



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO  
DE TECNOLOGÍA DIGITAL

MODELADO Y CONTROL DE UN  
VEHÍCULO AÉREO NO TRIPULADO CON  
VALIDACIÓN EXPERIMENTAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
**Maestría en Ciencias de Sistemas Digitales**

PRESENTA:

**Oscar Rodrigo Garduño Delgadillo**



DIRECTOR DE TESIS:  
Dr. Eduardo Javier Moreno Valenzuela  
Dr. Ricardo Ramón Pérez Alcocer

Tijuana, Baja California, Noviembre 2016



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

## SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

### ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de Tijuana, B.C. siendo las 12:00 horas del día 04 del mes de octubre del 2016 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CITEDI para examinar la tesis titulada:

**Modelado y control de un vehículo aéreo no tripulado con validación experimental**

Presentada por el alumno:

**GARDUÑO**

Apellido paterno

**DELGADILLO**

Apellido materno

**OSCAR RODRIGO**

Nombre(s)

Con registro:

B	1	4	0	5	0	7
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

**MAESTRÍA EN CIENCIAS EN SISTEMAS DIGITALES**

Después de intercambiar opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA  
Directores de tesis

DR. EDUARDO JAVIER MORENO VALENZUELA

DR. RICARDO RAMÓN PÉREZ ALCOCER

DR. VÍCTOR HUGO DÍAZ RAMÍREZ

DR. JUAN JOSÉ TAPIA ARMENTA

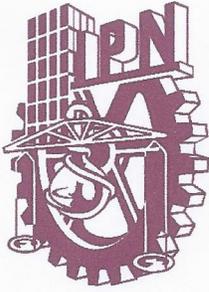
DR. ROGER MIRANDA COLORADO

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

DR. JULIO CÉSAR ROLÓN GARRIDO



S.E.P.  
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO  
DE TECNOLOGÍA DIGITAL  
DIRECCIÓN



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

**CARTA CESIÓN DE DERECHOS**

En la Ciudad de Tijuana, Baja California, el día 04 del mes octubre del año 2016, el que suscribe

Oscar Rodrigo Garduño Delgadillo alumno del Programa de MAESTRÍA EN CIENCIAS EN SISTEMAS DIGITALES con número de registro B140507, adscrito al CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO DE TECNOLOGÍA DIGITAL, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Eduardo Javier Moreno Valenzuela y el Dr. Ricardo Ramón Pérez Alcocer, cede los derechos del trabajo titulado Modelado y control de un vehículo aéreo no tripulado con validación experimental, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección Av. Instituto Politécnico Nacional 1310, Colonia Nueva Tijuana, Tijuana, Baja California 22435, México, o a la dirección electrónica: [oscar2307m@gmail.com](mailto:oscar2307m@gmail.com) y [posgrado@citedi.mx](mailto:posgrado@citedi.mx) . Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Oscar Rodrigo Garduño Delgadillo



# Dedicatoria

---

*A las personas que siempre me han apoyado, a mis padres Claudia y Luciano, que a pesar de la distancia han estado cerca y dando lo que más se necesita para cumplir el objetivo, su apoyo.*

*Mis hermanos Erika y Uzziel, y a mi abuelo Ricardo que me han estado apoyando a su manera.*

*A mis amigos de la universidad, Diego y Mauricio.*

*Mis compañeros y amigos del CITEDI que hemos compartido esta experiencia juntos desde las pequeñas tareas hasta la escritura de la tesis.*

*Con un especial cariño a mi tío Alejandro Delgadillo Robledo.*

*Es gracias a ustedes que es posible el presente trabajo.*



# Agradecimientos

---

A mi director de tesis, Dr. Ricardo Pérez Alcocer, por compartir sus conocimientos y acompañarme a lo largo de este trabajo de tesis, al Dr. Javier Moreno Valenzuela, por permitirme ser parte de su equipo de trabajo y a los integrantes del comité tutorial: Dr. Roger Miranda, Dr. Víctor Díaz y al Dr. Juan Tapia por su valiosa colaboración.

Sobre todo a mis padres que siempre han apoyado con todo lo que han podido.

Al CONACyT y al IPN por el apoyo económico otorgado.



# Modelado y control de un vehículo aéreo no tripulado con validación experimental

---

## Resumen

La investigación que se presenta en este trabajo aborda el problema de estabilización de un vehículo aéreo no tripulado de cuatro rotores para el seguimiento de una trayectoria utilizando controladores Proporcional Integral Derivativo, controlador por backstepping y basado en modelo. El vehículo es un sistema que posee seis grados de libertad y es controlado mediante cuatro motores eléctricos. El objetivo de control es resolver el problema de regulación y seguimiento de trayectorias. Se obtuvo el modelo dinámico mediante los métodos de Euler-Lagrange y las ecuaciones de Kirchhoff. Se realizaron simulaciones numéricas de cada controlador y se implementaron en la plataforma experimental. Al final se realizó una comparativa de los controladores estudiados corroborando los resultados teóricos con los prácticos.

# Modeling and control of an unmanned aerial vehicle with experimental validation

---

## **Abstract**

The research presented in this thesis addresses the problem of stabilization of an unmanned aerial vehicle which is equipped with four rotors. Specifically, regulation and tracking of time varying commands are achieved by using technics such as Proportional-Integral-Derivative control, backstepping control, and model-based control. The vehicle is a system that has six degrees of freedom and is controlled by four electric motors. The addressed control problems are regulation and trajectory tracking. The dynamic model was obtained by the Euler-Lagrange approach and Kirchhoff equations. Numerical simulations were performed for each controller. Besides, real-time implementations were achieved in an experimental platform. A study on the performance of the tested controllers is also given, which support the theoretical results.

# Índice general

---

Índice de figuras	XII
Índice de tablas	XVII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes	1
1.2. Objetivos	2
1.2.1. Objetivo general	2
1.2.2. Objetivos específicos	2
1.3. Motivación	3
1.4. Planteamiento del problema	3
1.5. Metodología	3
1.6. Contribuciones	3
1.7. Estructura de la tesis	4
<b>2. Modelo dinámico</b>	<b>5</b>
2.1. Método de Euler-Lagrange	5
2.2. Modelo dinámico del cuadrirotor empleando ecuaciones de Kirchhoff.	8
2.3. Aerodinámica del cuadrirotor	10
2.4. Plataforma QBall 2 de Quanser	13
<b>3. Controlador PID/PD</b>	<b>16</b>
3.1. Simulación numérica del controlador PID/PD	17
3.1.1. Regulación	17
3.1.2. Seguimiento de trayectoria	20
3.2. Controlador PID en la plataforma experimental	22
3.2.1. Regulación	22
3.2.2. Seguimiento de trayectorias que generan una circunferencia	25
3.2.3. Prueba experimental de seguimiento de trayectoria curva lemniscata.	32
<b>4. Controlador de linealización por retroalimentación con <i>backstepping</i></b>	<b>36</b>
4.1. Simulación numérica del controlador <i>Backstepping</i>	38
4.1.1. Regulación	38
4.1.2. Seguimiento de trayectoria	40
4.2. Controlador por <i>backstepping</i> en la plataforma experimental	42
4.2.1. Regulación	42
4.2.2. Seguimiento de trayectorias que generan una circunferencia	45

4.2.3. Prueba experimental de seguimiento de trayectorias que genera una curva de lemniscata. . . . .	51
<b>5. Controlador Basado en Modelo</b>	<b>55</b>
5.1. Simulación numérica del controlador basado en modelo . . . . .	60
5.1.1. Regulación . . . . .	60
5.1.2. Seguimiento de trayectoria . . . . .	62
5.2. Controlador basado en modelo en la plataforma experimental . . . . .	64
5.2.1. Regulación . . . . .	64
5.2.2. Seguimiento de trayectorias que generan una circunferencia . . . . .	67
5.2.3. Prueba experimental de seguimiento de trayectoria lemniscata. . . . .	73
<b>6. Análisis comparativo de los resultados obtenidos</b>	<b>77</b>
6.1. Regulación . . . . .	77
6.2. Seguimiento de trayectoria de circunferencia . . . . .	80
6.3. Trayectoria lemniscata . . . . .	85
<b>7. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>87</b>
7.1. Conclusiones . . . . .	87
7.1.1. Trabajo Futuro . . . . .	88
<b>Bibliografía</b>	<b>89</b>

# Índice de figuras

---

2.1.	Representación del cuadrirotor incluyendo el marco de referencia inercial $E$ y el marco de referencia del vehículo $B$ . . . . .	6
2.2.	Entradas de control del cuadrirotor. . . . .	11
2.3.	Combinación de movimientos del cuadrirotor. . . . .	12
2.4.	Quanser Qball 2. . . . .	13
2.5.	Diagrama del sistema. . . . .	14
3.1.	Estructura del controlador PID/PD para el cuadrirotor. . . . .	17
3.2.	Diagrama a bloques general de la programación en <i>Simulink</i> y animación del ambiente tridimensional. . . . .	18
3.3.	<b>Resultados en simulación:</b> Gráficas de la posición $\mathbf{p}(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}(t)$ en regulación empleando el controlador PID/PD descrito en (3.3)-(3.6). . . . .	19
3.4.	<b>Resultados en simulación:</b> Gráficas del error en la tarea de regulación empleando el controlador PID/PD descrito en (3.3)-(3.6). . . . .	20
3.5.	<b>Resultados en simulación:</b> Gráficas del seguimiento de trayectoria en $\mathbf{p}(t)$ y $\boldsymbol{\eta}(t)$ empleando el controlador PID/PD descrito en (3.3)-(3.6). . . . .	21
3.6.	<b>Resultados en simulación:</b> Gráficas del error en la tarea de seguimiento de trayectoria empleando el controlador PID/PD descrito en (3.3)-(3.6). . . . .	21
3.7.	<b>Resultados experimentales:</b> Movimiento realizado por el cuadrirotor Quanser QBall 2 durante la tarea de regulación. . . . .	23
3.8.	<b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de la posición $\mathbf{p}(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}(t)$ en regulación y señales de referencia de posición $\mathbf{p}_d(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ durante la tarea de regulación empleando el esquema de control PID/PD en (3.3)-(3.6). . . . .	23
3.9.	<b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de las señales de error de posición $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ y orientación $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$ obtenidas durante la tarea de regulación asignado al cuadrirotor Quanser QBall 2 empleando el controlador PID/PD presentado en (3.3)-(3.6) . . . . .	24
3.10.	<b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de la fuerza generada por cada rotor del vehículo durante la tarea de regulación empleando el controlador PID/PD presentado en (3.3)-(3.6). . . . .	25
3.11.	Ruta a baja velocidad realizada por el cuadrirotor Quanser QBall 2, utilizando el controlador PID/PD 3.3- 3.6. . . . .	26
3.12.	<b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de la posición $\mathbf{p}(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}(t)$ y señales de referencia de posición $\mathbf{p}_d(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ durante la tarea de seguimiento de trayectoria que da lugar a una circunferencia empleando el esquema de control PID/PD en (3.3)-(3.6). . . . .	26

3.13. <b>Resultados experimentales:</b> Gráficas del error de posición $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ y orientación $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$ durante el experimento de seguimiento de trayectorias que da lugar a una circunferencia empleando el controlador PID/PD presentado en (3.3)-(3.6). . . . .	27
3.14. <b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de fuerza generada por cada rotor del vehículo durante la tarea de seguimiento de trayectorias que describe una circunferencia a baja velocidad. . . . .	28
3.15. Ruta a alta velocidad realizada por el cuadrirotor Quanser QBall 2, utilizando el controlador PID/PD 3.3- 3.6. . . . .	29
3.16. <b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de la posición $\mathbf{p}(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}(t)$ y señales de referencia de posición $\mathbf{p}_d(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ durante la tarea de seguimiento de trayectoria empleando el esquema de control PID/PD en (3.3)-(3.6). . . . .	30
3.17. <b>Resultados experimentales:</b> Gráficas del error de posición $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ y orientación $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$ durante el experimento de seguimiento de trayectorias que da lugar a una circunferencia de alta velocidad empleando el controlador PID/PD presentado en (3.3)-(3.6). . . . .	31
3.18. <b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de la fuerza generada por cada rotor del vehículo durante la tarea de seguimiento de trayectorias que describe una circunferencia a alta velocidad. . . . .	32
3.19. Trayectoria lemniscata realizada con el cuadrirotor Quanser QBall 2. . . . .	33
3.20. <b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de la posición $\mathbf{p}(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}(t)$ y señales de referencia de posición $\mathbf{p}_d(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ durante la tarea de seguimiento de trayectoria lemniscata empleando el esquema de control PID/PD en (3.3)-(3.6). . . . .	33
3.21. <b>Resultados experimentales:</b> Gráficas del error de posición $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ y orientación $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$ durante el experimento de seguimiento de trayectorias que da lugar a una ruta lemniscata empleando el controlador PID/PD presentado en (3.3)-(3.6). . . . .	34
3.22. <b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de fuerza generada por cada rotor del vehículo durante la tarea de seguimiento de trayectorias que describe una lemniscata. . . . .	35
4.1. Estructura del controlador <i>backstepping</i> . . . . .	36
4.2. <b>Resultados de simulación:</b> Gráficas de la posición $\mathbf{p}(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}(t)$ en regulación empleando el controlador <i>backstepping</i> descrito en (4.9)-(4.12). . . . .	39
4.3. <b>Resultados en simulación:</b> Gráficas del error en la tarea de regulación empleando el controlador <i>backstepping</i> descrito en (4.9)-(4.12). . . . .	39
4.4. <b>Resultados en simulación:</b> Gráficas del seguimiento de trayectoria en $\mathbf{p}(t)$ y $\boldsymbol{\eta}(t)$ empleando el controlador <i>backstepping</i> descrito en (4.9)-(4.12). . . . .	41
4.5. <b>Resultados en simulación</b> Gráficas del error en la tarea de seguimiento de trayectoria empleando el controlador <i>backstepping</i> descrito en (4.9)-(4.12). . . . .	41
4.6. <b>Resultados experimentales:</b> Movimiento realizado por el cuadrirotor Quanser QBall 2 durante la tarea de regulación. . . . .	43
4.7. <b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de la posición $\mathbf{p}(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}(t)$ en regulación y señales de referencia de posición $\mathbf{p}_d(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ durante la tarea de regulación empleando el esquema de control <i>backstepping</i> en (4.9)-(4.12). . . . .	43
4.8. <b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de las señales de error de posición $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ y orientación $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$ obtenidas durante la tarea de regulación asignado al cuadrirotor Quanser QBall 2 empleando el controlador <i>backstepping</i> presentado en (4.9)-(4.12) . . . . .	44
4.9. <b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de fuerza $f_i(t)$ de cada motor del cuadrirotor. . . . .	45

4.10. Trayectoria de la circunferencia a baja velocidad realizada con el cuadrirotor Quanser QBall 2. . . . .	46
4.11. <b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de la posición $\mathbf{p}(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}(t)$ y señales de referencia de posición $\mathbf{p}_d(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ durante la tarea de seguimiento de trayectoria empleando el esquema de control <i>backstepping</i> en (4.9)-(4.12). . . . .	46
4.12. <b>Resultados experimentales:</b> Gráficas del error de posición $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ y orientación $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$ durante el experimento de seguimiento de trayectorias que da lugar a una circunferencia empleando el controlador <i>backstepping</i> presentado en (4.9)-(4.12). . . . .	47
4.13. <b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de fuerza generada por cada rotor del vehículo durante la tarea de seguimiento de trayectorias que describe una circunferencia a alta velocidad. . . . .	48
4.14. Trayectoria de la circunferencia a alta velocidad realizada con el cuadrirotor Quanser QBall 2. . . . .	49
4.15. <b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de la posición $\mathbf{p}(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}(t)$ y señales de referencia de posición $\mathbf{p}_d(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ durante la tarea de seguimiento de trayectoria empleando el esquema de control <i>backstepping</i> en (4.9)-(4.12). . . . .	49
4.16. <b>Resultados experimentales:</b> Gráficas del error de posición $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ y orientación $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$ durante el experimento de seguimiento de trayectorias que da lugar a una circunferencia de alta velocidad empleando el controlador <i>backstepping</i> presentado en (4.9)-(4.12). . . . .	50
4.17. <b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de fuerza de cada motor del cuadrirotor. . . . .	51
4.18. Trayectoria Lemniscata realizada con el cuadrirotor Quanser QBall 2. . . . .	52
4.19. <b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de la posición $\mathbf{p}(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}(t)$ y señales de referencia de posición $\mathbf{p}_d(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ durante la tarea de seguimiento de trayectoria Lemniscata empleando el esquema de control <i>backstepping</i> en (4.9)-(4.12). . . . .	52
4.20. <b>Resultados experimentales:</b> Gráficas del error de posición $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ y orientación $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$ durante el experimento de seguimiento de trayectorias que da lugar a una ruta lemniscata empleando el controlador <i>backstepping</i> presentado en (4.9)-(4.12). . . . .	53
4.21. <b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de fuerza $f_i(t)$ generada por cada motor del cuadrirotor. . . . .	54
5.1. Estructura del controlador basado en modelo. . . . .	55
5.2. <b>Resultados de Simulación:</b> Gráficas de la posición $\mathbf{p}(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}(t)$ en regulación empleando el controlador basado en modelo (5.1) y (5.18). . . . .	61
5.3. <b>Resultados en simulación:</b> Gráficas del error en la tarea de regulación empleando el controlador basado en modelo (5.1) y (5.18). . . . .	62
5.4. <b>Resultados en simulación:</b> Gráficas del seguimiento de trayectoria en $\mathbf{p}(t)$ y $\boldsymbol{\eta}(t)$ empleando el controlador basado en modelo (5.1) y (5.18). . . . .	63
5.5. <b>Resultados en simulación:</b> Gráficas del error en la tarea de seguimiento de trayectoria empleando el controlador basado en modelo (5.1) y (5.18). . . . .	63
5.6. <b>Resultados experimentales:</b> Movimiento realizado por el cuadrirotor Quanser QBall 2 durante la tarea de regulación usando el controlador (5.1) y (5.18). . . . .	65
5.7. <b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de la posición $\mathbf{p}(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}(t)$ en regulación y señales de referencia de posición $\mathbf{p}_d(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ , durante la tarea de regulación empleando el esquema de control basado en modelo (5.1) y (5.18). . . . .	65

5.8.	<b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de las señales de error de posición $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ y orientación $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$ obtenidas durante la tarea de regulación asignado al cuadrirotor Quanser QBall 2 empleando el controlador basado en modelo (5.1) y (5.18). . . . .	66
5.9.	<b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de fuerza $f_i(t)$ generada por cada motor del cuadrirotor. . . . .	67
5.10.	Trayectoria de la circunferencia a baja velocidad realizada con el cuadrirotor Quanser QBall 2. . . . .	68
5.11.	<b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de la posición $\mathbf{p}(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}(t)$ y señales de referencia de posición $\mathbf{p}_d(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ durante la tarea de seguimiento de trayectoria empleando el esquema de control basado en modelo (5.1) y (5.18). . . . .	68
5.12.	<b>Resultados experimentales:</b> Gráficas del error de posición $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ y orientación $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$ durante el experimento de seguimiento de trayectorias que da lugar a una circunferencia empleando el controlador basado en modelo (5.1) y (5.18). . . . .	69
5.13.	<b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de la fuerza $f_i(t)$ generada por cada motor del cuadrirotor. . . . .	70
5.14.	Trayectoria de la circunferencia a alta velocidad realizada con el cuadrirotor Quanser QBall 2. . . . .	71
5.15.	<b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de la posición $\mathbf{p}(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}(t)$ y señales de referencia de posición $\mathbf{p}_d(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ durante la tarea de seguimiento de trayectoria empleando el esquema de control basado en modelo (5.1) y (5.18). . . . .	71
5.16.	<b>Resultados experimentales:</b> Gráficas del error de posición $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ y orientación $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$ durante el experimento de seguimiento de trayectorias que da lugar a una circunferencia de alta velocidad empleando el controlador basado en modelo. . . . .	72
5.17.	<b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de fuerza $f_i(t)$ generada por cada motor del cuadrirotor. . . . .	73
5.18.	Trayectoria lemniscata realizada con el cuadrirotor Quanser QBall 2. . . . .	74
5.19.	<b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de la posición $\mathbf{p}(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}(t)$ y señales de referencia de posición $\mathbf{p}_d(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ durante la tarea de seguimiento de trayectoria lemniscata empleando el esquema de control basado en modelo. . . . .	74
5.20.	<b>Resultados experimentales:</b> Gráficas del error de posición $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ y orientación $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$ durante el experimento de seguimiento de trayectorias que da lugar a una ruta lemniscata empleando el controlador basado en modelo. . . . .	75
5.21.	<b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de la fuerza $f_i(t)$ generada por cada motor del cuadrirotor. . . . .	76
6.1.	<b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de la posición $\mathbf{p}(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}(t)$ durante la tarea de regulación obtenidas con los controladores PID/PD (línea azul), <i>backstepping</i> (línea verde), basado en modelo (línea negra) y señales de referencia de posición $\mathbf{p}_d(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ . . . . .	78
6.2.	<b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de las señales de error de posición $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ y orientación $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$ durante la tarea de regulación obtenidas con los controladores PID/PD (línea azul), <i>backstepping</i> (línea verde), basado en modelo (línea negra). . . . .	79

---

6.3.	<b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de la posición $\mathbf{p}(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}(t)$ durante la tarea de regulación obtenidas con los controladores PID/PD (línea azul), <i>backstepping</i> (línea verde), basado en modelo (línea negra) durante la tarea de seguimiento de trayectoria que da lugar a una circunferencia de baja velocidad. . . . .	81
6.4.	<b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de las señales de error de posición $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ y orientación $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$ durante la tarea de seguimiento de trayectorias que da lugar a una circunferencia de baja velocidad obtenidas con los controladores PID/PD (línea azul), <i>backstepping</i> (línea verde), basado en modelo (línea negra). . . . .	82
6.5.	<b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de la posición $\mathbf{p}(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}(t)$ durante la tarea de regulación obtenidas con los controladores PID/PD (línea azul), <i>backstepping</i> (línea verde), basado en modelo (línea negra) durante la tarea de seguimiento de trayectoria que da lugar a una circunferencia de alta velocidad. . . . .	83
6.6.	<b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de las señales de error de posición $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ y orientación $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$ durante la tarea de seguimiento de trayectorias que da lugar a una circunferencia de alta velocidad obtenidas con los controladores PID/PD (línea azul), <i>backstepping</i> (línea verde), basado en modelo (línea negra). . . . .	84
6.7.	<b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de la posición $\mathbf{p}(t)$ y orientación $\boldsymbol{\eta}(t)$ durante la tarea de regulación obtenidas con los controladores PID/PD (línea azul), <i>backstepping</i> (línea verde), basado en modelo (línea negra) durante la tarea de seguimiento de trayectoria que da lugar a una curva lemniscata. . . . .	85
6.8.	<b>Resultados experimentales:</b> Gráficas de las señales de error de posición $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ y orientación $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$ durante la tarea de seguimiento de trayectorias que da lugar a una curva lemniscata obtenidas con los controladores PID/PD (línea azul), <i>backstepping</i> (línea verde), basado en modelo (línea negra). . . . .	86

# Índice de tablas

---

2.1. Parámetros del sistema. . . . .	15
6.1. Tabla comparativa del error cuadrático medio . . . . .	80
6.2. Tabla comparativa del error cuadrático medio en la primer prueba de seguimiento de trayectorias . . . . .	81
6.3. Tabla comparativa del error cuadrático medio en la segunda prueba de seguimiento de trayectorias . . . . .	82
6.4. Tabla comparativa del error cuadrático medio en la prueba de seguimiento de trayectoria de curva lemniscata . . . . .	86

# Introducción

---

En años recientes, investigadores e ingenieros de diversas áreas han trabajado intensamente para desarrollar máquinas efectivas de vuelo capaces de realizar misiones con la mínima intervención humana. Este tipo de vehículos son conocidos como UAVs por sus siglas en inglés (*Unmanned Aerial Vehicles*) o vehículos aéreos no tripulados (*VANTs*), [1], [2].

Un *VANT* está definido como un vehículo aéreo sin tripulación, el cual puede volar de manera autónoma basado en un plan de vuelo precargado (un algoritmo configurado en la computadora del vehículo para seguir una ruta definida por el usuario). Estas aeronaves pueden llevar diversos tipos de cargas dependiendo las necesidades requeridas. Entre algunas de sus características se encuentran: la capacidad de comunicar información importante como la temperatura, imágenes o vídeo de su entorno [2].

Un tipo particular de aeronave no tripulada similar a un helicóptero es conocida como *quadrotor* por su nombre en inglés. El prefijo *quad* [3] de origen latín, con significado cuatro, es el número de rotores con que cuenta la aeronave. En el castellano el prefijo correspondiente es “cuadri”, partiendo de esta analogía, al vehículo aéreo no tripulado de cuatro rotores se le puede llamar cuadirotor.

## 1.1. Antecedentes

La investigación en vehículos aéreos no tripulados ha crecido considerablemente en los últimos años, en particular aquellos de pequeñas dimensiones y que son impulsados por cuatro propelas [3]. Estas aeronaves han captado el interés de la comunidad científica, debido a que presentan características que los vuelven una opción atractiva para tareas vigilancia, inspección remota, fotografía, ámbito militar, etc., [4], [5], [6], [7], [8].

Proveer de autonomía de vuelo a estos sistemas requiere del conocimiento de distintos aspectos del mismo, como la dinámica del vehículo y los actuadores. Esta dinámica resulta una herramienta de gran utilidad para poder diseñar esquemas de control que regulen el comportamiento del sistema. Una de las características más importantes para el esquema de control es la capacidad de mantener o seguir una referencia de posición y orientación de modo eficiente y que a la vez sea robusto a perturbaciones en el ambiente. Sin embargo, el control de los vehículos de cuatro rotores no es fácil debido a su dinámica altamente no lineal, fuertemente acoplada, su naturaleza multivariable además que es un sistema subactuado el cual cuenta con seis salidas y cuatro entradas de control independientes.

Castillo *et al.* [9] reportan un análisis comparativo de dos metodologías de control para el cuadri-

rotor. En este estudio optaron por utilizar un controlador lineal cuadrático óptimo y un controlador por saturación anidada donde el segundo mostró mejores resultados que el controlador lineal a pesar de la existencia de perturbaciones. Con esto se concluyó que los controladores no lineales pueden ser mejores en las tareas de vuelo de los cuadrirotos. En [1], Naidoo *et al.* presentan un controlador proporcional derivativo para la estabilización del vehículo. Las pruebas para validar el control se realizaron en simulaciones numéricas donde se estudió el comportamiento del vehículo. De los resultados obtenidos, los autores concluyeron que el controlador brinda un desempeño satisfactorio sin embargo, afirman que hay que considerar las perturbaciones en una implementación real.

En otro trabajo, Freddi *et al.* [10] resuelven el problema del sensado con ayuda de un modelo que muestra las condiciones necesarias para la existencia de un observador no lineal. Éste es usado para generar diagnósticos residuales dentro del sistema de fallas. Por otro lado Mohammadi *et al.* [11] proponen un controlador no lineal adaptativo diseñado para solucionar el problema de seguimiento de trayectorias en presencia de incertidumbres paramétricas y no paramétricas. Se utiliza el controlador descentralizado adaptativo en el lazo interno que se encarga del control de orientación mientras para el lazo externo se encarga del control del movimiento traslacional, donde el controlador propuesto es de fácil implementación y los resultados muestran que se cumple la tarea asignada.

Otra metodología para realizar el control de estos vehículos es la de Flores y Lozano [12] donde se ataca el problema de las perturbaciones utilizando un controlado basado en Lyapunov. Este controlador es capaz de conservar el punto deseado en un ambiente con perturbaciones.

El control difuso también se ha usado para controlar VANTs. Un ejemplo de ello está en [13], donde se sintonizan los parámetros del controlador difuso para obtener un resultado asintótico en el seguimiento de trayectorias. En un trabajo similar Nicol *et al.* [14] abordan el problema de control para un cuadrirotor perturbado por la carga útil, presentan el uso de controladores difusos y un control neuronal adaptable para lograr la estabilización del vehículo cuando se realiza el cambio de carga útil. En sus resultados se muestran las comparaciones entre los controladores neuronales, los cuadráticos lineales y control con parametrización lineal y las ventajas de usar el control neuronal adaptativo frente a perturbaciones y la variación del peso.

## 1.2. Objetivos

### 1.2.1. Objetivo general

Analizar, diseñar y validar experimentalmente esquemas de control lineal y no lineales para un vehículo aéreo no tripulado de cuatro rotores.

### 1.2.2. Objetivos específicos

- Determinar la dinámica del vehículo.
- Realizar simulaciones numéricas del cuadrirotor en lazo cerrado con diferentes esquemas de control.
- Analizar controladores para cuadrirotos.

- Implementar y evaluar el desempeño de los controladores en el cuadrirotor.

### 1.3. Motivación

Recientemente, el interés en los cuadrirotos ha crecido por su popularidad y sus aplicaciones potenciales. Los investigadores se han dedicado a estudiar estos vehículos a fin de que realicen dos tareas específicas que dan soporte a estas aplicaciones. La primera tarea consiste en realizar un vuelo estacionario con una determinada ubicación y orientación del vehículo. El segundo problema es el seguimiento de trayectorias [2]. Por tal motivo, desarrollar esquemas de control que garanticen el cumplimiento de estas tareas resulta de gran interés a fin de que el cuadrirotor pueda ser empleado en aplicaciones que requieran autonomía de vuelo.

### 1.4. Planteamiento del problema

El problema de control en los vehículos aéreos de cuatro rotores para realizar el seguimiento de trayectorias se puede abordar de distintas maneras, observando principalmente los siguientes características del sistema. Primero, el sistema es subactuado, segundo, el modelo aerodinámico es altamente no lineal por lo cual sólo se tienen a disposición aproximaciones del mismo y finalmente sus entradas son idealizadas. En la práctica, se sabe que existen perturbaciones y parámetros que se desconocen debido a la falta de sensores y a la naturaleza no lineal del vehículo, lo que complica la implementación de algún método de identificación paramétrica o de medición. Es por esto que se necesitan controladores capaces de compensar estos factores para poder lograr el objetivo que es el seguimiento de trayectoria y el vuelo estacionario. En este trabajo se propone realizar un análisis comparativo de distintas técnicas de control cuando se realizan las tareas de regulación y seguimiento de trayectorias empleando vehículos de cuatro rotores.

### 1.5. Metodología

La presente investigación contiene una serie de etapas que han permitido alcanzar el objetivo propuesto. Primeramente, se analizan a profundidad la dinámica de los vehículos aéreos de pequeña escala dotados con cuatro rotores. Posteriormente se procede a analizar distintos esquemas de control para observar el comportamiento de este tipo de vehículos aéreos y después se realiza la validación experimental del comportamiento de los controles propuestos. Finalmente con los resultados obtenidos se hace un análisis del desempeño de las leyes de control propuestas para definir que controlador se comporta mejor al realizar de manera más acertada las tareas de regulación y seguimiento de trayectorias.

### 1.6. Contribuciones

Las contribuciones principales de esta investigación son:

- Se presta particular atención a un controlador que resuelve el problema de regulación y seguimiento de trayectorias basado en el conocimiento del modelo dinámico del cuadrirotor. Se reporta una prueba de estabilidad asintótica que es original.
- La comparación y análisis cuantitativo del desempeño de dos controladores que existen en la literatura y un controlador propuesto nuevo.
- El controlador propuesto resuelve el problema de regulación y seguimiento de trayectorias con resultados más apegados al objetivo. Logrando así proponer el controlador para dichas tareas.

## 1.7. Estructura de la tesis

Este trabajo está dividido en siete capítulos. El primer capítulo presenta una breve reseña sobre los vehículos aéreos no tripulados, usos y aplicaciones. También se establecen los lineamientos que sigue el presente trabajo, los objetivos, la motivación, el planteamiento del problema, la metodología y las contribuciones. En el capítulo 2 se exponen dos metodologías para la obtención del modelo dinámico del cuadrirotor representados con respecto a los marcos de referencia del vehículo e inercial. Además, se describe el cuadrirotor que se emplea como plataforma experimental así como también el software utilizado y las características del cuadrirotor Qball 2 de Quanser. El capítulo 3 presenta un controlador proporcional integral derivativo utilizado en la literatura. Se muestra el funcionamiento del mismo en simulación numérica y experimentación. En el capítulo 4 se describe el controlador no lineal con estructura *backstepping* y se muestran los resultados de las simulaciones numéricas y experimentación. En el capítulo 5 se estudia un controlador basado en modelo, del cual se presenta un análisis teórico que garantiza estabilidad al sistema. Además, se muestran los resultados de las simulaciones numéricas y de las pruebas experimentales. El capítulo 6 se expone un análisis comparativo del desempeño de los tres controladores al realizar la validación experimental. Finalmente en el capítulo 7 se exponen las conclusiones de la investigación y el trabajo a futuro.

# Modelo dinámico

---

Para conocer el comportamiento de un sistema en particular, siempre es útil contar con el modelo matemático que se ajuste lo más fielmente al sistema real a estudiar, utilizando para ello, las leyes físicas aplicables. La dinámica que describe el comportamiento del sistema generalmente se representa por un conjunto de ecuaciones diferenciales que se pueden obtener mediante una amplia variedad de métodos. Por ejemplo, para la dinámica completa de una aeronave, se deben incluir diversos factores como la flexibilidad de las alas, los efectos aeroelásticos, la dinámica interna de los motores y todo el conjunto de variables cambiantes que tienen por objetivo obtener un modelado lo más apegado al sistema real.

## 2.1. Método de Euler-Lagrange

Las presente sección está inspirada de [1], [2], [3], [15], [16], [17], [10], [11], [18]. El modelo dinámico del cuadrirotor se puede obtener considerando la aeronave como un cuerpo rígido que se mueve en un espacio tridimensional el cual se somete una fuerza de empuje la cual da lugar al desplazamiento en el espacio tridimensional y a tres momentos de fuerza que generan los movimientos de cabeceo, balanceo y guiñada.

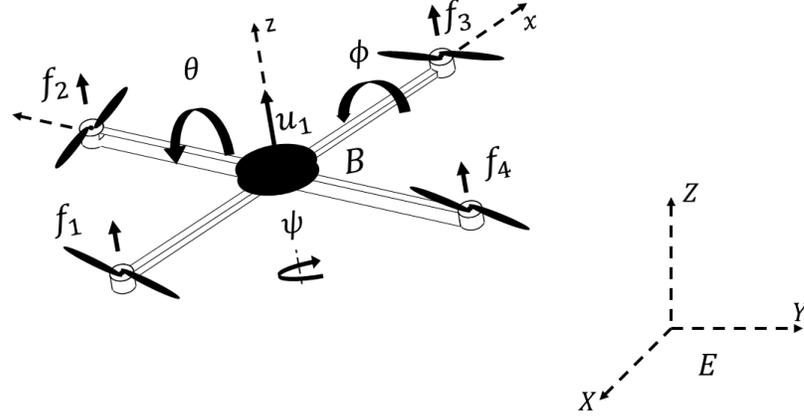
Las coordenadas generalizadas (un conjunto cualquiera de parámetros numéricos que sirven para determinar de manera unívoca un sistema mecánico con un número finito de grados de libertad) para el vehículo aéreo no tripulado de cuatro rotores se seleccionan como:

$$\mathbf{q} = [\mathbf{p}^T \quad \boldsymbol{\eta}^T]^T \in \mathbb{R}^6, \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{p} = [x \quad y \quad z]^T \in \mathbb{R}^3$  denota el vector de posición del centro de masa del vehículo respecto al marco de referencia inercial,  $\boldsymbol{\eta} = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T \in \mathbb{R}^3$  denota el vector de ángulos de Euler definidos por el balanceo, cabeceo y guiñada donde el balanceo  $\phi$  es el giro sobre el eje  $x$ , el cabeceo  $\theta$  es el giro sobre el eje  $y$ , y finalmente la guiñada  $\psi$  es el giro realizado sobre el eje  $z$ . La representación gráfica de los movimientos que realiza el cuadrirotor se muestran en la figura 2.1.

Haciendo uso del formalismo de Lagrange es posible obtener las ecuaciones de movimiento del cuadrirotor. De inicio se calcula el Lagrangiano mediante la diferencia de la energía cinética y la energía potencial del sistema de estudio como sigue

$$\mathbb{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T_{trans} + T_{rot} - U, \quad (2.2)$$



**Figura 2.1:** Representación del cuadricóptero incluyendo el marco de referencia inercial  $E$  y el marco de referencia del vehículo  $B$ .

donde la energía cinética traslacional está dada por:

$$T_{trans} = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{p}}, \quad (2.3)$$

$m$  es la masa del cuadricóptero. Del mismo modo la energía cinética rotacional está definida como

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T I \boldsymbol{\Omega}, \quad (2.4)$$

siendo  $I$  el tensor de inercia,  $\boldsymbol{\Omega}$  es el vector de velocidades angulares medidas con respecto al marco de referencia del vehículo. Adicionalmente, la energía potencial se obtiene como

$$U = mgz, \quad (2.5)$$

donde  $g$  es la constante de aceleración gravitacional y  $z$  es la altitud del vehículo.

De este modo, el modelo dinámico del cuadricóptero se obtiene con las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_p \\ \mathbf{f}_o \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

donde  $\mathbf{f}_p \in \mathbb{R}^3$  es la fuerza traslacional aplicada a la aeronave producida por la fuerza de empuje en los cuatro motores mientras que  $\mathbf{f}_o \in \mathbb{R}^3$  representa los momentos de fuerza de guiñada, balanceo y cabeceo. Como se puede observar, la energía cinética rotacional definida en (2.4) está en términos de la velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega}$ . Sin embargo, el vector de coordenadas generalizadas no incluye este término. Es por esto que es necesario emplear la relación que existe entre la velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega}$  y la tasa de cambios de los ángulos de Euler  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$  dada por [19]

$$\boldsymbol{\Omega} = W(\boldsymbol{\eta}) \dot{\boldsymbol{\eta}}, \quad (2.7)$$

donde

$$W(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} 1 & S\phi T\theta & C\phi T\theta \\ 0 & C\phi & -S\phi \\ 0 & S\phi/C\theta & C\phi/C\theta \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

con  $S\phi = \sin \phi$ ,  $T\theta = \tan \theta$ ,  $C\phi = \cos \phi$ ,  $C\theta = \cos \theta$ .

