

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO
DE TECNOLOGÍA DIGITAL**



MAESTRÍA EN CIENCIAS EN SISTEMAS DIGITALES

**“CONTROL DEL PÉNDULO DE FURUTA USANDO LA
TÉCNICA DE LINEALIZACIÓN POR
RETROALIMENTACIÓN”**

TESIS

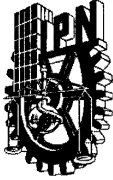
**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN SISTEMAS DIGITALES**

**PRESENTA
ING. CARLOS ALBERTO AGUILAR AVELAR**

**BAJO LA DIRECCIÓN DE
DR. EDUARDO JAVIER MORENO VALENZUELA**

JUNIO 2013

TIJUANA, B.C., MÉXICO



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de Tijuana, B.C. siendo las 9:00 horas del día 13 del mes de junio del 2013 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CITEDI para examinar la tesis titulada:
CONTROL DEL PÉNDULO DE FURUTA USANDO LA TÉCNICA DE LINEALIZACIÓN POR RETROALIMENTACIÓN.

Presentada por el alumno:

AGUILAR
Apellido paterno

AVELAR
Apellido materno

CARLOS ALBERTO
Nombre(s)

Con registro:

B	1	1	0	6	1	0
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

MAESTRÍA EN CIENCIAS EN SISTEMAS DIGITALES

Después de intercambiar opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director(a) de tesis

DR. EDUARDO JAVIER MORENO VALENZUELA

DR. LUIS ARTURO GONZÁLEZ HERNÁNDEZ

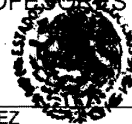
DR. OSCAR HUMBERTO MONTIEL ROSS

DR. LUIS NUPAK AGUILAR BUSTOS

DR. ALFONSO ÁNGELES VALENCIA

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

DRA. MIREYA SARAI GARCÍA VÁZQUEZ



S. E. P.
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO
DE TECNOLOGÍA DIGITAL



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de Tijuana, Baja California, el día 13 del mes junio del año 2013, el (la) que suscribe Carlos Alberto Aguilar Avelar alumno(a) del Programa de MAESTRÍA EN CIENCIAS EN SISTEMAS DIGITALES con número de registro B110610, adscrito al CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO DE TECNOLOGÍA DIGITAL, manifiesta que es autor(a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Eduardo Javier Moreno Valenzuela, cede los derechos del trabajo titulado “Control del Péndulo de Furuta Usando la Técnica de Linealización por Retroalimentación”, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección Av. del Parque 1310, Mesa de Otay, Tijuana, Baja California 22510, México, o a la dirección electrónica: biblioteca@citedi.mx Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Carlos Alberto Aguilar Avelar

Nombre y firma

Control del péndulo de Furuta usando la técnica de linealización por retroalimentación

Resumen

En este trabajo de tesis se presenta el procedimiento de diseño e implementación de un controlador obtenido mediante la técnica de linealización por retroalimentación, desarrollado a partir de la proposición de una novedosa función de salida. Este nuevo esquema de control es aplicado al péndulo rotacional invertido, mejor conocido como péndulo de Furuta; tanto para resolver el problema de regulación de posición, como para el problema de control de movimiento o seguimiento de trayectorias de este sistema experimental. Cabe mencionar que en el procedimiento de diseño del controlador, se considera la presencia de los componentes de fricción viscosa y fricción de Coulomb en el modelo dinámico.

Para el péndulo de Furuta, se presenta la dinámica cero obtenida a partir de la función de salida propuesta, tanto para el caso de regulación de posición como para el de seguimiento de trayectorias. Así mismo, se presenta el análisis correspondiente de las trayectorias de la dinámica cero para cada uno de los casos mencionados.

Finalmente, se realiza una comparativa del desempeño experimental entre el controlador propuesto y una versión modificada de un controlador no lineal de seguimiento de salida reportado en literatura, el cual ha sido reformulado para compensar los términos de fricción viscosa y fricción de Coulomb, con el fin de mejorar su desempeño.

Palabras Clave: Péndulo de Furuta, péndulo rotacional invertido, linealización por retroalimentación, control no lineal, regulación de posición, seguimiento de trayectorias, dinámica cero.

Control of the Furuta pendulum using a feedback linearization based technique

Abstract

In this thesis the design procedure and implementation of a new feedback linearization based controller is presented. The new design is developed from a novel output function proposed. This new control scheme is applied to the rotary inverted pendulum, also known as Furuta pendulum, to solve the position regulation and trajectory tracking problem. It is noteworthy that in the design procedure of the new controller, the terms of viscous friction and Coulomb friction are considered in the dynamic model.

For the Furuta pendulum, we present the zero-dynamics obtained from the proposed output function, for both position regulation and trajectory tracking. The corresponding analysis of the zero-dynamics trajectories for both cases is shown as well.

