



Instituto Politécnico Nacional

Sección de Estudios de Posgrado e Investigación
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica; Unidad Culhuacán



Modelado y Control de Movimiento de un Vehículo Aéreo a Escala Impulsado por Cuatro Propelas

Tesis

que para obtener el grado de

Doctor en Comunicaciones y Electrónica

presenta el

M. en C. Salvador González Vázquez

bajo la dirección del

Dr. Eduardo Javier Moreno Valenzuela

trabajo elaborado en el



Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital

Diciembre 2013

Tijuana, B.C.; México



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de Tijuana, B.C. siendo las 11:00 horas del día 26 del mes de Noviembre del 2013 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de SEPI-ESIME-CULH.

para examinar la tesis titulada:

“ MODELADO Y CONTROL DE MOVIMIENTO DE UN VEHÍCULO AÉREO A ESCALA IMPULSADO POR CUATRO PROPELAS ”

Presentada por el alumno:

GONZÁLEZ
Apellido paterno

VÁZQUEZ
Apellido materno

SALVADOR
Nombre(s)

Con registro:

A	1	0	0	6	0	6
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

DOCTOR EN COMUNICACIONES Y ELECTRÓNICA

Después de intercambiar opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director(a) de tesis


DR. EDUARDO JAVIER MORENO VALENZUELA


DR. LUÍS ARTURO GONZÁLEZ HERNÁNDEZ


DR. LUÍS TUPAK AGUILAR BUSTOS


DR. OSCAR HUMBERTO MONTIEL ROSS


DR. ROBERTO SEPÚLVEDA CRUZ

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES


Dr. Gonzalo Isaac Duchén Sánchez





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de Tijuana, B.C. el día 28 del mes de Noviembre del año 2013, el (la) que suscribe Salvador González Vázquez alumno(a) del Programa de Doctorado en Comunicaciones y Electrónica, con número de registro A100606, adscrito(a) al E.S.I.M.E. - Culhuacán, C.I.T.E.D.I., I.P.N., manifiesto(a) que es el (la) autor(a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del (de la, de los) Dr. Eduardo Javier Moreno Valenzuela y cede los derechos del trabajo titulado Modelado y Control de Movimiento de un Vehículo Aéreo a Escala Impulsado por Cuatro Propelas, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del (de la) autor(a) y/o director(es) del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección sal.gonzalez.vazquez@gmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Salvador González Vázquez

Nombre y firma del alumno(a)

Dedicatoria

A mis abuelos, familia y amistades por su apoyo incondicional.

*A mi tío José Luís R.†, un hombre hiperactivamente bondadoso.
A mi tía Juanita M.†, una mujer ejemplar en cada aspecto de su vida.*

Epígrafe

"Ninguna investigación humana puede ser denominada ciencia si no pasa a través de pruebas matemáticas"

Leonardo da Vinci
(1452 - 1519)

"Nuestra recompensa se encuentra en el esfuerzo y no en el resultado. Un esfuerzo total es una victoria completa"

Mahatma Gandhi
(1869 - 1948)

Prefacio y agradecimientos

La tesis presenta un estudio acerca del diseño de etapas o algoritmos para el control del movimiento de un sistema denominado mini quadrotor o mini cuadrirotor o vehículo aéreo a escala impulsado por cuatro propelas. La temática de la tesis se distribuye en cuatro capítulos. El primer capítulo se destina a describir la problemática, los antecedentes concernientes a la solución de la problemática, la propuesta a desarrollar en la tesis y los alcances de la misma. En el segundo capítulo se presenta un estudio sobre el modelo matemático del mini quadrotor y las propiedades relacionadas a este, lo cual será de utilidad durante el proceso de planteamiento de las etapas de control. El tercer capítulo se inicia con el resumen de una técnica que tiene por objeto determinar la estabilidad del sistema, subsecuentemente se presenta la formulación de la problemática y su correspondiente propuesta de solución. Un apartado es destinado para hacer una descripción detallada sobre los trayectos a ser seguidos por parte del mini quadrotor, así como las perturbaciones que intervienen sobre el sistema. La propuesta, análisis y prueba numérica de tres clases de controladores se resume en un conjunto de tres apartados. El último capítulo contiene las observaciones y conclusiones concerniente a la tesis.

Durante el desarrollo de la tesis fueron utilizadas las siguientes plataformas de edición y simulación:

- Winedt V.5.4
- MiKTeX 2.9
- Ghostscript 9.05
- TeXnicCenter 1.0 Stable Release
- Adobe Acrobat 7.0 Professional
- MatLab R2007b
- Autodesk Maya 2008
- Microsoft Office Visio 2007

El documento se estructuro bajo el siguiente enfoque:

- A fin de simplificar la continuidad de ideas, se evita la repetitividad en cuanto a las definiciones de términos matemáticos. En su defecto, estas han sido resumidas en el apartado de *Nomenclatura* y al inicio del tercer capítulo. En caso que el lector requiera un desglose de las definiciones y equivalencias, este deberá consultar tales apartados o tener a la mano una copia de los mismos.
- Se cuenta con un apartado que resume los *acrónimos y abreviaciones* utilizadas a lo largo de la tesis. En caso que estas se presenten por ocasión primera dentro del cuerpo de la tesis, se utilizará el pie de página para tener un inmediato acceso a su definición.
- Las abreviaciones serán indicadas en su idioma de procedencia, ya que a la fecha no existe una organización formal que normalice su notación y correspondiente traducción al idioma español. Adicionalmente, en la presente tesis se indicará la traducción o interpretación equivalente que comúnmente se encuentra dentro de los documentos redactados en el idioma español.

El autor hace constar que trabajo bajo un régimen formal y ético. Los resultados derivados del trabajo de tesis son completamente auténticos y fueron analizados en la medida de los conocimientos del autor. Así también, se dio crédito a todos aquellos trabajos, artículos y documentos que inspiraron o contribuyeron en grado alguno al desarrollo de la tesis. Si el contenido presentado en esta tesis le sirve al lector para su inclusión y profundización hacia el tema, o bien, le inspira de manera parcial o total a la creación de nuevas ideas, comprobaciones o procedimientos, se incita a la ética laboral y profesional del lector a citar la presente tesis.

Los **agradecimientos** a organizaciones y personal institucional que contribuyó en sentido alguno al proceso de desarrollo de la tesis, se resumen en los siguientes párrafos:

Por sus valiosos comentarios y aportaciones dirigidos hacia la mejora del trabajo de tesis, el autor externa su agradecimiento al comité revisor compuesto por el Dr. Luís Arturo González Hernández, Dr. Luís Tupak Aguilar Bustos, Dr. Roberto Sepúlveda Cruz, Dr. Oscar Humberto Montiel Ross y la Dra. Mireya Saraí García Vázquez.

Se extiende un agradecimiento especial al director de tesis Dr. Eduardo Javier Moreno Valenzuela, por compartir su confianza, conocimientos, ética y pasión laboral en la prosperidad del tema de tesis.

A toda persona que en algún sentido hacia la jornada laboral más amena con sus palabras de convivencia, de igual manera aprovecho para dejar asentado mi agradecimiento por ustedes.

Un profundo reconocimiento al IPN (Instituto Politécnico Nacional) por ser el pilar fundamental de mi formación integral profesional. Aprovecho para agradecer la jornada completa que tuve en esta casa de estudios, iniciando en primer instancia con mi formación a nivel técnico y culminando con el actual trabajo a nivel doctoral. En particular, se agradece las atenciones prestadas por parte del personal académico y administrativo de la SEPI (Sección de Estudios de Posgrado e Investigación) de ESIME-Culhuacán (Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica) en toda cuestión concerniente a mis estudios doctorales. Así también, se agradece al CITEDI-Tijuana (Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital) por facilitar su infraestructura y personal en pos de mi desarrollo profesional.

Se agradece al CONACyT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología) por el apoyo económico destinado a mis estudios de doctorado. De igual manera, se agradece al IPN por el apoyo económico derivado del PIFI (Programa Institucional de Formación de Investigadores). Las becas asignadas, me permitieron destinar un mayor esfuerzo, enfoque y concentración hacia el fortalecimiento del trabajo doctoral.

Contenido

Prefacio y agradecimientos	I
Lista de tablas	V
Lista de figuras	VII
Acrónimos y abreviaciones	IX
Nomenclatura	XI
Resumen	XIX

Capítulos

1. Introducción	1
1.1. Preámbulo	1
1.2. Antecedentes históricos	2
1.2.1. Clasificación de los vehículos aéreos a escala impulsados por propelas	2
1.3. Vehículo aéreo en estudio y problemática	2
1.4. Objetivo propuesto	6
1.5. Estado del arte en la solución de la problemática	7
1.6. Propuesta de solución, aportaciones y metodología	8
2. Modelado matemático del mini quadrotor	11
2.1. Especificación del sistema de coordenadas	11
2.1.1. Posición geográfica	12
2.1.2. Efecto gravitacional	13
2.1.3. Espacio de trabajo y relación entre los sistemas de coordenadas	15
2.2. Especificación del sistema mini quadrotor	18
2.3. Cinemática	19
2.4. Dinámica	21
2.4.1. Fuerzas de entrada	22
2.4.2. Matrices de inercia y centro de masas	26
2.4.3. Fuerza gravitatoria	29
2.4.4. Fuerzas disipativas	29
2.5. Modelado matemático	30
2.5.1. Energía cinética y potencial	31
2.5.2. Desarrollo y descripción del modelo dinámico	32
2.5.3. Configuraciones del modelo matemático simplificado	35

3. Control autónomo del mini quadrotor	39
3.1. Preliminares	39
3.1.1. Notación	39
3.1.2. Teoría de perturbaciones singulares	41
3.2. Formulación del problema	42
3.3. Propuesta de solución para el sistema en coordenadas L y B	43
3.4. Bosquejo del proceso de simulación	45
3.5. Regulación	48
3.6. Seguimiento de trayectoria	55
3.6.1. Control mediante cinemática, PI de velocidad y tipo-PD de posición	55
3.6.2. Controlador PD/PI para el sistema en formato subactuado	64
4. Conclusiones	75
Bibliografía	77
Apéndices	
A. Resumen de propiedades y cálculos	85
A.1. Producto Cruz	85
A.2. Espacios Ortogonales	86
A.3. Derivadas temporales de la orientación deseada	86

Lista de tablas

- 3.1. Descripción de los parámetros relacionados al mini quadrotor. 41
- 3.2. Ganancias del primer controlador 53
- 3.3. Ganancias del segundo controlador 60

Lista de figuras

1.1. Antecedentes históricos del quadrotor	3
1.2. Sistema mini quadrotor configurado con estructura estabilizadora	3
1.3. Sistema mini quadrotor con carcasa-esfera protectora	4
1.4. Sistema mini quadrotor en aplicaciones de vanguardia	4
1.5. Sistema mini quadrotor en aplicaciones cotidianas	4
1.6. Sistema híbrido mini carro-quadrotor	4
1.7. Sistema mini quadrotor en aplicaciones policíacas	5
1.8. Bosquejo esquemático del mini quadrotor	5
1.9. Bosquejo esquemático del sistema retroalimentado	6
2.1. Marcos de referencia terrestres	12
2.2. Diagrama vectorial de la aceleración gravitacional ejercida sobre el vehículo aéreo	14
2.3. Sistema de coordenadas dentro del volumen de trabajo	15
2.4. Relación secuencial de los sistemas de coordenadas	16
2.5. Marcos de referencia del mini quadrotor	19
2.6. Diagrama de cuerpo libre del i -ésimo sistema de propulsión	22
2.7. Movimientos del mini quadrotor en función de las fuerzas de empuje	25
2.8. Equivalente geométrico simplificado de la estructura del mini quadrotor	27
3.1. Definición de los marcos de referencia del mini quadrotor	39
3.2. Diagrama a bloques del proceso de simulación	45
3.3. Trayecto tipo-caótico: posición y velocidad deseada	47
3.4. Trayecto helicoidal: posición y velocidad deseada	47
3.5. Diagrama a bloques del regulador	48
3.6. Respuesta del sistema ante múltiples posiciones deseadas	53
3.7. Desempeño de la posición y orientación del sistema	54
3.8. Comportamiento de las escalas de tiempo	55
3.9. Diagrama a bloques del controlador de movimiento	55
3.10. Trayecto tipo-caótico y helicoidal descrito por el mini quadrotor	60
3.11. Desempeño de algunos estados del sistema ante variaciones paramétricas	61
3.12. Desempeño de las fuerzas de empuje ante variaciones paramétricas	62
3.13. Verificación de señales relacionadas al análisis de estabilidad	63
3.14. Señales de control	63
3.15. Diagrama a bloques del controlador	64
3.16. Efecto de los parámetros β y δ	70
3.17. Efecto de los parámetros $\bar{\epsilon}$ y ϵ	71
3.18. Sintonización del tiempo de asentamiento	72
3.19. Comportamiento de las escalas de tiempo al formular un escenario práctico	73
3.20. Desempeño de las fuerzas de empuje	74
3.21. Trayecto incluyendo perturbaciones prácticas	74

Acrónimos y abreviaciones

Abreviación	
B	Marco de referencia no inercial atado al vehículo aéreo.
L	Marco de referencia terrestre-local (marco inercial), atado tangencialmente a un punto cercano al elipsoide geodético (superficie terrestre nominal).
S	Marco espacial de referencia atado al vehículo aéreo, el cual es paralelo al marco terrestre L dentro del volumen espacial V .
E	Marco de referencia relacionado a la superficie terrestre, que en consecuencia es relativo al conjunto de los n marcos locales L contenidos a lo largo de todo el elipsoide geodético.
V	Región o volumen relativo al marco de referencia terrestre-local L .
E_G	Marco de referencia terrestre o geodético.

Acrónimo	
C.M.	Centro de Masa.
g.d.l.	Grados de Libertad
DMR	Dirección de las Manecillas del Reloj.
PID	proporcional, integral y derivativo.
IMU	Inertial Measurement Unit (unidad de medición inercial).
MEMS	Microelectromechanical System (sistema microelectromecánicos).
TPS	Teoría de Perturbaciones Singulares
SPT	Singular Perturbation Theory
RW	Rotatory Wings (propelas o alas rotatorias).
VTOL	Vertical Take Off and Landing (despegue y aterrizaje vertical).
OS(3)	Special Orthogonal Group in 3 dimensions (grupo ortogonal especial de orden 3).
ECEF	Earth-Centered Earth-Fixed (sistema de coordenadas cartesianas fijadas al marco terrestre)
SMC	Sliding Mode Control (control por modos deslizantes).
DARPA	Defence Advanced Research Projects Agency (agencia de proyectos de investigación avanzada de la defensa).
ECI	Earth-Centered Inertia (sistema de coordenadas inerciales; vértice ubicado en el centro de masa de la Tierra).
ENU	East-North-Up (Este-Norte-Altitud).
LTP	Local Tagent Plane (plano local tangencial).

Acrónimo	
GLONASS	GLObal NAVigation Satellite System (sistema satelital de navegación global).
UAV	Unmanned Aerial Vehicle (vehículo aéreo no tripulado).
MUAV	Micro Unmanned Aerial Vehicle (micro vehículo aéreo no tripulado).
GNSS	Global Navigation Satellite System (sistemas globales de navegación por satélite).
GPS	Global Position System (sistema global de posicionamiento).
GALILEO	European Union's Galileo positioning system (sistema de posicionamiento Galileo de la unión Europea).
WGS-84	World Geodetic System 1984 (sistema geodético mundial 1984).
EGM2008	Earth Gravitational Model 2008 (modelo gravitacional terrestre 2008).
GRACE	Gravity Recovery And Climate Experiment (experimento de clima y recuperación gravitatoria).
GOCE	Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer (explorador de la circulación oceánica y de gravedad).
ESA	European Space Agency (agencia espacial europea).
ETRS89	European Terrestrial Reference System 1989 (sistema Europeo de referencia terrestre 1989).
LLA	Latitude, Longitude, Altitude (Latitud, Longitud, Altitud).

Nomenclatura

Los símbolos, parámetros y notación en general ha sido normalizada de acuerdo al siguiente criterio. Los términos escalares se representan mediante letras serif minúsculas, románicas itálicas, y con caracteres griegos en formato normal, e.g., x , $\theta \in \mathbb{R}$. Mientras que los vectores de dimensión n se definen mediante letras minúsculas en negritas y por caracteres griegos en negritas con formato itálico, e.g., \mathbf{x} , $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$. Las matrices de tamaño $n \times m$ se definen mediante letras mayúsculas itálicas, e.g., $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Para hacer referencia al i -ésimo elemento de un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se utiliza el subíndice inferior derecho, e.g. $x_i \in \mathbb{R}$. Para hacer referencia al elemento i, j de una matriz $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ se utiliza el subíndice inferior derecho, e.g. $X_{ij} \in \mathbb{R}$. La adición de una letra o signo diacrítico entorno al término en cuestión (escalares, vectores, matrices), sirve para aumentar y diversificar las opciones relacionadas la notación, e.g. la matriz M_a es diferente a la matriz M_b , $M_{\bar{a}}$, $M_{\hat{a}}$, \bar{M}_a , \hat{M}_a . La anterior lógica es también extendible a escalares, elementos y vectores. La adición de un subíndice- u y un subíndice- a indicará que la componente en cuestión, pertenece a la dinámica no-actuada y a la dinámica actuada, respectivamente. Mientras que el subíndice- d se emplea para enfatizar una componente deseada. El símbolo $\tilde{\cdot}$ ubicado sobre una componente, se utilizará para hacer referencia al error entre el valor deseado y el valor actual de la componente en cuestión. Es decir que $\tilde{*} = *_{\bar{d}} - *$, donde $*$ representa la componente. Los vectores $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{e}_2 = [0 \ 1 \ 0]^T$ y $\mathbf{e}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T \in \mathbb{R}^3$ representan bases estándar. Ejemplos más específicos de todo lo antes descrito, puede ser observado dentro del subsiguiente conjunto de tablas.

Abreviaturas matemáticas	
Símbolo	Descripción
I_n	Matriz identidad de tamaño $n \times n$.
$\mathbf{0}$	Vector nulo o matriz cero con tamaño adecuado a las operaciones algebraicas.
$diag\{*\}$	Matriz diagonal o matriz diagonal a bloques formada por los términos especificados en el argumento $*$.
s_{\odot}	Función seno con argumento \odot : $\text{sen}(\odot)$.
c_{\odot}	Función coseno con argumento \odot : $\text{cos}(\odot)$.
t_{\odot}	Función tangente con argumento \odot : $\text{tan}(\odot)$.
s_{\odot}^{-1}	Recíproco de la función seno con argumento \odot : $1/\text{sen}(\odot)$.
c_{\odot}^{-1}	Recíproco de la función coseno con argumento \odot : $1/\text{cos}(\odot)$.
t_{\odot}^{-1}	Recíproco de la función tangente con argumento \odot : $1/\text{tan}(\odot)$.

Notación	
Símbolo	Descripción
\in	Pertenece a.
\forall	Para toda.
\mathbb{R}	Conjunto de todos los números reales.
\mathbb{R}^m	Espacio Euclidiano de dimensión m .
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Espacio vectorial de todas las matrices reales de dimensión $m \times n$.
\odot	Término auxiliar que denota un escalar cualesquiera.
Θ	Término auxiliar que denota un vector cualesquiera de dimensión arbitraria.
Ξ	Término auxiliar que denota una matriz cualesquiera de dimensión arbitraria.
χ	Término auxiliar cualesquiera, sea escalar, vector, matriz o función.
χ^{-1}	Recíproco de $\chi \in \mathbb{R}$.
Ξ^{-1}	Inversa de la matriz $\Xi \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
χ^T	Traspuesta de χ .
Θ_i	El i -ésimo elemento del vector Θ .
$\Xi_{i,j}$	Elemento i, j de la matriz Ξ .
$ \odot $	Valor absoluto del escalar $\odot \in \mathbb{R}$.
$\ \Theta\ $	Norma euclídea del vector $\Theta \in \mathbb{R}^n$.
$\ \Xi\ $	Norma euclídea o de Frobenius de la matriz $\Xi \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
$\lambda_m\{\Xi\}$	El mínimo valor propio de la matriz Ξ de dimensión arbitraria.
$\lambda_M\{\Xi\}$	El máximo valor propio de la matriz Ξ de dimensión arbitraria.
$\dot{\chi}$	Primera derivada de χ respecto al tiempo.
$\ddot{\chi}$	Segunda derivada de χ respecto al tiempo.
$\chi^{(3)}$	Tercera derivada de χ respecto al tiempo.
$\chi^{(i)}$	i -ésima derivada de χ respecto al tiempo.
$\mathcal{S}(\Theta)$	Matriz tornillo simétrica del vector $\Theta \in \mathbb{R}^3$.
$\Theta_a \times \Theta_b$	Producto vectorial o cruz de los vectores Θ_a y $\Theta_b \in \mathbb{R}^3$.

Variables relacionadas al vehículo aéreo		
Variable	Descripción	Unidad
x	Posición relativa al marco de referencia L (dirección Este).	m
y	Posición relativa al marco de referencia L (dirección Norte).	m
z	Posición relativa al marco de referencia L (dirección Arriba).	m
x_b	Eje longitudinal atado al vehículo aéreo, que pertenece al marco de referencia B (apunta hacia la cara frontal del vehículo).	m
y_b	Eje lateral atado al vehículo aéreo, que pertenece al marco de referencia B (apunta hacia la izquierda del vehículo).	m
z_b	Eje normal atado al vehículo aéreo, que pertenece al marco de referencia B (apunta hacia arriba).	m
x_r	Posición del C.M. del vehículo aéreo (relativa a la coordenada x_b).	m
y_r	Posición del C.M. del vehículo aéreo (relativa a la coordenada y_b).	m
z_r	Posición del C.M. del vehículo aéreo (relativa a la coordenada z_b).	m
$f_{1,2,3,4}$	Fuerza de empuje de la propela 1, 2, 3 y 4, respectivamente	N
ϕ	Ángulo de Euler (roll) especificado entorno al eje x (apunta en DMR y es relativo a los marcos de referencia S, L).	rad
θ	Ángulo de Euler (pitch) especificado entorno al eje y (apunta en DMR y es relativo a los marcos de referencia S, L).	rad
ψ	Ángulo de Euler (yaw) especificado entorno al eje z (apunta en DMR y es relativo a los marcos de referencia S, L).	rad
u	Velocidad lineal del vehículo aéreo medida en relación a su movimiento longitudinal (relativa al marco de referencia B).	$m \cdot s^{-1}$
v	Velocidad lineal del vehículo aéreo medida en relación a su movimiento lateral (relativa al marco de referencia B).	$m \cdot s^{-1}$
w	Velocidad lineal del vehículo aéreo medida en relación a su movimiento normal (relativa al marco de referencia B).	$m \cdot s^{-1}$
p	Velocidad angular especificada entorno al eje x_b (apunta en DMR y es relativa al marco de referencia B).	$rad \cdot s^{-1}$
q	Velocidad angular especificada entorno al eje y_b (apunta en DMR y es relativa al marco de referencia B).	$rad \cdot s^{-1}$
r	Velocidad angular especificada entorno al eje z_b (apunta en DMR y es relativa al marco de referencia B).	$rad \cdot s^{-1}$

Parámetros relacionados al vehículo aéreo		
Parámetro	Descripción	Unidad
g	Aceleración gravitacional.	$m \cdot s^{-2}$
m	Masa total del vehículo aéreo	Kg
l	Longitud del brazo-estructura del mini quadrotor, medida del origen del marco de referencia hasta el eje de rotación de i -ésima propela.	m
k	Relación entre la fuerza de fricción aerodinámica presente en la superficie de las aspas, y la fuerza de empuje ejercida por estas.	m
I_p	Momento de inercia entorno al eje- x_b .	$Kg \cdot m^2 \cdot rad^{-1}$
I_q	Momento de inercia entorno al eje- y_b .	$Kg \cdot m^2 \cdot rad^{-1}$
I_r	Momento de inercia entorno al eje- z_b .	$Kg \cdot m^2 \cdot rad^{-1}$
I_{pq}	momento de inercia generado entorno al eje- x_b , cuando el vehículo aéreo se encuentra rotando en relación al eje- y_b . El enfoque antes descrito puede ser extendido para el caso de I_{pr} , I_{qp} , I_{qr} , I_{rp} y I_{rq} .	$Kg \cdot m^2 \cdot rad^{-1}$
f_u	Coefficiente de fricción aerodinámica relacionado a la superficie del vehículo aéreo, cuando este vehículo se mueve en dirección-Longitudinal.	$N \cdot s \cdot m^{-1}$
f_v	Coefficiente de fricción aerodinámica relacionado a la superficie del vehículo aéreo, cuando este vehículo se mueve en dirección-Lateral.	$N \cdot s \cdot m^{-1}$
f_w	Coefficiente de fricción aerodinámica relacionado a la superficie del vehículo aéreo, cuando este vehículo se mueve en dirección-Superior o normal.	$N \cdot s \cdot m^{-1}$
f_{uv}	Coefficiente de fricción aerodinámica presente en la superficie-longitudinal del vehículo aéreo cuando este se desplaza lateralmente. El enfoque antes descrito puede ser extendido para el caso de f_{uw} , f_{vu} , f_{vw} , f_{wu} y f_{wv} .	$N \cdot s \cdot m^{-1}$
f_p	Coefficiente de fricción aerodinámica relacionado a la superficie del vehículo aéreo, cuando este se mueve entorno al eje- x_b .	$N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1}$
f_q	Coefficiente de fricción aerodinámica relacionado a la superficie del vehículo aéreo, cuando este se mueve entorno al eje- y_b .	$N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1}$
f_r	Coefficiente de fricción aerodinámica relacionado a la superficie del vehículo aéreo, cuando este se mueve entorno al eje- z_b .	$N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1}$
f_{pq}	Coefficiente de fricción aerodinámica generado entorno al eje x_b , cuando el vehículo gira en relación al eje- y_b . El enfoque antes descrito puede extenderse para el caso de f_{pr} , f_{qp} , f_{qr} , f_{rp} y f_{rq} .	$N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1}$

Términos vectoriales			
Vector	Descripción	Componentes	Unidad
Θ	vector cualesquiera perteneciente a \mathbb{R}^m	$[\Theta_1 \ \Theta_2 \ \dots \ \Theta_m]^T$	unidades
Vectores relativos al marco de referencia B			
ν	Velocidad lineal del vehículo aéreo.	$[u \ v \ w]^T$	$m \cdot s^{-1}$
ω	Velocidad angular del vehículo aéreo.	$[p \ q \ r]^T$	$rad \cdot s^{-1}$
ϑ	Velocidad (lineal y angular) del vehículo aéreo.	$[\nu^T \ \omega^T]^T$	$\left\{ \begin{array}{l} m \cdot s^{-1} \\ rad \cdot s^{-1} \end{array} \right\}$
g_p	Fuerza gravitatoria (componente lineal).	$mgR(\eta)^T e_3$	N
g_o	Fuerza gravitatoria (componente angular).	$mgS(r)R(\eta)^T e_3$	$N \cdot m$
g_B	Proyección de las fuerzas gravitatorias.	$[g_p^T \ g_o^T]^T$	$\left\{ \begin{array}{l} N \\ N \cdot m \end{array} \right\}$
d_p	Fuerza disipativa lineal.	$F_p \nu$	N
d_o	Fuerza disipativa angular.	$F_o \omega$	$N \cdot m$
d_B	Fuerza disipativa.	$[d_p^T \ d_o^T]^T$	$\left\{ \begin{array}{l} N \\ N \cdot m \end{array} \right\}$
f_p	Fuerzas externas aplicadas sobre el vehículo.	$[f_{p1} \ f_{p2} \ f_{p3}]^T$	N
f_o	Torques externos aplicados sobre el vehículo.	$[f_{o1} \ f_{o2} \ f_{o3}]^T$	$N \cdot m$
f_B	Fuerzas externas totales (lineales y angulares).	$[f_p^T \ f_o^T]^T$	$\left\{ \begin{array}{l} N \\ N \cdot m \end{array} \right\}$
u	Vector de entrada o control.	$[f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4]^T$	N
r	Coordenada del C.M. del vehículo aéreo.	$[x_r \ y_r \ z_r]^T$	m
Vectores relativos al marco de referencia L			
ξ	Posición del vehículo aéreo.	$[x \ y \ z]^T$	m
η	Orientación del vehículo aéreo.	$[\phi \ \theta \ \psi]^T$	rad
q	Postura (posición y orientación).	$[\xi^T \ \eta^T]^T$	$\left\{ \begin{array}{l} m \\ rad \end{array} \right\}$
$g_{\bar{p}}$	Fuerza gravitatoria (componente lineal).	mge_3	N
$g_{\bar{o}}$	Fuerza gravitatoria (componente angular).	$mgW(\eta)^{-T} S(r)R(\eta)^T e_3$	$N \cdot m$
g_L	Fuerza gravitatoria.	$[g_{\bar{p}}^T \ g_{\bar{o}}^T]^T$	$\left\{ \begin{array}{l} N \\ N \cdot m \end{array} \right\}$
$d_{\bar{p}}$	Proyección de la fuerza disipativa lineal.	$R(\eta) F_p R(\eta)^T \dot{\xi}$	N
$d_{\bar{o}}$	Proyección de la fuerza disipativa angular.	$W(\eta)^{-T} F_o W(\eta)^{-1} \dot{\eta}$	$N \cdot m$
d_L	Proyección de la fuerza disipativa.	$[d_{\bar{p}}^T \ d_{\bar{o}}^T]^T$	$\left\{ \begin{array}{l} N \\ N \cdot m \end{array} \right\}$
$f_{\bar{p}}$	Proyección de las fuerzas externas.	$[f_{\bar{p}1} \ f_{\bar{p}2} \ f_{\bar{p}3}]^T$	N
$f_{\bar{o}}$	Proyección de los Torques externos.	$[f_{\bar{o}1} \ f_{\bar{o}2} \ f_{\bar{o}3}]^T$	$N \cdot m$
f_L	Proyección de las fuerzas externas totales (lineales y angulares).	$[f_{\bar{p}}^T \ f_{\bar{o}}^T]^T$	$\left\{ \begin{array}{l} N \\ N \cdot m \end{array} \right\}$

Términos matriciales			
Matriz	Descripción	Componentes	Unidad
Ξ	Matriz cualesquiera perteneciente a $\mathbb{R}^{m \times n}$.	$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \cdots & \Xi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Xi_{m1} & \cdots & \Xi_{mn} \end{bmatrix}$	Ξ unidades
$\mathcal{S}(\Theta)$	Matriz tornillo simétrica del vector $\Theta \in \mathbb{R}^3$.	$\begin{bmatrix} 0 & -\Theta_3 & \Theta_2 \\ \Theta_3 & 0 & -\Theta_1 \\ -\Theta_2 & \Theta_1 & 0 \end{bmatrix}$	Θ unidades
$R(\eta)$	Matriz de rotación.	$\begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}$	—
$R(\eta)$	Matriz de rotación (cálculo).	$R_z(\psi)^T R_y(\theta)^T R_x(\phi)^T$	—
$R_x(\phi)$	Matriz de rotación relativa al ángulo ϕ .	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\phi \end{bmatrix}$	—
$R_y(\theta)$	Matriz de rotación relativa al ángulo θ .	$\begin{bmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix}$	—
$R_z(\psi)$	Matriz de rotación relativa al ángulo ψ .	$\begin{bmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	—
$R(\eta)^{-1}$	Inversa de la matriz de rotación.	$R(\eta)^T$	—
$W(\eta)$	Matriz de transformación angular.	$\begin{bmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi c_\theta^{-1} & c_\phi c_\theta^{-1} \end{bmatrix}$	—
$W(\eta)^{-1}$	Inversa de la matriz de transformación angular.	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & s_\phi c_\theta \\ 0 & -s_\phi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}$	—
$J(\eta)$	Matriz Jacobiana o de transformación.	$\begin{bmatrix} R(\eta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W(\eta) \end{bmatrix}$	—
$J(\eta)^{-1}$	Inversa de la matriz Jacobiana o de transformación.	$\begin{bmatrix} R(\eta)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W(\eta)^{-1} \end{bmatrix}$	—
Ganancia	Para definir las ganancias de control, se utilizará el término K adicionando diferentes subíndices y signos diacríticos para hacer distinción entre ellos. En el lado derecho se muestran algunos ejemplos al respecto.	$K, \hat{K}, \bar{K}, K_D, \bar{K}_D$	—

Matrices relativas al marco de referencia B			
M_B	Matriz de inercia del vehículo aéreo.	$\begin{bmatrix} M_p & M_r^T \\ M_r & M_o \end{bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} Kg \\ Kg \cdot m \\ Kg \cdot m^2 \cdot rad^{-1} \end{Bmatrix}$
M_p	Matriz de masas.	mI_3	Kg
M_o	Tensor de inercia.	$\begin{bmatrix} I_p & I_{pq} & I_{pr} \\ I_{qp} & I_q & I_{qr} \\ I_{rp} & I_{rq} & I_r \end{bmatrix}$	$Kg \cdot m^2 \cdot rad^{-1}$
M_r	Matriz de inercia relacionada al C.M. con coordenada $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$.	$m\mathcal{S}(\mathbf{r})$	$Kg \cdot m$
C_B	Matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis del vehículo aéreo. Su representación no es única (en las siguientes líneas se muestra una configuración particular de los términos C_p , C_o y C_r).	$\begin{bmatrix} C_p & -C_r^T \\ C_r & C_o \end{bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} Kg \cdot rad \cdot s^{-1} \\ Kg \cdot m \cdot rad \cdot s^{-1} \\ Kg \cdot m^2 \cdot s^{-1} \end{Bmatrix}$
C_p	Matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis en referencia común a los movimientos en $\boldsymbol{\nu}$ y $\boldsymbol{\omega}$.	$m\mathcal{S}(\boldsymbol{\omega})$	$Kg \cdot rad \cdot s^{-1}$
C_o	Matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis relacionada a características inerciales.	$\mathcal{S}(M_o\boldsymbol{\omega})$	$Kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$
C_r	Matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis relacionada al C.M. con coordenada $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$.	$m\mathcal{S}(\mathbf{r})\mathcal{S}(\boldsymbol{\omega})$	$Kg \cdot m \cdot rad \cdot s^{-1}$
F_B	Matriz de fricción aerodinámica del vehículo aéreo.	$\begin{bmatrix} F_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_o \end{bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} N \cdot s \cdot m^{-1} \\ N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1} \end{Bmatrix}$
F_p	Matriz de fricción aerodinámica atribuida al movimiento traslacional.	$\begin{bmatrix} f_u & f_{uv} & f_{uw} \\ f_{vu} & f_v & f_{vw} \\ f_{wu} & f_{wv} & f_w \end{bmatrix}$	$N \cdot s \cdot m^{-1}$
F_o	Matriz de fricción aerodinámica atribuida al movimiento angular.	$\begin{bmatrix} f_p & f_{pq} & f_{pr} \\ f_{qp} & f_q & f_{qr} \\ f_{rp} & f_{rq} & f_r \end{bmatrix}$	$N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1}$

Matrices relativas al marco de referencia L [unidades consistentes a las de B]		
M_L	Matriz de inercia proyectada.	$\begin{bmatrix} M_{\bar{p}} & M_{\bar{r}}^T \\ M_{\bar{r}} & M_{\bar{o}} \end{bmatrix}$
$M_{\bar{p}}$	Matriz de masas.	mI_3
$M_{\bar{o}}$	Tensor de inercia proyectado.	$W(\boldsymbol{\eta})^{-T} M_o W(\boldsymbol{\eta})^{-1}$
$M_{\bar{r}}$	Matriz de proyecciones relacionadas al C.M.	$mW(\boldsymbol{\eta})^{-T} \mathcal{S}(\mathbf{r}) R(\boldsymbol{\eta})^T$
C_L	Matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis proyectada (en las siguientes líneas se muestra una configuración particular de los términos $C_{\bar{p}}$, $C_{\bar{o}}$, $C_{\bar{r}_1}$ y $C_{\bar{r}_2}$).	$\begin{bmatrix} C_{\bar{p}} & C_{\bar{r}_1} \\ C_{\bar{r}_2} & C_{\bar{o}} \end{bmatrix}$
$C_{\bar{p}}$	Submatriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis proyectada. Este efecto es a causa del movimiento terrestre.	$\mathbf{0}$
$C_{\bar{o}}$	Submatriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis proyectada, estrechamente relacionada al movimiento angular.	$-W(\boldsymbol{\eta})^{-T} [\mathcal{S}(M_o \boldsymbol{\omega}) + M_o W(\boldsymbol{\eta})^{-1} \frac{d}{dt} [W(\boldsymbol{\eta})]] W(\boldsymbol{\eta})^{-1}$
$C_{\bar{r}_1}$	Submatriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis debida a proyecciones de factores angulares relacionados al C.M.	$-mR(\boldsymbol{\eta}) [\mathcal{S}(\mathbf{r})^T W(\boldsymbol{\eta})^{-1} \frac{d}{dt} [W(\boldsymbol{\eta})] + \mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathcal{S}(\mathbf{r})] W(\boldsymbol{\eta})^{-1}$
$C_{\bar{r}_2}$	Submatriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis debida a proyecciones de factores lineales relacionados al C.M.	$\mathbf{0}$
F_L	Matriz de fricción aerodinámica proyectada.	$\begin{bmatrix} F_{\bar{p}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_{\bar{o}} \end{bmatrix}$
$F_{\bar{p}}$	Matriz de fricción aerodinámica atribuida a las proyecciones del movimiento traslacional.	$R(\boldsymbol{\eta}) F_p R(\boldsymbol{\eta})^T$
$F_{\bar{o}}$	Matriz de fricción aerodinámica atribuida a las proyecciones del movimiento angular.	$W(\boldsymbol{\eta})^{-T} F_o W(\boldsymbol{\eta})^{-1}$

Resumen

En recientes años se ha despertado el interés del público en general hacia el sistema denominado mini quadrotor o mini quadrirotor o mini quadri-helicóptero o vehículo aéreo a escala impulsado por cuatro propelas, principalmente a causa de su amplia gama de aplicaciones y disponibilidad como producto comercial. Su maniobrabilidad resulta simple para los operarios principiantes a pesar de la compleja dinámica involucrada, siendo esto posible gracias a las etapas de control encargadas de proveer comandos preprogramados que auxilian parcial o totalmente al sistema durante el vuelo del mismo. Si se omitieran tales etapas, entonces solo los operadores más experimentados podrían maniobrar el mini quadrotor satisfactoriamente. En aplicaciones donde se requiere un vuelo completamente autónomo o que no intervenga el operador, se verá incrementada la complejidad del análisis que concierne al diseño de la etapa control. En este sentido, la tesis presenta un estudio formal acerca del diseño de algoritmos cuya función es controlar el movimiento del mini quadrotor cuando este se desplaza de un punto a otro, o bien, para que este dé seguimiento a un trayecto deseado. Los algoritmos de control propuestos son de sencilla implementación, además de ser robustos ante la presencia de perturbaciones atribuidas al medio, al ruido en los sensores y a las limitantes prácticas de los sistemas de propulsión. Para validar la estabilidad de cada sistema diseñado, se emplean métodos analíticos y pruebas numéricas. En perspectiva, se propone una clase de etapas de control que resuelven un problema de enfoque genérico (control autónomo de movimiento), implicando entonces que los diseños aquí propuestos pudieran ser implementados sobre una diversidad de actuales y potenciales aplicaciones.

Palabras Clave: control de movimiento, quadrotor, quadrirotor, vehículo aéreo no tripulado, estabilidad, sistema autónomo.

Abstract

In recent years, the mini quadrotor or mini quadcopter has attracted the attention of the general public, mainly because of its wide range application and their availability as commercial product. Despite the complex dynamics of the system, their stability and maneuverability is simple for beginners operators. The reason behind the system simplicity, concerns a set of preprogrammed control commands that partially or completely helpful to the system operator. In other case, only the most experienced operators can satisfactorily handle such dynamics. In applications where the mini quadrotor requires a fully autonomous flight control system, the complexity of the design is increased. The thesis presents a formal study about the design of algorithms for the motion control of the mini quadrotor, where the goal is that the aerial vehicle reach one point in the cartesian space, or following a desired path. The proposed control algorithms can be implemented easily, in addition the system performance is showed in the presence of environment disturbances, sensors noise and the common practical limitations of the propulsion system. To validate the robustness and stability of each design, analytical methods and numerical tests are used. In general, a class of control algorithms are proposed in order to solve a generic task (autonomous motion control), implying that the proposed designs could be implemented on a variety of current and potential applications.

Keywords: motion control, quadrotor, unmanned aerial vehicle, stability, autonomous system.



Capítulo 1

Introducción

El panorama, objetivo y alcance del trabajo de tesis se resume en el presente capítulo. En las primeras secciones se aborda brevemente la temática sobre los vehículos aéreos no tripulados y el papel que la ingeniería de control desempeña sobre estos. Posteriormente, se sintetiza un historial relacionado al vehículo aéreo en estudio¹ y se formula la problemática a resolver. El capítulo finaliza con un resumen del estado del arte, la propuesta de solución del problema en cuestión y las aportaciones derivadas del tema de tesis.

1.1. Preámbulo

En la última década ha aumentado el interés del sector tecnológico de América Latina por los denominados vehículos aéreos no tripulados (UAV²). Algunos de los factores que contribuyen a esta tendencia son la reducción en los costos de producción, los avances tecnológicos de origen militar puestos al alcance de particulares, y el creciente compendio de aplicaciones. Otro factor predominante es la tasa creciente de creación de compañías comerciales extranjeras y filiales locales, que desarrollan y adaptan tecnología en UAVs a escala³ para que sean aplicados en enfoques de carácter social y de entretenimiento. En general, se dice que la temática como tal resulta atractiva para el usuario común, ingeniero y/o investigador, dado que en la actualidad es considerada de vanguardia.

En términos de rapidez, versatilidad y cobertura de terrenos de difícil acceso, los UAVs muestran una mayor ventaja en comparación a los vehículos terrestres. En contraparte, su grado de maniobrabilidad es alto a causa de su dinámica compleja. El desempeño del sistema es entonces dependiente de las habilidades y toma de decisiones del operario. Una alternativa para abordar la dinámica compleja del UAV y los diversos factores involucrados entorno a este, consiste en diseñar etapas de control que auxilien parcialmente al operario durante el vuelo del vehículo. Más aún, se pueden diseñar etapas de control que conlleven al sistema a realizar tareas específicas y a maniobrar en total autonomía.

El diseño de la etapa que controla el movimiento de un UAV, es una tarea que debe contemplar el profundo análisis de los fenómenos, no linealidades y perturbaciones estrechamente relacionadas a la dinámica del vehículo. Diversas instituciones académicas, instituciones privadas e industrias de innovación tecnológica ubicadas predominantemente en el extranjero, han resuelto el problema de autonomía parcial o total del UAV mediante el uso de un gran compendio de técnicas de control. En el ámbito local, la temática ha sido abordada por un grupo reducido de investigadores que contemplan en su solución el análisis crítico. En este sentido, el presente trabajo de tesis mostrará el proceso de análisis y diseño de etapas de control autónomo del denominado vehículo aéreo a escala impulsado por cuatro propelas. Las técnicas utilizadas serán de simple implementación práctica, pero lo suficientemente robustas para controlar el movimiento del vehículo ante el seguimiento de un trayecto que contempla ciertas características de un vuelo tipo-acrobático. La formulación de la problemática, su descripción y propuesta de solución serán tratadas en detalle en secciones posteriores.

¹Mini quadrotor o mini quadrirotor o vehículo aéreo a escala impulsado por cuatro propelas.

²Unmanned Aerial Vehicles: Vehículo Aéreo No Tripulado.

³UAV de menor tamaño (coincidente con las dimensiones de un juguete).

1.2. Antecedentes históricos

De acuerdo a [Xu et. al. \(2008\)](#), en la década de los 90's los desarrollos tecnológicos realizados en las telecomunicaciones y la miniaturización de componentes, originó que la DARPA⁴ pusiera a discusión la creación de UAVs a escala también llamados MAVs⁵ (dimensiones menores a 15 cm) y mini UAVs (dimensiones ligeramente por encima de 15 cm), y los cuales se describen a mayor detalle en [Warwick y Norris \(2008\)](#). Aclarando que en la literatura comúnmente se nombra a los MAVs como mini UAVs ya que pertenecen a dicho grupo. La DARPA estima que entre los años 2010-2015 serán desarrollados avances tecnológicos en lo que respecta al procesamiento y miniaturización de componentes, tal que se podrá equipar mini UAVs de dimensiones cada vez más pequeñas para que realicen tareas complejas de manera autónoma.

Los mini UAVs han provocado el interés de diversos grupos científicos, académicos, independientes y compañías, lo que ha llevado a la generación de diversos prototipos comerciales y plataformas de estudio. Los mini UAVs también han evolucionado hacia diversas áreas y enfoques de carácter social, sus aplicaciones actuales y potenciales van desde ser un elemento visual aéreo para la cobertura en zonas de desastre, monitoreo de tráfico, monitoreo de vida silvestre, mapeo topográfico, detección de incendios, coordinación de unidades terrestres, elemento de enseñanza académica, entretenimiento, etc. Para ejemplos particulares, el lector puede consultar [Dixon et. al. \(2001\)](#); [Spanoudakis et. al. \(2003\)](#) en lo referido a las plataformas de estudio, mientras que en [Santana y Barata \(2005\)](#); [Ollero et. al. \(2004\)](#); [Ollero y Merino \(2004\)](#); [Jones et. al. \(2006\)](#); [Béjar y Ollero \(2008\)](#); [Budyono \(2008\)](#) se describen diversas aplicaciones.

1.2.1. Clasificación de los vehículos aéreos a escala impulsados por propelas

Una clase de mini UAVs son los equipados con propelas para efectuar un despegue y aterrizaje vertical (RW-VTOL⁶). Dentro de los cuales, se encuentra versiones a escala del llamado Ducted Fan⁷, Helicóptero⁸, Helicóptero Coaxial⁹, Helicóptero Tandem-rotor¹⁰, Helicóptero V-22 Osprey¹¹, Three-Rotor⁸ y Quadrotor¹². Variantes de los sistemas Three-Rotor y Quadrotor pueden ser formulados al adicionar sobre los ejes-rotación un conjunto de propelas complementarias en configuración coaxial, es decir, se define sistemas de 6 y 8 propelas llamados Hexa-rotor y Octo-rotor, respectivamente. Estas mismas configuraciones pueden ser especificadas en otro formato, al considerarse que las ubicaciones de los ejes-rotación son distintas entre sí (omitir el arreglo coaxial). Algunos movimientos o características dinámicas de los sistemas anteriormente descritos, pueden ser abordadas por plataformas experimentales que están equipadas con equipos de sensado. Por ejemplo, se tiene el denominado Twinrotor¹³ (TRMS¹⁴) y los prototipos de Quanser^{15,16}.

1.3. Vehículo aéreo en estudio y problemática

En el presente trabajo de tesis se plantea como caso de estudio a el mini quadrotor o vehículo aéreo a escala impulsado por cuatro propelas, el cual pertenece a las categorías de los mini UAVs y RW-VTOL. La Figura 1.1 resume algunos antecedentes concernientes al origen del quadrotor.

⁴Defence Advanced Research Projects Agency: Agencia de Proyectos de Investigación Avanzada de la Defensa.

⁵Micro Aerial Vehicles: micro vehículos aéreos.

⁶Rotatory Wing - Vertical Take Off and Landing: propelas (alas rotatorias) para el despegue y aterrizaje vertical.

⁷Sistema aéreo de 1 propela

⁸Sistema aéreo de 2 propelas: Walkera, Piccolo, MARVIN, etc.

⁹Sistema aéreo de 3 propelas.

¹⁰Sistema aéreo de 2 propelas longitudinales: Ghost rotary-wing (en escala).

¹¹Sistema aéreo de 2 propelas laterales.

¹²Sistema aéreo de 4 propelas: X-UFO, Spy Drone o M1.0 microdrone, Draganflyer V, CEA, X4-flyer, NewOS4, MD4-200, Q-Ball, STARMAC, H-Q1.

¹³Sistema tipo-aéreo conformado por 2 propelas y anclado a una base estática.

¹⁴Twin Rotor Multi-Input Multi-Output System: sistema multi entrada-salida conformado por 2 propelas.

¹⁵Compañía comercial que elabora prototipos académicos.

¹⁶Sistemas tipo-aéreos anclados a bases estáticas: 2DOF-Hover, 3DOF-UFO, 2DOF-Helicopter y 3DOF-Helicopter.

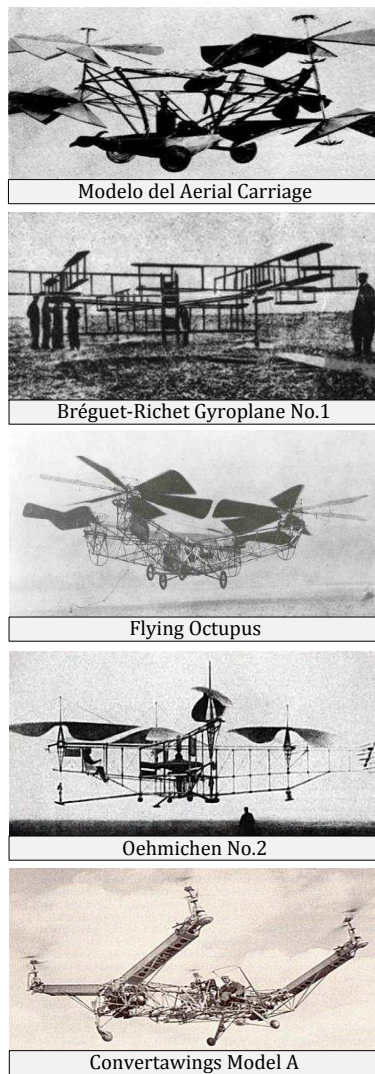


Figura 1.1: [Fuentes: Munson y Wood (1968); Gablehouse (1969); Leishman (2002), www.aviastar.org y www.century-of-flight.net]. El primer planteamiento conceptual de un sistema aéreo basado en propelas que pudiera ser pilotado por el hombre, fue concebido por Leonardo da Vinci en el siglo XVI. Mientras que la idea de un mecanismo que utilizase cuatro propelas para la sustentación del mismo, fue presentada por Sir George Cayley en el siglo XVIII bajo el nombre de *Aerial Carriage*. No fue hasta 1907 que los hermanos Bréguet y el profesor Charles Richet construyeron el primer mecanismo aéreo que utilizaba cuatro propelas para lograr sustentación, y al cual denominaron Bréguet-Richet Gyroplane No.1. Como en todo experimento del tipo pionero, el prototipo de prueba mostró poca estabilidad ya que en este se agregaron únicamente mecanismos para controlar la velocidad de las propelas. El sistema realizó despegues verticales que rondaban el metro de altura, aunque para lograrlo fue necesario auxiliarse de hombres en tierra para mantenerlo estable. Auspiciados por la Armada de los Estados Unidos de América, en 1922 George de Bothezat y Ivan Jerome pusieron a prueba el llamado *Flying Octopus*. El diseño de este quadrotor permitía generar más fuerza aerodinámica para la sustentabilidad del mismo, a fin de alcanzar alturas de hasta 4.6 metros. Adicionalmente, el vehículo aéreo estaba equipado con mecanismos que le proporcionaban cierto grado de maniobrabilidad. Por otro lado, en 1922 el ingeniero francés Étienne Edmond Oehmichen implemento un quadrotor más estable al cual nombró *Oehmichen No.2*. La controlabilidad del sistema se vio aumentada gracias a la incorporación de un conjunto de pequeñas propelas auxiliares que hacen las veces de un rotor de cola. Permitiéndole entonces alcanzar alturas de 15 m y desplazarse distancias de hasta un 1 km. Con el patrocinio de la Armada de los Estados Unidos de América, D.H. Kaplan diseño y puso a prueba el quadrotor *Covertawings Model A* en 1956. Este incorporaba mecanismos que modificaban el ángulo de ataque de las paletas-propelas, brindándole mayor maniobrabilidad en lo que se refiere a la orientación del sistema. A pesar del éxito del proyecto, este fue cancelado a causa de recortes en el presupuesto militar. Posteriormente fueron desarrollados los prototipos Curtiss-Wright X-19 y Bell X-22, que en principio se basan en una típica aeronave pero incorporando en esta una estructura de cuatro propelas para lograr un despegue y aterrizaje vertical.

Diversas variantes surgieron en años subsiguientes, pero todas ellas basadas en el principio de vuelo del quadrotor. En épocas más recientes, los avances tecnológicos y la miniaturización de componentes ha sido un detonante para que el quadrotor resurja en escalas de menor dimensión. Un resumen de aplicaciones se presenta en Ollero et. al. (2004); Budiyo (2008). Otras aplicaciones actuales y potenciales, involucran al mini quadrotor como un elemento de inspección en zonas de desastre, herramienta de monitoreo para escenas de crimen, filmación de videos de carácter recreativo y profesional, para monitoreo de vida silvestre, herramienta para llevar a cabo mapeos topográficos, coordinación de unidades terrestres, patrullaje fronterizo y como elemento de entrenamiento, solo por mencionar ciertas aplicaciones. En el grupo de Figuras 1.2-1.7 se describe una diversidad de configuraciones y aplicaciones relacionadas al mini quadrotor.

