

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas

**Métodos asintóticos para sistemas con características de
multiplicidad variable**

Tesis

que para obtener el grado de
Doctor en Ciencias con especialidad
en Matemáticas

PRESENTA:

Andriy Kryvko

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Valeri Kucherenko

México, D.F. Noviembre de 2007

Dedico este trabajo a mis padres! Especialmente a mi querida mamá que siempre me apoya.

Agradezco a mi asesor Dr. Valeri Kucherenko, al que estimo mucho, por todo el tiempo que me dedicó y por todo lo que me ha enseñado.

Agradezco a los miembros del jurado: Dr. Mykhaylo Shapiro Fishman, Dra. María Elena Luna Elizarrarás, Dr. Jorge Esquivel Ávila, Dr. Serguei Groudski y Dr. José María Rocha Martínez por sus sugerencias para con este trabajo.

También agradezco a mi amigo Jesús Sánchez Corona por su ayuda y apoyo.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Condiciones de cuantización en el caso de características de multiplicidad variable	2
1.2. Sistemas hiperbólicos	4
1.3. Multiplicidad en los problemas asintóticos	6
1.4. Método asintótico desarrollado en el caso unidimensional	7
1.5. Construcción de las soluciones asintóticas locales para ecuaciones en derivadas parciales con características de multiplicidad triple	10
2. Condiciones de cuantización	14
2.1. Las condiciones de cuantización para el problema matricial de Sturm-Liouville en el caso de las características de multiplicidad variable	14
2.1.1. Resultados principales	14
2.1.2. Matrices de transición y sus aplicaciones a las condiciones de cuantización	16
2.1.3. Forma explícita de la condición de cuantización para una matriz $A(x)$ de dimensión (2×2)	19
2.1.4. Soluciones asintóticas de las funciones propias de un espectro continuo para (2×2) matriz $A(x)$	21
2.1.5. Soluciones asintóticas de multifase y sus aplicaciones	23
2.1.6. Demostración del Teorema 4	28
2.2. Acercamiento general para las condiciones de cuantización en el caso de características de multiplicidad variable	31
2.2.1. Solución asintótica de WKB-Maslov	31
2.2.2. Matrices de transición y su aplicación a la condición de cuantización	34
3. Soluciones asintóticas para los sistemas de ecuaciones ordinarias con un parámetro pequeño cerca de la derivada	38
3.1. Introducción	38
3.2. Justificación de las soluciones asintóticas	68
3.3. Caso de la matriz $A(t)$	75
4. Soluciones asintóticas para los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales con un parámetro pequeño cerca de la derivada	83
4.1. Método desarrollado para el caso de las derivadas parciales	83
4.2. Ramificación de las trayectorias	111
4.3. Sobre las ecuaciones de hidrodinámica linealizadas para los líquidos ideales compresibles	117
4.4. Dos formas modelo para el problema de Cauchy de un sistema lineal real hiperbólico simétrico de primer orden	126

Resumen

En el Capítulo 2 se considera el problema vectorial de Sturm-Liouville para sistema con un parámetro pequeño cerca de la derivada. Se construyen las soluciones asintóticas para los valores y vectores propios en el caso cuando el símbolo del problema tiene valores propios de multiplicidad variable. También se determinan las condiciones de cuantización para el problema de Sturm-Liouville en el caso de las características de multiplicidad variable.

Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con un parámetro pequeño cerca de la derivada con la matriz de la forma $A(t) + hB(t)$ se consideran en el Capítulo 3. En este capítulo se desarrolló un nuevo método para la construcción de las soluciones asintóticas de multifase en el caso cuando la matriz $A(t)$ tiene tres o más raíces características que coinciden en el punto de cambio de multiplicidad.

En el Capítulo 4 se considera un sistema de ecuaciones diferenciales parciales real hiperbólico con un parámetro pequeño cerca de la derivada y se desarrolla un nuevo método para la construcción de las soluciones asintóticas de multifase.

Abstract

In the Chapter 2 the vector Sturm–Liouville problem for the system with a small parameter at the derivatives is considered. Asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions for the case in which the symbol of the problem has eigenvalues of variable multiplicity, and the quantization conditions for the vector Sturm-Liouville problem in the case of characteristics of variable multiplicity are constructed .

Linear system of ordinary differential equations with a small parameter near the derivative with the matrix of the form $A(t) + hB(t)$ is considered in the Chapter 3. A new method of construction of the multiphase asymptotic solutions for the case when the matrix $A(t)$ has three or more coinciding characteristic roots at the multiplicity point is proposed.

In the Chapter 4 a real hyperbolic system of partial differential equations with a small parameter near the derivative is considered and a new method of construction of the multiphase asymptotic solutions is proposed.

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo de tesis está dedicado a la construcción de las soluciones sucesivas locales y globales de las ecuaciones diferenciales, con un parámetro pequeño cerca de la derivada, de la forma

$$L\left(x, -ih\frac{\partial}{\partial x}, h\right) u_N(x, h) = O\left(h^{N+r(N)}\right), \quad x \in \Omega_x \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

aquí $h \in (0, 1]$, $N \in \mathbb{N}_0$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $O(h^N)$ - es una función $C^\infty(\Omega_x)$ con respecto a x , tal que

$$|O(h^N)| \leq C_N h^N \text{ en } (x, h) \in \Omega_x \times (0, 1], \quad (1.2)$$

$u_N = \sum_{j=0}^N v_j(x, h)$, donde $v_j(x, h) \in C^\infty(\Omega_x)$ para todo $h \in (0, 1]$, y $v_j(x, h) \in C(\Omega_x \times (0, 1])$. Las funciones $v_j(x, h)$ en Ω_x satisfacen las estimaciones

$$|v_j(x, h)| \leq C_j h^{\sigma_j}, \quad (1.3)$$

donde $\sigma_j \rightarrow +\infty$ cuando $j \rightarrow +\infty$. Se supone que $r(N)$ es tal que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{r(N)}{N} = 0.$$

Note que de aquí se sigue que $\sigma_j \geq -a^2$ (para una constante real a). De la estimación (1.3) fue demostrado (en los trabajos de L. Hormander, Erdelyi) que existen funciones finitas $\chi_j(h)$ satisfaciendo

$$\text{Sop } \chi_{j+1}(h) \subset \text{Sop } \chi_j(h)$$

y tales que la serie

$$u(x, h) := \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j(h) v_j(x, h)$$

es convergente y la función $u(x, h)$ satisface la ecuación

$$L\left(x, -ih\frac{\partial}{\partial x}, h\right) u(x, h) = O(h^\infty) \text{ en } \Omega_x.$$

La función $u(x, h)$ se llama la *solución asintótica con precisión $O(h^\infty)$* . Pegando de algún modo las soluciones locales en diferentes dominios Ω_x se obtienen las soluciones globales en \mathbb{R}^n las cuales se usan para obtener las condiciones de cuantización para los problemas de mecánica cuántica y para demostrar los teoremas de existencia para los sistemas no estrictamente hiperbólicos.

Las ecuaciones con un parámetro pequeño cerca de la derivada surgen en la mecánica cuántica (al elegir una escala adecuada). Por ejemplo la ecuación de Schrödinger para una partícula con masa m en un campo externo $V(x)$ tiene la forma:

$$-\frac{\hbar_0^2}{2m}\Delta\psi + (V(x) - E)\psi = 0, \psi \in L_2(\mathbb{R}^3),$$

al introducir una escala, i.e. $x = l\eta$, se obtiene la ecuación

$$-\frac{\hbar_0^2}{2ml^2}\Delta\psi + (V(l\eta) - E)\psi = 0. \quad (1.4)$$

En el caso en que el máximo V_0 de la energía potencial es tal que

$$V_0 \gg \frac{\hbar_0^2}{2ml^2}, V_0 \sim E,$$

la bibliografía dice que el potencial cambia poco en una distancia del orden de la longitud de onda de una partícula libre. Así multiplicando la ecuación (1.4) por V_0^{-1} se obtiene una ecuación con parámetro pequeño

$$h^2 = \frac{\hbar_0^2}{2ml^2V_0},$$

cerca de la derivada, i.e.

$$-h^2\Delta_\eta\psi(\eta) + \frac{1}{V_0}V(l\eta)\psi(\eta) = \lambda\psi(\eta),$$

donde $\lambda := E/V_0$, y se supone que

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial \eta^k} \left(\frac{V(l\eta)}{V_0} \right) \right| \leq C_k h^{\delta k}, \text{ para } \delta < \frac{1}{2}.$$

Las condiciones de cuantización son ecuaciones para serie de los valores propios λ_n , de la forma

$$\lambda_n = \Phi(h, n) + O(h^2),$$

donde $\Phi(h, n)$ es un funcional de las trayectorias de un sistema mecánico que será descrito más adelante.

El problema de cuantización fue estudiado intensamente a partir del planteamiento de las ecuaciones de Schrödinger y de Dirac, en los trabajos de W. Bor, Heizenberg, Neumann, Sommerfeld, WKB (Wentzel, Kramers, Brioullin), Keller, Fock, V.P. Maslov.

En este trabajo se describen las condiciones de cuantización clásicas para la ecuación matricial de Pauli, los cuales no han sido consideradas anteriormente.

1.1. Condiciones de cuantización en el caso de características de multiplicidad variable

Se considera el problema matricial de Sturm-Liouville siguiente:

$$\left(-ih \frac{d}{dx} \right)^2 y + A(x)y = Ey; x \in \mathbb{R}^1; y(x) \in L_2(\mathbb{R}^1); \quad (1.5)$$

donde $y \in \mathbb{C}^n$; $h \in (0, 1]$ es un parámetro pequeño. El problema matricial de Sturm-Liouville surge en mecánica cuántica y en la nanotecnología, veanse los trabajos de [1], [2], [3].

Sea $A(x) = A(x)^*$ una función matricial de dimensión $(n \times n)$ de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ y tal que el operador (1.5) es esencialmente autoconjugado en $L_2(\mathbb{R}^1)$. Los valores propios de la matriz autoconjugada $A(x)$ se denotan por $\lambda_j(x)$, $j = 1, \dots, n$. Sean $e_j(x)$ los vectores propios ortonormales de la matriz $A(x)$, i.e., $A(x)e_j(x) = \lambda_j(x)e_j(x)$. Si sobre un conjunto abierto $V \subseteq \mathbb{R}^1$ la matriz autoconjugada $A(x)$ es una función analítica, se tiene que los valores propios y los vectores propios de la matriz son funciones analíticas sobre el conjunto V . Por lo tanto se puede suponer que se satisfacen las condiciones siguientes.

Condición 1 *Suponga que la matriz $A(x)$ tiene la forma $A(x) = \mathbf{U}(x) \|\lambda_j(x)\delta_{ij}\| \mathbf{U}^*(x)$, donde $\mathbf{U}(x)$ es una función matricial unitaria de la clase C^∞ definida sobre \mathbb{R}^1 y se tiene que $\lambda_j(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\text{Im } \lambda_j \equiv 0$, son valores propios reales de la matriz $A(x)$. Sea D el conjunto de los puntos x donde los valores propios cambian su multiplicidad. Además suponga que D es un conjunto discreto y la diferencia $(\lambda_i - \lambda_j)$ de cualesquiera dos valores propios λ_j y λ_i que coinciden sobre el conjunto D tiene un cero de orden finito sobre D .*

Condición 2 *Sean γ_j las curvas en el espacio de fase $\mathbb{R}_{x,p}^2$ definidas como:*

$$p^2 + \lambda_j(x) = E, \quad j = 1, \dots, k \leq n. \quad (1.6)$$

Suponga que las curvas γ_j son compactas y que la condición $d\lambda_j(x)/dx \neq 0$ se satisface para todos los puntos x tales que $\lambda_j(x) = E$. Además suponga que sobre el conjunto $(E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, no existe un espectro continuo y que $E \in (E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$.

Condición 3 *(Posición general) Suponga que se satisfacen las Condiciones 1 y 2 para γ_j , $j = 1, \dots, n$, donde todas las curvas γ_j son compactas, las ecuaciones $\lambda_j(x) = E$ tienen una cantidad finita de soluciones sobre cada curva y que $d\lambda_j(x)/dx \neq 0$ en estos puntos. Además suponga que sobre el conjunto de cambio de multiplicidad D se tiene que $\lambda_j|_D \neq E$, $j = 1, \dots, n$. Suponga que cualesquiera dos curvas que se intersectan entre si tienen una cantidad finita de intersecciones y que los valores propios λ_j, λ_q que coinciden sobre el conjunto D satisfacen que:*

$$d(\lambda_j - \lambda_q)/dx|_D \neq 0 \quad \text{para } j \neq q. \quad (1.7)$$

El índice de Maslov de la curva γ_j se denotará por $\text{Ind}(\gamma_j(E))$, vease [9].

En este caso en el Capítulo 2 fue demostrado el teorema siguiente.

Teorema 1 *Suponga que la curva γ_j se intersecta solamente con las curvas γ_{i_α} , $\alpha = 1, \dots, k \leq n - 1$, y que se satisfacen las Condiciones 1, 2 y 3. Sea $E = E(h)$ una función definida sobre $(0, 1]$ y tal que $E(h) \in (E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$. Además suponga que en el intervalo $(E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$ el operador (1.5) no tiene un espectro continuo. Si para un número $m(h) \in \mathbb{Z}$ y una constante $C > 0$ se cumple que*

$$\frac{1}{h} \int_{\gamma_j(E)} p dx - \frac{\pi}{2} \text{Ind}(\gamma_j(E)) = 2\pi m(h), \quad (1.8)$$

$$\left| \exp i \left\{ \frac{1}{h} \int_{\gamma_{i_\alpha}(E)} p dx - \frac{\pi}{2} \text{Ind}(\gamma_{i_\alpha}(E)) \right\} - 1 \right| \geq C > 0, \quad \alpha = 1, \dots, k, \quad (1.9)$$

entonces existen valores propios $E_{eg}(h) \in (E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$ del problema de Sturm-Liouville (1.5) tales que $E(h) - E_{eg}(h) = O(h^2)$.

Es decir fue demostrado que en el caso de no resonancia (1.9) la condición de cuantización coincide con la condición de cuantización de V.P. Maslov. Sin embargo las funciones propias en el caso de cambio de multiplicidad difieren de las funciones propias consideradas por Maslov, no las presentamos debido a su complejidad.

Se proponen dos acercamientos para las condiciones de cuantización. El segundo método es más general y puede ser aplicado para el caso cuando la matriz A depende de un parámetro adicional por lo que en el caso general las raíces características pierden suavidad.

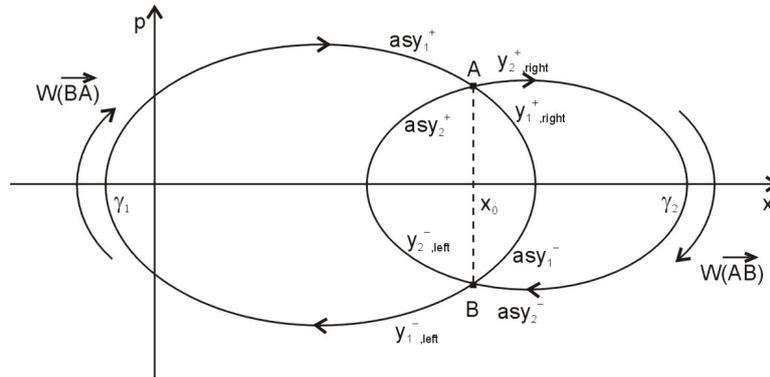


Figura 1

1.2. Sistemas hiperbólicos

Considere un sistema de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{r=1}^n A_r(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_r} + B(x, t) u = 0, \quad (1.10)$$

$$u|_{t=0} = \exp\left(i\left(\frac{\xi}{|\xi|}, x\right) |\xi|\right) \phi(x),$$

donde $A_r(x, t)$, $B(x, t)$ son matrices con los elementos de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ de dimensión $(m \times m)$. En la ecuación (1.10) se introduce un parámetro pequeño $h = \frac{1}{|\xi|}$ multiplicando la ecuación por $(-i\frac{1}{|\xi|})$, i.e. se tiene que

$$-ih \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{r=1}^n A_r(x, t) \left(-ih \frac{\partial u}{\partial x_r}\right) + (-ih) B(x, t) u = 0, \quad (1.11)$$

$$u|_{t=0} = \exp\left(\frac{i}{h}(k, x)\right) \phi(x), \text{ con } k = \frac{\xi}{|\xi|}.$$

Usando las soluciones asintóticas del problema (1.10) se construye una función $G(x, y, t, \tau)$ llamada parametrix que satisface la ecuación

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{r=1}^n A_r(x, t) \frac{\partial G}{\partial x_r} + B(x, t) G = F(x, y, t, \tau), \quad (1.12)$$

$$G|_{t=\tau} = I\delta(x - y),$$

donde $F(x, y, t, \tau) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n} \times [0, T])$ es el nucleo de un operador integral que actúa en el espacio H^s , i.e. $F : H^s \rightarrow H^s$, para $\forall s \in \mathbb{N}$, tal que $s \geq s_0 > 0$. Esta función permite construir la solución del problema de Cauchy en la forma

$$u = \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y, t, 0) \phi(y) dy + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y, t, \tau) g(y, \tau) dy. \quad (1.13)$$

Evidentemente se tiene que $u|_{t=\tau} = \phi$. Sustituyendo la expresión (1.13) en la ecuación (1.11) se obtiene que

$$g(x, t) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} F(x, y, t, \tau) g(y, \tau) dy = f(x, t) + \int_{\mathbb{R}^n} F(x, y, t, 0) \phi(y) dy,$$

i.e. para la función $g(x, \tau)$ se obtiene una ecuación de Volterra, que tiene una solución única.

A la ecuación (1.10) se le corresponde el símbolo matricial principal

$$L(x', \xi') = I\xi_0 + \sum_{r=1}^n A_r(x') \xi_r, \text{ con } x' = (x_0, x).$$

Se considera la ecuación característica que corresponde a este símbolo, i.e. la ecuación

$$\det L(x', \xi_0, \xi) = 0, \quad (1.14)$$

con respecto a la variable ξ_0 . Sean $\lambda_j(x', \xi)$, $j = 1, \dots, \mu$, $\mu \leq n$, las soluciones de la ecuación (1.14). Evidentemente $\lambda_j(x', \xi)$ son funciones homogéneas con respecto a ξ , del orden 1 y

$$\det L(x', \xi_0, \xi) = \prod_{j=1}^{\nu} (\xi_0 - \lambda_j(x', \xi)) \quad (1.15)$$

Definición 1 El sistema (1.10) se llama un sistema hiperbólico si se tiene que

$$\text{Im}(\lambda_j(x', \xi)) = 0, \text{ para todo } (x', \xi) \in \mathbb{R}^{2n+1}, j = 1, \dots, \mu. \quad (1.16)$$

Ahora se definirán los sistemas no estrictamente hiperbólicos.

Definición 2 Un punto $(x', \xi) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ se llama un punto de cambio de multiplicidad del sistema (1.10) si toda vecindad del punto (x', ξ) contiene a un punto $(\bar{x}', \bar{\xi})$ tal que la ecuación $\det L(\bar{x}', \xi_0, \bar{\xi}) = 0$ con respecto a ξ_0 tiene más raíces que la ecuación $\det L(x', \xi_0, \xi) = 0$.

Definición 3 El sistema (1.10) se llama no estrictamente hiperbólico si se cumple la condición (1.16) y el conjunto de los puntos de cambio de multiplicidad del sistema (1.10) no es vacío.

En lo que sigue el conjunto de los puntos de cambio de multiplicidad del sistema (1.10) se denotará por Σ .

Se sabe que en el caso en que las raíces λ_j son suaves de (1.15) se sigue que

$$\nabla_{x', \xi'} L(x', \xi')|_{\Sigma} = 0. \quad (1.17)$$

La teoría de las ecuaciones hiperbolicas fue desarrollada en los trabajos de Sobolev, Lere, Krice, V.P. Maslov, L. Hormander, etc. Los sistemas no estrictamente hiperbólicos fueron investigados en los trabajos de Levi, Oleinik, Ivrii, Kucherenko, Kumano-go, Melrose, G.Uhlmann, K. Yagdjian, M. Reissig, etc.

Hasta el momento no fue investigado el caso cuando en un punto coinciden 3 raíces características λ_j . Este caso fue investigado en este trabajo de tesis, bajo la condición que las raíces λ_j son de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{\xi = 0\})$, y además se tiene que

$$\{\eta - \lambda_j, \eta - \lambda_k\}|_{\Sigma} \neq 0, j \neq k,$$

para las raíces λ_j, λ_k que coinciden sobre Σ .

1.3. Multiplicidad en los problemas asintóticos

Como fue mencionado anteriormente a la ecuación

$$L\left(x, -ih\frac{\partial}{\partial x}, h\right)u = 0, \quad u \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega_x \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.18)$$

se le corresponde el símbolo $L(x, \xi, h)$, el cual es una función matricial con respecto a las variables $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, con $h \in (0, 1]$.

Para construir las soluciones locales (i.e. para $x \in \Omega_x$) se supone que el símbolo $L(x, \xi, h)$ satisface las condiciones *MF* siguientes.

Condición 4 (*MF*) Suponga que el símbolo $L(x, \xi, h)$ es tal que:

$$\begin{aligned} L(x, \xi, h) &\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n} \times [-1, 1]) \\ \left| D_x^\alpha D_\xi^\beta D_h^\gamma L(x, \xi, h) \right| &\leq C_{\alpha\beta\gamma} (1 + |x|)^m (1 + |\xi|)^m, \end{aligned}$$

con $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| < \infty$, $m \in \mathbb{N}$ un número fijo, $L(x, \xi, h) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x, h) \xi^\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, y $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$.

Definición 4 Un punto $(x', \xi) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ se llama un punto de cambio de multiplicidad del sistema (1.18) si toda vecindad del punto (x', ξ) contiene a un punto $(\bar{x}', \bar{\xi})$ tal que la ecuación $\det L(\bar{x}', \xi_0, \bar{\xi}) = 0$ con respecto a ξ_0 tiene más raíces que la ecuación $\det L(x', \xi_0, \xi) = 0$.

Definición 5 El sistema (1.18) se llama un sistema de multiplicidad variable si el conjunto de los puntos de cambio de multiplicidad del sistema (1.18) no es vacío.

Un ejemplo importante de tal sistema vectorial físico es la ecuación estacionaria de Pauli

$$-\frac{1}{2m} \sum_{j=1}^3 \left(-ih\frac{\partial}{\partial x_j} + A_j \right)^2 \psi + B(x)\psi = E\psi,$$

donde $\psi \in \mathbb{C}^2$, $B(x)$ son funciones matriciales de la clase C^∞ con respecto a x de dimensión (2×2) , y $A_j, j = 1, 2, 3$, son los potenciales del campo electromagnético (i.e. $\text{rot } A = H$).

En el caso en que sobre el conjunto de los puntos de cambio de multiplicidad Σ se tiene que

$$L(x, p)|_\Sigma = 0, \nabla_{x,p} L(x, p)|_\Sigma = 0, \det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial p_l} \right\|_\Sigma \neq 0,$$

los métodos asintóticos para la construcción de las soluciones asintóticas fueron presentados en los trabajos de Kucherenko, Osipov, Melrose, Ulmann, Yadijan, etc. Sin embargo para el caso en que

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial p_l} \right\|_\Sigma = 0,$$

estos métodos no funcionan. Este caso aparece cuando sobre el conjunto Σ coinciden 3 o más raíces características de la ecuación

$$L(x', \xi_0, \xi) = 0.$$

Esto sucede para la ecuación de Pauli en el campo magnético y para los sistemas de muchas partículas de diferentes tipos. Sin embargo en estos problemas el símbolo del operador es simétrico. En los problemas de la mecánica de los medios continuos el cambio de multiplicidad sucede

en la ecuación linealizada para los líquidos ideales compresibles, cuando para una solución ρ_0 del problema no lineal en un punto (\bar{x}, \bar{t}) se tiene que

$$\frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho_0)(\bar{x}, \bar{t}) = 0,$$

así como en las ecuaciones de magnetohidrodinámica. Para estos problemas el símbolo matricial del sistema tiene una caja de Jordan. En este trabajo de tesis se investigaron los casos cuando en los puntos de cambio de multiplicidad conciden tres o más raíces características $\lambda_j(x, \xi)$ y además en los puntos de cambio de multiplicidad el símbolo del sistema tiene una caja de Jordan. Primero se describen los métodos asintóticos para este tipo de símbolos para modelos unidimensionales.

1.4. Método asintótico desarrollado en el caso unidimensional

Ahora se considera el sistema

$$L\left(t, -ih\frac{d}{dt}\right)y = -ih\frac{dy}{dt} + A(t)y + hB(t)y = 0, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (1.19)$$

con la función matricial $A(t)$ de la forma

$$A(t) = \begin{bmatrix} Ia(t) & 0 & 0 \\ 0 & b(t) & d(t) \\ 0 & 0 & c(t) \end{bmatrix}, \quad (1.20)$$

donde $B(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, I es la matriz identidad $(r \times r)$, las funciones a, b, c, d son de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ de la forma $a(t) = at + O(t^2)$, $b(t) = bt + O(t^2)$, $c(t) = ct + O(t^2)$, y $d(t) = d + O(t)$, $d \neq 0$.

Al sistema (1.19) se le corresponde el símbolo

$$L(t, \eta, h) = I\eta + A(t) + hB(t),$$

para el cual se obtiene que las raíces características del sistema (1.19) satisfacen la ecuación

$$\det L(t, \eta, 0) = (\eta + a(t))(\eta + b(t))(\eta + c(t)) = 0,$$

i.e. el determinante es igual a cero para $\eta = -a(t)$, $\eta = -b(t)$ y $\eta = -c(t)$.

En el dominio $|t| > h^{1/2-\delta}$ la solución asintótica del problema (1.19) se construye usando el método WKB. Note que en el punto $t = 0$, conciden tres raíces características del sistema, i.e. $a(0) = b(0) = c(0) = 0$. Por lo tanto en el dominio $|t| < h^{1/2-\delta}$ no es posible aplicar los métodos asintóticos estándares para construir la solución asintótica del problema (1.19). Debido a esto hemos desarrollado un nuevo método asintótico. Las aplicaciones de los resultados obtenidos se presentan más adelante. Es posible suponer que $a(t), b(t), c(t)$ son polinomios en t .

En el Capítulo 3 fue demostrado el teorema siguiente.

Teorema 2 Sea $B(t) \in C^\infty(U)$, $U = \{|t| < \varepsilon\}$, $A(t)$ es de la forma (1.20), $a(t), b(t), c(t)$ son polinomios en t , además se tiene que $a'(t) < b'(t) < c'(t)$, y $|t| < h^{1/2-\delta}$, para $0 < \delta < 1/8$. En este caso para un número $\sigma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ el sistema (1.19) tiene soluciones linealmente independientes siguientes:

1) Existe una solución y_0 tal que:

i) Para $t > h^{1/2-\delta/2}$:

$$y_{0,r+2}(t) = \exp\left(-i\frac{bt^2}{2h}\right) \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{i\pi}{2}(1+\sigma)} \left(\frac{h}{t}\right)^{\sigma+1/2} (e^{i2\pi\sigma} - 1) \Gamma(\sigma + 1) + o(h^\delta) \\ + \exp\left(-i\frac{ct^2}{2h}\right) \sqrt{2\pi(c-b)} (|c-b|t)^\sigma e^{i\pi\sigma} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) + o(h^\delta),$$

$$y_{0,r+1}(t) = -d \exp\left(-i\frac{bt^2}{2h}\right) \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{i\pi}{2}(1+\sigma)} \left(\frac{h}{t}\right)^{\sigma-1/2} (e^{i2\pi\sigma} - 1) \Gamma(\sigma) + o(h^\delta) \\ + \exp\left(-i\frac{ct^2}{2h}\right) \sqrt{2\pi(c-b)} (|c-b|t)^{\sigma-1} e^{i\pi(\sigma-1)} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) + o(h^\delta),$$

$$y_{0,j}(t) = o(|y_{1,r+2}(t)|) \text{ para } j = 1, \dots, r,$$

donde

$$\sigma = -i \frac{b_{(r+2)(r+1)}(0) d}{c-b}.$$

ii) Para $t < -h^{1/2-\delta/2}$ el término principal de la solución asintótica $y_{0,r+2}(t)$ se determina solamente por el punto estacionario y es de la forma

$$y_{0,r+2}(t) = \exp\left(-i\frac{c't^2}{2h}\right) \sqrt{2\pi(c'-b')} (|c'-b'|t)^\sigma e^{i\pi\sigma} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) + o(h^\delta),$$

$$y_{0,r+1}(t) = \exp\left(-i\frac{c't^2}{2h}\right) \sqrt{2\pi(c'-b')} (|c'-b'|t)^{\sigma-1} e^{i\pi(\sigma-1)} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) + o(h^\delta),$$

$$y_{0,j}(t) = o(|y_{1,r+2}(t)|) \text{ para } j = 1, \dots, r.$$

2) Existen r soluciones linealmente independientes $y_q, q = 1, \dots, r$, tales que

$$y_{q,j}(t) = \exp\left(i\frac{at^2}{2h}\right) C_{q,j} + o(1), \quad C_{q,j} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad j = 1, \dots, r, \\ y_{q,r+1} = O(h^\sigma), \\ y_{q,r+2} = O(h^{\sigma+1}), \quad (1.21)$$

3) La solución asintótica de $(r+2)$ -ésima solución linealmente independiente se obtiene tomando a $C_q = 0, q = 1, \dots, r$, en la fórmula (1.21), poniendo en la fórmula

$$y_{r+2}(t) = \frac{C_{r+2}}{\sqrt{2\pi h}} \int_\gamma \exp \frac{i}{h} \left(pt + \frac{p^2}{2(c-b)} - \frac{bt^2}{2} \right) p^\sigma \chi(p) dp, \quad (1.22)$$

a $C_{r+2} = 1$ y cambiando en la fórmula (1.22) el contorno γ por su conjugado complejo, que pasa por arriba del punto $p = 0$.

Nota 1 En el caso cuando $\sigma = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ las fórmulas asintóticas tienen una forma un poco diferente.

En el Capítulo 2 de la tesina la solución del problema (1.19) se busca en la clase de funciones vectoriales con las componentes de la forma

$$\int_{\gamma} e^{\frac{i}{h}pt} dp \left\{ e^{\frac{i}{h}S_{f,0}} \nu_{f,0}(p, h) + \sum_{k=1}^N \int_{p_0}^p dp_k \int_{p_0}^{p_k} dp_{k-1} \dots \int_{p_0}^{p_2} \exp\left(\frac{i}{h}S_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k)\right) \nu_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, h) dp_1 \right\}, \quad (1.23)$$

donde $p_j \in \gamma, j = 0, \dots, N$, el contorno γ está presentado en la Figura 2:

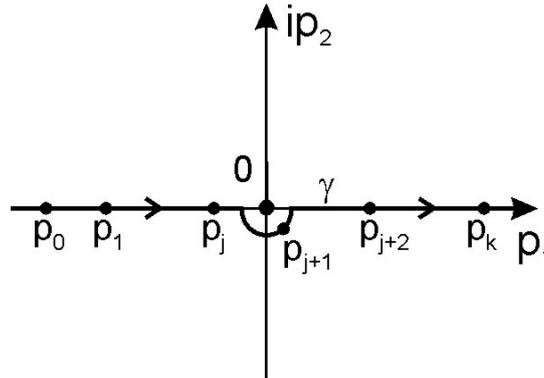


Figura 2

y $f = 1, 2; N \in \mathbb{N}$, las fases $S_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k)$ son de la forma

$$S_{1,k}(p, p_1, \dots, p_k) = \int_{p_0}^{p_1} \lambda_1(s) ds + \int_{p_1}^{p_2} \lambda_2(s) ds + \dots + \int_{p_k}^p \lambda_l(s) ds,$$

donde $l = 2$ para números $(k + 1)$ pares, y $l = 1$ para números $(k + 1)$ impares,

$$S_{2,k}(p, p_1, \dots, p_k) = \int_{p_0}^{p_1} \lambda_2(s) ds + \int_{p_1}^{p_2} \lambda_1(s) ds + \dots + \int_{p_k}^p \lambda_q(s) ds,$$

donde $q = 1$ para números $(k + 1)$ pares, y $q = 2$ para números $(k + 1)$ impares, y se tiene que $\lambda_1(p) = p/(a - b)$, $\lambda_2(p) = p/(c - b)$. Las soluciones asintóticas de multifase de la forma (1.23) para el caso cuando la matriz A del sistema (1.19) no tiene cajas de Jordan fueron introducidos por primera vez en el trabajo [5], unos años más tarde en los trabajos de Kumano-Go, vease [6] fueron introducidas unas soluciones asintóticas de multifase de otro tipo. En este trabajo de tesis se desarrolla un nuevo método asintótico basado en el método de V.V. Kucherenko, para el caso cuando la matriz A del sistema (1.19) tiene una caja de Jordan en los puntos de cambio de multiplicidad del sistema. Este problema no fue resuelto anteriormente.

En efecto, se sugiere buscar las componentes $\nu_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, h)$ en una clase de funciones $\mathcal{L}^{f,k}$. Las funciones de esta clase son analíticas con respecto a p, p_1, \dots, p_k , y son de la forma

$$\nu_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, h) = \prod_{\alpha=0}^k \sum_{m,l,j=0}^M \left\{ \psi_{f,k}(p_0, p_1, \dots, p_k) \times \phi_{f,k}(p_0, p_1, \dots, p_k) \left(\frac{h}{p_\alpha}\right)^j h^l (\ln p_\alpha)^l p_\alpha^m C_{m,l,j}(h) \right\} \Big|_{p_0=p} \quad (1.24)$$

donde $f = 1, 2; M < \infty$; $\psi_{f,k}$ son $C^\infty(\mathbb{R}^{k+1})$ -funciones con respecto a p_0, p_1, \dots, p_k ; $C_{m,l,j}(h)$ son

polinomios en h con $C^\infty(\mathbb{R}^{k+1})$ -coeficientes en p_0, p_1, \dots, p_k ; y las funciones $\phi_{f,k}$ son de la forma

$$\begin{aligned} \phi_{1,0}(p) &\in C^\infty(\mathbb{R}^1), \\ \phi_{1,1}(p, p_1) &= \left(\frac{p}{p_1}\right)^\sigma, \\ \phi_{1,k}(p, p_1, \dots, p_k) &= \begin{cases} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\sigma \frac{1}{p_2} \left(\frac{p_4}{p_3}\right)^\sigma \frac{1}{p_4} \dots \left(\frac{p_{2l}}{p_{2l-1}}\right)^\sigma \frac{1}{p_{2l}} \left(\frac{p}{p_{2l+1}}\right)^\sigma, & \text{para } k = 2l + 1, \\ \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\sigma \frac{1}{p_2} \left(\frac{p_4}{p_3}\right)^\sigma \frac{1}{p_4} \dots \left(\frac{p_{2l}}{p_{2l-1}}\right)^\sigma \frac{1}{p_{2l}}, & \text{para } k = 2l, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.25)$$

y

$$\begin{aligned} \phi_{2,0}(p) &= p^\sigma, \\ \phi_{2,1}(p, p_1) &= p_1^{\sigma-1}, \\ \phi_{2,k}(p, p_1, \dots, p_k) &= \begin{cases} p_1^{\sigma-1} \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^\sigma \frac{1}{p_3} \left(\frac{p_5}{p_4}\right)^\sigma \frac{1}{p_5} \dots \frac{1}{p_{2l-1}} \left(\frac{p_{2l+1}}{p_{2l}}\right)^\sigma \frac{1}{p_{2l+1}}, & \text{para } k = 2l + 1, \\ p_1^{\sigma-1} \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^\sigma \frac{1}{p_3} \left(\frac{p_5}{p_4}\right)^\sigma \frac{1}{p_5} \dots \frac{1}{p_{2l-1}} \left(\frac{p}{p_{2l}}\right)^\sigma, & \text{para } k = 2l, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.26)$$

donde $l \in \mathbb{N}$ y

$$\sigma = -i \frac{b_{(r+2)(r+1)}(0) d}{c - b}. \quad (1.27)$$

1.5. Construcción de las soluciones asintóticas locales para ecuaciones en derivadas parciales con características de multiplicidad triple

Se considera un sistema real hiperbólico de primer orden de la forma

$$-ih \frac{\partial u}{\partial t} + (-i) h \sum_{r=1}^n A_r(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_r} + (-i) h B(t, x) u = 0, \quad u \in \mathbb{R}^n \quad (1.28)$$

con los datos iniciales

$$u|_{t=0} = \phi(x) \exp\left(\frac{i}{h} S_0(x)\right), \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), S_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \nabla S_0|_{\text{Supp}\phi} \neq 0, \quad (1.29)$$

donde $h \in (0, 1]$, y $B; A_r, r = 1, \dots, n$, son funciones matriciales reales de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de dimensión $(n \times n)$.

Para simplificar la notación los valores propios $\lambda_1(t, x, \xi), \lambda_2(t, x, \xi), \lambda_3(t, x, \xi)$ del símbolo del sistema (1.28) se denotarán por $a(t, x, \xi), b(t, x, \xi), c(t, x, \xi)$, respectivamente.

Definición 6 Sean $\Sigma_{12}, \Sigma_{13}, \Sigma_{23}, \Sigma_{123}$ los conjuntos de puntos $(x', \xi) \subset \mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1}$ definidos como:

$$\begin{aligned} \Sigma_{12} &:= \{(x', \xi) : a(t, x, \xi) = b(t, x, \xi), a(t, x, \xi) \neq c(t, x, \xi)\}, \\ \Sigma_{13} &:= \{(x', \xi) : a(t, x, \xi) = c(t, x, \xi), a(t, x, \xi) \neq b(t, x, \xi)\}, \\ \Sigma_{23} &:= \{(x', \xi) : b(t, x, \xi) = c(t, x, \xi), b(t, x, \xi) \neq a(t, x, \xi)\}, \\ \Sigma_{123} &:= \{(x', \xi) : a(t, x, \xi) = b(t, x, \xi) = c(t, x, \xi)\}. \end{aligned}$$

Se tiene el caso presentado en la Figura 3:

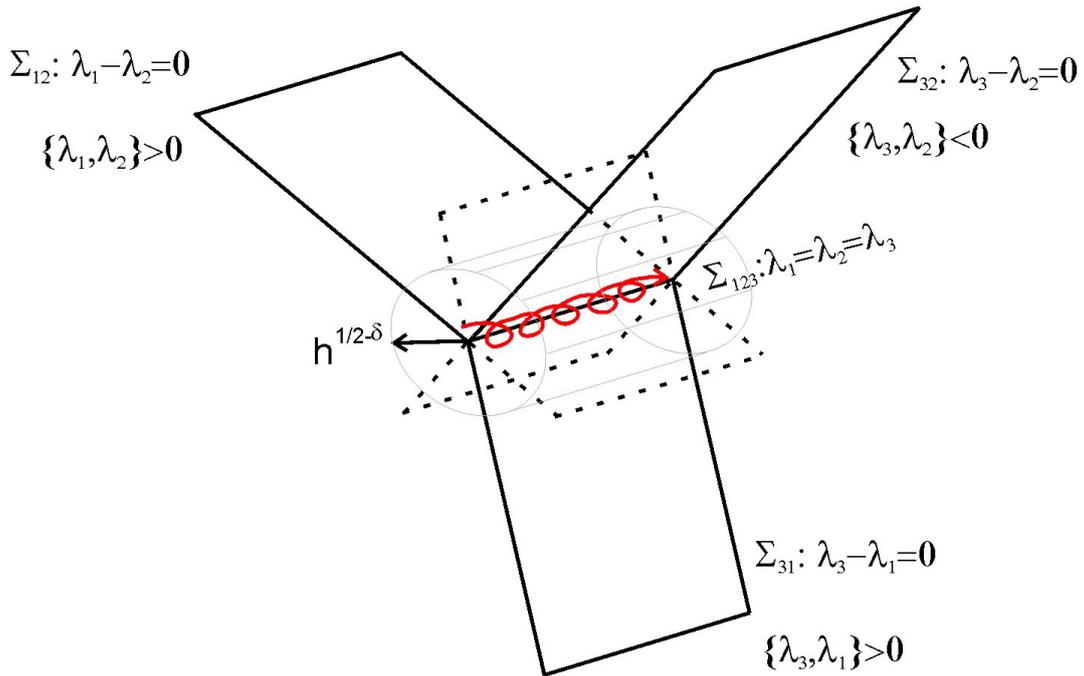


Figura 3

En $\Omega_{x'_0, \xi_0}, (x'_0, \xi_0) \in \Sigma_{123}$, el sistema (1.28) se reduce microlocalmente al siguiente sistema con un parámetro pequeño cerca de la derivada:

$$-ih \frac{\partial y}{\partial t} + A \left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) y + hB \left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) y = 0, \quad (1.30)$$

aquí $y \in \mathbb{C}^{r+2}, r \geq 1$, y el operador matricial $A(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x})$ tiene la forma

$$A \left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) = \begin{bmatrix} Ia \left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) & 0 & 0 \\ 0 & b \left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) & d \left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ 0 & 0 & c \left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{bmatrix}. \quad (1.31)$$

En lo que sigue se supone que se satisface la condición siguiente.

Condición 5 Suponga que los símbolos $a(t, x, \xi), b(t, x, \xi), c(t, x, \xi) \in S^m (\not\in x'_0, \xi_0)$ son tales que

$$\{\eta - a, \eta - b\} |_{\Sigma_{12}} \neq 0, \{\eta - a, \eta - c\} |_{\Sigma_{13}} \neq 0, \{\eta - b, \eta - c\} |_{\Sigma_{23}} \neq 0.$$

La solución asintótica en este caso se construye de manera análoga al caso unidimensional, i.e. como una solución asintótica de multifase. En una ε -vecindad de Σ_{123} la solución asintótica tiene la forma

$$\int_{\gamma} e^{\frac{i}{h} p t} dp \left\{ e^{\frac{i}{h} S_{f,0}(x,p)} \nu_{f,0}(x, p, h) + \sum_{k=1}^N \int_{p_0}^p dp_k \int_{p_0}^{p_k} dp_{k-1} \dots \int_{p_0}^{p_2} \exp \left(\frac{i}{h} S_{f,k}(x, p, p_1, \dots, p_k) \right) \nu_{f,k}(x, p, p_1, \dots, p_k, h) dp_1 \right\}, \quad (1.32)$$

donde $p_j \in \gamma, j = 0, \dots, N$, el contorno γ está presentado en la Figura 2.

Para la construcción de las soluciones globales se usa el método V.P. Maslov y que las soluciones construidas por este nuevo método tienen su frente de onda concentrada en las variedades de Lagrange

$$\Lambda^n(p, p_1, \dots, p_m), \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

En la Figura 4 se describe el modelo de propagación de ondas en el caso de cambio de multiplicidad.

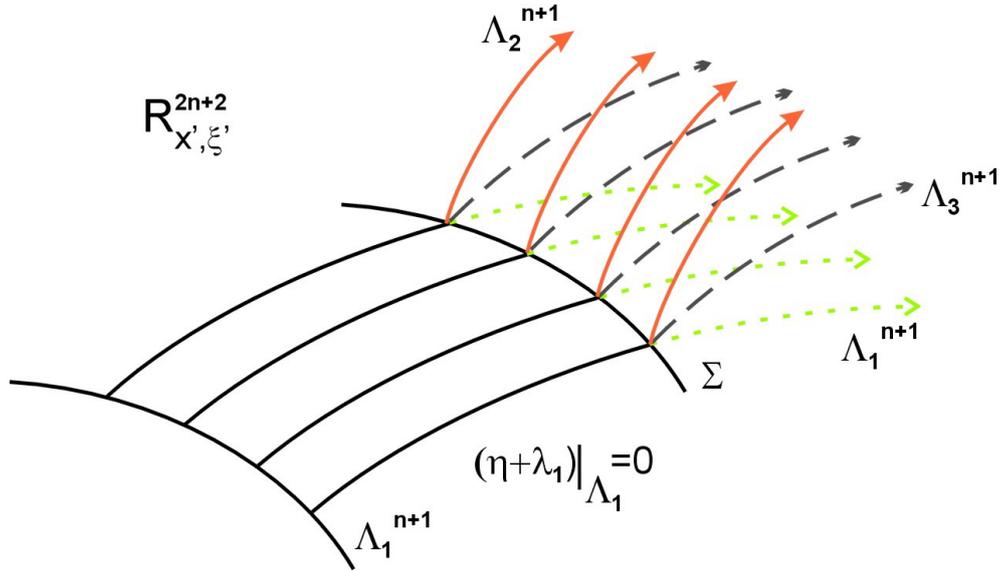


Figura 4 - Propagación de ondas

Por lo tanto la propagación de ondas se determina por unas trayectorias de ramificación.

Se determinaron casos cuando algunas de estas trayectorias de ramificación no se salen de una ε -vecindad de Σ_{123} , para $\forall \varepsilon > 0$. De lo cual se siguen los teoremas de no existencia de las soluciones del problema de Cauchy. Además se determinaron las condiciones bajo las cuales no existen ciclos cerrados en todas las vecindades de Σ_{123} , que permiten demostrar el teorema de existencia de solución de problema de Cauchy con pérdida de suavidad, i.e. para los datos iniciales en H^S la solución del problema de Cauchy para $t \in [0, T]$ existe en $H^{S-\Delta(T)}$, con $S \geq \Delta(T)$.

En este caso para todo $t_0 \in [0, T]$ el periodo de tiempo t durante el cual el punto $(t, x(t); \xi(t))$ puede regresar a $\Sigma_{12} \cup \Sigma_{13} \cup \Sigma_{23}$ satisface la condición

$$t - t_0 \geq \Delta(T), \quad \Delta(T) > 0, \tag{1.33}$$

con una constante positiva $\Delta(T)$.

Sea q el mínimo número natural tal que $q > (1/2 - \gamma)_+$, aquí $(1/2 - \gamma)_+ = (1/2 - \gamma)$ si $(1/2 - \gamma) > 0$; y $(1/2 - \gamma)_+ = 0$ si $(1/2 - \gamma) \leq 0$.

Condición 6 Suponga que

$$a(0, x, \xi) = b(0, x, \xi) = c(0, x, \xi),$$

y para $t > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} a(t, x, \xi) &\neq b(t, x, \xi), \\ a(t, x, \xi) &\neq c(t, x, \xi), \\ c(t, x, \xi) &\neq b(t, x, \xi). \end{aligned}$$

En este caso se tiene que

$$\Sigma_{12} = \Sigma_{13} = \Sigma_{23} = \Sigma_{123} = \mathbb{R}_{x,\xi}^{2n},$$

y es válido el teorema siguiente.

Teorema 3 *Suponga que $u \in \mathbb{R}^n$, $x' = (t, x)$ matrices $C, A_r, r = 1, \dots, n$, son $C^\infty(\mathbb{R}_{x'}^{n+1})$ funciones matriciales reales. Suponga que existen unas matrices $\tilde{C}(t), \tilde{A}_r(t) \in C^\infty((-T, T))$ tales que las derivadas $\partial_x^m \partial_t^l (C - \tilde{C}(t))$ y $\partial_x^m \partial_t^l (A_r - \tilde{A}_r(t))$ para $m, l \geq 0$ pertenecen al espacio de Schwarz con respecto a x . Suponga además que el símbolo principal del sistema (1.28), i.e. $Q(x', \xi') := \eta I + \sum_{\nu=1}^n A_\nu(x') \xi_\nu, x' = (t, x), \xi' = (\eta, \xi), x' \in \mathbb{R}^{n+1}, \xi \in \mathbb{R}^n$ es hiperbólico con respecto a η . Además suponga que se satisfacen las Condiciones 5 y 6. En este caso la solución del problema de Cauchy con $f(t, x) \in H_{k-1}(\mathbb{R}^n \times (-T, T)), k \in \mathbb{N}$, y los datos iniciales en $H_k(\mathbb{R}^n)$, existe y es única en el espacio $H_{k-m}(\mathbb{R}^n \times (-T, T)), m = ([T/\Delta(T)] + 1)q$, para $k - m - 1 \geq 0$. Aquí $\Delta(T)$ es la constante definida por la fórmula (1.33).*

Capítulo 2

Condiciones de cuantización

2.1. Las condiciones de cuantización para el problema matricial de Sturm-Liouville en el caso de las características de multiplicidad variable

2.1.1. Resultados principales

Se considera el problema matricial de Sturm-Liouville siguiente:

$$\left(-ih\frac{d}{dx}\right)^2 y + A(x)y = Ey; x \in \mathbb{R}^1; y(x) \in L_2(\mathbb{R}^1); \quad (2.1)$$

donde $y \in \mathbb{C}^n$; $h \in (0, 1]$ es un parámetro pequeño. El problema matricial de Sturm-Liouville ocurren en mecánica cuántica (veanse [1], [2]) y en la nanotecnología (veanse [3], [16]).

Sea $A(x) = A(x)^*$ una función matricial de dimensión $(n \times n)$ de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ y tal que el operador (2.1) es esencialmente autoconjugado en $L_2(\mathbb{R}^1)$ (vea [17]). Los valores propios de la matriz autoconjugada $A(x)$ se denotan por $\lambda_j(x)$, $j = 1, \dots, n$. Sean $e_j(x)$ los vectores propios ortonormales de la matriz $A(x)$, i.e., $A(x)e_j(x) = \lambda_j(x)e_j(x)$. Cuando sobre un conjunto abierto $V \subseteq \mathbb{R}^1$ la matriz autoconjugada $A(x)$ es una función analítica, se tiene que los valores propios y los vectores propios de la matriz son funciones analíticas sobre el conjunto V (vea [18]). Por lo tanto se puede suponer que se satisfacen las condiciones siguientes.

Condición 7 *Suponga que la matriz $A(x)$ tiene la forma $A(x) = \mathbf{U}(x) \|\lambda_j(x)\delta_{ij}\| \mathbf{U}^*(x)$, donde $\mathbf{U}(x)$ es una función matricial unitaria de la clase C^∞ definida sobre \mathbb{R}^1 y se tiene que $\lambda_j(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\text{Im } \lambda_j \equiv 0$, son valores propios reales de la matriz $A(x)$. Sea D el conjunto de los puntos x donde los valores propios cambian su multiplicidad. Además se supone que D es un conjunto discreto y la diferencia $(\lambda_i - \lambda_j)$ de cualesquiera dos valores propios λ_i y λ_j que coinciden sobre el conjunto D tiene un cero de orden finito sobre D .*

Condición 8 *Sean γ_j las curvas en el espacio de fase $\mathbb{R}_{x,p}^2$ definidas como:*

$$p^2 + \lambda_j(x) = E, \quad j = 1, \dots, k \leq n. \quad (2.2)$$

Suponga que las curvas γ_j son compactas y que la condición $d\lambda_j(x)/dx \neq 0$ se satisface para todos los puntos x tales que $\lambda_j(x) = E$. Además se supone que sobre el conjunto $(E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, no existe un espectro continuo y que $E \in (E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$.

Por lo tanto las curvas γ_j son variedades unidimensionales de la clase C^∞ en $\mathbb{R}_{x,p}^2$. Sea π_x la proyección de $\mathbb{R}_{x,p}^2$ sobre \mathbb{R}_x^1 y sea $\pi_x(\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k)$ la proyección del conjunto $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$ sobre \mathbb{R}_x^1 .

En el caso cuando todas las curvas γ_j son disjuntas son válidas las condiciones de cuantización de Born-Sommerfeld-Maslov (veanse [9], [19]). En este capítulo se determinan las condiciones de cuantización en el caso cuando las curvas $\gamma_j, j = 1, \dots, k, k \geq 2$, se intersectan de manera no trivial.

Abajo se describen algunas propiedades básicas de las aproximaciones asintóticas WKB (vea [8]). Se supone que los valores propios $\lambda_j(x_1), j = 1, \dots, n$, tienen la multiplicidad uno (son distintos a pares) en los puntos x_1 y que los impulsos $p_j(x_1) := \sqrt{E - \lambda_j(x_1)}$ son positivos. En este caso todos los impulsos son distintos a pares en una vecindad V_{x_1} y se tiene que $p_j(x) > 0$. Existen $2n$ soluciones linealmente independientes y_j^\pm del problema (2.1) con la aproximación asintótica WKB de la forma:

$$y_j^\pm = \exp\left(\frac{i}{h} S_j^\pm(x)\right) \left[\frac{e_j(x) \rho_j^\pm}{\sqrt{|p_j|}} + h \psi_j^\pm + O(h^2) \right], \quad (2.3)$$

$$S_j^+(x) := \int_{x_0}^x p_j(x) dx, \quad S_j^-(x) := \int_x^{x_0} p_j(x) dx.$$

El residuo $O(h^2)$ es tal que $O(h^2) \in C^\infty(V_{x_1})$, y $d^j O(h^2)/dx^j = O(h^2)$. Las amplitudes ρ_j^\pm satisfacen el ecuación de transporte siguiente:

$$\frac{d\rho_j^\pm}{dx} + \left(\frac{de_j}{dx}, e_j \right) \rho_j^\pm = 0. \quad (2.4)$$

Es posible reescribir la ecuación (2.4) en una forma invariante para las cartas en "x" y "p"-representaciones (vea [19]). De hecho sobre la curva γ_j se puede considerar a las amplitudes ρ_j^\pm como funciones de un parámetro global t (vea [9]). Sobre la curva γ_j las funciones $x_j(t), p_j(t)$ son soluciones del sistema de Hamilton siguiente:

$$\frac{dx}{dt} = 2p, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{d\lambda_j}{dx}; \quad \{x(0), p(0)\}_{\gamma_j} \in \gamma_j. \quad (2.5)$$

Evidentemente las soluciones del sistema de Hamilton (2.5) para $j = 1, 2, \dots, k$, son funciones periódicas con algunos períodos T_j . Para la aproximación asintótica WKB con signo "+" los puntos iniciales sobre las curvas γ_j se eligen como $\{x(0), p(0)\}_{\gamma_j} = \left\{ x_0, p = \sqrt{E - \lambda_j(x_0)} \right\}$, y para la aproximación asintótica WKB con signo "-" como $\left\{ x_0, p = -\sqrt{E - \lambda_j(x_0)} \right\}$. Sobre la curva γ_j la ecuación de transporte (2.4) puede ser reescrita en la forma invariante:

$$\frac{d\rho_j^\pm}{dt} + 2p \left(\frac{de_j}{dx}, e_j \right) \rho_j^\pm = 0, \quad \text{here } p = p_j(t), \quad x = x_j(t); \quad \text{Re} \left(\frac{de_j}{dx}, e_j \right) = 0. \quad (2.6)$$

Es importante subrayar que debido a la Condición 7, la ecuación de transporte (2.6) sigue siendo válida hasta cuando los valores propios cambian su multiplicidad.

En la fórmula (2.3) las funciones ψ_j^\pm son de la forma:

$$\psi_j^\pm = i2p_j \frac{\rho_j^\pm}{\sqrt{|p_j|}} [p_j^2 + A(x) - E]^{-1} \left(\frac{de_j}{dx} - e_j(x) \left(\frac{de_j}{dx}, e_j \right) \right). \quad (2.7)$$

Condición 9 (*Posición general*) Suponga que se satisfacen las Condiciones 7 y 8 para $\gamma_j, j = 1, \dots, n$, donde todas las curvas γ_j son compactas, las ecuaciones $\lambda_j(x) = E$ tienen una cantidad finita de soluciones sobre cada curva y que $d\lambda_j(x)/dx \neq 0$ en estos puntos. Además se supone que sobre el conjunto de cambio de multiplicidad D se tiene que $\lambda_j|_D \neq E, j = 1, \dots, n$. Suponga que cualesquiera dos curvas que se intersectan entre si tienen una cantidad finita de intersecciones y que los valores propios λ_j, λ_q que coinciden sobre el conjunto D satisfacen que:

$$d(\lambda_j - \lambda_q)/dx|_D \neq 0 \text{ para } j \neq q. \tag{2.8}$$

El índice de Maslov (veanse [9],[19]) de la curva γ_j se denotará por $Ind(\gamma_j(E))$.

Teorema 4 (*Teorema Principal*) Suponga que la curva γ_j se intersecta solamente con las curvas $\gamma_{l_\alpha}, \alpha = 1, \dots, k \leq n - 1$, y que se satisfacen las Condiciones 7, 8 y 9. Sea $E = E(h)$ una función definida sobre $(0, 1]$ y tal que $E(h) \in (E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$. Además se supone que en el intervalo $(E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$ el operador (2.1) no tiene un espectro continuo. Si para un número $m(h) \in \mathbb{Z}$ y una constante $C > 0$ se cumple que

$$\frac{1}{h} \int_{\gamma_j(E)} p dx - \frac{\pi}{2} Ind(\gamma_j(E)) = 2\pi m(h), \tag{2.9}$$

$$\left| \exp i \left\{ \frac{1}{h} \int_{\gamma_{i_\alpha}(E)} p dx - \frac{\pi}{2} Ind(\gamma_{i_\alpha}(E)) \right\} - 1 \right| \geq C > 0, \alpha = 1, \dots, k, \tag{2.10}$$

entonces existen unos valores propios $E_{eg}(h) \in (E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$ del problema de Sturm-Liouville (2.1) tales que $E(h) - E_{eg}(h) = O(h^2)$.

El teorema principal implica que en el caso no resonante (2.10) las condiciones de cuantización de Born-Zommerfeld-Maslov (2.9) determinan la solución asintótica de los valores propios con la precisión $O(h^2)$, como en el caso cuando no hay cambio de multiplicidad. En el caso de cambio de multiplicidad no trivial, el comportamiento asintótico de las funciones propias tiene una forma diferente. La solución asintótica de una función propia tiene orden $O(1)$ sobre la curva γ_j cuantizada por la condición (2.9) y tiene orden $O(\sqrt{h})$ sobre las curvas $\gamma_{l_\alpha}, \alpha = 1, \dots, k$, que intersectan a la curva γ_j . Además la solución asintótica de una función propia tiene orden $O(h)$ sobre las curvas que no intersectan a la curva γ_j pero intersectan a las curvas $\gamma_{l_\alpha}, \alpha = 1, \dots, k$, y tiene orden 0 sobre las curvas que no intersectan ni a la curva γ_j ni a las curvas $\gamma_{l_\alpha}, \alpha = 1, \dots, k$. Es posible demostrar que en el caso resonante el valor propio se divide y que esta división tiene orden $O(h^{3/2})$. El teorema principal será demostrado más adelante. Es importante subrayar que en el caso cuando las curvas γ_j no satisfacen la condición (2.8) en la condición de cuantización (2.9) aparecen términos adicionales.

2.1.2. Matrices de transición y sus aplicaciones a las condiciones de cuantización

Sean $U_j, j = 1, \dots, k$, unas cartas sobre γ_j tales que $p|_{U_j} \geq 0$. Suponga que

$$\pi_x(U_j) = (x_0 - \delta < x < x_0), j = 1, \dots, k,$$

y que $D \cap (x_0 - \delta < x < x_0) = \emptyset$. Se considera la solución asintótica WKB asy_j^+ en las cartas U_j . Usando el método desarrollado en el trabajo [5] es posible extender la solución asintótica WKB desde las cartas U_j a lo largo de la unión $\gamma_1 \cup \gamma_2 \dots \cup \gamma_k$ de las curvas $\gamma_j, j = 1, \dots, k$, en la dirección de las manecillas de reloj. Sea x_0 un punto que satisface las condiciones siguientes.

Condición 10 Suponga que los valores propios $\lambda_j(x), j = 1, \dots, k, k \geq 2$, coinciden en un solo punto $x_0 \in \pi_x(\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k)$ y que $\lambda_1(x_0) = \dots = \lambda_k(x_0) \neq E$. Además se supone que los valores propios $\lambda_j(x), j = k+1, \dots, n$, tienen multiplicidad uno sobre el conjunto $\pi_x(\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k)$ y que los ceros de las funciones $\lambda_j(x) - \lambda_l(x), 1 \leq j, l \leq k, j \neq l$, tienen un orden finito en el punto x_0 .

Suponga que se satisfacen las Condiciones 7,8 y 10. Para las soluciones asintóticas WKB asy_j^\pm por la izquierda y por la derecha del punto x_0 los datos iniciales de la ecuación de transporte y de las fases S_j sobre las curvas γ_j en el momento $t = 0$ se definen en un mismo punto $\{x(0), p(0)\}_{\gamma_j} = \{x_0, p = \pm \sqrt{E - \lambda_1(x_0)}\} \in \gamma_1 \cap \dots \cap \gamma_k$. Sean $\widetilde{S}_j(t)$ las funciones definidas sobre las curvas γ_j de la forma:

$$\widetilde{S}_j(t) = \int_0^t p_j(t) \left[\frac{dx_j(t)}{dt} \right] dt. \quad (2.11)$$

Sea $t_j(x)$ la solución de la ecuación $x_j(t) = x$. En lo que sigue se tiene que

$$S_j(x) = \widetilde{S}_j(t) \Big|_{t_j(x)}. \quad (2.12)$$

Evidentemente en este caso cuando una carta U_x sobre γ_j es tal que la proyección π_x es un difeomorfismo $U_x \rightarrow \pi_x(U_x)$, se tiene que $t_j(x) \in C^\infty(\pi_x(U_x))$. Note que las funciones $t_j(x)$ están definidas con precisión hasta un periodo T_j .

Lema 1 (Matrices de transición) Suponga que se satisfacen las Condiciones 7,8 y 10.

1° Sean $y_j^+, j = 1, \dots, k$, las soluciones del sistema (2.1) que en el intervalo $(x_0 - \delta/2 < x < x_0)$ tienen el comportamiento asintótico (2.3) con el signo "+", la amplitud $\rho_{j,left}^+$ y los datos iniciales $\rho_{j,left}^+(0)$. En este caso existe una matriz unitaria \mathbf{u}_{left} de dimensión $(k \times k)$ tal que en el intervalo $(x_0 < x < x_0 + \delta/2)$ las soluciones $y_j^+, j = 1, \dots, k$, tienen el comportamiento asintótico

$$y_j^+ = \sum_{m=1}^k \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_m^+(x) \right\} \left[\frac{e_m(x) \rho_{mj,right}^+(x)}{\sqrt{|p_m(x)|}} + \hbar \psi_{mj,right}^+(x) + O(\hbar^2) \right]. \quad (2.13)$$

Aquí los datos iniciales $\rho_{mj,right}^+(0)$ para las amplitudes $\rho_{kj,right}^+$ tienen la forma

$$\begin{aligned} \{\rho_{11,right}^+(0), \dots, \rho_{k1,right}^+(0)\}^t &= \mathbf{u}_{left} \{\rho_{1,left}^+(0), \dots, 0\}^t, \dots, \\ \{\rho_{1k,right}^+(0), \dots, \rho_{kk,right}^+(0)\}^t &= \mathbf{u}_{left} \{0, \dots, \rho_{k,left}^+(0)\}^t. \end{aligned} \quad (2.14)$$

El símbolo $\{\dots\}^t$ en la fórmula (2.14) denota la transposición.

2° Sean $y_j^-, j = 1, \dots, k$, las soluciones del sistema (2.1) que en el intervalo $(x_0 < x < x_0 + \delta/2)$ tienen el comportamiento asintótico (2.3) con el signo "-", la amplitud $\rho_{j,right}^-$ y los datos iniciales $\rho_{j,right}^-(0)$. En este caso existe una matriz unitaria \mathbf{u}_{right} de dimensión $(k \times k)$ tal que en el intervalo $(x_0 - \delta/2 < x < x_0)$ las soluciones $y_j^-, j = 1, \dots, k$, tienen el comportamiento asintótico

$$y_j^- = \sum_{m=1}^k \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_m^-(x) \right\} \left[\frac{e_m(x) \rho_{mj,left}^-(x)}{\sqrt{|p_m(x)|}} + \hbar \psi_{mj,left}^-(x) + O(\hbar^2) \right], \quad (2.15)$$

y los datos iniciales $\rho_{mj,left}^-(0)$ de las amplitudes $\rho_{mj,left}^-$ tienen la forma

$$\begin{aligned} \{\rho_{11, \text{left}}^-(0), \dots, \rho_{k1, \text{left}}^-(0)\}^t &= \mathbf{u}_{\text{right}} \{\rho_{1, \text{right}}^-(0), \dots, 0\}^t, \dots; \\ \{\rho_{1k, \text{left}}^-(0), \dots, \rho_{kk, \text{left}}^-(0)\}^t &= \mathbf{u}_{\text{right}} \{0, \dots, \rho_{k, \text{right}}^-(0)\}^t. \end{aligned} \quad (2.16)$$

3º Determinantes de las matrices \mathbf{u}_{left} , $\mathbf{u}_{\text{right}}$ satisfacen la igualdad

$$\det \mathbf{u}_{\text{left}} = \det \mathbf{u}_{\text{right}} + O(\hbar^2). \quad (2.17)$$

La demostración y la evaluación de las matrices \mathbf{u}_{left} y $\mathbf{u}_{\text{right}}$ se obtiene usando las soluciones asintóticas locales en una vecindad del punto $x_0 \in D$ (vea la Sección "Soluciones asintóticas de multifase y sus aplicaciones"). Evidentemente las matrices \mathbf{u}_{left} , $\mathbf{u}_{\text{right}}$ dependen del parámetro de la energía E .

Usando las matrices \mathbf{u}_{left} y $\mathbf{u}_{\text{right}}$ es posible introducir las condiciones de cuantización en una forma diferente de las condiciones (2.9), (2.10). En lo que sigue se supone que se satisface la Condición 10 para $k = 2$. Ahora se construirá una generalización del operador de Maslov (ver [5],[9],[19]) sobre la unión $\gamma_1 \cup \gamma_2$. Sean $U_j, j = 1, 2$, cartas sobre γ_j tales que $p|_{U_j} \geq 0$. Se supone que las proyecciones $\pi_x(U_j), j = 1, 2$, son difeomorfas al intervalo $(x_0 - \delta < x < x_0)$. Se consideran las soluciones asintóticas WKB asy_1^+, asy_2^+ en las cartas $U_j, j = 1, 2$. Usando el Lema 1 y el método de Maslov (ver [19]), es posible extender las soluciones asintóticas WKB desde las cartas $U_j, j = 1, 2$, a lo largo de la unión $\gamma_1 \cup \gamma_2$ de las curvas $\gamma_j, j = 1, 2$, en la dirección de las manecillas de reloj. Sean $A = \{x_0, p = \sqrt{E - \lambda_1(x_0)}\}$ y $B = \{x_0, p = -\sqrt{E - \lambda_1(x_0)}\}$. Evidentemente se tiene que $A \cup B = \gamma_1 \cap \gamma_2$. Se introduce el índice de las curvas $\gamma_j, j = 1, 2$, en la dirección de las manecillas de reloj. El símbolo $\overrightarrow{AB}(\gamma_j)$ denota el arco AB de la curva γ_j recorrido desde el punto A al punto B , i.e. en la dirección de las manecillas de reloj. El índice de Maslov (vea [9],[19]) del arco $\overrightarrow{AB}(\gamma_j)$ se denotará por $Ind(\overrightarrow{AB}(\gamma_j))$. Sea p_j el impulso sobre la curva γ_j . Sean $\mathbf{w}(\overrightarrow{AB}), \mathbf{w}(\overrightarrow{BA})$ unas matrices unitarias definidas como $\|\mathbf{w}(\overrightarrow{AB})\|_{i,j} := \|\delta_{ij} \exp\{\theta_j\}\|$, y $\mathbf{w}(\overrightarrow{BA}) : \|\mathbf{w}(\overrightarrow{BA})\|_{i,j} := \|\delta_{ij} \exp\{\varphi_j\}\|$

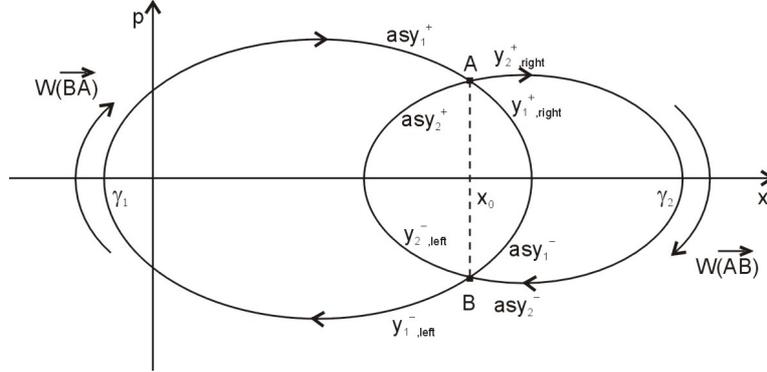


Figura 5: Espectro discreto

donde los ángulos θ_j, φ_j están definidos como

$$\theta_j := \frac{1}{\hbar} \int_{\overrightarrow{AB}(\gamma_j)} p_j dx - \frac{\pi}{2} Ind(\overrightarrow{AB}(\gamma_j)), \quad \varphi_j := \frac{1}{\hbar} \int_{\overrightarrow{BA}(\gamma_j)} p_j dx - \frac{\pi}{2} Ind(\overrightarrow{BA}(\gamma_j)), \quad (2.18)$$

para $j = 1, 2$.

