaciones propuestas, en esta instrumentación, para la resolución algebraica pueden encontrarse en los libros más tradicionales de Cálculo y en las referencias bibliográficas. Los ejercicios de resolución gráfica y de interpretación de inecuación no fueron encontrados en la literatura referida.

Los ejercicios enfocaron básicamente dos aspectos del tema en estudio denominados *inecuación* y *resolución de inecuaciones* (cf. cap.1). En el aspecto *inecuación* tomo en cuenta interpretación de inecuación, comparación entre funciones (cf. por ej. **1I**), resolución de inecuaciones conociendo sólo la representación gráfica de las funciones involucradas y operaciones con inecuaciones. En *resolución algebraica de inecuación* se propusieron algunas inecuaciones para ser resueltas algebraicamente.

Todas las preguntas del apartado *inecuación* proporcionan medios para conducir el estudiante a alcanzar por lo menos una concepción acción. Éste puede, o no, limitarse a esa concepción, esto depende del tipo de abstracción desarrollada. A continuación presento algunos ejercicios junto con el objetivo de su utilización en la metodología (la lista completa se encuentra en el anexo A).

3I – A continuación tenemos una tabla con los valores de las expresiones x^2 y $3x+4$, para números enteros entre –5 y 5.

a ¿Para cuáles valores de esta tabla tenemos $x^2 < 3x+4$?

b Esta tabla puede sugerir una respuesta a la pregunta: ¿para cuál conjunto de números reales la desigualdad $x^2 < 3x+4$ es satisfactoria? ¿Cuál es la respuesta? Justifique.

c ¿V o F? Si x=4,92, entonces ¿ $x^2 < 3x+4$?

x	x^2	$3x+4$
-5	25	-11
-4	16	-8
-3	9	-5
-2	4	-2
-1	1	1
0	0	4
1	1	7
2	4	10
3	9	13
4	16	16
5	25	19

El objetivo del ejercicio **3I** es que el estudiante realice una acción, pero no se limite a ella, pues los incisos **b** y **c** propician también el surgimiento de una concepción proceso. En el inciso **b,** se debe resolver la inecuación.

1I – En la tabla se presentan los valores de las expresiones $x-4$ e $3x-6$, para números enteros entre –5 y 5.

x	$x-4$	$3x-6$
-5	-9	-24
-4	-8	-18
-3	-7	-15
-2	-6	-12
-1	-5	-9
0	-4	-6
1	-3	-3
2	-2	0
3	-1	3
4	0	6
5	1	9

a ¿Para cuáles valores de esta tabla tenemos $x-4 < 3x-6$?

b La tabla puede sugerir una respuesta a la pregunta: "¿Para cuál conjunto de números reales la inecuación $x-4 < 3x-6$ es satisfactoria?" ¿Cuál es la respuesta? Justifique.

c Si x = 0.5, entonces $x-4<3x-6$. ¿Esta afirmación es verdadera (V) o falsa (F)?

Los ejercicios **1I** y **3I** se emplearon con la finalidad de que su resolución posibilitase el análisis de construcciones mentales en relación con la interpretación del conjunto solución, a la comparación de expresiones algebraicas por medio de tablas y a la comprensión de los estudiantes sobre el conjunto de los números enteros y racionales.

2I - Analice las afirmaciones siguientes. ¿Son verdaderas o falsas? Justifique su respuesta.

a Sean f y g dos funciones definidas para todo número real x. El conjunto de todos los números reales que satisfacen a la desigualdad $f/g>0$, en donde $g>0$ para todo x real, es el conjunto de los reales que satisfacen $f>0$.

b Sean f y g dos funciones definidas para todo número real x. El conjunto de los números reales que satisfacen a la desigualdad $f/g<0$, en donde $g<0$ para todo x real, es el conjunto de los reales que satisfacen $f<0$.

c Sean f y g dos funciones definidas para todo real. El conjunto de los números reales que satisfacen a la inecuación $f\times g\times h>0$ es la unión de los conjuntos de números reales que satisfacen respectivamente a $f>0$, $g>0$ e $h>0$.

d Sean f y g dos funciones definidas para todo real. El conjunto de los números reales que satisfacen a la inecuación $f<g<h$ es la unión de todos los conjuntos de números reales que satisfacen $f<g$ y $g<h$, respectivamente.

Las afirmaciones **1I** hasta **2Id** poseen potencial para desarrollar una concepción proceso de inecuación. El estudiante debe interiorizar la acción de analizar la atribución de valores aislados a la variable. Necesita trabajar, sin las expresiones algebraicas explícitas, el que puede necesitar una concepción proceso de función de acuerdo a Breindenbach y col. (1992).

El **5Ib** pide para que el estudiante analice equivalencias entre inecuaciones. Además de eso, si aplica acciones, en este caso multiplicar por $(x-2)$ ambos de los lados, restringido a la condición $x-2>0$ (y después restringido a la condición $x-2<0$). El puede proporcionar el avance a la concepción objeto.

La resolución de ejercicio **5Ia** puede desarrollar una concepción proceso de resolución de inecuación si el estudiante simplifica al máximo su resolución, es decir, si lo resuelve de inmediato utilizando la propiedad de que cualquier número o expresión algebraica al cuadrado es positiva, y también una concepción proceso de inecuación, si comprende el significado de conjunto solución. Como se ve en el ejemplo del estudiante Dudu:

> Dudu: Todo número real satisface a la desigualdad: $x+1$ al cuadrado es mayor que –1
> Y: Piense…
> Dudu: Que todo número real positivo satisface la inecuación, eso es cierto
> Y: ¿Por que dices que es positivo?

Muestra que piensa globalmente:

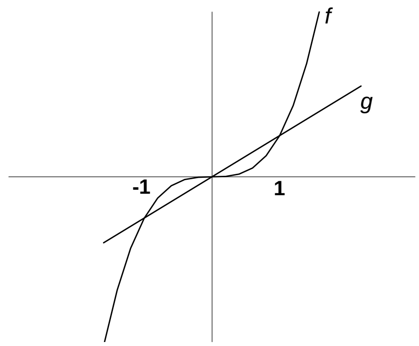
> Dudu: Porque, sólo por ser positivo, ya es mayor que –1 y, aún... estoy sumando uno, entonces, continuando, elevando este número al cuadrado, no va a ser alterado. Ahora, los números negativos, voy a tener que... déjeme tomar un número aquí... voy a poner de otra forma...el cuadrado del primero, dos veces el primero por el segundo, raíz cuadrada del segundo…

1II – Analice y justifique:

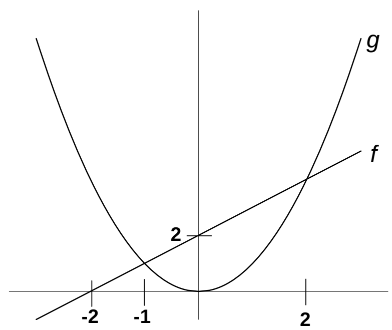
a Para todo número real x se tiene que $x^4+5x^2<x^5+500$, ¿es verdadero (V) o falso (F)? Justifique su respuesta.

b Si en la inecuación $x^4+5x^2<x^5+500$ cambiamos x por $3x$, ¿seguirá la inecuación siendo satisfactoria? Justifique su respuesta.

2II - Dados los gráficos de las funciones f y g, encuentre el conjunto solución de $f(x) > g(x)$.



3II.-. Dados los gráficos de las funciones f y g, encuentre el conjunto-solución de $f(x) < g(x)$.



5II– Resuelva las siguientes inecuaciones:

a $x^2 < -x$

b $\dfrac{x+1}{x^2+1} \leq 1$

d $\sqrt{x+3} \leq x$

e $\dfrac{2-x}{\sqrt{x^2-16}} \leq 0$

La pregunta **1II** puede ser aplicada con el objetivo de que el alumno alcance una concepción proceso de inecuación, en el caso de que perciba propiedades del conjunto solución sin efectuar transformaciones en la inecuación. Cito el ejemplo de los estudiantes Beto y Fábio en una entrevista grupal.

Pregunta 1IIa

El alumno piensa de forma global, no se limita a atribuir valores uno a uno:

> Beto: Lo que sucede es lo siguiente: analizando los dos términos de esta desigualdad, estos del lado izquierdo tienen exponente par y los de la izquierda con exponente impar. Significa que, si se trabaja en esta desigualdad en el primer término menor que el segundo, en un número negativo, va ser falso por ser exponente par de este lado, siempre va ser un valor positivo. En este caso, aquél elevado a la quinta puede ser que dé un número negativo.

La entrevistadora sugiere un valor:

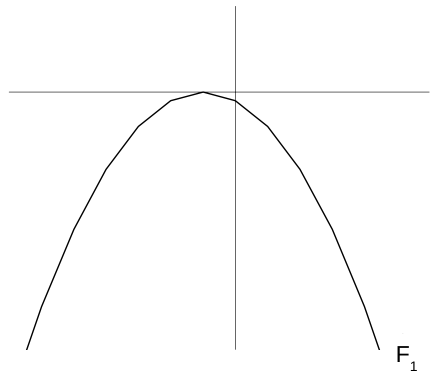
> Y: ¿Vale, entonces, –3, por ejemplo?
>
> Beto: Para ser falso, sí, para que persista la falsedad.
>
> Y: -3 entonces ¿sería un contra ejemplo? ¿qué piensa, Fábio?
>
> Beto: Quiero un... valor grande.
>
> Y: ¿Qué tan grande, mil, 3 mil?
>
> Beto: Grande, negativo.
>
> Y: ¡Ah! ¡Un negativo grande!
>
> Fábio: Bien grande, negativo, al elevar a la quinta, sumar 500 y continua siendo negativo.

Cuestión 1IIb

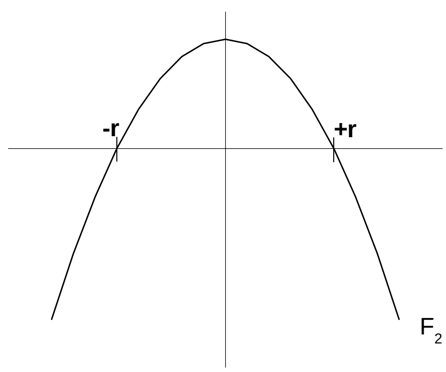
> Y: Está bien. Continuando, pregunté si cambiando...– ustedes dijeron que era falso -, vamos a cambiar y colocar $3x$ en vez de x; escribí de esta forma: $3x$ a la cuarta más 5 que multiplica $3x$ al cuadrado menor que $3x$ a la quinta más 500. ¿Qué respondieron ustedes?
>
> Beto: Sigue siendo falso porque el cambio de la base no va a influir en nada; si el exponente está en par, va a seguir siendo par la potenciación.

6I – Analice a las cuestiones abajo. Responda verdadero o falso y justifique.

a El gráfico de la función cuadrática: $F_1 = ax^2 + bx + c$ tiene la forma que se muestra a continuación. ¿Es el conjunto-solución de $ax^2 + bx + c \leq 0$ un conjunto de los números reales?



b El siguiente gráfico corresponde a la función cuadrática: $F_2 = ax^2 + bx + c$. ¿ El conjunto de reales tales que $ax^2 + bx + c < 0$ es $\{x \mid -r < x < r\}$?



Las preguntas **2II**, **3II**, **6Ia**, **6Ib** tienen por objeto inducir al alumno a alcanzar una concepción proceso de inecuación (Compare con el esquema inicial).

Los ejercicios **5II** proporcionan medios para el desarrollo de una concepción acción, proceso y objeto de resolución algebraica y gráfica de inecuación. Tal desarrollo dependerá del tipo de abstracción que el alumno logre realizar.

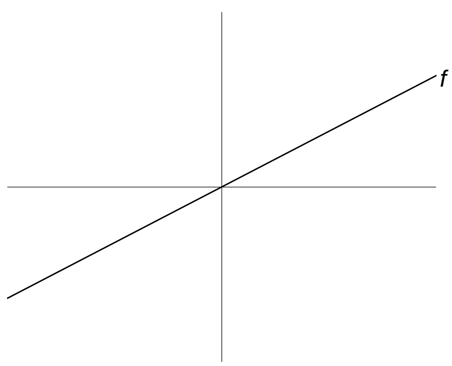
Los ejercicios **7Ia** y **7Ib**, y **3II** tuvieron como finalidad principal proporcionar situaciones para observar las estructuras mentales que los estudiantes presentan, al intentar resolver inecuaciones en las que se dan sólo los gráficos, sin las expresiones algebraicas.

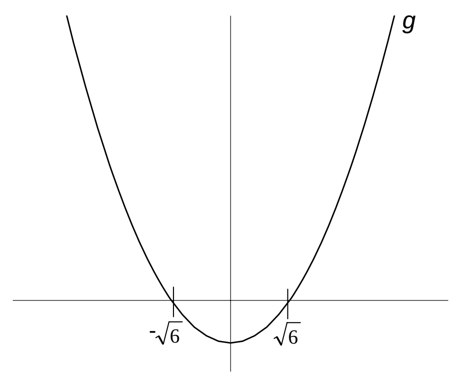
7I - Dados los gráficos de las funciones f , g y h en [-5,5]. Resuelva:

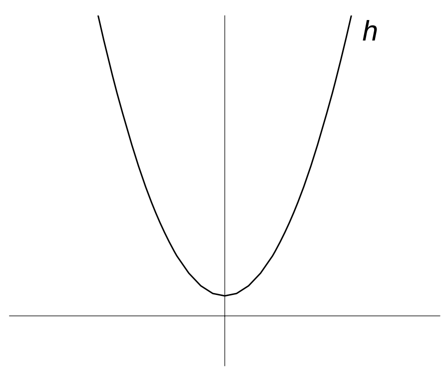
a $\dfrac{f}{g} > 0$

b $f \times g \leq 0$

c $f < g < h$







2.3.3 – Uso de la computadora

Según varias investigaciones (cf. Cap.1), uno de los objetivos del uso de la computadora es hacer que el aprendiz construya sus propias ideas sobre las matemáticas en lugar de recibirlas ya construidas; plantear hipótesis; conjeturar sobre las respuestas de la computadora; comparar las propias respuestas con las de la computadora e intentar rehacer el razonamiento, en caso de que la computadora dé una respuesta diferente; y hacer que el estudiante desarrolle una mejor comprensión de las matemáticas. Otra ventaja de escribir *partes de programas* en ISETL es que su sintaxis es muy parecida a la de las matemáticas.

Para facilitar el uso de ese lenguaje elaboré un texto (en ese momento sólo estaba disponible un manual para DOS, en inglés) con la información básica sobre ISETL: cómo entrar y salir del programa, el significado de los *prompts* > y >>, las diferencias entre una expresión y un comando. Tales fichas contienen también la sintaxis ISETL de operaciones aritméticas (+, -, *, /, **), operadores relacionales (=, /=, <, <=), operadores booleanos proposicionales (and, or, not, impl, iff) y operadores booleanos predicados (forall, exists, choose), funciones pre definidas (*sen(x), cos(x), abs(x)*), atribución de variable, comandos para construcciones de funciones, especificación de conjuntos, esbozo de gráficos de funciones y otros comandos. Siempre se puso énfasis en hacer comparaciones entre la sintaxis de las matemáticas y la de ISETL. Los contenidos del texto no están encaminados específicamente para la enseñanza de inecuaciones.

Las primeras tareas realizadas en la sala de cómputo y en el salón de clases, fueron expresiones, desigualdades y proposiciones numéricas que implicaban las cuatro operaciones básicas, potenciación y radicación (anexo B). Los estudiantes analizaban lo que sucedía después de presionar la tecla *enter* o conjeturaban respuestas antes de presionarla, y después, comparaban su respuesta con de la computadora. El texto posee también algunos ejemplos de programas, incluso algunos ya ejecutados. Los alumnos debían ejecutarlos nuevamente y discutir la respuesta encontrada y analizar e intentar descubrir cuál seria la respuesta de la computadora, comparándola después de correr el programa.

Las actividades iniciales tenían como objetivo, además de familiarizar a los alumnos con el lenguaje, revisar contenidos que eran considerados prerrequisitos, tales como orden de resolución de operaciones en expresiones numéricas; análisis de preposiciones y comprensión del significado de los conectivos “y” y “o”.

Ciertas programaciones fueron realizadas en conjunto. La profesora estimulaba a los alumnos a colaborar con propuestas de programación y los ejemplos eran otorgados y los alumnos eran incentivados a crear sus propios ejemplos. También fueron propuestas cuestiones (anexo B) para pasar para el lenguaje ISETL, ejecutaren, analizaren y confrontaren las respuestas. Al igual que en el salón de clase, en el laboratorio de computación la estrategia principal de enseñanza fue estimular discusiones y debates. Se estudiaron los mismos contenidos, de forma paralela, en ambos ambientes, salón de clase y laboratorio.

El lenguaje se utilizó también para comparar funciones por medio de tablas y de gráficos empleando resultados booleanos. También se presentaron situaciones que inducían a los alumnos a identificar funciones existentes en las inecuaciones a fin de analizar su variación por medio de gráficos.

Antes de esas actividades, los alumnos, bajo la orientación del texto y del profesor, aprendían a utilizar los comandos *func* y *plot*. El comando *func* abre una rutina para trabajar con funciones y el comando *plot* posibilita el esbozo de gráficos.

Se solicitó a los alumnos que, una vez aprendidos los comandos necesarios, escribiesen programas que comparasen funciones punto a punto. Se abría la discusión para la clase y, dependiendo de los tipos de comparaciones propuestas por los alumnos, (tablas, gráficos) la profesora presentaba otras. Inicialmente, la comparación por tablas, como en el ejercicio **1I** (anexo A), se hizo en conjunto.

Las actividades 2, 3 y 4 (aplicadas también en el salón de clase para análisis sin la computadora, ejercicio **2Ie**) tienen por finalidad conducir que los estudiantes piensen en la implicación y analicen proposiciones relativas a números dados por frases cuantificadas (por ejemplo, las proposiciones: *Si* $a > b \geq 0$, *entonces* $a^2 > b^2$ y *si* a *y* b *son números no negativos y* $a^2 > b^2$, *entonces* $a > b$), esto es, trabajar algunos de los prerrequisitos citados anteriormente. En la actividad 2 este análisis se da por medio de una tabla numérica, en la 3, mediante una tabla booleana, en la 4, mediante un análisis de equivalencias utilizando operadores booleanos proposicionales y booleanos predicativos. De acuerdo con el esquema mental inicial, el objetivo de las actividades 2, 3 y 4 es propiciar al alumno los medios para alcanzar la concepción objeto de inecuación. Los estudiantes escogían un subconjunto de los reales para el campo de variación de x y de y, trabajaban en grupo y, después de analizada la proposición, eran cuestionados con respecto a su veracidad. La profesora pedía explicación para cada una de las respuestas, y, si ellos respondían que alguna proposición era falsa ellos intentaban convencer a sus compañeros y había una discusión. Después de la discusión, algunos concluían, en caso de que realmente fuese falsa, que no habían escogido un subconjunto adecuado para el análisis; esto es, sustituyendo los números de los subconjuntos escogidos por ellos, la proposición parecía ser verdadera. La mayoría sólo intentaba contraejemplos utilizando subconjuntos de los números naturales o enteros. En la discusión percibían la utilización de otros posibles subconjuntos que debían ser investigados (racionales, reales).

El objetivo de las actividades 5 y 6 es estimular, no sólo el desarrollo de una concepción acción, como también la concepción proceso de inecuación, pues se espera que, después de atribuir puntos aislados, en el intento de encontrar la solución de la inecuación, logre pensar en la solución de forma global. La actividad 7 puede tener diferentes objetivos. Bajo el punto de vista del esquema mental inicial, se esperaba que el estudiante, al analizarla, presentara una concepción proceso de resolución de inecuación, en el caso en que la actividad involucrara funciones lineales o cuadráticas; o una concepción objeto, en el caso en que involucrara otro tipo de función. Esta actividad se trabajó de la siguiente manera: por medio de una lista de ejercicios se les pidió que esbozaran por separado los gráficos de determinadas funciones, como, por ejemplo, x^2, $3x+4$, $\operatorname{sen} x$, $x \operatorname{sen} x$, x^3-2, x^3+2, en seguida, se les pidió que analizaran, en el gráfico, la variación del signo de cada función. Si era necesario, podían hacer uso de recursos algebraicos. Se les solicitó, también, que esbozaran gráficos de más de una función en el mismo sistema de coordenadas y que, después, hicieran la comparación entre las imágenes de esas funciones, relacionándolas con los respectivos dominios.

Varios alumnos sintieron mucha dificultad en lidiar con el lenguaje y sorprendieron con su uso para aprender las matemáticas pero, parecieron interesados en aprender ya que ellos eran estudiantes del curso de Ciencias de la Computación. Muchos nunca trabajaron en el Laboratorio de Computación, eran recién ingresados y no aparentaron habilidad en lidiar con computadora, principalmente en programar. Pensé que ellos no tendrían tanta dificultad, pero todas las actividades programadas fueron realizadas excepto la resolución gráfica de inecuaciones envolviendo otras funciones además de x^3, lineales y cuadráticas.

2.3.4 – Las evaluaciones

Las evaluaciones se basaron también en la propuesta de RUMEC que incluye discusiones diseñadas para estimular en los estudiantes la construcción de los conceptos matemáticos; el aprendizaje en grupos colaborativos; actividades computacionales; y exámenes escritos en grupo e individuales, y orales (entrevistas). Aquí las actividades computacionales no tuvieron puntos para la calificación y el examen escrito individual y en grupo recibieron el mismo peso, cada uno: 4.5 puntos para un total de 9.0; y la entrevista, valía hasta un punto para el promedio final. No todos fueron entrevistados; para los que no fueron, el examen escrito individual valía 5,5 puntos. Las evaluaciones escritas fueron realizadas 10 días después de haber terminado las 20 horas de clases. Las entrevistas empezaron 10 días después de la evaluación escrita y continuaron hasta 15 días antes de terminar el semestre (inicio de julio).

Los ejercicios aplicados en la evaluación escrita eran similares a los trabajados en el salón de clase, los cuales fueron planeados de manera cuidadosa, teniendo como objetivo principal propiciar el desarrollo de algunos tipos de construcciones mentales como las destacadas en el esquema inicial. Los objetivos de las evaluaciones eran tanto el analizar del aprendizaje de inecuaciones como recolectar datos para análisis del esquema inicial y de la metodología elaborada y, si necesario, reelaborarlos.

Para seleccionar a los alumnos para las entrevistas, fueron dividido en grupos de acuerdo a 4 criterios: estudiantes que acertaron mínimo 70% de los ejercicios de la evaluación escrita; que acertaron entre 50% y 69%; los que acertaron entre 20% y 49%; y los que presentaron alguna construcción mental diferente de los demás. Después de esta división, fueron elegidos los que serían entrevistados, en cada grupo, de forma aleatoria. En total fueron 18 entrevistas, de las cuales, 3 se dieron en grupo.

Los alumnos fueron evaluados, en las entrevistas, según su seguridad al explicar respuestas correctas e incorrectas. Si el alumno hubiese errado la pregunta en la prueba, pero en la entrevista reconocía su error y la rehacía correctamente, el ejercicio era considerado correcto. Las entrevistas duraban 30 min y no todas se referían a los mismos ejercicios; se basaban en las respuestas escritas de las preguntas de la evaluación, presentadas durante la entrevista. Algunas preguntas se prepararon anticipadamente, pero a veces eran planteadas preguntas que no habían sido trabajadas, lo que posibilitaba un rumbo totalmente imprevisto en la entrevista. La intención, en este caso, era verificar construcciones mentales diferentes o certificar otras ya detectadas.

2. 4- RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE LOS DATOS COLECTADOS

Los estudiantes mostraron mucho nerviosismo en las entrevistas, decían que no sabían matemáticas, se sorprendían con lo que ellos mismos habían escrito, se confundían en argumentos no conexos antes de descifrar sus soluciones, presentaban fuerte resistencia a pensar y discutir sus soluciones. Algunos intentaban reescribir la resolución durante la entrevista. La solución escrita de las preguntas de la evaluación individual con frecuencia era una respuesta mecánica. Me pareció que no reflexionaban antes de intentar resolver el ejercicio. Las soluciones obtenidas de manera grupal eran más discutidas y ricas, aunque presentasen errores. Las modificaciones del esquema inicial llevaron al esquema intermedio.

Se diseñaron dos nuevos grupos de ejercicios de resolución de inecuaciones, uno basado en gráficos. En todos ellos se trabajó la idea de interpretación de la inecuación. Estos dos nuevos grupos de ejercicios proporcionaron la observación de nuevas construcciones mentales. Se observó también la necesidad de que los estudiantes comprendiesen la variable como incógnita y en una relación funcional (Capítulo 1) para, así, comprender el concepto de conjunto solución y entender, también, que una inecuación puede interpretarse como una relación entre funciones, y que su conjunto solución se puede, eventualmente, determinar por medio de gráficos.

Los prerrequisitos listados anteriormente (Esquema inicial) eran insuficientes. Para mayor entendimiento, fueron divididos en las siguientes categorías: inecuación y resolución algebraica, y resolución en el contexto gráfico.

Las conclusiones, después de esta recolección intermedia, son:

- Los ejercicios de resolución de inecuaciones en los cuales las funciones son presentadas sólo en la forma gráfica deberían explotarse más, pues tienen potencial para trabajar otros contenidos.
- Debería ponerse más énfasis en el análisis de la equivalencia entre una inecuación y su transformada, y su influencia en el conjunto solución.
- Los ejercicios con preguntas sobre la solución sin que el alumno haya resuelto la inecuación, dan margen al análisis de otras potencialidades cognitivas, otras construcciones mentales; por ejemplo, interpretación de la inecuación.
- Algunos estudiantes persisten en resolver una inecuación utilizando propiedades específicas de los números reales para la resolución de ecuaciones. Memorizan también técnicas de

resolución y las aplican de modo arbitrario, e inconvenientemente. Por ejemplo, tenemos el caso de los alumnos Nilo y Hélio.

El alumno Nilo intenta resolver $x^2 < -x$ (**5IIa**), *dividiendo* ambos miembros entre x, como podría hacer si estuviese resolviendo la ecuación $x^2 = -x$, con $x \neq 0$. No percibe que x es una variable que puede asumir tanto valores negativos como positivos y que, dependiendo del signo de x, la multiplicación de ambos miembros por $\frac{1}{x}$ modifica o no la inecuación.

> Nilo: Creo que sería mejor si divido x al cuadrado, ahí cancelaba.
>
> Y: ¿Dividir entre qué?
>
> Nilo: Entre x... ahí va a ser uno y no iba a ser correcto.
>
> Y: ¿Por qué? ¿Tiene dudas con el uno?
>
> Nilo: No... es, podría ser uno.

La entrevistadora intenta estimular al alumno a diferenciar la solución de una inecuación de la solución de una ecuación, incitándolo a encontrar el error cometido:

> Y: ¿Y qué significa pensar que un resultado es correcto? ¿qué significa resolver?
>
> Nilo: En mi opinión, es aislar x e intentar encontrar su valor; si es mayor o menor que alguna cosa. Que es el caso de una inecuación.
>
> Y: ¿Y si fuera una ecuación?
>
> Nilo: La ecuación generalmente tiene un valor. Usted halla x igual a tal.
>
> Y: ¿Qué significa ese "tal"?
>
> Nilo: Es un valor real en el caso de ecuación.
>
> Y: ¿Si fuese, por ejemplo, inecuación, en vez de ecuación?
>
> Nilo: Usted puede venir con ellos para acá, no hay problema; coloca x...(ruido) corta los dos x. ¿me estás comprendiendo? Cuando viene para acá queda... ¿queda uno, no es así? Y aquí menos x. Ese x al cuadrado queda x veces x; ahí corta con ese otro x (ruido); abajo queda x menos uno igual a uno; pasa x multiplicando, queda x igual a menos uno.

Abajo, otro alumno, Hélio muestra una forma de solución que consta de fragmentos de métodos provenientes de resolución de ecuaciones, memorizados de forma totalmente desconectada. Su solución se conforma de pasos sin significado.

Ejercicio 5IIb (Resuelva $\frac{x+1}{x^2+1} \leq 1$)

Y: Está bien.. Y este de aquí, ¿cómo lo resolvería?

Intenta encontrar los ceros de las funciones del numerador y del denominador:

Hélio: Cada una de éstas de aquí ... $x+1=0$ ... (ruido) ...creo que encontré el número de primer grado para poder hacer... pienso que es eso: $x+1=0$ y $x^2+1=0$. Intenté ese...

Y: Pero, ¿ $x+1=0$ y $x^2+1=0$?