Figura 1.2: [Fuente: Pounds et. al. (2004, 2010)] El mini quadrotor denominado *X-4 Flyer Mark II* fue construido en la *Australian National University*. La configuración y materiales usados en este mini quadrotor tienen por objeto introducir estabilidad al sistema. Adicionalmente al diseño propuesto, la estabillización del sistema se complementa con la adición de etapas de control en lo relativo a su orientación.



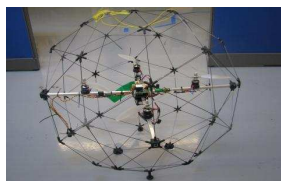


Figura 1.3: [Fuente: www.quanser.com] La plataforma comercial denominada *Q-Ball* es generalmente usada para fines de experimentación y diseño. Adicionalmente, cuenta con una carcasa-esfera de seguridad ante impactos. Cabe mencionar que esta compañía comercial, también pone a disposición el *3DOF-Hover* que es una versión simplificada del mini quadrotor. Pero con la diferencia que tal sistema se encuentra anclado a una base estática.

Figura 1.4: [Fuente: www.kmelrobotics.com] Presentan uno de los mini quadrotores de menor dimensión y más livianos que se han desarrollados a la fecha [2013]. Han resuelto innovadoras tareas, entre las que se encuentra la coordinación de un enjambre de mini quadrotores en aplicaciones de carácter visual y de entretenimiento. Así también, han implementado pruebas relacionadas con maniobras-acrobáticas agresivas, seguimiento de trayectoria y evasión de obstáculos. [Fuente: www.aec.at] En lo que respecta a quadrotores de mayor tamaño, en Austria la compañía *Ars Electronica Futurelab* han coordinado múltiples mini quadrotores para efectos de entretenimiento visual. [Fuente: www.idsc.ethz.ch] El Instituto de Sistemas Dinámicos y Control perteneciente al ETH (*Eidgenössische Technische Hochschule Zürich*) en Suiza, ha resuelto una variedad de problemáticas que van desde sincronizar los movimientos del mini quadrotor al ritmo de una pieza musical, hasta llevar a cabo el ensamblaje de una estructura arquitectónica.

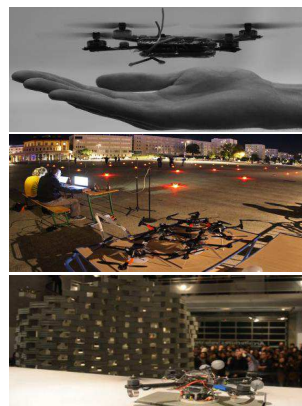


Figura 1.5: [Fuentes: [Skrzypietz \(2012\)](#); [Torres-Sánchez et. al. \(2013\)](#); www.microdrones.com] Un mini quadrotor facilita la cobertura, el monitoreo, la evaluación y el estudio estadístico de grandes extensiones de cultivo o de vida silvestre. En un corto periodo de tiempo ayuda a visualizar o proporciona un conjunto de datos al agricultor/biólogo, para que éste ejecute/evalúe los riesgos y las acciones correctivas que lleven a optimizar o mejorar la calidad del proceso en cuestión. En forma análoga, un mini quadrotor que es utilizado para inspeccionar zonas de alto riesgo o zonas que involucren materiales peligrosos, tiene por objeto sobreguardar la integridad física del personal y proporcionar información en pro de corregir la falla. [Fuentes: www.bu.edu/iml; www.reuters.com] El laboratorio de Mecatrónica Inteligente de Universidad de Boston, ha utilizado el mini quadrotor para tratar de entender el vuelo de murciélagos o aves, esto, con miras a formular algoritmos matemáticos que imiten la eficacia de un vuelo natural. [Fuente: www.dailynews.openwaterswimming.com] Existen múltiples enfoques de uso para el mini quadrotor dentro de un determinado evento deportivo, por ejemplo, para filmación y cobertura de las acciones, proveer de mejor perspectiva a los jueces, para que entrenadores evalúen el desempeño/posicionamiento de sus atletas y ejecuten las estrategias pertinentes, para que los organizadores detecten fallas relativas al circuito o trayecto, solo por mencionar algunas de sus ventajas. [Fuente: www.aquacopters.com; Foto: www.multicopters.es] Recientemente se han desarrollado mini quadrotors con carcasa a prueba de agua. Puede ser empleado para hacer filmaciones referente a la pesca, el buceo superficial, el surfing y otras actividades del tipo recreativas. En general, los enfoques de aplicación y nuevas variantes del mini quadrotor están creciendo drásticamente. Parte de esto se atribuye a la reducción del tamaño de los componentes, reducción de los costos de producción, ventajas ofrecidas dentro de las actividades recreacionales y laborales.



Figura 1.6: [Fuente: www.bgobeyond.co.uk] Una variante no convencional del mini quadrotor es el prototipo híbrido *B Go Beyond*. La configuración de este vehículo consiste de un carro de radio control y un mecanismo de propulsión basado en 4 propelas, además de tener una cámara a bordo para efectos de monitoreo. Resulta ideal para llevar a cabo misiones de exploración en terrenos de difícil acceso, interactuar en escenarios de alto riesgo y como elemento de entretenimiento.

Figura 1.7: [Fuentes: *www.draganfly.com*; *www.rcmp-grc.gc.ca: Forensic Collision Reconstruction Program, Ontario Provincial Police*] Las unidades forenses de la policía canadiense se auxilian de vehículos aéreos no tripulados para la reconstrucción de escenas que involucren desastres, crímenes o accidentes automovilísticos. Esto brinda una mejor perspectiva en tiempo real sobre los factores involucrados en el incidente, permitiendo hacer decisiones y conclusiones más certeras. Algunos otros departamentos policíacos, lo utilizan para operaciones de rescate en terrenos de difícil acceso. Incorporando sobre ellos elementos de propósito específico, por ejemplo una cámara térmica o una cámara de visión nocturna. [Fuentes: *www.microdrones.com*; *www.polizei-verkehr-technik.de* (reporte 05, Sept.2012); *www.telegraph.co.uk*] La policía alemana emplea el mini quadrotor para el monitoreo del tráfico automovilístico, esto, con la finalidad de realizar toma de decisiones concernientes a la descarga del flujo vehicular. En recientes años la policía británica y americana, han comenzado a auxiliarse de mini quadrotores para realizar rondas de patrullajes desde los cielos. En este sentido, normas y regulaciones se están desarrollando para clarificar las limitantes del uso de tal tecnología a fin de proteger los derechos civiles.



El bosquejo esquemático del mini quadrotor se muestra en la Figura 1.8 y se desglosa en mayor detalle en Pounds et. al. (2002, 2006); Lee et. al. (2007); Castillo et. al. (2007). El mini quadrotor es un sistema de 6 g.d.l.¹⁷ que se desplaza libremente a través del medio. Un total de 3 movimientos traslacionales y 3 movimientos angulares son posibles, mediante la adecuada interacción de las fuerzas de empuje generadas por las 4 propelas. Tales movimientos están referidos a un sistema de coordenadas terrestres previamente predefinido.

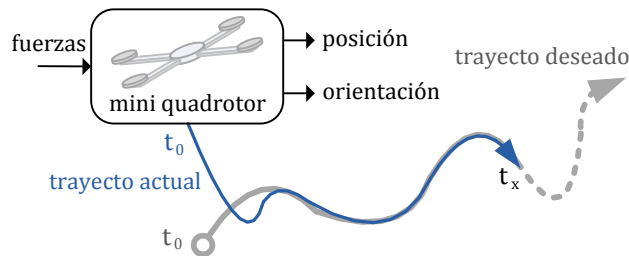


Figura 1.8: Bosquejo esquemático del mini quadrotor

Cabe mencionar que el mini quadrotor pertenece a la clase de sistemas denominados subactuados¹⁸. Adicionalmente, etapas de control son incorporadas al mini quadrotor para mejorar su desempeño y modificar su respuesta en acorde a la tarea a realizar. Independientemente del enfoque de aplicación o asignación de tareas que se le pudiera dar al mini quadrotor, el presente trabajo de tesis plantea solucionar el problema de regulación y seguimiento de trayectoria mediante el diseño de etapas de control autónomo. En particular, se tiene que para la

- Regulación: dentro del espacio coordenado, se fija una o múltiples coordenadas deseada.
- Seguimiento de trayectoria: dentro del espacio coordenado, se especifica un trayecto deseado a seguir (por ejemplo, ver Figura 1.8).

Cualquiera que sea el caso, se establece como objetivo que los movimientos relacionados a la posición y orientación actual del mini quadrotor, se configuren en un dominio de coordenadas o movimientos deseados. En el caso del la regulación, se establece que la postura (posición y orientación) del mini quadrotor debe converger a un valor constante. Mientras que para el seguimiento de trayectoria, el mini quadrotor debe describir movimientos lo suficientemente rápidos para compaginarse con un trayecto deseado dependiente del tiempo. Por ejemplo, en la Figura 1.8 se indica como el mini quadrotor alcanza las cercanías del trayecto deseado dentro del rango de tiempo $t_0 \leq t \leq t_x$, ajustando la tasas de cambio en sus movimientos a fin de mantenerse equiparado al trayecto

¹⁷Grados de libertad.

¹⁸El número de entradas de control (actuadores: propelas) es menor al número de g.d.l.

en cuestión. Cualesquiera que sea el objetivo seleccionado, la solución a la problemática puede ser dada por alguna de las alternativas listadas a continuación.

- El operario del sistema (vía radio-control), realiza la toma de decisiones y proporciona un conjunto adecuado de comandos a las entradas del sistema (propelas). En este caso, se dice que el sistema no es autónomo. Una desventaja es que existe incertidumbre sobre el desempeño y precisión del sistema entorno a las tareas que realiza. Principalmente porque se tiene una ambigua referencia visual para ubicar un punto o trayecto deseado. Otra desventaja consiste en que la toma de decisiones cambian entre operario y operario, o bien, hay poca certeza en la repetitividad experimental a pesar que se pudieran mantener idénticas condiciones de prueba (operario, escenario). Entonces, se tiene que el desempeño y estabilidad del mini quadrotor dependerán exclusivamente de las habilidades del operario para manipular el sistema.
- Se implementan etapas o algoritmos de control que auxilien parcial o totalmente al operario del sistema, resultando entonces en un sistema parcialmente autónomo o totalmente autónomo, respectivamente. Estas medidas proporcionarán mayor certidumbre y precisión al sistema durante las tareas asignadas, o bien, ante situaciones que no puedan ser interpretadas por el operario. Entre las alternativas que brindan autonomía a un sistema, se encuentran los denominados esquemas de control directo y esquemas retroalimentados, que en breve serán descritos.
- El control directo se basa en un esquema en lazo abierto que proporciona comandos pre-grabados (base de datos) hacia las entradas del sistema (propelas). A pesar que esta solución es simple desde el punto de vista práctico, se dice que es poco robusta dado que no recibe información alguna sobre el desempeño del sistema. El control directo resulta efectivo si el sistema se inicializa bajo las mismas condiciones y no existen perturbaciones en el medio, esto, para evitar futuras discrepancias e inexactitudes durante el desarrollo de las tareas pre-establecidas.
- El control retroalimentado se basa en un esquema en lazo cerrado que requiere información de la salida (sensado de variables relacionadas a la posición y orientación del sistema), para calcular los comandos de control destinados a ser utilizados sobre las entradas del sistema (propelas). Esta clase de control es efectiva en escenarios que involucren sistemas con dinámica compleja, perturbaciones en el medio y precisión en las tareas asignadas.

1.4. Objetivo propuesto

El trabajo de tesis está destinado a la propuesta, diseño, análisis y prueba numérica de diversos esquemas de control. Los cuales estabilizarán el movimiento del mini quadrotor entorno a un punto o trayecto definido dentro de un espacio con coordenadas cartesianas. Los controladores diseñados se basarán en esquemas de retroalimentación a fin de proporcionar una completa autonomía al sistema. Para el ajuste y sintonización de las señales de control se hará uso combinado de las acciones tipo P, I y D¹⁹. Estas acciones de control tienen como objeto incorporar parámetros de ajuste que modifiquen la respuesta de cada grado de libertad, es decir, permiten adecuar el tipo respuesta de la salida o postura del mini quadrotor (posición y orientación). Todo lo descrito anteriormente, queda sintetizado por el esquema a bloques mostrado en la Figura 1.9.

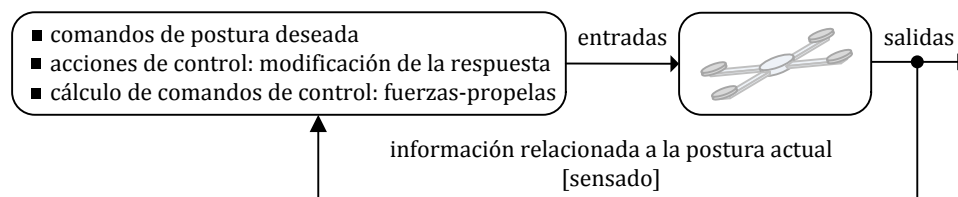


Figura 1.9: Bosquejo esquemático del sistema retroalimentado

Se proponen dos clases de objetivos de control a ser satisfechos por el sistema en cuestión, es decir,

- regulación: conforme el tiempo crece al infinito, la postura actual (posición y orientación) del mini quadrotor debe converger a una posición constante y una orientación nula.

¹⁹P, I y D: proporcional, integral y diferencial.

- seguimiento de trayectoria: conforme el tiempo crece al infinito, la postura actual (posición y orientación) del mini quadrotor debe converger a un trayecto o postura deseada (posición y/o orientación variantes en el tiempo).

En diversas aplicaciones de carácter autónomo, se observa que los movimientos realizados por el mini quadrotor se fundamentan en cumplir al menos uno de los anteriores objetivos de control. Para tareas de mayor complejidad, las etapas diseñadas en el presente trabajo bien podrían ser parte auxiliar o híbrida de un esquema de control más robusto para la aplicación particular.

1.5. Estado del arte en la solución de la problemática

Una etapa de control extensamente empleada en sistemas electromecánicos es el esquema PID, debido en gran parte a su versatilidad y fácil implementación. Para el caso de un mini quadrotor de 6 g.d.l. no es la excepción, ya que esquemas retroalimentados basados en acciones PID han sido exitosamente empleados sobre esta clase de vehículos aéreos. El esquema ha mostrado ser lo suficientemente robusto para hacer frente a las no linealidades inherentes en el mini quadrotor.

Algunos estudios encontrados en literatura resultan meramente prácticos, por ejemplo, en los trabajos de [Orsag y Bogdan \(2009\)](#); [Zhang et. al. \(2009\)](#); [Weng y Abidin \(2006\)](#) no presentan la justificación analítica formal sobre cuestiones relacionadas al modelo del sistema y a su estabilidad en lazo-cerrado. En [Orsag y Bogdan \(2009\)](#) se presenta un controlador PID híbrido (algoritmo discreto para la toma de decisiones) para el posicionamiento del mini quadrotor en relación al espacio cartesiano. En [Zhang et. al. \(2009\)](#) controlan la posición de un mini quadrotor mediante la aplicación directa de acciones PID en cada uno de sus actuadores (motor-propela). Aunque estos estudios son interesante desde el punto de vista experimental, carecen de formalidad sobre el planteamiento o la metodología utilizada. Así también, no queda del todo claro cuales son las condiciones o limitantes en las que el sistema se mantendrá estable.

Para formular la propuesta de solución a la problemática de regulación o seguimiento de trayectoria, se identificó un conjunto de estudios enfocados al análisis formal del control de movimiento con acciones PI, PD y PID. Para un modelo simplificado²⁰ del mini quadrotor, en [Bouabdallah et. al. \(2004\)](#) lo controlan con acciones PID mediante un esquema de linealización por retroalimentación.

Para controlar la dinámica angular del mini quadrotor, en [Mian y Wang \(2008a\)](#) aplican un esquema de linealizado por retroalimentación exacta y control PD. Esta clase de diseño resulta eficiente cuando el mini quadrotor mantiene condiciones cercanas al vuelo estacionario. El trabajo presentado por [Mian y Wang \(2008c,b\)](#); [Mian et. al. \(2008a,b\)](#) consiste en aplicar un controlador tipo PD/PID-Backstepping para regular la postura (posición y orientación) del mini quadrotor, donde las acciones PD y PID son destinadas a controlar la posición y orientación, respectivamente. La validez de la prueba de estabilidad concerniente a la parte angular, resulta cierta solo si se asumen condiciones de vuelo quasi-estacionario. En [Altuğ et. al. \(2002\)](#), se presentó un controlador PD-Backstepping para regular la postura del mini quadrotor en el espacio coordinado, cuyos valores de posición son estimados a través de visión. Sin embargo, no se presentan los argumentos de estabilidad del sistema de lazo-cerrado. En [Hernández-Guzmán et. al. \(2010\)](#) se propone controlar al mini quadrotor a través de esquemas PD con compensación de gravedad. El controlador es de sencilla implementación, dado que no emplea compensación de otros efectos no lineales pertenecientes al modelo del mini quadrotor. Además [Hernández-Guzmán et. al. \(2010\)](#) utiliza el enfoque de sistemas perturbados presentado por [Khalil \(2002\)](#) [pag. 456] para formular los argumentos de estabilidad del sistema de lazo-cerrado. En [Tayebi y McGillvray \(2004, 2006\)](#) se emplea una acción PD² para controlar un mini quadrotor anclado a una base estática, la acción PD se aplica a través del vector de posicionamiento²¹ y la acción D restante se aplica en relación a la velocidad angular del mini quadrotor. De acuerdo a una mención textual contenida en el documento de [Tayebi y McGillvray \(2004, 2006\)](#), es posible demostrar estabilidad asintótica global del sistema (con/sin compensación de la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis). Acciones PD fueron aplicadas por [Philippe y Erwan \(2010\)](#) y acciones PI en [Bourquardez et. al. \(2009\)](#) a fin de controlar un mini quadrotor equipado con sensores basados en visión.

²⁰Anclado a una base estática.

²¹En términos de Cuaterniones (representación alternativa en el sistema de coordenadas).

En estos últimos trabajos, se menciona que es posible analizar la estabilidad del sistema mediante la teoría de perturbaciones singulares (TPS), sin embargo, no se presentan comprobaciones al respecto.

Un enfoque utilizado por los diseñadores, consiste en linealizar por retroalimentación el modelo altamente no lineal del mini quadrotor, o bien, considerar un modelo simplificado o lineal del mini quadrotor. En resumen,

- C.1** El controlador contiene términos que compensen las no linealidades pertenecientes al modelo del mini quadrotor, tal que por retroalimentación se linealiza el sistema.
- C.2** Simplificar la dinámica y cinemática mediante restricciones mecánicas. Por ejemplo, montando al mini quadrotor sobre una base estática.
- C.3** Seleccionando condiciones o puntos de operación. Por ejemplo, el mini quadrotor se restringe a realizar vuelos quasi-estacionarios.

Respecto al uso de las alternativas antes mencionadas, existe una gran cantidad de artículos reportados en la literatura [aquí se cita solo algunos]. Por ejemplo, en [Bouabdallah et. al. \(2004\)](#) se presentan acciones de control PID sobre el modelo simplificado del mini quadrotor (anclado a una base estática). En lo respectivo a sistemas linealizados por retroalimentación, en [Mian y Wang \(2008a\)](#) emplean acciones de control PD, mientras que en [Önkol y Önder Efe \(2009\)](#) emplean diversas técnicas de control (PID, SMC²²).

En todo caso, el uso de las alternativas **C.1-C.3** conlleva al sistema retroalimentado o de lazo-cerrado a estructurarse en un formato lineal o simplificado. Desde un punto de vista analítico o del análisis de estabilidad, tal estructura resulta ser trivial o poco atractiva para un trabajo de nivel doctoral (área: sistemas de control). En otro sentido, el uso de la compensación (caso **C.1**) conlleva a implicaciones de carácter práctico, es decir, la complejidad de los circuitos se incrementa o en su defecto se deberá hacer una programación más extensa. Si se utilizan restricciones mecánicas o puntos de operación (casos **C.2** y **C.3**), se estaría abordando casos de estudio simples o poco correlacionados a un escenario real (mini quadrotor desplazándose en un medio o espacio libre). En consecuencia, se observa que los diseños resultarían poco robustos para controlar el movimiento del mini quadrotor en relación a sus 6 g.d.l. En general, la propuesta y trabajo de tesis omitirá en la medida de lo posible las alternativas antes mencionadas. A razón de esto, la complejidad en el análisis de estabilidad se verá incrementada.

1.6. Propuesta de solución, aportaciones y metodología

Para dar solución a la problemática formulada en la anterior sección, se propone

- Diseñar controladores basados en esquemas tipo-PID, considerando las típicas no linealidades del mini quadrotor o modelo matemático en estudio. El esquema propuesto debe proveer de completa autonomía al sistema en cuestión, tanto en objetivos de regulación y seguimiento de trayectoria.
- La respuesta en cada g.d.l. o movimiento²³ del sistema debe estar regido por su propia acción de control, para facilitar el proceso de sintonización del mismo.
- Diseñar las señales de control en relación directa a cada actuador (propela-fuerza). A diferencia de lo típicamente encontrado en la literatura, donde las señales de control contienen los comandos de al menos dos actuadores. Esta mezcla o inter-dependencia analítica, aumenta la complejidad de la sintonización del sistema. Mientras que en el aspecto práctico, se requeriría implementar o programar una etapa de desacople entre las señales del controlador y las entradas de cada propela.
- La estabilidad del sistema retroalimentado se analizará mediante la teoría de Lyapunov, análisis de sistemas en cascada y la TPS²⁴ descritas por [Khalil \(2002\)](#).
- Generar reglas de sintonización para los controladores tipo-PID propuestos.

A pesar que diversos trabajos relacionados al mini quadrotor han empleado acciones tipo-PID para efectos de control, solo en algunos de estos trabajos han presentado argumentos formales en lo competente al análisis. Más aún, existen pocos estudios que aborden el problema desde la perspectiva de la TPS. Por tal motivo, se dice que la temática está aún abierta a estudio. Una ventaja de llevar a cabo la prueba de estabilidad del sistema es

²²Sliding Mode Control: control por modos deslizantes.

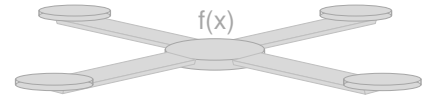
²³Desplazamientos: rotacionales y traslacionales.

²⁴TPS: Teoría de Perturbaciones Singulares.

propiciar un conjunto de argumentos ciertos acerca del esquema analizado, por ejemplo, limitantes, tolerancias y reglas de sintonización que provean al sistema de un adecuado desempeño. En este sentido, se contribuye con fundamentación analítica relacionada al control del mini quadrotor con acciones tipo P,I y D. La aportación buscada por el trabajo de tesis, consiste en diseñar controladores de fácil implementación o programación, que sean lo suficientemente robustos para controlar el movimiento de un mini quadrotor en desplazamiento libre o sin anclaje físico al marco terrestre.

En cuanto a la metodología a seguir, se proponen los siguientes pasos

- Estudio del modelo matemático del mini quadrotor, tanto en su formato clásico como en el formato subactuado.
- Parametrizar las entradas del modelo matemático, tal que cada actuador (propela-fuerza) sea considerado como la entrada a controlar.
- Estudio de esquemas de control tipo-PID y su utilización sobre el mini quadrotor.
- Estudio de los sistemas en cascada, la TPS y la teoría de Lyapunov tanto en el enfoque lineal y no lineal.
- Demostrar la estabilidad de los esquemas de control propuestos.
- Realizar pruebas numéricas que ejemplifiquen el desempeño y la validez del sistema retroalimentado.



Capítulo 2

Modelado matemático del mini quadrotor

A lo largo del capítulo se presenta un compendio de fundamentos y planteamientos relacionados al modelado matemático del mini quadrotor, por ejemplo, la especificación de coordenadas, relaciones cinemáticas y la formulación de la dinámica. Así también, se presenta un conjunto de propiedades que serán de utilidad durante el proceso de diseño y análisis de los controladores. Por último, se obtiene y configura el modelo matemático del mini quadrotor en diferentes clases de formatos.

2.1. Especificación del sistema de coordenadas

Para cuestiones de navegación y control, se establece que los desplazamientos que realiza un vehículo aéreo sobre el medio, deben estar especificados en términos de un sistema coordenadas terrestres. Existen diversas caracterizaciones del sistema coordenado en función de la ubicación geográfica del vehículo aéreo. Entre los sistemas de coordenadas comúnmente utilizados en el campo aeronáutico y aeroespacial, se encuentra el WGS-84¹ para el continente americano y el ETRS89² para el continente europeo. Estos sistemas de coordenadas son base para estructurar las coordenadas utilizadas en los GNSS³ (GPS⁴, GLONASS⁵, GALILEO⁶). En este trabajo, se selecciona el WGS-84 para establecer las condiciones relacionadas al sistema coordenado del vehículo aéreo en cuestión (mini quadrotor). De acuerdo al reporte NIMA TR8350.2 Third Edition (2000) ligado al WGS-84, se establece que la forma nominal de la superficie terrestre se caracteriza mediante un modelo elipsoidal, tal y como queda ejemplificado en la Figura 2.1. La posición del vehículo aéreo se especifica en términos de un sistema ortogonal de coordenadas denominado ECEF⁷. El vértice del sistema ECEF se ubica en el centro de masa de la Tierra, mientras que los ejes x_G , y_G y z_G se encuentran estrictamente fijados al planeta. Cabe mencionar que para vehículos o satélites artificiales desplazándose en órbitas geocéntricas de altitud baja⁸, media⁹ y geoestacionaria¹⁰, se utiliza el sistema de coordenadas ECI¹¹, el cual es similar al ECEF. Sin embargo, los ejes no se encuentran fijados al planeta ya que estos se apuntalan hacia referencias celestes. Las cuales pueden ser especificadas de acuerdo al sistema de coordenadas ecuatoriales^{12,13}.

En la Figura 2.1, la notación \mathbf{E}_G y \mathbf{L} especifica el marco de referencia de la tierra y el marco de referencia tangencial local, respectivamente. El origen de \mathbf{E}_G se encuentra en el centro de masa de la Tierra. El eje x_G apunta en dirección a la intersección del meridiano primario¹⁴ con el ecuador terrestre. El eje y_G apunta en dirección al ecuador terrestre y es perpendicular al eje x_G . El eje z_G es perpendicular al plano ecuatorial x_G - y_G y apunta en

¹WGS-84: World Geodetic System 1984 (sistema geodético mundial 1984).

²ETRS89: European Terrestrial Reference System 1989 (sistema europeo de referencia terrestre 1989).

³GNSS: Global Navigation Satellite System (sistema global de navegación por satélite).

⁴GPS: Global Position System (sistema global de posicionamiento).

⁵GLONASS: GLObal NAvigation Satellite System (sistema satelital de navegación global).

⁶GALILEO: European Union's Galileo positioning system (sistema de posicionamiento Galileo de la Unión Europea).

⁷ECEF: Earth-Centered Earth-Fixed (sistema de coordenadas cartesianas fijado a la Tierra).

⁸Rango aproximado de 160 Km - 2,000 Km por encima de la superficie terrestre nominal.

⁹Rango aproximado de 2,000 Km - 35,786 Km por encima de la superficie terrestre nominal.

¹⁰A 35,786 Km por encima de la superficie terrestre nominal.

¹¹ECI: Earth-Centered Inertial (sistema de coordenadas inerciales ubicado en el centro de masa de la Tierra).

¹²Eje-z apunta al Polo Norte geográfico o celeste; el eje-x se direcciona hacia el Equinoccio vernal.

¹³Su plano ecuatorial celeste x - y es paralelo al plano ecuatorial terrestre x_G - y_G .

¹⁴También denominado: Internacional o de Greenwich.

dirección al Polo Norte geográfico, además de ser coincidente con el eje de rotación terrestre¹⁵. En relación al sistema coordinado de \mathbf{L} , su origen se encuentra en algún punto p_L ubicado en la superficie terrestre, mientras que su orientación se define de acuerdo a la cardinalidad en el punto p_e perteneciente al elipsoide terrestre. La cardinalidad seleccionada en este trabajo, corresponde a la orientación denominada ENU¹⁶, donde el eje-Altitud apunta en dirección del cenit relativo al punto p_e . El sistema coordinado \mathbf{L} se utiliza para caracterizar los movimientos (traslacionales y angulares) de un vehículo aéreo con respecto al vector $\xi_m \in \mathbb{R}^3$ y ligado al punto de observación p_L . El resto de elementos indicados en la Figura 2.1, serán explicados a lo largo de las subsecciones siguientes.

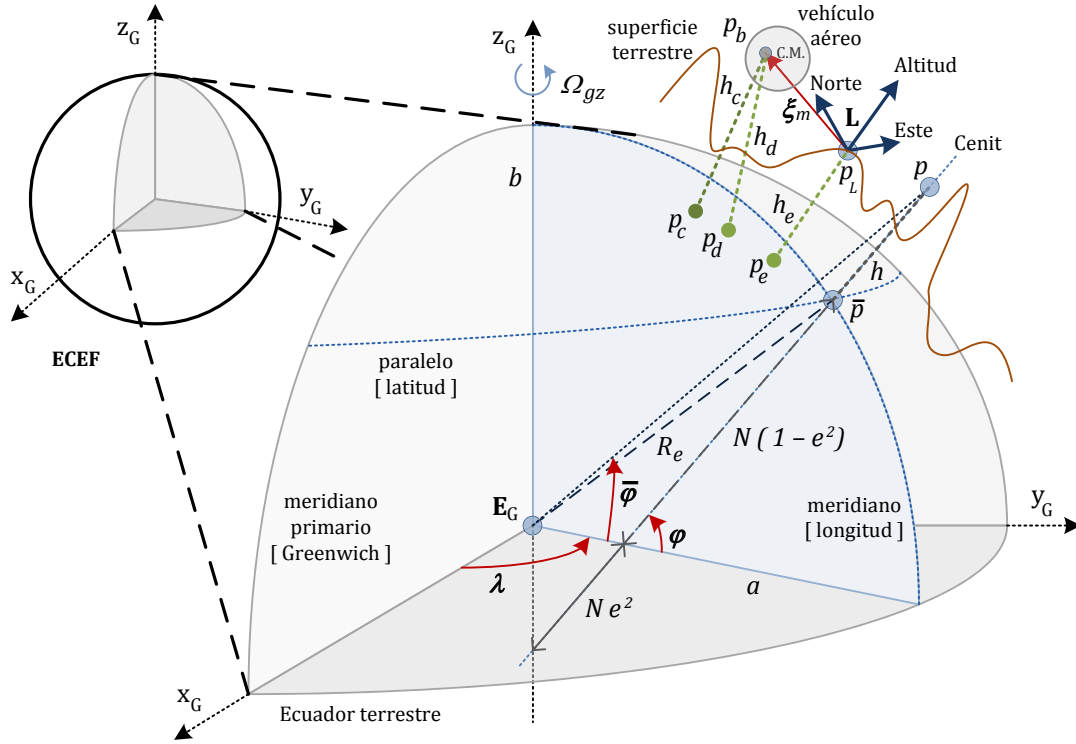


Figura 2.1: Marcos de referencia terrestres

2.1.1. Posición geográfica

Cualquier punto de análisis p , es generalmente descrito mediante el sistema de coordenadas geodésicas (φ, λ, h) , donde φ es la latitud geodésica, λ la longitud geodésica y h la altitud geodésica. Las coordenadas geodésicas pueden transformarse a coordenadas ECEF: $\mathbf{E}_G(x_G, y_G, z_G)$, mediante el denominado vector de posición geográfica

$$\xi_G = \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [N(\varphi) + h] \cos(\lambda) \cos(\varphi) \\ [N(\varphi) + h] \sin(\lambda) \cos(\varphi) \\ [N(\varphi) [1 - e^2] + h] \sin(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

La distancia normal N es medida desde el punto \bar{p} al cruce con el eje- z_G , y se define como

$$N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi)}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2(\varphi) + b^2 \sin^2(\varphi)}},$$

¹⁵Rotación a velocidad angular $\Omega_{gz} = 7,292,115 \times 10^{-11} \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

¹⁶ENU: East-North-Up (Este-Norte-Altitud).

mientras que la excentricidad del elipsoide se expresa mediante el término e , el cual es definido explícitamente por

$$e = \sqrt{f [2 - f]} = a^{-1} \sqrt{a^2 - b^2},$$

siendo $f = a^{-1} [a - b]$ el factor de achatamiento del elipsoide. Los parámetros terrestres¹⁷ a y b , representan la distancia del semieje-mayor (radio ecuatorial) y del semieje-menor (radio polar) correspondientes al modelo elipsoidal, respectivamente. Mediante el uso de identidades trigonométricas, es posible determinar la expresión que relaciona el ángulo geodésico φ con el ángulo geocéntrico $\bar{\varphi}$, es decir,

$$\tan(\bar{\varphi}) = \tan(\varphi) \left[\frac{N(\varphi) [1 - e^2] + h}{N(\varphi) + h} \right]. \quad (2.2)$$

Cabe mencionar que el trazo que cruza el eje- z_G , el punto \bar{p} , el punto p y se dirige en dirección al Cenit, se orienta perpendicularmente al elipsoide nominal de la Tierra en el punto \bar{p} . De acuerdo a lo especificado para el punto de análisis $p(\lambda, \varphi, h)$, es posible caracterizar los puntos restantes $\bar{p}(\lambda, \varphi, 0)$, $p_L(\lambda_e, \varphi_e, h_e)$, $p_b(\lambda_d, \varphi_d, h_d)$, $p_c(\lambda_d, \varphi_c, 0)$ y $p_d(\lambda_d, \varphi_d, 0)$ bajo sus correspondientes coordenadas geodésicas. Haciendo notar que la línea segmentada que une al centro de masa del vehículo aéreo con el punto p_c , apunta hacia el origen del sistema coordenado \mathbf{E}_G . Mientras que la línea segmentada que une al centro de masa del vehículo aéreo con el punto p_d , se encuentra orientada perpendicularmente al elipsoide terrestre en el punto p_d . La utilidad de los puntos p_c y p_d se mostrará a detalle en la siguiente subsección. La magnitud desde el origen de \mathbf{E}_G a cualquier punto de interés, se calcula mediante la norma Euclidiana del vector de posición geográfica (2.1). Un ejemplo al respecto, consiste en definir el radio del elipsoide como

$$R_e(\varphi) := \|\xi_G(\bar{p}(\lambda, \varphi, 0))\| = N(\varphi) a^{-2} \sqrt{a^4 \cos(\varphi)^2 + b^4 \sin(\varphi)^2}, \quad (2.3)$$

el cual representa la distancia formada desde el centro de masa de la Tierra a un punto ubicado en el elipsoide. Por otro lado, para obtener información numérica relacionada a la altura geodésica h_e , suele aplicarse un método que utiliza datums geodésicos asociados al sistema de coordenadas (WGS-84, ETRS89). Los datums geodésicos permiten estimar la altura h_e a partir del conocimiento de las coordenadas geodésicas de un punto geográfico p_L de interés (ubicado en la superficie terrestre de determinado país, región, área). Contemplando este mismo enfoque, es posible estimar la coordenada p_L y la altura h_e a partir del conocimiento del denominado datum horizontal y datum vertical, respectivamente. En términos generales, se dice que el valor numérico de h_e dependerá de la Hipsografía y Topografía de la superficie terrestre en el punto p_L .

2.1.2. Efecto gravitacional

De acuerdo a Pavlis et. al. (2008a,b), la gravedad puede ser caracterizada por un modelo gravitacional terrestre denominado EGM2008¹⁸, el cual depende de coeficientes o datos recolectados por el sistema satelital GRACE¹⁹ o por el sistema GOCE²⁰ operado por la ESA²¹. En la Figura 2.2 se muestra el diagrama vectorial correspondiente a una versión simplificada del modelo EGM2008 presentado en NIMA TR8350.2 Third Edition (2000), donde consideran que el campo gravitacional terrestre es decreciente y homogéneo con respecto a distancias especificadas en y por encima del elipsoide terrestre. Por lo tanto, se dice que el modelo está paramétricamente relacionado a la ubicación geográfica del vehículo aéreo y al elipsoide terrestre. Adicionalmente se introduce el efecto centrípeto atribuido a la rotación de la Tierra.

¹⁷De acuerdo al WGS-84, los valores se definen en $a = 6,378,137.0 \text{ m}$ y $b = 6,356,752.3142 \text{ m}$.

¹⁸EGM2008: Earth Gravitational Model (modelo gravitacional terrestre 2008).

¹⁹GRACE: Gravity Recovery And Climate Experiment (experimento sobre datos climáticos y gravitacionales).

²⁰GOCE: Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer (explorador de flujo oceánico y campo de gravedad).

²¹ESA: European Space Agency (agencia espacial europea).

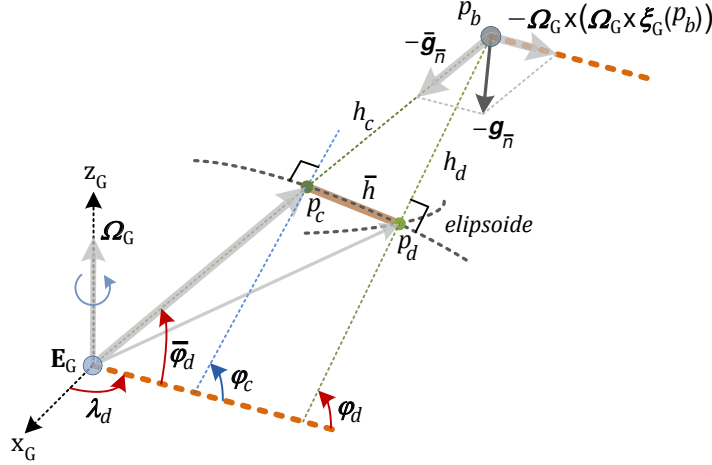


Figura 2.2: Diagrama vectorial de la aceleración gravitacional ejercida sobre el vehículo aéreo

El punto $p_c(\lambda_d, \varphi_c, 0)$ se define en el cruce del elipsoide con un trazo en dirección geocéntrica, el cual conecta el centro de masas del vehículo aéreo $p_b(\lambda_d, \varphi_d, h_d)$ y el centro de masas de la Tierra. El punto $p_d(\lambda_d, \varphi_d, 0)$ se refiere al cruce del elipsoide con un trazo en dirección geodésica. Las distancias que separan a los puntos p_b , p_c y p_d se representan mediante h_c , h_d y \bar{h} . En particular, las dos primeras distancias representan las alturas medidas del elipsoide (puntos p_c y p_d) al centro de masa del vehículo aéreo. El vector de aceleración gravitacional que actúa sobre el vehículo aéreo, es relativo al marco de referencia geográfico \mathbf{E}_c y queda descrito por

$$\mathbf{g}_{\bar{n}} = \bar{\mathbf{g}}_{\bar{n}} + \boldsymbol{\Omega}_G \times (\boldsymbol{\Omega}_G \times \boldsymbol{\xi}_G(p_b)) , \quad (2.4)$$

donde el símbolo \times representa el producto vectorial o cruz, descrito con mayor detalle en el Apéndice A.1. El vector $\boldsymbol{\Omega}_G = [0 \ 0 \ \Omega_{gz}]^T$ representa la velocidad angular terrestre. El vector de posición geográfica del vehículo aéreo $\boldsymbol{\xi}_G(p_b(\varphi_d, \lambda_d, h_d)) \in \mathbb{R}^3$ depende del conjunto de coordenadas geodésicas $(\varphi_d, \lambda_d, h_d)$. El segundo vector en (2.4) es relativo al sistema de coordenadas geográficas e interpreta el efecto de aceleración centrípeta atribuido a la rotación de la Tierra. El vector de aceleración gravitacional geocéntrica $\bar{\mathbf{g}}_{\bar{n}} \in \mathbb{R}^3$ depende de la ubicación geográfica del vehículo aéreo. En términos del sistema de coordenadas geográficas, el vector en cuestión queda representado como

$$\bar{\mathbf{g}}_{\bar{n}} = g(\varphi_c) \begin{bmatrix} \frac{\|\boldsymbol{\xi}_G(p_c)\|}{\|\boldsymbol{\xi}_G(p_c)\| + h_c} \\ \cos(\lambda_d) \cos(\bar{\varphi}_d) \\ \text{sen}(\lambda_d) \cos(\bar{\varphi}_d) \\ \text{sen}(\bar{\varphi}_d) \end{bmatrix} , \quad (2.5)$$

donde

$$g(\varphi_c) = a^{-2} N(\varphi_c) [a g_e \cos(\varphi_c)^2 + b g_p \text{sen}(\varphi_c)^2] , \quad (2.6)$$

$$\bar{\varphi}_d = \arctan(\tan(\varphi_c) [1 - e^2]) ,$$

$$\varphi_c = \arctan \left(\tan(\varphi_d) \left[\frac{N(\varphi_d) [1 - e^2] + h_d}{[1 - e^2] [N(\varphi_d) + h_d]} \right] \right) ,$$

$$h_c = \left[\bar{h}^2 + h_d^2 - 2\bar{h}h_d \cos \left(\pi + \bar{\varphi}_d - \varphi_d - \arcsin \left(\frac{h_d}{\bar{h}} \text{sen}(\varphi_d - \bar{\varphi}_d) \right) \right) \right]^{1/2} ,$$

$$\bar{h} = \|\boldsymbol{\xi}_G(p_c) - \boldsymbol{\xi}_G(p_d)\| := \left[\|\boldsymbol{\xi}_G(p_c)\|^2 + \|\boldsymbol{\xi}_G(p_d)\|^2 - 2\boldsymbol{\xi}_G(p_c) \cdot \boldsymbol{\xi}_G(p_d) \right]^{1/2} .$$

El símbolo \cdot representa el producto interno o punto. Los ángulos $\bar{\varphi}_d$ y φ_c se establecen a partir de las relaciones angulares indicadas en la Figura 2.2 y la expresión (2.2). Mientras que la expresión de h_c se plantea a partir

de la Ley de Senos y Cosenos. Se observa entonces que $\mathbf{g}_{\bar{n}}$ depende de las coordenadas geodésicas, puesto que $p_b(\lambda_d, \varphi_d, h_d)$, $p_c(\lambda_d, \varphi_c(\varphi_d), 0)$, $p_d(\lambda_d, \varphi_d, 0)$, $h_c(\lambda_d, \varphi_d)$ y $\bar{\mathbf{g}}_{\bar{n}}(\lambda_d, \varphi_d, h_d)$. Ahora bien, la magnitud $\|\bar{\mathbf{g}}_{\bar{n}}\|$ representa una función que indica las variaciones de gravedad respecto a la altura del objeto. Los términos g_p ²² y g_e ²³ representan los valores teóricos de aceleración gravitacional geocéntrica en los puntos polares y ecuatoriales pertenecientes al elipsoide terrestre, respectivamente. El rango de valores de la gravedad normal²⁴ se define en $g_e \leq g(\varphi_c) \leq g_p$.

Si la altura h_c es poco significativa respecto a las dimensiones de la Tierra, entonces el efecto gravitatorio atribuido a la rotación de la Tierra resulta despreciable, implicando que $\boldsymbol{\Omega}_G \times (\boldsymbol{\Omega}_G \times \boldsymbol{\xi}_c(p_b)) \cong 0$ y la expresión (2.4) se pueda simplificar en

$$\mathbf{g}_{\bar{n}} = g(\varphi_c) \begin{bmatrix} \cos(\lambda_d) \cos(\bar{\varphi}_d) & \sin(\lambda_d) \cos(\bar{\varphi}_d) & \sin(\bar{\varphi}_d) \end{bmatrix}^T, \quad (2.7)$$

con $g(\varphi_c)$ detallada en (2.6). Asumiendo que el vehículo aéreo se desplaza a bajas velocidades dentro de una región de vuelo acotada y cercana a la superficie terrestre, entonces la orientación y magnitud del vector de gravedad (2.7) se especifican como constantes o invariantes respecto a los movimientos realizados por el vehículo aéreo. Cabe mencionar que si la Tierra se contempla como una esfera, los términos (a, b, g_e, g_p) relacionados al ecuador y polos pueden igualarse a valores estándares o nominales (por ejemplo: radio R_{nom} y gravedad g_{nom}). Esto simplifica aún más el modelo gravitacional, puesto que $R_{nom} = N(\varphi_d) = R_e(\varphi_d) = \|\boldsymbol{\xi}_c(p_c)\| = \|\boldsymbol{\xi}_c(p_d)\|$, $g_{nom} = g(\varphi_d)$, $e = 0$, $\bar{h} = 0$, $h_c = h_d$ y $\varphi_c = \varphi_d = \bar{\varphi}_d$.

2.1.3. Espacio de trabajo y relación entre los sistemas de coordenadas

En comparación a los satélites u vehículos aéreos de baja, mediana y alta órbita, se dice que los mini o micro vehículos aéreos circundan a menores velocidades dentro de una región acotada. Esto se atribuye principalmente a sus limitaciones²⁵ estructurales y de diseño. Para especificar los desplazamientos que realiza un vehículo aéreo dentro de una región de vuelo restringida a las cercanías de la superficie terrestre, comúnmente se utiliza un esquema de referencia terrestre denominado planos tangenciales locales (geodésico local) o LTP²⁶, cuyo bosquejo se muestra en la Figura 2.3. Estos sistemas de coordenadas son ortogonales, y se orientan tangencialmente con respecto al elipsoide terrestre ligado a la localía de interés.

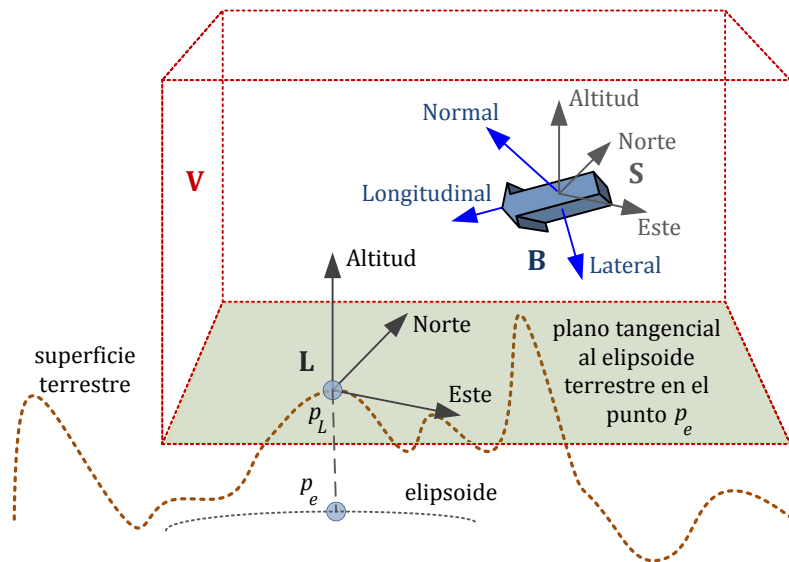


Figura 2.3: Sistema de coordenadas dentro del volumen de trabajo

²² $g_p = 9.832, 184, 937, 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ es el valor de aceleración gravitacional en los polos del elipsoide.

²³ $g_e = 9.780, 325, 335, 9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ es el valor de aceleración gravitacional en el segmento ecuatorial del elipsoide.

²⁴ $g(\varphi_c)$: modelo internacional de aceleración gravitacional (para puntos pertenecientes a la superficie elipsoidal).

²⁵Pérdidas de potencia en sus comandos o señales, vibraciones estructurales, limitaciones energéticas, etc.

²⁶LTP: Local Tangent Plane (plano local tangencial).

El vehículo aéreo a escala se trata como un cuerpo rígido desplazándose dentro del volumen espacial acotado o región de trabajo \mathbf{V} . Para especificar los movimientos del vehículo aéreo, se utilizan diversos sistemas de coordenadas con componentes cartesianas ortogonales, denominados marcos de referencia. El marco de referencia no-inercial \mathbf{B} se encuentra atado al vehículo aéreo en todo momento, y se utiliza para caracterizar la estructura y los movimientos relativos al propio vehículo aéreo (Longitudinal, Lateral, Normal). El marco de referencia espacial \mathbf{S} , especifica los movimientos del vehículo aéreo en relación a un sistema de coordenadas ligado con la superficie de la Tierra. Mientras que el marco de referencia inercial o local \mathbf{L} , caracteriza un sistema de coordenadas atado al punto de observación p_L y orientado en dirección ENU²⁷. Ya que el espacio de trabajo \mathbf{V} de un mini o micro vehículo aéreo es considerado poco significativo con respecto a las dimensiones de la Tierra, se establece que los marcos de referencia \mathbf{S} y \mathbf{L} son paralelos e inerciales dentro de la región de trabajo.

Relación entre los marcos de referencia \mathbf{S} , \mathbf{B} y \mathbf{L}

En la Figura 2.4 se muestra la secuencias angulares que relacionan a los sistemas coordenados \mathbf{B} y \mathbf{S} . Estos movimientos angulares (roll: ϕ , pitch: θ , yaw: ψ) se denominan ángulos de Euler, y definen la orientación del vehículo aéreo respecto al marco de referencia espacial \mathbf{S} . Los ángulos de Euler se refieren secuencialmente entorno a los ejes del sistema coordenado, y se miden en dirección a las manecillas del reloj. De acuerdo a Phillips et. al. (2001, 2003), existen 27 formas distintas de caracterizar la orientación de un vehículo aéreo a través de los ángulos de Euler. En este trabajo se selecciona la secuencia z-y-x o rotación Tait-Bryan ($\psi \rightarrow \theta \rightarrow \phi$), puesto que es la más utilizada en aplicaciones referidas al campo de la ingeniería aeroespacial. Bajo este criterio, una rotación ψ entorno al eje- z_b ubicará el marco \mathbf{B} en la posición denotada por (x_b, y_b, z_b) . Subsecuentemente, la rotación θ entorno al eje- y_b ubicará el marco \mathbf{B} en la posición denotada por (x_b, y_b, z_b) , y finalmente, la rotación ϕ entorno al eje- x_b ubicará el marco \mathbf{B} en la posición denotada por (x_b, y_b, z_b) .

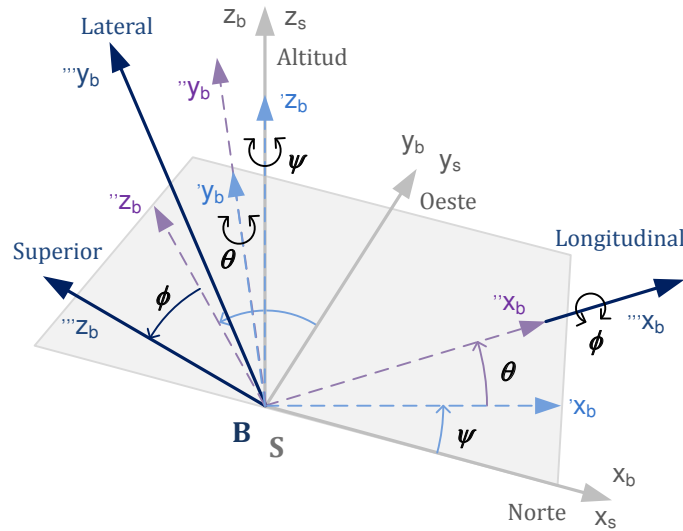


Figura 2.4: Relación secuencial de los sistemas de coordenadas

En Phillips et. al. (2001); Shuster y Markley (2003); Perez y Fossen (2007) se aborda la descripción trigonométrica de estas rotaciones, donde cada una de ellas queda resumida por el siguiente conjunto de matrices de transformación

$$R_{x_b}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) \\ 0 & -\text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix},$$

$$R_{y_b}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

²⁷ENU: East-North-Up (Este-Norte-Altitud).

$$R_{z_b}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) & 0 \\ -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

la notación $R_\Gamma(\Phi) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ indica la rotación del ángulo Φ entorno al eje- Γ . Considerando un volumen de trabajo poco significativo respecto a las dimensiones terrestres, se dice que el marco espacial \mathbf{S} es paralelo al marco terrestre local \mathbf{L} . Por lo tanto las matrices de transformación anteriormente descritas, son utilizadas para relacionar los marcos \mathbf{B} y \mathbf{L} . En resumen, los elementos relativos al marco \mathbf{B} quedarán relacionados al marco \mathbf{L} a través de la matriz de rotación

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{\eta}) &= R_{z_b}(\psi)^T R_{y_b}(\theta)^T R_{x_b}(\phi)^T \\ &:= \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cos(\psi) & \text{sen}(\phi) \text{sen}(\theta) \cos(\psi) - \cos(\phi) \text{sen}(\psi) & \cos(\phi) \text{sen}(\theta) \cos(\psi) + \text{sen}(\phi) \text{sen}(\psi) \\ \cos(\theta) \text{sen}(\psi) & \text{sen}(\phi) \text{sen}(\theta) \text{sen}(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi) & \cos(\phi) \text{sen}(\theta) \text{sen}(\psi) - \text{sen}(\phi) \cos(\psi) \\ -\text{sen}(\theta) & \text{sen}(\phi) \cos(\theta) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde $\boldsymbol{\eta} = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ representa el vector de orientación, el cual contiene los denominados ángulos de Euler y es relativo al sistema de coordenadas del marco \mathbf{S} o \mathbf{L} . Las matrices de transformación y rotación pertenecen a $OS(3)$ ²⁸ descrito en el Apéndice A.2, implicando que la inversa de la matriz de transformación se define en

$$R(\boldsymbol{\eta})^{-1} = R(\boldsymbol{\eta})^T = R_{x_b}(\phi) R_{y_b}(\theta) R_{z_b}(\psi), \quad (2.9)$$

esta última ecuación se emplea para referir elementos con coordenadas en \mathbf{S} o \mathbf{L} , a términos de coordenadas en \mathbf{B} .

