Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas

Tesis de licenciatura:

Métodos Homológicos en Álgebra Conmutativa y Aplicaciones a la Teoría de la Dimensión

Director de Tesis:

Dr. Carlos Rentería Márquez

Tesista:

Ernesto Álvarez González

A mi abuela, a mi madre, a mi esposa

Índice general

Notación y prerrequisitos

Suponemos que el lector está familiarizado con conceptos elementales de álgebra, como anillos, módulos y producto tensorial.

La siguiente notación será la que utilizaremos en el presente trabajo: $\mathbb{N}$(respectivamente $\mathbb{Z}$) representa a los números naturales (respectivamente a los números enteros). Si $n \in \mathbb{N}$, escribimos $n \gg 1$ para denotar a un número natural muy grande. Si X es un conjunto, denotamos por 1_X a la función identidad en X.

Siempre trabajaremos sobre anillos conmutativos con identidad y sobre módulos unitarios. Si A es un anillo, $Spec(A)$ denota al conjunto de todos los ideales primos de A.Si $\varphi : A \to B$ es un homomorfismo de anillos, a todo B-módulo M lo podemos tratar como A-módulo de manera natural mediante dicho homomorfismo. En este caso decimos que B es un A-álgebra.

Prólogo

El presente trabajo tiene por objeto abordar resultados básicos de la Teoría de la dimensión, enfatizando resultados elementales de Homología, como son los functores Tor y Ext.

No obstante los prerrequisitos, consideramos conveniente introducir dentro del segundo capítulo de este escrito, algunos resultados imprescindibles sobre álgebra conmutativa, donde supriremos las demostraciones de ciertos resultados que, lejos de acercarnos al objetivo de este texto, podrían alejarnos de él. Sin embargo, en la sección de la bibliografía sugeriremos los libros donde se pueda accesar a la teoría que aquí se considere, junto con una explicación más extensa y basta.

Capítulo 1

Homomorfismos y sucesiones exactas de módulos

1.1 Homomorfismos de módulos

Sea A un anillo y sean M, N dos A-módulos. Una función $f : M \to N$ se llama homomorfismo de A-módulos (o función A-lineal) si

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ y}$$
$$f(ax) = af(x)$$

para todo $a \in A$ y para todo par de elementos $x, y \in M$. En consecuencia, f es un homomorfismo de grupos abelianos que conmuta con la acción de cada $a \in A$. Si A es un campo, una función A-líneal es lo mismo que una transformación de espacios vectoriales.

La composición de funciones A-lineales es A-lineal.

El conjunto de todos los homomorfismos de A-módulos, de un módulo M a un módulo N, puede adquirir estructura de A-módulo si se definen las siguientes operaciones:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(af)(x) = af(x)$$

para todo $x \in M$. Este A-módulo se denota por $Hom_A(M, N)$.

1.2 Sucesiones exactas de módulos

Sea A un anillo y sean M, M', M'' A-módulos. Una sucesión $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ de A-homomorfismos se dice exacta si $\ker g = im f$.

Sea $M_0 \to M_1 \to M_2 \to \ldots \to M_n$ una sucesión de A-homomorfismos. Sea i un entero con $1 \leq i \leq n-1$. Decimos que la sucesión es exacta en M_i si la sucesión $M_{i-1} \to M_i \to M_{i+1}$ es exacta. Si la sucesión es exacta en M_i para todo i, entonces decimos que dicha sucesión es exacta.

Una sucesión exacta corta es una sucesión exacta del tipo $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$. Dicha sucesión se dice que se escinde si existe un A-homomorfismo $t : M'' \to M$ tal que $gt = 1_{M''}$. En consecuencia t es inyectiva y $M = f(M) \bigoplus t(M'')$.

Sea $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos que se escinde y sea F un functor aditivo de A-módulos en B-módulos. Entonces la sucesión $0 \to F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'') \to 0$ también es una sucesión exacta que se escinde.

Capítulo 2

Resultados básicos de Álgebra Conmutativa

2.1 Anillos de Fracciones y Localización

Sea A un anillo. Un subconjunto S de A se dice multiplicativo si $1 \in S$ y si para todo par $s, s' \in S$ tenemos $ss' \in S$. Sea M un A-módulo y sea S un conjunto multiplicativo de A. Definimos una relación sobre $M\mathbf{x}S$, de la siguiente manera: $(m, s) \sim (m', s')$ si existe $s'' \in S$ tal que $s''(s'm - sm') = 0$. La relación $\sim$ es de equivalencia; al conjunto de clases de equivalencia lo denotamos por $S^{-1}M$. Si $(m, s) \in M\mathbf{x}S$, su clase se denota por $\frac{m}{s}$. Cuando $M = A$, a $S^{-1}A$ lo llamamos anillo de fracciones de A(junto con operaciones de suma y producto entre clases como se define entre números racionales).

Si M es un A-módulo, el conjunto $S^{-1}M$ tiene asociado una estructura natural de $S^{-1}A$-módulo si se definen las siguientes operaciones básicas:

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{s'm + sm'}{ss'}$$

$$\frac{a}{s} * \frac{m}{s'} = \frac{am}{ss'}$$

Al $S^{-1}A$-módulo $S^{-1}M$ lo llamamos módulo de fracciones de M respecto de S.

Sea ζ un ideal primo del anillo A. Entonces $S = A - \zeta$ es un conjunto multiplicativo de A. En este caso denotamos a $S^{-1}A$ por A_ζ; si M es un A-módulo, al conjunto $S^{-1}M$ lo denotamos por M_ζ.

Sean M, N A-módulos y sea $f \in Hom_A(M, N)$. Definimos $S^{-1}f : S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N$ por $S^{-1}f(\frac{m}{s}) = \frac{f(m)}{s}$. Se verifica fácilmente que $S^{-1}f \in Hom_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N)$ está bien definida.

PROPOSICIÓN 1: La asignación $M \mapsto S^{-1}M, f \mapsto S^{-1}f$ define un functor exacto de A-módulo a $S^{-1}A$-módulos.
Dem. Verifiquemos la siguiente implicación:

La exactitud de
$$0 \to M' \overset{f}{\to} M \overset{g}{\to} M'' \to 0$$
$$\Rightarrow$$
la exactitud de
$$0 \to S^{-1}M' \overset{S^{-1}f}{\longrightarrow} S^{-1}M \overset{S^{-1}g}{\longrightarrow} S^{-1}M'' \to 0$$

Exactitud en $S^{-1}M''$: todo elemento de $S^{-1}M''$ es de la forma $\frac{m''}{s}$ con $m'' \in M'', s \in S$. Sea $m \in M$ tal que $g(m) = m''$. Entonces $\frac{m''}{s} = S^{-1}g(\frac{m}{s})$.

Exactitud en $S^{-1}M$: $g \circ f = 0$ implica $S^{-1}g \circ S^{-1}f = S^{-1}(g \circ f) = 0$, así que $imS^{-1}f \subseteqq kerS^{-1}g$. Sea ahora $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$ tal que $S^{-1}g(\frac{m}{s}) = \frac{g(m)}{s} = 0$. En tonces existe $t \in S$ tal que $g(tm) = tg(m) = 0$. Por lo tanto, existe $m' \in M'$ tal que $tm = f(m')$. Ahora $S^{-1}f(\frac{m'}{ts}) = \frac{f(m')}{ts} = \frac{tm}{ts} = \frac{m}{s}$.

Exactitud en en $S^{-1}M'$: Sea $\frac{m'}{s} \in S^{-1}M'$ tal que $\frac{f(m')}{s} = S^{-1}f(\frac{m'}{s}) = 0$. Entonces existe $t \in S$ tal que $f(tm') = tf(m') = 0$, que implica $tm' = 0$, luego $\frac{m'}{s} = 0$.
■

En lo sucesivo, denotaremos por $i_M : M \to S^{-1}M$ al morfismo natural que envía $m \mapsto \frac{m}{1}$.

PROPOSICIÓN 2: La asignación $\varphi : \zeta \to S^{-1}\zeta (= \zeta S^{-1}A)$ es una función que define una biyección entre el conjunto de ideales primos $\zeta \subsetneqq A$ con $\zeta \cap S = \emptyset$ y el conjunto de los ideales primos de $S^{-1}A$.

Dem. Si $\zeta \subsetneqq A$ es un ideal primo con $\zeta \cap S = \emptyset$, aseguramos que si un elemento $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$ satisface $\frac{a}{s} \in S^{-1}\zeta$, entonces $a \in \zeta$: $\frac{a}{s} \in S^{-1}\zeta \Rightarrow \frac{a}{s} = \frac{p}{t}$ con $p \in \zeta, t \in S$, implica que existe $u \in S$ tal que $uta = usp \in \zeta \Rightarrow a \in \zeta$, pues $ut \in S \subsetneqq A - \zeta$. Esto implica que $S^{-1}\zeta \neq S^{-1}A$. Ahora $(\frac{a}{s})(\frac{a'}{s'}) \in S^{-1}\zeta \Rightarrow \frac{aa'}{ss'} \in S^{-1}\zeta \Rightarrow aa' \in \zeta \Rightarrow (a$ o $a') \in \zeta \Rightarrow \frac{a}{s}$ o $\frac{a'}{s'} \in S^{-1}\zeta$. Más claramente, $\zeta_1 \subsetneqq \zeta_2 \Leftrightarrow S^{-1}\zeta_1 \subsetneqq S^{-1}\zeta_2$. Sea $p \subsetneqq S^{-1}A$ un ideal primo y sea $\zeta = i_A^{-1}(p)$. Entonces ζ es un ideal primo de A con $\zeta \cap S = \emptyset$. Veamos que $p \mapsto i_A^{-1}(p)$ es la inversa de φ. Primeramente, para un ideal primo p de $S^{-1}A$, tenemos $i_A^{-1}(p)S^{-1}A \subsetneqq p$. Por otra parte, $\frac{a}{s} \in p \Rightarrow \frac{a}{1} \in p \Rightarrow a \in i_A^{-1}(p) \Rightarrow \frac{a}{s} \in i_A^{-1}(p)S^{-1}A$. Entonces $p = i_A^{-1}(p)S^{-1}A$. Sea ahora ζ un ideal primo de A con $\zeta \cap = \emptyset$. Entonces $\zeta \subsetneqq i_A^{-1}(\zeta S^{-1}A)$. Por otra parte, $a \in i_A^{-1}(\zeta S^{-1}A) \Rightarrow \frac{a}{1} \in \zeta S^{-1}A \Rightarrow a \in \zeta$. Esto Muestra que $\zeta = i_A^{-1}(S^{-1}\zeta)$.

■

2.2 Módulos Noetherianos

Proposición 3: Sea A un anillo. Para un A-módulo M, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. todo submódulo de M es finitamente generado;
2. M satisface la condición de cadena ascendente;
3. todo subconjunto no vacío de M tiene un elemento máximo.

Dem. (1)⇒(2): Sea $N = \cup_{i\geq 0} M_i$. N es un submódulo de M. Sea $\{n_1, .., n_r\}$ un subconjunto de generadores de N. Existe M_p que contiene a todos los elementos de dicho conjunto. Entonces $N \subseteq M_p \subseteq N \Rightarrow N = M_p \Rightarrow M_p = M_{p+1} = ...$
(2)⇒(3): Sea χ un conjunto no vacío de submódulos de M. Sea $M_0 \in \chi$. Si M_0 es máximo en χ, ya acabamos. En otro caso, elija $M_1 \in \chi$ tal que $M_0 \subsetneq M_1$. Si M_1 es máximo, ya terminamos. En otro caso, existe $M_2 \in \chi$ con $M_1 \subsetneq M_2$. Procediendo de esta manera, conseguimos una sucesión $M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq ...$ necesariamente finita. El último elemento de la sucesión es máximo en χ.
(3)⇒(1): Como la condición (3) se sigue cumpliendo aún si se reemplaza a M por cualquier submódulo, es suficiente mostrar que M es finitamente generado. Sea χ la familia de de todos los submódulos de M finitamente generados; desde luego χ no es vacío. Por (3), existe un elemento máximo $N \in \chi$. Si $N \subsetneq M$, existe $m \in M, m \notin M$; el submódulo generado por N y m pertenece a χ y contiene a N propiamente. Esta contradicción prueba que M es finitamente generado.
■

Definición 1: Un A-módulo M se dice noetheriano si satisface las tres condiciones equivalentes de la proposición anterior. Un anillo A es noetheriano si lo es como A-módulo.

Proposición 4: Sea A un anillo noetheriano y M, un A-módulo finitamente generado. Entonces M es noetheriano.

Dem. Supongamos que M está generado por n elementos. La proposición se prueba por inducción sobre n. Si $n = 1$, M es isomorfo a un cociente del módulo noetheriano A. Sea $n > 1$ y supongamos que M está generado por $x_1, ..., x_n$. Sea $M' = Ax_1$ y $M'' = M/M'$. M' es noetheriano. Como M'' está generado por las imágenes de $x_2, ..., x_n$ en M'', entonces es noetheriano por la hipótesis de inducción.

■

Proposición 5: Sea S un conjunto multiplicativo de un anillo noetheriano A. Entonces $S^{-1}A$ es noetheriano.

Dem. Sea α un ideal de $S^{-1}A$ y sean $a_1, ..., a_r$ elementos en A que generan al ideal $i_A^{-1}(\alpha)$ de A. Entonces $a_1/1, ..., a_r/1$ generan a α.

■

Teorema 1 (Teorema de la base de Hilbert): Sea A un anillo noetheriano. Entonces el anillo de polinomios $A[x_1, ...x_n]$ en n variables sobre A es noetheriano.

Dem. Por inducción sobre n (tomando en cuenta que es suficiente probar el teorema para el caso $n = 1$, es decir, para el caso $B = A[x]$). Sea β un ideal de B; mostraremos que β es finitamente generado. Sea $\eta = \{0\} \cup \{$coeficientes líderes de $\beta\}$. η es un ideal de A. Si $\eta = 0$, entonces $\beta = 0$ y no hay nada que probar. Supongamos que $\eta \neq 0$. Como η es finitamente generado, existen en A elementos $c_1, ..., c_r$ distintos de cero tales que $\eta = (c_1, ..., c_r)$. Sea $f_i \in \beta$ con coeficiente líder c_i para $1 \leq i \leq r$. Sea $N = max_i(deg(f_i))$. Entonces aseguramos que $\beta = (f_1, ..., f_r) + \beta'$, donde $\beta = \beta \bigcap (A + AX + ... + AX^{N-1})$. Para probar esto, es sufieciente mostrar que todo $f = a_m X^m + ... + a_0 \in \beta$ pertence a $(f_1, ..., f_r) + \beta'$. Si $m \leq N - 1$, ya acabamos. Sea $m \geq N$ y sea $a_m = \sum_{1 \leq i \leq r} d_i c_i, d_i \in A$. Entonces $deg(f-\sum_{1\leq i\leq r} d_i X^{m-deg(f_i)} f_i) \leq m-1$ y en consecuencia, por inducción en m, $f-\sum_{1\leq i\leq r} d_i X^{m-deg(f_i)} f_i \in (f_1,...,f_r)+\beta'$, luego también $f \in (f_1,...,f_r)+\beta'$. Siendo un submódulo de $A+AX+...+AX^{N-1}$, β' tiene un conjunto de generadores $g_1,...,g_s$ sobre A. Entonces $f_1,...,f_r,...,g_1,...,g_s$ generan β.

■

COROLARIO 1: Sea A un anillo noetheriano y B, un A-álgebra finitamente generado. Entonces B es noetheriano.

■

2.3 Lema de Nakayama

Definición 2: Sea A un anillo. La intersección de todos los ideales máximos de A se llama Radical de Jacobsonτ se denota por $\underline{r}(A)$ o bien por $\underline{r}$.

Lema 1 (Lema de Nakayama): Sea M un A-módulo finitamente generado. Si $\underline{r}M = M$, entonces $M = 0$.

Dem. Suponamos que $M \neq 0$ y que $x_1, ..., x_n$ es un conjunto mínimo generador de M. Como $M = \underline{r}M$, tenemos $x_1 = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i x_i$ con $a_i \in \underline{r}$. Esto conduce a que $(1 - a_1)x_1 = \sum_{2 \leq i \leq n} a_i x_i$, esto es $x_1 = \sum_{2 \leq i \leq n} (1 - a_1)^{-1} a_i x_i$, lo que implica que $x_2, ..., x_n$ generan a M. Esto es una contradicción.

■

2.4 Descomposición primaria

Sea A un anillo y M, un A-módulo. Para $a \in A$, la asignación $a_M : M \to M$, definida por $a_M(x) = ax$ para $x \in M$ es un A-homomorfismo llamado homotesia de a. Sea N un submódulo de M. Decimos que N es primario en M, si $N \neq M$ y si para cualquier $a \in A$, la homotesia $a_{M/N}$ es inyectiva o nilpotente. Por un ideal primario de A entendemos un submódulo primario de A.

Proposición 6: Sea N un submódulo primario de un A-módulo M y sea $\zeta = \{a \in A \mid a_{M/N}$ no es inyectivo$\}$. Entonces ζ es un ideal primo de A.

Dem. Como N es primario en M, tenemos $\zeta = \{a \in A \mid a_{M/N}$ es nilpotente$\}$. Se sigue ζ es un ideal propio. Sea $a, b \in A; a, b \neq \zeta$. Entonces $a_{M/N}, b_{M/N}$ son inyectivos y también lo es $ab_{M/N} = a_{M/N} \circ b_{M/N}$. Luego $ab \neq \zeta \Rightarrow \zeta$ es primo.

■

Para un submódulo primario N de M, el ideal primo ζ definido en la proposición anterior se llama ideal primo asociado a N en M. En este caso decimos que N es ζ-primario (en M).

Sea N un submódulo de M. Una descomposición de la forma $N = N_1 \bigcap N_2 \bigcap ... \bigcap N_r$, donde $N_i, 1 \leq i \leq r$ son submódulo primarios de M, es llamada descomposición primaria de N en M. Esta descomposición es reducida si (1) N no se puede expresar como la intersección de un subconjunto propio de $\{N_1, ..., N_r\}$, y si (2) los ideales primos $\zeta_1, ..., \zeta_r$ asociados respectivamente a $N_1, ..., N_r$ en M son distintos.

Lema 2: Sean $N_1, ..., N_r$ submódulos ζ-primarios de M. Entonces $N = N_1 \bigcap ... \bigcap N_r$ es ζ-primario.

■

Lema 3: Todo submódulo irreducible N de un módulo noetheriano M es primario.

■

Lema 4: Sea M un A-módulo noetheriano. Entonces todo submódulo propio de M es una intersección finita de submódulos irreducibles.

■

Proposición 7: Sea M un A-módulo noetheriano. Entonces todo submódulo propio de M admite una descomposición primaria reducida.

Dem. Los lemas 3 y 4 garantizan que todo submódulo propio N admite una descomposición primaria $N = N_1 \bigcap ... \bigcap N_r$. Por el lema 2, podríamos, luego de agrupar todos los submódulos ζ-primarios con el mismo ideal primo ζ, suponer que los ideales primos asociados a N_i son distintos. Luego de quitar algunos de los $N_i^{'}$, si fuese necesario, conseguimos una descomposición primaria reducida de N.

■

Sea M un A-módulo. Un ideal primo ζ de A se dice asciado a M, si existe $x \neq 0$ en M tal que ζ es el anulador de x. Denotamos por $Ass(M)$ al conjunto de todos los ideales primos de A asociados a M.

Proposición 8: Sea A un anillo noetheriano y M, un A-módulo finitamente generado. Sea $0 = N_1 \bigcap ... \bigcap N_r$ una descomposición primaria reducida de 0 en M, con N_i ζ_i-primario para $1 \leq i \leq r$. Entonces $Ass(M) = \{\zeta_1, ..., \zeta_r\}$. En particular $Ass(M)$ es finito; más aún, $M = 0$ si y sólo si $Ass(M) = \emptyset$.

