Instituto Politécnico Nacional

Centro de Investigación en Ciencia
Aplicada y Tecnología Avanzada

Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica

Tesis que para obtener el grado de

Doctora en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:

Gisela Montiel Espinosa

Directores de Tesis:

Dr. Ricardo Cantoral Uriza
Dr. Apolo Castañeda Alonso

México, DF. Diciembre 2005

CGPI-14

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 12:00 horas del día 21 del mes de septiembre del 2005 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica

Presentada por el alumno:

Montiel	Espinosa	Gisela
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro: | A | 0 | 3 | 0 | 2 | 6 | 1 |

aspirante al grado de:

Doctor en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Cantoral U.

Dr. Ricardo Cantoral Uriza

Codirector

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dr. Javier Lezama Andalón

CICATA - IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dra. Rocío Alejandra Muñoz Hernández

Dr. Gustavo Martínez Sierra

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

CARTA DE CESION DE DERECHOS

En la ciudad de México, D.F. el día 2 del mes Diciembre del año 2005, el (la) que suscribe Gisela Montiel Espinosa alumno (a) del Programa de Doctorado en Matemática Educativa con número de registro A030261 adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada , manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Ricardo Cantoral Uriza y del Dr. Apolo Castañeda Alonso y cede los derechos del trabajo intitulado Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección gmontiel@ipn.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

GMontielE.

Gisela Montiel Espinosa

Nombre y firma

Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica

Gisela Montiel Espinosa

Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica

RESUMEN 1

PRESENTACIÓN 3

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN A LA PROBLEMÁTICA 5

1.1 Explicaciones Teóricas a la Problemática 7

1.1.1 El dominio de la perspectiva cognitiva 7

1.1.2 Una aproximación sistémica al fenómeno didáctico 10

1.2 La Aproximación Sistémica de la Socioepistemología al Estudio de las Funciones 17

CAPÍTULO 2. FENÓMENOS DIDÁCTICOS LIGADOS A LA CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA 23

2.1 La Función Trigonométrica en el Aula 27

2.1.1 Los Programas de Estudio 27

2.1.2 Los Libros de Texto 30

2.1.3 Construcción Geométrica-Analítica de la Función Trigonométrica 31

- A Course of Pure Mathematics, de G. H. Hardy. 31
- Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal, de Tom M. Apostol. 37
- Calculus. Cálculo Infinitesimal, de Michael Spivak. 42

2.2 El Fenómeno Didáctico de la Extensión 54

2.2.1 Concepciones del estudiante sobre la Función Trigonométrica 56

2.3 Tratamiento Algebraico a la Función Trigonométrica 60

Capítulo 3. La Función Trigonométrica en su Contexto de Origen 65

3.1 Trigonometría, un origen histórico 67

3.1.1 Usos prácticos de la trigonometría, la historia antes de la formalización 67

3.1.2 Nace la Trigonometría 75

3.1.3 De la cuerda al seno 81

3.2 La trigonometría se vuelve analítica 82

3.2.1 El Álgebra de Vietè 83

3.2.2 El *seno* como serie infinita 84

3.2.3 El movimiento oscilatorio 88

3.3 La función trigonométrica 89

3.3.1 Del grado al radian 91

3.3.2 La cuerda vibrante 94

3.4 La Serie Trigonométrica 95

Capítulo 4. Una construcción social de la Función Trigonométrica 97

4.1 Elementos teóricos de la Aproximación Socioepistemológica 99

4.2 Construcción Social de la Función Trigonométrica 104

4.2.1 Anticipación 104

4.2.2 Predicción 105

4.2.3 Formalización 107

Capítulo 5. Aportaciones al Discurso Matemático Escolar 111

5.1 Implicaciones Didácticas 113

5.2 Elementos para una Construcción Social de la Función Trigonométrica en el Aula 114

5.2.1 Anticipación en el Aula 115

5.2.2 Predicción en el Aula 116

5.2.3 Formalización en el Aula 119

5.3 Reflexiones Finales 120

5.4 Conclusión 124

Bibliografía 129

Anexo A. Programa de Estudios: Álgebra II. Escuelas Preparatorias Oficiales del Estado de México

Anexo B. Programa de Estudios: Trigonometría. Escuelas Preparatorias Oficiales del Estado de México

Anexo C. Programa de Estudios: Cálculo I. UNAM: Lic. en Matemáticas Aplicadas y Computación

Anexo D. Tablas del Almagesto

Anexo E. Proyecto Eratosthenes: Guía para el profesor

Resumen

Este trabajo de investigación ha centrado la atención en el fenómeno didáctico relacionado con el tratamiento escolar de la función trigonométrica. Su exposición obedece a la naturaleza sistémica de la aproximación que le da fundamento teórico, es decir, contempla elementos cognitivos, epistemológicos, didácticos y aporta elementos de carácter social para explicar el fenómeno en cuestión.

El Capítulo 1, planteado como los antecedentes, muestra las aportaciones que han hecho otras investigaciones respecto del fenómeno didáctico ligado a la noción de función. Hemos sintetizado los resultados desde el dominio de la perspectiva cognitiva a los acercamientos sistémicos que reflexionan sobre quien aprende, quien enseña y lo que se aprende. Sin embargo, permaneció constante el objeto que se aprende. Esto es, si bien los acercamientos sistémicos tomaban en consideración la naturaleza epistemológica del concepto, este, al igual que en la perspectiva cognitiva, siempre fue el concepto de función en general. No había distinción entre aprender o construir el concepto de función algebraica (lineal o no), función exponencial, función logarítmica, y, claro está, función trigonométrica. Estas últimas fueron abordadas por las primeras investigaciones de corte socioepistemológico.

El fenómeno asociado a la función trigonométrica se ha contemplado en investigaciones de corte cognitivo (De Kee, et. al, 1996) y didáctico (Maldonado, 2005), mostrando la estrecha relación de sus resultados con la organización de los programas de estudio, la exposición de los libros de texto y el funcionamiento del discurso matemático escolar. Estos resultados se presentan en el Capítulo 2 y constituyen un fuerte argumento del porqué estudiar esta función en contextos más allá del escolar y el matemático.

En el Capítulo 3 detallamos los momentos histórico - epistemológicos de la función trigonométrica desde su origen, en las razones, hasta su constitución en series trigonométricas. Es en este análisis que distinguimos los elementos de construcción social que aporta el trabajo: las actividades, las prácticas de referencia y las prácticas sociales ligadas a la constitución de la función trigonométrica.

Finalmente, los Capítulos 4 y 5 plantean los elementos de nuestro marco teórico, la construcción social de la función trigonométrica y las aportaciones que provee esta al discurso matemático escolar.

Abstract

This research work has centered the attention in the pedagogical phenomenon related to the trigonometrical function. The presentation obeys the systemic nature of the approach that gives him theoretical foundation, that is to say, it contemplates cognitive, epistemological and didactic elements and contributes with elements of social character to explain the phenomenon in question.

The Chapter 1, outlined as the antecedents, it shows the contributions that have made other investigations regarding the bound didactic phenomenon to the function notion. We have synthesized the results from the cognitive perspective to the systemic approaches, which have meditated on who is learning, who is teaching and the mathematical knowledge. However, it remained constant the mathematical knowledge. This is, although the systemic approaches took in consideration the epistemologic nature of the concept, this, the same as in the cognitive perspective, it was always the function concept in general. There was not distinction between to learn or to build the concept of algebraic function (lineal or not), exponential function, logarithmic function, and, clear this, trigonometrical function. These last ones were approached by the first socioepistemological researches.

The phenomenon associated to the trigonometrical function has been contemplated in investigations of the cognitive perspective (De Kee, et. Al, 1996) and didactic perspective (Maldonado, 2005), showing the narrow relationship of their results with the organization of the study programs, the exhibition of the text books and the mathematical discourse to teaching. These results are presented in the Chapter 2 and they constitute a strong reason argument to study this function in contexts beyond the scholar and the mathematician ones.

Chapter 3 details the historical-epistemologicals moments of the trigonometrical function, from their origin in the trigonometrical ratios until their constitution in trigonometrical series. It is in this analysis that we distinguish the elements of social construction that it contributes the work: the activities, the reference practices and the social practices bounded to the trigonometrical function.

Finally, the Chapters 4 and 5 outline the elements of our theoretical framework, the social construction of the trigonometrical function and the contributions that it provides this to the mathematical discourse to teaching.

Presentación

Una de las preocupaciones recientes, al nivel mundial, sobre el papel que juega la escuela en la educación y formación del individuo es la denominada *alfabetización de la ciencia*. Prueba de ello es que México, junto con más de 30 países, aceptó ser considerado en este criterio por la OCDE en la evaluación PISA 2003 cuyos resultados cimbraron al sector educativo de nuestro país.

La alfabetización de la ciencia se define como *la capacidad de usar conocimiento científico para identificar preguntas y para sacar conclusiones basadas en las pruebas, con el fin de entender y ayudar a tomar decisiones sobre el mundo natural y los cambios realizados en él a través de la actividad humana* (Wynne, 2002). Aunque cabe señalar que en las pruebas del PISA se evalúa lo que los países participantes han acordado que son resultados deseables, estén éstos reflejados o no en los currículos actuales de cada país en particular.

El conocimiento matemático juega, indiscutiblemente, un papel primordial en esta alfabetización de la ciencia, particularmente en la resolución de problemas de *aplicación* en contextos reales. ¿Por qué no vislumbramos los resultados de esta prueba con anticipación si, en efecto, el currículo mexicano no contempla la vinculación de las áreas científicas? Matemáticas, Física, Química, Biología, son áreas o "materias" escolares que viven, más no conviven, en la formación de los estudiantes.

Los fenómenos didácticos y sus efectos en la sociedad no encontrarán una única explicación que dote de solución a los problemas que se presentan. Es tarea de la Investigación Educativa entender el fenómeno en su totalidad y atender a sus particularidades. Este es el caso de la Matemática Educativa, como disciplina que se encarga de los fenómenos de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, pero las distintas escuelas de pensamiento han desarrollado investigación en varias direcciones: cómo se aprenden, cómo se enseñan, cómo se convirtieron los saberes teóricos en saberes escolares, cuáles son las restricciones institucionales y escolares para la actividad didáctica, qué se enseña, etc. Y es sólo con base en éstos resultados que puede pensarse en reformar un currículo que beneficie efectivamente el aprendizaje del estudiante y, en ese sentido, *alfabetizarlo matemáticamente*.

La investigación que ahora presentamos es una minúscula aportación al fenómeno educativo que vive nuestra sociedad, pero puede ser sumamente significativa para la alfabetización de la ciencia en los niveles medio superior y superior. Tradicionalmente la convivencia de las matemáticas con otras áreas científicas escolares se entiende como la *aplicación* de las primeras en los problemas de las segundas. En esta investigación mostraremos, para el caso de la función trigonométrica, que es en estas otras áreas científicas donde *nacen* las ideas, nociones y conceptos matemáticos, y sin las cuales no tienen significación, utilidad y sentido.

Esta investigación nace en el seno de una aproximación teórica, la *socioepistemológica*, que busca explicar cómo se aprende, cómo se enseña y qué se enseña, para lograr desarrollar el pensamiento matemático de los y las estudiantes, vía el rediseño del discurso matemático escolar. Esto presupone un cambio radical en lo que se entiende por enseñar - aprender matemáticas, resolver problemas y evaluar el aprendizaje, entre otros.

En este momento, con esta investigación, se abre una línea de investigación que busca incidir en problemáticas específicas de los tres niveles educativos que tratan con los conceptos trigonométricos escolares. Las investigaciones futuras deberán atender, además de lo ya planteado, las condiciones institucionales, sociales y culturales, entre otras, que se pueden encontrar en las distintas regiones de un solo país. Ahora presentamos lo que en nuestra opinión es sólo el punto de partida de un programa emergente de investigación y desarrollo.

Capítulo 1

Introducción a la Problemática

Capítulo 1

Introducción a la Problemática

Capítulo 1.

Introducción a la Problemática

Fenómenos ligados a la enseñanza y aprendizaje del concepto de función han sido ampliamente reportados en la literatura especializada de la matemática educativa[1]. Fue en la década de los 90s cuando surgen los primeros resultados de investigación alrededor de los procesos de aprendizaje de este concepto en escenarios escolares (Breidenbach, et al., 1992; Dreyfus, Eisenberg, 1991; Dubinsky, Harel, 1992; Harel, et al., 1992; Hitt, 1998; Tall, 1996; Vinner, 1983; 1992) y probablemente los artículos de Monna (1972) y Youschkevitch (1976) despertaron un interés especial por llevar al aula el proceso evolutivo del concepto de función, incluyendo sus etapas, aplicaciones y dificultades. Todos estos trabajos de investigación reportaron distintos matices del concepto cuando se llevó a escenarios escolares. Por ejemplo, su aprendizaje mediante el tránsito, vínculo y manejo adecuado de sus representaciones se ha convertido en un paradigma para líneas de investigación tales como la visualización.

1.1 Explicaciones Teóricas a la Problemática

La Matemática Educativa ha evolucionado en tanto sus objetos de estudio, de ahí que los antecedentes a nuestro trabajo de investigación muestren cortes cognitivos, didácticos y epistemológicos. De iniciar con el auxilio de ciencias como la psicología, la pedagogía, la sociología, entre otras, para explicar fenómenos de enseñanza y aprendizaje, hoy contamos con fundamentos y marcos teóricos para explicar los fenómenos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en específico.

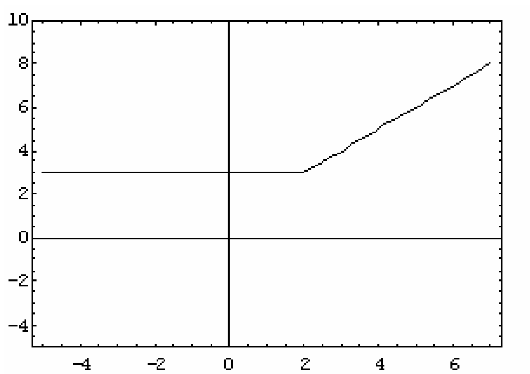
1.1.1 El dominio de la perspectiva cognitiva

Las primeras explicaciones teóricas alrededor del aprendizaje del concepto de función consistían de argumentos cognitivos resultado de las experiencias de aula. Vinner (1983) y Tall (1996) acuñaron los términos *imagen del concepto* y *definición del*

1 Educación Matemática o Didáctica de las Matemáticas, entre otras, dependiendo de la escuela de pensamiento de que se trate.

concepto para explicar cómo el estudiante usaba dichas imágenes para resolver problemas que involucraban a la función, más que la definición establecida en la exposición del profesor o en los textos. Para estos autores apropiarse del significado de la noción de función implica formar una imagen de la misma, es decir, tener estructuras cognitivas que se asocien al concepto, incluyendo sus representaciones mentales, procesos y propiedades asociados, más que la definición formal del concepto, y con el cúmulo de experiencias en el aula acercar las imágenes del concepto a su definición.

Entre las aportaciones de estos trabajos de investigación rescatamos la exposición de las concepciones de los estudiantes respecto del concepto de función: asumen como función sólo a aquellas cuyas gráficas tengan forma regular, rechazando las compuestas por intervalos por ejemplo (a); una función definida por n intervalos se asume como n funciones (b); en la gráfica de una función discontinua se consideran las *partes* como funciones distintas (c); dados los pares ordenados en una tabla, se asigna a cada par ordenado una función (d); entre otras.



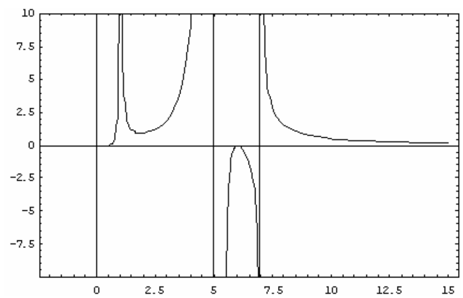
(a)

.. esto no es una función, porque primero está horizontal y luego empieza a crecer..

$$f(x) = \begin{cases} -x, & si \quad x < 0 \\ -x^2, & si \quad 0 \leq x \leq 10 \\ sen \quad x, si & x > 0 \end{cases}$$

(b)

.. aquí tenemos 3 funciones de x...



(c)

… aquí hay 4 funciones…

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

(d)

…(-2, 4) es de la función … (-1, 0) es de la función …

También dentro de la perspectiva cognitiva, pero en un paradigma distinto, Dubinsky y Harel (1992) y Breidenbach, et al., (1992) hacen una extensión del análisis piagetiano de la percepción y de la inteligencia usando el marco teórico de la abstracción reflexiva mediante *acciones*, *procesos*, *objetos* y *esquemas* (conocida en la jerga como teoría APOE), para hablar de la apropiación de las nociones. En términos generales, en lo que respecta a la noción de función, reportan la complejidad de pasar de la concepción de acción a la concepción de proceso, debido a ciertas restricciones, como por ejemplo la restricción debida a su concepción de lo que es una función (restricción de manipulación, restricción de cantidades, restricción de continuidad en la gráfica). Se refieren a una concepción de acción cuando el alumno requiere de las instrucciones precisas, como por ejemplo del empelo de fórmulas algebraicas de la función para estar en condiciones de realizar transformaciones sobre ella, por ejemplo evaluar en puntos específicos o realizar la composición de dos funciones haciendo las sustituciones correspondientes, digámoslo así, haciendo sólo un paso a la vez. Una concepción de proceso significa, bajo este enfoque, el tener una idea más dinámica, poder pensar a la función como algo que recibe una o más entradas y que regresa salidas o encontrar la inversa de una función. Esta etapa requiere de la coordinación de varias acciones. La concepción de objeto se logra cuando se manipulan las funciones mediante otras acciones y procesos, por ejemplo, cuando se derivan. Lograr la concepción de esquema involucra acciones, procesos y objetos del concepto de función, y distingue cuales pertenecen a cada esquema.

Estas explicaciones no excluían aspectos como la tradición escolar, simplemente no fueron analizadas a detalle. Por ejemplo Eisenberg y Dreyfus (1991) reportan que la reluctancia a visualizar en la clase de matemáticas puede deberse tanto a factores cognitivos como sociales, y en éste último aspecto se refieren a la transposición didáctica que sufre el contenido matemático y a su exposición escolar, pero destacan con mayor énfasis el papel de los elementos visuales en la tradición matemática, tanto científica como escolar.

Por otra parte, autores como Douady y Duval hacen explícito el papel que juegan las representaciones en la adquisición de la noción de función. Douady (1986; 1995; 1996), en su dialéctica *herramienta-objeto*, reporta la existencia de dificultades para considerar a las funciones como *herramientas* en el trabajo matemático y, de forma más notoria, para traducir al contexto de funciones aquellos problemas que han sido planteados en otros contextos matemáticos como el numérico, geométrico, o externos a la matemática y que requieren de una *traducción* para ser resueltos. Mientras que Duval (1999) establece que se aprende en la medida que se abstrae un objeto de sus representaciones. Estas representaciones han de *formarse*, *tratarse* y *convertirse* para lograr una coordinación entre ellas, bajo tres condiciones: la correspondencia semántica entre las unidades significativas que la constituyen; un mismo orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones coordinadas y la conversión de una unidad significativa en la representación inicial, en una sola unidad significativa en la representación final.

En las aproximaciones teóricas anteriores se le confiere un estatus importante al manejo de las diferentes *representaciones* del concepto de función, ya sea en términos de imágenes del concepto, concepciones de acción, proceso, objeto y esquema o en su doble estatus de herramienta y de objeto. La formación del pensamiento científico, particularmente en matemática, está íntimamente ligado al desarrollo de simbolismos específicos para *representar* a los objetos y a sus relaciones, por tanto, el progreso de los conocimientos implica la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos (Ferrari; 2001).

1.1.2 Una aproximación sistémica al fenómeno didáctico

En 1986 Brousseau publica los fundamentos de una teoría que iba a cambiar la forma en que se explicaban los fenómenos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, la

Teoría de Situaciones Didácticas. Se sentaron las bases para una disciplina científica encargada de analizar y teorizar sobre los fenómenos didácticos que surgen de la interacción sistémica del profesor y el estudiante respecto de un saber matemático escolar en particular. Establecida la unidad indivisible de análisis y los fundamentos de la teoría, se construyeron metodologías de investigación y de diseño de situaciones didácticas, en forma natural nacen líneas de investigación y nuevas teorías que aportan elementos para la explicación de los fenómenos didácticos y amplían sus componentes, a saber, la didáctica, cognitiva y epistemológica.

En este sentido las dificultades con el aprendizaje del concepto de función no se podían limitar al manejo y articulación de sus representaciones. A la par de algunas posturas cognitivas se desarrollaban investigaciones sobre los *obstáculos epistemológicos*[2] del concepto de función, obstáculos inherentes al concepto y no así a las particularidades de las maneras de enseñar, que además, son propios de la construcción de una cultura y son obstáculos objetivos para nuevos modos de conocer.

Por ejemplo, Sierpinska (1992) distingue 19 categorías en la comprensión de la función:

1. la identificación de los cambios observados en el mundo que nos rodea,
2. la identificación de regularidades en las relaciones entre los cambios como medio para tratarlos,
3. la identificación de los objetos que cambian,
4. discriminación entre dos modos de pensamiento matemático: uno en términos de cantidades conocidas y desconocidas, y otro en término de variables y constantes,
5. discriminación entre variable dependiente y variable independiente,
6. generalización y síntesis de la noción de número,
7. discriminación entre cantidad y número,
8. síntesis entre el concepto de ley y el concepto de función; en particular, conocimiento del posible uso de las funciones en la modelización de relaciones entre magnitudes,

[2] Obstáculo epistemológico es un concepto que acuña Bachelard (1938 /1983) y que Brousseau introduce en 1983 a la Didáctica de las Matemáticas (citado por Ruiz; 1998).

9. discriminación entre una función y las herramientas analíticas que se usan a veces para describir su ley,
10. discriminación entre definiciones y descripciones de objetos,
11. síntesis de la concepción general de la función como un objeto,
12. discriminación entre los conceptos de relación y función,
13. discriminación entre las nociones entre función y sucesión,
14. discriminación entre coordenadas de un punto de una curva y los segmentos "rellenos" de la curva de ciertas funciones,
15. discriminación entre la función y sus diferentes representaciones,
16. síntesis de las diferentes formas de expresar las funciones, representar las funciones y hablar sobre funciones,
17. generalización de la noción de variable,
18. síntesis de los roles de la noción de función y de causa, y
19. discriminación entre las nociones de relación causal y funcional.

En esta explicación sobre la comprensión del concepto en el estudiante, podemos distinguir tanto aspectos cognitivos como epistemológicos, es decir, entra en la discusión, sobre el aprendizaje del estudiante, el papel que juega un concepto matemático muy particular y los obstáculos ligados a su construcción original. Añade a su explicación aspectos de motivación y contextualización, conocimientos previos y modalidades de exposición.

En una investigación posterior, Ruiz (1998) extiende la explicación a un plano epistemológico – didáctico donde, si bien hace un análisis exhaustivo de los resultados de corte cognitivos (algunos discutidos anteriormente) de otros autores, caracteriza las concepciones que manifiestan los alumnos sobre la noción de función, atendiendo a los distintos aspectos que configuras dichas concepciones: las propiedades invariantes que reconocen, las representaciones y las situaciones en que se usa el concepto, tratando además de poner de manifiesto las condiciones y restricciones que sobre ellas ejerce el sistema de enseñanza en el que están situados los alumnos. Está última consideración añade a las explicaciones anteriormente discutidas el cómo vive la función, como concepto escolar, en un sistema educativo muy particular.

Ruiz parte del establecimiento de las concepciones asociadas a la evolución histórico - epistemológica de la noción de función:

- identificación de regularidades en los fenómenos sujetos al cambio (relación entre cantidades de magnitudes variables)
- razón o proporción
- gráfica (visión sintética)
- curva (analítico - geométrica)
- expresión analítica
- correspondencia arbitraria (aplicación)
- función como terna

describiendo detalladamente las situaciones que le dan origen, las invariantes, sus representaciones y el momento histórico de referencia. En seguida, cataloga los obstáculos epistemológicos en tres clases:

- Obstáculos a nivel de creencias y convicciones:
    - obstáculo de la concepción estática,
    - obstáculo de la disociación existente entre magnitudes y números.
- Obstáculos a nivel de esquemas de pensamiento:
    - obstáculo de la razón o proporción,
    - obstáculo de la homogeneidad en las proporciones,
    - obstáculo de la concepción geométrica de las variables.
- Obstáculos a nivel de conocimiento técnico:
    - obstáculo de la concepción algebraica,
    - obstáculo de la concepción mecánica de la curva.

Al estudiar el fenómeno de *transposición didáctica* que sufre el concepto de función, lo distingue como objeto a enseñar (analizando los programas oficiales del sistema educativo español del nivel secundaria), como objeto de enseñanza (analizando el discurso de presentación en los libros de texto) y como objeto enseñado (analizando los apuntes de los estudiantes).

Identifica en los programas oficiales la inducción de la concepción de función como *aplicación entre conjuntos numéricos*, estructurada en:

- Polinomios - Ecuaciones
- Proporcionalidad de magnitudes (aritméticas y geométricas)
- Cálculo Infinitesimal (sucesiones, función, función derivada, función primitiva, …)
- Logaritmos (Función Logarítmica)
- Trigonometría (Función Trigonométrica)
- Estadística
- Significado práctico de las funciones como descripción de fenómenos

Respecto de los libros de texto (manuales escolares), caracteriza las nociones que induce en:

- Expresión algebraica o fórmula
- Curva representada en un diagrama cartesiano
- Aplicación entre conjuntos numéricos.

Y finalmente, extrae de los apuntes del estudiante fenómenos derivados de los distintos tipos de contrato: didáctico, escolar, pedagógico y de enseñanza que viven, explícita o implícitamente, en el salón de clase:

- la programabilidad de los temas,
- permanencia de la convicción en los Diagramas de Venn como soporte intuitivo primordial e ideograma gráfico riguroso,
- presentación de reglas económicas y códigos para reducir la incertidumbre (y el error) en el estudiante,
- la transaccionalidad o progreso en el tiempo del saber a enseñar,
- uso de herramientas semióticas (praxemas) como objetos de enseñanza que no figuran en el saber sabio,
- la enseñanza deforma el *objeto función* adaptándolo fuertemente a sus necesidades de evaluabilidad rompiendo epistemológicamente con los problemas y contextos a los que está ligada esta noción desde su nacimiento,

- presentación y manipulación del concepto mediante la progresión: criterio - fórmula, construcción de tablas, determinación de dominios, representación gráfica,
- la gráfica se concibe como un fin en sí mismo y no como un instrumento del trabajo matemático del alumno. Posteriormente se convierte en un instrumento de significación para objetos matemáticos definidos con alto grado de rigor y formalización (continuidad, límite, etc.) y, sobre todo, descontextualizados. Esto es, el gráfico se vuelve necesario en el discurso del profesor para salvar la distancia entre el rigor y la intuición,

tomando en consideración la influencia de la *noosfera*, en tanto la valoración de la actividad del alumno en el aula, la economía del sistema didáctico, como motor de la estructuración del conocimiento, y la evaluación a la que están sujetos estudiantes y profesores. Con ello configura las concepciones sobre la función que induce el profesor en situación de enseñanza:

- fórmula algebraica,
- curva representada en ciertos ejes cartesianos,
- aplicación entre conjuntos numéricos.

Finalmente, mediante un cuestionario organizado y diseñado con la intensión de explorar, distinguir y caracterizar las concepciones de los estudiantes, Ruiz realiza la tipología (distinguiendo en cada tipo las invariantes, las representaciones asociadas y situación que le da sentido):

a. algoritmo de cálculo
b. expresión algebraica
c. gráfica, a partir de la fórmula
d. ideograma (algebraico y gráfico)
e. correspondencia entre conjuntos numéricos
f. transformación

En sus conclusiones finales señala las inconsistencias, obstáculos didácticos y obstáculos a nivel de los conocimientos en los alumnos, y confirma sus hipótesis iniciales:

- las concepciones locales y parciales de los alumnos tienen aspectos coincidentes con las concepciones determinadas en la evolución histórica,
- la enseñanza enfatiza el tratamiento de la función como un objeto de estudio en sí mismo, minimizando su consideración como herramienta de la actividad matemática,
- el conjunto de restricciones del sistema de enseñanza induce concepciones muy limitadas y parciales entre los alumnos, que se constituyen en obstáculos para la formación de una concepción más general y completa de la noción de función,
- los alumnos utilizaron preferentemente otros criterios de decisión que reflejan estadios anteriores de la concepción epistemológica de la función como aplicación.

Este estudio se constituye como el más completo sobre el fenómeno didáctico alrededor del concepto de función. Podemos distinguir una ampliación en el problema, tomando en cuenta las condiciones en las que se lleva el fenómeno en estudio: aquellas que impone el sistema de enseñanza. Pero incluso considerando la componente epistemológica como pieza fundamental tanto en la caracterización de las concepciones en los estudiantes, cómo en las explicaciones de fenómenos didácticos y el diseño de ingenierías didácticas, las investigaciones anteriores consideraron al concepto "Función" en lo general. Esto es, las funciones algebraicas, exponencial, logarítmica y trigonométrica son tratadas por igual, su naturaleza es ignorada.

En nuestra opinión, la cual fundamentaremos a lo largo de esta tesis, la funcionalidad del concepto mismo puede marcar una diferencia significativa en el tratamiento de los diferentes tipos de funciones, lo cual no se vio reflejado al nivel de investigación y las propuestas didácticas hasta fechas recientes. Esto es, atender a la naturaleza epistemológica de las funciones algebraicas y trascendentes, y dentro de las trascendentes la naturaleza epistemológica de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, en estatus diferenciados, sin ignorar las aportaciones obtenidas alrededor de la función en general.

1.2 La Aproximación Sistémica de la Socioepistemología al Estudio de las Funciones

La visión sistémica, ha permitido explicar los fenómenos didácticos en términos de cómo se enseña, cómo se aprende y qué se aprende. En esta dirección Farfán (1997) reporta una investigación que buscó significar entre profesores universitarios el concepto de convergencia de series infinitas, cuya hipótesis inicial planteaba como indispensable la significación que le daba origen al conocimiento matemático en juego y que, en este caso, era la determinación del estado estacionario. Sin embargo, este concepto físico no es producto de la primera experiencia sensible, se encontró que su abstracción representaba una tarea cognitiva muy compleja. En consecuencia el ámbito de la determinación del estado estacionario no resultó propicio para recrearse en el aula pues resultó ser aun más complejo que aquél que se deseaba introducir, el de la convergencia. A partir de aquí la autora se plantea poner más atención en los aspectos sociales de la construcción de conocimiento, aunque ello significara perder, en un cierto sentido, el ámbito propiamente escolar e incorporar otras prácticas de referencia (Cantoral y Farfán, 2003). En consecuencia *no podía centrar la atención en los conceptos y sus diferentes estructuraciones conceptuales en forma aislada, sino tratar con las prácticas que producen o favorecen la necesidad de tales conceptos*.

La aproximación teórica que incorpora estas prácticas a las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica recibe el nombre de *Aproximación Socioepistemológica a la Investigación en Matemática Educativa* y profundizaremos sobre sus elementos y modelos teóricos en el Capítulo 4 del presente trabajo. Sin embargo, es importante resaltar en este momento que desde esta aproximación se platearon preguntas importantes respecto del problema didáctico que plantea el estudio de la Función: ¿pueden aprenderse por igual, desde cualquier perspectiva, las funciones algebraicas que las transcendentes?, al incorporar una componente epistemológica a la explicación del fenómeno didáctico ¿no debemos atender la particularidad epistemológica de cada tipo de función: algebraica, exponencial, logarítmica, trigonométrica, …? Con las investigaciones que nacen a partir de ese entonces, no se aceptó como válida la tesis que plantea que entender cómo se construye la noción de función desde un punto de vista epistemológico, cognitivo y didáctico, provee una explicación completa sobre la construcción de la noción de función trigonométrica, exponencial, o logaritmo (por mencionar a las más significativas) en escenarios escolares.

Lezama (1999) en un estudio sobre la reproducibilidad de una situación didáctica establece, en las fases de una ingeniería didáctica, consideraciones alrededor de la función exponencial. Inicia considerando las dificultades para identificar distintas funciones, discriminar sus propiedades, darse cuenta de sus posibles aplicaciones e identificar las situaciones o fenómenos que modela, además de poderlas representar gráfica, tabular y analíticamente, así como transitar entre dichas representaciones. Identifica la particularidad epistemológica de la función exponencial en íntima relación con la de la función logaritmo, siendo esta última definida a partir del estudio de las relaciones entre progresión geométrica y aritmética. Reconoce al modelo que construye Napier, auxiliándose de interpretaciones geométricas y físicas y contemplando como caso particular los valores discretos encontrados en la relación entre progresiones, como lo que permite el paso del caso discreto al continuo. A partir del pasaje anterior, se identificaron en el proceso de construcción de la función exponencial, las siguientes dificultades:

- dificultad para elevar números a distintas potencias, cada tipo de números que se maneje impondrá retos distintos y en ocasiones difíciles de interpretar el significado de la operación,
- dificultad en identificar la naturaleza y estructura en la función exponencial (estructura creciente, forma de crecimiento y la justificación del trazo continuo de su representación gráfica),
- dificultad en identificar la relación con la función logarítmica.

Finalmente, se consideran los señalamientos sobre los obstáculos y dificultades en el aprendizaje del concepto de función en general, como las que señalan Sierpinska (1992): *una posible consecuencia de identificar tablas de funciones con las funciones mismas es la creencia de que los métodos de interpolación dan los valores exactos de la función en puntos intermedios*, y Vergnaud (1990, citado en Lezama): *un concepto no puede reducirse a su definición, al menos si nos interesamos en su aprendizaje y su enseñanza; son las situaciones las que dan sentido a los conceptos matemáticos, pero el sentido no está en las situaciones ni en las representaciones simbólicas. Es una relación del sujeto con las situaciones y los significados. Más precisamente, son los* *esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o un significante lo que constituye el sentido de esta situación o este significante para el individuo*.

Estas consideraciones, en conjunto con aquellas de naturaleza didáctica y cognitiva, componen el análisis preliminar para el diseño de la situación didáctica reconocida como 2^x.

De esta investigación surgen nuevas preguntas alrededor de la construcción de algunos conceptos matemáticos específicos, como lo fueron los trabajos de Martínez-Sierra (2000 y 2003) sobre la construcción de los exponentes no naturales. En su análisis preliminar Martínez-Sierra localiza un mecanismo, al que denomina *convención matemática*, que posibilita la construcción de sistemas de conocimiento matemático. Posteriormente, con un diseño experimental, logra activar este mecanismo con grupos de estudiantes en situación escolar, mediante la contradicción o la necesidad de integrar en forma sistémica un nuevo objeto matemático al conjunto de conocimientos previos.

Por su parte Ferrari (2001), consideró las aportaciones respecto del aprendizaje de la función de distintos paradigmas como punto de partida en su investigación sobre la función logaritmo, pero se adentra en el devenir histórico – epistemológico del logaritmo para encontrar momentos relevantes de su desarrollo, significados y sentidos que pudieran haberse perdido en la transposición a escenarios escolares. Ferrari sintetiza su búsqueda caracterizando la construcción de la función logaritmo en tres momentos:

> … de nuestra indagación epistemológica concluimos entonces que en una primera instancia se pueden distinguir, bajo nuestra óptica, seis etapas en el desarrollo de los logaritmos, a saber: *de exploración algorítmica*, *numérica utilitaria*, *gráfico - geométrica*, *de analiticidad*, *de simbolización*, *de formalismo* a las cuales, desde una perspectiva más global encuadramos en los tres momentos: los *logaritmos como transformación*, etapa que se desarrolla antes de su definición formal y que se refleja en las distintas exploraciones en torno a la formulación y extensión de las progresiones y en la búsqueda por facilitar engorrosos cálculos producto de necesidades sociales de la época; el momento *numérico utilitario*, cuando entran en escena Napier y Burgüi, definiendo por primera vez a los logaritmos; y

finalmente el momento de *analiticidad* pues se logra su formulación en serie de potencias lo cual lo hace susceptible al análisis.

Posterior a este trabajo, Ferrari (2004) contempla a la covariación de progresiones aritméticas y geométricas como un argumento de discusión y construcción de las funciones polinómicas, exponenciales, potencia y logarítmica, aunque no generalizable a otras funciones tales como las trigonométricas. Esto la hace reafirmar su idea de reconocer la naturaleza propia de cada función.

Estas investigaciones (Lezama; 1999; 2003; Martínez-Sierra; 2000; 2003; Ferrari; 2001) incorporaron la dimensión social del saber. Fue esta ampliación la que permitió localizar aquellas condiciones o factores que provocaran la necesidad de construir las nociones o conceptos de función exponencial, exponente no natural y función logaritmo.

Esta dimensión *social* afecta a las componentes epistemológica, didáctica y cognitiva, pero sobre todo modifica su relación sistémica para explicar los fenómenos didácticos alrededor de la construcción de un conocimiento matemático particular en escenario escolar. Profundizando en estas investigaciones podemos distinguir momentos de uso del concepto (en tanto actividad humana), momentos de influencia cultural (como las prácticas sociales), etapas de consenso (teorización o consolidación de los conceptos), a la par que se distinguen las herramientas y contextos matemáticos accesibles para la evolución de nociones y conceptos. Dicho en otras palabras, encontraremos los factores sociales que generan conocimiento matemático, entendidos éstos como aquellas restricciones que pesan sobre los individuos por el sólo hecho de vivir en sociedad y que no son estrictamente modificables por una voluntad individual (Martínez-Sierra, 2003).

Coincidimos además con Ferrari cuando afirma que los objetos matemáticos en tanto se actúe sobre ellos, son una construcción sociocultural, por cuanto nacen al seno de una comunidad específica, respondiendo a cuestionamientos particulares, pero que se van abstrayendo y escindiendo de sus orígenes para devenir en objetos universales, despersonalizados y atemporales. Las discusiones, las confrontaciones, la comunicación de los mismos hace que evolucionen, que adquieran status en una estructura teórica en tanto sean aceptados y exista un consenso.

