



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO  
DE TECNOLOGÍA DIGITAL**



**MAESTRÍA EN CIENCIAS EN SISTEMAS DIGITALES**

**“CONTROL POR LÓGICA DIFUSA PARA SISTEMAS MÉCANICOS  
CON FRICCIÓN DE COULOMB Y BACKLASH”**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN SISTEMAS DIGITALES**

**PRESENTA**

**ING. NATALY DUARTE TORRES**

**BAJO LA DIRECCIÓN DE  
DR. LUIS TUPAK AGUILAR BUSTOS  
DR. OSCAR CASTILLO LÓPEZ**

**JUNIO 2016**

**TIJUANA, B. C., MÉXICO**



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

## SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

### ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de Tijuana, B.C. siendo las 12:00 horas del día 10 del mes de junio del 2016 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CITEDI para examinar la tesis titulada:

**Control por lógica difusa para sistemas mecánicos con fricción de Coulomb y backlash**

Presentada por el alumno:

**DUARTE**

Apellido paterno

**TORRES**

Apellido materno

**NATALY**

Nombre(s)

Con registro: 

B	1	4	0	4	9	7
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

**MAESTRÍA EN CIENCIAS EN SISTEMAS DIGITALES**

Después de intercambiar opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

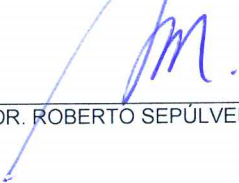
### LA COMISIÓN REVISORA

Directores de Tesis

  
DR. LUIS PUPAK AGUILAR BUSTOS


  
DR. OSCAR CASTILLO LÓPEZ

  
DR. OSCAR HUMBERTO MONTIEL ROSS

  
DR. ROBERTO SEPÚLVEDA CRUZ

  
DRA. DOLORES ALEJANDRA FERREIRA DE LOZA

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

  
DRA. MIREYA SARAÍ GARCÍA VAZQUEZ



S.E.P.  
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO  
DE TECNOLOGÍA DIGITAL  
DIRECCIÓN



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

**CARTA CESIÓN DE DERECHOS**

En la Ciudad de México, D.F. el día **10** del mes de **junio** del año **2016**, el (la) que suscribe **Nataly Duarte Torres** alumno(a) del Programa de **Maestría en Ciencias en Sistemas Digitales**, con número de registro **B140497**, adscrito(a) al **Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital**, manifiesto(a) que es el (la) autor(a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del (de la, de los) **Doctores Luis Tupak Aguilar Bustos y Oscar Castillo López** y cede los derechos del trabajo titulado "**Control por lógica difusa para sistemas mecánicos con fricción de Coulomb y backlash**", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del (de la) autor(a) y/o director(es) del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a las siguientes direcciones **nduarte@citedi.mx**; **posgrado@citedi.mx** y **laguilarb@ipn.mx**. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

---

Nataly Duarte Torres

*A mis padres,*

*gracias por su amor y su apoyo.*

*Su tenacidad y lucha interminable han sido mi mayor ejemplo para salir adelante.*

*A mi hermana,*

*mi cómplice de vida, gracias por enseñarme tanto e inspirarme a ser mejor persona.*

*Los amo y son mi más grande orgullo.*

# Agradecimientos

A través de estas líneas quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las que con su soporte científico y humano han colaborado en la realización de esta investigación.

Quiero agradecer en primer lugar a quien fue mi más grande inspiración, gracias Alejandro Hernández por tu dedicación, por confiar en mi y por alentarme cuando ya quería rendirme.

Agradezco a mis directores de tesis el Dr. Luis T. Aguilar y el Dr. Oscar Castillo por la dedicación, soporte y orientación que me permitió realizar este trabajo de investigación. Gracias por compartir conmigo sus conocimientos.

A mis compañeros Anel Otero, Reinier Arbelo, Oscar Garduño, Yoshio Rubio, Abel Murillo, Sonia Ortiz, Tahimi Niubo, Juan Tapia gracias por los buenos momentos que compartimos.

A cada uno de los integrantes del seminario de los miércoles. Gracias por la motivación, el interés y la ayuda para poder realizar mi investigación.

Agradezco a Dios por la familia que me ha brindado, quienes siempre han estado pendientes de mi y celebrando mis triunfos.

Finalmente al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) que ha hecho posible la realización de este trabajo, a través del apoyo económico que me brindo.

Nataly Duarte Torres.

---

# Control por lógica difusa para sistemas mecánicos con fricción de Coulomb y backlash

## Resumen

La mayoría de los sistemas industriales operan bajo condiciones inciertas debido a fenómenos no-suaves como juego mecánico (backlash), zona muerta y fricción de Coulomb; produciendo inexactitudes no deseadas, oscilaciones e inestabilidad que degradan el desempeño del sistema. La presente tesis consiste en proponer controladores difusos tipo Mamdani para resolver el problema de regulación y seguimiento de trayectorias en sistemas mecánicos compuesto por dos subsistemas: la carga y el actuador acoplados entre sí a través de engranes con acoplamiento imperfecto debido al backlash, asumiendo únicamente la retroalimentación de la posición de la carga. Aunado a lo anterior, se aborda el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov para un motor de corriente directa (CD) con fricción de Coulomb y el efecto del backlash. Debido a que se asume que el modelo dinámico de la planta no está disponible y al hecho que el controlador difuso tipo Mamdani es un método heurístico, se implementa un método determinista para realizar el análisis de estabilidad en el sistema basado en el lema de comparación y en una función candidata de Lyapunov.

**Palabras clave:** lógica difusa, estabilidad en el sentido de Lyapunov, no linealidades no suaves, retroalimentación por salida.

## **Fuzzy logic control for mechanical systems with Coulomb friction and backlash**

### **Abstract**

Most of industrial systems operate under uncertain conditions due the nonsmooth phenomena such as backlash, dead-zone, and Coulomb friction producing undesired inaccuracies, oscillations, and instability thereby degrading the system. This thesis proposes Mamdani-type fuzzy controllers to solve the regulation and tracking control problems in mechanical systems (composed by two sub-systems: the actuator and the load) affected by backlash, that load position is the only information available for feedback. A Lyapunov stability analysis for a DC motor affected by Coulomb friction and backlash is addressed. It is assumed that the dynamic model is not available and the fact that Mamdani fuzzy logic controller is an heuristic method, a deterministic analysis based on the comparison principle and nonsmooth Lyapunov functions is used to verify the stability of a Mamdani fuzzy controller.

**Keywords:** fuzzy logic, Lyapunov stability, nonsmooth nonlinearities, output feedback.

# Índice general

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Metodología . . . . .	3
1.3. Objetivos . . . . .	4
1.4. Justificación . . . . .	5
1.5. Contribuciones . . . . .	6
1.6. Organización de la tesis . . . . .	6
<b>2. CONCEPTOS BÁSICOS</b>	<b>7</b>
2.1. Lógica Difusa . . . . .	7
2.1.1. Conjuntos difusos . . . . .	8
2.1.2. Variables lingüísticas . . . . .	10
2.1.3. Reglas Si-Entonces difusas . . . . .	11
2.2. Sistemas difusos . . . . .	11
2.2.1. Métodos de inferencia . . . . .	11
2.2.2. Inferencia difusa tipo Mamdani . . . . .	12
2.3. Sistemas de control difusos tipo Mamdani . . . . .	12
2.4. Definiciones de estabilidad . . . . .	14
2.5. Conceptos de estabilidad en el sentido de Lyapunov . . . . .	17
<b>3. MOTOR DE CORRIENTE DIRECTA Y PLATAFORMA EXPERIMENTAL</b>	<b>21</b>



---

3.1. Descripción de la plataforma . . . . .	21
3.2. Modelo dinámico . . . . .	24
<b>4. CONTROL DIFUSO PARA REGULACIÓN DE UN MOTOR CD</b>	<b>27</b>
4.1. Preámbulo . . . . .	27
4.1.1. Objetivo de control . . . . .	28
4.2. Solución al problema de regulación de un motor CD con fricción . . . . .	28
4.2.1. Análisis de estabilidad . . . . .	31
4.3. Solución al problema de regulación de un motor CD con fricción y backlash . . . . .	33
4.3.1. Análisis de estabilidad . . . . .	38
4.3.2. Análisis de estabilidad de la dinámica cero . . . . .	40
4.4. Comentarios . . . . .	42
<b>5. CONTROL DIFUSOS PARA SEGUIMIENTO DE UN MOTOR CD</b>	<b>43</b>
5.1. Preámbulo . . . . .	43
5.1.1. Objetivo de control . . . . .	43
5.2. Solución al problema de seguimiento de un motor CD con fricción y backlash . . . . .	44
5.2.1. Análisis de estabilidad . . . . .	49
5.2.2. Análisis de estabilidad de la dinámica cero . . . . .	50
5.3. Comentarios . . . . .	51
<b>6. CONCLUSIONES</b>	<b>53</b>

# Índice de figuras

2.1. Estructura de un sistema de lógica difusa. . . . .	12
2.2. Sistema de inferencia Mamdani. . . . .	13
2.3. Estabilidad. . . . .	15
2.4. Estabilidad asintótica. . . . .	16
3.1. Base experimental. . . . .	22
3.2. Diagrama de bloques de la base experimental. . . . .	23
3.3. Backlash. . . . .	26
4.1. Funciones de membrecía de las variables de entrada $(e, \dot{e})$ . . . . .	29
4.2. Funciones de membrecía de la variable de salida $(u)$ . . . . .	30
4.3. Superficie de control. . . . .	30
4.4. Posición del motor (línea sólida) y posición deseada $\theta_d = \pi/2$ rad (línea punteada). . . . .	32
4.5. Error de posición angular del motor $e(t) = \theta(t) - \theta_d(t)$ . . . . .	32
4.6. Señal de control. . . . .	33
4.7. Error de posición de la carga (líneas continuas) y solución superior e inferior de la desigualdad diferencial (líneas discontinuas) $\alpha = \lambda_{\min}\{Q\}/2 = 2$ . . . . .	34
4.8. Funciones de membrecía de las variables de entrada $(e, \dot{e})$ . . . . .	35
4.9. Funciones de membrecía de la variable de salida $(u(t))$ . . . . .	36
4.10. Superficie de control. . . . .	36
4.11. Retroalimentación del sistema con un controlador por lógica difusa . . . . .	37
4.12. (a) Posición de la carga, (b) Posición del motor, (c) Error de posición de la carga, y (d) señal de control. . . . .	39

4.13. Error de posición de la carga (línea continua) y solución superior e inferior de la desigualdad diferencial (líneas discontinuas) donde  $\alpha = \lambda_{\min}\{Q\}/2 = 0.38$ . . . . . 40

5.1. Funciones de membresía de las variables de entrada ( $e, \dot{e}$ ). . . . . 45

5.2. Funciones de membresía de la variable de salida ( $u$ ). . . . . 46

5.3. Superficie de control. . . . . 46

5.4. (a) Posición de la carga, (b) Posición del motor, (c) Error de posición de la carga, y (d) señal de control. . . . . 48

5.5. Error de posición de la carga (línea continua) y solución superior e inferior de la desigualdad diferencial (líneas discontinuas) donde  $\alpha = \lambda_{\min}\{Q\}/2 = 0.15$ . . . . . 50

# Índice de tablas

3.1. Parámetros del motor CD. . . . .	22
4.1. Conjunto de reglas difusas donde el prefijo <i>N</i> es Negativo, <i>P</i> es Positivo, <i>Z</i> es Cero, <i>S</i> es Pequeño, y <i>B</i> es Grande. . . . .	31
4.2. Conjunto de reglas difusas para el regulador de posición del sistema con fricción y backlash. . . . .	37
5.1. Conjunto de reglas difusas . . . . .	47

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1. Antecedentes

La mayoría de los sistemas industriales como los robot manipuladores con engranes, las compuertas mecánicas de las presas, calderas, entre muchos más, operan bajo condiciones inciertas debido entre tantas cosas como al juego mecánico (backlash), zona muerta y fricción de Coulomb, las cuales provocan errores en estado estable, ciclos limites y en el peor caso son las causantes de la inestabilidad en el sistema degradándolo severamente [1]. A este tipo de fenómenos se les conoce como no linealidades no suaves porque por lo general están representados por ecuaciones discontinuas o no diferenciables lo que conduce a un problema desafiante en términos de control de posición y velocidad, el cual ha atraído considerable interés de los investigadores. Sin embargo, a pesar de la diversidad en la literatura sobre este tema [2, 3, 4, 5, 6], los fenómenos mencionados siguen siendo difíciles de modelar y, por tanto, se describen a menudo con modelos con parámetros con un alto grado de incertidumbre [7].

El backlash que es el juego mecánico entre las partes móviles adyacentes, es un fenómeno

común tanto en sistemas mecánicos, electromecánicos, como en sistemas hidráulicos y neumáticos. El backlash está acompañado con histéresis entre la entrada y la salida causando retrasos, oscilaciones e impactos. La fricción seca es una no-linealidad no-suave que ocurre comúnmente en sistemas mecánicos [8]. Otra no-linealidad no-suave más importantes es la zona muerta que puede limitar severamente el desempeño del sistema y está presente en actuadores como las válvulas, servomotores de corriente directa y en otros dispositivos. Es por esto que el efecto de zona muerta debe ser considerado en el diseño y análisis de sistemas de control.

Una estrategia común para resolver el problema de control es la compensación de los términos de la fricción, sin embargo resulta difícil lidiar con todas las variables que la fricción pueda tener (fricción viscosa, strickbeck) [9], [10], es por ello que lo más apropiado es emplear estrategias de control simples que rechacen su efecto sin necesidad de la compensación [11], [12].

Para representar el efecto de backlash se han propuesto diferentes modelos. Algunos de estos incluyen funciones descriptivas de la síntesis en el dominio del frecuencia, como también para sistemas con comportamiento sinusoidal [13, 14]. Otro modelo extensamente utilizado es el modelo inverso [15, 16], que es una función estática discontinua que revierte el efecto del backlash cuando aparece a la entrada o en la salida del sistema. Este modelo requiere una estimación exacta de los parámetros ya que una compensación inadecuada (sobrecompensación o subcompensación) puede conducir a la inestabilidad. El backlash también puede ser representado por un modelo dinámico como en [17], requiriendo un conocimiento preciso de los parámetros. El resultado es una aproximación que omite un importante parte del comportamiento del backlash, y solo se han reportado resultados numéricos para validar el uso del modelo [18, 19]. Los modelos estáticos, propuestos en [20] y [21], reemplazan las no-linealidades no suaves por unas más suaves de este modo atenúan las inexactitudes en la representación del backlash. En [22],

el backlash es visto como una perturbación que requiere el diseño de un observador extra para estimar la perturbación inducida por el backlash. Todos estos modelos ignoran los efectos no-suaves los cuales son importantes en el diseño de realimentación para lograr exactitud en el comportamiento del sistema en lazo cerrado.

## 1.2. Metodología

La técnica de la lógica difusa se ha aplicado con éxito en sistemas de control donde no se cuenta con el modelo matemático exacto de la planta [23]. Los controladores difusos también muestran tener un desempeño satisfactorio en sistemas complejos [24, 25]. Conforme la popularidad de las técnicas de control difuso han aumentado, es de suma importancia clarificar la razón del porque son preferibles ante las técnicas de control clásicas. Una de las ventajas más significativas es la robustez en la variación paramétrica de la estructura y en las incertidumbres no estructuradas [26].

Uno de los principales retos a los que se han enfrentado los controladores difusos desde sus inicios en los años setenta a sido el análisis de estabilidad, ya que para los pioneros de esta teoría el hecho de que la tarea fuera realizada satisfactoriamente era suficiente. Sin embargo esto no ha sido aceptado del todo.

