INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

EL PAPEL DE LA MODELACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE CONCEPTOS ABSTRACTOS DEL ÁLGEBRA LINEAL

Tesis que para obtener el grado de
Doctorado en Matemática Educativa

Presenta:
Hilda Margarita Salgado Sota

Directora de Tesis:
Dra. María Trigueros Gaisman

México, D. F., septiembre de 2015.

SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 17:00 horas del día 24 del mes de marzo del 2015 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA – U. Legaria para examinar la tesis titulada:

El papel de la modelación en la enseñanza de conceptos abstractos del álgebra lineal

Presentada por el alumno:

Salgado	Sota	Hilda Margarita
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre(s)

Con registro: B 1 0 2 2 9 6

aspirante de:

Doctorado en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron ***APROBAR LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director(a) de tesis

Dra. María Trigueros Gaisman

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dr. Mario Sánchez Aguilar

Dra. Avenilde Romo Vázquez

Dra. Asuman Oktaç

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

Dr. José Antonio Calderón Arenas

CICATA - I.P.N. U. LEGARIA
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Autorización de uso de obra

Instituto Politécnico Nacional
P r e s e n t e

Bajo protesta de decir verdad el que suscribe, ***Hilda Margarita Salgado Sota***, manifiesta ser autora y titular de los derechos morales y patrimoniales de la obra titulada ***El papel de la modelación en la enseñanza de conceptos abstractos del álgebra lineal***, en adelante "La Tesis" y de la cual se adjunta copia, por lo que por medio del presente y con fundamento en el artículo 27 fracción II, inciso b) de la Ley Federal del Derecho de Autor, otorgo a El Instituto Politécnico Nacional, en adelante El IPN, autorización no exclusiva para comunicar y exhibir públicamente total o parcialmente en medios digitales (archivo electrónico en formato PDF) "La Tesis" por un periodo de 10 años contado a partir de la fecha de la presente autorización, dicho periodo se renovará automáticamente en caso de no dar aviso a "El IPN" de su terminación.

En virtud de lo anterior, "El IPN" deberá reconocer en todo momento mi calidad de autora de "La Tesis".

Adicionalmente, y en mi calidad de autora y titular de los derechos morales y patrimoniales de "La Tesis", manifiesto que la misma es original y que la presente autorización no contraviene ninguna otorgada por el suscrito respecto de "La Tesis", por lo que deslindo de toda responsabilidad a El IPN en caso de que el contenido de "La Tesis" o la autorización concedida afecte o viole derechos autorales, industriales, secretos industriales, convenios o contratos de confidencialidad o en general cualquier derecho de propiedad intelectual de terceros y asumo las consecuencias legales y económicas de cualquier demanda o reclamación que puedan derivarse del caso.

México, D.F., 25 de septiembre de 2015.

Atentamente

Hilda Margarita Salgado Sota

A Julio, mi esposo, el gran amor de mi vida, por quererme tanto, por tu apoyo incondicional, por alentarme siempre, pero sobre todo por la historia de amor tan hermosa que seguimos escribiendo. Gracias por dejarme ser y por todos y cada uno de los momentos que hemos vivido juntos.

A mis hijos, Hilda, Andrea, Julio. Son mi fuerza absoluta. Gracias por su amor y sobre todo por entender y respetar mi pasión por los números. Sé que van a lograr todo lo que se propongan y que nunca se van a dar por vencidos en la vida.

A mis padres por haber inculcado en mí el valor de la excelencia y a mis hermanas por sus consejos, por su cariño y por su apoyo para lograr esta meta.

A la Dra. María Trigueros, a ti María, sabes de mi enorme agradecimiento por todo el esfuerzo y el trabajo que hemos compartido durante varios años. Tenemos la misma pasión por las matemáticas, por la enseñanza de las mismas, pero principalmente una sólida amistad personal. Por todo ello, muchas gracias.

Asimismo agradezco al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, IPN y a todos sus profesores por su interés en la formación profesional de sus alumnos; muy en especial a la Dra. Avenilde Romo por el apoyo que me brindó a lo largo de estos años.

Mil gracias a todos mis alumnos que contribuyeron con su esfuerzo en la realización de esta tesis; finalmente son ellos parte fundamental de la matemática educativa.

ÍNDICE

RESUMEN

En el aprendizaje del álgebra lineal se observan problemas debido a que los conceptos resultan a menudo complejos por su alto nivel de abstracción. Los temas de combinación lineal, conjunto generador, espacio generado, independencia y dependencia lineal, base y dimensión y valores, vectores y espacios propios son muy abstractos, pero importantes debido a sus múltiples aplicaciones dentro y fuera de las matemáticas.

Esta tesis presenta una propuesta didáctica para el aprendizaje de dichos conceptos mediante una experiencia en clase apoyada en dos marcos teóricos: Modelos y Modelación y Teoría APOE. El primero se utilizó para diseñar problemas de modelación y el segundo en el diseño de actividades conceptuales. Los problemas de modelación motivan a los alumnos a usar sus conocimientos previos que les puede ser útiles para la solución del problema que enfrentan, pero además necesitan construir nuevos conceptos para resolver el problema. El uso de la Teoría APOE permite analizar y estudiar las construcciones mentales que usan los alumnos durante el proceso de solución.

Se realiza un análisis de la puesta en práctica de la propuesta didáctica con alumnos de nivel universitario. Se presenta dicho análisis y los resultados obtenidos a partir del trabajo de los alumnos con la propuesta realizada.

Se utilizaron descomposiciones genéticas y un problema de modelación diseñados por otros investigadores para los conceptos relacionados con la combinación lineal. Sin embargo, para el tema de valores, vectores y espacios propios no se encontró en la literatura ninguna propuesta, por lo que se diseñaron tres problemas de modelación y una descomposición genética que mostró ser un modelo válido para predecir y describir las construcciones necesarias para el aprendizaje de dichos conceptos. Los resultados validan la descomposición genética propuesta y muestran evidencias del aprendizaje de los alumnos. En particular ponen de manifiesto la posibilidad de construir una concepción objeto de los conceptos en estudio y la construcción de la mayoría de los alumnos de una concepción proceso.

ABSTRACT

Learning linear algebra often causes problems to students particularly due to the complexity of the concepts involved and their high level of abstraction. Linear combination, spanning set, span, linear independence and dependence, basis and dimension, and eigenvalues, eigenvectors, and eigenspaces are very abstract, but important concepts because of their multiple applications inside and outside of mathematics.

This thesis considers a didactical approach to learn these concepts by means of a classroom experience based on two theoretical frameworks: Models and Modeling and APOS Theory. The first was used to design modeling problems and the second to design conceptual activities. The modeling problems motivate students both to use their previous knowledge and to build new concepts to solve the problem. The use of APOS Theory allows researchers to analyze and study the mental constructions that the students' use when modeling problems.

The didactical design was applied at university level. The analysis and results presented are based on the students' work on the didactical design.

Genetic decompositions and a modeling problem designed by other researchers were used for the concepts related with the linear combination. However, as no genetic decomposition was found in literature, for eigenvalues, eigenvectors, and eigenspaces, a genetic decomposition and three modeling problems were designed. The genetic decomposition proved to be a valid model to predict and describe the necessary constructions for the learning of these concepts. The results validate the proposed genetic decomposition and show evidence of students' learning. They show how students can construct an object conception of the studied concepts and how most of them could construct a process conception.

INTRODUCCIÓN

Actualmente se está haciendo mucha investigación en distintos temas de álgebra lineal. Es muy común pensar que la primera forma de introducir un concepto es a través de su definición. Es por esto que muchos cursos de álgebra lineal involucran una cantidad excesiva de definiciones. Los alumnos saben que las definiciones son importantes, sin embargo no les gustan y no siempre las entienden. En una clase tradicional se introducen la mayoría de los conceptos usando su definición formal. Carlson (1997) dice:

> Mis alumnos primero aprenden cómo resolver sistemas lineales de ecuaciones y cómo calcular productos de matrices. Esto es fácil para ellos. Pero cuando llegan a subespacios, espacio generado y dependencia lineal mis alumnos se confunden y desorientan. Parece como si una densa neblina descendiera sobre ellos y no pueden ver dónde están y ni a dónde van. Y yo, como su maestro, me quedo descorazonado y me pregunto sobre mi elección de profesión. (Carlson, 1997, p. 39)

Mi experiencia como maestra confirma que el escenario presentado por Carlson es muy común en los salones de clase. Sin embargo, muchos alumnos obtienen buenas calificaciones en los exámenes finales debido a que, en general, las preguntas únicamente requieren el uso de técnicas y procedimientos memorizados y no la necesidad de entender[1] los conceptos. Sin embargo, el álgebra lineal no es un conjunto de definiciones y teoremas sino un conocimiento teórico cuyo aprendizaje no debe reducirse a practicar y dominar un conjunto de algoritmos.

La búsqueda de estrategias didácticas que permitan a los alumnos desarrollar ideas intuitivas que posteriormente sirvan de base para comprender los conceptos del álgebra lineal es una tarea difícil pero importante. En los últimos años se ha hecho un gran esfuerzo en la investigación en Educación Matemática para comprender los obstáculos que enfrentan los alumnos y buscar formas de superarlos.

Muchos estudios (Lesh y Doerr, 2003; Kwon, 2002; Blum, 2009; Haines, 2009; Bas, Cetinkaya y Kursat, 2009) sugieren que los alumnos pueden desarrollar importantes conceptos matemáticos cuando trabajan con problemas de la “vida real” y que a través de ellos aumenta su interés en la materia. La idea de modelación se reconoce como fundamental en la enseñanza de las matemáticas. Distintas investigaciones (Lehrer y Schauble, 2000; Rasmussen, Zandieh, King y Teppo, 2005; Trigueros, 2009; Possani, Trigueros, Preciado y Lozano, 2010; Perdomo, 2011; Camacho, Perdomo y Santos, 2012) han demostrado que es

[1] *En este trabajo los términos entender y comprender se utilizan como sinónimos y, en general, en el sentido de la Real Academia Española: “Tener idea clara de las cosas”.*

posible mejorar la enseñanza de las matemáticas a través del uso de problemas en contexto. Estos trabajos también muestran que la modelación puede usarse para introducir nuevos conceptos.

Un problema diseñado usando, por ejemplo, la Teoría de Modelos y Modelación (Lesh y Doerr, 2003) debe conducir a la formulación de un modelo, no directamente, sino a través de varios ciclos. En dichos ciclos, los alumnos reformulan su planteamiento original y surgen nuevas preguntas y necesidades conceptuales. La satisfacción de dichas necesidades puede hacerse de diversas formas. En particular, es posible usar una teoría cognitiva, por ejemplo la Teoría APOE (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa Fuentes, Trigueros y Weller, 2014), como complemento al uso de modelos para guiar las construcciones de los alumnos de manera que logren superarse los obstáculos asociados a la comprensión de los conceptos.

En esta investigación se trabajó en condiciones reales de clase. Se usó la modelación para la enseñanza de los siguientes conceptos: combinación lineal, conjunto generador, espacio generado, independencia y dependencia lineal, base y dimensión y valor, vector y espacio propio. En ella se presentan las dificultades encontradas y la forma en que se introdujeron con mayor o menor éxito los conceptos. Se analizan las ventajas y desventajas de introducir la modelación como metodología de enseñanza y se mencionan las implicaciones que puede tener el uso de esta metodología en el aula.

Al enfrentar un problema de modelación los alumnos utilizan sus conocimientos previos y usan las construcciones que consideran necesarias para abordar el problema. Pueden aparecer nuevos conceptos que sirven para resolver el problema dado. Para profundizar en la construcción de estos nuevos conceptos es necesario apoyar a los alumnos, por lo tanto, se usó, de forma complementaria, la Teoría APOE para estudiar y analizar a mayor profundidad las construcciones mentales que realizan los alumnos. Se utilizaron descomposiciones genéticas diseñadas por otros investigadores para los temas relacionados con la combinación lineal. Sin embargo, para el tema de valores, vectores y espacios propios no se encontró en la literatura ninguna propuesta, por lo que se diseñaron tres problemas de modelación y una descomposición genética que mostró ser un modelo válido para predecir y describir las construcciones necesarias para el aprendizaje de dichos conceptos. Los resultados validan la descomposición genética propuesta y muestran evidencias del aprendizaje de los alumnos. En particular ponen de manifiesto la posibilidad de construir una concepción objeto, en el sentido de la Teoría APOE, de dichos conceptos y la construcción de la mayoría de los alumnos de una concepción proceso.

La experimentación se llevó a cabo durante los semestres de enero – mayo 2011 a enero – mayo 2014. Las condiciones de la experimentación se mantuvieron a través de todo este tiempo.

La tesis está dividida en ocho capítulos:

En el primer capítulo se hace una reseña tanto de las investigaciones que se han llevado a cabo usando la metodología de modelos, como de los resultados obtenidos en investigaciones sobre el aprendizaje del álgebra lineal, en particular del aprendizaje de los conceptos antes mencionados que resultan de mayor interés para esta investigación.

E el segundo capítulo se presentan y explican los dos marcos teóricos usados: Modelos y Modelación y Teoría APOE y la forma en que se usan de manera complementaria en este trabajo.

El tercer capítulo incluye la descripción de la metodología que se usó en la investigación sobre el aprendizaje de los conceptos de combinación lineal, conjunto generador, espacio generado, independencia y dependencia lineal, base y dimensión, y del problema que se eligió para introducir a los alumnos en su estudio. La descripción de la metodología empleada en este trabajo continúa en el capítulo 4. En él se describe la metodología que se usó para los conceptos de valores, vectores y espacios propios que es distinta en varios aspectos a la seguida en el capítulo 3, razón por la cual se decidió separar la metodología en dos capítulos distintos. En el cuarto capítulo se incluye la presentación de los tres problemas de modelación elegidos para la introducción de los conceptos de interés y la descomposición genética de los conceptos de valores, vectores y espacios propios, diseñada para esta investigación y que se utilizó en el diseño de las actividades utilizadas en la propuesta didáctica y en los instrumentos de investigación.

El capítulo 5 se dedica al análisis del trabajo de los alumnos con el problema de modelación empleado para la enseñanza de los conceptos combinación lineal, conjunto generador, espacio generado, independencia y dependencia lineal, base y dimensión. Mientras que en el capítulo 6 se presentan los resultados del trabajo de los alumnos con las actividades didácticas diseñadas para la construcción de los conceptos relacionados con la combinación lineal.

En el capítulo 7 se presenta el resultado del análisis del trabajo de los alumnos con los problemas de modelación que se diseñaron para el tema de valores, vectores y espacios propios. Se presenta el trabajo realizado en el primer problema que fue diseñado con el fin de probar si dicho problema tenía el potencial para funcionar como problema de modelación para la enseñanza de los conceptos de valores, vectores y espacios propios. Más adelante, se presenta el trabajo realizado por los alumnos en los problemas que se diseñaron con la finalidad de explicar lo que es una ecuación en diferencias y su solución y por último el trabajo en el problema que se diseñó para introducir los conceptos de valores, vectores y espacios propios. El análisis de las construcciones de los alumnos relacionadas con dichos conceptos se encuentra en el capítulo 8.

Por último se presentan las conclusiones, los anexos con las soluciones de los problemas de modelación y de las actividades didácticas y algunas tablas que se utilizaron para los análisis realizados.

El problema elegido para la introducción de los conceptos relacionados con la estructura del espacio vectorial: combinación lineal, independencia y dependencia lineal, conjunto generador, espacio generado, base y dimensión mostró ser motivador y muy adecuado para iniciar la construcción intuitiva de dichos conceptos. Este hecho permitió aprovechar las ideas de los alumnos para introducir y formalizar estos conceptos. Los resultados muestran que las actividades conceptuales[2] diseñadas dieron oportunidades de reflexión a los alumnos con lo que fue posible lograr un aprendizaje profundo de estos conceptos.

De igual manera, los resultados obtenidos en esta investigación muestran que el problema de empleo – desempleo diseñado para la introducción de los conceptos de valores, vectores y espacios propios permitió que dichos conceptos surgieran del trabajo de los alumnos. Los alumnos desarrollaron un proceso para encontrar los valores y vectores propios antes de que las definiciones de estos conceptos fueran introducidas en clase, lo que permitió la formalización de los conceptos de manera natural. La descomposición genética diseñada mostró ser un modelo válido para predecir y describir las construcciones necesarias para el aprendizaje de estos conceptos. Un resultado importante de esta parte de la investigación es que en cada semestre, en promedio, tres estudiantes mostraron haber construido una concepción objeto de estos conceptos.

El análisis de todos los resultados obtenidos en este trabajo de investigación, permite concluir que los problemas de modelación ayudaron a los alumnos a dar significado a los conceptos estudiados y lograron un aprendizaje más profundo y sólido.

[2] *Se llama actividades conceptuales al conjunto de actividades relativas a un concepto y diseñadas con base en la descomposición genética.*

CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

En muchas universidades el curso de álgebra lineal es el primero que los alumnos cursan y está fuertemente basado en matemáticas abstractas. En esta materia, se enseñan más teoremas y definiciones que en otros cursos y muchos de ellos no tienen conexión con los conceptos matemáticos que los alumnos conocen. El curso es, por ello, abstracto y poco intuitivo. Robert y Robinet (1989) comentan que la principal crítica que hacen los alumnos a los cursos de álgebra lineal es la inmensa cantidad de nuevas definiciones que tienen poca conexión con otros conceptos matemáticos que ellos conocen.

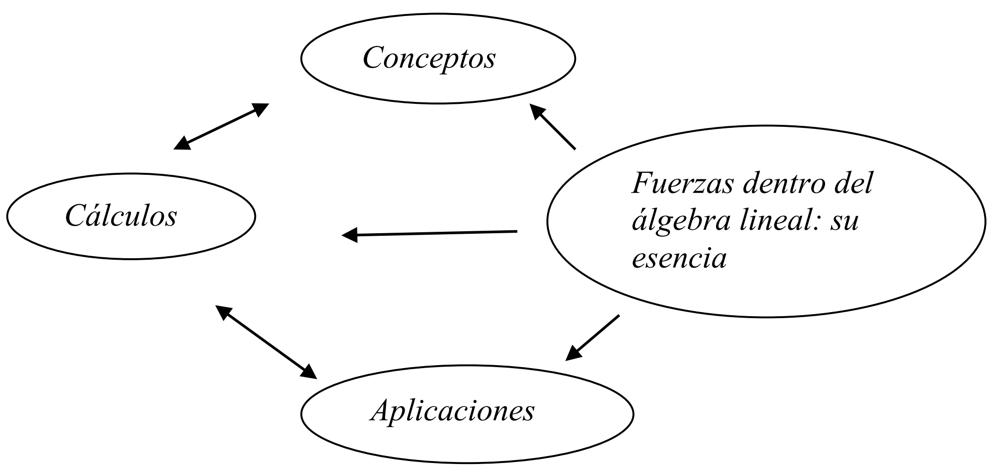
El álgebra lineal es una rama de las Matemáticas con muchas aplicaciones a problemas prácticos de diversas disciplinas. Ello ha conducido a que se convierta en un curso obligatorio para los alumnos de distintas licenciaturas. Sin embargo, la investigación en Matemática Educativa acerca del álgebra lineal muestra que los alumnos presentan dificultades en su aprendizaje y que esas dificultades están relacionadas con la naturaleza abstracta de los conceptos que integran esta materia, es decir, con la gran cantidad de definiciones que se incluyen y el manejo formal que se hace de ellas (Sierpinska, 2000; Larson, Rasmussen, Zandieh, Smith y Nelipovich, 2007; Possani, Trigueros, Preciado y Lozano, 2010). En las investigaciones se detalla que los alumnos generalmente consideran al álgebra lineal como un conjunto de algoritmos que les permiten resolver problemas específicos. Por ello, se esfuerzan únicamente en memorizar los procedimientos requeridos en la solución de los problemas y no ponen atención a la comprensión de los conceptos que subyacen a ellos. La investigación muestra también que después de un curso de esta materia, en el que se enseñan definiciones de conceptos y teoremas, la mayoría de los alumnos no los comprenden y son incapaces de usarlos en la solución de problemas no rutinarios (Thomas y Stewart, 2011).

Las definiciones de los conceptos se suelen introducir mediante un lenguaje formal simbólico y las referencias a definiciones previas y teoremas ya demostrados son constantes. Según Hillel (2000) el lenguaje formal simbólico del álgebra lineal se puede describir mediante tres modos de pensamiento: abstracto, algebraico y geométrico. El modo abstracto incluye el lenguaje y los conceptos de la teoría en general (espacios vectoriales, valor y vector propio, transformaciones lineales, etc.), el modo algebraico incluye el lenguaje y los conceptos de $\boldsymbol{R^n}$ (matrices, solución de sistemas lineales de ecuaciones, etc.) y el modo geométrico es el lenguaje del espacio en dos y tres dimensiones (rectas, puntos, planos, etc.). Estos modos de pensamiento no son equivalentes pero coexisten y algunas veces son intercambiables. Ello se refleja en los problemas que presentan los alumnos al usarlos y sobre todo cuando es necesario pasar de uno a otro en la resolución de un problema.

En el año 2000, Harel publicó los resultados de una investigación en la que compara dos grupos de álgebra lineal: en uno de ellos solamente se enseñaron definiciones y teoremas de manera tradicional, mientras que en el otro se hizo referencia a las interpretaciones geométricas de los conceptos. Los alumnos del segundo grupo obtuvieron mejores resultados que los del primero en un examen sobre el concepto de espacio vectorial, gracias a que usaron recurrentemente la interpretación geométrica y obtuvieron más respuestas correctas. Este investigador concluye que el uso de la interpretación geométrica fue un factor decisivo en la diferencia de los resultados. Muchos investigadores (Molina y Oktaç, 2007; Dogan-Dunlap, 2009; Parraguez y Bozt, 2012) coinciden en que el uso de la interpretación geométrica y su relación con la interpretación algebraica mejora el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Sierpinska (2000) comenta que la habilidad de los alumnos de transitar entre el razonamiento geométrico, aritmético y estructural es fundamental para aprender y entender los conceptos fundamentales del álgebra lineal.

Harel (2000) también comenta que los cursos de álgebra lineal deben tener énfasis en las demostraciones para ayudar en el aprendizaje de los conceptos. Sin embargo, éstas deben presentarse a los alumnos de forma que estén al nivel de sus habilidades para que las puedan comprender. Otra recomendación que hace es impartir un curso de álgebra lineal a nivel preparatoria para introducir conceptos básicos de manera geométrica. De esta forma a nivel universitario el curso puede ser una continuación de las ideas aprendidas en la preparatoria.

Uhlig (2003) desarrolló un marco filosófico y pedagógico para enseñar un curso de álgebra lineal. Menciona que debe encontrarse un equilibrio entre los componentes del siguiente diagrama (Uhlig, 2003, p. 148):



Comenta que desde 1970 hasta esa fecha los textos de álgebra lineal comienzan con algoritmos computacionales como Gauss – Jordan o aplicaciones como sistemas de ecuaciones lineales y después se dan los conceptos subyacentes. Es decir, se pretende enseñar los conceptos matemáticos abstractos a partir de ejemplos (parte izquierda del diagrama anterior). El autor opina que de esta forma se deja de lado el “poder fundamental y las fuerzas naturales que están dentro del álgebra lineal” (Uhlig, 2003, p. 150). Hace falta agregar ejemplos conceptuales que ayuden en la comprensión abstracta de los temas, es decir, usar la parte derecha del diagrama. De esta forma se pueden desarrollar los conceptos y las aplicaciones y luego unirlos mediante cálculos.

El autor explica que las fuerzas dentro del álgebra lineal determinan cómo debe darse un curso. Los conceptos y temas siguen una secuencia que está integrada en el marco del álgebra lineal. Los cursos pueden comenzarse con cualquier tema dado que hay una estrecha relación entre ellos. Por ejemplo, si se quiere empezar un curso con vectores generados, bases y cambio de base se puede comenzar con la definición de dependencia lineal que llevará al estudio de sistemas de ecuaciones, después a Gauss – Jordan y de ahí a los demás conceptos del álgebra lineal. El autor comienza sus cursos con vectores, geometría, transformaciones lineales y matrices. Lleva 18 años trabajando de esta forma y le parece que obtiene resultados positivos, pero no ha hecho investigación al respecto.

A partir de estas primeras investigaciones sobre el aprendizaje del álgebra lineal, el interés por investigar la forma en que esta materia se aprende y cómo puede mejorarse el aprendizaje comenzó a crecer. Varios autores han analizado el aprendizaje de esta disciplina ya sea de manera general o poniendo atención a la forma en que se aprenden conceptos específicos. Por ejemplo, Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000) estudiaron las dificultades que presentan los alumnos en un curso de álgebra lineal en el primer año de una universidad en Francia y presentaron, además, los resultados de un diseño didáctico realizado en términos de los resultados de su investigación que fue probado con 200 alumnos durante cinco años con resultados satisfactorios. Oktaç y Trigueros (2010), en cambio, se han interesado en el aprendizaje de los distintos conceptos del álgebra lineal; para ello han propuesto descomposiciones genéticas (Teoría APOE) para los conceptos de espacio vectorial, transformación lineal, base y sistemas de ecuaciones lineales y las han puesto a prueba a través de diversas investigaciones con el fin de proponer sugerencias didácticas para mejorar el aprendizaje de dichos conceptos. Wawro, Seeney y Rabin (2011) realizaron una investigación sobre el aprendizaje del concepto de subespacio vectorial en la que concluyen que las primeras definiciones que los alumnos dan del concepto no necesariamente coinciden con su definición formal y que este fenómeno ocurre también cuando se enseñan otros conceptos. En la misma línea de investigación, Wawro, Rasmussen, Zandieh, Sweeney y Larson (2012) analizaron el aprendizaje de los conceptos de independencia lineal y conjunto generador usando un problema “realista” que titularon “alfombra mágica.” El análisis del trabajo de los alumnos los condujo a la conclusión de que frente a un problema abierto adecuado al nivel e intereses de los alumnos, ellos son capaces de “reinventar” los conceptos estudiados y que a partir de sus ideas es posible formalizarlos. Por su parte, Wawro (2014) estudió la forma como los alumnos razonaban sobre el teorema de la matriz inversa (teorema resumen) a lo largo de un curso. Analizó las características de sus reflexiones y la manera en que construyen argumentos para relacionar las distintas afirmaciones del teorema. La información obtenida en su trabajo permite al investigador adentrarse en la forma en que los alumnos construyen relaciones entre distintos conceptos.

Como se puede apreciar a partir del análisis de literatura anterior, se han llevado a cabo investigaciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de distintos conceptos y temas del álgebra lineal. Dado que el interés del presente trabajo se centra justamente en la búsqueda de formas de enseñar esta disciplina, la información que la literatura proporciona fue fundamental para iniciar el estudio de la forma en que pueden construirse algunos conceptos del álgebra lineal.

Recientemente ha surgido una línea de investigación en el contexto de la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal que se interesa en la posibilidad de lograr dicho aprendizaje mediante el uso de problemas abiertos o modelos que susciten el interés de los alumnos. Dado que el trabajo que aquí se presenta se inscribe en esta línea de investigación, concretamente para la enseñanza de los conceptos relacionados con la combinación lineal y con los valores, vectores y espacios propios, a continuación se describen los resultados de una revisión de la literatura en estas dos líneas. En primer lugar se analizaron distintas investigaciones donde se usa la modelación para describir sus resultados en la enseñanza de temas específicos del álgebra lineal. Con ello se podrá tener un panorama de lo que se ha logrado con este tipo de estrategia didáctica. Posteriormente, se presentan resultados de investigaciones sobre los conceptos de combinación lineal, conjunto generador, espacio generado, independencia y dependencia lineal, base y dimensión que serán objeto de estudio en este trabajo. Por último, se describen los resultados de investigaciones relacionadas con el aprendizaje de valores, vectores y espacios propios. Es a partir del análisis de los resultados de toda la revisión de esta literatura que se construyeron las preguntas de investigación que guían el presente trabajo.

1.1 INVESTIGACIONES EN TORNO AL USO DE LA MODELACIÓN PARA LA ENSEÑANZA

Muchos investigadores (Schorr y Lesh, 2003; Vargas, 2013; Fonseca, Pereira y Casas, 2011; Aguirre, Elguero y Rosso, 2006) concuerdan en que el uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas promueve su aprendizaje. Sus investigaciones muestran que los alumnos tienen dificultades para usar los conceptos que han estudiado desde un punto de vista teórico o al resolver problemas y aplicarlos más adelante a situaciones en diferentes disciplinas (Blum, 2009; Haines, 2009; Trigueros, Possani, Lozano y Sandoval, 2009; Trigueros y Possani, 2013). Según estos estudios, la modelación motiva a los alumnos a involucrarse en los cursos y aumenta su interés por aprender nuevos conceptos. También, concluyen que ayuda a poner de manifiesto las dificultades que los alumnos enfrentan al resolver problemas y, al mismo tiempo, les apoya a comprender conceptos matemáticos específicos. En general, estos autores consideran que esta actividad favorece que los alumnos desarrollen diferentes formas de pensar y una variedad de estrategias para abordar los problemas, lo cual conduce a la necesidad de nuevos conceptos en su solución.

Son muchas las investigaciones (Schorr y Lesh, 2003; English, Lesh y Fennewald, 2008; Fonseca, Pereira y Casas, 2011; Vargas, 2013) que hacen uso de la Teoría Modelos y Modelación, pero los temas en los que se ha realizado incluyen principalmente funciones, cálculo y ecuaciones diferenciales. En estas investigaciones se han desarrollado proyectos que muestran que es posible enseñar diferentes conceptos matemáticos usando problemas en contexto y modelación.

Otras investigaciones (Rasmussen, Zandieh, King y Teppo, 2005; Perdomo, 2011; Camacho, Perdomo y Santos, 2012) han mostrado que los alumnos con habilidades promedio pueden desarrollar modelos poderosos para describir sistemas complejos que dependen solamente de un nuevo uso de conceptos matemáticos más o menos elementales. Estos trabajos también han puesto en evidencia que la modelación puede usarse exitosamente para introducir nuevos conceptos.

Los resultados de la inclusión de modelación en la clase de matemáticas refuerzan la hipótesis de que la introducción de modelos en la enseñanza del álgebra lineal podría permitir a los alumnos una construcción más sólida de los conceptos y un mayor interés por la materia. A continuación se analizan a profundidad algunos artículos donde se reportan resultados del uso de modelos en el aula siguiendo estrategias didácticas basadas en diferentes marcos teóricos.

Kwon (2002) investigó un modelo de poblaciones nómadas utilizando la Teoría de Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1973, 1991) (RME por sus siglas en inglés) con el fin de analizar la efectividad del uso de situaciones realistas, la construcción de procedimientos de solución y la interacción entre alumnos y maestros en el aprendizaje de la variación. La RME se enfoca en la reinvención guiada de las matemáticas a través de la matematización y toma como punto de partida las estrategias e interpretaciones informales de solución de los alumnos al resolver problemas reales en contexto. La autora comenta que aunque, al parecer, los alumnos coreanos obtienen resultados satisfactorios en las pruebas estandarizadas que miden el aprendizaje, cuando enfrentan situaciones reales o en contexto, muestran dificultades para utilizar dicho aprendizaje debido, en la opinión de la autora y de otros investigadores, al manejo mecánico de los conceptos matemáticos y a la falta de comprensión de cómo los conceptos se pueden relacionar con situaciones de esa naturaleza. Sus resultados muestran que el uso del modelo, conjuntamente con el uso de programas, diseñados por ella, para la calculadora TI-92 y otros materiales basados en la Teoría RME, permite a las alumnas encontrar sus propias formas de trabajar con los conceptos matemáticos de interés. El análisis de los resultados pone de manifiesto que esta estrategia didáctica permitió guiar a las alumnas en el paso de la formulación de un modelo intuitivo a un modelo formal de la situación planteada; se observó, además, en este tránsito, la sofisticación de sus razonamientos matemáticos. Las conclusiones del estudio indican que el uso de modelos, de tecnología y de actividades diseñadas con base en una teoría de la Educación Matemática, promueve el aprendizaje de la variación en el contexto de las ecuaciones diferenciales tanto en un aspecto práctico como teórico.

Respecto al papel del maestro en un aula en la que se usa modelación, Aguirre, Elguero y Rosso (2006) analizaron el uso de modelos. Utilizaron dos problemas: uno relacionado con un cilindro que se llena de agua y otro en el que se utiliza la ley de enfriamiento de Newton, ambos con alumnos de la licenciatura de profesor de matemáticas. El objetivo del trabajo consistía en estudiar la capacidad de los alumnos de aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones reales, así como el cambio de actitud de los alumnos frente al aprendizaje de las matemáticas. A partir de sus resultados las autoras concluyeron que el uso de la modelación matemática tiene potencial como herramienta didáctica y permite crear las condiciones necesarias para formar profesores de matemáticas con una mayor capacidad para reconocer, aplicar y validar el uso de las matemáticas en el mundo real. Las autoras enfatizan que este potencial está relacionado con el reconocimiento de que la modelación va más allá de la aplicación de los conceptos matemáticos, y debe verse como un proceso que implica la identificación del problema; la generación de un modelo matemático; la solución del problema y la validación de la solución propuesta junto con el reconocimiento de sus limitaciones. En otra de sus conclusiones señalan que cuando este proceso incluye oportunidades para realizar simulaciones y predicciones a través de una enseñanza interactiva con oportunidades para discutir, consultar y trabajar cooperativamente, el interés de los alumnos aumenta considerablemente. Con base en estas conclusiones las autoras sugieren que la modelación debe estar presente en el proceso de formación de los maestros y que para lograr los efectos como los que ellas encontraron es necesario incluir actividades especiales de aprendizaje para que los alumnos adquieran conocimientos teóricos, prácticos y metodológicos acerca de los componentes generales del proceso de modelación.

Los siguientes tres artículos que se incluyen en esta revisión se interesan por el uso de la modelación en el aprendizaje y la enseñanza del álgebra lineal utilizando como fundamento teórico la Teoría de Modelos y Modelación (Lesh y Doerr, 2003) y la Teoría APOE (Arnon, et al., 2014), elección que coincide con la que se hace en este trabajo. Esto es de particular interés dado que su acercamiento y sus objetivos coinciden con los de la presente investigación.

Possani et al. (2010) trabajaron con un problema relacionado con el flujo de tráfico. Mediante dicho problema introdujeron a los alumnos a los temas relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales. Como se mencionó, se utilizó como marco teórico un híbrido que incluyó dos teorías de Educación Matemática: la Teoría de Modelos y Modelación, para la introducción de modelos, y la Teoría APOE, para favorecer la construcción de nuevos conceptos aprovechando el trabajo con el modelo. En este trabajo, y considerando el uso de la Teoría APOE, se utilizó una descomposición genética para sistemas de ecuaciones lineales diseñada por Trigueros, Oktaç y Manzanero (2007).

Los resultados obtenidos en este trabajo sugieren que los alumnos son capaces de desarrollar conceptos matemáticos importantes cuando trabajan con problemas de la vida real y que, si además, se incluyen actividades diseñadas en base a la descomposición genética, es posible que construyan los conceptos de interés. Los autores concluyen, por una parte, que el uso de teorías de la Educación Matemática fue fundamental para interpretar las necesidades de los alumnos y para diseñar actividades que conducen a la construcción de conocimientos relacionados con el proceso de modelación, y por otra parte, que es posible usar dos teorías diferentes de Educación Matemática para diseñar una situación real con la que los alumnos pueden trabajar y para guiar la construcción de los conceptos relacionados con los sistemas lineales de ecuaciones.

En Trigueros (2009) se presentan los resultados del uso de tres problemas diferentes de modelación en clases distintas: un modelo de precios, uno relacionado con el estudio del péndulo y el problema de tránsito (mencionado en la descripción anterior). En la introducción menciona que en la enseñanza básica los programas hacen énfasis en la importancia de resolver problemas para mejorar el aprendizaje de las matemáticas, mientras que a nivel universitario las clases se imparten introduciendo definiciones y teoremas y los problemas se dejan como un asunto adicional a trabajar como tarea. El artículo describe parte del trabajo realizado por un grupo de investigadores que ha experimentado la enseñanza de matemáticas a nivel universitario mediante el uso de la modelación. Argumenta que dado que la teoría de Modelos y Modelación no contiene constructos que describan la forma en que los alumnos pueden aprender nuevos conceptos específicos, se decidió complementar el marco teórico mediante la introducción de la Teoría APOE. Sus resultados muestran que este acercamiento a la enseñanza de las matemáticas en la universidad fue favorable tanto para la motivación de los estudiantes como para favorecer la construcción de nuevos conceptos. Esta autora concluye que el trabajo en los modelos proporcionó una oportunidad para que los alumnos aprendieran el significado de las matemáticas en la solución de problemas reales e insiste en que es esencial buscar el equilibrio entre aquellos aspectos de la modelación que son importantes de rescatar y los conceptos que se quieren enseñar.

La Teoría de Modelos y Modelación conjuntamente con la Teoría APOE fueron nuevamente empleadas por Trigueros y Possani, 2013. En esta investigación, el problema de modelación planteado fue un problema de planeación de producción con el interés de introducir los conceptos de combinación lineal, dependencia e independencia lineal. El primer objetivo de este trabajo consistió analizar cómo el uso de un problema de modelación conjuntamente con la introducción de actividades diseñadas con la Teoría APOE contribuye al aprendizaje. El segundo objetivo fue probar el problema de modelación y estudiar su potencial para introducir los conceptos de interés y como escenario para analizar el proceso de razonamiento, verificación y justificación de los alumnos. Los autores diseñaron una descomposición genética de independencia y dependencia lineal y una trayectoria hipotética de aprendizaje (modelo a priori en el que se formula una hipótesis de lo que se debe hacer en clase para favorecer el aprendizaje de los alumnos (Simon, 1995)) para guiar al maestro en la clase.

A partir de los resultados del análisis de los datos, los autores concluyeron que el problema de modelación motivó a los alumnos y constituyó una base sólida para la introducción de los conceptos. El trabajo en el modelo junto con las actividades y la trayectoria de aprendizaje contribuyó al aprendizaje, por lo que los autores sugieren que los resultados de esta experiencia pueden ser útiles para rediseñar la trayectoria de aprendizaje y buscar la obtención de mejores resultados.

La producción de investigación sobre el uso de modelación en la enseñanza de las matemáticas es amplia. Esta literatura, independientemente del contexto en el que se realiza, coincide en considerar que el trabajo con problemas reales o problemas en contexto ayuda a los alumnos a desarrollar y aprender conceptos importantes de matemáticas. A pesar de la abundancia de la literatura, hace falta desarrollar modelos específicos que permitan comprender a mayor profundidad cómo los alumnos usan y construyen conocimientos cuando trabajan con modelos y si basta el uso de modelos para promover el aprendizaje, como se reporta en la investigación de Aguirre, Elguero y Rosso (2006) o si es necesario introducir actividades adicionales para promover el aprendizaje de los alumnos, como en el estudio de Kwon (2002) y los mencionados anteriormente. Este es uno de los objetivos de la presente investigación.

1.2 INVESTIGACIONES SOBRE EL APRENDIZAJE DE LOS CONCEPTOS DE COMBINACIÓN LINEAL, CONJUNTO GENERADOR, ESPACIO GENERADO, INDEPENDENCIA Y DEPENDENCIA LINEAL, BASE Y DIMENSIÓN

Dado que un objetivo de esta tesis consiste en estudiar los resultados del uso de la modelación en la construcción de los conceptos de combinación lineal, conjunto generador, espacio generado, independencia y dependencia lineal, base y dimensión, a continuación se describen los resultados de las escasas investigaciones sobre el aprendizaje de estos conceptos.

En el trabajo de Trigueros y Possani (2013), descrito en la sección anterior, se estudia la construcción de los conceptos de combinación lineal y dependencia e independencia lineal considerados como abstractos e interconectados. Los alumnos con quienes se trabajó en la investigación tuvieron dificultades para interpretar el problema de modelación y para seleccionar las variables. Al trabajar con la solución del sistema de ecuaciones que representa al modelo, utilizando distinta información, diferentes equipos de trabajo encontraron diferencias en su solución: única, múltiple o inconsistente. Esta disparidad condujo a una discusión en clase que les permitió estudiar el conjunto de datos que habían utilizado y comparar sus características para detectar qué podría causarla. Los autores reportan que los alumnos concluyeron que en algunos de los conjuntos de datos utilizados existía información que no era útil pues de alguna manera estaba contenida en el resto de la información, así que acuñaron la expresión "hay información redundante." Esta idea les permitió dar un significado "concreto" a las propiedades de independencia y dependencia lineal de un conjunto de vectores. En este momento, se introdujeron en clase las actividades diseñadas con la descomposición genética para formalizar las definiciones de combinación lineal, independencia y dependencia lineal. Los autores concluyeron que el uso del modelo y las actividades contribuyeron a la construcción de estos conceptos y por ende a su aprendizaje.

En otra investigación, Da Silva y Lins (2002) utilizaron el modelo teórico de los campos semánticos para estudiar el significado que los alumnos tenían del concepto de base, los posibles supuestos que utilizan y la lógica de sus operaciones y sus argumentos. Entrevistaron a dos alumnos de un curso introductorio de álgebra lineal utilizando cuatro problemas, aunque en el artículo solamente analizan uno: "Considera el plano $\boldsymbol{\pi}$ dado por $\boldsymbol{x - 2y + z = 0}$ en $\boldsymbol{R^3}$. Encuentra dos bases para $\boldsymbol{\pi}$." (Da Silva y Lins, 2002, p. 4). Los resultados del estudio los condujeron a concluir que el tipo de respuesta que dan los alumnos depende de los supuestos que utilizan. De ahí proponen que entre los alumnos existen diferentes significados para un mismo concepto y que dichos significados pueden provenir de los libros de texto, de la historia de las matemáticas y de la propia lógica de pensamiento de los alumnos. Sugieren, además, que los distintos significados deberían tomarse en cuenta en la enseñanza de las matemáticas.

Por su parte, Kú (2007) y Kú, Trigueros y Oktaç (2008) estudiaron el concepto de base de un espacio vectorial. La investigación se llevó a cabo en un curso de álgebra lineal que se impartió siguiendo el ciclo ACE (Actividades, Clase, Ejercicios, descrito en la sección 2.3) y utilizando el lenguaje de programación ISETL. Diseñaron una descomposición genética y llevaron a cabo una entrevista que se aplicó a seis alumnos al finalizar el curso para analizar las construcciones empleadas y, en su caso, validar o refinar la descomposición genética. Sus resultados mostraron que la forma en que se enseña este concepto influye en el aprendizaje de los alumnos y que para ellos existe una diferencia entre averiguar si un conjunto de vectores forma una base de un espacio vectorial y encontrar una base para un espacio vectorial. Para determinar si un conjunto es una base, los alumnos comprobaban si un conjunto dado era linealmente independiente y si generaba el espacio vectorial, pero no verificaban el que los vectores generadores estuvieran en el espacio generado. Las autoras de estos estudios concluyeron que es necesario diseñar actividades específicas que permitan a los alumnos superar esta dificultad. Con la información recabada, las autoras rediseñaron la descomposición genética considerando la importancia de definir a la base como un conjunto máximo de vectores linealmente independientes y como el conjunto generador mínimo para que los alumnos puedan construir el concepto de base como objeto.

En otro estudio en el que se utiliza la teoría de modos de pensamiento (Sierpinska, 2000), Parraguez y Bozt (2012) analizaron el razonamiento de alumnos universitarios acerca de los conceptos de dependencia e independencia lineal, la solución de sistemas lineales de ecuaciones en $\boldsymbol{R^2}$ y $\boldsymbol{R^3}$ y las relaciones entre estos conceptos. Sus objetivos consistían en identificar los modos de pensamiento (sintético-geométrico (SG), analítico-aritmético (AA) y analítico-estructural (AE)) mostrados por los alumnos, promover el tránsito entre estos distintos modos y averiguar las relaciones entre los conceptos en estudio. Sus datos mostraron que existe una fuerte tendencia de los alumnos al modo de pensamiento AA; que, en general logran transitar del modo SG al modo AA, al no poder interpretar la solución gráfica de un sistema de soluciones; que cambian del modo SG al modo AA en sistemas en $\boldsymbol{R^3}$ y que la mayoría no muestra el uso del modo AE lo cual no les permite entender las propiedades del vector cero.

Encontraron también que la mayoría de los alumnos resolvía de manera mecanizada de forma algebraica los sistemas de ecuaciones y que únicamente en el caso en que no podían explicar la solución recurrían a la interpretación geométrica. Concluyeron que es importante presentar a los alumnos las diferentes interpretaciones (geométrica, analítica y estructural) de las definiciones formales para permitir que los alumnos transiten entre los diferentes modos de pensamiento. Esta consideración se tomó en cuenta en la presente investigación al dar particular importancia a la relación entre los aspectos geométricos y algebraicos de los conceptos estudiados.

Partiendo de los resultados de un estudio anterior en el que encontró que los alumnos confunden los conceptos de conjunto generador y base, Kú (2012) estudió la construcción de los conceptos de conjunto generador y espacio generado desde la Teoría APOE. Diseñó una descomposición genética preliminar de dichos conceptos y con ella organizó la enseñanza de estos conceptos, diseñó tareas y actividades y analizó los resultados de los instrumentos utilizados: entrevistas y un examen diseñados para obtener información detallada de las construcciones mostradas por los alumnos. Sus resultados la llevaron a concluir que era necesario refinar la descomposición genética preliminar para incluir construcciones que no se incluyeron en ella y que los alumnos mostraron en el estudio. En la investigación que aquí se presenta se utilizó justamente esta descomposición genética en el diseño y análisis de los datos.

De esta revisión de la literatura se puede concluir que estos conceptos resultan difíciles para los alumnos. Los autores relacionan las dificultades encontradas con el hecho de que estos conceptos son muy abstractos. Los resultados aquí reportados constituyen un antecedente de interés para el presente trabajo que intenta, justamente, analizar las posibilidades de construcción de estos conceptos mediante un diseño didáctico basado en la Teoría APOE y en la Teoría de Modelos y Modelación.

1.3 INVESTIGACIONES SOBRE EL APRENDIZAJE DE LOS CONCEPTOS DE VALORES, VECTORES Y ESPACIOS PROPIOS

Las investigaciones relacionadas sobre el aprendizaje de los valores, vectores y espacios propios son aún más escasas en la literatura. Se muestra, en esta sección, un resumen de lo que en ellas se ha encontrado y que proporcionó información para la propuesta de descomposición genética que se utiliza en el presente trabajo.

Larson et al. (2007) usaron la Teoría de Modelos y Modelación para diseñar una actividad de modelación con el objetivo de enseñar valores y vectores propios. La actividad propuesta consiste en la búsqueda de un modelo para distribuir convenientemente un número dado de autos en diferentes locales de renta, de manera que siempre haya autos disponibles en cada uno de ellos. Complementaron su trabajo con el diseño de secuencias didácticas para lo cual se basaron en la Teoría de Educación Matemática Realista RME (Gravemeijer, 1999). Los datos obtenidos de entrevistas mostraron que los alumnos aplicaron tres estrategias en el planteamiento y la resolución del problema: formulación e iteración de una matriz de coeficientes identificada como una matriz de transición de un proceso de Markov; propuesta de un sistema de ecuaciones lineales para encontrar la distribución inicial que asigna los autos de acuerdo a la demanda proyectada en diferentes periodos de tiempo, e interpretación de las estadísticas de redistribución como razones de cambio. Con el fin de dirigir la atención de los alumnos a los conceptos de valor, vector y espacio propio se pidió a los alumnos encontrar el comportamiento de la distribución a largo plazo. A pesar de ello, en ninguno de los casos los alumnos utilizaron directamente los valores y vectores propios. Los investigadores reportan que enfrentaron dificultades al intentar encontrar una forma más o menos natural de introducir estos conceptos en el contexto del trabajo de los alumnos y concluyeron que, a pesar de que la primera estrategia de modelación se puede relacionar con los valores y vectores propios, la necesidad de estos conceptos es tardía en el trabajo con el modelo y queda, de cierta forma, forzada. Ello no permitió alcanzar el fin deseado y, como consecuencia, se consideró que la actividad de modelación sugerida no es adecuada para la enseñanza de los conceptos de interés.

En una nueva investigación basada en el mismo marco teórico, Larson, Zandieh y Rasmussen (2008) entregaron a los alumnos un problema en contexto que requiere de la formulación de una matriz estocástica y de un proceso de Markov para introducir más directamente los conceptos de valor, vector y espacio propio. Se pidió a los alumnos estudiar el comportamiento a largo plazo de este problema que converge a un vector fijo. Los autores intentaban con ello que los alumnos generalizaran la noción de vector fijo en términos de la noción de vectores con la "misma dirección" resultantes del producto de matrices. Con esta estrategia lograron que, con un matriz de ***2x2*** los alumnos pensaran en el proceso de encontrar valores y vectores propios como un procedimiento con el cual encuentran vectores cuya imagen debe estar en la misma línea que el vector original. En el estudio de Rasmussen y Blumenfeld (2007) se había encontrado que este "primer acercamiento" permite a los alumnos que estudian ecuaciones diferenciales imaginar los movimientos que se deben hacer para forzar a los vectores a ser paralelos, o estén sobre una misma línea recta, y a relacionar esta necesidad con el hecho de que el determinante sea cero. En el nuevo estudio, sin embargo, los autores encontraron que al intentar generalizar este enfoque a matrices más grandes, en particular de ***3x3,*** este razonamiento se complica y no resulta evidente para los alumnos, por lo que sugieren que el maestro introduzca en este momento la forma tradicional de encontrar primero los valores propios y después los vectores propios.

Las investigaciones de Stewart y Thomas (2007) y Thomas y Stewart (2011) analizan las dificultades de los alumnos frente a los conceptos de valores y vectores propios asociados a una matriz utilizando la Teoría de "Embodied Cognition" (Tall, 2008). Estos autores no van mucho más allá de mostrar que los alumnos tienen dificultades con la manipulación de la ecuación $\boldsymbol{A\overline{v}} = \boldsymbol{\lambda\overline{v}}$ y con la relación entre la representación gráfica y la algébrica de estos conceptos y sugieren que su evidencia muestra que cuando los alumnos reconocen esta relación, logran una mejor comprensión de estos conceptos.

Existen, además investigaciones que se dirigen a la introducción de los conceptos de valor, vector y espacio propio mediante el uso de tecnologías de la información. Un ejemplo de ello es la investigación de Klasa, J. y Klasa, S. (2002) en la que se utilizan dos programas: Cabri y Maple para introducir los conceptos de transformación lineal y valores y vectores propios. Los investigadores encontraron que mediante el uso de Cabri los estudiantes mejoraron su comprensión de la relación entre el conocimiento geométrico y conceptual, y lograron un mayor entendimiento de los conceptos en estudio. Más adelante, Klasa (2010) utilizó los mismos programas para diseñar una estrategia de enseñanza para los mismos conceptos, añadiendo los de formas cuadráticas, cónicas y cambio de base y analizar sus efectos en el aprendizaje de los alumnos. En el caso de los valores y vectores propios la autora diseñó animaciones en las que los alumnos pudieran ver las condiciones que se requieren para que el vector $\boldsymbol{\overline{v}}$ sea paralelo al vector ***T(*** $\overline{v}$ ***)***. El uso de los programas de computadora y de las animaciones mostró, de acuerdo a las conclusiones de la autora que el uso de Cabri facilita el aprendizaje de estos conceptos complejos, mientras que el uso de Maple facilita la realización de operaciones complicadas.

Utilizando también el programa Cabri, Soto y García (2002) crearon un ambiente computacional interactivo para enseñar los conceptos de valores y vectores propios de una matriz cuadrada de ***2x2*** y de ***3x3***. Para la definición de estos conceptos utilizan la transformación lineal. Por medio del programa, al igual que en la investigación anterior, los alumnos mueven los vectores para encontrar cuándo $\boldsymbol{\overline{v}}$ y ***T(*** $\overline{v}$ ***)*** son paralelos. Después de esta actividad se plantearon preguntas a los alumnos. Los autores concluyen que el trabajo con las actividades fue exitoso y aumentó el interés de los alumnos por estos conceptos, aún y cuando se presentaron algunas dificultades. Finalmente, presenta el archivo con las instrucciones de Cabri para el caso de $\boldsymbol{R^2}$.

En la misma línea que los trabajos anteriores y en un esfuerzo por dar significado a la representación gráfica de los valores y vectores propios de una matriz, Gol, (2012) entregó a sus alumnos matrices, $\boldsymbol{A_{2x2}}$, multiplicadas por un vector, $\boldsymbol{A\bar{x}}$ y les pidió que encontraran los valores y vectores propios asociados a esa matriz usando un programa de computadora. La autora estudió la interacción de los alumnos con los vectores propios enfocándose en su comprensión, sus expresiones lingüísticas y sus gestos conforme describían la representación geométrica de los vectores propios. A partir del análisis de sus resultados, la autora concluyó que el uso de la computadora permitió a los alumnos ver la dirección de los vectores y su posición en el plano; explorar con distintos vectores y detectar las condiciones para que dos vectores fueran colineales con la misma dirección y con dirección opuesta; entender a los vectores propios como vectores "especiales" que son colineales con el vector que se obtiene al multiplicarlos por la matriz, y analizar el comportamiento de su transformación bajo la matriz $\boldsymbol{A}$, así como sus propiedades.

De este breve análisis es posible observar que, aunque se ha hecho investigación sobre el aprendizaje de los temas estudiados y se cuenta con resultados que proporcionan información útil para profundizar en este tema y para diseñar una posible descomposición genética para valores, vectores y espacios propios, es necesario llevar a cabo más investigación para entender la forma en que los alumnos construyen todos los conceptos antes mencionados y para explorar la posibilidad de su aprendizaje mediante el uso de modelos en el aula.

Las preguntas de investigación planteadas en este estudio son:

1.- ¿El uso de problemas de modelación favorece la introducción de algunos conceptos de álgebra lineal?

a) ¿Qué estrategias utilizan los alumnos cuando enfrentan un problema de modelación cuya solución requiere los conceptos de combinación lineal, conjunto generador, espacio generado, independencia y dependencia lineal, base y dimensión?
b) ¿Qué estrategias utilizan los alumnos cuando enfrentan un problema de modelación cuya solución requiere los conceptos de valor, vector y espacio propio?

2.- ¿Qué construcciones requieren los alumnos para aprender los conceptos mencionados en el punto anterior?

a) ¿Qué construcciones requieren los alumnos para aprender los conceptos de combinación lineal, conjunto generador, espacio generado, independencia y dependencia lineal, base y dimensión?

b) ¿Qué construcciones requieren los alumnos para aprender los conceptos de valores, vectores y espacios propios?

c) ¿Es posible favorecer estas construcciones mediante actividades diseñadas con la Teoría APOE?

3.- ¿Pueden los alumnos construir una concepción objeto de estos conceptos cuando son enseñados usando un diseño didáctico basado en la Teoría APOE y en el uso de modelos?

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En el diseño y realización de esta investigación se utilizaron los seis criterios de la Teoría de Modelos y Modelación (Lesh y Doerr, 2003), para proponer problemas en contexto que fueran adecuados para ser usados con los alumnos, y la Teoría APOE (Arnon, et al., 2014) para el diseño de actividades conceptuales con el fin de apoyar las construcciones de los alumnos en el aprendizaje de los conceptos de combinación lineal, conjunto generador, espacio generado, independencia y dependencia lineal, base y dimensión, y valores, vectores y espacios propios de una matriz.

La decisión de emplear la Teoría de Modelos y Modelación se tomó con base en que la revisión de la literatura que hace uso de esta teoría ha demostrado que es eficaz para la enseñanza de conceptos matemáticos en diversos niveles escolares. Algunos ejemplos del uso exitoso de este acercamiento teórico son las investigaciones llevadas a cabo por Aliprantis y Carmona (2003) en el caso de la maximización; Carlson, Larsen y Lesh (2003) para la covarianza; Barnes (2004) en el caso de nivelar los conocimientos de alumnos de bajo rendimiento; Aguirre, Elguero, y Rosso (2006) para introducir la modelación a profesores de matemáticas; Fonseca, Pereira y Casas (2011) en el caso de las funciones de varias variables y Vargas (2013) en el de máximos y mínimos de una función.

A pesar del éxito de la Teoría de Modelos y Modelación, algunos investigadores (por ejemplo, Larson, Rasmussen, Zandieh, Smith y Nelipovich, 2007; Possani, Trigueros, Preciado y Lozano, 2010; Trigueros, 2014) consideran que el uso exclusivo de la modelación, no ha mostrado evidencia suficientemente clara de la forma en que los alumnos construyen nuevos conceptos matemáticos basados en sus conocimientos anteriores o, de si el trabajo en el modelo es suficiente para el aprendizaje a profundidad de los conceptos. Estos autores consideran que es necesario complementar el trabajo en los modelos con alguna teoría que permita profundizar en la forma en que los alumnos construyen los conceptos y que además provea de herramientas de diseño de material didáctico para favorecer las construcciones deseadas para estimular el aprendizaje de nuevos conceptos. En concordancia con la posición de estos autores, en este trabajo se decidió hacer un uso complementario de la teoría antes mencionada con la Teoría APOE.

La elección de la Teoría APOE se sustentó en la fortaleza de sus constructos teóricos para realizar análisis de las posibles construcciones de los alumnos cuando aprenden nuevos conceptos y para diseñar actividades que apoyen dichas construcciones (Trigueros, 2008, 2009 y 2014 y Possani, Trigueros, Preciado y Lozano, 2010).

Así, en la presente investigación se analizó el aprendizaje de los alumnos usando la combinación de estas dos teorías para estudiar el aprendizaje de los alumnos de los conceptos de combinación lineal, conjunto generador, espacio generado, independencia y dependencia lineal, base y dimensión, por una parte, y por otra los conceptos de valor, vector y espacio propio de una matriz.

En la primera parte de esta investigación se tomó un problema de modelación diseñado y probado por Wawro, Rasmussen, Zandieh, Sweeney y Larson (2012) para la enseñanza de los conceptos de conjunto generador y espacio generado, pero se amplió para poderlo emplear, además, en la enseñanza de los conceptos de combinación lineal, independencia y dependencia lineal, base y dimensión. En la segunda parte de este estudio y con el fin de dar sentido y apoyar la construcción de los conceptos de valor, vector y espacio propio, que son muy abstractos y difíciles para los alumnos, se decidió usar los seis criterios de la Teoría de Modelos y Modelación, para diseñar un nuevo problema. A diferencia de otras investigaciones, los criterios de la Teoría de Modelos y Modelación se utilizaron además para validar la pertinencia del problema diseñado.

Se considera en esta investigación que cuando los alumnos resuelven un problema construyen nuevos conceptos que son útiles para su solución. La descomposición genética de la Teoría APOE es un modelo que predice las construcciones mentales que deben hacer los alumnos para construir esos conceptos, así que constituye una herramienta útil para guiar las construcciones de los alumnos en su construcción. En consecuencia, en ambas partes de la investigación se utilizó la Teoría APOE para diseñar actividades que ayudaran a los alumnos en la construcción de los conceptos de interés.

A continuación se hace una breve descripción de los dos marcos teóricos que se utilizan en esta investigación. Esta descripción termina con la elaboración de un marco global en el que se usan ambos de manera complementaria.

2.1 MODELOS Y MODELACIÓN

La Teoría de Modelos y Modelación (Lesh y Doerr, 2003) es un marco conceptual que propone que el aprendizaje puede desarrollarse a partir del trabajo de los alumnos con una situación real que les permita utilizar sus conocimientos previos para desarrollar un modelo matemático con el cual puedan dar respuesta a algunas preguntas de interés relacionadas con la situación planteada. La solución del problema puede requerir, por otra parte, el uso de nuevos conocimientos por parte de los alumnos y esos conocimientos, se pueden construir, de acuerdo a esta teoría, mediante el trabajo en equipo y durante la discusión con el profesor en el contexto del trabajo con el modelo.

Trigueros (2009) menciona que esta teoría es un marco teórico útil para el desarrollo de actividades que susciten modelos que permitan a los alumnos desarrollar ideas matemáticas en un contexto realista. Esta perspectiva de modelación se enfoca en el desarrollo de herramientas conceptuales que sean útiles en la toma de decisiones. La idea principal de la perspectiva de Modelos y

Modelación consiste en introducir situaciones complejas reales que dirijan a los alumnos hacia el pensamiento matemático y que permitan generar productos complejos y herramientas conceptuales para conseguir la meta que se plantea en el trabajo con la situación real. Estos productos se construyen durante ciclos de trabajo y reflexión y pueden, en cada ciclo, ser evaluados por los propios alumnos, por el maestro y por los investigadores.

En la opinión de English, Lesh y Fennewald (2008) esta teoría no fue desarrollada primordialmente para investigar la solución de problemas per se, sino para investigar el desarrollo de los conceptos matemáticos de los alumnos y entender el proceso que se sigue para resolver un problema. Para estos autores, la Teoría de Modelos y Modelación propone que las actividades de solución de problemas son actividades orientadas hacia una meta, en las que quienes resuelven los problemas, necesitan hacer adaptaciones significativas a sus actuales formas de pensar matemáticamente para lograr la meta deseada. Cuando se presenta un problema de modelación a los alumnos, se espera que usen, de entre sus conocimientos matemáticos, aquéllos que les pueden ser útiles en la solución del problema que enfrentan. Las actividades de modelación tienen como finalidad promover un desarrollo significativo del razonamiento matemático en un ambiente realista. Estas actividades le dan al maestro la oportunidad de observar y analizar aspectos sutiles del desarrollo matemático de los alumnos y tener una visión más clara de su proceso de razonamiento. Así, el maestro puede observar cómo los alumnos verifican y justifican su modelo matemático en lugar de sólo observar su éxito o fracaso cuando responden a una pregunta o problema específicos.

Los investigadores que han trabajado con esta perspectiva han desarrollado un conjunto de criterios que deben satisfacer los problemas que se plantearán a los alumnos para que puedan aplicarse en el aula de forma exitosa y contribuyan así al proceso de aprendizaje de los alumnos (Carlson, Larsen y Lesh, 2003). Estos principios son:

1. Principio de realidad. El contexto que motiva el problema debe ser suficientemente realista para motivar a los alumnos. Además, debe sugerir suficientes elementos matemáticos para que la actividad de modelación no sea trivial.

2. Principio de construcción de modelos. El marco del problema debe ser suficientemente rico para que el desarrollo del modelo requiera de conceptos matemáticos. Debe plantear la necesidad de transformar situaciones reales, problemas, en un lenguaje que permita analizarlos con conceptos y técnicas matemáticas.

3. Principio de autoevaluación. Los alumnos deben poder verificar su progreso y revisar si los modelos propuestos describen adecuadamente el comportamiento de la situación real que están

modelando. La evaluación debe indicar a los alumnos cuándo el modelo necesita ser modificado.

4. Principio de elaboración de documentos o de documentación. Los alumnos deben ser capaces de registrar su proceso de pensamiento escribiendo supuestos y modelos en términos verbales y matemáticos. Esto permite al maestro verificar el progreso y evaluar el desarrollo del pensamiento de los alumnos para sugerir actividades adicionales o conceptos nuevos que mejoren el trabajo con el modelo.

5. Principio de generalización de los constructos. Los modelos desarrollados pueden generalizarse para ser utilizados en otras situaciones o problemas. El modelo desarrollado debe convertirse en un nuevo objeto matemático que los alumnos puedan aplicar a otros problemas y servirles como una nueva herramienta de análisis.

6. Principio de simplicidad. El problema debe representar un reto para los alumnos pero no tan complicado que no les sea posible abordarlo.

A continuación se describe la Teoría APOE.

2.2 TEORÍA APOE

La Teoría APOE (acción, proceso, objeto y esquema) es una teoría cognitiva que fue desarrollada como parte de un esfuerzo por entender cómo las matemáticas se aprenden y qué se puede hacer en la enseñanza para ayudar a los alumnos en su aprendizaje. En este marco se busca entender cómo, una teoría cognitiva sobre el aprendizaje de matemáticas puede ayudar al proceso de aprendizaje al explicar fenómenos que se observan en los alumnos que están tratando de construir conceptos matemáticos y sugerir acciones pedagógicas que puedan ayudar en este proceso de aprendizaje. Esta teoría, desarrollada en sus inicios por Ed Dubinsky en 1985, está basada en el principio de que la investigación en Matemática Educativa se refuerza de muchas formas cuando se basa en una perspectiva teórica. Dubinsky tomó de la epistemología genética de Piaget los elementos que consideró indispensables para la construcción de conocimientos matemáticos y definió ciertos conceptos que forman el cuerpo de la Teoría APOE.

La Teoría APOE tiene como marco de referencia epistemológica a la teoría de Piaget. Toma las ideas piagetianas sobre la manera de pasar de un estado de conocimiento a otro para analizar la forma en que se construyen o aprenden conceptos matemáticos. Sin embargo, se enfoca en cómo se aprenden los conceptos matemáticos, en particular, en los correspondientes a las matemáticas universitarias; aunque se ha usado también en otros niveles escolares.

Siempre que se utilizan teorías o resultados que provienen de un contexto epistemológico en otra ciencia se requiere hacer una adaptación para adecuarlos y poder usarlos en su nuevo entorno. Es así que, el uso de la epistemología de Piaget condujo a la elaboración de una nueva teoría que, basada en las ideas de dicha epistemología, fuera de utilidad en el contexto educativo donde se desea aplicar. Al hacer esta transposición de la epistemología a la educación, fue necesario incorporar nuevas estructuras teóricas, así como establecer nuevas definiciones y nuevas relaciones entre ellas.

La Teoría APOE nació al estudiar el mecanismo de construcción de conocimientos conocido como abstracción reflexiva, que Piaget usa para describir el desarrollo del pensamiento lógico en niños y así extender la aplicación de este mecanismo al análisis del aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario. El mecanismo principal de construcción del conocimiento matemático dentro de esta teoría es, pues, la abstracción reflexiva. Este mecanismo se activa a través de las acciones físicas o mentales que un alumno realiza sobre el objeto de conocimiento cuando reflexiona sobre ellas. Del mismo modo que en la teoría de Piaget, la interacción entre el sujeto y el objeto de conocimiento se considera como dialéctica, es decir, no es posible separar al objeto de conocimiento del sujeto que conoce.

La Teoría APOE proporciona una base teórica al análisis de la forma en que las ideas matemáticas de los alumnos evolucionan y, al mismo tiempo, propone una metodología para favorecer que los alumnos hagan las construcciones necesarias de manera que esta evolución pueda tener lugar y el aprendizaje de los conceptos matemáticos sea efectivo. Constituye una herramienta que puede usarse para explicar, objetivamente, las dificultades de los alumnos frente a una gran variedad de conceptos matemáticos y sugerir formas en que pueden aprenderlos; señala estrategias que llevan a un mejor aprendizaje de conceptos matemáticos abstractos o complejos y mejora el uso que se hace de ellos para probar teoremas y resolver problemas.

Con la Teoría APOE como marco teórico se han realizado investigaciones en áreas como cálculo, álgebra abstracta, matemáticas discreta, estadística, teoría de números, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales. En Arnon et al. (2014) se mencionan más de 120 publicaciones realizadas en los últimos 25 años en todo el mundo que hacen uso de esta teoría. Se ha usado, también, y ha sido eficaz, en el diseño de enseñanza de conceptos matemáticos básicos como factorización de un número en sus primos, divisibilidad, máximo común divisor y mínimo común múltiplo (Bodí, 2006) y fracciones (Arnon, Nesher y Nirenburg, 1999).

El análisis teórico, conocido como descomposición genética, intenta predecir las construcciones mentales que los alumnos deben hacer para entender un concepto. Con este análisis se diseñan estrategias pedagógicas: actividades y ejercicios que se trabajan en clase y sirven para ayudar a los alumnos a construir las estructuras mentales necesarias para el aprendizaje. Después se analizan los datos y de acuerdo a los resultados obtenidos se refina o se valida el análisis teórico. El análisis teórico supone que un individuo no aprende los conceptos directamente. Si ya ha construido las estructuras apropiadas el aprendizaje se facilita, pero si no lo ha hecho, entonces éste se vuelve muy difícil o casi imposible. La finalidad de este análisis es ayudar a los alumnos a construir las estructuras necesarias y favorecer la construcción de relaciones entre ellas y los conceptos matemáticos.

Esta teoría considera que todos los conceptos matemáticos pueden construirse mediante acciones, procesos, objetos y esquemas. La hipótesis fundamental de esta teoría es que “el conocimiento matemático consiste en la tendencia del individuo en enfrentar problemas matemáticos construyendo acciones, procesos y objetos mentales y organizándolos en esquemas que tengan sentido con estos problemas y les permitan resolver los problemas” (Dubinksy y McDonald, 2001, p.274).

Las componentes o estructuras básicas de esta teoría se definen de la siguiente manera (Arnon et al., 2014):

ACCIONES. Son transformaciones de los objetos cognitivos previamente construidos que un alumno percibe como externas o que constituyen instrucciones que el alumno requiere para realizar cada operación de un procedimiento. La realización de acciones constituye el inicio de la construcción de cualquier concepto matemático, por ello, son indispensables. Es decir, un alumno que muestra un conocimiento de una transformación limitada a una concepción acción no puede ejecutar la transformación más que con indicaciones externas que le den detalles sobre los pasos a seguir. Por ejemplo, en el caso del concepto de valores propios un alumno que muestra una concepción acción usa de forma memorizada el algoritmo de búsqueda de los valores y vectores propios de una matriz dada para encontrarlos. Sin embargo, es incapaz de reconocer si un valor o un vector dado son o no valores o vectores propios de una matriz sin resolver la ecuación característica.

PROCESOS. Cuando la acción o las acciones se repiten, el alumno puede reflexionar sobre ellas de tal forma que ya no requiere de las instrucciones externas, las puede imaginar o llevar a cabo sin seguir el orden específico dado por las acciones. En este caso, se considera, en la teoría, que las acciones han sido interiorizadas en un proceso. El proceso hace una transformación semejante a la de la acción o las acciones sin necesidad de algún estímulo externo o de seguir pasos memorizados. Si un alumno muestra una concepción proceso de una transformación puede reflexionar sobre los pasos de la transformación, los puede describir o invertir sin realmente efectuarlos; tiene más control sobre la transformación o transformaciones que requiere aplicar, puede construir diferentes procesos ejecutando diversas cadenas de acciones sobre un concepto y puede coordinarlo con otros procesos, o revertirlo para obtener un proceso nuevo. En el caso del ejemplo anterior, un alumno que muestra una concepción proceso de valores y vectores propios, a diferencia de los que muestran una concepción acción, es capaz de encontrar las condiciones que debe cumplir un valor o un vector dado para ser efectivamente valor o vector propio de una matriz dada. No tiene necesidad de resolver siempre la ecuación característica y relaciona estos conceptos con otros del curso como dependencia lineal y determinantes.

OBJETOS. Cuando un alumno enfrenta la necesidad de hacer acciones sobre un proceso y se da cuenta de su totalidad, puede encapsular el proceso en un objeto cognitivo. Este alumno ha construido una concepción objeto de un concepto matemático si es capaz de trabajar con él como una entidad, la cual puede transformar mediante nuevas acciones, o analizar sus propiedades. Los alumnos pueden desencapsular el objeto en el proceso que le dio origen para trabajar nuevamente con el proceso si es necesario en la resolución de un problema. Regresando al ejemplo anterior, un alumno que muestra una concepción objeto es capaz de trabajar con los valores y vectores propios como una entidad, independientemente de si son reales o complejos. Esto se observa en su capacidad de comparar vectores propios, por ejemplo, explicar con claridad sus propiedades, como su relación con la posibilidad de diagonalizar una matriz, e identificarlos en aplicaciones tales como los Procesos de Markov.

ESQUEMAS. Un esquema para determinado tema o concepto matemático es la colección de acciones, procesos y objetos que un alumno ha construido, que están ligados entre sí mediante relaciones de naturaleza diversa y que el alumno evoca, de manera no necesariamente consciente, como un marco más o menos coherente en la solución de problemas específicos ligados a los conceptos matemáticos relacionados con el esquema. Cuando el esquema es coherente, el alumno es capaz de reconocer aquellas situaciones donde puede aplicarse y discriminar entre los tipos de problemas que pueden o no resolverse mediante su uso. El alumno puede además, conocer sus posibilidades y limitaciones. Cuando el alumno es capaz de considerar al esquema como un objeto sobre el cual puede ejecutar nuevas acciones se considera que el alumno ha tematizado el esquema. Notamos, entonces que en la Teoría APOE existen dos formas de construir objetos mediante la encapsulación de un proceso o mediante la tematización de un esquema. Siguiendo con el ejemplo, un alumno que tiene un esquema coherente de valores, vectores y espacios propios identifica problemas en contextos diversos que pueden resolverse usando estos conceptos. Muestra además que ha construido la relación entre valores y vectores propios como procesos u objetos; que es capaz de identificar las propiedades de los espacios propios como proceso; que ha construido relaciones con otros procesos u objetos tales como los relativos al espacio nulo, a la matriz inversa, al determinante, a la independencia lineal y que es capaz de utilizar indistintamente la interpretación algebraica y geométrica de los conceptos de valor, vector y espacio propio.

Las construcciones anteriores no necesariamente deben construirse en el orden en que se presentan aquí. Los alumnos pueden ir y venir entre estas estructuras en la construcción de un concepto. Pueden incluso mostrar distintas construcciones para determinados aspectos de un mismo concepto matemático. Los investigadores pueden comparar el trabajo de los alumnos analizando las construcciones que muestren cuando realizan actividades específicas. En la Teoría APOE el mecanismo para pasar de una estructura a la otra es la abstracción reflexiva. Esta se considera como la reflexión de un alumno sobre el sentido de las operaciones que efectúa sobre sus acciones o procesos en relación con algún concepto matemático.

Como ya se había mencionado, la Teoría APOE propone que a partir de estas estructuras y de los mecanismos asociados a su construcción es posible diseñar un modelo teórico detallado de la construcción de cada concepto específico. Este modelo se conoce como descomposición genética del concepto en cuestión y en él se intenta predecir las posibles construcciones que conducen al aprendizaje de un concepto o tema matemático. El diseño de una primera descomposición genética puede partir de la experiencia de los investigadores como maestros, del análisis epistemológico o histórico de las matemáticas involucradas, del análisis de los resultados encontrados en la literatura sobre el concepto en cuestión, de la experiencia de los investigadores como maestros o de una combinación de estos factores.

Una vez diseñada una descomposición genética preliminar se utiliza en la investigación para analizar las construcciones que muestran distintos alumnos cuando están aprendiendo el concepto o los conceptos de interés. Estas construcciones se manifiestan a través del trabajo y las explicaciones de los alumnos cuando resuelven actividades, ejercicios y problemas relacionados con dicho concepto. Los resultados de la investigación se utilizan para refinar, si es necesario, la descomposición genética de manera que sea más congruente con la forma observada en la que aprenden los alumnos. Este proceso de investigación y refinación puede repetirse hasta obtener una descomposición genética que permite enseñar de manera efectiva el concepto y explicar las construcciones propuestas como necesarias para su aprendizaje. Es importante notar que una descomposición genética no es única. Pueden coexistir distintas descomposiciones genéticas de un mismo concepto, siempre y cuando den cuenta de la construcción del mismo de forma adecuada.

La descomposición genética pone en relieve las construcciones cognitivas que pueden ser necesarias para el aprendizaje. En ella se destacan las acciones y los distintos procesos, además de la forma de estructurarlos para posibilitar la construcción de la concepción objeto y para propiciar también la construcción de los esquemas que se consideran necesarios para el aprendizaje de la parte de las matemáticas en la que se está trabajando. Actualmente se cuenta con descomposiciones genéticas diseñadas por diversos autores sobre una gran variedad de conceptos matemáticos, ver por ejemplo: McDonald, Mathews y Strobel, 2000; Gavilán, García y Linares, 2006; Trigueros, 2009; Oktaç y Trigueros, 2010; Roa-Fuentes y Oktaç, 2012; Arnon et al., 2014.

Mediante la descomposición genética, como modelo de aprendizaje de un concepto o un tema de las matemáticas, es posible diseñar actividades que permitan a los alumnos hacer las construcciones predichas en ella. Estas actividades se utilizan en el aula siguiendo un ciclo de enseñanza específico: el ciclo ACE. En él se comienza por trabajar colaborativamente con algunas actividades (A) en el aula en pequeños equipos, posteriormente se discute el trabajo en clase (C) con todo el grupo y finalmente se utilizan algunas actividades para que se trabajen como ejercicios (E) de tarea. Este ciclo se repite hasta que se han realizado todas las actividades diseñadas.

La Teoría APOE incluye una metodología de investigación además de la metodología de enseñanza descrita anteriormente. Esta metodología consta de tres partes:

- Diseño de una descomposición genética del concepto matemático.

- Desarrollo e implementación de métodos de instrucción basados en el análisis teórico en los que se utiliza el ciclo ACE que incluye estrategias didácticas tales como aprendizaje colaborativo y/o programación en computadora.

- Recolección y análisis de datos para poner a prueba y refinar, si es necesario, la descomposición genética preliminar y las actividades de instrucción.

El análisis teórico se centra en el diseño y rediseño, cuando es necesario, de la descomposición genética. Con base en ella se propone una estrategia didáctica para ayudar a los alumnos a hacer las construcciones mentales involucradas en el aprendizaje del concepto matemático. Al final se diseñan instrumentos cuantitativos y/o cualitativos para determinar las construcciones mentales que muestran los alumnos en relación a los conceptos matemáticos en cuestión. El análisis teórico indica, a través de las construcciones incluidas en la descomposición genética, preguntas que los investigadores pueden hacer en el proceso de análisis de los datos. Los resultados de dicho análisis muestran qué tan efectiva ha sido la instrucción y las posibles revisiones a la descomposición genética que son necesarias para mejorarla como modelo predictivo de las construcciones de los alumnos.

Un aspecto importante de la Teoría APOE, como instrumento de investigación y de enseñanza, es que para trabajar con ella es necesario interpretar los conceptos matemáticos desde el punto de vista tanto de las matemáticas mismas como desde el cognitivo. Por lo tanto, permite incorporar dentro del estudio de la Matemática Educativa a la Matemática. La construcción de los conceptos matemáticos sigue una lógica que es diferente a la utilizada para construir conceptos de otras disciplinas. Los conceptos matemáticos conforman su propio sistema, un lugar donde se desarrollan y donde se establecen relaciones entre ellos y con conceptos de otras disciplinas. Al insertar las matemáticas en el ámbito escolar estas relaciones cambian, pero es muy importante conocerlas y por ello interesan en la Matemática Educativa. La teoría incluye, además de la parte cognitiva, la parte social del aprendizaje, pues se considera que la colaboración entre los alumnos y el profesor es indispensable en la construcción del conocimiento.

Dentro de la Teoría APOE las distintas representaciones se consideran como una parte integral en la construcción de los conceptos. El desarrollo de la representación demanda una interiorización de las acciones, una encapsulación de los procesos y la construcción de relaciones con el objeto matemático. Trigueros y Martínez-Planell (2010) mencionan que la Teoría APOE no habla del papel de la representación en la comprensión de los conceptos, reportan que algunos autores consideran que, cuando se establecen conexiones entre constructos internos y representaciones a través de los sentidos, está involucrada la visualización. Según Trigueros y Martinez-Planell, la visualización también se puede considerar en el caso de la conexión entre representaciones o imágenes mentales. Las construcciones que van de representaciones mentales a otras representaciones mentales pueden describirse entonces por la interiorización, coordinación o reversión de procesos o por la encapsulación de objetos. Comentan que este punto de vista es consistente con la propuesta de Duval (1999, 2006) quien considera que el proceso de pensamiento de las matemáticas, requiere no solo del uso de sistemas de representación sino también de su coordinación cognitiva. Para él la visualización y el razonamiento son procesos de pensamiento complementarios.

El paso de la descomposición genética a las actividades didácticas no es evidente, pero es muy importante pues implica poner una teoría en función didáctica. Cada actividad debe tener una meta específica para facilitar las construcciones que la descomposición genética prevé y la secuencia global debe permitir a los alumnos reforzar estas construcciones.

Esta teoría ha sido utilizada, como se ha mencionado con anterioridad, por investigadores de distintos países para estudiar la forma en que los alumnos construyen una gran variedad de conceptos matemáticos. También, se ha usado para escribir libros de texto. El uso de estos libros ha sido objeto de investigaciones que han demostrado que, efectivamente, los alumnos que los utilizan logran hacer las construcciones previstas por la teoría y aprenden los conceptos a mayor profundidad que los alumnos que han aprendido mediante otros métodos. Se ha probado que, en general bastan dos o tres iteraciones del ciclo de investigación para diseñar materiales que promuevan efectivamente el aprendizaje de los alumnos (Weller, Clark, Dubinsky, Loch, McDonald y Merkovsky, 2000).

La Teoría APOE pone de relieve las dificultades que los alumnos enfrentan y superan y permite a los investigadores ver más allá de la manera en la que se aprende cada concepto en particular y entender la forma en la que los distintos conceptos se van estructurando unos con otros para ir conformando lo que llamamos pensamiento matemático. Es adecuada para estudiar el aprendizaje como fenómeno de la Educación Matemática pues permite analizar con detalle la forma en que los alumnos construyen los conceptos matemáticos y posibilita, además, diseñar didácticas específicas, basadas en modelos teóricos que se pueden poner a prueba de manera experimental.

2.3 Uso de Modelos y Modelación y la Teoría APOE de manera complementaria

El objetivo de este trabajo es analizar el aprendizaje de varios conceptos del álgebra lineal a través de las estrategias que los alumnos ponen en juego frente a problemas que requieren, para su solución, de modelación matemática y del resultado del uso de actividades conceptuales diseñadas con base en la descomposición genética de los conceptos de interés. La Teoría APOE no propone esta vía para el aprendizaje, sin embargo, no se opone a ella. Se consideró que para poder analizar de manera efectiva el aprendizaje de los alumnos es necesario destacar la complementariedad de las dos teorías para, posteriormente utilizarlas en el diseño de la investigación. A continuación se describe un marco teórico que abarca de manera complementaria las dos propuestas teóricas.

El problema de modelación diseñado mediante los criterios descritos por la perspectiva de Modelos y Modelación contribuye a fomentar el uso de los conocimientos matemáticos que los alumnos han construido con anterioridad y que ponen en juego en la solución de la situación que enfrentan. El análisis de ese conocimiento previo puede hacerse con la Teoría APOE en términos de las construcciones mentales que los alumnos muestran. Por otra parte, el trabajo con el modelo estimula la necesidad de nuevos conocimientos y mediante la Teoría APOE pueden diseñarse actividades específicas, basadas en una descomposición genética, que permiten promover las construcciones relacionadas con el aprendizaje de los nuevos conceptos, así como guiar al maestro en sus intervenciones y en el análisis de las respuestas de los alumnos. Así, las dos teorías pueden utilizarse en el diseño de una situación de enseñanza. Los modelos permitirán abordar la necesidad de introducir nuevos conceptos y darán pie a las actividades desarrolladas con la Teoría APOE. Estas actividades darán, a su vez, oportunidades para que los alumnos regresen al trabajo con el modelo utilizando nuevas herramientas conceptuales que permiten el desarrollo de nuevos productos. De esta manera, los ciclos de enseñanza y de investigación de la Teoría APOE se insertan de manera natural en los distintos ciclos de modelación que entran en juego de acuerdo a la perspectiva de Modelos y Modelación.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA RELACIONADA CON EL PROBLEMA DE LAS PATINETAS VOLADORAS

Dada la complejidad de la investigación que se reporta en este trabajo, se tomó la decisión de describirla en dos secciones diferentes. La primera, la metodología seguida en la implementación y análisis de resultados del problema elegido, que se denomina patinetas voladoras, para la enseñanza de los conceptos relacionados con el espacio vectorial. En ella, y como ya se mencionó en el capítulo 1, se tomó y adaptó un problema diseñado por otros investigadores y descomposiciones genéticas propuestas para los conceptos de interés existentes en la literatura. La segunda sección de metodología se dedica a la seguida en la implementación y análisis de resultados de los problemas de modelación diseñados para la enseñanza de los valores, vectores y espacios propios. En este caso, tanto el problema, como la descomposición genética corresponden a un diseño original de este trabajo.

La metodología seguida en la parte correspondiente al uso y análisis de los resultados del problema de las patinetas voladoras, puede describirse en cinco grandes rubros que se describirán a detalle más adelante:

3.1 DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

1. Elección de las descomposiciones genéticas relativas a los conceptos de interés. Se decidió tomar como base del diseño de las actividades conceptuales, de los instrumentos de investigación y del análisis del aprendizaje de los conceptos las siguientes: la propuesta por Kú (2012) para combinación lineal, conjunto generador y espacio generado; la propuesta por esta misma autora (Kú, 2007) para base de un espacio vectorial y una adaptación de la propuesta por Trigueros y Lozano (2010) para independencia y dependencia lineal.

2. Análisis teórico utilizando la Teoría de Modelos y Modelación del problema de las patinetas voladoras y que se describe más adelante.

3.2 DISEÑO DE INSTRUMENTOS

Usando las descomposiciones genéticas mencionadas anteriormente se diseñaron los instrumentos correspondientes a esta parte de la investigación: en primer término, una serie de actividades didácticas para ser empleadas en el aula como apoyo a la construcción de los conceptos suscitados por el uso del problema de modelación y para ponerlas nuevamente a prueba y proponer su refinación o validarlas con alumnos en situación de clase. Algunas de estas actividades se utilizaron además como preguntas de un cuestionario, como tarea o como preguntas guía en una entrevista semi-estructurada que se hizo a los alumnos al final del curso. Por facilidad, dichas actividades se muestran organizadas en torno a los conceptos que abordan.

1. Combinación lineal
2. Conjunto generador y espacio generado
3. Independencia y dependencia lineal
4. Base y dimensión

3.3 Metodología didáctica

La metodología propuesta para la primera fase consistió en el trabajo de los alumnos con el modelo y la discusión del modelo con todo el grupo. En esta fase, se determinaron los conocimientos previos de los alumnos, sus estrategias de solución y la necesidad de utilizar nuevos conceptos para dar respuesta a las preguntas planteadas en el problema de modelación. Durante la segunda fase, se utilizaron las actividades conceptuales diseñadas con base en la descomposición genética para apoyar la construcción de los nuevos conceptos que serían útiles para continuar el trabajo con el modelo. Se discutieron, además, dichas actividades y el modelo con el fin de institucionalizar y formalizar el conocimiento y se dejaron ejercicios de tarea, relacionados con los conceptos introducidos con el modelo y las actividades conceptuales, para reforzar la reflexión y las construcciones de los alumnos.

3.4 Metodología de investigación de la Teoría APOE para el análisis de los datos obtenidos

Es decir, análisis del trabajo de los alumnos con el modelo en términos de sus estrategias y de los conceptos empleados y las necesidades de nuevos conceptos, y análisis de las respuestas de los alumnos a las preguntas del cuestionario utilizado en clase.

3.5 Análisis de los resultados de las entrevistas

Se diseñó una entrevista semi-estructurada que se aplicó, al finalizar el curso, a seis alumnos cada semestre para analizar las construcciones predichas en las descomposiciones genéticas a mayor profundidad y su aprendizaje.

A continuación se describe con detalle la metodología seguida en cada uno de estos rubros.

3.1 DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

En concordancia con la metodología de investigación de la Teoría APOE, es necesario contar con una descomposición genética. Al tratarse, en este caso del análisis de la construcción de diversos conceptos relacionados con el espacio vectorial para los cuales se han validado las descomposiciones genéticas respectivas, se tomó la decisión de utilizarlas para la presente investigación.

3.1.1 DESCOMPOSICIONES GENÉTICAS

Las descomposiciones genéticas utilizadas se muestran a continuación.

Descomposición genética de combinación lineal (Kú, 2012)

> Dado un espacio vectorial ***V***, un conjunto específico de vectores ***S*** pertenecientes a ***V*** y los escalares de un cuerpo ***K***, los estudiantes empiezan a realizar acciones con los vectores de ***S*** y los escalares de ***K***. Estas acciones consisten, por un lado, en realizar multiplicaciones de vectores por un escalar y por otro, la suma entre ellos para formar un nuevo vector del espacio vectorial ***V***. Al repetir cada una de estas acciones y reflexionar sobre ellas, se interiorizan en un proceso, donde el estudiante puede pensar en formar productos de vectores por escalares y realizar sumas de vectores sin tener que trabajar con elementos concretos. Estos dos procesos se coordinan en el proceso de construir un nuevo vector que es un elemento del espacio vectorial; dicho proceso es el de combinaciones lineales.
>
> Posteriormente el estudiante puede aplicar el proceso inverso, a saber, comprobar si existen escalares que puedan expresar a un vector dado por suma de vectores por algún escalar. En este caso se implica el proceso de encontrar el conjunto solución del sistema de ecuaciones resultante, así como la noción de variable. Así, el estudiante puede realizar combinaciones lineales y puede determinar si algún vector ***w*** es una combinación lineal de un conjunto de vectores dados (ver diagrama).

Este proceso se encapsula en el objeto combinación lineal; así el estudiante puede pensar en distintas combinaciones lineales de los mismos vectores y puede operar sobre ellas (Kú, 2012, p. 50 – 51).

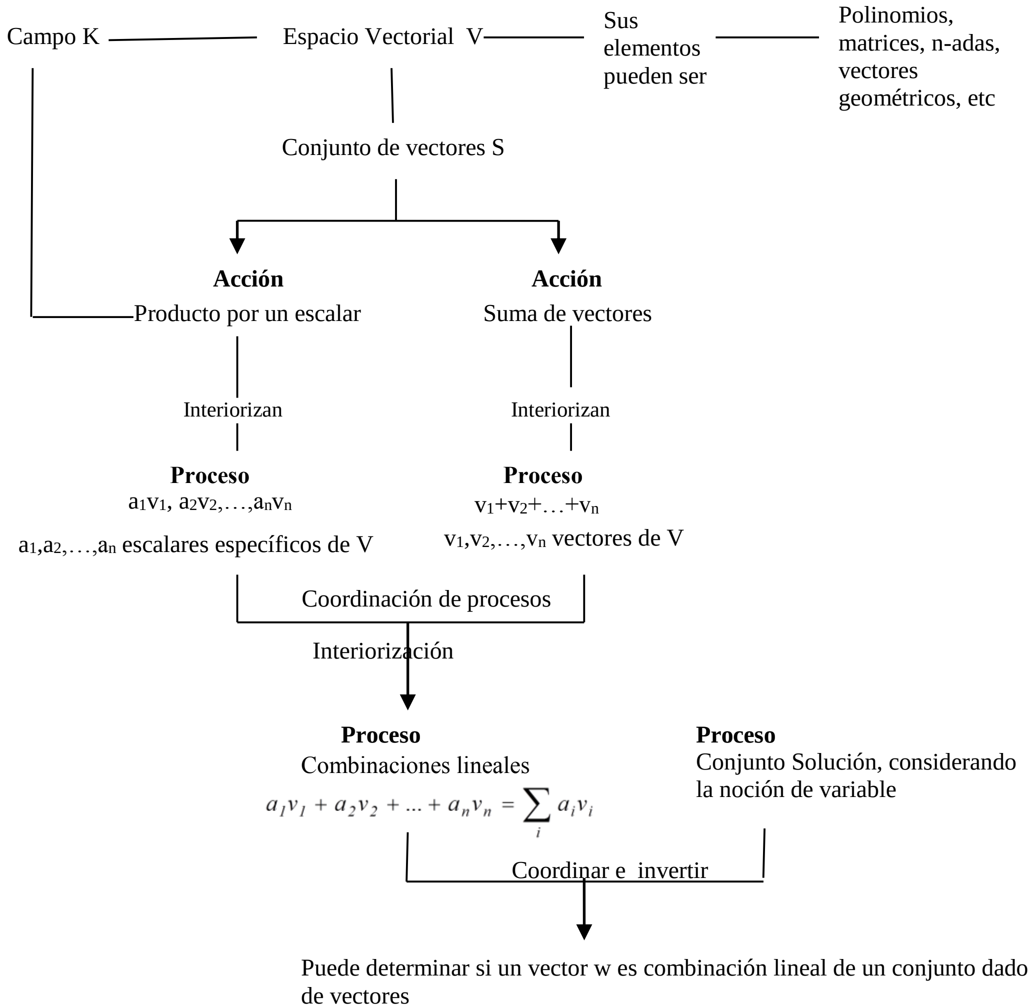


Diagrama de Kú, 2012, p. 51.

Descomposición genética de conjunto generador y espacio generado (Kú, 2012)

Para construir el concepto de conjunto generador, el estudiante puede empezar formando todas las combinaciones lineales posibles de un conjunto de vectores de ***S***. Estas acciones se interiorizan en el proceso de conjunto generador, cuando el estudiante es capaz de pensar en formar combinaciones lineales sin tener que realizar las acciones explícitamente y hasta pensar en formar combinaciones lineales de conjuntos que contienen un número infinito de elementos. Este proceso se encapsula en el objeto conjunto generador. Esta concepción objeto implica que los estudiantes sean capaces de explicar que un espacio vectorial dado puede ser generado por diferentes conjuntos generadores, es decir que no tiene que ser generado de manera única. Asimismo se da cuenta que los conjuntos generadores no tienen por qué no tener elementos en común o por qué tener el mismo número de elementos. De esta manera el estudiante puede considerar que el número de elementos de los conjuntos no es un factor determinante para ser o no un conjunto generador de un espacio vectorial. En este caso el concepto espacio generado se da en términos del conjunto generador, como aquel conjunto ***T*** que se forma por todas la combinaciones lineales de los vectores de ***S***.

Las construcciones anteriores deben permitir que el estudiante sea capaz de distinguir los conceptos espacio generado y conjunto generador, así como no confundir estos conceptos y otros como base de un espacio vectorial (Kú, 2012, p. 52 – 53).

Adaptación de la descomposición genética de independencia y dependencia lineal de Trigueros y Lozano, 2010

Conocimientos previos:

1) Esquema algebraico que incluye la interpretación y uso flexible de variables en sus tres diferentes aspectos.

2) Vectores en campos finitos $\boldsymbol{Z^n}$, $\boldsymbol{R^2}$ y $\boldsymbol{R^3}$ como proceso: incluye la posibilidad de operar con vectores y operar vectores con escalares.

3) Esquema de conjunto que incluye los procesos de usar notación de conjuntos y describir los elementos de un conjunto en diferentes maneras y también el proceso de formar conjuntos con distintos tipos de elementos.

Descomposición genética:

Se realizan acciones sobre vectores para formar combinaciones lineales de un conjunto dado de vectores y para representarlos geométricamente cuando sea posible. Estas acciones se generalizan en un proceso que permita la consideración de todas las posibles combinaciones lineales de esos vectores. Este proceso se coordina con el esquema de conjunto para considerar el conjunto de los vectores resultantes. Este proceso se encapsula en el objeto combinación lineal.

La acción de buscar una combinación lineal de la que se obtenga como resultado un vector dado, en cualquier representación, se interioriza y coordina con el esquema de conjunto para considerar un conjunto de combinaciones lineales que puede representar a dicho vector, incluyendo al vector cero. Este proceso se encapsula en un objeto vector como combinación lineal.

Las acciones necesarias para formar combinaciones lineales e igualarlas a vectores desconocidos para encontrar el sistema de ecuaciones correspondiente y su conjunto solución, se interiorizan en el proceso de considerar todos los vectores $\boldsymbol{Z}^n$ y $\boldsymbol{R}^n$ que pueden obtenerse de las combinaciones lineales de todos los elementos de un conjunto.

Se realizan acciones sobre vectores para determinar si un vector es combinación lineal de un conjunto dado de vectores, ***S***. Estas acciones se interiorizan y coordinan con el proceso de conjunto para encontrar el conjunto de todos los vectores que se pueden expresar como combinación lineal de los vectores en ***S***. Este proceso se encapsula en el objeto combinación lineal.

El proceso combinación lineal se utiliza para considerar si el vector cero es o no combinación lineal del conjunto ***S***. Este proceso se coordina con el proceso de conjunto solución de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales para determinar si la solución de este sistema es única o múltiple. Se pueden determinar los conjuntos ***S*** en los cuales existe una única forma de escribir al vector cero como combinación lineal (independencia lineal) y los conjuntos ***S*** en los cuales existen muchas formas de escribir al vector cero como combinación lineal (dependencia lineal). Estos procesos se denominan independencia y dependencia lineal (Trigueros y Lozano, 2010).

Descomposición genética de base de un espacio vectorial (Kú, 2007)

> Para construir el concepto de Base de un espacio vectorial ***V***, un individuo se deberá encontrar en un nivel de proceso del concepto de espacio vectorial y en un nivel de acción con las operaciones entre vectores incluyendo la multiplicación por un escalar.
>
> El individuo deberá realizar acciones con los elementos de un espacio vectorial ***V***, a través de una serie de acciones en las que verifica, si un vector puede escribirse como combinación lineal de otros vectores que pertenecen a un conjunto ***S*** dado o verificando si el conjunto de vectores dado es o no linealmente independiente en términos de la definición.
>
> El individuo repite estas acciones con vectores pertenecientes a diversos conjuntos de espacios vectoriales dados. A partir de la reflexión sobre estas acciones, el sujeto es capaz de interiorizarlas en un proceso que le permite

establecer si un vector dado o un conjunto de vectores pertenecientes a un espacio vectorial pueden o no ser escritos como combinaciones lineales de los vectores del conjunto original. A través de la abstracción reflexiva, el individuo puede considerar al conjunto de vectores que se pueden escribir en términos de los vectores dados como un todo, es decir, ha encapsulado el proceso de verificación en dicho conjunto de vectores. Esta encapsulación implica, además que el individuo es capaz de reconocer cuáles subconjuntos del espacio vectorial pueden generarse a partir del conjunto dado (conjunto generado).

El individuo puede además identificar a partir de las acciones que le permiten establecer combinaciones lineales de los elementos de conjuntos dados, cuáles de entre ellas producen el vector cero y de ahí determinar cuáles serían los conjuntos en los que existe una combinación lineal única que da como resultado el vector cero. Estas acciones se interiorizan en un proceso que permite determinar si un conjunto dado de vectores cumple con esta condición (Independencia lineal). Posteriormente, el individuo puede considerar este proceso como un todo, es decir, encapsularlo para pensar en los conjuntos de vectores que satisfacen esta propiedad.

El individuo puede además revertir los objetos en los procesos que les dieron origen para verificar las propiedades de los vectores que los conforman. Los procesos anteriores pueden, además coordinarse en un nuevo proceso en el que se verifica si los vectores de un conjunto dado son linealmente independientes y se determina cuáles vectores de un espacio vectorial se pueden generar a partir de ellos. Este proceso incluye también en decidir si dichos vectores son los indispensables para generar a todos los elementos de un espacio vectorial determinado. Este proceso se puede también encapsular, como un todo, en un objeto relacionado con el espacio vectorial en la mente del individuo: la base, que le permite, por una parte, caracterizar al espacio vectorial y por otra, ejercer sobre él nuevas acciones, como por ejemplo, determinar su dimensión, tomarla como punto de partida para cambiar de base, etc. Kú, 2007, p. 28 – 30.

3.1.2 ANÁLISIS TEÓRICO UTILIZANDO MODELOS Y MODELACIÓN

Se presenta el problema de las patinetas voladoras y se describe la metodología seguida en el uso de este problema. Su solución se encuentra en el anexo A.

Problema de las patinetas voladoras

El problema de las patinetas voladoras fue diseñado originalmente por Wawro, Rasmussen, Zandieh, Sweeney y Larson (2012). Ha sido utilizado en el ITAM durante varios años y se ha rediseñado de manera que permite la introducción de otros conceptos que van más allá de los de conjunto generador y espacio generado y se ha generalizado para incluir $\boldsymbol{R^n}$ a partir del análisis con vectores en $\boldsymbol{R^2}$ y $\boldsymbol{R^3}$. En este trabajo se utiliza para introducir los conceptos de combinación lineal, conjunto generador, espacio generado, independencia y dependencia lineal, base y dimensión. En este problema se presenta un escenario general en el contexto de un posible viaje por el espacio, se inicia con la exploración de una situación en la que se dan datos concretos, pero en el transcurso de toda la actividad el problema inicial se transforma en un modelo en general.

Este problema se usó en los semestres de agosto 2010 a enero 2014. Su análisis incluye lo que se espera que hagan los alumnos, sea correcto o no, y algunas de las dificultades que pueden enfrentar. A continuación se presenta el problema junto con un análisis:

Eres un joven viajero que deja su tierra natal por primera vez. Tus parientes quisieron ayudarte en tu viaje, así que antes de partir te dieron dos regalos. Te regalaron dos medios de transporte: una patineta voladora y una alfombra mágica. Tus parientes te informaron que tanto la patineta como la alfombra tienen restricciones a las cuales deben someterse:

- *Denotaremos el movimiento de la patineta con el vector* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} = (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{1})$.

Con esto queremos decir que si la patineta avanza "hacia adelante" durante una hora, se movería en un camino diagonal que resultaría en un desplazamiento de ***3*** *unidades hacia el este y* ***1*** *unidad hacia el norte a partir de su posición inicial.*

- *Denotaremos el movimiento de la alfombra mágica por el vector* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2})$.

Con esto queremos decir que si la alfombra mágica avanza "hacia adelante" durante una hora, se movería en un camino diagonal que resultaría en un desplazamiento de ***1*** *unidad hacia el este y* ***2*** *unidades hacia el norte a partir de su posición inicial.*

El viaje del sabio

Uno de tus parientes, El Tío Cramer, te recomendó que fueras en tu primer viaje a visitar al viejo sabio Gauss. El Tío Cramer dice que el viejo Gauss vive en una cabaña que se encuentra ***107*** *millas hacia el este y* ***64*** *millas hacia el norte de tu casa.*

PARTE I

► *¿Es posible usar la patineta y la alfombra mágica para llegar a la cabaña del viejo Gauss? Si lo es, ¿de qué manera? Si no es posible llegar con estos medios de transporte, ¿por qué?*

Se espera que los alumnos hagan la acción de graficar para localizar en el plano los vectores que representan el movimiento de la patineta y la alfombra y el punto que representa la cabaña del Tío Gauss. Gráficamente pueden hacer las acciones para ver el movimiento de cada vector y/o de los dos vectores para ver si es posible o no llegar al punto meta. Se espera que algunos alumnos hagan gráficas pero no puedan concluir, mientras que otros pueden intentar resolver el problema utilizando sistemas de ecuaciones lineales.