De este modo, la energía cinética rotacional se puede expresar como

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbb{J}(\boldsymbol{\eta}) \dot{\boldsymbol{\eta}}, \quad (2.9)$$

donde la matriz  $\mathbb{J}(\boldsymbol{\eta})$  actúa como la matriz de inercia para toda la energía cinética rotacional del cuadrirotor expresada directamente en términos de las coordenadas generalizadas  $\boldsymbol{\eta}$  y que se denota por

$$\mathbb{J}(\boldsymbol{\eta}) = W(\boldsymbol{\eta})^T I W(\boldsymbol{\eta}). \quad (2.10)$$

En vista de que el Lagrangiano no contiene términos cruzados en la energía cinética que combinen  $\dot{\boldsymbol{p}}$  y  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$  la ecuación de Euler-Lagrange puede separarse para la dinámica de  $\boldsymbol{p}$  y  $\boldsymbol{\eta}$ , esto es, la ecuación de movimiento traslacional está dada por

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{p}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{p}} = \boldsymbol{f}_p, \quad (2.11)$$

de lo cual se obtiene,

$$m\ddot{\boldsymbol{p}} + mg\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{f}_p, \quad (2.12)$$

donde  $\boldsymbol{e}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T \in \mathbb{R}^3$ . Del mismo modo, la dinámica de  $\boldsymbol{\eta}$  se obtiene de

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\eta}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{f}_o, \quad (2.13)$$

sustituyendo se tiene

$$\frac{d}{dt} (\mathbb{J}\dot{\boldsymbol{\eta}}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} (\dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbb{J} \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \boldsymbol{f}_o, \quad (2.14)$$

de donde resulta que

$$\mathbb{J}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\mathbb{J}}\dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} (\dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbb{J} \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \boldsymbol{f}_o, \quad (2.15)$$

Si se define el vector de Coriolis y fuerzas centrífugas como

$$\bar{V}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \dot{\mathbb{J}}\dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} (\dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbb{J} \dot{\boldsymbol{\eta}}), \quad (2.16)$$

la ecuación (2.15) se puede reescribir como

$$\mathbb{J}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{V}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \boldsymbol{f}_o, \quad (2.17)$$

siendo,  $\bar{V}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})$  expresada como

$$\bar{V}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \left( \dot{\mathbb{J}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} (\dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbb{J}) \right) \dot{\boldsymbol{\eta}}, \quad (2.18)$$

$$= C(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) \dot{\boldsymbol{\eta}}, \quad (2.19)$$

donde  $C(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})$  se conoce como la matriz de Coriolis la cual contiene los elementos giroscópicos y centrífugas. De los resultados anteriores, la dinámica completa del cuadrirotor se puede expresar como

$$m\ddot{\boldsymbol{p}} + mg\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{f}_p, \quad (2.20)$$

$$\mathbb{J}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + C(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) \dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{f}_o. \quad (2.21)$$

## 2.2. Modelo dinámico del cuadrirotor empleando ecuaciones de Kirchhoff.

Con el método de Euler-Lagrange, las ecuaciones de movimiento se generan a partir de las coordenadas generalizadas que se miden con respecto al marco de referencia inercial. No obstante, en ocasiones es una ventaja formular las ecuaciones de movimiento con relación al marco de referencia del vehículo [19]. Dicho lo anterior, la manera de obtener la dinámica en este marco de referencia es considerando el vector de velocidades lineales y angulares que se define como sigue

$$\boldsymbol{\nu} = [\mathbf{v}^T \quad \boldsymbol{\Omega}^T]^T = [v_x \quad v_y \quad v_z \quad \Omega_x \quad \Omega_y \quad \Omega_z]^T, \quad (2.22)$$

donde  $\mathbf{v}$  representa la velocidad lineal medida con respecto al marco de referencia del vehículo y  $\boldsymbol{\Omega}$  es el vector de velocidades angulares. Note que, el vector  $\boldsymbol{\nu}$  no puede ser integrado para dar un conjunto de coordenadas generalizadas en términos de orientación y posición. Es decir,  $\int_0^t \boldsymbol{\nu} d\tau$  no tiene interpretación física inmediata [19]. Como consecuencia de esto, no se pueden usar las ecuaciones de Lagrange directamente para formular las ecuaciones de movimiento en el sistema coordenado del marco de referencia del vehículo. Sin embargo, este problema puede ser evitado haciendo uso de las ecuaciones de Kirchhoff con las cuales se puede obtener la dinámica del sistema. Considerando la velocidad lineal  $\mathbf{v} = [v_x \quad v_y \quad v_z]^T$  y velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega} = [\Omega_x \quad \Omega_y \quad \Omega_z]^T$  de manera individual y de acuerdo con [19], la fuerza  $\mathbf{f}_{Bp}$  y el par  $\mathbf{f}_{Bo}$  están relacionados a la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^T M_B \boldsymbol{\nu}, \quad (2.23)$$

por las ecuaciones de Kirchhoff

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \right) + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{f}_{Bp}, \quad (2.24)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\Omega}} \right) + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\Omega}} + \mathbf{v} \times \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{f}_{Bo}. \quad (2.25)$$

Así, la dinámica del cuadrirotor expresada con respecto al marco de referencia del vehículo se escribe como [19]:

$$M_B \dot{\boldsymbol{\nu}} + C_B(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{\nu} + \mathbf{g}_B(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_B, \quad (2.26)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = J(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\nu}, \quad (2.27)$$

donde  $M_B \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  es la matriz de inercia,  $C_B \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  es la matriz de Coriolis,  $\mathbf{g}_B(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^6$  el vector de fuerzas gravitacionales,  $\mathbf{f}_B \in \mathbb{R}^6$  es el vector de entrada de fuerzas y momentos producidos por los motores del vehículo y  $J(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  es el operador que relaciona el vector de velocidades  $\boldsymbol{\nu}$  con la derivada temporal de la pose  $\dot{\mathbf{q}}$ . Los componentes de las ecuaciones (2.26) y (2.27) se definen

explícitamente como sigue:

$$\begin{aligned}
 M_B &= \begin{bmatrix} mI_3 & -mS(\mathbf{r})^T \\ mS(\mathbf{r}) & I \end{bmatrix}, \\
 C_B &= \begin{bmatrix} mS(\Omega) & -[mS(\mathbf{r})S(\Omega)]^T \\ mS(\mathbf{r})S(\Omega) & S(\Omega)I \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{g}_B &= \begin{bmatrix} mgR(\boldsymbol{\eta})^T \mathbf{e}_3 \\ mgS(\mathbf{r})R(\boldsymbol{\eta})^T \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{f}_B &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{Bp} \\ \mathbf{f}_{Bo} \end{bmatrix}, \\
 J(\boldsymbol{\eta}) &= \begin{bmatrix} R(\boldsymbol{\eta}) & 0 \\ 0 & W(\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix}, \\
 R(\boldsymbol{\eta}) &= \begin{bmatrix} C\theta C\psi & C\psi S\theta S\phi - C\phi S\psi & S\phi S\psi + C\psi C\phi S\theta \\ C\theta S\psi & C\psi C\phi + S\theta S\psi S\phi & C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi \\ -S\theta & C\theta S\phi & C\theta C\phi \end{bmatrix}, \\
 W(\boldsymbol{\eta}) &= \begin{bmatrix} 1 & S\phi T\theta & C\phi T\theta \\ 0 & C\phi & -S\phi \\ 0 & S\phi/C\theta & C\phi/C\theta \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

donde  $m$  es la masa del vehículo,  $g$  es la constante de aceleración por la gravedad,  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  es el vector de posición del centro de masa del cuadrirotor con respecto al marco de referencia del vehículo,  $I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es el tensor de inercia,  $I_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz identidad,  $R(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz ortogonal de rotación,  $W(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz que relaciona el vector de velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  con la derivada del vector de orientación  $\boldsymbol{\eta}$ ,  $Sx$  es el seno de  $x$ ,  $Cx$  es el coseno de  $x$ ,  $Tx$  es la tangente de  $x$  y dado un vector  $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T \in \mathbb{R}^3$ ,  $S(\mathbf{a})$  es una matriz antisimétrica definida como

$$S(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Considerando que el centro de masa del vehículo coincide con su propio marco de referencia se tiene

$$\begin{bmatrix} mI_3 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mS(\Omega) & 0 \\ 0 & S(\Omega)I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \Omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mgR(\boldsymbol{\eta})^T \mathbf{e}_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{Bp} \\ \mathbf{f}_{Bo} \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

esta última ecuación se puede reescribir como dos igualdades que representan la dinámica traslacional y rotacional por separado como sigue

$$m\dot{\mathbf{v}} + mS(\Omega)\mathbf{v} + mgR(\boldsymbol{\eta})^T \mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_{Bp}, \quad (2.30)$$

$$I\dot{\Omega} + S(\Omega)I\Omega = \mathbf{f}_{Bo}, \quad (2.31)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = J(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\nu}, \quad (2.32)$$

En [19] se establece la existencia de un conjunto de ecuaciones equivalentes a las dadas en (2.30)- (2.32) donde cada componente cumple con las propiedades de los sistemas Lagrangianos. Así la dinámica del cuadrirotor se puede expresar como

$$m\ddot{\mathbf{p}} + mg\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_p, \quad (2.33)$$

$$H_o(\boldsymbol{\eta})\ddot{\boldsymbol{\eta}} + C_o(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{f}_o, \quad (2.34)$$

donde

$$\begin{aligned}
 H_o(\boldsymbol{\eta}) &= W(\boldsymbol{\eta})^{-T} I W(\boldsymbol{\eta})^{-1}, \\
 C_o(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) &= W(\boldsymbol{\eta})^{-T} [S(W(\boldsymbol{\eta})^{-1} \dot{\boldsymbol{\eta}}) I - I W(\boldsymbol{\eta})^{-1} \dot{W}(\boldsymbol{\eta})] W(\boldsymbol{\eta})^{-1}, \\
 \mathbf{f}_p &= R(\boldsymbol{\eta})^{-T} \mathbf{f}_{Bp}, \\
 \mathbf{f}_o &= W(\boldsymbol{\eta})^{-T} \mathbf{f}_{Bo}.
 \end{aligned}$$

Estas últimas ecuaciones establecen la relación de equivalencia entre la representación de la dinámica del cuadrirotor con respecto al marco de referencia inercial y la representación en el marco de referencia del vehículo.

Note que la dinámica de orientación presentada en (2.34) posee las siguientes propiedades que son de utilidad en los desarrollos presentados posteriormente.

**Propiedad 1.** La matriz  $H_o(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es simétrica y positiva definida para todo  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .  $\square$

**Propiedad 2.** Usando símbolos de Christoffel para calcular la matriz  $C_o(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , la matriz  $\dot{H}_o(\boldsymbol{\eta}) - 2C_o(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})$  es antisimétrica, es decir,

$$\mathbf{x}^T \left[ \frac{1}{2} \dot{H}_o(\boldsymbol{\eta}) - C_o(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) \right] \mathbf{x} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

$\square$

## 2.3. Aerodinámica del cuadrirotor

La aerodinámica de los rotores ha sido ampliamente estudiada. Muchos de los detalles acerca de estos modelos aerodinámicos son empleados para el diseño de rotores donde un conjunto de sus parámetros son fundamentales para determinar su comportamiento. Para generar las fuerzas de empuje y los momentos en un cuadrirotor es necesario conocer la aerodinámica de cada propela en conjunto con el motor que la mueve. La fuerza de empuje generada en el sobrevuelo (el motor no tiene que trasladarse horizontalmente o verticalmente) es modelada usando la teoría del momento [3] como

$$f_i = k_h \rho A_{ri} r_i^2 \omega_i^2, \tag{2.35}$$

donde cada motor  $i$ ,  $A_{ri}$  es el área del disco del rotor,  $r_i$  es el radio del disco,  $\omega_i$  es la velocidad angular del rotor,  $k_h$  es el coeficiente de empuje que depende de la geometría y perfil de la propela y  $\rho$  es la densidad del aire. En la práctica, se emplea una versión simplificada del modelo antes presentado en (2.35), la cual está dada por

$$f_i = k \omega_i^2, \tag{2.36}$$

donde  $k$  es una constante positiva la cual se puede determinar mediante una prueba de fuerza de empuje estático. Al realizar el proceso de identificación experimental de esta constante de fuerza se tiene la ventaja que también se incorpora el efecto de arrastre en la estructura de la aeronave

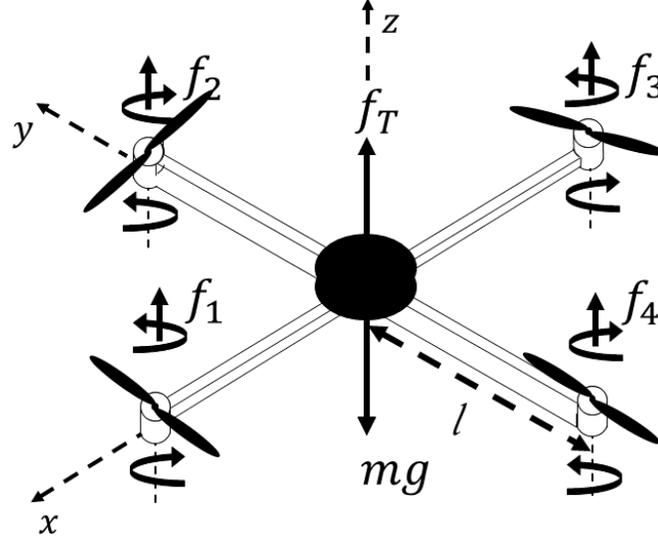


Figura 2.2: Entradas de control del cuadrirotor.

inducido por el flujo del rotor. Por otro lado, la reacción del momento de fuerza que actúa sobre la aeronave en el sobrevuelo está representada por

$$D_{drag} = k_D \omega^2, \quad (2.37)$$

donde la constante  $k_D$  también depende de  $A_r$ ,  $r_i$  y  $\rho$ .

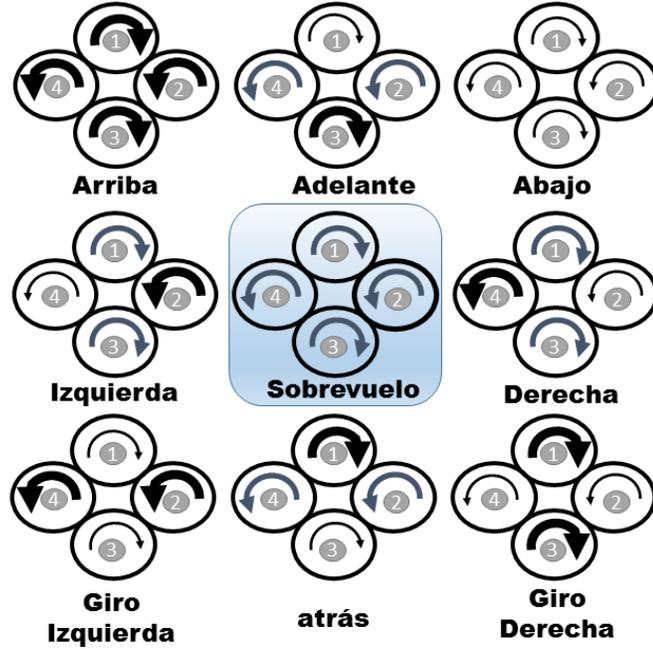
La fuerza generada por cada rotor del vehículo afecta de manera particular según su ubicación en la estructura del cuadrirotor. De inicio, se establece que la fuerza de empuje de cada rotor está orientada en dirección del eje  $z$  del marco de referencia del vehículo. Además, cada rotor está ubicado en un brazo de la aeronave, de tal modo que existe una separación de  $\frac{\pi}{2}$  [rad] entre ellos y una distancia  $l$  al centro de masa del vehículo. De manera general, se etiqueta el conjunto de rotores del 1 al 4 en sentido antihorario con el rotor 1 alineado en el eje  $x$  positivo. Note que los rotores asociados con números pares giran en dirección opuesta a los que se encuentran marcados con números impares, esto con el fin de compensar el efecto de arrastre producido por los rotores cuando giran a la misma velocidad. En la figura 2.2 se observa la distribución de las propelas en el cuadrirotor y el modo en que se mueven.

Bajo esta configuración se puede observar como los vehículos cuadrirotos son sistemas subactuados, dado que únicamente es posible generar fuerza de empuje en la dirección  $z$  del vehículo y con esta fuerza producir los momentos alrededor de los tres ejes coordenados. Así, el vector de fuerzas que actúa sobre el cuadrirotor se expresa como

$$\mathbf{f}_{Bp} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 f_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \sum_{i=1}^4 \omega^2 \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

mientras que los momentos de fuerza producidos por los rotores se determinan de la siguiente manera

$$\mathbf{f}_{Bo} = \begin{bmatrix} l(f_2 - f_4) \\ l(-f_1 + f_3) \\ k_y \sum_{i=1}^4 (-1)^{i-1} f_i \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$



**Figura 2.3:** Combinación de movimientos del cuadrirotor.

donde  $k_y = \frac{k_D}{k}$ .

De este modo, el vector de fuerzas externas  $\mathbf{f}_B$ , el cual está en función del empuje generado por los cuatro rotores se expresa como

$$\mathbf{f}_B = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 4} \\ B \end{bmatrix} \mathbf{f}, \quad (2.40)$$

$$(2.41)$$

donde  $0_{2 \times 4} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$  es la matriz con ceros en todos sus elementos y

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & l & 0 & -l \\ -l & 0 & l & 0 \\ k_y & -k_y & k_y & -k_y \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Finalmente, es importante hacer notar que el incremento decremento de la fuerza que genera cada rotor produce el movimiento del vehículo en el espacio tridimensional. En la figura 2.3 [20] se muestra un esquema de los movimientos que se obtienen al realizar esta variación de fuerza en los rotores.

Es importante también mencionar que

$$\mathbf{f}_p = R(\boldsymbol{\eta}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 f_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{13}(\boldsymbol{\eta}) \\ r_{23}(\boldsymbol{\eta}) \\ r_{33}(\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix} \sum_{i=1}^4 f_i \quad (2.43)$$

$$\mathbf{f}_o = W(\boldsymbol{\eta})^{-T} \begin{bmatrix} l(f_2 - f_4) \\ l(f_3 - f_1) \\ ky \sum_{i=1}^4 (-1)^{-1} f_i \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Además la relación inversa de (2.43)-(2.44) es dada por

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(\boldsymbol{\eta}) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & W(\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{f}_p \\ \mathbf{f}_o \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

## 2.4. Plataforma QBall 2 de Quanser

La plataforma QBall 2 manufacturado por la empresa canadiense Quanser integra el cuadrirotor QBall 2 con una palanca de mando, una estación de control terrestre con el software de tiempo real QUARC y un sistema de cámaras OptiTrack.

El cudrirotor QBall 2 es un vehículo aéreo no tripulado de cuatro motores de corriente directa sin escobillas y cuatro propelas de 10 pulgadas de largo colocadas en cada motor. Todo el vehículo está encerrado en una jaula protectora de fibra de carbono como se muestra en la figura 2.4. Las



**Figura 2.4:** Quanser Qball 2.

mediciones de los sensores y el control de los motores en el QBall 2 se realiza a través de una tarjeta de adquisición de datos (DAQ) y un sistema integrado inalámbrico Gumstix DuoVero. El software de control de tiempo real *QUARC*<sup>®</sup> de Quanser permite desarrollar software que se ejecuta en tiempo real en el cuadrirotor utilizando la interfaz de *Matlab*<sup>®</sup> *Simulink*<sup>®</sup>. Con el

sistema integrado Gumstix y *QUARC*<sup>®</sup> el código se genera automáticamente y se ejecuta en el vehículo. Un esquema general de los componentes que interactúan con el cuadrirotor se presentan en la figura 2.5 [21]. Adicionalmente el cuadrirotor QBall 2 cuenta con:



**Figura 2.5:** Diagrama del sistema.

- 4 salidas de modulación por ancho de pulso para los motores y 2 salidas más configurables,
- un giroscopio de 3 ejes,
- un acelerómetro de 3 ejes,
- un sensor sonar de rango entre 0.2-7.65 [m] y 1 [cm] de resolución,
- medidor de voltaje,
- 2 entradas análogas de 12 bits,
- canales de comunicación SPI, UART e I2C, y
- 8 entradas y salidas digitales.

Por otro lado, el fabricante proporciona información de los parámetros dinámicos del vehículo (que son empleados en los desarrollos presentados en los capítulos siguientes). En la tabla 2.1 se muestran estos parámetros.

**Tabla 2.1:** Parámetros del sistema.

Parámetro	Descripción	Valor
$l$	Distancia del motor al centro de gravedad	0.2 [m]
$I_x$	Inercia en eje x	0.03 [kgm <sup>2</sup> ]
$I_y$	Inercia en eje y	0.03 [kgm <sup>2</sup> ]
$I_z$	Inercia en eje z	0.04 [kgm <sup>2</sup> ]
$m$	Masa del cuadrirotor	1.79 [kg]

La estación terrestre tiene consigo el software QUARC, y OptiTrack Motive. QUARC se encarga de controlar el sistema Gumstix incorporado en el cuadrirotor QBall 2. Por otro lado, el sistema de cámaras OptiTrack se encarga de realizar el seguimiento en el área de trabajo del cuadrirotor Qball 2. El cual cuenta con seis cámaras de infrarrojos conectados y sincronizados a la estación terrestre. Las cámaras son de tipo Flex 3 con una resolución VGA de 640x480 pixeles capaces de capturar el movimiento a una cadencia de 100 imágenes por segundo.

## Controlador PID/PD

El controlador proporcional integral derivativo es hasta ahora el algoritmo de control usado más comúnmente para determinar el funcionamiento de los sistemas mecatrónicos. La mayoría de los lazos de retroalimentación son controlados por este algoritmo o variaciones menores. Su implementación puede ser realizada de muchas maneras y ser visto como una herramienta con pocas reglas generales o también ser abordado analíticamente [22].

Para implementar el controlador PID en un cuadrirotor es necesario trabajar con las entradas del sistema que son los cuatro motores de corriente directa sin escobillas. Dado que es un sistema subactuado, únicamente es posible controlar directamente la altura y los tres ángulos de orientación e indirectamente la posición  $x$ ,  $y$ , estas últimas dos coordenadas se controlan a partir de generar señales de referencia  $\phi_d$  y  $\theta_d$  para el balanceo y cabeceo respectivamente. En [20] se presenta un controlador de doble lazo, el lazo interno es el encargado de controlar la orientación mediante un esquema proporcional derivativo (PD) mientras que un controlador proporcional integral derivativo (PID) en lazo externo se encarga de la posición. La figura 3.1 muestra la estructura de este controlador aplicado al cuadrirotor. Para implementar este esquema de control, se requieren mediciones de los vectores de posición  $\mathbf{p}(t) = [x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t) = [\phi \ \theta \ \psi]^T \in \mathbb{R}^3$  así como definir las señales de referencia  $\mathbf{p}_d(t) = [x_d \ y_d \ z_d]^T \in \mathbb{R}^3$  y  $\boldsymbol{\eta}_d(t) = [\phi_d \ \theta_d \ \psi_d]^T \in \mathbb{R}^3$  correspondientes a la posición y orientación deseadas respectivamente. De este modo, se establece el error de posición y orientación como sigue:

$$\tilde{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{p}_d(t) - \mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

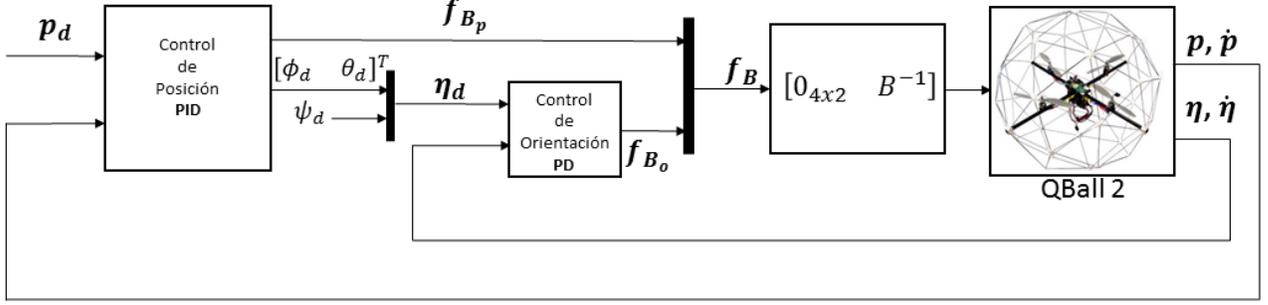
$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t) = \boldsymbol{\eta}_d(t) - \boldsymbol{\eta}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}(t) \\ \tilde{\theta}(t) \\ \tilde{\psi}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Una vez definido el error en (3.1) y (3.2) se establece la acción de control como [20]

$$\mathbf{f}_{Bp} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\hat{m}g}{\cos\theta\cos\phi} + k_z\tilde{z} + k_{dz}\dot{\tilde{z}} + k_{iz}\int\tilde{z}dt \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{f}_{Bo} = K_{p\eta}\tilde{\boldsymbol{\eta}} - K_{\Omega}\boldsymbol{\Omega}, \quad (3.4)$$

donde  $k_z$ ,  $k_{dz}$  y  $k_{iz}$  son constantes positivas,  $K_{p\eta}$  y  $K_{\Omega}$  son matrices de ganancias diagonales y definidas positivas. Como se mencionó anteriormente, el control de posición horizontal del cuadrirotor



**Figura 3.1:** Estructura del controlador PID/PD para el cuadrirotor.

se realiza indirectamente modificando los valores deseados para los ángulos de balanceo  $\phi_d(t)$  y cabeceo  $\theta_d(t)$ . Esta actualización de las señales de referencia se realiza mediante una ley de control PID definida de la siguiente manera [20],

$$\theta_d = k_x \tilde{x} + k_{dx} \dot{\tilde{x}} - k_{ix} \int \tilde{x} dt, \quad (3.5)$$

$$\phi_d = k_y \tilde{y} + k_{dy} \dot{\tilde{y}} + k_{iy} \int \tilde{y} dt, \quad (3.6)$$

donde  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_{dx}$ ,  $k_{dy}$ ,  $k_{ix}$  y  $k_{iy}$  son ganancias constantes positivas.

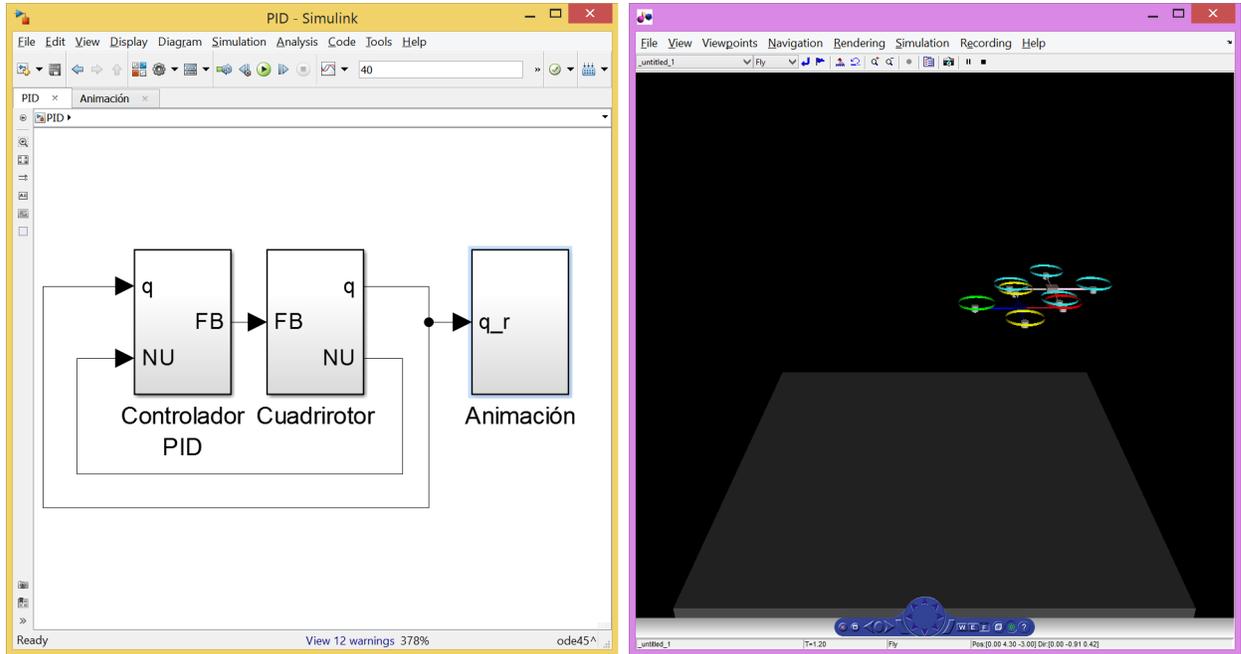
### 3.1. Simulación numérica del controlador PID/PD

La validación en simulación numérica del controlador presentado en esta sección se realizó empleando *Simulink*<sup>©</sup> de *Matlab*<sup>©</sup>. Para tal propósito se utilizó el modelo dinámico descrito en (2.30)- (2.32). Los parámetros de la dinámica del cuadrirotor empleados fueron tomados del manual de usuario del cuadrirotor QBall 2 de Quanser [21], los cuales se presentan en la tabla 2.1. Finalmente, con el objetivo de contar con una herramienta de visualización del comportamiento del cuadrirotor, se hizo uso de la biblioteca de animación 3D de *Simulink*, la cual permite generar entornos virtuales tridimensionales y mover los objetos de interés de acuerdo a los resultados obtenidos por la simulación numérica. La figura 3.2 muestra el diagrama a bloques general de la programación de la simulación realizada junto con el ambiente tridimensional que permite visualizar el comportamiento del sistema en lazo cerrado.

El proceso de validación del comportamiento del controlador PID/PD se realizó evaluando el desempeño del controlador tanto en la tarea de regulación como en el seguimiento de trayectorias. En las secciones siguientes se presentan los resultados correspondientes a cada tarea. Debido a que no se encontró en la literatura técnicas de sintonización para el controlado PID todas las ganancias en simulación numérica y experimentalmente fueron encontradas heurísticamente.

#### 3.1.1. Regulación

En la primera prueba, la tarea de regulación fue asignada al cuadrirotor, esta tarea consiste en alcanzar y mantener una pose constante durante el tiempo que dura la simulación, dicha duración fue establecida en 40 segundos. La pose deseada se definió mediante los siguientes valores de



**Figura 3.2:** Diagrama a bloques general de la programación en *Simulink* y animación del ambiente tridimensional.

referencia

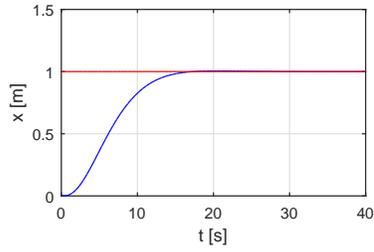
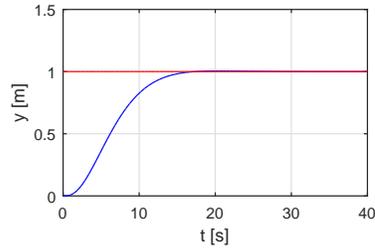
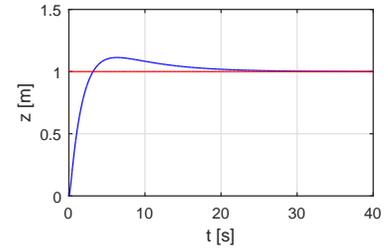
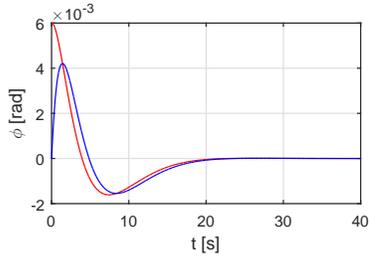
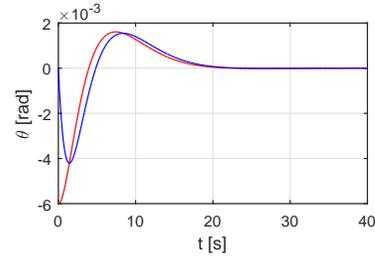
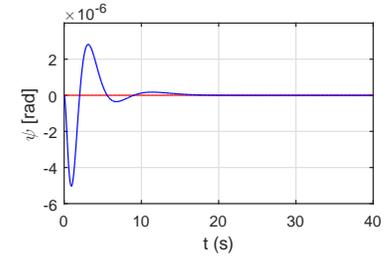
$$\mathbf{p}_d(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [\text{m}],$$

$$\psi_d(t) = 0 [\text{rad}].$$

Las ganancias del controlador definido en (3.3)-(3.6) fueron obtenidas por medio de un proceso heurístico el cual proporcionó los valores que se muestran a continuación

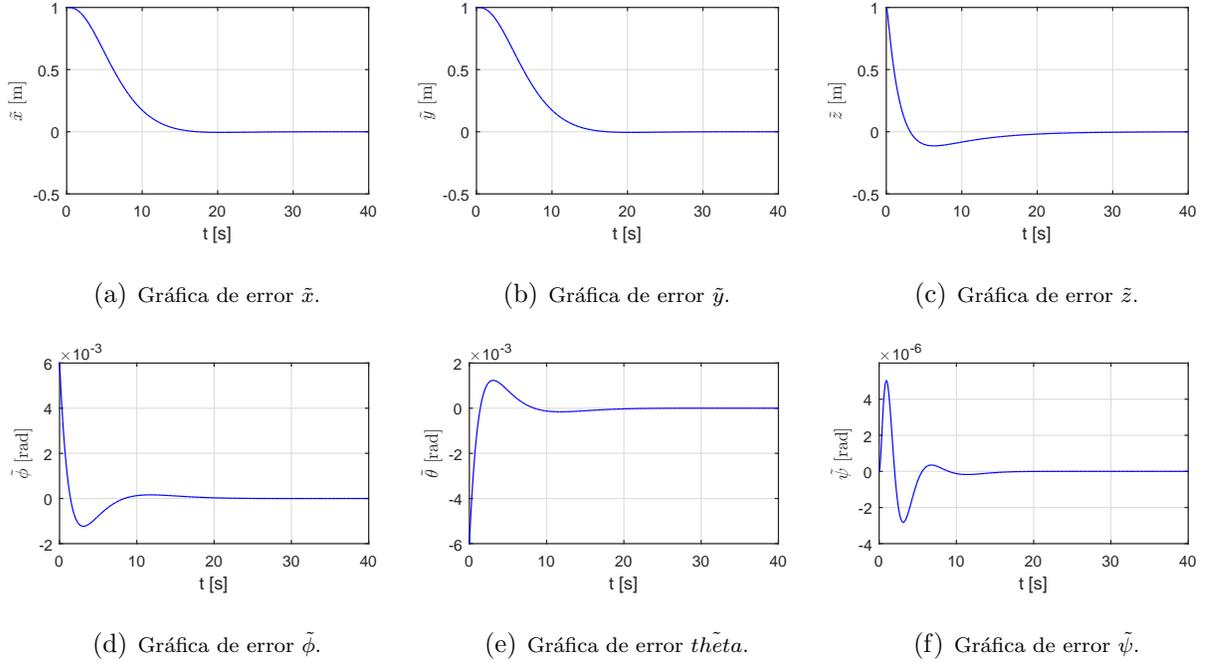
$$\begin{aligned} k_x &= 0.12, & k_{dx} &= 0.01, & k_{ix} &= 0.12, \\ k_y &= 0.12, & k_{dy} &= 0.01, & k_{iy} &= 0.12, \\ k_z &= 1.2, & k_{dz} &= 0.02, & k_{iz} &= 2.8, \\ K_{p\eta} &= \text{diag}\{10, 10, 0.015\}, \\ K_{\Omega} &= \text{diag}\{2, 2, 0.015\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

En la figura 3.3 se presentan las señales de posición y orientación deseadas (línea roja) así como también las señales actuales (línea azul) obtenidas de la simulación. En las gráficas se observa como el cuadrirotor alcanza el valor deseado para cada una de las coordenadas en un período menor de 5 segundos y después de este transitorio se mantiene la pose deseada. Este comportamiento es congruente con las gráficas del error de posición y orientación las cuales se muestran en la figura 3.4, donde las señales de error tienden a cero conforme el tiempo incrementa.

(a) Gráfica de  $x$ .(b) Gráfica de  $y$ .(c) Gráfica de  $z$ .(d) Gráfica de  $\phi$ .(e) Gráfica de  $\theta$ .(f) Gráfica de  $\psi$ .

**Figura 3.3: Resultados en simulación:** Gráficas de la posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  en regulación empleando el controlador PID/PD descrito en (3.3)-(3.6).

El comportamiento del cuadricóptero en la simulación numérica fue adecuado dado que los errores en la posición y en el ángulo de guiñada  $\psi(t)$  tienden a cero conforme el tiempo avanza. El vehículo alcanza la pose deseada antes de que transcurran los primeros 10 segundos de la simulación, lo que indica que el controlador PID/PD tiene un desempeño en el que el cuadricóptero se encuentra muy cercano al valor deseado a pesar de ser un controlador lineal.



**Figura 3.4: Resultados en simulación:** Gráficas del error en la tarea de regulación empleando el controlador PID/PD descrito en (3.3)-(3.6).

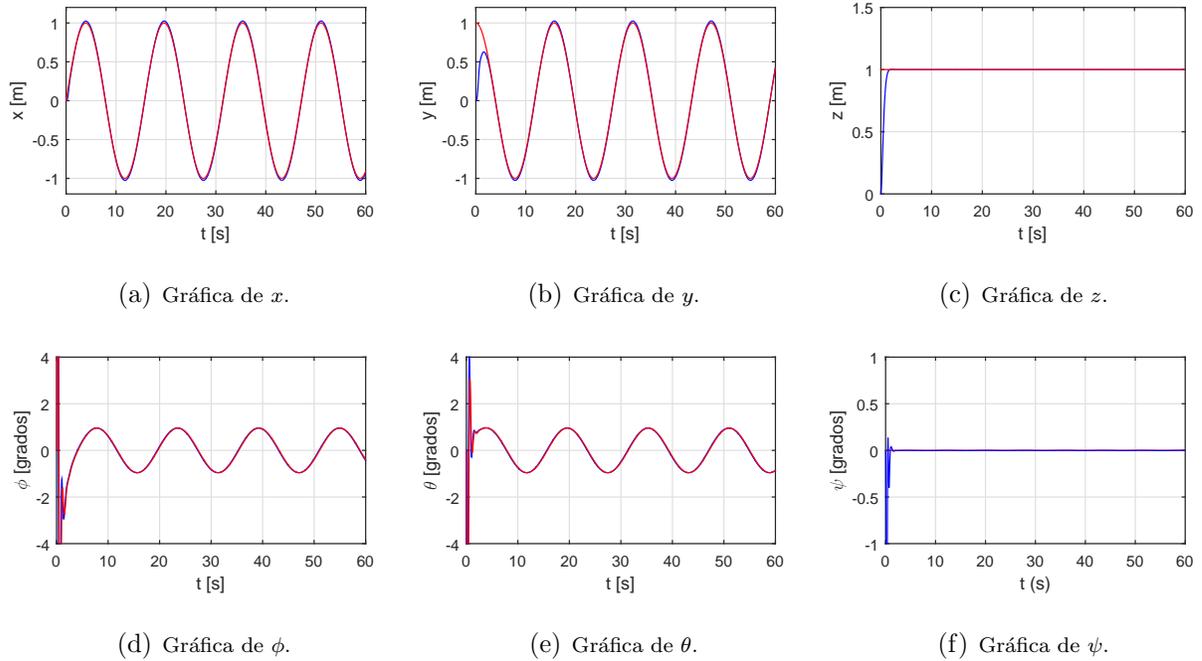
### 3.1.2. Seguimiento de trayectoria

El seguimiento de trayectoria es la segunda tarea analizada en simulación numérica, la cual consiste en que el cuadricóptero siga un conjunto de trayectorias definidas durante 60 segundos. Las trayectorias asignadas a la pose y el ángulo de guiñada generan una ruta en forma de circunferencia en el plano  $x, y$  de radio de 1 [m] a una altura constante de 1 [m]. Las señales de referencia se establecieron como

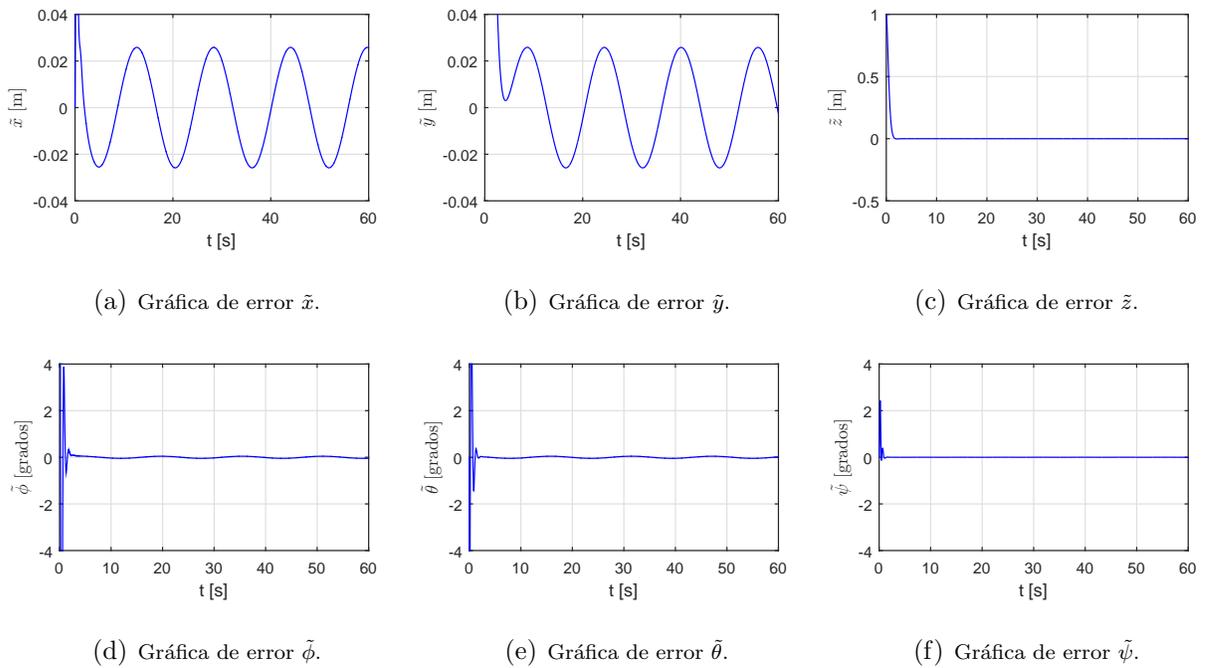
$$\mathbf{p}_d(t) = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{2t}{5}\right) \\ \cos\left(\frac{2t}{5}\right) \\ 1 \end{bmatrix} [\text{m}],$$

$$\psi_d(t) = 0 [\text{rad}].$$

Las ganancias utilizadas fueron las mismas que en la tarea de regulación. En la figura 3.5 se presentan las señales de posición y orientación deseadas (línea roja) así como también las señales actuales (línea azul) obtenidas de la simulación. En las gráficas se muestra como el cuadricóptero sigue la trayectoria deseada y el comportamiento es acorde con las gráficas del error de posición y orientación las cuales se muestran en la figura 3.6. En estas gráficas se observa como las señales de error permanecen cercanas a cero, dentro de un intervalo de 0.04 [m] en lo que respecta a la posición  $x, y$  y tienden a cero para la posición en  $z$  y los ángulos de Euler.