Hélio: Ah, no... queda $x^2=-1$; coloco factorizo x abajo también.

Y: Es necesario colocar factorizar x ?

Hélio: No se puede, ¿no es así? No, no se puede. Espera. Yo hice eso en la prueba

Y: Entonces, piense un poco.

Hélio: No recuerdo cómo lo hice.

Y: Bien, usted no recuerda, pero ¿cómo lo haría ahora?

Hélio: Yo recuerdo haber intentado poner $x^2+1=0$ y llegar a la condición de complejo; sacar raíz cuadrada de número negativo no serían números reales ...

Y: ¿Por qué está diciendo eso? ¿Por qué está buscando los ceros; usted dice "eso es igual a cero"?

Hélio: Eso que estoy diciendo es mucho más mecánico que entendido. He visto en el libro así, ejercicios resueltos aquí, recuerdo que allá no tenía ninguna de segundo grado, ningún x al cuadrado, todo de primer grado, pero hice los de la lista de esa manera.

Parte de los estudiantes iniciaba la resolución por tentativa y error, atribuyendo valores aleatorios uno a uno, pero sólo los que avanzaban para un abordaje generalizado encontraban el conjunto-solución. Por ejemplo, Carlos se restringió a pensar puntualmente; Dudu avanzó de forma puntual para global. El primero no logra resolver la inecuación, mientras que el segundo, si. Carlos aparenta tener concepción acción de inecuación, pues piensa de manera estática, sólo paso a paso. Procura resolver por tentativa y error, atribuyendo valores a la variable x. El fragmento de la entrevista de Dudu fue citado anteriormente.

Ejercicio 4Ic (Resuelva $\sqrt{x+2} \leq x$)

Carlos: Estoy pensando lo siguiente: aleatoriamente, tomo un valor para x tal que sustituyendo en la raíz voy tener una raíz exacta. Por ejemplo: si x es 7 en la...de la raíz 7+2=9, entonces extrayendo la raíz va resultar 3 que es menor que 7. Entonces, satisface realmente la inecuación... todos los valores positivos.

Y: ¿Todos los valores positivos?

Carlos: Positivos, porque, si yo pongo valores negativos....

El alumno da la respuesta errónea, y la entrevistadora intenta estimularlo:

Y: Repitiendo, entonces, usted me dice que todos los valores positivos estarían correctos, ahí le dice, intente el número uno. ¿Qué encontró usted?

Carlos: Encontré que la raíz de 3 , substituyendo en la inecuación, la raíz de 3 es mayor que uno. Entonces, uno no es correcto. ¿Qué tipo de valor podría ser?

Otro momento:

Carlos: Raíz cuadrada de x más dos menor e igual a x. Pensando mejor voy hacer lo siguiente: voy a elevar los dos miembros al cuadrado, con eso voy sacar la raíz cuadrada menor e igual a x al cuadrado y voy a analizar la inecuación sólo con estos datos que descubrí aquí: x más dos menor e igual a x al cuadrado, o sea, cualquier valor de x que ponga de ese lado, teniendo el exponente par, voy a tener x positivo, *analizando punto a punto.*

Y: Humm...

Carlos: Entonces, tengo que atribuir valores a x en el primer miembro que sean siempre menores e iguales a x al cuadrado. Ya determiné que el segundo miembro va ser siempre positivo debido al cuadrado. Entonces, ¿qué valores voy poner para x? Creo, creo no, tengo la seguridad de que son valores de x menores que cero, cualquier valor menor que cero.

La entrevista, por ejemplo, de los alumnos Jorge y Guto, muestra la dificultad en la interpretación de la idea de inecuación cuando las funciones son presentadas en forma gráfica.

Ejercicio 2Ic (p.20)

Jorge: El conjunto de todos los números reales que satisface a la desigualdad f multiplicado por g y por h mayor que cero es la unión de los conjuntos de números reales a los cuales satisfacen f mayor que cero, g mayor que cero y h mayor que cero, respectivamente. Bien, si todos fuesen positivos, satisface a la inecuación, pero, si todos fuesen negativos, no la satisface. Si este aquí fuera negativo, este negativo y este aquí positivo, va a resultar positivo. Si fuera negativo aquí y los demás fueran positivos, va a resultar negativo. O si todos fuesen negativos, va a resultar negativo. Todas las veces que tuviera variables (ruido) y una sola que es negativa (corte), variables negativas...

Y: Funciones.

Jorge: Si funciones. En el caso, aquí, él dijo sólo h... ¿es una función?

Y: Todas son funciones: f, g y h, por ejemplo, x, x más dos, x más tres

> Jorge: En ese caso, si todos fuesen positivos, satisfaría lo que él afirmó aquí, pero, si todos fuesen negativos, no lo satisfaría, si uno sólo fuese negativo. Por eso, considero esa afirmación falsa, no hay una afirmación concreta de que sea correcto.
>
> Y: No entendí. ¿Puede repetir? Esto de aquí es multiplicación de tres funciones.

Después de muchos intentos con algunos estímulos por parte de la entrevistadora, el alumno llega a una conclusión:

> Jorge: De tres funciones; si ése fuera negativo, si ése y ése también, va a resultar un número negativo. Y todo número negativo es menor que cero, por la recta de los números reales. Lo que él puso aquí es que esta condición satisface lo que él afirmó, pero no satisface, porque es como dije, si uno fuera negativo o todos fueran negativos, uno tiene que ser negativo. Por ejemplo, si f fuera negativo, no puede ser mayor que cero.

Después de varios intentos:

> Y: Pero, ¿están todos ahí? ¿La respuesta completa está ahí?
>
> Jorge: Todos los números reales; por ejemplo, si f fuera negativo, no puede satisfacer esa condición porque, si los demás fueren negativos, g y h, positivos, disculpe, si g y h fueren positivos y f negativo, no va a satisfacer esa condición aquí.

Sigue la entrevista de Guto sobre la misma cuestión:

> Y: Ok, ¿cómo es que usted interpreta eso?
>
> Guto: ¿Eso que tiene como resultado f multiplicado por g multiplicado por h?
>
> Y: ¡Eso mismo! Donde f es una función , g es otra y h es otra. Dame un ejemplo.
>
> Guto: ¡¿Un ejemplo?!
>
> Y: Un ejemplo de f, g, h.

Parece no poder ejemplificar las funciones f, g, h de otra manera que no sea numérica:

> Guto: ¿Números?
>
> Y: Déme funciones. Eso de aquí no son funciones: ¿ f, g, h? Entonces, déme ejemplos de funciones.

Guto: No comprendo.

Y: Déme ejemplo de función. f puede ser tal función, g tal, ...antes de comenzar a pensar en el ejercicio.

Después del análisis llegué a la conclusión de que las construcciones mentales que surgieron en las resoluciones gráficas deberían destacarse y presentarse por separado. Surgieron detalles tanto sobre la interpretación de inecuación como sobre las conexiones entre inecuaciones y funciones que también era necesario destacar. Así, fue necesario rehacer el esquema inicial. Después de todo el estudio, varios estudiantes continuaron resolviendo una inecuación empleando de forma errada propiedades de los números reales, principalmente multiplicando ambos miembros por expresiones algebraicas sin considerar el cambio de signo de la inecuación.

La metodología propuesta es demasiado global, pues trabaja con varios tipos de inecuaciones, polinomiales, racionales y con radicales cuadráticos, y las relaciones entre ellas. Es probable que esto permita al estudiante enfrentar con más éxito situaciones que involucran inecuaciones, con flexibilidad y comprendiendo todos los caminos elegidos. A pesar de la complejidad de varios de los contenidos, involucrados en las inecuaciones, la manera como fueron trabajados, utilizando varias actividades, permite que los estudiantes rehagan sus esquemas mentales y los asimilen.

2.4.1 - El Esquema Intermedio De Inecuaciones

Después de analizar los datos percibí la necesidad de refinar el esquema inicial, pues las construcciones mentales, principalmente con relación al planteamiento gráfico, solicitaban más atención, más investigación. Basándome en los datos colectados en las evaluaciones escritas, en las observaciones y en las entrevistas surgió el esquema intermedio. Los cambios del esquema anterior para obtener el esquema intermedio se encuentran en *cursivas.*

2.4.1.1 - Prerrequisitos

La *interpretación* y la *resolución algebraica* de una inecuación requiere la capacidad de:

- Comprender la correspondencia 1 a 1 entre $\Re$ y un eje orientado con unidad y cero fijos;
- Comprender variable como incógnita y en una relación funcional[4];
- Comprender nociones básicas de conjunto, esto es, algunas operaciones con subconjuntos y su notación, y uso de conectivos "*y*" y "*o*";
- Conocer y aplicar adecuadamente las propiedades del cuerpo ordenado $\Re$;
- Comprender el significado de las implicaciones falsas y verdaderas, así como las recíprocas de implicaciones y equivalencias.

La resolución gráfica de inecuaciones requiere además de lo anterior:

- *La habilidad de esbozar algunos tipos básicos de funciones, como cuadrática, cúbica simples (ej: $f(x)=x^3$, $f(x)=x^3+1$), lineal, raíz cuadrada, $f(x)=1/x$;*
- *La habilidad de lectura e interpretación de gráficos de funciones.*

Para facilitar su descripción, las construcciones mentales presentadas en el esquema siguiente, se dividen en tres categorías: inecuaciones, resolución algebraica de inecuaciones y resolución gráfica de inecuaciones, a pesar de reconocer que se pueden, y es deseable que así sea, desarrollarse simultáneamente.

2.4.1.2 - Inecuación

Acción

Un individuo realiza una acción cuando, por ejemplo, atribuye valores específicos a la variable y verifica si éstos satisfacen o no la desigualdad. Es un procedimiento estático: el alumno piensa un paso cada vez.

[4] Verifique capítulo 1.

Proceso

El individuo que percibe una inecuación como un proceso es capaz de pensar globalmente, o sea, pensar en una inecuación como el recibir uno o más valores de las variables, ejecutar una o más operaciones con estos valores y regresar valores booleanos. Es un procedimiento dinámico.

Objeto

Un individuo que piensa en una inecuación como objeto puede:

- *Percibir propiedades del conjunto solución de una inecuación en situaciones en las cuales no tiene información suficiente para resolverla (por ejemplo, sabiendo que 3.6 es solución de* $f(x) \leq 0$*, ¿que se puede decir en relación con una solución de* $f(3x) \leq 0$ *?).*
- Operar con dos o más inecuaciones, explicando su razonamiento.
- Analizar implicaciones y equivalencias entre inecuaciones.
- Aplicar propiedades del cuerpo ordenado de los números reales.

2.4.1.3 - Resolución algebraica de inecuaciones

Pre-acción

Un individuo realiza una pre-acción cuando:

- Intenta resolver una inecuación como si fuese una ecuación;
- Emplea manipulaciones algebraicas realizando transformaciones en la inecuación que no llevan a ningún progreso en el proceso de resolución.

Un estudiante que posee una concepción pre-acción de resolución de inecuaciones está limitado a intentar soluciones de forma aleatoria. Realiza transformaciones, utiliza algoritmos de resolución memorizados anteriormente, pero no tiene ningún progreso en la obtención del conjunto solución.

Acción

Un individuo realiza una acción cuando resuelve algunos tipos de inecuaciones utilizando algoritmos previamente memorizados o imitando resoluciones de inecuaciones similares; sin embargo no logra describir el proceso de resolución sin realizarlo ni puede explicar por qué el algoritmo puede aplicarse. Además, es incapaz de verificar si un número es o no solución sólo investigando si pertenece o no al conjunto solución; necesita sustituir el número en la inecuación.

Proceso

Un estudiante que posee una concepción proceso es capaz de:

- Verificar si un número es o no solución de una inecuación, investigando si pertenece o no al conjunto solución de esa inecuación;
- Narrar correctamente el procedimiento de resolución, sin ejecutarlo realmente;
- Hacer un uso correcto de atajos para simplificar la resolución.

Ejemplos:

i) Dada la inecuación $(x-1)/(x^2+1)<1$, el alumno es capaz de ponerla en forma equivalente $(x-1)<x^2+1$, resolviéndola más fácilmente.

ii) Dada la inecuación $(x-1)^2>-1/2$, el estudiante es capaz de observar que el exponente en el término de la izquierda es par, y ese término es siempre no negativo, luego, como el término de la derecha es negativo, el conjunto solución es el conjunto de los números reales.

- Resolver diferentes tipos de inecuación, explicando razonamientos y propiedades utilizadas.

Objeto

Un individuo que concibe una resolución a nivel objeto es capaz de seleccionar un método eficaz para resolver una inecuación comprendiendo las relaciones entre los conjuntos solución de las inecuaciones transformadas y los diferentes procedimientos utilizados para encontrar el conjunto solución final. *En este caso, el alumno es capaz de emplear propiedades del conjunto de los reales, adecuadas a cada resolución y analizar equivalencias entre las inecuaciones transformadas.*

2.4.1.4 - *Resolución gráfica de inecuaciones*

Pre-acción

Un alumno que posee una concepción pre-acción es incapaz de resolver una inecuación sólo por medio de los gráficos de las funciones involucradas. En este caso, se limita a percibir que las imágenes de las funciones tienen signos. Por ejemplo, dados los gráficos de f *y* g*, encuentre el conjunto-solución de* $f(x)\times g(x)>0$*. El alumno entiende sólo que las funciones deben tener el mismo signo.*

Acción

Un individuo que posee una concepción acción no logra resolver una inecuación sólo por medio de los gráficos de las funciones involucradas, no obstante no se limita a percibir que las imágenes de las funciones deben tener signo. Es capaz de identificar los intervalos en que las funciones son positivas y negativas, pero no logra coordinar esa información a fin de resolver la inecuación. Su concepción de función es muy débil. Por ejemplo, dados los gráficos de f *y* g*, encuentre el conjunto solución de* $f(x)\times g(x)>0$*. El alumno entiende que* f *y* g *deben tener el mismo signo y asocia ese dato a las imágenes gráficas. A veces logra asociar coherentemente esas imágenes a los dominios, pero no comprende que el conjunto solución es subconjunto de la intersección de los dominios de* f *y* g*.*

Proceso

Un estudiante posee una concepción proceso cuando resuelve varios tipos de inecuaciones sólo a partir de los gráficos de las funciones involucradas. Si tales funciones son solamente cuadráticas o lineales, demuestra facilidad en su resolución (ejercicios ***6Ia*** *y* ***6Ib****). En ese nivel, tiene ideas sobre los intervalos donde cada función es positiva o negativa, y reconoce que el conjunto solución de ese tipo de inecuación se encuentra haciendo conexiones entre estas ideas, sin embargo aún se muestra indeciso en su trato.*

Objeto

Un individuo que piensa en una inecuación como objeto posee la capacidad de:

- *Decidir cuándo es conveniente utilizar recursos gráficos para encontrar la solución, con una elección adecuada de las funciones a ser representadas gráficamente*[5]*;*

[5] En este caso, es conveniente que el estudiante tenga acceso y que sepa utilizar un software (o calculadora gráfica) que le facilite esbozar gráficos.

Ejemplos:

1 – Dada la inecuación $x > x^3$*, la transforma en* $x - x^3 > 0$ *y utiliza recursos gráficos para resolverla, pues es capaz de percibir que es simple analizar el gráfico de* $f(x) = x - x^3$*, esto es, analizar el signo de una única función. El alumno también podría resolver esbozando los gráficos de las funciones* $g(x) = x$ *y* $h(x) = x^3$.

2 – Dada la inecuación $\frac{3}{x+6} > \frac{1}{x-2}$*, la pone en la forma* $\frac{2(x-6)}{(x+6)(x-2)} > 0$ *e intenta encontrar la solución por medio de recursos gráficos, lo que es más simple que comparar los valores de las expresiones algebraicas* $\frac{3}{x+6}$ *y* $\frac{1}{x-2}$.

- *Resolver inecuaciones funcionales* $f(x) < g(x)$ *en las que las funciones* f *y* g *son exhibidas sólo por sus gráficos.*

2.4.2- Otros resultados

Otro resultado es con relación a las definiciones *Interpretar* y *Resolver* una inecuación. Hubo necesidad de extender estas definiciones, pues implican más conceptos y correlaciones: la comprensión del conjunto solución, de la variable, de las funciones, de los gráficos, de las equivalencias y otros.

- Interpretar una inecuación implica, por un lado, la comprensión del significado de variable real y del conjunto-solución. Por otro lado, una inecuación, presentada como una relación entre expresiones algebraicas, puede ser interpretada como una relación entre funciones, y su conjunto-solución puede eventualmente ser determinado por medio de gráficos. La interpretación de una inecuación queda perjudicada si el universo numérico del aprendiz y el dominio de las propiedades de los números reales como un cuerpo ordenado son muy limitados. Por ejemplo, al analizar la inecuación $x^2 < x^4$, el estudiante en general piensa que es verdadera para cualquier número real, y al tratar de resolver la inecuación $\sqrt{x+1} \le \sqrt{2}\ x$, es importante que el estudiante comprenda que ningún número real negativo puede ser solución. La comprensión del conjunto-solución implica reconocer lo que no puede ser solución.

Resolver una inecuación es hallar su conjunto solución, de hecho, es hallar la descripción más simple posible de ese conjunto solución. Por ejemplo, $\{x \in R \mid x^2 > 1\}$ es una descripción del conjunto solución de la inecuación $x^2 < x^4$, sin embargo no es la más simple posible. Resolver una inecuación algebraicamente implica, en general, transformaciones realizadas mediante el empleo de propiedades de los números reales. Es importante que el individuo sepa cuáles de las propiedades deben emplearse para realizar las transformaciones adecuadas, y además que tenga en cuenta las equivalencias entre las inecuaciones que se van obteniendo. Por ejemplo, para resolver la inecuación $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{2}\, x$ es natural que se inicie la búsqueda de la solución elevando al cuadrado ambos miembros. Sin embargo, al mismo tiempo que esta manipulación algebraica permite iniciar el proceso de resolución, la nueva inecuación $x+1 \leq 2x^2$, no es equivalente a la inecuación original. La solución de $x+1 \leq 2x^2$ es $\left\{x \in \Re \mid x \leq -\frac{1}{2} \text{ e } x \geq 1\right\}$. Pero, la inecuación $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{2}\, x$ no admite solución negativa, y se puede verificar que la solución de esa inecuación es $\{x \in \Re \mid \mathrm{x} \geq 1\}$.

La resolución gráfica de una inecuación, interpretada como una relación entre funciones, implica la construcción de los gráficos de dichas funciones y la determinación del conjunto solución por medio del análisis de tales gráficos, pero a veces es necesaria también la manipulación algebraica.

Otra situación de resolución gráfica de inecuación aparece, por ejemplo, cuando son dados los gráficos de f y de g y se solicita determinar el conjunto solución de $f(x) \times g(x) \geq 0$. En este caso, la ausencia de las expresiones algebraicas remite a una abstracción con la cual los estudiantes tienen mucha dificultad.

Para un refinamiento del esquema intermedio y de la metodología de enseñanza empleada, fue necesaria una reelaboración del análisis teórico. Para Lüdke, “cuanto mayor sea el período de permanencia en el campo, mayor será la probabilidad de resultados perfeccionados, lo que identificará la validez de las informaciones” (1986:51). Además de eso, era importante recolectar más datos, pues los obtenidos en esta etapa parecieron insuficientes para llegar a conclusiones más precisas con relación a las construcciones mentales, principalmente lo que se refiere a la interpretación y a las resoluciones gráficas de inecuaciones. Era importante observar y analizar otras construcciones mentales con otros estudiantes.

En el próximo capítulo, presento la segunda instrumentación de la metodología de enseñanza de inecuación y el último esquema de inecuación, obtenido del refinamiento del esquema intermedio.

CAPÍTULO 3

SEGUNDA Y ÚLTIMA ETAPA DE LA INVESTIGACIÓN

De acuerdo con lo previsto en el paradigma de investigación y desarrollo pedagógico utilizado en este trabajo (Fig. 1), al final del análisis de los datos recolectados en la primera instrumentación metodológica, modifiqué el esquema inicial y obtuve el esquema intermedio. Con base en ello, reconstruí la primera metodología de enseñanza obteniendo la segunda metodología y la instrumenté. Se cambiaron algunas actividades y se añadieron otras.

En este capítulo, presento las características de la metodología de enseñanza utilizada en dicha etapa, los resultados del análisis de las construcciones mentales de los estudiantes y el esquema final de inecuaciones.

Resalto que en esta instrumentación el enfoque dado a las resoluciones algebraicas quedó dirigido, principalmente, al análisis de equivalencias entre las inecuaciones, es decir, al análisis de las transformaciones permitidas y necesarias, y a las consecuencias de tales transformaciones en el conjunto solución. Este análisis, por un lado, acarrea mejor interpretación de la inecuación y correcta descripción del conjunto solución, que, a su vez, está relacionado con las condiciones de existencia de las expresiones algebraicas involucradas y con la orden numérica establecida en el signo de desigualdad. Por otro lado, una cuidadosa interpretación de la inecuación, así como la correcta comprensión del conjunto solución, llevan a los alumnos a un análisis reflexivo de las transformaciones efectuadas.

Los ejercicios propuestos en la instrumentación anterior fueron estudiados nuevamente en esta etapa y se propusieron otros que podrían estimular algunas construcciones mentales no percibidas anteriormente. También tuvieron el propósito de estimular la comprensión del conjunto solución y la conexión entre inecuación y función. Los ejercicios fueron elaborados de manera que:

- permitan al alumno contestar las preguntas sobre el conjunto solución sin resolver la inecuación;
- se pueda hacer el análisis de la inecuación, proporcionando sólo los gráficos de las funciones involucradas;
- pidan la resolución de una inecuación propuesta de forma algebraica por medio de un esbozo gráfico.

La primera y la segunda elaboración e instrumentación de la metodología de enseñanza para inecuaciones difirieron básicamente en el enfoque dado a los ejercicios elaborados, los cuales poco se alteraron en el transcurrir de esas etapas. Un mismo ejercicio propicia varios tipos de enfoques de interpretación y de resolución.

3.1- CARACTERÍSTICAS DE LA SEGUNDA INSTRUMENTACIÓN DE LA METODOLOGÍA DE ENSEÑANZA

La segunda instrumentación ocurrió en un grupo de Cálculo I, turno vespertino, con 22 estudiantes: 20 del programa de Técnico en Procesamiento de Datos y 2 del de Licenciatura en Ciencias Matemáticas. De estos estudiantes, 30% cursaban esa disciplina por la segunda vez, y la mayoría no poseía los prerrequisitos necesarios para un curso de Cálculo I.

Al igual que en la etapa anterior, el tiempo fue insuficiente para estudiar inecuaciones de acuerdo con la complejidad y la riqueza del tema. Se realizó una adaptación en los contenidos que denominé Revisión. La deficiencia en los prerrequisitos de los estudiantes para cursar dicha disciplina lleva a muchos profesores a incluir la Revisión.

En esta etapa, el tema fue trabajado conjuntamente con funciones, completando 20 horas, en 8 de las cuales se utilizó la computadora. Se mantuvieron la técnica de enseñanza-aprendizaje en grupos colaborativos, las evaluaciones y las entrevistas en grupo, como en la etapa anterior, así como las estrategias de enseñanza. Lo que cambió fue el enfoque dado a las resoluciones y a los diferentes tipos de ejercicios. Así mismo, no se trabajó la resolución gráfica de inecuaciones racionales, pues demandaría un tiempo superior a 20 horas.

3.1.1 – Los ejercicios

El entendimiento y la flexibilidad de interpretación de las inecuaciones resultan de resoluciones de ejercicios, sobre los cuales son necesarias construcciones mentales diferentes. Para lograr un análisis, por separado, de las construcciones mentales y también observar la posibilidad de nuevas construcciones, clasifiqué los ejercicios en tres categorías (que no fueron presentadas a los alumnos):

- Resolución de inecuación por métodos algebraicos o gráficos;
- Operaciones con inecuaciones;
- Preguntas sobre la solución, sin resolver la inecuación.

Ejemplos de la primera categoría:

Resuelva la inecuación $\frac{x^2+1}{x-3} \leq x$. En este caso, el estudiante debe:

- Interpretar;

- Emplear propiedades de los reales para realizar transformaciones permitidas y necesarias;

- Analizar la equivalencia entre las inecuaciones obtenidas para asegurarse de que el conjunto solución encontrado sea realmente el conjunto solución de la inecuación original.

Encontrar el conjunto solución de la inecuación $f(x) \times g(x) \geq 0$, en la que se dan los gráficos de f y g. El estudiante debe ser capaz de:

- Interpretar la inecuación;

- Analizar los signos que las funciones deben tener para satisfacer a la inecuación;

- Hacer la conexión de ese análisis con el análisis gráfico.

En la categoría de operación con inecuaciones, cito el ejemplo:

Si $2{,}9 \leq x \leq 3$ y $1{,}7 \leq y \leq 1{,}8$, determine cual es el intervalo de variación de $\frac{x}{y}$.

En este caso, el estudiante debe interpretar estas inecuaciones y emplear dos propiedades de orden de los números reales.

Por último, en la categoría de preguntas sobre la solución sin resolver la inecuación, cito por ejemplo: sabiendo que 3.4 es solución de $f(x) \leq 0$, determine una solución para $f(2x) \leq 0$. En este caso, el estudiante debe ser capaz de interpretar la inecuación, observando que el conjunto solución es parte del dominio de la función $f(x)$, y aplicar una acción: dividir 3.4 entre 2.

Entre todos los ejercicios, de todas las etapas, percibí que era necesaria una abstracción más compleja para la resolución y comprensión de los siguientes: **4Ic**,**1IIIc, 4II, 4III** y **5III.** Los dos últimos están en la categoría Preguntas sobre la solución, sin resolver la inecuación, y el ejercicio **5III** fue aplicado con el objetivo de recolectar datos para analizar las estructuras mentales que los estudiantes poseen al intentar hacer conexiones entre el esbozo gráfico, las expresiones algebraicas presentadas en las inecuaciones, la variación de parámetros y el signo de desigualdad. Sólo se tuvo este ejercicio para trabajar con los parámetros.

Para mejor comodidad los presento aquí.

4Ic - Resuelva $\sqrt{x+2} \leq x$

1IIIc - Resuelva $\sqrt{x+2} < -x$

4II - Pruebe que

$$\text{si } 1{,}3 \le x \le 1{,}5 \text{ e } 2{,}6 \le y \le 2{,}8\text{, entonces } 1{,}1 \le y - x \le 1{,}5$$

4IIIa- Si 2.3 es solución de $f(x) \ge 0$, ¿qué número podemos tomar como solución de $f\left(\frac{x}{2}\right) \ge 0$? ¿Cómo hacer una generalización sobre la solución de $f\left(\frac{x}{k}\right) \ge 0$?

4IIIb – Si 4.6 es solución de $f(x) \le 0$, ¿qué número podemos tomar como solución de $f(2x) \le 0$? ¿Cómo hacer una generalización sobre la solución de $f(kx) \le 0$?

5III- Dado que $x^2 + 1 \le ax + b$, encuentre “a” y “b” de tal manera que la inecuación tenga:

i infinitas soluciones.

ii una única solución.

3.1.2- Uso de la computadora

Las estrategias de enseñanza empleadas en la utilización del lenguaje, en esta segunda instrumentación, fueron las mismas empleadas en la primera. Así, en el laboratorio, durante las ocho horas en que se utilizó la computadora, los estudiantes aprendían algunas sintaxis y comandos básicos, utilizando el texto de la etapa anterior. Analizaban ejercicios ya resueltos y resolvían ejercicios propuestos, y para los más complejos contaban con la orientación de la profesora. Hubo siempre estímulo para que el alumno previera qué tipo de respuesta la computadora podría ofrecer y así fuera posible confrontar estos resultados con su propia previsión.

Además de las actividades presentadas en la parte I, se propusieron otras que desarrollan el potencial para ayudar a los estudiantes a comprender mejor las equivalencias entre inecuaciones: **II1** y II2 (presentamos aquí dos de ellas, el resto se encuentra en el Anexo B). Tienen como propósito despertar la necesidad de analizar las transformaciones efectuadas en la inecuación inicial para verificar si obtienen o no una inecuación equivalente. La actividad **II1** fue realizada junto con la profesora. Su objetivo es estimular la atribución de valores que satisfagan una de las inecuaciones, las dos, y ninguna de ellas. Implica identificar el conectivo *and* con el hecho de que un determinado valor satisfaga dos inecuaciones al mismo tiempo; implica también identificar la necesidad de la existencia de otra función que, a su vez, es una función de otras dos y reconocer que la ley de formación de esta última función se basa en el conectivo *and*. Para comprender esta actividad, el estudiante necesita una concepción objeto de funciones (Capítulo 1).