Otro factor de importancia consiste en definir las razón de cambio del vehículo aéreo (\mathbf{B}) respecto a los marcos de referencia \mathbf{S} o \mathbf{L} . En base a lo descrito por [Perez y Fossen \(2007\)](#) y utilizando las propiedades P.14, P.26 y P.27 detalladas en el Apéndice A. Las razones de cambio de las matrices de transformación pueden escribirse en la forma

$$\dot{R}_{x_b} = \mathcal{S}_1^T R_{x_b}, \quad \dot{R}_{y_b} = \mathcal{S}_2^T R_{y_b}, \quad \dot{R}_{z_b} = \mathcal{S}_3^T R_{z_b},$$

donde $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}([\dot{\phi} \ 0 \ 0]^T)$, $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}([0 \ \dot{\theta} \ 0]^T)$ y $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}([0 \ 0 \ \dot{\psi}]^T)$. La notación $\mathcal{S}(\ast) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ representa la matriz tornillo simétrica del vector en cuestión $\ast \in \mathbb{R}^3$. Una definición mas detallada de esta clase de matrices se muestra dentro del Apéndice A.1. Ahora bien, la razón de cambio de la matriz de rotación se escribe en la forma

$$\begin{aligned} \dot{R}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) &= R_{z_b}^T R_{y_b}^T R_{x_b}^T \mathcal{S}_1 + R_{z_b}^T R_{y_b}^T \mathcal{S}_2 R_{x_b}^T + R_{z_b}^T \mathcal{S}_3 R_{y_b}^T R_{x_b}^T \\ &= R(\boldsymbol{\eta}) \left[\mathcal{S}_1 + R_{x_b} \mathcal{S}_2 R_{x_b}^T + [R_{x_b} R_{y_b}] \mathcal{S}_3 [R_{x_b} R_{y_b}]^T \right] \\ &= R(\boldsymbol{\eta}) \mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})), \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_{x_b} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_{x_b} R_{y_b} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

representa el vector de velocidad angular del vehículo aéreo. Este vector tiene coordenadas en \mathbf{B} y se caracteriza a partir de proyecciones ligadas al sistema coordinado de \mathbf{L} , es decir, a través de los ángulos de Euler $\boldsymbol{\eta}$ y sus respectivas tasas de cambio $\dot{\boldsymbol{\eta}}$. Esta relación resulta más clara, si se parametriza el vector de velocidad angular tal que

$$\boldsymbol{\omega} = W(\boldsymbol{\eta})^{-1} \dot{\boldsymbol{\eta}}, \quad (2.11)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = W(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\omega}, \quad (2.12)$$

²⁸ $OS(3)$: Special Orthogonal group in 3 dimensions (grupo especial ortogonal de orden 3).

donde

$$W(\boldsymbol{\eta})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{cos}(\phi) & \text{sen}(\phi) \text{cos}(\theta) \\ 0 & -\text{sen}(\phi) & \text{cos}(\phi) \text{cos}(\theta) \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

$$W(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} 1 & \text{sen}(\phi) \tan(\theta) & \text{cos}(\phi) \tan(\theta) \\ 0 & \text{cos}(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ 0 & \text{sen}(\phi) \text{cos}(\theta)^{-1} & \text{cos}(\phi) \text{cos}(\theta)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

La matriz de transformación angular $W(\boldsymbol{\eta})$ es singular²⁹ en $\theta = \pm 90^\circ [2n + 1]$, con $n = 0, 1, 2, \dots$. Mientras que su inversa se representa por $W(\boldsymbol{\eta})^{-1}$ y no tiene restricciones. La expresión (2.11) transforma razones de cambio angulares medidas en \mathbf{L} a términos de \mathbf{B} , en tanto que la expresión (2.12) hace la función contraria.

Relación entre los marcos de referencia \mathbf{L} , \mathbf{S} y \mathbf{E}_G

A partir de la definición de ángulos de Euler (ϕ, θ, ψ) descrita para la Figura 2.4, es posible orientar un determinado sistema de coordenadas ortogonales respecto a otro. Este concepto permite interrelacionar diversos sistemas coordinados $(\mathbf{B}, \mathbf{S}, \mathbf{L}, \mathbf{E}_G)$. De acuerdo a lo presentado en la subsección anterior, se puede obtener la matriz que transforma de coordenadas geográficas (ECEF: \mathbf{E}_G) a coordenadas locales (ENU: \mathbf{L}), es decir,

$$\bar{R}(p_d) = [\mathbf{e}_3 \quad \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \bar{R}_{y_G}(-\bar{\varphi}_d) \bar{R}_{z_G}(\lambda_d) := \begin{bmatrix} -\text{sen}(\lambda_d) & \text{cos}(\lambda_d) & 0 \\ -\text{cos}(\lambda_d) \text{sen}(\bar{\varphi}_d) & -\text{sen}(\lambda_d) \text{cos}(\bar{\varphi}_d) & \text{cos}(\bar{\varphi}_d) \\ \text{cos}(\lambda_d) \text{cos}(\bar{\varphi}_d) & \text{sen}(\lambda_d) \text{sen}(\bar{\varphi}_d) & \text{sen}(\bar{\varphi}_d) \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

donde los vectores $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{e}_2 = [0 \ 1 \ 0]^T$ y $\mathbf{e}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T \in \mathbb{R}^3$ representan bases estándar. La inversa de la matriz (2.15) transforma de coordenadas locales a geográficas. Los cambios angulares del marco \mathbf{S} con respecto al marco \mathbf{L} se representa por la función vectorial

$$\bar{\boldsymbol{\eta}}(p_L, p_S) \in \mathbb{R}^3, \quad (2.16)$$

donde su magnitud dependerá de la discrepancia entre las coordenadas geodésicas p_L y p_S ligadas al vértice de los marcos de referencia local y espacial. Ahora bien, para el volumen espacial acotado o región de trabajo, la interrelación de las razones de cambios entre sistemas coordinados resulta poco significativa, siendo solo de interés para aplicaciones de vehículos espaciales desplazándose a mayores velocidades y altitudes. Por tal motivo, dichos planteamientos y cálculos son omitidos en el presente trabajo de tesis.

2.2. Especificación del sistema mini quadrotor

En la Figura 2.5 se muestra el bosquejo de sistemas de coordenadas y variables ligadas al mini quadrotor. El marco de referencia no-inercial³⁰ \mathbf{B} se encuentra atado al cuerpo del mini quadrotor en todo momento. La orientación de este sistema de coordenadas se hace coincidir con las caras del vehículo aéreo, comúnmente identificadas como longitudinal y lateral de acuerdo al tipo de movimiento que realiza el vehículo aéreo en cuestión. El vértice del marco de referencia inercial local³¹ \mathbf{L} se encuentra en todo momento atado a un punto perteneciente a la superficie terrestre. La orientación de este sistema de coordenadas corresponde a la dirección denominada ENU³². Mediante la interacción de cuatro fuerzas de empuje $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4)$ provistas por sistemas de propulsión (actuadores), se provoca que el mini quadrotor realice movimientos traslacionales y angulares.

²⁹Orientación comúnmente denominada Gimbal-Lock.

³⁰Identificado como body-fixed frame (marco de referencia de cuerpo). Las leyes de Newton no son aplicables.

³¹Identificado como earth-based coordinate system (marco de referencia ligado a la Tierra).

³²ENU: East-North-Up (Este-Norte-Altitud).

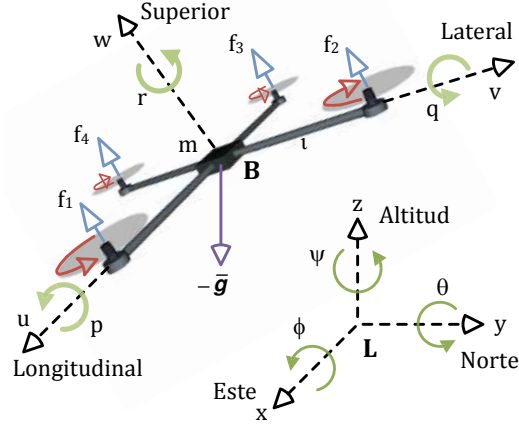


Figura 2.5: Marcos de referencia del mini quadrotor

El conjunto de variables mostradas en la Figura 2.5, se resumen en

$$\text{vector de posición} \quad \xi = [x \ y \ x]^T, \quad (2.17a)$$

$$\text{vector de orientación} \quad \eta = [\phi \ \theta \ \psi]^T, \quad (2.17b)$$

$$\text{vector de velocidad lineal} \quad \nu = [u \ v \ w]^T, \quad (2.17c)$$

$$\text{vector de velocidad angular} \quad \omega = [p \ q \ r]^T, \quad (2.17d)$$

$$\text{vector de entrada} \quad \mathbf{u} = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4]^T, \quad (2.17e)$$

$$\text{vector de aceleración gravitacional} \quad \bar{\mathbf{g}}, \quad (2.17f)$$

el escalar ι es la distancia entre el vértice del sistema coordenado \mathbf{B} y el eje de rotación de la i -ésima propela, mientras que m es la masa total del mini quadrotor. Los vectores de posición y orientación son relativos al marco de referencia \mathbf{L} . Los vectores de velocidad lineal y angular son relativos al marco de referencia \mathbf{B} . El vector de entrada contiene las fuerzas de empuje f_i desarrolladas por el i -ésimo sistema de propulsión. La expresión del vector de aceleración gravitacional terrestre $\bar{\mathbf{g}}$ se abordará con mayor detalle en las secciones subsiguientes. El vector de orientación se conforma de los denominados ángulos de Euler (roll: ϕ , pitch: θ , yaw: ψ).

2.3. Cinemática

El modelo cinemático del mini quadrotor se define utilizando las transformaciones descritas en la Sección 2.1.3, las cuales se agrupan en la denominada matriz de transformación cinemática

$$J(\eta) = \begin{bmatrix} R(\eta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W(\eta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \quad (2.18)$$

donde la matriz de rotación $R(\eta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ se describe explícitamente en (2.8), mientras que la matriz de transformación angular $W(\eta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ se muestra en (2.14). Para las variables indicadas en la Figura 2.5, se dice que es posible direccionar y describir el conjunto de movimientos $(x, y, z, \phi, \theta, \psi)$ a partir de los movimientos (u, v, w, p, q, r) . Es decir, el

$$\text{vector de postura (posición y orientación) relativo al marco } \mathbf{L}: \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad (2.19a)$$

$$\text{y el vector de velocidad (lineal y angular) relativo al marco } \mathbf{B}: \quad \vartheta = \begin{bmatrix} \nu \\ \omega \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad (2.19b)$$

se relacionan a través del modelo cinemático o ecuación de cinemática traslacional y rotacional, esto es,

$$\dot{\mathbf{q}} = J(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{R}^6. \quad (2.20)$$

La relación entre movimientos es estrictamente dependiente de alguna configuración particular de la matriz de transformación cinemática $J(\boldsymbol{\eta})$. Un conjunto de propiedades concernientes a la matriz de transformación cinemática, se lista a continuación.

- P.1** $|R(\boldsymbol{\eta})| = |R(\boldsymbol{\eta})^T| = |R(\boldsymbol{\eta})^{-1}| = |R(\boldsymbol{\eta})^{-T}| = 1$
- P.2** $|J(\boldsymbol{\eta})| = |J(\boldsymbol{\eta})^T| = |W(\boldsymbol{\eta})| = |W(\boldsymbol{\eta})^T| = \cos(\theta)^{-1}$
- P.3** $|J(\boldsymbol{\eta})^{-1}| = |J(\boldsymbol{\eta})^{-T}| = |W(\boldsymbol{\eta})^{-1}| = |W(\boldsymbol{\eta})^{-T}| = \cos(\theta)$
- P.4** $\left| \frac{d}{dt} [R(\boldsymbol{\eta})] \right| = \left| \frac{d}{dt} [R(\boldsymbol{\eta})^T] \right| = \left| \frac{d}{dt} [R(\boldsymbol{\eta})^{-1}] \right| = \left| \frac{d}{dt} [R(\boldsymbol{\eta})^{-T}] \right| = 0$
- P.5** $\left| \frac{d}{dt} [W(\boldsymbol{\eta})] \right| = \left| \frac{d}{dt} [W(\boldsymbol{\eta})^T] \right| = \left| \frac{d}{dt} [W(\boldsymbol{\eta})^{-1}] \right| = \left| \frac{d}{dt} [W(\boldsymbol{\eta})^{-T}] \right| = 0$
- P.6** $\left| \frac{d}{dt} [J(\boldsymbol{\eta})] \right| = \left| \frac{d}{dt} [J(\boldsymbol{\eta})^T] \right| = \left| \frac{d}{dt} [J(\boldsymbol{\eta})^{-1}] \right| = \left| \frac{d}{dt} [J(\boldsymbol{\eta})^{-T}] \right| = 0$
- P.7** $\|R(\boldsymbol{\eta})\| = \|R(\boldsymbol{\eta})^T\| = \|R(\boldsymbol{\eta})^{-1}\| = \|R(\boldsymbol{\eta})^{-T}\| = 1$
- P.8** $1 \leq \|J(\boldsymbol{\eta})\| = \|J(\boldsymbol{\eta})^T\| = \|W(\boldsymbol{\eta})\| = \|W(\boldsymbol{\eta})^T\| = |\cos(\theta)|^{-1} \sqrt{1 + |\sin(\theta)|} < \infty$
- P.9** $1 \leq \|J(\boldsymbol{\eta})^{-1}\| = \|J(\boldsymbol{\eta})^{-T}\| = \|W(\boldsymbol{\eta})^{-1}\| = \|W(\boldsymbol{\eta})^{-T}\| = \sqrt{1 + |\sin(\theta)|} \leq \sqrt{2}$
- P.10** $0 \leq \left\| \frac{d}{dt} [R(\boldsymbol{\eta})] \right\| = \left\| \frac{d}{dt} [R(\boldsymbol{\eta})^T] \right\| = \left\| \frac{d}{dt} [R(\boldsymbol{\eta})^{-1}] \right\| = \left\| \frac{d}{dt} [R(\boldsymbol{\eta})^{-T}] \right\| \leq \|\boldsymbol{\omega}\|$
- P.11** $0 \leq \left\| \frac{d}{dt} [W(\boldsymbol{\eta})^{-1}] \right\| = \left\| \frac{d}{dt} [W(\boldsymbol{\eta})^{-T}] \right\| = \sqrt{\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2} \leq \|\dot{\boldsymbol{\eta}}\| \leq \|W(\boldsymbol{\eta})\| \|\boldsymbol{\omega}\|$
- P.12** $0 \leq \left\| \frac{d}{dt} [J(\boldsymbol{\eta})^{-1}] \right\| = \left\| \frac{d}{dt} [J(\boldsymbol{\eta})^{-T}] \right\| \leq \max\{\|\boldsymbol{\omega}\|, \|\dot{\boldsymbol{\eta}}\|\} \leq \|W(\boldsymbol{\eta})\| \|\boldsymbol{\omega}\|$
- P.13** $0 \leq \left\| \frac{d}{dt} [W(\boldsymbol{\eta})] \right\| = \left\| \frac{d}{dt} [W(\boldsymbol{\eta})^T] \right\| \leq \|W(\boldsymbol{\eta})\|^2 \|\dot{\boldsymbol{\eta}}\| \leq \|W(\boldsymbol{\eta})\|^3 \|\boldsymbol{\omega}\|$
- P.14** $0 \leq \left\| \frac{d}{dt} [J(\boldsymbol{\eta})] \right\| = \left\| \frac{d}{dt} [J(\boldsymbol{\eta})^T] \right\| \leq \max\{\|\boldsymbol{\omega}\|, \|W(\boldsymbol{\eta})\|^2 \|\dot{\boldsymbol{\eta}}\|\} \leq \|W(\boldsymbol{\eta})\|^3 \|\boldsymbol{\omega}\|$

Las propiedades son válidas para el dominio $\mathcal{D} = \{\mathbb{R}^6 - \{\theta = \pm 90^\circ [2n + 1]\} : \theta \in \mathbf{q}, n = 0, 1, 2, \dots\}$. El símbolo $\|\ast\|$ representa la norma Euclídea o Espectral del vector o matriz en cuestión. Considerando la matriz diagonal cualesquiera $M > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y el Teorema de Sylvester tratado en Kelly et. al. (2005), se concluye que

- P.15** $\bar{M} = R(\boldsymbol{\eta}) M R(\boldsymbol{\eta})^T > \mathbf{0}$ para todo el dominio \mathcal{D} , puesto que

$$\mathbf{e}_j^T \bar{M} \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^3 M_{ii} R_{ji}^2 > 0, \text{ siendo } j = 1, 2, 3.$$

$$\left| [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2]^T \bar{M} [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \right| = M_{22} M_{33} \sin(\theta)^2 + M_{11} \cos(\theta)^2 [M_{33} \sin(\phi)^2 + M_{22} \cos(\phi)^2] > 0$$

$$|\bar{M}| = \prod_{i=1}^3 M_{ii} > 0$$

- P.16** $\hat{M} = W(\boldsymbol{\eta})^{-T} M W(\boldsymbol{\eta})^{-1} > \mathbf{0}$ para todo el dominio \mathcal{D} , puesto que

$$\mathbf{e}_1^T \hat{M} \mathbf{e}_1 = M_{11} > 0$$

$$\mathbf{e}_2^T \hat{M} \mathbf{e}_2 = M_{33} \sin(\phi)^2 + M_{22} \cos(\phi)^2 > 0$$

$$\mathbf{e}_3^T \hat{M} \mathbf{e}_3 = M_{11} \sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 [M_{22} \sin(\phi)^2 + M_{33} \cos(\phi)^2] > 0$$

$$\left| [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2]^T \hat{M} [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \right| = M_{11} [M_{22} \cos(\phi)^2 + M_{33} \sin(\phi)^2] > 0$$

$$\left| \hat{M} \right| = \cos(\theta)^2 \prod_{i=1}^3 M_{ii} > 0$$

Los vectores \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 y $\mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ representan bases estándar. En general, todas las anteriores propiedades serán de utilidad para aspectos relacionados al modelo del mini quadrotor y al análisis de estabilidad presentados en posteriores apartados.

2.4. Dinámica

Algunos trabajos consultados en lo referido al estudio del mini quadrotor, se resume a continuación: Hamel et. al. (2002); Altuğ et. al. (2003); Bouabdallah et. al. (2004); Castillo et. al. (2004); Tayebi y McGilvray (2004); Pounds et. al. (2006); Madani y Benallegue (2006); Hoffmann et. al. (2007); Lee et. al. (2007); Raffo et. al. (2008); Mian y Wang (2008b); Hernández-Guzmán et. al. (2010); Kim et. al. (2010); Freddi et. al. (2011). Los modelos matemáticos ahí presentados, corresponden a un mini quadrotor con centro de masa invariante en el tiempo. Sin importar la notación utilizada por los autores, la generalización del modelo dinámico del mini quadrotor con coordenadas en \mathbf{B} , puede ser agrupado a la forma estándar

$$M_B \dot{\boldsymbol{\vartheta}} + C_B(\boldsymbol{\vartheta}) \boldsymbol{\vartheta} + F_B \boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{g}_B(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_B(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^6 . \quad (2.21)$$

Aplicando el cambio de variable (2.20) en (2.21), es posible reescribir la forma estándar del modelo dinámico a términos de coordenadas en \mathbf{L} , es decir,

$$M_L(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + C_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + F_L(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_L(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_L(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^6 . \quad (2.22)$$

donde

$$M_L(\mathbf{q}) = J(\boldsymbol{\eta})^{-T} M_B J(\boldsymbol{\eta})^{-1} , \quad (2.23a)$$

$$C_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = J(\boldsymbol{\eta})^{-T} \left[C_B \left(J(\boldsymbol{\eta})^{-1} \dot{\mathbf{q}} \right) - M_B J(\boldsymbol{\eta})^{-1} \frac{d}{dt} [J(\boldsymbol{\eta})] \right] J(\boldsymbol{\eta})^{-1} , \quad (2.23b)$$

$$F_L(\mathbf{q}) = J(\boldsymbol{\eta})^{-T} F_B J(\boldsymbol{\eta})^{-1} , \quad (2.23c)$$

$$\mathbf{g}_L(\mathbf{q}) = J(\boldsymbol{\eta})^{-T} \mathbf{g}_B(\mathbf{q}) , \quad (2.23d)$$

$$\mathbf{f}_L(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = J(\boldsymbol{\eta})^{-T} \mathbf{f}_B(\mathbf{u}) . \quad (2.23e)$$

El subíndice $*_B$ y $*_L$ en el elemento $*$, indica el sistema de coordenadas al que se hace referencia. La notación M , C y $F \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ representa la matriz de inercia, matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis, y matriz de fricción, respectivamente. Mientras que los vectores \mathbf{g} y $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^6$ representan las fuerzas gravitacionales y fuerzas de entrada, respectivamente. La fuerzas de empuje provistas por los actuadores se representa mediante el vector de entrada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$. En la definición (2.19) se describe los vectores de postura $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^6$ y de velocidad $\boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{R}^6$.

En los trabajos especializados sobre la temática es común encontrar un compendio de consideraciones que realizan sobre la estructura del mini quadrotor, esto con la finalidad de simplificar la complejidad del modelo matemático y en consecuencia la reducción de la problemática concerniente al control del sistema. Por mencionar alguno de estos trabajos, en Castillo et. al. (2004); Tayebi y McGilvray (2004); Lee et. al. (2007); Madani y Benallegue (2007); Raffo et. al. (2008); Kim et. al. (2010); Freddi et. al. (2011) se asume que

- La estructura del mini quadrotor es estrictamente rígida e invariante con el tiempo,
- el sistema de propulsión esta firmemente atado a la estructura del mini quadrotor,
- el efecto giroscópico atribuido al sistema de propulsión es omitido, si la masas de sus rotores es mucho menor a la masa restante del mini quadrotor,
- para cualquier velocidad del sistema de propulsión, sus aspas no presentan deformación estructural o efecto de torsión,
- el sistema de propulsión no consta con mecanismos que provean de aleteo a las aspas,
- el mini quadrotor se desplaza a bajas velocidades a través de un flujo laminar (régimen con bajo número de Reynolds), tal que durante los movimientos rotacionales y traslacionales, la correspondiente fricción aerodinámica es proporcional a la velocidad angular y lineal, respectivamente.

A pesar de las simplificaciones que conllevan estas consideraciones, el modelo dinámico resultante es el más ampliamente utilizado por los especialistas en el campo. Principalmente porque el modelo conserva las características no linealidades implícitas en el sistema ante escenarios de vuelo real. En todo caso, el proceso relacionado al modelado dinámico y definición explícita de (2.21)-(2.22) se abordará posteriormente, entre tanto, algunos estudios preliminares ligados a dichas expresiones se presentarán en las siguientes subsecciones.

2.4.1. Fuerzas de entrada

En la Figura 2.6 se muestra el diagrama de cuerpo libre para las fuerzas lineales y angulares atribuidas al i -ésimo sistema de propulsión, siendo $i = 1, 2, 3, 4$. El contorno del plano de rotación \mathbf{B}'_i se especifica con los movimientos realizados por los extremos de las paletas-aspas pertenecientes al i -ésimo sistema de propulsión. Su posición y orientación nominal de referencia, es correspondiente al plano asignado como \mathbf{B}_i ³³. La conicidad se debe al estrés estructural ejercido sobre la aspa, principalmente a causa de la fuerza centrífuga y la fuerza de sustentación o de elevación total generadas durante la rotación de la aspa en cuestión. Los daños estructurales se evitan al liberar de estrés a la aspa mediante la incorporación de bisagras-articulación de aleteo o batimiento sobre las bases de estas, o bien, se utilizan aspas-semirígidas conformadas por materiales con cierto grado de flexibilidad. Una discrepancia o antisimetría en el aleteo de las aspas pertenecientes al i -ésimo sistema de propulsión, conlleva a variaciones de la orientación del plano de rotación (θ_i : ángulo de aleteo longitudinal, ϕ_i : ángulo de aleteo lateral). En consecuencia, se modifica la dirección del vector $\mathbf{f}'_{ei} \in \mathbb{R}^3$ correspondiente a la fuerza de empuje total del i -ésimo sistema de propulsión.

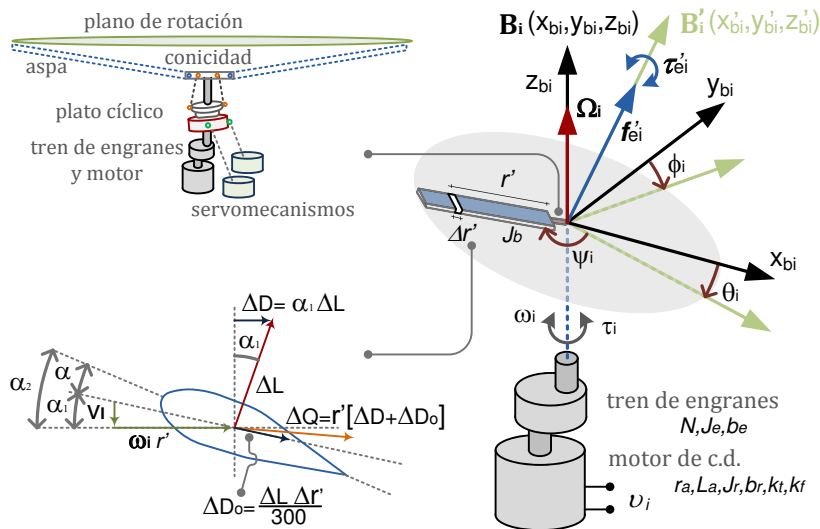


Figura 2.6: Diagrama de cuerpo libre del i -ésimo sistema de propulsión

La discrepancia en el aleteo-conicidad es posible al configurar variaciones en el ángulo de ataque α de la aspa conforme esta realiza el desplazamiento rotacional ψ_i . La discrepancia también depende de componentes adicionales ligadas a la velocidad de desplazamiento del mini quadrotor y al comportamiento del flujo de aire inducido al plano de rotación. Para efectos introductorios, en los subsecuentes planteamientos se considera que:

- Cada aspa se asume como un sólido rígido en forma de prisma rectangular.
- La velocidad del mini quadrotor es poco significativa en relación³⁴ a la velocidad del sonido o de vehículos de gran escala, en consecuencia se incrementa la simetría de la conicidad a causa de reducir la limitante de diseño concerniente a la rigidez de la aspa en cuestión.
- En las aspas del i -ésimo sistema de propulsión incide un flujo homogéneo para todo desplazamiento ψ_i y desplazamiento del mini quadrotor. Tal que el vector de empuje total $\mathbf{f}'_{ei} \in \mathbb{R}^3$ y provisto por las fuerzas

³³Los planos \mathbf{B}_i son paralelos al marco de referencia \mathbf{B} .

³⁴En la literatura se denomina mach number (número mach).

de empuje incrementales ΔL , apunta en dirección al eje- \mathbf{z}'_{bi} . Mientras que el vector de torque de carga $\boldsymbol{\tau}'_{ei} \in \mathbb{R}^3$ y atribuido a las fuerzas de fricción incrementales ΔQ actuando sobre las aspas, se define entorno al eje- \mathbf{z}'_{bi} .

- Comúnmente la función del ángulo de flujo local entrante α_1 es dependiente de un argumento con región reducida (menor a 15°), siendo posible asumir aproximaciones lineales al respecto.
- El vector de velocidad angular proporcionado a la salida del i -ésimo tren de engranajes es $\boldsymbol{\Omega}_i = [0 \ 0 \ \omega_i]^T$, con coordenadas en \mathbf{B}_i . La respectiva proyección sobre el marco \mathbf{B}'_i se define como

$$\boldsymbol{\Omega}'_i = W(\phi_i, \theta_i)^{-1} \boldsymbol{\Omega}_i \in \mathbb{R}^3 ,$$

donde la matriz inversa de $W(\phi_i, \theta_i) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ se define en (2.13) con los argumentos correspondientes (ϕ_i, θ_i) .

- Se considera que los mecanismos de articulación proyectan íntegramente la velocidad angular ω_i y torque τ_i del i -ésimo sistema electromecánico (motor de c.d. controlado por armadura y tren de engranajes), hacia el correspondiente plano de rotación de las aspas.
- A partir del enfoque presentado en Kelly et. al. (2005), se sintetiza el modelo matemático del i -ésimo sistema electromecánico en la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_i \\ \dot{\tau}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J^{-1}b & J^{-1}N^2 \\ -N^{-2}L_a^{-1}k_t k_f & -L_a^{-1}r_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_i \\ \tau_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -J^{-1}N^2 & 0 \\ 0 & N^{-1}L_a^{-1}k_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi_i) \cos(\theta_i) \tau_{ci} \\ v_i \end{bmatrix} ,$$

donde

$$\begin{bmatrix} J \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_r + N^2 [J_e + J_p + J_b] \\ b_r + N^2 [b_e + b_p] \end{bmatrix}$$

contiene el momento de inercia reflejada J y el coeficiente de fricción reflejada b en relación al eje- \mathbf{z}_b . El torque de carga τ_{ci} se describe en (2.25) y se debe a la fricción aerodinámica actuando sobre las aspas. Los parámetros r_a , L_a , k_t , k_f , b_r , J_r y v_i representan la resistencia de armadura, inductancia de armadura, ganancia de torque-corriente, ganancia de fuerza contraelectromotriz, coeficiente de fricción de los cojinetes-rotor, momento de inercia del rotor y el voltaje del i -ésimo motor, respectivamente. Mientras que N , b_e , J_e , J_p , b_p y J_b representa la relación de engranaje, coeficiente de fricción de los cojinetes-engranes, momento de inercia del sistema de engranaje, momento de inercia del plato cíclico, coeficiente de fricción del plato cíclico (juntura de bola, cojinetes) y momento de inercia de las aspas que componen al i -ésimo sistema de propulsión, respectivamente.

- En el aspecto comercial, los mini quadrotores no son provistos de bisagras de aleteo o sistemas de articulación a causa de la complejidad y de los costos que esto conllevaría. Sin embargo es posible que sus aspas no sean lo suficientemente rígidas, implicando la presencia de perturbaciones con comportamientos análogos a los abordados en la presente subsección.

Aplicando los métodos de cálculo tratados por Prouty (1986), la estimación teórica de la fuerza de elevación incremental se enuncia como

$$\Delta L = 3\rho\iota_a\alpha [\omega_i r']^2 \Delta r' ,$$

donde ρ es la densidad del aire, ι_a es el ancho de la aspa, $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ es el ángulo de ataque local y α_1 es el ángulo de flujo local entrante aproximado teóricamente a la función

$$\alpha_1 = \arctan(\omega_i^{-1} r'^{-1} V_I) := \arctan\left(\omega_i^{-1} r'^{-1} \left[\frac{3\omega_i N_a \iota_a}{16\pi} \right] \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{32\pi r' \alpha_2}{3N_a \iota_a}} \right] \right) ,$$

siendo α_2 el ángulo de cabeceo de la aspa, V_I la velocidad del flujo de aire inducido hacia el plano de rotación y N_a el número de aspas. El resto de componentes atribuidas a la presión del aire actuando sobre el segmento incremental $\Delta r'$ a la distancia r' , se detallan en la Figura 2.6. El término ΔD es la componente de fricción inducida por la fuerza de elevación, ΔD_o es la componente de fricción de arrastre ligada a la forma-tipo del objeto y ΔQ es la componente de torque de carga atribuido a la fricción aerodinámica ejercida sobre la aspa. Al conjuntar todas las fuerzas de elevación incremental ΔL , se obtiene la fuerza de empuje total del i -ésimo sistema de propulsión con coordenadas en \mathbf{B}'_i , es decir,

$$\mathbf{f}'_{ei} = [0 \ 0 \ f_i]^T , \quad (2.24)$$

donde

$$f_i = \frac{N_a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\iota_d} \frac{\Delta L}{\Delta r} dr d\psi_i ,$$

siendo ι_d la longitud de la aspa. Mientras que al conjuntar todos los incrementos de las fuerzas de fricción aerodinámica ΔQ , se obtiene el torque de carga del i -ésimo sistema de propulsión con coordenadas en \mathbf{B}'_i , es decir,

$$\boldsymbol{\tau}'_{ei} = [0 \quad 0 \quad \tau_{ci}]^T , \quad (2.25)$$

donde

$$\tau_{ci} = \frac{N_a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\iota_d} \frac{\Delta Q}{\Delta r} dr d\psi_i .$$

La magnitud de la fuerza de empuje (2.24) y torque de carga (2.25) dependen del voltaje del motor v_i y del ángulo de cabeceo α_2 de las propelas. El bosquejo del sistema de articulación mecánica indicado en la Figura 2.6, tiene como objeto modificar el ángulo de cabeceo α_2 en función de la coordenada ψ_i adquirida por la aspa. En primer instancia, el sistema de articulación esta compuesto por un grupo de servomecanismos que transfiere comandos o movimientos al anillo-estático inferior del plato cíclico. Consecuentemente un mecanismo basado en un buje o junta de bola, transfiere íntegramente la orientación de anillo-estático inferior y la velocidad angular ω_i hacia el anillo-rotativo superior. Finalmente, un juego de eslabones o palancas dispuestas convenientemente entre el anillo-rotativo superior y el cuerpo de la aspa, provocará las variaciones del ángulo de ataque de acuerdo a las instrucciones

- el control colectivo modifica la disposición del plato cíclico, tal que este siempre es paralelo al plano horizontal de \mathbf{B}_i . Esto produce valores idénticos de α_2 para cada posición de la aspa con coordenada ψ_i . Implicando que las correspondientes fuerzas de elevación incremental ΔL no cambian de dirección.
- el control cíclico modifica la orientación del plato cíclico, tal que este nunca es paralelo al plano horizontal de \mathbf{B}_i . Esto produce cambios de α_2 en función de la coordenada de la aspa ψ_i . En consecuencia, la correspondiente fuerzas de elevación incremental ΔL cambia de dirección en función de ψ_i .
- la compensación inicial del control cíclico, permite contrarrestar componentes de fuerzas no deseadas en escenarios reales. Las componentes están principalmente ligadas a discrepancias paramétricas-diseño en las aspas (ϕ_i, θ_i) .

Este conjunto de instrucciones repercute directamente sobre la magnitud de las fuerzas provistas por el sistema de propulsión, sin la necesidad de hacer cambios en los voltajes v_i correspondientes. En todo caso, la proyección de la fuerza de empuje (2.24) y torque de carga (2.25) en el sistema coordenado \mathbf{B}_i , se obtiene mediante la transformación

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ei} \\ \boldsymbol{\tau}_{ei} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(\phi_i, \theta_i, \psi_i) \mathbf{f}'_{ei} \\ W(\phi_i, \theta_i, \psi_i)^{-T} \boldsymbol{\tau}'_{ei} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 ,$$

donde las matrices $R(\phi_i, \theta_i, \psi_i)$ y $W(\phi_i, \theta_i, \psi_i) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ se definen en (2.8) y (2.14) con los argumentos $(\phi_i, \theta_i, \psi_i)$, respectivamente. Mientras que la proyección de fuerzas en relación al marco de referencia \mathbf{B} que se encuentra atado a la estructura del mini quadrotor, resulta en el conjunto de fuerzas externas (lineales y angulares) atribuidas a los actuadores, es decir,

$$\mathbf{f}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_p \\ \mathbf{f}_o \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \mathbf{f}_{ei} \\ \sum_{i=1}^4 [(-1)^i \boldsymbol{\tau}_{ei} + [\mathbf{r}_{ei} - \mathbf{r}] \times \mathbf{f}_{ei}] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 , \quad (2.26)$$

donde el término $(-1)^i$ hace referencia al sentido de rotación de la i -ésima propela. Los vectores \mathbf{r}_{ei} y $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ representan la ubicación del origen del i -ésimo sistema de coordenadas \mathbf{B}_i y la ubicación del centro de masa del mini quadrotor, respectivamente. El vector de fuerza lineal de entrada $\mathbf{f}_p \in \mathbb{R}^3$ aplicado sobre el mini quadrotor, se direcciona acorde a los ejes-(Superior,Longitudinal,Lateral) atados a su estructura. Mientras que el vector de fuerza angular de entrada (torque de entrada) $\mathbf{f}_o \in \mathbb{R}^3$ aplicado sobre el centro de masa del mini quadrotor, se direcciona con el uso de la regla de la mano-derecha entorno a los ejes-(Superior,Longitudinal,Lateral). En gran parte de la literatura especializada, se asume que

- El origen de cada sistema \mathbf{B}_i se encuentra ubicado a distancias equidistantes ι del vértice del marco \mathbf{B} , y sobre los ejes de su plano horizontal.
- El centro de masa del mini quadrotor se ubica sobre el vértice del sistema coordenado \mathbf{B} .

- Los ángulos de aleteo lateral ϕ_i y de aleteo longitudinal θ_i se consideran nulos.
- El ángulo de cabeceo de las aspas α_2 se mantiene constante para toda posición de la misma en ψ_i .
- La relación entre la fuerza de fricción aerodinámica y la fuerza de empuje ejercida en las aspas, puede ser descrita por el factor de conversión k . Por ejemplo, si se considera que ΔD_o es despreciable respecto a ΔD , se define una aproximación de $k = \frac{3}{4}\alpha_1\ell_d$ de acuerdo a la relación existente entre (2.24) y (2.25).

Empleando estas consideraciones en la expresión (2.26), esta se reduce a la forma

$$\mathbf{f}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_p \\ \mathbf{f}_o \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sum_{i=1}^4 f_i \\ \iota(f_2 - f_4) & \iota(f_3 - f_1) & k \sum_{i=1}^4 (-1)^i f_i \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^6. \quad (2.27)$$

En la Figura 2.7, se muestra un bosquejo de movimientos generados por la interacción de las fuerzas externas (2.27).

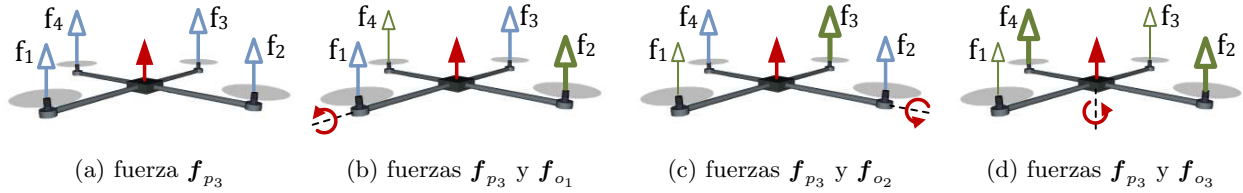


Figura 2.7: Movimientos del mini quadrotor en función de las fuerzas de empuje

Cambios en el grosor de las flechas, indica un incremento/decremento de la velocidad de la propela. En el anterior conjunto de figuras se observa la presencia de la fuerza colectiva de empuje $\mathbf{f}_{p_3} = \sum_{i=1}^4 f_i$, la cual induce al mini quadrotor a desplazarse en dirección relativa a su eje-Superior. Una discrepancia entre las velocidades de las propelas, implicará un movimiento angular adicional. Por ejemplo, en la segunda figura se incrementa/decrementa proporcionalmente las fuerzas ligadas a f_4 y f_2 , tal que se induce al mini quadrotor a que también gire entorno a su eje-Longitudinal. Un caso análogo se presenta en la tercer figura, donde se incrementa/decrementa proporcionalmente las fuerzas ligadas a f_1 y f_3 , implicando un movimiento angular entorno al eje-Lateral. La cuarta figura indica el desplazamiento angular entorno al eje-Superior y que corresponde al incremento/decremento proporcional de los pare de fuerzas (f_4, f_2) y (f_1, f_3) . En particular, este último movimiento se atribuye a la interacción de los torques reactivos³⁵ provistos por las propelas. El giro de las propelas se configura de tal manera que la dirección de un par de ellas se asigna en el sentido de las manecillas del reloj, mientras que la dirección del par restante se asigna en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Todos los movimientos anteriormente descritos, son proyectados al marco de referencia local \mathbf{L} a través de la conversión (2.23), obteniendo que

$$\mathbf{f}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\bar{p}} \\ \mathbf{f}_{\bar{o}} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} R(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{f}_p \\ W(\boldsymbol{\eta})^{-T} \mathbf{f}_o \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad (2.28)$$

donde el vector de fuerza lineal de entrada $\mathbf{f}_{\bar{p}} \in \mathbb{R}^3$ se direcciona acorde a $\boldsymbol{\xi}$. Mientras que el vector de fuerza angular de entrada (torque de entrada) $\mathbf{f}_{\bar{o}} \in \mathbb{R}^3$ se direcciona entorno de los ejes-(Este,Norte,Altitud) con el uso de la regla de la mano-derecha. Las fuerzas externas tienen efecto sobre las posiciones (x,y,z) del mini quadrotor de acuerdo a alguna configuración de las matrices de transformación. Esto en consecuencia directa a la acción combinada de los ángulos de Euler (roll: ϕ ,pitch: θ ,yaw: ψ).

Parametrización de las fuerzas de entrada

En la literatura resulta común que los elementos del vector de control se asuman como una mezcla (sumas o restas) de las fuerzas de propulsión. Esta clase de configuración resulta compleja en términos de sintonización, puesto que la misma acción de control repercute simultáneamente sobre varios sistemas de propulsión. Ante esta situación, en la presente tesis se propone parametrizar los vectores de fuerzas externas en tal forma que cada uno de sus elemento está en función directa con las fuerzas de propulsión, es decir,

$$\mathbf{u} = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4]^T \in \mathbb{R}^4 \quad (2.29)$$

³⁵Causados por la fricción del aire actuando sobre las caras de las aspas.

representa el vector de entrada o control. En consecuencia, los vectores de fuerzas lineales y angulares en (2.27), se escriben en la forma

$$\mathbf{f}_p = [\mathbf{e}_3 \quad 0_{3 \times 3}] B_n \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \quad (2.30a)$$

$$\mathbf{f}_o = [0_{3 \times 1} \quad I_3] B_n \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \quad (2.30b)$$

siendo el vector $\mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ una base estándar. La conversión de las fuerzas de empuje a términos de fuerzas lineales y angulares, se contempla en la matriz de transformación de fuerzas, descrita por

$$B_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \iota & 0 & -\iota \\ -\iota & 0 & \iota & 0 \\ -\mathbf{k} & \mathbf{k} & -\mathbf{k} & \mathbf{k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}. \quad (2.31)$$

Otra parametrización que será de utilidad durante el diseño de las etapas de control, consiste en llevar los vectores (2.27) y (2.28) al formato

$$\mathbf{f}_B = B_B \hat{\mathbf{u}} := \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 4} \\ 0_{4 \times 2} & B_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_c(\mathbf{u}) \quad u_c(\mathbf{u})]^T \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad (2.32)$$

y

$$\mathbf{f}_L = B_L(\boldsymbol{\eta}) \hat{\mathbf{u}} := \begin{bmatrix} \text{diag}\{R_{13}, R_{23}\} & 0_{2 \times 4} \\ 0_{4 \times 2} & \text{diag}\{R_{33}, W^{-T}\} B_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_c(\mathbf{u}) \quad u_c(\mathbf{u})]^T \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6. \quad (2.33)$$

El vector de entradas parametrizadas $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^6$ contiene las fuerzas atribuidas al sistema de propulsión. La fuerza producida por todo el conjunto de sistemas de propulsión, se representa por la denominada fuerza colectiva de empuje

$$u_c(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{f}_i = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \mathbf{u} \in \mathbb{R}. \quad (2.34)$$

En la ecuación (2.32) se observa que las fuerzas relacionadas con $\hat{\mathbf{u}}$, solo tienen efecto sobre el desplazamiento ligado al eje-Superior y las rotaciones entorno a los ejes del marco \mathbf{B} . Mientras que en la ecuación (2.33), se tiene que las fuerzas $\hat{\mathbf{u}}$ conllevan un efecto sobre todos los estados relacionados al marco \mathbf{L} , además de tener una magnitud dependiente de los ángulos de Euler.

2.4.2. Matrices de inercia y centro de masas

En la Figura 2.8 se muestra un esquema geométrico de la estructura del mini quadrotor, a partir del cual se procede a definir los momentos de inercia y la coordenada del centro de masa. Cada forma geométrica³⁶ asignada como P_j , tiene una distribución de masa homogénea (densidad uniforme). Los elementos están distribuidos de forma equidistante con respecto al origen del marco de referencia \mathbf{B} .

Los momentos de inercia J_b , J_p , J_e y J_r en el i -ésimo sistema de propulsión se describieron en la subsección 2.4.1. En función de estos, se define el tensor de inercia

$$M_{\Omega_i} = \text{diag}\{0, 0, J_r + N^2 [J_e + J_p]\} + N^2 W(\phi_i, \theta_i, \psi_i)^{-T} M_{\Omega_i} W(\phi_i, \theta_i, \psi_i)^{-1} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

del i -ésimo sistema de propulsión. La inversa de la matriz $W(\phi_i, \theta_i, \psi_i) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ se detalla en (2.13), con argumentos $(\phi_i, \theta_i, \psi_i)$ referidos como ángulo de aleteo lateral, ángulo de aleteo longitudinal y desplazamiento de la aspa, respectivamente. El tensor de inercia de las aspas $M_{\Omega_i} = \text{diag}\{J_{bx}, J_{by}, J_b\}$, es relativo a son definidos a un marco de coordenadas atado en todo momento al cuerpo de las aspas.

³⁶Para este caso se configuran: 4 masas puntuales representativas del sistema de propulsión, 4 carcasas de los motores, 2 fuselajes y 1 cuerpo central.

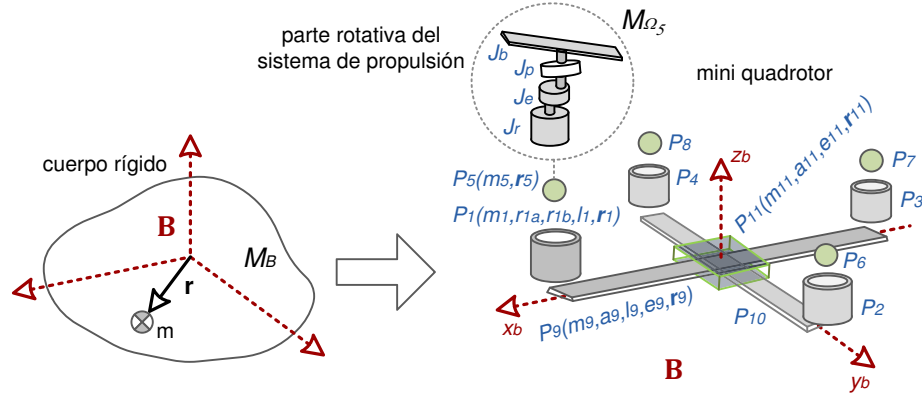


Figura 2.8: Equivalente geométrico simplificado de la estructura del mini quadrotor

Se asume que los elementos rotativos del sistema de propulsión se reflejan como masas puntuales para la estructura estática del mini quadrotor, esto a causa que en el marco \mathbf{B} las masas en rotación son poco significativas con respecto a las masas en reposo. Bajo este enfoque, la matriz de inercia del mini quadrotor se define en

$$M_B = \begin{bmatrix} M_p & M_r^T \\ M_r & M_o \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} mI_3 & m\mathcal{S}(\mathbf{r})^T \\ m\mathcal{S}(\mathbf{r}) & M_o \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \quad (2.35)$$

mientras que su proyección en el marco de referencia \mathbf{L} , resulta en

$$M_L = \begin{bmatrix} M_{\bar{p}} & M_{\bar{r}}^T \\ M_{\bar{r}} & M_{\bar{o}} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} mI_3 & mR(\boldsymbol{\eta})\mathcal{S}(\mathbf{r})^T W(\boldsymbol{\eta})^{-1} \\ mW(\boldsymbol{\eta})^{-T}\mathcal{S}(\mathbf{r})R(\boldsymbol{\eta})^T & W(\boldsymbol{\eta})^{-T}M_o W(\boldsymbol{\eta})^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}. \quad (2.36)$$

El vector de ubicación del centro de masa del mini quadrotor es

$$\mathbf{r} = [x_r \quad y_r \quad z_r]^T := m^{-1} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3, \quad (2.37)$$

en tanto que la aproximación teórica del tensor de inercia M_o puede calcularse mediante el Teorema de Steiner para ejes paralelos en su forma de tensor, es decir,

$$M_o = \sum_{i=1}^n [M_{o_i} + m_i [I_3 \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T]] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}. \quad (2.38)$$

La notación $\mathcal{S}(\ast) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ se refiere a la matriz tornillo simétrica del vector $\ast \in \mathbb{R}^3$, explícitamente definida en el Apéndice A. El término $m = \sum_{i=1}^n m_i \in \mathbb{R}$ representa la masa total del mini quadrotor, siendo n el número de formas geométrica en análisis. Mientras que $m_i \in \mathbb{R}$, $\mathbf{r}_i = [x_i \quad y_i \quad z_i]^T \in \mathbb{R}^3$ y $M_{o_i} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ son la masa, posición y momento de inercia de la i -ésima forma geométrica del mini quadrotor, respectivamente. Cabe mencionar que el momento de inercia M_{o_i} se calcula respecto a un marco-virtual que es paralelo a \mathbf{B} y que tiene su vértice ubicado en el centro de masa de la i -ésima forma geométrica.

Estimación geométrica del tensor de inercia

Listados de fórmulas para calcular el momento de inercia M_{o_i} en función de la forma del objeto, pueden ser consultados en Beer et. al. (2004); Hibbeler (2009) o en literatura especializada en dinámica. Para el caso de la carcasa-motor \ast , la notación $(m_\ast, r_{\ast a}, r_{\ast b}, l_\ast, \mathbf{r}_\ast)$ se refiere a su masa, radio interno, radio externo, largo y vector de ubicación de su centro de masa. Para el caso de la masa puntual del sistema-rotativo de propulsión \ast , la notación $(m_\ast, \mathbf{r}_\ast)$ se refiere a su masa y vector de ubicación. Para los fuselajes-brazos, la notación $(m_\ast, a_\ast, l_\ast, e_\ast, \mathbf{r}_\ast)$ se refiere a su masa, ancho, largo, espesor y vector de ubicación de su centro de masa. Para el elemento central,

la notación $(\mathbf{m}_*, \mathbf{a}_*, \mathbf{e}_*, \mathbf{r}_*)$ se refiere a su masa, ancho, espesor y vector de ubicación de su respectivo centro de masa. Al considerar que las formas geométricas están distribuidas simétricamente en \mathbf{B} y sus centros de masas están alineados con los ejes del planos horizontal de \mathbf{B} , es posible concluir la aproximación teórica del tensor de inercia (2.38) en

$$M_o = \text{diag} \{l_p, l_q, l_r\} ,$$

donde

$$\begin{aligned} l_p &= m_1 [r_{1a}^2 + r_{1b}^2 + \frac{1}{3}l_1^2 + 2y_1^2 + 4z_1^2] + m_5 [2y_5^2 + 4z_5^2] + \frac{m_9}{12} [a_9^2 + l_9^2 + 2e_9^2] + \frac{m_{11}}{12} [a_{11}^2 + e_{11}^2 + 12z_{11}^2] , \\ l_q &= m_1 [r_{1a}^2 + r_{1b}^2 + \frac{1}{3}l_1^2 + 2x_1^2 + 4z_1^2] + m_5 [2x_5^2 + 4z_5^2] + \frac{m_9}{12} [a_9^2 + l_9^2 + 2e_9^2] + \frac{m_{11}}{12} [a_{11}^2 + e_{11}^2 + 12z_{11}^2] , \\ l_r &= 2m_1 [r_{1a}^2 + r_{1b}^2 + x_1^2 + y_1^2] + 2m_5 [x_5^2 + y_5^2] + \frac{m_9}{6} [a_9^2 + l_9^2] + \frac{m_{11}}{6} a_{11}^2 . \end{aligned}$$

En el caso que el centro de masa del elemento central se seleccione con una configuración negativa en dirección al eje- z_b , el vector de ubicación del centro de masa (2.37) se concluye en

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{4 [m_1 z_1 + m_5 z_5] - m_{11} z_{11}}{4 [m_1 + m_5] + 2m_9 + m_{11}} \end{bmatrix}^T ,$$

el cual permite modificar la coordenada del centro de masa del mini quadrotor, mediante la distribución física de los elementos centrales.

Propiedades y observaciones

Al considerar el dominio $\mathcal{D} = \{\mathbb{R}^6 - \{\theta = \pm 90^\circ [2n + 1]\} : \theta \in \mathbf{q}, n = 0, 1, 2, \dots\}$ para la matriz de inercia M_B y la matriz de inercia proyectada M_L , el siguiente grupo de observaciones puede ser establecido a partir del Teorema de Sylvester.