Dem. Sea $\zeta \in Ass(M)$. Entonces existe $x \neq 0$ en M tal que ζ es el anulador de x. Como $x \neq 0$, podemos suponer que $x \notin N_1 \bigcup ... \bigcup N_j, x \in N_{j+1} \bigcap ... \bigcap N_r$

para algún $j \in \{1, ..., r\}$. Para $a \in \zeta_i$, la homotesia a_{M/N_i} es nilpotente. Como ζ_i es finitamente generado, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $\zeta_i^{n_i} M \subseteq N_i$. Tenemos que $\prod_{1 \leq i \leq j} \zeta_i^{n_i} x \subseteq (N_1 \bigcap ... \bigcap N_j) \bigcap (N_{j+1} \bigcap ... \bigcap N_r) = 0$. Luego $\prod_{1 \leq i \leq j} \zeta_i^{n_i} \subseteq \zeta \Rightarrow \zeta_k \subseteq \zeta$ para algún $k \in \{1, ..., j\}$. Por otra parte $\zeta x = 0$ implica que la homotesia a_{M/N_k} no es inyectiva para $a \in \zeta$. Por lo tanto $\zeta \subseteq \zeta_k \Rightarrow \zeta = \zeta_k$. Esto prueba que $Ass(M) \subseteq \{\zeta_1, ..., \zeta_r\}$.

Ahora mostraremos que $\zeta_i \subseteq Ass(M), 1 \leq i \leq r$. Es suficiente probar que $\zeta_i \in Ass(M)$. Como la descomposición primaria dada es reducida, existe $x \in N_2 \bigcap ... \bigcap N_r, x \notin N_1$. Como N_1 es ζ_1-primario, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\zeta_1^n x \subseteq N_1, \zeta_1^{n-1} x \subsetneq N_1$. Sea $y \in \zeta_1^{n-1} x, y \notin N_1$. Entonces ζ_1 está contenido en el anulador de y. Por otra parte, si $a \in A$ es tal que $ay = 0$, entonces a_{M/N_1} no es inyectivo, lo que implica $a \in \zeta_1$. Entonces ζ_1 es el anulador de $y \Rightarrow \zeta_1 \in Ass(M)$.

■

Corolario 2: Sea A un anillo noetheriano y N, un submódulo de un A-módulo M finitamente generado, con descomposición primaria reducida $N = N_1 \bigcap ... \bigcap N_r$. Entonces $Ass(M/N) = \{\zeta_1, ..., \zeta_r\}$, donde los ζ_i son ideales primos asociados a N_i en M, para $1 \leq i \leq r$. En particular, el conjunto $\{\zeta_1, ..., \zeta_r\}$ de ideales primos, correspondiente a la descomposición primaria reducida de N, es independiente de dicha descomposición.

■

Un elemento $a \in A$ se llama divisor de cero de un A-módulo M, si existe $x \in M, x \neq 0$ tal que $ax = 0$.

Proposición 9: Sea A un anillo noetheriano y M, un A-módulo finitamente generado. Entonces el conjunto de divisores de cero de M es $\bigcup_{\zeta \in Ass(M)} \zeta$.

■

Sea A un anillo. Recordemos que $Spec(A)$ denota al conjunto de todos los ideales primos de A.

El nilradical $\varsigma(A)$ de un anillo A se define como el subconjunto $\{a \in A \mid a^n = 0, n \in \mathbb{N}\}$ de A. Éste es un ideal de A.

PROPOSICIÓN 10: Sea A un anillo. Entonces $\varsigma(A) = \bigcap_{\zeta \in Spec(A)} \zeta$.

■

Sea α un ideal de un anillo A. El radical $\sqrt{\alpha}$ de α se define como el conjunto $\sqrt{\alpha} = \{a \in A \mid a^n \in \alpha, n \in \mathbb{N}\}$. $\sqrt{\alpha}$ es un ideal de A que contiene a α y que satisface $\sqrt{\alpha}/\alpha = \varsigma(A/\alpha)$.

COROLARIO 3: Sea α un ideal de A. Entonces $\sqrt{\alpha} = \bigcap_{\zeta \in Spec(A), \zeta \supseteq \alpha} \zeta$.

■

Para un A-módulo M, definimos el anulador de M por $ann(M) = \{a \in A \mid aM = 0\}$. Desde luego, $ann(M)$ es un ideal de A.

PROPOSICIÓN 11: Sea A un anillo noetheriano y M, un A-módulo finitamente generado con $\alpha = ann(M)$. Entonces $\sqrt{\alpha} = \bigcap_{\zeta \in Ass(M)} \zeta$.

■

COROLARIO 4: Para un anillo noetheriano A, tenemos $\varsigma(A) = \bigcap_{\zeta \in Ass(M)} \zeta$.

■

Sea M un A-módulo. El conjunto $\{\zeta \in Spec(A) \mid M_\zeta \neq 0\}$ se llama soporte de M, y se denota por $Supp(M)$.

Proposición 12: Sea M un A-módulo. Entonces el A-homomorfismo $\varphi : M \to \prod_{\zeta \in Spec(A)} M_\zeta$, inducido por el homomorfismo canónico $M \to M_\zeta$ es inyectivo. En particular $M = 0$ si y sólo si $Supp(M) = 0$.

Dem. Sea $x \in M$ tal que $\varphi(x) = 0$. Esto significa que para todo $\zeta \in Spec(A)$, existe $s_\zeta \in A - \zeta$ tal que $s_\zeta x = 0$. Entonces $ann(Ax) \nsubseteq \zeta, \zeta \in Spec(A) \Rightarrow ann(Ax) = A, x = 0$.

■

Proposición 13: Sea A un anillo noetheriano y M, un A-módulo finitamente generado. Para $\zeta \in Spec(A)$ las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\zeta \in Supp(M)$;
2. existe $\zeta' \in Ass(M)$ tal que $\zeta \supseteq \zeta'$;
3. $\zeta \supseteq ann(M)$.

Dem. (1)⇒(2): Supongamos que $Ass(M) = \{\zeta_1, ..., \zeta_r\}$. Si (2) no se satisface, $\zeta \nsupseteq \bigcap_{1 \leq i \leq r} \zeta_i$. Esto implica que $\zeta \nsupseteq ann(M) \Rightarrow M_\zeta = 0$, lo que contradice (1).

(2)⇒(3): Se tiene $\zeta \supseteq \zeta' \Rightarrow \zeta \supseteq \sqrt{ann(M)}$.

(3)⇒(1): Supongamos que $M_\zeta = 0$. Sea $\{x_1, ..., x_r\}$ un conjunto generador de M. Existe $s_i \in A - \zeta$ tal que $s_i x_i = 0$. Entonces $s = s_1 ... s_r \in ann(M)$. Esto contradice (3), ya que $s \notin \zeta$.

■

Corolario 5: Tenemos que $Ass(M) \subseteq Supp(M)$. Los elementos mínimos de $Supp(M)$ pertenecen a $Ass(M)$, y son precisamente los elementos mínimos de $Ass(M)$.

■

2.5 Módulos de Artin y módulos de longitud finita

Un A-módulo M se dice de Artin si satisface la condición de cadena descendente para submódulos. Un anillo A se dice de Artin si lo es como A-módulo.

Un A-módulo M es de longitud finita si posee una serie de Jordan-Hölder.

Se define la longiud l de un A-módulo de longitud finita como el número de eslabones de cualquiera de sus series de Jordan-Hölder.

PROPOSICIÓN 14: Sea M un A-módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. M es de Artin;
2. Todo subconjunto no vacío de submódulos de M contiene un elemento mínimo.

■

PROPOSICIÓN 15: Sea A un anillo noetheriano y M, un A-módulo finitamente generado. Entonces M es de longitud finita si y sólo si todo $\zeta \in Supp(M)$ es máximo.

Dem. Sea M de longitud finita. Si $M = 0$, entonces $Supp(M) = \emptyset$ y la afirmación se satisface. Supongamos que $l_A(M) = 1$. Entonces $M \cong A/m$ para un ideal máximo m con $Supp(M) = m$. Supongamos ahora que $l_A(M)\,1$. Sea $M' \neq 0$ un submódulo propio de M. Entonces la sucesión exacta $0 \to M' \to M \to M/M' \to 0 \Rightarrow$ $Supp(M) = Supp(M') \bigcup Supp(M/M')$. Como $l_A(M'), l_A(M/M')$ ambas son estrictamente menores que $l_A(M)$, se sigue por inducción sobre $l_A(M)$ que todo $\zeta \in Supp(M)$ es máximo.

Recíprocamente, supongamos que todo $\zeta \in Supp(M)$ es máximo. Si $M = 0$, no hay nada que probar. Supongamos que $M \neq 0$ está generado por $x_1, ..., x_n$. Procederemos por inducción sobre n. si $n = 1$, $M \cong A/\alpha$ para un ideal $\alpha \subseteq A$. Sea $\alpha = \alpha_1 \bigcap ... \bigcap \alpha_r$ una descomposición primaria reducida de α con α_i, ζ_i-primario. Por hipótesis todo ζ_i es máximo. Tenemos un monomorfismo $A/\alpha \to \bigoplus_i A/\alpha_i$. Es suficiente mostrar que todo A/α_i es de longitud finita. Como A es noetheriano y como para todo $x \in \zeta_i$, alguna potencia de x pertenece a α_i, tenemos $\zeta_i^m \subseteq \alpha_i$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Tenemos el epimorfismo $A/\zeta_i^m \to A/\alpha_i$. Ahora es suficiente mostrar que $l_A(A/\zeta_i^m)$ es finita. Esto lo verificaremos por indución sobre m. Como ζ_i es máximo, A/ζ_i es de longitud finita. En virtud de la sucesión exacta $0 \to \zeta_i^{m-1}/\zeta_i^m \to A/\zeta_i^m \to A/\zeta_i^{m-1} \to 0$, es suficiente demostrar que ζ_i^{m-1}/ζ_i^m es de longitud finita. Como ζ_i es finitamente generado, ζ_i^{m-1}/ζ_i^m es finitamente generado sobre A/ζ_i; en consecuencia es de longitud finita como A/ζ_i-módulo y en consecuencia como A-módulo.
Sea $n > 1$. Sea $M' = Ax_1$. Tenemos entonces la sucesión exacta $0 \to M' \to M \to M/M' \to 0$ y $Supp(M) = Supp(M') \bigcup Supp(M/M')$. Como $M', M/M'$ están generados por menos de n elementos, se sigue por hipótesis de inducción que $M', M/M'$ son de longitud finita, lo que implica que M también es de longitud finita.

■

PROPOSICIÓN 16: Todo anillo de Artin es de longitud finita.

■

COROLARIO 6: Todo anillo de Artin es Noetheriano.

■

COROLARIO 7: Todo módulo finitamente generado sobre un anillo de Artin es de longitud finita.

■

2.6 Módulos graduados, módulos con filtración. El teorema de Artin-Rees.

Sea A un anillo. Una graduación de A es una descomposición $A = \bigoplus_{n\geq 0, n\in\mathbb{Z}^+} A_n$ de A como suma directa de subgrupos A_n de A, tal que $A_m A_n \subseteq A_{m+n}$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Un anillo con graduación se llama anillo graduado. Sea $A = \bigoplus_n A_n$ un anillo graduado. Los elementos de A_n distintos de cero se llaman homogéneos de grado n. Llamamos a A_n la n-ésima componente homogénea de A.

Proposición 17: A_0 es un subanillo de A con identidad. Más aún, todo A_n es un A_0-módulo, y A es un A_0-álgebra.

■

Sea A con las mismas características y supongamos que $k \to A_0$ es un homomorfismo de anillos. Entonces A es un k-álgebra. En este caso nos referimos a A como un k-álgebra graduado.

Sea $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ un anillo graduado y sea M un A-módulo. Una A-graduación de M es una descomposición $M = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$ de M como suma directa de subgrupos M_n de M tal que $A_n M_n \subseteq M_{m+n}, m, n \in \mathbb{Z}^+$. Dicho módulo se llama A-módulo graduado.

Sean $M = \bigoplus_{n\geq 0} M_n, N = \bigoplus_{n\geq 0} N_n$ dos A-módulos graduados. Un homomorfismo $f : M \to N$ de A-módulos graduados de grado r es un A-homomorfismo tal que $f(M_n) \subseteq N_{n+r}, n \in \mathbb{Z}^+$. Si $r = 0, f$ se llama (simplemente) homomorfismo de módulos graduados.

Sean $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n, B = \bigoplus_{n\geq 0} B_n$ dos anillos graduados. Un homomorfismo de anillos $f : A \to B$ se llama homomorfismo de anillos graduados si $f(A_n) \subseteq B_n, n \in \mathbb{Z}^+$.

Sea $A = \bigoplus_n A_n$ un anillo graduado y sea $M = \bigoplus_n M_n$ un A-módulo graduado. Un submódulo N de M se llama submódulo graduado de M si $N = \bigoplus_n (N \bigcap M_n)$. Un ideal de A que es un submódulo graduado de A se llama ideal homogéneo de A. Si N es un submódulo graduado de M, M/N tiene una A-graduación inducida por aquella de M: $M/N = \bigoplus_n (M_n + N)/N$. Sea $f : M \to M'$ un homomorfismo de A-módulos graduados. El núcleo de f, denotado $kerf$, como la imágen de f, denotada imf, son submódulos graduados de M, M'; respectivamente.

Proposición 18:

1. Sea $A = \bigoplus_n A_n$ un anillo graduado y $M = \bigoplus_n M_n$, un A-módulo graduado. Si M es noetheriano, M_n es finitamente generado como A_0-módulo;
2. Supongamos que A está generado por A_1 como A_0-álgebra. Entonces A es noetheriano si y sólo si A_0 es noetheriano y si A_1 es finitamente generado como A_0-módulo.

■

Sea A un anillo. Una filtración de A es una sucesión $A = A_0 \subseteq A_1 \subseteq ... \subseteq A_n \subseteq ...$ de ideales de A tal que $A_m A_n \subseteq A_{m+n}, m, n \in \mathbb{Z}^+$. Un anillo con filtración se llama anillo de filtración. Sea A un anillo de filtración. Una filtración sobre un A-módulo M es una sucesión $M = M_0 \subseteq M_1 \subseteq ... \subseteq M_n \subseteq ...$ de submódulos M_n tal que $A_m M_n \subseteq M_{m+n}, m, n \in \mathbb{Z}^+$. Un A-módulo con filtración se llama módulo de filtración.

Sea A un anillo de filtración y sea α un ideal de A. Sea M un A-módulo de filtración (M_n los submódulos asociados). Decimos que esta filtración es compatible con α si $\alpha M_n \subseteq M_{n+1}, n \geq 0$; asimismo decimos que dicha filtración es α-estable si es compatible con α y si $\alpha M_n = M_{n+1}, n \gg 1$.

Sea A un anillo y M, un A-módulo. Sea α un ideal de A. Entonces α define una filtración $A = \alpha^0 \supseteq \alpha \supseteq \alpha^2 \supseteq ...$ en A y define otra filtración $M = \alpha^0 M \supseteq \alpha M \supseteq \alpha^2 M \supseteq ...$ en M, llamadas <u>α-ádicas filtraciones</u>. Claramente, toda α-ádica filtración es α-estable.

Sea A un anillo y α, un ideal de A. Sea M un A-módulo con filtración $M = \alpha^0 M \supseteq \alpha M \supseteq \alpha^2 M \supseteq ...$ compatible con α. Considere la suma directa $\overline{A} = A \bigoplus \alpha \bigoplus \alpha^2 \bigoplus ....$ La multiplicación en A induce otra multiplicación en $\overline{A}$ que lo dota de una graduación. Sea $\overline{M} = M_0 \bigoplus M_1 \bigoplus M_2 \bigoplus ....$ La estructura de A-módulo de M induce la estructura de $\overline{A}$-módulo graduado en $\overline{M}$.

Lema 5: Sea α un ideal de A y sea M un A-módulo noetheriano con filtración $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq ...$ compatible con α. Entonces $\overline{M}$ es finitamente generado como $\overline{A}$-módulo si y sólo si la filtración es α-estable.

■

Sea M un A-módulo con filtración $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq ...$ y supongamos que N es un submódulo de M. Entonces $N_n = N \bigcap M_n, n \geq 0$ define una filtración en M, llamada filtración <u>inducida</u> en N.

Teorema 2 (Artin-Rees): Sea A un anillo noetheriano, α un ideal de A, M un A-módulo finitamente generado, y N, un submódulo de M. Entonces, para toda α-filtración estable de M, la filtración inducida en N es α-estable.

Dem. Sea $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq ...$ una filtración α-estable de M. Sean $\overline{A} = A \bigoplus \alpha \bigoplus \alpha^2 \bigoplus ..., \overline{M} = M_0 \bigoplus M_1 \bigoplus M_2 \bigoplus ..., \overline{N} = N \bigoplus (M_1 \bigcap N) \bigoplus (M_2 \bigcap N) \bigoplus ....$ Como la filtración en M es α-estable, se sigue que $\overline{M}$ es finitamente generado como $\overline{A}$-módulo. Como A es noetheriano, α es finitamente generado, y en consecuencia $\overline{A}$ es noetheriano. Por lo tanto $\overline{M}$ es un $\overline{A}$-módulo noetheriano, lo que implica que $\overline{N}$ es finitamente generado sobre $\overline{A}$. Luego entonces, la filtración inducida en N es α-estable.

■

Corolario 8: Sea A un anillo noetheriano, α un ideal de A, M un A-módulo finitamente generado y N, un submódulo de M. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que para todo $n \geq 0$, tenemos $\alpha(\alpha^n M \bigcap N) = \alpha^{n+1} M \bigcap N$.

■

Corolario 9: Sea A un anillo noetheriano y $\underline{r}$, su radical de Jacobson. Entonces $\bigcap_{n\geq 0} \underline{r}^n = 0$.

■

Sea A un anillo con filtración $A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq ...$ y sea M un A-módulo con filtración $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_{\supseteq}....$ Consideremos la suma directa $G(A) = \bigoplus_{n\geq 0} A_n/A_{n+1}$ de grupos abelianos A_n/A_{n+1}. Podemos hacer de $G(A)$ un anillo graduado al definir la siguiente multiplicación: sean $\overline{a} \in A_n/A_{n+1}, \overline{b} \in A_m/A_{m+1}$ elementos homogéneos de grados n, m; respectivamente. Supongamos que $a \in A_n, b \in A_m$ son representantes de $\overline{a}, \overline{b}$. Entonces $ab \in A_{n+m}$; definimos $\overline{a}\overline{b}$ como la imagen de ab en A_{n+m}/A_{n+m+1}. Esta multiplicación está bien definida, que se extiende a una multiplicación en $G(A)$, graduándolo. De manera similar, damos estructura de $G(A)$-módulo graduado a $G(M) = \bigoplus_{n\geq 0} M_n/M_{n+1}$. $G(A)$ es el anillo graduado <u>asociado</u> a la filtración de A. Asimismo $G(M)$ es el módulo graduado asociado a la filtración de M.

Sea A un anillo, α un ideal suyo, y M un A-módulo. El anillo graduado y el módulo graduado asociados a las filtraciones α-ádicas en A y en M, respectivamente, se denotan por $G_\alpha(A)$ y $G_\alpha(M)$.

Lema 6: Sea A un anillo noetheriano y α, un ideal de A contenido en $\underline{r}(A)$. Si $G_\alpha(A)$ es un dominio entero, tambien lo es A.