Finally, we carry out an experimental performance comparative of the proposed controller and a modified version of a known output tracking controller, which has been modified in order to compensate the viscous friction and Coulomb friction to improve its performance.

Keywords: Furuta pendulum, rotary inverted pendulum, feedback linearization, non-linear controller, position regulation, trajectory tracking, zero-dynamics.

Dedicatoria

A mis padres, María Guadalupe Avelar Gómez y José Alberto Aguilar Montes, porque han estado conmigo toda mi vida y gracias a su amor, apoyo y motivación es que soy la persona que soy. Gracias a su constante ánimo para salir adelante es que he llegado hasta donde estoy y todos los logros de mi vida se los debo a ellos.

A mi hermano, José Alberto Aguilar Avelar por su apoyo, sus consejos y enseñanzas para superar los momentos más difíciles en mi vida y para sobresalir.

A mis hermanas, Luisa Mercedes Aguilar Avelar y Laura Karina Aguilar Avelar por ser parte importante de mi vida y por ayudarme a entender la importancia de la familia.

A mis abuelos, no solo porque sin ellos yo no existiría, sino porque sin ellos no sería quién soy y cómo soy.

Agradecimientos

A mi director de tesis, asesor y tutor, Dr. Javier Moreno Valenzuela por el tiempo dedicado, sin el cual este trabajo no sería posible, y por tomar el riesgo de aceptar a un alumno de último momento.

Al comité tutorial integrado por el Dr. Oscar H. Montiel, Dr. Luis T. Aguilar, Dr. Luis A. González y Dr. Alfonso Ángeles, por el tiempo dedicado a los avances de tesis y en el desarrollo de este trabajo de investigación. Así también al M.C. Ernesto E. Quiroz Morones, que descanse en paz, le recordamos con mucho aprecio y respeto.

Al Instituto Politécnico Nacional a través del Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital, CITEDI-IPN por darme la oportunidad de seguir preparándome.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT por el apoyo económico brindado.

Contenido

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	2
1.2. Objetivos	3
1.2.1. Objetivo general	3
1.2.2. Objetivos específicos	4
1.3. Aportaciones	4
1.4. Organización del contenido por capítulo	5
2. Preliminares	6
2.1. Representación de estados	6
2.2. Derivada de Lie	7
2.3. Estabilidad en el sentido de Lyapunov	7
2.4. Acotamiento y acotamiento último	8
2.5. Linealización	9
2.6. Criterio de Routh-Hurwitz	9
2.7. Normas de señales escalares	10
2.7.1. Raíz cuadrática media	11
2.7.2. Valor absoluto promedio	11
3. Modelo dinámico del péndulo de Furuta	12
3.1. Modelado del péndulo de Furuta	12
3.1.1. Energía del sistema	13
3.1.2. Ecuaciones dinámicas de Euler-Lagrange	14
3.2. Plataforma experimental	16
3.2.1. Parámetros del modelo dinámico	16
3.2.2. Descripción física de la plataforma experimental	18

4. Controlador no lineal para seguimiento de salida	21
4.1. Modelo dinámico	21
4.2. Diseño del controlador	22
4.3. Sistema de lazo cerrado	24
4.4. Resultados experimentales y numéricos	25
4.4.1. Resultados en el caso de regulación de posición	26
4.4.2. Resultados en el caso de seguimiento de trayectoria	27
5. Controlador basado en linealización por retroalimentación	31
5.1. Diseño del controlador	31
5.2. Obtención y análisis de la dinámica cero	34
5.2.1. Dinámica cero en el caso de regulación de posición	37
5.2.2. Dinámica cero en el caso de seguimiento de trayectoria	43
5.3. Resultados experimentales y numéricos	48
5.3.1. Resultados en el caso de regulación de posición	48
5.3.2. Resultados en el caso de seguimiento de trayectoria	49
6. Evaluación de desempeño	54
6.1. Índices basados en la magnitud del error y la acción de control	54
6.2. Índices basados en energía	57
6.2.1. Dinámica en términos del vector de semi-velocidades inerciales	57
6.2.2. Índice de la tasa de variación	58
6.2.3. Índice de energía cinética de los acoplamientos	59
6.2.4. Índice de energía cinética transferida	61
7. Conclusiones y trabajo futuro	63
A. Publicaciones	64
B. Código m para generar la gráfica del lugar de las raíces	65
C. Código m para calcular los valores RMS y AAV en la evaluación de desempeño	69
Glosario	75