A esta aproximación teórica se le ha denominado *Aproximación Socioepistemológica* y a través de sus resultados teóricos y la evidencia empírica, busca reconstruir el discurso matemático escolar con base en la *construcción social del conocimiento matemático*. Al momento hemos discutido cómo esta aproximación dotó de un extenso campo de significados a conceptos como la función exponencial, el exponente no natural y la función logarítmica.

En esta misma dirección, particularmente el de las funciones trascendentes, nace nuestra investigación. Las concepciones y comportamientos de los estudiantes y profesores ante la problemática que plantea el aprendizaje de las funciones trigonométricas, así como las exposiciones (que abandonan, modifican y proponen ciertos elementos de construcción y significación) del discurso matemático escolar, dieron origen a preguntas de investigación alrededor de éste fenómeno.

Capítulo 2

Fenómenos Didácticos Ligados a la Construcción de la Función Trigonométrica

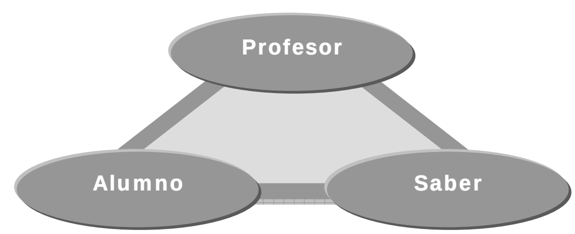
Capítulo 2

Fenómenos Didácticos Ligados a la Construcción de la Función Trigonométrica

Capítulo 2.

Fenómenos Didácticos Ligados a la Construcción de la Función Trigonométrica

Constantemente, la problemática de investigación en Matemática Educativa es definida por los fenómenos didácticos que se presentan regularmente en los estudiantes tras haber tenido un acercamiento al conocimiento matemático en cuestión. Sin embargo, explicarlos en términos de lo que acontece en la Institución requiere de un estudio sistémico sobre la relación del profesor y los estudiantes con respecto de un saber matemático escolar.



Sistema Didáctico

Se han identificado diversos "contratos" que condicionan y modifican las relaciones del sistema didáctico en el aula. Existen un **contrato social de enseñanza** donde se establece la causa del saber a enseñar, un **contrato escolar** donde se define la actividad, las responsabilidades, actitudes y los derechos de los participantes del fenómeno escolar, a saber, escuela, profesor y alumno; un **contrato pedagógico** donde se establecen las relaciones sociales entre profesor y alumno; y finalmente el **contrato didáctico** que se refiere a las negociaciones de profesor y alumno respecto del saber matemático escolar en juego.

Es claro que los contratos escolar y pedagógico están sujetos a variables tales como: estructura institucional, modalidad educativa, calendarios escolares, programas académicos, horas clase, estándares de evaluación, tradición de enseñanza, etc., y por lo tanto encontraremos diferencias significativas de una Institución a otra, en una región que en otra, etc. Pero en tanto dichos contratos son necesarios para la existencia de un contrato didáctico, se han acotado las formas de estudiarlos. La información, la interpretación y las restricciones del medio rigen los comportamientos del alumno en situación escolar, esto es, los contratos escolar y pedagógico generan en el alumno concepciones de su actividad respecto del aprendizaje de las matemáticas en la escuela (D'Amore, 1999):

- **La concepción escolar**: El alumno ajusta su comportamiento con base en aquello que espera le sea evaluado. Nadie le dice lo que habrá de hacer explícitamente, sólo tiene que escribir lo que el profesor le transmite porque el alumno espera que eso le sea preguntado en alguna evaluación posterior, sin embargo, a pesar de no ser explícito, el alumno descifra el mensaje y se comporta en consecuencia.
- **La concepción de la matemática**: El alumno tiende a responder haciendo uso de objetos matemáticos, aun cuando la pregunta no lo requiera. Aunque no se haga explícito el uso de objetos matemáticos por parte del problema o de su maestro, la concepción que el alumno tiene de la materia le hace tratar a la actividad operándola con números, expresiones matemáticas, gráficas, entre otros. El cree que la respuesta habrá de ser matemática.
- **La concepción de la modalidad escolar**: Aunque el objetivo sea la adquisición de un concepto matemático, el alumno tiende a repetir ejercicios de naturaleza semejante, pues él descubre que la modalidad de clase se conserva a lo largo del tiempo. Termina por aprender que la modalidad empleada por su maestro, le indica lo que él habrá de hacer.

Para identificar los fenómenos didácticos ligados a la construcción de la función trigonométrica, sus causas y efectos, es necesario entender cómo vive este conocimiento en escenario escolar y delimitar la concepción respectiva.

Maldonado (2005) reporta, con fundamento en la Teoría de la Transposición Didáctica, las concepciones que los estudiantes tienen de las razones trigonométricas, la conversión de unidades de medida y la función trigonométrica, posterior a un tratamiento escolar clásico. Incluyendo sus resultados, realizamos el análisis de un programa de estudios de nivel medio superior y un análisis crítico del planteamiento analítico que proponen libros de texto, regularmente recomendados para el nivel superior, para la construcción de la función trigonométrica.

2.1 La Función Trigonométrica en el Aula

Un acercamiento al cómo vive la función trigonométrica en escenario escolar puede hacerse mediante el examen de las fuentes principales de organización y recursos con que cuenta un profesor para impartir su clase, así como con el registro de su clase. Dichas fuentes las constituyen los Programas de Estudio y los Libros de Texto más comunes. Nuestro trabajo de investigación no pretende hacer un estudio exhaustivo en esta dirección, si no una síntesis del trabajo de Maldonado (2005), incorporando algunas variables vinculadas al discurso matemático escolar.

2.1.1 Los Programas de Estudio

De acuerdo con el Programa Oficial de la Secretaría de Educación Pública en México, en el tercer grado del **Nivel Secundaria** debe abordarse el tema "Elementos de Trigonometría", antecedido por el tema "Sólidos" y precedido por el tema "Presentación y Tratamiento de la Información".

SEP. SECUNDARIA, TERCER GRADO

Elementos de trigonometría:

- Razones trigonométricas de un ángulo agudo: seno, coseno y tangente
- Valores del seno, el coseno y la tangente para los ángulos de 30°, 45° y 60°.
- Uso de tablas (ejercicios de interpolación) y calculadora para los otros ángulos agudos
- Resolución de triángulos rectángulos y su aplicación a la solución de problemas: cálculo de distancias inaccesibles; del lado y la apotema de polígonos regulares; etcétera.

Pero es en el **Nivel Medio Superior** donde se da el tránsito de la Trigonometría Clásica (vinculada al estudio de los triángulos) a la Trigonometría Analítica (vinculada al estudio de las funciones trigonométrica).

Tomaremos, a manera de muestra representativa del nivel medio superior, el Plan de Estudios para Matemáticas de las ESCUELAS PREPARATORIAS OFICIALES DEL ESTADO DE MÉXICO (EPOEM), el cual está dividido en seis Programas de Estudio, correspondientes a los 6 semestres del bachillerato:

- Álgebra I
- Álgebra II

- Trigonometría
- Geometría Analítica
- Cálculo Diferencial
- Estadística

Este sistema es relativamente joven. En 1985 surge con el nombre de BACHILLERATO PROPEDÉUTICO GENERAL, y en el marco del Plan Maestro (agosto de 2001) que se configuró dentro del Plan Nacional de Desarrollo 2001 - 2006 y del Plan de Desarrollo del Estado de México 1999 - 2005 se convierte en EPOEM.

Actualmente cubren 96 Municipios del Estado de México a través de 169 escuelas preparatorias y su Plan de Estudios fue rediseñado e institucionalizado en el 2001. Dos cosas que llaman la atención de los Programas de Matemáticas son:

a) El Programa de ALGEBRA II (ver Anexo A) aborda el Tema de Funciones, incluyendo la Función Trigonométrica:
   - Concepto
   - Elementos
   - Graficación (seno, coseno, tangente)
b) El Programa de TRIGONOMETRÍA (ver Anexo B) no se acompaña, antecede o continua con un Programa de Geometría Plana. Esto puede deberse los antecedentes de la escuela secundaria que presupone este Plan de Estudios.[3]

Por último, en este Plan de Estudios, el Programa de Cálculo Diferencial contempla el trabajar con la derivación de funciones trascendentes, incluyendo por supuesto a la función trigonométrica.

Analizando detalladamente este programa y los reportados por Maldonado (2005)[4] hemos caracterizado la presentación escolar de la función trigonométrica en 6 etapas:

[3] Las asignaturas antecedentes, del nivel básico, que asume el Programa de Álgebra I son: Aritmética, Álgebra, **Geometría Plana**, **Trigonometría**, Probabilidad y Estadística.

[4] Del Instituto Politécnico Nacional (Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos), de la UNAM (Escuela Nacional Preparatoria) y de la UAEM (Escuela Preparatoria)

- **ETAPA ESCOLAR 1.** Sobre los ángulos: clasificación, unidad de medida, ángulos dirigidos.
- **ETAPA ESCOLAR 2.** Sobre los triángulos: clasificación, propiedades, razones trigonométricas, solución de triángulos, las razones trigonométricas en el plano y sus signos de acuerdo a su posición.
- **ETAPA ESCOLAR 3.** Problemas de aplicación, leyes e identidades trigonométricas.
- **ETAPA ESCOLAR 4.** El círculo trigonométrico: círculo unitario, ángulos - arcos, conversión de unidades $\leftrightarrow$ grado $\rightarrow$ radian real, graficación de la función trigonométrica.
- **ETAPA ESCOLAR 5.** La función trigonométrica: dominio y rango, propiedades (periodicidad y acotamiento), variación de parámetros.
- **ETAPA ESCOLAR 6.** Operaciones con la función trigonométrica: derivación e integración.

Finalmente en el **Nivel Superior** la aparición de la función trigonométrica depende del contexto profesional universitario, regularmente la encontramos en los programas de ciencia e ingeniería, en diversas asignaturas, básicamente con tres presentaciones:

- Función Trigonométrica, $y = a\, sen\,(bx + c) + d$
- Serie Infinita, $sen \quad x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$
- Producto Infinito, $sen\, x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$
- Serie Trigonométrica,

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + b_1 sen\, x + b_2 sen 2\, x + \cdots$$

Incluimos las representaciones en serie infinita, producto infinito y serie trigonométrica en la **Etapa Escolar 6**, pues asumen que el estudiante ha construido la función trigonométrica como concepto matemático (como objeto susceptible a un proceso).

2.1.2 Los Libros de Texto

El libro de texto constituye para el profesor una fuente de recursos tanto para las explicaciones de clase como para el conjunto de ejercicios a resolver en el salón, para llevar tarea o para usarse en la evaluación.

Los textos proporcionan una presentación *secuenciada*, *lógica* y *coherente* de los temas y conceptos matemáticos. Ver en los textos una secuencia semejante a la que proponen los programas de estudio es un indicador de que dichos programas no varían drásticamente entre sistemas educativos. Incluso explorando en Internet, la secuencia **trigonometría → círculo trigonométrico → función trigonométrica** domina en las propuestas o innovaciones para la enseñanza-aprendizaje de estos conceptos.

Sin embargo, dada su naturaleza, hay dos presentaciones o formas de construir la noción de función trigonométrica en los libros de texto. Los Textos de **Geometría y Trigonometría** o simplemente **Trigonometría** dan un tratamiento casi idéntico al que describimos de los programas de estudio, con variados y numerosos ejemplos, ejercicios y problemas de aplicación, y algunos no abordan a la función como tal.

Por otro lado, los libros de **Análisis Matemático** asumen los principios trigonométricos (es decir, de origen geométrico) y construyen la función trigonométrica o demuestran sus propiedades con herramientas de derivación, integración, expresión en series y productos infinitos, serie trigonométrica, resolución de ecuaciones diferenciales, entre otros.

En tres libros de Análisis Matemático con importante influencia escolar en el nivel superior encontramos presentaciones Geométricas - Analíticas para la construcción de las funciones seno y coseno. En (Hardy, 1908), (Apostol, 1984) y (Spivak, 1992) sobresalen presentaciones que si bien retoman los principios trigonométricos – geométricos del seno y el coseno, problematizan sobre algunos fundamentos de la teoría analítica de las funciones trigonométricas y proponen construcciones con base en herramientas del cálculo diferencial e integral. A continuación exponemos la presentación del problema que brinda cada autor.

2.1.3 Construcción Geométrica - Analítica de la Función Trigonométrica

En este apartado hemos sintetizado los aportes más importantes de Hardy, Apostol y Spivak a la función trigonométrica. El orden obedece a la cronología de publicación, pero también al orden de los elementos que presenta cada uno:

- Hardy. Fundamento de partida: longitud de un arco.
- Apostol. Unidad de medida: el radian para la función definida en los reales.
- Spivak. Construcción Analítica de la Función Trigonométrica

A course of Pure Mathematics de G. H. Hardy

En su capítulo II. Funciones de Variable Real, Hardy clasifica a las funciones, por su simplicidad e importancia, en polinomiales, racionales, algebraicas y trascendentes. De éstas últimas dice:

> Todas las funciones de x que no son algebraicas se denominan funciones *trascendentes*. La definición es negativa. No intentamos hacer una clasificación sistemática de las funciones trascendentes, pero podemos escoger una o dos sub-clases de particular importancia.
>
> **Las funciones trigonométricas o circulares directas e inversas.** Son las funciones seno y coseno de la trigonometría elemental, sus inversas, y las funciones derivadas de ellas. Asumimos provisionalmente que el lector está familiarizado con sus propiedades más importantes (las definiciones de las funciones circulares dadas en trigonometría elemental presuponen que cualquier sector de un circulo tiene asociado un número definido llamado su *área*).

Posterior a este tema vienen los capítulos:

- III. Números Complejos,
- IV. Límites de funciones de una variable entera positiva,
- V. Límites de funciones de variable continua. Funciones continuas y discontinuas,
- VI. Derivadas e Integrales,

- VII. Teoremas Adicionales en el Cálculo Diferencial e Integral.

En este último capítulo Hardy dedica un apartado al **Área de un sector en un círculo. Las funciones circulares**. Es aquí donde problematiza sobre la suposición de partida de los textos de trigonometría elemental señalando:

> La teoría de las funciones $\cos x, sen\,x$, etc., como se presenta usualmente en los libros de texto de trigonometría elemental, descansa en un supuesto no demostrado. Un *ángulo* es la configuración formada por dos líneas rectas *OA*, *OP* (ver Figura 2.1); y no hay dificultad en traducir esta definición 'geométrica' en términos puramente analíticos. En seguida se presenta la suposición, cuando se asume que los *ángulos son aptos de medirse numéricamente*, es decir, que existe un número real *x* asociado a la configuración, tal como se asocia un número real, llamado área, con una región bajo alguna curva. Una vez admitido este punto, cos *x* y sen *x* se definen de forma ordinaria, y en principio, no hay mayor dificultad para la elaboración de la teoría. Toda la dificultad recae en la pregunta ¿qué es la *x* del $\cos x$ y del $sen\,x$? Para responder, debemos definir la medida de un ángulo, y en este momento podemos hacerlo[5]. La definición más natural podría ser: suponga que *AP* es el arco de un círculo cuyo centro es *O* y cuyo radio es la unidad, de tal forma que *OA* = *OP* = 1. Entonces *x*, la medida del ángulo, es la longitud del arco *AP*. Esto es, en esencia, la definición adoptada en los libros de texto, dentro de las consideraciones que dan de la teoría de la 'medida circular'. Sin embargo, para nuestro propósito, ésta tiene un defecto fatal; no se ha probado que el arco de una curva, incluso de un círculo, posea una longitud. La noción de longitud de una curva requiere de un análisis matemático tan preciso como el de un área bajo la curva; pero este análisis, aunque del mismo carácter general que el de las secciones precedentes, es decididamente más difícil, y es imposible dar aquí cualquier tratamiento general al tema.

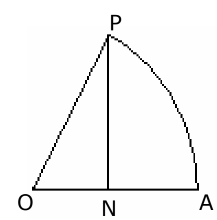


Fig. 2.1

[5] Haciendo referencia a los contenidos ya estudiados en el libro.

Por lo tanto debemos encontrar nuestra definición no en la noción de longitud sino en la de *área*. Definimos la medida del ángulo *AOP* como dos veces el área del sector *AOP* del circulo unidad.

Supongamos, en particular, que *OA* es $y=0$ y *OP* es $y = mx$, donde $m>0$. El área es una función de m, que denotaremos como $\phi(m)$. El Punto *P* es $(\mu, m\mu)$.

Tenemos entonces,

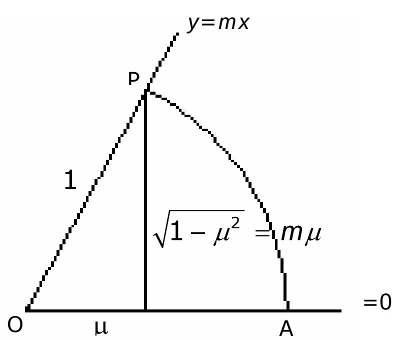


Fig. 2.2

$$P = (\mu, m\mu),$$

$$\mu^2 + (m\mu)^2 = 1$$
$$\mu^2(1+m^2) = 1$$
$$\mu^2 = \frac{1}{(1+m^2)}$$
$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$m\mu = \sqrt{1-\mu^2}$$
$$m = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}$$

$$m = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}}$$
$$\frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = \sqrt{1-\mu^2}$$

y definimos $\phi(m)$ como la suma de dos áreas,

$$\begin{aligned}\phi(m) &= \frac{1}{2}(m\mu)\mu + \int_{\mu}^{1}\sqrt{1-x^2dx} \\ &= \frac{1}{2}\mu^2\left[\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\right] + \int_{\mu}^{1}\sqrt{1-x^2dx} \\ &= \frac{1}{2}\mu\sqrt{1-\mu^2} + \int_{\mu}^{1}\sqrt{1-x^2dx}.\end{aligned}$$

De aquí que,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\mu}\phi(m) &= \frac{1}{2}\mu\cdot\frac{(-2\mu)}{2\sqrt{1-\mu^2}}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\mu^2}-\sqrt{1-\mu^2}\\ &= -\frac{\mu^2}{2\sqrt{1-\mu^2}}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\mu^2}\\ &= \frac{-\mu^2-\left(1-\mu^2\right)}{2\sqrt{1-\mu^2}}\\ &= \frac{-\mu^2-1+\mu^2}{2\sqrt{1-\mu^2}}\\ &= -\frac{1}{2\sqrt{1-\mu^2}}.\end{aligned}$$

Pero, en tanto nos interesa $\phi(m)$, calculamos

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dm} &= \frac{d\phi}{d\mu}\frac{d\mu}{dm}\\ &= \left[\frac{-1}{2\sqrt{1-\mu^2}}\right]\left[\frac{-(2m)}{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\\ &= \frac{m}{2\sqrt{1-\mu^2}\cdot(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}\\ &= \frac{m}{2\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}\cdot(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}\\ &= \frac{1}{2(1+m^2)}.\end{aligned}$$

Así,

$$\phi(m)=\frac{1}{2}\int_0^m\frac{dt}{1+t^2}.$$

Dado que

$$\begin{aligned}\tan\angle AOP &= m\\ \angle AOP &= \arctan(m)\\ &= 2\phi(m),\end{aligned}$$

de esta manera la equivalencia analítica de la definición propuesta sería definir el arc tan m con la ecuación

$$arc\tan m = \int_0^m \frac{dt}{1-t^2}.$$

Hardy aclara que una vez probado que el arco tiene un número asociado, llamado longitud, se puede trabajar la teoría de las funciones circulares. En su capítulo IX. Las Funciones Logaritmo, Exponencial y Circulares, de Variable Real (que va antecedido de los capítulos VII. Teoremas Adicionales en el Cálculo Diferencial e Integral y VIII. La Convergencia de Series Infinitas e Integrales Finitas), en el Tema **Teoría Analítica de las Funciones Circulares**.

En esta sección Hardy señala cuatro formas obvias de construir una teoría analítica de las funciones circulares:

(i) ***El Método Geométrico***. El método más natural es seguir de cerca el procedimiento ordinario de los libros de texto, haciendo una traducción del lenguaje geométrico que utilizan al lenguaje del análisis. Discutimos el problema que produce esta traducción y hemos concluido que conlleva a una seria dificultad. Tenemos que mostrar también que con cualquier arco de un círculo se asocia un número llamado su *longitud*, o con cualquier sector de un círculo se asocia un número llamado su *área*. Estas demandas son alternativas, y cuando cualquiera de ellas se satisfaga nuestra trigonometría descansará sobre fundamentos seguros. Regularmente se adopta la primera alternativa, y la trigonometría se basa en la noción de longitud, pero la discusión sobre áreas y no longitudes del Capítulo VII, nos lleva a preferir naturalmente la segunda alternativa.

(ii) ***El Método de las Series Infinitas***. El segundo método, adoptado en muchos tratados de análisis, consiste en definir las funciones trigonométricas mediante series infinitas. Definimos $\cos x$ y $sen\, x$ con las ecuaciones:

(1) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \quad sen\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots.$$

Estas series son absolutamente convergentes para todos los valores reales de x, y pueden multiplicarse a la vez. De esta manera obtenemos la fórmula

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y - sen\,x\,sen\,y$$

y las fórmulas trigonométricas adicionales. La propiedad de periodicidad es un poco más compleja. Podemos probar de (1) que el $\cos x$, qué es positivo para valores pequeños de *x*, cambia su signo sólo una vez en el intervalo (0,2), digamos para $x=\xi$; y definimos π por la ecuación $\frac{1}{2}\pi=\xi$. Entonces es más sencillo probar que si $sen\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{2}=-1$, $sen\,\pi=0$; y las ecuaciones

$$\cos(x+\pi)=-\cos x,\ \ sen(x+\pi)=-sen\,x$$

se siguen de las fórmulas adicionales. Consideraciones cuidadosas sobre la teoría, basadas en estas definiciones, pueden encontrarse en el Apéndice A del *Análisis Moderno*[6] de Whittaker y Watson.

Esta teoría es bastante satisfactoria, pero es más natural cuando consideramos $\cos z$ y $sen\,z$ como funciones de la variable compleja *z*, y no sólo cómo funciones reales de variable real, como hacemos aquí.

(iii) ***Definición del seno como producto infinito***. Un tercer método consiste en definir $sen\,x$ por la expresión

$$sen\,x=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

Este método tiene muchas ventajas, pero de forma natural demanda conocimiento sobre la teoría de los productos infinitos.

(iv) ***Definición de las funciones inversas mediante integrales***. Existe un cuarto método preferible en este momento, ya que continúa el tratamiento que se dio a la función logaritmo anteriormente en este capítulo. Empezamos por definir $\arctan x$ y $\tan y$, y entonces definimos $\cos y$ y $sen\,y$ en términos de $\tan y$. Pudimos tratar con $\arcsen x$ y $sen\,y$

[6] Modern Analysis.

como nuestras funciones fundamentales. Para este caso debemos definir $arcsen\, x$, en el intervalo (-1, 1) para *x*, con la ecuación

$$y = y(x) = arcsen\, x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

donde la raíz cuadrada es positiva; definimos $sen\, y$ por inversión; π con $\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$; y $\cos y$ y $\tan y$ con:

$$\cos y = \sqrt{1-x^2},\ \tan y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1 < x < 1).$$

El procedimiento que hemos adoptado es ligeramente más conveniente.

- **Calculus de Tom M. Apostol**

Apostol trata a las funciones trigonométricas en el tema de "Aplicaciones de la Integral", comienza con una introducción sobre la importancia de estas funciones en el Cálculo, básicamente como modeladores de fenómenos periódicos:

> Suponemos que el lector tiene algún conocimiento de las propiedades de las seis **funciones** trigonométricas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante; y sus inversas arco seno, arco coseno, arco tangente, etc. Estas funciones se discuten en los cursos de Trigonometría en relación con problemas diversos que relacionan los lados y los ángulos de los triángulos.
>
> Las funciones trigonométricas son importantes en el Cálculo, no sólo por su relación con los lados y los ángulos de un triángulo, sino más bien por las propiedades que poseen como *funciones*. Las seis funciones trigonométricas tienen en común una propiedad importante llamada *periodicidad*.
>
> Una función es *periódica* con periodo $p \neq 0$ si su dominio contiene $x+p$ siempre que contenga *x* y si $f(x+p)=f(x)$ pata todo *x* del dominio de *f*. Las funciones seno y coseno son periódicas de periodo 2π, siendo π el área de un disco circular unidad. Muchos problemas en Física e Ingeniería tratan fenómenos periódicos (tales como vibraciones, movimiento planetario y de

ondas) y las funciones seno y coseno constituyen la base para el análisis matemático de tales problemas.

Las funciones seno y coseno pueden introducirse de varias maneras. Por ejemplo, hay definiciones geométricas que relacionan las funciones seno y coseno a los ángulos, y hay otras de carácter analítico que introducen esas funciones sin referencia alguna a la Geometría. Unas y otras son equivalentes, en el sentido de que todas ellas conducen a las mismas funciones.

De ordinario, cuando trabajamos con senos y cosenos no nos importan tanto sus definiciones como las propiedades que pueden deducirse a partir de sus definiciones. Algunas de esas propiedades, importantes en Cálculo, se citan seguidamente. Corrientemente, designamos los valores de las funciones seno y coseno de *x* poniendo sen *x*, cos *x*, respectivamente.

Propiedades Fundamentales del seno y el coseno.

1. *Dominio de definición*. Las funciones seno y coseno están definidas en toda la recta real.

2. *Valores especiales*. Tenemos $\cos 0 = sen = \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \pi = -1$.

3. *Coseno de la diferencia*. Para *x* e *y* cualesquiera, tenemos $\cos(y - x) = \cos y \cos x + sen\, y\, sen\, x$.

4. *Desigualdades fundamentales*. Para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tenemos $0 < \cos x < \frac{sen\, x}{x} < \frac{1}{\cos x}$.

A partir de esas cuatro propiedades podemos deducir todas las propiedades del seno y el coseno que tienen importancia en el Cálculo. Esto sugiere que podemos introducir las funciones trigonométricas axiomáticamente. Esto es, podríamos tomas las propiedades 1 a 4 como axiomas del seno y el coseno y deducir todas las demás propiedades como teoremas. Para trabajar correctamente no debe discutirse sobre una teoría vacía, es necesario probar que existen funciones que satisfagan las propiedades anteriores. Por el momento pasaremos de largo este problema. Primero suponemos que

> existen funciones que satisfacen estas propiedades fundamentales y mostraremos cómo pueden deducirse las demás propiedades. Luego, indicamos un método geométrico para definir el seno y el coseno como funciones con las propiedades deseadas. En un capítulo posterior también esbozamos un método para definir el seno y el coseno.

Seguido a esta introducción Apostol enuncia tres teoremas, con propiedades, desigualdades y fórmulas de integración, respectivamente, para las funciones, para finalmente presentar la anunciada **Descripción Geométrica de las Funciones Seno y Coseno**:

> Consideremos una circunferencia de radio *r* y centro en el origen. Designemos el punto (*r*, 0) por *A*, y sea *P* cualquier otro punto de la circunferencia. Los dos segmentos rectilíneos *OA* y *OP* determinan una figura geométrica llamada ángulo que representamos con el símbolo $\angle AOP$. Un ejemplo se representa en la Figura 2.3. Queremos asignar a este ángulo un número real no negativo *x* que puede usarse como medida de su magnitud. El método más corriente para hacerlo es tomar una circunferencia de radio 1 y llamar *x* a la longitud del arco *AP*, descrito en el sentido contrario al de las agujas del reloj de *A* a *P*, y decir que la medida de $\angle AOP$ es *x* radianes. Desde el punto de vista lógico, esto no es satisfactorio por el momento pues no se ha precisado el concepto de *longitud de arco*. Este será discutido más adelante. Puesto que la noción de área ha sido ya discutida, preferimos utilizar el área del sector circular *AOP* en lugar de la longitud del arco *AP* como medida de la magnitud de $\angle AOP$. Se sobreentiende que el sector *AOP* es la proporción más pequeña del disco circular cuando *P* está por encima del eje real y la mayor cuando *P* está por debajo del eje real.

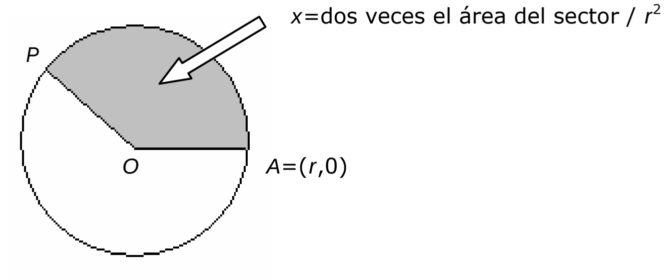


Fig. 2.3
Un ángulo $\angle AOP$ de x radianes

Más adelante, cuando se haya discutido la longitud del arco, veremos que el arco AP tiene una longitud exactamente doble del área del sector *AOP*. Por consiguiente, para conseguir la misma escala de medida de ángulos por los dos métodos, usaremos el doble del área del sector *AOP* como medida del ángulo $\angle AOP$. No obstante, Para obtener una medida independientemente de la unidad de distancia en nuestro sistema coordenado, definiremos la medida de $\angle AOP$ como el *doble del área del sector AOP dividida por el cuadrado del radio*. Esta razón no varía si dilatamos o contraemos el círculo, y por tanto no se pierde generalidad al restringir nuestras consideraciones al círculo unidad. La unidad de medida así obtenida se llama *radián*. Así que, decimos que la medida de un ángulo $\angle AOP$ es x radianes si $x/2$ es el área del sector *AOP* determinado en el disco circular unidad.

Ya hemos introducido el símbolo π para designar el área de un disco circular unidad. Cuando P=(-1, 0), el sector *AOP* es un semicírculo de área $\frac{1}{2}\pi$, de modo que subtiende un ángulo de π radianes. El disco completo es un sector de 2π radianes. Si inicialmente P está en (1, 0) y se desplaza una vez alrededor de la circunferencia en sentido contrario al de las agujas del reloj, el área del sector *AOP* crece de 0 a π, tomando todos los valores del intervalo $[0, \pi]$ exactamente una vez. Esta propiedad es geométricamente aceptable, puede demostrarse expresando el área como una integral, pero no expondremos la demostración.

El siguiente paso es definir el seno y el coseno de un ángulo. En realidad, preferimos hablar del seno y del coseno de un *número* mejor que de un ángulo, del modo que el seno y el coseno serán *funciones* definidas sobre la recta real. Procedemos como sigue: Consideramos un número x tal que $0<x<2\pi$ y sea P el punto de la circunferencia unidad tal que el área del sector AOP sea igual a $\frac{x}{2}$.

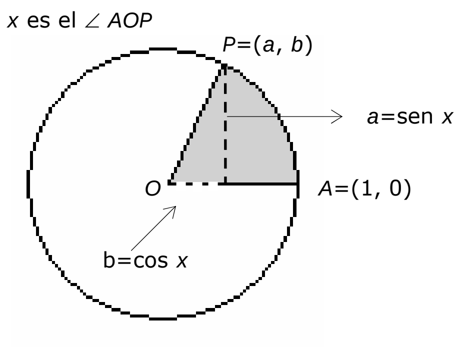


Fig. 2.4
Descripción geométrica de sen *x* y cos *x*

Sean (a, b) las coordenadas de P. En la Figura 2.4 se presenta un ejemplo. Los números a y b están completamente determinados por x. Definamos el seno y el coseno de x como sigue:

$$\cos x = a, \;\; sen\, x = b.$$

Dicho de otro modo, $\cos x$ es la abscisa de P y $sen\, x$ es su ordenada.

Por ejemplo, cuando x=π, tenemos P=(-1, 0) de modo que $\cos \pi = -1$ y $sen\, \pi = 0$. Análogamente, cuando $x = \frac{1}{2}\pi$ tenemos P=(0 ,1) y por tanto $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$ y $sen \frac{1}{2}\pi = 1$. Este procedimiento da el seno y al coseno como funciones definidas en el intervalo abierto (0, 2π). Se extienden las definiciones a todo el eje real por medio de las igualdades siguientes:

$$sen\, 0 = 0,\; \cos 0 = 1,\; sen\,(x + 2\pi) = sen\, x,\; \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Las cuatro funciones trigonométricas se definen ahora en función del seno y el coseno mediante las conocidas fórmulas,

$$\tan x = \frac{sen\, x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{sen\, x},\; \sec x = \frac{1}{\cos x},\; \csc x = \frac{1}{sen\, x}.$$

> Estas funciones están definidas para todo real x salvo en ciertos puntos aislados en los que los denominadores pueden ser cero. Satisfacen la propiedad de periodicidad $f(x+2\pi)=f(x)$. La tangente y la cotangente tienen el periodo menor π.

En seguida, Apostol presenta algunos razonamientos para demostrar las propiedades y desigualdades trigonométricas de partida, para cerrar anunciando una presentación sin geometría de las funciones trigonométricas, en un capítulo posterior. Esta presentación consiste de establecer las funciones seno y coseno en series infinitas, en el Capítulo 11 titulado *Sucesiones y Series de Funciones*.

- **Cálculo Infinitesimal de Michael Spivak**

Spivak trata a las funciones trigonométricas en el Capítulo de **Derivadas e Integrales**. Llama la atención que lo hace antes de abordar las funciones logaritmo y exponencial, pero después de los temas Derivadas e Integrales. Spivak parte de los conceptos básicos de ángulo, y de seno y coseno de ángulos dirigidos, pero busca construir el concepto de *función*. Transcribimos esta sección del libro, para más adelante hacer una síntesis de lo que requiere una construcción, necesariamente analítica, de la función trigonométrica. Spivak, inicia diciendo:

> Lo que hemos hecho ha sido definir el seno y el coseno de un ángulo dirigido (Figura 2.5); lo que *queremos* definir es $sen\,x$ y $\cos x$ para cada *número* x. El procedimiento corriente para hacer esto es asociar un ángulo a cada número. El método más antiguo consiste en "medir ángulos en grados". Un ángulo "todo alrededor" se asocia a 360, un ángulo de "mitad de vuelta" se asocia a 180, un ángulo de "un cuarto de vuelta" a 90, etc. El ángulo asociado de esta manera al número x recibe el nombre de "ángulo de x grados". El ángulo de 0 grados es el mismo que el ángulo de 360 grados, un ángulo de

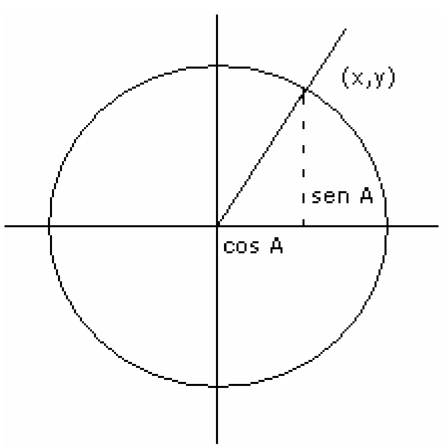


Fig. 2.5

90 grados es también un ángulo de 360 + 90 grados, y así para cualquier ángulo. Se puede ahora definir una función, que denotaremos por sen°, como sigue:

$$sen^{\circ}(x) = \text{seno del ángulo en } x \text{ grados.}$$

Este enfoque presenta dos dificultades. Aunque puede estar claro lo que entendemos por ángulo de 90 o 45 grados, no está del todo claro qué cosa es un ángulo de, por ejemplo, √2 grados. Aun cuando se pudiera obviar esta dificultad, no es probable que el sistema, al depender como depende de la elección arbitraria de 360, conduzca a resultados tan elegantes; sería pura casualidad que la función sen tuviera propiedades matemáticamente agradables.

La *medida en radianes* parece ofrecer el remedio para los dos defectos mencionados. Dado un número cualquiera *x*, elíjase un punto *P* sobre el círculo unidad tal que *x* sea la longitud de arco de círculo que empieza en (1, 0) y que se dirige hacia *P* en sentido contrario a las agujas de un reloj (Fig. 2.6). El ángulo dirigido determinado por *P* recibe el nombre de "ángulo de *x* radianes". Al ser 2π la longitud total del círculo, el ángulo de *x* radianes y el ángulo de 2π + *x* radianes son idénticos. Una función sen^r puede definirse ahora como sigue:

$$sen^r(x) = \text{seno del ángulo de } x \text{ radianes.}$$

Puede adoptarse fácilmente este mismo método para definir sen°; puesto que queremos tener $sen^{\circ}360 = sen^r 2\pi$, podemos definir

$$sen^{\circ}x = sen^r \frac{2\pi x}{360} = sen^r \frac{\pi x}{180}.$$

Pronto abandonaremos el superíndice r en sen^r, ya que sen^r (y no sen°) es la única función que nos interesa; antes de hacerlo, conviene hacer unas cuantas advertencias.

La expresión $sen^{\circ}x$ y $sen^r x$ se escriben a veces

$$sen\, x^{\circ}$$

$$sen\, x \text{ radianes,}$$

pero esta notación es completamente confusa; un número x es simplemente un número; no lleva ningún distintivo que indique que es "en grados" o "en radianes". Si se tiene duda acerca del significado de la notación $sen\, x$ se suele preguntar:

¿Está x en grados o radianes?

pero lo que se quiere decir es:

¿se trata de sen° o sen^{r}?

Incluso para los matemáticos, adictos al rigor, estas observaciones serían indispensables, si no fuera por el hecho de que el no tomarlas en consideración conduce a soluciones incorrectas de ciertos problemas.

Aunque la función sen^{r} es la que deseamos designar simplemente por sen (y utilizarla de aquí en adelante exclusivamente), la misma definición de sen^{r} encierra una dificultad. La definición propuesta depende del concepto de longitud de una curva. Aunque la longitud de una curva ha sido definida en varios problemas, es también fácil reformular la definición en términos de área. Supongamos que x es la longitud del arco de círculo unidad desde (1, 0) hasta P: este arco contiene así $\frac{x}{2\pi}$ de la longitud total 2π de la circunferencia del círculo unidad. Designemos por S el "sector" indicado en la Figura 2.6; S está limitado por el círculo unidad, el eje horizontal, y la semirrecta por (0, 0) y P. el área de S debería ser $\frac{x}{2\pi}$ veces el área interior al círculo unidad, la cual damos por supuesto que es π; así pues, S deberá tener por área:

$$\frac{x}{2\pi}\pi = \frac{x}{2}$$

Podemos, por lo tanto, definir cos x y sen x como las coordenadas del punto P que determina un sector de área $\frac{x}{2}$.