■

Capítulo 3
Functores Tor y Ext

3.1 Functor Tor

Sea M un A-módulo y sea $\underline{P} = (\underline{P}, \varepsilon)$ una resolución proyectiva de M. Entonces, para todo A-módulo N, denotamos por $\underline{P} \bigotimes_A N$ el complejo izquierdo

$$... \to P_n \bigotimes_A N \overset{d_n \bigotimes 1_N}{\to} P_{n-1} \bigotimes_A N \to ... \to P_0 \bigotimes_A N \to 0.$$

Denotamos los módulos homológicos $H_n(\underline{P} \bigotimes_A N)$ de dicho complejo por $H_n(M, N; \underline{P})$. Sea $f : M \to M'$ un homomorfismo de A-módulos y sea $\underline{P}, \underline{P'}$ resoluciones proyectivas de M, M' respectivamente. Sea $F : \underline{P} \to \underline{P'}$ un morfismo terminal en f. El morfismo F define para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ un A-homomorfismo

$$H_n(f, N; \underline{P}, \underline{P'}) : H_n(M, N; \underline{P}) \to H_n(M', N; \underline{P'}).$$

Dicho homomorfismo no depende de la elección del morfismo terminal en f.
Sea $0 \to M' \overset{i}{\to} M \overset{j}{\to} M'' \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos y sea

$$0 \to \underline{P'} \to \underline{P} \to \underline{P''} \to 0 \qquad (*)$$

una resolución exacta de esta sucesión exacta. Sea para todo $n \geq 1$ $\partial_n(N, (*))$: $H_n(M'', N; \underline{P''}) \to H_{n-1}(M', N; \underline{P'})$ el homomorfismo conector definido por (*). Tenemos el siguiente lema:

Lema 7: 1. Sean $f : M \to M', g : M' \to M''$ homomorfismos de A-módulos y supongamos que $\underline{P}, \underline{P'}, \underline{P''}$ son resoluciones proyectivas de M, M' y M'', respectivamente. Entonces para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ tenemos

$$H_n(gf,N;\underline{P},\underline{P''}) = H_n(g,N;\underline{P'},\underline{P''})H_n(f,N;\underline{P},\underline{P'}). \text{ Más aún,}$$
$$H_n(1_M,N;\underline{P},\underline{P}) = 1_{H_n(M,N;\underline{P})}.$$

2. Si $0 \to \underline{P'} \to \underline{P} \to \underline{P''} \to 0$ (*) es una resolución proyectiva de una sucesión exacta de A-módulos $0 \to M' \underset{\to}{i} M \underset{\to}{j} M'' \to 0$, entonces la sucesión

$$\ldots \to$$
$$H_n(M'',N;\underline{P''}) \overset{\partial_n}{\to} H_{n-1}(M',N;\underline{P'}) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} H_{n-1}(M,N;\underline{P}) \xrightarrow{H_{n-1}(j)} H_{n-1}(M'',N;\underline{P''}) \to$$
$\ldots \to H_0(M'',N;\underline{P''}) \to 0$ es exacta (donde hemos escrito ∂_n en vez de $\partial_n(N,(*))$, y $H_{n-1}(i)$ en vez de $H_{n-1}(i,N;\underline{P'P})$, etcétera).

3. Si

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M' & \to & M & \to & M'' & \to & 0 \\ & f' & \downarrow & f & \downarrow & f'' & \downarrow & & \\ 0 & \to & L' & \to & L & \to & L'' & \to & 0 \end{array}$$

es un diagrama conmutativo de A-módulos con renglones exactos, y si

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \underline{P'} & \to & \underline{p} & \to & \underline{P''} & \to & 0 \\ & F' & \downarrow & F & \downarrow & F'' & \downarrow & & \\ 0 & \to & \underline{Q'} & \to & \underline{Q} & \to & \underline{Q''} & \to & 0 \end{array}$$

es un diagrama conmutativo de complejos, donde los dos primeros renglones de éste (denotados por * y por **, respectivamente) son resoluciones proyectivas de los dos primeros renglones del diagrama anterior (en el mismo órden), y donde $\underline{P'} \to \underline{Q'}$ (respectivamente $\underline{P} \to \underline{Q}, \underline{P''} \to \underline{Q''}$) es un morfismo terminal en $M' \to L'$ (respectivamente en $M \to L, M'' \to L''$), entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & H_n(M'',N;\underline{P''}) & \xrightarrow{H_n(f'',N;\underline{P''},\underline{Q''})} & H_n(L'',N;\underline{Q''}) & \\ \partial_n(N,(*)) & \downarrow & & \downarrow & \partial_n(N,(**)) \\ & H_{n-1}(M',N;\underline{P'}) & \xrightarrow{H_{n-1}(f',N;\underline{P'},\underline{Q'})} & H_{n-1}(L',N;\underline{Q'}) & \end{array}$$

conmuta para todo $n \geq 1$.

Dem. (1): Si $F : \underline{P} \to P', G : \underline{P'} \to P''$ son homomorfismos terminales en f, g respectivamente, entonces GF es terminal en gf. Más aún, $1_{\underline{P}}$ es terminal en 1_M. (2) y (3) son claros.

■

Proposición 19: Sea M un A-módulo y sean $\underline{P}, \underline{Q}$ resoluciones proyectivas de M. Entonces

$$H_n(1_M, N; \underline{P}, \underline{Q}) : H_n(M, N; \underline{P}) \to H_n(M, N; Q)$$

es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Si $f : M \to M'$ es un homomorfismo de A-módulos y si $\underline{P}, \underline{Q}$ son resoluciones proyectivas de M', entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} & H_n(M, N; \underline{P}) & \xrightarrow{H_n(1_M, N; \underline{P}, \underline{Q})} & H_n(M, N; \underline{Q}) & \\ H_n(f, N; \underline{P}, \underline{P'}) & \downarrow & & \downarrow & H_n(f, N; \underline{Q}, \underline{Q'}) \\ & H_n(M', N; \underline{P'}) & \xrightarrow{H_n(1_{M'}, N; \underline{P'}, \underline{Q'})} & H_n(M', N; \underline{Q'}) & \end{array}$$

Más aún, si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es una sucesión exacta de A-módulos y si

$$0 \to \underline{P'} \to \underline{P} \to \underline{P''} \to 0 \qquad (*)$$
$$0 \to \underline{Q'} \to \underline{Q} \to \underline{Q''} \to 0 \qquad (**)$$

son dos resoluciones proyectivas de dicha sucesión, entonces el siguiente diagrama conmuta para todo $n \geq 1$:

$$\begin{array}{ccccc} & H_n(M'', N; \underline{P''}) & \xrightarrow{H_n(1_{M''}, N; \underline{P''}, \underline{Q''})} & H_n(M'', N; \underline{Q''}) & \\ \partial_n(N, (*)) & \downarrow & & \downarrow & \partial_n(N, (**)) \\ & H_{n-1}(M', N; \underline{P'}) & \xrightarrow{H_{n-1}(1_{M'}, N; \underline{P'}, \underline{Q'})} & H_{n-1}(M', N; \underline{Q'}) & \end{array}$$

Dem. Tenemos que $H_n(1_M, N; \underline{Q}, \underline{P})H_n(1_M, N; \underline{P}, \underline{Q}) = H_n(1_M, N; \underline{P}, \underline{P}) = 1_{H_n(M,N;\underline{p})}$ por el lema anterior. Asimismo $H_n(1_M, N; \underline{P}, \underline{Q})H_n(1_M, N; \underline{Q}, \underline{P}) = 1_{H_n(M,N;\underline{Q})}$. Luego entonces $H_n(1_M, N; \underline{P}, \underline{Q})$ es un isomorfismo. Ahora $H_n(f, N; \underline{Q}, \underline{Q'})H_n(1_M, N; \underline{P}, \underline{Q}) = H_n(f, N; \underline{P}, \underline{Q'}) = H_n(1_{M'}, N; \underline{P'}, \underline{Q'})H_n(f, N; \underline{P}, \underline{P'})$ por el mismo lema. Esto prueba la conmutatividad del primer diagrama.

Para probar la conmutatividad del segundo diagrama de esta proposición, considere el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & M' & \rightarrow & M & \rightarrow & M'' & \rightarrow & 0 \\ & 1_{M'} & \downarrow & 1_M & \downarrow & 1_{M''} & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & M' & \rightarrow & M & \rightarrow & M'' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Existen morfismos F', F, F'' terminales en $1_{M'}, 1_M, 1_{M''}$; respectivamente tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \underline{P'} & \rightarrow & \underline{p} & \rightarrow & \underline{P''} & \rightarrow & 0 \\ & F' & \downarrow & F & \downarrow & F'' & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \underline{Q'} & \rightarrow & \underline{Q} & \rightarrow & \underline{Q''} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

El resultado se sigue del lema 7.

■

Sea para todo $n \in \mathbb{Z}^+, Tor_n^A(M, N) = H_n(M, N; \underline{P})$, donde $\underline{P}$ es una resolución proyectiva de M. En virtud de la proposición anterior, tenemos para un A-módulo fijo N, una sucesión $\{Tor_n^A(M, N)\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ de functores de A-módulos a A-módulos, definidos independientemente de las resoluciones proyectivas $\underline{P}$ de M. Más aún, si $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ es una sucesión exacta de A-módulos, tenemos A-homomorfismos $\{\partial_n : Tor_n^A(M'', N) \rightarrow Tor_{n-1}^A(M', N)\}_{n \geq 1}$ llamados homomorfismos <u>conectores</u>.

Sea ahora M un A-módulo y $\underline{P}$, una resolución proyectiva de M. Si $f : N \rightarrow N'$ es un homomorfismo de A-módulos, el morfismo $1_{\underline{P}} \bigotimes f : \underline{P} \bigotimes N \rightarrow \underline{P} \bigotimes N'$ de complejos, induce para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, un A-homomorfismo

$$Tor_n^A(M,f) : Tor_n^A(M,N) \to Tor_n^A(M,N').$$

Si $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ es una sucesión exacta de A-módulos, entonces la sucesión de complejos

$$0 \to \underline{P} \bigotimes_A N' \to \underline{P} \bigotimes_A N \to \underline{P} \bigotimes_A N'' \to 0$$

es exacta. por lo tanto, ésta define homomorfismos conectores

$$\partial_n : Tor_n^A(M,N'') \to Tor_{n-1}^A(M,N').$$

Teorema 3:

1. Para un A-módulo fijo N, las asignaciones $\{M \mapsto Tor_n^A(M,N)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$, $\{M \mapsto Tor_n^A(N,M)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ son sucesiones de functores de A-módulos a A-módulos.

2. Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es una sucesión exacta de A-módulos, entonces las sucesiones

$$\begin{gathered} ... \to Tor_n^A(M'',N) \overset{\partial_n}{\to} Tor_{n-1}^A(M',N) \to Tor_{n-1}^A(M,N) \to \\ Tor_{n-1}^A(M'',N) \to ...Tor_0^A(M'',N) \to 0, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} ... \to Tor_n^A(N,M'') \overset{\partial_n}{\to} Tor_{n-1}^A(N,M') \to Tor_{n-1}^A(N,M) \to \\ Tor_{n-1}^A(N,M'') \to ...Tor_0^A(N,M'') \to 0 \end{gathered}$$

son exactas.

3. Si

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M' & \to & M & \to & M'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & K' & \to & K & \to & K'' & \to & 0 \end{array}$$

es un diagrama conmutativo de A-módulos con renglones exactos, entonces para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, tenemos:

$$\begin{array}{ccc} Tor_n^A(M'', N) & \stackrel{\partial_n}{\to} & Tor_{n-1}^A(M', N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Tor_n^A(K'', N) & \stackrel{\partial_n}{\to} & Tor_{n-1}^A(K', N) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} Tor_n^A(N, M'') & \stackrel{\partial_n}{\to} & Tor_{n-1}^A(N, M') \\ \downarrow & & \downarrow \\ Tor_n^A(N, K'') & \stackrel{\partial_n}{\to} & Tor_{n-1}^A(N, K') \end{array}$$

son conmutativos.

4. Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, el functor $Tor_n^A(M, N)$ es A-lineal en M y en N.
5. Existe un A-isomorfismo $Tor_0^A(M, N) \cong M \bigotimes_A N$ que es functorial en M y en N.

Dem. En virtud del teorema anterior, (1) y (2) se satisfacen. Lo referente a los functores $\{M \mapsto Tor_n^A(M, N)\}$ de (3), también se sigue del teorema anterior y de un resultado básico sobre diagramas conmutativos de complejos con renglones exactos (ver apéndice). Para demostrar lo referente a los functores $\{M \mapsto Tor_n^A(N, M)\}$, notemos que si $\underline{P}$ es una resolución proyectiva de M, entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \underline{P} \bigotimes_A M' & \to & \underline{P} \bigotimes_A M & \to & \underline{P} \bigotimes_A M'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \underline{P} \bigotimes_A K' & \to & \underline{P} \bigotimes_A K & \to & \underline{P} \bigotimes_A K'' & \to & 0 \end{array}$$

es conmutativo, por lo que el mismo resultado referenciado sobre diagramas conmutativos de complejos con renglones exactos, se tiene la conmutatividad del diagrama asociado.
Demostremos (4): Sean $f, g : N \to N'$ homomorfismos de A-módulos y sea $\underline{P}$ una resolución proyectiva de M. Como para $a, b \in A$, tenemos $a(1_{\underline{P}} \bigotimes f) + b(1_{\underline{P}} \bigotimes g) = 1_{\underline{P}} \bigotimes (af + bg)$, tenemos que $aTor_n^A(M, f) + bTor_n^A(M, g) = Tor_n^A(M, af+$

bg). Esto demuestra que $Tor_n^A(M,N)$ es A-lineal en N. Sean ahora $\underline{Q}, \underline{Q'}$ resoluciones proyectivas de N, N' respectivamente. Entonces para $a, b \in A$, el morfismo $aF + bG$ es terminal en $af + bg$ y en consecuencia se tiene la A-linealidad de $Tor_n^A(M,N)$ en M.

Finalmente, para demostrar (5), supongamos que $\underline{P}$ es una resolución proyectiva de M. Como $Tor_0^A(M,N) = (P_0 \bigotimes_A N)/im(d_1 \bigotimes 1_N)$, el A-homomorfismo $\varepsilon \bigotimes 1_N : P_0 \bigotimes_A N \to M \bigotimes_A N$ induce un A-homomorfismo $\varepsilon(M,N) : Tor_0^A(M,N) \to M \bigotimes_A N$. Debemos demostrar que $\varepsilon(M,N)$ es un isomorfismo functorial en M y en N. Como $P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$ es exacta, la sucesión $P_1 \bigotimes_A N \xrightarrow{d_1 \bigotimes 1_N} P_0 \bigotimes_A N \xrightarrow{\varepsilon \bigotimes 1_N} M \bigotimes_A N \to 0$ es exacta, de modo que $\varepsilon(M,N)$ es un isomorfismo. Si ahora $f : M \to M'$ es un homomorfismo de A-módulos, y si $F : \underline{P} \to \underline{P'}$ es un morfismo terminal en f, donde $\underline{P}, \underline{P'}$ son resoluciones proyectivas de M, M', respectivamente, entonces el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc}
P_1 \bigotimes_A N & \xrightarrow{d_1 \bigotimes 1} & P_0 \bigotimes_A N & \xrightarrow{\varepsilon \bigotimes 1} & M \bigotimes_A N & \to & 0 \\
\downarrow F_1 \bigotimes 1 & & \downarrow F_0 \bigotimes 1 & & \downarrow f \bigotimes 1 & & \\
P'_1 \bigotimes_A N & \xrightarrow{d'_1 \bigotimes 1} & P'_0 \bigotimes_A N & \xrightarrow{\varepsilon \bigotimes 1} & M' \bigotimes_A N & \to & 0
\end{array}$$

lo que implica que el siguiente diagrama también es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
Tor_0^A(M,N) & \xrightarrow{\varepsilon(M,N)} & M \bigotimes_A N \\
Tor_0^A(f,N) \downarrow & & \downarrow f \bigotimes 1_N \\
Tor_0^A(M',N) & \xrightarrow{\varepsilon(M',N)} & M' \bigotimes_A N
\end{array}$$

Esto prueba que $\varepsilon(M,N)$ es functorial en M. Ahora sea $g : N \to N'$ un A-homomorfismo y sea $\underline{P}$ una resolución proyectiva de M. Entonces, la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
P_1 \bigotimes_A N & \xrightarrow{d_1 \bigotimes 1_N} & P_0 \bigotimes_A N & \xrightarrow{\varepsilon \bigotimes 1_N} & M \bigotimes_A N & \to & 0 \\
\downarrow 1 \bigotimes g & & \downarrow 1 \bigotimes g & & \downarrow 1 \bigotimes g & & \\
P_1 \bigotimes_A N' & \xrightarrow{d_1 \bigotimes 1_{N'}} & P_0 \bigotimes_A N' & \xrightarrow{\varepsilon \bigotimes 1_{N'}} & M \bigotimes_A N' & \to & 0
\end{array}$$

implica que $\varepsilon(M,N)$ es functorial en N.

■

Lema 8: Sea P un A-módulo proyectivo. Entonces $Tor_n^A(P,M)=0, Tor_n^A(M,P)=0$ para todo A-módulo y para todo $n \geq 1$.

Dem. Como P es proyectivo, tenemos la resolución proyectiva $0 \to \underline{P} \xrightarrow{1_P} P \to 0$. Luego entonces $Tor_n^A(P,M)=0, n \geq 1$. Por otra parte, si $(\underline{Q}, \varepsilon)$ es cualquier resolución proyectiva de M, la sucesión

$$... \to Q_n \bigotimes_A P \to Q_{n-1} \bigotimes_A P \to ... \to Q_0 \bigotimes_A P \xrightarrow{\varepsilon \bigotimes 1} M \bigotimes_A P \to 0$$

es exacta. Por lo tanto $Tor_n^A(M,P)=0$ para todo $n \geq 1$.

■

Proposición 20: Sean M y N A-módulos. Entonces para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, existe un isomorfismo $Tor_n^A(M,N) \cong Tor_n^A(N,M)$, que es functorial en M, N.

Dem. Por inducción sobre n. Para $n=0$ tenemos por el teorema anterior, isomorfismos functoriales $Tor_0^A(M,N) \cong M \bigotimes_A N, Tor_0^A(N,M) \cong N \bigotimes_A M$. Como $M \bigotimes_A N \cong N \bigotimes_A M$, el resultado se satisface para $n=0$. Sea $n>0$. Supongamos que la sucesión de A-módulos $0 \to K \to F \to M \to 0$ es exacta, donde F es libre. Esto induce la siguientes sucesiones exactas:

$$Tor_n^A(F,N) \to Tor_n^A(M,N) \xrightarrow{\partial_n} Tor_{n-1}^A(K,N) \to Tor_{n-1}^A(F,N)$$
$$Tor_n^A(N,F) \to Tor_n^A(N,M) \xrightarrow{\partial_n} Tor_{n-1}^A(N,K) \to Tor_{n-1}^A(N,F)$$

Como $n>0$, tenemos $Tor_n^A(F,N)=0=Tor_n^A(N,F)$ por el lema anterior. En consecuencia, por hipótesis de inducción, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & Tor_n^A(M,N) & \xrightarrow{\partial_n} & Tor_{n-1}^A(K,N) & \to & Tor_{n-1}^A(F,N) \\
 & & & & \downarrow \ \varphi & & \downarrow \ \psi \\
0 & \to & Tor_n^A(N,M) & \xrightarrow{\partial_n} & Tor_{n-1}^A(N,K) & \to & Tor_{n-1}^A(N,F)
\end{array}$$

donde φ, ψ son isomorfismos. En consecuencia, φ induce un isomorfismo φ' : $Tor_n^A(M,N) \cong Tor_n^A(N,M)$. Como φ es functorial por hipótesis y como también ∂_n es functorial -por el teorema anterior-, el isomorfismo φ' también es functorial.