Se espera que algunos alumnos interioricen estas acciones en un proceso en el que coordinen la representación gráfica con la representación algebraica y hagan el proceso de escribir la ecuación algebraica y/o la ecuación vectorial y la resuelvan para encontrar el número de horas que necesitan usar la patineta y la alfombra para llegar a la cabaña de Gauss.

► *¿Es posible llegar a la cabaña del viejo Gauss utilizando solamente uno de los dos medios de transporte? ¿Cuál y de qué manera? Si no lo es, ¿por qué?*

Se espera que los alumnos hagan la acción de graficar el vector de la patineta y reconozcan que se mueven en una sola dirección por lo que no es posible llegar a la cabaña de Gauss. También, pueden hacer el proceso de escribir una ecuación vectorial y/o algebraica y determinar que no existen valores que resuelvan la ecuación. Es posible que algunos alumnos dibujen las gráficas pero que tengan problemas para interpretarlas y no sean capaces de concluir o justificar sus respuestas. El caso de la alfombra mágica sería equivalente.

Esta parte del problema tiene como objetivo que los alumnos utilicen conceptos conocidos y desarrollen métodos de solución que permitan la introducción del concepto de combinación lineal.

PARTE II

Cada semana el viejo Gauss mueve de lugar su cabaña. No estás seguro si el viejo está tratando de poner a prueba tu ingenio para encontrarlo, o si de verdad quiere esconderse en un lugar donde no puedas visitarlo. Determina a cuáles de *los siguientes lugares puedes llegar partiendo de tu casa utilizando la patineta y la alfombra. Para cada ubicación, explica cómo llegar o bien explica por qué es imposible llegar desde tu casa. Recuerda que Gauss vive en una cabaña que se encuentra **107** millas hacia el este y **64** millas hacia el norte de tu casa.*

► *Si mueve su casa **3** unidades hacia el oeste y **4** unidades al norte.*

► *Si mueve su casa **25** unidades hacia el este.*

► *Si mueve su casa **12** unidades hacia el este y **36** unidades al sur.*

Se espera que los alumnos hagan el proceso de resolver la ecuación vectorial y/o algebraica para encontrar el número de horas que deben usar la alfombra y la patineta para llegar a las distintas ubicaciones. Es de esperar que algunos alumnos dibujen una gráfica e intenten resolver gráficamente el problema. En la última ubicación, ***12*** unidades este y ***36*** unidades sur, el número de horas necesarias utilizando la alfombra es negativo. Se espera que analizando sus diagramas y ecuaciones algunos alumnos se den cuenta que este resultado significa que la alfombra va en reversa mientras que otros concluyan que un resultado negativo es imposible.

Esta parte del problema tiene como objetivo que los alumnos interioricen las acciones relacionadas con la combinación lineal en el proceso que permite escribir cualquier vector en términos de un conjunto dado de vectores, lo que permite iniciar las construcciones de conjunto generador y de espacio generado.

PARTE III

► *¿Existe alguna ubicación que no se pueda alcanzar utilizando ambos medios de transporte? Describe los lugares que puedes alcanzar utilizando una combinación de patineta con alfombra mágica y aquellos que no pueden ser alcanzados. Especifica los lugares geométricamente y algebraicamente. Incluye una representación simbólica usando vectores. También incluye un párrafo que explique tu respuesta.*

Se espera que los alumnos hagan el proceso de escribir la ecuación vectorial y/o algebraica correspondiente al problema y que se den cuenta que es posible llegar a cualquier punto en el espacio $\boldsymbol{R}^2$. También pueden hacer el proceso correspondiente mediante gráficas para indicar que moviéndose sobre los vectores y haciendo combinaciones de ellos pueden llegar a cualquier punto en $\boldsymbol{R}^2$. Se espera también que algunos alumnos tengan dificultades para generalizar los resultados anteriores o que no sean capaces de interpretar la situación y no puedan concluir qué puntos del espacio se pueden alcanzar en las condiciones que se les presentan.

Esta parte del problema tiene los mismos objetivos de la parte anterior con un énfasis mayor en la construcción del espacio generado.

Otras patinetas

<u>*PARTE IV*</u>

► *Ahora supón que tienes otros medios de transporte: una patineta* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{2}, \mathbf{3})$ *y una alfombra* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{5}, \mathbf{0})$. *¿Puedes ir a los mismos lugares que con las patinetas y alfombras anteriores? Explica tu respuesta.*

► *Supón que tienes una patineta* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{2}, \mathbf{3})$ *y una alfombra* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{6}, \mathbf{9})$. *¿Puedes ir a los mismos lugares que con tu patineta y alfombra anteriores? Explica tu respuesta.*

► *¿Puedes caracterizar a los pares de medios de transporte con los que puedes alcanzar cualquier lugar en el plano de coordenadas? ¿Qué pares permiten ir solamente a ciertos lugares del plano? ¿Cuáles son estos lugares?*

Se espera que los alumnos realicen las acciones y procesos que han hecho anteriormente para discriminar en qué condiciones es posible alcanzar cualquier punto del plano y en cuáles no, y en estas últimas distinguir los subconjuntos del plano a los que es posible llegar. Algunos alumnos tendrán dificultades para diferenciar los lugares que pueden alcanzar con las distintas parejas de vectores.

El objetivo de esta parte del problema consiste en dar oportunidades a los alumnos de interiorizar los procesos de conjunto generador y espacio generado. Además, la comparación de posibilidades permite encapsular en un objeto el proceso de combinación lineal y hacer las acciones iniciales para la construcción de los conceptos de independencia y dependencia lineal.

Tres medios de transporte

<u>*PARTE V*</u>

Supón ahora que tienes tres medios de transporte, por ejemplo, una patineta $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{2}, \mathbf{3})$, *una alfombra mágica* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{5}, \mathbf{0})$ *y un jet ski* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}} = (\mathbf{1}, \mathbf{4})$.

► *¿Puedes llegar a cualquier lado?*

Los alumnos pueden hacer la acción de graficar y/o escribir la ecuación vectorial y/o algebraica y darse cuenta que es posible llegar a cualquier punto del plano $\boldsymbol{R}^2$. Se espera que construyan la coordinación correspondiente a los procesos de solución múltiple de un sistema de ecuaciones y de dependencia lineal. Es posible, sin embargo, que algunos alumnos no sepan qué hacer con el tercer vector y resuelvan tomando a los vectores de dos en dos.

► *Supón que quieres ir a la ubicación* ***6*** *este y* ***1*** *sur ¿puedes llegar? ¿Cómo?*

Se espera que los alumnos hagan el proceso de resolver la ecuación vectorial y/o algebraica para encontrar el número de horas que usarán la patineta, la alfombra y el jet ski para llegar a la ubicación indicada. En este caso se espera que utilicen el proceso ya construido que les permita identificar que el sistema de ecuaciones correspondiente es subdeterminado por lo que su conjunto solución consta de un número infinito de soluciones y que esto significa, en relación con el problema, que existen muchas formas de llegar a dicha ubicación. Se espera que quienes enfrentaron dificultades al trabajar con tres vectores no puedan resolver las preguntas correspondientes a esta parte de la situación.

► *¿Qué conjuntos de tres medios de transporte permiten ir a cualquier lugar? ¿Cuáles no lo permiten? ¿Cómo puedes describir esto de manera geométrica y algebraica, usando vectores?*

Se espera que los alumnos usen las acciones o procesos construidos anteriormente para determinar que si los tres vectores son paralelos se llega a los puntos sobre una recta que pasa por el origen, en caso contrario se genera $\boldsymbol{R}^2$.

Con ello se espera que los alumnos interioricen las acciones que permitan la construcción del proceso espacio generado y que hagan las acciones necesarias para, posteriormente, distinguir los objetos conjunto generador y base de un espacio vectorial. Nuevamente se espera que quienes enfrentaron problemas al trabajar con tres vectores no puedan responder estas preguntas.

Como se señaló en el marco teórico, bajo la Teoría de Modelos y Modelación un problema debe cumplir seis principios para poder ser utilizado en una actividad que favorezca la emergencia de modelos por parte de los alumnos. A continuación se analiza el problema en términos de los seis principios de dicha teoría.

1. Principio de realidad. Este problema habla de una patineta voladora y una alfombra mágica, objetos que no existen. Sin embargo, los alumnos pueden imaginar el problema y otorgarle cierta realidad. Este problema crea un medio apropiado de experimentación para que los alumnos desarrollen ideas y razonamientos matemáticos. Usando su sentido común y sus conocimientos, los alumnos pueden buscar estrategias de resolución y modelos matemáticos útiles para resolver el problema.

2. Principio de construcción de modelos. Los alumnos necesitarán conceptos matemáticos al trabajar con el problema pues transformarán las condiciones de éste a un lenguaje matemático que pueda ser analizado con conceptos y técnicas matemáticas. Deben ser capaces de utilizar gráficas o ecuaciones algebraicas y vectoriales para construir un modelo para explicar la situación planteada. El modelo que se espera que construyan es el de combinación lineal.

3. Principio de autoevaluación. El problema pregunta si se puede o no llegar a determinados lugares en el plano $\boldsymbol{R^2}$. Usando su modelo y los conocimientos que han empezado a construir, los alumnos pueden verificar si el modelo que proponen y las herramientas matemáticas que están usando son las óptimas para responder las preguntas o si tienen necesidad de otros conceptos.

4. Principio de elaboración de documentos o de documentación. Los alumnos escriben sus supuestos, razonamientos y modelos en términos matemáticos y explican su procedimiento verbalmente. Esto permite al maestro verificar el progreso y evaluar el desarrollo del pensamiento de los alumnos para que pueda sugerir actividades adicionales o conceptos nuevos que mejoren el modelo. Además, a través de sus discusiones y la escritura de un resumen en el que describen, al final, el proceso completo de trabajo en el modelo, los alumnos documentan el proceso de solución.

5. Principio de generalización de los constructos. Al finalizar la actividad se espera que los alumnos interioricen las acciones en procesos y si es posible encapsulen los procesos encontrados en los objetos combinación lineal, conjunto generado, espacio generado, independencia y dependencia lineal, base y dimensión, y que construyan algunas relaciones entre ellos. Estos conceptos pueden generalizarse para ser utilizados en otras situaciones o problemas. También se pide a los alumnos que resuelvan problemas distintos que tienen relación (no directa) con el modelo trabajado para verificar si reconocen la estructura matemática del modelo en ellos y tengan la oportunidad de aplicar el mismo modelo en situaciones que aparentemente no están relacionadas con él.

6. Principio de simplicidad. El problema es lo suficientemente simple para que los alumnos empiecen a trabajar con él usando sus conocimientos previos, por ejemplo, gráficas y planos cartesianos y, más adelante hagan las construcciones asociadas a los conceptos nuevos a través del problema y de las actividades conceptuales.

A partir de este análisis se puede decir que el problema cumple los principios que debe satisfacer un problema según la Teoría de Modelos y Modelación.

A lo largo del trabajo de los alumnos con el problema se organizarán discusiones con el grupo para formalizar sus resultados mediante la definición de los conceptos introducidos: combinación lineal, conjunto generador, espacio generado, independencia y dependencia lineal, base y dimensión, con base en el trabajo de los alumnos. La maestra introducirá las definiciones y teoremas cuando considere que los alumnos han tenido suficientes oportunidades para hacer las construcciones sugeridas en la descomposición genética. Asimismo, los alumnos trabajarán en las actividades diseñadas con la descomposición genética de la

Teoría APOE que contribuirán a que hagan las construcciones mentales que se consideran necesarias para la construcción de estos conceptos.

3.2 DISEÑO DE INSTRUMENTOS

Se diseñó un conjunto de actividades didácticas con el fin de apoyar a los alumnos en la construcción de los conceptos de interés a través de la promoción de las acciones, de oportunidades de reflexión e interiorización, así como de coordinación de diferentes procesos y de encapsulación de objetos referidos en la descomposición genética. Algunas de estas actividades se inspiraron en algunos ejercicios del libro Lay (2012).

Es importante notar que los alumnos trabajaron en varias actividades semejantes a las que aquí se muestran, con datos diferentes, con el fin de brindarles oportunidades de reflexión sobre sus acciones y alentar la posibilidad de su interiorización en los procesos correspondientes y de encapsulación de objetos. Las actividades diseñadas, conjuntamente con su análisis en términos de la descomposición genética, se presentan a continuación, organizadas por temas del álgebra lineal. Su solución se encuentra en el anexo B.

3.2.1 COMBINACIÓN LINEAL

1.- Encuentra si el vector $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (-\mathbf{1}, \mathbf{14})$ *es combinación lineal de los vectores* $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2})$ *y* $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}} = (-\mathbf{2}, \mathbf{4})$.

Se espera que algunos alumnos hagan las acciones de graficar los vectores y buscar los escalares que multiplican a los vectores $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ y $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$ para que al sumarlos se obtenga al vector $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$. Otros pueden escribir la ecuación $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{a}_{\mathbf{1}}\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} + \boldsymbol{a}_{\mathbf{2}}\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$ y hacer las acciones para encontrar los valores de los escalares y concluir si $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ es o no combinación lineal. Se espera que algunos alumnos escriban la ecuación, pero no puedan concluir si $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ es o no combinación lineal.

2.- Encuentra si el vector $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (-\mathbf{7}, \mathbf{7}, \mathbf{7})$ *es combinación lineal de los vectores* $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (-\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4})$ *y* $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}} = (\mathbf{5}, -\mathbf{3}, \mathbf{1})$.

Se espera que los alumnos generalicen a $\boldsymbol{R}^{3}$ la actividad anterior. Pueden hacer la acción de graficar y/o resolver la ecuación vectorial $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{a}_{\mathbf{1}}\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} + \boldsymbol{a}_{\mathbf{2}}\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$ para encontrar los valores de $\boldsymbol{a}_{\mathbf{1}}$ y $\boldsymbol{a}_{\mathbf{2}}$ y concluir si $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ es o no combinación lineal. Se espera que los alumnos que tuvieron problemas con la actividad anterior no puedan resolver ésta.

3.- Demuestra si $\bar{\boldsymbol{v}}$ ***= (8, 4, 7)*** *es combinación lineal de los vectores* $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ ***= (1, 0, -1)***, $\bar{v}_2$ ***= (2, 1, 3)*** *y* $\bar{v}_3$ ***= (4, 2, 6)***.

Se espera que los alumnos hagan las acciones o procesos asociados a la combinación lineal. Habrá algunos que, al no haber construido dichas acciones o procesos, no sean capaces de responder la pregunta.

3.2.2 CONJUNTO GENERADOR Y ESPACIO GENERADO

En las siguientes actividades, y las posteriores, los alumnos tendrán la necesidad de ir empleando los conceptos construidos anteriormente. Es claro que quienes no hayan construido dichos conceptos tendrán dificultades con ellas. No se aclara esto en cada actividad para no cansar al lector con repeticiones innecesarias.

4.- Di si los vectores $\bar{\imath} = (1, 0)$ y $\bar{\jmath} = (0, 1)$ generan R^2.

Se espera que los alumnos hagan la acción o proceso de graficar y/o encontrar algunas de las combinaciones lineales de los vectores $\bar{\imath}$ y $\bar{\jmath}$ para después generalizar y concluir que sí generan R^2. Se espera que coordinen el proceso de solución de la ecuación vectorial $\bar{v} = a\bar{\imath} + b\bar{\jmath} = (a, b)$ con el proceso de conjunto generador para concluir que se genera R^2. Algunos no podrán justificar sus respuestas.

5.- Di si los vectores $\bar{\imath} = (1, 0, 0)$, $\bar{\jmath} = (0, 1, 0)$ y $\bar{k} = (0, 0, 1)$ generan R^3.

Se espera que los alumnos generalicen a R^3 la actividad anterior y coordinen el proceso de solución de la ecuación vectorial $\bar{v} = a\bar{\imath} + b\bar{\jmath} + c\bar{k} = (a, b, c)$ con el proceso de conjunto generador. Algunos no podrán justificar sus respuestas.

6.- ¿Cuál es el espacio generado por los vectores $\bar{v}_1 = (2, -1, 4)$ y $\bar{v}_2 = (4, 1, 6)$?

Se espera que los alumnos coordinen el proceso de solución de la ecuación vectorial $\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2$ con el proceso de conjunto generador para encontrar el plano en R^3 que generan dichos vectores. Algunos alumnos podrán concluir erróneamente que los vectores generan R^3 o respondan de forma memorizada que dos vectores en R^3 generan un plano, pero no puedan justificarlo o usen un procedimiento memorizado para encontrarlo.

*7.- SIN HACER operaciones, di si los siguientes vectores generan un plano y, en caso afirmativo, qué plano generan. EXPLICA tu respuesta. Sean $\bar{v}_1$ **= (3, 0, 2)** y $\bar{v}_2$ **= (-2, 0, 3)**.*

Se espera que algunos alumnos respondan de forma memorizada que dos vectores en R^3 generan un plano, pero que no puedan justificarlo y tal vez no puedan encontrar el plano que dichos vectores generan o usan un procedimiento memorizado para hallarlo. Otros alumnos pueden pensar en todas las combinaciones lineales de dichos vectores sin tener que realizar las acciones explícitamente y pueden justificar su respuesta dando evidencia de haber construido el proceso de combinación lineal y haberlo coordinado con el proceso de su representación geométrica.

3.2.3 INDEPENDENCIA Y DEPENDENCIA LINEAL

8.- ¿Son linealmente dependientes o independientes los vectores $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2})$ *y* $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{2}, \mathbf{4})$*?*

Se espera que los alumnos hagan la acción de graficar los vectores y reconozcan que los vectores son paralelos, múltiplos, $\mathbf{2}\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = \bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$, y/o sobre la misma recta por lo que son linealmente dependientes (interpretación geométrica). Algunos pueden plantear la ecuación de independencia y dependencia lineal $\boldsymbol{c}_{\mathbf{1}}\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{c}_{\mathbf{2}}\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = \bar{\mathbf{0}}$, coordinar su proceso de solución para encontrar los valores de $\boldsymbol{c}_{\mathbf{1}}$ y $\boldsymbol{c}_{\mathbf{2}}$ con el proceso de dependencia lineal y, reconocer que existe solución no trivial, por lo que ambas constantes pueden ser diferentes de cero y concluir que los vectores son linealmente dependientes. Otros pueden usar sus conocimientos previos y reconocer que el sistema tendrá solución múltiple porque los vectores son múltiplos lo que implica que son linealmente dependientes. Se espera que algunos alumnos reflexionen sobre sus acciones y las interioricen en un proceso con el que concluyan que dos vectores que son múltiplos siempre serán linealmente dependientes.

9.- ¿Son linealmente dependientes o independientes los vectores $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})$, $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (-\mathbf{4}, \mathbf{1}, \mathbf{5})$ *y* $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}} = (-\mathbf{5}, \mathbf{8}, \mathbf{19})$*?*

Se espera que algunos alumnos hagan la acción de graficar, sin embargo al estar en $\boldsymbol{R}^{3}$, es más difícil visualizar si son linealmente independientes o dependientes. Pueden plantear la ecuación de independencia y dependencia lineal $\boldsymbol{c}_{\mathbf{1}}\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{c}_{\mathbf{2}}\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} + \boldsymbol{c}_{\mathbf{3}}\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}} = \bar{\mathbf{0}}$, coordinar su proceso de solución para encontrar los valores de $\boldsymbol{c}_{\mathbf{1}}$, $\boldsymbol{c}_{\mathbf{2}}$ y $\boldsymbol{c}_{\mathbf{3}}$ con el proceso de dependencia lineal y concluir que los vectores son linealmente dependientes.

10.- ¿Son linealmente dependientes o independientes los vectores $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4})$ *y* $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{2}, -\mathbf{5}, \mathbf{3})$*?*

Se espera que los alumnos hagan la acción de graficar y reconozcan que los vectores no son paralelos por lo que son linealmente independientes. Algunos pueden plantear la ecuación de independencia y dependencia lineal y coordinar su proceso de solución, para encontrar que los escalares valen cero, con el proceso de independencia lineal para concluir que los vectores son linealmente independientes. Se espera que algunos alumnos reconozcan que al no ser múltiplos son linealmente independientes.

11.- ¿Son linealmente dependientes o independientes los vectores $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{2}, -\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{3})$ *y* $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (-\mathbf{6}, \mathbf{3}, \mathbf{0}, -\mathbf{9})$*?*

Se espera que algunos alumnos intenten graficar sin reflexionar que están en ***R*⁴**. Pueden generalizar, el proceso de dependencia lineal a $\boldsymbol{R}^{4}$ y el teorema de vectores múltiplos, para concluir que los vectores dados son linealmente dependientes.

12.- ¿Son linealmente dependientes o independientes los vectores $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{1}, -\mathbf{2}, \mathbf{3})$, $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{2}, -\mathbf{2}, \mathbf{0})$ *y* $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{7})$*?*

Se espera que los alumnos hagan el proceso correspondiente a la independencia y dependencia lineal. Además, se espera que algunos alumnos resuelvan el sistema de ecuaciones lineales de manera memorizada y así lleguen a la conclusión correcta.

13.- Sean $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ ***= (1, 1, 1)****,* $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ ***= (3, -1, 0)*** *y* $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$***= (4, 1, 1)*** *linealmente independientes. Di, sin hacer operaciones, si* $\bar{\boldsymbol{v}}$ ***= (0, 0, 1)*** *es combinación lineal de* $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$*,* $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ *y* $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$*. Si lo es, no es necesario dar la combinación lineal. Explica tu respuesta.*

Se espera que algunos alumnos utilicen la ecuación algebraica para la combinación lineal. Otros pueden coordinar los procesos de independencia lineal, conjunto generador y espacio generado para concluir que los tres vectores dados son linealmente independientes y por lo tanto generan $\boldsymbol{R}^{3}$. Además, pueden utilizar el proceso de combinación lineal para concluir que $\bar{\boldsymbol{v}}$ es combinación lineal de los vectores dados pues $\bar{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{R}^{3}$. Se espera que los alumnos que no hayan construido los procesos necesarios no puedan responder o necesiten plantear las ecuaciones correspondientes a la definición de combinación lineal.

14.- ***SIN*** *hacer operaciones di si los siguientes vectores son linealmente dependientes o independientes.* ***EXPLICA*** *tu respuesta.*

a) ***(2, 3, 5)****,* ***(0, 0, 0)****,* ***(1, 1, 8)***

b) ***(-2, 4, 6, 10)****,* ***(3, -6, -9, -30)***

c) ***(1, 4)****,* ***(3, -5)****,* ***(2, 1)***

d) ***(1, 0, 1, 1)****,* ***(0, 1, 1, 1)***

Los alumnos entienden que sin hacer operaciones significa que no deben resolver las ecuaciones correspondientes a las definiciones de independencia y dependencia lineal.

Se espera que algunos alumnos no puedan resolver esta pregunta sin plantear las ecuaciones correspondientes a las definiciones de independencia y dependencia lineal. Se espera que otros alumnos utilicen los procesos construidos en relación con los conceptos de independencia y dependencia lineal para responder y analizar las propiedades de cada conjunto de vectores y justificar sus respuestas.

*15.- ¿Si ninguno de los tres vectores, $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$, $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$ en **R**^{3} es un múltiplo de alguno de los otros vectores, entonces $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$, $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$ son linealmente independientes?*

Los alumnos pueden coordinar el proceso de independencia lineal con el teorema de vectores múltiplos para concluir que no tienen información suficiente para determinar la independencia lineal de los vectores.

*16.- Justifica si el siguiente enunciado es verdadero o falso. Si $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$,$\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$ son linealmente independientes, entonces $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$,$\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$ no están en **R**^{2}.*

Se espera que los alumnos coordinen el proceso de independencia lineal con el de la dimensión del espacio o con el proceso de solución de un sistema subdeterminado para concluir que los vectores deben estar en ***R***^{3} o en ***R***^{n} con ***n > 2***.

*17.- Di si es falso o verdadero. **EXPLICA** tu respuesta.*

a) *Las columnas de cualquier matriz* $\boldsymbol{A}_{4x5}$ *son linealmente dependientes.*

b) *Si $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ son linealmente independientes y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$, $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$ son linealmente dependientes, entonces puedes afirmar que $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$ es combinación lineal de $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$.*

Se espera que algunos alumnos no puedan responder esta pregunta al no tener vectores y una matriz en particular. Puede ser que algunos de ellos escriban algunos casos particulares pero no puedan justificar su respuesta.

Otros alumnos estarán evidenciando haber construido una coordinación entre los procesos de columnas de una matriz como vectores, espacio generado y dependencia lineal al justificar que los vectores son linealmente dependientes (inciso ***a***).

Para el inciso ***b*** se espera que los alumnos coordinen los procesos de combinación lineal, independencia, dependencia lineal y espacio generado para concluir que necesariamente $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$ está en el espacio generado por $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ y, por lo tanto, es combinación lineal de ellos.

*18.- Sea $\overline{v}_1$ **= (1, 1, 1)**, $\overline{v}_2$ **= (3, -1, 0)** y $\overline{v}_3$ **= (4, 1, 1)**. ¿Está $\overline{v}$ **= (0, 0, 1)** en el espacio generado por $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ y $\overline{v}_3$?*

Se espera que algunos alumnos respondan de forma memorizada que tres vectores generan R^3 por lo que $\overline{v}$ está en el espacio generado sin reflexionar sobre la independencia lineal de los vectores o que hagan las acciones correspondientes para verificarlo. Se espera que otros alumnos den evidencia de haber construido los procesos de independencia y dependencia lineal y de haberlos coordinado con el de espacio generado para responder y justificar su respuesta.

*19.- ¿En qué casos es posible que cuatro vectores generen R^5? **JUSTIFICA**.*

Se espera que algunos alumnos escriban cuatro vectores cualesquiera o contesten de forma memorizada que cuatro vectores no pueden generar $\mathbf{R}^5$ o no sean capaces de responder. Otros alumnos pueden reconocer que para generar $\mathbf{R}^5$ se necesitan cinco vectores linealmente independientes, demostrando en su justificación que han construido el proceso de conjunto generador y lo han coordinado con el de espacio generado.

*20.- Encuentra un conjunto de vectores que genere a $W = \{\overline{v}\ \varepsilon\ R^4 \mid \overline{v} = (4a + 3b, 0, a + b + c, c - 2a)$ **con a, b, c** $\varepsilon\ R\}$.*

Se espera que los alumnos reconozcan que al haber tres constantes ***a***, ***b*** y ***c*** arbitrarias se necesitan tres vectores para generar el espacio ***W***. Pueden escribir tres vectores cualesquiera sin dar justificaciones. Otros alumnos pueden escribir una ecuación vectorial que incluya una combinación lineal de vectores linealmente independientes para encontrar el conjunto generador, mostrando haber construido una concepción proceso de conjunto generador y espacio generado.

*21.- Sean $\overline{v}_1$ **= (1, 0, -2)**, $\overline{v}_2$ **= (-2, 1, 7)** y $\overline{v}_3$ **= (h, -3, -5)**. ¿Para qué valores de **h** se encuentra $\overline{v}_3$ en **gen** $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$?*

a) *¿Son linealmente dependientes o independientes los vectores $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ y $\overline{v}_3$? ¿Qué generan?*

b) *¿Son linealmente dependientes o independientes los vectores $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$? ¿Qué generan?*

c) *¿Qué diferencia existe entre **gen** $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2$ y $\overline{v}_3\}$ y **gen** $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$?*

Se espera que algunos alumnos no puedan resolver esta pregunta al no poder encontrar el valor de ***h***. Otros alumnos podrán encontrar los valores de ***h*** para los cuales $\overline{v}_3$ es combinación lineal de $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$ y coordinar con los procesos de conjunto generador y espacio generado para concluir que $\overline{v}_3$ está en el espacio generado por $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$ y que los tres vectores generan un plano en R^3. Se espera que en el inciso ***a*** coordinen el proceso de dependencia lineal con el de combinación lineal para concluir que los tres vectores son linealmente dependientes. En el inciso ***b*** pueden usar el proceso de independencia lineal para demostrar que los dos vectores son linealmente independientes. Se espera que respondan en ambos incisos que se genera un plano en ***R³***. Mostrarán evidencia además de que han construido el proceso de espacio generado al concluir que ambos conjuntos generan el mismo plano.

22.- Sean $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{1})$, $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ *y* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}} = (\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{6})$.

a) *Sin hacer cálculos encuentra qué generan* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}, \overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}\ y\ \overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$ *.*

b) *Sea* $\overline{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$. *¿Está* $\overline{\boldsymbol{v}}$ *en el subespacio generado por* $\{\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}, \overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}\ \boldsymbol{y}\ \overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}\}$***.*** *¿Por qué?*

c) *Con la información del inciso anterior revisa el inciso* ***a).*** *¿Cambia tu respuesta? ¿Por qué?*

Se espera que algunos alumnos respondan que tres vectores generan ***R³***, sin reflexionar sobre su independencia lineal o que sigan un procedimiento memorizado pero no puedan interpretar el resultado obtenido del sistema de ecuaciones. Para el inciso ***b*** se espera que comprueben si el vector dado se puede escribir como combinación lineal de los vectores del conjunto, pero que no sean capaces de rectificar su respuesta en el inciso ***c*** al no saber interpretar el resultado obtenido con el sistema de ecuaciones de la combinación lineal.

Otros alumnos pueden reconocer que los vectores $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$ son múltiplos por lo que el conjunto de vectores dado es linealmente dependiente. En el caso de que algunos de ellos no noten esto se espera que muestren haber construido los procesos de independencia y dependencia lineal y concluyan que los vectores son linealmente dependientes. Al reflexionar sobre esto se espera que utilicen el proceso que permite transformar un conjunto de vectores linealmente dependientes en un conjunto de vectores linealmente independientes y lo coordinen con el proceso de espacio generado para concluir que se genera un plano. En el inciso ***b*** se espera que coordinen los procesos de combinación lineal y espacio generado para concluir que el vector dado es combinación lineal del conjunto de vectores que encontraron y está en el espacio generado. En el inciso **c** pueden usar los procesos anteriores para contestar que la información del inciso anterior les confirma que los tres vectores no generan ***R³***.

Puede ser que algunos alumnos cometan un error y concluyan que los vectores dados son linealmente independientes y generan ***R³***. Sin embargo, se espera que al resolver los incisos ***b*** y ***c*** reflexionen sobre su respuesta y la corrijan al reconocer que $\overline{\boldsymbol{v}}$ no es combinación lineal de los vectores dados.

23.- Sean $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{3}, \mathbf{3}, -\mathbf{1})$, $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{1}, \mathbf{12}, \mathbf{0})$ *y* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}} = (\mathbf{3}, \mathbf{36}, \mathbf{0})$. *Sin hacer operaciones di qué generan* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1},}\ \overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}\ y\ \overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$ *.*

Algunos de los alumnos pueden responder que los tres vectores dados generan $\boldsymbol{R^3}$ sin reflexionar sobre su independencia lineal. Se espera que otros alumnos coordinen el proceso de vectores múltiplos o paralelos con el proceso de dependencia lineal para concluir que los vectores $\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}$ y $\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}}$ son linealmente dependientes y, por lo tanto, el conjunto de los tres vectores también lo es. En el caso de que algunos de ellos no reconozcan esto, se espera que muestren haber construido los procesos de independencia y dependencia lineal y concluyan que los vectores son linealmente dependientes. Al reflexionar sobre esto se espera que coordinen los procesos de conjunto generador e independencia lineal para concluir que los tres vectores generan un plano en $\boldsymbol{R^3}$.

24.- Escribe dos vectores linealmente independientes en $\boldsymbol{R^6}$ *(explica por qué lo son) y encuentra un vector que esté en el espacio generado por ellos.*

Se espera que algunos alumnos escriban dos vectores cualesquiera en $\boldsymbol{R^6}$ sin justificar su independencia lineal y no sean capaces de encontrar el vector en el espacio generado.

Se espera que otros alumnos utilicen el proceso de independencia lineal para encontrar los dos vectores que se piden y lo coordinen con los procesos de combinación lineal, conjunto generado y espacio generado para encontrar un vector en el espacio generado por ellos.

25.- Di si es falso o verdadero. EXPLICA tu respuesta.

a) *Sean los vectores* $\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}$, $\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}$, $\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}}$ *y* $\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{4}}$ *en* $\boldsymbol{R^n}$. *Si sabes que las parejas* $\{\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}, \bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}\}$, $\{\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}, \bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}}\}$, $\{\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}, \bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{4}}\}$, $\{\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}, \bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}}\}$, $\{\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}, \bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{4}}\}$ *y* $\{\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}}, \bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{4}}\}$ *son linealmente independientes, entonces el conjunto* $\{\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}, \bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}, \bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}}, \bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{4}}\}$ *es linealmente independiente.*

b) *Dos vectores son linealmente dependientes sí y sólo sí, están en una misma recta que pasa por el origen.*

Se espera que algunos alumnos tengan dificultades para responder correctamente y justificar sus respuestas. Los alumnos que no han construido el proceso de independencia y dependencia lineal pueden contestar que al tener parejas linealmente independientes el conjunto de todos los vectores también lo será (inciso ***a***). Los que no han construido el proceso de conjunto generador y espacio generado pueden contestar de forma memorizada que dos vectores linealmente dependientes generan una recta pero no podrán justificar si pasa o no por el origen (inciso ***b***).

Se espera que otros alumnos coordinen los procesos de independencia y dependencia lineal para concluir, en el inciso ***a***, que no se cuenta con suficiente información para determinar si los vectores son linealmente dependientes o independientes por lo que la afirmación es falsa. En el inciso ***b***, los alumnos pueden coordinar el proceso de independencia lineal con el de representación geométrica para concluir que dos vectores linealmente dependientes son múltiplos, paralelos y por lo tanto están en una misma recta que pasa por el origen. Esto puede responderse de forma mecánica o explicarse mediante argumentos que pongan en evidencia la posibilidad de que los alumnos hayan construido una concepción proceso.

3.2.4 BASE Y DIMENSIÓN

26.- Encuentra dos vectores que generen $\boldsymbol{R^2}$*. ¿Existen otras parejas que también lo generen? ¿Son linealmente dependientes o independientes estas parejas de vectores? ¿Forman una base para* $\boldsymbol{R^2}$*? ¿Cuál es la dimensión de dicha base?*

Se espera que algunos alumnos respondan de forma memorizada con la pareja: $\bar{\boldsymbol{\imath}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0})$ y $\bar{\boldsymbol{\jmath}} = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$, pero no puedan encontrar otras parejas. Otros pueden coordinar los procesos de independencia, dependencia lineal, conjunto generador y espacio generado para encontrar distintas parejas de vectores, reconocer que generan $\boldsymbol{R^2}$ y determinar que deben cumplir las condiciones de independencia lineal. Se espera que estos alumnos coordinen todos los procesos anteriores para concluir que como dichas parejas generan $\boldsymbol{R^2}$ y son linealmente independientes cumplen las condiciones para ser una base. Se espera que estos alumnos determinen que la dimensión es dos al tener la base dos vectores. Tal vez algunos alumnos expliquen que el espacio $\boldsymbol{R^2}$ puede ser generado por diferentes conjuntos generadores.

27.- Encuentra tres vectores que generen $\boldsymbol{R^2}$*. ¿Existen otras tercias que también lo generen? ¿Son linealmente dependientes o independientes estas tercias de vectores? ¿Necesitas tres vectores para generar* $\boldsymbol{R^2}$*? ¿Forman una base?*

Se espera que los alumnos coordinen los procesos de conjunto generador, espacio generado, independencia y dependencia lineal y base para encontrar distintas tercias de vectores y reconocer que generan $\boldsymbol{R^2}$. Pueden concluir que tienen tres vectores en $\boldsymbol{R^2}$ o utilizar el proceso de dependencia lineal para determinar que los vectores serán linealmente dependientes. Además, pueden coordinar los procesos anteriores con el de combinación lineal para determinar que uno de los vectores es combinación lineal de los otros dos. Al coordinar todos los procesos anteriores pueden concluir que necesitan solamente dos vectores linealmente independientes para generar $\boldsymbol{R^2}$. De esta forma los alumnos podrán concluir que existen distintas bases para $\boldsymbol{R^2}$ pero todas de dimensión dos. Algunos alumnos tendrán dificultades para responder esta pregunta por su imposibilidad de coordinar alguno o algunos de los procesos involucrados.

28.- ¿Son linealmente dependientes o independientes los vectores $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{2}, -\mathbf{3}, \mathbf{4})$*,* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{4}, \mathbf{7}, -\mathbf{6})$*,* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}} = (\mathbf{18}, -\mathbf{11}, \mathbf{4})$ *y* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{4}} = (\mathbf{2}, -\mathbf{7}, \mathbf{3})$*? ¿Forman una base para* $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{3}}$*? Explica.*

Se espera que los alumnos resuelvan la ecuación de independencia y dependencia lineal $\boldsymbol{c_1}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{c_2}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} + \boldsymbol{c_3}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}} + \boldsymbol{c_4}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{4}} = \overline{\mathbf{0}}$ como un proceso y que coordinen el proceso solución del sistema con el proceso de dependencia lineal al encontrar algunas constantes diferentes de cero. Algunos pueden coordinar con los procesos correspondientes a otros conceptos del curso y reconocer que el sistema de ecuaciones que resulta es un sistema homogéneo subdeterminado por lo que tendrá solución múltiple, es decir, los vectores son linealmente dependientes. Se espera que algunos de entre estos alumnos coordinen el proceso relacionado al número de elementos del conjunto con el proceso de dimensión del espacio al que pertenecen y con el de dependencia lineal para determinar las condiciones en las que los vectores serán linealmente dependientes. Se espera, por último, que los alumnos coordinen el proceso de conjunto generador con el de dependencia lineal para concluir que los vectores dados no pueden ser una base para $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{3}}$. Se espera también que algunos alumnos tengan dificultades debido a la falta de coordinación de los procesos antes mencionados.

29.- Sea $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ ***= (2, -1, 4)****,* $\overline{\boldsymbol{v}}_{2}$ ***= (1, 0, k)*** *y* $\overline{\boldsymbol{v}}_{3}$ ***= (3, -1, 5)****. ¿Para qué valores de* ***k*** *los vectores* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$*,* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ *y* $\overline{\boldsymbol{v}}_{3}$ *son una base para* $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{3}}$*? Explica tu respuesta.*

Se espera que los alumnos hagan acciones correspondientes a encontrar la independencia y/o dependencia lineal para encontrar los valores de ***k***. Algunos alumnos no podrán explicar su respuesta. Otros alumnos encontrarán los valores de ***k*** para los cuales los vectores dados son linealmente independientes y coordinarán este proceso con el proceso de conjunto generador y espacio generado para concluir que los vectores son base para $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{3}}$. Estos alumnos mostrarán así evidencia de haber construido la coordinación de los procesos de independencia lineal, conjunto generado, espacio generado y base. En esta pregunta, nuevamente las dificultades posibles pueden deberse a la falta de coordinación de los procesos que aquí se mencionan.

30.- Sea $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ ***= (7, 4, -9, -5)****,* $\overline{\boldsymbol{v}}_{2}$ ***= (4, -7, 2, 5)*** *y* $\overline{\boldsymbol{v}}_{3}$ ***= (1, -5, 3, 4)****. Sabes que* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} - 3\overline{\boldsymbol{v}}_{2} + 5\overline{\boldsymbol{v}}_{3} = \overline{\mathbf{0}}$*. Usa esta información para encontrar una base para* ***H = gen {***$\overline{\boldsymbol{v}}_{1}$*,* $\overline{\boldsymbol{v}}_{2}$*,* $\overline{\boldsymbol{v}}_{3}$***}****.*

Se espera que algunos alumnos concluyan, sin reflexionar sobre la independencia lineal de los vectores, que forman una base. Se espera que otros alumnos utilicen los procesos construidos en relación con los conceptos de combinación lineal e independencia lineal para concluir que los vectores dados son linealmente dependientes y coordinen los procesos anteriores con los de conjunto generador, espacio generado y base para responder y encontrar la base de ***H***.

*31.- Sea **H = gen** $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, ..., \bar{v}_n\}$, entonces $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, ..., \bar{v}_n\}$ es una base para **H**. Cierto o falso, explica.*

Algunos alumnos pueden concluir que es una base sin reflexionar sobre la independencia lineal de los vectores. Otros alumnos pueden utilizar los procesos construidos en relación con los conceptos de independencia lineal, conjunto generador, espacio generado y base para concluir que los vectores no son una base pues no se da información sobre su independencia lineal.

32.- El conjunto de vectores $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, ..., \bar{v}_n\}$ es linealmente independiente entonces $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, ..., \bar{v}_{n-1}\}$ es base del espacio generado por $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, ..., \bar{v}_n\}$. Falso o verdadero.

Se espera que algunos alumnos concluyan que el enunciado es verdadero sin reflexionar sobre el número de vectores de los conjuntos dados. Otros alumnos pueden utilizar el proceso de conjunto generador para concluir que el enunciado es falso pues el conjunto $\{\bar{v}_1, ..., \bar{v}_{n-1}\}$ no tiene el mismo número de elementos que el conjunto original. De esta forma mostrarán evidencia de haber construido el proceso de base.

33.- Encuentra los vectores que se piden. Explica tu respuesta.

a) *5 vectores en **R**^{4} que sean una base para **R**^{4}.*

b) *4 vectores en **R**^{5} que sean una base para **R**^{5}*

c) *2 vectores linealmente independientes en **R**^{6} (explica por qué lo son) y encuentra un vector que esté en el espacio generado por ellos.*

d) *Escribe una base para **R**^{7}que incluya al vector cero.*

Se espera que algunos alumnos al resolver los incisos ***a*** y ***b*** escriban los vectores que se piden sin razonar si cumplen con las condiciones necesarias para ser base para un espacio dado. Para el inciso ***c*** se espera que escriban los vectores pero no puedan justificar su independencia lineal ni encontrar un vector en el espacio generado por ellos. Para el inciso ***d*** se espera que algunos de estos alumnos incluyan, de forma errónea, al vector cero en la base.

Se espera que otros alumnos utilicen los procesos construidos en relación con los conceptos de independencia lineal, conjunto generador, espacio generado y base para responder y analizar las propiedades de los vectores que se piden. En el inciso ***a*** pueden coordinar los procesos de dependencia lineal y base para concluir que no es posible construir una base con cinco vectores en ***R***^{4} pues cinco vectores en ***R***^{4} siempre serán linealmente dependientes. En el inciso ***b*** pueden coordinar los procesos de conjunto generador y base para concluir que necesitan cinco vectores para generar ***R***^{5} por lo que no es posible encontrar una base con cuatro vectores. En el inciso ***c*** pueden coordinar los procesos de independencia lineal y conjunto generador para encontrar los vectores que se piden. Finalmente, en el inciso ***d*** pueden coordinar los procesos de dependencia lineal y base para concluir que todo conjunto que incluya al vector cero es linealmente dependiente y no puede ser base de $\boldsymbol{R^7}$.

34.- Encuentra una base y su dimensión para el conjunto de vectores en el plano: ***x + 2y + z = 0****. Explica tu procedimiento y justifica tu respuesta.*

Se espera que algunos alumnos tengan dificultades para responder correctamente y justificar su respuesta. Mientras que otros alumnos coordinen el proceso de independencia lineal con el de conjunto generador para encontrar dos vectores linealmente independientes en el plano. Se espera que coordinen los procesos anteriores con el de base para concluir que cumplen las condiciones para ser una base. Se espera que estos alumnos determinen que la dimensión es dos al tener la base dos vectores.

Algunos alumnos pueden mostrar evidencia de haber construido la coordinación de los procesos algebraico y geométrico de independencia lineal y su coordinación con el de espacio generado al justificar su respuesta con gráficas.

35.- Sea ***z = 2x + 5y****.*

a) *¿Qué representa gráficamente?*

Se espera que los alumnos utilicen el proceso de representación geométrica del plano y reconozcan que la ecuación dada es un plano en $\boldsymbol{R^3}$ que pasa por el origen.

b) *¿Es un subespacio vectorial?*

Se espera que los alumnos coordinen el proceso de subespacio vectorial con el proceso de representación geométrica del inciso ***a*** para concluir que es un subespacio vectorial de $\boldsymbol{R^3}$ y puedan justificarlo.

c) *¿Cuántos vectores tendría una base del espacio anterior? ¿Existen varias bases?*

Se espera que los alumnos puedan coordinar los procesos de independencia lineal, conjunto generador y espacio generado para concluir que dos vectores linealmente independientes en el plano lo generan. Se espera que coordinen los procesos anteriores con el de base para concluir que dichos vectores cumplen las condiciones para ser una base.

Algunos alumnos pueden explicar que el plano puede ser generado por diferentes conjuntos generadores, por lo que existen muchas bases que lo generan. Se espera que los alumnos que no han construido los procesos anteriores contesten de forma memorizada que necesitan dos vectores y que contesten erróneamente que existe solamente una base.

d) *Encuentra una base y su dimensión.*

Se espera que los alumnos coordinen los procesos de independencia lineal, conjunto generador, espacio generado y base para encontrar una base y su dimensión. Los alumnos que no han construido los procesos anteriores pueden escribir dos vectores cualesquiera y de forma memorizada contestar que la dimensión es dos.

3.3 METODOLOGÍA DIDÁCTICA

La instrucción en clase siguió el ciclo ACE descrito en el marco teórico. El problema de modelación se utilizó en los semestres que van de agosto del 2010 a enero del 2014. Los alumnos involucrados en esta investigación estaban inscritos en un curso de álgebra lineal en una licenciatura de economía en una universidad privada de México, ITAM, Instituto Tecnológico Autónomo de México. Durante los ocho semestres en los que se pusieron a prueba los modelos diseñados los grupos eran en promedio de 33 alumnos, los cuales se dividieron para trabajar en equipos de 3 o 4 alumnos cada uno. Los alumnos trabajaron de forma conjunta en la modelación y en las actividades conceptuales y tuvieron oportunidades de discutir y reflexionar sobre su trabajo.

Los equipos se nombraron con letras (A, B, C, etc.) y a los alumnos se les identificó con un subíndice, por ejemplo A_3 es el alumno 3 del equipo A. El trabajo se realizó en los semestres de agosto - diciembre 2010 a enero – mayo 2014, por lo que se especifica para los alumnos, entre paréntesis, el semestre al que pertenecen: Sem. 1-2014, es el primer semestre del año 2014. Es importante destacar que, como es usual, los comentarios de los alumnos, obtenidos de la transcripción de la grabación de sus conversaciones o explicaciones, se reproducen textualmente entre comillas aún y cuando sus respuestas no sean correctas.

En esta investigación la maestra fue la autora de este trabajo. Esta decisión se tomó porque se consideró que, en esta etapa de la investigación, si otro maestro daba el curso podría darse el caso de que no siguiera exactamente lo planeado para la investigación y que la preparación necesaria para lograr que lo hiciera tomaría más tiempo del que se disponía para la misma. El curso en el que se llevó a cabo la investigación es un curso curricular y al finalizarlo los alumnos fueron evaluados.

Durante la clase la maestra fue elaborando una bitácora en donde se registró el avance de los distintos equipos, con los comentarios, dudas, propuestas, etc. que surgieron dentro de cada equipo, entre los equipos y en la discusión en clase.

Además se hicieron grabaciones de las clases. Todo esto con la finalidad de poder analizar las construcciones de los alumnos en distintos momentos del trabajo en clase y qué dificultades encuentran al resolver los problemas y las actividades planteadas.

Se siguió la metodología del ciclo ACE modificada. No se dividió este ciclo por clases por razones prácticas relacionadas con el avance de los alumnos. La metodología de trabajo fue la siguiente: la maestra dio al grupo el problema, en cada ocasión, y lo leyó resolviendo cualquier duda o problema de comprensión que se presentara. Después, los alumnos trabajaron en equipos. La maestra discutió con los distintos equipos el trabajo que realizaban, resolvió dudas e hizo preguntas y comentarios sobre los avances en cada uno de ellos. Después de 20 minutos, la maestra pasó al pizarrón a 3 equipos, que abordaron el problema de diferentes maneras, para que expusieran y argumentaran su trabajo, el cual se discutió con los demás alumnos de la clase y con la maestra. Este procedimiento se repitió dos veces hasta que se decidió, conjuntamente utilizar aquel modelo que representara de mejor manera la situación planteada.

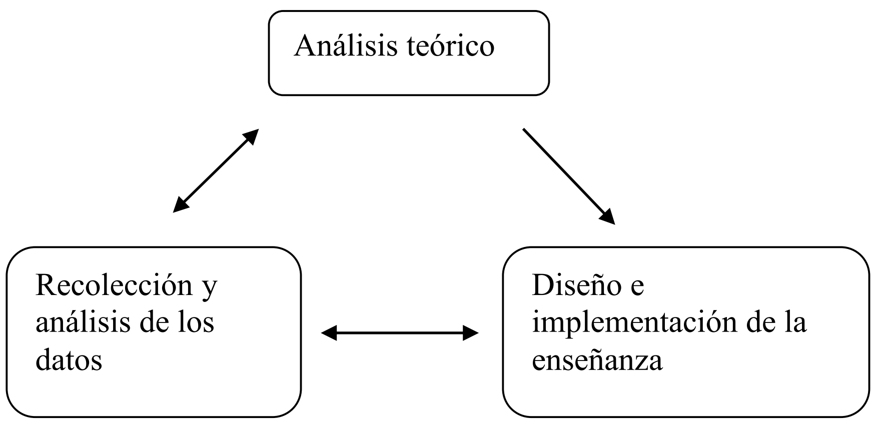
Los alumnos regresaron a trabajar en equipos en el problema de modelación. La maestra observó el trabajo de los alumnos y detenía, en ocasiones, el trabajo de los equipos para que alguno de ellos explicara en el pizarrón sus ideas sobre la respuesta a las preguntas. Mientras los alumnos trabajaban en equipo, la maestra los apoyó mediante preguntas pertinentes para estimular la reflexión sobre su trabajo y para ayudar a su progreso en la solución de las tareas incluidas en las actividades. En cada ocasión, cuando la maestra consideró que la discusión sobre el trabajo en las preguntas planteaba la necesidad de trabajar las actividades conceptuales, la maestra introdujo algunas actividades basadas en la descomposición genética. En la discusión con el grupo completo que siguió al trabajo con las actividades, la maestra cuestionó, comparó y aclaró las opiniones y dudas y finalmente formalizó los conceptos incluidos en las actividades. Además, relacionó dicho trabajo con la definición y la teoría de los conceptos estudiados que los alumnos necesitaban para continuar con su trabajo en el problema. Es importante notar que estos conceptos se introdujeron paulatinamente, conforme los alumnos los necesitaban o cuando era necesario formalizar aquellos conceptos que los alumnos ya estaban empleando sin conocer su definición.

Las actividades conceptuales se utilizaron en distintos momentos del trabajo en clase, pues, como ya se mencionó, su introducción respondió a las necesidades de los alumnos. Por último, la maestra dejó algunas actividades y ejercicios convencionales como tarea para reforzar el proceso de reflexión sobre los conceptos introducidos. Este ciclo se repitió varias veces hasta que se utilizaron todas las actividades diseñadas para cada uno de los temas estudiados en este trabajo. Además se diseñó un cuestionario. Las preguntas de dicho cuestionario se usaron en un examen parcial y en el final como instrumento para analizar las construcciones de los alumnos.

De la sección anterior (3.2) se tomaron los ejercicios 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 26, 27 y 28 como actividades conceptuales de clase y los ejercicios 3, 7, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 29, 30, 31, 32, 33 y 34 para el cuestionario. Esta decisión se tomó después de haber diseñado todas las actividades aquí reportadas para asegurar que las preguntas del cuestionario estaban claramente relacionadas con las actividades en clase y las utilizadas en las tareas. Al mismo tiempo se diseñaron actividades que se destinaron a la entrevista.

3.4 METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN DE LA TEORÍA APOE PARA EL ANÁLISIS DE LOS DATOS OBTENIDOS

La metodología de investigación consiste en tres componentes: análisis teórico (descomposición genética), recolección y análisis de datos y diseño e implementación de la enseñanza. Esta metodología se describió en el marco teórico. La siguiente figura ilustra las componentes de la metodología de investigación (Arnon et al., 2014, p. 94):



La maestra iba anotando todas las preguntas, respuestas, dudas, comentarios, etc. que surgían en el momento de la discusión en clase y durante la presentación de la teoría y la resolución de las actividades diseñadas. La maestra llenó después de clase una bitácora en la que describió el trabajo de los alumnos, las dificultades encontradas, las ideas interesantes que surgieron del trabajo de los alumnos, y su relación con la descomposición genética. Las observaciones del grupo, y la bitácora fueron analizadas de forma independiente por las investigadoras: la maestra y su tutora. Posteriormente, los resultados encontrados se discutieron y se negociaron a modo de triangular los resultados obtenidos.

Al finalizar con el trabajo en el conjunto completo de actividades conceptuales y de preguntas relacionadas con el problema de modelación, se realizó un examen parcial. Al final del curso, en el examen final, se incluyeron preguntas relacionadas con los temas introducidos siguiendo la metodología experimental. Algunas de entre ellas requerían la realización de inferencias a partir del conocimiento construido. Se pidió a los alumnos que justificaran por escrito todos sus procedimientos y respuestas. Las preguntas de ambos exámenes fueron analizadas de manera independiente por las investigadoras en los mismos términos que el trabajo en clase. Todos los resultados obtenidos fueron discutidos y negociados entre ellas.

Para la recopilación de los datos se pidió a los equipos que escribieran todos los razonamientos que empleaban en la solución de los problemas de los cuestionarios, ya fuesen dibujos, diagramas, cálculos, etc. Se pidió que entregaran todos sus procedimientos aunque no los consideraran correctos. Es decir, debían entregar todo lo que hacían. Todo el trabajo de los alumnos fue analizado en términos de las construcciones descritas en la descomposición genética. Se incluye en esta investigación fotos del trabajo de los alumnos. Estas fotos se retocaron para eliminar datos de los alumnos, fechas y anotaciones de la maestra.

El análisis de los datos incluyó todo lo recopilado a partir de los instrumentos. Como ya se mencionó, después de un primer análisis independiente por las dos investigadoras, los resultados se discutieron y negociaron para su triangulación.

3.5 ENTREVISTAS

Después de la experiencia en clase y con base en el análisis de las preguntas del examen parcial se eligieron seis alumnos, en cada semestre, de los semestres enero – mayo 2011 a enero – mayo 2014, en total 42 alumnos, para llevar a cabo la entrevista con el fin de profundizar en el análisis de las construcciones involucradas en el aprendizaje de los conceptos estudiados. Los alumnos se eligieron considerando que en su trabajo previo hubieran mostrado distinto tipo de construcciones de acuerdo al análisis realizado previamente y que pertenecieran a distintos equipos. La entrevista semi-estructurada incluyó preguntas relacionadas con los conceptos de combinación lineal, conjunto generador, espacio generado, independencia y dependencia lineal, base y dimensión, su interpretación geométrica y sus aplicaciones. Se incluyeron preguntas tradicionales y otras que no aparecen normalmente en los textos.

Para la entrevista se tomaron de la sección 3.2 los ejercicios 14, 15, 16, 19, 22 y 35 que fueron diseñados con este fin.

Una vez diseñados los instrumentos se procedió a poner en práctica la propuesta didáctica. Los resultados se detallan en los capítulos 5 y 6.

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA RELACIONADA CON VALORES PROPIOS, VECTORES PROPIOS Y ESPACIOS PROPIOS

En el capítulo anterior se describió la metodología empleada en la investigación que se llevó a cabo con el problema de modelación elegido para la enseñanza de los conceptos relacionados con la estructura del espacio vectorial.

En este capítulo se describe la metodología empleada en la investigación relacionada con la introducción de los conceptos de valores, vectores y espacios propios. Se decidió separar la metodología de la presente tesis en dos capítulos debido a que, si bien en ambos casos se siguió el diseño metodológico de la Teoría APOE, hay diferencias sustanciales en el diseño y puesta a prueba del problema que se utilizó en el caso de los conceptos de interés. Estas diferencias se consideraron importantes de señalar para la mejor comprensión de la investigación y de los resultados obtenidos.

4.1 Diseño de la investigación

En concordancia con la Teoría APOE, en esta parte de la presente investigación, se diseñó, a diferencia del capítulo anterior, una descomposición genética preliminar relativa a los conceptos de valores, vectores y espacios propios de una matriz. En este diseño se consideró la experiencia de la investigadora como maestra de álgebra lineal y los resultados reportados en la literatura relacionados con estos conceptos.

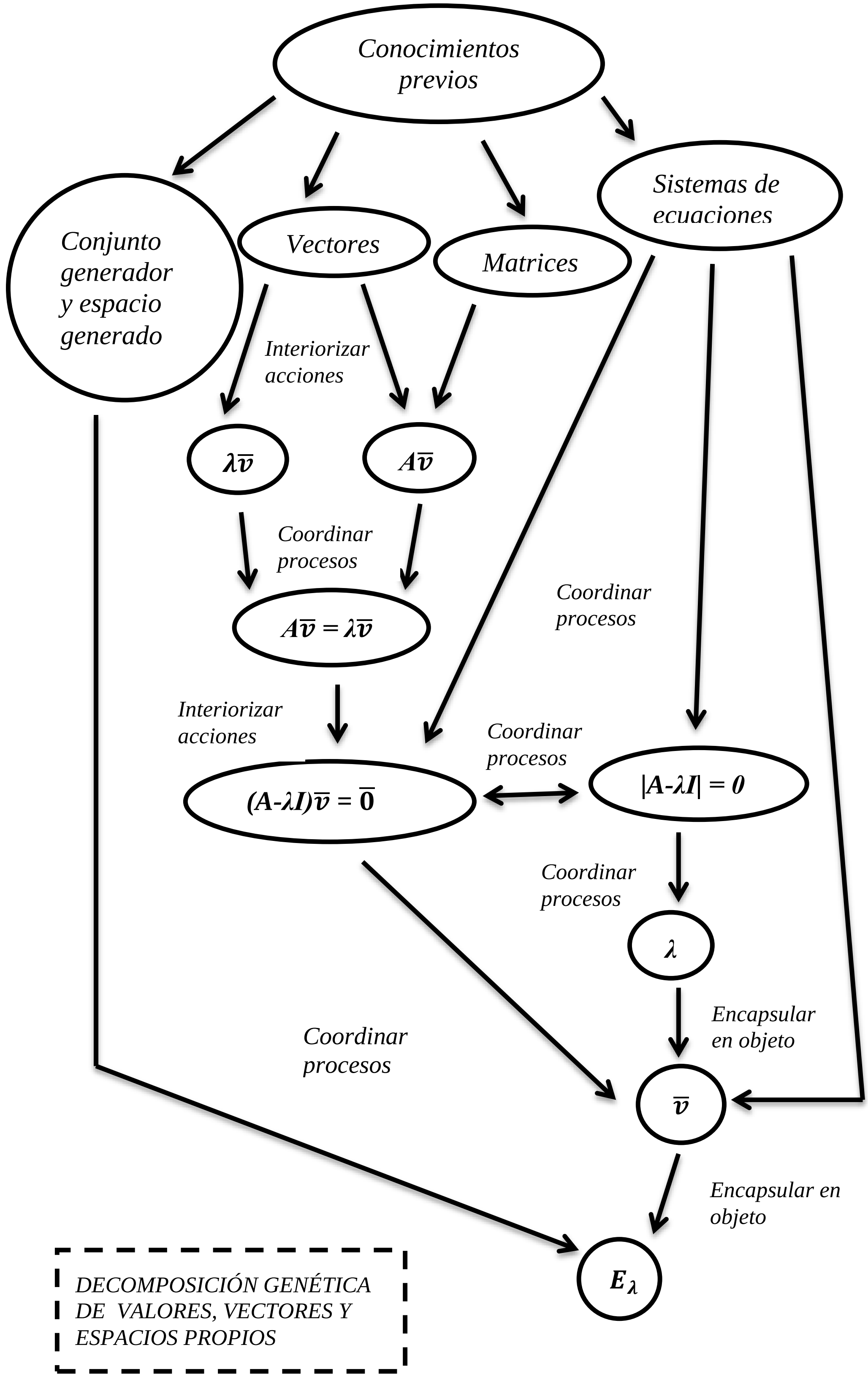
La descripción de la descomposición genética se complementa con el análisis del problema de modelación en términos de los principios de la Teoría de Modelos y Modelación. Debido a que el problema diseñado para la introducción de los conceptos de valores, vectores y espacios propios es un problema dinámico y los alumnos no han tenido relación con este tipo de problemas, hubo necesidad de introducir a los alumnos al estudio de problemas dinámicos que no involucraran matrices con el objetivo de que se adentraran en este tipo de situación. Además, el modelo de empleo - desempleo se utilizó en una primera ocasión utilizando datos y con intervención frecuente de la maestra con el fin de probarlo y determinar sus posibilidades de uso como problema abierto.

4.1.1 Descomposición genética

Se presenta la descomposición genética diseñada para este trabajo en relación a los conceptos de valores, vectores y espacios propios asociados a una matriz.

Descomposición genética de valores, vectores y espacios propios

A continuación se presenta en primer término la descomposición genética en un diagrama y se procede posteriormente a su descripción detallada.



Se considera que los conocimientos previos necesarios para iniciar la construcción de estos conceptos son:

- Los conceptos de matriz y vectores como objetos.
- El proceso de solución de un sistema de ecuaciones lineales.
- Los conceptos de conjunto, conjunto solución de un sistema, espacio nulo de una matriz, conjunto generador y espacio generado de un espacio vectorial como procesos.

A partir de las construcciones previas se requieren las siguientes construcciones:

- Se realizan acciones de multiplicar una matriz por un vector para encontrar que este producto resulta en un nuevo vector. Estas acciones se interiorizan en un proceso que permite concebir el vector resultante del producto para cualquier matriz y cualquier vector, con las dimensiones apropiadas, sin necesidad de calcularlo explícitamente.
- Se hacen acciones tanto geométricas como algebraicas para encontrar el producto de un vector por un escalar. Estas acciones se interiorizan en un proceso que permite a los alumnos considerar el resultado de estas acciones como una transformación de un vector en un nuevo vector paralelo al primero y en el que se asocia el signo del escalar con la dirección del vector resultante. Estos dos procesos se coordinan en un nuevo proceso en el cual ambos se consideran como vectores.
- La necesidad de comparar los vectores resultantes del proceso anterior y considerar las condiciones que se requieren para que sean iguales, permite encapsular la ecuación resultante como un objeto y nombrar al escalar y al vector que en ella aparecen como valor y vector propio respectivamente.
- Se realizan acciones sobre la ecuación resultante para determinar qué condiciones debe cumplir el escalar para que la ecuación tenga solución no trivial. Estas acciones se interiorizan en un proceso en el cual no es necesario realizar explícitamente cada acción para encontrar el escalar y el vector correspondiente que satisfacen la ecuación; cuando se ha interiorizado el proceso los alumnos son capaces de plantear, resolver e interpretar el sistema de ecuaciones resultante de la ecuación sin necesidad de seguir paso a paso un procedimiento específico.
- Este último proceso puede revertirse para determinar si un escalar es valor propio de una matriz y encontrar los vectores propios correspondientes.

- El mismo proceso se coordina con el proceso de reconocer propiedades geométricas de los vectores propios en un proceso geométrico donde el hecho de que el escalar cambia la magnitud o dirección del vector puede realizarse mentalmente para cualquier vector.

- La necesidad de determinar las propiedades de los vectores que satisfacen la ecuación permite la encapsulación de este último proceso en un objeto donde el escalar y el vector que satisfacen la ecuación se consideren como entidades que pueden definirse y nombrarse como valor y vector propio de una matriz dada.

- Los objetos valor y vector propio se desencapsulan en procesos que se coordinan con el proceso de solución de un sistema homogéneo de ecuaciones en un nuevo proceso que permite a los alumnos interpretar el procedimiento de encontrar los valores y vectores propios de una matriz dada como el conjunto solución de un sistema homogéneo de ecuaciones.

- El último proceso se coordina con el proceso de espacio nulo de una matriz en un proceso que permite reconocer el conjunto solución de un sistema homogéneo de ecuaciones como el espacio nulo de la matriz correspondiente al sistema.

- La coordinación del proceso anterior con el proceso de conjunto generador de un espacio vectorial resulta en un proceso que permite identificar al espacio nulo de la matriz del sistema de ecuaciones como un espacio generado correspondiente a cada valor propio y sus vectores propios asociados. La necesidad de comparar espacios generados por diferentes vectores propios permite la encapsulación del proceso de espacio generado en un objeto definido como espacio propio correspondiente a un valor propio de la matriz.

- Las acciones, procesos u objetos correspondientes a los valores, vectores y espacios propios, mencionadas anteriormente, se relacionan entre sí en un esquema que podría denominarse esquema de valores propios. Este esquema permite a los alumnos reconocer, en situaciones problemáticas diversas, la pertinencia de los valores, vectores y espacios propios así como la forma de encontrarlos. En este trabajo, se hizo énfasis en la construcción de los conceptos de valor, vector y espacio como objetos. La construcción del esquema no se estudió en esta investigación por lo que no se desarrolló la descomposición genética del esquema.

4.1.2 ANÁLISIS TEÓRICO UTILIZANDO MODELOS Y MODELACIÓN

La Teoría de Modelos y Modelación se utilizó para el diseño de problemas abiertos que requieren de distintos grados de matematización. Se presentan los problemas diseñados para la introducción del tema de valores, vectores y espacios propios. A continuación se describe la metodología seguida en el diseño y uso de estos problemas. Su solución se encuentra en el anexo C. En todos los casos se espera que los alumnos interpreten y trabajen con el problema propuesto y se esperan diversas propuestas, pero ello no es garantía de que lo hagan. La solución que se muestra en el anexo no tiene pretensión de ser la única posible.

<u>Diseño inicial del problema de empleo - desempleo</u>

Este problema se usó por primera vez en el semestre enero – mayo del 2011. Su solución se encuentra en el anexo C.1.

Primera experiencia. Problema empleo – desempleo

*Supóngase que $\boldsymbol{x_t}$ representa el número de personas empleadas en el periodo **t** y $\boldsymbol{y_t}$ el número de desempleados en el mismo periodo. La fuerza laboral $\boldsymbol{L = x_t + y_t}$ se mantiene constante. Sean **p** la probabilidad de que una persona desempleada encuentre trabajo en cualquier periodo dado y **q** la probabilidad de que una persona empleada continúe empleada. El siguiente modelo describe la dinámica del empleo:*

$$\boldsymbol{x_{t+1} = qx_t + py_t}$$
$$\boldsymbol{y_{t+1} = (1-q)x_t + (1-p)y_t}$$

*Supóngase que **q = ½** y **p =1/3.** Resuelve y encuentra a largo plazo qué sucede.*

1.- Escribe el sistema anterior en notación matricial.

*2.- Sea $\boldsymbol{\overline{x}_t = \lambda^t \overline{v}}$ una solución. Demuestra que es solución o en qué condiciones es solución, para ello sustituye la solución y llega a un sistema en función de la matriz **A** y el vector $\boldsymbol{\overline{v}}$.*

3.- Encuentra los valores de $\boldsymbol{\lambda}$ (valor propio) para los cuales $\boldsymbol{\overline{v}} \neq \boldsymbol{\overline{0}}$ (vector propio asociado a $\boldsymbol{\lambda}$).

4.- Para cada $\boldsymbol{\lambda}$ (valor propio) encuentra un $\boldsymbol{\overline{v}}$ (vector propio).

*5.- Teníamos que $\boldsymbol{\overline{x}_{t+1} = A\overline{x}_t}$. Si $\boldsymbol{\overline{v}_1}$ y $\boldsymbol{\overline{v}_2}$ son vectores propios de una matriz **A** con valores propios correspondientes $\boldsymbol{\lambda_1}$ y $\boldsymbol{\lambda_2}$ entonces la combinación lineal de* *ellos también es solución. Definimos:* $\bar{x}_t = c_1\lambda_1^t\bar{v}_1 + c_2\lambda_2^t\bar{v}_2$*. Demuestra que es solución.*

6.- Sustituye $\bar{x}_t = c_1\lambda_1^t\bar{v}_1 + c_2\lambda_2^t\bar{v}_2$ *en nuestro ejemplo e interpreta el resultado cuando* $t \to \infty$.

El objetivo de la introducción de este problema consistió en probar su pertinencia para la introducción de los conceptos de interés y las posibilidades de emplearlo en clase. En esta primera ocasión la maestra guió a los alumnos en el planteamiento del modelo y en la introducción del tema de valores, vectores y espacios propios. El problema planteado consiste en una aplicación de las ecuaciones en diferencia, un tema que no se incluye en el programa de la materia de álgebra lineal y que los alumnos no han enfrentado antes en otras materias. La introducción de los conceptos de valores, vectores y espacios propios no es inmediata, por lo que, además de presentar explícitamente un modelo se presentó una posible solución, $\bar{x}_t = \lambda^t\bar{v}$, para guiar a los alumnos hacia la construcción de esos conceptos.

Este primer uso del problema tenía la intención de establecer si el problema contaba con las características necesarias para introducir los conceptos de interés, antes de utilizarlo de manera más abierta como problema de modelación. En este semestre se constató que el problema era útil para introducir los conceptos de valor, vector y espacio propio, por lo que se rediseñó como un problema abierto.

Se espera que los alumnos interpreten el problema y concluyan que lo que sucede en el tiempo $t + 1$ depende de lo que ha sucedido en el tiempo inmediatamente anterior t. Se espera también que hagan la acción de sustituir la solución dada en el sistema de ecuaciones en diferencia para verificar si satisface las ecuaciones que representan el problema. Estas acciones los conducirán a un sistema de ecuaciones lineales que involucra los valores y los vectores propios. En la transformación de la ecuación $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ al sistema homogéneo puede aparecer la dificultad reportada en la literatura al hacer el cambio de λ por λI, (Stewart y Thomas, 2007). En este momento se pretende partir del trabajo de los alumnos para formalizar los conceptos de valor y vector propio e introducir una parte de las actividades diseñadas con base en la descomposición genética.

Para resolver el sistema homogéneo anterior, $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$, y dado que se pide $\bar{v} \neq \bar{0}$, se espera que los alumnos coordinen los procesos construidos previamente, relacionados con la solución de sistemas de ecuaciones, independencia lineal y espacio generado y sean capaces de concluir que el sistema debe tener solución múltiple. Se espera, además, que puedan coordinar el proceso asociado al cálculo del determinante con el proceso de dependencia lineal o el de matriz inversa, de manera que reconozcan que las columnas de la matriz $A - \lambda I$ son linealmente dependientes y/o que dicha matriz no tiene inversa. La maestra introducirá el concepto de polinomio y ecuación característica cuando sea pertinente en términos del trabajo de los alumnos con la ecuación resultante de la consideración de dependencia lineal de la matriz. Se espera que los alumnos hagan las acciones o procesos necesarios para encontrar las raíces de la ecuación para encontrar los valores propios que podrán utilizar en el proceso de solución de los sistemas homogéneos asociados con ellos para encontrar los vectores propios asociados a cada uno de los valores propios.

Las últimas dos preguntas (5 y 6) tienen como objetivo favorecer que los alumnos construyan la propiedad de linealidad, es decir, que una combinación lineal de soluciones de una ecuación en diferencias también es solución de la misma ecuación, además de conducirlos a interpretar la solución en términos del comportamiento del sistema a largo plazo, es decir, cuando $t \to \infty$. En este caso, se espera que los alumnos reconozcan que si $t \to \infty$ entonces una de las soluciones encontradas tiende a cero y la otra se estabiliza por lo que en el largo plazo prevalece una de ellas. La maestra introducirá actividades para formalizar los conceptos de valor, vector y espacio propio mediante el trabajo en algunas de las actividades diseñadas (sección 4.2.1).

Después del análisis de los datos de la experiencia con el uso de este problema, que se discutirá en el capítulo de resultados, se llegó a la conclusión de que el problema satisfacía las condiciones necesarias para la introducción de los conceptos de interés y se rediseñó como un problema abierto.

Rediseño del problema de modelación con base en los resultados de su primera aplicación

Dado que los alumnos no han trabajado con ecuaciones en diferencia se consideró importante introducir, antes del problema abierto, otros problemas con ecuaciones en diferencia más simples, aun cuando no requirieran de los conceptos de valor, vector y espacio propios. Se diseñaron dos problemas, uno de población y otro de empleo. Estos problemas se describen a continuación y se utilizaron en los semestres de agosto del 2011 a enero del 2014.

Los tres problemas (población, empleo y empleo – desempleo) se diseñaron siguiendo los seis principios que un problema debe cumplir según la Teoría de Modelos y Modelación, para utilizarse con éxito en una actividad que favorezca la emergencia de modelos por parte de los alumnos. A continuación se muestran los problemas diseñados.

Problema de población

> *En un bosque de México viven los búhos manchados. Supón que no tienen depredadores y tienen alimento suficiente. Sabes que en el periodo* ***t + 1*** *sobrevive una proporción de los búhos del periodo anterior.*

1.- Escribe un modelo que describa lo anterior.

*2.- Encuentra la solución, si sabes que la proporción de búhos que sobrevive de un periodo a otro es **2/3** y que la población inicial es de **375** búhos. ¿Qué pasará a la larga?*

3.- Encuentra la solución para el modelo en general.

Este planteamiento es adaptación propia de un problema que aparece en el texto Lay (2012). Su solución se encuentra en el anexo C.2.

A continuación se describe la relación del problema con los principios de la Teoría de Modelos y Modelación.

1. Principio de realidad. El problema es un problema de poblaciones y los alumnos utilizan lo que conocen acerca del crecimiento poblacional para resolver este problema.

2. Principio de construcción de modelos. Al trabajar con el problema se espera que surja la necesidad de introducir nuevos conceptos relacionados con ecuaciones en diferencia. Se espera que los alumnos realicen distintas acciones para construir modelos que expliquen la situación planteada. El modelo que se desea que construyan es el de una ecuación en diferencia y, se espera, que junto con la maestra encuentren la forma de la solución de una ecuación en diferencia.

3. Principio de autoevaluación. Una vez propuesta una ecuación en diferencia los alumnos pueden resolverla para el caso específico propuesto y analizar su comportamiento a largo plazo. Esto permite autoevaluar el modelo propuesto en términos del comportamiento esperado. La discusión con el maestro y con el resto del grupo contribuye también a la posibilidad de autoevaluación del modelo propuesto.

4. Principio de elaboración de documentos o de documentación. Los alumnos deben entregar por escrito sus supuestos o hipótesis, sus razonamientos y sus modelos en términos matemáticos. Esto permite al maestro verificar el progreso, evaluar el desarrollo del pensamiento de los alumnos y, en términos de su avance, sugerir actividades adicionales o introducir conceptos nuevos que les permitan trabajar para mejorar el modelo. Se pide, además, como otro producto un resumen en el que los alumnos deben describir, al terminar, el proceso completo de su trabajo en el modelo.

5. Principio de generalización de los constructos. Al finalizar la actividad se presentan nuevos problemas que, aunque pueden modelarse con una ecuación semejante a la desarrollada en el

modelo, no presentan situaciones similares a la modelada en clase. Asimismo, el trabajo en las actividades conceptuales que acompañan el modelo debe permitir la interiorización de las acciones relacionadas con los conceptos de ecuación en diferencia y de solución de una ecuación en diferencia.

6. Principio de simplicidad. Es posible esperar que los alumnos puedan trabajar con la situación del problema usando conocimientos anteriores y que mediante la discusión entre ellos y con el maestro les sea posible avanzar en la construcción de nuevos conocimientos que permitan resolver distintas cuestiones relacionadas con el problema de modelación.

El problema reúne, en principio, las condiciones que exige la Teoría de Modelos y Modelación para resultar efectivo para el aprendizaje de los conceptos de interés.

Se espera que los alumnos utilicen la hipótesis básica de que la población en el tiempo ***t + 1*** depende únicamente de la población en el tiempo inmediatamente anterior, ***t***, y del índice de crecimiento (índice de mortalidad menos índice de natalidad) con lo que podrán establecer un modelo matemático representado por una ecuación $\boldsymbol{x_{t+1}} = \boldsymbol{kx_t}$, que es una ecuación en diferencia con una incógnita, donde $\boldsymbol{x_t}$ es la población de búhos en el periodo $\boldsymbol{t}$. Al elegir un valor para la proporción de búhos que sobrevive se espera que sustituyan valores para el tiempo y encuentren qué sucede en el largo plazo. Se espera además que sean capaces de generalizar la solución encontrada para el caso particular para cualquier índice de crecimiento de la población. Se espera que algunos alumnos no puedan plantear la ecuación $\boldsymbol{x_{t+1}} = \boldsymbol{kx_t}$ y, por lo tanto, no puedan resolver el problema.

Problema de empleo

*En una economía sabes que el número de empleados en el periodo **t + 1** es una proporción del número de empleados del periodo anterior.*

1.- Escribe un modelo que describa la dinámica del empleo.

*2.- Encuentra una solución de la ecuación que representa el modelo matemático, si sabes que la proporción de personas que sigue empleada es la mitad y que la población inicial es de **100** personas. ¿Qué pasará con el número de empleados a la larga?*

3.- Encuentra la solución para la ecuación del modelo original que planteaste.

Este problema es similar al anterior. Su solución se encuentra en el anexo C.3. El modelo pertinente es también una ecuación en diferencia, del mismo tipo y su solución es una función exponencial discreta. Se espera de los alumnos un comportamiento similar al descrito para el modelo de poblaciones. Algunos alumnos tal vez no puedan plantear la ecuación $\boldsymbol{x_{t+1} = kx_t}$ y, por lo tanto, no puedan resolver el problema.

El problema reúne también, en principio, las condiciones que exige la Teoría de Modelos y Modelación para resultar efectivo para el aprendizaje de los conceptos de interés.

Problema de empleo – desempleo

El problema de empleo – desempleo original (usado en el semestre enero – mayo del 2011) se rediseñó como un problema abierto en el que se pedía a los alumnos el modelo, una posible solución a la ecuación del modelo y qué sucedía en el largo plazo. En el anexo C.4 se encuentra su solución junto con las preguntas que la maestra fue realizando al ir avanzando en su solución.

> *Supóngase que* $\boldsymbol{x_t}$ *representa el número de personas empleadas en el periodo* $\boldsymbol{t}$ *y* $\boldsymbol{y_t}$ *el número de desempleados en el mismo periodo. La fuerza laboral se mantiene constante. Sean* ***p*** *la probabilidad de que una persona desempleada encuentre trabajo en cualquier periodo dado y* ***q*** *la probabilidad de que una persona empleada continúe empleada.*
>
> *Encuentra un modelo que describa la dinámica del empleo y el comportamiento del mismo a largo plazo.*

El problema cumple, como en el caso de la primera versión, con los principios de la Teoría de Modelos y Modelación. Las diferencias que existen entre los dos problemas intentan que cumpla mejor con el principio de realidad pues en este caso se trata de una versión abierta, así como con el principio de construcción de modelos dado que en esta ocasión se deja en manos de los alumnos la construcción del modelo matemático y el trabajo con las ecuaciones resultantes. Nuevamente se espera que algunos alumnos no puedan resolver el problema.

Se espera que los alumnos planteen las hipótesis de crecimiento del número de empleados en la economía y el número de desempleados de manera que usen un modelo simple del tipo de un sistema de ecuaciones en diferencias de la forma:

$$\boldsymbol{x_{t+1} = qx_t + py_t}$$
$$\boldsymbol{y_{t+1} = (1-q)x_t + (1-p)y_t}$$

donde $\boldsymbol{x_t}$ es el número de empleados y $\boldsymbol{y_t}$ es el número de desempleados en el periodo $\boldsymbol{t}$.

Se espera que los alumnos generalicen la solución de las ecuaciones que representan los modelos de una ecuación en diferencia trabajados anteriormente (problema de población y empleo), y que utilicen matrices y vectores y sus propiedades para abordarlo. Se espera que encuentren una solución del sistema de ecuaciones en diferencia y que ello permita relacionar la solución encontrada con los nuevos conceptos e introducir los valores y vectores propios.

Después de proponer una solución, se espera que los alumnos verifiquen que se trata efectivamente de una solución y que usen sus conocimientos previos para efectuar las acciones o procesos necesarios que podrían, posteriormente, relacionarse con los valores propios de una matriz y los vectores y espacios propios asociados que representan los nuevos conocimientos que se desea introducir.

Se espera que los alumnos puedan trabajar con el problema abierto, sin embargo, en este momento la maestra proporcionará valores específicos a los parámetros para simplificar el proceso de solución que permita encontrar los requerimientos de la solución que posibiliten hacer la relación con los nuevos conceptos.

Por último, se espera que una vez encontrado el conjunto solución del sistema, algunos alumnos sean capaces de coordinar el proceso de conjunto solución con el de espacio generado (espacio propio) por los vectores propios, y también que sean capaces de coordinar el proceso de espacio generado con su representación geométrica en cada caso.

Después de que los alumnos lleven a cabo el trabajo descrito anteriormente, se organizará una discusión con el grupo para formalizar sus resultados mediante la definición de los valores, vectores y espacios propios. La maestra introducirá las definiciones y teoremas.

Los alumnos trabajarán enseguida en las actividades diseñadas con la descomposición genética de la Teoría APOE, que contribuirán a que hagan las construcciones mentales que se consideran necesarias para la construcción de estos conceptos y su relación con la matriz.

4.2 DISEÑO DE INSTRUMENTOS

Se diseñó un conjunto de actividades didácticas con el fin de apoyar a los alumnos en la construcción de los conceptos de interés a través de la promoción de las acciones, de oportunidades de reflexión e interiorización, así como de coordinación de diferentes procesos y de encapsulación de objetos referidos en la descomposición genética. Algunas de estas actividades se inspiraron en algunos ejercicios del libro Lay (2012).

Es importante notar que los alumnos trabajaron en varias actividades semejantes a las que aquí se muestran, con datos diferentes, con el fin de brindarles oportunidades de reflexión sobre sus acciones y alentar la posibilidad de su interiorización en los procesos correspondientes y de encapsulación de objetos. Las actividades diseñadas, conjuntamente con su análisis en términos de la descomposición genética, se presentan a continuación. Su solución se encuentra en el anexo D.

Se inicia con algunas actividades cuyo objetivo es construir una relación entre la interpretación algebraica y geométrica de los valores y vectores propios, para que los alumnos reflexionen sobre el hecho de que la ecuación $\boldsymbol{A\bar{v}} = \boldsymbol{\lambda\bar{v}}$ implica que el producto $\boldsymbol{A\bar{v}}$ es un vector paralelo a $\boldsymbol{\bar{v}}$. El enfoque geométrico se trabajó en $\boldsymbol{R^2}$. Se introdujeron posteriormente algunas actividades con vectores en $\boldsymbol{R^3}$ y $\boldsymbol{R^4}$ para brindar oportunidades a los alumnos de reflexionar en la generalización de sus acciones y procesos a espacios reales de dimensión mayor y más adelante se formalizaron los conceptos para el espacio $\boldsymbol{R^n}$.

Otras actividades se dirigieron a que el alumno hiciera las acciones para encontrar los valores, vectores y espacios propios de distintas matrices, así como para favorecer la interiorización de estas acciones en procesos. Se incluyeron además actividades destinadas a la coordinación de procesos y a la encapsulación de los objetos mencionados en la descomposición genética. Se incluyeron actividades con valores y vectores propios complejos, pero por cuestiones de tiempo y dado que los alumnos tendrán nuevas oportunidades de trabajar en este caso en el curso de sistemas dinámicos, no se profundizó en este tema.

4.2.1 VALORES Y VECTORES PROPIOS

1.- Sea la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{-4} & \boldsymbol{2} \end{pmatrix}$ *y los vectores* $\boldsymbol{\bar{v}_1} = (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{-2})$ *y* $\boldsymbol{\bar{v}_2} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{-2})$*. Encuentra y grafica* $\boldsymbol{A\bar{v}_1}$ *y* $\boldsymbol{A\bar{v}_2}$*. ¿Qué obtienes como resultado? Dibuja en la gráfica los vectores* $\boldsymbol{\bar{v}_1}$ *y* $\boldsymbol{\bar{v}_2}$*. ¿Qué observas? ¿Son estos vectores paralelos a* $\boldsymbol{A\bar{v}_1}$ *y* $\boldsymbol{A\bar{v}_2}$ *respectivamente? Cuando el producto da como resultado un vector paralelo, decimos que el vector es un vector propio de la matriz* ***A****. ¿Son vectores propios de la matriz* ***A****?*

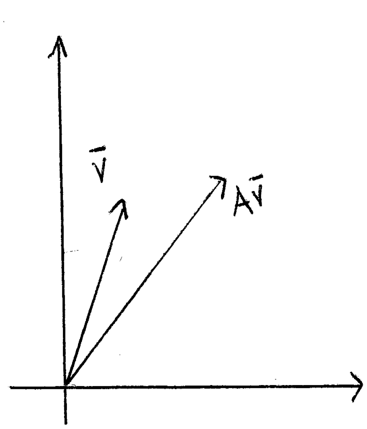
Se espera que los alumnos hagan la acción de multiplicar la matriz por cada uno de los vectores, y encuentren que el resultado es un vector que, en ocasiones es paralelo al vector $\boldsymbol{\bar{v}}$. Esta acción y la reflexión sobre su resultado les permite reconocer que, en el caso del vector $\boldsymbol{\bar{v}_2}$, el nuevo vector es paralelo al primero y, por lo tanto, de acuerdo a la definición dada en el problema si es vector propio de ***A***. En el caso de $\boldsymbol{\bar{v}_1}$, en este ejemplo, el nuevo vector no es paralelo al primero por lo que no se trata de un vector propio de ***A***. Al hacer la representación gráfica se espera que los alumnos construyan la relación entre la interpretación algebraica y la geométrica de los vectores propios como procesos. Se espera que, en general, los alumnos no tengan problemas con esta pregunta.

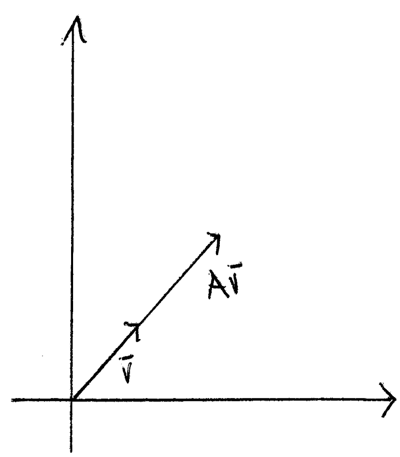
2.- Sea la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$ *y los vectores* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{2}, \mathbf{1})$ *y* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{1}, \mathbf{-4})$*. Encuentra el vector* $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ *y* $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$*. ¿Son múltiplos de los vectores* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ *y* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ *respectivamente? Escribe la ecuación* $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\lambda}\overline{\boldsymbol{v}}$ *y encuentra el valor de* $\boldsymbol{\lambda}$ *en caso de que se cumpla la igualdad. Dibuja en una gráfica los vectores* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$*,* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$*,* $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ *y* $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$*. ¿Cuáles de ellos son paralelos? ¿Qué representa geométricamente la constante* $\boldsymbol{\lambda}$*? A esta constante, cuando existe, se le llama valor propio de la matriz* ***A****.*

Se espera que los alumnos hagan la acción de multiplicar la matriz por el vector, $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}$ y encuentren que el resultado es un vector que, en ocasiones es paralelo al vector $\overline{\boldsymbol{v}}$. Se espera que hagan las acciones necesarias para encontrar la constante $\boldsymbol{\lambda}$ cuando los vectores sean paralelos. Se espera que la reflexión sobre estas acciones y la discusión les permitan reconocer que el valor propio asociado a la matriz ***A*** es una constante que cambia la magnitud y/o dirección del vector propio correspondiente. Se espera, también que los alumnos construyan la coordinación entre los procesos correspondientes a la interpretación algebraica y geométrica de valores y vectores propios como procesos.

La repetición de actividades como las anteriores para diferentes matrices y la reflexión sobre los resultados obtenidos permiten la interiorización de las acciones realizadas en un proceso que da cuenta de cuándo un valor y un vector pueden considerarse como valor y vector propio de una matriz y la construcción de la coordinación de este proceso con el proceso de representación geométrica de estos conceptos.

3.- En las siguientes gráficas, ¿$\overline{\boldsymbol{v}}$ *es vector propio de la matriz* ***A****?*





En estas actividades se incluyeron una diversidad de gráficas con los vectores, $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}$, en algunas los vectores son paralelos, mientras que en otras no lo son. Se espera que los alumnos hagan la acción o proceso de relacionar las gráficas para reconocer el hecho de que el paralelismo de los vectores significa que la ecuación algebraica, $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\lambda}\overline{\boldsymbol{v}}$, es verdadera para una $\boldsymbol{\lambda}$ específica y que en ese caso el vector es un vector propio de la matriz ***A***. Mientras que si no lo es, la igualdad no se cumple y el vector no es un vector propio de la matriz. Esta reflexión permite coordinar el proceso relativo a la interpretación algebraica de los vectores propios con el de su interpretación geométrica.

La reflexión sobre estas actividades puede permitir la interiorización de estas acciones en un proceso de reconocimiento geométrico de los valores y los vectores propios. Además propicia la coordinación del proceso gráfico de definición de los vectores propios con el proceso algebraico correspondiente. También puede conducir a la interiorización de los procesos correspondientes a relaciones con distintos conceptos tratados previamente en el curso como, por ejemplo, combinación lineal o independencia lineal. La interpretación geométrica se trabajó en $\boldsymbol{R^2}$. Después se hicieron ejercicios en $\boldsymbol{R^3}$ y $\boldsymbol{R^4}$ para generalizar más adelante los conceptos a $\boldsymbol{R^n}$, mediante la extensión del problema y actividades similares, aunque ese no fue el enfoque del trabajo y por ello no se trabaja aquí.

4.- Sea la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ *y los vectores* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{6}, -\mathbf{5})$ *y* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{3}, -\mathbf{2})$*. Explica si son vectores propios de la matriz* ***A*** *y encuentra el valor del valor propio correspondiente. ¿Qué significa algebraica y geométricamente el valor propio?*

Se espera que los alumnos hagan la acción de multiplicar la matriz por cada uno de los vectores y reconocer cuándo se cumple la ecuación que define a los valores y vectores propios de una matriz dada. Se espera que, en los casos en que se cumple la ecuación, hagan la acción de encontrar el valor propio correspondiente. En este caso $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ es vector propio y su valor propio asociado es $\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{4}$, mientras que $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ no es vector propio. Se espera que la reflexión sobre sus acciones les permita interiorizarlas en el proceso que permite reconocer al valor propio como una constante para la cual la igualdad $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\lambda}\overline{\boldsymbol{v}}$ se cumple, y que corresponde al cambio necesario en la magnitud del vector $\overline{\boldsymbol{v}}$ que es paralelo a $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}$. Cuando los alumnos no pueden realizar el producto de la matriz por los vectores, por carecer de los conceptos previos necesarios, se espera que no puedan responder esta pregunta.

5.- ¿Es $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{1}, \mathbf{4})$ *vector propio de la matriz* $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\mathbf{3} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{3} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$*? Si lo es, encuentra el valor propio correspondiente.*

Se espera que los alumnos reconozcan que necesitan hacer las acciones necesarias para comprobar el paralelismo del vector con el producto de la matriz por el mismo. Aunque, los alumnos que presentaron problemas en la actividad anterior probablemente no podrán trabajar con esta tampoco.

6.- Di si $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (-\mathbf{1}, \mathbf{1})$ *y* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{2}, \mathbf{1})$ *son vectores propios de* $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & -\mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$*. Explica.*

Se espera que los alumnos coordinen los procesos de valores y vectores propios para responder que $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ no es vector propio mientras que $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ es vector propio y su valor propio asociado es $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{2}$. Algunos alumnos pueden coordinar los procesos de valores y vectores propios con el de paralelismo de vectores para responder. Los alumnos que no han construido estos procesos pueden usar procedimientos memorizados para encontrar primero los valores y después los vectores propios.

7.- Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$*. ¿Es* ***7*** *valor propio? ¿Por qué si o por qué no?*

Se espera que los alumnos sean capaces de sustituir mentalmente el valor propio propuesto en la matriz $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}$ y que puedan asimismo considerar que la matriz resultante de esa operación es una matriz cuyas columnas son múltiplo una de la otra: $\begin{pmatrix} -\mathbf{6} & \mathbf{6} \\ \mathbf{5} & -\mathbf{5} \end{pmatrix}$.

Se espera además que coordinen el proceso de dependencia lineal con el de las propiedades de una matriz, y reconozcan, que en esas condiciones, el determinante de la matriz será cero o no existe la matriz inversa, por lo que el sistema asociado a esa matriz tiene solución múltiple y $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{7}$ es un valor propio de la matriz ***A***. Los alumnos que razonan de esta manera mostrarán haber construido una concepción al menos proceso de valores propios. Aquellos alumnos que requieran hacer las operaciones explícitamente darán evidencia de una concepción acción de valores propios. Se espera que de no haber construido las acciones necesarias para encontrar valores propios, los alumnos no podrán justificar si el valor dado es un valor propio.

8.- Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$*. Sin hacer operaciones, demuestra que* $\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{2}$ *es valor propio de la matriz* ***A****.*

Los alumnos entienden que lo que se pide por “sin hacer operaciones” es que no resuelvan en papel la ecuación característica. Se espera que los alumnos muestren evidencia de haber construido un proceso para valores propios que puedan coordinar con el proceso de dependencia lineal de las columnas de la matriz $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}$ correspondiente al valor propio dado. En este caso, muestran que pueden coordinar el proceso resultante con el de determinante de un sistema homogéneo de ecuaciones, que será cero, por lo que el sistema asociado a la matriz tiene solución múltiple y responderán que $\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{2}$ es un valor propio de la matriz ***A***. Aquellos alumnos que requieran hacer las operaciones explícitamente y resolver la ecuación característica darán evidencia de que han construido una concepción acción de valores propios. Aquellos alumnos que únicamente hayan construido las acciones para encontrar valores propios, no podrán demostrar que es valor propio.

9.- Usando el teorema resumen del álgebra lineal di si $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{2}$ es un valor propio de $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$. Justifica.

Los alumnos pueden coordinar los procesos de valores propios y dependencia lineal con el mencionado teorema para justificar que $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{2}$ es valor propio de la matriz. Se espera que algunos alumnos no puedan responder esta pregunta sin resolver explícitamente la ecuación característica y otros no contesten.

10.- NO utilices la definición de valor y vector propio y dime si $\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{2}$ es valor propio de la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$.

Se espera que los alumnos puedan coordinar el proceso de valor propio con el proceso de dependencia lineal de las columnas de la matriz $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}$ correspondiente al valor propio dado. En este caso, pueden coordinar el proceso resultante con el de determinante de un sistema homogéneo de ecuaciones, que será cero, por lo que el sistema asociado a la matriz tiene solución múltiple y responderán que $\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{2}$ es un valor propio de la matriz $\boldsymbol{A}$. Los alumnos que requieran hacer las operaciones explícitamente y resolver la ecuación característica darán evidencia de que han construido una concepción acción de valores propios.

11.- Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$. Sean $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (-\mathbf{2}, \mathbf{3})$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{1}, \mathbf{1})$ los vectores propios. ¿Son linealmente dependientes o independientes?

Se espera que los alumnos coordinen el proceso de vector propio con otros procesos construidos en el curso como el de independencia lineal para determinar, sin hacer operaciones, la independencia lineal de los vectores dados. Los alumnos que no hayan construido dichos procesos no responderán o necesitarán resolver la ecuación de independencia lineal.

12.- Escribe los valores propios y su multiplicidad algebraica si $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{8} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{7} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{9} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$.

Se espera que los alumnos reconozcan a la matriz como una matriz triangular inferior y coordinen el proceso del determinante de una matriz triangular con el proceso de valores propios. Se espera que algunos alumnos encuentren los valores propios ***3***, ***1*** y ***0*** y relacionen la multiplicidad algebraica con el grado del polinomio característico y el número de veces que aparece el valor en la diagonal. Sin embargo, algunos alumnos pueden confundirse con el valor de cero y los valores repetidos y es de esperar que no puedan determinar la multiplicidad algebraica de los valores propios. Algunos de estos alumnos pueden hacer las acciones asociadas a la definición de valores propios para encontrarlos y resolver la ecuación característica.

13.- Sin hacer operaciones encuentra algún valor propio de las siguientes matrices. Explica.

a) $A = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{12} \\ \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{16} \\ \mathbf{5} & \mathbf{10} & \mathbf{20} \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{7} & \mathbf{4} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$

Se espera que los alumnos relacionen el proceso de la dependencia de las columnas de la matriz del inciso ***a*** con la posibilidad de que la matriz tenga un valor propio igual a cero. Mientras que en el inciso ***b*** se espera que coordinen el proceso de solución del determinante con el de matriz mediante la propiedad de que la matriz triangular tiene como determinante los elementos de la diagonal que en este caso serán los valores propios. Los alumnos que no hayan construido los procesos anteriores, obviamente no podrán coordinarlos para responder o no serán capaces de responder sin realizar explícitamente las operaciones.

14.- Escribe una matriz $\boldsymbol{A_{4x4}}$ *que tenga, únicamente como valores propios al* ***1, -1*** *y* ***3****. Justifica.*

Se espera que algunos alumnos sean capaces de revertir el proceso para encontrar los valores propios de una matriz y reconozcan que podría haber distintas matrices con los mismos valores propios para que busquen la más simple, es decir, una matriz triangular o diagonal que tiene los valores propios en la diagonal. Se espera que aquellos alumnos que no han construido los procesos necesarios, no puedan resolver esta actividad o la resuelvan de memoria, pero sean incapaces de justificar.

15.- Encuentra los valores propios de la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$*. Explica por qué uno de ellos es cero.*

Se espera que algunos alumnos hagan las acciones necesarias para resolver la ecuación característica para encontrar los valores propios y tengan dificultades al explicar por qué uno de los valores propios es cero. Otros alumnos pueden relacionar el proceso de dependencia lineal de las columnas de ***A*** con la posibilidad de que la matriz tenga un valor propio igual a cero. Se espera que coordinen este proceso con los procesos correspondientes a otros temas del curso y reconozcan que en estas condiciones el determinante de la matriz será cero y, por lo tanto, un valor propio será cero. Puede ser que algunos de ellos mencionen el teorema resumen del álgebra lineal.

16.- Escribe una matriz $\boldsymbol{A_{2x2}}$ *(no diagonal ni triangular) que tenga como valor propio al cero.*

Se espera que algunos alumnos no respondan o propongan una matriz cualquiera, al no haber construido los procesos necesarios para elaborar su respuesta. Otros alumnos pueden utilizar la coordinación entre el proceso correspondiente al conjunto solución de un sistema de ecuaciones y el relacionado con la dependencia lineal de las columnas de la matriz. Algunos serán capaces de coordinar los distintos procesos relacionados con la solución de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con la definición del valor propio para encontrar la matriz ***A*** que se pide.

17.- Escribe una matriz $\boldsymbol{A_{3x3}}$ *que tenga como valor propio al cero, es decir,* $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$.

Se espera que algunos alumnos no puedan contestar esta pregunta. Otros pueden coordinar el proceso correspondiente al conjunto solución de un sistema de ecuaciones con el relacionado con la dependencia lineal de las columnas de la matriz para encontrar la matriz ***A***. Otros pueden relacionar los distintos procesos ligados a la solución de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con la definición del valor propio para encontrar la matriz ***A*** que se pide.

18.- ¿Cuántos valores propios distintos puede tener, cuando mucho, una matriz $\boldsymbol{A_{4x4}}$*?*

En este caso los alumnos pueden ofrecer distintas respuestas. Algunos pueden considerar que el polinomio característico de una matriz $\boldsymbol{A_{4x4}}$, es de cuarto grado, por lo que pueden concluir que máximo puede tener cuatro raíces diferentes y por ello la matriz tendrá cuando mucho cuatro valores propios distintos. Estos alumnos mostrarán una concepción acción de valores y vectores propios si se determina que responden de manera memorizada, o proceso si son capaces de ofrecer alguna explicación que refleja la posible interiorización del concepto de valor propio.

Otros alumnos pueden responder que sí es posible asociar vectores propios linealmente independientes al mismo valor propio, y dado que éstos están en $\boldsymbol{R^4}$, la matriz tendrá máximo cuatro vectores propios. Los alumnos que dan esta respuesta han construido la coordinación de los procesos de valores y vectores propios de la matriz ***A*** y la coordinación del proceso resultante con el proceso de espacio vectorial. Aquellos alumnos que no hayan construido la relación entre el número de posibles valores propios y la independencia lineal de conjuntos de vectores, probablemente tendrán dificultad para responder esta pregunta.

19.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? Justifica.

*a) Los valores propios de una matriz **A** triangular superior son exactamente los elementos de la diagonal diferentes de **0**.*

b) Las matrices semejantes tienen siempre los mismos vectores propios.

*c) Si $\boldsymbol{A_{5x5}}$ tiene menos de cinco valores propios diferentes, entonces **A** no es diagonalizable.*

d) Los valores propios de una matriz no necesariamente deben ser distintos de cero pero los vectores propios deben ser distintos del vector cero.

Los alumnos pueden coordinar los procesos de valores y vectores propios con otros procesos relacionados con los conceptos construidos a lo largo del curso y reconocer que el inciso ***d*** es el único correcto. Es de esperar que los alumnos que no han construido los procesos anteriores no puedan responder correctamente.

20.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA? Justifica.