**Figura 3.5: Resultados en simulación:** Gráficas del seguimiento de trayectoria en  $p(t)$  y  $\eta(t)$  empleando el controlador PID/PD descrito en (3.3)-(3.6).



**Figura 3.6: Resultados en simulación** Gráficas del error en la tarea de seguimiento de trayectoria empleando el controlador PID/PD descrito en (3.3)-(3.6).

En la tarea de seguimiento de trayectoria el cuadrirotor sigue las señales de referencia alcanzando el objetivo. Sin embargo, en la gráfica del error de posición  $\tilde{x}$  y  $\tilde{y}$  que estos son relativamente grandes en comparación a lo obtenido en la tarea de regulación.

## 3.2. Controlador PID en la plataforma experimental

En esta sección se presentan los resultados obtenidos usando el controlador PID/PD al realizar distintas tareas de vuelo y que son empleados para evaluar su desempeño en la plataforma experimental. Entre las tareas asignadas se encuentra la regulación y el seguimiento de trayectorias. Para el seguimiento de trayectorias se realizaron tres pruebas con trayectorias distintas. La primera y segunda se asocian con una ruta en forma de circunferencia con distinta velocidad de recorrido, la tercera corresponde a una curva de lemniscata.

### 3.2.1. Regulación

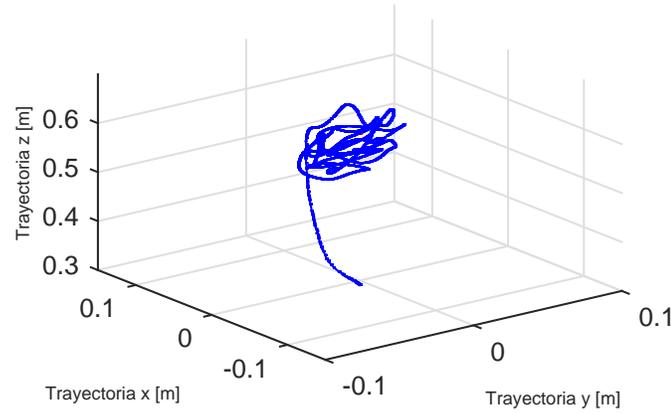
La primer tarea se realizó de manera similar en la simulación numérica. La pose establecida para mantener durante el experimento está dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_d(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.6 \end{bmatrix} [\text{m}], \\ \psi_d(t) &= 0 [\text{rad}], \end{aligned}$$

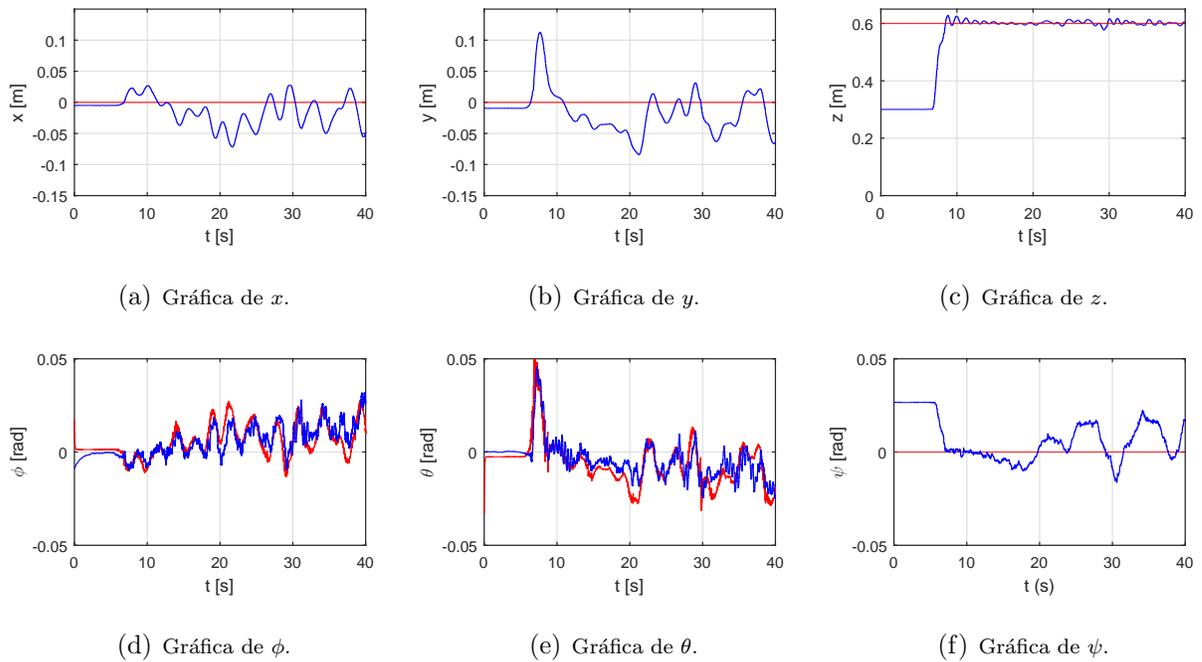
que produce que el cuadrirotor se mantenga volando a una altura 0.6 [m]. Las ganancias del controlador PID/PD fueron obtenidas en un proceso heurístico y se usaron para todos los experimentos presentados en este capítulo. Los valores obtenidos del proceso de sintonización se presentan a continuación

$$\begin{aligned} k_x &= 0.27, & k_{dx} &= 0.1625, & k_{ix} &= 0.01, \\ k_y &= 0.27, & k_{dy} &= 0.1625, & k_{iy} &= 0.01, \\ k_z &= 11.17, & k_{dz} &= 4.46, & k_{iz} &= 2.23, \\ K_{p\eta} &= \text{diag}\{1.75, 1.75, 2.6\}, \\ K_{\Omega} &= \text{diag}\{0.35, 0.4, 1\}. \end{aligned}$$

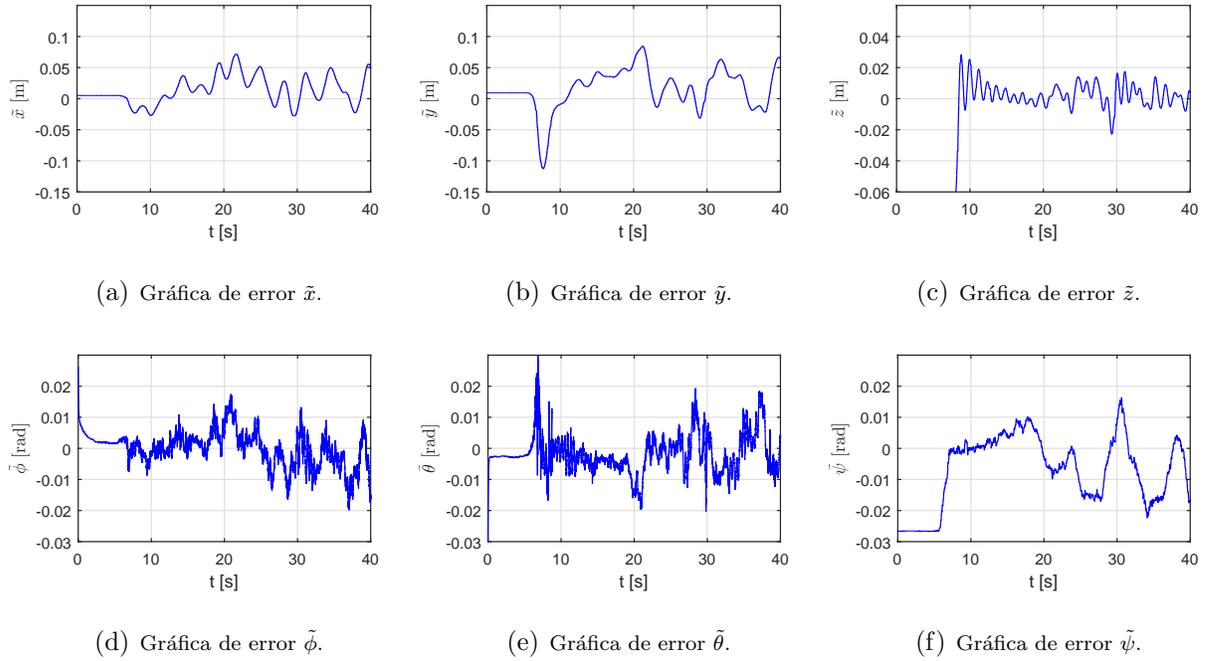
En la figura 3.7 se muestra el movimiento del cuadrirotor en el espacio tridimensional, se observa que el vehículo siempre se encuentra alrededor del punto de referencia. En la figura 3.8 se presentan las señales de posición  $\mathbf{p}_d(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  deseadas (línea roja), así como también las señales actuales de posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  (línea azul) obtenidas durante en la experimentación. Se puede notar que después de los primeros 5 segundos el cuadrirotor comienza a despegar, los siguientes 5 segundos el vehículo alcanza la pose deseada y se mantiene alrededor de ésta. Para tener idea más clara de que tan cercano el cuadrirotor se encuentra realizando el vuelo en el punto deseado, se muestran las gráficas del error en la figura 3.9. El error en la posición  $\tilde{x}$  y  $\tilde{y}$  se encuentran delimitados en un intervalo  $\pm 0.1$  [m], en el caso de error  $\tilde{z}$ , su magnitud es menor a  $\pm 0.02$  [m], mientras que los errores de los ángulos de Euler, se encuentran en un intervalo con límites en  $\pm 0.3$  [rad].



**Figura 3.7: Resultados experimentales:** Movimiento realizado por el cuadrirotor Quanser QBall 2 durante la tarea de regulación.



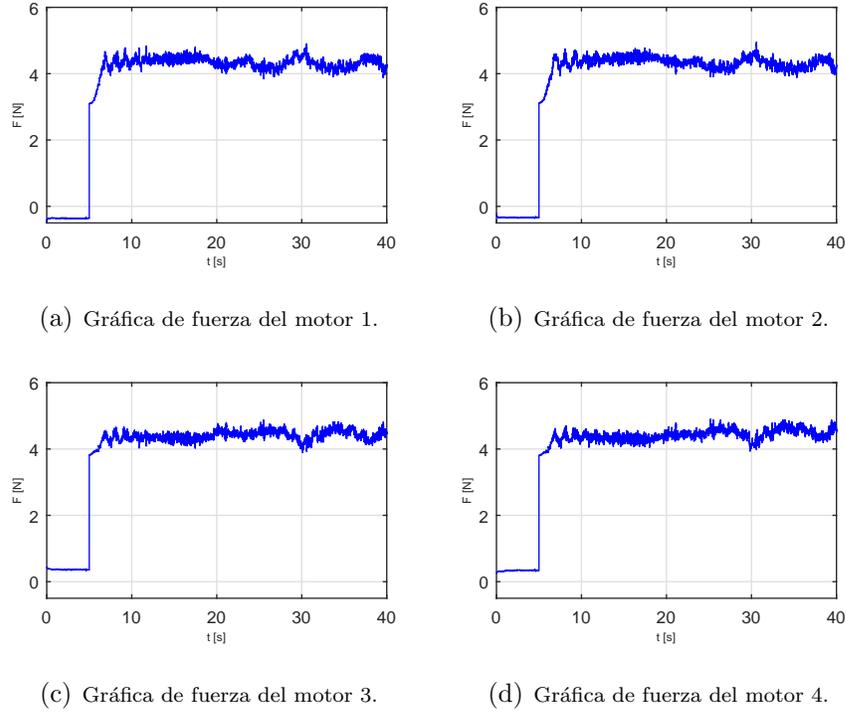
**Figura 3.8: Resultados experimentales:** Gráficas de la posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  en regulación y señales de referencia de posición  $\mathbf{p}_d(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  durante la tarea de regulación empleando el esquema de control PID/PD en (3.3)-(3.6).



**Figura 3.9: Resultados experimentales:** Gráficas de las señales de error de posición  $\tilde{\mathbf{p}}(t)$  y orientación  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$  obtenidas durante la tarea de regulación asignado al cuadricóptero Quanser QBall 2 empleando el controlador PID/PD presentado en (3.3)-(3.6)

Las gráficas de las fuerzas  $f_i(t)$  generadas por los motores del cuadricóptero durante el vuelo en regulación se muestran en la figura 3.10, las cuales han sido obtenidas con la ecuación (2.45). Se puede ver que las fuerzas son menores a los 5 [N] para cada motor lo cual produce la fuerza necesaria para que el cuadricóptero pueda elevarse y mantenerse en la pose deseada.

El controlador PID es capaz de compensar el error para cumplir la tarea de regulación. Con ello el vehículo se mantiene cercano a la pose deseada manteniendo las señales de error acotadas con magnitudes pequeñas.



**Figura 3.10: Resultados experimentales:** Gráficas de la fuerza generada por cada rotor del vehículo durante la tarea de regulación empleando el controlador PID/PD presentado en (3.3)-(3.6).

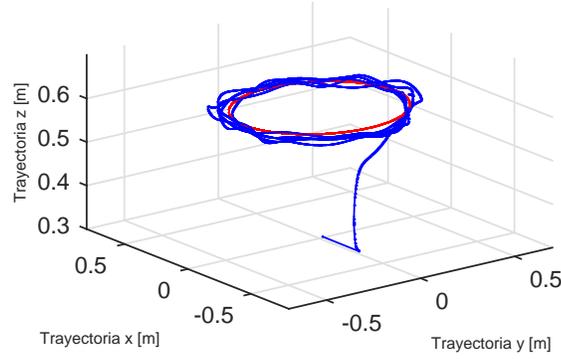
### 3.2.2. Seguimiento de trayectorias que generan una circunferencia

En esta sección se presentan dos resultados experimentales en la tarea de seguimiento al asignar trayectorias que generan circunferencias en el plano  $x, y$ , las cuales se recorren a distintas velocidades. En el primer experimento, las señales de posición deseada  $\mathbf{p}_d(t)$  y el ángulo de guiñada deseada  $\psi_d(t)$  que se emplearon están dadas por

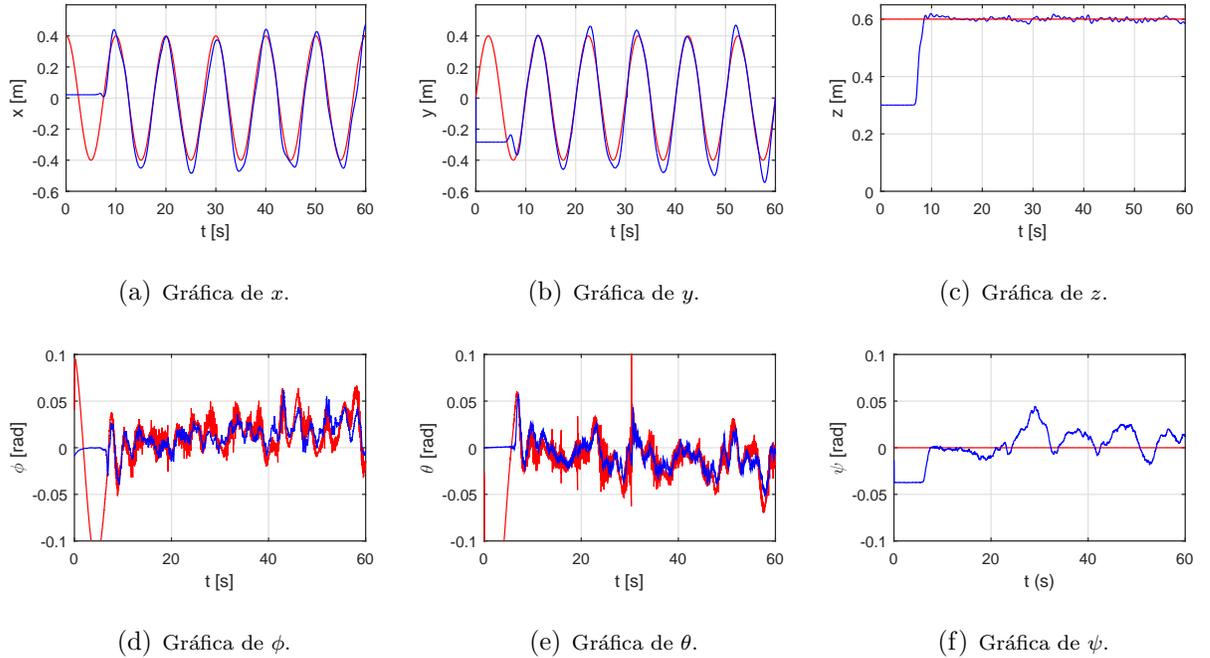
$$\mathbf{p}_d(t) = \begin{bmatrix} 0.4 \cos(\frac{\pi}{5}t) \\ 0.4 \sin(\frac{\pi}{5}t) \\ 0.6 \end{bmatrix} [\text{m}],$$

$$\psi_d(t) = 0 [\text{rad}],$$

así, el vehículo sigue la trayectoria a una altura de 0.6 [m]. El desempeño del controlador en esta tarea de seguimiento se observa en las figuras 3.11- 3.14.



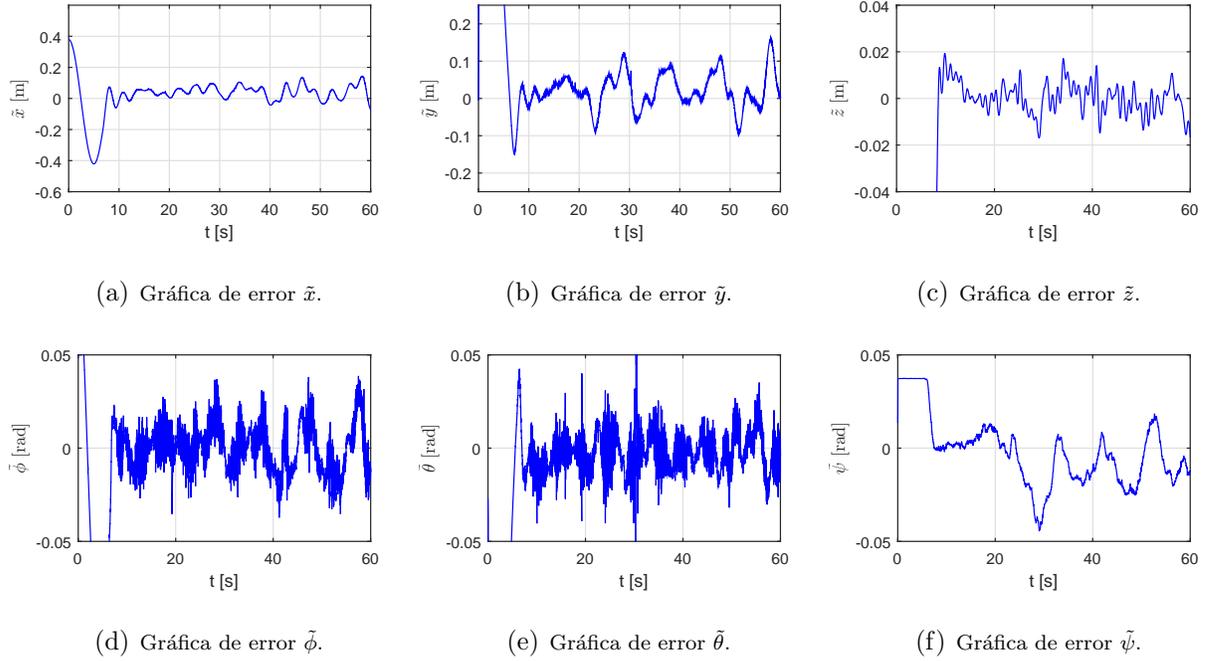
**Figura 3.11:** Ruta a baja velocidad realizada por el cuadrirotor Quanser QBall 2, utilizando el controlador PID/PD 3.3- 3.6.



**Figura 3.12: Resultados experimentales:** Gráficas de la posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  y señales de referencia de posición  $\mathbf{p}_d(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  durante la tarea de seguimiento de trayectoria que da lugar a una circunferencia empleando el esquema de control PID/PD en (3.3)-(3.6).

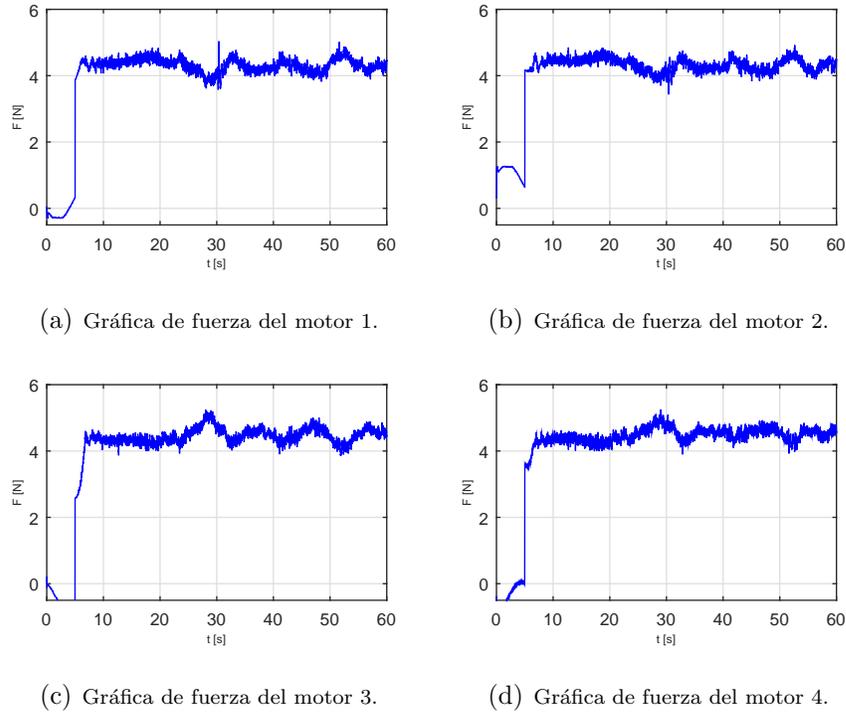
En la vista tridimensional que se muestra en la figura 3.11 se presenta la ruta deseada (línea roja) y la ruta realizada por el vehículo (línea azul), se nota que el vehículo es capaz de seguir la ruta deseada. En la figura 3.12 se observan las señales de posición y orientación deseada  $\mathbf{p}_d(t)$  y  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  respectivamente (línea roja) y las señales reales de posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  (línea azul) obtenidas durante el experimento, se puede ver como el vehículo realiza el seguimiento y se mantiene siempre cerca de la trayectoria. Adicionalmente, las gráficas en la figura 3.13 muestran

las señales de error, en estas gráficas tanto el error de posición como el de orientación se mantienen acotadas. En el caso de las coordenadas  $x$  y  $y$  el error es menor a los 0.15 [m], note que la magnitud del error se incrementa principalmente en las crestas de la señal sinusoidal donde la velocidad deseada es mayor. De manera similar, la señal de error para la altura se mantiene en un intervalo de  $\pm 0.04$  [m], mientras que en el error en los tres parámetros de orientación la magnitud es menor a los 0.05 [rad].



**Figura 3.13: Resultados experimentales:** Gráficas del error de posición  $\tilde{\mathbf{p}}(t)$  y orientación  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$  durante el experimento de seguimiento de trayectorias que da lugar a una circunferencia empleando el controlador PID/PD presentado en (3.3)-(3.6).

En las gráficas de la figura 3.14 se muestran las señales  $f_i(t)$  generadas por el controlador necesarias para lograr que el vehículo complete la tarea asignada las cuales fueron calculadas usando la relación 2.45. Como se observa, dichas señales son acotadas, lo que permite que sean generadas por los rotores.



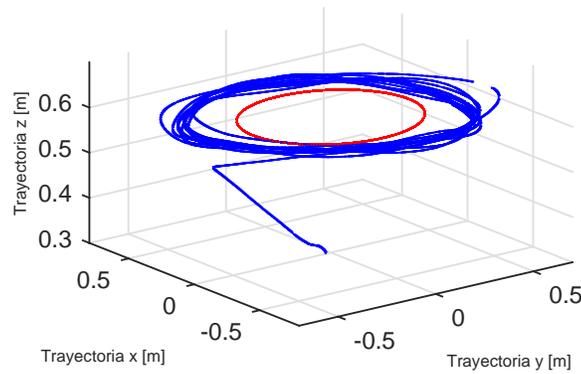
**Figura 3.14: Resultados experimentales:** Gráficas de fuerza generada por cada rotor del vehículo durante la tarea de seguimiento de trayectorias que describe una circunferencia a baja velocidad.

En el segundo experimento relacionado con trayectorias que generan movimiento circular, se incrementó la frecuencia de las funciones sinusoidales para producir un movimiento más rápido en el cuadrirotor. Las señales de posición deseada  $\mathbf{p}_d(t)$  y ángulo de guiñada  $\psi_d(t)$  para este experimento están dadas por

$$\mathbf{p}_d(t) = \begin{bmatrix} 0.4 \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right) \\ 0.4 \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) \\ 0.6 \end{bmatrix} [\text{m}],$$

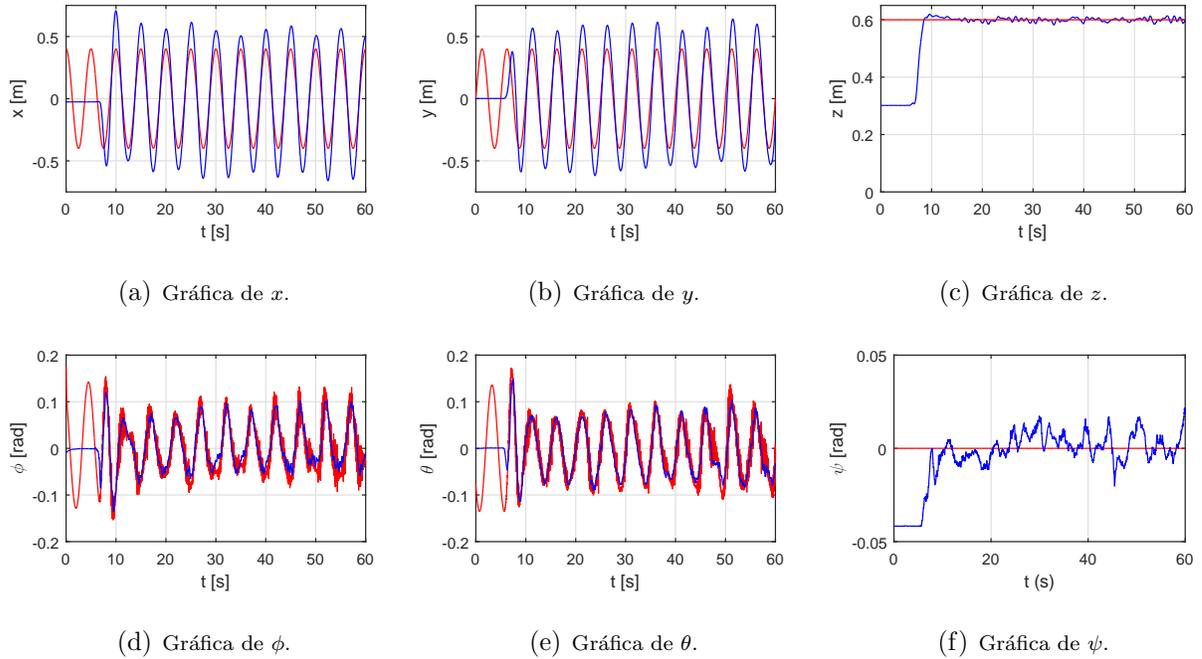
$$\psi_d(t) = 0 [\text{rad}].$$

En la figura 3.15 se muestra la vista tridimensional del movimiento del cuadrirotor durante el experimento. Se observa como la ruta realizada por el cuadrirotor (línea azul) es similar a la ruta deseada (línea roja) pero con un radio de magnitud mayor.

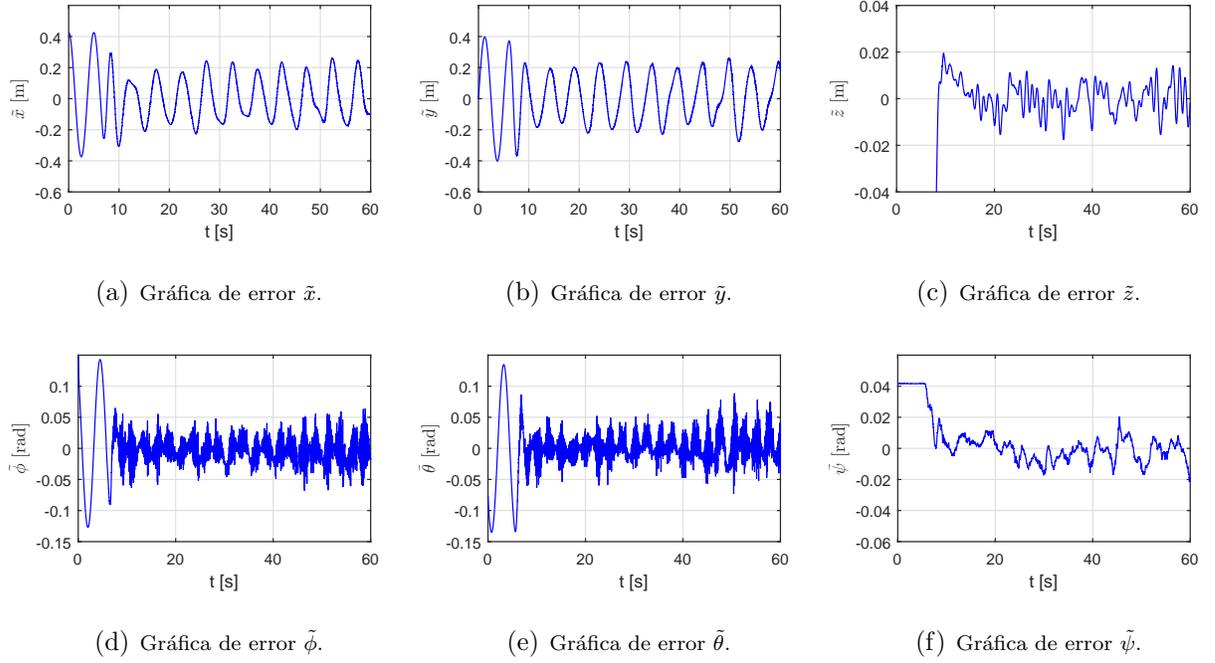


**Figura 3.15:** Ruta a alta velocidad realizada por el cuadrirotor Quanser QBall 2, utilizando el controlador PID/PD 3.3- 3.6.

En la figura 3.16 se presentan las señales de posición deseada  $\mathbf{p}_d(t)$  y orientación deseada  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  (líneas rojas) y posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  (líneas azules) obtenidas durante el experimento. En las gráficas correspondientes a la posición  $x, y$  se observa como la frecuencia de la señal sinusoidal es el doble del caso anterior produciendo un ciclo cada 5 segundos. En cuanto al seguimiento se puede observar que la diferencia entre la señal deseada y la real es mayor con respecto al experimento previo. En la gráfica de altura  $z(t)$  muestra que el vehículo se mantiene a la distancia deseada mientras que los ángulos que representan la orientación se siguen adecuadamente. En particular, hay que poner atención en las señales deseadas para  $\phi_d(t)$  y  $\theta_d(t)$  las cuales muestran valores deseados con mayor magnitud en comparación con el experimento anterior. Las señales de error se presentan en la figura 3.17. En general estas señales se mantienen en intervalos más grandes en comparación con las trayectorias con frecuencia más baja. Para el caso de la posición  $x, y$  el error sobrepasa los 0.2 [m]. La altura se mantiene con un error por debajo de los 0.04 [m] mientras que el error en los ángulos de orientación que representan el cabeceo y balanceo la magnitud del error es mayor a los 0.05 [rad].

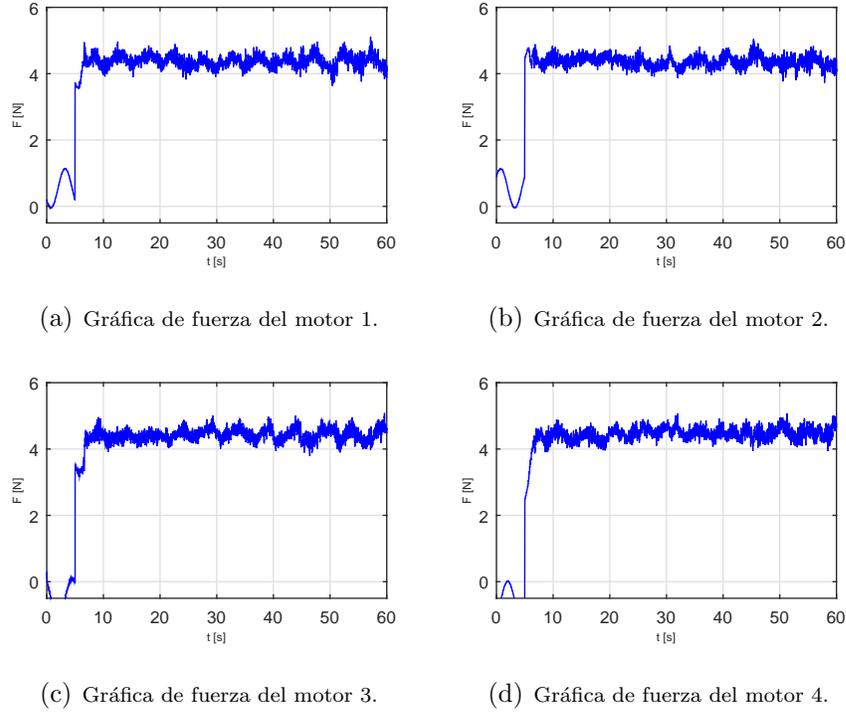


**Figura 3.16: Resultados experimentales:** Gráficas de la posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  y señales de referencia de posición  $\mathbf{p}_d(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  durante la tarea de seguimiento de trayectoria empleando el esquema de control PID/PD en (3.3)-(3.6).



**Figura 3.17: Resultados experimentales:** Gráficas del error de posición  $\tilde{\mathbf{p}}(t)$  y orientación  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$  durante el experimento de seguimiento de trayectorias que da lugar a una circunferencia de alta velocidad empleando el controlador PID/PD presentado en (3.3)-(3.6).

En la figura 3.18 se muestran las fuerzas  $f_i(t)$  de empuje obtenidas del controlador PID/PD y de la expresión (2.45). Es claro como estas señales se mantienen cerca de los 4.5 [N] fuerza necesaria para alcanzar la altura deseada pero también se observa como presentan una variación constante y con magnitudes considerables debido a la necesidad de seguir ángulos deseados más grandes.



**Figura 3.18: Resultados experimentales:** Gráficas de la fuerza generada por cada rotor del vehículo durante la tarea de seguimiento de trayectorias que describe una circunferencia a alta velocidad.

### 3.2.3. Prueba experimental de seguimiento de trayectoria curva lemniscata.

El último experimento realizado para evaluar el funcionamiento del controlador PID/PD se trata del seguimiento de trayectorias que dan lugar a una curva lemniscata en el plano  $x y$ , las cuales se establecieron como sigue

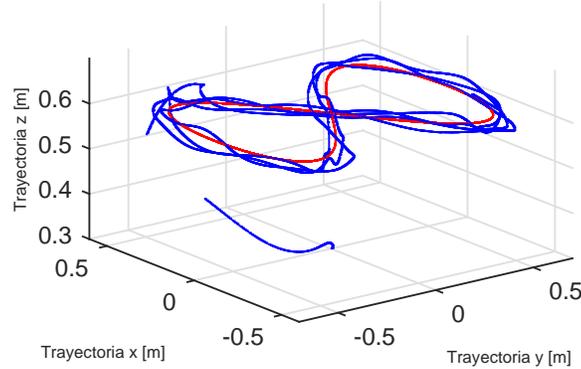
$$\mathbf{p}_d(t) = \begin{bmatrix} 0.4 \cos\left(\frac{2\pi}{15}t\right) \\ 0.6 \sin\left(\frac{4\pi}{15}t\right) \\ 0.6 \end{bmatrix} [\text{m}],$$

$$\psi_d(t) = 0 [\text{rad}].$$

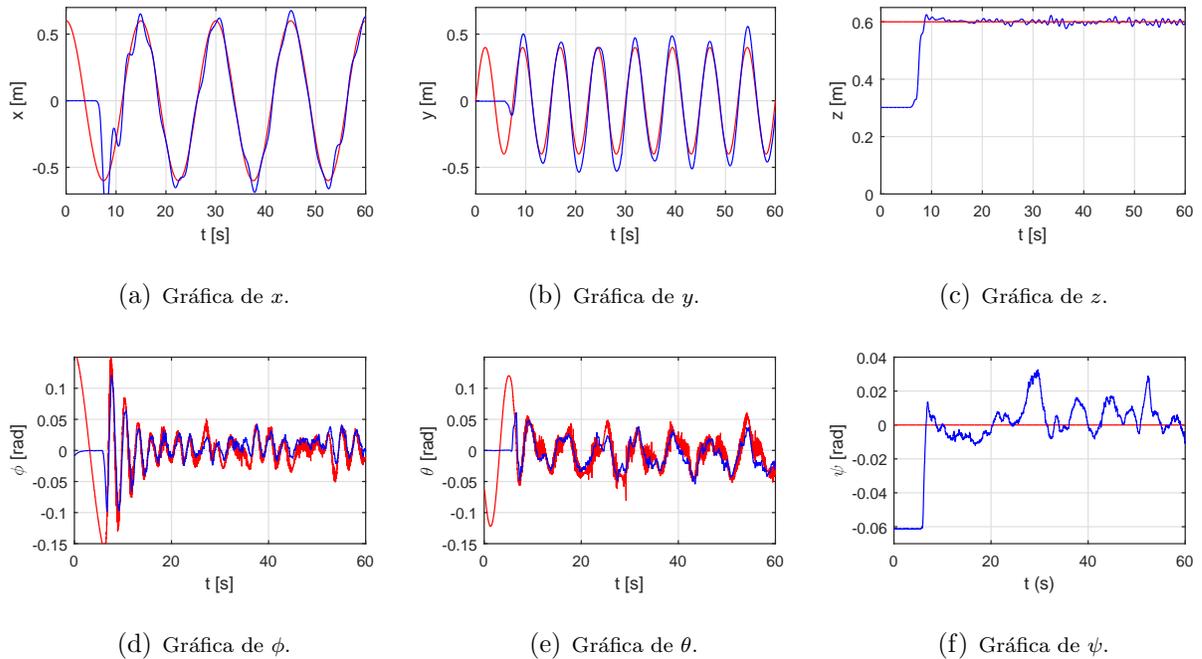
En este experimento la posición deseada  $x_d(t)$  es más lenta que la definida para  $y_d(t)$ . Además, la amplitud de la trayectoria  $x_d(t)$  es mayor que la de  $y_d(t)$ . La altura deseada  $z_d(t)$  se establece constante en 0.6 [m] mientras que el ángulo deseado de guiñada  $\psi_d(t)$  es cero en todo el experimento. La ruta deseada (línea roja) y la descrita por el cuadrirotor durante el experimento se presentan en la figura 3.19.

Las gráficas de la figura 5.19 muestran las trayectorias deseadas (líneas rojas) y las trayectorias que se obtienen del experimento (línea azul), en ellas se observa como el controlador mantiene al cuadrirotor cercano a las señales de referencia. Las señales de error presentadas en la figura 3.21 permiten observar de manera más clara el comportamiento del sistema donde se ve que el error

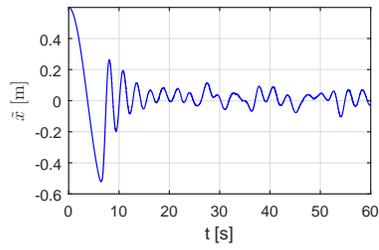
del seguimiento en las posiciones  $x$ ,  $y$  están acotadas por  $\pm 0.15$  [m], el error de altura se mantiene oscilante en los  $0.03$  [m], mientras que la figura 3.22 presenta las fuerzas  $f_i(t)$  de empuje obtenidas del controlador y que fueron generadas por cada rotor durante el experimento.