A lo largo de varios años se ha buscado formalizar algunos criterios de estabilidad, pero estas investigaciones han sido enfocadas al estudio de controladores difusos tipo Takagi-Sugeno ya que estos por definición trabajan con funciones [27], esto permite introducir de manera más fácil un análisis determinista, algunos de los trabajos enfocados a resolver el problema son [28], [29], [30], [31] y [32], entre muchos otros. A pesar de esto el estudio de estabilidad en controladores

difusos tipo Mamdani ha quedado rezagado, por esta razón, surge el interés del presente trabajo.

Entre los trabajos más trascendentales en el análisis de estabilidad de controladores difusos tipo Mamdani se encuentran [33], [34], [35] y [36], donde se propone una variante del análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov (método para concluir estabilidad en controladores basados en modelo), comúnmente llamada síntesis difusa de Lyapunov. Este método se basa en la propuesta de una función candidata de Lyapunov, la cual es utilizada como base para la construcción de las reglas difusas. En contraste a los trabajos anteriormente presentados, en el presente trabajo de tesis se proponen controladores no-basados en una función candidata de Lyapunov, complementado con el uso del lema de comparación [37].

### **1.3. Objetivos**

El objetivo general es resolver el problema de regulación de posición y seguimiento de trayectoria en un motor de corriente directa.

Los objetivos específicos se enuncian a continuación:

- Diseñar un controlador por lógica difusa, vía retroalimentación de la posición del actuador, para estabilizar la trayectoria de un motor de CD, con fricción de Coulomb, en un punto deseado.
- Realizar un controlador por lógica difusa para un motor con backlash, vía retroalimentación de la posición del actuador.
- Comprobar estabilidad de cada uno de los sistemas en lazo cerrado, utilizando el criterio de estabilidad de Lyapunov.



## 1.4. Justificación

El enfoque de la presente tesis conduce a la solución de tres principales problemas:

*El primer problema es diseñar un regulador difuso con retroalimentación de posición de la carga para sistemas con backlash y fricción.* Cuando se trabaja con sistemas afectados por el backlash, donde se considera el backlash como un sistema de dos masas, lo que resulta en un sistema subactuado constituido por dos subsistemas, el actuador y la carga. La gran parte de los trabajos resuelven el problema de control asumiendo medición de la posición tanto del lado del actuador como en el lado de la carga, a excepción de [35], [11]. Lo cual en aplicaciones prácticas no sucede, lo cotidiano es que únicamente se pueda obtener mediciones de posición en el lado del actuador.

*El segundo es resolver el problema de seguimiento trayectorias a través de un controlador difuso con retroalimentación de posición de la carga con backlash y fricción.* La gran mayoría de los trabajos cuando se trata de sistemas con backlash solo resuelven el problema de regulación, a excepción de [8], en donde el problema se vuelve un tanto complicado y es necesario resolver ecuaciones diferenciales o utilizar ecuaciones de Riccati. A diferencia de resolver el problema con controladores difusos donde la solución es computacionalmente más sencilla.

*Por último realizar el análisis de estabilidad de un controlador difuso tipo Mamdani.* Tomando en cuenta la condición heurística del controlador, sumado a esto el diseño de un controlador libre de modelo, hace imposible realizar analíticamente el análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado de forma directa. Dadas las circunstancias se propone el uso del lema de comparación complementado con el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov.

## 1.5. Contribuciones

- Se propone un análisis de estabilidad determinista para controladores difusos heurísticos utilizando el Lema de comparación.
- Se resuelve el problema de control de sistemas con backlash asumiendo que solo es posible el sensado de la posición de la carga.
- Se presenta la solución al problema de seguimiento de trayectorias por retro-alimentación de salida en sistemas con backlash.

## 1.6. Organización de la tesis

La tesis está organizada de la siguiente manera. En el capítulo dos presentan los conceptos básicos de la teoría de lógica difusa, así como definiciones y teoremas de estabilidad en el sentido de Lyapunov, los cuales serán útiles para el lector a lo largo de la tesis. En el capítulo tres se incluye el modelo dinámico y la descripción de la plataforma donde se realizan los experimentos. En el capítulo cuatro se presentan casos de estudios con la solución al problema de regulación de un motor de corriente directa (CD). El capítulo cinco presenta la solución al problema de seguimiento para un motor CD. Finalmente en el capítulo seis se incluyen las conclusiones.

## Capítulo 2

# CONCEPTOS BÁSICOS

### 2.1. Lógica Difusa

La lógica difusa o lógica borrosa nace a mediados de los sesenta en la universidad de Berkeley en California por el ingeniero Lofti A. Zadeh [38]. Sus primeras investigaciones están basadas en el trabajo de J. Lukasiewicz quien había propuesto una alternativa a la lógica bi-valuada de Aristoteles; la cual consistía en un tercer valor el cual puede ser traducido como “posible”, y le asignó a un valor numérico entre verdadero y falso dando pie a la lógica multi-valuada.

Cuando Zadeh se dio cuenta de lo que llamó principio de incompatibilidad: “Conforme la complejidad de un sistema aumenta, nuestra capacidad para ser más precisos y construir instrucciones sobre su comportamiento disminuye hasta el umbral más allá del cual, la precisión y el significado son características excluyentes”. Introdujo entonces el concepto de conjunto difuso [39] en el cual reside la idea de que los elementos sobre los que se construye el pensamiento humano no son números sino etiquetas lingüísticas.

El aspecto central de los sistemas basados en la teoría de lógica difusa es permitir representar el conocimiento común, que es en su mayoría del tipo lingüístico cualitativo y no necesariamente cuantitativo, en un lenguaje matemático a través de la teoría de conjuntos difusos y funciones características asociadas a ellos.

Desde sus inicios, la teoría de lógica difusa ha sido controversial, ya que al inicio no existían aplicaciones reales, era difícil defender la teoría desde un punto de vista puramente filosófico. Pero a finales de los sesenta y principio de los setenta Zadeh propuso nuevos conceptos, los cuales fueron fundamentales para la teoría de lógica difusa [40]. En 1973, Zadeh [41] establece las bases para el control difuso, introduce el concepto de variables lingüísticas y propone el uso de reglas *Si-Entonces* para formular el conocimiento humano.

Desde entonces la lógica difusa ha tenido gran éxito por la variedad de sus aplicaciones, las cuales van desde control de complejos sistemas industriales, control de electrodomésticos inteligentes, control automático de frenado en automóviles, hasta mejoras en imágenes médicas.

### 2.1.1. Conjuntos difusos

Los conjuntos difusos pueden ser considerados como una generalización de los conjuntos clásicos (conjuntos *crisp*) con una diferencia conceptual importante: la teoría de conjuntos clásicos sólo contempla la pertenencia o no de un elemento en un conjunto, mientras que la teoría de conjuntos difusos contempla la pertenencia parcial de un elemento a un conjunto, es decir, la transición de “pertenecer a un conjunto” a “no pertenecer a un conjunto” es gradual y cada elemento presenta un grado de pertenencia a un conjunto difuso que puede tomar cualquier valor entre 0 y 1.

**Definición 1 (Conjunto [42])** Si  $X$  es una colección de objetos denotados por  $x$ , entonces un conjunto difuso  $A$  en  $X$  se define como un conjunto de pares ordenado:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\} \quad (2.1)$$

donde  $\mu_A(x)$  es llamada la función de membrecía para el conjunto difuso  $A$ , la función de membrecía mapea cada elemento  $X$  a un grado de membrecía entre 0 y 1.

Una forma alternativa para denotar un conjunto difuso  $A$  puede ser:

$$A = \int_x \mu_A(x)/x, \quad (2.2)$$

donde el símbolo  $\int$  indica la unión de los pares  $(x, \mu_A(x))$ . Sí  $X$  es una colección de objetos discretos,  $A$  se define comúnmente como:

$$A = \sum_{x_i \in X} \mu_A(x_i)/x_i \quad (2.3)$$

donde el símbolo  $\sum$  indica la unión de los pares  $(x, \mu_A(x))$ .

Los conjuntos difusos, al igual que los conjuntos clásicos tienen algunas operaciones básicas. Asumiendo que  $A$  y  $B$  son conjuntos difusos definidos en el mismo universo de discurso  $X$ , la igualdad, el interior, el complemento, la unión e intersección pueden ser definidos como:

**Definición 2 (Igualdad [42])** Se dice que un conjunto difuso  $A$  y un conjunto difuso  $B$  son iguales si y solamente si  $\mu_A(x) = \mu_B(x)$  para todo  $x \in X$ .

**Definición 3 (Interior [42])** Se dice que un conjunto difuso  $A$  está contenido en un conjunto difuso  $B$  y se denota como  $A \subset B$ , si y solamente si  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$  para todo  $x \in X$ .

**Definición 4 (Complemento [27])** El complemento de un conjunto difuso  $A$  es un conjunto difuso

$\bar{A}$  en  $X$  cuya función de membresía esta definida como

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x). \quad (2.4)$$

**Definición 5 (Unión [27])** La unión de un conjunto  $A$  y un conjunto  $B$  es un conjunto difuso en  $X$ , denotado por  $A \cup B$ , cuya función de membresía es definida como

$$\mu_{A \cup B}(x) = \text{máx}[\mu_A(x), \mu_B(x)]. \quad (2.5)$$

**Definición 6 (Intersección [27])** La intersección de un conjunto  $A$  y un conjunto  $B$  es un conjunto difuso en  $X$ , denotado por  $A \cap B$ , cuya función de membresía es definida como

$$\mu_{A \cap B}(x) = \text{mín}[\mu_A(x), \mu_B(x)]. \quad (2.6)$$

### 2.1.2. Variables lingüísticas

Una variable lingüística es aquella cuyos valores son palabras o sentencias en un lenguaje natural o artificial [43]. De esta forma, una variable lingüística sirve para representar cualquier elemento que sea demasiado complejo, o del cual no sea posible obtener una definición concreta.

De esta forma una variable lingüística es caracterizada por una quintupla  $(x, T(x), X, G, M)$  en la cual  $x$  es el nombre de una variable;  $T(x)$  es el conjunto de términos de  $x$ , esto es, el conjunto de sus valores lingüísticos o términos lingüísticos;  $X$  es el universo de definición;  $G$  es la regla sintáctica que genera los términos en  $T(x)$ ; y  $M$  es una regla semántica que asocia con cada valor lingüístico  $A$  su significado  $M(A)$ , donde  $M(A)$  denota un conjunto difuso en  $X$  [27].

### 2.1.3. Reglas Si-Entonces difusas

Una regla difusa *si-entonces* (también conocida como regla difusa, implicación difusa o declaración condicional difusa) asume la forma:

$$\text{Si } x \text{ es } A \text{ entonces } y \text{ es } B, \quad (2.7)$$

donde  $A$  y  $B$  son valores lingüísticos definidos por conjuntos difusos en universos  $X$  y  $Y$  respectivamente. Frecuentemente “ $x$  es  $A$ ” es el antecedente o la premisa, mientras que “ $y$  es  $B$ ” es el consecuente o conclusión [27].

## 2.2. Sistemas difusos

La estructura básica de un sistema de inferencia difusa consiste en cuatro componentes fundamentales (figura 2.1): la *base de reglas*, que contiene una selección de reglas difusas como (2.1.3); el *fusificador*, mapea números de entrada en sus correspondientes membresías difusas; el *motor de inferencia*, es el mecanismo de razonamiento que realiza el procedimiento de inferencia; y por último el *defusificador*, encargado de extraer el valor numérico de la salida.

### 2.2.1. Métodos de inferencia

La inferencia difusa puede definirse como el proceso de obtener un valor de salida para un valor de entrada empleando la teoría de conjuntos difusos. Existen varios métodos para realizar la inferencia difusa [27], sin embargo los más utilizados por su facilidad de implementación son los de tipo Mamdani [44] y Sugeno [45].

El presente trabajo solo se tomara en cuenta los sistemas de inferencia tipo Mamdani.

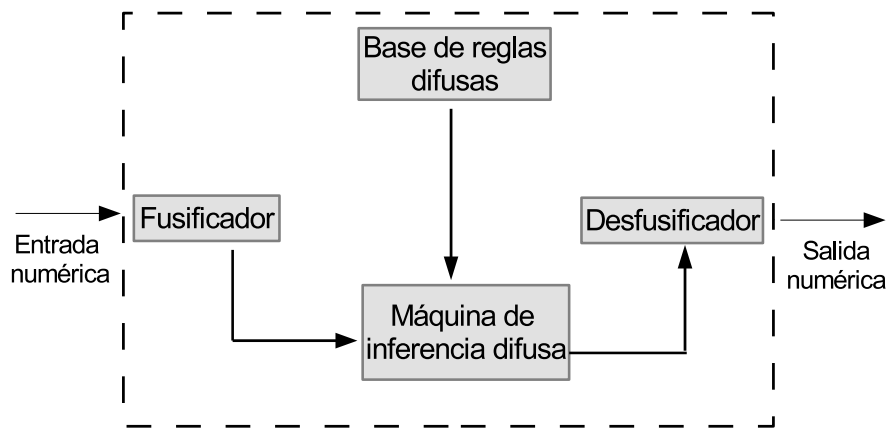


Figura 2.1: Estructura de un sistema de lógica difusa.

### 2.2.2. Inferencia difusa tipo Mamdani

El método fue propuesto por Ebrahim Mamdani en 1975 [44], con el enfoque de hacer control de sistemas usando reglas lingüísticas obtenidas de la experiencia de los expertos humanos. La figura 2.2 es una ilustración de cómo un sistema de inferencia difusa de dos reglas encuentra la salida total de  $Z$  cuando esta sujeta a dos entradas numéricas  $X$  y  $Y$ .

## 2.3. Sistemas de control difusos tipo Mamdani

El supuesto básico del enfoque del control de lógica difusa propuesto por E.H Mamdani en 1974, es que en caso de ausencia del modelo explícito de la planta y/o clara exposición de los objetivos de control, el conocimiento informal de cómo operar la planta dada, puede ser codificada en términos de reglas si-entonces o reglas condición-acción las cuales formarán las bases para la estrategia de control lingüística [38].



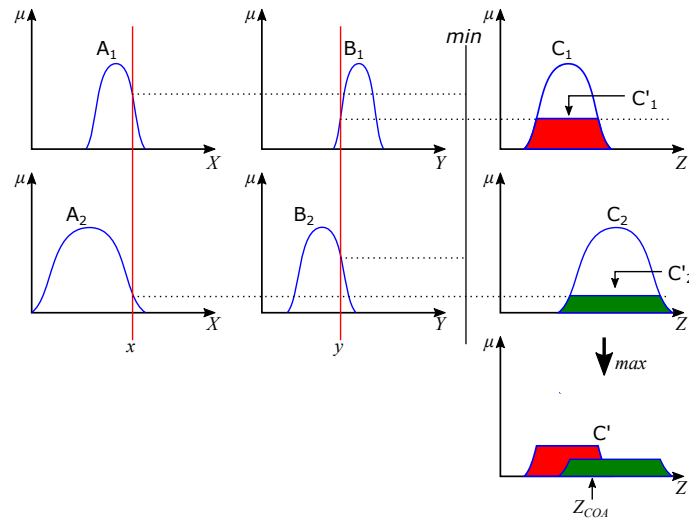


Figura 2.2: Sistema de inferencia Mamdani.

Como se mencionó anteriormente la estrategia de control basada en reglas tiene la siguiente forma

Si  $OA_1$  es  $y$   $OA_2$  es  $y$ ... Entonces  $CA_1$  es  $y$   $CA_2$  es...

Si  $OA_1$  es  $y$   $OA_2$  es  $y$ ... Entonces  $CA_1$  es  $y$   $CA_2$  es...

...