Además se define la matriz $\mathbf{W}(E)$ de la forma:

$$\mathbf{W}(E) := w(\overrightarrow{BA})\mathbf{u}_{right}w(\overrightarrow{AB})\mathbf{u}_{left}, \quad (2.19)$$

cuyo espectro se denota por $\sigma(E)$.

Note que en el caso cuando las curvas $\gamma_j, j = 1, 2$, y los puntos A y B son simétricos con respecto al eje x se tiene que

$$\int_{\overrightarrow{AB}(\gamma_j)} p_j \left(\frac{de_j}{dx}, e_j \right) dt = 0, \quad \int_{\overrightarrow{BA}(\gamma_j)} p_j \left(\frac{de_j}{dx}, e_j \right) dt = 0.$$

Extendiendo de esta manera las soluciones asintóticas sobre la unión $\gamma_1 \cup \gamma_2$ se obtiene el teorema siguiente.

Teorema 5 (Condición de cuantización) *Suponga que se satisfacen las Condiciones 7,8 y 10 para el índice $k = 2$ en la Condición 10. Si la energía $E(h)$ satisface la condición $E(h) \in (E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$ y se tiene que*

$$1 \in \sigma(E(h)) \quad (2.20)$$

entonces existen valores propios $E_{eg}(h)$ del problema (2.1), tales que $E_{eg}(h) - E(h) = O(h^2)$.

Condición (2.20) es válida en el caso cuando existe una ecuación de transporte global para las amplitudes ρ_j^\pm . En este caso es posible aplicar el método desarrollado en los trabajos [5],[19]. De otra manera no es posible suponer que las matrices u_{right} y u_{left} actúan sobre el mismo vector $\{\rho_1^+(0), \rho_2^+(0)\}^t$. Por ejemplo esta excepción ocurre en la ecuación de Weber. En muchas ocasiones es posible calcular la matriz de transición $W(E)$ de manera explícita, aun cuando no existe una ecuación global para las amplitudes ρ_j^\pm . En este caso el vector $\{\rho_1^+(0), \rho_2^+(0)\}^t$ es el valor inicial para la extensión de las amplitudes de forma asintótica a lo largo de las curvas γ_1 y γ_2 . La condición de cuantización en este caso está dada por la misma fórmula (2.20). La condición de cuantización (2.20) es otra forma de las condiciones de cuantización (2.9),(2.10) para el caso cuando se intersectan dos curvas γ_1, γ_2 . Es posible aplicar la condición de cuantización (2.20) hasta en el caso resonante y cuando las curvas γ_1, γ_2 no satisfacen la condición (2.8). Las condiciones de cuantización (2.9) fueron deducidas por V.P.Maslov de la condición (2.20). En unos casos particulares la condición (2.20) fue usada en libros de física (ver [21]).

2.1.3. Forma explícita de la condición de cuantización para una matriz $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ de dimensión (2×2)

Ahora se calcularán las condiciones de cuantización de una manera más explícita. Usando la representación estándar para las matrices unitarias de dimensión (2×2) , se puede representar a las matrices unitarias $\mathbf{u}_{left}, \mathbf{u}_{right}$ de dimensión (2×2) de la forma

$$\mathbf{u}_{left} = e^{i\vartheta(left)} \left\| \begin{array}{cc} e^{i\alpha} \sqrt{1 - |a|^2} & a \\ -\bar{a} & e^{-i\alpha} \sqrt{1 - |a|^2} \end{array} \right\|, \quad \text{con } |a| \leq 1,$$

$$\mathbf{u}_{right} = e^{i\vartheta(right)} \left\| \begin{array}{cc} e^{i\beta} \sqrt{1 - |b|^2} & b \\ -\bar{b} & e^{-i\beta} \sqrt{1 - |b|^2} \end{array} \right\|, \quad \text{con } |b| \leq 1.$$

Se introduce la notación siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{a}\bar{b} &:= |ab| e^{-i\gamma}, \quad \Delta := \varphi_1 + \varphi_2 + \theta_1 + \theta_2, \\ d &:= |ab| \cos \left[\frac{\Delta}{2} - (\varphi_2 + \theta_1 - \gamma) \right] - \\ &\quad \sqrt{(1 - |a|^2)(1 - |b|^2)} \cos \left[\frac{\Delta}{2} - (\varphi_1 + \theta_1 + \alpha + \beta) \right]. \end{aligned}$$

Evidentemente se tiene que $|d| \leq 1$. Calculando directamente se obtiene que

$$\mathbf{W} = e^{i(\vartheta(left) + \vartheta(right))} \|w_{mj}\|, \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} w_{11} &= e^{i(\varphi_1 + \theta_1 + \alpha + \beta)} \sqrt{(1 - |a|^2)(1 - |b|^2)} - \bar{b}\bar{a} e^{i(\varphi_1 + \theta_2)}, \\ w_{12} &= e^{i(\varphi_1 + \theta_1 + \beta)} a \sqrt{1 - |b|^2} + e^{i(\varphi_1 + \theta_2 - \alpha)} b \sqrt{1 - |a|^2}, \\ w_{21} &= -e^{i(\varphi_2 + \theta_1 + \alpha)} \bar{b} \sqrt{1 - |a|^2} - \bar{a} \sqrt{1 - |b|^2} e^{i(\varphi_2 + \theta_2 - \beta)}, \\ w_{22} &= -e^{i(\theta_1 + \varphi_2)} \bar{b} a + e^{i(\varphi_2 + \theta_2 - \alpha - \beta)} \sqrt{(1 - |a|^2)(1 - |b|^2)}. \end{aligned}$$

Además se obtiene la ecuación cuadrática siguiente para los valores propios λ de la matriz \mathbf{W} :

$$\lambda^2 e^{-2i\{\vartheta(left) + \vartheta(right)\}} + 2e^{\frac{i\Delta}{2}} d \lambda e^{-i\{\vartheta(left) + \vartheta(right)\}} + e^{i\Delta} = 0.$$

La condición de cuantización

$$\frac{\Delta}{2} \pm \arccos(-d) + \vartheta(left) + \vartheta(right) = 2\pi n, \quad (2.22)$$

implica que uno de los valores propios de la matriz unitaria \mathbf{W} es igual a uno.

Además de la ecuación (2.17) se sigue que $2\vartheta(left) = 2\vartheta(right) + 2\pi m + O(h^2)$. Por lo tanto se puede reescribir la condición de cuantización (2.22) en la forma

$$\frac{\Delta}{2} \pm \arccos(-d) + 2\vartheta(left) = 2\pi n + \pi m + O(h^2). \quad (2.23)$$

Los parámetros $\alpha, \beta, a, b, \vartheta(left), \vartheta(right)$ de las matrices $\mathbf{u}_{left}, \mathbf{u}_{right}$ pueden ser determinados usando la fórmula (2.37) y el método de la fase estacionaria (ver [22]). Por ejemplo si se tiene que

$$\frac{d(\lambda_1 - \lambda_2)}{dx}(x_0) \neq 0, \quad (2.24)$$

entonces calculando directamente se obtiene que

$$\begin{aligned} \alpha = 0, \quad a &= -\sqrt{\hbar}\omega \exp \left\{ +\frac{i\pi}{4} \right\}, \quad \text{with } \omega = \sqrt{2\pi} \left(\frac{de_2}{dx}, e_1 \right) (x_0) \left| \frac{d(p_1 - p_2)}{dx}(x_0) \right|^{-\frac{1}{2}}, \\ \beta = 0, \quad b &= \sqrt{\hbar}\omega \exp \left\{ -\frac{i\pi}{4} \right\}, \quad \bar{a}\bar{b} = -i\hbar |\omega|^2, \quad \vartheta(left) = o(h). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Suponga ahora que se satisfacen las condiciones (2.23) y (2.24). Sea $E(h) \in (E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$ una función tal que

$$|d(E(h))| \leq 1 - \delta_0, \quad (2.26)$$

para un número $\delta_0 > 0$. En este caso la condición de cuantización (2.23) es equivalente a la condición

$$\theta_1 + \varphi_1 = 2\pi n + O(h) \quad (2.27)$$

o a la condición

$$\theta_2 + \varphi_2 = 2\pi n + O(h). \quad (2.28)$$

En el caso en que se satisfacen las dos condiciones (2.27) y (2.28) la condición (2.26) no puede ser válida. En este caso ocurre una resonancia y se divide el valor propio. De la fórmula (2.23) se sigue que en el caso resonante la condición de cuantización se transforma en la condición

$$\begin{aligned} \theta_1 + \varphi_1 &= 2\pi m + \alpha_1, \\ \theta_2 + \varphi_2 &= 2\pi n + \alpha_2. \end{aligned}$$

Aquí $m + n = 2k$, $m - n = 2l$, y $\alpha_1 \simeq h^{1/2}$, $\alpha_2 \simeq o(h^{1/2})$. El valor exacto de α_1 está dado por la fórmula

$$\alpha_1 = \pm \sqrt{48h |\omega|^2 \pm \sqrt{2304h^2 |\omega|^4 - 384h |\omega|^2 (1 + \sin(\varphi_2 + \theta_1))}}.$$

También pueden existir algunos otros valores de α_1 y α_2 si $|1 + \sin(\varphi_2 + \theta_1)| \ll 1$.

De las fórmulas (2.18) se sigue que las condiciones (2.27) y (2.28) son las condiciones de cuantización de Maslov sobre las curvas γ_1 y γ_2 , respectivamente. Por lo tanto en el caso (2.24),(2.25) y (2.27) se obtiene que

$$\rho_1^+(0) = 1, \rho_2^+(0) = [e^{i(\varphi_2 + \theta_1)} \bar{b} + \bar{a} e^{i(\varphi_2 + \theta_2)}][e^{i(\varphi_2 + \theta_2)} - 1]^{-1} + O(h) \quad (2.29)$$

si

$$\left| e^{i(\varphi_2 + \theta_2)} - 1 \right| \geq C > 0,$$

y en el caso (2.24),(2.25) y (2.28) se obtiene que

$$\rho_2^+(0) = 1, \rho_1^+(0) = -[e^{i(\varphi_1 + \theta_1)} a + e^{i(\varphi_1 + \theta_2)} b][e^{i(\varphi_1 + \theta_1)} - 1]^{-1} + O(h) \quad (2.30)$$

si

$$\left| e^{i(\varphi_1 + \theta_1)} - 1 \right| \geq C > 0.$$

De hecho la condición (2.26) es equivalente a la condición $|e^{i(\varphi_1 + \theta_1)} - 1| \geq C > 0$ ó a la condición $|e^{i(\varphi_2 + \theta_2)} - 1| \geq C > 0$.

2.1.4. Soluciones asintóticas de las funciones propias de un espectro continuo para (2×2) matriz $\mathbf{A}(\mathbf{x})$

Se consideran las soluciones asintóticas de las funciones propias del espectro continuo. Suponga que se satisface la Condición 7. Sea $A(x)$ una matriz (2×2) . Sean $\gamma_j, j = 1, 2$, las curvas definidas por la fórmula (2.2). Suponga que la curva γ_1 es compacta, que la curva γ_2 no lo es y que existe una cantidad finita de puntos x tales que $\lambda_j(x) = E, E \in (E_1 - \varepsilon, E_1 + \varepsilon)$, y $d\lambda_j(x)/dx \neq 0$. Además se supone que $\lim \sqrt{E - \lambda_2(x)} = E, E \in (E_1 - \varepsilon, E_1 + \varepsilon)$, cuando $|x| \rightarrow +\infty$. Se considera el caso cuando $\lambda_1(x) = \lambda_2(x)$ solamente en los puntos $x = x_0, d(\lambda_1(x_0) - \lambda_2(x_0))/dx_0 \neq 0$, y la curva γ_1 satisface la condición de cuantización (2.9) para alguna función $E = E(h), E(h) \in (E_1 - \varepsilon, E_1 + \varepsilon)$.

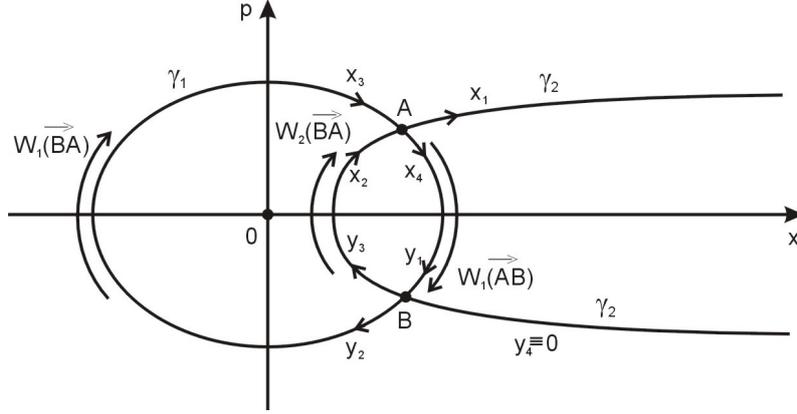


Figura 6: Espectro continuo

Es decir se considera el caso presentado en la Figura 4. El objetivo es determinar la parte adicional $\Delta(h)$ para la energía $E(h)$ tal que para $E(h) + \Delta(h)$ exista sólo una onda saliente x_1 sobre la curva γ_2 , i.e., $y_4 \equiv 0$. Lema 1, Teorema 5, y las fórmulas (2.25) implican que la energía $E = E(h) + \Delta(h)$ tiene que satisfacer la ecuación siguiente:

$$\sqrt{1 - |a|^2} \sqrt{1 - |b|^2} \exp i(\varphi_1 + \theta_1) - \bar{a}\bar{b} \exp i(\varphi_2 + \theta_1) = 1. \quad (2.31)$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene que

$$\Delta(h) = -ih \frac{|a|^2}{T_1} [1 + \sin(\theta_1 + \varphi_2)] - h \frac{|a|^2}{T_1} \cos(\theta_1 + \varphi_2) + O(h^3), \quad (2.32)$$

donde

$$|a|^2 = h2\pi \left| \left(\frac{de_2}{dx}, e_1 \right) (x_0) \right|^2 \left| \frac{d(p_1 - p_2)}{dx} (x_0) \right|^{-1},$$

y T_1 es el periodo del sistema (2.5) sobre γ_1 . Por lo tanto al definir los datos iniciales para la ecuación de Shrödinger como $K_{\gamma_1} \{e_1 \rho_1\}$, se obtiene que el tiempo de vida de estos datos iniciales es del orden h^{-1} . El tiempo de vida incrementa hasta el orden de h^{-2} si $\theta_1 + \varphi_2 = -\pi/2 + 2\pi n + O(h)$. Por lo tanto el tiempo de vida tiene un comportamiento de resonancia.

Ahora se considera el problema de dispersión correspondiente a la Figura 4 cuando se satisfacen las condiciones del Teorema 5. Suponga que la amplitud de y_4 es igual a una constante C y que el punto B es el punto inicial de las amplitudes ρ_{x_1}, ρ_{y_2} de las soluciones asintóticas asx_1, asy_2 . En este caso haciendo algunos cálculos simples se obtiene la fórmula siguiente para la amplitud $\rho_{x_1}(0)$ de la solución asintótica de la solución x_1 y para la amplitud $\rho_{y_2}(0)$ de la solución asintótica de la solución y_2 ,

$$\rho_{y_2}(0) = C e^{i[\vartheta(left) + \vartheta(right)]} \left\{ e^{i(\varphi_1 + \theta_1 + \alpha)} \sqrt{1 - |a|^2} b + e^{i(\varphi_2 + \theta_1 - \beta)} \sqrt{1 - |b|^2} a \right\} \\ \times \left\{ 1 - e^{i[\vartheta(left) + \vartheta(right)]} \left[\sqrt{1 - |a|^2} \sqrt{1 - |b|^2} e^{i(\alpha + \beta + \varphi_1 + \theta_1)} - \bar{a}\bar{b} e^{i(\varphi_2 + \theta_1)} \right] \right\}^{-1}, \quad (2.33)$$

$$\rho_{x_1}(0) = e^{i[\vartheta(left) + \vartheta(right)]} \left[\rho_{y_2}(0) \left\{ -\bar{a} e^{i(\varphi_1 + \beta)} \sqrt{1 - |b|^2} - \bar{b} e^{i(\varphi_2 - \alpha)} \sqrt{1 - |a|^2} \right\} \right. \\ \left. + C \left\{ -\bar{a}\bar{b} e^{i\varphi_1} + \sqrt{1 - |b|^2} \sqrt{1 - |a|^2} e^{i(\varphi_2 - \alpha - \beta)} \right\} \right]. \quad (2.34)$$

Si se satisface la condición (2.24) entonces las expresiones para las amplitudes ρ_{x_1} y ρ_{y_2} se simplifican. En este caso los polos de (2.33) son las soluciones de (2.31), $E = E(h) + \Delta(h)$, donde la función $E(h)$ satisface la condición de cuantización (2.9) y $\Delta(h)$ se determina por la fórmula (2.32).

2.1.5. Soluciones asintóticas de multifase y sus aplicaciones

Para demostrar el Teorema 4 se generaliza el método asintótico desarrollado en el trabajo [5] para las ecuaciones del segundo orden. Las soluciones asintóticas de multifase es una generalización natural del método WKB para el caso cuando los valores propios λ_j tienen una multiplicidad variable. En lo que sigue se supone que se satisfacen las Condiciones 7, 8 y 10.

Denote por (l, m) el conjunto l_1, \dots, l_m , donde $1 \leq l_q \leq k, q = 1, \dots, m$, y suponga que $l_f \neq l_{f+1}$ para $f = 1, 2, \dots, m-1$. Sea c un punto del intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta/2)$. Ahora se introducirá la cadena de funciones de fase:

$$S_{l_1} = \int_{x_0}^x p_{l_1}(t) dt; \dots; S_{l_1, \dots, l_m}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, x) = \int_{x_0}^{\tau_1} p_{l_1}(t_1) dt_1 \quad (2.35)$$

$$+ \int_{\tau_1}^{\tau_2} p_{l_2}(t_2) dt_2 + \dots + \int_{\tau_{m-1}}^x p_{l_m}(t_m) dt_m.$$

Evidentemente se tiene que

$$\frac{\partial S_{l_1, \dots, l_m}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, x)}{\partial x} = p_{l_m}(x), \quad \frac{\partial S_{l_1, \dots, l_m}(\tau_1, \dots, x, x)}{\partial x} = p_{l_{m-1}}(x), \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial S_{l_1, \dots, l_m}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, x)}{\partial \tau_f} = p_{l_f}(\tau_{l_f}) - p_{l_{f+1}}(\tau_{l_f}), \quad f \leq m.$$

En la vecindad $(x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2)$ es posible calcular las soluciones asintóticas locales del problema (2.1) con la precisión hasta $O(h^2)$ en la forma de multifase, i.e.,

$$y_{l_1}^N(x, h) = \exp \left\{ \frac{i}{h} S_{l_1}(x) \right\} \left[e_{l_1}(x) c_{l_1}(x) + h \psi_{l_1}^{mf}(x) \right]$$

$$+ \sum_{l_1 \neq l_2} \int_c^x \exp \left\{ \frac{i}{h} S_{l_1, l_2}(\tau_1, x) \right\} \left(e_{l_2}(x) c_{l_1, l_2}(\tau_1, x) + h \psi_{l_1 l_2}^{mf}(\tau_1, x) \right) d\tau_1 + \dots$$

$$+ \sum_{(l, N)} \int_c^x d\tau_{N-1} \int_c^{\tau_{N-1}} d\tau_{N-2} \dots \int_c^{\tau_2} \left(\exp \left\{ \frac{i}{h} S_{l_1, \dots, l_N}(\tau_1, \dots, \tau_{N-1}, x) \right\} \right.$$

$$\left. \times \left\{ e_{l_N}(x) c_{l_1, \dots, l_N}(\tau_1, \dots, \tau_{N-1}, x) + h \psi_{l_1 \dots l_N}^{mf}(\tau_1, \dots, \tau_{N-1}, x) \right\} d\tau_1 \right). \quad (2.37)$$

Aquí el primer elemento $l_1 \leq k$ está fijo. Para los valores $l_1 > k$ no se puede aplicar el método WKB estándar. La sumatoria se toma sobre los conjuntos $(l, m) = l_1, \dots, l_m$ con $l_i \neq l_{i+1}, m = 2, \dots, N$. Los coeficiente $\psi_{l_1 \dots l_m}^{mf}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, x), c_{l_1, \dots, l_m}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, x)$ son funciones de la clase $C^\infty((x_0 - \delta, x_0 + \delta)^m)$. La abreviación mf en la notación $\psi_{l_1}^{mf}$ subraya que las funciones $\psi_{l_1}^{mf}$ y ψ_{l_1} en la solución asintótica de multifase (2.37) y en la solución asintótica WKB (2.3) no necesariamente coinciden.

Note que cuando crece el número m , los valores de las m -múltiple integrales en la fórmula (2.37) decrece como $h^{\gamma m}$ para algún número γ positivo.

Lema 2 Suponga que el orden máximo de los ceros de las funciones $\lambda_i - \lambda_q, i \neq q, 1 \leq i, q \leq k$, en el punto x_0 es igual a $\alpha < +\infty, \alpha \in \mathbb{Z}_+$. En este caso se tiene que

$$\begin{aligned} & \max_{[x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2]} \left| \sum_{(l,m)} \int_a^x d\tau_{m-1} \int_a^{\tau_{m-1}} d\tau_{m-2} \dots \int_a^{\tau_2} d\tau_1 \right. \\ & \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{l_1, \dots, l_m}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, x) \right\} e_{l_m}(x) c_{l_1, \dots, l_m}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, x) \left. \right| \leq C_{m\varepsilon} h^{\frac{m-1-\varepsilon}{\alpha+1}}, \quad (2.38) \end{aligned}$$

para todo $m \geq 2$, todo $\varepsilon > 0$, y una constante $C_{m\varepsilon} > 0$.

Demostración. De las fórmulas (2.35), (2.36) se sigue que el único punto estacionario de la función bajo la integral en la fórmula (2.38) es $\tau_1 = \dots = \tau_{m-1} = x_0$. Sean φ_1, φ_2 funciones de la partición de la unidad en \mathbb{R}_+^1 tales que φ_1 es igual a 1 para $\tau \leq 1$ e igual a cero para $\tau \geq 2$. Sea

$$\omega_j(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, h) := \varphi_j \left(h^{-(1-\gamma)/(\alpha+1)} \sqrt{(\tau_1 - x_0)^2 + \dots + (\tau_{m-1} - x_0)^2} \right), 0 < \gamma < 1.$$

Sustituyendo la expresión $1 = \omega_1 + \omega_2$ en la integral en la fórmula (2.38), se puede representar la integral obtenida como la sumatoria siguiente:

$$\begin{aligned} & \sum_{(l,m)} \int_c^x d\tau_{m-1} \int_c^{\tau_{m-1}} d\tau_{m-2} \dots \int_c^{\tau_2} d\tau_1 \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{l_1, \dots, l_m}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, x) \right\} \omega_j \\ & \times e_{l_m}(x) c_{l_1, \dots, l_m}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, x), \text{ donde } j = 1, 2. \quad (2.39) \end{aligned}$$

En la integral (2.39), para $j = 1$, las variables son $\tau_q \in [-h^{(1-\gamma)/(\alpha+1)} + x_0, h^{(1-\gamma)/(\alpha+1)} + x_0]^{m-1}$. Como $\text{Im } S_{l_1, \dots, l_m}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, x) \equiv 0$, esta integral está acotada por $C_{m\gamma} h^{(1-\gamma)(m-1)/(\alpha+1)}$. Integrando por partes la expresión (2.39) para $j = 2$ (ver [22]), se obtiene la estimación de la integral por $C_{m\gamma} h^{(m-1)/(\alpha+1)}$. Sumando las dos estimaciones se obtiene la estimación (2.38). ■

Ahora se derivarán las ecuaciones para las funciones $\psi_{l_1, \dots, l_m}^{mf}, c_{l_1, \dots, l_m}$. Sustituyendo la función (2.37) en (2.1) se obtiene

$$\begin{aligned} & \left(-ih \frac{d}{dx} \right)^2 y_{l_1}^N + [A(x) - E] y_{l_1}^N = (-ih) \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_1(x) \right) \left\{ 2p_{l_1}(x) \frac{d}{dx} [e_{l_1}(x) c_{l_1}(x)] \right. \\ & \quad \left. + e_{l_1}(x) c_{l_1}(x) \frac{dp_{l_1}(x)}{dx} + h [p_{l_1}^2(x) + A(x) - E] \psi_{l_1}^{mf}(x) \right. \\ & \quad \left. + (-ih) \sum_{l_2 \neq l_1} \left[\frac{dS_{l_1, l_2}(x, x)}{dx} + \frac{\partial S_{l_1, l_2}(\tau_1, x)}{\partial x} \Big|_{\tau_1=x} \right] e_{l_2}(x) c_{l_1, l_2}(x, x) \right\} \\ & \quad + \sum_{l_2 \neq l_1} \int_c^x \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_{l_1, l_2}(\tau_1, x) \right) \left\{ (-ih) \left[2p_{l_2}(x) \frac{d}{dx} [e_{l_2}(x) c_{l_1, l_2}(\tau_1, x)] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{dp_{l_2}(x)}{dx} e_{l_2}(x) c_{l_1, l_2}(\tau_1, x) \right] + h [p_{l_2}^2(x) + A(x) - E] \psi_{l_1, l_2}^{mf}(\tau_1, x) \right. \\ & \quad \left. + (-ih) \sum_{l_3 \neq l_2} \left[\frac{dS_{l_1, l_2, l_3}(\tau_1, x, x)}{dx} + \frac{\partial S_{l_1, l_2, l_3}(\tau_1, \tau_2, x)}{\partial x} \Big|_{\tau_2=x} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\times e_{l_3}(x)c_{l_1,l_2,l_3}(\tau_1, x, x)d\tau_1 + \dots + O(\hbar^2).$$

Sea $P_k(x)$ la proyección de \mathbb{C}^n sobre el espacio lineal generado por los vectores $e_j(x)$, $j = 1, \dots, k$. Para aniquilar los términos del primer orden con respecto al parámetro pequeño \hbar se ponen las condiciones siguientes para las funciones $c_{l_1}, c_{l_1,l_2}, \psi_{l_1}^{mf}$:

$$2p_{l_1}(x) \left(\frac{d}{dx} [e_{l_1}(x)c_{l_1}(x)], e_{l_1}(x) \right) + c_{l_1}(x) \frac{dp_{l_1}(x)}{dx} = 0, \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k \left[2p_{l_1}(x) \frac{d}{dx} [e_{l_1}(x)c_{l_1}(x)] + e_{l_1}(x)c_{l_1}(x) \frac{dp_{l_1}(x)}{dx} \right] \\ = - \sum_{l_2 \neq l_1} [p_{l_1}(x) + p_{l_2}(x)] e_{l_2}(x)c_{l_1,l_2}(x, x), \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \psi_{l_1}^{mf}(x) = i[p_{l_1}^2(x) + A(x) - E]^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_k) \\ \times \left[2p_{l_1}(x) \frac{d}{dx} [e_{l_1}(x)c_{l_1}(x)] + e_{l_1}(x)c_{l_1}(x) \frac{dp_{l_1}(x)}{dx} \right]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

la ecuación (2.41) es una ecuación de transporte. Esta ecuación implica que el primer término en la parte derecha de la ecuación (2.40) es ortogonal al vector $e_{l_1}(x)$. Es bien sabido que $c_{l_1}(x) = \rho_{l_1}(x)/\sqrt{|p_{l_1}(x)|}$, donde la función $\rho_{l_1}(x)$ satisface la ecuación (2.4) con unos datos iniciales.

Por lo tanto la parte izquierda de la ecuación (2.42) es una combinación lineal de los vectores $e_{l_2}(x)$, donde $l_1 \neq l_2, 1 \leq l_2 \leq k$. Así se obtiene que las funciones $c_{l_1,l_2}(x, x)$ pueden ser determinadas de manera única a partir de la ecuación (2.42). La función $\psi_{l_1}^{mf}(x)$ en la solución asintótica de multifase (2.37) está dada por la fórmula (2.43). Debido al operador $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_k)$ en la fórmula (2.43), la función $\psi_{l_1}^{mf}(x)$ difiere de la función $\psi_{l_1}(x)$ en la solución asintótica WKB dada por (2.7). Usando la ecuación (2.41), se puede representar la expresión (2.43) en la forma

$$\begin{aligned} \psi_{l_1}^{mf}(x) = i[p_{l_1}^2(x) + A(x) - E]^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_k) 2 \left[\rho_{l_1}(x)/\sqrt{|p_{l_1}(x)|} \right] p_{l_1}(x) \\ \times \left[\frac{d}{dx} e_{l_1}(x) - e_{l_1}(x) \left(\frac{de_{l_1}}{dx}, e_{l_1} \right) (x) \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

Para aniquilar los términos de primer orden con respecto al parámetro pequeño \hbar en la función bajo la integral en la parte derecha de la ecuación (2.40), se ponen las siguientes condiciones sobre las funciones $c_{l_1,l_2}(\tau_1, x)$, $\psi_{l_1,l_2}^{mf}(\tau_1, x)$, y $c_{l_1,l_2,l_3}(\tau_1, x, x)$:

$$2p_{l_2}(x) \left(\frac{d}{dx} [e_{l_2}(x)c_{l_1,l_2}(\tau_1, x)], e_{l_2}(x) \right) + \frac{dp_{l_2}(x)}{dx} c_{l_1,l_2}(\tau_1, x) = 0, \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k \left[2p_{l_2}(x) \frac{d}{dx} [e_{l_2}(x)c_{l_1,l_2}(\tau_1, x)] + \frac{dp_{l_2}(x)}{dx} e_{l_2}(x)c_{l_1,l_2}(\tau_1, x) \right] \\ = - \sum_{l_3 \neq l_2} [p_{l_2}(x) + p_{l_3}(x)] e_{l_3}(x)c_{l_1,l_2,l_3}(\tau_1, x, x), \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\psi_{l_1,l_2}^{mf}(\tau_1, x) = i[p_{l_2}^2(x) + A(x) - E]^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_k) \quad (2.47)$$

$$\times \left[2p_{l_2}(x) \frac{d}{dx} [e_{l_2}(x) c_{l_1, l_2}(\tau_1, x)] + \frac{dp_{l_2}(x)}{dx} e_{l_2}(x) c_{l_1, l_2}(\tau_1, x) \right].$$

La ecuación (2.45) es la ecuación de transporte para la función $c_{l_1, l_2}(\tau_1, x)$. Los datos iniciales $c_{l_1, l_2}(x, x)$ se determinan de la ecuación (2.42). Es bien sabido que $c_{l_1}(x) = \rho_{l_1}(x)/\sqrt{|p_{l_1}(x)|}$, donde la función $\rho_{l_1}(x)$ satisface la ecuación (2.4) con datos iniciales arbitrarios; y que $c_{l_1, l_2}(\tau_1, x) = \rho_{l_1, l_2}(\tau_1, x)/\sqrt{|p_{l_2}(x)|}$, donde la función $\rho_{l_1, l_2}(\tau_1, x)$ satisface la ecuación de transporte (2.4) con respecto a la variable x . La ecuación (2.42) determina los datos iniciales para la función $\rho_{l_1, l_2}(\tau_1, x)$ en el punto $x = \tau_1$,

$$\rho_{l_1, l_2}(\tau_1, \tau_1) = \frac{- \left(\left[2p_{l_1}(\tau_1) \frac{d}{d\tau_1} [e_{l_1}(\tau_1) c_{l_1}(\tau_1)] + e_{l_1}(\tau_1) c_{l_1}(\tau_1) \frac{dp_{l_1}(\tau_1)}{d\tau_1} \right], e_{l_2}(\tau_1) \right)}{[p_{l_1}(\tau_1) + p_{l_2}(\tau_1)]}. \quad (2.48)$$

En general, se tiene que

$$c_{l_1, \dots, l_m}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, x) = \frac{\rho_{l_1, \dots, l_m}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, x)}{\sqrt{|p_{l_m}(x)|}} \text{ para } m \geq 2, \quad (2.49)$$

y las funciones $\rho_{l_1, \dots, l_m}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, x)$, $2 \leq m$, satisfacen la ecuación de transporte (2.4) con respecto a la variable x con los datos iniciales de la forma

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\rho_{l_1, \dots, l_m}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, x)}{\sqrt{|p_{l_m}(x)|}} \right|_{x=\tau_{m-1}} = \frac{-1}{[p_{l_m}(\tau_{m-1}) + p_{l_{m-1}}(\tau_{m-1})]} \\ & \times \left(\left[2p_{l_{m-1}}(\tau_{m-1}) \frac{d}{d\tau_{m-1}} \left[e_{l_{m-1}}(\tau_{m-1}) \frac{\rho_{l_1, \dots, l_{m-1}}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1})}{\sqrt{|p_{l_{m-1}}(\tau_{m-1})|}} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{dp_{l_{m-1}}(\tau_{m-1})}{d\tau_{m-1}} e_{l_{m-1}}(\tau_{m-1}) \frac{c_{l_1, \dots, l_{m-1}}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1})}{\sqrt{|p_{l_{m-1}}(\tau_{m-1})|}} \right], e_{l_m}(\tau_{m-1}) \right). \quad (2.50) \end{aligned}$$

La expresión para las funciones $\psi_{l_1 \dots l_m}^{mf}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, x)$ puede ser representada en la forma

$$\begin{aligned} & \psi_{l_1 \dots l_m}^{mf}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, x) = i2[p_{l_m}^2(x) + A(x) - E]^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_k) \\ & \times \left[\rho_{l_1, \dots, l_m}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, x) / \sqrt{|p_{l_m}(x)|} \right] p_{l_m}(x) \left[\frac{d}{dx} e_{l_m}(x) - e_{l_m}(x) \left(\frac{de_{l_m}}{dx}, e_{l_m} \right)(x) \right]. \quad (2.51) \end{aligned}$$

Lema 3 1° Existen funciones $\psi_{l_1 \dots l_m}^{mf}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, x)$, $c_{l_1, \dots, l_m}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, x)$ que pertenecen a la clase $C^\infty((x_0 - \delta, x_0 + \delta)^m)$, $2 \leq m$, tales que la ecuación (2.49) y las condiciones iniciales (2.50) se satisfacen con datos iniciales $\rho_{l_1}(x_0)$ arbitrarios. Las funciones $\rho_{l_1, \dots, l_m}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, x)$, $2 \leq m$, y $\rho_{l_1}(x)$ satisfacen la ecuación de transporte (2.4) con respecto a la variable x . Las funciones $\psi_{l_1 \dots l_m}^{mf}(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, x)$ están definidas por las fórmulas (2.51).

2° Si $N > (\alpha + 1)2 + 1$ entonces la función $y_l^N(x, h)$ definida por (2.37) es una solución asintótica de la ecuación (2.1) con la precisión $O(h^2)$. Además se tiene que $O(h^2) \in C^\infty((x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2)^m)$ y $d^q O(h^2)/dx^q = O(h^{2-q})$.

Demostración. Punto número 1° del Lema 3 sigue de las formulas (2.48)-(2.51). Punto número 2° del Lema sigue de la estimación (2.38) y de la fórmula (2.40). ■

En lo que sigue se elige un punto $c \in (x_0 - \delta, x_0 - \delta/2)$. Sea $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\varphi = 0$, para $x < c$ y $\varphi = 1$ para $x \geq x_0 - \delta/2$. Se supone que las funciones $c_{l_1, \dots, l_m}, \psi_{l_1, \dots, l_m}^{mf}$ para $m \geq 2$ en la expresión (2.37) están reemplazadas por $\tilde{c}_{l_1, \dots, l_m} = c_{l_1, \dots, l_m} \varphi(\tau_1)$, $\tilde{\psi}_{l_1, \dots, l_m}^{mf} = \psi_{l_1, \dots, l_m}^{mf} \varphi(\tau_1)$. Integrando por partes de manera consecutiva con respecto a las variables $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{m-1}$, se obtiene que la multiplicación anterior cambia la expresión (2.37) en el dominio $[x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2]$ por una función del orden $O(h^\infty)$ tal que $d^l O(h^\infty)/dx^l = O(h^\infty)$. Por lo tanto multiplicando la expresión (2.37) por φ , otra vez se obtiene una solución asintótica de la ecuación (2.1) con la misma precisión.

Lema 4 *Al reemplazar las funciones c_{l_1, \dots, l_m} y $\psi_{l_1, \dots, l_m}^{mf}$ en la expresión (2.37) por las funciones $\tilde{c}_{l_1, \dots, l_m}$ y $\tilde{\psi}_{l_1, \dots, l_m}^{mf}$, la función obtenida en el dominio $(x_0 - \delta, x_0)$ tiene solución asintótica WKB (2.3) con $j = l_1$ y el signo "+".*

La demostración de este lema sigue directamente integrando por partes de manera consecutiva con respecto a las variables $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{m-1}$.

Demostración. del Lema 1

1) Usando la expresión (2.37) con las funciones $\tilde{c}_{l_1, \dots, l_m}, \tilde{\psi}_{l_1, \dots, l_m}^{mf}$, e integrando por partes, se obtiene que la expresión (2.37) en el intervalo $(x_0 - \delta/2, x_0 - \varepsilon)$ es la solución WKB de la forma (2.3) con el signo "+". En el intervalo $(x_0 + \varepsilon, x_0 + \delta/2)$ es posible aplicar el método de la fase estacionaria (ver [22]) para demostrar que (2.37) es una solución asintótica WKB de la forma (2.3) con el signo "+". Como las amplitudes $\rho_{mj, left}^+$ y $\rho_{mj, right}^+$ satisfacen la misma ecuación de transporte (2.6), ellos solamente pueden tener diferentes datos iniciales. Por lo tanto la ecuación (2.14) se satisface para alguna matriz $\tilde{\mathbf{u}}_{left}$.

Para determinar la matriz $\tilde{\mathbf{u}}_{right}$, es necesario modificar las fórmulas (2.37). Considere la siguiente cadena de funciones de fase:

$$S_{l_1}^- = \int_x^{x_0} p_{l_1}(t) dt, \dots, S_{l_1, \dots, l_m}^-(\tau_1, \dots, \tau_{m-1}, x) = \int_{\tau_1}^{x_0} p_{l_1}(t_1) dt_1 \\ + \int_{\tau_2}^{\tau_1} p_{l_2}(t_2) dt_2 + \dots + \int_x^{\tau_{m-1}} p_{l_m}(t_m) dt_m,$$

aquí $d > x_0 + \delta/2$. Para unir las soluciones asintóticas WKB (2.3) con el signo " - " en los intervalos $(x_0 + \varepsilon, x_0 + \delta/2)$ y $(x_0 - \delta/2, x_0 - \varepsilon)$, se usan las soluciones asintóticas de multifase de la forma

$$y_{l_1}^N(x, h) = \exp \left\{ \frac{i}{h} S_{l_1}^-(x) \right\} \left[e_{l_1}(x) c_{l_1}^-(x) + h \psi_{l_1}^{-mf}(x) \right] \\ + \sum_{(l,2)}^d \int_x^d \exp \left\{ \frac{i}{h} S_{l_1, l_2}^-(\tau_1, x) \right\} \left[e_{l_2}(x) c_{l_1, l_2}^-(\tau_1, x) + h \psi_{l_1, l_2}^{-mf}(\tau_1, x) \right] d\tau_1 + \dots \quad (2.52)$$

Como antes se usa la representación $c_{l_1, \dots, l_m}^- = \rho_{l_1, \dots, l_m}^-(\tau_1, \dots, \tau_m, x) / \sqrt{|p_{l_m}(x)|}$, donde las amplitudes $\rho_{l_1, l_2, \dots, l_m}^-$ satisfacen la ecuación de transporte (2.4) con respecto a la variable x .

2) Ahora se corrigen las matrices $\tilde{\mathbf{u}}_{left}$ y $\tilde{\mathbf{u}}_{right}$ para obtener matrices unitarias. Considere una solución $(n \times n)$ -matricial del problema de Sturm-Liouville

$$\left(-ih \frac{d}{dx} \right)^2 C + (A(x) - IE)C = 0, \text{ para } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad (2.53)$$

Suponga que la matriz $A(x)$ es autoconjugada. En este caso de manera estándar se puede demostrar que

$$C^* \frac{dC}{dx} - \frac{dC^*}{dx} C = \text{const.} \quad (2.54)$$

Tomando las soluciones asintóticas (2.3) en lugar de las columnas de la matriz C en el intervalo $(x_0 - \delta/2, x_0)$, y tomando las soluciones asintóticas (2.13) en lugar de las columnas de la matriz C en el intervalo $(x_0, x_0 + \delta/2)$, se obtiene de la fórmula (2.54) que $\tilde{\mathbf{u}}_{left} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{left}^* = I + O_l(h^2)$. De manera análoga se obtiene que $\tilde{\mathbf{u}}_{right} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{right}^* = I + O_r(h^2)$ y $O_m(h^2) = h^2 C_m(h)$, $m = l, r$, donde $C_m(h) = C_m^*(h)$. Evidentemente las matrices autoconjugadas $C_m(h)$ están uniformemente acotadas con respecto al parámetro pequeño $h \in (0, 1]$. Por lo tanto existen matrices autoconjugadas $\mathbf{B}_{left}(h), \mathbf{B}_{right}(h)$ tales que $\|\mathbf{B}_{left}(h)\| \leq \text{const}$ y $\|\mathbf{B}_{right}(h)\| \leq \text{const}$ para $h \in (0, 1]$ y las matrices $\tilde{\mathbf{u}}_{left} + h^2 \mathbf{B}_{left}(h)$ y $\tilde{\mathbf{u}}_{right} + h^2 \mathbf{B}_{right}(h)$ satisfacen las condiciones del Lema 1. La expresión (2.17) sigue del fórmula de Liouville para el determinante de las soluciones linealmente independientes de un sistema lineal de primer orden (ver [8]). ■

2.1.6. Demostración del Teorema 4

1) Considere la solución asintótica de multifase (2.37) de la función y_j^N en el dominio $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Suponga que la solución asintótica de multifase y_j^N está construida por el Lema 4, i.e. la función y_j^N tiene solución asintótica WKB (2.3) en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 - \varepsilon)$, $\delta > \varepsilon > 0$. Aplicando el método de la fase estacionaria (ver [22]), se obtiene que la función y_j^N en el intervalo $(x_0 + \varepsilon, x_0 + \delta)$ tiene la representación asintótica siguiente:

$$\begin{aligned} y_j^N = & e^{\frac{i}{h} S_j(x)} \beta_j(h) \left[\frac{e_j(x) \rho_j(x)}{\sqrt{|p_j(x)|}} + h \psi_j(x) \right] + \sqrt{h 2\pi} \sum_{l_2=1; l_2 \neq j}^k \exp \left\{ \frac{i}{h} [S_j(x_0) \right. \\ & + \int_{x_0}^x p_{l_2}(t) dt] + \frac{\pi}{4} \text{sign} \left(\frac{d(p_j(x_0) - p_{l_2}(x_0))}{dx_0} \right) \left. \right\} \left| \frac{d(p_j(x_0) - p_{l_2}(x_0))}{dx_0} \right|^{-1/2} \\ & \times \beta_{j l_2}(h) \left[\frac{e_{l_2}(x) \rho_{l_2}(x)}{\sqrt{|p_{l_2}(x)|}} + h \psi_{l_2}(x) \right] + O(h^2). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Aquí $\beta_j(h) = 1 - \beta_j^1 h + O(h^{3/2-\varepsilon})$, $\beta_{j l_2}(h) = 1 + O(h^{1/2})$; $\rho_j(x_0) = \rho_{j l_2}(x_0, x_0)$, y $\rho_{l_2}(x)$ satisface la ecuación de transporte (2.4). Se obtienen resultados similares para las soluciones asintóticas de multifase (2.37) con fases S_{l_1, \dots, l_m}^- .

2) Sea $\zeta_{x_0}(x)$ una función de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ tal que $\zeta_{x_0}(x) = 0$ para $x > x_0 + \delta$ y $\zeta_{x_0}(x) = 1$ para $x \leq x_0 + \varepsilon$. Evidentemente, $[h^2 (d^2/dx^2), \zeta_{x_0}] = 2h^2 (d\zeta_{x_0}/dx) (d/dx)$. Por lo tanto se tiene que

$$\left\{ \left(-ih \frac{d}{dx} \right)^2 + A(x) - IE \right\} h^q \zeta_{x_0}(x) e^{\frac{i}{h} S_j(x)} \left[\frac{\rho_j(x)}{\sqrt{|p_j(x)|}} + h \psi_j(x) \right] = O(h^{1+q}), \quad (2.56)$$

donde $q \in \mathbb{R}^1$. La función $\tilde{y}_j^N(x, x_0, h)$ se define en el dominio $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ como:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_j^N(x, x_0, h) = & \zeta_{x_0}(x) y_j^N(x, h) \\ & + (1 - \zeta_{x_0}(x)) \exp \left\{ \frac{i}{h} S_j(x) \right\} \beta_j(h) \left[\frac{e_j(x) \rho_j(x)}{\sqrt{|p_j(x)|}} + h \psi_j(x) \right]. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Combinando (2.55) y (2.56), se obtiene que la función $\tilde{y}_j^N(x, x_0, h)$ en el dominio $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ satisface la ecuación

$$\left\{ \left(-ih \frac{d}{dx} \right)^2 + A(x) - IE \right\} \tilde{y}_j^N(x, x_0, h) = O(h^{3/2}) \text{ para } N \geq 2. \quad (2.58)$$

La ecuación (2.58) implica que se puede considerar a la función $\tilde{y}_j^N(x, x_0, h)$ en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ como una solución de la ecuación (2.58) con la precisión $O(h^{3/2})$ (independientemente de las intersecciones $\gamma_{l_\alpha} \cap \gamma_j$). Esta consideración permite construir una solución asintótica del problema (2.1) tal que tiene su amplitud del orden 1 sobre la curva γ_j , las amplitudes del orden \sqrt{h} sobre las curvas $\gamma_{l_\alpha}, \alpha = 1, \dots, k$, y las amplitudes del orden h sobre las curvas que no intersectan a la curva γ_j pero intersectan a las curvas $\gamma_{l_\alpha}, \alpha = 1, \dots, k$. Sobre las curvas que no intersectan a las curvas γ_j y $\gamma_{l_\alpha}, \alpha = 1, \dots, k$, las solución asintóticas tiene amplitud igual a cero.

3) Considere las curvas $\gamma_j, \gamma_{l_\alpha}, \alpha = 1, \dots, k$. Sean $A_1^\alpha, \dots, A_{q_\alpha}^\alpha$ los puntos de intersecciones, i.e. $\{A_1^\alpha, \dots, A_{q_\alpha}^\alpha\} = \gamma_j \cap \gamma_{l_\alpha}$. La condición (2.8) implica que todos los puntos A_m^α sobre la curva γ_j pertenecen a "x" cartas disjuntas U_m , y que los puntos sobre las curvas γ_{l_α} pertenecen a "x" cartas disjuntas U_m^α . Estas cartas se puede elegir de tal manera que $\pi_x(U_m^\alpha) = \pi_x(U_m)$. Sean A_{0_j} y A_{0_α} puntos iniciales sobre γ_j y γ_{l_α} que no pertenecen a $\cup_{\alpha=1}^k \{A_1^\alpha, \dots, A_{q_\alpha}^\alpha\}$. Los puntos A_{0_j} y A_{0_α} se usan para construir el operador de Maslov \mathbf{K}_γ sobre las curvas $\gamma_j, \gamma_{l_\alpha}$. Éstos también son los puntos iniciales para la amplitud, la función de fase y el índice de Maslov sobre las curvas γ_j y γ_{l_α} . Se considera el índice de Maslov sobre γ_j y γ_{l_α} en la dirección de las manecillas del reloj; suponga que los puntos $A_{0_\alpha}, A_1^\alpha, \dots, A_{q_\alpha}^\alpha$ están enumerados también en la dirección de las manecillas del reloj. Evidentemente se tiene que $\cup_{\alpha=1}^k \{A_1^\alpha, \dots, A_{q_\alpha}^\alpha\} \in \gamma_j$. Bajo la notación $\Gamma = \cup_{\alpha=1}^k \cup_{m=1}^{q_\alpha} A_m^\alpha$, el conjunto de cambio de multiplicidad D tiene forma $D = \pi_x \Gamma$.

Ahora se construirá una generalización del operador de Maslov (ver [9]) para el caso cuando las curvas γ_j y γ_{l_α} tienen una intersección no trivial para $\alpha = 1, \dots, k$. Suponga que $\pi_x(A_m^\alpha) = x_m^\alpha$. En este caso se considera la función $\exp\left\{-\frac{i}{h} S_j(x)\right\} \sqrt{|p_j(x)|} y_j^N(x, h) \circ \pi_x^{-1}$ en "x" carta U_m sobre γ_j , tal que $A_m^\alpha \in U_m$. En las demás cartas sobre γ_j , que no intersectan al conjunto Γ se considera la función $\tilde{\rho}_j := e_j \rho_j + h \sqrt{|p_j|} \psi_j$. Aquí la amplitud ρ_j para la solución asintótica de multifase y para la solución asintótica WKB está dada por la misma función. De la fórmula (2.7) para las funciones ψ_j se sigue que $\tilde{\rho}_j$ es la función definida sobre γ_j . Multiplicando estas funciones en las cartas por una partición de la unidad $\{g_m\}$ subordinada al atlas $\{U_m\}$ considerado, se obtiene la función φ_j sobre γ_j . De la condición de cuantización (2.9) (ver [9],[19]) y la ecuación (2.58) se sigue que la función $\mathbf{K}_{\gamma_j}(\varphi_j)$ (el operador de Maslov generalizado aplicado a φ_j) satisface la ecuación

$$\left\{ \left(-ih \frac{d}{dx} \right)^2 + A(x) - IE \right\} \mathbf{K}_{\gamma_j}(\varphi_j) = O(h^{3/2}), \quad (2.59)$$

donde las funciones $\mathbf{K}_{\gamma_j}(\varphi_j), O(h^{3/2-n}), n \in \mathbb{N}_0$, pertenecen al espacio $\mathbb{S}(\mathbb{R}^1)$ y $\partial^n O(h^{3/2}) = O(h^{3/2-n})$.

Es posible mejorar la precisión $O(h^{3/2})$ en (2.59) hasta $O(h^2)$ considerando las otras curvas γ_{l_α} que intersectan a γ_j . En cada intersección A_m^α la función $\mathbf{K}_{\gamma_j}(\varphi_j)$ genera una onda que propaga a lo largo de la curva γ_{l_α} . La conclusión se obtiene directamente de la fórmula (2.55). Ahora se suman las funciones obtenidas en cada curva γ_{l_α} , y se pega el resultado con la función $\mathbf{K}_{\gamma_j}(\varphi_j)$.

Por lo tanto la fórmula (2.55) implica que la función $\mathbf{K}_{\gamma_j}(\varphi_j)$ en el punto $A \in \Gamma$ genera "ondas" a lo largo de todas las curvas γ_{l_α} que pasan por el punto A , y esta misma fórmula

determina sus amplitudes. Estas "ondas" se propagan en la dirección de las manecillas del reloj. Se fija una curva γ_{l_α} y se investiga la "onda" estacionaria sobre esta curva.

En una vecindad del punto A_m^α la proyección π_x es un difeomorfismo de las vecindades U_m, U_m^α que pertenecen a las curvas γ_j y γ_{l_α} en un mismo intervalo $(x_m^\alpha - \delta, x_m^\alpha + \delta)$. Sea π_p la proyección de $\mathbb{R}_{x,p}^2$ sobre \mathbb{R}_p^1 , $\pi_p A_m^\alpha = p_m^\alpha$. Si $p_m^\alpha > 0$, entonces de (2.55) se sigue que la función $\mathbf{K}_{\gamma_j}(\varphi_j)$ genera una "onda" con amplitud $\mu_{\alpha,m}$ a lo largo de la curva γ_{l_α} en el punto A_m^α y se obtiene

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha,m} := & \exp \left\{ \frac{i}{h} \left[S_j(x_m^\alpha) - \int_{A_{0\alpha}}^{A_m^\alpha} p_{l_\alpha}(\tau) d\tau \right] + \frac{\pi}{4} \text{sign} \left(\frac{d(p_j(x_m^\alpha) - p_{l_\alpha}(x_m^\alpha))}{dx_m^\alpha} \right) \right\} \\ & \times \sqrt{2\pi h} \left| \frac{d(p_j(x_m^\alpha) - p_{l_\alpha}(x_m^\alpha))}{dx_m^\alpha} \right|^{-1/2} \left(e_{l_\alpha} \rho_{l_\alpha}(x) + h \widehat{\psi}_{l_\alpha}(x) \right) \circ \pi_x^{-1}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

donde

$$S_j(x_m^\alpha) := \int_{A_{0j}}^{A_m^\alpha} p_j dx, \quad \widehat{\psi}_{l_\alpha}(x) := \sqrt{|p_{l_\alpha}(x)|} \psi_{l_\alpha}(x).$$

En el caso cuando $p_m^\alpha < 0$ se usa la expresión (2.37) con las fases S_{l_1, \dots, l_m}^- . Por lo tanto en la expresión (2.60) para la función $\mu_{\alpha,m}$ se cambia el signo " + " cerca de la expresión $\frac{\pi}{4} \text{sign} (d(p_j(x_m^\alpha) - p_{l_\alpha}(x_m^\alpha))/dx_m^\alpha)$ por el signo " - ".

Note que las curvas γ_{l_α} no satisfacen la condición de cuantización (2.9). Por lo tanto es posible definir una constante C_α como sigue:

$$\begin{aligned} C_\alpha = & \left[1 - \exp \frac{i}{h} \left\{ \int_{\gamma_{l_\alpha}(E)} p dx - \frac{\pi}{2} \text{Ind}(\gamma_{i_k}(E)) \right\} \right]^{-1} \\ & \times \sum_{m=1}^{q_\alpha} (\mu_{\alpha m}(A_{0\alpha}), e_{l_\alpha} \circ \pi_x^{-1}(A_{0\alpha})) \exp \left\{ -\frac{i\pi}{2} \text{Ind}(A_m^\alpha, A_{0\alpha}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Considere el arco $\overrightarrow{A_{0\alpha}, A_m^\alpha}$ de la curva γ_{l_α} orientado en la dirección de las manecillas del reloj. Sea $\sigma_{\alpha m}$ una función de la clase C^∞ definida sobre este arco, tal que la función $\sigma_{\alpha m}$ es igual a 1 fuera de la carta U_m^α . Sea g_m un elemento de la partición de la unidad sobre γ_j , tal que $\text{Supp } g_m \subset U_m$. En este caso la función $\sigma_{\alpha m}$ satisface las condiciones siguientes: $\sigma_{\alpha m} \circ \pi_x^{-1} + g_m \circ \pi_x^{-1} = 1$ en el intervalo $(x_m^\alpha, x_m^\alpha + \delta)$, y $\sigma_{\alpha m} \circ \pi_x^{-1} = 0$ en $(x_m^\alpha - \delta, x_m^\alpha)$. Note que $\pi_x U_m^\alpha = \pi_x U_m = (x_m^\alpha - \delta, x_m^\alpha + \delta)$.

En lo que sigue se describe solamente la idea de generalización de la construcción de Maslov en el caso cuando las curvas γ_j y $\cup_{\alpha=1}^k \gamma_{l_\alpha}$ tienen una intersección no trivial. Los detalles pueden ser obtenidos de manera análoga siguiendo los pasos descritos en los trabajos [9],[19].

Sobre la curva γ_{l_α} se considera la solución ρ_{l_α} de la ecuación de transporte (2.4) con los datos iniciales $\rho_{l_\alpha}(0) = 1$. La curva γ_{l_α} no satisface la condición de cuantización y por lo tanto el operador de Maslov puede ser definido solamente sobre el recubrimiento universal de γ_{l_α} . De hecho el operador de Maslov estandar $K_{\gamma_{l_\alpha}}$ (ver [9],[19]) es una extensión de las soluciones asintóticas a lo largo de la curva γ_{l_α} . Por lo tanto se empieza extendiendo la solución asintótica

$$K_{\gamma_{l_\alpha}} C_\alpha \left(e_{l_\alpha} \rho_{l_\alpha} + h \widehat{\psi}_{l_\alpha}(x) \right) + \sum_{m=1}^{q_\alpha} K_{\gamma_{l_\alpha}} \mu_{\alpha m} \sigma_m^\alpha \quad (2.62)$$

a lo largo de la curva γ_{l_α} , a partir del punto inicial $A_{0\alpha}$. Se elige una constante C_α tal que uno regresa al mismo valor después de hacer una vuelta a lo largo de γ_{l_α} . Después se cambia el

operador estándar $K_{\gamma_{l_\alpha}}$ en la expresión (2.62) por el operador generalizado $\mathbf{K}_{\gamma_{l_\alpha}}$ anteriormente definido y se suman las funciones obtenidas para $\alpha = 1, \dots, k$, con $\mathbf{K}_{\gamma_j}(\varphi_j)$. La función obtenida satisface la ecuación (2.63) con la precisión $O(h^2)$. Esto implica que existe un valor propio $E_{eg}(h)$ tal que $E_{eg}(h) - E(h) = O(h^2)$.

2.2. Acercamiento general para las condiciones de cuantización en el caso de características de multiplicidad variable

2.2.1. Solución asintótica de WKB-Maslov

Considere el problema matricial de Sturm-Liouville

$$\left(-ih \frac{d}{dx}\right)^2 y + A(x)y = Ey; x \in \mathbb{R}^1; y(x) \in L_2(\mathbb{R}^1); \quad (2.63)$$

donde $y \in \mathbb{C}^n$; $h \in (0, 1]$ es un parámetro pequeño. El problema matricial de Sturm-Liouville ocurre en la mecánica cuántica (veanse [1, 2]) y en la nanotecnología (veanse [3, 16, 23]).

Sea $A(x) = A(x)^*$ una $(n \times n)$ función matricial de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ tal que el operador (2.63) es esencialmente autoconjugado en $L_2(\mathbb{R}^1)$ (vea [17]). Denote los valores propios de la matriz autoconjugada $A(x)$ por $\lambda_j(x)$, $j = 1, \dots, n$. Sean $e_j(x)$ los vectores propios ortonormales de $A(x)$, i.e., $A(x)e_j(x) = \lambda_j(x)e_j(x)$. Si la matriz autoconjugada $A(x)$ es una función analítica en un conjunto abierto $V \subseteq \mathbb{R}^1$, entonces todos los valores propios y los vectores propios de la matriz son funciones analíticas en V (vea [18]). Por lo tanto es posible suponer que las siguientes condiciones son válidas.

Condición 11 *Suponga que la matriz $A(x)$ tiene la forma $A(x) = \mathbb{U}(x) \|\lambda_j(x)\delta_{ij}\| \mathbb{U}^*(x)$, donde $\mathbb{U}(x)$ es una función matricial unitaria de la clase C^∞ en \mathbb{R}^1 y $\lambda_j(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\text{Im } \lambda_j \equiv 0$. Sea D el conjunto de los puntos x en los cuales los valores propios cambian su multiplicidad. Suponga que $D \neq \emptyset$ y tiene un número finito de puntos; la diferencia $(\lambda_i - \lambda_j)$ entre cualesquiera dos valores propios λ_j, λ_i , $i \neq j$, que coinciden en D tiene un cero de orden finito en D .*

Condición 12 *Sean $\gamma_j(E)$ las curvas en el espacio de fase $\mathbb{R}_{x,p}^2$ definidas como:*

$$p^2 + \lambda_j(x) = E, \quad j = 1, \dots, k \leq n.$$

Suponga que todas las curvas $\gamma_j(E)$ son conexas y compactas en $\mathbb{R}_{x,p}^2$ para $E \in (E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$ en algun E_0 , $\varepsilon > 0$. Suponga que la desigualdad $d\lambda_j(x)/dx \neq 0$ se satisface en todos los puntos x para los cuales $\lambda_j(x) = E$, y que en problema (2.63) no tiene un espectro continuo en el conjunto $(E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$.

Así las curvas γ_j son unas C^∞ -variedades unidimensionales en $\mathbb{R}_{x,p}^2$. Denote por π_x la proyección de $\mathbb{R}_{x,p}^2$ sobre \mathbb{R}_x^1 , y por π_p la proyección de $\mathbb{R}_{x,p}^2$ sobre \mathbb{R}_p^1 . Sea $\pi_x(\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k)$ la proyección del conjunto $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$ sobre \mathbb{R}_x^1 .

Si todas las curvas γ_j son disjuntas entonces son válidas las condiciones de cuantización de Born-Sommerfeld-Maslov (veanse [9, 19]). En esta sección se determinan las condiciones de cuantización en el caso cuando estas curvas γ_j , $j = 1, \dots, k$, $k \geq 2$, tiene una intersección no trivial.

Recuerde unas propiedades de las soluciones asintóticas WKB estándar (vea [8]). Suponga que los valores propios $\lambda_j(x_1)$, $j = 1, \dots, n$, tienen multiplicidad uno (son disjuntos a pares)

en un punto x_1 y que los impulsos $p_j(x_1) := \sqrt{E - \lambda_j(x_1)}$ son positivos. En este caso todos los impulsos son distintos a pares en una vecindad V_{x_1} del punto x_1 y se tiene que $p_j(x) > 0$. Existen $2n$ soluciones linealmente independientes y_j^\pm del problema (2.63) con las soluciones asintóticas WKB siguientes:

$$y_j^\pm = \exp\left(\frac{i}{h} S_j^\pm(x)\right) \left[\frac{e_j(x) \rho_j^\pm}{\sqrt{|p_j|}} + h \psi_j^\pm + O(h^2) \right], \quad (2.64)$$

$$S_j^+(x) := \int_{x_0}^x p_j(x) dx, \quad \frac{dS_j^+(x)}{dx} = p_j(x); \quad S_j^-(x) := \int_x^{x_0} p_j(x) dx, \quad \frac{dS_j^-(x)}{dx} = -p_j(x). \quad (2.65)$$

El residuo es tal que $O(h^2) \in C^\infty(V_{x_1})$, y $d^j O(h^2)/dx^j = O(h^2)$, para $j \geq 0$. Las amplitudes ρ_j^\pm satisfacen la ecuación de transporte siguiente:

$$\frac{d\rho_j^\pm}{dx} + \left(\frac{de_j}{dx}, e_j \right) \rho_j^\pm = 0. \quad (2.66)$$

La ecuación (2.66) se puede reescribir en una forma invariante para las cartas en "x" y "p" representaciones (vea [19]). En efecto sobre la curva γ_j las amplitudes ρ_j^\pm pueden ser consideradas como funciones de un parámetro global t (ver [9]). Las funciones $x_j(t), p_j(t)$ sobre las curvas γ_j son soluciones del sistema de Hamilton

$$\frac{dx}{dt} = 2p, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{d\lambda_j}{dx}; \quad \{x(0), p(0)\}_{\gamma_j} \in \gamma_j, \quad t \geq 0. \quad (2.67)$$

Evidentemente las soluciones del sistema de Hamilton (2.67) para $j = 1, 2, \dots, k$, son funciones periódicas con periodos T_j . Se consideran las trayectorias $x_j(t), p_j(t)$ a lo largo de las curvas γ_j en la dirección de las manecillas del reloj. Se elige un punto inicial sobre las curvas γ_j como

$$\{x(0), p(0)\}_{\gamma_j} = \left\{ x_{0j}, p = \sqrt{E - \lambda_j(x_{0j})} > 0 \right\}. \quad (2.68)$$

Sobre la curva γ_j la ecuación de transporte (2.66) en la forma invariante está dada por la fórmula:

$$\frac{d\rho_j}{dt} + 2p \left(\frac{de_j}{dx}, e_j \right) \rho_j = 0, \quad \text{here } p = p_j(t), \quad x = x_j(t); \quad \text{Re} \left(\frac{de_j}{dx}, e_j \right) = 0. \quad (2.69)$$

Evidentemente, si en una carta U_x sobre γ_j en el dominio $\pi_x(U_x)$ se tiene que $p_j(t)|_{U_x} > 0$ entonces la función $\rho_j \circ \pi_x^{-1}$ satisface la ecuación de transporte (2.66) con el signo "+", y si se tiene que $p_j(t)|_{U_x} < 0$ entonces con el signo "-". Note que todas las curvas γ_j son simétricas con respecto al eje real. Por lo tanto la ecuación (2.69) implica que la función $\rho_j(t)$ tiene un periodo T_j , i.e. $\rho_j(0) = \rho_j(T_j)$.

Las funciones ψ_j^\pm en (2.64) están determinadas por la ecuación

$$\psi_j^\pm = i2p_j \frac{\rho_j^\pm}{\sqrt{|p_j|}} [p_j^2 + A(x) - E]^{-1} \left(\frac{de_j}{dx} - e_j(x) \left(\frac{de_j}{dx}, e_j \right) \right). \quad (2.70)$$

En lo que sigue sobre la curva γ_j se usa la función ψ_j , obtenida de la fórmula (2.70) cambiando la función ρ_j^\pm por ρ_j , con $p_j = p|_{\gamma_j}$.

Ahora se definen las funciones $\tilde{S}_l(t)$ sobre las curvas γ_l como:

$$\widetilde{S}_j(t) = \int_0^t p_j(t) \left[\frac{dx_j(t)}{dt} \right] dt = \int_{x_{0j}}^{x_j(t)} p_j dx_j \Big|_{\gamma_j}. \quad (2.71)$$

Sea $t_l(x)$ la solución de la ecuación $x_j(t) = x$. Note que si la carta U_x sobre γ_j es tal que la proyección π_x es un difeomorfismo $U_x \rightarrow \pi_x(U_x)$, entonces $t_l(x) \in C^\infty(\pi_x(U_x))$. Las funciones $t_l(x)$ están definidas hasta unos periodos T_l . En lo que sigue se pone:

$$S_j(x) = \widetilde{S}_j(t) \Big|_{t_j(x)}. \quad (2.72)$$

Evidentemente si se tiene que $p_j(t)|_{U_x} > 0$ entonces $S_j(x) = S_j^+(x) + const$, y en el caso cuando $p_j(t)|_{U_x} < 0$ se tiene que $S_j(x) = S_j^-(x) + const$. En lo que sigue para todas las curvas γ_j se fijan los puntos iniciales (2.68) y se definen los datos iniciales para la amplitud ρ_j en estos puntos, i.e. para $t = 0$.

Por asy_j^\pm se denotará la solución asintótica WKB en la parte derecha de (2.64). En una vecindad del punto x_j tal que $\lambda_j(x_j) = E$ la Condición 12 implica que $d\lambda_j(x_j)/dx \neq 0$. Sea U_p una pequeña carta sobre la curva γ_j tal que contiene al punto $(x_j, 0)$. Entonces π_p es un difeomorfismo $U_p \rightarrow \pi_p(U_p)$, y se puede calcular la solución asintótica del problema (2.63) en el intervalo $(x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon)$ en la "p"-representación de Maslov, i.e. como

$$y = \frac{1}{\sqrt{2i\pi\hbar}} \int \chi(p) e^{\frac{i}{\hbar}(px + \Phi(p))} \left[e_j \left(-\frac{d\Phi(p)}{dp} + ih \frac{d}{dp} \right) \rho_j + h\psi_j \left(-\frac{d\Phi(p)}{dp} \right) \right] dp;$$

aquí $\chi(p) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_p^1)$, $\chi(p) = 1$ en una vecindad del punto $p = 0$, y la función de fase está definida como $\Phi(p) := S_j(t)|_{t=t(p)} - px(t)|_{t=t(p)}$. Evidentemente se tiene que $-d\Phi/dp = x(t)|_{t=t(p)}$.