3.2 Functor Ext

Sean M, N A-módulos y sea $(\underline{P}, \varepsilon)$ una resolución proyectiva de M. Denotamos por $Hom_A(\underline{P}, N)$ al complejo derecho

$$0 \to Hom_A(P_0, N) \overset{D(d_1)}{\to} Hom_A(P_1, N) \overset{D(d_2)}{\to} \to ... \to Hom_A(P_n, N) \overset{D(d_{n+1})}{\to} \to ...$$

y por $Ext^n_A(M, N)$ al n-ésimo módulo de homologia $H^n(Hom_A(\underline{P}, N))$. Si $f : M \to M', g : N \to N'$ son A-homomorfismos, entonces definimos

$$Ext^n_A(f, N) : Ext^n_A(M', N) \to Ext^n_A(M, N)$$

y

$$Ext^n_A(M, g) : Ext^n_A(M, N) \to Ext^n_A(M, N')$$

del mismo modo como enel caso de Tor. Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es una sucesión exacta de A-módulos y N, es un A-módulo, definimos, como en la sección anterior, homomorfismos conectores

$$\partial^{n-1} : Ext^{n-1}_A(M', N) \to Ext^n_A(M'', N)$$

y de forma similar para sucesiones exactas en la segunda variable. De este modo, tenemos:

Teorema 4:

1. Para un A-módulo N, la asignación $\{M \mapsto Ext^n_A(M, N)\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ es una sucesión de functores contravariantes de A-módulos a A-módulos, y la asignación $\{M \mapsto Ext^n_A(N, M)\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ es una sucesión de functores de A-módulos a A-módulos.
2. Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es una sucesión exacta de A-módulos, entonces las sucesiones

$$0 \to Ext_A^0(M'', N) \to ... \to Ext_A^{n-1}(M'', N) \to Ext_A^{n-1}(M, N) \to$$
$$Ext_A^{n-1}(M', N) \xrightarrow{\partial^{n-1}} Ext_A^n(M'', N) \to ...$$

y

$$0 \to Ext_A^0(N, M') \to ... \to Ext_A^{n-1}(N, M') \to Ext_A^{n-1}(N, M) \to$$
$$Ext_A^{n-1}(N, M'') \xrightarrow{\partial^{n-1}} Ext_A^n(N, M') \to ...$$

son exactas.

3. Si

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M' & \to & M & \to & M'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & K' & \to & K & \to & K'' & \to & 0 \end{array}$$

es un diagrama conmutativo de A-módulos con renglones exactos, entonces, para todo $n \geq 1$, los diagramas inducidos

$$\begin{array}{ccc} Ext_A^{n-1}(M', N) & \xrightarrow{\partial^{n-1}} & Ext_A^n(M'', N) \\ \uparrow & & \uparrow \\ Ext_A^{n-1}(K', N) & \xrightarrow{\partial^{n-1}} & Ext_A^n(K'', N) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} Ext_A^{n-1}(N, M'') & \xrightarrow{\partial^{n-1}} & Ext_A^n(N, M') \\ \downarrow & & \downarrow \\ Ext_A^{n-1}(N, K'') & \xrightarrow{\partial^{n-1}} & Ext_A^n(N, K') \end{array}$$

son conmutativos.

4. Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, el functor $Ext_A^n(M, N)$ es A-lineal en M y en N.

5. Existe un A-isomorfismo $Ext_A^0(M, N) \cong Hom_A(M, N)$, que es functorial en M y en N.

6. Sea P un A-módulo proyectivo. Entonces $Ext_A^n(P, N) = 0$ para todo A-módulo N y para todo $n \geq 1$.

Dem. La misma demostración como la que se hizo previamente para el functor Tor.

■

Capítulo 4
Teoría de la Dimensión

4.1 Polinomio de Hilbert-Samuel

Sea $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Q}$ una función. Definimos $\Delta f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Q}$ por $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n); n \in \mathbb{Z}^+$. Por inducción sobre r, definimos $\Delta^r f$para todo $r \in \mathbb{Z}^+$ por

$$\Delta^0 f = f;$$
$$\Delta^r f = \Delta(\Delta^{r-1} f), r \geq 1.$$

Sea $\mathbb{Q}[X]$ el anillo de polinomios en una variable con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Una función $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Q}$ se llama función polinomial, si existe $g \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(n) = g(n)$, para todo $n \gg 1$. Si f es una función polinomial, g es único. El grado de g se llama grado de f, y el coeficiente líder de g se llama coeficiente líder de f. Si $f \neq 0$ y si $f(n) \geq 0$ para $n \gg 1$, entonces el coeficiente líder de f es positivo. Sean f_1, f_2 dos funciones polinomiales. Decimos que $f_1 \leq f_2$ si $f_1(n) \leq f_2(n)$ para $n \gg 1$.

Lema 9: Sea $r \in \mathbb{N}$. La función $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Q}$ es polinomial de grado r si y sólo si $\Delta f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Q}$ es una función polinomial de grado $r - 1$.

Dem. Si f es polinomial de grado r, Δf es una función polinomial de grado $r - 1$. Demostraremos la *suficiencia por inducción sobre r. Si $r = 1$, existe $p \in \mathbb{Q}, p \neq 0$ tal que $\Delta f(n) = p$ para $n \gg 1$. Entonces*

$$f(n+1) - f(n) = p = p(n+1) - pn,$$
$$\textit{esto es } f(n+1) - p(n+1) = f(n) - pn = q$$

para $n \gg 1$ y para algún $q \in \mathbb{Q}$. Esto implica que $f(n) = pn + q$ para $n \gg 1$ y

ya terminamos para este caso.
Sea ahora $r > 1$*. Sea* $g(X) = a_0X^{r-1} + ... + a_{r-1} \in \mathbb{Q}[X], a_0 \neq 0$ *tal que* $\Delta f(n) = g(n), n \gg 1$*. Entonces*

$$f(n+1) - f(n) = \Delta f(n) = \frac{a_0}{r}\{(n+1)^r - n^r + h(n)\}$$

donde $h \in \mathbb{Q}[X]$ *y* $degh \leq r-2$*. Haciendo* $f^*(n) = f(n) - \frac{a_0}{r}n^r$*, tenemos, para* $n \gg 1$

$$\Delta f^*(n) = f^*(n+1) - f^*(n) = h(n)$$

y por hipótesis de inducción, $f^*(n)$ *es una función polinomial de grado menor o igual que* $r-1$*. Como* $f(n) = \frac{a_0}{r}n^r + f^*(n)$ *para* $n \gg 1, a_0 \neq 0$*, el resultado se satisface.*
■

Por conveniencia asignamos grado -1 al polinomio 0.
Sea $R = \bigotimes_{n\geq 0} R_n$ un anillo graduado tal que R_0 es de Artin y R está generado, como R_0-álgebra, por r elementos $x_1, ..., x_r$ de R_1. Entonces R, siendo finitamente generado como R_0-álgebra, es noetheriano. Sea $N = \bigoplus_{n\geq 0} N_n$ finitamente generado como R-módulo graduado. Entonces todo N_n, como R_0-módulo, es fnitamente generado y de longitud finita. Definamos $\chi(\chi N, .) : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ por $\chi(N, .)(n) = \chi(N, n) = l_{R_0}(N_n)$.

Proposición 21 (Hilbert): La función $\chi(N, .)$ es una función polinomial de grado $\leq r-1$, donde r es como arriba.

Dem. Demostraremos la proposición por inducción sobre r. Si $r = 0$, entonces $R = R_0$. Sea S un conjunto finito de generadores homogéneos de N sobre $R = R_0$, y supongamos que $m = sup_{s\in S}(degs)$. Entonces $N_n = 0$ para

$n > m$. Entonces $\chi(N,n) = 0$ para $n \gg 1$, esto es, $\chi(N,n)$ es una función polinomial de grado -1. Supongamos ahora que $r > 0$ y que el resultado se satisface para todos los módulos graduados finitamente generados sobre anillos graduados R, que son generados como R_0-álgebras, por menos que r elementos de R_1.
Supongamos que K, C son, respectivamente, el kernel y el cokernel de los endomorfismos graduados $\varphi : N \to N$ de grado 1, dados por $\varphi = (x_r)_N$, la homotesia de x_r. Tenemos, para todo n, una sucesión exacta

$$0 \to K_n \to N_n \overset{\varphi}{\to} N_{n+1} \to C_{n+1} \to 0.$$

Como N es noetheriano, los R-módulos K, C son noetherianos, por lo que $\chi(K,.), \chi(C,.)$ se pueden definir. Se sigue de la proposición que $\chi(K,n) - \chi(N,n) + \chi(N,n+1) - \chi(C,n+1) = 0$, esto es,

$$\Delta\chi(N,n) = \chi(C,n+1) - \chi(K,n).$$

Como x_r anula a K y a C, estos son finitamente generados como módulos graduados sobre el subanillo graduado $R' = R_0[x_1, ..., x_{r-1}]$ de R. Por hipótesis de inducción, $\chi(C,n), \chi(K,n)$ son funciones polinomiales de grados menores o iguales que $r-1$, y lo mismo ocurre con $\Delta\chi(N,n)$.
■

El polinomio asociado a la función polinomial $\chi(N,n)$ se llama polinomio de Hilbert de N y también está denotado por $\chi(N,n)$.
Hasta el final de éste capítulo supondremos que A es un anillo noetheriano local. Denotamos por m a su ideal máximo. Por un A-módulo siempre entenderemos un A-módulo finitamente generado.
Un ideal α de A se llama un ideal de definición de A, si $m^n \subseteq \alpha \subseteq m$ para algún entero $n \geq 1$.

Sea α un ideal de definición de A. Denotamos por $G_\alpha(A)$ al anillo graduado $\bigotimes_{n\geq 0}\alpha^n/\alpha^{n+1}$ asociado a la α-ádica filtración de A. Asimismo, para un A-módulo M, denotamos por $G_\alpha(M)$ al G_α-módulo graduado $\bigotimes_{n\geq 0}\alpha^n M/\alpha^{n+1}M$, correspondiente a la α-ádica filtración de M. Por hipótesis de inducción sobre α, $Supp(A/\alpha) = \{m\}$. Por lo tanto A/α es de longitud finita, y en consecuencia, de Artin. Como A es noetheriano, el ideal α es finitamente generado, digamos, por r elementos, y la condición de la proposición anterior la satisfacen $R = G_\alpha(A), N = G_\alpha(M)$. Por lo tanto, $\chi(G_\alpha(M), n) = l_{A/\alpha}(\alpha^n M/\alpha^{n+1}M)$ es un polinomio de grado menor o igual que $r-1$.
Como $Supp(M/\alpha^n M) = \{m\}$, el A-módulo $M/\alpha^n M$ es de longitud finita. Hagamos $P_\alpha(M,n) = l_A(M/\alpha^n M)$. Como $l_A(\alpha^n M/\alpha_{n+1}M) = l_{A/\alpha}(\alpha^n M/\alpha^{n+1}M)$, la sucesión exacta

$$0 \to \alpha^n M/\alpha^{n+1}M \to M/\alpha^{n+1}M \to M/\alpha^n M \to 0$$

implica que $\chi(G_\alpha(M), n) = P_\alpha(M, n+1) - P_\alpha(M,n) = \Delta P_\alpha(M,n)$. Por el lema 9 y sus observaciones, obtenemos:

Teorema 5 (Samuel): Sea A un anillo local, M un A-módulo finitamente generado y α, un ideal de A de definición generado por r elementos. Entonces $P_\alpha(M,N)$ es una función polinomial de grado menor o igual que r.

■

Lema 10: Sea M un A-módulo y sean α, α' ideales de definición de A. Entonces $P_\alpha(M,N)$ y $P_{\alpha'}(M,N)$ tienen el mismo grado.

Dem. Es suficiente demostrar que $P_\alpha(M,n)$ y $P_m(M,n)$ tienen el mismo grado. Como α es un ideal de definción de A, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m^n \subseteq \alpha \subseteq m$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $m^{mn} \subseteq \alpha \subseteq m$, por lo que $P_m(M, nm) \geq P_\alpha(M,n) \geq P_m(M,n)$.

■

Proposición 22: Sea α un ideal de definición de A y sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos. Entonces tenemos

$$P_\alpha(M', n) + P_\alpha(M'', n) = P_\alpha(M, n) + R(n),$$

donde $R(n)$ es una función polinomial menor que $deg P_\alpha(M, n)$ y donde el coeficiente líder de $R(n)$ es no negativo.

Dem. Para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos una sucesión exacta (inducida)

$$0 \to M'/M' \bigcap \alpha^n M \to M/\alpha^n M \to M''/\alpha^n M'' \to 0$$

Esto implica

$$l_A(M'/M' \bigcap \alpha^n M) + l_A(M''/\alpha^n M'') = l_A(M/\alpha^n M).$$

Haciendo $M'_n = M' \bigcap \alpha^n M$, tenemos

$$l_A(M'/M'_n) = P_\alpha(M, n) - P_\alpha(M'', n) \tag{1}$$

lo que demuestra que $l_A(M'/M'_n)$ es una función polinomial. Por el teorema de *Artin-Rees existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $\alpha M'_n = M'_{n+1}$ *para* $n \geq m$. *Se sigue que para todo* $n \in \mathbb{N}$, $\alpha^{m+n} M' \subseteq M'_{m+n} = \alpha^n M'_m \subseteq \alpha^n M'$, *por lo que* $l_A(M'/\alpha^{m+n} M') \geq l_A(M'/M'_{n+m} \geq l_A(M'/\alpha^n M')$
esto es
$$P_\alpha(M', n+m) \geq l_A(M'/M'_{n+m}) \geq P_\alpha(M', n) \tag{2}$$
Estas desigualdades demuestran que $P_\alpha(M', n)$ *y que* $l_A(M'/M'_n)$ *tienen el mismo grado y el mismo coeficiente líder. en consecuencia* $R(n) = P_\alpha(M', n) - l_A(M'/M'_n)$ *es una función polinomial de grado menor que el grado de* $l_A(M'/M'_n)$ *que, por (1), es menor o igual que el grado de* $P_\alpha(M, n)$, *ya que* $deg P_\alpha(M', n) \leq$

$P_\alpha(M,n)$. Como por (2), $R(n) \geq 0, n \gg 1$, su coeficiente líder es no negativo.

■

COROLARIO 10: Sea M' un submódulo de M. Entonces $degP_\alpha(M',n) \leq degP_\alpha(M,n)$.

Dem. Sea $M'' = M/M'$. Se tiene $degP_\alpha(M'',n) \leq degP_\alpha(M,n)$.

■

Todos los resultados anteriores se aplican al caso $M = A$. Sea $G(A) = G_m(A)$ y supongamos que $k \cong A/m$. Si m está generado por r elementos $x_1, ..., x_r$, tenemos que $deg\chi(G(A),n) \leq r-1$. Tenemos un epimorfismo de k-álgebras graduadas $\varphi : k[X_1, ...X_r] \to G(A)$ definido por $\varphi(X_i) = \overline{x_i}$, donde $\overline{x_i}$ denota la clase de $x_i \mathrm{mod} m^2$.

PROPOSICIÓN 23: Bajo la notación previa, tenemos que $deg\chi(G(A),n) = r-1$ si y sólo si $\varphi : k[X_1, ..., X_r] \to G(A)$ es un isomorfismo.

Dem. Sea $B = k[x_1, ..., x_r]$.
Sea φ un isomorfismo. Entonces tenemos un isomorfismo $B_n \cong m^n/m^{n+1}$ de k-espacios vectoriales, donde B_n denota la n-ésimo componente homogéneo de B. Por lo tanto $\chi(G(A),n) = l_k(m^n/m^{n+1}) = l_k(B_n) = \binom{n+r-1}{r-1}$, ya que B_n es un k-espacio vectorial de rango $\binom{n+r-1}{r-1}$. La asignación $n \to cb(n+r-1, r-1)$ es una función polinomial de grado $r-1$, y en consecuencia $deg\chi(G(A),n) = r-1$. Recíprocamente, supongamos que φ no es un isomorfismo y sea $N = \ker\varphi \neq 0$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, tenemos una sucesión exacta

$$0 \to N_n \to B_n \to m^n/m^{n+1} \to 0$$

de k-espacios vectoriales, que conduce a la siguiente igualdad

$$\chi(G(A),n) = \binom{n+r-1}{r-1} - l_k(N_n) \qquad (*)$$

Escojamos un elemento homogéneo $f \in \mathbb{N}$ distinto de cero, y supongamos que $degf = d$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, tenemos $fB_n \subseteq N_{n+d}$, lo que implica que $l_k(N_{n+d}) \geq l_k(fB_n) = l_k(B_n) \geq l_k(N_n)$. Entonces $l_k(N_n), l_k(B_n) = \binom{n+r-1}{r-1}$ tienen el mismo grado $r-1$ y el mismo coeficiente líder. Ahora (*) implica que $degP_m(A,n) < r-1$.

■

Corolario 11: Tenemos $degP_m(A,n) = r$ si y sólo si

$$\varphi : k[X_1, ..., X_r] \to G(A)$$

es un isomorfismo.

Dem. Es consecuencia de la proposición anterior, ya que $\Delta P_m(A,n) = \chi(G(A),n)$.

4.2 Teorema de la Dimensión

Una cadena en A es una sucesión $\zeta_0 \subseteq \ldots \subseteq \zeta_r$ de ideales primos en A tales que $\zeta_i \neq \zeta_{i+1}$ para $0 \leq i \leq r-1$; decimos que dicha cadena es de logitud r. La altura de un ideal primo ζ, denotado $ht\zeta$, está definida por

$$ht\zeta = sup\{r \mid existeenAunacadena\zeta_0 \subseteq \ldots \subseteq= \zeta\}.$$

Si S es un conjunto multiplicativo de A con $\zeta \bigcap S = \emptyset$, entonces $ht\zeta = htS^{-1}\zeta$. La coaltura de un ideal primo ζ, denotada por $coht\zeta$, está definida por

$$coht\zeta = sup\{r \mid existeenAunacedena\zeta = \zeta_0 \subseteq \ldots \subseteq \zeta_r$$

Sea M un A-módulo distinto de cero. La dimensión de Krull de M, denotada por $dim_A M$ (o simplemente $dimM$), está definida por

$$dimM = sup_{\zeta \in Supp(M)} coht\zeta.$$

En consecuencia, $dimM$ es el supremo de las ongitudes de cadenas de ideales primos pertenecientes a $Supp(M)$. Como los elementos mínimos de $Supp(M)$ pertenecen a $Ass(M)$, tenemos que $dimM = sup_{\zeta \in Ass(M)} coht\zeta$. Si $M = 0$ es, $Supp(M) = \emptyset$, y definimos $dimM = -1$. La dimensión de Krull de un anillo A está definida como $dim_A A$, y denotada por $dimA$. En consecuencia, $dimA$ es el supremo de las longitudes de todas las cadenas de ideales primos en A. Si ζ es un ideal primo de A, $dimA/\zeta = coht\zeta$ y $dimA_\zeta = ht\zeta$.
La dimensión de Chevalley $s(M)$ de un A-módulo $M \neq 0$ se define como el menor entero r para el que existen elementos $a_1, ..., a_r$ en m tales que $M/(a_1, ..., a_r)M$ es de longitud finita como A-módulo. Ahora bien, como M/mM es de longitud finita, tal r existe. Si $M = 0$, definimos $s(M) = -1$. Definimos la dimensión de Chevalley de A como su dimensión de Chevalley como A-módulo.

Sea α un ideal de definición de A, esto es, $m^m \subseteq \alpha \subseteq m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Para un A-módulo M, denotamos como antes, la longitud del A-módulo $M/\alpha^n M$ por $P_\alpha(M,n)$. Por el teorema de Samuel, sabemos que si α está generado por r elementos, entonces $P_\alpha(M,n)$ es una función polinomial de grado menor o igual que r. Por el lema 10, $degP_\alpha(M,n)$ es independiente de la elección del ideal α de definición, y es igual a $degP_m(M,n)$. Definimos

$$d(M) = degP_m(M,n).$$

Teorema 6 (de la Dimensión): Sea A un anillo noetheriano local. Si M es un A-módulo finitamente generado, entonces $dimM = d(M) = s(M)$.