II1 - Elabore un programa en ISETL que posibilite la verificación de que si un número dado satisface o no a las dos inecuaciones al mismo tiempo. A continuación tenemos un ejemplo de como puede ejecutarse ecuación utilizando la ISETL.

```
 >I := func(x);
>>        if x /= 3 then return (3+x)/(3-x) <= 4;
>>        end; end;
>    J := func(x);
>>        return x*sin(x) > 0;
>>        end;
>    ADD := func(I1,I2);
>>          return func(x);
>>             return I1(x) and I2(x);
>>          end; end;
>    ADD;
>>   K := ADD(I,J);
>    K(4);
false;
>    I(4);
```

```
true;
>    J(4);
false;
```

II2 - Haga un programa en ISETL que posibilite el análisis de la posible equivalencia entre las siguientes inecuaciones: $4x^2 < 9$ y $2x < 3$. Diga si estas inecuaciones son equivalentes o no. Justifique. Si usted no lo recuerde, consulte el programa, hecho en clase, que posibilitó el análisis de equivalencia entre $\sqrt{x+3} < x$ y $x+3 < x^2$. Luego, intente resolver la desigualdad $4x^2 < 9$. ¿Qué propiedades de los números reales pueden aplicarse?

Después de haber trabajado con varios tipos de comparación entre funciones (Capítulo 2: Actividades 4 a 7), la siguiente actividad tiene como objetivo revisar estos tipos de comparación. Sin embargo, ahora el alumno debe crear sus propias funciones y desigualdades.

II3 - Una inecuación puede verse como una comparación de funciones. Cree dos funciones y, utilizando el ISETL, establezca comparaciones entre ellas de tres maneras diferentes: mediante gráficos, mediante tablas y mediante valores booleanos.

3.1.2-Las evaluaciones

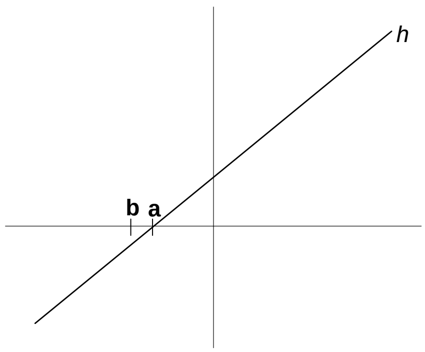
Las características de las evaluaciones fueron las mismas de la etapa anterior: cantidad, distribución de pesos, tipos de ejercicios, criterios de selección para entrevistas, duración de las entrevistas, momento de evaluar, evaluaciones por medio de pruebas escritas y entrevistas, individuales y en grupo, y observaciones. En las entrevistas observé principalmente la capacidad del empleo de las propiedades de los reales para efectuar transformaciones de las inecuaciones, en búsqueda del conjunto solución, y de la interpretación de una inecuación.

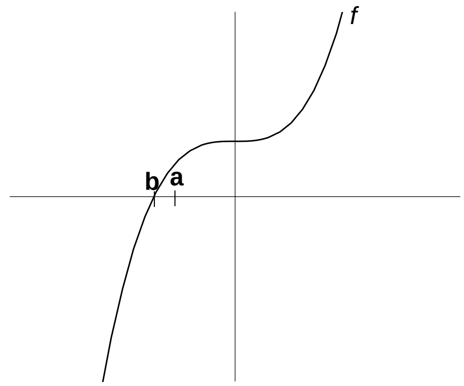
Para un análisis más seguro de los datos de las evaluaciones, los ejercicios fueron clasificados de la misma forma en que se hizo anteriormente.

El objetivo de los ejercicios clasificados en la Resolución de inecuación por métodos algebraicos o gráficos es proporcionar condiciones para identificar las construcciones mentales de los estudiantes al interpretar y resolver una inecuación, ya sea en el contexto algebraico, o en el contexto gráfico (Capítulo 2: interpretación, resolución algebraica y resolución gráfica de inecuaciones). Los que perteneces a la parte de *Operaciones con inecuaciones* ofrecen condiciones para analizar las construcciones mentales de los estudiantes al operar e interpretar inecuaciones. Los correspondientes a las *Preguntas sobre la solución, sin resolver la inecuación* proporcionan una oportunidad para analizar las construcciones mentales del estudiante al interpretar e intentar contestar preguntas sobre el conjunto solución sin resolver la inecuación. Aparte de los ya citados presento, a continuación, otros ejemplos.

El ejercicio **2III** tuvo como principal finalidad proporcionar situaciones para observar las estructuras mentales que los estudiantes presentan al intentar resolver inecuaciones, cuando sólo se les proporcionan los gráficos, sin expresiones algebraicas. El **3III** tiene como propósito evaluar la capacidad del estudiante para identificar una o más funciones y utilizarlas para la resolución gráfica.

2III-Dados os gráficos de las siguientes funciones f y h, encuentre el conjunto solución de $f(x)h(x) < 0$.





3III- Utilice dos gráficos de funciones para proponer la solución de las inecuaciones siguientes. Primeramente, elija las funciones que usted puede utilizar.

a $x^2 < -x$

b $x^3 < x$

3.2 - RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE LOS DATOS RECOLECTADOS

Antes de pasar a los resultados, hago un repaso de los principales objetivos de este trabajo:

- Presentar un conjunto de construcciones mentales para que los estudiantes puedan desarrollar el aprendizaje del concepto de inecuaciones y las conexiones entre estas construcciones;
- Presentar una propuesta metodológica de enseñanza para optimizar el aprendizaje de este concepto;
- Presentar algunos conceptos previos necesarios para el aprendizaje de inecuaciones;
- Realizar una reflexión sobre las relaciones entre la interpretación de inecuación y las demás situaciones-problema que involucran al concepto.

Para presentar una concepción objeto de resolución algebraica, un alumno necesita aplicar un proceso o acción en una inecuación ya comprendida al nivel proceso. En otras palabras, para resolver una inecuación, comprendiendo lo que se está realizando, es necesario que posea una concepción proceso de inecuación. Hay alumnos que encuentran el conjunto solución de la inecuación, pero aún no presentan una concepción proceso de inecuación, no reconocen qué contenidos matemáticos están involucrados en la resolución, no identifican equivalencias, transformaciones ocurridas y las propiedades de los reales empleadas. El estudiante Sávio (cf. entrevista al final de este capítulo), por ejemplo, logra resolver la inecuación, pero no logra entender las transformaciones y las probables equivalencias entre las inecuaciones obtenidas en las transformaciones.

Observé que los alumnos que tuvieron éxito en la categoría *Resolución de inecuación por métodos algebraicos o gráficos* también lo tuvieron en las categorías *Operaciones con inecuaciones* y *Preguntas sobre la solución sin resolver la inecuación* y lograron, además, interpretar correctamente una inecuación. Para realizar conexiones entre las transformaciones necesarias y permitidas, ejecutadas en la inecuación, se debe tener en mente respuestas a las preguntas: ¿Cuál propiedad de los reales debe ser empleada? ¿Por qué y para qué emplearlas? ¿Existen restricciones para tal empleo? ¿Cuáles son las consecuencias de tales transformaciones para el conjunto solución? Además de esto, el alumno que tiene éxito en la resolución coordina dos o más procesos de inecuaciones.

A continuación doy ejemplos de procesos de inecuación, es decir, inecuaciones interpretadas en el nivel de concepción proceso de inecuación:

> Cuando el estudiante reconoce que $x^2 + 1 > 0$, para cualquier x real, que $-x > 0$, para todo $x < 0$ o que $\sqrt{x+1} > 0$, si $x + 1 > 0$, presenta una visión dinámica y global del conjunto solución. En este caso, posee una concepción proceso de inecuación.

La concepción proceso puede surgir de las condiciones de existencia impuestas por las propiedades del conjunto de los números reales, de las expresiones algebraicas involucradas en la inecuación. Todos los ejercicios propuestos, en todas las categorías, proporcionan medios para que los aprendices puedan mejorar su capacidad de interpretar la inecuación: empleo de las propiedades del orden de los reales, noción de variación y de distancia de los números reales, concatenación del concepto de función con el de inecuación, análisis de parámetros, manipulaciones algebraicas permitidas y necesarias y la interpretación del conjunto solución.

La característica uso correcto de atajos para simplificar la resolución, presentada en el esquema inicial como concepción proceso, fue reencuadrada como concepción objeto, pues sólo los estudiantes con una concepción objeto demostrarán capacidad de minimizar manipulaciones algebraicas de resolución. Este tipo de resolución simplificada, minimizando las manipulaciones algebraicas, involucra interpretar a la inecuación y aplicar correctamente las propiedades de los reales.

La característica de capacidad para seleccionar un método eficaz de resolución de las inecuaciones, comprendiéndolo, que se encuentra en los esquemas inicial e intermedio, fue excluida del último esquema, pues es una simple consecuencia de efectuar los pasos de resolución de forma consciente, analizando las equivalencias. Esta característica tiene interrelación con el uso correcto de atajos para simplificar la resolución, percibido como una consecuencia de la utilización de propiedades de los reales.

Una observación importante es con relación al cambio de nombre: el *esquema de inecuación* que estaba relacionado inicialmente sólo con la interpretación, se llama ahora *esquema de interpretación* y el *esquema de inecuación* es todo el conjunto de construcciones mentales relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de inecuaciones, incluso el *esquema de interpretación*.

Basado en el análisis de entrevistas acerca del aprendizaje de inecuaciones, realizadas con estudiantes universitarios, presento el esquema final: modelo de cognición descrito por un conjunto de construcciones mentales llamadas Acción, Proceso, Objeto y otros Esquemas.

3.2.1 – Último Esquema de Inecuaciones

El concepto de inecuación puede ser comprendido bajo dos aspectos, que provienen de tipos diferentes de construcciones mentales:

- De *Interpretación de inecuación*, es decir, una inecuación vista como un ente matemático que es necesario interpretar, y que es posible manipular empleando determinadas propiedades del conjunto de los números reales, operar, analizar equivalencias, verificar cuáles de los subconjuntos de $\Re$ satisfacen a la inecuación.
- Según el punto de vista de *resolución*, es decir, ¿qué tipos de transformaciones son permitidas y qué alteraciones sufrió el conjunto solución después de ellas?, ¿cuál es el mejor método para resolver una inecuación específica?, y ¿cómo minimizar cálculos? Además, entender la resolución desde el punto de vista gráfico: ¿qué funciones pueden ser utilizadas para que el esbozo gráfico represente la inecuación que se quiere resolver?; o ¿cuándo se deben comparar dos o más gráficos dados analizando los signos de las imágenes? La resolución en el contexto gráfico, en muchos casos, sirve para intuir, y también encontrar, el conjunto solución, siendo aún necesario, en algunas situaciones, la resolución algebraica.

Es necesario que el estudiante no emplee sólo las transformaciones adecuadas a la inecuación, para alcanzar el conjunto solución, sino que también logre entender en qué condiciones, así como las razones por las cuales tales transformaciones fueron empleadas y por qué funcionan. Lo ideal es que el estudiante tenga conciencia de la legitimidad de las transformaciones efectuadas y que establezca relaciones entre diversas inecuaciones transformadas, equivalentes o no. La capacidad de usar el concepto de inecuación de forma flexible depende, en gran parte, de la posibilidad de diferenciar e integrar las distintas formas en que el concepto y su resolución se manifiesten, es decir, reconocerlas, combinarlas de manera efectiva y tener seguridad para pasar de una forma a otra sin dificultades.

Los dos tipos de comprensión, interpretación y resolución, pueden surgir en conjunto y el estudiante puede relacionarlos pasando de uno a otro fácilmente. No obstante, es posible, por un lado, encontrar estudiantes que interpreten una inecuación de manera muy superficial y que no tengan éxito en las resoluciones, ya sea en el contexto algebraico o en el gráfico (como se constata en el fragmento de la entrevista de Carlos). Por otro lado, es posible encontrar aquellos que, aún sin interpretar una inecuación, poseen ciertas construcciones mentales que les posibilitan resolver varios tipos de inecuaciones, principalmente en el contexto algebraico, pero de forma mecánica, ya que imitan procedimientos memorizados. Se espera que el estudiante sea capaz de trabajar simultáneamente con la interpretación y con la resolución de inecuaciones. Además, es posible encontrar algunos estudiantes que logren resolver una inecuación en un contexto gráfico, independientemente de la comprensión algebraica.

En el siguiente fragmento, el estudiante Carlos pensó dar valores a x. Intentó resolver la inecuación solamente dando valores uno a uno, y no logró interpretarla ni resolverla ya que discernió únicamente de manera puntual. El fragmento corresponde a la resolución de $\sqrt{x+2} \leq x$.

> Carlos: Estoy pensando lo siguiente: elegí un valor para x de manera que sustituyendo en la raíz tendré una raíz exacta. Por ejemplo, consideré 7 en la raíz 7 + 2 = 9, entonces sacando raíz resultará 3 que es menor que 7. Entonces, satisface realmente a la inecuación... todos los valores positivos.

Después de muchos intentos, elevó los dos miembros al cuadrado y nuevamente intentó la resolución dando valores.

> Carlos: Entonces, tengo que dar valores a x en el primer miembro de modo que sean siempre menores o iguales a x al cuadrado. Ya definí que el segundo miembro será siempre positivo

> debido al cuadrado. Entonces, ¿qué valores son los que voy a tomar para x? Tengo la seguridad de que son valores de x menores que cero, cualquier valor menor que cero.

Un estudiante puede demostrar un esquema débil en alguna de estas comprensiones, o en todas, y así mismo tener éxito en determinadas situaciones matemáticas que implican inecuaciones; sin embargo, tal logro será limitado y llegará el momento en que no podrá responder a ciertas situaciones matemáticas que impliquen inecuaciones. Esto obedece a que el esquema de inecuación implica el de interpretación de inecuación, el de resolución algebraica y el de resolución gráfica.

Desgloso, a continuación, los esquemas por separado, resaltando las posibles relaciones entre ellos y analizando cómo ocurren. Entiéndase que un esquema constituye una red de construcciones mentales conectadas por medio de posibles, y a veces necesarias, acciones para una verdadera comprensión del concepto. En la presentación de los esquemas se destacan las acciones.

Expongo, primero, los prerrequisitos básicos para el entendimiento del concepto de inecuación.

Interpretar y *resolver* en el contexto algebraico una inecuación, de manera general, requiere como prerrequisitos:

- Hacer una correspondencia 1-1 entre $\Re$ y el eje real;
- Comprender la variable como incógnita, como número real y en una relación funcional (Trigueros,1997);
- Comprender nociones básicas de subconjuntos en $\Re$: unión e intersección de intervalos;
- Comprender los conectivos *y* y *o*;
- Reconocer y emplear adecuadamente las propiedades del cuerpo ordenado $\Re$;
- Comprender el significado de implicaciones falsas y verdaderas, y sus recíprocas, así como proposiciones si y sólo si;

- Comprender los cuantificadores: *para todo*, *existe*.

Resolver una inecuación en el contexto gráfico requiere como prerrequisitos:

- Esbozar algunos tipos básicos de funciones, como cuadráticas, cúbicas simples (ej: $f(x)=x^3$, $f(x)=x^3+1$), lineal, raíz cuadrada, $f(x)=1/x$.
- Leer e interpretar gráficos sin necesidad de sus respectivas expresiones algebraicas.

Para los tres esquemas es muy importante la concepción de función que el individuo posee, como es posible percibirlo, principalmente, en los esquemas de interpretación y de resolución gráfica. El entendimiento de una función involucra comprensión de dominio, imagen, operación de funciones -suma, resta, multiplicación, división- composición de funciones y análisis gráfico.

Presento de entrada el esquema de interpretación, ya que sobre éste se construyen y se desarrollan los demás. Ahora bien, los estudiantes que lograron interpretar correcta y flexiblemente una inecuación tuvieron éxito tanto en las resoluciones algebraicas, como en las resoluciones de gráficos. Quienes presentaron un esquema débil de interpretación fueron exactamente los que no lograban resolver correctamente una inecuación.

3.2.1.1- Esquema de Interpretación de Inecuación

Acción

Un individuo posee una concepción acción si es capaz de atribuir valores particulares a la variable y verificar si satisfacen, o no, a la inecuación. Es un procedimiento estático, el individuo es capaz de pensar sólo de manera local, es decir, no logra extender los valores de la variable. En el caso de que el conjunto solución esté dado y si se cuestione sobre lo que sucedería si sustituimos un determinado valor en la inecuación, el individuo no es capaz de ofrecer la respuesta de inmediato. Necesita hacer la sustitución para verificar, comprobando que no está apto para interpretar y hacer uso del conjunto solución. Muestra, en este caso, que posee un esquema débil de interpretación.

Los estudiantes en el nivel de concepción acción de interpretación que tomé como muestra presentaron también un entendimiento de función en el nivel de concepción acción. Por tanto, si el estudiante presenta un nivel de concepción acción de función es probable que posea el de concepción acción de interpretación de inecuación, lo cual evidencia el nexo del esquema de función con el esquema de interpretación.

Proceso

Un individuo posee una concepción proceso si es capaz de discernir si una inecuación recibe una o más entradas o valores de variables independientes, ejecuta una o más operaciones en la entrada y obtiene valores booleanos: ejercita una dinámica. Así mismo, debe imaginar el proceso de asociar un número real a la variable en la inecuación, teniendo como resultado un valor booleano, es decir, tal número satisface, o no, a la inecuación. Si se le cuestiona sobre lo que sucede al sustituir un determinado valor en la inecuación, es capaz de utilizar el resultado del conjunto solución para contestar correctamente y de manera rápida. Puede leer la inecuación de derecha a izquierda e interpretarla en tal dirección.

Así, cuando reconoce que $x^2+1>0$ para cualquier x real, que $-x>0$ para todo x < 0 y, que $\sqrt{x+1}>0$ para $x+1>0$, tiene una concepción proceso de interpretación.

En este caso, la lectura del conjunto solución forma parte del esquema de interpretación de inecuación de quien conoce el significado del conjunto solución. Y si está en el nivel de concepción proceso de función, entonces muestra una tendencia a estar en el nivel de concepción proceso de interpretación.

Objeto

La primera característica de una concepción objeto es sumamente importante para la ejecución de acciones. Puede ser considerada como esencial para el entendimiento del concepto de inecuación.

Un estudiante posee una concepción objeto si:

a) Aplica las propiedades del cuerpo ordenado de los números reales a las inecuaciones, en particular, diferencia las propiedades que pueden ser aplicadas a una ecuación de las que pueden ser aplicadas a una inecuación. Un estudiante con indicios de poseer esta concepción logra emplear tales propiedades siempre que la situación matemática lo solicite, tanto en la resolución como en la interpretación de inecuaciones.

b) Responde a preguntas sobre la solución sin realmente resolver la inecuación.

c) Opera dos o más inecuaciones, explicando su razonamiento.

d) Analiza implicaciones y equivalencias entre inecuaciones.

e) Visualiza las inecuaciones con el punto de vista de funciones.

El estudiante Zezé explica de manera global la no equivalencia. Hace uso de las propiedades de orden de los números reales y comprueba su entendimiento de la variable como incógnita. Presenta una fuerte coherencia a emplear propiedades de los números reales, al analizar las transformaciones y equivalencias. Fue uno de los pocos estudiantes que presentó la concepción objeto de interpretación, concepción objeto de resolución algebraica y gráfica, y un buen entendimiento del concepto de función. Revisemos la entrevista.

Problema: ¿Para todo número real x, $x \neq 2$, $\dfrac{x^2+1}{x-2} > 3 \Leftrightarrow x^2+1 > 3(x-2)$?

El estudiante necesitaba analizar la equivalencia y contestar si era verdadera o falsa.

> Zezé: Esta expresión implica que x al cuadrado más uno es mayor que tres que multiplica a x menos 2, y esta expresión implica la otra, una implica la otra. Pero, vimos que no es así, porque x menos dos es una variable que no sabemos si es positiva. La verdad puede asumir valores positivos y negativos, podría alterar el signo de esta inecuación.

En otro momento de la entrevista observé que el estudiante era capaz de usar su esquema de interpretación en los esquemas de resolución algebraica y de resolución gráfica. Veamos su empleo del esquema de resolución algebraica. Interpreta de una manera global la ausencia de equivalencia.

> Zezé: Es... Y aquí implicaría lo mismo (...) viniendo de derecha a izquierda implicaría lo mismo, mismo, cómo puedo decir... ¿Del mismo modo, no? Porque yo no podría pasar dividiendo o multiplicando los dos, en ambos miembros, por uno sobre x menos dos que tampoco sabemos si es positivo o negativo, porque es una variable, puede asumir ambos valores, positivo o negativo.
>
> E: Entonces ¿qué es lo que puede concluir en este ejercicio?
>
> Zezé: Que es falso.
>
> E: ¿Que es falso?
>
> Zezé: Que no, no , no implica, (...) podría (...) que uno no implica el otro y viceversa, ¿no es verdad? Por causa de esa (...) tendría que ser hecho de otra manera.
>
> E: Pero, el contraejemplo aquí (apuntando la evaluación escrita) (...)...
>
> Zezé: Es el, (...) 3 es mayor que menos 3...Lo que pasa es que le atribuimos un valor que satisface una inecuación, lo sustituimos en la otra, y no satisfizo la otra inecuación, eso quiere decir que una no implica la otra.

Con el fin de detallar las construcciones mentales presento algunos ejemplos de preguntas para las características **b)** y **c)** y las acciones que el estudiante debe ejecutar en las inecuaciones involucradas en estos ejemplos. Tales ejemplos proporcionan un medio para detectar características de una concepción objeto de interpretación. Solamente los estudiantes que posean esta concepción son capaces de resolverlos. Los ejemplos no son los únicos.

Ejemplos para la característica **b)**:

1-Si [-2, 3.2] es solución de $f(x) \geq 0$, ¿cuál sería el conjunto solución de $f(x+3) \geq 0$?

2- Dado $x^2 + 1 \leq ax + b$ encuentre “a” y “b” de tal manera que esta inecuación posea:

i un número infinito de valores para x

ii un único valor para x.

Para resolver cualquiera de estas preguntas, el estudiante necesita presentar una concepción proceso de interpretación y una concepción proceso de función. Para la pregunta **1**, debe ejecutar:

Acción: Que *comprenda* el conjunto solución como subconjunto del dominio de una función relacionada con la inecuación. Es necesario que posea una concepción proceso de función y que la relacione con una concepción proceso de inecuación siendo entonces capaz de hacer las siguientes identificaciones:

Inecuación $\longleftarrow f(x) \longrightarrow$ *función*

y

Conjunto solución de la inecuación $\longleftarrow x \longrightarrow$ *dominio de la función*

Conjunto solución de la inecuación $\longleftarrow x+3 \longrightarrow$ *dominio de la función*

Acción: Que *realice* operaciones en el conjunto solución (sumar, restar, dividir, multiplicar).

En este nivel de construcción mental, el estudiante es capaz de proceder a la resolución por medio de un análisis gráfico. Interpreta el gráfico, luego el nuevo dominio y la solución como una traslación de 3 unidades hacia la izquierda del gráfico, pero la imagen no cambia. Se observa una relación con el esquema de función, pues trabajan con composición de funciones, operaciones con funciones, entendimiento de imagen y dominio.

Con respecto a la pregunta **2**:

Acción: Que *visualice* el proceso de resolución encapsulado de tal forma que sea posible pensar en la resolución de varias inecuaciones, pero sin resolverlas. Que Comprenda el significado de los parámetros, es decir, comprenda que existe una familia de recta según los valores de los parámetros.

Acción: Que *trace* gráficos y detecte intersección de los gráficos x^2+1 y $ax+b$. A partir de ahí encuentre un valor para los parámetros *a* y *b* que satisfaga la cantidad de soluciones. Para que la inecuación tenga infinitas soluciones, el estudiante percibe la necesidad de tener una parte del gráfico de la parábola situada abajo del gráfico de la recta. Para que haya una sola solución percibe que el gráfico de la recta debe tocar a la parábola solamente en un punto.

Ésta es una de las maneras de resolver el problema. Por lo tanto, el estudiante que lo solucione de este modo alcanza una concepción objeto, debido a que es capaz de tal concepción y a que es capaz de contestar muchas preguntas que impliquen interpretación del conjunto solución. Así, muestra que puede interpretar bien una inecuación paramétrica y hacer uso correcto de los recursos gráficos. Así pues, vemos nuevamente la conexión del esquema de interpretación con el esquema de función.

Ejemplo para la característica **c)**:

Pruebe que:

Si $1{,}3 \leq x \leq 1{,}5$ y $2{,}6 \leq y \leq 2{,}8$, entonces $1{,}1 \leq y - x \leq 1{,}5$

Los problemas que entroncan en tal categoría están relacionados con la interpretación de inecuaciones y el empleo de propiedades de orden de los números reales. No se relacionan con la resolución de inecuación en sí. Aquí la concepción objeto se alcanza cuando se ejecutan acciones en el proceso de interpretación (inecuación interpretada en el nivel concepción proceso) como, por ejemplo, multiplicar un proceso de interpretación de inecuación por (-1) o actuar sobre un proceso (o más) de interpretación, transformándolo en otro proceso[1], como por ejemplo, sumarlos o multiplicarlos.

El estudiante necesita poseer una concepción proceso de interpretación y ponerla en juego:

Acción: Que *emplee* propiedades de los números reales como, por ejemplo, '$a < b$, $c < 0$ entonces $ac > bc$' y '$a < b$, entonces $1/a > 1/b$ si $a > 0$ y $b > 0$', entre otras.

Acción: Que *analice* el resultado, si tiene significado o no.

En este nivel, el joven es capaz de interpretar las inecuaciones en el contexto gráfico relacionando el esquema de interpretación con el esquema de función.

A continuación presento las construcciones mentales necesarias para que un estudiante, consciente de sus pasos y acciones, resuelva una inecuación.

[1] Aquí hago una observación: existe una diferencia entre ejecutar una acción sobre el proceso y ejecutar una acción haciendo uso de este proceso: multiplicar un proceso de interpretación por -1 es diferente de sumar dos procesos de interpretaciones. En la resolución de inecuaciones es posible hacer la siguiente diferencia: considerar un proceso de interpretación y emplear las propiedades de los números reales en este proceso; y considerar las posibles equivalencias entre estos procesos y coordinarlos. La diferencia básica seria actuar, ejecutar acción ***en*** *el* proceso y actuar, ejecutar acción ***con*** el proceso ***(o, haciendo uso de varios procesos)***.

3.2.1.2- El esquema de Resolución de Inecuaciones

3.2.1.2.1- Esquema de Resolución algebraica de inecuaciones

Para resolver una inecuación el estudiante debe poseer concepciones objeto de interpretación y de resolución de inecuaciones. Si utiliza su esquema de interpretación logrará, con seguridad, avanzar hacia una completa y correcta resolución. Esto significa, básicamente, que podrá emplear de manera coherente su concepción proceso de interpretación, las propiedades de los números reales, y, cuando sea necesario, coordinar varios procesos.

Pre-acción

Un individuo posee una concepción pre-acción cuando:

- Intenta resolver una inecuación como si fuera una ecuación.
- Posee algún algoritmo de resolución, por tanto no logra llegar a una solución completa y a veces ni parcial.

El estudiante que intenta resolver una inecuación como una ecuación parece poseer una coherencia débil.

Acción

Un estudiante posee una concepción acción cuando posee algún algoritmo de resolución para determinados tipos de inecuaciones y logra encontrar el conjunto solución, pero no justifica la validez del algoritmo utilizado. Aquellos que poseen una concepción acción consideran como esencia real del álgebra la ejecución de secuencias de manipulación simbólica, y no su validez como consecuencia del empleo de las propiedades de los reales. Está determinado a entender la resolución algebraica de inecuación como un conjunto de pasos memorizados.

Proceso

Un estudiante que presenta una concepción proceso:

- Narra correctamente los procedimientos de resolución de diferentes tipos de inecuaciones, no necesariamente ejecutándolos (capacidad observada sólo en la entrevista).
- Encuentra el conjunto solución de diversos tipos de inecuaciones y logra interiorizar la acción, es decir, reflexiona sobre sus acciones. Los pasos que sigue ya no son completamente automáticos; hay una desconfianza sobre la equivalencia entre las inecuaciones transformadas. Es capaz de verificar si la equivalencia fue mantenida o no, pero no alcanza a generalizar el análisis de la equivalencia utilizando las propiedades de los números reales y coordinando otros procesos. También puede resolverlas dejando siempre la variable en el lado derecho.