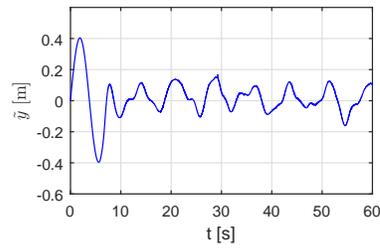
**Figura 3.19:** Trayectoria lemniscata realizada con el cuadrirotor Quanser QBall 2.



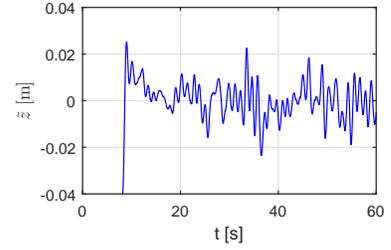
**Figura 3.20: Resultados experimentales:** Gráficas de la posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  y señales de referencia de posición  $\mathbf{p}_d(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  durante la tarea de seguimiento de trayectoria lemniscata empleando el esquema de control PID/PD en (3.3)-(3.6).



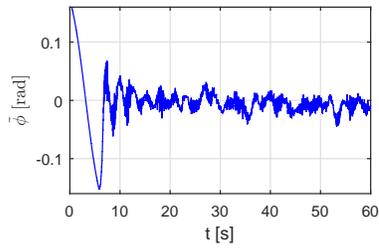
(a) Gráfica de error  $\tilde{x}$ .



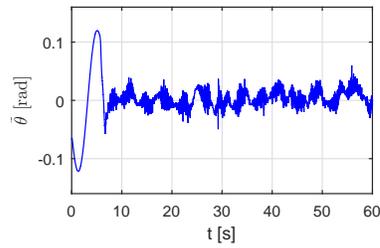
(b) Gráfica de error  $\tilde{y}$ .



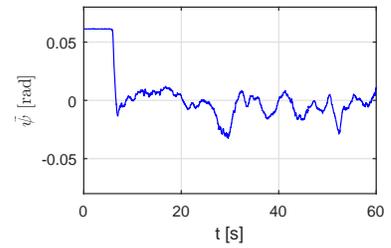
(c) Gráfica de error  $\tilde{z}$ .



(d) Gráfica de error  $\tilde{\phi}$ .

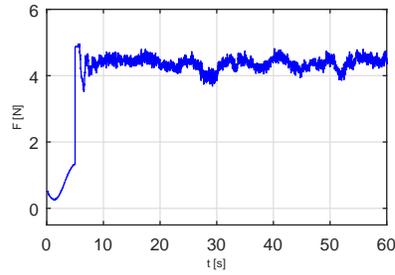


(e) Gráfica de error  $\tilde{\theta}$ .

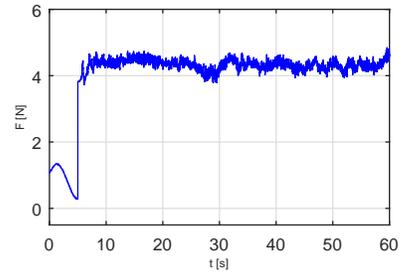


(f) Gráfica de error  $\tilde{\psi}$ .

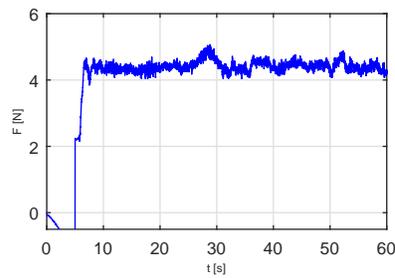
**Figura 3.21: Resultados experimentales:** Gráficas del error de posición  $\tilde{\mathbf{p}}(t)$  y orientación  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$  durante el experimento de seguimiento de trayectorias que da lugar a una ruta lemniscata empleando el controlador PID/PD presentado en (3.3)-(3.6).



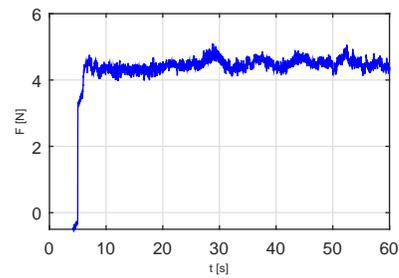
(a) Gráfica de fuerza del motor 1.



(b) Gráfica de fuerza del motor 2.



(c) Gráfica de fuerza del motor 3.



(d) Gráfica de fuerza del motor 4.

**Figura 3.22: Resultados experimentales:** Gráficas de fuerza generada por cada rotor del vehículo durante la tarea de seguimiento de trayectorias que describe una lemniscata.

# Controlador de linealización por retroalimentación con *backstepping*

El control *backstepping* es otro método que puede ser empleado para resolver el problema de control de cuadrirotos. En [23], [24], [25],[26] se presentan controladores basados en esta metodología los cuales son aplicados en experimentos de vuelo en interiores, de igual manera en [27] los autores muestran como el control basado en *backstepping* dividido en tres subsistemas estabiliza el vehículo en simulación. En este capítulo se analiza el desempeño de un esquema del controlador de linealización por retroalimentación con estructura *backstepping*, el cual fue presentado en [20]. El controlador está dividido en tres subcontroles: el de altura, el de orientación y el de posición en el plano  $x - y$ . Al igual que en caso del controlador PID/PD, la altura y la orientación se controlan de manera directa, mientras que la posición horizontal se determina modificando la señal de referencia para los ángulos de balanceo  $\phi_d(t)$  y de cabeceo  $\theta_d(t)$ . De este modo, el movimiento deseado del cuadrirotor se determina estableciendo los valores de referencia a las coordenadas  $[x_d(t), y_d(t), z_d(t), \psi_d(t)]$ . En la figura 4.1 se muestra el diagrama a bloques del controlador descrito.

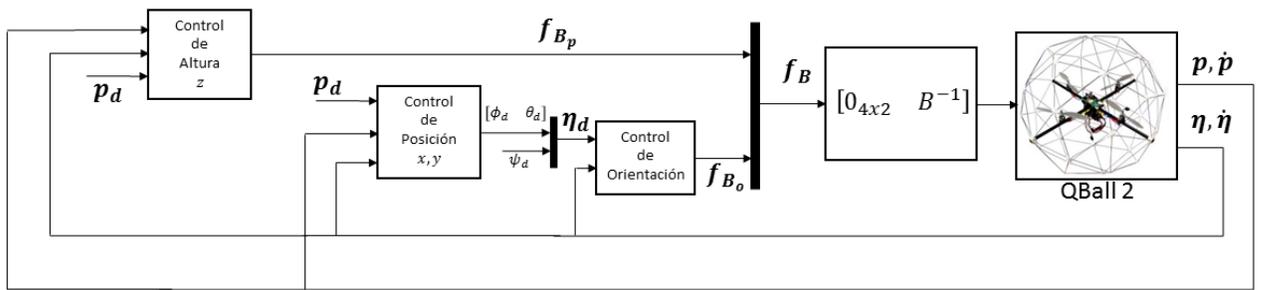


Figura 4.1: Estructura del controlador *backstepping*.

Considerando de nueva cuenta la posición  $\mathbf{p}(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]^T \in \mathbb{R}^3$  y la orientación  $\boldsymbol{\eta}(t) = [\phi(t) \ \theta(t) \ \psi(t)]^T \in \mathbb{R}^3$  del cuadrirotor y las señales de referencia de posición  $\mathbf{p}_d(t) = [x_d(t) \ y_d(t) \ z_d(t)]^T \in \mathbb{R}^3$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}_d(t) = [\phi_d(t) \ \theta_d(t) \ \psi_d(t)]^T \in \mathbb{R}^3$ , entonces los errores de posición  $\tilde{\mathbf{p}}(t) = [\tilde{x}(t) \ \tilde{y}(t) \ \tilde{z}(t)]^T \in \mathbb{R}^3$  y orientación  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t) = [\tilde{\phi}(t) \ \tilde{\theta}(t) \ \tilde{\psi}(t)]^T \in \mathbb{R}^3$  se

definen como

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_d - \mathbf{p}, \quad (4.1)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\eta}_d - \boldsymbol{\eta}. \quad (4.2)$$

Adicionalmente, se definen los errores de seguimiento de posición filtrado

$$\mathbf{s}_p(t) = [s_{px}(t) \quad s_{py}(t) \quad s_{pz}(t)]^T \in \mathbb{R}^3 \quad (4.3)$$

y de orientación filtrado

$$\mathbf{s}_\eta(t) = [s_{\eta\phi}(t) \quad s_{\eta\theta}(t) \quad s_{\eta\psi}(t)]^T \in \mathbb{R}^3 \quad (4.4)$$

como

$$\dot{\mathbf{s}}_p = \dot{\tilde{\mathbf{p}}} + \Lambda_p \tilde{\mathbf{p}}, \quad (4.5)$$

$$\dot{\mathbf{s}}_\eta = \dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} + \Lambda_\eta \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \quad (4.6)$$

donde  $\Lambda_p = \text{diag}\{\Lambda_{px}, \Lambda_{py}, \Lambda_{pz}\} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , y  $\Lambda_\eta = \text{diag}\{\Lambda_{\eta\phi}, \Lambda_{\eta\theta}, \Lambda_{\eta\psi}\} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  son matrices de ganancias diagonales definidas positivas. Una condición en la selección de las ganancias  $\Lambda_{px}$  y  $\Lambda_{py}$  es que estas ganancias deben ser suficientemente grandes tales que

$$\Lambda_{px} > \left| \frac{s_{px}}{\tilde{x}} \right|, \quad (4.7)$$

$$\Lambda_{py} > \left| \frac{s_{py}}{\tilde{y}} \right|. \quad (4.8)$$

Así, la ley de control propuesta en [20] se expresa como

$$\mathbf{f}_{B_p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m}{\cos\theta \cos\phi} [g + (1 - \Lambda_{pz}^2) \tilde{z} + (\Lambda_{pz} + k_{spz}) s_{pz}] \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{f}_{B_p} = W(\boldsymbol{\eta})^T \{S(\dot{\boldsymbol{\eta}})^T I \dot{\boldsymbol{\eta}} + I^{-1}[(I_3 - \Lambda_\eta^2) \tilde{\boldsymbol{\eta}} + (\Lambda_\eta + K_{s\eta}) \mathbf{s}_\eta]\}, \quad (4.10)$$

donde,  $S(\dot{\boldsymbol{\eta}}) \in SS(3)$  es el operador antisimétrico definido en (2.28),  $I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es el tensor de inercia,  $I_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz identidad,  $K_{s\eta} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz de ganancias definida estrictamente positiva y  $k_{spz}$  es una constante positiva. El control de posición del cuadricóptero se realiza indirectamente modificando los valores deseados de  $\phi_d$  y  $\theta_d$  de la siguiente manera

$$\phi_d = \text{sen}^{-1} (\gamma_1^{sol} \text{sen} \psi - \gamma_2^{sol} \cos \psi), \quad (4.11)$$

$$\theta_d = \text{sen}^{-1} \left( \frac{\gamma_1^{sol} \cos \psi + \gamma_2^{sol} \text{sen} \psi}{\cos \phi} \right), \quad (4.12)$$

donde  $\gamma_1^{sol}$  y  $\gamma_2^{sol}$  son entradas virtuales las cuales se obtienen como sigue

$$\gamma_1^{sol} \leq \begin{cases} \gamma_1^{max} & \text{si } s_{px} \geq 0, \\ -\gamma_1^{max} & \text{si } s_{px} < 0, \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\gamma_2^{sol} \leq \begin{cases} \gamma_2^{max} & \text{si } s_{py} \geq 0, \\ -\gamma_2^{max} & \text{si } s_{py} < 0, \end{cases} \quad (4.14)$$

siendo  $\gamma_1^{max}$  y  $\gamma_2^{max}$  constantes positivas que cumplen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} 0 &< \gamma_1^{max} \leq 0.7071, \\ 0 &< \gamma_2^{max} \leq 0.7071. \end{aligned} \quad (4.15)$$

## 4.1. Simulación numérica del controlador *Backstepping*

Las leyes de control descritas anteriormente se probaron en simulación numérica de manera similar como se realizó con el controlador PID/PD, utilizando los parámetros del cuadrirotor de Quanser QBall 2 mostrados en la tabla 2.1 bajo las mismas condiciones. Las tareas realizadas en simulación numérica son de regulación y seguimiento de trayectorias. Los valores de ganancias siguientes fueron encontrados de manera heurística y utilizados para ambas tareas

$$\begin{aligned}\Lambda_p &= \text{diag}\{1.0, 1.0, 6.2\}, \\ \Lambda_\eta &= \text{diag}\{5.0, 5.0, 8.0\}, \\ K_{s\eta} &= \text{diag}\{3.0, 3.0, 5.0\}, \\ k_{spz} &= 3.6.\end{aligned}$$

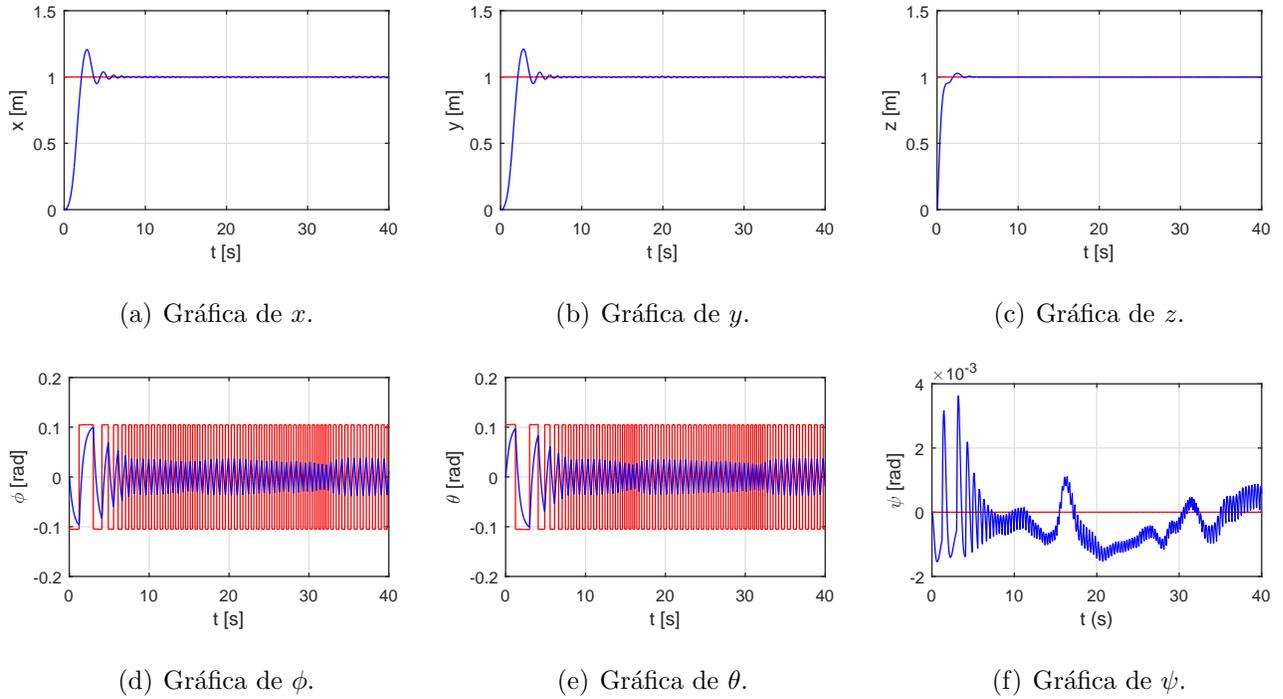
Además, la constante  $\gamma_1^{max} = \gamma_2^{max} = 0.1$  para ambas tareas. Hay que hacer mención que esta constante es de vital importancia en el desempeño del controlador presentado en este capítulo.

### 4.1.1. Regulación

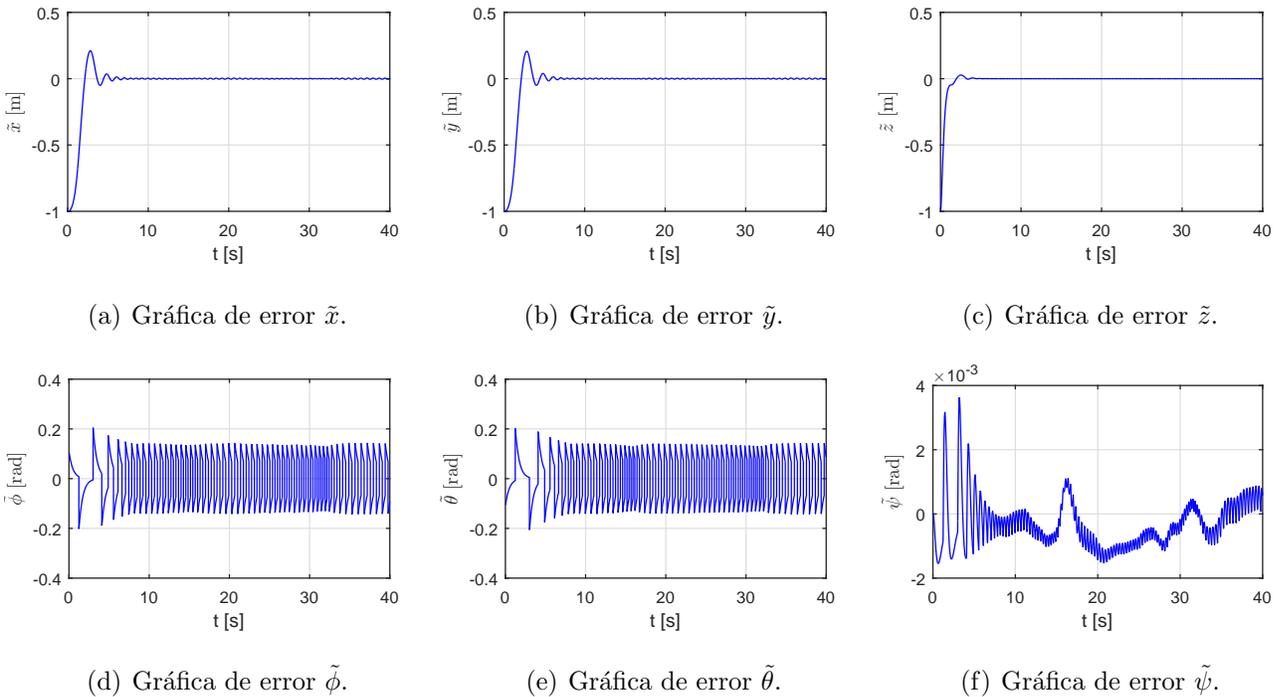
La tarea de regulación asignada al cuadrirotor para evaluar al controlador basado en *backstepping* se presenta en esta sección. De manera similar al controlador PID/PD, el cuadrirotor debe alcanzar y mantener una pose constante durante un período de 40 segundos. Dicha pose se define a continuación

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_d(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ [m]}, \\ \psi_d(t) &= 0 \text{ [rad]}.\end{aligned}$$

Los resultados de la simulación se presentan en la figura 4.2, donde se muestran las señales de posición  $\mathbf{p}_d(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  deseadas (líneas rojas) y las señales actuales  $\mathbf{p}(t)$  y  $\boldsymbol{\eta}(t)$  (líneas azules). En las gráficas se ve como el controlador llega a la posición deseada  $\mathbf{p}_d(t)$  después de un período transitorio de aproximadamente 7 segundos. Por otro lado, los ángulos de balanceo  $\phi_d(t)$  y cabeceo  $\theta_d(t)$  oscilan abruptamente dentro de los valores de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  establecidos. Esto provoca que los ángulos deseados se encuentren acotados a  $\pm 0.1$  [rad]. Para el ángulo de guiñada el punto deseado es alcanzado y permanece dentro de un intervalo de  $\pm 0.004$  [rad]. La figura 4.3 muestra las gráficas del error de cada una de las coordenadas generalizadas. En el caso de la posición  $\tilde{\mathbf{p}}(t)$  el error alcanza el cero a los 7 segundos. Para los ángulos de balanceo y cabeceo el error permanece con una magnitud acotada en  $\pm 0.17$  [rad], mientras que para el ángulo de guiñada se encuentra dentro del rango  $\pm 0.002$  [rad].



**Figura 4.2: Resultados de simulación:** Gráficas de la posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  en regulación empleando el controlador *backstepping* descrito en (4.9)-(4.12).



**Figura 4.3: Resultados en simulación:** Gráficas del error en la tarea de regulación empleando el controlador *backstepping* descrito en (4.9)-(4.12).

Los resultados en la simulación numérica mostraron que el controlador llega a la pose deseada. El hecho de que el controlador depende de un par de funciones signo con magnitud establecida por las constantes  $\gamma_1^{max}$  y  $\gamma_2^{max}$  genera cambios repentinos en los ángulos de balanceo y cabeceo deseados lo que provoca que el cuadrirotor tienda a realizar un movimiento similar a una vibración.

### 4.1.2. Seguimiento de trayectoria

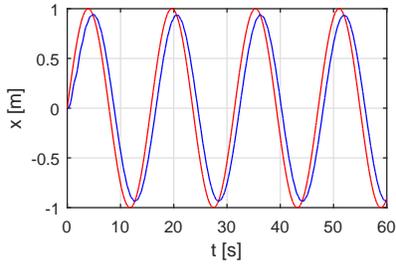
La tarea analizada en esta sección es el seguimiento de trayectoria, la cual consiste que el cuadrirotor siga un conjunto de trayectorias definidas en un periodo de 60 segundos. La trayectoria asignada a la pose y al ángulo de guiñada  $\psi(t)$  generan una ruta en forma de circunferencia en el plano  $x, y$  de radio de 1 [m] y a una altura constante de 1 [m]. Las señales de referencia asignadas para dicha tarea se establecieron como

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_d(t) &= \begin{bmatrix} \text{sen}(2t/5) \\ \text{cos}(2t/5) \\ 1 \end{bmatrix} [m], \\ \psi_d(t) &= 0 [rad]. \end{aligned}$$

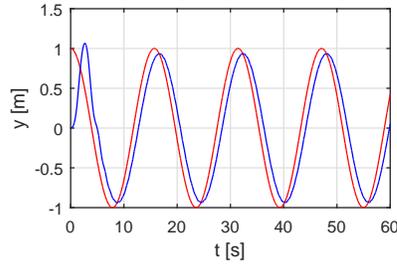
En la figura 4.4 se presentan las señales de posición  $\mathbf{p}_d(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  deseadas (línea roja) junto con las señales actuales  $\mathbf{p}(t)$ ,  $\boldsymbol{\eta}(t)$  (línea azul) obtenidas durante la simulación numérica. Se observa que el cuadrirotor sigue la trayectoria deseada y que la señal actual posee un pequeño desfase para las coordenadas  $x - y$ . En el caso de la altura el cuadrirotor llega al punto deseado dentro los primeros 3 segundos de la simulación. Los ángulos de balanceo  $\phi(t)$  y cabeceo  $\theta(t)$  permanecen oscilando al rededor de cero mientras el ángulo de guiñada se mantiene cercano al valor deseado.

En la figura 4.5 se muestran las gráficas de error de seguimiento de trayectorias donde las señales  $\tilde{x}(t)$ ,  $\tilde{y}(t)$  presentan un magnitud en el rango de  $\pm 0.4$  [m], lo que explica el desfase que se menciono anteriormente. El error de altura  $\tilde{z}$  decrece a cero en menos de 10 segundos. En el caso de los errores de los ángulos de balanceo  $\tilde{\phi}(t)$  y cabeceo  $\tilde{\theta}(t)$  éstos se mantienen acotados por  $\pm 0.2$  [rad], mientras que el error en el ángulo de guiñada  $\tilde{\psi}(t)$  permanece fluctuando dentro de  $\pm 0.004$  [rad].

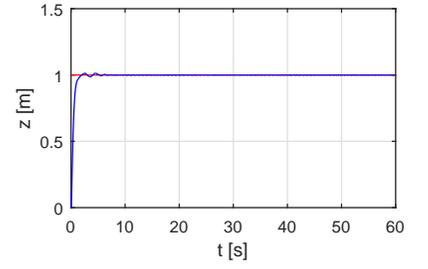
En general, la simulación numérica muestra que el comportamiento del cuadrirotor usando el controlador *backstepping* permite cumplir con las tareas asignadas. Lo más importante a notar es que las constantes  $\gamma_1^{max}$  y  $\gamma_2^{max}$  definen el rango de variación de los ángulos deseados de balanceo y cabeceo, y por lo tanto, entre más grandes sean los valores de estas ganancias el cuadrirotor presentará mayores vibraciones durante el vuelo.



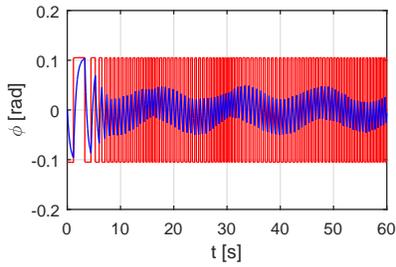
(a) Gráfica de  $x$ .



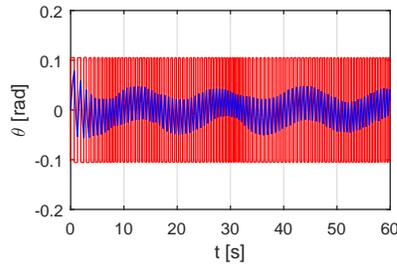
(b) Gráfica de  $y$ .



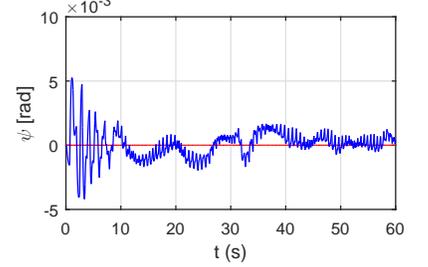
(c) Gráfica de  $z$ .



(d) Gráfica de  $\phi$ .

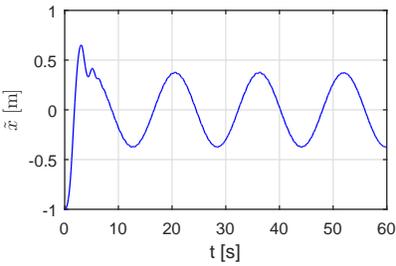


(e) Gráfica de  $\theta$ .

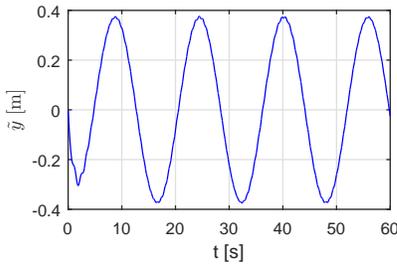


(f) Gráfica de  $\psi$ .

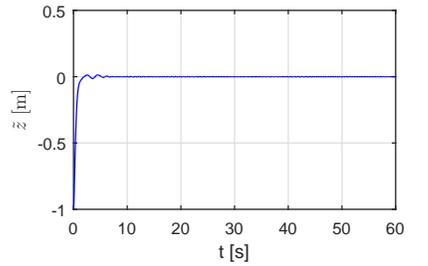
**Figura 4.4: Resultados en simulación:** Gráficas del seguimiento de trayectoria en  $p(t)$  y  $\eta(t)$  empleando el controlador *backstepping* descrito en (4.9)-(4.12).



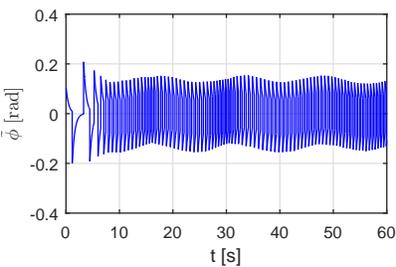
(a) Gráfica de error  $\tilde{x}$ .



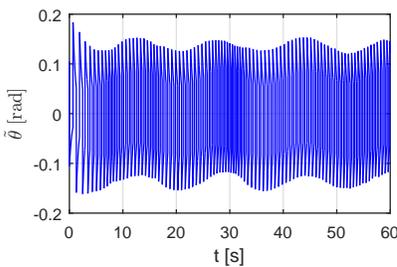
(b) Gráfica de error  $\tilde{y}$ .



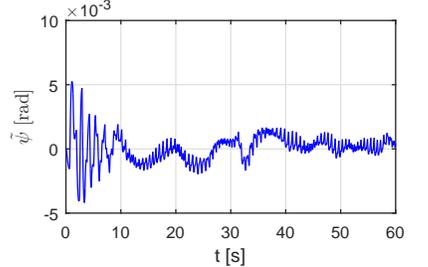
(c) Gráfica de error  $\tilde{z}$ .



(d) Gráfica de error  $\tilde{\phi}$ .



(e) Gráfica de error  $\tilde{\theta}$ .



(f) Gráfica de error  $\tilde{\psi}$ .

**Figura 4.5: Resultados en simulación** Gráficas del error en la tarea de seguimiento de trayectoria empleando el controlador *backstepping* descrito en (4.9)-(4.12).

## 4.2. Controlador por *backstepping* en la plataforma experimental

En esta sección se presentan los resultados obtenidos con el controlador basado en *backstepping* al realizar distintas tareas de vuelo para evaluar su desempeño en la plataforma experimental. Entre las tareas asignadas para tal propósito se encuentra la regulación y el seguimiento de trayectorias. Para el seguimiento de trayectorias, al igual que en el caso del controlador PID/PD, se realizaron 3 pruebas distintas. Las primeras dos se relacionan a una ruta en forma de circunferencia con la única diferencia en la velocidad de recorrido, la tercera corresponde a una curva de lemniscata.

### 4.2.1. Regulación

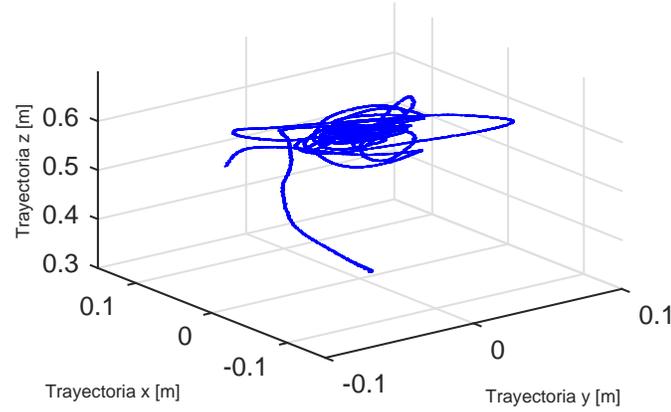
En la tarea de regulación, de manera similar que en la sección de simulación numérica, se establece un punto definido dado por los siguientes valores

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_d(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.6 \end{bmatrix} [\text{m}], \\ \psi_d(t) &= 0 [\text{rad}].\end{aligned}$$

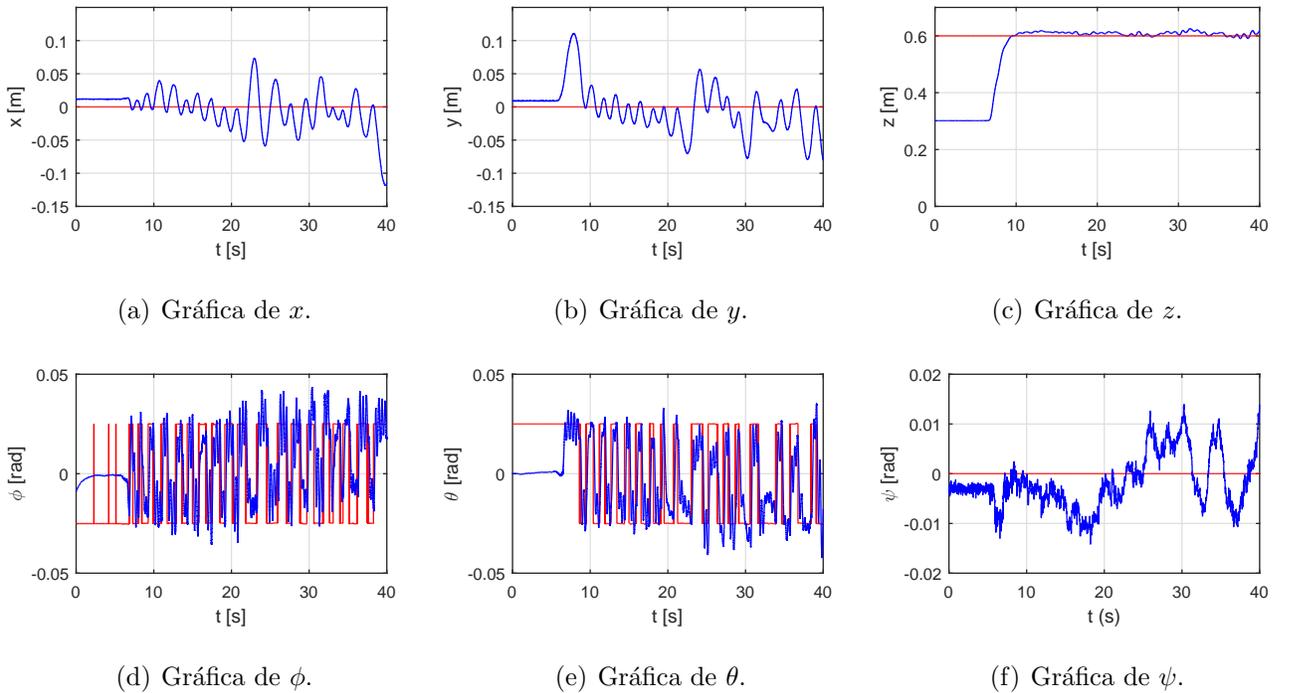
Las ganancias utilizadas para el controlador *backstepping* fueron obtenidas con procesos heurísticos y son expresadas a continuación

$$\begin{aligned}\Lambda_p &= \text{diag}\{1.75, 1.0, 2.0107\}, \\ \Lambda_\eta &= \text{diag}\{8.2638, 8.2638, 29.0466\}, \\ K_{s\eta} &= \text{diag}\{6.7362, 6.7362, 2.2034\}, \\ k_{spz} &= 2.3587, \\ \gamma_1 &= \gamma_2 = 0.025.\end{aligned}$$

El comportamiento del cuadrirotor en el espacio tridimensional se puede apreciar en la figura 4.6 donde el punto deseado fue definido a 0.6 [m] por encima del origen. Se observa que el vehículo se mantiene alrededor del punto deseado. En la figura 4.7 se muestran las señales de posición y orientación deseadas  $\mathbf{p}_d(t)$  y  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  respectivamente (línea roja), además de las señales actuales de posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  (línea azul). El vehículo alcanza la altura deseada a los 10 segundos de haber iniciado el experimento y a los 5 segundos de haber despegado. Para las coordenadas  $x - y$  el vehículo se mantiene cerca del valor deseado desde el inicio, mientras que los ángulos de balanceo  $\phi(t)$  y cabeceo  $\theta(t)$  varían entre  $\pm 0.025$  [rad], lo cual es resultado de los valores asignados a las constantes  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ . Para el ángulo de guiñada  $\psi(t)$  el vehículo mantiene un valor dentro del intervalo comprendido entre  $\pm 0.01$  [rad] aproximadamente.

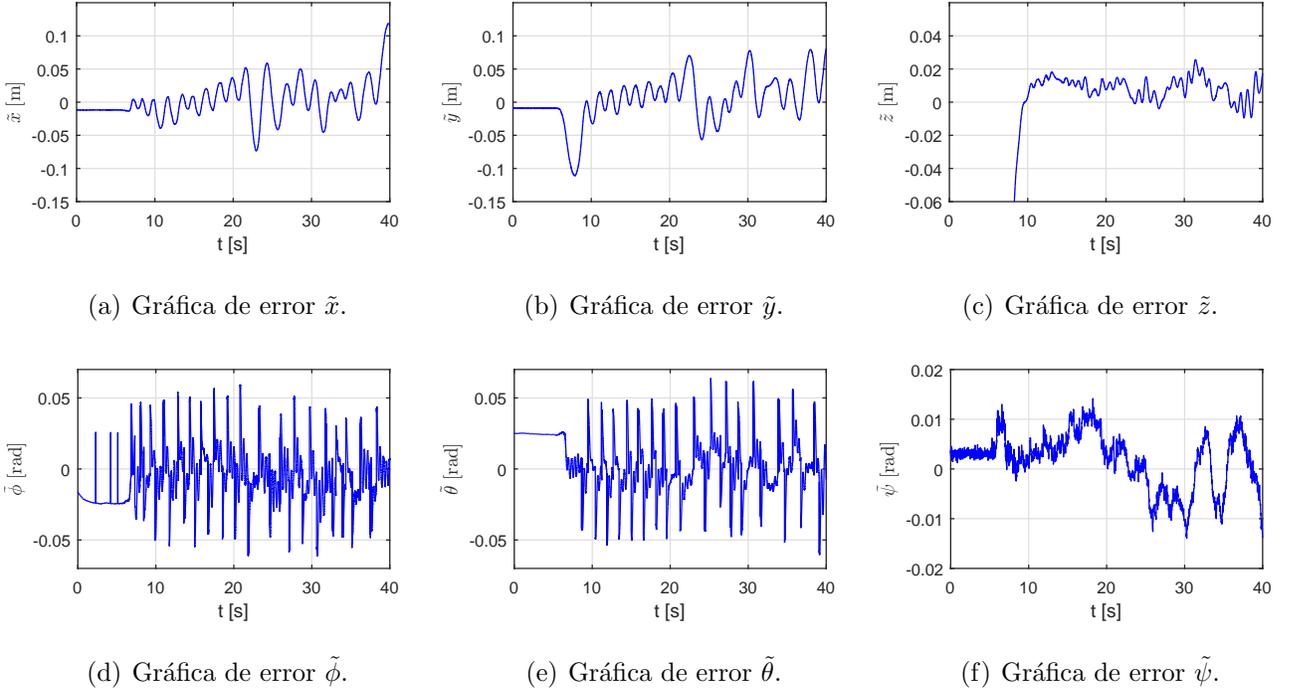


**Figura 4.6: Resultados experimentales:** Movimiento realizado por el cuadrirotor Quanser QBall 2 durante la tarea de regulación.



**Figura 4.7: Resultados experimentales:** Gráficas de la posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  en regulación y señales de referencia de posición  $\mathbf{p}_d(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  durante la tarea de regulación empleando el esquema de control *backstepping* en (4.9)-(4.12).

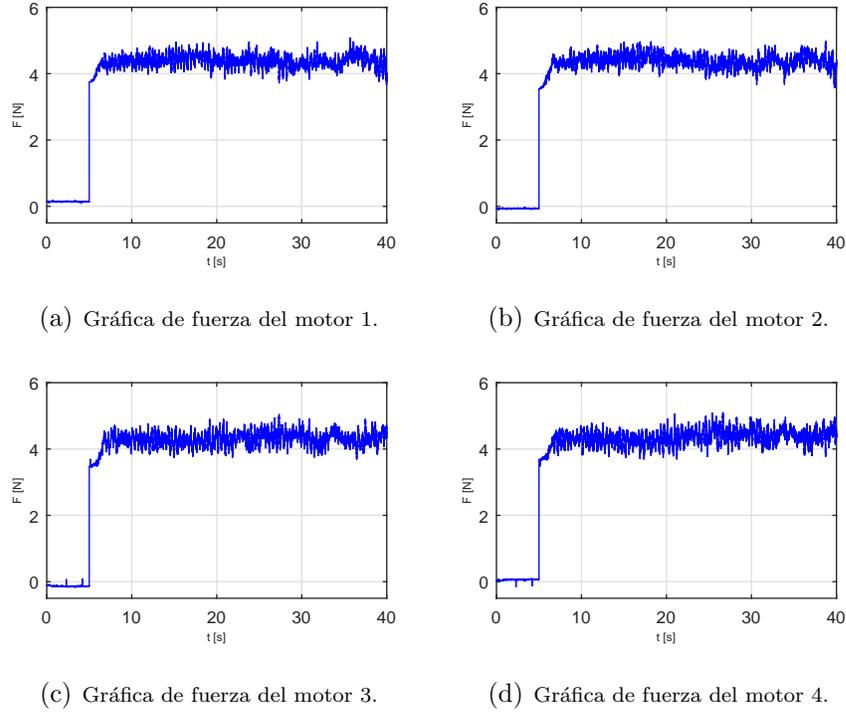
En la figura 4.8 se muestran las señales de error, en estas gráficas se ve como el error de posición  $\tilde{x}(t)$  y  $\tilde{y}(t)$  está acotado por  $\pm 0.1$  [m] mientras que el error de altura  $\tilde{z}(t)$  muestra valores absolutos menores a los 0.04 [m]. Se debe hacer notar como el error en los ángulos de balanceo  $\tilde{\phi}(t)$  y cabeceo  $\tilde{\theta}(t)$  muestra variaciones abruptas con magnitud mayor de  $\pm 0.05$  [rad] debido a la naturaleza del controlador.