P.17 Las matrices diagonales M_p , $M_{\bar{p}}$ y $M_o > \mathbf{0}$, y la matriz $M_{\bar{o}} > \mathbf{0}$ son simétricas, además

$$|M_p| = |M_{\bar{p}}| = m^3, |M_o| = \prod_{i=1}^3 M_{o_{ii}} > 0 \text{ y } |M_{\bar{o}}| = \cos(\theta)^2 |M_o| > 0$$

P.18 $M_B = M_B^T$, donde

$$M_{B_{ii}} > 0 \quad \forall i = 1, \dots, 6$$

$$\left| \text{diag} \{I_3, \mathbf{e}_1\}^T M_B \text{diag} \{I_3, \mathbf{e}_1\} \right| = m^3 \left| \mathbf{e}_1^T [M_o + m\mathcal{S}(\mathbf{r})^2] \mathbf{e}_1 \right|$$

$$\left| \text{diag} \{I_3, [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2]\}^T M_B \text{diag} \{I_3, [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2]\} \right| = m^3 \left| [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2]^T [M_o + m\mathcal{S}(\mathbf{r})^2] [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] \right|$$

$$|M_B| = m^3 \left| M_o + m\mathcal{S}(\mathbf{r})^2 \right|$$

P.19 $M_L = M_L^T$, donde

$$M_{L_{ii}} > 0 \quad \forall i = 1, \dots, 6$$

$$\left| \text{diag} \{I_3, \mathbf{e}_1\}^T M_L \text{diag} \{I_3, \mathbf{e}_1\} \right| = m^3 \left| [W(\boldsymbol{\eta})^{-1} \mathbf{e}_1]^T [M_o + m\mathcal{S}(\mathbf{r})^2] [W(\boldsymbol{\eta})^{-1} \mathbf{e}_1] \right|$$

$$\left| \text{diag} \{I_3, [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2]\}^T M_L \text{diag} \{I_3, [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2]\} \right| = \dots$$

$$\dots = m^3 \left| [W(\boldsymbol{\eta})^{-1} [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2]]^T [M_o + m\mathcal{S}(\mathbf{r})^2] [W(\boldsymbol{\eta})^{-1} [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2]] \right|$$

$$|M_L| = \cos(\theta)^2 |M_B|$$

Los vectores \mathbf{e}_1 y $\mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^3$ representan bases estándar. Cabe mencionar que durante su planteamiento, se utilizaron las propiedades tratadas en la Sección 2.3. Las matrices M_B y M_L se definen como definidas positivas si y solo si el vector \mathbf{r} se configura paramétricamente tal que $[M_o + m\mathcal{S}(\mathbf{r})^2] > \mathbf{0}$. En el caso que $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, resulta claro que las matrices en cuestión son siempre definidas positivas. Adicionalmente a este caso, si la matriz M_o se conforma de elementos idénticos entonces el siguiente listado de propiedades se satisface.

P.20 $\|M_o\| = M_{o_{ii}}$

P.21 $\|M_B\| = \max\{m, M_{o_{ii}}\}$

P.22 $M_{o_{ii}} \leq \|M_o\| = M_{o_{ii}} \sqrt{\sin(\theta)^2 + 2|\sin(\theta)| + 1} \leq 2M_{o_{ii}}$

P.23 $\|M_L\| = \max\{m, \|M_o\|\}$

2.4.3. Fuerza gravitatoria

El vector de aceleración gravitacional presentado en (2.17) es relativo al marco de referencia local \mathbf{L} , y se escribe como

$$\bar{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} \bar{R}(\bar{\boldsymbol{\eta}}) \mathbf{g}_{\bar{n}} \\ \frac{d^2}{dt^2} [\bar{\boldsymbol{\eta}}(p_L, p_S)] \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \bar{R}(p_L) \mathbf{g}_{\bar{n}} \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad (2.39)$$

La definición del vector parte de lo establecido en la Sección 2.1.3. El término $\bar{R}(\bar{\boldsymbol{\eta}}) \mathbf{g}_{\bar{n}} \in \mathbb{R}^3$ con generalización detallada en (2.7) y (2.15), representa la transformación de coordenadas geográficas a coordenadas locales. El término $\frac{d^2}{dt^2} [\bar{\boldsymbol{\eta}}(p_L, p_S)] \in \mathbb{R}^3$ representa la tasa de cambio angular de sistema coordenado \mathbf{S} respecto al sistema coordenado local. Aunque para este trabajo, dicho término resulta poco significativo a causa del acotamiento del espacio de vuelo. La ecuación (2.39) resulta apropiada para aquellos enfoques que requieran analizar la información provista por sensores³⁷, para caracterizar con una gran precisión al sistema de referencia local \mathbf{L} . Sin embargo, para efectos de diseño de controladores de mini vehículos aéreos, en la literatura usualmente omiten las pequeñas desviaciones en orientación que tiene el vector $\bar{\mathbf{g}}$ con respecto al eje-Altitud. En consecuencia, el vector de aceleración gravitacional (2.39) se simplifica en

$$\bar{\mathbf{g}} = [0 \ 0 \ g \ 0 \ 0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^6, \quad (2.40)$$

donde $g := g(\varphi_c)$ es el valor estándar de aceleración gravitacional detallado en (2.6). Su magnitud satisface la cota $9.780 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \leq g \leq 9.833 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ y depende de la ubicación geodésica del plano local seleccionado. Cualesquiera que sea el caso en el tratado de $\bar{\mathbf{g}}$, se tiene que el vector de fuerzas gravitacionales relacionado al marco \mathbf{L} se define como

$$\mathbf{g}_L = M_L \bar{\mathbf{g}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{g}_p \\ \mathbf{g}_o \end{bmatrix} = \text{mg} \begin{bmatrix} I_3 \\ W(\boldsymbol{\eta})^{-T} \mathcal{S}(\mathbf{r}) R(\boldsymbol{\eta})^T \end{bmatrix} \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^6, \quad (2.41)$$

con proyección sobre el marco \mathbf{B} descrita por

$$\mathbf{g}_B = M_B J(\boldsymbol{\eta})^{-1} \bar{\mathbf{g}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{g}_p \\ \mathbf{g}_o \end{bmatrix} = \text{mg} \begin{bmatrix} I_3 \\ \mathcal{S}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} R(\boldsymbol{\eta})^T \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^6, \quad (2.42)$$

donde M_L y M_B son las denominadas matrices de inercia, mientras que el vector $\mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ representa una base estándar. Las normas de los vectores gravitacionales se enlistan explícitamente a continuación.

P.24 $\|\mathbf{g}_B\| = \text{mg} \sqrt{1 + \|\mathcal{S}(\mathbf{r}) R(\boldsymbol{\eta})^T \mathbf{e}_3\|^2} \leq \text{mg} \sqrt{1 + \|\mathbf{r}\|^2}$

P.25 $\|\mathbf{g}_L\| = \text{mg} \sqrt{1 + \|W(\boldsymbol{\eta})^{-T} \mathcal{S}(\mathbf{r}) R(\boldsymbol{\eta})^T \mathbf{e}_3\|^2} \leq \text{mg} \sqrt{1 + [1 + |\sin(\theta)|] \|\mathbf{r}\|^2}$

2.4.4. Fuerzas disipativas

La fuerza disipativa más trascendental en lo que respecta a los movimientos del mini quadrotor, tiene que ver con la interacción de su superficie-estructura con el medio. Concerniente a este punto, se dice que

- el mini quadrotor se mueve a bajas velocidades en comparación a vehículos aéreos de gran escala, asumiendo que el medio es un flujo laminar con bajo número de Reynolds,
- el aire es un fluido tipo Newtoniano (incompresible y uniformemente viscoso).

³⁷Por ejemplo, IMU: Inertial Measurement Unit (unidad de medición inercial) o MEMS: Microelectromechanical Systems (sistemas microelectromecánicos).

bajo este enfoque, se dice que la fuerza disipativa o fuerza fricción aerodinámica que actúan sobre la superficie del mini quadrotor es proporcional a su velocidad de movimiento, siendo esto correspondiente con el modelo lineal de fricción viscosa. En función del marco de referencia \mathbf{B} , la fuerza disipativa es

$$\mathbf{d}_B = F_B \boldsymbol{\vartheta} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{d}_p \\ \mathbf{d}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad (2.43)$$

donde los vectores \mathbf{d}_p y $\mathbf{d}_o \in \mathbb{R}^3$ representan la fuerza disipativa lineal y angular, respectivamente. Las matrices $F_p = \text{diag}\{f_u, f_v, f_w\}$ y $F_o = \text{diag}\{f_p, f_q, f_r\}$ contienen los coeficientes de fricción aerodinámica para la parte traslacional y rotacional, respectivamente. La magnitud de estos coeficientes dependen de las propiedades del flujo (densidad del aire), así como de las dimensiones y forma del objeto. Utilizando la conversión (2.23) sobre la ecuación (2.43), las fuerzas disipativas en términos del marco \mathbf{L} se escriben en $\mathbf{d}_L = J(\boldsymbol{\eta})^{-1} \mathbf{d}_B$ y

$$\mathbf{d}_L = F_L \dot{\mathbf{q}} := \text{diag}\{F_{\bar{p}}, F_{\bar{o}}\} \dot{\mathbf{q}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{\bar{p}} \\ \mathbf{d}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(\boldsymbol{\eta}) F_p R(\boldsymbol{\eta})^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W(\boldsymbol{\eta})^{-T} F_o W(\boldsymbol{\eta})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\xi}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6. \quad (2.44)$$

siendo $\mathbf{d}_{\bar{p}}, \mathbf{d}_{\bar{o}} \in \mathbb{R}^3$, $F_{\bar{p}}$ y $F_{\bar{o}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ las proyecciones de los vectores de fuerzas disipativas y de las matrices de coeficientes de fricción aerodinámica. Cabe mencionar que el tipo de flujo relativo a las caras de las aspas de un sistema de propulsión, dependerá de la velocidad de rotación de las aspas en cuestión. Por ejemplo, para aspas de helicópteros, turbinas, aviones y lanchas se tiene un flujo laminar con alto número de Reynolds, implicando que las fuerzas disipativas actuando sobre la superficie de las aspas sea proporcional al cuadrado de su velocidad angular. Mientras que para aspas girando a bajas velocidades (molinos, propelas y turbinas eólicas) se considera un bajo número de Reynolds, implicando que las fuerzas disipativas actuando sobre la superficie de las aspas sea proporcional a su velocidad angular.

Propiedades y observaciones

Al considerar el dominio $\mathcal{D} = \{\mathbb{R}^6 - \{\theta = \pm 90^\circ [2n + 1]\} : \theta \in \mathbf{q}, n = 0, 1, 2, \dots\}$ para las matrices de fricción aerodinámica F_B y F_L , el siguiente grupo de observaciones puede ser establecido a partir del Teorema de Sylvester.

P.26 Las matrices diagonales F_p , F_o y $F_B > \mathbf{0}$, y las matrices $F_{\bar{p}}$, $F_{\bar{o}}$ y $F_L > \mathbf{0}$ son simétricas, además $|F_{\bar{p}}| = |F_p| > 0$ y $|F_{\bar{o}}| = \cos(\theta)^2 |F_o| > 0$

P.27 $\|F_p\| = \max_{1 \leq i \leq 3} \{F_{p_{ii}}\}$, $\|F_o\| = \max_{1 \leq i \leq 3} \{F_{o_{ii}}\}$ y $\|F_B\| = \max\{\|F_p\|, \|F_o\|\}$

P.28 $\|F_{\bar{p}}\| \leq \|F_p\|$, $\|F_{\bar{o}}\| \leq [1 + |\text{sen}(\theta)|] \|F_o\|$ y $\|F_L\| = \max\{\|F_{\bar{p}}\|, \|F_{\bar{o}}\|\}$

P.29 Si F_p contiene elementos idénticos, entonces $\|F_{\bar{p}}\| = \|F_p\| = F_{p_{ii}}$

P.30 Si F_o contiene elementos idénticos, $F_{o_{ii}} \leq \|F_{\bar{o}}\| = F_{o_{ii}} \sqrt{\text{sen}(\theta)^2 + 2|\text{sen}(\theta)| + 1} \leq 2F_{o_{ii}}$

2.5. Modelado matemático

En Fantoni y Lozano (2001); Castillo et. al. (2005); Kelly et. al. (2005); Kyrkjebø y Pettersen (2005) se establece que a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange se puede modelar el movimiento de un cuerpo rígido en términos del marco de referencia local \mathbf{L} . En función del vector de postura $\mathbf{q} = [\boldsymbol{\xi}^T \quad \boldsymbol{\eta}^T]^T \in \mathbb{R}^6$ detallado en (2.19), las ecuaciones de Euler-Lagrange se definen en

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\xi}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \boldsymbol{\xi}} + \frac{\partial \mathcal{D}_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\xi}}} = \mathbf{f}_{\bar{p}} \in \mathbb{R}^3, \quad (2.45a)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\eta}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \boldsymbol{\eta}} + \frac{\partial \mathcal{D}_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\eta}}} = \mathbf{f}_{\bar{o}} \in \mathbb{R}^3, \quad (2.45b)$$

donde

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}_L - \mathcal{U}_L$$

representa el Lagrangiano, siendo \mathcal{K}_L la energía cinética y $\mathcal{U}_L \in \mathbb{R}$ la energía potencial con coordenadas en \mathbf{L} . Las ecuaciones (2.45a) y (2.45b) representan la parte traslacional y rotacional de la dinámica del mini quadrotor, respectivamente. Fundamentos asociados al vector de fuerzas externas proyectadas $\mathbf{f}_L = [\mathbf{f}_p^T \ \mathbf{f}_o^T]^T \in \mathbb{R}^6$ y a la función disipativa $\mathcal{D}_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{d}_L \in \mathbb{R}$, se presentaron durante el planteamiento de las ecuaciones (2.28) y (2.44), respectivamente. Otra alternativa para obtener las ecuaciones de movimiento del mini quadrotor, consiste en utilizar el vector de velocidad $\boldsymbol{\vartheta} = [\boldsymbol{\nu}^T \ \boldsymbol{\omega}^T]^T \in \mathbb{R}^6$ detallado en (2.19) y el cual es relativo al marco de referencia no-inercial \mathbf{B} . Sin embargo, el método de Euler-Lagrange no es aplicable directamente para coordenadas no-inerciales. En su lugar se utiliza la denominada ecuación de Quasi-Lagrange³⁸ presentada por Meirovitch y Kwak (1989); Fossen y Fjellstad (1995) y sobre la cual se adicionan los términos disipativos descritos en Kyrkjebø y Pettersen (2005), esto es,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\vartheta})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right] + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\vartheta})}{\partial \boldsymbol{\nu}} - R(\boldsymbol{\eta})^T \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\vartheta})}{\partial \boldsymbol{\xi}} + \frac{\partial \mathcal{D}_B(\boldsymbol{\vartheta})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \mathbf{f}_p \in \mathbb{R}^3, \quad (2.46a)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\vartheta})}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right] + \boldsymbol{\nu} \times \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\vartheta})}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\vartheta})}{\partial \boldsymbol{\omega}} - W(\boldsymbol{\eta})^T \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\vartheta})}{\partial \boldsymbol{\eta}} + \frac{\partial \mathcal{D}_B(\boldsymbol{\vartheta})}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{f}_o \in \mathbb{R}^3, \quad (2.46b)$$

donde

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\vartheta}) = \mathcal{K}_B - \mathcal{U}_L \equiv \mathcal{K}_L - \mathcal{U}_L \equiv \mathcal{K}_B - \mathcal{U}_B$$

representa el Lagrangiano, siendo \mathcal{K}_* y \mathcal{U}_* en \mathbb{R} la energía cinética y la energía potencial con coordenadas en $*$, respectivamente. Bajo el principio de la conservación de la energía, se observa que el Lagrangiano puede ser configurado convenientemente en lo que se refiere al sistema de coordenadas. La parte traslacional de la dinámica se define en la ecuación (2.46a), en tanto que la parte rotacional de la dinámica se define mediante la ecuación (2.46b). Fundamentos asociados al vector de fuerzas externas $\mathbf{f}_B = [\mathbf{f}_p^T \ \mathbf{f}_o^T]^T \in \mathbb{R}^6$ y a la función disipativa $\mathcal{D}_B(\boldsymbol{\vartheta}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\vartheta}^T \mathbf{d}_B \in \mathbb{R}$, se presentaron durante el planteamiento de las ecuaciones (2.27) y (2.43), respectivamente.

2.5.1. Energía cinética y potencial

A partir de los preliminares presentados en las Secciones 2.4.1 y 2.4.2, se establece que la energía cinética relativa al marco de referencia \mathbf{B} es

$$\mathcal{K}_B = \frac{1}{2} \boldsymbol{\vartheta}^T M_B \boldsymbol{\vartheta} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 [\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_i]^T M_{\Omega_i} [\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_i],$$

El vector $\boldsymbol{\Omega}_i \in \mathbb{R}^3$ y la matriz $M_{\Omega_i} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ representan la velocidad angular y tensor de inercia de las aspas, atribuidas al i -ésimo sistema de propulsión, respectivamente. En la literatura especializada sobre el tema, se asume que

- La velocidad angular de las aspas es mucho mayor a la velocidad angular de la estructura del mini quadrotor
- El tensor de inercia de las aspas es poco significativo ante el tensor de inercia de la estructura del mini quadrotor

En consecuencia, la energía cinética se simplifica en $\mathcal{K}_B := \frac{1}{2} \boldsymbol{\vartheta}^T M_B \boldsymbol{\vartheta}$. En lo que respecta a la energía potencial, se considera la influencia del campo gravitacional en las cercanías de la superficie terrestre. La energía potencial relativa al sistema de coordenadas \mathbf{L} puede ser determinada en base a lo presentado en Kelly et. al. (2005), es decir,

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{U}_L] = \frac{\partial \mathcal{U}_L}{\partial \mathbf{q}^T} \dot{\mathbf{q}} := \mathbf{g}_L(\mathbf{q})^T \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}.$$

La definición explícita de los elementos y dependencias de los vectores de gravedad, se observan en la Sección 2.4.3 asumiendo que la coordenada del centro de masa es invariante en el tiempo. Ahora bien, sin importar cual sistema de coordenadas se esté utilizando, las anteriores expresiones son equivalentes-conservativas a las energías que

³⁸Relacionada a las denominadas ecuaciones de Kirchhoff.

resta por definir $(\mathcal{K}_L, \mathcal{U}_B)$. Implicando que la energía cinética \mathcal{K}_* y la energía potencial $\mathcal{U}_* \in \mathbb{R}$ con coordenadas en $*$ pueden ser establecidas en

$$\begin{bmatrix} \mathcal{K}_B \\ \mathcal{U}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \boldsymbol{\vartheta}^T M_B \boldsymbol{\vartheta} \\ \int_{t_0}^t \mathbf{g}_B(\mathbf{q}(\tau))^T \boldsymbol{\vartheta}(\tau) d\tau + \mathcal{U}_B(\mathbf{q}(t_0)) \end{bmatrix}, \quad (2.47a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{K}_L \\ \mathcal{U}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M_L \dot{\mathbf{q}} \\ \int_{t_0}^t \mathbf{g}_L(\mathbf{q}(\tau))^T \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau + \mathcal{U}_L(\mathbf{q}(t_0)) \end{bmatrix}, \quad (2.47b)$$

esto en concordancia al modelo cinemático (2.20) y las conversiones (2.23). Las constantes o condiciones iniciales $\mathcal{U}_B(\mathbf{q}(t_0))$ y $\mathcal{U}_L(\mathbf{q}(t_0))$ corresponden a la energía potencial del mini quadrotor en el instante $t_0 \geq 0$.

2.5.2. Desarrollo y descripción del modelo dinámico

Previamente, se resume el conjunto de variables y parámetros concernientes al mini quadrotor mostrado en la Figura 2.5, es decir,

vector de posición	$\boldsymbol{\xi} = [x \ y \ x]^T$,
vector de orientación	$\boldsymbol{\eta} = [\phi \ \theta \ \psi]^T$,
vector de postura	$\mathbf{q} = [\boldsymbol{\xi}^T \ \boldsymbol{\eta}^T]^T$,
vector de velocidad lineal	$\boldsymbol{\nu} = [u \ v \ w]^T$,
vector de velocidad angular	$\boldsymbol{\omega} = [p \ q \ r]^T$,
vector de velocidad	$\boldsymbol{\vartheta} = [\boldsymbol{\nu}^T \ \boldsymbol{\omega}^T]^T$,
vector de entrada	$\mathbf{u} = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4]^T$,
coordenada del centro de masa	$\mathbf{r} = [x_r \ y_r \ z_r]^T$.

El vector de postura es relativo al marco de referencia \mathbf{L} , mientras que el vector de velocidad es relativo al marco de referencia \mathbf{B} . El vector de entrada contiene las fuerzas de empuje f_i provistas por el i -ésimo sistema de propulsión. El vector de orientación $\boldsymbol{\eta}$ contiene los denominados ángulos de Euler (roll: ϕ , pitch: θ , yaw: ψ). En relación a los parámetros, el escalar ι representa la distancia entre el vértice del sistema coordenado \mathbf{B} y el eje de rotación de la i -ésima propela, m es la masa total del mini quadrotor, \mathbf{g} es la aceleración gravitacional, k es un factor de conversión que relaciona la fuerza de fricción aerodinámica y la fuerza de empuje ejercida en las aspas. Los coeficientes de fricción aerodinámica (f_u, f_v, f_w) y (f_p, f_q, f_r) se relacionan a la estructura del mini quadrotor, cuando éste realiza un movimiento traslacional (Longitudinal, Lateral, Normal) y rotacional (entorno a los ejes del marco \mathbf{B}), respectivamente. Los momentos de inercia atribuidos a la estructura del mini quadrotor y especificados respecto al marco de referencia atado a éste, se representan por (I_p, I_q, I_r) .

Modelo dinámico con coordenadas en \mathbf{B}

Para definir el modelo dinámico del mini quadrotor con coordenadas relativas al marco de referencia \mathbf{B} , se procede a concatenar la ecuación (2.46) en función del vector de velocidad $\boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{R}^6$ y desarrollar. Además, se emplean las propiedades presentadas en el Apéndice A.1. Un resultado preliminar se muestra a continuación

$$\frac{d}{dt} [M_B \boldsymbol{\vartheta}] + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -S([I_3 \ \mathbf{0}] M_B \boldsymbol{\vartheta}) \\ -S([I_3 \ \mathbf{0}] M_B \boldsymbol{\vartheta}) & -S([\mathbf{0} \ I_3] M_B \boldsymbol{\vartheta}) \end{bmatrix} \boldsymbol{\vartheta} - F_B \boldsymbol{\vartheta} + J(\boldsymbol{\eta})^T \frac{\partial \mathcal{U}_L(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f}_B(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^6,$$

el cual es también equivalente a

$$\frac{d}{dt} [M_B \boldsymbol{\vartheta}] + \begin{bmatrix} S(\boldsymbol{\omega}) & \mathbf{0} \\ S(\boldsymbol{\nu}) & S(\boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} M_B \boldsymbol{\vartheta} - F_B \boldsymbol{\vartheta} + J(\boldsymbol{\eta})^T \frac{\partial \mathcal{U}_L(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f}_B(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^6,$$

siendo $S(*) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matriz tornillo simétrica del vector $* \in \mathbb{R}^3$. El segundo término de la expresión se interpreta como el vector de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C_B(\boldsymbol{\vartheta}) \boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{R}^3$. A pesar que este último tiene

una sola representación, la parametrización de la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C_B(\boldsymbol{\vartheta}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ puede describirse con diversas configuraciones, algunas de las cuales se obtuvieron a partir de las propiedades presentadas en el Apéndice A.1. En resumen, la forma estándar del modelo dinámico del mini quadrotor con coordenadas en \mathbf{B} , resulta en

$$M_B \dot{\boldsymbol{\vartheta}} + C_B(\boldsymbol{\vartheta}) \boldsymbol{\vartheta} + F_B \boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{g}_B(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_B(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^6, \quad (2.48)$$

donde

$$\begin{aligned} M_B &= \begin{bmatrix} M_p & M_r^T \\ M_r & M_o \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} mI_3 & m\mathcal{S}(\mathbf{r})^T \\ m\mathcal{S}(\mathbf{r}) & \text{diag}\{I_p, I_q, I_r\} \end{bmatrix}, \\ C_B &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -m\mathcal{S}(\boldsymbol{\nu} + \mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}) \\ -m\mathcal{S}(\boldsymbol{\nu} + \mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}) & \mathcal{S}(m\mathcal{S}(\boldsymbol{\nu}) \mathbf{r} - M_o \boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m\mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}) & -m\mathcal{S}(\mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}) \\ -m\mathcal{S}(\mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}) & \mathcal{S}(m\mathcal{S}(\boldsymbol{\nu}) \mathbf{r} - M_o \boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m\mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}) & -m\mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathcal{S}(\mathbf{r}) \\ m\mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathcal{S}(\mathbf{r}) & -m\mathcal{S}(\boldsymbol{\nu}) \mathcal{S}(\mathbf{r}) - \mathcal{S}(M_o \boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m\mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}) & -m\mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathcal{S}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{0} & -m\mathcal{S}(\mathbf{r}) \mathcal{S}(\boldsymbol{\nu}) - \mathcal{S}(M_o \boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix}, \\ C_B &= \begin{bmatrix} C_p & -C_r^T \\ C_r & C_o \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} m\mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}) & -[m\mathcal{S}(\mathbf{r}) \mathcal{S}(\boldsymbol{\omega})]^T \\ m\mathcal{S}(\mathbf{r}) \mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}) & -\mathcal{S}(M_o \boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix}, \\ F_B &= \begin{bmatrix} F_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_o \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \text{diag}\{f_u, f_v, f_w\} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{diag}\{f_p, f_q, f_r\} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \\ \mathbf{g}_B &= \begin{bmatrix} \mathbf{g}_p \\ \mathbf{g}_o \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} mgR(\boldsymbol{\eta})^T \mathbf{e}_3 \\ mg\mathcal{S}(\mathbf{r}) R(\boldsymbol{\eta})^T \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{f}_B &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_p \\ \mathbf{f}_o \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} [0 \ 0 \ \sum_{i=1}^4 f_i]^T \\ [\iota(f_2 - f_4) \ \iota(f_3 - f_1) \ k \sum_{i=1}^4 (-1)^i f_i]^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \end{aligned}$$

siendo $\mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ la representación de una base estándar. Los argumentos de la matriz de transformación cinemática $J(\boldsymbol{\eta}) = \text{diag}\{R(\boldsymbol{\eta}), W(\boldsymbol{\eta})\} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ descrita en (2.18), se muestran explícitamente en (2.8) y (2.14). El resto de términos pertenecientes al modelo dinámico, fueron abordados con mayor detalle durante el planteamiento de las ecuaciones (2.27), (2.35), (2.42) y (2.43). Cabe mencionar que el resultado (2.48) es correspondiente con la expresión preliminar presentada en (2.21). Adicionalmente, para el dominio $\mathcal{D} = \{\mathbb{R}^6 - \{\boldsymbol{\theta} = \pm 90^\circ [2n + 1]\} : \boldsymbol{\theta} \in \mathbf{q}, n = 0, 1, 2, \dots\}$ se tiene el siguiente conjunto de propiedades.

P.31 $M_B = M_B^T > \mathbf{0}$, la matriz es simétrica y definida positiva.

P.32 $C_B(\boldsymbol{\vartheta}) = -C_B(\boldsymbol{\vartheta})^T \ \forall \boldsymbol{\vartheta} \in \mathcal{D}$, la matriz es tornillo-simétrica o antisimétrica.

P.33 $F_B = F_B^T > \mathbf{0}$, la matriz es diagonal.

P.34 $\frac{d}{dt} [M_B] = \mathbf{0}$.

P.35 $\boldsymbol{\Theta}^T \left[\frac{d}{dt} [M_B] - 2C_B(\boldsymbol{\vartheta}) \right] \boldsymbol{\Theta} = 0 \ \forall \boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{R}^6$ y $\mathbf{q} \rightarrow \boldsymbol{\vartheta} \in \mathcal{D}$, se satisface.

Así también, se observa que las matrices M_p , M_o , F_p y F_o son simétricas, en contraparte se tiene que las matrices M_r , C_p y C_o son anti-simétricas. Mientras que C_r no pertenece a ninguno de los tipos de matrices antes mencionados.

Modelo dinámico con coordenadas en \mathbf{L}

Para desarrollar el modelo dinámico del mini quadrotor con coordenadas relativas al marco de referencia \mathbf{L} , se procede a concatenar la ecuación (2.45) en función del vector de postura $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^6$ y utilizar las propiedades resumidas en el Apéndice A.1. Una expresión preliminar derivada del desarrollo, es

$$M_L(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \left[\frac{d}{dt} [M_L(\mathbf{q})] - \frac{1}{2} \frac{\partial [\dot{\mathbf{q}}^T M_L(\mathbf{q})]}{\partial \mathbf{q}} \right] \dot{\mathbf{q}} + F_L(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{U}_L(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f}_L(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^6,$$

observando que la derivada parcial contenida dentro del corchete, puede deducirse en la traspuesta de la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis definida a partir de

$$C_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T := \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial [\dot{\boldsymbol{\eta}}^T M_{\bar{r}}]}{\partial \boldsymbol{\eta}} & \frac{1}{2} \frac{\partial [\dot{\boldsymbol{\eta}}^T M_{\bar{o}}]}{\partial \boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6} .$$

La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es también calculable a través de la fórmula de conversión presentada en (2.23b), donde la matriz de transformación cinemática es $J(\boldsymbol{\eta}) = \text{diag} \{R(\boldsymbol{\eta}), W(\boldsymbol{\eta})\} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$. Utilizando los elementos de las matrices definidas para (2.48), la expresión formulada en (2.10) y las propiedades mostradas en el Apéndice A.1, es posible verificar que la siguiente igualdad se satisface, esto es,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [M_L(\mathbf{q})] &= C_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \\ &:= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{m}R [\mathcal{S}(\mathbf{r}) \bar{W} - \mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathcal{S}(\mathbf{r})] W^{-1} \\ \mathbf{m}W^{-T} [\mathcal{S}(\mathbf{r}) \bar{W} - \mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathcal{S}(\mathbf{r})]^T R^T & -W^{-T} [M_o \bar{W} + [M_o \bar{W}]^T] W^{-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

siendo $\bar{W}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = W(\boldsymbol{\eta})^{-1} \frac{d}{dt} [W(\boldsymbol{\eta})] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $\boldsymbol{\omega} = W(\boldsymbol{\eta})^{-1} \dot{\boldsymbol{\eta}} \in \mathbb{R}^3$. En todo caso, la forma estándar del modelo dinámico del mini quadrotor con coordenadas en \mathbf{L} resulta en

$$M_L(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + C_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + F_L(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_L(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_L(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^6, \quad (2.49)$$

donde

$$\begin{aligned} M_L &= \begin{bmatrix} M_{\bar{p}} & M_{\bar{r}}^T \\ M_{\bar{r}} & M_{\bar{o}} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbf{m}I_3 & \mathbf{m}R(\boldsymbol{\eta}) \mathcal{S}(\mathbf{r})^T W(\boldsymbol{\eta})^{-1} \\ \mathbf{m}W(\boldsymbol{\eta})^{-T} \mathcal{S}(\mathbf{r}) R(\boldsymbol{\eta})^T & W(\boldsymbol{\eta})^{-T} M_o W(\boldsymbol{\eta})^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \\ C_L &= \begin{bmatrix} C_{\bar{p}} & C_{\bar{r}_1} \\ C_{\bar{r}_2} & C_{\bar{o}} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{m}R(\boldsymbol{\eta}) [\mathcal{S}(\mathbf{r}) \bar{W}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) - \mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}) \mathcal{S}(\mathbf{r})] W(\boldsymbol{\eta})^{-1} \\ \mathbf{0} & -W(\boldsymbol{\eta})^{-T} [\mathcal{S}(M_o \boldsymbol{\omega}) + M_o \bar{W}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})] W(\boldsymbol{\eta})^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \\ F_L &= \begin{bmatrix} F_{\bar{p}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_{\bar{o}} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} R(\boldsymbol{\eta}) F_p R(\boldsymbol{\eta})^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W(\boldsymbol{\eta})^{-T} F_o W(\boldsymbol{\eta})^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \\ \mathbf{g}_L &= \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\bar{p}} \\ \mathbf{g}_{\bar{o}} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbf{m}g\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{m}gW(\boldsymbol{\eta})^{-T} \mathcal{S}(\mathbf{r}) R(\boldsymbol{\eta})^T \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{f}_L &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\bar{p}} \\ \mathbf{f}_{\bar{o}} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} R(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{f}_p \\ W(\boldsymbol{\eta})^{-T} \mathbf{f}_o \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \end{aligned}$$

siendo $\mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ la representación de una base estándar. Haciendo notar que la configuración o parametrización de la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis no es única. El resto de los elementos fueron anteriormente descritos en detalle durante el planteamiento de (2.28), (2.36), (2.41) y (2.44), donde se muestra una mayor descripción en lo referido a elementos y dependencias. Cabe mencionar que el resultado (2.49) es consistente con la expresión preliminar presentada en (2.22). Adicionalmente, para el dominio $\mathcal{D} = \{\mathbb{R}^6 - \{\boldsymbol{\theta} = \pm 90^\circ [2n + 1]\} : \boldsymbol{\theta} \in \mathbf{q}, n = 0, 1, 2, \dots\}$ se tiene que el siguiente conjunto de propiedades se satisface.

P.36 $M_L(\mathbf{q}) = M_L(\mathbf{q})^T > \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{D}$, la matriz es simétrica y definida positiva.

P.37 $C_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \neq C_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathcal{D}$, la matriz no es simétrica.

P.38 $C_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \neq -C_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathcal{D}$, la matriz no es tornillo-simétrica o antisimétrica.

P.39 $F_L(\mathbf{q}) = F_L(\mathbf{q})^T > \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{D}$, la matriz es diagonal a bloques y definida positiva.

P.40 $\frac{d}{dt} [M_L(\mathbf{q})] = \left[\frac{d}{dt} [M_L(\mathbf{q})] \right]^T \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{D}$, la matriz es simétrica.

P.41 $\frac{d}{dt} [M_L(\mathbf{q})] = C_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathcal{D}$, la igualdad se satisface.

P.42 $\boldsymbol{\Theta}^T \left[\frac{d}{dt} [M_L(\mathbf{q})] - 2C_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \boldsymbol{\Theta} = \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{R}^6$ y $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathcal{D}$, se satisface.

Implicando que los coeficientes o símbolos de Christoffel descritos en Kelly et. al. (2005), pueden aplicarse para determinar la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis a partir de la matriz de inercia. Adicionalmente, se

dice que las propiedades son consistentes si el centro de masa del mini quadrotor es invariante con el tiempo. Por otro lado, se observa que las matrices $M_{\bar{p}}$, $M_{\bar{o}}$, $F_{\bar{p}}$ y $F_{\bar{o}}$ son simétricas, en tanto que las matrices $M_{\bar{r}}$, $C_{\bar{p}}$ y $C_{\bar{r}_1}$ no son ni simétricas ni anti-simétricas.

Las propiedades de los modelos matemáticos (2.48) y (2.49) son consistentes con las propiedades de robots manipuladores descritas en [Canudas de Wit et. al. \(1996\)](#); [Sciavicco y Siciliano \(2000\)](#); [Kelly et. al. \(2005\)](#). Adicionalmente, se tiene que

P.43 La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es lineal en $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, tal que la igualdad

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{z} = C(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \mathbf{y} ,$$

se satisface para toda $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

P.44 La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis es acotable en

$$\|C(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})\| \leq k_c \|\dot{\mathbf{v}}\| ,$$

para toda $\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ y constante k_c estrictamente positiva.

P.45 Considerando los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, se establece que la matriz de inercia $M(\mathbf{v})$ puede ser acotada en las formas

$$\begin{aligned} \lambda_m\{M(\mathbf{v})\} \|\mathbf{x}\|^2 &\leq \mathbf{x}^T M(\mathbf{v}) \mathbf{x} \leq \lambda_M\{M(\mathbf{v})\} \|\mathbf{x}\|^2 , \\ |\mathbf{x}^T M(\mathbf{v}) \mathbf{y}| &\leq \lambda_M\{M(\mathbf{v})\} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| , \\ \lambda_m\{M(\mathbf{v})\} &\leq \mathbf{x}^T M(\mathbf{v}) \mathbf{x} \leq \lambda_M\{M(\mathbf{v})\} , \end{aligned}$$

siendo $\lambda_m\{*\}$ y $\lambda_M\{*\}$ el valor propio mínimo y máximo de la matriz $*$, respectivamente.

2.5.3. Configuraciones del modelo matemático simplificado

En la gran mayoría de los trabajos especializados sobre el tema, asumen que el centro de masa del mini quadrotor es coincidente con el origen del marco \mathbf{B} . Esta acción facilita la maniobrabilidad del sistema y simplifica la problemática concerniente a su control. El modelo matemático resultante es ampliamente utilizado por diseñadores y especialistas en el campo, puesto que éste conserva no linealidades implícitas en el mini quadrotor ante un escenario de vuelo real. En otro sentido, existen diversas configuraciones del modelo matemático en función del sistema coordinado seleccionado. Por ejemplo, en [Castillo et. al. \(2004\)](#); [Madani y Benallegue \(2007\)](#); [Raffo et. al. \(2008\)](#) se establece que el mini quadrotor tenga coordenadas generalizadas en \mathbf{L} para describir su dinámica traslacional y la dinámica angular. Mientras que [Kim et. al. \(2010\)](#); [Tayebi y McGillvray \(2004\)](#); [Lee et. al. \(2007\)](#); [Freddi et. al. \(2011\)](#) establecen los sistemas coordinados \mathbf{L} y \mathbf{B} para definir la dinámica traslacional y la dinámica angular, respectivamente. Bajo este último enfoque, en los trabajos presentados por [Lee et. al. \(2007\)](#); [Madani y Benallegue \(2007\)](#); [Freddi et. al. \(2011\)](#) se incluye los efectos concernientes a la fricción aerodinámica. Adicionalmente, en [Tayebi y McGillvray \(2004\)](#) incluyen la dinámica de los actuadores. La relación existente entre los sistemas de coordenadas, se especifica a través de los términos correspondientes a la cinemática del sistema. En resumen, un grupo de sistemas de ecuaciones o modelos matemáticos simplificados se mostrará en los subsiguientes apartados.

Modelo matemático con parte traslacional y angular relativa a \mathbf{L}

La ecuación del modelo es correspondiente a la expresión deducida en (2.49), donde se asumirá que el vector $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ es nulo. Además, dicha expresión puede ser especificada en el formato de espacio de estados, esto es,

$$\frac{d}{dt} [\dot{\boldsymbol{\xi}}] = -\mathbf{m}^{-1} R F_p R^T \dot{\boldsymbol{\xi}} - \mathbf{g} \mathbf{e}_3 + \mathbf{m}^{-1} R \mathbf{f}_p \in \mathbb{R}^3 , \quad (2.50a)$$

$$\frac{d}{dt} [\dot{\boldsymbol{\eta}}] = W M_o^{-1} [\mathcal{S}(M_o W^{-1} \dot{\boldsymbol{\eta}}) - F_o + M_o W^{-1} \dot{W}] W^{-1} \dot{\boldsymbol{\eta}} + W M_o^{-1} \mathbf{f}_o \in \mathbb{R}^3 , \quad (2.50b)$$

y las cuales caracterizan la dinámica traslacional y la dinámica angular del sistema. La definición y descripción de los elementos pertenecientes al modelo matemático se presentó a lo largo de la Sección 2.5.2. La expresión (2.30) muestra el vector de fuerzas lineales $\mathbf{f}_p \in \mathbb{R}^3$ y el vector de fuerzas angulares $\mathbf{f}_o \in \mathbb{R}^3$ en su forma parametrizada. La descripción explícita de la matriz de rotación $R(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y la matriz de transformación angular $W(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ se muestra en (2.8) y (2.14), respectivamente.

Modelo matemático con parte traslacional relativa a \mathbf{L} y parte angular relativa a \mathbf{B}

Esta configuración se conforma de la parte traslacional de (2.49) y la parte angular de (2.48), en donde el vector $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ se asumirá como nulo. La expresiones se escribe en el formato de espacio de estados, resultando en

$$\frac{d}{dt} [\dot{\boldsymbol{\xi}}] = -\mathbf{m}^{-1} R F_p R^T \dot{\boldsymbol{\xi}} - \mathbf{g} e_3 + \mathbf{m}^{-1} R \mathbf{f}_p \in \mathbb{R}^3, \quad (2.51a)$$

$$\frac{d}{dt} [\boldsymbol{\omega}] = M_o^{-1} [\mathcal{S}(M_o \boldsymbol{\omega}) - F_o] \boldsymbol{\omega} + M_o^{-1} \mathbf{f}_o \in \mathbb{R}^3, \quad (2.51b)$$

mientras que la relación entre los sistemas coordenados se caracteriza a través de la ecuación de cinemática angular

$$\frac{d}{dt} [\boldsymbol{\eta}] = W \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3. \quad (2.52)$$

La definición y descripción de los elementos del modelo matemático se presentó a lo largo de la Sección 2.5.2. En (2.30) se muestra la parametrización del vector de fuerzas lineales $\mathbf{f}_p \in \mathbb{R}^3$ y el vector de fuerzas angulares $\mathbf{f}_o \in \mathbb{R}^3$. La matrices de transformación cinemática $R(\boldsymbol{\eta})$ y $W(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ se detallan (2.8) y (2.14), respectivamente.

Modelo matemático en formato de sistema subactuado

Si la matriz de fricción aerodinámica F_p está compuesta de coeficientes idénticos, se observa que los modelos matemáticos pueden configurarse bajo la perspectiva de sistemas subactuados tratada en Fantoni y Lozano (2001). En consecuencia, el modelo matemático con parte traslacional relativa a \mathbf{L} y parte angular relativa a \mathbf{B} , se formula en la estructura

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{M_u} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{v}_u \\ \ddot{y} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{v}}_u} + \underbrace{\begin{bmatrix} f_u & 0 \\ 0 & f_v \end{bmatrix}}_{F_u} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_u} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{13} & 0 \\ 0 & R_{23} \end{bmatrix}}_{B_u(\mathbf{q}_a)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_c \\ u_c \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{u})} \in \mathbb{R}^2, \quad (2.53)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_o \end{bmatrix}}_{M_a} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{z}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{v}}_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathcal{S}(M_o \boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix}}_{C_a(\mathbf{v}_a)} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} f_w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_o \end{bmatrix}}_{F_a} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} mg \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}_a} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{33} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_3 \end{bmatrix}}_{B_a(\mathbf{q}_a)} B_n \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^4, \quad (2.54)$$

con ecuación cinemática descrita por $\dot{\mathbf{q}}_u = \mathbf{v}_u := [\dot{x} \ \dot{y}]^T \in \mathbb{R}^2$ y

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}_a} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W \end{bmatrix}}_{J_a(\mathbf{q}_a)} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_a} \in \mathbb{R}^4. \quad (2.55)$$

En los anteriores subsistemas, los elementos referidos con el subíndice- u pertenecen a la denominada dinámica no-actuada, la cual se caracterizó respecto al plano horizontal del sistema coordenado. Mientras que los elementos denotados con el subíndice- a pertenecen a la dinámica actuada, la cual está conformada por un sistema de coordenadas compuestas que caracterizan los desplazamientos verticales y los movimientos angulares del mini quadrotor. En términos generales, se dice que las componentes³⁹ \mathbf{q}_* , \mathbf{v}_* , M_* , C_* , F_* y B_* representan el vector de posición, vector de velocidad, matriz de inercia, matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis, matriz de fricción aerodinámica y la matriz de entrada, todas ellas referidas al sistema coordenado del subsistema-*. Si alguna de estas componentes contienen elementos combinados en coordenadas (\mathbf{B}, \mathbf{L}) , se agregará además la palabra *compuesto*(a) al nombre de dicha componente. El vector de entrada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ se interpreta como el vector de control de la entrada actuada. Resultando claro que las correspondientes acciones de control guardan una dependencia con la dinámica no-actuada, esto a través del denominado vector de entrada colectiva $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2$. La configuración del vector de entrada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$, fuerza colectiva de empuje $u_c \in \mathbb{R}$ y matriz de transformación de fuerzas $B_n \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, se detalla dentro del grupo de ecuaciones (2.29)-(2.34) presentadas en un apartado ligado a la parametrización de fuerzas.

³⁹Con dimensiones adecuadas al subsistema en cuestión.

Si la matriz de fricción aerodinámica F_p está compuesta de coeficientes idénticos, el modelo matemático con parte traslacional y parte angular exclusivamente relativa a \mathbf{L} , puede formularse en los siguientes subsistemas

$$M_u \ddot{\mathbf{q}}_u + F_u \dot{\mathbf{q}}_u = B_u(\mathbf{q}_a) \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} & \overbrace{\begin{bmatrix} m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W^{-T} M_o W^{-1} \end{bmatrix}}^{\mathcal{M}_a(\mathbf{q}_a)} \overbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{z}} \\ \ddot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix}}^{\ddot{\mathbf{q}}_a} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -W^{-T} [\mathcal{S}(M_o \boldsymbol{\omega}) + M_o W^{-1} \dot{W}] W^{-1} \end{bmatrix}}^{\mathcal{C}_a(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_a)} \overbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix}}^{\dot{\mathbf{q}}_a} \\ & + \overbrace{\begin{bmatrix} f_w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W^{-T} F_o W^{-1} \end{bmatrix}}^{\mathcal{F}_a(\mathbf{q}_a)} \overbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix}}^{\dot{\mathbf{q}}_a} + \overbrace{\begin{bmatrix} mg \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}^{\mathbf{g}_a} = \overbrace{\begin{bmatrix} R_{33} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W^{-T} \end{bmatrix}}^{\mathcal{B}_a(\mathbf{q}_a)} B_n \overbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}}^{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^4, \end{aligned} \quad (2.57)$$

Las componentes de estos subsistemas guardan el mismo enfoque descrito para las expresiones (2.53)-(2.55). Cabe mencionar que algunas de las componentes se editaron en formato caligráfico, para diferenciarlas de las componentes del otro sistema subactuado presentado al inicio de este apartado.



Capítulo 3

Control autónomo del mini quadrotor

En este capítulo se presenta un resumen sobre las variables y elementos relacionados al modelo matemático del mini quadrotor. Además, se presentan algunos antecedentes y bases concernientes a la teoría de perturbaciones singulares, siendo esta última empleada durante el proceso de análisis de la estabilidad del sistema retroalimentado. El resto de las secciones se desatinarán a la propuesta, diseño y prueba numérica de controladores, tal que en un esquema completamente autónomo deberán dar solución al problema de regulación y seguimiento de trayectoria.

3.1. Preliminares

En este apartado se describen las variables, elementos y el sistema de coordenadas del modelo matemático del mini quadrotor, además de algunas cuestiones relacionadas al método a ser empleado para realizar el análisis de la estabilidad del sistema retroalimentado. Con la finalidad de restar densidad y repetitividad al presente capítulo, se evitará re-escribir a lo largo de él la notación aquí resumida. A razón de esto, el actual apartado deberá ser consultado si así lo requiere el lector.

3.1.1. Notación

A continuación se resume el modelo matemático del mini quadrotor que fue previamente formulado y analizado dentro de las Secciones 2.5.2 y 2.5.3. Adicionalmente, la Figura 3.1 muestra el conjunto de variables y marcos de referencia ligados al mini quadrotor.

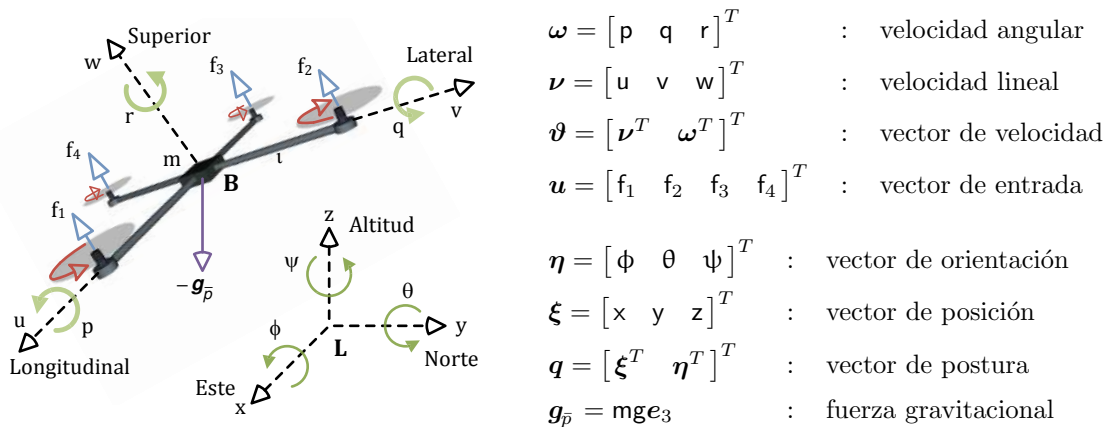


Figura 3.1: Definición de los marcos de referencia del mini quadrotor

donde el vector $e_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ representa una base estándar y g es la aceleración gravitacional. Los escalares m y l corresponden a la masa total y a la longitud del brazo-estructura del mini quadrotor, respectivamente. La relación entre el marco de referencia no-inercial \mathbf{B} y el marco de referencia local \mathbf{L} está dada por la ecuación

de cinemática traslacional y rotacional, esto es,

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\nu} \\ W(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad (3.1)$$

donde

$$R(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cos(\psi) & \sin(\phi) \sin(\theta) \cos(\psi) - \cos(\phi) \sin(\psi) & \cos(\phi) \sin(\theta) \cos(\psi) + \sin(\phi) \sin(\psi) \\ \cos(\theta) \sin(\psi) & \sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi) & \cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) - \sin(\phi) \cos(\psi) \\ -\sin(\theta) & \sin(\phi) \cos(\theta) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

$$W(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\phi) \tan(\theta) & \cos(\phi) \tan(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) \cos(\theta)^{-1} & \cos(\phi) \cos(\theta)^{-1} \end{bmatrix}$$

representan la matriz de rotación y la matriz de transformación angular, respectivamente. En cuanto a las componentes del modelo matemático, se tiene que el

tensor de inercia	$M_o = \text{diag} \{I_p, I_q, I_r\},$
matriz de fricción aerodinámica (traslación)	$F_p = \text{diag} \{f_u, f_v, f_w\},$
matriz de fricción aerodinámica (rotación)	$F_o = \text{diag} \{f_p, f_q, f_r\}.$

Las componentes pertenecientes a los diversos formatos del modelo subactuado, son

vector de posición horizontal	$\mathbf{q}_u = [x \ y]^T,$
matriz de masas	$M_u = \text{diag} \{m, m\},$
matriz de fricción aerodinámica (plano x-y)	$F_u = \text{diag} \{f_u, f_v\},$
matriz de entrada ligada al plano horizontal	$B_u = \text{diag} \{R_{13}, R_{23}\},$
vector de posición vertical y angular	$\mathbf{q}_a = [z \ \boldsymbol{\eta}^T]^T,$
vector de velocidad compuesto	$\mathbf{v}_a = [\dot{z} \ \boldsymbol{\omega}^T]^T,$
matriz de inercia compuesta	$M_a = \text{diag} \{m, M_o\},$
matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis compuesta	$C_a = \text{diag} \{0, -\mathcal{S}(M_o \boldsymbol{\omega})\},$
matriz de fricción aerodinámica compuesta	$F_a = \text{diag} \{f_w, F_o\},$
matriz de entrada ligada a la altura y velocidad angular	$B_a = \text{diag} \{R_{33}, I_3\} B_n,$
matriz de transformación compuesta	$J_a = \text{diag} \{1, W\},$
vector de gravedad compuesto	$\mathbf{g}_a = [m\mathbf{g} \ 0_{1 \times 3}]^T,$
matriz de masa e inercia proyectada	$\mathcal{M}_a = \text{diag} \{m, W^{-T} M_o W^{-1}\},$
matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis proyectada	$C_a = \text{diag} \{0, C_o\},$
matriz de fricción aerodinámica proyectada (altura, rotación)	$\mathcal{F}_a = \text{diag} \{f_w, W^{-T} F_o W^{-1}\},$
matriz de entrada ligada a la altura y rotación	$\mathcal{B}_a = \text{diag} \{R_{33}, W^{-T}\} B_n.$

donde la matriz de transformación de fuerzas $B_n \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ se describe en (2.31). La componente de la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis proyectada, se define como $C_o = -W^{-T} [\mathcal{S}(M_o \boldsymbol{\omega}) + M_o W^{-1} \dot{W}] W^{-1} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Todas las matrices enunciadas dentro del anterior listado, son invertibles en el dominio

$$\mathcal{D} = \{\mathbb{R}^6 - \{\theta = \pm 90^\circ [2n + 1]\} : \theta \in \boldsymbol{\eta}, n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Los valores numéricos de los parámetros del mini quadrotor se resumen en el Cuadro 3.1.