Índice de figuras

1.1. Péndulo rotacional invertido ó péndulo de Furuta.	1
3.1. Sistema de coordenadas y notación utilizada para el modelado del péndulo de Furuta.	13
3.2. Fotografía del prototipo del péndulo de Furuta disponible en CITEDIPN.	19
3.3. Descripción de la estructura de la plataforma experimental del péndulo de Furuta disponible en CITEDIPN.	19
3.4. Representación esquemática o de bloques del péndulo de Furuta.	20
3.5. Diagrama esquemático general del sistema de control de lazo cerrado para el péndulo de Furuta.	20
4.1. Regulación de posición: Evolución temporal de $q_1(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (4.11).	26
4.2. Regulación de posición: Evolución temporal de $q_2(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (4.11).	27
4.3. Regulación de posición: Acción de control $\tau(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (4.11).	28
4.4. Regulación de posición: Evolución temporal de la función de salida $Z(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (4.11).	28
4.5. Seguimiento de trayectoria: Evolución temporal de $q_1(t)$ y $q_{d1}(t)$ obtenidas en simulación y experimento al aplicar el controlador en (4.11).	29
4.6. Seguimiento de trayectoria: Evolución temporal de $q_2(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (4.11).	29
4.7. Seguimiento de trayectoria: Acción de control $\tau(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (4.11).	30
4.8. Seguimiento de trayectoria: Evolución temporal de la función de salida $Z(t)$ y la salida deseada $Z_d(t)$ obtenidas en simulación y experimento al aplicar el controlador en (4.11).	30

5.1.	Gráfica de las condiciones $\kappa_1(\Delta_1)$ y $\kappa_2(\Delta_1)$ para $0 \leq \Delta_1 \leq 10$. Se ilustra el dominio de la condición $\kappa_2(\Delta_1)$ sobre $\kappa_1(\Delta_1)$	42
5.2.	Lugar de las raíces del polinomio característico $P(\lambda)$ en (5.48) para $\Delta_1 = 5$ y $3 \leq \Delta_2 \leq 8$	42
5.3.	Regulación de posición: Evolución temporal de $q_1(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (5.10).	49
5.4.	Regulación de posición: Evolución temporal de $q_2(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (5.10).	50
5.5.	Regulación de posición: Acción de control $\tau(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (5.10).	51
5.6.	Regulación de posición: Evolución temporal de la función de salida $y(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (5.10).	51
5.7.	Seguimiento de trayectoria: Evolución temporal de $q_d(t)$ y $q_{d1}(t)$ obtenidas en simulación y experimento al aplicar el controlador en (5.10).	52
5.8.	Seguimiento de trayectoria: Evolución temporal de $q_2(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (5.10).	52
5.9.	Seguimiento de trayectoria: Acción de control $\tau(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (5.10).	53
5.10.	Seguimiento de trayectoria: Evolución temporal de la función de salida $y(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (5.10).	53
6.1.	Comparativa experimental: Evolución temporal del error de posición del brazo $e_1(t)$ para los controladores FCL y OTC en el experimento de seguimiento de trayectorias.	55
6.2.	Comparativa experimental: Evolución temporal del error de posición del péndulo $e_2(t)$ para los controladores FCL y OTC en el experimento de seguimiento de trayectorias.	56
6.3.	Comparativa experimental: Evolución temporal de la acción de control $\tau(t)$ aplicada por los controladores FCL y OTC en el experimento de seguimiento de trayectorias.	57
6.4.	Índices basados en energía: Valores del índice i_{RV} de cada articulación y del sistema total, obtenidos en el experimento de seguimiento de trayectorias.	59
6.5.	Índices basados en energía: Valores del índice i_{KC} de cada articulación y del sistema total, obtenidos en el experimento de seguimiento de trayectorias.	60
6.6.	Índices basados en energía: Valores del índice i_{KT} de cada articulación y del sistema total, obtenidos en el experimento de seguimiento de trayectorias.	61

Índice de tablas

3.1. Definición física de los parámetros del modelo dinámico del péndulo de Furuta.	17
3.2. Valores numéricos de los parámetros del modelo dinámico del péndulo de Furuta.	18
4.1. Ganancias de control utilizadas en simulación y experimento para el controlador en (4.11).	25
5.1. Ganancias de control utilizadas en simulación y experimento para el controlador en (5.10).	48
6.1. Comparativa de los valores RMS de error de posición y torque de los controladores FLC y OTC para $5 \leq t \leq 10$	55
6.2. Comparativa de los valores AAV de error de posición y torque de los controladores FLC y OTC para $5 \leq t \leq 10$	56

Capítulo 1

Introducción

El péndulo de Furuta es un sistema experimental usado comúnmente para propósitos educativos en la teoría de control moderna, es un ejemplo claro de un sistema subactuado y extremadamente no lineal, debido a las fuerzas gravitacionales y el acoplamiento derivado de las fuerzas de Coriolis y centrípeta [1], [2].