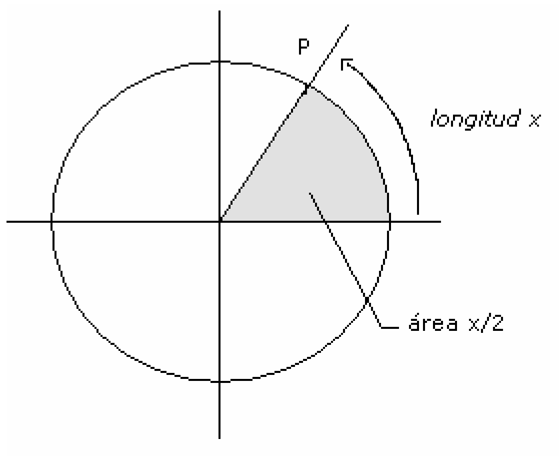


Fig. 2.6

Basados en estas observaciones, iniciamos la definición rigurosa de las funciones seno y coseno. La primera definición identifica a π como el área del círculo unidad; más exactamente, dos veces el área de un semicírculo (Fig. 2.7).

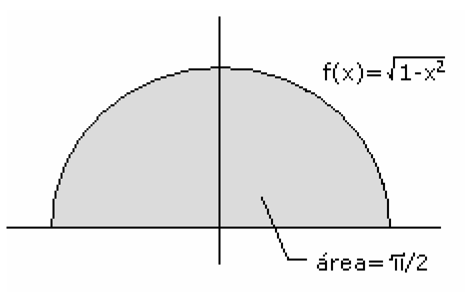


Fig. 2.7

Definición

$$\pi = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx \,.$$

(Esta definición no se ofrece simplemente como ornato; para definir las funciones trigonométricas será necesario empezar definiendo $sen\, x$ y $\cos x$ solamente para $0 \le x \le \pi$.)

La segunda definición esta destinada a describir, para $-1 \le x \le 1$, el área $A(x)$ del sector limitado por el círculo unidad, el eje horizontal y la semirrecta por $\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$. Si $0 \le x \le 1$, esta área puede expresarse (Figura 2.8) como la suma del área de un triángulo y el área de una región por debajo del círculo unidad:

$$\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

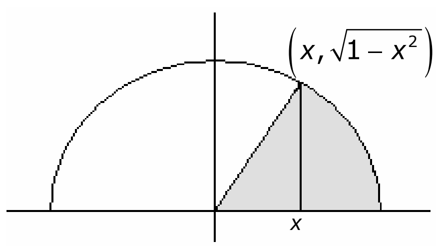


Fig. 2.8

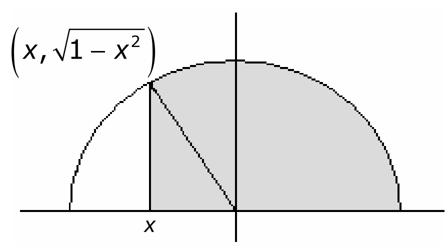


Fig. 2.9

Se da el caso que esta misma fórmula vale también para $-1 \le x \le 0$. En este caso (Figura 2.9) el término

$$\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$$

es negativo, y representa el área del triángulo que debe ser restado del término

$$\int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

DEFINICIÓN

Si $-1 \leq x \leq 1$, entonces

$$A(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

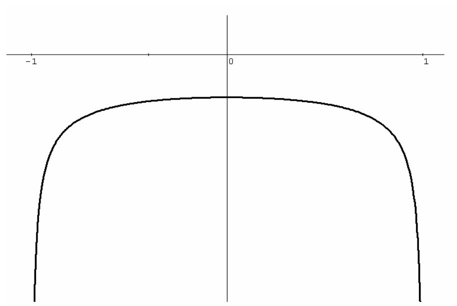
Obsérvese que si $-1 \leq x \leq 1$, entonces A es derivable en x y (aplicando el teorema fundamental del cálculo infinitesimal),

$$A'(x) = \frac{1}{2}\left[x\,\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}\right] - \sqrt{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-x^2+(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right] - \sqrt{1-x^2}$$

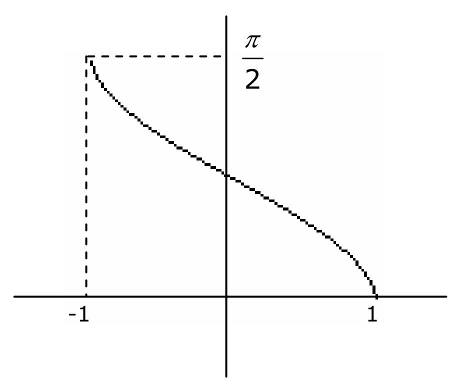
$$= \frac{1-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}$$

$$= \frac{1-2x^2-2(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}.$$



$A'(x)$

Fig. 2.10



$A(x)$

Fig. 2.11

Obsérvese también (Figura 2.11) que sobre el intervalo [-1, 1] la función A decrece a partir de

$$A(-1) = 0 + \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

hasta $A(1)=0$. Esto se sigue directamente de la definición de A, y también del hecho de que su derivada es negativa sobre (-1, 1).

Para $0 \le x \le \pi$ queremos definir $\cos x$ y $sen\, x$ como las coordenadas de un punto $P=(\cos x, sen\, x)$ sobre el círculo unidad que determina un sector cuya área es $\frac{x}{2}$ (Figura 2.10). En otros términos:

DEFINICIÓN

Si $0 \le x \le \pi$, entonces $\cos x$ es el único número de [-1, 1] tal que

$$A(\cos x) = \frac{x}{2};$$

y

$$sen\, x = \sqrt{1-(\cos x)^2}.$$

Esta definición requiere, en realidad, unas cuantas palabras de justificación. Para saber que *existe* un número y que satisface $A(y)=\frac{x}{2}$, utilizamos el hecho de que A es continua, y de que A toma valores 0 y $\frac{\pi}{2}$. Este recurso tácito al teorema de los valores intermedios es crucial si queremos que sea precisa nuestra definición preliminar. Una vez hecha, y justificada, nuestra definición, podemos ahora proceder muy rápidamente.

TEOREMA 1. Si $0 < x < \pi$, entonces

$$\cos'(x) = -sen\, x$$
$$sen'(x) = \cos x$$

DEMOSTRACIÓN. Si $B=2A$, entonces la definición $A(\cos x)=\frac{x}{2}$ puede escribirse

$$B(\cos x) = x;$$

en otras palabras, coseno es precisamente la inversa de *B*. Hemos calculado ya

$$A'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \, ,$$

de lo cual deducimos que

$$B'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, .$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\cos'(x) &= (B^{-1})'(x) \\
&= \frac{1}{B'(B^{-1}(x))} \\
&= \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{1-[B^{-1}(x)]^2}}} \\
&= -\sqrt{1-(\cos x)^2} \\
&= -sen\, x.
\end{aligned}$$

Puesto que

$$sen\, x = \sqrt{1-(\cos x)^2} \, ,$$

obtenemos también

$$sen'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\cos x \cdot \cos'(x)}{\sqrt{1-(\cos x)^2}} = \frac{\cos x \;\; sen\, x}{sen\, x} = \cos x.$$

La información contenida en el teorema 1 puede ser utilizada para trazar las gráficas de seno y coseno sobre el intervalo [0, π]. Puesto que

$$\cos'(x) = -sen\, x < 0, \;\; 0 < x < \pi \, ,$$

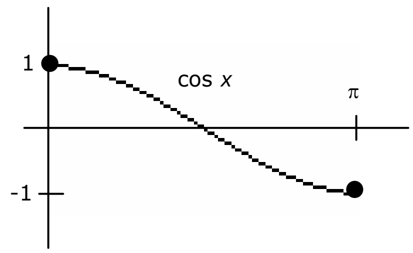


Fig. 2.11

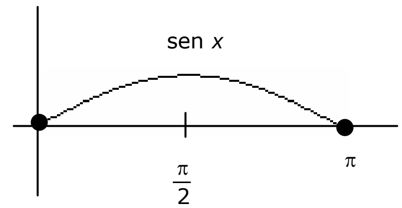


Fig. 2.12

la función coseno decrece desde $\cos 0 = 1$ hasta $\cos \pi = -1$ (Figura 2.12). En consecuencia, $\cos y = 0$ para un y único de [0, π]. Para hallar y observemos que la definición de coseno,

$$A(\cos x) = \frac{x}{2},$$

significa que

$$A(0) = \frac{y}{2},$$

de modo que

$$y = 2\int_{0}^{-1} \sqrt{1-t^2}dt \,.$$

Es fácil ver que

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{1-t^2}dt = \int_{0}^{1} \sqrt{1-t^2}dt \,,$$

de modo que podemos escribir también

$$y = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

Tenemos ahora

$$sen'(x) = \cos x \begin{cases} > 0, \; 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ < 0, \; \dfrac{\pi}{2} < x < \pi, \end{cases}$$

de modo que seno crece sobre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ desde $sen\,0 = 0$ hasta $sen\frac{\pi}{2} = 1$, y después decrece sobre $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ hasta $sen\,\pi = 0$ (Figura 2.13).

Los valores de $sen\,x$ y $\cos x$ cuando x no está en $[0, \pi]$ se calculan muy fácilmente mediante un proceso de yuxtaposición en dos fases:

(1) Si $\pi \le x \le 2\pi$, entonces

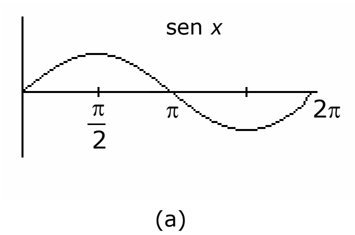
$$sen\,x = -sen(2\pi - x),$$

$$\cos x = \cos(2\pi - x).$$

La Figura 2.14 muestra las gráficas de seno y coseno sobre $[0, 2\pi]$.

(2) Si $x = 2\pi k + x'$ para algún entero k y algún x' de $[0, 2\pi]$, entonces

$$sen\,x = sen\,x',$$
$$\cos x = \cos x',$$



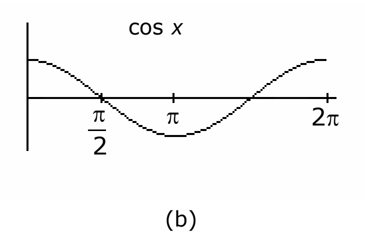


Fig. 2. 14

La Figura 2.15 muestra las gráficas de seno y coseno, definidas ahora sobre todo **R**.

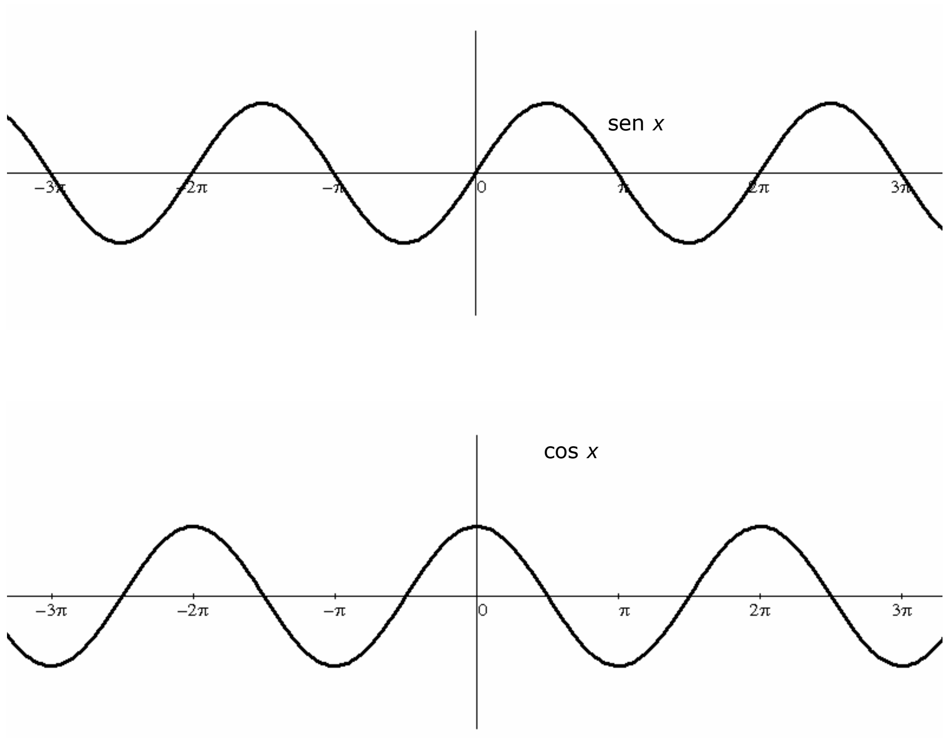


Fig. 2.15

Una vez construidas las funciones, Spivak prueba algunas propiedades básicas para el seno y el coseno, e incluye, al igual que los autores anteriores, ejemplos y ejercicios variados.

En las tres presentaciones hemos encontrado elementos importantes sobre la definición de la función trigonométrica que el discurso matemático escolar ha dejado de lado, sin exponer o sin problematizar. Hardy hace explícito que para tratar *analíticamente* a la función trigonométrica es necesario ir más allá de los principios básicos trigonométricos-geométricos, específicamente demostrar que un arco puede medirse y en consecuencia asociarle un número llamado longitud. Apostol menciona tal circunstancia sin hacer crítica de los textos de trigonometría y sin hacer una demostración dentro del tema. Por su lado Spivak no lo problematiza como punto de partida para una teoría analítica de la función trigonométrica, pero lo incluye en su construcción de la función.

Una vez discutida la longitud del arco Hardy propone cuatro formas para abordar la función trigonométrica: la *geométrica*, una vez que se ha demostrado que el arco puede medirse, mediante las *series infinitas* o los *productos infinitos* sin hacer una reflexión, referencia o explicación de cómo se construyen tales series o productos; y finalmente la definición de las *funciones inversas mediante integrales* donde toma como punto de partida la integral que resulta de demostrar que un arco tiene asociado un número que representa la *longitud*.

Apostol centra más la atención en las propiedades de la función, retomando conceptos de la trigonometría, pero atiende con precisión a la variable independiente de la función cuando habla de la unidad de medida, de la *longitud del arco*, necesaria para trabajar en la teoría analítica de las funciones trigonométricas, el *radián*.

Finalmente, Spivak no proporciona argumentos convincentes, en términos teóricos, del uso de los radianes como unidad de medida angular, realiza la equivalencia grados $\leftrightarrow$ radianes y comienza su construcción analítica. Su propuesta lleva a la par dos desarrollos: uno donde la x es la longitud del arco y el otro donde x es la coordenada de la curva $y = \sqrt{1 - x^2}$, que convergen y se articulan en la construcción de las funciones seno y coseno.

Implícita o explícitamente, los tres autores toman de base un razonamiento respecto de la *proporción* de la longitud del arco y el área un sector de la circunferencia.

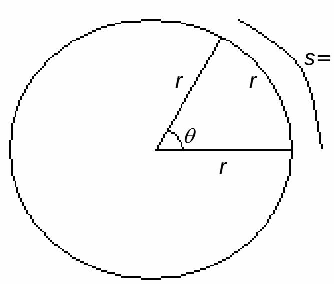


Fig. 2.16

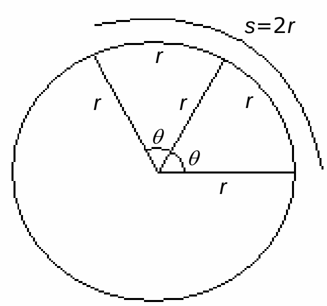


Fig. 2.17

longitud del arco de una circunferencia

Sea θ el ángulo, inscrito en una circunferencia de radio r, que subtiende una longitud de arco r (Figura 2.16), se deduce que la longitud s conforme θ crece es $s = \theta r$.

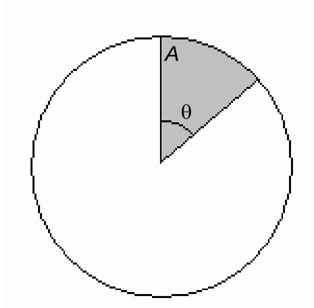


Fig. 2.18

Por otro lado tenemos el área de un sector de la circunferencia (Figura 2.18), que puede expresarse mediante la razón de proporcionalidad: $\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi}$ (el área A es al área total [πr^2] lo que θ es a la longitud total [2π]).

Estas expresiones necesitan una unidad de medida que mantenga la homogeneidad de las ecuaciones. Esto es, abandonar el grado como unidad de medida angular y usar su equivalente en radianes. Tal como sucede en los tres textos citados es probable que ningún libro de texto de matemáticas aborde el tema de la homogeneidad de las ecuaciones, ya que es propio de los problemas que aborda la física y que en nuestra investigación jugará un papel fundamental.

2.2 El Fenómeno Didáctico de la Extensión

Los Programas de Estudio y Textos de apoyo muestran a la Función Trigonométrica como un saber a enseñar producto de la Transposición Didáctica, en el sentido de Chevallard (1991/1997). Esta transformación del saber juega un papel importante en la estructuración del discurso matemático escolar y en consecuencia en la interacción del sistema didáctico.

Vamos a entender por fenómeno didáctico todo evento periódico de carácter educativo generado por el discurso matemático escolar y las interacciones provocadas entre docente y estudiantes al abordar un saber escolar específico. Este fenómeno puede tomar matiz de fenómeno de enseñanza y/o fenómeno de aprendizaje.

A partir de lo reportado por Maldonado (2005) y el análisis de los programas y los textos que aquí realizamos, podemos inferir que el tratamiento escolar tradicional que hay en el nivel Medio Superior del concepto de Función Trigonométrica es una **extensión** de la Trigonometría Clásica, que encuentra en el círculo trigonométrico una explicación necesaria y suficiente para dejar claro:

- el dominio de la función en todos los reales,
- el significado de un ángulo negativo,
- la conversión de la unidad de medida: grados $\leftrightarrow$ radianes,

- la equivalencia entre radianes y reales,
- la periodicidad y el acotamiento de la función.

La programación de los temas referentes a Trigonometría y Funciones Trigonométricas en el Nivel Medio Superior (NMS) y en el discurso matemático escolar asociado, permite que al final de este periodo las funciones trigonométricas puedan operarse (derivarse y, en algunos sistemas educativos, integrarse). En consecuencia, el discurso matemático escolar del Nivel Superior (NS) asume de entrada que la función trigonométrica ha sido aprendida por el estudiante, generando en el docente una **indiferencia** ante las explicaciones analíticas que problematizan la longitud de un arco, la conveniencia o necesidad del uso del radián, el significado analítico de la expresión en serie infinita de la función, etc.

No profundizaremos en el diseño de los programas de estudio del NS por la diversidad que enfrentaríamos y porque consideramos que el análisis de textos avanzados que recién hicimos describe un acercamiento dominante. Sin embargo, hemos incluido (ver Anexo C) a manera de ejemplo el nuevo programa de estudios de la materia Cálculo II de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación que ofrece la Universidad Nacional Autónoma de México en la Facultad de Estudios Superiores, Acatlán; que entrara en vigencia a partir del semestre 2006-I. Siendo una carrera universitaria especializada en el estudio de la Matemática y sus aplicaciones, esperábamos encontrar en el programa de estudios, temáticas que trataran con mayor profundidad el tema de las funciones trascendentes, logaritmo, exponencial y trigonométrica; especialmente cuando en programas posteriores la función trigonométrica juega un papel importante para la solución de ecuaciones diferenciales, la modelación de fenómenos periódicos y la expresión en serie trigonométrica, entre otros.

2.2.1 Concepciones del estudiante sobre la Función Trigonométrica

Ya mencionamos anteriormente que los estudios sobre el aprendizaje, y en consecuencia las concepciones relacionadas con el concepto de función han abundado en los diversos paradigmas de nuestra disciplina. No ha sucedido lo mismo para el caso particular de la función trigonométrica.

De Kee, Mura y Dionne (1996) reportan el estado de comprensión de las nociones de seno y coseno en los contextos del triángulo rectángulo y del círculo trigonométrico, usando las cinco componentes del método constructivista, no ampliado, de Herscovics y Bergeron (1982): la *comprensión inicial*, la *comprensión del procedimiento*, la *abstracción*, la *formalización* y la *comprensión global*. Sin embargo, comienzan cada contexto estudiando la comprensión global de las nociones. Su investigación se realiza entre estudiantes canadienses de un nivel educativo equivalente al segundo de bachillerato del sistema educativo mexicano.

Los conflictos que presentan los estudiantes son variados, dependen del problema y del conjunto de conceptos asociados. Las representaciones dominantes entre los alumnos fueron:

- como el procedimiento que consiste en dividir una entre otra las longitudes de dos lados de un triángulo (rectángulo) y que producen el seno o el coseno de un ángulo (agudo). Aunque a veces los alumnos aplicaban este procedimiento indebidamente a triángulos que no eran rectángulos o a ángulos que no eran agudos;
- como coordenadas cartesianas de un punto en un círculo trigonométrico, esas coordenadas eran, para los alumnos, el coseno y el seno del «punto»;
- como las funciones de una calculadora, funciones que proporcionaban, según los alumnos, el seno y el coseno de un número que expresaba la medida de un ángulo.
- como las curvas de aspecto ondulado. Incluso algunos alumnos admitían que esas curvas seguían representando las mismas funciones cuando sufrían una rotación o un cambio de escala.
- como una ecuación, aunque raramente recurrieron a ella y eran susceptibles de equivocarse cuando lo hacían.

Se encontraron concepciones alrededor de la función trigonométricas relacionadas a las concepciones ya estudiadas sobre el concepto de función general (ver Capítulo 1), pero dos llamaron nuestra atención por ser particulares de la función trigonométrica:

> … no se hace diferencia entre el seno como una *relación* trigonométrica y el seno como *función* trigonométrica…
>
> ... una «función» es el conjunto de diferentes objetos que comúnmente llamamos funciones («la función trigonométrica es el conjunto, el coseno, el seno, todas esas cosas») …

Las autoras señalan que para favorecer la comprensión hay que dar más importancia a los lazos entre las diversas representaciones de la noción, aunque dichos lazos puedan parecernos evidentes y triviales cuando ya se posee el concepto. Sin embargo, hacen una reflexión, o más bien crítica, sobre el papel que juega el círculo trigonométrico en el paso de las concepciones geométricas a las concepciones funcionales relacionadas con el seno y el coseno (y que constituye uno de los lazos más importantes entre la relación y la función trigonométrica):

> *Cuando comparamos el desempeño de los alumnos en el contexto del triángulo rectángulo y en el del círculo trigonométrico, constatamos que era mejor en el primer contexto, aun cuando el segundo estuviera más fresco en su mente, ya que acababan de terminar su estudio mientras que había pasado todo un año desde la presentación del primero. Observamos notoriamente pocas huellas de comprensión, del género que fuera, de la función circular y de su papel en la definición de las funciones trigonométricas. Si pensamos que la función circular no es más que un medio didáctico destinado a volver más visual, más «concreta», la construcción de las funciones trigonométricas, esta constatación deja perplejo. Hay que reconocer que esta aproximación concretiza la definición de las funciones trigonométricas al precio de complicarla considerablemente.*

Por otro, Maldonado (2005)[7] consciente de la distinción que se ha marcado en la aproximación socioepistemológica entre las funciones trascendentes y algebraicas, diseña un cuestionario con base en los contenidos institucionales, de tres sistemas educativos mexicanos, para explorar las concepciones de los estudiantes alrededor de la función trigonométrica. Su diseño dibuja tres etapas escolares: el planteamiento de

[7] No podemos dejar de señalar que no localizamos otras investigaciones de este corte, el de concepciones ligadas a la función trigonométrica, en el periodo de 1996 a 2005.

la razón trigonométrica, la relación entre ángulos medidos en grados y radianes, y la comprensión de las propiedades. Mostramos aquí una muestra significativa de las respuestas (y concepciones) de los estudiantes:

> **Pregunta**: Dado $\cot B = \frac{3}{4}\cot$, ¿cuál es el seno, coseno y tangente del ángulo *B*?
>
> **Respuesta**: Asigna, en un triangulo rectángulo, el valor de 3 al cateto adyacente, el valor de 4 al cateto opuesto, calcula el valor de la hipotenusa y construye las razones trigonométricas restantes.

La respuesta es correcta y cumple el propósito de usar las razones trigonométricas. Sin embargo, parece perder el sentido de *razón* como expresión de proporción al no responder, por ejemplo, $senB = \frac{8}{10}$. Podemos inferir que la enseñanza de las razones descansa en una presentación estática, donde al conjunto de razones trigonométricas le corresponde un sólo triángulo.

> **Pregunta**: ¿Cuál es el valor de $sen\frac{\pi}{2}$ y $\cos\frac{\pi}{2}$?, argumente.
>
> **Respuesta**: *como* $\frac{\pi}{2}$ *está en radianes tendríamos que convertir a grados y la fórmula para convertir es* $x \cdot \frac{180}{\pi}$ *, entonces tenemos que* $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{180}{2} = 90$ .... $sen\,90 = 1$ *y* $\cos 90 = 0$.

Parece claro que si el discurso matemático escolar presenta la conversión de la medida del ángulo en grados a radianes, y viceversa, como una equivalencia, el estudiante puede no distinguir entre el uso de uno y otro. El diseño buscaba una respuesta en radianes mediante el uso del círculo trigonométrico, pero incluso usándolo la familiaridad de los estudiantes con el uso de los grados los lleva a la conversión antes de calcular el seno y el coseno.

Pregunta: ¿Para qué valor de x se satisface $sen\, x = \sqrt{5}$?

Respuesta: Las respuestas varían. Con el uso de la calculadora la tercera parte de los estudiantes calcula $\sqrt{5}$ en sen^{-1} y concluyen que x tiene infinitos valores, otra tercera parte responde en términos del rango del seno, y el resto responde con otro tipo de argumentos.

Probablemente la respuesta más interesante sea aquella que usa al rango como argumento, ya que descansa en reconocer una propiedad de la función seno, la de acotamiento. La respuesta que sorprende es la de *infinitos* valores, no sólo porque la calculadora marque un error en el cálculo, también porque la pregunta pide un único valor para x que cumpla la ecuación. Asumir que infinitos valores del argumento tengan una misma imagen en la función puede relacionarse con la propiedad periódica de la función seno, sin embargo, esta concepción contrasta con las respuestas a la siguiente pregunta.

Pregunta: ¿Para qué valores de x se satisface $sen\, x = \cos x$? Argumenta tu respuesta graficando $sen\, x$ y $\cos x$?

Respuesta: Los estudiantes grafican ambas funciones $y = sen\, x$ y $y = \cos x$, y localizan los puntos de intersección en el intervalo graficado. Sin embargo, aun señalando varias intersecciones en las gráficas los estudiantes responden a lo más con dos valores para x.

La pregunta establece de entrada la *ecuación* $sen\, x = \cos x$ y sugiere graficar las *funciones* seno y coseno, pero en la respuesta no se usa el círculo trigonométrico para la construcción gráfica. El uso del grado como unidad de medida para x domina al nivel de construir un plano cartesiano con eje x en grados y eje y en reales, dando en consecuencia la respuesta en grados (x=45° y x=225°).

Pregunta: Grafica $\tan x$ y explica sus propiedades

Respuesta: se construyen las graficas por dos vías, (1) usando calculadora de capacidad gráfica, reproduciendo en papel en un plano con eje *x* real y eje *y* real, pero sin explicaciones y, (2) obtenidas sin calculadora, construyendo un plano con eje *x* en grados y eje *y* en reales, señalando como propiedades las raíces de la función y su crecimiento al infinito. Solo un caso aislado menciona las asuntotas de la función.

Es claro que no hay una concepción de *funcionalidad* de los conceptos trigonométricos entre los estudiantes, es decir, se conservan la razón trigonométrica y sus unidades de medida como el instrumento de resolución de aquello que se relacione con el seno, el coseno, la tangente y sus inversas.

Maldonado (2005) reporta que la relación (equivalencia) del radián y el real constituye el punto de partida para las Funciones Trigonométricas y concluye que al no hacerse explícito en el discurso matemático escolar provoca que para el estudiante sea indistinto el tratamiento de razón o de función. En nuestra opinión, hacer explícita dicha relación modificaría ligeramente las respuestas, pero es poco probable que modifique sus concepciones del concepto, ya que en realidad la explicación no genera la necesidad de cambiar la unidad de medida.

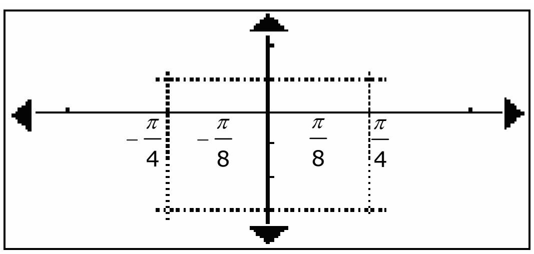
2.3 Tratamiento Algebraico a la Función Trigonométrica

Algunos esfuerzos por abordar la función trigonométrica se han orientado a continuar el tratamiento de las funciones algebraicas, generando una dinámica operativa sobre la función. Es decir, trabajar con las funciones $y = A\,sen(Bx + C) + D$, $y = A\cos(Bx + C) + D$ y $y = A\tan(Bx + C) + D$ en un contexto gráfico donde el cambio de cada parámetro puede interpretarse como una operación con constantes o como transformaciones a la función.

Hornsby (1990) detectó la complejidad de graficar la función trigonométrica dando significado a todos los parámetros que ella involucra. El método que propone para un mejor entendimiento del significado de los parámetros en la gráfica de la función busca, en esencia, relacionar las constantes en la fórmula con las propiedades de la función observando su significado en la gráfica. Por ejemplo, para graficar $f(x) = 2\,sen(4x + \pi) - 1$, inicia calculando el intervalo donde se define el periodo resolviendo la desigualdad $0 \le 4x + \pi \le 2\pi$,

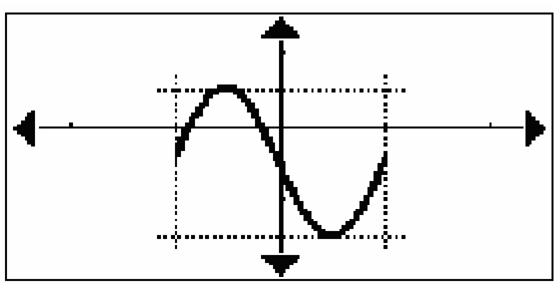
$$\begin{array}{ll} 0 \le 4x + \pi & 4x + \pi \le 2\pi \\ -\pi \le 4x & 4x \le 2\pi - \pi \\ \dfrac{-\pi}{4} \le x & x \le \dfrac{\pi}{4} \\ x \ge \dfrac{-\pi}{4} & \end{array}$$

El siguiente paso consiste en determinar el rango de la función reemplazando $sen(4x + \pi)$ por los valores máximo y mínimo de $y = sen\,x$, esto es $f(x) = 2(1) - 1 = 1$ y $f(x) = 2(-1) - 1 = -3$. Con estos valores calcula la mitad de la diferencia del máximo y mínimo de la función, para obtener la amplitud de la función $\left[1 - (-3)\right]/2 = 2$. Para graficar la función inicia con los intervalos y amplitud encontrada, pide dibujar líneas verticales achuradas en $x = -\dfrac{\pi}{4}$ y $x = \dfrac{\pi}{4}$, y líneas horizontales achuradas en $y = -3$ y $y = 1$.



Ahora, el intervalo encerrado por las líneas se divide en cuatro y se evalúa la función para los valores de x sobre el eje y $\left(x = -\dfrac{\pi}{4}, x = -\dfrac{\pi}{8}, x = 0, x = \dfrac{\pi}{8}, x = \dfrac{\pi}{4}\right)$.

En seguida se dibujan los pares ordenados con los valores de $f(x)$ encontrados y se unen con la uniformidad típica de la curva.



Por su parte Navarro (2004) revela en los resultados de la puesta en escena de una ingeniería didáctica que busca la construcción visual de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(x)}{x}$ y $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x}$, que profesores de bachillerato logran abordar de forma continua el paso de la Función Algebraica a la Función Trigonométrica, de las cuales no hacen ninguna diferencia incluso al tratar los ángulos de las funciones trigonométricas en radianes. La ingeniería consistió de trabajar con $Af(Bx+C)+D$ para algebraicas y trigonométricas con el objetivo de abordar posteriormente límites que involucraban ambos tipos de funciones desde la perspectiva de operaciones entre ellas.

El tratamiento algebraico expuesto en (Hornsby, 1990) y utilizado en (Navarro, 2004), descansa en el supuesto de que las funciones $y = sen\, x$, $y = \cos x$ y $y = \tan x$ son funciones *primitivas* susceptibles de operar y transformar mediante parámetros, y en consecuencia que debe haber un significado sobre qué son éstas. Dicho en otros términos que las funciones primitivas ya están construidas por el estudiante. Por ejemplo, el método de Hornsby exhibe claramente que ya se tiene conocimiento sobre el periodo [0, 2π], los valores mínimo [x=-1] y máximo [x=1], y la amplitud; pero sobre todo que éstas características se relacionan con alguna constante en la fórmula.

En nuestra opinión, los fenómenos relacionados con el aprendizaje de la función trigonométrica radican en el significado que tiene el seno (o el coseno) aplicado a una variable y el significado en sí de la variable. Dicho en otros términos, en la construcción de $y = sen\, x$ y $y = \cos x$. Por otro lado todas estas investigaciones (Kee, Mura, Dionne; 1996; Maldonado; 2005; Hornsby; 1990 y Navarro; 2004) tratan en exclusiva con las concepciones de seno y coseno, ya sea como razones o como funciones. Ninguna de ellas profundiza a detalle en los conceptos básicos asociados al seno y al coseno, como por ejemplo el ángulo, el triángulo rectángulo, la razón-proporción, la relación funcional y por supuesto la función. Estos conceptos, su aprendizaje y enseñanza han sido estudiados en forma aislada desde distintos marcos teóricos de referencia (Clements, Burns, 2000; Mitchelmore, White, 2000; Cavey, Berenson, 2005; Ros, 1996), siendo el concepto de función el más estudiado en la disciplina (ver la revisión del Capítulo 1).

Dado que estos conceptos son la base actual para enseñar la función trigonométrica uno podría preguntarse sobre el significado de x en $y = sen\, x$, una vez que se abandona la concepción de ángulo y se convierte en una variable real. Ya hemos visto que la variable tiene un significado ambiguo en los estudiantes, no hay claridad para definirla como una cantidad en grados, en radianes o en reales. La definición de esta variable independiente y su relación funcional con el seno (coseno o tangente) constituyen a la función trigonométrica teóricamente, pero son su herencia geométrica y la estructura del discurso matemático escolar los elementos fundamentales de su construcción, como saber escolar, para el estudiante.

Capítulo 3

La Función Trigonométrica en su Contexto de Origen

Capítulo 3

La Función Trigonométrica en su Contexto de Origen

Capítulo 3.

La Función Trigonométrica en su Contexto de Origen

Nuestro acercamiento –en tanto se ubica en el ámbito de la Matemática Educativa y no propiamente en el de la Historia o la Epistemología de la ciencia- pretende mostrar la factibilidad que encierra el hecho de reconocer la base de significados naturales subyacentes a los procesos y conceptos matemáticos, mediante un análisis de ideas que señaladas en la historia y en la epistemología, establezca explicaciones sobre la construcción de un cierto conocimiento matemático, en nuestro caso el de las funciones trigonométricas. Se pretende así, formar con estos elementos una primera *base de significaciones* para los conceptos y procesos matemáticos, buscando incidir, con su auxilio, en el *discurso matemático escolar* (Cantoral, 2001).

Con un acercamiento a las producciones originales o a los estudios especializados alrededor de los conceptos trigonométricos buscamos entender su evolución, así como encontrar las condiciones y problemáticas que determinan la emergencia de un conocimiento. Los conceptos trigonométricos evolucionan dando explicación a fenómenos de naturaleza diversa: astronómicos, físicos, químicos, relacionados con el movimiento, el calor, el sonido, entre otros. De tal suerte que al identificar una nueva estructura conceptual vinculada a las nociones o conceptos trigonométricos localizamos a los personajes más sobresalientes y las preguntas que se plantearon para resolver un problema, situándolo en una época y analizando el pensamiento científico que imperaba en ella, tratando de reconstruir el desarrollo de nuevos conceptos con base o en contraste con los previos.

3.1 Trigonometría, un origen histórico

3.1.1 Usos prácticos de la trigonometría, la historia antes de la formalización

Los estudios históricos sobre la trigonometría se dividen en dos momentos, el de sus inicios prácticos y el de sus fundamentos teóricos. Los inicios prácticos pueden encontrarse en actividades desarrolladas en diferentes culturas y que no son consideradas actividad matemática en sentido estricto de la palabra. Las actividades que dan inicio a los estudios sobre trigonometría son en esencia la *medición* y la *astronomía*.

El Papiro de Rhind (1700 a. C. aproximadamente) es la fuente de información más importante sobre la actividad matemática egipcia y se le considera una guía de la medición y el cálculo (Heath, 1981). De este Papiro se extraen reglas para el cálculo de áreas de formas cuadradas, triangulares, circulares, etc.; y algunos rudimentos de trigonometría que se basan en los cálculos necesarios en la construcción de pirámides y monumentos. El problema 56 de este papiro contiene lo que se podría llamar algunos rudimentos de trigonometría y de una teoría de triángulos semejantes. En la construcción de las pirámides un problema esencial era el de mantener la pendiente uniforme en cada cara y la misma en las cuatro, y puede haber sido este problema el que llevo a los egipcios a introducir un concepto equivalente al de la cotangente de un ángulo (Boyer, 1968) Para lograr sus construcciones calculaban la separación de una recta oblicua del eje vertical por unidad de variación en la altura.