Al poseer esta concepción, el estudiante comienza a darse cuenta de que existen transformaciones efectuadas en determinadas inecuaciones que alteran el conjunto solución, pero aún no logra coordinar otros procesos de inecuación y relacionar ciertas transformaciones obtenidas por las propiedades utilizadas.

Objeto

El individuo posee una concepción objeto si es capaz de efectuar pasos de resolución de forma consciente: analizar las equivalencias, hacer uso de la interpretación de la variable, actuar sobre los procesos empleando propiedades de los números reales, coordinar otros procesos e interceptar o unir varios conjuntos solución de procesos coordinados.

El individuo que posee tal concepción puede seleccionar otro método de resolución, cuando es posible, además del que haya elegido. Hace uso de procedimientos para agilizar la solución, así como emplea correcta y adecuadamente las propiedades de los números reales.

Para la resolución es necesario que el estudiante efectúe una conexión con el esquema de interpretación de inecuación, y que interprete la inecuación inicial al menos en el nivel de proceso (véase concepción proceso de interpretación). Por ejemplo:

- Reconoce que $x^2 + 1 > 0$ para cualquier x real;
- Percibe que hay un subconjunto de los números reales que satisfacen a la inecuación $(x+1)(x-3) > 4$ y que este subconjunto no puede contener el valor 3 ni -1. Así mismo, poseer una concepción proceso de interpretación significa ofrecer una interpretación correcta del conjunto solución, como expuse anteriormente.

Después, el estudiante debe ser capaz de ejecutar una acción o coordinar procesos (lo cual ocurre fundamentalmente a través del nexo con el esquema de función) operar dos o más funciones, así como la interpretación, es decir, el empleo de las propiedades de orden de los números reales.

Como ejemplos de las conexiones tenemos:

1 - Dado $x^3 + 4x^2 - x < 0$, el estudiante factoriza x obteniendo $x(x^2 + 4x - 1) < 0$. Coordina los procesos x y $(x^2 + 4x - 1)$ analizando y combinando las posibilidades de signos para ellos.

2 - Dado $\frac{x+1}{x-3} > 4$ el estudiante ejecuta acciones empleando propiedades de los números reales como, por ejemplo, sumar (-4) en ambos miembros, obteniendo otra inecuación: $\frac{-3x+13}{x-3} > 0$.

Después de haber realizado la primera transformación, o algunas (coordinando procesos o aplicando acciones), el estudiante debe cuestionar lo que sucede en el conjunto solución. ¿Fue alterado, o no, y por qué? ¿Ya es conjunto solución más simple (o simplemente conjunto solución) o no? Si fue alterado, todavía deberá coordinar otros procesos. Nuevamente vemos la relación con el esquema de interpretación, pues existe la necesidad del entendimiento de conjunto solución y de análisis de las equivalencias y las implicaciones.

Veamos el siguiente ejemplo:

Al trabajar en la resolución de $\sqrt{x+2} \le -x$, el estudiante después de elevar al cuadrado, obtiene $x+2 \le x^2$. Cuando reconoce que el conjunto solución fue alterado, entonces debe coordinar la solución de esa nueva inecuación con los procesos $-x \ge 0$ y $x+2 \ge 0$.

A partir de ahí, es posible considerar las siguientes construcciones mentales: el empleo de propiedades de los números reales; la coordinación de procesos, la interceptación, y unión, si es necesario, del conjunto solución, de la inecuación transformada, con conjuntos solución de procesos coordinados; el cuestionamiento sobre las alteraciones del conjunto solución ante las transformaciones obtenidas con la pregunta: ¿es el conjunto solución final? Si la respuesta es negativa, sigue a continuación aplicando acciones, coordinando procesos o ambos. En suma, emplear acciones en procesos de interpretación de inecuaciones, coordinar procesos o ambas cosas.

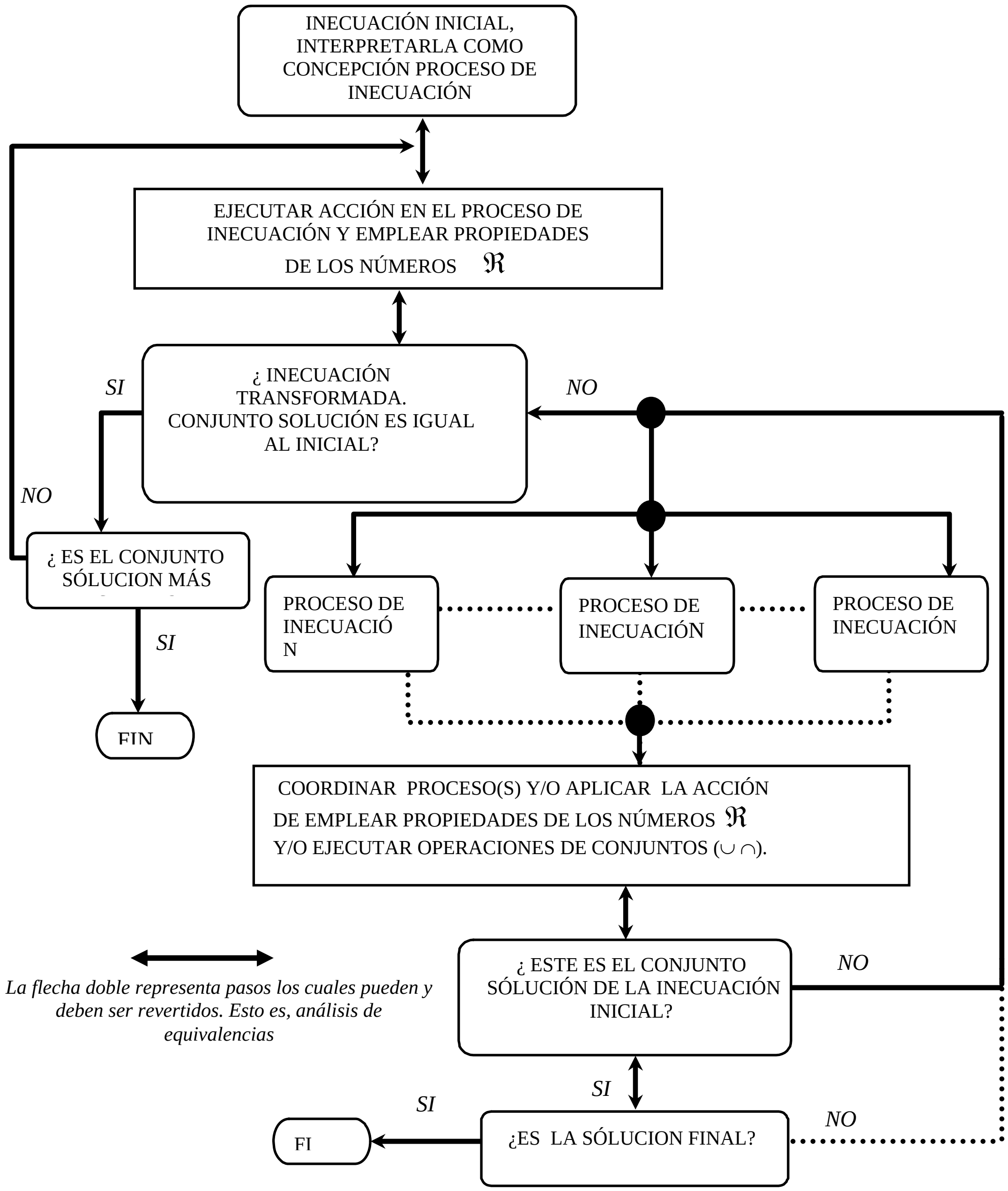
Al cuestionar la alteración del conjunto solución, obtenido a través de esas transformaciones, necesita desencapsular el objeto en proceso. Para regresar al proceso del que se originó el objeto, el estudiante nuevamente deberá hacer uso de las propiedades de orden de los números reales. Se dice desencapsular, porque el análisis de la alteración del conjunto solución es efectuado tras haber aplicado acciones en procesos o coordinado.

Un estudiante que posee tales construcciones mentales tiene un fuerte esquema de resolución algebraica de inecuaciones. Al cuestionar la relación entre las transformaciones efectuadas y sus respectivos conjuntos solución, recurre a su esquema de interpretación, al menos a la concepción proceso y al empleo de las propiedades de los reales. Las interconexiones entre la resolución y la interpretación de una inecuación son, básicamente, la interpretación de las inecuaciones obtenidas y la inicial, al menos en el nivel proceso, la ejecución o coordinación de acciones en esos procesos (o ambas cosas) y el análisis de las inecuaciones transformadas a fin de obtener el conjunto solución.

El estudiante Carlos es un ejemplo de alguien que posee una concepción acción de interpretación y pre-acción de resolución de inecuaciones, mientras que Zezé es una muestra de alguien que posee una concepción objeto de interpretación y de resolución algebraica (cf. 3.2.2).

En el diagrama presentamos un entendimiento de las construcciones mentales del estudiante al pasar de una concepción proceso a una concepción objeto de resolución algebraica de inecuaciones (figura 3).

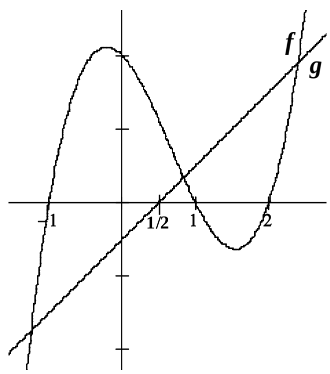
Figura 3



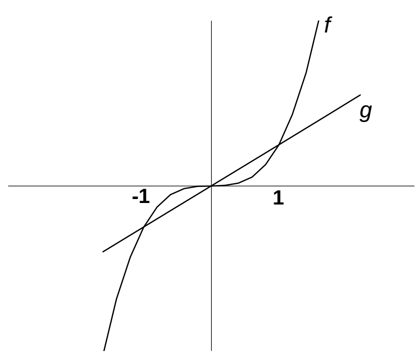
3.2.1.2.2- Esquema de Resolución Gráfica de Inecuaciones

Presento dos problemas que fueron utilizados para analizar las construcciones mentales que los estudiantes muestran al resolver (o intentar resolver) una inecuación en el contexto gráfico. Cabe resaltar que éstas no agotan los tipos de preguntas que pueden elaborarse con el objetivo de desarrollar determinadas construcciones mentales en este contexto. Implican diferentes estructuras mentales de resolución, por tanto surge la necesidad de analizarlas por separado.

1-Resolución de una inecuación cuyas funciones incluidas son expresadas gráficamente, en el mismo sistema de coordenadas. Por ejemplo, encontrar el conjunto solución de la inecuación $f(x) \times g(x) \geq 0$.



2-Comparar imágenes de funciones a través de gráficos sin sus expresiones algebraicas, por ejemplo, encontrar el conjunto solución de la inecuación $f(x) < g(x)$, en la que están dados los gráficos de $f(x)$ y $g(x)$.



El esquema de función influye mucho en el desarrollo del esquema de resolución algebraica del estudiante. Durante la descripción de las estructuras mentales, señalo dónde y cómo el estudiante necesita recurrir al uso de tal esquema.

Muestro a continuación las construcciones mentales para la actividad **1**.

Pre-Acción

Un individuo posee una concepción pre-acción cuando se limita a analizar los signos que las funciones deben satisfacer. En este nivel no es capaz de coordinar dos procesos de función, $f(x)$ y $g(x)$, (o más) de funciones y muestra poseer un esquema débil de función. No obtiene éxito en la resolución de la inecuación solicitada. En muchas situaciones necesita de la expresión algebraica del gráfico e intenta encontrar tal expresión.

Por ejemplo, en la actividad **1**, se limita a entender que las posibilidades para $f(x)$ y $g(x)$ son positivas o ambas negativas, además por lo menos una de ellas nula. No es capaz de establecer una relación de las posibilidades de signos con las respectivas imágenes del gráfico.

Acción

Un aprendiz presenta una concepción acción cuando atribuye, en el gráfico, puntos aislados para analizar las variaciones de las imágenes de las funciones y analiza, en la inecuación, posibilidades de signos (positivo, negativo) para las imágenes de las funciones incluidas.

El estudiante comprende el concepto de función (véanse prerrequisitos) bajo una concepción acción y, mediante esta comprensión, coordina dos concepciones acción de funciones. Relaciona el dominio con la imagen solamente para puntos aislados, no piensa en términos de intervalos. Además, no relaciona el análisis de los valores obtenidos en el gráfico con el análisis de los signos de las funciones involucradas en la expresión de la inecuación. En la actividad **1**, por ejemplo, da en el gráfico valores para el dominio de f y de g, reconoce las posibilidades de signos para las imágenes de las funciones f y g en la expresión $f(x) \times g(x) < 0$, pero aún no logra coordinar los dos tipos de representaciones de una inecuación: gráfica y algebraica. Aquí, el esquema de interpretación del estudiante implica sólo la concepción acción. Su comprensión es motivada exclusivamente por la óptica puntual y parece no conectar coherentemente, en el contexto gráfico, su esquema de función con su esquema de resolución gráfica.

Proceso

Un estudiante que posee una concepción mental proceso:

- Visualiza e identifica, en el gráfico, que existen subconjuntos del dominio que vuelven las imágenes positivas o negativas.
- Percibe, en la inecuación, que hay subconjuntos del dominio que vuelven positivas o negativas las imágenes de las funciones involucradas.

Además, es capaz de coordinar dos procesos de función; pero no relaciona las dos construcciones mentales indicadas en el párrafo anterior para que lleve a cabo la intersección y/o la unión de los intervalos (subconjuntos de $\Re$) encontrados: visualiza las raíces y las intersecciones, pero no sabe qué hacer con ellas. En esta situación, el estudiante aún no presenta una coherencia adecuada para incluir la resolución gráfica en su esquema de inecuación; sin embargo, parece encaminarse a lograrla.

Objeto

Un estudiante posee una concepción objeto si:

- Visualiza e identifica, en el esbozo gráfico, subconjuntos del dominio que hacen las imágenes positivas o negativas;

- Visualiza, en la inecuación, subconjuntos del dominio que hacen las funciones positivas o negativas;
- Coordina dos procesos de función. Logra relacionar las dos construcciones mentales de mencionadas en los incisos anteriores y hace las intersecciones y/o las uniones de los intervalos encontrados. Son necesarias las acciones:
  - De localización de las raíces de $f(x)$ y $g(x)$.
  - De enlazamiento

Signo de f(x) en la expresión f(x)g(x) ≥ 0 $\longleftrightarrow$ *posicionamiento gráfico del signo de f(x)* $\longleftrightarrow$ *intervalo asociado*

y

Signo de g(x) en la expresión f(x)g(x) ≥ 0 $\longleftrightarrow$ *posicionamiento gráfico del signo de g(x)* $\longleftrightarrow$ *intervalo asociado*

  - De intersección y unión de intervalos resultantes de esas relaciones.

Otro resultado observado en la enseñanza-aprendizaje de resolución de inecuaciones en el contexto gráfico es que el desempeño y las construcciones mentales del estudiante no se alteran, estén o no los gráficos trazados en el mismo sistema de coordenadas.

Durante la actividad **2,** una concepción pre-acción se caracteriza cuando el estudiante intenta encontrar las expresiones algebraicas involucradas. En el nivel de concepción acción se limita a dar valores, uno a uno, y comparar las funciones puntualmente, haciendo un procedimiento estático, mientras que en la de proceso interioriza la acción de atribuir valores puntuales y pasa a razonar en términos de la existencia de subconjuntos de los dominios, donde las imágenes de las funciones se puedan comparar. Así, halla intervalos tales que la imagen de una función es mayor o menor que la otra, por medio de un procedimiento dinámico, global. No obstante, aún no es capaz de encontrar la solución. Para poseer una concepción objeto es necesario las acciones:

- De localización de las intersecciones entre $f(x)$ y $g(x)$.

- De coordinación.

Representación gráfica $\longleftrightarrow$ *expresión de la inequación por ejemplo f(x)<g(x)*

- De identificación de los subconjuntos del dominio de una de las funciones que satisfacen a la inecuación.

- De unión de los intervalos.

En el ejemplo en que se pide la identificación de los subconjuntos de la función $\boldsymbol{f}$ que hace su imagen menor que la imagen de $\boldsymbol{g}$, tal acción, en general, es realizada a partir de la identificación de las posibles intersecciones entre los gráficos. Aquí, el estudiante logra, conscientemente, enlazar su esquema de función, incluyendo la representación gráfica de las funciones, a su esquema de resolución gráfica de inecuación.

La resolución gráfica también puede verse bajo la perspectiva de resolver, por medio de gráficos, una inecuación presentada de forma algebraica. Es importante que el estudiante tenga acceso a una computadora o a una calculadora gráfica, y que sepa utilizar recursos para hacer esbozos gráficos. Por lo general, en inecuaciones que involucran funciones de primero y segundo grados, muestra facilidad para hacer uso de esta estrategia de resolución. Si logra usar tal método de resolución con las funciones de primero y segundo grados, considero que posee una concepción proceso de resolución gráfica.

Además de identificar las funciones que quisiera analizar a través del esbozo gráfico y del trazado de los respectivos gráficos, necesita poseer estructuras mentales que les permitan encontrar la solución (las mismas citadas anteriormente, dependiendo del tipo de actividad que se proponga).

En ciertas situaciones necesita coordinar las construcciones mentales de resolución gráfica con las de índole algebraica. Tal situación puede surgir cuando el estudiante cambia la inecuación inicial a través de acciones o procesos, o ambos, y después de algunas transformaciones opta por continuar la resolución gráficamente. En este caso los esquemas de resolución algebraica y de resolución gráfica están conectados. Sin embargo, no se tiene, aquí, la intención de explorar tal enfoque.

Concepción mental objeto de resolución algebraica

Concepción mental objeto de resolución gráfica

Resolución algebraica gráfica

La investigación sobre las actividades cognitivas que lleva a cabo el estudiante cuando intenta comprender el concepto de inecuación, es "dialéctica". Por un lado, el estudiante, para presentar un esquema fuerte[2] de resolución tanto en el contexto algebraico como en el gráfico, debe presentar un esquema fuerte de interpretación, el cual debe implicar todas las características que atañen a una concepción objeto. Por otro lado, si el estudiante posee un esquema fuerte de interpretación, su comprensión de tal concepto debe implicar también todas las características apuntadas en una concepción objeto de resolución, ya sea en el contexto gráfico o en el algebraico.

El esquema de interpretación resulta fundamental para el desarrollo del esquema de resolución y, a su vez, colabora en su propia expansión. Ahora bien, el estudiante puede iniciar sus estudios de

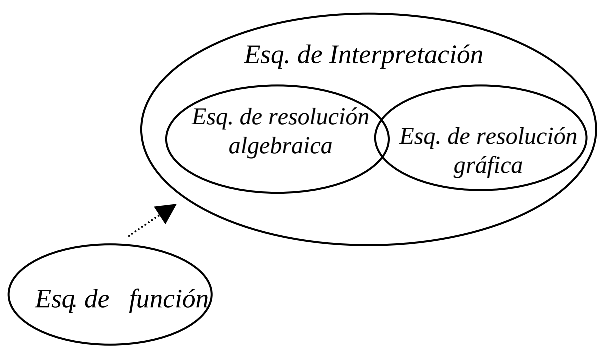
[2] Un esquema fuerte significa poseer la concepción objeto.

tal forma que su comprensión esté en el nivel de una concepción acción de interpretación y al intentar resolver una inecuación, aunque posea también un esquema débil de resolución, pueda abstraer datos, relacionar y coordinar contenidos de tal forma que sus construcciones mentales se vuelvan más elaboradas y mejore su interpretación del concepto y su comprensión de resolución.

Pongo énfasis en que un esquema fuerte de resolución está fundamentado en el esquema de interpretación del individuo, que debe abarcar una concepción objeto. Así, el esquema de inecuación necesita involucrar el de interpretación y los de resolución algebraica y gráfica. Sin embargo, el esquema de función es imprescindible para el entendimiento del concepto de inecuación, como es posible percibir en las conexiones y relaciones destacadas anteriormente (figura 4).

Figura 4

Esquema de Inecuación



3.2.2-Entrevistas[3]

Presento aquí algunas conclusiones con respecto a los tipos de construcciones mentales predominantes, según el esquema final, encontradas en ocho estudiantes: Nina, Luiz, Pepe, Rob, Sávio, Túlio, Valdo y Zezé.

[3] Presento aquí nuevamente algunos ejercicios para mejor comodidad de lectura.

Nina y Luiz - predominancia de una concepción pre-acción con tendencias a la acción de resolución de inecuaciones.

Ejercicio 1IIIj **(**resuelva $\frac{3+x}{3-x} < 4$**)**

Después de que Luiz intentó la resolución de diversas maneras, la entrevistadora preguntó:

> Y: ¿Existe otra manera para que usted intente resolver este ejercicio?
>
> Luiz: ¿Pero llegando a lo mismo? ¿Al mismo resultado? (...) ¡Espere! (...) En el caso 3 menos x, está dividiendo pasaría multiplicando para acá. Por 4, espere, 4 por 3 menos x.

La estudiante Nina se limitó a dar valores al azar para la resolución de la inecuación. No fue capaz de abstraer que existe un subconjunto de los números reales que puede satisfacer a la inecuación mediante un procedimiento dinámico y no consiguió interpretar el conjunto solución. Presentamos una parte de la entrevista en relación con la resolución de $x^2 < -x$. Desde el inicio, la alumna declaró que tal ejercicio no tendría solución: "x^2 nunca puede ser menor que $-x$, pues está elevado al cuadrado". Nina pareció presentar la concepción pre-acción, pero, después de varios intentos, resolvió la cuestión utilizando la fórmula de la ecuación de segundo grado y con recursos gráficos.

Ejercicio 1IIIg (**Resuelva** $x^2 < -x$)

> Y: Ah, está bien. Y este de aquí, ¿cómo lo resolvería?
>
> Nina: Ese de ahí yo diría que… porque x al cuadrado no va ser menor que menos x porque fue al cuadrado y siempre va a resultar un número mayor.

Después de algunos estímulos de la entrevistadora:

> Y: ¿Significa que este de aquí tiene o no tiene solución?
>
> Nina: Tiene solución
>
> Y: ¿Cómo haría usted entonces, ya que tiene solución? Olvide lo que hizo en la prueba.
>
> Nina: En este caso daría un valor…

Y: ¿Pero usted resuelve dando valores?

Nina: Es porque no sé hacer eso con gráfico ni de otra manera.

Pepe - Predominancia de concepción acción de interpretación y pre-acción de resolución con tendencias a la acción. No resolvió correctamente la inecuación. Así como Pepe y otros estudiantes brasileños los estudiantes italianos e israelitas también cometen el error $(a-b)^2 = a^2 - b^2$, como pude constatar en el artículo de Tsamir y Bazzini (2002).

Ejercicio 1IIId (Resuelva $\sqrt{x+3} < x$)

Pepe: Este de aquí también, adicionamos menos x en ambos miembros, hicimos aquí la… la simetría, ¿no es? Adicionamos una x positiva con una negativa, y encontramos del lado izquierdo raíz de $x+3$ menos x menor o igual a cero. Aquí, (pausa) elevamos al cuadrado, esa ecuación, esa ecuación nosotros calculó en la raíz x más tres menos x, elevamos al cuadrado para poder arrancar, tirar ese radical. Después sacamos el radical y nos quedó una ecuación de segundo grado menos x al cuadrado…

Y: ¿Retiró el radical cómo?

Pepe: Elevando al cuadrado.

Utilizó de forma errada la propiedad $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Y: ¿qué elevó al cuadrado?

Pepe: Toda la función.

Y: ¿Cómo quedaría entonces? ¿Cómo es que usted consiguió sacar el radical?

Pepe: Multiplicamos al cuad..., elevamos al cuadrado, entonces la raíz cuadrada con… elevada la potencia, quedaría toda esa… ese termino dentro de la raíz al cuadrado, cancelando se sacaría x al cuadrado, +3 al cuadrado, cancelaría el cuadrado de x con el radical, x sale, y el 3 es la misma cosa. Entonces quedaría x más 3, y como no tiene radical, quedaría al cuadrado. Es $x+3$ menos x al cuadrado. Ahí se encontró, una... organizando, una ecuación de segundo grado. Menos x al cuadrado, más x más 3. Menor o igual a cero. En ésa encontramos delta, delta 3, colocamos en la formula de Báskhara, pero hallamos x línea (1 + raíz de 13 sobre 2) y dos líneas (1 menos raíz de 13 sobre dos). Y como queríamos el valor, los valores menores o iguales a cero, colocamos que x seria menor o igual que (1 menos raíz de 13 sobre 2) o x mayor que uno más raíz de 13 sobre 2.

Y: Está bien, entonces un x, por ejemplo, menos 6, ¿sirve?

Pepe: ¡Yo no sé! (pausa) ¡sí!

Y: ¿Es respuesta?

Pepe substituye valores en la inecuación transformada, es decir, después de elevarla al cuadrado.

Pepe: Sí. Porque aquí quedaría menos seis al cuadrado, quedaría 36, menos aquí, quedaría –36. –36 con –6, -42. Con 3, resulta menos 39.

Y: Esa es, ¿la qué usted está resolviendo?

Pepe: ¡Sí!

Y: Entonces eso que usted encontró aquí ¿es solución de qué?

Pepe: Solución de ésa, primero de ésa… de esa inecuación aquí, de segundo grado.

Y: ¿Y qué está resolviendo?

Pepe: Yo tengo que resolver ésta de aquí. Yo no concordé mucho cuando… pero creo que no va a haber problema ninguno, que hayan elevado al cuadrado aquí, después pasado… colocar el –6 aquí. (pausa) Ese –6 no seria esa respuesta, esta de aquí no sería ninguna raíz cuadrada de número negativo. De los naturales, de los reales… sólo esa respuesta daría en los números complejos. Ese menos 6 no sería solución para acá.

Y: ...-6... está incluida en esa respuesta que usted dio, ¿o no?

Pepe: (pausa) ¡Sí! (pausa) Menor o igual a, 1 menos raíz de 3 sobre 2, están todos los valores menores que 1 menos esa raíz. Menos uno, menos 2, menos 3… (pausa)

No logró encontrar el conjunto solución. De acuerdo con el próximo fragmento, mostró que no sabe lo que significan las inecuaciones equivalentes. Las confunde con fracciones equivalentes.

Y: ¿Qué significa ser equivalente?

Pepe: Equivalente sería un número, una ecuación que después de multiplicada o dividida se mantiene, un valor... multipli... si después yo multipliqué por dos, la divi... seria igual al mismo valor, por ejemplo, si una ecuación tiene la solución 6, sería equivalente a una respuesta un dos, si pudiera simplificarla por..., para que sea equivalente. Como ocurre mucho encontrar ecuaciones de segundo grado, en el caso dos x más cuatro x menos ocho, y la dividimos entre dos, encontramos una equivalente y pone x, más $2x$, menos cuatro.

En otro momento, cuando se trataba de resolver el ejercicio **3I,** no fue capaz de hacer uso del conjunto solución para ofrecer la respuesta de inmediato. Mostró poseer la concepción acción de interpretación.

Ejercicio 3I

A continuación, hay una tabla con los valores de las expresiones x^2 y $3x+4$, para números enteros entre –5 y 5, incluyendo –5 y 5.

a ¿Para cuáles valores de esta tabla tenemos $x^2 < 3x+4$?

b ¿Puede esta tabla sugerir una respuesta a la pregunta: ¿para cuál conjunto de números reales la desigualdad $x^2 < 3x+4$ es satisfactoria? ¿Cuál es la respuesta? Justifique.

c ¿V o F? ¿Si x = 4.92, entonces $x^2 < 3x+4$?

x	x^2	$3x+4$
-5	25	-11
-4	16	-8
-3	9	-5
-2	4	-2
-1	1	1
0	0	4
1	1	7
2	4	10
3	9	13
4	16	16
5	25	19

Pepe: "Esa tabla puede sugerir una respuesta a la pregunta. ¿Para cuál conjunto de los números reales se satisface la desigualdad x al cuadrado menor que $3x+4$? Cuál es la respuesta y justifique". Ahí sí, entra ese... esa solución que acabo de mencionar aquí. Confundí esa solución colocando aquí. Porque un valor 0.1, cuando yo multipliqué, dio una respuesta satisfactoria, x al cuadrado resultó menor que $3x+4$ y un valor hasta 3... (alumno habla bien bajo "voy a tener que sumar eso") (pausa). Hasta 3... (pausa) menor o igual a 3, hasta 3 también colocando en ella satisface, iría a satisfacer, el ... a la inecuación. Entonces todos los valores intermedios fraccionarios entre 0 y 3 la satisfarían.