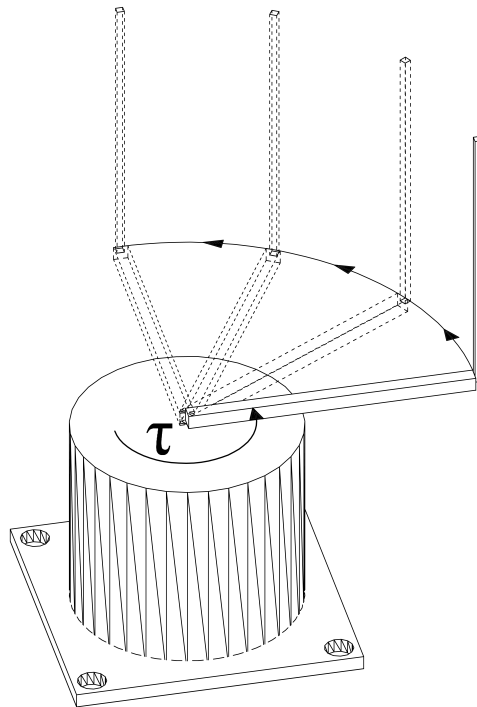


Figura 1.1: Péndulo rotacional invertido ó péndulo de Furuta.

A diferencia del péndulo invertido lineal, el péndulo de Furuta o péndulo rotacional invertido, como el que se muestra en la figura 1.1, no está limitado en el movimiento del carro donde se monta el péndulo, dado que su estructura es diferente. Utiliza un motor

de corriente directa como actuador y el péndulo se acopla a una varilla (brazo) la cual va montada sobre la flecha del motor. Al no poder controlar directamente la aceleración angular del péndulo, éste es un sistema subactuado.

Los sistemas mecánicos subactuados son sistemas que tienen más grados de libertad que actuadores para su control. El uso de este tipo de sistemas son comunes en diversas aplicaciones como sistemas robóticos móviles, vehículos usados en el espacio o bajo el agua (con configuraciones especiales que dificultan el control), o sistemas cuyo modelo matemático incluye la flexibilidad de la articulación para su control. El péndulo de Furuta es un muy conocido sistema mecánico subactuado el cual es usado extensivamente por investigadores en el área de control para probar técnicas de control tanto lineales como no lineales [1], [3].

El primer prototipo fue diseñado y presentado por Katsuhisa Furuta en el Instituto de Tecnología de Tokio en 1991, llamado como “Péndulo TITech” [4], [5]. Posteriormente se han presentado diversos métodos de control y prototipos derivados del mismo como el llamado “Péndulo de Furuta doble” o “Péndulo de Furuta triple”.

1.1. Antecedentes

Referente al control del péndulo de Furuta, en literatura hay gran variedad de controladores reportados donde se utilizan diversas técnicas de control. A continuación se citan algunos trabajos previos en el análisis y control de este sistema experimental.

El primer experimento sobre el control del péndulo de Furuta es por supuesto, presentado por su diseñador en [4], en donde se presenta un esquema de control con el cual era posible levantar el péndulo de la posición de reposo hasta la posición de balanceo, experimento comúnmente llamado “*Swing Up*”, esto mediante un controlador denominado “*Bang-Bang*”. Una vez en la posición de balanceo, se hacía uso de un controlador cuadrático lineal (LQ del inglés *Linear Quadratic*) para la regulación.

Posteriormente en [6], se presenta un control adaptable de estructura variable para el problema de regulación, esto basado en un modelo no lineal del péndulo de Furuta, con lo cual se logró mas robustez con respecto a algunos controladores lineales reportados. Sin embargo, este esquema de control era altamente sensible a perturbaciones, lo cual llevaba a la fácil desestabilización del sistema.

En [7] se introduce un esquema de control basado en la linealización por retroalimentación parcial del modelo dinámico del sistema, dejándolo expresado como un sistema lineal completamente actuado. Posteriormente en [8] se presenta un controlador compuesto, basado en las técnica de linealización por retroalimentación parcial presentada

en [7], y la acción de control se complementa con un controlador basado en la energía del sistema. Este controlador se desarrolla para el problema de seguimiento de trayectoria del brazo, en donde se prueba que las trayectorias de error del sistema son acotadas uniformemente de forma última, además, se presentan resultados experimentales.

Recientemente se han publicado trabajos sobre el control de esta plataforma, haciendo uso de técnicas de análisis no lineal con las cuales se ha conseguido mejorar el desempeño experimental, así como el desarrollo de análisis de estabilidad más rigurosos. Por ejemplo, en [9] se presenta un esquema de control no lineal llamado *Nonlinear Backstepping* aplicado al péndulo de Furuta, en donde no sólo se consiguen muy buenos desempeños en la regulación del péndulo, si no que también se extiende este esquema de control para realizar el *Swing Up* del péndulo. Sin embargo, solamente se presentan resultados experimentales, posiblemente porque la magnitud de la acción de control requerida para llevar a cabo estos experimentos, excedían los límites de los actuadores en proporción con las dimensiones del sistema experimental presente.