La cual mapea los atributos observables ( $OA_1, OA_2$ ) del sistema físico dado en sus atributos controlables ( $CA_1, CA_2$ ), donde

*Salida*  $\leftrightarrow$  *Atributo observable*

*Entrada*  $\leftrightarrow$  *Atributo controlable*

Cada  $OA_i, i = 1, 2, \dots$ , es una variable directamente medible y/o la diferencia entre cualquier variable y su valor de referencia asociado. Donde cualquier valor filtrado de cualquier atributo (por

ejemplo, cambio de posición) puede ser dentro de la premisa de una regla:

$$OA_1 \equiv e \equiv v_d - v \quad (2.8)$$

$$OA_2 \equiv \frac{de}{dt} \quad (2.9)$$

donde  $e$  puede ser el error de posición. Alternativamente en el caso de la implementación en tiempo discreto de un sistema de control difuso,  $OA_2 = e(t) - e(t - T)$  donde  $T$  es el llamado periodo de muestreo del sistema.

## 2.4. Definiciones de estabilidad

La teoría de estabilidad de Lyapunov [46] tiene como principal objetivo el estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos gobernado por ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+ \text{ es el tiempo,} \quad (2.10)$$

donde el vector  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  son los estados y  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  denota la condición inicial o estado inicial.

Se asume que la función  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua en  $t$  y  $x(t)$ , y además se supone que:

- La ecuación (2.10) tiene una solución única en el intervalo de  $t \in [0, \infty)$  correspondiente a cada condición inicial  $x(0)$ .
- Si  $x(t)$  es la solución de (2.10) correspondiente a la condición inicial  $x(0)$  entonces  $x(t)$  depende de manera continua del estado inicial  $x(0)$ .

**Comentario 1** Si la función  $f$  no depende explícitamente del tiempo, i.e.,  $f(t, x(t)) = f(x(t))$ , la ecuación (2.10) se denomina autónoma. Si  $f(t, x(t)) = A(t)x(t) + u(t)$  con  $A(t)$  siendo una

matriz cuadrada de dimensión  $n$  y siendo  $A(t)$  y  $u(t)$  funciones únicamente dependientes de  $t$  o constantes entonces la ecuación (2.10) es lineal. En caso contrario es no lineal.

**Definición 7 (Equilibrio [46])** Un vector constante  $x_e \in \mathbb{R}^n$  es un equilibrio o estado de equilibrio del sistema (2.10) si

$$f(t, x_e) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.11)$$

**Definición 8 (Estabilidad [46])** El origen es un equilibrio estable (en el sentido de Lyapunov) de la ecuación (2.10) si para cada par de números  $\epsilon > 0$  y  $t_0 \leq 0$ , existe  $\delta = \delta(t_0, \epsilon) > 0$ , tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0. \quad (2.12)$$

En la figura 2.3 se muestra gráficamente el concepto de estabilidad

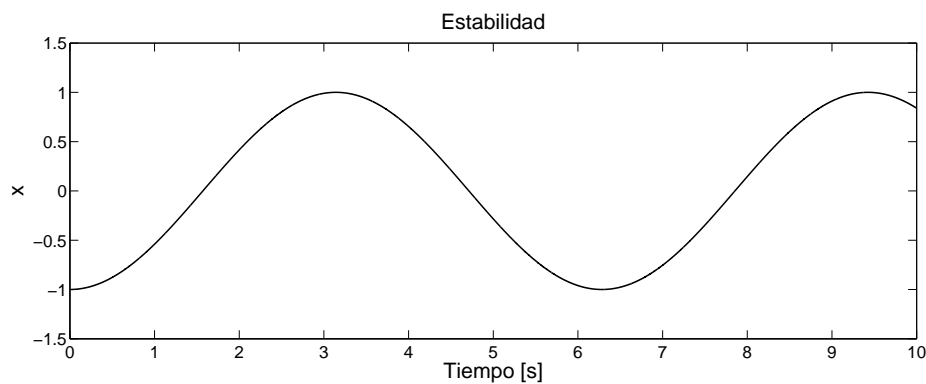


Figura 2.3: Estabilidad.

**Definición 9 (Estabilidad asintótica [46])** El origen  $x = 0 \in \mathbb{R}^n$  es un equilibrio asintóticamente estable de (2.10) si:

1. El origen es estable;

2. El origen es atractivo, i.e., para cada  $t_0 \geq 0$ , existe  $\delta' > 0$  tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty. \quad (2.13)$$

En la figura 2.4 se muestra gráficamente el concepto de estabilidad.

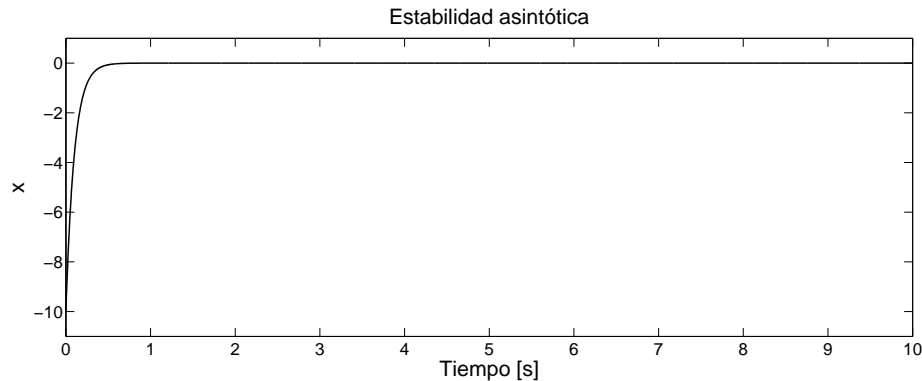


Figura 2.4: Estabilidad asintótica.

**Definición 10 (Función de Lyapunov [46])** Una función candidata de Lyapunov  $V(t, x)$  para la ecuación (2.10) es una función de Lyapunov para (2.10) si su derivada a lo largo de las trayectorias de (2.10) satisface:

$$\dot{V}(t, x) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (2.14)$$

y para  $\|x\|$  suficientemente pequeña.

**Definición 11 (Estabilidad asintótica global [46])** El origen de la ecuación (2.10) es un equilibrio uniformemente asintóticamente estable si:

1. el origen es uniformemente estable;
2. el origen es uniformemente atractivo, i.e., existe un número  $\delta' > 0$  tal que (9) mantenga un rango de convergencia independiente de  $t_0$ .

**Definición 12 (Función candidata de Lyapunov [46])** Una función  $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  es una función candidata de Lyapunov para el equilibrio  $x = 0 \in \mathbb{R}^n$  de (2.10) si:

1.  $V(t, x)$  es una función definida positiva localmente.
2.  $\frac{\partial V(t, x)}{\partial t}$  es una función continua con respecto a  $t$  y  $x$ .
3.  $\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}$  es una función continua con respecto a  $t$  y  $x$ .

**Definición 13 (Derivada de una función candidata de Lyapunov [46])** Sea  $V(t, x)$  una función candidata de Lyapunov para la ecuación (2.10). La derivada de  $V(t, x)$  a lo largo de las trayectorias de (2.10), denotada por  $\dot{V}(t, x)$  esta dada por

$$\dot{V}(t, x) = \frac{d}{dt}V(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)^T}{\partial x} f(t, x). \quad (2.15)$$

## 2.5. Conceptos de estabilidad en el sentido de Lyapunov

**Teorema 1 (Estabilidad [46])** El origen  $x = 0 \in \mathbb{R}^n$  es un punto de equilibrio estable de la ecuación (2.10), si existe una función candidata de Lyapunov  $V(t, x)$  tal que su derivada temporal satisfaga (2.14) al menos para  $\|x\|$  suficientemente pequeña.

**Teorema 2 (Estabilidad asintótica global [46])** El origen  $x = 0 \in \mathbb{R}^n$  es un estado de equilibrio asintóticamente estable en forma global de (2.10) si:

- el origen es estable;
- el origen es globalmente atractivo, esto es,

$$\|x(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{como } t \rightarrow \infty, \quad \forall x(t_0) \in \mathbb{R}^n, t_0 \leq 0.$$

**Teorema 3 (Estabilidad exponencial global [46])** *El origen de (2.10) es estable exponencialmente en forma global si existe una función candidata de Lyapunov  $V(t, x)$  y constantes positivas  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $p \geq 1$  tal que:*

- $\alpha\|x\|^p \leq V(t, x) \leq \beta\|x\|^p$ ;
- $\dot{V}(t, x) \leq -\gamma\|x\|^p, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

**Definición 14 (Ecuación con el lado derecho discontinuo [47])** *Sea la ecuación diferencial*

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (2.16)$$

*que es discontinua en  $x \in \mathbb{R}^n$  y sea para cada punto  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  el conjunto convexo cerrado más pequeño  $F(x, t)$  que contiene todos los puntos límite de  $f(x^*, t)$  cuando  $x^* \rightarrow x, t =$  constante,  $y(x^*, t) \in \mathbb{R}^{n+1}(U_{j-1}^N \partial G_j)$ .*

**Definición 15 (Dinámica cero [48])** *Dado*

$$\dot{\eta} = f_{\eta}(\eta, \xi) \quad (2.17)$$

$$\dot{\xi} = f_{\xi}(\eta, \xi, u) \quad (2.18)$$

*asúmase que existe una  $u$  tal que  $\xi \rightarrow 0$  de manera asintótica. Entonces haciendo  $\xi = 0$  en (2.17) resulta*

$$\dot{\eta} = f_{\eta}(\eta, 0) \quad (2.19)$$

*que se conoce como dinámica cero.*

De acuerdo con [37], el lema de comparación es una herramienta para calcular los límites en la solución de una ecuación diferencial sin calcular la solución en si. El lema de comparación

compara la solución de un diferencial desigualdad con la solución de una ecuación diferencial. Una función que satisface la desigualdad se llama una solución de la ecuación diferencial. El presente análisis consiste por lo tanto en proponer una desigualdad diferencial cuya solución superior o inferior acotada pueda ser comparada con las respuestas en el tiempo de la salida de la planta.

**Lema 1 (Lema de comparación [37])** *Considerando la ecuación escalar diferencial*

$$\dot{z} = f(t, z), \quad z(t_0) = z_0 \quad (2.20)$$

donde  $f(t, z)$  es continua en  $t$  y localmente Lipschitz en  $z$ , para todo  $t \geq 0$  y todo  $z \in B_z \subset \mathbb{R}$ . Sea  $[t_0, \infty)$  el intervalo máximo de la existencia de la solución  $z(t)$ , y suponiendo  $z(t) \in B_z$  para todo  $t \in [t_0, \infty)$ . Sea  $v(t)$  una función continua con el lado derecho derivable  $\dot{v}(t)$  que satisface la desigualdad diferencial

$$\dot{v}(t) \leq f(t, v(t)), \quad v(t_0) = z_0 \quad (2.21)$$

con  $v(t) \in B_u$  para todo  $t \in [t_0, \infty)$ . Entonces,  $v(t) \leq z(t)$  para todo  $t \in [t_0, \infty)$ .

**Ejemplo 1** *La ecuación diferencial escalar*

$$\dot{x} = f(x) = -(1 + x^2)x, \quad x(0) = a$$

tiene una solución única en  $[0, t_1)$  para un  $t_1 > 0$ , porque  $f(x)$  es localmente Lipschitz. Se propone  $v(t) = x^2(t)$ . La función  $v(t)$  es diferenciable y su derivada está dada por

$$\dot{v}(t) = 2x(t)\dot{x}(t) = -2x^2(t) - 2x^4(t) \leq -2x^2(t).$$

Por lo tanto,  $v(t)$  satisface la desigualdad diferencial

$$\dot{v}(t) \leq -2v(t), \quad v(0) = a^2.$$

Se propone  $z(t)$  como la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{z} = -2z, \quad z(0) = a^2 \quad \Rightarrow \quad z(t) = a^2 \exp^{-2t}.$$

Después, por el lema de comparación, la solución  $x(t)$  esta definida para todo  $t \geq 0$  y satisface

$$\|x(t)\| = \sqrt{v(t)} \leq \exp^{-t} \|a\|, \quad \forall t \geq 0.$$



## Capítulo 3

# MOTOR DE CORRIENTE DIRECTA Y PLATAFORMA EXPERIMENTAL

En esta sección se presenta el modelo dinámico de la plataforma experimental. El modelo dinámico considera un motor de corriente directa, actuando bajo condiciones inciertas tales como la fricción de Coulomb, el efecto del backlash y perturbaciones externas.

### 3.1. Descripción de la plataforma

Los controladores que se presentan en los siguientes capítulos se desarrollan en la plataforma experimental instalada en el laboratorio de robótica y control automático del Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital (CITEDI-IPN), la cual involucra un motor CD gobernado por el modelo dinámico (4.2)–(3.6) bajo los parámetros presentados en la tabla 3.1. Las constantes  $J$  y  $K$  son obtenidas de la hoja de datos que proporciona el fabricante, mientras que los parámetros de fricción fueron identificados siguiendo el procedimiento dado por Kelly et al. [49].

Tabla 3.1: Parámetros del motor CD.

Parámetro	Valor	Unidad
Inercia del motor ( $J$ )	$3.11 \times 10^{-5}$	Kgm <sup>2</sup>
Coefficiente de fricción viscosa ( $f_v$ )	$2.25 \times 10^{-5}$	Nms/rad
Coefficiente de fricción de Coulomb ( $f_c$ )	$7.745 \times 10^{-3}$	Nm
Constante del amplificador ( $K_a$ )	4.2	A/V
Coefficiente de rigidez ( $K$ )	10000	
Zona muerta ( $j_0$ )	0.0025	

En la figura 3.1 se muestra una fotografía de la base experimental y la figura 3.2 corresponde al diagrama de bloques de la plataforma.

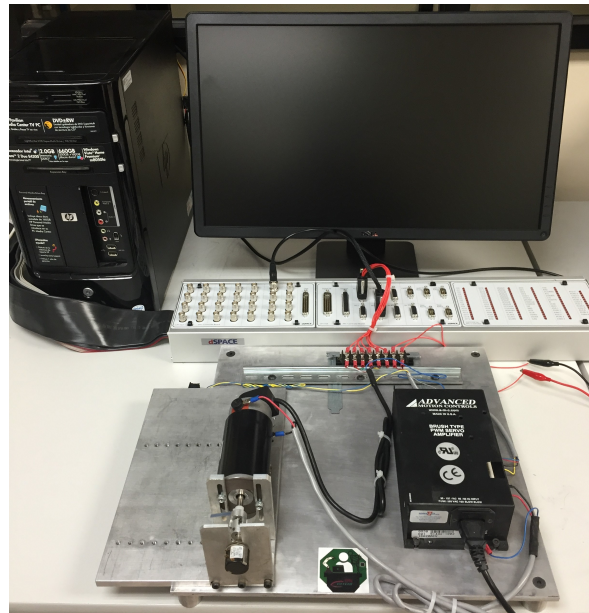


Figura 3.1: Base experimental.

La base experimental consiste en una computadora convencional con MATLAB/SIMULINK<sup>®</sup>, la cual envía y recibe la señal del motor a través de una tarjeta de adquisición de datos *dSPACE* DS1103, esta tarjeta procesa la información y se la envía al motor mediante un servo-amplificador

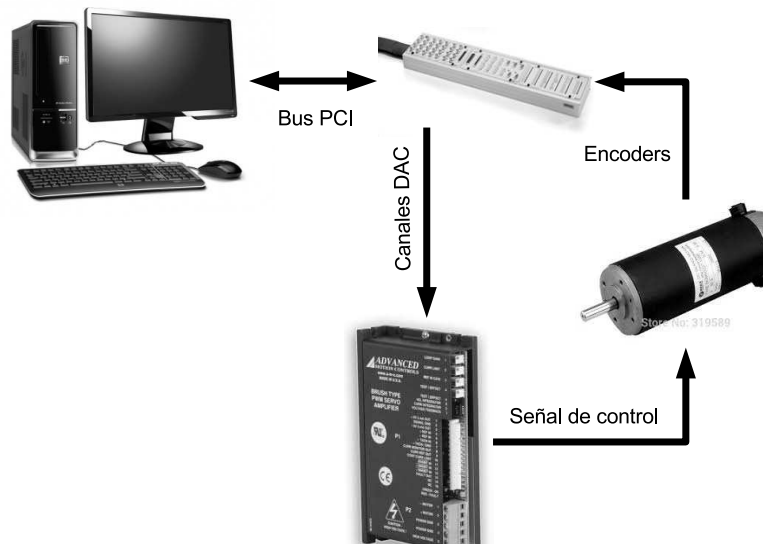


Figura 3.2: Diagrama de bloques de la base experimental.

lineal modelo 16A20ACV manufacturado por *Advanced Motion Controls*. La tarjeta a su vez recibe las mediciones de posición del motor obtenidas mediante el encoder y las envía a la computadora, donde se estima la velocidad a través del bloque  $d/dt$ , sin embargo se puede implementar un observador de velocidad.