Pepe no fue capaz de llegar a una conclusión usando sólo la tabla. Hizo los cálculos en la calculadora, dando valores aislados.

Y: ¿Cómo fue que usted descubrió eso?

Pepe: Yo agarré y multipliqué, en la calculadora. Yo se...

Y: ¿Multiplicó qué?

Pepe: Yo fui dando los valores, 0.1, 0.5, en el caso de aquí coloqué 1.2, 1.5 y todos esos valores dieron, transformaron x al cuadrado menor que $3x+4$.

Rob - predominancia de una concepción acción de interpretación, acción de resolución gráfica y algebraica.

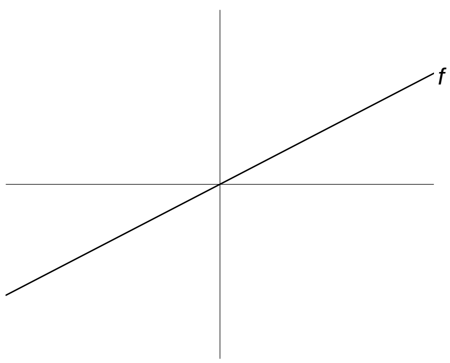
Ejercicio 7Ia

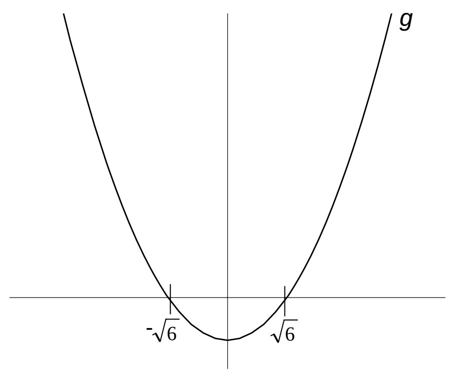
Dados los gráficos de las funciones f , g y h en [-5,5]. Resuelva:

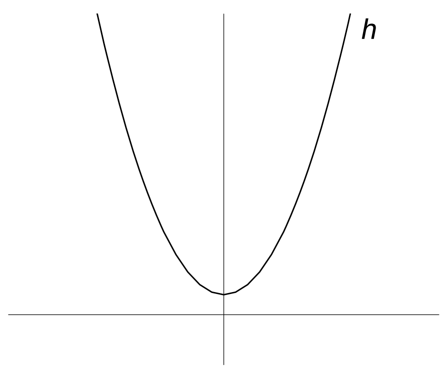
a $\dfrac{f}{g} > 0$

b $f \times g \leq 0$

c $f < g < h$







Pareció presentar una concepción proceso de resolución gráfica, no obstante presentó una concepción acción, pero encaminada hacia una concepción proceso.

> Rob: (calcula bajo). Bien, esta parte, por ejemplo, que agarra esta función, es mayor que cero y esta parte de aquí también es mayor que cero, porque por el eje de x, por la derecha es mayor que cero. Creo que es eso (apuntando hacia $x > 0$ y $y > 0$ en el gráfico de $f(x)$).
>
> Y: Ahora ¿cuáles son los valores que vuelven esta división positiva? Qué significa eso ¿"cuáles son los valores que transforman esta división positiva"?

Analizó posibilidades para los signos de las imágenes de las funciones f y g:

> Rob: f y g tiene que ser negativos, para ser mayor que cero.
>
> Y: Pero éstos de aquí son positivos y la función es negativa (apuntando a la función $g(x)$)
>
> Rob: En este caso de la parte negativa, pero en la parte superior de la recta es positiva

Visualizó las posibilidades para los signos de las imágenes de las funciones f y g:

> Rob: Es, el resultado tiene que ser positivo, o sea los dos, f y g, tienen que ser positivos o negativos.
>
> Y: Y bien, entonces ¿dónde está la respuesta?
>
> Rob: Esta parte es positiva. La parábola y esta parte son positivas (apuntando a donde las funciones f y g son positivas). Esta parte es positiva. La parte inferior (apuntando a g)...
>
> Y: Sé, pero quiero saber la respuesta que torna eso positivo.

El estudiante no logró coordinar los signos de las imágenes de las funciones involucradas en la inecuación con el análisis gráfico, pero no relaciona las dos construcciones mentales indicadas arriba para que lleve a cabo la intersección y/o la unión de los intervalos (subconjuntos de $\Re$). Muchos de los estudiantes sólo hicieron un análisis aislado de las funciones, o sólo en la inecuación, o sólo en el gráfico.

Sávio - tendencia hacia una concepción proceso de interpretación y acción de resolución algebraica, con una tendencia hacia el proceso de resolución algebraica. En el fragmento siguiente, mostró comprender equivalencias entre inecuaciones, sin embargo, no consiguió explicar lo que impide la equivalencia.

Ejercicio 1IIIb (¿V o F? Justifique. $4x^2 > 9 \Leftrightarrow 2x > 3$. Luego, solucione $4x^2 > 9$)

> Sávio: Diga si es verdadero o falso, justifique su respuesta. Letra b: $4x^2 > 9 \Rightarrow 2x > 3$.
>
> Y: Es... Ese ejercicio usted dijo que era falso. ¿Sigue usted hallando que es falso? ¿O no? Y ¿por qué?

Analizó la implicación solamente de forma puntual, con un contraejemplo específico.

> Sávio: Para mí,... es falso. Por lo tanto, di... ofrecí un contraejemplo para esa implicación, esa equivalencia. ¿No es así? No es, la implicación, es equivalencia. Se está hablando que esta inecuación equivale a ésta. El conjunto, es... solución es lo mismo. Y cuando di los valores, es... ¡no! El conjunto solución de éste y de éste, son diferentes. Ahí, di un contraejemplo $x = -2$ que, en uno dio verdadero y en la otra dio falso. Pero no satisface las dos.
>
> Y: ¿Cuál es su contraejemplo?
>
> Sávio: $x = -2$.
>
> Y: Pausa. Vamos a cambiar el ejercicio, entonces. Vamos hacer lo siguiente. Mira. Es... $9x^2 < 16$ es equivalente a $3x < 4$, ¿verdadero o falso? Pausa.
>
> Sávio: Falso.
>
> Y: ¿Por qué?
>
> Sávio: Porque... un contraejemplo: $x = -2$, aquí.
>
> Y: Hum...
>
> Sávio: $9(-2)^2$ no es < 16, luego, no equivale a 3(-2) que es menor que 4. Satisface eésta de aquí, pero no satisface ésa.

Sávio mostró estar oscilando entre una concepción acción y una concepción proceso de resolución algebraica, pero con fuertes tendencias hacia una concepción proceso. Presentó ideas con respecto a equivalencias, aplicó varias propiedades de los reales, pero no se mostró seguro de los caminos seguidos para resolver una inecuación. No coordinó construcciones mentales proceso ni empleó correctamente las propiedades de los números reales. En cuanto a la interpretación del concepto inecuación, parecía poseer una concepción proceso. Intentó resolver la inecuación, pero no logró comprender y emplear propiedades de los reales.

> Sávio: En primer plano, nosotros teníamos... resolví... Era para pasar 16 para acá pero cuando, es... fuimos a ver la solución, no esta correcta, ¿no?, con la... para satisfacer a la inecuación. Ahí extraemos la raíz, de un lado y del otro, y vimos que sólo tenía una única solución y no dos como si se hubiese pasado el 9 dividiendo, ¿no?, iba tener dos soluciones: - y +.**¡Error!**
>
> Y: Bueno, ¿me puede explicar mejor qué hicieron ahí?
>
> Sávio: ¿Aquí?
>
> Y: Sí.
>
> Sávio: Claro, extrayendo las raíces dio $3x < 4$ y dio que $x < \frac{4}{3}$. Ahí, tuvimos duda. Si ese... como x... x... se encontró esa solución. No sabíamos si era aquí que se es... cogía valores menores que $\frac{4}{3}$ o aquí, para satisfacer la... esa inecuación, si era en esa o en aquella ya extraída. Yo no sabía si era la misma cosa...

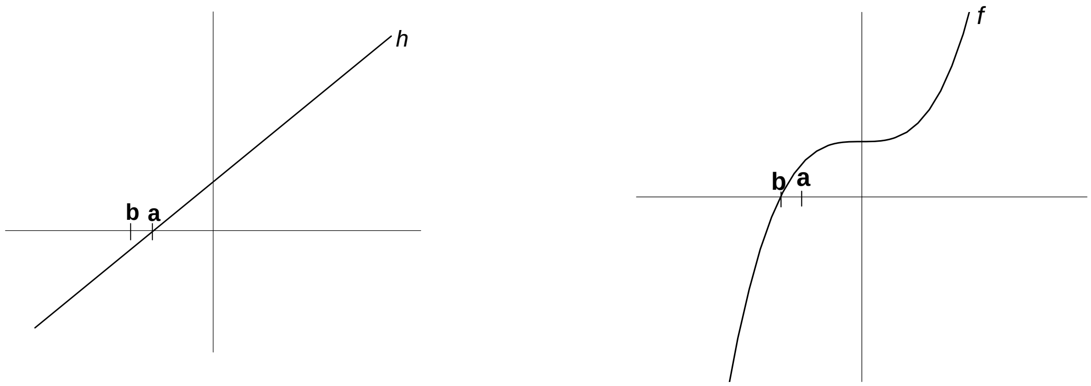
En otra situación:

> Sávio: Si, déjame ver, hmm... Por esa solución se satisface. Satisface esa inecuación.
>
> Y: ¿Esa está correcta o no, la que ustedes hicieron?
>
> Sávio: Para mí, está correcta (señalando la resolución de $9x^2 < 16$).

Túlio - tendencia hacia una concepción proceso de interpretación y proceso de resolución gráfica con tendencia hacia una concepción objeto de resolución gráfica de inecuación, que viene de una concepción débil proceso.

Ejercicio 2III

Dados los gráficos de las siguientes funciones f y h encuentre el conjunto solución de $f(x)h(x) < 0$.



> Túlio: Aquí, mire, cuando en el gráfico de $h(x)$, cuando cualquier x es menor que a, $f(x)$ correspondiente aquí y va ser negativo. Y en ese de aquí, yo tengo un negativo aquí y necesito, entonces, de un positivo. Entonces cuando x fuera mayor que b, y va ser positivo. Ahí va a resultar más con menos da menos, va a resultar menor que cero. Ahí habría una respuesta. x menor que a, x mayor que b.
>
> Y: ¿Tiene más respuestas?

Túlio analizó las posibilidades de los signos de las funciones: $f(x) > 0$ y $h(x) > 0$ o $f(x) < 0$ y $h(x) < 0$.

> Túlio: Ésta seria una de ellas, x menor que a, x mayor que b, que es una que se colocó aquí. Ahora aquí yo requiero de un positivo allí y un negativo... un positivo en $h(x)$ y un negativo en f(x). Entonces cuando x fuera mayor que "a" y correspondiente va ser positivo.
>
> Y: y ¿correspondiente de quién? ¿De la h o de la f ?

El alumno no consiguió visualizar la necesidad de interceptar los subconjuntos de los reales que satisfacen $f(x) > 0$ y $h(x) > 0$ o $f(x) < 0$ y $h(x) < 0$:

> Túlio: De h, cuando fuera mayor que a. Y ahora yo requiero de un negativo aquí, entonces va ser cuando x fuera menor que b. Es lo que colocamos aquí, x mayor que a y x menor que b. Ahí tendría esas dos respuestas.
>
> Y: x mayor que a...
>
> Túlio: x menor que b
>
> Y: x mayor que a ¿es de dónde a dónde?

Parece que no logró coordinar dos concepciones procesos de función. No consiguió incluir su esquema de función a su esquema de resolución gráfica. Presentó visión global del conjunto solución, pero se mostró inseguro en el trato de estas ideas:

> Túlio: x mayor que a en $h(x)$ y x menor que b en $f(x)$. Yo no estoy seguro ni en este "*a*" aquí, no.

Valdo - dio muestras de poseer una concepción objeto de interpretación, de resolución gráfica y algebraica. En el fragmento de la entrevista transcrita a continuación visualiza e identifica, en el esbozo gráfico y en la inecuación, subconjuntos del dominio que hacen las imágenes positivas y negativas. Es capaz de conectar las dos visualizaciones, encuentra las raíces y el conjunto solución. Fue uno de los pocos estudiantes que logró resolver este ejercicio.

Ejercicio 2III

> Valdo: Analizando la desigualdad aquí, la f de x multiplicado por h de x a f de x sólo podrá ser qué, para ser menor que cero positiva y h de x negativa o entonces a f de x negativa y h de x positiva para obedecer a la desigualdad que es menor que cero. Analizando los dos gráficos aquí, las dos funciones para f de x positivo y h de x negativo sólo tiene aquí entre a y b que la función aquí es lo que es, positiva.
>
> Y: ¿Cuál es positiva?
>
> Valdo: La f de x. Una de las reglas que debo obedecer que es f de x positivo y h de x negativo para obedecer la desigualdad, ¿no? Entonces el intervalo de es... a, entre a y b aquí en la f de x es positiva, y entre a y z por ejemplo, ¿eso de aquí es b? b por ejemplo es $h(x)$ negativa también entonces ¿en ese intervalo cambia qué? La función, el producto de las dos funciones menor que cero.
>
> pausa...
>
> ...Y sólo existe en ese punto, porque cuando h negativo para h de x negativo sólo va ser qué, aquí positivo entonces, no hay ninguna parte aquí, déjame ver, y... f de x para ser negativo sólo tiene esa parte aquí oh, intervalo más o menos aquí el es negativo aquí oh,... no, no es no, negativo sólo tiene de esa parte de aquí entonces la única intersección entre ellos dos que puede hacer la condición verdadera es que sea menor que cero, es entre a y c es entre a y b haciendo la intersección, ¿entonces x puede ser qué? x mayor que b y x menor que a

Zezé - predominancia de una concepción objeto de interpretación y concepción objeto de resolución gráfica y algebraica.

Ejercicio 1IIIe (Resuelva $\frac{3}{x-1} \leq \frac{x}{x+1}$)

> Y: Bueno, regresando a esa de aquí (...) es (...), usted podría hacer esa resolución (cinta interrumpe), repitiendo, es, esa de aquí, esa primera inecuación 3 sobre x menos 1 menor o igual a x sobre x más 1. Regresando aquí un poquito. Habría otra manera de resolver esa inecuación, ¿o no?
>
> Zezé: Es (...) Déjame ver (...) Yo creo que no, por lo menos (...) a mi ver, no, no, en el momento aquí yo no consigo ver otro modo de resolverla, no.
>
> Y: Usted no podría multiplicar todo por x más 1, o por x menos 1?
>
> Zezé: No porque yo no se si este término seria positivo o negativo. En ese caso, si fuera negativo puede alterar el valor de la desigualdad.
>
> Y: ¿Este término? ¿De cuál término está usted hablando?
>
> Zezé: De lo que dijo usted 1 sobre x o 1 sobre menos x que x es una variable y que, puede asumir valores positivos o valores negativos. Ahí en el caso que fueran negativos, va alterar el valor de a, del signo de la desigualdad.
>
> Y: ¿Qué puede ser negativo o positivo, x o x menos 1?
>
> Zezé: x, x no puede ser. Si en el caso yo fuera a multiplicar, si tuviera seguridad que x seria positivo usted podría multiplicar que él no se alteraría, alteraría ¿no es?, el signo de la desigualdad. Pero usted no tiene la seguridad de que x es positivo o negativo, no podría multiplicar, (...) x.
>
> Y: Bueno, pero aquí, por ejemplo. Vamos a escoger otra resolución aquí. Es de una prueba (...) este de aquí por ejemplo (...), ¿es la misma cosa si x fuera positivo o x negativo, o es x más 1?
>
> Zezé: No, porque depende del término que fuera multiplicado. Si fuesen todos multiplicados por 1, x más 1, ese término no podría ser menor que 0. Porque alteraría el signo. Depende del término a ser multiplicado.
>
> Y: Bueno., (...), es... otra cosa, regresando a la misma, 3 sobre x menos 1 menor o igual a x sobre x más 1, (...) ¿esa inecuación inicial es equivalente a esa: menos x al cuadrado más 4 x más 3 sobre x al cuadrado menos uno menor o igual a 0?
>
> Zezé: Yo creo que es.
>
> Y: Por qué usted cree?
>
> Zezé: Porque aquí, aquí usted usa la propiedad de sumar en ambos lados, ahí yo pienso que no alteraría en nada. La primera, la inicial en esa ecuac..., en esa inecuación (...) que fue desarrollada.

Ejercicio 1IIId (Resuelva $\sqrt{x+3} < x$)

> Y: Y esta de aquí, raíz de x más 3 menor o igual a x con x al cuadrado menos x menos 3 mayor o igual a 0?

Zezé presentó justificativa para que las dos inecuaciones no sean equivalentes. Aparentó comprender el concepto de equivalencia.

> Zezé: Ahí es diferente, porque aquí, aquí tiene x al cuadrado menos x menos 3, puede asumir cualquier valor, porque no tiene raíz, no tiene (...) no tiene raíz, entonces puede asumir valores positivos o negativos, ya en la primera (...) no puede asumir valor negativo, entonces la solución de esta de aquí no va ser la misma de la primera. De la inicial.
>
> Y: Entonces, ¿son o no equivalentes?
>
> Zezé: No.

Así, la investigación desarrolló en busca de las posibles construcciones mentales realizadas pelos estudiantes de la enseñanza universitaria al intentar comprender el concepto de inecuación. En este desarrollo incluyeron variados componentes como la metodología utilizada para recolectar los datos, la metodología de enseñanza y aprendizaje del concepto, el análisis de alcance del aprendizaje de dos grupos, el modelo teórico utilizado para el estudio de las construcciones mentales y por cierto el esquema de inecuación. Tal esquema envuelve pues el esquema de interpretación, de resolución algebraica y gráfica y seguro otros esquemas como el de función.

En el próximo y ultimo capitulo presento los resultados y conclusiones de esta investigación.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS GENERALES Y CONCLUSIONES

Los investigadores de las matemáticas educativa se ocupan de entender cómo el individuo interpreta un contenido específico acerca del pensamiento matemático. Se interesan en caracterizar o modelar los procesos de comprensión de los conceptos matemáticos. Este interés por estudiar la psicología del pensamiento matemático es relativamente nuevo y muy prometedor, pues implica la expectativa del desarrollo de un programa de investigación que mejore sus procesos educativos en matemáticas para los distintos niveles del sistema escolar.

En la presente investigación pude observar que el entendimiento del concepto de inecuaciones involucra muchos niveles de construcciones mentales, prerrequisitos, conexiones con otros conceptos y las posibles formas de esas conexiones. En este capítulo presento resultados generales y conclusiones finales con relación a tal entendimiento.

4.1 – RESULTADOS GENERALES

Los resultados generales más importantes son seis, y se refieren a:

-Interpretación de una inecuación;

-Resolución gráfica y algebraica de inecuaciones;

-Uso de computadoras;

-Orden y propiedades de los reales;

-Desempeño de estudiantes universitarios que participaron en esta investigación; y

-Aprendizaje de las matemáticas.

4.1.1 - Interpretación de una inecuación

La interpretación de una inecuación puede preceder al proceso de resolución o surgir en el transcurso de éste. Durante la investigación, noté que parte de los estudiantes, al iniciar la resolución dando valores uno a uno y paso a paso, no lograron comprender equivalencias entre las inecuaciones. El estudiante que sólo hace un análisis punto a punto de una inecuación, no logrando interpretarla, no será capaz de resolverla comprendiendo los pasos seguidos ni las transformaciones ocurridas, y tampoco será capaz de analizar las consecuencias de esas transformaciones sobre el conjunto solución. Para la correcta resolución gráfica o algebraica, el alumno debe presentar, al menos, la concepción proceso de inecuación.

Observé que los estudiantes no presentan dificultades en aplicar propiedades de los reales; por ejemplo multiplicar por (-3) la desigualdad $-\frac{1}{5} < \frac{3}{4}$, o multiplicar por (-3) la expresión $3x \geq -4$. Sin embargo, el empleo de esas propiedades utilizando expresiones algebraicas es para ellos más difícil; por ejemplo, multiplicar por $(x-1)$ la expresión $-\frac{1}{5} < \frac{3}{4}$.

La importancia de estudiar inecuaciones bajo la óptica de las funciones surgió también en el grupo de ejercicios de *Preguntas sobre solución, sin resolver la inecuación* (cf. Cap.3). Es necesario que el estudiante presente una concepción objeto de inecuación para resolver ese tipo de ejercicio, pues su resolución involucra concebir a la inecuación como objeto matemático y emplear acciones en su conjunto solución. Esto lleva a una abstracción frente a la cual los alumnos presentan dificultades. En la resolución de ejercicios de *Operaciones con inecuaciones*, nuevamente requiere la interpretación. Así, la interpretación es fundamental para el éxito en la resolución de situaciones que involucren inecuaciones, y debe incluir:

- La comprensión del conjunto solución y del significado de la variable;

- La identificación de lo que no puede ser solución;

- La identificación de las expresiones algebraicas que aparecen en la inecuación con funciones y análisis de la variación de las imágenes de esas funciones;

- La interpretación gráfica, o sea, la visualización de la inecuación por medio de gráficos de funciones;

- La comprensión del signo de desigualdad; y

- La identificación de las propiedades empleadas y de las respectivas transformaciones ocurridas en la inecuación y en su conjunto solución.

En todas las categorías de ejercicios se observó que si los estudiantes dan valores aislados en la inecuación y no logran interpretar el conjunto solución, entonces no logran comprender ni resolver conscientemente los ejercicios.

Revertir las acciones empleadas a fin de verificar si el conjunto solución fue alterado o no y analizar la coordinación de construcciones proceso es complejo, y sólo quien presente una concepción objeto puede ser capaz de revertirlas. Tal capacidad es extremadamente importante para el entendimiento de la resolución algebraica de inecuaciones. Los estudiantes que no lograron resolver las actividades que involucran resoluciones gráficas de inecuación, o que no logran encontrar el conjunto solución o que lo encuentran pero de forma automática, sin realmente comprender lo que pasa, presentan un esquema débil de interpretación de inecuaciones. Tal esquema parece involucrar sólo una concepción acción. Los estudiantes Nina, Luiz, Pepe y Rob presentaron tal concepción.

4.1.2 - Resoluciones gráficas y algebraicas de inecuaciones

En el esquema inicial, la capacidad de resolución gráfica estaba incluida en el esquema de *inecuación* (concepción objeto) pues, al principio no esperaba enfrentar la riqueza de informaciones que este tipo de resolución puede proporcionar, como tampoco esperaba que las construcciones involucradas vinieran solamente de la interpretación. Creía también que las construcciones mentales surgidas de la resolución de ejercicios, sin las expresiones algebraicas, se encuadraban sólo en el esquema de inecuación, después denominado, adecuadamente, esquema de interpretación.

La resolución gráfica de inecuaciones depende de conexiones con otros contenidos y de competencias matemáticas importantes, y no han sido trabajadas en la enseñanza y el aprendizaje de inecuaciones. Hay propuestas (Sackur, 2004; Farfán&Albert,1997) que analizan las inecuaciones por medio de gráficos, pero solamente cuando presentan las expresiones algebraicas. Tales propuestas son aisladas de otros tipos de resoluciones, no hacen conexiones con otros contenidos, sólo con las funciones.

Después de analizar por separado las construcciones mentales de los estudiantes al intentar interpretar y resolver problemas, sin las expresiones algebraicas, percibí que es esencial presentar por lo menos una concepción proceso de función para una resolución consciente. Es necesario hacer conexión entre los gráficos de las funciones involucradas y la inecuación. La conexión consiste en investigar los signos de las imágenes de las funciones; en visualizar, en el gráfico, los intervalos que satisfacen a la inecuación; en percibir que el conjunto solución debe mirarse como una unión de intervalos del eje *Ox*. Sólo los estudiantes que tienen tendencia hacia la concepción objeto de resolución gráfica son los que logran resolver situaciones problema de esta naturaleza.

Observé que el desempeño en la resolución de ejercicios propuestos por medio de gráficos es el mismo, estando o no en un mismo sistema de coordenadas, pues el éxito en la resolución proviene de la capacidad del alumno en hacer conexiones con el concepto de función. Las construcciones mentales son las mismas.

El entendimiento del concepto de función es indispensable en varias categorías de ejercicios de inecuaciones. Los estudiantes presentaron mucha dificultad en la *interpretación y resolución gráfica* de una inecuación. Probablemente esto ocurre en razón de varios factores, tales como la falta de enfoque gráfico y/o gráfico-algebraico en álgebra desde el periodo de enseñanza fundamental y la mala comprensión del concepto de función, aunque existan estudios de cambios y abordajes pedagógicos exitosos.

Elaborar situaciones-problema que permitan la interpretación y la resolución a través de gráficos es esencial. Además de incluir diferentes contenidos matemáticos, de ser analítico, geométrico y muy visual, ese enfoque posibilita rápidas conclusiones sobre el conjunto solución y es parte de la etapa de concretización del estudiante. También facilita abstracciones en la interpretación y la resolución algebraica de inecuaciones.

Cuando el análisis fue iniciado, basado en el esquema inicial, no estaban claras las relaciones existentes entre *inecuación*, vista como un *objeto matemático*, y *resolución de una inecuación.* Sabía que las construcciones mentales para interpretación del objeto matemático *inecuación* eran diferentes de las construcciones mentales para la *resolución de la inecuación* y, por eso, siempre las presento separadas. Sin embargo, con el desarrollo del trabajo, noté que estas construcciones estaban muy estrechamente conectadas y que resolver una inecuación implica realizar transformaciones en el objeto matemático inecuación. Por tanto, es importante interpretar bien y, al mismo tiempo, analizar las consecuencias de esas transformaciones en el conjunto solución. En fin, es necesario que el estudiante interprete una inecuación para resolverla conscientemente. En el desarrollo de la investigación, el esquema de inecuación se dividió en dos esquemas: de interpretación y de resolución. El último se dividió en resoluciones algebraica y gráfica.

Tales transformaciones son consecuencias de las acciones sobre el proceso inecuación[1] o de la coordinación de otros procesos. Las acciones consisten en realizar operaciones en la inecuación de acuerdo con las propiedades de los números reales. La coordinación surge de condiciones impuestas por las propiedades de los números reales. Por ejemplo, al resolver $\sqrt{x+2} \leq -x$, el estudiante debe de imponer la condición de existencia de la raíz y que el segundo miembro sea positivo. Coordinar los procesos $x+2 \geq 0$ y $-x > 0$ es hacer la intersección entre sus conjuntos solución. Entonces el conjunto solución de la inecuación inicial es un subconjunto de esa intersección.

[1] Un *proceso de inecuación* es una desigualdad entre expresiones algebraicas o entre expresiones algebraicas y numéricas interpretadas según una *concepción proceso de inecuación*.

Un estudiante conocedor de las opciones de resolución existentes ciertamente opta por un método menos complicado. Para ejemplificar, cito el caso de la resolución de $\frac{\sqrt{3-x}}{x^2+4} > 0$. El estudiante que conoce las propiedades de los números reales reconoce que $x^2 + 4 > 0$ para todo x real y resuelve haciendo un análisis directo del numerador, mientras otro puede optar por el método de elevar al cuadrado ambos miembros. Ambas resoluciones son correctas, peros los que optan por el primer método presentan mayor comprensión del concepto de inecuación, empleando de forma eficaz las propiedades de $\Re$.

Así, para resolver una inecuación consciente de los caminos seguidos, el estudiante debe presentar una concepción objeto de interpretación y de resolución de inecuación. Utilizando su esquema de interpretación, llega a una completa y correcta resolución. Esto significa hacer uso coherentemente de su concepción proceso de interpretación, emplear las propiedades de los números reales y, si necesario, coordinar los procesos involucrados.

Es posible encontrar diversos niveles de comprensión de una resolución. Hay estudiantes que no logran resolver nada, a pesar de intentar varias estrategias de resolución; otros resuelven, pero de forma muy mecánica ya que imitan métodos memorizados y no comprenden ni justifican la técnica utilizada. Otros aún, a pesar de presentar noción sobre los pasos seguidos, todavía no tienen total conciencia de ellos, mientras que hay también los que tienen total dominio de los pasos seguidos y de las transformaciones efectuadas, teniendo éxito en la resolución.

En muchas circunstancias, observé que varios universitarios eran capaces de analizar equivalencias e implicaciones sólo dando valores. Otros iban más allá de dar valores, eran capaces de analizar la inecuación de manera global haciendo uso de la interpretación de la variable como incógnita y empleando propiedades de los números reales (primera característica presentada en la concepción objeto de inecuación). Sin embargo, el solo hecho de dar valores para responder si existe equivalencia entre las inecuaciones no los posibilita entender y hacer uso de este entendimiento, por ejemplo, en la resolución algebraica de inecuaciones.