La técnica de linealización por retroalimentación es también un esquema de control comúnmente usado en sistemas no lineales, en donde es de interés el estudio de la dinámica interna del sistema cuando la función de salida propuesta converge a cero, ver por ejemplo [10], [11] y [12]. En [13] se presenta una metodología constructiva para controlar el péndulo de Furuta, esto mediante linealización por retroalimentación y la propuesta de una función de Lyapunov. Sin embargo, la metodología usada para determinar la dinámica cero resultante difiere de la teoría introducida en [10] y [11], en donde se establece formalmente la metodología de cálculo de la dinámica cero. Por otra parte, en [14] se presenta un controlador no lineal de seguimiento de salida, el cual es aplicado a una versión sin fricción del modelo del péndulo de Furuta. Sin embargo, de nuevo la dinámica cero del sistema no es obtenida de acuerdo con la teoría disponible sobre el tema. Finalmente, en [15] se presenta un controlador difuso adaptable basado en un esquema de linealización por retroalimentación, esta vez para el sistema carro-péndulo, pero de nuevo la dinámica cero del sistema no fue determinada de acuerdo a la teoría disponible en literatura.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Desarrollar un algoritmo de control basado en la técnica de linealización por retroalimentación para la estabilización del péndulo de Furuta, así como el desarrollo riguroso del análisis de las trayectorias del sistema de lazo cerrado resultante. Así mismo, imple-

mentar el algoritmo propuesto de forma numérica y experimental con el fin de evaluar su rendimiento.

1.2.2. Objetivos específicos

- Análisis del modelo dinámico del péndulo de Furuta.
- Diseño de algoritmos de control para distintos objetivos de control.
- Obtención de la expresión que describe la dinámica del péndulo de Furuta, de acuerdo a la teoría reportada en literatura.
- Análisis de las trayectorias de la dinámica cero resultante.
- Realización de simulaciones numéricas para corroborar la teoría.
- Implementación de los algoritmos de control desarrollados con el fin de evaluar su rendimiento.

1.3. Aportaciones

Como aportaciones del presente trabajo de investigación se tiene

- La proposición de un nuevo esquema de control, el cual se basa en la técnica de linealización por retroalimentación y la proposición de una función de salida novedosa.
- La integración de los componentes de fricción en el procedimiento de diseño de un controlador no lineal de seguimiento de salida previamente reportado en literatura. La incorporación de la compensación de fricción mejora su desempeño experimental en el seguimiento de trayectorias así también como en la regulación del péndulo.
- La obtención de la expresión de la dinámica cero para el péndulo de Furuta así como el correspondiente análisis formal de estabilidad, en donde se prueba la convergencia asintótica exponencial de las trayectorias de la dinámica cero para el caso de regulación de posición y se demuestra el acotamiento último uniforme de las trayectorias de la dinámica cero en el caso de seguimiento de trayectoria.

1.4. Organización del contenido por capítulo

La estructura de este documento se organiza por capítulos de la siguiente manera.

En el capítulo 2 se presentan algunas definiciones preliminares, las cuales se consideran necesarias para asegurar la comprensión del lector sobre algunos de los conceptos y desarrollos presentados en este trabajo de tesis.

En el capítulo 3 se presenta el modelo matemático que describe la dinámica del péndulo de Furuta. Este modelo es obtenido mediante una formulación de Euler-Lagrange y finalmente llevado a su expresión en forma compacta, extensamente usada para la descripción de la dinámica de robots manipuladores y sistemas de estructura similar. Posteriormente en este capítulo se describe detalladamente la plataforma experimental del péndulo de Furuta disponible en CITEDI-IPN, en la cual se llevaron a cabo los experimentos de este trabajo de investigación.

En el capítulo 4 se presenta una versión modificada de un controlador no lineal de seguimiento de salida previamente reportado en literatura. A este controlador se le han agregado los términos de fricción viscosa y fricción de Coulomb, esto con el fin de mejorar su desempeño experimental en el seguimiento de trayectorias del brazo.

En el capítulo 5 es donde se propone un nuevo esquema de control, el cual se basa en la técnica de linealización por retroalimentación y la proposición de una novedosa función de salida para el péndulo de Furuta. Este nuevo esquema de control se aplica para el problema de regulación de posición del péndulo y para el problema de seguimiento de trayectorias del brazo, en donde se obtiene la expresión de la dinámica cero para cada uno de los casos, así como el respectivo análisis de estabilidad. Para finalizar el capítulo, se presentan las simulaciones numéricas y los resultados experimentales tanto para la regulación de posición como para el seguimiento de trayectorias.