Notación	Descripción	Unidad	Valor
g	valor nominal de la aceleración gravitacional	$[m \cdot s^{-2}]$	9.80665
m	masa total del mini quadrotor	$[Kg]$	0.141
l	longitud del brazo-estructura del mini quadrotor	$[m]$	0.175
I_p, I_q	momento de inercia entorno al eje-Longitudinal y entorno al eje-Lateral, respectivamente.	$[Kg \cdot m^2 \cdot rad^{-1}]$	2.1×10^{-3}
I_r	momento de inercia entorno al eje-Superior	$[Kg \cdot m^2 \cdot rad^{-1}]$	4.2×10^{-3}
f_u, f_v, f_w	coeficientes de fricción aerodinámica relacionado a la superficie del vehículo aéreo, cuando dicho vehículo se mueve en dirección-Longitudinal, dirección-Lateral y dirección-Superior, respectivamente.	$[N \cdot s \cdot m^{-1}]$	6.5×10^{-3}
f_p, f_q, f_r	coeficientes de fricción aerodinámica relacionado a la superficie del vehículo aéreo, cuando dicho vehículo se mueve entorno al eje-Longitudinal, eje-Lateral y eje-Superior, respectivamente.	$[N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1}]$	6.5×10^{-4}
k	relación entre la fuerza de fricción aerodinámica y la fuerza de empuje ejercida por las aspas	$[m]$	10.2×10^{-3}

Cuadro 3.1: Descripción de los parámetros relacionados al mini quadrotor.

En cuanto a los símbolos y subíndices agregados sobre las componentes¹, se tiene que

- El subíndice- u indica que la componente pertenece a la dinámica no-actuada.
- El subíndice- a indica que la componente pertenece a la dinámica actuada.
- El subíndice- d se emplea para enfatizar una componente deseada. Su terminología se mantiene, pero con la diferencia que se agrega la palabra "deseado(a)" a la definición.
- El símbolo $\tilde{\cdot}$ ubicado sobre una componente, se utiliza para hacer referencia al error entre el valor deseado y el valor actual de la componente en cuestión. Es decir que $\tilde{\Xi} := \Xi_d - \Xi$, donde Ξ es la componente.
- El símbolo $\dot{\cdot}$ ubicado sobre una componente, se utiliza para representar su derivada temporal. Es decir que $\dot{\Xi} := \frac{d}{dt} [\Xi]$, donde Ξ es la componente.
- La notación $\mathcal{S}(\ast)$ representa la matriz tornillo simétrica de 3×3 , donde su argumento \ast es un vector de tamaño 3. La representación detallada y propiedades concernientes a dicha matriz, se muestra a detalle en el Apéndice A.1.
- Los vectores $e_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$, $e_2 = [0 \ 1 \ 0]^T$ y $e_3 = [0 \ 0 \ 1]^T \in \mathbb{R}^3$ representan bases estándar.

Todas las descripciones mostradas en esta Sección, también pueden ser consultadas en el apartado de nomenclatura ubicado en el preámbulo de la tesis.

3.1.2. Teoría de perturbaciones singulares

La TPS² se basa en el estudio de un conjunto de ecuaciones diferenciales en diferentes escalas de tiempo³, con el objetivo de validar la estabilidad del mismo. La TPS es comúnmente utilizada para sistemas aéreos, dado que estos muestran una discrepancia entre la rapidez de sus movimientos traslacionales y la rapidez de sus movimientos angulares, siendo entonces posible caracterizar el sistema por una dinámica lenta y una dinámica rápida. En Naidu y Calise (2001); Kokotović et. al. (1987); Johnson (2004); Khalil (2002); Smith (2009); Khalil (1987) se presenta un estudio de bases teóricas, antecedentes y estado del arte relacionado al análisis de estabilidad de vehículos espaciales y aéreos haciendo uso de la TPS. A pesar de la extensa gama de estudios ahí resumidos, son mínimos aquellos enfocados a vehículos con efecto gravitatorio inherente, por ejemplo, misiles y aviones. Para validar la estabilidad del sistema en cuestión, este debe acomodarse en la forma singularmente perturbada y satisfacer la serie de pasos enunciados por el Teorema a continuación transcrito.

¹Se entiende como: escalar, elemento, variable, vector o matriz.

²TPS: Teoría de Perturbaciones Singulares.

³Comúnmente denominadas: escala lenta, escala rápida. Aunque, podrían constituirse un mayor número de escalas.

Teorema 1. [Teorema 11.4, *Khalil (2002)*, pag. 456] Para el sistema singularmente perturbado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \epsilon) , \quad (3.2)$$

$$\epsilon \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \epsilon) . \quad (3.3)$$

Se asume que las siguientes consideraciones son satisfechas para todo $(t, \mathbf{x}, \epsilon) \in [0, \infty) \times \mathcal{B}_r \times [0, \epsilon_0]$

A.1 $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \epsilon) = \mathbf{0}$ y $\mathbf{g}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \epsilon) = \mathbf{0}$.

A.2 La ecuación $\mathbf{0} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, 0)$ tiene raíces aisladas $\mathbf{z} = \mathbf{h}(t, \mathbf{x})$ tal que $\mathbf{h}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$

A.3 Las funciones $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \epsilon)$, $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \epsilon)$, $\mathbf{h}(t, \mathbf{x})$ y sus derivadas parciales por arriba del segundo orden, son acotadas para todo $\mathbf{z} - \mathbf{h}(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{B}_\rho$.

A.4 El origen del sistema reducido $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{h}(t, \mathbf{x}), 0)$ es exponencialmente estable.

A.5 El origen del sistema de capa-frontera $\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{h}(t, \mathbf{x}), 0)$ es exponencialmente estable, y uniforme en (t, \mathbf{x}) .

Entonces, existe una $\epsilon^* > 0$ tal que para toda $\epsilon < \epsilon^*$, el origen de (3.2)-(3.3) es exponencialmente estable.

Prueba. Ver *Khalil (2002)*, pag. 456 $\Delta\Delta\Delta$.

En particular, se sugiere que la estabilidad exponencial del sistema reducido y del sistema de capa-frontera sea verificada mediante la Teoría de Lyapunov presentada por *Saberi y Khalil (1984)*; *Queiroz et. al. (2000)*; *Khalil (2002)*; *Kelly et. al. (2005)*; *Bacciotti y Rosier (2005)*, y a través del enfoque de sistemas en cascada presentado por *Panteley y Loria (1998, 2001)*; *Kelly y Moreno (2005)*.

Además del extenso estudio de antecedentes y estado del arte presentado por *Naidu y Calise (2001)*. Existen otros trabajos que abordan problemáticas particulares, por ejemplo en *Bertrand et. al. (2008, 2009)* se aplica la TPS a sobre los sistemas denominados UAVs-VTOLs⁴. En *Esteban et. al. (2005)* se emplea la TPS para validar la estabilidad del control de altura de una plataforma-helicóptero a escala, a través de tres escalamientos de tiempo en su dinámica⁵. En *González et. al. (2004)* también analizan un sistema helicóptero a escala a través de la TPS, pero desde un enfoque lineal. En *Philippe y Erwan (2010)*; *Bourquardez et. al. (2009)* se extiende la TPS para analizar un modelo en cascada compuesto por un mini quadrotor (lazo externo: dinámica lenta) y su etapa de sensado (lazo interno: dinámica rápida). Notando que en *Bourquardez et. al. (2009)* incluyen acciones de control PI y analizan la estabilidad en lazo abierto, mientras que en *Philippe y Erwan (2010)* incluyen acciones de control PD y analizan la estabilidad en lazo cerrado. En otro sentido, en *Tomlin y Sastry (1996)*; *Su et. al. (2001)*; *Liu et. al. (2008)*; *Yurkevich (2006, 2008, 2009)* se utilizan esquemas de control PID para diversas clases de sistemas mecánicos. Estos estudios sirven de guía en lo relacionado a la metodología y tratado de esquemas PID bajo el enfoque de TPS.

3.2. Formulación del problema

El problema de control planteado en el presente trabajo de tesis, consiste en formular leyes de control basadas en retroalimentación de estados, tal que la postura actual del mini quadrotor $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}; \mathbf{q}_u, \mathbf{q}_a)$ tienda asintóticamente a una postura deseada $(\boldsymbol{\xi}_d, \boldsymbol{\eta}_d; \mathbf{q}_{ud}, \mathbf{q}_{ad})$, es decir, el objetivo de control consiste en garantizar el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\xi}}(t)^T & \tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)^T \end{bmatrix}^T = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_u(t)^T & \tilde{\mathbf{q}}_a(t)^T \end{bmatrix}^T = \mathbf{0} , \quad (3.4)$$

donde los vectores $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\xi}_d - \boldsymbol{\xi}$ y $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\eta}_d - \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^3$ caracterizan el error de posición y orientación, respectivamente. El vector $\tilde{\mathbf{q}}_u = \mathbf{q}_{ud} - \mathbf{q}_u \in \mathbb{R}^2$ representa el error de posición sobre el plano x-y del sistema coordenado, mientras que el vector $\tilde{\mathbf{q}}_a = \mathbf{q}_{ad} - \mathbf{q}_a \in \mathbb{R}^4$ representa el error de altura y orientación.

⁴UAVs-VTOLs: Unmanned Aerial Vehicles - Vertical Take Off and Landing, (vehículo aéreo no tripulado - con despegue y aterrizaje vertical).

⁵Posición y velocidad vertical, velocidad del rotor, sistema colectivo (ángulo de ataque de las aspas).

3.3. Propuesta de solución para el sistema en coordenadas L y B

Para simplificar el proceso de diseño, se asume una matriz diagonal $F_p \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ con elementos idénticos y se especifica el dominio

$$\mathcal{D} = \{\mathbb{R}^6 - \{\theta = \pm 90^\circ [2n + 1]\} : \theta \in \boldsymbol{\eta}, n = 0, 1, 2, \dots\}$$

para los modelos matemáticos del mini quadrotor (2.51)-(2.52) y (2.53)-(2.55), donde cada uno de los términos pertenecientes al modelo se describen en la Sección 3.1.1. En primer instancia, se estructura el vector de control en la forma

$$\mathbf{u} = B_a(\mathbf{q}_a)^{-1} \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^4, \quad (3.5)$$

donde el vector $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \ \boldsymbol{\mu}_r^T]^T := [\mu_1 \ [\mu_2 \ \mu_3 \ \mu_4]]^T \in \mathbb{R}^4$ representa ciertas señales de control a ser definidas. Al desarrollar sobre los modelos matemáticos del mini quadrotor y colocar el resultado correspondiente en función de las variables de error, se obtiene un bosquejo de las ecuaciones de lazo-cerrado, es decir,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\xi}} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} \\ \tilde{\boldsymbol{\eta}} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} \\ \ddot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} + m^{-1} \left[F_p \left[\dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} - \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} \right] + m \mathbf{g} \mathbf{e}_3 - \mu_1 R_{33}(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}})^{-1} R(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \mathbf{e}_3 \right] \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} - W(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \left[\boldsymbol{\omega}_d - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \right] \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + M_o^{-1} \left[\left[F_o - \mathcal{S}(M_o \left[\boldsymbol{\omega}_d - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \right]) \right] \left[\boldsymbol{\omega}_d - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \right] - \boldsymbol{\mu}_r \right] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12}, \quad (3.6)$$

y

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_u \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u \\ \tilde{\mathbf{q}}_a \\ \tilde{\mathbf{v}}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u \\ \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_{ud} + M_u^{-1} \left[F_u \left[\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{ud} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u \right] - \mu_1 R_{33}(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}})^{-1} \left[R_{13}(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \ R_{23}(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \right]^T \right] \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{ad} - J_a(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \left[\mathbf{v}_{ad} - \tilde{\mathbf{v}}_a \right] \\ \dot{\mathbf{v}}_{ad} + M_a^{-1} \left[\left[F_a + C_a(\mathbf{v}_{ad}, \tilde{\mathbf{v}}_a) \right] \left[\mathbf{v}_{ad} - \tilde{\mathbf{v}}_a \right] + \mathbf{g}_a - \boldsymbol{\mu} \right] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12}, \quad (3.7)$$

Durante su planteamiento se concluye que la fuerza colectiva de empuje es $u_c = \mu_1 R_{33}(\boldsymbol{\eta})^{-1} \in \mathbb{R}$, el vector de fuerzas lineales es $\mathbf{f}_p = u_c \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ y el vector de fuerzas angulares es $\mathbf{f}_o = \boldsymbol{\mu}_r \in \mathbb{R}^3$. Para encontrar un conjunto de leyes de control que den solución a la problemática planteada y en consecuencia estabilicen las ecuaciones de lazo-cerrado, se procede a utilizar el enfoque de escalamiento en tiempo. Esto se resume en el siguiente grupo de pasos,

- 1.- Durante la región transitoria de los estados relacionados a la traslación $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, se asume que el resto de los estados son nulos. En esta condición, se propone que la componente ligada al vector de entrada adquiera la configuración

$$\mu_1 R_{33}(\boldsymbol{\eta}_d, \mathbf{0})^{-1} R(\boldsymbol{\eta}_d, \mathbf{0}) \mathbf{e}_3 := \Gamma \bar{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbb{R}^3 \quad (3.8)$$

En consecuencia, se dice que la dinámica traslacional ubicada dentro de los bosquejos (3.6) y (3.7), pueden ser estabilizable mediante una selección adecuada de las señales de control contenidas en la matriz $\Gamma = \text{diag}\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$ y el vector $\bar{\boldsymbol{\mu}} = [\bar{\mu}_1 \ \bar{\mu}_2 \ \bar{\mu}_3]^T$, y las cuales serán diseñadas más adelante. Cabe mencionar que el vector $R_{33}(\boldsymbol{\eta}_d)^{-1} [R_{13}(\boldsymbol{\eta}_d) \ R_{23}(\boldsymbol{\eta}_d)]^T \in \mathbb{R}^2$ contenido en el bosquejo del sistema de lazo-cerrado subactuado, resulta intrínseco a la ecuación anteriormente mostrada. A partir de la resolución algebraica del sistema de ecuaciones no-lineales descrito en (3.8), se obtiene el siguiente conjunto de funciones escalares

$$\begin{bmatrix} \phi_d \\ \theta_d \\ \mu_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \arctan(\cos(\theta_d) \mu_1^{-1} [\Gamma_1 \bar{\mu}_1 \sin(\psi_d) - \Gamma_2 \bar{\mu}_2 \cos(\psi_d)]) \\ \arctan(\mu_1^{-1} [\Gamma_1 \bar{\mu}_1 \cos(\psi_d) + \Gamma_2 \bar{\mu}_2 \sin(\psi_d)]) \\ \Gamma_3 \bar{\mu}_3 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

donde los ángulos deseados ϕ_d y θ_d están contenidos en el vector $\boldsymbol{\eta}_d \in \mathbf{q}_{ad}$. Una serie de observaciones ligadas a la anterior expresión, se lista a continuación.

- R.1** Considerando que Γ y $\bar{\mu}$ se caracterizan en función de los estados de la dinámica traslacional, entonces se dice que ángulos deseados ϕ_d y θ_d dependen de tales estados y de la configuración deseada para el ángulo yaw.
- R.2** La función $\arctan(*)$ provee ventajas prácticas dado que se mantiene acotada dentro una región de $\pm \frac{\pi}{2}$ [rad], a pesar que en su argumento pudiera generarse alguna divergencia inesperada.
- R.3** Para evitar alguna posible indeterminación dentro del argumento de la función $\arctan(*)$, puede proponerse que el conjunto Γ_i o el conjunto $\bar{\mu}_i$ sea linealmente proporcional a μ_1 , siendo $i = 1, 2$.
- R.4** Usando la identidad trigonométrica $\cos(*) = [1 + \tan(*)^2]^{-1/2}$, la función deseada para el ángulo roll puede escribirse en

$$\phi_d = \arctan \left(\frac{[\Gamma_1 \bar{\mu}_1 \sin(\psi_d) - \Gamma_2 \bar{\mu}_2 \cos(\psi_d)]}{\sqrt{\mu_1^2 + [\Gamma_1 \bar{\mu}_1 \cos(\psi_d) + \Gamma_2 \bar{\mu}_2 \sin(\psi_d)]^2}} \right),$$

- 2.-** En la región transitoria de los estados relacionados a la rotación ($\tilde{\phi}, \tilde{\theta}, \tilde{\psi}$), se asume que los estados ($\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$) son constantes, mientras que el resto de estados se asumen como nulos. Considerando el enfoque presentado por Siciliano (1990a,b), se dice que la dinámica rotacional ubicada dentro de los bosquejos (3.6) y (3.7), pueden ser estabilizable mediante el controlador tipo cinemático

$$\omega_d = W(\eta)^{-1} [\alpha \dot{\eta}_d + K_w \tilde{\eta}] \Leftrightarrow v_{ad} = J_a(\eta)^{-1} [\alpha \dot{q}_{ad} + K_J \tilde{q}_a], \quad (3.10)$$

donde a las matrices diagonales $K_w > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $K_J > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ se les asigna el nombre de matriz de ganancia cinemática. Las matrices de transformación W y J_a son invertibles en el dominio $\mathcal{D} = \{\mathbb{R}^6 - \{\theta = \pm 90^\circ [2n + 1]\} : \theta \in \eta, n = 0, 1, 2, \dots\}$. Un conjunto de observaciones concernientes al controlador se enuncia a continuación.

- R.5** El término α permite caracterizar al controlador tipo cinemático en dos clases, es decir, clase 1 ($\alpha = 0$) y clase 2 ($\alpha = 1$).
- R.6** La velocidad angular deseada ω_d y la velocidad compuesta v_{ad} se calculan a partir de información relativa al marco local terrestre.
- R.7** Los bosquejos (3.6) y (3.7) dependen de las derivadas temporales del controlador tipo cinemático, es decir,

$$\dot{\omega}_d = -W^{-1} [[\dot{W}W^{-1} + K_w] K_w \tilde{\eta} - K_w W \tilde{\omega} + [\alpha \dot{W}W^{-1} + [\alpha - 1] K_w] \dot{\eta}_d - \alpha \dot{\tilde{\eta}}_d],$$

$$\dot{v}_{ad} = -J_a^{-1} [[\dot{J}_a J_a^{-1} + K_J] K_J \tilde{q}_a - K_J J_a \tilde{v}_a + [\alpha \dot{J}_a J_a^{-1} + [\alpha - 1] K_J] \dot{q}_{ad} - \alpha \dot{\tilde{q}}_{ad}],$$

implicando que los sistemas de lazo-cerrado se escriban en la forma

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\xi} \\ \dot{\tilde{\xi}} \\ \tilde{\eta} \\ \tilde{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\xi}} \\ \tilde{\xi}_d + m^{-1} [F_p [\dot{\tilde{\xi}}_d - \dot{\tilde{\xi}}] + m g e_3 - \mu_1 R_{33}^{-1} R e_3] \\ [1 - \alpha] \dot{\tilde{\eta}}_d - K_w \tilde{\eta} + W \tilde{\omega} \\ D_a \tilde{\eta} + D_b \tilde{\omega} + D_c \dot{\tilde{\eta}}_d + \alpha W^{-1} \dot{\tilde{\eta}}_d - M_o^{-1} \mu_r \end{bmatrix},$$

donde $D_a = -[W^{-1} \dot{W} + D_b] W^{-1} K_w$, $D_b = W^{-1} K_w W - M_o^{-1} [F_o - \mathcal{S}(M_o \omega)]$ y $D_c = W^{-1} K_w + \alpha D_a \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Mientras que

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q}_u \\ \dot{\tilde{q}}_u \\ \tilde{q}_a \\ \tilde{v}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_u \\ \tilde{q}_{ud} + M_u^{-1} [F_u [\dot{\tilde{q}}_{ud} - \dot{\tilde{q}}_u] - \mu_1 R_{33}^{-1} [R_{13} \quad R_{23}]^T] \\ [1 - \alpha] \dot{\tilde{q}}_{ad} - K_J \tilde{q}_a + J_a \tilde{v}_a \\ D_A \tilde{q}_a + D_B \tilde{v}_a + D_C \dot{\tilde{q}}_{ad} + \alpha J_a^{-1} \dot{\tilde{q}}_{ad} + M_a^{-1} [g_a - \mu] \end{bmatrix},$$

donde $D_A = -[J_a^{-1} \dot{J} + D_B] J_a^{-1} K_J$, $D_B = J_a^{-1} K_J J_a - M_a^{-1} [F_a + C_a(v_{ad}, \tilde{v}_a)]$ y $D_C = J_a^{-1} K_J + \alpha D_A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$.

3.- En la región transitoria relacionada a la frecuencia angular, se asume que el resto de los estados son constantes. A partir de los bosquejos obtenidos en **R.7**, se observa que en el segmento $\frac{d}{dt} [\tilde{\omega}]$ existen algunas perturbaciones atribuidas a los estados no correspondientes a dicha dinámica. A pesar de esto, el segmento puede ser estabilizable mediante la propuesta de controladores $(\mu_r, \bar{\mu})$ que son dependientes de los estados en cuestión $(\tilde{\omega}, \tilde{v}_a)$.

R.8 En caso que la señales de control propuestas $(\mu_r, \bar{\mu})$ contemple el uso de la derivada temporal del controlador tipo cinemático $(\dot{\omega}_d, \dot{v}_{ad})$, entonces se observa que se requiere información de las derivadas temporales η_d y q_{ad} . Para el controlador tipo cinemático clase 1 ($\alpha = 0$) se requiere su primera derivada temporal, mientras que para la clase 2 ($\alpha = 1$) se requiere tanto la primera como la segunda derivada temporal. En consecuencia, la señal de control $\bar{\mu}$ debe configurarse de tal forma que las componentes de sus derivadas temporales sean accesibles⁶. En este sentido, a continuación se lista un caso de estudio que contempla la estimación de componentes pertenecientes a la señal $\bar{\mu}$.

- o Si la señal de control se configura en la forma $\bar{\mu} = \tilde{\gamma} + \gamma(\varphi) \in \mathbb{R}^3$, donde $\tilde{\gamma}$ representa las componentes accesibles⁷, mientras que $\gamma(\varphi)$ representa las componentes estimables que son dependientes de ciertos estados⁸ φ pertenecientes al sistema de lazo-cerrado. Este tipo de señales puede ser estimables mediante el uso de filtros lineales de primer orden, es decir,

$$\dot{\gamma}_{\bar{f}} = -K_{\bar{f}} [\gamma_{\bar{f}} - \gamma_f] , \quad (3.11a)$$

$$\dot{\gamma}_f = -K_f [\gamma_f - \varphi] , \quad (3.11b)$$

donde las matrices K_f y $K_{\bar{f}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ se refieren como ganancias del filtro en cuestión. Cuando se implementa el controlador tipo cinemático clase 1 ($\alpha = 0$) sólo es requerido el uso de una etapa de filtrado ($\gamma = \gamma_f$). Mientras que para el controlador tipo cinemático clase 2 ($\alpha = 1$) se requieren ambas etapas de filtrado ($\gamma_{\bar{f}}$ y $\gamma = \gamma_{\bar{f}}$).

3.4. Bosquejo del proceso de simulación

El desempeño de cada uno de los controladores diseñados, quedará verificado a través de un conjunto de pruebas numéricas realizadas en la plataforma Simulink-MatLab. En Figura 3.2 se resume un esquema para configurar la simulación del sistema retroalimentado, donde cada una de las etapas puede ser construida o formulada mediante el ambiente de programación detallado en el documento [Simulink 7: Writing S-Functions \(2007\)](#).

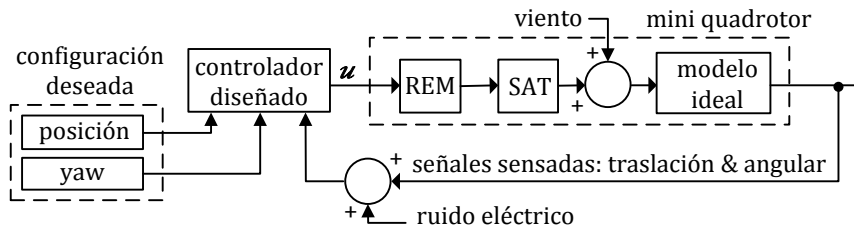


Figura 3.2: Diagrama a bloques del proceso de simulación

La etapa indicada como *modelo ideal* corresponde al modelo matemático ideal del mini quadrotor (2.51)-(2.52) o (2.53)-(2.55), siendo estas ecuaciones diferenciales configuradas con condiciones iniciales nulas. Los parámetros del mini quadrotor se resumen en el Cuadro 3.1 (ver página 41).

El bloque etiquetado como *controlador diseñado*, representa la ley de control que será formulada y presentada explícitamente dentro de subsecuentes secciones tituladas: **Regulación**, y **Seguimiento de trayectoria**. Esta

⁶Componentes medibles, estimables o calculables.

⁷Al menos hasta $\tilde{\gamma}$ (controlador tipo cinemático clase 1), y hasta $\tilde{\gamma}$ (controlador tipo cinemático clase 2).

⁸Con alguna dimensión a ser definida en el proceso de diseño.

última terminología se refiere al tipo de señal definida en la etapa asignada como *configuración deseada*, es decir, señales de valor constante y señales dependientes del tiempo hacen referencia al problema de regulación y seguimiento de trayectoria, respectivamente. Un conjunto de entradas y bloques caracterizan las perturbaciones prácticas usualmente encontradas en todo sistema electromecánico, esto es, *ruido eléctrico* en los sensores, *viento* o perturbaciones aerodinámicas en el medio, *REM*: respuesta electromecánica o tiempo de encendido del motor-propela, y *SAT*: saturación o limitantes energéticas en la señal de alimentación.

Dentro de las pruebas numéricas concernientes a las secciones: **Regulación**, y **Seguimiento de trayectoria**; se definirán diferentes escenarios. En el caso denominado **simulación con perturbaciones prácticas**, se asume que todos los bloques del esquema de la Figura 3.2 se mantendrán íntegros. Mientras que en el caso denominado **simulación ideal**, se omitirá el efecto de las entradas y etapas relativas a las perturbaciones prácticas.

En el siguiente listado de puntos, se proporciona una detallada descripción acerca de los parámetros considerados en las entradas *ruido eléctrico* y *viento*. Así como los parámetros definidos para los bloques *SAT*, *REM* y *configuración deseada*.

- E.1** Se asume que la etapa de sensado de los movimientos traslacionales y angulares incorpora *ruido eléctrico*. La frecuencia de muestreo de la etapa de sensado es de 100 Hz. La amplitud del ruido-posición se encuentra dentro del rango de -0.01 a 0.01 metros. La amplitud del ruido-orientación se encuentra dentro del rango de -0.05 a 0.05 radianes.
- E.2** La amplitud del *ruido eléctrico* en la derivada de posición y orientación se considera 100 veces mayor con respecto a las amplitudes del *ruido eléctrico* en la posición y orientación. Este efecto se atribuye a la derivación temporal del ruido por parte de la etapa práctica en cuestión.
- E.3** Con respecto a la dirección de las fuerzas producidas por las propelas, se incorporan fuerzas de perturbación atribuidas al efecto del viento. Estas últimas fuerzas se configura como señales senoidales con idénticas características paramétricas. La amplitud es igual al 5 por ciento del valor de la fuerza-empuje requerida en cada propela para compensar la gravedad, es decir $\frac{1}{20} \frac{mg}{4}$. El periodo de las señales senoidales se selecciona de 5 segundos.
- E.4** *SAT*: El bloque de saturación limita las fuerzas generadas por las propelas al rango de $0 - 1$ N. Cabe mencionar que esta acción provee únicamente señales positivas hacia las alimentaciones de las propelas a fin de mantener un sentido de rotación unidireccional.
- E.5** *REM*: El bloque es representado en el dominio de Laplace $\frac{a}{s+a}$ y denota el efecto-filtrado-electromecánico implícito en el actuador. Se selecciona $a = 20\pi$ para establecer un tiempo de encendido cercano a $\frac{5}{a}$ segundos.
- E.6** *configuración deseada*: La definición las señales dependerá del objetivo de control propuesto. Para el problema de **Regulación** se define a la posición deseada (x_d, y_d, z_d) y al ángulo yaw deseado (ψ_d) como valores constantes, o bien, definidos por una secuencia de valores constantes aplicados a intervalos de tiempo lo suficientemente grandes tal que cada convergencia al valor preliminar se diga satisfecha.
- E.7** *configuración deseada*: Para el problema de **Seguimiento de trayectoria** se define el ángulo yaw deseado

$$\psi_d(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{30}t\right) + \frac{1}{10} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{4}t\right) \in \mathbb{R}. \quad (3.12)$$

En cuanto a la posición deseada $(x_d(t), y_d(t), z_d(t))$, esta se formulará en acorde a dos distintos escenarios de prueba. El escenario con el denominado **trayecto tipo-caótico** demandará cambios de velocidad, es decir, contempla ciertas características de un vuelo tipo acrobático. Mientras que el escenario con el denominado **trayecto helicoidal** resulta ser más simple, ya que el mini quadrotor es poco afectado o demandado en relación a su velocidad. El objetivo implícito en esta cuestión, es someter a prueba la robustez del sistema ante dos trayectos con características dinámicas poco correlacionadas entre sí. En breve se enlista la definición explícita de cada uno de estos trayectos.

E.7.1 Trayecto tipo-caótico:

$$\boldsymbol{\xi}_d(t) = [x_d(t) \quad y_d(t) \quad z_d(t)]^T = \hat{a}_o [\hat{x}(t) \quad \hat{y}(t) \quad \hat{z}(t) + 1]^T \in \mathbb{R}^3, \quad (3.13)$$

donde $\hat{x}(t)$, $\hat{y}(t)$ y $\hat{z}(t)$ corresponden a los estados de la ecuación de [Rabinovich y Fabrikant \(1979\)](#)

en su forma escalada, es decir,

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{y}} \\ \dot{\hat{z}} \end{bmatrix} = \hat{\tau}_o \begin{bmatrix} \hat{y} [\hat{z} - 1 + \hat{x}^2] + \gamma \hat{x} \\ \hat{x} [3\hat{z} + 1 - \hat{x}^2] + \gamma \hat{y} \\ -2\hat{z} [\alpha + \hat{x}\hat{y}] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.14)$$

Las condiciones iniciales son $\hat{x}(0) = -0.16$, $\hat{y}(0) = 0.1$ y $\hat{z}(0) = 0.1$. Mientras que los parámetros son seleccionados en $\gamma = 0.1$, $\alpha = 0.3$, $\hat{a}_o = 1$ y $\hat{\tau}_o = 0.2$. Cabe mencionar que las subsiguientes derivadas temporales del trayecto $\xi_d(t)$, pueden plantearse haciendo uso del lado-derecho de la expresión (3.14) y una correspondiente sustitución en forma recursiva. En la Figura 3.3 se muestra el correspondiente gráfico del trayecto (3.13) y la evolución de su velocidad con respecto al tiempo.

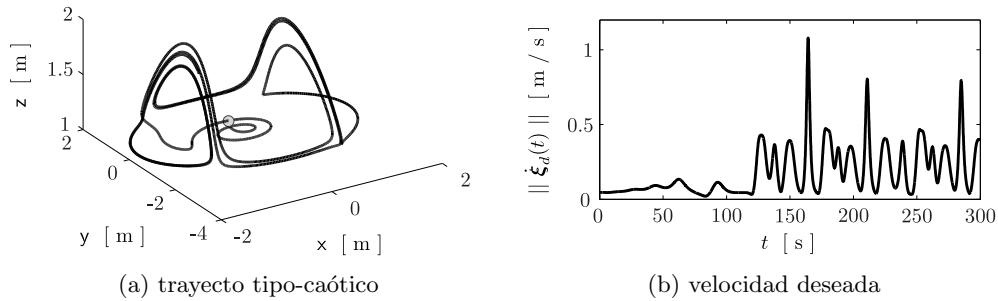


Figura 3.3: La imagen 3.3a muestra el trayecto tipo-caótico o posición deseada para el mini quadrotor sobre el plano cartesiano terrestre. La imagen 3.3b muestra la velocidad descrita por el trayecto tipo-caótico. El punto en gris indica la posición inicial o de arranque. En el rango aproximado de tiempo $0 < t < 122$ s, se observa que la velocidad deseada establece condiciones cercanas a la regulación (razón de cambio con magnitud relativamente pequeña, entre $2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ y $13 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ aproximadamente). Posterior a dicho rango de tiempo, el mini quadrotor se configura a diversas velocidades en el transcurso de la trayectoria (desplazamientos con razones de cambios de $13 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ hasta $1.12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ aproximadamente).

E.7.2 Trayecto helicoidal:

$$\xi_d(t) = [x_d(t) \quad y_d(t) \quad z_d(t)]^T = [1.7 \cos(\frac{1}{12}t) \quad 1.7 \sin(\frac{1}{12}t) \quad \frac{1}{320}t + 1]^T \in \mathbb{R}^3. \quad (3.15)$$

En la Figura 3.4 se muestra el correspondiente gráfico del trayecto (3.15) y la evolución de su velocidad con respecto al tiempo.

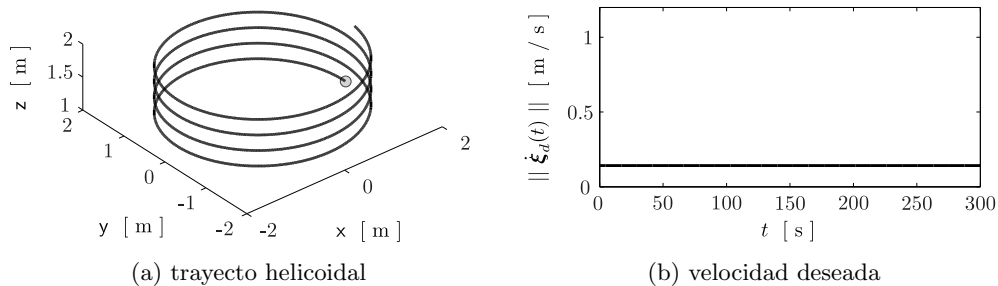


Figura 3.4: La imagen 3.4a muestra el trayecto helicoidal o posición deseada para el mini quadrotor sobre el plano cartesiano terrestre, mientras que la imagen 3.4b se observa que la velocidad del trayecto helicoidal es constante ($14.17 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$) en todo momento. El punto en gris indica la posición inicial o de arranque.

3.5. Regulación

En el presente apartado, se asume que el lector está familiarizado con la notación y el modelo matemático del mini quadrotor previamente presentados a lo largo de la Sección 3.1.1. Así también, se debe tener presente los lineamientos abordados en las Secciones 3.2 y 3.3.

Se propone un esquema por retroalimentación de estados, que tienen como objeto posicionar el mini quadrotor sobre una postura deseada localizada en el espacio coordenado. El controlador resulta de fácil implementación, dado que carece de compensadores para las fuerzas centrípetas y de Coriolis, la fuerza gravitatoria y las fuerzas de fricción aerodinámica. En la Figura 3.5 se observa que el esquema de control está estructurado en dos lazos de retroalimentación. El lazo de velocidad se destina al cálculo de comandos de las fuerzas ligadas a los actuadores del mini quadrotor. El lazo de posición se utiliza para calcular los comandos ligados al vector de velocidad compuesta deseada. Acciones PI son empleadas para modificar la respuesta la altura y orientación del mini quadrotor. Mientras que acciones PID se utilizan para alterar la respuesta del mini quadrotor en relación al plano x-y. El controlador tipo-cinemático calcula comandos de velocidad a partir del error en la altura y orientación. La etapa etiquetada como cálculo de trayectorias se compone de funciones dependientes del error de posición horizontal (plano x-y) y del ángulo yaw deseado, es decir, genera los comandos de la orientación deseada teniendo en consideración la cinemática del sistema. La etapa previa a las entradas del mini quadrotor, configura las señales de control en términos de las fuerzas de empuje.

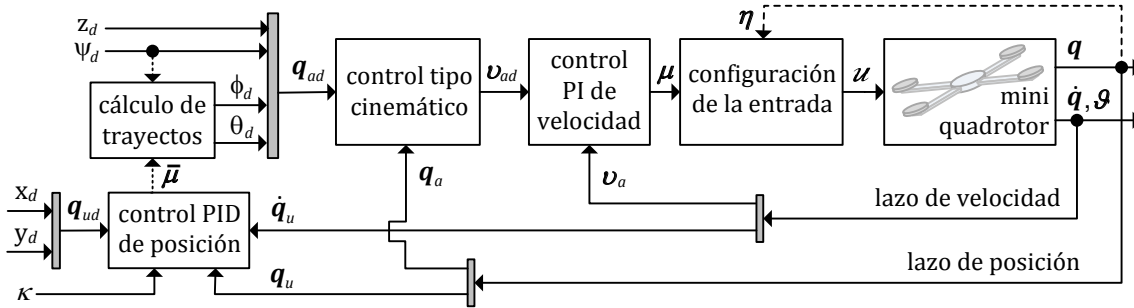


Figura 3.5: Diagrama a bloques del regulador

En correspondencia al diagrama a bloques, a continuación se enlista el conjunto de condiciones y controladores que satisfacen el límite (3.4), esto es,

- Los valores deseados x_d , y_d , z_d y ψ_d se consideran como constantes.
- El vector de entrada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ se estructurado en (3.5) se compone de un controlador PI de velocidad

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= K_{pa} \tilde{\mathbf{v}}_a + K_{ia} \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_a, \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}_a &= \tilde{\mathbf{v}}_a, \end{aligned}$$

siendo $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_a \in \mathbb{R}^4$ la representación de la acción integral. Las matrices diagonales K_{pa} y $K_{ia} > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ contienen las ganancias proporcionales e integrales, respectivamente. El error de velocidad compuesta se define en $\tilde{\mathbf{v}}_a = \mathbf{v}_{ad} - \mathbf{v}_a$, siendo

$$\mathbf{v}_{ad} = [\dot{z}_d \quad \boldsymbol{\omega}_d^T]^T := J_a(\boldsymbol{\eta})^{-1} K_J \tilde{\mathbf{q}}_a \in \mathbb{R}^4$$

el denominado controlador tipo cinemático clase 1 ($\alpha = 0$), el cual fue previamente formulado en (3.10). Este vector compuesto, está caracterizado por un tipo-comando de velocidad vertical deseada $\dot{z}_d \in \mathbb{R}$ y la velocidad angular deseada $\boldsymbol{\omega}_d \in \mathbb{R}^3$. Diversos cálculos concernientes a la derivada temporal del controlador tipo cinemático, se resumen en el Apéndice A.3.

R.9 La señal de control $\boldsymbol{\mu}(\tilde{\mathbf{v}}_a, \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_a)$ debe satisfacer $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{0}, \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_a(\infty)) = \mathbf{g}_a$. La caracterización de tal efecto, se define mediante el cambio de variable

$$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_a = \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_a^* + K_{ia}^{-1} \mathbf{g}_a \in \mathbb{R}^4 ,$$

donde el vector $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_a^*$ representa la acción integral virtual. La cual tenderá a cero conforme el tiempo tiende a infinito.

- A partir del planteamiento en (3.8) y (3.9), se propone la orientación deseada

$$\boldsymbol{\eta}_d = \begin{bmatrix} \phi_d \\ \theta_d \\ \psi_d \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \arctan(\cos(\theta_d) \bar{\mu}_3^{-1} [\bar{\mu}_1 \sin(\psi_d) - \bar{\mu}_2 \cos(\psi_d)]) \\ \arctan(\bar{\mu}_3^{-1} [\bar{\mu}_1 \cos(\psi_d) + \bar{\mu}_2 \sin(\psi_d)]) \\ \psi_d \end{bmatrix} ,$$

donde se propone que $\Gamma = \text{diag}\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\} := \kappa^{-1} \mu_1 I_3$, con $\kappa > 0 \in \mathbb{R}$. Mientras que el vector $\bar{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbb{R}^3$ representa una señal de control tipo PID, es decir,

$$\bar{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix} K_{pu} \tilde{\mathbf{q}}_u + K_{iu} \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_u + K_{du} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u \\ \kappa \end{bmatrix} ,$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}_u = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u .$$

Los primeros dos elementos del vector $\bar{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbb{R}^3$ representan el conjunto de acciones PID destinadas a controlar el mini quadrotor en lo que respecta a su posición horizontal (plano x-y). Las ganancias proporcionales, integrales y derivativas están definidas por las matrices diagonales K_{pu} , K_{iu} y $K_{du} > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, respectivamente. En tanto que el vector $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_u \in \mathbb{R}^2$ representa la acción integral.

Análisis de estabilidad

En primer instancia, los vectores y matrices pertenecientes a los estados denominados actuados (subíndice-a) se redefinen en notación directamente ligada al movimiento angular y al movimiento vertical del mini quadrotor, tal y como se resume en la Subsección 3.1.1. En cuanto a las ganancias de control, se considera la partición $K_{pa} = \text{diag}\{k_{pz}, K_{\bar{p}}\}$, $K_{ia} = \text{diag}\{k_{iz}, K_{\bar{i}}\}$ y $K_{ja} = \text{diag}\{k_{jz}, K_{\bar{w}}\}$, donde las matrices $K_{\bar{p}}$, $K_{\bar{i}}$ y $K_{\bar{w}} \in \mathbb{R}^3$ son referidas al movimiento angular, mientras que k_{pz} , k_{iz} y $k_{jz} \in \mathbb{R}$ son relativas al movimiento vertical. Siguiendo el mismo lineamiento, la notación de las acciones integrales se especifican en $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_a = [\tilde{\zeta}_z \quad \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T]^T$ y $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_a^* = [\tilde{\zeta}_z^* \quad \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^{*T}]^T$. El sistema se configura en tres escalas de tiempo y se analiza mediante la teoría de perturbaciones singulares, donde los estados pertenecientes a cada escala de tiempo se enlistan a continuación.

- Los estados $[\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_u^T \quad \tilde{\mathbf{q}}_u^T \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u^T \quad \tilde{\mathbf{z}} \quad \tilde{\zeta}_z^* \quad \dot{\tilde{\mathbf{z}}}]^T \in \mathbb{R}^9$ representan aquellos con dinámica lenta. Tales estados se relacionan al error de posición del mini quadrotor.
- Los estados con dinámica intermedia corresponden al error de orientación y a la integral del error de la velocidad angular, es decir $[\tilde{\boldsymbol{\eta}}^T \quad \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^{*T}]^T \in \mathbb{R}^6$.
- Los términos en el error de la velocidad angular $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \in \mathbb{R}^3$ se refieren como los estados con dinámica rápida.

Para obtener el esquema de análisis, se sustituye el conjunto de controladores sobre el bosquejo del sistema de lazo-cerrado descrito en la Sección 3.3 (ver observación R.7 con $\alpha = 0$), además de parametrizar convenientemente las ganancias de control

$$\{K_{\bar{p}}, K_{\bar{i}}\} = \epsilon_1^{-1} \{\bar{K}_{\bar{p}}, \bar{K}_{\bar{i}}\} ,$$

con $\epsilon_1 > 0$. Resultando la forma singularmente perturbada del sistema de lazo-cerrado, es decir,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\zeta}_u \\ \tilde{\mathbf{q}}_u \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u \\ \tilde{\mathbf{z}} \\ \tilde{\zeta}_z^* \\ \dot{\tilde{\mathbf{z}}} \\ \tilde{\eta} \\ \tilde{\zeta}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_u \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u \\ -M_u^{-1} \left[F_u \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u + \mu_1 R_{33}(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}})^{-1} \left[R_{13}(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \quad R_{23}(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \right]^T \right] \\ -k_{jz} \tilde{\mathbf{z}} + \dot{\tilde{\mathbf{z}}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{z}}} \\ D_{A_{11}} \tilde{\mathbf{z}} + D_{B_{11}} \dot{\tilde{\mathbf{z}}} - m^{-1} \left[k_{pz} \dot{\tilde{\mathbf{z}}} + k_{iz} \tilde{\zeta}_z^* \right] \\ \frac{d}{dt} \left[\boldsymbol{\eta}_d(\bar{\boldsymbol{\mu}}(\tilde{\zeta}_u, \tilde{\mathbf{q}}_u, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u)) \right] - K_w \tilde{\boldsymbol{\eta}} + W(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{15}, \quad (3.16a)$$

$$\epsilon_1 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \left[D_a \tilde{\boldsymbol{\eta}} + D_b \tilde{\boldsymbol{\omega}} + D_c \frac{d}{dt} \left[\boldsymbol{\eta}_d(\bar{\boldsymbol{\mu}}(\tilde{\zeta}_u, \tilde{\mathbf{q}}_u, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u)) \right] \right] - M_o^{-1} \left[\bar{K}_p \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \bar{K}_I \tilde{\zeta}^* \right] \\ \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \epsilon_1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.16b)$$

siendo $\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \dot{\mathbf{z}}_d - \mathbf{z}$. Cabe mencionar que los términos D_* están en función de los estados denominados actuados y de la ganancia cinemática K_j . La estabilidad del sistema singularmente perturbado 3.16 se analiza mediante la teoría de perturbaciones singulares, la cual fue descrita en detalle a lo largo de la Sección 3.1.2. En particular, se dice que los estados en \mathbf{z} describen una dinámica rápida con respecto a los estados en \mathbf{x} .

Proposición 1. *Existe un valor ϵ_1^* tal que para toda región $0 < \epsilon_1 < \epsilon_1^*$, se tiene que el origen del sistema en espacio de estados (3.16) es localmente exponencialmente estable.*

Prueba. *Considerando el sistema singularmente perturbado (3.16), se procedió a comprobar los cinco pasos estipulados en el Teorema 1, esto es,*

- V.1** *El único punto de equilibrio se encuentra en el origen $[\mathbf{x}^T \quad \mathbf{z}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{18}$. Durante la solución del presente paso, se observó que $\frac{d}{dt} [\boldsymbol{\eta}_d(\bar{\boldsymbol{\mu}}(\tilde{\zeta}_u(0), \mathbf{0}, \mathbf{0}))] = \mathbf{0}$. En caso que la condición inicial de la acción integral sea considerada nula, se observa que la igualdad $R_{33}(\boldsymbol{\eta}_d, \mathbf{0})^{-1} [R_{13}(\boldsymbol{\eta}_d, \mathbf{0}) \quad R_{23}(\boldsymbol{\eta}_d, \mathbf{0})]^T = \mathbf{0}$ se satisface.*
- V.2** *Las raíces aisladas o solución en estado quasi-estacionario resulta en $\mathbf{z} = \mathbf{h}(t, \mathbf{x}) := -\bar{K}_p^{-1} \bar{K}_I \tilde{\zeta}^* \in \mathbb{R}^3$, la cual satisface la condición $\mathbf{h}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$.*
- V.3** *Las derivadas parciales del sistema singularmente perturbado y de las raíces aisladas son acotables si se selecciona un conjunto compacto relativo a los estados del sistema.*
- V.4** *En la Proposición 2 se presenta la prueba de estabilidad exponencial del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{h}(t, \mathbf{x}), 0)$.*
- V.5** *El origen del sistema de capa-frontera $\frac{d}{d\tau} [\mathbf{y}(\tau)] = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}(\tau) + \mathbf{h}(t, \mathbf{x}), 0) := -M_o^{-1} \bar{K}_p \mathbf{y}(\tau) \in \mathbb{R}^3$ con $\tau = \epsilon_1^{-1} t$, es exponencialmente estable. Por extensión, existen suficientes condiciones para decir que satisface el*

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\tau) = \mathbf{h}(t, \mathbf{x})$$

con tasa de convergencia exponencial.

Al demostrar los cinco puntos del Teorema 1, se dice que el origen de (3.16) es exponencialmente estable. $\Delta\Delta\Delta$.

Proposición 2. *Parametrizando las ganancias de control*

$$\{K_w, \bar{K}_I\} = \epsilon_2^{-1} \left\{ \hat{K}_w, \hat{K}_I \right\},$$

siendo $\epsilon_2 > 0$. El sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{h}(t, \mathbf{x}), 0)$ se lleva a su forma singularmente perturbada

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \tilde{\zeta}_u \\ \tilde{\mathbf{q}}_u \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u \\ \tilde{\mathbf{z}} \\ \tilde{\zeta}_z^* \\ \dot{\tilde{\mathbf{z}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \epsilon_2) \\ \tilde{\mathbf{q}}_u \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u \\ -M_u^{-1} \left[F_u \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u + \mu_1 R_{33}(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}})^{-1} \begin{bmatrix} R_{13}(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) & R_{23}(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \end{bmatrix}^T \right] \\ -k_{jz} \tilde{\mathbf{z}} + \dot{\tilde{\mathbf{z}}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{z}}} \\ D_{A_{11}} \tilde{\mathbf{z}} + D_{B_{11}} \dot{\tilde{\mathbf{z}}} - \mathbf{m}^{-1} [k_{pz} \dot{\tilde{\mathbf{z}}} + k_{iz} \tilde{\zeta}_z^*] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^9, \quad (3.17a)$$

$$\epsilon_2 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\eta}} \\ \tilde{\zeta}^* \\ \bar{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_2 \frac{d}{dt} [\boldsymbol{\eta}_d(\bar{\boldsymbol{\mu}}(\tilde{\zeta}_u, \tilde{\mathbf{q}}_u, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u))] - \hat{K}_W \tilde{\boldsymbol{\eta}} - W(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \bar{K}_P^{-1} \hat{K}_I \tilde{\zeta}^* \\ -\bar{K}_P^{-1} \hat{K}_I \tilde{\zeta}^* \\ \bar{\mathbf{g}}(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \epsilon_2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6. \quad (3.17b)$$

Entonces, existe un valor ϵ_2^* tal que para toda región $0 < \epsilon_2 < \epsilon_2^*$, se establece que el origen del sistema en espacio de estados (3.17) es localmente exponencialmente estable.

Prueba. Considerando el sistema singularmente perturbado (3.17), se procede a comprobar los cinco pasos estipulados en el Teorema 1, esto es,

V.6 Por extensión del paso V.1, se concluye que el único punto de equilibrio se encuentra en el origen $[\bar{\mathbf{x}}^T \ \bar{\mathbf{z}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{15}$.

V.7 Las raíces aisladas o solución en estado quasi-estacionario resulta en $\bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{h}}(t, \bar{\mathbf{x}}) := \mathbf{0} \in \mathbb{R}^6$.

V.8 Las derivadas parciales del sistema singularmente perturbado y de las raíces aisladas son acotables si se selecciona un conjunto compacto relativo a los estados.

V.9 El sistema de orden reducido $\bar{\mathbf{f}}(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{h}}(t, \bar{\mathbf{x}}), 0)$ se escribe en la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_A \bar{\mathbf{x}}_1 + M_B(\bar{\mathbf{x}}_1) \bar{\mathbf{x}}_2 \\ M_C \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix},$$

donde la equivalencia (3.8) es aplicada y $\mu_1 = k_{pz} \dot{\tilde{\mathbf{z}}} + k_{iz} \tilde{\zeta}_z^* + \mathbf{g}_{a_1}$. En cuanto a los vectores, se tiene que $\bar{\mathbf{x}}_1 = [\tilde{\zeta}_u^T \ \tilde{\mathbf{q}}_u^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u^T]^T \in \mathbb{R}^6$ y $\bar{\mathbf{x}}_2 = [\tilde{\mathbf{z}} \ \tilde{\zeta}_z^* \ \dot{\tilde{\mathbf{z}}}]^T \in \mathbb{R}^3$. Mientras que las matrices se definen en

$$M_A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_2 \\ -\kappa^{-1} \mathbf{g}_{a_1} M_u^{-1} K_{iu} & -\kappa^{-1} \mathbf{g}_{a_1} M_u^{-1} K_{pu} & -M_u^{-1} [\kappa^{-1} \mathbf{g}_{a_1} K_{du} + F_u] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6},$$

$$M_B(\bar{\mathbf{x}}_1) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \kappa^{-1} [M_u^{-1} [K_{pu} \tilde{\mathbf{q}}_u + K_{iu} \tilde{\zeta}_u + K_{du} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u]] [0 \ k_{iz} \ k_{pz}] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 3},$$

$$M_C = \begin{bmatrix} -k_{jz} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ D_{A_{11}} & -\mathbf{m}^{-1} k_{iz} & D_{B_{11}} - \mathbf{m}^{-1} k_{pz} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Para verificar la estabilidad del sistema, se propone la función de Lyapunov

$$\bar{V}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}_1^T \bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\alpha} \bar{\mathbf{x}}_2^T \bar{\mathbf{x}}_2 \leq \bar{\kappa}_1 \|\bar{\mathbf{x}}\|^2,$$

de acuerdo al método utilizado por Kelly y Moreno (2005), donde $\bar{\kappa}_1 = \max\{1, \bar{\alpha}\}$ y $\bar{\alpha} > 0 \in \mathbb{R}$. Al derivar la anterior función con respecto al tiempo y evaluar las correspondientes trayectorias del sistema, se obtiene

$$\frac{d}{dt} [\bar{V}(\bar{\mathbf{x}})] = \bar{\mathbf{x}}_1^T \underbrace{[M_A + M_A^T]}_{-Q_A} \bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_1^T M_B \bar{\mathbf{x}}_2 + \bar{\mathbf{x}}_2^T M_B^T \bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\alpha} \bar{\mathbf{x}}_2^T \underbrace{[M_C + M_C^T]}_{-Q_C} \bar{\mathbf{x}}_2 \leq -\bar{\kappa}_2 \|\bar{\mathbf{x}}\|^2.$$

Al seleccionar $\bar{\alpha} = \lambda_m\{Q_C\}^{-1} \lambda_m\{Q_A\} > 0$ y definir el límite superior

$$k_q = \kappa^{-1} m^{-1} [k_{pz}^2 + k_{iz}^2]^{1/2} \lambda_M\{K_{pu}^2 + K_{iu}^2 + K_{du}^2\}^{1/2} \bar{r}$$

de la norma de la matriz $M_B(\bar{\mathbf{x}}_1)$ considerando el dominio $\bar{\mathcal{D}} = \{\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^9 : \|\bar{\mathbf{x}}_1\| \leq \bar{r}\}$. Se establece que $\bar{\kappa}_2 = \lambda_m\{Q_A\} - k_q > 0 \in \mathbb{R}$ es correspondiente con la condición formulada por el Teorema de Sylvester, la cual es satisfecha mediante una adecuada selección de las ganancias de control. En consecuencia, se tiene que las soluciones $\bar{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^9$ convergen a cero con tasa exponencial conforme el tiempo crece a infinito, puesto que la desigualdad

$$\frac{d}{dt} [\bar{V}(\bar{\mathbf{x}})] \leq -\frac{\bar{\kappa}_2}{\bar{\kappa}_1} \bar{V}(\bar{\mathbf{x}})$$

es satisfecha para toda condición inicial $\bar{\mathbf{x}}(0)$ perteneciente a un conjunto compacto \mathcal{B}_x .