Dicho cálculo recibía el nombre de *se*–*qet*, y con ello lograban mantener las *proporciones* de la pirámide y la *inclinación* de sus caras. A manera formal el *se*–*qet* se calculaba de la siguiente forma:

… supongamos la pirámide constituida por *ABCD* el cuadrado de su base, *E* su centro, *H* el vértice, y *F* el punto medio del lado *AD* de la base,

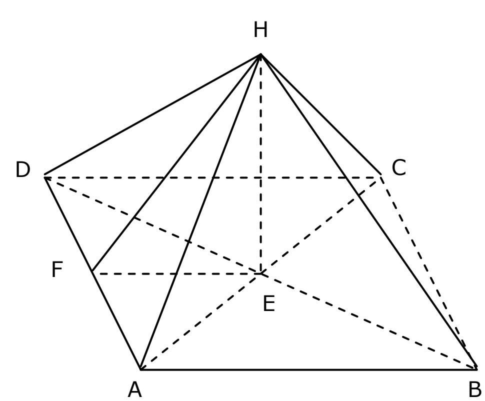


Fig. 3.1

el $se-qet=\frac{EF}{EH}$, es decir, un concepto equivalente a la cotangente del ángulo de inclinación. Esta relación establecida por lo egipcios pone la atención en las *razones* en términos de *proporciones*.

Siglos después y retomando el conocimiento de los egipcios, Thales (624 – 547 B. C.) introduce la geometría a Grecia y desarrolla diversas ideas alrededor de los triángulos y sus ángulos. Sin embargo, se entiende que el uso de la palabra "similar" para describir los ángulos iguales de un triángulo isósceles indica que Thales *no concebía el ángulo como una magnitud*, sino como una *figura* que tenía una cierta *forma*, idea muy cercana a la egipcia *se –quet* (Heath, 1981).

Junto con la medición, la astronomía (la observación del movimiento de los cuerpos celestes, el cálculo de sus tamaños y las distancias entre ellos) genera aportes empíricos importantes para lo que hoy conocemos como *Trigonometría*. La astronomía se considera la rama de las ciencias naturales más antigua en la historia del hombre (Pannekoek, 1961), aunque no se tiene evidencia del estudio hecho al respecto por la humanidad,

> *Para mantenerse a sí mismo, el hombre ha peleado por su existencia incesantemente contra los poderes hostiles de la naturaleza, luchó por adquirir conocimiento sobre los fenómenos naturales que influían en su vida y determinaban su trabajo; cuanto más sabía, más segura era su vida.*

Para lograr su objetivo de *predicción*, el hombre buscó incesantemente la *recurrencia periódica* de los fenómenos naturales en la inmensidad del universo.

Un segundo incentivo para observar los fenómenos celestes fue la necesidad de tener intervalos de tiempo y de forma natural el primer referente fue el cambio noche - día, y por lo tanto el estudio de los movimientos de la luna y el sol. Pronto estos fenómenos fueron insuficientes para determinar las épocas para las prácticas adecuadas (agricultura, pesca, navegación, comercio) y comenzó la observación y registro de los cambios en la posición de las estrellas y los planetas.

La astronomía mesopotámica temprana se percibe meramente cualitativa, bastante similar a la astronomía egipcia contemporánea. Desde el periodo asirio se percibe un cambio hacia las descripciones matemáticas y solo los últimos tres siglos a. C. nos dejaron textos basados en una teoría matemática consistente sobre los movimientos planetarios y lunar (Neugebauer, 1969).

En el campo de la astronomía, ésta se constituye como actividad científica hasta la sistematización de experiencias, principalmente en forma de *reconocimiento de periodos*, después de los cuales el fenómeno reincidía en la misma sucesión. *La periodicidad de los fenómenos celestes se convirtió en un puente entre la práctica empírica y la teoría predictiva*. En la repetición periódica, la regla abstracta evoluciona a partir de hechos concretos, el periodo fue la fundamentación y esencia de la primera ciencia de las estrellas (Pannekoek, 1961).

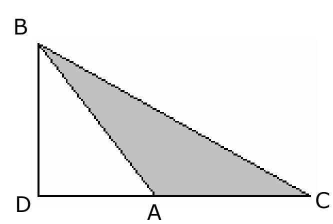
Para las culturas anteriores a la griega: babilónica y egipcia, la Astronomía consistía únicamente en la observación de las estrellas, con lo que tras varios siglos de anotaciones, se dieron cuenta de la periodicidad de sus movimientos, a partir de lo cual pudieron hacer predicciones. Pero este trabajo no fue acompañado de razonamientos teóricos, siendo los griegos los primeros que buscaron teorías explicativas del dato observable (Saiz, 2003).

En la matemática griega encontramos por primera vez un estudio sistemático de las relaciones entre los ángulos centrales (o sus arcos correspondientes) en un círculo y las longitudes de las cuerdas que los subtienden. Las propiedades de las cuerdas, tomadas como medidas de ángulos centrales e inscritos en una circunferencia, les eran familiares ya a los griegos de la época de Hipócrates (460 a. C.), y es muy probable que Eudoxo (408 – 355 A. C.) haya usado razones y medidas de ángulos para determinar el tamaño de la tierra y las distancias relativas del sol y la luna (Boyer, 1968). En los trabajos de Euclides (aproximadamente 300 a. C.) no hay trigonometría en el sentido estricto de la palabra, pero hay teoremas equivalentes a leyes o fórmulas trigonométricas, elaborados en lenguaje geométrico,

Los Elementos

Libro II. Proposición 12

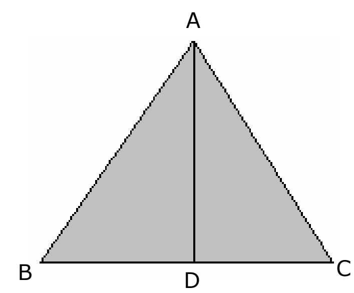
En los triángulos obtusángulos, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo comprendido por un lado de los del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y la recta exterior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo obtuso.



Los Elementos

Libro II. Proposición 13

En los triángulos acutángulos, el cuadrado del lado opuesto al ángulo agudo es menor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo agudo en dos veces el rectángulo comprendido por uno de los lados del ángulo agudo sobre el que cae la perpendicular y la recta interior cortada por la perpendicular hasta el ángulo agudo.



Con Aristarco (310 – 230 A. C.) se tiene la primera muestra existente de la geometría pura utilizada con un objeto trigonométrico. Aristarco sostenía que la media luna tenía que ser el vértice de un ángulo recto (90°) formado por las líneas Sol - Luna y Luna - Tierra. Aristarco, como todos sus contemporáneos, suponía que la órbita de la Luna era un círculo en cuyo centro está la Tierra (Fig. 3. 2a) y que la Luna lo recorría siempre a la misma velocidad. Si el Sol estuviera tan lejos que sus rayos nos llegaran siempre paralelos –lo que equivale a poner al sol a una distancia infinita-, los cuartos de la Luna ocurrirían cuando el ángulo Sol – Tierra - Luna es recto.

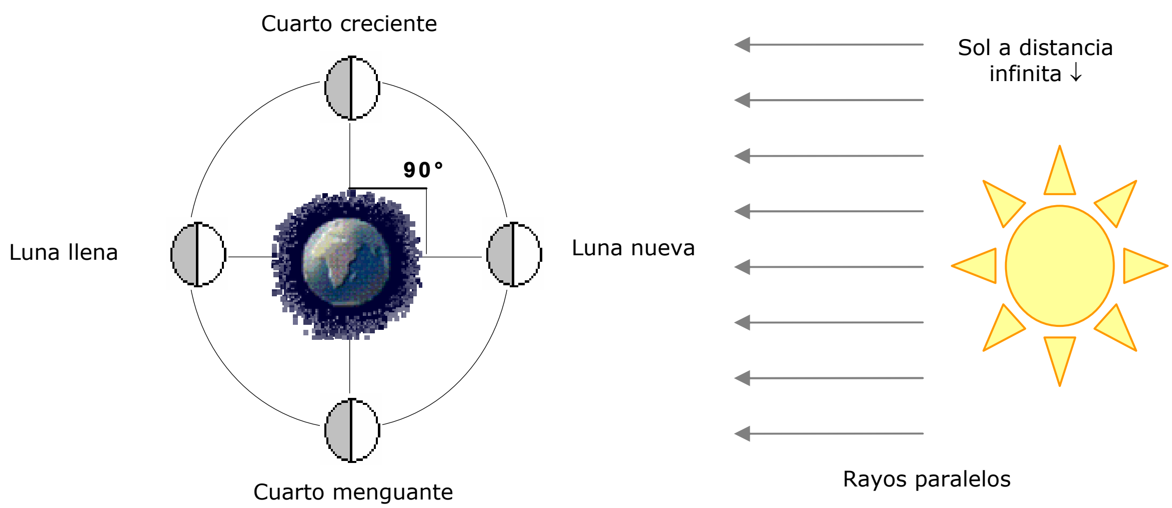


Fig. 3.2a

En cambio, si el sol se encuentra a una distancia finita, sus rayos divergen formando un ángulo (Fig. 3.2b). La secuencia de las fases ya no está dividida en partes iguales. El lapso entre la Luna nueva y el cuarto creciente es menor que el lapso entre éste último y la luna llena. Por la misma razón el intervalo entre la luna llena y el cuarto menguante es mayor que el intervalo entre éste y la siguiente luna nueva.

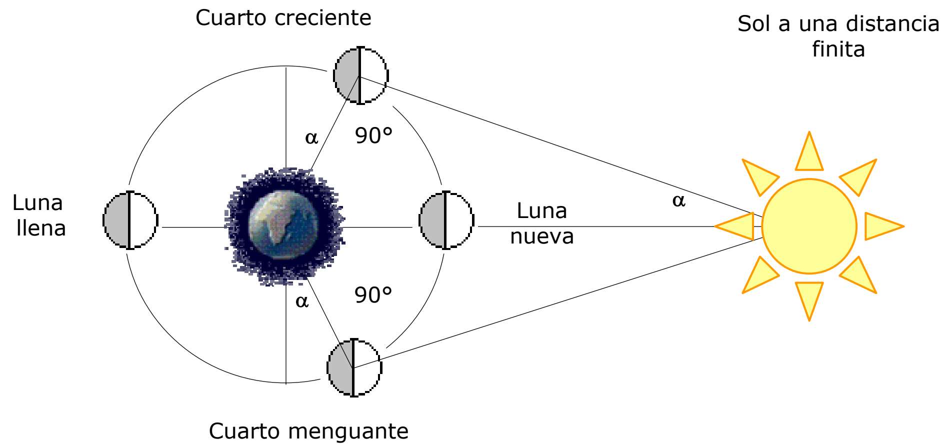


Fig. 3.2b

Aristarco encontró que el ángulo α, que forman los rayos del Sol que abarcan la órbita de la Luna, tiene que ser igual a la diferencia angular entre la posición de la media luna. En el caso de la Figura 3.2a el Sol se encuentra a una distancia infinita, y en el caso de la Figura 3.2b el sol se encuentra a una distancia finita y calculable. Si llamamos *A* la distancia de la Tierra a la Luna y *B* a la distancia de la Luna al sol, resulta que hay una sencilla razón entre A, B y el ángulo α, que hoy conocemos como tangente: $\tan \alpha = \dfrac{A}{B}$,

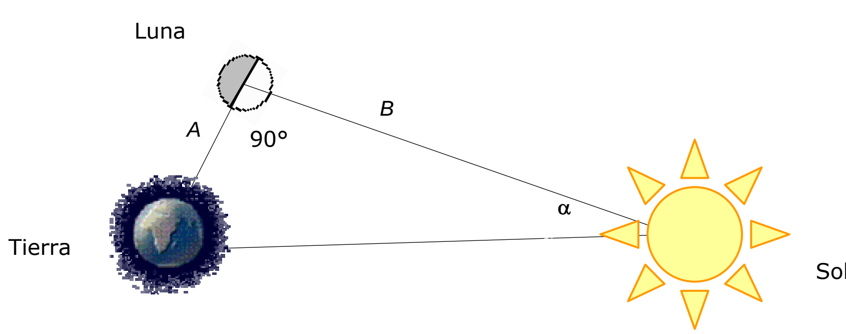


Fig. 3.3

En otras palabras, determinando α se puede calcular qué tanto más lejos está el Sol de la Luna que la Luna de la Tierra. Si para Aristarco la Luna se movía en una órbita circular y con velocidad constante alrededor de la tierra, debía medir cuánto tarda la luna en darle una vuelta completa a la Tierra, para lo cual bastaba con medir el tiempo que transcurre, por ejemplo, entre dos Lunas nuevas. Una vez determinado ese lapso, y si el sol estuviera a una distancia infinita, hay que dividirlo entre cuatro para obtener el tiempo que debería transcurrir entre cada fase de la luna. Entonces, la secuencia de las fases de la Luna estaría dividida en cuatro intervalos iguales. Empleando números concretos, si el periodo de la luna es 29 días y medio, o 708 horas y las fases sucedieran a intervalos perfectamente regulares, entre cualquier fase y la siguiente transcurrirían 177 horas (708 ÷ 4). Aristarco observó que el cuarto creciente ocurría seis horas antes de lo esperado, si el sol estuviera a una distancia infinita. El ángulo α de nuestra figura correspondía, por lo tanto, a seis horas de movimiento de la Luna. De aquí, Aristarco deduce que, puesto que la Luna recorría su órbita con velocidad constante, el ángulo α que se busca determinar debería estar en la misma proporción a una vuelta completa (360°) y que las seis horas de discrepancia al periodo completo de 708 horas: $\frac{a}{360^\circ} = \frac{6}{708}$ de donde $\alpha = \frac{6}{708} \quad 360^\circ$.

Aristarco expresó la relación entre las distancias $\frac{Tierra - Luna}{Luna - Sol}$, que hoy día es $\tan 3^\circ = 0.05$, cómo "*la distancia del Sol a la Luna es veinte veces la distancia de la Luna a la Tierra*". Este cálculo es erróneo, pero no por el método, sino por los datos numéricos. El método geométrico es perfectamente válido, el problema estriba en que la discrepancia entre el lapso Luna nueva – Cuarto creciente con el sol a una distancia infinita y el mismo lapso con el sol a la distancia infinita que se encuentra no es de seis horas sino de cerca de 18 minutos (Ruiz y de Regules, 2002). Con esta cifra y el razonamiento anterior se obtiene la cifra correcta: *el sol esta 400 veces más lejos de la Luna que la Luna de la Tierra*.

Una vez determinadas las distancias relativas del Sol y la Luna, Aristarco dedujo que sus tamaños tendrían que estar en la misma razón, partiendo del hecho de que ambos cuerpos celestes tienen muy aproximadamente el mismo tamaño aparente, es decir, se ven bajo el mismo ángulo aproximadamente para un observador desde la tierra.

Otro cálculo que puso en funcionamiento diferentes técnicas geométricas fue el originado por la medida de la Tierra. Una de las mediciones más precisas por los conceptos involucrados fue la realizada por Eratóstenes. En Siena (hoy Asuán[8]), situado al sur de Alejandría, donde había fama que los rayos del sol caían a plomo el día de solsticio de verano, Eratóstenes observó un pozo muy profundo en cuyas aguas se podía ver reflejado el sol justo al mediodía. Clavando una vara en el suelo en Alejandría, en el mismo solsticio de verano, Eratóstenes observó que allí el sol no pasaba exactamente por el cenit, sino que la vara proyectaba una sobra.

Geométricamente, Eratóstenes dedujo lo siguiente: si los rayos del Sol inciden directamente en Siena, pero en Alejandría hacen un ángulo con la vertical, ese ángulo es igual al que formarían las verticales de las dos ciudades si las prolongamos hasta el centro de la Tierra (Fig. 3.4), es decir, es igual a la diferencia de latitud geográfica entre Siena y Alejandría.

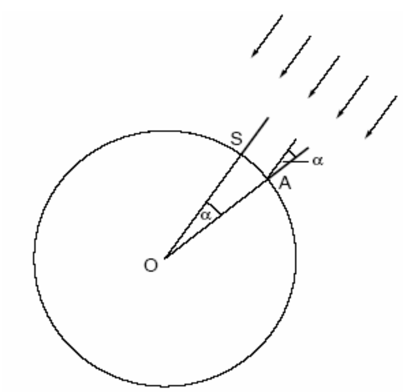


Fig. 3.4

Eratóstenes comprobó que el ángulo β era de alrededor de 7.5° y dado que la distancia entre las dos ciudades se calculó en 5,250 estadíos[9], calculó: el ángulo α (7.5°) es la cuadragésima octava parte de un círculo completo (360°), por lo tanto la distancia entre Alejandría y Siena (5,250 estadíos) debe estar en la misma proporción a la circunferencia total de la Tierra, o sea, ésta debe ser 48 veces 5,250 estadíos, o 252,000 estadíos[10].

Al momento no hemos hablado de Trigonometría tal como se le designa en la cultura matemática, sin embargo, los antecedentes que sentaron las culturas babilónica, egipcia y griega en sus inicios muestran que la problemática de construir un modelo a escala, con base en los datos empíricos acumulados, de una realidad macro no manipulable sienta las bases para la construcción de un cuerpo teórico que más adelante recibirá el nombre de Trigonometría.

Se considera que los cálculos y modelos de Hiparco y Eratóstenes son algunas, de las más importantes, bases de la trigonometría por dar aproximaciones muy buenas, por ejemplo, al seno de ciertos ángulos y por hacer uso de triángulos y las relaciones entre

[8] Situado a 950 km, aproximadamente, al sur del Cairo

[9] Un estadío es una medida antigua que equivale a cerca de 157.5 metros.

[10] Aproximadamente 40,000 kilómetros

sus catetos. Pero lo que representa, a nuestro parecer, el elemento más importante en la construcción de las nociones trigonométricas es la *proporción expresada como razón* en un sentido matemático abstracto, no la razón como la relación de dos catetos en el triángulo. Por ejemplo, Aristarco ve dos posibilidades ante la apariencia, en tamaño, idéntica de la Luna y el Sol: 1) ambos cuerpos son del mismo tamaño y están a la misma distancia de la Tierra, o 2) un cuerpo es más grande que otro, pero su distancia respecto de la Tierra guarda una *proporción* respecto de la distancia a la Tierra del segundo cuerpo. Así, la localización de los tres cuerpos como vértices de un triángulo asociada a los fenómenos celestes, principalmente eclipses, lleva a la construcción de los modelos geométricos cuyo uso de las razones obedece a la condición de proporción entre las distancias de la Luna y el Sol respecto de la Tierra.

3.1.2 Nace la Trigonometría

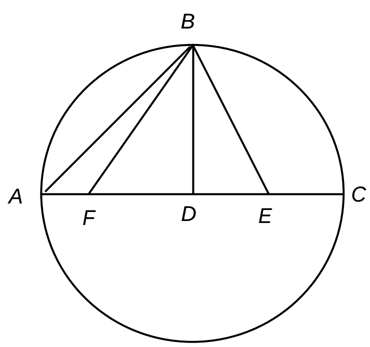
Las culturas prehelénicas acumularon los datos suficientes sobre los fenómenos ligados a los movimientos de los cuerpos celestes, para satisfacer necesidades prácticas de los grupos dedicados al comercio, la agricultura, la navegación, entre otras. Dichos datos ayudaron a la construcción y validación de modelos geométricos que los filósofos griegos usaron para fundamentar los estudios o tratados astronómicos. Pero hasta Eratóstenes, no había nada que pudiera llamarse Trigonometría. Fue alrededor del siglo II a. C. que el astrónomo Hiparco de Nicea (190 a 120 a. C., aproximadamente) construye la primera tabla trigonométrica, ganándose así el nombre de padre de la Trigonometría. Sin embargo, no contaba con las observaciones necesarias para explicar los movimientos de los planetas con la exactitud con la que explicó geométricamente los movimientos de la Tierra, el Sol y la Luna, por lo que dedicó gran parte de su trabajo a la observación de los movimientos planetarios. Se presenta como el mayor astrónomo de la Antigüedad antes de Ptolomeo, no sólo por los considerables progresos que aporta al conocimiento del cielo, sino también, y acaso todavía más, por la minuciosa perfección de su método, que asocia estrechamente la precisión de las observaciones con el rigor del razonamiento.

Es importante destacar que gracias a los tres siglos de diferencia entre Hiparco y Ptolomeo, éste último contaba ya con observaciones, hipótesis de los epiciclos y las excéntricas, así como con cálculos astronómicos; y con base en ello construyó su sistema.

El sistema ptolemaico fue el sistema astronómico más ampliamente aceptado y conocido en la Antigüedad clásica y en el mundo árabe. El tratado de Ptolomeo dominaría el pensamiento astronómico occidental en su vertiente matemática hasta la época de Copérnico.

Sintetizaremos la aportación de Ptolomeo a la trigonometría con los elementos básicos que usa en la construcción de la tabla de cuerdas subtendidas por los arcos de una circunferencia dividida en 360 partes cuyo diámetro supone dividido en 120 unidades. Cada una de esas partes está dividida en otras 60 que a su vez están subdivididas en 60. Es decir, el sistema sexagesimal, que ya existía en Mesopotamia en la dinastía de Ur (2050 - 1950), desde ahí llevado a Grecia.

Ptolomeo establece:



BD lado del hexágono
FD lado del decágono
BF lado del pentágono
AB lado del cuadrado

Sea un semicírculo *ABC*, de centro *D*, diámetro *AC* y desde el centro *D* trácese una línea *DB* que forme ángulos rectos con el diámetro *AC*. Divídase *DC* en dos partes iguales por el punto *E* y únase *EB*, con el que se construye *EF* igual, y únase *FB*. Afirmo que la línea *FD* es el lado del **decágono**, en cambio *BF* es el del **pentágono**. En efecto, puesto que la línea recta *DC* está dividida en dos partes iguales por el punto *E* y a ésta se la alarga añadiendo la línea recta *DF*, el cuadrángulo encerrado sobre *CF* y *FD*, junto con el cuadrado de la línea *ED* es igual a aquel cuadrado que se construye partiendo de la línea *EF*, por lo tanto es igual a *EB*, ya que la línea *EB* se ha hecho igual a *FE*.

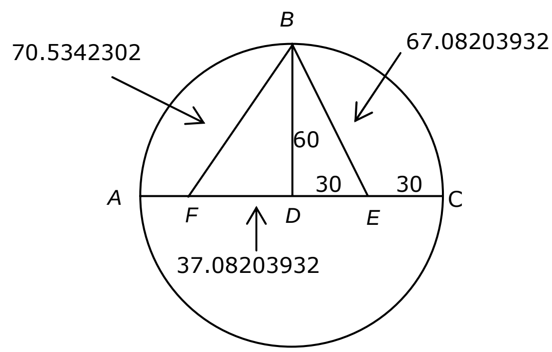
Pero los cuadrados de las líneas *ED* y *DB* son iguales al cuadrado de *EB*, por lo tanto el rectángulo que está encerrado bajo *CF* y *FD*, junto con el cuadro de la línea *D*E, es igual a aquellos cuadrados que se forman con las líneas *BD* y *DE*. Y por esto, si se quita por ambas partes el cuadrado de la línea *ED*, el rectángulo que queda, constituido con las líneas *CF* y *FD*, es igual al cuadrado de *DB*, con lo que lo es también al cuadrado de *DC*. Por consiguiente, la línea *FC* está dividida en el punto *D* según extrema razón y media razón. Ahora bien, dado que los lados de un **hexágono** y de un **decágono** (inscritos en el mismo círculo) dividen a la recta continua que forman alineados en extrema y media razón, al ser la línea *CD* el lado del hexágono partiendo del mismo centro, ciertamente será la línea *DF* el lado del decágono. De la misma manera, ya que el lado del pentágono puede ser descrito mediante el lado del hexágono y el del decágono inscritos en el mismo círculo, al ser *BF* el lado del **triángulo** rectángulo *BDF* cuyo cuadrado es igual a dos cuadrados: la línea del hexágono BD y el lado del decágono *DF*, se desprende que necesariamente *BF* ha de ser el lado del **pentágono**.

Usando solamente teorema de Pitágoras encontraríamos:

$$BE = \sqrt{DE^2 + BD^2} = \sqrt{900 + 3600}$$

$$DF = BE - 30 = \sqrt{900 + 3600} - 30$$

$$BF = \sqrt{DF^2 + BD^2} = \sqrt{DF^2 + 3600}$$



O como establece Ptolomeo, en sistema sexagesimal:

> Por lo tanto, ya que suponíamos que el diámetro de un círculo era de 120 partes, por lo que acabamos de exponer será de 30 partes la línea DE que va desde la mitad hasta el centro y su cuadrado 900, en cambio BD, al ser el centro, tendrá 60 partes y su cuadrado 3600 partes, así pues el cuadrado de la línea EF, tendrá 4500. Por lo cual, la longitud de la línea EF se aproxima a 67.4.55 partes y la restante DF de 37.4.55 de las mismas. Luego **el lado del decágono, que se subtiende bajo un arco de 36 partes de la clase de las 360 que tiene el círculo es de 37.4.55 de la que el diámetro tiene 120**.
>
> Además, puesto que DF es de 37.4.55 partes y su cuadrado es de 1375.4.15, y el cuadrado de la línea DB es de 3600, y si se reúnen estos números constituyen el cuadrado de la línea BF, que es 4975.4.15, entonces BF tendrá la longitud aproximada de 70.32.3 partes; luego **el lado del pentágono que se subtiende bajo esos 72 grados de los 360 del círculo es de 70.32.3 partes de las que el diámetro tiene 120**. Es evidente que **el lado del hexágono que se subtiende bajo 60 grados es igual al semidiámetro y es de 60 partes**.
>
> De modo semejante, puesto que el cuadrado del lado del cuadrado que se subtiende bajo 90 grados es de 7200, al ser de 3600 el cuadrado el cuadrado del semidiámetro y el cuadrado del lado del triángulo es de 10800. Por lo tanto, **la longitud de la cuerda que se subtiende bajo 90 grados será aproximadamente de 84.51.10 de las partes de las que el diámetro tiene 120**, en cambio, la que se subtiende bajo **120 será de 103.55.23 de las mismas**.

Dicho de otro modo, construye la siguiente tabla:

Ángulo	Cuerda		
36	37°	4′	55″
60	60°		
72	70°	32′	3″
90	84°	51′	10″
120	103°	55′	23″

Seguido de estos primeros cálculos, Ptolomeo establece el teorema que le permitirá operar con las longitudes encontradas, seguido de tres corolarios de donde se pueden calcular más longitudes de cuerda: la cuerda de la diferencia de dos arcos, la cuerda de la mitad de un arco y la cuerda de la suma de dos arcos. Dichos corolarios son equivalentes a las identidades trigonométricas para el seno de la diferencia de dos ángulos, el seno de la mitad de un ángulo y el seno de la suma de dos ángulos respectivamente.

El Almagesto se consolida como la recopilación de los principios matemáticos hasta su época, aportando teoremas y las medidas de las cuerdas subtendidas en un círculo, que a su vez aportan a su modelo astronómico. Sin embargo, su modelo astronómico se basaba en supuestos no válidos, tales como la órbita circular que recorren los cuerpos celestes, la velocidad constante de su movimiento y la geocentricidad. En este sentido, su modelo astronómico no predice con exactitud los fenómenos y movimientos celestes, es decir, el dato empírico invalida su modelo teórico (dado que la adecuación a la realidad era el criterio de verdad en la época), no así los fundamentos geométricos - trigonométricos en que se basa.

Con la declinación del imperio romano, el centro de la investigación matemática comenzó a desplazarse hacia la India y más tarde se desplazó hacia Mesopotamia. Las primeras bien preservadas contribuciones hindúes a las ciencias exactas son los *Siddhantas* de las cuales uno, el *Surya*, todavía existe en una forma que se asemeja al original (hacia 300 - 400 d. C.). Estos libros tratan fundamentalmente de astronomía y operan con epiciclos y fracciones sexagesimales. Tales hechos sugieren la influencia de la astronomía griega, probablemente transmitida en un periodo que anticipa al Almagesto; aunque también indican contacto directo con la astronomía babilónica. Además, los *Siddhantas* muestran muchas características nativas hindúes. A diferencia de la griega[11], en la trigonometría hindú se determinaba la semicuerda correspondiente al ángulo doble, es decir, el antecedente del actual seno.

A los *Siddhantas* le siguieron:

- el *Aryhabatiya* de Aryhabata (489 – 499) que proporcionaba la tabla de los valores del seno (*ardha-jya*, o mitad de la cuerda) de los ángulos comprendidos entre 3° 45′ y 90°, variando en $^{1}/_{24}$ de cuadrante (3° 45′),
- el *Panka Sidhantika* (aproximadamente en el Siglo VI) de Varahamihira que resume los *Siddhantas*,
- y el *Khanda Khandayaka* (665) de Brahmagupta, que dice como dada una tabla de senos encuentra los intermedios.

Por su parte, la cultura árabe, no sólo asimiló los conocimientos producidos por otros pueblos; las obras traducidas sirvieron como punto de partida para el desarrollo de una rica ciencia propia en la que se destacó la Astronomía junto a la que progreso su auxiliar: la Trigonometría. Se sistematizó el uso del seno del ángulo, en lugar de la correspondiente cuerda helénica. Además del seno-verso ($1 - \cos \alpha$) que ya conocía la Trigonometría india, los árabes introdujeron las restantes funciones trigonométricas. Habas al –Hasib (aproximadamente 762 – 862), además de ser el primer árabe que elaboró una tabla de senos, determinó la longitud de la sombra de un *gnomon*[12] horizontal colocado en una pared, cuya medida tomó como unidad (según los diferentes ángulos del Sol entre 0° y 90°). Los resultados los recogió en una tabla que equivale a una tabla de tangentes. La denominación *tangente* es más tardía, en esta época, dado su origen, se la destinaba por *sombra*, tradición persistente de la trigonometría hindú.

Entre los pensadores árabes más destacados en esta materia merece un puesto Abul Wefa (940 – 998) quien escribe su particular Almagesto, mejorando y ampliando el de

---

[11] que calculaba las longitudes de las cuerdas que subtienden los arcos de una circunferencia

[12] Del latín *gnomon*, actualmente se le define como indicador de las horas en los relojes solares más comunes. Antiguo instrumento de astronomía, compuesto de un estilo vertical y de un plano o círculo horizontal, con el cual se determinaban el acimut y altura del Sol, observando la dirección y longitud de la sombra proyectada por el estilo sobre el expresado círculo.

Ptolomeo. Una de estas mejoras se lleva a cabo en la Trigonometría, donde a partir de las fórmulas de Ptolomeo y una, propia, aproximada para ángulos pequeños, calcula con 9 decimales exactos el seno de 30′ y a partir de él elabora una tabla de senos que va de 15′ en 15′; independientemente, construye una tabla de tangentes y secantes. Una de las fórmulas es la del seno de la suma o diferencia de ángulos, que dice: "*Multiplicar el seno de uno por el coseno de otro, expresados en sexagésimos, y sumar los dos productos si buscamos el seno de la suma de los dos arcos, o restar si buscamos el seno de su diferencia*".

En su tratado de Astronomía *Kitab al – Kabil*, Abul Wefa define y hace uso de las seis funciones trigonométricas. Generalmente, en el mundo islámico se utilizaba un radio de longitud 60 unidades, como Ptolomeo; pues bien, Abul Wefa pretendiendo simplificar operaciones da a este radio el valor de 1, aunque no siempre lo utilizará así. Lo mismo hace al – Biruni (973 – 1048), iniciando así el camino hacia las razones trigonométricas actuales.

Años más tarde, ya en pleno ocaso de la ciencia árabe, el matemático, físico, astrónomo, filósofo y teólogo iraní Nasir al Din Tusi (1201 – 1274), autor muy prolífico, aparte de disputar a Abul Wefa el ser el descubridor del teorema del seno, desliga por primera vez la Trigonometría de la Astronomía, haciéndola una ciencia independiente con su obra: *Tratado del Cuadrilátero Completo* que tuvo notable influencia sobre Regiomontano.

Johann Müller (1436–1476), mejor conocido como Regiomontano, escribió el primer tratado extenso sobre trigonometría moderna. En su "*De triagulis omnimodis libri quinque*" desarrolla el tema partiendo de una conceptos geométricos básicos hasta llegar a la definición del seno. Muestra entonces, como resolver cualquier triángulo (plano o esférico) usando el seno del ángulo o el seno de su complemento (el coseno). Este tratado llega a manos de Copérnico, cuya obra supone el nacimiento de un nuevo paradigma en la ciencia de la astronomía: *De revolutionibus orbium coelestium* (finalizado hacia 1530 y publicado en 1543). Si bien *De triangulis* constituye una influencia para Copérnico, el Capitulo IX del Libro Primero de *De revolutionibus* sigue paso a paso los teoremas y razonamientos de Ptolomeo.

3.1.3 De la cuerda al seno

En sus orígenes la trigonometría no trata directa y exclusivamente con la similitud de dos triángulos rectángulos. La medición, la construcción y la astronomía son algunas de las actividades donde surgen las nociones trigonométricas. Incluso, el llamado "calculó de sombras", bastante conocido por los antiguos, es considerado precursor de la trigonometría formal. El problema teórico que se plantearon los griegos consideraba todo triángulo (plano o esférico) inscrito en un círculo (o esfera, según el caso), con lo que cada uno de sus lados se convertía en una cuerda. Para estimar las partes del triángulo se debe encontrar la longitud de la cuerda como función del ángulo central (arco central medido en grados). Esta fue la tarea principal de la trigonometría por varios siglos.

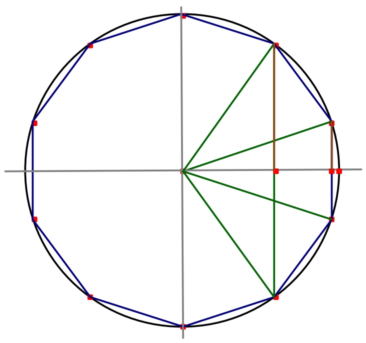


Fig. 3.5

Por ejemplo, Ptolomeo calcula la medida de las cuerdas subtendidas por distintos arcos[13]. Parte de elementos geométricos para asociar el lado de un polígono regular inscrito en el círculo con la cuerda que subtiende un arco. Por ejemplo el lado del decágono tiene 37.4.55 (37° 4′ 55′′ o 37.08194444 en sistema decimal) partes del tipo que el diámetro tiene 120 y se asocia con el arco de 36 partes del tipo que el círculo tiene 360. Si la cuerda del arco 36 mide $\frac{37.4.55}{120}$ puede interpretarse como $\frac{37.4.55}{2(60)}$ y ello haría referencia a la semicuerda en proporción al radio (r=60), lo que actualmente definimos como el seno de 18 grados actualmente.

Fue en el *Aryhabatiya*, que se usa la palabra *ardha-jya* para denominar **la mitad de cuerda** y en ocasiones se intercambiaban los términos (*jya- ardha*) o se hacían más cortos (*jya* o *jiva*). En las traducciones al árabe del *Aryhabatiya* se mantiene la palabra *jiva*. Sin embargo, por la pronunciación se modifica a *jiba* o *jaib*, y *jaib* en árabe significa seno (pecho o corazón), pliegue (o doblez) o bahía. Finalmente, en la traducción del árabe al latín *jiba* se traduce como *sinus*, que significa seno, bahía o curva. La notación abreviada *sin* fue usada por primera vez por Edmund Gunter (1581 – 1626), profesor inglés de astronomía en el Gresham College en Londres.

Aun con la constitución de la Trigonometría como rama independiente, sus resultados siguen vinculándose a los problemas astronómicos, incluso actualmente existe el

[13] Ver tabla completa en el Anexo D.

método trigonométrico para el cálculo de distancias de cuerpos celestes. Sin embargo, la constitución de una disciplina independiente genera teoremas, axiomas y definiciones propios que validarán el trabajo en la materia. Pero las raíces del conocimiento científico se hunden en la cultura de un pueblo a la que nutre en reciprocidad (Loi, 1999), y las disciplinas van ampliando las problemáticas, objetos de estudio, métodos de exploración y resolución. Así, la trigonometría se vio impulsada por lo que sucedió, particularmente, en el contexto del álgebra, amplió el contexto geométrico con un tratamiento simbólico en la solución de los problemas, preparando el terreno para un cambio en la visión del mundo.

3.2 La trigonometría se vuelve analítica

Aun con las dos grandes obras de Regiomontano y Copérnico, el término *Trigonometría* aparece hasta 1595 en el libro "*Trigonometriae sive de dimensione triangulorum libri quinque*" de Bartolomaus Pitiscus (1561–1614), un sacerdote alemán interesado en las matemáticas. Es en el siglo XVII que la trigonometría toma el carácter analítico que conserva hasta nuestros días.

Pero para hablar de trigonometría analítica fue necesario *abandonar la compilación de tablas trigonométricas y destacar las relaciones trigonométricas.* Sin embargo, el origen de dichas relaciones continuaba situado en un contexto geométrico, seguían representando a las cuerdas subtendidas por un arco.

De hecho, Katz (1987) señala que dado que el seno y el coseno son los ejemplos de funciones periódicas más familiares uno esperaría que se hicieran presentes en cualquier discusión sobre fenómenos físicos periódicos; y de hecho así fue, pero en un contexto geométrico que no dio oportunidad al desarrollo de ideas analíticas. Esto debe interpretarse como una apreciación distinta de las propiedades de las relaciones trigonométricas. Por ejemplo, la periodicidad y el valor de las cuerdas (valores acotados) estaban vinculadas a la repetición de fenómenos astronómicos y a la posición de los planetas, y una vez que eran encontrados periodo y posición, no había razón para su estudio como propiedad de la relación trigonométrica en cuestión.

3.2.1 El Álgebra de Vietè

El reemplazo gradual del álgebra verbal de las matemáticas medievales por frases simbólicas y concisas –el álgebra de literales– facilitó la lectura y escritura de textos matemáticos, pero aun más importante, permitió a los matemáticos aplicar métodos algebraicos a problemas que a la fecha sólo habían sido tratados en forma puramente geométrica. Mediante el álgebra, un álgebra clarificada y perfeccionada, se hizo posible resolver los problemas relativos a las magnitudes y figuras siguiendo un camino seguro y regular (Loi, 1999). Esto se le debe principalmente al matemático francés Fraçois Viète (1540-1603), con quien la trigonometría experimenta un cambio importante: *admite procesos infinitos en sus rangos*.