El capítulo 6 contiene la evaluación experimental de los controladores presentados. En primera instancia se presenta una comparativa de ambos controladores haciendo uso del valor RMS y del valor absoluto promedio de las señales de error de posición del brazo, error de posición del péndulo y la acción de control aplicada. Posteriormente en el capítulo, se presenta el cálculo de algunos índices basados en la energía cinética del sistema, con los cuales es posible cuantificar los efectos del acoplamiento entre cada una de las articulaciones, así como la energía cinética reducida por cada una de las articulaciones.

Finalmente, las conclusiones de la investigación se presentan en el capítulo 7.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se presentan los conceptos básicos, los cuales son indispensables para la comprensión de los teoremas y desarrollos matemáticos utilizados para el diseño y análisis de los controladores presentados en este trabajo de investigación.

2.1. Representación de estados

Una forma general de representar un sistema dinámico es por un número finito n de ecuaciones diferenciales, que será llamada representación de estados

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots = \vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}$$

donde \dot{x}_n representa la derivada de x_n con respecto al tiempo, es decir, $\dot{x}_n = \frac{dx_n}{dt}$. Las variables x_1, x_2, \dots, x_n representan los estados del sistema, y f_1, f_2, \dots, f_n representan las funciones no lineales del sistema [11].

Bajo esta representación el sistema es autónomo o invariante con el tiempo, ya que el sistema no depende explícitamente del tiempo [11] y también puede escribirse de manera general como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{2.1}$$

2.2. Derivada de Lie

Dada una función $h(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ y una función $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$, la derivada Lie de $h(\mathbf{x})$ con respecto a $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ se describe como $L_f h$ y está dada por

$$L_f h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Esto significa que se obtiene la derivada de h con respecto a las trayectorias del sistema (2.1), un escalar que describe el cambio de h con respecto al campo vectorial de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ [10].

2.3. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Para un sistema de control determinado, generalmente el elemento más importante a determinar es la estabilidad. En esta sección se presentarán los conceptos básicos de la teoría de Lyapunov [16].

La teoría de estabilidad de Lyapunov, tiene como principal objetivo estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos. Entre los conceptos básicos de la teoría de estabilidad de Lyapunov destacan los siguiente:

Definición 2.1 (Equilibrio) *Un vector constante $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio del Sistema (2.1) si:*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = 0.$$

De la definición anterior se tiene que si la condición inicial $\mathbf{x}(0)$ es justamente un equilibrio, entonces se satisface:

- $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e, \quad \forall t,$
- $\dot{\mathbf{x}}(t) = 0, \quad \forall t.$

Definición 2.2 (Estabilidad) *Suponga que $\mathbf{f}(0) = 0$ del sistema (2.1). Si para cada número $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un número $\delta > 0$ tal que:*

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0,$$

entonces el origen del espacio de estados es estable.

La definición de estabilidad requiere la existencia de un $\delta > 0$ para cada $\varepsilon > 0$ y no para algún $\varepsilon > 0$.

Definición 2.3 (Estabilidad asintótica) *El origen del espacio de estados es un equilibrio asintóticamente estable del sistema (2.1) si:*

1. *El origen estable.*
2. *El origen es atractivo, es decir, existe un número $\delta' > 0$ tal que:*

$$\| \mathbf{x}(0) \| < \delta' \Rightarrow \| \mathbf{x}(t) \| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Definición 2.4 (Estabilidad asintótica global) *El origen del espacio de estados es un equilibrio global y asintóticamente estable del sistema (2.1) si:*

1. *El origen estable.*
2. *El origen es atractivo para todo $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$, es decir:*

$$\| \mathbf{x}(t) \| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty, \quad \forall \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n.$$

Un equilibrio global asintóticamente estable implica que dicho equilibrio es también asintóticamente estable, pero lo contrario, es falso.

2.4. Acotamiento y acotamiento último

Definición 2.5 *Las soluciones de (2.1) son [10]*

- *acotadas uniformemente si existe una constante positiva c , independiente de $t_0 > 0$, y para cada $a \in (0, c)$, hay una $\beta = \beta(a) > 0$, independiente de t_0 , tal que*

$$\| \mathbf{x}(t_0) \| \leq a \Rightarrow \| \mathbf{x}(t) \| \leq \beta, \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.2)$$

- *acotadas uniformemente de forma global si (2.2) se mantiene para valores arbitrariamente grandes de a .*
- *acotadas últimamente uniformemente con cota final b si existen constantes positivas b y c , independientes de $t_0 \geq 0$, y para cada $a \in (0, c)$, existe $T = T(a, b) \geq 0$, independiente de t_0 , tal que*

$$\| \mathbf{x}(t_0) \| \leq a \Rightarrow \| \mathbf{x}(t) \| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T. \quad (2.3)$$

- *acotadas últimamente uniformemente de forma global si (2.3) se mantiene para valores arbitrariamente grandes de a .*