El estudiante que logra analizar equivalencias entre las inecuaciones que van siendo obtenidas y halla el conjunto solución, muestra coherencia en la interpretación y resolución de inecuaciones. Las inecuaciones analizadas van siendo obtenidas, a partir de la inecuación inicial, por medio del empleo de las propiedades de $\Re$, como el joven Zezé.

4.1.3 - Uso de computadoras

Las actividades con el lenguaje ISETL pueden estimular el estudiante a una concepción acción, pues al programar utilizando ese lenguaje, éste es llevado a realizar análisis de las equivalencias al menos en forma puntual. Algunos estudiantes, aunque no sepan hacer un análisis global de la equivalencia entre inecuaciones, presentaron una visión local, es decir, dando valores uno a uno y percibían cuándo dos inecuaciones no eran equivalentes.

Aparentemente, ISETL estimuló a los estudiantes a buscar contraejemplos para verificar falsedades de implicaciones y atentar al orden de los números reales, pues al programar elegían un subconjunto de los reales que pudiera ser contraejemplo de la implicación presentada. Como la computadora proporciona rápidamente respuesta de los valores probados, podrían cambiar con presteza el subconjunto probado. Las actividades propuestas para análisis de implicaciones, pueden haber favorecido a la comprensión de la recta numérica y del orden de los reales, principalmente de los números racionales.

Es posible que el lenguaje ISETL haya incrementado la capacidad de los alumnos para trabajar con funciones haciendo comparaciones por medio de gráficos y tablas. Se presume que este tipo de recurso les ayuda a entender el concepto de conjunto solución. Elaborar pequeños programas para el análisis gráfico de inecuaciones puede despertar la importancia de la conexión entre inecuación y funciones, principalmente por causa del comando *func*. La sintaxis matemática del ISETL permite hacer rápidamente comparación de expresiones numéricas, comparación de expresiones algebraicas por atribución de valores y análisis de conjuntos descritos por variables. Permite también el uso de operadores aritméticos, relaciones, proposiciones y predicados (cap.1).

El uso y el entendimiento de ese lenguaje matemático auxilian la interpretación de inecuaciones, así como la comprensión y la utilización de propiedades de los números reales.

Tal lenguaje no es complejo, pero como la mayoría de los estudiantes no ha estado en contacto con la computadora, tuvimos que destinar un tiempo para eso. La ventaja de esta utilización es que con pocos comandos es posible hacer pequeños programas, pero su resolución gráfica no es perfecta, como es posible verificar en los gráficos (anexo B).

4.1.4 - Orden de los reales y propiedades derivadas

Observé que la mayoría de los estudiantes no comprendía la recta numérica y no visualizaba el orden de los números reales, principalmente cuando se trataba del orden de los números racionales. Casi nunca pensaban en números no racionales. No los empleaban para dar contraejemplos.

En las discusiones de aula, los números citados por ellos para ejemplos o contraejemplos siempre pertenecían al conjunto de los números naturales o al de los enteros, en ese orden de preferencia. Muchos estudiantes, cuando encontraban un valor para una variable que no era número entero, decían haberse equivocado. Esto se observó particularmente cuando utilizaban la fórmula de Baskhara. Si la raíz cuadrada no fuera un número natural, rehacían sus cuentas en busca de errores.

Comencé a preguntar el porqué de tales comportamientos. Lo más interesante es que, en ese momento pude trabajar también con algunos estudiantes del último año de secundaria y noté que la situación era la misma. No encontré la razón de esto, pero presento una posición en la sección 4.2, de las conclusiones.

La enseñanza y el aprendizaje de los números reales es muy superficial en todos los periodos escolares. En el paso de los enteros hacia los reales hay un gran salto, lo cual acarrea dificultades para los estudiantes al trabajar con los racionales y con los irracionales.

4.1.5 – Desempeño de estudiantes universitarios que participaron en esta investigación

Los datos obtenidos en la recolección inicial posibilitaron, además de la elaboración del esquema inicial, un análisis entre los desempeños de dos grupos en el aprendizaje de inecuaciones. Uno de los grupos analizados fue el de *control*, conformado por estudiantes que no estudiaron bajo la metodología aquí propuesta, sino por una que muy bien pudo haber sido *tradicional*, no me fue posible obtener información al respecto. El otro grupo era compuesto por estudiantes que estudiaron bajo la metodología de enseñanza propuesta para el presente trabajo.

Hay algunos datos interesantes, con respecto al grupo de *control*:

- Por lo menos 70% de los participantes de ese grupo tenían una madurez matemática mucho mayor que el grupo de la metodología especial, puesto que eran estudiantes de Cálculo III o del último año de Licenciatura en Matemáticas. Algunos, incluso, ya eran profesores de primaria, secundaria y preparatoria;
- El cuestionario aplicado fue más extenso;
- Posiblemente, algunos ya habían estudiado inecuaciones en tiempo remoto; y
- Eran voluntarios.

El número de estudiantes estaba distribuido de la siguiente manera: 69 para el grupo de control y 62 para el grupo de metodología especial. La muestra sacada entre los diversos niveles de estudio en las matemáticas, en universidades diferentes y en diferentes cursos, garantizan una diversificación de datos. Pero lo ideal es un análisis entre equipos que estén bajo las mismas condiciones de estudio.

El análisis fue realizado con base en los mismos ejercicios, o en ejercicios con la misma idea de resolución (apéndice A). Para hacer este análisis, los ejercicios fueron clasificados en tres categorías (capítulo 2): *interpretación, resolución algebraica* y *resolución gráfica*. La primera presenta ejercicios que permiten observar cómo el alumno interpreta una inecuación: comprende el conjunto solución, establece relación con las funciones, comprende el significado de la variable, comprende el signo de desigualdad y emplea propiedades de los reales. La segunda permite observar el desempeño y los métodos utilizados por los estudiantes al resolver algebraicamente una inecuación. La última permite analizar las resoluciones gráficas.

Clasifiqué a los estudiantes en cuatro grupos:

Superior - *S*: estudiantes que acertaron, como mínimo, 80% de los ejercicios.

Medio - *M*: estudiantes que acertaron entre 45% y 80% de los problemas.

Inferior – *I*: estudiantes que acertaron de 10 % a aproximadamente 45% de los ejercicios.

Sin resolución - *SR*: estudiantes que resolvieron menos del 10% de los ejercicios.

A continuación presento los resultados del análisis cuantitativo, en cuanto a los aspectos de *interpretación, resolución algebraica* y *resolución gráfica*:

CUADRO 1: INTERPRETACIÓN

Desempeño	Equipo del grupo de control	Equipo de metodología especial
I	44 (64,0%)	12 (19,0%)
M	20 (29,0%)	19 (31,0%)
S	2 (3,0%)	31 (50,0%)
SR	3 (4,0%)	0 (0,0%)

Es posible percibir que 64% de los estudiantes del grupo de control tuvieron una tasa muy baja de acierto de los ejercicios de la categoría interpretación. Pero, en la columna de la metodología especial, se observa una tasa de 50% de los estudiantes que acertaron, como mínimo, 80% de los ejercicios y solamente 19% tuvieron una baja tasa de aciertos.

CUADRO 2: RESOLUCIÓN ALGEBRAICA

Desempeño		Equipo del grupo de control	Equipo de metodología especial
Intento de resolver una inecuación como ecuación – *T*	*I*	46 (67%)	2 (3.0%)
Otros errores		1 (1.0%)	12 (12.0%)
M		4 (6.0%)	21 (34.0%)
S		2 (3.0%)	26 (42.0%)
SR		16 (23.0%)	1 (2.0%)

En esa categoría fueron considerados 6 ejercicios. El inciso *I* fue subdividido en dos:

Intento de resolver una inecuación como ecuación – T, alumnos que intentaron resolver una inecuación multiplicándola por una expresión algebraica, sin tomar en consideración la posible variación del signo de desigualdad y la consecuencia que esto trae en el signo de la inecuación. Este error se cometió con frecuencia.

Otros errores – OE, alumnos cuyos errores cometidos no fueron intentos de resolver una inecuación como ecuación.

Tanto la tasa porcentual del ejercicio sin resolución (23.0%) como la tasa de intentos de resolver una inecuación como una ecuación resultaron muy altas (67.0%) en el grupo de control, mientras que en el grupo de metodología especial sólo 3.0% de los alumnos optaron por este tipo de intento de resolución. En total, la tasa de estudiantes que se equivocaron en la resolución algebraica de una inecuación fue de 15.0% en la metodología especial, contra 68.0% en la otra metodología. Según el análisis realizado, es posible observar una tendencia hacia un mejor aprovechamiento que conduce, a su vez, a un mejor aprendizaje de los estudiantes que estuvieron en la metodología especial.

CUADRO 3: RESOLUCIÓN GRÁFICA

Desempeños	Equipo del grupo de control	Equipo de metodología especial
I	6 (9.0%)	20 (32.0%)
M	2 (3.0%)	13 (21.0%)
S	2 (3.0%)	24 (39.0%)
SR	59 (86.0%)	5 (8.0%)

En este análisis fue observado un elevado número de estudiantes del grupo de control (86.0% contra 8.0%; de estudiantes de metodología especial) que no resolvieron los ejercicios propuestos. De los estudiantes de metodología especial, 39.0% acertaron las preguntas propuestas contra 3.0% del grupo de control.

Se notó que 32.0% de los estudiantes de la metodología especial cometieron errores al resolver los ejercicios de resolución gráfica. Se encontró 9.0% de estudiantes del grupo de control que cometieron errores. Se debe considerar que esas tasas de errores son relativas a toda la población y no sólo a los estudiantes que intentaron resolver los ejercicios. En el grupo de metodología especial, 8.0% de los estudiantes no intentaron resolver las preguntas contra 86.0% del grupo de control. La tasa de aciertos fue mucho mayor en el grupo de metodología especial (39.0% contra 3.0%).

Hice un análisis comparativo en el caso de la resolución gráfica sólo con los estudiantes que intentaron resolver por lo menos 20% de las preguntas; pues los que resolvieron menos de 10% de las preguntas fueron clasificados como *sin solución*. Los resultados para el grupo de control son:

-De 69 participantes del grupo de control, 10 intentaron resolver por lo menos 20% de los ejercicios;

-De 10, 70% cometieron errores en más del 50% de las preguntas;

-20% acertaron más de 80%; y

-10% acertaron entre 45% y 80% de las preguntas. Ellos forman parte del ítem Medio.

Para el grupo que aprendió inecuaciones bajo la propuesta metodológica presentada en este trabajo los resultados fueron:

-De 62 estudiantes participantes, 57 intentaron resolver los problemas relacionados con las resoluciones gráficas, lo que corresponde a 92%;

-De 57, 36.0% cometieron errores en más de 50% de las preguntas;

-43.0% acertaron más de 80% de las preguntas; y

-21.0% acertaron entre 45% y 80% de las preguntas.

Se aplicaron, inicialmente, cuestionarios de sondeo en equipos de cálculo I y III y último semestre de licenciatura. Ningún estudiante de estos equipos estudió inecuaciones por medio de una metodología especial. De los 69 alumnos, sólo 3 resolvieron correctamente las inecuaciones propuestas. Analizando lo que estos 3 alumnos escribieron, la resolución me pareció automática. No es posible inferir si ellos llegaron a la respuesta correcta comprendiendo integralmente el proceso. La mayoría de los estudiantes del grupo de control intentó resolver una inecuación como si fuera una ecuación. Los mismos resultados pueden encontrarse en Tsamir & Bazzini (2002).

Vale resaltar que la idea inicial no era hacer un análisis del desempeño de esos grupos. Solamente en la etapa final de la investigación surgió el deseo de hacerlo. Entonces, la heterogeneidad de las muestras ya no podría ser controlada. Esto fue una evaluación preliminar y exploratoria de la metodología con indicación de que el método funciona. Pero hay necesidad de estudios posteriores con más control das las fuentes de variación.

4.1.6 – El aprendizaje de las matemáticas.

Es muy importante utilizar gráficos en la enseñanza-aprendizaje tanto de inecuaciones como de otros contenidos, pues son un valioso auxilio para la comprensión de diferentes conceptos matemáticos, incluso el de función. En general, los libros no utilizan gráficos cuando tratan el concepto de inecuación. Los estudiantes no están acostumbrados a utilizar el análisis gráfico para resolver las situaciones convenientes a este análisis.

Al hacer las entrevistas, noté que muchos ejercicios eran resueltos por los estudiantes de forma automática, mecánica, sin investigar la precisión de los pasos seguidos. Varios estudiantes, cuando eran requeridos, no lograron describir sus resoluciones. Percibí que encuadraban los ejercicios en paquetes de 'modelos mentales' (Barash, 2002) y, al comenzar a resolver alguno, lo que les venía a la mente era *encajarlo* en uno de sus ‘modelos’. Así, comenzaban la resolución utilizando todos los recursos de ese paquete sin preocuparse si era apropiada o no su utilización. Parece que existe miedo de fracasar al intentar comprender, al aprender y, por lo tanto, se habitúan a memorizar. Pienso que en un ambiente de aprendizaje es de mucho valor estimular y posibilitar a los estudiantes a hablar sobre lo que están entendiendo. Todo esto afectó mi posición de educadora. Es difícil para ellos rehacer sus esquemas mentales y señalar nuevos contenidos y nuevas relaciones.

Trabajar el concepto de inecuación conjuntamente con el de función estimula al establecimiento de conexiones con otros esquemas, de otros contenidos matemáticos, por ejemplo: interpretación del conjunto solución, comparación de imágenes, utilización de conectivos lógicos, interpretación gráfica, comprensión de dominio e imagen y entendimiento de la recta numérica.

Enfatizar la comparación con tablas y gráficos, la operación con inecuaciones, la interpretación del conjunto solución, el análisis de equivalencias y de los pasos seguidos, la reversión de estos pasos, y la distinción entre inecuación y ecuación es necesario para que los estudiantes puedan desarrollar construcciones mentales esenciales a la comprensión de conceptos como ecuación, modelos matemáticos, resolución de problemas, demostraciones, algunos principios de las matemáticas y de otras ciencias como la Física, la Química, la Economía, las Ingeniarías y otras.

El concepto de equivalencia (Kieran,1980; Linchevisky & Sfard, 1991; Bazzini,1998; Hallagan, 2004) no es trabajado en los cursos tradicionales y debe trabajarse desde la escuela básica hasta la enseñanza universitaria, así como el concepto de variable (Ursini & Trigueros, 2001; Evgeny, 2002). En general el estudiante no comprende el concepto de conjunto solución porque no comprende el concepto de variable.

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas deben proporcionar un pensamiento flexible (Davis &MacGowen, 2002; Gray &Tall, 1993), de manera que un objeto matemático pueda ser interpretado de variadas maneras dependiendo de la situación problema. El estudiante debe ser capaz de pasar de una situación a otra sin dificultades, pero no es esto lo que he presenciado.

4.2 – CONCLUSIONES

La enseñanza-aprendizaje de inecuaciones ha sido tema de seminarios internacionales como el Seminario Franco-Italiano de Didáctica de Álgebra, Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education y The Future of Teaching and Learning of Algebra, así como de artículos de investigadores israelíes, italianos y americanos; pero en Brasil, hasta el momento, no ha sido explorado.

La enseñanza-aprendizaje del concepto de inecuación en los últimos años de la escuela primaria, secundaria, preparatoria y de la licenciatura debe de abarcar actividades que involucren: resolución en el contexto gráfico, uso de tablas, relación con las funciones, aplicaciones prácticas, empleo de las propiedades de los reales, análisis de equivalencias e implicaciones, uso de calculadoras gráficas o computadora. La diferencia entre los niveles de su enseñanza ocurre en cuanto a la complejidad del estudio.

Observé en los alumnos gran dificultad en operar ambos miembros de una inecuación: casi siempre en las pláticas de ellos está la jerga “pasar para el otro lado” (generalización muchas veces indebida del método de transposición). Ellos proceden sin considerar el análisis de la posibilidad de alteración del signo de la desigualdad, lo que les lleva al error. La idea de operar en ambos miembros de una igualdad o desigualdad posiblemente viene desde las etapas iniciales de su historia educativa. Los mismos resultados son relatados por algunos autores, como por ejemplo Tsamir & Bazzini (2002), Tsamir, Almog & Tirosh (1998). El método de transposición puede ser utilizado después de estar muy clara la necesidad del análisis del signo de desigualdad y de la comprensión del empleo de las propiedades de los reales. Al igual que los resultados de Boero (1998), los resultados del análisis de las entrevistas y evaluaciones escritas de esta investigación son un testimonio de la falta de flexibilidad de los alumnos en la aplicación de las reglas algebraicas y lógicas. Estoy de acuerdo con Boero cuando se refiere a la no exploración de las potencialidades de aprendizaje implícitas en la idea de inecuación, sobretodo en la no exploración de los conceptos de variable, de parámetro y el empleo de las propiedades de los números reales.

La estructura de los números reales como cuerpo ordenado sólo se formalizó en el siglo XIX y esto nos posibilitó emplear sus propiedades en las resoluciones de inecuaciones y ecuaciones. A pesar de que la utilización de operaciones inversas puede encontrarse en muchos de los problemas aritméticos resueltos por los hindúes empleando el *método de la inversión*, en el que se trabaja hacia atrás, a partir de los datos, las resoluciones de las ecuaciones algebraicas, principalmente por los árabes, optaban el procedimiento del *cancelación*, que contiene ideas similares a las del método de inversión en las resoluciones de los problemas aritméticos. Cabe destacar que la palabra *álgebra* se originó del tratado de Al- Khowârizmî, denominado *Hiâb al-jabr w’al-muqâ-balah* (escrito alrededor de 825), traducido como “ciencia de la reunión y oposición” o, más libremente, como “ciencia de la transposición y la cancelación”.

Analizar la manera como los estudiantes construyen sus conocimientos es muy enriquecedor para la planeación de clase, pues observándolos y oyéndolos es posible detectar exactamente lo que es necesario exponer con más claridad, por dónde se debe de caminar en esa red de conexiones de conocimientos matemáticos de forma que sea posible diagnosticar más rápidamente las fallas de determinadas estructuras mentales. Con ese objetivo, se deben proponer ejercicios que posean carácter de *desequilibración*[2]. Así, el sujeto requiere rehacer sus estructuras cognitivas asimilando nuevos contenidos, nuevos tipos de interpretaciones y consecuentemente, comprende el concepto y amplia sus habilidades de responder a situaciones matemáticas. Los ejercicios deben contener situaciones que estimulen a los estudiantes a abstraer reflexivamente (Piaget, 1977; Armella, 1996) ideas necesarias al entendimiento del concepto.

La enseñanza tradicional se ha basado exclusivamente en las construcciones mentales que los profesores presentan sobre los conceptos matemáticos. No defiendo una metodología elaborada tan sólo en las construcciones mentales de los alumnos. Hay que proponer estrategias pedagógicas en que la experiencia del profesor y su conocimiento sobre el concepto, aliados a los resultados de un análisis de las estructuras mentales de los estudiantes, puedan fusionarse en una enseñanza-aprendizaje más eficiente de las matemáticas. Esto es lo que propone el paradigma de investigación y desarrollo pedagógico del grupo RUMEC.

La utilización del método de Grupo Colaborativo encontró resistencia inicial por parte de los estudiantes, pero, poco a poco, se fueron integrando. La resistencia se manifestaba debido al miedo a trabajar con colegas que no eran responsables y por falta de tiempo para los encuentros fuera del salón de clases. Los equipos eran muy heterogéneos en términos de madurez matemática y este método proporcionó intercambios de experiencias entre los alumnos, y entre

---

[2] El término *desequilibración* es utilizado para designar los ejercicios que inducen a los aprendices a modificar sus esquemas cognitivos y *asimilar* nuevos conceptos. Esta modificación del esquema es conocida como *acomodación* (Armella,1996: 8,10).

los alumnos y la profesora. El método didáctico "se impone por la relevancia que la relación colaborativa tiene en la sociedad actual” (Niquini, 1997:11).

Las entrevistas generaron sorpresas: los estudiantes se sorprendieron al pedírseles que explicasen sus resoluciones. Esto los dejó ansiosos. Yo también, me sorprendí con sus dificultades en describirlas. Algunos, después del inicio, cambiaban de opinión sobre sus resoluciones. Otros se sentían inmovilizados frente a la necesidad de tener que explicar, pero los alumnos más convincentes, con más poder de argumentación son justamente los que resolvieron correctamente las cuestiones comprendiendo los pasos seguidos. Las evaluaciones en grupo tienen un carácter no sólo tasador sino también formador y las entrevistas en grupos son ricas en discusiones y proporcionan medios de aprendizaje. Estoy en acuerdo cuando Díaz & Dubinsky afirman que

> *...la entrevista se basa en la idea de que las personas son capaces de ofrecer una explicación de su conducta, sus prácticas y sus acciones a quien le pregunta sobre ellas, es decir, que pueden reflexionar hasta cierto punto, sobre sus propias acciones, o al menos se les puede inducir a hacerlo.* (Díaz & Dubinsky, 2002:82)

Es verdad que una evaluación desde una perspectiva constructivista es más difícil de diseñar e instrumentar, pero de acuerdo con las orientaciones educativas de los Parámetros Curriculares Nacionales del Brasil (2002) y con los Principios y los Estándares del NCTM (2000) la educación necesita resignificar y cuestionar sus metodologías de evaluación, y emplear una que no sólo establezca calificaciones a los estudiantes, sino que refuerce el aprendizaje de diversas maneras como el uso de entrevistas, pláticas, conversaciones, auto evaluaciones, observaciones y otras. Díaz (2002) presenta un artículo sobre la evaluación bajo esa perspectiva en el que hace una propuesta que concuerda con la aquí presentada.

Además de ser un instrumento de evaluación, la entrevista es, junto con la observación, uno de los instrumentos básicos para la recolección de datos. Adquiere vida al iniciar el diálogo entre el entrevistador y el entrevistado. En esta investigación, la entrevista fue del tipo semi-estructurada, es decir, se desarrolló a partir de un esquema básico, pero no aplicado rígidamente, permitiendo que el entrevistador hiciera las adaptaciones necesarias.

El uso del lenguaje de programación tuvo momentos de encanto y de pavor. La idea de usar computadora para estudiar matemáticas los entusiasmó de manera que su tiempo de permanencia en el laboratorio de informática fue superior a lo previsto. A veces continuaban trabajando a pesar de la salida de la profesora del laboratorio, pero se llenaban de pánico con la dificultad en elaborar pequeños programas. Verifiqué que para trabajar más productivamente es necesario más tiempo para el estudio de ISETL. El uso de la computadora en la enseñanza y el aprendizaje es muy cuestionado en la literatura; por ejemplo Lagrange, Artigue, Laborde &Trouche (2001); Kieran & Hershkowitz (2001); Secada(2003). Esta investigación no tiene el objetivo de responder a tales cuestionamientos, pero su utilización en esta metodología se mostró estimuladora de conjeturas, de generalización, de conclusiones, de inferencias, de refutación, de realización de cálculos y de identificación de errores. Estoy de acuerdo con Heid y Kunkle (1995) cuando afirman que, en el planteamiento 'tradicional' de la resolución de ecuaciones, el concepto de "solución" es ofuscado por el énfasis en el procedimiento. En el intento de enfatizar el concepto de solución, los autores usan tablas generadas en la computadora para enfocar el significado de expresiones, ecuaciones e inecuaciones, del mismo modo en que utilicé aquí el ISETL.

La cantidad de ejercicios propuestos en la metodología puede y debe ser incrementada, principalmente con ejercicios que proporcionen a los alumnos un panorama claro del orden de los números reales y de su establecimiento en la recta numérica, poniendo énfasis en comparaciones que involucren a los números racionales e irracionales. A pesar de que los cálculos se vuelven más difíciles, para ello existe la calculadora. Es importante presentar cuestiones relacionadas, una y otra vez, con números racionales, no enteros e irracionales. Por ejemplo: resuelva $\frac{x-3.2}{1.99-2x}<\sqrt{2}$. Este tipo de ejercicios no tienen por objetivo enseñar a los alumnos a que realicen cálculos con esos números pero, sí, de modificar los patrones de los ejercicios presentados en algunos libros y en el salón de clases, que ignoran completamente la existencia de los racionales, no enteros, e irracionales.

Los ejercicios siguientes, elaborados después de las instrumentaciones, pueden estimular la interpretación, la resolución gráfica y algebraica.

1 - Sabiendo que la función $f(x) = x^2 + 2$ satisface a la doble inecuación $x < x^2 + 2 \leq -x + 3$, escriba doble inecuaciones semejantes para:

a $\quad - f(x)$

b $\quad \dfrac{f(x)}{x}, x \neq 0$

c $\quad h(x) = 3x^2 - x + 4{,}2$

Resuelva cada una de las inecuaciones de forma algebraica y haga un análisis gráfico.

2 - Sabiendo que $x < x^2 + 2 \leq -x + 3{,}1$ y que $x + 2 \leq -x^3 + x^2 + 3x < x - 3.5$, llene los espacios de la doble inecuación ________$\leq -x^3 + 3x - 2 <$_________. Resuelva de forma algebraica y por medio de análisis gráfico.

3 – Sabiendo que $-1 \leq \dfrac{x+1}{x-4} < x - 5$ estudie la variación de $x + 1$.

Una importante actividad de interpretación puede ser encontrada en el artículo de Tsamir & Bazzini (2001b) en el que las autoras presentan tareas como el ejemplo dado más adelante. En otro artículo de dichas autoras hay actividades acerca de los parámetros e inecuaciones que deberían ser trabajados. Un ejemplo de actividad planteada es: Considere el conjunto $S = \{x \in R : x = 3\}$ y verifique la siguiente afirmación:

¿Puede S ser la solución de una ecuación y de una inecuación?

El tiempo para trabajar con las proposiciones *si A*, *entonces B* y *A si, y solamente si, B* fue corto, 3 horas/clase. Éste es un tópico importante en todas las áreas de las matemáticas y que demanda más tiempo para ser estudiado, incluso en el análisis de equivalencias. Pero se indica que sólo se le trabaje en la enseñanza universitaria. Con relación al análisis de las equivalencias entre inecuaciones, vale resaltar los artículos de Linchevsky & Sfard (1991), Ávila (1998), que presentan ejemplos de este estudio.

Los trabajos de Bazzini (1998) y Linchevski & Sfard (1991) nos relatan que los estudiantes de enseñanza media logran definir el significado de equivalencias entre inecuaciones y entre ecuaciones, pero no saben concluir si las inecuaciones presentadas en una lista de ejercicios son o no equivalentes. Este tipo de ejercicio es bastante útil en la comprensión del concepto de inecuación y debe ser propuesto a los universitarios. Es decir, proporcionar al estudiante algunos pares de inecuaciones y ecuaciones, y pedir que los clasifiquen en *equivalentes y transformables*; *equivalentes y no transformables*; y *no-equivalentes y no-transformables.* Es un excelente estímulo para que cuestionen el porqué de esas clasificaciones y lo que garantiza cada clasificación. No tengo duda que esto está relacionado también con la comprensión del conjunto solución y de la variable. En este punto, el modelo de utilización de las variables, presentado en los trabajos de Trigueros & Ursini (1996, 1997) y Ursini & Trigueros (2001) sirvieron de referencia para aclarar las relaciones de la variable con la interpretación y la resolución de las inecuaciones. Para las autoras, el concepto de variable es de múltiples facetas e incluye distintos aspectos. Los aspectos pertinentes a este trabajo son, principalmente, el *uso de la variable como incógnita* y *el uso de la variable en una relación funcional*. Después de haber analizado las construcciones mentales de los estudiantes que participaron en esta investigación y de haber leído los trabajos de las autoras, Trigeros y Ursini, percibo que algunos problemas de mala interpretación y hasta de la resolución de inecuaciones se deben a la falta de entendimiento del concepto de variable.

La instrumentación doble de la metodología de enseñanza proporcionó la certificación de datos, la recolección de otros, un refinamiento de los esquemas y de la metodología de enseñanza y una objetividad con relación a lo que se pretendía con la investigación.

Para Asiala y otros,

> *un estudio del desarrollo cognitivo de un individuo, cuando intenta aprender un concepto matemático particular, ocurre por sucesivos refinamientos tanto cuanto el investigador recurre repetidamente las actividades componentes del ciclo.* (Asiala y col., 1996:5) (figura 1)

El planteamiento metodológico utilizado en esa investigación tiene la ventaja de proporcionar una interacción entre la teoría y la práctica: una modifica a la otra, si es necesario, de acuerdo con el desarrollo de la investigación y favorece el refinamiento de los datos, del análisis y de la práctica pedagógica.