V.10 El sistema de capa-frontera $\frac{d}{d\sigma} [\bar{\mathbf{y}}(\sigma)] = \bar{\mathbf{g}}(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}(\sigma) + \bar{\mathbf{h}}(t, \bar{\mathbf{x}}), 0) \in \mathbb{R}^6$ se define explícitamente en

$$\frac{d}{d\sigma} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}}_1 \\ \bar{\mathbf{y}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{K}_w \bar{\mathbf{y}}_1 - W(\bar{\mathbf{x}}^\dagger, \bar{\mathbf{y}}_1) \bar{K}_p^{-1} \hat{K}_f \bar{\mathbf{y}}_2 \\ -\bar{K}_p^{-1} \hat{K}_f \bar{\mathbf{y}}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6,$$

siendo $\sigma = \epsilon_2^{-1} t$ y $\bar{\mathbf{h}}(t, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$. El superíndice-† se utiliza para indicar que los estados en cuestión son considerados como constantes. Para verificar la estabilidad del sistema, se propone la función de Lyapunov

$$\hat{V}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{y}}_1^T \bar{\mathbf{y}}_1 + \hat{\alpha} \bar{\mathbf{y}}_2^T \bar{\mathbf{y}}_2 \leq \hat{\kappa}_1 \|\bar{\mathbf{y}}\|^2,$$

con $\hat{\kappa}_1 = \max\{1, \hat{\alpha}\}$ y $\hat{\alpha} > 0 \in \mathbb{R}$. Al derivar la función de Lyapunov con respecto a la variable σ y evaluar las correspondientes trayectorias del sistema, se obtiene

$$\frac{d}{d\sigma} [\hat{V}(\bar{\mathbf{y}})] = -2\bar{\mathbf{y}}_1^T \hat{K}_w \bar{\mathbf{y}}_1 - \bar{\mathbf{y}}_1^T W(\bar{\mathbf{y}}_1) M_k \bar{\mathbf{y}}_2 - \bar{\mathbf{y}}_2^T M_k W(\bar{\mathbf{y}}_1)^T \bar{\mathbf{y}}_1 - 2\hat{\alpha} \bar{\mathbf{y}}_2^T M_k \bar{\mathbf{y}}_2 \leq -\hat{\kappa}_2 \|\bar{\mathbf{y}}\|^2,$$

siendo $M_k = \bar{K}_p^{-1} \hat{K}_f \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ una matriz auxiliar, mientras que $\hat{\kappa}_2 > 0$ es una constante arbitraria que está asociada al límite superior de la función. Considerando el dominio $\hat{\mathcal{D}} = \{\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^6 : |\bar{\mathbf{y}}_{1,2}| \leq \hat{r} < \frac{\pi}{2} - |\theta_d^\dagger|\}$

con $|\theta_d^\dagger| < \frac{\pi}{2}$, se establece que la norma de la matriz $W(\bar{\mathbf{y}}_1)$ es acotada superiormente por la constante $k_w = |\cos(\theta_d^\dagger - \hat{r})|^{-1} [1 + |\sin(\theta_d^\dagger - \hat{r})|]^{1/2}$.

R.10 De acuerdo al dominio $\bar{\mathcal{D}}$ en **V.9** y a la función η_d previamente presentada en el apartado de diseño, se dice que $|\theta_d^\dagger| = |\arctan(\kappa^{-1} [\bar{\mu}_1^\dagger \cos(\psi_d) + \bar{\mu}_2^\dagger \sin(\psi_d)])|$ es menor a $\frac{\pi}{2}$ puesto que las señales en $\bar{\mu}^\dagger$ fueron contempladas como finitas. Mediante una adecuada selección de las ganancias de control en $\bar{\mu}^\dagger$, es posible formular condiciones suficientes de existencia en lo referido al dominio $\hat{\mathcal{D}}$.

Al proponer $\hat{\alpha} = \lambda_m\{\bar{K}_p^{-1} \hat{K}_f\}^{-1} \lambda_m\{\hat{K}_w\} > 0$ y aplicando el Teorema de Sylvester, se encuentra que la condición en

$$\hat{\kappa}_2 = 2\lambda_m\{\hat{K}_w\} - \lambda_m\{\bar{K}_p\}^{-1} \lambda_M\{\hat{K}_f\} k_w > 0$$

da razón suficiente para asumir que el sistema es estable para toda condición inicial $\bar{\mathbf{y}}(0)$ perteneciente a un conjunto compacto \mathcal{B}_y . Más aún, conforme la variable σ crece a infinito se tiene que las soluciones $\bar{\mathbf{y}}(\sigma) \in \mathbb{R}^6$ convergen a cero con tasa exponencial ya que la desigualdad

$$\frac{d}{d\sigma} [\hat{V}(\bar{\mathbf{y}})] \leq -\frac{\hat{\kappa}_2}{\hat{\kappa}_1} \hat{V}(\bar{\mathbf{y}})$$

se satisface. En consecuencia, existen condiciones suficientes para decir que el

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \bar{\eta}(\sigma)^T & \zeta^*(\sigma)^T \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{h}}(t, \bar{\mathbf{x}})^T := \mathbf{0}$$

se cumple con tasa de convergencia exponencial.

Al demostrar los cinco puntos del Teorema 1, se dice que el origen de (3.17) es exponencialmente estable. $\Delta\Delta\Delta$.

En resumen, para $(t, [\tilde{\zeta}_u^T \ \tilde{q}_u^T \ \dot{q}_u^T \ \tilde{z} \ \tilde{\zeta}_z^* \ \dot{z}]^T, [\tilde{\eta}^T \ \tilde{\zeta}^{*T}]^T, \tilde{\omega}, \epsilon_1, \epsilon_2) \in [0, t^*] \times \mathbb{R}^9 \times \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^3 \times [0, \epsilon_1^*] \times [0, \epsilon_2^*]$, siendo $\epsilon_2^* > \epsilon_1^* > 0$. Se concluye que el origen o punto de equilibrio del sistema de lazo-cerrado es uniforme y exponencialmente estable en forma local, es decir, se satisface el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \bar{x}(t)^T & \bar{z}(t)^T & z(t)^T \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

a tasa de convergencia exponencial conforme el tiempo se incrementa. En particular, se tiene que

- Los estados $\bar{x} = [\tilde{\zeta}_u^T \ \tilde{q}_u^T \ \dot{q}_u^T \ \tilde{z} \ \tilde{\zeta}_z^* \ \dot{z}]^T \in \mathbb{R}^9$ se refieren a la dinámica lenta. Todos estos estados están relacionados al error de posición del mini quadrotor.
- Los estados $\bar{z} = [\tilde{\eta}^T \ \tilde{\zeta}^{*T}]^T \in \mathbb{R}^6$ corresponden a la dinámica intermedia. Estos estados representan el error de orientación y la acción integral relativa al error de la velocidad angular.
- El error de la velocidad angular $z = \tilde{\omega} \in \mathbb{R}^3$ es referido como los estados con dinámica rápida.

Pruebas numéricas

El grupo de figuras pertenecientes a este apartado, se obtuvieron al haber desarrollado el esquema de simulación descrito en la Sección 3.4. En todas las pruebas se considero la presencia de perturbaciones prácticas. La descripción detallada de la etapa de control se presenta en la Figura 3.5. Los valores numéricos de los parámetros del mini quadrotor y las ganancias del controlador se resumen en los Cuadros 3.1 y 3.2, respectivamente.

Etapa	Valor
PI-Velocidad	$K_{pa} = \text{diag} \{5, 3\epsilon_1^{-1} I_3\}$, $K_{ia} = \text{diag} \{0.125, 1.5\epsilon_1^{-1}\epsilon_2^{-1} I_3\}$
Cinemática	$K_J = \text{diag} \{10, \epsilon_2^{-1} \text{diag} \{5, 5, 2\}\}$
PID-Posición	$K_{pu} = 2I_2$, $K_{iu} = 0.01I_2$, $K_{du} = 2I_2$

Cuadro 3.2: Ganancias del primer controlador

donde ϵ_1 y ϵ_2 son los parámetros de perturbación asignados a la escala rápida e intermedia, respectivamente.

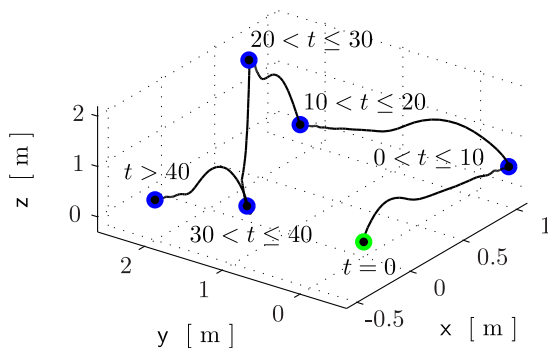


Figura 3.6: Los parámetros de prueba son $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 1$ y $\kappa = 5$. La posición en la que arranca el mini quadrotor se denota por un punto en color verde. Una secuencia de posiciones deseadas se indica por puntos en color azul y se aplica de acuerdo a los intervalos de tiempos mostrados en la imagen. A pesar de haber asumido perturbaciones prácticas en el esquema de simulación, la respuesta del sistema describe un buen desempeño ante el problema de regular o posicionar el mini quadrotor sobre alguna coordenada-constante perteneciente al plano cartesiano.

Los valores numéricos de las coordenadas de cada punto deseado en el plano cartesiano, será definido en la Figura 3.7. Adicionalmente, se muestra el conjunto de valores correspondientes al ángulo yaw deseado. En términos generales se dice que los valores en ξ_d y ψ_d conforman la denominada configuración deseada en el esquema de simulación, siendo este último bosquejado en la Figura 3.2.

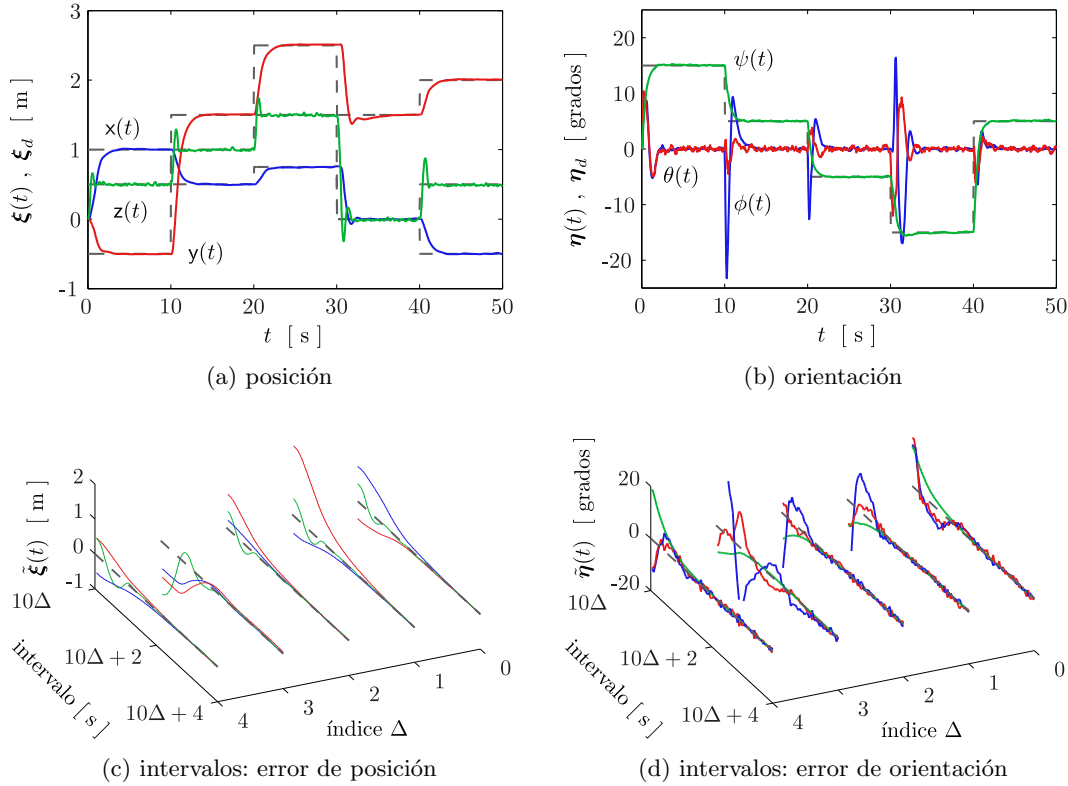


Figura 3.7: En las imágenes superiores se muestran líneas segmentadas para definir la secuencia o configuración deseada para el mini quadrotor, donde la posición deseada ξ_d y el ángulo yaw deseado ψ_d están conformados por un conjunto de valores que son múltiplos de 0.5 y múltiplos de 5, respectivamente. En cuanto a los ángulos deseados $\phi_d(\bar{\mu})$ y $\theta_d(\bar{\mu})$ solo se hace notar que son funciones dependientes de los estados del sistema, para mayor detalle consultar el vector η_d definido en el apartado de diseño. En cada intervalo de tiempo se observa que los errores de posición $\tilde{\xi}(t) = [\tilde{x}(t) \ \tilde{y}(t) \ \tilde{z}(t)]^T \in \mathbb{R}^3$ y orientación $\tilde{\eta}(t) = [\tilde{\phi}(t) \ \tilde{\theta}(t) \ \tilde{\psi}(t)]^T \in \mathbb{R}^3$ convergen a cero conforme el tiempo crece a infinito, tal y como se muestra en el par de imágenes inferiores. Según sea el caso, se tiene que las señales en color azul se relacionan al desplazamiento-x y al ángulo roll. Las señales en color rojo están relacionadas al desplazamiento-y y al ángulo pitch. Mientras que el color verde se utiliza para hacer referencia al desplazamiento-z y al ángulo yaw.

En los resultados mostrados en las Figuras 3.6 y 3.7 se demuestra que es posible posicionar el mini quadrotor en un punto del sistema coordenado a pesar de existir perturbaciones eléctricas y del medio, solo haciendo uso de esquemas simples de control autónomo que no requieren información de diversos términos (gravedad, fuerzas centrípetas y de Coriolis, Fricción) que usualmente son compensados por los diseñadores.

Para verificar los argumentos establecidos durante el análisis de estabilidad, se omiten las perturbaciones prácticas en el esquema de simulación y se prueba el sistema con el siguiente conjunto de valores numéricos

$$\epsilon_1 = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, \quad y \quad \epsilon_2 = 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6$$

en los parámetros de perturbación. Cabe señalar que en los resultados mostrados en las Figuras 3.6 y 3.7, se seleccionaron valores pequeños en ganancias integrales (posición) para introducir amortiguamiento en la respuesta de la posición horizontal (x,y). Sin embargo, esta misma acción disminuye la tasa de convergencia del error de posición y aumenta también su amplitud. Teniendo en cuenta tal consideración, en las pruebas de existencia de las escalas de tiempo se contemplará que las ganancias integrales $K_{iu} = I_2 \in \mathbb{R}^2$ y $K_{ia} = \text{diag} \{1.25, 1.5\epsilon_1^{-1}\epsilon_2^{-1}I_3\} \in \mathbb{R}^4$. Los resultados en la Figura 3.8 resumen el comportamiento de las escalas de tiempo ante variaciones de los parámetros de perturbación ϵ_1 y ϵ_2 .

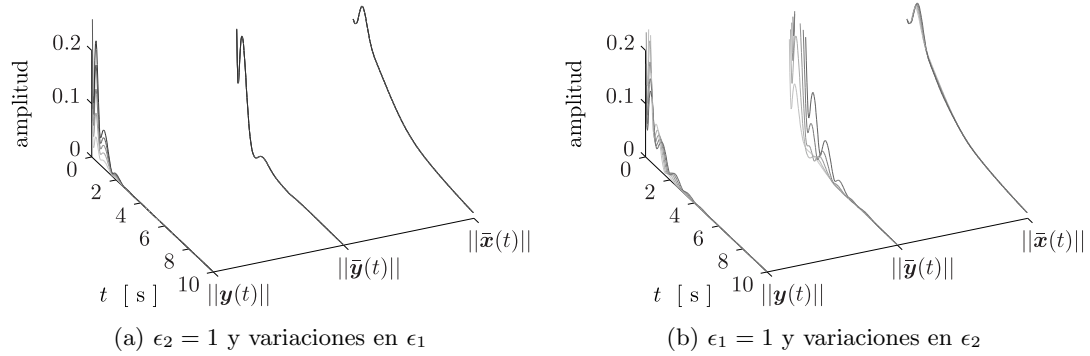


Figura 3.8: Un incremento en el tono del color se refiere a un incremento del correspondiente parámetro de perturbación. Los gráficos solo se muestran para el primer intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 10$, aunque este mismo enfoque es trasladable para el resto de los intervalos de tiempo. A partir de lo establecido en el apartado de análisis de estabilidad, se dice que los estados en $\bar{\mathbf{x}}(t) = [\zeta_u^T \ \tilde{\mathbf{q}}_u^T \ \dot{\mathbf{q}}_u^T \ \tilde{\mathbf{z}} \ \zeta_z^* \ \dot{\mathbf{z}}]^T \in \mathbb{R}^9$, $\bar{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{h}}(t, \bar{\mathbf{x}}) := [\tilde{\boldsymbol{\eta}}^T \ \zeta^{*T}]^T \in \mathbb{R}^6$ y $\mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{h}(t, \mathbf{x}) := \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \bar{K}_p^{-1} \bar{K}_I \zeta^* \in \mathbb{R}^3$ configuran la denominada escala lenta, escala intermedia y escala rápida, respectivamente. Los resultados demuestran la existencia de tres escalas de tiempo, dado que una variación en los parámetros de perturbación ϵ_1 y ϵ_2 conlleva predominantemente a un cambio de la convergencia de los estados pertenecientes a la escala rápida e intermedia, respectivamente.

3.6. Seguimiento de trayectoria

Partiendo de los lineamientos presentados en las Secciones 3.2 y 3.3, además del modelo matemático tratado en la Sección 3.1.1. En los subsiguientes apartados se sintetizará un conjunto de esquemas por retroalimentación de estados, que tienen como objeto controlar el movimiento del mini quadrotor ante el seguimiento de un trayecto programado.

3.6.1. Control mediante cinemática, PI de velocidad y tipo-PD de posición

En la Figura 3.9 se muestra un diagrama a bloques que sintetiza las etapas de control del mini quadrotor. El lazo interno se compone de un controlador PI de velocidad y una etapa de configuración de fuerzas, que calcula los comandos de fuerzas ligadas a los actuadores del mini quadrotor. Así también, se emplea un controlador tipo-cinemático para calcular los comandos de velocidad angular deseada. El lazo externo se destina a controlar la dinámica traslacional y angular del mini quadrotor. Este lazo está conformado por una etapa de filtrado que estima señales relativas a acciones PD de posición. También contempla una etapa de precompensado que utiliza información de las señales filtradas, a fin de calcular la orientación deseada y sus respectivas trayectorias.

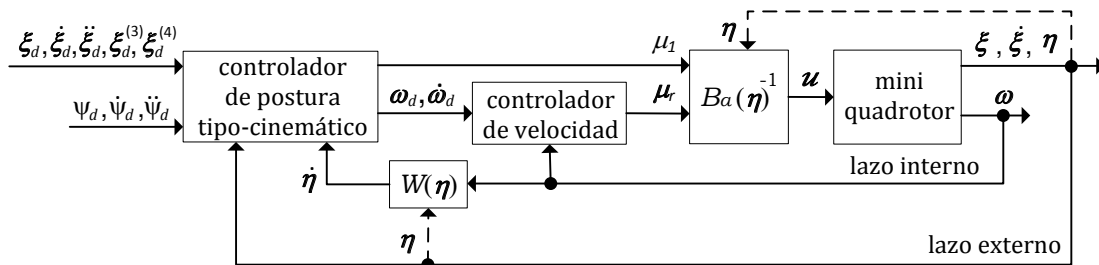


Figura 3.9: Diagrama a bloques del controlador de movimiento

A continuación se resume un listado que muestra las condiciones y el conjunto de controladores que satisfacen el límite establecido en (3.4), lo cual es correspondiente a la descripción explícita de los elementos presentados

en el diagrama a bloques.

- Las trayectorias deseadas son descritas mediante las funciones temporales en $\psi_d(t) \in \mathbb{R}$ y $\xi_d(t) = [x_d(t) \ y_d(t) \ z_d(t)]^T \in \mathbb{R}^3$.
- Se omiten las fuerzas de fricción aerodinámica en el modelo matemático del sistema.
- El vector de entrada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ correspondiente a los sistemas de propulsión de mini quadrotor, se estructura de acuerdo a la forma presentada en (3.5).
- Para controlar la velocidad angular, se utiliza un controlador PI de velocidad que está basado en el control PD+ descrito por Kelly et. al. (2005), es decir,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_r &= M_o \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathcal{S}(\boldsymbol{\omega}) M_o \boldsymbol{\omega}_d + K_p \tilde{\boldsymbol{\omega}} + K_I \tilde{\boldsymbol{\zeta}} , \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}} &= \tilde{\boldsymbol{\omega}} , \end{aligned}$$

donde el vector $\tilde{\boldsymbol{\zeta}} \in \mathbb{R}^3$ se refiere a la acción integral. Las matrices diagonales K_p y $K_I > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ representan las ganancias proporcionales e integrales, respectivamente. La velocidad angular deseada $\boldsymbol{\omega}_d \in \mathbb{R}^3$ se muestra en detalle en el siguiente apartado.

- Para la dinámica angular, se propone el controlador tipo cinemático clase 2 ($\alpha = 1$) descrito en (3.10), es decir

$$\boldsymbol{\omega}_d = W(\boldsymbol{\eta})^{-1} [\dot{\boldsymbol{\eta}}_d + K_w \tilde{\boldsymbol{\eta}}] .$$

Considerando que el controlador PI de velocidad $\boldsymbol{\mu}_r$ requiere información de la $\dot{\boldsymbol{\omega}}_d$, en el Apéndice A.3 se resume el cálculo explícito de la primera y segunda derivada temporal de la orientación deseada.

- La dinámica traslacional se controla a partir de lo establecido en (3.8) y (3.9), definiéndose entonces la orientación deseada

$$\boldsymbol{\eta}_d = \begin{bmatrix} \phi_d \\ \theta_d \\ \psi_d \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \arctan(\cos(\theta_d) \bar{\mu}_3^{-1} [\bar{\mu}_1 \sin(\psi_d) - \bar{\mu}_2 \cos(\psi_d)]) \\ \arctan(\bar{\mu}_3^{-1} [\bar{\mu}_1 \cos(\psi_d) + \bar{\mu}_2 \sin(\psi_d)]) \\ \psi_d \end{bmatrix} ,$$

donde se tiene que $\Gamma = \text{diag}\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\} := mI_3$. En particular, se propone que el vector $\bar{\boldsymbol{\mu}}$ esté caracterizado por un control tipo PD con precompensación, es decir,

$$\bar{\boldsymbol{\mu}} = \ddot{\boldsymbol{\xi}}_d + \mathbf{g}e_3 - \boldsymbol{\gamma}_{\bar{f}} ,$$

donde la señal $\boldsymbol{\gamma}_{\bar{f}}$ se estima a través de una secuencia de dos etapas de filtrado lineal, es decir,

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\bar{f}} &= -K_{\bar{f}} [\boldsymbol{\gamma}_{\bar{f}} - \boldsymbol{\gamma}_f] , \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}_f &= -K_f [\boldsymbol{\gamma}_f - \boldsymbol{\varphi}] , \end{aligned}$$

con vector $\boldsymbol{\varphi} = -K_p \tilde{\boldsymbol{\xi}} - K_D \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} \in \mathbb{R}^3$ relacionado a la acción tipo-PD de posición, donde las matrices diagonales K_p y $K_D > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ son representativas de la ganancia proporcional e integral, respectivamente. Mientras que las matrices K_f y $K_{\bar{f}} > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ son también diagonales, y representan las ganancias del filtro en cuestión. El uso de la etapa de filtrado se debe a que se requiere información medible o estimable por parte de las derivadas temporales de $\boldsymbol{\eta}_d$, esto a causa de la componente de velocidad angular deseada contenida en $\bar{\boldsymbol{\mu}}$.

Análisis de estabilidad

La estabilidad del sistema se analiza mediante la teoría de perturbaciones singulares tratada en la Sección 3.1.2. Para esto, se evalúa el anterior conjunto de controladores sobre el bosquejo del sistema de lazo-cerrado (3.6) y subsecuentemente se procede a parametrizar convenientemente el conjunto de ganancias de control

$$\{K_p, K_I, K_f, K_{\bar{f}}\} = \epsilon_1^{-1} \{\bar{K}_p, \bar{K}_I, \bar{K}_f, \bar{K}_{\bar{f}}\} ,$$

siendo $\epsilon_1 > 0$ el parámetro de perturbación correspondiente a la escala rápida. El sistema de lazo-cerrado resultante, puede acomodarse en la forma singularmente perturbada

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\xi} \\ \dot{\tilde{\xi}} \\ \tilde{\zeta} \\ \tilde{\eta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \epsilon_1) \\ \dot{\tilde{\xi}} \\ \ddot{\xi}_d + \mathbf{g}e_3 - m^{-1}\mu_1 R_{33}(\eta_d, \tilde{\eta})^{-1} R(\eta_d, \tilde{\eta}) e_3 \\ \tilde{\omega} \\ -K_w \tilde{\eta} + W(\eta_d, \tilde{\eta}) \tilde{\omega} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12}, \quad (3.19a) \\ \epsilon_1 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\omega} \\ \gamma_{\tilde{f}} \\ \gamma_f \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\epsilon_1 M_o^{-1} \mathcal{S}(\omega_d - \tilde{\omega}) M_o \tilde{\omega} - M_o^{-1} \bar{K}_p \tilde{\omega} - M_o^{-1} \bar{K}_I \tilde{\zeta} \\ -\bar{K}_{\tilde{f}} [\gamma_{\tilde{f}} - \gamma_f] \\ -\bar{K}_f [\gamma_f + K_p \tilde{\xi} + K_D \dot{\tilde{\xi}}] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^9, \quad (3.19b) \\ &\quad \mathbf{z} \quad \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \epsilon_1) \end{aligned}$$

para esta escala, es posible definir la función vectorial $\eta_d := \eta_d(\bar{\mu}(\gamma_{\tilde{f}})) \in \mathbb{R}^3$ a partir de lo descrito en el apartado de controladores.

Proposición 3. *Existe un valor ϵ_1^* tal que para toda región $0 < \epsilon_1 < \epsilon_1^*$, se tiene que el origen del sistema en espacio de estados (3.19) es localmente exponencialmente estable.*

Prueba. *Considerando el sistema singularmente perturbado (3.19), se procedió a comprobar los cinco pasos estipulados en el Teorema 1, esto es,*

V.11 *El único punto de equilibrio se encuentra en el origen $[\mathbf{x}^T \quad \mathbf{z}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{21}$.*

V.12 *Las raíces aisladas o solución en estado quasi-estacionario resulta en*

$$\mathbf{z}^* = \mathbf{h}(t, \mathbf{x}) \iff \begin{bmatrix} \tilde{\omega}^* \\ \gamma_{\tilde{f}}^* \\ \gamma_f^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{K}_p^{-1} \bar{K}_I \tilde{\zeta} \\ -K_p \tilde{\xi} - K_D \dot{\tilde{\xi}} \\ -K_p \tilde{\xi} - K_D \dot{\tilde{\xi}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^9,$$

la cual satisface la condición $\mathbf{h}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Además, se observa que la raíz o estimación del filtrado $\gamma_{\tilde{f}}^*$ conlleva a que la orientación deseada se configure en

$$\eta_d^*(\bar{\mu}^*),$$

siendo $\bar{\mu}^* = \ddot{\xi}_d + \mathbf{g}e_3 - \gamma_{\tilde{f}}^*$ especificado de acuerdo a lo presentado en el apartado de controladores.

V.13 *Las derivadas parciales del sistema singularmente perturbado y de las raíces aisladas son acotables si se selecciona un conjunto compacto relativo a los estados del sistema.*

V.14 *Definiendo una escala intermedia en el sistema reducido $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{h}(t, \mathbf{x}), 0)$, además de la parametrización*

$$K_w = \epsilon_2^{-1} \bar{K}_w,$$

es posible escribir dicho sistema en el formato singularmente perturbado

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \tilde{\xi} \\ \dot{\tilde{\xi}} \\ \tilde{\zeta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \epsilon_2) \\ \dot{\tilde{\xi}} \\ \ddot{\xi}_d + \mathbf{g}e_3 - m^{-1}\mu_1 R_{33}(\eta_d^*, \tilde{\eta})^{-1} R(\eta_d^*, \tilde{\eta}) e_3 \\ -\bar{K}_p^{-1} \bar{K}_I \tilde{\zeta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^9, \quad (3.20a) \\ \epsilon_2 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\eta} \\ \bar{\mathbf{z}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\bar{K}_w \tilde{\eta} - \epsilon_2 W(\eta_d^*, \tilde{\eta}) \bar{K}_p^{-1} \bar{K}_I \tilde{\zeta} \\ \bar{\mathbf{g}}(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \epsilon_2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.20b) \end{aligned}$$

siendo $\epsilon_2 > 0$ el parámetro de perturbación correspondiente a la escala intermedia. De acuerdo a la Proposición 4 presentada más adelante, se dice que el sistema (3.20) es exponencialmente estable.

V.15 El sistema de capa-frontera $\frac{d}{d\tau} [\mathbf{y}(\tau)] = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}(\tau) + \mathbf{h}(t, \mathbf{x}), 0)$ resulta en la estructura lineal

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_o^{-1} \bar{K}_p \mathbf{y}_1 \\ -\bar{K}_f [\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_3] \\ -\bar{K}_f \mathbf{y}_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^9 ,$$

siendo $\tau = \epsilon_1^{-1} t$. Para verificar la estabilidad de este sistema, se propone la función de Lyapunov

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{y}_1^T M_o \mathbf{y}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{y}_2^T \mathbf{y}_2 + \frac{1}{2} \beta \mathbf{y}_3^T \mathbf{y}_3 \leq \kappa_1 \|\mathbf{y}\|^2 ,$$

siendo $\kappa_1 = \frac{1}{2} \max\{1, \beta\}$ y $\beta > 0 \in \mathbb{R}$. El tensor de inercia M_o es una matriz diagonal que está conformada con elementos de valor por debajo de la unidad. La derivada de la función $V(\mathbf{y})$ respecto a la escala de tiempo τ y correspondiente evaluación de las trayectorias del sistema, resulta en

$$\frac{d}{d\tau} [V(\mathbf{y})] = -\mathbf{y}_1^T \bar{K}_p \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2^T \bar{K}_f \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_2^T \bar{K}_f \mathbf{y}_3 - \beta \mathbf{y}_3^T \bar{K}_f \mathbf{y}_3 \leq -\kappa_2 \|\mathbf{y}\|^2 ,$$

donde la constante $\kappa_2 = \min\left\{ \lambda_m\{\bar{K}_p\}, \kappa_\lambda - \sqrt{\kappa_\lambda^2 - \beta \lambda_m\{\bar{K}_f\} \lambda_m\{\bar{K}_f\} + \frac{1}{4} \lambda_M\{\bar{K}_f\}^2} \right\} \in \mathbb{R}$, en tanto que $\kappa_\lambda = \frac{1}{2} [\lambda_m\{\bar{K}_f\} + \beta \lambda_m\{\bar{K}_f\}]$. A partir del Teorema de Sylvester se deduce que una

$$\beta > \frac{1}{4} \lambda_M\{\bar{K}_f\}^2 \lambda_m\{\bar{K}_f\}^{-1} \lambda_m\{\bar{K}_f\}^{-1}$$

garantiza que el origen del sistema de capa-frontera sea estable. Más aún, las soluciones $\mathbf{y}(\tau) \in \mathbb{R}^9$ convergen a cero con tasa exponencial conforme la escala de tiempo τ crece a infinito, puesto que la desigualdad

$$\frac{d}{d\tau} [V(\mathbf{y})] \leq -\frac{\kappa_2}{\kappa_1} V(\mathbf{y})$$

es satisfecha para toda condición inicial $\mathbf{y}(0)$ perteneciente a un conjunto compacto \mathcal{B}_p . Por extensión, se dice que las soluciones de $\mathbf{z} = [\tilde{\omega}^T \quad \gamma_f^T \quad \gamma_f^T]^T \in \mathbb{R}^9$ tienden al valor de las raíces aisladas descritas en el punto **V.12**, es decir, el

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{z}(\tau) = \mathbf{h}(t, \mathbf{x})$$

se satisface con tasa de convergencia exponencial.

Al demostrar los cinco puntos del Teorema 1, se dice que el origen de (3.19) es exponencialmente estable. $\Delta\Delta\Delta$.

Proposición 4. Existe un valor ϵ_2^* tal que para toda región $0 < \epsilon_2 < \epsilon_2^*$, se tiene que el origen del sistema en espacio de estados (3.20) es localmente exponencialmente estable.

Prueba. La estabilidad del sistema singularmente perturbado (3.20) correspondiente a la escala intermedia, se verifica haciendo uso del Teorema 1. A continuación se muestra la comprobación de los cinco pasos estipulados en dicho Teorema, es decir,

V.16 El único punto de equilibrio se encuentra en el origen $[\bar{\mathbf{x}}^T \quad \bar{\mathbf{z}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{12}$.

V.17 Las raíz aislada o solución en estado quasi-estacionario es $\bar{\mathbf{z}}^\dagger = \bar{\mathbf{h}}(t, \bar{\mathbf{x}}) \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\eta}}^\dagger = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$.

V.18 Resulta claro que las derivadas parciales de las raíces aisladas son nulas y en consecuencia son acotables. Mientras que las derivadas parciales del sistema singularmente perturbado son acotables si se selecciona un conjunto compacto relativo a los estados.

V.19 Al evaluar la raíz aislada y utilizar la definición (3.8) se observa la estructuración $\mu_1 R_{33}(\boldsymbol{\eta}_d^*)^{-1} R(\boldsymbol{\eta}_d^*) \mathbf{e}_3 := \Gamma \bar{\boldsymbol{\mu}}^* \in \mathbb{R}^3$, donde sus componentes $\Gamma = \mathbf{m} I_3$ y $\bar{\boldsymbol{\mu}}^*$ fueron previamente especificadas durante la definición del controlador y en el punto **V.12**, respectivamente. Entonces, el sistema reducido $\dot{\mathbf{f}}(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{h}}(t, \bar{\mathbf{x}}), 0)$ se define en

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\xi}} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} \\ \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} \\ -K_p \tilde{\boldsymbol{\xi}} - K_D \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} \\ -\bar{K}_p^{-1} \bar{K}_f \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^9 .$$

Al proponer la función de Lyapunov

$$\bar{V}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^T [K_P + \bar{\beta} K_D - \bar{\beta}^2 I_3] \tilde{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1}{2} [\bar{\beta} \tilde{\boldsymbol{\xi}} + \dot{\boldsymbol{\xi}}]^T [\bar{\beta} \tilde{\boldsymbol{\xi}} + \dot{\boldsymbol{\xi}}] + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T \bar{K}_I \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \leq \bar{\kappa}_1 \|\bar{\mathbf{x}}\|^2 ,$$

donde $\bar{\kappa}_1 = \frac{1}{2} \max\left\{\lambda_M\{\bar{K}_I\}, \bar{\kappa}_\lambda + \sqrt{[\bar{\kappa}_\lambda - 1]^2 + \frac{1}{4} \bar{\beta}^2}\right\}$, $\bar{\kappa}_\lambda = \frac{1}{2} [1 + \lambda_M\{K_P\} + \bar{\beta} \lambda_M\{K_D\}]$ y $\bar{\beta} > 0 \in \mathbb{R}$. Su derivada temporal y correspondiente evaluación de las trayectorias del sistema reducido, resulta en

$$\frac{d}{dt} [\bar{V}(\bar{\mathbf{x}})] = -\bar{\beta} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^T K_P \tilde{\boldsymbol{\xi}} - \dot{\boldsymbol{\xi}}^T [K_D - \bar{\beta} I_3] \dot{\boldsymbol{\xi}} - \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T \bar{K}_I \bar{K}_P^{-1} \bar{K}_I \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \leq -\bar{\kappa}_2 \|\bar{\mathbf{x}}\|^2 ,$$

con $\bar{\kappa}_2 = \min\left\{\bar{\beta} \lambda_m\{K_P\}, \lambda_m\{K_D\} - \bar{\beta}, \lambda_m\left\{\bar{K}_I \bar{K}_P^{-1} \bar{K}_I\right\}\right\}$. El cumplimiento de la condición $0 < \bar{\beta} < \lambda_m\{K_D\}$ garantiza que el origen del sistema reducido sea exponencialmente estable, dado que la desigualdad

$$\frac{d}{dt} [\bar{V}(\bar{\mathbf{x}})] \leq -\frac{\bar{\kappa}_2}{\bar{\kappa}_1} \bar{V}(\bar{\mathbf{x}})$$

es satisfecha para toda condición inicial $\bar{\mathbf{x}}(0)$ perteneciente a un conjunto compacto $\mathcal{B}_{\bar{p}}$.

V.20 El sistema de capa-frontera $\frac{d}{d\sigma} [\bar{\mathbf{y}}(\sigma)] = \bar{\mathbf{g}}(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}(\sigma) + \bar{\mathbf{h}}(t, \bar{\mathbf{x}}), 0)$ se define explícitamente en

$$\frac{d}{d\sigma} [\bar{\mathbf{y}}(\sigma)] = -\bar{K}_w \bar{\mathbf{y}}(\sigma) ,$$

donde el cambio de variable $\sigma = \epsilon_2^{-1} t$ es representativo de la escala de tiempo intermedia. La matriz diagonal $\bar{K}_w \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es definida positiva. Resulta claro que las soluciones del anterior sistema lineal son exponencialmente estables conforme la escala de tiempo σ crece a infinito. Por extensión, se concluye que el

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \tilde{\boldsymbol{\eta}}(\sigma) = \bar{\mathbf{h}}(t, \bar{\mathbf{x}}) := \mathbf{0}$$

es satisfecho con tasa de convergencia exponencial. Cabe señalar que la explícita definición de la raíz aislada, fue abordada a lo largo del punto **V.17**.

Al demostrar los cinco puntos del Teorema 1, se dice que el origen del sistema (3.20) es exponencialmente estable. $\Delta\Delta\Delta$.

En resumen, para $\left(t, \left[\tilde{\boldsymbol{\xi}}^T \quad \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \quad \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T\right]^T, \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \left[\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \quad \boldsymbol{\gamma}_f^T \quad \boldsymbol{\gamma}_f^T\right]^T, \epsilon_1, \epsilon_2\right) \in [0, t^*] \times \mathbb{R}^9 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^9 \times [0, \epsilon_1^*] \times [0, \epsilon_2^*]$, siendo $\epsilon_2^* > \epsilon_1^* > 0$. Se concluye que el origen o punto de equilibrio del sistema de lazo-cerrado es uniforme y exponencialmente estable en forma local, es decir, se satisface el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t)^T & \bar{\mathbf{z}}(t)^T & \mathbf{z}(t)^T \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

a tasa de convergencia exponencial conforme el tiempo se incrementa. En particular, se tiene que

- Los estados $\bar{\mathbf{x}} = \left[\tilde{\boldsymbol{\xi}}^T \quad \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \quad \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T\right]^T \in \mathbb{R}^9$ se refieren a la dinámica lenta. Dichos estados se relacionan al error de posición (traslación) del mini quadrotor.
- Los estados $\bar{\mathbf{z}} = \tilde{\boldsymbol{\eta}} \in \mathbb{R}^3$ corresponden a la dinámica intermedia. Estos estados están ligados al error de orientación (rotación) del mini quadrotor.
- Los estados $\mathbf{z} = \left[\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \quad \boldsymbol{\gamma}_f^T \quad \boldsymbol{\gamma}_f^T\right]^T \in \mathbb{R}^9$ denotan la dinámica rápida. En particular, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ se refiere al error de velocidad angular del mini quadrotor, mientras que el resto de los estados se relacionan a los errores de estimación de la etapa de filtrado.

Pruebas numéricas

Aplicando el esquema de simulación desarrollado en la Sección 3.4, se procede a verificar el desempeño del sistema ante el seguimiento de un trayecto predeterminado. El desglose del controlador puede verificarse a mayor detalle en la Figura 3.9. Los valores numéricos de las ganancias del controlador se resumen en el Cuadro 3.3.

Haciendo notar que las ganancias relativas a la escala rápida e intermedia tienen incorporado el correspondiente parámetro de perturbación ϵ_1 y ϵ_2 , respectivamente.

Etapa	Valor
PI-Velocidad	$K_P = \epsilon_1^{-1} \text{diag} \{0.005, 0.005, 0.075\}$, $K_I = \epsilon_1^{-1} \text{diag} \{0.005, 0.005, 0.075\}$
Filtrado	$K_f = \epsilon_1^{-1} \text{diag} \{25, 25, 25\}$, $K_f = \epsilon_1^{-1} \text{diag} \{50, 50, 50\}$
Cinemática	$K_w = \epsilon_2^{-1} \text{diag} \{5, 5, 5\}$
PD-Posición	$K_p = \text{diag} \{2, 0.75, 10\}$, $K_D = \text{diag} \{3, 1, 20\}$

Cuadro 3.3: Ganancias del segundo controlador

Para verificar el desempeño del sistema ante la variación paramétrica de las ganancias, se selecciona el conjunto de prueba

$$\epsilon_1 = 0.1, 0.4, 0.7, 1.0, \quad y \quad \epsilon_2 = 0.5, 1.5, 2.5, 3.5, 4.5 .$$

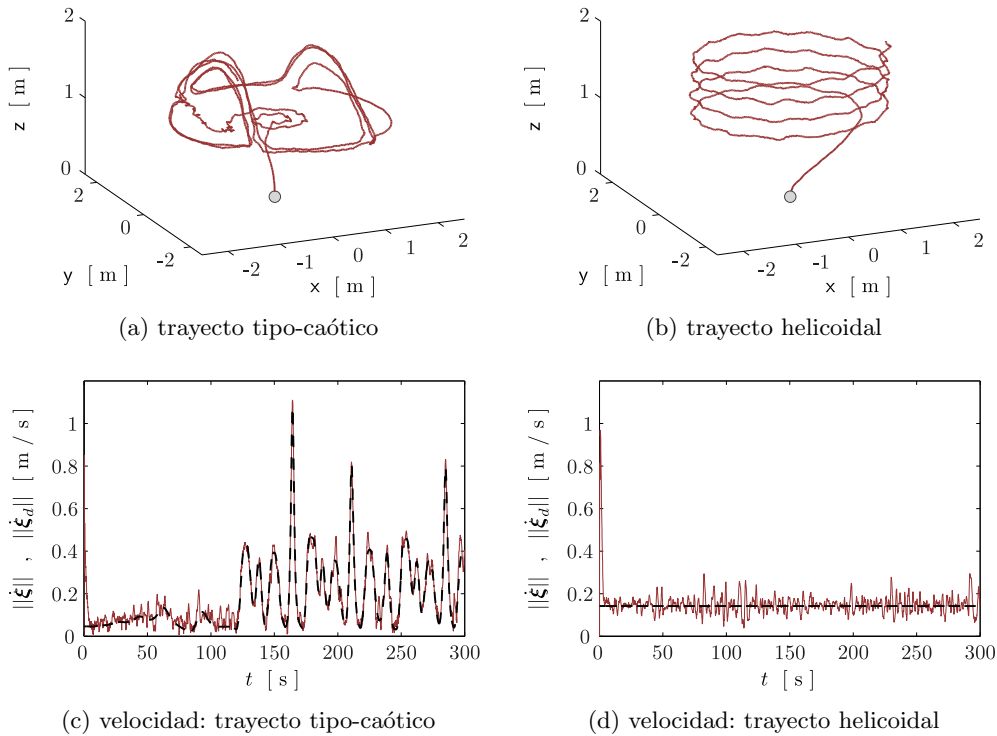


Figura 3.10: Los resultados mostrados en los gráficos se obtuvieron al establecer los valores $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 1$ y considerar las perturbaciones detalladas en la Figura 3.2. Las imágenes 3.10a y 3.10b muestran los trayectos descritos por el movimiento actual del mini quadrotor, en pos de dar seguimiento al trayecto tipo-caótico (3.13)-(3.14) y al trayecto helicoidal (3.15), respectivamente. Adicionalmente a los trayectos, se adjuntan las imágenes 3.10c y 3.10d para mostrar el correspondiente desempeño en velocidad. La velocidad actual del mini quadrotor se indica en línea continua, mientras que en línea segmentada se refiere a la velocidad deseada. Para el trayecto tipo-caótico en el rango aproximado de tiempo $0 < t < 122$ s, se observa que la velocidad deseada establece condiciones cercanas a la regulación (razón de cambio con magnitud relativamente pequeña, entre $2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ y $13 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ aproximadamente). Posterior a dicho rango de tiempo, el mini quadrotor se configura a diversas velocidades en el transcurso de la trayectoria (desplazamientos con razones de cambios de $13 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ hasta $1.12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ aproximadamente). En comparación, el trayecto helicoidal establece condiciones invariantes en lo relativo a la velocidad deseada ($14.17 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$).

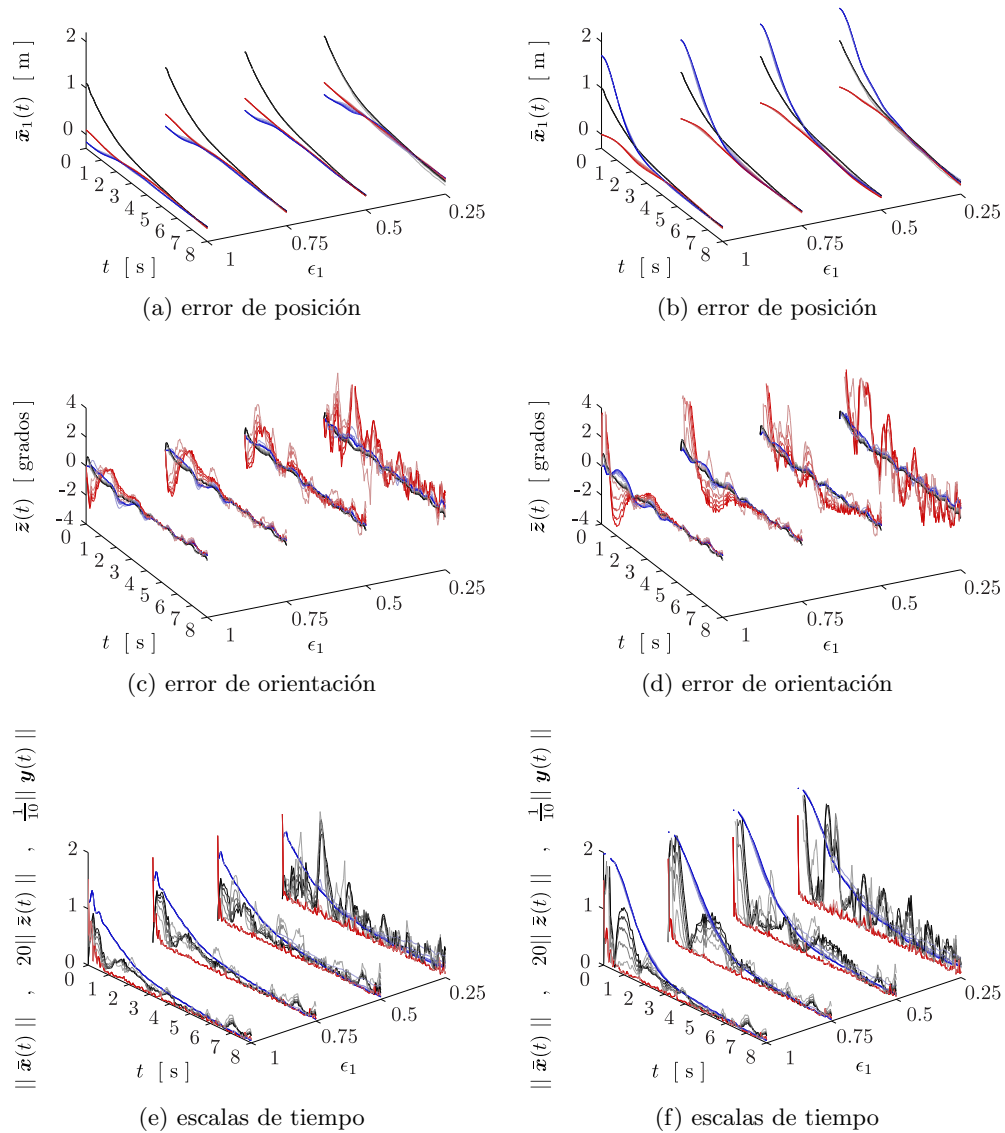


Figura 3.11: Los resultados mostrados en los gráficos se obtuvieron de aplicar variaciones paramétricas en ϵ_1 , ϵ_2 y considerar las perturbaciones detalladas en la Figura 3.2. El grupo de figuras ubicadas en el lado izquierdo y en el lado derecho corresponden al trayecto tipo-caótico y al trayecto helicoidal, respectivamente. El incremento de tono en cada uno de los colores se refiere al aumento del parámetro ϵ_2 , mientras que los cambios de ϵ_1 se indican a través de otra dimensión representada sobre los mismos gráficos. La respuesta de los errores de posición (\bar{x}_1 : \tilde{x} [azul], \tilde{y} [rojo] y \tilde{z} [negro]) muestran ligeros cambios ante las variaciones paramétricas. Aunque tales cambios, se atribuyen al efecto que tienen las perturbaciones prácticas (afecta al error de orientación, conllevando a variaciones en el error de posición), puesto que si estas se omiten, se observará que el error de posición se mantiene inalterable ante las variaciones paramétricas. Para la escala intermedia o errores de orientación (\bar{z} : $\tilde{\phi}$ [azul], $\tilde{\theta}$ [rojo] y $\tilde{\psi}$ [negro]) se observa una respuesta susceptible a ambas variaciones paramétricas. En términos generales, las normas en 3.11e y 3.11f ejemplifican el comportamiento de las escalas de tiempo ($\bar{x}(t)$: escala lenta [azul], $\bar{z}(t)$: escala intermedia [negro], $y(t)$: escala rápida [rojo]) ante las variaciones paramétricas en cuestión. Un decremento en el parámetro ϵ_1 afecta inversa y directamente al tiempo de convergencia de los estados lentos $\bar{x}(t)$ y rápidos $y(t)$, respectivamente. El efecto del parámetro ϵ_2 sobre estos mismos estados, se considera como despreciable. En cuanto al transitorio de los estados intermedios $\bar{z}(t)$, se dice que es afectado por ambos parámetros de perturbación.