Dem. Demostraremos la siguiente desigualdad: $dimM \leq d(M) \leq s(M) \leq dimM$.
Primero demostremos la primera desigualdad: $dimM \leq d(M)$. Si $d(M) = -1$, entonces $P_m(M,n) = 0$ para $n \gg 1$, lo que implica que $M = m^n M$ para $n \gg 1$. Como M es finitamente generado, se sigue por el Lema de Nakayama, que $M = 0$, y en consecuencia $dimM = -1$. Supongamos ahora que $d(M) \geq 0$. Como $Ass(M)$ es finito, existe $\zeta \in Ass(M)$ tal que $dimM = coht\zeta = dimA/\zeta$. Como $\zeta \in Ass(M)$, tenemos un monomorfismo $A/\zeta \hookrightarrow M$, y por el corolario 10, $d(A/\zeta \leq d(M))$. Es suficiente demostrar que $dimA/\zeta\zeta d(A/\zeta)$. Para demostrar esto, tenemos que verificar que si $\zeta = \zeta_0 \subseteq \ldots \subseteq \zeta_r$ es una cadena en A, entonces $r \leq (A/\zeta)$. Como $(A/\zeta) \neq 0$, tenemos $d(A/\zeta) \neq -1$ y ya no hay nada que demostrar si $r = 0$. Supondremos entonces que $r \geq 1$. Formulemos la siguiente hipótesis de inducción: si $\zeta' = \zeta'_0 \subseteq \ldots \subseteq \zeta'_r$ es una cadena de longitud $r-1$ en A, entonces $r-1 \leq d(A/\zeta')$. Elijamos $a \in \zeta_1, a \notin \zeta$ y suponga que ζ' es un ideal primo mínimo con $Aa + \zeta \subseteq \zeta' \subseteq \zeta_1$. Tenemos entonces la siguiente cadena $\zeta' \subseteq \zeta_2 \subseteq \ldots \subseteq \zeta_r$ de longitud $r-1$, que implica $r-1 \leq d(A/\zeta')$. Más aún, como $\zeta' \in Ass(A/Aa+\zeta)$, tenemos el monomorfismo $A/\zeta' \hookrightarrow A/Aa+\zeta$, lo que implica, por el corolario 10, que $d(A/\zeta') \leq d(A/Aa+\zeta)$. Considere ahora la sucesión exacta

$$0 \to A/\varrho \overset{\varphi}{\to} A/\varrho \to A/Aa + \varrho \to 0$$

donde la función $\varphi : A/\varrho \to A/\varrho$ es la homotesia de a. Por la proposición 22, tenemos

$$P_m(A/\varrho, n) + P_m(A/Aa + \varrho, n) = P_m(A/\varrho, n) + R(n),$$

donde $R(n)$ es una función polinomial de grado menor que $d(A/\varrho)$. Por lo tanto $d(A/Aa + \varrho) < d(A/\varrho)$, lo que implica que $r \leq d(A/\varrho)$.

Probaremos que $d(M) \leq s(M)$. Si $s(M) = -1$, entonces $M = 0$ y $d(M) = -1$. Ahora supongamos que $s = s(M) \geq 0$ y supongamos que $a_1, ..., a_s \in m$ tal que $M/(a_1, ..., a_s)M$ es de longitud finita. Sea $\xi = annM$ y sea $\beta = (a_1, ..., a_s) + \xi$. Conjeturamos que $Supp(A/\beta) = \{m\}$, ya que, como $M/(a_1, ..., a_s)M = M \bigotimes_A A/(a_1, ..., a_s)$, tenemos que $Supp(M/(a_1, ..., a_r)) = Supp(M) \bigcap Supp(A/(a_1, ..., a_s))$ y $Supp(M/(a_1, ..., a_s)M) = \{m\}$. Asimismo tenemos que $Ass(A/\zeta) = \{m\}$. En consecuencia β es m-primario, por lo que $m^n \subset \beta$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Luego β es un ideal de definición de A. Sea $\bar{A} = A/\xi$ y sea $\bar{A} = A/\xi$. Entonces $\bar{A}$ es un anillo local y $\bar{\beta}$, es un ideal de definición de $\bar{A}$ y generado por los elementos $\bar{a}_1, ..., \bar{a}_s$, donde $\bar{a}_i$ denota la imagen de $a_i \in \bar{A}$. Considerando M como $\bar{A}$-módulo, se sigue del teorema de *Samuel que $P_{\bar{\beta}}(M, n)$ es de grado menor o igual que s. Como $l_{\bar{A}}(M/\beta^{-n}) = l_A(M/\beta^n M)$, tenemos $P_{\bar{\beta}}(M, n) = P_\beta(M, n)$ y $d(M) \leq s$. Finalmente probaremos por inducción sobre $dimM$ que $s(M) \leq dimM$, que es finito, ya que $dimM \leq M$. Si $dimM = -1$, entonces $M = 0$ y $s(M) = -1$. Si $dimM = 0$, entonces $Supp(M) = \{m\}$, de modo que M es de longitud finita. Se sigue que $s(M) = 0$. Supongamos que $dimM > 0$ y supongamos que $\varrho_1, ..., \varrho_g$ son los elementos de $Ass(M)$, de donde $dimM = coht\varrho_i, 1 \leq i \leq g$. Como $dimM > 0$, tenemos $\varrho_i \neq m$, para todo i y luego $m \nsubseteq \bigcup_{1 \leq i \leq g} \varrho_i$. Elija $a \in m, a \notin \bigcup_{1 \leq i \leq g} \varrho_i$ y supongamos que $M' = M/aM$. Entonces $Supp(M') \subseteq Supp(M) - \{\varrho_1, ..., \varrho_g\}$, por lo que $dimM' < dimM$. Sea $t = s(M')$ y suponga que $a_1, ..., a_t \in m$ tales que $M'/(a_1, ..., a_t)M'$ es de longitud finita. Entonces*

$M/(a, a_1, ..., a_t)M$ es de longitud finita, de modo que $s(M) \leq t+1$. Por inducción de hipótesis, $t \leq dimM'$. Luego $s(M) \leq dimM$.

■

Corolario 12: Sea A un anillo noetheriano local y M, un A-módulo finitamente generado. Entonces $dim_A M < \infty$.

■

Llamamos al número común $dimM = d(M) = s(M)$ la dimensión de M y la denotamos por $dim_A M$ (0 simplemente $dimM$).

Corolario 13: Sea B un anillo noetheriano y sea β un ideal de B, generado por r elementos. Entonces, para todo ideal primo mínimo $\zeta \in B$ que contenga β, tenemos que $ht\zeta \leq r$.

Dem. Considere el anillo local B_ζ. Como ζ es un ideal primo mínimo que contiene β, tenemos $Supp(B_\zeta/\beta B_\zeta) = \{\zeta B_\zeta\}$. Por lo tanto $l_{B_\zeta}(B_\zeta/\zeta B_\zeta) < \infty$ y entonces $s(B_\zeta) \leq r$. En consecuencia $ht\zeta = dimB_\zeta = s(B_\zeta) \leq r$.

■

Corolario 14 (Teorema de los ideales principales): Sea B un anillo noetheriano y sea Ba un ideal principal de B. Sean $\zeta_1, ..., \zeta_g$ los ideales primos mínimos de B que contienen a Ba. Entonces $ht\zeta_i \leq 1$ para $1 \leq i \leq g$. Más aún, si a no es un divisor de cero de B, entonces $ht\zeta_i = 1$ para $1 \leq i \leq g$.

Dem. La primera parte de este corolario se desprende del anterior. Supongamos que a no es un divisor de cero de B. Entonces no puede pertenecer a ningún ideal primo mínimo de B. En consecuencia, para $\zeta \in Ass(B/Ba)$, tenemos $ht\zeta \geq 1$. Entonces $ht\zeta_i = 1$ para $1 \leq i \leq g$.

■

Capítulo 5
Caracterización homológica de la dimensión y aplicaciones a anillos locales regulares

5.1 Dimensión homológica

Sea M un A-módulo no cero y sea

$$\ldots \rightarrow P_n \xrightarrow{d} P_{n-1} \rightarrow \ldots \rightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \rightarrow 0$$

una resolución proyectiva de M. Decimos que dicha resolución es de longitud n si $P_n \neq 0$ y $P_i = 0, i > n$. La dimensión homológica de un A-módulo M no cero, denotada $hd_A M$, es el menor entero n, si existe, tal que hay una resolución proyectiva de M de longitud n. Si no existe tal entero, hacemos $hd_A M = \infty$. Si $M = 0$, definimos $hd_A M = -1$. En los ejercicios se debe demostrar que un A-módulo M es proyetivo si y sólo si $hd_A M \leq 0$.
La dimensión global de un anillo A, denotada $gl.dimA$, se define como $gl.dimA = sup_M hd_A M$, donde el supremo se toma sobre el conjunto de todos los A-módulos M.

Proposición 24: Para un A-módulo M, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. M es proyectivo;
2. $Ext^j_A(M, N) = 0$ para todo A-módulo N y para todo $j \geq 1$;
3. $Ext^1_A(M, N) = 0$ para todo A-módulo N

Dem. (1)⇒(2): Como M es proyectivo, M tiene una resolución proyectiva

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{1_M} M \rightarrow 0$$

Al utilizar esta resolución para calcular el functor Ext, observamos que $Ext^j_A(M,N) = 0$ para todo N y para todo $j \geq 1$.

(2)⇒(3): Claro

(3)⇒(1): Sea

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & \varphi & \downarrow & f & \\ N & \rightarrow & N'' & & \rightarrow \quad 0 \end{array}$$

un diagrama de A-homomorfismos, con el renglón exacto. Si $N' = \ker\varphi$, la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow N' \rightarrow N \xrightarrow{\varphi} N'' \rightarrow 0$$

induce la sucesión exacta

$$Hom_A(M,N) \xrightarrow{\varphi*} Hom_A(M,N'') \rightarrow Hom_A(M,N')$$

Como $Ext^1_A(M,N') = 0$ por hipótesis, $\varphi*$ es un epimorfismo. En consecuencia, existe un A-homomorfismo $g : M \rightarrow N$ tal que $\varphi \circ g = f$.

■

Proposición 25: Para un A-módulo M y para un $n \in \mathbb{Z}^+$, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $hd_A M \leq n$;
2. $Ext^j_A(M,N) = 0$ para todo A-módulo N y para todo $j \geq n+1$;
3. $Ext^{n+1}_A(M,N) = 0$ para todo A-módulo N;

4. si

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow ... \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

es exacta, donde P_j es A-proyectivo para $0 \geq j \geq n-1$, entonces K_n es A-proyectivo.

Dem. (1)$\Rightarrow$(2): Por hipótesis existe una resolución proyectiva de M de longitud menor o igual que n. Al calcular el functor Ext de dicha resolución, el resultado se obtiene.
(2)$\Rightarrow$(3): es claro.
(3)$\Rightarrow$(4): Si $n = 0$, M es proyectivo. Sea $n \geq 1$. La sucesión exacta dada induce la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow K_{j+1} \rightarrow P_j \rightarrow K_j \rightarrow 0$$

para $0 \leq j \leq n-1$, donde $K_{j+1} = im(P_{j+1} \rightarrow P_j), 0 \leq j \leq n-2$ y $K_0 = M$. Para todo A-módulo N, estas sucesiones inducen las otras sucesiones exactas

$$Ext^{n-j}(P_j, N) \rightarrow Ext^{n-j}(K_{j+1}, N) \rightarrow Ext^{n-j+1}(K_j, N) \rightarrow Ext^{n-j+1}(P_j, N)$$

$0 \leq j \leq n-1$. Como P_j es proyectivo, $Ext^{n-j}(P_j, N) = Ext^{n-j+1}(P_j, N) = 0$ para $0 \leq j \leq n-1$. En consecuencia, $Ext^1(K_n, N) \simeq Ext^2(K_{n-1}, N) \simeq \ldots Ext^{n+1}(K_0, N)$. Como $K_0 = M$, tenemos $Ext_A^{n+1}(K_0, N) = 0$, y en consecuencia $Ext_A^1(K_n, N) = 0$. Como N es arbitrario, K_n es proyectivo.
(4)$\Rightarrow$(1):Raghavan-Sridharan[proposición 2.5]

Corolario 15: Para todo A-módulo M no cero, tenemos $hd_A M = sup_n\{n \mid \exists$ un A-módulo N con $Ext_A^n(M, N) \neq 0\}$.

■

Corolario 16: Si M' es un sumando directo de M, entonces $hd_A M' \leq hd_A M$.
Dem. ejercicio

■

PROPOSICIÓN 26: Sea

$$0 \rightarrow M' \rightarrow P \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

una sucesión exacta de A-módulos con P, proyectivo. Entonces

1. M” proyectivo⇒ M’ proyectivo;
2. $hd_A M'' \geq 1 \Rightarrow hd_A M'' = hd_A M' + 1$, donde ambos pueden ser infinitos

Dem. (1): Si M'' es proyectivo, la sucesión

$$0 \rightarrow M' \rightarrow P \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

se escinde, de modo que M' es un sumando directo de P, y e n consecuencia es proyectivo.
(2): Para un A-módulo N y para $n \in \mathbb{N}$, tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow Ext^n_A(M', N) \rightarrow Ext^{n+1}_A(M'', N) \rightarrow 0$$

, ya que P, por ser proyectivo, $Ext^n_A(P, N) = 0 = Ext^{n+1}_A(P, N)$. El resultado se sigue de la proposición 28.

■

LEMA 11: Sea M un A-módulo con $hd_A M < \infty$. Si a es un no divisor de cero de A ni de M, entonces $hd_{A/Aa} M/aM < \infty$.
Dem. Por inducción sobre $hd_A M$. Podemos suponer que $M \neq 0$. Si $hd_A M = 0$, M es A-proyectivo y en consecuencia $M/aM = M \bigotimes A/Aa$ es A/Aa-proyectivo. Supongamos que $hd_A M > 0$ y sea

$$0 \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0 \tag{*}$$

una sucesión exacta con P, A-proyectivo. Por la proposición anterior, $hd_A N =$

$hd_A M - 1$. La sucesión (*) induce la sucesión exacta

$$Tor_1^A(M, A/Aa) \rightarrow N/aN \rightarrow P/aP \rightarrow M/aM \rightarrow 0$$

de A/Aa-módulos. Como a no es un divisor de cero de A, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\varphi} A \rightarrow A/Aa \rightarrow 0$$

, donde φ es la homotesia a_A. Esto a su vez, induce la sucesión exacta

$$0 \rightarrow Tor_1^A(M, A/Aa) \rightarrow M \xrightarrow{a} 0$$

Como a no es un divisor de cero de M, $Tor_1^A(M, A/Aa) = 0$. Por lo tanto, la sucesión

$$0 \rightarrow N/aN \rightarrow P/aP \rightarrow M/aM \rightarrow 0$$

es exacta. Por hipótesis de inducción, $hd_{A/Aa}N/aN < \infty$, y como P/aP es A/Aa-proyectivo, $hd_{A/Aa}M/aM < \infty$.

■

5.2 Dimensión inyectiva y dimensión global

Un A-módulo Q se llama inyectivo, si dado cualquier diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & & i & \\ 0 & \rightarrow & M' & \rightarrow & M \\ & & & f \searrow & \\ & & & & Q \end{array}$$

con renglón exacto, existe un A-homomorfismo $\overline{f}: M \rightarrow Q$ tal que $\overline{f} \circ i = f$.

Proposición 27: Un A-módulo N es inyectivo si y sólo si todo A-homomorfismo de un ideal de A a N se puede extender a un A-homomorfismo de A a N.
Dem. Claramente todo módulo inyectivo tiene la propiedad de la proposición. Supongamos que N es un A-módulo con la propiedad requerida. Sea M un A-módulo, M' un A-submódulo y $f : M' \rightarrow N$ un A-homomorfismo. Debemos demostrar que f se puede extender a un A-homomorfismo de M a N.
Sea Γ una colección de parejas (P, g), donde P es un submódulo de M que contiene a M' y donde $g : P \rightarrow N$ es un A-homomorfismo que extiende a f. Dicha familia es no vacía, pues $(M', f) \in \Gamma$. Consideremos el orden parcial sobre Γ dado por $(P_1, g_1) \leq (P_2, g_2)$ si $P_1 \subseteq P_2$ y si $g_2 \mid P_1 = g_1$. Si $(P_\alpha, g_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una subfamilia totalmente ordenada, sea $P = \bigcup_{\alpha \in I} P_\alpha$. Sea $g : P \rightarrow N$ definida por $x \imath P_\alpha \subseteq P \Rightarrow g(x) = g_\alpha(x)$. Se verifica fácilmente que $(P, g) \in \Gamma$ y que también es una cota superior de esta familia. Por el lemma de Zorn, Γ tiene un elemento máximo (M_1, f_1). Afirmamos que $M_1 = M$. Supongamos que $M_1 \neq M$ y que $x \in M, x \notin M_1$. La asignación $a \mapsto ax$ de A a M induce un A-isomorfismo $A/\beta \xrightarrow{\sim} Ax$, donde β es un ideal de A. Bajo dicho isomorfismo, $M_1 \bigcap Ax$ se corresponde con un ideal $\varsigma/\beta \subseteq A/\beta$. La restricción de f_1 a $M_1 \bigcap Ax$ induce un A-homomorfismo $\varsigma/\beta \rightarrow N$. Componiendo este homomorfismo con el morfismo canónico $\varsigma \rightarrow \varsigma/\beta$, obtenemos un homomorfismo $\varsigma \rightarrow N$ que se anula en

β. Por hipótesis sobre N, este homomorfismo se puede extender a un homomorfismo $A \to N$ que se anula en β, de modo que tenemos un homomorfismo $f_2 : Ax \xrightarrow{\simeq} A/\beta \to N$. Considere la asignación $g : M_1 + Ax \to N$ dada por $g \mid M_1 = f_1$ y $g \mid Ax = f_2$, de manera que $(M_1 + Ax, g) \in \Gamma$, lo que contradice la maximalidad de (M_1, f_1).

■

Recordemos que un módulo M sobre un dominio entero se llama <u>divisible</u> si para todo $m \in M, 0 \neq a \in A \exists n \in M$ tal que $m = an$.

Proposición 28: Si A es un dominio entero, todo A-módulo inyectivo es divisible. Si A es un dominio principal, todo A-módulo divisible es inyectivo.
Dem. Sea M un A-módulo inyectivo y supongamos que $m \in M, a \in A, a \neq 0$. Definamos un A-homomorfismo $f : Aa \to M$ por $f(ba) = bm$. Como M es inyectivo, f se puede extender a un homomorfismo $\overline{f} : A \to M$. Si $n = \overline{f}(1)$, tenemos $m = an$.
Supongamos ahora que A es un dominio principal y que M es un A-módulo divisible. Sea $f : \varsigma \to M$ un A-homomorfismo, donde ς es un ideal de A. Si $\varsigma = 0$, $f = 0$ y se puede extender a un homomorfismo $A \to M$. Supongamos que $\varsigma = Aa \neq 0$. Supongamos que $f(a) = m$. Como M es divisible, existe $n \in M$ tal que $m = an$. Definamos $\overline{f} : A \to M$ por $\overline{f}(b) = bn$. Entonces $\overline{f}$ extiende f. En consecuencia, M es inyectivo.

■

Corolario 17: Los $\mathbb{Z}$-módulos $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son inyectivos.
Dem. $\mathbb{Z}$ es principal y $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son divisibles.

■

Proposición 29: Todo módulo es isomorfo a un submódulo de un módulo inyectivo.

Dem. Sea M un A-módulo. Definamos $M^* = Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Dotamos a M^* de una estructura de A-módulo si para $a \in A, f \in M^*, af \in Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ por $(af)(m) = f(am)$. Tenemos un A-homomorfismo $i_M : M \to M^{**}$ definido por $i_M(m)(f) = f(m), m \in M, f \in M^*$. Afirmamos que i_M es inyectivo. En efecto, si $x \in M, x \neq 0$, tenemos un $\mathbb{Z}$-homomorfismo $h : \mathbb{Z}x \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $h(x) \neq 0$;si x es de orden infinito (considerando a M como un grupo abeliano), elegimos $h(x)$ como un elemento no cero de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, y si x es de orden n, elegimos $h(x)$ como la clase de $1/n \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es $\mathbb{Z}$-inyectivo, dicho homomorfismo se extiende a $\overline{h} : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y $\overline{h}(x) = h(x) \neq 0$, es decir, $i_M(x) \neq 0$. Por tanto i_M es inyectivo. Sea

$$F \xrightarrow{j} M^* \to 0$$

una sucesión exacta con F un A-módulo libre. En consecuencia, tenemos la sucesión exacta

$$0 \to M^{**} \xrightarrow{j^*} F^*$$

de A-módulos, de modo que M es isomorfo a un submódulo de F^*. Ahora debemos demostrar que si P es un A-módulo proyectivo, entonces P^* es inyectivo. Sea P un A-módulo proyectivo y supongamos que tenemos el siguiente diagrama de A-homomorfismos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "g"'] & M \\ & & P^* \end{tikzcd}$$

Como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es $\mathbb{Z}$-inyectivo, $i^* = M^* \to M'^*$ es sobre, y también obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{cccccc} & i_P & & & & \\ P & \rightarrow & P^{**} & & & \\ & \searrow & \downarrow & g^* & & \\ M^* & \rightarrow & M'^* & & \rightarrow & 0 \\ & i^* & & & & \end{array}$$

Como P es A-proyectivo, existe un A-homomorfismo $h : P \rightarrow M^*$ tal que $g^* \circ i_P = i^* \circ h$. De esta forma obtenemos un A-homomorfismo $h^* : M^{**} \rightarrow P^*$. Se verifica fácilmente que $h^* \circ i_M \circ i = g$, donde $i_M : M \rightarrow M^{**}$ es el A-homomorfismo definido antes.