En 1571, bajo el título de *Canon mathematicus seu ad triangula cum appendicibus*, Viète hace el primer tratamiento sistemático de los métodos para resolver triángulos planos y esféricos, usando las seis *funciones* trigonométricas. Desarrolla las tres fórmulas de suma a producto (por ejemplo $sen\,\alpha + sen\,\beta = 2\,sen\frac{(\alpha+\beta)}{2}\cdot\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}$), con fórmulas similares para $sen\,\alpha + \cos\beta$ y $\cos\alpha + \cos\beta$, de donde Napier pudiera obtener la idea de los logaritmos, dado que permiten (al moverse a la inversa) reducir un producto de dos números a la suma de otros dos números. Viète es el primero que aplica métodos algebraicos a la trigonometría. Por ejemplo, haciendo el cambio de variables $x = 2\cos\alpha$ y $y_n = \cos n\alpha$, obtiene la fórmula de recurrencia

$$y_n = xy_{n-1} - y_{n-2},$$

que en terminología trigonométrica, se convierte en

$$\cos n\alpha = 2\cos\alpha\cdot\cos(n-1)\alpha - \cos(n-2)\alpha\,.$$

Ahora podemos expresar $\cos(n-1)\alpha$ y $\cos(n-2)\alpha$ en términos de cosenos de múltiplos inferiores de α; y continuando el proceso, se llega a una fórmula que expresa $\cos n\alpha$ en términos de $\cos\alpha$ y $sen\,\alpha$. Viète hizo esto para todos los enteros n superiores a 10, y estaba tan orgulloso de su logro que dijo "Este análisis de las secciones angulares involucra secretos geométricos y aritméticos que no habían sido penetrados por nadie". Y no erraba al decirlo, pues más de cien años después Jacob Bernoulli encontró las fórmulas generales para expresar $\cos n\alpha$ y $sen\,n\alpha$ en términos de $\cos\alpha$ y $sen\,\alpha$ (Maor, 1998). Sin embargo, el los tiempos de Viète aun se consideraban las longitud de cuerda de un ángulo, más que el *seno* del ángulo, como la función trigonométrica básica, y ello sólo daba lugar a los segmentos no-negativos (o su equivalente a los *senos* positivos).

Posterior a Viète, particularmente en Inglaterra, tres personajes hicieron importantes contribuciones a la trigonometría en el transcurso de la primera mitad del Siglo XVII. La invención de los logaritmos en 1614 por John Napier (1550 – 1617) auxiliaron en los cálculos numéricos, particularmente en la trigonometría. William Oughtred (1574–1660) fue el primero en usar símbolos trigonométricos, en su *Trigonometrie*, *or*, *The manner of Calculating the Sides and Angles of Triangles*, *by the Mathematical Canon*, *demostrated* (Inglaterra, 1657), usó las abreviaciones *s*, *t*, *se*, *s co*, *t co*, y *se co*, para el *seno*, *tangente*, *secante*, *coseno* (complemento del *seno*), *cotangente* y *cosecante*, respectivamente. Y, finalmente, el trabajo en series infinitas, precursor de los trabajos de Newton en esta dirección, de John Wallis (1616 – 1703).

El estudio del infinito viene con un movimiento más grande en el quehacer matemático y que fue el impulso principal de la trigonometría analítica: la matemática se convierte en el instrumento para describir y analizar el mundo físico.

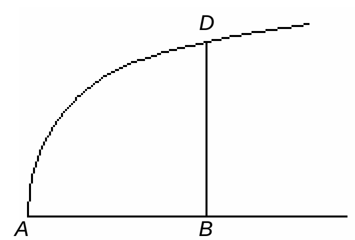
3.2.2 El *seno* como serie infinita

El siglo XVII, fue el inicio de una revolución en el pensamiento científico. La cuestión del movimiento desempeñó un papel primordial, especialmente como introducción natural e intuitiva a los problemas del cálculo diferencial. Tan pronto como se acometió el estudio del movimiento y se empezó a captar lo invisible, es decir, el cambio –lo que no había sido posible antes de disponer de los instrumentos matemáticos adecuados, y en cuanto sus leyes comenzaron a introducirse como fundamento de la física, resultó que, al estudiar la naturaleza, no era posible seguir considerando el número determinado o sus equivalentes geométricos (punto, recta, círculo, etc.) como objeto único de las investigaciones (Loi, 1999). Es decir, el ente matemático dejó de ser el número: la ley de variación, la función, se convirtió en el centro en torno al cual se organizó la ciencia. La matemática no sólo se enriqueció con nuevos métodos, sino que su objeto y sus fundamentos quedaron transformados.

De las producciones científicas más representativos de este siglo, llamado *siglo heroico* de la historia de las matemáticas, está sin lugar a dudas la de Isaac Newton (1642 - 1727). La nueva visión de la ciencia del movimiento, cómo se hace explícito en sus trabajos, se preocupa solamente por establecer relaciones entre variables asociadas al movimiento, es decir, el tiempo, la posición, la velocidad y la aceleración. Dicho en otros términos, un pasaje de los atributos a las relaciones (Cantoral, 2001).

Para el caso que nos ocupa, el de la Función Trigonométrica, atenderemos dos casos mencionados por Katz (1987) en el trabajo de Newton, ubicándonos en el paradigma científico que imperaba en la época. Katz asume que la función trigonométrica entra al *análisis* cuando Newton obtiene la serie infinita para el seno, aunque su papel no sea como función (curva) a la cual le aplica *su método*. Este método consiste en la asociación del manejo de las series infinitas con el estudio de las velocidades de cambio, de las que a su vez se servía para determinar la fluente, lo que fluye (Cantoral y Farfán, 2004).

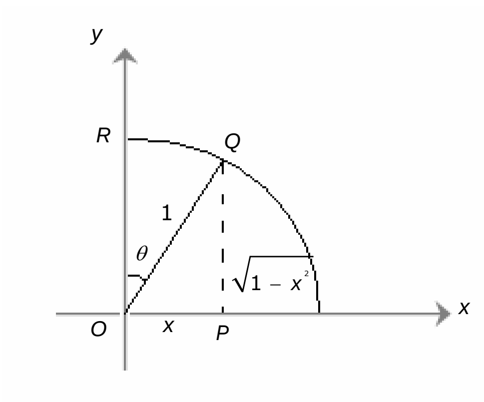
En 1669, Newton escribe *De analysi per æquationes numero terminorum infinitas* (On Analysis by Infinite Series), donde establece:



Supongamos que la base *AB* de una curva cualquiera *AD* tenga una ordenada particular *BD*; y llamemos *AB=x*, *BD=y*, y supongamos que *a*, *b*, *c*, etc. son cantidades dadas, y *m* y *n*, números enteros. Entonces,

Regla 1: Si $ax^{m/n} = y$, será $\dfrac{an}{m+n} x^{(m+n)/n}$ = Área *ABD.*

Para el caso del círculo $x^2 + y^2 = 1$, se tiene que el ángulo $\theta = sen^{-1}x$ es equivalente a dos veces el área del sector circular *OQR*.



Newton desarrolla el binomio para $\sqrt{1-x^2}$,

$$\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{15}{128}x^8 + \cdots,$$

y obtiene la cuadratura de la curva (el área de *OPQR*): $x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \frac{15}{1152}x^9 + \cdots$. De tal forma que igualando con θ obtiene,

$$\begin{aligned}\theta = 2 \quad OQR &= 2\left(OPQR - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\right)\\ &= 2\left(x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \frac{15}{1152}x^9 + \cdots\right) - \\ &\qquad x\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{15}{128}x^8 + \cdots\right)\\ &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{105}{1152}x^9 + \cdots.\end{aligned}$$

Esto constituye la serie de $sen^{-1}x$, que equivale al doble del área de un sector del círculo en términos de *x*. Newton invierte la serie, por aproximaciones sucesivas, para tener la expresión en términos del ángulo. Esto es, obtiene la serie

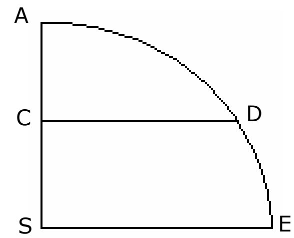
$$x = sen\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 - \frac{1}{5040}\theta^7 + \cdots.$$

La teoría newtoniana partía de una interpretación de los objetos geométricos como entidades generadas por un movimiento continuo, pero que no podía ser reducido a una geometría del movimiento y que se fundaba sobre un tratamiento de las ecuaciones algebraicas que prefiguraban de algún modo la noción analítica de la función (Panza, 2001). De ahí que notemos un cambio en la manera de usar la trigonometría, la compilación de tablas se sustituye por la relación de dos variables, el ángulo y el área bajo la curva, ahora como cantidades, aunque sigan teniendo como referente geométrico un triángulo inscrito en una circunferencia.

En el Libro Primero, del *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, sobre el movimiento de los cuerpos, establece

PROPOSICIÓN XXXVIII. TEOREMA XII

Supuesto que la fuerza centrípeta sea proporcional a la altura o distancia de los lugares al centro, digo que los tiempos de caída, las velocidades y los espacios recorridos son respectivamente proporcionales a los arcos, senos rectos y senos versos de los arcos.



Sea un cuerpo que cae desde un lugar cualquiera A y según la línea AS; y desde el centro de fuerzas S, y con intervalo AS, trácese el cuadrante circular AE, y sea CD el seno recto de un arco cualquiera AD; y el cuerpo A, en el tiempo AD, recorrerá al caer el espacio AC, y en el punto C alcanzará la velocidad CD.

Esto se puede considerar como el "síntoma de función trigonométrica" en un sentido análogo al síntoma de función de Yushkevich (1976) en tanto se le consideran a los arcos en relación con los senos y los senos versos, en una equivalencia a lo que hoy conocemos como variable independiente, derivada y función. Si bien, al usar solo un cuadrante de la elipse, Newton no señala un movimiento repetitivo que indicara la propiedad periódica de la función trigonométrica en cuestión, su serie de potencias, herramienta con la que opera a los polinomios más o menos de la misma manera que a los números, sí acepta valores negativos para x o θ, en la serie de seno inverso y seno, respectivamente.

Katz (1987) asume que la función trigonométrica entra al análisis cuando se hace explícito un estudio de sus propiedades y en tanto se opere para obtener sus derivadas e integrales, por lo tanto la ubica, ya como una función, en los trabajos de Euler. Sin embargo, resalta el uso de la serie infinita en los trabajos de Newton y Leibniz (1646 - 1716) y Taylor (1685 - 1731) previamente.

Sobre el trabajo de Leibniz se destaca la obtención, por el método de las diferenciales, de la relación infinitesimal entre el arco y su seno en un círculo de radio a: $a^2dy^2 = a^2dx^2 + x^2dy^2$, asumiendo dy constante. Leibniz toma la diferencial de esta ecuación para obtener $2a^2dxd^2x + 2xdxdy^2 = 0$ o $a^2d^2x + xdy^2 = 0$. Esta ecuación puede escribirse como $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{x}{a^2}$, la ecuación diferencial estándar para $x = sen\left(\frac{y}{a}\right)$.

Leibniz llega a esta solución con su método de los coeficientes indeterminados, pero la expresa en serie de potencias. Katz argumenta la no incursión de la función seno en el análisis, particularmente en el trabajo de Leibniz, por que no hay discusión de la serie y sus propiedades. De nuevo, la serie infinita del seno no era el centro de atención en sus trabajos, pues no representaba una curva (o función como la conocemos actualmente).

Leibniz y Newton tenían como objetos de estudio las curvas, trayectorias y ciertas expresiones analíticas (Cantoral y Farfán, 2004); y aplicar los métodos, diferencial e infinitesimal, a la circunferencia como una curva y a la elipse como trayectoria (de los cuerpos celestes), proporcionaron expresiones para las relaciones trigonométricas conocidas en la época.

3.2.3 El movimiento oscilatorio

Una rama de la mecánica, estudiada con vigor en los Siglos XVII y XVIII, trataba con oscilaciones. Las grandes exploraciones marítimas de la era, demandaban técnicas de navegación cada vez más precisas, y esto a su vez dependía de la disponibilidad de relojes de mayor precisión. Ello condujo a los científicos a estudiar las oscilaciones de cuerdas y péndulos de distintos tipos, entre ellos encontramos a Christian Huygens (1629–1695) y Robert Hooke (1635–1703). Huygens descubrió el péndulo cicloide, cuyo periodo de oscilación es independiente de la amplitud, mientras que el trabajo de Hooke con el resorte dejó las bases para el actual reloj que funciona a base de resortes. En 1678 se publica la, hoy conocida como, Ley de Hooke con una amplia descripción del movimiento de una pesa atada a un resorte y dibuja un diagrama bastante complejo, mostrando que la velocidad de dicha pesa es equivalente a ciertas ordenadas en un círculo; las cuales pueden pensarse como los senos de los arcos que cortan. Además, dibuja una curva que representa el tiempo para que la pesa se encuentre en una posición dada, siendo ésta una curva del arco seno. Sin embargo, Hooke no utiliza términos trigonométricos, le es suficiente la geometría de la situación. En esta dirección, la caracterización del ángulo, seno verso y seno como tiempo, posición y velocidad es explícito en los *Principia* de Newton.

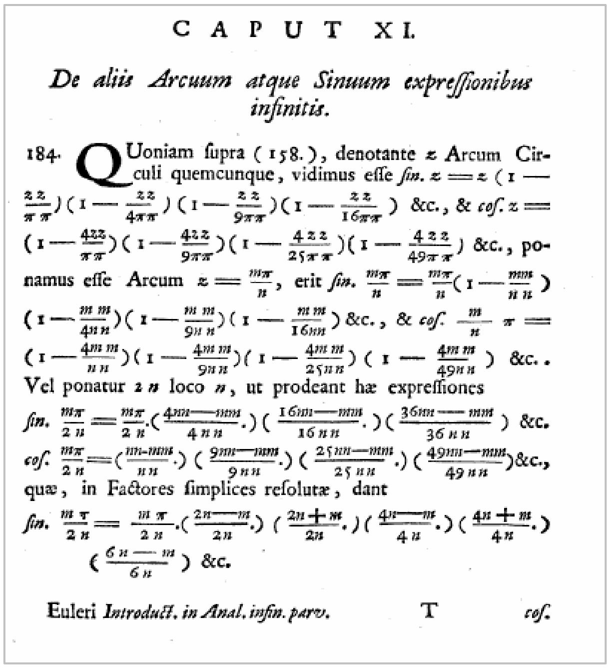
Fueron quizá los nuevos usos de las cantidades trigonométricas lo que las despojó de su carácter geométrico, pasaron de considerarse líneas en un círculo a cantidades que describían ciertos fenómenos, particularmente movimientos periódicos. En 1739, Euler presenta el trabajo *De novo genere oscillationum* sobre lo que podríamos llamar el movimiento de un oscilador armónico dirigido sinosoidalmente. Se consideraba al movimiento de un objeto compuesto de dos partes, una proporcional a la distancia y la otra variando sinosoidalmente en el tiempo. He aquí un cambio importante, el foco de atención cambia del periodo al movimiento.

3.3 La función trigonométrica

La serie infinita para el seno era conocida desde Newton, pero fue Leonard Euler (1707 - 1783) quien la usó para obtener resultados en abundancia. Los senos y cosenos se consideraban longitudes de segmentos de línea relativos a un círculo dado de radio *R*, el seno del ángulo *A* era la mitad de la cuerda en un círculo, subtendida por el ángulo central 2*A*, y el coseno de *A* era la longitud de la perpendicular que va del centro de la circunferencia a la cuerda.

En *Introductio in analysin infinitorum*, Euler (1967) presenta un estudio de las funciones para el análisis, donde ya reconoce a las cantidades trigonométricas como relaciones funcionales trascendentes, junto con el logaritmo y la exponencial.

Del primer Tomo, en el Capítulo VIII, *De quantitatibus trascendentibus ex Circulo ortis*, define las *funciones* trigonométricas como cantidades trascendentes que nacen del círculo y aunque no hace uso de la palabra *radián*, señala que π es la semicircunferencia de un círculo (de radio 1) y en consecuencia es la longitud del arco de 180° y entonces, establece $sen\ 0\pi = 0$, $\cos\ 0\pi = 1$, $sen\frac{1}{2}\pi = 1$, $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$, $sen\pi = 0$, $\cos\ \pi = -1$, $sen\frac{3}{2}\pi = -1$, $\cos\frac{3}{2}\pi = 0$, $sen\ 2\pi = 0$ y $\cos\ 2\pi = 1$. En este mismo capítulo discute las propiedades periódicas de la función trigonométrica y establece las igualdades (suma de ángulos, sumas de senos-cosenos, multiplicación y división) trigonométricas básicas (que hoy podemos encontrar en cualquier libro de texto). En el Capítulo IX, *De investigatione Factorum trinomialium*, se discute y generaliza el teorema de Moivre (quien fusiona, para asombro de los matemáticos de su época, la trigonometría con el álgebra y el análisis cuando encuentra una solución poco convencional al problema de factorizar un polinomio de la forma $x^{2n} + px^n + 1$) que establece $(\cos\phi + i\,sen\phi)^n = \cos n\phi + i\,sen\,n\phi$ para *n* real.



CAPUT XI.

De aliis Arcuum atque Sinuum expressionibus infinitis.

184. Quoniam supra (158.), denotante z Arcum Circuli quemcunque, vidimus esse $sin.\ z = z\left(1 - \frac{zz}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{zz}{4\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{zz}{9\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{zz}{16\pi\pi}\right)$ &c., & $cos.\ z = \left(1 - \frac{4zz}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4zz}{9\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4zz}{25\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4zz}{49\pi\pi}\right)$ &c., ponamus esse Arcum $z = \frac{m\pi}{n}$, erit $sin.\ \frac{m\pi}{n} = \frac{m\pi}{n}\left(1 - \frac{mm}{nn}\right)\left(1 - \frac{mm}{4nn}\right)\left(1 - \frac{mm}{9nn}\right)\left(1 - \frac{mm}{16nn}\right)$ &c., & $cos.\ \frac{m}{n}\pi = \left(1 - \frac{4mm}{nn}\right)\left(1 - \frac{4mm}{9nn}\right)\left(1 - \frac{4mm}{25nn}\right)\left(1 - \frac{4mm}{49nn}\right)$ &c.. Vel ponatur $2n$ loco n, ut prodeant hæ expressiones

$$sin.\ \frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}.\left(\frac{4nn-mm}{4nn}.\right)\left(\frac{16nn-mm}{16nn}.\right)\left(\frac{36nn-mm}{36nn}\right) \&c.$$

$$cos.\ \frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{nn-mm}{nn}.\right)\left(\frac{9nn-mm}{9nn}.\right)\left(\frac{25nn-mm}{25nn}.\right)\left(\frac{49nn-mm}{49nn}\right) \&c.,$$

quæ, in Factores simplices resolutæ, dant

$$sin.\ \frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}.\left(\frac{2n-m}{2n}.\right)\left(\frac{2n+m}{2n}.\right)\left(\frac{4n-m}{4n}.\right)\left(\frac{4n+m}{4n}.\right)\left(\frac{6n-m}{6n}\right) \&c.$$

Euleri *Introduct. in Anal. infin. parv.* T *cos.*

Fig. 3.6. Escrito original de Euler, 1967.

En el Capítulo XI, *De aliis Arcuum atque Sinum expressionibus infinitis*, expone la serie infinita para las cantidades trigonométricas. Euler consideró las series de potencias como "polinomios infinitos" que obedecen a las mismas reglas del álgebra que los polinomios finitos ordinarios, de tal suerte que si la función seno es igual a cero en $x = 0, x = \pm\pi, x = \pm 2\pi, x = \pm 3\pi,$ etc., tenemos que el polinomio infinito, compuesto en factores, que cumple tal condición:

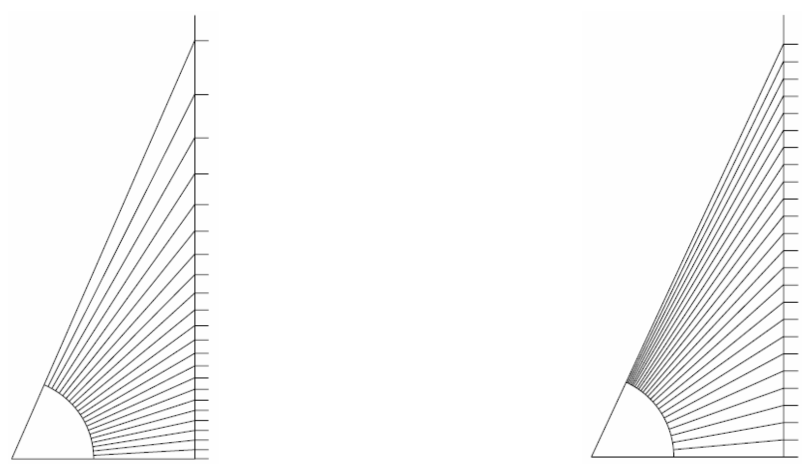
$$\begin{aligned} sen\ x &= \cdots\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\cdots \\ &= x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots \end{aligned}$$

Finalmente, en el Capítulo XXI del Tomo II, *On Trascendental Curves*, en donde la periodicidad se distingue como propiedad de la función (Buendía, 2004), Euler construye una curva de $\frac{y}{a} = arc\ sen\frac{x}{c}$ señalando el número infinito de arcos de un círculo cuyo seno es $\frac{x}{c}$, y donde la ordenada y es una función multivaluada. El eje y y cualquier otra línea vertical paralela, intersecta a la curva en un número infinito de puntos.

3.3.1 Del grado al radián

Al momento hemos caminado del contexto geométrico, donde las relaciones trigonométricas asocian los elementos de un triángulo inscrito en la circunferencia, al contexto analítico, donde se les consideran como cantidades trascendentes generadas por el círculo. En este devenir, la medida "angular" pasa del estudio de la forma al estudio del giro cuantificable, transitando así entre arcos, grados y radianes (Euler no le llama propiamente radián, usa las expresiones en términos de π en equivalencia a la unidad en grados).

El ángulo visto como forma proviene del estudio de la sombra que producen las posiciones del sol durante el día. En un modelo geométrico veríamos dos casos: proyectar ángulos iguales en una línea vertical no interceptan en segmentos iguales (caso 1) o segmentos iguales no eran resultado de la división en ángulos iguales (caso 2).



Caso 1 Caso 2

Fig. 3.7. Relación ángulo - proyección.

Se cree que el grado, unidad de medida angular, tiene su origen en la cultura babilónica (Maor, 1998). Generalmente se asume que la división que hacen del círculo en 360 partes se basa en la cercanía de este número con la duración del año, 365 días. Otra razón considerada ha sido el hecho de que un círculo se divide naturalmente en seis partes iguales, cada una subtendiendo una cuerda igual al radio. Sin embargo, no ha evidencia concluyente que apoye estas dos hipótesis, y el origen exacto del sistema de 360 grados podría desconocerse por siempre. En cualquier caso, el sistema encaja bien con el sistema numérico sexagesimal (base 60) de los babilonios, que posteriormente fuera adoptado por los griegos y usado por Ptolomeo en su tabla de cuerdas. El texto de (Bourbaki, 1976) añade la pertinencia de la división en 360° para fijar las posiciones de objetos celestes en puntos determinados de sus trayectorias aparentes, y compilar así las tablas con fines científicos o astrológicos.

Bourbaki señala que la medida de los ángulos a partir de los arcos que cortan en una circunferencia, es una concepción intuitiva y correcta, pero para llegar a ser rigurosa requiere de la noción de longitud de curva (Cálculo Integral). Esto es, hasta Newton el ángulo no se concibe como una magnitud mensurable, sobre todo después de los griegos de la época clásica donde se debilita el espíritu de rigor y según los autores vuelve el punto de vista de la intuición.

Curiosamente como sistema de numeración, el sistema sexagesimal es obsoleto hoy día, pero la división del círculo en 360 partes ha sobrevivido –no sólo como medición angular, también en la división de la hora en 60 minutos y el minuto en 60 segundos. Llama la atención que ninguna división decimal de ángulos amenazara al sistema sexagesimal, ni siquiera en Francia donde tiene su origen el sistema métrico decimal que usamos hoy día (aunque la mayoría de las calculadoras científicas tienen la opción *grad* donde el ángulo recto es igual a 100 "gradianes", y las partes fraccionales del gradian se consideran decimales), (Maor, 1998).

La palabra grado se originó en Grecia, usando la palabra μιρα (moira) que los Árabes tradujeron como *daraja* (muy semejante al *dar'ggah* hebreo, que significa un paso en una escalera de mano o balanza); y finalmente este se tradujo al latín como *gradus*, de donde viene la palabra grado. Los griegos llamaron la *primera parte* a la sexagésima parte de un grado, la *segunda parte* a la sexagésima parte de la *primera parte*, y así sucesivamente. En latín se llamaron *pars minuta prima* (primera pequeña parte) y *pars minuta secunda* (segunda pequeña parte), respectivamente; y es de ahí donde proviene nuestro *minuto* y *segundo* (Smith, 1953).

Actualmente el *radián* o *unidad de medida circular* se ha adoptado universalmente como la unidad natural de una medida angular. Un radián es el ángulo, medido desde el centro del círculo, que subtiende una longitud de arco de un radio a lo largo de la circunferencia (Fig. 3.6). Dado que el círculo completo comprende 2π (≈ 6.28) radio a lo largo de la circunferencia, y cada uno de éstos radios corresponde al ángulo central de

1 radián, tenemos que 360° es equivalente a 2π radianes; de aquí 1 radian sea equivalente a $\frac{360°}{2\pi} \approx 57.29°$.

El manejo simultaneo de los arcos (su proporción respecto del círculo) y los radianes (expresados en términos de π) surge a partir de los problemas que trae consigo la matemática de la variación y el cambio. Se sabe que la primera obra que introduce el concepto de medida de un ángulo es *Logometria* (1714) de Roger Cotes (Prefacio de la Parte II), sobre ésta Gowing (2002) señala:

> *Cotes consideró que bastante se había dicho sobre las medidas de las razones, pero se necesitaba de una palabra para los ángulos. El arco circular, interceptado por las rectas que forman un ángulo con centro en el punto de dicho ángulo era la medida natural; pero variaría con el tamaño del círculo, por lo tanto se necesitaba de un módulo. El módulo podría ser un círculo estándar o alguna línea estándar que variará con el círculo, por ejemplo el diámetro o el lado de un polígono regular. El radio era la opción más apropiada siempre que la medida de una razón se cambiará en la medida de un ángulo, el módulo podría cambiarse en el radio. Robert Smith[14] expande la idea en sus notas como editor, sigue de cerca la forma del argumento en la Proposición I de Logometria, Parte I donde se muestra que la razón modular es 2.71828… (es decir, la razón cuya medida es siempre igual al módulo). Smith llega a la idea de un ángulo modular, es decir, un ángulo cuya medida es siempre igual al radio, y muestra que es 57.295 grados. Esta es quizá la primera vez que se publica el cálculo de un radián en grados.*

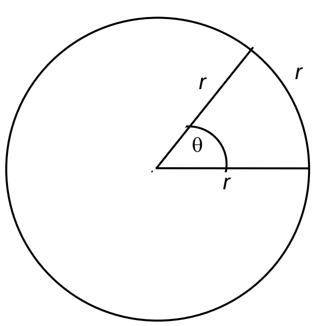


Fig. 3.6

Actualmente las posturas respecto del uso del radián son diversas. Una de las más frecuentes afirma que el radian es una unidad más conveniente que el grado por ser más grande, y ello nos permita expresar ángulos con números más pequeños. Consideramos que a nivel teórico domina el criterio de la analiticidad a fin de cumplir que el $\lim_{\theta \to 0} \frac{sen\,\theta}{\theta} = 1$, es decir, que el ángulo y su *seno* tiendan a

[14] Quien además de editor de su obra era primo de Cotes.

ser iguales cuando θ es pequeño. Este hecho es de suma importancia en el cálculo diferencial e integral y en la teoría de las ecuaciones diferenciales.

Sin embargo, también es cierto que el uso de radianes simplifica muchas fórmulas (Maor, 1998). Por ejemplo, un arco circular de medida angular θ (donde θ está en radianes) subtiende una longitud de arco dada por $s = r\theta$; pero si θ está en grados, la fórmula correspondiente es $s = \pi r^2\theta/360°$. De igual manera, el área de un sector circular de medida angular θ es $A = r^2\theta/2$ para θ en radianes y $A = \pi r^2\theta/360°$ para θ en grados. El uso de radianes libera estas fórmulas del factor $\pi/180$.

Como concepto el radian fue utilizado con Cotes, pero fue hasta 1871 que se acuña la palabra *radian*, por James Thomson, y aparece por primera vez en un examen impreso, en el Queen's Collage en Belfast en 1873.

3.3.2 La cuerda vibrante

Casi desde sus inicios, el cálculo diferencial e integral se aplicó a numerosos problemas de la Mecánica, empezando con la mecánica discreta (el movimiento de una partícula única o un sistema de partículas) y posteriormente con la mecánica continua. En esta última rama un problema sobresaliente, en la segunda mitad del siglo XVIII, fue la cuerda vibrante. Este problema inspiró a matemáticos de diversas épocas por su cercanía con la música. Ya los pitagóricos, en el siglo VI a. C. descubrieron algunas leyes que regían las vibraciones de una cuerda; lo que les permitió construir una escala musical basada en principios matemáticos. Sin embargo, una investigación profunda y completa del problema requería de métodos desconocidos por Newton y Leibniz, las ecuaciones diferenciales parciales. Para el caso de la cuerda vibrante, la ecuación es $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$, donde $u = u(x,t)$ representa el desplazamiento de la cuerda desde su posición de equilibrio a una distancia x en un tiempo t, y donde c es una constante que depende de los parámetros físicos de la cuerda (su tensión y densidad lineal).

Los intentos por resolver la ecuación, conocida como la ecuación de onda uni–dimensional, corrieron a cargo de matemáticos de la talla de los hermanos Bernoulli, Euler, D'Alembert y Lagrange. Euler y D'Alembert expresaron sus soluciones en términos de funciones arbitrarias que representaban dos ondas, una se movía a lo largo de la cuerda hacia la derecha y la otra hacia la izquierda, con velocidad igual a la constante *c*. Por otro lado, Daniel Bernoulli, encontró la solución compuesta por series infinitas de funciones trigonométricas.

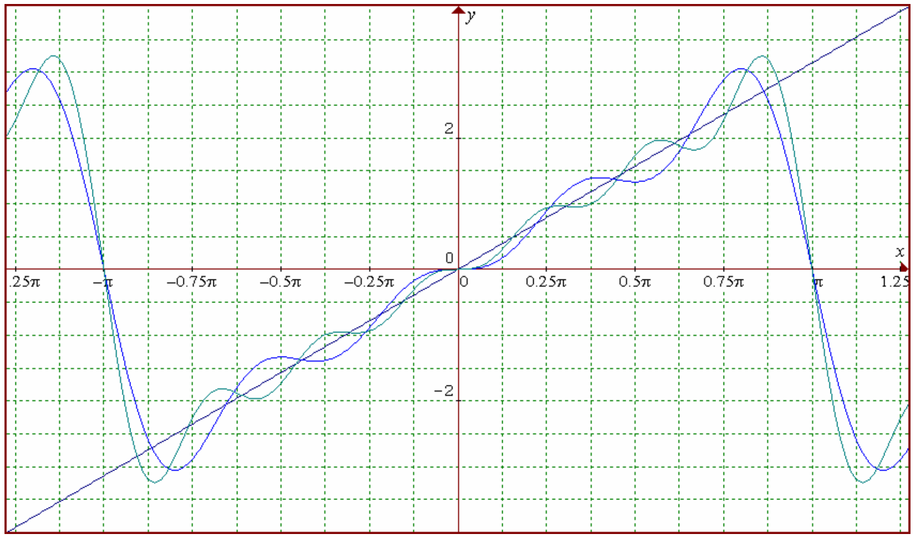
Un estudio a profundidad sobre el desarrollo del análisis matemático en general, y sobre el debate de la cuerda vibrante en particular, podemos encontrarlo en (Cantoral y Farfán, 2004). En esta sección nos limitaremos a revelar el papel de la función trigonométrica en dichas discusiones y en esa medida, sustentar nuestra propia hipótesis.

3.4 La Serie Trigonométrica

Dado que las dos soluciones al problema de la cuerda vibrante parecían muy distintas se cuestionaba el que pudieran reconciliarse, y de no hacerlo, la pregunta sería cuál era la más general. Fue el matemático francés Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830), en su *Théorie analytique de la chaleur*, quien mostró que cualquier función, cuando se considera periódica sobre un intervalo dado, puede representarse como una serie trigonométrica de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots + b_1 sen\, x + b_2 sen\, 2x + b_3 sen\, 3x + \cdots .$$

Newton había estudiado el fenómeno de transferencia de calor y encontró que la tasa de enfriamiento (caída de la temperatura) de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y aquella de sus alrededores. Sin embargo, esta ley de enfriamiento rige sólo la tasa *temporal* del cambio de temperatura, no la tasa espacial de cambio, o *gradiente*. Esta última cantidad depende de muchos otros factores: la conductividad de calor del objeto, su forma geométrica y la distribución de temperatura inicial sobre su frontera. Para poder tratar con el problema, eran necesarias las herramientas del análisis continuo, particularmente las ecuaciones diferenciales parciales. Fourier mostró que para resolver tal ecuación se debe expresar la distribución de temperatura inicial con una suma infinita de *senos* y *cosenos*. La idea parte de la propiedad periódica que tienen las funciones trigonométricas *seno* y *coseno*, y que guardan ciertas combinaciones lineales pertinentes.



Serie de Fourier con 4 (en azul) y 5 (en verde) términos para la aproximación a f(x)=x en $-\pi<x<\pi$.

La serie demuestra en forma explícita que el *seno* y el *coseno* son esenciales en el estudio de *todos* los fenómenos periódicos, simples o complejos. Fourier extendió su teorema a funciones no periódicas, considerándolas como funciones periódicas cuyo periodo se aproxima a infinito. Para lograr este paso, la serie debe remplazarse por una integral que represente una distribución continua de ondas *seno* sobre todas las frecuencias. Esta integral es más compleja que la serie de Fourier, pero en su esencia están las mismas dos funciones que forman la espina dorsal de la trigonometría: el seno y el coseno (Maor, 1998).

El desarrollo en serie trigonométrica permitió representar una clase más general de función, que aquel que dominaba en la época, y el problema de su convergencia implicó, según Dirichlet (1805-1859), una definición de la correspondencia funcional independiente de toda forma de expresión analítica. Se inicia de este modo y de la mano de las funciones trigonométricas, otra historia, la del análisis matemático clásico.

Capítulo 4

Una Construcción Social de la Función Trigonométrica

Capítulo 4

Una construcción Social de la Función Trigonométrica

Capítulo 4.

Una Construcción social de la Función Trigonométrica

La Aproximación Socioepistemológica a la Investigación en Matemática Educativa se plantea como tarea fundamental el examen del conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y escenarios socioculturales particulares, caracterizando al conocimiento como el fruto entre epistemología y factores sociales (Cantoral, 2002). Así el estudio de la evolución de conocimiento e ideas en la historia nos permitió encontrar las circunstancias, los escenario, los medios, que posibilitaron la emergencia de la función trigonométrica y con base en ello planteamos su *construcción social*. Esto es, fue en el contexto de origen del conocimiento que reconocimos los escenarios, los contextos, las problemáticas y lo que llamaremos prácticas de referencias asociadas a la función trigonométrica y que en principio consideramos fundamentales para significar al concepto en escenario escolar.

De entrada planteamos a la actividad matemática como aquella plenamente humana y social (Cantoral y Farfán, 2004), y proponemos un **modelo** basado en actividades, prácticas de referencia y prácticas sociales. Ello no abandona ni niega las posturas de otros autores que caracterizaron etapas en la evolución del concepto de función, como la ya citada de Ruiz (1998):

a. identificación de regularidades en los fenómenos sujetos al cambio (relación entre cantidades de magnitudes variables)
b. razón o proporción
c. gráfica (visión sintética)
d. curva (analítico - geométrica)
e. expresión analítica
f. correspondencia arbitraria (aplicación)
g. función como terna;

o la que señala Youschkevitch (1976):

a. el crecimiento impetuoso de los cálculos matemáticos

b. la creación del álgebra simbólico - literal

c. la extensión del concepto de número;

Podemos decir que se complementarán con los elementos *sociales* que caracterizan en particular a la **Función Trigonométrica**. Como se habrá podido advertir, cuando nos referimos a la función trigonométrica estamos hablando de algo más amplio que una mera definición, nos referimos a una problemática contextualizada. De ahí que se abordarla hagamos referencia a la triada Actividad – Práctica – Práctica Social en un escenario histórico, institucional y culturalmente situado.

La tesis socioepistemológica que sostenemos asume que el concepto de función trigonométrica sólo puede derivarse de la evolución de una cierta problemática situada. Nuestro interés es entonces develar, mediante un examen académico, dicha problemática.

4.1 Elementos teóricos de la Aproximación Socioepistemológica

La visión que se circunscribe explícitamente al aprendizaje individual hubo de cambiarse por otra centrada en el aprendizaje social. Esta ha sido propia de la teoría del conocimiento y ha influido a las teorías sobre conocimiento científico (filosofía de la ciencia). Si bien se acepta al individuo como agente cognitivo, también se reconoce el carácter situado de tal cognición. Esto constituye nuestro punto de partida para explicar el sentido en el cual la cognición es social.

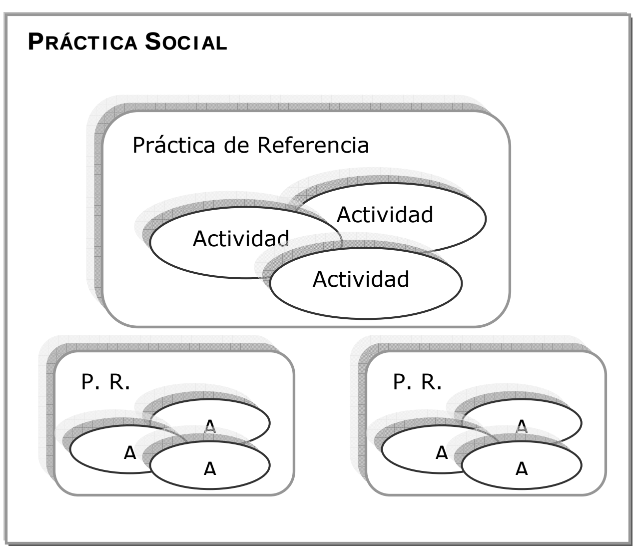
Sin embargo, la descripción de la construcción de conocimiento matemático al seno de la comunidad científica es sólo uno de los elementos constitutivos de la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas en escenarios escolares y sólo hasta recientes fechas se han considerado las condiciones sociales de su construcción.