*a) Una matriz $\boldsymbol{A_{nxn}}$ no es invertible si y sólo si **0** es un valor propio de **A**.*

b) Un vector fijo de una matriz de probabilidad de un proceso de Markov es realmente un vector propio.

*c) Si $\bar{\boldsymbol{v}}_1$ y $\bar{\boldsymbol{v}}_2$ son vectores propios linealmente independientes de **A** entonces corresponden a distintos valores propios.*

*d) Si dos matrices **A** y **B** son semejantes entonces tienen los mismos valores propios.*

Se espera que los alumnos coordinen los procesos de valores y vectores propios con otros procesos relacionados con los conceptos construidos a lo largo del curso y reconozcan que el inciso ***c*** es el único falso. Es de esperar que los alumnos que no han construido los procesos anteriores no puedan responder correctamente.

*21.- Si las columnas de **A** son linealmente independientes entonces, ¿cuál de los siguientes incisos es verdadero?*

*a) **det(A)** $\neq \mathbf{0}$.*

*b) No tiene a **0** como valor propio.*

c) El sistema $\boldsymbol{A\bar{x}} = \bar{\boldsymbol{b}}$ tiene solución única para todo $\bar{\boldsymbol{b}}$.

d) Todas las anteriores.

e) Ninguna de las anteriores.

Los alumnos pueden coordinar los procesos de valores y vectores propios con otros procesos construidos a lo largo del curso y reconocer que los incisos ***a***, ***b*** y ***c*** cumplen el teorema resumen del álgebra lineal. Es decir, se cumplen todas las condiciones dadas y la respuesta correcta es el inciso ***d***. Se espera que los alumnos que no hayan construido estos procesos no puedan responder esta pregunta.

*22.- Sea $\boldsymbol{\lambda}$ valor propio de la matriz **A**. La matriz **A** es invertible, es decir, existe **A**$^{-1}$. Demuestra que $\boldsymbol{\lambda^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}}$ es valor propio de la matriz **A**$^{-1}$. (Recuerda la definición de valor y vector propio: $\boldsymbol{\lambda}$ es valor propio de **A** si existe $\overline{\boldsymbol{v}} \neq \overline{\mathbf{0}}$ tal que $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\lambda}\overline{\boldsymbol{v}}$.)*

Se espera que los alumnos coordinen los procesos de valor y vector propio con el proceso de inversa de una matriz y los procesos de manipulación algebraica para transformar la ecuación de la definición de valor y vector propio de ***A*** en la ecuación de la definición de valor y vector propio de ***A***$^{-1}$. Aquellos alumnos que hayan encapsulado los conceptos de valor y vector propio mostrarán ser capaces de hacer acciones sobre el valor propio y sobre la matriz para determinar la relación entre los valores propios de la matriz y los de la matriz inversa. Los alumnos que no hayan construido los procesos que requiere la respuesta a esta pregunta no podrán responder.

23.- ¿Cuál es la definición de valor y vector propio?

Se espera que los alumnos respondan con la definición. Se espera que algunos no respondan al no recordar la definición.

24.- ¿Qué significa algebraicamente la definición anterior?

Dependiendo de los procesos que los alumnos hayan construido podrán interpretar su significado. Se espera que algunos alumnos coordinen los procesos de valores y vectores propios con el de vectores y reconozcan que ambos lados de la igualdad son vectores. Se espera que algunos alumnos que no han interiorizado sus acciones en un proceso, no puedan dar argumentos que justifiquen su respuesta.

25.- ¿Qué significa geométricamente la definición anterior?

Se espera que los alumnos coordinen los procesos de las preguntas 23 y 24 en un proceso que les permita reconocer que los vectores son paralelos. Los alumnos que no hayan construido dichos procesos no podrán responder.

26.- ¿Cómo obtienes los valores propios?

Se espera que los alumnos realicen las acciones o procesos necesarios para explicar cómo se define y se calcula un valor propio de cualquier matriz. En la respuesta de los alumnos será posible identificar si responden de manera memorizada siguiendo los pasos del algoritmo para encontrar los valores propios o si dan muestras de haber interiorizado el proceso correspondiente. Se espera también que coordinen el proceso de solución del sistema de ecuaciones homogéneo asociado a la definición con el de determinante y el de conjunto solución para describir e interpretar las condiciones que deben cumplirse para que se puedan encontrar los valores propios de la matriz. Los alumnos que no hayan construido dichos procesos no podrán responder, o repetirán de manera memorizada el algoritmo para hallarlos.

27.- ¿Cómo obtienes los vectores propios?

Se espera que los alumnos sean capaces de describir las acciones o procesos involucrados en el cálculo de los vectores propios suponiendo que conocen los valores propios correspondientes. Se espera que los alumnos coordinen el proceso involucrado en la definición de vectores propios con el del conjunto solución del sistema correspondiente para determinar los vectores propios asociados a un valor propio y, en ciertos casos, que sean capaces de explicar las distintas posibilidades de conjunto solución del sistema y su relación con los vectores propios correspondientes. Se espera también que algunos alumnos muestren que han coordinado el proceso conjunto solución del sistema con el de espacio nulo de la matriz que define al sistema. Los alumnos que no hayan construido dichos procesos no podrán responder o repetirán de manera memorizada el algoritmo para encontrarlos.

4.2.2 ESPACIOS PROPIOS

28.- *Encuentra los valores, vectores y espacios propios de la matriz* $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-6} \end{pmatrix}$*.*

Los alumnos pueden aplicar los procesos de valores, vectores y espacios propios para resolver este problema específico y explicar sus respuestas. En sus explicaciones será posible identificar si encuentran los valores, vectores y espacios propios de manera memorizada siguiendo los pasos del algoritmo para obtenerlos o si dan muestras de haber interiorizado los procesos correspondientes.

29.- Encuentra los valores, vectores y espacios propios de la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{-9} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{18} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{-7} \end{pmatrix}$*. Encuentra la multiplicidad algebraica y geométrica.*

Se espera que los alumnos coordinen el proceso de comparación de $\boldsymbol{A\overline{v}}$ y $\boldsymbol{\lambda\overline{v}}$ con el de solución de un sistema homogéneo de ecuaciones en un nuevo proceso en el que se determinan las condiciones que permiten encontrar los valores y vectores propios a través del uso del determinante. Se espera también que los alumnos coordinen el proceso de solución del sistema homogéneo correspondiente a cada valor propio con el proceso de encontrar los vectores propios correspondientes. Por último, se espera que algunos alumnos coordinen el proceso del conjunto solución para cada valor propio con el proceso de espacio generado por los vectores propios encontrados para construir el proceso de espacio propio.

Algunos alumnos serán capaces de encontrar las multiplicidades pedidas y de compararlas, mientras que otros pueden tener dificultades al encontrarlas y al compararlas.

La forma en que los alumnos abordan distintos problemas de esta naturaleza podría dar evidencia de que los alumnos han construido una concepción proceso o una concepción objeto de los conceptos de valor, vector y espacio propio. También podría dar evidencia de su posibilidad de coordinar las representaciones geométrica y algebraica y de la posibilidad de coordinar estos procesos con los construidos para otros conceptos del mismo curso. Los alumnos que no hayan construido dichos procesos no podrán responder.

30.- Encuentra los valores, vectores y espacios propios de la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$.

Esta actividad es semejante a la anterior, pero en ella los valores propios de la matriz son números imaginarios. Se espera que algunos alumnos no puedan resolverlo al no poder operar con números imaginarios, mientras que otros puedan hacer acciones para encontrar los valores propios pero enfrenten dificultades con los vectores y espacios propios. Algunos podrán efectuar acciones con los números imaginarios, aunque tal vez presenten problemas para interpretar el espacio propio.

31.- Encuentra los valores, vectores y espacios propios de la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$.

Esta actividad es semejante a las anteriores, pero en este caso la matriz es una matriz diagonal. Se espera que los alumnos coordinen el proceso de determinante con los procesos correspondientes a las propiedades de los determinantes para encontrar los valores propios. Algunos alumnos, en cambio, necesitarán resolver la ecuación característica en su respuesta.

*32.- La siguiente matriz **A** tiene como valor propio a **λ = -1**. Encuentra los vectores propios y el espacio propio asociado a este valor propio. ¿Qué representa gráficamente el espacio propio? No necesitas dar la ecuación característica.* $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$.

Los alumnos pueden usar los procesos de valores y vectores propios para encontrar el sistema homogéneo correspondiente y llevar a cabo el proceso de solución del sistema para encontrar los vectores propios. Al encontrar dos vectores propios de la matriz dada, pueden coordinar los procesos de espacio propio y espacio generado para concluir que el espacio propio es un plano. Se espera que algunos alumnos no puedan encontrar el espacio propio.

Los alumnos que no hayan construido los procesos anteriores puede ser que no contesten o hagan las acciones que han memorizado para encontrar los valores, vectores y espacios propios de una matriz.

33.- Encuentra una base para el espacio propio correspondiente a cada valor propio dado. Encuentra la multiplicidad geométrica de los espacios propios. Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{1}$ *y* $\boldsymbol{\lambda_2} = \mathbf{5}$.

Se espera que algunos alumnos usen los procedimientos memorizados y encuentren los valores propios, aun y cuando estén dados en el problema, hagan además las acciones para encontrar los vectores propios y enfrenten dificultades para encontrar el espacio propio y la base.

Se espera que otros alumnos no hagan las acciones necesarias para resolver la ecuación característica y tomen a los valores propios como datos del problema. Se espera que coordinen el proceso de solución del sistema homogéneo correspondiente a cada valor propio con el proceso de vectores propios. Por último, se espera que algunos alumnos coordinen el proceso del conjunto solución para cada valor propio con el proceso de espacio generado por los vectores propios encontrados para construir el proceso de espacio propio. Después, que coordinen los procesos de independencia lineal y de espacio generado para encontrar una base de los espacios propios. Es posible que algunos alumnos encuentren, erróneamente, un solo espacio propio con todos los vectores propios encontrados.

34.- SIN hacer cálculos encuentra un valor propio, dos vectores propios y el espacio propio de la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$. *¿Por qué se piden dos vectores propios?*

Los alumnos entienden que no deben resolver la ecuación característica. Se espera que muestren haber construido la coordinación entre el proceso de dependencia lineal de las columnas de una matriz y el proceso de valor y vector propio de la misma matriz, y consideren el hecho de que las columnas de la matriz son linealmente dependientes. En esas condiciones, la matriz tiene un valor propio $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$. También se espera que, al considerar el sistema homogéneo asociado con este valor propio, reconozcan que el conjunto solución incluye múltiples soluciones pero que todas ellas se representan mediante una relación con dos grados de libertad, y que coordinen ese proceso con el de vectores propios. Es de esperar que aquellos alumnos que puedan únicamente realizar acciones en la respuesta a sus preguntas no puedan resolver esta actividad sin realizar cálculos.

35.- Sea $\boldsymbol{A}_{nxn}$. *Di si es falso o verdadero. Justifica.*

*a) Si $\boldsymbol{A\overline{v}} = \boldsymbol{\lambda\overline{v}}$ para alguna $\boldsymbol{\overline{v}}$, entonces **λ** es valor propio de **A**.*

*b) **A** es no invertible ⟺ **λ = 0**.*

*c) **λ** es valor propio de **A** ⟺ $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I})\boldsymbol{\overline{v}} = \overline{\mathbf{0}}$ tiene solución múltiple.*

*d) Puede ser difícil encontrar un vector propio de **A**, pero es fácil comprobar si un vector dado es un vector propio.*

*e) Para encontrar los valores propios de **A** se reduce **A** a su forma escalonada.*

*f) Si $\boldsymbol{A\overline{v}} = \boldsymbol{\lambda\overline{v}}$ para alguna **λ** $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{\overline{v}}$ es vector propio de **A**.*

*g) Un espacio propio de **A** es un espacio nulo de cierta matriz.*

Se espera que algunos alumnos tengan problemas con estas preguntas pues sus respuestas son casos generales que requieren la construcción de procesos y si han memorizado los procedimientos no podrán responder correctamente. Otros alumnos pueden coordinar los procesos de valores, vectores y espacios propios para responder y explicar correctamente sus procedimientos.

36.- ¿Cómo obtienes los espacios propios? ¿Qué es la multiplicidad geométrica?

Se espera que los alumnos sean capaces de coordinar el proceso de espacio propio con el de conjunto generador en un proceso que permite encontrar el espacio propio que corresponde a los valores y vectores propios de una matriz cualquiera, además de coordinar este proceso con los procesos de base y, de dimensión de una base de un espacio vectorial, en un nuevo proceso que les permita explicar coherentemente la multiplicidad geométrica. Los alumnos que no hayan construido dichos procesos, o que no los hayan coordinado, tendrán dificultades para responder estas preguntas.

37.- Dime una aplicación de estos conceptos.

Se espera que los alumnos puedan describir alguno de los temas estudiados en clase: ecuaciones en diferencia, diagonalización y potencias de matrices o procesos de Markov. Se espera que algunos alumnos no recuerden aplicaciones.

38.- En una sociedad hay dos partidos políticos. Se van a llevar a cabo elecciones y la gente vota por uno de los dos partidos. Sea ***q*** *la probabilidad de que si una persona votó en la elección anterior por un partido vuelva a votar por el mismo en la siguiente elección y sea* ***p*** *la probabilidad de que cambie su voto. Encuentra un modelo que describa cuántas personas votarán por un mismo partido y cuántas por otro en el tiempo* ***t****. ¿Cómo lo resolverías? ¿Qué datos necesitas?*

Se espera que los alumnos reconozcan que esta situación puede modelarse mediante un sistema de ecuaciones en diferencias, como el problema de empleo - desempleo, que puedan resolverlo y describir los datos que se requerirían para una situación particular. Los alumnos que den muestras de modelar este problema y de responder preguntas que involucren la interpretación de la solución, darán evidencia de haber generalizado la situación de modelación planteada originalmente. Algunos alumnos tendrán problemas con la modelación o, si lo modelan, tendrán problemas para recordar la forma de resolverlo por no haber interiorizado las acciones en proceso.

4.3 METODOLOGÍA DIDÁCTICA

Se siguió la misma metodología didáctica explicada en la sección 3.3. Sin embargo, estos problemas no se aplicaron en el semestre agosto 2010, es decir, se aplicaron en los semestres que van de enero del 2011 a enero del 2014.

De la sección anterior (4.2) se tomaron los ejercicios 1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 12, 15, 29, 30, 31 y 33 como actividades conceptuales de clase y los ejercicios 1, 8, 9, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 32, 34 y 35 para el cuestionario. Esta decisión se tomó después de haber diseñado todas las actividades aquí reportadas para asegurar que las preguntas del cuestionario estaban claramente relacionadas con las actividades en clase y las utilizadas en las tareas.

4.4 METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN DE LA TEORÍA APOE PARA EL ANÁLISIS DE LOS DATOS OBTENIDOS

Se siguió la misma metodología de investigación explicada en la sección 3.4.

4.5 ENTREVISTAS

Después de la experiencia en clase y con base en el análisis de las preguntas del examen parcial se eligieron seis alumnos de cada uno de los semestres enero – mayo 2011 a enero – mayo 2014, en total 36 alumnos, para llevar a cabo la entrevista con el fin de profundizar en el análisis de las construcciones involucradas en el aprendizaje de los conceptos estudiados. Los alumnos se eligieron considerando que en su trabajo previo hubieran mostrado distinto tipo de construcciones de acuerdo al análisis realizado previamente y que pertenecieran a distintos equipos. La entrevista semi-estructurada incluyó preguntas relacionadas con los conceptos de valor, vector y espacio propio, su interpretación geométrica y sus aplicaciones. Se incluyeron preguntas tradicionales y otras que no aparecen normalmente en los textos.

Para la entrevista se tomaron de la sección 4.2 los ejercicios 3, 6, 10, 13, 14, 16, 18, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 34, 36, 37 y 38 que fueron diseñados con este fin.

Una vez diseñados los instrumentos se procedió a poner en práctica la propuesta didáctica. Los resultados de la misma se detallan en los capítulos 7 y 8.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DEL TRABAJO CON EL PROBLEMA DE LAS PATINETAS VOLADORAS

En este capítulo se presenta el análisis del trabajo de los alumnos con el problema que se ha llamado aquí de las patinetas voladoras. Nuevamente, como en el caso de los capítulos referentes a la metodología, se decidió hacer el análisis de cada problema en un capítulo separado atendiendo a las diferencias en el tipo de modelo utilizado, así como en la metodología que se ha descrito para llevar a cabo la aplicación del problema. El problema de modelación es útil, como se verá más adelante, para que los alumnos construyan varios conceptos relacionados con la estructura del espacio vectorial. Por esta razón el problema se usa, con distintos matices a lo largo de varias semanas, mientras que el problema diseñado para introducir los valores, vectores y espacios propios tiene como objetivo, por una parte, evaluar la descomposición genética propuesta y por otra analizar las construcciones de los alumnos en un periodo menor de tiempo y con un problema específico.

Se incluye a continuación el problema del que trata este capítulo, pues, aunque ya se había presentado, se pensó que se facilitaría la lectura del capítulo si el problema formaba parte del mismo.

El problema es el siguiente. Una posible solución se presenta en el anexo A.

PATINETAS VOLADORAS

Eres un joven viajero que deja su tierra natal por primera vez. Tus parientes quisieron ayudarte en tu viaje, así que antes de partir te dieron dos regalos. Te regalaron dos medios de transporte: una patineta voladora y una alfombra mágica. Tus parientes te informaron que tanto la patineta como la alfombra tienen restricciones a las cuales deben someterse:

- *Denotaremos el movimiento de la patineta con el vector* $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{3}, \mathbf{1})$.

*Con esto queremos decir que si la patineta avanza "hacia adelante" durante una hora, se movería en un camino diagonal que resultaría en un desplazamiento de **3** unidades hacia el este y **1** unidad hacia el norte a partir de su posición inicial.*

- *Denotaremos el movimiento de la alfombra mágica por el vector* $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2})$.

*Con esto queremos decir que si la alfombra mágica avanza "hacia adelante" durante una hora, se movería en un camino diagonal que resultaría en un desplazamiento de **1** unidad hacia el este y **2** unidades hacia el norte a partir de su posición inicial.*

El viaje del sabio

Uno de tus parientes, El Tío Cramer, te recomendó que fueras en tu primer viaje a visitar al viejo sabio Gauss. El Tío Cramer dice que el viejo Gauss vive en una cabaña que se encuentra ***107*** *millas hacia el este y* ***64*** *millas hacia el norte de tu casa.*

<u>PARTE I</u>

► *¿Es posible usar la patineta y la alfombra mágica para llegar a la cabaña del viejo Gauss? Si lo es, ¿de qué manera? Si no es posible llegar con estos medios de transporte, ¿por qué?*

► *¿Es posible llegar a la cabaña del viejo Gauss utilizando solamente uno de los dos medios de transporte? ¿Cuál y de qué manera? Si no lo es, ¿por qué?*

<u>PARTE II</u>

Cada semana el viejo Gauss mueve de lugar su cabaña. No estás seguro si el viejo está tratando de poner a prueba tu ingenio para encontrarlo, o si de verdad quiere esconderse en un lugar donde no puedas visitarlo. Determina a cuáles de los siguientes lugares puedes llegar partiendo de tu casa utilizando la patineta y la alfombra. Para cada ubicación, explica cómo llegar o bien explica por qué es imposible llegar desde tu casa. Recuerda que Gauss vive en una cabaña que se encuentra ***107*** *millas hacia el este y* ***64*** *millas hacia el norte de tu casa.*

► *Si mueve su casa* ***3*** *unidades hacia el oeste y* ***4*** *unidades al norte.*

► *Si mueve su casa* ***25*** *unidades hacia el este.*

► *Si mueve su casa* ***12*** *unidades hacia el este y* ***36*** *unidades al sur.*

<u>PARTE III</u>

► *¿Existe alguna ubicación que no se pueda alcanzar utilizando ambos medios de transporte? Describe los lugares que puedes alcanzar utilizando una combinación de patineta con alfombra mágica y aquellos que no pueden ser alcanzados. Especifica los lugares geométricamente y algebraicamente. Incluye una representación simbólica usando vectores. También incluye un párrafo que explique tu respuesta.*

Otras patinetas

PARTE IV

► *Ahora supón que tienes otros medios de transporte: una patineta* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{2},\mathbf{3})$ *y una alfombra* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{5},\mathbf{0})$. *¿Puedes ir a los mismos lugares que con las patinetas y alfombras anteriores? Explica tu respuesta.*

►*Supón que tienes una patineta* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{2},\mathbf{3})$ *y una alfombra* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{6},\mathbf{9})$. *¿Puedes ir a los mismos lugares que con tu patineta y alfombra anteriores? Explica tu respuesta.*

► *¿Puedes caracterizar a los pares de medios de transporte con los que puedes alcanzar cualquier lugar en el plano de coordenadas? ¿Qué pares permiten ir solamente a ciertos lugares del plano? ¿Cuáles son estos lugares?*

Tres medios de transporte

PARTE V

Supón ahora que tienes tres medios de transporte, por ejemplo, una patineta $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{2},\mathbf{3})$, *una alfombra mágica* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{5},\mathbf{0})$ *y un jet ski* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}} = (\mathbf{1},\mathbf{4})$.

► *¿Puedes llegar a cualquier lado?*

► *Supón que quieres ir a la ubicación **6** este y **1** sur ¿puedes llegar? ¿Cómo?*

► *¿Qué conjuntos de tres medios de transporte te permiten ir a cualquier lugar? ¿Cuáles no lo permiten? ¿Cómo puedes describir esto de manera geométrica y algebraica, usando vectores?*

Es importante destacar que el problema se aplicó a los alumnos que cursaban la misma materia, con la misma profesora, durante varios semestres. Esto se hizo, de inicio, para verificar la estabilidad de los resultados de la aplicación del problema, pero, al comprobar que efectivamente el trabajo con el problema y las actividades conceptuales eran estables, es decir, similares independientemente del grupo con el que se empleaba, se decidió considerar los datos obtenidos en todos ellos para llevar a cabo el análisis de los resultados.

A continuación se hace un análisis de los resultados encontrados en el análisis de los datos, que se presenta siguiendo el orden de las secciones del problema considerado y que están relacionadas con la construcción de los diferentes conceptos mencionados en el capítulo 3. La estructura del capítulo es la siguiente:

Se comienza por el análisis de los resultados referentes a la construcción del concepto de combinación lineal que es la base para la construcción de los otros conceptos (5.1), se continúa con el análisis de los resultados relacionados a los conceptos de conjunto generador (5.2) y espacio generado (5.3) cuya definición está íntimamente ligada a la de la combinación lineal. Posteriormente se introduce el análisis de los datos relativos a la construcción de los conceptos de independencia y dependencia lineal (5.4) que permiten responder nuevas preguntas relacionadas con el conjunto generador y el espacio generado, para terminar con el análisis de los datos referentes a la construcción de los conceptos de base y dimensión (5.5) que permiten relacionar todos los conceptos anteriores.

Como se mencionó en el capítulo 3, las evidencias que se muestran en términos de las respuestas de los alumnos, sean verbales o escritas, se transcriben, entre comillas en el caso de las verbales, exactamente como ellos las hicieron, independientemente de si son correctas o no. Esto se hace dado que, en una investigación, no es ético modificar los datos obtenidos.

5.1 Parte I. Combinación lineal

Al iniciar el trabajo con el problema, la mayoría de los alumnos hacen la acción de graficar los vectores de la patineta y la alfombra. La casa de Gauss la dibujan como el punto en el plano correspondiente a su ubicación, ***(107, 64)***.

Los miembros del equipo H (Sem. 2-2010), por ejemplo (figura 1), hacen la acción de sumar ambos vectores y buscan si la casa de Gauss es múltiplo de ese vector. Como la posición buscada no es un múltiplo de ese vector concluyen que no es posible llegar a ella.

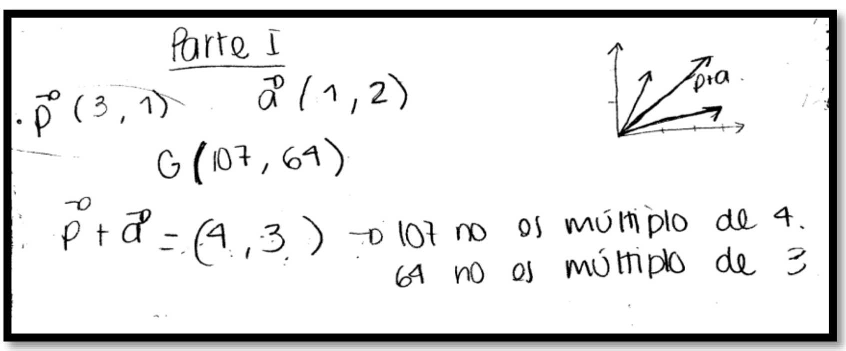


Figura 1

En el caso en que solamente disponen de un medio de transporte, continúan pensando en utilizar vectores que sean *"múltiplos"* uno de otro. En el caso de la patineta se equivocan y toman el vector ***(1, 3)***. Pareciera ser que únicamente buscan múltiplos del ***3*** y no trabajan con el vector como un objeto, sin embargo, este no es el caso, lo que ocurre es que la otra componente del vector es ***1*** y únicamente no lo mencionan. Esta interpretación se justifica al observar que cuando trabajan con la alfombra sí consideran el vector como un todo al buscar los múltiplos, como se muestra en la figura 2. Los alumnos comentan:

H3: *“No es posible viajar solo en patineta porque **107** y **64** no son múltiplos de **3**”.*

H2: *“Tampoco es posible viajar solo con la alfombra porque no hay vector **107** y **64**”.*

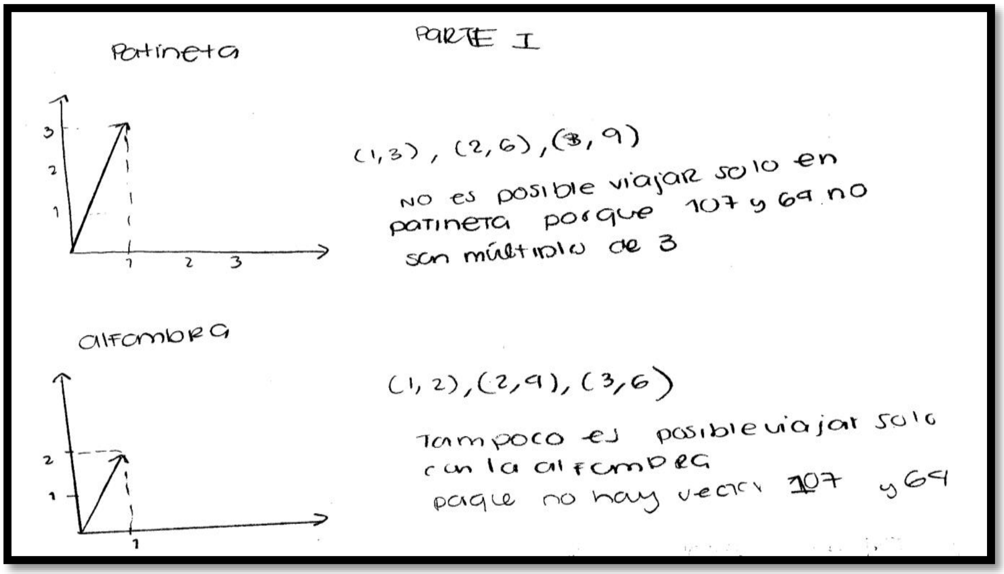


Figura 2

Otro equipo, E (Sem. 1-2014), hace lo mismo que el equipo anterior pero va más allá al buscar, además, otras opciones. Hacen la acción de multiplicar por distintos números de horas para ver si de esa manera pueden llegar a la casa de Gauss (figura 3). En la discusión en equipo los alumnos tienen la siguiente discusión:

E1: *“Necesitamos llegar al **107**, entonces, … si tomamos la patineta necesitamos **(3, 1)** por … treinta y cinco, dos tercios de horas pero … llegamos a **(107, $35\,{}^{2}/_{3}$)**… no llegamos al **64**. Si usamos la alfombra … **(1, 2)** por **107** … la necesitamos **107** horas pero … llegamos al **(107, 214)** … tampoco llegamos al **64**. No podemos llegar”.*

Después, consideran usar ambos medios de transporte. Hacen la acción de sumar ambos vectores y nuevamente comentan que no pueden llegar a la casa de Gauss. Más adelante, con el objeto de probar otras opciones, multiplican los vectores utilizando, de forma incorrecta, el producto escalar y concluyen que tampoco pueden llegar al punto de interés.

E2: *“¿Por qué no usamos ambos? ¿Multiplicamos los vectores o los sumamos?”* (E1 escribe ambos casos). *“Si multiplicamos la patineta y la alfombra **(3, 1)** por **(1, 2) = (3, 2)**… **(3, 2)** por $35\,{}^{2}/_{3}$ llegamos a **(107, $71\,{}^{1}/_{3}$)** … Tampoco sirve. …. Si sumamos la patineta y la alfombra **(3, 1) + (1, 2) = (4, 3)** ….. **(4, 3)** por*

26.75 = (107, $80\,{}^{1}\!/_{4}$***)*** *… tampoco … Solo podemos llegar al **107**. Sigue pasando lo mismo”.*

Por último, optan por utilizar los dos vectores pero viajando primero en un medio de transporte y cambiando después al otro:

E_3: *“¿Y si no tomamos los dos al mismo tiempo? Podemos ir un rato en la patineta y otro en la alfombra…. nos queda un sistema … podemos resolver…. **x** es en la patineta y **y** en la alfombra… Sí funciona”.*

E_2: *“¡Ya! Tenemos la respuesta **30** y **17**. Las probamos con la patineta y alfombra y sí funciona. Sí se puede llegar”.*

Este equipo lleva a cabo las acciones necesarias para escribir de forma algebraica todos los productos que mencionan. No parecen tener una idea clara por qué hacen dichas operaciones, sino que lo hacen únicamente por operar. Después de algunos intentos en los que no es posible llegar al punto objetivo, comienzan a reflexionar sobre sus acciones y son capaces de interiorizarlas en un proceso que les permite identificar que pueden hacer la acción de sumar múltiplos de cada vector y ello les conduce a hacer las acciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones lineales relacionado con esta operación general con los vectores dirección de la patineta y la alfombra. Hacen las acciones para resolver dicho sistema y encuentran que de esa forma es posible llegar al destino que buscaban. Su trabajo se muestra en la figura 3.

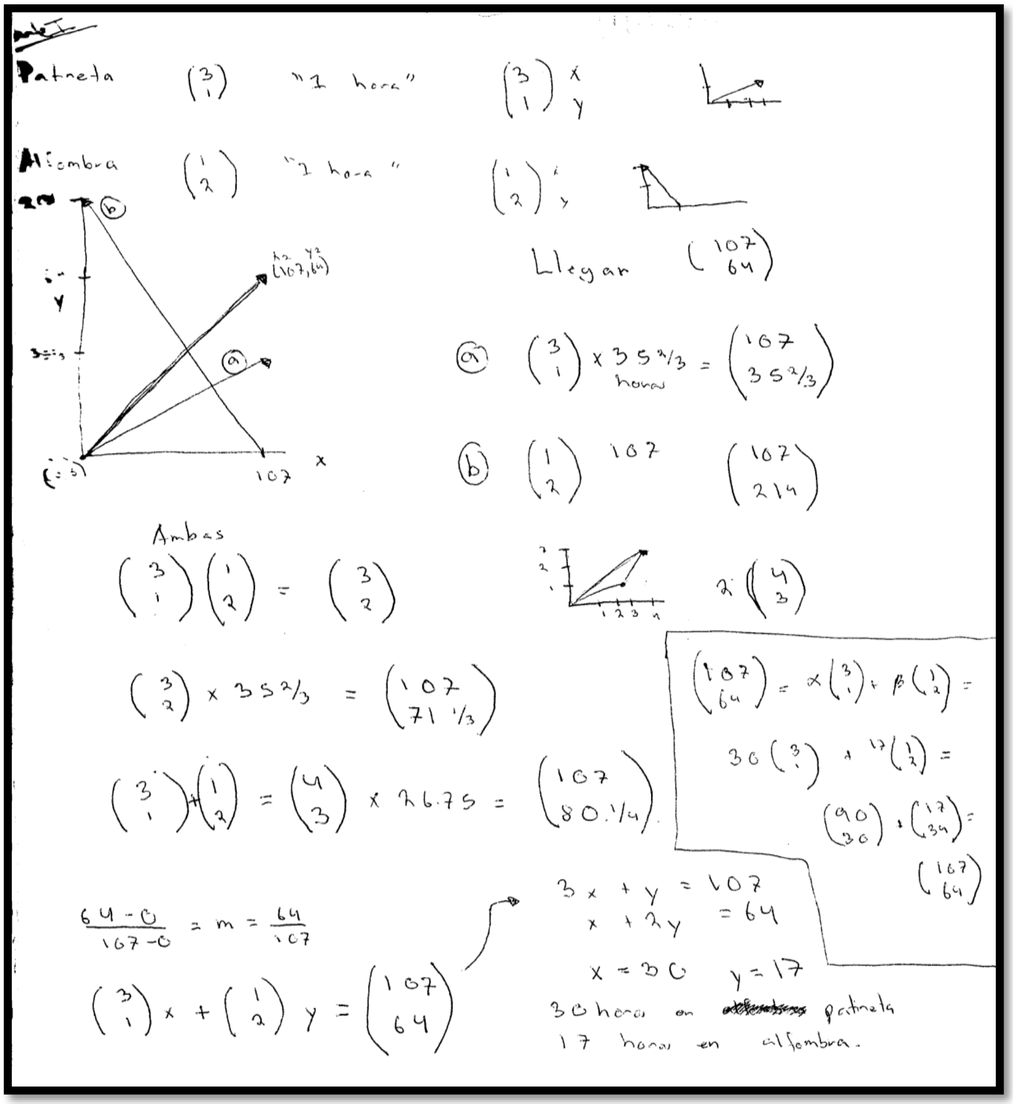


Figura 3

En el caso en que solamente es posible usar un medio de transporte ya no hacen la acción de graficar, la han interiorizado en un proceso que les permite escribir la ecuación vectorial y dan la respuesta sin necesidad de hacer cálculos explícitamente para encontrar el valor del escalar (figura 4). En su trabajo escriben incluso que la patineta y la alfombra "*tendrían que combinarse (ya que la dirección que sigue cada uno no puede llegar a las coordenadas **(107, 64)**)".*

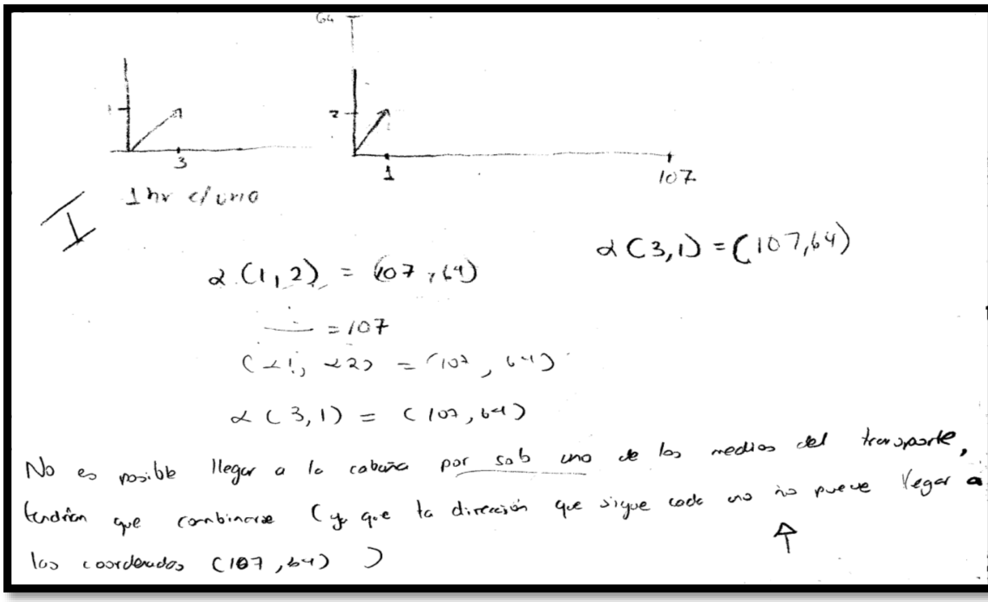


Figura 4

Otros equipos, como el equipo G (Sem. 2-2012), hacen las acciones de avanzar con la patineta y notan que conforme lo hacen se va reduciendo la distancia a la casa de Gauss y van corrigiendo el cálculo (figura 5).

G2: *"Empezamos en **(3, 1)** … multiplico por **10** llegamos a **(30, 10)** … como me acerco lo tenemos que restar de la casa de Gauss … ahora es **(77, 54)**. Todavía me falta, puedo multiplicar por **20** …**(60, 20)** y Gauss … **(47, 44)**. Me falta … ahora por **30** … **(90, 30)** y Gauss … **(17, 34)**. Por **40**… no sirve, me paso la casa".*

G3: *"Espera … no hemos usado la alfombra … ponle eso a la alfombra".*

G2: *"Cierto, entonces … **30** horas en patineta y **17** en alfombra. ¡Listo"!*

Cuando los alumnos mostraron su trabajo a la maestra, ella les preguntó si podrían generalizar la estrategia que habían seguido. Los alumnos reflexionan y son capaces de relacionar sus acciones con la posibilidad de escribir un sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x + 2y &= 64 \\ 3x + y &= 107 \end{aligned}$$

Esto muestra que han interiorizado sus acciones en un proceso que les permite abordar el problema con un sistema de ecuaciones y observan que encuentran los mismos resultados (figura 5).

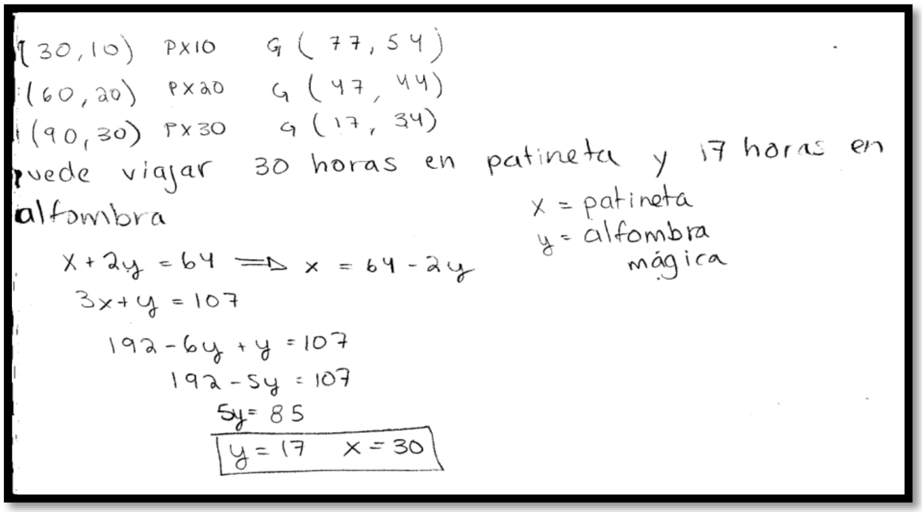
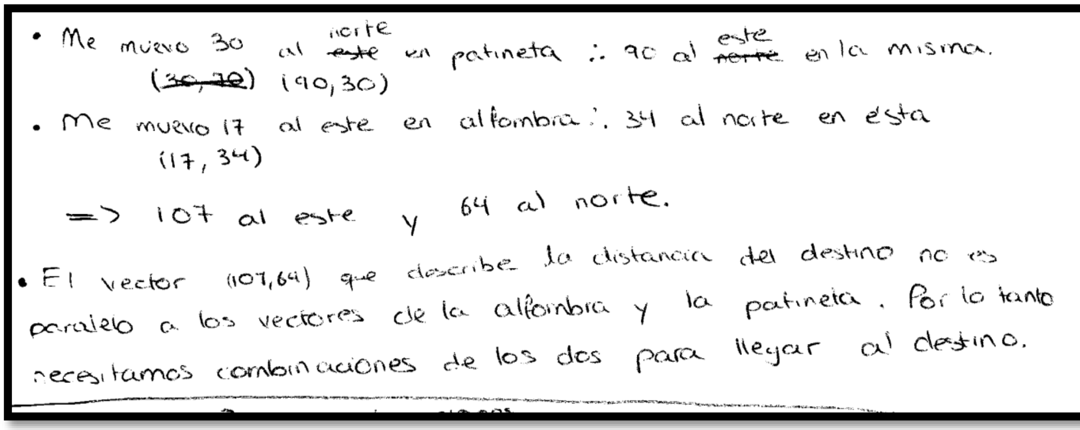


Figura 5

A través de los semestres se pudo observar que la mayoría de los alumnos que trabajaron con este problema empezaron con una interpretación geométrica del problema, haciendo acciones para graficar la patineta, la alfombra y la casa de Gauss. Posteriormente, los alumnos realizan la acción de multiplicar por un escalar estos vectores para encontrar el desplazamiento que se logra después de un cierto tiempo. En todos los semestres se encontraron equipos en los que los alumnos reflexionan sobre su procedimiento inicial y se dan cuenta que están haciendo el producto de un escalar por un vector, y relacionan el proceso de producto por un escalar en el caso de ambos medios de transporte con el proceso de suma de vectores que resulta en un sistema de ecuaciones lineales. Una vez que han propuesto un sistema de ecuaciones como modelo de solución, son capaces de resolverlo y comparar los resultados encontrados por los dos procedimientos. Generalmente, en los distintos semestres, solo un equipo es el que no llega tarde o temprano a utilizar el sistema de ecuaciones.

En algunos casos, los alumnos de los equipos explican con claridad la relación entre el movimiento de la patineta y la alfombra y la posibilidad de llegar al destino propuesto. Mencionan, por ejemplo A_1 (Sem. 1-2011, figura 6) que: "*El vector **(107, 64)** que describe la distancia del destino no es paralelo a los vectores de la alfombra y la patineta. Por lo tanto necesitamos combinaciones de los dos para llegar al destino".*



• Me muevo 30 al ~~este~~ norte en patineta ∴ 90 al ~~norte~~ este en la misma.
(~~30,70~~) (90,30)
• Me muevo 17 al este en alfombra ∴ 34 al norte en ésta
(17, 34)
=> 107 al este y 64 al norte.
• El vector (107,64) que describe la distancia del destino no es paralelo a los vectores de la alfombra y la patineta. Por lo tanto necesitamos combinaciones de los dos para llegar al destino.

Figura 6

Es importante notar que en estos últimos casos, los alumnos utilizan la combinación lineal de dos vectores sin que ésta haya sido introducida en clase. Los alumnos se refieren a ella utilizando la palabra combinación, como se ejemplifica en la figura anterior. La maestra aprovechó este hecho, en todos los casos, para usar las ideas de los alumnos e introducir la definición de combinación lineal. En ese momento introduce algunas actividades diseñadas con la descomposición genética de la sección 3.2.1 para trabajar en la construcción de este concepto. En el siguiente capítulo se muestran los resultados obtenidos del trabajo de los alumnos en dichas actividades.

5.2 PARTE II. CONJUNTO GENERADOR

Las experiencias realizadas mostraron evidencia de que con el trabajo en el problema y las actividades la mayoría de los alumnos fue capaz de construir el concepto de combinación lineal como proceso. Al regresar al trabajo con el problema ya no necesitan hacer las acciones correspondientes a dibujar gráficas sino que plantean y resuelven directamente el sistema de ecuaciones correspondiente a la combinación lineal. En el último caso de esta parte del problema, cuando se mueve la casa ***12*** unidades hacia el este y ***36*** unidades al sur, obtienen un número "*negativo de horas*." Esto causa en los equipos incertidumbre y se genera una discusión entre los alumnos. Por ejemplo, en el caso del equipo H (Sem. 2-2010) que se mencionó anteriormente, uno de los alumnos, H_2, propone: "*El resultado es imposible pues las horas están restringidas a los números positivos"* (figura 7).

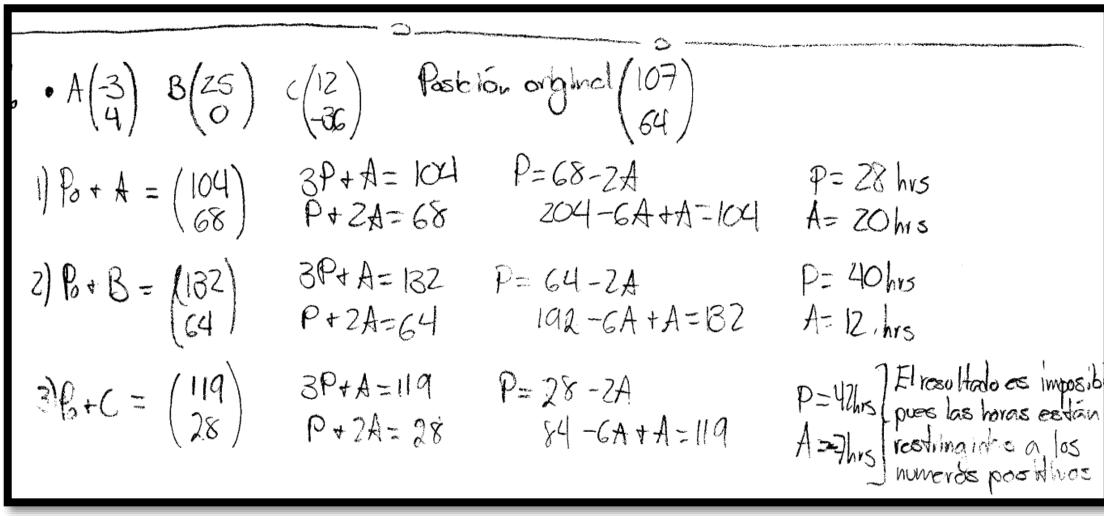


Figura 7

Al darse cuenta que la mayoría de los alumnos tienen problemas para interpretar este hecho, y que para otros la patineta y la alfombra los puede llevar a *"todos lados"* (***R^2***), la maestra inició, en todos los semestres, una discusión en grupo. Algunos alumnos muestran con sus gráficas como por ejemplo B_1 (Sem. 2-2010): *"No sé por qué sale negativo. Si vemos la gráfica se puede ver que se llega a todos lados … pero ya checamos la solución y es correcta. Si sale un negativo ¿qué está pasando?"* La maestra comenta que la interpretación algebraica y geométrica no puede contradecirse y les propone que sigan discutiendo. Después de esta discusión, generalmente solamente un equipo no concluye que el signo negativo significa que se usa el medio de transporte en reversa. Por ejemplo, un miembro del equipo E (Sem. 1-2014), E_4 explica: *"Ya lo tenemos … como sabemos que puede llegar a todas partes pensamos … debe pasarse con la patineta …. entonces tiene que regresar … o sea **42** horas en patineta y como se pasa debe regresar **7** horas en alfombra"* (figura 8). En este momento la mayoría de los alumnos comentan: *"el signo negativo es reversa. Ahora sí puede llegar."* Este tipo de comentarios muestra la interpretación del signo negativo como movimiento en dirección contraria. En general, los alumnos dibujan en una gráfica su explicación de este resultado (figura 8).

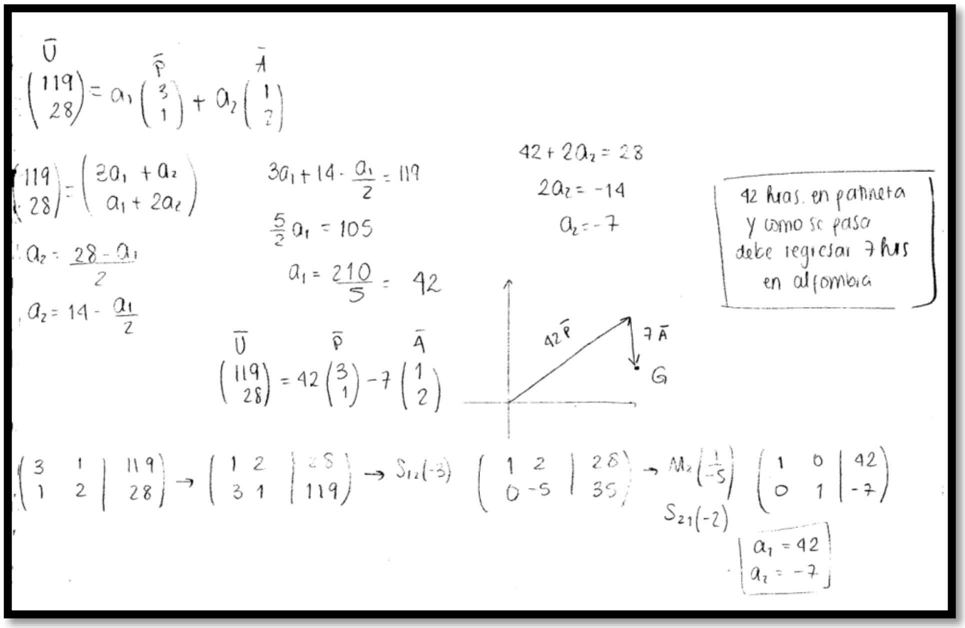


Figura 8

En cada semestre se observó también que muchos equipos hacen referencia al concepto de combinación lineal en su trabajo en esta segunda parte del problema. Este concepto se estudió en la parte I, sección 5.1. Al encontrar que sí pueden llegar a las distintas posiciones para la casa de Gauss hacen comentarios del tipo, I_3 (Sem.1-2012): "*Sí son combinaciones lineales*" (figura 9).

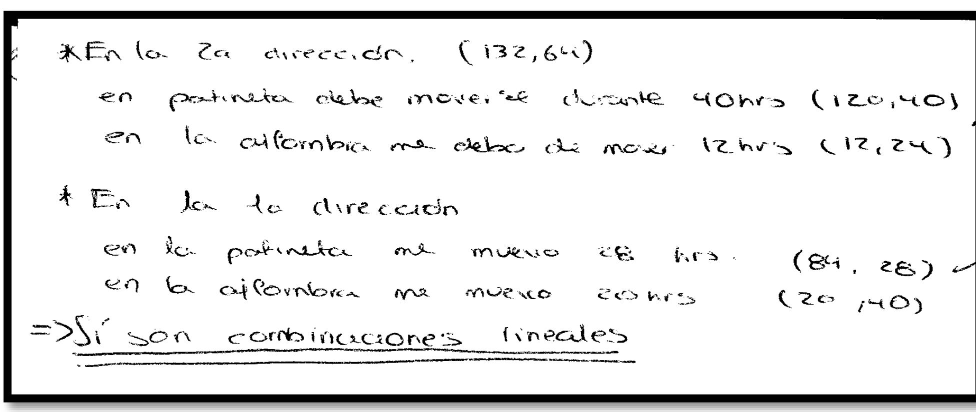


Figura 9

Pudo observarse en esta parte del problema que los alumnos se refieren a aquellos puntos a los que pueden llegar mediante frases similares a la mostrada anteriormente o su negación en el caso de no poder llegar a alguna posición. De esta manera, los alumnos han construido una idea similar a la de conjunto generador sin que este concepto haya sido introducido en clase. Nuevamente la maestra aprovecha esta oportunidad para introducir y formalizar el concepto e introduce algunas actividades de la sección 3.2.2 diseñadas con la descomposición genética para promover su construcción por parte de los alumnos.

En el siguiente capítulo se muestran los resultados obtenidos del trabajo de los alumnos en dichas actividades.

5.3 PARTE III. ESPACIO GENERADO

Después del trabajo con las actividades la maestra observó que la mayoría de los alumnos construyeron un proceso relacionado con el conjunto generador y que son capaces de distinguir aquellos casos en que con la patineta y la alfombra pueden llegar a *"cualquier lado"* (cualquier punto de $\boldsymbol{R^2}$). En este momento la maestra pidió a los alumnos que explicaran lo anterior geométricamente, algebraicamente y con palabras. La mayoría de los equipos responden a esta tarea con facilidad. Por ejemplo, los alumnos del equipo, C (Sem.1-2011), escriben la ecuación vectorial y concluyen, a partir de ella, que con esos medios de transporte pueden llegar a cualquier punto en $\boldsymbol{R^2}$. Después graficaron (figura 10) y se observó la siguiente discusión:

C_1: *"si te subes en uno nada más, haces línea recta y si tienes dos que están en distintas direcciones puedes llegar a cualquier punto, ya que no hay restricciones"*.

C_2: *"Buscamos una combinación lineal de patineta y alfombra en la que no haya solución. Esto no se da. Tiene solución siempre. Gauss no se puede esconder y siempre lo vas a encontrar".*

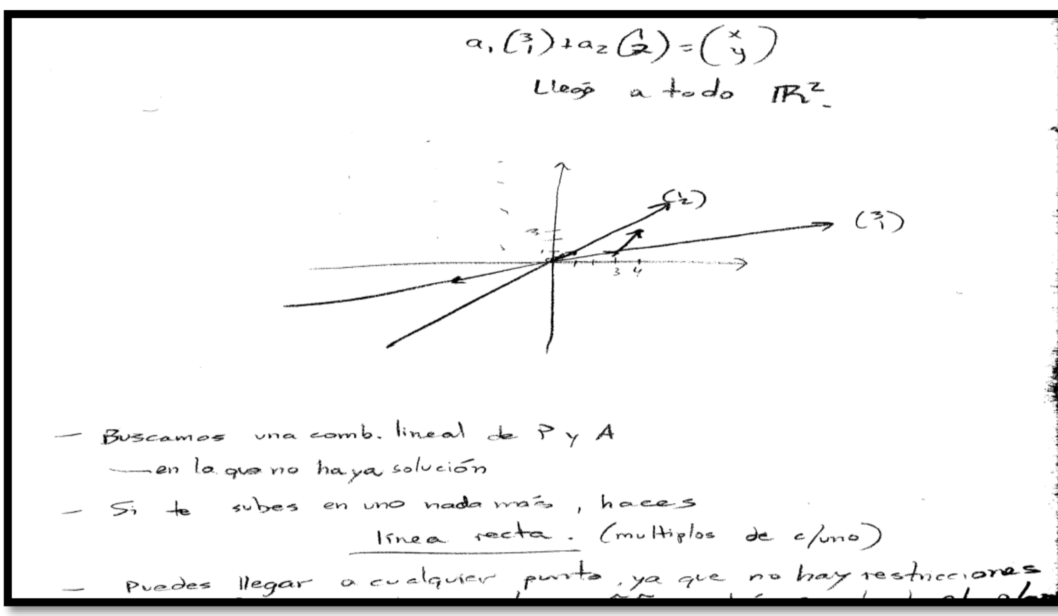


Figura 10

Los alumnos de otro equipo, el G (Sem. 2-2012), al trabajar sobre la representación geométrica explican cómo es posible llegar a cualquier punto de

R$\boldsymbol{R^2}$; G_4 dice: *“Se puede obtener cualquier punto en el área formada por los dos vectores sumándolos”* (marca en la gráfica esa parte) *“…se puede cambiar la dirección de un vector y multiplicarlo por un escalar de signo negativo, entonces obtienes cualquier punto entre las dos rectas ….”* (regresa a marcar la gráfica). *“En otras palabras, multiplicando por un escalar cualquiera de los dos vectores y sumándolos se puede alcanzar cualquier punto.”* Los alumnos están utilizando el método del paralelogramo para sumar gráficamente los vectores. Señalan incorrectamente una parte del dibujo correspondiente a la región contenida entre las dos rectas, pero cuando hacen el último comentario señalan el plano completo. De esta forma, están encontrando todas las combinaciones lineales posibles de los dos vectores y concluyen correctamente que pueden llegar a cualquier punto en $\boldsymbol{R^2}$. En su anotación aclaran que es lo mismo que la ecuación vectorial y la escriben. Estos alumnos muestran haber relacionado la interpretación algebraica con la geométrica (figura 11).

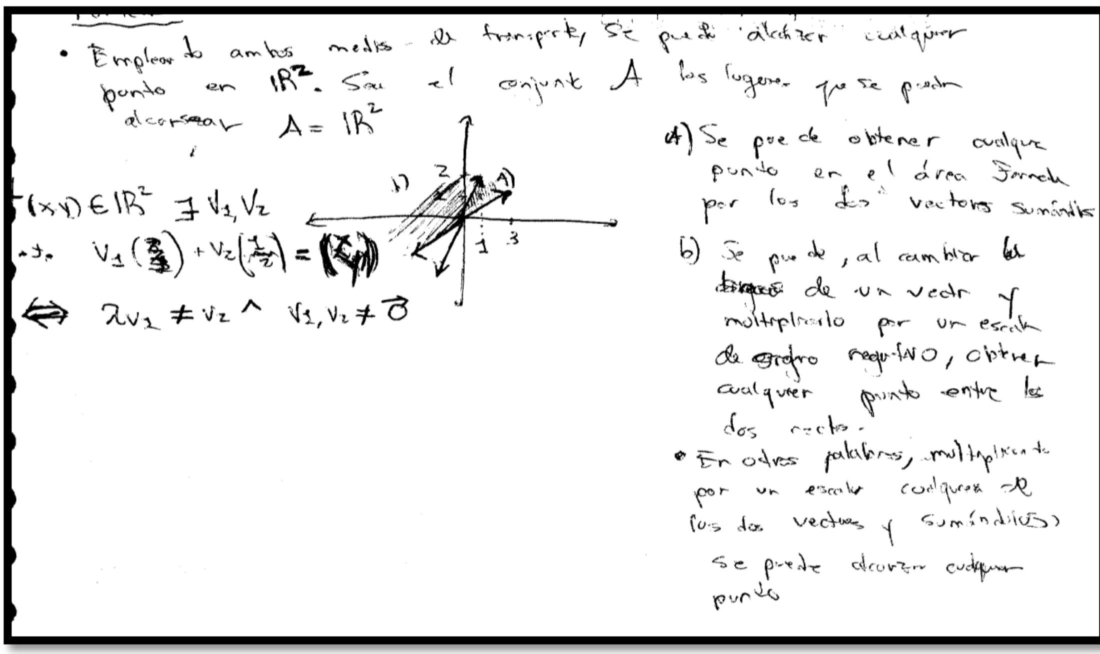


Figura 11

Algunos equipos son capaces incluso de escribir en forma general la ecuación que permite encontrar el número de horas que debe viajarse en la patineta y en la alfombra para cualquier punto del plano (figura 12, equipo C Sem. 1-2011). Este tipo de respuesta muestra que estos alumnos han construido como proceso el concepto de combinación lineal y el de solución de un sistema de ecuaciones.

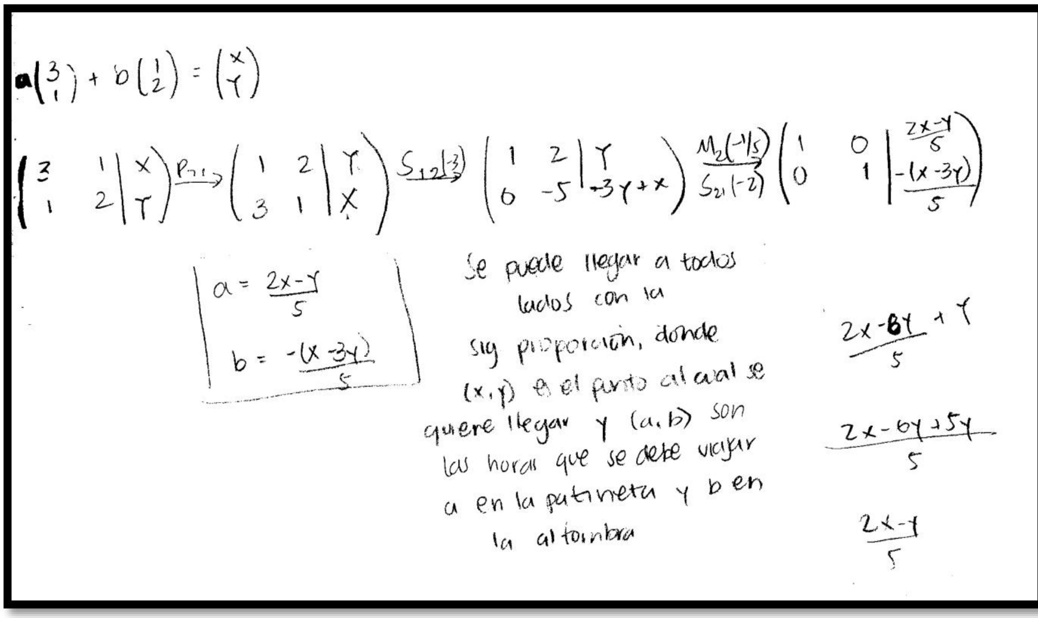


Figura 12

En cada semestre se encontró además que al menos los alumnos de un equipo, como D (Sem. 1-2013) mencionan y escriben frases como: "*se pueden generar cualquier* ***x, y***" (figura 13) que ponen de manifiesto que muy posiblemente han interiorizado el proceso asociado al conjunto generador.

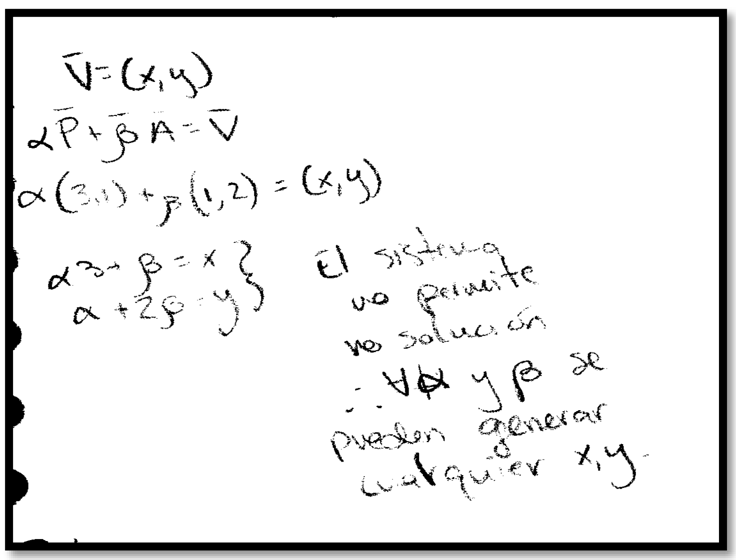


Figura 13

Estos alumnos, por ejemplo el equipo G (Sem. 2-2012), hacen comentarios del tipo G_1: "… *genera todo* $\boldsymbol{R^2}$ *porque el determinante es cinco, diferente de cero y el sistema tiene solución*" (figura 14), encuentran la solución del sistema por medio del determinante.

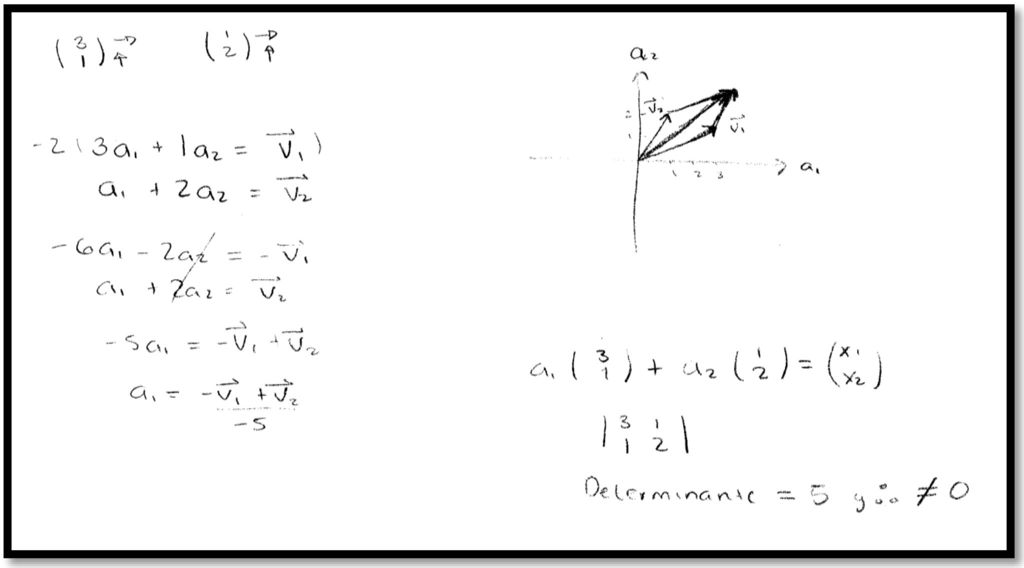


Figura 14

Cuando la maestra se dio cuenta de que la mayoría de los alumnos hacen comentarios que indican que distinguen las situaciones en que se puede llegar a cualquier punto del plano, de aquellas en las que esto no es posible, introdujo la definición de espacio generado y propuso el trabajo en algunas actividades conceptuales de la sección 3.2.2 diseñadas con la descomposición genética para dar a los alumnos nuevas oportunidades de construcción de los conceptos de conjunto generador y espacio generado. En el siguiente capítulo se muestran los resultados obtenidos del trabajo de los alumnos en dichas actividades.

5.4 PARTE IV. INDEPENDENCIA Y DEPENDENCIA LINEAL

En esta parte del problema, parte IV, se introducen situaciones en las que a pesar de contar con dos medios de transporte no es posible llegar a cualquier punto del plano y se pregunta a los alumnos a cuáles puntos pueden llegar.

En todos los casos se encontraron evidencias de alumnos que habían construido la coordinación de los procesos asociados a las representaciones gráfica y algebraica de la combinación lineal y la coordinación de estos procesos con el de espacio generado. Por ejemplo, los miembros del equipo C (Sem. 1-2011) mostraron que habían construido estos procesos al ser capaces de explicar las representaciones; por ejemplo C_4 comenta: *"Con éstos sí podemos llegar a todos los lugares… con estos otros no podemos llegar a todos los lugares. Solo me puedo mover en una recta. Puedo alcanzar cualquier punto mientras mis dos vectores no sean paralelos. Los paralelos me permiten llegar (sic.) solo lugares específicos … los que están en esta recta"* (figura 15).

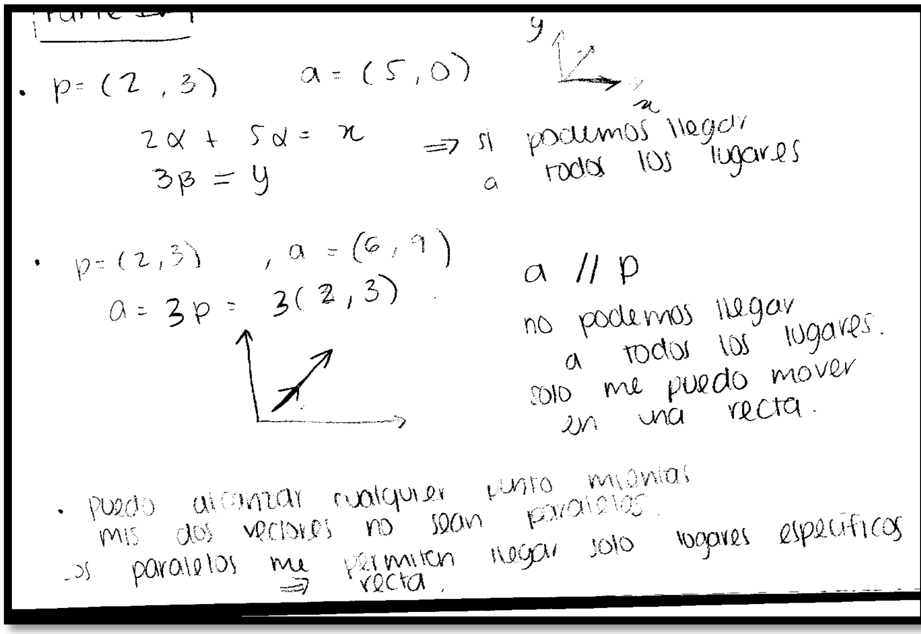
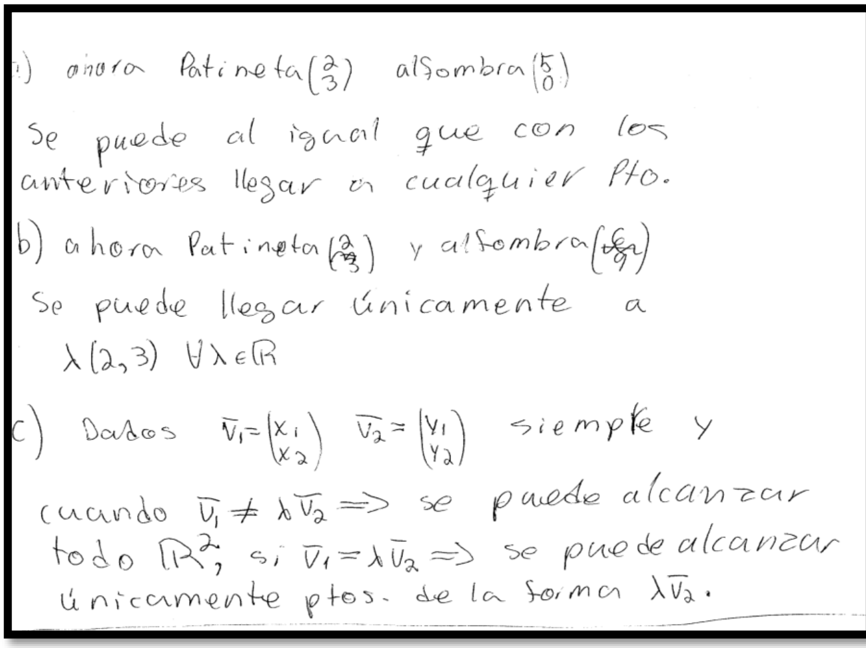


Figura 15

Los alumnos que hacen este tipo de comentarios muestran una concepción proceso del concepto de espacio generado. Otros alumnos, como en el caso de los miembros del equipo E, (Sem. 1-2014), exhiben evidencia de haber construido una concepción objeto de este concepto al contestar sin necesidad de graficar o escribir ecuaciones que "*con dos vectores no paralelos se puede alcanzar todo* $\boldsymbol{R^2}$, *pero si son paralelos se puede alcanzar únicamente puntos de la forma* $\boldsymbol{\lambda\bar{v}_2}$" (figura 16), es decir, son capaces de realizar mentalmente las acciones, o más bien, el proceso, de construir diferentes combinaciones lineales de los vectores e imaginar el resultado de todas ellas simultáneamente.



a) ahora Patineta$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ alfombra$\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$

Se puede al igual que con los anteriores llegar a cualquier Pto.

b) ahora Patineta$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ y alfombra$\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$

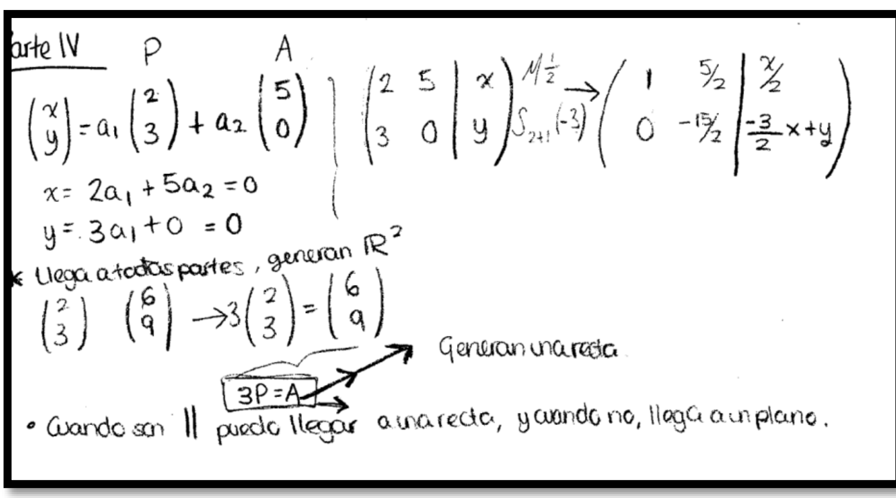
Se puede llegar únicamente a

$\lambda(2,3)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

c) Dados $\bar{V}_1=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ $\bar{V}_2=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ siempre y cuando $\bar{V}_1 \neq \lambda\bar{V}_2 \Rightarrow$ se puede alcanzar todo $\mathbb{R}^2$; si $\bar{V}_1 = \lambda\bar{V}_2 \Rightarrow$ se puede alcanzar únicamente ptos. de la forma $\lambda\bar{V}_2$.

Figura 16

Nuevamente puede observarse que el problema propuesto contribuye de forma efectiva a que los alumnos usen sus conocimientos previos para construir conceptos que no han sido previamente introducidos. En muchas ocasiones los alumnos mencionan explícitamente los conceptos recién introducidos para explicar cuándo se puede generar todo el plano $\boldsymbol{R^2}$ y cuándo se puede generar una recta (equipo E, Sem 1-2014, figura 17).



arte IV P A

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{cc|c}2&5&x\\3&0&y\end{array}\right) \xrightarrow[S_{2+1}(-3)]{M\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cc|c}1&5/2&x/2\\0&-15/2&\frac{-3}{2}x+y\end{array}\right)$

$x = 2a_1 + 5a_2 = 0$

$y = 3a_1 + 0 = 0$

* Llega a todas partes, generan $\mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$ $\rightarrow 3\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$ Generan una recta

$\boxed{3P=A}$

• Cuando son || puede llegar a una recta, y cuando no, llega a un plano.

Figura 17

Un ejemplo de lo anterior se encuentra en el trabajo de los miembros del equipo C (Sem. 1-2011) quienes dan evidencia de haber construido posiblemente una concepción objeto del espacio generado al contestar, usando dicho concepto sin necesidad de hacer cálculos específicos, cuándo se generan distintos tipos de espacios. Estos alumnos muestran, además, que han construido la coordinación de los procesos asociados a la representación algebraica y geométrica a través de aclaraciones que surgieron en su discusión:

C_3: *"estos son diferentes"* (señala los primeros vectores de esta parte) "*pero estos son iguales"* (señala los vectores múltiplos).

C_4: *"Es obvio que no vas a llegar a las mismas partes. Si graficamos me muevo sobre el vector nada más y genero una recta… cuando la patineta y alfombra son múltiplos".*

C_1: *"ok …. y si tenemos dos diferentes generas **R²**. O sea con vectores diferentes llegamos a todo **R²**, pero con vectores múltiplos o paralelos llegamos solo a ciertos lugares del plano, la recta que generan."* (Escriben todo lo anterior en forma algebraica y geométrica como se muestra en la figura 18).

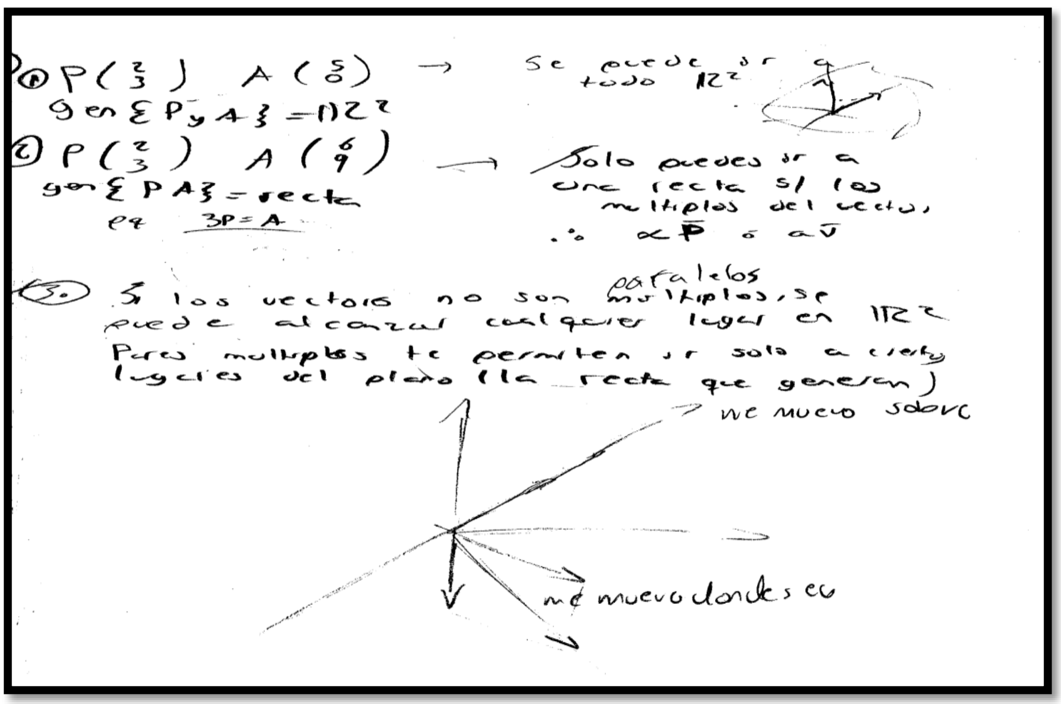


Figura 18

Estos alumnos usan el término de vectores *"diferentes"* para referirse a lo que matemáticamente se conoce como vectores linealmente independientes y se refieren a vectores *"iguales o múltiplos o paralelos"* para aquellos que son linealmente dependientes. Es posible nuevamente observar que los alumnos han construido, al menos intuitivamente, estas nociones que suelen ser difíciles. La maestra aprovechó estos comentarios para introducir en la discusión en grupo los conceptos de independencia y dependencia lineal e introdujo algunas actividades de la sección 3.2.3 diseñadas con la descomposición genética para proporcionar a los alumnos nuevas oportunidades de construcción. En el siguiente capítulo se muestran los resultados obtenidos del trabajo de los alumnos en dichas actividades.

5.5 PARTE V. BASE Y DIMENSIÓN

Los últimos conceptos introducidos con este problema son los de base y dimensión. Se espera que los alumnos hayan construido al menos como proceso los conceptos mencionados anteriormente: combinación lineal, conjunto generador, espacio generado, independencia y dependencia lineal.

En el trabajo con esta parte del problema los alumnos muestran distintas construcciones que se ejemplifican a continuación. En general, los alumnos utilizan las siglas li y dicen “ele i” para referirse a vectores linealmente independientes y ld y dicen “ele d” para vectores linealmente dependientes tanto al escribir como al hablar, por lo que en sus explicaciones se utilizan estas siglas.

Los miembros del equipo D (Sem. 1-2013) muestran haber construido, al menos como proceso, los conceptos de combinación lineal, independencia y dependencia lineal. Encuentran que los tres vectores son linealmente dependientes, escogen dos y demuestran que son linealmente independientes. Explican su procedimiento a la maestra de la siguiente manera:

D_1: *“Hicimos Gauss para ver cómo eran los vectores y llegamos a que son ele d, hay información que sobra”.*

D_2: *“… o sea podemos quitar algo. Escogimos alfombra y jet ski y vimos que son ele i porque usamos el teorema … no son múltiplos”.*

D_3: *“Esto quiere decir que los tres son ele d y eso pasa porque el tercero es combinación lineal a los anteriores”* (Figura 19).

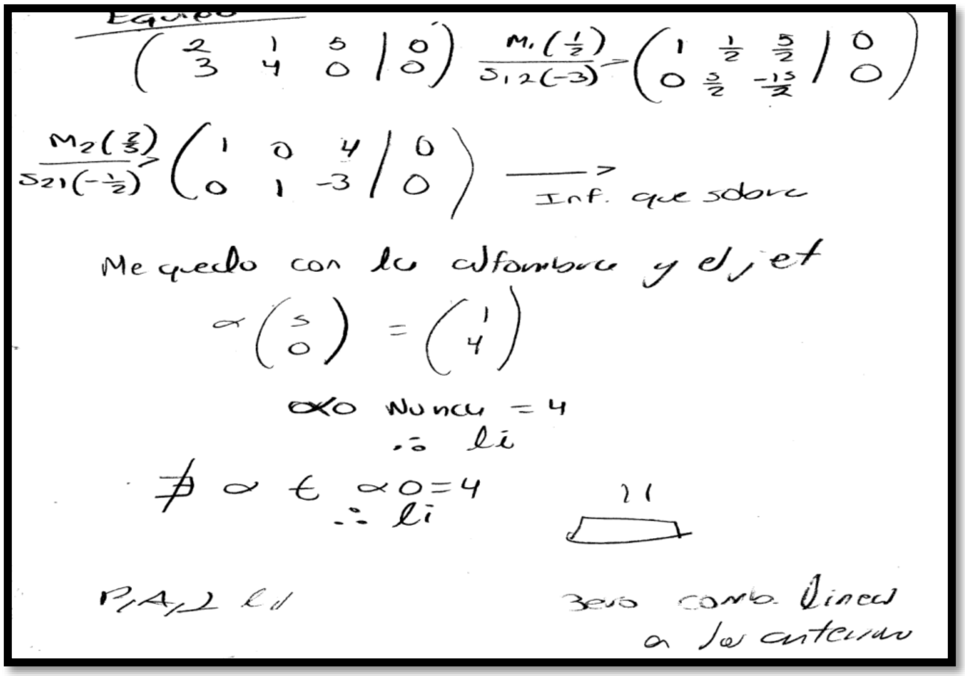


Figura 19

Muchos equipos utilizan gráficas para explicar sus razonamientos. Un miembro del equipo G (Sem. 2-2012, figura 20), G_4, comenta: *“sabemos que sobra uno … necesitas combinar dos y llegas a cualquier lado.”* Señala las gráficas que hicieron y explica: *“aquí están los tres, puedes pasar a patineta y alfombra o patineta y jet ski o alfombra y jet ski. Da lo mismo.”* Concluye: “*puedes llegar a todos lados usando los tres”.*

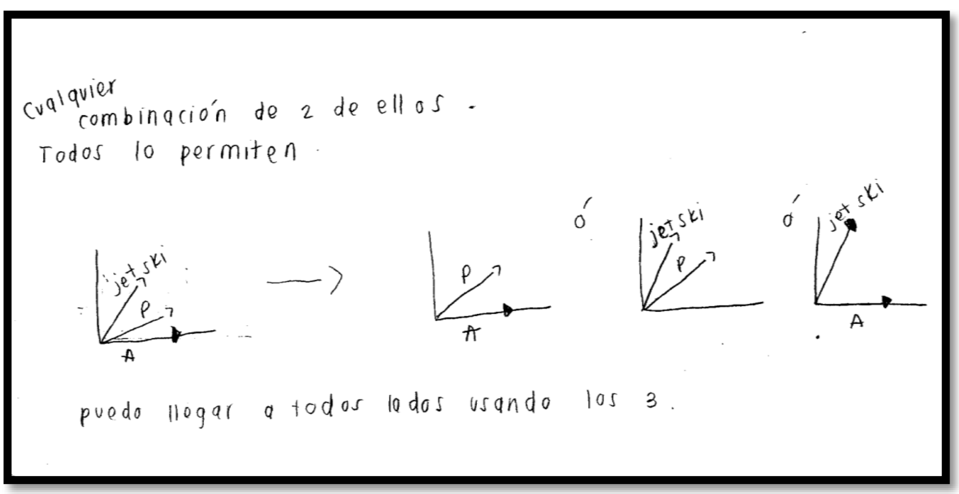


Figura 20

Otros alumnos resuelven de forma algebraica y encuentran que el sistema tiene solución múltiple. Este es el caso, por ejemplo, del equipo I (Sem. 1-2012) que tiene la siguiente discusión (figura 21):

I$_1$: *"¿llegamos a solución múltiple, por qué"?*

I$_2$: *"¿Puedes llegar de muchas formas"?*

I$_1$: *" …. Si das valores a la **c_3** … es libre tenemos muchos casos. Sí, llegas de muchas formas".*

I$_3$: *" … pero ya con dos llegábamos a todos lados, … entonces el tercero sobra."* Resuelven la combinación lineal con tres y dos medios de transporte.

I$_1$: *"… miren … el jet ski no es necesario y con dos pudimos llegar … vamos un tercio de hora en reversa, … 20 minutos en patineta y cuatro tercios … 1 hora 20 en la alfombra".*

Siguen discutiendo y concluyen:

I$_2$: *"el jet ski es información de más, redundante, podemos tirarlo. Es una combinación lineal de patineta y alfombra".*

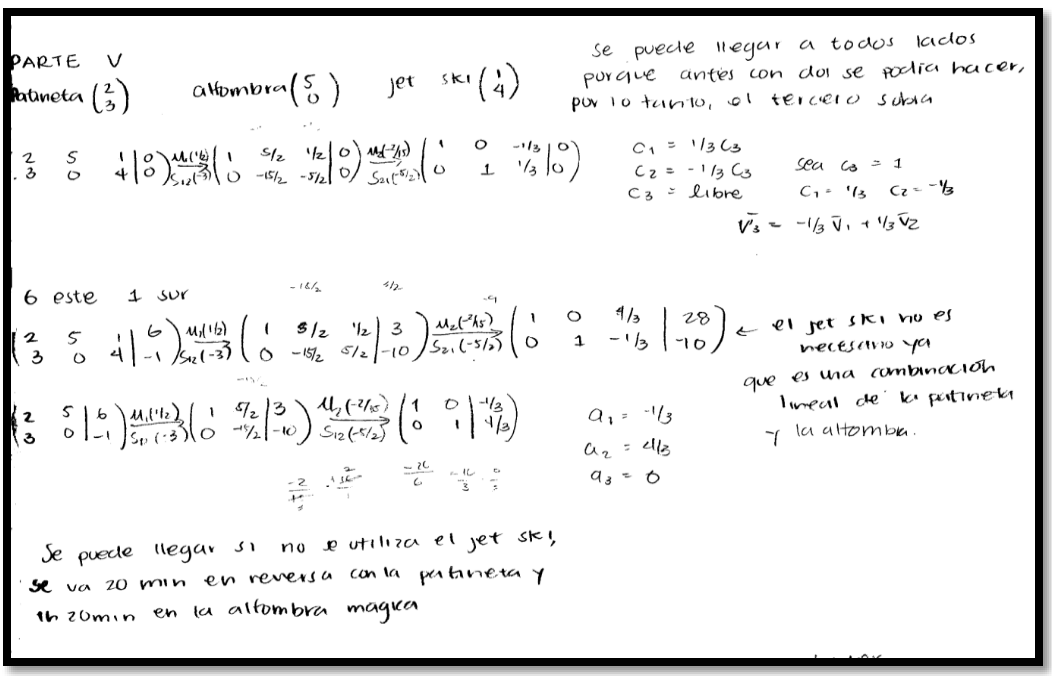


Figura 21

La mayoría de los alumnos muestran haber construido al menos como proceso los conceptos de conjunto generador y espacio generado y concluyen que con tres medios de transporte pueden *"llegar a cualquier punto"* (E$_1$, Sem. 1-2014), es decir, *"tres medios generan **R^2**."* Además, mencionan que solamente son necesarios dos medios de transporte. Algunos alumnos muestran haber construido al menos como proceso el concepto de independencia lineal al comentar: *"estos dos deben ser linealmente independientes"* (D$_3$, Sem. 1-2013).

Casi la totalidad de los equipos aclaran que con un solo medio de transporte *“no se puede llegar”* o *“se genera una recta”* o *“solamente llegas a ciertas partes”* (figura 22).

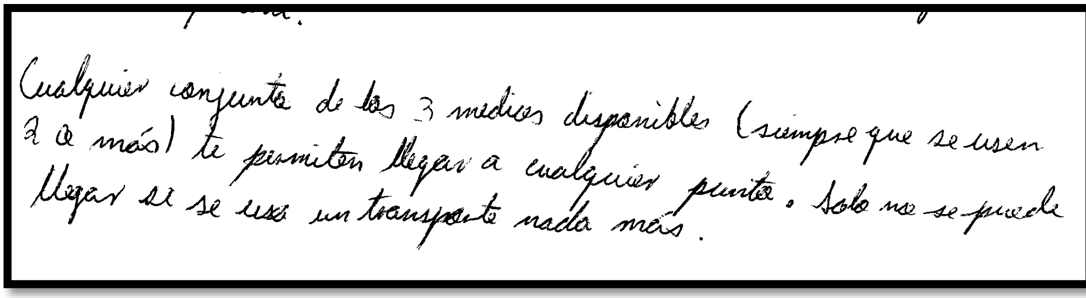

Cualquier conjunto de los 3 medios disponibles (siempre que se usen
2 o más) te permiten llegar a cualquier punto. Solo no se puede
llegar si se usa un transporte nada más.

Figura 22

Los alumnos han trabajado con conjuntos de uno, dos y tres transportes que generan una recta o $\boldsymbol{R^2}$. La mayoría de los alumnos muestra haber construido como proceso los conceptos de independencia y dependencia lineal y espacio generado y concluyen que un vector o dos vectores paralelos son linealmente dependientes y por lo tanto generan una recta, mientras que, dos vectores no paralelos o no múltiplos son linealmente independientes y por lo tanto generan $\boldsymbol{R^2}$. Los alumnos que muestran una concepción objeto han construido la coordinación de los procesos asociados a la representación algebraica y geométrica y relacionan otros conceptos del curso como determinantes. Cuando los alumnos trabajaron con tres vectores mencionan que siguen generando $\mathbf{R}^2$, pero mencionan que *“les sobra información*” o *“pueden quitar un vector”* o *“tenemos información redundante”.*

Nuevamente, se puede observar que mediante el trabajo con el problema, los alumnos han construido, al menos intuitivamente, los conceptos de base y dimensión. La maestra aprovechó, nuevamente, estos comentarios para introducir actividades conceptuales de la sección 3.2.4 diseñadas para esta parte con base en la descomposición genética para dar a los alumnos nuevas oportunidades de construcción de los conceptos de base y dimensión y para formalizar estos conceptos. En el siguiente capítulo se muestran los resultados obtenidos del trabajo de los alumnos en dichas actividades.

En este capítulo se analizó el trabajo de los alumnos con el problema de las patinetas voladoras. Como se mencionó, durante este trabajo los alumnos han construido, al menos intuitivamente, los conceptos de combinación lineal, conjunto generador, espacio generado, independencia y dependencia lineal, base y dimensión. Es importante destacar que el problema permite a los alumnos imaginar el viaje en los distintos medios de transporte y pueden así obtener una imagen más concreta del significado de conceptos que son sumamente abstractos. El análisis utilizando la Teoría APOE permite interpretar las construcciones de los alumnos al ir resolviendo el problema, determinando, al mismo tiempo, las posibles necesidades de algunos de los equipos para poder apoyarlos en su construcción. La gestión de la actividad de los alumnos en este contexto es muy compleja. Requiere, como en este caso de que la maestra detecte en el momento las necesidades de los alumnos y guíe sus conversaciones mediante nuevas preguntas. En este caso, además, la maestra aprovechó, en cada parte del problema, las ideas y comentarios de los alumnos para introducir las actividades conceptuales diseñadas para promover su construcción por parte de los alumnos y para introducir y formalizar los nuevos conceptos. Como se comentó, el problema se trabajó en $\boldsymbol{R^2}$, sin embargo en las actividades conceptuales introducidas se utilizaron otros espacios reales para trabajar matemáticamente haciendo las construcciones señaladas en la descomposición genética necesarias para construir los mismos conceptos en espacios reales de otra dimensión, es decir, para generalizar los conceptos a $\boldsymbol{R^n}$. En el siguiente capítulo se muestran los resultados obtenidos del trabajo de los alumnos en las actividades conceptuales diseñadas con la descomposición genética.

CAPÍTULO 6. ANÁLISIS DE LAS CONSTRUCCIONES DE LOS ALUMNOS DE LOS CONCEPTOS RELACIONADOS CON LA COMBINACIÓN LINEAL

En este capítulo se presentan los resultados de esta investigación mediante evidencia del análisis del trabajo de los alumnos obtenida tanto de las actividades realizadas en clase, como de los instrumentos de investigación. La descripción de los resultados se hará para cada uno de los conceptos introducidos con el problema de las patinetas voladoras, es decir, combinación lineal, conjunto generador, espacio generado, independencia y dependencia lineal, base y dimensión.

Como se mencionó en el capítulo anterior, el trabajo se realizó durante 8 semestres (2010 – 2014) pero el trabajo en cada uno de ellos y los resultados fueron similares, por ello los resultados descritos incluyen información de todos ellos. Los números que se presentan corresponden al promedio de los alumnos por semestre que dio respuestas similares.

Construcciones previas

Las descomposiciones genéticas utilizadas suponen, como conceptos previos para la construcción de los conceptos estudiados en este capítulo, la construcción, entre otros, de los conceptos de plano cartesiano, vectores, suma de vectores, producto de un escalar por un vector, ecuaciones algebraicas y vectoriales, solución de sistemas de ecuaciones y tipos de solución.

Los resultados mostraron que tres alumnos en promedio cada semestre no mostraban evidencia de haberlos construido, como se ejemplifica enseguida, y que esto parecía ser responsable de sus dificultades en el aprendizaje de los conceptos estudiados. Las dificultades de estos alumnos se manifestaron en distintos momentos durante la investigación, incluyendo la entrevista en la que se les presentaron preguntas en contextos distintos, pero, en todos los casos, los resultados mostraron que construyeron, en el mejor de los casos, una concepción acción de los conceptos de interés.

Dos de estos alumnos mostraron no haber construido el concepto de vector ni siquiera como acción. Consideran a los vectores como puntos en el espacio y los sustituyen en las ecuaciones para determinar si el vector está en un espacio específico.

Tal es el caso del alumno B_1 (Sem. 2-2010, figura 1) que cuando se le pide que muestre si los vectores $\bar{v}_1 = (0, 5, 2)$, $\bar{v}_2 = (-5, 0, 3)$ y $\bar{v}_3 = (2, 3, 0)$ forman una base para el plano $W: 3x - 2y + 5z = 0$ toma a los vectores como puntos y comenta: *“A los tres vectores los sustituyo en la ecuación … como la cumplen … entonces los vectores satisfacen la ecuación. Esto quiere decir que son una base para **W**.”* Considera que el hecho de que un vector “satisfaga” la ecuación significa que genera ese espacio. Al parecer, el hecho de confundir el vector con un punto no le permite construir los conceptos de conjunto generador y base.

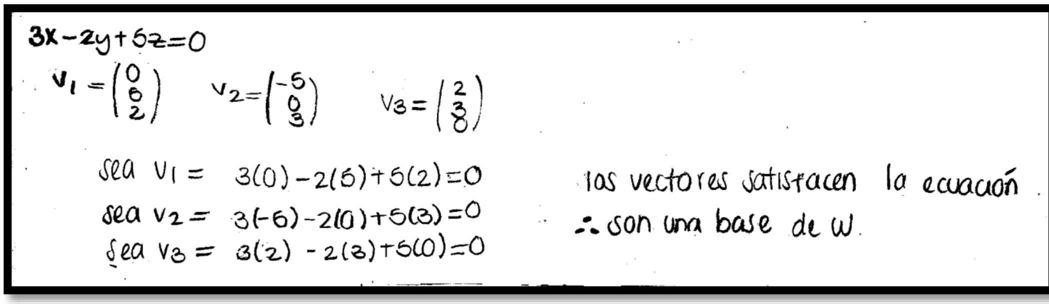


Figura 1

Ante la misma pregunta otro alumno, H2 (Sem. 2-2013), forma nuevos vectores, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, con las componentes de los vectores dados. Sustituye estos nuevos vectores como se ve en la figura 2, llega a un absurdo y concluye: *"Hago vectores con las componentes de los vectores que me dan o sea un vector con las **x**'s otro con las **y**'s y otro con las **z**'s… entonces tengo los vectores $\bar{x}$ **= (0, -5, 2)**, $\bar{y}$ **= (5, 0, 3)** y $\bar{z}$ **= (2, 3, 0)**. Los sustituyo en el plano para ver si cumplen y son base … pero con $\bar{v}_3$ se llega a **4 = 0** …. absurdo… pero $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ sí cumplen por lo que sí son base."* Al pedirle que explique su razonamiento dice: *"los dos primeros sí resuelven la ecuación, o sea generan **W** y por lo tanto sí son base, mientras que $\bar{v}_3$ me da un absurdo por lo que no es base",* mostrando que no ha construido los conceptos de conjunto generador y base.

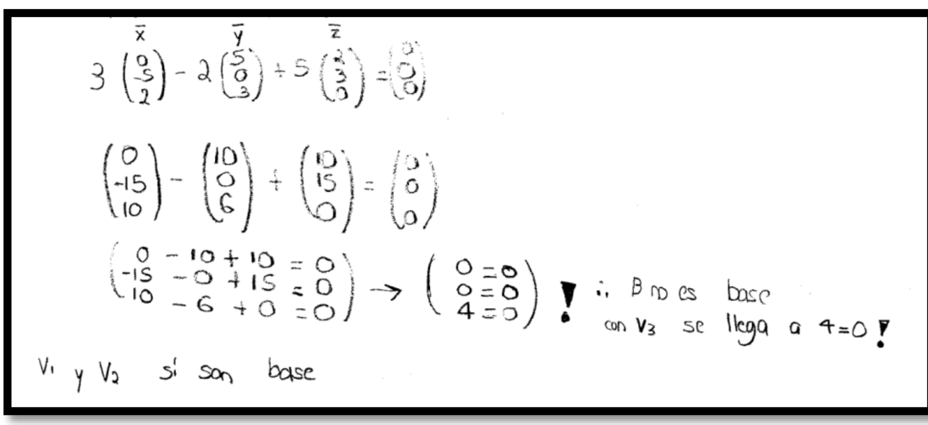


Figura 2

Estos alumnos confunden a los vectores con variables. El alumno anterior, en otra pregunta donde se da la combinación lineal $\bar{v}_1 - 3\bar{v}_2 + 5\bar{v}_3 = \bar{0}$, escribe la palabra “vectores” (figura 3), sin embargo toma la ecuación vectorial como una ecuación con variables v_1, v_2 y v_3. Despeja v_1 y deja a v_2 y v_3 como variables arbitrarias. Al preguntarle qué significa que sean arbitrarias dice: *“tengo dos grados de libertad y me muevo en dos direcciones.”* La maestra le insiste en que son vectores pero el alumno no logra reconocer la diferencia.

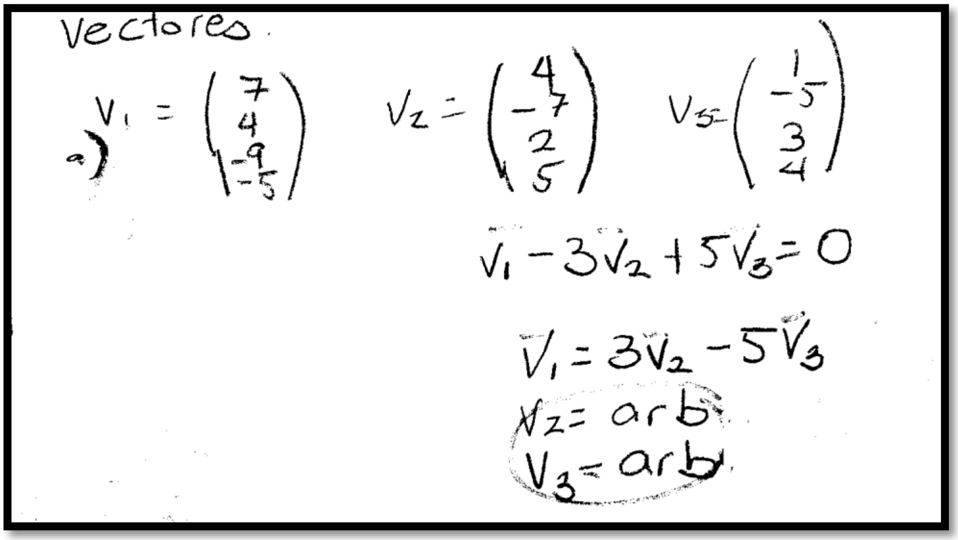


Figura 3

Los alumnos que no han construido como proceso la solución de sistemas de ecuaciones y los posibles tipos de solución tienen problemas para construir los conceptos estudiados. Algunos alumnos han memorizado, sin comprenderlo, el algoritmo de Gauss – Jordan para resolver un sistema de ecuaciones. Es el caso del alumno B_3 (Sem. 2-2011, figura 4) quien al usar este algoritmo y llegar a una matriz con ceros en la diagonal no sabe cómo continuar. En la pregunta mencionada anteriormente muestra al menos una concepción acción del concepto de base al contestar: *“Necesitamos que los tres vectores dados sean ele i y generen el plano para ser base.”* Al escribir el sistema homogéneo para encontrar si los vectores son linealmente independientes no sabe resolverlo y comenta: *“Estoy buscando generar en **R**^{3} un plano. Necesito ver si los vectores son ele i, entonces resuelvo la ecuación $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + c_3\bar{v}_3 = \bar{0}$ …. resuelvo el sistema homogéneo.”* Lo escribe como se ve en la figura 4, y dice: *“… pero esto no se puede resolver … ¿está mal? No sé … ¿qué hago?… no puedo hacer pivotes. Tengo ceros en toda la diagonal. No puedo saber si son ele i o ele d.”* Al no poder resolver el sistema homogéneo no puede determinar si los vectores dados son o no linealmente independientes y por lo tanto no puede responder la pregunta. Al parecer ha construido como acción los conceptos de independencia lineal y base. Como se mencionó en el capítulo anterior, en general, los alumnos utilizan las siglas li y dicen “ele i” para referirse a vectores linealmente independientes y ld y dicen ele de para vectores linealmente dependientes tanto al escribir como al hablar. Se decidió escribir las citas verbales como los alumnos las comentan para no alterar los datos recogidos. Sin embargo, para tener mayor claridad las ecuaciones, vectores y variables se escriben en su formato matemático.