■

Proposición 30: Para un A-módulo N, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. N es inyectivo;
2. $Ext^1_A(M,N) = 0$ para todo A-módulo M;
3. $Ext^i_A(M,N) = 0$ para todo entero $i \geq 1$ y para todo A-módulo M;
4. $Ext^1_A(M,N) = 0$ para todo A-módulo M finitamente generado;
5. $Ext^1_A(A/\varsigma, N) = 0$ para todo ideal ς de A.

Dem. (1)⇒(2): Sea M un A-módulo y sea

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{i} P \xrightarrow{j} M \rightarrow 0$$

una sucesión exacta con P, A-proyectivo. Esto induce una sucesión exacta

$$Hom_A(P,N) \xrightarrow{i^*} Hom_A(P,N) \rightarrow Ext^1_A(M,N) \rightarrow Ext^1_A(P,N)$$

Como P es proyectivo, $Ext^1_A(P,N)=0$. El morfismo i^* es sobre, ya que N es inyectivo. Luego entonces, $Ext^1_A(M,N)=0$.
(2)⇒(3): Supongamos por inducción que $Ext^i_A(M,N)=0$ para todo $i, 1 \leq i \leq n-1, n \geq 2$ y para todo A-módulo M. Demostraremos que $Ext^n_A(M,N)=0$ para todo A-módulo M. Si

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{i} P \xrightarrow{j} M \rightarrow 0$$

es exacta con P proyectivo, obtenemos la sucesión exacta

$$Ext^{n-1}_A(R,N) \rightarrow Ext^{n-1}_A(R,N) \rightarrow Ext^{n-1}_A(R,N)$$

Por hipótesis de inducción, $Ext^{n-1}_A(R,N)=0$. Como P es proyectivo, $Ext^n_A(P,N)=0$. En consecuencia $Ext^n_A(M,N)=0$.
(3)⇒(4): claro.
(4)⇒(5): claro.
(5)⇒(1): Para un ideal ς de A, la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \varsigma \rightarrow A \rightarrow A/\varsigma \rightarrow 0$$

induce la sucesión exacta

$$Hom_A(A,N) \rightarrow Hom_A(\varsigma,N) \rightarrow Ext^1_A(A/\varsigma,N)$$

Por hipótesis $Ext^1_A(A/\varsigma,N)=0$, de modo que todo A-homomorfismo $\varsigma \rightarrow N$ se puede extender a un A-homomorfismo $A \rightarrow N$. Por tanto N es inyectivo.
■

Sea N un A-módulo no cero. La dimensión inyectiva de N, denotada $injdim_A N$, está definida por $injdim_A N = sup\{n \mid \exists$ un A-módulo M con $Ext^n_A(M,N) \neq 0\}$, si existe, sino, se define como ∞. Si $N=0$, hacemos $injdim_A N = -1$.
Una observación de la proposición anterior es que un A-módulo N es inyectivo si y sólo si $injdim_A N \leq 0$.

Proposición 31: Para un A-módulo N, $injdim_A N = sup\{n \mid \exists$ un A-módulo M finitamente generado tal que $Ext^n_A(M,N) \neq 0\}$.

Dem. Es suficiente demostrar que para todo entero $i \geq 0$, si $Ext^i_A(M,N) = 0$ para todo A-módulo M finitamente generado, entonces $Ext^i_A(M,N) = 0$ para todo A-módulo M. Esto lo demostraremos por inducción sobre i. Si $i = 0, N \xrightarrow{\sim} Hom_A(A,N) = Ext^0_A(A,N)$, de modo que $Ext^0_A(A,N) = 0 \Rightarrow N = 0$. Para $i = 1$, el resultado se sigue de la proposición anterior. Supongamos que $i \geq 2$. Entonces existe una sucesión

$$0 \quad \rightarrow \quad N \quad \rightarrow \quad Q \quad \rightarrow \quad Q/N \quad \rightarrow \quad 0$$

con Q inyectivo. Para todo A-módulo M, se induce una sucesión exacta

$$Ext^{i-1}_A(M,Q) \quad \rightarrow \quad Ext^{i-1}_A(M,Q/N) \quad \rightarrow \quad Ext^i_A(M,N) \quad \rightarrow \quad Ext^i_A(M,Q)$$

Como Q es inyectivo, $Ext^{i-1}_A(M,Q) = Ext^i_A(M,Q) = 0$, por lo que tenemos un isomorfismo $Ext^{i-1}_A(M,Q/N) \xrightarrow{\sim} Ext^i_A(M,N)$. Como $Ext^i_A(M,N) = 0$ para todo A-módulo M finitamente generado, $Ext^{i-1}_A(M,Q/N) = 0$ para todo A-módulo M finitamente generado. Luego, por hipótesis de inducción, $Ext^{i-1}_A(M,Q/N) = 0$ para todo A-módulo M, lo que implica nuevamente por el isomorfismo considerado, $Ext^i_A(M,N) = 0$ para todo A-módulo M.

■

Proposición 32: Para todo anillo A, $gl.dimA = sup_N injdim_A N$.

Dem. $gl.dimA = sup_M hd_A M = sup_M sup\{n \mid \exists$ un A-módulo N tal que $Ext^n_A(M,N) \neq 0\} = sup\{n \mid \exists$ módulos M,N tales que $Ext^n_A(M,N) \neq 0\} = sup_N sup\{n \mid \exists$ un A-módulo M tal que $Ext^n_A(M,N) \neq 0\} = sup_N inj.dim_A N$.

■

Teorema 7: Para todo anillo A, $gl.dimA = sup_M\{hd_A M \mid M$ es finitamente generado$\}$.

Dem. Por la proposición anterior tenemos que $gl.dimA = sup_N injdim_A N =$

$sup_N sup\{n \mid \exists$ un A-módulo M finitamente generado con $Ext^n_A(M,N) \neq 0\} =$ $sup_{M f.g.}\{n \mid \exists$ un A-módulo N con $Ext^n_A(M,N) \neq 0\} = sup_{M f.g.} hd_A M$.

■

5.3 Dimensión global y anillos noetherianos locales

En esta sección, A denota un anillo local, m, su ideal máximo, y $k = A/m$, su campo residual. Todos los A-módulos que se considerarán son finitamente generados.

Lema 12: Sea M un A-módulo. Un conjunto de elementos $x_1, ..., x_n$ de M es un conjunto mínimo generador de M si y sólo si sus imágenes canónicas $\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n$ en M/mM forman una base del k-espacio vectorial M/mM. En particular, la cardinalidad de un conjunto mínimo generador de M es igual al rango del k-espacio vectorial M/mM.

Dem. Es suficiente demostrar que $x_1, ..., x_n \in M$ generan a M sobre A si y sólo si $\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n \in$ genran a M/mM sobre k. Si $x_1, ..., x_n \in M$ generan a M, $\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n$ generan a M/mM. Recíprocamente, supongamos que $x_1, ..., x_n \in M$ son tales que $\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n$ generan a M/mM sobre k. Sea M' un submódulo de M generado por $x_1, ..., x_n$. Si $M'' = M/M'$, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

que implica la siguiente sucesión exacta:

$$M'/mM' \xrightarrow{\overline{i}} M/mM \rightarrow M''/mM'' \rightarrow 0$$

Como $x_1, ..., x_n \in M'$ y como $\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n$ generan a M/mM, $\overline{i}$ es un epimorfismo, por tanto $M''/mM'' = 0$. Como M'' es finitamente generado, $M'' = 0$ (Lema de Nakayama) y $M' = M$.

■

Proposición 33: Sea A un anillo local y M, un A-módulo finitamente generado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. M es libre;

2. M es proyectivo;

   Más aún, si A es noetheriano, (1) y (2) también sonequivalentes a las siguientes condiciones:

3. $Tor_j^A(M, N) = 0$ para todo A-módulo N y para todo $j \geq 1$;

4. $Tor_1^A(M, k) = 0$.

Dem. (1)⇒(2): Es claro.
(2)⇒(1): Sea $\{x_1, ..., x_n\}$ un conjunto mínimo generador de M y sea $\varphi : F \to M$ un epimorfismo, donde F es un A-módulo libre con una base con n elementos. Si $K = \ker \varphi$, se tiene la sucesión exacta

$$0 \to K \to F \xrightarrow{\varphi} M \to 0 \quad {}^{*}$$

Como F es proyectivo, esta sucesión se escinde, de modo que

$$0 \to K/mK \to F/mF \xrightarrow{\overline{\varphi}} M/mM \to 0 \quad {}^{**}$$

es exacta. Por lema anterior, $\overline{\varphi}$ es un isomorfismo y $K/mK = 0$. Como la sucesión (*) se escinde, K es finitamente generado. En consecuencia, el Lema de Nakayama garantiza que $K = 0$; asimismo φ es un isomorfismo y M es libre.
(2)⇒(3): Como M es proyectivo, tiene una resolución proyectiva

$$0 \to M \xrightarrow{1_M} M \to 0$$

Componamos esta sucesión con el functor Tor.
(3)⇒(4): Es claro.
(4)⇒(1): La demostración de esta implicación es similar a la de la implicación "(2)⇒(1)", salvo que la exactitud de la sucesión (**), es consecuencia de que $Tor_1^A(M, k) = 0$ y de que K es finitamente generado debido a que A es noetheriano.

■

Proposición 34: Sea A un anillo noetheriano local, M un A-módulo finitamente generado y $n \in \mathbb{Z}^+$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $hd_A M \leq n$;
2. $Tor_j^A(M,N) = 0$ para todo A-módulo N y para todo $j \geq n+1$;
3. $Tor_{n+1}^A(M,k) = 0$.

Dem. Considerando una resolución proyectiva de longitud menor o igual que n para componer con el functor Tor, obtenemos que $Tor_j^A(M,N) = 0$ para todo A-módulo N y para todo $j \geq n+1$.
(2)$\Rightarrow$(3): Es claro.
(3)$\Rightarrow$(1): Por inducción sobre n. Si $n = 0$, $Tor_1^A(M,k) = 0$, y por la proposición anterior, M es libre. En consecuencia $hd_A M \leq 0$. Por tanto podemos suponer que $n \geq 1$. Entonces existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M' \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$$

, donde P es A-proyectivo. Esto induce la sucesión exacta

$$Tor_{n+1}^A(M,k) \rightarrow Tor_n^A(M',k) \rightarrow Tor_n^A(P,k)$$

Por hipótesis $Tor_{n+1}^A(M,k) = 0$ y por la proposición anterior, $Tor_n^A(P,k) = 0$, de modo que $Tor_n^A(M',k) = 0$. Luego, por hipótesis de inducción, $hd_A M' \leq n-1$, y por la proposición anterior, $hd_A M \leq n$.
■

Proposición 35: Sea A un anillo noetheriano local. Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $gl.dim A \leq n$;
2. $Tor_j^A(M,N) = 0$ para todos los A-módulos M, N y para todo $j \leq n+1$;

3. $Tor_{n+1}^{A}(k,k)=0$.

Dem.(1)⇒(2): Se deduce de la proposición anterior.

(2)⇒(3): Es claro.

(3)⇒(1): Por la proposición anterior, $Tor_{n+1}^{A}(k,M)=0$ para todo A-módulo M. Como $Tor_{n+1}^{A}(M,k)\simeq Tor_{n+1}^{A}(k,M)$, se tiene por la proposición anterior que M es finitamente generado, luego $hd_AM\leq n$. Como esto ocurre para todo A-módulo M finitamente generado, (1) se obtiene del teorema 7.

■

Corolario 18: Para todo anillo noetheriano local A, $gl.dimA=hd_Ak$.

■

5.4 Anillos regulares locales

En esta sección, A denota un anillo noetheriano local y m, su ideal máximo. Asimismo $k=A/m$ denota su campo residual.

Supongamos que $dimA=r$. Por el teorema de Samuel, m no puede generarse por menos que r elementos.

Un anillo noetheriano local A de dimensión r se llama regular si su ideal máximo sí se puede generar por r elementos.

Teorema 8: Sea A un anillo noetheriano local con ideal máximo m y hagamos $k=A/m$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. A es regular;
2. el rango del k-espacio vectorial m/m^2 es $dimA$;

3. la k-álgebra $G(A) = \bigoplus_{j\geq 0} m^j/m^{j+1}$ es isomorfa -como k-álgebra graduada- a una álgebra de polinomios $k[X_1, ..., X_s]$;

4. $G(A)$ es isomorfo como k-álgebra graduada al álgebra de polinomios $k[X_1, ..., X_r]$, donde $r = dimA$.

Dem.(2)$\Rightarrow$(1): Es consecuencia del lema 12
(3)$\Rightarrow$(2): Sea $\varphi : k[X_1, ..., X_s] \rightarrow G(A)$ un isomorfismo de k-álgebras graduadas y sean $x_1, ..., x_s \in m$ tales que $\varphi(X_j) = x_j$(módulo m^2) para $1 \leq j \leq s$. Por el lema 12, los elementos $x_1, ..., x_s$ generan m, y por el corolario 11, $degP_m(A, n) = s$. Por otra parte, como $m/m^2 = G(A)_1 \simeq k[X_1, ..., X_s]_1$, tenemos que $rank_k m/m^2 = s$.
(4)$\Rightarrow$(3): Es claro.
(1)$\Rightarrow$(4): Sea $\{x_1, ..., x_r\}$ un conjunto generador de m con $r = dimA$. Sea $\varphi : k[X_1, ..., X_r] \rightarrow G(A)$ el homomorfismo de k-álgebras graduadas definido por $\varphi(X_j) = x_j$(módulom^2), $1 \leq j \leq r$. Como $degP_m(A, n) = r$, tenemos por el corolario 11, que φ es un isomorfismo.

■

Corolario 19: Todo anillo regular local es un dominio entero.
Dem. Como $G(A) \simeq k[X_1, ..., X_r]$ es un dominio entero, el resultado se sigue del lema 6.

■

Sea A un anillo regular local de dimensión r. Todo conjunto generador de m con r elementos se llama <u>sistema regular de parámetros</u> de A.

Proposición 36: Sea A un anillo regular local de dimensión r y sean $a_1, ..., a_j$ j elementos de m, $0 \leq j \leq r$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\{a_1, ..., a_j\}$ es parte de un sistema regular de parámetros de A;

2. las imágenes $\overline{a}_1, ..., \overline{a}_j$ de $a_1, ..., a_j$ bajo el morfismo canónico $m \to m/m^2$ son linealmente independientes sobre k;

3. $A/(a_1, ..., a_j)$ es un anillo regular local de dimensión $r - j$.

Dem. (1)$\leftrightarrow$(2): Es consecuencia del lema 12.
(1)$\Rightarrow$(3): Sea $\overline{A} = A/(a_1, ..., a_j)$ y hagamos $\overline{m} = m/(a_1, ..., a_j)$. Sea $a_1, ..., a_j, a_{j+1}, ..., a_r$ un sistema regular de parámetros de A. Entonces las imágenes canónicas de $a_{j+1}, ..., a_r$ en $\overline{m}$ generan a $\overline{m}$, y en consecuencia, por el teorema de Samuel, $dim\overline{A} \leq r - j$. Supongamos que $s = dim\overline{A}$ y sean $b_1, ..., b_s \in m$ tales que, si $\overline{b}_1, ..., \overline{b}_s$ son sus imágenes canónicas en $\overline{m}$, $\overline{A}/(\overline{b}_1, ..., \overline{b}_s)$ es de longitud finita. Como $A/(a_1, ..., a_j, b_1, ..., b_s) \simeq \overline{A}/(\overline{b}_1, ..., \overline{b}_s)$, tenemos $s + j \geq dimA = r$. En consecuencia $dim\overline{A} = r - j$. Como $\overline{m}$ está generado por $r - j$ elementos, $\overline{A}$ es regular.
(3)$\Rightarrow$(1): Sean $a_{j+1}, ..., a_r \in m$ tales que sus imágenes canónicas en $\overline{m} = m/(a_1, ..., a_j)$ generan $\overline{m}$. Entonces $a_1, ..., a_j, a_{j+1}, ..., a_r$ generan m.
■

Corolario 20: Sea $\{a_1, ..., a_j\}$ parte de un sistema regular de parámetros de un anillo regular local A. Entonces $\zeta = (a_1, ..., a_j)$ es un ideal primo de A con altura j.
Dem. Por la proposición anterior, A/ζ es un anillo regular local, por tanto también es un dominio entero (corolario 19); en consecuencia ζ es un ideal primo. Demostraremos por inducción sobre j, que $ht\zeta = j$. Si $j = 0$, $\zeta = 0$ y en consecuencia $ht\zeta = 0$. Sea $j > 0$. Por hipótesis de inducción, el ideal $(a_1, ..., a_{j-1})$ es primo y tiene altura $j - 1$. Más aún, dicho ideal está contenido propiamente en ζ, ya que $\{a_1, ..., a_j\}$ es un sistema generador mínimo de ζ. Entonces $ht\zeta \geq j$. por otro lado, el corolario 13 implica que $ht\zeta \leq j$. Por tanto $ht\zeta = j$.
■

Sea M un A-módulo no cero. Una sucesión $a_1, ..., a_r$ de elementos de m se llama M-sucesión, si a_i no es un divisor de cero de $M/(a_1, ..., a_{i-1})M$ para $1 \leq i \leq r$ (Para $i = 1$, dicha condición es equivalente a que a_1 no es un divisor de cero de M).

Proposición 37: Sea M un A-módulo no cero y sea $a_1, ..., a_r$ una M-sucesión. Entonces $r \leq dimM$.

Dem. Por inducción sobre r. Para $r = 0$ es claro. Supongamos que $r > 0$ y sea $M'' = M/a_1M$. Como a_1 no es un divisor de cero de M, tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

, donde φ es la homotesia de a_1. Por la proposición 22, $P_m(M'', n) = R(n)$, donde $R(n)$ es una función polinomial de grado menor que $degP_m(M, n)$, es decir, $dimM'' < dimM$. Como $a_2, ..., a_r$ es una M''-sucesión, tenemos por hipótesis de inducción que $r - 1 \leq dimM'' \leq dimM - 1$.

■

Corolario 21: Un anillo noetheriano local A es regular si y sólo si su ideal máximo está generado por una A-sucesión.

Dem. Supongamos que A es regular y sea $\{a_1, ..., a_r\}$ un sistema regular de parámetros de A. Por la proposición 36, $a_1, ..., a_r$ es una A-sucesión. Recíprocamente, supongamos que $a_1, ..., a_r$ es una A-sucesión que genera m. Por la proposición 37, $r \leq dimA$. Por el Teorema de Samuel, $dimA \leq r$. Por tanto, $r = dimA$.

■

5.5 Caracterización homológica de los anillos regulares locales

El objetivo principal de esta sección es demostrar que un anillo local A es regular si y sólo si $gl.dimA < \infty$.
En esta sección, A denota a un anillo noetheriano local, m, su ideal máximo, y k, su campo residual.