La aproximación socioepistemológica retoma la visión sistémica de la *didáctica en la escuela; pero sin escenarios* (Cantoral y Farfán, 2003) incorporando una componente social a la construcción del conocimiento matemático. Este acercamiento incorpora entonces cuatro componentes con la intención de desarrollar el pensamiento matemático de los y las estudiantes. Se basa en un marco teórico que permite tratar con los fenómenos de producción y difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, la dimensión social del saber, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2004).

Esquema de la Aproximación Socioepistemológica
(Ferrari y Farfán, 2001)

La dimensión social, en nuestro estudio al fenómeno didáctico ligado a la función trigonométrica, toma el carácter de **práctica social**. Ello modifica el centro de atención de la *componente epistemológica*, lo desvía de los conceptos u objetos matemáticos preestablecidos a la identificación de prácticas de referencia y actividades, ubicando a estas en escenarios particulares. La *componente cognitiva* asume entonces al conocimiento como una serie de procesos sustentados por mecanismos cognitivos que se han desarrollado socialmente y la *componente didáctica*, finalmente se ocupa de explicar la difusión del conocimiento a través del discurso matemático escolar y examina los efectos e implicaciones didácticas.

Elementos para un Modelo: actividad, práctica de referencia y práctica social



En la búsqueda de las circunstancias y escenarios socioculturales particulares que permitieron entender el enfoque socioepistemológico, encontramos y clasificamos nuestros hallazgos en tres momentos. En ellos, identificamos a la *matematización de la astronomía*, la *matematización de la física* y la *matematización de la transferencia de calor* como las **prácticas de referencia** asociadas a lo que hemos llamado *la construcción social de la función trigonométrica*. En cada práctica de referencia podemos distinguir acciones específicas, como lo son la producción de teoremas, lemas, definiciones, entre otros. Es claro también que estas producciones pertenecen a cierta tradición científica, sin embargo, lo que nos interesa es identificar aquello que las *regula*, las norma, la **práctica social**. La práctica social ha sido caracterizada por medio de actividades sujetas a condiciones de un contexto particular, contexto que a su vez es determinado por las prácticas de referencia. Ello ha llevado a identificar los fenómenos, los problemas, las circunstancias y las herramientas asociados al conocimiento matemático involucrado en ámbitos no escolares, pues es ahí donde nace y se usa dicho conocimiento.

Respecto de la práctica, en un sentido genérico, Arrieta (2003) señala:

> …el concepto de "práctica" connota hacer algo, pero no simplemente hacer algo en sí mismo y por sí mismo; es algo que en un contexto histórico y social otorga una estructura y un significado a lo que hacemos. En ese sentido la práctica siempre es una *práctica social*.

Arrieta sostiene que el aprendizaje es una actividad situada en contextos sociales, donde los actores (sociales) ejercen prácticas usando y construyendo herramientas, modificando con esta actividad las mismas prácticas y las herramientas, su entorno, su identidad, su cognición y su realidad. Distingue el contexto social de otros "contextos", y lo describe como un lugar donde confluyen, temporal y espacialmente, diferentes factores organizados sistémicamente.

Sin embargo, para efectos de establecer una construcción social de la función trigonométrica hablaremos, en nuestro modelo, de la práctica social, la práctica de referencia y la actividad. Para explicar cómo interactúan estas tres entidades partimos afirmando que l*a práctica de referencia consiste de un conjunto de actividades reguladas por la práctica social*. Esta es la mediación necesaria para alcanzar el estatus *socio*.

Medir, por ejemplo, es una **actividad** regulada por una necesidad de orden mayor cuyo origen, práctico o teórico, depende del contexto o circunstancia que la envuelve. Los primeros datos que se tienen sobre la medición se encuentran en los registros sobre edificación y división de la tierra que realizaban los egipcios hacia 1400 a. C. Mientras sólo se tuvieron que hacer medidas aproximadas, la humanidad tomaba las dimensiones de sus propios cuerpos, así para medir *longitudes* usaban el codo (medida del codo a la punta de los dedos), la palma (desde la punta del dedo meñique a la punta del dedo pulgar cuando la mano esta totalmente extendida), el pie e incluso su estatura. Eratóstenes, por ejemplo, calculó el perímetro de la tierra con la unidad griega *estadio*, equivalente a 600 pies.

Las primitivas mediciones de *superficie* también iban de acuerdo a las necesidades prácticas, por ejemplo, se podía medir la tierra por la superficie que podía ser sembrada con una determinada cantidad de semilla. El *volumen* se media por la capacidad, por ejemplo de grano o agua, en un espacio y hay poca evidencia que se haya relacionado con la medición del peso (Derry y Williams, 1977). Para la medición primitiva del *peso*, que parece haberse iniciado para pesar polvo de oro, con el uso de balanzas fue necesaria una medida más exacta dado el valor de cambio de la mercancía.

La medición del *tiempo* presentó dificultades excepcionales, el cambio día - noche servía para iniciar - terminar las actividades diarias, el cambio de estación determinaba las épocas para siembra - cosecha, caza, pesca. Junto con las observaciones astronómicas cada vez más precisas se constituyeron calendarios para la planificación del trabajo. Los primeros instrumentos de medición para la duración del día usaron desde las sombras que produce el sol a lo largo del día, hasta el flujo de agua o arena (aproximadamente desde 1450 a. C.). Fue hasta el Siglo XIII que se construyen relojes mecánicos impulsados por pesos que caían, y para el Siglo XV se construyen los relojes de bolsillo con mecanismos impulsados por resortes, que posteriormente abren una era de mucha mayor precisión en el cronometraje con las aportaciones de Galileo sobre la oscilación isócrona del péndulo.

Quizá la medición más compleja la constituyó la medición (o transferencia) de *calor*, pues durante mucho tiempo fue considerado un fluido, sin peso ni sustancia, que pasaba de un cuerpo caliente a uno frío. Sin embargo, resulta importante señalar cómo la tecnología térmica, como la máquina de vapor, se utilizó y desarrolló ampliamente sin contar con una explicación teórica suficiente de la naturaleza del calor.

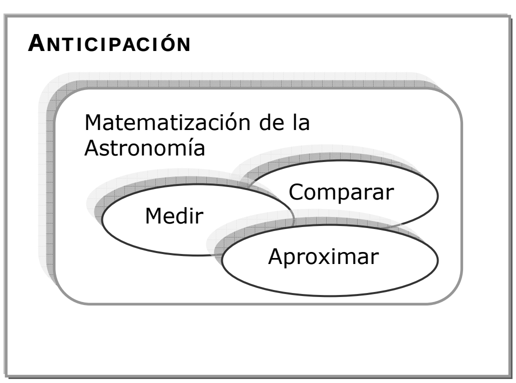
Estas formas de medición reflejan necesidades sociales, de origen pragmático o reflexivo, según sea el caso, de un momento y lugar determinados. También podemos asociar a ellas el pensamiento y producción *científico* que vivía en ciertas épocas, mostrando la relación de dependencia entre el surgimiento o desarrollo del conocimiento, así como los escenarios regulados por prácticas de orden social.

4.2 Construcción Social de la Función Trigonométrica

En nuestro análisis histórico, de corte socioepistemológico, se identificaron tres prácticas de referencia que consideramos fundamentales y a las que hemos denominado en esta obra como: la *matematización de la astronomía*, la *matematización de la física* y la *matematización de la transferencia de calor*. Todas ellas reguladas por las prácticas sociales de **anticipación**, **predicción** y **formalización**, respectivamente. Llamaremos a estos los tres momentos de construcción social de la función trigonométrica, de donde reconocemos dos cambios en el paradigma que rige la actividad matemática y que son necesarios para (1) estudiar el movimiento (en el paso de la anticipación a la predicción) y (2) estudiar la transferencia del calor (en el paso de la predicción a la formalización). Expliquemos esto en más detalle.

4.2.1 Anticipación

Esta práctica social se identificó en la actividad realizada hasta el surgimiento del álgebra como lenguaje simbólico, siendo ésta la transición entre la anticipación y la predicción. Se caracteriza por la construcción de modelos a escala de una realidad no “manipulable”, la celeste. Esto constituye una transición *de lo macro a lo micro*, donde la noción de proporción juega un papel fundamental en la construcción de los modelos y las herramientas matemáticas. Aquí las razones se convierten en la abstracción inmediata de la proporción y el triángulo en el referente matemático principal.



En tanto la anticipación se vincula con la matematización de la astronomía y en consecuencia a la trigonometría clásica, los modelos matemáticos a construir son de naturaleza geométrica estática. Esto es, la actividad matemática consiste en medir, comparar, aproximar y calcular eventos relacionados con fenómenos macro para representarlos en modelos geométricos proporcionales que permitan *anticipar* al hecho real.

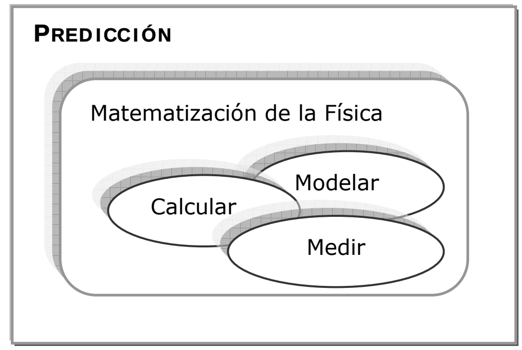
Pedersen (1974) agregó al potencial geométrico del Almagesto, la obra más importante de este periodo, un pensamiento funcional que permitió establecer *relaciones funcionales* y usar nociones como *función inversa, el diferencial* y *la continuidad;* así como establecer *relaciones funcionales de una, dos y tres variables*. Sin embargo, Youschkevitch (1976) rechaza tal hipótesis sobre un pensamiento funcional en esta época, señalando que *la literatura matemática de los antiguos carece no únicamente de palabras equivalentes al término función, sino incluso de alguna alusión a esa idea más abstracta y general mediante la cual se unifican las dependencias concretas e independientes entre cantidades o números, en cualquier forma que en un momento determinado se consideren tales dependencias*.

Nuestra postura respecto de la función trigonométrica es que el aparato trigonométrico - geométrico dota de significado a la cantidad trascendente que nace en el círculo, constituyendo lo que el mismo Youschkevitch llama *síntoma* de la función. Por ejemplo, las tablas de Ptolomeo son equivalentes a una tabla actual de seno que va de 0° a 80°, avanzando con pasos de ½°; no son la función seno sino tablas de cuerdas subtendidas en un círculo. Es cierto que no hay un pensamiento funcional explícito, pues éste vendrá cuando el arco de la circunferencia no sea visto sólo como la órbita del planeta sino como su trayectoria, es decir, cuando el centro de atención esté puesto en el **movimiento más que en la posición**. Sin embargo, la equivalencia de las tablas con los valores actuales de la función nos habla del uso de la noción seno antes de conocerse siquiera como tal, esto es, de su significado y origen.

4.2.2 Predicción

Se ha hablado de la práctica social de la predicción en diversas investigaciones (Cantoral, 2001; Cantoral y Farfán, 2003, 2004; Buendía y Cordero, 2005; Mingüer, 2005) y no es coincidencia que todas ellas traten con objetos matemáticos que surgen o toman su carácter matemático en el estudio del movimiento y el cambio. Particularmente hemos localizado esta práctica social, para el caso de la construcción de la función trigonométrica, en el periodo que del surgimiento del álgebra hasta la introducción del seno al cuerpo de la familia de funciones, situación que ocurre explícitamente con los trabajos de Euler.

Los conceptos físicos están indisolublemente asociados a uno o varios conceptos matemáticos guardando así una relación *constituyente* más que instrumental (Levy-Leblond, 1999) y en el periodo que estamos caracterizando la física proveyó de gran variedad de situaciones y planteamientos científicos donde nacen conceptos matemáticos de gran relevancia. Por ello toca ahora a la *matematización de la física* ser la práctica de referencia a la construcción de modelos mecánicos que describen movimientos periódicos. Es decir, en este escenario nace el carácter funcional de las relaciones trigonométricas, siendo su problemática básica el estudio del movimiento oscilatorio.



De nuestro análisis histórico, naturaleza socioepistemológica, identificamos el paso del fenómeno celeste al modelo mecánico como la transición de la trigonometría en el plano geométrico al plano funcional. El problema geométrico, aquel de las cuerdas subtendidas en un círculo, se aborda desde otro paradigma, donde se abandonan las razones y se centra la atención en las cantidades trascendentes trigonométricas y sus relaciones. Dicho en otros términos, la medida de la semicuerda en función del ángulo central constituye la cantidad que surge del círculo, pero visto este como una curva (o trayectoria en el plano de la física). De hecho, es la cuadratura de esta curva donde se va a originar la expresión en serie infinita de la función seno: *una expresión algebraica de lo trascendente*.

La actividad matemática consiste entonces en el planteamiento de problemas sobre un movimiento particular, su estudio y su modelación. Dado el contexto físico en el que se planteaban los problemas se usa el radián como unidad de medida para las relaciones trigonométricas, logrando con ello homogeneidad en las ecuaciones.

En este periodo, que va de la formulación galileana de la física a la síntesis newtoniana se constituyen los cimientos de una teoría general de las funciones, que si bien no avizoraba todavía el papel que la naturaleza numérica de sus variables tendría, sí permitía una nueva mirada de las funciones trascendentes que hasta ese entonces no formaban parte de la matemática avanzada. Las funciones que hoy nombramos exponenciales, circulares (trigonométricas directas e inversas), hiperbólicas y otras más que son reportadas en los textos actuales de análisis matemático, eran más bien vistas como casos de excepción en el estudio de las progresiones numéricas y de las relaciones trigonométricas, ya sea en la hipérbola, ya en el círculo. Sin embargo, este periodo, fue el sitio idóneo en el cual estas funciones adquieren el estatus de analíticas, es decir, cuando se les aplican los métodos del análisis infinitesimal.

Aparecen entonces asociados con series, y estas construidas sobre variables, que ya no son los ángulos tradicionales, sino acaso "evoluciones históricas de esos ángulos". Es posible pensar en $sen(t)$, donde *t*, representa el tiempo y no más a un ángulo para un triángulo rectángulo particular. Emergían entonces los elementos para una nueva formalización: una nueva teoría de las funciones que serían sometidas al análisis de los infinitesimales; las funciones analíticas. En este cuerpo teórico cabrían por igual y con el mismo estatus, funciones polinomiales, racionales, trascendentes, etc. Se precisaba entonces de una nueva teoría analítica de las funciones. Sólo hacía falta un ingrediente y una pregunta por responder: ¿para qué habrían de servir estos nuevos objetos?

4.2.3 Formalización

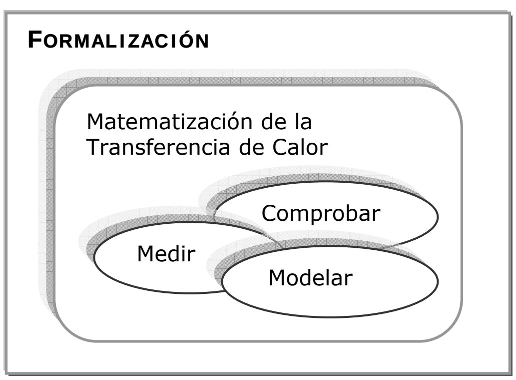
Esta práctica se localizó básicamente en los siglos XVIII y XIX, y contempla la consolidación de la teoría analítica de las funciones. Las funciones trigonométricas son consideradas ya cantidades trascendentes con un estatus funcional y analítico, y resultan fundamentales en la solución de problemas ligados a fenómenos periódicos[15]. Pero nuevos fenómenos expandieron su uso, por ejemplo, la transferencia de calor, el enfriamiento de los cuerpos, las vibraciones sonoras y las oscilaciones en la marea. Sin embargo, era necesario un cambio de paradigma para resolver los problemas que plateaban tales fenómenos:

> *Sobre el paradigma newtoniano, se construyeron una oleada de producciones que extendían los primeros hallazgos sobre el movimiento y el cambio. Se habían estudiado y explicado fenómenos tan diversos soportados en pocas leyes fundamentales, pues se aceptaba que los mismos principios regían tanto el movimiento de los astros, como sus respectivas formas, la diversidad de sus trayectorias, el equilibrio y las oscilaciones de los mares, las*

[15] El centro de atención pasa del periodo (nuestra variable independiente) a la cantidad que se repite (nuestra variable dependiente).

> *vibraciones armónicas del aire y de los cuerpos sonoros, la transmisión de la luz, los fenómenos de capilaridad, las ondulaciones de los líquidos, y en fin los más complejos efectos de todas las fuerzas naturales, todo lo cual confirma el célebre pensamiento de Newton expresado en sus Principia.*
>
> *... Fourier sostiene que tanto las ecuaciones del calor como aquellas que expresan las vibraciones de los cuerpos sonoros, o las oscilaciones últimas de los líquidos pertenecen a la entonces rama del análisis y que a la postre sería el inicio de lo que hemos dado el llamar análisis clásico real.*
>
> (Cantoral y Farfán, 2004)

El problema de la transferencia de calor implica el uso de las funciones trigonométricas como un objeto matemático mayor, por así decirlo, denominado serie trigonométrica. Pero el contexto físico del problema exige un nivel de abstracción avanzado que permita entender *la variabilidad dentro de la estabilidad*, esto es, entender que en un flujo de calor constante las temperaturas en los puntos difieren.



La actividad matemática central consiste en modelar la variación (distinguiendo lo que varía respecto a qué es lo que produce tal variación) y determinar el estado estacionario. De esto deviene necesario el estudio de la convergencia de la serie trigonométrica infinita, siendo este concepto un pilar en la teoría del análisis. Denominamos *formalización* a la práctica social que regula la actividad de este periodo pues constituye el paso del cálculo a su teorización (Cantoral y Farfán, 2004), donde los nuevos resultados se convierten en conceptos que van dando cuerpo y coherencia a la teoría.

Hemos caracterizado hasta este momento, los tres momentos de construcción social de la función trigonométrica a partir de la actividad que le da origen y significación. Ahí, en cada momento, hemos distinguido elementos que viven actualmente en el discurso matemático escolar como los objetos matemáticos (razón, función y serie), algunos elementos que se han perdido como la actividad experimental de medir (longitudes, distancias y temperaturas) y, finalmente, otros que han sido remitidos a otras áreas, como el estudio del movimiento circular uniforme (y la explicación del uso del radián) en la física. Sin embargo, es factible encontrar prácticas asociadas a las nociones trigonométricas en otros escenarios. Patricio, et al. (2005) señalan que el uso de las *nociones* de razón y función trigonométrica es cotidiano en prácticas profesionales como la del arquitecto o el ingeniero:

> *En comunidades de arquitectos podemos encontrar actividades que están relacionadas con la semejanza y el seno es empleado como una razón entre dos lados, mientras que en comunidades de ingenieros electrónicos la modulación de ondas utiliza al seno como un instrumento periódico, como una onda.*

Esto es, identifican las prácticas que se realizan en comunidades *vivas* fuera del escenario escolar, señalando que hay un divorcio entre dichas prácticas (de semejanza, por ejemplo) y las herramientas escolares (la razón trigonométrica) que teóricamente debieran utilizarse.

En escenario escolar y bajo la perspectiva socioepistemológica, Buendía (2004) estudió cómo la práctica social de predicción permite la construcción de la noción de periodicidad, siendo esta, quizá, la propiedad analítica más importante de la función trigonométrica. De hecho, es con esta función que la periodicidad encuentra definición escolar, en tanto concepto. Cuando hablamos de escenario escolar nos referimos a la exploración que se realiza con estudiantes dentro de una institución educativa, aun cuando los diseños experimentales no sean típicamente escolares o se lleven a cabo fuera del programa o calendario institucional.

Pero ¿podríamos llamar arquitectos a quienes construyeron las pirámides egipcias donde se calculaba el *se-qet* o ingenieros electrónicos a aquellos que estudiaron por primera vez los movimientos ondulatorios?, ¿de donde parte el conocimiento especializado de los actuales arquitectos o ingenieros si no de la escuela? Pues bien, la investigación en los tres escenarios y en varias direcciones proveerá de la evidencia teórica y empírica para generar la interacción y retroalimentación de los tres escenarios. Esto favorecerá la constitución de un discurso matemática escolar que articule las cuatro componentes de la construcción social del conocimiento y satisfaga las demandas de la sociedad actual. Esta labor precisa de grandes esfuerzos, esta tesis abona en ese camino.

Capítulo 5

Aportaciones al Discurso Matemático Escolar

Capítulo 5

Aportaciones al Discurso Matemático Escolar

Capítulo 5

Aportaciones al Discurso Matemático Escolar

La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa se basa en la interacción sistémica de las cuatro componentes de la construcción social de conocimiento. La práctica social afecta dicha interacción entre las componentes epistemológica, cognitiva y didáctica, y genera una explicación al fenómeno didáctico en términos *del desarrollo del pensamiento matemático* a través de las nociones de actividad, interacción, uso del conocimiento, explicación, debate, argumentación, consensos, instrumentación, validación, construcción y modificación de herramientas, todo ello en el planteamiento y resolución de situaciones – problema. En consecuencia, toda propuesta didáctica basada en esta aproximación supone un cambio significativo del discurso matemático escolar (DME): es decir, busca el desarrollo del pensamiento matemático y la construcción de conocimiento de parte de los estudiantes con base en prácticas sociales y no sólo, como hasta ahora, con base en el estudio de conceptos.

5.1 Implicaciones Didácticas

El discurso escolar es el conjunto de interacciones entre profesor y estudiantes, dirigidas por la exposición coherente de los saberes escolares. Esta coherencia se establece respecto de exposiciones previas y futuras, pero también respecto de los conceptos matemáticos asociados. Por su parte, el DME es el conjunto de restricciones, implícitas o explícitas, que *norman* la actividad áulica y al discurso escolar mismo. Una de sus características más importantes es la de alcanzar hegemonía en el contexto escolar. Por ejemplo, el discurso matemático escolar asociado a la noción de función trigonométrica contempla tanto su definición a partir de razones trigonométricas, ilustradas invariablemente con un triángulo rectángulo; mediante el uso del círculo trigonométrico para definir la función y la graficación, al menos de las funciones básicas o primitivas, a fin de ilustrar la periodicidad. El discurso matemático escolar se ha organizado durante años (siglos), *para responder a cuestionamientos de orden teórico e ideológico que muestren la coherencia interna del discurso argumentativo o de las eventuales implicaciones que tendría el conducir al razonamiento bajo hipótesis* *inusuales* (Cantoral y Farfán, 2004). Probablemente esta sea la razón por la que no encontraremos, o al menos no hemos encontrado hasta ahora, un texto o un programa de estudios, o una exposición de aula que abandone el recurso usual de emplear el círculo trigonométrico como medio de introducción a las funciones trigonométricas.

Llevar al aula una propuesta basada en la *construcción social* de la función trigonométrica presupone entonces la modificación del discurso escolar, discurso que inicia con el estudio de los principios trigonométricos (tercer año de secundaria en el SEM[16]) hasta el estudio de las series trigonométricas (segundo o tercer año del programa de ciencias o ingeniería en el SEM). Este periodo tan extenso, requiere de investigación que, a partir de nuestros resultados, se ocupe de problemáticas específicas de cada nivel. Elementos concretos sobre el desarrollo del pensamiento y la construcción del conocimiento ligado a la Trigonometría en general, a la Función Trigonométrica y a la Serie Trigonométrica, así como de las nociones asociadas a ellas (ángulo, triángulo, razón trigonométrica, identidad trigonométrica, ecuación trigonométrica, periodicidad, función trigonométrica, serie trigonométrica, convergencia, etc.) son fundamentales para el diseño de secuencias didácticas que busquen construir y dar significado a dichas funciones entre los estudiantes.

Sin embargo, la revisión en los planos histórico - epistemológico, didáctico, cognitivo y social que hemos llevado a cabo en esta investigación, dotó de los principios básicos para cada momento en lo específico de la construcción de la función trigonométrica.

5.2 Elementos para una Construcción Social de la Función Trigonométrica en el Aula

La investigación en Matemática Educativa, así como ocurrió con otras disciplinas, no nace y se desarrolla en forma aislada, pues retomamos resultados que han aportado trabajos como los de De Kee, et al, (1996), Ros (1996), Farfán (1997), Buendía (2004), a fin de delinear las aportaciones de la construcción social de la función trigonométrica al discurso matemático escolar.

Como mencionamos en el capítulo anterior, fue en el contexto que denominamos "contexto de origen" que reconocimos las entidades: actividades, prácticas de

[16] Sistema Educativo Mexicano

referencia asociadas y prácticas sociales que las regulan. Sin embargo, la significación que les da origen a los conceptos en cada momento específico contempla ciertos conflictos al momento de transponerlos al aula. Estos deben estudiarse y explicarse en detalle a través de estudios sistemáticos que provean de suficiente evidencia empírica.

En el siguiente cuadro sintetizamos los principios básicos de cada momento de construcción con base a la práctica social que los regula. Más adelante haremos señalamientos particulares para la etapa escolar que afecta cada momento.

	Práctica Social		
	Anticipación	**Predicción**	**Formalización**
Práctica de Referencia	Matematización de la Astronomía	Matematización de la Física	Matematización de la Transferencia del Calor
Contexto Natural	Estático – Proporcional	Dinámico – Periódico	Estable – Analítico
Objeto Matemático Asociado	Razón Trigonométrica	Función Trigonométrica	Serie Trigonométrica
Variables en juego	$sen\,\theta$ θ ángulo (grados) $sen\,\theta$ longitud	$sen\,x$ x tiempo (radian-real) $sen\,x$ distancia	$sen\,t$ t tiempo (real) $sen\,t$ temperatura

Principios Básicos para la Construcción Social de la Función Trigonométrica

5.2.1 Anticipación en el Aula

La construcción social de la función trigonométrica en su primer momento (las etapas escolares 1 a 3[17]), regulado por la anticipación, propone el estudio de fenómenos macro no manipulables donde la proporción genera las nociones y los modelos asociados a la razón trigonométrica. Sin embargo, la recreación del contexto de origen de estas nociones puede provocar que sea más compleja la tarea de simular la realidad, en este caso la astronómica, que la construcción de la razón trigonométrica. Por ejemplo, Ros (1996) reporta la dificultad de realizar una maqueta a escala del sistema solar cuando se cuenta sólo con las instalaciones de una escuela. Ello la obliga a simular el sistema solar en un mapa, aunque esto se convierta a su vez en un

[17] Ver Capítulo 2, página 26

modelo a escala (el sistema solar) dentro de otro modelo a escala (el mapa): una escala de otra escala.

Una vía factible para trabajar este tipo de problemas sería quizá a través de iniciativas masivas, como el que propone el Proyecto Eratosthenes en el marco del Año Mundial de la Física (ver *Guía para el Profesor* en el Anexo E).

Ahora bien, la construcción de conocimiento depende también de las herramientas tecnológicas de que se disponga y sobre todo del conocimiento que antecede a los problemas que abordamos. Los estudiantes que tienen un primer acercamiento a la trigonometría ya tienen conocimientos de la heliocentricidad del sistema solar, es probable que sepan que las órbitas no son circulares sino elípticas, que tengan acceso a las dimensiones de los planetas y del sistema, etc. Además de contar con aparatos de medición y proceso de datos más avanzados. Esto es, una génesis ficticia en un contexto similar al de origen es poco más que compleja.

Cuando proponemos recrear la *práctica social de anticipación* en este momento nos referimos a que el discurso matemático escolar debe reconciliar el estudio de la trigonometría con el estudio de la proporcionalidad, donde objetos como el triángulo, el círculo, el ángulo y las relaciones entre ellos sean herramientas en la construcción de modelos geométricos (estáticos), donde surja la *cantidad trascendente trigonométrica*.

5.2.2 Predicción en el Aula

En el segundo momento de construcción (las etapas escolares 4 a 6) se propone el estudio del movimiento y cambio en fenómenos particulares, los periódicos. Un nuevo escenario donde el planteamiento de problemas físicos de origen a una nueva unidad de medida, pero sobre todo brinde una nueva visión de la herramienta matemática: la predictiva.

Tradicionalmente, el círculo trigonométrico es el elemento con que la trigonometría pierde su carácter geométrico y adquiere su carácter funcional. El círculo trigonométrico y su discurso asociado son la base de la explicación, que se considera necesaria y suficiente, para clarificar:

- el dominio de la función en todos los reales,
- el significado de un ángulo negativo,

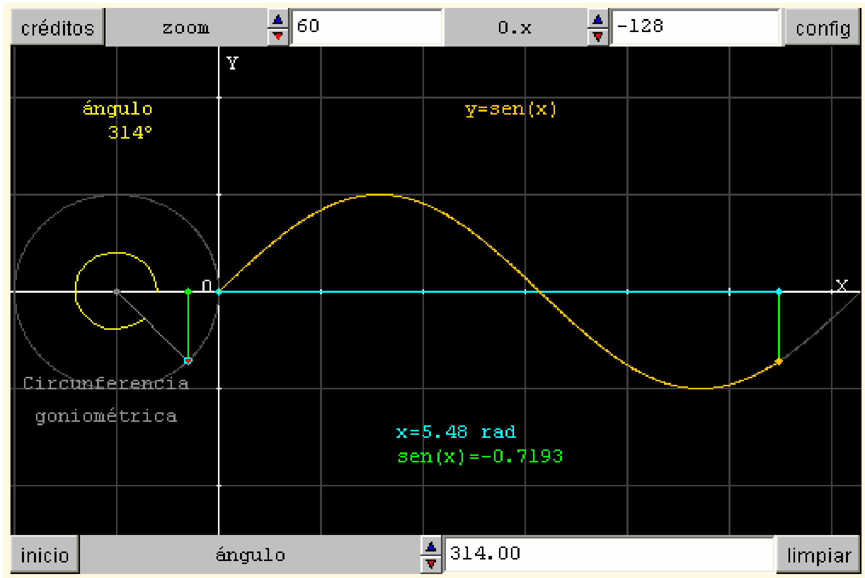
- la conversión de la unidad de medida: grados $\leftrightarrow$ radianes,
- la equivalencia entre radianes y reales,
- la periodicidad y acotamiento de la función.

De Kee et al., (1996) y Maldonado (2005) mostraron evidencia empírica de la preferencia por los elementos geométricos de la trigonometría, más aún mostraron su uso en contextos incorrectos. Al respecto De Kee et al., (1996) señala:

> Cuando comparamos el desempeño de los alumnos en el contexto del triángulo rectángulo y en el del círculo trigonométrico, constatamos que era mejor en el primer contexto, aun cuando el segundo estuviera más fresco en su mente, ya que acababan de terminar su estudio mientras que había pasado todo un año desde la presentación del primero. Observamos notoriamente pocas huellas de comprensión, del género que fuera, de la función circular y de su papel en la definición de las funciones trigonométricas. Si pensamos que la función circular no es más que un medio didáctico destinado a volver más visual, más «concreta», la construcción de las funciones trigonométricas, esta constatación deja perplejo. Hay que reconocer que esta aproximación concretiza la definición de las funciones trigonométricas al precio de complicarla considerablemente.

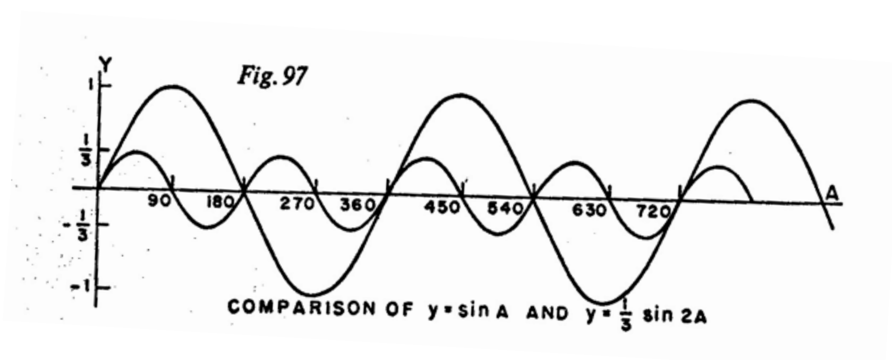
Esto es, pareciera que el empleo del círculo trigonométrico como estrategia de enseñanza obstaculiza la construcción de la función trigonométrica en un contexto analítico. Sin embargo, es un recurso gráfico que logra un vínculo coherente entre las nociones y unidades de medida en la trigonometría y en la función trigonométrica. Este recurso mantiene el discurso en el ámbito escolar de la matemática y abandona la posibilidad de vincularlo con el discurso escolar de la física, por ejemplo.

En el siguiente esquema, tomado del Proyecto Descartes (Disponible en red, ver http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_CNST_1/Funciones_trigonometricas/Funcion_seno.htm), podemos observar los elementos geométricos y funcionales de la relación trigonométrica seno, claramente diferenciados (por color) por unidad. Pero el esquema y el discurso matemático escolar que tradicionalmente lo incluye no han dejado claro, en el estudiante, porqué la conveniencia y/o necesidad de usar los radianes sobre los grados para la variable independiente.



Del circulo trigonométrico a la función trigonométrica en el plano.

Autores como Morris Kline han restado importancia a este tipo de explicaciones. Esta situación es comprensible en tanto sus textos están orientados a mostrar los aspectos físicos vinculados a ciertos objetos matemáticos, como el caso de su *Mathematics and the physical World.* En el tema *The mathematics of oscillatory motion* (p. 280), incluso muestra una gráfica cuyo plano cartesiano se compone de la variable independiente en grados y la variable dependiente en reales.



Las preguntas reportadas en Maldonado (2005) y De Kee et al. (1996) están desprovistas de un contexto o un problema en donde la función trigonométrica se use para explicar un fenómeno. Sin una situación de variación o un problema de cambio, no hay acciones para medir, calcular, aproximar, modelar, y en consecuencia no hay motivo para elegir una unidad de medida coherente con la situación problema. Si bien es posible, como muestra Kline, construir la gráfica del seno con la variable independiente en grados, estos obstaculizarían el uso de la función trigonométrica en el cálculo o en las ecuaciones diferenciales, por ejemplo, y ambas ramas de la matemática están íntimamente vinculadas al estudio del movimiento y el cambio.

Con la tecnología actual es posible diseñar situaciones de aprendizaje donde se estudia y modela fenómenos periódicos, por ejemplo, Buendía (2004) y Sánchez y Molina (2003a y 2003b) usan sensores de movimiento para recolectar datos del movimiento de los propios estudiantes o de un péndulo construido con material común.

Internet como banco de información provee también de datos relacionados a fenómenos periódicos de los que no podríamos hacer experimentación en aula, pero si un análisis cualitativo y cuantitativo de ciertos comportamientos. Un ejemplo es el registro que lleva el Departamento de Oceanografía Física del CICESE[18] de las alturas que presenta la marea en las distintas playas de nuestro país (http://oceanografia.cicese.mx/predmar/calmen.htm).

5.2.3 Formalización en el Aula

Esta práctica social precisa de distinguir una nueva etapa escolar para dar tratamiento a la serie trigonométrica, en tanto que se requiere de un nuevo paradigma en la resolución de problemas. La función trigonométrica se despoja de todo origen geométrico, se trabaja en exclusiva con sus propiedades analíticas, particularmente la periodicidad.

El contexto de origen que da significación a la serie trigonométrica, el de la transferencia del calor, fue ya estudiado por Farfán (1997), aunque el centro de su atención estuvo puesto en el concepto de convergencia de la serie. Farfán encontró que al reconstruir el contexto de la transferencia de calor, las representaciones gráfica y analítica exigían un manejo versátil sobre una producción cultural que vincula los contextos físicos con los geométricos, cosa inusual en la enseñanza contemporánea. En este contexto físico se deberá distinguir lo que varía respecto a qué es lo que produce tal variación para, enseguida, predecir cuándo la variación que subsiste ha llegado a un estado estable. Pero admitir la variabilidad dentro de la estabilidad no se deriva de la experiencia sensible, sino de una profunda abstracción y reflexión del fenómeno, para

[18] Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.

lo cual se requiere de un amplio repertorio de habilidades no cultivadas en el ámbito escolar.

Sin embargo, desde nuestra investigación podríamos preguntarnos ¿cómo significar la serie trigonométrica y su convergencia, si profesores y estudiantes siguen pensando en $y = sen\, x$ o $y = \cos x$ cómo funciones de ángulos y división de longitudes?

Cantoral y Farfán (2004) señalan como necesidad el desarrollo de la intuición más allá de lo sensible, como una etapa previa, antes de significar la convergencia de la serie trigonométrica infinita. Añadimos a esto la necesidad de significar a la función trigonométrica como herramienta predictiva, despojarla del contexto geométrico – estático de las razones (incluido el círculo trigonométrico) y muy en particular proveer de significado a la unidad de medida.

5.3 Reflexiones finales

La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa se ha venido desarrollando sistemática y cooperativamente por una comunidad académica que más recientemente ha alcanzado notoriedad internacional. Este proceso quedó sintetizado en el artículo de Cantoral y Farfán (2003) y se planteó con este enfoque una tesis que consideramos *revolucionaria*, al producir en la comunidad una verdadera ruptura con los enfoques llamados clásicos, al plantear una descentración del objeto matemático como prerrequisito para la acción didáctica. El punto de partida fue la mirada crítica respecto de las tradiciones formalistas y de los enfoques constructivistas dominantes en los 80's, señalando que ninguna abandonaba la predilección manifiesta por colocar en el centro de su debate teórico al conocimiento matemático en sí. Esto es, una especie de cogno-centrismo matemático. Por su parte, la socioepistemología abandona la centración en el objeto matemático y su naturaleza epistemológica para privilegiar la epistemología de las prácticas asociadas a su construcción, las prácticas de referencia y la práctica social.