**Figura 4.8: Resultados experimentales:** Gráficas de las señales de error de posición  $\tilde{\mathbf{p}}(t)$  y orientación  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$  obtenidas durante la tarea de regulación asignado al cuadrirotor Quanser QBall 2 empleando el controlador *backstepping* presentado en (4.9)-(4.12)

Las gráficas de la acción de control  $f_i(t)$  que es aplicada al cuadrirotor durante el vuelo en regulación se muestran en la figura 4.9 en ellas se observa que la fuerzas se encuentran entre 4 y 5 [N] para cada rotor, lo cual produce la fuerza necesaria para que el cuadrirotor pueda elevarse y mantenerse en la pose deseada.

El comportamiento del cuadrirotor con el controlador de *backstepping* en la tarea de regulación se mostró congruente con lo visto en la simulación numérica. Durante el experimento el vehículo se mantuvo cerca de la pose deseada, además de que en la tanto en la simulación como en el experimento se nota la vibración del vehículo durante el vuelo.



**Figura 4.9: Resultados experimentales:** Gráficas de fuerza  $f_i(t)$  de cada motor del cuadrirotor.

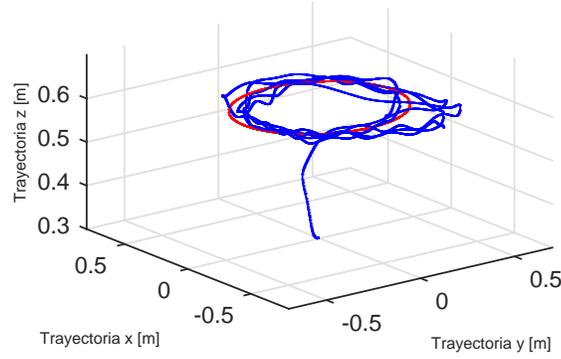
### 4.2.2. Seguimiento de trayectorias que generan una circunferencia

En esta sección se presentan 2 resultados experimentales con el controlador basado en *backstepping* para la tarea de seguimiento de trayectorias que generan circunferencias en el plano  $x - y$  y que se especifican a distintas velocidades. Para el primer experimento, las señales de posición deseada  $\mathbf{p}_d(t)$  y el ángulo de guiñada deseada  $\psi_d(t)$  que se emplearon están dados por

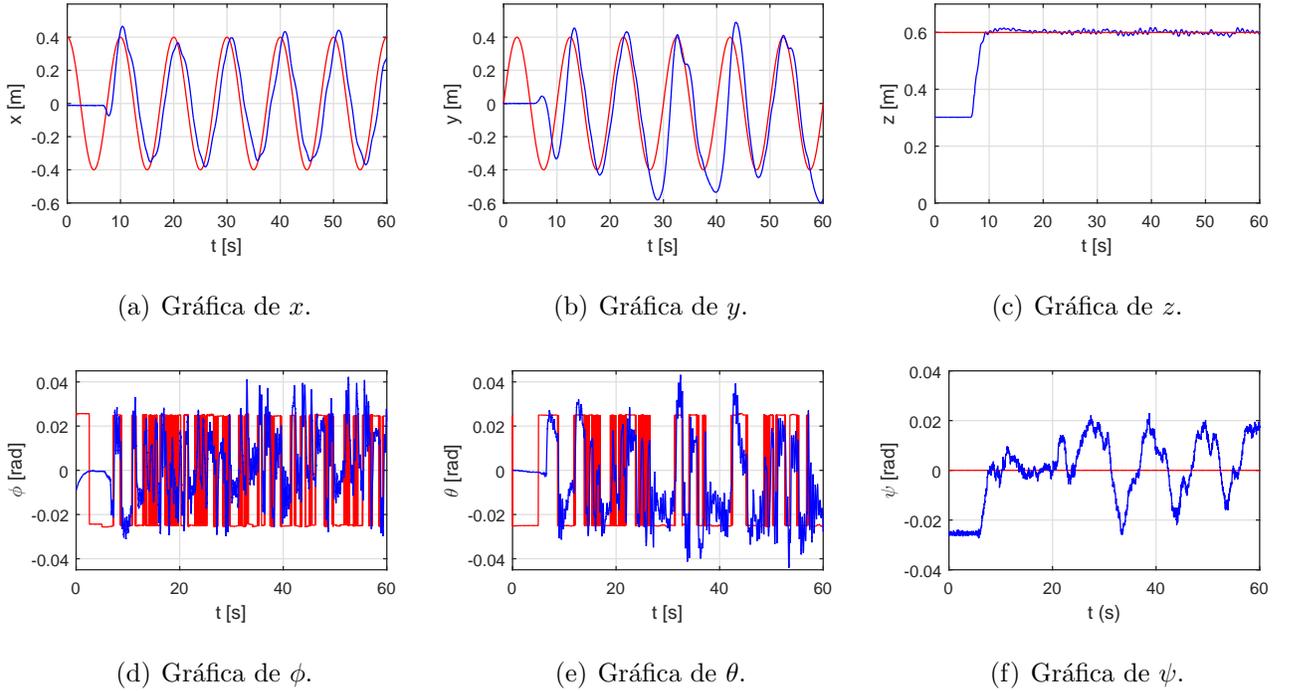
$$\mathbf{p}_d(t) = \begin{bmatrix} 0.4 \cos(\pi/5) \\ 0.4 \sen(\pi/5) \\ 0.6 \end{bmatrix} [\text{m}],$$

$$\psi_d(t) = 0 [\text{rad}].$$

La ruta definida da lugar a una circunferencia de radio 0.4 [m] a una altura de 0.6 [m]. El recorrido se realiza 6 veces en el periodo de los 60 segundos que dura el experimento. En la figura 4.10 se muestra la ruta deseada (línea roja) y la ruta del cuadrirotor (línea azul) en una vista tridimensional. En la figura 4.11 se presentan las señales de posición deseada  $\mathbf{p}_d(t)$  y orientación deseada  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  (línea roja) y las señales reales de posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  (línea azul) obtenidas durante el experimento. Se observa que para la coordenada  $x$  el seguimiento se hace pero con cierto error en él, mientras que para la coordenada  $y$  el seguimiento se pierde pero el controlador logra retomarlo. Para la altura el cuadrirotor llega al punto deseado antes de los 10 segundos. En el caso de los ángulos de balanceo y cabeceo el seguimiento se realiza mientras se siguen presentando las fluctuaciones.

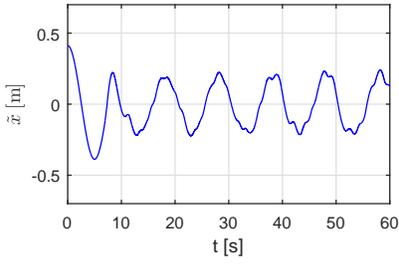
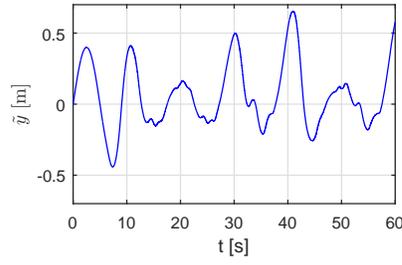
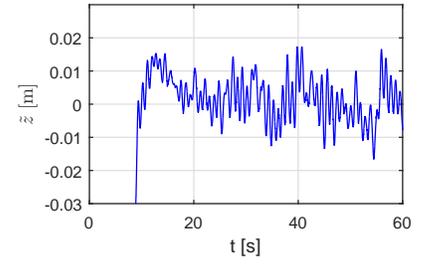
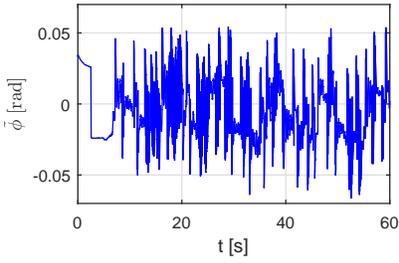
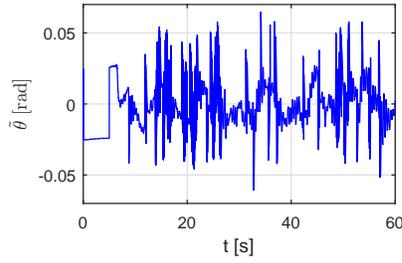
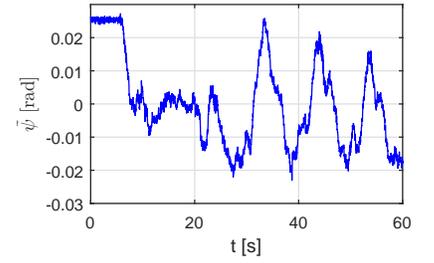


**Figura 4.10:** Trayectoria de la circunferencia a baja velocidad realizada con el cuadrirotor Quanser QBall 2.



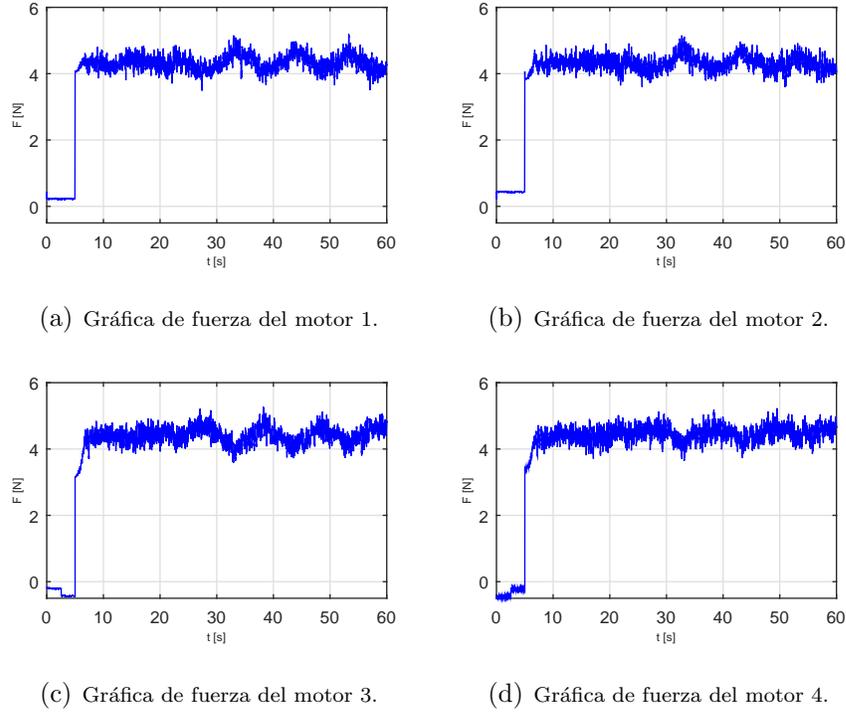
**Figura 4.11: Resultados experimentales:** Gráficas de la posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  y señales de referencia de posición  $\mathbf{p}_d(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  durante la tarea de seguimiento de trayectoria empleando el esquema de control *backstepping* en (4.9)-(4.12).

En la figura 4.12 se observan las señales de error, donde se observa que tanto difiere la señal real de la deseada. En el caso de la coordenada  $y$  es evidente cuando el sistema es perturbado y el error de seguimiento alcanza los 0.6 [m] para posteriormente reducirse. La coordenada  $x$  se mantiene oscilante en el rango de  $\pm 0.4$  [m]. Los ángulos de balanceo y cabeceo se mantienen cercanos a cero en un rango de aproximadamente  $\pm 0.06$  [rad]. En cuanto al ángulo de guiñada el error se mantiene en un rango de 0.025 [rad].


 (a) Gráfica de error  $\tilde{x}$ .

 (b) Gráfica de error  $\tilde{y}$ .

 (c) Gráfica de error  $\tilde{z}$ .

 (d) Gráfica de error  $\tilde{\phi}$ .

 (e) Gráfica de error  $\tilde{\theta}$ .

 (f) Gráfica de error  $\tilde{\psi}$ .

**Figura 4.12: Resultados experimentales:** Gráficas del error de posición  $\tilde{\mathbf{p}}(t)$  y orientación  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$  durante el experimento de seguimiento de trayectorias que da lugar a una circunferencia empleando el controlador *backstepping* presentado en (4.9)-(4.12).

En la figura 4.13 se muestran las gráficas de la fuerza generada  $f_i(t)$  por cada rotor del vehículo. El controlador calcula las fuerzas necesarias para lograr que el vehículo complete la tarea asignada y como estas son señales acotadas, lo que permite que sean generadas por los rotores. Sin embargo, se puede notar que existen ciertos picos en la señal que son causados por los cambios abruptos que el controlador realiza en el plano  $x - y$ .



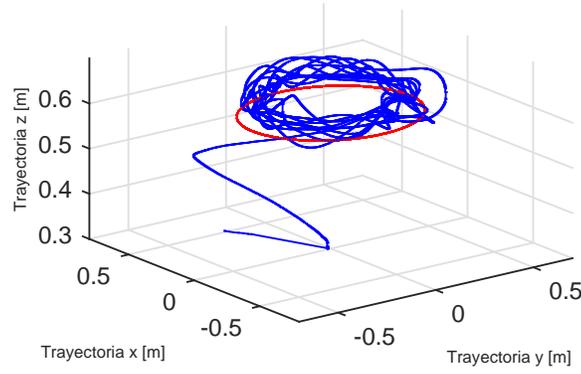
**Figura 4.13: Resultados experimentales:** Gráficas de fuerza generada por cada rotor del vehículo durante la tarea de seguimiento de trayectorias que describe una circunferencia a alta velocidad.

En el segundo experimento de trayectorias con rutas circulares se incrementó la frecuencia de las funciones sinusoidales para producir un movimiento más rápido en el cuadrirotor. La trayectoria correspondiente a seguir está dada por los siguientes valores

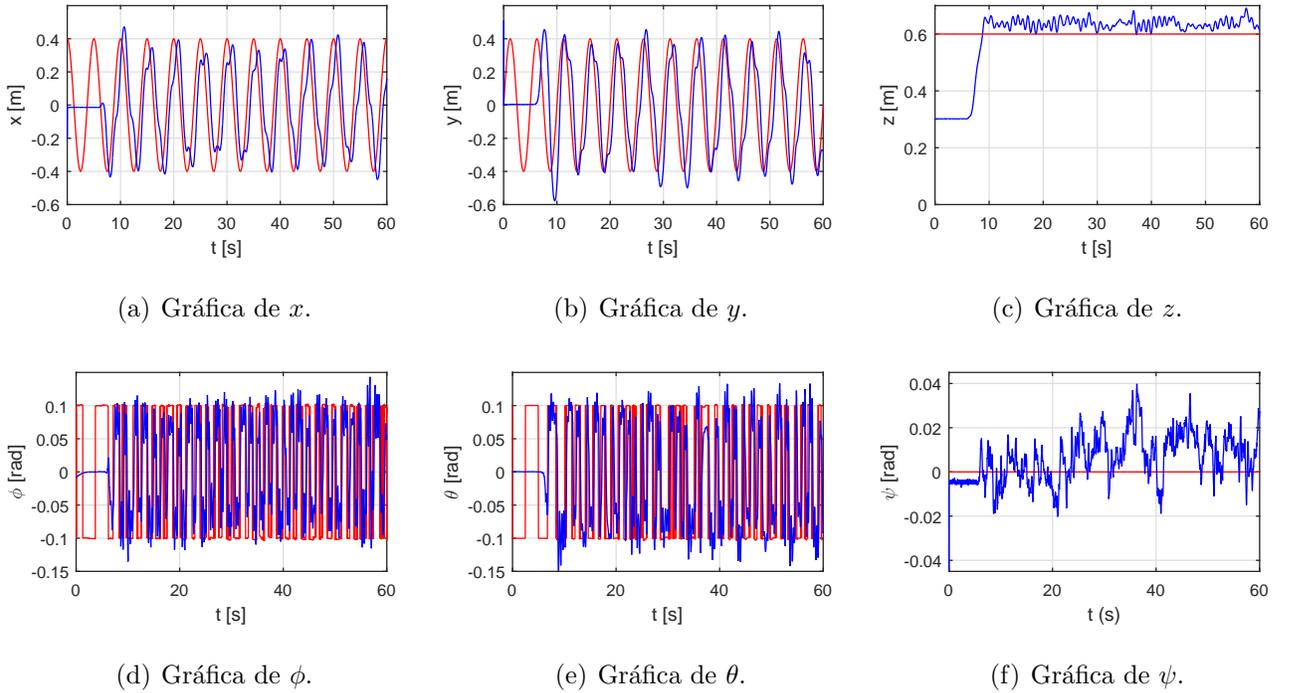
$$\mathbf{p}_d(t) = \begin{bmatrix} 0.4 \cos(2\pi/5) \\ 0.4 \sen(2\pi/5) \\ 0.6 \end{bmatrix} [\text{m}],$$

$$\psi_d(t) = 0 [\text{rad}].$$

De manera similar al experimento anterior, la circunferencia está definida con un radio de 0.4 [m] y una altura de 0.6 [m]. La frecuencia de recorrido es el doble que el experimento anterior. Además, para este experimento las constantes  $\gamma_1^{max}$  y  $\gamma_2^{max}$  tienen un valor de 0.1. En la figura 4.14 se muestra la gráfica tridimensional de la ruta deseada (línea roja) y la ruta realizada por el cuadrirotor (línea azul) durante el experimento, en esta gráfica se observa que la ruta descrita por el vehículo es similar a la deseada. En la figura 4.15 se presentan las señales de posición deseada  $\mathbf{p}_d(t)$  y orientación deseada  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  (línea roja) y posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  actuales (línea azul) obtenidas durante el experimento. Se puede ver en las señales correspondientes a  $x(y)$  y  $y(t)$  que el seguimiento es realizado pero en cada máximo y mínimo de la señal sinusoidal no alcanza la posición deseada. Este comportamiento es consecuencia de la velocidad con que el vehículo recorre la ruta. Para la altura  $z(t)$ , el valor real se encuentra por encima del valor deseado. Por otro lado, los ángulos de balanceo  $\phi(t)$  y cabeceo  $\theta(t)$  permanecen oscilando a alta frecuencia dentro del valor de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ . El ángulo de guiñada  $\psi(t)$  permanece cercano al valor deseado.

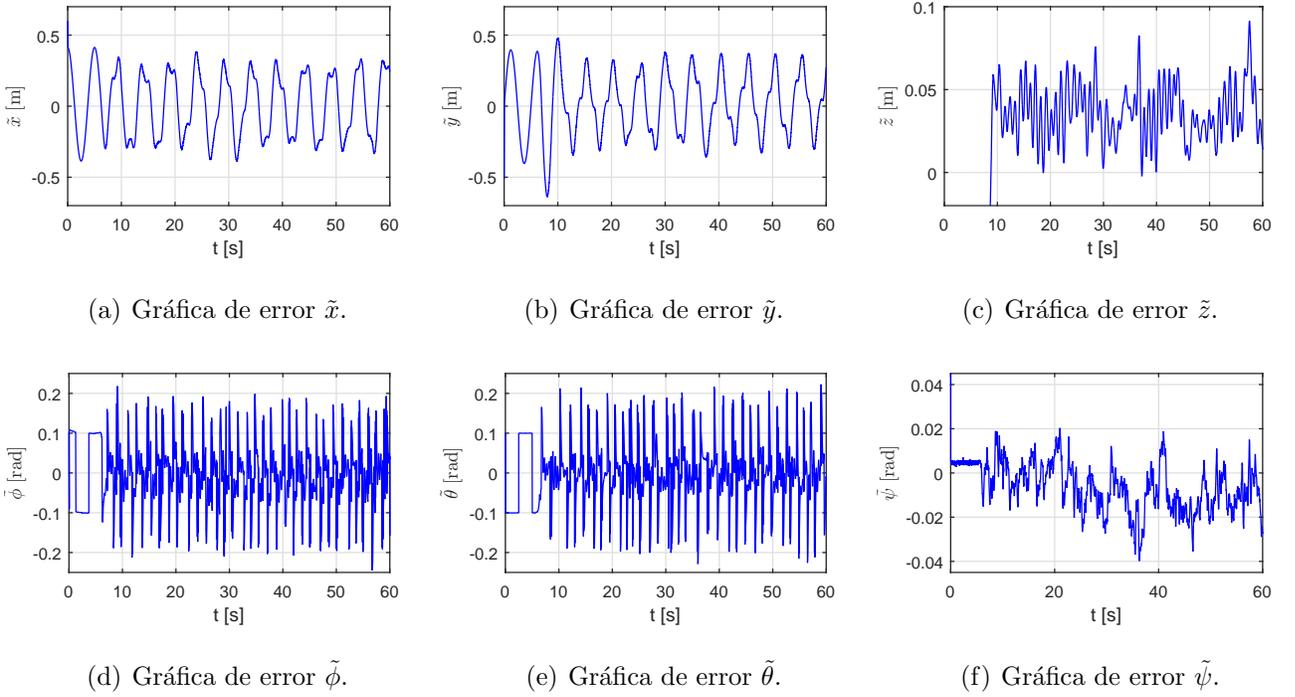


**Figura 4.14:** Trayectoria de la circunferencia a alta velocidad realizada con el cuadrirotor Quanser QBall 2.



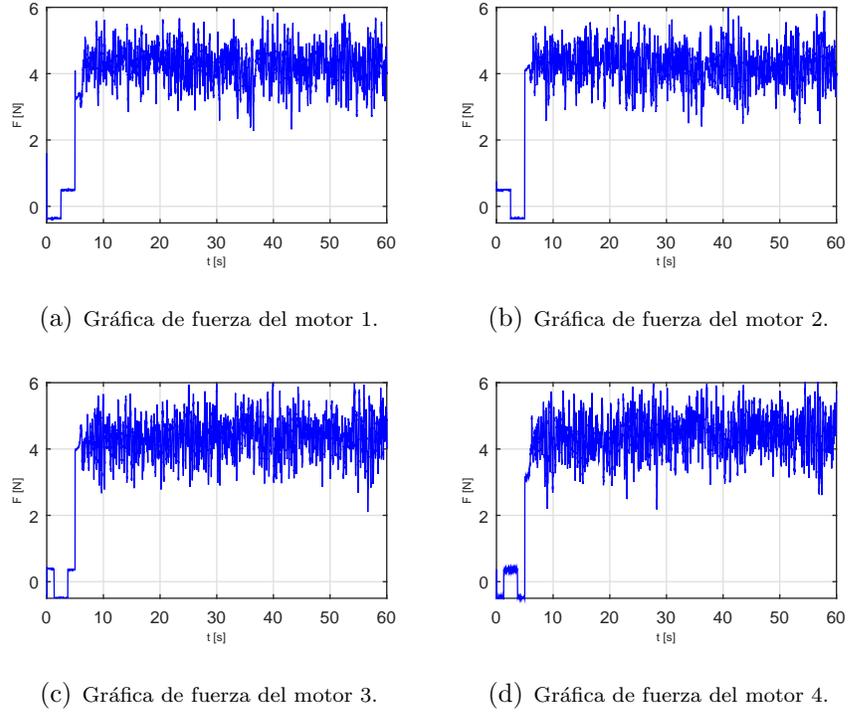
**Figura 4.15: Resultados experimentales:** Gráficas de la posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  y señales de referencia de posición  $\mathbf{p}_d(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  durante la tarea de seguimiento de trayectoria empleando el esquema de control *backstepping* en (4.9)-(4.12).

Las señales de error se presentan en la figura 4.16 donde las señales  $\tilde{x}(t)$ ,  $\tilde{y}(t)$  se encuentran en un rango de  $\pm 0.45$  [m]. Para  $z$ , el valor del error está por debajo de 0.1 [m], mientras que para los errores en los ángulos de balanceo  $\tilde{\phi}(t)$  y cabeceo  $\tilde{\theta}(t)$  se observan variaciones a altas frecuencias en un rango de  $\pm 0.2$  [rad]. Finalmente el error de guiñada  $\tilde{\psi}(t)$  presenta una magnitud menor a  $\pm 0.04$  [rad].



**Figura 4.16: Resultados experimentales:** Gráficas del error de posición  $\tilde{\mathbf{p}}(t)$  y orientación  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$  durante el experimento de seguimiento de trayectorias que da lugar a una circunferencia de alta velocidad empleando el controlador *backstepping* presentado en (4.9)-(4.12).

En la figura 4.17 se muestran las fuerzas de entrada calculadas por el controlador y aplicadas a través de los rotores del vehículo. Se observa que a diferencia de los experimentos anteriores, este control genera oscilaciones de gran amplitud donde las fuerzas de empuje oscilan en un rango de 3.5 a 6 [N] debido al cambio abrupto de los ángulos  $\phi_d(t)$  y  $\theta_d(t)$  que dependen principalmente del valor de  $\gamma_1^{max}$  y  $\gamma_2^{max}$ . Estas ganancias se incrementaron con el objetivo de que el cuadricóptero alcance la trayectoria deseada.



**Figura 4.17: Resultados experimentales:** Gráficas de fuerza de cada motor del cuadrirotor.

### 4.2.3. Prueba experimental de seguimiento de trayectorias que genera una curva de lemniscata.

En esta sección se presenta la última tarea realizada en la plataforma experimental para validar el controlador con estructura *backstepping*. La tarea establece el seguimiento de trayectorias, las cuales generan una curva de lemniscata que está definida como sigue

$$\mathbf{p}_d(t) = \begin{bmatrix} 0.4 \cos(2\pi/15) \\ 0.6 \sin(4\pi/15) \\ 0.6 \end{bmatrix} [\text{m}],$$

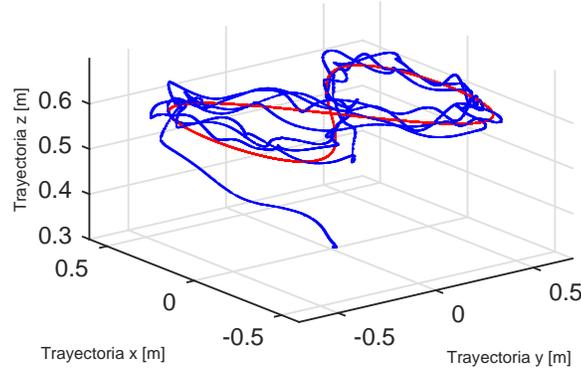
$$\psi_d(t) = 0 [\text{rad}].$$

De acuerdo con estos valores definidos para las trayectorias  $x_d(t)$  y  $y_d(t)$  ambas señales son funciones trigonométricas en donde la frecuencia de la primera es la mitad de la segunda, además, la amplitud en  $x_d(t)$  es mayor que la de  $y_d(t)$  lo que da lugar a la curva de Lemniscata en el plano horizontal. La altura  $z_d(t)$  está definida a 0.6 [m], mientras que el ángulo de deseado de guiñada  $\psi_d(t)$  es cero en todo el experimento. Las ganancias para las constantes  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  fueron modificadas nuevamente con el objetivo de tener un mejor resultado en el seguimiento de las trayectorias de las coordenadas  $x - y$  y se establecieron como

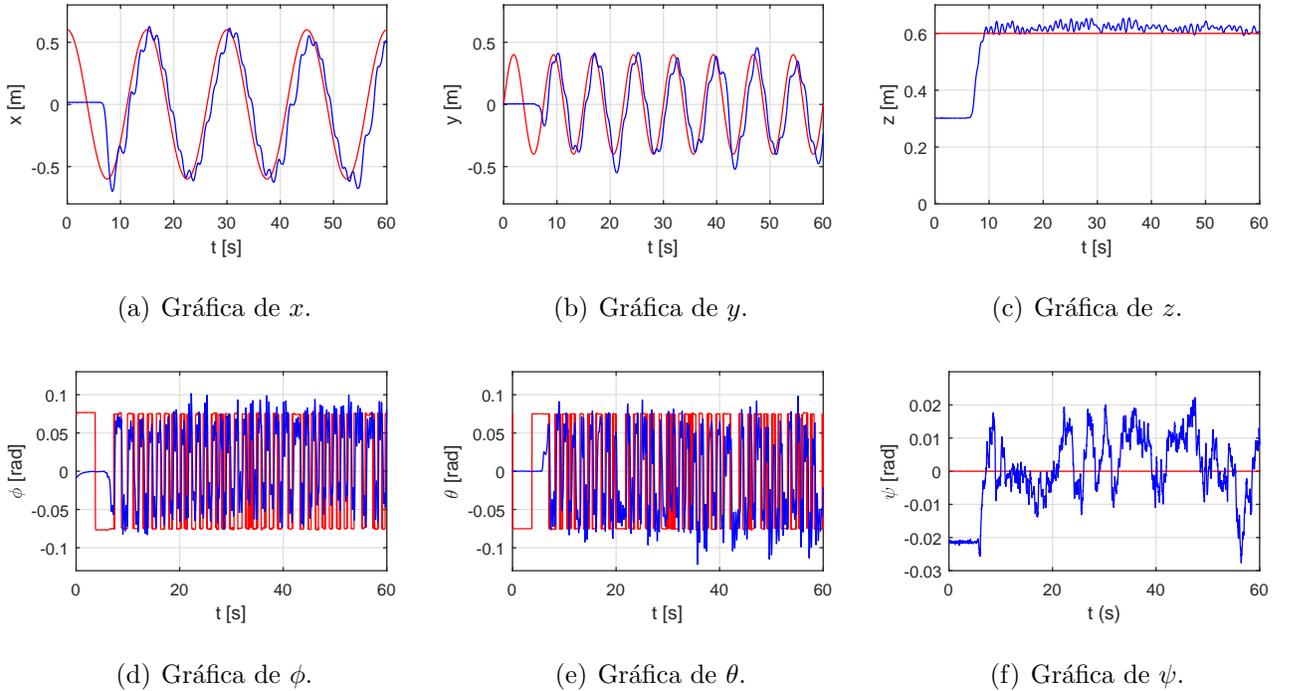
$$\gamma_1^{max} = 0.075, \quad (4.16)$$

$$\gamma_2^{max} = 0.075. \quad (4.17)$$

La figura 4.18 muestra la ruta establecida (línea roja) y la ruta realizada por el vehículo (línea azul), se observa como el vehículo realiza la tarea de seguimiento de la curva de Lemniscata. El desempeño del controlador para cada una de las coordenadas generalizadas se analiza basado en las señales que se presentan en las figuras 4.19 y 4.12, donde, en la primera se muestran las señales de posición deseada  $\mathbf{p}_d(t)$  y orientación deseada  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  (línea roja) así como también, las señales de posición actual  $\mathbf{p}(t)$  y orientación actual  $\boldsymbol{\eta}(t)$ . En la segunda figura se despliegan las señales de error obtenidas durante el experimento.

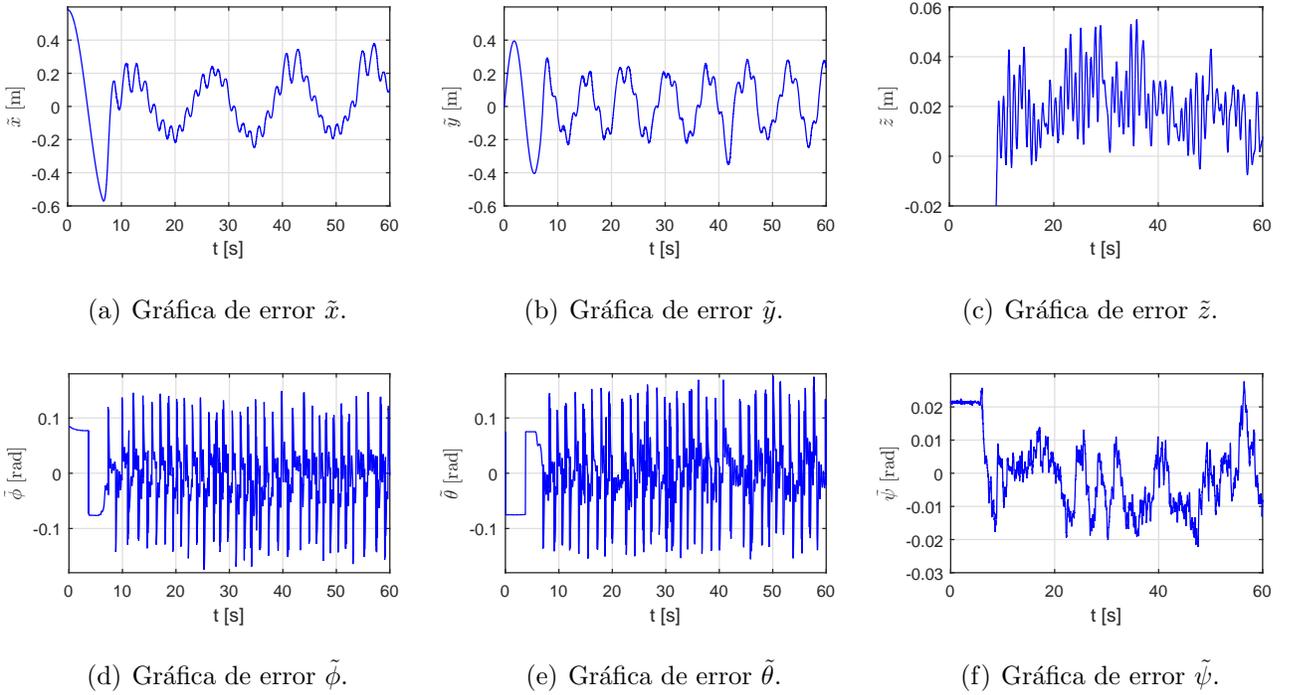


**Figura 4.18:** Trayectoria Lemniscata realizada con el cuadrirotor Quanser QBall 2.



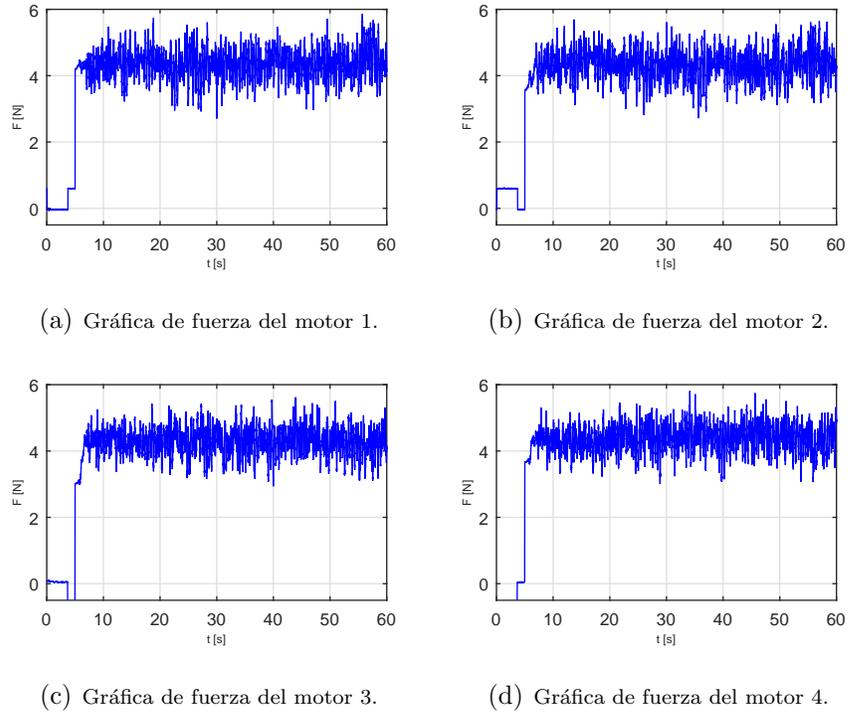
**Figura 4.19: Resultados experimentales:** Gráficas de la posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  y señales de referencia de posición  $\mathbf{p}_d(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  durante la tarea de seguimiento de trayectoria Lemniscata empleando el esquema de control *backstepping* en (4.9)-(4.12).

El comportamiento del vehículo en el plano  $x - y$  muestra que el cuadricóptero sigue la trayectoria deseada pero con variaciones de alta frecuencia y magnitudes considerables, lo que produce que la aeronave vibre continuamente durante el vuelo. Para la señal de altura correspondiente a  $z(t)$  el cuadricóptero se mantiene ligeramente por encima de la señal deseada a partir del décimo segundo. Para los ángulos deseados  $\phi_d(t)$  y  $\theta_d(t)$  se mantienen acotados aproximadamente en un rango de  $\pm 0.075$  [rad] correspondiente al valor de las constantes  $\gamma_1^{max}$  y  $\gamma_2^{max}$  mientras que para  $\psi$  permanece cercano al valor deseado. Por otro lado, las señales de error muestran de mejor manera el desempeño del controlador, en ellas se observa que en el caso de  $x$  el error es oscilante en  $\pm 0.2$  [m] mientras que para  $y$  se encuentra en  $\pm 0.3$  [m]. Para la altura, el error se encuentra en el rango de  $-0.01$  a  $0.055$  [m]. En cuanto a los ángulos de Euler,  $\phi$  se cuenta con valores de error de entre  $\pm 0.2$  [rad] y para  $\theta$  en  $\pm 0.2$  [rad]. Por último,  $\psi$  tiene un error menor de entre  $\pm 0.022$  [rad].



**Figura 4.20: Resultados experimentales:** Gráficas del error de posición  $\tilde{\mathbf{p}}(t)$  y orientación  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$  durante el experimento de seguimiento de trayectorias que da lugar a una ruta lemniscata empleando el controlador *backstepping* presentado en (4.9)-(4.12).

La figura 4.21 muestra las fuerzas  $f_i(t)$  de entrada calculadas por el controlador y que son generadas por cada rotor del vehículo durante el experimento. En las gráficas se puede apreciar que las señales varían de entre 3 [N] a 5.8 [N], se nota que a diferencia de los experimentos anteriores el rango de fuerza es mayor debido a los cambios a altas frecuencias de las señales de  $\phi_d(t)$  y  $\theta_d(t)$  las cuales fueron incrementadas en magnitud a fin de que el vehículo se acerque a la trayectoria deseada para  $x(y)$  y  $y(t)$ .



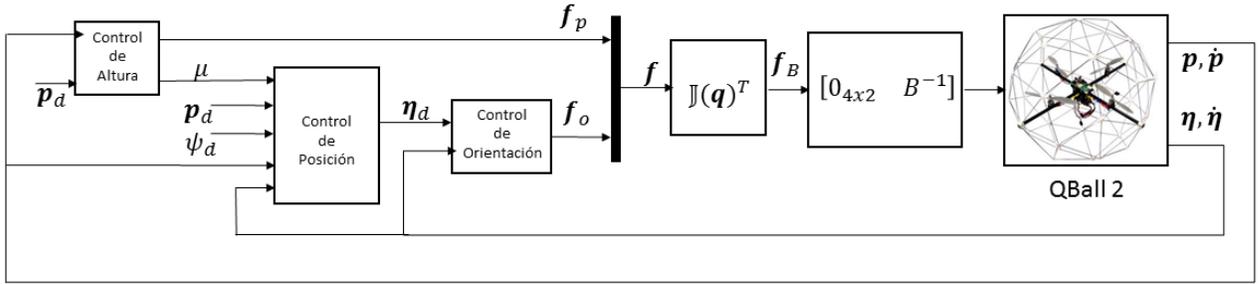
**Figura 4.21: Resultados experimentales:** Gráficas de fuerza  $f_i(t)$  generada por cada motor del cuadrirotor.

En general el comportamiento del cuadrirotor a altas velocidades de seguimiento de trayectorias tiende a ampliar el rango de oscilación en los ángulos  $\phi(t)$  y  $\theta(t)$  que finalmente se ve reflejado en las gráficas empuje generadas por cada rotor. Esta situación tiende a ser una desventaja, el consumo de energía provoca que la batería se descargue más rápidamente. Esto es debido a la demanda de corriente de los motores al hacer los cambios repentinos de fuerzas y el aumento de la vibración del vehículo.

# Controlador Basado en Modelo

En este capítulo se presenta un controlador basado en modelo para el seguimiento de trayectorias de un cuadrirotor. Este tipo de controles se caracterizan por suponer que se conocen con exactitud los parámetros dinámicos del sistema.