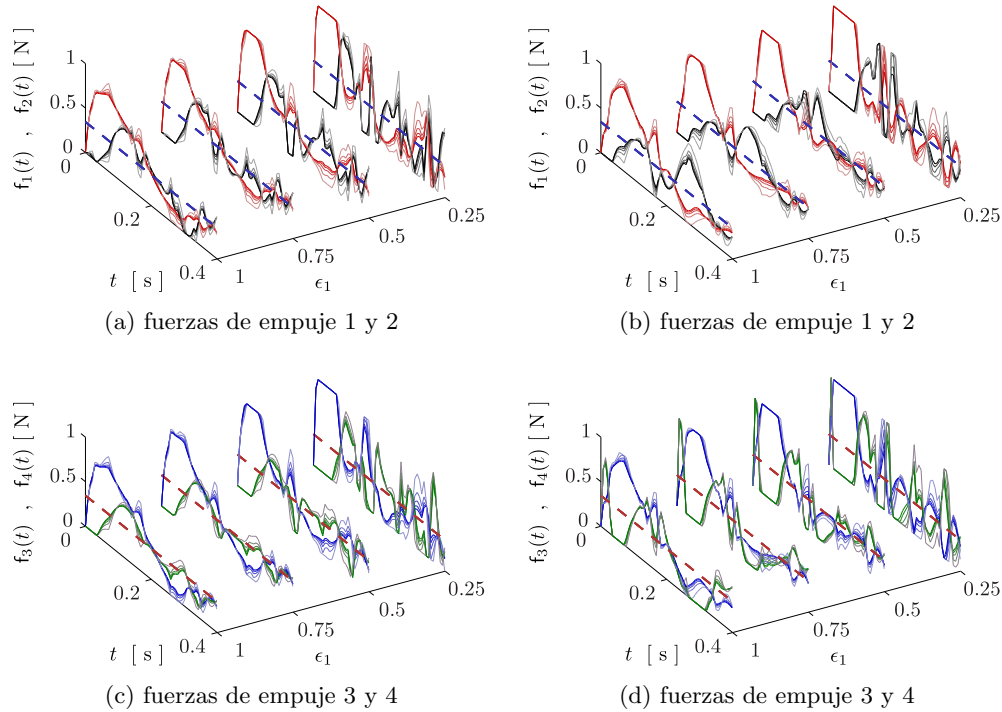


Figura 3.12: El grupo de figuras ubicadas en el lado izquierdo y en el lado derecho corresponden al trayecto tipo-caótico y al trayecto helicoidal, respectivamente. Las figuras muestran el desempeño de las fuerzas (provistas por las propelas del mini quadrotor) ante las variaciones paramétricas de ϵ_1 y ϵ_2 . Los límites del eje- z , se hicieron corresponder a la ventana o region de saturación definida como 0–1 Newtons. El incremento de tono en cada color corresponde al aumento del parámetro ϵ_2 , mientras que los cambios de ϵ_1 se indican a través de otra dimensión representada sobre los mismos gráficos. Las líneas segmentadas indican el valor $\frac{1}{4}mg$, es decir, las condiciones necesarias para un vuelo estacionario. Por otro lado, se observa que las fuerzas muestran ligeras discrepancias ante variación del parámetro ϵ_2 . Una disminución del parámetro ϵ_1 conlleva a las fuerzas a aproximarse a las cercanías del régimen de conmutación, siendo sus valores restringidos por los límites de la ventana de saturación. Cabe mencionar que al omitir las perturbaciones prácticas, es posible deducir que la evolución de las fuerzas (desgaste energético y tiempo de asentamiento) dependen directamente de las magnitudes de los errores ligados a los movimientos angulares.

Los resultados mostrados en el conjunto de Figuras 3.10, 3.11 y 3.12 ejemplifican el desempeño del controlador ante condiciones análogas al escenario práctico descrito en la Figura 3.2. Adicionalmente a la verificación del escalamiento de tiempo, los gráficos permiten visualizar la respuesta del sistema ante incertidumbres paramétricas en las ganancias del controlador e incertidumbres eléctricas a la salida de la etapa de sensado.

Pruebas numéricas ideales

Con el grupo de resultados mostrados en las Figuras 3.13 y 3.14, se comprueba numéricamente los argumentos tratados durante la propuesta del controlador y el respectivo análisis de estabilidad. Para este fin, se verifica exclusivamente el desempeño del sistema mostrado en la Figura 3.9, es decir, se omiten el conjunto de perturbaciones prácticas descritas en el esquema de la Figura 3.2. Para reducir o optimizar el número de imágenes que pudieran generarse a partir de considerar los diversos valores de los parámetros de perturbación, se optó por presentar únicamente los gráficos correspondientes al trayecto tipo-caótico a valores de $\epsilon_1 = 1$ y $\epsilon_2 = 1$. Aunque bien, el mismo enfoque de simulación puede extenderse a pruebas numéricas que impliquen a las combinaciones restantes de ϵ_1 y ϵ_2 . Cabe señalar que para efectos de la graficación, se contemplo a $\bar{z}(t)$ con unidades en grados.

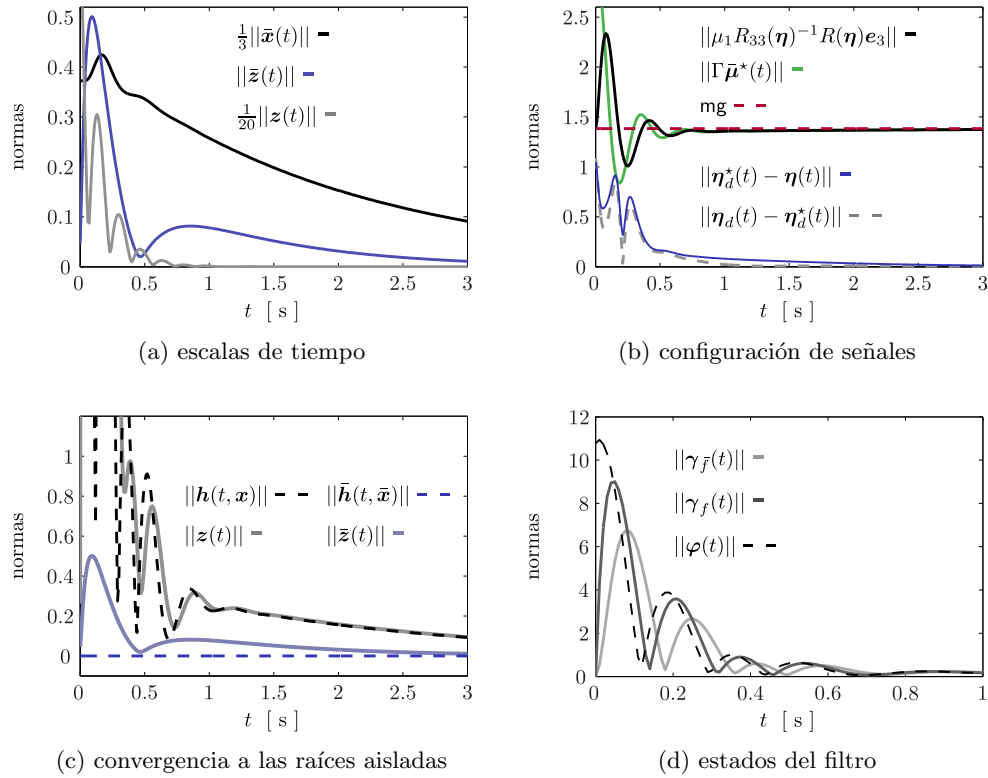


Figura 3.13: Para verificar algunos argumentos abordados durante el planteamiento del análisis de estabilidad, se presenta un conjunto de gráficos que resultan de probar el sistema con el trayecto tipo-caótico, donde $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 1$ y las perturbaciones prácticas son omitidas. El escalamiento de tiempo queda ejemplificado por la imagen 3.13a, donde resulta claro la discrepancia entre los tiempos de asentamiento. De acuerdo a la imagen 3.13b y a lo descrito por la prueba **V.19**, se observa la evolución de la estructuración del vector de control $\mu_1 R_{33}(\eta_d^*)^{-1} R(\eta_d^*) e_3$ en el vector $\Gamma \bar{\mu}^*$, es decir, la convergencia en secuencia $\|\eta(t)\| \rightarrow \|\eta_d(t)\| \rightarrow \|\eta_d^*(t)\|$ implica que $\|\mu_1 R_{33}(\eta)^{-1} R(\eta) e_3\| \rightarrow \|\Gamma \bar{\mu}^*\| \rightarrow mg$ conforme el tiempo se incrementa. En la imagen 3.13c se verifica la convergencia de los estados rápidos $z(t)$ y estados intermedios $\bar{z}(t)$ hacia los valores descritos por las raíces aisladas $h(t, x)$ y $\bar{h}(t, \bar{x})$, respectivamente. En particular, las raíces aisladas tiende a cero conforme el tiempo crece a infinito. La imagen 3.13d muestra la convergencia en forma secuencial ($\|\gamma_{\bar{f}}(t)\| \rightarrow \|\gamma_f(t)\| \rightarrow \|\varphi(t)\|$) de los estados pertenecientes a la etapa de filtrado (escala rápida), hacia la señal $\varphi(t)$ ligada al controlador PD de posición. Una vez transcurrido el transitorio de la señal, esta convergerá hacia cero lentamente puesto que depende de los estados relacionados a la escala lenta.

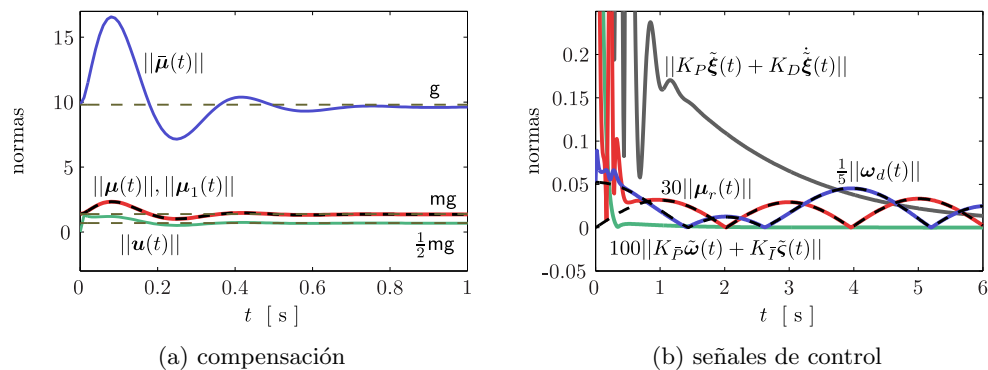


Figura 3.14: Desempeño de las señales de control.

En la imagen 3.14a se muestra las señales de control que están ligadas a la compensación del efecto gravitatorio. Conforme el tiempo se incrementa, las señales convergen a las cercanías de los valores constantes indicados por líneas segmentadas, es decir, el mini quadrotor va adquiriendo las condiciones de un vuelo quasi-estacionario. A primera vista se dice que las señales $\|\boldsymbol{\mu}(t)\|$ y $\|\boldsymbol{\mu}_1(t)\|$ quedan traslapadas, dado que las magnitudes de las componentes angulares $\boldsymbol{\mu}_r = [\mu_2 \ \mu_3 \ \mu_4]^T \in \boldsymbol{\mu}(t)$ son poco significativas y convergen a cero muy rápidamente. Tal implicación, conlleva a argumentar que la señal $\boldsymbol{\mu}_1$ (ligada a la fuerza lineal o colectiva) se configura para asumir el peso de la fuerza gravitatoria. La señal $\bar{\boldsymbol{\mu}}(t)$ representa una acción tipo PD con precompensación de la aceleración gravitacional, su tiempo de asentamiento es mayor al del resto de señales dado que depende de estados con dinámica lenta. Tal argumentación quedo formalmente establecida en la prueba V.12, cuando se asume que $\bar{\boldsymbol{\mu}}(t) \rightarrow \bar{\boldsymbol{\mu}}^*(t)$. La señal $\|\boldsymbol{u}(t)\|$ contempla las magnitudes de fuerza atribuidas a las cuatro propelas, y donde cada una de estas convergerá rápidamente a las cercanías del valor $\frac{1}{4}mg$ a fin de configurar al mini quadrotor con un vuelo quasi-estacionario. En la imagen 3.14b se muestra las señales que convergen tanto a las cercanías de un valor nulo, así como a las cercanías de una función dependiente del tiempo. Las señales relacionadas al controlador PD y PI convergen de forma lenta y rápida, respectivamente. Mientras que las señales de control $\|\boldsymbol{\mu}_r(t)\|$ y $\|\boldsymbol{\omega}_d(t)\|$ convergen rápidamente hacia los valores $|\frac{d}{dt}[\psi_d(t)]|$ y $|-M_{o33}\frac{d^2}{dt^2}[\psi_d(t)]|$ que están gráficamente relacionados a las líneas segmentadas mostradas en la imagen 3.14b, respectivamente. Resulta claro que las variaciones en tales señales, se debe principalmente a la dependencia temporal que tiene el trayecto seleccionado para el ángulo-yaw. A causa de tal variación, conforme el tiempo crece a infinito se observará que la señal de control PI convergerá a las cercanías de cero, pero se mantendrá una señal remanente adjudicada a $\boldsymbol{\omega}_d(t)$. Aunque no queda ejemplificado en las ventanas de tiempo de ambas imágenes, todas las señales describirán un transitorio en aquellas regiones de tiempo donde se observe un cambio abrupto de la velocidad deseada para el mini quadrotor.

3.6.2. Controlador PD/PI para el sistema en formato subactuado

A fin de satisfacer el límite (3.4), se propone el esquema de control mostrado en la Figura 3.15. El lazo de velocidad o lazo interno, calcula los comandos de las fuerzas de empuje a proveerse por los actuadores. Este lazo interno utiliza acciones PI sobre las señales que conciernen al error de velocidad vertical y al error de velocidad angular. Como parte del lazo interno, se incorpora un controlador tipo-cinemático que calcula los comandos relativos a la velocidad vertical deseada y a la velocidad angular deseada. El lazo de posición o lazo externo, se compone de una etapa que configura los trayectos deseados (altura y orientación). En particular, los comandos concernientes al ángulo roll deseado y ángulo pitch deseado se formulan con las señales de control provenientes de una etapa de filtrado y precompensación. Esta última etapa, percibe información de un sistema con retroalimentación en posición (plano x-y) conformado con típicas acciones PD.

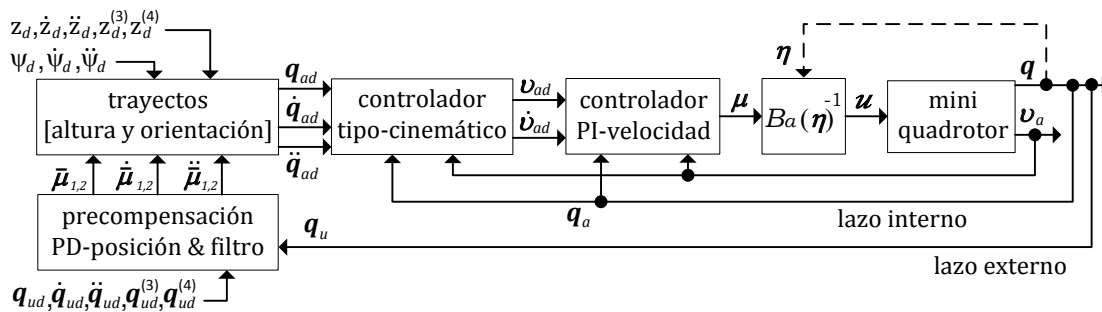


Figura 3.15: Diagrama a bloques del controlador

Las condiciones y definición explícita de cada una de las etapas de control, se aborda en el siguiente listado de puntos.

- Las trayectorias deseadas $\mathbf{q}_{ud}(t) = [x_d(t) \ y_d(t)]^T \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{z}_d(t)$ y $\psi_d(t) \in \mathbb{R}$ están caracterizadas en función del tiempo.

- El vector de entrada \mathbf{u} se estructura de acuerdo a (3.5), donde el vector de control

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu} &= M_a \dot{\mathbf{v}}_{ad} + C_a(\mathbf{v}_a) \mathbf{v}_{ad} + F_a \mathbf{v}_{ad} + \mathbf{g}_a + K_{pa} \tilde{\mathbf{v}}_a + K_{ia} \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_a, \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}_a &= \tilde{\mathbf{v}}_a,\end{aligned}$$

contiene un controlador PI de velocidad, que se basa en la estructura PD+ presentada en Kelly et. al. (2005). Donde el vector $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_a \in \mathbb{R}^4$ representa la acción integral. Las matrices diagonales K_{pa} y $K_{ia} > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ representan las ganancias proporcionales e integrales, respectivamente. Por otro lado, el vector compuesto $\mathbf{v}_{ad} = [\dot{z}_d \ \boldsymbol{\omega}_d^T]^T \in \mathbb{R}^4$ está conformado por un tipo-comando de velocidad vertical deseada \dot{z}_d y por la velocidad angular deseada $\boldsymbol{\omega}_d$, siendo explícitamente calculados mediante la expresión

$$\mathbf{v}_{ad} = J_a(\boldsymbol{\eta})^{-1} [\dot{\mathbf{q}}_{ad} + K_J \tilde{\mathbf{q}}_a].$$

Este representa el llamado controlador tipo cinemático clase 2 ($\alpha = 1$) que fue detallado previamente en (3.10). Cabe mencionar que la definición del vector $\dot{\mathbf{v}}_{ad} \in \boldsymbol{\mu}$ implica conocer la primera y segunda derivada temporal de $\mathbf{q}_{ad} = [z_d \ \boldsymbol{\eta}_d^T]^T \in \mathbb{R}^4$. Por tal razón, algunos cálculos concerniente a tales operaciones se resumen en el Apéndice A.3.

- Siguiendo lineamientos similares a los propuesto en (3.8) y (3.9), la orientación deseada se define en

$$\boldsymbol{\eta}_d = \begin{bmatrix} \phi_d \\ \theta_d \\ \psi_d \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \arctan(\cos(\theta_d) \bar{\mu}_3^{-1} [\bar{\mu}_1 \sin(\psi_d) - \bar{\mu}_2 \cos(\psi_d)]) \\ \arctan(\bar{\mu}_3^{-1} [\bar{\mu}_1 \cos(\psi_d) + \bar{\mu}_2 \sin(\psi_d)]) \\ \psi_d \end{bmatrix},$$

donde se estableció que $\Gamma = \text{diag}\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\} := I_3$. Mientras que el vector $\bar{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbb{R}^3$ se caracteriza por un control tipo PD con precompensación, es decir,

$$\bar{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix} M_u \ddot{\mathbf{q}}_{ud} + F_u \dot{\mathbf{q}}_{ud} + \boldsymbol{\gamma}_{\bar{u}} \\ \mathbf{m} \ddot{z}_d + \mathbf{f}_w \dot{z}_d + \mathbf{m} \mathbf{g} \end{bmatrix}.$$

La acción proporcional-derivativa es indirectamente calculada en $\boldsymbol{\gamma}_{\bar{u}} \in \mathbb{R}^2$ a través de la secuencia de filtrado

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\bar{u}} &= -K_{\bar{u}} [\boldsymbol{\gamma}_{\bar{u}} - \boldsymbol{\gamma}_u], \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}_u &= -K_u [\boldsymbol{\gamma}_u - \boldsymbol{\rho}],\end{aligned}$$

siendo $\boldsymbol{\rho} = K_{pu} \tilde{\mathbf{q}}_u + K_{du} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u \in \mathbb{R}^2$ la representación de la acción PD, con señales referentes al error de posición del mini quadrotor (plano x-y). Sus ganancias proporcionales y derivativas están definidas por las matrices diagonales K_{pu} y $K_{du} > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, respectivamente. Mientras que las matrices diagonales K_u y $K_{\bar{u}} > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ representan las ganancias del filtro en cuestión. La disposición de la etapa de filtrado, permite acceder a información medible o estimable que será de utilidad para el cálculo de las derivadas temporales de la orientación deseada.

Análisis de estabilidad bajo un enfoque de aproximación

Evaluando el conjunto de controladores sobre el correspondiente bosquejo del sistema de lazo-cerrado, es posible obtener la ecuación

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_u \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u \\ \boldsymbol{\gamma}_{\bar{u}} \\ \boldsymbol{\gamma}_u \\ \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_a \\ \tilde{\mathbf{v}}_a \\ \tilde{\mathbf{q}}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u \\ \ddot{\mathbf{q}}_{ud} + M_u^{-1} [F_u [\dot{\mathbf{q}}_{ud} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u] - \mathbf{b}(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}})] \\ -K_{\bar{u}} [\boldsymbol{\gamma}_{\bar{u}} - \boldsymbol{\gamma}_u] \\ -K_u [\boldsymbol{\gamma}_u - K_{pu} \tilde{\mathbf{q}}_u - K_{du} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u] \\ \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_a \\ -M_a^{-1} [[F_a + C_a(\mathbf{v}_{ad}, \tilde{\mathbf{v}}_a) + K_{pa}] \tilde{\mathbf{v}}_a + K_{ia} \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_a] \\ -K_J \tilde{\mathbf{q}}_a + J_a(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \tilde{\mathbf{v}}_a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{20}, \quad (3.22)$$

siendo $\mathbf{b}(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) = \mu_1 R_{33}(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}})^{-1} [R_{13}(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \quad R_{23}(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}})]^T \in \mathbb{R}^2$. Un bosquejo aproximado del análisis de estabilidad, consiste en abordar a la ecuación de lazo-cerrado (3.22) en dos regiones de tiempo. El espacio de estados se subdivide de tal forma que $\mathbf{s}_1 = [\tilde{\mathbf{q}}_u^T \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u^T \quad \gamma_{\bar{u}}^T \quad \gamma_u^T]^T \in \mathbb{R}^8$ y $\mathbf{s}_2 = \frac{d}{dt} [\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_a^T \quad \tilde{\mathbf{v}}_a^T \quad \tilde{\mathbf{q}}_a^T]^T \in \mathbb{R}^{12}$ son referidos como los estados con dinámica relativa a la primera región de tiempo y la segunda región de tiempo, respectivamente. En primer instancia, se asume que los estados relativos a la segunda región de tiempo, se encuentran en estado estacionario dentro de la segunda región de tiempo. Bajo esta hipótesis, la función de Lyapunov concerniente a \mathbf{s}_2 puede definirse en

$$V_a = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_a^T K_{ia} \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_a + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{v}}_a^T M_a \tilde{\mathbf{v}}_a + \frac{\rho}{2} \tilde{\mathbf{q}}_a^T \tilde{\mathbf{q}}_a,$$

donde ρ es una constante positiva. Las matrices M_a y F_a son simétricas, definidas positivas y contienen elementos constantes. Mientras que la matriz $C_a(\mathbf{v}_{ad}, \tilde{\mathbf{v}}_a)$ es antisimétrica. Al desarrollar la derivada temporal de V_a a lo largo de la trayectoria del espacio de estados en cuestión, y extender el razonamiento resumido por las propiedades de la Sección 2.5.2, se obtiene que

$$\dot{V}_a = - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_a \\ \tilde{\mathbf{q}}_a \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_a + K_{pa} & -\frac{\rho}{2} J_a^T \\ -\frac{\rho}{2} J_a & \rho K_J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_a \\ \tilde{\mathbf{q}}_a \end{bmatrix} \leq - \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{v}}_a\| \\ \|\tilde{\mathbf{q}}_a\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_m\{F_a + K_{pa}\} & -\frac{\rho}{2} k_j \\ -\frac{\rho}{2} k_j & \rho \lambda_m\{K_J\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{v}}_a\| \\ \|\tilde{\mathbf{q}}_a\| \end{bmatrix}.$$

Si el ángulo pitch se restringe al dominio $\mathcal{D}_o = \{|\theta| \leq k_o < 90^\circ : \theta, k_o \in \mathbb{R}\}$, entonces es posible definir una constante $k_j = \cos(k_o)^{-1} \sqrt{1 + \sin(k_o)}$ o límite superior para la norma de la matriz $J_a(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}})$. Aplicando el Teorema de Sylvester y el Lema de Barbalat descritos por Khalil (2002), se dice que V_a es definida positiva y \dot{V}_a es semidefinida negativa dado que puede satisfacerse la condición $0 < \rho < 4k_j^{-2} \lambda_m\{F_a + K_{pa}\} \lambda_m\{K_J\}$. Así también, seleccionando el dominio \mathcal{D}_o y un conjunto compacto para los estados en cuestión, se puede demostrar que la segunda derivada temporal de la función de Lyapunov es acotable. En resumen, se concluye que el

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_a(t)^T & \tilde{\mathbf{q}}_a(t)^T \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Asumiendo que el límite será satisfecho a lo largo de la región de tiempo restante, se tiene que el vector $\mathbf{b}(\boldsymbol{\eta}_d, \mathbf{0}) := \gamma_{\bar{u}}$. El espacio de estados relativo a $\mathbf{s}_1 \in \mathbb{R}^8$ puede entonces acomodarse en la forma singularmente perturbada

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{q}}_u \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \epsilon) \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u \\ -M_u^{-1} F_u \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u - M_u^{-1} \gamma_{\bar{u}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad (3.23a)$$

$$\epsilon \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \gamma_{\bar{u}} \\ \gamma_u \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{K}_{\bar{u}} [\gamma_{\bar{u}} - \gamma_u] \\ -\bar{K}_u [\gamma_u - K_{pu} \tilde{\mathbf{q}}_u - K_{du} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u] \\ \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}, \epsilon) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad (3.23b)$$

si se parametriza las matrices de ganancia $K_{\bar{u}} = \epsilon^{-1} \bar{K}_{\bar{u}}$ y $K_u = \epsilon^{-1} \bar{K}_u$ en acorde al parámetro de perturbación $\epsilon > 0 \in \mathbb{R}$.

Proposición 5. *Existe un valor ϵ^* tal que para toda región $0 < \epsilon < \epsilon^*$, se tiene que el origen del sistema en espacio de estados (3.23) es localmente exponencialmente estable.*

Prueba. *La estabilidad del sistema singularmente perturbado se verifica haciendo uso del Teorema 1. A continuación se muestra la comprobación de los cinco pasos estipulados en dicho Teorema, es decir,*

V.21 *El único punto de equilibrio se encuentra en el origen $[\mathbf{x}^T \quad \mathbf{z}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^8$.*

V.22 *Las raíces aisladas son $\mathbf{z}^\dagger = \mathbf{h}(t, \mathbf{x})$ es $[\gamma_{\bar{u}}^T \quad \gamma_u^T] = [\gamma_u^T \quad [K_{pu} \tilde{\mathbf{q}}_u + K_{du} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u]^T]^T \in \mathbb{R}^4$.*

V.23 *Seleccionando un conjunto compacto relativo a los estados del sistema y a los estados del trayecto deseado, es posible acotar las funciones y sus respectivas derivadas parciales.*

V.24 El origen del sistema reducido $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{h}(t, \mathbf{x}), 0)$ es exponencialmente estable, puesto que la función de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}_u^T [M_u^{-1} K_{pu} + \beta M_u^{-1} [F_u + K_{du}] - \beta^2 I_2] \tilde{\mathbf{q}}_u + \frac{1}{2} [\beta \tilde{\mathbf{q}}_u + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u]^T [\beta \tilde{\mathbf{q}}_u + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u] \leq \kappa_1 \|\mathbf{x}\|^2$$

y correspondiente evaluación de trayectorias sobre su derivada temporal

$$\dot{V} = -\beta \tilde{\mathbf{q}}_u^T M_u^{-1} K_{pu} \tilde{\mathbf{q}}_u - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u^T [M_u^{-1} [F_u + K_{du}] - \beta I_2] \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u \leq -\kappa_2 \|\mathbf{x}\|^2,$$

resultan en una función definida positiva y una función definida negativa, respectivamente. Lo anterior resulta válido con $0 < \beta < \lambda_m\{M_u^{-1} [F_u + K_{du}]\}$, además que la desigualdad $\dot{V} \leq -\kappa_2 \kappa_1^{-1} V(\mathbf{x})$ se satisface para toda condición inicial $\mathbf{x}(0)$ perteneciente a un conjunto compacto \mathcal{B}_p . En particular, los escalares ligados a las cotas superiores de las funciones se definen en $\kappa_1 = \frac{1}{4} [\kappa_\lambda + 1 + \sqrt{[\kappa_\lambda - 1]^2 + 4\beta^2}]$, $\kappa_\lambda = \frac{1}{m} [\lambda_M\{K_{pu}\} + \beta \lambda_M\{F_u + K_{du}\}]$ y $\kappa_2 = \min\{m^{-1} \beta \lambda_m\{K_{pu}\}, m^{-1} \lambda_m\{F_u + K_{du}\} - \beta\}$.

V.25 Conforme la escala de tiempo $\sigma = \epsilon^{-1}t$ crece a infinito, se dice que el sistema de capa-frontera $\frac{d}{d\sigma} [\mathbf{y}(\sigma)] = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}(\sigma) + \mathbf{h}(t, \mathbf{x}), 0)$ es exponencialmente estable, dado que tal sistema se define explícitamente en una estructura lineal

$$\frac{d}{d\sigma} [\mathbf{y}(\sigma)] = -\text{diag}\{\bar{K}_u, \bar{K}_u\} \mathbf{y}(\sigma).$$

En consecuencia, se satisface el $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \mathbf{z}(\sigma) = \mathbf{h}(t, \mathbf{x})$ con tasa de convergencia exponencial.

Al demostrar los cinco puntos del Teorema 1, se dice que el origen de (3.23) es exponencialmente estable. $\Delta\Delta\Delta$.

Análisis de estabilidad utilizando un enfoque formal

La estabilidad del sistema de lazo-cerrado (3.22) puede ser determinada bajo un enfoque formal si se emplea la Teoría de Perturbaciones Singulares. Al parametrizar el conjunto de ganancias de control $\{K_{pa}, K_{ia}, K_J\} = \bar{\epsilon}^{-1} \{\hat{K}_{pa}, \hat{K}_{ia}, \hat{K}_J\}$, el sistema se lleva a la forma singularmente perturbada

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{q}}_u \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u \\ \gamma_{\bar{u}} \\ \gamma_u \\ \tilde{\zeta}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \bar{\epsilon}) \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u \\ \ddot{\mathbf{q}}_{ud} + M_u^{-1} [F_u [\dot{\mathbf{q}}_{ud} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u] - \mathbf{b}(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}})] \\ -K_{\bar{u}} [\gamma_{\bar{u}} - \gamma_u] \\ -K_u [\gamma_u - K_{pu} \tilde{\mathbf{q}}_u - K_{du} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u] \\ \tilde{\mathbf{v}}_a \end{bmatrix}, \quad (3.24a)$$

$$\bar{\epsilon} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_a \\ \tilde{\mathbf{q}}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{\epsilon} M_a^{-1} [F_a + C_{aa}(\tilde{\mathbf{v}}_a, \mathbf{q}_{ad}, \dot{\mathbf{q}}_{ad}, \tilde{\mathbf{q}}_a)] \tilde{\mathbf{v}}_a - M_a^{-1} [\hat{K}_{pa} + C_{ab}(\mathbf{q}_{ad}, \tilde{\mathbf{q}}_a)] \tilde{\mathbf{v}}_a - M_a^{-1} \hat{K}_{ia} \tilde{\zeta}_a \\ -\hat{K}_J \tilde{\mathbf{q}}_a + \bar{\epsilon} J_a(\boldsymbol{\eta}_d, \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \tilde{\mathbf{v}}_a \end{bmatrix}, \quad (3.24b)$$

siendo $\bar{\epsilon} > 0 \in \mathbb{R}$ el parámetro de perturbación. A fin de caracterizar la incidencia que tiene el parámetro de perturbación en la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis, ésta última se subdivide en $C_{aa}(\tilde{\mathbf{v}}_a, \mathbf{q}_{ad}, \dot{\mathbf{q}}_{ad}, \tilde{\mathbf{q}}_a) = \text{diag}\{0, \mathcal{S}(M_I M_a [\tilde{\mathbf{v}}_a - J_a(\mathbf{q}_{ad}, \tilde{\mathbf{q}}_a)^{-1} \dot{\mathbf{q}}_{ad}])\}$ y $C_{ab}(\mathbf{q}_{ad}, \tilde{\mathbf{q}}_a) = \text{diag}\{0, \mathcal{S}(-M_I M_a J_a(\mathbf{q}_{ad}, \tilde{\mathbf{q}}_a)^{-1} \hat{K}_J \tilde{\mathbf{q}}_a)\} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, donde la matriz auxiliar $M_I = [0_{3 \times 1} \quad I_3] \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ es utilizada para extraer los términos angulares del vector al que multiplican.

Proposición 6. Existe un valor $\bar{\epsilon}^*$ tal que para toda región $0 < \bar{\epsilon} < \bar{\epsilon}^*$, se tiene que el origen del sistema en espacio de estados (3.24) es localmente exponencialmente estable.

Prueba. La estabilidad del sistema singularmente perturbado se verifica haciendo uso del Teorema 1. A continuación se muestra la comprobación de los cinco pasos estipulados en dicho Teorema, es decir,

V.26 El único punto de equilibrio se encuentra en el origen $[\bar{\mathbf{x}}^T \quad \bar{\mathbf{z}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{20}$.

V.27 Las raíz aislada $\bar{\mathbf{z}}^\dagger = \bar{\mathbf{h}}(t, \bar{\mathbf{x}})$ es

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_a \\ \tilde{\mathbf{q}}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\hat{K}_{pa} + C_{ab}(\mathbf{q}_{ad}, \mathbf{0})]^{-1} \hat{K}_{ia} \tilde{\zeta}_a \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^8,$$

siendo $C_{ab}(\mathbf{q}_{ad}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Aunque bien, $[\hat{K}_{pa} + C_{ab}]^{-1} := \hat{K}_{pa}^{-1} - [I_4 + \hat{K}_{pa}^{-1} C_{ab}]^{-1} \hat{K}_{pa}^{-1} C_{ab} \hat{K}_{pa}^{-1}$ existe para el todo el dominio $\mathcal{D} = \{\mathbb{R}^6 - \{\theta = \pm 90^\circ [2n + 1]\} : \theta \in \mathbf{q}_a, n = 0, 1, 2, \dots\}$.

V.28 Seleccionando un conjunto compacto relativo a los estados del sistema y a los estados del trayecto deseado, es posible acotar las funciones y sus respectivas derivadas parciales.

V.29 Configurando el sistema reducido $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{f}}(t, \hat{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{h}}(t, \hat{\mathbf{x}}), 0)$ en su forma singularmente perturbada

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{q}}_u \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u \\ \tilde{\zeta}_a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}(t, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \epsilon) \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u \\ -M_u^{-1} F_u \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u - M_u^{-1} \gamma_{\bar{u}} \\ -\hat{K}_{pa}^{-1} \hat{K}_{ia} \tilde{\zeta}_a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^8, & (3.25a) \\ \epsilon \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \gamma_{\bar{u}} \\ \gamma_u \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\bar{K}_{\bar{u}} [\gamma_{\bar{u}} - \gamma_u] \\ -\bar{K}_u [\gamma_u - K_{pu} \tilde{\mathbf{q}}_u - K_{du} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4, & (3.25b) \\ & \mathbf{z} = \mathbf{g}(t, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \epsilon) \end{aligned}$$

siendo el parámetro de perturbación $\epsilon > 0$ y el conjunto de ganancias $\{K_{\bar{u}}, K_u\} = \epsilon^{-1} \{\bar{K}_{\bar{u}}, \bar{K}_u\}$ convenientemente parametrizadas. Al invocar la Proposición 5 se deduce la función de Lyapunov

$$\hat{V} = V + \frac{1}{2} \tilde{\zeta}_a^T \hat{K}_{pa} \tilde{\zeta}_a \leq \hat{\kappa}_1 \|\hat{\mathbf{x}}\|^2,$$

y su derivada temporal

$$\dot{\hat{V}} = \dot{V} - \tilde{\zeta}_a^T \hat{K}_{ia} \tilde{\zeta}_a \leq -\hat{\kappa}_2 \|\hat{\mathbf{x}}\|^2$$

con correspondiente evaluación de las trayectorias del sistema reducido. Los escalares ligados a las cotas superiores, se proponen como $\hat{\kappa}_1 = \max\{\kappa_1, \frac{1}{2} \lambda_M\{\hat{K}_{pa}\}\}$ y $\hat{\kappa}_2 = \min\{\kappa_2, \lambda_m\{\hat{K}_{ia}\}\} > 0$. El término ligado a la acción integral se dice estable a tasa exponencial. Implicando entonces que el sistema reducido sea exponencialmente estable para toda condición inicial $\hat{\mathbf{x}}(0)$ perteneciente a un conjunto compacto $\mathcal{B}_{\hat{p}}$.

V.30 El sistema de capa-frontera $\frac{d}{d\bar{\sigma}} [\bar{\mathbf{y}}(\bar{\sigma})] = \bar{\mathbf{g}}(t, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}(\bar{\sigma}) + \bar{\mathbf{h}}(t, \bar{\mathbf{x}}), 0)$ con escala de tiempo $\bar{\sigma} = \bar{\epsilon}^{-1} t$, queda definido explícitamente por la estructura en cascada

$$\frac{d}{d\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}}_1 \\ \bar{\mathbf{y}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_a^{-1} \hat{K}_{pa} \bar{\mathbf{y}}_1 - M_a^{-1} \bar{C}_{ab}(\bar{\mathbf{y}}_1) M_a J_a (\mathbf{q}_{ad}^\dagger, \bar{\mathbf{y}}_2)^{-1} \hat{K}_J \bar{\mathbf{y}}_2 \\ -\hat{K}_J \bar{\mathbf{y}}_2 \end{bmatrix}.$$

Se utilizaron las propiedades enunciadas en el Apéndice A.1 a fin de especificar la matriz $\bar{C}_{ab}(\bar{\mathbf{y}}_1) = \text{diag}\{0, \mathcal{S}(M_I [\bar{\mathbf{y}}_1 - \hat{K}_{pa}^{-1} \hat{K}_{ia} \tilde{\zeta}_a^\dagger])\} \in \mathbb{R}^4$, siendo $M_I = [0_{3 \times 1} \quad I_3] \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$. En la escala de tiempo actual se definen a los vectores $\tilde{\zeta}_a^\dagger$ y \mathbf{q}_{ad}^\dagger como constantes, dado que estos dependen de los estados lentos. La función de Lyapunov

$$\bar{V}(\bar{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{y}}_1^T \hat{K}_{pa}^{-1} M_a \bar{\mathbf{y}}_1 + \frac{1}{2} \alpha \bar{\mathbf{y}}_2^T \hat{K}_J^{-1} \bar{\mathbf{y}}_2 \leq \bar{\kappa}_1 \|\bar{\mathbf{y}}\|^2,$$

se deriva respecto a $\bar{\sigma}$ y evalúan las trayectorias del sistema en cuestión, obteniendo

$$\frac{d}{d\bar{\sigma}} [\bar{V}(\bar{\mathbf{y}})] = -\bar{\mathbf{y}}_1^T \bar{\mathbf{y}}_1 + \bar{\mathbf{y}}_1^T \hat{K}_{pa}^{-1} \bar{C}_{ab}(\bar{\mathbf{y}}_1) M_a J_a (\mathbf{q}_{ad}^\dagger, \bar{\mathbf{y}}_2)^{-1} \hat{K}_J \bar{\mathbf{y}}_2 - \alpha \bar{\mathbf{y}}_2^T \bar{\mathbf{y}}_2 \leq -\bar{\kappa}_2 \|\bar{\mathbf{y}}\|^2,$$

donde $\alpha > 0$ es una constante arbitraria. Los términos escalares que pertenecen a las cotas superiores se definen en $\bar{\kappa}_1 = \frac{1}{2} \max\{\lambda_M\{M_a \hat{K}_{pa}^{-1}\}, \alpha \lambda_M\{\hat{K}_J^{-1}\}\}$ y $\bar{\kappa}_2 = \frac{1}{2} [\alpha + 1 - \sqrt{[\alpha - 1]^2 + 4k_q^2}] \in \mathbb{R}$. El

valor de $k_q = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_M \{M_a\} \lambda_M \{ \hat{K}_{pa}^{-1} \} \lambda_M \{ \hat{K}_J \} \left[k_{y_1} + \lambda_M \{ \hat{K}_{ia} \hat{K}_{pa}^{-1} \} k_\zeta \right]$ es establecido si se considera el dominio $\bar{\mathcal{D}} = \left\{ \bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^8, \tilde{\zeta}_a \in \mathbb{R}^4 : \|\bar{\mathbf{y}}_1\| \leq k_{y_1}, \|\tilde{\zeta}_a^\dagger\| \leq k_\zeta \right\}$. En resumen, se dice que el origen del sistema de capa-frontera es exponencialmente estable dado que es posible satisfacer las desigualdades $\alpha > k_q^2$ y $\frac{d}{d\bar{\sigma}} [\bar{V}(\bar{\mathbf{y}})] \leq -\bar{\kappa}_2 \bar{\kappa}_1^{-1} \bar{V}(\bar{\mathbf{y}})$. Por extensión, al considerar toda condición inicial $\bar{\mathbf{z}}(0)$ perteneciente al dominio $\mathcal{B}_{\bar{p}}$, se observa que el

$$\lim_{\bar{\sigma} \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{z}}(\bar{\sigma}) = \bar{\mathbf{h}}(t, \bar{\mathbf{x}})$$

es satisfecho con tasa de convergencia exponencial.

Al demostrar los cinco puntos del Teorema 1, se dice que el origen de (3.24) es exponencialmente estable. $\Delta\Delta\Delta$.

En resumen, para $(t, [\tilde{\mathbf{q}}_u^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u^T \ \tilde{\zeta}_a^T]^T, [\gamma_u^T \ \gamma_u^T]^T, [\tilde{\mathbf{v}}_a^T \ \tilde{\mathbf{q}}_a^T]^T, \bar{\epsilon}, \epsilon) \in [0, t^*] \times \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^8 \times [0, \epsilon^*] \times [0, \epsilon^*]$, siendo $\epsilon^* > \bar{\epsilon}^* > 0$. Se concluye que el origen o punto de equilibrio del sistema de lazo-cerrado es uniforme y exponencialmente estable en forma local, es decir, se satisface el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t)^T & \mathbf{z}(t)^T & \bar{\mathbf{z}}(t)^T \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

a tasa de convergencia exponencial conforme el tiempo se incrementa. En particular, se tiene que

- Los estados $\hat{\mathbf{x}} = [\tilde{\mathbf{q}}_u^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u^T \ \tilde{\zeta}_a^T]^T \in \mathbb{R}^8$ se refieren a la dinámica lenta. Los primeros dos vectores se relacionan al error de posición-horizontal del mini quadrotor. Mientras que el último vector es característico de las acciones integrales calculadas a partir del error en la velocidad vertical y error en la velocidad angular del mini quadrotor.
- Los estados $\mathbf{z} = [\gamma_u^T \ \gamma_u^T]^T \in \mathbb{R}^4$ corresponden a la dinámica intermedia. Estos estados están ligados a los errores de estimación de la etapa de filtrado.
- Los estados $\bar{\mathbf{z}} = [\tilde{\mathbf{v}}_a^T \ \tilde{\mathbf{q}}_a^T]^T \in \mathbb{R}^8$ denotan la dinámica rápida. En particular, el vector $\tilde{\mathbf{v}}_a \in \mathbb{R}^4$ se refiere al error en la velocidad vertical y error en la velocidad angular del mini quadrotor. El vector $\tilde{\mathbf{q}}_a \in \mathbb{R}^4$ contiene los estados relacionados al error de posición vertical y error de orientación del mini quadrotor.

Reglas de sintonización

En el presente apartado se enuncia un grupo básico de reglas de sintonización, que tienen por objeto el caracterizar la rapidez del sistema en función de las ganancias de control. Aunque el método aquí presentado muestra resultados satisfactorios ante diversas propuestas en las ganancias, no debe generalizarse para asegurar la estabilidad del sistema ya que fue formulado a partir de aproximaciones. El primer paso consiste en proponer los límites superiores nominales T_{sl}^* , T_{sm}^* y T_{sr}^* a fin de restringir los tiempos de asentamiento de los estados pertenecientes a la dinámica lenta, a la dinámica intermedia y a la dinámica rápida, respectivamente. Los valores numéricos propuestos para cada límite deben satisfacer la condición $T_{sl}^* > T_{sm}^* > T_{sr}^* > 0$, además de ser lo suficientemente grandes si es que se requiere reproducir experimentalmente el régimen transitorio resultante. El segundo paso consiste en calcular las ganancias del controlador mediante el siguiente conjunto de expresiones

$$\hat{K}_J = \frac{20}{3T_{sr}^*} \text{diag} \left\{ \frac{14}{10} \rho, I_3 \right\}, \quad (3.27a)$$

$$\bar{K}_{\bar{u}} = \bar{K}_u = \frac{25\rho}{T_{sm}^*} I_2, \quad (3.27b)$$

$$\hat{K}_{pa} = m \hat{K}_J, \quad (3.27c)$$

$$\hat{K}_{ia} = \Phi \hat{K}_{pa}, \quad (3.27d)$$

$$K_{pu} = \frac{1}{3} m \delta \Phi [1 - \beta] I_2, \quad (3.27e)$$

$$K_{du} = m \delta I_2 - F_u > 0, \quad (3.27f)$$

con parametrización

$$\{K_{pa}, K_{ia}, K_J\} = \bar{\epsilon}^{-1} \left\{ \hat{K}_{pa}, \hat{K}_{ia}, \hat{K}_J \right\}, \quad (3.28a)$$

$$\{K_{\bar{u}}, K_u\} = \bar{\epsilon}^{-1} \left\{ \bar{K}_{\bar{u}}, \bar{K}_u \right\}, \quad (3.28b)$$

siendo $\Phi = \frac{20\rho}{T_{sl}^*}$, $0 < \beta < 1$, $4 \leq \delta \leq 10$ y $\epsilon > \bar{\epsilon} > 0$. La constante m representa la masa del mini quadrotor, $\bar{\epsilon}$ es el parámetro de perturbación de la escala de tiempo rápida y ϵ es el parámetro de perturbación de la escala de tiempo intermedia. La selección de un valor ρ con condición $1 < \rho < 2$, permite hacer un re-ajuste sobre las ganancias en acorde al tipo de trayecto o características dinámicas descritas por mini quadrotor. Por ejemplo, en este trabajo se contempla un trayecto helicoidal y un trayecto tipo-caótico que describen una velocidad constante y cambios de velocidad, respectivamente. Así también, la respuesta del sistema pudiera estar afectada por componentes de alta frecuencia atribuidas al ruido eléctrico en las etapas de sensado. En este sentido, se dice que el ancho de banda está inversamente relacionado al parámetro ρ . Otra condición relacionada a un escenario práctico, tiene que ver con las limitantes energéticas del sistema (saturación). En presencia de esta situación, se dice que las ganancias de control quedarán regidas por un dominio estrechamente relacionado a tales limitantes. En caso de verse reducidas las cotas en la saturación, se recomienda aumentar los valores de los límites superiores nominales T_{sl}^* , T_{sm}^* y T_{sr}^* .

Pruebas numéricas entorno a los parámetros de sintonización

Para verificar el efecto que tienen las ganancias (3.27)-(3.28) sobre la respuesta del sistema, se implementa el esquema de simulación descrito en la Sección 3.4 con perturbaciones prácticas consideradas nulas y el mini quadrotor ubicado en la posición de inicio (0,-1,0) con respecto al plano cartesiano. El controlador en cuestión es desglosado a detalle al principio de la Sección 3.6.2. El parámetro $\rho = 1.7$ será asumido para el caso que se aplique un trayecto deseado tipo-caótico, mientras que para un trayecto helicoidal se propone $\rho = 1.3$.

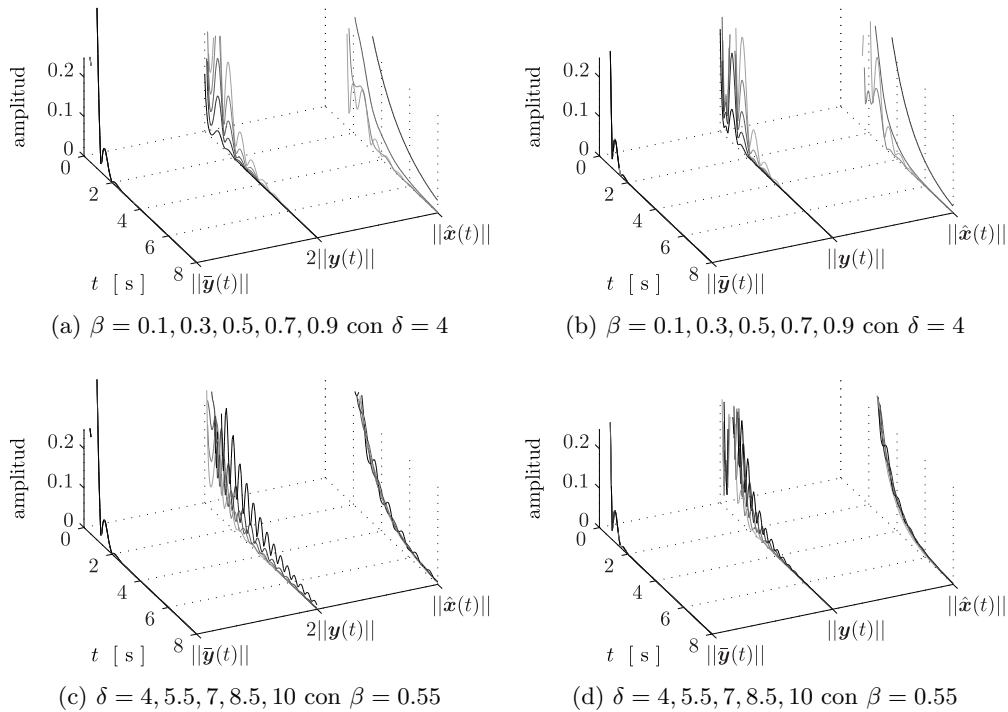


Figura 3.16: El grupo de figuras ubicadas en el lado izquierdo y en el lado derecho corresponden al trayecto tipo-caótico y al trayecto helicoidal, respectivamente. En todas las pruebas, se utilizaron los parámetros $\bar{\epsilon} = 1$, $\epsilon = 1$, $T_{sr}^* = 2$, $T_{sm}^* = 4$ y $T_{sl}^* = 6$. Un gradual incremento en el tono de las líneas se debe al aumento de los valores del parámetro mostrado abajo de cada imagen. El parámetro β afectará simultáneamente a los tiempos de asentamiento de los estados pertenecientes a la dinámica lenta e intermedia, los cuales se alejarán entre sí conforme se aumenta el valor de tal parámetro. El parámetro δ permitirá modificar principalmente el amortiguamiento y tiempo de asentamiento de los estados pertenecientes a la escala de tiempo intermedia. En cualquier caso, los parámetros β y δ pueden utilizarse para configurar el tipo de respuesta del sistema y como elementos de re-ajustes para satisfacer los límites T_{sl}^* y T_{sm}^* .

Con el grupo de resultados mostrados en las Figuras 3.18, 3.16 y 3.17, se comprueba numéricamente los argumentos tratados durante la propuesta del controlador, la propuesta de las reglas de sintonización y el respectivo análisis de estabilidad. En particular, se muestra la respuesta de los vectores

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= [\tilde{\mathbf{q}}_u^T \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u^T \quad \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_a^T]^T \in \mathbb{R}^8, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{z} - \mathbf{h}(t, \mathbf{x}) := [\boldsymbol{\gamma}_u^T \quad \boldsymbol{\gamma}_u^T]^T - \left[\boldsymbol{\gamma}_u^T \quad [K_{pu}\tilde{\mathbf{q}}_u + K_{du}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u]^T \right]^T \in \mathbb{R}^4, \\ \bar{\mathbf{y}} &= \bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{h}}(t, \bar{\mathbf{x}}) := [\tilde{\mathbf{v}}_a^T \quad \tilde{\mathbf{q}}_a^T]^T - \left[[-\hat{K}_{pa}^{-1}\hat{K}_{ia}\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_a]^T \quad \mathbf{0} \right]^T \in \mathbb{R}^8,\end{aligned}$$

los cuales son relativos a los estados que conforman la dinámica lenta, dinámica intermedia y dinámica rápida, respectivamente. Estos vectores se formularon en las Proposiciones 5 y 6, correspondientes a las tres escalas de tiempo establecidas durante el análisis de estabilidad del sistema.

Ahora bien, en la Figura 3.18 se muestra el desempeño de las diferentes escalas de tiempo ante variaciones en los límites superiores nominales T_{sl}^* , T_{sm}^* y T_{sr}^* , es decir, en los máximos tiempos de asentamiento deseados para los estados pertenecientes a las escalas en cuestión. En cuanto a las Figuras 3.16 y 3.17, estas muestran el desempeño de las diferentes escalas de tiempo ante variaciones paramétricas relacionadas a las ganancias del controlador.