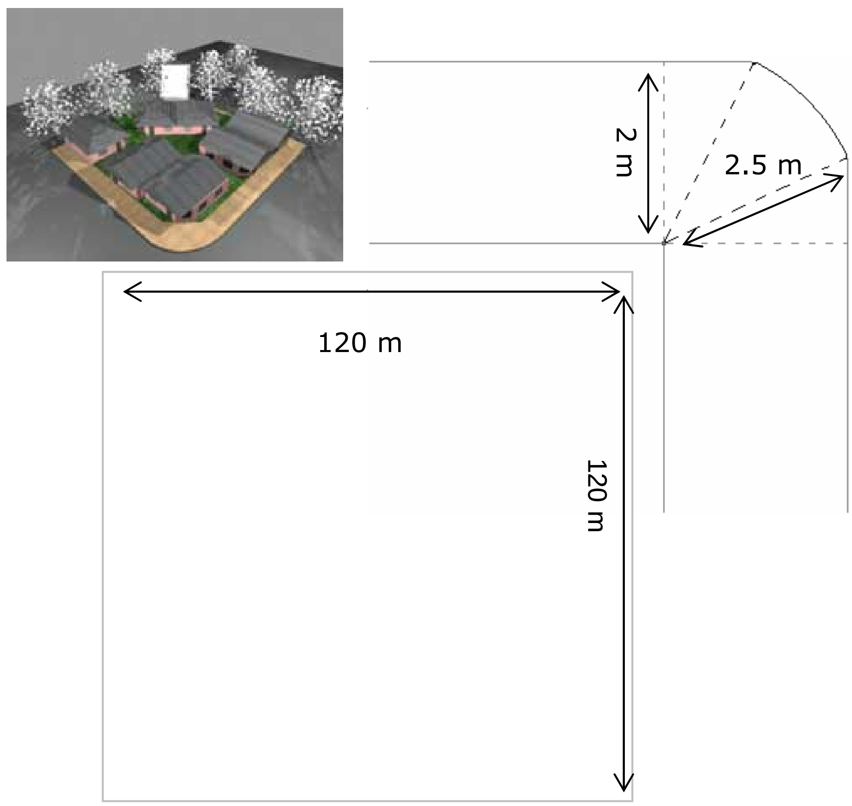
Nuestro trabajo de investigación sigue el principio de problematizar al saber, localizando y analizando su uso y su razón de ser. De tal suerte que al iniciar la búsqueda por los usos y significados primarios de la función trigonométrica descubrimos que la pregunta central era ¿de donde proviene la cantidad trigonométrica trascendente?, ¿es la razón trigonométrica el origen de todo? Entonces comenzó el viaje: la componente epistemológica nos situó en el año 1700 a.C. y comenzamos entonces, desde ese momento, a distinguir el nuevo elemento de la problemática en nuestra disciplina. Esto es, se eligió el contexto de origen del saber para localizar cuáles eran las prácticas de referencia que lo producen y la práctica social que lo induce. Este pequeño, pero gran cambio de matiz, plantea una variante profunda al momento de obtener los resultados de la investigación, no estaríamos contando propiamente una historia de las ideas, sino narrando y analizando otra, la de sus prácticas.

Cómo evoluciona la cantidad trigonométrica trascendente desde el contexto estático - proporcional al analítico - estacionario, pasando por el dinámico - periódico, no puede describirse a través de teoremas o definiciones. Fue necesario ubicarnos al nivel de los escenarios, de los paradigmas científicos de una época, de los problemas y del cómo estos se planteaban, de los fenómenos y de las prácticas que le sustancian. El conocimiento guarda así íntima relación con la ideología de un entorno. El conjunto de conceptos y creencias alrededor de la geocentricidad determinó la producción científica hasta 1543. Tras romper o luchar contra una ideología, y en consecuencia iniciar una revolución del pensamiento, los antiguos conceptos y nociones evolucionan, se transforman y encuentran nuevos problemas.

Si continuamos en la escuela con la visón platónica que considera a los objetos matemáticos independientes por completo de la experiencia humana, una verdad absoluta, la función trigonométrica no es sino la generalización de las razones trigonométricas. Pero entonces nos preguntamos ¿y estas qué cosas son? Con las primeras nociones trigonométricas que se tiene registro se pone en evidencia que el saber matemático se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares y su introducción al sistema de enseñanza le obligó a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento.

En la más reciente Relme – Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, celebrada en Montevideo, Uruguay, llevamos a cabo una experiencia didáctica no controlada con la participación de colegas profesores de varios países de Latinoamérica en donde exploramos sus concepciones ligadas a ciertas nociones trigonométricas. La secuencia no fue registrada, dado el escenario donde se presentaba, pero nos dio luz sobre algunas relaciones que se establecen entre el tipo de problemas y la herramienta matemática elegida por los profesores. Por ejemplo, a nivel ilustrativo queremos mostrar el siguiente problema:

> Se planea la reconstrucción de la banqueta que rodea este conjunto de cabañas. Para saber la cantidad de mezcla a usar es necesario calcular el área de la banqueta. Cada esquina se puede aproximar a un sector de circunferencia y dos triángulos rectángulos. ¿Cuál sería el área de cada esquina?, ¿cuál es el área de toda la banqueta?

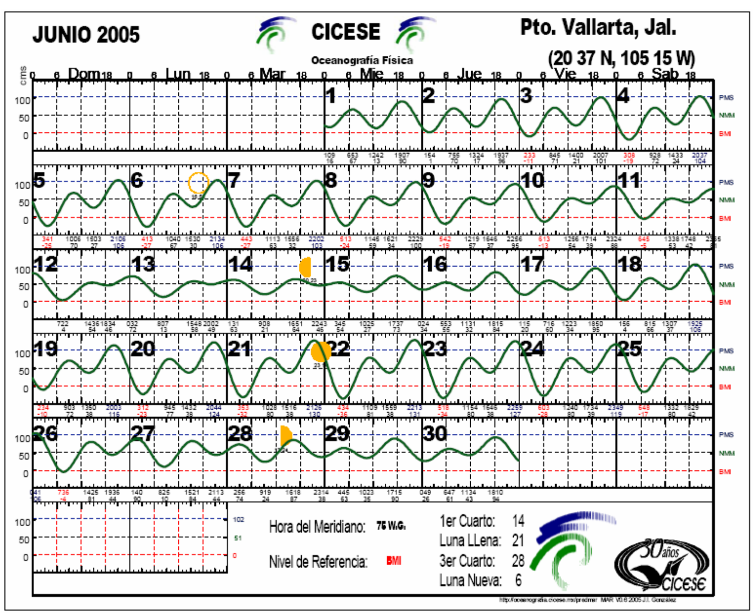


Los profesores participantes en la experiencia iniciaron por calcular las áreas más *sencillas*, cuatro rectángulos de 120 m de largo x 2m de ancho, 1 cuadrado de 120 m de lado y 8 triángulos de 2 m de base y $\sqrt{2.25}$ m de altura. Esta última medida se debe calcular a partir de los datos proporcionados. El último cálculo es el área de los 4 sectores circulares.

Sólo 4 de 18 profesores obtuvieron el área a partir de la relación proporcional $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{\text{área del sector}}{\text{área total}}$ (el ángulo del sector es al ángulo completo, lo que el área del sector al área de todo el círculo). Lo más significativo de dicha resolución es que sólo estos cuatro profesores usaron el ángulo sólo en radianes, mientras que el resto obtuvo el ángulo en radianes y lo convirtió a grados, a partir de ese dato ya no continuaron con el ejercicio. Sabemos que es necesaria más investigación sobre esta secuencia y sobre las interacciones que provoca entre los participantes, sin embargo, queremos señalar que dentro del debate que se sostuvo con y entre los profesores no se proporcionaron argumentos que sustentaran la elección del uso del ángulo en grados.

Esta actividad puede pensarse como aquella donde Newton obtiene la serie infinita del seno, pero carece del elemento primordial: el *movimiento*. Además, introduce en el esquema triángulos carentes de medida en uno de sus catetos, por lo que la alusión a la razón trigonométrica es inmediata. En este contexto es mucho más natural el uso del grado que del radián.

Posterior a este problema se les proporcionó el siguiente calendario,



a la par que se les daban los datos que registra el Departamento de Oceanografía Física del Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, para discutir sobre la factibilidad de construir un modelo matemático que represente el comportamiento de la marea en Puerto Vallarta, Jalisco, del 1ero al 30 de junio de 2005. Surgieron ideas como:

- recortar cada semana y pegarlas en forma continua (como un electrocardiograma) para ver su comportamiento general,
- definir el modelo en cuatro intervalos para cada periodo (1er cuarto, luna llena, 3er cuarto y luna nueva)
- Determinar el máximo y el mínimo alcanzado en cada periodo, para conocer un posible parámetro de *amplitud* de la función trigonométrica que lo modele.

Al preguntar a los profesores sobre las unidades de medida sólo hubo una respuesta: *tiempo* (variable independiente) y *distancia* (variable dependiente). No hubo siquiera mención de ángulos, todo se centró en el movimiento y las alturas de la marea. El abandono del contexto matemático escolar se logró gracias a las condiciones en las que llevamos a cabo esta experiencia, el objetivo no era la resolución en sí misma de los problemas, sino el debate y los consensos. Gracias a esto los profesores tuvieron más libertad de expresar ideas para resolver los problemas, éstas fueron tan variadas como colores en una pintura y nos permitieron entrar más allá de sus concepciones, a sus ideas y creencias. No recreamos la medición de la marea, pero hicimos un ejercicio de análisis sobre fenómenos dinámicos periódicos que matizaron la actividad con discusiones, argumentos, explicaciones, y no con conceptos.

5.4 Conclusión

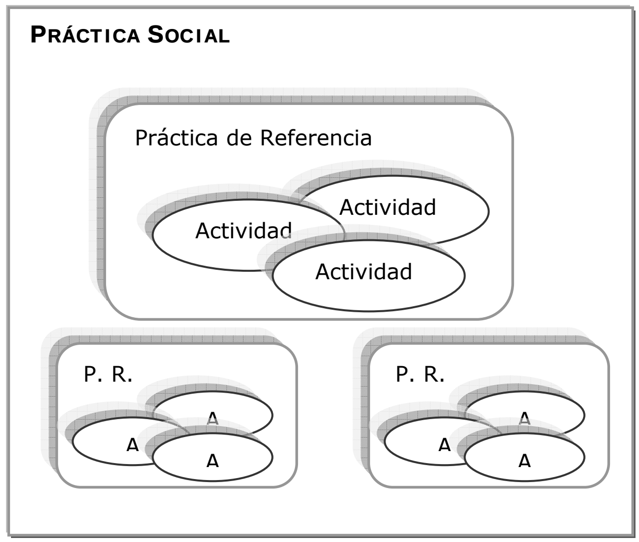
La dimensión *social* que hemos incorporado al estudio de la enseñanza – aprendizaje de la función trigonométrica ha afectado a las componentes epistemológica, didáctica y cognitiva que aportaron otras investigaciones (ver Capítulo 2), pero más importante que esto fue el hecho de que se modificó su relación sistémica para explicar los fenómenos de su construcción en escenarios escolares. Documentamos que en la escuela se trata a la función trigonométrica como una *extensión* de las razones y que su única explicación sobre la unidad de medida radica en la equivalencia entre grados y radianes en el círculo trigonométrico. Con esto se despoja de los usos y significados que dan origen a la función trigonométrica, pero más importante, se pierde el vínculo con algunas prácticas de referencia que viven escolarmente en otras asignaturas, como aquella del estudio del movimiento (circular uniforme) en la física.

Si bien es cierto que el sistema de enseñanza impone restricciones propias del medio, también las impone su función proveedora de formación integral al ciudadano y en ese sentido las "matemáticas" no deben contemplarse como una asignatura aislada. Por el contrario debe entenderse y aprenderse en la medida en que *convive* en la construcción de conocimiento relacionado a otros ámbitos, otras asignaturas en el caso escolar. Sólo así y con base en la investigación sistémica de los fenómenos didácticos lograremos la alfabetización científica de nuestros estudiantes, o dicho en términos de la matemática educativa, una visión científica del mundo. Esta tesis aporta en esta dirección, en tanto el enfoque clásico no ha podido resolver: la elección de unidad de medida en el tránsito de la trigonometría clásica a la trigonometría analítica. En consecuencia no hay recursos didácticos que permitan al profesor el tránsito constructivo triángulo rectángulo -> círculo trigonométrico -> función trigonométrica.

Por cuanto toca a los aportes metodológicos, esta tesis documentó el papel de las prácticas de referencia que producen conocimiento y el estatus de las prácticas sociales en tanto que inducen la construcción de la función trigonométrica en su contexto de origen, aportando así los principios básicos para modificar el enfoque clásico que vive en la escuela y que se usa en la literatura especializada de matemática educativa. La ruta alternativa que propone la tesis es el de la construcción de la función trigonométrica en escenarios que articulen la actividad del alumno con una práctica de referencia específica y realista, ambas reguladas por tres prácticas sociales: *anticipación*, *predicción* y *formalización*. De nuestro análisis sabemos que tanto las prácticas de referencia como las actividades viven en contextos particulares, y que para la función trigonométrica hemos denominado *estático – proporcional*, *dinámico – periódico* y *estable – analítico*, respectivamente. Dicho en otros términos, la construcción del conocimiento no sigue cualquier práctica de referencia o cualquier actividad elegida, sino que sigue un patrón específico documentado a lo largo de esta tesis.

Ubicarnos en el tiempo y espacio de origen también nos dejó ver que las prácticas de referencia señaladas son fundamentales para la construcción de conocimiento científico, en tanto sobreviven a lo largo de los siglos, cambiando paradigmas de acuerdo a necesidades o exigencias de carácter social.

Por otro lado, estamos aportando un nuevo modelo para explicar la construcción social del conocimiento matemático en la aproximación *socioepistemológica*. Delimitamos grosso modo los elementos de nuestro modelo como sigue:



- la *actividad* como aquella observable tanto en los individuos como en los grupos humanos,
- la *práctica de referencia* como un conjunto articulado de actividades, también cómo aquella que permite la articulación de la actividad con la práctica social,
- la *práctica social* como reguladora (normativa) de la práctica de referencia y sus actividades relacionadas.

Con estos tres elementos, los contextos y el planteamiento de problemas específicos hemos trazado una construcción social de la función trigonométrica que apunta hacia una aportación de orden conceptual: *el desarrollo del pensamiento matemático y la construcción de conocimiento científico*. Mientras que el enfoque clásico trata sólo con el aprendizaje de las razones trigonométricas (ecuaciones e identidades), de las funciones trigonométricas y de las series trigonométricas desvinculadas, nuestro enfoque atiende a la construcción de conocimiento con base en la experiencia, en el planteamiento de ciertas situaciones – problema, en la identificación de regularidades, en la argumentación, en los consensos, en las explicaciones, entre otras. Ninguna de éstas es exclusiva del ámbito matemático, por el contrario viven en otras áreas de conocimiento y en la vida cotidiana de los estudiantes.

Señalábamos en un principio que toda propuesta teórica o didáctica basada en la aproximación socioepistemológica supone un cambio significativo en la visión de enseñar y aprender matemáticas. Hablamos ahora del desarrollo del pensamiento matemático y la construcción de conocimiento a partir de prácticas sociales, no sólo como hasta ahora se ha hecho basados exclusivamente en el tratamiento escolar de los conceptos. Esto no es sólo una novedad didáctica, sino que es una respuesta a dos cuestiones: 1) aquello que no explicaban las teorías de nuestra disciplina y 2) a la exigencia que nos hace la sociedad de educar y formar más y mejores ciudadanos, cuya visión del mundo que les rodea no puede limitarse a lo sensible.

En este sentido, esta tesis tiene tres aportes fundamentales: una de orden teórico, otra metodológica y una más en el terreno de la pragmática. Esperamos que esta última pueda ser implementada en propuestas de enseñanza en un futuro cercan y con ella, se consoliden los aportes alcanzados al momento… Esa será una nueva historia.

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía

Apostol, T. (1984). *Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal*. Vol. 1. España: Reverté.

Bachelard, G. (1983). *La formación del espíritu científico* (J. Babini, Trad.). Buenos Aires: Siglo XXI. (Original en francés, 1938)

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. y Nicholson, D. (1992). Development of the process Concept of function. *Educational Studies in Mathematics 23*(3), 247 – 285.

Bourbaki, N. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas*. España: Alianza Universidad.

Boyer, C. (1989). *A history of mathematics*. New York: Wiley.

Brosseau, G. (1983). *Les obstacles épistemologiques et les problemes en Mathématiques*. Thése de Doctorat d'Etat. Université de Bordeaux.

Brosseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7*(2), 33 - 115.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales (Un estudio socioepistemológico)*. Tesis Doctoral no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspects as generators of knowledge in a social practice framework. *Educational Studies in Mathematics 58*, 299-333.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2004). La sensibilité a la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathematiques 24*(2.3), 137 – 168.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. México: Thomson.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2003) Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 6*(1), 27 – 40.

Cantoral, R. (2002). La sensibilidad a la contradicción: Un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 15, Tomo 1, pp. 35 - 42). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2001). Matemática Educativa. *Un estudio de la formación social de analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cavey, L., Berenson, S. (2005). Learning to teach high school mathematics: Patterns of growth in understanding right triangle trigonometry during lesson plan study. *Journal of Mathematical Behavior 24*(2), 171 – 190.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1998). *Estudiar Matemáticas, el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Biblioteca para la actualización del Maestro SEP/ICE Universitat de Barcelona.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado* (C. Gilman, Trad.). Argentina: Aique. (Trabajo original publicado en 1991).

Clements, D. y Burns, B. (2000). Students' development of strategies for turn and angle measure. *Educational Studies in Mathematics 41*, 31 - 45.

Copérnico, N. (1982) *Sobre las revoluciones de los orbes celestes* (C. Minués y M. Testal, Trad.). Madrid, España: Editora Nacional. (Obra original publicada en 1543 bajo el título *De revolutionibus orbium coelestium*)

Dalmedico, A. D (1992). *Mathématisations:Augustin-Louis Cauchy et L´École Française*. Publié avec le concours du CNRS de l´École Polytechnique. Editions du Choix. Librairie Scientifique de Albert Blanchard. Paris.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica.* Bologna, Italia : Pitagora.

De Kee, S., Mura, R. y Dionne J. (1996). La comprensión des notions de sinus et de cosinus chez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics 16*(2), 19 - 22.

Derry, T. y Williams, T. (1977). *Historia de la Tecnología* (Vol. 2). España: Siglo XXI.

Douady, R., (1986). Jeux de Cadres et Didactique outil-objeto. *Recherches en Didactique de Mathematique 7*(2), 5 - 31.

Douady, R., (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En Pedro Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México: Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica.

Douady, R., (1996). Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de Collége-Seconde. (P. Ferreiras-Soto, Trad.). En *Enseñanza de las matemáticas: relaciones entre saberes, programas y prácticas* (pp. 241-256). Francia: Topiques éditions.

Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1990). *On the reluctance to visualize in mathematics. Visualization in teaching and learning mathematics*. En W. Zimmerman y S. Cunningham (Eds.) MAA Notes 19, 25 –38.

Dubinsky, E. y Harel, G. (Eds.). (1992). *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Notes 25, MAA.

Dunham, W. (2005). *Viaje a través de los genios. Biografías y teoremas de los grandes matemáticos*. España: Pirámide.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (M. Vega, Trad.). Cali, Colombia: Restrepo. (Trabajo original publicado en 1995).

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ferrari, M. (2004). La covariación de progresiones en la resignificación de funciones. En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 17, pp. 145 – 149). México: CLAME A. C.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Galileo, G. (1984). *Galileo-Kepler: el mensaje y el mensajero sideral* (C. Solís, Trad.). Madrid, España: Alianza. (Trabajo original publicado en 1610).

Gowing, R. (2002). *Roger Cotes, Natural Philosopher*. NY, USA: Cambridge University Press.

Hardy, G. (1908). *A Course of Pure Mathematics*. UK: Cambridge University Press.

Heath, T. (1981). *A history of Greek Mathematics*. NY, USA: Dover.

Herscovics, N. y Bergeron, J. (1982). Des modèles de la compréhension. *Revue des sciences de l'éducation 8*(3), 576 - 596.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representation linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior 17*(1), 123 - 134.

Hornsby, E. (1990). A method of graphing $f(x) = A\,sen(Bx + C) + D$. *Mathematics Teacher 83*(1).

Katz, V. (1987). The Calculus of the Trigonometric Functions. *Historia Mathematica 14*, 311-324.

Kline, M. (1959). *Mathematics and the physical world*. NY, USA: Dover.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., y Stein, M. K. (1990). Functions, graph and graphing: Task, learning, and Teaching. *Review of Educational Research 60*(1), 1 – 64.

Levy-Leblond, J. (1999). Física y Matemáticas. En Guenard y Lelièvre (Eds.), *Pensar la Matemática*. España: Tusquets Editores.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Loi, M. (1999) Prologo en Guenard y Lelièvre (Eds.). *Pensar la Matemática*. España: Tusquets Editores.

Maldonado, E. (2005). U*n análisis didáctico de la función trigonométrica*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Maor, E. (1998). *Trigonometric delights*. USA: Princeton University Press. [Versión electrónica disponible el 13 de Octubre de 2005 en http://pup.princeton.edu/books/maor/].

Martínez-Sierra, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Martínez-Sierra, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA del IPN, México.

Mitchelmore, M. y White, P. (2000). Development of angle concept by progressive abstraction and generalization. *Educational Studies in Mathematics 41*, 209 - 238.

Monna, A. F. (1972). The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Bore and Lebesgue. *Archive for History of Exact Sciences 9*, 59 - 84.

Neugebauer, O. (1969). *The exact sciencie in antiquity.* NY, USA: Dover.

Newton, I. (1984). *Tratado de la Cuadratura de las curvas* (A. Altieri, Trad.). México: Textos de la Universidad Autónoma de Puebla [Edición Facsimilar]. (Obra original publicado en 1723 bajo el título *Tractatus de Quadratura Curvarum*).

Newton, I. (1987). Principios matemáticos de la filosofía natural (E. Rada, Trad.). Madrid, España: Alianza. (Trabajo original publicado en 1687 bajo el título *Philosophicae naturalis principia mathematica*).

Pannekoek, A. (1961). *A history of astronomy*. NY, USA: Dover.

Pastor, R. y Babini, J. (1985). *Historia de las Matemáticas*. España: Gedisa.

Panza, M. (2001). Introducción. En *Tratado de Métodos de Series y Fluxiones* (I. Vargas, Trad.). México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM. (Trabajo original publicado en 1671).

Patricio, H., García, C. y Arrieta, J. (2005). Las prácticas de hacer semejanza en los triángulos y en la emergencia de las razones trigonométricas. En J. Lezama, M. Sánchez y G. Molina (Eds.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 18, pp. 619-624). México: CLAME A. C.

Pedersen, O. (1974). Logistics and the theory of functions. An essay in the history of Greek mathematics. *Archives Internationales D'Histoire des Sciencies 24*(94), 29 – 50.

Ros, R. (1996). Matemática Aplicada y Relaciones de Proporcionalidad. *Revista EMA 1*(2), 12 – 139.

Ruiz, C. y de Regules, S. (2002). *El piropo matemático. De los números a las estrellas*. México: Lectorum.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Publicaciones de la Universidad de Jaén, España.

Sainz, L. (2003). *El Capítulo IX del Libro I del ALMAGESTO de Claudio Ptomoleo: "Sobre la medida de las líneas rectas que se trazan en el círculo" (Construcción de la primera tabla trigonométrica)*. [Edición Facsimil]. España: Maxtor.

Sánchez, M. y Molina, J. (2003a). *Un Laboratorio de Ciencias con el Sistema de Análisis de Datos* EA-100. México: Casio.

Sánchez, M. y Molina, J. (2003b). *Analizando la relación entre el periodo y el tiempo en el movimiento de un péndulo*. Revista C+1 *4*, 1 - 4.

Smith, D. (1958). *History of mathematics* (Vol. 2). NY, USA: Dover.

Sierspinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds.) *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Mathematical Association of America Notes Vol. 25, pp. 25 - 58). USA.

Spivak, M. (1992). *CALCULUS. Cálculo Infinitesimal*. España: Reverté.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12*, 151 – 169.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. En A. L. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 289-325). Netherlands: Kluwer.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of mathematics education, science and technology 14*(3), 293 – 305.

Vinner, S. (1992). The function Concept as a Prototype for problems in Mathematics Learning. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds.) *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Mathematical Association of America Notes Vol. 25, pp. 195 - 213). USA.

Wynne, H., (2002) Evaluar la alfabetización científica en el programa de la OECD para la evaluación internacional de estudiantes (PISA). *Enseñanza de las Ciencias 20*(2), 209 - 216. [Versión electrónica disponible el 27 de septiembre de 2005 en

http://www.bib.uab.es/pub/ensenanzadelasciencias/02124521v20n2p209.pdf]

Youschkevitch, A. (1976). El concepto de función hasta la primera mitad del siglo XIX. *Arch. for Hist. of Exact Sciences 16*, 37 – 85.

PÁGINAS DE INTERNET CONSULTADAS

Secretaría de Educación Pública. Plan y Programas de Estudio de Educación Secundaria, Matemáticas http://www.sep.gob.mx/wb2/sep/sep_514_matematicas

Proyecto Descartes

http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_CNST_1/Funciones_trigonometricas/Funcion_seno.htm

Eratosthenes and His Experiment. 2005, Año Mundial de la Física: Proyecto Eratosthenes.

http://www.physics2005.org/events/eratosthenes/experiment.html

http://www.physics2005.org/events/eratosthenes/TeachersGuide.pdf

Departamento de Oceanografía Física del CICESE http://oceanografia.cicese.mx/betadof/index.html

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada http://www.cicese.mx/

Anexo A

Programa de Estudios: Algebra II. Escuelas Preparatorias Oficiales del Estado de México

Escuelas Preparatorias Oficiales del Estado de México

Programa de Estudio: **Álgebra II**

No. De Créditos: 8 Horas Teóricas: 35 Horas Prácticas: 45

I. Relaciones y Funciones

1. Conjuntos
2. Relaciones
3. Funciones
4. Clasificación de funciones

II. Función Lineal

1. Función lineal
2. Ecuación general de la recta

III. Función Cuadrática

1. Función cuadrática
2. Métodos de solución de una ecuación cuadrática en una variable
3. Uso del discriminante
4. Construcción de ecuaciones dadas sus raíces
5. Problemas que involucren ecuaciones cuadráticas
6. Ecuaciones reductibles a cuadráticas
7. Sistemas de ecuaciones compuestas por una lineal y una cuadrática

IV. Desigualdades

1. Desigualdades lineales
2. Desigualdades cuadráticas en una variable

V. Álgebra de Funciones Algebraicas

1. Operaciones con funciones
2. Composición de funciones
3. Funciones inversas

VI. Funciones Trascendentes

1. Funciones exponenciales
2. Función Logarítmica
3. Funciones Trigonométricas

Bibliografía para el Profesor

- SWOKOWKI, Ear W. Y Jeffery A. Cole (1998) Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Ed. International Thomson Editores.

- REES, Paul K, Fred W. Sparks y Charles Sparks rees (1983). Algebra contemporánea. Edit. Mc Graw Hill.

- LAREDO, Santín, J. y Jorge Rojas González (1985) Elementos de Cálculo Diferencia.lEdit. U.A.E.M.

- BARNETT, Raymond A. (1994). Algebra y Trigonometría. Edit Mc Graw Hill.

- GETCHMAN, Murray (1999) Algebra y trigonometría con geometría analítica. Edit. Limusa.

- SULLIVAN, Michael (1997). Precálculo. Edit. Prentice Hall.

- SOBEL,Max y Norbert Lerner (1998) Precálculo. Edit. Prentice Hall.

- GOODMAN, Arthur y Lewis Hirsch (1996). Algebra y trigonometría con geometría analítica. Edit. Prentice Hall.

- KLEIMAN, Ariel y Elena k de Kleiman (1984). Conjuntos, aplicaciones matemáticas a la administración. Edit. Limusa.

- JHONSON L., Murphy y Arnold R. Steffensen (1994). Algebra y trigonometría con aplicaciones.

Bibliografía para el Alumno

- FLORES Meyer, Marco Antonio y Eugenio L. Fautsch Tapia. Temas selectos de matemáticas. Edit. Progreso.

- BERISTAIN Marquez, Eloisa y Yolanda Campos (1988). Edit Mac Graw Hill.

- RANGEL, Luz María (1990). Funciones y relaciones. Edit. Trillas.

- ANFOSSI, A. Y M. A. Flores Meyer (1998). Algebra. Edit Progreso.

- SPIEGEL, Murray R. 81991). Algebra superior. Edit Mc Graw Hill.

Anexo B

Programa de Estudios: Trigonometría. Escuelas Preparatorias Oficiales del Estado de México

Escuelas Preparatorias Oficiales del Estado de México

Programa de Estudio: **Trigonometría**

No. De Créditos: 9   Horas Teóricas: 33   Horas Prácticas: 47

I. Conceptos Fundamentales

- 1.1 Ángulos
- 1.2 Clasificación
- 1.3 Sistemas de Medida
- 1.4 El plano coordenado y los ángulos
- 1.5 Ángulos en posición normal
- 1.6 Ángulos reducidos y coterminales

II. Las Razones Trigonométricas y la Solución de Triángulos

- 2.1 Razones trigonométricas
- 2.2 Solución de triángulos

III. Las Funciones Circulares

- 3.1 La circunferencia y el círculo
- 3.2 Las razones trigonométricas en el círculo

IV. Álgebra Trigonométrica

- 4.1 Identidades trigonométricas
- 4.2 Ecuaciones trigonométricas

V. Aplicaciones de Trigonometría

- 5.1 Introducción a la geometría
- 5.2 Otras aplicaciones

Bibliografía para el Profesor

- A. BALDOR. J. , Geometría plana y del espacio y trigonometría, Ed, Publicaciones cultural S. A., México, 1994.
- SWOKOWSKI, W. Earl, Algebra y trigonometría con geometría analítica, Ed. Grupo editorial Iberoamericana, México, 1996.
- MUHLIA, Trigonometrìa, 1995.
- NICHOLS, Trigonometrìa, 1970.
- FUENLABRADA, Samuel, Trigonometrìa, Ed. Mc. Graw Hill. Mèxico 1988.
- NILES, N. O. Trigonomerìa plana, Ed. Limusa, Mèxico. 1981.

Bibliografía para el Alumno

- ABELARDO GUZMAN. E., Geometría y trigonometría, Ed. Publicaciones cultural S. A. México, 1990.
- FRANCISCO J. ORTIZ CAMPOS., Matemáticas - 3, Ed. Publicaciones Cultural S. A. México, 1997.
- Zill, TRIGONOMETRIA, 1992,
- FLORES, TROGONOMETRIA, 1983.
- CANTU, TRIGONOMETRIA, 1983.
- ANFOSSI, Agustìn, Trigonometrìa, Ed. Progreso. Mexico.

Anexo C

Programa de Estudios: Cálculo I. UNAM: Lic. en Matemáticas Aplicadas y Computación

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN

PROGRAMA DE ASIGNATURA

ACATLÁN

Créditos: 12 **Horas Semestre: 96** **Horas Semana: 6**

OBJETIVO: EL ALUMNO DETERMINÁ PARA LAS FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL, EL DOMINIO, EL RANGO Y EL CODOMINIO, CALCULARÁ LIMITES, OBTEDRÁ DERIVADAS Y APLICARÁ ÉSTAS EN PROBLEMAS DINÁMICOS.

Número de horas	Unidad 1. LOS NÚMEROS REALES
12	Objetivo: El alumno aplicará la axiomatización del sistema de los números reales en la solución de desigualdades con valor absoluto y diferenciará los conjuntos numerables de los no numerables.

Temas:

1.1 Axiomas de campo y axiomas de orden.

1.2 Conjuntos numerables infinitos y no numerables. Paradojas con relación al infinito.

1.3 Teoremas sobre números reales.

1.4 Intervalos.

1.5 Valor absoluto.

Número de horas	Unidad 2. FUNCIONES
14	Objetivo: El alumno determinará el dominio y rango de una función y los correspondientes a operaciones entre ellas, trazará las gráficas de funciones algebraicas, trascendentes y de algunos casos especiales y discriminará entre funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

Temas:

2.1 Enunciados de la definición de función a partir de un mapeo en variable real.

2.2 Notación f, f:A→B, $a \mapsto f(a)$. Valor numérico f(x).

2.3 Dominio de una función. Rango y codominio.

2.4 Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

2.5 Operaciones entre funciones.

2.6 Gráficas en el sistema cartesiano de funciones polinomiales, trascendentes, hiperbólicas, no elementales del tipo valor absoluto de x, mayor entero, etc.

Número de horas	Unidad 3. LÍMITES Y CONTINUIDAD
14	Objetivo: El alumno determinará el límite de funciones algebraicas y trascendentes, incluyendo aquellas en las que la función sea discontinua y distinguirá entre discontinuidades esenciales y removibles.

Temas:

3.1 Concepto de límite de una función.

3.2 Teoremas sobre límites de funciones.

3.3 Límites unilaterales.

3.4 Límites infinitos.

3.5 Límites en infinito.

3.6 Concepto de continuidad en un punto.

3.7 Teoremas sobre continuidad.

3.8 Continuidad en un intervalo.

3.9 Continuidad y discontinuidad de una función. Funciones discretas.

3.10 Tipos de discontinuidad.

3.11 Discontinuidad en funciones elementales.

Número de horas	Unidad 4. LA DERIVADA
28	Objetivo: El alumno determinará la derivada de funciones algebraicas sencillas usando la definición de derivada y la interpretará geométricamente, identificará los puntos en los cuales algunas funciones no son diferenciables y calculará la derivada de cualquier orden de funciones algebraicas y trascendentes.

Temas:

4.1 Concepto de derivada.

4.2 Interpretación geométrica. Ángulos entre curvas.

4.3 Teoremas sobre la derivación funciones elementales (algebraicas y

trascendentes).

4.4 Diferenciabilidad de funciones elementales y no elementales.

4.5 Diferenciación implícita.

4.6 Derivadas de orden superior.

4.7 Regla de L´Hospital. Formas indeterminadas.

Número de horas	Unidad 5. APLICACIONES DE LA DERIVADA
28	Objetivo: El alumno determinará los extremos absolutos en un intervalo cerrado y con base en el teorema de Rolle y las pruebas de primera y segunda derivada, los extremos relativos de una función y describirá el comportamiento gráfico de una función.

Temas:

5.1 Máximos y mínimos de una función.

5.2 Extremos relativos y absolutos en intervalos cerrados.

5.3 Teorema de Rolle y del valor medio.

5.4 Concavidad de una curva y puntos inflexión.

5.5 Prueba de la primera derivada.

5.6 Prueba de la segunda derivada.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Leithold, L., *El cálculo con geometría*, Harla, México,1992

Spivak, M., *Cálculo infinitesimal*, Reverté, México, 1993

Stein, S. *Cálculo y geometría analítica*, McGraw Hill, México, 1995

Stewart, J., *Cálculo*, Iberoamérica, México, 1994

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Boyce, D., *Cálculo*, CECSA, México, 1994

Larson y Hostetler, *Cálculo y geometría analítica*, McGraw Hill, México, 1995

Swokowski, E., *Cálculo con geometría analítica*, Iberoamérica, México, 1989

Zill, D., *Cálculo con geometría analítica*, Iberoamérica, México, 1996

SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

- Introducir y exponer los temas y contenidos de las diferentes unidades, con ejemplos claros y sencillos.

- Propiciar la participación de los alumnos a través del empleo de diferentes técnicas de trabajo en grupo.

- Utilizar los paquetes Mathematica, Math-Cad entre otros, como herramienta para analizar los conocimientos adquiridos en la materia.

- Fomentar en los alumnos la investigación relacionada con la materia, así como tratar temas relevantes que se encuentren en revistas especializadas o en diversas fuentes bibliográficas.

SUGERENCIAS DE EVALUACIÓN

- Exámenes parciales.
- Examen final.
- Participación en clase.

PERFIL PROFESIOGRÁFICO QUE SE SUGIERE

El profesor que impartirá el curso deberá tener el título de licenciado en Matemáticas, Matemáticas Aplicadas y Computación, Actuario, Físico, Ingeniero o carreras afines.