Condición 13 (Posición general) *Suponga que las Condiciones 11 y 12 se satisfacen para γ_j , $j = 1, \dots, n$, las ecuaciones $\lambda_j(x) = E$ tienen dos soluciones para cada curva y $d\lambda_j(x)/dx \neq 0$ en los puntos $x : \lambda_j(x) = E$. Suponga que sobre el conjunto de cambio de multiplicidad D se tiene que $\lambda_j|_D \neq E$, $j = 1, \dots, n$. Suponga además que cada dos curvas que se intersectan tienen una cantidad finita de intersecciones, y que los valores propios λ_j, λ_q que coinciden sobre el conjunto D satisfacen la condiciones siguientes:*

$$d(\lambda_j - \lambda_q)/dx|_D \neq 0 \text{ para } j \neq q.$$

Denote el índice de Maslov (veanse [9, 19]) de la curva $\gamma_j(E)$ por $Ind(\gamma_j(E))$. El teorema siguiente fue demostrado en la sección anterior.

Teorema 6 *Suponga que la curva γ_j intersecta solamente las curvas $\gamma_{l_\alpha}, \alpha = 1, \dots, k \leq n - 1$, y que se satisfacen las Condiciones 11, 12, y 13. Sea $E = E(h)$ una función definida en $(0, 1]$ tal que $E(h) \in (E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$, y en el intervalo $(E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$ el operador (2.63) no tiene un espectro continuo. Suponga que*

$$\frac{1}{\hbar} \int_{\gamma_j(E)} p dx - \frac{\pi}{2} Ind(\gamma_j(E)) = 2\pi m(h), \text{ para algún } m(h) \in \mathbb{Z},$$

$$\left| \exp i \left\{ \frac{1}{\hbar} \int_{\gamma_{i_\alpha}(E)} p dx - \frac{\pi}{2} Ind(\gamma_{i_\alpha}(E)) \right\} - 1 \right| \geq C > 0, \alpha = 1, \dots, k,$$

para una constante C . Entonces existen valores propios $E_{eg}(h) \in (E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$ del problema de Sturm-Liouville (2.63) tales que $E(h) - E_{eg}(h) = O(h^2)$.

2.2.2. Matrices de transición y su aplicación a la condición de cuantización

Sean $U_j, j = 1, \dots, k$, cartas sobre γ_j tales que $p|_{U_j} \geq 0$. Suponga que $\pi_x(U_j) = (x_1 - \delta < x < x_1), j = 1, \dots, k$, y que $D \cap (x_1 - \delta < x < x_1) = \emptyset$, pero $x_1 \in D$. Considere la solución asintótica WKB asy_j^+ en la carta U_j . Usando el método desarrollado en el trabajo [5] se extiende la solución asintótica WKB desde las cartas U_j a lo largo de la unión $\gamma_1 \cup \gamma_2 \dots \cup \gamma_k$ de las curvas $\gamma_j, j = 1, \dots, k$, en la dirección de las manecillas del reloj. Sea x_1 un punto que satisface las condiciones siguientes.

Condición 14 *Suponga que los valores propios $\lambda_j(x), j = 1, \dots, k, k \geq 2$, coinciden en un punto $x_1 \in \pi_x(\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k)$, las funciones $\lambda_j(x) - \lambda_l(x), 1 \leq j, l \leq k, j \neq l$ tienen ceros de ordenes finitos en el punto x_1 , y $\lambda_l(x_1) \neq E$, para $l = 1, \dots, k$. Se supone que en $\pi_x(\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k)$ los valores propios $\lambda_j(x), j = k+1, \dots, n$, tienen multiplicidad uno.*

Ahora se supone que se satisfacen las Condiciones 11,12, y 14. Se considera la solución asintótica WKB y_j^\pm con las funciones de fase (2.65) del lado derecho y del lado izquierdo del punto x_1 . El lema siguiente fue demostrado en la sección anterior.

Lema 5 *(Matrices de Transición) Suponga que se satisfacen las Condiciones 11,12, y 14. 1° Sean $y_l^+, l = 1, \dots, k$, las soluciones del sistema (2.63) tales que en el intervalo por la izquierda $(x_1 - \delta/2, x_1)$ tiene el comportamiento asintótico (2.64) con el signo "+", la amplitud $\rho_{l,left}^+$, y los datos iniciales $\rho_{l,left}^+(0)$. En este caso, existe una $(k \times k)$ matriz unitaria $\mathbb{U}^+(x_1)$ tal que en el intervalo por la derecha $(x_1, x_1 + \delta/2)$ las soluciones $y_l^+, l = 1, \dots, k$, tienen el siguiente comportamiento asintótico:*

$$y_l^+ = \sum_{m=1}^k \exp \left\{ \frac{i}{h} S_m^+(x) \right\} \left[\frac{e_m(x) \rho_{ml,right}^+(x)}{\sqrt{|p_m(x)|}} + h \psi_{ml,right}^+(x) + O(h^2) \right]. \quad (2.73)$$

Aquí los datos iniciales $\rho_{ml,right}^+(0)$ de las amplitudes $\rho_{kl,right}^+$ son de la forma

$$\begin{aligned} \{\rho_{11,right}^+(0), \dots, \rho_{k1,right}^+(0)\}^t &= \mathbb{U}^+(x_1) \{\rho_{1,left}^+(0), \dots, 0\}^t, \dots, \\ \{\rho_{1k,right}^+(0), \dots, \rho_{kk,right}^+(0)\}^t &= \mathbb{U}^+(x_1) \{0, \dots, \rho_{k,left}^+(0)\}^t. \end{aligned} \quad (2.74)$$

El símbolo $\{\dots\}^t$ en la fórmula (2.74) denota la transposición.

2° Análogamente para las soluciones del sistema (2.63) tales que en el intervalo por la derecha $(x_1, x_1 + \delta/2)$ tienen un comportamiento asintótico (2.64) con el signo "-" existe una $(k \times k)$ matriz unitaria $\mathbb{U}^-(x_1)$ tal que las fórmulas (2.74) y (2.73) se satisfacen con el signo "-".

3° Determinantes de las matrices $\mathbb{U}^+(x_1)$ y $\mathbb{U}^-(x_1)$ satisfacen la igualdad

$$\det(\mathbb{U}^+(x_1)) = \det(\mathbb{U}^-(x_1)) + O(h^2). \quad (2.75)$$

4° Las matrices $\mathbb{U}^+(x_1)$ y $\mathbb{U}^-(x_1)$ como funciones del parámetro h tienen el siguiente comportamiento asintótico:

$$\mathbb{U}^\pm(x_1) = \mathbb{I} + h^{\frac{1}{q+1}} C(x_1) + o(h^{\frac{1}{q+1}}), \quad (2.76)$$

donde el número q es el menor orden de los ceros de las funciones $(\lambda_j(x) - \lambda_l(x))$, para $1 \leq j, l \leq k, j \neq l$, en el punto x_1 .

Se dice que las curvas $\gamma_l(E), \gamma_m(E)$ pertenecen a un clúster si existe una cadena $\{\gamma_{j_\alpha}(E)\}_{\alpha=1}^q$ de curvas que se intersectan a pares, i.e. $\gamma_{j_\alpha}(E) \cap \gamma_{j_{\alpha+1}}(E) \neq \emptyset$ tales que $\gamma_l(E) = \gamma_{j_1}(E)$ y $\gamma_m(E) = \gamma_{j_q}(E)$. En lo que sigue se considera el clúster formado por las curvas $\gamma_{l_1}(E), \dots, \gamma_{l_m}(E)$. Sea $\{x_1, \dots, x_u : x_1 < \dots < x_u\}$ la proyección de todas las intersecciones entre las curvas del clúster sobre \mathbb{R}_x^1 , i.e. los puntos de la forma $\pi_x(\gamma_{l_\alpha}(E) \cap \gamma_{l_\beta}(E)), 1 \leq \alpha \neq \beta \leq m$. Más adelante se introduce un índice sobre las curvas del clúster en la dirección de las manecillas del reloj. Considere sobre todas las curvas γ_{l_α} del clúster, la solución asintótica WKB tal que las amplitudes toman sus valores iniciales en el punto (2.68) y las funciones de fase S_l^+ son iguales a la función de fase (2.72). El problema consiste en elegir a los datos iniciales para las amplitudes de tal manera que extendiendo la solución asintótica WKB a lo largo del clúster en la dirección de las manecillas del reloj se obtiene la misma solución asintótica WKB. Esta condición es en realidad una condición de cuantización para la energía E . Es posible extender la solución asintótica WKB usando del método de Maslov (ver [9, 19]) y el método desarrollado en los trabajos [10, 5] (ver además el Lema 5).

Para las curvas γ_j consideradas es válida la afirmación siguiente.

Afirmación 1 *Cada curva γ_j intersecta la línea vertical $x = cte.$ a lo más en dos puntos.*

Considere las imágenes inversas de un punto $x_q \in \{x_1, \dots, x_u\}$ sobre las curvas del clúster. Sea $\pi_x^{-1}(x_q) = \left(\cup_{\mu=1}^{\beta} A_{q,\mu}^+\right) \cup \left(\cup_{\mu=1}^{\beta} A_{q,\mu}^-\right)$, note que los puntos $A_{q,\mu}^-$ y $A_{q,\mu}^+$ son simétricos con respecto al eje real. Suponga que las curvas $\gamma_{l_{\alpha_1}}, \dots, \gamma_{l_{\alpha_\mu}}$ del clúster se intersectan en el punto $A_{q,\mu}^+$. Debido a la simetría de los puntos las mismas curvas se intersectan en el punto $A_{q,\mu}^-$. Como cada curva γ_j intersecta la línea vertical $x = cte.$ a lo más en dos puntos es posible separar a las curvas en clases tales que las curvas de una clase pasen a través de los puntos $A_{q,\mu}^\pm$ y no pasen a través de los puntos $A_{q,\alpha}^\pm$ para $\alpha \neq \mu$. Por lo tanto las curvas de un clúster pasan a través de cada punto $A_{q,\beta}^\pm$ solamente en la dirección de las manecillas del reloj. Más adelante se construyen $(m \times m)$ matrices unitarias $\mathbb{W}^+(x_q, E)$, $\mathbb{W}^-(x_q, E)$ y $(m \times m)$ matrices unitarias $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_u$ para cada punto x_q . La condición de cuantización es equivalente a la existencia de un vector propio $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^m$ tal que

$$\mathbb{W}^-(x_1, E) \dots \mathbb{W}^-(x_u, E) \mathbb{L}_u \mathbb{W}^+(x_u, E) \dots \mathbb{W}^+(x_1, E) \mathbb{L}_1 \mathbf{v} = \mathbf{v} + O(h), \quad (2.77)$$

ó a la siguiente condición sobre el espectro de la matriz en la parte izquierda de la fórmula (2.77):

$$\sigma(\mathbb{W}^-(x_1, E) \dots \mathbb{W}^-(x_u, E) \mathbb{L}_u \mathbb{W}^+(x_u, E) \dots \mathbb{W}^+(x_1, E) \mathbb{L}_1) \cap \{\lambda : |1 - \lambda| \leq Ch\} \neq \emptyset.$$

Ahora sin pérdida de generalidad se supone que el clúster está formado por las curvas $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, y que los datos iniciales para la amplitud ρ_j son iguales a la componente \mathbf{v}_j del vector $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^m$. Más adelante se calculan las matrices $\mathbb{L}_1, \mathbb{W}^\pm(x_1, E), \mathbb{W}^\pm(x_2, E), \mathbb{L}_u$, y las matrices $\mathbb{W}^\pm(x_k, E), k \geq 2$, los cuales son similares a las matrices $\mathbb{W}^\pm(x_2, E)$.

Se definen los puntos iniciales $A_j^0 = \{x_j(0), p_j(0)\}$ sobre las curvas $\gamma_j, j = 1, \dots, m$, de manera siguiente. Considere las líneas verticales $x = x_q, x_q \in \{x_1, \dots, x_u\}$ tales que intersectan a la curva γ_j . Sea $x = x_{q(j)}$ una de las líneas con el mínimo subíndice q tal que la curva γ_j intersecta a la curva del clúster en un punto del conjunto $\pi_x^{-1}(x_q)$. Se define el punto inicial sobre la curva γ_j como

$$A_j^0 := \gamma_j \cap \{x = x_{q(j)}\} \cap \{p > 0\},$$

y sea $A_j^{0-} := \gamma_j \cap \{x = x_{q(j)}\} \cap \{p < 0\}$.

Suponga que se tiene que $\pi_x^{-1}(x_1) = \left(\cup_{\mu=1}^{\beta} A_{1,\mu}^+\right) \cup \left(\cup_{\mu=1}^{\beta} A_{1,\mu}^-\right)$. Ahora es posible separar a las curvas del clúster en grupos con respecto al punto x_1 . Suponga que a través de los puntos $A_{1,1}^\pm$

pasan las curvas $\gamma_1, \dots, \gamma_{k_1}$, a través de los puntos $A_{1,2}^\pm$ pasan las curvas $\gamma_{k_1+1}, \dots, \gamma_{k_2}$, y a través de los puntos $A_{1,\beta}^\pm$ pasan las curvas $\gamma_{k_{\beta-1}+1}, \dots, \gamma_{k_\beta}$, donde $k_0 = 0$, y $1 < k_1 < \dots < k_\beta$. Suponga que en el clúster existen f curvas $\gamma_{k_\beta+1}, \dots, \gamma_{k_\beta+f}$ que intersectan la línea $x = x_1$ y las curvas del clúster de tal manera que los puntos de intersecciones de $\gamma_{k_\beta+1}, \dots, \gamma_{k_\beta+f}$ con el clúster no pertenecen a la línea $x = x_1$. Además suponga que existen $(m - k_\beta - f)$ curvas $\gamma_{k_\beta+f+1}, \dots, \gamma_m$ que no intersectan la línea $x = x_1$.

Para construir la extensión de la solución asintótica WKB a lo largo del clúster se introducen las notaciones siguientes. Considere el arco $(M_1, M_2)_l$ de la curva $\gamma_l(E)$ que pasa a través de los puntos M_1 y M_2 en la dirección de las manecillas del reloj. Sea $\theta(M_1, M_2)_l$ el ángulo definido como

$$\theta(M_1, M_2)_l = \frac{1}{h} \int_{(M_1, M_2)_l} p_l dx - \frac{\pi}{2} \text{Ind}((M_1, M_2)_l), \quad (2.78)$$

aquí $\text{Ind}((M_1, M_2)_l)$ es el índice de Maslov del arco $(M_1, M_2)_l$ [9, 19].

Primero se definen las matrices $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_q$. Sea \mathbb{L}_1 la matriz definida como

$$\mathbb{L}_1 = \|\delta_{lj} \exp(i\theta_j(A_j^{0-}, A_j^0))\|,$$

para $1 \leq l, j \leq m$.

Sea $x = x_{l(j)}$ la línea con el máximo subíndice l tal que la curva γ_j intersecta una curva del clúster en los puntos $A_{l(j),\nu}^\pm \in \pi_x^{-1}(x_{l(j)})$. Por definición la matriz \mathbb{L}_q tiene la forma $\mathbb{L}_q := \|\delta_{lj} \exp(i\theta_j(A_{l(j),\nu}^+, A_{l(j),\nu}^-))\|$, para $1 \leq l, j \leq m$.

Ahora se define la matriz unitaria $\mathbb{W}^+(x_1, E)$ en \mathbb{C}^m . Esta matriz es una matriz diagonal por bloques compuesta por dos bloques. El primer bloque es una matriz diagonal por bloques que consiste de β bloques $\mathbb{U}_j(x_1)$, $j = 1, \dots, \beta$, correspondientes a las curvas $\gamma_{k_{j-1}+1}, \dots, \gamma_{k_j}$, $1 \leq j \leq \beta$. En efecto estos $(k_j - k_{j-1}) \times (k_j - k_{j-1})$ bloques se obtienen al aplicar el Lema 5 a las curvas $\gamma_{k_{j-1}+1}, \dots, \gamma_{k_j}$ en una vecindad del punto x_1 . El segundo bloque de la matriz unitaria $\mathbb{W}^+(x_1, E)$ es la $(m - k_\beta) \times (m - k_\beta)$ matriz identidad.

Para calcular la matriz $\mathbb{W}^+(x_2, E)$ es necesario separar a las curvas del clúster en grupos con respecto al punto x_2 de manera análoga como se hizo para el punto x_1 . Suponiendo que $\pi_x^{-1}(x_2) = (\cup_{\mu=1}^\delta A_{2,\mu}^+) \cup (\cup_{\mu=1}^\delta A_{2,\mu}^-)$, existe una enumeración de las curvas $\gamma_j(E)$, tal que las curvas $\gamma_1, \dots, \gamma_{n_1}$ pasan a través de los puntos $A_{2,1}^\pm$ y las curvas $\gamma_{n_\nu-1}, \dots, \gamma_{n_\nu}$ pasan a través de los puntos $A_{2,\nu}^\pm$, $\nu = 2, \dots, \delta$. Suponga que en el clúster existen f_2 curvas $\gamma_{n_\delta+1}, \dots, \gamma_{n_\delta+f_2}$ que intersectan la línea $x = x_2$ y las curvas del clúster de tal manera que los puntos de intersección con el clúster no pertenecen a la línea $x = x_2$. Además suponga que existen $(m - n_\delta - f_2)$ curvas $\gamma_{n_\delta+f_2+1}, \dots, \gamma_m$ que no intersectan la línea $x = x_2$.

Bajo la enumeración inicial se tienen que $\rho_j(0) = \mathbf{v}_j$. Sea $\mathbb{E}n_2$ la matriz unitaria correspondiente a la enumeración del punto x_2 .

La matriz $\mathbb{E}n_2 \mathbb{W}^+(x_2, E) \mathbb{E}n_2^*$ es una matriz diagonal por bloques compuesta por dos bloques. El primer bloque es una matriz diagonal por bloques que consiste de δ bloques, correspondientes a las curvas $\gamma_{n_{j-1}+1}, \dots, \gamma_{n_j}$, $1 \leq j \leq \delta$. Así se obtienen $(n_j - n_{j-1}) \times (n_j - n_{j-1})$ matrices $\mathbb{U}_j(x_2)$, donde $j = 1, \dots, \delta$; $n_{j-1} + 1 \leq q, r \leq n_j$. Aquí el ángulo $\theta_q, (n_{j-1} + 1) \leq q \leq n_j$, es igual a $\theta(A_{1,\mu}^+, A_{2,\alpha}^+)_q$ si la curva γ_q pasa a través de los puntos $A_{1,\mu}^+, A_{2,\alpha}^+$. El ángulo θ_q es igual a cero si la curva γ_q no pasa a través de ninguno de los puntos $A_{1,\mu}^+, \mu = 1, \dots, \delta$. El segundo bloque de la matriz unitaria $\mathbb{E}n_2 \mathbb{W}^+(x_2, E) \mathbb{E}n_2^*$ es la $(m - n_\delta) \times (m - n_\delta)$ matriz identidad.

Ahora se considera el caso general, i.e. la matriz $\mathbb{W}^+(x_k, E)$. Se dividen las curvas del clúster en los grupos con respecto al punto x_k , análogamente como se hizo para los puntos x_1 y x_2 .

Suponga que se tiene que $\pi_x^{-1}(x_k) = \left(\cup_{\mu=1}^{\delta} A_{k,\mu}^+\right) \cup \left(\cup_{\mu=1}^{\delta} A_{k,\mu}^-\right)$. Evidentemente el número δ depende del punto x_k . En este caso existe una enumeración de las curvas $\gamma_j(E)$, tal que las curvas $\gamma_1, \dots, \gamma_{d_1}$ pasan a través de los puntos $A_{k,1}^{\pm}$ y las curvas $\gamma_{d_{j-1}+1}, \dots, \gamma_{d_j}$ pasan por los puntos $A_{k,j}^{\pm}, j = 2, \dots, \delta$. Suponga que en el clúster existen f_k curvas $\gamma_{d_{\delta}+1}, \dots, \gamma_{d_{\delta}+f_k}$ que intersectan la línea $x = x_k$ y las curvas del clúster de tal manera que los puntos de intersección con el clúster no pertenecen a la línea $x = x_k$. Además, suponga que existen $(m - d_{\delta} - f_k)$ curvas $\gamma_{d_{\delta}+f_k+1}, \dots, \gamma_m$ que no intersectan la línea $x = x_k$.

Como antes se tiene que bajo la enumeración inicial $\rho_j(0) = \mathbf{v}_j$, y sea $\mathbb{E}n_k$ la matriz unitaria correspondiente a la enumeración para el punto x_k . La matriz $\mathbb{E}n_k \mathbb{W}^+(x_k, E) \mathbb{E}n_k^*$ es una matriz diagonal por bloques compuesta por dos bloques. El primer bloque es una matriz diagonal por bloques que consiste de δ bloques, correspondientes a la curvas $\gamma_{d_{j-1}+1}, \dots, \gamma_{d_j}, 1 \leq j \leq \delta$. Aplicando el Lema 5 a las curvas $\gamma_{d_{j-1}+1}, \dots, \gamma_{d_j}$ en una vecindad del punto x_k se obtienen $(d_j - d_{j-1}) \times (d_j - d_{j-1})$ matrices $\mathbb{U}_j(x_k), j = 1, \dots, \delta$. El primer bloque de la matriz $\mathbb{E}n_k \mathbb{W}^+(x_k, E) \mathbb{E}n_k^*$ está compuesto por δ bloques de la forma $\mathbb{U}_j(x_k) \|\delta_{qr} \exp(i\theta_q)\|, d_{j-1} + 1 \leq q, r \leq d_j$. Aquí el ángulo $\theta_q, (d_{j-1} + 1) \leq q \leq d_j$ es igual a $\theta(A_{\sigma(k),\mu}^+, A_{k,\alpha}^+)_q$ en el caso cuando la curva γ_q pasa a través de los puntos $A_{\sigma(k),\mu}^+, A_{k,\alpha}^+$, y el índice $\sigma(k)$ es menor o igual que k . Aquí $\sigma(k)$ es el índice q más cercano al índice k tal que la curva γ_q intersecta a una curva del clúster en un punto del conjunto $\pi_x^{-1}(x_k)$. El ángulo θ_q es igual a cero si la curva γ_q no pasa a través de ninguno de los puntos $A_{k,\mu}^+, \mu = 1, \dots, \delta$, y para $\sigma(k) \geq k$. El segundo bloque de la matriz $\mathbb{E}n_k \mathbb{W}^+(x_k, E) \mathbb{E}n_k^*$ es $(m - d_{\delta}) \times (m - d_{\delta})$ matriz identidad. Las matrices $\mathbb{W}^-(x_k, E)$ pueden ser determinadas de manera análoga.

Teorema 7 *Suponga que las curvas $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ satisfacen las Condiciones 11, 12, y 14. Si la energía $E(h)$ satisface la ecuación (2.77) y $E(h) \in (E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$ entonces existe un valor propio $\lambda \in (E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$ del problema (2.63) tal que $\lambda = E(h) + O(h^2)$.*

La fórmula (2.76) implica que en el caso cuando se satisface la Condición 14 se tiene que

$$\begin{aligned} & \mathbb{W}^-(x_1, E) \dots \mathbb{W}^-(x_u, E) \mathbb{L}_u \mathbb{W}^+(x_u, E) \dots \mathbb{W}^+(x_1, E) \mathbb{L}_1 \\ &= \|\delta_{lj} \exp(i\theta_j)\| + \sqrt{\hbar} D, \text{ para } 1 \leq l, j \leq m, \end{aligned} \quad (2.79)$$

donde

$$\theta_j = \frac{1}{\hbar} \int_{\gamma_j(E)} p dx - \frac{\pi}{2} \text{Ind}(\gamma_j(E)),$$

m es el número de las curvas del clúster considerado y para todo $h \in (0, 1]$ se tiene que $\|D\| \leq cte$.

La demostración del Teorema 7 se obtiene directamente de la fórmula (2.79).

Capítulo 3

Soluciones asintóticas para los sistemas de ecuaciones ordinarias con un parámetro pequeño cerca de la derivada en el caso cuando coinciden 3 raíces características

3.1. Introducción

linealizando los sistemas no lineales en derivadas parciales (por ejemplo el sistema de ecuaciones para líquidos ideales compresibles, sistema de ecuaciones de Maxwell con corriente $J(\rho, E)$ que depende de manera no lineal de la densidad de carga ρ y del campo eléctrico E) se obtiene un sistema lineal con tres o más raíces características coincidentes. El modelo unidimensional de esta situación es el siguiente sistema con un parámetro pequeño cerca de la derivada:

$$-ih \frac{dy}{dt} + A(t)y + hB(t)y = 0, \quad (3.1)$$

aquí $y \in \mathbb{C}^{r+2}$, $r \geq 1$, y $h \in (0, 1]$ es parámetro pequeño. Considere la solución asintóticas de las soluciones linealmente independientes del sistema (3.1) en un dominio $U = \{|t| < \varepsilon\}$. Sean $B(t) \in C^\infty(U)$ y $A(t)$ una función matricial de la forma

$$A(t) = \begin{bmatrix} Iat & 0 & 0 \\ 0 & bt & d \\ 0 & 0 & ct \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

con I la $(r \times r)$ matriz identidad, $d \in \mathbb{R}_+^1$, y $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a \neq b \neq c$. Evidentemente se

tiene que los vectores $e_j \in \mathbb{R}^{r+2}$, $j = 1, \dots, r+2$, tales que la j -ésima entrada del vector e_j es igual a 1 y todas las demás entradas son iguales a 0, son vectores propios de la matriz (3.2). Este sistema no se reduce a la ecuación de Weber.

Sea Φ^N una solución del problema (3.1) con precisión $O(h^N)$ que satisface unos datos iniciales, i.e. se tiene que

$$-ih \frac{d\Phi^N}{dt} + A(t)\Phi^N + hB(t)\Phi^N = O(h^N), \text{ para } |t - t_0| < T, \quad (3.3)$$

$$[t_0 - T, t_0 + T] \subset [-T_0, T_0].$$

Evidentemente el problema (3.1) es un sistema lineal de ecuaciones diferenciales con coeficientes acotados, por lo tanto existe la solución exacta $y(x, h)$ del problema (3.1) que satisface los mismos datos iniciales que Φ^N . En este caso la función $\tilde{\phi}^N := y - \Phi^N$, es solución del problema (3.3) con datos iniciales iguales a cero, i.e.

$$-ih \frac{d\tilde{\phi}^N}{dt} + A(t)\tilde{\phi}^N + hB(t)\tilde{\phi}^N = F(t, h)h^N, \text{ para } |t - t_0| < T,$$

$$\tilde{\phi}^N(t_0) = 0,$$

donde $F(t, h) \in C^\infty([t_0 - T, t_0 + T])$ y $\text{Sup}_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} |\partial_t^k F(t, h)| \leq C_k h^{-k}$, para una constante $C_k > 0$, y $k \in \mathbb{N}$.

En este capítulo se desarrolla un método asintótico para resolver este problema y demostrar el teorema siguiente.

Teorema 8 *Suponga que los coeficientes de la ecuación (3.1) satisfacen las condiciones antes mencionadas. En este caso existe un número natural $n = n(T)$ tal que la solución del problema (3.3) tiene la estimación siguiente:*

$$\left\| \tilde{\phi}^N \right\|_{C([-T, T])} \leq Ch^{N-n-1}, \text{ para } N > n + 1.$$

En el dominio $|t| > h^{1/2-\delta}$, $0 < \delta < 1/8$, se puede obtener la solución asintótica de la ecuación (3.1) usando el método WKB estándar. En el dominio $|t| < h^{1/2-\delta}$, $0 < \delta < 1/8$, buscamos la solución del problema (3.1) en la forma

$$y(t) = \exp\left(-i \frac{bt^2}{2h}\right) z(t). \quad (3.4)$$

Substituyendo la expresión (3.4) en (3.1) y pasando en la ecuación obtenida en "p"-representación (ver [19]), i.e.

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{\gamma} \exp\left(\frac{i}{h} tp\right) \tilde{w}(p) \chi(p) dp$$

donde $\chi(p)$ es una función de corte, i.e. $\chi(p) \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ y se tiene que $\chi(p) = 1$ para $|\text{Re } p| < h^{1/2-\delta}$ y $\chi(p) = 0$ para $|\text{Re } p| > 2h^{1/2-\delta}$, la ecuación (3.1) se reduce a

$$p\tilde{w}(p) + \begin{bmatrix} I(a-b) \left(ih \frac{d}{dp} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & (c-b) \left(ih \frac{d}{dp} \right) \end{bmatrix} \tilde{w}(p) + hB \left(ih \frac{d}{dp} \right) \tilde{w}(p) = 0, \quad (3.5)$$

donde $\tilde{w}(p) = (w_1(p), \dots, w_r(p), w_{r+1}(p), w_{r+2}(p))$, $B \left(ih \frac{d}{dp} \right) = \left\| b_{ij} \left(ih \frac{d}{dp} \right) \right\|$ y $b_{ij} \left(ih \frac{d}{dp} \right)$, $1 \leq i, j \leq r+2$, son operadores pseudodiferenciales (P.D.O.'s). La integración se hace a lo largo del contorno γ que pasa por el eje real y pasa por abajo del punto $p = 0$ a lo largo de la circunferencia de radio $|p| = h^{1/2+2\delta}$. Note que en el dominio $|t| < h^{1/2-\delta}$ la matriz $B(t)$ puede ser

reemplazada por una sumatoria finita de la serie de Taylor con la precisión hasta $O(t^N)$. Por lo tanto es posible considerar a los operadores $b_{ij} \left(ih \frac{d}{dp} \right)$ como operadores diferenciales. Considere la solución del sistema (3.1) para p en el dominio $D = \{p : |p| > h^{1/2+2\delta}\}$ cortada a lo largo de un rayo. Note que en dicho dominio se tiene que $\left| \frac{h}{p} \right| \leq h^{1/2-2\delta} < h^{1/4}$ para $0 < \delta < 1/8$. Las soluciones asintóticas en "t"-representación se determinan por el comportamiento de la función $w_j(p)$ en una vecindad del punto $p = 0$. Por lo tanto p en realidad es un segundo parámetro pequeño. En lo que sigue se demuestra que para construir la solución del problema (3.1) en el dominio $|t| < h^{1/2-\delta}$ es suficiente construir la solución asintóticas del problema (3.5) en el dominio $|p| < h^{1/2-\delta}$, donde δ es un número positivo. Por lo que se construirá la solución asintóticas del problema (3.5) en el dominio $D = \{p : h^{1/2+2\delta} < |p| < h^{1/2-\delta}\}$.

Debido a que el símbolo principal de la ecuación (3.5) tiene unas raíces múltiples en el punto $p = 0$ y estas raíces son suaves, entonces procediendo de manera análoga con los trabajos [5], [28] la solución del problema se busca en la clase de vector funciones con las componentes de la forma

$$e^{\frac{i}{h} S_{f,0}} \nu_{f,0}(p, h) + \sum_{k=1}^N \int_{p_0}^p dp_k \int_{p_0}^{p_k} dp_{k-1} \dots \int_{p_0}^{p_2} \exp\left(\frac{i}{h} S_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k)\right) \nu_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, h) dp_1, \quad (3.6)$$

donde $f = 1, 2; N \in \mathbb{N}, p_j \in \gamma, j = 0, \dots, N$, fases $S_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k)$ son de la forma

$$S_{1,k}(p, p_1, \dots, p_k) = \int_{p_0}^{p_1} \lambda_1(s) ds + \int_{p_1}^{p_2} \lambda_2(s) ds + \dots + \int_{p_k}^p \lambda_l(s) ds,$$

donde $l = 2$ para números $(k+1)$ pares, y $l = 1$ para números $(k+1)$ impares,

$$S_{2,k}(p, p_1, \dots, p_k) = \int_{p_0}^{p_1} \lambda_2(s) ds + \int_{p_1}^{p_2} \lambda_1(s) ds + \dots + \int_{p_k}^p \lambda_q(s) ds,$$

donde $q = 1$ para números $(k+1)$ pares, y $q = 2$ para números $(k+1)$ impares, y se tiene que $\lambda_1(p) = p/(a-b)$, $\lambda_2(p) = p/(c-b)$. Se sugiere buscar las componentes $\nu_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, h)$ en una clase de funciones $\mathcal{L}^{f,k}$. Las funciones de esta clase son analíticas con respecto a p, p_1, \dots, p_k , y son de la forma

$$\nu_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, h) = \prod_{\alpha=0}^k \sum_{m,l,j=0}^M \left\{ \psi_{f,k}(p_0, p_1, \dots, p_k) \times \phi_{f,k}(p_0, p_1, \dots, p_k) \left(\frac{h}{p_\alpha}\right)^j h^l (\ln p_\alpha)^l p_\alpha^m C_{m,l,j}(h) \right\} \Big|_{p_0=p} \quad (3.7)$$

donde $f = 1, 2; M < \infty$; $\psi_{f,k}$ son funciones $C^\infty(\mathbb{R}^{k+1})$ con respecto a p_0, p_1, \dots, p_k ; $C_{m,l,j}(h)$ son polinomios en h con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^{k+1})$ en p_0, p_1, \dots, p_k ; y las funciones $\phi_{f,k}$ son de la forma

$$\phi_{1,0}(p) \in C^\infty(\mathbb{R}^1),$$

$$\phi_{1,1}(p, p_1) = \left(\frac{p}{p_1}\right)^\sigma,$$

$$\phi_{1,k}(p, p_1, \dots, p_k) = \begin{cases} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\sigma \frac{1}{p_2} \left(\frac{p_4}{p_3}\right)^\sigma \frac{1}{p_4} \dots \left(\frac{p_{2l}}{p_{2l-1}}\right)^\sigma \frac{1}{p_{2l}} \left(\frac{p}{p_{2l+1}}\right)^\sigma, & \text{para } k = 2l + 1, \\ \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\sigma \frac{1}{p_2} \left(\frac{p_4}{p_3}\right)^\sigma \frac{1}{p_4} \dots \left(\frac{p_{2l}}{p_{2l-1}}\right)^\sigma \frac{1}{p_{2l}}, & \text{para } k = 2l, \end{cases} \quad (3.8)$$

y

$$\phi_{2,k}(p, p_1, \dots, p_k) = \begin{cases} \phi_{2,0}(p) = p^\sigma, \\ \phi_{2,1}(p, p_1) = p_1^{\sigma-1}, \\ \begin{cases} p_1^{\sigma-1} \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^\sigma \frac{1}{p_3} \left(\frac{p_5}{p_4}\right)^\sigma \frac{1}{p_5} \dots \frac{1}{p_{2l-1}} \left(\frac{p_{2l+1}}{p_{2l}}\right)^\sigma \frac{1}{p_{2l+1}}, & \text{para } k = 2l + 1, \\ p_1^{\sigma-1} \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^\sigma \frac{1}{p_3} \left(\frac{p_5}{p_4}\right)^\sigma \frac{1}{p_5} \dots \frac{1}{p_{2l-1}} \left(\frac{p}{p_{2l}}\right)^\sigma, & \text{para } k = 2l, \end{cases} \end{cases} \quad (3.9)$$

donde $l \in \mathbb{N}$ y

$$\sigma = -i \frac{b_{(r+2)(r+1)}(0) d}{c - b}. \quad (3.10)$$

Denote la clase de funciones de multifase antes definida por $M\Phi_f$. Si las funciones $w_k, k = 1, \dots, r + 2$, pertenecen a esta clase es posible determinar la función w_{r+1} , con la precisión hasta h^{N_1} para todo $N_1 > 0$. Note que en el sistema (3.5) la ecuación para w_{r+1} tiene forma

$$\left\{ 1 + \frac{h}{p} b_{(r+1)(r+1)} \left(ih \frac{d}{dp} \right) \right\} w_{r+1} = g(p, h), \quad (3.11)$$

$$g(p, h) = - \left(\frac{d}{p} w_{r+2} + \frac{h}{p} \sum_{l \neq r+1} b_{(r+1)l} \left(ih \frac{d}{dp} \right) w_l \right).$$

Se busca una aproximación de la solución denotada por w_{r+1}^N de esta ecuación con respecto a la función w_{r+1} en la clase de funciones (3.6). Después se substituye la aproximación w_{r+1}^N en el sistema (3.5) y se obtiene un sistema reducido con respecto a w_1, \dots, w_r, w_{r+2} . Aplicando formalmente la teoría de perturbación (ver [9]) la aproximación w_{r+1}^N se busca en la forma

$$w_{r+1}^N = \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{h}{p} \right) b_{(r+1)(r+1)} \left(ih \frac{d}{dp} \right) \right\}^k g(p, h). \quad (3.12)$$

Sustituyendo w_{r+1}^N en (3.11) se obtiene

$$\left\{ 1 + \frac{h}{p} b_{(r+1)(r+1)} \left(ih \frac{d}{dp} \right) \right\} w_{r+1}^N = (-1)^{N+1} \left\{ \left(\frac{h}{p} \right) b_{(r+1)(r+1)} \left(ih \frac{d}{dp} \right) \right\}^{N+1} g(p, h). \quad (3.13)$$

La estimación en la parte derecha de la ecuación (3.13) se obtiene usando el lema siguiente.

Lema 6 *Suponga que las componentes de la función vectorial $g_f, f = 1, 2$, pueden ser representadas en la forma (3.6) y que $b \left(ih \frac{d}{dp} \right) = \sum_{\alpha=0}^m b_\alpha \left(ih \frac{d}{dp} \right)^\alpha$ es un operador matricial h -diferenciales del orden m , donde b_α son $(m \times m)$ matrices constantes. En este caso existen operadores h -diferenciales*

$$\tilde{P}_{f,l}^k \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}} \right) := \sum_{0 \leq |m| < \infty} \tilde{a}_{f,l}^{k,m} \left(h, p \right) \left(ih \frac{\partial}{\partial p} \right)^{m_0} \left(ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}} \right)^{m_1} \dots \left(ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}} \right)^{m_l}, \quad (3.14)$$

donde $k = 0, 1, \dots, N; l = 1, \dots, |m|; |m| = m_0 + \dots + m_l$, y $\tilde{a}_{f,l}^{k,m} \left(h, p \right)$ son polinomios con respecto a p y h , tales que:

$$b \left(ih \frac{d}{dp} \right) g_f = \exp \left(\frac{i}{h} S_{f,0} \right) \left\{ \left[b \left(-\frac{dS_{f,0}}{dp} \right) + \tilde{P}_{f,0}^0 \left(h, p; ih \frac{d}{dp} \right) \right] v_{f,0} \left(p, h \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
 & +h \tilde{P}_{f,1}^0 \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1} \right) v_{f,1}(p, p_1, h) \Big|_{p_1=p} + \dots \\
 & +h^l \tilde{P}_{f,l}^0 \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_l} \right) v_{f,l}(p, p_1, \dots, p_l) \Big|_{p_1=\dots=p_l=p} + \dots \\
 & \quad \left. + (ih)^m b_m v_{f,m}(p, p_1, \dots, p_m) \Big|_{p_1=\dots=p_m=p} \right\} \\
 & + \sum_{k=1}^N \int_{p_0}^p dp_k \dots \int_{p_0}^{p_2} dp_1 e^{\frac{i}{h} S_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k)} \left\{ \left[b \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p} \right) + \tilde{P}_{f,0}^k \left(h, p; ih \frac{d}{dp} \right) \right] v_{f,k} \right. \\
 & \quad \left. +h \tilde{P}_{f,1}^k \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}} \right) v_{f,k+1}(p, p_1, \dots, p_{k+1}) \Big|_{p_{k+1}=p} + \dots \right. \\
 & \quad \left. +h^l \tilde{P}_{f,l}^k \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}} \right) v_{f,k+l}(p, p_1, \dots, p_{k+l}) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+l}=p} + \dots \right. \\
 & \quad \left. + (ih)^m b_m v_{f,k+m}(p, p_1, \dots, p_{k+m}) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+m}=p} \right\}. \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

Aquí los términos del orden cero $a_l(p, h)$ de los operadores $\tilde{P}_{f,l}^k \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}} \right)$ son funciones polinomiales en h con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ con respecto a p , y los vectores $v_{f,\beta} \equiv 0$ para todo $\beta > N$.

2. La función $\sum_{\beta=0}^N \left\{ \left(-\frac{h}{p} \right) b \left(ih \frac{d}{dp} \right) \right\}^\beta g_f$ puede ser representada como la parte derecha de la expresión (3.15) donde los operadores $\tilde{P}_{f,l}^k$ son sustituidos por los operadores $P_{f,l}^k$. Los operadores $P_{f,l}^k = P_{f,l}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}} \right)$ se obtienen a partir de la fórmula (3.14) cambiando los coeficientes $\tilde{a}_{f,l}^{k,m}(h, p)$ por funciones $a_{f,l}^{k,m} \left(h, \frac{h}{p}, p \right)$, y las funciones $a_{f,l}^{k,m} \left(h, \frac{h}{p}, p \right)$ son polinomios con respecto a $h, \frac{h}{p}$, y p .

3. La función $\sum_{\beta=0}^N \left\{ \left(-\frac{h}{p} \right) b \left(ih \frac{d}{dp} \right) \right\}^\beta \left(\frac{d}{p} g_f \right)$ puede ser representada en la forma (3.15) donde los operadores $\tilde{P}_{f,l}^k$ son sustituidos por los operadores $\frac{1}{p} P_{f,l}^k$. Los operadores $P_{f,l}^k$ tienen la misma forma que los operadores $P_{f,l}^k$ con distintos coeficientes $a_{f,l}^{k,m} \left(h, \frac{h}{p}, p \right)$ polinomiales con respecto a $h, \frac{h}{p}$, y p . Aquí a lo largo del contorno Γ se tiene que $|h/p|_\Gamma \leq h^{1/2-\delta}$, $0 < \delta < 1/2$, i.e. sobre el contorno h/p también es un parámetro pequeño.

En lo que sigue abusando de la notación se omitirá el signo ' en los operadores $P_{f,l}^k$.

Para el operador $\left(ih \frac{d}{dp} \right)^l$ el lema anterior se prueba por inducción sobre l . Después sumando las fórmulas (3.15) para los operadores $\left(ih \frac{d}{dp} \right)^l$ de obtiene el primer punto del lema. Cálculos directos implican que es válida la fórmula siguiente

$$\sum_{\beta=0}^N \left\{ \left(-\frac{h}{p} \right) b \left(ih \frac{d}{dp} \right) \right\}^\beta = c \left(\frac{h}{p}; ih \frac{d}{dp} \right) \tag{3.16}$$

donde $c \left(\frac{h}{p}; ih \frac{d}{dp} \right)$ es un operador diferencial con coeficientes polinomiales con respecto a (h/p) . El punto número 2 del lema se sigue del Punto 1 y la fórmula (3.16).

Más adelante se prueba que para las funciones de la clase (3.6) el residuo en la fórmula (3.13) tiene orden $O(h^{\delta N - \beta})$. Ahora se considera el sistema de ecuaciones obtenido sustituyendo la función w_{r+1} por las funciones (3.12) en el sistema (3.5), i.e. un sistema reducido. En este caso se obtiene el siguiente sistema para la función vectorial $w = (w_1, \dots, w_r, w_{r+2})$:

$$\begin{aligned} & ih \frac{dw_k}{dp} + \frac{pw_k}{a-b} + \frac{h}{a-b} \sum_{j=1}^r \left\{ b_{kj} \left(ih \frac{d}{dp} \right) + \frac{h}{p} a_{kj} \left(\frac{h}{p}, ih \frac{d}{dp} \right) \right\} w_j \\ & - \frac{h}{a-b} \frac{d}{p} \left\{ b_{k(r+1)} \left(ih \frac{d}{dp} \right) + \frac{h}{p} a_{k(r+2)} \left(\frac{h}{p}, ih \frac{d}{dp} \right) \right\} w_{r+2} = 0, \\ \\ & ih \frac{dw_{r+2}}{dp} + \frac{pw_{r+2}}{c-b} + \frac{h}{c-b} \sum_{j=1}^r \left\{ b_{(r+2)j} \left(ih \frac{d}{dp} \right) + \frac{h}{p} a_{(r+2)j} \left(\frac{h}{p}, ih \frac{d}{dp} \right) \right\} w_j \quad (3.17) \\ & - \frac{h}{c-b} \frac{d}{p} \left\{ b_{(r+2)(r+1)} \left(ih \frac{d}{dp} \right) + \frac{h}{p} a_{(r+2)(r+2)} \left(\frac{h}{p}, ih \frac{d}{dp} \right) \right\} w_{r+2} = 0, \end{aligned}$$

para $k = 1, \dots, r$. El operador diferencial en la parte izquierda del sistema (3.17) se denotará por L , en este caso el sistema (3.17) tiene forma $Lw = 0$.

De hecho las matrices del sistema (3.17) se consideran sobre el espacio vectorial lineal generado por los vectores $e_j \in \mathbb{R}^{r+2}$, $j = 1, \dots, r, r+2$, definidos anteriormente. En lo que sigue todas las matrices se consideran en el espacio vectorial lineal generado por los vectores e_1, \dots, e_r, e_{r+2} . Evidentemente en esta base los vectores e_1, \dots, e_r, e_{r+1} son vectores propios de la matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{p}{a-b} I & 0 \\ 0 & \frac{p}{c-b} \end{bmatrix}.$$

Ahora se construirán las soluciones aproximadas del sistema (3.17) con los componentes en la clase de funciones de multifase (3.6). Sustituyendo las funciones w de la forma (3.6) en el sistema (3.17) y aplicando el Lema 6 se obtiene

$$\begin{aligned} Lw = & \exp \left(\frac{i}{h} S_{f,0}(p) \right) \left\{ \left(-\frac{dS_{f,0}}{dp} I + \begin{bmatrix} \frac{p}{a-b} I & 0 \\ 0 & \frac{p}{c-b} \end{bmatrix} \right) v_{f,0}(p, h) \right. \\ & + h \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{a-b} \left\| b_{mj} \left(-\frac{dS_{f,0}}{dp} \right) \right\| & -\frac{d}{p(a-b)} \left\| b_{m(r+1)} \left(-\frac{dS_{f,0}}{dp} \right) \right\| \\ \frac{1}{c-b} \left\| b_{(r+2)m} \left(-\frac{dS_{f,0}}{dp} \right) \right\| & -\frac{d}{p(c-b)} b_{(r+2)(r+1)} \left(-\frac{dS_{f,0}}{dp} \right) \end{bmatrix} v_{f,0}(p, h) \right. \\ & + i \frac{dv_{f,0}(p, h)}{dp} + iv_{f,1}(p, p, h) \\ & + \widehat{P}_{f,0}^0 \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{d}{dp} \right) v_{f,0}(p, h) + h P_{f,1}^0 \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1} \right) v_{f,1}(p, p_1, h) \Big|_{p_1=p} \\ & + h^2 P_{f,2}^0 \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, ih \frac{\partial}{\partial p_2} \right) v_{f,2}(p, p_1, p_2, h) \Big|_{p_1=p_2=p} + \dots \\ & + h^l P_{f,l}^0 \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_l} \right) v_{f,l}(p, p_1, \dots, p_l, h) \Big|_{p_1=\dots=p_l=p} + \dots \\ & \left. + h^{N_0} P_{f,N_0}^0 \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{N_0}} \right) \times \right. \\ & \left. v_{f,N_0}(p, p_1, \dots, p_{N_0}, h) \Big|_{p_1=\dots=p_{N_0}=p} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^N \int_{p_0}^p dp_k \dots \int_{p_0}^{p_2} dp_1 e^{\frac{i}{h} S_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k)} \left\{ \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p} I + \begin{bmatrix} \frac{p}{a-b} I & 0 \\ 0 & \frac{p}{c-b} \end{bmatrix} \right) v_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, h) \right. \\
& + h \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{a-b} \left\| b_{mj} \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p} \right) \right\| & -\frac{d}{p(a-b)} \left\| b_{m(r+1)} \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p} \right) \right\| \\ \frac{1}{c-b} \left\| b_{(r+2)m} \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p} \right) \right\| & -\frac{d}{p(c-b)} b_{(r+2)(r+1)} \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p} \right) \end{bmatrix} v_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, h) \right. \\
& + i \frac{\partial v_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, h)}{\partial p} + i v_{f,k+1}(p, p_1, \dots, p_{k+1}, h) \Big|_{p_{k+1}=p} \\
& + \widehat{P}_{f,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) v_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, h) + \\
& + h P_{f,1}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}} \right) v_{f,k+1}(p, p_1, \dots, p_{k+1}, h) \Big|_{p_{k+1}=p} \\
& + h^2 P_{f,2}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+2}} \right) v_{f,k+2}(p, p_1, \dots, p_{k+2}, h) \Big|_{p_{k+1}=p_{k+2}=p} + \dots (3.18) \\
& + h^l P_{f,l}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}} \right) v_{f,k+l}(p, p_1, \dots, p_{k+l}, h) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+l}=p} + \dots \\
& + h^{N_0} P_{f,N_0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+N_0}} \right) \times \\
& \left. v_{f,k+N_0}(p, p_1, \dots, p_{k+N_0}, h) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+N_0}=p} \right\}.
\end{aligned}$$

Aquí $P_{f,l}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}} \right)$ son operadores matriciales diferenciales de la forma

$$P_{f,l}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}} \right) = \begin{bmatrix} \left\| P_{f,l}^k(m, j) \right\| & \frac{1}{p} \left\| P_{f,l}^k(m, r+2) \right\| \\ \left\| P_{f,l}^k(r+2, j) \right\| & \frac{1}{p} P_{f,l}^k(r+2, r+2) \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

donde

$$P_{f,l}^k(m, j) = P_{f,l}^k(m, j) \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}} \right), \quad 1 \leq m, j \leq r,$$

y

$$P_{f,l}^k(m, r+2), P_{f,l}^k(r+2, j), P_{f,l}^k(r+2, r+2) \quad \text{para } l = 0, \dots, N_0,$$

son operadores escalares h -diferenciales. Para definir los operadores $\widehat{P}_{f,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right)$ se introduce la matriz siguiente

$$A_1 \left(\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p} \right) := \begin{bmatrix} \frac{1}{a-b} \left\| b_{mj} \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p} \right) \right\| & -\frac{d}{p(a-b)} \left\| b_{m(r+1)} \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p} \right) \right\| \\ \frac{1}{c-b} \left\| b_{(r+2)j} \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p} \right) \right\| & -\frac{d}{p(c-b)} b_{(r+2)(r+1)} \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p} \right) \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Los operadores $\widehat{P}_{f,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right)$ en la fórmula (3.18) se obtienen a partir de los operadores $P_{f,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right)$ quitando los términos de la forma (3.20) en el término del orden cero en el operador $P_{f,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right)$. Por lo tanto los operadores $\widehat{P}_{f,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right)$ tienen los términos

del orden cero de la forma (3.90). Aquí N_0 es el máximo orden de los operadores diferenciales en la expansión.

En lo que sigue se describe el método para determinar las amplitudes $v_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, h)$ de la solución asintótica de multifase (3.6). Dicha función se construye como la sumatoria de las funciones $v_{f,k}^l(p, p_1, \dots, p_k, h)$ obtenidas usando las aproximaciones sucesivas, i.e.

$$v_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, h) = \sum_{l=0}^N v_{f,k}^l(p, p_1, \dots, p_k, h), \quad (3.21)$$

para un número N bastante grande. Las funciones $v_{f,k}^l(p, p_1, \dots, p_k, h)$ se construyen usando el método asintótico de multifase en "p"-representación (ver [5], [10], y Capítulo 1). Se propone buscar las funciones $v_{f,k}^0(p, p_1, \dots, p_k, h)$, $f = 1, 2$, en la forma

$$\begin{aligned} v_{1,2m}^0(p, p_1, \dots, p_{2m}, h) &= \sum_{\alpha=1}^r C_{1,2m}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m}) e_{\alpha}(p), \\ v_{1,2m+1}^0(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, h) &= C_{1,2m+1}^{0,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}) e_{r+2}(p), \end{aligned} \quad (3.22)$$

y

$$\begin{aligned} v_{2,2m}^0(p, p_1, \dots, p_{2m}, h) &= C_{2,2m}^{0,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m}) e_{r+2}(p), \\ v_{2,2m+1}^0(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, h) &= \sum_{\alpha=1}^r C_{2,2m+1}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}) e_{\alpha}(p), \end{aligned}$$

donde $m \in \mathbb{N}_0$, y todos los coeficientes $C_{f,k}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_k)$, $f = 1, 2$; $k = 0, 1, \dots, N_0$, $\alpha = 1, \dots, r, r + 2$, son funciones $C^\infty(\mathbb{R}^{k+1})$ con respecto a p, p_1, \dots, p_k y no dependen de h . Las ecuaciones para las funciones $v_{f,k}^l(p, p_1, \dots, p_k, h)$, $l \geq 1$ se describen más adelante. En lo que sigue sin pérdida de generalidad se considera el caso $f = 1$. De hecho las funciones $v_{f,k}^0(p, p_1, \dots, p_k, h)$ se determinan por el método asintótico de multifase. Ahora se describirán las ecuaciones y los datos iniciales para los coeficientes $C_{1,k}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_k)$, para $k = 1, \dots, N_0$, $\alpha = 1, \dots, r, r + 2$. Note que para $k = 0$ los coeficientes $C_{1,0}^{0,\alpha}$, $j = 1, \dots, r$, dependen solamente de p .

Lema 7 *Los coeficientes $C_{1,0}^{0,\alpha}$ son funciones $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ y*

$$C_{1,k}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_k) = \eta_{1,k}^{0,j}(p, p_1, \dots, p_k) \phi_{1,k}(p, p_1, \dots, p_k), \quad (3.23)$$

donde $\eta_{1,k}^{0,j}(p, p_1, \dots, p_k)$ son funciones $C^\infty(\mathbb{R}^{k+1})$ y $\phi_{1,k}(p, p_1, \dots, p_k)$ es de la forma (3.8) para $k = 0, 1, \dots, N_0$, $\alpha = 1, 2, \dots, r, r + 2$.

Demostración. Se procede por inducción sobre el índice k , para $k = 0, 1, \dots, N_0$.

De las propiedades de las soluciones asintóticas de multifase (ver Capítulo 1) y de la fórmula (3.22) se sigue que los coeficientes $C_{1,k}^{0,\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, r, r + 2$, satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones para $k = 2m$:

$$\frac{\partial C_{1,2m}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m})}{\partial p} = i \sum_{j=1}^r C_{1,2m}^{0,j} \left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) e_j, e_{\alpha} \right), \quad (3.24)$$

con los datos iniciales

$$C_{1,0}^{0,\alpha}(0) = Cte.,$$

$$C_{1,2l}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2l}) \Big|_{p=2l} = i C_{1,2l-1}^{0,r+2} \left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2l-1}}{\partial p} \right) e_{r+2}, e_\alpha \right) (p, p_1, \dots, p_{2l-1}) \Big|_{p=p_{2l}}. \quad (3.25)$$

Para $k = 2m + 1$ se tiene que

$$\frac{\partial C_{1,2m+1}^{0,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m+1})}{\partial p} = i C_{1,2m+1}^{0,r+2} \left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m+1}}{\partial p} \right) e_{r+2}, e_{r+2} \right), \quad (3.26)$$

con los datos iniciales

$$C_{1,2l+1}^{0,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2l+1}) \Big|_{p=p_{2l+1}} = i \sum_{j=1}^r C_{1,2l}^{0,j} \left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2l}}{\partial p} \right) e_j, e_{r+2} \right) (p, p_1, \dots, p_{2l}) \Big|_{p=p_{2l+1}} = 0, \quad (3.27)$$

aquí $m = 0, 1, \dots, [N_0/2]$ y $l = 1, \dots, [N_0/2]$.

Primero note que de la fórmula (3.20) se sigue que $i \left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) e_j, e_\alpha \right)$, para $j = 1, \dots, r$; $\alpha = 1, \dots, r$, son funciones $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ con respecto a la variable p y las funciones $ip \left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) e_{r+2}, e_\alpha \right)$, son funciones $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ con respecto a la variable p para $\alpha = 1, \dots, r, r+2$.

Por lo tanto se obtiene (ver [8]) que para $k = 0$ la solución del problema de Cauchy (3.24) con los datos iniciales $C_{1,0}^{0,j}(0)$ tiene la forma

$$C_{1,0}^{0,\alpha}(p) = \sum_{j=1}^r C_{1,0}^{0,j}(0) U_{j,\alpha}(p), \quad (3.28)$$

donde $U_{j,\alpha}(p)$, $j = 1, \dots, r$; $\alpha = 1, \dots, r$, son $C^\infty(V)$ funciones, tales que $U_{j,\alpha}(p) \Big|_{p=0} = \delta_{j\alpha}$, y $V \subset \mathbb{R}^2$ es una vecindad del punto $(0, 0)$. Como se investiga solamente el comportamiento de la función de amplitud en la vecindad $|p| \leq h^{1/2-\delta}$ es posible extender las funciones $C_{1,0}^{0,j}(p)$, $j = 1, \dots, r$, hasta funciones de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^1)$.

Ahora se considera la ecuación (3.26) para $k = 1$ (i.e. $m = 0$), con dadas funciones $C_{1,0}^{0,j}(p)$, $j = 1, \dots, r$, que satisfacen la ecuación (3.24). La fórmula (3.20) implica que

$$i \left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) e_{r+2}, e_\alpha \right) = \frac{\sigma}{p} + O(1), \quad (3.29)$$

y por lo tanto la función en la parte derecha de la ecuación (3.26) para $m = 0$ tiene una singularidad de la forma σ/p . Resolviendo la ecuación lineal (3.26) para $m = 0$ con los datos iniciales (3.27) se obtiene que

$$C_{1,1}^{0,r+2}(p, p_1) = \eta_{1,1}^{0,r+2}(p, p_1) \left(\frac{p}{p_1} \right)^\sigma, \quad (3.30)$$

aquí $\eta_{1,1}^{0,r+2}(p, p_1)$ es una función $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Ahora se probará que si las afirmaciones del Lema son válidas para algún $k \in \mathbb{N}$ entonces también son válidas para $k + 1$.

i) Primero se considera el caso cuando k es un número par, i.e. $k = 2m$, y los coeficientes $C_{1,2m}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m})$ tienen la forma

$$C_{1,2m}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m}) = \eta_{1,2m}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m}) \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \left(\frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2m}} \right],$$

donde $\eta_{1,2m}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m})$ son funciones $C^\infty(\mathbb{R}^{2m+1})$. Ahora se probará que para $k = 2m + 1$ los coeficientes $C_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1})$ tienen la forma (3.23). En efecto se tiene que el coeficiente $C_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1})$ es la solución del problema de Cauchy (3.26) con los datos iniciales (3.27) de la forma

$$C_{1,2m+1}^{0,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}) \Big|_{p=p_{2m+1}} = \tilde{\eta}_{1,2m+1}^{0,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m}) \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \cdots \left(\frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2m}} \right] \Big|_{p=p_{2m+1}},$$

donde $\tilde{\eta}_{1,2m+1}^{0,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m})$ son funciones $C^\infty(\mathbb{R}^{2m+1})$. Por lo tanto calculando directamente, de la fórmula (3.29) se obtiene que

$$C_{1,2m+1}^{0,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}) = \eta_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}) \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \cdots \left(\frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2m}} \left(\frac{p}{p_{2m+1}} \right)^\sigma \right],$$

donde $\eta_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, h)$ son funciones $C^\infty(\mathbb{R}^{2m+2})$.

ii) Ahora se considera el caso cuando k es un número impar, i.e. $k = 2m + 1$. En este caso los coeficientes $C_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1})$ tienen la forma

$$C_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}) = \eta_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}) \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \cdots \left(\frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2m}} \left(\frac{p}{p_{2m+1}} \right)^\sigma \right],$$

donde $\eta_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1})$ son funciones $C^\infty(\mathbb{R}^{2m+2})$. Ahora se probará que para $k = 2m + 2$ los coeficientes $C_{1,2m+2}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m+2})$, $\alpha = 1, \dots, r$, tiene la forma (3.23). En efecto se tiene que el coeficiente $C_{1,2m+2}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m+2})$ es la solución del problema de Cauchy (3.24) con los datos iniciales (3.25). Usando la fórmula (3.29) se obtiene que los datos iniciales (3.25) son de la forma

$$C_{1,2m+2}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m+2}) \Big|_{p=p_{2m+2}} = \tilde{\eta}_{1,2m+2}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}) \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \cdots \left(\frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2m}} \left(\frac{p}{p_{2m+1}} \right)^\sigma \frac{1}{p} \right] \Big|_{p=p_{2m+2}},$$

donde $\tilde{\eta}_{1,2m+2}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m+1})$ son funciones $C^\infty(\mathbb{R}^{2m+2})$. Por lo tanto calculando directamente se obtiene que

$$C_{1,2m+2}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m+2}) = \eta_{1,2m+2}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m+2}) \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \cdots \left(\frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2m}} \left(\frac{p_{2m+2}}{p_{2m+1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2m+2}} \right],$$

sonde $\eta_{1,2m+2}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m+2})$ son funciones $C^\infty(\mathbb{R}^{2m+3})$ con respecto a p, p_1, \dots, p_{2m+2} . ■

Además se propone buscar la l -ésima aproximación $v_{1,k}^l(p, p_1, \dots, p_k, h)$, $l \geq 1$ en la forma:

$$\begin{aligned} v_{1,2m}^l(p, p_1, \dots, p_{2m}, h) &= \sum_{\alpha=1}^r C_{1,2m}^{l,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m}, h) e_\alpha(p), \\ v_{1,2m+1}^l(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, h) &= C_{1,2m+1}^{l,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, h) e_{r+2}(p), \text{ para } m \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Ahora se describe el procedimiento de la determinación de las funciones $v_{1,k}^l(p, p_1, \dots, p_k, h)$, para $l = 1, \dots, N$; $k = 0, \dots, N_0$. Las funciones $v_{1,k}^0(p, p_1, \dots, p_k, h)$ de la fórmula (3.22) se sustituyen

en la ecuación (3.18) y se buscan los primeros términos adicionales para aniquilar los términos de la forma

$$\widehat{P}_{1,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) v_{1,k}^0(p, p_1, \dots, p_k, h),$$

y

$$P_{1,l}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_l} \right) v_{1,k+l}^0(p, p_1, \dots, p_{k+l}, h) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+l}=p},$$

para $l = 1, \dots, N_0 - k$. En efecto se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para los primeros términos adicionales $v_{1,k}^0(p, p_1, \dots, p_k, h)$:

i) Para $k = 2m, m \geq 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C_{1,2m}^{1,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m}, h)}{\partial p} - i \sum_{j=1}^r C_{1,2m}^{1,j} \left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) e_j, e_\alpha \right) = \\ & \left(i \widehat{P}_{1,0}^{2m} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) v_{1,2m}^0(p, p_1, \dots, p_{2m}, h), e_\alpha \right) \\ & + i \sum_{q=1}^{N_0-2m} h^q \left(P_{1,q}^{2m} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q}} \right) \times \right. \\ & \left. v_{1,2m+q}^0(p, p_1, \dots, p_{2m+q}, h) \Big|_{p_{2m+1}=\dots=p_{2m+q}=p}, e_\alpha \right), \end{aligned} \quad (3.31)$$

con los datos iniciales

$$\begin{aligned} & \left(C_{1,2m}^{1,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m}, h) - i C_{1,2m-1}^{1,r+2} \left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m-1}}{\partial p} \right) e_{r+2}, e_\alpha \right) \right) \Big|_{p=p_{2m}} = \\ & \left(i \widehat{P}_{1,0}^{2m-1} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) v_{1,2m-1}^0(p, p_1, \dots, p_{2m-1}, h), e_\alpha \right) \Big|_{p=p_{2m}} \\ & + i \sum_{q=1}^{N_0-2m+1} h^q \left(P_{1,q}^{2m-1} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q-1}} \right) \times \right. \\ & \left. v_{1,2m+q-1}^0(p, p_1, \dots, p_{2m+q-1}, h) \Big|_{p_{2m}=\dots=p_{2m+q-1}=p}, e_\alpha \right) \Big|_{p=p_{2m}}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

Para $k = 0$, los coeficientes $C_{1,0}^{1,\alpha}(p, h), \alpha = 1, \dots, r$, satisfacen la ecuación (3.31) con los datos iniciales $C_{1,0}^{1,\alpha}(p, h) \Big|_{p=0} = 0$.

ii) Para $k = 2m + 1, m \geq 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C_{1,2m+1}^{1,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, h)}{\partial p} - i C_{1,2m+1}^{1,r+2} \left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m+1}}{\partial p} \right) e_{r+2}, e_{r+2} \right) = \\ & \left(i \widehat{P}_{1,0}^{2m+1} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) v_{1,2m+1}^0(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, h), e_{r+2} \right) \\ & + i \sum_{q=1}^{N_0-2m-1} h^q \left(P_{1,q}^{2m+1} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+2}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q+1}} \right) \times \right. \\ & \left. v_{1,2m+q+1}^0(p, p_1, \dots, p_{2m+q+1}, h) \Big|_{p_{2m+2}=\dots=p_{2m+q+1}=p}, e_{r+2} \right), \end{aligned} \quad (3.33)$$

con los datos iniciales

$$\begin{aligned} & \left(C_{1,2m+1}^{1,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, h) - i \sum_{j=1}^r C_{1,2m}^{1,j} \left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) e_j, e_{r+2} \right) \right) \Big|_{p=p_{2m}} = \\ & i \left(\widehat{P}_{1,0}^{2m} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) v_{1,2m}^0(p, p_1, \dots, p_{2m}, h), e_{r+2} \right) \Big|_{p=p_{2m}} \\ & + i \sum_{q=1}^{N_0-2m} h^q \left(P_{1,q}^{2m} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q}} \right) \times \right. \\ & \left. v_{1,2m+q}^0(p, p_1, \dots, p_{2m+q}, h) \Big|_{p_{2m+1}=\dots=p_{2m+q}=p}, e_{r+2} \right) \Big|_{p=p_{2m}}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

La fórmula (3.20) implica que en las fórmulas (3.31) - (3.34) se tiene que:

$$\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) e_j, e_\alpha \right), \left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) e_j, e_{r+2} \right) \in C^\infty(V_p), \quad (3.35)$$

$$p \left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) e_{r+2}, e_\alpha \right), p \left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) e_{r+2}, e_{r+2} \right) \in C^\infty(V_p),$$

donde $V_p \subset \mathbb{R}^1$ es una vecindad del cero, i.e. son suaves con respecto a la variable p , para $1 \leq j, \alpha \leq r, m = 0, \dots, [N_0/2]$.