LEMA 13: Si $a \in m - m^2$, la sucesión exacta

$$0 \quad \rightarrow \quad Aa/ma \quad \rightarrow \quad m/ma \quad \rightarrow \quad m/Aa \quad \rightarrow \quad 0$$

de A/Aa-módulos se escinde.
Dem. Sea $d = rank_k m/m^2$. Como $a \notin m^2$, existen -por el lema 12- $a_1, ..., a_{d-1} \in m$ tales que $\{a, a_1, ..., a_{d-1}\}$ es un conjunto generador de m mínimo. Sea $\varsigma = (a_1, ..., a_{d-1})$. Sea $b \in A$ tal que $ba \in \varsigma$. Por minimalidad de $\{a, a_1, ..., a_{d-1}\}$ como conjunto generador de m, b no es una unidad, de modo que $b \in m$. En consecuencia, $\varsigma \bigcap Aa \subseteq \varsigma \bigcap ma$. Como $\varsigma \bigcap Aa \supseteq \varsigma \bigcap ma$, por lo que $\varsigma \bigcap Aa = \varsigma \bigcap ma$. Asimismo tenemos $(\varsigma + ma)/ma \simeq \varsigma/(\varsigma \bigcap ma) = \varsigma/(\varsigma \bigcap Aa) \simeq (\varsigma + Aa)/Aa = m/Aa$, que demuestra que el homomorfismo canónico $m/ma \rightarrow m/Aa$ envía isomórficamente $(\varsigma + ma)/ma$ a m/Aa. por lo tanto la sucesión exacta se escinde.

■

COROLARIO 22: Sea A un anillo noetheriano local con $gl.dimA < \infty$. Si $a \in m - m^2$ no es un divisor de cero de A, entonces $gl.dimA/Aa < \infty$.
Dem. Tenemos un isomorfismo $(A/Aa)/(m/Aa) \simeq A/m = k$, y en consecuencia una sucesión exacta

$$0 \quad \rightarrow \quad m/Aa \quad \rightarrow \quad A/Aa \quad \rightarrow \quad k \quad \rightarrow \quad 0$$

de A/Aa-módulos. Por el corolario de la proposición 34, $gl.dimA/Aa = hd_{A/Aa}k$.
Ahora es suficiente demostrar -en virtud de la proposición 22- que $hd_{A/Aa}m/Aa <$

∞. Por hipótesis, $gl.dimA < \infty$, y en consecuencia $hd_A m < \infty$. Por el lema 11, $hd_{A/Aa} m/ma < \infty$. Por el lema anterior, m/Aa es un sumando directo de m/ma. Por el corolario de la proposición 21, $hd_{A/Aa} m/Aa < \infty$.

■

LEMA 14: Sea M un A-módulo no cero y sea $a \in m$ un no divisor de cero de M. Entonces $hd_A M/aM = hd_A M + 1$, donde ambos lados pueden ser infinitos.
Dem. La sucesión exacta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{a_M} M \rightarrow M/aM \rightarrow 0$$

induce la sucesión exacta

$$Tor^A_{n+1}(M,k) \rightarrow Tor^A_{n+1}(M/aM,k) \rightarrow Tor^A_n(M,k) \xrightarrow{Tor^A_n(a_M,k)} Tor^A_n(M,k)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Como $a \in m$, $a_k = 0$, por tanto $Tor^A_n(a_M,k) = aTor^A_n(1_M,k) = Tor^A_n(1_M,a_k) = 0$. En consecuencia, la sucesión

$$Tor^A_{n+1}(M,k) \rightarrow Tor^A_{n+1}(M/aM,k) \rightarrow Tor^A_n(M,k) \rightarrow 0$$

es exacta. El lema se sigue de la proposición 33.

■

LEMA 15: Sea A un anillo noetheriano local tal que $m \neq m^2$ y tal que todo elemento de $m - m^2$ es un divisor de cero. Entonces todo A-módulo de dimensión homológica finita es libre.
Dem. Por la proposición 9 tenemos $m - m^2 \subseteq_{\zeta \in Ass(A)} \bigcup \zeta$. Esto significa que $m \subseteq_{\zeta \in Ass(A)} \bigcup \zeta \bigcup m^2$, y como $m \neq m^2$, tenemos por el lema 1.10[Raghavan-Sridharan], $m \in Ass(A)$ y también tenemos un monomorfismo $k = A/m \hookrightarrow A$. Sea M un A-módulo con $hd_A M = n < \infty$. Si $n = -1$, $M = 0$ y el resultado se cumple. Supongamos que $n \geq 0$. La sucesión exacta

$$0 \rightarrow k \rightarrow A \rightarrow A/k \rightarrow 0$$

induce la sucesión exacta

$$Tor_{n+1}^A \quad \rightarrow \quad Tor_n^A(M,k) \quad \rightarrow \quad Tor_n^A(M,A)$$

Por la proposición 33, $Tor_{n+1}^A(M,A/k)=0$ y $Tor_n^A(M,k)\neq 0$. Esto implica que $Tor_n^A(M,A)\neq 0$, por lo que $n=0$. Por lo tanto, M es proyectivo. El resultado se obtiene de la proposición 32.

■

Teorema 9: Sea A un anillo noetheriano local. A es regular si y sólo si $gl.dimA<\infty$; más aún, si $gl.dimA<\infty$, entonces $gl.dimA=dimA$.

Dem. Por el corolario a la proposición 37, es suficiente demostrar que el ideal máximo m de A está generado por una A-sucesión si y sólo si $gl.dimA<\infty$ y si, en este caso, $gl.dimA=dimA$.

Supongamos que m está generado por una A-sucesión $a_1,...,a_r$. Por aplicaciones repetidas del lema 14, $hd_A A/m=r$. El corolario a la proposición 34, $gl.dimA=r<\infty$. Más aún, por la proposición 37, $r\leq dimA$. Ahora bien, el teorema de Samuel implica $dimA\leq r$, de modo que $gl.dimA=r=dimA$.

Para completar la demostración, es suficiente demostrar que si $gl.dimA<\infty$, m es generado por una A-sucesión. Supongamos entonces que $gl.dimA<\infty$. Usaremos inducción sobre $r=rank_k m/m^2$ para demostrar que m está gnerado por una A-sucesión. Si $r=0$, entonces $m=m^2$, lo que implica por el lema de Nakayama que $m=0$, por lo que m está generado por la sucesión vacía. Supongamos ahora que $r>0$. Si todo elemento de $m-m^2$ es un divisor de cero, entonces, como $hd_A A/m<\infty$, tenemos por el lema anterior, que A/m es libre; en consecuencia $m=0$, lo que contradice que $r>0$. Por lo tanto existe $a\in m-m^2$ que no es un divisor de cero. En consecuencia, por el corolario al lema 13, $gl.dimA/Aa<\infty$. Sea $\overline{m}=m/Aa$; como $\overline{m}/\overline{m}^2$ es un k-espacio vectorial de rango $r-1$, tenemos por inducción que m/Aa está generado por una A/Aa-sucesión $\overline{a}_1,...,\overline{a}_{r-1}$, donde $a_i\in m$ y $\overline{a}_i$ es la clase de a_i módulo Aa para $1\leq i\leq r-1$. Entonces $a,a_1,...,a_{r-1}$ es una A-sucesión que genera m.

■

Corolario 23: Sea A un anillo regular local y sea ζ un ideal primo de A. Entonces A_ζ es un anillo regular local.

Dem. En vista del teorema anterior, es suficiente demostrar que $gl.dimA_\zeta \leq gl.dimA$. Sea

$$0 \quad \rightarrow \quad F_n \quad \rightarrow \quad F_{n-1} \quad \rightarrow \quad ... \quad \rightarrow \quad F_0 \quad \rightarrow \quad A/\zeta \quad \rightarrow \quad 0 \;(*)$$

una resolución A-libre del A-módulo A/ζ con $n \leq gl.dimA$. En vista de las proposiciones 1 y 2, obtenemos al tensorizar (*) con A_ζ, una resolución A_ζ-libre

$$0 \quad \rightarrow \quad F_n \bigotimes_A A_\zeta \quad \rightarrow \quad F_{n-1} \bigotimes_A A_\zeta \quad \rightarrow \quad ... \quad \rightarrow \quad F_0 \bigotimes_A A_\zeta \quad \rightarrow \quad A_\zeta/\zeta A_\zeta \quad \rightarrow \quad 0$$

de $A_\zeta/\zeta A_\zeta$, lo que implica que $hd_{A_\zeta} A_\zeta/\zeta A_\zeta \leq n$. Ahora bien, el corolario de la proposición 34 implica que $gl.dimA_\zeta = hd_{A_\zeta} A_\zeta/\zeta A_\zeta \leq n \leq gl.dimA$.

■

Ejercicios resueltos

1*. Sea

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

una sucesión exacta que se escinde, y sea F un functor aditivo de A-módulos en B-módulos; entonces la sucesión

$$0 \rightarrow F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'') \rightarrow 0 \qquad (*)$$

también se escinde.

Dem. Claramente $F(g) \circ F(f) = F(1_{M''}) = 1_{F(M'')}$.

Chequemos que (*) es exacta:

Como

$$M' \overset{f}{\hookrightarrow} M$$

podemos identificar a M' como un submódulo de M; luego al restringir el rango de f a $f(M')$, podemos extender a f a M, de modo que $f = 1_M \mid_{M'}$, por lo que $F(f) = F(1_M \mid_{M'}) = F(1_{M'}) = 1_{F(M')}$, por lo tanto

$$F(M') \overset{F(f)}{\hookrightarrow} F(M)$$

Esto demuestra que F(f) es inyectiva.

Ahora bien, como f, t son inyectivas, podemos identificar a $M = M' \bigoplus M''$. Consideremos extensiones de f, t a M tales que $f = 0(modM')$ y $t = 0(modM'')$. Por aditividad, $1_{F(M)} = F(1_M) = F(f+t) = F(f)+F(t)$, $F(f) = 0(modF(M'))$ y $F(t) = 0(modF(M''))$. Tenemos lo siguiente:

(1) $F(M) = F(f)(F(M')) + F(t)(F(M''))$; $F(M) = F(M') + F(M'')$ (por inyectividad).

(2) $F(f)(F(M')) \bigcap F(t)(F(M'')) = \{0\}$: supongamos que $F(f)(\overline{m}') = F(t)(\overline{m}'')$, que $\overline{m}' \in F(M')$ y que $\overline{m}'' \in F(M'')$, entonces $0 = F(g)F(f)(\overline{m}') = F(g)F(t)(\overline{m}'') =$

$\overline{m}''$, lo que implica por inyectividad que $F(t)(\overline{m}'') = 0$; asimismo $F(f)(\overline{m}') = 0$.
(3) $F(M) = F(M') \bigoplus F(M'')$: Se sigue de las afirmaciones 1 y 2.
(4) $\ker F(g) = imF(f)$: $F(g)1_{F(M)} = F(g)F(f)+F(g)F(t)$; luego $F(g)(F(M)) = F(M'')$, lo que demuestra que $F(g)$ es sobre y que $\ker F(g) = F(M)/F(M'') \simeq F(M')$, donde la última identificación se deduce de la afirmación 3.

■

2. Sea F un functor aditivo exacto de A-módulos en B-módulos (Ver [Raghavan-Sridharan]). Si

$$M_0 \quad \to \quad M_1 \quad \to \quad ... \quad \to \quad M_n$$

, entonces la sucesión

$$F(M_0) \quad \to \quad F(M_1) \quad \to \quad ... \quad \to \quad F(M_n)$$

es exacta.

Dem. Para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$

$$M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1}$$

es exacta. Si $N_i = im(f_{i-1}) = \ker(f_i)$, entonces

$$0 \quad \to \quad N_i \xrightarrow{i} M_i \xrightarrow{f_i} N_{i+1} \quad \to \quad 0$$

es exacta, lo que implica por hipótesis que

$$0 \quad \to \quad F(N_i) \xrightarrow{F(i)} F(M_i) \xrightarrow{F(f_i)} F(N_{i+1}) \quad \to \quad 0$$

es exacta, por tanto, $\ker(F(f_i)) = F(N_i)$ y $imF(f_i) = F(N_{i+1})$, es decir, la sucesión

$$F(M_{i-1}) \xrightarrow{F(f_{i-1})} F(M_i) \xrightarrow{F(f_i)} F(M_{i+1})$$

es exacta.

■

3. Demuestre que si $m, n \in \mathbb{Z}$ son coprimos ($(m) + (n) = (1)$ como ideales), entonces $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \bigotimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$.

Dem. $(m) + (n) = (1) \leftrightarrow am + bn = 1$ para algunos $a, b \in \mathbb{Z}$. Verifiquemos que $1 \bigotimes 1 = 0$:

$1 \bigotimes 1 = (am + bn) \bigotimes 1 = a(m \bigotimes 1) + b(1 \bigotimes n) = 0$.

■

4. Sea A un anillo y sean M,N A-módulos. N se llama A-módulo plano si el functor $T_N : M \mapsto M \bigotimes_A N$ es exacto. Demuestre que si $f : A \to B$ es un homomorfismo de anillos y M es un A-módulo plano, entonces $M_B = B \bigotimes_A M$ es un B-módulo plano.

Dem. Para demostrar este resultado, nos apoyaremos de la proposición 2.19 de [M. F. Atiyah, I. G. Macdonald].

Sea $g : N' \to N$ un monomorfismo de B-módulos (claramente N, N' tienen una estructura de A-módulos inducida por f). Como M es A-plano, entonces $g \bigotimes 1 : N' \bigotimes_A M \to N \bigotimes_A M$ es un monomorfismo de A, B-módulos. Como $N' \simeq N' \bigotimes_B B$ y $N \simeq N \bigotimes_B B$, entonces $g' \bigotimes 1_M : (N' \bigotimes_B B) \bigotimes_A M \to (N \bigotimes_B B) \bigotimes_A M$ es inyectiva ($g' = g \bigotimes 1_B$)$\leftrightarrow g \bigotimes 1_{B \bigotimes_A M} : N' \bigotimes_B (B \bigotimes_A M) \to N \bigotimes_B (B \bigotimes_A M)$ es inyectiva $\leftrightarrow g \bigotimes 1_{M_B} : N' \bigotimes_B M_B \to N \bigotimes_B M_B$ es inyectiva $\leftrightarrow M_B$ es plano.

■

5. Sea A un anillo y sean a_i, b ideales de A para todo $i \in I$(conjunto de índices). Supongamos que $\prod_I a_i \subseteq b$, entonces $a_j \subseteq b$ para algún $j \in I$.

Dem. Supongamos que para todo $j \in I$, existe $x_j \in a_j - b$, entonces $\prod x_j \in \prod_I (a_i - b) \subseteq \bigcap (a_i - b) \subseteq \prod_I a_i - b$.

■

6. Sea A un anillo. (1) Entonces $x \in A$ nilpotente $\Rightarrow 1 + x \in A$ es unidad. (2) Deduzca la suma de un elemento nilpotente con una unidad es una unidad.

Dem. (1): Sea I el ideal generado por $1 + x$. $-x(1 + x) = -x - x^2 \in I$, luego

$1+x-x-x^2 = 1-x^2 \in I$, $-x(1-x^2) = -x+x^3 \in I$, por tanto $1+x-x+x^3 = 1+x^3 \in I$. Siguiendo de esta manera, llegamos a que $1+(-1)^{n+1}x^n = 1 \in I$. En consecuencia $1+x$ es una unidad.
(2): Sea x un elemento nilpotentee y sea y una unidad. Sea J el ideal generado por $x+y$. Entonces $-xy^{-1}(y+x) = -x - y^{-1}x^2 \in J$, luego $y+x-x-y^{-1}x^2 = y - y^{-1}x^2 \in J$. Asimismo $-xy^{-1}(y-y^{-1}x^2) = -x+y^{-2}x^3 \in J$, luego $y+x-x+y^{-2}x^3 = y+y^{-2}x^3 \in J$. Siguiendo de este modo, obtenemos que $y+(-1)^{n-1}y^{1-n}x^n = y \in J$. Como y es unidad, $y+x$ es unidad.
$\blacksquare$

7. Sea A un anillo tal que todo ideal no contenido en el nilradical η contiene un elemento idempotente distinto de cero ($e^2 = e \neq 0$). Demuestre que $\eta = r(A)$.
Dem. Recordemos que si $1 \neq e$ es idempotente, no es unidad: supongamos que existe $b \neq 1$ tal que $be = 1$, entonces $b = b(be) = b(be^2) = (be)^2 = 1\sharp$.
Queremos demostrar que $\eta = r(A)$. Como $\eta \subseteq r(A)$, basta verificar la otra inclusión.
Supongamos que $r(A) \nsubseteq \eta$, entonces existe $e \in r(A)$ tal que $e^2 = e \neq 0 \Rightarrow (1-e)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}e^{n-k} = e\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}+1 = e(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}) + 1 - e = e(1-1)^n + 1 - e = 1-e$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular $1 \neq 1-e$ es idempotente.$\sharp$
$\blacksquare$

8. Demuestre lo siguiente:

1. $Ann(M+N) = Ann(M)\bigcap Ann(N)$
2. $(N:P) = Ann((N+P)/N)$

Dem. (1): $a \in Ann(M+N) \Rightarrow a(M+N) = 0$, luego $aM = 0$ y $aN = 0$. Sea $a \in Ann(M)\bigcap Ann(N)$, entonces $aM = 0$ y $aN = 0$. Luego, si $m \in M$ y $n \in N$, entonces $a(m+n) = am + an = 0$, es decir $a \in Ann(M+N)$.
(2): Sea $a \in A$ tal que $aP \subseteq N$. Si $n+p \in N+P$, entonces $a(n+p)+N =$

$an + ap + N = N$, es decir, $a \in Ann((N+P)/N)$. Sea $a \in Ann((N+P)/N)$, entonces, en particular, $a(0+p)+N = N$ para todo $p \in P$, es decir, $aP \subseteq N$.

■

9. Sea M_i una familia de A-módulos ($i \in I$-familia de índices-) y sea M su suma directa.

Demuestre que M es plano si y sólo si cada M_i es plano.

Dem. $\Rightarrow$) Sea $f : N' \to N$ un homomorfismo de A-módulos, inyectivo, entonces $f \bigotimes 1_{M_i} : N' \bigotimes_A M_i \to N \bigotimes_A M_i$ es inyectiva; de otra forma existiría $(n', a_i) \neq (0,0)$ tal que $(n', (x_j)) \in \ker f$ con $x_i = a_i$ y, en consecuencia, con $(n', (x_j)) \neq 0$.

$\Leftarrow$) Sea

$$0 \to N' \xrightarrow{\varphi_1} N \xrightarrow{\varphi_2} N'' \to 0$$

una sucesión exacta de A-módulos y consideremos la sucesión

$$0 \to N' \bigotimes_A M \xrightarrow{\varphi_1 \bigotimes 1_M} N \bigotimes_A M \xrightarrow{\varphi_2 \bigotimes 1_M} N'' \bigotimes_A M \to 0$$

Verifiquemos la exactitud en $N \bigotimes_A M$: Supongamos que $im(\varphi_1 \bigotimes_A 1_M) \subsetneq \ker \varphi_2 \bigotimes_A 1_M$, entonces existe $n \bigotimes (x_i) \in N \bigotimes_A M$ tal que $\varphi_2(n) \neq 0 \Rightarrow n \notin \ker \varphi_2 = im\varphi_1$. No obstante $f(n) \bigotimes m_i \neq 0$ para todo $i \in I$, por tanto $0 \neq (..., f(n) \bigotimes m_i, ...) = f(n) \bigotimes (..., m_i, ...)\sharp$, esta última igualdad dada por la relación 0.4(V) del libro [Raghavan-Sridharan], y donde se ha identificado

$$N/\ker \varphi_2 \overset{\overline{\varphi}_2}{\underset{\to}{\sim}} (\bigoplus_{i \in I} M'')/D$$

donde $D = \{$submódulo de elementos con al menos dos coordenadas distintas$\}$ y donde $\overline{\varphi}_2$ es el morfismo inducido por φ_2.

■

10. Sea $A[X]$ el anillo de polinomios en una indeterminada. Demuestre que $A[X]$ es una A-álgebra plana.

Dem. $A[X] = \bigoplus_{\mathbb{Z}^+} S_d$, donde S_d es el submódulo generado por todos los elementos de grado d. Verifiquemos que S_d es plano: sea $f : M' \to M$ un monomorfismo, entonces $f \bigotimes 1 : M' \bigotimes S_d \to M \bigotimes S_d$ es inyectivo, pues dado $0 \neq p \in S_d$, $ap = 0, a \in A, \leftrightarrow a = 0$.El resultado se obtiene del ejercicio anterior.