A continuación se en listan las características de la tarjeta *dSPACE DS1103*

- Procesador PPC 750GX, reloj 1 Ghz.
- Memoria de programa 32 MB, memoria de datos 96 MB.
- Temporizador de 32 bit, resolución 30 ns.
- Conversor A/D: 16 canales multiplexados, 4 canales paralelos. Resolución 16 bit, entrada  $\pm 10$  V.
- Conversor D/A: 8 canales, resolución 16 bit, salida  $\pm 10$  V.

- Encoder digital: 6 canales independientes, simple (TTL) ó diferencial (RS422).
- Encoder analógico: 1 can, 1  $V_{pp}$  diferencial ó 11  $\mu A_{pp}$  diferencial.

## 3.2. Modelo dinámico

Se considera un motor CD operando bajo condiciones inciertas debido a la fricción y backlash.

El motor CD se rige por la siguiente ecuación dinámica [12]

$$J\ddot{q} = u - F(\dot{q}) - F_1(t) + w(t) \quad (3.1)$$

donde  $q(t) \in \mathbb{R}$  es la posición angular del motor,  $\dot{q}(t) \in \mathbb{R}$  es la velocidad angular del motor,  $u(t) \in \mathbb{R}$  es la entrada de control,  $t \in \mathbb{R}$  es la variable de tiempo, y  $w(t)$  son perturbaciones externas desconocidas pero uniformemente acotadas, es decir

$$\|w(t)\| \leq W, \quad \text{para toda } t. \quad (3.2)$$

El parámetro  $J$  denota la inercia motor y  $F(\dot{\theta})$  es la fuerza de fricción gobernada por el siguiente modelo estático

$$F(\dot{q}) = f_v \dot{q} + f_c \text{sign}(\dot{q}), \quad (3.3)$$

donde el primer término define la fricción viscosa con un coeficiente positivo  $f_v$  y el último término es el modelo de la fricción de Coulomb con un coeficiente positivo  $f_c$ , el cual es un modelo ideal

multi-valuado para velocidad cero, es decir,

$$\text{sign}(\dot{q}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dot{q} > 0 \\ [-1, 1] & \text{si } \dot{q} = 0 \\ -1 & \text{si } \dot{q} < 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Por lo tanto, la fricción seca descrita por la fuerza de fricción de Coulomb en reposo, puede tomar cualquier valor en el segmento  $[-f_c, f_c]$  siendo una fuente de incertidumbre en la planta. En otras palabras, el error de posición en estado estable es causado por la fricción seca.

Finalmente,  $F_1(t)$  (véase figura 3.3), esta dado por

$$F_1(t) = \begin{cases} -K(\Delta\theta - j_0) & \text{si } \Delta\theta \geq j_0 \\ 0 & \text{si } |\Delta\theta| < j_0 \\ -K(\Delta\theta + j_0) & \text{si } \Delta\theta \leq -j_0 \end{cases} \quad (3.5)$$

describe el backlash como en [1] en términos de la magnitud máxima de éste  $j_0 > 0$ , el coeficiente de rigidez es  $K > 0$ , y la desviación  $\Delta\theta(t) = q(t) - \theta(t)$  de la posición del motor  $q(t)$  respecto a la posición de la carga  $\theta(t)$  la cual esta gobernada por

$$J\ddot{\theta}(t) = -F_1(t). \quad (3.6)$$

En todo momento, el significado preciso de la ecuación diferencial (4.2), (5.4) continua a trozos por el lado derecho es definida en el sentido de Filippov [47].

La representación en espacio de estados para el sistema (4.2)–(3.6) en términos del error

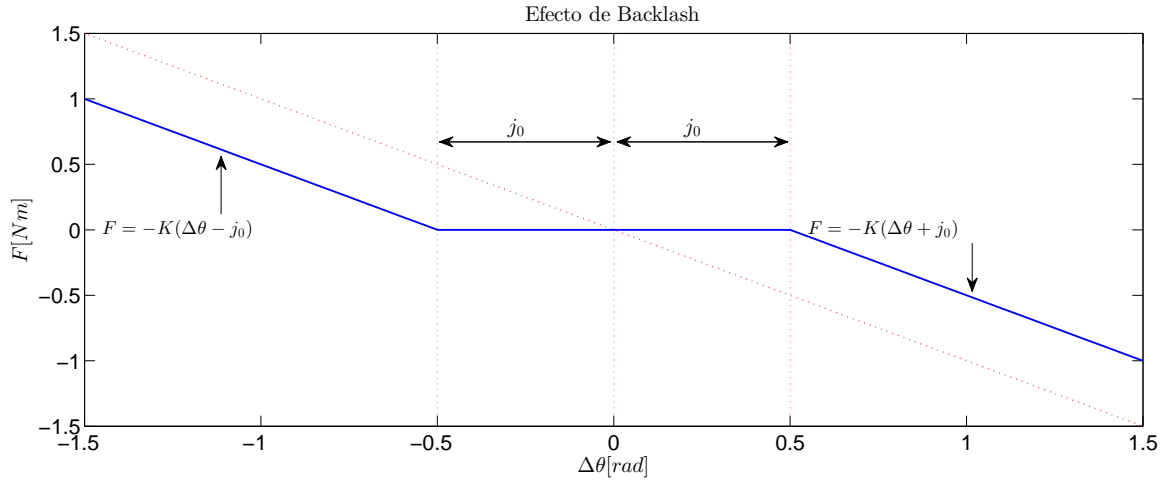


Figura 3.3: Backlash.

$e = (e_1, e_2, e_3, e_4)^T = (\theta - \theta_d, \dot{\theta} - \dot{\theta}_d, q - F(\theta_d), \dot{q} - \dot{F}(\theta_d))$  esta dada por

$$\dot{e}_1 = e_2$$

$$\dot{e}_2 = \frac{1}{J}F_1(e) - \ddot{\theta}_d$$

$$\dot{e}_3 = e_4$$

(3.7)

$$\begin{aligned} \dot{e}_4 = & -\frac{f_v}{J}(e_4 + \dot{F}(\theta_d)) - \frac{f_c}{J} \text{sign}(e_4 + \dot{F}(\theta_d)) \\ & - \frac{1}{J}F_1(e) - \ddot{\theta}_d + \frac{1}{J}u + \frac{1}{J}w(t), \end{aligned}$$

donde  $F(\theta_d(t))$  es la posición angular deseada del motor en términos de la posición deseada de la carga y  $F_1(e)$  es el fenómeno del backlash en términos de los estados del sistema. Así, el problema de control difuso es sintetizar  $u(t)$  para dirigir la posición y velocidad de la carga  $x = (e_1, e_2)^T$  a cero.

## Capítulo 4

# CONTROL DIFUSO PARA REGULACIÓN DE UN MOTOR CD

### 4.1. Preámbulo

En el presente capítulo se presenta la solución al problema de regulación y en análisis de estabilidad para un motor CD operando bajo condiciones inciertas y dirigido por un controlador difuso tipo Mamdani. Es importante mencionar que el diseño de los controladores parte de la idea de que se desconoce el modelo del sistema y solo se cuenta con la información que proporciona el experto de la planta [44] [50].

Los casos de estudio se presentan en dos secciones, en la sección 4.2 se expone el diseño de un controlador considerando solamente fricción. En la sección 4.3 se presenta el diseño del controlador asumiendo presencia de fricción y backlash debido al acoplamiento imperfecto entre la carga y el actuador.

### 4.1.1. Objetivo de control

El *problema de control* se plantea de la siguiente manera: dada la posición deseada  $\theta_d(t) \in \mathbb{R}$ , el objetivo de control es llevar la posición de la carga  $\theta(t)$  hacia un punto deseado  $\theta_d(t)$  que es constante ( $\dot{\theta}_d = \ddot{\theta}_d = 0 \forall t$ ), en otras palabras, se debe satisfacer que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\theta_d(t) - \theta(t)\| = 0, \quad (4.1)$$

para una condición inicial arbitraria  $\theta(0) \in \mathbb{R}$  a pesar de la presencia de perturbaciones externas.

## 4.2. Solución al problema de regulación de un motor CD con fricción

Se propone el diseño de un controlador difuso tipo Mamdani para un motor CD el cual es gobernado por las ecuaciones

$$J\ddot{q} = u - F(\dot{q}) + w(t) \quad (4.2)$$

con perturbaciones externas desconocidas pero uniformemente acotadas, es decir

$$\|w(t)\| \leq W, \quad \text{para toda } t. \quad (4.3)$$

La fricción es descrita por el siguiente modelo estático

$$F(\dot{q}) = f_v \dot{q} + f_c \text{sign}(\dot{q}), \quad (4.4)$$

Se asume que el modelo de la planta es desconocido, y sin efecto de backlash.

El objetivo es diseñar la base de reglas difusas para alcanzar el objetivo de control (4.1). Para esto, se diseña un controlador difuso PD, con dos entradas y una salida. Las entradas serán el



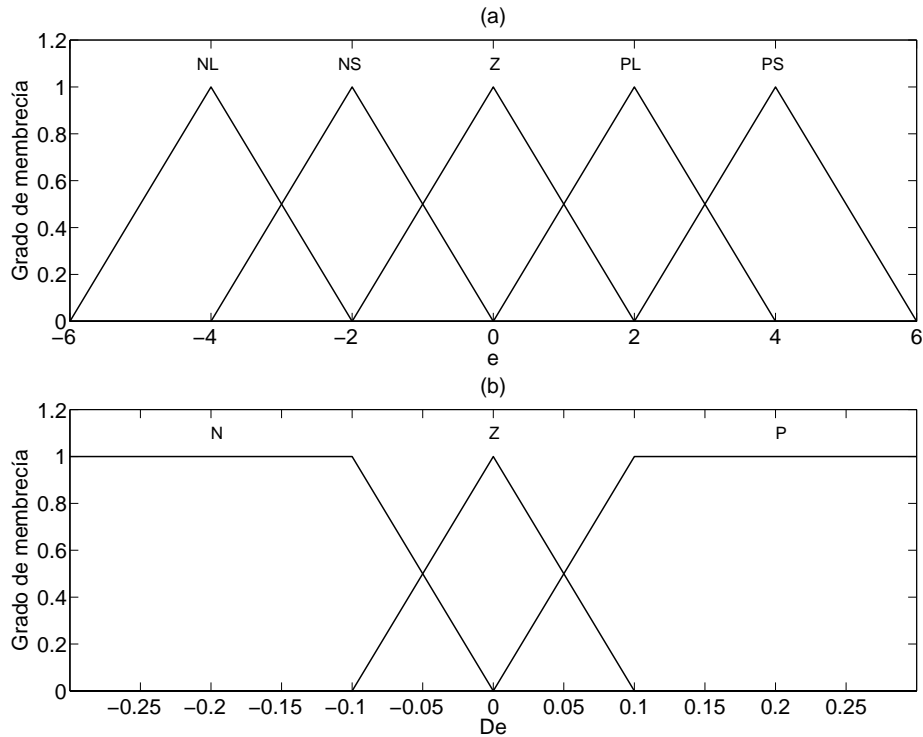


Figura 4.1: Funciones de membresía de las variables de entrada ( $e$ ,  $\dot{e}$ ).

error  $e(t) = \theta(t) - \theta_d(t)$  y el cambio en el error  $\dot{e}(t) = \dot{\theta}(t)$ , para el error se utilizan cinco funciones de membresía, todas triangulares y para el cambio en el error, tres funciones de membresía trapezoidales a los extremos y triangular al centro; como salida se utilizó la corriente aplicada al motor  $u(t)$  dividida en cinco funciones de membresía triangulares. Las funciones de membresía se pueden observar en las figuras 4.8 y 4.9. La figura 4.8 corresponde a las funciones de membresía para las entradas y la figura 4.9 representa las funciones de membresía de la salida.

La base de reglas difusas está compuesta por quince reglas difusas, en la tabla 4.1 se puede observar un resumen de las reglas difusas. En la figura 4.3 se muestra las curvas producidas por las entradas y la salida.

En las figuras 4.4–4.6 se muestra los resultados obtenidos en la simulación. La figura 4.4 muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado, donde es posible observar que se cumple el

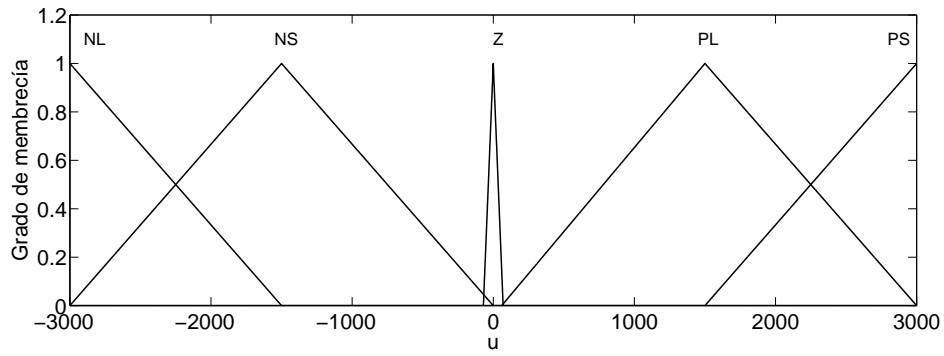
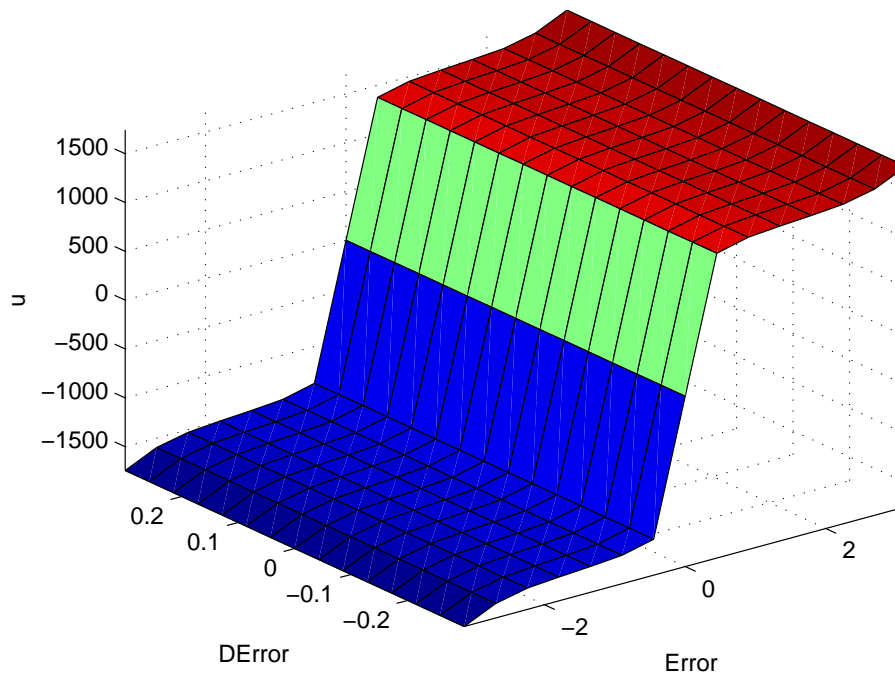
Figura 4.2: Funciones de membresía de la variable de salida ( $u$ ).