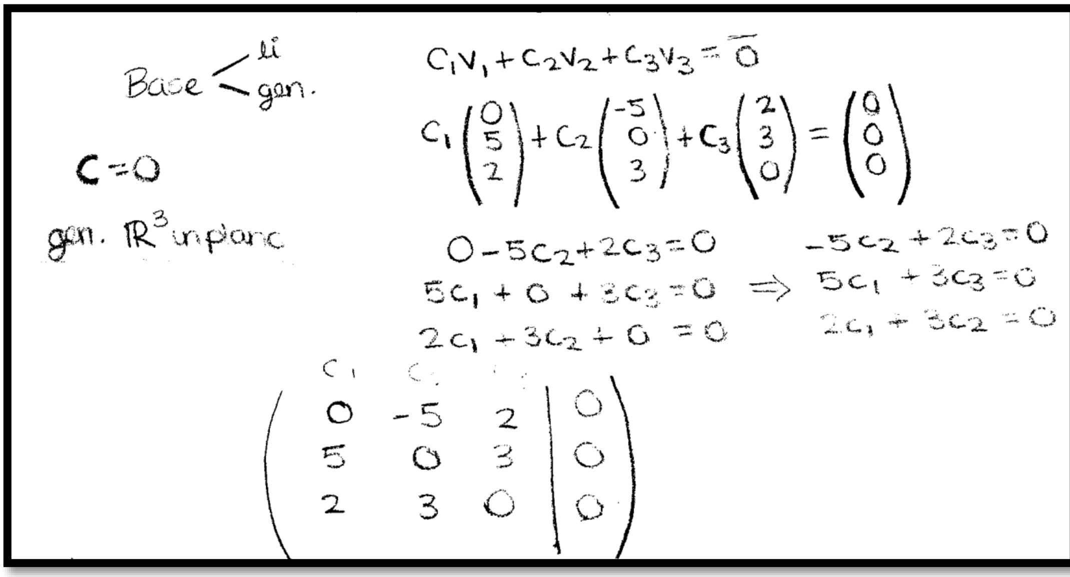


Figura 4

Los ejemplos anteriores ponen de manifiesto que los alumnos que no han construido los conceptos previos no pueden hacer las construcciones previstas en la descomposición genética. La construcción del concepto de vector resulta indispensable para la construcción de los conceptos estudiados. La interpretación de la solución del sistema homogéneo resulta además imprescindible en la construcción del concepto de independencia lineal, por lo que muestran cuando mucho una concepción acción de dicho concepto.

A continuación se presentan los resultados de la investigación para cada uno de los conceptos introducidos con el problema de las patinetas voladoras: combinación lineal, conjunto generador, espacio generado, independencia y dependencia lineal, base y dimensión. Es importante recordar que los alumnos trabajaron en varias actividades diseñadas con la descomposición genética con datos diferentes para darles oportunidad de reflexionar sobre sus acciones e interiorizarlas en procesos. Como se mencionó en el capítulo anterior, el problema de las patinetas voladoras se trabajó exclusivamente en $\boldsymbol{R^2}$, con las actividades conceptuales que se mencionaron en el capítulo 3, se generalizaron los conceptos a $\boldsymbol{R^3}$ y $\boldsymbol{R^4}$ (sección 3. 2) y posteriormente se generalizaron a $\boldsymbol{R^n}$.

6.1 Combinación lineal

Estas actividades se aplicaron después de que los alumnos trabajaron con la parte I del problema de las patinetas voladoras. Las primeras actividades tenían como objetivo que los alumnos construyeran la relación entre la interpretación algebraica y geométrica de una combinación lineal.

En la primera actividad se pregunta si el vector $\bar{v}_3$ ***= (2, 12)*** era combinación lineal de los vectores $\bar{v}_1$ ***= (2, 3)*** y $\bar{v}_2$ ***= (3, 0)***. En un principio los alumnos realizaron las acciones de graficar y multiplicar los vectores por distintos escalares. Algunos alumnos hacen mención al problema de las patinetas. Por ejemplo, en el equipo I (Sem. 1-2014) discuten lo siguiente:

I_4: *"Es lo mismo que el problema de las patinetas. Hay que encontrar el número de horas que usamos cada vector para llegar a $\bar{v}_3$. En la gráfica necesitamos cambiar el tamaño de los vectores $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$,… el sentido. Los vamos sumando para ver si podemos llegar a $\bar{v}_3$".*

I_2: *"Necesitamos encontrar los escalares que cambien el tamaño y sentido de los vectores $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ para llegar a la nueva casa de Gauss, $\bar{v}_3$,"* refiriéndose al vector como una nueva ubicación de la casa de Gauss.

En sus respuestas usan la gráfica para explicar que necesitan multiplicar a $\bar{v}_1$ por ***4*** y a $\bar{v}_2$ por ***-2*** para llegar a $\bar{v}_3$. Comentan:

I_1: *"El primer vector crece **4** veces su tamaño. El segundo vector se hace **2** veces más grande pero cambia de sentido porque se multiplica por un negativo. Después sumamos esos dos vectores y llegamos a $\bar{v}_3$ … entonces $\bar{v}_3$ es combinación lineal de $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$, o sea podemos escribir a $\bar{v}_3$ en función de $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$".*

I_2: *"$\bar{v}_3$ es la nueva casa de Gauss y podemos llegar usando **4** horas $\bar{v}_1$ y **-2** horas a $\bar{v}_2$, **2** horas en reversa porque es negativo. Esto quiere decir que $\bar{v}_3$ es combinación lineal de $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$".*

Algunos alumnos resuelven la ecuación pero no son capaces de explicar su razonamiento, mostrando una concepción acción de combinación lineal. Algunos de ellos dibujan la gráfica pero no la relacionan con la ecuación algebraica.

El alumno I_2 (Sem. 1-2014, figura 5) considera que al tener tres vectores que no son paralelos, $\bar{v}_1$***= (1, 1, 1)***, $\bar{v}_2$ ***= (3, -1, 0)*** y $\bar{v}_3$ ***= (4, 1, 1)***, alguno de ellos será combinación lineal de los otros y responde: *"Los tres vectores no son paralelos … son diferentes en el espacio … no sobre una recta, así que si (sic.) es posible hacer uno combinación lineal de los otros."* En su respuesta, el estudiante, al parecer, generaliza un resultado válido en $\boldsymbol{R^2}$ a $\boldsymbol{R^3}$. No queda claro si verificó o si uno de los vectores puede escribirse como combinación lineal de los otros, porque no lo escribe y pudiera ser que al ver que ***3 + 1*** es ***4*** y ***1 + 0*** es ***1*** ya no haya verificado que la segunda componente no satisface dicha suma. Al parecer no ha construido ni siquiera una concepción acción del concepto de combinación lineal pues ni siquiera planteó la ecuación, pero podría ser que haya realizado acciones incompletas sin escribirlo.

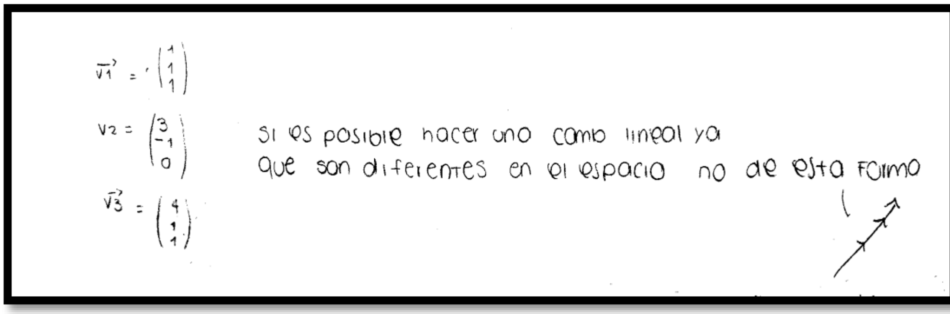


Figura 5

Después de hacer varias actividades similares con datos y espacios diferentes los alumnos reflexionaron sobre sus acciones y, en promedio, 27 alumnos las interiorizaron en el proceso de combinación lineal que les permitió resolver la ecuación de la definición de combinación lineal: $\boldsymbol{a_1\overline{v}_1} + \boldsymbol{a_2\overline{v}_2} + \boldsymbol{a_3\overline{v}_3} + \ldots + \boldsymbol{a_n\overline{v}_n} = \boldsymbol{\overline{v}}$ para encontrar los valores de los escalares $(\boldsymbol{a_i})$ con los cuales dicha ecuación se cumple. Por ejemplo, al preguntarles si el vector $\boldsymbol{\overline{v}_1} = (\boldsymbol{-7, 7, 7})$ es combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{\overline{v}_2} = (\boldsymbol{-1, 2, 4})$ y $\boldsymbol{\overline{v}_3} = (\boldsymbol{5, -3, 1})$ el alumno C_3 (Sem. 2-2012) que muestra una concepción proceso de este concepto explica: *"Resolvemos la ecuación de combinación lineal. Esta ecuación es la suma de vectores multiplicados por escalares. Los escalares $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ son los que cambian la magnitud y/o dirección de los vectores. Si $\boldsymbol{\overline{v}_1}$ es combinación lineal, entonces lo puedes escribir en función de los otros, como combinación lineal. …. En este caso $\boldsymbol{\overline{v}_1} = 2\boldsymbol{\overline{v}_2} - \boldsymbol{\overline{v}_3}$ entonces sí es combinación lineal … $\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{2}$ y $\boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{-1}$".*

Algunos de estos alumnos, como E_1 (Sem. 2-2013) mencionan, además, la interpretación geométrica de la ecuación: *"si estás en **R^2** o **R^3** puedes graficar los vectores. Los escalares te dicen si el vector crece o decrece y si cambia de sentido. Sumas estos vectores y te da el que quieres, en este caso es combinación lineal. Eso es lo que te dice también la ecuación, los escalares son las **a**'s. Si encuentras varias combinaciones lineales puedes llegar a todo **R^2**".*

Al parecer la mayoría de los alumnos, en promedio 30 en los distintos semestres, ha construido la relación entre la interpretación gráfica y algebraica. En el caso de la actividad anterior, estos alumnos resuelven la ecuación de combinación lineal, encuentran los valores $\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{2}$ y $\boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{-1}$ y concluyen que el vector $\boldsymbol{\overline{v}_1}$ es combinación lineal de $\boldsymbol{\overline{v}_2}$ y de $\boldsymbol{\overline{v}_3}$. Después, grafican los tres vectores y hacen comentarios como los de C_3 (Sem. 2-2012): *"En la gráfica vemos que el dos multiplica al vector $\boldsymbol{\overline{v}_2}$ o sea lo hace del doble del tamaño …. y el menos uno cambia de sentido y deja del mismo tamaño al vector $\boldsymbol{\overline{v}_2}$ …. entonces… luego* *sumamos estos dos nuevos vectores y llegamos a $\overline{v}_1$ … eso quiere decir que sí es combinación lineal … sí podemos llegar a él".*

El alumno C_2 (Sem. 1-2011) comenta: *"con dos vectores tengo dos transportes y ya vimos que puedes llegar a todas las casas de Gauss … o sea que puedo encontrar distintos vectores que son combinación lineal de ellos. Puedo llegar a todo* ***R^2****. Puedes escoger cualquier pareja de vectores para llegar a todo* ***R^2*** *porque multiplicando por escalares te mueves en los cuatro cuadrantes."* Este comentario muestra que el alumno ha construido una concepción proceso de combinación lineal al encontrar distintas combinaciones lineales de un conjunto de vectores dados. Está hablando de espacio generado sin conocer el concepto, aunque generaliza de forma errónea porque no cualquier pareja de vectores genera ***R^2***.

Algunos de los alumnos que muestran una concepción objeto de combinación lineal explican claramente sus procedimientos, hacen referencia al significado de los escalares ***a_i***, pueden comparar distintas combinaciones lineales e incluso formar combinaciones lineales operando sobre las recién encontradas. Por ejemplo, en la pregunta en que se piden dos vectores en ***R^4*** y otro que sea combinación lineal de ellos, C_2 (Sem. 1-2011, figura 6) responde: *"… doy los que sea … por ejemplo $\overline{v}_1$* ***= (1, 2, 3, 4)*** *y $\overline{v}_2$* ***= (5, 6, 7, 8)****. Estos vectores están en* ***R^4*** *… Ahora para la combinación lineal … hay muchas. Puedo sumarlos* ***(6, 8, 10, 12)****. Este es combinación lineal, pero hay otras. Puedo multiplicarlos para hacerlos más grandes y luego sumarlos … o sea por* ***2*** *me daría …* ***(12, 16, 20, 24)*** *… sería lo mismo que multiplicar el primero que me salió por* ***2****, los hago del doble del tamaño. También puedo hacerlos más chicos o multiplicar por negativos para cambiarles el sentido…. depende del escalar que escojamos .. y puedo hacer todas las operaciones, multiplicar por cualquier número y sumar o restar … hay una infinidad….. Este …. también puedo hacer una combinación lineal con las combinaciones lineales que encontré primero".*

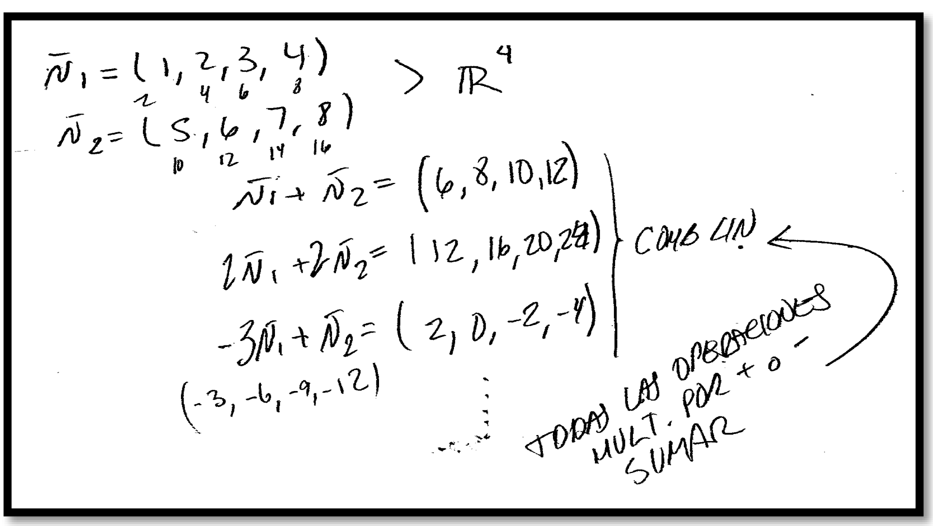


Figura 6

La mayoría de los alumnos se refiere a la combinación lineal de vectores como un vector al que puedo *“llegar”* o *“alcanzar”*, utilizando los términos del problema de las patinetas. Como se mencionó una mayoría de los alumnos (30 en promedio) relacionó la interpretación algebraica y geométrica de este concepto. Como se verá más adelante, este concepto fue indispensable para la construcción de los otros conceptos estudiados. La maestra pidió que resolvieran las partes II y III del problema de las patinetas voladoras.

6.2 CONJUNTO GENERADOR Y ESPACIO GENERADO

Durante el trabajo con las partes II y III del problema de las patinetas voladoras los alumnos utilizan los conceptos de conjunto generador y espacio generado sin que éstos hayan sido introducidos en la clase. Los alumnos comentan (por ejemplo C_3, Sem. 2-2012): *“puedo llegar a las distintas casas de Gauss aunque la cambie de lugar”* y (D_2, Sem. 1-2012) *“con mi patineta y alfombra puedo llegar a todo* $\boldsymbol{R^2}$*, o sea que Gauss nunca se va a poder esconder. ¡Siempre lo encuentro!”* En realidad están encontrando el conjunto generador y el espacio generado por los “vectores patineta y alfombra.” La maestra aprovechó este hecho para usar las ideas de los alumnos e introducir la definición de conjunto generador y espacio generado. Al finalizar dichas partes del problema se aplicaron las siguientes actividades para formalizar y definir dichos conceptos.

Algunos alumnos que muestran una concepción acción de conjunto generador y espacio generado (en promedio 5 alumnos cada semestre), que, como se mencionó anteriormente únicamente muestran evidencia de poder realizar acciones en sus respuestas o responden de forma memorizada, confunden el número de vectores con la dimensión del espacio que generan. Estos alumnos han memorizado que tres vectores generan $\boldsymbol{R^3}$ y dos vectores generan $\boldsymbol{R^2}$. Tal es el caso del alumno I_3 (Sem. 2-2011, figura 7) quien al tener tres vectores en $\boldsymbol{R^3}$ contesta: *“Los tres vectores generan un plano en* $\boldsymbol{R^3}$*. Tienes tres vectores. Si tomas solamente dos … pues generas un plano pero ahora en* $\boldsymbol{R^2}$*, porque tienes dos vectores … es diferente el espacio generado”.*

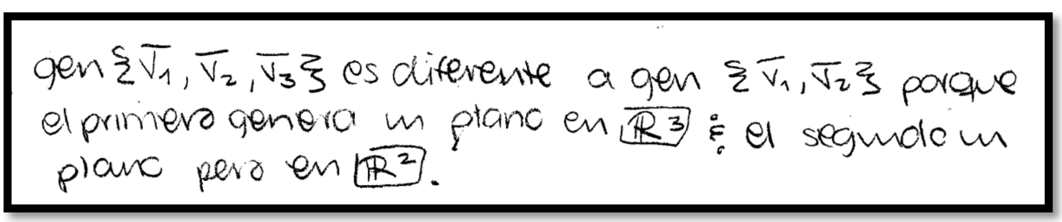

gen $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ es diferente a gen $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ porque el primero genera un plano en $\boxed{\mathbb{R}^3}$ y el segundo un plano pero en $\boxed{\mathbb{R}^2}$.

Figura 7

Nuevamente trabajaron con los vectores $\bar{v}_1$ ***= (2, 3)***, $\bar{v}_2$ ***= (3, 0)*** y $\bar{v}_3$ ***= (2, 12)***. Se preguntó si los vectores $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ generaban al vector $\bar{v}_3$ y qué espacio generaban. Algunos alumnos que muestran una concepción acción de conjunto generador y espacio generado resuelven la ecuación $\boldsymbol{a_1}\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} + \boldsymbol{a_2}\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}} = \overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}}$ para determinar si el vector $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}}$ es generado por los vectores $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}$. Concluyen que $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}$ generan $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2}}$, pero no son capaces de explicar su razonamiento.

Los alumnos que han interiorizado las acciones en el proceso de conjunto generador y espacio generado (22 alumnos en promedio cada semestre), piensan en combinaciones lineales sin tener que realizar las acciones explícitamente. Por ejemplo, D_2 (Sem. 1-2013) comenta: *"en el ejercicio anterior vimos que $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}}$ es combinación lineal de los otros dos … o sea lo puedo escribir en función de $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}$ … pero también puedo encontrar otros vectores que sean combinación lineal … si cambiamos los escalares … $\boldsymbol{a_i}$ … encuentro más combinaciones lineales, todas esas combinaciones son el espacio generado. … o sea $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}$ generan $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2}}$".*

Algunos alumnos han construido el proceso de combinación lineal y lo coordinan con el proceso de su representación geométrica. Por ejemplo, E_2 (Sem. 1-2014, figura 8) comenta: *"o sea estos dos vectores tienen muchas combinaciones lineales no solamente a $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}}$ …. porque Gauss cambió su casa de lugar varias veces. En la gráfica vemos que me muevo en dos direcciones porque tengo dos medios de transporte $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}$. Si multiplico por escalares positivos me quedo en el primer cuadrante … Para el segundo cuadrante multiplico a $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}$ por un escalar negativo y puedo llegar a todo esto del segundo cuadrante. Así … multiplico … o sea voy variando los escalares y llego a todos los cuadrantes, llego a todo $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2}}$. Entonces estos vectores generan todo el espacio, generan todo $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2}}$. Por eso Gauss nunca puede esconderse".*

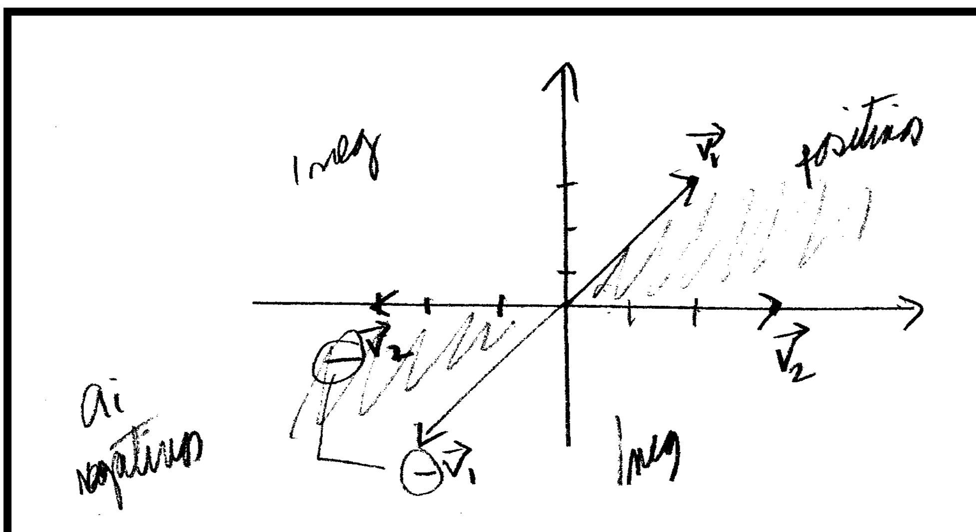


Figura 8

Los alumnos que muestran una concepción objeto (3 alumnos en promedio cada semestre) de conjunto generador y espacio generado comentan que existen varios conjuntos generadores para un mismo espacio y los comparan. Por ejemplo, C_4 (Sem. 1-2012) comenta: *"Tengo la patineta y la alfombra del problema*

*… pero … puedo tener otras patinetas y alfombras. En clase de geometría vimos los vectores $\bar{\imath}$ y $\bar{\jmath}$. Esos también se mueven en dos direcciones y generan **R**^{2}. Todos los vectores en **R**^{2} son combinación lineal de $\bar{\imath}$ y $\bar{\jmath}$ o sea ellos también generan todos los vectores. …. Entonces … si tienes dos vectores que se muevan en distinta dirección …. generas **R**^{2}. Hay muchas parejas de vectores … muchos conjuntos generadores que generan el espacio **R**^{2}. Aquí puse dos conjuntos que generan **R**^{2}."* Estos alumnos diferencian, además el conjunto generador del espacio generado.

En la siguiente pregunta algunos alumnos explican que un espacio vectorial puede ser generado por diferentes conjuntos generadores y que estos conjuntos pueden tener elementos en común y distinto número de elementos. La pregunta decía: tienes tres vectores $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ *en* **R**^{3}. Sabes que $\bar{v}_3$ es combinación lineal de $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$. Encuentra el espacio que generan $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$. Encuentra el espacio que generan $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$. ¿Existe alguna diferencia?

El alumno C$_2$ (Sem. 1-2013, figura 9) responde a la pregunta anterior: *"Los vectores $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ no son tres en realidad porque $\bar{v}_3$ es combinación lineal de los otros dos … te mueves en dos direcciones … entonces generan un plano en **R**^{3}… puedo decir entonces que $\bar{v}_1$* y *$\bar{v}_2$ generan el mismo plano en **R**^{3}. Ambos conjuntos generan lo mismo … si quitamos $\bar{v}_3$ no pasa nada. El conjunto generador es diferente pero el espacio generado es el mismo."* Este alumno muestra una concepción objeto de combinación lineal, conjunto generador y espacio generado puesto que identifica que el número de vectores no determina el espacio generado.

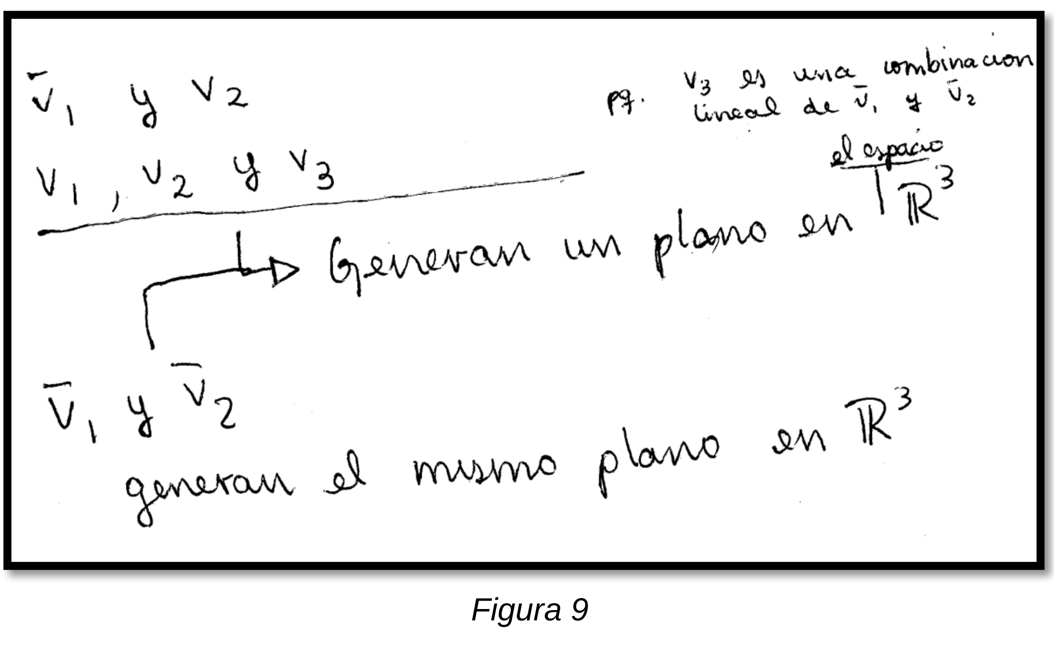


Figura 9

Sin embargo, en la pregunta anterior un alumno que muestra una concepción acción de conjunto generador considera que el número de vectores en el conjunto generador afecta al espacio generado; F_4 (Sem. 2-2013, figura 10) contesta: *"Primero tengo 3 vectores y luego 2 … la diferencia es que al tener más vectores en un espacio, el resultado del espacio generado es distinto. No generan el mismo espacio".*

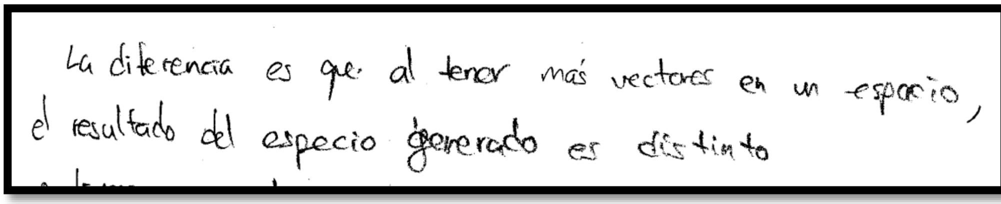


Figura 10

Muchos alumnos (en promedio 26 cada semestre) se cuestionan, por ejemplo I_2 pregunta (Sem. 1-2014): *"¿Cualquier pareja genera* $\boldsymbol{R^2}$*? ¿Puedo tener cualquier patineta y alfombra?"* La maestra pide que resuelvan las partes IV y V del problema de las patinetas voladoras para resolver esta duda.

6.3 INDEPENDENCIA Y DEPENDENCIA LINEAL

En la parte IV los alumnos trabajaron con dos parejas de vectores, "medios de transporte". En un caso tenían dos vectores con diferentes direcciones ***(2, 3)*** y ***(5, 0)***, mientras que en el otro tenían vectores paralelos ***(2, 3)*** y ***(6, 9)***. Los alumnos que muestran una concepción acción de conjunto generador concluyeron, como en el caso de F_4 (Sem. 2-2013): *"en los dos casos tienes dos vectores, ya vimos que dos vectores generan todo* $\boldsymbol{R^2}$*. Entonces podemos concluir que dos vectores siempre generan* $\boldsymbol{R^2}$*."* Este alumno utiliza de manera memorizada, aunque no correcta, el hecho de que dos vectores generan el plano, sin llevar a cabo las acciones específicas que le permitirían darse cuenta de que este no es el caso para la segunda pareja de vectores.

Los alumnos que muestran una concepción proceso de conjunto generador y espacio generado reconocieron que los vectores del segundo conjunto son paralelos y comentaron, como D_2 (Sem. 1-2013): *"no todas las parejas generan* $\boldsymbol{R^2}$*, porque si son múltiplos o sea paralelos solo te mueves en una recta."* Algunos aclararon, como E_2 (Sem. 1-2014): *"no es cierto lo que habíamos dicho antes. A veces dos transportes no generan* $\boldsymbol{R^2}$*, necesitas dos que sean …. diferentes … porque si son iguales o múltiplos … es como si tuvieras uno. Si hacemos la gráfica puedes ver que cuando son paralelos o múltiplos o iguales … te mueves solo en una dirección. Necesitas fijarte qué te regalan. Algunos transportes no sirven,"* mostrando haber construido la coordinación entre el proceso de la interpretación algebraica y el de la interpretación geométrica.

En la parte V del problema de las patinetas voladoras trabajaron con tres vectores, "medios de transporte", ***(2, 3)***, ***(5, 0)*** y ***(1, 4)***. C_4 (Sem. 1-2012) comenta:

"*aunque sean diferentes, no necesitas los tres … podemos quedarnos con dos y llegamos a todas las casas de Gauss … a todo* $\boldsymbol{R^2}$ *… dos vectores generan* $\boldsymbol{R^2}$ *y tres vectores también. Te sobra un transporte. Podemos guardar uno en la casa y usar los otros dos. Luego puedes cambiarlos."* Es de notar que estos alumnos transformaron un conjunto linealmente dependiente en un conjunto linealmente independiente y lo relacionaron con el conjunto generador y el espacio generado, sin haber tenido ningún contacto con los conceptos de independencia y dependencia lineal.

Algunos alumnos agregan, como A_2 (Sem. 1-2013): *"necesitamos escoger dos transportes diferentes, o sea … cuando guardas uno necesitas fijarte que los dos que te quedas sean diferentes … si no nos pasa como en el otro ejercicio … si te quedas con dos que son múltiplos solo te mueves en una dirección y no generas* $\boldsymbol{R^2}$*."* En la discusión en clase este alumno explica que para generar $\boldsymbol{R^2}$: *"necesitas por lo menos dos vectores diferentes o no múltiplos. Si puedes tener tres o cuatro o más pero no serían necesarios todos. Si tienes menos de dos no generas todo* $\boldsymbol{R^2}$ *… estarías en una recta. O sea dos vectores diferentes se mueven en dos direcciones y generas* $\boldsymbol{R^2}$*, un vector se mueve en una dirección y generas una recta".*

En este momento terminaron el problema de las patinetas. Los alumnos hablan de vectores *"diferentes"* para referirse a vectores linealmente independientes e información *"que sobra"* para referirse a vectores linealmente dependientes. Estos dos conceptos no los conocen todavía, no se han introducido en la clase formalmente. Posterior al problema de las patinetas voladoras se entregaron actividades de la sección 3.2 y se formalizaron dichos conceptos. En estas actividades se hace referencia a los conceptos anteriores: combinación lineal, conjunto generador y espacio generado además de independencia y dependencia lineal.

Como se verá a continuación, en un principio se trabajó con vectores en $\boldsymbol{R^3}$ y después se generalizaron los conceptos a $\boldsymbol{R^n}$. En $\boldsymbol{R^3}$ algunos alumnos hicieron la acción de graficar, pero comentaron, como por ejemplo I_1 (Sem.1-2014): *"es difícil verlo, mejor resuelvo la ecuación."* Parece que la mayoría (30 alumnos en promedio cada semestre) ha construido la relación entre la interpretación algebraica y geométrica. Hablan de vectores paralelos o múltiplos sin necesidad de graficar.

En una actividad se les presentaron tres vectores linealmente independientes $\boldsymbol{\bar{v}_1 = (1, 1, 1)}$, $\boldsymbol{\bar{v}_2 = (3, -1, 0)}$ y $\boldsymbol{\bar{v}_3 = (4, 1, 1)}$ y se les preguntó qué generaban y qué vectores eran combinación lineal de ellos. Algunos alumnos respondieron de forma memorizada que tres vectores linealmente independientes en $\boldsymbol{R^3}$ generan $\boldsymbol{R^3}$, pero tuvieron problemas para encontrar vectores que fueran combinación lineal de ellos. Por ejemplo, I_2 (Sem. 1-2014) comenta: *"necesitaría escribir el sistema* $\boldsymbol{a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + a_3\bar{v}_3}$ *y resolverlo, pero ¿a quién lo igualo? … escribo cualquier vector, no sé cómo encontrar una combinación lineal de ellos."* Estos alumnos han construido una concepción acción de conjunto generador, espacio generado e independencia lineal porque han memorizado algunas reglas o algoritmos, pero no muestran haber construido, ni como acción, el concepto de combinación lineal que es un pre-requisito para la construcción de estos conceptos.

Algunos alumnos coordinan el proceso de conjunto generador con el de independencia lineal y concluyen que tres vectores linealmente independientes generan ***R*³**. Además, escriben, por ejemplo, la suma de los vectores, $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}+\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}+\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$, o el múltiplo de alguno de ellos, $\alpha\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$, como una combinación lineal de $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}, \overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$. También comentan, como E_2 (Sem. 1-2014): "*cualquier otro vector debe ser combinación lineal porque el número de vectores ele i no puede ser mayor que la dimensión en la que están. Tenemos tres vectores en **R*³***, entonces el cuarto vector tiene que ser a la fuerza ele de … no le queda más que ser ele de y eso hace que sea combinación lineal."* Este alumno coordina el proceso relacionado con el número de vectores con el proceso de dimensión del espacio al que pertenecen y con el de dependencia lineal para determinar que cualquier otro vector sería combinación lineal de los tres vectores dados.

Algunos alumnos se refieren a la definición de combinación lineal, por ejemplo A_2 (Sem. 1-2012, figura 11) comenta: *"generan el espacio **R*³** por lo que un vector cualquiera en **R*³** es combinación lineal de estos vectores. Si se resuelve* $\boldsymbol{a}_{\mathbf{1}}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}+\boldsymbol{a}_{\mathbf{2}}\,\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}+\boldsymbol{a}_{\mathbf{3}}\,\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}=\overline{\boldsymbol{v}}$ *con Gauss – Jordan se llega a una solución única para cualquier* $\overline{\boldsymbol{v}}$ *que pongas … eso implica que sí existe esa combinación lineal";* más adelante dice: *"todos los vectores en **R*³** son combinación lineal de estos tres,"* mostrando que ha construido una concepción proceso de combinación lineal.

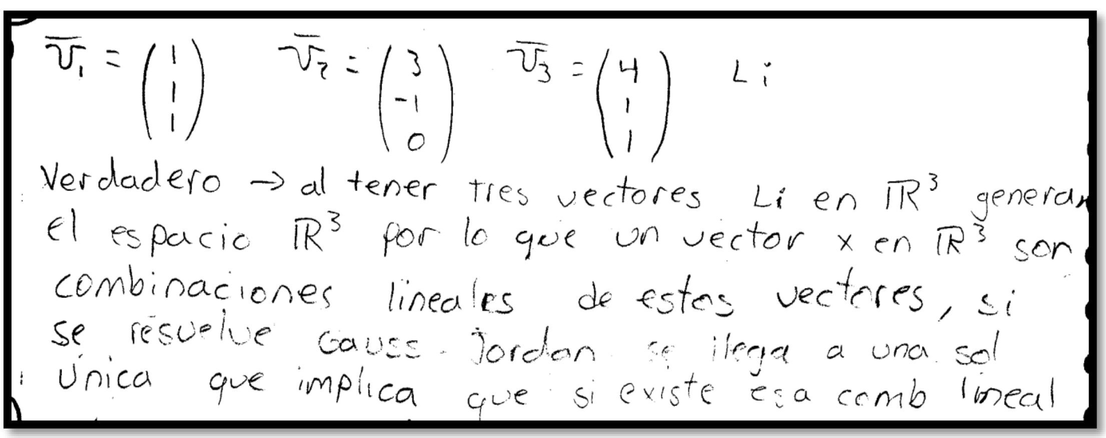
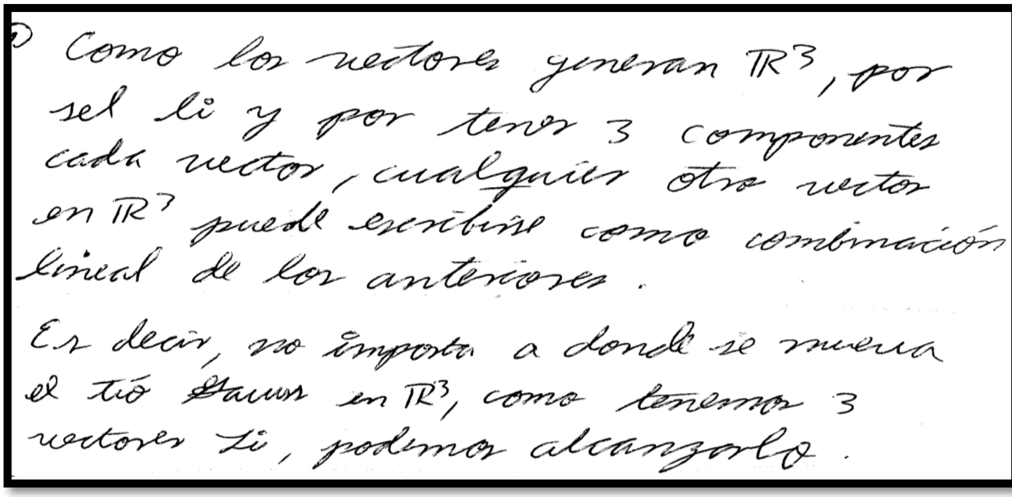


Figura 11

El alumno C_4 (Sem. 1-2012) explica, figura 12: *"como los vectores generan **R*³***, por ser ele i y por tener tres componentes cada vector, cualquier otro vector en **R*³** puede escribirse como combinación lineal de los anteriores."* Además, menciona y generaliza de ***R*²** a ***R*³** el problema de las patinetas al comentar: *"no importa a donde (sic.) se mueva el Tío Gauss … ahora en **R*³** … como tenemos tres vectores* *ele i, podemos alcanzarlo,"* muestra una concepción objeto de conjunto generador y espacio generado.


Como los vectores generan $\mathbb{R}^3$, por ser li y por tener 3 componentes cada vector, cualquier otro vector en $\mathbb{R}^3$ puede escribirse como combinación lineal de los anteriores.

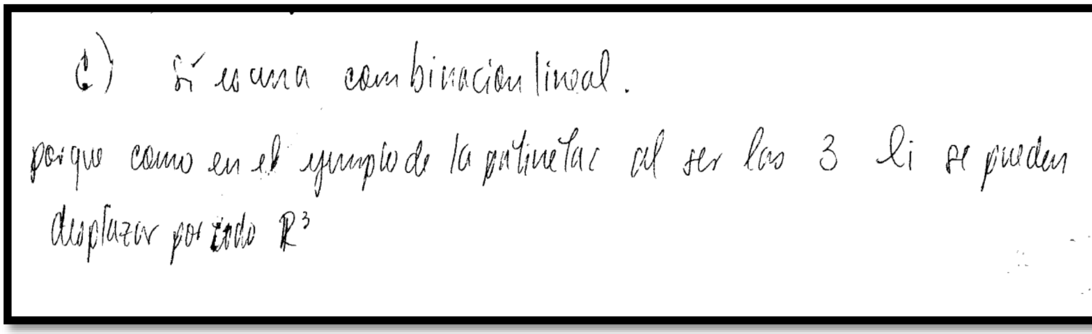
Es decir, no importa a donde se mueva el tío Gauss en $\mathbb{R}^3$, como tenemos 3 vectores li, podemos alcanzarlo.

Figura 12

La siguiente actividad era similar a la anterior, pero se pidió a los alumnos que no hicieran operaciones. El ejercicio decía: tienes tres vectores $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{1}, -\mathbf{2}, \mathbf{3})$, $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{2}, -\mathbf{2}, \mathbf{0})$ *y* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{7})$ en $\boldsymbol{R}^3$ linealmente independientes, sin hacer operaciones, di si el vector, $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{4}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})$ es combinación lineal de $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$, $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$.

Algunos alumnos no pudieron contestar sin hacer operaciones y resolvieron la ecuación de la definición de combinación lineal: $\boldsymbol{a}_{\mathbf{1}}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{a}_{\mathbf{2}}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} + \boldsymbol{a}_{\mathbf{3}}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}} = \overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{4}}$. Algunos de estos alumnos hacen un mal uso de los teoremas, por ejemplo I_3 (Sem. 2-2011) concluye: *"no es combinación lineal ya que no es ni suma ni múltiplo de ninguno de ellos."* Es decir, estos alumnos consideran que un vector es combinación lineal solamente cuando es posible obtener uno de ellos mediante las acciones de sumar los vectores o de multiplicarlos por alguna constante. Es posible que en este tipo de respuestas los alumnos se refieran además a la suma ponderada de vectores, aunque no está claro en su afirmación. De cualquier manera, los alumnos responden utilizando la memoria y sin tomar en consideración los teoremas en los que se ha estado trabajando. Tal vez estos alumnos han construido una concepción acción de combinación lineal y de independencia lineal o no han construido ni siquiera una concepción acción de dichos conceptos.

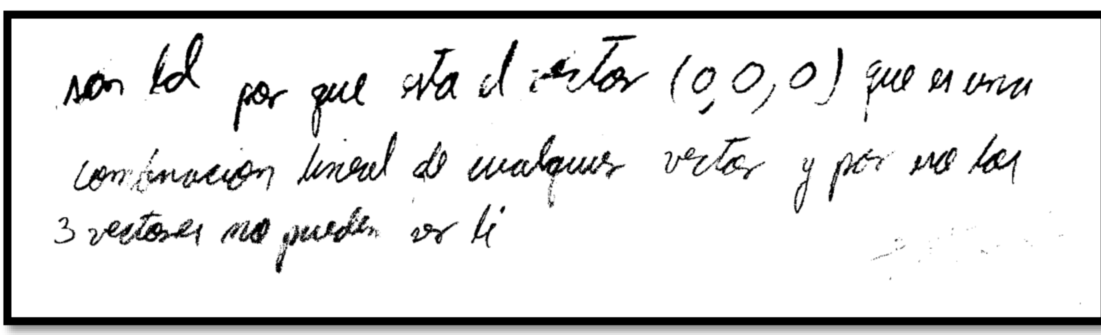
Sin embargo, otros alumnos, por ejemplo E_2 (Sem. 1-2014) comentan: *"el cuarto vector si (sic.) es combinación lineal de los tres primeros, ya que todos ellos son ele i y se encuentran en* $\boldsymbol{R}^3$*. En* $\boldsymbol{R}^3$ *el número máximo de vectores ele i es tres, y entonces generan todo* $\boldsymbol{R}^3$ *por eso* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{4}}$ *forzosamente debe ser una combinación lineal de ellos."* Varios alumnos mencionan, nuevamente, el problema de las patinetas, por ejemplo D_2 (Sem. 1-2013) comenta: *"sí es una combinación lineal porque como en el ejemplo de las patinetas al ser los* ***3*** *ele i se pueden desplazar* *por todo **R**^{3}"* (figura 13). Estos alumnos coordinan los procesos de combinación lineal e independencia lineal con los de conjunto generador y espacio generado.



c) Sí es una combinación lineal.
porque como en el ejemplo de la patineta al ser los 3 li se pueden desplazar por todo R^3

Figura 13

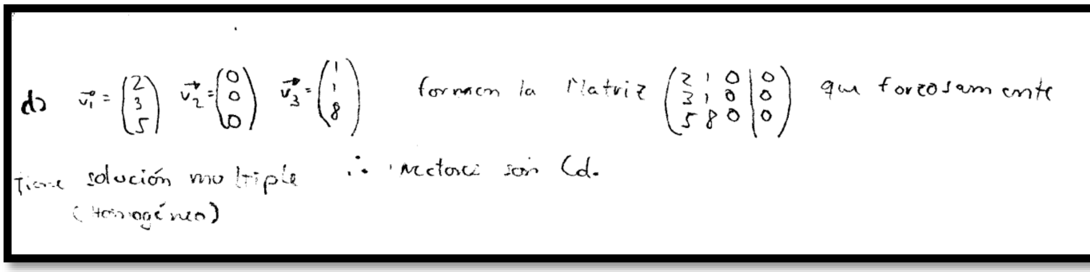
En otra actividad se preguntaba si los vectores: $\bar{\boldsymbol{v}}_1$ ***= (2, 3, 5)***, $\bar{\boldsymbol{v}}_2$ ***= (0, 0, 0)*** y $\bar{\boldsymbol{v}}_3$ ***= (1, 1, 8)*** eran linealmente independientes o dependientes. Algunos alumnos tienen problemas al trabajar con el vector cero, pues consideran como B2 (Sem. 2-2012) que *"el vector cero nunca es combinación lineal de otro vector y siempre será ele i con otros vectores."* Sin embargo, los alumnos que muestran una concepción proceso de dependencia lineal (20 alumnos en promedio de cada semestre) coordinan este proceso con el proceso de las propiedades del vector cero y concluyen que cualquier conjunto que incluya al vector cero es linealmente dependiente. Tal es el caso de C3 (Sem. 2-2012) que comenta: *"el vector cero es una combinación lineal de cualquier otro vector y, por lo tanto, un conjunto que contenga al vector cero no será linealmente independiente … es linealmente dependiente"* (figura 14).



son ld por que esta el vector (0,0,0) que es una
combinacion lineal de cualquier vector y por eso los
3 vectores no pueden ser li

Figura 14

Algunos alumnos que muestran una concepción objeto de independencia lineal (3 alumnos en promedio cada semestre) además, de dar las explicaciones anteriores, coordinan el proceso de solución del sistema homogéneo $\boldsymbol{a_1}\bar{\boldsymbol{v}}_1 + \boldsymbol{a_2}\,\bar{\boldsymbol{v}}_2 + \boldsymbol{a_3}\,\bar{\boldsymbol{v}}_3 = \bar{\boldsymbol{0}}$ con el proceso de dependencia lineal y concluyen como por ejemplo, C4 (Sem. 1-2012, figura 15): *"si resolvemos con la definición de independencia lineal … el sistema homogéneo forzosamente tiene solución múltiple porque una columna es de ceros … es el vector cero. Entonces los vectores serán ele de siempre que incluya al vector cero"*.



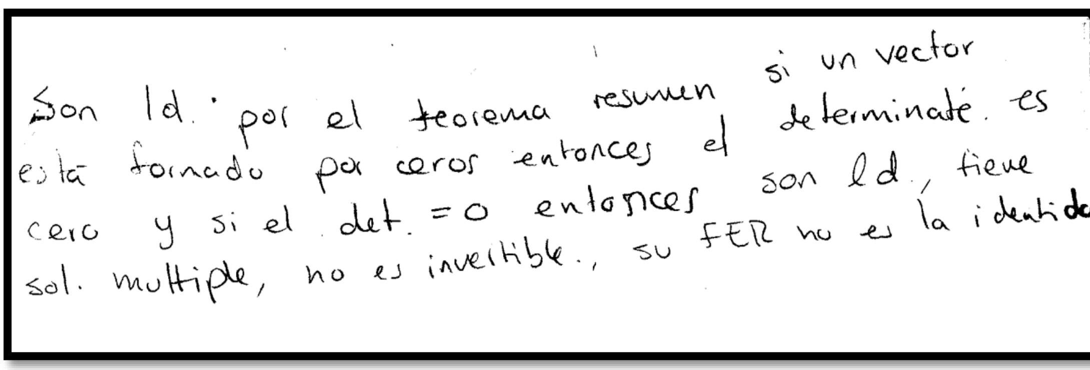
d) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\8\end{pmatrix}$ forman la Matriz $\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&0&0\\3&1&0&0\\5&8&0&0\end{array}\right)$ que forzosamente

Tiene solución multiple $\therefore$ vectores son Ld.
(Homogéneo)

Figura 15

El alumno A_2 (Sem. 1-2013), refiriéndose al sistema homogéneo anterior, muestra también una concepción proceso al coordinar el proceso de dependencia lineal con el proceso de solución de Gauss – Jordan y comentar: *"no va a ser posible encontrar un pivote a la hora de resolver, por lo que* $\boldsymbol{c_3}$*, en este caso, será arbitraria rompiendo así la afirmación de que toda* $\boldsymbol{c_i = 0}$*, por lo tanto los vectores son ele de".*

A_3 (Sem. 1-2011) coordina el proceso de dependencia lineal con otros procesos correspondientes a otros conceptos del curso y menciona el teorema resumen (figura 16): *"son ele de por el teorema resumen si un vector está formado por ceros entonces el determinante es cero y si el determinante es cero entonces son ele de … tiene solución múltiple … no es invertible y su FER no es la identidad,"* donde FER significa matriz en forma escalonada reducida. Más adelante, escoge algunos vectores del conjunto para tener vectores linealmente independientes. Muestra que ha encapsulado el proceso en objeto al poder hacer acciones sobre el conjunto para volverlo linealmente independiente.



Son ld. por el teorema resumen si un vector está formado por ceros entonces el determinaté es cero y si el det. = 0 entonces son ld, tiene sol. multiple, no es invertible, su FER no es la identida

Figura 16

Como se mencionó antes, los alumnos que muestran una concepción acción de combinación lineal e independencia lineal, es decir, que únicamente pueden decidir si un vector se puede escribir como combinación lineal de otros o si un conjunto de vectores es linealmente independiente llevando a cabo las acciones dictadas por las operaciones en las correspondientes definiciones, aunque no dan muestra de entenderlas a cabalidad, tienen problemas con los casos que incluyen al vector cero. En el ejercicio en que se pedía que escribieran dos vectores linealmente independientes en $\boldsymbol{R^5}$, el alumno I_3 (Sem. 2-2011) comenta (figura

17): *“para encontrar los vectores los haremos ele i poniendo el vector* $\bar{\mathbf{0}}$ *en uno de ellos así no puede ser escrito como combinación lineal del otro y por teorema serán ele i.”* Este alumno usa el hecho de que dos vectores son linealmente independientes si no son linealmente dependientes, así que al buscar un vector que no se pueda escribir como combinación lineal de otro, elige al vector cero y concluye, sin considerar las condiciones en que su definición puede ser válida que un conjunto que incluye al cero puede ser linealmente independiente, mostrando una concepción acción de combinación lineal e independencia lineal.

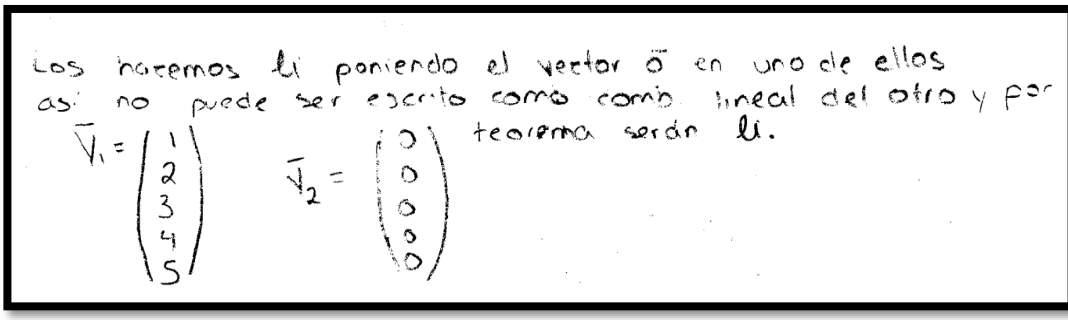


Figura 17

En esta misma actividad el alumno C_2 (Sem.1-2011) explica claramente su procedimiento (figura 18). Escribe dos vectores y dice: *“son ele i porque ninguno de los dos vectores pertenecientes a* $\boldsymbol{R^5}$ *se puede escribir como* $\bar{\boldsymbol{v}}_1 = \boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{v}}_2$ *con* $\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{R}$*. La única manera de que una combinación de estos 2 vectores de (sic.) cómo resultado el vector* $\bar{\mathbf{0}}$*, es que los coeficientes que multiplican a los vectores sean* ***0****.”* Escribe la ecuación de independencia y dependencia lineal $\boldsymbol{c_1}\bar{\boldsymbol{v}}_1 + \boldsymbol{c_2}\bar{\boldsymbol{v}}_2 = \bar{\mathbf{0}}$ y coordina el proceso de solución del sistema con el proceso de independencia lineal al encontrar que las constantes son cero.

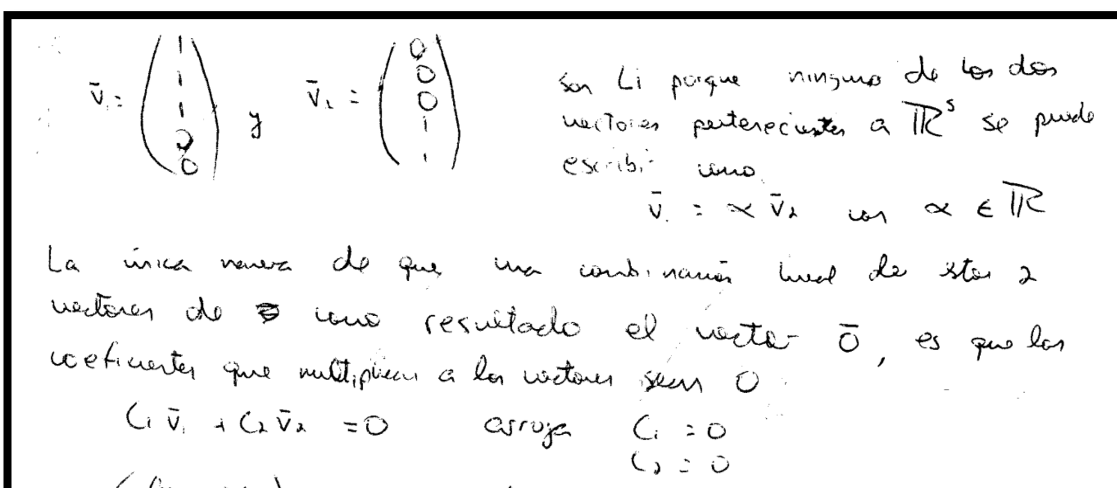


Figura 18

Es importante notar que varios alumnos mencionan el problema de las patinetas al resolver las actividades. Por ejemplo, en la siguiente pregunta se pedía que explicaran si era falso o verdadero lo siguiente: sean los vectores $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$, $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$ en ***R²***. Si sabes que las parejas $\{\overline{\boldsymbol{v}}_1, \overline{\boldsymbol{v}}_2\}$, $\{\overline{\boldsymbol{v}}_1, \overline{\boldsymbol{v}}_3\}$ y $\{\overline{\boldsymbol{v}}_2, \overline{\boldsymbol{v}}_3\}$ son linealmente independientes, entonces el conjunto $\{\overline{\boldsymbol{v}}_1, \overline{\boldsymbol{v}}_2, \overline{\boldsymbol{v}}_3\}$ es linealmente independiente. El alumno E_2 (Sem.1 1-2014, figura 19) responde correctamente lo siguiente: *"Las parejas son ele i entre ellas … pero más de tres se vuelven ele de pues estoy en* ***R^2*** *… pudiendo sacar un vector y generar* ***R^2****. Sobra* ***1*** *como ejemplo patineta, jetski y alfombra,"* refiriéndose al caso del problema de las patinetas donde tenían tres transportes en ***R^2***. Este alumno muestra una concepción objeto al coordinar el proceso relacionado con el número de vectores del conjunto con el proceso de dimensión del espacio al que pertenecen y con el de dependencia lineal para determinar que en estas condiciones los vectores serán linealmente dependientes.

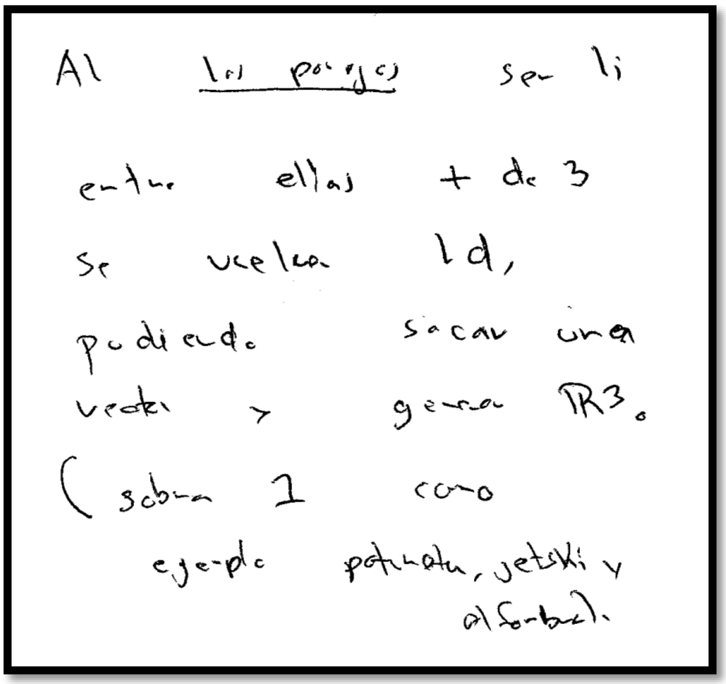

Al las parejas son li
entre ellas + de 3
se vuelven ld,
pudiendo sacar una
vector y generar $\mathbb{R}3$.
(sobra 1 como
ejemplo patineta, jetski y
alfombra.

Figura 19

En la pregunta siguiente: Si ***X*** = $\{\overline{\boldsymbol{v}}_1, \overline{\boldsymbol{v}}_2, \dots, \overline{\boldsymbol{v}}_p\} \subseteq$ ***R^n*** es un conjunto ortogonal que no contiene al $\overline{\mathbf{0}}$ tenían que responder cuál inciso era la respuesta correcta, como se muestra en la figura 20. El alumno H_4 (Sem. 2-2011) explica claramente su respuesta al contestar: *"la respuesta es* ***b*** *porque se puede ver que si todos los vectores son perpendiculares entre si (sic.) entonces son ele i y necesito además* ***$p \leq n$****. Además no contiene al vector cero porque ese hace a cualquier conjunto ele de."* Al preguntarle por qué el inciso ***a*** no es correcto aclara: *"es falso porque el conjunto es ele i pero tenemos* ***p*** *vectores en* ***R^n****. Por eso escribí* ***$p \leq n$*** *…. para generar* ***R^n*** *necesito* ***n*** *vectores ele i, eso pasa si* ***$p = n$****, pero si* ***p*** *es estrictamente menor a* ***n*** *entonces no tenemos suficientes vectores para generar* ***R^n****."* Muestra una concepción objeto de conjunto generador al hacer acciones de comparación entre diferentes conceptos y espacios y es capaz de coordinar los procesos de independencia lineal con los procesos de ortogonalidad de vectores y propiedades del vector cero construidos a lo largo del curso.

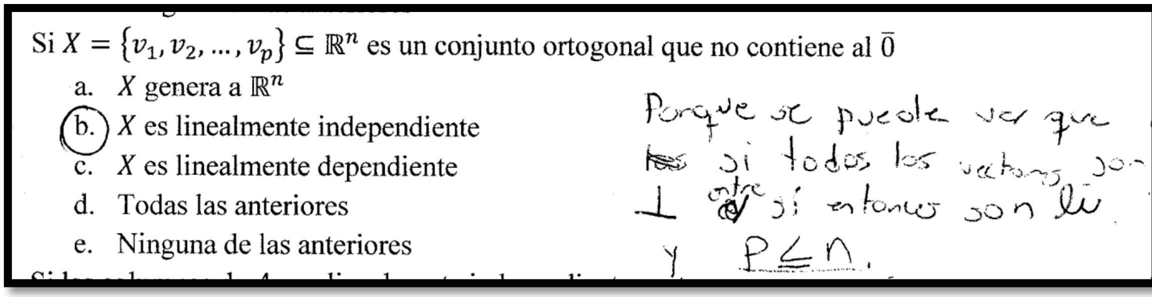


Figura 20

En la siguiente actividad se pedía que encontraran el valor de ***k*** para que los siguientes vectores $\bar{v}_1$ = ***(2, -1, 4)***, $\bar{v}_2$ ***= (1, 0, k)*** y $\bar{v}_3$***= (3, -1, 5)*** fueran linealmente independientes. Los alumnos que muestran una concepción acción de independencia lineal no pueden resolver esta pregunta. Otros alumnos, como por ejemplo D_4 (Sem. 1-2013, figura 21) quien comenta: *"Necesitamos que el sistema homogéneo tenga solución trivial para que los vectores sean linealmente independientes,"* coordinan los procesos de solución de un sistema homogéneo con el de independencia lineal.

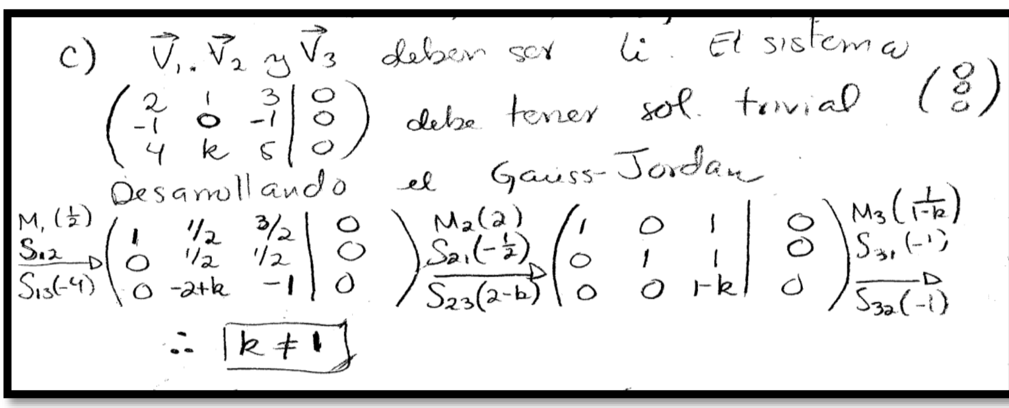


Figura 21

En la última parte del problema de las patinetas voladoras, parte V, los alumnos hacen comentarios sobre el número de vectores que necesitan para generar un espacio y sobre su independencia o dependencia lineal. El alumno C_2 (Sem. 1-2011) comenta: *"parece que hay un mínimo de vectores que generan **R²**. Vemos que si tengo dos vectores diferentes … o sea ele i generan **R²**. … No puedo tener menos de dos porque si tengo uno se genera una recta … Sin embargo, si (sic.) puedo tener más de dos … y sigo generando **R²**. El problema con más de dos es que alguno sobra, es combinación lineal de los otros, son ele de".*

La maestra les preguntó qué pasaría en $\boldsymbol{R^3}$. La mayoría de los alumnos generaliza el concepto de forma correcta, por ejemplo E_2 (Sem. 2-2012) explica: *"… si estamos en* $\boldsymbol{R^3}$ *aumentamos una dimensión … entonces necesitamos movernos en tres direcciones … necesitamos tres vectores para generar* $\boldsymbol{R^3}$*, tres ele i … también podemos tener más de tres pero sobran, serían ele de … Si tengo dos … no pueden generar* $\boldsymbol{R^3}$*, te estás moviendo en dos direcciones."* Los alumnos se cuestionan qué generarían dos vectores en $\boldsymbol{R^3}$. Los alumnos que muestran una concepción acción de conjunto generador contestan sin poder explicar su razonamiento, como es el caso de F_4 (Sem. 2-2013): *"dos vectores generan un plano igual que en* $\boldsymbol{R^2}$*, ¿el plano es* $\boldsymbol{R^2}$*"?*

Sin embargo, otros alumnos comentan algo como E_2 (Sem.1-2014): *"tres vectores o más generan* $\boldsymbol{R^3}$ *… el problema de más de tres es que no son diferentes, serían ele de y si tienes tres necesitas que sean ele i. Ahora … si tienes menos de tres, o sea dos, no puede ser una recta … vimos antes que dos se mueven en dos direcciones …. o sea .. tiene que ser un plano, pero …. en otro espacio porque estamos en* $\boldsymbol{R^3}$*."* Al preguntarle qué pasaría si tuviera un vector, comenta: *"¡claro! … esa es la recta, un vector … una dimensión … un vector genera una recta pero ahora está en* $\boldsymbol{R^3}$*."* Estos alumnos muestran una concepción proceso de conjunto generador.

Después de esta discusión se trabajaron otras actividades y se formalizaron los conceptos de base y dimensión que los alumnos mencionan como *"mínimo número de vectores"* y *"vectores que sobran"*.

6.4 BASE Y DIMENSIÓN

Para construir el concepto de base los alumnos necesitan haber construido los procesos de conjunto generador, espacio generado e independencia lineal. En la siguiente actividad: Sea $\boldsymbol{H = gen\ \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \ldots, \bar{v}_n\}}$, entonces $\boldsymbol{\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \ldots, \bar{v}_n\}}$ es una base para **H**, los alumnos tenían que decir si la afirmación era verdadera o falsa. Algunos alumnos confunden el concepto de conjunto generador con el de independencia lineal, por ejemplo I_2 (Sem. 1-2014) comenta: *"Si **H** está generado por esos vectores … quiere decir que todos esos vectores son ele i …. entonces si (sic.) forman una base para **H**. Es cierto."* Ha memorizado que la base de un espacio debe tener un conjunto de vectores linealmente independientes que generen dicho espacio, pero no ha construido ni como acción los conceptos de independencia lineal y generar pues, como se ve en su respuesta, piensa que significan lo mismo. El alumno B_2 (Sem. 2-2012) muestra cuando mucho una concepción acción (15 alumnos en promedio de cada semestre) de base pues ha memorizado, erróneamente, que ***n*** vectores forman una base sin reflexionar que los vectores deben ser linealmente independientes. B_2 responde: *"Hay un teorema …. dice que el espacio generado por **n** vectores constituye una base para ese espacio. Es verdadera"*.

El alumno E_2 (Sem.1-2014) contesta *"Falso, los vectores pueden ser ele de … si son ele de entonces no es base,"* utiliza el proceso de dependencia lineal para concluir que el enunciado es falso pues no hay información sobre la independencia lineal de los vectores. Estos alumnos muestran una concepción proceso de base, 10 alumnos en promedio cada semestre.

Algunos alumnos además de comentar lo anterior explican como A_1 (Sem.1-2014): *"Si los vectores son ele de entonces la base se conforma con menos vectores pues se necesitan vectores ele i,"* muestra que ha encapsulado el proceso de base en un objeto al ser capaz de comparar conjuntos que son base con otros que no lo son y concluir que para la base se necesitan vectores linealmente independientes. Además agrega: *"En el caso de que los vectores sean ele i entonces sí sería una base para **H**,"* mostrando una concepción objeto de base (2 alumnos en promedio cada semestre).

En otra actividad se pedía que encontraran una base para el espacio $\boldsymbol{W = \{\bar{v}\ \varepsilon\ R^4 \mid \bar{v} = (4a + 3b, 0, a + b + c, c - 2a), a, b, c\ \varepsilon\ R\}}$ (figura 22). El alumno H_4 (Sem. 2-2011) comenta: *"tengo tres variables **a**, **b** y **c** … por lo que tengo tres grados de libertad y me muevo en tres direcciones. O sea … necesito tres vectores para generar **W**. Debo dar valores a **a**, **b** y **c** pero cuidando que no me salgan vectores linealmente dependientes."* Al preguntarle quién es **W**, contesta: *"sería el espacio generado por los tres vectores que encontré. Tres variables arbitrarias, tres grados de libertad, me muevo en tres direcciones. Como mis vectores están en $\boldsymbol{R^4}$ no lo puedo graficar … pero sí sé que es un hiperplano en $\boldsymbol{R^4}$."* Muestra una concepción objeto de base pues da evidencia de que ha encapsulado el proceso de base al considerar las condiciones necesarias para formar distintas bases que generen el mismo espacio. Coordina, además, la representación algebraica y geométrica.

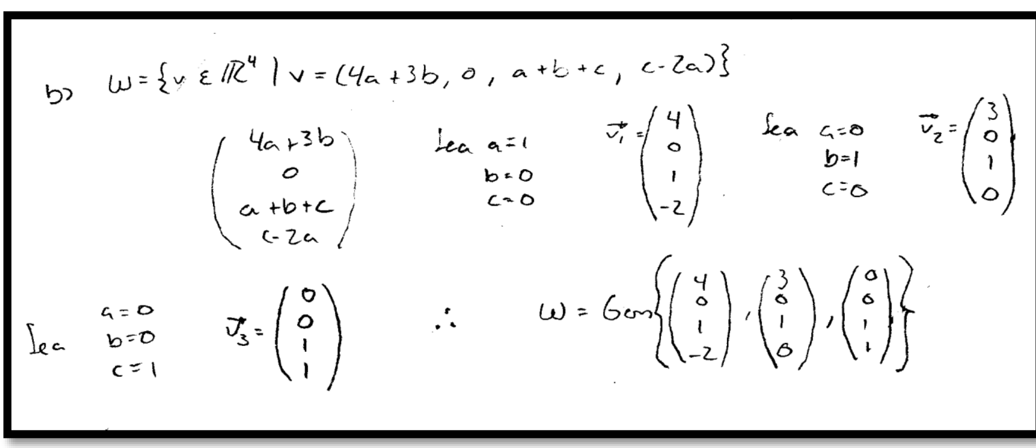


Figura 22

Otra actividad decía: sean los vectores: $\boldsymbol{\bar{v}_1 = (7, 4, -9, -5)}$, $\boldsymbol{\bar{v}_2 = (4, -7, 2, 5)}$ y $\boldsymbol{\bar{v}_3 = (1, -5, 3, 4)}$. Sabes que $\boldsymbol{\bar{v}_1 - 3\bar{v}_2 + 5\bar{v}_3 = \bar{0}}$. Usa esta información para encontrar una base para $\boldsymbol{H = gen\ \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}}$.

Algunos alumnos necesitan resolver la ecuación de dependencia lineal para decir si los vectores dados son linealmente independientes o dependientes. Sin embargo, otros alumnos coordinan los procesos de combinación lineal y dependencia lineal y reconocen la ecuación dada y por ejemplo, el alumno H_4 (Sem. 2-2011, figura 23) comenta: *"dada la información podemos estar seguros que son vectores ele de pues* $\boldsymbol{c_1 = 1}$*,* $\boldsymbol{c_2 = -3}$*,* $\boldsymbol{c_3 = 5}$ *…. son distintos de cero, por lo tanto tenemos solución no trivial. Lo que nos dice que son combinación lineal."* Además aclara: *"puedo escoger dos vectores … en realidad cualquier pareja porque no son múltiplos. Por ejemplo,* $\bar{v}_3$ *y* $\bar{v}_1$ *son base. Es decir, estos vectores son suficientes para generar **H** … no quiere decir que* $\bar{v}_2$ *no esté en **H**, solo que sobra, no puede estar en la base pues los tres vectores son ele d."* Este alumno muestra que ha coordinado los procesos de: combinación lineal, dependencia lineal y base y ha construido una concepción objeto de base por la razón dada anteriormente.

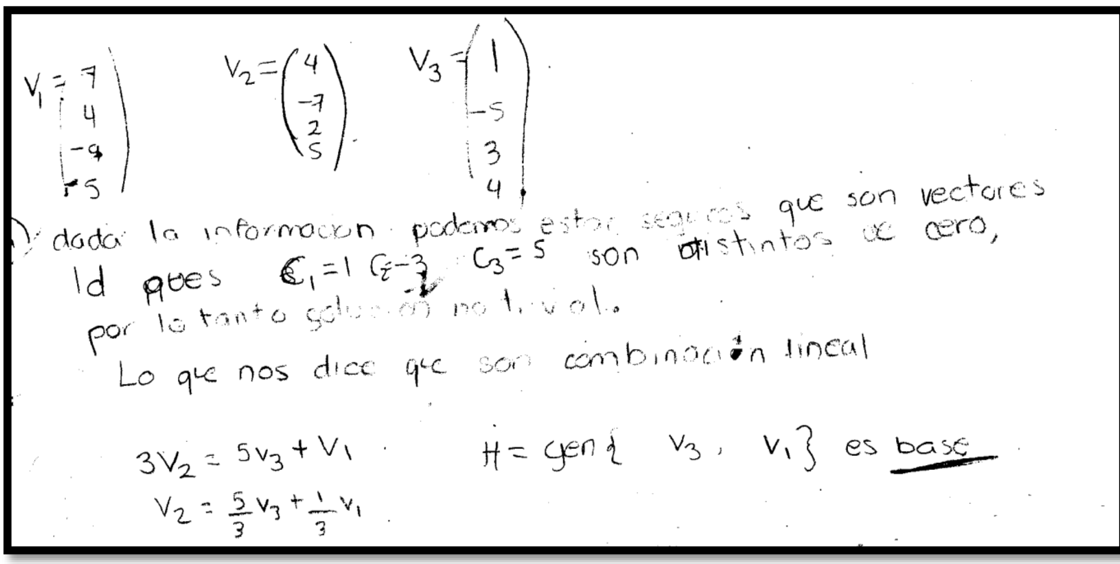
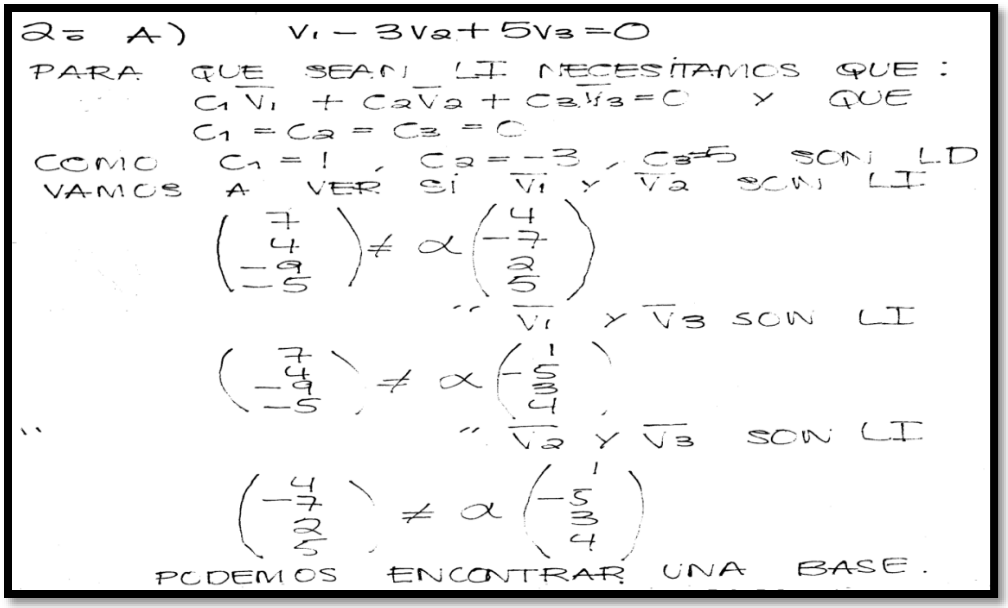


Figura 23

Nuevamente, varios alumnos mencionan el problema de las patinetas. Comentan que era similar a cuando tenían tres medios de transporte: patineta, alfombra y jet ski y en realidad nada más necesitaban dos para buscar al Tío Gauss.

Otro alumno, C_2 (Sem.1-2013) explica claramente (figura 24) todo su procedimiento. Demuestra que por parejas los vectores son linealmente independientes y aclara: *"sabemos que los tres vectores son combinación lineal o sea ele de …. para base quiero vectores ele i … voy a probar de dos en dos …. podemos encontrar una base. En realidad cualquier pareja será base para el hiperplano en* $\boldsymbol{R^4}$ *puesto que son ele i y generan al hiperplano … tengo 3 bases distintas para el mismo subespacio,"* mostrando haber construido una concepción objeto de base pues el alumno no se refiere a solamente tres bases posibles sino que basta con encontrar varias bases, que ejemplifica con tres, ya que afirma que en realidad cualquier pareja sería base para el hiperplano.



2= A) $V_1 - 3V_2 + 5V_3 = 0$

PARA QUE SEAN LI NECESITAMOS QUE:

$C_1\overline{V_1} + C_2\overline{V_2} + C_3\overline{V_3} = 0$ Y QUE

$C_1 = C_2 = C_3 = 0$

COMO $C_1 = 1$, $C_2 = -3$, $C_3 = 5$ SON LD

VAMOS A VER SI $\overline{V_1}$ Y $\overline{V_2}$ SON LI

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix} \neq \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\overline{V_1}$ Y $\overline{V_3}$ SON LI

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix} \neq \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

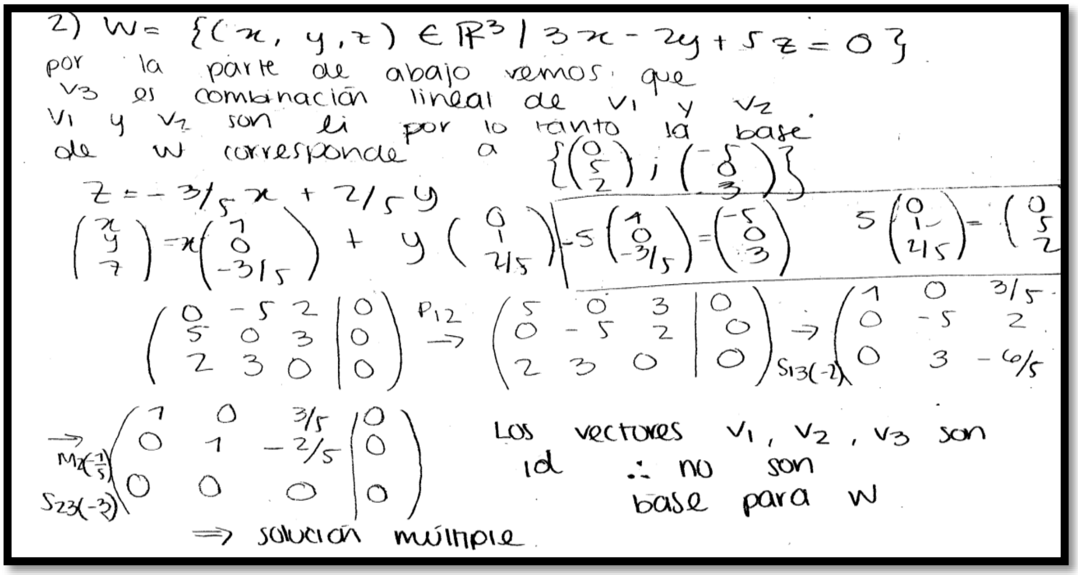
$\therefore$ $\overline{V_2}$ Y $\overline{V_3}$ SON LI

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

PODEMOS ENCONTRAR UNA BASE.

Figura 24

Algunos alumnos relacionan los procesos de combinación lineal, independencia lineal y base con otros procesos (por ejemplo, conjunto solución de un sistema homogéneo) que han aprendido anteriormente en el curso. Tal es el caso del alumno anterior quien al tener el plano ***3x – 2y + 5z = 0*** y los vectores $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{0}, \mathbf{5}, \mathbf{2})$, $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (-\mathbf{5}, \mathbf{0}, \mathbf{3})$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}} = (\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{0})$ comenta (figura 25): *"Necesitamos saber si los vectores son ele i … resuelvo el sistema homogéneo … llegué a solución múltiple. Esto quiere decir que son ele de."* Al preguntarle por la base dice: *"Los vectores $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$, $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$, $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$ son ele de, por lo tanto no son base para **W**."* Se le pide que encuentre una base y responde: *"…los tres son ele de … puedo decir que $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$ es combinación lineal de $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$* y *$\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ ….. hago al conjunto ele i … $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ son ele i por lo tanto la base de **W** corresponde a $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ … pero también puedo quedarme con otros dos … pues ….en realidad cualquier pareja es base,"* mostrando una concepción objeto de independencia lineal y base.



2) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + 5z = 0\}$
por la parte de abajo vemos que
v_3 es combinación lineal de v_1 y v_2.
v_1 y v_2 son li por lo tanto la base
de W corresponde a $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

$z = -3/5\, x + 2/5\, y$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3/5 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2/5 \end{pmatrix}$ $\quad -5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

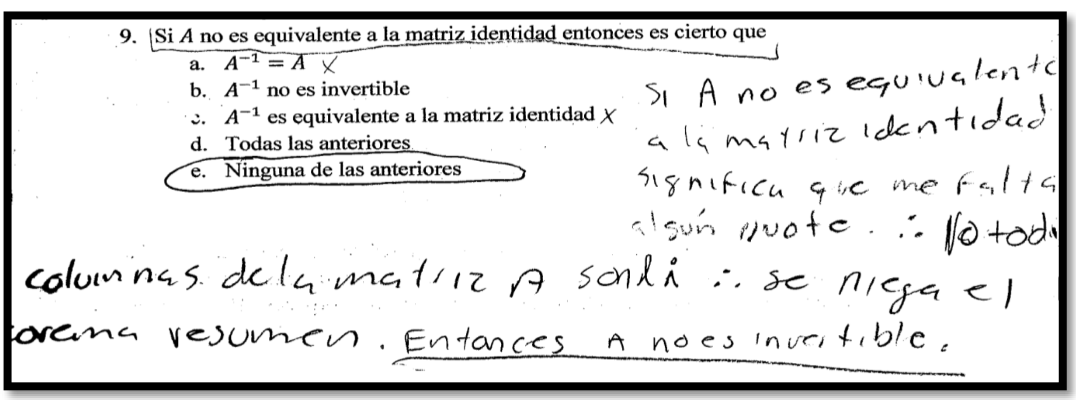
$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{P_{12}} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{S_{13}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/5 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -6/5 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[S_{23}(-3)]{M_2(-\frac{1}{5})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Los vectores v_1, v_2, v_3 son ld $\therefore$ no son base para W

$\Rightarrow$ solución múltiple

Figura 25

En la actividad 9 (figura 26) donde se daba la condición de que si ***A*** no es equivalente a la matriz identidad, los alumnos tenían que escoger cuál opción era la correcta. El alumno H4 (Sem. 2-2011) coordina los procesos de matriz inversa, de solución de un sistema y de independencia lineal (teorema resumen). Muestra un claro conocimiento y manejo del teorema resumen al contestar: *"Es verdadero el inciso **e**: ninguna de las anteriores. Porque si **A** no es equivalente a la matriz identidad significa que me falta algún pivote. Por lo tanto no todas las columnas de la matriz **A** son ele i … por lo tanto se niega el teorema resumen. Entonces **A** no es invertible."* Al preguntarle qué más podría decir de la matriz ***A*** contesta: *"Niegas todo el teorema o sea el determinante de **A** es cero, el sistema homogéneo tiene solución múltiple y el no homogéneo no tiene única o sea múltiple o no solución. Las columnas son ele de … ".*



9. Si A no es equivalente a la matriz identidad entonces es cierto que
a. $A^{-1} = A$ X
b. A^{-1} no es invertible
c. A^{-1} es equivalente a la matriz identidad X
d. Todas las anteriores
e. Ninguna de las anteriores

Si A no es equivalente a la matriz identidad significa que me falta algún pivote. $\therefore$ no todas columnas de la matriz A son li $\therefore$ se niega el teorema resumen. Entonces A no es invertible.

Figura 26

Después de analizar toda la información obtenida del trabajo de los alumnos y de la entrevista se concluyó que el problema de modelación ayudó a los alumnos a dar significado a los conceptos de combinación lineal, conjunto generador, espacio generado, independencia y dependencia lineal, base y dimensión. Es importante recordar que los resultados de la literatura afirman consistentemente que estos conceptos son muy abstractos y muy difíciles para los alumnos. En este estudio y como se mencionó anteriormente, los alumnos usaron el problema de modelación en muchas ocasiones como un contexto para explicar su razonamiento. También es importante destacar que mediante el trabajo en el problema de modelación, varios alumnos, en cada semestre, utilizaron los conceptos estudiados de manera informal y sin usar necesariamente sus nombres científicos, antes de que fueran formalizados y definidos en clase. Esto pone en evidencia que el problema de modelación utilizado proporciona un marco de reflexión en el que los alumnos pueden reflexionar sobre las posibilidades de movimiento de manera más concreta y utilizar esta analogía a los casos que ya no se presentan en el mismo contexto.

Por otra parte, si bien el problema brinda oportunidades de reflexión a los alumnos, no es posible afirmar que basta con el uso del problema para que los alumnos hagan las construcciones predichas en la descomposición genética. La intervención oportuna de la maestra para introducir las actividades diseñadas con base en la descomposición genética proporcionó a los alumnos nuevas oportunidades de reflexión. Es importante señalar que la elaboración de las actividades conceptuales no es fácil, la búsqueda de actividades que promuevan cada una de las construcciones requiere de un trabajo detallado y riguroso que implica ir generalmente más allá de las actividades que suelen usarse en clase y en los textos. En este caso, se puede concluir que las actividades diseñadas usando la Teoría APOE fueron efectivas en brindar a los alumnos nuevas oportunidades para reflexionar sobre sus construcciones y hacer las acciones y procesos necesarios para lograr un entendimiento más profundo de estos conceptos a través de la construcción de las estructuras previstas en la descomposición genética. La maestra incluyó además, en las discusiones con todo el grupo y en los ejercicios de tarea nuevas oportunidades de reflexión y de formalización de los mismos.

En el siguiente capítulo se muestran los resultados obtenidos respecto a la construcción de los conceptos de valor, vector y espacio propio de la matriz $\boldsymbol{A}$.

CAPÍTULO 7. ANÁLISIS DE RESULTADOS RELACIONADOS CON LOS PROBLEMAS DE MODELACIÓN DE VALORES, VECTORES Y ESPACIOS PROPIOS

En este capítulo se presenta el resultado del análisis del trabajo de los alumnos al trabajar con los problemas relacionados con los valores, vectores y espacios propios. Se inicia el análisis con la primera propuesta que se hizo del problema de empleo – desempleo en el que se trabajó con preguntas específicas para los alumnos con el fin de probar el problema. Posteriormente, se presentarán los resultados obtenidos del uso de los otros problemas de modelación. La solución de todos ellos se encuentra en el anexo C.

7.1 PRIMERA EXPERIENCIA. PROBLEMA DE EMPLEO – DESEMPLEO

Como se mencionó en la metodología, el objetivo de este problema era analizar su posible funcionamiento para introducir los conceptos de valor, vector y espacio propio. En esta ocasión la maestra guió a los alumnos en el planteamiento del modelo.

Supóngase que $\boldsymbol{x_t}$ representa el número de personas empleadas en el periodo $\boldsymbol{t}$ y $\boldsymbol{y_t}$ el número de desempleados en el mismo periodo. La fuerza laboral $\boldsymbol{L = x_t + y_t}$ se mantiene constante. Sean $\boldsymbol{p}$ la probabilidad de que una persona desempleada encuentre trabajo en cualquier periodo dado y $\boldsymbol{q}$ la probabilidad de que una persona empleada continúe empleada. El siguiente modelo describe la dinámica del empleo:

$$\boldsymbol{x_{t+1} = qx_t + py_t}$$
$$\boldsymbol{y_{t+1} = (1-q)x_t + (1-p)y_t}$$

Supóngase que $\boldsymbol{q = ½}$ y $\boldsymbol{p = 1/3}$. Resuelve y encuentra a largo plazo que sucede.

1.- Escribe el sistema anterior en notación matricial.

*2.- Sea $\boldsymbol{\overline{x}_t = \lambda^t \overline{v}}$ una solución. Demuestra que es solución o en qué condiciones es solución, para ello sustituye la solución y llega a un sistema en función de la matriz **A** y el vector $\boldsymbol{\overline{v}}$.*

3.- Encuentra los valores de $\boldsymbol{\lambda}$ (valor propio) para los cuales $\boldsymbol{\overline{v} \neq \overline{0}}$ (vector propio asociado a $\boldsymbol{\lambda}$).

4.- Para cada $\boldsymbol{\lambda}$ (valor propio) encuentra un $\boldsymbol{\overline{v}}$ (vector propio).

5.- Teníamos que $\bar{x}_{t+1} = A\bar{x}_t$*. Si* $\bar{v}_1$ *y* $\bar{v}_2$ *son vectores propios de una matriz* ***A*** *con valores propios correspondientes* λ_1 *y* λ_2 *entonces la combinación lineal de ellos también es solución. Definimos:* $\bar{x}_t = c_1\lambda_1^t\bar{v}_1 + c_2\lambda_2^t\bar{v}_2$*. Demuestra que es solución.*

6.- Sustituye $\bar{x}_t = c_1\lambda_1^t\bar{v}_1 + c_2\lambda_2^t\bar{v}_2$ *en nuestro ejemplo e interpreta el resultado cuando* $t \to \infty$.

El problema planteado en esta primera experiencia (enero-mayo 2011) no puede considerarse como un problema real de modelación pues, dado que el objetivo era probar si el problema tenía el potencial para funcionar como un problema de modelación, es decir, un problema que puede ser abierto y en su aplicación los alumnos tienen libertad de acción, para la enseñanza de los conceptos de valores, vectores y espacios propios, se incluyó el modelo en el enunciado y se guió a los alumnos en el proceso de solución. En el semestre en el que este problema se probó y como ya se mencionó anteriormente en el capítulo de metodología, se trabajó con 32 alumnos divididos en 8 equipos de 4 alumnos cada uno.

Los alumnos de los diferentes equipos no mostraron ninguna dificultad para encontrar una matriz que permitiera representar el problema como una ecuación en diferencias en forma matricial $\bar{x}_{t+1} = A\bar{x}_t$. Esto mostró que los alumnos pueden hacer acciones sobre un sistema de ecuaciones dado como un objeto. Reconocieron también, sin problemas que los valores dados para las probabilidades de cambio en el estado de empleo o desempleo de la economía constituían los elementos de la matriz, es decir, que $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$.

Cuando la maestra preguntó a la clase por el significado de las ecuaciones, por ejemplo el alumno A_4 explicó de la siguiente manera: *"…el número total de empleados está dado por los empleados que siguen empleados más los desempleados que consiguen trabajo. Los desempleados son los empleados que pierden su trabajo más los que se quedan desempleados".*

Otros alumnos de otros equipos mencionaron concretamente las probabilidades dadas en el problema, por ejemplo C_3 comenta: *"los empleados en el periodo **t** son la mitad de los empleados del periodo anterior más la tercera parte de los desempleados del periodo anterior que ahora tienen trabajo. Los desempleados son la otra mitad de empleados que perdió su trabajo del periodo anterior más dos tercios de los desempleados que siguen desempleados."* La maestra explicó a los alumnos que las ecuaciones del modelo propuesto se conocen como ecuaciones en diferencia puesto que lo que sucede en el tiempo ***t* + *1*** depende de lo que ocurre en el periodo anterior, ***t***.

Cuando la maestra preguntó si $\overline{\boldsymbol{x}}_t = \boldsymbol{\lambda}^t \overline{\boldsymbol{v}}$, podría ser solución y en qué condiciones, si las había, podría serlo, únicamente los alumnos de dos equipos (D y H) tuvieron problemas al sustituir en la ecuación matricial la solución propuesta. Los alumnos del equipo D sustituyeron la solución en la ecuación, pero no fueron capaces de operar con ella. Los alumnos del equipo H sustituyeron correctamente la solución propuesta y cancelaron el vector de ambos lados de la ecuación, lo que los condujo a una igualdad en la que la matriz $\boldsymbol{A}$ es igual a un escalar, $\boldsymbol{\lambda}$. Estos alumnos mostraron no haber construido el concepto de vector como un objeto, su imposibilidad de reflexionar sobre la ecuación como un objeto los condujo, además, a no darse cuenta de que esta acción los conducía a un resultado sin sentido. En la figura 1, se muestra la parte del trabajo entregada por este equipo en esta etapa del trabajo en clase.

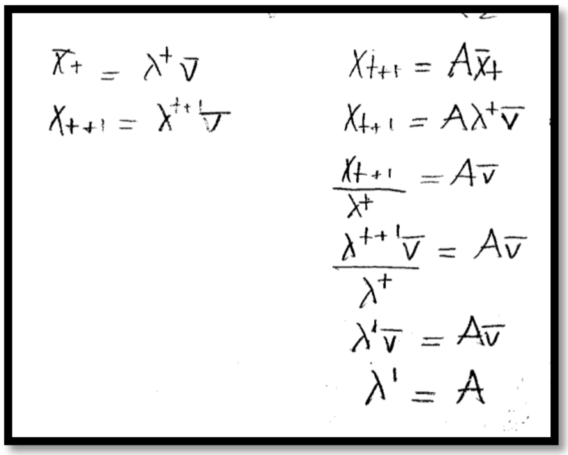


Figura 1

Los demás equipos hicieron la sustitución correcta y, al hacer acciones sobre la ecuación, encontraron en unos casos que $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{\lambda}\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\boldsymbol{0}}$ y en otros que $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\lambda}\overline{\boldsymbol{v}}$. Sin embargo, los alumnos mostraron dudas sobre cómo es que se puede encontrar la solución propuesta. La maestra explicó un método para encontrarla que se conoce como “adivinanza ilustrada” pero los alumnos tuvieron dificultades en darle sentido a ese proceso, posiblemente por el desconocimiento de las ecuaciones en diferencia. Varios de los alumnos hicieron comentarios del tipo que señaló D_2: *“¿es solución, pero por qué así? ¿De dónde sale $\boldsymbol{\lambda}^t$ y $\overline{\boldsymbol{v}}$? ¿Qué son”?*

La maestra respondió las preguntas explicando por qué se proponía ese tipo de solución y una vez que consideró que la mayor parte de los alumnos había comprendido introdujo las definiciones de los conceptos de valor y vector propio. La maestra explicó que la solución de los sistemas de ecuaciones en diferencia consiste en combinaciones lineales de funciones exponenciales en las que la base es un valor propio y que están multiplicadas por el vector propio correspondiente al valor propio en la exponencial. En su bitácora la maestra comentó acerca de las dificultades de los alumnos para entender este tipo de solución a pesar de que fueron capaces de verificar que la solución propuesta era, efectivamente, una solución. La maestra también anotó que los alumnos no entendieron claramente de dónde aparecieron los valores y vectores propios y cuál era su papel.

Después de intentar aclarar las dudas, la maestra pidió al grupo que encontraran los valores propios y les recordó que el vector propio debe ser distinto de cero. Los alumnos de seis de los ocho equipos, los mismos que no tuvieron problema con la sustitución de la solución planteada, reconocieron que al utilizar la definición de los valores y vectores propios se obtiene un sistema homogéneo, por lo que la solución del sistema de ecuaciones de interés es la solución múltiple. Todos estos alumnos recordaron el teorema resumen del álgebra lineal y consideraron, en algunos casos, que en esas condiciones no existe la matriz inversa de la matriz ***A***, mientras que en otros casos, indicaron que el determinante de dicha matriz debe ser cero. Los alumnos de los otros dos equipos (D y H) tuvieron problemas para utilizar la definición de los valores y vectores propios. Los alumnos del equipo H tuvieron dificultades al operar con ella, como se muestra en la figura 2. Escriben la ecuación $\boldsymbol{A\overline{v}} = \boldsymbol{\lambda\overline{v}}$, pero al sustituir los valores dados y resolver igualan a cero ambas ecuaciones. Al preguntarles la maestra sobre el valor de $\boldsymbol{\lambda}$ cambian la parte derecha de la ecuación, pero no saben cómo continuar.

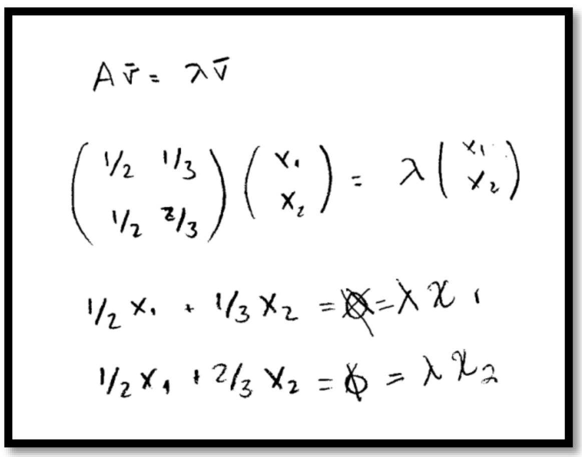


Figura 2

Es importante notar que los demás equipos no mostraron dificultades con el uso de la definición. Algunos equipos utilizaron el hecho de que el determinante de la ecuación resultante debía ser cero: $|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}| = \boldsymbol{0}$, con lo que dan evidencia de que son capaces de coordinar los procesos de sistema de ecuaciones lineales y determinantes en el proceso de encontrar el conjunto solución y, al hacerlo, encuentran los valores propios. Algunos alumnos aclaran en su procedimiento el hecho de que en este problema se necesita solución múltiple para darle sentido al modelo (equipo B, figura 3).

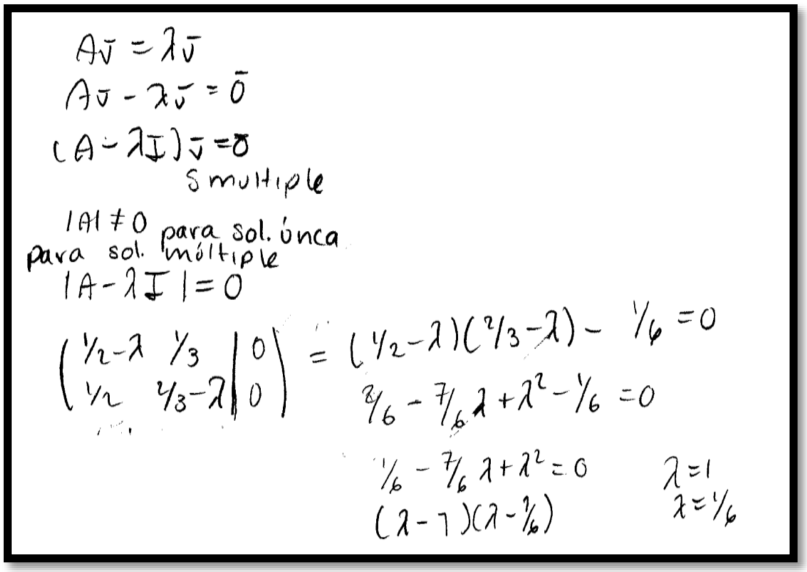


Figura 3

Al encontrar los vectores propios se presentó la dificultad de transformar la ecuación $\boldsymbol{A\bar{v}} = \boldsymbol{\lambda\bar{v}}$ en $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I})\boldsymbol{\bar{v}} = \boldsymbol{\bar{0}}$ reportada en la literatura**.** Algunos alumnos manipularon la ecuación pero no reflexionaron sobre la necesidad de introducir la matriz identidad para poder operar con matrices. Sin embargo, los alumnos de varios equipos realizaron las acciones requeridas en esta transformación. En la discusión en clase estos alumnos fueron capaces de explicar a los demás por qué era necesario introducir la matriz identidad (equipo E, figura 4) y con ello bastó para que el resto de los alumnos reflexionaran y entendieran la necesidad de la matriz identidad.

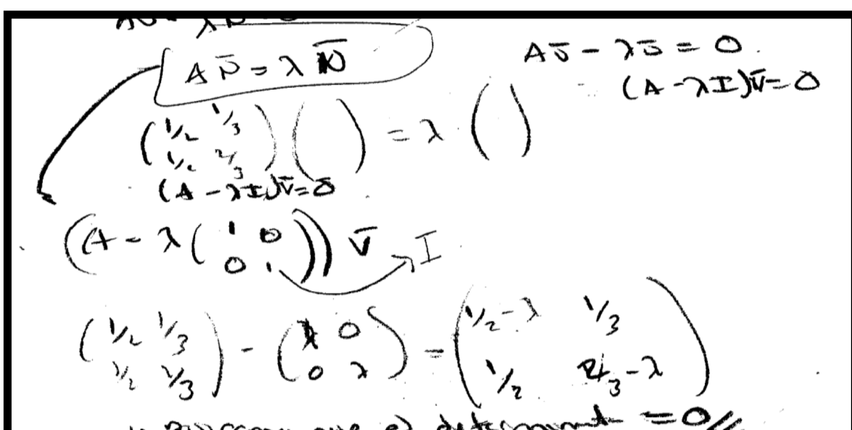


Figura 4

Una vez encontrados los valores propios, todos los alumnos fueron capaces de hacer las acciones necesarias para encontrar los vectores propios asociados a cada valor propio, a través de la solución del sistema homogéneo asociado, $(\boldsymbol{A} -$

$\boldsymbol{\lambda I})\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\mathbf{0}}$. Algunos de los alumnos propusieron un caso particular para los vectores propios. Los alumnos del equipo A, además de encontrarlos, demostraron que efectivamente dichos vectores eran vectores propios de la matriz usando la definición que se acababa de introducir, $\boldsymbol{A\bar{v}} = \boldsymbol{\lambda\bar{v}}$, como se ve en la figura 5.

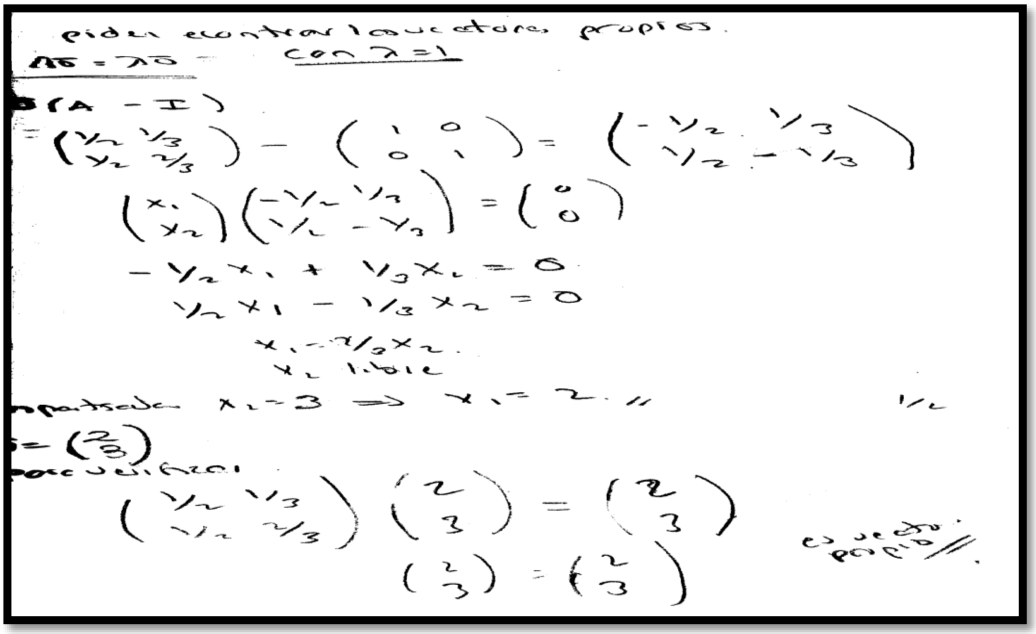


Figura 5

La siguiente instrucción consistía en verificar que la combinación lineal de las soluciones encontradas para la ecuación en diferencias era también solución de la misma ecuación. Los alumnos sustituyeron y fueron capaces de hacer las acciones correspondientes en la ecuación correctamente (equipo C, figura 6). Sin embargo, mostraron muchas dificultades en la comprensión de lo que estaban haciendo. Al parecer, los alumnos son capaces de seguir las instrucciones, pero no tienen los conocimientos, ni la intuición necesaria para esperar una solución exponencial para este tipo de problema. Este resultado se tomó en consideración en la decisión de no incorporar directamente el problema de modelación en la secuencia de enseñanza, sino incluir problemas con una sola ecuación en diferencia en los que los alumnos pudieran proponer, por ellos mismos, una solución exponencial al problema, antes de presentar el problema de modelación.