En ciertos paradigmas de investigación obsoletos, principalmente en la educación, se determinaba que el investigador debería estar lo más distante posible del objeto que está investigando, para que no influenciara su acto de conocer. Hoy se entiende que "el papel del investigador es justamente el de servir como vehículo inteligente y activo entre ese conocimiento acumulado en el área y las nuevas evidencias que serán establecidas a partir de la investigación" (Lüdke & André, 1986:35).

En esta investigación la entrevistadora fue también la profesora del equipo, lo que podría generar un involucramiento emocional inconveniente en la recolección de datos, pero se tuvo esto presente en todo el proceso de investigación, lo que acarreó un control del involucramiento para que hubiese precisión e imparcialidad en la recolección y el análisis de los datos. Esto fue un constante aprendizaje, con múltiples lecturas sobre el asunto, pues, si no hubiese ese control emocional, los datos recolectados estarían comprometidos y, consecuentemente, todo el trabajo.

Fue una de las etapas en que encontré dificultades. Lo ideal sería que el entrevistador fuese otra persona. Sin embargo, según Lüdke y André,

> *La pregunta general, hecha frecuentemente con relación a los planteamientos cualitativos es la subjetividad del investigador. Los partidarios de una posición más tradicional con relación al conocimiento científico defienden el punto de vista de que los juicios de valor del investigador no deben afectar ni a la recolección ni al análisis de los datos. Otros afirman que es imposible la objetividad....una posición más equilibrada parece ser la de aquél que, reconociendo la imposibilidad de separar los valores personales del proceso de investigación, sugiere algunos cuidados especiales en el sentido de controlar el efecto de la subjetividad. Una de las formas de control es la revelación, por el investigador, de sus prejuicios, valores, suposiciones, de modo que las personas juzguen su peso relativo en el desarrollo del estudio... El investigador debe revelar al lector en qué medida fue afectado por el estudio, explicando cambios que por ventura existieron en sus suposiciones, valores y juzgamientos. Es importante que deje claros los criterios utilizados para seleccionar ciertos tipos de datos, y no otros, para observar algunas situaciones, y no otras, y para entrevistar ciertas personas y no otras (*Lüdke, 1986: 51).

El ciclo ACE sugiere etapas para una metodología de enseñanza, comenzando por las actividades con la computadora. No obstante, sentí la necesidad de modificar las etapas sugeridas. Hubo ocasiones en que se presentaron al mismo tiempo, como, por ejemplo, cuando trabajábamos en el laboratorio surgieron preguntas relacionadas a los ejercicios que no fueron propuestos para resolución con el auxilio de la computadora, y en clase surgieron preguntas relacionadas al uso de la computadora y fueron discutidas. Creo que tales preguntas deben ser respondidas bajo las circunstancias en que ocurren. Tampoco inicié el estudio de inecuación haciendo uso de la computadora. Inicié en el salón de clase con actividades que, como he descrito anteriormente, permitieron un análisis del orden de los números reales.

La enseñanza-aprendizaje de inecuaciones en el ámbito universitario debe inducir a los estudiantes a investigar implicaciones y/o equivalencias entre las inecuaciones por medio del empleo de las propiedades de los números reales. Por cierto, en todo nivel de complejidad del estudio de inecuaciones es necesario conocer las propiedades de los números reales. Como ya se dijo, ese estudio debe ser compartido con el de funciones, propiciando tanto el establecimiento de relaciones entre las inecuaciones y las funciones como la resolución por medios gráficos.

Las inecuaciones pueden ser presentadas para los estudiantes con, y también sin, sus expresiones algebraicas explícitas. Estas variaciones estimulan y amplían la interpretación del concepto, trabajan con los conceptos de dominio e imagen, de conjunto solución, de variable y de operaciones tanto en el conjunto solución como en las imágenes y también entre las propias inecuaciones.

El último esquema de interpretación, presentado en el Capítulo 3, responde, de forma más amplia, las preguntas: ¿Cuáles son los conceptos previos necesarios para la comprensión de inecuaciones? ¿Cómo un alumno construye o entiende el concepto de inecuación? ¿Cuáles son las estructuras mentales y las conexiones con otros contenidos matemáticos para la comprensión de inecuación? Las respuestas a las preguntas: ¿Cómo la interpretación de inecuación puede influir en las resoluciones de las situaciones-problema que implican el concepto? ¿Qué análisis se puede hacer de los desempeños de los estudiantes que aprendieron bajo la metodología aquí sugerida y los que no la siguieron? Las respuestas puntuales se encuentran en las secciones 4.1.1 y 4.1.5 respectivamente.

Es necesario hacer trabajos más profundos y amplios que investiguen la potencialidad que el concepto de inecuación ofrece para trabajar con el empleo de propiedades de los reales, análisis de equivalencias, conectivos lógicos, funciones, gráficos, interpretación del conjunto solución y de la variable, y estimaciones de errores. El concepto también ofrece oportunidad para detectar y corregir errores de concepción algebraica y gráfica, así como para enriquecer la capacidad para el análisis y la interpretación de las situaciones-problema que lo involucran y que involucran otros conceptos matemáticos.

Hay una demanda de más investigaciones sobre cómo los profesores pueden mejorar su práctica pedagógica con énfasis en la construcción del conocimiento y en cómo los estudiantes elaboran este conocimiento. Tales investigaciones deben involucrar el área cognitiva; el lado afectivo emocional; la auto-estima; la cultura y la cuestión socioeconómica de alumnos y profesores;

además de los recursos didácticos, del lenguaje de los profesores y, por fin, pero no menos importante, la motivación de los involucrados en el proceso de aprendizaje. Mi visión es que todos estos enfoques se interrelacionan en este proceso de enseñanza y aprendizaje.

Resalto que otra investigación acerca de las construcciones mentales que los estudiantes presentan en el proceso de aprendizaje de inecuaciones podrá encontrar construcciones mentales diferentes a las presentadas en este trabajo. No obstante, la diversidad de datos analizados garantiza que las construcciones mentales aquí presentadas son suficientes para la comprensión del concepto de inecuación.

Los resultados aquí presentados pueden todavía ser refinados, pues una investigación puede desarrollar según modelos y cuando ellos son diferentes los resultados pueden ser mejorados y hasta contradictorios. Para Carmichael

> *(...) lo que es más importante, es imposible que la epistemología sea estática en su punto de vista, porque todo conocimiento científico está en evolución permanente, incluso las matemáticas y la propia lógica [cuyo aspecto constructivista se hizo evidente desde que los teoremas de Gödel mostraron la imposibilidad de que una teoría sea auto-suficiente (completa) – de ahí la necesidad de construir siempre teorías "mas fuertes"; dando finalmente los límites inevitables de la formalización!]. Como dijo Natorp en 1910:.. "la ciencia evoluciona continuamente..."* (Carmichael,1967:113).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1 - Artículos

ALVARENGA, K. B.(1999) “Desigualdades - una investigación de doctorado”, en *Resúmenes de la Decimotercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, Santo Domingo, República Dominicana, julio, p.115.

__________________.(1999) “Desigualdades - uma pesquisa de doutorado em andamento”, en *Revista da III Jornada de Produção Científica das Universidades Católicas do Centro-Oeste*,vol. II, setembro, Goiânia, pp.77-83.

__________________(2003).“La Enseñanza de Inecuaciones desde el Punto de Vista de la Teoría APOE”, en Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,vol.6, n.3.

__________________. A Methodology Based On Apos Theory To Improve Teaching And Learning Of The Inequality Concept. Sometido para RCME, en revisión.

ARMELLA, L. E. M.(1996). “La Epistemología Genética. Una interpretación”, en *Educación Matemática,* vol. 8, diciembre, núm. 3, pp.5-23

ARZARELLO, F.(1991). “Procedural and relational aspects of algebraic thinking”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of XV PME, vol.1, pp. 80-87.

ASIALA, M., Brown, D. J. Devries, Dubinsky E., Mathews D. y Thomas K. (1996) “A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education”, en *CBMS Issues in Mathematical Education*, vol.6, pp.1-32.

ASIALA, Cottrill M. J., Dubinsky E. and Schwingendorf K.(1997) “The development of student´s graphical understanding of the derivative”, en *Journal of Mathematical Behavior,* vol.16, núm. 4, pp.399-431.

ASIALA, M., Dubinsky E., Mathews D., Morics S. y Oktac A. (1997) “Students understanding of cosets, normality and quotient groups”, en *Journal of Mathematical Behavior,* vol.16, núm. 3, pp.241-309.

ASIALA, M., Brown A., Kleiman J.,Mathews D. (1998) “The development of student’s understanding of permutations and symmetries”, en *International Journal of Computers for Mathematical Learning*,vol. 3, pp.13 – 43.

ASSUDE, T.(1997) “De l’usage de ‘techniques faibles’ et ‘techniques fortes’ dans l’organisation du curriculum”, en Jean-Philipe y Maryse Maurel, *Actes des Séminaires- SFIDA IX*, vol. III, Nice, l’IREM de Nice, pp. IX 9-14.

AYERS, T., Davis G., Dubinsky E. y Lewin P.(1988). "Computer experiences in learning composition of functions", en *Journal of Research in Math Education,* vol.19, núm. 3, pp.243-259.

ÁVILA, G.(1998). "Equações e Inequações com radicais", en Revista do Professor de Matemática, 38, pp.10-13.

BAKER, B., L. Cooley y M. Trigueiros. (2000). "A calculus graphing scheme", en *Journal for Research in Mathematics Education,* vol.31, núm. 5, pp.557-578.

BARASH, A.(2002). "Algorithmic mental models and metacognition", en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education*, Proceedings of 26th PME, vol. 1, pp. 262.

BAZZINI, L. y M. Ascari(1999) "Disequazioni. Il ruolo del segno", en Jean-Philipe y Maryse Maurel, *Actes des Séminaires- SFIDA XII*, vol. III, Modena, l'IREM de Nice, pp. XII 7-12.

BERNARD, J. M. y M. Cohen(1995) "Uma integração dos métodos de resolução de equações numa seqüência evolutiva de aprendizado", org. A. Coxford y A. Shulte, *As idéias da Álgebra*, São Paulo, pp.111-127.

BOERO, P.(1998) "Inéquations: aspects didactiques, épistémologiques et cognitifis", en Jean-Philipe y Maryse Maurel, *Actes des Séminaires - SFIDA X*, vol. III, Génova, L'IREM de Nice, pp. X 3-7.

BOERO, P. y R. Garuti(1999) "Les inéquations fonctionnelles: lieu de dévelopement et d'étude de la maîtrise des fonctions", en Jean-Philipe y Maryse Maurel, *Actes des Séminaires - SFIDA XII*, vol. III, Modena, L'IREM de Nice, pp. XII 3-6.

BREINDENBRACH, D., Dubinsky E., J. Hawks y D. Nichols(1992) " Development of the process of function", en *Educational Studies in Mathematics*, vol. 23, pp.247-285.

BRUMATTI, R. N. M. y D. Bianchini(2003) "Um caso de 'Projetação': a Aprendizagem cooperativa no ensino de matemática para engenharia", en *Revista de Educação PUC-Campinas. Docência e Qualidade no ensino superior: área de ciências exatas e de engenharias*, núm. 12, Campinas, junio de 2002, publicado y distribuido en 2003, pp.127-134.

BROWN, A., DeVries D., Dubinsky E. y Thomas K.(1997) "Leaning binary operations groups, and subgroups", en *Journal for Mathematical Behavior,* vol. 16, núm. 3, pp.187-293

CARMICHAEL, C (1975). "A teoria de Piaget", en P.H. M., *Manual da Psicologia da Criança*, cap. 2. vol.4, São Paulo.

CLARK, J., F. Cordero, J. Cotrill, C. Bronislaw, D. J. DeVries, D. St. John, G. Tolias y D. Vidakovic (1997). "Constructing a schema: the case of the chain rule", en *Journal of Mathematical Behavior*, vol.14, núm. 4.

CONFREY, J. and Costa, S.(1996). 'A critique of the selection of "mathematical objects" as a central metaphor for advanced mathematical thinking', *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 1(2), 139–168.

COOPER, T. J. y A. R. Barturo (2001) “Manipulating virtual materials and using ‘office’ software to develop primary mathematics concepts”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of 25th PME, vol 2 , pp.105-112.

COTRILL, J. Dubinsky E., Nichols D., Schwingendorf K.l.(1991) “Understanding the limit concept. Beginning with a coordinated process schema”, en *Journal for Mathematical Behavior,* vol. 15, pp.167-192.

CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO(2001) *Parecer CNE/CP 9/2001, Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena*, Brasília, 8 de maio de 2001.

DA ROCHA FALCÃO, J.(1996) “Clinical analysis of difficulties in algebraic problem solving among brazilian students: principal aspects and didactic issues” en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of PME XX , vol. 2, pp. 257-264.

DAVIS, G. E. Y M. A. McGowen(2002) “Function machines & flexible algebraic thought”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of 26th PME, vol. 2, pp. 273-280.

DAVIDSON, N.(1990) “Small-Group Cooperative in Mathematics”, en *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s,* series: Yearbook of NCTM, The Council, Reston, Vol.83, n.2, pp. 52-61.

DÍAZ, O. V. & DUBINSKY, E (2002). “Evaluación del Aprendizaje del Cálculo desde una perspectiva contructivista” en *Serie Antologías- Red Nacional de CIMATES,* Chiapas, n.2,pp.69-111.

DOBBS, D. E. y J. C. Peterson(1991) “The sing-chart method for solving inequalities”, en *Mathematics Teacher*, november, pp.657-64.

DRAM, N.A.(1973) “A general algoritm for factorization”, en *Mathematics Teacher*, December, pp. 741.

DRIJVERS, P.(2001) “Reaction to ‘a meta study on IC technologies in education: towards a multidimensional framework to tackle their integration’”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of 25th PME, vol. 1, pp. 1-3**.**

DROUHARD J. y C. Sackur(1997) “Triple approach: a theoretical frame to interpret students activity in algebra”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education*, Proceedings of PME XXI, vol.2, pp.225-232.

DUBINSKY, E., (1987). “Teaching Mathematical Induction I”, en *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 6, n.1, pp.305-317.

_____________.(1989). “Teaching Mathematical Induction II”, en *Journal of Mathematical Behavior,* vol. 8, pp.285-304.

_____________.(1991) “Reflective abstraction in advanced mathematical thinking”, en D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, pp. 95-123.

_____________.(1995) “A programming language for learning mathematics”, *Communication on Pure and Applied Mathematics*, vol. 48, pp.1-25.

_____________.(1996) “Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria”, en *Educación Matemática*, vol. 8, diciembre,n. 3, pp.24-41.

_____________. (1997). A Reaction To “A Critique of the Selection of ‘Mathematical Objects’ as a Central Metaphor for Advanced Mathematical Thinking” by Confrey and Costa en *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *2*, pp.67-91.

FORGASZ, H. J.(2003). “Equity and beliefs about the efficacy of computers for mathematics learning”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education*, Proceedings of 27th PME, vol. 2, pp. 381 - 388.

FRANDSEN, H.(1969). “The last word on solving inequalities”, en *The Mathematics Teacherl*, University of Tennessee, Knoxville, New York, October, pp. 439-41.

GALLO, E. y M. Battu (1998). “Quali modelli e controlli intervengono laborando su disequasioni?”, org. Jean-Philipe y Maryse Maurel, em *Actes des Séminaires - SFIDA X*, vol. III, Genova, L’IREM de Nice, pp. X 25- 38.

GRAY**,** E. y D. Tall (1993). “Success and failures in Mathematics: the flexible meaning of symbols as process and concept”, en *Mathematics Teaching*, march,142, pp. 6-10.

GRAY, E. y D. Tall (1994) “Duality, ambiguity, and flexibility. A ‘proceptual’ view of simple arithmetic”, en *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 25, n.2, pp.116-14.

HALLAGAN, J. E.(2004) “A theacher’s model of students’ algebraic thinking about equivalent expressions”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education*, Proceedings of 28th PME, vol. 3, pp. 1-8.

HEID, M. y D. Kunkle(1995) “Tábuas geradas pelo computador: instrumentos para o desenvolvimento de conceitos em álgebra elementar”,org. A. Coxford, y A. Shulte, en *As idéias da Álgebra*, São Paulo, pp.195-204.

HERSCOVISCS, N. y C. Kieran (1980). “Constructing meaning for the concept of equation”, en *Mathematics Teacher*, noviembre, pp.572-580.

HERSCOVISCS, N. y L. Linchevski(1991). “Pre-algebraic thinking. Rande of equations and informal solution processes used by seventh graders prior to any instruction”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education*, Proceedings of PME XV, vol.2, pp.173-180.

_____________________________(1994). “A cognitive gap between arithmetic and algebra”, en *Educational Studies in Mathematics*, vol.27, pp. 59-78.

KAPUT, J. (1982). "Differential effects of the symbol of arithmetic and geometry on the interpretation of algebraic symbols", en *Annual Meeting of the American Educational Research* Association, Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York.

KIERAN, C. (1980). “The interpretation of the equal sign: symbol for an equivalence relation vs. an operator symbol”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education*, Proceedings of PME X, vol. 3, pp.163-169.

__________ (1981). “Concepts associated with the equality symbol”, en *Educational studies in mathematics*, vol.12, pp. 317-326.

__________(1989). “A perspective on algebraic thinking”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of XIX PME ,vol.2, pp.163-170.

__________(1995). “Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra”, org.: A. Coxford y A. Shulte, en *As idéias da Álgebra,* São Paulo, pp.104-110**.**

KIERAN, C. y R. Hershkowitz (2001). “Potential and pitfalls of technological tools in learning mathematics: introductory remarks”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of 25th PME, vol.1 , pp.96-104.

KING, J. L.(1973) “A method for solution of nonlinear inequalities”, en *Mathematics Teacher*, december, pp.739-40.

KOPELMAN, E.(2002) “Misunderstanding of variables by students in an advanced course”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of 26th PME, vol. 3, pp. 225-232.

LAGRANGE, J., M. Artigue, C. Laborde y L. Trouche (2001). “A meta study on IC technologies in education. Towards a multidimensional framework to tackle their integration”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of 25th PME, vol. 1, pp.111-119.

LINCHEVSKI, L. y D. Sfard(1991). “Rules without reasons as process without objects - the case of equalities and inequalities”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of 15th PME, vol. 2, pp.317-324.

________________________.(1994). “The gains and the pitfalls of reification”, en *Educational Studies in Mathematics*, vol. 26, pp.191-228.

LINCHEVSKI, L. y N. Herscovics (1996) “Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: operating the unknown in the context of equations”, en *Educational Studies in Mathematics,* vol.30, pp. 39-65.

LINS, R.(1990).“A framework for understanding what algebraic thinking is”, en T*he International Conference of Psychology of Mathematics Education*, Proceedings of PME XIV, vol.2, pp.93-100.

_________.(1992) “Algebraic and non-algebraic algebra”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of PME XVI, vol. 2, pp. 56-63.

MALARA, N. et al.(1999) “Comportamenti di studenti in ingresso all’universitá di fronte allo studio di disequazioni”, orgs.Jean-Philipe y Maryse Maurel, en *Actes des Séminaires - SFIDA XII*, vol. III, Modena, L’IREM de Nice, pp. XII 13-28.

MARGOLINAS, C.(1991) “Interrelations between different levels of didactic analysis about elementary algebra”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of XXI PME, vol.2, pp. 381-388.

McDONALD, M., D. Mathews y K. Strobel (2000).“Undestanding sequences: a tale of two objects”. To apear in RCME 4.

MINOR, L.(1995) “Gêmeos de fatoração como instrumento de ensino”, orgs.:A. Coxford y A. Shulte, en *As idéias da Álgebra,* São Paulo, pp.221-228.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), (1989). *Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics,* Reston, Virginia.

______________, (2000). *Principles and Standars for School Mathematics,* Reston, Virginia.

PARISH, C. R.(1992) “Inequalities, absolute value, and logical connectives”, en *The Mathematics Teacher,* December, pp.756-7.

ROMBERG, T. A.(1992) “ Perspective on scholarship and research methods”, en D. A. Grows (ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning,* NCTM, pp.49-63, New York: Macmillan.

SACKUR, C. y M. Maurel(1998) “Les outils théoriques du GECO et les inéquations en classe de seconde”, org.:Jean-Philipe y Maryse Maurel, en *Actes des Séminaires - SFIDA X*, vol. III, Génova, L’IREM de Nice, pp. X 7-24.

_____________________.(1998) “Les inéquations em classe de seconde er l’expérience de la nécessité”, org.:Jean-Philipe y Maryse Maurel, en *Actes des Séminaires - SFIDA XI*, vol. III, Nice, L’IREM de Nice, pp. XI 35-46.

SACKUR, C.(2004) “Problems related to the use of graphs in solving inequalities”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of 28th PME, vol. 1, pp.148-166**.**

SAN DIEGO, J. P., J. Aczel y B. Hodgson(2004) “The effects of technology on making conjectures: linking multiple representations in learning iterations”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of 28th PME, vol. 1, p. 348.

SCHOENFELD, A. H.(1994) “Some notes on the enterprise (research in collegiate mathematics education, that is)”, en E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld y J. Kaput, *Research in Collegiate Mathematics I, Issues in Mathematics Education,* vol. 4, MAS/MAA, pp. 1-19.

SECADA, W. G.(2003) “Some issues facing work for equity in mathematics education”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of 27th PME, vol. 1, pp.165-169.

SELDEN, J., Selden, A., & Mason, A. (1994). Even good calculus students can't solve nonroutine problems. In J. Kaput and E. Dubinsky (Eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning: Preliminary Analyses and Results* (pp 19-26), MAA Notes No. 33, Washington, DC: Mathematical Association of America.

SFARD, A. (1989) “Transition from operational to structural conception: The notion of function revisited”, en G. Vergnaud, J. Rogalski, y M. Artigue (eds.),en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of 13th PME, Paris, pp.151-158.

_________.(1991) “On the dual nature of mathematical conceptions. Reflections on processes and objects as different sides of the same coin”, en *Educational Studies in Mathematics,* vol. 22, pp.1-36.

SFARD, A. y L. Linchevski (1991). “Rules without reasons as process without objects - the case of equalities and inequalities”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of 15th PME, vol. 2, pp. 317-324.

STANLEY, J. H., (1979). “An algorithm for inequalities”, en *Mathematics Teacher*, pp.609-12.

TALL, D. O. y S. Vinner (1981) “Concept Image and Concept definition in Mathematics, with particular reference to limits and continuity”, *Educational Studies in Mathematics,* vol.12, 151-169.

TIROSH, D. Even, R., & Robinson, N.(1998) “Symplifying algebraic expressions. Teacher awareness and teaching aproaches”, en *Educational Studies in Mathematics*, vol. 35, pp. 51-64.

TRIGUEROS, M., Ursini S., and Reyes A. (1996). “College students conceptions of variable”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of the 20th PME.

TRIGUEROS, M. y S. Ursini (1997) “Understanding of different uses of variable. A study with starting college students”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of the 21th PME.

________________________ “Starting college students difficulties in working with different uses of variable”, submitted for publication.

TRIGUEROS, M. Y S. Ursini (2001).“A model for the uses of variable in elementary algebra”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of 25th PME, vol. 4, pp 327-3.

_____________________(2001) “Research based instruction: widening students’ perspective when dealing with inequalities”, en *Proceedings of the 12th ICMI Study “The future of teaching and learning of algebra”*, vol. 1, Melbourne, pp. 61-68.

TSAMIR, P. y L. Bazzini(2002) “Algorithmic models: italian an israeli students’ solutions to algebraic inequalities”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of 26th PME, vol. 4, pp.289-297.

____________________(2004) “RF02: algebraic equations and inequalities: issues for research and teaching”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education*, Proceedings of 28th PME, vol. 1, pp.137-166.

URSINI, S. y M. Trigueros(2004) “How do high school students interpret parameters in algebra?”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of 28th PME, vol. 4, pp.361-368.

USISKIN, Z.(1995) “Concepções sobre álgebra da escola média e utilizações das variáveis”, org.A. Coxford y A. Shulte, en *As idéias da Álgebra*, São Paulo: Atual, pp.9-21.

VANDYK, R. P.(1990) “Expressions, equations, and inequalities”, en *Mathematics Teacher*, January, pp. 41-42.

VERGNAUD G., Cortez A (1990) “From arithmetic to algebra: negotiating a jump in the learning process”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of XIV PME, vol. 2, pp.27-34.

VERGNAUD, G.,(1982) “Cognitive and Developmental Psychology and Research in Mathematics Education: some theoretical and methodological issues”, *For the Learning of Mathematics*, vol.3, n.2, november.

VINNER-BLOEDY, H.(1996) “The analgebraic mode of thinking and other errors in word problem solving”, en *The International Conference of Psychology of Mathematics Education*, Proceedings of PME XX, vol.2, pp.105-112.

WAGNER, S.(1981). “Conservation of equation and function under transformation of variable”, en *Journal for Research in Mathematics Education*, vol.12, pp.107-118.

WHITE, P. y M. Mitchelmore (1996). “Conceptual knowledge in introductory calculus”, en *Journal for Research in Mathematics in Education*, vol. 27, núm. 1, pp.79-95.

2 – Libros

ALBERT, A. y R. Farfán(1997) *Resolución gráfica de inecuaciones*, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

ANDRÉ, M. E. D. A.(1999) *Etnografia da Prática Escolar*, Papirus, São Paulo.

ÁVILA, G.S. de S., (1982) *Cálculo 1. Funções de uma variável*, LTC, Rio de Janeiro.

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DE PORTUGAL(2001) "Práticas Profissionais. A dinâmica de grupo e práticas colaborativas", en P. Abrantes (coord.) *Matemática 2001- Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*, Associação de Professores de Matemática, Lisboa, pp.52-59.

BETH, E. y J. Piaget, (1966). *Mathematical Epistemology and Psychology*, traducción de W. Mays, Reidel, Dordrecht.

DAVIS, P**.** y R. Hersh, (1985). *A Experiência Matemática*, Francisco Alves, Rio de Janeiro.

ECO, U(1996). *Como se faz uma tese*, Perspectiva, São Paulo.

GUIDORIZZI, H. L. (1987). *Um curso de cálculo*, LTC, Rio de Janeiro e São Paulo.

LEITHOLD, L.(1994). *O cálculo com geometria analítica*, traducción de C. de Carvalho, Harbra, São Paulo.

LÜDKE, M. y M. E. D. A. André (1986). *Pesquisa em Educação. Abordagens qualitativas*, EPU, São Paulo.

MIORIN, M.(1998) *Introdução à história da educação matemática*, Atual, São Paulo.

MOISE, E. E.(1972). *Cálculo. Um curso universitário*, Edgard Blücher, São Paulo.

MÜNEN, M.A. y D. J. Foulis (1982). *Cálculo*, LTC, Rio de Janeiro.

NIQUINI, D.(1997) *O Grupo Cooperativo. Uma metodologia de ensino*, Ed. Universa, Brasília.

PIAGET, J.(1995) *Abstração reflexionante: relações lógico- aritméticas e ordem das relações espaciais*, traducción de F. Becker y P. B. G. da Silva, Artes Médicas, Porto Alegre.

PIAGET, J.(1972). *The principles of Genetic* Epistemology, traducción de W. Mays, Routledge & Kegan Paul, London.

SKEMP, R. R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematic*, Pelican, London.

SWOKOWSKI, E. W.(1994) *Cálculo com geometria analítica*, traducción de A. Alves, vol. 1, Makron Books, São Paulo.

3 - Multimedia

DAUTERMANN, J., "Using ISETL 3.0 - A language for learning Mathematics (DOS Guide)", disponible en http://www.ilstu.edu/~jfcottr/isetl/default.html

DeVRIES, D., 2000, **Publicación electrónica.** RUMEC/APOS theory glossary. Disponible en http://www.cs.gsu.edu/~rumec/Papers/Glossary.html en junio de 2000.

MAMEDE, A.(1999) "Aprendendo a aprendizagem", CD ROM, CCE, Puc-Rio.

VAN DE SANDE, C.(2002). The development of Student`sUnderstanding of Volume: Solids of Revolution. Disponible en http//10.pins1.xdsl.nauticom.net/bvds/education/aposprint.html

4 - Tesis

BRUMATTI, R. N. M.(2001) “Uma análise do processo de construção de conceitos: o caso do valor absoluto”. Tesis de Doctorado, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

DOMINGOS, Jorge R.V.(1998) “Um estudo sobre aprendizagem cooperativa”, Disertación de Maestría, PUC-Rio.