En el caso general se sustituyen los $(l-1)$ -ésimos términos adicionales $v_{1,k}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_k, h)$, $k = 0, \dots, N_0$, en la ecuación (3.18) y se buscan los l -ésimos términos adicionales para aniquilar los términos de la forma

$$\widehat{P}_{1,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) v_{1,k}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_k, h),$$

y

$$P_{1,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+j}} \right) v_{1,k+j}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_{k+j}, h) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+j}=p},$$

donde $j = 1, \dots, N_0 - k$. En efecto se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para los l -ésimos términos adicionales $v_{1,k}^l(p, p_1, \dots, p_k, h)$:

i) Para $k = 2m, m \geq 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C_{1,2m}^{l,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m}, h)}{\partial p} - i \sum_{j=1}^r C_{1,2m}^{l,j} \left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) e_j, e_\alpha \right) = \\ & \left(i \widehat{P}_{1,0}^{2m} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) v_{1,2m}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_{2m}, h), e_\alpha \right) \\ & + i \sum_{q=1}^{N_0-2m} h^q \left(P_{1,q}^{2m} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q}} \right) \times \right. \\ & \left. v_{1,2m+q}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_{2m+q}, h) \Big|_{p_{2m+1}=\dots=p_{2m+q}=p}, e_\alpha \right), \end{aligned} \quad (3.36)$$

con los datos iniciales

$$\begin{aligned} & \left(C_{1,2m}^{l,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m}, h) - i C_{1,2m-1}^{l,r+2} \left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m-1}}{\partial p} \right) e_{r+2}, e_\alpha \right) \right) \Big|_{p=p_{2m}} = \\ & \left(i \widehat{P}_{1,0}^{2m-1} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) v_{1,2m-1}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_{2m-1}, h), e_\alpha \right) \Big|_{p=p_{2m}} \\ & + i \sum_{q=1}^{N_0-2m+1} h^q \left(P_{1,q}^{2m-1} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q-1}} \right) \times \right. \\ & \left. v_{1,2m+q-1}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_{2m+q-1}, h) \Big|_{p_{2m}=\dots=p_{2m+q-1}=p}, e_\alpha \right) \Big|_{p=p_{2m}}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Para $k = 0$, los coeficientes $C_{1,0}^{l,\alpha}(p, h)$, $\alpha = 1, \dots, r$, satisfacen la ecuación (3.31) con los datos iniciales $C_{1,0}^{l,\alpha}(p, h) \Big|_{p=0} = 0$.

ii) Para $k = 2m + 1, m \geq 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C_{1,2m+1}^{l,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, h)}{\partial p} - i C_{1,2m+1}^{l,r+2} \left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m+1}}{\partial p} \right) e_{r+2}, e_{r+2} \right) = \\ & \left(i \widehat{P}_{1,0}^{2m+1} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) v_{1,2m+1}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, h), e_{r+2} \right) \\ & + i \sum_{q=1}^{N_0-2m-1} h^q \left(P_{1,q}^{2m+1} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+2}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q+1}} \right) \times \right. \\ & \left. v_{1,2m+q+1}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_{2m+q+1}, h) \Big|_{p_{2m+2}=\dots=p_{2m+q+1}=p}, e_{r+2} \right), \end{aligned} \quad (3.38)$$

con los datos iniciales

$$\begin{aligned}
 & \left(C_{1,2m+1}^{l,r+2} (p, p_1, \dots, p_{2m+1}, h) - i \sum_{j=1}^r C_{1,2m}^{l,j} \left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) e_j, e_{r+2} \right) \right) \Big|_{p=p_{2m+1}} = \\
 & \quad i \left(\widehat{P}_{1,0}^{2m} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) v_{1,2m}^{l-1} (p, p_1, \dots, p_{2m}, h) \right) \Big|_{p=p_{2m+1}} \\
 & \quad + i \sum_{q=1}^{N_0-2m} h^q \left(P_{1,q}^{2m} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q}} \right) \times \right. \\
 & \quad \left. v_{1,2m+q}^{l-1} (p, p_1, \dots, p_{2m+q}, h) \Big|_{p_{2m+1}=\dots=p_{2m+q}=p}, e_{r+2} \right) \Big|_{p=p_{2m+1}}. \tag{3.39}
 \end{aligned}$$

Lema 8 *Suponga que los coeficientes $C_{1,k}^{l,\alpha} (p, p_1, \dots, p_k, h)$, $l = 1, \dots, N_1$; $\alpha = 1, \dots, r, r+2$; $k = 1, \dots, N$, de las funciones vectoriales $v_{1,k}^l (p, p_1, \dots, p_k)$ de la N_1 -ésima aproximación (3.21) satisfacen el sistema de ecuaciones (3.36) - (3.39), entonces se tiene que*

$$\begin{aligned}
 C_{1,2m}^{l,\alpha} (p, p_1, \dots, p_{2m}, h) &= \sum_{l_0+\dots+l_{2m}=l, l_0, \dots, l_{2m} \geq 0} \left[h^l \left(\frac{1}{p_0} \right)^{l_0} \dots \left(\frac{1}{p_{2m}} \right)^{l_{2m}} \right] \Big|_{p_0=p} \times \\
 g_{1,2m}^{l,\alpha} [l_0, \dots, l_{2m}] &\left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right) \times \\
 &\left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \left(\frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2m}} \right], \tag{3.40}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{1,2m+1}^{l,r+2} (p, p_1, \dots, p_{2m+1}, h) &= \\
 \sum_{l_0+\dots+l_{2m+1}=l, l_0, \dots, l_{2m+1} \geq 0} &\left[h^l \left(\frac{1}{p_0} \right)^{l_0} \dots \left(\frac{1}{p_{2m+1}} \right)^{l_{2m+1}} \right] \Big|_{p_0=p} \times \\
 g_{1,2m+1}^{l,r+2} [l_0, \dots, l_{2m+1}] &\left(p, \frac{h}{p}, h, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right) \times \\
 &\left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \frac{1}{p_{2m}} \left(\frac{p}{p_{2m+1}} \right)^\sigma \right], \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

para $m = 1, \dots, [N_1/2]$. Aquí las funciones $g_{1,k}^{l,\alpha} [l_0, \dots, l_k] \left(p, \frac{h}{p}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_k \right)$ son polinomios en $h, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, p, \ln p_1, \dots, \ln p_k$, con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^k)$ con respecto a p_1, \dots, p_k .

La demostración del Lema 8 se basa en un lema auxiliar. Sea

$$R_{f,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+j}} \right)$$

un operador escalar h -diferencial con coeficientes polinomiales en $h, \frac{h}{p}$, de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ con respecto a p , y tal que los términos del orden cero de los operadores $R_{f,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right)$ tienen la forma $\left(\frac{h}{p} \right) q_{f,0}^k \left(p, \frac{h}{p}, h \right)$, donde $q_{f,0}^k \left(p, \frac{h}{p}, h \right)$ es una función polinomial en $h, \frac{h}{p}$ con coeficientes de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ con respecto a p .

Lema 9 *Sean $\phi_{f,k+j} (p, p_1, \dots, p_{k+j})$, $f = 1, 2$; $j = 0, \dots, N_0 - k$, funciones de la forma (3.8), (3.9), respectivamente. En este caso son válidas las fórmulas siguientes:*

$$\begin{aligned}
 & R_{f,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) \phi_{f,k} (p, p_1, \dots, p_k) = \\
 & \left(\frac{h}{p} \right) g_{f,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p \right) \phi_{f,k} (p, p_1, \dots, p_k), \text{ para } k = 2l, \\
 & \frac{1}{p} R_{f,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) \phi_{f,k} (p, p_1, \dots, p_k) = \\
 & \frac{1}{p} \left(\frac{h}{p} \right) g_{f,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p \right) \phi_{f,k} (p, p_1, \dots, p_k), \text{ para } k = 2l + 1,
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & h^j R_{f,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+j}} \right) \phi_{f,k+j}(p, p_1, \dots, p_{k+j}) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+j}=p} \\ &= \left(\frac{h^j}{p^{\lfloor j/2 \rfloor}} \right) g_{f,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p \right) \phi_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k), \text{ para } k+j = 2l, \\ & \frac{h^j}{p} R_{f,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+j}} \right) \phi_{f,k+j}(p, p_1, \dots, p_{k+j}) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+j}=p} \\ &= \left(\frac{h^j}{p^{\lfloor j/2 \rfloor + 1}} \right) g_{f,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p \right) \phi_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k), \text{ para } k+j = 2l+1, \end{aligned}$$

aquí $l \in \mathbb{N}_0, j = 1, \dots, N_0 - k; R_{f,l}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; -ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, -ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}} \right)$ son los operadores diferenciales anteriormente definidos, $g_{f,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p \right)$ son funciones vectoriales con las componentes polinomiales en $h, (h/p)$, y de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ con respecto a p .

Demostración. Sin pérdida de generalidad se considera el caso $f = 1$. Existen 4 situaciones siguientes:

- i) $k+j = 2m+1, k = 2l$;
- ii) $k+j = 2m+1, k = 2l+1$;
- iii) $k+j = 2m, k = 2l$;
- iv) $k+j = 2m, k = 2l+1$,

donde $m, l \in \mathbb{N}_0$.

Se consideran paso por paso los casos descritos anteriormente.

Caso i). En este caso se tiene que $j = 2(m-l)+1$, y se consideran las funciones de la forma

$$\frac{1}{p} R_{1,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+j}} \right) \phi_{1,2m+1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}).$$

Aquí los operadores $R_{1,j}^k$ tienen un factor $1/p$, y las funciones $\phi_{1,2m+1}$ son de la forma (3.8). Tomando en cuenta la estructura del operador $R_{1,j}^k$ se obtiene que para demostrar las afirmaciones del Lema 9 es suficiente considerar las funciones de la forma

$$\frac{1}{p} \left(ih \frac{\partial}{\partial p} \right)^{\alpha_0} \left(ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}} \right)^{\alpha_1} \dots \left(ih \frac{\partial}{\partial p_{k+j}} \right)^{\alpha_j} \phi_{1,k}(p, p_1, \dots, p_k).$$

Usando la fórmula (3.8) para $k = 2m+1$ se obtiene que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \left(ih \frac{\partial}{\partial p} \right)^{\alpha_0} \left(ih \frac{\partial}{\partial p_{2l+1}} \right)^{\alpha_1} \dots \left(ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+1}} \right)^{\alpha_j} \phi_{1,2m+1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}) = \\ & C_{m_0 \dots m_j} \frac{(ih)^{|\alpha|}}{p} \left(\frac{1}{p^{\alpha_0}} \frac{1}{p_{2l+1}^{\alpha_1}} \dots \frac{1}{p_{2m+1}^{\alpha_j}} \right) \phi_{1,2m+1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}), \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde $C_{\alpha_0 \dots \alpha_j}$ son constantes y $|\alpha| = \sum_{q=0}^j \alpha_q$. Debido a la operación de la restricción en la fórmula (3.42) se obtiene que

$$C_{\alpha_0 \dots \alpha_j} \frac{(ih)^{|\alpha|}}{p} \left(\frac{1}{p^{\alpha_0}} \frac{1}{p_{2l+1}^{\alpha_1}} \dots \frac{1}{p_{2m+1}^{\alpha_j}} \right) \phi_{1,2m+1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}) \Big|_{p_{2l+1}=\dots=p_{2m+1}=p} =$$

$$\begin{aligned}
 & C_{\alpha_0 \dots \alpha_j} \frac{(ih)^{|\alpha|}}{p^{|\alpha|+1}} \left\{ \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \left(\frac{p_{2l}}{p_{2l-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2l}} \left(\frac{p_{2l+2}}{p_{2l+1}} \right)^\sigma \times \right. \\
 & \left. \frac{1}{p_{2l+2}} \dots \left(\frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2m}} \left(\frac{p}{p_{2m+1}} \right)^\sigma \right\} \Big|_{p_{2l+1}=\dots=p_{2m+1}=p} = \\
 & C_{\alpha_0 \dots \alpha_j} \frac{(ih)^{|\alpha|}}{p^{|\alpha|+1}} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \left(\frac{p_{2l}}{p_{2l-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2l}} \right] \left\{ \frac{1}{p_{2l+2}} \dots \frac{1}{p_{2m-2}} \frac{1}{p_{2m}} \right\} \Big|_{p_{2l+2}=\dots=p_{2m}=p} = \\
 & C_{\alpha_0 \dots \alpha_j} \left(\frac{h}{p} \right)^{|\alpha|} \frac{(i)^{|\alpha|}}{p^{[j/2]+1}} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \left(\frac{p_{2l}}{p_{2l-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2l}} \right], \tag{3.43}
 \end{aligned}$$

donde $[j/2]$ es la parte entera de $j/2$. Las fórmulas (3.42), (3.43) implican que

$$\begin{aligned}
 & \frac{h^j}{p} R_{1,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+j}} \right) \phi_{1,k+j}(p, p_1, \dots, p_{k+j}) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+j}=p} \\
 & = g_{1,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p \right) \left(\frac{h^j}{p^{[j/2]+1}} \right) \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \left(\frac{p_{2l}}{p_{2l-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2l}} \right],
 \end{aligned}$$

donde $g_{1,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p \right)$ son polinomios en $h, (h/p)$, y funciones de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ con respecto a p . Evidentemente se tiene que $j \geq [j/2] + 1$ para $j \geq 1$. Por lo tanto $(h^j/p^{[j/2]+1})$ es un parámetro pequeño.

Caso ii). En este caso se tiene que $j = 2(m-l)$, y se consideran las funciones de la forma

$$\frac{1}{p} R_{1,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+j}} \right) \phi_{1,2m+1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}).$$

Aquí los operadores $R_{1,j}^k$ tienen el factor $1/p$, y las fórmulas (3.42), (3.43) implican que

$$\begin{aligned}
 & \frac{h^j}{p} P_{1,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+j}} \right) \phi_{1,k+j}(p, p_1, \dots, p_{k+j}) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+j}=p} \\
 & = g_{1,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p \right) \left(\frac{h^j}{p^{[j/2]+1}} \right) \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \frac{1}{p_{2l}} \left(\frac{p}{p_{2l+1}} \right)^\sigma \right].
 \end{aligned}$$

Caso iii). Se tiene en este caso que $j = 2(m-l)$, y se consideran las funciones de la forma

$$R_{1,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+j}} \right) \phi_{1,2m}(p, p_1, \dots, p_{2m})$$

donde los operadores $R_{1,j}^k$ no tienen el factor $1/p$, y de las fórmulas (3.42), (3.43) se obtiene que

$$\begin{aligned}
 & h^j R_{1,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+j}} \right) \phi_{1,k+j}(p, p_1, \dots, p_{k+j}) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+j}=p} \\
 & = g_{1,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p \right) \left(\frac{h^j}{p^{[j/2]}} \right) \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \left(\frac{p_{2l}}{p_{2l-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2l}} \right].
 \end{aligned}$$

Caso iv). En este caso se tiene que $j = 2(m-l) - 1$, se consideran las funciones de la forma

$$R_{1,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+j}} \right) \phi_{1,2m}(p, p_1, \dots, p_{2m})$$

donde los operadores $R_{1,j}^k$ no tiene el factor $1/p$, y las fórmulas (3.42), (3.43) implican que

$$\begin{aligned} & h^j R_{1,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+j}} \right) \phi_{1,k+j}(p, p_1, \dots, p_{k+j}) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+j}=p} \\ &= g_{1,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p \right) \left(\frac{h^j}{p^{[j/2]}} \right) \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \frac{1}{p_{2l}} \left(\frac{p}{p_{2l+1}} \right)^\sigma \right]. \end{aligned}$$

Note que $[j/2] \leq j$, para $j > 0$, y por lo tanto $(h^j/p^{[j/2]})$ es también un parámetro pequeño.

Ahora se consideran los términos de la forma

$$R_{1,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) \phi_{1,k}(p, p_1, \dots, p_k),$$

para $k = 2l$ se obtienen las funciones

$$R_{1,0}^{2l} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) \phi_{1,2l}(p, p_1, \dots, p_{2l})$$

donde los operadores $R_{1,0}^k$ no tienen el factor $1/p$, y sus términos libres son del orden (h/p) . Así se obtiene que

$$\begin{aligned} & R_{1,0}^{2l} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) \phi_{1,2l}(p, p_1, \dots, p_{2l}) \\ &= h g_{1,0}^{2l} \left(h, \frac{h}{p}, p \right) \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \left(\frac{p_{2l}}{p_{2l-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2l}} \right]. \end{aligned}$$

En el caso $k = 2l + 1$ se obtienen las funciones de la forma

$$\frac{1}{p} R_{1,0}^{2l+1} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) \phi_{1,2l+1}(p, p_1, \dots, p_{2l+1})$$

donde los operadores $R_{1,0}^{2l+1}$ tienen el factor $1/p$, y sus términos libres son del orden (h/p) . Por lo tanto se obtiene que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} R_{1,0}^{2l+1} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) \phi_{1,2l+1}(p, p_1, \dots, p_{2l+1}, h) \\ &= \frac{1}{p} \left(\frac{h}{p} \right) g_{1,0}^{2l+1} \left(h, \frac{h}{p}, p \right) \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \frac{1}{p_{2l}} \left(\frac{p}{p_{2l+1}} \right)^\sigma \right]. \end{aligned}$$

Es decir para $k = 2l$ y $k = 2l + 1$ el vector $g_{1,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p \right)$ se multiplica por un parámetro pequeño sea h o (h/p) , respectivamente. ■

Demostración. (del Lema 8)

Se procede por inducción sobre los índices k, l para $l = 0, 1, \dots, N$, y $k = 0, 1, \dots, N_0$. Primero para un índice l fijo se prueban las afirmaciones del Lema 8 para $k = 0, 1, \dots, N_0$. Después se supone que las afirmaciones del Lema 8 son válidas para $l = 1, \dots, q$ y $k = 0, 1, \dots, N_0$, y se demuestra que las afirmaciones del Lema 8 son válidas para $l = q + 1$, y $k = 0, 1, \dots, N_0$. El caso $l = 0, k = 0, 1, \dots, N_0$ fue considerado en el Lema 7.

Ahora se considera el caso $l = 1$. En este caso el Lema 9 implica que para $k = 0$ (i.e. $m = 0$ en la fórmula (3.31)) en la parte derecha de la ecuación (3.31) se tiene una función de la forma $\left(\frac{h}{p} \right) \Phi_{1,0}^{1,\alpha} \left(p, \frac{h}{p}, h \right)$, donde $\Phi_{1,0}^{1,\alpha} \left(p, \frac{h}{p}, h \right)$ es una función polinomial en $h, \frac{h}{p}$, con coeficientes de

la clase $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ con respecto a p . Note que en este caso en la ecuación (3.31) las funciones $\left(A_1\left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p}\right)e_j, e_\alpha\right), j = 1, \dots, r; \alpha = 1, \dots, r$, son funciones suaves con respecto a la variable p . Por lo tanto la solución del problema de Cauchy (3.31) para $l = 1, m = 0$, con los datos iniciales iguales al cero tiene la forma

$$C_{1,0}^{1,\alpha}(p, h) = \left(\frac{h}{p}\right) g_{1,0}^{1,\alpha}\left(p, \frac{h}{p}, h\right), \quad (3.44)$$

aquí $g_{1,0}^{1,\alpha}\left(p, \frac{h}{p}, h\right)$ es una función polinomial en $h, \frac{h}{p}$, con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ con respecto a p . Además el Lema 9 implica que para $k = 1$ (i.e. $m = 0$ en la fórmula (3.33)) en la parte derecha de la ecuación (3.33) se tiene una función de la forma $(h/p^2)\left(\frac{p}{p_1}\right)^\sigma \Phi_{1,1}^{1,r+2}\left(p, \frac{h}{p}, h\right)$, donde $\Phi_{1,1}^{1,r+2}\left(p, \frac{h}{p}, h\right)$ es una función polinomial en $h, \frac{h}{p}$, con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ con respecto a p . Los datos iniciales para $C_{1,1}^{1,r+2}(p, p_1, h)\Big|_{p=p_1}$ de acuerdo con las fórmulas (3.34), (3.35) tienen la forma $(h/p)g_{1,1}^{1,r+2}\left(p, \frac{h}{p}, h, \ln p\right)\Big|_{p=p_1}$, donde $g_{1,1}^{1,r+2}\left(p, \frac{h}{p}, h, \ln p\right)$ es una función polinomial en $h, \frac{h}{p}, \ln p$ con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ con respecto a p . Note que en este caso la función $\left(A_1\left(\frac{\partial S_{1,2m+1}}{\partial p}\right)e_{r+2}, e_{r+2}\right)$ tiene el factor $1/p$. Resolviendo el problema de Cauchy (3.33),(3.34) para $l = 1, m = 0$, con la función $C_{1,0}^{1,\alpha}(p, h)$ que satisface la fórmula (3.44) se obtiene que

$$C_{1,1}^{1,r+2}(p, p_1, h) = \sum_{j=0,1} \left(\frac{h}{p_j}\right)\Big|_{p_0=p} g_{1,1}^{1,r+2}[j]\left(p, \frac{h}{p}, h, \ln p, \ln p_1\right) \left(\frac{p}{p_1}\right)^\sigma,$$

aquí $g_{1,1}^{1,r+2}[l_j]\left(p, \frac{h}{p}, h, \ln p, \ln p_1\right), j = 0, 1$, son polinomios en $p, h, \frac{h}{p}, \ln p, \ln p_1$, con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ con respecto a p_1 .

Ahora se considera un número natural arbitrario $q \geq 2$, se supone que las fórmulas (3.40), (3.41) son válidas para $l = 1$ y $k = q$, y se demuestra que las fórmulas (3.40), (3.41) son válidas para $l = 1$ y $k = q + 1$.

Primero sin pérdida de generalidad se considera el caso cuando q es un número impar, i.e. $q = 2m - 1$. En este caso el Lema 9 implica que en la parte derecha de la ecuación (3.31) se tiene una función de la forma

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \left(\frac{h}{p_j}\right)\Big|_{p_0=p} \Phi_{1,2m}^{1,\alpha}[j]\left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1}\right), \quad (3.45)$$

donde $\Phi_{1,2m}^{1,\alpha}[l_j]\left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1}\right), j = 0, 1, \dots, 2m - 1$, son polinomios en $p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1}, h$, con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^q)$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m} . Note que en este caso en la ecuación (3.31) las funciones $\left(A_1\left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p}\right)e_j, e_\alpha\right), j = 1, \dots, r; \alpha = 1, \dots, r$, son suaves con respecto a p , y en la fórmula (3.32) las funciones $\left(A_1\left(\frac{\partial S_{1,2m-1}}{\partial p}\right)e_{r+2}, e_\alpha\right), \alpha = 1, \dots, r$, tienen el factor $1/p$ (ver la fórmula (3.35)). Por lo tanto el problema de Cauchy (3.31),(3.32)

para $l = 1, k = q + 1 = 2m$ tiene los datos iniciales (3.32) de la forma

$$\begin{aligned} & C_{1,2m}^{1,\alpha} (p, p_1, \dots, p_{2m}, h) \Big|_{p=p_{2m}} = \\ & \frac{d}{p(c-b)} b_{(r+2)(r+1)} \left(-\frac{\partial S_{1,2m-1}}{\partial p} \right) C_{1,2m-1}^{1,r+2} (p, p_1, \dots, p_{2m-1}, h) \Big|_{p=p_{2m}} \\ & + \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2m-1} \left(\frac{h}{p_j} \right) \Big|_{p_0=p} \zeta_{1,2m}^{1,\alpha} [j] \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right) \Big|_{p=p_{2m}}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

donde $\zeta_{1,2m}^{1,\alpha} [j] \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right), j = 0, 1, \dots, 2m - 1$, son polinomios en $p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1}, h$, con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^q)$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m-1} . Para determinar los coeficientes $C_{1,2m}^{1,\alpha}$ es necesario considerar la solución del problema de Cauchy (3.31), (3.32). En el caso considerado para $l = 1, k = q + 1 = 2m$ la parte derecha de la ecuación (3.31) tiene la forma (3.45), los datos iniciales (3.32) son de la forma (3.46) y la solución $C_{1,2m}^{1,\alpha}$ está dada por la fórmula

$$\begin{aligned} & C_{1,2m}^{1,\alpha} (p, p_1, \dots, p_{2m}, h) = \\ & \sum_{j=0}^{2m} \left(\frac{h}{p_j} \right) \Big|_{p_0=p} g_{1,2m}^{1,\alpha} [j] \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right) \\ & \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \left(\frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2m}} \right], \end{aligned}$$

aquí $g_{1,2m}^{1,\alpha} [j] \left(p, \frac{h}{p}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right), j = 0, 1, \dots, 2m$, son polinomios en $p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1}, h$ con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^{q+1})$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m-1} .

Ahora se considera el caso cuando q es un número par, i.e. $q = 2m$, y se determina el coeficiente para $q + 1 = 2m + 1$, i.e. el coeficiente $C_{1,2m+1}^{1,r+1}$. Note que la función $\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) e_j, e_{r+2} \right), j = 1, \dots, r$, es suave con respecto a p . En efecto los datos iniciales (3.34) del problema de Cauchy (3.33), (3.34) para $l = 1, k = q + 2 = 2m + 1$, son de la forma

$$\begin{aligned} & C_{1,2m+1}^{1,r+2} (p, p_1, \dots, p_{2m+1}, h) \Big|_{p=p_{2m+1}} = \\ & \frac{1}{(c-b)} \sum_{j=1}^r b_{(r+2)j} \left(-\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) C_{1,2m}^{1,j} (p, p_1, \dots, p_{2m}, h) \Big|_{p=p_{2m+1}} \\ & + \sum_{j=0}^{2m} \left(\frac{h}{p_j} \right) \Big|_{p_0=p} \zeta_{1,2m+1}^{1,r+2} [j] \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right) \Big|_{p=p_{2m+1}}, \end{aligned}$$

donde $\zeta_{1,2m+1}^{1,r+2} \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right)$ es polinomio en $p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m}, h$ con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^{q+1})$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m} . La parte derecha de la ecuación (3.33) para $l = 1, k = q + 2 = 2m + 1$, tiene la forma

$$\frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2m} \left(\frac{h}{p_j} \right) \Big|_{p_0=p} \Phi_{1,2m+1}^{1,r+1} [j] \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right),$$

donde $\Phi_{1,2m+1}^{1,r+1} [j] \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right), j = 0, 1, \dots, 2m$, son polinomios en $p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m}, h$, con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^q)$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m} . Así se obtiene

que la solución del problema de Cauchy (3.33),(3.34) para $l = 1, k = q + 2 = 2m + 1$, tiene la forma

$$C_{1,2m+1}^{1,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, h) = \left(\frac{h}{p}\right) g_{1,2m+1}^{1,r+2}\left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m}\right) \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\sigma \frac{1}{p_2} \cdots \frac{1}{p_{2m}} \left(\frac{p}{p_{2m+1}}\right)^\sigma\right],$$

aquí $g_{1,2m+1}^{1,r+2}\left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m}\right)$ es polinomio en $p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}$, y $\ln p_1, \dots, \ln p_{2m}, h$, con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^{q+2})$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m+1} .

Ahora procediendo por inducción se supone que para un número natural $j \geq 2$, las fórmulas (3.40), (3.41) son válidas para $l = j, m = 0, \dots, [N_0/2]$. En lo que sigue por inducción sobre el índice $m = 0, \dots, [N_0/2]$ se demuestra que las fórmulas (3.40), (3.41) son válidas para $l = j + 1, m = 0, \dots, [N_0/2]$. Bajo las hipótesis anteriormente mencionadas el Lema 9 implica que para $l = j + 1, m = 0$, en la parte derecha de la ecuación (3.36) se tiene una función de la forma

$$\left(\frac{h}{p}\right) \left(\frac{h}{p}\right)^j \Phi_{1,0}^{j+1,\alpha}\left(p, \frac{h}{p}, h\right), \quad (3.47)$$

donde $\Phi_{1,0}^{j+1,\alpha}\left(p, \frac{h}{p}, h\right)$ es una función polinomial en $h, \frac{h}{p}, y p$. Note que en este caso en la ecuación (3.31) las funciones $\left(A_1\left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p}\right) e_j, e_\alpha\right), j = 1, \dots, r; \alpha = 1, \dots, r$, son suaves con respecto a la variable p . Por lo tanto la solución del problema de Cauchy (3.31) para $l = j + 1, m = 0$, con los datos iniciales iguales al cero tiene la forma

$$C_{1,0}^{j+1,\alpha}(p, h) = \left(\frac{h}{p}\right)^{j+1} g_{1,0}^{j+1,\alpha}\left(p, \frac{h}{p}, h\right), \quad (3.48)$$

donde $g_{1,0}^{j+1,\alpha}\left(p, \frac{h}{p}, h, \ln p\right), \alpha = 1, \dots, r$, son polinomios en $h, \frac{h}{p}, \ln p$, con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ con respecto a p . Además el Lema 9 implica que para $k = 1$ (i.e. $m = 0$ en la fórmula (3.38)) en la parte derecha de la ecuación (3.38) se tiene una función de la forma

$$\frac{1}{p} \sum_{l_0+l_1=j;l_0,l_1 \geq 0} \left[\left(\frac{h}{p_0}\right)^{l_0} \left(\frac{h}{p_1}\right)^{l_1}\right] \Bigg|_{p_0=p} \left(\frac{p}{p_1}\right)^\sigma \Phi_{1,1}^{j+1,r+2}[l_1]\left(p, \frac{h}{p}, h\right), \quad (3.49)$$

donde $\Phi_{1,1}^{j+1,r+2}[l_1]\left(p, \frac{h}{p}, h\right)$ es una función polinomial en $h, \frac{h}{p}$, con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ en p . Los datos iniciales para $C_{1,1}^{j+1,r+2}(p, p_1, h) \Big|_{p=p_1}$ de acuerdo con las fórmulas (3.39), (3.35) son de la forma

$$\sum_{l_0+l_1=j;l_0,l_1 \geq 0} \left[\left(\frac{h}{p_0}\right)^{l_0} \left(\frac{h}{p_1}\right)^{l_1}\right] \Bigg|_{p_0=p} g_{1,1}^{j+1,r+2}[l_1]\left(p, \frac{h}{p}, h, \ln p\right) \Bigg|_{p=p_1}, \quad (3.50)$$

donde $g_{1,1}^{j+1,r+2}[l_1]\left(p, \frac{h}{p}, h, \ln p\right)$ es una función polinomial en $h, \frac{h}{p}, \ln p$ con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ con respecto a p . Note además que en este caso la función $\left(A_1\left(\frac{\partial S_{1,2m+1}}{\partial p}\right) e_{r+2}, e_{r+2}\right)$ tiene el factor $1/p$. Resolviendo el problema de Cauchy (3.38),(3.39) para $l = j + 1, m = 0$, con las funciones $C_{1,0}^{j+1,\alpha}(p, h)$ que satisfacen la fórmula (3.48) se obtiene que

$$C_{1,1}^{j+1,r+2}(p, p_1, h) = \sum_{l_0+l_1=j+1;l_0,l_1 \geq 0} \left[\left(\frac{h}{p_0}\right)^{l_0} \left(\frac{h}{p_1}\right)^{l_1}\right] \Bigg|_{p_0=p} g_{1,1}^{j+1,r+2}[l_1]\left(p, \frac{h}{p}, h, \ln p, \ln p_1\right) \left(\frac{p}{p_1}\right)^\sigma,$$

aquí $g_{1,1}^{j+1,r+2} [l_1] \left(p, \frac{h}{p}, h, \ln p, \ln p_1 \right)$ son polinomios en $p, h, \frac{h}{p}, \ln p, \ln p_1$, con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ con respecto a p_1 .

Ahora se considera un número natural arbitrario $q \geq 2$, se supone que las fórmulas (3.40), (3.41) son válidas para $l = j + 1$ y $k = q$, y se demuestra que las fórmulas (3.40), (3.41) son válidas para $l = j + 1$ y $k = q + 1$.

Primero sin pérdida de generalidad se considera el caso cuando q es un número impar, i.e. $q = 2m - 1$. En este caso el Lema 9 implica que en la parte derecha de la ecuación (3.36) para $l = j + 1$, se tiene una función de la forma

$$\begin{aligned} & \sum_{l_0+\dots+2m-1=j+1; l_0, \dots, l_{2m-1} \geq 0} \left[\left(\frac{h}{p_0} \right)^{l_0} \cdots \left(\frac{h}{p_{2m-1}} \right)^{l_{2m-1}} \right] \Big|_{p_0=p} \\ & \times \Phi_{1,2m}^{j+1,\alpha} [l_1, \dots, l_{2m-1}] \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right), \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde $\Phi_{1,2m}^{j+1,\alpha} [l_1, \dots, l_{2m-1}] \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right)$ son polinomios en $p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}$, y $\ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1}, h$ con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^q)$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m} . Note que en este caso en la ecuación (3.36) las funciones $\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) e_j, e_\alpha \right)$, $j = 1, \dots, r; \alpha = 1, \dots, r$, son suaves con respecto a la variable p , y en la fórmula (3.37) las funciones $\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m-1}}{\partial p} \right) e_{r+2}, e_\alpha \right)$, $\alpha = 1, \dots, r$, tienen el factor $1/p$ (ver la fórmula (3.35)). Por lo tanto el problema de Cauchy (3.36),(3.37) para $l = j + 1, k = q + 1 = 2m$ tiene los datos iniciales (3.37) de la forma

$$\begin{aligned} & C_{1,2m}^{j+1,\alpha} (p, p_1, \dots, p_{2m}, h) \Big|_{p=p_{2m}} = \\ & \frac{d}{p(c-b)} b^{(r+2)(r+1)} \left(-\frac{\partial S_{1,2m-1}}{\partial p} \right) C_{1,2m-1}^{j+1,r+2} (p, p_1, \dots, p_{2m-1}, h) \Big|_{p=p_{2m}} \\ & + \frac{1}{p} \sum_{l_0+\dots+2m-1=j+1; l_0, \dots, l_{2m-1} \geq 0} \left[\left(\frac{h}{p_0} \right)^{l_0} \cdots \left(\frac{h}{p_{2m-1}} \right)^{l_{2m-1}} \right] \Big|_{p_0=p} \\ & \times \zeta_{1,2m}^{j+1,\alpha} [l_1, \dots, l_{2m-1}] \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right) \Big|_{p=p_{2m}}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde $\zeta_{1,2m}^{j+1,\alpha} [l_1, \dots, l_{2m-1}] \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right)$ son polinomios en $p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}$, y $\ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1}, h$ con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^q)$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m-1} . Para determinar los coeficientes $C_{1,2m}^{1,\alpha}$ es necesario considerar la solución del problema de Cauchy (3.36),(3.37). En el caso considerado para $l = j + 1, k = q + 1 = 2m$ la parte derecha de la ecuación (3.36) tiene la forma (3.51) y los datos iniciales (3.37) tienen la forma (3.52). Los cálculos directos implican que la solución $C_{1,2m}^{j+1,\alpha}$ está dada por la fórmula

$$\begin{aligned} & C_{1,2m}^{j+1,\alpha} (p, p_1, \dots, p_{2m}, h) = \\ & \sum_{l_0+\dots+2m=j+1; l_0, \dots, l_{2m} \geq 0} \left[\left(\frac{h}{p_0} \right)^{l_0} \cdots \left(\frac{h}{p_{2m}} \right)^{l_{2m}} \right] \Big|_{p_0=p} \\ & \times g_{1,2m}^{j+1,\alpha} [l_1, \dots, l_{2m}] \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right) \\ & \times \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \cdots \left(\frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2m}} \right], \end{aligned}$$

aquí $g_{1,2m}^{j+1,\alpha} [l_1, \dots, l_{2m}] \left(p, \frac{h}{p}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right)$, son polinomios en $p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}$, y $\ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1}, h$ con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^{q+1})$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m-1} .

Ahora se considera el caso cuando q es un número par, i.e. $q = 2m$ y se determina el coeficiente para $q + 1 = 2m + 1$, i.e. el coeficiente $C_{1,2m+1}^{j+1,r+1}$. Note que la función $\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) e_j, e_{r+2} \right)$, $j = 1, \dots, r$, es suave con respecto a p . En efecto los datos iniciales (3.39) del problema de Cauchy (3.38),(3.39) para $l = j + 1$, $k = q + 2 = 2m + 1$, tiene la forma

$$\begin{aligned} & C_{1,2m+1}^{j+1,r+2} (p, p_1, \dots, p_{2m+1}, h) \Big|_{p=p_{2m+1}} = \\ & \frac{1}{(c-b)} \sum_{\alpha=1}^r b_{(r+2)j} \left(-\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) C_{1,2m}^{j+1,\alpha} (p, p_1, \dots, p_{2m}, h) \Big|_{p=p_{2m+1}} \\ & + \sum_{l_0+\dots+2m=j+1; l_0, \dots, l_{2m} \geq 0} \left[\left(\frac{h}{p_0} \right)^{l_0} \dots \left(\frac{h}{p_{2m}} \right)^{l_{2m}} \right] \Big|_{p_0=p} , \\ & \times \zeta_{1,2m+1}^{j+1,r+2} [l_1, \dots, l_{2m}] \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right) \Big|_{p=p_{2m+1}} \end{aligned}$$

donde $\zeta_{1,2m+1}^{j+1,r+2} [l_1, \dots, l_{2m}] \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right)$ es polinomio en $p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}$, y $\ln p_1, \dots, \ln p_{2m}, h$ con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^{q+1})$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m} . La parte derecha de la ecuación (3.38) para $l = j + 1$, $k = q + 2 = 2m + 1$, es de la forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \sum_{l_0+\dots+2m=j+1; l_0, \dots, l_{2m} \geq 0} \left[\left(\frac{h}{p_0} \right)^{l_0} \dots \left(\frac{h}{p_{2m}} \right)^{l_{2m}} \right] \Big|_{p_0=p} \\ & \times \Phi_{1,2m+1}^{j+1,r+1} [l_1, \dots, l_{2m}] \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right) , \end{aligned}$$

donde $\Phi_{1,2m+1}^{j+1,r+1} [l_1, \dots, l_{2m}] \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right)$ son polinomios en $p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}$, y $\ln p_1, \dots, \ln p_{2m}, h$ con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^q)$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m} . Por lo tanto se obtiene que la solución del problema de Cauchy (3.38),(3.39) para $l = j + 1$, $k = q + 2 = 2m + 1$, tiene la forma

$$\begin{aligned} & C_{1,2m+1}^{j+1,r+2} (p, p_1, \dots, p_{2m+1}, h) = \\ & \sum_{l_0+\dots+2m=j+1; l_0, \dots, l_{2m} \geq 0} \left[\left(\frac{h}{p_0} \right)^{l_0} \dots \left(\frac{h}{p_{2m+1}} \right)^{l_{2m+1}} \right] \\ & \times g_{1,2m+1}^{j+1,r+2} [l_1, \dots, l_{2m+1}] \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right) \\ & \times \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \frac{1}{p_{2m}} \left(\frac{p}{p_{2m+1}} \right)^\sigma \right] , \end{aligned}$$

aquí $g_{1,2m+1}^{j+1,r+2} [l_1, \dots, l_{2m+1}] \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right)$ es polinomio en $p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}$, y $\ln p_1, \dots, \ln p_{2m}, h$ con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^{q+2})$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m} .

Ahora se considerarán los términos de la fórmula (3.6). Es válida el lema siguiente. ■

Lema 10 *Suponga que $\operatorname{Re} p_0 < \operatorname{Re} p_1 < \dots < \operatorname{Re} p_j < 0 < \operatorname{Re} p_{j+1} < \dots < \operatorname{Re} p_k$,*

Primero se supone que $(\operatorname{Re} \sigma - 1) > 0$. En este caso para un número j par y $k = 2m + 1$ la fórmula (3.59) implica que para unas constantes $\tilde{C}_{1,2m+1}^l$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 & \left| \exp \left(\frac{i}{h} S_{1,k}(p, p_1, \dots, p_k) \right) v_{1,k}^l(p, p_1, \dots, p_k) \right| \\
 & \leq \tilde{C}_{1,2m+1}^l \sum_{l_0 + \dots + l_{2m+1} = l, l_0, \dots, l_{2m+1} \geq 0} \left[h^l \left| \frac{1}{p_0} \right|^{l_0} \dots \left| \frac{1}{p_{2m+1}} \right|^{l_{2m+1}} \right] \Big|_{p_0=p} \\
 & \quad \times \left| \frac{p_2}{p_1} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \dots \left| \frac{p_j}{p_{j-1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \left(\prod_{q=1}^{j/2} \left| \frac{1}{p_{2q-1}} \right| \right) \\
 & \quad \times \left| \frac{p_{j+2}}{p_{j+3}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \dots \left| \frac{p_{2m}}{p_{2m+1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \left(\prod_{q=1}^{m-j/2} \left| \frac{1}{p_{2q+j+1}} \right| \right) \left| \frac{p}{p_{j+1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma} \\
 & \leq \tilde{C}_{1,2m+1}^l \sum_{l_0 + \dots + l_{2m+1} = l, l_0, \dots, l_{2m+1} \geq 0} \left[h^l \left| \frac{1}{p_0} \right|^{l_0} \dots \left| \frac{1}{p_{2m+1}} \right|^{l_{2m+1}} \right] \Big|_{p_0=p} \\
 & \quad \times \left(\prod_{q=1}^{j/2} \left| \frac{1}{p_{2q-1}} \right| \right) \left(\prod_{q=1}^{m-j/2} \left| \frac{1}{p_{2q+j+1}} \right| \right) \left| \frac{p}{p_{j+1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma} \\
 & \leq \tilde{C}_{1,2m+1}^l \sum_{l_0 + \dots + l_{2m+1} = l, l_0, \dots, l_{2m+1} \geq 0} \left[h^l \left| \frac{1}{p_0} \right|^{l_0} \dots \left| \frac{1}{p_{2m+1}} \right|^{l_{2m+1}} \right] \Big|_{p_0=p} h^{-(1/2+2\delta)m} \left| \frac{p}{p_{j+1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma} \\
 & \leq C_{1,2m+1}^l \frac{h^{l/4}}{h^{(1/2+2\delta)m}} \left| \frac{p}{p_{j+1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma}, \tag{3.61}
 \end{aligned}$$

ya que sobre el contorno γ , se tiene que $|h/p| < h^{1/4}$.

Para un número j impar y $k = 2m + 1$ la fórmula (3.59) implica que

$$\begin{aligned}
 & \left| \exp \left(\frac{i}{h} S_{1,k}(p, p_1, \dots, p_k) \right) v_{1,k}^l(p, p_1, \dots, p_k) \right| \\
 & \leq C_{1,2m+1}^l \sum_{l_0 + \dots + l_{2m+1} = l, l_0, \dots, l_{2m+1} \geq 0} \left[h^l \left| \frac{1}{p_0} \right|^{l_0} \dots \left| \frac{1}{p_{2m+1}} \right|^{l_{2m+1}} \right] \Big|_{p_0=p} \\
 & \quad \times \left| \frac{p_2}{p_1} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \dots \left| \frac{p_{j-1}}{p_{j-2}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \left(\prod_{q=1}^{(j-1)/2} \left| \frac{1}{p_{2q-1}} \right| \right) \\
 & \quad \times \left| \frac{p_{j+1}}{p_{j+2}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \dots \left| \frac{p_{2m}}{p_{2m+1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \left(\prod_{q=1}^{m-(j-1)/2} \left| \frac{1}{p_{2q+j}} \right| \right) \left| \frac{p}{p_j} \right|^{\operatorname{Re} \sigma} \\
 & \leq C_{1,2m+1}^l \sum_{l_0 + \dots + l_{2m+1} = l, l_0, \dots, l_{2m+1} \geq 0} \left[h^l \left| \frac{1}{p_0} \right|^{l_0} \dots \left| \frac{1}{p_{2m+1}} \right|^{l_{2m+1}} \right] \Big|_{p_0=p} \\
 & \quad \times \left(\prod_{q=1}^{(j-1)/2} \left| \frac{1}{p_{2q-1}} \right| \right) \left(\prod_{q=1}^{m-(j-1)/2} \left| \frac{1}{p_{2q+j}} \right| \right) \left| \frac{p}{p_j} \right|^{\operatorname{Re} \sigma} \\
 & \leq C_{1,2m+1}^l \sum_{l_0 + \dots + l_{2m+1} = l, l_0, \dots, l_{2m+1} \geq 0} \left[h^l \left| \frac{1}{p_0} \right|^{l_0} \dots \left| \frac{1}{p_{2m+1}} \right|^{l_{2m+1}} \right] \Big|_{p_0=p} h^{-(1/2+2\delta)m} \left| \frac{p}{p_j} \right|^{\operatorname{Re} \sigma} \\
 & \leq C_{1,2m+1}^l \frac{h^{l/4}}{h^{(1/2+2\delta)m}} \left| \frac{p}{p_j} \right|^{\operatorname{Re} \sigma}. \tag{3.62}
 \end{aligned}$$

Para un número j par y $k = 2m$ la fórmula (3.60) implica que para unas constantes $\tilde{C}_{1,2m}^l$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 & \left| \exp\left(\frac{i}{h} S_{1,k}(p, p_1, \dots, p_k)\right) v_{1,k}^l(p, p_1, \dots, p_k) \right| \\
 & \leq \tilde{C}_{1,2m}^l \sum_{l_0+\dots+l_{2m}=l, l_0, \dots, l_{2m} \geq 0} \left[h^l \left| \frac{1}{p_0} \right|^{l_0} \dots \left| \frac{1}{p_{2m}} \right|^{l_{2m}} \right] \Big|_{p_0=p} \\
 & \quad \times \left| \frac{p_2}{p_1} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \dots \left| \frac{p_j}{p_{j-1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \left(\prod_{q=1}^{j/2} \left| \frac{1}{p_{2q-1}} \right| \right) \\
 & \quad \times \left| \frac{p_{j+2}}{p_{j+3}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \dots \left| \frac{p_{2m-2}}{p_{2m-1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \left(\prod_{q=1}^{m-j/2} \left| \frac{1}{p_{2q+j+1}} \right| \right) \left| \frac{p_{2m}}{p_{j+1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma} \frac{1}{p_{2m}} \\
 & \leq \tilde{C}_{1,2m}^l \frac{h^{l/4}}{h^{(1/2+2\delta)m}} \left| \frac{p_{2m}}{p_{j+1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1}. \tag{3.63}
 \end{aligned}$$

Para un número j impar y $k = 2m$ la fórmula (3.60) implica que

$$\begin{aligned}
 & \left| \exp\left(\frac{i}{h} S_{1,k}(p, p_1, \dots, p_k)\right) v_{1,k}^l(p, p_1, \dots, p_k) \right| \\
 & \leq \tilde{C}_{1,2m}^l \sum_{l_0+\dots+l_{2m}=l, l_0, \dots, l_{2m} \geq 0} \left[h^l \left| \frac{1}{p_0} \right|^{l_0} \dots \left| \frac{1}{p_{2m}} \right|^{l_{2m}} \right] \Big|_{p_0=p} \\
 & \quad \left| \frac{p_2}{p_1} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \dots \left| \frac{p_{j-1}}{p_{j-2}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \left(\prod_{q=1}^{(j-1)/2} \left| \frac{1}{p_{2q-1}} \right| \right) \\
 & \quad \times \left| \frac{p_{j+1}}{p_{j+2}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \dots \left| \frac{p_{2m}}{p_{2m+1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \left(\prod_{q=1}^{m-(j+1)/2} \left| \frac{1}{p_{2q+j}} \right| \right) \left| \frac{p_{2m}}{p_j} \right|^{\operatorname{Re} \sigma} \frac{1}{p_{2m}} \\
 & \leq \tilde{C}_{1,2m}^l \frac{h^{l/4}}{h^{(1/2+2\delta)m}} \left| \frac{p_{2m}}{p_j} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1}. \tag{3.64}
 \end{aligned}$$

Ahora note que las soluciones asintóticas se buscan en el dominio $|p| < h^\mu, |p_0| < h^\mu, \mu > 1/2 - \delta$, y sobre el contorno γ se tiene que $|p| > h^{1/2+2\delta}$. En este caso como se tiene que

$$\left| \frac{p}{p_l} \right| < h^{-3\delta}, \left| \frac{p_{2m}}{p_l} \right| < h^{-3\delta}, l = j, j+1,$$

donde por notación $p_0 = p$, se obtiene que las estimaciones (3.61)-(3.64) implican que m -múltiple integral (3.54) tiene las estimaciones (3.55) y (3.56).

Ahora se supone que $(\operatorname{Re} \sigma - 1) < 0$. En este caso para un número j par y $k = 2m + 1$ la fórmula (3.59) implica que para unas constantes $\tilde{C}_{1,2m+1}^l$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 & \left| \exp\left(\frac{i}{h} S_{1,k}(p, p_1, \dots, p_k)\right) v_{1,k}^l(p, p_1, \dots, p_k) \right| \\
 & \leq \tilde{C}_{1,2m+1}^l \sum_{l_0+\dots+l_{2m+1}=l, l_0, \dots, l_{2m+1} \geq 0} \left[h^l \left| \frac{1}{p_0} \right|^{l_0} \dots \left| \frac{1}{p_{2m+1}} \right|^{l_{2m+1}} \right] \Big|_{p_0=p} \\
 & \quad \times \left| \frac{1}{p_1} \right|^{\operatorname{Re} \sigma} \left| \frac{p_2}{p_3} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \dots \left| \frac{p_{j-2}}{p_{j-1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \left(\prod_{q=1}^{j/2-1} \left| \frac{1}{p_{2q+1}} \right| \right) \\
 & \quad \times \left| \frac{p_{j+2}}{p_{j+1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \dots \left| \frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \left(\prod_{q=0}^{m-j/2-1} \left| \frac{1}{p_{2q+j+1}} \right| \right) \left| \frac{p}{p_{2m+1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma} |p_j|^{\operatorname{Re} \sigma - 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \tilde{C}_{1,2m+1}^l \sum_{l_0+\dots+l_{2m+1}=l, l_0, \dots, l_{2m+1} \geq 0} \left[h^l \left| \frac{1}{p_0} \right|^{l_0} \dots \left| \frac{1}{p_{2m+1}} \right|^{l_{2m+1}} \right] \Big|_{p_0=p} \\
 &\quad \times \left(\prod_{q=0}^{j/2-1} \left| \frac{1}{p_{2q+1}} \right| \right) \left(\prod_{q=0}^{m-j/2-1} \left| \frac{1}{p_{2q+j+1}} \right| \right) \left| \frac{p_j}{p_1} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \left| \frac{p}{p_{2m+1}} \right| \\
 &\leq \tilde{C}_{1,2m+1}^l \sum_{l_0+\dots+l_{2m+1}=l, l_0, \dots, l_{2m+1} \geq 0} \left[h^l \left| \frac{1}{p_0} \right|^{l_0} \dots \left| \frac{1}{p_{2m+1}} \right|^{l_{2m+1}} \right] \Big|_{p_0=p} \\
 &\quad \times h^{-(1/2+2\delta)m} \left| \frac{p_j}{p_1} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \left| \frac{p}{p_{2m+1}} \right| \\
 &\leq C_{1,2m+1}^l \frac{h^{l/4}}{h^{(1/2+2\delta)m}} \left| \frac{p_j}{p_1} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \left| \frac{p}{p_{2m+1}} \right|, \tag{3.65}
 \end{aligned}$$

ya que sobre el contorno γ , se tiene que $|h/p| < h^{1/4}$.

Para un número j impar y $k = 2m + 1$ la fórmula (3.59) implica que

$$\begin{aligned}
 &\left| \exp \left(\frac{i}{h} S_{1,k}(p, p_1, \dots, p_k) \right) v_{1,k}^l(p, p_1, \dots, p_k) \right| \\
 &\leq C_{1,2m+1}^l \sum_{l_0+\dots+l_{2m+1}=l, l_0, \dots, l_{2m+1} \geq 0} \left[h^l \left| \frac{1}{p_0} \right|^{l_0} \dots \left| \frac{1}{p_{2m+1}} \right|^{l_{2m+1}} \right] \Big|_{p_0=p} \\
 &\quad \times \left| \frac{1}{p_1} \right|^\sigma \left| \frac{p_2}{p_3} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \dots \left| \frac{p_{j-1}}{p_j} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \left(\prod_{q=1}^{j/2-1} \left| \frac{1}{p_{2q+1}} \right| \right) \\
 &\quad \times \left| \frac{p_{j+3}}{p_{j+2}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \dots \left| \frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \left(\prod_{q=1}^{m-j/2-1} \left| \frac{1}{p_{2q+j+1}} \right| \right) \left| \frac{p}{p_{2m+1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma} |p_{j+1}|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \\
 &\leq C_{1,2m+1}^l \sum_{l_0+\dots+l_{2m+1}=l, l_0, \dots, l_{2m+1} \geq 0} \left[h^l \left| \frac{1}{p_0} \right|^{l_0} \dots \left| \frac{1}{p_{2m+1}} \right|^{l_{2m+1}} \right] \Big|_{p_0=p} \\
 &\quad \times \left(\prod_{q=0}^{j/2-1} \left| \frac{1}{p_{2q+1}} \right| \right) \left(\prod_{q=1}^{m-j/2-1} \left| \frac{1}{p_{2q+j+1}} \right| \right) \left| \frac{p}{p_{2m+1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma} \left| \frac{p_{j+1}}{p_1} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \\
 &\leq C_{1,2m+1}^l \sum_{l_0+\dots+l_{2m+1}=l, l_0, \dots, l_{2m+1} \geq 0} \left[h^l \left| \frac{1}{p_0} \right|^{l_0} \dots \left| \frac{1}{p_{2m+1}} \right|^{l_{2m+1}} \right] \Big|_{p_0=p} \\
 &\quad \times h^{-(1/2+2\delta)m} \left| \frac{p}{p_{2m+1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma} \left| \frac{p_{j+1}}{p_1} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \\
 &\leq C_{1,2m+1}^l \frac{h^{l/4}}{h^{(1/2+2\delta)m}} \left| \frac{p_{j+1}}{p_1} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \left| \frac{p}{p_{2m+1}} \right|. \tag{3.66}
 \end{aligned}$$

Para un número j par y $k = 2m$ la fórmula (3.60) implica que existen constantes $\tilde{C}_{1,2m}^l$ tales que

$$\begin{aligned}
 &\left| \exp \left(\frac{i}{h} S_{1,k}(p, p_1, \dots, p_k) \right) v_{1,k}^l(p, p_1, \dots, p_k) \right| \\
 &\leq \tilde{C}_{1,2m}^l \sum_{l_0+\dots+l_{2m}=l, l_0, \dots, l_{2m} \geq 0} \left[h^l \left| \frac{1}{p_0} \right|^{l_0} \dots \left| \frac{1}{p_{2m}} \right|^{l_{2m}} \right] \Big|_{p_0=p} \\
 &\quad \times \left| \frac{1}{p_1} \right|^\sigma \left| \frac{p_2}{p_3} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \dots \left| \frac{p_{j-2}}{p_{j-1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \left(\prod_{q=1}^{j/2-1} \left| \frac{1}{p_{2q+1}} \right| \right) \\
 &\quad \times \left| \frac{p_{j+2}}{p_{j+1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \dots \left| \frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \left(\prod_{q=0}^{m-1-j/2} \left| \frac{1}{p_{2q+j+1}} \right| \right) |p_j|^{\operatorname{Re} \sigma - 1}
 \end{aligned}$$

$$\leq \tilde{C}_{1,2m}^l \frac{h^{l/4}}{h^{(1/2+2\delta)m}} \left| \frac{p_j}{p_1} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1}. \quad (3.67)$$

Para un número j impar y $k = 2m$ la fórmula (3.60) implica que

$$\begin{aligned} & \left| \exp \left(\frac{i}{h} S_{1,k}(p, p_1, \dots, p_k) \right) v_{1,k}^l(p, p_1, \dots, p_k) \right| \\ & \leq \tilde{C}_{1,2m}^l \sum_{l_0 + \dots + l_{2m} = l, l_0, \dots, l_{2m} \geq 0} \left[h^{l_0} \left| \frac{1}{p_0} \right|^{l_0} \dots \left| \frac{1}{p_{2m}} \right|^{l_{2m}} \right]_{p_0=p} \\ & \quad \times \left| \frac{1}{p_1} \right|^\sigma \left| \frac{p_2}{p_3} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \dots \left| \frac{p_{j-1}}{p_j} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \left(\prod_{q=1}^{j/2-1} \left| \frac{1}{p_{2q+1}} \right| \right) \\ & \quad \times \left| \frac{p_{j+3}}{p_{j+2}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \dots \left| \frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \left(\prod_{q=1}^{m-j/2-1} \left| \frac{1}{p_{2q+j+1}} \right| \right) |p_{j+1}|^{\operatorname{Re} \sigma - 1} \\ & \leq \tilde{C}_{1,2m}^l \frac{h^{l/4}}{h^{(1/2+2\delta)m}} \left| \frac{p_{j+1}}{p_1} \right|^{\operatorname{Re} \sigma - 1}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Como las soluciones asintóticas se buscan en el dominio $|p| < h^\mu$, $|p_0| < h^\mu$, $\mu > 1/2 - \delta$, y sobre el contorno γ se tiene que $|p| > h^{1/2+2\delta}$, entonces se tiene que

$$\left| \frac{p}{p_{2m+1}} \right| < h^{3\delta}, \left| \frac{p_j}{p_1} \right| > h^{3\delta}, \left| \frac{p_{j+1}}{p_1} \right| > h^{3\delta}, l = j, j + 1,$$

donde por notación $p_0 = p$, se obtiene que las estimaciones (3.65)-(3.68) implican que m -múltiple integral (3.54) tiene las estimaciones (3.57) y (3.58). ■

Ahora se investigará el término principal del problema (3.1) que se obtiene al aplicar la h^{-1} -transformación de Fourier a las expresiones de las componentes w_j . Usando el Lema 10 es posible demostrar que para el término principal obtenido es posible en la fórmula (3.12) quitar los términos w_{r+2} , y en la fórmula (3.17) quitar los términos $w_j, j = 1, \dots, r$. Resolviendo las ecuaciones diferenciales obtenidas de primer orden se obtiene que el término principal de la componente $v_{r+2}(t)$ tiene la forma

$$y_{r+2}(t) = \frac{C_{r+2}}{\sqrt{2\pi h}} \int_{\gamma} \exp \frac{i}{h} \left(pt + \frac{p^2}{2(c-b)} - \frac{bt^2}{2} \right) p^\sigma \chi(p) dp, \quad (3.69)$$

donde σ está definida por la fórmula (3.10). El término principal de la componente $y_{r+1}(t)$ está determinado por la fórmula

$$y_{r+1}(t) = -\frac{dC_{r+2}}{\sqrt{2\pi h}} \int_{\gamma} \exp \frac{i}{h} \left(pt + \frac{p^2}{2(c-b)} - \frac{bt^2}{2} \right) p^{\sigma-1} \chi(p) dp, \quad (3.70)$$

y el término principal de la solución asintótica de las componentes de $y'(t) = (y_1(t), \dots, y_r(t))$ es del orden $o(|y_{r+2}|)$ si $C_{r+2} \neq 0$. En el caso cuando $C_{r+2} = 0$ el término principal de $y'(t)$ está dado por la fórmula

$$y'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \frac{i}{h} \left(pt + \frac{p^2}{2(a-b)} - \frac{bt^2}{2} \right) C' \chi(p) dp + o(1), C' \in \mathbb{C}^r.$$

En las fórmulas (3.69), (3.70) la integración se hace a lo largo del contorno γ que pasa a lo largo del eje $p_2 = 0$ (donde $p = p_1 + ip_2$) y pasa por abajo del punto $p = 0$ a lo largo de la circunferencia de radio $h^{1/2+\delta}$ presentado en la siguiente figura

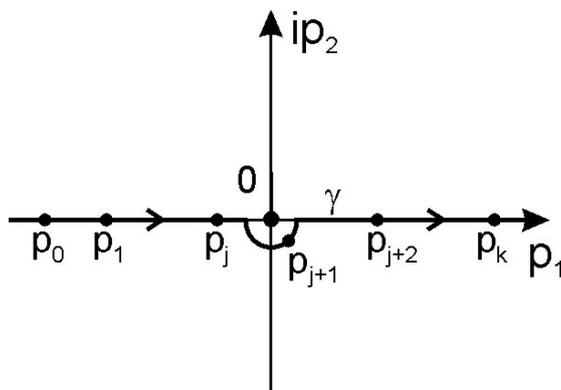


Figura 7

como antes aquí $\chi(p)$ es una función de corte, i.e. $\chi(p) \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ y se tiene que $\chi(p) = 1$ para $|\operatorname{Re} p| < h^{1/2-\delta}$ y $\chi(p) = 0$ para $|\operatorname{Re} p| > 2h^{1/2-\delta}$. Cambiando en las fórmulas anteriores los valores de las constantes C_{r+2} y C' se obtiene $r + 1$ soluciones linealmente independientes. Para obtener $(r + 2)$ -ésima solución linealmente independiente es necesario en las fórmulas anteriores tomar $C = 0, C_{r+2} = 1$ y reemplazar el contorno γ por su conjugado complejo. En lo que sigue se considera el caso cuando $a < b < c$. Los demás casos se investigan de manera análoga.

En el caso $\operatorname{Re} \sigma - 1 < 0$ es posible quitar la función de corte χ en la integral (3.69) sin el cambio del resultado con la precisión hasta $O(h^\infty)$. Por lo tanto primero se considera la integral (3.69) a lo largo de γ con la función $\chi(p) \equiv 1$, para el caso $\operatorname{Re} \sigma - 1 < 0$.

La integral (3.69) tiene un punto singular $p = 0$, y un punto estacionario $p = -(c - b)t$. Considere la parte real de la función de fase en la integral (3.69):

$$\operatorname{Re} \left\{ i \left(pt + \frac{p^2}{2(c-b)} \right) \right\} = -p_2 \left(\frac{p_1}{(c-b)} + t \right), p = p_1 + ip_2.$$

Note que para $(p_1 / (c - b) + t) > 0$ el contorno γ se puede desplazar hacia arriba como en la Figura 8

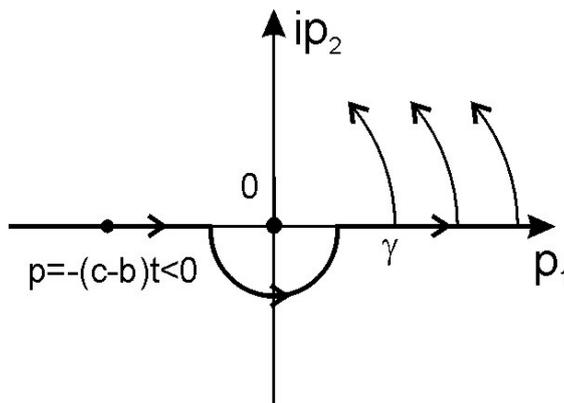


Figura 8

y para $(p_1 / (c - b) + t) < 0$ el contorno γ es posible desplazar hacia abajo como en la Figura 9

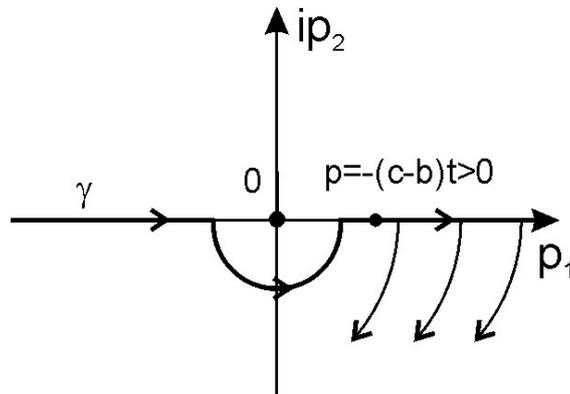


Figura 9

Por lo tanto para $t < 0$ y $p_1 < -(c - b)t$ el contorno γ se puede desplazar hacia abajo lo cual implica que para $t < 0$ en la solución asintótica sólo contribuye el punto estacionario, y el punto $p = 0$ no contribuye. El resultado de deformación del contorno γ para $t < 0$ esta presentado en la Figura 10

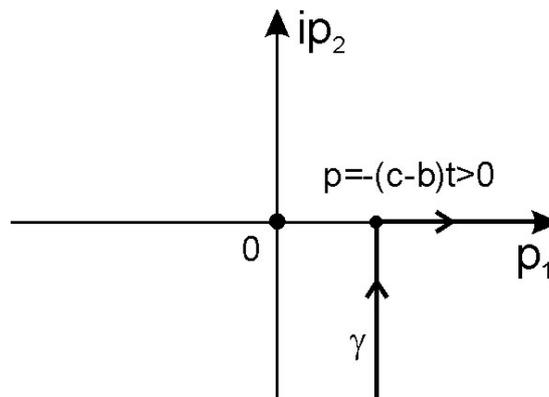


Figura 10

A su vez para $t > 0$ y $p_1 > -(c - b)t$ el contorno γ es posible desplazar hacia arriba. Por lo tanto para $t > 0$ la solución asintótica se determina por el punto estacionario y un contorno del tipo de Gankel que pasa alrededor del punto $p = 0$. El resultado de deformación del contorno γ para $t > 0$ está presentado en la Figura 11

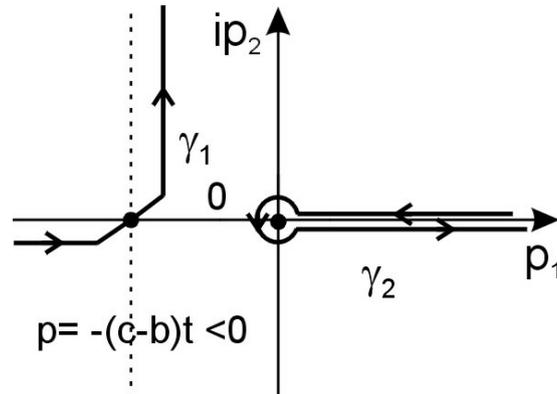


Figura 11

Considere la integral de la fórmula (3.69) para el caso $t > 0$ y $p_1 > -(c-b)t$. En este caso la contribución del polo es igual a

$$I_y^{pol} := \int_{\gamma_2} \exp \frac{i}{h} \left(pt + \frac{p^2}{2(c-b)} \right) p^\sigma dp. \quad (3.71)$$

Ahora se calcula la integral (3.71) en el caso $0 > \text{Re } \sigma > -1$. Haciendo el cambio $p = st$ se obtiene que

$$I_y^{pol} = t^{\sigma+1} \int_{\gamma_2} \exp \left(\frac{it^2}{h} \left(s + \frac{s^2}{2(c-b)} \right) \right) s^\sigma ds.$$

Ahora rotando el contorno γ_2 de tal manera que se transforma en el contorno $\tilde{\gamma}_2$ "paralelo" al eje $p_2 = 0$ (ver la Figura 12)

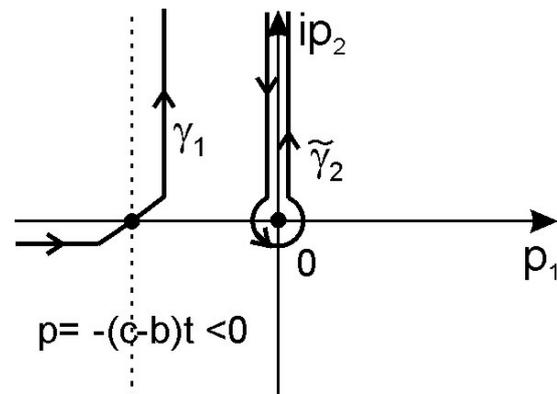


Figura 12

Haciendo el cambio $s = ix$ se obtiene que

$$I_y^{pol} = \exp \left(\frac{i\pi}{2} (\sigma + 1) \right) t^{\sigma+1} \int_{\gamma_1} \exp \left(\frac{it^2}{h} \left(s + \frac{s^2}{2(c-b)} \right) \right) s^\sigma ds$$

$$= t^{\sigma+1} e^{\frac{i\pi}{2}(\sigma+1)} \int_{\tilde{\gamma}_2} \exp\left(\frac{it^2}{h} \left(ix - \frac{x^2}{2(c-b)}\right)\right) x^\sigma dx.$$

Ahora como se tiene que

$$\int_{\tilde{\gamma}_2} \exp\left(\frac{it^2}{h} \left(ix - \frac{x^2}{2(c-b)}\right)\right) x^\sigma dx = (e^{i2\pi\sigma} - 1) (1 + o(h^\delta)) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{h}x\right) x^\sigma dx,$$

entonces se obtiene

$$I_y^{pol} = e^{\frac{i\pi}{2}(\sigma+1)} t^{\sigma+1} (e^{i2\pi\sigma} - 1) (1 + o(h^\delta)) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{h}x\right) x^\sigma dx. \quad (3.72)$$

Haciendo en la fórmula (3.72) el cambio $z = (t^2x)/h$ se obtiene que

$$\begin{aligned} I_y^{pol} &= e^{\frac{i\pi}{2}(\sigma+1)} t^{\sigma+1} (e^{i2\pi\sigma} - 1) \left(\frac{h}{t^2}\right)^{\sigma+1} (1 + o(h^\delta)) \int_0^\infty e^{-z} z^\sigma dz \\ &= (i)^{\sigma+1} (e^{i2\pi\sigma} - 1) \left(\frac{h}{t}\right)^{\sigma+1} \Gamma(\sigma + 1) (1 + o(h^\delta)). \end{aligned} \quad (3.73)$$

La contribución del punto estacionario en el caso considerado, i.e. $t > 0$ y $p_1 < -(c-b)t$, se determina usando la fórmula estándar (ver [19]).