2.5. Linealización

Considere el sistema autónomo en (2.1), y asuma que $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es diferenciable continuamente. Entonces el sistema dinámico puede ser escrito como

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \mathbf{x} + \mathbf{f}_{h.o.t}(\mathbf{x}), \quad (2.4)$$

donde $\mathbf{f}_{h.o.t}$ representa los términos de orden superior en \mathbf{x} . Nótese que la anterior expansión de Taylor comienza directamente con el término de primer orden, debido al hecho de que $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, ya que el origen es un punto de equilibrio del sistema. Entonces se define una matriz constante A para referirse a la matriz Jacobiana de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ con respecto a \mathbf{x} en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (una matriz de dimension $n \times n$ y elementos $\partial f_i / \partial x_j$)

$$A = \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}. \quad (2.5)$$

Entonces, el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad (2.6)$$

representa la linealización (o aproximación lineal) del sistema no lineal original en el punto de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ [11].

2.6. Criterio de Routh-Hurwitz

El criterio de Routh-Hurwitz es un criterio necesario y suficiente para la estabilidad de sistemas lineales. El método originalmente fue desarrollado en términos de determinantes, pero a continuación se presentará una formulación de arreglos más conveniente. El criterio de Routh-Hurwitz se basa en ordenar los coeficientes del polinomio característica del sistema

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (2.7)$$

en un arreglo o tabla como se muestra a continuación

$$\begin{array}{l|l} \lambda^n & a_n \quad a_{n-2} \quad a_{n-4} \cdots \\ \lambda^{n-1} & a_{n-1} \quad a_{n-3} \quad a_{n-5} \cdots \end{array}$$

Los siguientes renglones de la tabla se completan con

$$\begin{array}{l|l} \lambda^n & a_n \quad a_{n-2} \quad a_{n-4} \\ \lambda^{n-1} & a_{n-1} \quad a_{n-3} \quad a_{n-5} \\ \lambda^{n-2} & b_1 \quad b_2 \quad b_3 \\ \lambda^{n-3} & c_1 \quad c_2 \quad c_3 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \lambda^0 & h_1 \end{array}$$

donde

$$b_i = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2i} \\ a_{n-1} & a_{n-2i-1} \end{vmatrix},$$

$$c_i = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2i-1} \\ b_1 & b_{i+1} \end{vmatrix},$$

y así sucesivamente.

El criterio de Routh-Hurwitz establece que número de raíces con parte real positiva es igual al número de cambios de signo en la primer columna del arreglo o tabla de Routh. Entonces el criterio requiere que no haya cambios de signo en la primer columna para que el sistema sea estable. Esta condición es tanto necesaria como suficiente [17].

2.7. Normas de señales escalares

En general, los parámetros de diseño de un controlador pueden ser expresados en términos del *tamaño* de varias señales relacionadas con este, por ejemplo, las señales de error de seguimiento deberían de ser “pequeñas”, mientras que las señales del actuador no deberían de ser “demasiado grandes”. En este capítulo se presentan dos formas en que la noción del tamaño de una señal puede ser expresada, esto es, usando normas [18].

2.7.1. Raíz cuadrática media

La medida que refleja el eventual tamaño promedio de una señal es el valor cuadrático medio o raíz cuadrática media (RMS, del inglés *Root Mean Square*), definida por

$$\|u\|_{rms} \triangleq \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt \right]^{1/2}, \quad (2.8)$$

a condición de que el limite exista. Esta es una noción clásica de las dimensiones de una señal, ampliamente usada en muchas areas de la ingeniería.

Aunque la norma RMS de una señal sea pequeña, la señal ocasionalmente puede tener grandes picos, siempre y cuando estos picos no sean demasiado frecuentes y no contengan mucha energía. En este sentido, $\|u\|_{rms}$ es menos afectada por grandes pero infrecuentes valores de la señal. También es importante mencionar que la norma RMS es una medida de estado estacionario de una señal; el valor RMS de la señal no es afectado por ningún transitorio. De forma discreta, la norma RMS de una señal puede ser calculada como

$$\|u\|_{rms} = \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T/h} u(kh)^2 h \right]^{1/2}, \quad (2.9)$$

donde k es el índice entero de tiempo y h es el periodo de muestreo.

2.7.2. Valor absoluto promedio

El valor absoluto promedio (AAV, del inglés *Average-Absolute Value*) es una norma que pone menos énfasis en los grandes valores de una señal, de hecho, el mínimo énfasis posible para seguir siendo una norma, y está definida por

$$\|u\|_{aa} \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt, \quad (2.10)$$

a condición de que el limite exista.