Figura 4.3: Superficie de control.

Tabla 4.1: Conjunto de reglas difusas donde el prefijo *N* es Negativo, *P* es Positivo, *Z* es Cero, *S* es Pequeño, y *B* es Grande.

$e \backslash \dot{e}$	<b>N</b>	<b>Z</b>	<b>P</b>
<b>SN</b>	SN	SN	SN
<b>BN</b>	BN	BN	BN
<b>Z</b>	Z	Z	Z
<b>SP</b>	SP	SP	SP
<b>BP</b>	BP	BP	BP

objetivo de control. La figura 4.5 muestra el error de posición, a pesar de que en la figura se puede observar que la trayectoria converge en tiempo finito, se asume que el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable (véase Definición 9). Finalmente, la entrada de control es presentada en la figura 4.6.

#### 4.2.1. Análisis de estabilidad

Para realizar un análisis de estabilidad determinista se utiliza el Lema de comparación, (véase Lema 1). Considerando que existe una señal de control difusa  $u(t)$  que sea capaz de llevar la posición y la velocidad al origen, esto es una solución no-negativa de  $x(t)$  de (4.2)–(5.4) es dominada  $v(t) \leq z(t)$  por la solución

$$z(x(t), \dot{x}(t)) = |x(t_0)| \exp^{\alpha(t-t_0)}, \quad \alpha > 0 \quad (4.5)$$

de la ecuación diferencial

$$\dot{z} = \alpha z \quad (4.6)$$

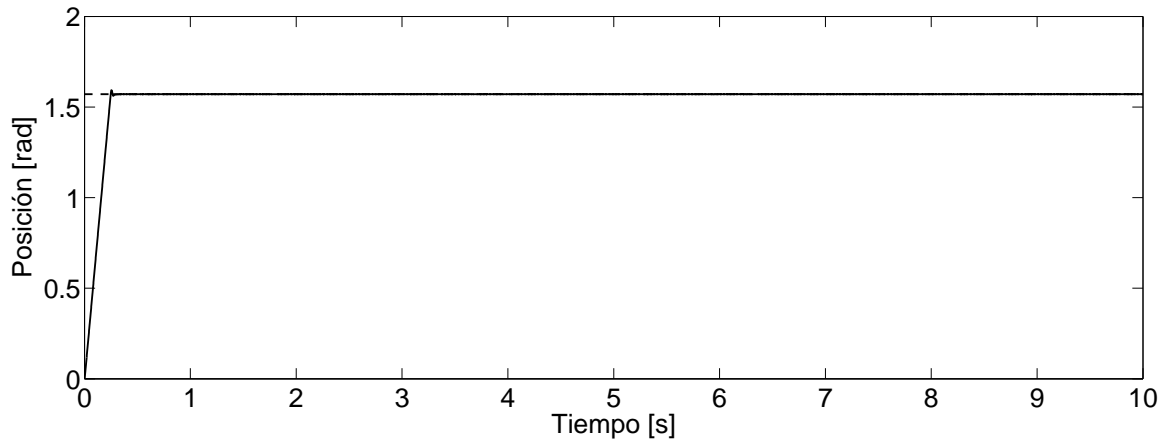


Figura 4.4: Posición del motor (línea sólida) y posición deseada  $\theta_d = \pi/2$  rad (línea punteada).

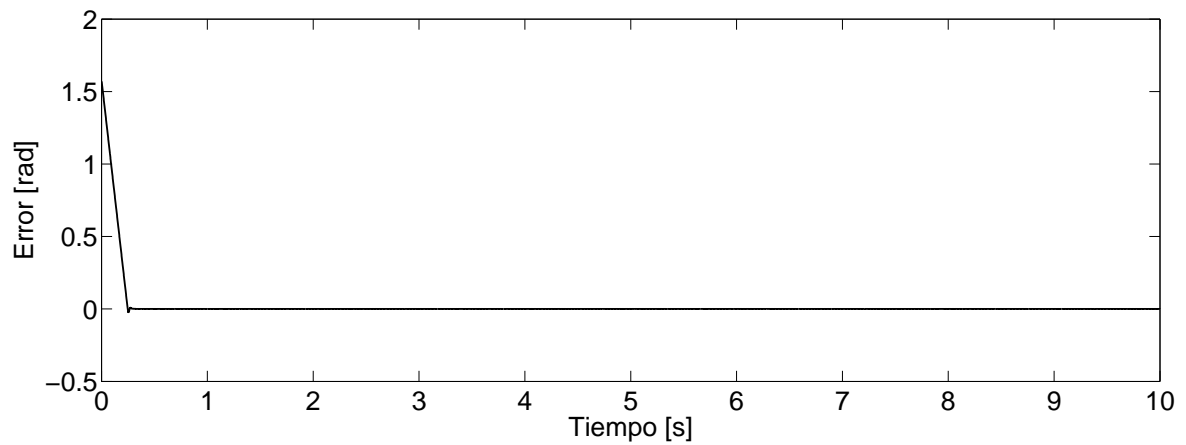


Figura 4.5: Error de posición angular del motor  $e(t) = \theta(t) - \theta_d(t)$ .

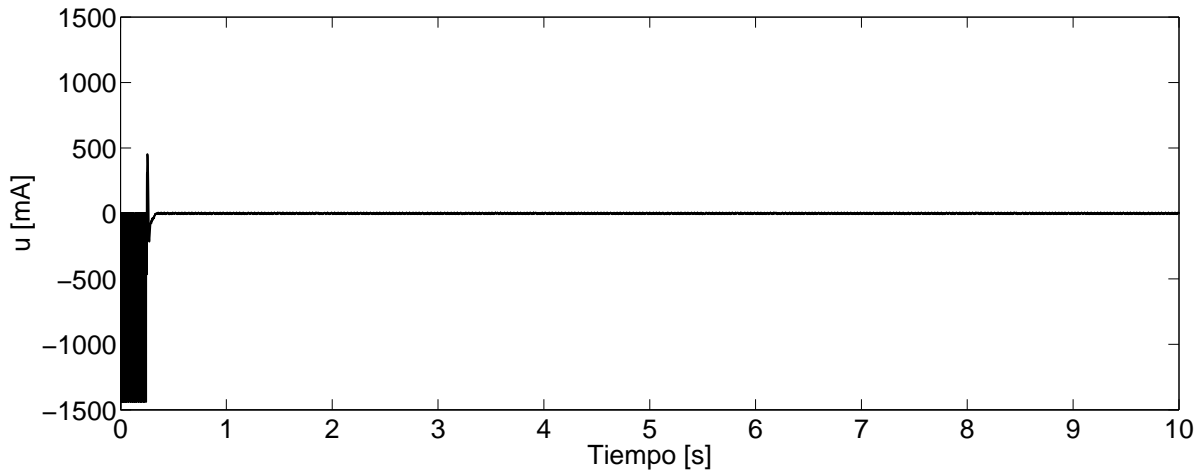


Figura 4.6: Señal de control.

cuya solución para diferentes condiciones iniciales esta acotada por la derivada de la función de almacenamiento  $v$ , la cual es,  $\dot{v}(x, \dot{x}) \leq -\alpha v$ , como se puede observar en la figura 4.7 donde  $\dot{v}$  es negativa definida para toda  $(x, \dot{x})^T$ .

### 4.3. Solución al problema de regulación de un motor CD con fricción y backlash

Se plantea un controlador difuso tipo Mamdani, el cual sea capaz de alcanzar el objetivo de control propuesto en (4.1) para un motor CD con fricción y backlash gobernado por las ecuaciones

$$J\ddot{q} = u - F(\dot{q}) + w(t) \quad (4.7)$$

con perturbaciones externas desconocidas pero uniformemente acotadas, es decir

$$\|w(t)\| \leq W, \quad \text{para toda } t. \quad (4.8)$$

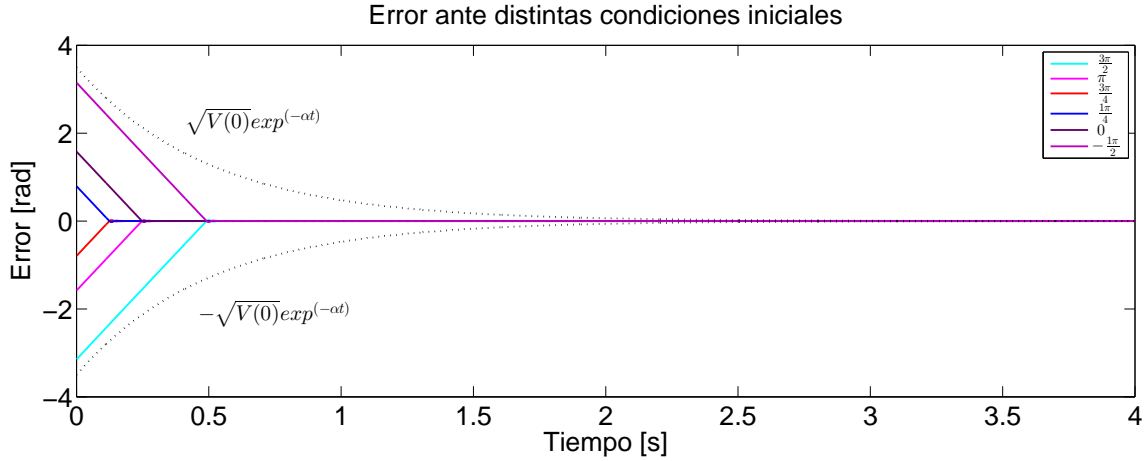


Figura 4.7: Error de posición de la carga (líneas continuas) y solución superior e inferior de la desigualdad diferencial (líneas discontinuas)  $\alpha = \lambda_{\min}\{Q\}/2 = 2$ .

La fricción es descrita por el siguiente modelo estático

$$F(\dot{q}) = f_v \dot{q} + f_c \text{sign}(\dot{q}), \quad (4.9)$$

Finalmente,  $F_1(t)$ , esta dado por

$$F_1(t) = \begin{cases} -K(\Delta\theta - j_0) & \text{si } \Delta\theta \geq j_0 \\ 0 & \text{si } |\Delta\theta| < j_0 \\ -K(\Delta\theta + j_0) & \text{si } \Delta\theta \leq -j_0 \end{cases} \quad (4.10)$$

describe el backlash como en [1] en términos de la magnitud máxima de éste  $j_0 > 0$ , el coeficiente de rigidez es  $K > 0$ , y la desviación  $\Delta\theta(t) = q(t) - \theta(t)$  de la posición del motor  $q(t)$  respecto a la posición de la carga  $\theta(t)$  la cual esta gobernada por

$$J\ddot{\theta}(t) = -F_1(t). \quad (4.11)$$

Teniendo como propósito lo anterior se plantea la base de reglas difusas tomando como an-

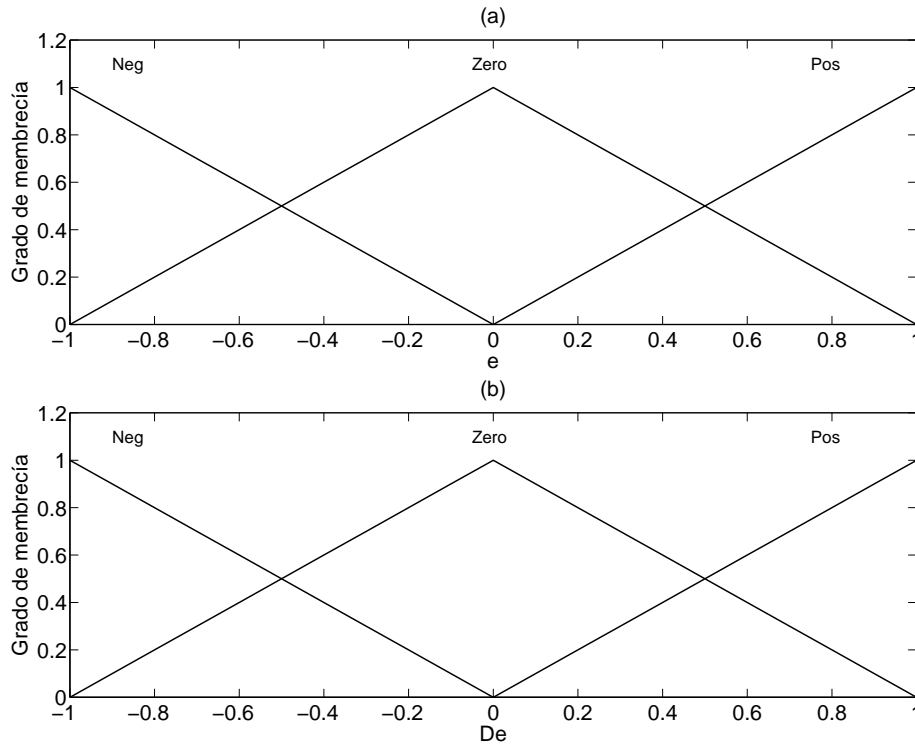


Figura 4.8: Funciones de membresía de las variables de entrada ( $e, \dot{e}$ ).

tecedentes el error  $e(t) = \theta(t) - \theta_d(t)$  y el cambio en el error  $\dot{e}(t) = \dot{\theta}(t)$  y como consecuente la señal de control  $u(t)$ . Las funciones de membresía se pueden observar en las figuras 4.8 y 4.9. La figura 4.8 (a) corresponde a las funciones de membresía para el error y la figura 4.8 (b) para el cambio en el error y la figura 4.9 representa las funciones de membresía de la salida.

En la tabla 4.2 se muestra un resumen del conjunto de reglas difusas, donde la primer columna y el primer renglón corresponden a las variables lingüísticas de la entrada, y los restantes corresponden a las variables lingüísticas de la salida. La figura 4.10 muestra las curvas producidas por las entradas y salida del controlador difuso.