A su vez en el caso $t < 0$ en la solución asintótica contribuye solamente el punto estacionario. Para los demás valores de σ la solución asintótica se determina aplicando el procedimiento estándar para la extensión asintótica de σ (ver [20]).

Teorema 9 Sea $B(t) \in C^\infty(U)$, $U = \{|t| < \varepsilon\}$, $A(t)$ es de la forma (3.2), $a, b, c \in \mathbb{R}^1$, $a < b < c$, y $|t| < h^{1/2-\delta}$, $0 < \delta < 1/8$. Suponga que $\sigma \notin \mathbb{N}$. En este caso el sistema (3.1) tiene las soluciones linealmente independientes siguientes:

- 1) Existe una solución y_0 tal que:
- i) Para $t > h^{1/2-\delta/2}$:

$$\begin{aligned} y_{0,r+2}(t) &= \exp\left(-i\frac{bt^2}{2h}\right) \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{i\pi}{2}(1+\sigma)} \left(\frac{h}{t}\right)^{\sigma+1/2} (e^{i2\pi\sigma} - 1) \Gamma(\sigma + 1) (1 + o(h^\delta)) \\ &\quad + \exp\left(-i\frac{ct^2}{2h}\right) \sqrt{2\pi(c-b)} |(c-b)t|^\sigma e^{i\pi\sigma} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) (1 + o(h^\delta)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{0,r+1}(t) &= -d \exp\left(-i\frac{bt^2}{2h}\right) \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{i\pi}{2}(1+\sigma)} \left(\frac{h}{t}\right)^{\sigma-1/2} (e^{2\pi i\sigma} - 1) \Gamma(\sigma) (1 + o(h^\delta)) \\ &\quad + \exp\left(-i\frac{ct^2}{2h}\right) \sqrt{2\pi(c-b)} |(c-b)t|^{\sigma-1} e^{i\pi(\sigma-1)} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) (1 + o(h^\delta)), \end{aligned}$$

$$y_{0,j}(t) = o(|y_{1,r+2}(t)|) \text{ para } j = 1, \dots, r.$$

ii) Para $t < -h^{1/2-\delta/2}$ el término principal de la solución asintótica $y_{0,r+2}(t)$ se determina solamente por el punto estacionario y es de la forma

$$y_{0,r+2}(t) = \exp\left(-i\frac{ct^2}{2h}\right) \sqrt{2\pi(c-b)} |(c-b)t|^\sigma e^{i\pi\sigma} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) (1 + o(h^\delta)),$$

$$y_{0,r+1}(t) = \exp\left(-i\frac{ct^2}{2h}\right) \sqrt{2\pi(c-b)} |(c-b)t|^{\sigma-1} e^{i\pi(\sigma-1)} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) (1 + o(h^\delta)),$$

$$y_{0,j}(t) = o(|y_{1,r+2}(t)|) \text{ para } j = 1, \dots, r.$$

2) Existen r soluciones linealmente independientes $y_q, q = 1, \dots, r$, tales que

$$\begin{aligned} y'_q(t) &= \exp\left(i\frac{at^2}{2h}\right) C' + o(1), \quad C' \in \mathbb{C}^r \setminus \{0\}, \\ y_{q,r+1} &= O(h^\sigma), \\ y_{q,r+2} &= O(h^{\sigma+1}). \end{aligned} \tag{3.74}$$

3) La solución asintótica de la $(r+2)$ -ésima solución linealmente independiente se obtiene al tomar en la fórmula (3.74) a $C' = 0$, y en la fórmula (3.69) a $C_{r+2} = 1$ y cambiando en la fórmula (3.69) el contorno γ por su conjugado complejo, que pasa por arriba del punto $p = 0$.

Nota 2 De manera análoga se considera la solución asintótica para los demás valores de a, b, c tales que $a \neq b \neq c$.

3.2. Justificación de las soluciones asintóticas

Considere el sistema

$$L\left(t, -ih\frac{d}{dt}\right)y = -ih\frac{dy}{dt} + A(t)y + hB(t)y = 0, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{3.75}$$

con la función matricial $A(t)$ de la forma

$$A(t) = \begin{bmatrix} Ia(t) & 0 & 0 \\ 0 & b(t) & d(t) \\ 0 & 0 & c(t) \end{bmatrix}, \tag{3.76}$$

donde $A(t), B(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, I es la matriz identidad $(r \times r)$, las funciones a, b, c, d son de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ de la forma $a(t) = at + O(t^2)$, $b(t) = bt + O(t^2)$, $c(t) = ct + O(t^2)$, y $d(t) = d + O(t)$, $d \neq 0, a \neq b, b \neq c, a \neq c$. Sin pérdida de generalidad es posible suponer que para un número pequeño T_0 se tiene que $a'(t) < b'(t) < c'(t)$, para $|t| \leq T_0$, los demás casos se consideran de manera análoga.

Sea Φ^N una solución del problema (3.75) con precisión $O(h^N)$ que satisface unos datos iniciales, i.e. se tiene que

$$\begin{aligned} -ih\frac{d\Phi^N}{dt} + A(t)\Phi^N + hB(t)\Phi^N &= O(h^N), \text{ para } |t - t_0| < T, \\ [t_0 - T, t_0 + T] &\subset [-T_0, T_0]. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Evidentemente el problema (3.75) es un sistema lineal de ecuaciones diferenciales con coeficientes acotados, por lo tanto existe la solución exacta $y(x, h)$ del problema (3.75) que satisface los mismos datos iniciales que Φ^N . En este caso la función $\tilde{\phi}^N := y - \Phi^N$, es solución del problema (3.77) con datos iniciales iguales a cero, i.e.

$$\begin{aligned} -ih\frac{d\tilde{\phi}^N}{dt} + A(t)\tilde{\phi}^N + hB(t)\tilde{\phi}^N &= F(t, h)h^N, \text{ para } |t - t_0| < T, \\ \tilde{\phi}^N(t_0) &= 0, \end{aligned}$$

donde $F(t, h) \in C^\infty([t_0 - T, t_0 + T])$ y $Sup_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} |\partial_t^k F(t, h)| \leq C_k h^{-k}$, para una constante $C_k > 0$, y $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 10 *Suponga que los coeficientes de la ecuación (3.75) satisfacen las condiciones antes mencionadas. En este caso existe un número natural $n = n(T)$ tal que la solución del problema (3.77) tiene la estimación siguiente:*

$$\left\| \tilde{\phi}^N \right\|_{C([-T, T])} \leq Ch^{N-n-1}, \text{ para } N > n + 1.$$

Demostración. i) Reducción del sistema (3.77).

Sea $U(t, t_0)$ la matriz definida como

$$U(t, t_0) := \begin{bmatrix} I \exp\left(-\frac{i}{h} \int_{t_0}^t a(s) ds\right) & 0 & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{i}{h} \int_{t_0}^t b(s) ds\right) & 0 \\ 0 & 0 & \exp\left(-\frac{i}{h} \int_{t_0}^t c(s) ds\right) \end{bmatrix}$$

Haciendo el cambio

$$\tilde{\phi}^N(t) = U(t, t_0) z(t),$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} -ih \frac{dz}{dt} + U^*(t, t_0) \begin{bmatrix} I \cdot 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{d} \\ 0 & hb_{r+2, r+1} & 0 \end{bmatrix} U(t, t_0) z \\ + hU^*(t, t_0) \tilde{B}(t) U(t, t_0) z = U^*(t, t_0) F(t) h^N, \end{aligned} \quad (3.78)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{d} &:= d + hb_{r+1, r+2}, \\ \tilde{B}(t) &:= \begin{bmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1, r+1} & b_{1, r+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{r+1,1} & \dots & b_{r+1, r+1} & 0 \\ b_{r+2,1} & \dots & 0 & b_{r+2, r+2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora para simplificar la ecuación (3.78) note que

$$\begin{aligned} &U^*(t, t_0) \begin{bmatrix} I \cdot 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{d} \\ 0 & hb_{r+2, r+1} & 0 \end{bmatrix} U(t, t_0) \\ = &U^*(t, t_0) \begin{bmatrix} I \cdot 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{d} \exp\left(-\frac{i}{h} \int_{t_0}^t c(s) ds\right) \\ 0 & hb_{r+2, r+1} \exp\left(-\frac{i}{h} \int_{t_0}^t b(s) ds\right) & 0 \end{bmatrix} \\ = &\begin{bmatrix} I \cdot 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{d} \Delta_{r+1, r+2} \\ 0 & hb_{r+2, r+1} \Delta_{r+2, r+1} & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta_{r+1, r+2} &: = \exp\left(-\frac{i}{h} \int_{t_0}^t (c(s) - b(s)) ds\right), \\ \Delta_{r+2, r+1} &: = \exp\left(-\frac{i}{h} \int_{t_0}^t (b(s) - c(s)) ds\right). \end{aligned}$$

Se introduce la notación

$$\widehat{B}(t) := U^*(t, t_0) \widetilde{B}(t) U(t, t_0) = \begin{bmatrix} B_{11} & b_{1,r+1} \Delta_{1,r+1} & b_{1,r+2} \Delta_{1,r+2} \\ & \vdots & \vdots \\ b_{r+1,1} \Delta_{r+1,1} & \dots & b_{r+1,r+1} & 0 \\ b_{r+2,1} \Delta_{r+2,1} & \dots & 0 & b_{r+2,r+2} \end{bmatrix}, \quad (3.79)$$

donde

$$\begin{aligned} B_{11} & : = \|b_{ij}\|, 1 \leq i, j \leq r, \\ \Delta_{1,r+1} & = \exp\left(-\frac{i}{h} \int_{t_0}^t (b(s) - a(s)) ds\right), \\ \Delta_{1,r+2} & = \exp\left(-\frac{i}{h} \int_{t_0}^t (c(s) - a(s)) ds\right), \\ \Delta_{r+1,1} & = \overline{\Delta}_{1,r+1}, \\ \Delta_{r+2,1} & = \overline{\Delta}_{1,r+2}. \end{aligned}$$

En este caso la ecuación (3.78) se reduce a la forma:

$$\begin{aligned} -ih \frac{dz}{dt} + \widehat{A}(t) z + h \widehat{B}(t) z & = U^*(t, t_0) F(t) h^N, \\ z(t_0) & = 0, \end{aligned} \quad (3.80)$$

donde

$$\widehat{A}(t) := \begin{bmatrix} I \cdot 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{d} \Delta_{r+1,r+2} \\ 0 & hb_{r+2,r+1} \Delta_{r+2,r+1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora para reducir la ecuación (3.80) se hace el cambio

$$z(t) = D(t, t_0) w(t), \quad (3.81)$$

donde $D(t, t_0)$ es la matriz de la forma:

$$D(t, t_0) := \begin{bmatrix} D_{11}(t, t_0) & 0 & 0 \\ 0 & D_{r+1,r+1}(t, t_0) & 0 \\ 0 & 0 & D_{r+2,r+2}(t, t_0) \end{bmatrix},$$

la matriz $D_{11}(t)$ es la matriz solución del problema

$$\begin{aligned} -i \frac{dD_{11}(t, t_0)}{dt} & = -B_{11}(t) D_{11}(t, t_0), \\ D_{11}(t_0, t_0) & = I. \end{aligned}$$

y los coeficientes $D_{r+1,r+1}(t, t_0)$ $D_{r+2,r+2}(t, t_0)$ son de la forma:

$$\begin{aligned} D_{r+1,r+1}(t, t_0) & : = \exp\left(-i \int_{t_0}^t b_{r+1,r+1}(s) ds\right), \\ D_{r+2,r+2}(t, t_0) & : = \exp\left(-i \int_{t_0}^t b_{r+2,r+2}(s) ds\right). \end{aligned}$$

Evidentemente se tiene que $D(t_0, \tau) D(\tau, t_0) = 1$, lo cual implica que integrando la ecuación (3.80) con respecto a t se obtiene la siguiente ecuación integral para la función $w(t)$:

$$\begin{aligned} w(t) &= (-i) \int_{t_0}^t D(t_0, \tau) \frac{1}{h} \widehat{A}(t) D(\tau, t_0) w(\tau) d\tau \\ &\quad + (-i) \int_{t_0}^t D(t_0, \tau) B_{\Delta}(\tau) D(\tau, t_0) w(\tau) d\tau \\ &\quad - (-i) h^{N-1} \int_{t_0}^t D(t_0, \tau) U^*(\tau, t_0) F(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.82)$$

aquí

$$B_{\Delta}(\tau) := \begin{bmatrix} I \cdot 0 & b_{1,r+1} \Delta_{1,r+1} & b_{1,r+2} \Delta_{1,r+2} \\ & \vdots & \vdots \\ b_{r+1,1} \Delta_{r+1,1} & \dots & 0 \\ b_{r+2,1} \Delta_{r+1,1} & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora se considera el operador \mathbf{A} definido por la fórmula:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}w &: = (-i) \int_{t_0}^t D(t_0, \tau) \frac{1}{h} \widehat{A}(t) D(\tau, t_0) w(\tau) d\tau \\ &\quad + (-i) \int_{t_0}^t D(t_0, \tau) B_{\Delta}(\tau) D(\tau, t_0) w(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.83)$$

y sea $G(t, h)$ la función definida como

$$G(t, h) := (-i) h^{N-1} \int_{t_0}^t D(t_0, \tau) U^*(\tau, t_0) F(\tau, h) d\tau.$$

En este caso la ecuación integral (3.82) para la función w se puede reescribir en la forma

$$w = \mathbf{A}w + G. \quad (3.84)$$

Ahora al introducir la función η tal que

$$w = \eta + G + \mathbf{A}G + \dots + \mathbf{A}^n G, \quad (3.85)$$

de la ecuación (3.84) se obtiene que

$$\eta = \mathbf{A}\eta + \mathbf{A}^{n+1} G.$$

La solución de esta ecuación se busca en la forma

$$\eta = (t - t_0)^{n+1} \xi,$$

i.e. la función ξ satisface la ecuación

$$\xi = \frac{1}{(t - t_0)^{n+1}} \mathbf{A} \left((t - t_0)^{n+1} \xi \right) + \frac{\mathbf{A}^{n+1} G}{(t - t_0)^{n+1}}. \quad (3.86)$$

ii) Estimación de la función ξ .

Para simplificar los cálculos sin pérdida de generalidad se concidera el caso $t_0 = 0$. Primero note que $G \simeq h^N$, i.e. $|G(t, h)| \leq C_0 h^N$, para $|t| < \delta$, donde $\delta > 0$ es un número suficientemente pequeño. Esto implica que

$$\mathbf{A}^{n+1}G \simeq O(h^{N-n-1})t^{n+1}.$$

Por lo tanto en el espacio $C([-T, T])$ se tiene que

$$\left\| \frac{\mathbf{A}^{n+1}G}{t^{n+1}} \right\|_{C([-T, T])} \leq C_1 h^{N-n-1}. \quad (3.87)$$

Veamos ahora que para un número n suficientemente grande en el espacio $C([-T, T])$, la norma del operador $(t^{n+1})^{-1} \mathbf{A}^{n+1} (t^{n+1})$ es menor que 1. Con este objetivo en lo que sigue se estiman las componentes $(\mathbf{A}\xi)_j, j = 1, \dots, r+2$.

Primero para estimar las componentes $(\mathbf{A}\xi)_j, j = 1, \dots, r$, se consideran los operadores de la forma

$$\mathbf{A}_1\xi = \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^t \gamma(\tau) \tau^{n+1} \xi(\tau) d\tau, \text{ donde } \xi \in C([-T, T]), n \in \mathbb{N}, \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^1). \quad (3.88)$$

En el espacio $C([-T, T])$ se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^t \gamma(\tau) \tau^{n+1} \xi(\tau) d\tau \right| &\leq C_2 \max_{t \in [-T, T]} |\xi(t)| \frac{1}{|t^{n+1}|} \left| \int_0^t \tau^{n+1} d\tau \right| \\ &\leq C_2 \|\xi\|_{C([-T, T])} \left| \frac{1}{t^{n+1}} \frac{t^{n+2}}{(n+2)} \right| \\ &= C_2 \frac{|t|}{n+2} \|\xi\|_{C([-T, T])} \leq \frac{TC_2}{n+2} \|\xi\|_{C([-T, T])}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Como la constante C_2 no depende del número n , entonces para un $T > 0$ fijo, y grandes números n los operadores de la forma (3.88) son pequeños en el espacio $C([-T, T])$.

Ahora para estimar las componentes $(\mathbf{A}\xi)_{r+1}$ se consideran los operadores de la forma

$$\mathbf{A}_2\xi = \frac{1}{h} \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^t \gamma_1(\tau) \tilde{d}\tau^{n+1} \exp\left(\frac{i}{h}\tau^2\alpha(\tau)\right) \xi_{r+2}(\tau) d\tau, \quad (3.90)$$

donde $\xi_{r+2} \in C([-T, T]), n \in \mathbb{N}, \gamma_1, \alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^1), \alpha(\tau) \neq 0$, para $\tau \in [-T_0, T_0]$. Integrando por partes la parte derecha de la fórmula (3.90) se obtiene

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h} \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^t \gamma_1(\tau) \tilde{d}\tau^{n+1} \exp\left(\frac{i}{h}\tau^2\alpha(\tau)\right) \xi_{r+2}(\tau) d\tau \\ &= (-i) \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^t \frac{\gamma_1(\tau) \tilde{d}\tau^n \xi_{r+2}(\tau)}{2\alpha(\tau) + \tau\alpha'(\tau)} e^{\frac{i}{h}\tau^2\alpha(\tau)} \left(\frac{i}{h}\tau^2\alpha(\tau)\right)' d\tau \\ &= (-i) \frac{1}{t^{n+1}} \left\{ e^{\frac{i}{h}\tau^2\alpha(\tau)} - e^{\frac{i}{h}t^2\alpha(t)} \right\} \frac{\gamma_1(\tau) \tilde{d}\tau^n \xi_{r+2}(\tau)}{2\alpha(\tau) + \tau\alpha'(\tau)} \Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &\quad - (-i) \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^t \left\{ e^{\frac{i}{h}\tau^2\alpha(\tau)} - e^{\frac{i}{h}t^2\alpha(t)} \right\} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\gamma_1(\tau) \tilde{d}\tau^n \xi_{r+2}(\tau)}{2\alpha(\tau) + \tau\alpha'(\tau)} \right) d\tau. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\gamma_1(\tau) \tilde{d}\tau^n \xi_{r+2}(\tau)}{2\alpha(\tau) + \tau\alpha'(\tau)} \right) &= ng(\tau) \tau^{n-1} \xi_{r+2}(\tau) \\ &+ g(\tau) \tau^n \frac{d\xi_{r+2}(\tau)}{d\tau} + \tau^n \xi_{r+2}(\tau) \frac{dg(\tau)}{d\tau}, \end{aligned} \quad (3.92)$$

donde $g \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ es de la forma

$$g(\tau) := \frac{\gamma_1(\tau) \tilde{d}}{2\alpha(\tau) + \tau\alpha'(\tau)}.$$

Primero note que análogamente como la estimación (3.89) se obtiene que

$$\left| \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^t g(\tau) \tau^n \xi_{r+2}(\tau) d\tau \right| \leq \frac{C_3}{n} \|\xi_{r+2}\|_{C([-T, T])}, \quad (3.93)$$

donde $C_3 > 0$, es una constante.

Note que

$$\tau^n \frac{d\xi_{r+2}(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\tau} \frac{d}{d\tau} (\tau^{n+1} \xi_{r+2}(\tau)) - (n+1) \tau^{n-1} \xi_{r+2}(\tau). \quad (3.94)$$

En este caso la fórmula (3.83) y la fórmula (3.86) para la función ξ implican que

$$\frac{d}{d\tau} (\tau^{n+1} \xi_{r+2}(\tau)) = \tau^{n+1} \left(\sum_{j=1}^{r+2} \beta_j(\tau, h) \xi_j(\tau) + h^{N-n-1} g_1(\tau) \right), \quad (3.95)$$

donde las funciones $\beta_j(\tau, h)$, $j = 1, \dots, r+2$, son continuas y uniformemente acotadas con respecto a $h \in (0, 1]$, tales que

$$\text{Sup}_{(\tau, h) \in [-T, T] \times (0, 1]} |\beta_j(\tau, h)| \leq \gamma_j < \infty.$$

Tomando en cuenta que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \eta_{r+2}(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{n+1} \xi_{r+2}(\tau) = 0,$$

se obtiene

$$\tau^{n-1} \xi_{r+2}(\tau) = \frac{1}{\tau^2} \int_0^\tau s^{n+1} \left(\sum_{j=1}^{r+2} \beta_j(s, h) \xi_j(s) + h^{N-n-1} g_1(s) \right) ds,$$

y

$$\tau^n \xi_{r+2}(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau s^{n+1} \left(\sum_{j=1}^{r+2} \beta_j(s, h) \xi_j(s) + h^{N-n-1} g_1(s) \right) ds. \quad (3.96)$$

Como

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \eta(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{n+1} \xi(\tau) = 0,$$

entonces la ecuación (3.96) implica que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^n \xi_{r+2}(\tau) = 0,$$

de lo cual se obtiene que el término no acotado en la fórmula (3.91) es igual a cero.

De la fórmula (3.95) se obtiene que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^t g(\tau) \tau^{n-1} \xi_{r+2}(\tau) d\tau \right| \tag{3.97} \\ & \leq \left| \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^t g(\tau) \tau^n \left(C_4 \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r+2} \|\xi_j\|_{C([-T, T])} + C_5 h^{N-n-1} \right) d\tau \right| \\ & \leq C_6 \frac{1}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{r+2} \|\xi_j\|_{C([-T, T])} + C_7 \frac{h^{N-n-1}}{n}. \end{aligned}$$

Las fórmulas (3.94) - (3.97) implican que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^t g(\tau) \tau^n \frac{d\xi_{r+2}(\tau)}{d\tau} d\tau \right| \tag{3.98} \\ & \leq \frac{C_8}{n} \sum_{j=1}^{r+2} \|\xi_j\|_{C([-T, T])} + C_6 \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r+2} \|\xi_j\|_{C([-T, T])} + C_7 h^{N-n-1}, \end{aligned}$$

ya que anteriormente fue demostrado que el término no acotado en la fórmula (3.91) es igual a cero.

Ahora las fórmulas (3.91), (3.92), (3.93) y (3.98) implican que para un $T > 0$ fijo los operadores de la forma (3.90) son tales que en el espacio $C([-T, T])$ se tiene la estimación

$$\|\mathbf{A}_2 \xi\|_{C([-T, T])} \leq \frac{\tilde{C}_1}{n} \sum_{j=1}^{r+2} \|\xi_j\|_{C([-T, T])} + \tilde{C}_2 h^{N-n-1}. \tag{3.99}$$

La fórmula (3.86) y las estimaciones (3.87), (3.99) implican que

$$\sum_{j=1}^r \|\xi_j\|_{C([-T, T])} \leq \frac{C_1}{n} \sum_{j=1}^{r+2} \|\xi_j\|_{C([-T, T])} + C_2 h^{N-n-1}. \tag{3.100}$$

De la fórmula (3.100) se sigue que para los números $n \geq 2C_1$ se tiene que

$$\sum_{j=1}^r \|\xi_j\|_{C([-T, T])} \leq 2C_2 h^{N-n}. \tag{3.101}$$

iii) Estimación de la función $\tilde{\phi}^N$.

Note que la fórmula (3.101) implica que la función $\eta(t) = t^{n+1} \xi(t)$ tiene la estimación

$$\|\eta\|_{C([-T, T])} \leq Ch^{N-n}. \tag{3.102}$$

Como los operadores $D(t, t_0)$ y $U(t, t_0)$ son uniformemente acotados para $h \in (0, 1]$, entonces de las fórmulas (3.79), (3.81), (3.85) y (3.102) se obtiene la estimación siguiente

$$\left\| \tilde{\phi}^N \right\|_{C([-T, T])} \leq C_0 h^{N-n},$$

para un número natural $n \geq n_0(T)$. ■

3.3. Caso de la matriz $A(t)$

Ahora se considera el sistema (3.1) con la función matricial $A(t)$ de la forma

$$A(t) = \begin{bmatrix} Ia(t) & 0 & 0 \\ 0 & b(t) & d(t) \\ 0 & 0 & c(t) \end{bmatrix}, \quad (3.103)$$

donde a, b, c, d son $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ funciones de la forma $a(t) = at + O(t^2)$, $b(t) = bt + O(t^2)$, $c(t) = ct + O(t^2)$, y $d(t) = d + O(t)$, $d \neq 0$. En este caso el término principal también se determina usando el Teorema 9. Como antes es suficiente considerar esta ecuación en el dominio $|t| < h^{1/2-\delta}$. Por lo tanto es posible suponer que $a(t), b(t), c(t)$ son polinomios en t . Considere como antes el caso cuando $a'(t) < b'(t) < c'(t)$, para $|t| < h^{1/2-\delta}$. Haciendo el cambio

$$y(t) = \exp\left(-\frac{i}{h} \int_0^t b(\tau) d\tau\right) z(t)$$

y pasando en "p"-representación con respecto a t el sistema (3.1) con la matriz $A(t)$ de la forma (3.103) se reduce a la ecuación

$$pw(p) + Q\left(ih\frac{d}{dp}\right)\tilde{w}(p) + hB\left(ih\frac{d}{dp}\right)\tilde{w}(p) = 0, \quad (3.104)$$

donde

$$Q\left(ih\frac{d}{dp}\right) := \begin{bmatrix} I \left[(a-b)\left(ih\frac{d}{dp}\right) + \left(ih\frac{d}{dp}\right)^2 Q_1\left(ih\frac{d}{dp}\right) \right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d + \left(ih\frac{d}{dp}\right) d_1\left(ih\frac{d}{dp}\right) \\ 0 & 0 & (c-b)\left(ih\frac{d}{dp}\right) + \left(ih\frac{d}{dp}\right)^2 q_{(r+2)(r+2)}\left(ih\frac{d}{dp}\right) \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{w}(p) &= (w_1(p), \dots, w_r(p), w_{r+1}(p), w_{r+2}(p)), \\ B\left(ih\frac{d}{dp}\right) &= \left\| b_{ij}\left(ih\frac{d}{dp}\right) \right\|, Q_1\left(ih\frac{d}{dp}\right) = \left\| \delta_{ij} q_{ij}\left(ih\frac{d}{dp}\right) \right\|, \end{aligned}$$

donde $q_{ij}\left(ih\frac{d}{dp}\right), b_{ij}\left(ih\frac{d}{dp}\right), 1 \leq i, j \leq r+2$, son operadores diferenciales con los términos menores constantes. En este caso en el sistema (3.104) la componente w_{r+1} está determinada por la fórmula

$$\left\{ 1 + \frac{h}{p} b_{(r+1)(r+1)}\left(ih\frac{d}{dp}\right) \right\} w_{r+1} = g(p, h), \quad (3.105)$$

donde

$$g(p, h) = - \left(\frac{1}{p} d\left(ih\frac{d}{dp}\right) w_{r+2} + \frac{h}{p} \sum_{l \neq r+1} b_{(r+1)l}\left(ih\frac{d}{dp}\right) w_l \right),$$

con

$$d\left(ih\frac{d}{dp}\right) = d + \left(ih\frac{d}{dp}\right) d_1\left(ih\frac{d}{dp}\right).$$

Como antes se busca la aproximación de la función w_{r+1} en la forma (3.12). Sustituyendo la función w_{r+1} en el sistema (3.104) por la aproximación (3.12) se obtiene el siguiente sistema reducido para la función vectorial $w = (w_1, \dots, w_r, w_{r+2})$:

$$ih \frac{dw_k}{dp} + \frac{pw_k}{a-b} + \frac{h}{a-b} \left(\sum_{j=1}^r b_{kj} \left(ih \frac{d}{dp} \right) w_j - b_{k(r+1)} \left(ih \frac{d}{dp} \right) \frac{1}{p} d \left(ih \frac{d}{dp} \right) w_{r+2} \right) + \left(ih \frac{d}{dp} \right)^2 q_{kk} \left(ih \frac{d}{dp} \right) w_k + h \left(\frac{h}{p} \right) \sum_{m \neq r+1} a_{km} \left(h, \frac{h}{p}; ih \frac{d}{dp} \right) w_m = 0, \quad (3.106)$$

$$ih \frac{dw_{r+2}}{dp} + \frac{pw_{r+2}}{c-b} + \frac{h}{c-b} \left(\sum_{j \neq r+1} b_{(r+2)j} \left(ih \frac{d}{dp} \right) w_j - b_{(r+2)(r+1)} \left(ih \frac{d}{dp} \right) \frac{1}{p} d \left(ih \frac{d}{dp} \right) w_{r+2} \right) + \left(ih \frac{d}{dp} \right)^2 q_{(r+2)(r+2)} \left(ih \frac{d}{dp} \right) w_{r+2} + h \left(\frac{h}{p} \right) \sum_{m \neq r+1} a_{(r+2)m} \left(h, \frac{h}{p}; ih \frac{d}{dp} \right) w_m = 0.$$

El operador diferencial en la parte derecha de sistema (3.106) se denota por L_1 , y el sistema (3.106) en este caso tiene la forma $L_1 w = 0$.

Ahora sustituyendo las funciones w de la forma (3.6) en el sistema (3.106) y aplicando el Lema 6 de obtiene que

$$\begin{aligned} L_1 w = & \exp \left(\frac{i}{h} S_{f,0}(p) \right) \left\{ \left(-\frac{dS_{f,0}}{dp} I + \begin{bmatrix} \frac{p}{a-b} I & 0 \\ 0 & \frac{p}{c-b} \end{bmatrix} \right. \right. \\ & + \left. \left. \begin{bmatrix} \frac{1}{a-b} \left(-\frac{dS_{f,0}}{dp} \right)^2 Q_1 \left(-\frac{dS_{f,0}}{dp} \right) I & 0 \\ 0 & \frac{1}{c-b} \left(-\frac{dS_{f,0}}{dp} \right)^2 q_{(r+2)(r+2)} \left(-\frac{dS_{f,0}}{dp} \right) \end{bmatrix} \right) v_{f,0}(p, h) \right. \\ & + h \left(\begin{bmatrix} \left\| \frac{1}{a-b} b_{kj} \left(-\frac{dS_{f,0}}{dp} \right) \right\| & \frac{1}{p(a-b)} d \left(ih \frac{d}{dp} \right) \left\| b_{k(r+1)} \left(-\frac{dS_{f,0}}{dp} \right) \right\| \\ \left\| \frac{1}{c-b} b_{(r+2)j} \left(-\frac{dS_{f,0}}{dp} \right) \right\| & \frac{1}{p(c-b)} d \left(ih \frac{d}{dp} \right) \left\| b_{(r+2)(r+1)} \left(-\frac{dS_{f,0}}{dp} \right) \right\| \end{bmatrix} v_{f,0}(p, h) \right. \\ & + i \frac{\partial v_{f,0}}{\partial p}(p, h) + i R_1 v_{f,0}(p, h) + \tilde{P}_{f,0}^0 \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{d}{dp} \right) v_{f,0}(p, h) \\ & + i \left(1 + \tilde{P}_{f,0}^0 \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) \right) v_{f,1}(p, p, h) \\ & + \left(h P_{f,1}^0 \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1} \right) + \tilde{P}_{f,1}^0 \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1} \right) \right) v_{f,1}(p, p_1, h) \Big|_{p_1=p} \\ & + \left(h^2 P_{f,2}^0 \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, ih \frac{\partial}{\partial p_2} \right) \right. \\ & \left. + h \tilde{P}_{f,2}^0 \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, ih \frac{\partial}{\partial p_2} \right) \right) v_{f,2}(p, p_1, p_2, h) \Big|_{p_1=p_2=p} + \dots \\ & + \left(h^l P_{f,l}^0 \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_l} \right) \right. \\ & \left. + h^{l-1} \tilde{P}_{f,l}^0 \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_l} \right) v_{f,l}(p, p_1, \dots, p_l, h) \right) \Big|_{p_1=\dots=p_l=p} + \dots \\ & \left. \left(+ h^{N_0} P_{f,N_0}^0 \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{N_0}} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + h^{N_0-1} \tilde{P}_{f,N_0}^0 \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{N_0}} \right) \right) v_{f,N_0}(p, p_1, \dots, p_{N_0}, h) \Big|_{p_1=\dots=p_{N_0}=p} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^N \int_{p_0}^p dp_k \dots \int_{p_0}^{p_2} dp_1 e^{\frac{i}{h} S_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k)} \left\{ \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p} I + \begin{bmatrix} \frac{p}{a-b} I & 0 \\ 0 & \frac{p}{c-b} \end{bmatrix} \right. \right. \\
 & + \left. \begin{bmatrix} \left(\frac{-\partial S_{f,k}}{\partial p} \right)^2 Q_1 \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p} \right) I & 0 \\ 0 & \left(\frac{-\partial S_{f,k}}{\partial p} \right)^2 q_{(r+2)(r+2)} \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p} \right) \end{bmatrix} \right) v_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, h) \\
 & + h \left(\begin{bmatrix} \left\| \frac{1}{a-b} b_{kj} \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p} \right) \right\| & \frac{1}{p(a-b)} d \left(ih \frac{d}{dp} \right) \left\| b_{k(r+1)} \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p} \right) \right\| \\ \left\| \frac{1}{c-b} b_{(r+2)j} \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p} \right) \right\| & \frac{1}{p(c-b)} d \left(ih \frac{d}{dp} \right) b_{(r+2)(r+1)} \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p} \right) \end{bmatrix} v_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, h) \right. \\
 & + i \frac{\partial v_{f,k}}{\partial p}(p, p_1, \dots, p_k, h) \\
 & + i R_1 v_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, h) + \widehat{P}_{f,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) v_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, h) \\
 & + i \left(1 + \widetilde{P}_{f,0}^k \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) \right) v_{f,k+1}(p, p_1, \dots, p_{k-1}, p, h) \\
 & + h P_{f,1}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}} \right) v_{f,k+1}(p, p_1, \dots, p_{k+1}, h) \Big|_{p_{k+1}=p} \\
 & + \widetilde{P}_{f,1}^k \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}} \right) v_{f,k+1}(p, p_1, \dots, p_{k+1}, h) \Big|_{p_{k+1}=p} \tag{3.107}
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 & + \left(h^2 P_{f,2}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+2}} \right) \right. \\
 & + h \widetilde{P}_{f,2}^k \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+2}} \right) v_{f,k+2}(p, p_1, \dots, p_{k+2}, h) \Big|_{p_{k+1}=p_{k+2}=p} + \dots \\
 & + \left(h^l P_{f,l}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}} \right) \right. \\
 & + h^{l-1} \widetilde{P}_{f,l}^k \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}} \right) v_{f,k+l}(p, p_1, \dots, p_{k+l}, h) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+l}=p} + \dots \\
 & + \left(h^{N_0-1} \widetilde{P}_{f,l}^k \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+N_0}} \right) \right. \\
 & + h^{N_0} P_{f,N_0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+N_0}} \right) \Big) \\
 & \left. \times v_{f,k+N_0}(p, p_1, \dots, p_{k+N_0}, h) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+N_0}=p} \right\},
 \end{aligned}$$

$$R_1 v_{f,k} = \begin{bmatrix} I \frac{d}{d\xi} (\xi^2 Q_1(\xi)) \Big|_{\xi=-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p}} & 0 \\ 0 & \frac{d}{d\xi} (\xi^2 q_{(r+2)(r+2)}(\xi)) \Big|_{\xi=-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p}} \end{bmatrix} \frac{\partial v_{f,k}}{\partial p} + G_{f,k} v_{f,k},$$

y

$$G_{f,k} := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I \left(-\frac{\partial^2 S_{f,k}}{\partial p^2} \frac{d^2}{d\xi^2} (\xi^2 Q_1(\xi)) \right) \Big|_{\xi=-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p}} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial^2 S_{f,k}}{\partial p^2} \frac{d^2}{d\xi^2} (\xi^2 q_{(r+2)(r+2)}(\xi)) \Big|_{\xi=-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p}} \end{bmatrix} v_{f,k},$$

aquí $G_{f,k} \in C^\infty (|p| < \varepsilon)$ son los términos constantes de los operadores

$$\widehat{P}_{f,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right), P_{f,l}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}} \right)$$

de la forma $i(b_k + O(p))$, $k = 0, \dots, N_0$, respectivamente; los operadores

$$\widehat{P}_{f,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right), P_{f,l}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}} \right)$$

son operadores diferenciales matriciales aplicados a las funciones $w = (w_1, \dots, w_r, w_{r+2})$ de la forma (3.19). Además comparando con la fórmula (3.18) en la fórmula (3.107) aparecen unos operadores adicionales $\widetilde{P}_{f,l}^k \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}} \right)$ de la forma (3.14) los cuales tienen sus términos menores del orden $O(p)$.

En lo que sigue se demuestra que en este caso es posible buscar la solución del problema (3.1), con la función matricial $A(t)$ de la forma (3.103), en la clase de funciones (3.6). Análogamente se obtiene que las funciones $v_{f,k}^l(p, p_1, \dots, p_k, h)$ en el caso $f = 1$ tiene la forma

$$\begin{aligned} v_{1,2m}^l(p, p_1, \dots, p_k, h) &= \sum_{\alpha=1}^r C_{1,2m}^{l,\alpha}(p, p_1, \dots, p_k, h) e_\alpha(p), \\ v_{1,2m+1}^l(p, p_1, \dots, p_k, h) &= C_{1,2m+1}^{l,r+2}(p, p_1, \dots, p_k, h) e_{r+2}(p), \text{ para } l, m \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Se sustituyen las funciones $v_{1,k}^0(p, p_1, \dots, p_k, h)$ en la ecuación (3.18) y se buscan los primeros términos adicionales para aniquilar los términos de la forma

$$\begin{aligned} &\widehat{P}_{1,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) v_{1,k}^0(p, p_1, \dots, p_k, h), \\ &\widetilde{P}_{1,l}^k \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_l} \right) v_{1,k+l}^0(p, p_1, \dots, p_{k+l}, h) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+l}=p}, \end{aligned}$$

y $P_{1,l}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_l} \right) v_{1,k+l}^0(p, p_1, \dots, p_{k+l}, h) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+l}=p}$. En el caso general se sustituyen los $(l-1)$ -ésimos términos adicionales $v_{1,k}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_k, h)$, $k = 0, \dots, N_0$, en la ecuación (3.18) y se buscan los l -ésimos términos adicionales para aniquilar los términos de la forma

$$\begin{aligned} &\widehat{P}_{1,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) v_{1,k}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_k, h), \\ &\widetilde{P}_{1,j}^k \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_j} \right) v_{1,k+j}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_{k+j}, h) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+j}=p}, \end{aligned}$$

y $P_{1,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_j} \right) v_{1,k+j}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_{k+j}, h) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+j}=p}$. En efecto se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para los l -ésimos términos adicionales $v_{1,k}^l(p, p_1, \dots, p_k, h)$, por definición se tiene que $v_{1,k}^{-1} := 0$:

i) Para $k = 2m$:

$$\begin{aligned} &\left(1 + O \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) \right) \frac{\partial C_{1,2m}^{l,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m}, h)}{\partial p} - \\ &i \sum_{j=1}^r C_{1,2m}^{l,j} \left[\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) e_j, e_\alpha \right) + (G_{1,2m} e_j, e_\alpha) \right] = \\ &i \left(\widehat{P}_{1,0}^{2m} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) v_{1,2m}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_{2m}, h), e_\alpha \right) + \\ &i \left(\widetilde{P}_{1,0}^{2m} \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) v_{1,2m+1}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_{2m}, p, h), e_\alpha \right) + \tag{3.108} \\ &i \sum_{q=1}^{N_0} h^{q-1} \left(e_\alpha, \left(h P_{1,q}^{2m} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q}} \right) + \right. \right. \\ &\left. \left. \widetilde{P}_{1,q}^{2m} \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q}} \right) \right) v_{1,2m+q}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_{2m+q}, h) \Big|_{p_{2m+1}=\dots=p_{2m+q}=p} \right), \end{aligned}$$

con los datos iniciales

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \tilde{P}_{1,0}^{2m} \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}\right)\right) C_{1,2m}^{l,\alpha} (p, p_1, \dots, p_{2m-1}, p, h) = \\
 & i C_{1,2m-1}^{l,r+2} \left[\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m-1}}{\partial p}\right) e_{r+2}, e_\alpha\right) + (G_{1,2m-1} e_{r+2}, e_\alpha)\right] + \\
 & i \left(\left(\left(1 + O\left(\frac{\partial S_{1,2m-1}}{\partial p}\right)\right) + \tilde{P}_{1,0}^{2m-1} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}\right) \right) v_{1,2m-1}^{l-1} (p, p_1, \dots, p_{2m-1}, h), e_\alpha \right) + \quad (3.109) \\
 & i \sum_{q=1}^{N_0} h^{q-1} \left(e_\alpha, \left(h P_{1,q}^{2m-1} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q-1}}\right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \tilde{P}_{1,q}^{2m-1} \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q-1}}\right) \right) \times \right. \\
 & \left. v_{1,2m+q-1}^{l-1} (p, p_1, \dots, p_{2m+q-1}, h) \Big|_{p_{2m}=\dots=p_{2m+q-1}=p} \right),
 \end{aligned}$$

ii) Para $k = 2m + 1$:

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + O\left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p}\right)\right) \frac{\partial C_{1,2m+1}^{l,r+2} (p, p_1, \dots, p_{2m+1}, h)}{\partial p} - \\
 & i C_{1,2m+1}^{l,r+2} \left[\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m+1}}{\partial p}\right) e_{r+2}, e_{r+2}\right) + (G_{1,2m+1} e_{r+2}, e_{r+2}) \right] = \\
 & i \left(\tilde{P}_{1,0}^{2m+1} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}\right) v_{1,2m+1}^{l-1} (p, p_1, \dots, p_{2m+1}, h), e_{r+2} \right) + \quad (3.110) \\
 & i \left(\tilde{P}_{1,0}^{2m+1} \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}\right) v_{1,2(m+1)}^{l-1} (p, p_1, \dots, p_{2m+1}, p, h), e_{r+2} \right) + \\
 & i \sum_{q=1}^{N_0} h^{q-1} \left(e_{r+2}, \left(h P_{1,q}^{2m+1} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q+1}}\right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \tilde{P}_{1,q}^{2m+1} \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q+1}}\right) \right) v_{1,2m+q+1}^{l-1} (p, p_1, \dots, p_{2m+q+1}, h) \Big|_{p_{2m+1}=\dots=p_{2m+q+1}=p} \right),
 \end{aligned}$$

con los datos iniciales

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \tilde{P}_{1,0}^{2m+1} \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}\right)\right) C_{1,2m+1}^{l,r+2} (p, p_1, \dots, p_{2m}, p, h) = \\
 & i \sum_{j=1}^r C_{1,2m}^{l,j} \left[\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m-1}}{\partial p}\right) e_j, e_{r+2}\right) + (G_{1,2m+1} e_j, e_{r+2}) \right] + \\
 & i \left(\left(\left(1 + O\left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p}\right)\right) + \tilde{P}_{1,0}^{2m} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}\right) \right) v_{1,2m}^{l-1} (p, p_1, \dots, p_{2m}, h), e_{r+2} \right) + \quad (3.111) \\
 & i \sum_{q=1}^{N_0} h^{q-1} \left(e_{r+2}, \left(h P_{1,q}^{2m} \left(h, \frac{h}{p}, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q}}\right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \tilde{P}_{1,q}^{2m} \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q}}\right) \right) v_{1,2m+q}^{l-1} (p, p_1, \dots, p_{2m+q}, h) \Big|_{p_{2m}=\dots=p_{2m+q}=p} \right).
 \end{aligned}$$

Lema 11 Los coeficientes $C_{1,k}^{l,\alpha} (p, p_1, \dots, p_k, h)$, $l = 1, \dots, N_1$; $\alpha = 1, \dots, r, r + 2$; $k = 1, \dots, N$, de las funciones vectoriales $v_{1,k}^l (p, p_1, \dots, p_k)$ de N_1 -ésima aproximación (3.21) de la solución del problema (3.1) con la función matricial $A(t)$ de la forma (3.103) satisface el sistema de ecuaciones (3.108) - (3.111), y se tiene que

$$\begin{aligned}
 & C_{1,2m}^{l,\alpha} (p, p_1, \dots, p_{2m}, h) = \\
 & \sum_{l_0+\dots+l_{2m}=l, l_0, \dots, l_{2m} \geq 0} \left[h^{l_0} \left(\frac{1}{p_0}\right)^{l_0} \dots \left(\frac{1}{p_{2m}}\right)^{l_{2m}} \right] \Big|_{p_0=p} \\
 & \times g_{1,2m}^{l,\alpha} [l_0, \dots, l_{2m}] \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right), \quad (3.112) \\
 & \times \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \left(\frac{p_{2m}}{p_{2m-1}}\right)^\sigma \frac{1}{p_{2m}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & C_{1,2m+1}^{l,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, h) = \\
 & \sum_{l_0+\dots+l_{2m+1}=l, l_0, \dots, l_{2m+1} \geq 0} \left[h^{l_0} \left(\frac{1}{p_0} \right)^{l_0} \dots \left(\frac{1}{p_{2m+1}} \right)^{l_{2m+1}} \right] \Big|_{p_0=p} \\
 & \times g_{1,2m+1}^{l,r+2}[l_0, \dots, l_{2m+1}] \left(p, \frac{h}{p}, h, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m+1} \right) \\
 & \times \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \frac{1}{p_{2m}} \left(\frac{p}{p_{2m+1}} \right)^\sigma \right], \tag{3.113}
 \end{aligned}$$

para $m = 1, \dots, [N_1/2]$. Aquí las funciones $g_{1,k}^{l,\alpha}[l_0, \dots, l_k] \left(p, \frac{h}{p}, h, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_k}, \ln p_1, \dots, \ln p_k \right)$ son polinomios en $h, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_k}, p, \ln p_1, \dots, \ln p_k$, con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^k)$ con respecto a p_1, \dots, p_k .

Demostración. Primero note que $\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p} = O(p)$ y sobre el contorno γ se tiene que $\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p}$ es también un parámetro pequeño. Por lo tanto aparecen operadores adicionales en el sistema (3.108)-(3.111) comparando con el sistema (3.36)-(3.39), i.e. los operadores

$$\tilde{P}_{1,q}^k \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_k}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+q}} \right),$$

tienen los términos menores del orden $O(p)$. Esto implica que las ecuaciones (3.108) y (3.110) tienen la misma forma que las ecuaciones (3.36) y (3.38), respectivamente. Sin embargo los datos iniciales para los coeficientes $C_{1,2m}^{l,\alpha}$ y $C_{1,2m+1}^{l,r+2}$ satisfacen las ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \tilde{P}_{1,0}^{2m} \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) \right) C_{1,2m}^{l,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m-1}, p, h) = \\
 & \frac{d}{p(c-b)} b^{(r+2)(r+1)} \left(\frac{\partial S_{1,2m-1}}{\partial p} \right) C_{1,2m-1}^{1,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m-1}, h) \\
 & + \left(\frac{h}{p} \right) \zeta_{1,2m}^{1,\alpha} \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right),
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \tilde{P}_{1,0}^{2m+1} \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) \right) C_{1,2m+1}^{l,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m}, p, h) = \\
 & \frac{1}{(c-b)} \sum_{j=1}^r b^{(r+2)j} \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) C_{1,2m}^{1,j}(p, p_1, \dots, p_{2m}, h) \\
 & + \left(\frac{h}{p} \right) \zeta_{1,2m+1}^{1,r+2} \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right).
 \end{aligned}$$

Como los términos menores de los operadores $\tilde{P}_{1,q}^k \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_k}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+q}} \right)$, tienen orden $O(p)$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
 & C_{1,2m}^{l,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m-1}, p, h) = \\
 & \left(1 + \tilde{P}_{1,0}^{2m} \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) \right)^{-1} \left\{ \frac{d}{p(c-b)} b^{(r+2)(r+1)} \left(\frac{\partial S_{1,2m-1}}{\partial p} \right) C_{1,2m-1}^{1,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m-1}, h) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{h}{p} \right) \zeta_{1,2m}^{1,\alpha} \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right) \right\}, \tag{3.114}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 & C_{1,2m+1}^{l,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m}, p, h) = \\
 & \left(1 + \tilde{P}_{1,0}^{2m+1} \left(h, p; ih \frac{\partial}{\partial p} \right) \right)^{-1} \left\{ \frac{1}{(c-b)} \sum_{j=1}^r b^{(r+2)j} \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) C_{1,2m}^{1,j}(p, p_1, \dots, p_{2m}, h) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{h}{p} \right) \zeta_{1,2m+1}^{1,r+2} \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right) \right\}. \tag{3.115}
 \end{aligned}$$

Primero se considera el caso cuando $l = 1$. En este caso Lema 9 implica que para $m = 0$ en la parte derecha de la ecuación (3.108) se tiene una función de la forma $\left(\frac{h}{p}\right) \Phi_{1,0}^{1,\alpha}\left(p, \frac{h}{p}, h\right)$, donde $\Phi_{1,0}^{1,\alpha}\left(p, \frac{h}{p}, h\right)$ es un polinomio en $h, \frac{h}{p}$ con coeficientes de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ con respecto a p . Note que en este caso en la ecuación (3.108) las funciones $\left(A_1\left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p}\right) e_j, e_\alpha\right)$, para $j = 1, \dots, r$, no tienen el factor $1/p$. Por lo tanto la solución del problema de Cauchy (3.108) para $l = 1, m = 0$, con los datos iniciales iguales a cero tiene la forma

$$C_{1,0}^{1,\alpha}(p, h) = \sum_{l_1, l_2, l_3 \geq 0} \sum_{l_1 + l_2 + l_3 = 1} \left(\left(h \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) \right)^{l_1} \left(\frac{h}{p} \right)^{l_2} p^{l_3} \right) g_{1,0}^{1,\alpha} \left(p, \frac{h}{p}, h \right), \quad (3.116)$$

aquí $g_{1,0}^{1,\alpha}\left(p, \frac{h}{p}, h\right)$ es un polinomio en $h, \frac{h}{p}$ con coeficientes de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ con respecto a p . Usando el Lema 9 se obtiene que para $m = 0$ en la parte derecha de la ecuación (3.110) se tiene una función de la forma $\left(\frac{h}{p^2}\right) \left(\frac{p}{p_1}\right)^\sigma \Phi_{1,1}^{1,r+2}\left(p, \frac{h}{p}, h\right)$, donde $\Phi_{1,1}^{1,r+2}\left(p, \frac{h}{p}, h\right)$ es un polinomio en $h, \frac{h}{p}, p$ con coeficientes de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Además la función $\left(A_1\left(\frac{\partial S_{1,2m+1}}{\partial p}\right) e_{r+2}, e_{r+2}\right)$ tiene el factor $1/p$. Resolviendo el problema de Cauchy (3.110),(3.111) para $l = 1, m = 0$, con la función $C_{1,0}^{1,\alpha}(p, h)$ que satisface la fórmula (3.44) se obtiene que

$$C_{1,1}^{1,r+2}(p, p_1, h) = \sum_{\alpha=0}^1 \left(\left(\frac{h}{p} \right)^\alpha p^{1-\alpha} \right) g_{1,1}^{1,r+2} \left(p, \frac{h}{p}, h, \ln p_1 \right) \left[\left(\frac{p}{p_1} \right)^\sigma \right],$$

donde $g_{1,1}^{1,r+2}\left(p, \frac{h}{p}, h, \ln p_1\right)$ es un polinomio en $h, \frac{h}{p}, \ln p_1, p$ con coeficientes de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ con respecto a p_1 . Para un número arbitrario m el Lema 9 implica que en la parte derecha de la ecuación (3.108) se tiene una función de la forma

$$\left(\frac{h}{p} \right) \Phi_{1,2m}^{1,\alpha} \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right),$$

donde $\Phi_{1,2m}^{1,\alpha}\left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1}\right)$, es un polinomio en $p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}$, y $\ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1}, h$ con coeficientes de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^{2m-1})$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m-1} . Note que en este caso en la ecuación (3.108) las funciones $\left(A_1\left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p}\right) e_j, e_\alpha\right)$, para $j = 1, \dots, r$, no tienen el factor $1/p$. Ahora como la función $\left(A_1\left(\frac{\partial S_{1,2m-1}}{\partial p}\right) e_{r+2}, e_\alpha\right)$ tiene el factor $1/p$ entonces el problema de Cauchy (3.108),(3.109) para $l = 1$, tiene los datos iniciales (3.109) de la forma (3.114). Por lo tanto la solución del problema de Cauchy (3.108),(3.109) para $l = 1$ está dada por la fórmula

$$\begin{aligned} C_{1,2m}^{1,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m}, h) = & \sum_{l_1, l_2, l_3 \geq 0} \sum_{l_1 + l_2 + l_3 = 1} \left(\left(h \ln \left(\frac{p}{p_{2m}} \right) \right)^{l_1} \left(\frac{h}{p} \right)^{l_2} p^{l_3} \right) \\ & \times g_{1,2m}^{1,\alpha} \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right) \\ & \times \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \cdots \left(\frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2m}} \right], \end{aligned}$$

aquí $g_{1,2m}^{1,\alpha}\left(p, \frac{h}{p}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1}\right)$ es un polinomio en $p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}$, y $\ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1}, h$ con coeficientes de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^{2m-1})$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m-1} . Note que la función

$(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) e_j, e_{r+2})$ no tiene el factor $1/p$. En efecto los datos iniciales (3.111) del problema de Cauchy (3.110),(3.111) para $l = 1$ tiene la forma(3.115). Por lo tanto se obtiene que la solución del problema de Cauchy (3.110),(3.111) para $l = 1$ tiene la forma

$$C_{1,2m+1}^{1,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, h) = \sum_{\alpha=0}^1 \left(\left(\frac{h}{p} \right)^\alpha p^{1-\alpha} \right) g_{1,2m+1}^{1,r+2} \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m+1} \right) \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \cdots \frac{1}{p_{2m}} \left(\frac{p}{p_{2m+1}} \right)^\sigma \right],$$

aquí $g_{1,2m+1}^{1,r+2} \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right)$ es un polinomio en $p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}$, y $\ln p_1, \dots, \ln p_{2m}, h$ con coeficientes de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^{2m})$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m} . ■

Capítulo 4

Soluciones asintóticas para los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales con un parámetro pequeño cerca de la derivada

4.1. Método desarrollado para el caso de las derivadas parciales

Se considera un sistema real hiperbólico de primer orden de la forma

$$-ih \frac{\partial u}{\partial t} + (-i) h \sum_{r=1}^n A_r(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_r} + (-i) h B(t, x) u = 0, \quad (4.1)$$

donde $B; A_r, r = 1, \dots, n$, son funciones matriciales reales de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u \in \mathbb{R}^n$. En lo que sigue se supone que el sistema (4.1) satisface la Condición 19. Para simplificar la notación los valores propios $\lambda_1(t, x, \xi)$, $\lambda_2(t, x, \xi)$, $\lambda_3(t, x, \xi)$ del símbolo del sistema (4.1) se denotarán por $a(t, x, \xi)$, $b(t, x, \xi)$, $c(t, x, \xi)$, respectivamente. Sea $(0, x_0, \xi_0) \in \Sigma_1$, i.e. el punto $(0, x_0, \xi_0)$ pertenece al conjunto de cambio de multiplicidad Σ_1 de la Condición 19. Sean $(x'_0, \xi_0) := (0, x_0, \xi_0)$ y $\Omega_{x'_0, \xi_0} \subset \left(\mathbb{R}_{x'}^{n+1} \times \mathbb{R}_\xi^n\right)$ una vecindad cónica con respecto a ξ . En $\Omega_{x'_0, \xi_0}$ el sistema (4.1) se reduce microlocalmente al siguiente sistema con un parámetro pequeño cerca de la derivada:

$$-ih \frac{\partial y}{\partial t} + A\left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x}\right) y + hB\left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x}\right) y = 0, \quad (4.2)$$

aquí donde el operador $A\left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x}\right)$ está dado por la fórmula (4.5), $y \in \mathbb{C}^{r+2}$, $r \geq 1$, y $h \in (0, 1]$ es parámetro pequeño. En lo que sigue se construirá la solución del problema de Cauchy (4.2) con los datos iniciales

$$y(t, x)|_{t=0} = \exp\left(\frac{i}{h} S_0(x)\right) \phi(x), \quad (4.3)$$

donde $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $Supp \phi \subset \{|x - x_0| < \beta h^{1/2-\delta_1}\}$, $|\partial_x^j \phi| \leq C_j h^{j(1/2-\delta)}$, (los números reales δ_1, β se elegirán más adelante), la fase $S_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es tal que:

$$\{t = 0\} \times \Lambda_0 \subset \Omega_{x'_0, \xi_0}, \text{ con } \Lambda_0 := \{x, \xi : x \in Supp \phi, \xi = \nabla S_0(x)\}.$$

En un dominio donde los operadores $a(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x})$, $b(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x})$ y $c(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x})$ son distintos se puede obtener la solución asintótica de la ecuación (4.2) usando el método WKB estándar. En esta sección se busca la solución asintótica del problema (4.2), (4.3) cerca de los puntos donde estos operadores coinciden, más bien en la intersección de $\Omega_{x'_0, \xi_0}$ con el dominio

$$\begin{aligned} |a(t, x, \xi) - b(t, x, \xi)| &< h^{1/2-\delta}, \\ |c(t, x, \xi) - b(t, x, \xi)| &< h^{1/2-\delta}, \\ |t| &< h^{1/2-\delta}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

La solución asintótica se construye en "p"-representación en la forma de multifase (4.14), donde p es la variable dual con respecto a t . Las ideas del método desarrollado en este capítulo para el caso de ecuaciones en derivadas parciales son las mismas como en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias, sin embargo en este caso se complica la técnica de determinación de las fases y de las amplitudes. En lo que sigue se describe el método para el caso de las ecuaciones en derivadas parciales.

Sean $x' = (t, x)$ y los símbolos $A(x', \xi), B(x', \xi) \in S^m(\Omega_{x'_0, \xi_0})$ (ver [26]) con el operador matricial $A(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x})$ de la forma

$$A\left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{bmatrix} Ia\left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x}\right) & 0 & 0 \\ 0 & b\left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x}\right) & d\left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ 0 & 0 & c\left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x}\right) \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

Por lo tanto es posible suponer que los símbolos $a(t, x, \xi), b(t, x, \xi), c(t, x, \xi) \in S^m(\not\llcorner_{x'_0, \xi_0})$ son polinomios en t, x, ξ . Se considera el caso cuando $a_t(t, x, \xi) < b_t(t, x, \xi) < c_t(t, x, \xi)$, para $|t| < h^{1/2-\delta}$, aquí se usa la notación $a_t(t, x, \xi) := \frac{\partial a}{\partial t}(t, x, \xi)$. En lo que sigue se supone que se satisfacen las condiciones siguientes.

Condición 15 *Suponga que los símbolos $a(t, x, \xi), b(t, x, \xi), c(t, x, \xi) \in S^m(\not\llcorner_{x'_0, \xi_0})$ son tales que*

$$\begin{aligned} \{a, b\}_{\Sigma_{ab}} &\neq 0, \{a, c\}_{\Sigma_{ac}} \neq 0, \{b, c\}_{\Sigma_{bc}} \neq 0, \\ \{a, b\}_{\Sigma_{abc}} &\neq 0, \{a, c\}_{\Sigma_{abc}} \neq 0, \{b, c\}_{\Sigma_{abc}} \neq 0, \end{aligned}$$

y que los parentesis de Poisson

$$\{\eta - a, \eta - b\}, \{\eta - a, \eta - c\}$$

no cambian sus signos en unas ε -vecindades $\Sigma_{ab}^\varepsilon, \Sigma_{ac}^\varepsilon$, de los conjuntos Σ_{ab}, Σ_{ac} , respectivamente. Además se supone que los parentesis de Poisson $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ no cambian sus signos en una ε -vecindad Σ_{abc}^ε del conjunto Σ_{abc} , aquí los conjuntos $\Sigma_{ab}, \Sigma_{ac}, \Sigma_{bc}$ y Σ_{abc} son los conjuntos dados en la Definición 9 con la notación $\lambda_1 = a, \lambda_2 = b$, y $\lambda_3 = c$.

Condición 16 *Suponga que los símbolos a, b, c son tales que*

$$C_1^a \leq |a(t, x, \xi)| \leq C_2^a, C_1^b \leq |b(t, x, \xi)| \leq C_2^b, C_1^c \leq |c(t, x, \xi)| \leq C_2^c,$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x} a(t, x, \xi) \right| &\leq C_3^a, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \xi} a(t, x, \xi) \right| \leq C_4^a, \\ \left| \frac{\partial}{\partial x} b(t, x, \xi) \right| &\leq C_3^b, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \xi} b(t, x, \xi) \right| \leq C_4^b, \\ \left| \frac{\partial}{\partial x} c(t, x, \xi) \right| &\leq C_3^c, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \xi} c(t, x, \xi) \right| \leq C_4^c, \end{aligned}$$

donde $C_j^a, C_j^b, C_j^c, j = 1, 2, 3, 4$, son constantes positivas.

Suponga que el símbolo $b(t, x, \xi)$ está definido en el espacio $\mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1}$ y pertenece a la clase $S^m(\mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1})$. Se considera el operador $U(t, t_0)$ sobre las funciones $z(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que para toda función $z(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} -ih \frac{\partial U(t, t_0) z(x)}{\partial t} &= b_{sim} \left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) U(t, t_0) z(x), \\ U(t, t_0)|_{t=t_0} z(x) &= z(x) \end{aligned}$$

donde

$$b_{sim} \left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) := b \left(t, \overset{1}{x}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) + b \left(t, \overset{2}{x}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

En lo que sigue se usa la notación

$$\widehat{b}_{sim}(t) := b_{sim} \left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

Primero consideramos el caso $\frac{\partial b(t, x, \xi)}{\partial t} \equiv 0$. Bajo ciertas condiciones sobre el símbolo $b(t, x, \xi)$ (ver [4]) éste es esencialmente conjugado. Entonces su extensión autoconjugada es única y puede ser obtenida por la extensión del operador $\widehat{b}_{sim}(t)$. Por lo tanto es posible considerar en lugar del operador $\widehat{b}_{sim}(t)$ el operador autoconjugado $\widehat{b}_{sim}(t)$. En este caso el operador $U(t, t_0)$ tiene la forma

$$U(t, t_0) = \exp \left(\frac{i}{h} (t - t_0) \widehat{b}_{sim}(t) \right).$$

El operador $U(t, 0)$ es un grupo de operadores unitarios que dependen del parámetro t , i.e.

$$U(t, 0) = U(\tau, 0) = U(t + \tau, 0).$$

En el caso general cuando $\frac{\partial b(t, x, \xi)}{\partial t} \neq 0$ es posible demostrar que bajo unas condiciones los operadores $U(t, \tau)$ son unitarios (ver [27]) tales que

$$U(t, \tau) U(\tau, t_0) = U(t, t_0).$$

De hecho para nuestros fines es suficiente considerar la aproximación formal asintótica de las funciones

$$a \left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) U(t, t_0) \exp \left(\frac{i}{h} S_0(x) \right) \phi(x), \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), S_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

obtenida por el método WKB con respecto al parámetro pequeño h . Como en el caso considerado se tiene que $\text{Im } b(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x}) \equiv 0$, entonces con precisión $O(h)$ es posible considerar en lugar la función $U(t, 0) \exp\left(\frac{i}{h} S_0(x)\right) \phi(x)$ la solución formal asintótica WKB del problema

$$\begin{aligned} -ih \frac{\partial u}{\partial t} &= b_{sim}\left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x}\right) u, \\ u|_{t=0} &= \exp\left(\frac{i}{h} S_0(x)\right) \phi(x). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Teorema 11 Sea g_b^\dagger el operador de desplazamiento a lo largo de las trayectorias del sistema de Hamilton con Hamiltoniano $b(t, x, \xi)$. Suponga que los símbolos $a(t, x, \xi) \in S^m\left([0, t] \times \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n\right)$ y $b(t, x, \xi) \in S^q\left([0, t] \times \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n\right)$ entonces para $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $S_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, con $|\nabla S|_{\text{Supp } \phi} \neq 0$, existe un número $\Delta > 0$ tal que para $|T| < \Delta$ la solución asintótica del problema (4.6) es de la forma

$$u(t, x) = \exp\left(\frac{i}{h} S(t, x)\right) \left\{ \phi_0(t, x) + h\phi_1(t, x) + \dots + h^N \phi_N(t, x) + O(h^{N+1}) \right\},$$

donde $\phi_0(t, x)$ satisface la ecuación de transporte, las funciones $\phi_j(t, x)$, $j = 1, \dots, N$, satisfacen un sistema recurrente de ecuaciones, y son tales que $\text{Supp } \phi_j(t, x)$, $j = 0, \dots, N$, son compactos, la función $S(t, x)$ satisface que

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= b_{sim}\left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ S(t, x)|_{t=0} &= S_0(x). \end{aligned}$$

Se tiene que

$$a\left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x) = \exp\left(\frac{i}{h} S(t, x)\right) \left\{ a \circ g_b^\dagger(x, \nabla S_0(x)) \phi(t, x) + O(h) \right\}. \quad (4.7)$$

De hecho se considera la aproximación asintótica de las funciones de la forma

$$U(0, t) a\left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x}\right) U(t, 0) \exp\left(\frac{i}{h} S_0(x)\right) \phi(x), \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), S_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

donde $U(t, 0) \exp\left(\frac{i}{h} S_0(x)\right) \phi(x)$ es la solución formal asintótica WKB del problema (4.6), y $U(\tau, t) a\left(x, -ih \frac{\partial}{\partial x}\right) U(t, 0) \exp\left(\frac{i}{h} S_0(x)\right) \phi(x)$ es la solución asintótica formal WKB del problema

$$\begin{aligned} -ih \frac{\partial w}{\partial \tau} &= b_{sim}\left(\tau, x, -ih \frac{\partial}{\partial x}\right) w, \\ w|_{\tau=t} &= a\left(x, -ih \frac{\partial}{\partial x}\right) U(t, 0) \exp\left(\frac{i}{h} S_0(x)\right) \phi(x). \end{aligned} \quad (4.8)$$

En los trabajos [9],[26] fue demostrado el teorema siguiente.

Teorema 12 Bajo las condiciones del teorema anterior se tiene que

$$U(0, t) a\left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x}\right) U(t, 0) \exp\left(\frac{i}{h} S_0(x)\right) \phi(x) =$$

$$\exp\left(\frac{i}{h}S_0(x)\right)\left(a \circ g_b^t(x, \nabla S_0(x))\phi(t, x) + \sum_{j=1}^N h^j V_j \phi(t, x)\right),$$

aquí V_j son operadores P.D.O.

Corolario 1 Del desarrollo asintótico del operador $U(t, 0)$ se sigue que

$$U(0, t)U(t, 0)\exp\left(\frac{i}{h}S_0(x)\right)\phi(x) = \exp\left(\frac{i}{h}S_0(x)\right)(\phi(x) + O(h^\infty)),$$

donde $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $S_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Haciendo el cambio $y(t, x) = U(t, 0)z(x)$ (donde $U(t, 0)\exp\left(\frac{i}{h}S_0(x)\right)\phi(x)$ es la solución formal asintótica WKB del problema (4.6)) se obtiene el sistema

$$-ih\frac{\partial z}{\partial t} + \tilde{A}\left(t, x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right)z + h\tilde{B}\left(t, x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right)z = 0, \quad (4.9)$$

donde

$$\tilde{A}\left(t, x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{bmatrix} I(a-b) \circ g_b^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \circ g_b^t \\ 0 & 0 & (c-b) \circ g_b^t \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

y

$$\tilde{B}\left(t, x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\| b_{ij}\left(t, x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right) \right\|, b_{ij}\left(t, x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{q=-N}^1 b_{ij}^q\left(t, x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

donde $b_{ij}^q \in S^{-q}(U \times \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$, $j = 1, 2$.