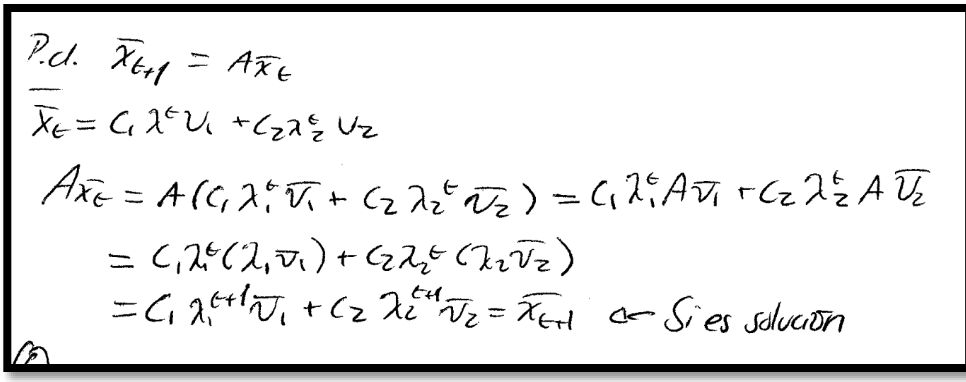


Figura 6

Finalmente, los alumnos encontraron qué sucedía en el largo plazo a partir de las soluciones encontradas. Nuevamente, todos los equipos encontraron que a la larga, la solución dependerá solamente del valor propio $\boldsymbol{\lambda_1}$ ***= 1*** puesto que la solución asociada al valor propio $\boldsymbol{\lambda_2} = {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{6}}$ tiende a cero cuando $\boldsymbol{t} \to \infty$. Por ejemplo, los alumnos del equipo E, explicaron que a la larga la solución al problema tiende a la recta asociada al vector propio ***(2, 3)*** y que constituye una solución de equilibrio, como se ve en la figura 7, se equivocan al escribir el vector y ponen ***(2/3)***.

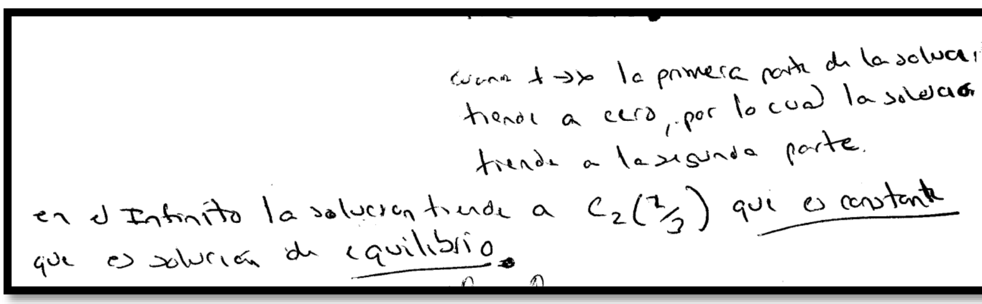


Figura 7

El problema planteado contribuyó a dar sentido a los valores, vectores y espacios propios para los alumnos en el momento en que explicaron lo que sucedía en el largo plazo. Algunos alumnos explicaron que los valores propios determinan qué pasará en el largo plazo, por ejemplo E_3 comentó: *“cuando lambda es menor a uno tenderá a cero a la larga, si lambda es mayor a uno crecerá indefinidamente y si lambda es uno permanece igual.”* Entonces aclaró: *“puede llegar al vector propio o un múltiplo o una combinación lineal.”* Por ejemplo, en la figura 8 los alumnos del equipo B encuentran el límite y concluyen que *“todo va a depender de* $\boldsymbol{\lambda_1}$ *y de* $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$*”.*

$$\overline{x}_t = c_1 \lambda_1^t \overline{v}_1 + c_2 \lambda_2^t \overline{v}_2$$

$t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} \overline{x}_t = c_1 1^t \overline{v}_1 + c_2 (1/6)^t \overline{v}_2$$

$$= c_1 (1)^t \begin{pmatrix} 2/3\, x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} + c_2 (1/6)^t \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como $\lim_{t\to\infty} (1/6)^t = 0$, todo va a depender de λ_1 y de $\overline{v}_1$

Figura 8

Siguiendo el proceso completo de solución del problema fue posible darse cuenta de que al comenzar el trabajo con el problema, la solución propuesta, $\boldsymbol{\overline{x}_t} = \boldsymbol{\lambda^t \overline{v}}$, no tenía significado para los alumnos y, aunque fueron capaces de hacer las acciones necesarias sobre la ecuación en diferencia para verificar que dicha función era efectivamente solución de la ecuación, no lograron entender por qué la solución tenía esa forma. Al finalizar el problema, los alumnos fueron capaces de relacionar los valores y vectores propios con la solución del problema, comprendieron el significado de la función solución a través de sus diferentes representaciones y su comportamiento a largo plazo, aunque no eran aún conscientes del significado matemático de los valores y vectores propios.

Los alumnos entendieron el problema y las ecuaciones en diferencia planteadas. Como se dijo antes, fueron capaces de explicar su significado correctamente, por lo que se concluyó que en la siguiente experiencia se podría plantear el problema abierto como problema de modelación para que, por una parte, los alumnos propusieran por ellos mismos un modelo y por otra parte, al plantear el problema abierto hubiera más posibilidades de discusión del papel de los parámetros en el mismo y su relación con los conceptos de interés. Se decidió plantear antes de esa experiencia dos problemas más simples que permitieran a los alumnos sugerir un modelo en ecuaciones en diferencia y darse cuenta de que la solución de la ecuación del modelo debería tener forma exponencial y, posiblemente, generalizarla a este problema más complejo.

Los alumnos pudieron responder a las demás preguntas y encontrar qué sucedía en el largo plazo, por lo que se espera que al plantear el problema abierto puedan también encontrar qué sucede a la larga. Así se concluyó, que el problema tenía el potencial para que emergieran los conceptos de valor, vector y espacio propio y se les pudiera dar sentido. Se decidió usarlo como un problema abierto para probarlo como problema de modelación.

7.2 Experiencias posteriores

En los seis semestres de agosto 2011 a enero 2014 se usaron tres problemas de modelación que se pueden plantear con ecuaciones en diferencias: uno de población, uno de empleo y finalmente el de empleo – desempleo. Los dos primeros se diseñaron con la finalidad de explicar, a grandes rasgos, lo que es una ecuación en diferencias y su solución y, con el objetivo de que los alumnos fueran capaces de sugerir una solución de tipo exponencial y de generalizarla, posteriormente al problema de empleo – desempleo. Los resultados que se muestran a continuación se ejemplifican con propuestas de los alumnos de diferentes semestres dado que el comportamiento de los alumnos fue muy similar en cada uno de ellos.

7.2.1 Problema de población

Se presenta en primer término el modelo de población.

Problema de población

*En un bosque de México viven los búhos manchados. Supón que no tienen depredadores y tienen alimento suficiente. Sabes que en el periodo **t + 1** sobrevive una proporción de los búhos del periodo anterior.*

1.- Escribe un modelo que describa lo anterior.

*2.- Encuentra la solución, si sabes que la proporción de búhos que sobrevive de un periodo a otro es **2/3** y que la población inicial es de **375** búhos. ¿Qué pasará a la larga?*

3.- Encuentra la solución para el modelo en general.

(Adaptación propia de un problema que aparece en el texto Lay, 2012, p. 265).

En cada ocasión en que se planteó el problema de poblaciones, los alumnos encontraron rápidamente un modelo exponencial y fueron capaces de explicar su razonamiento, como se muestra en el ejemplo de la figura 9. Sus explicaciones son similares a la dada por el equipo I (Sem. 1-2014): *"sabemos que en el periodo **t + 1** sobrevive una proporción **k** de los búhos del periodo anterior. Por lo tanto, la población en **t + 1** es la que había en **t**, o sea **B**, por **k**, la proporción … o sea …$\boldsymbol{B_{t+1} = kB}$. Además necesitas que **k** esté entre cero y uno para que tenga sentido".*

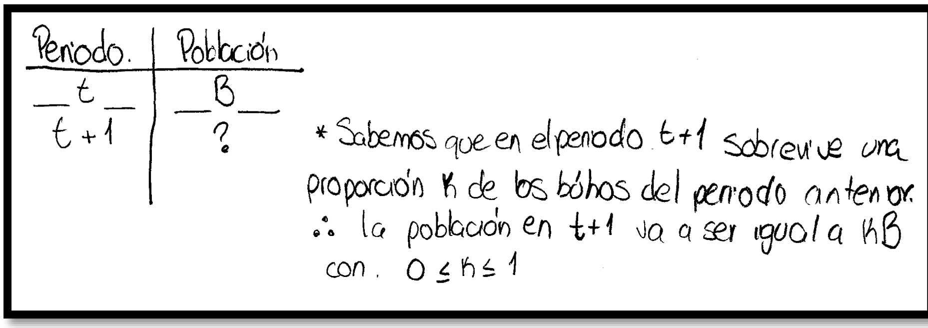


Figura 9

Para encontrar qué pasa en el largo plazo, la mayoría de los alumnos sustituyeron los valores dados, ***2/3*** y ***375*** y evalúan en el tiempo (***t = 1***, ***2***, ***3****,* etc.). Reconocen un patrón en el que la ***k*** está elevada a una potencia y concluyen que la solución de la ecuación del modelo es una función exponencial (figura 10, equipo B, Sem. 2-2013). Por ejemplo, el alumno B_4 explica que para encontrar la población en un periodo dado: *"tenemos que elevar el **2/3** a la **t** y multiplicarlo por la población inicial. O sea … siempre depende de la población inicial."* Hubo algunos alumnos en cada semestre que hicieron comentarios del tipo: *"no nos dicen si nacen búhos. Nada más la proporción que pasa de un tiempo a otro. Llegamos a una exponencial … bueno pues … cada vez habrá menos búhos… o sea a la larga todos se mueren. Tendría que haber búhos que nacen".*

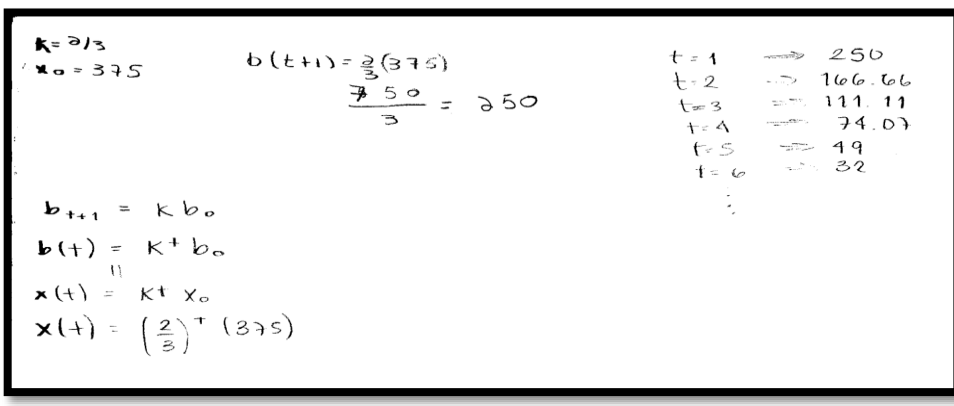


Figura 10

La solución a este problema es muy intuitiva y como se esperaba los alumnos se dieron cuenta fácilmente que la solución era una exponencial. Sus dudas ante el ejemplo concreto planteado están justificadas pues por ser un problema de poblaciones, esperaban que la solución indicara crecimiento de la población. El hecho de que ***k*** resultara menor que uno permitió la discusión con la maestra del significado de que ***k*** fuera menor que uno y su relación con las hipótesis del problema. Para los alumnos resultó fácil darse cuenta que la solución obtenida era una función exponencial decreciente, pero no tanto relacionar con las hipótesis del problema en las que se habla de que en cada periodo hay una proporción de la población que sobrevive. Finalmente se dieron cuenta que en realidad esa hipótesis hablaba de que la población de búhos se estaba extinguiendo y se les sugirió que pensaran cómo plantearían un nuevo modelo en el que se incluyera el nacimiento de búhos. Esta discusión contribuyó en cada semestre pues se usó el problema en una discusión amplia e interesante por parte de los alumnos. Después, se planteó el problema de empleo.

7.2.2 PROBLEMA DE EMPLEO

Este problema es muy similar al anterior aunque el contexto es diferente. Con él se trataba de verificar si los alumnos podían reconocer un modelo exponencial en una situación nueva. A continuación se presenta el análisis de los resultados.

Problema de empleo

*En una economía sabes que el número de empleados en el periodo **t + 1** es una proporción del número de empleados del periodo anterior.*

1.- Escribe un modelo que describa la dinámica del empleo.

*2.- Encuentra una solución de la ecuación que representa el modelo matemático, si sabes que la proporción de personas que sigue empleada es la mitad y que la población inicial es de **100** personas. ¿Qué pasará con el número de empleados a la larga?*

3.- Encuentra la solución para la ecuación del modelo original que planteaste.

Los alumnos rápidamente reconocieron que el problema de empleo era igual al anterior. Utilizaron también sus conocimientos de economía y/o la intuición que han desarrollado en economía e hicieron comentarios, incluso sin haber realizado ninguna operación, como los de A_2 (Sem. 2-2011): *"es igual al anterior, es un problema de población, población empleada. Muy fácil a la larga no hay ningún empleado."* Después de este razonamiento, escriben la misma ecuación que obtuvieron en el problema anterior. Muchos de ellos cambian la variable ***B*** de búhos por ***E*** de empleados y explican de maneras similares a la que se muestra en la figura 11 equipo A (Sem. 2-2011), *"a la larga la población va a ser cero, porque **q** = ½ y todo se va dividiendo a la mitad".*

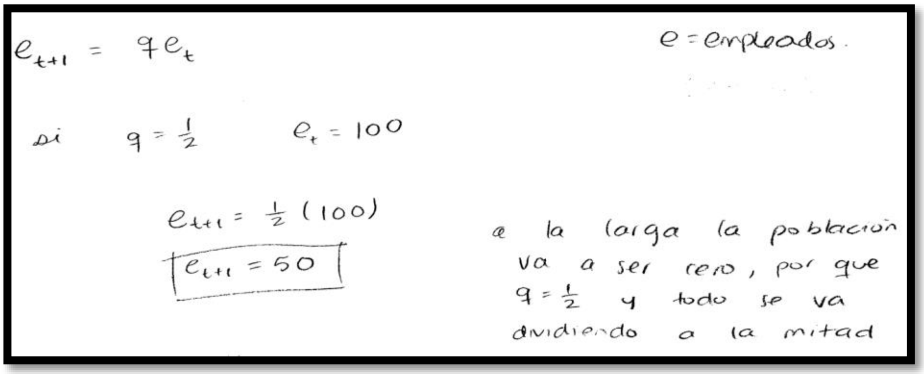


Figura 11

Algunos alumnos nuevamente sustituyen los valores ***t* = *1*, *2*, *3*** etc. y explican, como por ejemplo E3 (Sem. 1-2012): *"al final tenemos la misma exponencial, la población de empleados en el tiempo **t** es la **q** elevada a la **t** por la población inicial … o sea …* $\boldsymbol{P^t = q^t P_0}$*,"* como se ve en la figura 12.

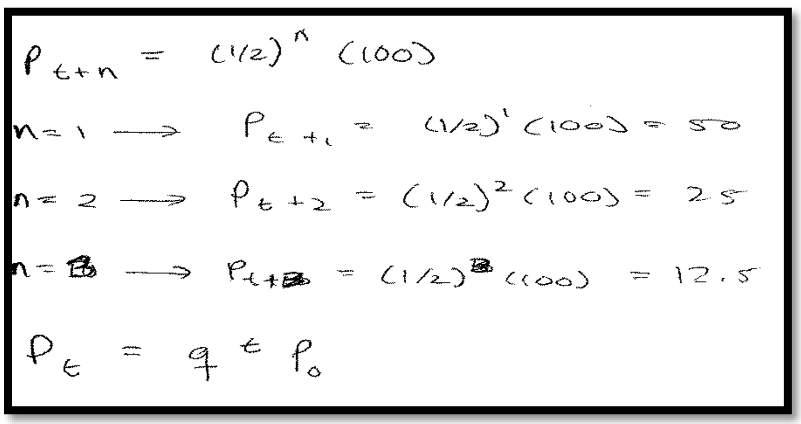


Figura 12

El tema de ecuaciones en diferencia es nuevo para los alumnos y no forma parte del plan de estudios de este curso. Por ello al finalizar estos problemas, la maestra explicó que las ecuaciones que propusieron para el modelo se conocen como ecuaciones en diferencia puesto que lo que sucede en el tiempo ***t* + *1*** depende de lo que sucede en el periodo anterior, ***t***. Los alumnos discutieron y varios comentaron, como E3 (Sem. 1-2012): *"así como están los problemas no tienen sentido. Al final todos los búhos mueren o todas las personas queden desempleadas. Necesitamos más datos, algo más."* Otros se cuestionaron, B4 (Sem. 2-2013): *"¿la exponencial siempre es solución de este tipo de ecuaciones?"* La maestra aclaró brevemente que la solución es una exponencial y se discutió con los alumnos cómo si la constante es mayor que uno, indica que además de quedar algunos empleados del periodo anterior, podrían entrar nuevos empleados al mercado de trabajo, es decir, habría un modelo más realista en el que hay empleo y desempleo o en el caso de la población habría nacimientos y muertes.

7.2.3 PROBLEMA DE EMPLEO – DESEMPLEO

Después del trabajo con los problemas anteriores se planteó a los alumnos el problema de empleo – desempleo. Se esperaba que, después de resolver los dos problemas anteriores, generalizaran la solución exponencial al considerar este nuevo problema como un problema de población empleada y desempleada. Como se mencionó en la metodología, el problema original se rediseñó haciéndolo un problema abierto donde se pedía a los alumnos el modelo, su solución y qué sucedía en el largo plazo.

Este problema se diseñó con la finalidad de introducir los conceptos de valor, vector y espacio propio. El problema es el siguiente:

Problema de empleo – desempleo

> *Supóngase que* $\boldsymbol{x_t}$ *representa el número de personas empleadas en el periodo* $\boldsymbol{t}$ *y* $\boldsymbol{y_t}$ *el número de desempleados en el mismo periodo. La fuerza laboral se mantiene constante. Sean* $\boldsymbol{p}$ *la probabilidad de que una persona desempleada encuentre trabajo en cualquier periodo dado y* $\boldsymbol{q}$ *la probabilidad de que una persona empleada continúe empleada.*
>
> *Encuentra un modelo que describa la dinámica del empleo y el comportamiento del mismo a largo plazo.*

A continuación se explica la forma en la que los alumnos trabajaron en la elaboración de sus modelos, el uso que hacen de conocimientos matemáticos previos y por qué el problema propuesto cumple los principios de la Teoría de Modelos y Modelación.

Los alumnos mostraron interés por el problema. Recordaron los problemas de empleo y población que habían resuelto. Varios de ellos dijeron, como por ejemplo B_2 (Sem. 2-2013): *"Es como los problemas de antes … los de ecuaciones en diferencia. Nada más que ahora sí tenemos nuevos empleados."* Abordaron el problema utilizando sus conocimientos acerca de sistemas de ecuaciones, matrices, economía y sentido común. Comentaron, como por ejemplo C_1 (Sem. 2-2013): *"tenemos empleados y desempleados. Creo que necesitamos dos variables y dos ecuaciones."* Al ser alumnos de economía también mencionaron, como C_1 (Sem. 2-2013): *"La fuerza laboral es constante. Esto quiere decir que no aumenta el total de personas, pero hay nuevos empleados y otros que dejan el empleo."* Esto proporcionó evidencia de que el problema propuesto cumple el principio de realidad de la Teoría de Modelos y Modelación.

Los alumnos trabajaron en equipos, desarrollaron hipótesis, seleccionaron variables, discutieron las relaciones entre ellas y empezaron a construir modelos matemáticos para resolver el problema. A través de discusión y negociación entre los alumnos y con la maestra sobre ideas e hipótesis que surgieron, se propusieron, discutieron y modificaron las primeras propuestas de algunos modelos. Los alumnos escribieron sus supuestos y razonamientos en términos matemáticos. La mayoría de los alumnos definió dos variables, una para empleo y otra para el desempleo. Sin embargo, algunos tuvieron dificultades para escribir matemáticamente la forma en que el número de empleados y el de desempleados se podrían relacionar entre sí y necesitaron apoyo y sugerencias de la maestra para poder trabajar con su modelo y explorar sus posibilidades.

La mayoría de los equipos fue capaz de considerar que una característica importante del modelo era que el número de empleados y desempleados en un periodo dado estaba relacionado con el periodo anterior. Varios equipos buscaban funciones del tiempo que pudieran describir el número de personas empleadas y el número de personas desempleadas. Los alumnos no habían descrito situaciones en términos de razón de cambio, excepto por los modelos de población y empleo, trabajados anteriormente, que involucraban una sola variable. Varios equipos mencionaron que el modelo que se necesitaba para este problema debía ser similar al modelo que encontraron para los problemas de población de búhos y de personas empleadas. La maestra anotó en su bitácora: *"al parecer los problemas anteriores ayudaron a algunos alumnos en el planteo del modelo pues piensan que deben tener ecuaciones en diferencia."* La figura 13 muestra el modelo propuesto por el equipo B (Sem. 2-2013). Expresiones similares fueron presentadas por varios equipos. Durante su trabajo en equipo discutieron lo siguiente:

B_2: *"Sabemos que la solución de una ecuación en diferencia es* $\boldsymbol{x_n = k^n x_0}$*. Sabemos esto de los problemas de población. Entonces … necesitamos tener una exponencial…".*

B_1: *"pero ahora tenemos dos variables* $\boldsymbol{x_t}$ *y* $\boldsymbol{y_t}$ *… entonces necesitamos dos exponenciales…".*

B_3: *"…**p** es la probabilidad de que un desempleado encuentre trabajo, así que uno menos **p** deben ser los empleados, y esto lo elevamos al tiempo **t**. Ahora, **q** es …. lo mismo, empleados que siguen empleados así que uno menos **q** son los desempleados, también lo elevamos a la **t**."* Entonces, escribieron la ecuación $\boldsymbol{x_t(1-p)^t + y_t(1-q)^t}$ (figura 13) como modelo matemático.

Después de un tiempo de discusión, se dieron cuenta que necesitaban dos ecuaciones por lo que llamaron a la maestra y le explicaron:

B_2: *"Necesitamos separar la ecuación en dos partes. Los empleados en el tiempo **t + 1** es la primera parte, empleados en el tiempo **t** por la probabilidad **1 - p**. Los desempleados son la segunda parte, desempleados en el tiempo **t** por la probabilidad **1 - q**".*

La maestra les preguntó si las ecuaciones estaban o no relacionadas. Un alumno del equipo contestó:

B_1:*“Ah! … pero … tal vez las personas empleadas pierden su trabajo y los desempleados obtienen un trabajo. ¿Dónde están ellos? ¿Entonces solo tenemos la primera ecuación que escribimos? ¿Solo una”?*

B_2: *“Tal vez el modelo son los empleados más los desempleados y tenemos …. No sé”.*

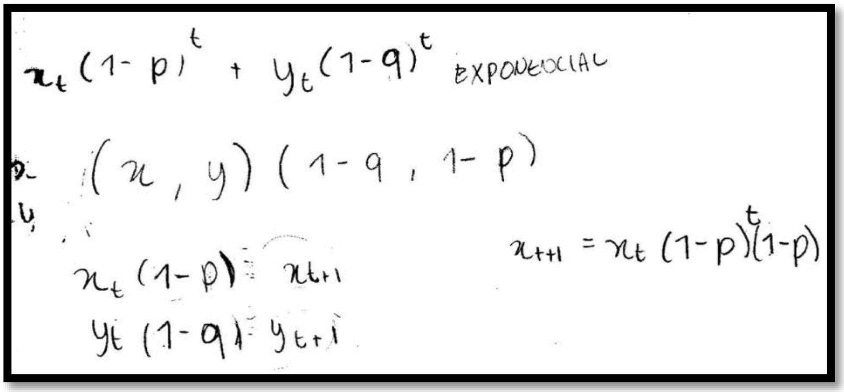


Figura 13

Los alumnos de este equipo generalizaron la solución $\boldsymbol{x_n = k^n x_0}$, que habían obtenido en los problemas de poblaciones que involucraban una sola variable dependiente en una ecuación en diferencia, a dos variables independientes, una para el número de empleados y otra para el número de desempleados. No tomaron en cuenta que en esta nueva situación tenían dos variables que necesitaban estar relacionadas. Al reflexionar sobre la pregunta de la maestra solamente hicieron la acción de regresar a la primera ecuación que habían propuesto para considerar una posible relación, pero no discutieron qué representaba esta expresión y la dejaron como la habían planteado originalmente.

Otros equipos sugirieron modelos similares, tomando en consideración los cambios en el empleo y desempleo en dos ecuaciones independientes y cuatro equipos fueron capaces de considerar la razón de cambio del empleo y desempleo en términos de la interrelación del cambio en las funciones describiéndolas en diferentes periodos de tiempo sucesivos. Por ejemplo, los alumnos del equipo A (Sem. 1-2012), discutieron (figura 14):

A_2: *“Yo creo que en un tiempo dado, hay un cierto número de empleados y desempleados, pero eso puede cambiar en el siguiente periodo. Puede pasar que en un tiempo haya desempleados que consigan trabajo y algunos empleados que pierdan su trabajo, pero …”.*

A_3: *“Es correcto, podemos pensar en el número de empleados en el siguiente periodo y ese debe ser los que siguen empleados menos los que ahora están desempleados …”.*

A1: *“…. Suena bien, pero en mi opinión, los empleados en el nuevo periodo deben ser una proporción de las personas que tienen empleo y lo siguen teniendo más una proporción de la gente que estaban desempleadas antes y ahora consiguieron empleo …”.*

A2: *“Sabemos que **p** son los desempleados que consiguieron trabajo y **q** los empleados que siguen empleados, bueno, las probabilidades”.*

A1: *“Ok, así que debe ser x_{t+1} es igual a **q** por x_t más **p** por y_t.”* (escribe $x_{t+1} = qx_t + py_t$ → empleo).

A3: *“Es correcto… Si **p** y **q** son probabilidades, entonces **1 - q** es la probabilidad de que una persona empleada pierda su trabajo y **1 - p** es la probabilidad de que alguien desempleado siga sin trabajo.”* (A1 escribe $y_{t+1} = (1 - q)x_t + (1 - p)y_t$ → desempleo), *“así que el modelo del problema es este”.*

Estos alumnos usaron su experiencia sobre empleo, y lo que habían aprendido de ecuaciones en diferencia y probabilidades, para efectuar acciones en las variables y relacionarlas en un modelo matemático que describiera la dinámica del problema. El modelo consistió en un sistema de ecuaciones en diferencia como el que escribió el equipo anterior, pero más completo (figura 14).

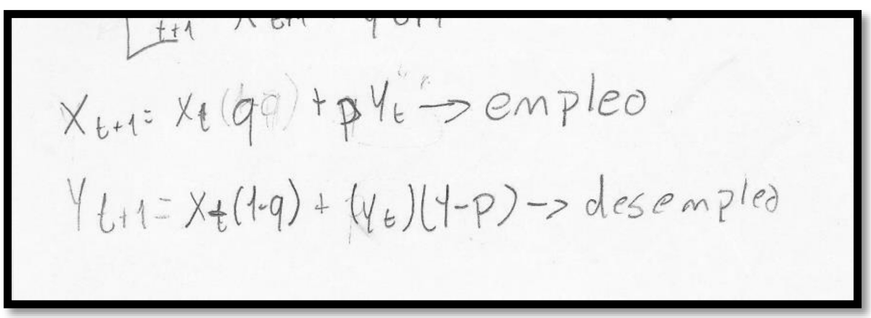


Figura 14

Cuando la maestra detectó que todos los equipos habían sugerido un modelo, eligió a tres equipos que habían seguido diferentes procedimientos para exponer su modelo y su avance al resto del grupo para que los discutieran. Durante esta discusión, los alumnos comentaron las ventajas y desventajas de cada uno de los modelos propuestos. En el caso del equipo B (figura 13), al presentar su modelo al grupo sus integrantes no fueron capaces de explicar el significado de su expresión. Durante la discusión, los comentarios de los otros alumnos les hicieron darse cuenta que ***1 - p*** era la probabilidad de que una persona desempleada continuara sin trabajo y no el número de empleados. Muchos alumnos les comentaron que no habían considerado a las personas que cambiaban su estatus de empleo. El grupo concluyó que la expresión propuesta no describía la situación que presentaba el problema. El equipo A (figura 14) expuso claramente sus ideas. Después de algunas preguntas, el grupo estuvo de acuerdo en que el modelo que ellos presentaban reflejaba mejor la situación. La maestra pidió a los alumnos que compararan este modelo con el suyo. Se realizó una nueva discusión con el grupo y se concluyó que la propuesta del equipo A era la apropiada. El grupo decidió usarla como “el modelo”.

Lo expuesto anteriormente pone de manifiesto que el problema planteado, cumple con el principio de construcción de modelos de la Teoría de Modelos y Modelación. Además, la posibilidad de los alumnos de discutir y criticar sus propios modelos y los de sus compañeros muestra que se cumple el principio de autoevaluación de esta teoría. Es importante notar que el modelo propuesto para trabajar con el problema tiene la misma forma que el que se sugirió en la puesta a prueba del problema descrito en la sección 7.1, pero, en este caso, en cada semestre fue propuesto por uno o varios equipos sin que la maestra interviniera en ello.

El modelo propuesto para utilizar colectivamente consiste en un sistema de ecuaciones en diferencia puesto que los valores de las variables en el tiempo $\boldsymbol{t+1}$ dependen de sus valores en $\boldsymbol{t}$. Pudo observarse que los alumnos consideran que en el problema el valor de las variables en un tiempo dado depende del valor en el tiempo anterior y varios equipos propusieron un modelo en el que la variación del empleo y el desempleo están interrelacionadas. En la discusión en grupo se decidió emplear las variables $\boldsymbol{x_t}$ y $\boldsymbol{y_t}$ para describir el número de empleados y desempleados en el periodo $\boldsymbol{t}$, respectivamente, con la finalidad de que todos los alumnos trabajaran con las mismas variables y se facilitara la discusión en grupo y la comparación de resultados obtenidos. Dado que los alumnos fueron capaces de plantear un modelo para representar la situación planteada en el problema, es posible afirmar que el problema cumple el principio de simplicidad.

Posteriormente los alumnos trabajaron con el modelo matemático propuesto para describir el comportamiento del empleo a lo largo del tiempo. Aunque se había trabajado anteriormente con modelos que incluían una sola ecuación en diferencias, los alumnos no estaban familiarizados con este tipo de sistemas de ecuaciones. Sin embargo, en cada semestre, la mayoría de los alumnos reconocieron, en general, que el modelo podía escribirse usando notación matricial, $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{t+1}} = \boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{t}}$, con $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{t}}$ vector de empleo en el tiempo $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{A}$ matriz de coeficientes y $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{t+1}}$ vector de empleo en el tiempo $\boldsymbol{t+1}$ como se muestra a continuación.

La siguiente conversación tuvo lugar mientras el equipo D (Sem. 2-2011) estaba trabajando para encontrar la solución del sistema de ecuaciones.

D_1: *“Puede ser algo como …* (escribe: $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{t}}\overline{\boldsymbol{v}}$). *Parecido a lo que hicimos para los modelos de población. Necesitamos una exponencial”.*

D_3: *“¿Qué significan ahora **q** y $\overline{\boldsymbol{v}}$? ¿Son lo mismo que antes”?*

D_2: *“**q** es la probabilidad que nos dan, pero también tenemos a **p**. ¿Cuál de las dos usamos? ¿ $\overline{\boldsymbol{v}}$ es el vector de probabilidades iniciales”?*

La solución que proponen muestra que los alumnos pueden relacionar este problema con los problemas trabajados previamente y considerar la posibilidad de introducir soluciones de tipo exponencial como propuesta de solución del sistema de ecuaciones en diferencia. Otros equipos hicieron interpretaciones similares aunque hubo siempre equipos que interpretaron la situación de manera diferente. A diferencia del problema original (sección 7.1), donde los alumnos no entendieron por qué la solución era una exponencial, en este problema varios alumnos expresaron que una exponencial podía ser solución. En el intento de resolver la ecuación matricial surgieron las siguientes propuestas:

a) Generalización de la solución del modelo de poblaciones como $\bar{\boldsymbol{x}}_{t+1} = \boldsymbol{A}^{t+1}\bar{\boldsymbol{x}}_{0}$.

b) Soluciones exponenciales del tipo $\boldsymbol{x}_{t+1} = (\boldsymbol{x}_t)\boldsymbol{q}^t + (\boldsymbol{y}_t)\boldsymbol{p}^t$ y $\boldsymbol{y}_{t+1} = (\boldsymbol{x}_t)(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{q})^t + (\boldsymbol{y}_t)(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{p})^t$.

c) Uso de la inversa de la matriz en la forma $\bar{\boldsymbol{x}}_t = \boldsymbol{A}^{-1}\bar{\boldsymbol{x}}_{t+1}$.

d) Generalización de la solución encontrada previamente para el modelo de población usando vectores, en la forma $\bar{\boldsymbol{x}}_t = \boldsymbol{q}^t\bar{\boldsymbol{v}}$.

La figura 15 muestra el trabajo de uno de los equipos (equipo B, Sem. 2-2013) que sugirió la estrategia de solución ***c)***. Es interesante notar que a pesar de usar la notación matricial los alumnos de este equipo, y de otros tres que propusieron algo similar, no tenían claro que el vector de empleo tiene como componentes el empleo y el desempleo en el tiempo $\boldsymbol{t}$ o $\boldsymbol{t+1}$. Utilizaron la matriz inversa sin cuestionarse ni su existencia ni la pertinencia de su uso en este problema.

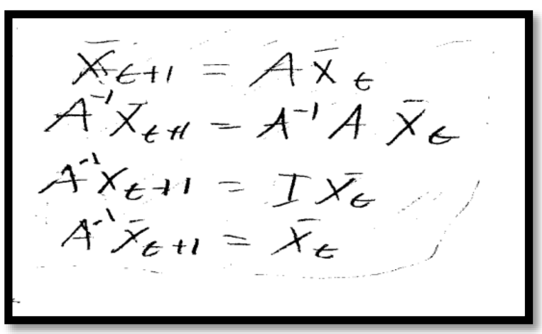


Figura 15

Durante los distintos semestres varios equipos, generalmente cuatro, llegaron a la solución ***d)*** usando distinta notación (figura 16). La estrategia de estos alumnos fue una generalización ciega de la solución del problema de población. En la discusión anterior del equipo D, se observó que no tenían claridad en el significado de las variables que propusieron.

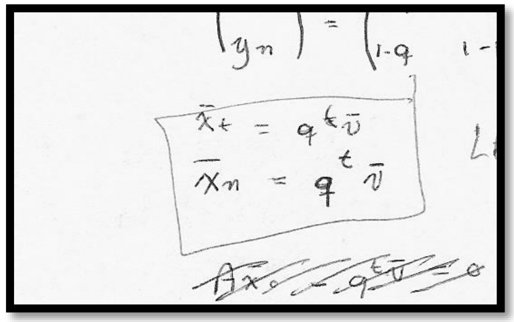


Figura 16

En la discusión en clase la maestra comentó con los alumnos las distintas soluciones propuestas y pidió a los alumnos de los equipos correspondientes que explicaran sus razonamientos. La mayoría de los alumnos de estos equipos tuvieron dificultades al justificar sus propuestas. Sin profundizar en estas explicaciones, la maestra sugirió que verificaran si sus propuestas eran efectivamente solución del modelo matemático. Al finalizar la clase la maestra escribió: *"Ningún equipo parece haber entendido las razones de su elección. Parece que están adivinando, espero que al trabajar con ellas puedan darles algún significado. Es importante notar que en este problema, a diferencia del original, pueden entender de forma muy general que la solución es una exponencial, lo cual se debe a la solución de los dos problemas de población y de empleo".*

En el debate de la siguiente clase se decidió en forma conjunta con la opinión de todo el grupo que la solución adecuada era la propuesta en ***d)***, dado que se podía demostrar que era efectivamente solución del sistema de ecuaciones en diferencia. Casi todos los alumnos fueron capaces de hacer las acciones necesarias para probar que la solución propuesta era solución del sistema de ecuaciones en diferencia. Al parecer dejaron de lado el problema y se concentraron en usar sus conocimientos matemáticos. Pudieron hacer las acciones de sustituir las funciones en el tiempo $\boldsymbol{t}$ y en el tiempo $\boldsymbol{t+1}$. Por consenso se cambió el escalar ***q*** por ***k*** para no confundir la base de la exponencial con ***q*** la probabilidad de que una persona empleada continuara empleada.

Durante el trabajo en la verificación de la solución la mayoría de los equipos utilizaron la siguiente estrategia: mediante acciones sobre la solución, los alumnos derivaron la ecuación $\boldsymbol{A\bar{v}} - \boldsymbol{k\bar{v}} = \overline{\mathbf{0}}$ y escribieron el sistema de ecuaciones $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{kI})\boldsymbol{\bar{v}} = \overline{\mathbf{0}}$, con lo que mostraron la construcción del proceso de describir el sistema anterior como un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con sus posibles soluciones. Manifestaron que ***k*** y $\boldsymbol{\bar{v}}$ deben cumplir esta ecuación. En cada semestre se encontraron, por ejemplo, propuestas como la que se muestra en la figura 17 del equipo C (Sem 2-2012) que muestra su trabajo antes de decidir el cambio de notación antes mencionado, es decir, este equipo trabajó con ***q*** en lugar de ***k***. Durante su trabajo discutieron lo siguiente:

C1: *"… hay dos incógnitas aquí, el vector $\overline{\boldsymbol{v}}$ y el escalar $\boldsymbol{q}$. Necesitamos encontrarlas."* (Escribe $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{?}$ y $\overline{\boldsymbol{v}} =$?).

C2: *"Es un sistema homogéneo de ecuaciones. La solución depende de $\boldsymbol{q}$ y no tiene sentido que el vector cero sea solución. El sistema puede tener solución múltiple. ¿Lo resolvemos y vemos?"* (C1 escribe solución única, $\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\boldsymbol{0}}$ o solución múltiple).

C3: *"Pero $\overline{\boldsymbol{v}}$ igual a cero no tiene sentido para el problema … entonces … las soluciones deben ser linealmente dependientes …".*

C2: *"….y no existe inversa."* (C1 escribe "l.d. y ∄ la inversa").

C3: *"Pero entonces el determinante debe ser cero, necesitamos solución múltiple."* (C1 escribe "$|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{q}\boldsymbol{I}|$ = $\boldsymbol{0}$").

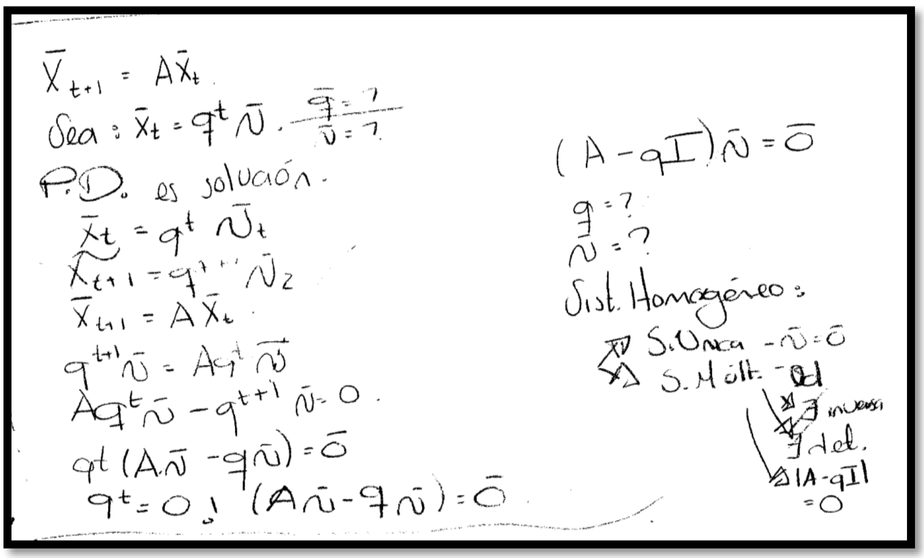


Figura 17

Algunos alumnos en otros equipos consideraron también la posibilidad de solución múltiple para el sistema de ecuaciones, pero no usaron el determinante de la matriz del sistema como una estrategia ni consideraron la posibilidad de encontrar el valor de $\boldsymbol{k}$. Solamente indicaron que se necesitaba encontrar el conjunto solución.

El trabajo en la verificación de la solución proporciona evidencia de que se cumple el principio de autoevaluación pues los alumnos fueron capaces de discutir sus propuestas de solución críticamente y de elegir aquélla que parecía más conveniente. Además, los alumnos escribieron y justificaron sus argumentos, lo que muestra que el problema cumple además el principio de documentación de la Teoría de Modelos y Modelación.

En su estudio, Larson, Zandieh y Rasmussen (2008) comentan la dificultad que involucra la transformación de la ecuación $\boldsymbol{A\overline{v}} = \boldsymbol{\lambda\overline{v}}$ en $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I})\boldsymbol{\overline{v}} = \boldsymbol{\overline{0}}$ y posteriormente en relacionar dicha ecuación con un sistema de ecuaciones para el cual la solución debe ser distinta del vector cero y por ello $|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}| = \boldsymbol{0}$. En este estudio esta dificultad también se manifestó en cada semestre, como se observa en la figura 18, pero varios equipos realizaron, en cada ocasión, el proceso requerido en la transformación de la ecuación de manera correcta y mostraron la posibilidad de coordinar este proceso con el proceso de determinantes con el fin de encontrar las soluciones distintas de cero por ellos mismos como un medio para verificar la solución de las ecuaciones del modelo matemático propuesto. Estos alumnos fueron capaces de utilizar las construcciones previas propuestas en la descomposición genética para ejercer acciones sobre la ecuación matricial y establecer las ecuaciones que definen a los valores propios, sin haber sido introducidos a este concepto. Asimismo, fueron capaces de decidir, por ellos mismos, que la solución del sistema de ecuaciones de interés es la solución múltiple. Parece ser, que el trabajo en el problema los condujo a enfocar su atención en las propiedades de los sistemas de ecuaciones (soluciones de un sistema homogéneo, vectores linealmente dependientes, determinantes, inversa) que ya conocían.

Se pudo observar que los alumnos mostraron haber construido el concepto de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales como proceso pues fueron capaces de considerar que la solución dependía del valor del parámetro y coordinaron este proceso con los de dependencia lineal, la existencia de la matriz inversa y determinante de la matriz.

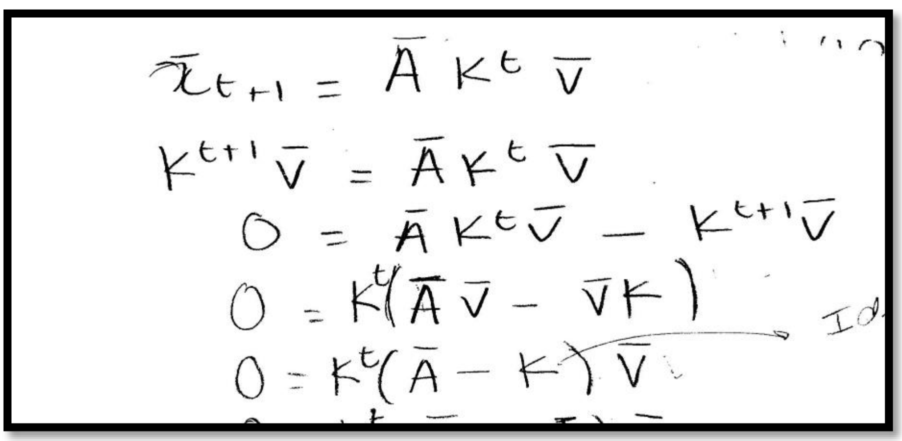


Figura 18

Es importante mencionar que después del trabajo en este problema se dejaron otros problemas similares al propuesto como problema de modelación como tarea. Los alumnos reconocieron las semejanzas con el problema propuesto en clase, propusieron modelos matemáticos semejantes y funciones solución de tipo exponencial. Además, más adelante en el curso se estudiaron las cadenas de Markov y nuevamente, en cada ocasión, varios alumnos reconocieron en ellos a los valores y vectores propios. Esto permite afirmar que el problema propuesto cumple con el principio de generalización de constructos de la Teoría de Modelos y Modelación.

En conclusión, se constató que el problema propuesto cumple con los seis principios de la Teoría de Modelos y Modelación, lo cual lo hace un modelo que siendo nuevo para los alumnos, les permite utilizar sus conocimientos previos para resolverlo, a pesar de su complejidad. Es muy importante recalcar que el trabajo con el problema permitió, además, que los alumnos construyeran relaciones entre su conocimiento previo y el que se deseaba introducir, que surgió del trabajo de los propios alumnos. Este hecho hizo posible dar sentido al sistema de ecuaciones que resulta del modelo y que, al después del trabajo con él, la maestra introdujera, de manera natural, una definición de valores y vectores propios que tenía sentido para los alumnos en términos del modelo e hizo más fluida la gestión de la clase.

En el siguiente capítulo se muestran los resultados obtenidos respecto a la construcción de estos conceptos.

CAPÍTULO 8. ANÁLISIS DE LAS CONSTRUCCIONES DE LOS ALUMNOS DE LOS CONCEPTOS RELACIONADOS CON LOS VALORES PROPIOS

Se presentan los resultados de esta investigación mediante evidencia obtenida del análisis del trabajo de los alumnos, tanto de las actividades realizadas en clase, como de los instrumentos de investigación. La descripción de los resultados se centra en las diferencias encontradas en los alumnos que mostraron distintas construcciones y en la explicación de las dificultades encontradas, todo ello en términos de la Teoría APOE.

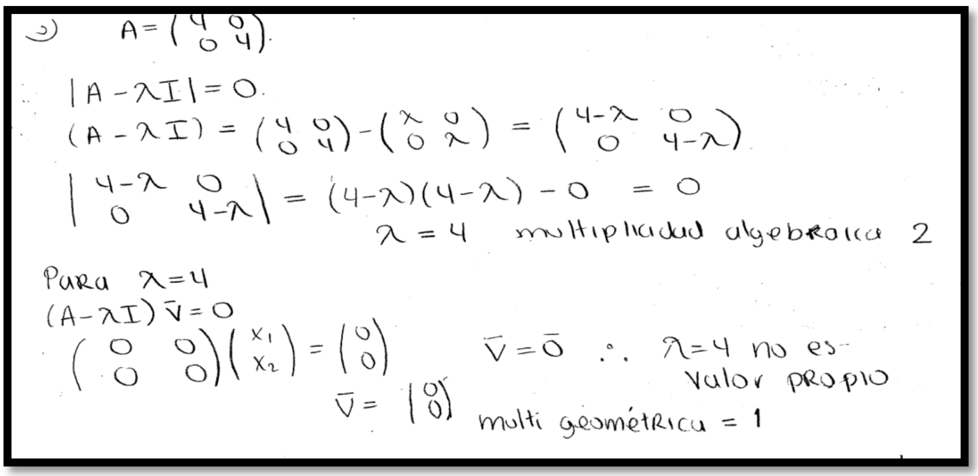
Como se mencionó, el trabajo se realizó durante siete semestres (2011-2014) pero el trabajo en cada uno de ellos y los resultados fueron muy similares, por ello los resultados descritos incluyen la información de todos ellos. Los números que se presentan corresponden al promedio de los alumnos por semestre.

8.1 CONSTRUCCIONES PREVIAS

La descomposición genética diseñada supone, como conceptos previos para la construcción de los conceptos de valores, vectores y espacios propios, la construcción, entre otros, de los conceptos de conjunto, conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, espacio nulo de una matriz y conjunto generador de un espacio vectorial como procesos. Los resultados mostraron que tres alumnos en promedio cada semestre no los habían construido y que esto parecía ser responsable de sus dificultades en el aprendizaje de los valores, vectores y espacios propios. Las dificultades de estos alumnos se manifestaron en distintos momentos durante la investigación, incluyendo la entrevista en la que se les presentaron preguntas en contextos distintos al de valores y vectores propios, pero en todos los casos, los resultados mostraron que, en el mejor de los casos, construyeron una concepción acción de los conceptos de interés.

Dos de estos alumnos mostraron no haber construido el concepto de conjunto solución de un sistema de ecuaciones como proceso. El otro no dio evidencia de haber construido los conceptos de conjunto generador y el espacio nulo de una matriz más allá de una concepción acción.

Por ejemplo, cuando al alumno D_1 (Sem. 1-2012) se le pide que encuentre los valores y vectores propios de la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$, encuentra el valor propio, $\boldsymbol{\lambda = 4}$. Utiliza este valor propio para encontrar los vectores propios y resuelve el sistema homogéneo $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I})\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\mathbf{0}}$ (figura 1). Al obtener con este procedimiento la matriz cero concluye que la solución es el vector propio cero y comenta: *“dado que $\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\mathbf{0}}$ entonces $\boldsymbol{\lambda = 4}$ no es valor propio.”* Se observa que no es capaz de interpretar la matriz aumentada del proceso de solución del sistema, lo que indica que no ha construido el concepto de conjunto solución de un sistema de ecuaciones como un proceso y que esto le impide relacionar dicha solución con el concepto de vector propio. Se observa que ha memorizado el procedimiento para encontrar los valores propios, pero no ha comprendido este concepto pues su interpretación errónea del sistema homogéneo le lleva a concluir que el valor propio que encontró no es realmente tal. De sus respuestas a éste, y otros problemas, se determinó que no ha construido siquiera una concepción acción de los conceptos de valor ni de vector propio de una matriz.



2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$|A - \lambda I| = 0$.

$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(4-\lambda) - 0 = 0$

$\lambda = 4$ multiplicidad algebraica 2

Para $\lambda = 4$

$(A - \lambda I)\bar{v} = 0$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\bar{v} = \bar{0}$ $\therefore$ $\lambda = 4$ no es valor propio

$\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ multi geométrica = 1

Figura 1

Cuando se le pide al alumno B_2 (Sem. 2-2012) que encuentre los vectores propios de la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$, encuentra, mediante un procedimiento memorizado, dos vectores, pero uno de ellos es el vector cero (figura 2). Construye un conjunto con estos vectores y concluye: *“son dos vectores, generan un plano.”* Al igual que D_1, B_2 interpreta incorrectamente la solución del sistema de ecuaciones, no reflexiona sobre la imposibilidad de que el vector cero sea un vector propio asociado a la matriz $\boldsymbol{A}$, y muestra claramente que no ha construido el concepto de espacio generado pues responde de memoria, sin considerar que su respuesta sea compatible con el conjunto generador que ha encontrado.

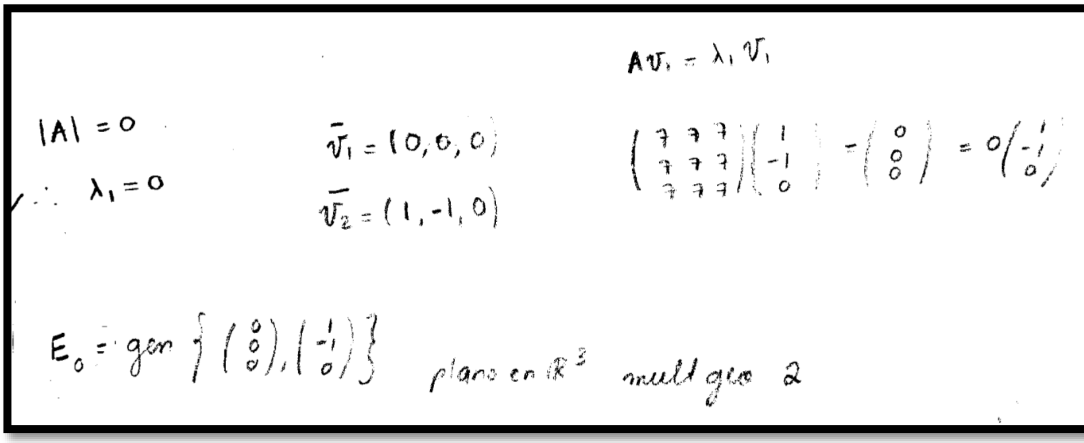


Figura 2

Los ejemplos anteriores ponen de manifiesto que los alumnos que no han construido los conceptos previos no pueden hacer casi ninguna construcción prevista en la descomposición genética. La interpretación del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales resulta indispensable en la construcción del concepto de vector propio, por lo que muestran cuando mucho una concepción acción de dicho concepto. La construcción del concepto de conjunto generador resulta, además indispensable en la construcción del espacio propio de una matriz como un proceso.

8.2 RESULTADOS DEL TRABAJO CON EL MODELO Y LAS ACTIVIDADES HACIENDO ALUSIÓN AL MODELO

Después de que los alumnos propusieron un modelo para el problema rediseñado de empleo – desempleo (sección 7.2.3, semestres agosto 2011 a enero 2014) se trabajó con él para encontrar qué sucedía en el largo plazo. A continuación se analizará el procedimiento que realizaron los alumnos para encontrar los valores, vectores y espacios propios y el trabajo con el modelo para encontrar el comportamiento de las soluciones a largo plazo tanto algebraica como geométricamente. Se describe el análisis del trabajo del equipo A, uno de los tres equipos que mostraron un progreso importante entre el inicio del trabajo con el modelo, el trabajo con las actividades diseñadas y la entrevista. En todos los semestres hubo, al menos, tres equipos que mostraron este avance y en todos los semestres se nombró a uno de estos equipos como equipo A. También se describe, de forma más general, algunos de los obstáculos que enfrentaron otros equipos y los alumnos del grupo.

8.2.1 VALORES, VECTORES Y ESPACIOS PROPIOS

Los alumnos discutieron entre ellos acerca de la solución al sistema. La mayor parte de los alumnos, incluyendo a los del equipo A (Sem. 1-2013), consideraron que la solución del sistema podía ser el vector $\bar{\mathbf{0}}$. Sin embargo, en la discusión en equipos A_3 (Sem.1-2013) comentó lo siguiente, como se muestra en la figura 3: *"la solución depende de* $\boldsymbol{k}$ *y no tiene sentido tener al vector cero como solución. El sistema puede tener solución múltiple. ¿Por qué no lo resolvemos y vemos?"* mostrando que ha construido el proceso de solución de un sistema pues es capaz de considerar que la solución depende del valor del parámetro.

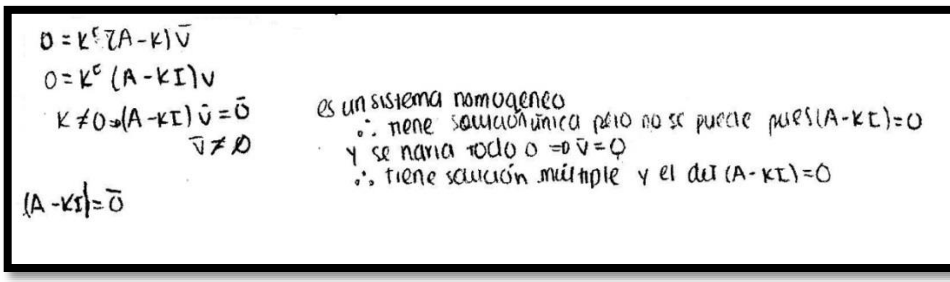


Figura 3

A partir de esa propuesta los alumnos del equipo A utilizaron el hecho de que para que el sistema tenga solución múltiple es necesario calcular el determinante del sistema e igualarlo a cero, es decir, $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{kI}| = \mathbf{0}$, mostrando así una concepción objeto del conjunto solución de un sistema de ecuaciones y la construcción de la relación entre dicho conjunto y el determinante de una matriz. También explicaron, como en el caso de A_2 (Sem. 1-2013) que: *"En realidad estamos encontrando el espacio nulo de la matriz* $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{kI}$*."* Además, con ello fueron capaces de encontrar el valor de $\boldsymbol{k}$. Otros equipos consideraron también la posibilidad de la solución múltiple del sistema de ecuaciones pero no utilizaron como estrategia el cálculo del determinante de la matriz del sistema y no consideraron la posibilidad de encontrar el valor de $\boldsymbol{k}$. Únicamente dejaron indicado que habría que encontrar el conjunto solución.

La maestra interrumpió el trabajo de los alumnos para discutir con todo el grupo lo que habían hecho hasta ese momento. Se discutió el hecho de que el sistema tuviera solución múltiple. La maestra habló de las condiciones matemáticas que el determinante impone en los valores de $\boldsymbol{k}$ y su relación con el vector $\bar{\boldsymbol{v}}$, aunque los alumnos todavía no los habían calculado. Comentó la interpretación de estos resultados en términos de la situación representada por el modelo matemático y preguntó al grupo: *"¿Qué significan estas variables en términos del modelo matemático?"* Después de un rato durante el cual ningún alumno contestó, A_2 (Sem. 1-2013) dijo: *"Uh … las ecuaciones dicen que en cada nuevo periodo la situación de empleo cambia, así que la solución … si vemos lo que hemos hecho y lo que tenemos que hacer, las ecuaciones dicen cómo cambia* *el empleo en esa economía … así, ahora que estamos pensando en eso, me parece que esas constantes están relacionadas de alguna forma con las probabilidades de cambio en el estatus de empleo… mmm, lo que quiero decir, deben tener un valor en términos de esas probabilidades **p** y **q**, pero es todo lo que puedo decir … no sé el significado exacto … necesito calcularlas".*

Algunos alumnos estuvieron de acuerdo con él, pero nadie continuó la discusión. Hasta este momento se trabajaron las preguntas del problema abierto. Al llegar a este punto, durante la discusión, la maestra consideró que era pertinente considerar valores específicos para los parámetros del modelo y sugirió ***q = ½*** y ***p = 1/3***.

Los alumnos regresaron a trabajar. Independientemente del método de solución empleado todos los alumnos fueron capaces de encontrar la solución del sistema usando los valores dados y llegaron a dos posibles valores para ***k***: $\boldsymbol{k_1}$***= 1*** y $\boldsymbol{k_2}$ ***= 1/6***. Varios equipos resolvieron el determinante para encontrar los valores de ***k***, valores propios, figura 4.

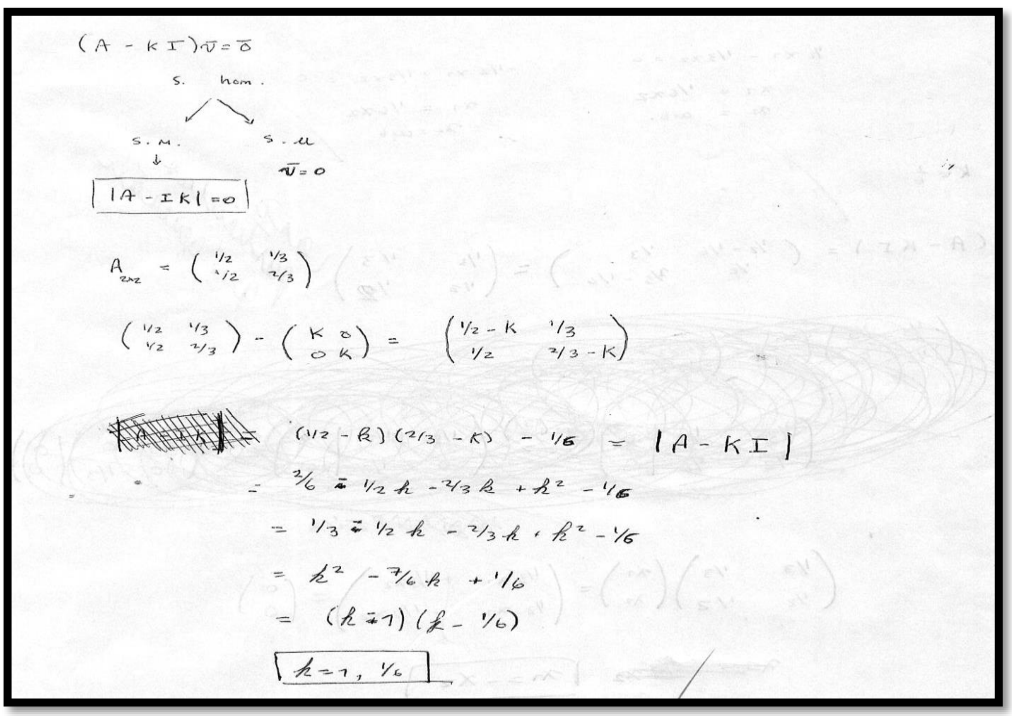


Figura 4

Al regresar al trabajo en equipo, en el equipo A (Sem. 1-2013, figura 5), se dio el siguiente diálogo:

A1: *"… para $\boldsymbol{k_1}$ igual a uno, los vectores solución tienen la forma $\overline{\boldsymbol{v}} = (2x_2/3, x_2)$ y x_2 es un parámetro y para $\boldsymbol{k_2}$ igual a **1/6** los vectores son de la forma $\overline{\boldsymbol{v}} = (-x_2, x_2)$".*

A_3: *"En ambos casos* $\boldsymbol{x_2}$ *es arbitraria, esa es la familia de soluciones en el conjunto solución. ¿El parámetro es el mismo en ambos casos ….? No, entonces lo escribimos mal, deberíamos haber puesto* $\boldsymbol{x_1}$ *…".*

A_2: *"Eso es cierto …. Así … solo esos valores de* $\boldsymbol{k}$ *y esos valores de* $\overline{\boldsymbol{v}}$ *… son solución del sistema del modelo".*

A_3: *"¿Podemos usar un caso particular para cada familia de vectores"?*

A_1: *"No sé, pero en ese caso, un caso particular … para* $\boldsymbol{k_1 = 1}$, $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{2}, \mathbf{3})$ *y para* $\boldsymbol{k_2 = 1/6}$, $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (-\mathbf{1}, \mathbf{1})$, *está bien"?*

A_3: *"Para cada* $\boldsymbol{k}$*, sabemos que los vectores generan una recta, puesto que solamente tenemos una variable arbitraria en cada caso".*

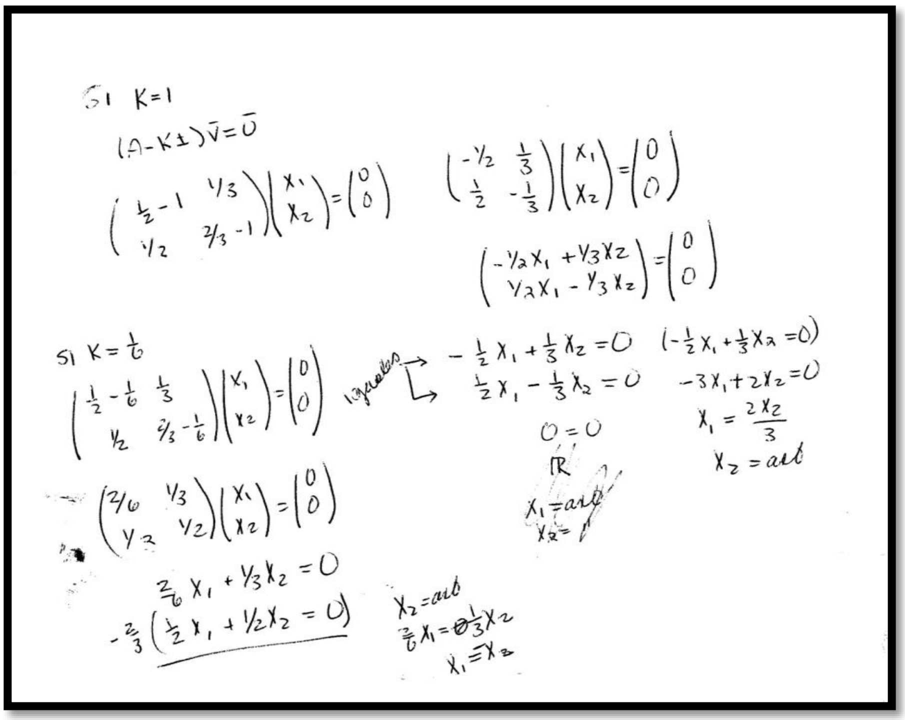


Figura 5

Otros tres equipos hicieron consideraciones similares, demostrando que han construido la coordinación entre el proceso de conjunto solución con el de espacio generado y la coordinación de este nuevo proceso con el involucrado en la representación geométrica del conjunto solución. Es de notar que los alumnos del equipo A y de otros tres equipos, encontraron los valores de esas constantes y que para hacerlo desarrollaron una estrategia en la que encontraron los valores y vectores propios de una matriz, sin haber tenido ningún contacto con estos conceptos antes.

Los alumnos del equipo C (Sem. 2-2013) encontraron un vector particular (figura 6) y comentaron: *“Encontramos un caso particular para* $\boldsymbol{k_1 = 1}$, $\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} = (\boldsymbol{2},\boldsymbol{3})$ *y para* $\boldsymbol{k_2 = 1/6}$, $\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}} = (-\boldsymbol{1},\boldsymbol{1})$ *Tenemos un vector por lo que se genera una recta en ambos casos”.*

Este resultado pone de manifiesto que estos alumnos fueron capaces de coordinar el proceso de espacio generado con su representación geométrica, encontrando de esta manera por ellos mismos el espacio propio asociado a los valores propios antes de que el concepto se introdujera en clase.

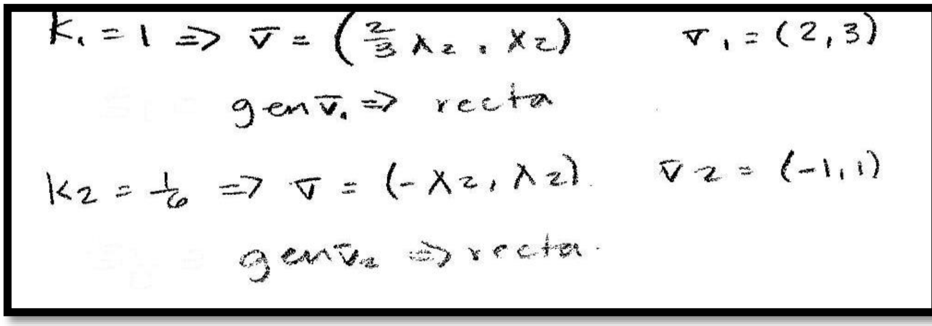


Figura 6

Un resultado interesante del estudio es que al escribir el sistema en notación matricial, los alumnos mostraron una tendencia a olvidar el hecho de que el sistema es dinámico y se concentraron en la solución del sistema de ecuaciones lineales. Todos logran resolverlo. Es de notar que cuatro equipos, incluyendo al equipo A (Sem. 1-2013), ponen en juego todo lo que se había estudiado en el curso hasta ese momento. Escriben la solución del sistema de ecuaciones en términos del espacio generado por los vectores elegidos, mostrando una concepción proceso de los conceptos de conjunto generador y espacio generado. Se puede considerar que estos alumnos usaron un esquema en el cual relacionaron los procesos y objetos asociados a los conceptos que han aprendido con el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales.

En la fase de discusión en grupo, la maestra revisó y comentó los resultados obtenidos y posteriormente introdujo las definiciones de valor, vector y espacio propio de una matriz y los teoremas asociados a ellos. La maestra sugirió en ese momento trabajar con las actividades diseñadas usando la Teoría APOE. En ellas se incluían algunas cuyo objetivo era relacionar los nuevos conceptos con su representación geométrica y asociar los resultados obtenidos en el trabajo con el modelo con la definición de los nuevos conceptos.

En la siguiente clase, la maestra revisó los resultados de la tarea sin considerar los resultados relacionados con la matriz del modelo puesto que varios alumnos comentaron que era difícil trabajar solamente con símbolos. Estos alumnos mostraron que solamente habían construido las acciones involucradas en la solución del sistema homogéneo de ecuaciones lineales. Se empezó la clase con el trabajo en equipo de actividades de la sección 4.2 diseñadas con la Teoría APOE que se describirán con mayor detalle en la siguiente sección.

Las primeras actividades (por ejemplo sección 4.2.1 ejercicios 1 a 4) proponen acciones sobre distintas matrices para encontrar los valores y vectores propios para comenzar la construcción de los nuevos conceptos y su interiorización en procesos, otras actividades (por ejemplo sección 4.2.1 ejercicios 5 y 6) incluyeron oportunidades para coordinar los procesos involucrados en encontrar valores y vectores propios en diferentes representaciones y otras (por ejemplo sección 4.2.1 ejercicios 7, 8, 10) estaban relacionadas con la coordinación de los procesos involucrados en encontrar valores y vectores propios con el de espacio nulo de la matriz $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}$ y para reflexionar en la relación de estos nuevos conceptos con otros conceptos introducidos antes, para promover la construcción objeto y con la construcción del concepto de espacio propio (por ejemplo sección 4.2.2 ejercicios 28 a 30).

Durante el trabajo en equipo con las actividades, los alumnos del equipo A (Sem.1-2013) mostraron que eran capaces de coordinar el proceso relacionado con la representación algebraica de valores y vectores propios con el proceso de su representación geométrica y coordinar estos procesos con los previamente construidos (figura 7). Al pedirles que interpreten la ecuación $\boldsymbol{A\bar{v}}=\boldsymbol{\lambda\bar{v}}$ comentaron:

A3: *"…. $\boldsymbol{A\bar{v}}=\boldsymbol{\lambda\bar{v}}$ significa que cuando multiplicas $\boldsymbol{A\bar{v}}$ no cambias la dirección, es un vector paralelo a $\boldsymbol{\bar{v}}$".*

A2: *"$\boldsymbol{\lambda}$ es en realidad un escalar que cambia la magnitud del vector. Puede ser más grande o más pequeño".*

A1: *"Tenemos dos vectores $\boldsymbol{A\bar{v}}$ y $\boldsymbol{\bar{v}}$ que son paralelos, combinación lineal, tienen la misma dirección y son linealmente dependientes".*

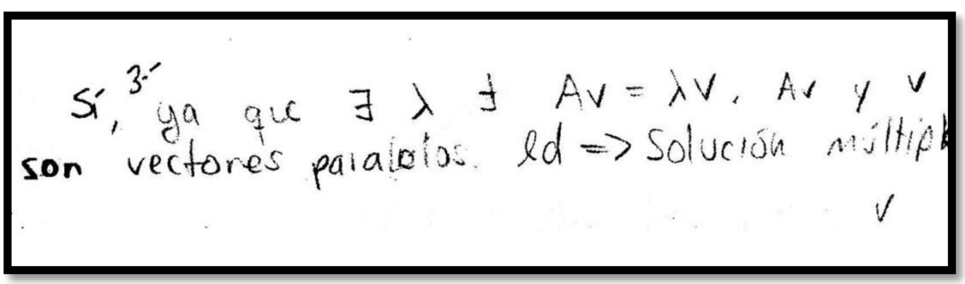


Figura 7

La maestra volvió a preguntar qué significaban las constantes encontradas en la solución del modelo. Solamente los alumnos del equipo A (Sem. 1-2013) y el equipo C (2-2013) habían hecho esto de tarea. Los alumnos del equipo A explicaron:

A$_3$: *"… Encontramos que los valores propios son* ***k_1 = 1*** *y* ***k_2*** *=* ***q*** *–* ***p****, así que son diferentes. Uno es independiente de las probabilidades dadas y el otro es la diferencia entre la probabilidad de que una persona continúe empleada y la probabilidad de que una persona desempleada encuentre trabajo".*

A$_2$: *"Usamos estos valores y encontramos los vectores propios, bueno escogimos uno para cada* ***k****. Para* ***k_1 = 1*** *encontramos el vector* ***(p/(1-q), 1)*** *así que éste está relacionado con la razón entre la probabilidad de que una persona desempleada encuentre trabajo en el siguiente periodo y la probabilidad de que una persona empleada pierda su trabajo en el siguiente periodo. Como una razón entre las probabilidades de cambiar de estatus … el otro, para la otra* ***k****,* ***k_2*** *=* ***q*** *–* ***p*** *es independiente de los valores de las probabilidades, este es el vector* ***(-1, 1)*** *y no podemos explicar esto… porque también hicimos una gráfica y el espacio propio relacionado con este siempre tiene vectores con una componente negativa …".*

En este momento, muchos alumnos se habían dado cuenta y comentaron que el vector $\bar{v}$ no estaba relacionado con las condiciones iniciales. Entonces A$_3$ preguntó:

A$_3$: *"Así que las constantes no están relacionadas con las condiciones iniciales, pero en el problema de la población de búhos estas condiciones aparecieron en la solución. Discutimos su papel en términos de una familia de soluciones. Entonces, ¿dónde están las condiciones iniciales en este problema? ¿No forman parte de la solución"?*

La maestra indicó a los alumnos que pensaran en esta pregunta y regresaran al trabajo con el sistema de ecuaciones para encontrar qué se podía predecir del comportamiento en el largo plazo.

8.2.2 Comportamiento a largo plazo

Los alumnos regresaron al modelo para encontrar el comportamiento de la solución de las ecuaciones del modelo a largo plazo utilizando todo lo que se había desarrollado y surgieron algunas dudas. Por ejemplo un alumno del equipo A (Sem. 1-2013) comentó:

A$_3$: *"… esto está bien,* (señalando la solución que habían encontrado con los parámetros dados) *pero tenemos muchas soluciones, ¿cuál es la correcta"?*

Dado que varios alumnos tenían la misma duda la maestra decidió discutirlo con el grupo. Durante la discusión, algunos alumnos recordaron otro problema usado en clase, el problema de las patinetas voladoras. Un alumno del equipo A (Sem. 1-2013) preguntó:

A_1: *"Escogimos un vector particular para cada conjunto solución pero ¿podemos tomar un vector de cada familia y hacer una combinación lineal que tal vez genere el espacio vectorial,* ***R²****"?*

Los comentarios de los alumnos nuevamente mostraron que los alumnos en el equipo A estaban construyendo posibles relaciones entre sus conocimientos previos y los conceptos que estaban construyendo. Esta propuesta condujo a discutir qué relación existía entre las soluciones, el concepto de base y la naturaleza del espacio generado por las soluciones. Los alumnos del equipo A (Sem. 1-2013) comentaron:

A_3: *"¿Así que $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ forman una base"?*

A_1: *"Sí, las combinaciones lineales generan muchas soluciones, un conjunto solución".*

A_2: *"¿Pero cuál es la solución correcta del problema? ¿Estamos haciendo algo correcto"?*

La maestra preguntó a los alumnos si la combinación lineal de las soluciones encontradas era también una solución del sistema, trabajó con ellos en la demostración y en la discusión de que el espacio generado por la función solución es el espacio de todas las soluciones del sistema de ecuaciones en diferencia, considerando todas las posibles combinaciones de condiciones iniciales reflejadas en las construcciones de la combinación lineal. Entonces les dio a los alumnos un conjunto nuevo de actividades (sección 4.2 ejercicios 9, 11 y 33) donde el énfasis es justamente la construcción de relaciones entre los conceptos que estaban construyendo y conceptos que habían construido previamente, como dependencia e independencia lineal, espacio nulo y base.

Mientras discutían el trabajo en las actividades, los alumnos dijeron que en el problema en el que estaban trabajando, los vectores propios debían tener componentes positivas puesto que estaban encontrando el número de personas empleadas y desempleadas. Un alumno, F_2 (Sem. 2-2011) comentó lo siguiente, como se ve en la figura 8: *"Son dos vectores en* $\boldsymbol{R}^2$ *se elige $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ porque en realidad $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ no funciona (no hay "-1" desempleados)."* La maestra regresó a la noción de espacio generado y cómo la solución del modelo debía restringirse por lo que solamente una parte del espacio generado se tomaba en consideración.

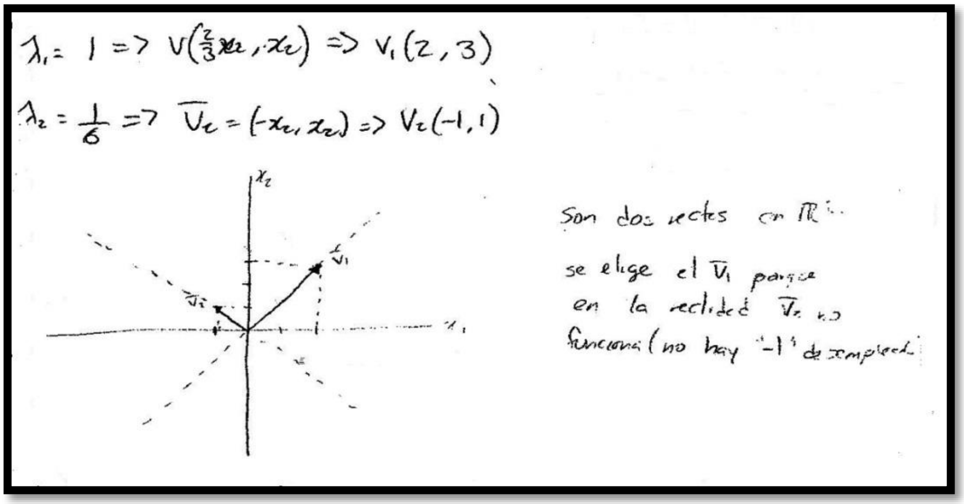


Figura 8

La maestra pidió que regresaran al trabajo con el problema y encontraran qué pasaba en el largo plazo. La siguiente conversación tuvo lugar entre los alumnos del equipo A (Sem. 1-2013):

A_1: *"… Ahora si combinamos las dos soluciones … ahí las condiciones iniciales juegan un papel para decidir la solución específica del problema … pero … no puedo ver cómo ….".*

A_2: *"Pero yo no entiendo … estas soluciones son funciones del tiempo, funciones discretas, no puedo imaginarme cómo se comportan. La maestra dijo que estas soluciones generan un espacio solución de funciones … no puedo imaginarme esto".*

A_1: *"Tampoco yo ….".*

A_3: *"Podemos graficar cada una de ellas en función del tiempo,* ***t****. Cada una depende de* ***t****, grafiquemos por separado y veamos cómo se comportan ….".*

A_2: *"Ok, luego podemos ver qué pasa cuando las combinemos …"* (Figura 9).

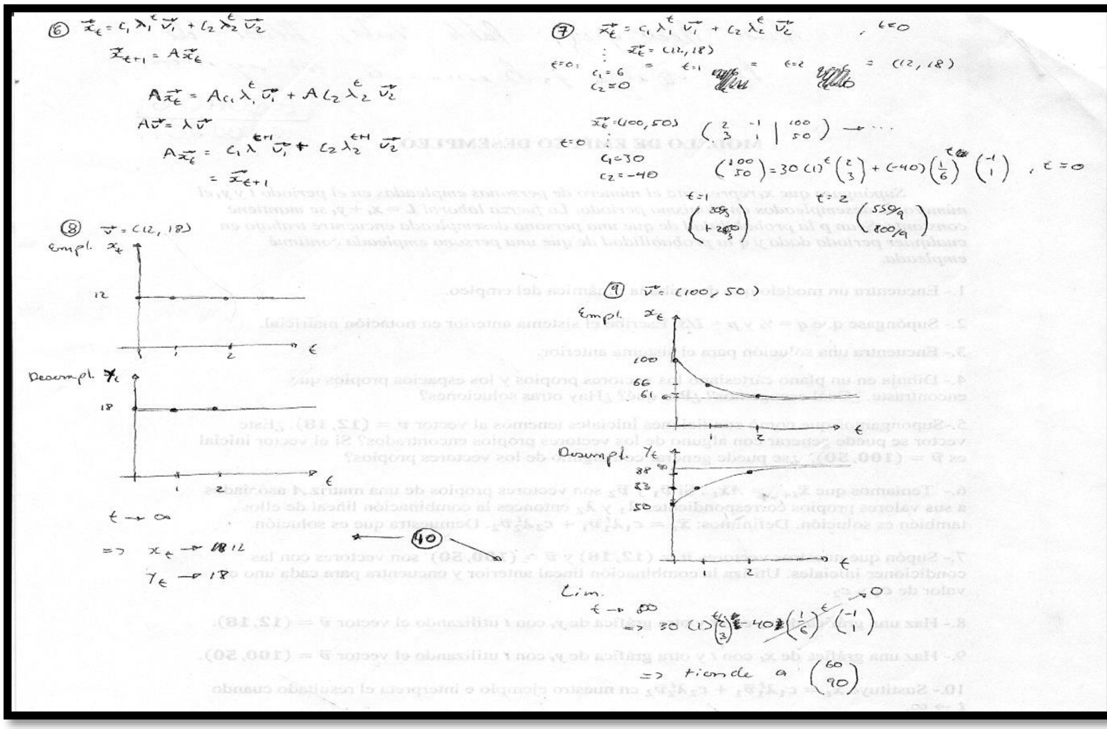


Figura 9

En la discusión anterior parece que los alumnos del equipo A (Sem. 1-2013) están tratando de relacionar los nuevos conceptos del problema de modelación, aunque enfrentan dificultades y no están muy seguros de cómo hacerlo, puesto que las soluciones que han encontrado incluyen vectores que tienen como componentes a funciones, cosa que no han estudiado antes. Sin embargo, al graficar (figura 9) $\boldsymbol{x_t}$ con $\boldsymbol{t}$ (empleo con tiempo) y $\boldsymbol{y_t}$ con $\boldsymbol{t}$ (desempleo con tiempo), por separado, pudieron sobreponerse a las dificultades al pensar en el modelo. Viendo las gráficas se dieron cuenta de que les era posible analizar el comportamiento del empleo y del desempleo a través del tiempo.

La maestra explicó en este momento el concepto de base y espacio generado relacionado con las funciones del modelo y el papel de las condiciones iniciales. Después, comentó la importancia del comportamiento de las soluciones en el largo plazo y pidió a los alumnos del equipo A que mostraran sus resultados. A_3 (Sem. 1-2013) comenta lo siguiente (figura 9): *"cuando $\boldsymbol{t} \to \infty$, **(1/6)^t** $\to$ **0** y entonces tenemos que $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{t+1}}$ es un múltiplo de $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} = (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{3})$, y tenemos una proporción de dos empleados por cada tres desempleados, **60** empleados y **90** desempleados. O sea, en el largo plazo la solución converge a la solución que corresponde al vector propio o … al espacio propio"*.

La maestra dejó una tarea que incluyó ejercicios relacionados con la construcción de los conceptos de valores, vectores y espacios propios, y algunos problemas de aplicación. En la siguiente clase, revisó y discutió los resultados de los alumnos e hizo énfasis en nuevas aplicaciones. En su bitácora de clase apuntó: *"la mayoría de los alumnos reconoció que el modelo matemático que habían desarrollado en clase era aplicable a nuevos problemas. Parece que han construido los conceptos al menos como proceso, aunque algunos pueden haberlos construido como objeto, ellos los pueden relacionar con otros conceptos".*

Durante el trabajo con el modelo, se hizo evidente que la mayoría de los alumnos parecían haber construido los procesos involucrados en la construcción de los conceptos de valor, vector y espacio propio correspondientes a una matriz ***A***. Parece que la modelación los ayudó a darle sentido a dichos conceptos a través de las relaciones que hicieron entre la solución del sistema de ecuaciones en diferencia, las discusiones realizadas en clase y su reflexión sobre lo que habían hecho. El trabajo con las actividades propuestas resultó efectivo pues ayudó a los alumnos a reflexionar sobre las acciones y procesos que construyeron mientras trabajaban con el problema y les ayudó a construir procesos y objetos relacionados con los conceptos de valor, vector y espacio propio. Puede considerarse por ello que el uso del problema de modelación, junto con las actividades propuestas, resultó efectivo en la construcción de estos conceptos.

Es importante señalar que durante el trabajo con el problema se están buscando soluciones al modelo y encuentran dos soluciones. Le dan en primer término sentido a cada una por separado. Esto facilita, más adelante, la comprensión de que los vectores y espacios propios van asociados a cada valor propio. Además, durante la solución demuestran que la combinación lineal es solución del modelo y que las soluciones asociadas a los vectores propios forman una base del espacio de soluciones del modelo. Entienden que los vectores propios forman una base para el espacio propio. El problema ayudó a dar sentido a los conceptos de valores, vectores y espacios propios.

Al parecer se construye un esquema con los valores, vectores y espacios propios; la independencia y dependencia lineal; la inversa; el determinante y el espacio nulo de la matriz $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}$. Sería interesante analizar la posible evolución de este esquema más adelante.

8.3 ALUMNOS QUE MUESTRAN UNA CONCEPCIÓN ACCIÓN DE VALORES, VECTORES Y ESPACIOS PROPIOS

Los alumnos que muestran este tipo de concepción reconocen que si $\boldsymbol{A\overline{v}} \parallel \overline{\boldsymbol{v}}$ entonces $\overline{\boldsymbol{v}}$ es vector propio de ***A*** y si $\boldsymbol{A\overline{v}} \nparallel \overline{\boldsymbol{v}}$ entonces no es vector propio de ***A***. Conocen las acciones a realizar para encontrar valores, vectores y espacios propios pero las realizan siguiendo un procedimiento memorizado. Reconocen a los valores y vectores propios en forma geométrica y algebraica; sin embargo la no interiorización de sus acciones, particularmente aquellas que se refieren al uso memorizado del procedimiento de búsqueda de los valores y vectores propios, se manifiesta de diferentes maneras. Por ejemplo: consideran que el vector cero puede ser un vector propio de una matriz; cuando cometen un error no lo reconocen aún en casos en que obtienen resultados contradictorios; son incapaces de reconocer si un valor o un vector dado son valores o vectores propios de una matriz sin recurrir a la solución de la ecuación característica; no relacionan el máximo número de vectores propios con el tamaño de una matriz; no establecen relaciones con otros conceptos del álgebra lineal como el espacio nulo, la independencia lineal de las columnas de la matriz $\boldsymbol{A}$ y tienen dificultades al encontrar el espacio propio correspondiente a un valor propio.

Un resultado interesante durante la entrevista fue notar que algunos alumnos de este grupo no recordaban la definición algebraica de los vectores propios, pero pudieron reconocerlos en la representación gráfica, lo cual les ayudó a reformular la definición de valores y vectores propios verbalmente. Al parecer, estos alumnos han construido una relación entre los procesos correspondientes a la interpretación algebraica y geométrica, pero se considera que muestran una concepción acción pues, aunque esta respuesta pareciera evidenciar una concepción proceso de valores propios, en sus demás respuestas no son capaces de utilizar estos conceptos más que de manera memorizada.

A continuación se presentan las respuestas de algunos alumnos que muestran una concepción acción y que ilustran claramente algunas de las dificultades antes mencionadas.

Cuando se pide a B_1 (Sem. 2-2011) que encuentre los valores, vectores y espacios propios de la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{-4} & \boldsymbol{2} \end{pmatrix}$, hace las acciones necesarias para encontrar los valores y los vectores propios, es decir, las acciones involucradas en la solución de la ecuación característica y el sistema homogéneo, pero al utilizar acciones memorizadas, no es capaz de comprender que el cero no puede ser un vector propio de la matriz. Explica: *“como el vector propio es el vector cero no genera nada y se queda en el mismo punto”* (figura 10). No ha interiorizado las acciones en un proceso que le permita determinar las condiciones que deben satisfacer los vectores y los espacios propios.

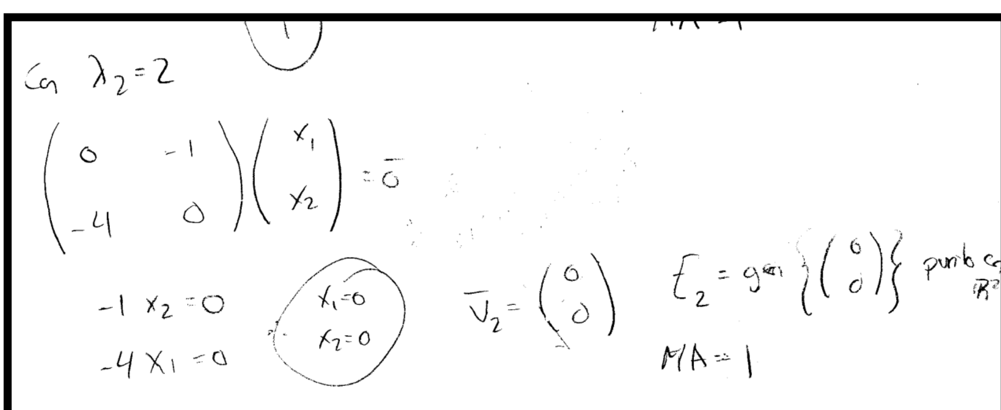


Figura 10

Por su parte, E_2 (Sem. 2- 2012) dibuja la gráfica de los vectores $\overline{\boldsymbol{v}}$ y $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}$ (figura 11). Aclara que $\overline{\boldsymbol{v}}$ es vector propio, encuentra el valor propio correspondiente y a partir de ahí escribe la definición de valor y vector propio que no había recordado anteriormente; utiliza las letras $\boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{\lambda}$ para el valor propio y explica: *"$\overline{\boldsymbol{v}}$ es vector propio de la matriz **A** si $\boldsymbol{q}\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}$."* Muestra una concepción acción pues recuerda la ecuación de la definición de valores y vectores propios hasta haber dibujado la gráfica, es decir, ésta actúa como un apoyo externo.

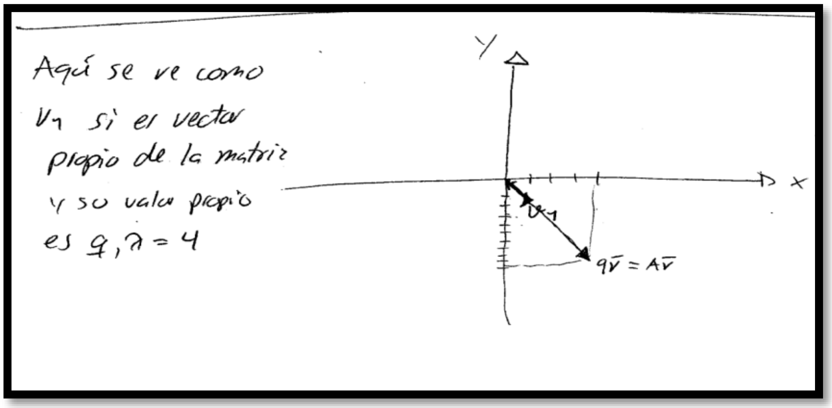


Figura 11

Al preguntarle sobre el número de vectores propios que una matriz dada puede tener, sin resolver la ecuación característica, E_4 (Sem. 2- 2012) muestra incertidumbre y responde: *"No sé,… sin hacer el determinante, no… pero el tamaño de la matriz no tiene relación con el número de vectores propios."* Más adelante, al enfrentar en la entrevista una matriz con columnas linealmente dependientes, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ responde incorrectamente y sin reflexionar: *"no es posible encontrar el valor propio"* y más adelante: *"el valor propio es uno con multiplicidad geométrica tres, porque los vectores tienen tres componentes y, además, puedo dar los vectores que quiera y generan un plano,"* muestra así una concepción acción dado que exclusivamente puede encontrar los valores y vectores propios a través de la aplicación del algoritmo que ha memorizado.

Para la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{16} \end{pmatrix}$ cuyas columnas son linealmente dependientes, B_4 (Sem. 1-2013) no puede encontrar un valor propio sin hacer las acciones que corresponden a los cálculos para hallarlos y explica: *"…es dos porque es el número que multiplica a las columnas de **A**."* Ante la pregunta en la entrevista en que se pedía que encontraran una matriz que tuviera como un valor propio al cero, es decir $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, B_4 (Sem. 1-2013) como la mayoría de los alumnos que muestran una concepción acción, no responde de inicio, pero después propone una matriz cualquiera y utiliza únicamente acciones memorizadas para encontrar los valores propios. Al proponer varias matrices (tres en este caso) y no encontrar un valor propio igual a cero comenta: *“No sale…es muy difícil atinarle a una matriz para que salga el cero”.*

En conclusión, en los diferentes semestres se registró un promedio de siete alumnos que muestran una concepción acción: es decir, que siguen procedimientos memorizados y no muestran más que en algunas respuestas esporádicas, la interiorización de estas acciones en algún proceso.

8.4 ALUMNOS QUE MUESTRAN UNA CONCEPCIÓN PROCESO DE VALORES, VECTORES Y ESPACIOS PROPIOS

Todos los alumnos que muestran una concepción proceso mostraron evidencia de haber construido los conceptos previos requeridos y distintas evidencias de haber interiorizado las acciones en los procesos descritos en la descomposición genética. No solamente resuelven un mayor número de preguntas, sino que sus explicaciones muestran que son capaces de explicar y generalizar sus procedimientos, además de encontrar las condiciones que deben cumplirse para que un valor y un vector sean valor y vector propio de una matriz dada.

En particular, todos ellos, reconocen de forma inmediata, el paralelismo de los vectores $\boldsymbol{A\overline{v}}$ y $\overline{v}$ para cualquier espacio $\boldsymbol{R^n}$, sin necesidad de hacer cálculos, lo que muestra claramente interiorización de acciones; en los casos en que los vectores están en $\boldsymbol{R^2}$ o $\boldsymbol{R^3}$ algunos de estos alumnos dibujan los vectores para ejemplificar su paralelismo y reconocen que el valor propio es un escalar que cambia la magnitud y posiblemente la dirección del vector $\overline{v}$ mostrando coordinación entre los procesos correspondientes a la interpretación gráfica y analítica de los conceptos en estudio. Todos estos alumnos son capaces de explicar el producto de una matriz por un vector como la transformación de un vector en uno paralelo a sí mismo e identifican el signo del valor propio con la dirección del vector resultante lo que demuestra la coordinación de los procesos involucrados en la definición de los valores y vectores propios. Estos alumnos coordinan el proceso solución del sistema homogéneo asociado a la búsqueda de los valores y vectores propios con el proceso de encontrar el espacio nulo de la matriz correspondiente al sistema y relacionan los conceptos de valor y vector propio con otros conceptos del curso, mostrando así la construcción de coordinaciones entre distintos procesos descritos en la descomposición genética.

A pesar de haber interiorizado los procesos de identificación y búsqueda de valores propios, estos alumnos tienen dificultades al enfrentar problemas que incluyen una matriz $\boldsymbol{A}$ con componentes reales que tiene como valores propios números complejos y muestran evidencias de que no necesariamente han construido un proceso relacionado a la noción de espacio propio. Muchos de ellos muestran dificultades para encontrar o interpretar el espacio generado por los vectores propios asociados a un valor propio cuando la multiplicidad algebraica del valor propio es mayor que uno, tanto en el caso en que se le asocia únicamente un vector propio como en el caso en que se le asocian dos o más vectores propios. En estos casos recurren a respuestas memorizadas, como por ejemplo, que un solo vector genera una recta y dos vectores un plano, mostrando que no han interiorizado las acciones asociadas al concepto de espacio propio en procesos.

A continuación se presentan ejemplos de respuestas de los alumnos que ilustran estas construcciones y las dificultades encontradas.

Dada la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ y el vector $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{1}, \mathbf{-2})$, H4 (Sem. 2-2013) aclara: *"$\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ es un vector propio de la matriz porque los vectores $\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ y $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ son paralelos, además, el valor propio hace más grande el vector $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ por 4 veces."* Posteriormente escribe su respuesta y dibuja los dos vectores a los que se refiere (figura 12).

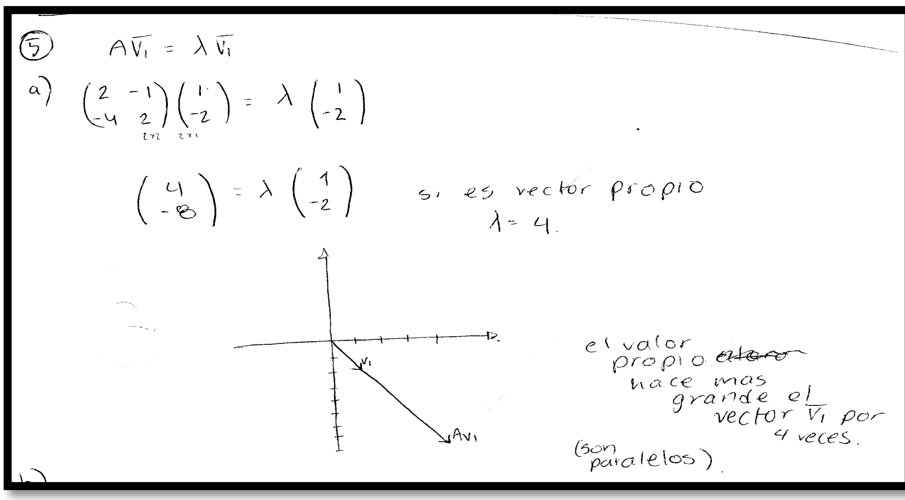


Figura 12

Ante un problema, similar, G3 (Sem. 1-2013) afirma: *"Sí es un vector propio y corresponde a $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{4}$, los vectores que se obtienen son paralelos, son linealmente dependientes. En este caso el vector $\boldsymbol{A\bar{v}}$ es cuatro veces más grande que el vector $\bar{\boldsymbol{v}}$."* Más adelante añade: *"$\boldsymbol{\lambda}$ es un escalar que hace más grande al vector $\bar{\boldsymbol{v}}$, pero lo deja en la misma dirección. Estos vectores son linealmente dependientes, son múltiplos y son combinación lineal,"* refiriéndose a que el vector $\boldsymbol{A\bar{v}}$ puede escribirse como múltiplo de $\bar{\boldsymbol{v}}$. Mientras que, en el caso del otro vector dado, $\bar{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{2}, \mathbf{-3})$, explica: *"No es vector propio, no son paralelos y son linealmente independientes,"* refiriéndose a los vectores $\boldsymbol{A\bar{v}}$ y $\bar{\boldsymbol{v}}$. También hace una gráfica para enfatizar su conclusión (figura 13). Sus respuestas dan evidencia de la interiorización de las acciones necesarias para determinar cuándo un vector es o no un vector propio de una matriz y las acciones correspondientes a la relación entre la representación algebraica y geométrica de los valores y los vectores propios de una matriz. Además, ha construido la coordinación de estos procesos con los de otros temas del curso y con el proceso correspondiente al espacio nulo de una matriz: *"Cuando encontramos los vectores propios estamos resolviendo el sistema homogéneo* $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I})\overline{\boldsymbol{v}}=\overline{\boldsymbol{0}}$*, o sea, el espacio nulo de la matriz* $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I})$*."* Más adelante, refiriéndose a dicha matriz, $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I})$, comenta: *"Además, sé que un valor propio es cero cuando las columnas de esta matriz son linealmente dependientes. También … si su determinante es cero es cuando* $\boldsymbol{\lambda}$ *es un valor propio".*

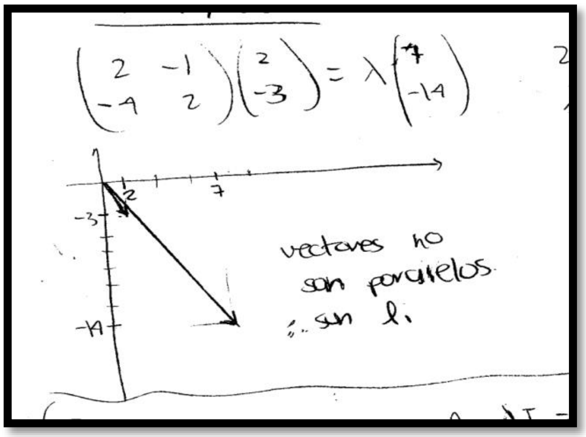


Figura 13

La reflexión sobre el hecho de que sean paralelos los lleva a relacionar a los vectores propios con otros temas del curso: combinación lineal, dirección, dependencia lineal. Por ejemplo, D_2 (Sem. 1-2014) comenta (figura 14): *"como son paralelos entonces son combinación lineal, vectores ele de, tienen la misma dirección, cuando no son paralelos no son combinación lineal y no existe la lambda".*

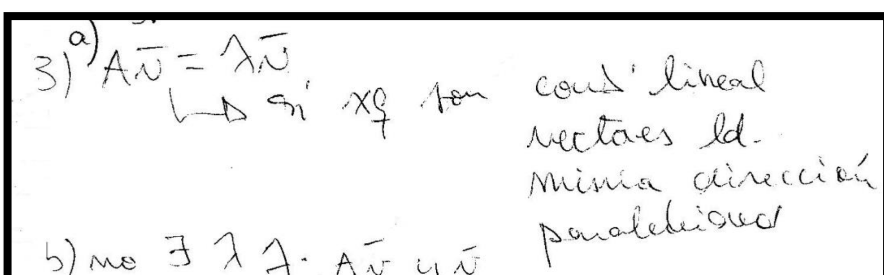
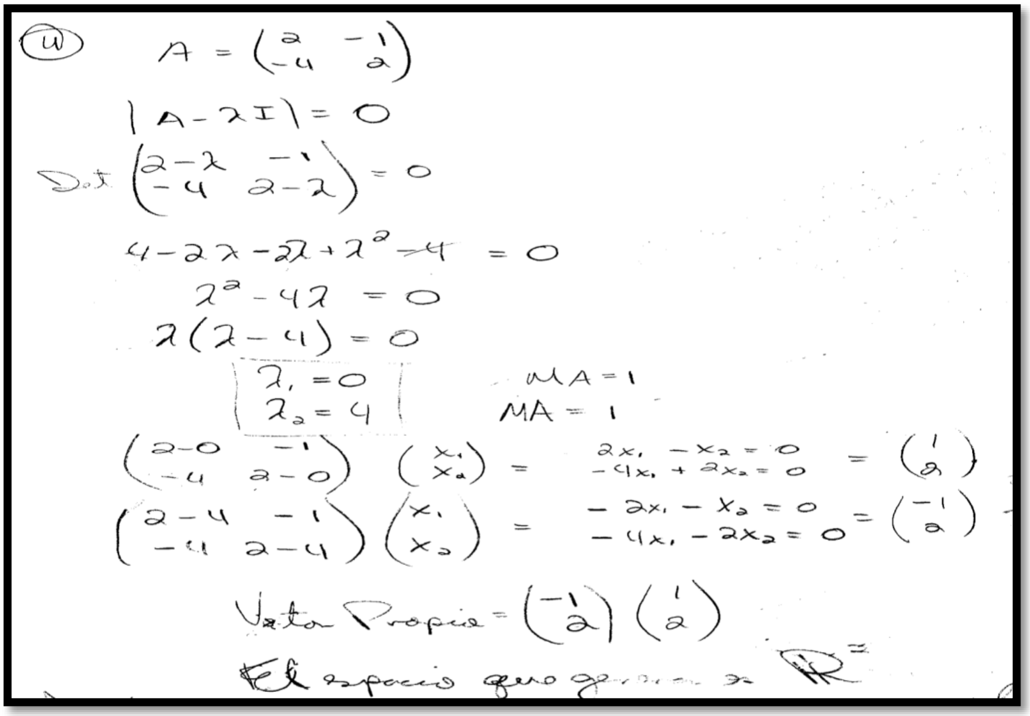


Figura 14

El trabajo de F_4 (Sem. 1- 2013) muestra la forma en que estos alumnos son capaces de relacionar los conceptos de valor y vector propio de una matriz con otros conceptos del curso. Al pedirle que encontrara una matriz que tuviera al cero como valor propio responde: "*si el valor propio es cero, al usarlo en el* *determinante de la ecuación característica, debe ser igual a cero. El determinante se reduce al determinante de la matriz **A** igual a cero… eso te dice que la matriz no es invertible, o sea, si uso el teorema resumen la matriz tiene columnas linealmente dependientes, así que cualquier matriz que cumpla esto tendrá un valor propio cero*".