MIRANDA, E. M.(1999) “El Entendimiento de la Transformada de Laplace. Caso de uma descomposición genética”, f. 149, Tesis de Doctorado, CINVESTAV, México.

THOMAS, K. S.(1995) “The Fundamental Theorem of Calculus: An investigation into student’s Constructions”, Tesis de Doctorado, Purdue University.

VIDAKOVIC, D.(1993) “Cooperative Learning: Differences between group and individual processes of construction of the concept of inverse function”, f. 121. Tesis de Doctorado, Purdue Univesity.

ANEXO A

EJERCICIOS UTILIZADOS EN LA RECOLECCIÓN DE DATOS

I - RECOLECCIÓN DE DATOS INICIAL

Los ejercicios de 1 a 7, además de hubieron sido trabajados en todas las etapas de la investigación fueron utilizados para evaluar analizar los desempeños presentados en el capítulo 4.

El siguiente ejercicio es parte de la categoría inecuación (ver cuadro 1, cap. 4).

1 – Abajo hay una tabla con los valores de las expresiones $x-4$ y $3x-6$, para números enteros entre –5 y 5, incluyendo –5 y 5.

x	$x-4$	$3x-6$
-5	-9	-24
-4	-8	-18
-3	-7	-15
-2	-6	-12
-1	-5	-9
0	-4	-6
1	-3	-3
2	-2	0
3	-1	3
4	0	6
5	1	9

a ¿Para cuáles valores de esta tabla tenemos $x-4<3x-6$?

b Puede esta tabla sugerir una respuesta a la cuestión: “¿Para cuál conjunto de números reales la inecuación $x-4<3x-6$ es satisfactoria?” ¿Cuál es la respuesta? Justifique.

c ¿V o F? ¿Si x=0,5, entonces $x-4<3x-6$?

Los ejercicios del ítem 2 son parte de la categoría inecuación (ver cuadro 1, cap.4).

2 - Analice las cuestiones abajo. Responda verdadero o falso y justifique.

a Sean f y g dos funciones definidas para todo número real x. El conjunto de todos los números reales que satisfacen la desigualdad $f/g > 0$, donde $g > 0$ para todo x real, es el conjunto de los reales que satisfacen $f > 0$.

b Sean f y g dos funciones definidas para todo número real x. El conjunto de los números reales que satisfacen la desigualdad $f/g < 0$, donde $g < 0$ para todo x real, es el conjunto de los reales que satisfacen $f < 0$.

c Sean f y g dos funciones definidas para todo real. El conjunto de los números reales que satisfacen la inecuación $f \times g \times h > 0$ es la unión de los conjuntos de números reales que satisfacen respectivamente a $f > 0$, $g > 0$ y $h > 0$.

d Sean f y g dos funciones definidas para todo real. El conjunto de los números reales que satisfacen la inecuación $f < g < h$ es la unión de todos los conjuntos de números reales que satisfacen $f < g$ y $g < h$, respectivamente.

El siguiente ejercicio fue también resuelto por los grupos de primera y segunda implementación utilizando la ISETL y son parte de la categoría inecuación (ver cuadro 1, cap.4).

e Para todo x, y en R, $x < y \iff x^2 < y^2$.

Es parte de la categoría inecuación (ver cuadro 1, cap.4).

3 - Abajo, hay una tabla con los valores de las expresiones x^2 y $3x+4$, para números enteros entre –5 y 5, incluyendo –5 y 5.

a ¿Para cuáles valores de esta tabla tenemos $x^2 < 3x+4$?

b Esta tabla puede sugerir una respuesta a la cuestión: ¿para cuál conjunto de números reales la desigualdad $x^2 < 3x+4$ es satisfactoria? ¿Cuál es la respuesta? Justifique.

c ¿V o F? ¿Si x = 4,92, entonces $x^2 < 3x+4$?

x	x^2	$3x+4$
-5	25	-11
-4	16	-8
-3	9	-5
-2	4	-2
-1	1	1
0	0	4
1	1	7
2	4	10
3	9	13
4	16	16
5	25	19

Todos los ejercicios de este ítem son parte da categoría resolución de inecuación (ver cuadro 2, cap.4).

4 - Resuelva:

a $(x-2)^3(x-3)^2 > 0$

b $\dfrac{3+x}{3-x} \leq 4$

c $\sqrt{x+2} \leq x$

d $\dfrac{2x}{x+1} \leq \dfrac{1}{x}$

5 - Analice las cuestiones abajo. Responda verdadero o falso y justifique.

Categoría resolución de inecuación (ver cuadro 2, cap.4).

a Todo número real satisface la inecuación $(x-1)^2 > -1$.

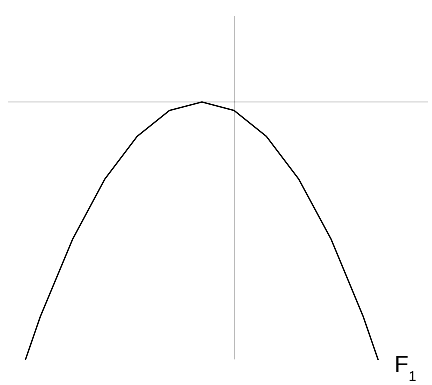
Categoría resolución de inecuación (ver cuadro 2, cap.4).

b Para todo número real x, $x \neq 2$, $\dfrac{x^2+1}{x-2} > 3 \Leftrightarrow x^2+1 > 3(x-2)$

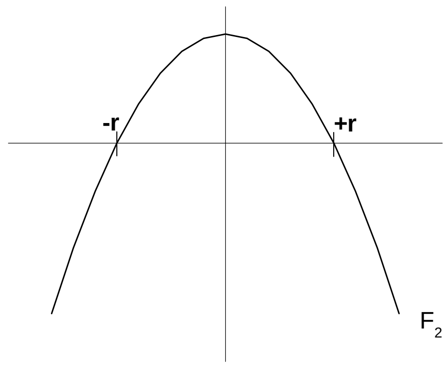
Categoría resolución gráfica de inecuación (ver cuadro 3, cap.4).

6 - Analice las cuestiones abajo. Responda verdadero o falso y justifique.

a El gráfico de la función cuadrática: $F_1 = ax^2 + bx + c$ tiene la forma abajo. ¿Es el conjunto-solución de $ax^2 + bx + c \leq 0$ un conjunto de los números reales?



b Abajo tenemos el gráfico de la función cuadrática: $F_2 = ax^2 + bx + c$. ¿Es el conjunto de reales tal que $ax^2 + bx + c < 0$ sea $\{x \mid -r < x < r\}$?



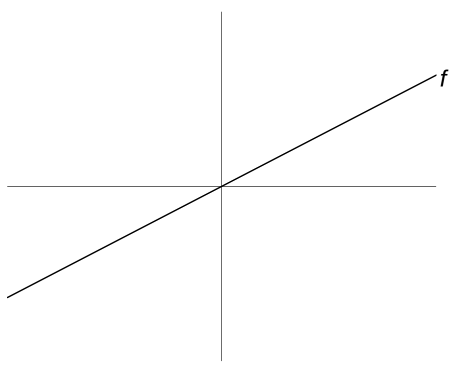
Categoría de resolución gráfica de inecuación (ver cuadro 3, cap.4).

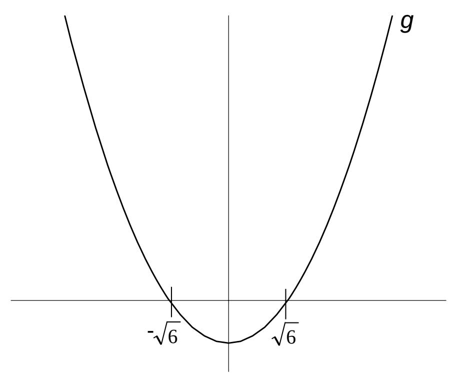
7 - Dados los gráficos de las funciones f, g y h en [-5,5], resuelva:

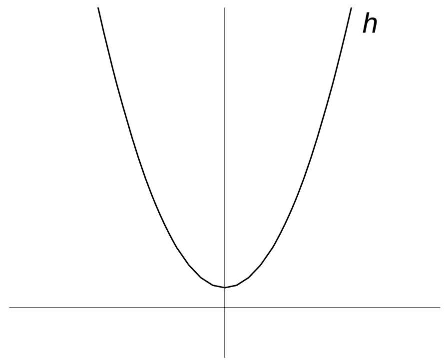
a $\dfrac{f}{g} > 0$

b $f \times g \leq 0$

c $f < g < h$







Los siguientes ejercicios no fueron utilizados para evaluar comparativamente los desempeños de los dos grupos.

8- ¿Verdadero o falso?

a $\{x \in R \,/\, x \in (-2,5)\} = \{x \in R \,/\, x > -2 \text{ y } x < 5\}$

b $\{x \in R \,/\, x \in (-2,5)\} = \{x \in R \,/\, 5 > x < -2\}$

c $\{x \in R \,/\, x \in (-2,5)\} = \{x \in R \,/\, x > -2 \text{ o } x < 5\}$

d $\{x \in R \,/\, x \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty)\} = \{x \in R \,/\, x < -2 \text{ o } x > 2\}$

e $\{x \in R \,/\, x \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty)\} = \{x \in R \,/\, x < -2 \text{ y } x > 2\}$

f $\{(a,b) \,/\, a \in R, b \in R \,/\, ab = 1\} = \{(a,b) \,/\, a \in R, b \in R, b \in R \,/\, (a = 1 \text{ y } b = 1) \text{ o } (a = -1 \text{ y } b = -1)\}$

9 -Resuelva:

a $(2x-1)(x^2-4) = 0$

b $(x^2+x+1)(x-1) = 1$

c $x(sen\,(x)) > 0$

10- Suponga que un(a) jefe(a) de familia requiere un sueldo mínimo semanal de $200,00 para sus gastos familiares. Él(la) es un(a) vendedor(a) y gana comisión de 25% sobre sus ventas (Sueldo = ventas x porcentaje de comisión). ¿Cuánto es el mínimo que él(la) debe de vender por semana para que su sueldo sea al menos de $200,00 por semana? (RESUELVA UTILIZANDO UNA DESIGUALDAD).

11-Haga un gráfico del conjunto solución del sistema

$$x + 2y \leq 3$$
$$3y + 4x \geq 2$$

12-Dadas las desigualdades

$$x(x^2 + 1) \geq 0 \qquad \text{y} \qquad x(x^2 - 1) \geq 0$$

obtenga los intervalos de soluciones y verifique si existe algún intervalo que contiene o que está contenido en el otro, o no.

II - RECOLECCIÓN DE DATOS INTERMEDIA

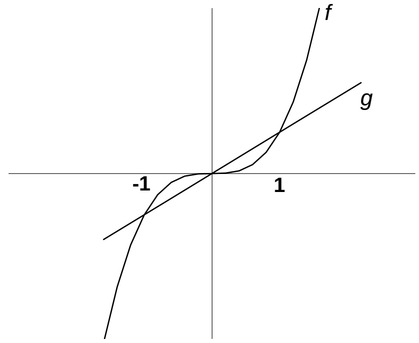
Como fue dado, algunos ejercicios utilizados en esta recolección intermedia ya habían sido aplicados en la recolección inicial. Son: **3I, 1I, 2Ia, 2Ia, 2Id, 4Ic, 5Ib 5Ia 6Ia 6Ib**

1 - Analice y justifique:

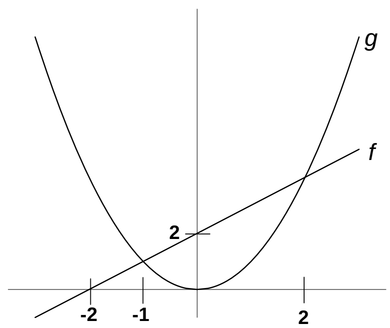
a Para todo número real x tenemos $x^4 + 5x^2 < x^5 + 500$. ¿V o F? Justifique.

b Si en la inecuación $x^4 + 5x^2 < x^5 + 500$ cambiamos x por $3x$, ¿seguirá la inecuación a ser satisfactoria o no? Justifique.

2 - Dados los gráficos de las funciones f y g, encuentre el conjunto-solución de $f(x) > g(x)$.



3.-. Dados los gráficos de las funciones f y g, encuentre el conjunto-solución de $f(x) < g(x)$.



4 - Pruebe que

Si $1{,}3 \leq x \leq 1{,}5$ y $2{,}6 \leq y \leq 2{,}8$, entonces $1{,}1 \leq y - x \leq 1{,}5$

Resolución algébrica de inecuación

5 – Resuelva las siguientes inecuaciones:

a $x^2 < -x$

b $\dfrac{x+1}{x^2+1} \leq 1$

d $\sqrt{x+3} \leq x$

e $\dfrac{2-x}{\sqrt{x^2-16}} \leq 0$

III –RECOLECCIÓN DE DATOS FINAL

Además de los ejercicios relacionados anteriormente, fueron utilizados en esa etapa las cuestiones **3I, 4Ia, 5Ib, 7Ia, 7Ib, 3II** y **4II** de las etapas anteriores.

1.- Resolución de inecuación por métodos algébricos o gráficos

a $9x^2 < 16$.

b ¿V o F? Justifique. $4x^2 > 9 \Leftrightarrow 2x > 3$. Luego, solucione $4x^2 > 9$.

c $\sqrt{x+2} < -x$

d $\sqrt{x+3} < x$

e $\dfrac{3}{x-1} \leq \dfrac{x}{x+1}$

f $\dfrac{2x}{x+1} \leq \dfrac{1}{x}$

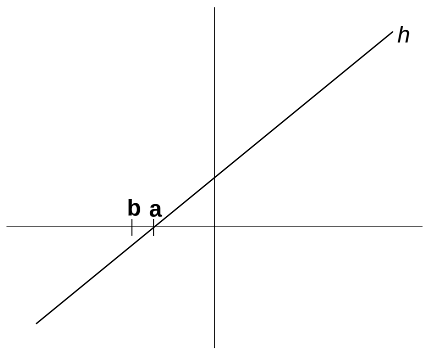
g $x^2 < -x$

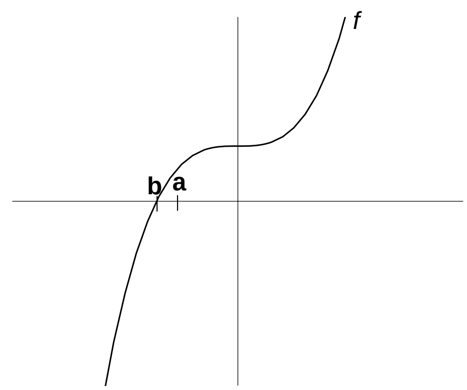
h $\dfrac{5x-2}{x^2+2} \leq 1$

i $(x-5)^2(x-1{,}2)^3 > 0$

j $\dfrac{3+x}{3-x} < 4$

2.- Dados los gráficos de las siguientes funciones f y h encuentre el conjunto-solución de $f(x)h(x) < 0$.





3- Utilice dos gráficos de funciones para proponer la solución de las inecuaciones abajo. Primeramente, elija las funciones que usted puede utilizar.

a $x^2 < -x$

b $x^3 < x$

4 - Preguntas sobre la solución, sin resolver la inecuación

4.a- Si 2,3 es solución para $f(x) \geq 0$, ¿qué número podemos afirmar como solución de $f\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$? ¿Cómo hacer una generalización sobre la solución de $f\left(\frac{x}{k}\right) \geq 0$?

4b – Si 4,6 es solución para $f(x) \leq 0$, ¿qué número podemos afirmar como solución de $f(2x) \leq 0$? ¿ Cómo hacer una generalización sobre la solución de $f(kx) \leq 0$?

5- Dado que $x^2 + 1 \leq ax + b$, encuentre “a” y “b” de tal manera que la inecuación tenga:

i infinitas soluciones.

ii una única solución.

ANEXO B

ACTIVIDADES CON USO DE LA COMPUTADORA

I – PRIMERA ETAPA DE LA INVESTIGACIÓN

Siguen ejemplos de actividades que fueron trabajadas con el lenguaje ISETL

1-

a) Suponga la respuesta que la computadora dará, luego presione "enter" y cheque su previsión.

```
>	8**1/3;
>	8**(1/3);
>	5+2/3+7;
>	(5+2)/(3+7);
>	(5+2)/3+7;
>	-10<-5;
>>	2**5<5**2;
>	(2>3)and (5=2+3);
>	(2>3) or (5=3+2);
>	(4=1)impl(5>2);
>	(4=1)iff(5>2);
>	forall x in [3,6,5,4]
>>	|x>=0;
>	abs(-4)<=abs(4);
>	-0.34>-0.36;
>	sqrt(1/2)<1/2;
>	(-1/3)**2>(1/3);
>	k:={[x,x**3] : x in [1,3..9]};
>	k(1);
>	k(3);
>	k;
```

b) Transfiera para el lenguaje ISETL y verifique el resultado

3+4;

$$\frac{(2^5+3)^2}{5};$$

$2 > 3;$
$(2+3) \neq (3+2);$

Hay x en {3,4,5,7} tal que x ≤ 0;

Para todo x en {-3,-2 -1,0,1,2} x ≥ 0;

c) Transfiera para el lenguaje ISETL y ejecute:

$f(x) = |x|;\quad f(-3);\ f(2);$

$f(t) = e^t;\ f(-2);\ f(2);$

$g(x) = x^2 + 2x - 1;$ Luego esboce su gráfico.

d) Analice y ejecute los siguientes programas e interprete las respuestas encontradas por la computadora:

i
```
    f:=func(x);
>>        return 1/(x-1);
>>  end;
➢   f(-1);f(0); f(1);
```

ii
```
    f:=func(x);
>>        if 3*x-2>0 then
>>  return sqrt(3*x-2);
>>  end;
>>  end;
➢   f(-1);f(0);f(1);
```

e) Construya dos funciones *f* y *j*, esboce sus gráficos utilizando ISETL y encuentre para cuales valores del dominio tendremos: $f < j$, $f > j$, $f = j$.

f) Ejecute los siguientes comandos y analice los resultados.

```
  S:=[1..8];
> S;
> d:={-2..6};
> d;
> f:=[-1,-0.9..2];
➢ f;
```

2 - Analice la proposición $\forall x, y \in \Re ; x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$ utilizando ISETL, vía comparación por tabla, usando un subconjunto de los números reales que le parezca a usted el más conveniente. Luego, conteste si la proposición es verdadera o falsa.

[1]
```
c1:= [-2..4];
>     for x,y in c1 do
>>    writeln x**2,y**2,x,y;
>>    end for;
        4        4        -2        -2
        4        1        -2        -1
        4        0        -2         0
        4        1        -2         1
        4        4        -2         2
        4        9        -2         3
        4       16        -2         4
        1        4        -1        -2
        1        1        -1        -1
        1        0        -1         0
        1        1        -1         1
        1        4        -1         2
        1        9        -1         3
        1       16        -1         4
        0        4         0        -2
        0        1         0        -1
        0        0         0         0
        0        1         0         1
```
[2] [3]

3 – Analice la proposición $\forall x, y \in \Re ; x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$ utilizando ISETL, y conteste si es verdadera o falsa.

[4]
```
c:={-3..4};
```
[5]

---

[1] Este es un ejemplo de experimentación.
[2] [-2..4]={-2,-1,0,1,2,3,4}
[3] y así sigue, con *x* e *y* variando de 0 a –4.

```
> V1:={[x,y]:x,y in c|x<y};
>     for [x,y] in V1 do
>>    writeln [x,y], x**2<y**2;
>>    end for;
         1         4      true
         1         3      true

         1         2      true
         3         4      true
         2         4      true
         2         3      true
         0         3      true
         0         4      true
         0         1      true
         0         2      true
        -1         4      true
        -1         3      true
        -1         1     false
        -1         2      true
        -1         0     false
        -2         0     false
        -2        -1     false
        -2         2     false
        -2         1     false
        -2         3      true
        -2         4      true
        -3         3     false
        -3         4      true
        -3         1     false
        -3         2     false
        -3         0     false
        -3        -1     false
        -3        -2     false
```

4.- Analice las proposiciones utilizando ISETL, y conteste si son verdaderas o falsas. Después, caso necesario, utilice papel y lápiz para demostrarlo.

a $\forall x, y \in \Re\, ; x < y \Rightarrow x^3 < y^3$.[6]

b $\forall x, y \in \Re\, ; x < y \Leftrightarrow x^4 < y^4$.

Sigue un ejemplo de programación.

---

[4] Este es uno de los ejemplos de experimentación.
[5] {-3..4}= {-2,-1,3,2,0,-3,1,4}

```
S := {-3,-2.91..4}⁷;
>     forall x,y in S | x <y impl x**3 < y**3;
true;
```

5 – Haga una comparación de funciones por atribución de valores. Elija las funciones.

Sigue un ejemplo de programación.

```
      f:=func(x);

>>    return x-4;
>>    end func;
>     g:=func(x);
>>    return 3*x-6;
>>    end func;
>     f(1)<g(1);
false;
>     f(-3)>g(-3);
true;
```

6 – Utilizándose de las mismas funciones expuestas anteriormente, haga una comparación entre ellas utilizando tablas. Sigue un ejemplo de programación.

```
>     for x in [-3..5] do
>>    writeln x, f(x),g(x);
>>    end for;
        -3        -7       -15
        -2        -6       -12
        -1        -5        -9
         0        -4        -6
         1        -3        -3
         2        -2         0
         3        -1         3
         4         0         6
         5         1         9
```

7 – Analice, utilizando gráficos, la solución de cada inecuación:

a $f(x) \leq g(x)$ para las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x + 4$. Después, haga lo mismo para $f(x) > g(x)$.

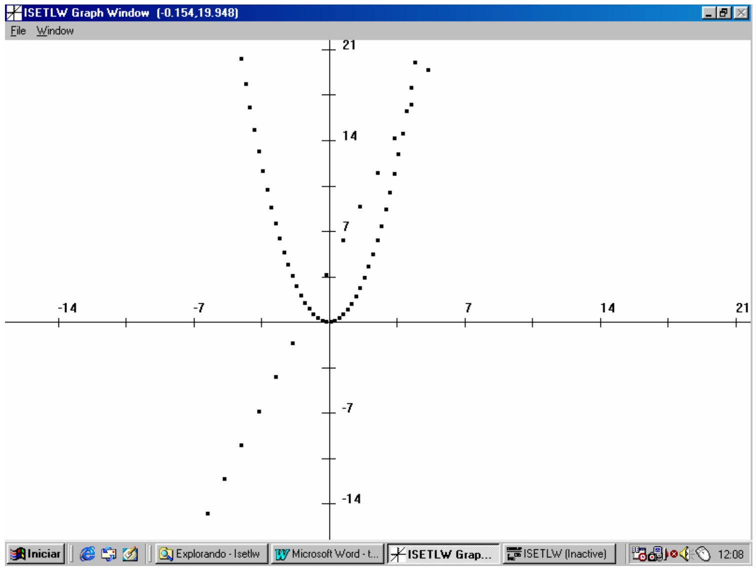
b $h(x) \leq 0$ e $h(x) > 0$, dónde $h(x) = x \operatorname{sen} x$.

Siguen ejemplos de programaciones.

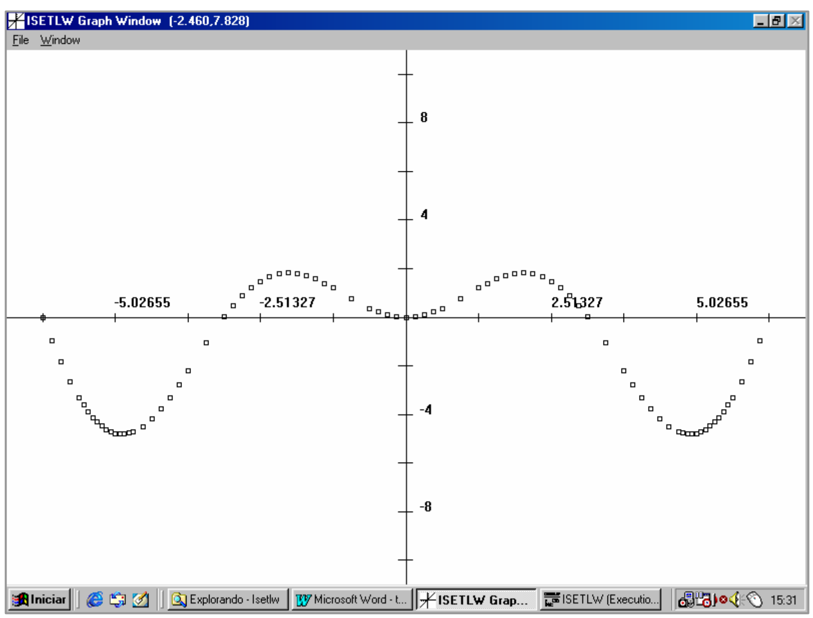
---

[6] Vale aquí anunciar la propiedad completa: “Cualesquiera que sean los reales x e y, $x < y \Leftrightarrow x^3 < y^3$”.

```
>      f:=|x->x**2|;$exercicio 4 da lista$
>      g:=|x->3*x+4|;
➢      plot([f,g],-15,20,-15,20);
```




```
>            h:=func(x);$exercicio 3$
>>           return x*sin(x);
>>     end func;
➢      plot(h,-2*Pi,2*Pi,-10,10);
```



[7] Este es el conjunto de números reales de –3 a 4 con variación de 0,01.

8 - Utilizando las funciones de las actividades 5 y 6, haga una comparación entre ellas obteniendo como resultados valores booleanos (valores *V* o *F*).

Sigue un ejemplo de programación.

```
>      for x in [-3..5] do
>>     writeln x, f(x)<g(x);
>>     end for;
         -3     false
         -2     false
         -1     false
          0     false
          1     false
          2      true
          3      true
          4      true
          5      true
```

El siguiente ejercicio fue criado para ser resuelto conjuntamente con la maestra usando ISETL, y es un ejemplo de aplicación de inecuaciones en problemas cotidianos. La descripción del programa viene después del enunciado del ejercicio.

9 - Suponga que un(a) jefe(a) de familia requiere un sueldo mínimo semanal de $200,00 para sus gastos familiares. Él(la) es un(a) vendedor(a) y gana comisión de 25% sobre sus ventas (Sueldo = ventas x porcentaje de comisión). ¿Cuánto es el mínimo que él (la) debe vender por semana para que su sueldo sea al menos de $200,00 por semana? (SOLUCIONE UTILIZANDO UNA DESIGUALDAD).

Ejemplo del programa:

```
Ven:=0;
>Sal:=0;
>Com:=25/100;
```

```
>      while Sal<=200 do
>>             Ven:= Ven+10;
>>             Sal:= Ven*Com;
>>     writeln Ven, Sal;
>>                    end while;
```

II – SEGUNDA Y ÚLTIMA ETAPA DE LA INVESTIGACIÓN

1 - Elabore un programa en ISETL que posibilite verificar si un dado número satisface o no las dos inecuaciones al mismo tempo presentadas.

Sigue un ejemplo de como puede ser ejecutada la ecuación utilizando la ISETL.

```
>I := func(x);
 >>      if x /= 3 then return (3+x)/(3-x) <= 4;
 >>      end; end;
 >   J := func(x);
 >>      return x*sin(x) > 0;
 >>      end;
 >   ADD := func(I1,I2);
 >>        return func(x);
 >>            return I1(x) and I2(x);
 >>        end; end;
 >   ADD;
 >>  K := ADD(I,J);
 >   K(4);
 false;
 >   I(4);
 true;
 >   J(4);
 false;
```

2 - Haga un programa en ISETL que posibilite el análisis de la eventual equivalencia entre las siguientes inecuaciones: $4x^2 < 9$ y $2x < 3$. Concluya si estas inecuaciones son equivalentes o no. Justifique. En el caso de que usted no recuerde, vuelva al programa que, hecho en clase, posibilitó el análisis de equivalencia entre $\sqrt{x+3} < x$ y $x+3 < x^2$. Luego, intente solucionar la desigualdad $4x^2 < 9$. ¿Qué propiedades de los números reales pueden ser aplicadas?

Después de haber trabajado con varios tipos de comparación entre funciones (cf. capítulo anterior. Actividades 4 a 7), la siguiente actividad tiene como objetivo revisar estos tipos de comparación. Sin embargo, ahora el alumno debe de crear sus propias funciones y desigualdades.

3 - Una inecuación puede ser vista como una comparación de funciones. Críe dos funciones y, utilizando el ISETL, establezca comparaciones entre ellas de tres maneras diferentes: por gráficos, por tablas y por valores booleanos.