Derivando con respecto a t se obtiene que

$$[a-b](t, g_b^t(x, \xi)) = [a-b](0, x, \xi) + [a_t - b_t](0, x, \xi)t + \{a, b\}(0, x, \xi)t + O(t^2).$$

El símbolo matricial $\tilde{A}(t, x, \xi)$ es posible representarlo en la forma

$$\tilde{A}(t, x, \xi) = Q_0(t, x, \xi) + Q_1(t, x, \xi),$$

donde el símbolo $Q_0(t, x, \xi)$ contiene a los términos del orden cero y uno del desarrollo en serie de Taylor del símbolo $\tilde{A}(t, x, \xi)$ con respecto a t . Es posible demostrar que

$$Q_0(t, x, \xi) = \begin{bmatrix} IQ_{11}^0(t, x, \xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d(t, x, \xi) \\ 0 & 0 & q_{33}^0(t, x, \xi) \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} Q_{11}^0\left(t, x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right) &= \langle\langle a, b \rangle\rangle\left(0, x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right)t, \quad q_{33}^0\left(t, x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right) = \langle\langle c, b \rangle\rangle\left(0, x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right)t, \\ d\left(t, x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right) &= d_0\left(0, x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right) + td_t\left(ih\frac{\partial}{\partial p}, x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right), \end{aligned}$$

aquí se usa la notación

$$\langle\langle a, b \rangle\rangle\left(p, x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(a_t\left(p, x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right) - b_t\left(p, x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) + \{a, b\}\left(p, x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

y de manera análoga se define el operador $\langle\langle c, b \rangle\rangle$.

Nota 3 Como el operador $U(t, 0)$ se constuye usando la aproximación asintótica formal el Teorema 11 es valido microlocalmente en una vecindad $\Omega_{x', \xi}$ cuando el símbolo $b(t, x, \xi) \in S^m(\Omega_{x'_0, \xi_0})$.

En lo que sigue se trabaja en "p"-representación con respecto a t , i.e.

$$z(t, x) = \int_C \exp(pt + S(p, x)) w(p, x) dp \tag{4.11}$$

donde el contorno C pasa a lo largo del eje real y por debajo del punto $p = 0$ a lo largo de la circunferencia del radio $r = h^{1/2+2\delta}$, la amplitud $w(p, x)$ es tal que

$$Supp w \subset \left\{ p, x : |x - x_0| < h^{1/2-\delta}, p \in C \right\}$$

y la fase $S(p, x)$ satisface la Condición 17.

Condición 17 La fase $S(p, x)$ es una función analítica con respecto a la variable p en una vecindad V_0 del punto $p = 0$, es infinitamente diferenciable con respecto a $x \in \mathbb{R}^n$, tal que $S(p, x)|_{p=0} = S_0(x)$, $\text{Im } S(p, x) = 0$ para $\text{Im } p = 0$, y tal que la variedad

$$\Lambda_{0,p} := \left\{ t, x, \xi : t = -\text{Re } \frac{\partial S}{\partial p}, x \in Supp w, \xi = \text{Re } \nabla_x S \right\},$$

para $p \in C \cap \{|p| < h^{1/2-\delta}\}$, está contenida en el dominio (4.4).

Así el sistema (4.9) con el operador matricial $\tilde{A}(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x})$ de la forma (4.10) se reduce al sistema

$$pw(p, x) + \tilde{A} \left(ih \frac{\partial}{\partial p}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{w}(p, x) + h\tilde{B} \left(ih \frac{\partial}{\partial p}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{w}(p, x) = 0, \tag{4.12}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{w}(p, x) &= (w_1(p, x), \dots, w_r(p, x), w_{r+1}(p, x), w_{r+2}(p, x)), \\ \tilde{B} \left(ih \frac{\partial}{\partial p}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) &= \left\| b_{ij} \left(ih \frac{\partial}{\partial p}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right\|, \\ Q_1 \left(ih \frac{\partial}{\partial p}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) &= \left\| \delta_{ij} q_{ij} \left(ih \frac{\partial}{\partial p}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right\|, \end{aligned}$$

donde $q_{ij} \left(ih \frac{\partial}{\partial p}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right)$, $b_{ij} \left(ih \frac{\partial}{\partial p}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right)$, $1 \leq i, j \leq r + 2$, son operadores diferenciales con los términos menores constantes. En este caso en el sistema (4.12) la componente w_{r+1} está determinada por la fórmula

$$\left\{ 1 + \frac{h}{p} b_{(r+1)(r+1)} \left(ih \frac{\partial}{\partial p}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right\} w_{r+1} = g \left(p, x, -ih \frac{\partial}{\partial x}, h \right), \tag{4.13}$$

donde

$$g \left(p, x, -ih \frac{\partial}{\partial x}, h \right) = - \left(\frac{1}{p} d \left(ih \frac{\partial}{\partial p}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) w_{r+2} + \frac{h}{p} \sum_{l \neq r+1} b_{(r+1)l} \left(ih \frac{\partial}{\partial p}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) w_l \right).$$

Debido a que el símbolo principal de la ecuación (4.12) tiene raíces múltiples en el punto $p = 0$ y estas raíces son suaves, entonces procediendo de manera análoga con los trabajos [5], [28] es

posible decir que el término $\exp(S(p, x)) w(p, x)$ en la fórmula (4.11) es la parte principal de la solución asintótica en "p"-representación. Es decir en la integral de la fórmula (4.11) es necesario reemplazar la función $\exp(S(p, x)) w(p, x)$ por una función vectorial con las componentes de la forma

$$\sum_{k=1}^N \int_{p_0}^p dp_k \int_{p_0}^{p_k} dp_{k-1} \dots \int_{p_0}^{p_2} \exp\left(\frac{i}{h} S_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, x, \nabla S_0(x))\right) \nu_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, x, h) dp_1, \quad (4.14)$$

donde $f = 1, 2; N \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^n, p_j \in C, j = 0, \dots, N$, las fases $S_{f,0}(p, x)$ son soluciones de los problemas de Cauchy

$$p + [a - b] \circ g_b^t(t, x, \nabla S_{1,0}) \Big|_{t=-\frac{\partial S_{1,0}}{\partial p}} = 0, \quad (4.15)$$

$$S_{1,0}(p, x) \Big|_{p=0} = S_0(x),$$

y

$$p + [c - b] \circ g_b^t(t, x, \nabla S_{2,0}) \Big|_{t=-\frac{\partial S_{2,0}}{\partial p}} = 0, \quad (4.16)$$

$$S_{2,0}(p, x) \Big|_{p=0} = S_0(x),$$

y en general las fases $S_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, \nabla S_0(x)), k \geq 1$, son soluciones de las problemas de Cauchy siguientes:

i)

$$[p - p_{2l}] + \left([a - b] \circ g_b^t(t, x, \nabla S_{1,2l}) \Big|_{t=-\frac{\partial S_{1,2l}}{\partial p}} + p_{2l} \right) = 0, \text{ para } l \in \mathbb{N}, \quad (4.17)$$

con los datos iniciales

$$S_{1,2l}(p, p_1, \dots, p_{2l}, x) \Big|_{p=p_{2l}} = S_{1,2l-1}(p_{2l}, p_1, \dots, p_{2l-1}, x);$$

ii)

$$[p - p_{2l+1}] + \left([c - b] \circ g_b^t(t, x, \nabla S_{1,2l+1}) \Big|_{t=-\frac{\partial S_{1,2l+1}}{\partial p}} + p_{2l+1} \right) = 0, \text{ para } l \in \mathbb{N}_0, \quad (4.18)$$

con los datos iniciales

$$S_{1,2l+1}(p, p_1, \dots, p_{2l+1}, x) \Big|_{p=p_{2l+1}} = S_{1,2l}(p_{2l+1}, p_1, \dots, p_{2l}, x);$$

iii)

$$[p - p_{2l}] + \left([c - b] \circ g_b^t(t, x, \nabla S_{1,2l}) \Big|_{t=-\frac{\partial S_{1,2l}}{\partial p}} + p_{2l} \right) = 0, \text{ para } l \in \mathbb{N}, \quad (4.19)$$

con los datos iniciales

$$S_{2,2l}(p, p_1, \dots, p_{2l}, x) \Big|_{p=p_{2l}} = S_{1,2l-1}(p_{2l}, p_1, \dots, p_{2l-1}, x);$$

iv)

$$[p - p_{2l+1}] + \left([a - b] \circ g_b^t(t, x, \nabla S_{1,2l+1}) \Big|_{t=-\frac{\partial S_{1,2l+1}}{\partial p}} + p_{2l+1} \right) = 0, \text{ para } l \in \mathbb{N}_0, \quad (4.20)$$

con los datos iniciales

$$S_{2,2l+1}(p, p_1, \dots, p_{2l+1}, x) \Big|_{p=p_{2l+1}} = S_{1,2l}(p_{2l+1}, p_1, \dots, p_{2l}, x).$$

Lema 12 Las soluciones de los problemas de Cauchy (4.15), (4.16) se representan en la forma

$$S_{1,0}(p, x) = S_0(x) + p(a-b)(0, x, \nabla S_0(x)) \tilde{S}_{1,0}^1(x) + \frac{p^2}{2} S_{1,0}^1(x, \nabla S_0(x)) + \sum_{l=3}^N \frac{p^l}{l} S_{1,0}^l(x, \nabla S_0(x)), \quad (4.21)$$

y

$$S_{2,0}(p, x) = S_0(x) + p(c-b)(0, x, \nabla S_0(x)) \tilde{S}_{2,0}^1(x) + \frac{p^2}{2} S_{2,0}^1(x, \nabla S_0(x)) + \sum_{l=3}^N \frac{p^l}{l} S_{2,0}^l(x, \nabla S_0(x)), \quad (4.22)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{1,0}^1(x) &= \frac{1}{\langle\langle a, b \rangle\rangle(0, x, \nabla S_0(x))}, \quad \tilde{S}_{2,0}^1(x) = \frac{1}{\langle\langle c, b \rangle\rangle(0, x, \nabla S_0(x))}, \\ S_{1,0}^1(x, \nabla S_0(x)) &= \frac{1 - \nabla_\xi [a-b](0, x, \xi)|_{\xi=\nabla S_0(x)} \nabla_x \left[\tilde{S}_{1,0}^1(x) [a-b](0, x, \nabla S_0(x)) \right]}{\langle\langle a, b \rangle\rangle(0, x, \nabla S_0(x))}, \\ S_{2,0}^1(x, \nabla S_0(x)) &= \frac{1 - \nabla_\xi [c-b](0, x, \xi)|_{\xi=\nabla S_0(x)} \nabla_x \left[\tilde{S}_{2,0}^1(x) [c-b](0, x, \nabla S_0(x)) \right]}{\langle\langle c, b \rangle\rangle(0, x, \nabla S_0(x))}. \end{aligned}$$

Además para los números reales positivos δ_1, β tales que las fases $S_{f,0}$, $f = 1, 2$, satisfacen la Condición 17 se tiene que la variedad $\Lambda_{0,p}^{f,0}$ está contenida en el dominio (4.4), donde

$$\Lambda_{0,p}^{f,0} := \left\{ t, x, \xi : t = -\operatorname{Re} \frac{\partial S_{f,0}}{\partial p}, x \in \operatorname{Supp} w, \xi = \operatorname{Re} \nabla_x S_{f,0} \right\},$$

y $p \in C, |p| < h^{1/2-\delta}$.

Demostración. Desarrollando en la serie de Taylor con respecto a la variable p la parte izquierda de las ecuaciones (4.15), (4.16) se obtiene que las fases $S_{f,0}(p, x)$ satisfacen los problemas de Cauchy:

$$\begin{aligned} p + (a-b)(0, x, \nabla_x S_{1,0}(p, x)) - \langle\langle a, b \rangle\rangle(x, \nabla_x S_{1,0}(p, x)) \frac{\partial S_{1,0}}{\partial p} + \\ r_1(x, \nabla_x S_{1,0}(p, x)) \left(\frac{\partial S_{1,0}}{\partial p} \right)^2 = 0, \quad (4.23) \\ S_{1,0}(p, x)|_{p=0} = S_0(x), \end{aligned}$$

para $f = 1$ y

$$\begin{aligned} p + (c-b)(0, x, \nabla_x S_{2,0}(p, x)) - \langle\langle c, b \rangle\rangle(0, x, \nabla_x S_{2,0}(p, x)) \frac{\partial S_{2,0}}{\partial p} + \\ r_2(x, \nabla_x S_{2,0}(p, x)) \left(\frac{\partial S_{2,0}}{\partial p} \right)^2 = 0, \quad (4.24) \\ S_{2,0}(p, x)|_{p=0} = S_0(x), \end{aligned}$$

para $f = 2$, donde $r_1(x, \xi), r_2(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$. ■

Sin pérdida de generalidad se resolverá el problema (4.23) (los problemas de Cauchy para $S_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, x, \nabla S_0(x))$ se resuelven de manera análoga). En efecto, sustituyendo la expresión (4.21) en la ecuación (4.23), tomando en cuenta que $p \in C$ es un parámetro pequeño, e

igualando a cero la expresión del orden $O(p)$ se obtiene la siguiente ecuación para $\tilde{S}_{1,0}^1, S_{1,0}^1$:

$$\begin{aligned} & p + [a - b](0, x, \nabla S_0(x)) - \langle \langle a, b \rangle \rangle(0, x, \nabla S_0(x)) [a - b](0, x, \nabla S_0(x)) \tilde{S}_{1,0}^1(x) - \\ & p \langle \langle a, b \rangle \rangle(0, x, \nabla S_0(x)) S_{1,0}^1(x, \nabla S_0(x)) + \\ & p \nabla_\xi [a - b](0, x, \xi)|_{\xi=\nabla S_0(x)} \nabla_x \left[\tilde{S}_{1,0}^1(x) [a - b](0, x, \nabla S_0(x)) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

de aquí se obtiene que

$$[a - b](0, x, \nabla S_0(x)) - \langle \langle a, b \rangle \rangle(0, x, \nabla S_0(x)) [a - b](0, x, \nabla S_0(x)) \tilde{S}_{1,0}^1(x) = 0,$$

lo cual implica que

$$\tilde{S}_{1,0}^1(x) = \frac{1}{\langle \langle a, b \rangle \rangle(0, x, \nabla S_0(x))}. \quad (4.26)$$

Además las fórmulas (4.25) y (4.26) implican que la fase $S_{1,0}^1(x, \nabla S_0(x))$ es la solución de la ecuación

$$\begin{aligned} & \langle \langle a, b \rangle \rangle(0, x, \nabla S_0(x)) S_{1,0}^1(x, \nabla S_0(x)) - \\ & \nabla_\xi [a - b](0, x, \xi)|_{\xi=\nabla S_0(x)} \nabla_x \left[S_{1,0}^1(x) [a - b](0, x, \nabla S_0(x)) \right] = 1. \end{aligned}$$

Así de manera consecutiva sustituyendo la expresión (4.21) en la ecuación (4.23), e igualando a cero la expresión del orden $O(p^l)$ se obtienen las ecuaciones para todas las funciones $S_{1,0}^l(x, \nabla S_0(x))$.

Lema 13 *Es posible representar las soluciones de los problemas de Cauchy (4.17) - (4.20) en la forma*

$$\begin{aligned} S_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, x) &= S_{f,k}^0(p_1, \dots, p_k, x) + [p - p_k] [a - b](0, x, \nabla S_0(x)) \tilde{S}_{f,k}^1(p_1, \dots, p_k, x) + \\ & \frac{(p-p_k)^2}{2} S_{f,k}^1(p_1, \dots, p_k, x, \nabla S_0(x)) + \sum_{l=3}^N \frac{(p-p_k)^l}{l} S_{f,k}^l(p_1, \dots, p_k, x, \nabla S_0(x)), \end{aligned} \quad (4.27)$$

donde para f igual a 1 ó 2 el número k es par ó impar respectivamente, y

$$\begin{aligned} S_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, x) &= S_{f,k}^0(p_1, \dots, p_k, x) + [p - p_k] [c - b](0, x, \nabla S_0(x)) \tilde{S}_{f,k}^1(p_1, \dots, p_k, x) + \\ & \frac{(p-p_k)^2}{2} S_{f,k}^1(p_1, \dots, p_k, x, \nabla S_0(x)) + \sum_{l=3}^N \frac{(p-p_k)^l}{l} S_{f,k}^l(p_1, \dots, p_k, x, \nabla S_0(x)), \end{aligned} \quad (4.28)$$

donde para f igual a 1 ó 2 el número k es impar ó par respectivamente.

Además para los números reales positivos δ_1, β tales que las fases $S_{f,k}, f = 1, 2$, satisfacen la Condición 17 se tiene que la variedad $\Lambda_{0,p}^{f,k}$ está contenida en el dominio (4.4), donde

$$\Lambda_{0,p}^{f,k} := \left\{ t, x, \xi : t = -\operatorname{Re} \frac{\partial S_{f,0}}{\partial p}, x \in \operatorname{Supp} w, \xi = \operatorname{Re} \nabla_x S_{f,0} \right\},$$

y $p \in C, |p| < h^{1/2-\delta}$.

Demostración. La demostración sigue del Lema 12. ■

Se sugiere buscar las componentes $\nu_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, x, h)$ en una clase de funciones $\mathcal{L}^{f,k}$. Las funciones de esta clase son analíticas con respecto a p, p_1, \dots, p_k, x , y son de la forma

$$\begin{aligned} \nu_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, x, h) &= \prod_{\alpha=0}^k \sum_{m,l,j=0}^M \left\{ \psi_{f,k} \left(p_0^{i_0} (\ln p_0)^{j_0}, p_1^{i_1} (\ln p_1)^{j_1}, \dots, p_k^{i_k} (\ln p_k)^{j_k}, x \right) \times \right. \\ & \left. \phi_{f,k}(p_0, p_1, \dots, p_k) \left(\frac{h}{p_\alpha} \right)^j h^l (\ln p_\alpha)^l p_\alpha^m C_{m,l,j}(h) \right\} \Big|_{p_0=p} \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde $f = 1, 2; M < \infty; \psi_{f,k} \left(p_0^{i_0} (\ln p_0)^{j_0}, p_1^{i_1} (\ln p_1)^{j_1}, \dots, p_k^{i_k} (\ln p_k)^{j_k}, x \right)$ son funciones polinomiales en $x, p_l^i (\ln p)^j, 1 \leq i, j \leq 3N, l = 0, \dots, k$, con $C^\infty(\mathbb{R}^{k+n+1})$ coeficientes con respecto a $p_0, \dots, p_k, x; C_{m,l,j}(h)$ son polinomios en h con $C^\infty(\mathbb{R}^{k+1})$ -coeficientes en p_0, p_1, \dots, p_k, x ; y las funciones $\phi_{f,k}$ son de la forma

$$\phi_{1,0}(p) \in C^\infty(\mathbb{R}^1),$$

$$\phi_{1,1}(p, p_1) = \left(\frac{p}{p_1} \right)^\sigma,$$

$$\phi_{1,k}(p, p_1, \dots, p_k) = \begin{cases} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \left(\frac{p_4}{p_3} \right)^\sigma \frac{1}{p_4} \cdots \left(\frac{p_{2l}}{p_{2l-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2l}} \left(\frac{p}{p_{2l+1}} \right)^\sigma, & \text{para } k = 2l + 1, \\ \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \left(\frac{p_4}{p_3} \right)^\sigma \frac{1}{p_4} \cdots \left(\frac{p_{2l}}{p_{2l-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2l}}, & \text{para } k = 2l, \end{cases} \quad (4.30)$$

y

$$\phi_{2,0}(p) = p^\sigma,$$

$$\phi_{2,1}(p, p_1) = p_1^{\sigma-1},$$

$$\phi_{2,k}(p, p_1, \dots, p_k) = \begin{cases} p_1^{\sigma-1} \left(\frac{p_3}{p_2} \right)^\sigma \frac{1}{p_3} \left(\frac{p_5}{p_4} \right)^\sigma \frac{1}{p_5} \cdots \frac{1}{p_{2l-1}} \left(\frac{p_{2l+1}}{p_{2l}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2l+1}}, & \text{para } k = 2l + 1, \\ p_1^{\sigma-1} \left(\frac{p_3}{p_2} \right)^\sigma \frac{1}{p_3} \left(\frac{p_5}{p_4} \right)^\sigma \frac{1}{p_5} \cdots \frac{1}{p_{2l-1}} \left(\frac{p}{p_{2l}} \right)^\sigma, & \text{para } k = 2l, \end{cases} \quad (4.31)$$

donde $l \in \mathbb{N}$,

$$\sigma := -i \frac{b_{(r+2)(r+1)}(0, x, \nabla S_0(x)) d_0(0, x, \nabla S_0(x))}{\langle\langle c, b \rangle\rangle(0, x, \nabla S_0(x))}. \quad (4.32)$$

Denote la clase de funciones de multifase antes definida por $M\Phi_f$. Si las funciones $w_k, k = 1, \dots, r + 2$, pertenecen a esta clase es posible determinar la función w_{r+1} , con la precisión hasta h^{N_1} para todo $N_1 > 0$. Se busca una aproximación de la solución denotada por w_{r+1}^N de esta ecuación con respecto a la función w_{r+1} en la clase de funciones (4.14). Después se substituye la aproximación w_{r+1}^N en el sistema (4.12) por la aproximación (4.13) se obtiene el siguiente sistema reducido para la función vectorial $w = (w_1, \dots, w_r, w_{r+2})$:

$$\begin{aligned} & ih \langle\langle a, b \rangle\rangle(0, x, -ih \frac{\partial}{\partial x}) \frac{dw_k}{dp} + pw_k + \\ & h \sum_{j=1}^r b_{kj} \left(ih \frac{d}{dp}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) w_j - \\ & hb_{k(r+1)} \left(ih \frac{d}{dp}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{1}{p} d \left(ih \frac{d}{dp}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) w_{r+2} + \\ & \left(ih \frac{d}{dp} \right)^2 q_{kk} \left(ih \frac{d}{dp}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) w_k + \\ & \langle\langle a, b \rangle\rangle(0, x, -ih \frac{\partial}{\partial x}) h \left(\frac{h}{p} \right) \sum_{m \neq r+1} a_{km} \left(h, \frac{h}{p}; ih \frac{d}{dp}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) w_m = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ih \langle\langle c, b \rangle\rangle(0, x, -ih \frac{\partial}{\partial x}) \frac{dw_{r+2}}{dp} + pw_{r+2} + \\ & h \sum_{j \neq r+1} b_{(r+2)j} \left(ih \frac{d}{dp}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) w_j - \\ & hb_{(r+2)(r+1)} \left(ih \frac{d}{dp}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{1}{p} d \left(ih \frac{d}{dp}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) w_{r+2} + \\ & \left(ih \frac{d}{dp} \right)^2 q_{(r+2)(r+2)} \left(ih \frac{d}{dp}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) w_{r+2} + \\ & \langle\langle c, b \rangle\rangle(0, x, -ih \frac{\partial}{\partial x}) h \left(\frac{h}{p} \right) \sum_{m \neq r+1} a_{(r+2)m} \left(h, \frac{h}{p}; ih \frac{d}{dp}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) w_m = 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Aplicando formalmente la teoría de perturbación (ver [9]) la aproximación w_{r+1}^N se busca en la forma

$$w_{r+1}^N = \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{h}{p} \right) b_{(r+1)(r+1)} \left(ih \frac{d}{dp}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right\}^k g(p, x, h). \quad (4.34)$$

Sustituyendo w_{r+1}^N en (4.13) se obtiene

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \frac{h}{p} b_{(r+r)(r+1)} \left(ih \frac{d}{dp}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right\} w_{r+1}^N = \\ & (-1)^{N+1} \left\{ \left(\frac{h}{p} \right) b_{(r+1)(r+1)} \left(ih \frac{d}{dp}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right\}^{N+1} g(p, x, h). \end{aligned} \quad (4.35)$$

La estimación en la parte derecha de la ecuación (4.35) se obtiene usando el lema siguiente.

Lema 14 *Suponga que las componentes de la función vectorial g_f , $f = 1, 2$, pueden ser representadas en la forma (4.14) y que $b \left(ih \frac{d}{dp}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) = \sum_{\alpha=0}^m b_\alpha \left(x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(ih \frac{\partial}{\partial p} \right)^\alpha$ es un operador matricial h -diferencial del orden m , donde $b_\alpha \left(x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right)$ son operadores diferenciales matriciales de $(m \times m)$ con coeficientes de la clase $C^\infty(\mathbb{R}_x^n)$. En este caso existen operadores h -diferenciales*

$$\begin{aligned} & \tilde{P}_{f,l}^k \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) := \\ & \sum_{0 \leq |m| < \infty, 0 \leq |q| < \infty} \tilde{a}_{f,l}^{k,m,q} (h, p, x) \left(ih \frac{\partial}{\partial p} \right)^{m_0} \times \\ & \left(ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}} \right)^{m_1} \dots \left(ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}} \right)^{m_l} \left(-ih \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{q_1} \dots \left(-ih \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{q_n}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde $k = 0, 1, \dots, N; l = 1, \dots, |m|; |m| = m_0 + \dots + m_l, |q| = q_1 + \dots + q_n$, y $\tilde{a}_{f,l}^{k,m,q} (h, p, x)$ son polinomios con respecto a p, x y h , tales que:

$$\begin{aligned} & b \left(ih \frac{d}{dp}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) g_f = \\ & \exp \left(\frac{i}{h} S_{f,0} \right) \left\{ \left[b \left(-\frac{\partial S_{f,0}}{\partial p}, x, \frac{\partial S_{f,0}}{\partial x} \right) + \tilde{P}_{f,0}^0 \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] v_{f,0} (p, x, h) + \right. \\ & h \tilde{P}_{f,1}^0 \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) v_{f,1} (p, p_1, x, h) \Big|_{p_1=p} + \dots + \\ & h^l \tilde{P}_{f,l}^0 \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_l}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) v_{f,l} (p, p_1, \dots, p_l, x, h) \Big|_{p_1=\dots=p_l=p} + \dots + \\ & \left. (ih)^m b_m v_{f,m} (p, p_1, \dots, p_m, x, h) \Big|_{p_1=\dots=p_m=p} \right\} + \\ & \sum_{k=1}^N \int_{p_0}^p dp_k \dots \int_{p_0}^{p_2} dp_1 e^{\frac{i}{h} S_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, x)} \left\{ \left[b \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p}, x, \frac{\partial S_{f,0}}{\partial x} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \tilde{P}_{f,0}^k \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] v_{f,k} (p, p_1, \dots, p_k, x, h) + \right. \\ & h \tilde{P}_{f,1}^k \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) v_{f,k+1} (p, p_1, \dots, p_{k+1}, x, h) \Big|_{p_{k+1}=p} + \dots + \\ & h^l \tilde{P}_{f,l}^k \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \times \\ & \left. v_{f,k+l} (p, p_1, \dots, p_{k+l}, x, h) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+l}=p} + \dots + \right. \\ & \left. (ih)^m b_m v_{f,k+m} (p, p_1, \dots, p_{k+m}, x, h) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+m}=p} \right\}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Aquí en los operadores $\tilde{P}_{f,l}^k \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right)$ los términos del orden cero $a_l (h, p, x)$ son funciones polinomiales en h con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}_x^n)$ con respecto a p, x y los vectores $v_{f,\beta} \equiv 0$ para todo $\beta > N$.

2. La función $\sum_{\beta=0}^N \left\{ \left(-\frac{h}{p} \right) b \left(ih \frac{d}{dp}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right\}^\beta g_f$ puede ser representada como la parte derecha de la expresión (4.37) donde los operadores $\tilde{P}_{f,l}^k$ son sustituidos por los operadores $P_{f,l}^k$. Los operadores $P_{f,l}^k = P_{f,l}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right)$ se obtienen a partir de la fórmula (4.36) cambiando los coeficientes $\tilde{a}_{f,l}^{k,m,q} (h, p, x)$ por funciones $a_{f,l}^{k,m,q} \left(h, \frac{h}{p}, p, x \right)$ las cuales son polinomios con respecto a $h, \frac{h}{p}, x$ y p .

3. La función $\sum_{\beta=0}^N \left\{ \left(-\frac{h}{p} \right) b \left(ih \frac{\partial}{\partial p}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right\}^\beta \left(\frac{d}{p} g_f \right)$ puede ser representada en la forma (4.37) donde los operadores $\tilde{P}_{f,l}^k$ son sustituidos por los operadores $\frac{1}{p} P_{f,l}^k$. Los operadores $P_{f,l}^k$ tienen la misma forma que los operadores $P_{f,l}^k$ con distintos coeficientes $a_{f,l}^{k,m,q} \left(h, \frac{h}{p}, p, x \right)$ polinomiales con respecto a $h, \frac{h}{p}, x$ y p . Aquí a lo largo del contorno Γ se tiene que $|h/p|_\Gamma \leq h^{1/2-\delta}, 0 < \delta < 1/2$, i.e. sobre el contorno h/p también es un parámetro pequeño.

Demostración. La demostración de este lema es análoga a la demostración del Lema 6 del Capítulo 2. ■

En lo que sigue abusando la notación se omitirá el signo ' en los operadores $P_{f,l}^k$.

El operador diferencial en la parte derecha de sistema (4.33) se denota por L_1 , y el sistema (4.33) en este caso tiene la forma $L_1 w = 0$.

Ahora sustituyendo las funciones w de la forma (4.14) en el sistema (4.33) y aplicando el Lema 14 de obtiene que

$$\begin{aligned}
 L_1 w = & \exp \left(\frac{i}{h} S_{f,0} (p, x) \right) \left\{ \left(\left(-\frac{\partial S_{f,0}}{\partial p} \right) I + \right. \right. \\
 & \left. \left[\begin{array}{cc} ((a, b)) (0, x, \nabla_x S_{f,0}) & 0 \\ 0 & ((a, b)) (0, x, \nabla_x S_{f,0}) \end{array} \right] \right\} v_{f,0} (p, x, h) + \\
 & h \left(A_{S_{f,0}} v_{f,0} (p, x, h) + i \frac{\partial v_{f,0}}{\partial p} (p, x, h) + \right. \\
 & i R_1 v_{f,0} (p, x, h) + \hat{P}_{f,0}^0 \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) v_{f,0} (p, x, h) + \\
 & i \left(1 + \tilde{P}_{f,0}^0 \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) v_{f,1} (p, p, x, h) + \\
 & \left(h P_{f,1}^0 \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) + \right. \\
 & \left. \tilde{P}_{f,1}^0 \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) v_{f,1} (p, p_1, x, h) \Big|_{p_1=p} + \\
 & \left(h^2 P_{f,2}^0 \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, ih \frac{\partial}{\partial p_2}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) + \right. \\
 & \left. h \tilde{P}_{f,2}^0 \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, ih \frac{\partial}{\partial p_2}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) v_{f,2} (p, p_1, p_2, x, h) \Big|_{p_1=p_2=p} + \dots + \\
 & \left(h^l P_{f,l}^0 \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_l}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) + \right. \\
 & \left. h^{l-1} \tilde{P}_{f,l}^0 \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_l}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \times \\
 & v_{f,l} (p, p_1, \dots, p_l, x, h) \Big|_{p_1=\dots=p_l=p} + \dots + \\
 & \left(h^{N_0} P_{f,N_0}^0 \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{N_0}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) + \right. \\
 & \left. h^{N_0-1} \tilde{P}_{f,N_0}^0 \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{N_0}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \times \\
 & v_{f,N_0} (p, p_1, \dots, p_{N_0}, x, h) \Big|_{p_1=\dots=p_{N_0}=p} \Big\} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^N \int_{p_0}^p dp_k \dots \int_{p_0}^{p^2} dp_1 e^{\frac{i}{h} S_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k)} \left\{ \left(\left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p} \right) I + \right. \right. \\
 & \left. \left[\begin{array}{cc} \langle (a, b) \rangle (0, x, \nabla_x S_{f,k}) & 0 \\ 0 & \langle (c, b) \rangle (0, x, \nabla_x S_{f,k}) \end{array} \right] \right) v_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, x, h) + \\
 & h (A_{\nabla S} v_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, x, h) + \\
 & i \frac{\partial v_{f,k}}{\partial p}(p, p_1, \dots, p_k, x, h) + i R_1 v_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, x, h) + \\
 & \widehat{P}_{f,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) v_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, x, h) + \\
 & i \left(1 + \widetilde{P}_{f,0}^k \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) v_{f,k+1}(p, p_1, \dots, p_{k-1}, p, x, h) + \\
 & \left(h P_{f,1}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) + \right. \\
 & \left. \widetilde{P}_{f,1}^k \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) v_{f,k+1}(p, p_1, \dots, p_{k+1}, x, h) \Big|_{p_{k+1}=p} + \\
 & \left(h^2 P_{f,2}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+2}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) + \right. \\
 & \left. h \widetilde{P}_{f,2}^k \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+2}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \times \\
 & v_{f,k+2}(p, p_1, \dots, p_{k+2}, x, h) \Big|_{p_{k+1}=p_{k+2}=p} + \dots + \\
 & \left(h^l P_{f,l}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) + \right. \\
 & \left. h^{l-1} \widetilde{P}_{f,l}^k \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \times \\
 & v_{f,k+l}(p, p_1, \dots, p_{k+l}, x, h) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+l}=p} + \dots + \\
 & \left(h^{N_0} P_{f,N_0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+N_0}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) + \right. \\
 & \left. h^{N_0-1} \widetilde{P}_{f,l}^k \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+N_0}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \times \\
 & \left. v_{f,k+N_0}(p, p_1, \dots, p_{k+N_0}, x, h) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+N_0}=p} \right\}, \tag{4.38}
 \end{aligned}$$

aquí se usa la notación

$$A_{S_{f,k}} := \left[\begin{array}{c} \left\| \frac{b_{kj} \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p}, \nabla S_{f,k} \right)}{\langle (a, b) \rangle (0, x, \nabla_x S_{f,k})} \right\| \quad \frac{d \left(ih \frac{\partial}{\partial p}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right)}{p \langle (a, b) \rangle (0, x, \nabla_x S_{f,k})} \left\| b_{k(r+1)} \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p}, \nabla S_{f,k} \right) \right\| \\ \left\| \frac{b_{(r+2)j} \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p}, \nabla S_{f,k} \right)}{\langle (c, b) \rangle (0, x, \nabla_x S_{f,k})} \right\| \quad \frac{d \left(ih \frac{\partial}{\partial p}, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right)}{p \langle (c, b) \rangle (0, x, \nabla_x S_{f,k})} b_{(r+2)(r+1)} \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p}, \nabla S_{f,k} \right) \end{array} \right]$$

$$\langle (a, b) \rangle (0, x, \nabla_x S_{f,k}) = \frac{I(p + [a - b] \circ g_b^t(t, x, \nabla_x S_{f,k}))}{\langle (a, b) \rangle (0, x, \nabla_x S_{f,k})} \Big|_{t = -\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p}}$$

$$R_1 v_{f,k} := \left[\begin{array}{cc} I \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta^2 Q_1(\eta, \nabla S_{f,k})) \Big|_{\eta = -\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta^2 q_{(r+2)(r+2)}(\eta, \nabla S_{f,k})) \Big|_{\eta = -\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p}} \end{array} \right] \frac{\partial v_{f,k}}{\partial p} + G_{f,k} v_{f,k},$$

y

$$G_{f,k} := \frac{1}{2} \times \left[\begin{array}{ccc} I \left(-\frac{\partial^2 S_{f,k}}{\partial p^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (\eta^2 Q_1 (\eta, \nabla S_{f,k})) \right) & 0 & \\ 0 & -\frac{\partial^2 S_{f,k}}{\partial p^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (\eta^2 q_{(r+2)(r+2)} (\eta, \nabla S_{f,k})) & \end{array} \right] \Big|_{\eta = -\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p}} v_{f,k},$$

aquí $G_{f,k} \in C^\infty (U \times \mathbb{R}^n)$ son los términos constantes de los operadores

$$\widehat{P}_{f,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right), P_{f,l}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

de la forma $i(b_k + O(p))$, $k = 0, \dots, N_0$, respectivamente; los operadores

$$\widehat{P}_{f,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right), P_{f,l}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

son operadores diferenciales matriciales aplicados a las funciones $w = (w_1, \dots, w_r, w_{r+2})$ de la forma (3.19). Además comparando con la fórmula (3.18) en la fórmula (3.107) aparecen operadores diferenciales adicionales $\widetilde{P}_{f,l}^k \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right)$ de la forma (4.36) los cuales tienen sus términos menores del orden $O(p)$.

En lo que sigue se demuestra que en este caso es posible buscar la solución del problema (4.2), con la función matricial $A(t, x)$ de la forma (4.10), en la clase de funciones (4.14) y se describe el método para determinar las amplitudes $v_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, x, h)$ de la solución asintótica de multifase (4.14). Dicha función se construye como la sumatoria de las funciones $v_{f,k}^l(p, p_1, \dots, p_k, x, h)$ obtenidas usando las aproximaciones sucesivas, i.e.

$$v_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, x, h) = \sum_{l=0}^N v_{f,k}^l(p, p_1, \dots, p_k, x, h), \quad (4.39)$$

para un número N bastante grande. Las funciones $v_{f,k}^l(p, p_1, \dots, p_k, x, h)$ se construyen usando el método asintótico de multifase en "p"-representación (ver [5], [10], y Capítulo 2). Se propone buscar las funciones $v_{f,k}^0(p, p_1, \dots, p_k, x, h)$, $f = 1, 2$, en la forma

$$\begin{aligned} v_{1,2m}^0(p, p_1, \dots, p_{2m}, x, h) &= \sum_{\alpha=1}^r C_{1,2m}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m}, x) e_\alpha(p, x), \\ v_{1,2m+1}^0(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x, h) &= C_{1,2m+1}^{0,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x) e_{r+2}(p, x), \end{aligned} \quad (4.40)$$

y

$$\begin{aligned} v_{2,2m}^0(p, p_1, \dots, p_{2m}, x, h) &= C_{2,2m}^{0,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m}, x) e_{r+2}(p, x), \\ v_{2,2m+1}^0(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x, h) &= \sum_{\alpha=1}^r C_{2,2m+1}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x) e_\alpha(p, x), \end{aligned}$$

donde $m \in \mathbb{N}_0$, y todos los coeficientes $C_{f,k}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_k, x)$, $f = 1, 2; k = 0, 1, \dots, N_0, \alpha = 1, \dots, r, r+2$, son funciones $C^\infty(\mathbb{R}^{k+2})$ con respecto a p, p_1, \dots, p_k, x y no dependen de h . Las ecuaciones para las funciones $v_{f,k}^l(p, p_1, \dots, p_k, x, h)$, $l \geq 1$, se describen más adelante. En lo que sigue sin pérdida de generalidad se considera el caso $f = 1$. De hecho como en el Capítulo 2 las funciones $v_{f,k}^0(p, p_1, \dots, p_k, x, h)$ se determinan por el método asintótico de multifase.

Analogamente como para el caso $l = 0$ se obtiene que las funciones $v_{f,k}^l(p, p_1, \dots, p_k, x, h)$, $l \geq 1$ en el caso $f = 1$ tienen la forma

$$\begin{aligned} v_{1,2m}^l(p, p_1, \dots, p_{2m}, x, h) &= \sum_{\alpha=1}^r C_{1,2m}^{l,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m}, x, h) e_{\alpha}(p, x), \\ v_{1,2m+1}^l(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x, h) &= C_{1,2m+1}^{l,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x, h) e_{r+2}(p, x), \text{ para } l, m \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Para calcular las funciones $v_{1,k}^1(p, p_1, \dots, p_k, x, h)$ se sustituyen las funciones $v_{1,k}^0(p, p_1, \dots, p_k, x, h)$ en la ecuación (4.38) y se buscan los primeros términos adicionales para aniquilar los términos de la forma

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{1,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) v_{1,k}^0(p, p_1, \dots, p_k, x, h), \\ \widetilde{P}_{1,l}^k \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_l}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) v_{1,k+l}^0(p, p_1, \dots, p_{k+l}, x, h) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+l}=p}, \end{aligned}$$

y $P_{1,l}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_l}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) v_{1,k+l}^0(p, p_1, \dots, p_{k+l}, x, h) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+l}=p}$. En el caso general se sustituyen los $(l-1)$ -ésimos términos adicionales $v_{1,k}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_k, x, h)$, $k = 0, \dots, N_0$, en la ecuación (4.38) y se buscan los l -ésimos términos adicionales para aniquilar los términos de la forma

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{1,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) v_{1,k}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_k, x, h), \\ \widetilde{P}_{1,j}^k \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_j}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) v_{1,k+j}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_{k+j}, x, h) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+j}=p}, \end{aligned}$$

y $P_{1,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_j}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) v_{1,k+j}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_{k+j}, x, h) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+j}=p}$. En lo que sigue se usa la notación

$$\begin{aligned} A_1 \left(\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p}, x, \nabla_x S_{f,k} \right) := \\ \left[\begin{array}{cc} \left\| \frac{b_{mj} \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p}, x, \nabla_x S_{f,k} \right)}{\langle \langle a, b \rangle \rangle (0, x, \nabla_x S_{f,k})} \right\| & -\frac{d}{p} \left\| \frac{b_{m(r+1)} \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p}, x, \nabla_x S_{f,k} \right)}{\langle \langle a, b \rangle \rangle (0, x, \nabla_x S_{f,k})} \right\| \\ \left\| \frac{b_{(r+2)j} \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p}, x, \nabla_x S_{f,k} \right)}{\langle \langle c, b \rangle \rangle (0, x, \nabla_x S_{f,k})} \right\| & -\frac{d}{p} \frac{b_{(r+2)(r+1)} \left(-\frac{\partial S_{f,k}}{\partial p}, x, \nabla_x S_{f,k} \right)}{\langle \langle c, b \rangle \rangle (0, x, \nabla_x S_{f,k})} \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Se procede por inducción sobre el índice k , para $k = 0, 1, \dots, N_0$.

Sean los símbolos $L_a(-t, x, \xi)$, $L_c(-t, x, \xi)$ de los operadores $(a-b) \circ g_b^t$, $(c-b) \circ g_b^t$, respectivamente. Entonces para obtener unas ecuaciones de transporte estándar se consideran los símbolos $L_a(\eta, x, \xi)$, $L_c(\eta, x, \xi)$. Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_a(\eta, x, \xi)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=-\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p}, \xi=\nabla_x S_{1,2m}} &= \\ \frac{\partial}{\partial \eta} [a-b] \circ g_b^{-\eta}(x, \nabla_x S_{1,2m}) \Big|_{\eta=-\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p}} &\neq 0, \\ \frac{\partial L_b(\eta, x, \xi)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=-\frac{\partial S_{1,2m+1}}{\partial p}, \xi=\nabla_x S_{1,2m+1}} &= \\ \frac{\partial}{\partial \eta} [c-b] \circ g_b^{-\eta}(x, \nabla_x S_{1,2m+1}) \Big|_{\eta=-\frac{\partial S_{1,2m+1}}{\partial p}} &\neq 0. \end{aligned}$$

Lema 15 *Los coeficientes $C_{1,0}^{0,\alpha}(p, x)$ son $C^\infty(\mathbb{R}_p^1 \times \mathbb{R}_x^1)$ funciones y*

$$C_{1,k}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_k, x) = \eta_{1,k}^{0,j}(p, p_1, \dots, p_k, x) \phi_{1,k}(p, p_1, \dots, p_k), \quad (4.42)$$

donde $\eta_{1,k}^{0,j}(p, p_1, \dots, p_k, x)$ son funciones $C^\infty(\mathbb{R}^{k+2})$ y $\phi_{1,k}(p, p_1, \dots, p_k)$ son de la forma (4.30) para $k = 0, 1, \dots, N_0$, $\alpha = 1, 2, \dots, r, r + 2$.

Demostración. De las propiedades de las soluciones asintóticas de multifase (ver Capitulo 1) y de la fórmula (4.40) se sigue que los coeficientes $C_{1,k}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_k, x)$, $\alpha = 1, \dots, r, r + 2$, satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones para $k = 2m$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial L_a(\bar{\eta}, x, \bar{\xi})}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial p} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L_a(\bar{\eta}, x, \bar{\xi})}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial C_{1,2m}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m}, x)}{\partial p} = \\ & i \sum_{j=1}^r C_{1,2m}^{0,j} \left[\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p}, x, \nabla_x S_{1,2m} \right) e_j, e_\alpha \right) + (G_{1,2m} e_j, e_\alpha) \right], \end{aligned} \quad (4.43)$$

con los datos iniciales

$$\begin{aligned} & C_{1,0}^{0,\alpha}(0, x) = Const, \\ & \left(1 + \tilde{P}_{1,0}^{2l} \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) C_{1,2l}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2l}, x) \Big|_{p=2l} = \\ & i C_{1,2l-1}^{0,r+2} \left[\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2l-1}}{\partial p}, x, \nabla_x S_{1,2l-1} \right) e_{r+2}, e_\alpha \right) + (G_{1,2l-1} e_{r+2}, e_\alpha) \right] (p, p_1, \dots, p_{2l-1}) \Big|_{p=2l}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Para $k = 2m + 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial L_b(\bar{\eta}, x, \bar{\xi})}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial p} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L_b(\bar{\eta}, x, \bar{\xi})}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial C_{1,2m+1}^{0,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x)}{\partial p} = \\ & i C_{1,2m+1}^{0,r+2} \left[\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m+1}}{\partial p}, x, \nabla_x S_{1,2m+1} \right) e_{r+2}, e_{r+2} \right) + (G_{1,2m+1} e_{r+2}, e_{r+2}) \right], \end{aligned} \quad (4.45)$$

con los datos iniciales

$$\begin{aligned} & \left(1 + \tilde{P}_{1,0}^{2l+1} \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) C_{1,2l+1}^{0,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2l+1}, x) \Big|_{p=2l+1} = \\ & i \sum_{j=1}^r C_{1,2l}^{0,j} \left[\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2l}}{\partial p}, x, \nabla_x S_{1,2l} \right) e_j, e_{r+2} \right) + (G_{1,2l} e_j, e_{r+2}) \right] (p, p_1, \dots, p_{2l}) \Big|_{p=2l+1}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

aquí $m = 0, 1, \dots, [N_0/2]$ y $l = 1, \dots, [N_0/2]$.

Aquí y en lo que sigue para abreviar se usa la notación

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_a(\bar{\eta}, x, \bar{\xi})}{\partial \eta} & : = \frac{\partial L_a(\eta, x, \xi)}{\partial \eta} \Big|_{\eta = -\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p}, \xi = \nabla_x S_{1,2m}}, \\ \frac{\partial L_a(\bar{\eta}, x, \bar{\xi})}{\partial \xi_j} & : = \frac{\partial L_a(\eta, x, \xi)}{\partial \xi_j} \Big|_{\eta = -\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p}, \xi = \nabla_x S_{1,2m}}, \\ \frac{\partial L_b(\bar{\eta}, x, \bar{\xi})}{\partial \eta} & : = \frac{\partial L_b(\eta, x, \xi)}{\partial \xi_j} \Big|_{\eta = -\frac{\partial S_{1,2m+1}}{\partial p}, \xi = \nabla_x S_{1,2m+1}}, \\ \frac{\partial L_b(\bar{\eta}, x, \bar{\xi})}{\partial \xi_j} & : = \frac{\partial L_b(\eta, x, \xi)}{\partial \xi_j} \Big|_{\eta = -\frac{\partial S_{1,2m+1}}{\partial p}, \xi = \nabla_x S_{1,2m+1}}. \end{aligned}$$

Con el objetivo de usar las fórmulas estándar (ver [22]) como antes se hace el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} T_a & : \mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_y^n \\ (p, x) & \mapsto (p, y(p, x)) \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial p} & = \frac{\partial L_a(\bar{\eta}, x, \bar{\xi})}{\partial \xi_k} \left(\frac{\partial L_a(\bar{\eta}, x, \bar{\xi})}{\partial \eta} \right)^{-1} \\ x_k(0, y) & = y_k, \end{aligned}$$

para $k = 1, \dots, n$, con $k = 2m$ la ecuación (4.43) se reescribe en forma análoga a la ecuación (3.36), i.e.

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{1,2m}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m}, x)}{\partial p} & = i \left(\frac{\partial L_a(\bar{\eta}, x, \bar{\xi})}{\partial \eta} \right)^{-1} \times \\ & \sum_{j=1}^r C_{1,2m}^{0,j} \left[\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p}, x, \nabla_x S_{1,2m} \right) e_j, e_\alpha \right) + (G_{1,2m} e_j, e_\alpha) \right]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Además haciendo el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} T_b & : \mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_y^n \\ (p, x) & \mapsto (p, y(p, x)) \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial p} & = \frac{\partial L_b(\bar{\eta}, x, \bar{\xi})}{\partial \xi_k} \left(\frac{\partial L_b(\bar{\eta}, x, \bar{\xi})}{\partial \eta} \right)^{-1} \\ x_k(0, y) & = y_k, \end{aligned}$$

para $k = 1, \dots, n$, con $k = 2m+1$ la ecuación (4.45) se reescribe en una forma análoga a la ecuación (3.38), i.e.

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{1,2m+1}^{0,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x)}{\partial p} & = i \left(\frac{\partial L_b(\bar{\eta}, x, \bar{\xi})}{\partial \eta} \right)^{-1} \times \\ C_{1,2m+1}^{0,r+2} & \left[\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m+1}}{\partial p}, x, \nabla_x S_{1,2m+1} \right) e_{r+2}, e_{r+2} \right) + (G_{1,2m+1} e_{r+2}, e_{r+2}) \right]. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Primero note que de la fórmula (4.41) se sigue que $i \left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p}, x, \nabla_x S_{1,2m} \right) e_j, e_\alpha \right)$, para $j = 1, \dots, r$; $\alpha = 1, \dots, r$, son funciones $C^\infty(\mathbb{R}_p^1 \times \mathbb{R}_x^1)$ con respecto a las variables p, x y las funciones $i p \left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p}, x, \nabla_x S_{1,2m} \right) e_{r+2}, e_\alpha \right)$, son funciones $C^\infty(\mathbb{R}_p^1 \times \mathbb{R}_x^1)$ con respecto a la variable p, x para $\alpha = 1, \dots, r, r+2$.

Por lo tanto se obtiene (ver [8]) que para $k = 0$ la solución del problema de Cauchy (4.47) con los datos iniciales $C_{1,0}^{0,j}(0, x)$ tiene la forma

$$C_{1,0}^{0,\alpha}(p, x) = \sum_{j=1}^r C_{1,0}^{0,j}(0, x) U_{j,\alpha}(p, x), \quad (4.49)$$

donde $U_{j,\alpha}(p, x), j = 1, \dots, r; \alpha = 1, \dots, r$, son funciones $C^\infty(V \times \mathbb{R}_x^1)$, tales que $U_{j,\alpha}(p, x)|_{p=0} = \delta_{j\alpha}$, y $V \subset \mathbb{R}^2$ es una vecindad del punto $(0, 0)$. Como se investiga solamente el comportamiento de la función de amplitud en la vecindad $|p| \leq h^{1/2-\delta}$ es posible extender las funciones $C_{1,0}^{0,j}(p, x), j = 1, \dots, r$, hasta unas funciones de la clase $C^\infty(\mathbb{R}_p^1 \times \mathbb{R}_x^1)$.

Ahora se considera la ecuación (4.48) para $k = 1$ (i.e. $m = 0$). Dadas funciones $C_{1,0}^{0,j}(p, x), j = 1, \dots, r$, que satisfacen la ecuación (4.47). La fórmula (4.41) implica que

$$i \left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,k}}{\partial p}, x, \nabla_x S_{1,k} \right) e_{r+2}, e_\alpha \right) = \frac{\sigma_{1,k}}{p} + O(1), \quad (4.50)$$

donde $\sigma_{1,k}$ es de la forma

$$\sigma_{1,k} = -i \frac{b_{(r+2)(r+1)}(p, x, \nabla S_{1,k}) d_0(p, x, \nabla S_{1,k})}{\langle\langle c, b \rangle\rangle(p, x, \nabla S_{1,k})}.$$

Sin pérdida de generalidad se considera el caso de $m = 0$, se determinan los coeficientes $C_{1,0}^{0,\alpha}, \alpha = 1, \dots, r$, y después de manera recursiva se determinan los coeficientes $C_{1,k}^{0,j}$. Note que la fórmula (4.50) implica que la función en la parte derecha de la ecuación (4.48) para $m = 0$ tiene una singularidad de la forma $\sigma_{1,0}/p$. Resolviendo la ecuación lineal (4.48) para $m = 0$ con los datos iniciales (4.46) notando que

$$\sigma_{1,k} = \sigma + \sum_{j=1}^k g_j^1(x) (p - p_j) + \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k g_{jl}^2(x) (p - p_j) (p - p_l) + \dots,$$

y aun que $\sigma_{1,k}$ depende de la función de fase $S_{1,k}$ se tiene que

$$\begin{aligned} p^{\sigma_{1,k}} &= p^\sigma \exp \left\{ \sum_{j_0+j_1+\dots+j_m=0}^{3N} \ln p_k^{j_0} (p - p_{l_1})^{j_1} \dots (p - p_{l_m})^{j_m} \right\} \\ &= p^\sigma \mathcal{P}(p_k), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{P}(p_k)$ es una función polinomial en $\ln p_k, (p - p_1), \dots, (p - p_k)$, lo cual implica que

$$C_{1,1}^{0,r+2}(p, p_1, x) = \eta_{1,1}^{0,r+2}(p, p_1, x) \mathcal{P}_{1,1}^{0,r+2}(p, p_1) \left(\frac{p}{p_1} \right)^\sigma, \quad (4.51)$$

aquí $\mathcal{P}_{1,1}^{0,r+2}(p)$ es una función polinomial en $\ln p, \ln p_1, (p - p_1)$, y $\eta_{1,1}^{0,r+2}(p, p_1, x)$ es una función $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ con respecto a p, p_1, x . Ahora se probará que si las afirmaciones del Lema son válidas para algún $k \in \mathbb{N}$ entonces también son válidas para $k + 1$.

i) Primero se considera el caso cuando k es un número par, i.e. $k = 2m$, y los coeficientes $C_{1,2m}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m}, x)$ tienen la forma

$$C_{1,2m}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m}, x) = \eta_{1,2m}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m}, x) \mathcal{P}_{1,2m}^{0,\alpha}(p_1, \dots, p_{2m}) \times \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \left(\frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2m}} \right],$$

donde $\mathcal{P}_{1,2m}^{0,\alpha}(p_1, \dots, p_{2m})$ es una función polinomial en $\ln p_1, \ln p_2, \dots, \ln p_{2m}, p_1 p_2, \dots, p_{2m}$, y $\eta_{1,2m}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m}, x)$ son funciones $C^\infty(\mathbb{R}^{2m+2})$ con respecto a p, p_1, \dots, p_{2m}, x . Ahora se probará que para $k = 2m + 1$ los coeficientes $C_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x)$ tienen la forma (4.42).

En efecto se tiene que el coeficiente $C_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x)$ es la solución del problema de Cauchy (4.48) con los datos iniciales (4.46) de la forma

$$C_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x) \Big|_{p=p_{2m+1}} = \tilde{\eta}_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m}, x) \mathcal{P}_{1,2m+1}^{0,r+1}(p_1, \dots, p_{2m}) \times \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \left(\frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2m}} \right] \Big|_{p=2m+1},$$

donde $\mathcal{P}_{1,2m+1}^{0,r+1}(p_1, \dots, p_{2m})$ es una función polinomial en $\ln p_1, \ln p_2, \dots, \ln p_{2m}, p_1, p_2, \dots, p_{2m}$, y $\tilde{\eta}_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m}, x)$ son funciones $C^\infty(\mathbb{R}^{2m+2})$ con respecto a p, p_1, \dots, p_{2m}, x . Por lo tanto calculando directamente, de la fórmula (4.50) se obtiene que

$$C_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m}, x) = \eta_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x) \mathcal{P}_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m}) \times \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \left(\frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2m}} \left(\frac{p}{p_{2m+1}} \right)^\sigma \right],$$

donde $\mathcal{P}_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m})$ es una función polinomial en $p \ln p, \dots, p^{3N} \ln p, p_1 \ln p_1, \dots, p_1^{3N} \ln p_1, \dots, p_{2m} \ln p_{2m}, \dots, p_{2m}^{3N} \ln p_{2m}$, y $\eta_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x)$ son funciones $C^\infty(\mathbb{R}^{2m+3})$ con respecto a $p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x$.

ii) Ahora se considera el caso cuando k es un número impar, i.e. $k = 2m + 1$. En este caso los coeficientes $C_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x)$ tienen la forma

$$C_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x) = \eta_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x) \mathcal{P}_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m}) \times \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \left(\frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2m}} \left(\frac{p}{p_{2m+1}} \right)^\sigma \right],$$

donde $\mathcal{P}_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1})$ son funciones polinomiales en $\ln p, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m+1}, p, p_1, \dots, p_{2m+1}$, y $\eta_{1,2m+1}^{0,r+1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x)$ son funciones $C^\infty(\mathbb{R}^{2m+3})$ con respecto a $p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x$. Ahora se probará que para $k = 2m + 2$ los coeficientes $C_{1,2m+2}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m+2}, x)$, $\alpha = 1, \dots, r$, tienen la forma (4.42). En efecto se tiene que el coeficiente $C_{1,2m+2}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m+2}, x)$ es la solución del problema de Cauchy (4.47) con los datos iniciales (4.44). Usando la fórmula (4.50) se obtiene que los datos iniciales (4.44) son de la forma

$$C_{1,2m+2}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m+2}, x) \Big|_{p=p_{2m+2}} = \tilde{\eta}_{1,2m+2}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x) \mathcal{P}_{1,2m+2}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}) \times \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \left(\frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2m}} \left(\frac{p}{p_{2m+1}} \right)^\sigma \frac{1}{p} \right] \Big|_{p=2m+2},$$

donde $\mathcal{P}_{1,2m+2}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m+1})$ es una función polinomial en $\ln p, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m+1}, p, p_1, \dots, p_{2m+1}$, y $\tilde{\eta}_{1,2m+2}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x)$ son funciones $C^\infty(\mathbb{R}^{2m+3})$ con respecto a $p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x$. Por lo tanto calculando directamente se obtiene que

$$C_{1,2m+2}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m+2}, x) = \eta_{1,2m+2}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m+2}, x) \mathcal{P}_{1,2m+2}^{0,\alpha}(p_1, \dots, p_{2m+2}) \times \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \left(\frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2m}} \left(\frac{p_{2m+2}}{p_{2m+1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2m+2}} \right],$$

donde $\mathcal{P}_{1,2m+2}^{0,\alpha}(p_1, \dots, p_{2m+1})$ es una función polinomial en $\ln p_1, \dots, \ln p_{2m+1}, p_1, \dots, p_{2m+1}$, y $\eta_{1,2m+2}^{0,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m+2}, x)$ son funciones $C^\infty(\mathbb{R}^{2m+4})$ con respecto a $p, p_1, \dots, p_{2m+2}, x$.

En el caso general se sustituyen los $(l-1)$ -ésimos términos adicionales $v_{1,k}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_k, x, h)$, $k = 0, \dots, N_0$, en la ecuación (4.38) y se buscan los l -ésimos términos adicionales para aniquilar los términos de la forma

$$\widehat{P}_{1,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) v_{1,k}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_k, x, h),$$

y

$$P_{1,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+j}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) v_{1,k+j}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_{k+j}, x, h) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+j}=p},$$

donde $j = 1, \dots, N_0 - k$. En efecto se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para los l -ésimos términos adicionales $v_{1,k}^l(p, p_1, \dots, p_k, x, h)$ (por definición se tiene que $v_{1,k}^{-1} := 0$):

i) Para $k = 2m$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial L_a(\bar{\eta}, x, \bar{\xi})}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial p} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L_a(\bar{\eta}, x, \bar{\xi})}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) C_{1,2m}^{l,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m}, x, h) - \\ & i \sum_{j=1}^r C_{1,2m}^{l,j} \left[\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p}, x, \nabla_x S_{1,2m} \right) e_j, e_\alpha \right) + (G_{1,2m} e_j, e_\alpha) \right] = \\ & i \left(\widehat{P}_{1,0}^{2m} \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) v_{1,2m}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_{2m}, x, h), e_\alpha \right) + \\ & i \left(\widetilde{P}_{1,0}^{2m} \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) v_{1,2m+1}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_{2m}, p, x, h), e_\alpha \right) + \\ & i \sum_{q=1}^{N_0} h^{q-1} \left(\left(h P_{1,q}^{2m} \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) + \right. \\ & \left. \widetilde{P}_{1,q}^{2m} \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \times \\ & v_{1,2m+q}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_{2m+q}, x, h) \Big|_{p_{2m+1}=\dots=p_{2m+q}=p}, e_\alpha \Big), \end{aligned} \quad (4.52)$$

con los datos iniciales

$$\begin{aligned} & \left(1 + \widetilde{P}_{1,0}^{2m} \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) C_{1,2m}^{l,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m-1}, p, x, h) = \\ & i C_{1,2m-1}^{l,r+2} \left[\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m-1}}{\partial p}, x, \nabla_x S_{1,2m-1} \right) e_{r+2}, e_\alpha \right) + (G_{1,2m-1} e_{r+2}, e_\alpha) \right] + \\ & i \left(\left(\left(1 + O \left(\frac{\partial S_{1,2m-1}}{\partial p} \right) \right) + \widehat{P}_{1,0}^{2m-1} \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \times \right. \\ & \left. v_{1,2m-1}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_{2m-1}, x, h), e_\alpha \right) + \\ & i \sum_{q=1}^{N_0} h^{q-1} \left(\left(h P_{1,q}^{2m-1} \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q-1}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. \widetilde{P}_{1,q}^{2m-1} \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q-1}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \times \right. \\ & \left. v_{1,2m+q-1}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_{2m+q-1}, x, h) \Big|_{p_{2m}=\dots=p_{2m+q-1}=p}, e_\alpha \right), \end{aligned} \quad (4.53)$$

ii) Para $k = 2m + 1$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial L_b(\bar{\eta}, x, \bar{\xi})}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial p} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L_b(\bar{\eta}, x, \bar{\xi})}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial C_{1,2m+1}^{l,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x, h)}{\partial p} - \\ & i C_{1,2m+1}^{l,r+2} \left[\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m+1}}{\partial p}, x, \nabla_x S_{1,2m+1} \right) e_{r+2}, e_{r+2} \right) + (G_{1,2m+1} e_{r+2}, e_{r+2}) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & i \left(\widehat{P}_{1,0}^{2m+1} \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) v_{1,2m+1}^{l-1} (p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x, h), e_{r+2} \right) + \\
 & i \left(\widetilde{P}_{1,0}^{2m+1} \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) v_{1,2(m+1)}^{l-1} (p, p_1, \dots, p_{2m+1}, p, x, h), e_{r+2} \right) + \\
 & i \sum_{q=1}^{N_0} h^{q-1} \left(\left(h P_{1,q}^{2m+1} \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q+1}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) + \right. \\
 & \left. \widetilde{P}_{1,q}^{2m+1} \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q+1}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \times \\
 & v_{1,2m+q+1}^{l-1} (p, p_1, \dots, p_{2m+q+1}, x, h) \Big|_{p_{2m+1}=\dots=p_{2m+q+1}=p}, e_{r+2} \Big),
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

con los datos iniciales

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \widetilde{P}_{1,0}^{2m+1} \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) C_{1,2m+1}^{l,r+2} (p, p_1, \dots, p_{2m}, p, x, h) = \\
 & i \sum_{j=1}^r C_{1,2m}^{l,j} \left[\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m-1}}{\partial p}, x, \nabla_x S_{1,2m-1} \right) e_j, e_{r+2} \right) + (G_{1,2m+1} e_j, e_{r+2}) \right] + \\
 & i \left(\left(\left(1 + O \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) \right) + \widehat{P}_{1,0}^{2m} \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \times \right. \\
 & \left. v_{1,2m}^{l-1} (p, p_1, \dots, p_{2m}, x, h), e_{r+2} \right) + \\
 & i \sum_{q=1}^{N_0} h^{q-1} \left(\left(h P_{1,q}^{2m} \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) + \right. \\
 & \left. \widetilde{P}_{1,q}^{2m} \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q}}, ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \times \\
 & v_{1,2m+q}^{l-1} (p, p_1, \dots, p_{2m+q}, x, h) \Big|_{p_{2m}=\dots=p_{2m+q}=p}, e_{r+2} \Big).
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Con el objetivo de usar las fórmulas estándar (ver [22]) como antes se hace el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned}
 T_a & : \mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_y^n \\
 (p, x) & \longmapsto (p, y(p, x))
 \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x_k}{\partial p} & = \frac{\partial L_a(\bar{\eta}, x, \bar{\xi})}{\partial \xi_k} \left(\frac{\partial L_a(\eta, x, \xi)}{\partial \eta} \right)^{-1} \\
 x_k(0, y) & = y_k,
 \end{aligned}$$

para $k = 1, \dots, n$, y la ecuación (4.52) se reescribe en una forma análoga a la ecuación (3.36), i.e.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial p} C_{1,2m}^{l,\alpha} (p, p_1, \dots, p_{2m}, y, h) - \\
 & i \left(\frac{\partial L_a(\bar{\eta}, y, \bar{\xi})}{\partial \eta} \right)^{-1} \sum_{j=1}^r C_{1,2m}^{l,j} \left[\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p}, y, \nabla_y S_{1,2m} \right) e_j, e_\alpha \right) + (G_{1,2m} e_j, e_\alpha) \right] = \\
 & i \left(\frac{\partial L_a(\bar{\eta}, y, \bar{\xi})}{\partial \eta} \right)^{-1} \left(\widehat{P}_{1,0}^{2m} \left(h, \frac{h}{p}, p, y; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial y} \right) v_{1,2m}^{l-1} (p, p_1, \dots, p_{2m}, y, h), e_\alpha \right) + \\
 & i \left(\frac{\partial L_a(\bar{\eta}, y, \bar{\xi})}{\partial \eta} \right)^{-1} \left(\widetilde{P}_{1,0}^{2m} \left(h, p, y; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial y} \right) v_{1,2m+1}^{l-1} (p, p_1, \dots, p_{2m}, p, y, h), e_\alpha \right) + \\
 & i \left(\frac{\partial L_a(\bar{\eta}, y, \bar{\xi})}{\partial \eta} \right)^{-1} \sum_{q=1}^{N_0} h^{q-1} \left(\left(h P_{1,q}^{2m} \left(h, \frac{h}{p}, p, y; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q}}, -ih \frac{\partial}{\partial y} \right) + \right. \\
 & \left. \left(\frac{\partial L_a(\bar{\eta}, y, \bar{\xi})}{\partial \eta} \right)^{-1} \widetilde{P}_{1,q}^{2m} \left(h, p, y; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q}}, -ih \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \times \\
 & v_{1,2m+q}^{l-1} (p, p_1, \dots, p_{2m+q}, y, h) \Big|_{p_{2m+1}=\dots=p_{2m+q}=p}, e_\alpha \Big),
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Además haciendo el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} T_b &: \mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_y^n \\ (p, x) &\mapsto (p, y(p, x)) \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial p} &= \frac{\partial L_b(\bar{\eta}, x, \bar{\xi})}{\partial \xi_k} \left(\frac{\partial L_b(\eta, x, \xi)}{\partial \eta} \right)^{-1} \\ x_k(0, y) &= y_k, \end{aligned}$$

para $k = 1, \dots, n$, la ecuación (4.54) se reescribe en una forma análoga a la ecuación (3.38), i.e.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial C_{1,2m+1}^{l,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, y, h)}{\partial p} - i \left(\frac{\partial L_b(\bar{\eta}, y, \bar{\xi})}{\partial \eta} \right)^{-1} \times \\ &C_{1,2m+1}^{l,r+2} \left[\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m+1}}{\partial p}, y, \nabla_y S_{1,2m+1} \right) e_{r+2}, e_{r+2} \right) + (G_{1,2m+1} e_{r+2}, e_{r+2}) \right] = \\ &i \left(\frac{\partial L_b(\bar{\eta}, y, \bar{\xi})}{\partial \eta} \right)^{-1} \times \\ &\left(\widehat{P}_{1,0}^{2m+1} \left(h, \frac{h}{p}, p, y; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial y} \right) v_{1,2m+1}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, y, h), e_{r+2} \right) \\ &+ i \left(\frac{\partial L_b(\bar{\eta}, y, \bar{\xi})}{\partial \eta} \right)^{-1} \times \\ &\left(\widetilde{P}_{1,0}^{2m+1} \left(h, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial y} \right) v_{1,2(m+1)}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, p, y, h), e_{r+2} \right) \\ &+ i \left(\frac{\partial L_b(\bar{\eta}, x, \bar{\xi})}{\partial \eta} \right)^{-1} \times \\ &\sum_{q=1}^{N_0} h^{q-1} \left(\left(h P_{1,q}^{2m+1} \left(h, \frac{h}{p}, p, y; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q+1}}, -ih \frac{\partial}{\partial y} \right) + \right. \\ &\left. \left(\frac{\partial L_b(\bar{\eta}, x, \bar{\xi})}{\partial \eta} \right)^{-1} \widetilde{P}_{1,q}^{2m+1} \left(h, p, y; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{2m+q+1}}, -ih \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \times \\ &\left. v_{1,2m+q+1}^{l-1}(p, p_1, \dots, p_{2m+q+1}, y, h) \Big|_{p_{2m+1}=\dots=p_{2m+q+1}=p}, e_{r+2} \right), \end{aligned} \tag{4.57}$$

respectivamente. ■

Lema 16 Sean $\phi_{f,k+j}(p, p_1, \dots, p_{k+j})$, $f = 1, 2; j = 0, \dots, N_0 - k$, funciones de la forma (4.30), (4.31), respectivamente. En este caso son válidas las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned} &R_{f,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, x) = \\ &\left(\frac{h}{p} \right) g_{f,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x \right) \phi_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, x), \text{ para } k = 2l, \\ &\frac{1}{p} R_{f,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, x) = \\ &\frac{1}{p} \left(\frac{h}{p} \right) g_{f,0}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x \right) \phi_{f,k}(p, p_1, \dots, p_k, x), \text{ para } k = 2l + 1, \end{aligned}$$

y

$$h^j R_{f,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+j}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_{f,k+j}(p, p_1, \dots, p_{k+j}, x) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+j}=p}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{h^j}{p^{\lfloor j/2 \rfloor}} \right) g_{f,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x \right) \phi_{f,k} (p, p_1, \dots, p_k, x), \text{ para } k + j = 2l, \\
 \frac{h^j}{p} R_{f,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x; ih \frac{\partial}{\partial p}, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, ih \frac{\partial}{\partial p_{k+j}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_{f,k+j} (p, p_1, \dots, p_{k+j}, x) \Big|_{p_{k+1}=\dots=p_{k+j}=p} \\
 &= \left(\frac{h^j}{p^{\lfloor j/2 \rfloor + 1}} \right) g_{f,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x \right) \phi_{f,k} (p, p_1, \dots, p_k, x), \text{ para } k + j = 2l + 1,
 \end{aligned}$$

aquí $l \in \mathbb{N}_0, j = 1, \dots, N_0 - k$; $R_{f,l}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x; -ih \frac{\partial}{\partial p}, -ih \frac{\partial}{\partial p_{k+1}}, \dots, -ih \frac{\partial}{\partial p_{k+l}}, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right)$ son los operadores diferenciales anteriormente definidos en el Lema 14, $g_{f,j}^k \left(h, \frac{h}{p}, p, x \right)$ son funciones vectoriales con las componentes polinomiales en $h, (h/p)$, y de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ con respecto a p, x .