Considerando el sistema (4.7)– (4.11), cuyos parámetros se proporcionan en la Tabla 3.1, se presentan los resultados obtenidos de la simulación del sistema en lazo cerrado. Para la simulación, se requiere que la carga se mueva desde posición inicial  $\theta(0) = 0$  rad siguiendo la trayectoria

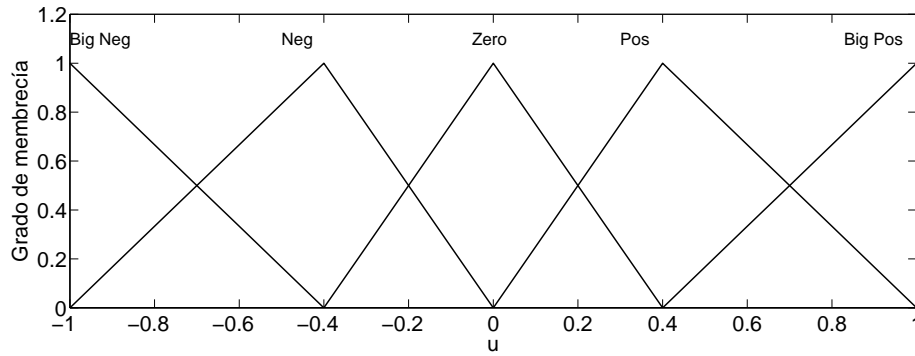
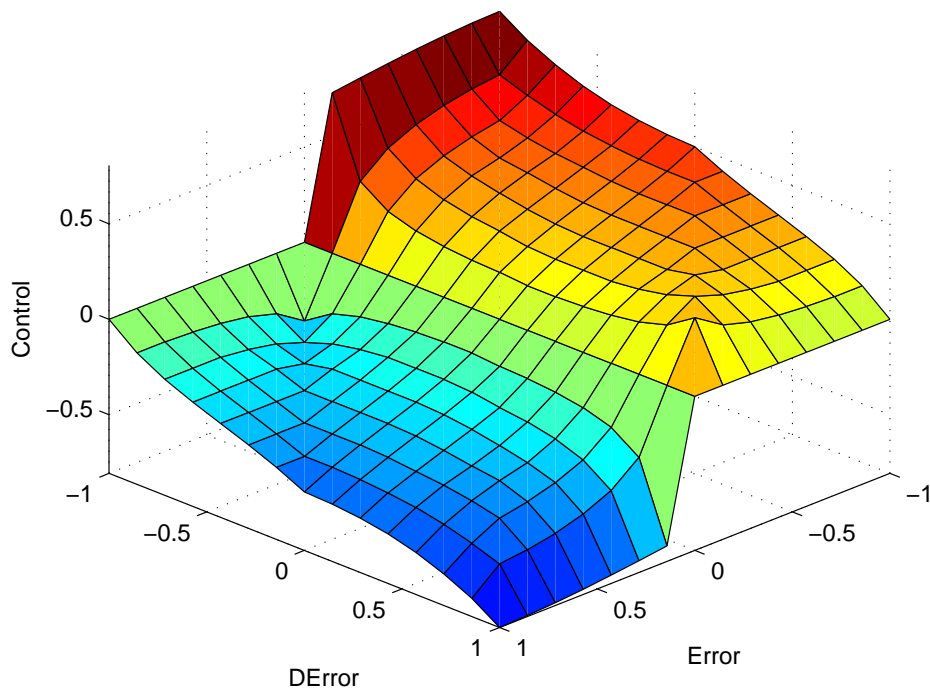
Figura 4.9: Funciones de membresía de la variable de salida ( $u(t)$ ).

Figura 4.10: Superficie de control.



Tabla 4.2: Conjunto de reglas difusas para el regulador de posición del sistema con fricción y backlash.

$\begin{matrix} & \dot{e} \\ e \end{matrix}$	<b>Neg</b>	<b>Zero</b>	<b>Pos</b>
<b>Neg</b>	Big Pos	Pos	Zero
<b>Zero</b>	x	Zero	x
<b>Pos</b>	Zero	Neg	Big Neg

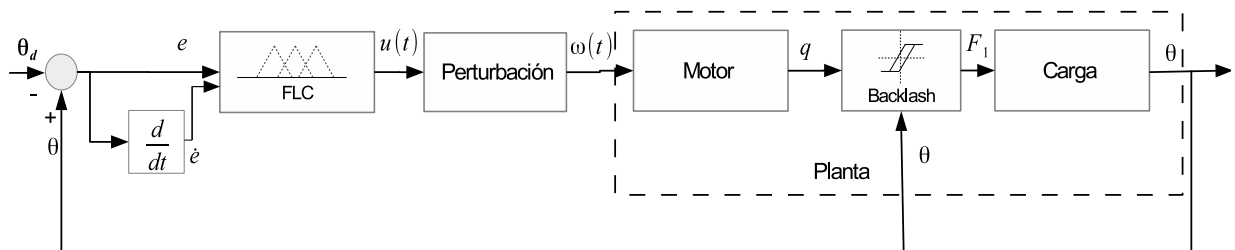


Figura 4.11: Retroalimentación del sistema con un controlador por lógica difusa

deseada  $\theta_d = \pi/2$  rad. La velocidad inicial fue establecida en  $\dot{\theta}(0) = 0$  rad/s. La retroalimentación del sistema con un controlador por lógica difusa se muestra en la figura 4.3, normalmente el bloque  $d/dt$  es utilizado para obtener la derivada temporal, sin embargo se puede utilizar un observador para evitar ruido en el controlador.

En la figura 4.12 se muestra la respuesta del sistema y la señal de control para un motor CD con fricción y backlash, dirigido por un controlador difuso tipo Mamdani. La figura 4.12(a) muestra que la posición de la carga alcanza la trayectoria deseada. En la figura 4.12(b) se presenta la posición del motor, donde es posible observar un pequeño error en estado estable el cual permite

que la carga logre llevar a la posición deseada. El error de posición en estado estable se presenta en la figura 4.12(c) donde el tiempo de asentamiento fue  $T \approx 5.5$  s. Finalmente, la figura 4.12(d) muestra la señal de control  $u(t)$ .

### 4.3.1. Análisis de estabilidad

Para realizar el análisis de estabilidad se toma en cuenta el error de posición de la carga presentada en la figura 4.12 como la trayectoria a analizar. Considerando que existe una señal de control difusa  $u(t)$  capaz de dirigir el error de posición y de velocidad al origen y existe una función definida positiva  $V(t) = x^T P x$ , donde  $x = (e, \dot{e})^T \in \mathbb{R}^2$  y  $P$  es una matriz simétrica definida positiva. Suponiendo que existe una matriz positiva definida y simétrica  $Q$ , la cual su derivada en el tiempo de  $V$  a lo largo de la solución del sistema en lazo cerrado debe satisfacer

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}\{Q\}\|x\|^2 = -\lambda_{\min}\{Q\}V. \quad (4.12)$$

Es importante observar que la matriz  $P$  puede ser una solución de la ecuación de Lyapunov  $PA + A^T P = -Q$ , donde la matriz  $A$  se puede obtener linealizando el modelo de la planta, sin embargo, para el siguiente análisis solo es necesario el valor propio mínimo de  $Q$ . Siendo  $z(t)$  la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{z} = -\lambda_{\min}\{Q\}z \quad (4.13)$$

la cual esta dada por

$$z(t) = z(0)e^{-\lambda_{\min}\{Q\}t}. \quad (4.14)$$

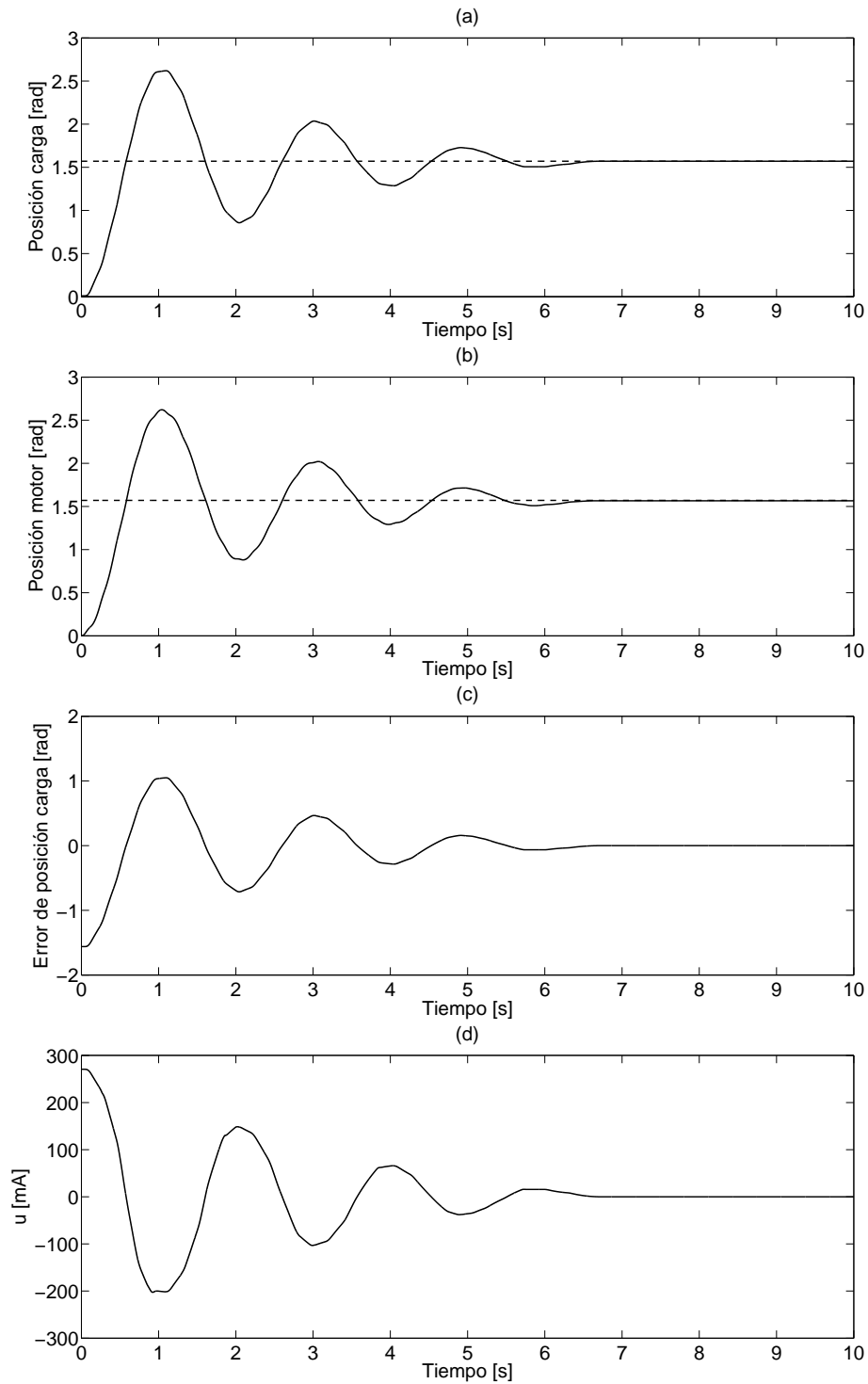


Figura 4.12: (a) Posición de la carga, (b) Posición del motor, (c) Error de posición de la carga, y (d) señal de control.

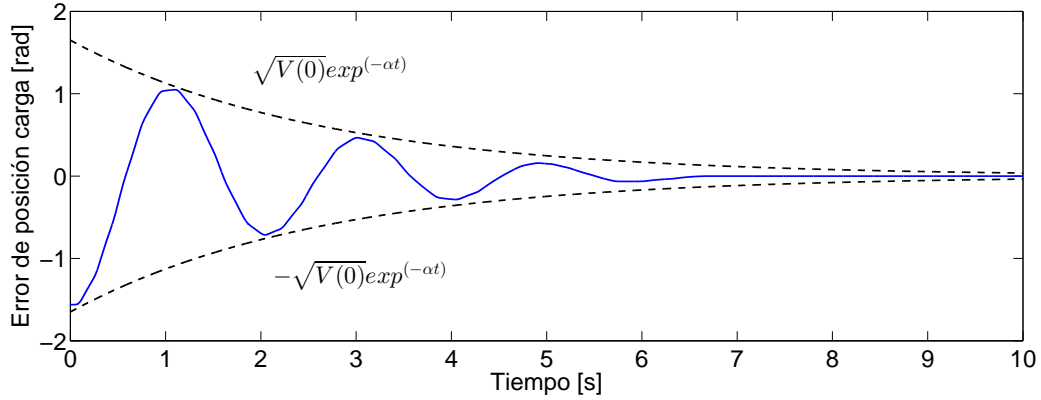


Figura 4.13: Error de posición de la carga (línea continua) y solución superior e inferior de la desigualdad diferencial (líneas discontinuas) donde  $\alpha = \lambda_{\min}\{Q\}/2 = 0.38$ .

Por el Lema de comparación, la solución  $x(t)$  esta acotada por

$$\|x(t)\| = \sqrt{V(t)} \leq \sqrt{V(0)} \exp\left\{-\frac{\lambda_{\min}\{Q\}}{2}t\right\} \quad (4.15)$$

para todo  $t \geq 0$ . La figura 4.13 muestra la solución de la desigualdad diferencial (4.12), bajo  $V(0) = e(0)^2 + \dot{e}(0)^2 = \pi^2/4$  y  $\lambda_{\min}\{Q\} = 0.76$ , es una cota de la respuesta en el tiempo del sistema. Esta ultima desigualdad envuelve una rango de respuestas.

### 4.3.2. Análisis de estabilidad de la dinámica cero

Para demostrar estabilidad de los estados  $(e_3, e_4)^T$  del sistema (3.7), donde  $u$  es la señal de control acotada, es decir,  $\|u\| < U^+$ , se considera que  $(e_1, e_2)^T = 0$ , es decir,

$$\dot{e}_3 = e_4 \quad (4.16)$$

$$\dot{e}_4 = -\frac{fv}{J}e_4 - \frac{fc}{J}\text{sign}(e_4) + \frac{K}{J}e_3 + \frac{Kj_0}{J}\text{sign}(e_3) - \frac{1}{J}u. \quad (4.17)$$

Partiendo de que

$$\frac{1}{J}F_1(e) = 0$$

y dado que (5.5) se puede representar como

$$F_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\Delta\theta| \leq j_0 \\ K\Delta\theta - Kj_0 \text{sign}(\Delta\theta) & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (4.18)$$

entonces

$$Ke_3 - Kj_0 \text{sign}(e_3) = 0. \quad (4.19)$$

Despejando  $e_3$  de (4.19) se obtiene que

$$e_3 \in [-j_0, j_0]. \quad (4.20)$$

Revisando la estabilidad de  $e_4$  se considera la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}Ke_3^2 + \frac{1}{2}Je_4^2. \quad (4.21)$$

La derivada temporal de (4.21) para la solución de la ecuación en lazo cerrado (3.7) esta dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= Ke_3\dot{e}_3 + Je_4\dot{e}_4 \\ &= Ke_3e_4 + e_4[-f_v e_4 - f_c \text{sign}(e_4) - Ke_3 + Kj_0 \text{sign}(e_3) + u] \\ &= -f_v e_4^2 - f_c |e_4| + e_4 Kj_0 \text{sign}(e_3) + ue_4 \\ &\leq -f_v e_4^2 - f_c |e_4| + Kj_0 |e_4| + U^+ e_4 \\ &= -[f_v e_4 + f_c - Kj_0 - U^+] |e_4| \end{aligned}$$

Para garantizar que  $\dot{V}$  sea negativa semi-definida es necesario que  $f_v e_4 + f_c - K j_0 - U^+ > 0$ . Lo cual se garantiza si

$$e_4 > \frac{U^+ - f_c + K j_0}{f_v}.$$

Por lo tanto se garantiza acotamiento de  $(e_3, e_4)^T$ .

#### 4.4. Comentarios

La condición heurística de un controlador difuso tipo Mamdani, sumado a un modelo de libre diseño de control, no hace posible predecir analíticamente la estabilidad del sistema en lazo cerrado forma directa. Este último motiva el uso del principio de comparación para un motor de corriente continua acoplado junto con el controlador difuso tipo Mamdani. Dado que la naturaleza lineal de la planta, es posible proponer una solución exponencial de una desigualdad diferencial lineal que puede ser una función de almacenamiento también llamada función de Lyapunov.

## Capítulo 5

# CONTROL DIFUSOS PARA SEGUIMIENTO DE UN MOTOR CD

### 5.1. Preámbulo

Durante el presente capítulo se mostrará la solución al problema de seguimiento en un motor CD operando bajo condiciones inciertas y gobernado por un controlador difuso tipo Mamdani, luego se presentara el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov. Al igual que en el capítulo 4 el objetivo principal es el diseñar un controlador asumiendo la ausencia del modelo matemático de la planta.

#### 5.1.1. Objetivo de control

El *problema de control* se formula de la siguiente manera: dada la trayectoria deseada  $\theta_d(t) \in \mathbb{R}$ , el objetivo de control es llevar la posición de la carga  $\theta(t)$  hacia la trayectoria deseada  $\theta_d(t)$ ,

es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\theta_d(t) - \theta(t)\| = 0, \quad (5.1)$$

para cualquier condición inicial arbitraria  $\theta(0) \in \mathbb{R}$  a pesar de la presencia de perturbaciones externas.