■

11. (1) Si M y N son A-módulos planos, entonces $M \bigotimes_A N$ también lo es;
(2) Si B es una A-álgebra plana y N es un B-módulo plano, entonces N es un A-módulo plano.

Dem. (1) Sea $f : P' \to P$ un monomorfismo de A-módulos, entonces $f \bigotimes 1 : P' \bigotimes_A M \to P \bigotimes_A M$ es inyectivo, luego $f \bigotimes (1 \bigotimes 1) = (f \bigotimes 1) \bigotimes 1 : P' \bigotimes_A (M \bigotimes_A N) \to P \bigotimes_A (M \bigotimes_A N)$ también lo es por ser N plano.

(2) Como B es una A-álgebra, existe $f : A \to B$, homomorfismo de anillos. Sea $\varphi : P' \to P$ un monomorfismo de A-módulos, entonces $\varphi \bigotimes 1 : P' \bigotimes_A B \to P \bigotimes_A B$ es un monomorfismo de A-módulos (B-módulos). Como N es un B-módulo plano, $(\varphi \bigotimes 1) \bigotimes 1 : (P' \bigotimes_A B) \bigotimes_B N \to (P \bigotimes_A B) \bigotimes_B N$ es un monomorfismo $\leftrightarrow \varphi \bigotimes (1 \bigotimes 1) : P' \bigotimes_A (B \bigotimes_B N) \to P \bigotimes_A (B \bigotimes_B N)$ es un monomorfismo $\leftrightarrow \varphi \bigotimes 1 : P' \bigotimes_A N \to P \bigotimes_A N$ es un monomorfismo.

■

12. Sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos. Si M' y M'' son finitamente generados, también lo es M.

Dem. Tenemos $M/M' \simeq M''$. Si $\{m''_1, ..., m''_n\}$ es un conjunto generador de M'', $\{m_1 + M', ..., m_n + M'\}$ es un conjunto generador de M/M'(suponemos que $m_1, ..., m_n$ son los representantes en M). Sea $m + M' = \sum_{i=1}^n a_i m_i + M' \in M/M' \leftrightarrow m - \sum_{i=1}^n a_i m_i \in M'$. Como M' es finitamente generado, existe un conjunto generador $\{m'_1, ..., m'_k\}$ de M' tal que $m - \sum_{i=1}^n a_i m_i = \sum_{j=1}^k a'_j m'_j$, es decir, $m = \sum_{i=1}^n a_i m_i + \sum_{j=1}^k a'_j m'_j$. Por tanto $\{m_1, ..., m_n, m'_1, ..., m'_k\}$ genera a M como A-módulo.

■

13. Sea A un anillo y q un ideal suyo. $A - q$ es un conjunto multiplicativo si

y sólo si q es primo.

Dem.$\Leftarrow$) Claramente se observa que $1 \in A - q$. Sean $a, b \in A - q \Rightarrow ab \in A - q$; de otra forma $ab \in q \Rightarrow a \in q$ o $b \in q\sharp$.

$\Rightarrow$) $1 \notin q$. Sean $a, b \in A$ tales que $ab \in q \Rightarrow a \in q$ o $b \in q$; de otra forma, ambos, $a, b \in A - q\sharp$.

■

14. Sea A un anillo y sea S un conjunto multiplicativo. Entonces $S^{-1}A = 0 \leftrightarrow 0 \in S$.

Dem. $\Rightarrow$) $1/s = 0 \leftrightarrow t = 1t = 0$ para algún $t \in S$.

$\Leftarrow$) Sea $a/s \in S^{-1}A$. Entonces $a/s = 0$, pues $0 \in S$ y $a{,}0 = 0$.

■

15. Sean A, B anillos, $f : A \to B$ un homomorfismo de anillos y q, un ideal primario de B. Entonces q^c es primario (q^c indica la imágen inversa de q bajo f, y se llama <u>contracción</u>).

Dem. Sea $xy \in f^{-1}(q)$, entonces $f(xy) \in q \leftrightarrow f(x) \in q$ o $f(y)^n \in q$. En el primer caso, $x \in f^{-1}(q)$, y en el segundo, $y^n \in f^{-1}(q)$.

■

16. (1) Sea M un A-módulo noetheriano y sea $u : M \to M$ un homomorfismo de A-módulos. Si u es sobre, entonces es un isomorfismo.

(2) Si M es de Artin y u es inyectiva, entonces u es un isomorfismo.

Dem. (1) Considere la cadena -estacionaria, desde luego- $\ker(u) \subseteq \ker(u^2) \subseteq \ldots \subseteq \ker(u^s) = \ker(u^{s+1}) = \ldots$. Entonces, tenemos lo siguiente: $x \in \ker(u^s), \exists y \in u^{-1}(x)$ tal que $y \in \ker(u^{s+1}), u(y) = x$, pero $\ker(u^s) = \ker(u^{s+1})$, luego $u^s(y) = 0$, es decir, $0 = u^s(y) = u^{s-1}(u(y)) = u^{s-1}(x) \Rightarrow x \in \ker(u^{s-1})$, luego $\ker(u^{s-1}) = \ker(u^s)$. Al repetir el mismo razonamiento considerando los conjuntos $\ker(u^{s-1}), ..., \ker(u^2)$, tenemos que $\ker(u) = \ker(u^J)$ para todo $J > 1$; más aún, si $x \in \ker(u), \exists y \in u^{-1}(x)$ tal que $y \in \ker(u^2), u(y) = x$, pero $\ker(u) = \ker(u^2)$, luego $0 = u(y) = x$, por tanto $0 = \ker(u)$

(2) Considere la cadena $u(M) \supseteq u^2(M) \supseteq \ldots \supseteq u^n(M) = u^{n+1}(M)$. Sea $y \in M$, entonces $u^n(y) \in u^n(M) = u^{n+1}(M) \Rightarrow \exists x \in M$ tal que $u^n(y) = u^{n+1}(x) = u^n(u(x)) \Rightarrow u^n(y - u(x)) = 0 \leftrightarrow y = u(x)$.

■

17. Sea S un conjunto multiplicativo de A. S se llama <u>saturado</u> si $xy \in S \leftrightarrow x \in S$ y $y \in S$ (Para checar otros criterios que ayudan a verificar si un conjunto multiplicativo es saturado, ver Atiyah-Macdonald [capítulo 3, sección de ejercicios].

El conjunto S_0 de todos los no divisores de A es un conjunto multiplicativo saturado. En consecuencia, el conjunto D de divisores de cero de A es una unión de ideales primos (ver Atiyah-Macdonald [capítulo 1, ejercicio 14]). Demuestre que todo ideal primo mínimo de A está contenido en D (checar Atiyah-Macdonald [capítulo 3, ejercicio 6]).

El anillo $S_0^{-1}A$ se llama <u>anillo total de fracciones</u> de A. Demuestre lo siguiente:

1. S_0 es el conjunto multiplicativo más grande de A para el que $A \to S_0^{-1}A$ es un monomorfismo.
2. Todo elemento en $S_0^{-1}A$ es una unidad o un dividor de cero.
3. Todo anillo en donde toda no unidad es un divisor de cero es igual a su anillo total de fracciones

Dem. Sea p un ideal primo mínimo de $A \Rightarrow S = A - p \in \daleth$ es máximo ($\daleth = \{S \mid 0 \notin S\}$). $S_0 \in \daleth$.

Supongamos que $S_0 \nsubseteq S \Rightarrow p \nsubseteq D \Rightarrow p \nsubseteq p_i$, donde $D = \bigcup_i p_i \Rightarrow \exists x \in p - p_i$(para todo i), luego $1 = \sum a_i x_i + bx(x_i^{'s}$ divisores de cero, x no divisor de cero). Sean (para todo i) $y_i \neq 0$ tal que $x_i y_i = 0$. Si $y = \prod y_i$, entonces $y = bxy \leftrightarrow x$ es una unidad, por tanto $p = (1)\sharp$.

(1) Sea $A \to S^{-1}A$ inyectivo, entonces $0 \neq x \in A$ satisface $x/1 \neq 0 \leftrightarrow$ para todo $s \in S, sx \neq 0$. Como x es arbitrario, $S \subseteq S_0$.

(2) x/s es una unidad si y sólo si $x \in S_0$, esto es, no es divisor de cero. Por tanto $x \notin S_0$ satisface lo siguiente: existe $y \neq 0$ tal que $xy = 0$, luego $x/s * y/1 = 0$ para todo $s \in S_0$.

(3) Ningún divisor de cero es una unidad: $0 \neq x \in A$ divisor de cero implica $xy = 0$ para algún $y \neq 0$. Si x es una unidad, entonces $0 = x^{-1}(xy) = y\sharp$. En consecuencia, el resultado se reduce a observar que un elemento de A es una unidad si y sólo si no es un divisor de cero; para $a/s \in S_0^{-1}A$ tenemos que $\varphi^{-1}(a/s) = as^{-1}$, donde $\varphi : A \to S_0^{-1}A$ es el homomorfismo natural.

■

18. Sea A un anillo. Se dice que A es absolutamente plano si todo A-módulo es plano (ver Atiyah-Macdonald [capítulo 2, ejercicio 27] para checar condiciones necesarias y suficientes que definen a un anillo absolutamente plano).

Demostrar que si A es absolutamente plano y S es un conjunto multiplicativo de A, entonces $S^{-1}A$ es absolutamente plano.

Dem. Sea (a/s) un ideal principal de $S^{-1}A$ y sea $a'/s' * a/s \in (a/s)$. Como A es absolutamente plano, $a'a = ba^2$ para algún $b \in A$. Luego $a'/s' * a/s = sb/s' * a^2/s^2 \in (a^2/s^2)$.

■

19. Sea ζ un ideal primo de A. $\zeta \in Ass(M) \leftrightarrow$ existe un A-monomorfismo $A/\zeta \to M$.

Dem. $\Rightarrow$) $\zeta = (0 : x), 0 \neq\in M$, luego entonces, el morfismo $\varphi : A/\zeta \to M$ dado por $a + \zeta \mapsto ax$ es inyectivo.

$\Leftarrow$) Sea $\varphi : A/\zeta \to M$ un A-monomorfismo. Sea $ab \in \zeta$ con $b \notin \zeta \Rightarrow a \in \zeta$ y $\varphi(\overline{ab}) = 0$, no obstante $x := \varphi(\underline{b}) \neq 0$. Para cualquier otro $a' \in \zeta$, $\varphi(\overline{a'b}) = 0$. Por lo tanto $\zeta = (0 : \varphi(\underline{b})) = (0 : x)$.

■

20*. De acuerdo con la definición de ideal primario de la página 15, demuestre que ς es un ideal primario de A si y sólo si $A/\varsigma \neq 0$ y todo divisor de cero de

A/ς es nilpotente.

Dem. $\Rightarrow$) Sea $\overline{a} \in A/\varsigma$ un divisor de cero y supongamos que $\overline{a}$ proviene de $0 \neq a \in A$ mediante el homomorfismo natural. Como $\overline{a}$ es un divisor de cero, existe $0 \neq \overline{b} \in A/\varsigma$ tal que $\overline{ab} = 0$. Luego $a_{A/\varsigma}(\overline{b}) = a\overline{b} = \overline{ab} = 0$, por tanto $a_{A/\varsigma}$ es nilpotente. Así, para algún $n \in \mathbb{N}$, $a^n_{A/\varsigma}(1) = (a\overline{1})^n = \overline{a}^n = 0$, es decir, $\overline{a}$ es nilpotente.

$\Leftarrow$) Sea $a \in A$ y supongamos que la homotesia $a_{A/\varsigma}$ no es inyectiva, entonces existe $0 \neq \overline{b} \in A/\varsigma$ tal que $0 = a_{A/\varsigma}(\overline{b}) = \overline{ab}$. Como $\overline{a}$ es un divisor de cero, $\overline{a}$ es nilpotente, por tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{a}^n = 0$. En consecuencia, si $\overline{c} \in A/\varsigma, a^n_{A/\varsigma}(\overline{c}) = 0$. Esto es, $a_{A/\varsigma}$ es nilpotente.

■

21. Un A-módulo M es proyectivo si y sólo si $hd_A M \leq 0$.

Dem. $\Rightarrow$) (caso $M \neq 0$)

$$0 \xrightarrow{d_1} M \xrightarrow{d_2} 0$$

es un complejo izquierdo con cada módulo proyectivo; si hacemos $\varepsilon = 1_M$, entonces

$$0 \to M \xrightarrow{\varepsilon = 1_M} M \to 0$$

es una resolución proyectiva de M con longitud 0, es decir, $hd_A M = 0$.

(caso $M = 0$) Por definición, $hd_A M = -1$.

$\Leftarrow$) El caso $hd_A M = -1$ es por definición.

(caso $hd_A M = 0$) Existe una resolución proyectiva

$$0 \to P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

luego $M \simeq P_0$.

■

22*. Con relación a la proposición 6, demuestre que si q es un ideal primario de A, entonces $\zeta = \{a \in A \mid a_{A/q} \text{ no es inyectivo } \} = r(q)$.

Dem. Sólo necesitamos checar que $q \subseteq \zeta$ y que ζ es mínimo en relación a los ideales primos que contienen a q.

Sea $0 \neq a \in q$, entonces $a_{A/q}$ no es inyectivo: $a_{A/q}(1) = a = 0(\mathrm{mod} q)$. Esto demuestra que $q \subseteq \zeta$.

Ahora bien, si $a \in \zeta$, entonces $a_{A/q}$ es nilpotente, luego $(a_{A/q})^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$. En particular $(a_{A/q})^n(1) = a^n = 0(\mathrm{mod} q) \leftrightarrow a^n \in q$, por tanto $q \subseteq \zeta \subseteq r(q)$. Es decir, $\zeta = r(q)$ (ver Atiyah-Macdonald[proposición 1.14]).

■

Apéndice 1

Functores

Sean A, B anillos. Un functor covariante F de A-módulos en B-módulos es una asignación

1. un B-módulo $F(M)$ a cada A-módulo M, y
2. un homomorfismo $F = F_{M,N} : Hom_A(M,N) \to Hom_B(F(M), F(N))$ a cada par M, N de A-módulos, tal que

   (a) $F(1_M) = 1_{F(M)}$,

   (b) $F(gf) = F(g)F(f)$, para todo $f \in Hom_A(M,N), g \in Hom_A(N,P); M, N, P$ A-módulos.

En lo sucesivo llamaremos simplemente functor a un functor covariante.
Un functor de A-módulos en B-módulos se dice aditivo si $F_{M,N}$ es un homomorfismo de grupos para cada par de A-módulos M, N. Un functor F de A-módulos en A-módulos se dice A-lineal si para cada par M, N de A-módulos; $F_{M,N}$ es un A-homomorfismo.
Sean F y G dos functores de A-módulos en B-módulos. Una colección $\{\varphi_M : F(M) \to G(M)\}$ de B-homomorfismos, donde M corre sobre todos los A-módulos, se llama functorial en M, si para todo $f \in Hom_A(M,N)$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} & F(M) & \xrightarrow{\varphi_M} & G(M) & \\ F(f) & \downarrow & & \downarrow & G(f) \\ & F(N) & \xrightarrow{\varphi_N} & G(N) & \end{array}$$

Apéndice 2

Conceptos básicos de Homología

Un complejo X de A-módulos es una sucesión

$$\ldots \to X_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} X_n \overset{d_n}{\to} X_{n-1} \to \ldots$$

de A-módulos X_n y A-homomorfismos d_n tales que $d_n \circ d_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Decimos que un complejo X es izquierdo (respectivamente derecho), si $X_n = 0$ para todo $n < 0$ (respectivamente para todo $n > 0$).

Definimos el n-ésimo módulo de homolgía de X como $\ker d_n / im d_{n+1}$, y lo denotamos por $H_n(\underline{X})$.

Sean X, Y complejos de A-módulos. Un morfismo $f : \underline{X} \to \underline{Y}$ de complejos es una familia $\{f_n : X_n \to Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de A-homomorfismos tales que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} & X_{n+1} & \overset{f_{n+1}}{\to} & Y_{n+1} & \\ d_{n+1} & \downarrow & & \downarrow & d'_{n+1} \\ & X_n & \overset{f_n}{\to} & Y_n & \end{array}$$

Si $f : \underline{X} \to \underline{Y}$ es un morfismo de complejos, entonces f_n induce otro morfismo $H_n(f) : H_n(\underline{X}) \to H_n(\underline{Y})$.

Una sucesión de complejos

$$0 \to \underline{X} \overset{f}{\to} \underline{Y} \overset{g}{\to} \underline{Z} \to 0$$

se llama exacta, si para todo $n \in \mathbb{Z}$, la sucesión

$$0 \to X_n \overset{f_n}{\to} Y_n \overset{g_n}{\to} Z \to 0$$

es exacta.

Toda sucesión exacta de complejos $0 \to \underline{X} \overset{f}{\to} \underline{Y} \overset{g}{\to} \underline{Z} \to 0$ induce un homomorfismo

$\partial_n : H_n(\underline{Z}) \to H_{n-1}(\underline{X})$ de manera natural.

Sean $f, g : \underline{X} \to \underline{Y}$ dos morfismos de complejos $\underline{X}, \underline{Y}$ de A-módulos. Una homotopía h entre f y g es un conjunto $h = \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de A-homomorfismos $h_n : X_n \to Y_{n+1}$ tales que $h_{n-1}d_n + d'_{n+1}h_n = f_n - g_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. En este caso decimos que f y g son homotópicos.

PROPOSICIÓN 38: Sean $f, g : \underline{X} \to \underline{Y}$ homomorfismos homotópicos de complejos de A-módulos. Entonces $H_n(f) = H_n(g)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Dem. Ver bibliografía.

■

PROPOSICIÓN 39: Para un A-módulo P, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. P es un sumando directo de un A-módulo libre;
2. dado cualquier diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow & f & \\ M & \overset{\varphi}{\to} & M'' & \to & 0 \end{array}$$

   de A-homomorfismos con el renglón exacto, existe un A-homomorfismo $\overline{f} : P \to M$ tal que dicho diagrama conmuta;
3. toda sucesión exacta de módulos $0 \to M' \to M \overset{\varphi}{\to} P \to 0$ se escinde.

Dem. Ver bibliografía.

■

Un A-módulo P que satisfaga las condiciones equivalentes de la proposición anterior se llama A-módulo proyectivo.

Sea M un A-módulo. Una resolución proyectiva de M es una pareja $(\underline{P}, \varepsilon)$, donde P es un complejo izquierdo con cada P_i un A-módulo proyectivo y donde $\varepsilon : P_0 \to M$ es un A-homomorfismo tal que la sucesión

$$\ldots \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

es exacta.

Sea $f : M \to M'$ un homomorfismo de A-módulos y sean $(\underline{P}, \varepsilon), (\underline{P'}, \varepsilon')$ resoluciones proyectivas de M, M', respectivamente. Un morfismo $F : \underline{P} \to \underline{P'}$ de complejos se dice terminal en f si $f\varepsilon = \varepsilon' F_0$.

PROPOSICIÓN 40: Sea $f : M \to M'$ un homomorfismo de A-módulos y sean $(\underline{P}, \varepsilon), (\underline{P'}, \varepsilon')$ resolcuines proyectivas de M, M', respectivamente. Entonces existe un morfismo $F : \underline{P} \to \underline{P'}$ terminal en f. Más aún, si $F, G : \underline{P} \to \underline{P'}$ son morfismos terminales en f, entonces F y G son homotópicos.

■

Bibliografía

S. Raghavan Balwant Sing, R. Sridharan,*Homological Methods in Commutative Algebra*, Oxford University Press, India, 1975.

Macdonald I.G., Atiyah M.F.,*Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1969.

R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, Heidelberg, Alemania, 1977.

K. Smith,*An invitation to algebraic geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Heidelberg, Alemania, 2000.

J. A. Vargas Mendoza,*Algebra Clásica*, Publicaciones electrónicas, Sociedad Matemática Mexicana, Oaxaca, México, 2006.

K. Hoffman, R. Kunze, *álgebra lineal*, Prentice-Hall, D.F., México.