El trabajo de F_4 (Sem. 1-2013) muestra también las dificultades encontradas por este grupo de alumnos. Durante la entrevista explica: "*Los valores propios de esta matriz pertenecen a los complejos, son conjugados…los vectores propios también tienen componentes complejas…pero no sé cómo resolver el sistema cuando tengo números imaginarios…y me cuesta trabajo imaginarme cómo son…*" Pone en evidencia cómo estos alumnos generalizan sin problema la definición a esta situación, pero tienen dificultades con las acciones correspondientes al trabajo con números complejos, probablemente porque han tenido muy poco contacto con el álgebra de este tipo de números.

El trabajo de F_2 (Sem. 2- 2011) en la entrevista nos permite ilustrar las dificultades de estos alumnos en la construcción del concepto de espacio propio. Encuentra sin problema los valores y vectores propios de $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$, incluyendo su multiplicidad algebraica (figura 15). Al comentar su trabajo explica claramente que cada valor propio tiene su vector propio asociado, sin embargo, al buscar el espacio propio considera que es el espacio generado por los vectores propios correspondientes a los distintos valores propios. Dice: *"el espacio propio es generado por todos los vectores propios encontrados. Tengo dos vectores en* $\boldsymbol{R^2}$*, por lo tanto genera* $\boldsymbol{R^2}$*,"* mostrando una concepción acción de espacios propios pues, juzgando por su respuesta completa, utiliza el hecho memorizado de que el espacio propio es generado por los vectores propios, pero no recuerda que el espacio propio corresponde a cada valor propio.



(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$|A - \lambda I| = 0$

$\text{Det} \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -4 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$4 - 2\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda = 0$

$\lambda(\lambda - 4) = 0$

$\lambda_1 = 0$ MA = 1

$\lambda_2 = 4$ MA = 1

$\begin{pmatrix} 2-0 & -1 \\ -4 & 2-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 = 0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

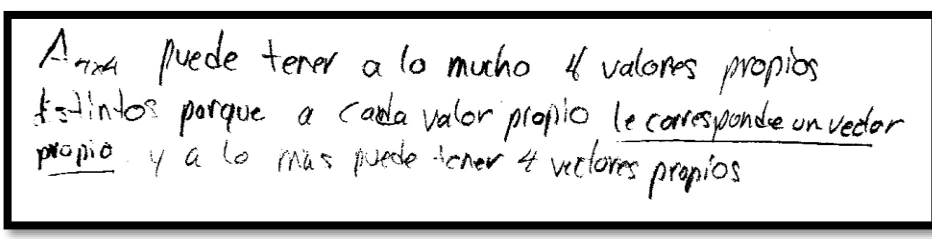
$\begin{pmatrix} 2-4 & -1 \\ -4 & 2-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} -2x_1 - x_2 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 = 0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vector Propio $= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

El espacio que genera es $\mathbb{R}^2$

Figura 15

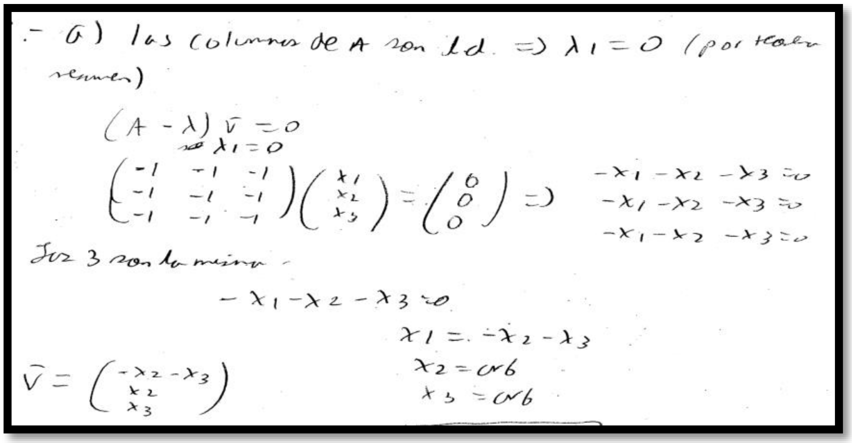
Durante su trabajo en clase D4 (Sem. 1-2012) afirma: *"…a cada valor propio le corresponde un vector propio siempre"* y escribe su respuesta a la pregunta que relaciona el número de valores propios con el tamaño de una matriz, en este caso ***A**4x4* (figura 16).



A_{4x4} puede tener a lo mucho 4 valores propios distintos porque a cada valor propio le corresponde un vector propio y a lo más puede tener 4 vectores propios

Figura 16

Por su parte, al considerar la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$, H1 (Sem. 2- 2013) concluye: *"$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ porque las columnas de la matriz son linealmente dependientes"* y al escribirlo lo justifica como un *"enunciado del teorema resumen del álgebra lineal"* (figura 17). No ha construido la coordinación del proceso de solución del sistema asociado a la definición de los valores y vectores propios con el correspondiente al número de vectores propios asociados que da como resultado el proceso de espacio propio. Comenta*: "…para este valor propio tengo dos variables arbitrarias, ¿doy dos valores?"* Escribe el conjunto solución en términos de la combinación lineal de dos vectores, pero no puede encontrar el espacio propio correspondiente porque se le presenta una confusión: *“Dos vectores generan un plano, pero cada valor propio tiene un vector propio, una familia… no me equivoqué, pero no sé cómo explicar esto”.*



6) las columnas de A son l.d. $\Rightarrow \lambda_1 = 0$ (por teorema)

$(A - \lambda)\bar{v} = 0$

$\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{matrix}$$

Las 3 son la misma.

$-x_1 - x_2 - x_3 = 0$

$x_1 = -x_2 - x_3$

$x_2 = \text{arb}$

$x_3 = \text{arb}$

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Figura 17

En promedio, en cada uno de los diferentes semestres hubo veintiún alumnos que mostraron una concepción proceso, lo que pone en evidencia la efectividad de la secuencia didáctica utilizada.

8.5 ALUMNOS QUE MUESTRAN UNA CONCEPCIÓN OBJETO DE VALORES, VECTORES Y ESPACIOS PROPIOS

En cada semestre se encontró, en promedio, tres alumnos que mostraron haber construido una concepción objeto de los conceptos en estudio. Estos alumnos evidencian todas las construcciones mencionadas para los alumnos cuya concepción es proceso. Además, son capaces de trabajar con los valores, vectores y espacios propios como una entidad, independientemente de que los valores propios sean reales o complejos; pueden identificar la necesidad de usar vectores propios en las aplicaciones y explican con claridad las propiedades de los vectores propios, por ejemplo, su relación con la posibilidad de diagonalizar una matriz y con la definición de matrices semejantes. Todo ello muestra que han encapsulado los procesos de valor y vector propio en objetos. La encapsulación del concepto de espacio propio se pone en evidencia cuando estos alumnos pueden hacer acciones sobre el espacio propio, por ejemplo para comparar espacios propios correspondientes a distintos valores propios y para determinar sus propiedades, como por ejemplo, su dimensión. Algunos ejemplos permiten ilustrar las construcciones antes mencionadas.

En el trabajo de A_2 (Sem. 1-2013) con la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ (figura 18) es posible observar que indica que los vectores y espacios propios corresponden a un valor propio y encuentra la multiplicidad geométrica. Describe claramente el espacio propio asociado a cada valor propio. Más adelante, cuando explica su trabajo comenta: *"Al sustituir los valores propios en el sistema homogéneo* $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I})\overline{\boldsymbol{v}}=\overline{\mathbf{0}}$ *estamos resolviendo el espacio nulo. La solución será múltiple porque* $\overline{\boldsymbol{v}}\neq\overline{\mathbf{0}}$*. No tiene sentido el vector cero, en el problema de empleo – desempleo no puede ser solución, no puede haber cero empleados y cero desempleados. Cada valor propio tiene sus vectores y espacio propio asociados."* Posteriormente aclara: "***E₀*** *es una línea recta que pasa por el origen y va en la dirección del vector* ***(1, 2)****, su dimensión es uno. El espacio propio generado por el valor propio* ***4*** *es también una línea recta, pasa por el origen, pero su dirección está dada por el vector* ***(-1, 2)****. Si pienso en las líneas rectas que representan a los espacios propios, son líneas que pasan por el origen pero cruzan por distintos cuadrantes.*" Este alumno muestra una concepción objeto pues es capaz de hacer la acción de comparar los espacios propios que encontró.

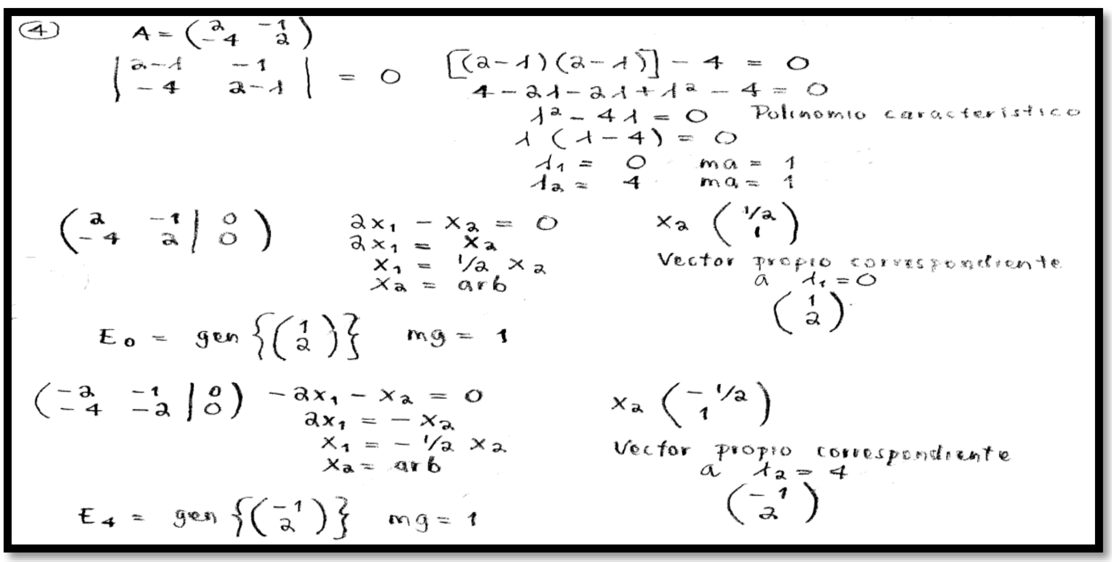
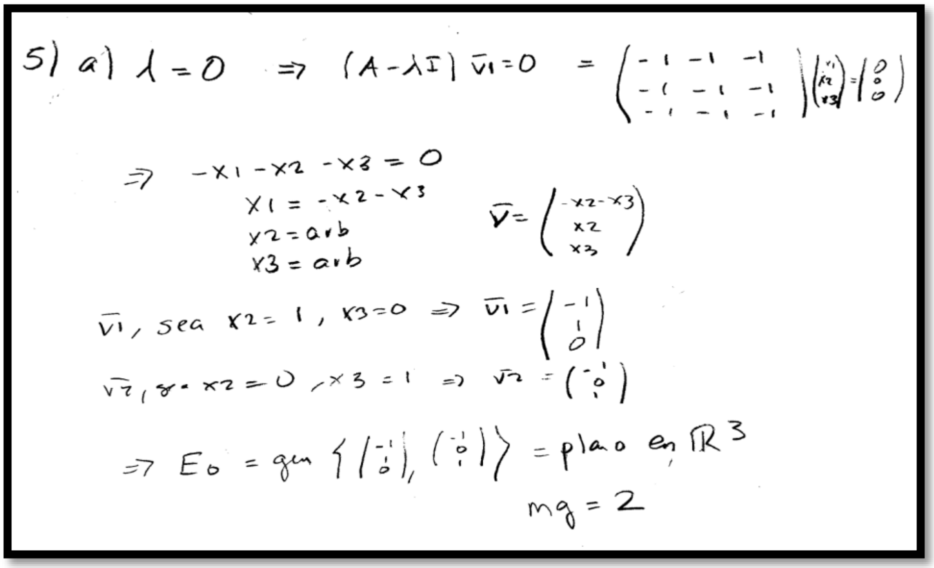


Figura 18

Al igual que A2, C2 (Sem. 2-2013) responde sin problemas todo lo que se le pregunta dando explicaciones muy claras y coherentes. En el caso de la matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$ a la que nos hemos referido antes, encuentra el valor propio $\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0}$, los vectores propios y el espacio propio asociados a dicho valor propio (figura 19).



$5)$ a) $\lambda = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)\bar{v}_1 = 0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow -x_1 - x_2 - x_3 = 0$

$x_1 = -x_2 - x_3$

$x_2 = \text{arb}$

$x_3 = \text{arb}$

$\bar{v} = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\bar{v}_1$, sea $x_2 = 1$, $x_3 = 0 \Rightarrow \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\bar{v}_2$, sea $x_2 = 0$, $x_3 = 1 \Rightarrow \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

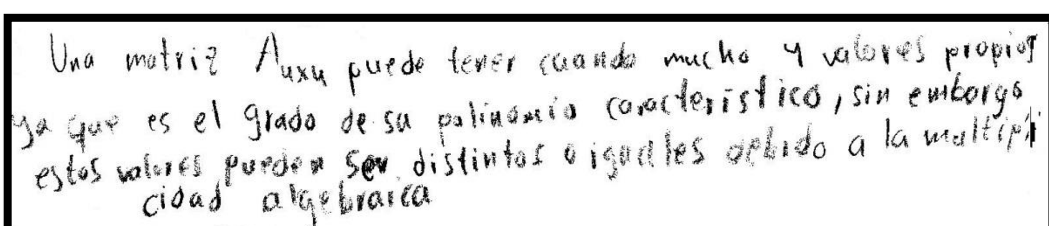
$\Rightarrow E_0 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \text{plano en } \mathbb{R}^3$

$mg = 2$

Figura 19

Al considerar el número de valores propios que puede tener una matriz responde: *"…cuando mucho **n** si la multiplicidad algebraica de todos es uno, cuando es mayor que uno disminuye el número de valores propios pero no necesariamente el de los vectores propios asociados a ellos, porque si la multiplicidad geométrica es mayor que uno pueden generar un espacio propio de dimensión más grande, un plano o un hiperplano u otro espacio,"* muestra una concepción objeto pues es capaz de comparar distintos espacios propios al relacionar las distintas posibilidades determinadas por la relación entre la multiplicidad algebraica y la geométrica y la de éstas con la dimensión del espacio propio.

A_4 (Sem. 1-2014) menciona además la multiplicidad algebraica para explicar que los cuatro valores propios de una matriz $\boldsymbol{A_{4x4}}$ pueden ser iguales o diferentes, como se ve en la figura 20. Comenta: *"Una matriz $\boldsymbol{A_{4x4}}$ puede tener cuando mucho cuatro valores propios ya que es el grado de su polinomio característico, sin embargo estos valores pueden ser distintos o iguales debido a la multiplicidad algebraica".*



Una matriz A_{4x4} puede tener cuando mucho 4 valores propios ya que es el grado de su polinomio caracteristico, sin embargo estos valores pueden ser distintos o iguales debido a la multiplicidad algebraica

Figura 20

D_3 (Sem. 2-2011) afirma que son cuatro valores propios (figura 21)*, "porque estos van de la mano con un vector propio. Estos vectores propios, por regla* *deben ser ele i y no puede haber más de cuatro vectores ele i en **R^4**,"* mostrando una concepción proceso de espacio vectorial.

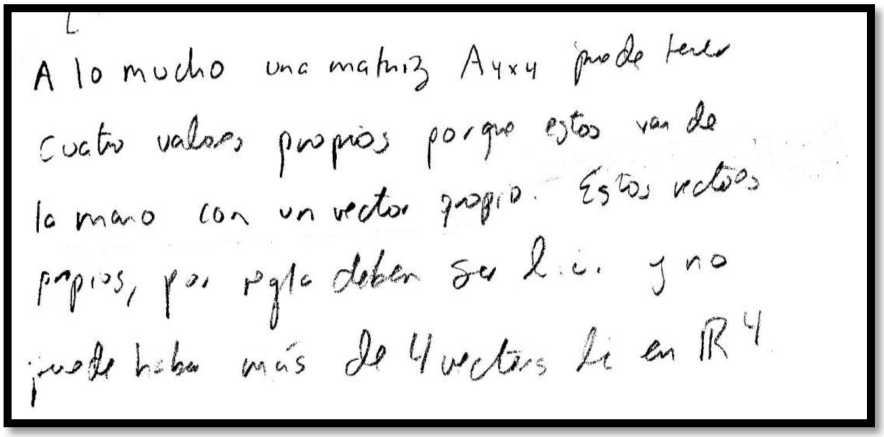

A lo mucho una matriz $A_{4\times4}$ puede tener cuatro valores propios porque estos van de la mano con un vector propio. Estos vectores propios, por regla deben ser l.i. y no puede haber más de 4 vectores l.i. en $\mathbb{R}^4$

Figura 21

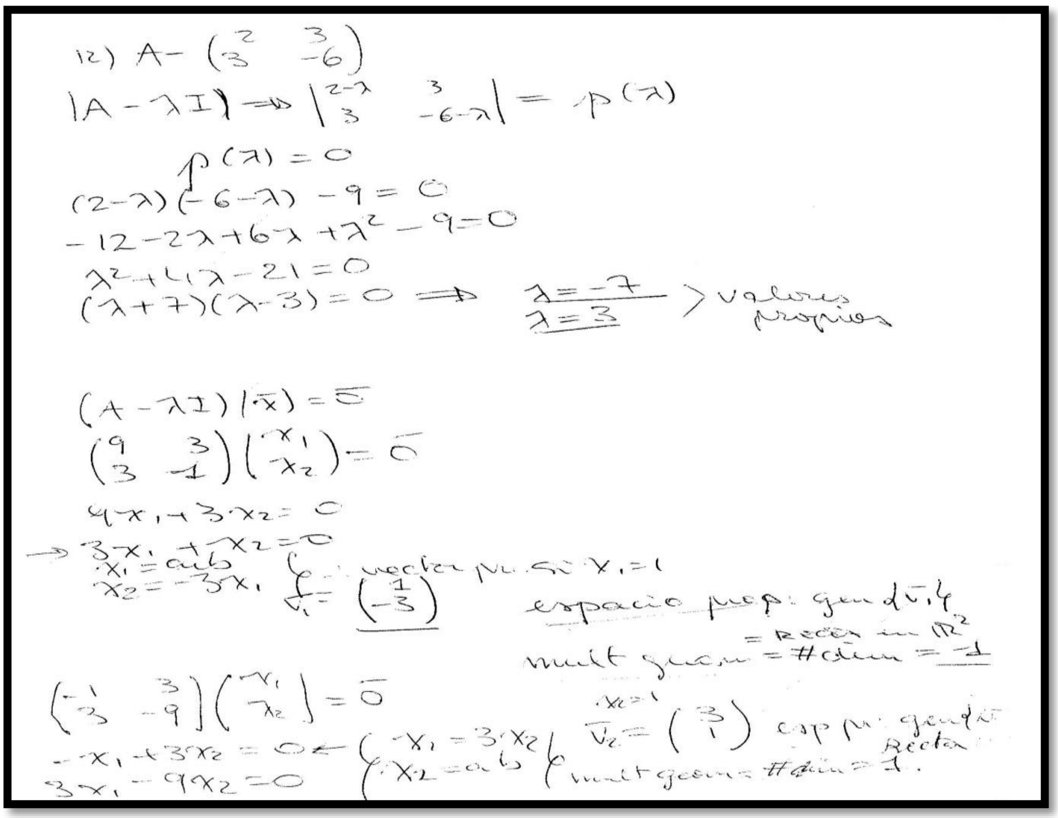
C₁ (Sem. 2-2012) menciona a la matriz diagonal (figura 22), y comenta: *"a lo mucho puede tener cuatro **λ** su diagonal es su máximo".*

Figura 22

Al trabajar con una matriz $\mathbf{A_{2x2}}$, que tiene valores propios complejos, C_1 afirma: *"…los valores propios son uno conjugado del otro, son complejos **λ = i** y **λ = -i**. Los vectores propios … encontramos el espacio nulo de la matriz $\boldsymbol{A-\lambda I}$, son el **(1, -i)** y el **(1, i)**. Los valores propios se pueden representar en un plano que tiene en el eje horizontal la parte real y en el vertical la imaginaria pero ya con los vectores propios no me lo puedo imaginar gráficamente… Creo que eso no lo vimos".*

Cuando se le pide encontrar una matriz que tenga como valor propio al cero, $\boldsymbol{\lambda = 0}$, es capaz de relacionar la dependencia lineal de las columnas de la matriz $(\boldsymbol{A-\lambda I})$ con la posibilidad de que la matriz ***A*** tenga un valor propio igual a cero; C_1 aclara: "*…esta matriz debe tener determinante igual a cero, por eso tiene solución múltiple y no tiene inversa. Si no fuera así tendría que tener un vector propio que fuera cero y eso no se puede… Bueno, pues por el teorema resumen cualquier matriz que tenga columnas ele de cumple con que tiene una **λ = 0**"* y da un ejemplo de una matriz $\boldsymbol{A_{5x5}}$ que tiene columnas que son todas múltiplos de la primera.

Estos alumnos identifican el polinomio característico y encuentran los valores propios. Más adelante reconocen que la matriz del sistema homogéneo tiene solución múltiple, ecuaciones iguales, y resuelven con una sola de ellas para encontrar los vectores propios. Encuentran el espacio propio, la multiplicidad geométrica y la representación gráfica del espacio propio. Por ejemplo al trabajar con la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-6} \end{pmatrix}$, por ejemplo D_3 (2-2011) comenta (figura 23): *"el sistema homogéneo tiene solución múltiple por lo que las dos ecuaciones deben ser múltiplos o iguales. Puedo resolver usando solamente una de ellas. Hay dos valores con un vector propio cada uno. Ambos espacios propios son una recta en* $\boldsymbol{R^2}$ *y la multiplicidad geométrica o sea la dimensión del espacio propio, es uno".*


12) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

$|A - \lambda I| \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{vmatrix} = p(\lambda)$

$p(\lambda) = 0$

$(2-\lambda)(-6-\lambda) - 9 = 0$

$-12 - 2\lambda + 6\lambda + \lambda^2 - 9 = 0$

$\lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0$

$(\lambda+7)(\lambda-3) = 0 \Rightarrow \lambda = -7,\ \lambda = 3$ > valores propios

$(A - \lambda I)(\bar{x}) = \bar{0}$

$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \bar{0}$

$9x_1 + 3x_2 = 0$

$\rightarrow 3x_1 + x_2 = 0$

$x_1 = arb$, $x_2 = -3x_1$ vector pr. si $x_1 = 1$, $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

espacio prop: gen$\{\bar{v}_1\}$ = Recta en $\mathbb{R}^2$

mult geom = # dim = 1

$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \bar{0}$

$-x_1 + 3x_2 = 0$, $3x_1 - 9x_2 = 0$

$x_1 = 3x_2$, $x_2 = arb$, $x_2 = 1$, $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ esp pr: gen$\{\bar{v}_2\}$ Recta

mult geom = # dim = 1.

Figura 23

En conclusión, la secuencia didáctica seguida permitió que, en promedio, cada semestre tres alumnos construyeran una concepción objeto de los conceptos de valor, vector y espacio propio, lo cual proporciona, nuevamente evidencia de que resultó efectiva en cada uno de los semestres investigados en este estudio. Además, estos alumnos parecen haber construido relaciones entre estos conceptos y otros conceptos del curso, es decir muestran haber construido un esquema coherente para los conceptos de interés, dado que reconocen aquellos problemas en los que son pertinentes, como por ejemplo los procesos de Markov. La construcción del esquema no se estudió a profundidad en esta investigación por lo que no es posible profundizar en este aspecto del aprendizaje.

8.6 RESULTADOS DE LA ENTREVISTA

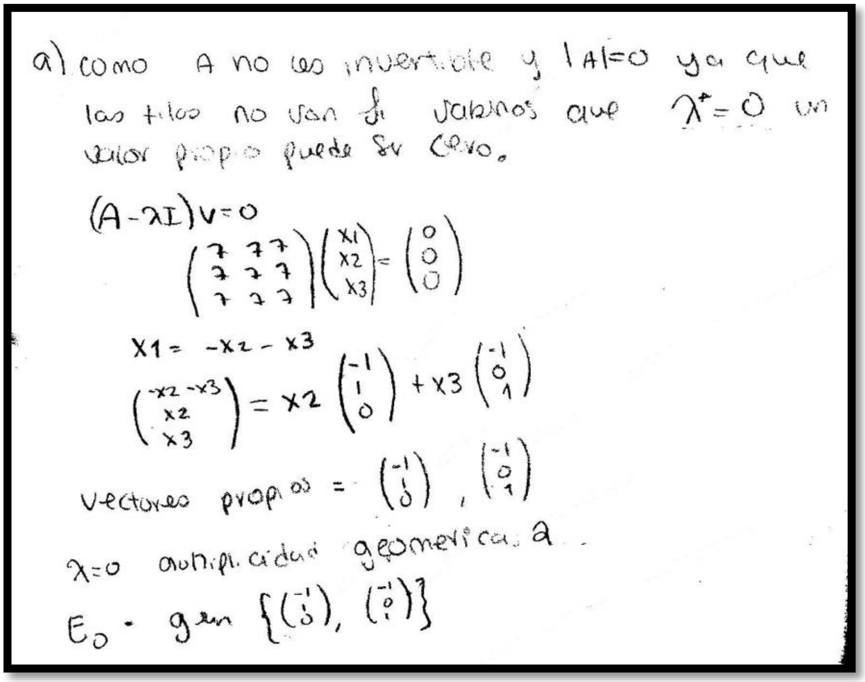
Después de tres semanas, se entrevistaron seis alumnos de distintos equipos, incluyendo a dos alumnos del equipo A mencionado anteriormente. Estas entrevistas se realizaron al finalizar todos los semestres (agosto 2011 a enero 2014). La entrevista semi-estructurada incluyó preguntas relacionadas con los conceptos de valor, vector y espacio propio, su interpretación geométrica y sus aplicaciones. Se incluyeron preguntas tradicionales y otras que no aparecen normalmente en los textos. Se encontraron distintas respuestas de los alumnos que ponen de manifiesto diferencias en sus concepciones.

Dos alumnos del equipo A (A_1 y A_2, Sem. 1-2013) y un alumno del equipo C (C_3, Sem. 2-2012) contestaron fácilmente todas las preguntas correctamente y dieron explicaciones claras que mostraron que habían construido una concepción objeto de los valores y vectores propios. Los otros tres alumnos mostraron algunas dificultades y el análisis de la información mostró que dos habían construido una concepción proceso y el otro una concepción acción de dichos conceptos.

Se reporta parte de la entrevista del alumno A_2 (Sem. 1-2013) que ilustra las respuestas dadas por los alumnos que mostraron una concepción objeto de valores, vectores y espacios propios. Cuando respondió a una pregunta en la que se incluyó la matriz ***A*** = $\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ con un solo valor propio con multiplicidad algebraica dos, explicó: *"existe solamente un valor propio … ¿no? pero realmente tienes dos vectores propios para esa $\boldsymbol{\lambda}$ … para ese valor propio … los vectores propios son linealmente independientes."* Reconoció que al resolver el sistema homogéneo asociado a ese valor propio había dos variables arbitrarias por lo que la solución incluía dos vectores propios y éstos debían ser linealmente independientes. Su respuesta muestra que fue capaz de comparar los vectores propios en términos de su independencia lineal.

Más adelante, cuando se le preguntó que encontrara el valor propio y el correspondiente vector o vectores propios de la matriz ***A*** = $\begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{7} & \mathbf{7} \\ \mathbf{7} & \mathbf{7} & \mathbf{7} \\ \mathbf{7} & \mathbf{7} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$, sin hacer operaciones A_2 responde (figura 24): *"sin hacer operaciones … o sea no puedo resolver el polinomio característico … $\boldsymbol{\lambda = 0}$, porque las columnas de la matriz son linealmente dependientes, el determinante será cero. También la matriz no tiene inversa y el sistema homogéneo tiene solución múltiple. Entonces, si lambda es cero, … la matriz aumentada del sistema tiene solo un renglón diferente de cero y ese es la ecuación $\boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 = 0}$, … así que un vector propio es **(-1, 1, 0)** o un múltiplo de él y … el otro vector puede ser **(-1, 0, 1)** o uno de sus múltiplos. Nada más que tienen que ser ele i. Esos vectores generan un plano que pasa por el origen en $\boldsymbol{R^3}$ … este plano es el espacio propio de $\boldsymbol{\lambda = 0}$".*

En esta respuesta A2 muestra que es capaz de relacionar la dependencia lineal de las columnas de la matriz con el hecho de que la matriz ***A*** tenga un valor propio igual a cero. Además, el hecho de que mencione la matriz inversa y haya encontrado la solución del sistema homogéneo sin hacer acciones sobre la matriz, demuestra que fue capaz de relacionar los valores propios con otros conceptos del curso.



a) como A no es invertible y |A|=0 ya que las filas no son li sabemos que $\lambda=0$ un valor propio puede ser cero.

$$(A-\lambda I)v=0$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x1=-x2-x3$$

$$\begin{pmatrix} -x2-x3 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix}=x2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+x3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vectores propios $=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda=0$ multiplicidad geométrica 2

$$E_0 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Figura 24

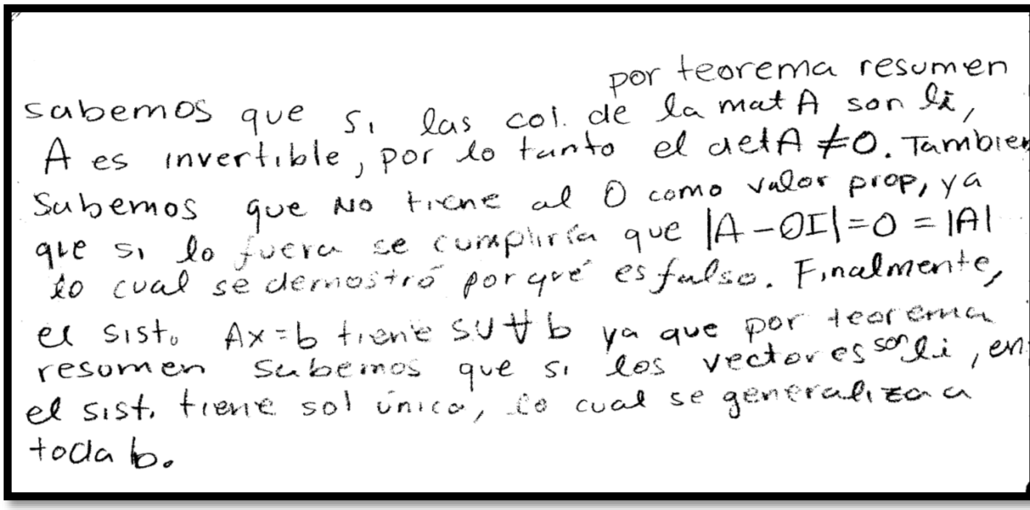
Al final de la entrevista, cuando estaba trabajando con un problema de un Proceso de Markov, A2 dijo*: "Hay un vector punto fijo, $\overline{\boldsymbol{w}}$, en este problema y ese es el vector propio que tiene valor propio uno, $\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}$, porque $\boldsymbol{P}\overline{\boldsymbol{w}}=\mathbf{1}\overline{\boldsymbol{w}}$ … Esto es parecido a lo que hicimos en el problema de empleo … Este proceso tiene un vector punto fijo y puedo usar los valores y vectores propios para encontrarlo. Además puedo usarlo después para diagonalizar la matriz".*

Este alumno reconoce la ecuación $\boldsymbol{P}\overline{\boldsymbol{w}}=\mathbf{1}\overline{\boldsymbol{w}}$ como la definición de valores y vectores propios y la relaciona con el hecho de que un valor propio es $\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}$. Puede usar las propiedades de las columnas de la matriz para deducir los valores y vectores propios sin hacer cálculos. Es capaz de comparar vectores propios asociados a un valor propio en términos de su independencia lineal. Además, muestra que ha construido relaciones entre una variedad de procesos relacionados con valores y vectores propios por ejemplo, la posibilidad de realizar el proceso necesario para encontrar una matriz diagonal relacionada con una matriz dada y las consecuencias de encontrar un valor propio igual a uno en un problema dado. Tomando en cuenta todas sus respuestas, comentarios y gráficas realizadas en la entrevista se encontró evidencia clara de que A2 mostró una concepción objeto de valor, vector y espacio propio.

Los otros dos alumnos, A_1 (Sem. 1-2013) y C_3 (Sem. 2-2012) mostraron evidencia de haber construido una concepción objeto de valores y vectores propios, pero una concepción proceso de espacios propios. Ambos mostraron algunas dificultades al intentar aplicar las acciones necesarias para comparar geométricamente diferentes espacios propios. Podían decir si eran rectas, planos o todo el espacio, de manera memorizada, pero cuando era necesario hacerlo geométricamente requerían de las fórmulas memorizadas para realizar operaciones y así decidir, por ejemplo, cuál era la diferencia entre dos planos generados por distintos vectores propios.

Otro alumno, F_2 (Sem. 2-2011) reconoció que una matriz con columnas linealmente dependientes tenía como un valor propio al cero, $\boldsymbol{\lambda = 0}$, pero no fue capaz de encontrar los vectores propios asociados sin hacer operaciones. Mostró, en general, una concepción proceso de valores y vectores propios. Tuvo varias dificultades con las preguntas sobre espacios propios. Usó todos los vectores propios asociados a una matriz para encontrar el espacio propio y tuvo dificultades cuando un valor propio tenía dos o más vectores propios asociados. Estas dificultades evidenciaron que no había construido el proceso mediante el cual puede reconocerse que un valor propio tiene su espacio propio asociado, ni el proceso que le permite reconocer que varios vectores propios pueden estar asociados con un mismo valor propio, Se concluyó que este alumno mostró una concepción acción de espacios propios.

Otro alumno, D_3 (Sem. 2-2013) mostró una concepción proceso de los conceptos de interés. Mostró fluidez en sus respuestas y pudo describir procesos de cálculo sin hacer las operaciones. Utilizó propiedades de la matriz ***A*** para demostrar por qué si la matriz tiene columnas linealmente independientes entonces no puede tener como valor propio al cero (figura 25) y explicó con sus palabras: *“por el teorema resumen sabemos que si las columnas de* ***A*** *son ele i entonces* ***A*** *es invertible y su determinante es diferente de cero y el valor propio no puede ser cero. Si fuera cero tendríamos …* ***|A – 0I| = 0 = |A|*** *lo cual es absurdo … el determinante tiene que ser diferente de cero”.*



por teorema resumen
sabemos que si las col. de la mat A son li,
A es invertible, por lo tanto el $\det A \neq 0$. Tambien
sabemos que no tiene al 0 como valor prop, ya
que si lo fuera se cumpliría que $|A - 0I| = 0 = |A|$
lo cual se demostró porqué es falso. Finalmente,
el sist. $Ax=b$ tiene SU $\forall\, b$ ya que por teorema
resumen sabemos que si los vectores son li, en
el sist. tiene sol único, lo cual se generaliza a
toda b.

Figura 25

Sin embargo, mostró dificultades al comparar vectores propios relacionados con un solo valor propio y al comparar espacios propios, sin hacer ciertos cálculos.

El alumno B_1 (Sem. 2-2011) mostró evidencia de haber construido el proceso para la representación geométrica de vectores propios. Durante la entrevista, contestó correctamente que cuando el valor propio aumenta o disminuye, el vector propio solamente cambia de magnitud. Al mostrarle gráficas donde los vectores $\boldsymbol{A\overline{v}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}$ eran paralelos, inmediatamente contestó: *"$\overline{\boldsymbol{v}}$ es un vector propio de **A**".*

Sin embargo, en un contexto algebraico, mostró que no había construido los procesos necesarios para calcular los valores propios. Al trabajar, por ejemplo, con la matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$ concluyó: *"el valor propio es **2** porque cuando multiplicas la primera columna por dos te da la segunda columna".*

No todos los alumnos hicieron las construcciones previstas durante esta experiencia. El último alumno entrevistado, B_1 (Sem. 2-2011) mostró dificultades con muchas de las preguntas. Por ejemplo, fue incapaz de explicar por qué una matriz $\boldsymbol{A_{2x2}}$ tenía a lo más dos valores propios. Mostró una concepción acción de los conceptos de valor y vector propio dado que únicamente puede usar algoritmos memorizados para encontrarlos.

Después de analizar toda la información obtenida del trabajo de los alumnos y de la entrevista, se consideró que el problema de modelación ayudó a los alumnos a dar significado a los conceptos de valor y vector propio a través de su papel en un problema que eran capaces de interpretar con sus conocimientos de economía. En muchas ocasiones, en sus explicaciones, los alumnos usaron el problema de modelación como un contexto para explicar su razonamiento, por ejemplo hacían comentarios del tipo (D_3, Sem. 2-2013): *"esto es parecido a la ecuación que* *teníamos en el problema de desempleo, así que puedo hacer lo mismo, encontrar los valores y vectores propios."* También, como varios alumnos fueron capaces de desarrollar por ellos mismos una estrategia para encontrar los valores y vectores propios en el contexto de las ecuaciones que representaban el problema de modelación, les fue más fácil transferir ese procedimiento al ámbito puramente matemático. Es decir, fueron capaces de relacionar las acciones o procesos que habían aplicado con las definiciones formales cuya construcción se apoyó mediante las actividades conceptuales diseñadas, así como construir la relación con otros conceptos de álgebra lineal.

Las actividades conceptuales diseñadas con la Teoría APOE, así como la gestión de la clase, resultaron fundamentales para que los alumnos pudieran reflexionar y hacer las acciones y procesos necesarios para lograr una comprensión más profunda de estos conceptos. Es importante notar que en este estudio no se encontraron las dificultades reportadas en los estudios mencionados en la revisión de la literatura o fueron menos predominantes y que ello puede deberse a la estratégica didáctica seguida durante la experiencia didáctica.

CONCLUSIONES

Esta investigación contribuye al análisis de la enseñanza y aprendizaje de los conceptos combinación lineal, conjunto generador, espacio generado, independencia y dependencia lineal, base, dimensión y valores, vectores y espacios propios de una matriz. Los resultados de esta investigación proporcionan evidencias que muestran que cuando se diseña una estrategia didáctica, basada en teorías de Educación Matemática, en este caso la Teoría de Modelos y Modelación y la Teoría APOE, es posible superar las dificultades encontradas en otras investigaciones en el aprendizaje de los alumnos. Además, el uso de estas teorías permite determinar cuáles son las causas de algunas de las dificultades encontradas.

Las estrategias seguidas por los alumnos al enfrentar los problemas de modelación permiten validar la construcción del proceso de modelación en términos de la Teoría APOE sugerida por Trigueros (2014). En ella se propone que los alumnos tomen de sus esquemas matemáticos las construcciones que son necesarias para resolver el problema y formulen distintas hipótesis para su solución. Por medio de estas hipótesis se realizan acciones sobre las variables del problema y se establecen relaciones entre ellas. Estas acciones se interiorizan en procesos con los cuales dichas relaciones se transforman. A su vez, estos procesos se coordinan con procesos de los esquemas matemáticos. Al coordinar los procesos surge un modelo que puede ser encapsulado como objeto. Sobre este objeto se pueden hacer nuevas acciones, que al interiorizarlas o encapsularlas, permiten determinar sus propiedades y plantear nuevas preguntas que pueden modificar el modelo. Durante el trabajo con el modelo pueden construirse nuevos procesos, objetos y esquemas para responder las preguntas. Este ciclo se repite hasta que se encuentre un modelo que describa adecuadamente el fenómeno.

Un resultado importante de esta investigación consiste en proporcionar evidencia de que la introducción de un problema de modelación ayuda a los alumnos a involucrarse en su solución. El problema de las patinetas voladoras y los problemas diseñados de población, empleo y empleo - desempleo fueron efectivos para motivar el interés de los alumnos para formular modelos matemáticos usando sus conocimientos matemáticos y económicos junto con su experiencia. El trabajo en los modelos hizo posible que los alumnos desarrollaran estrategias que promovieron el uso de conceptos construidos con anterioridad y permitió que los alumnos accedieran a nuevas preguntas y conceptos sin la ayuda de la maestra. Es decir, el uso de la modelación proporcionó a los alumnos un escenario para que usaran sus conocimientos y al mismo tiempo enfrentaran nuevas necesidades conceptuales.

Los alumnos fueron capaces de comparar y discutir los modelos propuestos para decidir cuál de ellos era el más apropiado. El contexto también estimuló su reflexión, hecho que se manifestó a través de algunas preguntas importantes que realizaron, como por ejemplo en el problema de empleo – desempleo cuál de las soluciones encontradas era mejor o si podían realizar combinaciones lineales con ellas. El trabajo en los problemas enfocó la atención de los alumnos hacia aspectos específicos y fundamentales de los conceptos introducidos y su relación con otros conceptos de álgebra lineal como se observa claramente en el caso de los valores y vectores propios. Este trabajo junto con las discusiones entre ellos y con la maestra logró que los alumnos llegaran por ellos mismos a resultados del álgebra lineal que después fueron formalizados por la maestra junto con los alumnos. Además, los alumnos fueron capaces de relacionar los conceptos estudiados con otros conceptos del álgebra lineal como matriz inversa, determinantes o espacio nulo de una matriz.

La evidencia mostró que el trabajo con los problemas de modelación contribuyó al aprendizaje de los alumnos. Sin embargo, el trabajo en las actividades conceptuales, diseñadas en términos de las construcciones predichas en las descomposiciones genéticas, jugó un papel importante para que los alumnos tuvieran la oportunidad de reflexionar y hacer las construcciones previstas para aprender estos conceptos y para construir relaciones con otros conceptos del álgebra lineal. Las actividades promovieron una reflexión más profunda acerca de los conceptos y su formalización sobre una base sólida. Los resultados muestran que la mayoría de los alumnos con los que se trabajó en los distintos semestres construyó una concepción proceso de los conceptos en estudio y, en el caso de los valores y vectores propios hubo al menos tres alumnos que dieron evidencia de haber construido una concepción objeto.

En cuanto al diseño didáctico, los resultados permiten concluir que es posible diseñar una estrategia didáctica en la que se utilice un problema de modelación y en la que se favorezcan las construcciones necesarias en el aprendizaje de estos conceptos mediante actividades diseñadas con la Teoría APOE. La evolución de los alumnos en la parte del curso relacionada con la enseñanza de los conceptos estudiados mediante la estrategia didáctica diseñada mostró ser satisfactoria. Esta investigación puso de manifiesto, además, que es posible lograr que los alumnos profundicen en la definición y el significado de estos conceptos.

Esta investigación aporta estrategias didácticas que pueden ser empleadas por otros maestros y de las cuales se esperarían resultados prometedores, aunque habría que hacer más investigación al respecto.

El uso complementario y exitoso de dos teorías: Modelos y Modelación y Teoría APOE constituye una evidencia de la pertinencia de utilizar teorías complementarias para apoyar el aprendizaje de los alumnos en una materia abstracta como es el álgebra lineal. La experiencia de esta investigación y los comentarios de los alumnos acerca de su motivación y aprendizaje conducen a recomendar el desarrollo de modelos para otros temas del álgebra lineal.

Problema de las patinetas voladoras

Los conceptos introducidos con este problema son muy abstractos. El problema permite a los alumnos construir de forma intuitiva dichos conceptos y darles significado.

En esta investigación se puso de manifiesto que la construcción del concepto de combinación lineal como objeto es indispensable para el aprendizaje de los conceptos de independencia lineal, conjunto generador, espacio generado, base y dimensión. Los alumnos que mostraron una concepción acción del concepto de combinación lineal no fueron capaces de interiorizar las acciones necesarias para construir dichos conceptos.

Al comenzar a resolver este problema la mayoría de los alumnos hace diagramas y gráficas con los vectores asociados a la dirección de la *patineta* y la *alfombra* para ver si *pueden llegar* a la casa del Tío Gauss. Esto ayudó a los alumnos a relacionar la interpretación algebraica y geométrica del concepto de combinación lineal. Al reflexionar sobre sus acciones las interiorizan en un proceso que les permite escribir sistemas de ecuaciones algebraicas y ecuaciones vectoriales para resolver el problema. Las actividades conceptuales introducidas se utilizaron para ayudar en la construcción de la relación entre la interpretación algebraica y geométrica de estos conceptos. Además, la discusión en clase permitió a los alumnos cambiar flexiblemente entre los sistemas de ecuaciones algebraicas y vectoriales. Este resultado es importante y constituye una aportación de este trabajo.

El concepto de conjunto generador es muy abstracto y difícil de comprender para los alumnos. Sin embargo, al ligarlo con la idea de los lugares en donde puede estar la casa del Tío Gauss, los alumnos desarrollan una idea intuitiva de este concepto que permite concretarlo de cierta manera. Ellos buscan todas las posibles combinaciones lineales de los vectores *patineta* y *alfombra* para concluir si *pueden o no llegar* a cualquier punto de $\boldsymbol{R}^2$. A partir de esta idea se formalizó el concepto de conjunto generador de una forma natural.

La definición de independencia lineal es difícil de interpretar por los alumnos. Al discutir en clases sus propuestas de solución de las partes IV y V del problema los alumnos construyeron ideas tanto geométricas como algebraicas que les permitieron entender las definiciones formales cuando la maestra las introdujo en clase. Las actividades conceptuales les permitieron generalizar tanto la representación geométrica como algebraica, en primera instancia de $\boldsymbol{R}^2$ a $\boldsymbol{R}^3$ y más adelante generalizar la parte conceptual a $\boldsymbol{R}^n$. Los alumnos concluyeron que los vectores eran linealmente dependientes cuando eran múltiplos o cuando uno se podía escribir como combinación lineal de los otros. Este resultado es importante porque es común que los alumnos concluyan que los vectores son linealmente dependientes únicamente cuando son paralelos o múltiplos uno del otro. Esta definición lleva muchas veces a los alumnos a generalizar este hecho erróneamente a dimensiones mayores a dos (Parraguez y Bozt, 2012). En esta investigación dicha generalización errónea no se dio ya que los alumnos recordaban que en el problema de las patinetas tres medios de transporte en $\boldsymbol{R}^2$ eran linealmente dependientes cuando uno de ellos era combinación lineal de los otros dos. Los alumnos que construyeron una concepción acción de este concepto no reconocen que un conjunto que contiene al vector cero es necesariamente linealmente dependiente. Los maestros deben tomar en consideración esta dificultad para incluir actividades en sus clases que permitan a los alumnos reflexionar sobre este hecho para hacer posible su interiorización.

En cuanto al concepto de base, en esta investigación se encontró que para demostrar si un conjunto de vectores es base de un espacio vectorial muchos alumnos, de forma memorizada, verifican la independencia lineal de los vectores sin verificar si generan o no el espacio en consideración. También se encontró que les resultó más difícil encontrar una base para un espacio dado. Esta dificultad puede superarse si los alumnos construyen los conceptos de independencia lineal y conjunto generador como procesos y si se dan más oportunidades a los alumnos de invertir el proceso de verificación del hecho de que un conjunto dado sea o no base de un espacio vectorial también dado.

Kú (2012) estudia los conceptos de conjunto generador y espacio generado. Es interesante notar que en su investigación 25 alumnos muestran una concepción acción, 4 una concepción proceso y 1 una concepción objeto mientras que en esta investigación 5 muestran una concepción acción, 22 una concepción proceso y 3 una concepción objeto, lo que muestra que el problema de las patinetas voladoras y las actividades conceptuales ayudaron en el proceso de aprendizaje.

Problema de empleo – desempleo

Esta investigación muestra que a través de un problema de modelación es posible que los conceptos de valores, vectores y espacios propios surjan del trabajo de los alumnos, aunque no estén conscientes que han aparecido nuevos conceptos. El uso de las actividades conceptuales diseñadas para que los alumnos reflexionaran en su trabajo y en dificultades específicas reportadas en la literatura, junto con las actividades propuestas con la descomposición genética y las discusiones en clase con la maestra en diferentes momentos del proceso de solución claramente promovieron la construcción de los conceptos de interés y promovieron el aprendizaje de los alumnos.

En esta investigación se puso de manifiesto que la construcción de los conceptos previos considerados en la descomposición genética es indispensable en un aprendizaje de los conceptos de valores, vectores y espacios propios que vaya más allá de la memorización de los algoritmos involucrados en su cálculo. Un aprendizaje de tipo acción de los sistemas de ecuaciones y de su conjunto solución, además de las nociones de conjunto generador y espacio generado inhibe la interiorización de las acciones necesarias en la construcción de estos conceptos. Si bien en la experiencia que aquí se reporta, los alumnos con esta dificultad fueron pocos, esta contribución es importante dado que por primera vez se reconoce este hecho que resulta indispensable conocer para enseñarlos. Este resultado alerta a los maestros a comenzar la enseñanza de este tema brindando oportunidades a los alumnos para que construyan los conceptos previos.

Otra contribución importante de este trabajo es el diseño de una descomposición genética que predice la construcción de estos importantes conceptos dado que no se había propuesto una anteriormente para estos conceptos. Los resultados de esta investigación sobre los valores, vectores y espacios propios muestran evidencias de las construcciones propuestas en la descomposición genética. La descomposición genética propuesta mostró ser un modelo válido para predecir y describir las construcciones necesarias para el aprendizaje de estos conceptos. Esto permite, por una parte validarla y por otra considerarla como un buen modelo para predecir las construcciones necesarias para el aprendizaje de estos conceptos. De esta manera, la descomposición genética propuesta puede ser empleada por otros investigadores y también por profesores en la planeación didáctica de actividades relacionadas con estos importantes conceptos.

En esta investigación, los alumnos desarrollaron un procedimiento para encontrar los valores y vectores propios de una matriz antes de que su definición fuera introducida. Esto fue posible gracias al uso del problema de modelación diseñado con el propósito de enseñar dichos conceptos. La relación entre el número de vectores propios correspondientes a un valor propio dado y su coordinación con la dimensión del espacio generado por los vectores propios asociados a cada valor propio fue difícil para muchos alumnos. La construcción del concepto de espacio propio, en particular en el caso en que la multiplicidad algebraica de un valor propio era mayor a uno, también resultó difícil para la mayoría de los alumnos. Esta dificultad puede explicarse por la posible falta de coordinación del espacio nulo de la matriz $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I})$ con el proceso de espacio generado por los vectores propios asociados a un valor propio. También puede deberse a las dificultades reportadas en la literatura (Kú, Trigueros y Oktaç, 2008) en la comprensión de los conceptos de conjunto generador, espacio generado y base, sobre todo en el caso de quienes construyeron una concepción acción de estos conceptos, y en los obstáculos presentados al comparar diferentes objetos geométricos en un espacio tridimensional. Es necesario hacer más investigación al respecto.

Una aportación del diseño teórico y didáctico utilizado en esta investigación consiste en lograr que la mayoría de los alumnos en los distintos semestres no mostraran dificultad con la representación geométrica de los vectores propios. La mayoría de los alumnos mostró evidencia de haber construido al menos una construcción proceso de los conceptos de valor y vector propio. Ello como resultado del diseño didáctico que combinó el problema de modelación con el diseño de actividades. Este resultado constituye, asimismo, una aportación a la investigación acerca de estos conceptos.

La literatura concerniente al aprendizaje de las matemáticas avanzadas en general, y del álgebra lineal en particular, señala que la construcción de una concepción objeto es difícil de lograr en el tiempo destinado a un curso universitario (Asiala, Brown, Kleiman y Mathews, 1998; Arnon et al., 2014; Clark, Kraut, Mathews y Wimbish, 2007; Trigueros y Martínez-Planell, 2010). En el caso de los cursos que aquí se reportan se encontraron, en promedio, al menos tres alumnos, que construyeron una concepción objeto de los conceptos de interés y que una mayoría de los alumnos construyó una concepción proceso. Estos resultados ponen de manifiesto que es posible superar las dificultades mencionadas en la literatura en relación al aprendizaje de los valores, vectores y espacios propios y constituye una aportación importante a la investigación utilizando la Teoría Modelos y Modelación y la Teoría APOE.

Es importante mencionar que los conceptos de valores, vectores y espacios propios han sido estudiados únicamente en el caso en que los valores propios son reales y los vectores propios se encuentran en un espacio vectorial real. En este estudio se avanza la investigación al considerar el problema de la construcción de estos conceptos de manera global, por lo que se incluyó en la enseñanza el caso de los valores, vectores y espacios propios complejos. En este ámbito se encontró que los alumnos desconocen el álgebra con números complejos, por lo que se considera que es necesario diseñar actividades en este sentido que preparen a los alumnos al trabajo con este tipo de valores, vectores y espacios propios. Este problema no invalida la descomposición genética, pero se concluyó que es necesario trabajar más ampliamente en este caso.

El hecho de que este enfoque didáctico permitiera que al menos tres alumnos, cada semestre, construyeran una concepción objeto; el hecho de que, contrario a investigaciones previas, la mayoría de los alumnos fueron capaces de asociar de manera flexible las representaciones algebraica y geométrica; y el hecho de que los alumnos fueron capaces de construir procesos relacionados con las propiedades de estos conceptos y relaciones con otros conceptos, constituyen una contribución en la investigación del aprendizaje de estos conceptos.

Aportaciones de esta investigación

Los resultados de esta investigación muestran que los problemas escogidos para introducir los conceptos estudiados fueron efectivos para motivar el interés de los alumnos para formular modelos matemáticos. También, los problemas les dieron a los alumnos un contexto que los estimuló a usar conceptos que habían aprendido anteriormente en el curso y un contexto para facilitar al maestro la introducción y comprensión de los conceptos. Los alumnos desarrollaron varios de los conceptos estudiados y un proceso para encontrar los valores y vectores propios antes de que las definiciones de estos conceptos fueran introducidas en clase. Las discusiones con todo el salón permitieron a la maestra introducir las definiciones empezando con lo que se había hecho en clase.

En el análisis de los resultados se muestran evidencias de las construcciones propuestas en la descomposición genética diseñada para los valores, vectores y espacios propios de una matriz, por lo que puede considerarse como un buen modelo para predecir las construcciones necesarias para el aprendizaje de estos conceptos. Por lo tanto, dicha descomposición genética puede ser empleada por otros profesores e investigadores para futuras investigaciones.

La construcción de los conceptos previos considerados en dicha descomposición genética resultó indispensable para el aprendizaje de dichos conceptos. Esta contribución es importante de tomar en consideración en los cursos de álgebra lineal, pues alerta a los maestros para comenzar la enseñanza de estos conceptos brindando oportunidades a los alumnos para que construyan los conceptos previos. Asimismo, las actividades diseñadas permitieron a la mayoría de los alumnos construir una relación entre la representación geométrica y algebraica y trabajar con ambas representaciones, lo cual es una aportación pues, como ya se mencionó, esta relación es difícil para los alumnos.

Se puede concluir que la estrategia didáctica diseñada permitió superar algunas de las dificultades encontradas en otras investigaciones y logró que los alumnos profundizaran en los conceptos estudiados. Además los alumnos construyeron relaciones entre los conceptos estudiados y otros conceptos del álgebra lineal.

Futuras investigaciones

Los alumnos que no muestran las construcciones previas necesarias tuvieron más dificultades para el aprendizaje de los conceptos de valor, vector y espacio propio. Sería importante diseñar actividades para mejorar el aprendizaje de los conceptos previos e investigar su impacto en el aprendizaje de estos conceptos.

Los conceptos de valores, vectores y espacios propios han sido estudiados únicamente en el caso en que los valores propios son reales y los vectores propios se encuentran en el espacio vectorial real. En esta investigación, se incluyeron actividades con valores y vectores propios complejos. Se encontró que los alumnos desconocen el álgebra con números complejos. Sería necesario, en futuras investigaciones, diseñar actividades con números complejos para investigar las estrategias y dificultades y si ello implicaría algún cambio en la descomposición genética.

En las entrevistas se puso de manifiesto que algunos alumnos tenían dificultades para encontrar cuántos vectores propios corresponden a un valor propio y cuál era la dimensión del espacio propio. Estos aspectos deben estudiarse más a fondo para determinar las construcciones que podrían hacer posible su comprensión.

El uso de modelos y actividades favoreció el aprendizaje de los alumnos. Sin embargo, no existen diseños didácticos para muchos temas de álgebra lineal. Sería interesante diseñarlos y hacer investigación con diseños didácticos semejantes al que aquí se presenta para analizar sus resultados en el aprendizaje de los alumnos.

Por último, es importante destacar que los resultados encontrados relativos a los conceptos de combinación lineal, conjunto generador, espacio generado, independencia y dependencia lineal, base y dimensión son alentadores y que abren preguntas acerca de la construcción y evolución del esquema de espacio vectorial que sería interesante analizar.

ANEXO A. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE LAS PATINETAS VOLADORAS

Eres un joven viajero que deja su tierra natal por primera vez. Tus parientes quisieron ayudarte en tu viaje, así que antes de partir te dieron dos regalos. Te regalaron dos medios de transporte: una patineta voladora y una alfombra mágica. Tus parientes te informaron que tanto la patineta como la alfombra tienen restricciones a las cuales deben someterse:

- *Denotaremos el movimiento de la patineta con el vector* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{3}, \mathbf{1})$.

*Con esto queremos decir que si la patineta avanza "hacia adelante" durante una hora, se movería en un camino diagonal que resultaría en un desplazamiento de **3** unidades hacia el este y **1** unidad hacia el norte a partir de su posición inicial.*

- *Denotaremos el movimiento de la alfombra mágica por el vector* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2})$.

*Con esto queremos decir que si la alfombra mágica avanza "hacia adelante" durante una hora, se movería en un camino diagonal que resultaría en un desplazamiento de **1** unidad hacia el este y **2** unidades hacia el norte a partir de su posición inicial.*

El viaje del sabio

*Uno de tus parientes, El Tío Cramer, te recomendó que fueras en tu primer viaje a visitar al viejo sabio Gauss. El Tío Cramer dice que el viejo Gauss vive en una cabaña que se encuentra **107** millas hacia el este y **64** millas hacia el norte de tu casa.*

<u>PARTE I</u>

► *¿Es posible usar la patineta y la alfombra mágica para llegar a la cabaña del viejo Gauss? Si lo es, ¿de qué manera? Si no es posible llegar con estos medios de transporte, ¿por qué?*

La cabaña está en la posición: ***107E, 64N***

$$\boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix} + \boldsymbol{\beta}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{107}\\\mathbf{64}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{3}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \mathbf{107}$$

$$\underline{(\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{2}\,\boldsymbol{\beta} = \mathbf{64}) - \mathbf{3}}$$

$$\mathbf{3}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \mathbf{107}$$

$$\underline{-\mathbf{3}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{6}\boldsymbol{\beta} = -\mathbf{192}}$$

$$-\mathbf{5}\boldsymbol{\beta} = -\mathbf{85}$$

$$\boldsymbol{\beta = 17}$$

$$\boldsymbol{\alpha = 64 - 2\beta = 64 - 34 = 30}$$

Sí se puede llegar a la cabaña y se necesitan:

$\boldsymbol{\alpha = 30}$ hrs. en patineta.
$\boldsymbol{\beta = 17}$ hrs. en alfombra.

No necesariamente necesitan ir ***30*** horas seguidas en patineta y luego ***17*** en la alfombra, pueden hacer distintas combinaciones lineales mientras el total de horas sean ***30*** en patineta y ***17*** en la alfombra.

► *¿Es posible llegar a la cabaña del viejo Gauss utilizando solamente uno de los dos medios de transporte? ¿Cuál y de qué manera? Si no lo es, ¿por qué?*

Usando solamente la patineta:

$$\boldsymbol{\alpha \binom{3}{1} = \binom{107}{64}}$$

$$\boldsymbol{\alpha = 64}$$

$$\boldsymbol{64 \binom{3}{1} = \binom{192}{64} \neq \binom{107}{64}}$$

por lo tanto, no se puede llegar a la cabaña de Gauss.

Usando solamente la alfombra mágica:

$$\boldsymbol{\alpha \binom{1}{2} = \binom{107}{64}}$$

$$\boldsymbol{\alpha = 107}$$

$$\boldsymbol{107 \binom{1}{2} = \binom{107}{214} \neq \binom{107}{64}}$$

por lo tanto, no se puede llegar a la cabaña de Gauss.

No se puede llegar a la cabaña de Gauss usando solamente uno de los transportes porque no existe $\boldsymbol{\alpha}$ tal que las igualdades anteriores se cumplan, no es combinación lineal.

PARTE II

Cada semana el viejo Gauss mueve de lugar su cabaña. No estás seguro si el viejo está tratando de poner a prueba tu ingenio para encontrarlo, o si de verdad *quiere esconderse en un lugar donde no puedas visitarlo. Determina a cuáles de los siguientes lugares puedes llegar partiendo de tu casa utilizando la patineta y la alfombra. Para cada ubicación, explica cómo llegar o bien explica por qué es imposible llegar desde tu casa. Recuerda que Gauss vive en una cabaña que se encuentra **107** millas hacia el este y **64** millas hacia el norte de tu casa.*

► *Si mueve su casa **3** unidades hacia el oeste y **4** unidades al norte.*

La nueva posición de la casa de Gauss es:

107E + 3O = 104E
64N + 4N = 68N

$$\boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}+\boldsymbol{\beta}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{104}\\ \mathbf{68}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{3}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{104}$$
$$\underline{(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{2}\,\boldsymbol{\beta}=\mathbf{68})-\mathbf{3}}$$

$$\mathbf{3}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{104}$$
$$\underline{-\mathbf{3}\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{6}\,\boldsymbol{\beta}=-\mathbf{204}}$$

$$-\mathbf{5}\boldsymbol{\beta}=-\mathbf{100}$$

$$\boldsymbol{\beta}=\mathbf{20}$$

$$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{68}-\mathbf{2}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{68}-\mathbf{40}=\mathbf{28}$$

Por lo tanto, si se puede llegar usando:

$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{28}$ hrs. en patineta
$\boldsymbol{\beta}=\mathbf{20}$ hrs. en alfombra

► *Si mueve su casa **25** unidades hacia el este.*

La nueva posición de la casa de Gauss es:
107E + 25E = 132E
64N

$$\boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}+\boldsymbol{\beta}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{132}\\ \mathbf{64}\end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{3}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{132})-\mathbf{2}$$
$$\underline{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{2}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{64}}$$

$$-\mathbf{6}\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{2}\boldsymbol{\beta}=-\mathbf{264}$$
$$\underline{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{2}\,\boldsymbol{\beta}=\mathbf{64}}$$

$$-5\boldsymbol{\alpha} = -200$$

$$\boldsymbol{\alpha} = 40$$

$$\boldsymbol{\beta} = 132 - 3\boldsymbol{\alpha} = 132 - 120 = 12$$

Por lo tanto, si se puede llegar usando:

$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{40}$ hrs. en patineta
$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{12}$ hrs. en alfombra

► *Si mueve su casa* ***12*** *unidades hacia el este y* ***36*** *unidades al sur.*

La nueva posición de la casa de Gauss es:

107E + 12E = 119E
64N – 36S = 28N

$$\boldsymbol{\alpha}\binom{3}{1} + \boldsymbol{\beta}\binom{1}{2} = \binom{119}{28}$$

$$(3\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = 119) - 2$$
$$\underline{\boldsymbol{\alpha} + 2\boldsymbol{\beta} = 28}$$

$$-6\boldsymbol{\alpha} - 2\boldsymbol{\beta} = -238$$
$$\underline{\boldsymbol{\alpha} + 2\,\boldsymbol{\beta} = 28}$$

$$-5\boldsymbol{\alpha} = -210$$

$$\boldsymbol{\alpha} = 42$$

$$\boldsymbol{\beta} = 119 - 3\boldsymbol{\alpha} = 119 - 126 = -7$$

Por lo tanto, si se puede llegar usando:

$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{42}$ hrs. en patineta
$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{-7}$ hrs. en alfombra, pero por ser un número negativo, en reversa

PARTE III

► *¿Existe alguna ubicación que no se pueda alcanzar utilizando ambos medios de transporte? Describe los lugares que puedes alcanzar utilizando una combinación de patineta con alfombra mágica y aquellos que no pueden ser alcanzados. Especifica los lugares geométricamente y algebraicamente. Incluye representación simbólica usando vectores. También incluye un párrafo que explique tu respuesta.*

Algebraicamente podemos escribir una combinación lineal de vectores.

$$\boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}+\boldsymbol{\beta}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a_1}\\\boldsymbol{a_2}\end{pmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}+\boldsymbol{\beta}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{3}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}&=\boldsymbol{a_1}\\\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{2}\boldsymbol{\beta}&=\boldsymbol{a_2}\end{aligned}$$

Tiene solución para cualquier valor, por lo tanto puedes llegar a todo $\boldsymbol{R^2}$, se genera $\boldsymbol{R^2}$.

Geométricamente son dos vectores que generan $\boldsymbol{R^2}$.

Otras patinetas

<u>*PARTE IV*</u>

► *Ahora supón que tienes otros medios de transporte: una patineta* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}=(\mathbf{2},\mathbf{3})$ *y una alfombra* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}=(\mathbf{5},\mathbf{0})$. *¿Puedes ir a los mismos lugares que con las patinetas y alfombras anteriores? Explica tu respuesta.*

Combinación lineal con los nuevos vectores:

$$\boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{3}\end{pmatrix}+\boldsymbol{\beta}\begin{pmatrix}\mathbf{5}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a_1}\\\boldsymbol{a_2}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{5}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{a_1}$$

$$\mathbf{3}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{a_2}$$

Tiene solución para cualquier valor, por lo tanto puedes llegar a todo $\boldsymbol{R^2}$, se genera $\boldsymbol{R^2}$. Es lo mismo que los casos anteriores.

► *Supón que tienes una patineta* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}=(\mathbf{2},\mathbf{3})$ *y una alfombra* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}=(\mathbf{6},\mathbf{9})$. *¿Puedes ir a los mismos lugares que con tu patineta y alfombra anteriores? Explica tu respuesta.*

Combinación lineal con los nuevos vectores:

$$\boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{3}\end{pmatrix}+\boldsymbol{\beta}\begin{pmatrix}\mathbf{6}\\\mathbf{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a_1}\\\boldsymbol{a_2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}(\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{6}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{a_1})\mathbf{3}\\\underline{(\mathbf{3}\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{9}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{a_2})-\mathbf{2}}\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6\boldsymbol{\alpha} + 18\boldsymbol{\beta} = 3\boldsymbol{a_1} \\ \underline{-6\boldsymbol{\alpha} - 18\boldsymbol{\beta} = -2\boldsymbol{a_2}} \end{array}$$

$$\mathbf{0} = 3\boldsymbol{a_1} - 2\boldsymbol{a_2}$$

$$3\boldsymbol{a_1} = 2\boldsymbol{a_2}$$

$$\boldsymbol{a_1} = {}^{2\boldsymbol{a_2}}\!/_{\mathbf{3}}$$

Tiene solución solamente si se cumple la relación anterior. Por lo tanto, no llegas a todo ***R²***, sino a una recta. Esto sucede porque los vectores son múltiplos, paralelos.

$$\mathbf{3}\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{6}\\\mathbf{9}\end{pmatrix}$$

► *¿Puedes caracterizar a los pares de medios de transporte con los que puedes alcanzar cualquier lugar en el plano de coordenadas? ¿Qué pares permiten ir solamente a ciertos lugares del plano? ¿Cuáles son estos lugares?*

Si los vectores son paralelos se llega a una recta, pero si no son paralelos se llega a ***R²***.

Tres medios de transporte

<u>*PARTE V*</u>

Supón ahora que tienes tres medios de transporte, por ejemplo, una patineta $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{2}, \mathbf{3})$*, una alfombra mágica* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{5}, \mathbf{0})$ *y un jet ski* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}} = (\mathbf{1}, \mathbf{4})$*.*

► *¿Puedes llegar a cualquier lado?*

Combinación lineal con los tres vectores:

$$\boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{3}\end{pmatrix} + \boldsymbol{\beta}\begin{pmatrix}\mathbf{5}\\\mathbf{0}\end{pmatrix} + \boldsymbol{\partial}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a_1}\\\boldsymbol{a_2}\end{pmatrix}$$

Tiene solución para cualquier valor, por lo tanto puedes llegar a todo ***R²***, se genera ***R²***.

► *Supón que quieres ir a la ubicación **6** este y **1** sur ¿puedes llegar? ¿Cómo?*

Se quiere llegar al ***6E 1S***.

$$\boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{3}\end{pmatrix} + \boldsymbol{\beta}\begin{pmatrix}\mathbf{5}\\\mathbf{0}\end{pmatrix} + \boldsymbol{\partial}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{6}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

$$2\boldsymbol{\alpha} + 5\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\partial} = \mathbf{6}$$

$$\mathbf{3\alpha + 4\partial = -1}$$

$$\left(\begin{matrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 6 \\ -1 \end{matrix}\right) \rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & -15/2 & 5/2 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 3 \\ -10 \end{matrix}\right) \rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} -1/3 \\ 4/3 \end{matrix}\right)$$

El sistema tiene solución múltiple:

$$\alpha = -{}^{1}\!/_{3} - {}^{4}\!/_{3}\,\delta$$

$$\beta = {}^{4}\!/_{3} + {}^{1}\!/_{3}\,\delta$$

$$\delta = \delta$$

Se puede llegar de muchas formas puesto que hay solución múltiple.

► *¿Qué conjuntos de los tres medios de transporte permiten ir a cualquier lugar? ¿Cuáles no lo permiten? ¿Cómo puedes describir esto de manera geométrica y algebraica, usando vectores?*

Algebraicamente el sistema va a tener solución múltiple por lo que se puede llegar a todo $\boldsymbol{R^2}$, se genera $\boldsymbol{R^2}$. Como hay solución múltiple para cada posición se puede llegar de muchas formas, es decir, existen muchas combinaciones lineales.

Gráficamente si los tres vectores son paralelos se genera una recta en $\boldsymbol{R^2}$. Si no son paralelos, se genera $\boldsymbol{R^2}$.

ANEXO B. SOLUCIÓN DE LAS ACTIVIDADES DIDÁCTICAS DE COMBINACIÓN LINEAL, CONJUNTO GENERADOR, ESPACIO GENERADO, INDEPENDENCIA Y DEPENDENCIA LINEAL, BASE Y DIMENSIÓN

1.- *Encuentra si el vector* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (-\mathbf{1}, \mathbf{14})$ *es combinación lineal de los vectores* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2})$ *y* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}} = (-\mathbf{2}, \mathbf{4})$.

Se resuelve el sistema $\boldsymbol{a_1}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} + \boldsymbol{a_2}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}} = \overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$.

$\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & -\mathbf{2} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{14} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{array}\right)$ Por lo tanto si es combinación lineal y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = 3\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\,\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$.

2.- Encuentra si el vector $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (-\mathbf{7}, \mathbf{7}, \mathbf{7})$ *es combinación lineal de los vectores* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (-\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4})$ *y* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}} = (\mathbf{5}, -\mathbf{3}, \mathbf{1})$.

Se resuelve el sistema $\boldsymbol{a_1}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} + \boldsymbol{a_2}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}} = \overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$.

$\left(\begin{array}{cc|c} -\mathbf{1} & \mathbf{5} & -\mathbf{7} \\ \mathbf{2} & -\mathbf{3} & \mathbf{7} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{7} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right)$ Por lo tanto si es combinación lineal y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = \mathbf{2}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} - \overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$.

3.- *Demuestra si* $\overline{\boldsymbol{v}}$ ***= (8, 4, 7)*** *es combinación lineal de los vectores* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ ***= (1, 0, -1)***, $\overline{\boldsymbol{v}}_{2}$ ***= (2, 1, 3)*** *y* $\overline{\boldsymbol{v}}_{3}$ ***= (4, 2, 6)***.

Se resuelve el sistema: $\boldsymbol{c_1}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{c_2}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} + \boldsymbol{c_3}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}} = \overline{\boldsymbol{v}}$.

$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{7} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{5} \end{array}\right)$ Se llega a un absurdo, por lo tanto no existe solución y $\overline{\boldsymbol{v}}$ no es combinación lineal de $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$, $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$.

4.- Di si los vectores $\bar{\boldsymbol{\imath}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0})$ *y* $\bar{\boldsymbol{\jmath}} = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ *generan* $\boldsymbol{R^2}$.

Cualquier vector en $\boldsymbol{R^2}$ puede escribirse como combinación lineal de los vectores $\bar{\boldsymbol{\imath}}$ y $\bar{\boldsymbol{\jmath}}$ de la forma $\overline{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\bar{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{b}\bar{\boldsymbol{\jmath}}$. Por lo tanto, $\bar{\boldsymbol{\imath}}$ y $\bar{\boldsymbol{\jmath}}$ generan $\boldsymbol{R^2}$.

5.- Di si los vectores $\bar{\boldsymbol{\imath}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, $\bar{\boldsymbol{\jmath}} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$ *y* $\overline{\boldsymbol{k}} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *generan* $\boldsymbol{R^3}$.

Cualquier vector en $\boldsymbol{R^3}$ puede escribirse como combinación lineal de los vectores $\bar{\boldsymbol{\imath}}$, $\bar{\boldsymbol{\jmath}}$ y $\overline{\boldsymbol{k}}$ de la forma $\overline{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\bar{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{b}\bar{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{c}\overline{\boldsymbol{k}}$. Por lo tanto, $\bar{\boldsymbol{\imath}}$, $\bar{\boldsymbol{\jmath}}$ y $\overline{\boldsymbol{k}}$ generan $\boldsymbol{R^3}$.

6.- ¿Cuál es el espacio generado por los vectores $\boldsymbol{\bar{v}_1} = (\mathbf{2}, \mathbf{-1}, \mathbf{4})$ y $\boldsymbol{\bar{v}_2} = (\mathbf{4}, \mathbf{1}, \mathbf{6})$?

Sea ***H = gen {$\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$}***. Se resuelve el sistema $\boldsymbol{a_1\bar{v}_2} + \boldsymbol{a_2\bar{v}_3} = \boldsymbol{\bar{v}_1}$.

$\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \boldsymbol{x} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{y} \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} & \boldsymbol{z} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & (\boldsymbol{x} - \mathbf{4}\boldsymbol{y})/\mathbf{6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & (\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y})/\mathbf{6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{-5}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y} + \mathbf{3}\boldsymbol{z})/\mathbf{3} \end{array}\right)$ → existe solución única si ***-5x + 2y + 3z = 0***. Este plano en ***R^3*** que pasa por el origen es el espacio generado por los vectores $\boldsymbol{\bar{v}_1}$ y $\boldsymbol{\bar{v}_2}$.

*7.- SIN HACER operaciones, di si los siguientes vectores generan un plano y, en caso afirmativo, qué plano generan. EXPLICA tu respuesta. Sean $\boldsymbol{\bar{v}_1}$ **= (3, 0, 2)** y $\boldsymbol{\bar{v}_2}$ **= (-2, 0, 3)**.*

Los vectores $\boldsymbol{\bar{v}_1}$ y $\boldsymbol{\bar{v}_2}$ no son múltiplos por lo que son linealmente independientes, por lo que generan un plano en ***R^3***. La segunda componente es cero en ambos vectores por lo que el plano que generan es el plano ***xz***.

8.- ¿Son linealmente dependientes o independientes los vectores $\boldsymbol{\bar{v}_1} = (\mathbf{1}, \mathbf{2})$ y $\boldsymbol{\bar{v}_2} = (\mathbf{2}, \mathbf{4})$?

Los vectores son múltiplos, $2\boldsymbol{\bar{v}_1}$ **=** $\boldsymbol{\bar{v}_2} \rightarrow 2\boldsymbol{\bar{v}_1} - \boldsymbol{\bar{v}_2} = \boldsymbol{\bar{0}}$, por lo tanto son linealmente dependientes.

9.- ¿Son linealmente dependientes o independientes los vectores $\boldsymbol{\bar{v}_1} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})$, $\boldsymbol{\bar{v}_2} = (\mathbf{-4}, \mathbf{1}, \mathbf{5})$ y $\boldsymbol{\bar{v}_3} = (\mathbf{-5}, \mathbf{8}, \mathbf{19})$?

Se resuelve el sistema $\boldsymbol{c_1\bar{v}_1} + \boldsymbol{c_2\bar{v}_2} + \boldsymbol{c_3\bar{v}_3} = \boldsymbol{\bar{0}}$.

$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{-4} & \mathbf{-5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{19} & \mathbf{0} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right)$ → Existe solución múltiple y los vectores son linealmente dependientes puesto que $\mathbf{3}\boldsymbol{\bar{v}_1} + \mathbf{2}\boldsymbol{\bar{v}_2} - \boldsymbol{\bar{v}_3} = \boldsymbol{\bar{0}}$.

10.- ¿Son linealmente dependientes o independientes los vectores $\boldsymbol{\bar{v}_1} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4})$ y $\boldsymbol{\bar{v}_2} = (\mathbf{2}, \mathbf{-5}, \mathbf{3})$?

Se resuelve el sistema $\boldsymbol{c_1\bar{v}_1} + \boldsymbol{c_2\bar{v}_2} = \boldsymbol{\bar{0}}$.

$\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right)$ → Existe solución única por lo tanto los vectores son linealmente independientes.

11.- ¿Son linealmente dependientes o independientes los vectores $\bar{\boldsymbol{v}}_1 = (\mathbf{2}, -\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{3})$ *y* $\bar{\boldsymbol{v}}_2 = (-\mathbf{6}, \mathbf{3}, \mathbf{0}, -\mathbf{9})$*?*

Los vectores son múltiplos, $\bar{\boldsymbol{v}}_2 = -\mathbf{3}\bar{\boldsymbol{v}}_1$, por lo tanto son linealmente dependientes.

12.- ¿Son linealmente dependientes o independientes los vectores $\bar{\boldsymbol{v}}_1 = (\mathbf{1}, -\mathbf{2}, \mathbf{3})$, $\bar{\boldsymbol{v}}_2 = (\mathbf{2}, -\mathbf{2}, \mathbf{0})$ *y* $\bar{\boldsymbol{v}}_3 = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{7})$*?*

Se resuelve el sistema $\boldsymbol{c}_1\bar{\boldsymbol{v}}_1 + \boldsymbol{c}_2\bar{\boldsymbol{v}}_2 + \boldsymbol{c}_3\bar{\boldsymbol{v}}_3 = \bar{\mathbf{0}}$.

$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{2} & -\mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{7} & \mathbf{0} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}\right)$ → Existe solución única. Los vectores son linealmente independientes.

13.- Sean $\bar{\boldsymbol{v}}_1$ ***= (1, 1, 1)****,* $\bar{\boldsymbol{v}}_2$ ***= (3, -1, 0)*** *y* $\bar{\boldsymbol{v}}_3$***= (4, 1, 1)*** *linealmente independientes. Di, sin hacer operaciones, si* $\bar{\boldsymbol{v}}$ ***= (0, 0, 1)*** *es combinación lineal de* $\bar{\boldsymbol{v}}_1$*,* $\bar{\boldsymbol{v}}_2$ *y* $\bar{\boldsymbol{v}}_3$*. Si lo es, no es necesario dar la combinación lineal. Explica tu respuesta.*

Los vectores $\bar{\boldsymbol{v}}_1$, $\bar{\boldsymbol{v}}_2$ y $\bar{\boldsymbol{v}}_3$ son linealmente independientes por lo que generan $\boldsymbol{R}^3$. El vector $\bar{\boldsymbol{v}}$ está en $\boldsymbol{R}^3$, por lo tanto es combinación lineal de $\bar{\boldsymbol{v}}_1$, $\bar{\boldsymbol{v}}_2$ y $\bar{\boldsymbol{v}}_3$.

*14.- **SIN** hacer operaciones di si los siguientes vectores son linealmente dependientes o independientes. **EXPLICA** tu respuesta.*

a) ***(2, 3, 5)****,* ***(0, 0, 0)****,* ***(1, 1, 8)***

b) ***(-2, 4, 6, 10)****,* ***(3, -6, -9, -30)***

c) ***(1, 4), (3, -5), (2, 1)***

d) ***(1, 0, 1, 1)****,* ***(0, 1, 1, 1)***

Inciso ***a)*** El conjunto de vectores incluye al vector cero por lo tanto son linealmente dependientes.

Inciso ***b)*** Los vectores son múltiplos por lo tanto son linealmente dependientes.

Inciso ***c)*** Son tres vectores en $\boldsymbol{R}^2$ por lo tanto linealmente dependientes.

Inciso ***d)*** Los vectores no son múltiplos por lo tanto son linealmente independientes.

15.- ¿Si ninguno de los tres vectores, $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ en $\boldsymbol{R^3}$ es un múltiplo de alguno de los otros vectores, entonces $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ son linealmente independientes?

No se puede concluir. El teorema dice que dos vectores múltiplos son linealmente dependientes, pero no se puede generalizar a tres vectores.

16.- Justifica si el siguiente enunciado es verdadero o falso. Si $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ son linealmente independientes, entonces $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ no están en $\boldsymbol{R^2}$.

Tres vectores en $\boldsymbol{R^2}$ son linealmente dependientes pues tenemos ***3 > 2*** (***vectores > dimensión***). Por lo tanto, si los vectores son linealmente independientes deben estar en $\boldsymbol{R^n}$ con ***n > 2***.

17.- Di si es falso o verdadero. ***EXPLICA*** *tu respuesta.*

a) *Las columnas de cualquier matriz* $\boldsymbol{A_{4x5}}$ *son linealmente dependientes.*

b) *Si $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ son linealmente independientes y $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ son linealmente dependientes, entonces puedes afirmar que $\bar{v}_3$ es combinación lineal de $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$.*

Inciso ***a)*** Si $\boldsymbol{A_{4x5}}$ entonces sería un sistema subdeterminado con 5 variables y 4 ecuaciones que tendría solución múltiple, por lo tanto los vectores son linealmente dependientes. Si $\boldsymbol{A_{4x5}}$ se tienen 5 vectores en $\boldsymbol{R^4}$ por lo tanto son linealmente dependientes. Verdadero

Inciso ***b)*** Si $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ son linealmente dependientes y $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ son linealmente independientes significa que $\bar{v}_3$ es combinación lineal de $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$, entonces $\bar{v}_3 \in \boldsymbol{gen}\,\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$. Verdadero.

18.-Sean $\bar{v}_1$ = ***(1, 1, 1)***, *$\bar{v}_2$* ***= (3, -1, 0)*** *y $\bar{v}_3$****= (4, 1, 1)*** *¿Está $\bar{v}$* ***= (0, 0, 1)*** *en el espacio generado por $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$?*

Se resuelve el sistema: $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + c_3\bar{v}_3 = \bar{v}$ para saber si $\bar{v}$ es combinación lineal de los vectores dados.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 \end{array}\right)$$

Por lo tanto $\bar{v}$ está en el espacio generado por los vectores $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ y es combinación lineal de ellos: $\frac{7}{3}\bar{v}_1 + \bar{v}_2 - \frac{4}{3}\bar{v}_3 = \bar{v}$.

*19.- ¿En qué casos es posible que cuatro vectores generen **R^5**? **JUSTIFICA**.*

En ningún caso, se necesitan 5 vectores linealmente independientes para generar **R^5**.

*20.- Encuentra un conjunto de vectores que genere a **W = {$\bar{v}$ ε R^4 | $\bar{v}$= (4a+3b, 0, a+b+c, c-2a) con a, b, c ε R}**.*

Podemos escribir al vector como: $\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{a}\begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix} + \boldsymbol{b}\begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \boldsymbol{c}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ → ***W*** se genera con el conjunto de vectores $\left\{\begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}\right\}$.

*21.- Sean $\bar{v}_1$ **= (1, 0, -2)**, $\bar{v}_2$ **= (-2, 1, 7)** y $\bar{v}_3$ **= (h, -3, -5)**. ¿Para qué valores de **h** se encuentra $\bar{v}_3$ en **gen {$\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ }**?*

a) ¿Son linealmente dependientes o independientes los vectores $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$? ¿Qué generan?

b) ¿Son linealmente dependientes o independientes los vectores $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$? ¿Qué generan?

*c) ¿Qué diferencia existe entre **gen {$\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ }** y **gen {$\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$}**?*

Se resuelve el sistema $\boldsymbol{c_1\bar{v}_1} + \boldsymbol{c_2\bar{v}_2} = \boldsymbol{\bar{v}_3}$ para saber qué valor debe tener ***h*** para que el sistema tenga solución.

$\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \boldsymbol{h} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{7} & \mathbf{-5} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{h-6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4+2}\boldsymbol{h} \end{array}\right)$ Tiene solución si ***4 + 2h = 0*** → si ***h = -2*** entonces $\boldsymbol{\bar{v}_3} \in$ ***gen*** $\{\boldsymbol{\bar{v}_1}, \boldsymbol{\bar{v}_2}\}$.

Inciso ***a)*** Los vectores $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ son linealmente dependientes puesto que $\bar{v}_3$ es combinación lineal de $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$. Los tres generan un plano en ***R^3***.

Inciso ***b)*** Los vectores $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ son linealmente independientes pues no son múltiplos. Generan un plano en ***R^3***.

Inciso ***c)*** Los vectores $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ son linealmente dependientes y los vectores $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ son linealmente independientes. Ambos conjuntos generan el mismo plano en ***R^3***.

22.- Sean $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{1})$, $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ y $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}} = (\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{6})$.

a) *Sin hacer cálculos encuentra qué generan $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}, \bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}\ y\ \bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$.*

b) *Sea $\bar{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$. ¿Está $\bar{\boldsymbol{v}}$ en el subespacio generado por $\{\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}, \bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}\ y\ \bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}\}$. ¿Por qué?*

c) *Con la información del inciso anterior revisa el inciso a). ¿Cambia tu respuesta? ¿Por qué?*

Inciso ***a)*** El espacio que generan depende de cuántos vectores son linealmente independientes. Si son linealmente independientes: tres se genera ***R³***, dos se genera un plano en ***R³*** y uno se genera una recta en ***R³***.

Inciso ***b)*** Se resuelve el sistema: $\boldsymbol{c}_{\mathbf{1}}\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{c}_{\mathbf{2}}\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} + \boldsymbol{c}_{\mathbf{3}}\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}} = \bar{\boldsymbol{v}}$ para saber si $\bar{\boldsymbol{v}}$ es combinación lineal de los vectores dados.

$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right)$ Tiene solución múltiple, por lo tanto $\bar{\boldsymbol{v}}$ está en el espacio generado por $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$, $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ y $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$ y es combinación lineal de ellos.

Inciso ***c)*** Sabemos que la matriz tiene dos pivotes por lo tanto hay dos vectores linealmente independientes y se genera un plano en ***R³***.

23.- Sean $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{3},\ \mathbf{3}, -\mathbf{1})$, $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{1}, \mathbf{12}, \mathbf{0})$ y $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}} = (\mathbf{3},\ \mathbf{36}, \mathbf{0})$. Sin hacer operaciones di qué generan $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}, \bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}\ y\ \bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$.

Los vectores $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ y $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$ son múltiplos, por lo tanto son linealmente dependientes. Los vectores $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ y $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ o los vectores $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ y $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$ son linealmente independientes, por lo tanto $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}, \bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}\ y\ \bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$ generan un plano en ***R³***.

*24.- Escribe dos vectores linealmente independientes en **R⁶** (explica por qué lo son) y encuentra un vector que esté en el espacio generado por ellos.*

Sean $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ = ***(1, 2, 3, 4, 5, 6)*** y $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$***= (7, 8, 9, 10, 11, 12)***, no múltiplos por lo tanto son linealmente independientes. Sea $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$ **=** $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} + \bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ ***= (8, 10, 12, 14, 16, 18)***.

Cualquier pareja de vectores no múltiplos y cualquier combinación lineal de ellos es correcta.

25.- Di si es falso o verdadero. EXPLICA tu respuesta.

a) *Sean los vectores $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}$, $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}$, $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{4}}$ en **R**^{n}. Si sabes que las parejas $\{\overline{\boldsymbol{v}}_1, \overline{\boldsymbol{v}}_2\}$, $\{\overline{\boldsymbol{v}}_1, \overline{\boldsymbol{v}}_3\}$, $\{\overline{\boldsymbol{v}}_1, \overline{\boldsymbol{v}}_4\}$, $\{\overline{\boldsymbol{v}}_2, \overline{\boldsymbol{v}}_3\}$, $\{\overline{\boldsymbol{v}}_2, \overline{\boldsymbol{v}}_4\}$ y $\{\overline{\boldsymbol{v}}_3, \overline{\boldsymbol{v}}_4\}$ son linealmente independientes, entonces el conjunto $\{\overline{\boldsymbol{v}}_1, \overline{\boldsymbol{v}}_2, \overline{\boldsymbol{v}}_3, \overline{\boldsymbol{v}}_4\}$ es linealmente independiente.*

b) *Dos vectores son linealmente dependientes si y sólo si, están en una misma recta que pasa por el origen.*

Inciso ***a)*** El hecho de que las parejas de vectores sean linealmente independientes no garantiza que el conjunto de los cuatro lo sea. No se puede concluir. Falso.

Inciso ***b)*** Si los dos vectores están sobre la misma recta entonces son paralelos y múltiplos por lo tanto son linealmente dependientes y generan una recta que pasa por el origen. Verdadero.

*26.- Encuentra dos vectores que generen **R**^{2}. ¿Existen otras parejas que también lo generen? ¿Son linealmente dependientes o independientes estas parejas de vectores? ¿Forman una base para **R**^{2}? ¿Cuál es la dimensión de dicha base?*

Los vectores $\bar{\boldsymbol{\imath}}$ y $\bar{\boldsymbol{\jmath}}$ generan ***R***^{2}. Si existen otras parejas que generen ***R***^{2}. Estas parejas tienen que ser linealmente independientes y forman una base para ***R***^{2} puesto que dos vectores linealmente independientes generan ***R***^{2}.

*27.- Encuentra tres vectores que generen **R**^{2}. ¿Existen otras tercias que también lo generen? ¿Son linealmente dependientes o independientes estas tercias de vectores? ¿Necesitas tres vectores para generar **R**^{2}? ¿Forman una base?*

Sean $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2})$, $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}} = (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{5})$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}} = (\boldsymbol{3}, -\boldsymbol{4})$ tres vectores que generan ***R***^{2}. También hay otras tercias que generan ***R***^{2}. Todas son linealmente dependientes pues se tienen 3 vectores en ***R***^{2}. No es necesario tener tres vectores para generar ***R***^{2}, basta con dos vectores linealmente independientes. Tres vectores no pueden formar una base pues siempre serán linealmente dependientes.

28.- *¿Son linealmente dependientes o independientes los vectores $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} = (\boldsymbol{2}, -\boldsymbol{3}, \boldsymbol{4})$, $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}} = (\boldsymbol{4}, \boldsymbol{7}, -\boldsymbol{6})$, $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}} = (\boldsymbol{18}, -\boldsymbol{11}, \boldsymbol{4})$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{4}} = (\boldsymbol{2}, -\boldsymbol{7}, \boldsymbol{3})$? ¿Forman una base para **R**^{3}? Explica.*

Se tienen cuatro vectores en ***R***^{3}, por lo tanto los vectores son linealmente dependientes y no pueden ser base. Se necesitan 3 vectores linealmente dependientes para que generen ***R***^{3} y formen una base.

*29.- Sea $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}$ **= (2, -1, 4)**, $\overline{\boldsymbol{v}}_{2}$ **= (1, 0, k)** y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}}$ **= (3, -1, 5)**. ¿Para qué valores de **k** los vectores $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}$, $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}}$ son una base para **R**^{3}? Explica tu respuesta.*

Se resuelve $\boldsymbol{c_1}\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} + \boldsymbol{c_2}\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{c_3}\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}} = \overline{\boldsymbol{0}}$.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & k & 5 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 \end{array}\right)$ Para que los vectores sean linealmente independientes se necesita ***1 – k ≠ 0*** para que el sistema tenga solución única.

Por lo tanto, si ***k ≠ 1*** los vectores serán linealmente independientes lo que significa que generan ***R***^{3} y son base.

*30.- Sea $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}$ **= (7, 4, -9, -5)**, $\overline{\boldsymbol{v}}_{2}$ **= (4, -7, 2, 5)** y $\overline{\boldsymbol{v}}_{3}$ **= (1, -5, 3, 4)**. Sabes que $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}$ **– 3**$\overline{\boldsymbol{v}}_{2}$ **+ 5**$\overline{\boldsymbol{v}}_{3}$ **=** $\overline{\boldsymbol{0}}$. Usa esta información para encontrar una base para **H = gen {**$\overline{\boldsymbol{v}}_{1}$, $\overline{\boldsymbol{v}}_{2}$, $\overline{\boldsymbol{v}}_{3}$**}**.*

Si $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}$ ***– 3***$\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}$ ***+ 5***$\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}}$ ***= 0*** entonces los tres vectores son linealmente dependientes. Los conjuntos $\{\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}, \overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}\}$ o $\{\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}, \overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}}\}$ o $\{\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}, \overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}}\}$ generan ***H***. Además, las parejas no son múltiplos por lo tanto son linealmente independientes y forman una base de dimensión dos.

*31.- Sea **H = gen {**$\overline{\boldsymbol{v}}_{1}$**,** $\overline{\boldsymbol{v}}_{2}$**,** $\overline{\boldsymbol{v}}_{3}$**, ….,** $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{n}}$**}**, entonces **{**$\overline{\boldsymbol{v}}_{1}$**,** $\overline{\boldsymbol{v}}_{2}$**,** $\overline{\boldsymbol{v}}_{3}$**, …,** $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{n}}$**}** es una base para **H**. Cierto o falso, explica.*

Para que los vectores $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}$**,** $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}$**,** $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}}$**, …,** $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{n}}$ sean base se necesita que generen y sean linealmente independientes. Por lo tanto, es falso pues no sabemos si son linealmente independientes.

32.- El conjunto de vectores $\{\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}, \dots, \overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{n}}\}$ es linealmente independiente entonces $\{\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}, \dots, \overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{n-1}}\}$ es base del espacio generado por $\{\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}, \dots, \overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{n}}\}$. Falso o verdadero.

Falso pues al quitar un vector no se genera el mismo espacio.

33.- Encuentra los vectores que se piden.

*a) 5 vectores en **R**^{4} que sean una base para **R**^{4}.*

*b) 4 vectores en **R**^{5} que sean base para **R**^{5}.*

*c) 2 vectores linealmente independientes en **R**^{6} (explica por qué lo son) y encuentra un vector que esté en el espacio generado por ellos.*

*d) Escribe una base para **R**^{7}que incluya al vector cero.*

Inciso **a)** No existen cinco vectores en $\boldsymbol{R^4}$ que sean base puesto que cinco vectores en $\boldsymbol{R^4}$ son linealmente dependientes.

Inciso ***b)*** No existen cuatro vectores en $\boldsymbol{R^5}$ que sean base para $\boldsymbol{R^5}$ puesto que cuatro vectores en $\boldsymbol{R^5}$ no generan $\boldsymbol{R^5}$.

Inciso ***c)*** Sean $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} =$ ***(1, 2, 3, 4, 5, 6)*** y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$***= (7, 8, 9, 10, 11, 12)***, no múltiplos por lo tanto son linealmente independientes. Sea $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{3}}$ **=** $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} + \overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ ***= (8, 10, 12, 14, 16, 18)***. Cualquier pareja de vectores no múltiplos y cualquier combinación lineal es correcta.

Inciso ***d)*** No existe ninguna base que incluya al vector cero puesto que el conjunto de vectores sería linealmente dependiente.

34.- Encuentra una base y su dimensión para el conjunto de vectores en el plano: ***x + 2y + z = 0****. Explica tu procedimiento y justifica tu respuesta.*

x + 2y + z = 0 → ***x = -2y – z, y = y, z = z***. Por lo tanto una base es***:*** $\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}\right\}$ y la dimensión es dos.

35.- Sea ***z = 2x + 5y****.*

a) ¿Qué representa gráficamente?

Un plano en $\boldsymbol{R^3}$.

b) ¿Es un subespacio vectorial?

Un plano que pasa por el origen es un subespacio vectorial.

c) ¿Cuántos vectores tendría una base? ¿Existen varias bases?

Existen muchas bases, pero todas tienen que tener dos vectores linealmente independientes que generen al plano.

d) Encuentra una base y su dimensión.

Sea ***x = 0, y = 1*** → ***z = 5*** → $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{5})$.

Sea ***x = 1, y = 0*** → ***z = 2*** → $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{2})$.

Base ***{*** $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}, \overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ ***}***, dimensión de la base ***2***.

ANEXO C. SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE MODELACIÓN DE VALORES, VECTORES Y ESPACIOS PROPIOS

A continuación están los problemas con las preguntas que la maestra fue haciendo al ir avanzando en su solución.

C.1 PROBLEMA ORIGINAL EMPLEO – DESEMPLEO

Supóngase que $\boldsymbol{x_t}$ *representa el número de personas empleadas en el periodo* $\boldsymbol{t}$ *y* $\boldsymbol{y_t}$ *el número de desempleados en el mismo periodo. La fuerza laboral* $\boldsymbol{L = x_t + y_t}$ *se mantiene constante. Sean* **p** *la probabilidad de que una persona desempleada encuentre trabajo en cualquier periodo dado y* **q** *la probabilidad de que una persona empleada continúe empleada. El siguiente modelo describe la dinámica del empleo:*

$$
\begin{aligned}
x_{t+1} &= qx_t + py_t \\
y_{t+1} &= (1-q)x_t + (1-p)y_t
\end{aligned}
$$

Supóngase que $\boldsymbol{q = 1/2}$ *y* $\boldsymbol{p = 1/3}$*. Resuelve y encuentra qué sucede a largo plazo.*

1.- Escribe el sistema anterior en notación matricial.

Sustituyendo los valores tenemos:

$$
\begin{aligned}
x_{t+1} &= 1/2x_t + 1/3y_t \\
y_{t+1} &= 1/2x_t + 2/3y_t
\end{aligned}
$$

En notación matricial:

$$
\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}
$$

$$
\overline{x}_{t+1} = A\overline{x}_t
$$

A una ecuación de esta forma se le llama ecuación en diferencias, puesto que depende del anterior.

2.- Sea $\overline{x}_t = \lambda^t \overline{v}$ *una solución. Demuestra que es solución o en qué condiciones es solución, para ello sustituye la solución y llega a un sistema en función de la matriz* **A** *y el vector* $\overline{v}$*.*

Sea la siguiente expresión una solución a la ecuación en diferencias anterior.

$$\overline{\boldsymbol{x}}_t = \boldsymbol{\lambda}^t \overline{\boldsymbol{v}}$$

Como $\overline{\boldsymbol{x}}_t = \boldsymbol{\lambda}^t \overline{\boldsymbol{v}}$ entonces $\overline{\boldsymbol{x}}_{t+1} = \boldsymbol{\lambda}^{t+1} \overline{\boldsymbol{v}}$ entonces, si $\overline{\boldsymbol{x}}_t$ es solución debe cumplirse que:

$$\overline{\boldsymbol{x}}_{t+1} = \boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}}_t$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{t+1}\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\lambda}^t\overline{\boldsymbol{v}}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{t+1}\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\lambda}^t(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}})$$

$$\boldsymbol{\lambda}^t(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}) - \boldsymbol{\lambda}^{t+1}\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\mathbf{0}}$$

Esta ecuación puede escribirse como:

$$\boldsymbol{\lambda}^t(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}) - \boldsymbol{\lambda}^t\boldsymbol{\lambda}\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\lambda}^t(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{\lambda}\overline{\boldsymbol{v}}) = \overline{\mathbf{0}}$$

Si $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$ (en algunos casos puede tomar el valor de cero)

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{\lambda}\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\mathbf{0}}$$

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I})\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\mathbf{0}}$$

Esto nos dice que la única manera de que la solución propuesta lo sea es que $\boldsymbol{\lambda}$ sea un valor propio de la matriz ***A*** y que $\overline{\boldsymbol{v}}$ sea un vector propio correspondiente a $\boldsymbol{\lambda}$.