El esquema de control que se describe a continuación tiene una estructura de doble lazo uno interno para regir el comportamiento de la dinámica de orientación y el otro externo para la posición. En la figura 5.1 se presenta un diagrama a bloques que muestra la estructura del sistema en lazo cerrado.



**Figura 5.1:** Estructura del controlador basado en modelo.

Considerando la dinámica de posición del cuadrirotor descrita en la ecuación (2.33) se propone la siguiente acción de control

$$\mathbf{f}_p = \mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta})\mu, \quad (5.1)$$

donde

$$\mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} R_{13}(\boldsymbol{\eta}) \\ R_{23}(\boldsymbol{\eta}) \\ R_{33}(\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix} \frac{1}{R_{33}(\boldsymbol{\eta})}, \quad (5.2)$$

y  $\mu$  es una entrada de control auxiliar que se define posteriormente. Sustituyendo (5.1) en (2.33) y sumando y restando  $\mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta}_d)$  en el lado derecho de la ecuación. La dinámica del error de posición se puede expresar como

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{p}} &= \ddot{\mathbf{p}}_d - \mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta})\frac{\mu}{m} + g\mathbf{e}_3 + \mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta}_d)\frac{\mu}{m} - \mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta}_d)\frac{\mu}{m} \\ &= \ddot{\mathbf{p}}_d + g\mathbf{e}_3 - \mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta}_d)\frac{\mu}{m} + [\mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta}_d) - \mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta}_d - \tilde{\boldsymbol{\eta}})]\frac{\mu}{m} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Note que,  $\mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta})$  en (5.2) es una función localmente Lipchitz [28], esto es,

$$\|\mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta}_d) - \mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta}_d - \tilde{\boldsymbol{\eta}})\| \leq k \|\boldsymbol{\eta}_d - \boldsymbol{\eta}_d + \tilde{\boldsymbol{\eta}}\|, \quad (5.4)$$

$$\leq k \|\tilde{\boldsymbol{\eta}}\|. \quad (5.5)$$

Con el objetivo de determinar una entrada auxiliar  $\mu$  y los valores deseados de  $\phi(t)$  y  $\theta(t)$ , considere la siguiente ecuación

$$\mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta}_d) \frac{\mu}{m} = \mathbf{f}_I \quad (5.6)$$

donde

$$\mathbf{f}_I = \ddot{\mathbf{p}}_d + g\mathbf{e}_3 + K_{pp}\tilde{\mathbf{p}} + K_{dp}\dot{\tilde{\mathbf{p}}} \quad (5.7)$$

siendo  $K_{pp} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  y  $K_{dp} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  matrices diagonales definidas positivas. La ecuación (5.6) define un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas  $\phi_d$ ,  $\theta_d$ ,  $\psi_d$  y  $\mu$ . Si se considera que  $\psi_d$  es una señal de referencia definida por el operador del cuadirotor o por un sistema de navegación, entonces el sistema

$$\mathbf{f}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{I_1} \\ \mathbf{f}_{I_2} \\ \mathbf{f}_{I_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sin \phi_d \sin \psi_d + \cos \phi_d \sin \theta_d \cos \psi_d}{\cos \phi_d \cos \theta_d} \\ \frac{\cos \phi_d \sin \theta_d \sin \psi_d + \sin \phi_d \cos \psi_d}{\cos \phi_d \cos \theta_d} \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\mu}{m}, \quad (5.8)$$

tiene una única solución dada por

$$\mu = m\ddot{p}_{d3} + mg + k_{pp}\tilde{p}_3 + k_{dp}\dot{\tilde{p}}_3, \quad (5.9)$$

$$\phi_d = \tan^{-1} \left[ (\cos \psi_d f_{I_1} + \sin \psi_d f_{I_2}) \frac{m}{\mu} \right], \quad (5.10)$$

$$\theta_d = \tan^{-1} \left[ (\sin \psi_d f_{I_1} - \cos \psi_d f_{I_2}) \frac{m \cos \theta_d}{\mu} \right]. \quad (5.11)$$

Además, la señal de control  $\mu$  está acotada superiormente por

$$|\mu| \leq c_1 + c_2 \left\| \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\eta}} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} \end{bmatrix} \right\| \leq c_1 + c_2 \left\| \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{p}}} \end{bmatrix} \right\|, \quad (5.12)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes positivas. Finalmente, sustituyendo (5.6) en (5.4) la dinámica del error de posición en lazo cerrado se expresa como

$$\ddot{\tilde{\mathbf{p}}} = -K_{pp}\tilde{\mathbf{p}} - K_{dp}\dot{\tilde{\mathbf{p}}} + [\mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta}_d) - \mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta}_d - \tilde{\boldsymbol{\eta}})] \frac{\mu}{m}. \quad (5.13)$$

Note que cuando  $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = 0$  se tiene que  $[\mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta}_d) - \mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta}_d - \tilde{\boldsymbol{\eta}})] = 0$  y por lo tanto la dinámica del error (5.13) se reduce a

$$\ddot{\tilde{\mathbf{p}}} = -k_{pp}\tilde{\mathbf{p}} - k_{dp}\dot{\tilde{\mathbf{p}}}, \quad (5.14)$$

cuya solución converge exponencialmente a cero siempre que las ganancias sean positivas. Esto sugiere que si el error de orientación  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$  converge a cero entonces el error de posición  $\tilde{\mathbf{p}}(t)$  también lo hará. De este hecho, se observa la necesidad de que el error de orientación converja. Con el propósito de simplificar la estructura del controlador de orientación y el análisis de estabilidad se define el error de orientación filtrado  $\mathbf{s}$  como

$$\mathbf{s} = \dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} + \Lambda \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \quad (5.15)$$

donde,  $\Lambda \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz diagonal definida positiva. Entonces, de las ecuaciones (2.34) y (5.15), la dinámica del error en términos del error filtrado  $\mathbf{s}$  puede expresarse como

$$\dot{\mathbf{s}} = \ddot{\boldsymbol{\eta}}_r - H_o^{-1} [\mathbf{f}_o - C_o(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})\dot{\boldsymbol{\eta}}], \quad (5.16)$$

donde

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_r = \dot{\boldsymbol{\eta}}_d + \Lambda \tilde{\boldsymbol{\eta}}. \quad (5.17)$$

Ahora, se propone la siguiente ley de control para la orientación

$$\mathbf{f}_o = H_o(\boldsymbol{\eta})\ddot{\boldsymbol{\eta}}_r + C_o(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})\dot{\boldsymbol{\eta}}_r + K_s \mathbf{s}, \quad (5.18)$$

donde  $K_s \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz diagonal definida positiva. De este modo, sustituyendo (5.18) en (5.16) la dinámica del error de orientación filtrado esta dada por

$$H_o(\boldsymbol{\eta})\dot{\mathbf{s}} = -C(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})\mathbf{s} - K_s \mathbf{s} \quad (5.19)$$

Así, la dinámica en lazo cerrado del cuadrirotor en variables de estado esta dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{p}} &= \dot{\tilde{\mathbf{p}}}, \\ \frac{d}{dt} \dot{\tilde{\mathbf{p}}} &= -k_{pp} \tilde{\mathbf{p}} - k_{dp} \dot{\tilde{\mathbf{p}}} + [\mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta}_d) - \mathbf{r}_c(\boldsymbol{\eta}_d - \tilde{\boldsymbol{\eta}})] \frac{\mu}{m}, \\ \frac{d}{dt} \tilde{\boldsymbol{\eta}} &= -\Lambda \tilde{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{s}, \\ \frac{d}{dt} \dot{\tilde{\mathbf{s}}} &= H_o(\boldsymbol{\eta})^{-1} [-C_o(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})\mathbf{s} - K_s \mathbf{s}], \end{aligned} \quad (5.20)$$

la cual tiene como estado a

$$\dot{\mathbf{x}} = [\tilde{\mathbf{p}}^T \quad \dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T \quad \tilde{\boldsymbol{\eta}}^T \quad \dot{\tilde{\mathbf{s}}}^T]^T \in \mathbb{R}^{12}. \quad (5.21)$$

El sistema 5.20 tiene un punto de equilibrio en  $\mathbf{x} = 0 \in \mathbb{R}^{12}$  donde  $\mathbf{x}$  es el estado en (5.21).

Basado en lo anterior se puede establecer el siguiente resultado

**Proposición 1.** *Usando ganancias adecuadas para  $K_{pp}$ ,  $K_{dp}$ ,  $\Lambda$ ,  $K_s$  en el sentido que sus eigenvalores mínimos son suficientemente grandes, el punto de equilibrio  $\mathbf{x} = 0$  del sistema en lazo cerrado (5.20) es asintóticamente estable localmente.*

*Demostración.* Considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2, \quad (5.22)$$

donde

$$V_1 = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T \dot{\tilde{\mathbf{p}}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{p}}^T K_{pp} \tilde{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \epsilon \tilde{\mathbf{p}}^T K_{dp} \tilde{\mathbf{p}} + \epsilon \tilde{\mathbf{p}}^T \dot{\tilde{\mathbf{p}}}, \quad (5.23)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T H_o(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{s} + \frac{1}{2} \alpha_3 \tilde{\boldsymbol{\eta}}^T \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \quad (5.24)$$

y  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  son constantes positivas. Note que

$$V_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{p}}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (K_{pp} + \epsilon K_{dp}) & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{p}}} \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

es definida positiva si, la desigualdad siguiente se cumple

$$\lambda_{\min}\{K_{pp}\} + \epsilon\lambda_{\min}\{K_{dp}\} - \epsilon^2 > 0, \quad (5.26)$$

lo cual ocurre siempre que

$$\lambda_{\min}\{K_{pp}\} - \epsilon^2 > 0, \quad (5.27)$$

y por tanto,

$$0 < \epsilon < \sqrt{\lambda_{\min}\{K_{pp}\}}. \quad (5.28)$$

De la propiedad 1 y la condición (5.28) se establece que  $V$  en (5.22) es una función definida positiva y radialmente desacotada en términos del estado en (5.21). Diferenciando la función candidata de Lyapunov con respecto del tiempo se obtiene Calculando la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \alpha_1 \{ \dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T \ddot{\tilde{\mathbf{p}}} + \tilde{\mathbf{p}}^T k_{pp} \dot{\tilde{\mathbf{p}}} + \epsilon \tilde{\mathbf{p}}^T k_{dp} \dot{\tilde{\mathbf{p}}} + \epsilon \tilde{\mathbf{p}}^T \ddot{\tilde{\mathbf{p}}} + \epsilon \dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T \dot{\tilde{\mathbf{p}}} \} \\ &+ \alpha_2 \left\{ \mathbf{s}_\eta^T H_o(\boldsymbol{\eta}) \dot{\mathbf{s}}_\eta + \frac{1}{2} \mathbf{s}_\eta^T \dot{H}_o(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{s}_\eta + \alpha_3 \tilde{\boldsymbol{\eta}}^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Sustituyendo (5.22) en (5.30) y haciendo uso de la propiedad 2, al reagrupar términos se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \alpha_1 \left\{ -\dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T k_{dp} \dot{\tilde{\mathbf{p}}} - \epsilon \tilde{\mathbf{p}}^T k_{pp} \tilde{\mathbf{p}} + \epsilon \dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T \dot{\tilde{\mathbf{p}}} + (\dot{\tilde{\mathbf{p}}}^T + \epsilon \tilde{\mathbf{p}}^T) [r_c(\boldsymbol{\eta}_d) - r_c(\boldsymbol{\eta})] \frac{\mu}{m} \right\} \\ &+ \alpha_2 \left\{ -\mathbf{s}^T k_s \mathbf{s} - \alpha_3 \tilde{\boldsymbol{\eta}}^T \Lambda \tilde{\boldsymbol{\eta}} + \alpha_3 \tilde{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{s} \right\}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Con el objetivo de obtener una cota superior para  $\dot{V}(x)$  en (5.30) se establece la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{p}} + \epsilon \tilde{\mathbf{p}}]^T [r_c(\boldsymbol{\eta}_d) - r_c(\boldsymbol{\eta}_d - \tilde{\boldsymbol{\eta}})] \frac{\mu}{m} &\leq \| \dot{\tilde{\mathbf{p}}} + \epsilon \tilde{\mathbf{p}} \| \| r_c(\boldsymbol{\eta}_d) - r_c(\boldsymbol{\eta}_d - \tilde{\boldsymbol{\eta}}) \| \left\| \frac{\mu}{m} \right\| \\ &\leq [ \| \dot{\tilde{\mathbf{p}}} \| + \epsilon \| \tilde{\mathbf{p}} \| ] \frac{k}{m} \| \tilde{\boldsymbol{\eta}} \| \left[ c_1 + c_2 \left\| \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{p}}} \end{bmatrix} \right\| \right] \\ &\leq c_3 [ \| \dot{\tilde{\mathbf{p}}} \| + \epsilon \| \tilde{\mathbf{p}} \| ] \| \tilde{\boldsymbol{\eta}} \| \end{aligned}$$

donde

$$c_3 \geq \frac{\mu}{m} \left[ c_1 + c_2 \left\| \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{p}}} \end{bmatrix} \right\| \right] \geq k [c_1 + c_2 r_{c3}]$$

con  $B_{r_{c3}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 : \|\mathbf{x}\| \leq r_{c3}\}$ , siendo  $\mathbf{x}$  un vector cualquiera.

Sean,  $\lambda_{\min}\{K_{pp}\}$ ,  $\lambda_{\min}\{K_{dp}\}$ ,  $\lambda_{\min}\{\Lambda\}$  y  $\lambda_{\min}\{K_s\}$  los eigenvalores mínimos de  $K_{pp}$ ,  $K_{dp}$ ,  $\Lambda$  y  $K_s$  respectivamente la derivada temporal de  $V$  se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\alpha_1 \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{p}}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{p}}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \epsilon\lambda_{\min}\{K_{pp}\} & 0 \\ 0 & \lambda_{\min}\{K_{dp}\} - \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{p}}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{p}}}\| \end{bmatrix} + \alpha_1 c_3 [\|\tilde{\mathbf{p}}\| + \epsilon \|\dot{\tilde{\mathbf{p}}}\|] \|\tilde{\boldsymbol{\eta}}\| \\ & -\alpha_2 \begin{bmatrix} \|\tilde{\boldsymbol{\eta}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{s}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha_3\lambda_{\min}\{\Lambda\} & -\frac{1}{2}\alpha_3 \\ -\frac{1}{2}\alpha_3 & \lambda_{\min}\{K_s\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\boldsymbol{\eta}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{s}}\| \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Ahora si hacemos

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \epsilon\lambda_{\min}\{k_{pp}\} & 0 \\ 0 & \lambda_{\min}\{k_{dp}\} - \epsilon \end{bmatrix}, \quad (5.32)$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} \alpha_3\lambda_{\min}\{\Lambda\} & -\frac{1}{2}\alpha_3 \\ -\frac{1}{2}\alpha_3 & \lambda_{\min}\{k_s\} \end{bmatrix}, \quad (5.33)$$

entonces  $Q_1$  es una matriz definida positiva si

$$\epsilon < \lambda_{\min}\{k_{dp}\} \quad (5.34)$$

y  $Q_2$  es definida positiva si

$$\alpha_3 < 4\lambda_{\min}\{\lambda\}\lambda_{\min}\{k_s\}. \quad (5.35)$$

Además, si  $\lambda_{\min}\{Q_1\}$  y  $\lambda_{\min}\{Q_s\}$  son los eigenvalores mínimos de  $Q_1$  y  $Q_2$  respectivamente, entonces, la derivada temporal de  $V$  se puede acotar superiormente como

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\alpha_1\lambda_{\min}\{Q_1\} \left\| \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{p}}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{p}}}\| \end{bmatrix} \right\|^2 + \alpha_1 c_3 \left\| \sqrt{1 + \epsilon^2} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{p}}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{p}}}\| \end{bmatrix} \right\| \left\| \begin{bmatrix} \|\tilde{\boldsymbol{\eta}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{s}}\| \end{bmatrix} \right\| \\ & -\alpha_2\lambda_{\min}\{Q_2\} \left\| \begin{bmatrix} \|\tilde{\boldsymbol{\eta}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{s}}\| \end{bmatrix} \right\|^2 \end{aligned} \quad (5.36)$$

donde se puede definir que  $\sigma_1 = \left\| \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{p}}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{p}}}\| \end{bmatrix} \right\|$ ,  $\sigma_2 = \left\| \begin{bmatrix} \|\tilde{\boldsymbol{\eta}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{s}}\| \end{bmatrix} \right\|$ . De este modo,

$$\dot{V} \leq -\alpha_1\lambda_{\min}\{Q_1\}\sigma_1^2 + \alpha_1 c_3 \sigma_1 \sigma_2 - \alpha_2\lambda_{\min}\{Q_2\}\sigma_2^2, \quad (5.37)$$

y ordenado matricialmente

$$\dot{V} \leq - \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha_1\lambda_{\min}\{Q_1\} & -\frac{1}{2}\alpha_1 c_3 \sqrt{1 + \epsilon^2} \\ -\frac{1}{2}\alpha_1 c_3 \sqrt{1 + \epsilon^2} & \alpha_2\lambda_{\min}\{Q_2\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}, \quad (5.38)$$

de donde se puede observar que  $\dot{V}$  es una función definida negativa localmente siempre que

$$\alpha_1 \lambda_{\min}\{Q_1\} \alpha_2 \lambda_{\min}\{Q_2\} - \frac{1}{4} \alpha_1^2 c_3^2 (1 + \epsilon^2) > 0, \quad (5.39)$$

y por lo tanto

$$\alpha_2 > \frac{\alpha_1 c_3^2 (1 + \epsilon^2)}{4 \lambda_{\min}\{Q_1\} \lambda_{\min}\{Q_2\}}. \quad (5.40)$$

De acuerdo con el método directo de Lyapunov [28],  $\mathbf{x} = 0$  es un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable, lo cual implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{p}}}(t) \\ \tilde{\boldsymbol{\eta}}(t) \\ \mathbf{s}(t) \end{Bmatrix} = 0 \quad (5.41)$$

se satisface. □

## 5.1. Simulación numérica del controlador basado en modelo

La validación en simulación numérica del controlador basado en modelo se presenta en esta sección. El proceso de validación del comportamiento del controlador basado en modelo se realizó evaluando el desempeño del controlador tanto en la tarea de regulación como en el seguimiento de trayectorias. En las secciones siguientes se mostrarán los resultados correspondientes a cada tarea.

### 5.1.1. Regulación

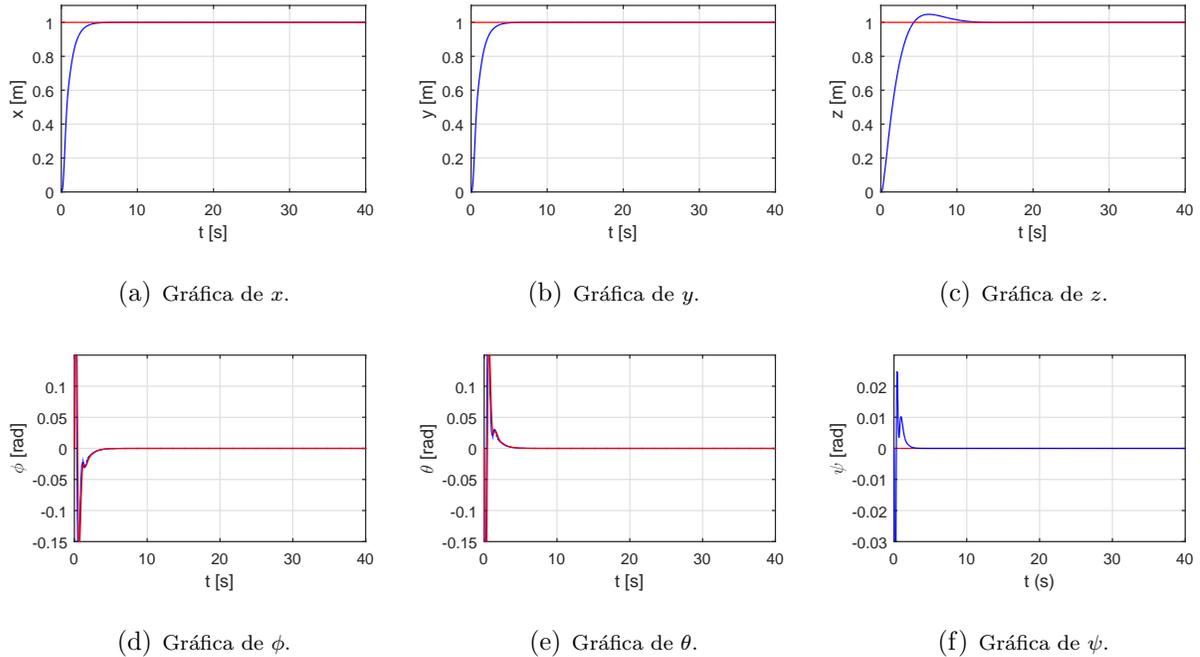
En la primera prueba en simulación numérica del controlador basado en modelo se asignó al cuadricóptero la tarea de regulación la cual consiste en alcanzar y mantener una pose determinada durante los 40 segundos que dura la simulación. El punto deseado se definió mediante los siguientes valores de referencia

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_d(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ [m]}, \\ \psi_d(t) &= 0 \text{ [rad]}. \end{aligned}$$

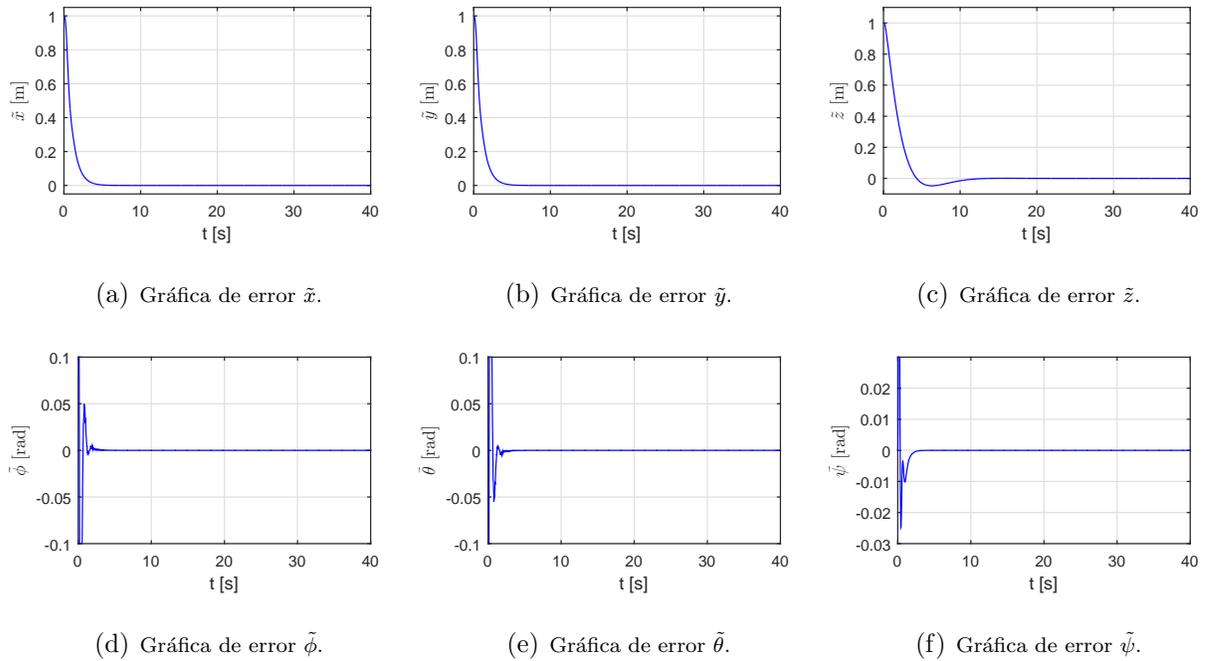
Las ganancias del controlador definido en (5.7), (5.15) y (5.18) fueron obtenidas por medio de un proceso heurístico el cual proporcionó los valores que se muestran a continuación

$$\begin{aligned} K_{pp} &= \text{diag}\{0.4, 0.4, 0.4\}, \\ K_{dp} &= \text{diag}\{1.2, 1.2, 1.2\} \\ \Lambda &= \text{diag}\{1.5, 3.2, 0.9\}, \\ K_s &= \text{diag}\{0.02, 0.015, 0.04\}. \end{aligned}$$

En la figura 5.2 se presentan las señales de posición y orientación deseadas (línea roja) así como también las señales actuales (línea azul) obtenidas de la simulación. En las gráficas se observa como el cuadrirotor alcanza el valor deseado para cada una de las coordenadas generalizadas y se mantiene así hasta el final de la simulación. Este comportamiento es congruente con las gráficas del error de posición y orientación las cuales se muestran en la figura 5.3. Como se esperaba por la naturaleza del controlador al ser basado en modelo el error tiende a cero muy rápido.



**Figura 5.2: Resultados de Simulación:** Gráficas de la posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  en regulación empleando el controlador basado en modelo (5.1) y (5.18).



**Figura 5.3: Resultados en simulación:** Gráficas del error en la tarea de regulación empleando el controlador basado en modelo (5.1) y (5.18).

El controlador trabaja muy bien de manera ideal, ya que demuestra permanecer en el punto deseado sin algún problema.

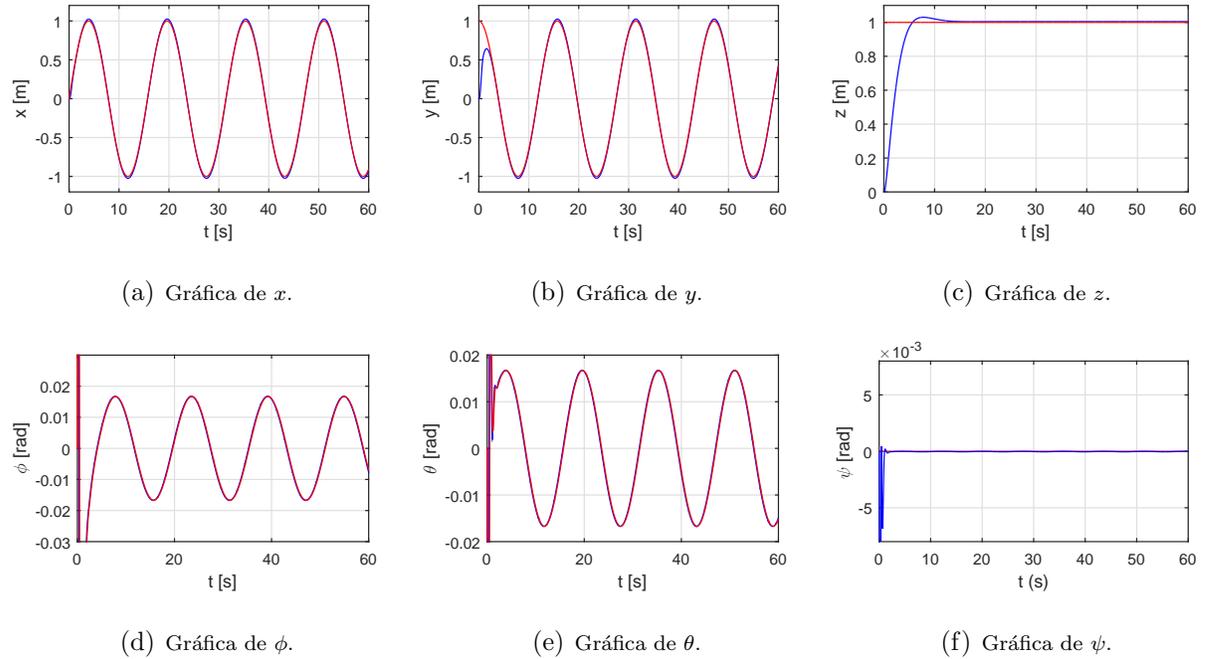
### 5.1.2. Seguimiento de trayectoria

En la segunda tarea, se realizó el seguimiento de trayectorias las cuales están descritas por los siguientes valores de referencia

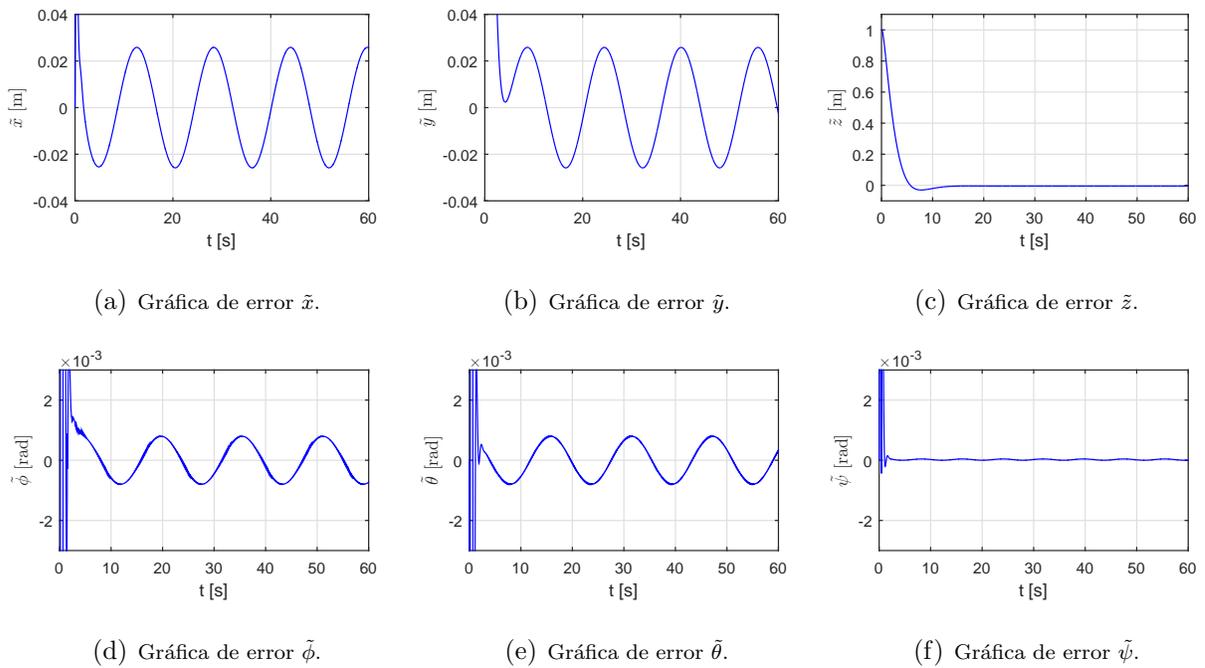
$$\mathbf{p}_d(t) = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{2t}{5}\right) \\ \cos\left(\frac{2t}{5}\right) \\ 1 \end{bmatrix} [\text{m}],$$

$$\psi_d(t) = 0 [\text{rad}].$$

Las ganancias utilizadas fueron las mismas que se utilizaron en la tarea de regulación. En la figura 5.4 se presentan las señales de posición y orientación deseadas (línea roja) así como también las señales actuales (línea azul) obtenidas de la simulación. En las gráficas se observa el seguimiento de las trayectorias deseadas por parte del cuadricóptero. El comportamiento es acorde con las gráficas del error de posición y orientación las cuales se muestran en la figura 5.5, donde las señales de error de pose permanecen cercanas a cero después de un periodo transitorio.



**Figura 5.4: Resultados en simulación:** Gráficas del seguimiento de trayectoria en  $p(t)$  y  $\eta(t)$  empleando el controlador basado en modelo (5.1) y (5.18).



**Figura 5.5: Resultados en simulación:** Gráficas del error en la tarea de seguimiento de trayectoria empleando el controlador basado en modelo (5.1) y (5.18).

Con esta última prueba de simulación numérica se observa que el controlador trabaja adecuadamente, esto es debido a la naturaleza del controlador que utiliza los parámetros exactos de la dinámica del sistema.

## 5.2. Controlador basado en modelo en la plataforma experimental

En esta sección se presentan los resultados obtenidos con el controlador basado en modelo al realizar diversas tareas de vuelo para evaluar el desempeño del controlador en la plataforma experimental. Dadas las características del controlador basado en modelo se requiere el conocimiento de los parámetros dinámicos del sistema, es por tal motivo que se han utilizado los valores proporcionados por el fabricante que se presentan en la tabla 2.1. De manera similar a las secciones anteriores se asignaron las tareas de regulación y seguimiento de trayectorias durante la experimentación. En el caso particular del seguimiento de trayectorias las dos primeras pruebas describen un movimiento circular con diferente velocidad de recorrido y el tercer experimento corresponde a una curva de lemniscata.

### 5.2.1. Regulación

Al igual que las pruebas con los otros controladores, en la tarea de regulación se propuso un punto en específico para que el cuadricóptero se mantenga durante el periodo de vuelo. El punto está definido con los siguientes valores

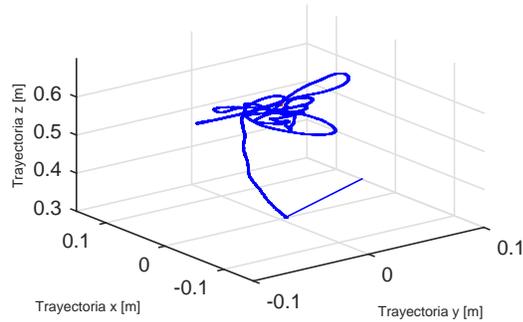
$$\begin{aligned}\mathbf{p}_d(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.6 \end{bmatrix} [\text{m}], \\ \psi_d(t) &= 0 [\text{rad}].\end{aligned}$$

Las ganancias del controlador en la plataforma experimental fueron obtenidas por medio de un proceso heurístico el cual se muestran a continuación

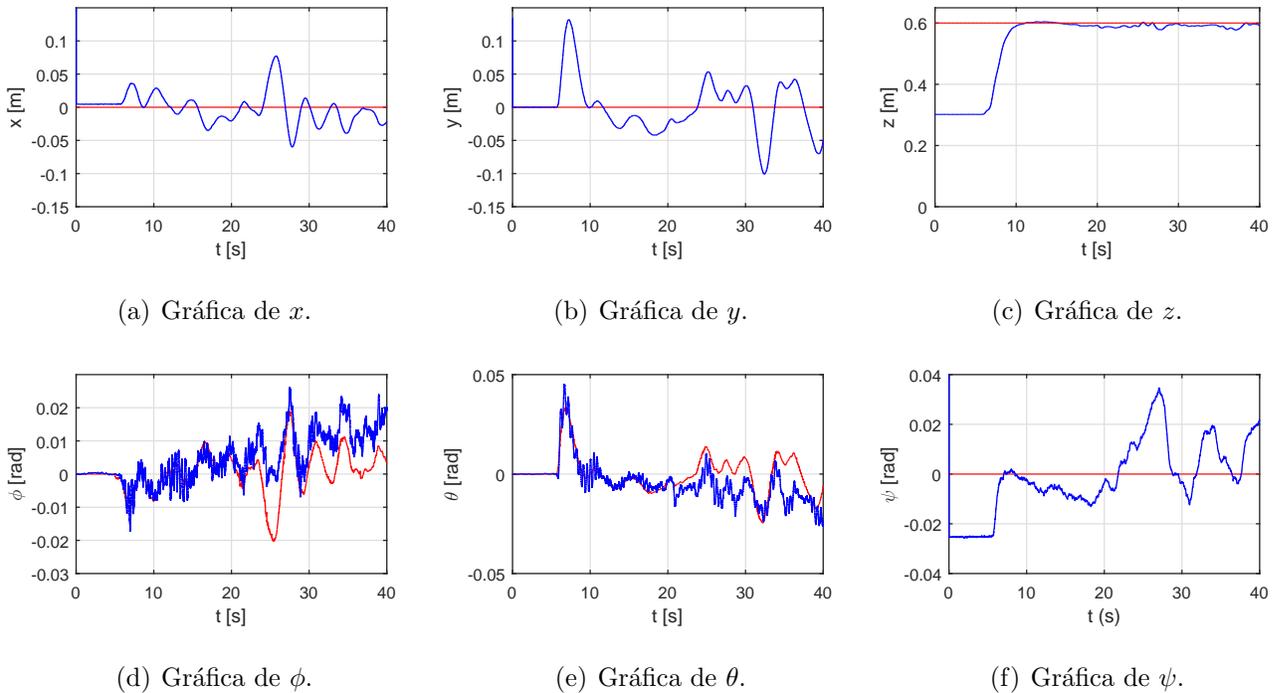
$$\begin{aligned}K_{pp} &= \text{diag}\{4, 3.75, 2.41\}, \\ K_{dp} &= \text{diag}\{1.9, 1.5, 3.02\} \\ \Lambda &= \text{diag}\{4.3, 6, 4\}, \\ K_s &= \text{diag}\{0.3, 0.24, 0.5\}.\end{aligned}$$

El comportamiento en la tarea de regulación del cuadricóptero en el espacio tridimensional se observa en la figura 5.6 y de acuerdo con el punto deseado el vehículo permanece flotando. En la figura 5.7 se muestran las señales de posición y orientación deseadas  $\mathbf{p}_d(t)$  y  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  (línea roja) respectivamente y las señales actuales de posición y orientación  $\mathbf{p}(t)$  y  $\boldsymbol{\eta}(t)$  (línea azul). El vehículo se mantiene cerca del punto deseado en la posición  $x - y$  donde este último a pesar de tener variaciones amplias regresa al punto deseado, mientras que para la altura llega en menos de los 10 segundos posteriores a haber iniciado el experimento y se mantiene aproximadamente en los 0.6 [m] hasta el final del

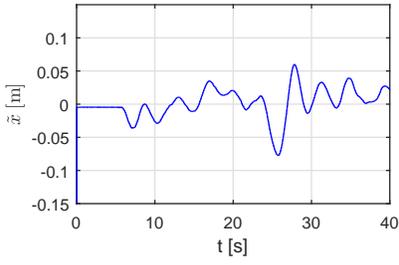
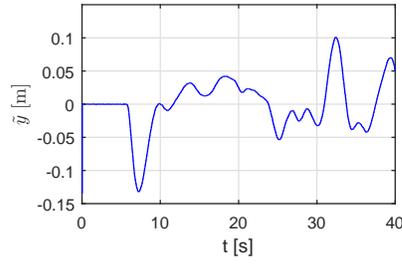
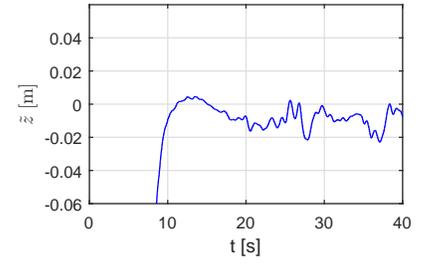
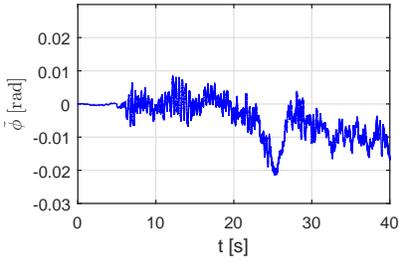
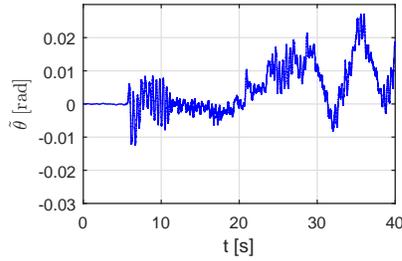
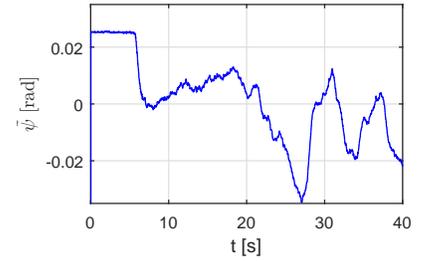
experimento. Para las señales de orientación  $\phi(t)$  y  $\theta(t)$  de manera similar se mantienen cercanos al valor de referencia. Cabe mencionar que este valor depende del controlador de posición. La señal de orientación  $\psi(t)$  permanece cercano al valor deseado desde el inicio del experimento. En la figura 5.8 se muestran las señales de error, donde se puede observar de mejor manera el desempeño del controlador, esto es, en las señales de posición  $x$  y  $y$  el error permanece dentro de los  $\pm 0.08$  [m] y  $\pm 0.13$  [m] respectivamente. En el caso de la altura el error esta en el rango de  $\pm 0.025$  [m]. El error de orientación en el cabeceo, balanceo y guiñada se encuentran en el rango de  $\pm 0.03$  [rad].