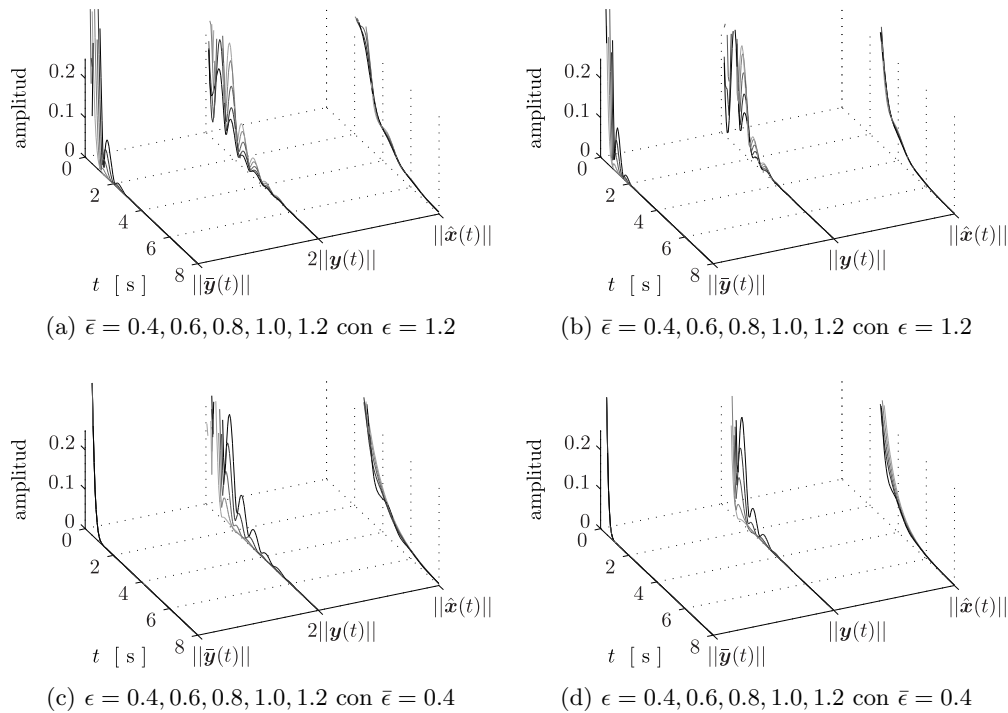


Figura 3.17: El grupo de figuras ubicadas en el lado izquierdo y en el lado derecho corresponden al trayecto típico caótico y al trayecto helicoidal, respectivamente. En cada prueba se definieron los parámetros $\beta = 0.55$, $\delta = 4$, $T_{sr}^* = 2$, $T_{sm}^* = 4$ y $T_{sl}^* = 6$. Un gradual incremento en el tono de las líneas se debe al aumento de los valores del parámetro mostrado abajo de cada imagen. El aumento de los parámetros $\bar{\epsilon}$ y ϵ conllevan a un incremento del tiempo de asentamiento de los estados pertenecientes a la dinámica rápida e intermedia, respectivamente. Se observa que estos parámetros modifican ligeramente a los transitorios de los estados pertenecientes a la escala de tiempo subsecuente. Por lo tanto, si los parámetros se disminuyeran o aumentarán aún más con respecto a los valores numéricos mostrados abajo de cada imagen, se observará que las escalas de tiempo comenzarán paulatinamente a acoplarse en función del parámetro en cuestión. Es decir, $\bar{\epsilon}$ tendrá efecto sobre los estados rápidos e intermedios. Mientras que ϵ afectará a los estados intermedios y lentos.

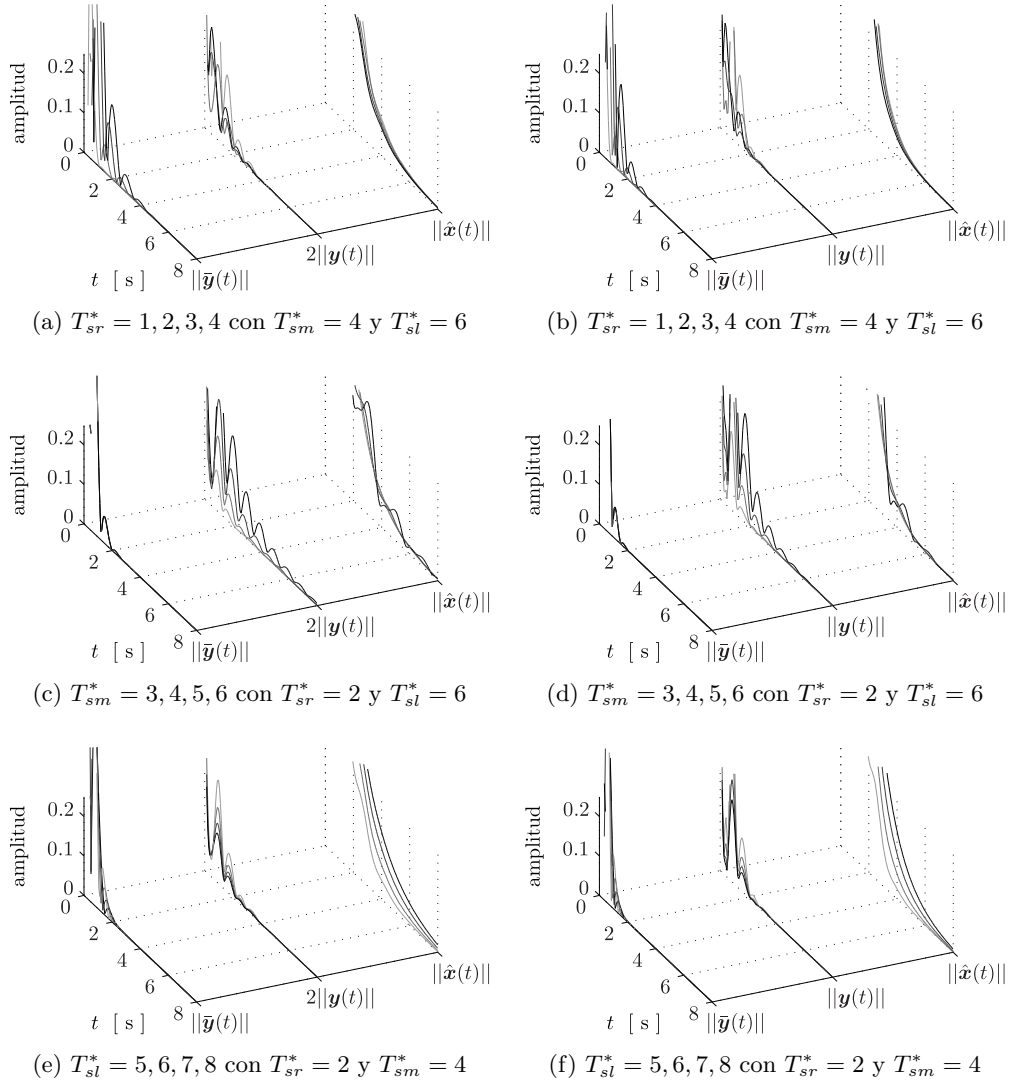


Figura 3.18: El grupo de figuras ubicadas en el lado izquierdo y en el lado derecho corresponden al trayecto tipo-caótico y al trayecto helicoidal, respectivamente. Las condiciones de prueba contemplan los parámetros $\beta = 0.55$, $\delta = 4$, $\bar{\epsilon} = 1$, $\epsilon = 1$ y el conjunto de límites superiores indicados textualmente abajo de cada imagen. Un gradual incremento en el tono de las líneas se debe al aumento en T_{sl}^* , T_{sm}^* o T_{sr}^* , según sea el caso bajo prueba. Se observa que una variación del límite superior ocasiona que las correspondientes señales cambien en relación a su tiempo de asentamiento. A pesar de que los estados de las restantes escalas de tiempo pudieran mostrar ciertos cambios en su transitorio, estos se mantienen acotados en relación a su tiempo de asentamiento.

Pruebas numéricas con inclusión de perturbaciones

Para este apartado se incluye un conjunto de perturbaciones prácticas sobre el sistema en retroalimentación, tal y como se ejemplifica en el bosquejo presentado en la Sección 3.4. La posición de inicio del mini quadrotor, corresponde a la coordenada cartesiana $(0, -1, 0)$. El controlador en cuestión es desglosado a detalle al principio de la Sección 3.6.2, donde las ganancias de control se obtienen a partir de (3.27)-(3.28) asumiendo a $\rho = 1.1$ para el trayecto helicoidal y el trayecto tipo-caótico. Así también, se establece $\beta = 0.55$, $\delta = 4$, $\bar{\epsilon} = 1$ y $\epsilon = 1$ en cada uno de los escenarios de prueba contemplados en las Figuras 3.19, 3.20 y 3.21. En particular, la Figura 3.19 muestra el desempeño de las diferentes escalas de tiempo ante variaciones en los máximos tiempos de asentamiento deseados para los estados respectivos. Adicionalmente, la Figura 3.20 muestra el comportamiento de las fuerzas de empuje generadas por las propelas del sistema.

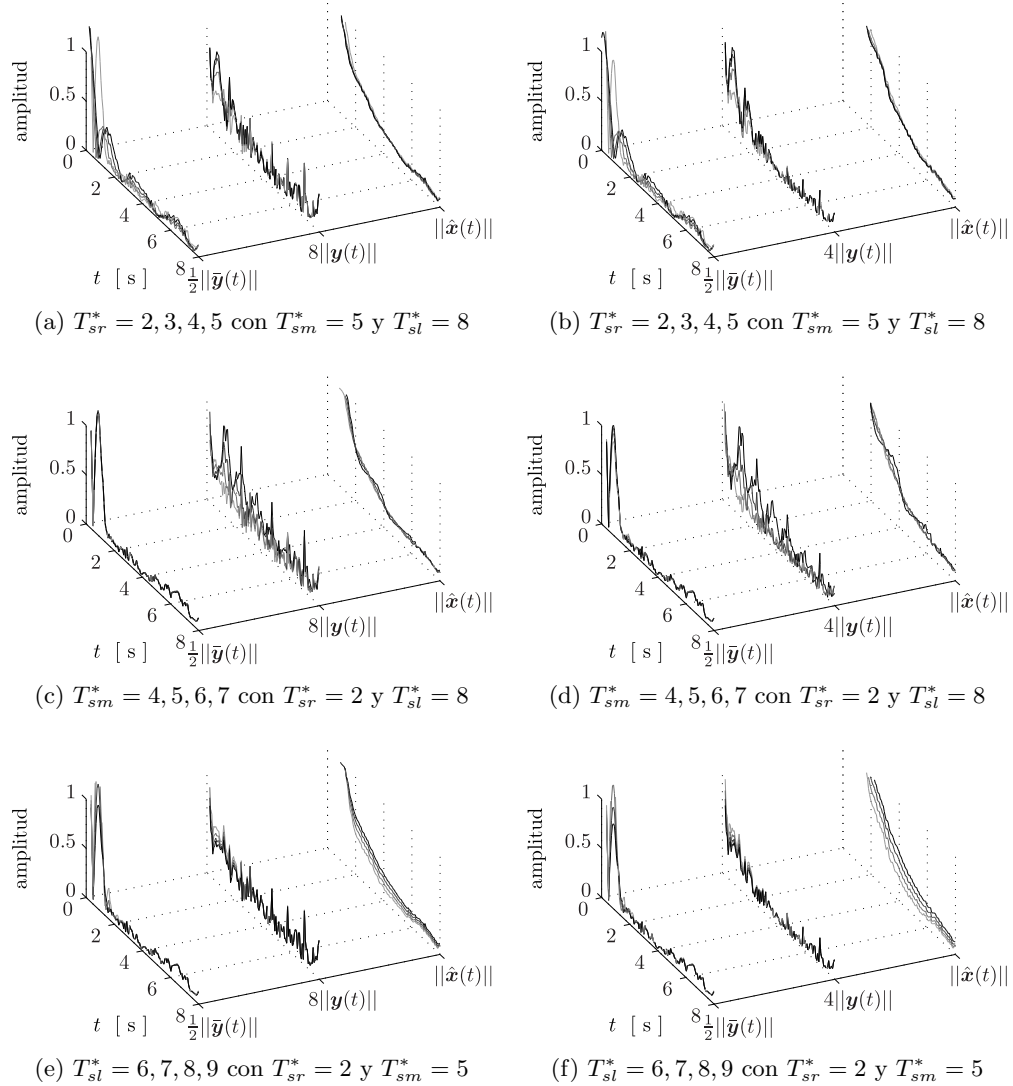


Figura 3.19: El grupo de figuras ubicadas en el lado izquierdo y en el lado derecho corresponden al trayecto tipo-caótico y al trayecto helicoidal, respectivamente. Las condiciones de prueba contemplan el conjunto de límites superiores escritos abajo de cada imagen. Según sea el caso, un gradual incremento en el tono de las líneas se debe al aumento en T_{sl}^* , T_{sm}^* o T_{sr}^* . En comparación a las pruebas desarrolladas sin la presencia de perturbaciones prácticas, en las actuales simulaciones se optó por seleccionar valores más grandes para T_{sl}^* , T_{sm}^* y T_{sr}^* debido a la presencia de la saturación. Sin embargo, los resultados y conclusiones pueden decirse equivalentes a los resúmenes para la Figura 3.18.

Las condiciones de prueba de la Figura 3.20 son las mismas a las descritas para la Figura 3.19, donde además se explica lo relacionado al cambio de tonalidad. Ahora bien, las líneas segmentadas indican el valor $\frac{1}{4}mg$, que en conjunto representan el vuelo estacionario del vehículo aéreo en cuestión. La ventana o región de saturación se define entre $0 - 1$ Newtons, tal que las propelas siempre giran en un solo sentido. Se optó por presentar solo las imágenes correspondientes a variaciones en T_{sr}^* , puesto que cambios realizados sobre los límites superiores T_{sm}^* y T_{sl}^* no afectaba sustancialmente a la respuesta de las fuerzas de empuje. Se observa que al disminuir el límite T_{sr}^* , se induce a las señales o fuerzas de empuje a aproximarse a un régimen de conmutación. A razón de esto, se dice que el desempeño de la dinámica rápida del sistema está estrechamente ligado a las fuerzas de empuje. Si el nivel de energía requerida se ve lo suficientemente reducido, podría llegar a inducirse inestabilidad sobre el sistema. Para evitar esto, se deberá aumentar la región de saturación y/o disminuir el T_{sr}^* .

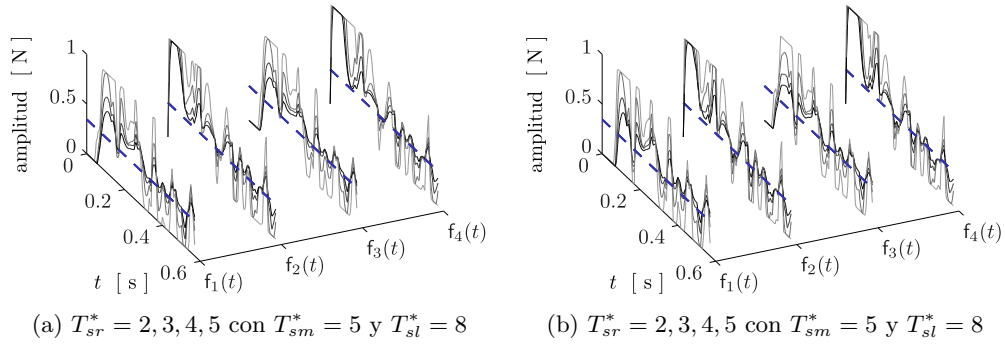


Figura 3.20: Desempeño de las fuerzas de empuje generadas por las propelas del mini quadrotor

Por último, la Figura 3.21 muestra los trayectos descritos por el mini quadrotor y su correspondiente respuesta en velocidad.

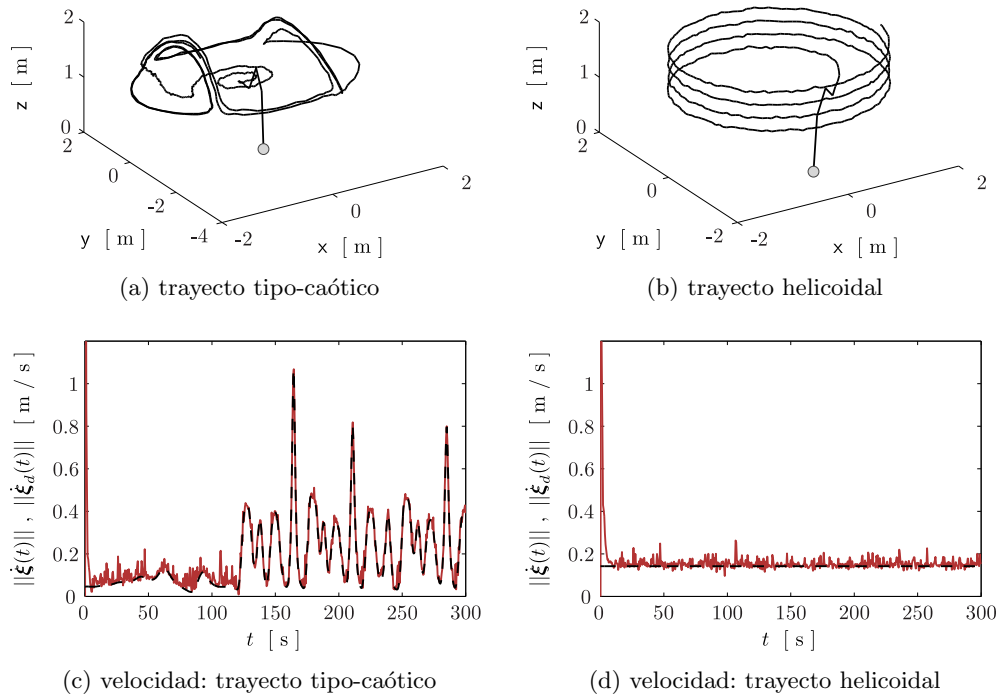


Figura 3.21: A partir de la Figura 3.20 se selecciona su caso más crítico en lo referido a la estabilidad del sistema, es decir, donde se observa la respuesta en un régimen mayormente saturado ($T_{sr}^* = 2, T_{sm}^* = 5, T_{sl}^* = 8$). El conjunto de imágenes muestran el adecuado desempeño del sistema a pesar de la existencia de diversas perturbaciones práctica.



Capítulo 4

Conclusiones

En el primer Capítulo 1 se resumió un compendio de antecedentes históricos acerca del surgimiento del mini quadrotor y de las técnicas de control clásico que han sido empleadas sobre tal sistema. Seguido a esto se presentó el objetivo de control, la propuesta de solución y la metodología a ser seguida. Las observaciones y conclusiones acerca de la temática tratada en el primer capítulo, se enlistan a continuación:

- La versatilidad y funcionalidad del mini quadrotor como herramienta tecnológica resulta evidente, dado que en recientes años se ha utilizado para resolver toda clase de problemáticas. La creciente cantidad de actuales y potenciales aplicaciones es un indicador para catalogar al mini quadrotor como dispositivo de vanguardia.
- En toda aplicación, los comandos enviados al mini quadrotor para su correspondiente movimiento a través del medio, resultan de fundamental importancia para brindar al sistema de un buen desempeño ante la tarea asignada. En este sentido, la adición de etapas de control permite auxiliar parcial o totalmente al operario del mini quadrotor dado que estas simplifican la toma de decisiones e incrementan el grado de maniobrabilidad del mismo.
- Se propuso que el movimiento del mini quadrotor fuera controlado bajo un enfoque completamente autónomo. Para dar solución a tal problemática, se formuló que las acciones se basarán en técnicas de control clásico de simple implementación práctica. Un compendio de estudios ligados al uso de estas técnicas fue resumido, principalmente aquellos estudios que utilizan técnicas basadas en acciones proporcionales, integrales y diferenciales para controlar el movimiento del mini quadrotor.

En un sentido más técnico, el control autónomo de movimiento del mini quadrotor es problema complejo que requiere un análisis enfatizado en la dinámica del sistema en cuestión. A razón de esto, en el Capítulo 2 se estableció y analizó el modelo matemático del mini quadrotor. Las principales observaciones y conclusiones concerniente al segundo capítulo, se enlistan a continuación:

- Se presentó un extenso estudio acerca de la especificación de coordenadas, de los efectos mecánicos, la cinemática y de la dinámica del mini quadrotor.
- Se analizó, planteó y presentó un grupo de propiedades que frecuentemente no son accesibles en la literatura especializada. Más aún, se desconoce si algunas pocas de estas propiedades han sido previamente formuladas y reportadas en algún trabajo. En esencia podría decirse que la tesis contribuye en este sentido, aunque se sugiere tener reserva en cuanto a su uso.
- Se configuró el modelo matemático del mini quadrotor en varias clases de formatos a fin de diversificar el enfoque de propuesta y diseño de los controladores.
- A diferencia de lo encontrado en la literatura, el vector de entrada quedó parametrizado en tal forma que cada uno de sus elementos está en función directa con las fuerzas de propulsión. Reduciendo con esto el nivel de complejidad del proceso de sintonización, dado que se evita mezclar analíticamente las fuerzas de propulsión.

En cuanto al proceso de diseño de las etapas de control, en el Capítulo 3 se mostró el planteamiento y la fundamentación analítica al respecto. En el siguiente listado de puntos, se muestra el conjunto de observaciones y conclusiones referidas a este capítulo.

- Se presentó un resumen sobre el modelo matemático del mini quadrotor y de las técnicas utilizadas para validar la estabilidad del sistema retroalimentado.

- Para modificar la convergencia en cada grado de libertad del sistema, se propuso que los controladores se basarían en acciones del tipo proporcional, integral y diferencial.
- Se diseñó un controlador no lineal para posicionar al mini quadrotor sobre un punto o secuencia de puntos ubicados en el espacio coordenado.
- Se diseñaron dos controladores no lineales de movimiento que resuelven el problema concerniente al seguimiento de una trayectoria por parte del mini quadrotor. El sistema se probó con un trayecto comúnmente utilizado en la literatura, y el cual no demanda cambios de velocidad por parte del mini quadrotor.
- Se propuso un segundo trayecto de prueba que es poco convencional. Este es tipo-caótico y describe cambios de velocidad que ponen a prueba la efectividad de los controladores.
- Para el tercer controlador, se formuló un conjunto de reglas de sintonización que limitan los tiempos de asentamiento de los estados del sistema retroalimentado.
- A pesar de la complejidad de los sistemas de lazo-cerrado, se verificó su estabilidad y desempeño mediante una variada gama de pruebas numéricas. Entre las cuales se encuentra la variación de los valores de ganancias y la inclusión teórica de un conjunto de perturbaciones prácticas (ruido eléctrico, saturación en los actuadores, viento en el medio).
- Para la prueba de estabilidad de cada diseño, se utilizó en forma combinada la teoría de sistemas en cascada, la teoría de Lyapunov y la teoría de perturbaciones singulares. En relación al uso de esta última técnica, permitió especificar el sistema retroalimentado en diversas escalas de tiempo (lenta, intermedia, rápida), simplificando así el análisis de estabilidad a pesar de la complejidad del sistema. Además, con esta técnica de análisis se logró formular controladores y reglas de sintonización desde un enfoque más simple.
- La teoría de perturbaciones singulares ha sido poco empleada en la literatura especializada que concierne al mini quadrotor. Más aún, en la presente tesis fue aplicada esta técnica bajo un novedoso enfoque de doble escalamiento de tiempo. A razón de esto, se contribuyó con la fundamentación y el aporte de conocimiento.

En un ámbito general, se dice que los controladores propuestos resolvieron el problema de regulación y seguimiento de trayectoria concerniente a los 6 grados de libertad del mini quadrotor: traslación- (x,y,z) y orientación- $(roll,pitch,yaw)$. En comparación a diversos trabajos encontrados en la literatura, se aplicó un trayecto inédito en la temática del mini quadrotor y se empleó un método de análisis de estabilidad recientemente abordado en la literatura. Se demostró que los sistemas retroalimentados son lo suficientemente robustos a pesar de la simplicidad del controlador formulado y de la presencia de perturbaciones prácticas.

Bibliografía

- Altuğ, E., Ostrowski, J. P., y Mahony, R. (2002).
Control of a quadrotor helicopter using visual feedback.
In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 1, pages 72–77, Washington, DC, USA.
- Altuğ, E., Ostrowski, J. P., y Taylor, C. J. (2003).
Quadrotor control using dual camera visual feedback.
In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 4294–4299, Taipei, Taiwan.
- Bacciotti, A. y Rosier, L. (2005).
Liapunov Functions and Stability in Control Theory.
Springer.
- Beer, F. P., Johnston Jr, E. R., Eisenberg, E. R., y Clausen, W. E. (2004).
Vector Mechanics for Engineers: Statics and Dynamics.
McGraw-Hill, New York, seventh edition.
- Béjar, M. y Ollero, A. (2008).
Modelado y control de helicópteros autónomos: Revisión del estado de la técnica.
Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, 5(4):5–16.
- Bertrand, S., Hamel, T., y Lahanier, H. P. (2008).
Stability analysis of an UAV controller using singular perturbation theory.
In *Proceedings of the 17th World Congress the International Federation of Automatic Control (IFAC)*, volume 17, pages 5706–5711, Seoul, Korea.
- Bertrand, S., Hamel, T., y Lahanier, H. P. (2009).
Aerial Vehicles (Chapter 6): Stabilization of Scale Model Vertical Take-Off and Landing Vehicles Without Velocity Measurements.
IN-TECH 2009.
- Bouabdallah, S., Noth, A., y Siegwart, R. (2004).
PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor.
In *Proceedings of the IEEE / RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2004)*, volume 3, pages 2451–2456, Sendai, Miyagi, Japan.
- Bourquardez, O., Mahony, R., Guenard, N., Chaumette, F., Hamel, T., y Eck, L. (2009).
Image-based visual servo control of the translation kinematics of a quadrotor aerial vehicles.
IEEE Transactions on Robotics, 25(3):743–749.
- Budiyono, A. (2008).
Advances in unmanned aerial vehicles technologies.
In *Proceedings of the International Symposium on Intelligent Unmanned System (ISIUS 2008)*, pages 1–13, Nanjing, China.

- Canudas de Wit, C., Siciliano, B., y Bastin, G. (1996).
Theory of robot control.
Springer-Verlag, London, UK.
- Castillo, P., Dzul, A., y Lozano, R. (2004).
Real-time stabilization and tracking of a four-rotor mini rotorcraft.
IEEE Transactions on Control Systems Technology, 12(4):510–516.
- Castillo, P., García, P., Lozano, R., y Albertos, P. (2007).
Modelado y estabilización de un helicóptero con cuatro rotores.
Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, 4(1):41–57.
- Castillo, P., Lozano, R., y Dzul, A. (2005).
Modelling and Control of Mini-Flying Machines.
Springer-Verlag, London.
- Dixon, W. E., Dawson, D. M., Costic, B. T., y de Queiroz, M. S. (2001).
Towards the standardization of a MATLAB-based control systems laboratory experience for undergraduate students.
In *Proceedings of the American Control Conference*, volume 2, pages 1161–1166, Arlington, VA, USA.
- Esteban, S., Aracil, J., y Gordillo, F. (2005).
Three-time scale singular perturbation control for a radio-control helicopter on a platform.
In *Proceedings of AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit*, pages 1–19, San Francisco, USA.
- Fantoni, I. y Lozano, R. (2001).
Non-Linear Control for Underactuated Mechanical Systems.
Springer-Verlag, London.
- Fossen, T. I. y Fjellstad, O. (1995).
Nonlinear modelling of marine vehicles in 6 degrees of freedom.
Journal of Mathematical Modelling of Systems, 1(1):1–11.
- Freddi, A., Lazon, A., y Longhi, S. (2011).
A feedback linearization approach to fault tolerance in quadrotor vehicles.
In *Proceedings of the 18th World Congress The International Federation of Automatic Control (IFAC)*, pages 5413–5418, Milano, Italy.
- Gablehouse, C. (1969).
Helicopters and autogiros: a history of rotating-wing and V/STOL aviation.
Lippincott Press, Philadelphia, USA.
- González, A., Mahtani, R., Béjar, M., y Ollero, A. (2004).
Control and stability analysis of an autonomous helicopter.
In *Proceedings of World Automation Congress*, volume 15, pages 399–404, Seville, Spain.
- Hamel, T., Mahony, R., Lozano, R., y Ostrowski, J. (2002).
Dynamic modelling and configuration stabilization for an X4-flyer.
In *IFAC, 15th Triennial World Congress*, volume 1, Barcelona, Spain.
- Hernández-Guzmán, V. M., Molina-Méndez, J., y Nieto-Martínez, J. (2010).
Nonlinear PD control of a quadrotor aircraft.
International Journal of Innovative Computing, Information and Control, 6(4):1699–1711.
- Hibbeler, R. C. (2009).
Engineering Mechanics: Statics and Dynamics.
Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 12th edition.

- Hoffmann, G. M., Huang, H., Waslander, S. L., y Tomlin, C. J. (2007).
Quadrotor helicopter flight dynamics and control: Theory and experiment.
In *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, Hilton Head, South Carolina.
- Johnson, R. S. (2004).
Singular-Perturbation Theory: Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering.
Springer.
- Jones, G. P., Pearlstine, L. G., y Percival, H. F. (2006).
An assessment of small unmanned aerial vehicles for wildlife research.
Wildlife Society Bulletin, 34(3):750–758.
- Kelly, R. y Moreno, J. (2005).
Manipulator motion control in operational space using joint velocity inner loops.
Automatica, 41(8):1423–1432.
- Kelly, R., Santibáñez, V., y Loría, A. (2005).
Control of Robot Manipulators in Joint Space.
Springer, Berlin.
- Khalil, H. K. (1987).
Stability analysis of nonlinear multiparameter singularly perturbed systems.
IEEE Transactions on Automatic Control, AC-32(3):260–263.
- Khalil, H. K. (2002).
Nonlinear Systems.
Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J. 07458.
- Kim, J., Kang, M.-S., y Park, S. (2010).
Accurate modeling and robust hovering control for a quad-rotor VTOL aircraft.
Journal of Intelligent and Robotic Systems, 57:9–26.
- Kokotović, P., Khalil, H. K., y O'Reilly, J. (1987).
Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design.
SIAM, Philadelphia.
- Kyrkjebø, E. y Pettersen, K. Y. (2005).
Output synchronization control of euler-lagrange systems with nonlinear damping terms.
In *Proceedings of the 44th IEEE conference on decision and control, and the European control conference*,
pages 4951–4957, Seville, Spain.
- Lee, D., Burg, T. C., Xian, B., y Dawson, D. M. (2007).
Output feedback tracking control of an underactuated quad-rotor UAV.
In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1775–1780, New York city, USA.
- Leishman, J. G. (2002).
The bréguet-richet quad-rotor helicopter of 1907.
Vertiflite, 47(3):58–60.
- Liu, G., Mareels, I., y Nešić, D. (2008).
Decentralized control design of interconnected chains of integrators: A case study.
Automatica, 44(8):2171–2178.
- Liu, S. y Trenkler, G. (2008).
Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products.
International Journal of Information and Systems Sciences, 4(1):160–177.

- Madani, T. y Benallegue, A. (2006).
Backstepping control for a quadrotor helicopter.
In *Proceedings of the IEEE / RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 3255–3260, Beijing, China.
- Madani, T. y Benallegue, A. (2007).
Sliding mode observer and backstepping control for a quadrotor unmanned aerial vehicles.
In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 5887–5892, New York.
- Meirovitch, L. y Kwak, M. K. (1989).
State equations for a spacecraft with maneuvering flexible appendages in terms of quasi-coordinates.
Journal of Applied Mechanics Reviews, 42:37–48.
- Mian, A. A., Ahmad, M. I., y Wang, D. (2008a).
Backstepping based nonlinear flight control strategy for 6 dof aerial robot.
In *Proceedings of the International Conference on Smart Manufacturing Application (ICSMA 2008)*, pages 146–151, Gyeonggi-do, Korea.
- Mian, A. A., Ahmad, M. I., y Wang, D. (2008b).
Backstepping based PID control strategy for an underactuated aerial robot.
In *Proceedings of the 17th World Congress the International Federation of Automatic Control (IFAC)*, volume 17, pages 15636–15641, Seoul, Korea.
- Mian, A. A. y Wang, D. (2008a).
Dynamic modeling and nonlinear control strategy for an underactuated quad-rotor rotorcraft.
Journal of Zhejiang University, Science A, 9(4):539–545.
- Mian, A. A. y Wang, D. (2008b).
Modeling and backstepping-based nonlinear control strategy for a 6 dof quadrotor helicopter.
Chinese Journal of Aeronautics, 21:261–268.
- Mian, A. A. y Wang, D. (2008c).
Nonlinear flight control strategy for an underactuated quadrotor aerial robot.
In *Proceedings of the IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control (ICNSC 2008)*, pages 938–942, Sanya, Hainan, China.
- Munson, K. y Wood, J. W. (1968).
Helicopters and other Rotorcraft since 1907.
Blandford Press, London, UK.
- Naidu, D. S. y Calise, A. J. (2001).
Singular perturbations and time scales in guidance and control of aerospace systems: A survey.
Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 24(6):1057–1070.
- NIMA TR8350.2 Third Edition (2000).
Its definition and relationships with local geodetic systems.
Technical report, National Imagery and Mapping Agency: Department of Defense World Geodetic System 1984.
- Önkol, M. y Önder Efe, M. (2009).
Experimental model based nonlinear control algorithms for a quadrotor unmanned vehicle.
In *2nd International Symposium on Unmanned Aerial Vehicles*, Reno, Nevada, USA.
- Ollero, A., Hommel, G., Gancet, J., Gutierrez, L. G., Viegas, D. X., Wiklund, J., y González, M. A. (2004).
COMETS: A multiple heterogeneous UAV system.
In *Proceedings of the IEEE International Workshop on Safety, Security and Rescue Robotics (SSRR 2004)*, volume 2, Bonn, Germany.

- Ollero, A. y Merino, L. (2004).
Control and perception techniques for aerial robotics.
Annual Reviews in Control, 28(2):167–178.
- Orsag, M. y Bogdan, S. (2009).
Hybrid control of quadrotor.
In *Proceedings of the IEEE 17th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2009)*, pages 1239–1244, Makedonia Palace, Thessaloniki, Greece.
- Panteley, E. y Loria, A. (1998).
On global uniform asymptotic stability of nonlinear time-varying systems in cascade.
Systems & Control Letters, 33:131–138.
- Panteley, E. y Loria, A. (2001).
Growth rate conditions for uniform asymptotic stability of cascaded time-varying systems.
Automatica, 37:453–460.
- Pavlis, N. K., Holmes, S. A., Kenyon, S. C., y Factor, J. K. (2008a).
An earth gravitational model to degree 2160: EGM2008.
Geophysical Research Abstracts, 10, EGU2008-A-01891.
- Pavlis, N. K., Holmes, S. A., Kenyon, S. C., y Factor, J. K. (2008b).
An earth gravitational model to degree 2160: EGM2008.
In *5th General Assembly of the European Geosciences Union*, Vienna, Austria.
- Perez, T. y Fossen, T. I. (2007).
Kinematic models for manoeuvring and seakeeping of marine vessels.
Journal of Modeling, Identification and Control, 28(1):19–30.
- Philippe, M. y Erwan, S. (2010).
The true role of accelerometer feedback in quadrotor control.
In *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 1623–1629, Anchorage, Alaska.
- Phillips, W. F., Hailey, C. E., y Gebert, G. A. (2001).
Review of attitude representations used for aircraft kinematics.
Journal of Aircraft, 38(4):718–737.
- Phillips, W. F., Hailey, C. E., y Gebert, G. A. (2003).
Errata: Review of attitude representations used for aircraft kinematics.
Journal of Aircraft, 40(1):223.
- Pounds, P., Mahony, R., y Corke, P. (2006).
Modelling and control of a quad-rotor robot.
In *Proceedings of the Australasian Conference on Robotics and Automation*, Auckland, New Zealand.
- Pounds, P., Mahony, R., y Corke, P. (2010).
Modelling and control of a large quadrotor robot.
Control Engineering Practice, 18:691–699.
- Pounds, P., Mahony, R., Gresham, J., Corke, P., y Roberts, J. (2004).
Towards dynamically-favourable quad-rotor aerial robots.
In *Proceedings of the Australasian Conference on Robotics and Automation*, Canberra, Australia.
- Pounds, P., Mahony, R., Hynes, P., y Roberts, J. (2002).
Design of a four-rotor aerial robot.
In *Proceedings of the Australasian Conference on Robotics and Automation*, pages 145–150, Auckland, New Zealand.

- Prouty, R. (1986).
Helicopter Performance, Stability, and Control.
Krieger Publishing Company, Boston.
- Queiroz, M. S. D., Dawson, D. M., Nagarkatti, S. P., y Zhang, F. (2000).
Lyapunov-Based Control of Mechanical Systems.
Birkhäuser Boston.
- Rabinovich, M. I. y Fabrikant, A. L. (1979).
Stochastic self-modulation of waves in nonequilibrium media.
Journal of Experimental and Theoretical Physics (JETP), 77:617–629.
- Raffo, G. V., Ortega, M. G., y Rubio, F. R. (2008).
Backstepping/nonlinear H_∞ control for path tracking of a quadrotor unmanned aerial vehicle.
In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 3356–3361, Westin Seattle Hotel, Seattle, Washington, USA.
- Saberi, A. y Khalil, H. K. (1984).
Quadratic-type Lyapunov functions for singularly perturbed systems.
IEEE Transactions on Automatic Control, AC-29(6):542–550.
- Santana, P. y Barata, J. (2005).
Unmanned helicopters applied to humanitarian demining.
In *Proceedings of 10th IEEE Conference on Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA 2005)*, volume 1, pages 729–738, Catania, Italy.
- Sciavicco, L. y Siciliano, B. (2000).
Modeling and control of robot manipulator.
Springer-Verlag, London, UK, second edition.
- Shuster, M. D. y Markley, F. L. (2003).
Generalization of the euler angles.
The Journal of the Astronautical Sciences, 51(2):123–132.
- Siciliano, B. (1990a).
A closed-loop inverse kinematic scheme for on-line joint-based robot control.
Robotica, 8(3):231–243.
- Siciliano, B. (1990b).
Kinematic control of redundant robot manipulators: A tutorial.
Journal of Intelligent & Robotic Systems, 3(3):201–212.
- Simulink 7: Writing S-Functions (2007).
Writing S-Functions.
Technical report, The Mathworks Inc., Natick, USA.
www.mathworks.com.
- Skrzypietz, T. (2012).
Unmanned aircraft systems for civilian missions.
Brandenburg Institute for Society and Security, 1:1–28.
- Smith, D. R. (2009).
Singular-Perturbation Theory: An Introduction with Applications.
Cambridge University Press.
- Spanoudakis, P., Doitsidis, L., Tsourveloudis, N. C., y Valavanis, K. P. (2003).
The market for VTOL-UAVs.
Unmanned Systems Magazine, 18(25):14–18.

- Su, S. W., Anderson, B. D. O., y Brinsmead, T. S. (2001).
Constant disturbance suppression for nonlinear systems design using singular perturbation theory.
In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 3272–3277, Orlando, Florida, USA.
- Tayebi, A. y McGilvray, S. (2004).
Attitude stabilization of a four-rotor aerial robot.
In *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1216–1221, Atlantis Paradise Islands, Bahamas.
- Tayebi, A. y McGilvray, S. (2006).
Attitude stabilization of a VTOL quadrotor aircraft.
IEEE Transactions on Control Systems Technology, 14(3):562–571.
- Tomlin, C. J. y Sastry, S. S. (1996).
Bounded tracking for nonminimum phase nonlinear systems with fast zero dynamics.
In *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 2058–2063, Kobe, Japan.
- Torres-Sánchez, J., López-Granados, F., Isabel, D. C. A., y Peña Barragán, J. M. (2013).
Configuration and specifications of an unmanned aerial vehicle (uav) for early site specific weed management.
PLoS ONE, 8:1–15.
- Warwick, G. y Norris, G. (2008).
DARPA at 50: Blue sky thinking; DARPA is 50 years old and still looking 20 years into the future.
Aviation Week & Space Technology, 18(25):1–19.
- Weng, K. W. y Abidin, M. S. B. Z. (2006).
Design and control of a quad-rotor flying robot for aerial surveillance.
In *Proceedings of 4th Student Conference on Research and Development (SCOReD 2006)*, pages 173–177, Selangor, Malaysia.
- Xu, F., Zhaoying, Z., Wei, X., y Qi, G. (2008).
MEMS-based low-cost flight control system for small UAVs.
Tsinghua Science and Technology, 13(5):614–618.
- Yurkevich, V. D. (2006).
PID controller design for nonlinear systems based on two-time-scale motions.
In *8th International Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE 2006)*, pages 251–258, Novosibirsk, Russia.
- Yurkevich, V. D. (2008).
PI and PID controller design for nonlinear systems in the presence of a time delay via singular perturbation technique.
In *9th International Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE 2008)*, pages 168–174, Novosibirsk, Russia.
- Yurkevich, V. D. (2009).
Adaptive gain tuning in nonlinear control systems designed via singular perturbation technique.
In *Proceedings of the 18th IEEE International Conference on Control Applications; Part of 2009 IEEE Multi-Conference on Systems and Control*, pages 37–42, Saint Petersburg, Russia.
- Zhang, T., Kang, Y., Actelik, M., Kühnlénz, K., y Buss, M. (2009).
Autonomous hovering of a vision/IMU guided quadrotor.
In *Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA 2009)*, pages 2870–2875, Changchun, China.
- Zill, D. G. y Cullen, M. R. (2006).
Advanced Engineering Mathematics.
Jones and Bartlett Learning, Sudbury, MA, third edition.

Apéndice A

Resumen de propiedades y cálculos

A.1. Producto Cruz

De acuerdo a Liu y Trenkler (2008) (Subsección 3.7), el producto cruz de los vectores $\Theta, \bar{\Theta} \in \mathbb{R}^3$, puede ser expresado mediante

$$\Theta \times \bar{\Theta} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \Theta_1 & \Theta_2 & \Theta_3 \\ \bar{\Theta}_1 & \bar{\Theta}_2 & \bar{\Theta}_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_2 \bar{\Theta}_3 - \Theta_3 \bar{\Theta}_2 \\ \Theta_3 \bar{\Theta}_1 - \Theta_1 \bar{\Theta}_3 \\ \Theta_1 \bar{\Theta}_2 - \Theta_2 \bar{\Theta}_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (\text{A.1})$$

$$\Theta \times \bar{\Theta} = \mathcal{S}(\Theta) \bar{\Theta} \in \mathbb{R}^3, \quad (\text{A.2})$$

donde

$$\mathcal{S}(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 & -\Theta_3 & \Theta_2 \\ \Theta_3 & 0 & -\Theta_1 \\ -\Theta_2 & \Theta_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad (\text{A.3})$$

siendo $\mathcal{S}(\odot)$ la matriz tornillo simétrica del vector \odot . Algunas propiedades del producto cruz se muestran en Zill y Cullen (2006) (Definición 7.4) y Liu y Trenkler (2008) (Teorema 11), estas son

P.1.- $\Theta \times \Theta = \mathcal{S}(\Theta) \Theta = \mathbf{0}$

P.2.- $\Theta \times \bar{\Theta} = -\bar{\Theta} \times \Theta = \mathcal{S}(\Theta) \bar{\Theta} = -\mathcal{S}(\Theta)^T \bar{\Theta} = -\mathcal{S}(\bar{\Theta}) \Theta = \mathcal{S}(\bar{\Theta})^T \Theta$

P.3.- $d(\Theta \times \bar{\Theta}) = (d\Theta) \times \bar{\Theta} = \Theta \times (d\bar{\Theta})$

P.4.- $\Theta \times (\bar{\Theta} \times \hat{\Theta}) \neq (\Theta \times \bar{\Theta}) \times \hat{\Theta}$

P.5.- $\Theta \times (\bar{\Theta} \times \hat{\Theta}) = \mathcal{S}(\Theta) \mathcal{S}(\bar{\Theta}) \hat{\Theta}$ *Identidad de Grassman*

P.6.- $(\Theta \times \bar{\Theta}) \times \hat{\Theta} = (\mathcal{S}(\Theta) \bar{\Theta}) \times \hat{\Theta} = \mathcal{S}(\mathcal{S}(\Theta) \bar{\Theta}) \hat{\Theta} = -(\bar{\Theta} \times \Theta) \times \hat{\Theta} = -\mathcal{S}(\mathcal{S}(\bar{\Theta}) \Theta) \hat{\Theta}$

P.7.- $\Theta \times (\Theta \times \bar{\Theta}) = \mathcal{S}(\Theta)^2 \bar{\Theta}$

P.8.- $\Theta \times (\bar{\Theta} \times \hat{\Theta}) + \bar{\Theta} \times (\hat{\Theta} \times \Theta) + \hat{\Theta} \times (\Theta \times \bar{\Theta}) = \mathbf{0}$ *Identidad de Jacobi*

P.9.- $\mathcal{S}(\Theta) = -\mathcal{S}(\Theta)^T = \mathcal{S}(-\Theta)^T$

P.10.- $\mathcal{S}(\Theta) \bar{\Theta} = -\mathcal{S}(\Theta)^T \bar{\Theta} = -\mathcal{S}(\bar{\Theta}) \Theta = \mathcal{S}(\bar{\Theta})^T \Theta$

P.11.- $\mathcal{S}(\Theta) + \mathcal{S}(\Theta)^T = \mathbf{0}$

P.12.- $\mathcal{S}(d\Theta) = d \mathcal{S}(\Theta)$

P.13.- $|\mathcal{S}(\Theta)| = 0$

P.14.- $\mathcal{S}(\Theta) + \mathcal{S}(\bar{\Theta}) = \mathcal{S}(\Theta + \bar{\Theta})$

donde $\Theta, \bar{\Theta}$ y $\hat{\Theta} \in \mathbb{R}^3$ y d es un escalar. A partir de las propiedades básicas anteriormente mencionadas, se plantean un conjunto de propiedades que son de utilidad en lo respectivo al proceso de modelado dinámico. El

resumen de estas, se enuncia a continuación:

Al evaluar $\hat{\Theta} = \bar{\Theta} \times \Theta$ en la propiedad P.8 y extender propiedades básicas, es posible deducir

$$\text{P.15.- } \Theta \times (\bar{\Theta} \times (\bar{\Theta} \times \Theta)) = -\bar{\Theta} \times (\Theta \times (\Theta \times \bar{\Theta})) = \mathcal{S}(\Theta) \mathcal{S}(\bar{\Theta})^2 \Theta = -\mathcal{S}(\bar{\Theta}) \mathcal{S}(\Theta)^2 \bar{\Theta}$$

De P.10, se dice que

$$\text{P.16.- } \mathcal{S}(\Theta) \mathcal{S}(\bar{\Theta}) = \mathcal{S}(\Theta)^T \mathcal{S}(\bar{\Theta})^T = [\mathcal{S}(\bar{\Theta}) \mathcal{S}(\Theta)]^T$$

Considerando una matriz $\Xi \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, es posible verificar que

$$\text{P.17.- } (\Xi \Theta) \times (\Xi \bar{\Theta}) = \text{adj}(\Xi)^T (\Theta \times \bar{\Theta}) \rightarrow \mathcal{S}(\Xi \Theta) \Xi = |\Xi| \Xi^{-T} \mathcal{S}(\Theta),$$

donde $\text{adj}(\Xi) = |\Xi| \Xi^{-1}$ representa la adjunta de Ξ . Además, mediante los cambios de variable $\Xi \rightarrow \Xi^T$ y $\Xi \rightarrow \Xi^{-T}$ en la definición de P.17, se obtiene el conjunto de igualdades

$$\text{P.18.- } \mathcal{S}(|\Xi|^{-1} \Xi \Theta) = \Xi^{-T} \mathcal{S}(\Theta) \Xi^{-1}$$

$$\text{P.19.- } \mathcal{S}(|\Xi|^{-1} \Xi^T \Theta) = \Xi^{-1} \mathcal{S}(\Theta) \Xi^{-T}$$

$$\text{P.20.- } \mathcal{S}(|\Xi|^{-1} \Xi^{-T} \Theta) = \Xi \mathcal{S}(\Theta) \Xi^T$$

A.2. Espacios Ortogonales

Considerando una matriz $\Xi \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, se dice que $\Xi \in OS(3)$ (grupo especial ortogonal de orden 3) si cumple con las propiedades

$$\text{P.21.- } |\Xi| = 1$$

$$\text{P.22.- } \Xi^{-1} = \Xi^T$$

A partir de las cuales se define que

$$\text{P.23.- } \Xi \Xi^T = I_3$$

$$\text{P.24.- } \frac{d}{dt} [\Xi \Xi^T] = \Xi \dot{\Xi}^T + [\Xi \dot{\Xi}^T]^T = \mathbf{0}$$

Comparando las las propiedades P.11 y P.24, se concluye que

$$\text{P.25.- } \dot{\Xi} = \mathcal{S}(\Theta)^T \Xi$$

Ahora bien, si se considera que la matriz $\Xi := \Xi(\alpha)$ es funcionalmente dependiente de un parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ y satisface la igualdad $\Xi(\alpha) = \Xi(\alpha)^T$. Adicionalmente, si el vector es ortonormal $\Theta(\dot{\alpha}) := \dot{\alpha} \hat{e}_i \in \mathbb{R}^3$ describe la tasa de cambio de α , donde \hat{e}_i representa la notación para vectores base con $i = 1, 2, 3$. Entonces la propiedad P.25 se reduce en $\dot{\Xi}(\alpha, \dot{\alpha}) = \mathcal{S}(\Theta(\dot{\alpha}))^T \Xi(\alpha) \equiv \dot{\Xi}(-\alpha, -\dot{\alpha})^T = [\mathcal{S}(-\Theta(\dot{\alpha}))^T \Xi(-\alpha)]^T$, y al extender la propiedad P.9 se tiene que

$$\text{P.26.- } \dot{\Xi}(\alpha, \dot{\alpha}) = \mathcal{S}(\Theta(\dot{\alpha}))^T \Xi(\alpha) = \Xi(\alpha) \mathcal{S}(\Theta(\dot{\alpha}))^T$$

Mientras que el conjunto de propiedades P.18-P.20 se simplifican a la forma

$$\text{P.27.- } \mathcal{S}(\Xi \Theta) = \Xi \mathcal{S}(\Theta) \Xi^T$$

$$\text{P.28.- } \mathcal{S}(\Xi^T \Theta) = \Xi^T \mathcal{S}(\Theta) \Xi$$

aplicando traspuesta a la igualdad P.27, se obtiene

$$\text{P.29.- } \mathcal{S}(\Xi \Theta)^T = \Xi \mathcal{S}(\Theta)^T \Xi^T$$

A.3. Derivadas temporales de la orientación deseada

Definición explícita de $\dot{\phi}_d$, $\ddot{\phi}_d$, $\dot{\theta}_d$ y $\ddot{\theta}_d$. Para simplificar el cálculo, primero se redefine la expresión de la orientación deseada en

$$\boldsymbol{\eta}_d = [\phi_d \quad \theta_d \quad \psi_d]^T = \left[\arctan\left(\frac{u_1}{s_1}\right) \quad \arctan\left(\frac{u_2}{s_2}\right) \quad \psi_d \right]^T,$$

donde

$$\begin{aligned} u_1 &= s_{\psi_d} \bar{\mu}_1 - c_{\psi_d} \bar{\mu}_2, \\ s_1 &= \sqrt{s_2^2 + u_2^2}, \\ u_2 &= c_{\psi_d} \bar{\mu}_1 + s_{\psi_d} \bar{\mu}_2, \\ s_2 &= \bar{\mu}_3, \end{aligned}$$

siendo $s_{\psi_d} = \sin(\psi_d)$ y $c_{\psi_d} = \cos(\psi_d)$. Para calcular las derivadas temporales de ϕ_d y θ_d , se parte de una estructura de la forma

$$\varphi = \arctan\left(\frac{u_i}{s_i}\right),$$

siendo entonces su primera y segunda derivada temporal descrita en

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \varphi \\ \frac{d^2}{dt^2} \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s_i \dot{u}_i - u_i \dot{s}_i}{u_i^2 + s_i^2} \\ \frac{[u_i^2 + s_i^2][s_i \ddot{u}_i - u_i \ddot{s}_i] - 2[s_i \dot{u}_i - u_i \dot{s}_i][u_i \dot{u}_i + s_i \dot{s}_i]}{[u_i^2 + s_i^2]^2} \end{bmatrix},$$

donde para el término u_i se dice que

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \ddot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{\psi_d} \dot{\bar{\mu}}_1 - c_{\psi_d} \dot{\bar{\mu}}_2 + [c_{\psi_d} \bar{\mu}_1 + s_{\psi_d} \bar{\mu}_2] \dot{\psi}_d, \\ s_{\psi_d} \ddot{\bar{\mu}}_1 - c_{\psi_d} \ddot{\bar{\mu}}_2 + 2[c_{\psi_d} \dot{\bar{\mu}}_1 + s_{\psi_d} \dot{\bar{\mu}}_2] \dot{\psi}_d + [c_{\psi_d} \bar{\mu}_1 + s_{\psi_d} \bar{\mu}_2] \ddot{\psi}_d \\ c_{\psi_d} \dot{\bar{\mu}}_1 + s_{\psi_d} \dot{\bar{\mu}}_2 + [-s_{\psi_d} \bar{\mu}_1 + c_{\psi_d} \bar{\mu}_2] \dot{\psi}_d \\ c_{\psi_d} \ddot{\bar{\mu}}_1 + s_{\psi_d} \ddot{\bar{\mu}}_2 + 2[-s_{\psi_d} \dot{\bar{\mu}}_1 + c_{\psi_d} \dot{\bar{\mu}}_2] \dot{\psi}_d + [-s_{\psi_d} \bar{\mu}_1 + c_{\psi_d} \bar{\mu}_2] \ddot{\psi}_d \end{bmatrix},$$

mientras que para el término s_i se tiene que

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \ddot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \ddot{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{[s_2 \dot{s}_2 + u_2 \dot{u}_2]}{s_1} \\ \frac{s_1^2 [s_2 \ddot{s}_2 + u_2 \ddot{u}_2 + \dot{s}_2^2 + \dot{u}_2^2] - [s_2 \dot{s}_2 + u_2 \dot{u}_2]^2}{s_1^3} \\ \dot{\bar{\mu}}_3 \\ \ddot{\bar{\mu}}_3 \end{bmatrix}.$$

Se omite presentar el cálculo de las derivadas temporales de ψ_d , dado que se asumen como poco laboriosos.