3.- Encuentra los valores de $\boldsymbol{\lambda}$ (valor propio) para los cuales $\overline{\boldsymbol{v}} \neq \overline{\mathbf{0}}$ (vector propio asociado a $\boldsymbol{\lambda}$).

Como $\overline{\boldsymbol{v}} \neq \overline{\mathbf{0}}$ entonces necesitamos que el sistema tenga solución múltiple por lo que $|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}| = \mathbf{0}$.

Resolvemos el determinante anterior (ecuación característica).

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \boldsymbol{\lambda} & \mathbf{1/3} \\ \mathbf{1/2} & \frac{2}{3} - \boldsymbol{\lambda} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \boldsymbol{\lambda}\right)\left(\frac{2}{3} - \boldsymbol{\lambda}\right) - \frac{1}{6} = \boldsymbol{\lambda}^2 - \frac{7}{6}\boldsymbol{\lambda} + \frac{1}{6} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\frac{7}{6} \pm \sqrt{\frac{49}{36} - 4\left(\frac{1}{6}\right)}}{2} = \frac{\frac{7}{6} \pm \sqrt{\frac{49-24}{36}}}{2} = \frac{\frac{7}{6} \pm \frac{5}{6}}{2}$$

Por lo tanto $\boldsymbol{\lambda}_1 = \mathbf{1}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{\lambda}_2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$, valores propios de la matriz ***A.***

4.- Para cada $\boldsymbol{\lambda}$ (valor propio) encuentra un $\overline{\boldsymbol{v}}$ (vector propio).

Sustituimos en la ecuación $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I})\overline{\boldsymbol{v}}=\overline{\mathbf{0}}$ los valores propios encontrados.

Para $\boldsymbol{\lambda_1}=\mathbf{1}$ tenemos:

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/3 \\ 1/2 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2=0$$

$$x_1=\frac{2}{3}x_2 \Rightarrow \overline{v}=\left(\frac{2}{3}x_2, x_2\right)$$

Se llega a una infinidad de soluciones, todas generan una misma línea recta. Se obtiene una familia de vectores propios asociados a este valor propio. En términos del problema basta con elegir uno.

Sea $\boldsymbol{x_2}=\mathbf{3} \Rightarrow \boldsymbol{x_1}=\mathbf{2} \Rightarrow \overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}=(\mathbf{2},\mathbf{3})$.

Entonces para el valor propio $\boldsymbol{\lambda_1}=\mathbf{1}$ tenemos como vector propio a $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}=(\mathbf{2},\mathbf{3})$.

Hacemos lo mismo para $\boldsymbol{\lambda_2}=\frac{1}{6}$.

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2=0$$

$$x_1=-x_2 \Rightarrow \overline{v}=(-x_2, x_2)$$

Se llega a una infinidad de soluciones, todas generan una misma línea recta. Se obtiene una familia de vectores propios asociados a este valor propio. En términos del problema basta con elegir uno.

Sea $\boldsymbol{x_2}=\mathbf{1} \Rightarrow \boldsymbol{x_1}=-\mathbf{1} \Rightarrow \overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}=(-\mathbf{1},\mathbf{1})$.

Entonces para el valor propio $\boldsymbol{\lambda_1}=\mathbf{1/6}$ tenemos como vector propio a $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}=(-\mathbf{1},\mathbf{1})$.

*5.- Teníamos que $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{t+1}}=\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{t}}$. Si $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ son vectores propios de una matriz **A** con valores propios correspondientes $\boldsymbol{\lambda_1}$ y $\boldsymbol{\lambda_2}$ entonces la combinación lineal de ellos también es solución. Definimos: $\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{c_1}\boldsymbol{\lambda_1^t}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}+\boldsymbol{c_2}\boldsymbol{\lambda_2^t}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$. Demuestra que es solución.*

$$A\bar{x}_t = A(c_1\lambda_1^t\bar{v}_1 + c_2\lambda_2^t\bar{v}_2) = c_1\lambda_1^t A\bar{v}_1 + c_2\lambda_2^t A\bar{v}_2 =$$

$$c_1\lambda_1^t\lambda_1\bar{v}_1 + c_2\lambda_2^t\lambda_2\bar{v}_2 = c_1\lambda_1^{t+1}\bar{v}_1 + c_2\lambda_2^{t+1}\bar{v}_2 = \bar{x}_{t+1}$$

6.- Sustituye $\bar{x}_t = c_1\lambda_1^t\bar{v}_1 + c_2\lambda_2^t\bar{v}_2$ en nuestro ejemplo e interpreta el resultado cuando $t \to \infty$.

$$\bar{x}_t = c_1\lambda_1^t\bar{v}_1 + c_2\lambda_2^t\bar{v}_2 =$$

$$= c_1 1^t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \left(\frac{1}{6}\right)^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si $t \to \infty$ entonces $\left(\frac{1}{6}\right)^t \to 0$ y nos quedaría:

$$\bar{x}_t \approx c_1 1^t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_{t+1} \approx c_1 1^{t+1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 c_1 1^t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1\bar{x}_t$$

Esto quiere decir que $\bar{x}_{t+1}$ es un múltiplo de $\bar{v}_1 = (2, 3)$, de esta forma la proporción se mantiene: hay 2 empleados por cada 3 desempleados.

Si el valor propio es distinto de uno, entonces $\bar{x}_{t+1}$ aumentaría cada mes por $\lambda\bar{x}_t$.

C.2 Problema de población

*En un bosque de México viven los búhos manchados. Supón que no tienen depredadores y tienen alimento suficiente. Sabes que en el periodo **t + 1** sobrevive una proporción de los búhos del periodo anterior.*

1.- Escribe un modelo que describa lo anterior.

$$x_{t+1} = kx_t$$

donde ***k*** es la proporción de búhos que sobrevive en el periodo ***t***.

*2.- Encuentra la solución, si sabes que la proporción de búhos que sobrevive de un periodo a otro es **2/3** y que la población inicial es de **375** búhos. ¿Qué pasará a la larga?*

$x_{t+1} = kx_t$ si ***k* =2/3** entonces $x_{t+1} = \frac{2}{3}x_t$.

Damos valores a ***t***:

Si ***t=0*** $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{x_1 = \frac{2}{3}x_0}$

Si ***t=1*** $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{x_2 = \frac{2}{3}x_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x_0\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 x_0}$

Si ***t=2*** $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{x_3 = \frac{2}{3}x_2 = \frac{2}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 x_0\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 x_0}$

Por lo tanto: $\boldsymbol{x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n x_0}$. A la larga, si $\boldsymbol{n} \to \infty$ entonces $\left(\frac{2}{3}\right)^{\boldsymbol{n}}$ tiende a cero por lo que la población de búhos desaparecerá. En general, si $\boldsymbol{k} < 1$, todos los búhos se morirán y si ***k = 1*** la población de búhos permanecerá igual.

3.- Encuentra la solución para el modelo en general.

Daremos valores a ***t***.

Si ***t=0*** $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{x_1 = kx_0}$

Si ***t=1*** $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{x_2 = kx_1 = k(kx_0) = k^2x_0}$

Si ***t=2*** $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{x_3 = kx_2 = k(k^2x_0) = k^3x_0}$

Por lo tanto: $\boldsymbol{x_n = k^n x_0}$.

C.3 PROBLEMA DE EMPLEO

*En una economía sabes que el número de empleados en el periodo **t + 1** es una proporción del número de empleados del periodo anterior.*

1.- Escribe un modelo que describa la dinámica del empleo.

$$\boldsymbol{x_{t+1} = qx_t}$$

donde ***q*** es la proporción de empleados que sigue empleada.

*2.- Encuentra una solución de la ecuación que representa el modelo matemático, si sabes que la proporción de personas que sigue empleada es la mitad y que la población inicial es de **100** personas. ¿Qué pasará con el número de empleados a la larga?*

$\boldsymbol{x_{t+1} = qx_t}$ si ***q* = ½** entonces $\boldsymbol{x_{t+1} = \frac{1}{2}x_t}$.

Damos valores a ***t***:

Si ***t=0*** $\Longrightarrow\ \boldsymbol{x_1 = \frac{1}{2}x_0}$

Si ***t=1*** $\Longrightarrow\ \boldsymbol{x_2 = \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x_0\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 x_0}$

Si ***t=2*** $\Longrightarrow\ \boldsymbol{x_3 = \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 x_0\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 x_0}$

Por lo tanto: $\boldsymbol{x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n x_0}$. A la larga, si $\boldsymbol{n} \to \infty$ entonces $\left(\frac{1}{2}\right)^{\boldsymbol{n}}$ tiende a cero por lo que las personas empleadas desaparecerán. En general, si $\boldsymbol{q} < 1$, toda la gente quedará sin empleo a la larga y si ***q = 1*** el número de personas empleadas permanecerá igual.

3.- Encuentra la solución para la ecuación del modelo original que planteaste.

Daremos valores a ***t***.

Si ***t=0*** $\Longrightarrow\ \boldsymbol{x_1 = qx_0}$

Si ***t=1*** $\Longrightarrow\ \boldsymbol{x_2 = qx_1 = q(qx_0) = q^2x_0}$

Si ***t=2*** $\Longrightarrow\ \boldsymbol{x_3 = qx_2 = q(q^2x_0) = q^3x_0}$

Por lo tanto: $\boldsymbol{x_n = q^nx_0}$.

C.4 PROBLEMA DE EMPLEO – DESEMPLEO

Supóngase que $\boldsymbol{x_t}$ *representa el número de personas empleadas en el periodo* ***t*** *y* $\boldsymbol{y_t}$ *el número de desempleados en el mismo periodo. La fuerza laboral se mantiene constante. Sean* ***p*** *la probabilidad de que una persona desempleada encuentre trabajo en cualquier periodo dado y* ***q*** *la probabilidad de que una persona empleada continúe empleada.*

Encuentra un modelo que describa la dinámica del empleo y el comportamiento del mismo a largo plazo.

1.- Encuentra un modelo que describa la dinámica del empleo. Escríbelo en notación matricial.

$$\boldsymbol{x_{t+1} = qx_t + py_t}$$
$$\boldsymbol{y_{t+1} = (1-q)x_t + (1-p)y_t}$$

En notación matricial:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & p \\ 1-q & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_{t+1} = A\bar{x}_t$$

A una ecuación de esta forma se le llama ecuación en diferencias, puesto que $\bar{x}_{t+1}$ depende de la anterior, $\bar{x}_t$. Las variables x_t y y_t están en función del tiempo t. El tiempo es un valor discreto (mensual o anual) por lo tanto x_t y y_t son funciones discretas.

2.- Encuentra una solución para el sistema anterior. Verifica que es solución.

Propongamos $\bar{x}_{t+1} = k^{t+1}\bar{v}$ y, por lo tanto, $\bar{x}_t = k^t\bar{v}$. Se sustituye para comprobar que es solución.

$$\bar{x}_{t+1} = A\bar{x}_t$$

$$k^{t+1}\bar{v} = Ak^t\bar{v}$$

$$k^{t+1}\bar{v} = k^t(A\bar{v})$$

$$k^t(A\bar{v}) - k^{t+1}\bar{v} = \bar{0}$$

Esta ecuación puede escribirse como:

$$k^t(A\bar{v}) - k^t k\bar{v} = k^t(A\bar{v} - k\bar{v}) = \bar{0}$$

Entonces ***k***$= \mathbf{0}$ ó

$$A\bar{v} - k\bar{v} = \bar{0}$$

$$(A - kI)\bar{v} = \bar{0}$$

Por lo tanto, k y $\bar{v}$ tienen que cumplir la ecuación anterior. Como $\bar{v} = \bar{0}$ no tendría sentido, entonces se necesita que $\bar{v} \neq \bar{0}$. Es decir, el sistema debe tener solución múltiple por lo que $|A - kI| = 0$.

3.- Resuelve usando los valores ***q = ½*** *y* ***p = 1/3****.*

Sustituyendo los valores se tiene:

$$x_{t+1} = 1/2x_t + 1/3y_t$$
$$y_{t+1} = 1/2x_t + 2/3y_t$$

Usando los valores dados se resuelve el determinante anterior, $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{kI}|=\mathbf{0}$.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-k & 1/3 \\ 1/2 & \frac{2}{3}-k \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}-k\right)\left(\frac{2}{3}-k\right)-\frac{1}{6}=k^2-\frac{7}{6}k+\frac{1}{6}=0$$

$$k=\frac{\frac{7}{6}\pm\sqrt{\frac{49}{36}-4\left(\frac{1}{6}\right)}}{2}=\frac{\frac{7}{6}\pm\sqrt{\frac{49-24}{36}}}{2}=\frac{\frac{7}{6}\pm\frac{5}{6}}{2}$$

Por lo tanto $\boldsymbol{k_1}=\mathbf{1}\ y\ \boldsymbol{k_2}=\frac{1}{6}$.

Para encontrar los vectores $\overline{\boldsymbol{v}}$ se sustituyen los valores anteriores de $\boldsymbol{k}$ en la ecuación $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{kI})\overline{\boldsymbol{v}}=\overline{\mathbf{0}}$.

Para $\boldsymbol{k_1}=\mathbf{1}$ tenemos:

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/3 \\ 1/2 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2=0$$

$$x_1=\frac{2}{3}x_2 \Rightarrow \overline{v}=\left(\frac{2}{3}x_2, x_2\right)$$

Se llega a una infinidad de soluciones, todas generan una misma línea recta. Se obtiene una familia de vectores asociados a este valor de $\boldsymbol{k}$. En términos del problema basta con elegir uno.

Sea $\boldsymbol{x_2}=\mathbf{3}\ \Rightarrow \boldsymbol{x_1}=\mathbf{2}\ \Rightarrow \overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}=(\mathbf{2},\mathbf{3})$.

Para el valor de $\boldsymbol{k_1}=\mathbf{1}$ tenemos como vector a $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}=(\mathbf{2},\mathbf{3})$.

Hacemos lo mismo para $\boldsymbol{k_2}=\frac{1}{6}$.

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2=0$$

$$x_1=-x_2 \Rightarrow \overline{v}=(-x_2, x_2)$$

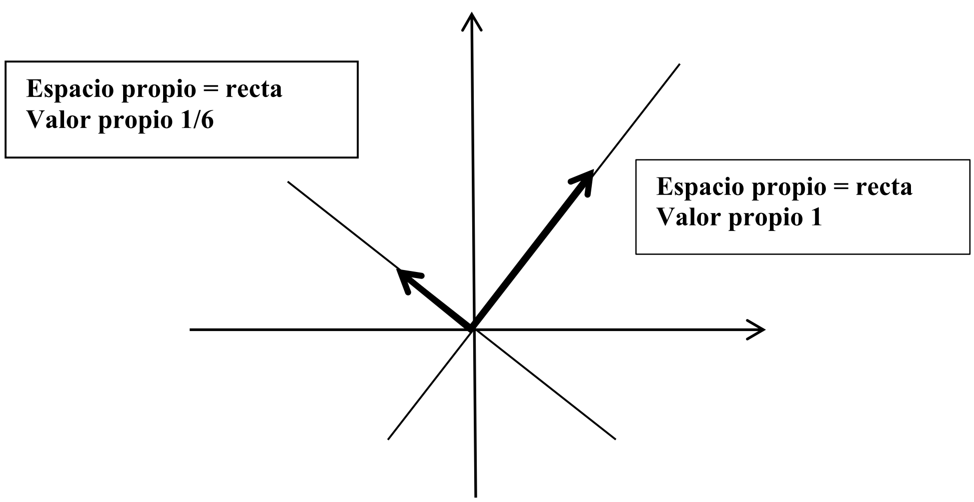
Se llega a una infinidad de soluciones, todas generan una misma línea recta. Se obtiene una familia de vectores asociados a este valor de $\boldsymbol{k}$. En términos del problema basta con elegir uno.

Sea $\boldsymbol{x_2 = 1} \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = -1} \Rightarrow \overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}} = (\boldsymbol{-1}, \boldsymbol{1})$.

Para el valor de $\boldsymbol{k_2 = 1/6}$ tenemos como vector a $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}} = (\boldsymbol{-1}, \boldsymbol{1})$**.**

En este momento se formalizaron los conceptos de valor, vector y espacio propio, por lo que usará el símbolo $\boldsymbol{\lambda}$ para el valor propio.

4.- Dibuja en un plano cartesiano los vectores propios y los espacios propios que encontraste. ¿Cuál escogemos? ¿Por qué? ¿Hay otras soluciones?



Hacen la gráfica de la recta que genera el vector ***(-1, 1)*** y la recta que genera el vector ***(2, 3)***. Se puede escoger para $\boldsymbol{\lambda_1 = 1}$ cualquier $\overline{\boldsymbol{v}} = \left(\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_2}\right)$. Para $\boldsymbol{\lambda_2} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{6}}$ cualquier múltiplo del vector ***(-1, 1)*** tiene el empleo negativo, por lo que no se puede escoger ningún múltiplo.

5.-Supongamos que como condiciones iniciales tenemos al vector $\overline{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{12}, \boldsymbol{18})$. *¿Este vector se puede generar con alguno de los vectores propios encontrados? Si el vector inicial es* $\overline{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{100}, \boldsymbol{50})$, *¿se puede generar con alguno de los vectores propios?*

$\begin{pmatrix}\boldsymbol{12}\\\boldsymbol{18}\end{pmatrix} = \boldsymbol{6}\begin{pmatrix}\boldsymbol{2}\\\boldsymbol{3}\end{pmatrix}$ por lo tanto este vector es múltiplo del vector propio $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} = (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{3})$. Está en el espacio propio de $\boldsymbol{\lambda_1 = 1}$.

$\begin{pmatrix}\mathbf{100}\\\mathbf{50}\end{pmatrix} \neq \boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{3}\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}\mathbf{100}\\\mathbf{50}\end{pmatrix} \neq \boldsymbol{\alpha}\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$ por lo tanto este vector no es múltiplo de ninguno de los vectores propios. No está en ninguno de los espacios propios.

*6.- Teníamos que $\overline{\boldsymbol{x}}_{t+1} = \boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}}_t$. Si $\overline{\boldsymbol{v}}_1$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_2$ son vectores propios de una matriz **A** asociados a sus valores propios correspondientes $\boldsymbol{\lambda}_1$ y $\boldsymbol{\lambda}_2$ entonces la combinación lineal de ellos también es solución. Definimos: $\overline{\boldsymbol{x}}_t = \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{\lambda}_1^t\overline{\boldsymbol{v}}_1 + \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{\lambda}_2^t\overline{\boldsymbol{v}}_2$. Demuestra que es solución.*

Se necesita demostrar que $\overline{\boldsymbol{x}}_t = \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{\lambda}_1^t\overline{\boldsymbol{v}}_1 + \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{\lambda}_2^t\overline{\boldsymbol{v}}_2$ es solución de $\overline{\boldsymbol{x}}_{t+1} = \boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}}_t$. Como $\overline{\boldsymbol{x}}_t = \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{\lambda}_1^t\overline{\boldsymbol{v}}_1 + \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{\lambda}_2^t\overline{\boldsymbol{v}}_2$ entonces $\overline{\boldsymbol{x}}_{t+1} = \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{\lambda}_1^{t+1}\overline{\boldsymbol{v}}_1 + \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{\lambda}_2^{t+1}\overline{\boldsymbol{v}}_2$.

$$\overline{\boldsymbol{x}}_{t+1} = \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{\lambda}_1^{t+1}\overline{\boldsymbol{v}}_1 + \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{\lambda}_2^{t+1}\overline{\boldsymbol{v}}_2 = \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{\lambda}_1^t\boldsymbol{\lambda}_1\overline{\boldsymbol{v}}_1 + \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{\lambda}_2^t\boldsymbol{\lambda}_2\overline{\boldsymbol{v}}_2 =$$
$$\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{\lambda}_1^t\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}_1 + \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{\lambda}_2^t\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}_2 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{\lambda}_1^t\overline{\boldsymbol{v}}_1 + \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{\lambda}_2^t\overline{\boldsymbol{v}}_2) = \boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}}_t.$$

Por lo tanto $\overline{\boldsymbol{x}}_{t+1} = \boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}}_t$, lo que quiere decir que la combinación lineal, $\overline{\boldsymbol{x}}_t = \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{\lambda}_1^t\overline{\boldsymbol{v}}_1 + \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{\lambda}_2^t\overline{\boldsymbol{v}}_2$, es solución y representa una familia de soluciones de las ecuaciones en diferencias.

Si se conoce una condición inicial es posible usarla para determinar los valores de las constantes $\boldsymbol{c_1}$ y $\boldsymbol{c_2}$, que representa la única solución que, entre todas ellas, satisface esa condición.

7.- Supón que nuestros vectores $\overline{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{12}, \mathbf{18})$ y $\overline{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{100}, \mathbf{50})$ son vectores con las condiciones iniciales. Utiliza la combinación lineal anterior y encuentra para cada uno el valor de $\boldsymbol{c}_1$ y $\boldsymbol{c}_2$.

Con el vector $\overline{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{12}, \mathbf{18})$:

$$\overline{\boldsymbol{x}}_t = \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{\lambda}_1^t\overline{\boldsymbol{v}}_1 + \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{\lambda}_2^t\overline{\boldsymbol{v}}_2$$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{12}\\\mathbf{18}\end{pmatrix} = \boldsymbol{c}_1\mathbf{1}^t\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{3}\end{pmatrix} + \boldsymbol{c}_2\left(\frac{1}{6}\right)^t\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{12} = \mathbf{2}\boldsymbol{c}_1\mathbf{1}^t - \left(\frac{1}{6}\right)^t\boldsymbol{c}_2$$

$$\mathbf{18} = \mathbf{3}\boldsymbol{c}_1\mathbf{1}^t + \left(\frac{1}{6}\right)^t\boldsymbol{c}_2$$

Como son condiciones iniciales, entonces ***t = 0***. Se sustituye:

$$\mathbf{12} = \mathbf{2}\boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{c}_2$$
$$\underline{\mathbf{18} = \mathbf{3}\boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2}$$

$$\mathbf{30} = \mathbf{5}\boldsymbol{c}_1 \Rightarrow \boldsymbol{c}_1 = \mathbf{6}$$

$$c_2 = 18 - 18 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix} = (6)1^t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0\left(\frac{1}{6}\right)^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con el vector $\overline{v} = (100, 50)$:

$$\overline{x}_t = c_1\lambda_1^t\overline{v}_1 + c_2\lambda_2^t\overline{v}_2$$

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} = c_1 1^t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2\left(\frac{1}{6}\right)^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$100 = 2c_1 1^t - \left(\frac{1}{6}\right)^t c_2$$

$$50 = 3c_1 1^t + \left(\frac{1}{6}\right)^t c_2$$

Como son condiciones iniciales, entonces ***t = 0***. Se sustituye:

$$100 = 2c_1 - c_2$$
$$\underline{50 = 3c_1 + c_2}$$

$$150 = 5c_1 \Rightarrow c_1 = 30$$

$$c_2 = 50 - 90 \Rightarrow c_2 = -40$$

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} = (30)1^t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-40)\left(\frac{1}{6}\right)^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8.- Haz una gráfica de x_t *con* **t** *y otra gráfica de* y_t *con* **t** *utilizando el vector* $\overline{v} = (12, 18)$.

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = (6)1^t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0\left(\frac{1}{6}\right)^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (6)1^t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Si ***t=0*** $\Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = (6)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix}$

Si ***t=1*** $\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = (6)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix}$

Si ***t=2*** $\Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = (6)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix}$

Como $\boldsymbol{c_2}$ = ***0*** y $\boldsymbol{\lambda_1 = 1}$ para cualquier valor de $\boldsymbol{t}$ se queda en el vector $\boldsymbol{\bar{v}_1} = (\mathbf{12}, \mathbf{18})$, lo cual significa que $\boldsymbol{x_t = 12}$ y $\boldsymbol{y_t = 18}$ $\forall\, \boldsymbol{t}$. El vector ***(12,18)*** se llama constante.

9.- Haz una gráfica de $\boldsymbol{x_t}$ *con* ***t*** *y otra gráfica de* $\boldsymbol{y_t}$ *con* ***t*** *utilizando el vector* $\boldsymbol{\bar{v}} = (\mathbf{100}, \mathbf{50})$.

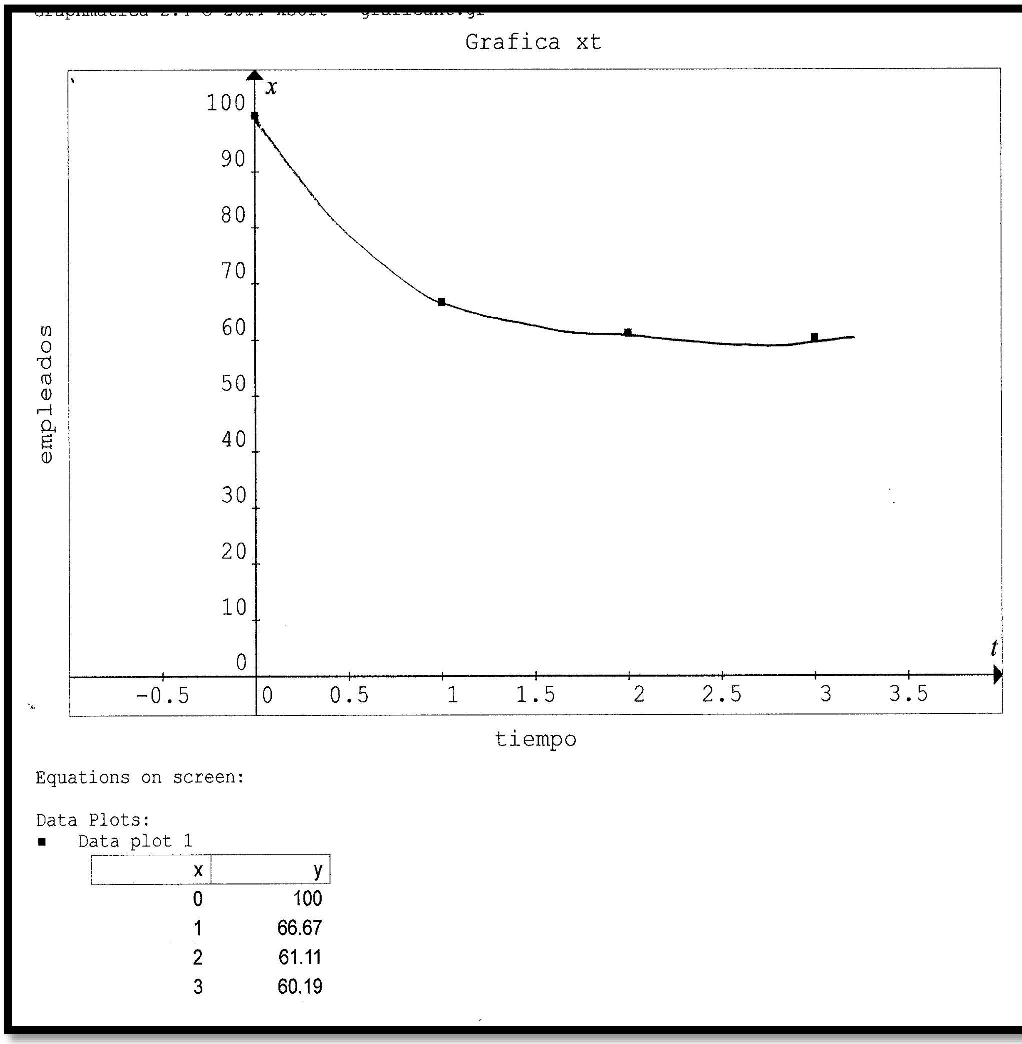
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_t} \\ \boldsymbol{y_t} \end{pmatrix} = (\mathbf{30})\mathbf{1}^{\boldsymbol{t}} \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix} + (\mathbf{-40}) \left(\tfrac{1}{6}\right)^{\boldsymbol{t}} \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Si ***t=0*** $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_0} \\ \boldsymbol{y_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{60} \\ \mathbf{90} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{40} \\ \mathbf{-40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{100} \\ \mathbf{50} \end{pmatrix}$.

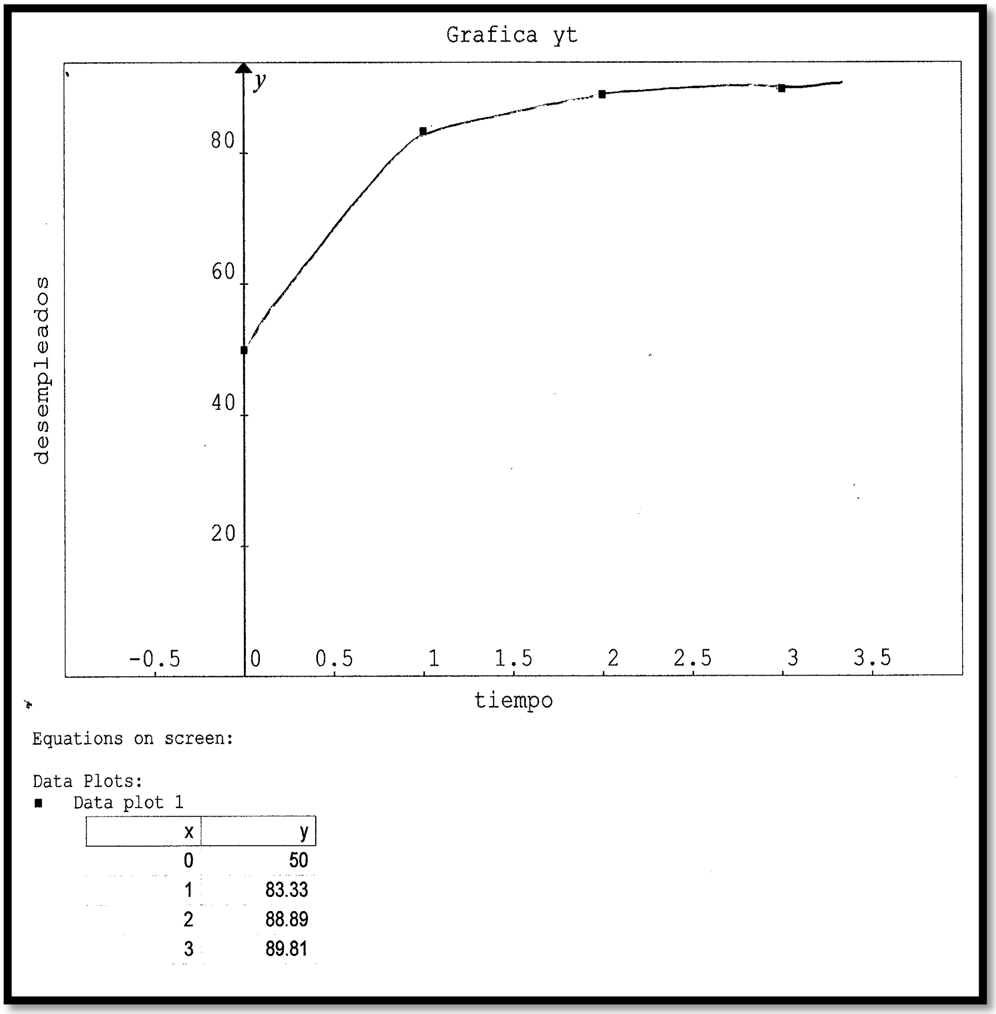
Si ***t=1*** $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{y_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{60} \\ \mathbf{90} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{40/6} \\ \mathbf{-40/6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{400/6} \\ \mathbf{500/6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{66.666} \\ \mathbf{83.333} \end{pmatrix}$.

Si ***t=2*** $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{60} \\ \mathbf{90} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{40/36} \\ \mathbf{-40/36} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2200/36} \\ \mathbf{3200/36} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{61.111} \\ \mathbf{88.888} \end{pmatrix}$.

Si ***t=3*** $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{y_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{60} \\ \mathbf{90} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{40/216} \\ \mathbf{-40/216} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{13000/216} \\ \mathbf{19400/216} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{60.185} \\ \mathbf{89.8148} \end{pmatrix}$.



Por lo tanto, para la gráfica de x_t con t tenemos los puntos ***(0, 100)***, ***(1, 66.666)***, ***(2, 61.111)*** y ***(3, 60.185)***. Es decir, el número de empleados decrece a partir de ***100***.



x	y
0	50
1	83.33
2	88.89
3	89.81

Para la gráfica de y_t con t se tienen los puntos ***(0, 50)***, ***(1, 83.333)***, ***(2, 88.888)*** y ***(3, 89.8148)***. Es decir, el número de desempleados crece a partir de ***50***.

10.- Sustituye $\overline{x}_t = c_1\lambda_1^t\overline{v}_1 + c_2\lambda_2^t\overline{v}_2$ *en nuestro ejemplo e interpreta el resultado cuando* $t \to \infty$.

$$\overline{x}_t = c_1\lambda_1^t\overline{v}_1 + c_2\lambda_2^t\overline{v}_2 = c_1 1^t \binom{2}{3} + c_2\left(\frac{1}{6}\right)^t \binom{-1}{1}$$

Se observa que cuando $t \to \infty$ no dependerá de las condiciones iniciales.

Si $t \to \infty$ entonces $\left(\frac{1}{6}\right)^t \to 0$ y se tendría:

$$\overline{x}_t \approx c_1 1^t \binom{2}{3} = c_1 \binom{2}{3}$$

$$\boldsymbol{\overline{x}_{t+1} \approx c_1 1^{t+1} \binom{2}{3} = 1 c_1 1^t \binom{2}{3} = 1 c_1 \binom{2}{3} = 1 \overline{x}_t}$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{\overline{x}_{t+1}}$ es un múltiplo de $\boldsymbol{\overline{v}_1} = (\mathbf{2}, \mathbf{3})$, de esta forma la proporción se mantiene: hay 2 empleados por cada 3 desempleados.

Si el valor propio es distinto de uno, entonces $\boldsymbol{\overline{x}_{t+1}}$ aumentaría cada mes por $\boldsymbol{\lambda \overline{x}_t}$.

Si se analiza la pregunta nueve, a la larga $\left(\frac{1}{6}\right)^{t} \rightarrow \mathbf{0}$ y se quedará solamente el vector ***(60, 90)***, es decir habrá ***60*** empleados y ***90*** desempleados. En las gráficas de dicha pregunta se puede observar que a eso tienden los puntos.

ANEXO D. SOLUCIÓN DE LAS ACTIVIDADES DIDÁCTICAS DE VALORES, VECTORES Y ESPACIOS PROPIOS DE LA MATRIZ *A*

1.- Sea la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ *y los vectores* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{3}, \mathbf{-2})$ *y* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{1}, \mathbf{-2})$*. Encuentra y grafica* $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ *y* $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$*. ¿Qué obtienes como resultado? Dibuja en la gráfica los vectores* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ *y* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ *¿Qué observas? ¿Son estos vectores paralelos a* $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ *y* $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ *respectivamente? Cuando el producto da como resultado un vector paralelo, decimos que el vector es un vector propio de la matriz* ***A****. ¿Son vectores propios de la matriz* ***A****?*

$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{8} \\ \mathbf{-16} \end{pmatrix}$. $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} \nparallel \overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$. Gráficamente no son paralelos. Por lo tanto, no es vector propio de ***A***.

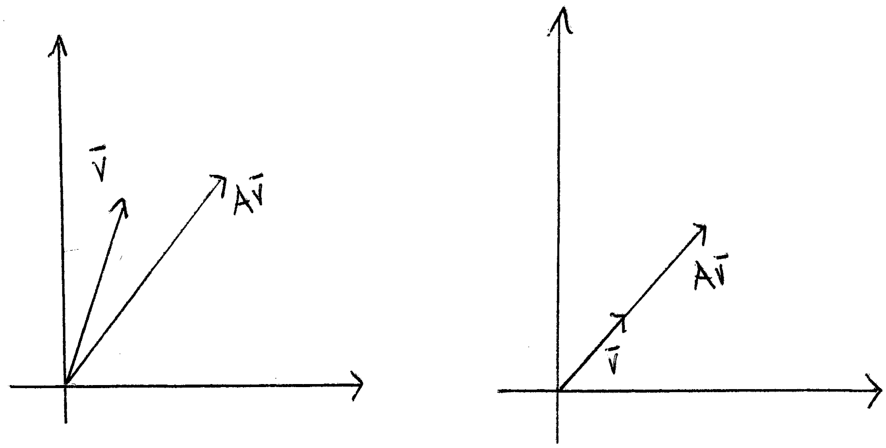
$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{-8} \end{pmatrix}$. $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} \parallel \overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$. Gráficamente sí son paralelos. Por lo tanto, si es vector propio de ***A***.

2.- Sea la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$ *y los vectores* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{2}, \mathbf{1})$ *y* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{1}, \mathbf{-4})$*. Encuentra el vector* $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ *y* $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$*. ¿Son múltiplos de los vectores* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ *y* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ *respectivamente? Escribe la ecuación* $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\lambda}\overline{\boldsymbol{v}}$ *y encuentra el valor de* $\boldsymbol{\lambda}$ *en caso de que se cumpla la igualdad. Dibuja en una gráfica los vectores* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$*,* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$*,* $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ *y* $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$*. ¿Cuáles de ellos son paralelos? ¿Qué representa geométricamente la constante* $\boldsymbol{\lambda}$*? A esta constante, cuando existe, se le llama valor propio de la matriz* ***A****.*

$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix} = \mathbf{3}\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$. $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} \parallel \overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$. Gráficamente son paralelos. Como $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{3}$ el vector $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ es tres veces más grande que $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$.

$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{39} \\ \mathbf{24} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\lambda}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-4} \end{pmatrix}$. $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} \nparallel \overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$. Gráficamente no son paralelos y no existe $\boldsymbol{\lambda}$.

*3.- En las siguientes gráficas, ¿$\bar{v}$ es vector propio de la matriz **A**?*



En la primera gráfica los vectores no son paralelos por lo que $\bar{\boldsymbol{v}}$ no es vector propio. Sin embargo, en la segunda gráfica los vectores son paralelos y $\bar{\boldsymbol{v}}$ es vector propio de la matriz ***A***.

*4.- Sea la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ y los vectores $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{6}, -\mathbf{5})$ y $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{3}, -\mathbf{2})$. Explica si son vectores propios de la matriz **A** y encuentra el valor del valor propio correspondiente. ¿Qué significa algebraica y geométricamente el valor propio?*

$\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{6} \\ -\mathbf{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{24} \\ \mathbf{20} \end{pmatrix} = -\mathbf{4}\begin{pmatrix} \mathbf{6} \\ -\mathbf{5} \end{pmatrix}$. Por lo tanto, $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ es vector propio y su valor propio es $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{1}} = -\mathbf{4}$. $\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ es cuatro veces más grande que $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$, pero como el valor propio es negativo cambia de sentido.

$\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ -\mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{9} \\ \mathbf{11} \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{\lambda}\begin{pmatrix} \mathbf{6} \\ -\mathbf{5} \end{pmatrix}$. Por lo tanto, no existe $\boldsymbol{\lambda}$, valor propio y $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ no es vector propio.

5.- ¿Es $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{1}, \mathbf{4})$ vector propio de la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\mathbf{3} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{3} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$? Si lo es, encuentra el valor propio correspondiente.

$\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} -\mathbf{3} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{3} & \mathbf{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{29} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\lambda}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}$. Por lo tanto, no existe $\boldsymbol{\lambda}$, valor propio y $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ no es vector propio.

6.- Di si $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (-\mathbf{1}, \mathbf{1})$ y $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{2}, \mathbf{1})$ son vectores propios de $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & -\mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Explica.

El vector $\boldsymbol{\overline{v}_1}$ no es vector propio mientras que $\boldsymbol{\overline{v}_2}$ si lo es porque $\boldsymbol{A\overline{v}_2} \parallel \boldsymbol{\overline{v}_2}$, $\boldsymbol{A\overline{v}_2} = \boldsymbol{2\overline{v}_2}$ si $\boldsymbol{\lambda = 2} \implies \boldsymbol{\overline{v}_2} = (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{1})$ es vector propio.

7.- Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{6} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{2} \end{pmatrix}$*. ¿Es **7** valor propio? ¿Por qué si o por qué no?*

$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-6} & \boldsymbol{6} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{-5} \end{pmatrix}$ ⇒ las columnas son linealmente dependientes ⇒ el sistema tiene solución múltiple y $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{7}$ es valor propio de la matriz ***A***.

8.- Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{7} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{-1} \end{pmatrix}$*. Sin hacer operaciones, demuestra que* $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{-2}$ *es valor propio de la matriz **A**.*

$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{9} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$ ⇒ las columnas son linealmente dependientes ⇒ el sistema tiene solución múltiple y $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{-2}$ es valor propio de la matriz ***A***.

9.- Usando el teorema resumen del álgebra lineal di si $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{2}$ *es un valor propio de* $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{3} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{8} \end{pmatrix}$*. Justifica.*

$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{2I} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{6} \end{pmatrix}$ ⇒ las columnas son linealmente dependientes ⇒ existe solución múltiple y $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{2}$ es valor propio de la matriz ***A***.

10.- NO utilices la definición de valor y vector propio y dime si $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{-2}$ *es valor propio de la matriz* $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{7} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{-1} \end{pmatrix}$*.*

Se sustituye $\boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{2}$, en ***A + 2I***. Las columnas de esta matriz son linealmente dependientes ⟹ que existe solución múltiple, por lo tanto, ***-2*** es valor propio.

11.- Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{4} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{3} \end{pmatrix}$*. Sean* $\boldsymbol{\overline{v}_1} = (\boldsymbol{-2}, \boldsymbol{3})$ *y* $\boldsymbol{\overline{v}_2} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1})$ *los vectores propios. ¿Son linealmente dependientes o independientes?*

Los vectores no son múltiplos, por lo tanto son linealmente independientes.

12.- Escribe los valores propios y su multiplicidad algebraica si $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{3} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{8} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{7} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{4} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{9} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{3} \end{pmatrix}$*.*

Los valores propios son los elementos de la diagonal: ***1*** y ***3*** con multiplicidad algebraica dos y ***0*** con multiplicidad algebraica uno.

13.- Sin hacer operaciones encuentra algún valor propio de las siguientes matrices. Explica.

$$a)\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{12} \\ \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{16} \\ \mathbf{5} & \mathbf{10} & \mathbf{20} \end{pmatrix}$$

Los vectores columna $\overline{\boldsymbol{v}}_2$ y $\overline{\boldsymbol{v}}_3$ son múltiplos del primero por lo que, los tres son linealmente dependientes y un valor propio es cero, $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$.

$$b)\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{7} & \mathbf{4} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$$

En este caso la matriz es una matriz triangular inferior por lo que los elementos de la diagonal son los valores propios: $\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{3}$, $\boldsymbol{\lambda_2} = \mathbf{5}$ y $\boldsymbol{\lambda_3} = \mathbf{9}$.

*14.- Escribe una matriz **A**$_{4x4}$ que tenga, únicamente como valores propios al **1**, **-1** y **3**. Justifica.*

Como ***A**$_{4x4}$* se necesitan repetir alguno de los valores propios. Puede darse cualquier matriz triangular o diagonal que contenga estos valores en su diagonal.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

15.- Encuentra los valores propios de la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$. *Explica por qué uno de ellos es cero.*

$p(\lambda) = |\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}| = \begin{vmatrix} \mathbf{2-\lambda} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{2-\lambda} \end{vmatrix} = \boldsymbol{\lambda^2 - 4\lambda = 0} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda_1 = 0}$ y $\boldsymbol{\lambda_2 = 4}$.

Uno de los valores propios es cero porque la matriz ***A*** tiene columnas linealmente dependientes, no tiene inversa y tiene determinante igual a cero.

*16.- Escribe una matriz **A**$_{2x2}$ (no diagonal ni triangular) que tenga como valor propio al cero.*

Cualquier matriz que tenga columnas linealmente dependientes, determinante igual a cero o no sea invertible. Por ejemplo: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{4} & \mathbf{12} \end{pmatrix}$

17.- Escribe una matriz $\boldsymbol{A_{3x3}}$ *que tenga como valor propio al cero, es decir,* $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0}$.

Cualquier matriz que tenga determinante igual a cero, no sea invertible o tenga columnas linealmente dependientes. Por ejemplo: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{9} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$

18.- ¿Cuántos valores propios distintos puede tener, cuando mucho, una matriz $\boldsymbol{A_{4x4}}$*?*

Existen a lo más cuatro valores propios distintos. El polinomio característico es de grado cuarto por lo que tiene a lo más cuatro soluciones distintas, es decir, cuando mucho cuatro valores propios distintos.

Si tuviera cinco valores propios existirían cinco vectores propios linealmente independientes, uno por cada valor propio, pero el espacio es $\boldsymbol{R^4} \Rightarrow$ cinco vectores serían linealmente dependientes. Por lo tanto, máximo hay cuatro valores propios distintos.

19.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? Justifica.

- *a) Los valores propios de una matriz* ***A*** *triangular superior son exactamente los elementos de la diagonal diferentes de* ***0****.*
- *b) Las matrices semejantes tienen siempre los mismos vectores propios.*
- *c) Si* $\boldsymbol{A_{5x5}}$ *tiene menos de cinco valores propios diferentes, entonces* ***A*** *no es diagonalizable.*
- *d) Los valores propios de una matriz no necesariamente deben ser distintos de cero, pero los vectores propios deben ser distintos del valor cero.*

Los incisos ***a)***, ***b)*** y ***c)*** no son verdaderos por las siguientes razones: ***a)*** los valores propios son todos los elementos de la diagonal en una matriz triangular superior, ***b)*** las matrices semejantes tienen los mismos valores propios, no los vectores propios y ***c)*** $\boldsymbol{A_{5x5}}$ puede tener menos de 5 valores propios y ser diagonalizable. El enunciado verdadero es ***d)*** cero puede ser valor propio pero el vector cero no puede ser vector propio.

20.- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA? Justifica.

- *a) Una matriz* $\boldsymbol{A_{nxn}}$ *no es invertible si y sólo si* ***0*** *es un valor propio de* ***A****.*

b) *Un vector fijo de una matriz de probabilidad de un proceso de Markov es realmente un vector propio.*

c) *Si* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$ *y* $\overline{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}$ *son vectores propios linealmente independientes de* ***A*** *entonces corresponden a distintos valores propios.*

d) *Si dos matrices* ***A*** *y* ***B*** *son semejantes entonces tienen los mismos valores propios.*

Son verdaderos los incisos: ***a)*** si cero es valor propio la matriz no es invertible, ***b)*** el vector punto fijo de un proceso de Markov es un vector propio y ***d)*** las matrices semejantes tienen los mismos valores propios. El inciso ***c)*** es falso porque los vectores propios son siempre linealmente independientes aunque correspondan a un mismo valor propio, por lo tanto, esta es la respuesta.

21.- Si las columnas de ***A*** *son linealmente independientes entonces*

a) ***det(A)*** $\neq \mathbf{0}$.

b) *No tiene a* ***0*** *como valor propio.*

c) *El sistema* $\boldsymbol{A\overline{x}} = \overline{\boldsymbol{b}}$ *tiene solución única para todo* $\overline{\boldsymbol{b}}$.

d) *Todas las anteriores.*

e) *Ninguna de las anteriores.*

Si la matriz ***A*** tiene columnas linealmente independientes entonces el $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}) \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{A\overline{x}} = \overline{\boldsymbol{b}}$ tiene solución única para todo $\overline{\boldsymbol{b}}$ y cero no puede ser valor propio, por lo que la respuesta correcta es el inciso ***d)*** todas las anteriores.

22.- Sea $\boldsymbol{\lambda}$ *valor propio de la matriz* ***A****. La matriz* ***A*** *es invertible, es decir, existe* $\boldsymbol{A}^{-1}$*. Demuestra que* $\boldsymbol{\lambda}^{-1} = \frac{1}{\lambda}$ *es valor propio de la matriz* $\boldsymbol{A}^{-1}$*. (Recuerda la definición de valor y vector propio:* $\boldsymbol{\lambda}$ *es valor propio de* ***A*** *si existe* $\overline{\boldsymbol{v}} \neq \overline{\mathbf{0}}$ *tal que* $\boldsymbol{A\overline{v}} = \boldsymbol{\lambda\overline{v}}$*.)*

$$\boldsymbol{A\overline{v}} = \boldsymbol{\lambda\overline{v}}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}A\overline{v}} = \boldsymbol{A^{-1}\lambda\overline{v}}$$

$$\boldsymbol{I\overline{v}} = \boldsymbol{A^{-1}\lambda\overline{v}}$$

$$\mathbf{1}/_{\boldsymbol{\lambda}}\,\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{A^{-1}\overline{v}}$$

$\boldsymbol{\lambda^{-1}\bar{v} = A^{-1}\bar{v}}$

Por lo tanto, $\boldsymbol{\lambda^{-1}}$es valor propio de la matriz $\boldsymbol{A^{-1}}$.

23.- ¿Cuál es la definición de valor y vector propio?

$\boldsymbol{A\bar{v} = \lambda\bar{v}}$, donde $\boldsymbol{\lambda}$ es el valor propio y $\boldsymbol{\bar{v}}$ es el vector propio.

24.- ¿Qué significa algebraicamente la definición anterior?

Al multiplicar la matriz $\boldsymbol{A}$ por el vector $\boldsymbol{\bar{v}}$, se obtiene un múltiplo del vector $\boldsymbol{\bar{v}}$.

25.- ¿Qué significa geométricamente la definición anterior?

Los dos lados de la ecuación representan vectores paralelos.

26.- ¿Cómo obtienes los valores propios?

Con la ecuación característica, $\boldsymbol{p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0}$, puesto que se quiere que el sistema homogéneo $\boldsymbol{(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}}$ tenga solución múltiple.

27.- ¿Cómo obtienes los vectores propios?

Para cada valor propio, se sustituye el valor propio $\boldsymbol{\lambda}$ en la ecuación $\boldsymbol{(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}}$ y se resuelve el sistema homogéneo, espacio nulo.

28.- Encuentra los valores, vectores y espacios propios de la matriz $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}}$.

<u>Valores propios</u>:

$$\boldsymbol{\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-6-\lambda) - 9 = \lambda^2 + 4\lambda - 21}$$

$\boldsymbol{\lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -7}$ y $\boldsymbol{\lambda_2 = 3.}$

<u>Vectores propios</u>:

Para $\boldsymbol{\lambda_1 = -7}$:

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{3x_1 + x_2 = 0}$$

$\boldsymbol{x_2 = -3x_1 \Rightarrow \bar{v} = (x_1, -3x_1)}$

Sea $\boldsymbol{x_1 = 1} \Rightarrow \boldsymbol{x_2 = -3} \Rightarrow \boldsymbol{\overline{v}_1 = (1, -3)}$

Para el valor de $\boldsymbol{\lambda_1 = -7}$ el vector propio asociado es $\boldsymbol{\overline{v}_1 = (1, -3)}$.

Para $\boldsymbol{\lambda_2 = 3}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x_1 + 3x_2 = 0$$

$$x_1 = 3x_2 \Rightarrow \overline{v} = (3x_2, x_2)$$

Sea $\boldsymbol{x_2 = 1} \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = 3} \Rightarrow \boldsymbol{\overline{v}_2 = (3, 1)}$

Para el valor de $\boldsymbol{\lambda_2 = 3}$ el vector propio asociado es $\boldsymbol{\overline{v}_2 = (3, 1)}$.

<u>Espacios propios</u>:

$\boldsymbol{E_{-7} = gen\,\{\overline{v}_1\} = gen\,\{(1, -3)\}} \Longrightarrow$ una recta.

$\boldsymbol{E_3 = gen\,\{\overline{v}_2\} = gen\,\{(3, 1)\}} \Longrightarrow$ una recta.

29.- Encuentra los valores, vectores y espacios propios de la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$*. Encuentra la multiplicidad algebraica y geométrica.*

Valores propios:

p(λ) **=** $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & -9 \\ 0 & 5-\lambda & 18 \\ 0 & -2 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) \Rightarrow$

valor propio: $\boldsymbol{\lambda_1 = -1}$ con multiplicidad algebraica tres.

Vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -9 \\ 0 & 6 & 18 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 + 3x_3 = 0$$

Por lo tanto:

$$x_1 = x_1$$
$$x_2 = -3x_3$$
$$x_3 = x_3$$

Dos variables arbitrarias, dos grados de libertad $\Rightarrow \bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{0}, -\mathbf{3}, \mathbf{1})$ y $\bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Espacio propio:

$\boldsymbol{E}_{-\mathbf{1}} = \boldsymbol{gen}\left\{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{3} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\right\}$ $\Rightarrow$ plano en ***R*³** que pasa por el origen. La multiplicidad geométrica es uno.

30.- Encuentra los valores, vectores y espacios propios de la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & -\mathbf{5} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$.

Valores propios:

***p(λ)* =** $|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}| = \begin{vmatrix} \mathbf{3} - \boldsymbol{\lambda} & -\mathbf{5} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda} \end{vmatrix} = \boldsymbol{\lambda}^{2} - \mathbf{2}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{2} \Rightarrow$

valores propios complejos: $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{1}} = \mathbf{1} + \boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{2}} = \mathbf{1} - \boldsymbol{i}$ con multiplicidad algebraica uno cada uno.

Vectores propios:

Para $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{1}} = \mathbf{1} + \boldsymbol{i}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} - \boldsymbol{i} & -\mathbf{5} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{2} - \boldsymbol{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \boldsymbol{x}_{\mathbf{1}} &= (\mathbf{2} + \boldsymbol{i})\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathbf{2}} &= \boldsymbol{x}_{\mathbf{2}} \end{aligned}$$

Una variable arbitraria, un grado de libertad $\Rightarrow \bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{2} + \boldsymbol{i}, \mathbf{1})$

Espacio propio:

$\boldsymbol{E}_{\mathbf{1}+\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{gen}\left\{\begin{pmatrix} \mathbf{2} + \boldsymbol{i} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}\right\}$ $\Rightarrow$ plano en ***C*²**. La multiplicidad geométrica es uno.

Para $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{2}} = \mathbf{1} - \boldsymbol{i}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} + \boldsymbol{i} & -\mathbf{5} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{2} + \boldsymbol{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \boldsymbol{x}_{\mathbf{1}} &= (\mathbf{2} - \boldsymbol{i})\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathbf{2}} &= \boldsymbol{x}_{\mathbf{2}} \end{aligned}$$

Una variable arbitraria, un grado de libertad $\Rightarrow \bar{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{2} - \boldsymbol{i}, \mathbf{1})$

Espacio propio:

$\boldsymbol{E_{1-i}} = \boldsymbol{gen}\left\{\begin{pmatrix} \boldsymbol{2-i} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow$ plano en $\boldsymbol{C^2}$. La multiplicidad geométrica es uno.

31.- Encuentra los valores, vectores y espacios propios de la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{4} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{4} \end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{\lambda = 4}$ pues ***A*** es una matriz diagonal y los elementos de la diagonal son los valores propios.

Si se resuelve el polinomio característico:

$$|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{4-\lambda} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{4-\lambda} \end{vmatrix} = (\boldsymbol{4-\lambda})^{\boldsymbol{2}} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = 4}$$

*32.- La siguiente matriz **A** tiene como valor propio a **λ = -1**. Encuentra los vectores propios y el espacio propio asociado a este valor propio. ¿Qué representa gráficamente el espacio propio? No necesitas dar la ecuación característica.* $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{3} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{4} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{4} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{3} \end{pmatrix}$.

Vectores propios:

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I})\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\boldsymbol{0}}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{4} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{4} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{4} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x_1} &= \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} &= \boldsymbol{-2x_1 - 2x_3} \\ \boldsymbol{x_3} &= \boldsymbol{x_3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, los vectores propios pueden ser: $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}$ ***= (1, -2, 0)*** y $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}$ ***= (0, -2, 1)*** y el espacio propio es $\boldsymbol{E_{-1}} = \boldsymbol{gen}\left\{\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}\right\}$. Al tener dos variables arbitrarias, dos grados de libertad y dos vectores propios el espacio propio es un plano en $\boldsymbol{R^3}$.

33.- Encuentra una base para el espacio propio correspondiente a cada valor propio dado. Encuentra la multiplicidad geométrica de los espacios propios. Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\lambda_1 = 1}$ *y* $\boldsymbol{\lambda_2 = 5}$.

Valores propios conocidos:

$\boldsymbol{\lambda_1 = 1}$ *y* $\boldsymbol{\lambda_2 = 5}$.

Vectores propios:

Para $\boldsymbol{\lambda_1 = 1}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \boldsymbol{x_1} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x_2} &= \boldsymbol{x_2} \end{aligned}$$

Una variable arbitraria, un grado de libertad ⇒ $\boldsymbol{\overline{v}_1} = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$

Espacio propio:

$\boldsymbol{E_1} = \boldsymbol{gen}\left\{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}\right\}$ ⇒ recta en $\boldsymbol{R^2}$. Multiplicidad geométrica uno.

Para $\boldsymbol{\lambda_1 = 5}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \boldsymbol{x_1} &= \boldsymbol{2x_2} \\ \boldsymbol{x_2} &= \boldsymbol{x_2} \end{aligned}$$

Una variable arbitraria, un grado de libertad ⇒ $\boldsymbol{\overline{v}_2} = (\mathbf{2}, \mathbf{1})$

Espacio propio:

$\boldsymbol{E_5} = \boldsymbol{gen}\left\{\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}\right\}$ ⇒ recta en $\boldsymbol{R^2}$. Multiplicidad geométrica uno.

34.- SIN hacer cálculos encuentra un valor propio, dos vectores propios y el espacio propio de la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$. *¿Por qué se piden dos vectores propios?*

Las columnas de la matriz son linealmente dependientes por lo que $\boldsymbol{\lambda = 0}$. Para los vectores propios:

$$\boldsymbol{2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0}$$

$$\boldsymbol{x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0}$$

$$\boldsymbol{x_1 = -2x_2 - 3x_3}$$

$$\boldsymbol{x_2 = x_2}$$

$$\boldsymbol{x_3 = x_3}$$

Por lo tanto, como hay dos grados de libertad o dos variables arbitrarias se necesitan dos vectores propios: $\boldsymbol{\overline{v}_1} = (\boldsymbol{-2, 1, 0})$ y $\boldsymbol{\overline{v}_2} = (\boldsymbol{-3, 0, 1})$.

El espacio propio es $\boldsymbol{E_0}$ ***= gen {***$\boldsymbol{\overline{v}_1}$ *y* $\boldsymbol{\overline{v}_2}$***}***, plano en ***$R^3$***.

35.- Sea ***A_{nxn}****. Di si es falso o verdadero. Justifica.*

a) *Si $\boldsymbol{A\overline{v} = \lambda\overline{v}}$ para alguna $\boldsymbol{\overline{v}}$, entonces **λ** es valor propio de **A**.*

b) ***A** es no invertible ⇔ **λ = 0**.*

c) ***λ** es valor propio de **A** ⇔ $(\boldsymbol{A - \lambda I})\boldsymbol{\overline{v}} = \boldsymbol{\overline{0}}$ tiene solución múltiple.*

d) *Puede ser difícil encontrar un vector propio de **A**, pero es fácil comprobar si un vector dado es un vector propio.*

e) *Para encontrar los valores propios de **A** se reduce **A** a su forma escalonada.*

f) *Si $\boldsymbol{A\overline{v} = \lambda\overline{v}}$ para alguna **λ** ⟹ $\boldsymbol{\overline{v}}$ es vector propio de **A**.*

g) *Un espacio propio de **A** es un espacio nulo de cierta matriz.*

Inciso ***a)*** Verdadera. Es la definición de valor y vector propio.

Inciso ***b)*** Verdadera. Si ***λ = 0*** las columnas de la matriz son linealmente dependientes y el determinante es cero por lo que la matriz no es invertible.

Inciso ***c)*** Verdadera. Para que ***λ*** sea valor propio se necesita $\boldsymbol{\overline{v} \neq \overline{0}}$, por lo que el sistema homogéneo debe tener solución múltiple.

Inciso ***d)*** Verdadera. Para encontrar el vector propio debe resolverse el sistema homogéneo y si la matriz es grande puede involucrar muchas operaciones. Sin embargo, para comprobar si un vector dado es vector propio solamente se necesita resolver $\boldsymbol{A\overline{v}} = \boldsymbol{\lambda\overline{v}}$.

Inciso ***e)*** Falsa. Para encontrar los valores propios debe resolverse el polinomio característico.

Inciso ***f)*** Verdadera. Es la definición de valor y vector propio.

Inciso ***g)*** Falsa. El espacio propio es el espacio generado por los vectores propios.

36.- ¿Cómo obtienes los espacios propios? ¿Qué es la multiplicidad geométrica?

Para cada valor propio $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{E_\lambda = gen\{\overline{v}\}}$, es el espacio generado por los vectores propios. La multiplicidad geométrica es la dimensión del espacio propio.

37.- Dime una aplicación de estos conceptos.

Diagonalización, ecuaciones en diferencia y solución de ecuaciones en diferencias.

*38.- En una sociedad hay dos partidos políticos. Se van a llevar a cabo elecciones y la gente vota por uno de los dos partidos. Sea **q** la probabilidad de que si una persona votó en la elección anterior por un partido vuelva a votar por el mismo en la siguiente elección y sea **p** la probabilidad de que cambie su voto. Encuentra un modelo que describa cuántas personas votarán por un mismo partido y cuántas por otro en el tiempo **t**. ¿Cómo lo resolverías? ¿Qué datos necesitas?*

Es una ecuación en diferencias.

$$\boldsymbol{x_{t+1} = qx_t + py_t}$$
$$\boldsymbol{y_{t+1} = (1-q)x_t + (1-p)y_t}$$

donde $\boldsymbol{x_t}$ es el número de votos por el partido ***A*** y $\boldsymbol{y_t}$ es el número de votos por el partido ***B***. La solución es $\boldsymbol{\overline{x}_t = \lambda^t\overline{v}}$ donde $\boldsymbol{\lambda}$ es el valor propio y $\boldsymbol{\overline{v}}$ es el vector propio. Se necesitan las probabilidades ***p*** y ***q***.

ANEXO E. TABLAS

En este anexo se presentan algunas de las tablas que se realizaron para estudiar las construcciones mentales de los alumnos. Las partes entre comillas se copiaron idénticas al texto escrito por los alumnos.

E.1 PROBLEMA DE LAS PATINETAS VOLADORAS

Pregunta 1

	UN MEDIO	***RESP***	***DOS MEDIOS***	***RESP***
1	Ec vectorial y algebraica	Correcta	Ec vectorial	Correcta
2	Suman los dos vectores	Incorrecta	Ningún escalar nos lleva a (107, 64)	Correcta
3	Ec vectorial y algebraica	Correcta	Ec vectorial	Correcta
4	Ec algebraica. Primero plantean mal, pero luego corrigen	Correcta	Ec vectorial. Gráfica.	Correcta
5	Ec vectorial	Correcta	Ec vectorial	Correcta
6	Ec vectorial y algebraica	Correcta	Ec algebraica	Correcta
7	Ec vectorial y algebraica	Correcta	Explican	Correcta
8	Ec vectorial y algebraica	Correcta	Ec vectorial y algebraica	Correcta
9	Ec vectorial y algebraica	Correcta	Grafican. Hacen operaciones.	Correcta
10	Hacen gráficas y escriben una ecuación. Después de la explicación de clase resuelven bien.	Correcta	Ec vectorial y algebraica	Correcta
11	Ec vectorial y algebraica	Correcta	Ec vectorial	Correcta
12	Ec vectorial y algebraica	Correcta	Ec vectorial	Correcta
13	Ec vectorial y algebraica	Correcta	Ec vectorial y algebraica	Correcta

Pregunta 2

	SOLUCIÓN	***RESPUESTA***
1	Ecuación vectorial y algebraica	Correcta, solo error en una suma
2	Ec vectorial y algebraica	Correcta "-7 en alfombra reversa", "son combinaciones lineales"
3	Ec vectorial y algebraica	Correcta, "-7 → voy de regreso", " si es combinación lineal"
4	Ec vectorial y algebraica	"no te puedes mover -7 horas" Más adelante "7 horas para atrás, es en reversa."
5	Ec vectorial y algebraica	Correcta "b = -7 → en reversa"

6	Ec vectorial y algebraica	Correcta. No resuelven a partir de (107, 64), pero el procedimiento es correcto. Cuando les da un número negativo ponen “hacia atrás”.
7	Ec vectorial y algebraica	Correcta, pero cuando obtienen un resultado negativo dicen “NO c puede”.
8	Ec vectorial y algebraica	Correcta. Resuelven en general y después sustituyen los tres casos.
9	Ec vectorial y algebraica	Correcta. Cuando les da un número negativo ponen “absurdo”.
10	Ec vectorial y algebraica	Correcta. “b = -7 → camina hacia atrás.”
11	Ec vectorial y algebraica	Correcta. Cuando les da negativo no dicen nada.
12	Ec vectorial y algebraica	Correcta. Cuando les da negativo no dicen nada.
13	Ec vectorial y algebraica	Correcta. Cuando les da negativo no dicen nada.

<u>Pregunta 3</u>

	RESPUESTA
1	“Podemos llegar a cualquier lugar con x_1 hrs de patineta o/y x_2 hrs de alfombra porque los puntos (todos) a donde queremos llegar pueden expresarse como una combinación lineal de los vectores (patineta y alfombra).”
2	Resuelven el sistema algebraico. Tienen errores de suma. “Sol. única para cualquier a, b.”
3	Escriben la ec vectorial y algebraica. Grafican.
4	Ec vectorial y algebraica. “En este caso siempre da solución porque son dos rectas que no son paralelas.” “¿Cómo sabemos si tiene solución para todo a, b? Hago Gauss – Jordan.”
5	Ec vectorial y algebraica, pero no explican.
6	“Se puede alcanzar cualquier punto en el plano porque como los vectores se pueden multiplicar por cualquier escalar ε ***R*** , puede dar como resultado cualquier valor ***R***. Geométricamente se puede alcanzar en combinación cualquier punto porque es como si pudiéramos mover la recta P a lo largo de toda la recta A, lo que incluiría a cualquier punto en $\boldsymbol{R}^2$. Solo se conservan las pendientes. Todo tomando en cuenta que son <u>rectas,</u> con otro tipo de curva podría ser diferente.” Hacen una gráfica.
7	Escriben una combinación lineal pero repitiendo los vectores. No explican.
8	Usan la solución general que encontraron en II y concluyen “es posible llegar a todo punto (A; B) ε $\boldsymbol{R}^2$.” También explican “Gráficamente el área sombreada son ptos. a los que se puede llegar con la patineta y la alfombra.”
9	“Si podemos llegar a cualquier lugar en $\boldsymbol{R}^2$, nunca a un punto a partir de $\boldsymbol{R}^3$.” Escriben la ecuación vectorial.
10	“Si estuvieran paralelas las rectas $3\alpha + \beta = a$ y $\alpha + 2\beta = b$, no habría solución, pero en este caso, siempre van a tener porque se cruzan.” Escribe la ecuación vectorial.
11	Ec vectorial y algebraica. Resuelven por Gauss – Jordan pero no concluyen.
12	“Sabiendo que los escalares pueden ser cualquier número ***R***, sumando los vectores de ambos se puede obtener cualquier vector.” Escriben la ec. algebraica.
13	Escriben la ec. algebraica y grafican, pero no explican.

Pregunta 4

	DOS PATINETAS (LI)	***SOLUCIÓN***
1	Solo respuesta	"Si, porque son vectores en $\boldsymbol{R^2}$ y la casa también se encuentra en $\boldsymbol{R^2}$." Incorrecta, podrían ser un solo vector.
2	Ec vectorial y algebraica	"Gen. $\boldsymbol{R^2}$. ∴ puedes llegar a cualquier lugar."
3	Ec vectorial y algebraica	"∴ si tiene solución. Si está en $\boldsymbol{R^2}$."
4	Ec vectorial	"Si, puedes alcanzar todo $\boldsymbol{R^2}$."
5	Ec vectorial	"∀ x, y ∴ genera todo $\boldsymbol{R^2}$."
6	Ec vectorial y algebraica	"Si pueden a_1 y b_2 tomar todos los valores posibles de $\boldsymbol{R}$ tal que las ecuaciones tienen solución. Por lo tanto el par de vectores pueden generar todo $\boldsymbol{R^2}$."
7	Gauss – Jordan	"genera $\boldsymbol{R^2}$ si puedo."
8	Solo respuesta	"Se puede al igual que con los anteriores llegar a cualquier pto."
9	Ec vectorial. Gauss – Jordan.	"si genera $\boldsymbol{R^2}$."
10	Ec algebraica	"Si puede generarme todo $\boldsymbol{R^2}$."
11	Ec vectorial. Gauss – Jordan.	"Si te puedes mover en todo $\boldsymbol{R^2}$."
12	Ec vectorial Gauss – Jordan.	"⟹ se puede mover en todo $\boldsymbol{R^2}$, porque son 2 vectores que tienen componente i, j."
13	Ec vectorial Gauss – Jordan.	"genera $\boldsymbol{R^2}$."

	DOS PATINETAS (LD)	***SOLUCIÓN***
1	Solo respuesta	"también". Incorrecta
2	Gauss – Jordan.	"Genera una recta en $\boldsymbol{R^2}$."
3	Solo respuesta.	"Está en $\boldsymbol{R^2}$ pero los vectores son paralelos ∴ no pueden abarcar todo $\boldsymbol{R^2}$ y no pueden ir a los mismos lugares."
4	Ec vectorial	"Si, puedes alcanza todo $\boldsymbol{R^2}$." Incorrecta
5	Ec vectorial	"Genera la recta en $\boldsymbol{R^2}$ ∴ no genera todo $\boldsymbol{R^2}$."
6	Ec vectorial y algebraica	"No puede ir a todas partes porque el vector (6, 9) es un múltiplo del (2, 3) es decir solo tengo un vector. Si buscamos la solución del sistema de ecuaciones como no tenernos valores para los cuales b, solo cuando $x = {}^{2y}/_{3}$ son los lugares a los cuales puedo llegar."
7	Gauss – Jordan.	"No puede."
8	Solo respuesta	"se puede llegar únicamente a $\lambda(2, 3)$ ∀ λ ε $\boldsymbol{R}$."
9	Gauss – Jordan.	"No puedo mov. en otra dirección. Gen una recta en $\boldsymbol{R^2}$"
10	Gauss – Jordan.	"→ recta en $\boldsymbol{R^2}$."
11	Gauss – Jordan. Gráfica.	"No puedes llegar a todo $\boldsymbol{R^2}$ falta un pivote. Son pivotes que van en la misma dirección."

12	Ec vectorial Gauss – Jordan.	"No se puede mover a todos los puntos solo a $(x, {}^{3}/_{2}\,x)$ en ***R***."
13	Ec vectorial	"no se puede generar todo $\boldsymbol{R^2}$."

	EN GENERAL
1	"Si, los vectores necesitan ser diferentes (linealmente independientes). Los vectores q nos permiten ir a ciertos lugares es porq son ld."
2	"2 vectores pueden llega a $\boldsymbol{R^2}$ siempre y cuando no sean múltiplos uno del otro ni paralelos."
3	"Si tengo 2 vectores li generan $\boldsymbol{R^2}$. Si tengo 2 vectores ld genero recta."
4	"Para alcanzar cualquier lugar, deben tener el mismo número de componentes y vectores (2 componentes, 2 vectores) que del número de variables es la dimensión. (2 comp, 2 vect. $\boldsymbol{R^2}$) y que no todos los vectores sean cero al mismo tiempo." Incorrecta Más adelante: "No, no con todos los vectores llegas a todas partes, con una combinación de vectores cero sólo puedes "llego al origen". Más adelante: No, no hay ningún lugar especial al que no puedas llegar." Incorrecta
5	"No, porque necesitas que a_1 y a_2 existan, y q' sean ≠, y no paralelos. 2 vectores li = $\boldsymbol{R^2}$."
6	"No podemos ir a todos los lugares en $\boldsymbol{R^2}$ con dos vectores, ya que pueden ser múltiplos, es decir que en verdad sólo te están dado un vector, uno sobre otro se verán de la siguiente forma (gráfica) ∴ solo se puede llegar a puntos que estén en la dirección que estos tengan que sería en $\boldsymbol{R^2}$ una línea recta por ejemplo en el 2° caso solo pueden llegar a puntos (x, y) tal que $x = {}^{2y}/_{3}$. Por otra parte, si decimos estrictamente 2 vectores (es decir que no estén encimados o sean el mismo) si es posible llegar a cualquier punto en $\boldsymbol{R^2}$con una combinación de vectores."
7	"NO, xq necesita 2 vectores q se muevan en distinta dirección. NO paralelos."
8	"siempre y cuando $v_1 \neq \lambda v_2$ → se puede alcanzar todo $\boldsymbol{R^2}$, si $v_1 = \lambda v_2$ → se puede alcanzar únicamente ptos. de la forma λv_2."
9	"Con 2 vectores no siempre se puede llegar a $\boldsymbol{R^2}$ → tienen que ser linealmente independientes y no linealmente dependientes. $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\ y\ \begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$ ⇒ generan una recta en $\boldsymbol{R^2}$."
10	"Con 2 vectores ⇒ $\boldsymbol{R^2}$ NO. Los dos primeros son diferentes, necesito que no sean el mismo vector (múltiplos) linealmente independiente".
11	"No se puede llegar a $\boldsymbol{R^2}$con todos los vectores (≠ linealmente independiente) (‖ linealmente dependiente) Tienen que ser li para poder ir a todo $\boldsymbol{R^2}$."
12	"Solo van a todos $\boldsymbol{R^2}$ aquellos vectores que sean diferentes."
13	"2 vectores ⟹ $\boldsymbol{R^2}$ pero mientras <u>NO</u> sean paralelos. Si son paralelos solo se llega en ese plano."

E.2 PROBLEMA DE EMPLEO –DESEMPLEO ORIGINAL (ENERO – MAYO 2011)

Pregunta 1

EQUIPO	$\boldsymbol{A}$	$\bar{\boldsymbol{x}}_{t+1} = \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}_t$
1	si	si
2	si	si
3	si	si
4	si	si
5	si	si
6	si	si
7	si	si
8	si	si

Pregunta 2

EQUIPO	$\bar{\boldsymbol{x}}_t = \boldsymbol{\lambda}^t\bar{\boldsymbol{v}}$ ***sust***	$\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{0}}$	$\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\lambda}\bar{\boldsymbol{v}}$
1	si	si	Si
2	si	si	Si
3	No saben despejar	no	No
4	si	si	Si
5	Sustituyen pero no resuelven	No	No
6	si	si	Si
7	si	si	Si
8	si	si	Si

Pregunta 3

EQUIPO	$\boldsymbol{|A - \lambda I| = 0}$ ***sol mult***	$\boldsymbol{p}\ (\boldsymbol{\lambda})$	$\boldsymbol{\lambda_1 = 1\ y\ \lambda_2 = \frac{1}{6}}$
1	"Sm $|A - \lambda I| = 0$"	Si	si
2	"Sol mult $|A - \lambda I| = 0$"	Resuelven $A\underline{v} = \lambda \bar{v}$	no
3	"|A| ≠ 0, solución única, $|A - \lambda I| = 0$"	Si	si
4	No aclaran, solo resuelven	Si	Si
5	No aclaran, solo resuelven	Si	Si
6	"Queremos sol mult → |A| = 0, $|A - \lambda I| = 0$"	Si	Se equivocan al resolver
7	"sol mult |A| = 0"	Si	si
8	"Buscamos que el determinante = 0 para que tenga sol múltiple"	Error de álgebra	Error de álgebra

Pregunta 4

EQUIPO	$\boldsymbol{\lambda_1 = 1, \bar{v} = \left(\frac{2}{3}x_2, x_2\right)}$	$\boldsymbol{\lambda_2 = \frac{1}{6}, \bar{v} = (-x_2, x_2)}$
1	Si. Familia de vectores, no dan caso particular.	Si familia de vectores.
2	Si, no dan caso particular.	Si, no dan caso particular.
3	Si, no dan caso particular.	Si, no dan caso particular.
4	Si, dan caso particular.	Si, dan caso particular.
5	Sustituyen, pero no resuelven.	Sustituyen, pero no resuelven.
6	Si, dan caso particular.	Si, dan caso particular.
7	Si, dan caso particular. “gen{ v} = recta”	Si, dan caso particular.
8	Si, dan caso particular, demuestran con la definición.	Si, dan caso particular, demuestran con la definición.

Pregunta 5

EQUIPO	***SUSTITUIR***
1	Si
2	Si
3	Si
4	Si
5	Si
6	Si
7	Si
8	Si

Pregunta 6

EQUIPO	***SUSTITUIR***	$\boldsymbol{t \to \infty}$	***INTERPRETAR***
1	Si	Dejan en general, no sustituyen λ_1 y λ_2	No
2	Si	“Solo dependerá del vector (2,3).”	No dan interpretación.
3	Si	“Todo va a depender de λ_1 y de v_1.”	No
4	Si	“No importa el tiempo x_t va a tender a c_1(2/3,1)”	“Siempre va a ver es proporción de empleados.”
5	Si	“c_1(2,3)”	“que cuando $t \to \infty$ el número de personas empleadas será constante.” Error: más bien la proporción se mantiene.
6	Si	“c_1(2,3)”	“A la larga siempre va a haber una proporción de 2 empleados por cada 3 desempleados.”
7	Si	“c_1(2,3)”	“siempre será constante por eso cuando $t \to \infty$, $\lambda_1 =$ 1 y eso implica que el número de empleados siempre tendrá la misma proporción con los desempleados.”

8	Si	Si	"cuando $t \to \infty$ la primera parte de la solución tiende a cero, por lo cual la solución tiende a la segunda parte. En el infinito la solución tiende a $c_1(2{,}3)$ que es constante que es solución de equilibrio."

E.3 Problema de población

Pregunta 1

EQUIPO	***ECUACIÓN*** $\boldsymbol{x_{t+1} = kx_t}$
1	"$x_{t+1} = kx_t$"
2	"$B_{t+1} = kB_t$"
3	"$P_{t+1} = kP_t$"
4	"$x_{t+1} = kx_t$"
5	Resolvió junto con equipo 4.
6	"$P_{t+1} = kB_t$"
7	"$x_{t+1} = kx_t$"
8	"$x_{t+1} = kx_t$"
9	"$x_{t+1} = kx_t$"
10	"$x_{t+1} = kx_t$"

Pregunta 2

EQUIPO	***VALORES t=0, t=1, A LA LARGA***
1	Dan valores t=0 y 1, "x tiende a cero"
2	Encuentran los valores para t=0, 1 y 2. "y así hasta llegar a 0 búhos. Los búhos tienden a extinguirse."
3	Encuentran t=0,1, … 10. "P búhos → 0. A la larga no habrá búhos."
4	Encuentran hasta t=13 "… tiende a 0"
5	Resolvió junto con equipo 4.
6	Encuentran hasta t=5. "A la larga se acaban los búhos, "$P_{t+1} = kB_t$"
7	Encuentran t =0 y 1. No concluyen.
8	Encuentran t=0, 1 y 2. "A la larga tiende a cero, es decir los búhos se extinguen."
9	Encuentran t=0, 1 y 2. "$\lim\limits_{t\to\infty} = 0$. Con el tiempo se van a extinguir."
10	Encuentran t=0, 1 …5. "A la larga tiende a cero."

Pregunta 3

EQUIPO	***SOLUCIÓN*** $\boldsymbol{x_n = k^n x_0}$
1	"$375(k)^{t+1}$ solución en general"
2	"$x_{t+1} = \left(2/3\right)^{t+1} x_0 \Rightarrow$ exponencial"
3	"$x_{t+1} = \left(2/3\right)^{t+1} x_0,\ \lim\limits_{t\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^t \to 0$. Si 0 < k < 1⇒0. Si k > 1 ⇒ crece siempre"
4	"Si $t \longrightarrow \infty \Rightarrow 0$. Si 0 < k < 1⇒ decrece. k > 1 ⇒ crece siempre. –k no tiene sentido."

5	Resolvió junto con equipo 4.
6	"$P_n = k^n B_t$" Error, debería ser B_0 no B_t.
7	"$k_t = k^t x_0$"
8	"$x_{t+1} = \left(2/_3\right)^{t+1} x_t$" Error, debería ser x_0 no x_t.
9	"$x_{t+1} = \left(2/_3\right)^{t+1} x_0$"
10	"$x_n = k^n x_0$"

E.4 Problema de empleo

<u>Pregunta 1</u>

EQUIPO	***ECUACIÓN*** $\boldsymbol{x_{t+1} = qx_t}$
1	"Sucesión $\{x_{n+1}\} = q^{n-1}(x_0)$." También "$x_{t+1} = qx_t$."Dan valor a x_0 y ponen varios casos.
2	"$E_{n+1} = lq^n, \quad x_{t+1} = qx_t$"
3	" $n_{t+1} = q^t n_t$ mal, $x_{t+1} = qx_t$ que pasará en el futuro = El # de empleados del presente multiplicado por Lo que pasó en el periodo pasado."
4	"$x_n = qx_{n-1}, x_n = x_0 q^n$"
5	"$N_{t+1} = qN_t$"
6	"$L_{t+1} = qL_t$"
7	"$x_{t+1} = qx_t$"
8	"$x_0 = t_1, qx_0 = t_2, t_n = q\ (\#empleados\ en\ t_{n-1})$ Para el primer periodo 1, n=1 y q=1" Supone que q=1, solamente para el primer periodo. Error.
9	" $n_{t+1} = qn_t$"

EQUIPO	***ECUACIÓN*** $\boldsymbol{x_{t+1} = qx_t}$
1	"$(q)^n$(x) = empleados" Escriben la solución no el modelo.
2	"$x_{t+1} = qx_t$"
3	"$E_{t+1} = kE_t$"
4	"$x_{t+1} = qx_t$"
5	Responden junto con el equipo 4.
6	"$E_{t+1} = kE_t$"
7	"$x_{t+1} = qx_0$" Error debería ser x_t.
8	"$x_{t+1} = qx_t$"
9	"$x_{t+1} = qx_t$"
10	"$x_{t+1} = qx_t$"

Pregunta 2

EQUIPO	VALORES t=0, t=1, A LA LARGA
1	"$x_n = \left(1/2\right)^n(100)$ la población disminuira"
2	Encuentran para t=1 y 2 " y así hasta llegar a 0."
3	Encuentran para t=0,1, 2 y 3 "$\rightarrow 0$"
4	Encuentran para t= 0 y 1. No concluyen.
5	Responden junto con el equipo 4.
6	"$E_{t+1} = \frac{1}{2}(100) = 50$ A la largaE_{t+1} tiende a cero, todos estarán desempleados."
7	Encuentran para t=0 y 1. "A la larga tiende a cero."
8	Encuentran para t=0 y 1. "A la larga tiende a cero."
9	Encuentran para t=0, 1 y 2. "A la larga todos quedaran desempleados"
10	"$x_t = q^n x_0 = \frac{1^n}{2}$ 100 $n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow 0 \therefore x_n \rightarrow 0$"

Pregunta 3

EQUIPO	SOLUCIÓN $x_n = k^n x_0$
1	"$x_n = \left(1/2\right)^n(100)$ la población disminuira"
2	"$x_{t+1} = k^{t+1}x_0$"
3	"$x_{t+1} = (q)^{t+1}x_t$" Error, debería ser x_0 no x_t.
4	"$x_t = q^n x_0$" No explican.
5	Responden junto con el equipo 4.
6	"$E_n = q^n E_0$"
7	"$x_{t+1} = (q)^{t+1}x_0$"
8	"$x_{t+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} x_t$" Encuentran la fórmula haciendo t=0, 1 y 2 y se equivocan al ponerla en general, debería ser x_0 no x_t. En los pasos lo hacen bien.
9	Sustituyen para t= 0,1 y 2 y concluyen "$x_{t+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} x_0$"
10	"$x_n = q^n x_0$"

E.5 Problema de empleo –desempleo rediseñado (agosto 2011 a enero 2014)

Pregunta 1

EQUIPO	SISTEMA DE ECUACIONES $\boldsymbol{x_{t+1} = qx_t + py_t}$ $\boldsymbol{y_{t+1} = (1-q)x_t + (1-p)y_t}$
1	Si. Además, encuentran t=0, t=1 y van sustituyendo.
2	Si
3	Si. $x_{t+1} = qx_t + py_t$ y luego $x_n = q^n x_0 + p^n y_0$. Lo mismo para y_t.
4	Si
5	Si.
6	Si. $x_n = q^n x_{n-1} + p^n y_{n-1}$ y $x_n = q^n x_0 + p^n y_0$.
7	Si $x_{t+1} = qx_t + py_t \rightarrow x_n = q^n x_0 + p^n y_0$. Lo mismo para y_t.
8	Si
9	Si. $x_{t+1} = qx_t + py_t$ y luego $x_n = q^n x_t + p^n y_t$. Lo mismo para y_t.

EQUIPO	***SISTEMA DE ECUACIONES*** $\boldsymbol{x_{t+1} = qx_t + py_t}$ $\boldsymbol{y_{t+1} = (1-q)x_t + (1-p)y_t}$	***NOTACIÓN MATRICIAL*** $\boldsymbol{\bar{x}_{t+1} = A\bar{x}_t}$
1	Si.	"A$\bar{x}_0 = \bar{x}_{t+1}$" Debería ser $\bar{x}_t$.
2	Escriben varias ecuaciones hasta que llegan a las correctas.	Si. "Ecuación en diferencias"
3	Si.	Si. "Ecuación en diferencias"
4	Si.	Si. "Ecuación en diferencias"
5	Resuelven junto con equipo 4.	
6	Si.	Si. "Ecuación en diferencias"
7	Si.	Si.
8	Si.	"$A_0\bar{x}_t = \bar{x}_{t+1}$" Mal ponen A_0 en lugar de A.
9	Si	Si
10	Si.	Si. "Ecuación en diferencias"

Pregunta 2

EQUIPO	***SUSTITUIR***	$\boldsymbol{\bar{x}_{t+1} = A\bar{x}_t}$
1	Si. Encuentran x_1, x_2, x_3 y los dejan expresados en función de x_0. Van elevando *p, q, 1 - p y 1 – q*, encuentran las potencias. Resuelven suponiendo que x_t y y_t valen *100*.	Si
2	Si. Encuentran x_1, x_2, primero con los valores dados y luegon con *p* y *q*. Escriben q^n.	Si
3	Si	Si
4	Si	Si
5	Si	Si
6	Si. Dicen: "hay que elevar la matriz, hay que elevar cada componente de la matriz, es un escalar a la *n* por un número."	Si
7	Si. Primero escriben el sistema elevando los coeficientes a la n.	Si
8	Si	Si. Escriben "$x_t = q^t x_0$"
9	Si.	Si. Despejan utilizando la inversa. Piden que el determinante sea distinto de cero "$\|A\| \neq 0$, $A^{-1}\bar{x}_{t+1} = \bar{x}_t$"

EQUIPO	***PROPUESTA DE SOLUCIÓN***	***SOLUCIÓN DADA***	***SOL MULTIPLE DETERMINANTE***
1	"$x_{t+1} = (x_t)q^t + (y_t)p^t$" y "$y_{t+1} = (x_t)(1-q)^t + (y_t)(1-p)^t$". Exponencial, pero no correcta.	Sustituyen.	"es un sistema homogéneo. ∴ tiene solución única pero no se puede pues (A-kI)=0 y se haría todo 0 ⇒ $\bar{v} = \bar{0}$ ∴ tiene solución múltiple y el det(A-kI)=0"
2	"$x_t = A^{-1}\bar{x}_{t+1}$" Incorrecta. "$x_t = q^t x_0 + p^t y_0$" y "$y_t =$	Sustituyen.	"|A-kI|=0 ⇒ solución múltiple. |A-kI|= 0 ⇒ no es invertible

	$(1-q)^t x_0 + (1-p)^t y_0$" Exponencial, pero incorrecta.		
3	Despejan de la ecuación matricial. "$\bar{x}_t = A^t(\bar{x}_0)$"	Sustituyen	"k ≠ 0 ⇒ (A-kI) $\bar{v}$= $\bar{0}$ ∴ solución múltiple. |A-kI|=0, det=0, ∴ columnas ld.
4	Despejan de la ecuación matricial. "$\bar{x}_t = A^{t-1}(\bar{x}_0)$"	Sustituyen	"Por ser un sistema homogéneo, solución múltiple, sean ld, no haya inversa, det=0, |A-kI|=0 sol múltiple."
5	Resuelven con equipo 4.		
6	"$\bar{x}_{t+1} = (A)^{t+1}\bar{x}_t$" y "$\bar{x}_t = k^t\bar{v}$" Correcta	Sustituyen.	"Sistema homogéneo, solución única o múltiple, como $\bar{v}$ no puede ser cero, solo hay solución múltiple ⇒ |A-kI|=0."
7	"$\bar{x}_t = (A^tA)^{-1}A^t\bar{x}_{t+1}$" Incorrecto, mínimos cuadrados. "$\bar{x}_t = k^t\bar{v}$" Correcta	Sustituyen.	"$\bar{v} \neq \bar{0}$ |A-kI|=0"
8	"$\bar{x}_{t+1} = (A)^{t+1}\bar{x}_0$" y "$x_t = q^t x_0 + p^t y_0$" y "$y_{t+1} = (1-q)^t x_0$" y "$\bar{x}_t = k^t\bar{v}$" Correcta	Sustituyen.	"k≠0 ⇒ (A-kI) $\bar{v}$=$\bar{0}$, $\bar{v} \neq \bar{0}$ ⇒ (A-kI)= $\bar{0}$ sistema homogéneo, solución múltiple, solución única" Marcan la solución múltiple pero no dicen nada del determinante.
9	Escriben x_1 y y_1, sustituyen para encontrar y_2. Dejan en general y_t con exponencial. Incorrecto.	Sustituyen.	"Es un sistema homogéneo que puede tener 2 soluciones, pero es absurdo que sea solución única ⇒ $\bar{v} = \bar{0}$ ∴ |A-kI|=0."
10	"A=$(\bar{x}_t)^{-1}\bar{x}_{t+1}$" y "$\bar{x}_t = k^t\bar{v}$" Correcta	Sustituyen.	"k≠0 ⇒(kI-A) $\bar{v} = \bar{0}$ $\bar{v} \neq \bar{0}$ ⇒ S.H. tiene SM ⇒ det = 0 ⇒ |A-kI|=0"

Pregunta 3

EQUIPO	***PROPUESTA DE SOLUCIÓN***	***SOLUCIÓN DADA***	***SOL MULT. DETEMINANTE.***
1	Resuelven usando Gauss Jordan. Suponen un valor y resuelven. También resuelven en general con p y q.	Sustituyen	"sistema homogéneo tiene por lo menos una solución trivial y tiene sol múltiple, nos sirve la múltiple |A – qI|=0"
2	Encuentran x_1, y_1. Encuentran x_2 y sustituyen los valores de x_1, y_1. No concluyen.	Sustituyen	"Por ser homogéneo, necesitamos que haya solución múltiple (y no sólo sol. trivial). Sm→ l.d. → |A-qI|=0"
3	No intentan nada.	Sustituyen	Hacen el despeje correcto y dicen

			que es homogéneo, pero no dicen nada del determinante.
4	No intentan nada.	Sustituyen	Hacen despeje correcto. Llegan a "$(A - qI)\bar{v} = \bar{0}$ q=?, $\bar{v}$ =?"
5	Despejan usando la inversa. "$\bar{x}_{t+1} = A\bar{x}_t$ $\bar{x}_t = A^{-1}\bar{x}_{t+1}$"	Sustituyen	"sistema homogéneo ∴ tiene solución mútliple o trivial pero esta no sirve"
6	Encuentran la solución $\bar{x}_t = q^t\bar{v}$	Sustituyen	"Por ser homogéneo se llega a solución trivial o múltiple. Sin embargo sólo nos es útil la solución múltiple. $\nexists\ (A - qI)^{-1} \Rightarrow$ |*A*-*qI*|=*0*."
7	No intentan nada	Sustituyen.	Para despejar dividen entre un vector. Después lo hacen correctamente. "Por ser homogéneo llego a solución múltiple y a solución trivial, pero la trivial no me sirve."
8	Llegan a $\bar{x}_t = q^t x_0$.	Sustituyen	"Sist homogéneo: S. única - $\bar{v} = \bar{0}$ ó S. Mult – ld, → ∄ inversa → |*A*-*qI*|=*0*"
9	Despejan usando la inversa. Elevan cada componente de la matriz a la *t+1*. Hablan de hacer Gauss-Jordan.	Sustituyen	Llegan a "$q\bar{u} - A\bar{u} = \bar{0}$"

EQUIPO	$p(\lambda)$	$\lambda_1, \bar{v}_1$ *y* E_{λ_1}	$\lambda_2, \bar{v}_2$ *y* E_{λ_2}
1	Si	Si, dan caso particular. Encuentran el espacio propio.	Si, dan caso particular. Encuentran el espacio propio.
2	Si	Si, dan caso particular. Encuentran el espacio propio.	Si, dan caso particular. Encuentran el espacio propio.
3	Si	Si, no dan caso particular. No encuentran el espacio propio. Lo hacen en la siguiente clase.	Si, no dan caso particular. No encuentran el espacio propio. Lo hacen en la siguiente clase.
4	Si	Si, no dan caso particular. No encuentran el espacio propio.	Si, no dan caso particular. No encuentran el espacio propio.
5	Si	Si, dan caso particular. Encuentran el espacio propio.	Si, dan caso particular. Encuentran el espacio propio.
6	Si	Si, no dan caso particular. No encuentran el espacio propio.	Si, no dan caso particular. No encuentran el espacio propio.
7	Si	Si, no dan caso particular. No encuentran el espacio propio.	Si, no dan caso particular. No encuentran el espacio propio.
8	Si	Si, dan caso particular. Encuentran el espacio propio.	Si, dan caso particular. Encuentran el espacio propio.
9	Si, pero ponen "$\|A - q^t I\| = 0$" Resuelven correctamente, toman a q^t como nombre del escalar.	Si, dan caso particular. Encuentran el espacio propio.	Si, dan caso particular. Encuentran el espacio propio.

EQUIPO	$p(\lambda)$	$\lambda_1, \bar{v}_1$	$\lambda_2, \bar{v}_2$
1	Si.	Si, dan caso particular.	Si, dan caso particular. Dijeron: "no se puede pq empleo es negativo"
2	Si.	Si, dan caso particular.	Si, dan caso particular.
3	Si.	Si, dan caso particular.	Si, dan caso particular.
4	Si.	Si, dan caso particular.	Si.
5	Resuelven junto con el equipo 4.		
6	Si.	Si.	Si.
7	Si.	Si.	Si.
8	Si.	Si, dan caso particular.	Si, dan caso particular.
9	Si.	Si.	Si.
10	Si.	Si, dan caso particular.	Si, dan caso particular.

Pregunta 4

EQUIPO	***GRÁFICA. ESPACIOS PROPIOS***	***SOLUCIÓN***
1	Si	"$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = 1^t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$" "Escogemos $\bar{v}_1$porque en $\bar{v}_2$habría empleados negativo o desempleados negativos"
2	Si	"Dado que no podemos tener un número de empleados/desempleados negativos, elegimos la solución del vector $\bar{v}_1$ con el espacio E_1"
3	Si	No
4	Si	"Se utiliza el de los positivos." "Tomaríamos el espacio generado por $\bar{v}_1 = (2,3)$ porque es el único que tiene las dos entradas positivas y el modelo exige que las variables sean positivas. Las otras soluciones estarían en $\mathbb{R}^2$"
5	Si	"Se escogería el E_1 porque sino con $E_{1/6}$ x sería negativo y eso no es posible."
6	Si	"Escogemos E_1 xq ambas componentes de $\bar{v}_1$ son positivas" "escojo λ_1 porque no tiene negativos su vector propio." "Escojo el E_1 y los vectores propios correspondientes porque son positivos."
7	Si	"en el espacio 2 no xq tenemos negativos $\bar{v}_2 = (-1,1)$ (por definición de las variables) Escogemos el espacio 1 $\bar{v}_1 = (2,3)$"
8	Si	"Escogemos E_1 porque sus componentes son positivos."
9	Si	No responden

EQUIPO	***GRÁFICA. ESPACIOS PROPIOS***	***SOLUCIÓN***
1	Si.	"La solución es λ_1 $\bar{v}_1 = (2,3)$"
2	Si.	"Escogemos (2,3) = $\bar{v}_1$ porque (-1,1) no tiene sentido en la realidad no hay negativos empleados/desempleados."
3	Si.	No contestan.
4	Si.	"Escogemos (2,3) por no poder tener (-1,1) empleado/desempleado."
5	Resuelven junto con el 4.	
6	Si.	"Escogemos el vector $\bar{v}_2$ porque no hay valores negativos en la vida real."
7	Si.	"(-1,1) no porque es negativo"
8	Si.	"(2,3) escogemos este porque el otro es negativo"
9	Si.	"(-1,1) NO! Porque no puedes tener -1 desempleados"
10	Si.	No contestan.

Pregunta 5

EQUIPO	$\boldsymbol{\bar{v} = (12, 18) = 6\,\bar{v}_1}$	$\boldsymbol{\bar{v} = (100, 50)}$ ***NO***
1	Si	Si
2	Si	Si “no es múltiplo de ninguno”
3	Si	Si
4	Si	Si “no se puede escribir como combinación de un vector por ello para llegar a (100,50) debo tener una combinación de los dos vectores”
5	Si	Si “no se puede generar ni con $\bar{v}_1$ ni con $\bar{v}_2$ solos pero como combinación lineal se puede”
6	Si	Si “no se puede generar con un solo vector pero con una combinación lineal si”
7	Si	Si “con ninguno ya que no es paralelo a ninguno”
8	Si	Si
9	Si	Si

EQUIPO	$\boldsymbol{\bar{v} = (12, 18) = 6\,\bar{v}_1}$	$\boldsymbol{\bar{v} = (100, 50)}$ ***NO***
1	“Es combinación lineal. Esta en el espacio”	Si.
2	“Este vector esta en el espacio propio de E_1.”	“No se puede generar con ningún vector propio. No esta sobre ninguna de las dos rectas.”
3	Si.	Si.
4	“Esta en el espacio propio.”	“No se puede. $\nexists\,\lambda$”
5	Resuelve con equipo 4.	
6	“Solo $\bar{v} = (12{,}18)$ pertenece a la solución.”	“No hay λ que satisfaga la ecuación”
7	Si.	Si.
8	“Esta sobre la recta.”	Si.
9	Si.	“No es combinación lineal.”
10	“Está sobre el esp propio”	Si.

Pregunta 6

EQUIPO	***SUSTITUIR***	$\boldsymbol{A\bar{v} = \lambda\bar{v}}$
1	Si	Si
2	Si	Si
3	Si	Si
4	Si	Si
5	Si	Si
6	Si	Si
7	Si	Si
8	Si	Si
9	Si	Si

EQUIPO	*SUSTITUIR*	$A\bar{v} = \lambda\bar{v}$
1	Si.	Si.
2	Si.	Si.
3	Si.	Si.
4	Si.	Si.
5	Resuelve con equipo 4.	
6	Si.	Si.
7	Si.	Si.
8	Si.	Si.
9	Si.	Si.
10	Si.	Si.

Pregunta 7

EQUIPO	$\bar{v} = (12, 18)$	$\bar{v} = (100, 50)$
1	Si	Si
2	Si	Si
3	Si	Si
4	Si “por el ejercicio 5 ya lo sabemos”	Si
5	Si	Si
6	Si	Si
7	Si	Si
8	Si	Si
9	Si	Si

EQUIPO	$\bar{v} = (12, 18)$	$\bar{v} = (100, 50)$
1	Si.	Si.
2	Si.	Si.
3	Si. “condición inicial t=0”	
4	“En condiciones iniciales. Aquí da $c_1=6$, $c_2=0$ porque el vector (12,18) es combinación directa (solo) del vector $(2,3)\lambda$, con $\lambda = 6$.”	“Para llegar a (100, 50) es necesario usar $c_1=30$, $c_2=-40$ ya que no es combinación de un solo vector propio, pero en combinación si.”
5	Resuelven con el equipo 4.	
6	“(12,18) solo es combinación lineal de v_1.”	“(100,50) es combinación lineal de v_1 y v_2.”
7	Si.	Si.
8	Si.	Si.
9	Si.	Si.
10	Si. “t=0”	Si. “t=0”

Pregunta 8

EQUIPO	*GRÁFICA* x_t	*GRÁFICA* y_t	*CONCLUSIÓN*
1	Si	Si	Resuelven con *t=0*, *t=1*.
2	Si	Si	“lo mismo para *t=1*, *t=2*, … pues $1^t = 1$”
3	Si	Si	No

4	Si	Si	"A la larga si $\lambda < 0$ entonces se vuelve 0, si es igual a 1 constante, si es $\lambda > 0$ crece a infinito"
5	Si	Si	Resuelven $t=0$, $t=1$, $t=2$.
6	Si	Si	"$t \to \infty \to x_t \to 12$, $y_t \to 18$"
7	Si	Si	"se mantiene constante, $t= (0,1,2)$"
8	Si	Si	No
9	Si	Si	No

EQUIPO	***GRÁFICA*** x_t	***GRÁFICA*** y_t	***CONCLUSIÓN***
1	Si.	Si.	"Se mantiene constante dado que $\lambda=1$"
2	Si.	Si.	Resuelven con t=0, 1, 2, … n.
3	Si.	Si.	"Si $\lambda=1$ a lo largo del tpo, el valor propio no cambiará."
4	Si.	Si.	"Con $\lambda=1$ a lo largo del tiempo = cte. $\lambda > 0$ aumenta a lo largo del tiempo. $\lambda < 0$ disminuye a lo largo del tiempo."
5	Resuelven junto con el equipo 4.		
6	Si.	Si.	No concluyen.
7	Si.	Si.	"No cambian porque $\lambda=1$ y $c_2=0$"
8	Si.	Si.	"Siempre es igual ya que $\lambda=1 \therefore \lambda^t \ \forall \ \lambda$ va a ser 1" Error debería ser $\forall \ t$.
9	Si.	Si.	"$\therefore$ siempre es lo mismo (12, 18)"
10	Si.	Si.	"$t \to \infty$ no cambia nada. El empleo no cambia."