Anexo D

Tablas del Almagesto

Arcū		Chordarum			trigeſimarum		
par.	M	par.	M	2ª	M	2ª	3ª
0	30	0	31	25	1	2	50
1	0	1	2	50	1	2	50
1	30	1	34	15	1	2	50
2	0	2	5	40	1	2	50
2	30	2	37	4	1	2	48
3	0	3	8	28	1	2	48
3	30	3	39	52	1	2	48
4	0	4	11	16	1	2	47
4	30	4	42	40	1	2	47
5	0	5	14	4	1	2	46
5	30	5	45	27	1	2	45
6	0	6	16	49	1	2	44
6	30	6	48	11	1	2	43
7	0	7	19	33	1	2	42
7	30	7	50	54	1	2	41
8	0	8	22	15	1	2	40
8	30	8	53	35	1	2	39
9	0	9	24	54	1	2	38
9	30	9	56	13	1	2	37
10	0	10	27	32	1	2	35
10	30	10	58	49	1	2	33
11	0	11	30	5	1	2	32
11	30	12	1	21	1	2	30
12	0	12	32	36	1	2	28
12	30	13	3	50	1	2	27
13	0	13	35	4	1	2	25
13	30	14	6	16	1	2	23
14	0	14	37	27	1	2	21
14	30	15	8	38	1	2	19
15	0	15	39	47	1	2	17
15	30	16	10	56	1	2	15
16	0	16	42	3	1	2	13
16	30	17	13	9	1	2	10
17	0	17	44	14	1	2	7
17	30	18	15	17	1	2	5
18	0	18	46	19	1	2	2
18	30	19	17	21	1	2	0
19	0	19	48	21	1	2	57
19	30	20	19	19	1	1	54
20	0	20	50	16	1	1	51
20	30	21	21	12	1	1	48
21	0	21	52	6	1	1	45
21	30	22	22	58	1	1	42
22	0	22	53	49	1	1	39
22	30	23	24	39	1	1	36

Arcū		Chordarum			trigeſimarū		
par.	M	par.	M	2ª	M	2ª	3ª
23	0	23	55	27	1	1	33
23	30	24	26	13	1	1	30
24	0	24	56	58	1	1	26
24	30	25	27	41	1	1	22
25	0	25	58	22	1	1	19
25	30	26	29	1	1	1	15
26	0	26	59	38	1	1	11
26	30	27	30	14	1	1	8
27	0	28	0	48	1	1	4
27	30	28	31	20	1	1	0
28	0	29	1	50	1	0	56
28	30	29	32	18	1	0	52
29	0	30	2	44	1	0	48
29	30	30	33	8	1	0	44
30	0	31	3	30	1	0	40
30	30	31	33	50	1	0	35
31	0	32	4	8	1	0	31
31	30	32	34	22	1	0	27
32	0	33	4	35	1	0	22
32	30	33	34	46	1	0	17
33	0	34	4	55	1	0	12
33	30	34	35	1	1	0	8
34	0	35	5	5	1	0	3
34	30	35	35	6	0	59	57
35	0	36	5	5	0	59	52
35	30	36	35	1	0	59	48
36	0	37	4	55	0	59	43
36	30	37	34	47	0	59	38
37	0	38	4	36	0	59	32
37	30	38	34	22	0	59	27
38	0	39	4	5	0	59	22
38	30	39	33	46	0	59	16
39	0	40	3	25	0	59	11
39	30	40	33	0	0	59	5
40	0	41	2	33	0	59	0
40	30	41	32	3	0	58	54
41	0	42	1	30	0	58	48
41	30	42	30	54	0	58	42
42	0	43	0	15	0	58	36
42	30	43	29	33	0	58	31
43	0	43	48	49	0	58	25
43	30	44	28	1	0	58	18
44	0	44	57	10	0	58	12
44	30	45	26	16	0	58	6
45	0	45	55	19	0	58	0

Arcũ par.	M	Chordarum par.	M	2ª	trigesimarũ M	2ª	3ª
45	30	46	24	19	0	57	54
46	0	46	53	16	0	57	47
46	30	47	22	9	0	57	41
47	0	47	51	0	0	57	34
47	30	48	19	47	0	57	27
48	0	48	48	30	0	57	21
48	30	49	17	11	0	57	14
49	0	49	45	48	0	57	7
49	30	50	14	21	0	57	0
50	0	50	42	51	0	56	53
50	30	51	11	18	0	56	46
51	0	51	39	42	0	56	39
51	30	52	8	0	0	56	32
52	0	52	36	16	0	56	25
52	30	53	4	29	0	56	18
53	0	51	32	38	0	56	10
53	30	54	0	43	0	56	3
54	0	54	28	44	0	55	55
54	30	54	56	42	0	55	48
55	0	55	24	36	0	55	40
55	30	55	52	26	0	55	33
56	0	56	20	12	0	55	25
56	30	56	47	54	0	55	17
57	0	57	15	33	0	55	9
57	30	57	43	7	0	55	1
58	0	58	10	38	0	54	53
58	30	58	38	5	0	54	45
59	0	59	5	27	0	54	37
59	30	59	32	49	0	54	29
60	0	60	0	0	0	54	21
60	30	60	27	11	0	54	12
61	0	54	60	17	0	54	4
61	30	61	21	18	0	53	56
62	0	61	48	17	0	53	47
62	30	62	15	10	0	53	39
63	0	62	42	0	0	53	30
63	30	63	8	45	0	53	22
64	0	63	35	25	0	53	13
64	30	64	2	2	0	53	4
65	0	64	28	34	0	52	55
65	30	64	55	1	0	52	46
66	0	65	21	24	0	52	37
66	30	65	47	43	0	52	28
67	0	66	13	57	0	52	19
67	30	66	40	7	0	52	10

Arcũ par.	M	Chordarum par.	M	2ª	trigesimarũ M	2ª	3ª
68	0	67	6	12	0	52	1
68	30	67	32	12	0	51	52
69	0	67	58	8	0	51	43
69	30	68	23	59	0	51	33
70	0	68	49	45	0	51	23
70	30	69	15	27	0	51	14
71	0	69	41	4	0	51	4
71	30	70	6	36	0	50	55
72	0	70	32	3	0	50	45
72	30	70	57	26	0	50	35
73	0	71	22	44	0	50	26
73	30	71	4	56	0	50	16
74	0	72	13	4	0	50	6
74	30	72	38	7	0	49	56
75	0	73	3	5	0	49	46
75	30	73	27	58	0	49	35
76	0	73	52	46	0	49	26
76	30	74	17	29	0	49	16
77	0	74	46	7	0	49	6
77	30	75	6	39	0	48	55
78	0	75	31	7	0	48	45
78	30	75	55	29	0	48	34
79	0	76	19	46	0	48	24
79	30	76	43	58	0	48	13
80	0	77	8	5	0	48	3
80	30	77	32	6	0	47	52
81	0	77	56	2	0	47	41
81	30	78	19	52	0	47	31
82	0	78	43	38	0	47	20
82	30	79	7	18	0	47	9
83	0	79	30	52	0	46	58
83	30	79	54	21	0	46	47
84	0	80	17	45	0	46	36
84	30	80	41	3	0	46	25
85	0	81	4	15	0	46	14
85	30	81	27	22	0	46	3
86	0	81	50	24	0	45	52
86	30	82	13	19	0	45	40
87	0	82	36	9	0	45	29
87	30	82	58	54	0	45	18
88	0	83	21	33	0	45	6
88	30	83	44	4	0	44	55
89	0	84	6	32	0	44	43
89	30	84	28	54	0	44	31
90	0	84	51	10	0	44	20

Arcũ		Chordarum			trigesimarum				Arcũ		Chordarum			trigesimarũ		
par.	M	par.	M	2a	M	2a	3a		par.	M	par.	M	2a	M	2a	3a
90	30	85	13	20	0	44	8		113	0	100	3	59	0	34	34
91	0	85	35	24	0	43	57		113	30	100	21	16	0	34	20
91	30	85	57	23	0	43	45		114	0	100	38	26	0	34	4
92	0	86	19	15	0	43	33		114	30	100	55	28	0	33	54
92	30	86	41	2	0	43	21		115	0	101	12	25	0	33	40
93	0	87	2	42	0	43	9		115	30	101	29	15	0	33	24
93	30	87	24	17	0	42	57		116	0	101	45	57	0	33	12
94	0	87	45	45	0	42	45		116	30	102	2	33	0	32	56
94	30	88	7	7	0	42	33		117	0	102	19	22	0	32	42
95	0	88	28	24	0	42	21		117	30	102	35	1	0	32	29
95	30	88	49	34	0	42	9		118	0	102	51	37	0	32	15
96	0	89	10	39	0	41	57		118	30	103	7	44	0	32	0
96	30	89	31	37	0	41	45		119	0	103	23	44	0	31	46
97	0	89	52	29	0	41	33		119	30	103	39	27	0	31	32
97	30	90	13	15	0	41	21		120	0	103	55	23	0	31	18
98	0	90	33	55	0	41	8		120	30	104	11	2	0	31	4
98	30	90	54	29	0	40	55		121	0	104	26	34	0	30	49
99	0	91	14	56	0	40	42		121	30	104	41	59	0	30	35
99	30	91	35	17	0	40	30		122	0	104	57	16	0	30	21
100	0	91	55	32	0	40	17		122	30	105	12	23	0	30	7
100	30	92	15	40	0	40	4		123	0	105	27	30	0	29	52
101	0	92	35	42	0	39	52		123	30	105	42	26	0	29	37
101	30	92	55	38	0	39	39		124	0	105	57	14	0	29	23
102	0	93	15	27	0	39	26		124	30	106	11	55	0	29	8
102	30	93	35	11	0	39	13		125	0	106	26	29	0	28	54
103	0	93	54	47	0	39	0		125	30	106	40	56	0	28	39
103	30	94	14	17	0	38	47		126	0	106	55	15	0	28	24
104	0	94	33	41	0	38	34		126	30	107	9	27	0	28	10
104	30	94	52	58	0	38	21		127	0	107	23	32	0	27	56
105	0	95	12	9	0	38	8		127	30	107	37	30	0	27	40
105	30	95	31	13	0	37	55		128	0	107	51	20	0	27	25
106	0	95	50	11	0	37	42		128	30	108	5	2	0	27	10
106	30	96	9	2	0	37	29		129	0	108	18	37	0	26	56
107	0	96	27	47	0	37	16		129	30	108	32	5	0	26	41
107	30	96	46	24	0	37	3		130	0	108	45	25	0	26	26
108	0	97	4	56	0	36	50		130	30	108	58	38	0	26	11
108	30	97	23	20	0	36	36		131	0	109	11	44	0	25	56
109	0	97	41	38	0	36	23		131	30	109	24	42	0	25	41
109	30	87	59	49	0	36	9		132	0	109	37	32	0	25	26
110	0	98	17	54	0	35	56		132	30	109	50	15	0	25	11
110	30	98	35	52	0	35	42		133	0	110	2	50	0	24	56
111	0	98	53	43	0	35	29		133	30	110	15	18	0	24	41
111	30	99	11	27	0	35	15		134	0	110	27	39	0	24	26
112	0	99	29	5	0	35	1		134	30	110	39	42	0	24	10
112	30	99	46	35	0	34	48		135	0	110	51	57	0	23	54

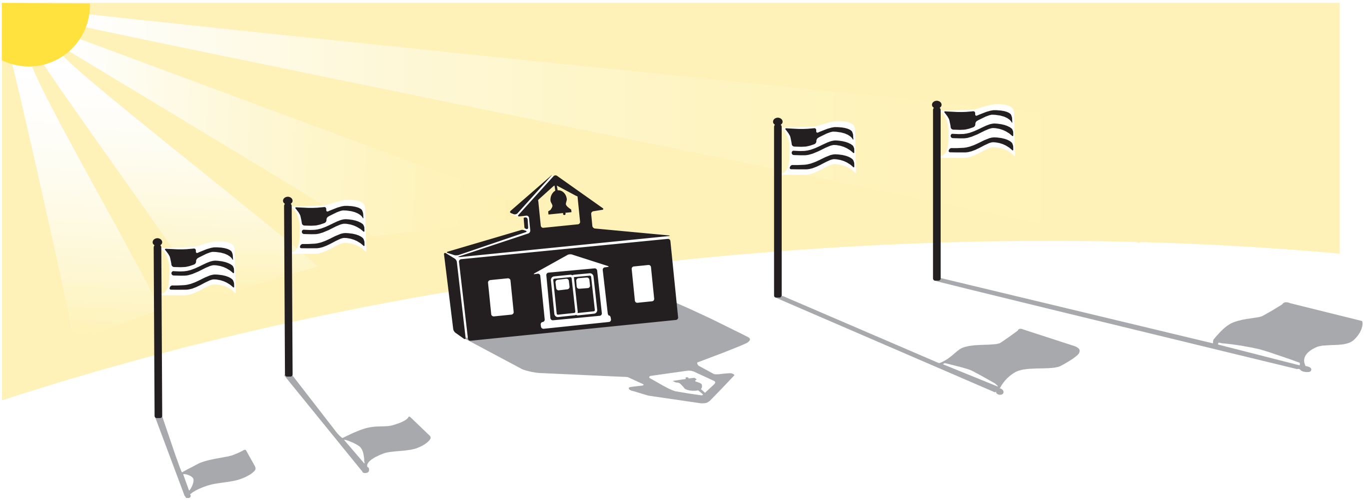
Arcũ		*Chordarum*			*trigesimarum*		
par.	M	*par.*	M	2a	M	2a	3a
135	30	111	3	54	0	23	40
136	0	111	15	44	0	23	24
136	30	111	27	26	0	23	9
137	0	111	39	1	0	22	54
137	30	111	50	28	0	22	39
138	0	112	1	47	0	22	24
138	30	112	12	56	0	22	8
139	0	112	24	3	0	21	53
139	30	112	35	0	0	21	37
140	0	112	45	48	0	21	22
140	30	112	56	29	0	21	6
141	0	113	7	2	0	20	50
141	30	113	17	25	0	20	36
142	0	113	27	44	0	20	20
142	30	113	37	54	0	20	4
143	0	113	47	56	0	19	49
143	30	113	57	50	0	19	34
144	0	114	7	37	0	19	16
144	30	114	17	15	0	19	2
145	0	114	26	46	0	18	46
145	30	114	36	9	0	18	30
146	0	114	45	24	0	18	14
146	30	114	54	31	0	17	58
147	0	115	3	30	0	17	43
147	30	115	12	22	0	17	26
148	0	115	21	6	0	17	11
148	30	115	29	41	0	16	56
149	0	115	38	9	0	16	40
149	30	115	46	29	0	16	24
150	0	115	54	40	0	16	8
150	30	116	2	44	0	15	52
151	0	116	10	40	0	15	36
151	30	116	18	28	0	15	20
152	0	116	26	8	0	15	4
152	30	116	33	40	0	14	48
153	0	116	41	4	0	14	32
153	30	116	48	20	0	14	16
154	0	516	55	28	0	14	0
154	30	117	2	28	0	13	44
155	0	117	9	20	0	13	28
155	30	117	16	4	0	13	12
156	0	117	22	40	0	12	56
156	30	117	29	8	0	12	40
157	0	117	35	28	0	12	24
157	30	117	41	40	0	12	7

Arcũ		*Chordarum*			*trigesimarum*		
par.	M	*par.*	M	2a	M	2a	3a
158	0	117	47	43	0	11	51
158	30	117	53	39	0	11	35
159	0	117	59	27	0	11	20
159	30	118	5	7	0	11	4
160	0	118	10	37	0	10	47
160	30	118	16	1	0	10	31
161	0	118	21	16	0	10	14
161	30	118	26	23	0	9	58
162	0	118	31	22	0	9	42
162	30	118	36	13	0	9	24
163	0	118	40	55	0	9	9
163	30	118	45	30	0	8	53
164	0	118	49	56	0	8	36
164	30	118	54	15	0	8	20
165	0	118	58	25	0	8	4
165	30	119	2	26	0	7	48
166	0	119	6	20	0	7	31
166	30	119	10	6	0	7	15
167	0	119	13	44	0	6	58
167	30	119	17	13	0	6	42
168	0	119	20	34	0	6	26
168	30	119	23	47	0	6	10
169	0	119	26	52	0	5	54
169	30	119	29	49	0	5	36
170	0	119	32	37	0	5	20
170	30	119	35	17	0	5	4
171	0	119	37	49	0	4	48
171	30	119	40	13	0	4	32
172	0	119	42	29	0	4	14
172	30	119	44	35	0	3	58
173	0	119	47	35	0	3	42
173	30	119	48	26	0	3	24
174	0	119	50	8	0	3	10
174	30	119	51	43	0	2	54
175	0	119	53	10	0	2	36
175	30	119	54	28	0	2	20
176	0	119	55	38	0	2	2
176	30	119	56	39	0	1	46
177	0	119	57	32	0	1	32
177	30	119	58	18	0	1	14
178	0	119	58	55	0	0	56
178	30	119	59	23	0	0	42
179	0	119	59	44	0	0	24
179	30	119	59	56	0	0	8
180	0	120	0	0	0	0	0

De

Anexo E

Proyecto Eratosthenes: Guía para el Profesor



TEACHER'S GUIDE: THE ERATOSTHENES PROJECT

Overview

This activity is part of the World Year of Physics 2005, the centennial celebration of Einstein's "miracle year." In 1905, Einstein created three groundbreaking theories that provided the framework for much of the exciting physics of the last hundred years.

This activity enables students to measure the radius of Earth. Groups of students at two distant schools will take data and then collaborate, in essentially the same way that Eratosthenes measured Earth's circumference millennia ago in Egypt. A World Year of Physics website will enable each school to find a partner.

Objectives	**2**
Logistics	**2**
National Standards Addressed	**2**
Materials	**2**
Student's Guide	**3**
Additional Activities	**6**
Notes on the Activities	**7**
References	**8**

TEACHER'S GUIDE: THE ERATOSTHENES PROJECT

Objectives

- Describe the geometry of how sunlight strikes Earth at different latitudes
- Describe how the circumference of Earth was first measured millennia ago
- Describe how to determine local noon
- Measure the angle of the sun at local noon
- Collaborate with another school some distance away to determine the radius of Earth.

Logistics

Your class will need the measurements made at some other school located a substantial distance away, either north or south. You will enter your school's latitude and longitude on the Eratosthenes Project website, <http://www.physics2005.org/events/eratosthenes/>, and you will then be paired with another school. After the collaborating schools have shared measurements, and students have computed the radius of Earth, they will enter their results on the site. All results will be displayed on the site, and a grand average will be made of all the measurements to obtain the final value of Earth's radius determined by this project.

National Standards Addressed

This activity addresses the following Benchmarks and National Science Education Standards (NSES):

Benchmarks, K-12:
The Mathematical World

Symbolic Relationships
When a relationship is represented in symbols, numbers can be substituted for all but one of the symbols and the possible values of the remaining symbol computed. . . .

Shapes
Distances and angles that are inconvenient to measure directly can be found from measurable distances and angles using scale drawings or formulas.

Models
The basic idea of mathematical modeling is to find a mathematical relationship that behaves in the same way as the objects or processes under investigation. A mathematical model may give insight about how something really works or may fit observations very well without any intuitive meaning.

Benchmarks, K-12: The Nature of Science

The Scientific Enterprise
The early Egyptian, Greek, Chinese, Hindu, and Arabic cultures are responsible for many scientific and mathematical ideas and technological inventions.

NSES, K-12: History and Nature of Science

Science as a Human Endeavor
Individuals and teams have contributed and will continue to contribute to the scientific enterprise.

Historical Perspectives
In history, diverse cultures have contributed scientific knowledge and technologic inventions.

NSES, K-12: Unifying Concepts and Processes

Developing Student Understanding
- Evidence, models, and explanation
- Constancy, change, and measurement

NSES, K-12: Science as Inquiry

Abilities necessary to do scientific inquiry
- Design and conduct scientific investigations
- Use technology and mathematics to improve investigations and communications
- Formulate and revise scientific explanations and models using logic and evidence

Materials

For each student
A copy of the *Student Activity Guide*
(pages 3 to 5 of this document)

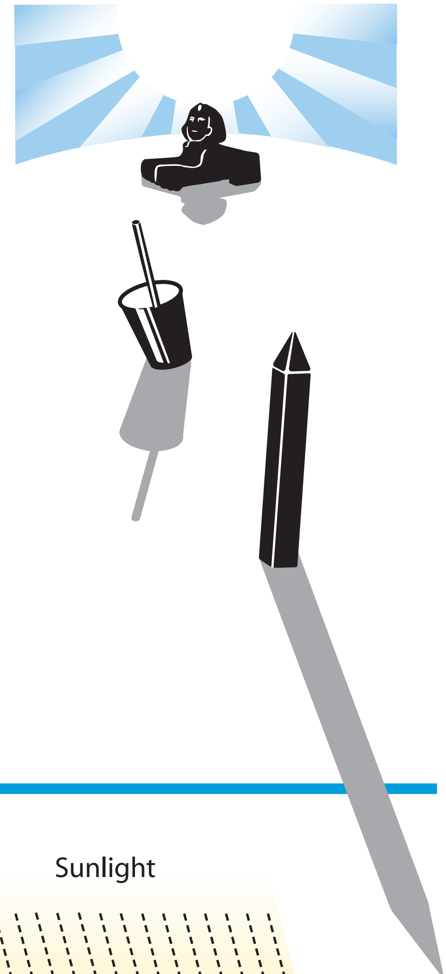
If students are doing the extension activities, see page 6.

For each group
- stick or dowel, about 60 centimeters (cm) long
- stiff cardboard (to provide a smooth, flat surface)
- meter stick
- pieces of blank paper
- pencil

To be shared by several groups
- carpenter's level
- tape

STUDENT'S GUIDE: THE ERATOSTHENES PROJECT

This activity is part of the World Year of Physics 2005, the centennial celebration of Einstein's "miracle year." In 1905, Einstein created three groundbreaking theories that provided the framework for much of the exciting physics of the last hundred years.



In this activity, you will work together with students at another school to measure the radius of Earth. You will use the same methods and principles that Eratosthenes used more than two thousand years ago.

Eratosthenes was a Greek living in Alexandria, Egypt, in the third century, BC. He knew that on a certain day at noon in Syene, a town a considerable distance to the south, the sun shone straight down a deep well. This observation meant that the sun was then directly overhead in Syene, as shown in Figure 1. Eratosthenes also knew that when the sun was directly overhead in Syene, it was *not* directly overhead in Alexandria, as shown in Figure 2. Notice that in both drawings, the sun's rays are shown as parallel.

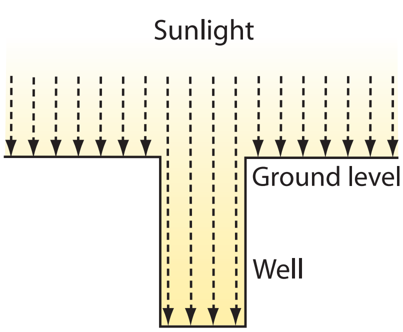


Figure 1:
Light rays shining straight down a well in Syene at noon, when the sun is directly overhead. No shadow is cast.

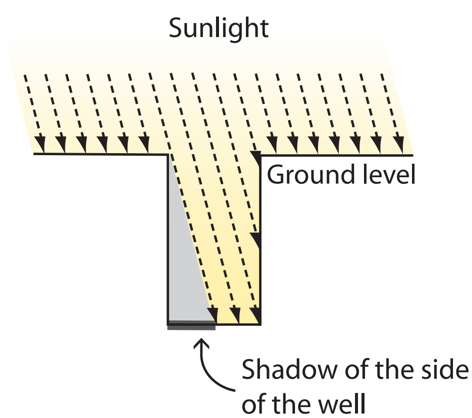


Figure 2:
Sunlight shining down a well in Alexandria at noon, on the same day as the observation shown in Figure 1. *The sun is not directly overhead. The gray bar at the bottom left shows the shadow cast by the side of the well. The angle of the sun's rays and the size of the shadow are exaggerated.*

In Figure 2, the side of the well casts a shadow on the bottom. Eratosthenes used a shadow like this to find the circumference of Earth. When the sun was directly overhead in Syene, he measured the shadow of an object in Alexandria at noon. From the length of the shadow, the height of the object, and the distance between Syene and Alexandria, he calculated the circumference of Earth. His value agreed quite well with the modern one.

How Eratosthenes Found the Circumference of Earth

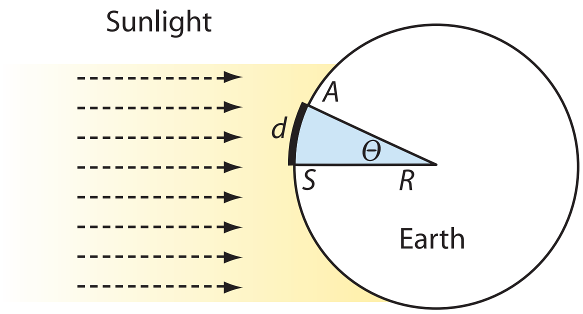
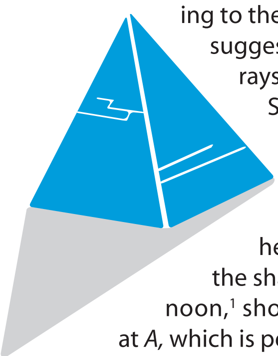


Figure 3:
The sun is directly overhead at noon at Syene (S). Alexandria is at point "A."

How did he do it, more than two thousand years ago? Take a look at Figure 3. Syene is represented by point *"S,"* and Alexandria by point *"A".* In Figure 3, the arc length between *S* and *A* is *d,* and the angle corresponding to the arc *SA* is θ. The radius of Earth is *R.* As suggested above, let's assume that the sun's rays are parallel. Since the ray that strikes Syene, at point *S,* is perpendicular to the surface of Earth, the sun is directly overhead there.



When the sun was directly overhead in Syene, Eratosthenes measured the shadow of a tower in Alexandria at noon,[1] shown in Figure 4. Since both the tower at *A,* which is perpendicular to Earth's surface, and the ray of sunlight at point *S* both point to the center of Earth, and the rays of sunlight are parallel, the angle between the sunlight and the tower is equal to θ. (Alternate interior angles are equal.)

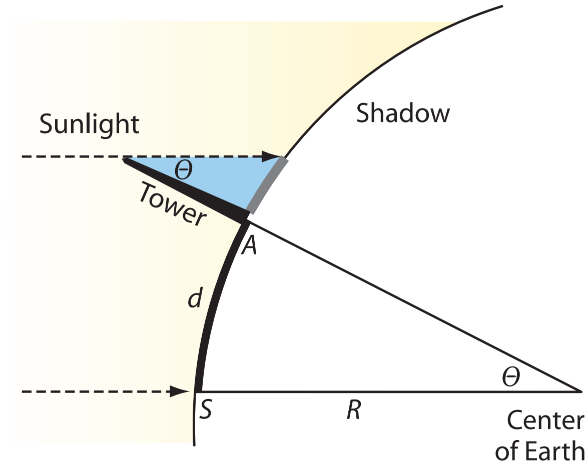


Figure 4:
The geometry of Eratosthenes' measurement. He measured the length of the tower and its shadow at noon at Alexandria. Then he determined the angle of sunlight with the vertical, which is the same as the angle subtended by Syene (S) and Alexandria (A) at the center of Earth.

The tower and its shadow form two sides of a right triangle, as shown in Figure 4. Although trigonometry hadn't yet been invented, Eratosthenes' procedure can be expressed in the language of trig as follows: The length of the shadow, the height of the tower (which he knew), and the angle θ, given here in degrees, are related by

$$\tan\theta = \frac{\text{length of shadow}}{\text{height of tower}} \qquad (1)$$

Inverting tan θ gives the value of θ. Using ratio and proportion, the arc length d is the same fraction of Earth's circumference C as θ is of 360 degrees.

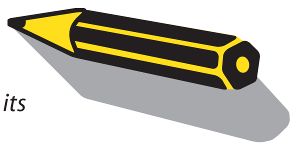
$$\frac{d}{C} = \frac{\theta}{360} \qquad (2)$$

Rearranging for the circumference *C,*

$$C = (360/\theta)d \qquad (3)$$

[1] *Some accounts say that Eratosthenes made measurements with a needle that cast a shadow onto the graduated inner surface of a hemispherical bowl. To relate as closely as possible to the method of this project, we will describe the experiment in terms of the shadow of a tower.*

How You Can Find the Radius of Earth



Rather than find Earth's circumference, we suggest you find its radius, so that you can more easily compare your measured value with the accepted value.

Eratosthenes was lucky, because he knew of a place where the sun was directly overhead at noon on a certain day. Can you do the experiment even without that information? Fortunately you can, as shown in Figures 5 and 6. You will make the shadow measurements at your school and share results with a class from a school at another location. You can then do a subtraction to find the angle you need. Be sure to plan ahead—ideally, both schools make the measurement on the same day.

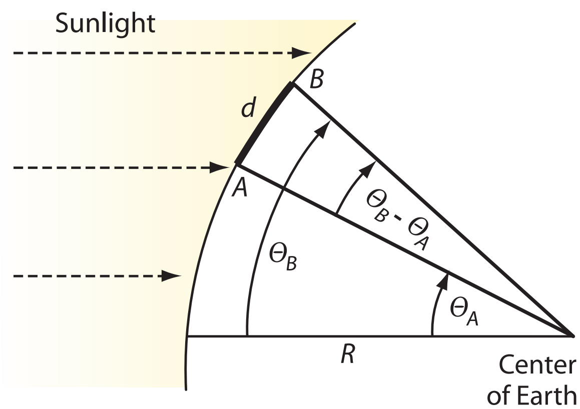


Figure 5:
The geometry for measuring the radius of Earth using the data of two collaborating schools separated by a north-south distance. Each will measure the angle of the sun, θ_A at one location and θ_B at the other, at local noon.

We need two points, *A* and *B,* separated by a north-south distance *d*, shown on Figure 5. The experiment will work best if *d* is as large as possible.

Take a look at Figure 6. Your school and the collaborating school are represented by the points A and B, and the angles θ_A and θ_B correspond to points *A* and *B*.

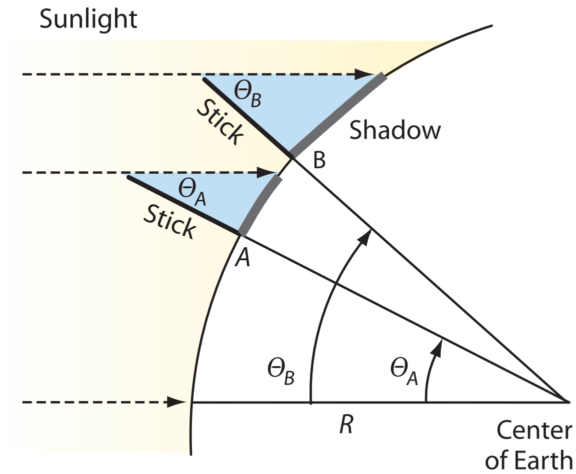


Figure 6:
The relationship among the direction of sunlight, the sticks, and the two angles θ_A and θ_B.

At point *A*,

$$\tan \theta_A = \frac{\text{length of shadow}}{\text{height of stick}} \qquad (4)$$

and likewise at point *B*.

Figures 5 and 6 show that the angle corresponding to the arc *AB* is just the difference $\theta_B - \theta_A$. We can find the radius of Earth in the same way that Eratosthenes found the circumference in equation (3).

$$\frac{d}{2\pi R} = \frac{\theta_B - \theta_A}{360} \qquad (5)$$

Rearranging and simplifying,

$$R = \frac{180d}{\pi(\theta_B - \theta_A)} \qquad (6)$$

Making the Measurement at Local Noon

On any day, local noon is the instant when the sun reaches its highest point in the sky. To determine it, plant the stick in the ground, making sure the stick is vertical using a plumb bob or a carpenter's level. In the late morning, measure the shadow's length at regular time intervals. The shadow will get shorter as noon approaches, and then get longer again once noon has passed. The shortest length is what you will substitute into equation (4) above to find the value of θ_B or θ_A for your location.

ADDITIONAL ACTIVITIES

Below are three additional activities:

- How Shadows Change During the Day
- Shadows on Earth
- Latitude

How Shadows Change During the Day

If your students have not thought much about shadows, they might benefit by starting with this preliminary activity. Give each group a 5-cm straw piece, a sheet of 8½" x 11" paper, and some tape. Ask them to tape the straw so it stands in the center of the paper, as shown in Figure 7, and also to indicate the direction of north on one of the long sides. If you provide them with a compass, they can orient the paper.

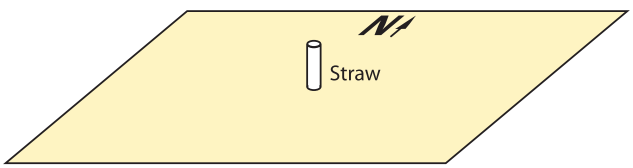


Figure 7:
Five-centimeter straw mounted vertically on a piece of paper. Students predict and then measure the shadow of this straw at different times.

Their challenge is to imagine that this paper is set on level ground in sunlight and to predict the location and length of the shadow of the stick on the hour during the day. Discuss these predictions to bring out their thinking. Then have them do the experiment and compare their predictions and results.

Shadows on Earth

Materials for each group: five 4-cm straw pieces, tape, and a piece of 8 ½" x 11" paper.

Explain to students that they will make a model of shadows at different points on Earth. Have them draw a straight line across a piece of 8 ½" x 11" paper and tape the five straw pieces, equally spaced, along this line, so the straws stand straight up. Ask how the paper and straws could be a model of sticks placed at different locations on Earth (curve the paper, with the straws on the convex side).

Explain that to avoid damaging their eyes, they should never look directly at the sun. In sunlight, ask students how the paper and straws can model the Eratosthenes experiment. (Facing the sun, hold the paper at the ends of the long sides and curve it so the straws point out. Turn the paper to make the shadow of one straw disappear. Make this straw point directly at the sun. The straw without a shadow models the well at Syene.) Have students describe what happens to the shadows of the other straws and relate the shadow of each one to its position. Ask students to relate these shadows to the shadows Eratosthenes used to measure Earth's circumference. See Figure 8.

Figure 8:
Model of shadows of sticks at noon, at different latitudes and the same longitude.

Extension Activity: Latitude

Once experimentation is complete and the results reported, you can have students relate the measurements they have made to the definition of latitude.

a. Ask them to define latitude (the length of arc, or angle from the center of Earth, measured north or south from the equator).

b. Referring them to Figure 3, ask them to assume that point *S* is on the equator. Ask on what day the sun would be directly overhead at noon at *S*. (In 2005, March 20, the vernal equinox, and September 22, the autumnal equinox; at the equinoxes; day and night have equal length, and the axis of Earth's spin is perpendicular to the line from Earth to the sun.)

c. If your students made their shadow measurement on the vernal or autumnal equinox, the resulting angle would be equal to the latitude, as shown in Figure 3 (remember point *S* is on the equator). If possible, have them try to do this by measuring the shadow of a stick on or near March 20 or September 22.

d. In the Eratosthenes experiment, the angle (θ_B - θ_A) is the same as the difference in latitude of the two schools, so students could determine this difference immediately by subtracting the two latitudes of the collaborating schools. Of course, we want students to make measurements and compare, rather than look up the answer in an atlas. If students point this out, you can remind them that they are reenacting an historical experiment.

Notes on Introduction

In the discussion of Figures 1 and 2, which show sunlight in wells at two different locations, we assume the following:

- The rays of sunlight are parallel (see next section for more detail)
- The sides of the well are vertical.

Notes on How Eratosthenes Found the Circumference of Earth

Here are Eratosthenes' assumptions:
Earth is a sphere. In fact, Earth bulges by about .3% at the equator, but we can safely neglect this difference.

The sun is very far away, so sunlight can be represented by parallel rays. The sun is indeed very far away, but it is not a point source, since its diameter is about 1/100 of the Earth-sun distance.

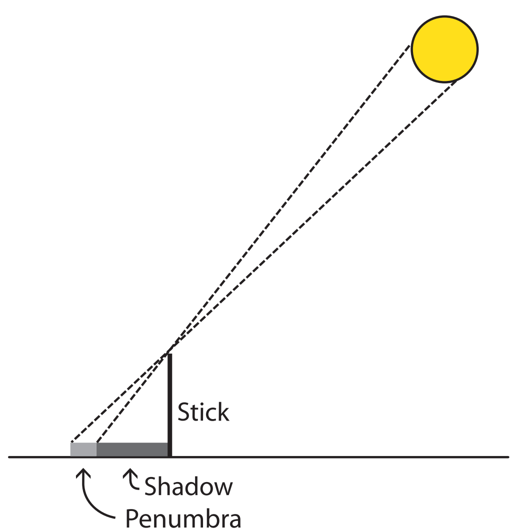


Figure 9:
Notice the penumbra—the partially illuminated region—at the end of the stick's shadow (drawing not to scale).

As shown in Figure 9, there is a penumbral region at the end of the shadow, a region only partially illuminated by the sun. If the stick is 1 meter (m) long, the penumbral region will be more than 1 centimeter (cm) wide, which limits the accuracy of the measurement of the shadow length. The penumbra size scales up with the length of the stick, so using a longer stick does not increase the accuracy of the measurement.

Alexandria is directly north of Syene: This is only approximately true. Find an atlas and compare the location of Alexandria and Aswan (built on the site of Syene).

You might ask students to comment on Eratostheses' assumptions, considering that he was working more than 2,000 years ago.

Notes on How You Can Find the Radius of Earth

Ask students to discuss the distance *d* between the two schools. Is it better for *d* to be large or small? (large) Why? (The larger *d*, the larger the value of the angle $\theta_B - \theta_A$. The larger this angle, the smaller the *percentage* error in its measurement.)

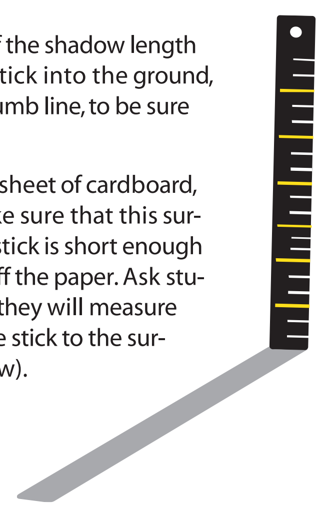
Once you have obtained the name and location of the school you'll collaborate with, show your class a map of the U.S. Find the location of the two schools and ask students how to find the distance between them (use the scale on the map). Ask how well the two schools line up north-to-south. Discuss how an east-west displacement might affect the outcome of the experiment. (Convert the difference in longitudes of the two schools into a time difference, using ratio and proportion and the fact that 360° of longitude corresponds to 24 hours. Then compare the difference with the uncertainty in identifying local noon.)

Note that near local noon, the shadow length does not change much with time. For this reason, missing local noon by a few minutes is not important. Suggest that students practice measuring the shadow length at noon in advance. If you need to look up the time of local noon, see the last reference.

Ask students how to select a suitable date for both schools to make measurements. Should they check the weather forecast first?

Try making the measurement of the shadow length yourself. If possible, drive the stick into the ground, and check with the level, or a plumb line, to be sure that the stick is vertical.

Tape copy paper on top of the sheet of cardboard, and check with the level to make sure that this surface is horizontal. Be sure your stick is short enough so the shadow doesn't extend off the paper. Ask students to describe what height they will measure (the distance from the top of the stick to the surface where they see the shadow).



Demonstration

Students may have difficulty understanding how the method presented here, with two schools along the same north-south line (the same meridian) working together, permits them to measure Earth's radius on any day of the year. If you have a globe, mount two straw pieces on the same meridian. Place the globe in the beam of an overhead projector. Ask a student to rotate the globe so the location of one straw is at local noon. Ask what time it is at the other straw (local noon also). How can they tell? (The shadows have minimum length.) Have a student change the orientation of the globe axis and repeat. Ask students to relate this demonstration to the geometry of Figures 4 and 6.

A different way to visualize the geometry is to imagine the plane containing the center of Earth and points *A* and *B.* As Earth turns on its axis, this plane sweeps through all of space. When this plane is oriented so the sun lies within it, then the shadow of each stick lies within the plane as well, so it is local noon at the location of each stick.

Assessment

There are several ways to assess students' performance in the Eratosthenes project.

- Students can choose one or more of the first three objectives and write or present the description that is specified in those objectives.
- Students can present a portfolio of student work, explanations, and drawings to show how they measured the radius of Earth.
- Students can prepare a written or oral presentation to a younger student on Eratosthenes' measurement of the circumference of Earth.

References

WYP Eratosthenes Project
http://www.physics2005.org/events/eratosthenes/

Center for Improved Engineering and Science Education
http://www.k12science.org/noonday/askanexpert.html

NASA
http://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/cosmic/earth_info.html

University of California, Berkeley
http://astron.berkeley.edu/~krumholz/sq/astro/class1.txt

U.S. Naval Observatory
Time of local noon ("sun transit")
http://aa.usno.navy.mil/data/docs/RS_OneDay.html

E0105