Demostración. La demostración es análoga a la demostración del Lema 9 del Capítulo 2. ■

Lema 17 Los coeficientes $C_{1,k}^{l,\alpha}(p, p_1, \dots, p_k, x, h), l = 1, \dots, N_1; \alpha = 1, \dots, r, r + 2; k = 1, \dots, N$, de las funciones vectoriales $v_{1,k}^{l,\alpha}(p, p_1, \dots, p_k, x)$ de N_1 -ésima aproximación (4.39) de la solución del problema (4.2) con la función matricial $A(t, x)$ de la forma (4.10) satisfacen el sistema de ecuaciones (4.56), (4.53), (4.57), (4.55), y se tiene que

$$\begin{aligned}
 &C_{1,2m}^{l,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m}, x, h) = \\
 &\sum_{l_0+\dots+l_{2m}=l, l_0, \dots, l_{2m} \geq 0} \left[h^l \left(\frac{1}{p_0} \right)^{l_0} \dots \left(\frac{1}{p_{2m}} \right)^{l_{2m}} \right] \Big|_{p_0=p} \\
 &\times g_{1,2m}^{l,\alpha} [l_0, \dots, l_{2m}] \left(p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right) \\
 &\times \mathcal{P}_{1,2m}^{l,\alpha}(p_1, \dots, p_{2m}) \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \left(\frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2m}} \right], \tag{4.58}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &C_{1,2m+1}^{l,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x, h) = \\
 &\sum_{l_0+\dots+l_{2m+1}=l, l_0, \dots, l_{2m+1} \geq 0} \left[h^l \left(\frac{1}{p_0} \right)^{l_0} \dots \left(\frac{1}{p_{2m+1}} \right)^{l_{2m+1}} \right] \Big|_{p_0=p} \\
 &\times g_{1,2m+1}^{l,r+2} [l_0, \dots, l_{2m+1}] \left(p, x, \frac{h}{p}, h, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m+1} \right) \\
 &\times \mathcal{P}_{1,2m+1}^{l,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}) \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \frac{1}{p_{2m}} \left(\frac{p}{p_{2m+1}} \right)^\sigma \right], \tag{4.59}
 \end{aligned}$$

donde $\mathcal{P}_{1,k}^{l,\alpha}(p, p_1, \dots, p_k)$ son funciones polinomiales en $\ln p, \ln p_1, \dots, \ln p_k, p, p_1, \dots, p_k, y$

$$g_{1,k}^{l,\alpha} [l_0, \dots, l_k] \left(p, x, \frac{h}{p}, h, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_k}, \ln p_1, \dots, \ln p_k \right)$$

son polinomios en $p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_k}, \ln p_1, \dots, \ln p_k, h$ con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^k)$ con respecto a p_1, \dots, p_k .

Demostración. Se procede por inducción sobre los índices k, l para $l = 0, 1, \dots, N$, y $k = 0, 1, \dots, N_0$. Primero para un índice l fijo se prueban las afirmaciones del Lema 17 para $k = 0, 1, \dots, N_0$. Después se supone que las afirmaciones del Lema 17 son válidas para $l = 1, \dots, q$ y $k = 0, 1, \dots, N_0$, y se demuestra que las afirmaciones del Lema 17 son válidas para $l = q + 1$, y $k = 0, 1, \dots, N_0$. El caso $l = 0, k = 0, 1, \dots, N_0$ fue considerado en el Lema 15.

Ahora se considera el caso $l = 1$. En este caso el Lema 16 implica que para $k = 0$ (i.e. $m = 0$ en la fórmula (4.56)) en la parte derecha de la ecuación (4.56) se tiene una función de la forma $\left(\frac{h}{p}\right) \Phi_{1,0}^{1,\alpha} \left(p, x, \frac{h}{p}, h\right)$, donde $\Phi_{1,0}^{1,\alpha} \left(p, x, \frac{h}{p}, h\right)$ es una función polinomial en $h, \frac{h}{p}$, con coeficientes de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ con respecto a p, x . Note que en este caso en la ecuación (4.56) las funciones $\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p}\right) e_j, e_\alpha\right), j = 1, \dots, r; \alpha = 1, \dots, r$, son funciones suaves con respecto a las variables p, x . Por lo tanto la solución del problema de Cauchy (4.56) para $l = 1, m = 0$, con los datos iniciales iguales al cero tiene la forma

$$C_{1,0}^{1,\alpha}(p, h) = \left(\frac{h}{p}\right) g_{1,0}^{1,\alpha} \left(p, x, \frac{h}{p}, h\right), \quad (4.60)$$

aquí $g_{1,0}^{1,\alpha} \left(p, x, \frac{h}{p}, h\right)$ es una función polinomial en $h, \frac{h}{p}$, con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ con respecto a p, x . Además el Lema 16 implica que para $k = 1$ (i.e. $m = 0$ en la fórmula (4.57)) en la parte derecha de la ecuación (4.57) se tiene una función de la forma

$$(h/p^2) \left(\frac{p}{p_1}\right)^\sigma \mathcal{P}_{1,1}^{1,r+2}(p, p_1) \Phi_{1,1}^{1,r+2} \left(p, x, \frac{h}{p}, h\right),$$

donde $\Phi_{1,1}^{1,r+2} \left(p, x, \frac{h}{p}, h\right)$ es una función polinomial en $h, \frac{h}{p}$, con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ con respecto a p , y $\mathcal{P}_{1,1}^{1,r+2}(p, p_1)$ es una función polinomial en $\ln p, \ln p_1, p, p_1$. Los datos iniciales para $C_{1,1}^{1,r+2}(p, p_1, x, h) \Big|_{p=p_1}$ de acuerdo con las fórmulas (4.55), (4.41) tienen la forma

$$(h/p) g_{1,1}^{1,r+2} \left(p, x, \frac{h}{p}, h, \ln p\right) \Big|_{p=p_1},$$

donde $g_{1,1}^{1,r+2} \left(p, x, \frac{h}{p}, h, \ln p\right)$ es una función polinomial en $h, \frac{h}{p}, \ln p$ con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ con respecto a p, x . Note que en este caso la función $\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m+1}}{\partial p}\right) e_{r+2}, e_{r+2}\right)$ tiene el factor $1/p$. Resolviendo el problema de Cauchy (4.54),(3.111) para $l = 1, m = 0$, con la función $C_{1,0}^{1,\alpha}(p, x, h)$ que satisface la fórmula (4.60) se obtiene que

$$C_{1,1}^{1,r+2}(p, p_1, x, h) = \sum_{j=0,1} \left(\frac{h}{p_j}\right) \Big|_{p_0=p} g_{1,1}^{1,r+2}[j] \left(p, x, \frac{h}{p}, h, \ln p, \ln p_1\right) \mathcal{P}_{1,1}^{1,r+2}(p, p_1) \left(\frac{p}{p_1}\right)^\sigma,$$

aquí $g_{1,1}^{1,r+2}[l_j] \left(p, \frac{h}{p}, h, \ln p, \ln p_1\right), j = 0, 1$, son polinomios en $p, h, \frac{h}{p}, \ln p, \ln p_1$, con $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ coeficientes con respecto a p_1 y $\mathcal{P}_{1,1}^{1,r+2}(p, p_1)$ es una función polinomial en $\ln p, \ln p_1, p, p_1$.

Ahora se considera un número natural arbitrario $q \geq 2$, se supone que las fórmulas (4.58), (4.59) son válidas para $l = 1$ y $k = q$, y se demuestra que las fórmulas (4.58), (4.59) son válidas para $l = 1$ y $k = q + 1$.

Primero sin pérdida de generalidad se considera el caso cuando q es un número impar, i.e. $q = 2m - 1$. En este caso el Lema 16 implica que en la parte derecha de la ecuación (4.56) se tiene una función de la forma

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \left(\frac{h}{p_j}\right) \Big|_{p_0=p} \Phi_{1,2m}^{1,\alpha}[j] \left(p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1}\right), \quad (4.61)$$

donde $\Phi_{1,2m}^{1,\alpha} [l,j] \left(p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right)$, $j = 0, 1, \dots, 2m-1$, son polinomios en $p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1}, h$, con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^q)$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m} . Note que en este caso en la ecuación (4.56) las funciones $\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) e_j, e_\alpha \right)$, $j = 1, \dots, r$; $\alpha = 1, \dots, r$, son suaves con respecto a p , y en la fórmula (4.53) las funciones $\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m-1}}{\partial p} \right) e_{r+2}, e_\alpha \right)$, $\alpha = 1, \dots, r$, tienen el factor $1/p$ (ver la fórmula (4.41)). Por lo tanto el problema de Cauchy (4.56),(4.53) para $l = 1, k = q + 1 = 2m$ tiene los datos iniciales (4.53) de la forma

$$\begin{aligned} & C_{1,2m}^{1,\alpha} (p, p_1, \dots, p_{2m}, x, h) \Big|_{p=p_{2m}} = \\ & \frac{d}{p \langle \langle c, b \rangle \rangle (0, x, -ih \frac{\partial}{\partial x})} b_{(r+2)(r+1)} \left(-\frac{\partial S_{1,2m-1}}{\partial p} \right) C_{1,2m-1}^{1,r+2} (p, p_1, \dots, p_{2m-1}, x, h) \Big|_{p=p_{2m}} \\ & + \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2m-1} \left(\frac{h}{p_j} \right) \Big|_{p_0=p} \zeta_{1,2m}^{1,\alpha} [j] \left(p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right) \Big|_{p=p_{2m}}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

donde $\zeta_{1,2m}^{1,\alpha} [j] \left(p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right)$, $j = 0, 1, \dots, 2m-1$, son polinomios en $p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1}, h$, con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^q)$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m-1} . Para determinar los coeficientes $C_{1,2m}^{1,\alpha}$ es necesario considerar la solución del problema de Cauchy (4.56),(4.53). En el caso considerado para $l = 1, k = q + 1 = 2m$ la parte derecha de la ecuación (4.56) tiene la forma (4.61), los datos iniciales (4.53) son de la forma (4.62) y la solución $C_{1,2m}^{1,\alpha}$ está dada por la fórmula

$$\begin{aligned} & C_{1,2m}^{1,\alpha} (p, p_1, \dots, p_{2m}, x, h) = \\ & \sum_{j=0}^{2m} \left(\frac{h}{p_j} \right) \Big|_{p_0=p} g_{1,2m}^{1,\alpha} [j] \left(p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right) \\ & \times \mathcal{P}_{1,2m}^{1,\alpha} (p_1, \dots, p_{2m}) \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \left(\frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2m}} \right], \end{aligned}$$

aquí

$$g_{1,2m}^{1,\alpha} [j] \left(p, \frac{h}{p}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right), j = 0, 1, \dots, 2m,$$

son polinomios en $p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1}, h$, con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^{q+1})$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m-1} , y $\mathcal{P}_{1,1}^{1,r+2} (p_1, \dots, p_{2m})$ es una función polinomial en $\ln p, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m}, p, p_1, \dots, p_{2m}$.

Ahora se considera el caso cuando q es un número par, i.e. $q = 2m$, y se determina el coeficiente para $q + 1 = 2m + 1$, i.e. el coeficiente $C_{1,2m+1}^{1,r+1}$. Note que la función $\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) e_j, e_{r+2} \right)$, $j = 1, \dots, r$, es suave con respecto a p . En efecto los datos iniciales (4.55) del problema de Cauchy (4.57),(4.55) para $l = 1, k = q + 2 = 2m + 1$, son de la forma

$$\begin{aligned} & C_{1,2m+1}^{1,r+2} (p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x, h) \Big|_{p=p_{2m+1}} = \\ & \frac{1}{\langle \langle c, b \rangle \rangle (0, x, -ih \frac{\partial}{\partial x})} \sum_{j=1}^r b_{(r+2)j} \left(-\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) C_{1,2m}^{1,j} (p, p_1, \dots, p_{2m}, x, h) \Big|_{p=p_{2m+1}} \\ & + \sum_{j=0}^{2m} \left(\frac{h}{p_j} \right) \Big|_{p_0=p} \zeta_{1,2m+1}^{1,r+2} [j] \left(p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right) \Big|_{p=p_{2m+1}}, \end{aligned}$$

donde

$$\zeta_{1,2m+1}^{1,r+2} \left(p, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right)$$

es polinomio en $p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m}, h$ con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^{q+1})$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m} . La parte derecha de la ecuación (4.57) para $l = 1, k = q + 2 = 2m + 1$, tiene la forma

$$\frac{1}{p} \sum_{j=0}^{2m} \left(\frac{h}{p_j} \right) \Big|_{p_0=p} \Phi_{1,2m+1}^{1,r+1} [j] \left(p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right),$$

donde

$$\Phi_{1,2m+1}^{1,r+1} [j] \left(p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right), j = 0, 1, \dots, 2m,$$

son polinomios en $p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m}, h$ con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^q)$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m} . Así se obtiene que la solución del problema de Cauchy (4.57),(4.55) para $l = 1, k = q + 2 = 2m + 1$, tiene la forma

$$\begin{aligned} & C_{1,2m+1}^{1,r+2} (p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x, h) = \\ & \left(\frac{h}{p} \right) g_{1,2m+1}^{1,r+2} \left(p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right) \\ & \times \mathcal{P}_{1,2m+1}^{1,r+2} (p, p_1, \dots, p_{2m+1}) \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \frac{1}{p_{2m}} \left(\frac{p}{p_{2m+1}} \right)^\sigma \right], \end{aligned}$$

aquí

$$g_{1,2m+1}^{1,r+2} \left(p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right)$$

es polinomio en $p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m}, h$ con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^{q+2})$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m} , y $\mathcal{P}_{1,2m+1}^{1,r+2} (p, p_1, \dots, p_{2m+1})$ es una función polinomial en $\ln p, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m+1}$, y p, p_1, \dots, p_{2m+1} .

Ahora procediendo por inducción se supone que para un número natural $j \geq 2$, las fórmulas (4.58), (4.59) son válidas para $l = j, m = 0, \dots, [N_0/2]$. En lo que sigue por inducción sobre el índice $m = 0, \dots, [N_0/2]$ de demuestra que las fórmulas (4.58), (4.59) son válidas para $l = j + 1, m = 0, \dots, [N_0/2]$. Bajo las hipótesis anteriormente mencionadas el Lema 16 implica que para $l = j + 1, m = 0$, en la parte derecha de la ecuación (4.56) se tiene una función de la forma

$$\left(\frac{h}{p} \right) \left(\frac{h}{p} \right)^j \Phi_{1,0}^{j+1,\alpha} \left(p, x, \frac{h}{p}, h \right), \quad (4.63)$$

donde $\Phi_{1,0}^{j+1,\alpha} \left(p, x, \frac{h}{p}, h \right)$ es una función polinomial en $h, \frac{h}{p}, y$ de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ con respecto a p, x . Note que en este caso en la ecuación (4.56) las funciones $\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) e_j, e_\alpha \right), j = 1, \dots, r; \alpha = 1, \dots, r$, son suaves con respecto a la variable p . Por lo tanto la solución del problema de Cauchy (4.56) para $l = j + 1, m = 0$, con los datos iniciales iguales al cero tiene la forma

$$C_{1,0}^{j+1,\alpha} (p, x, h) = \left(\frac{h}{p} \right)^{j+1} g_{1,0}^{j+1,\alpha} \left(p, x, \frac{h}{p}, h, \ln p \right), \quad (4.64)$$

donde $g_{1,0}^{j+1,\alpha} \left(p, x, \frac{h}{p}, h, \ln p \right), \alpha = 1, \dots, r$, son polinomios en $h, \frac{h}{p}, \ln p$ con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ con respecto a p, x . Además el Lema 16 implica que para $k = 1$ (i.e. $m = 0$ en la fórmula (4.57))

en la parte derecha de la ecuación (4.57) se tiene una función de la forma

$$\frac{1}{p} \sum_{l_0+l_1=j; l_0, l_1 \geq 0} \left[\left(\frac{h}{p_0} \right)^{l_0} \left(\frac{h}{p_1} \right)^{l_1} \right] \Bigg|_{p_0=p} \left(\frac{p}{p_1} \right)^\sigma \Phi_{1,1}^{j+1,r+2} [l_1] \left(p, x, \frac{h}{p}, h \right) \mathcal{P}_{1,1}^{j+1,r+2} (p, p_1), \quad (4.65)$$

donde $\Phi_{1,1}^{j+1,r+2} [l_1] \left(p, \frac{h}{p}, h \right)$ es una función polinomial en $h, \frac{h}{p}$, con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ en p, x , y $\mathcal{P}_{1,1}^{j+1,r+2} (p, p_1)$ es una función polinomial en $\ln p, \ln p_1, p, p_1$. Los datos iniciales para $C_{1,1}^{j+1,r+2} (p, p_1, x, h) \Big|_{p=p_1}$ de acuerdo con las fórmulas (4.55), (4.41) son de la forma

$$\sum_{l_0+l_1=j; l_0, l_1 \geq 0} \left[\left(\frac{h}{p_0} \right)^{l_0} \left(\frac{h}{p_1} \right)^{l_1} \right] \Bigg|_{p_0=p} g_{1,1}^{j+1,r+2} [l_1] \left(p, x, \frac{h}{p}, h, \ln p \right) \Big|_{p=p_1}, \quad (4.66)$$

donde $g_{1,1}^{j+1,r+2} [l_1] \left(p, x, \frac{h}{p}, h, \ln p \right)$ es una función polinomial en $h, \frac{h}{p}, \ln p$ con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ con respecto a p, x . Note además que en este caso la función $\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m+1}}{\partial p} \right) e_{r+2}, e_{r+2} \right)$ tiene el factor $1/p$. Resolviendo el problema de Cauchy (4.57), (4.55) para $l = j + 1, m = 0$, con las funciones $C_{1,0}^{j+1,\alpha} (p, x, h)$ que satisfacen la fórmula (4.64) se obtiene que

$$\begin{aligned} C_{1,1}^{j+1,r+2} (p, p_1, x, h) = \\ \sum_{l_0+l_1=j+1; l_0, l_1 \geq 0} \left[\left(\frac{h}{p_0} \right)^{l_0} \left(\frac{h}{p_1} \right)^{l_1} \right] \Bigg|_{p_0=p} g_{1,1}^{j+1,r+2} [l_1] \left(p, x, \frac{h}{p}, h, \ln p, \ln p_1 \right) \\ \times \mathcal{P}_{1,1}^{j+1,r+2} (p, p_1) \left(\frac{p}{p_1} \right)^\sigma, \end{aligned}$$

aquí $g_{1,1}^{j+1,r+2} [l_1] \left(p, \frac{h}{p}, h, \ln p, \ln p_1 \right)$ son polinomios en $p, x, h, \frac{h}{p}, \ln p, \ln p_1$, con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ con respecto a p_1 , y $\mathcal{P}_{1,1}^{j+1,r+2} (p, p_1)$ es una función polinomial en $\ln p, \ln p_1$, y p, p_1 .

Ahora se considera un número natural arbitrario $q \geq 2$, se supone que las fórmulas (4.58), (4.59) son válidas para $l = j + 1$ y $k = q$, y se demuestra que las fórmulas (4.58), (4.59) son válidas para $l = j + 1$ y $k = q + 1$.

Primero sin pérdida de generalidad se considera el caso cuando q es un número impar, i.e. $q = 2m - 1$. En este caso el Lema 16 implica que en la parte derecha de la ecuación (4.56) para $l = j + 1$, se tiene una función de la forma

$$\begin{aligned} \sum_{l_0+\dots+2m-1=j+1; l_0, \dots, l_{2m-1} \geq 0} \left[\left(\frac{h}{p_0} \right)^{l_0} \dots \left(\frac{h}{p_{2m-1}} \right)^{l_{2m-1}} \right] \Bigg|_{p_0=p} \\ \times \Phi_{1,2m}^{j+1,\alpha} [l_1, \dots, l_{2m-1}] \left(p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right), \end{aligned} \quad (4.67)$$

donde

$$\Phi_{1,2m}^{j+1,\alpha} [l_1, \dots, l_{2m-1}] \left(p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right)$$

son polinomios en $p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}$, y $\ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1}, h$ con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^q)$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m-1} . Note que en este caso en la ecuación (4.56) las funciones $\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) e_j, e_\alpha \right)$, $j = 1, \dots, r; \alpha = 1, \dots, r$, son suaves con respecto a la variable p , y en la fórmula (4.53) las funciones $\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m-1}}{\partial p} \right) e_{r+2}, e_\alpha \right)$, $\alpha = 1, \dots, r$, tienen el factor $1/p$ (ver la fórmula (4.41)). Por lo tanto el

problema de Cauchy (4.56),(4.53) para $l = j + 1, k = q + 1 = 2m$ tiene los datos iniciales (4.53) de la forma

$$\begin{aligned}
 & C_{1,2m}^{j+1,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m}, x, h) \Big|_{p=p_{2m}} = \\
 & \frac{d}{p \langle (c,b) \rangle (0, x, -ih \frac{\partial}{\partial x})} b_{(r+2)(r+1)} \left(-\frac{\partial S_{1,2m-1}}{\partial p} \right) C_{1,2m-1}^{j+1,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m-1}, x, h) \Big|_{p=p_{2m}} \\
 & + \frac{1}{p} \sum_{l_0+\dots+2m-1=j+1; l_0, \dots, l_{2m-1} \geq 0} \left[\left(\frac{h}{p_0} \right)^{l_0} \dots \left(\frac{h}{p_{2m-1}} \right)^{l_{2m-1}} \right] \Big|_{p_0=p} \\
 & \times \zeta_{1,2m}^{j+1,\alpha} [l_1, \dots, l_{2m-1}] \left(p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right) \Big|_{p=p_{2m}}.
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

donde

$$\zeta_{1,2m}^{j+1,\alpha} [l_1, \dots, l_{2m-1}] \left(p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right)$$

son polinomios en $p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}$, y $\ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1}, h$ con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^q)$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m-1} . Para determinar los coeficientes $C_{1,2m}^{1,\alpha}$ es necesario considerar la solución del problema de Cauchy (4.56),(4.53). En el caso considerado para $l = j + 1, k = q + 1 = 2m$ la parte derecha de la ecuación (4.56) tiene la forma (4.67) y los datos iniciales (4.53) tienen la forma (4.68). Los cálculos directos implican que la solución $C_{1,2m}^{j+1,\alpha}$ está dada por la fórmula

$$\begin{aligned}
 & C_{1,2m}^{j+1,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m}, x, h) = \\
 & \sum_{l_0+\dots+2m=j+1; l_0, \dots, l_{2m} \geq 0} \left[\left(\frac{h}{p_0} \right)^{l_0} \dots \left(\frac{h}{p_{2m}} \right)^{l_{2m}} \right] \Big|_{p_0=p} \\
 & \times g_{1,2m}^{j+1,\alpha} [l_1, \dots, l_{2m}] \left(p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right) \\
 & \times \mathcal{P}_{1,2m}^{j+1,\alpha}(p_1, \dots, p_{2m}) \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \dots \left(\frac{p_{2m}}{p_{2m-1}} \right)^\sigma \frac{1}{p_{2m}} \right],
 \end{aligned}$$

aquí

$$g_{1,2m}^{j+1,\alpha} [l_1, \dots, l_{2m}] \left(p, x, \frac{h}{p}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1} \right),$$

son polinomios en $p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m-1}}$, y $\ln p_1, \dots, \ln p_{2m-1}, h$ con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^{q+1})$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m-1} , y $\mathcal{P}_{1,2m}^{j+1,\alpha}(p_1, \dots, p_{2m})$ es una función polinomial en $\ln p_1, \dots, \ln p_{2m}, p_1, \dots, p_{2m}$.

Ahora se considera el caso cuando q es un número par, i.e. $q = 2m$ y se determina el coeficiente para $q + 1 = 2m + 1$, i.e. el coeficiente $C_{1,2m+1}^{j+1,r+1}$. Note que la función $\left(A_1 \left(\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) e_j, e_{r+2} \right), j = 1, \dots, r$, es suave con respecto a p . En efecto los datos iniciales (4.55) del problema de Cauchy (4.57),(4.55) para $l = j + 1, k = q + 2 = 2m + 1$, tienen la forma

$$\begin{aligned}
 & C_{1,2m+1}^{j+1,r+2}(p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x, h) \Big|_{p=p_{2m+1}} = \\
 & \frac{1}{\langle (c,b) \rangle (0, x, -ih \frac{\partial}{\partial x})} \sum_{\alpha=1}^r b_{(r+2)j} \left(-\frac{\partial S_{1,2m}}{\partial p} \right) C_{1,2m}^{j+1,\alpha}(p, p_1, \dots, p_{2m}, x, h) \Big|_{p=p_{2m+1}} \\
 & + \sum_{l_0+\dots+2m=j+1; l_0, \dots, l_{2m} \geq 0} \left[\left(\frac{h}{p_0} \right)^{l_0} \dots \left(\frac{h}{p_{2m}} \right)^{l_{2m}} \right] \Big|_{p_0=p}, \\
 & \times \zeta_{1,2m+1}^{j+1,r+2} [l_1, \dots, l_{2m}] \left(p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right) \Big|_{p=p_{2m+1}},
 \end{aligned}$$

donde

$$\zeta_{1,2m+1}^{j+1,r+2} [l_1, \dots, l_{2m}] \left(p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right)$$

son polinomios en $p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}$, y $\ln p_1, \dots, \ln p_{2m}, h$ con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^{q+1})$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m} . La parte derecha de la ecuación (4.57) para $l = j + 1, k = q + 2 = 2m + 1$, es de la forma

$$\frac{1}{p} \sum_{l_0 + \dots + 2m = j+1; l_0, \dots, l_{2m} \geq 0} \left[\left(\frac{h}{p_0} \right)^{l_0} \cdots \left(\frac{h}{p_{2m}} \right)^{l_{2m}} \right] \Big|_{p_0=p} \\ \times \Phi_{1,2m+1}^{j+1,r+1} [l_1, \dots, l_{2m}] \left(p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right),$$

donde

$$\Phi_{1,2m+1}^{j+1,r+1} [l_1, \dots, l_{2m}] \left(p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right)$$

son polinomios en $p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}$, y $\ln p_1, \dots, \ln p_{2m}, h$ con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^q)$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m} . Por lo tanto se obtiene que la solución del problema de Cauchy (4.57),(4.55) para $l = j + 1, k = q + 2 = 2m + 1$, tiene la forma

$$C_{1,2m+1}^{j+1,r+2} (p, p_1, \dots, p_{2m+1}, x, h) = \\ \sum_{l_0 + \dots + 2m = j+1; l_0, \dots, l_{2m} \geq 0} \left[\left(\frac{h}{p_0} \right)^{l_0} \cdots \left(\frac{h}{p_{2m+1}} \right)^{l_{2m+1}} \right] \\ \times g_{1,2m+1}^{j+1,r+2} [l_1, \dots, l_{2m+1}] \left(p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right) \\ \times \mathcal{P}_{1,2m+1}^{j+1,r+2} (p, p_1, \dots, p_{2m+1}) \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\sigma \frac{1}{p_2} \cdots \frac{1}{p_{2m}} \left(\frac{p}{p_{2m+1}} \right)^\sigma \right],$$

aquí

$$g_{1,2m+1}^{j+1,r+2} [l_1, \dots, l_{2m+1}] \left(p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}, h, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m} \right)$$

son polinomios en $p, x, \frac{h}{p}, \frac{h}{p_1}, \dots, \frac{h}{p_{2m}}$, y $\ln p_1, \dots, \ln p_{2m}, h$ con coeficientes $C^\infty(\mathbb{R}^{q+2})$ con respecto a p_1, \dots, p_{2m} , y $\mathcal{P}_{1,2m+1}^{j+1,r+2} (p, p_1, \dots, p_{2m+1})$ es una función polinomial en $\ln p, \ln p_1, \dots, \ln p_{2m+1}$, y p, p_1, \dots, p_{2m+1} . ■

4.2. Ramificación de las trayectorias

Se considera un sistema real hiperbólico de primer orden de la forma

$$-ih \frac{\partial u}{\partial t} + (-i) h \sum_{r=1}^n A_r(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_r} + (-i) h B(t, x) u = 0, \quad (4.69)$$

donde $B; A_r, r = 1, \dots, n$, son funciones matriciales reales de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u \in \mathbb{R}^n$.

Se consideran funciones reales $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_{3+j} \in S^1(\mathbb{R}_{x'}^{n+1} \times \mathbb{R}_\xi^n)$, $j = 1, \dots, k-3$, en el espacio $\mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1}$. Se definen superficies $\Sigma_{\lambda_i \lambda_j} \subset \mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1}$ de manera siguiente.

Definición 7 Sean $\Sigma_{\lambda_i \lambda_j} \subset \mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1}$ y $\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \subset \mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1}$ las superficies definidas como

$$\Sigma_{\lambda_i \lambda_j} := \{x', \xi : x' \in \mathbb{R}_{x'}^{n+1}, \xi \in \mathbb{R}_\xi^n, \lambda_i - \lambda_j = 0\}, \quad (4.70)$$

$$\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} := \Sigma_{\lambda_1 \lambda_2} \cap \Sigma_{\lambda_2 \lambda_3},$$

donde $i \neq j$, y $1 \leq i, j \leq 3$.

Suponiendo que

$$\{\eta + \lambda_1, \eta + \lambda_2\} |_{\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2}} \neq 0, \{\eta + \lambda_1, \eta + \lambda_3\} |_{\Sigma_{\lambda_1 \lambda_3}} \neq 0, \{\eta + \lambda_2, \eta + \lambda_3\} |_{\Sigma_{\lambda_2 \lambda_3}} \neq 0, \quad (4.71)$$

se obtiene que $\Sigma_{\lambda_i \lambda_j}$ son unas superficies de codimensión 1 en $\mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1}$ y $\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}$ es superficie de codimensión 2 en $\mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1}$. Evidentemente se tiene que

$$\lambda_1 |_{\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}} = \lambda_2 |_{\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}} = \lambda_3 |_{\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}}.$$

Definición 8 Sean $\Sigma_{\lambda_i \lambda_j}^1 \subset \mathbb{R}_{x, \xi}^{2n}$ y $\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}^1 \subset \mathbb{R}_{x, \xi}^{2n}$ las superficies definidas como

$$\Sigma_{\lambda_i \lambda_j}^1 := \{x, \xi : x \in \mathbb{R}_x^n, \xi \in \mathbb{R}_\xi^n, \lambda_i - \lambda_j = 0, |\xi| = 1\},$$

$$\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}^1 := \Sigma_{\lambda_1 \lambda_2}^1 \cap \Sigma_{\lambda_2 \lambda_3}^1,$$

donde $i \neq j$, y $1 \leq i, j \leq 3$.

Condición 18 Suponga que los únicos valores propios del símbolo matricial $A(x', \xi)$ son $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, y $\lambda_{3+j}, j = 1, \dots, k-3$.

Suponga que existen r vectores propios $e_j(x', \xi), j = 1, \dots, r$, correspondientes al valor propio $\lambda_1(x', \xi)$ en $\mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1}$. Suponga que $e_j \in S^0(\mathbb{R}_{x'}^{n+1} \times \mathbb{R}_\xi^n)$ para $j = 1, \dots, r$, y que además los valores propios $\lambda_4(x', \xi), \dots, \lambda_{k-3}(x', \xi)$ del símbolo $A(x', \xi)$ son simples, no coinciden entre sí en $\mathbb{R}_{x'}^{n+1} \times (\mathbb{R}_\xi^n \setminus 0)$ y

$$\lambda_l \neq \lambda_m,$$

para $1 \leq l \leq 3$, y $m \geq 4$.

Sean e_{r+1}, e_{r+2} los únicos vectores propios correspondientes a λ_2, λ_3 , respectivamente. Suponga además que

$$e_{r+1}, e_{r+2} \in S^0(\mathbb{R}_{x'}^{n+1} \times \mathbb{R}_\xi^n), \quad |\xi| \frac{e_{r+1} - e_{r+2}}{\lambda_2 - \lambda_3} \in S^0(\mathbb{R}_{x'}^{n+1} \times \mathbb{R}_\xi^n), \quad |\xi| \frac{e_{r+1} - e_{r+2}}{\lambda_2 - \lambda_3} \neq 0. \quad (4.72)$$

Bajo las Condiciones 18 la matriz $A(x', \xi)$ (del sistema (4.69)) tiene la forma

$$A(x', \xi) = T^{-1}(x', \xi) \begin{bmatrix} I\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & d & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix} T(x', \xi),$$

donde I es la matriz identidad ($r \times r$), $d = |\xi|$, $T(x', \xi)$ es una matriz tal que sus columnas $1, \dots, r, r+2, \dots, n$, están formadas por los vectores propios $e_j, j = 1, \dots, r, r+2, \dots, n$, del símbolo $A(x', \xi)$ y la $(r+1)$ -ésima columna está formada por el vector $|\xi| \frac{e_{r+1} - e_{r+2}}{\lambda_2 - \lambda_3}$. Sin pérdida de generalidad se supone en lo que sigue que las superficies $\Sigma_{\lambda_i \lambda_j}^1, 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j$, son compactas. En este caso la fórmula (4.71) implica que

$$\inf_{(x, \xi) \in \mathbb{R}_{x, \xi}^{2n} \setminus \{\mathbb{R}_x^n \times \{0\}\}} \left| \frac{\{\lambda_i, \lambda_j\}}{|\xi|} \right| \geq \gamma > 0,$$

donde $1 \leq i, j \leq 3, i \neq j$.

Además sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^1$ dos constantes positivas tales que

$$\inf_i \inf_{(x, \xi) \in \mathbb{R}_{x, \xi}^{2n} \setminus \{\mathbb{R}_x^n \times \{0\}\}} \left| \lambda_i \left(x, \frac{\xi}{|\xi|} \right) \right| \geq \alpha > 0,$$

$$\sup_i \sup_{(x, \xi) \in \mathbb{R}_{x, \xi}^{2n} \setminus \{\mathbb{R}_x^n \times \{0\}\}} \left| \lambda_i \left(x, \frac{\xi}{|\xi|} \right) \right| \leq \beta < +\infty.$$

Las ecuaciones de un sistema de Hamilton implican que a lo largo de la trayectoria $g_{\lambda_k}^t(x_0, \xi_0)$ de un sistema de Hamilton se tiene

$$\lambda_k(g_{\lambda_k}^t(x_0, \xi_0)) = \lambda_k(x_0, \xi_0),$$

por lo tanto se obtiene la siguiente desigualdad para la componente $g_{\lambda_k}^t(x_0, \xi_0)_\xi$ de la trayectoria del sistema de Hamilton con Hamiltoniano λ_k :

$$\left| g_{\lambda_k}^t(x_0, \xi_0)_\xi \right| \geq \frac{\alpha}{\beta} |\xi_0|.$$

Ahora considere la superficie

$$\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}^C := \Sigma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \cap \{\mathbb{R}_x^n \times \{C_1 \leq |\xi| \leq C_2\}\},$$

donde $C_j \in \mathbb{R}_+^1, j = 1, 2$, y denote por $(\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}^C)^\varepsilon$ su ε - vecindad en $\mathbb{R}_{x, \xi}^{2n}$. En lo que sigue se consideran las *trayectorias de ramificación* que salen de un punto $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$. Considere en particular a una trayectoria $g_{\lambda_1}^t(x_0, \xi_0)$ y las trayectorias generadas por esta trayectoria. Suponga que la trayectoria $g_{\lambda_1}^t(x_0, \xi_0)$ intersecta al conjunto $\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2}$ (ver Definición 7) para un tiempo τ , i.e. $g_{\lambda_1}^\tau(x_0, \xi_0) \in \Sigma_{\lambda_1 \lambda_2}$, entonces desde el punto de intersección sale una nueva trayectoria generada por el Hamiltoniano λ_2 , i.e. $g_{\lambda_2}^{t-\tau} \circ g_{\lambda_1}^\tau(x_0, \xi_0), t > \tau$, y la trayectoria original $g_{\lambda_1}^t(x_0, \xi_0)$ continua. Análogamente se tiene que si para un tiempo α la trayectoria $g_{\lambda_1}^t(x_0, \xi_0)$ intersecta al conjunto $\Sigma_{\lambda_1 \lambda_3}$, i.e. $g_{\lambda_1}^\alpha(x_0, \xi_0) \in \Sigma_{\lambda_1 \lambda_3}$, entonces desde el punto de intersección sale una nueva trayectoria generada por el Hamiltoniano λ_3 , i.e. $g_{\lambda_3}^{t-\alpha} \circ g_{\lambda_1}^\alpha(x_0, \xi_0), t > \alpha$, y la trayectoria original $g_{\lambda_1}^t(x_0, \xi_0)$ continua. Además si para un tiempo β la trayectoria $g_{\lambda_1}^t(x_0, \xi_0)$ intersecta al conjunto $\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}$, i.e. $g_{\lambda_1}^\beta(x_0, \xi_0) \in \Sigma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}$, entonces desde el punto de intersección salen dos nuevas trayectorias generadas por los Hamiltonianos λ_2 y λ_3 , i.e. $g_{\lambda_2}^{t-\beta} \circ g_{\lambda_1}^\beta(x_0, \xi_0)$ y $g_{\lambda_3}^{t-\beta} \circ g_{\lambda_1}^\beta(x_0, \xi_0), t > \beta$, respectivamente, y la trayectoria original $g_{\lambda_1}^t(x_0, \xi_0)$ continua. De manera análoga se consideran las trayectorias $g_{\lambda_2}^t(x_0, \xi_0)$ y $g_{\lambda_3}^t(x_0, \xi_0)$.

El proceso de propagación de onda en el caso de características múltiples se describe por estas trayectorias de ramificación.

Suponga que la solución asintótica del problema de Cauchy

$$-ih \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{r=1}^n A_r(x, t) \left(-ih \frac{\partial \phi}{\partial x_r} \right) + (-ih) B(x, t) \phi = 0, \quad (4.73)$$

$$\phi|_{t=0} = \exp\left(\frac{i}{h}(k, x)\right) \phi_0(x), \quad \text{con } k = \frac{\xi}{|\xi|},$$

es de la forma $\exp\left(\frac{i}{h} S_1(t, x)\right) \phi(t, x, h)$ y la variedad de Lagrange Λ_1^0 definida como

$$\Lambda_1^0 = \{x, \xi : x = x_0, \xi = \nabla S_1(x_0), x_0 \in \text{Sup } \phi_0\},$$

no intersecta a las superficies $\Sigma_{\lambda_1\lambda_2}, \Sigma_{\lambda_1\lambda_3}, \Sigma_{\lambda_2\lambda_3}$. Entonces usando las trayectorias de ramificación se construyen las variedades de Lagrange Λ_3, Λ_2 generadas por las trayectorias que se generan en los puntos de intersección de la variedad

$$\Lambda_1^t = \left\{ x, \xi : x \in \mathbb{R}_x^n, \xi = \nabla S_1(t, x), \frac{\partial S_1}{\partial t} + \lambda_1(x, \nabla_x S_1(t, x)) = 0 \right\},$$

con los superficies $\Sigma_{\lambda_1\lambda_2} \setminus \Sigma_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$ y $\Sigma_{\lambda_1\lambda_3} \setminus \Sigma_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$.

Proposición 1 *Suponga que $\{\lambda_i, \lambda_j\}|_{\Sigma_{\lambda_i\lambda_j}} > 0$, y sea $D \subset \mathbb{R}_{x,\xi}^{2n} \setminus \{\mathbb{R}_x^n \times \{|\xi| < \delta\}\}, \delta > 0$, un dominio con cerradura compacta. Denote por D^ε la ε - vecindad del conjunto D en $\mathbb{R}_{x,\xi}^{2n}$. En este caso existe un $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeño tal que*

$$\gamma_{ij} := \inf_{(x,\xi) \in D^\varepsilon} |\{\lambda_i, \lambda_j\}| > 0, \tag{4.74}$$

para todo $i \neq j, 1 \leq i, j \leq 3$.

Proposición 2 *Sea $(x_0, \xi_0) \in D^\varepsilon \cap (\Sigma_{\lambda_1\lambda_2})^\varepsilon$ y suponga que $(\lambda_i - \lambda_j)(x_0, \xi_0) < 0$. En este caso si $\{\lambda_i, \lambda_j\}|_{\Sigma_{\lambda_i\lambda_j}} > 0$, entonces para un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño:*

1. *Las trayectorias $g_{\lambda_k}^t(x_0, \xi_0), k = i, j$, intersectan a las superficies $\Sigma_{\lambda_i\lambda_j}$ en un período de tiempo*

$$t_{ij,k}(x_0, \xi_0) = O\left(|\lambda_i - \lambda_j|^2(x_0, \xi_0)\right), k = i, j,$$

respectivamente.

2. *Las funciones $(\lambda_i - \lambda_j)(g_{\lambda_k}^t(x_0, \xi_0)), k = i, j$, crecen con respecto al tiempo t , mientras las trayectorias $g_{\lambda_k}^t(x_0, \xi_0), k = i, j$, están en $(\Sigma_{\lambda_i\lambda_j})^\varepsilon \cap D^\varepsilon$.*

Demostración. Sean $\delta > 0$, y $\varepsilon_0 > 0$, tales que se satisface la proposición anterior para $(x, \xi) \in D^{\varepsilon_0}$. Note que

$$(\lambda_i - \lambda_j) \circ g_{\lambda_k}^t(x_0, \xi_0) = (\lambda_i - \lambda_j)(x_0, \xi_0) + \{\lambda_i - \lambda_j, \lambda_k\}(x_0, \xi_0)t + O(t^2). \tag{4.75}$$

La fórmula (4.75) implica que las funciones $(\lambda_i - \lambda_j)(g_{\lambda_k}^t(x_0, \xi_0)), k = i, j$, crecen con respecto al tiempo t , mientras las trayectorias $g_{\lambda_k}^t(x_0, \xi_0), k = i, j$, están en $\Sigma_{\lambda_i\lambda_j} \cap D^\varepsilon$. Ahora sea $\tilde{t}_{ij,k}$ el momento de tiempo definido como

$$\tilde{t}_{ij,k} := -\frac{(\lambda_i - \lambda_j)(x_0, \xi_0)}{\{\lambda_i - \lambda_j, \lambda_k\}(x_0, \xi_0)}.$$

En este caso se tiene que

$$\rho\left(g_{\lambda_k}^{\tilde{t}_{ij,k}}(x_0, \xi_0), \Sigma_{\lambda_i\lambda_j}\right) = O\left(|\lambda_i - \lambda_j|^2(x_0, \xi_0)\right).$$

Por lo tanto las trayectorias $g_{\lambda_k}^t(x_0, \xi_0), k = i, j$, intersectan las superficies $\Sigma_{\lambda_i\lambda_j}$ en el momento de tiempo $t_{ij,k}(x_0, \xi_0)$ tal que

$$t_{ij,k}(x_0, \xi_0) - \tilde{t}_{ij,k} = O\left(|\lambda_i - \lambda_j|^2(x_0, \xi_0)\right),$$

donde $k = i, j$, respectivamente. ■

Lema 18 Suponga que se satisfacen las Condiciones 18 y que además en $(\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}^C)^\varepsilon$ se tiene que:

$$\{\eta + \lambda_1, \eta + \lambda_2\} < 0, \{\eta + \lambda_1, \eta + \lambda_3\} < 0, \{\eta + \lambda_2, \eta + \lambda_3\} < 0, \quad (4.76)$$

i.e. se considera el caso de la Figura 10

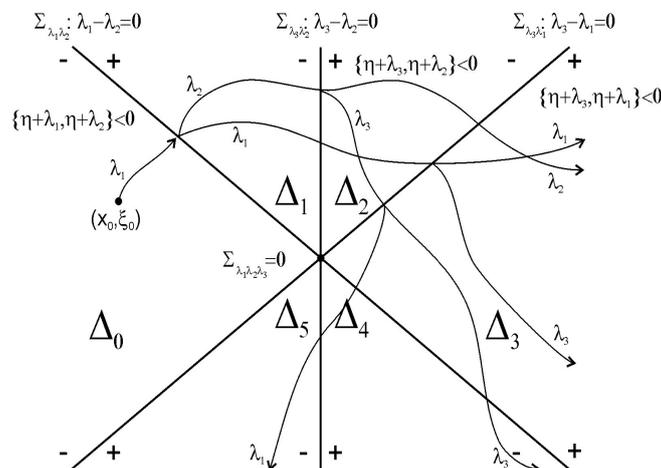


Figura 13

En este caso existe un $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeño, y una constante $T(\varepsilon) > 0$, tal que durante un tiempo $t_j(x_0, \xi_0) < T(\varepsilon)$ toda la trayectoria ramificada de un sistema de Hamilton inicialmente generada con el Hamiltoniano λ_j , $j = 1, 2, 3$, y que inicia en un punto $(x_0, \xi_0) \in (\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}^C)^\varepsilon$, sale de la ε - vecindad $(\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}^C)^\varepsilon$.

Nota 4 En la Figura 10 los signos $+$ y $-$ cerca de las superficies $\Sigma_{\lambda_k \lambda_j}$, significan que se consideran las regiones tales que $\lambda_k - \lambda_j < 0$ y $\lambda_k - \lambda_j > 0$, respectivamente.

Demostración. Sean $D \subset \mathbb{R}_{x, \xi}^{2n} \setminus \{\mathbb{R}^n \times \{|\xi| < \delta\}\}$, $\delta > 0$, y $\varepsilon_0 > 0$, tales que se satisfacen las Proposiciones 1 y 2. Sea $\gamma > 0$ definido como

$$\gamma := \inf_{i,j} \{\gamma_{ij}\},$$

donde los números γ_{ij} están definidos por la fórmula (4.74).

Sean los sectores $\Delta_j, j = 0, \dots, 5$, definidos como

$$\begin{aligned} \Delta_0 & : = \{x, \xi : \lambda_1 < \lambda_2; \lambda_3 < \lambda_2; \lambda_3 < \lambda_1\}, \\ \Delta_1 & : = \{x, \xi : \lambda_1 > \lambda_2; \lambda_3 < \lambda_2; \lambda_3 < \lambda_1\}, \\ \Delta_2 & : = \{x, \xi : \lambda_1 > \lambda_2; \lambda_3 > \lambda_2; \lambda_3 < \lambda_1\}, \\ \Delta_3 & : = \{x, \xi : \lambda_1 > \lambda_2; \lambda_3 > \lambda_2; \lambda_3 > \lambda_1\}, \\ \Delta_4 & : = \{x, \xi : \lambda_1 < \lambda_2; \lambda_3 > \lambda_2; \lambda_3 > \lambda_1\}, \\ \Delta_5 & : = \{x, \xi : \lambda_1 < \lambda_2; \lambda_3 < \lambda_2; \lambda_3 > \lambda_1\}. \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad se consideran las trayectorias $g_{\lambda_1}^t(x_0, \xi_0)$ que salen del sector Δ_0 , i.e. $(x_0, \xi_0) \in \Delta_0$.

Sean

$$\varepsilon_{i,j,k} := \rho \left(g_{\lambda_k}^{t_{ij,k}}(x_0, \xi_0), \Sigma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \right)$$

y define a $\varepsilon_0 > 0$ como

$$\varepsilon := \frac{1}{4} \min_{i,j,k} \{\varepsilon_0, \varepsilon_{ij,k}\}.$$

Sean

$$T(\varepsilon) := \max_{i,j,k} \left\{ 3t_{ij,k} + \frac{\varepsilon}{\gamma} \right\},$$

y $(x_0, \xi_0) \in \Delta_0 \cap (\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}^C)^\varepsilon$. Note que

$$\frac{d}{dt} [(\lambda_1 - \lambda_2) \circ g_{\lambda_1}^t] = \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial p} \dot{p} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial p} \dot{p},$$

y como se tiene que

$$\dot{x} = \frac{\partial \lambda_1}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial \lambda_1}{\partial x}$$

se obtiene

$$\frac{d}{dt} [(\lambda_1 - \lambda_2) \circ g_{\lambda_1}^t] = \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} - \{\lambda_1, \lambda_2\},$$

donde

$$\{\lambda_1, \lambda_2\} = \frac{\partial \lambda_1}{\partial p} \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \frac{\partial \lambda_2}{\partial p}.$$

Por lo tanto al definir de esta manera los paréntesis de Poisson se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(\lambda_1 - \lambda_2) \circ g_{\lambda_1}^t] &= -\{\eta + \lambda_1, \eta + \lambda_2\}, \\ \frac{d}{dt} [(\lambda_1 - \lambda_2) \circ g_{\lambda_2}^t] &= -\{\eta + \lambda_1, \eta + \lambda_2\}. \end{aligned}$$

En este caso como las paréntesis de Poisson $\{\eta + \lambda_1, \eta + \lambda_2\}$, $\{\eta + \lambda_3, \eta + \lambda_1\}$, y $\{\eta + \lambda_3, \eta + \lambda_2\}$, son negativos y no cambian el signo en $(\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}^C)^\varepsilon$ entonces sin pérdida de generalidad es posible suponer que la trayectoria $g_{\lambda_1}^t(x_0, \xi_0)$ interseca el conjunto $\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2}$ para un tiempo $t_{12,1} < +\infty$, i.e. $g_{\lambda_1}^{t_{12,1}}(x_0, \xi_0) \in \Sigma_{\lambda_1 \lambda_2}$. En este caso la trayectoria original $g_{\lambda_1}^t(x_0, \xi_0)$ ya no puede regresar al sector $\Delta_0 \cup \Delta_4 \cup \Delta_5$ (ya que $\{\eta + \lambda_1, \eta + \lambda_2\} < 0$, y $g_{\lambda_1}^{t_{12,1} + \delta}(x_0, \xi_0)$, $\delta > 0$, pertenece al conjunto donde $\lambda_1 > \lambda_2$). Además $g_{\lambda_1}^t(x_0, \xi_0)$ genera una trayectoria nueva $g_{\lambda_2}^{t-t_{12,1}} \circ g_{\lambda_1}^{t_{12,1}}(x_0, \xi_0)$ tal que $g_{\lambda_2}^{t-t_{12,1} + \delta} \circ g_{\lambda_1}^{t_{12,1}}(x_0, \xi_0) \in \Delta_1$, para un número $\delta > 0$, suficientemente pequeño. La trayectoria generada no regresa al sector $\Delta_0 \cup \Delta_4 \cup \Delta_5$, ya que $\{\eta + \lambda_1, \eta + \lambda_2\} < 0$ en $(\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}^C)^\varepsilon$ y para que la trayectoria generada intetsecta la superficie $\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2}$ los parentesis de Poisson $\{\eta + \lambda_1, \eta + \lambda_2\}$ tienen que cambiar su signo sobre $\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2}$.

Note que la trayectoria original $g_{\lambda_1}^t(x_0, \xi_0)$ después de intersectarse con $\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2}$ intersecta para un tiempo finito $t_{32,1} < +\infty$ la superficie $\Sigma_{\lambda_3 \lambda_2}$ y para un tiempo finito $t_{31,1} < +\infty$ la superficie $\Sigma_{\lambda_3 \lambda_1}$. En el primer caso (i.e. cuando $g_{\lambda_1}^{t_{32,1}}(x_0, \xi_0) \in \Sigma_{\lambda_3 \lambda_2} \setminus \Sigma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}$) la trayectoria original $g_{\lambda_1}^t(x_0, \xi_0)$ no genera una trayectoria nueva. Pero al intersectarse con la superficie $\Sigma_{\lambda_3 \lambda_1}$ la trayectoria $g_{\lambda_1}^t(x_0, \xi_0)$ genera una trayectoria nueva $g_{\lambda_3}^{t-t_{31,1}} \circ g_{\lambda_1}^{t_{31,1}}(x_0, \xi_0)$ la cual para un tiempo $t_{31,1} + \delta$, $\delta > 0$ (δ suficientemente pequeño) pertenece al sector Δ_3 y ya no sale de él. Note que en el sector Δ_3 las funciones $(\lambda_3 - \lambda_1) \circ g_{\lambda_1}^t$ y $(\lambda_1 - \lambda_2) \circ g_{\lambda_1}^t$ crecen y las funciones $(\lambda_3 - \lambda_1), (\lambda_1 - \lambda_2)$ son las coordenadas en este sector y por lo tanto cuando crece t la trayectoria $g_{\lambda_1}^t(x_0, \xi_0)$ sale de $(\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}^C)^\varepsilon$.

Falta investigar el comportamiento de la trayectoria $g_{\lambda_2}^{t-t_{12,1}} \circ g_{\lambda_1}^{t_{12,1}}(x_0, \xi_0)$. En efecto como

$$\rho\left(g_{\lambda_1}^{t_{12,1}}(x_0, \xi_0), \Sigma_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\right) < \varepsilon,$$

entonces la trayectoria $g_{\lambda_2}^{t-t_{12,1}} \circ g_{\lambda_1}^{t_{12,1}}(x_0, \xi_0)$ intersecta a $\Sigma_{\lambda_3\lambda_2}$ para un tiempo finito $t_{32,2}$ y genera una trayectoria nueva $g_{\lambda_3}^{t-t_{32,2}} \circ g_{\lambda_2}^{t_{32,2}-t_{12,1}} \circ g_{\lambda_1}^{t_{12,1}}(x_0, \xi_0)$. Como antes se obtiene que la trayectoria generada $g_{\lambda_3}^{t-t_{32,2}} \circ g_{\lambda_2}^{t_{32,2}-t_{12,1}} \circ g_{\lambda_1}^{t_{12,1}}(x_0, \xi_0)$ se queda en el sector $\Delta_3 \cup \Delta_4$. La trayectoria original $g_{\lambda_2}^{t-t_{12,1}} \circ g_{\lambda_1}^{t_{12,1}}(x_0, \xi_0)$ se queda en el sector $\Delta_2 \cup \Delta_3$.

Ahora note que como

$$\rho\left(g_{\lambda_2}^{t_{32,2}-t_{12,1}} \circ g_{\lambda_1}^{t_{12,1}}(x_0, \xi_0), \Sigma_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\right) < \varepsilon,$$

entonces la trayectoria generada $g_{\lambda_3}^{t-t_{32,2}} \circ g_{\lambda_2}^{t_{32,2}-t_{12,1}} \circ g_{\lambda_1}^{t_{12,1}}(x_0, \xi_0)$ intersecta a $\Sigma_{\lambda_3\lambda_1}$ para un tiempo finito $t_{31,3}$ y genera una trayectoria nueva $g_{\lambda_1}^{t-t_{31,3}} \circ g_{\lambda_3}^{t_{31,3}-t_{32,2}} \circ g_{\lambda_2}^{t_{32,2}-t_{12,1}} \circ g_{\lambda_1}^{t_{12,1}}(x_0, \xi_0)$. La trayectoria nueva $g_{\lambda_1}^{t-t_{31,3}} \circ g_{\lambda_3}^{t_{31,3}-t_{32,2}} \circ g_{\lambda_2}^{t_{32,2}-t_{12,1}} \circ g_{\lambda_1}^{t_{12,1}}(x_0, \xi_0)$ es tal que $g_{\lambda_1}^{t-t_{31,3}+\delta} \circ g_{\lambda_3}^{t_{31,3}-t_{32,2}} \circ g_{\lambda_2}^{t_{32,2}-t_{12,1}} \circ g_{\lambda_1}^{t_{12,1}}(x_0, \xi_0) \in \Delta_3$, para un número $\delta > 0$, suficientemente pequeño (ya que las fronteras de $\Sigma_{\lambda_1\lambda_3}$ y $\Sigma_{\lambda_1\lambda_2}$ no se intersectan). Por lo tanto durante el tiempo finito ε/γ la trayectoria $g_{\lambda_1}^{t-t_{31,3}} \circ g_{\lambda_3}^{t_{31,3}-t_{32,2}} \circ g_{\lambda_2}^{t_{32,2}-t_{12,1}} \circ g_{\lambda_1}^{t_{12,1}}(x_0, \xi_0)$ sale de $\Sigma_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}^\varepsilon$ (según las consideraciones anteriores). ■

4.3. Sobre las ecuaciones de hidrodinámica linealizadas para los líquidos ideales compresibles

Para investigar las ondas en medios físicos se utiliza la linealización de ecuaciones no lineales.

La ley de conservación de la energía se satisface para los sistemas físicos en derivadas parciales. Por lo regular las soluciones de sistemas linealizados tienen sus propias estimaciones. Estas estimaciones determinan los tipos de onda que ocurren en dichos sistemas.

Ahora se considerarán las relaciones entre las estimaciones de energía y los tipos de onda que ocurren en los sistemas linealizados. Suponga que el sistema linealizado L es un sistema real hiperbólico de primer orden de la forma

$$Lu = -i \frac{\partial u}{\partial t} + (-i) \sum_{r=1}^n A_r(x) \frac{\partial u}{\partial x_r} + (-i) B(x) u = f(x, t), \quad (4.77)$$

donde $B; A_r, r = 1, \dots, n$, son funciones matriciales reales de la clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u \in \mathbb{R}^n$. Se dice que el sistema (4.77) tiene una estimación de energía si existe una $(n \times n)$ matriz definida no negativamente $E(x) : (E(x)\eta, \eta) \geq 0$, $E(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que para cada función $u(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^1)$ con una unión compacta de soportes $\cup_{t=0}^T \text{Supp } u(x, t)$ se satisface que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (E(x) u(x, \tau), u(x, \tau)) dx \Big|_0^t \leq C \left\{ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} (u(x, \tau), u(x, \tau)) dx d\tau + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |Lu(x, \tau)|^2 dx d\tau \right\}. \quad (4.78)$$

Suponga que existen constantes $m, M \in (0, \infty)$ tales que $M \|\eta\|^2 \geq (E(x)\eta, \eta) \geq m \|\eta\|^2$ y se satisface la estimación de energía (4.78). En este caso en el trabajo [24] fue demostrado que el

símbolo $\sum_{r=1}^n A_r(x) \xi_r$ es diagonalizable para todos $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ y las matrices de diagonalización $S(x, \xi), S^{-1}(x, \xi)$:

$$S(x, \xi) \left\| \sum_{r=1}^n A_r(x) \xi_r \right\| S^{-1}(x, \xi) = \|\delta_{ij} \lambda_j(x, \xi)\|,$$

están uniformemente acotadas en $K \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$ para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$.

Por lo tanto la estimación de energía (4.78) con una matriz E definida no negativamente, implica que el símbolo $\sum_{r=1}^n A_r(x) \xi_r$ no puede tener cajas de Jordan.

Este hecho facilita la investigación de sistemas físicos complejos. Considere el sistema de magnetohidrodinámica (abreviación MHD) (ver [29]):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} B &= 0; B_t - \operatorname{curl}[u \times B] = 0; \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \rho u_t + \rho(u, \nabla)u + c^2(\rho) \nabla \rho - \frac{1}{\mu} (\operatorname{curl} B) \times B &= 0, \end{aligned} \quad (4.79)$$

para $x \in \mathbb{R}^3, t > 0$. linealizando el sistema (4.79) en una solución estacionaria u_0, B_0, ρ_0 y denotando al sistema obtenido por LMHD se obtiene que para una solución C^∞ de LMHD se tiene la estimación de energía siguiente:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{2\mu} B^2 + \frac{\rho_0}{2} u^2 + \frac{c^2(\rho_0)}{\rho_0} \rho^2 \right) dx \Big|_0^t \leq C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (B^2 + u^2 + \rho^2) dx d\tau. \quad (4.80)$$

También linealizando el sistema de hidrodinámica para líquidos ideales compresibles con fuerzas externas $f(x, t)$, i.e.:

$$\begin{aligned} \rho u_t + \rho(u, \nabla)u &= -c^2(\rho) \nabla \rho + f(x, t) \\ \rho_t + \operatorname{div}(\rho u) &= 0, \text{ here } c^2(\rho) := \partial p(\rho) / \partial \rho \end{aligned} \quad (4.81)$$

en una solución estacionaria u_0, ρ_0 se obtiene la estimación de energía siguiente para la solución del sistema linealizado de hidrodinámica (abreviación LSHD)

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\rho_0}{2} u^2 + \frac{c^2(\rho_0)}{2\rho_0} \rho^2 \right) dx \Big|_0^t \leq C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (u^2 + \rho^2) dx d\tau + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} u f dx d\tau \quad (4.82)$$

Esto implica que si se tiene que $M \geq c^2(\rho_0) / \rho_0 \geq m > 0$, para algunos $M, m \in (0, \infty)$, entonces las formas cuadráticas en la parte izquierda de las estimaciones de energía (4.80), (4.82) son no degeneradas. Así se obtiene que los símbolos principales de los sistemas LMHD y LSHD son diagonalizables. Evidentemente estos símbolos diagonalizables de LSHD y LMHD pueden tener valores propios de multiplicidad variable (ver [3],[16],[31]).

Considere los procesos de propagación de ondas adiabáticos en líquidos ideales compresibles. En este caso el sistema no lineal (4.81) tiene la integral de energía (ver [1]):

$$\int_{\mathbb{R}^3} \{ \rho u^2 / 2 + \rho \varepsilon(\rho) \} dx \Big|_0^t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (u f) dx dt, \quad (4.83)$$

donde $\varepsilon(\rho)$ es la energía interna

$$\varepsilon(\rho) = \varepsilon(\rho_0) + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p(\rho)}{\rho^2} d\rho.$$

En esta sección se investiga el fenómeno de generación de ondas con amplitudes grandes en los sistemas linealizados, cuando una onda de alta frecuencia (el frente de onda de las soluciones) pasa

a través de los puntos de cambio de multiplicidad. Note que hasta en el caso cuando los valores propios del símbolo $\sum_{r=1}^n A_r(x) \xi_r$ tienen una multiplicidad constante ocurre enfoque de haz y un incremento de amplitud local. Sin embargo la integral del cuadrado del valor absoluto del campo sigue siendo acotado. Por ejemplo el función de Airy $(2\pi h)^{-1/2} \int \exp(ih^{-1} [xp - p^3/3]) dp$ en el punto $x = 0$ tiene orden $h^{-1/6}$, pero la integral del cuadrado de su valor absoluto sobre un conjunto compacto está uniformemente acotada para $h \in (0, 1]$ debido a la igualdad de Parseval. Esto significa que el enfoque de haz resulta en una redistribución de la energía pero no en un incremento de la misma. Por lo tanto se obtiene que cuando las ondas pasan a través de los puntos de cambio de multiplicidad, un incremento significativo de la integral del cuadrado de valor absoluto de la solución (incremento de la energía) ocurre solamente en el caso cuando el símbolo principal tiene unas cajas de Jordan en los puntos de cambio de multiplicidad.

Los resultados obtenidos en el trabajo [24] implican que esto puede ocurrir solamente cuando la forma de energía del sistema linealizado en la parte izquierda de la estimación de energía (4.78) está degenerada.

linealizando el sistema (4.81) en una solución estacionaria $u_0, \rho_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ se obtiene

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_0 (u_0, \nabla) u = -\frac{\partial p(\rho_0)}{\partial \rho_0} \nabla \rho + B(u, \rho), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} u + (u_0, \nabla) \rho = a(u, \rho). \quad (4.84)$$

Aquí $B(u, \rho), a(u, \rho)$ denotan a los términos de orden cero correspondientes, i.e. los términos que no contienen las derivadas de u y ρ . En lo que sigue se considera el sistema (4.84).

La dependencia de la presión p de la densidad ρ se determina por los procesos de propagación de ondas adiabáticos. Por lo regular se tiene que $dp/d\rho \geq 0$ y la velocidad del sonido $c(\rho)$ en el líquido es igual a $\sqrt{dp/d\rho}$ (ver [30]).

El símbolo principal del sistema (4.84) tiene la forma

$$D := \begin{bmatrix} \rho_0(\eta + (u_0, \xi)) & 0 & 0 & c^2 \xi_1 \\ 0 & \rho_0(\eta + (u_0, \xi)) & 0 & c^2 \xi_2 \\ 0 & 0 & \rho_0(\eta + (u_0, \xi)) & c^2 \xi_3 \\ \rho_0 \xi_1 & \rho_0 \xi_2 & \rho_0 \xi_3 & \rho_0(\eta + (u_0, \xi)) \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto las raíces características $\eta = \lambda_j(x, \xi)$ satisfacen la ecuación

$$\det D = (\eta + (u_0, \xi))^2 (\eta + (u_0, \xi) - c|\xi|) (\eta + (u_0, \xi) + c|\xi|) = 0.$$

Evidentemente en los puntos x tales que $c(\rho_0(x)) = 0$ las raíces $\eta_{\pm} = -(u_0, \xi) \pm c|\xi|$ coinciden con la raíz $\eta = -(u_0, \xi)$. Haciendo unos cálculos simples se obtiene que en los puntos tales que $c(\rho_0(x)) = 0$ existen tres vectores propios y un vector adjunto, i.e. existe una caja de Jordan. Este ocurre debido a que la forma cuadrática en la estimación de energía (4.82) está degenerada en los puntos tales que $c(\rho_0(x)) = 0$.