**Figura 5.6: Resultados experimentales:** Movimiento realizado por el cuadrirotor Quanser QBall 2 durante la tarea de regulación usando el controlador (5.1) y (5.18).

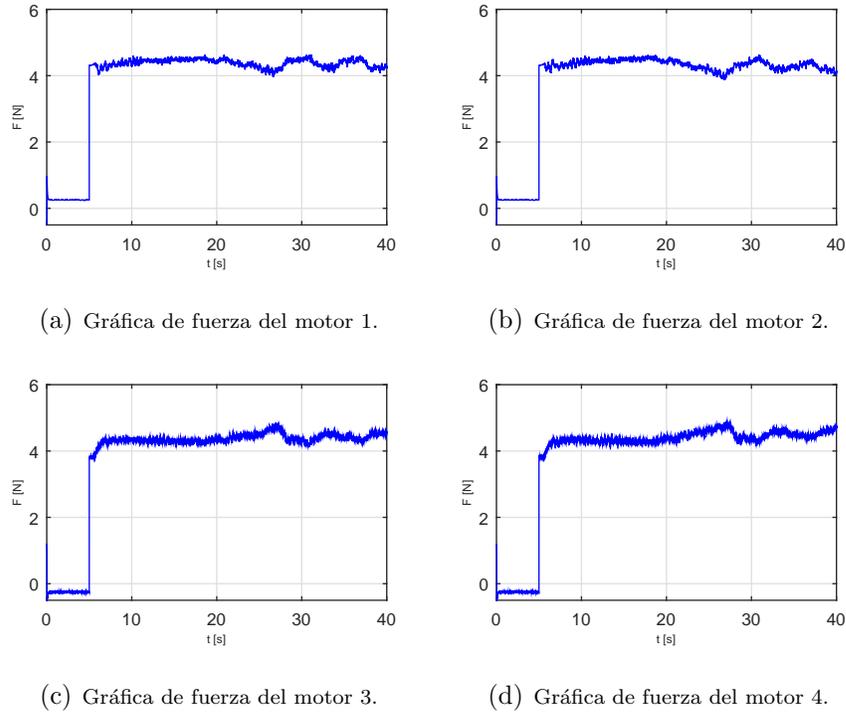


**Figura 5.7: Resultados experimentales:** Gráficas de la posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  en regulación y señales de referencia de posición  $\mathbf{p}_d(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ , durante la tarea de regulación empleando el esquema de control basado en modelo (5.1) y (5.18).


 (a) Gráfica de error  $\tilde{x}$ .

 (b) Gráfica de error  $\tilde{y}$ .

 (c) Gráfica de error  $\tilde{z}$ .

 (d) Gráfica de error  $\tilde{\phi}$ .

 (e) Gráfica de error  $\tilde{\theta}$ .

 (f) Gráfica de error  $\tilde{\psi}$ .

**Figura 5.8: Resultados experimentales:** Gráficas de las señales de error de posición  $\tilde{\mathbf{p}}(t)$  y orientación  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$  obtenidas durante la tarea de regulación asignado al cuadricóptero Quanser QBall 2 empleando el controlador basado en modelo (5.1) y (5.18).

Las gráficas de las fuerzas  $f_i(t)$  generadas por los motores del cuadricóptero durante el vuelo en regulación se muestran en la figura 5.9 donde se observa que las fuerzas son mayores a los 4 [N] sin llegar a los 5 [N] por cada motor. Se puede observar también, que las señales no presentan oscilaciones abruptas lo que es importante para el consumo de energía del cuadricóptero.



**Figura 5.9: Resultados experimentales:** Gráficas de fuerza  $f_i(t)$  generada por cada motor del cuadrirotor.

### 5.2.2. Seguimiento de trayectorias que generan una circunferencia

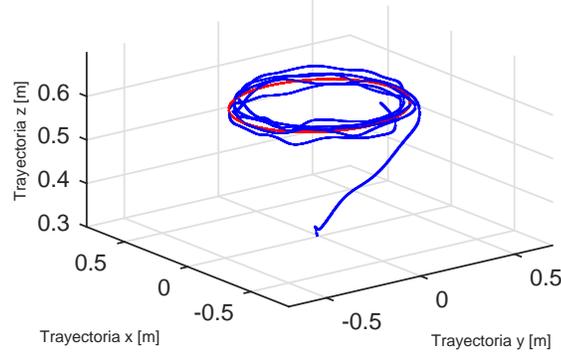
En los experimentos de seguimientos de trayectorias que generan una circunferencia se presentan 2 resultados obtenidos con el controlador basado en modelo. Las circunferencias en el plano  $x - y$  que generan las trayectorias deseadas se recorre con distintas velocidades. Las señales de posición deseada y ángulo de guiñada deseado  $\mathbf{p}_d(t)$  y  $\psi_d(t)$  que se emplearon en el primer experimento de seguimiento están dadas por

$$\mathbf{p}_d(t) = \begin{bmatrix} 0.4 \cos(\pi/5) \\ 0.4 \sen(\pi/5) \\ 0.6 \end{bmatrix} [\text{m}],$$

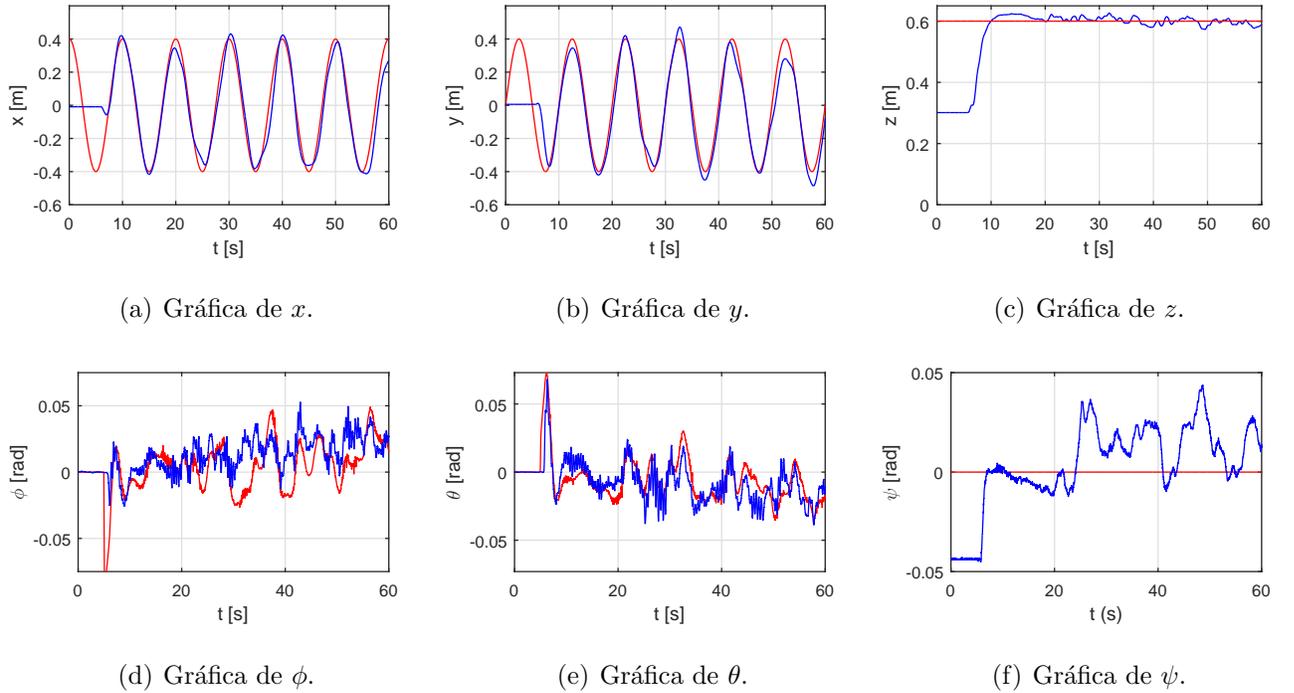
$$\psi_d(t) = 0 [\text{rad}].$$

La circunferencia cuenta con un radio de 0.4 [m] donde el vehículo vuela a 0.6 [m] de altura. En la figura 5.10 se muestra en una vista tridimensional la ruta deseada (línea roja) y la ruta trazada por el vehículo (línea azul). En la figura 5.11 las señales de posición  $\mathbf{p}_d(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  (línea roja) y las señales de posición actual  $\mathbf{p}(t)$  y orientación actual  $\boldsymbol{\eta}(t)$  (línea azul) obtenidas durante el experimento. Se observa en las gráficas como el controlador logra que el vehículo siga la trayectoria deseada, sin embargo, es claro que en las crestas de la señal este seguimiento presenta un ligero desfase. La altura alcanza la posición deseada a los 10 segundos y se mantiene oscilante en este valor hasta el final del experimento. Los ángulos de balanceo  $\phi(t)$  y cabeceo  $\theta(t)$  se mantienen cercanos al valor de referencia obtenido del lazo externo del controlador lo que indica que el subsistema

encargado de dichos ángulos trabaja de manera correcta. El ángulo de guiñada  $\psi(t)$  se mantiene cercano al punto deseado, aunque tiene variaciones el controlador logra acotarlas.



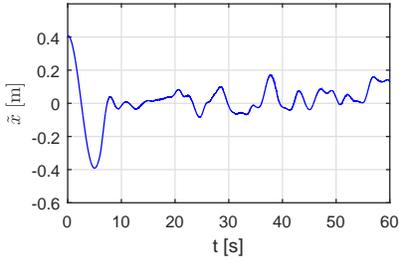
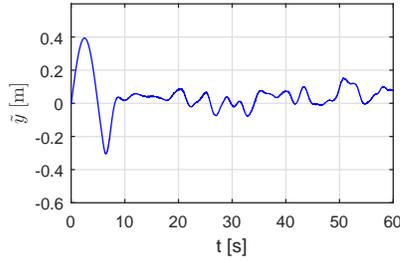
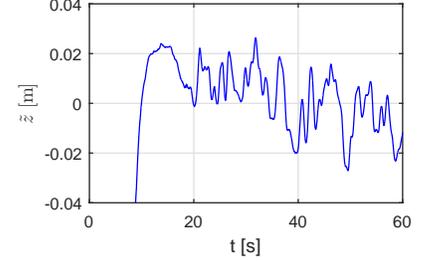
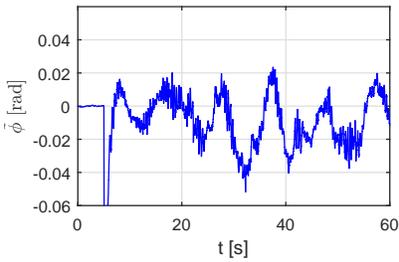
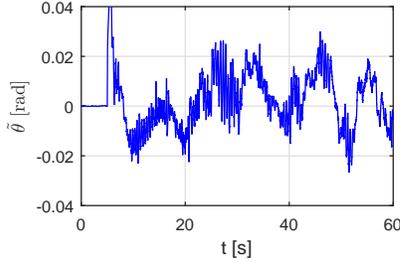
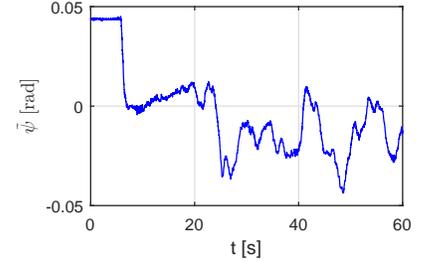
**Figura 5.10:** Trayectoria de la circunferencia a baja velocidad realizada con el cuadrirotor Quanser QBall 2.



**Figura 5.11: Resultados experimentales:** Gráficas de la posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  y señales de referencia de posición  $\mathbf{p}_d(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  durante la tarea de seguimiento de trayectoria empleando el esquema de control basado en modelo (5.1) y (5.18).

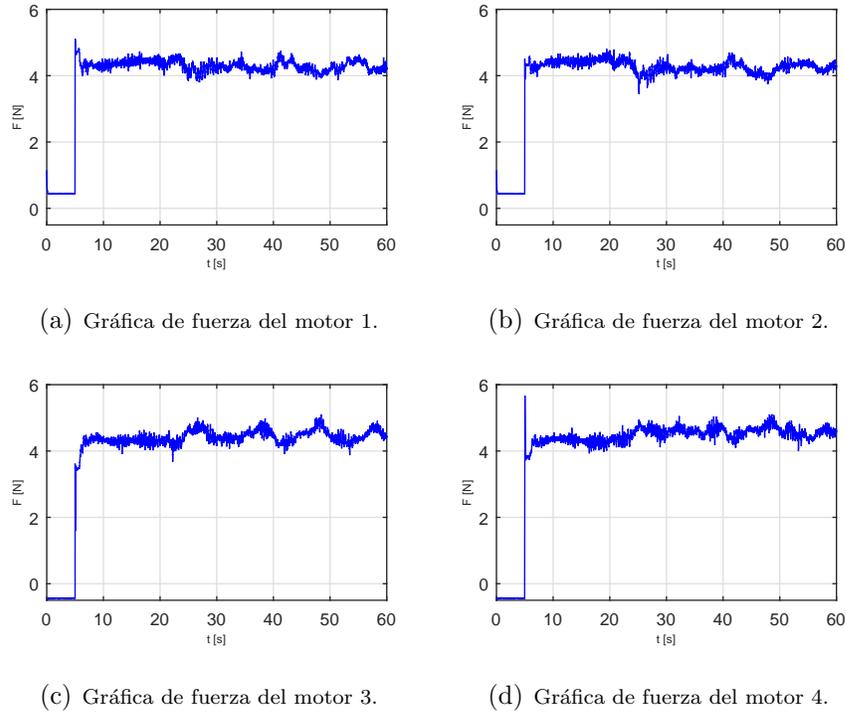
En la figura 5.12 se muestran las señales del error donde se nota el desempeño del controlador en este experimento. La señales de error  $\tilde{x}(t)$  y  $\tilde{y}(t)$  se encuentran acotadas en valores de  $\pm 0.2$  [m] mientras que la señal de error  $\tilde{z}(t)$  se encuentra acotada en valores de  $\pm 0.025$  [m]. En el caso de

la señal  $\tilde{\phi}(t)$  y  $\tilde{\theta}(t)$  se observa una mayor magnitud en los primeros segundos que corresponde a la inicialización y periodo transitorio del sistema posterior a esto el error se encuentra acotado en valores de  $\pm 0.04$  [rad]. Finalmente en el caso de la señal  $\tilde{\psi}(t)$  la señal permanece en el rango  $\pm 0.05$  [rad] donde se puede observar que permanece mas tiempo en el lado negativo de la gráfica.


 (a) Gráfica de error  $\tilde{x}$ .

 (b) Gráfica de error  $\tilde{y}$ .

 (c) Gráfica de error  $\tilde{z}$ .

 (d) Gráfica de error  $\tilde{\phi}$ .

 (e) Gráfica de error  $\tilde{\theta}$ .

 (f) Gráfica de error  $\tilde{\psi}$ .

**Figura 5.12: Resultados experimentales:** Gráficas del error de posición  $\tilde{\mathbf{p}}(t)$  y orientación  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$  durante el experimento de seguimiento de trayectorias que da lugar a una circunferencia empleando el controlador basado en modelo (5.1) y (5.18).

En la figura 5.13 se muestran las gráficas de la fuerza  $f_i(t)$  generada por cada rotor del vehículo. En ellas se pueda observar que las variaciones se encuentran acotadas entre los 4 [N] y 5 [N]. Las oscilaciones son causadas porque la ruta a seguir tiene trayectos rápidos y el controlador envía la señal para que el motor compense esos trayectos y pueda realizar el seguimiento.



**Figura 5.13: Resultados experimentales:** Gráficas de la fuerza  $f_i(t)$  generada por cada motor del cuadrirotor.

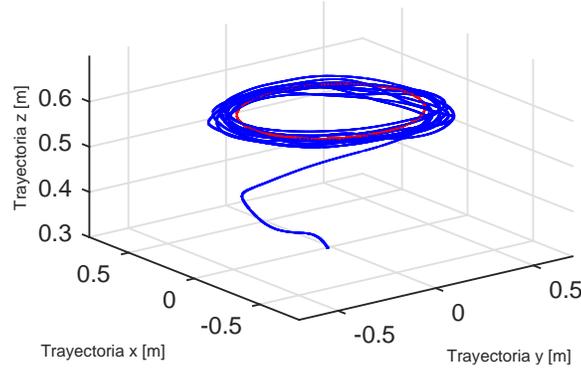
El segundo experimento corresponde a una ruta que dibuja un círculo con una frecuencia más alta en las funciones sinusoidales para producir un movimiento más rápido en el vehículo. Las trayectorias deseadas para este experimento están dadas por

$$\mathbf{p}_d(t) = \begin{bmatrix} 0.4 \cos(2\pi/5) \\ 0.4 \sen(2\pi/5) \\ 0.6 \end{bmatrix} [\text{m}],$$

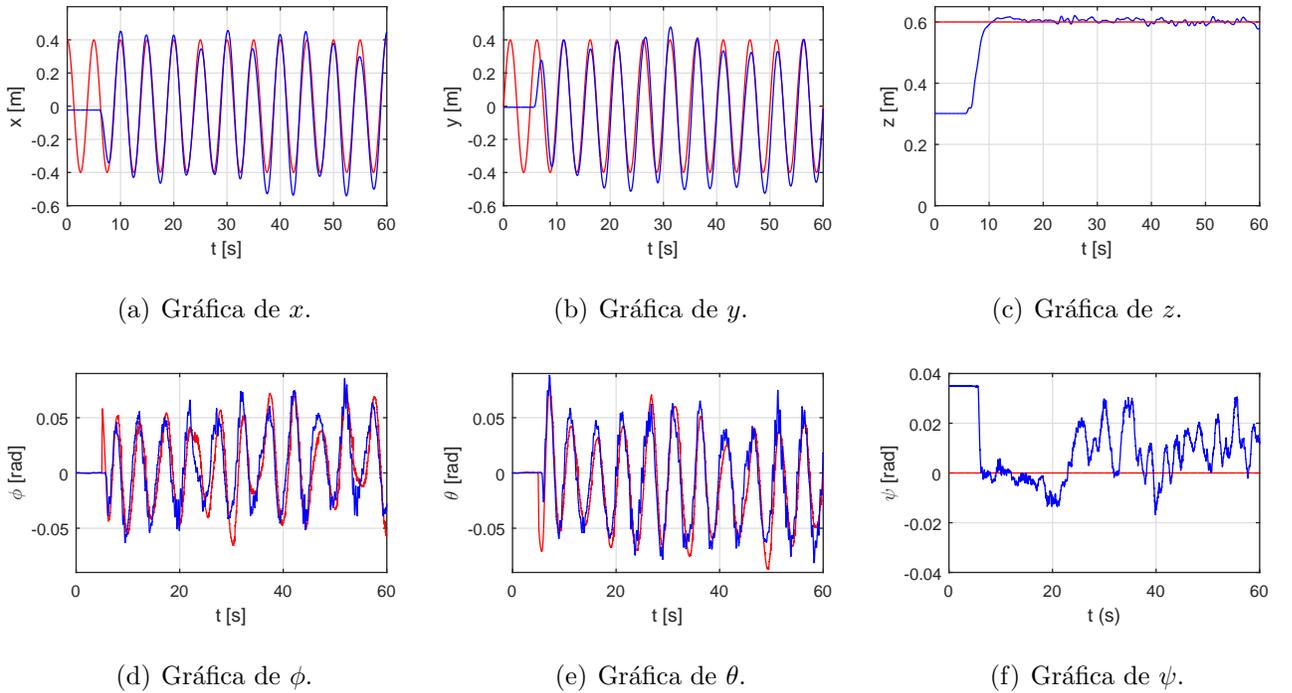
$$\psi_d(t) = 0 [\text{rad}].$$

En la figura 5.14 se muestra el recorrido del cuadrirotor en una gráfica tridimensional, donde la ruta deseada (línea roja) y la ruta realizada por el cuadrirotor (línea azul) se encuentran plasmadas. Se observa que la cantidad de vueltas realizadas por el cuadrirotor es el doble que en las realizadas en el experimento anterior. En la figura 5.15 se muestran las señales de posición y orientación deseada  $\mathbf{p}_d(t)$  y  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  respectivamente (línea roja), además de las señales de posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  actuales. En las señales se puede observar como el cuadrirotor realiza el seguimiento de la ruta tanto en  $x$  como en  $y$  con desfases presentados en las crestas mientras que para la altura se mantiene sobre el valor deseado. Los ángulos de cabeceo  $\theta(t)$  y balanceo  $\phi(t)$  el seguimiento se realiza casi a la par con pequeños rezagos. Además en la guiñada  $\psi(t)$  se mantiene cerca del punto deseado. En la figura 5.16 se muestran las señales de error donde se puede notar de mejor manera el desempeño del controlador basado en modelo. La señal  $\tilde{x}(t)$  el rango de error se encuentra entre  $\pm 0.18$  [m] y para  $\tilde{y}(t)$  de  $\pm 0.25$  [m] donde las variaciones más grandes se encuentran en las crestas

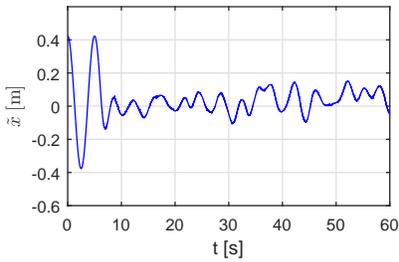
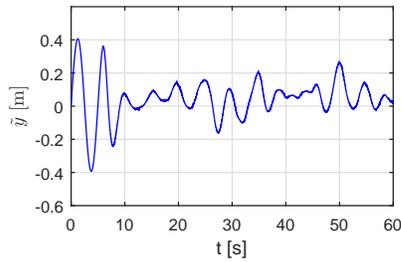
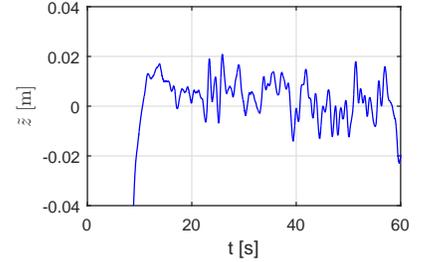
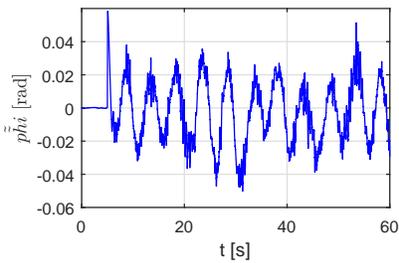
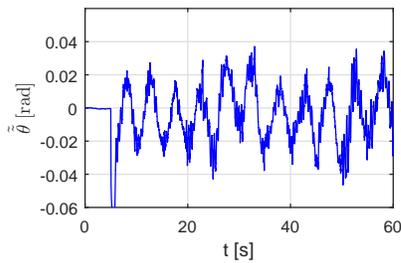
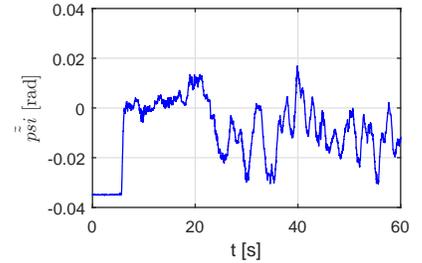
de las señales de posición. Para el error de altura  $\tilde{z}(t)$  el error tiene un rango de  $\pm 0.02$  [m] a lo largo del experimento. El error del ángulo de cabeceo  $\tilde{\psi}(t)$  se mantiene oscilante en  $\pm 0.05$  [rad] y el de balanceo  $\tilde{\theta}(t)$  en  $\pm 0.045$  [rad], además el error del ángulo de guiñada  $\tilde{\phi}(t)$  está en el rango de  $\pm 0.035$  [rad].



**Figura 5.14:** Trayectoria de la circunferencia a alta velocidad realizada con el cuadrirotor Quanser QBall 2.

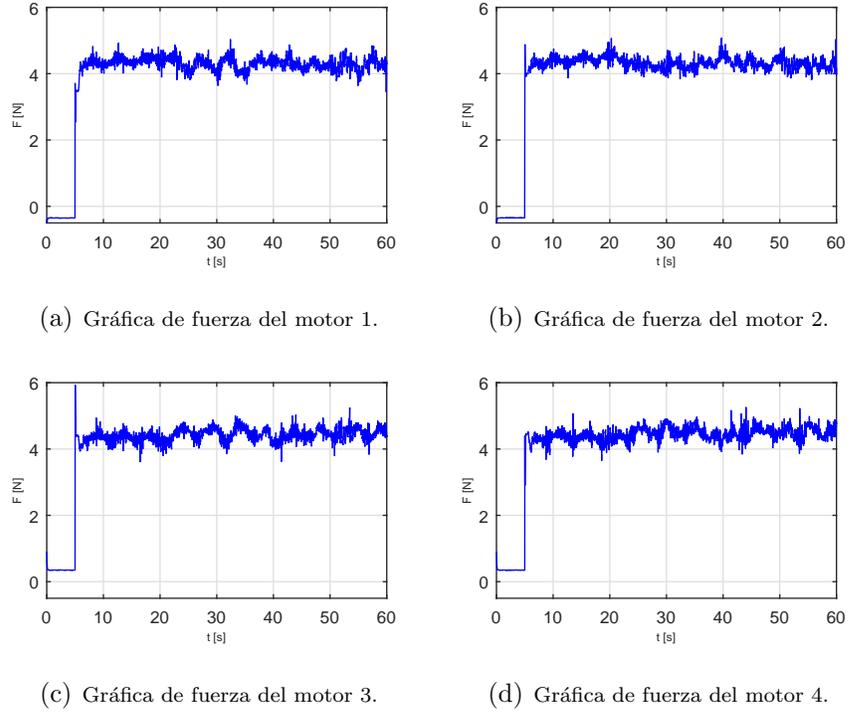


**Figura 5.15: Resultados experimentales:** Gráficas de la posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  y señales de referencia de posición  $\mathbf{p}_d(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  durante la tarea de seguimiento de trayectoria empleando el esquema de control basado en modelo (5.1) y (5.18).

(a) Gráfica de error  $\tilde{x}$ .(b) Gráfica de error  $\tilde{y}$ .(c) Gráfica de error  $\tilde{z}$ .(d) Gráfica de error  $\tilde{\phi}$ .(e) Gráfica de error  $\tilde{\theta}$ .(f) Gráfica de error  $\tilde{\psi}$ .

**Figura 5.16: Resultados experimentales:** Gráficas del error de posición  $\tilde{\mathbf{p}}(t)$  y orientación  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$  durante el experimento de seguimiento de trayectorias que da lugar a una circunferencia de alta velocidad empleando el controlador basado en modelo.

En la figura 5.17 se muestran las fuerzas  $f_i(t)$  generadas por cada rotor del cuadrirotor donde se observa que la señal permanece acotada y sin altas frecuencias de cambio con magnitud acotada entre aproximadamente entre 4 [N] y 5 [N].



**Figura 5.17: Resultados experimentales:** Gráficas de fuerza  $f_i(t)$  generada por cada motor del cuadrirotor.

### 5.2.3. Prueba experimental de seguimiento de trayectoria lemniscata.

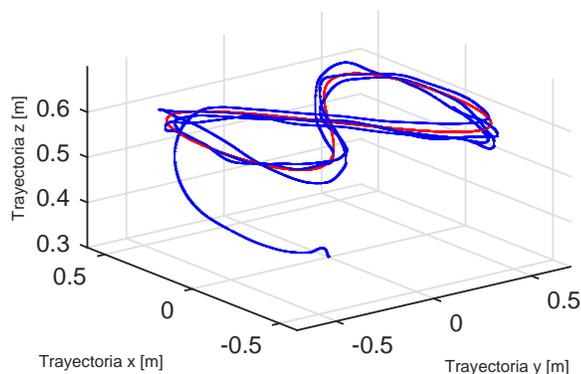
El último experimento para el controlador basado en modelo se trata de el seguimiento de una trayectoria que genera una curva de lemniscata en el plano  $x - y$ . Las trayectorias deseadas están definidas como sigue

$$\mathbf{p}_d(t) = \begin{bmatrix} 0.4 \cos(2\pi/15) \\ 0.6 \sin(4\pi/15) \\ 0.6 \end{bmatrix} [\text{m}],$$

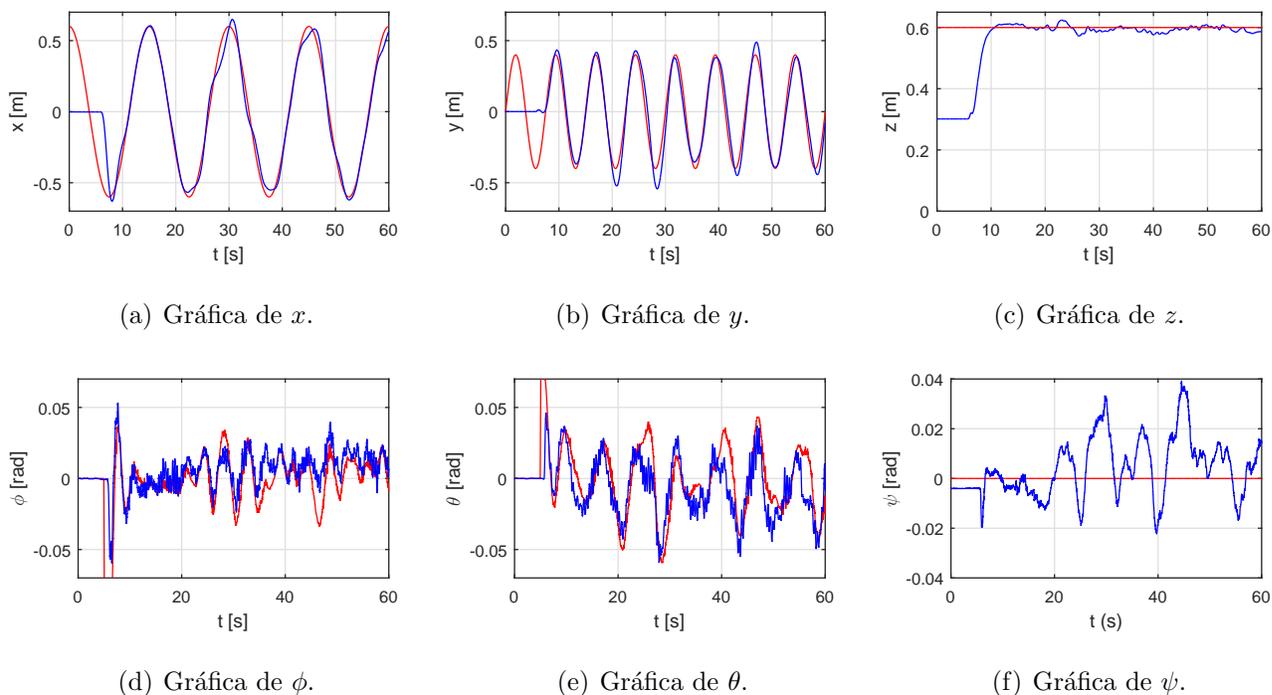
$$\psi_d(t) = 0 [\text{rad}].$$

La figura 5.18 muestra la ruta establecida (línea roja) y la ruta realizada por el vehículo (línea azul), es claro observar la curva lemniscata y como el vehículo realiza la tarea de seguimiento. El desempeño del controlador se analiza en las figuras 5.19 y 5.20 donde en la primera se muestran las señales de posición deseada  $\mathbf{p}_d(t)$  y orientación deseada  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  (línea roja) y las señales de posición actual  $\mathbf{p}(t)$  y orientación actual  $\boldsymbol{\eta}(t)$  mientras que en la segunda las señales de error correspondientes a las coordenadas generalizadas. En las figuras 5.19 y 5.12 se observa el desempeño del controlador, en las gráficas de  $x$  y  $y$  el vehículo se mantiene sobre la ruta deseada con algunos rezagos en las crestas de la señal sinusoidal, en cuanto a la altura se mantiene sobre el valor deseado. Los ángulos de cabeceo, balanceo y guiñada permanecen cercanos al valor deseado. En las gráficas del error los rangos de la señal  $\tilde{x}(t)$  y  $\tilde{y}(t)$  se mantienen en una cota menor a  $\pm 0.20$  [m] mientras que para el error en la altura  $\tilde{z}(t)$  se mantienen en una cota poco mayor a  $\pm 0.02$  [m]. En el caso del error de

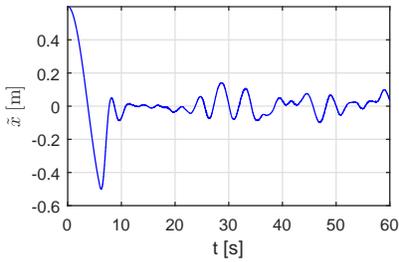
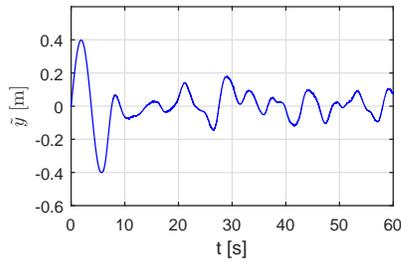
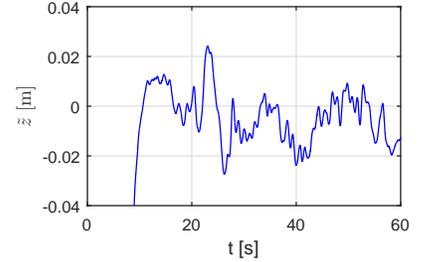
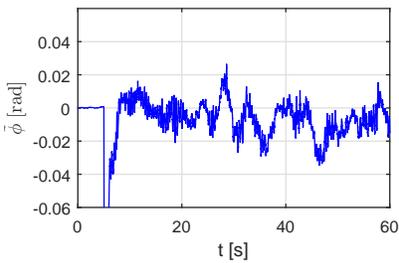
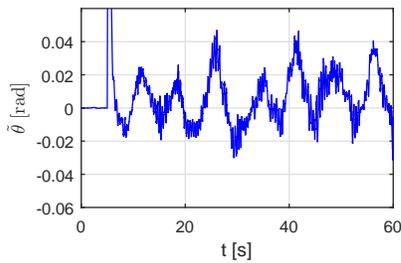
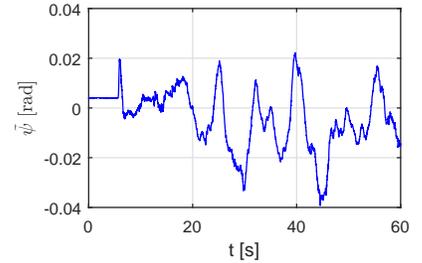
los ángulos de cabeceo  $\tilde{\phi}(t)$ , balanceo  $\tilde{\theta}(t)$  y guiñada  $\tilde{\psi}(t)$  permanecen dentro del rango de  $\pm 0.04$  [rad].



**Figura 5.18:** Trayectoria lemniscata realizada con el cuadrirotor Quanser QBall 2.

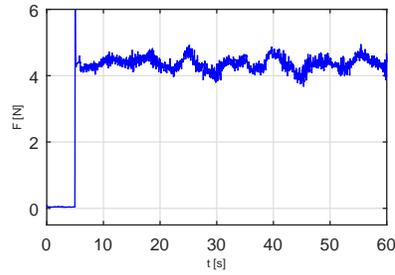


**Figura 5.19: Resultados experimentales:** Gráficas de la posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  y señales de referencia de posición  $\mathbf{p}_d(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  durante la tarea de seguimiento de trayectoria lemniscata empleando el esquema de control basado en modelo.

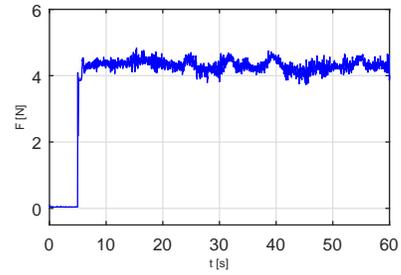
(a) Gráfica de error  $\tilde{x}$ .(b) Gráfica de error  $\tilde{y}$ .(c) Gráfica de error  $\tilde{z}$ .(d) Gráfica de error  $\tilde{\phi}$ .(e) Gráfica de error  $\tilde{\theta}$ .(f) Gráfica de error  $\tilde{\psi}$ .

**Figura 5.20: Resultados experimentales:** Gráficas del error de posición  $\tilde{\mathbf{p}}(t)$  y orientación  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$  durante el experimento de seguimiento de trayectorias que da lugar a una ruta lemniscata empleando el controlador basado en modelo.

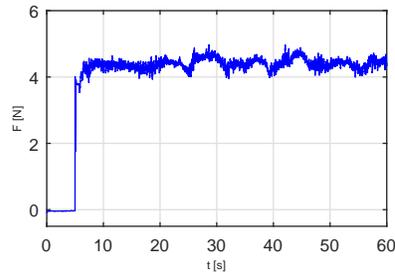
La figura 5.21 se muestra la fuerza  $f_i(t)$  generada por cada rotor del vehículo en la tarea de seguimiento de trayectoria de curva lemniscata. Se puede observar que los motores no presentan cambios bruscos en sus fuerzas generadas, lo que resulta en un vuelo con menos vibración del vehículo.



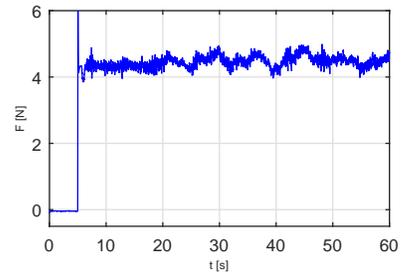
(a) Gráfica de fuerza del motor 1.



(b) Gráfica de fuerza del motor 2.



(c) Gráfica de fuerza del motor 3.



(d) Gráfica de fuerza del motor 4.

**Figura 5.21: Resultados experimentales:** Gráficas de la fuerza  $f_i(t)$  generada por cada motor del cuadrirotor.

---

# Análisis comparativo de los resultados obtenidos

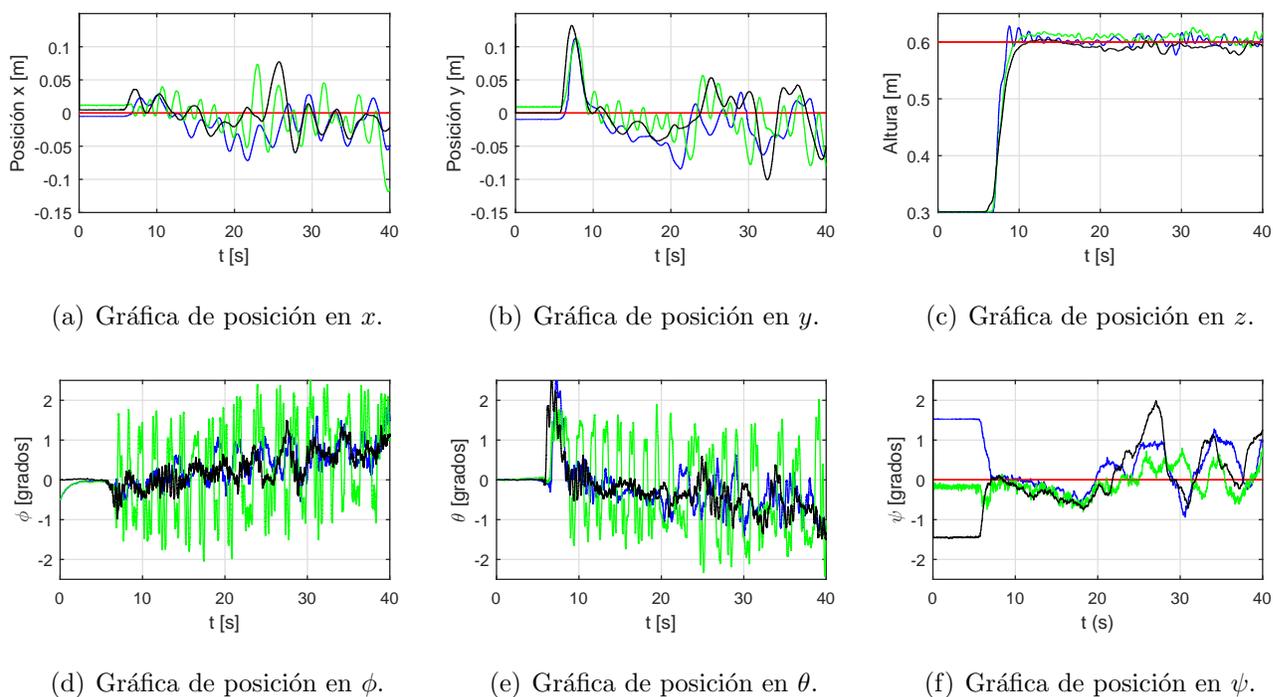
---

En este capítulo se presenta un análisis comparativo del comportamiento de los tres controladores expuestos en este trabajo, este análisis se basa en los datos recavados en las pruebas experimentales las cuales dan lugar a las gráficas de comparación y a las tablas de error medio cuadrático que son usadas como herramientas para establecer conclusiones de una manera cuantitativa. Se analizan cada uno de los resultados obtenidos en las tareas tanto en regulación como en los distintas trayectorias establecidas para el seguimiento.