Pregunta 9

EQUIPO	***GRÁFICA*** x_t	***GRÁFICA*** y_t	***CONCLUSIÓN***
1	Si	Si	$\left(\frac{1}{6}\right)^t \to 0$. x_t tiende a 60, y_t tiende a 90.
2	Si	Si	Encuentran $t=0$, 1 y 2. "x_t tiende a 60, y_t tiende a 90."
3	Si	Si	No explican.
4	Si	Si	"A la larga si $\lambda < 0$ entonces ese lado se vuelve 0. Si es igual a 1 constante. Si es $\lambda > 0$ crece a infinito" Calculan $t=0$, 1 y 2.
5	Si	Si	Calculan $t=0$, 1 y 2.
6	Si	Si	Calculan $t=0$, 1 y 2.
7	Si	Si	"los empleados disminuyen. Los desempleados aumentan"
8	Si	Si	Calculan $t=0$, 1 y 2.
9	Si	Si	Calculan $t=0$, 1 y 2.

EQUIPO	*GRÁFICA* x_t	*GRÁFICA* y_t	*CONCLUSIÓN*
1	Empieza bien en 100 pero la hacen para arriba.	Empieza bien en 50 pero la hacen para abajo.	Concluyen bien. "$t \to \infty \Rightarrow$ (60, 90)"
2	Si.	Si.	Resuelve con t=0,1,2 y 3. "Si $t \to \infty \Rightarrow$ (60, 90) misma proporción que (2,3) vector propio."
3	Si.	Si.	"$t \to \infty \Rightarrow$ (60,90)."
4	Dan valores correctos pero no hacen la gráfica.	Dan valores correctos pero no hacen la gráfica.	"$t = \infty$ (60,90)"
5	Resuelve junto con el equipo 4.		
6	Si.	Si.	Calculan t=0, 1, 2, 3.
7	Si.	Si.	"$x_t \to 60$, $y_t \to 90$ cuando $t \to \infty$"
8	Si.	Si.	No explican.
9	Dan valores correctos pero no hacen la gráfica.	Dan valores correctos pero no hacen la gráfica.	"$t \to \infty \Rightarrow$ (60,90)."
10	Si. Grafican la asíntota, x=60.	Si. Grafican la asíntota, y=90.	"$x_t \to 60$ = baja. $y_t \to 90$ = sube"

Pregunta 10

EQUIPO	*SUSTITUYEN*	*t* →∞	*CONCLUSIÓN*
1	Si	"$\lim_{t\to\infty} \bar{x}_t = \begin{pmatrix}60\\90\end{pmatrix}$" " A la larga el importante es el primer término"	"En el muy largo plazo el nivel de empleo será 60 y el de desempleo 90."
2	Si	"Cuando *t*→∞ (60, 90) cte , ($40/6^t$, $-40/6^t$) tiende a cero pues dividiremos entre un núm. muy grande"	"$\therefore (x_t, y_t) \rightarrow$ (60, 90)"
3	Si	"$(1)^\infty \to 1$ y $\left(\frac{1}{6}\right)^\infty \to 0$"	"*x = 60, y=90*."
4	Si	"Si *t*→∞ los valores de empleo y desempleo tienen a los obtenidos por $(c_1)(\lambda^t)(v_1)$"	"$(30)\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}60\\90\end{pmatrix}$" "A la larga si λ<0 entonces se vuelve 0. Si es igual a 1 constante. Si es λ>0 crece infinito"
5	Si	"*t*→∞ depende de v_1 ya que λ_2^t por ser fracción se hace pequeño"	"2 empleados x c/3 desempleados"
6	Si	*t*→∞ en la pregunta 8 "$x_t \to 12$, $y_t \to 18$"	"tiende a (60, 90)" "*x* tiende a 60 porque si *t*→∞ el lado que resta tiende

			a 0 y el otro a 60. y tiende a 90 porque t→∞ el lado que resta tiende a 0 y el otro a 90." "a la larga cuando t→∞ $x_t \to 60$, $y_t \to 90$"
7	Si	En la pregunta 8 "se mantiene constante" En la pregunta 9 "$(1)^t$ se mantiene constante $\left(\frac{1}{6}\right)^t$ se va a cero"	"2 emp x 3 des"
8	Si	"Cuando $t \to \infty$ $\lambda \to 0$"	"(60, 90) la fuerza laboral constante"
9	Si	No resuelven	No resuelven

EQUIPO	***SUSTITUYEN***	***t* →∞**	***CONCLUSIÓN***
1	Si.	Resuelven cuando $t \to \infty$.	"(x,y) = (60,90) cuando $t \to \infty$"
2	Si.	"$\lim\limits_{t\to\infty} = 60$. $\lim\limits_{t\to\infty} = 90$."	"Si. $t \to \infty \Rightarrow$ (60,90) misma proporción que (2,3) vector propio."
3	No resuelven.		
4	Si.	Sustituyen.	"$\left(\frac{1}{6}\right)^\infty \to 0$ tiende a cero $x_\infty = (x_\infty, y_\infty) =$ (60,90)"
5	Resuelve junto con el 4		
6	Si.	Si.	"Cuando $t \to \infty \Rightarrow$ (60,90) para el vector (100,50). Cuando $t \to \infty \Rightarrow$ (12,18) el valor no cambia."
7	Si.	Dan valores a t=0, 1, 2 y 3.	"$x_t \to 60$, $y_t \to 90$ cuando $t \to \infty$"
8	Si.	Si.	"Cuando $t \to \infty \Rightarrow$ (60,90)."
9	Si.	Dan valores.	"$t \to \infty \Rightarrow$(60, 90)."
10	Si.	Sacan el límite.	"$t \to \infty \Rightarrow \frac{1^t}{6^t} \to 0 \therefore x_t \to 60, \therefore y_t \to 90$"

E.6 EXÁMENES

Pregunta:

Encuentra, de la siguiente matriz, los valores, vectores y espacios propios. Encuentra la multiplicidad geométrica.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

	NOMBRE	*VALOR, VECTOR, ESPACIO PROPIO, MULTIPLICIDAD GEOMÉTRICA*
1	Adriana	Resuelve correctamente pero al dar valores para cada λ encuentra dos vectores propios.
2	Agustín	Correcta
3	Ainslie	Encuentra todo, pero al decir que el espacio vectorial es una recta da una recta que no pasa por el origen.
4	Alonso	Correcta
5	Carlos	Correcta
6	Cynthia	Error de álgebra. Bien procedimiento.
7	Fabiola	Correcta
8	Francisco	Da un espacio propio y una dimensión geométrica con los dos vectores propios.
9	Héctor	Correcta
10	Jesús	Correcta
11	Jorge A	No hizo examen.
12	Jorge L	Correcta
13	José A	Correcta
14	José I	Correcta
15	José M	Todo excepto la dimensión geométrica por que da una para ambos espacios.
16	Josiel	Da un espacio propio y una dimensión geométrica con los dos vectores propios.
17	Juan D	Correcta
18	Juan J	Correcta
19	Luis	Correcta
20	Mauricio	Correcta
21	Rafael	Valores propios correctos, pero para cada uno da dos vectores propios
22	Roberto N	Correcta
23	Roberto S	Correcta
24	Santiago	Correcta
25	Sergio	Correcta
26	Tania	Correcta

Pregunta

Valores y vectores propios.

a) *Sin hacer cálculos, encuentra un valor propio con sus dos vectores propios linealmente independientes, el espacio propio y la multiplicidad geométrica de:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{5} \\ \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{5} \\ \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

b) *Usando el teorema "resumen" si di* $\boldsymbol{\lambda = 2}$ *es un valor propio de:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

c) *Explica porqué una matriz* $\boldsymbol{A_{2x2}}$ *puede tener, cuando mucho, dos valores propios distintos.*

d) *Encuentra una matriz* $\boldsymbol{A_{4x4}}$ *que tenga como valores propio al 2, 3 y 5.*

Inciso a

	NOMBRE	*VALOR, VECTOR, ESPACIO PROPIO, MULTIPLICIDAD GEOMÉTRICA*
1	Adriana	$\lambda = 0$, pero no explica. Vectores propios incorrectos.
2	Agustín	Supone $\lambda = 5$. Incorrecta.
3	Ainslie	Supone $\lambda = 1$. Incorrecta.
4	Alonso	Columnas ld, $\lambda = 0$.
5	Carlos	Encuentra la ecuación pero no da valores correctos.
6	Cynthia	$\lambda = 0$, resuelve correctamente pero no explica.
7	Fabiola	"$\lambda = 0$ porque los vectores son ld." Le faltan vectores y espacio propio.
8	Francisco	Columnas ld, λ = 0. Vectores propios incorrectos, mult geom correcta.
9	Héctor	Incorrecta. "Asignamos a $\lambda = 15$ se cumple la ecuación"
10	Jesús	Supone $\lambda = 5$. Incorrecta.
11	Jorge A	No hizo examen.
12	Jorge L	Columnas ld, pero concluye "no puedes encontrar nada". Incorrecta.
13	José A	Columnas ld, $\lambda = 0$.
14	José I	Columnas ld. Encuentra los vectores propios y de ahí deduce $\lambda = 0$.
15	José M	Las columnas son ld, pero dice que no "puede tener vectores propios, espacio propio, etc."
16	Josiel	Supone $\lambda = 5$. Incorrecta.
17	Juan D	Supone $\lambda = 5$. Incorrecta.
18	Juan J	Columnas ld, pero "no se puede hacer nada de esto"
19	Luis	Obtiene los dos vectores propios correctos, pero no encuentra el valor propio.
20	Mauricio	Columnas ld, $\lambda = 0$.
21	Rafael	$\lambda = 0$, pero los vectores propios mal.

22	Roberto N	$\lambda = 0$, vectores ld
23	Roberto S	Supone $\lambda = 1$. Incorrecta.
24	Santiago	Columnas ld, $\lambda = 0$.
25	Sergio	Columns ld, $\lambda = 0$.
26	Tania	Columnas ld, $\lambda = 0$.

Inciso b

	NOMBRE	***SOLUCIÓN MÚLTIPLE***
1	Adriana	Incorrecta, pues resuelve.
2	Agustín	Incorrecta, pues resuelve.
3	Ainslie	Correcta
4	Alonso	$(A - 2I)$ ld, sol múltiple.
5	Carlos	Solución múltiple
6	Cynthia	$(A - 2I)$ y encuentra el determinante
7	Fabiola	$(A - 2I)$ y encuentra el determinante.
8	Francisco	Matriz con vectores li, determinante igual a cero.
9	Héctor	Incorrecta. Resuelve no usa el teorema.
10	Jesús	Determinante igual a cero.
11	Jorge A	No hizo examen.
12	Jorge L	Escribe el teorema pero no sabe aplicarlo.
13	José A	$(A - 2I)$, renglones ld, solución múltiple, si es.
14	José I	$(A - 2I)$, columnas ld
15	José M	No responde
16	Josiel	$(A - 2I)$ y encuentra el determinante, pero no concluye
17	Juan D	Sustituye en $(A - 2I)\bar{v}$, pero no concluye.
18	Juan J	Sustituye n $(A - 2I)\bar{v}$, pero no concluye.
19	Luis	$\lvert A - \lambda I \rvert = 0$
20	Mauricio	$\lambda \neq 0$, pero no dice nada de $\lambda = 2$.
21	Rafael	Incorrecta. “Sí es un valor propio porque además de que su determinante es diferente de 0, los vectores li.”
22	Roberto N	Sustituye en$(A - 2I)\bar{v}$, pero no concluye. Da la definición.
23	Roberto S	$(A - \lambda I)\bar{v} = 0$, $\lvert A - \lambda I \rvert = 0$
24	Santiago	Solución múltiple
25	Sergio	Columnas ld, $(A - 2I)$
26	Tania	$(A - 2I)$ y saca determinante. Escribe el teorema.

Inciso c

	NOMBRE	***SOLUCIÓN***
1	Adriana	“A_{2x2} puede tener máximo 2 valores propios distintos (λ) si sus renglones no son múltiplos, y son independientes pues de otra forma sólo tendrá un λ.
2	Agustín	“Supongamos que A_{2x2} es diagonalizable, la diagonal solo tiene 2 valores que pueden ser iguales o diferentes, es decir los valores propios de A”.
3	Ainslie	“la dimensión de una matriz A_{2x2} es 2 lo que implica que se necesita una base con 2 vectores para generar el espacio $\mathbb{R}^2$, también sabemos que los vectores propios son li”
4	Alonso	“Una matriz A_{2x2} puede tener n-vectores propios si y solo si la multiplicidad

		geométrica de todo valor propio es igual a la multiplicidad algebraica y los valores propios deben ser distintos con vectores propios correspondientes v_1 y v_2, por lo que v_1 y v_2 son vectores li y los valores propios son li y también porque el polinomio característico sería un cuadrado y la ecuación característica tendría 2 soluciones, ya sea distintas o uno mismo con multiplicidad algebraica 2."
5	Carlos	Por teorema
6	Cynthia	"A_{2x2} puede tener a lo mucho dos valores propios distintos ya que, éstos 2 valores propios distintos generarían 2 vectores propios posibles y así A puede ser diagonalizable con exactamente 2 valores propios y 2 vectores propios."
7	Fabiola	Si $A_{nxn} \Rightarrow$ tiene a lo mas n valores propios si n = 2 entonces A tiene 2 valores propios. Máximo porque su dimensión = 2, es decir, su multiplicidad algebraica es menor o igual a su multiplicidad geométrica no puede generar un espacio en una dimensión mayor a 2"
8	Francisco	"no pudiera tener más valores propios porque necesitaríamos una matriz más grande" , "para poder tener como mínimo 3 valores propios necesitaríamos mínimo una matriz 3x3 para que genere p(λ) cúbica"
9	Héctor	"ya que al momento de resolver el determinante de $\|A - \lambda I\|$, al ser matriz, nos va a quedar un polinomio característico cuadrático, lo cual hace que únicamente tenga a lo más 2 valores de λ."
10	Jesús	Polinomio característico "λ puede tener a lo más 2 vectores"
11	Jorge A	No hizo examen.
12	Jorge L	"un binomio cuadrado y a lo más podemos encontrar una raíz doble"
13	José A	"porque $(A - \lambda I)$ provoca un p(λ) de grado 2, que a lo más solo puede tener a lo más 2 raíces cuando $\|A - \lambda I\|$ = p(λ)=0 se resuelve, teorema de q una matriz de nxn puede tener a los más n valores propios."
14	José I	"porque cuando mucho puede tener 2 posiciones pivote. Por ejemplo si fuera una matriz triangular sus valores propios serían las entradas de la diagonal y tiene 2 entradas con 2 vectores propios li tendría dos valores propios dist."
15	José M	"cada valor propio tiene un vector propio, si hubiera más de dos entonces los vectores propios tendrían que ser ld. Una matriz 2x2 solo puede tener 2 vectores propios."
16	Josiel	Responde sobre los vectores propios no los valores propios.
17	Juan D	"a lo mucho 2 val propios distintos, ya que a lo mucho puede generar el plano xy, es decir, con 2 vectores li" "en el caso de la matriz 2x2, resultan 2 lambdas"
18	Juan J	"Al ser A_{2x2}, la matriz C necesariamente tiene que ser de 2x2, ya que los vectores propios no pueden tener más dimensiones que las de la matriz. Al ser C de 2x2, C^{-1} necesariamente es de 2x2, por lo que la matriz diagonal es de 2x2. La matriz D tiene a los valores propios en su diagonal y ceros en todo lo demás, por lo que si es de 2x2, a lo mucho puede tener dos valores propios distintos."
19	Luis	"Una matriz A_{2x2} solo puede tener 2 valores propios, ya que se debe obtener un det(A-λI) que es mi polinomio característico igualado a 0 $\therefore$ se tendrán λ^2 por eso solo es posible tener 2 valores propios"
20	Mauricio	"porque solo puede tener 2 vectores propios li" correcto, pero "a cada vector propio le corresponde solo un valor propio", incorrecto.
21	Rafael	"Porque si pensamos en un matriz diagonal de 2x2, sus valores propios serían los valores de la diagonal que en este caso son sólo 2. Por lo tanto, estos valores pueden ser iguales o distintos pero sólo puede haber cuando mucho, dos valores propios distintos".
22	Roberto N	"máximo 2 valores propios distintos debido a que para poder tener valores propios se necesitan tener vectores li" "también pudiera tener solo un valor propio

		con dimensión algebraica 2”
23	Roberto S	“Una matriz A_{2x2} solo puede tener 2 valores propios pues solo puede tener 2 ecuaciones li que cumplan $(A - \lambda I)\bar{v} = 0$ solo una λ que cumpla la restricción aunque podría haber muchos vectores propios.” “A_{2x2} cuando mucho $p(\lambda) = \lambda^2 \ldots \Rightarrow 2\lambda = , \Rightarrow 1\lambda$ mult alg 2, $\Rightarrow 3\lambda$ absurdo”
24	Santiago	“A tiene dos variables y está en $\mathbb{R}^2$ también es importante señalar que los vectores propios son li por lo que sólo puede haber máximo dos vectores propios, por lo que también deben existir máximo dos valores propios que necesitamos para encontrar los vectores propios.”
25	Sergio	“Una matriz A_{2x2} solo puede llegar a tener 2 valores propios distintos ya que a la hora de resolver el polinomio característico es decir $\|A - \lambda I\|$ nos va a resultar un polinomio cuadrático que al igualar a cero solo tendrá 2 soluciones → 2 valores propios”
26	Tania	“Si una matriz es de 2x2, significa que a lo mucho puede tener 2 vectores li y por lo tanto a lo mucho 2 valores propios. Sabemos por teorema que la dimensión o multiplicidad geométrica tiene que ser menor, o a lo mucho igual, a la algebraica; lo mayor que puede ser la dimensión geométrica de una matriz 2x2 es = 2, generando todo $\mathbb{R}^2$. Si hubiera más de 2 valores propios, podría haber más de 2 variables arbitrarias generando algo mayor a $\mathbb{R}^2$ y esto no se puede”

Inciso d

	NOMBRE	*MATRIZ DIAGONAL O TRIANGULAR*
1	Adriana	Encuentra el polinomio, no escribe la matriz.
2	Agustín	Matriz triangular
3	Ainslie	Matriz diagonal
4	Alonso	Matriz diagonal
5	Carlos	Matriz diagonal
6	Cynthia	Matriz diagonal, pero agrega otro valor propio.
7	Fabiola	Matriz triangular (sup/inf)
8	Francisco	Matriz diagonal
9	Héctor	Matriz diagonal
10	Jesús	Matriz diagonal
11	Jorge A	No hizo examen.
12	Jorge L	Matriz diagonal, pero A_{3x3}.
13	José A	Matriz diagonal
14	José I	Matriz diagonal
15	José M	Matriz diagonal
16	Josiel	Matriz diagonal
17	Juan D	Matriz diagonal
18	Juan J	Matriz diagonal
19	Luis	Matriz diagonal
20	Mauricio	Matriz diagonal
21	Rafael	Matriz diagonal
22	Roberto N	Matriz diagonal
23	Roberto S	Matriz diagonal
24	Santiago	Matriz diagonal
25	Sergio	Matriz diagonal
26	Tania	Matriz diagonal

Pregunta 5

	3 MEDIOS	*SOLUCIÓN*
1	Ec vectorial Gauss – Jordan.	"sumando los 3 vectores siempre van a ser ld, ya que por lo menos uno va a ser combinación lineal de los otros 2." Correcta, pero no contestan.
2	Ec vectorial y algebraica	"sobra 1. Sea v_3 combinación lineal de v_1 y v_2. $\therefore$ gen el plano $\boldsymbol{R^2}$."
3	Ec vectorial y algebraica	"como c_1, c_2, c_3 son $\neq$'s de cero son ld." No contesta.
4	Gauss – Jordan.	"son ld"
5	Ec vectorial Gauss – Jordan.	"v_1, v_2, v_3 generan el plano $\boldsymbol{R^2}$ ld."
6	Ec vectorial	"Si". Demuestran que por pares son li.
7	Ec vectorial	"Si puedes llegar a todos lados. Son ld y 1 es la convinación de los otros 2."
8	Gauss – Jordan.	Demuestran que por pares son li.
9	Gauss – Jordan.	"lo correcto es que son 2 vectores y si llegan a $\boldsymbol{R^2}$."
10	Gauss – Jordan.	"son LD porque es un sistema subdeterminado (2 ec. 3 vectores). Con 2 vectores es suficiente para llegar a $\boldsymbol{R^2}$." Grafica.
11	Ec vectorial	"sol múltiple $\therefore$ ld. Gen $\boldsymbol{R^2}$ un plano."
12	Ec vectorial	"$\therefore$ son ld los vectores. Si puedes llegar a todas partes pero hay una combinación de dos."
13	Ec vectorial y algebraica	"son ld. Generan el plano en $\boldsymbol{R^2}$."
14	Ec vectorial y algebraica	"Si se puede llegar a todas partes, pero hay uno que sobra."

	3 MEDIOS	*SOLUCIÓN*
1	Ec vectorial	"si podemos llegar a cualquier lado porque los vectores son li."
2	Ec vectorial y algebraica	"puedo llegar c/todos a cualquier lugar."
3		"Puedo llegar a cualquier parte. Los 3 vectores son ld $\rightarrow \therefore$ uno de ellos es combinación lineal de los otros. Uno sobra. v_1, v_2, v_3 $\rightarrow$ generan plano. Me basta con 2 vectores."
4	Gauss – Jordan.	Demuestran que por pares son li. Incorrecta
5	Matriz aumentada	"cualquiera mientras 2 de ellos tengan solución porque el tercero va a ser convinación lineal de los otros dos."
6	Gauss – Jordan.	"si"
7	Gauss – Jordan.	"Cualquier conjunto de los tres permite ir a todos lados."
8	Gauss – Jordan.	Demuestra que por pares son li.
9	No resuelve.	
10	Gauss – Jordan.	"si pueden llegar a (6, -1)."
11	Ec vectorial	"Si se puede llegar a cualquier lado pues los vectores son diferentes $\rightarrow$ pero ld, 1 depende de los otros 2 gen el plano $\boldsymbol{R^2}$ los vectores v_1, v_2, v_3."
12	No resuelve.	
13	Ec vectorial y algebraica	"Cualquier conjunto porque cualquier pareja de los 3 vectores ería li. Sobra es una suma de los otros 2 v, son ld." Demuestra que por pares son li.
14	Ec vectorial y algebraica	"Si se puede llegar a todas partes, pero hay uno que sobra."

	EN GENERAL
1	No resuelve.
2	No resuelve.
3	"Se puede llegar a cualquier lado usando los vectores li (x_1 y x_2)." Escriben la ecuación vectorial.
4	No resuelve.
5	"como se demostró arriba el sistema es subdeterminado y por lo tanto es ld." No es respuesta.
6	"Cualquier conjunto de 2 de los tres transportes o los 3, no lo permite un solo vector o 2 vectores "iguales" ($v_1 = \lambda v_2$)." Grafica.
7	"Como no c indetermina genera $\boldsymbol{R^2} \Longrightarrow$ q sean li". Grafica
8	"Todos permiten llegar, si tomas únicamente dos medios de transporte a la vez que es lo necesario, entonces cualquier par de los tres son linealmente independientes. ∴ generan todo $\boldsymbol{R^2}$."
9	No resuelve.
10	"Con 2 vectores es suficiente para llegar a $\boldsymbol{R^2}$." Grafica.
11	"Cualquier par de vectores pueden generar planos en $\boldsymbol{R^2}$ siendo li. Si utilizas los tres te queda 1 variable moviéndote en $\boldsymbol{R^2}$ pero serían ld. Sistema subdeterminado → sol multiple vectores ld 1 ° libertad. Lo svectores que no permitirían es cuando los hacemos múltiplos y forman 1 recta."
12	"Cualquier combinación de transportes puede generar todo $\boldsymbol{R^2}$ dado que no son ld." Grafica por pares.
13	"Cualquier conjunto porque cualquier pareja de los 3 vectores ería li. Sobra es una suma de los otros 2 v, son ld." Demuestra que por pares son li.
14	"Son linealmente dependientes los 3 vectores. v_3 es combinación lineal de v_1 y v_2." Grafica.

<u>*Pregunta*</u>

Encuentra los valores, vectores y espacios propios de la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

EQUIPO	***Valores propios*** $\boldsymbol{\lambda_1}$***=0 y*** $\boldsymbol{\lambda_2}$***= 4***	***Vectores propios*** $\boldsymbol{\overline{v}_1}$***=(1,2),*** $\boldsymbol{\overline{v}_2}$***=(-1,2)***	***Espacios propios Recta, recta.***
1Carolina	Si. "la matriz es ld por lo tanto una $\boldsymbol{\lambda}$ va a ser 0"	Toma una ecuación. Si	Si
1 Dulce	Si	Si	Si
1 Mario	Si	Toma una ecuación. Si	Si
1Cristina	Si	Toma una ecuación. Si	Si
2Arela	Si, pero "$\boldsymbol{\lambda}$ no puede ser 0 por lo que solo usamos $\boldsymbol{\lambda=4}$"	Toma una ecuación. Si, pero solo resuelve para uno.	Si. Solo para uno.
2Pedro	Si	Si. "$\boldsymbol{\overline{v}_1}$ *y* $\boldsymbol{\overline{v}_2}$ *son li*"	Si
2 Sofía	Si	Toma una ecuación. Si	Si
2 Elías	NO HIZO EXAMEN		
3 Andrés	Si	Toma una ecuación. Si	Si
3 Daniela	Si	Toma una ecuación. Si	Si
3 Rodrigo	"es ld valor propio = 2" NO.	Sustituye, no concluye.	No resuelve
3 Santiago	Si, pero al encontrar los vectores propios encuentra otro valor propio (el número que multiplica a sus dos	Sustituye el valor propio y toma las columnas como vectores propios, dos vectores para cada valor propio. NO	Si, pero con dos vectores cada uno. NO

	vectores propios). NO		
4 Daniela	Si	Toma una ecuación. Si. “tomamos esta”	Si
4 Imanol	NO HIZO EXAMEN		
4 Alexis	Si	Toma una ecuación. Si	Si
5 Jorge	Si	Toma una ecuación. Si	Si
5 Victor	Si	Toma una ecuación. Si	Si
5 Mylene	NO HIZO EXAMEN		
6 Gabriela	Si	Toma una ecuación. Si	Si
6 Ricardo	Si	Toma una ecuación. Si	Si
6 Manuel	Si	Toma una ecuación. Dos vectores para cada valor. NO	Si, pero con 2 vectores cada uno.
7 Montserrat	Si	Si. Da dos ejemplos, pero para el espacio propio toma uno (correcto)	Si.
7 Alain	Si	Si	Si
7 Carlos	Si	Toma una ecuación. Si	Si
7 Miguel	Si	Si	Si
8 Diego	Si	Toma una ecuación. Si	Si
8 Ana	Polinomio bien pero no sabe resolver y solo encuentra $\lambda=0$	Si, pero solo para el valor propio que encontró.	Si, pero solo para el valor propio que encontró.
8 Diana	Si	Toma una ecuación. Si. “Dado que son múltiplos tomamos sólo una fila”	Si
8 Francisco	NO HIZO EXAMEN		
9 Guillermo	Si	Toma una ecuación. Da dos vectores ld para cada valor propio. NO	Si, pero con dos vectores cada uno. NO
9 Juan Fernando	“es un sistema ld.” $\lambda=-2$, pues es el escalar que multiplica a la col2 para obtener la col 1. No encuentra el otro valor propio. NO	Resuelve correctamente. Toma una ecuación. Pero dice que es para $\lambda=-2$ en lugar de $\lambda=0$.	Si, pero con λ errónea.
9 Valeria	Si	Toma una ecuación. Si	Si
10 Raisa	Si	Toma una ecuación. Si. “Agarras cualquiera de las 2 pues son iguales.” “$\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ son li”	Si
10 Fabio	Si	Si	Si
10 Elizabeth	Si	Sustituye el valor propio y toma las columnas como vectores propios, dos vectores para cada valor propio. NO	Si, pero con dos vectores cada uno.

Pregunta

SIN hacer cálculos encuentra un valor propio con sus dos vectores propios, el espacio propio y la multiplicidad geométrica de: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{7} & \mathbf{7} \\ \mathbf{7} & \mathbf{7} & \mathbf{7} \\ \mathbf{7} & \mathbf{7} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$.

EQUIPO	***λ=0. Columnas ld***	***Vectores propios***	***Espacio propio***
1Carolina	"las columnas/renglones son ld ∴ un valor propio será $\boldsymbol{\lambda}$=**0**. Esta matriz tendrá solución múltiple."	Si	Si.
1 Dulce	"las columnas son ld ∴ un valor propio $\boldsymbol{\lambda}$=**0**."	Si	Si
1 Mario	"$\boldsymbol{\lambda}$=**0** valor propio, porque los renglones por ser idénticos y por tanto el sist tiene solución múltiple pues es la misma ecuación."	Si. "vectores propios pues ambos son li tendrías 2 incógnitas o variables arbitrarias y una dependiente y al elegir $\boldsymbol{\lambda}$=0 significa que solo existe una ecuación en el sistema y por tanto al tener 3 incógnitas y una ecuación existen 2 grados de libertad y una variable definida por estos, y por ello los vectores cumplen con eso."	Si
1Cristina	"Las columnas de A son ld, ∴ $\boldsymbol{\lambda}$=**0**."	Si	Si
2Arela	No resuelve.	No resuelve	No resuelve
2Pedro	"$\boldsymbol{\lambda}$=**0** por teorema"	Si, son li.	Si
2 Sofía	"columnas de A son iguales, ld, según el teorema resumen $\boldsymbol{\lambda}$=**0** es un valor propio."	Si	Si

2 Elías	NO RESUELVE EL EXAMEN.		
3 Andrés	Hace cero los renglones 2 y 3 y concluye “los eigenvalores son 7, 0 y 0” NO	Si	Si
3 Daniela	“$\boldsymbol{\lambda}$=7” NO	Si	Si
3 Rodrigo	“valor propio = 7” NO	NO	NO
3 Santiago	“$\boldsymbol{\lambda}$**=7**” NO	Pone un vector de unos y otro de sietes. NO	Bien procedimiento.
4 Daniela	“los vectores son ld, el determinante de la matriz es $\boldsymbol{\vert A\vert=0}$, …, $\boldsymbol{\lambda=0}$.”	Solo da un vector. NO	Bien procedimiento
4 Imanol	NO RESUELVE EL EXAMEN.		
4 Alexis	“todo es ld ∴ $\boldsymbol{\lambda}$=0”	Si	Si
5 Jorge	“$\boldsymbol{\lambda}$**=0**” No explica	Si	Si
5 Victor	“por prop. de determinantes → si una matriz tiene columnas iguales → detA=0. Teorema resumen dice que detA≠0 → $\boldsymbol{\lambda}$≠0. $\boldsymbol{\lambda}$=0.”	Resuelve correctamente el sist homogéneo, pero solo da 1 vector. NO	Bien procedimiento.
5 Mylene	NO RESUELVE EL EXAMEN.		
6 Gabriela	“$\boldsymbol{\lambda}$=0” No explica	Si	Si
6 Ricardo	“$\boldsymbol{\lambda}$=0” No explica.	Si	Si
6 Manuel	Si. “cols iguales”	Si	No resuelve
7 Montserrat	“La matriz A está formada por columnas ld por lo cual unos de sus valores propios será cero ($\boldsymbol{\lambda}$=0).”	“$\bar{v}_1 = \bar{v}_2 =$ (7,7,7)” NO son ld y las cols de A.	Bien procedimiento. Genera una recta, mult. geom 1.
7 Alain	“$\boldsymbol{\lambda}$**=0** porque detA=0”	Si	Si
7 Carlos	“$\boldsymbol{\lambda}$**=0** porque son ld”	Si	Si.
7 Miguel	“valor propio = 0 (porque sus columnas son ld, (de hecho iguales)).”	Si	Si
8 Diego	NO	NO	NO

8 Ana	"A tiene cols ld, ∴ $\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}\|$=0, $\boldsymbol{\lambda}$=**0**."	Si	Si
8 Diana	"un valor propio es $\boldsymbol{\lambda}$=**0** ya que las filas son ld."	"dado que todas las filas son iguales tomamos sólo un renglón" Si	Si
8Francisco	NO RESUELVE EL EXAMEN.		
9Guillermo	Saca factor común de la matriz y dice que $\boldsymbol{\lambda}$=**7**. NO	Bien procedimiento. NO	Bien procedimiento. NO
9 Juan Fernando	"por teo sabemos que $\boldsymbol{\lambda}$=0 si y solo si A es no invertible, como la matriz A de este ejercicio es ld entonces no es invertible"	Si	Si

<u>Pregunta</u>

Usando el teorema "resumen" di si $\boldsymbol{\lambda = 2}$ *es valor propio de la matriz*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{3} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{8} \end{pmatrix}.$$

EQUIPO	$\boldsymbol{\lambda = 2}$. ***Explicación***
1Carolina	Sustituye en $\boldsymbol{A-\lambda I}$. "el determinante es 0 por lo tanto la matriz es ld y al ser ld $\boldsymbol{\lambda}$**=2** es valor propio y no existe la inversa."
1 Dulce	Escribe el teorema resumen. Encuentra |A| ≠0. "∴ existe la inversa ∴ $\boldsymbol{\lambda}$=2 si podría ser un valor propio de A ya que cumple con los enunciados del teorema resumen" NO la pregunta es si es o no, no podría.
1 Mario	Resuelve $\|\boldsymbol{A-\lambda I}\|$. "Si es valor propio de la matriz pues al restarlo causa que los renglones sean ld y si los renglones son ld tiene solución múltiple. Además al restarlo su determinante da |A|=0 y por tanto tendría solución múltiple, entonces $\boldsymbol{\lambda}$**=2** si es un valor propio pues causa que sus renglones sean ld."
1Cristina	"Es posible que $\boldsymbol{\lambda}$=2 sea valor propio de A porque $\boldsymbol{\lambda}$=2≠0, $\boldsymbol{\lambda}$ no puede ser cero porque A es invertible (|A|≠0)." NO explica porqué 2.
2Arela	Resuelve $\boldsymbol{A-\lambda I}$. "por el teorema resumen $\boldsymbol{\lambda}$**=2** si es valor propio porque las columnas de $\boldsymbol{A-2I}$ son ld."
2Pedro	Resuelve $\boldsymbol{A-\lambda I}$. "las columnas son ld por lo tanto $\boldsymbol{\lambda}$ si es valor propio de A."
2 Sofía	"columnas de A son li ∴ $\boldsymbol{\lambda}$≠0 y $\boldsymbol{\lambda}$**=2** puede ser un valor propio." NO, es o no?
2 Elías	NO RESUELVE EL EXAMEN.
3 Andrés	"Las columnas de A son li, por lo que A es invertible y detA ≠0, y $\boldsymbol{\lambda}$ ≠0, $\boldsymbol{\lambda}$=2 es un candidato." Resuelve $\boldsymbol{A-\lambda I}$. Concluye erróneamente que $\boldsymbol{\lambda}$=2 es valor propio porque es el escalar que multiplica a las columnas de $\boldsymbol{A-\lambda I}$. NO
3 Daniela	"Sí, $\boldsymbol{\lambda}$=2≠0, las cols son li ∴ |A|≠0 y tiene como valores propios $\boldsymbol{\lambda}$≠0." NO, no explica porque 2.
3 Rodrigo	Resuelve $\|\boldsymbol{A-\lambda I}\|$. "det=0 son ld ∴ 2 es valor propio de la matriz"

3 Santiago	Sustituye en $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}$. "$\boldsymbol{\lambda}$**=2** si es val propio." NO explica.
4 Daniela	MAL
4 Imanol	NO RESUELVE EL EXAMEN.
4 Alexis	"$\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}\|$**=0** ∴ si es valor propio de A"
5 Jorge	Encuentra $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}$. "y sus columnas son ld al ser una matriz 2x2 que sus renglones son múltiplos." NO responde si es o no valor propio.
5 Victor	Encuentra $\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}\|$**=0**. "det=0 ∴ no cumple el teorema resumen detA≠0 → $\boldsymbol{\lambda}$**=0** y 2 no puede ser valor propio." NO
5 Mylene	NO RESUELVE EL EXAMEN.
6 Gabriela	Resuelve $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}$. "columnas ld, por tanto $\boldsymbol{\lambda}$**=2** es valor propio de A"
6 Ricardo	Resuelve $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}$. "∴ como las columnas son múltiplos, son ld; $\boldsymbol{\lambda}$=2 si es un valor propio de la matriz."
6 Manuel	$\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}\| = \mathbf{0}$ "como el det es 0 por el teorema resumen son ld hay solución múltiple y por ende con $\boldsymbol{\lambda}$**=2** será valor propio"
7 Montserrat	Encuentra $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}$ pero se equivoca. Encuentra "$\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}\|$**=6**≠0 ∴ $\boldsymbol{\lambda}$=2 si es valor propio." NO, diferente de cero sería que no es valor propio.
7 Alain	Encuentra $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}$. "$\boldsymbol{\lambda}$**=2** sí es valor propio porque entonces $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}$ y sus renglones son ld por lo que $\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}\|$**=0**."
7 Carlos	$\boldsymbol{A\bar{v}} = \boldsymbol{\lambda\bar{v}}$. Sustituye $\boldsymbol{\lambda}$**=2**, despeja y llega a $(\boldsymbol{A}-\ \mathbf{2}\boldsymbol{I})\boldsymbol{\bar{v}} = \bar{\mathbf{0}}$. Resuelve el sistema homogéneo "son ld por lo tanto va a tener solución múltiple y $\boldsymbol{\lambda}$**=2** sí es valor propio."
7 Miguel	Hace Gauss – Jordan sobre A y concluye que si puede ser. NO
8 Diego	"Si |A|=0, $\boldsymbol{\lambda}$**=0**." Correcto, pero no contesta.
8 Ana	" $\|\boldsymbol{A}-\mathbf{2}\boldsymbol{I}\|$=0 sí es valor propio."
8 Diana	Encuentra $\boldsymbol{A}-\mathbf{2}\boldsymbol{I}$. "para encontrar los vectores propios debemos resolver el sistema homogéneo y al resolverlo sabemos que hay solución múltiple y además los vectores son ld por lo que por teorema resumen sabemos que $\boldsymbol{\lambda}$=2 si es valor propio."
8 Francisco	NO RESUELVE EL EXAMEN.
9 Guillermo	Resuelve $\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}\|$. "∴ $\boldsymbol{\lambda}$**=2** sí es valor propio de A porque hace que su determinante sea cero, sus columnas ld y tiene sol. múltiple."
9 Juan Fernando	"con $\boldsymbol{\lambda}$**=2**, det=0 por teorema sabemos que $\boldsymbol{\lambda}$ es valor propio de A"
9 Valeria	"Por teorema si las columnas de $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}$ son ld al sustituir $\boldsymbol{\lambda}$ → es valor propio. Las columnas son ld ∴ si es un valor propio de A." Además escribe todo el teorema resumen.
10 Raisa	"$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}$ → teorema resumen." Encuentra esta matriz, pero se equivoca. "no son ld y su determinante diferente de cero ∴ $\boldsymbol{\lambda}$**=2** no es valor propio de A." Teorema correcto y bien aplicado pero se equivocó al encontrar la matriz $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}$.
10 Fabio	Resuelve $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}$. "det ≠ 0 → $\boldsymbol{\lambda}$ ≠ 0 ∴ si es valor" NO, cómo sabes que es 2.
10Elizabeth	Resuelve $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I}$. "Si es valor propio de A. Vectores son ld."

Pregunta

Cuántos valores propios distintos puede tener, cuando mucho, una matriz $\boldsymbol{A_{4x4}}$*? EXPLICA.*

EQUIPO	***Explicación***
1Carolina	"al ser una matriz cuadrada el número máximo de valores propios es 4, que es el número de renglones; n=4 y n es el número de renglones que es igual al número de columnas. A_{nxn} los valores propios de cualquier matriz serán a lo más n.Cada valor tendrá distinto tendrá mult alg = 1." NO explica.
1 Dulce	"Una matriz A_{4x4} puede tener cuando mucho 4 valores propios, una matriz no puede tener más valores propios que sus columnas."
1 Mario	"El máximo de valores propios es 4, pues el grado del polinomio característico sería de 4, pues esta determinado por el n de la matriz A_{nxn}, y un polinomio de grado 4 tiene 4 soluciones. A_{4x4} → n=4 → polinomio característico es de grado 4 → max 4 soluciones diferentes."
1Cristina	"Puede tener como máximo 4 valores propios porque la matriz es cuadrada y con este tipo de matrices la cantidad de valores propios debe ser menor o igual a n". NO demuestra
2Arela	"Una matriz A_{4x4} puede tener cuando mucho 4 valores propios distintos → multiplicidad geom ≤ dim A." NO
2Pedro	"4 pq por teorema sólo puedes tener hasta n valores propios en una matriz nxn. Pq me quedaría un polinomio p($\boldsymbol{\lambda}$) de grado 4 por lo que sólo puede tener 4 raíces."
2 Sofía	"Una matriz 4x4 puede tener, a lo mucho 4 valores propios distintos, ya que cada uno tendría multiplicidad algebraica = 1 y la suma de las multiciplidades algebraicas debe de ser igual al número de entradas."
2 Elías	NO RESUELVE EL EXAMEN.
3 Andrés	"Una matriz A_{4x4} puede tener un máximo de 4 valores propios. Sabemos que la diagonal de una matriz triangular es igual a los valores propios, así que esta diagonal puede tener máximo 4 valores propios diferentes, o que se repitan (mult alg > ó = a 1)."
3 Daniela	"Una matriz A_{4x4} puede como máximo tener 4 valores propios de acuerdo con la propiedad que dice que toda matriz A_{nxn} puede tener como máximo n val propios." NO explica.
3 Rodrigo	"4 porque en la diagonal caben hasta 4 valores diferentes para que al restar $\boldsymbol{\lambda I}$ de 0"
3 Santiago	"Puede tener hasta 4 debido a que tiene 4 pivotes en los cuales se multiplican las $\boldsymbol{\lambda}$." No se multiplican, se restan.
4 Daniela	"una matriz A_{4x4} puede cuando mucho tener cuatro valores propios, uno por cada pivote o vector li que contenga para que sea un sistema con solución única"
4 Imanol	NO RESUELVE EL EXAMEN.
4 Alexis	"se puede tener máximo 4 valores propios en la matriz A_{nxn}" NO explica.
5 Jorge	"Puede tener como máximo 4 valores propios ya que pueden llegar a tener tantos como número de variables y grado que queda la lambda."
5 Victor	"cuando mucho puede tener 4 distintos, si la multiplicidad algebraica es 1 (es decir si las $\boldsymbol{\lambda}$ que cumplen con la ecuación característica son todas distintas entres sí)"
5 Mylene	NO RESUELVE EL EXAMEN.
6 Gabriela	"Sea A_{nxn} con n vectores li → puede tener a lo máximo n valores propios ∴ A_{4x4} puede tener 4 valores propios como máximo." NO demuestra
6 Ricardo	"cuando mucho puede tener 4 valores propios, una matriz nxn puede tener cuando mucho n valores propios; ya que esto significa la multiplicidad algebraica y

	geométrica, la geométrica tiene que ser menor o igual a la algebraica; lo máximo que genera es R^4 ya que tenemos 4 vectores.”
6 Manuel	“4 valores propios o 4 $\boldsymbol{\lambda}$ pues el polinomio puede ser de grado 4 y si la multiplicidad algebraica es 1 o sea que no se repiten soluciones iguales hay 4 distintas.”
7 Montserrat	“Al ser A_{4x4} una matriz de la forma A_{nxn} el numero de valores no puede ser mayor que n, en este caso el número mayor de $\boldsymbol{\lambda}$ es 4.” NO explica.
7 Alain	“Puede tener cuando mucho 4 valores propios distintos porque el determinante de la matriz es de grado 4.”
7 Carlos	“Una matriz de 4x4 al resolver $\boldsymbol{p(\lambda)=0}$ va a quedar un polinomio de grado 4, que a lo más puede tener 4 soluciones. Por eso, solo puede tener máximo 4 valores propios.”
7 Miguel	“Cuando mucho, puede tener 4 diferentes, o 4 repetidos (o sea que al final sumen 4). Al llevar a la matriz A a su forma escalonada, cada pivote representa un valor propio de A, ∴ solo podría tener 4.” NO.
8 Diego	“Cuando mucho 3 val propios porque al meter un vector que puede generar.” NO
8 Ana	“A_{4x4} puede tener máximo 4 valores propios, esto cuando del polinomio característico salgan 4 $\boldsymbol{\lambda}$ incógnitas con mult alg 1. Sólo puede tener 4 valores propios porque $\boldsymbol{\lambda I}$ solo tiene 4 pivotes, eso es lo máximo que podemos tener si ningún valor se repite.”
8 Diana	“Pueden haber hasta cuatro valores propios distintos. Una matriz 4x4 puede ser no singular ya que es cuadrada, si lo es, entonces sabemos que tiene solución única por lo que tiene 4 pivotes. Por teorema sabemos que los # de la diagonal de una matriz triangular superior/inferior son sus valores propios. ∴ cada pivote sería otro valor propio → 4 pivotes.”
8 Francisco	NO RESUELVE EL EXAMEN.
9 Guillermo	“Una matriz 4x4 puede tener cuando mucho 4 valores propios porque es el número de valores que tiene en su diagonal cuando saque su determinante solo habrá máximo 4 valores que lo vuelvan cero.”
9 Juan Fernando	“Puede tener cuando mucho 4 valores propios, ya que en una matriz cuadrada obtenemos en la diagonal n valores de la forma a_{nn}- $\boldsymbol{\lambda}$=0. Con lo cual obtenemos un polinomio de grado n, que tiene n soluciones contando tanto reales como imaginarios, y por teorema sabemos que la multiplicidad geométrica es menos o igual a la algebraica. Por lo cual la matriz A_{4x4} tiene a lo más cuatro soluciones.”
9 Valeria	“4 porque una matriz A_{4x4} semejante que sea diagonal solo tiene cuando mucho 4 números distintos en la diagonal”
10 Raisa	“puede tener 4 valores propios diferentes pues el polinomio $\boldsymbol{\|A-\lambda I\|}$ puede darse de grado 4.” No puede darse, es de grado 4.
10 Fabio	“4 → puede tener diferente número de valores propios dependiendo de su multiplicidad algebraica.” Pone diferentes casos correctos de mult alg 1, 2, 3 y 4, pero no explica porque son 4.
10 Elizabeth	“puede tener cuando mucho 4 valores propios.” NO explica.

Pregunta
Escribe una matriz $\boldsymbol{A_{4x4}}$ *que tenga, únicamente como valores propios al* ***1, -1*** *y* ***3****.*

EQUIPO	***Explicación***
1Carolina	Escribe una matriz no diagonal ni triangular con elementos en la diagonal 1, -1, 4 y 3. "las columnas son ld por lo tanto una $\boldsymbol{\lambda=0}$ y las demás $\boldsymbol{\lambda}$ tendrán los valores 1, -1, 3." NO.
1 Dulce	Matriz triangular, repite el 1. "valores son los de la diagonal en una matriz triangular"
1 Mario	Matriz triangular superior, repite el 1. "El determinante de una matriz triangular es el producto de la diagonal, por tanto los factores del pol característico serían los de la diagonal y por tanto las soluciones cuando p($\boldsymbol{\lambda}$)=0."
1Cristina	Matriz diagonal, repite el 1. "sus valores propios son los valores que están en la diagonal. Puse 2 veces 1 para completar el 4x4 ∴ 1 tiene mult algebraica 2".
2Arela	Matriz diagonal, pero A_{3x3}, tenía que repetir un valor. "una matriz diagonal sus valores propios son la diagonal"
2Pedro	"tengo que tener en la diagonal (-$\boldsymbol{\lambda}$+1) (-$\boldsymbol{\lambda}$-1) –$\boldsymbol{\lambda}$+3 entonces" Escribe una matriz diagonal, repite el 1. "$\boldsymbol{\lambda}$=1 tendría mult algebraica 2."
2 Sofía	Matrid diagonal, repite el 1. "los valores propios de una matriz diagonal son los elementos de la diagonal. En este caso $\boldsymbol{\lambda=1}$, mult alg = 2, $\boldsymbol{\lambda=-1}$, mult alg = 1, $\boldsymbol{\lambda=3}$, mult alg = 1."
2 Elías	NO RESUELVE EL EXAMEN.
3 Andrés	Matriz diagonal, repite el 1. "Valores propios: 1 mult. alg 2, -1 mult alg 1, 3 mult alg 1."
3 Daniela	Matriz triangular inferior.
3 Rodrigo	Matriz diagonal, repite el 1. "funciona porque el det es =0" Explicación incorrecta.
3 Santiago	Escribe una matriz con 1, -1, 3 y 5 en la diagonal, pero no es matriz diagonal. NO
4 Daniela	Matriz diagonal, repite el 1 pero la escribe con – $\boldsymbol{\lambda}$. "con todos los valores con multiplicidad uno excepto $\boldsymbol{\lambda=1}$ con multiplicidad dos porque sabemos que en las matrices diagonales los valores equivalen a los de la diagonal, expresados como factores de lambda"
4 Imanol	NO RESUELVE EL EXAMEN.
4 Alexis	Matriz diagonal, repite el 1. "de tal forma el determinante sería la diagonal – $\boldsymbol{\lambda}$ correspondiente y resolviendo obtenemos los valores propios $\boldsymbol{\lambda=1}$, $\boldsymbol{\lambda=-1}$, $\boldsymbol{\lambda=3}$ y otro $\boldsymbol{\lambda=1}$."
5 Jorge	Escribe una matriz incorrecta y dice "porque son ld."
5 Victor	Matriz triangular superior , repite el 1.
5 Mylene	NO RESUELVE EL EXAMEN.
6 Gabriela	Matriz diagonal, repite el 1. "Porque en una matriz diagonal, los valores propios son los números de la diagonal."
6 Ricardo	Matriz incorrecta. NO.
6 Manuel	Matriz triangular inferior pero en la diagonal pone 4. Resuelve $\boldsymbol{\lvert A-\lambda I\rvert}$ con $\boldsymbol{\lambda=-1}$. "el determ es 0 por lo tanto -1 si es valor propio para esta matriz." Hace lo mismo para 1 y 3.
7 Montserrat	Matriz diagonal, pero A_{3x3}. "Al ser una matriz diagonal sus valores propios están dados por la diagonal."
7 Alain	Matriz diagonal, repite el 1.
7 Carlos	Matriz diagonal, repite el 1.
7 Miguel	Matriz triangular superior, repite el 1. "como es diagonal triangular superior sus

	VP's son los elementos de su diagonal."
8 Diego	Escribe la matriz pero con $\boldsymbol{\lambda}$. Repite el uno.
8 Ana	Matriz triangular superior, agrega un 4. "A4x4 tal que $\boldsymbol{\lambda}$=1, -1, 3 y 4."
8 Diana	Matriz triangular inferior, repite el 3. "porque es diagonal inferior y sus valores propios son la diagonal."
8 Francisco	NO RESUELVE EL EXAMEN.
9 Guillermo	Matriz diagonal, repite el 1. "Porque los valores propios de las matrices diagonales son los valores de su diagonal por lo tanto A tiene como valores propios a 1, -1 y 3 (**$\boldsymbol{\lambda}$=1** con mult. alg. 2)."
9 Juan Fernando	Matriz diagonal, pero resta $\boldsymbol{\lambda}$ a cada elemento. Repite el 1.
9 Valeria	Matriz diagonal, repite el 1.
10 Raisa	Incorrecta.
10 Fabio	Inventa una matriz pero 3x3. NO
10Elizabeth	Da una matriz incorrecta. No explica.

<u>Pregunta</u>
Escribe una matriz $\boldsymbol{A_{2x2}}$ *(no diagonal ni triangular) que tenga como valor propio al cero.*

EQUIPO	***Explicación***
1Carolina	Matriz con columnas ld. "porque las columnas son ld una $\boldsymbol{\lambda}$ va a ser cero"
1 Dulce	Matriz con columnas ld. Resuelve $\lvert \boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I} \rvert$ de la matriz que escribe.
1 Mario	Matriz con columnas ld. "Pues los renglones per se ya son múltiplos por tanto no es necesario restarle algún otro valor, **$\boldsymbol{\lambda}$=0**, siendo $\boldsymbol{\lambda}$ el valor propio, para hacerlos múltiplos y crear solución múltiple, por si solos sin operaciones ya lo son."
1Cristina	Matriz con columnas ld. "su determinante es cero ∴ cero es un valor propio. ($\nexists A^{-1}$)."
2Arela	Matriz con elementos iguales. "tiene como valor propio $\boldsymbol{\lambda}$=0."
2Pedro	Matriz con columas ld. "escogí está pq las columnas son ld."
2 Sofía	Matriz con columnas ld. "columnas ld ∴ **$\boldsymbol{\lambda}$=0**."
2 Elías	NO RESUELVE EL EXAMEN.
3 Andrés	Matriz con columnas ld. "Aquí detA = 16 – 16 = 0, como detA=0, no es invertible, y su valor propio es $\boldsymbol{\lambda}$=0."
3 Daniela	Matriz con columnas ld.
3 Rodrigo	Incorrecta.
3 Santiago	Matriz con columnas ld, pero no explica.
4 Daniela	Matriz con columnas ld. "lo que implica que uno de los valores de lambda sea 0. |A|=0."
4 Imanol	NO RESUELVE EL EXAMEN.
4 Alexis	"Cualquier matriz que sus columnas/renglones sean ld"
5 Jorge	Matriz con cincos en todos sus elementos. "porque el determinante es 0."
5 Victor	Matriz con columnas iguales. "las columnas son iguales o los renglones son múltiplos → det=0 → $\boldsymbol{\lambda}$ no puede ser diferente de 0." Conclusión incorrecta: **$\boldsymbol{\lambda}$=0**, pero puede haber otra $\boldsymbol{\lambda}$ diferente de cero.
5 Mylene	NO RESUELVE EL EXAMEN.
6 Gabriela	"El renglón 2 es múltiplo del renglón 1. ∴ el renglón 2 se puede poner como renglón de ceros → **$\boldsymbol{\lambda}$=0**. Además al hacer $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}$ como **$\boldsymbol{\lambda}$=0** no cambia A y sus columnas son ld ∴ **$\boldsymbol{\lambda}$=0** si es un valor propio."
6 Ricardo	Matriz con columnas ld. "Si **$\boldsymbol{\lambda}$=0** y sustituimos nos quedan columnas ld, **$\boldsymbol{\lambda}$=0** es valor

	propio.”
6 Manuel o	“esta tiene al valor propio 0 pues como son iguales ld el 0 es una $\boldsymbol{\lambda}$ posible”
7 Montserrat	Matriz con columnas ld. “Al ser sus columnas ld, de acuerdo al teorema largo de matrices A_{nxn} si tiene columnas ld si $\boldsymbol{\lambda}$=0 ya que para que $\boldsymbol{\lambda}$≠0 necesita columnas li.”
7 Alain	Matriz con columnas ld. “porque detA=0.”
7 Carlos	Matriz con columnas ld. “Los vectores tiene que ser ld”
7 Miguel	Matriz con columnas ld. “Tiene valor propio igual a cero porque NO es invertible, (su det es cero) y por ente sus columnas son ld.”
8 Diego	Matriz con columnas ld. “|A|=0 ∴ $\boldsymbol{\lambda=0}$”
8 Ana	Matriz con columnas ld. Resuelve $\boldsymbol{\|A-\lambda I\|=0}$.
8 Diana	Matriz con columnas ld. “porque son ld → $\boldsymbol{\lambda=0}$.”
8 Francisco	NO RESUELVE EL EXAMEN.
9 Guillermo	Matriz con columnas ld. Para probarlo resuelve $\boldsymbol{\|A-\lambda I\|}$.
9 Juan Fernando	Matriz con columnas iguales. “det=0 ∴ no tiene inversa por teorema $\boldsymbol{\lambda=0}$ sí y solo sí la matriz A es no invertible.”
9 Valeria	“son ld” Encuentra el det y resuelve el polinomio.
10 Raisa	Matriz con columnas ld. Encuentra el polinomio característico y lo resuelve.
10 Fabio	Escribe un polinomio característico “p($\boldsymbol{\lambda}$)=$\boldsymbol{\lambda}^2(6-\boldsymbol{\lambda})=\mathbf{0}$ para que un valor propio sea 0” e intenta escribir $\boldsymbol{\|A-\lambda I\|}$ que lleve al polinomio que inventó. NO llega a la matriz correcta.
10 Elizabeth	Matriz con columnas ld. No explica.

<u>Pregunta</u>

*Encuentra los valores, vectores, espacios propios y dimensión geométrica de la siguiente matriz. Di si es diagonalizable y encuentra las matrices **C** y **D**.*

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{4} & \mathbf{2}\\ \mathbf{3} & \mathbf{3}\end{pmatrix}$$

	NOMBRE	***VAL, VECT, ESP, MULT GEOM***	***DIAGONALIZABLE***
1	Adriana	Correcta.	Correcta, pero no demuestra bien.
2	Agustín	Correcta.	Correcta, pero no demuestra bien.
3	Ainslie	Falta multiplicidad	Correcta, pero no demuestra bien.
4	Alberto	Falto espacio propio.	Correcta, pero no demuestra bien.
5	Alejandro	Correcta.	Correcta.
6	Alonso	Correcta, pero espacio propio dice que un vector genera un punto, incorrecto.	Correcta.
7	Ángeles	Multiplicidad geométrica mal.	Correcta, pero no demuestra bien.
8	Carlos	Correcta.	Correcta.
9	Cynthia	Correcta.	Correcta.
10	Fabiola	Falta multiplicidad geométrica.	Correcta.
11	Francisco	Correcta.	Escribe D, le falta C y explicación es incorrecta.
12	Héctor	Faltó multiplicidad.	Correcta, pero no demuestra bien.
13	Jesús	Correcta.	Correcta.
14	Jorge A		

15	Jorge L	Correcta.	Correcta, pero no demuestra bien.
16	José A		
17	José I	Correcta.	Correcta.
18	José M	Multiplicidad mal.	Correcta.
19	Josiel	Pone un espacio propio para los dos valores propios.	Correcta, pero no demuestra bien.
20	Juan D	Correcta.	Correcta, pero no demuestra bien.
21	Juan J	Correcta.	Correcta.
22	Luis	Correcta.	Correcta, pero no demuestra bien.
23	Mauricio	Correcta.	Correcta.
24	Rafael	Correcta.	Correcta.
25	Roberto N	Correcta.	Correcta.
26	Roberto S	Poner un espacio propio los dos valores propios.	Correcta.
27	Santiago	Correcta.	Correcta.
28	Sergio P	Correcta.	Correcta.
29	Sergio V	Correcta.	Correcta.
30	Tania	Correcta.	Correcta.

E.7 ENTREVISTA SOBRE COMBINACIÓN LINEAL, CONJUNTO GENERADOR, ESPACIO GENERADO, INDEPENDENCIA Y DEPENDENCIA LINEAL, BASE Y DIMENSIÓN

Pregunta 1

	$\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ *y* $\bar{v}_3$ *en* $\mathbb{R}^3$***no múltiplos, ¿li?***
Sebastián	"No, porque uno de los vectores puede ser combinación lineal de los otros dos."
Roberto	"Si 3 vectores son múltiplos son LD. Como ninguno es múltiplo del otro entonces son LI." Incorrecto.
Susana	"Si porque hay s.u. entonces son li." Incorrecto.
Rodrigo	"Solo en R^2 se cunple el que si son múltiplos los dos vectores, son ld. porque podría ser que fueran combinación lineal."
Alejandro	"NO. Con $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ se puede construir una matriz. A continuación operaría hasta su Forma Escalonada Reducida. Si resulta un renglón de ceros (ó 2) son linealmente dependientes." Hace una gráfica.
Tania	"Teniendo tres vectores no podemos concluir que siendo no múltiplos son li."

Pregunta 2

	$\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ *y* $\bar{v}_3$ ***li, ¿están en*** R^2***?***
Sebastián	"Verdadero, porque si $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ son li → están en R^3 o más. No pueden estar en R^2 porque serían ld."
Roberto	"3 vectores LI generan R^3, por lo tanto 3 vectores LI no pueden estar en R^2. Si hay 3 vectores en R^2 pro fuerza son LD."
Susana	"No porque si estuvieran en R^2, 2 tendrían que ser ld."
Rodrigo	"Tres vectores li generan R^3, ∴ no pueden estar en R^2, si no, serían combinación lineal,

	ld.”
Alejandro	“Si pueden estar en R^2, pero serían linealmente dependientes. Si son LI están en R^3 o superior, puedo generar R^3 en una dimensión superior.” Incorrecta la última parte.
Tania	“$\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ sólo podríamos saber en donde están dependiendo el # de componentes de cada vector.”

Pregunta 3

	4 vectores generan R^5
Sebastián	“En ninguno, porque para generar R^5 se necesitan <u>por lo menos</u> 5 vectores li. Si hubiera 6 vectores entonces serían ld.”
Roberto	“No es posible, 4 vectores a lo más generan R^4 .”
Susana	“Tendrían que ser 5 vectores para generar R^5.”
Rodrigo	“Nunca, a lo más serán 4 vectores li y generan R^4, necesitamos 5 vectores al menos para generar R^5.”
Alejandro	“IMPOSIBLE. 4 vectores generan, a lo más, R^4. Se necesitan por lo menos 5 vectores.”
Tania	“Cuatro vectores no pueden generar R^5”

Pregunta 4

	$\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ *ld*	***Generar***
Sebastián	“Son múltiplos”	“$\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ ó $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_3$ generan un plano en R^3. $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ ó $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_3$ no son múltiplos.”
Roberto	“$\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ son LD porque 2 $\bar{v}_2$ = $\bar{v}_3$ ”	“A lo mas $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ generan un plano. Y me quedo con $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$. Si $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ fueran paralelos, generarían una recta.”
Susana	“$\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ son ld (son múltiplos) ∴ generan una recta en R^3”	“Con $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ sería un plano en R^3, porque son li.”
Rodrigo	“Generan R^2 ya que $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ son ld porque son múltiplos entre si.”	“($\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$) y ($\bar{v}_1$ y $\bar{v}_3$) son li y generan R^2 y generan un plano en R^3.” Incorrecto que generan R^2.
Alejandro	“$\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ son múltiplos.”	“Así que $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ generan un plano.”
Tania	“$\bar{v}_3$ =(4,2,6) es ld con $\bar{v}_2$ =(2,1,3)”	“pero $\bar{v}_1$ = (1,0,-1) y $\bar{v}_2$ son li ∴ no pueden generar R^3. Generan un plano en R^3.” Hace una gráfica.

Pregunta 5

	Vector cero	**$\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$**
Sebastián	“El vector (0, 0, 0) es múltiplo de cualquier vector.”	“Por lo tanto el conjunto de vectores es ld.”
Roberto	No	“No se ve que sean múltiplos entre ellos.” Incorrecto.
Susana	Si	“Son ld porque el vector cero se podría multiplicar por cualquier constante.”
Rodrigo	No	“No se sabe.”
Alejandro	Lo ve como matriz	“Si construyo una matriz con los vectores tendría un renglón de ceros y por lo tanto son LD.”
Tania	“Podemos descartar el	“al tener sólo dos vectores (2, 3, 5) y (1, 1, 8) podemos

	vector (0, 0, 0) por ser el origen."	concluir que son li por no ser múltiplos. Aparte podemos saber que al hacer G-J nos quedarían 2 pivotes y una variable arbitraria, por lo tanto tenemos solución múltiple por lo que los 3 vectores on ld."

Pregunta 6

Inciso a)

	Gráficamente
Sebastián	"Un plano"
Roberto	"está en R^3, es un plano."
Susana	"plano en R^3"
Rodrigo	"un plano"
Alejandro	"plano"
Tania	"un plano en R^3."

Inciso b)

	Subespacio vectorial
Sebastián	"Si es un subespacio, porque es un plano en R^3 y el punto (0, 0, 0) sí esta incluido."
Roberto	"Plano que pasa por el origen es subespacio."
Susana	"Si porque pasa por el origen"
Rodrigo	"si, pasa por el origen."
Alejandro	"Sí es subespacio vectorial, porque cumple cerraduras e incluye al cero."
Tania	"Si es subespacio porque pasa por el origen."

Inciso c)

	Número de vectores en la base	***Varias bases***
Sebastián	"2 vectores"	"varias bases porque tiene dos variables libres que podrían ocupar infinidad de números."
Roberto	"2 vectores al menos y deben ser LI. 1 vector genera una recta."	"Solo existe una base." Incorrecto.
Susana	"2 vectores"	"Solo hay 1 base." Incorrecto.
Rodrigo	"tres." Incorrecto.	"Hay varias bases."
Alejandro	"Base 2 porque es el mínimo número de vectores que pueden construir el plano."	"Pueden existir infinitas bases"
Tania	"dos vectores"	"podríamos dar diferentes bases porque al pasar por el origen tiene solución múltiple."

Inciso d)

	Base $\overline{v}_1$ = (0, 1, 5) y $\overline{v}_2$ = (1, 0, 2)	***Dimensión = 2***
Sebastián	Si.	Si.
Roberto	"No me acuerdo"	Si.
Susana	Hace Gauss – Jordan. Si	Si

Rodrigo	Da 3 vectores. Incorrecto.	"dim=3." Incorrecto.
Alejandro	"Hallar 2 vectores en el plano que sean LI." Pero no los encuentra.	No responde.
Tania	Si.	Si.

E.8 ENTREVISTA SOBRE VALORES, VECTORES Y ESPACIOS PROPIOS DE LA MATRIZ A

Pregunta 1

	$\bar{v}_1 = (-1, 1)$	$\bar{v}_2 = (2, 1)$
Santiago	"No es vector propio"	"Si es vector propio. $\lambda = 2$"
Fabio	"$\bar{v}_1$ no es vector propio"	"$\lambda = 2$ si es vector propio."
Alexis	"No es vector propio pq (-1,1)t ≠ (-5,-1)"	"Si es vector propio. t=2"
Daniela	"$\nexists\ \lambda\ \therefore \bar{v}_1$ no es vector propio de A"	"$\exists\ \lambda = 2$ tal que $A\bar{v}_2 = \lambda\bar{v}_2 \therefore \bar{v}_2$ es vector propio"
Diana	"$\nexists\ \lambda$ | A$\bar{v} = \lambda\ \bar{v}$ no es vector propio"	"$\lambda = 2\ \therefore$ es vector propio."
Alain	"$\bar{v}_1$ no es vector propio"	"$\bar{v}_1$ si es vector propio con $\lambda = 2$ valor propio"

	$\bar{v}_1 = (-1, 1)$	$\bar{v}_2 = (2, 1)$
Sebastián	"$\bar{v}_1$ no es vector propio porque no existe una λ que satisfaga la ecuación A$\bar{v} = \lambda\bar{v}$"	"$\bar{v}_2$ sí es un vector propio porque existe λ=2 que si satisface la ecuación A$\bar{v} = \lambda\bar{v}$"
Roberto	"no es vector propio"	"λ=2. Si es vector propio."
Susana	"$\nexists\ \lambda$ | A$\bar{v} = \lambda\bar{v}$. No es vector propio."	"Si es vector propio y λ=2."
Rodrigo	"$\bar{v}_1$ no es vector propio de A"	"λ=2 es valor propio de A. $\bar{v}_2$ = vector propio de A"
Alejandro	Resuelve A$\bar{v} = \lambda\bar{v}$. "No es vector propio"	"vector propio. A = 2 valor propio."
Tania	"$\bar{v}_1$ no es vector propio porque no hay una λ que cumpla con A$\bar{v} = \lambda\bar{v}$."	"$\bar{v}_2$ es vector propio porque existe λ=2 que cumple con A$\bar{v} = \lambda\bar{v}$."

Pregunta 2

	Sustituir	***Concluyen***
Santiago	Si.	"∴ si es val prop. Son ld. Sol múltiple."
Fabio	Si. Resuelve el determinante correctamente.	"no es suficiente para det si $\lambda = -2$ es valor propio" Incorrecto si era suficiente.
Alexis	Si.	"Si es , columnas son ld, solución múltiple"
Daniela	Si.	"cols ld ∴ valor propio. SM |A- λI|=0"
Diana	Si.	"Sí es valor propio ya que la matriz tiene vectores ld. → solución múltiple"
Alain	Si.	"λ = -2 es valor propio"

	Sustituir	***Concluyen***
Sebastián	Si	"un renglón es múltiplo de otro → hay S. M. ∴ sí es valor propio."
Roberto	Si. "No me interesa que la sol. sea única y quiero que sea múltiple."	"λ es valor propio."
Susana	Si.	"9-9=0 ∴ si es valor propio."
Rodrigo	Si	"Como las columnas son ld. el det = 0, ∴ $\lambda = -2$ es valor propio."
Alejandro	Escribe la fórmula: "$\lambda\bar{v}$ = A$\bar{v}$"	No explica.
Tania	Si. Escribe $\lvert A - \lambda I \rvert$=0, resuelve y le da cero, pero concluye incorrectamente.	"∴ λ=-2 no es valor propio."

<u>*Pregunta 3*</u>

	Gráfica 1	***Gráfica 2***
Santiago	"si es vector propio, porque son ld. Tienen la misma dirección ∴ son paralelos"	"No es vector propio, porque son li. Tienen diferente dirección" Incorrecto dirección contraria si sería vector propio.
Fabio	"Si xq son comb lineal, vectores ld, misma dirección, paralelidad"	"no ∃ $\lambda \mid A\bar{v}$ y $\bar{v}$ sean combinación lineal."
Alexis	"Si"	"No"
Daniela	"$A\bar{v}$ y $\bar{v}$ son paralelos"	"$A\bar{v}$ y $\bar{v}$ no son paralelos"
Diana	"Si, ya que ∃ $\lambda \mid A\bar{v} = \bar{v}$. $A\bar{v}$ y $\bar{v}$ son vectores paralelos. ld ⇒ solución múltiple."	"No son ya que ∄ $\lambda \mid A\bar{v} = \bar{v}$. $A\bar{v}$ y $\bar{v}$ no son paralelos, son li ⇒ solución única."
Alain	"$A\bar{v} = \bar{v}$ son ld"	"$A\bar{v}$ y $\bar{v}$ no son paralelos. ∴ $\bar{v}$ no es vector propio de A"

	Gráfica 1	***Gráfica 2***
Sebastián	"li, porque los vectores son paralelos, $\bar{v}$ es múltiplo de A$\bar{v}$."	"No, porque no son paralelos los vectores"
Roberto	"Si es vector propio. Yo busco que A$\bar{v}$ = λ $\bar{v}$ para que estén en la misma recta, y los vectores sean paralelos."	"No es vector propio y no son paralelos, ya que no hay una lambda que multiplique a $\bar{v}$ y sea igual a A$\bar{v}$, es decir no están en la misma recta."
Susana	"Si porque $\bar{v}$ por alguna constante menor a 1 te daría A$\bar{v}$. Son paralelos y ld."	"No porque no podrías multiplicar $\bar{v}$ por algo para llegar a A$\bar{v}$."
Rodrigo	"como $\bar{v}$ y A$\bar{v}$ son colineales, ∴ $\bar{v}$ es vector propio de A."	"No es $\bar{v}$ vector propio de A$\bar{v}$ ya que no son combinación lineal." No es de A$\bar{v}$ sino de A.
Alejandro	"Si, porque hay un escalar λ tal que A$\bar{v}$ = $\lambda\bar{v}$, en este caso λ<1. Están sobre la misma recta (colineales)."	"No, porque son LI. Al ser LI no hay escalar (λ) tal que A$\bar{v}$ = $\lambda\bar{v}$."
Tania	Ve la ecuación para después ver la gráfica. "Si, porque al hacer A$\bar{v}$ te da un vector entonces si son la misma recta podemos saber que son ld y se cumple A$\bar{v}$ = $\lambda\bar{v}$."	"no, porque no son paralelos y no cumplen con A$\bar{v}$ = $\lambda\bar{v}$"

Pregunta 4

	Valor propio	***Vectores propios***	***Dos vectores propios***
Santiago	"Valor propio es λ=2 porque todas las columnas son ld". Explicación correcta pero no era 2.	Da dos incorrectos	No explica
Fabio	"cols ld $\Longrightarrow$ no tiene inversa, $\Longrightarrow$ det=0, $\Longrightarrow$ Ax=b$\rightarrow$ SM o $\emptyset$S, $\Longrightarrow$ Ax=0, $\Longrightarrow$ λ=0"	Si.	"$\therefore$ vectores propios xq hay 2 arbitrarias." Encuentra el espacio propio. "gen$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$= plano en R^3."
Alexis	"Por el teorema resumen si columnas son ld λ=0"	Si.	No explica. Encuentra el espacio propio.
Daniela	"cols ld. |A|=0, SM, λ=0"	Si.	"2 vectores porque tengo 2 var arb."
Diana	λ=0 porque los vectores son ld."	Si.	"Espacio propio de dimensión 2 ya que hay que dar un vector por cada variable arbitraria que se tenga."
Alain	"λ=0 porque |A| = 0"	Si.	"porque hay 2 variables arbitrarias."

	Valor propio	***Vectores propios***	***Dos vectores propios***
Sebastián	"λ = 0 porque los renglones son múltiplos"	li	"Hay 2 grados de libertad y la forma de crear un plano en R^3 es por medio de dos vectores li"
Roberto	No resuelve	No resuelve	No resuelve
Susana	"λ=0 porque son ld"	Si	"2 vectores propios porque tiene 2 variables arbitrarias."
Rodrigo	"Como las columnas de A son ld, el det=0, λ=0."	Si	"son 2 vectores ya que hay 2 variables libre."
Alejandro	""columnas LD, el determinante es 0 por lo tanto, λ=0."	No resuelve.	No resuelve.
Tania	"Columnas ld que un valor propio es λ=0 por TR." TR significa teorema resumen.	Si.	"sólo 2 vectores porque tengo 2 variables arbitrarias."

Pregunta 5

	$\boldsymbol{\lambda = 0}$	$\boldsymbol{\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 5\ y\ \lambda_3 = 9.}$
Santiago	"Si porque las columnas son ld. λ=2". Explicación correcta pero no es 2.	"No porque las columnas son li". Incorrecto
Fabio	"3 cols ld λ=0"	"triangular inferior $\Longrightarrow$ (3-λ)(5-λ)(9-λ) = 0 $\lambda_1 = 3$ / $\lambda_2 = 5$ / $\lambda_3 = 9$"
Alexis	"λ=0 por ld"	"(3-λ)(5-λ)(9-λ) = 0 $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 9$"
Daniela	"cols ld, |A|=0, λ=0"	Correcto no explica.
Diana	"λ=0 vectores son múltiples $\Longrightarrow$ ld $\Longrightarrow$ solución múltiple"	"$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 9$ porque es una matriz triangular inferior y sabemos que los valores propios serán los números que están en la diagonal."

Alain	"λ=0 porque tiene columnas ld"	"$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 9$ porque A es triangular inferior"

Pregunta 6

	Valor propio	***Vector propio***
Santiago	"Valor propio: número que dada una combinación lineal, me de un múltiplo."	"Vector propio es el valor que corresponde a un valor propio."
Fabio	"Valor pr: $\lambda \mid A\bar{v} = \lambda\bar{v}$"	Fórmula
Alexis	"Ax=b, x=A^{-1}b, |A- λI|=0"	No.
Daniela	"$A\bar{v} = \lambda\bar{v}$"	Fórmula
Diana	"Valor propio es una λ que multiplique al vector tal que la matriz por el vector sea igual al vector por esa λ. $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$"	Fórmula
Alain	"El valor propio λ de una matriz A es aquel tal que $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ $\bar{v}$ siendo el vector propio."	Fórmula

	Valor propio	***Vector propio***
Sebastián	"Vector propio una $\boldsymbol{\lambda}$ que satisfaga que (A – λI) $\bar{v}$=0, A$\bar{v}$ = λ $\bar{v}$"	Junto con valor propio.
Roberto	"A$\bar{v}$ = $\lambda\bar{v}$ valor propio"	Junto con valor propio.
Susana	"A$\bar{v}$ = $\lambda\bar{v}$"	Junto con valor propio.
Rodrigo	"A$\bar{v}$ = $\lambda\bar{v}$"	Junto con valor propio.
Alejandro	"A$\bar{v}$ = $\lambda\bar{v}$"	Junto con valor propio.
Tania	"$\|A - \lambda I\|$=0 valor propio"	"$(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$ vector propio. A$\bar{v}$ = $\lambda\bar{v}$"

Pregunta 7

	Definición algebraica
Santiago	"La matriz por el vector es igual a el multiplicador por el vector (λ)"
Fabio	"Encontrar λ para que un vector propio y su matriz respectiva sean comb lineal"
Alexis	"Tanto la matriz como el vector son múltiplo del mismo parámetro λ."
Daniela	"λ es el valor tal que al multiplicar la matriz A por un vector $\bar{v}$, obtenemos λ veces el mismo vector"
Diana	"$A\bar{v} = \lambda\bar{v}$. Matriz por vector que generan un vector es igual al mismo vector multiplicado por una constante."
Alain	"Que la matriz funciona como un escalar. $A\bar{v}$ es un múltiplo de $\bar{v}$."

	Definición algebraica
Sebastián	"Si multiplicas la matriz por un vector obtengo un vector, $\boldsymbol{\lambda}$ es un valor que al multiplicarlo por $\bar{v}$ nos dará el mismo resultado que A$\bar{v}$."
Roberto	"Mult.la matriz A pro un vector, y que esto sea igual al vector por lambda."
Susana	"Que A$\bar{v}$ es ld con $\bar{v}$"
Rodrigo	"Un vector que multiplicado por una matriz (del lado derecho) da igual que multiplicar una lambda por el vector (del lado derecho) implica que $\bar{v}$ es vector propio."

Alejandro	"Valor propio = Un escalar tal que multiplicado por un vector sea igual a una matriz por el mismo vector."
Tania	"Que la matriz A por un vector $\bar{v}$ es lo mismo que el vector $\bar{v}$ multiplicado por su valor propio λ."

Pregunta 8

	Definición geométrica
Santiago	"λ es el que define el tamaño del vector y es igual a la matriz"
Fabio	"Que sean paralelos, comb. lineal"
Alexis	"Vectores paralelos." Hace una gráfica.
Daniela	"significa que son paralelos $A\bar{v}$ y $\bar{v}$"
Diana	"Gráficamente los vectores son paralelos. $\bar{v}$ puede ser mayor o menor a $A\bar{v}$ dependiendo de la magnitud de λ" Hace una gráfica.
Alain	"$A\bar{v}$ es paralelo a $\bar{v}$"

	Definición geométrica
Sebastián	"Geométricamente λ aumenta o disminuye el vector $\bar{v}$. $A\bar{v}$=$\lambda\bar{v}$ son múltiplos."
Roberto	"Un par de vectores paralelos."
Susana	"Que son paralelas."
Rodrigo	"A$\bar{v}$ y $\bar{v}$ son ld, ∴ son paralelos."
Alejandro	"Geométricamente que son colineales." Hace una gráfica.
Tania	"paralelos" Hace una gráfica

Pregunta 9

	$\boldsymbol{p(\lambda) = \lvert A - \lambda I\rvert = 0}$
Santiago	"$\lvert A - \lambda I\rvert$ = polinomio característico. Lo factorizas y obtienes las λ"
Fabio	"$\lvert A - \lambda I\rvert$ = $p(\lambda)$"
Alexis	No resuelve en papel.
Daniela	"$p(\lambda) = \lvert A - \lambda I\rvert, \quad p(\lambda) = 0$"
Diana	"$A\bar{v} = \lambda\bar{v}, A\bar{v} - \lambda\bar{v} = 0, (A - \lambda)\bar{v} = 0, (A - I\lambda)\bar{v} = 0, \lvert A - \lambda I\rvert = 0$ para que pueda haber solución múltiple"
Alain	"$\lvert A - \lambda I\rvert = 0$ porque queremos que sea solución múltiple"

	$\boldsymbol{p(\lambda) = \lvert A - \lambda I\rvert = 0}$
Sebastián	"Se obtienen por medio del polinomio característico el valor se obtiene por medio de la fórmula $\lvert A - \lambda I\rvert$" Faltó igualar a cero.
Roberto	"Tengo que obtener el det A – λI". Faltó igualar a cero.
Susana	"$\lvert A - \lambda I\rvert$=0"
Rodrigo	"Resolviendo A$\bar{v}$ = λ $\bar{v}$. $\lvert A - \lambda I\rvert$ polinomio característico."
Alejandro	Escribe una matriz A_{2x2}, luego le resta lambda de la diagonal y dice: "Resuelvo el determinante e igualar a 0. (solución múltiple)."
Tania	"$\lvert A - \lambda I\rvert$=0"

Pregunta 10

	$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I})\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{0}}$
Santiago	"Utilizas diferentes x_i que sean li y que multipliquen a λ"
Fabio	"$(A - \lambda I)\bar{v} = 0$ → SM o ~~sol única~~"
Alexis	No resuelve en papel
Daniela	"$(A - \lambda I)\bar{v} = 0$"
Diana	"$(A - \lambda I) = 0$ quedan vectores ld, se resuelve sistema homogéneo que tendrá solución múltiple." Escribe la matriz.
Alain	"$(A - \lambda I)\bar{v} = 0$"

	$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I})\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{0}}$
Sebastián	"Obteniendo la λ's, se le restan a la diagonal de la matriz A y posteriormente se resuelve el sistema homogéneo."
Roberto	"$A - \lambda I$, y la λ se sustituyo con los valores que obtuve."
Susana	"$(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$"
Rodrigo	"$(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$, ecuación característica."
Alejandro	No resuelve.
Tania	"$(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$"

Pregunta 11

	Espacio propio	***Multiplicidad geométrica***
Santiago	"Espacio de λ que genera $\bar{v}$"	"multiplicidad geométrica → dimensión de la base"
Fabio	"$gen\{\bar{v}\}$ donde $\bar{v}$ es vector propio"	"mult geom = # dim = # vectores"
Alexis	No resuelve en papel	
Daniela	"$E_\lambda = gen\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$"	"mult geom = n° de vectores del espacio vectorial"
Diana	No responde	"multiplicidad geométrica = dim. del espacio propio."
Alain	"gen{$\bar{v}$ propios}"	"la dimensión del espacio propio"

	Espacio propio	***Multiplicidad geométrica***
Sebastián	"Obteniendo los vectores propios, vemos qué es lo que generan."	"La multiplicidad geom se obtiene de la dimensión del espacio generado."
Roberto	"Veo que generan y eso es el espacio propio."	"Mult. geo más grande que alg. La mult geo es la dimensión, el número de vectores que utilicé para ver que genera." Error no es la dimensión del espacio.
Susana	"E_λ = gen{$\bar{v}_1$}"	"cuántos vectores propios hay es mult geom."
Rodrigo	"El espacio propio es el espacio correspondiente a c/u de las λ's y es el espacio generado por los vectores propios."	"Es la cantidad de vectores que están generando el espacio."
Alejandro	"El espacio propio es el que generan los vectores propios."	No resuelve
Tania	"E_λ = gen {$\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$}"	"la multiplicidad geométrica es el # de vectores del espacio propio."

Pregunta 12

	Polinomio característico $\boldsymbol{\lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0}$	***Valores propios*** $\boldsymbol{\lambda_1 = -7}$ ***y*** $\boldsymbol{\lambda_2 = 3}$	***Vectores propios*** $\boldsymbol{\overline{v} = (x_1, -3x_1)}$ ***y*** $\boldsymbol{\overline{v} = (3x_2, x_2)}$	***Espacios propios*** $\boldsymbol{E_{-7} = gen\,\{(1,-3)\}}$ ***y*** $\boldsymbol{E_3 = gen\,\{(3,1)\}}$
Santiago	Si.	Si.	No resuelve la ecuación. Escribe: "$\overline{v} = (2{,}3)$ no es vector propio porque no hay λ que lo multiplique y $\overline{v}$ = (3, -6) es vector propio porque existe una λ que multiplica al vector λ = 3" Incorrectos ambos.	Incorrecto. "$E_\lambda =$ gen{$\overline{v}_2$}= plano en R^2."
Fabio	Si.	Si.	Si.	Si. Encuentra multiplicidad geométrica de ambos.
Alexis	Si.	Si.	Si.	Si. Encuentra multiplicidad geométrica y algebraica.
Daniela	Si.	Si.	Si.	Si. Encuentra multiplicidad geométrica y algebraica.
Diana	Si.	Si.	Si.	Si. Encuentra multiplicidad geométrica.
Alain	Si.	Si.	Si. Al resolver y tener las ecuaciones dice: "usamos una porque queremos S.M."	Si. Encuentra multiplicidad geométrica.

	Polinomio característico $\boldsymbol{\lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0}$	***Valores propios*** $\boldsymbol{\lambda_1 = -7}$ ***y*** $\boldsymbol{\lambda_2 = 3}$	***Vectores propios*** $\boldsymbol{\overline{v} = (x_1, -3x_1)}$ ***y*** $\boldsymbol{\overline{v} = (3x_2, x_2)}$	***Espacios propios*** $\boldsymbol{E_{-7} = gen\,\{(1,-3)\}}$ ***y*** $\boldsymbol{E_3 = gen\,\{(3,1)\}}$
Sebastián	Si.	Si.	Si.	Si. Encuentra multiplicidad geométrica de ambos.
Roberto	Si.	Si.	Si.	Si. Multiplicidad geométrica de ambos.
Susana	Si.	Si.	Si.	Si. Multiplicidad geométrica de ambos.
Rodrigo	Si.	Si.	Si. Escoge una ecuación porque " son ld las columnas"	Si. "mult geom = 1. Hay un vector yua que hay 1 variable libre."
Alejandro	Si	Si	"SM. Matriz de 2x2 con un renglón de ceros, por lo tanto, me queda un vector LI, que sería el vector propio."	"Espacio propio: espacio que generan los vectores propios. Multiplicidad geométrica = 1." Hace una

				gráfica.
Tania	Si.	Si.	"es SM porque las columnas y renglones son múltiplos ∴ ld y al sólo tener una variable arbitraria sabemos que hay un solo vector propio p / λ=-7"	"y multiplicidad geométrica = 1, recta en R^2."

Pregunta 13

	Dos valores propios	***Explicación***
Santiago	Si.	"porque solo puede tener solo 2 pivotes ó porque el polinomio está al cuadrado."
Fabio	Si.	Escribe una matriz A_{2x2} y encuentra el polinomio característico. "(- λ)(- λ) = 0"
Alexis	Si.	"máximo valores propios para matriz 2x2 o nxn son el # de valores por los cuales se resta λ. Obteniendo 2, n, valores propios como máximo."
Daniela	Si.	Escribe una matriz 2x2 y dice "Al ser A_{2x2}, al llegar a la FER puedo tener 2 pivotes y por lo tanto 2 valores propios."
Diana	Si.	"2 valores propios ya que si la matriz es diagonal tiene 2 pivotes y la diagonal son los valores propios."
Alain	Si.	"2, porque el determinante es un polinomio de grado 2"

	Dos valores propios	***Explicación***
Sebastián	Si.	"2, porque su multiplicidad algebraica no puede ser mayor a n=2."
Roberto	Si.	"A lo más 2, porque me daría una cuadrática."
Susana	Si	"puede tener max 2 valores propio porque es 2x2 sólo puede haber 2 li (2 en la diagonal)."
Rodrigo	Si	"dos, ya que nos queda una λ^2 cuando hacemos el det."
Alejandro	Si.	"El polinomio característica es de 2° grado, eso lleva al factorizarse a dos λ."
Tania	Si.	"A_{2x2} puede tener a lo mucho 2 valores propios porque por columna hay un valor propio."

Pregunta 14

	Matriz	***Explicación***
Santiago	Si.	"Matriz diagonal con λ = 2, 3, 5"
Fabio	Si.	"Triangular inferior"
Alexis	Si.	"λ = 2, 2 – λ"
Daniela	Si.	"matriz triangular inferior"
Diana	Si.	"La diagonal en una matriz triangular inferior son sus valores propios."
Alain	Si.	No explica.

Pregunta 15.

	Matriz	***Explicación***
Santiago	Si.	"λ=0 porque son ld"
Fabio	Escribe dos matrices una triangular superior con ceros en la diagonal y una con determinante igual a cero.	Para la primera "triangular inferior". Para la segunda "con det=0"
Alexis	Si. Escribe dos matrices.	"columnas ld"
Daniela	Si.	"diagonal"
Diana	Si.	"Ya que los vectores son ld."
Alain	Si.	"λ=0 porque determinante = 0"

Pregunta 16

	Aplicación
Santiago	No responde
Fabio	No responde
Alexis	No responde
Daniela	No responde
Diana	"Ecuaciones en diferncia"
Alain	"Ecuaciones de diferencias"

	Aplicación
Sebastián	"Las ecuaciones diferenciales."
Roberto	No resuelve.
Susana	"Patinetas"
Rodrigo	"No"
Alejandro	"Ecuaciones en diferencias."
Tania	"probabilidad"

Pregunta 17

	Solución
Santiago	"Proceso de Markov. La sumatoria de los valores de p tienen que ser 1. Igual con q." Hace un diagrama de transición.
Fabio	"a_1 = mismo voto, a_2 = voto distinto, p + q = 1." Escribe una matriz de transición. Proceso de Markov.
Alexis	"Dos partidos A, B. Que datos necesito, la probabilidad p y q." Escribe una matriz de transición y las ecuaciones. Ponen sus datos de forma que sumen uno para tener un Proceso de Markov.
Daniela	Proceso de Markov. Escribe la matriz de transición, la suma debe ser uno, escribe el vector punto fijo y "→ $\overline{w}$, tendencia a la larga"
Diana	Escribe la matriz de transición. Proceso de Markov.
Alain	"p = 1- q, x = voto A, y = voto B. A = qx + py, B=(1- p)y + (1- q)x."

	Solución
Sebastián	"q quede en el mismo partido, p cambie de partido. Partido A = x, Partido B = y $x_{t+1} = qx + py$ $yt_{+1} = (1-q)x + (1-p)y$." Correcto
Roberto	"Tiempo importa, voto presente depende voto pasado. Prob. de votar por el mismo. Prob. de cambiar voto. Cademas Markov."
Susana	"A, B. diagrama con Cadena de Markov."
Rodrigo	"m = qa + pb. c = (q-1)a + (p-1)b"
Alejandro	"Cadenas de Markov. Matriz de transición." Hace un diagrama de transición.
Tania	"Necesitamos el # de pers que votaron la elección por los dos partidos. $\#_1 p + \#_1 q = P(A)$ $\#_2 p + \#_2 q = P(B)$"

BIBLIOGRAFÍA

Aguirre, N., Elguero, C. y Rosso, F. (2006). *El proceso de modelación en el diseño de actividades matemáticas.* Recuperado el 2 abril del 2010 de http://www.sochiem.cl/jornadas 2006/ponencias/r06.pdf.

Aliprantis, C. y Carmona, G. (2003). Introduction to an economic problem: a models and modeling perspective. En R. Lesh y M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: models & modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving.* (pp. 255 – 264). Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* Nueva York: Springer.

Arnon, I., Nesher, P. y Nirenburg, R. (1999). What can be learnt about fractions only with computers. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (2),* (pp. 33 – 40). Israel: PME.

Asiala, M., Brown, A., Kleiman, J. y Mathews, D. (1998).The development of students' understanding of permutations and symmetries. *International Journal of Mathematical Learning, 3*, 13 – 43.

Barnes, H. (2004). Realistic mathematics education: Eliciting alternative mathematical conceptions of learners. *African Journal of Research in SMT Education*, *8(1)*, 53 – 64.

Bas, S., Cetinkaya, B. y Kursat, A. (2009). Pre-service Mathematics Teachers' Development of Mathematical Models: Motion with Simple Pendulum. *14th International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications.* Recuperado el 4 de mayo de 2013 de http://www.ictma14.de/media/files/ICTMA14_Abstracts_FINAL.pdf.

Blum, W. (2009). Can Modelling be taught and learnt? Some Answers from Empirical Research. *14th International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications.* Recuperado el 20 de diciembre de 2014 de http://www.ictma14.de/media/files/ICTMA14_Abstracts_FINAL.pdf.

Bodí Pascual, S. (2006). *Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los números naturales.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Alicante. España.

Camacho, M., Perdomo, J. y Santos, M. (2012). Procesos conceptuales y cognitivos en la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias vía la resolución de problemas. *Enseñanza de las ciencias. 30(2)*, 9 – 32.

Carlson, D. (1997). Teaching linear algebra: Must the fog always roll in? En D. Carlson, C. E. Johnson, D. C. Lay, A. D. Porter, A. Watkins y W. Watkins (Eds.), *Resources for teaching linear algebra*, *Mathematical Association of America Notes*, (Vol. 42, pp. 39 – 51). Washington: Mathematical Association of America.

Carlson, M., Larsen, S. y Lesh, R. (2003). Integrating a models and modeling perspective with existing research and practice. En R. Lesh y H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivist: A models & modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problems solving* (pp. 465 – 478). Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Clark, J., Kraut, G., Mathews, D. y Wimbish, J. (2007). *The "Fundamental Theorem" of statistics: Classifying student understanding of basic statistical concepts*. Recuperado el 22 de noviembre del 2014 de http://www1.hollins.edu/faculty/clarkjm/stat2c.pdf.

Da Silva, A. y Lins, R. (2002). *An analysis of the production of meaning for the notion of basis in linear algebra.* Recuperado el 28 de febrero del 2015 de http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap409.pdf.

Dogan-Dunlap, H. (2009). Linear algebra students' modes of reasoning: geometric representations. *Linear algebra and its applications. 432*, 2141 – 2159.

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J. y Rogalski, M. (2000). On a research program about the teaching and learning of linear algebra in the first-year of a French science university. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31 (1)*, 27 – 35.

Dubinksy, E. y McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An International Commission on Mathematical Instruction Study* (pp. 273 – 280). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the XXI Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (pp. 3 – 26). Columbus: ERIC.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61(1),* 103 – 131.

English, L., Lesh, R. y Fennewald, T. (2008). Methodologies for investigating relationships between concept development and the development of problem solving abilities. En M. Santos y Y. Shimizu (Eds.), *Proceedings of the11th International Congress on Mathematical Education*, (pp. 1 – 15). Mexico.

Fonseca, C., Pereira, A. y Casas, J. M. (2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: los Recorridos de Estudio e Investigación. *Educación Matemática*, *23(1),* 97 – 121.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Pulishers.

Gavilán, J. M., García, M. y Linares, S. (2006). El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva. *Educación Matemática, 18(2),* 167 -170.

Gol, S. (2012). Dynamic geometric representation of eigenvector. En S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle y M. Oehrtman (Eds.), *Proceedings of the 15th annual conference on research in undergraduate mathematics education* (pp. 53 – 58). Portland: RUME.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may Foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1,* 155 – 177.

Haines, C. (2009). Drivers for Mathematical Modeling: Pragmatism in Practice. In Touch with the Real World! *14th International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications.* Recuperado el 7 de enero de 2015 de http://www.ictma14.de/media/files/ICTMA14_Abstracts_FINAL.pdf

Harel, G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics. En J. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*. (pp. 177-189). Netherlands: Kluwer Academic publishers.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. En J. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra.* (pp. 191-207). Netherlands: Kluwer Academic publishers.

Klasa, J. y Klasa, S. (2002). Linear transformations and eigenvectors with Cabri II via Maple V. *2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level).* Recuperado el 10 de agosto de 2015 de http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap256.pdf.

Klasa, J. (2010). A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple. *Linear Algebra and its Applications. 432 (8),* 2100 – 2111.

Kú, D. (2007). *Aprendizaje de la base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la Teoría APOE.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Kú, D. (2012). *Análisis sobre la comprensión de los conceptos conjunto generador y espacio generado desde la mirada de la Teoría APOE.* Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Kú, D., Trigueros, M. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la Teoría APOE. *Educación Matemática*. *20(2),* 65 - 89.

Kwon, O. N. (2002). Conceptualizing the realistic mathematics education approach in the teaching and learning of ordinary differential equation. *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level).* Greece: Wiley Publishers. Recuperado el 10 de agosto de 2015 de http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/invKwo.pdf.

Larson, C., Rasmussen, C., Zandieh, M., Smith, M. y Nelipovich, J. (2007). *Modeling perspectives in linear algebra: a look at eigen-thinking.* Recuperado el 3 de agosto del 2014 de http://www.rume.org/crume2007/papers/larson-rasmussen-zandieh-smith-nelipovich.pdf

Larson, C., Zandieh, M. y Rasmussen, C. (2008). A trip through Eigen Land: Where most roads lead to the direction associated with the largest eigenvalue. *11th annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, SIGMAA on RUME.* Recuperado el 3 de agosto de 2014 de http://sigmaa.maa.org/rume/crume2008/Proceedings/Larson%20SHORT.pdf

Lay, D. (2012). *Álgebra Lineal y sus aplicaciones*. *Cuarta edición.* México: Editorial Pearson.

Lehrer, R. y Schauble, L. (2000). The development of model-based reasoning. *Journal of Applied Developmental Psychology, 21*(1), 39 – 48.

Lesh, R. y Doerr, H. (2003). *Beyond Constructivist: A Models & Modelling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving.* New Hampshire: Lawrence Erlbaum Associates.

McDonald, M., Mathews, D. y Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV,* (pp. 77 – 102). Providence: American Mathematical Society.

Molina, J. y Oktaç, A. (2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 10(2),* 241 – 273.

Oktaç, A. y Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa. 13(4-II),* 373 - 385.

Parraguez, M. y Bozst, J. (2012). Conexiones entre los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores y el de solución de sistema de ecuaciones lineales en $\boldsymbol{R^2}$ y $\boldsymbol{R^3}$ desde el punto de vista de los modos de pensamiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 7(1),* 49 - 72.

Perdomo, J. (2011). Módulo de enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un ambiente de resolución de problemas con tecnología. *Números. 78*, 113 - 134.

Possani E., Trigueros M., Preciado G. y Lozano M.D. (2010). Use of models in the Teaching of Linear Algebra. *Linear Algebra and its Applications 432(8),* 2125 - 2140.

Rasmussen, C. y Blumenfeld, H. (2007). Reinventing solutions to systems of linear differential equations: A case of emergent models involving analytic expressions. *Journal of Mathematical Behavior*. *26,* 195 - 210.

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K. y Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7,* 51 – 73.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de APOE. *Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa, 15(2),* 199 - 232.

Robert, A. y Robinet, J. (1989) Quelques résultats sur l'apprentissage de l'algebre linéaire en premiere année de DEUG. *Cahier de didactique des mathématiques.* 53, IREM de Paris VII.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education. 26(2),* 114 – 145.

Schorr, R. y Lesh, R. (2003). A modeling approach for providing teacher development. En R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 141 – 158). Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of student´s thinking in linear algebra. En J. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra*. (pp. 209 – 246). Dordrecht: Kluwer.

Soto, J. L. y García, M. (2002). A graphical exploration of the concepts of eigenvalue and eigenvectors in $\boldsymbol{R}^2$ and $\boldsymbol{R}^3$. *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level).* Recuperado el 29 de agosto del 2015 de http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/reportes/pdf/reporte10.pdfhttp://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/reportes/pdf/reporte10.pdf.

Stewart, S. y Thomas, M. (2007). Eigenvalues and eigenvectors: formal, symbolic, and embodied thinking. *The 10th Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education (RUME),* (pp. 275 – 296). Estados Unidos: RUME.

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal. 20(2),* 5 – 24.

Thomas, M. y Stewart, S. (2011). Eigenvalues and eigenvectors: embodied, symbolic, and formal thinking. *Mathematics Education Research Group of Austaralasia*. *23,* 275 - 296. Versión electrónica doi: 10.1007/s13394-011-0016-1.

Trigueros, M. (2008). Modeling in a dynamical system course. *Electronic proceedings for Special Interest Group of the Mathematical Association of America for the eleventh Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education.* Recuperado el 18 de octubre de 2010 de http://www.rume.org/crume2008.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación educativa 9(46),* 75 – 87.

Trigueros, M. (2014). Vínculo entre la modelación y el uso de representaciones en la comprensión de los conceptos de ecuación diferencial de primer orden y de solución. *Educación Matemática. 25 años (número especial),* 207 - 226.

Trigueros, M. y Lozano, M. D. (2010). Learning linear independence through modeling. En M. F. Pinto y T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th conference of the international group for the psychology of mathematics education (4).* (pp. 233-240). Brazil: PME.

Trigueros, M y Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics. 73(1),* 3 – 19.

Trigueros, M., Oktaç, A. y Manzanero, L. (2007). Understanding of system of equations in algebra. *Proceedings of the Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 5*. Larnaca: European Society for Research in Mathematics Education.

Trigueros, M. y Possani, E. (2013). Using an economics model for teaching linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*. *438,* 1779 - 1792.

Trigueros, M., Possani, E., Lozano, M.D. y Sandoval, I. (2009). Learning systems of linear equations through modeling. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (5).* (pp. 225 - 232). Grecia: PME.

Uhlig, F. (2003). A new unified, balanced and conceptual approach to teaching linear algebra. *Linear Algebra and Its Applications, 361,* 147 - 159.