## 5.2. Solución al problema de seguimiento de un motor CD con fricción y backlash

Se plantea el diseño de un controlador difuso tipo Mamdani para un motor CD con el propósito de cumplir el objetivo de control (5.1) el cual esta gobernado por las siguientes ecuaciones

$$J\ddot{q} = u - F(\dot{q}) + w(t) \quad (5.2)$$

con perturbaciones externas desconocidas pero uniformemente acotadas, es decir

$$\|w(t)\| \leq W, \quad \text{para toda } t. \quad (5.3)$$

La fricción es descrita por el siguiente modelo estático

$$F(\dot{q}) = f_v \dot{q} + f_c \text{sign}(\dot{q}), \quad (5.4)$$

Finalmente,  $F_1(t)$ , esta dado por

$$F_1(t) = \begin{cases} -K(\Delta\theta - j_0) & \text{si } \Delta\theta \geq j_0 \\ 0 & \text{si } |\Delta\theta| < j_0 \\ -K(\Delta\theta + j_0) & \text{si } \Delta\theta \leq -j_0 \end{cases} \quad (5.5)$$



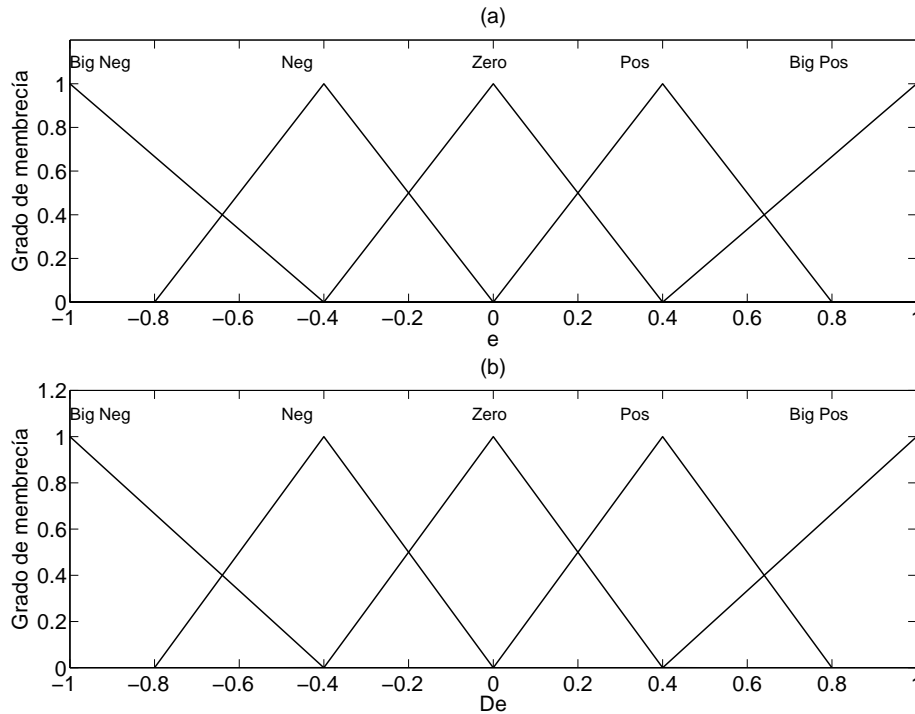


Figura 5.1: Funciones de membresía de las variables de entrada ( $e, \dot{e}$ ).

describe el backlash como en [1] en términos de la magnitud máxima de éste  $j_0 > 0$ , el coeficiente de rigidez es  $K > 0$ , y la desviación  $\Delta\theta(t) = q(t) - \theta(t)$  de la posición del motor  $q(t)$  respecto a la posición de la carga  $\theta(t)$  la cual esta gobernada por

$$J\ddot{\theta}(t) = -F_1(t). \quad (5.6)$$

La base de reglas difusas esta formada por dos entradas y una salida. El error  $e(t) = \theta(t) - \theta_d(t)$  y el cambio en el error  $\dot{e}(t) = \dot{\theta}(t) - \dot{\theta}_d(t)$  fueron seleccionados como entradas, ambas están divididas en cinco funciones de membresía triangulares y como salida se utiliza la corriente aplicada al motor  $u(t)$ . En las figuras 5.1 y 5.2 se muestran las funciones de membresía seleccionadas.

En la tabla 5.1 se muestra un resumen de las 21 reglas difusas utilizadas. La figura 5.3 muestra la superficie producida por las entradas y salida.

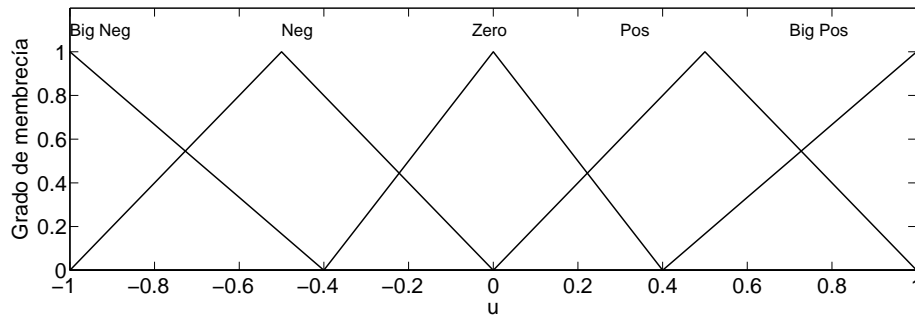
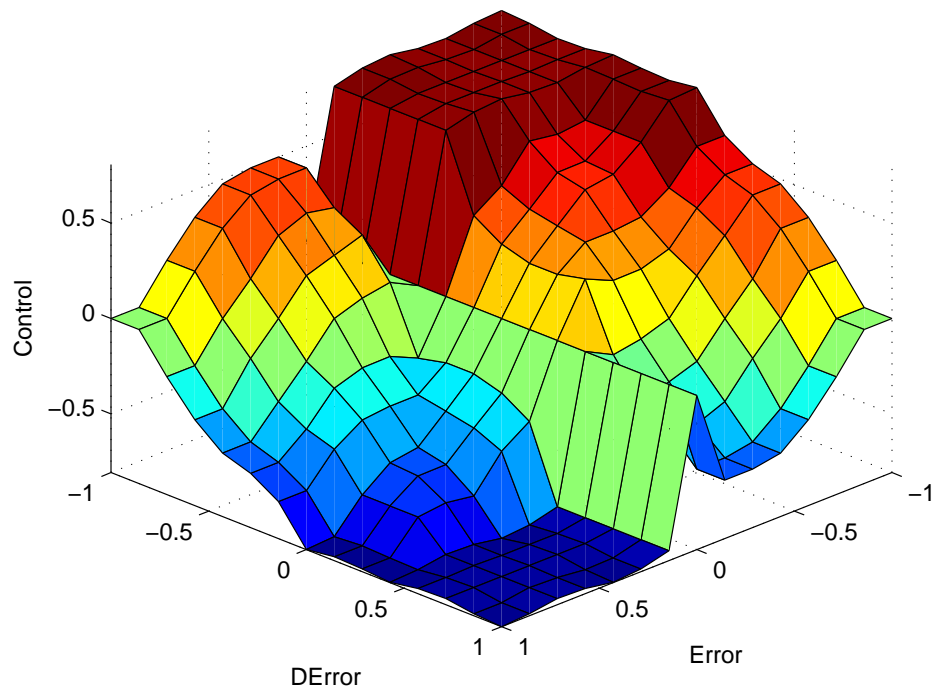
Figura 5.2: Funciones de membresía de la variable de salida ( $u$ ).

Figura 5.3: Superficie de control.

Tabla 5.1: Conjunto de reglas difusas

$e \backslash \dot{e}$	<b>Big Neg</b>	<b>Neg</b>	<b>Zero</b>	<b>Pos</b>	<b>Big Pos</b>
<b>Big Neg</b>	Big Pos	Big Pos	Big Pos	Pos	Zero
<b>Neg</b>	Big Pos	Big Pos	Pos	Zero	Neg
<b>Zero</b>	x	x	Zero	x	x
<b>Pos</b>	Pos	Zero	Big Neg	Big Neg	Big Neg
<b>Big Pos</b>	Zero	Neg	Big Neg	Big Neg	Big Neg

Considerando el sistema (5.2)–(5.6) cuyos parámetros se proporcionan en la tabla 3.1 se presentan los resultados obtenidos de la simulación del sistema en lazo cerrado. Para la simulación, se requiera que la carga se mueva desde posición  $\theta(0) = 0$  rad hasta la posición deseada  $\theta_d = \pi/2$  rad. La velocidad inicial fue establecida en  $\dot{\theta}(0) = 0$  rad/s. La retroalimentación del sistema con un controlador por lógica difusa se muestra en la figura 4.3, normalmente el bloque  $d/dt$  se utiliza para estimar la derivada temporal, sin embargo se puede utilizar un observador para evitar ruido en el controlador.

La respuesta del sistema y la señal de control para un motor CD con fricción y backlash dirigido por un controlador difuso tipo Mamdani se muestran en la figura 5.4. La figura 4.12(a) muestra que la posición de la carga alcanza la posición deseada asintóticamente. En la figura 5.4(b) se presenta la posición del motor, donde es posible observar un pequeño error en estado estable el cual permite que la carga logre llevar a la posición deseada. El error de posición en estado estable se presenta en la figura 5.4(c) donde el tiempo de asentamiento fue  $T \approx 5.5s$ . Finalmente la figura 5.4(d) muestra la señal de control  $u(t)$ .

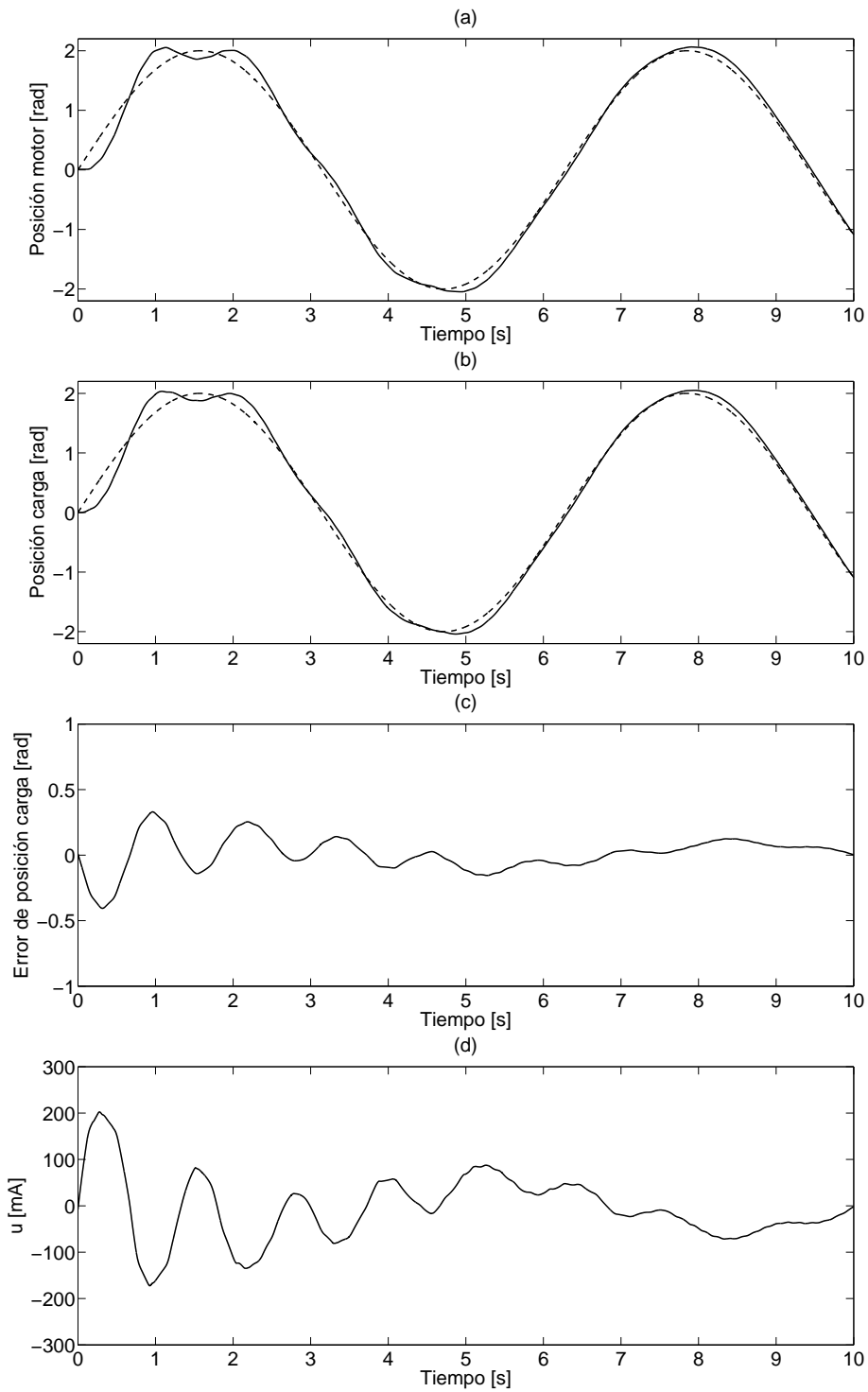


Figura 5.4: (a) Posición de la carga, (b) Posición del motor, (c) Error de posición de la carga, y (d) señal de control.

### 5.2.1. Análisis de estabilidad

Para realizar el análisis de estabilidad se tomara en cuenta el error de posición de la carga presentada en la figura 5.4 como la trayectoria a analizar. Tomando en cuenta que existe una señal de control difusa  $u(t)$  capaz de dirigir el error de posición y de velocidad al origen y existe una función definida positiva  $V(t) = x^T P x$ , donde  $x = (e, \dot{e})^T \in \mathbb{R}^2$  y  $P$  es una matriz simétrica definida positiva. Suponiendo que existe una una matriz positiva definida y simétrica  $Q$ , tal que su derivada temporal de  $V$  a lo largo de la solución del sistema en lazo cerrado satisfaga

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}\{Q\}\|x\|^2 = -\lambda_{\min}\{Q\}V. \quad (5.7)$$

Es importante observar que la matriz  $P$  puede ser una solución de la ecuación de Lyapunov  $PA + A^T P = -Q$ , donde la matriz  $A$  podría ser obtenida linealizando el modelo de la planta, sin embargo, para el siguiente análisis solo es necesario el valor propio mínimo de  $Q$ . Siendo  $z(t)$  la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{z} = -\lambda_{\min}\{Q\}z \quad (5.8)$$

la cual esta dada por

$$z(t) = z(0)e^{-\lambda_{\min}\{Q\}t}. \quad (5.9)$$

Por el lema de comparación, la solución  $x(t)$  esta acotada por

$$\|x(t)\| = \sqrt{V(t)} \leq \sqrt{V(0)} \exp\left\{-\frac{\lambda_{\min}\{Q\}}{2}t\right\} \quad (5.10)$$

para todo  $t \geq 0$ . La figura 5.5 muestra la solución de la desigualdad diferencial (5.7), bajo  $V(0) = e(0)^2 + \dot{e}(0)^2 = \pi^2/4$  y  $\lambda_{\min}\{Q\} = 0.76$ , es una cota de la respuesta en el tiempo del sistema. Esta última desigualdad envuelve un rango de respuestas.