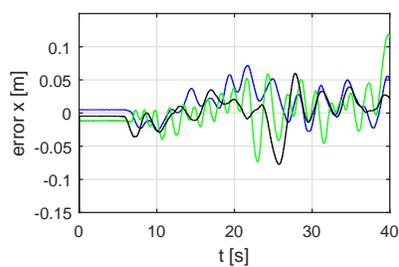
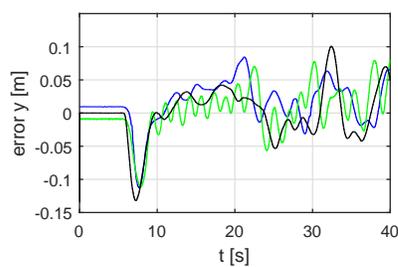
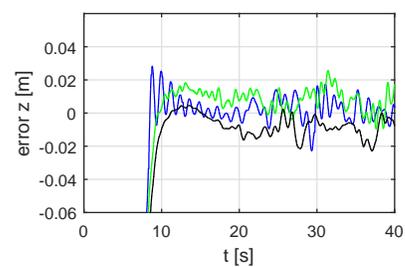
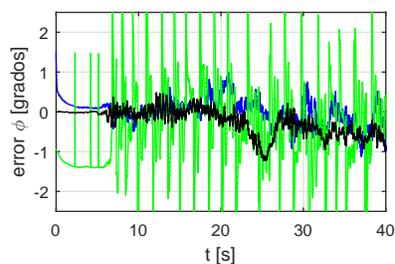
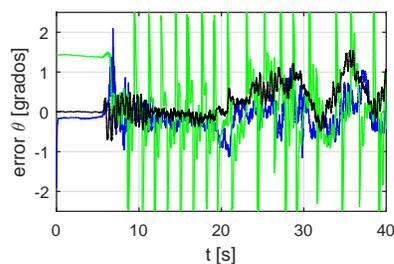
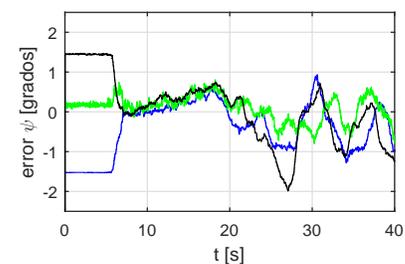
## 6.1. Regulación

En los capítulos anteriores se describen a detalle los parámetros y controladores que fueron empleados para realizar la tarea de regulación con el cuadricóptero, así como los resultados obtenidos durante la experimentación. En esta sección, los resultados obtenidos con cada controlador son colocados de manera conjunta de tal forma que se puede observar la diferencia del desempeño de cada uno de ellos al realizar la tarea asignada.

En la figura 6.1 se presenta las señales de posición  $\mathbf{p}(t)$  y de orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  actuales obtenidas con cada controlador, donde la línea de color azul representa al controlador PID, la línea de color verde corresponde al controlador con estructura de *backstepping* y la línea de color negro esta relacionada con el controlador basado en modelo. De igual manera en las gráficas se presentan las señales deseadas para cada coordenada representada con la línea de color rojo. En las gráficas de posición  $\mathbf{p}(t)$  y el ángulo de guiñada  $\psi(t)$  podemos observar que el comportamiento es similar para los tres controladores, sin embargo, para los ángulos de cabeceo  $\theta(t)$  y balanceo  $\phi(t)$  los controladores PID/PD y basado en modelo presentan un comportamiento parecido mientras que el de *backstepping* muestra una mayor magnitud durante el experimento. Las señales de error presentadas en la figura 6.2 corroboran el comportamiento descrito anteriormente. Donde el desempeño de los tres controladores es similar para la posición  $\mathbf{p}(t)$  y el ángulo de guiñada  $\psi(t)$ , sin embargo, en el caso de los ángulos de orientación de balanceo  $\psi(t)$  y cabeceo  $\theta(t)$  muestran un error mayor cuando se emplea el controlador de *backstepping*, esto debido a la discontinuidad de las señales de referencia obtenidas en el lazo externo del control. Con el objetivo brindar una métrica cuantitativa del desempeño de los controladores se presenta el error cuadrático medio para cada una de las señales de error de las coordenadas generalizadas. Para calcular esta métrica, la cual se presenta en la tabla 6.1, no se tomaron en cuenta los primeros 10 segundos del experimento en los cuales los transitorios son dominantes. Los resultados obtenidos confirman lo observado en las gráficas



**Figura 6.1: Resultados experimentales:** Gráficas de la posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  durante la tarea de regulación obtenidas con los controladores PID/PD (línea azul), *backstepping* (línea verde), basado en modelo (línea negra) y señales de referencia de posición  $\mathbf{p}_d(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ .

(a) Gráfica de error  $\tilde{x}$ .(b) Gráfica de error  $\tilde{y}$ .(c) Gráfica de error  $\tilde{z}$ .(d) Gráfica de error  $\tilde{\phi}$ .(e) Gráfica de error  $\tilde{\theta}$ .(f) Gráfica de error  $\tilde{\psi}$ .

**Figura 6.2: Resultados experimentales:** Gráficas de las señales de error de posición  $\tilde{\mathbf{p}}(t)$  y orientación  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$  durante la tarea de regulación obtenidas con los controladores PID/PD (línea azul), *backstepping* (línea verde), basado en modelo (línea negra).

**Tabla 6.1:** Tabla comparativa del error cuadrático medio

Error Cuadrático Medio			
Prueba de regulación			
Señal	PID/PD	<i>Backstepping</i>	Basado en Modelo
$\tilde{x}$	0.0298	0.0325	0.0253
$\tilde{y}$	0.0360	0.0314	0.0349
$\tilde{z}$	0.0071	0.0108	0.0097
$\tilde{\phi}$	0.0061	0.0208	0.0081
$\tilde{\theta}$	0.0069	0.0207	0.0091
$\tilde{\psi}$	0.0093	0.0062	0.0124

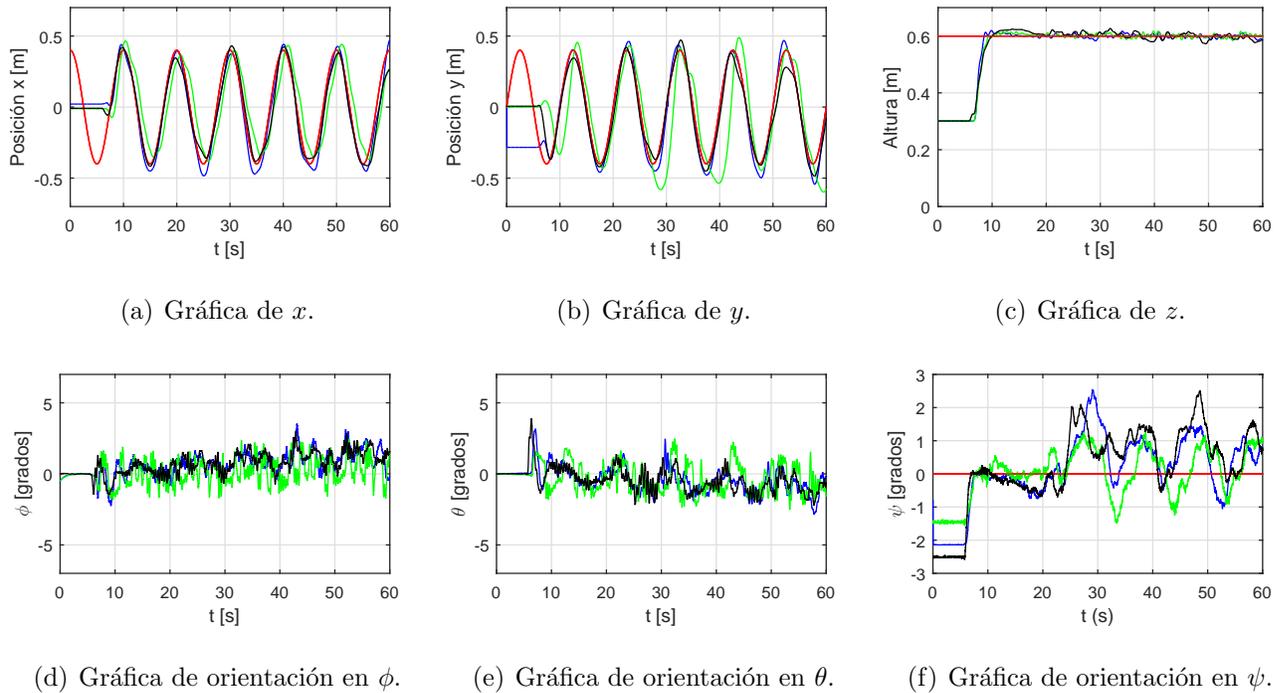
presentadas anteriormente donde el controlador de *backstepping* produce los valores más altos en todas las señales de error haciéndose más notorio en los ángulos de balanceo  $\tilde{\phi}(t)$  y cabeceo  $\tilde{\theta}(t)$ .

## 6.2. Seguimiento de trayectoria de circunferencia

En esta sección se presenta el análisis comparativo de los controladores cuando se asigna la tarea de seguimiento de trayectorias que dan lugar a una circunferencia en el plano  $x - y$ . Como se mencionó anteriormente se realizaron dos experimentos en el cual el cuadrirotor sigue la misma ruta pero con distinta velocidad. Para el primer experimento la figura 6.3 muestra las señales de posición  $\mathbf{p}_d(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  deseadas (línea de color rojo) y las señales de posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  actuales empleando el controlador PID/PD (línea azul), *backstepping* (línea verde) y basado en modelo (línea negra). Estas gráficas muestran que de nueva cuenta los controladores PID/PD y basado en modelo tienen un comportamiento similar mientras que el controlador *backstepping* muestra un retardo en el seguimiento de trayectoria. Las gráficas del error de la figura 6.4 corroboran el comportamiento del cuadrirotor descrito anteriormente.

La tabla 6.2 presenta el error cuadrático medio obtenido con los distintos controladores cuando se realiza la tarea de seguimiento de una ruta circular a velocidad baja. Los valores obtenidos para el control de *backstepping* muestran las magnitudes más altas mientras que el control PID/PD y basado en modelo tienen valores cercanos uno del otro.

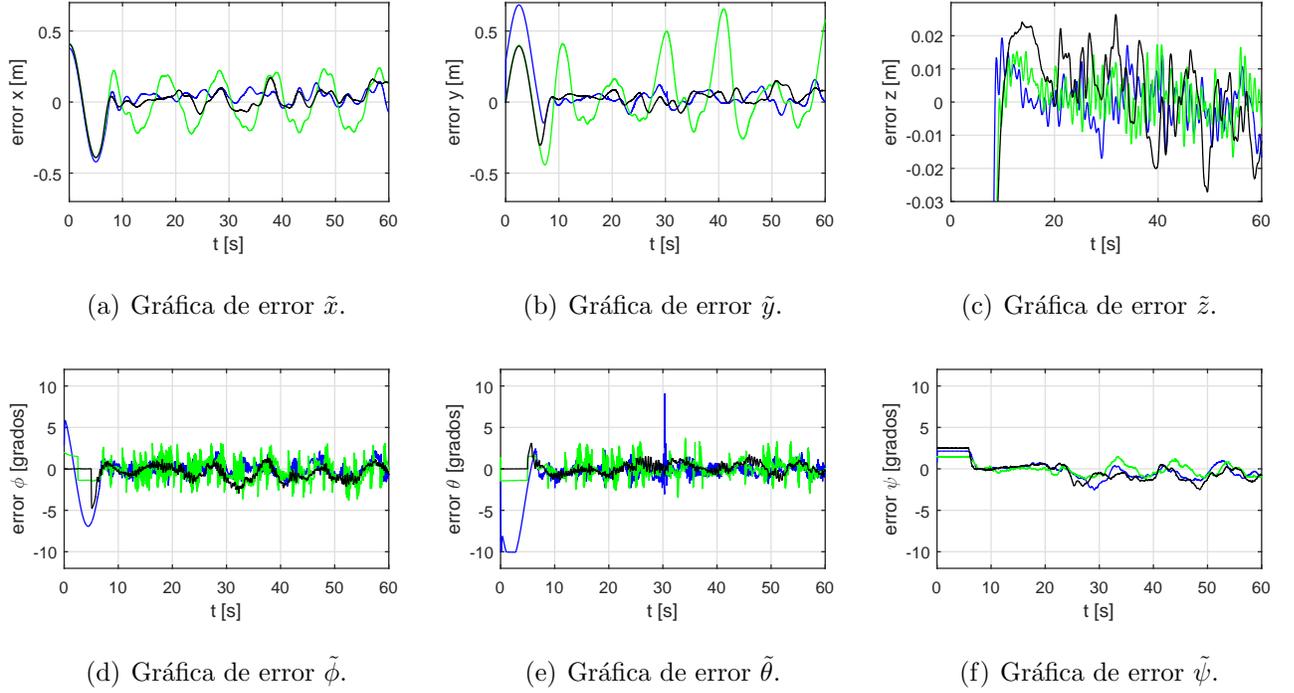
El segundo experimento de trayectorias que dan lugar a una circunferencia en el plano  $x - y$ , en el cual se incrementa la velocidad, da lugar a las gráficas de posición y orientación de la figura 6.5 en donde se observa que los controladores presentan mayor problema para seguir cada señal de referencia. En la figura 6.6 se observa como las señales de error se incrementan considerablemente en relación a los otros experimentos y también se puede percibir que el controlador basado en modelo tiene un mejor desempeño en el seguimiento de las coordenadas  $x(t)$  y  $y(t)$ . La tabla 6.3 confirma de manera cuantitativa esta observación presentando menores valores de error cuadrático medio para la señales del error de posición  $\tilde{x}(t)$  y  $\tilde{y}(t)$ .



**Figura 6.3: Resultados experimentales:** Gráficas de la posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  durante la tarea de regulación obtenidas con los controladores PID/PD (línea azul), *backstepping* (línea verde), basado en modelo (línea negra) durante la tarea de seguimiento de trayectoria que da lugar a una circunferencia de baja velocidad.

**Tabla 6.2:** Tabla comparativa del error cuadrático medio en la primer prueba de seguimiento de trayectorias

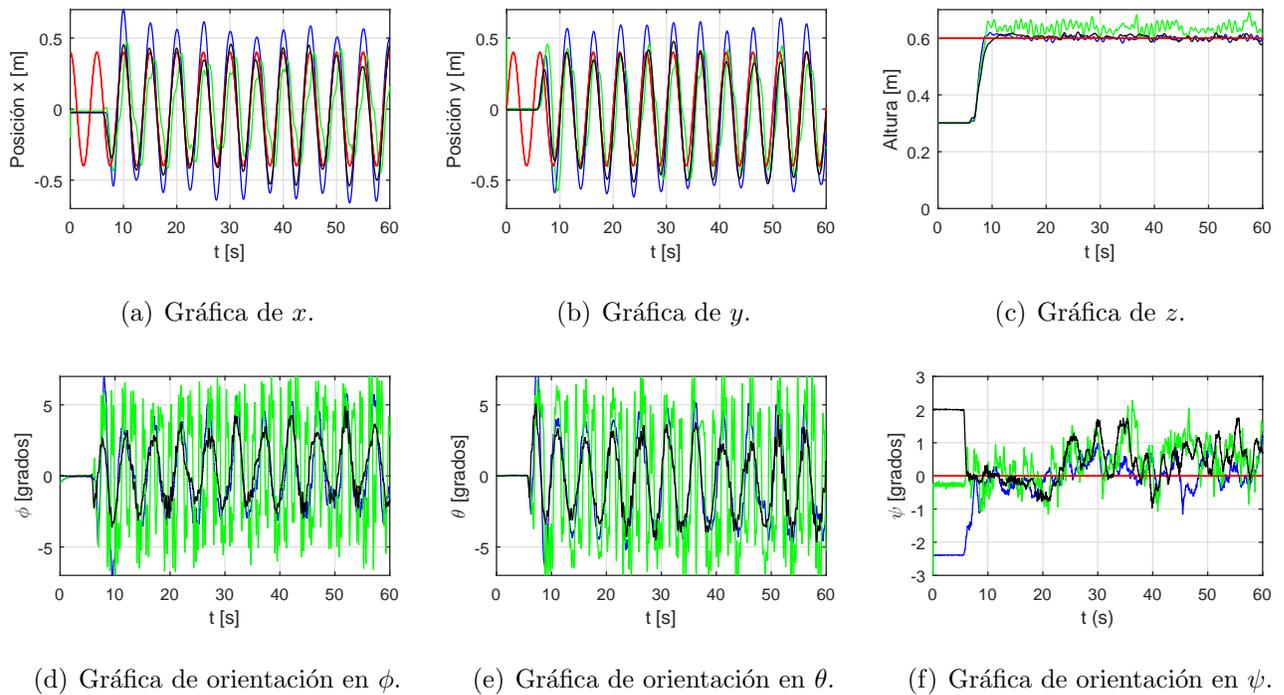
Error Cuadrático Medio			
Primera prueba de seguimiento de trayectoria			
Señal	PID/PD	<i>Backstepping</i>	Basado en modelo
$\tilde{x}$	0.0580	0.1447	0.0640
$\tilde{y}$	0.0524	0.1125	0.0573
$\tilde{z}$	0.0065	0.0128	0.0130
$\tilde{\phi}$	0.0115	0.0415	0.0168
$\tilde{\theta}$	0.0108	0.0427	0.0107
$\tilde{\psi}$	0.0150	0.0118	0.0171



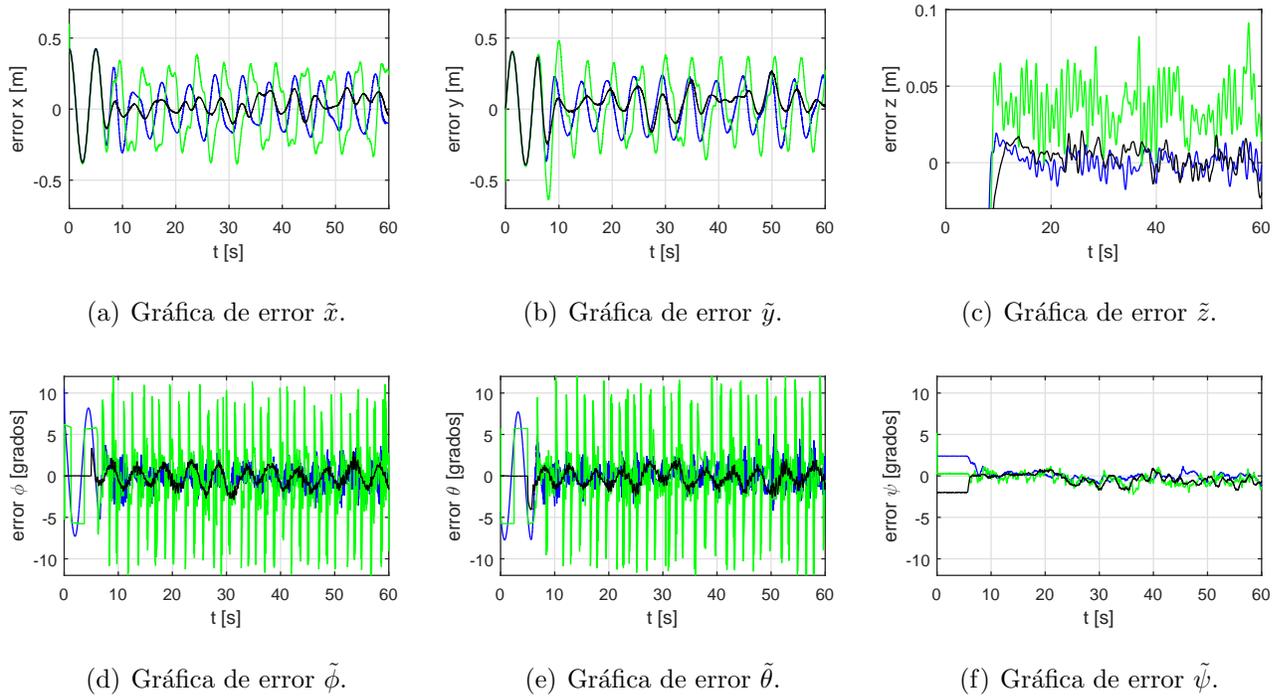
**Figura 6.4: Resultados experimentales:** Gráficas de las señales de error de posición  $\tilde{\mathbf{p}}(t)$  y orientación  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$  durante la tarea de seguimiento de trayectorias que da lugar a una circunferencia de baja velocidad obtenidas con los controladores PID/PD (línea azul), *backstepping* (línea verde), basado en modelo (línea negra).

**Tabla 6.3:** Tabla comparativa del error cuadrático medio en la segunda prueba de seguimiento de trayectorias

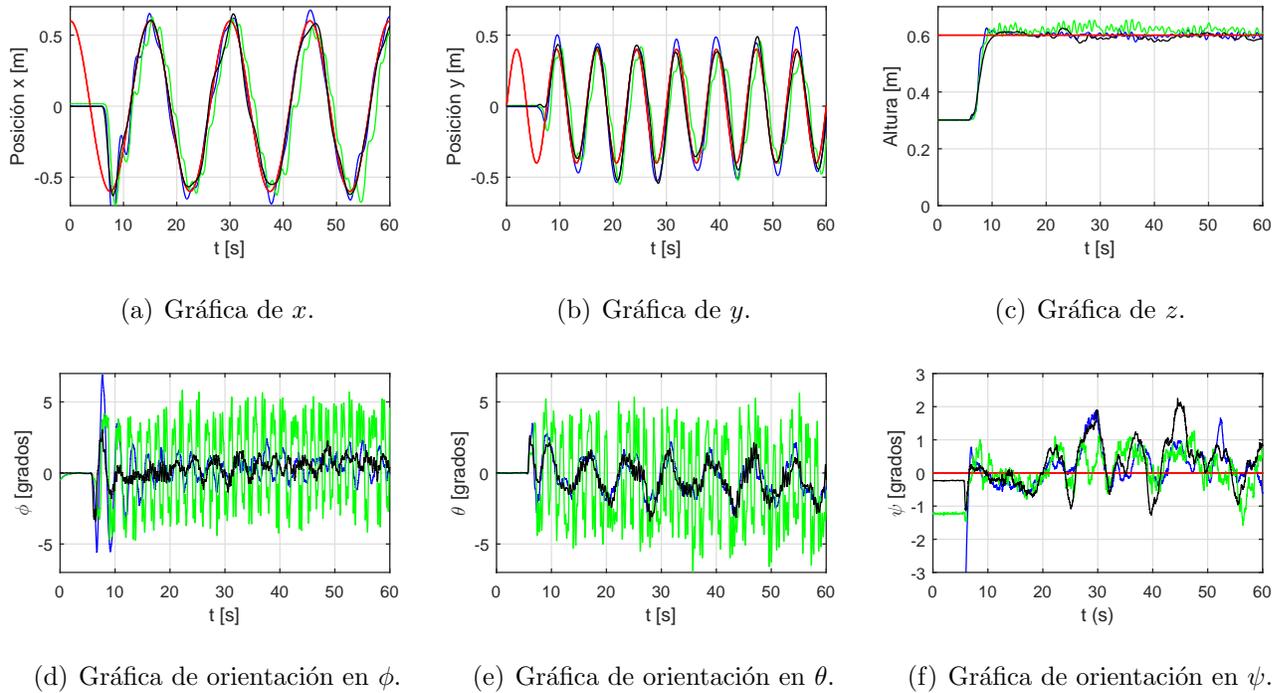
Error Cuadrático Medio			
Segunda prueba de seguimiento de trayectoria			
Señal	PID/PD	<i>Backstepping</i>	Basado en modelo
$\tilde{x}$	0.1354	0.2187	0.0651
$\tilde{y}$	0.1472	0.2045	0.0896
$\tilde{z}$	0.0066	0.0400	0.0084
$\tilde{\phi}$	0.0156	0.0799	0.0184
$\tilde{\theta}$	0.0158	0.0824	0.0165
$\tilde{\psi}$	0.0069	0.0132	0.0125



**Figura 6.5: Resultados experimentales:** Gráficas de la posición  $p(t)$  y orientación  $\eta(t)$  durante la tarea de regulación obtenidas con los controladores PID/PD (línea azul), *backstepping* (línea verde), basado en modelo (línea negra) durante la tarea de seguimiento de trayectoria que da lugar a una circunferencia de alta velocidad.



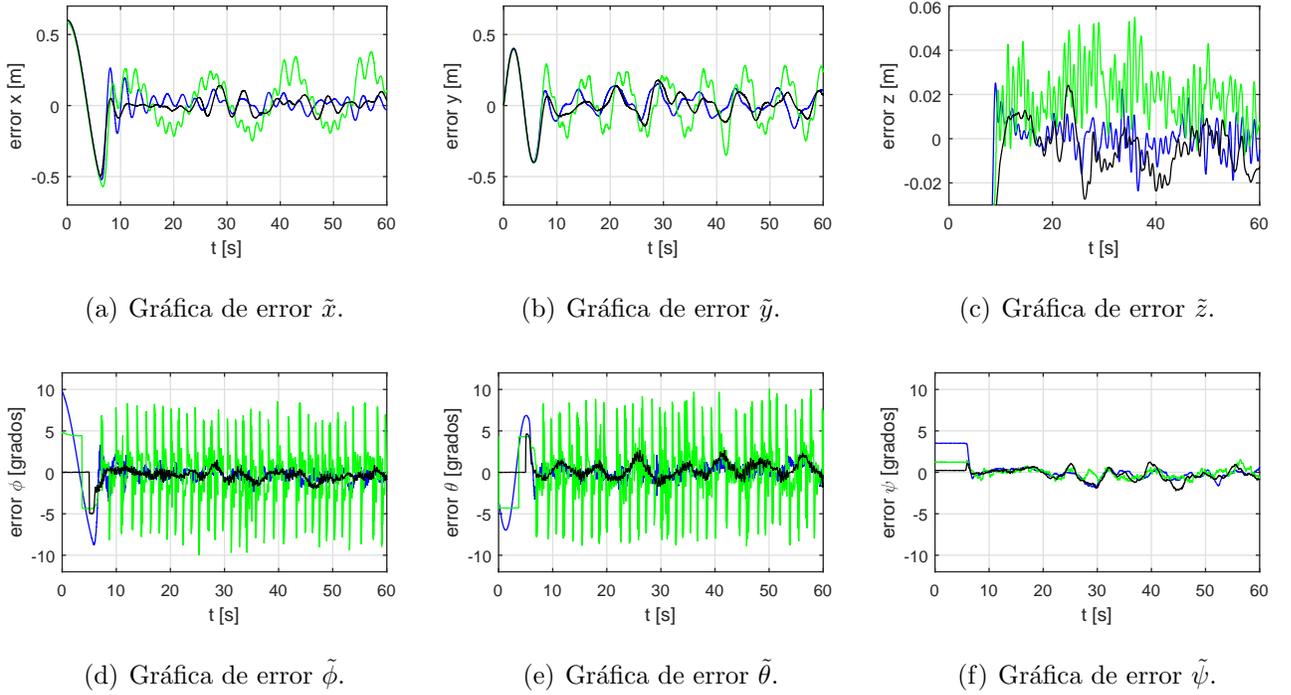
**Figura 6.6: Resultados experimentales:** Gráficas de las señales de error de posición  $\tilde{\mathbf{p}}(t)$  y orientación  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$  durante la tarea de seguimiento de trayectorias que da lugar a una circunferencia de alta velocidad obtenidas con los controladores PID/PD (línea azul), *backstepping* (línea verde), basado en modelo (línea negra).



**Figura 6.7: Resultados experimentales:** Gráficas de la posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  durante la tarea de regulación obtenidas con los controladores PID/PD (línea azul), *backstepping* (línea verde), basado en modelo (línea negra) durante la tarea de seguimiento de trayectoria que da lugar a una curva lemniscata.

### 6.3. Trayectoria lemniscata

Finalmente en esta sección se analiza el comportamiento de los controladores durante la tarea de seguimiento de trayectorias que dan lugar a una curva lemniscata. La figura 6.7 presenta las señales de posición  $\mathbf{p}(t)$  y orientación  $\boldsymbol{\eta}(t)$  del cuadricóptero durante el vuelo. En las gráficas se observa que los controladores PID/PD y basado en modelo poseen un comportamiento similar mientras que el controlador *backstepping* presenta mayor dificultad en el seguimiento de las señales de referencia. Las gráficas de la figura 6.8 muestran las señales de error para la posición y orientación del vehículo. La tabla 6.4 del error cuadrático medio de las señales de error presenta los valores obtenidos para los tres controladores durante este experimento demostrando de manera cuantitativa lo observado en las gráficas.



**Figura 6.8: Resultados experimentales:** Gráficas de las señales de error de posición  $\tilde{\mathbf{p}}(t)$  y orientación  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t)$  durante la tarea de seguimiento de trayectorias que da lugar a una curva lemniscata obtenidas con los controladores PID/PD (línea azul), *backstepping* (línea verde), basado en modelo (línea negra).

**Tabla 6.4:** Tabla comparativa del error cuadrático medio en la prueba de seguimiento de trayectoria de curva lemniscata

Error Cuadrático Medio			
Prueba de seguimiento de trayectoria en curva lemniscata			
Señal	PID/PD	<i>Backstepping</i>	Basado en modelo
$\tilde{x}$	0.0519	0.1645	0.0486
$\tilde{y}$	0.0721	0.1540	0.0689
$\tilde{z}$	0.0073	0.0234	0.0110
$\tilde{\phi}$	0.0124	0.0610	0.0111
$\tilde{\theta}$	0.0119	0.0651	0.0156
$\tilde{\psi}$	0.0101	0.0091	0.0135

---

# Conclusiones y trabajo futuro

---

## 7.1. Conclusiones

Este trabajo de tesis presentó un análisis comparativo entre distintas estrategias de control para un cuadrirotor. Inicialmente se describió a detalle la dinámica del cuadrirotor representada tanto en el marco de referencia inercial como en el marco de referencia del vehículo obtenida mediante el formalismo de Euler-Lagrange y las ecuaciones de Kirchhorff respectivamente. Empleando la representación de la dinámica en el marco de referencia del vehículo se realizó la simulación numérica del sistema en *Simulink* de *Matlab*. En el presente trabajo se analizó el desempeño de tres diferentes controladores: PID/PD, de estructura *backstepping*, y basado en modelo, siendo este último un esquema de control original, el cual fue analizado de manera teórica y que garantiza estabilidad asintótica de manera local. En la validación experimental se empleó el cuadrirotor Qball 2 manufacturado por Quanser y se establecieron las tareas de regulación y seguimiento de trayectorias. En la primera de estas tareas, el cuadrirotor se mantuvo sobrevolando en un punto fijo, y que corresponde a una tarea de vuelo que en inglés se le conoce como *hovering*. Por otro lado, en las pruebas de seguimiento de trayectorias se establecieron señales de referencia que daban lugar a una ruta circular en el espacio  $x - y$  así como también una curva lemniscata. La ruta circular es recorrida a dos velocidades distintas en igual número de experimentos. Los resultados obtenidos de la experimentación sirvieron para poder realizar el análisis de los controladores a fin de establecer las siguientes conclusiones.

Los resultados de la experimentación y las métricas de desempeño dadas por el error cuadrático medio mostraron el comportamiento de cada controlador implementado en el cuadrirotor. De estos datos se pudo observar que el controlador basado en modelo tuvo mejores resultados en comparación con los controladores PID/PD y *backstepping*. Cabe mencionar que para implementar el controlador basado en modelo es necesario conocer los parámetros dinámicos exactos de la planta mientras que los otros controladores no la necesitan. Sin embargo, los resultados experimentales muestran que con valores aproximados de estos parámetros el controlador funciona de manera adecuada.

El controlador PID mostró resultados similares al controlador basado en modelo cuando se emplea en tareas donde el movimiento del cuadrirotor es lento. En contraste, en la tarea de seguimiento de trayectorias que dan lugar a una ruta circular con una velocidad alta, este esquema de control mostró mayores problemas para cumplir la tarea en comparación con el basado en modelo. Este comportamiento se atribuye a que a altas velocidades se excita la dinámica no lineal del sistema y el controlador PID/PD no logra compensarla. En general es posible usar el controlador para tareas de regulación y seguimiento de trayectorias siempre y cuando no requiera de movimientos con alta

velocidad.

En cuanto al controlador de estructura *backstepping* se obtuvieron resultados muy similares a los otros controladores en pruebas de regulación mientras que en pruebas de seguimiento su desempeño es inferior al mostrado por el controlador PID/PD y el basado en modelo. Una característica que es importante resaltar de este controlador es el que en el lazo externo que determina el comportamiento en el plano  $x - y$  se incluye una acción de control discontinua la cual se ve afectada por de las ganancias  $\gamma_1^{max}$  y  $\gamma_2^{max}$  las cuales afectan de manera considerable en su rendimiento. Cuando se incrementa la ganancia asociada con la discontinuidad el error se reduce pero se produce mayor vibración en el vehículo, de igual manera, se observó que es necesario modificar los valores de las ganancias según la velocidad con que se desea se mueva el cuadrirotor. Así mismo, también se determinó que la acción de control obtenida con este esquema demanda una mayor cantidad de energía lo cual reduce el tiempo de vuelo.

Finalmente, del análisis realizado se puede establecer que el controlador basado en modelo puede ser usado en tareas de regulación y seguimiento de trayectorias con certeza de que tendrá un seguimiento muy apegado al deseado, teniendo en cuenta que se deben conocer con una precisión importante los parámetros dinámicos del cuadrirotor a fin de que pueda ser implementado. Por otro lado, el controlador PID con una correcta sintonización de las ganancias brinda un desempeño adecuado siempre que la velocidad de movimiento no sea demasiado rápida con la ventaja de que no requiere conocimiento alguno de la dinámica del vehículo y por último el controlador de *backstepping* que tiene la particularidad de ser más agresivo en sus movimientos por lo que puede realizar desplazamientos con alta velocidad pero con el riesgo de volver inestable el sistema, además de que incrementa el consumo de energía.

### 7.1.1. Trabajo Futuro

Como parte de las acciones para incrementar el alcance de este trabajo se consideran acciones a seguir como explorar otras técnicas de control, las cuales pueden ser los basados en redes neuronales, lógica difusa o sistemas discontinuos; contemplar perturbaciones externas como la descarga de batería, agregar una carga útil o viento durante el vuelo del cuadrirotor; buscar nuevas alternativas de comunicación entre el vehículo y el centro de mando para evitar la interferencia en el canal de comunicación wi-fi utilizando otras tecnologías como Zigbee.

# Bibliografía

---

- [1] Y. Naidoo, R. Stopforth, y G. Bright. Quad-rotor unmanned aerial vehicle helicopter modelling & control. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 8(4):139–149, 2011.
- [2] L.R.G. Carrillo, A.E.D. López, R. Lozano, y C. Pégard. *Quad Rotorcraft Control: Vision-Based Hovering and Navigation*. Advances in Industrial Control. Springer, 2012.
- [3] R. Mahony, V. Kumar, y P. Corke. Multirotor aerial vehicles: Modeling, estimation, and control of quadrotor. *Robotics Automation Magazine, IEEE*, 19(3):20–32, Sept 2012.
- [4] H. C. T. E. Fernando, A. T. A. De Silva, M. D. C. De Zoysa, K. A. D. C. Dilshan, y S. R. Munasinghe. *Modelling, simulation and implementation of a quadrotor UAV*, pages 207–212. 2013.
- [5] C. Wang, M. Nahon, y M. Trentini. Controller development and validation for a small quadrotor with compensation for model variation. In *Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 2014 International Conference on*, pages 902–909, May 2014.
- [6] M. Mohammadi y A. Mohammad Shahri. Modeling and adaptive tracking control of a quadrotor uav. *International Journal of Intelligent Mechatronics and Robotics*, 2012.
- [7] Mostafa Mohammadi y Alireza Mohammad Shahri. Adaptive nonlinear stabilization control for a quadrotor uav: Theory, simulation and experimentation. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 72(1):105–122, 2013.
- [8] I. Carro Perez, D. Flores-Araiza, J.A. Fortoul-Diaz, R. Maximo, y H.G. Gonzalez-Hernandez. Identification and pid control for a quadcopter. In *Electronics, Communications and Computers (CONIELECOMP), 2014 International Conference on*, pages 77–82, Feb 2014.
- [9] P. Castillo, R. Lozano, y A. Dzul. Stabilization of a mini rotorcraft with four rotors. *IEEE control systems magazine*, 25(6):45–55, 2005.
- [10] A. Freddi, S. Longhi, y A. Monteriù. A diagnostic thau observer for a class of unmanned vehicles. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 67(1):61–73, 2012.
- [11] M. Mohammadi, A. Shahri, y Z. Boroujeni. Modeling and adaptive tracking control of a quadrotor uav. *International Journal of Intelligent Mechatronics and Robotics*, 2(4):58–81, 2012.

- 
- [12] G. Flores y R. Lozano. Lyapunov-based controller using singular perturbation theory: An application on a mini-uav. In *2013 American Control Conference*, pages 1596–1601. IEEE, 2013.
- [13] F. Yacef, O. Bouhali, y M. Hamerlain. Adaptive fuzzy tracking control of unmanned quadrotor via backstepping. In *2014 IEEE 23rd International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)*, pages 40–45, June 2014.
- [14] C. Nicol, C.J.B. Macnab, y A. Ramirez-Serrano. Robust adaptive control of a quadrotor helicopter. *Mechatronics*, 21(6):927–938, 2011.
- [15] A. Mohamed, K. Massey, S. Watkins, y R. Clothier. The attitude control of fixed-wing mavs in turbulent environments. *Progress in Aerospace Sciences*, 66:37–48, 2014.
- [16] P. Casau, D. Cabecinhas, y C. Silvestre. Hybrid control strategy for the autonomous transition flight of a fixed-wing aircraft. *IEEE Transactions on control systems technology*, 21(6):2194–2211, 2013.
- [17] J. Alvarenga, N. I Vitzilaios, K. Valavanis, y M. Rutherford. Survey of unmanned helicopter model-based navigation and control techniques. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 80(1):87–138, 2015.
- [18] R. Lopez, S. Salazar, I. Gonzalez-Hernandez, y R. Lozano. Real-time parameters identification for a quad-rotor mini-aircraft using adaptive control. In *2014 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*,, pages 499–505, May 2014.
- [19] Thor I. Fossen. *Guidance and Control of Ocean Vehicles*. Wiley, 1994.
- [20] Y.-C. Choi y H.-S. Ahn. Nonlinear control of quadrotor for point tracking: Actual implementation and experimental tests. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 20(3):1179–1192, June 2015.
- [21] Quanser Inc. *USER MANUAL QBall 2 for QUARC*, 2014.
- [22] K.J. Åström y T. Hägglund. *PID Controllers*. Setting the standard for automation. International Society for Measurement and Control, 1995.
- [23] S. Bouabdallah y R. Siegwart. Full control of a quadrotor. In *2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 153–158, Oct 2007.
- [24] S. Bouabdallah, P. Murrieri, y R. Siegwart. Design and control of an indoor micro quadrotor. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation, (ICRA)2004. Proceedings.*, volume 5, pages 4393–4398 Vol.5, April 2004.
- [25] C. Ha, ZY Zuo, FB Choi, y D. Lee. Passivity-based adaptive backstepping control of quadrotor-type uavs. *ROBOTICS AND AUTONOMOUS SYSTEMS*, 62(9):1305–1315, 2014.
- [26] Bin Xian, Jianchuan Guo, y Yao Zhang. Adaptive backstepping tracking control of a 6-dof unmanned helicopter. *Automatica Sinica, IEEE/CAA Journal of*, 2(1):19–24, January 2015.
-

- [27] T. Madani y A. Benallegue. Backstepping control for a quadrotor helicopter. In *2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 3255–3260, Oct 2006.
- [28] H.K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Pearson Education. Prentice Hall, 2002.