En lo que sigue se supone que sobre el conjunto de cambio de multiplicidad Σ se tiene que $\{\eta + \lambda_j, \eta + \lambda_k\}|_{\Sigma} \neq 0$, para las raíces que conciden sobre Σ . En este caso se obtiene que

$$\Sigma = \{x, \xi : c(\rho_0(x)) = 0\}, \{(u_0, \xi), c|\xi|\}|_{\Sigma} = (u_0, \nabla)|\xi|c|_{\Sigma} \neq 0. \quad (4.85)$$

Por lo tanto si se tiene que $u_0|_{\Sigma} \neq 0$, entonces la formula (4.85) implica que $\nabla c|_{\Sigma} \neq 0$. Así se obtiene que Σ es una superficie suave de dimensión $(2n - 1)$ en $\mathbb{R}_{x, \xi}^{2n}$.

Para el símbolo del sistema LSHD la raíz $\eta = -(u_0, \xi)$ tiene dos vectores propios de la clase C^∞ en $\mathbb{R}_{x, \xi}^{2n} : \{u_m = k_m(\xi), \rho_m = 0\}$, aquí $k_m(\xi), m = 1, 2$, son dos vectores linealmente independientes ortogonales a ξ . Además los vectores propios $e_{\pm} = \{u_{\pm} = \pm c\xi, \rho = \rho_0\}$, tales que $e_{\pm} \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n \times (\mathbb{R}^n \setminus 0))$ corresponden a las raíces $\eta_{\pm} = -(u_0, \xi) \pm c|\xi|$, respectivamente. Sobre

el conjunto Σ el vector $(e_+ - e_-) / (\eta_+ - \eta_-)$ de la clase C^∞ se transforma en el vector adjunto $\{u = \xi, \rho = 0\}$.

En el caso cuando se tiene que $dp/d\rho < 0$ se cambia el tipo de la ecuación y bajo unas pequeñas perturbación de alta frecuencia la solución tendrá un incremento exponencial con respecto a la frecuencia. Esto significa que el problema de Cauchy para el sistema (4.84) se convierte en un problema mal definido. Dichos casos (i.e. cuando $dp/d\rho < 0$) ocurren en el gas de Wander-Vaals (ver [30]). Los físicos cambian la dependencia de p de ρ para gas de Wander-Vaals de tal manera que $dp/d\rho \geq 0$. Esto se explica por algunos efectos físicos adicionales de transición de fase (ver [30]).

En lo que sigue se considera el caso cuando $d\rho/dp \geq 0$ y $d\rho/dp(\rho_0) = 0$ en un punto ρ_0 . En este caso la ecuación (4.81) tiene una solución estacionaria $u = u_0, \rho = \rho_0 = Const \neq 0, u_0 = Const \neq 0$, (esto también ocurre en el gas de Wander-Vaals, vea [30]). Evidentemente en este caso los términos menores $B(u, \rho), a(u, \rho)$ en (4.84) son iguales a cero.

La solución del problema de Cauchy $u|_{t=0} = n \exp\{i(x, k)h^{-1}\}, \rho|_{t=0} = 0, |k| = 1$ para la ecuación (4.84) tiene forma

$$\begin{aligned} u &= n \exp\{i[(x, k) - (u_0, k)t]h^{-1}\}; \\ \rho &= -ih^{-1}t\rho_0(n, k) \exp\{i[(x, k) - (u_0, k)t]h^{-1}\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la densidad ρ de la excitación de alta frecuencia aumenta rápidamente cuando $h \rightarrow 0$, en todos los puntos $t > 0$. Evidentemente se tiene que durante un pequeño periodo de tiempo $h^\gamma, 0 \leq \gamma \leq 1$, la densidad ρ crece como $h^{-1+\gamma}$.

Ahora se considera el caso cuando la solución estacionaria u_0, ρ_0 no es constante y satisface la ecuación (4.85). En lo que sigue se demuestra que si los términos menores del sistema LSHD satisfacen ciertas condiciones, entonces la integral del cuadrado de valor absoluto de la solución del sistema LSHD con los datos iniciales de alta frecuencia de la forma

$$\{\phi(x), \psi(x)\}^T \exp\left(\frac{i}{h}S_0(x)\right); h \in (0, 1] \tag{4.86}$$

tiene un incremento del orden $h^{-\mu}$ durante un corto periodo de tiempo h^δ para algunos $\mu, \delta > 0$. Este fenómeno se llamará la inestabilidad de la solución de LSHD con respecto a las excitaciones de alta frecuencia para un periodo de tiempo finito $[0, t], t > 0$ (abreviación HFinstabilidad). Aquí los valores μ, δ dependen de los términos menores. Multiplicando la función (4.86) por un parámetro pequeño se obtiene una excitación elemental (ver [32]). La integral de energía (4.83) implica que la excitación elemental de los datos iniciales para la ecuación no lineal (4.81) no implicará un incremento grande de la energía (4.83). Es decir la HFinstabilidad de la ecuación linealizada no implica la HFinstabilidad del problema no lineal. Por lo tanto en el caso de cambio de multiplicidad y de la HFinstabilidad la aproximación lineal no es una aproximación adecuada del problema no lineal. En el caso del cambio de multiplicidad la estructura de la solución del problema no lineal será más complicada.

Es posible demostrar la unicidad de la solución del sistema LSHD que pierde su suavidad, i.e. si se tiene que $u(x, 0), \rho(x, 0) \in H_{s+N_0}$ (para algún número natural N_0 y todos $s \geq 0$) entonces la solución del sistema LSHD existe y además se tiene que $\partial_t^j \{u(x, t), \rho(x, t)\} \in H_{s-j}$, para $s - j > 0$.

Para estimar el incremento de amplitud del sistema linealizado (i.e. su HFinstabilidad) es suficiente considerar las soluciones asintóticas formales del problema de Cauchy (4.86) hasta el orden $O(h^N)$ ($N < \infty$). Por lo tanto en lo que sigue se presentan los resultados obtenidos por los métodos asintóticos en el caso cuando en los puntos de cambio de multiplicidad aparecen

cajas de Jordan. Las soluciones asintóticas obtenidas se llamarán FAS (abreviación en inglés - Formally Asymptotic Solutions). Para poder aplicar los resultados obtenidos a unos sistemas más generales (por ejemplo la ecuación de LMHD), se generalizan las propiedades de los valores propios y de los vectores propios del LSHD.

Ahora se definirán unas condiciones sobre el símbolo $\sum_{j=1}^n A_j(x')\xi_j$ tales que el sistema linealizado de Maxwell y el sistema LHD los satisfacen. Sea $N := \{(x', \xi') \mid \det Q(x', \xi') = 0\}$ el conjunto característico del símbolo $Q(x', \xi')$ del sistema (4.77) y denote por $\Sigma \subset \mathbb{R}_{x', \xi'}^{2n+2}$ al conjunto sobre el cual la matriz $Q(x', \xi')$ tiene una caja de Jordán y sus raíces características cambian multiplicidad. Suponga que en $\mathbb{R}_{x', \xi'}^{2n+2} \setminus \Sigma$ las raíces características de la matriz $Q(x', \xi')$ tienen una multiplicidad constante.

El conjunto Σ se llama el conjunto de multiplicidad y suponga que $\Sigma \neq \emptyset$. En los puntos $(x', \xi') \in N \setminus \Sigma$ la solución asintótica del problema (4.77) puede ser calculada por el método WKB (ver [33],[22]).

Suponga que $\det Q(x', \xi') = \prod_{j=1}^k (\lambda_j + \eta)$. Denote por Σ_1 la proyección del Σ sobre $\mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1}$. Evidentemente, Σ_1 es el conjunto de los puntos (x', ξ) en los cuales coinciden algunas dos raíces características, i.e. $\lambda_m(x', \xi) = \lambda_l(x', \xi)$.

En lo que sigue las construcciones asintóticas se hacen en una vecindad Ω conica con respecto a ξ del conjunto Σ_1 y se obtiene el teorema de existencia bajo las condiciones siguientes.

Condición 19 (Condición de reducción local) Suponga que $\Sigma_1 \cap \mathbb{R}_{x'}^{n+1}$ es un conjunto compacto. Suponga que Σ_1 es una variedad de la clase C^∞ fuera de los puntos $\xi = 0$. Sea $\lambda_1(x', \xi)$ el valor propio de multiplicidad r del símbolo matricial $A(x', \xi) = \sum_{j=1}^n A_j(x')\xi_j$, y suponga que existen r vectores propios $e_j(x', \xi)$, $j = 1, \dots, r$, que corresponden al valor propio $\lambda_1(x', \xi)$ en $\mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1} \setminus \Sigma_1$. Suponga que $\lambda_1 \in S^1(\mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1})$ y $e_j \in S^0(\mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1})$ para $j = 1, \dots, r$. Ahora, sean $\lambda_2, \lambda_3 \in S^1(\mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1})$ otros valores propios del símbolo tales que

$$\lambda_1|_{\Sigma_1} = \lambda_2|_{\Sigma_1} = \lambda_3|_{\Sigma_1}; \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_3, \lambda_2 \neq \lambda_3 \text{ en } \mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1} \setminus \Sigma_1.$$

Sean e_{r+1}, e_{r+2} los únicos vectores propios que corresponden a los valores propios λ_2, λ_3 en $\mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1} \setminus \Sigma_1$. Suponga que

$$e_{r+1}, e_{r+2} \in S^0(\mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1}); \left| \xi \frac{e_{r+1} - e_{r+2}}{\lambda_2 - \lambda_3} \in S^0(\mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1}); \left| \xi \frac{e_{r+1} - e_{r+2}}{\lambda_2 - \lambda_3} \right|_{\Sigma_1} \neq 0, \quad (4.87)$$

y

$$\{\lambda_1, \lambda_2\}|_{\Sigma_1} \neq 0, \{\lambda_1, \lambda_3\}|_{\Sigma_1} \neq 0, \{\lambda_2, \lambda_3\}|_{\Sigma_1} \neq 0. \quad (4.88)$$

Además se supone que el símbolo $A(x', \xi)$ no tiene otros valores propios distintos de λ_2, λ_3 y que coinciden con λ_1 sobre el conjunto Σ_1 . Suponga que los demás valores propios $\lambda_4, \dots, \lambda_k$ del símbolo $A(x', \xi)$ no cambian su multiplicidad y pertenecen a la clase $S^0(\mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1})$. Suponga también que los vectores propios e_{r+3}, \dots, e_n que corresponden a estos valores propios pertenecen a la clase $S^1(\mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1})$.

Definición 9 Sea $\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2}$ el conjunto de los puntos $(x', \xi) \in \mathbb{R}_{x'}^{n+1} \times \mathbb{R}_\xi^n$ tales que:

$$\Sigma_{\lambda_1 \lambda_2} := \{x', \xi : \lambda_1 = \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_3\},$$

y sean $\Sigma_{\lambda_1\lambda_3}$, $\Sigma_{\lambda_2\lambda_3}$ y $\Sigma_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$, los conjuntos en $\mathbb{R}_{x'}^{n+1} \times \mathbb{R}_\xi^n$ definidos como

$$\begin{aligned}\Sigma_{\lambda_1\lambda_3} & : = \{x', \xi : \lambda_1 = \lambda_3, \lambda_1 \neq \lambda_2\}, \\ \Sigma_{\lambda_2\lambda_3} & : = \{x', \xi : \lambda_2 = \lambda_3, \lambda_2 \neq \lambda_1\}, \\ \Sigma_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} & : = \{x', \xi : \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_3\}.\end{aligned}$$

Definición 10 Sea $S_\gamma(V)$, $V \subset \mathbb{R}_{x'}^{n+1}$, una clase de símbolos $e(t, x, \xi)$ tales que:

- i) $e \in C^\infty(\mathbb{R}_{x'}^{n+1} \times \mathbb{R}_\xi^n)$, $\cup_\xi \text{Sop}_{x'} e(x', \xi) \subset V$,
- ii) $\text{Sop}_{x', \xi} \left| \partial_{x'}^r \partial_\xi^q e(t, x, \xi) \right| \leq C_{r,q} h^{-\gamma(|r|+|q|)}$, con $\gamma < 1/2$, $h \in (0, 1]$, $|r|, |q| < \infty$.

Definición 11 Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}_{x'}^{n+1} \times \mathbb{R}_\xi^n$ se llama no singular para una función ϕ , si para todo $e(t, x, \xi) \in S_\gamma(V) \cap C_0^\infty(\Omega)$ se tiene que

$$\left\| \partial_x^r e \left(t, x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi \right\|_{L^2} \simeq O(h^\infty).$$

Definición 12 Un frente de onda $WF\phi$ de ϕ es el complemento de todos los conjuntos no singulares en $\mathbb{R}_{x'}^{n+1} \times \mathbb{R}_\xi^n$.

Ahora sea $T(x', \xi)$ una matriz tal que sus columnas $1, \dots, r, r+2, \dots, n$, están formadas por los vectores propios $e_j, j = 1, \dots, r, r+2, \dots, n$, del símbolo $A(x', \xi)$ y la $(r+1)$ -ésima columna está formada por el vector $|\xi|^{\frac{e_{r+1}-e_{r+2}}{\lambda_2-\lambda_3}}$. Sea $T(x', -i\partial/\partial x), A(x', -i\partial/\partial x), T^{-1}(x', -i\partial/\partial x)$ el operador pseudodiferencial correspondiente al símbolo $T(x', \xi), A(x', \xi), T^{-1}(x', \xi)$. La solución asintótica del problema (4.77) se busca en la forma $u = T(x', -i\partial/\partial x)v$. En este caso la función v satisface el sistema hiperbólico

$$-i\partial v/\partial t + B(t, x, -ih\partial/\partial x, h)v = 0(h^\infty), \quad (4.89)$$

con unos datos iniciales. El operador h^{-1} -pseudodiferencial B tiene el símbolo $b(x', \xi, h) = \sum_{k=0}^\infty h^k b_k(x', \xi)$, $b_k(x', \xi) \in S^{1-k}(\mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1})$, y el símbolo principal tiene la forma

$$b_0 = \begin{bmatrix} b_{11}^0 & 0 \\ 0 & b_{22}^0 \end{bmatrix}; b_{11}^0(x', \xi) = \begin{bmatrix} \lambda_1 I & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & d \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (4.90)$$

Aquí I es $(r \times r)$ matriz identidad, $d = |\xi|$. Cambiando la base es posible transformar el elemento d en una función arbitraria de la clase $S^1(\mathbb{R}_{x', \xi}^{2n+1})$ que no es igual a cero sobre Σ_1 , además se tiene que $\partial^m O(h^\infty)(t, x)/\partial_t^{m_1} \partial_x^{m_2} \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n \times [0, T])$, $|\partial^m O(h^\infty)(t, x)/\partial_t^{m_1} \partial_x^{m_2}| \leq C_N h^N$ para todo $N \in \mathbb{N}$.

El elemento $b_{r+2, r+1}^1(x', \xi)$ de la matriz $b_1(x', \xi)$ juega un papel importante en lo que sigue. Sea

$$\sigma := -ib_{r+2, r+1}^1 d / \{\lambda_2, \lambda_3\}, \gamma = \min_{\Sigma_1} \text{Re } \sigma(x', \xi).$$

Usando el método descrito en el libro [25] se obtiene el lema siguiente.

Lema 19 Suponga que se satisfacen las condiciones 4.65, 4.87, 4.88. Entonces existen símbolos matriciales $P_r(x, \xi) \in S^{-r}(\Omega_{x, \xi})$, $0 \leq r < \infty$, tales que:

- 1) $P_0(x, \xi)$ es una matriz invertible;

2) Sustituyendo $u = Pv$, donde P es un operador pseudodiferencial (P.D.O.) correspondiente al símbolo $P = \sum_{r=0}^N P_r$, el sistema (4.77) se reduce al sistema

$$\frac{\partial v}{\partial t} + b \left(x, -i \frac{\partial}{\partial x} \right) v = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.91)$$

microlocalmente en $\Omega_{x,\xi}$. Aquí $b \left(x, -i \frac{\partial}{\partial x} \right)$ es un operador P.D.O. con un símbolo diagonal por bloques $b(x, \xi)$ de la forma

$$b = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}, \quad b_{11} = \sum_{q=-N}^1 b_{11}^q, \quad b_{22} = \sum_{q=-N}^1 b_{22}^q.$$

Aquí $b_{jj}^q \in S^{-q}(\Omega_{x,\xi})$, $j = 1, 2$, y

$$b_{11}^1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 I & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & d \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad (4.92)$$

donde I es $(r \times r)$ matriz identidad y $d = |\xi|$. Además, los espectros de los operadores b_{11}^1 y b_{22}^1 no se intersectan.

3) Si el frente de onda de la solución $v(x, t)$ de la ecuación (4.91) pertenece a $\Omega_{x,\xi}$ para todo $t \in [0, T]$ entonces se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} (Pv) + \sum_{r=1}^n A_r(x) \frac{\partial}{\partial x_r} (Pv) = R_{N+1}v,$$

donde R_{N+1} es un P.D.O. con el símbolo $R_{N+1}(x, \xi) \in S^{-(N+1)}(\Omega_{x,\xi})$.

Note que cambiando la base se puede transformar el elemento d en (4.92) en una función arbitraria de la clase $S^1(\Omega_{x,\xi})$ que no sea igual a cero sobre Σ .

La construcción de FAS se reduce a la construcción de dos FAS para las ecuaciones (4.91) con símbolos b_{11}, b_{22} . En lo que sigue se construye FAS para el problema de Cauchy $v|_{t=0} = \phi(x) \exp\left(\frac{i}{h} S_0(x)\right)$, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $S_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

$$(-i) \frac{\partial v}{\partial t} + B_{11} \left(x, -i \frac{\partial}{\partial x} \right) v = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.93)$$

donde el operador pseudodiferencial (P.D.O.) B_{11} tiene símbolo b_{11} . Sea Λ_0 una variedad de Lagrange en $\Omega_{x,\xi}$ definida como $\Lambda_0 = \{x = x_0, \xi = \nabla S_0(x_0) : x_0 \in \text{Supp } \phi\}$.

Se construye FAS del problema (4.93), en "p"-representación con respecto a t , análogamente con la representación integral para las funciones de Weber (ver [28]).

Se usarán los operadores h^{-1} -P.D.O. (ver [19]) tales que

$$A \left(x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x) : = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int \exp \left(\frac{i}{h} \xi [x - y] \right) a(x, \xi) u(y) dy d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \exp(i\eta [x - y]) a(x, h\eta) u(y) dy d\eta.$$

Multiplicando el sistema (4.93) por h se obtiene que

$$(-ih) \frac{\partial v}{\partial t} + B_{11}^1 \left(x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) v + \sum_{q=-N}^0 h^{1+|q|} B_{11}^q \left(x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) v = 0, \quad (4.94)$$

con los mismos datos iniciales como para la ecuación (4.93).

Sea $U(t)$ el grupo del operador unitario generado por la extensión de Friedrichs del operador P.D.O. simétrico $\lambda(x, -ih\partial/\partial x) + \lambda^*(x, -ih\partial/\partial x)$ (aquí $*$ denota el operador formalmente conjugado). La solución se busca en forma $v = Uw$. En el dominio $|\lambda_2 - \lambda_3| \leq h^{1/2-\delta}$, $|t| \leq h^{1/2-\delta}$, $0 < \delta \leq 1/8$ la función w se busca en "p"-representación con respecto a t :

$$w(t, x, h) = \int_C \exp\{i/h^{-1}[tp + S(p, x)]\} \widehat{w}(p, x, h) dp, \quad (4.95)$$

aquí el contorno C pasa a lo largo del eje real y por debajo del punto $p = 0$ a lo largo de la circunferencia del radio $r = h^{1/2+2\delta}$. Sobre el contorno C se tiene que $|p|_C \leq h^{1/2-\delta}$. En el dominio $|\lambda_2 - \lambda_3| \geq h^{1/2-\delta_2}$ la función w puede ser construida por el método WKB estándar. Estas dos soluciones se unen usando la partición de la unidad.

Se definen los símbolos siguientes $\widetilde{\lambda}_j(t, x, \xi) = (\lambda_j - \lambda_2) \circ g_2^t(x, \xi)$, $j = 1, 3$, $\widetilde{d} := d \circ g_2^t(x, \xi)$, donde $g_2^t(x, \xi)$ es el flujo de Hamilton generado por el Hamiltoniano λ_2 . Los componentes de la función vectorial $y := \exp\{i/h^{-1}[S(p, x)]\} \widehat{w}(p, x, h)$ satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} (p + \widehat{\lambda}_1)y_j &= -h \sum_{k=1}^{r+2} \widehat{B}_{j,k} y_k; & p y_{r+1} + \widehat{d} y_{r+1} &= -h \sum_{k=1}^{r+2} \widehat{B}_{r+1,k} y_k; \\ (p + \widehat{\lambda}_{r+2})y_{r+2} &= -h \sum_{k=1}^{r+2} \widehat{B}_{r+2,k} y_k; & j &= 1, \dots, r \end{aligned} \quad (4.96)$$

donde $\widehat{B}_{j,k}$ son unos operadores h^{-1} -P.D.O., y $\widehat{\lambda}_j = \widehat{\lambda}_j(ih\partial/\partial p, x, -ih\partial/\partial x)$. La solución se busca en la clase de funciones $\exp\{i/h^{-1}[S(p, x)]\} \widehat{w}(p, x, h)$, con las funciones de fase S de la clase C^∞ y las amplitudes singulares de la forma

$$p^\sigma \left\{ \sum_{k,l,j=0}^M (h/p)^j h^l (\ln p)^l p^k c_{k,l,j}(x, h) \right\}, \quad M < \infty. \quad (4.97)$$

donde $c_{k,l,j}(x, h)$ son polinomios en h con coeficientes $C^\infty(R^n)$, y la función $\sigma(x) \in C^\infty$. Si las funciones y_k , $k \neq r+1$, pertenecen a la clase anteriormente definida es posible determinar la función y_{r+1} hasta la precisión $h^{\gamma N_1}$ para un número $\gamma > 0$:

$$y_{r+1} = -p^{-1} \widehat{d} y_{r+2} + \sum_{j=1}^{N_1} (-1)^j p^{-1} \left(h p^{-1} \widehat{B}_{r+1,r+1} \right)^j \left(-\widehat{d} y_{r+2} - h \sum_{k \neq r+1} \widehat{B}_{r+1,k} y_k \right) \quad (4.98)$$

Sustituyendo la expresión (4.98) en las ecuaciones (4.96) se obtiene que la fase $S(p, x)$ tiene que satisfacer una de las ecuaciones $p + \widetilde{\lambda}_j(-\partial S/\partial p, x, \partial S/\partial x)$, $j = 1, 3$, y las amplitudes satisfacen ecuación de transporte con coeficientes singulares. Las soluciones de esta ecuación de transporte pertenecerán a la clase (4.97).

Sean $b_{(11)i,j}^0(x, \xi)$ los elementos del símbolo matricial $b_{11}^0(x, \xi)$, correspondiente al operador B_{11}^0 de la ecuación (4.94). Los cálculos directos implican que

$$\sigma = -i b_{(11)r+1,r+2}^0 d / \{ \lambda_2, \lambda_3 \} (x, \nabla_x S(p, x)).$$

Sean $\Lambda_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, las variedades $g_j^t(\Lambda_0)$, $j = 1, 2, 3$, donde g_j^t son los desplazamientos a lo largo de las trayectorias de los sistemas de Hamilton con Hamiltonianos λ_j , $j = 1, 2, 3$, respectivamente. Suponga que en un punto $(x_0, \xi_0) \in \Lambda_0$ del espacio de fase $\mathbb{R}_{x,\xi}^{2n}$ la trayectoria $g_j^t(x_0, \xi_0)$

intersecta a la variedad Σ para un $t_0^j = t(x_0, \xi_0)$. En este momento se consideran las trayectorias $g_k^{t-t_0^j}(x_j, \xi_j)$ que salen del punto $(x_j, \xi_j) = g_j^{t_0^j}(x_0, \xi_0)$, para $k \neq j$. Estas trayectorias nuevas $g_k^{t-t_0^j}(x_j, \xi_j)$ se llamarán las trayectorias generadas. La familia de las trayectorias generadas

$$\left\{ g_k^{t-t_0^j}(x_j, \xi_j) : (x_j, \xi_j) = g_j^{t_0^j}(x_0, \xi_0), (x_0, \xi_0) \in \Lambda_0, k \neq j \right\}$$

forma una nueva variedad de Lagrange $\Lambda_{kj} \subset \mathbb{R}_{x,\xi}^{2n}$.

Suponga que en el momento de tiempo inicial el vector de los datos iniciales tiene la forma

$$\phi = \{0, \dots, 0, 1, (\lambda_3 - \lambda_2)/d\}^T \Big|_{\Lambda_0} \phi_0(x) \exp\{ih^{-1}S_0\}.$$

Resulta que el frente de onda del término principal de FAS se concentra sobre las variedades $\Lambda_3(t)$, Λ_{23} y Λ_{13} . Suponga que

$$\Lambda_3(t), \Lambda_{23}(t), \Lambda_{13}(t) \subset \Omega_{x,\xi} \text{ para } 0 \leq t \leq T$$

y que

$$\Lambda_0 \subset \Omega_{x,\xi}, \Lambda_0 \cap \Sigma = \emptyset.$$

Además suponga que en el momento de tiempo \bar{t} se tiene que

$$\Lambda_3(\bar{t}) \cap \Sigma = \emptyset, \Lambda_{23}(\bar{t}) \cap \Sigma = \emptyset, \Lambda_{13}(\bar{t}) \cap \Sigma = \emptyset,$$

y la variedad $\Lambda_3(t)$ intersecta a Σ para un t tal que $0 < \bar{t}_1 < t < \bar{t}$. Para simplificar el razonamiento es posible suponer que las variedades $\Lambda_3(t)$, $\Lambda_{23}(t)$, $\Lambda_{13}(t)$ tienen proyecciones difeomorfas π_x de $\mathbb{R}_{x,\xi}^{2n}$ sobre el plano $\xi = 0$, para todo $t \in [0, \bar{t}]$. Esto significa que no hay puntos focales. El caso general puede ser investigado usando el operador canónico de Maslov.

Teorema 13 *Existe una solución FAS del problema (4.94) de la forma:*

1) *Para $t \in [0, \bar{t}_1)$ la solución FAS es la solución asintótica WKB*

$$FAS_N(x, t, h) = C(x, t) \{0, \dots, 0, 1, (\lambda_3 - \lambda_2)/d\}^T \Big|_{\Lambda_3(t)} \times \exp\left(\frac{i}{h}S_3(x, t)\right) (1 + O(h)); \partial_t^\alpha C(x, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), 0 \leq \alpha \leq \infty, \quad (4.99)$$

donde S_3 es la función de fase sobre la variedad $\Lambda_3(t) = g_3^t \circ \Lambda_0$;

2) *Suponga que $\text{Re } \sigma(x, \xi) \Big|_{\Omega_{x,\xi}} - 1/2 < 0$. Para los momentos de tiempo $t \geq \bar{t}$ la solución FAS tiene forma*

$$FAS_N(x, t, h) = h^{-1/2 + \sigma \circ g_2^{t-t_0^3(x_1, \xi_1)}} \tilde{C}(x, t) \{0, \dots, 0, 1, 0\}^T \times \exp\left(\frac{i}{h}S_{23}(x, t)\right) (1 + o(1)), \quad (4.100)$$

donde S_{23} es la función de fase sobre la variedad Λ_{23} , $g^{t-t_0^3(x_1, \xi_1)}(x_1, \xi_1) = (x, \partial S_{23}/\partial x)$, y $o(1) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.

Existe una función $\phi_0(x) \in C_0^\infty(\pi_x(\Omega_{x,\xi}))$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} |FAS_N(x, t, h)|^2 dx \geq h^{-\delta}$ para $t \geq \bar{t}$ uniformemente con respecto a $h \in (0, 1]$, sin embargo se tiene que $\beta > \int_{\mathbb{R}^n} |FAS_N(x, 0, h)|^2 dx \geq \alpha$, para $0 < \alpha, \beta < \infty$;

3) Los residuos en las fórmulas (4.99), (4.100) son unas funciones de la clase C_0^∞ que satisfacen las estimaciones siguientes

$$\left| \partial_t^\beta \partial_x^\alpha O(h^l) \right| \leq C_{l,\beta,\alpha} h^{l-|\beta|-|\alpha|};$$

4) FAS_N existe para todo $N < \infty$ y satisface la ecuación (4.94) hasta la precisión $O(h^N)$ ($N < \infty$).

4.4. Dos formas modelo para el problema de Cauchy de un sistema lineal real hiperbólico simétrico de primer orden

Considere la solución asintótica del problema de Cauchy de un sistema lineal real hiperbólico simétrico de primer orden con los datos iniciales de alta frecuencia, i.e.

$$Q\left(t, x; -ih \frac{\partial}{\partial t}, -ih \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0, \quad u|_{t=0} = \phi \exp\left(\frac{iS_0}{h}\right). \quad (4.101)$$

Aquí $u \in \mathbb{C}^k$; $x' = (t, x)$; $\xi' = (\eta, \xi)$; $x \in \mathbb{R}^n$; $\xi \in \mathbb{R}^n$ y

$$Q(x', \xi') := A_0(x) \eta + \sum_{\nu=1}^n A_\nu(x) \xi_\nu + B(x)$$

es un símbolo matricial de orden k hiperbólico con respecto a η .

Suponga que $A_0, A_0^{-1}, A_\nu, B \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n)$; $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $S_0 \in C^\infty(U)$, donde $Supp \phi \subset U$.

Sea N el conjunto característico del símbolo $Q(x', \xi')$, i.e.

$$N := \{x', \xi' : \det Q(x', \xi') = 0\},$$

y denote por Σ el conjunto siguiente:

$$\Sigma := \{(x', \xi') \in N : \dim Ker Q(x', \xi') > 1\}.$$

En los puntos $(x', \xi') \in N \setminus \Sigma$ la función $\det Q(x', \xi')$ tiene ceros simples (con respecto a la variable η), y es posible calcular la solución asintótica del problema (4.101) usando el método WKB (ver [33],[19]).

Suponga que $\det Q(x', \xi') = \prod_{j=1}^k (\lambda_j + \eta)$. Evidentemente, Σ es el conjunto de los puntos (x, η, ξ) en los cuales coinciden algunas dos raíces, i.e. $\lambda_m(x, \xi) = \lambda_l(x, \xi)$. Por lo cual se tiene que $\eta = \lambda_m(x, \xi) = \lambda_l(x, \xi)$.

Evidentemente en el dominio $\mathbb{R}_{x,\xi}^{2n} \setminus \Sigma$ las raíces $\lambda_j, j = 1, \dots, k$, pertenecen a $S^1(\mathbb{R}_{x,\xi}^{2n} \setminus \Sigma)$. Sean $e_j(x', \xi), j = 1, \dots, k$, los vectores propios de la matriz $A_0^{-1} \sum_{\nu=1}^n A_\nu \xi_\nu$ que pertenecen a la clase $S^0(\mathbb{R}_{x,\xi}^{2n} \setminus \Sigma)$.

Suponga que la variedad de Lagrange

$$\Lambda_0 = \{x, \xi : x = x_0, \xi = \nabla S_0(x_0), x_0 \in U\}$$

no interseca al conjunto Σ , i.e.

$$\Sigma \cap \Lambda_0 = \emptyset. \quad (4.102)$$

En este caso existe $T \in \mathbb{R}_+^1$, tal que para $0 \leq t \leq T$ la solución asintótica WKB del problema (4.101) tiene la forma

$$u_N = \sum_{j=1}^k \exp\left(\frac{i}{h} S_j(x, t)\right) e_j(x', \xi) |_{\xi=\nabla S_j} C_j(x, t) \{1 + O(h)\},$$

y

$$Qu_N = O(h^N).$$

Aquí para un t fijo los residuos y todas sus derivadas pertenecen a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, y se tiene que

$$|\partial_t^\alpha \partial_x^\beta O(h^N)| \leq C_{\alpha, \beta} h^{N-\alpha-|\beta|}, \quad |\partial_t^\alpha \partial_x^\beta O(h)| \leq \tilde{C}_{\alpha, \beta} h^{1-\alpha-|\beta|}.$$

Las funciones de fase S_j se determinan a partir de las siguientes ecuaciones de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S_j}{\partial t} + \lambda_j(x', \nabla S_j) = 0, \quad S_j|_{t=0} = S_0(x),$$

y los coeficientes C_j se determinan a partir de las ecuaciones de transporte.

Durante la propagación de ondas las variedades de Lagrange

$$\Lambda_j(t) = \{x, \xi | x = x, \xi = \nabla S_j(x, t)\}$$

pueden intersectar el conjunto de multiplicidad Σ .

En el caso cuando en una vecindad del conjunto Σ las raíces características λ_j y los vectores propios no pierden suavidad la solución asintótica puede ser construida usando el método desarrollado en el trabajo [5]. Sin embargo en el caso general en una vecindad del conjunto Σ las raíces coincidentes pierden su suavidad sobre Σ . Se demuestra que es posible resolver estas singularidades pasando en "p"-representación con respecto al grupo de variables y usando unas amplitudes singulares y unas funciones de fase singulares.

Bajo la siguiente suposición (Suposición A)

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker} Q(x', \xi') |_{N \setminus \Sigma} &= 1, \\ \dim \text{Ker} Q(x'_0, \xi'_0) |_{\Sigma} &= 2, \\ \text{rank Hess det } Q|_{(x'_0, \xi'_0)} &= 3, \end{aligned}$$

para $(x'_0, \xi'_0) \in \Sigma$, $n \geq 3$, el sistema (4.101) microlocalmente (i.e. en una vecindad cónica $\Omega_{x'_0, \xi'_0}$ con respecto a ξ') se reduce a dos formas estándar (ver [34]). Por lo tanto es necesario desarrollar unos métodos asintóticos adecuados para estas formas estándar.

Primero se describen estas formas estándar y después el método asintótico correspondiente.

La Suposición A implica que existen operadores P.D.O. A, B tales que al multiplicar la ecuación (4.101) por la izquierda por el P.D.O. A y por la derecha por el P.D.O. B el símbolo Q microlocalmente (en $\Omega_{x'_0, \xi'_0}$) se reduce a la forma

$$AQB = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}, \tag{4.103}$$

donde $P(x', \xi')$ es (2×2) matriz con el símbolo principal real simétrico $P_1(x', \xi')$ de la clase $S^1(\Omega_{x'_0, \xi'_0})$ y el símbolo principal $Q_1(x', \xi') \in S^1(\Omega_{x'_0, \xi'_0})$ de la matriz \tilde{Q} es elíptico en $\Omega_{x'_0, \xi'_0}$. Evidentemente, la matriz simétrica $P_1(x', \xi')$ siempre puede ser representada en la forma

$$P_1(x', \xi') = \begin{bmatrix} q+r & s \\ s & q-r \end{bmatrix},$$

donde $q, r, s \in S^1(\Omega_{x'_0, \xi'_0})$ son de primer orden y homogéneos con respecto a ξ' . Se tiene que

$$\det P_1 = q^2 - (s^2 + r^2)$$

y los valores propios de la matriz $P_1(x', \xi')$ son $\lambda_{\pm} = q \pm \sqrt{r^2 + s^2}$.

Esto implica que en $\Omega_{x'_0, \xi'_0}$ se tiene que

$$\det Q = (q^2 - r^2 - s^2) Q_1(x', \xi'), \text{ con } Q_1(x', \xi')|_{\Omega_{x'_0, \xi'_0}} \neq 0.$$

Note que $\text{rank Hess det } Q = 3$ si y sólo si $\nabla q, \nabla r, \nabla s$ son linealmente independientes. Denote por H_p, H_r, H_q, H_s los campos vectoriales de Hamilton correspondientes a los Hamiltonianos p, r, q, s (en el espacio $\mathbb{R}_{x', \xi'}^{2n+2}$), respectivamente. Por lo tanto se tiene que $H_p = 2(qH_q - rH_r - sH_s)$. Este campo vectorial es igual a cero en los puntos $(x', \xi') \in \Sigma$. Esto implica que se tiene una linealización definida de manera invariante:

$$L = 2(dq \otimes H_q - dr \otimes H_r - ds \otimes H_s)$$

sobre Σ . Note que L es un endomorfismo lineal sobre $T_{(x', \xi')}(\mathbb{R}^{2n+2})$. Calculando el polinomio característico sobre la base H_r, H_q, H_s se obtiene que éste tiene un valor propio igual a cero y dos valores propios λ que satisfacen la ecuación (ver [34]):

$$\lambda^2 = 4 \left(\{r, q\}^2 + \{s, q\}^2 - \{r, s\}^2 \right).$$

En el caso cuando $\lambda \neq 0$ se tienen dos casos diferentes:

$$a) \lambda^2 > 0 \Leftrightarrow \{r, s\}^2 < \{r, q\}^2 + \{s, q\}^2; \quad b) \lambda^2 < 0 \Leftrightarrow \{r, s\}^2 > \{r, q\}^2 + \{s, q\}^2.$$

Multiplicando el símbolo $P(x', \xi')$ por símbolos matriciales A, A^t elípticos en $\Omega_{x'_0, \xi'_0}$ con los elementos en $S^{-1/4}(\Omega_{x', \xi'})$ es posible reducir el problema con la precisión hasta unas funciones planas sobre $\Sigma \cap U$, al problema con el símbolo

$$P = \begin{bmatrix} \tilde{q} + \tilde{r} & \tilde{s} \\ \tilde{s} & \tilde{q} - \tilde{r} \end{bmatrix}, \quad (4.104)$$

donde las funciones $\tilde{q}, \tilde{r}, \tilde{s}$ satisfacen las condiciones

$$\lambda^2 < 0 \Leftrightarrow \{\tilde{q}, \tilde{r}\} = \{\tilde{q}, \tilde{s}\} = 0 \text{ y } \{\tilde{r}, \tilde{s}\} = \pm 1; \quad (4.105)$$

$$\lambda^2 > 0 \Leftrightarrow \{\tilde{q}, \tilde{r}\} = \{\tilde{r}, \tilde{s}\} = 0 \text{ y } \{\tilde{s}, \tilde{q}\} = 1. \quad (4.106)$$

Note que los coeficientes a, b, c, d dependen de todos los impulsos ξ' , i.e. de η, ξ .

Ahora se calculan las funciones q, r, s para la ecuación de cristalóptica (ver [8]). Sean $\varepsilon = \|\delta_{ij}\varepsilon_j\|$ el tensor de la permeabilidad dieléctrica y μ la constante de permeabilidad, entonces se tiene que

$$\frac{1}{c} \frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial t} = \text{rot} H, \quad \frac{1}{c} \mu \frac{\partial H}{\partial t} = -\text{rot} E, \quad \text{div}(\varepsilon E) = 0, \quad \text{div} H = 0,$$

donde H, E son los vectores de campo magnético y eléctrico, respectivamente. Suponga que $\varepsilon_1(x) > \varepsilon_2(x) > \varepsilon_3(x); \varepsilon(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Se introduce la notación siguiente:

$$\begin{aligned} A_1^2 &= \frac{1}{\mu\varepsilon_3} - \frac{1}{\mu\varepsilon_2} > 0, \quad A_2^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon_1} - \frac{1}{\mu\varepsilon_3} < 0, \quad A_3^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon_2} - \frac{1}{\mu\varepsilon_1} > 0; \\ \Psi &= \frac{\xi^2 - \xi_1}{\mu\varepsilon_1} + \frac{\xi^2 - \xi_2}{\mu\varepsilon_2} + \frac{\xi^2 - \xi_3}{\mu\varepsilon_3}; \\ X &= \left\{ |A_2|^2 \xi_2^2 + (A_1 \xi_1 + A_3 \xi_3)^2 \right\} \left\{ |A_2|^2 \xi_2^2 + (A_1 \xi_1 - A_3 \xi_3)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Sobre la esfera $|\xi| = 1$ el conjunto de cambio de multiplicidad Σ es la suma de dos conjuntos disjuntos:

$$\begin{aligned}\Sigma^+ &= \{x, \xi : \xi_2 = 0, A_1\xi_1 + A_3\xi_3 = 0\}, \\ \Sigma^- &= \{x, \xi : \xi_2 = 0, A_1\xi_1 - A_3\xi_3 = 0\}.\end{aligned}$$

Considere la función

$$\sqrt{\Psi \pm \sqrt{X}} = \sqrt{\Psi} \sqrt{1 \pm \frac{\sqrt{X}}{\Psi}} = \sqrt{\Psi} \chi_1 \pm \frac{\sqrt{X}}{\sqrt{\Psi}} \chi_2,$$

donde $\chi_1(x, \xi), \chi_2(x, \xi) \in S^0$ y $\sqrt{\Psi}, \sqrt{X/\Psi} \in S^1$.

En una vecindad de Σ^\pm se introducen las funciones q, r_\pm, s_\pm tales que

$$\begin{aligned}q &= \eta - \sqrt{\Psi} \chi, \\ r_\pm &= |A_2| \xi_2 \sqrt{\chi_2} \frac{|A_2|^2 \xi_2^2 + (A_1\xi_1 \mp A_3\xi_3)^2}{\Psi}, \\ s_\pm &= (A_1\xi_1 \pm A_3\xi_3) \sqrt{\chi_2} \frac{|A_2|^2 \xi_2^2 + (A_1\xi_1 \mp A_3\xi_3)^2}{\Psi}.\end{aligned}$$

Por lo tanto los valores propios de la segunda variación del sistema dinámico de Hamilton con el Hamiltoniano $q^2 - r_\pm^2 - s_\pm^2$ (en los puntos de Σ) determinarán las formas normales.

Con la precisión hasta unas funciones planas sobre Σ , i.e. con la precisión hasta $O(|\tilde{r}|^\infty + |\tilde{s}|^\infty)$ (ver [34]) el símbolo principal P_1 del operador (4.103) se puede reducir a las formas (4.104), donde las funciones $\tilde{q}, \tilde{r}, \tilde{s}$ satisfacen las condiciones (4.105) ó (4.106).

Usando el teorema de Egorov (ver [36]) y los operadores integrales de Fourier se puede reducir (ver [34]) la construcción de las soluciones asintóticas locales (ver [28]) del problema (4.101) en el caso (4.105) al problema de la construcción de la solución asintótica del problema de Cauchy con los datos iniciales de alta frecuencia para el sistema

$$-i \frac{\partial u}{\partial t} + \begin{bmatrix} -i \frac{\partial}{\partial x_1} & x_1 (-i) \frac{\partial}{\partial x_2} \\ x_1 (-i) \frac{\partial}{\partial x_2} & i \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} u + \hat{P}_1 u + \hat{P}_0 u + \dots = O(h^\infty). \quad (4.107)$$

Aquí el símbolo del operador P.D.O. \hat{P}_1 es una función plana sobre $\Sigma \cap \Omega_{x'_0, \xi'_0}; |\xi_2| / |\xi| \geq Cte. > 0$, y $P_\mu \in S^\mu(\Omega_{x'_0, \xi'_0}), \mu = 0, -1, -2, \dots$.

En el caso (4.106) el problema (4.101) puede ser reducido al problema de la construcción de la solución asintótica de problema de Cauchy con los datos iniciales de alta frecuencia para el sistema

$$-i \frac{\partial u}{\partial t} + \begin{bmatrix} -i \frac{\partial}{\partial x_1} & t (-i) \frac{\partial}{\partial x_2} \\ t (-i) \frac{\partial}{\partial x_2} & i \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} u + \hat{P}'_1 u + \hat{P}'_0 u + \dots = O(h^\infty). \quad (4.108)$$

Aquí el símbolo del operador P.D.O. \hat{P}'_1 es una función plana sobre $\Sigma \cap \Omega_{x'_0, \xi'_0}; |\xi_2| / |\xi| \geq Const > 0$, y $P_\mu \in S^\mu(\Omega_{x'_0, \xi'_0})$.

En esta sección se considera el problema (4.108). Se propone considerar el problema (4.108) directamente sin reducirlo a una ecuación con un símbolo principal escalar. Sea $h = 1/|\xi|$ y se consideran los operadores h^{-1} -pseudodiferenciales (ver [19]):

$$\begin{aligned}A \left(x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) u &: = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int \exp \frac{i}{h} (\xi, (x - y)) a(x, \xi) u(y) dy d\xi = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \exp \frac{i}{h} (\eta, (x - y)) a(x, h\eta) u(y) dy d\eta.\end{aligned}$$

Multiplicando el sistema (4.108) por h se obtiene que

$$-ih\frac{\partial u}{\partial t} + h \begin{bmatrix} -i\frac{\partial}{\partial x_1} & t(-i)\frac{\partial}{\partial x_2} \\ t(-i)\frac{\partial}{\partial x_2} & i\frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} u + \sum_{j=-N}^1 h^{1-j} \widehat{P}'_j \left(x', -i\frac{\partial}{\partial x'} \right) u = 0. \quad (4.109)$$

Como se investiga la transformación del plano de onda al pasar el dominio de cambio de multiplicidad se consideran los datos iniciales de la forma

$$u|_{t=\tau} = \phi(x) \exp \left(\frac{i}{h} \sum_{j=1}^n x_j \omega_j \right); |\omega_2| \geq Const > 0; \sum_{j=1}^n \omega_j^2 = 1; \tau < 0; \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (4.110)$$

Note que el símbolo principal del operador P_1 satisface la estimación (ver [34])

$$|P_1| \leq C_m \left| \sum_{\alpha+\beta+\gamma=m} \eta^\alpha t^\beta \xi_1^\gamma \right|, \text{ para todo } m < \infty. \quad (4.111)$$

En lo que sigue se considera la solución asintótica v tal que $(-ih\frac{\partial}{\partial t})^l v = O(h^{(1/2-\delta)l})$ y en el espacio de fase el soporte (ver [28]) de esta solución asintótica está contenido en el dominio $|\xi_1| \leq h^{1/2-\delta}$, $|t| < h^{1/2-\delta}$. En este caso la estimación (4.111) implica que

$$P_1 \left(x', -ih\frac{\partial}{\partial x'} \right) v = O(h^\infty).$$

Los resultados obtenidos en [28] implican que para $|\omega_1| \geq Ch^{(1-\delta)/2}$, $\delta > 0$ ó $|t| > h^{1/2-\delta}$ es posible aplicar directamente el método WKB al problema (4.109),(4.110). Por lo tanto ahora se considera la solución asintóticas del problema (4.109),(4.110) en el dominio

$$|t| < h^{1/2-\delta}; |\omega_1| < h^{(1-\delta)/2}; |\omega_2| \geq Const > 0, \text{ con } 0 < \delta < 1/7. \quad (4.112)$$

Sea

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

y se busca la solución del problema en la forma

$$\begin{aligned} u &= \exp \frac{i}{h} \left(\sum_{j=1}^n \omega_j x_j + \frac{t^2 \omega_2}{2} \right) Uv, \\ v &= \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_C \exp \left(\frac{i}{h} pt \right) w(x, p, h) dp, \text{ con } \omega_2 < 0. \end{aligned} \quad (4.113)$$

Aquí el contorno C con $\rho = h^{1/2+3\delta/2}$ está presentado en la Figura 11

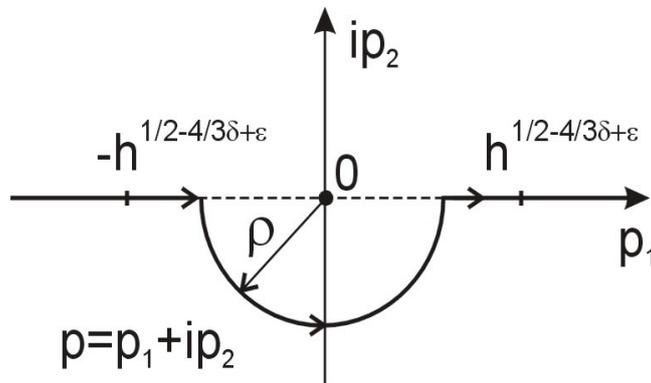


Figura 14

Para $\omega_2 > 0$ es necesario sustituir ω_j por $-\omega_j$ en la fórmula (4.113) y considerar el complejo conjugado de w . La función w es analítica con respecto a t para $|p| \leq h^{1/2-\delta}$ y es igual a cero para $|t| > 2h^{1/2-\delta}$. El método de Maslov se basa en la representación de Fourier de las funciones de Airy y el método propuesto en esta sección se basa en la representación de Fourier de las funciones de Weber. Por lo tanto es necesario trabajar en una vecindad pequeña del punto $p = 0$, con respecto a h .

Para la función $w(x, p)$ se obtiene la ecuación siguiente

$$\begin{bmatrix} p & \omega_1 \\ \omega_1 & p + 2\omega_2 \left(ih \frac{\partial}{\partial p} \right) \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} ih \frac{\partial}{\partial p} \left(-ih \frac{\partial}{\partial x_2} \right) & -ih \frac{\partial}{\partial x_1} \\ -ih \frac{\partial}{\partial x_1} & ih \frac{\partial}{\partial p} \left(ih \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \end{bmatrix} w + \sum_{j=-N}^1 h^{1-j} \widehat{P}'_j \left(x, -ih \frac{\partial}{\partial p}; p, -ih \frac{\partial}{\partial x_1} + \omega_1, \dots, -ih \frac{\partial}{\partial x_n} + \omega_n \right) w = 0. \quad (4.114)$$

Este sistema se resuelve asintóticamente usando que sobre el contorno C se tiene que

$$|\operatorname{Im} p|_C \leq h^{1/2+3\delta/2}, h^{1/2+3\delta/2} \leq |p|_C \leq h^{1/2-\delta_1}, 0 < \delta_1 < \delta. \quad (4.115)$$

Note que para obtener la estimación

$$\left| \frac{1}{1 + \frac{\omega_1^2}{p^2}} \right|_C \geq \frac{1}{2}, \text{ para } |\omega_1| < h^{1/2+\gamma}, \gamma < 1/7,$$

el contorno C con $\rho = h^{1/2+3\delta/2}$ se sustituye por el contorno C con $\rho = h^{1/2+\gamma-\epsilon}$ y con $0 < (\gamma - \epsilon) < 1/7$.

Aplicando el método WKB la solución w se busca en la forma de una serie formal

$$\exp\left(\frac{i}{h} S(p)\right) \sum_{j=0}^{\infty} h^j f_j(x, p), \quad (4.116)$$

donde la fase S tiene la forma

$$S(p) = \frac{p^2}{4\omega_2} - \frac{\omega_1^2}{2\omega_2} \ln p, \quad (4.117)$$

y las funciones f_j satisfacen las estimaciones

$$h^j \left| h^{|\alpha|+|\beta|} \partial_p^\alpha \partial_x^\beta f_j \Big|_C \right| \leq C_{\alpha,\beta} h^{\Delta(|\alpha|+|\beta|)+\Delta j},$$

para $x \in K \Subset \mathbb{R}^n$, y Δ es un número positivo. La fase se elige tal que al sustituir (4.116) en la ecuación (4.114) el símbolo principal matricial obtenido

$$\begin{bmatrix} p & \omega_1 \\ \omega_1 & \frac{\omega_1^2}{p} \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

tiene un valor propio igual a cero. Los vectores propios e_1, e_2 de la matriz (4.118) son de la forma

$$e_1 = (-\omega_1/p, 1)^T, \quad e_2 = (1, \omega_1/p)^T$$

con los valores propios $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = p + \omega_1^2/p$, respectivamente. La matriz adjunta de (4.118) tiene los vectores propios

$$e_1^* = (-\omega_1/\bar{p}, 1)^T / (1 + \omega_1^2/\bar{p}^2), \quad e_2^* = (1, \omega_1/\bar{p})^T / (1 + \omega_1^2/\bar{p}^2).$$

Evidentemente, se tiene que $(e_j, e_k^*) = \delta_{jk}$. Ahora es posible aplicar el método WKB estándar para calcular las amplitudes f_j . El término principal f_0 es igual a $e_1 C_0(x, p)$, donde el coeficiente $C_0(x, p)$ se determina a partir de la condición de solubilidad de la ecuación con respecto a f_1 .

Poniendo formalmente igual a cero a las expresiones que multiplican a h^j se obtienen las ecuaciones para las amplitudes f_j . En efecto para f_1 se tiene que

$$\left\{ \begin{bmatrix} p & \omega_1 \\ \omega_1 & \frac{\omega_1^2}{p} \end{bmatrix} f_1 + \begin{bmatrix} 0 & -i \frac{\partial}{\partial x_1} \\ -i \frac{\partial}{\partial x_1} & 2\omega_2 \left(i \frac{\partial}{\partial p} \right) \end{bmatrix} f_0 + P'_0 \left(x, -\frac{p}{2\omega_2} + \frac{\omega_1^2}{2\omega_2 p}; p, \omega_1, \dots, \omega_n \right) f_0 \right\} = 0. \quad (4.119)$$

Para obtener la solución asintóticas del problema de Cauchy de la ecuación (4.108) se usan dos soluciones asintóticas. La primera es de la forma (4.113) y la segunda es

$$\begin{aligned} u_- &= \exp \left(\frac{i}{h} \left[\sum_{j=1}^n \omega_j x_j - \frac{t^2 \omega_2}{2} \right] \right) U_- v_-, \quad U_- = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ v_- &= \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_C \exp \left(\frac{i}{h} p t \right) w_-(x, p, h) dp, \quad \omega_2 > 0, \end{aligned} \quad (4.120)$$

y

$$w_- = \exp \left(-\frac{i}{h} S(p) \right) \sum_{j=0}^{\infty} h^j f_j^-(x, p). \quad (4.121)$$

Aquí la fase $S(p)$ tiene la forma (4.117) y las amplitudes $f_j^-(x, p)$ se construyen análogamente como las amplitudes $f_j(x, p)$. Para $\omega_2 < 0$ es necesario reemplazar ω_j por $-\omega_j$ en la fórmula (4.120) y considerar el complejo conjugado de la solución asintótica (4.125).

En el método WKB la condición de solubilidad de la ecuación con respecto a f_1 se llama la ecuación de transporte y tiene la forma

$$2\omega_2 \frac{\partial C_0}{\partial p} + \frac{2\omega_1}{p} \frac{\partial C_0}{\partial x_1} - i (P'_0 e_1, e_1^*) C_0 = 0. \quad (4.122)$$

Para resolver la ecuación (4.122) se aplica el método característico estándar

$$\frac{dp}{d\tau} = 2\omega_2; \quad \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{2\omega_1}{p};$$

y se obtiene la solución siguiente

$$x_1 = \frac{\omega_1}{\omega_2} \ln p + x_1^0.$$

Como se tiene que

$$|\omega_1 \ln p|_C < h^{1/2-\Delta/2}, \quad (4.123)$$

entonces usando la extensión cuasianalítica de los datos iniciales y el coeficiente $(P'_0 e_1, e_1^*)$ (ver [37]) se obtiene la siguiente solución de la ecuación (4.122) con la precisión hasta $O(h^\infty)$:

$$C_0(x, p) = C(x_0(x, p), p_0) \exp \frac{i}{\omega_2} \int_{p_0}^p (P'_0 e_1, e_1^*)(x_0(x, \tau), \tau) d\tau.$$

Aquí

$$x_1^0 = x_1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \ln p; \quad x_j^0 = x_j \text{ para } j \geq 2.$$

Así se obtiene que

$$f_0 = C_0(x, p) e_1(p).$$

Por lo tanto es posible calcular las amplitudes f_j paso por paso. El siguiente teorema es válido.

Teorema 14 1. Para $0 < \delta < 1/7$ existen $\Delta(\delta) > 0$ y las funciones f_j^-, f_j para $j \in \mathbb{Z}_+$, las cuales son funciones polinomiales con respecto a $p, p^{-1}, \ln p$ y tienen coeficientes de la clase $C^\infty(\mathbb{R}_x^n)$. Las funciones f_j, f_j^- satisfacen las estimaciones (4.115), (4.123) sobre el contorno C y la función

$$u_N = u_N^+ + u_N^-,$$

donde

$$u_N^+ = \exp \left(\frac{i}{h} \left[\sum_{j=1}^n \omega_j x_j + \frac{t^2 \omega_2}{2} \right] \right) U \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_C \exp(ipt) w_N(p, x, h) dp, \quad (4.124)$$

$$u_N^- = \exp \left(-\frac{i}{h} \left[\sum_{j=1}^n \omega_j x_j - \frac{t^2 \omega_2}{2} \right] \right) U_- \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_C \exp(ipt) \bar{w}_N(p, x, h) dp$$

$$w_N = \exp \left(\frac{i}{h} S(p) \right) \sum_{j=0}^{N_1} h^j f_j, \quad \text{con } N_1 = \left[\frac{N}{\Delta} \right] + 3, \quad (4.125)$$

satisface el sistema (4.108) en el dominio $\mathbb{R}_x^n \setminus \{t : |t| < h^{1/2-\delta}\}$ con la precisión hasta $O(h^N)$. Aquí

$$\text{Sup}_{x \in \mathbb{R}^n, |t| < h^{1/2-\delta}} |\partial_t^\alpha \partial_x^\beta O(h^N)| \leq C_{\alpha, \beta} h^{N-\alpha-|\beta|}.$$

2. Denote por $P'_0(x', \xi')_{ij}$ los elementos del operador matricial $P'_0(x', \xi')$ y sean P_{ij} sus valores en el punto $x' = (x, 0)$, $\xi' = (0, \omega)$. En este caso para $t \leq -h^{1/2-\delta}$ y $\omega_2 < 0$ se tiene que

$$u_N^+ = \exp \left(\frac{i}{h} \left[\sum_{j=1}^n \omega_j x_j - \frac{\omega_2 t^2}{2} \right] \right) \exp \left(-i \frac{\pi}{4} \right) \left[- \left(\frac{\omega_1}{\omega_2 t} \right)^2 P_{21} + P_{12} \right]$$

$$-\frac{\omega_1}{2\omega_2 t} \left(-P_{11} + \frac{P_{22}}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2 t} \right)^2} \right) + O \left(\left[\frac{\omega_1^2}{t} + |\omega_1| \right] |\ln t| \right) \left[U \left(\frac{\omega_1}{2\omega_2 t} \right) \right]. \quad (4.126)$$

$$u_N^- = \exp \left(\frac{i}{h} \left[\sum_{j=1}^n \omega_j x_j + \frac{\omega_2 t^2}{2} \right] \right) \exp \left(\frac{i\pi}{4} \right) \left[- \left(\frac{\omega_1}{\omega_2 t} \right)^2 P_{21} + P_{12} \right. \\ \left. - \frac{\omega_1}{2\omega_2 t} \left(-P_{11} + \frac{P_{22}}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2 t} \right)^2} \right) + O \left(\left[\frac{\omega_1^2}{t} + |\omega_1| \right] |\ln t| \right) \right] U_- \left(-\frac{\omega_1}{2\omega_2 t} \right) \quad (4.127)$$

Además, para $\mu_0 = -\frac{i\omega_1^2}{2h\omega_2}$, $\tilde{\mu}_0 = \frac{i\omega_1^2}{2h\omega_2}$, $t \geq h^{1/2-\delta}$ y $\omega_2 < 0$ se tiene que

$$u_N = u_N^+ + u_N^-,$$

$$u_N^+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(\frac{i}{h} \left[\sum_{j=1}^n \omega_j x_j + \frac{\omega_2 t^2}{2} \right] \right) U (u_N^1, u_N^2)^T + StP^+,$$

$$u_N^- = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(\frac{i}{h} \left[\sum_{j=1}^n \omega_j x_j - \frac{\omega_2 t^2}{2} \right] \right) U_- (\tilde{u}_N^1, \tilde{u}_N^2)^T + StP^-,$$

donde

$$u_N^1 = P_{21} (1 - \exp i\pi (\mu_0 - 2)) \Gamma \left(\frac{\mu_0 - 2}{2} \right) h^{\frac{\mu_0-3}{2}} t^{\frac{2-\mu_0}{2}} \omega_1^3 (1 + O(h^{\delta_1}));$$

$$u_N^2 = -P_{21} (1 - \exp i\pi (\mu_0 - 3)) \Gamma \left(\frac{\mu_0 - 1}{2} \right) h^{\frac{\mu_0-2}{2}} t^{\frac{1-\mu_0}{2}} \omega_1^2 (1 + O(h^{\delta_1}));$$

$$\tilde{u}_N^1 = -P_{21} (1 - \exp i\pi (2 - \tilde{\mu}_0)) \Gamma \left(\frac{\tilde{\mu}_0 - 2}{2} \right) h^{\frac{\tilde{\mu}_0-3}{2}} t^{\frac{2-\tilde{\mu}_0}{2}} \omega_1^3 (1 + O(h^{\delta_1}));$$

$$\tilde{u}_N^2 = -P_{21} (1 - \exp i\pi (3 - \tilde{\mu}_0)) \Gamma \left(\frac{\tilde{\mu}_0 - 1}{2} \right) h^{\frac{\tilde{\mu}_0-2}{2}} t^{\frac{1-\tilde{\mu}_0}{2}} \omega_1^2 (1 + O(h^{\delta_1}));$$

y la expresión StP^+ , StP^- tiene la forma (4.126) y (4.127) en el punto $t = h^{1/2-\delta}$, respectivamente.

Para obtener la solución asintótica para $\omega_2 > 0$ es necesario reemplazar ω_j por $-\omega_j$ en la fórmula (4.124) y considerar el complejo conjugado de la solución asintótica (4.125).

Por lo tanto en el dominio $|t| > h^{1/2-2\delta}$ la solución asintótica puede ser construida por el método WKB, y en el dominio $|t| < h^{1/2-\delta}$ se tiene la representación integral (4.124). La representación integral (4.124) en el punto $t = h^{1/2-3\delta/2}$ se extiende por el método de la fase estacionaria y después estas dos soluciones se pegan usando particiones de la unidad.

Bibliografía

- [1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum mechanics*, Vol.III, Fizmatlit, Moscow, 2002
- [2] J. E. Avron and A. Gordon, Born-Oppenheimer Wave Function near Level Crossing, *Phys. Rev. A.* 62, 062504-1 – 062504-9, (2000)
- [3] V. V. Belov, S. Yu. Dobrokhotov, and T. Ya. Tudorovskii, *Quantum and Classical Dynamics of an Electron in Thin Curved Tubes with Spin* a
- [4] Shubin M.A., *Pseudodifferential operators and spectral theory*, Springer Verlag, Berlin, 1987
- [5] V. V. Kucherenko, Asymptotic behavior of the solution of the system $A(x, -ih\partial/\partial x)$ as $h \rightarrow 0$ in the case of characteristics with variable multiplicity, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 38, 625-662 (1974); English translation in: *Math. USSR Izv.* 8 (3), 631-666 (1974).
- [6] H. Kumanogo - M. Nagase, Pseudodifferential operators with non-regular symbols and applications, *Funkcial. Ekvac.* 21, 151-192 (1978).
- [7] K. Yagdjian, *The Cauchy problem for hyperbolic operators*, Akademie Verlag, Berlin, 1997
- [8] E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGRAW-Hill, New York, 1955
- [9] V. P. Maslov, *Perturbation Theory and Asymptotic Methods*, Izdat. Moskov. Gos. Univ., Moscow, 1965; Dunod, Paris, 1972
- [10] A.Kryvko and V.V.Kucherenko, Semiclassical asymptotics of the vector Sturm-Liouville problem, *Russ. J. Math. Phys.*, Vol. 13, No. 2, 188-202 (2006)
- [11] A.V. Krivko, V.V. Kucherenko, On Real Hyperbolic Systems with Characteristics of Variable Multiplicity, *Doklady Mathematics*, Vol. 75, N.1, 83 – 86 (2007)
- [12] A.V. Krivko, V.V. Kucherenko, Asymptotic Solution of a Linear System with a High-Order Rotation Point, *Doklady Mathematics*, Vol. 75, N.1, 58 – 61 (2007)
- [13] A.V. Krivko and V.V. Kucherenko, Semiclassical asymptotics of the Matrix Sturm-Liouville problem, *Mathematical Notes*, Vol. 80, N 1-2, 136 – 140 (2006)
- [14] Valeri V. Kucherenko, Andriy Kryvko, Asymptotic solutions of real symmetric systems with multiplicity, *Proceedings of Days on Diffraction - 2006*, San Petersburgo, Rusia, 138 – 147 (2006)
- [15] A. Kryvko and V.V. Kucherenko, Waves in Linearized systems, *Resumen de memoria de APPLIEDMATH, IPN, Mexico*, 105 – 110 (2005)nd *External Electromagnetic Fields Taken into Account*, *Russian J. Math. Phys.* 11 (1), 109-119 (2004)

- [16] V. V. Belov, S. Yu. Dobrokhotov, and T. Ya. Tudorovskii, Asymptotic solutions of non-relativistic equations of quantum mechanics in curved nanotubes. I. Reduction to spatially one-dimensional equations, *Teoret. Mat. Fiz.* 141 (2), 267-303, (2004); English translation in: *Theoret. and Math. Phys.* 141 (2), 1562-1592 (2004)
- [17] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*, Vol. II, Academic Press, New York, 1975
- [18] K. O. Friedrichs, *Perturbation of Spectra in Hilbert Space*, American Mathematical Society, Providence R.I., 1965
- [19] V. P. Maslov and M. V. Fedoryuk, *Semi-classical approximations in quantum mechanics*, Nauka, Moscow, 1976; Reidel, Dordrecht, 1981
- [20] Gelfand I.M., Shilov G.E., *Generalized Functions Vol. 1, Properties and operations*, Academic Press, New-York, 1964
- [21] Y. C. De Verdiere and B. Parisse, Singular Bohr-Sommerfeld rules, *Commun. Math. Phys.* 205, 459-500 (1999).
- [22] A. Erdélyi, *Asymptotic expansions*, Dover, New York, 1956
- [23] Belov V.V., Dobrokhotov S.Yu., Tudorovskiy T.Ya., Operator separation of variables for adiabatic problems in quantum and wave mechanics, To appear in: *Engineering Mathematics* (2005)
- [24] V. Ivrii and V. Petkov, The necessary conditions of correctness of Cauchy problem for nonstrictly hyperbolic equations, *Uspehi Matematicheskikh Nauk* (179) v.XXIX, N5 (179), 3-70 (1974)
- [25] W. Wazov, *Linear Turning Point Theory*, John Wiley and Sons, New York, 1985
- [26] L. Hormander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators, II*, Springer Verlag, Berlin, 1983
- [27] J.I. Lions, E. Magenes, *Problemes aux limites non homogénes et applications*, Vol. 1, Dunod, Paris, 1968
- [28] V.V. Kucherenko and Yu. Osipov, The Cauchy problem for nonstrictly hyperbolic equations, *Math USSR Sbornik*, v. 48, N1, 81-109 (1984)
- [29] R. Courant and D. Hilbert, *Method of Mathematical Physics VII*, John Wiley and Sons, New York, 1989
- [30] Kerson Huang, *Statistical Mechanics*, John Wiley and Sons, New York, 1987
- [31] V.L. Ginzburg, *The propagation of electromagnetic waves in plasma*, Nauka, Moscow, 1967
- [32] M.A. Leontovich, *Introduction in thermodynamics. Statistical physics.*, Nauka, Moscow, 1983
- [33] V. Babich and V. Buldyrev, *Asymptotic methods in the diffraction of short waves*, Nauka, Moscow, 1972
- [34] P.J. Duistermaat, *Indag. Mathem. N.S.* 4(4), 407-421 (1993)

-
- [35] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics: vol. 2*, John Wiley & Sons Inc, New York, 1989
- [36] Yu. Egorov, *Linear Differential Equations of Principal Type*, Consultants Burea, New York, 1984
- [37] V.Kucherenko, VINITY, Vol.8 (1977)
- [38] R.Melrose, *Journal D'Analyse Mathematique*, v.44 (1985)
- [39] G.Uhlmann and C.J. Noland, *Contemporary mathematics*, v.333 (2003)