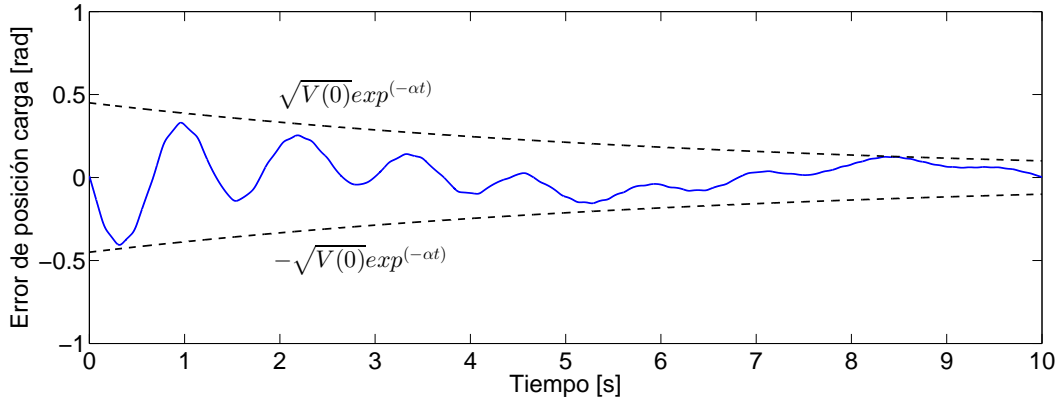


Figura 5.5: Error de posición de la carga (línea continua) y solución superior e inferior de la desigualdad diferencial (líneas discontinuas) donde  $\alpha = \lambda_{\min}\{Q\}/2 = 0.15$ .

### 5.2.2. Análisis de estabilidad de la dinámica cero

Para demostrar estabilidad de los estados  $(e_3, e_4)^T$  del sistema (3.7), donde  $u$  es la señal de control acotada, es decir,  $u < U^+$ , se considera que  $(e_1, e_2)^T = 0$ , es decir,

$$\dot{e}_3 = e_4 \quad (5.11)$$

$$\dot{e}_4 = -\frac{fv}{J}e_4 - \frac{fv}{J}\dot{\theta}_d - \frac{fc}{J}\text{sign}(e_4 + \dot{\theta}_d) + \frac{K}{J}e_3 + \frac{Kj_0}{J}\text{sign}(e_3) - \frac{1}{J}u. \quad (5.12)$$

Partiendo de que

$$\frac{1}{J}F_1(e) = 0$$

y dado que (5.5) se puede representar como

$$F_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\Delta\theta| \leq j_0 \\ K\Delta\theta - Kj_0\text{sign}(\Delta\theta) & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (5.13)$$

entonces

$$Ke_3 - Kj_0\text{sign}(e_3) = J\ddot{\theta}_d \quad (5.14)$$

Despejando  $e_3$  de (5.14) se obtiene que

$$e_3 \in \left[ -j_0 + \frac{J}{K}\ddot{\theta}_d, j_0 + \frac{J}{K}\ddot{\theta}_d \right]. \quad (5.15)$$

Por lo tanto  $e_3$  permanece acotado y las trayectorias están en el conjunto (5.15).

Revisando la estabilidad de  $e_4$  se considera la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}Jq_4. \quad (5.16)$$

La derivada temporal de  $V$  para la solución de la ecuación en lazo cerrado (3.7) esta dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= Jq_4\dot{q}_4 \\ &= f_4(-f_vq_4 - f_c \text{sign } q_4 - Ke_3 + Kj_0 \text{sign}(e_3) + u) \\ &\leq -f_vq_4 - f_c|q_4| - Kq_4e^+ + Kj_0|q_4| + U^+. \end{aligned}$$

Para garantizar que  $\dot{V}$  sea negativa semi-definida es necesario que  $f_v|q_4| + f_c + Ke^+ - Kj_0 - U^+ >$

0. Lo cual se garantiza si

$$q_4 > \frac{U^+ + Kj_0 - f_c - Ke^+}{f_v}.$$

Por lo tanto se garantiza acotamiento de  $(e_3, e_4)^T$ .

### 5.3. Comentarios

La solución al problema de control de seguimiento de un motor de corriente continua con fricción y backlash usando mediciones de posición de motor ha sido abordado. Debido a la condición de la heurística tipo Mamdani controlador difuso, sumado al diseño de un controlador libre modelo, no es posible predecir analíticamente la estabilidad del sistema en lazo cerrado. Este último

---

motiva el uso del principio de comparación para un motor de CD acoplado junto con el controlador difuso tipo Mamdani. Dado que la naturaleza lineal de la planta, es posible proponer una solución exponencial de un diferencial lineal la desigualdad que puede ser una función de almacenamiento también llamada función de Lyapunov. Para finalmente concluir estabilidad en el sistema.



## Capítulo 6

# CONCLUSIONES

En este trabajo de tesis se presento el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov para un sistema discontinuo gobernado por un controlador difuso tipo Mamdani. En especifico un motor de corriente directa el cual opera bajo condiciones inciertas debido a la fricción seca y backlash.

El análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov es un método ampliamente estudiado para concluir estabilidad de los sistemas basados en modelo. Dada la condición heurística de los controladores difusos tipo Mamdani y asumiendo que el modelo dinámico de la planta es desconocido, no es posible realizar directamente el análisis de estabilidad. Es por esto que fue necesario encontrar una herramienta capaz de unir la condición determinista del análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov y la parte heurística de los controladores difuso tipo Mamdani, dado esto se propone una técnica determinista como criterio de estabilidad de Lyapunov, es ahí donde el lema de comparación juega un importante rol.

Utilizando el lema de comparación en combinación con una función candidata de Lyapunov fue posible realizar el análisis de estabilidad en cada uno de los controladores propuestos durante

---

el trabajo de tesis y así poder concluir estabilidad o estabilidad asintótica según fuera el caso. Dada la naturaleza de la planta fue posible proponer soluciones exponenciales de una desigualdad lineal diferencial la cual puede ser una función de almacenamiento también llamada función de Lyapunov.

Se resuelve el problema de retroalimentación de posición de la carga para sistemas con backlash y fricción seca, es decir, sistemas compuestos por dos sub-sistemas el actuador y la carga. Se hace énfasis que única medición accesible del sistema es la posición de la carga.

Se propuso un controlador difuso tipo Mamdani para seguimiento en un sistema con backlash y fricción de Coulomb, donde a pesar de la presencia de los fenómenos no-suaves, el controlador difuso sigue a la señal de referencia utilizando la posición de la carga como la única medición accesible del sistema.

Se comprobó que los controladores difusos pueden estabilizar la posición alrededor de una trayectoria deseada tomando en consideración la posición de la carga o el actuador únicamente.

Se confirma la robustez de los controladores difusos ante perturbaciones no lineales, no suaves como lo son la fricción de Coulomb y el fenómeno del backlash, en sistemas discontinuos.

El trabajo anteriormente presentado pretende ser el punto de partida para la formalización del análisis de estabilidad de controladores difusos tipo Mamdani.

# Bibliografía

- [1] G. Tao and P. Kokotovic, *Adaptive control of systems with actuator and sensor non-linearities*. New York: Wiley, 1996.
- [2] F. Wang, Z. Liu, and G. Lai, "Fuzzy adaptive control of nonlinear uncertain plants with unknown dead zone output," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 263, pp. 27 – 48, 2015.
- [3] J. Dong and B. Mo, "The adaptive pid controller design for motor control system with backlash," in *Intelligent Control and Information Processing (ICICIP), 2013 Fourth International Conference on*, pp. 59–63, June 2013.
- [4] Y. J. Liu and S. Tong, "Adaptive fuzzy control for a class of nonlinear discrete-time systems with backlash," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 22, pp. 1359–1365, Oct 2014.
- [5] L. Acho, F. Ikhouane, and G. Pujol, "Compensation of friction and backlash effects in an electrical actuator," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers – Part II*, vol. 3, pp. 175–180, 2013.
- [6] L. T. Aguilar, Y. Orlov, J. C. Cadiou, and R. Merzouki, "Nonlinear h-output regulation of a multi-stable drive system including backlash with a single-stability approximation," in *2007 American Control Conference*, pp. 4709–4714, July 2007.

- [7] Y. Orlov, L. Aguilar, and J. C. Cadiou, "Switched chattering control vs. backlash/friction phenomena in electrical servo-motors," *International Journal of Control*, vol. 76, no. 9-10, pp. 959–967, 2003.
- [8] I. U. Ponce, Y. Orlov, L. T. Aguilar, and J. Álvarez, "Nonsmooth  $H_\infty$  synthesis of non-minimum-phase servo-systems with backlash," *Control Engineering Practice*, vol. 46, pp. 77 – 84, 2016.
- [9] B. Armstrong-Hélouvry, P. Dupont, and C. C. D. Wit, "A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction," *Automatica*, vol. 30, no. 7, pp. 1083 – 1138, 1994.
- [10] C. Canudas-de-Wit, H. Olsson, K. J. Astrom, and P. Lischinsky, "A new model for control of systems with friction," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, pp. 419–425, Mar 1995.
- [11] I. Ponce, J. Bentsman, Y. Orlov, and L. Aguilar, "Generic nonsmooth  $H_\infty$  output synthesis: application to a coal-fired boiler/turbine unit with actuator dead zone," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 23, pp. 2117–2128, Nov. 2015.
- [12] Y. Orlov, L. Aguilar, and J. Cadiou, "Switched chattering control vs. backlash/friction phenomena in electrical servo-motors," *International Journal of Control*, vol. 76, no. 9/10, pp. 959–967, 2003.
- [13] E. A. Freeman, "The effect of speed-dependent friction and backlash on the stability of automatic control systems," *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part II: Applications and Industry*, vol. 77, pp. 680–692, Jan 1959.

- [14] Y. Nakayama, K. Fujikawa, and H. Kobayashi, "A torque control method of three-inertia torsional system with backlash," in *Advanced Motion Control, 2000. Proceedings. 6th International Workshop on*, pp. 193–198, April 2000.
- [15] Z. Li, C.-Y. Su, and X. Chen, "Modeling and inverse adaptive control of asymmetric hysteresis systems with applications to magnetostrictive actuator," *Control Engineering Practice*, vol. 33, pp. 148 – 160, 2014.
- [16] G. Tao and P. V. Kokotovic, "Adaptive control of systems with backlash," *Automatica*, vol. 29, no. 2, pp. 323 – 335, 1993.
- [17] C. Y. Su, Y. Stepanenko, J. Svoboda, and T. P. Leung, "Robust adaptive control of a class of nonlinear systems with unknown backlash-like hysteresis," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, pp. 2427–2432, Dec 2000.
- [18] J. Guo, F. Wang, and B. Yao, "Adaptive control for nonlinear system with unknown hysteresis," in *2012 24th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, pp. 1067–1072, May 2012.
- [19] J. Zhou, C. Wen, and Y. Zhang, "Adaptive backstepping control of a class of uncertain nonlinear systems with unknown backlash-like hysteresis," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, pp. 1751–1759, Oct 2004.
- [20] R. Merzouki, J. Cadiou, and M'Sirdi, "Compensation of friction and backlash effects in an electrical actuator," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers – Part II*, vol. 218, pp. 75–84, March 2004.
- [21] H. Zhao, "Backstepping adaptive control of dual-motor driving servo system with backlash nonlinearity," in *Intelligent Control and Information Processing (ICICIP), 2013 Fourth International Conference on*, pp. 655–660, June 2013.

- [22] I. Kolnik and G. Agranovich, "Backlash compensation for motion system with elastic transmission," in *IEEE 27th Convention of Electrical Electronics Engineers in Israel (IEEEI)*, pp. 1–5, Nov 2012.
- [23] D. Driankov, M. Reinfrank, and H. Hellendoorn, *Introduction to Fuzzy Control*. Springer Berlin Heidelberg, 1996.
- [24] D. Dubois and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Mathematics in science and engineering, Academic Press, 1980.
- [25] C. W. Tao and J. Taur, "Design of fuzzy controllers with adaptive rule insertion," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, vol. 29, no. 3, pp. 389–397, 1999.
- [26] W. Tao and S. Taur, "An approach for the robustness comparison between piecewise linear PID—like fuzzy and classical PID controllers," *Soft Computing*, vol. 9, no. 6, pp. 430–438, 2005.
- [27] J. Jang, C. Sun, and E. Mizutani, *Neuro-fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence*. MATLAB curriculum series, New Jersey: Prentice Hall, 1997.
- [28] H. K. Lam, F. H. F. Leung, and P. K. S. Tam, "Stable and robust fuzzy control for uncertain nonlinear systems," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans*, vol. 30, no. 6, pp. 825–840, 2000.
- [29] K. Tanaka, T. Hori, and H. O. Wang, "A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 11, pp. 582–589, Aug 2003.

- [30] B.-J. Rhee and S. Won, "A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi/Sugeno fuzzy control system design," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 157, no. 9, pp. 1211–1228, 2006.
- [31] D. Lee, Y. Joo, and M. Tak, "Local stability analysis of continuous-time Takagi/Sugeno fuzzy systems: A fuzzy Lyapunov function approach," *Information Sciences*, vol. 257, pp. 163–175, 2014.
- [32] M. Bernal and T. M. Guerra, "Generalized nonquadratic stability of continuous-time takagi-sugeno models," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 18, no. 4, pp. 815–822, 2010.
- [33] M. Margaliot and G. Langholz, *New Approaches to Fuzzy Modeling and Control: Design and Analysis*. Series in machine perception and artificial intelligence, World Scientific, 2000.
- [34] M. Margaliot and G. Langholz, "Design and analysis of fuzzy schedulers using fuzzy Lyapunov synthesis," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 14, no. 2, pp. 183–188, 2001.
- [35] N. R. Cazarez-Castro, L. Aguilar, and O. Castillo, "Designing type-1 and type-2 fuzzy logic controllers via fuzzy Lyapunov synthesis for nonsmooth mechanical systems," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 25, no. 5, pp. 971–979, 2012.
- [36] N. Cazarez-Castro, L. Aguilar, O. Castillo, and A. Rodriguez-Diaz, "Controlling unstable non-minimum-phase systems with fuzzy logic: The perturbed case," in *Evolutionary Design of Intelligent Systems in Modeling, Simulation and Control* (O. Castillo, W. Pedrycz, and J. Kacprzyk, eds.), vol. 257 of *Studies in Computational Intelligence*, pp. 245–257, Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [37] H. Khalil, *Nonlinear systems*. New Jersey: Prentice Hall, third ed., 2002.

- [38] G. Chen and T. Pham, *Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Control Systems*. CRC Press, 2000.
- [39] L. Zadeh, "Fuzzy sets," *Information and Control*, vol. 8, no. 3, pp. 338 – 353, 1965.
- [40] L. Zadeh, G. Klir, and B. Yuan, *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Systems: Selected Papers by Lotfi A Zadeh*. Advances in Fuzzy Systems-Applications and Theory, 1996.
- [41] L. A. Zadeh, "Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. SMC-3, pp. 28–44, Jan 1973.
- [42] J. Yen and R. Langari, *Fuzzy Logic: Intelligence, Control, and Information*. Prentice Hall, 1999.
- [43] L. A. Zadeh, *Learning Systems and Intelligent Robots*, ch. The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning, pp. 1–10. Boston, MA: Springer US, 1974.
- [44] E. Mamdani and S. Assilian, "An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller," *International Journal of Man-Machine Studies*, vol. 7, no. 1, pp. 1–13, 1975.
- [45] M. Sugeno and G. Kang, "Structure identification of fuzzy model," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 28, no. 1, pp. 15 – 33, 1988.
- [46] R. Kelly, V. Santibáñez, and A. Loría, *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. London: Springer London, 2005.
- [47] A. Filippov, *Differential equations with discontinuous right-hand sides*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1988.



- 
- [48] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*. Communications and Control Engineering, Springer London, 1995.
- [49] R. Kelly, J. Llamas, and R. Campa, "A measurement procedure for viscous and Coulomb friction," *IEEE Trans. on Instr. and Measurement*, vol. 49, no. 4, pp. 857–861, 2000.
- [50] E. Mamdani, "Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic synthesis," *IEEE Transactions in Computers*, vol. 26, no. 12, pp. 1182–1191, 1977.