La norma absoluto promedio $\|u\|_{aa}$ es útil en la medida del promedio de energía usada, en general, el promedio de recursos usados cuando el consumo de recursos es proporcionan a $|u(t)|$. De forma discreta, la norma AAV de una señal puede ser calculada como

$$\|u\|_{aa} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T/h} |u(kh)| h. \quad (2.11)$$

Capítulo 3

Modelo dinámico del péndulo de Furuta

En este capítulo se presenta el modelo matemático que describe la dinámica del péndulo rotacional invertido o péndulo de Furuta presentado en [1], el cual se obtiene a partir de las ecuaciones dinámicas de Euler-Lagrange. Sin embargo, también es posible determinar el modelo dinámico del péndulo de Furuta mediante una formulación de Newton-Euler iterativa como la presentada en [19]. En primera instancia no se consideran los términos correspondientes a la fricción.

Posteriormente se muestran los resultados de la identificación de parámetros presentados en [20], para el modelo experimental del péndulo de Furuta elaborado en CITEDIPN. En donde los términos que modelan la fricción en las articulaciones son agregados y considerados en el procedimiento de identificación paramétrica.

También se presenta una descripción detallada de los componentes de la plataforma experimental del péndulo de Furuta, así como la forma en la que está estructurada.

Finalmente, se muestra la representación esquemática de éste sistema experimental, así como el diagrama que describe de manera general el sistema de control en lazo cerrado dispuesto para el control del péndulo de Furuta.

3.1. Modelado del péndulo de Furuta

Debido a la construcción del péndulo rotacional invertido o péndulo de Furuta, éste presenta algunas ventajas con respecto al péndulo invertido más clásico, como lo es el sistema carro-péndulo. Como se comentó anteriormente, el péndulo de Furuta no está limitado en el movimiento del carro donde se monta el péndulo, dado que su estructura es diferente, además de que ocupa menos espacio. Utiliza un motor de corriente directa como actuador

y el péndulo se acopla a una varilla (brazo) la cual va montada sobre la flecha del motor. El sistema de coordenadas y las notaciones utilizadas se muestran en la figura 3.1 y se describen a continuación.

- I_1 : Inercia del brazo
- L_1 : Largo total del brazo
- m_2 : Masa del péndulo
- l_2 : Distancia con respecto al centro de gravedad del péndulo
- J_2 : Inercia del péndulo con respecto a su centro de gravedad
- q_1 : Ángulo rotacional del brazo
- q_2 : Ángulo rotacional del péndulo
- τ : Entrada de torque aplicado al brazo

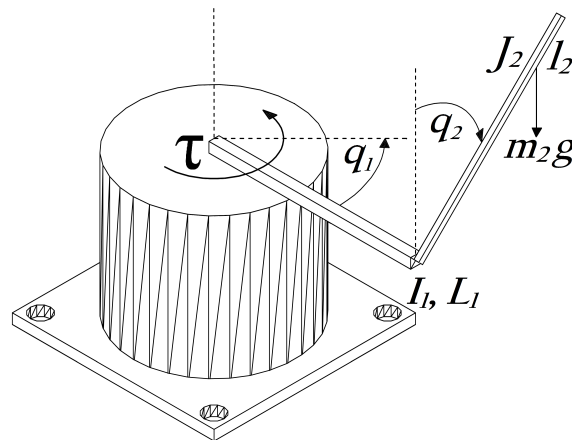


Figura 3.1: Sistema de coordenadas y notación utilizada para el modelado del péndulo de Furuta.

3.1.1. Energía del sistema

Para obtener el modelo matemático del péndulo de Furuta mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange, es necesaria la expresión de la energía total del sistema, la cual es la suma de la energía cinética y la energía potencial tanto del brazo, como del péndulo [1].

El brazo

La energía cinética del brazo está dada por

$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2. \quad (3.1)$$

La energía potencial del brazo es nula, ya que no se consideran las fuerzas gravitacionales que actúan sobre el brazo, por lo que se tiene

$$P_1 = 0. \quad (3.2)$$

El péndulo

La energía cinética del péndulo está dada por

$$K_2 = \frac{1}{2} J_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\left\{ \frac{d}{dt} (L_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_2) \cos(q_1)) \right\}^2 + \left\{ \frac{d}{dt} (L_1 \cos(q_1) - l_2 \sin(q_2) \sin(q_1)) \right\}^2 + \left\{ \frac{d}{dt} (l_2 \cos(q_2)) \right\}^2 \right], \quad (3.3)$$

donde el primer termino corresponde a la energía cinética debida a la velocidad angular del péndulo, mientras que los últimos tres términos son debidos a la velocidad tangencial, la velocidad radial y la velocidad vertical del péndulo, respectivamente. Después de algunos cálculos simples, K_2 se reduce a

$$K_2 = \frac{1}{2} J_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \sin^2(q_2) \dot{q}_1^2 + m_2 L_1 l_2 \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2. \quad (3.4)$$

La energía potencial del péndulo está dada por

$$P_2 = m_2 g l_2 (\cos(q_2) - 1). \quad (3.5)$$

3.1.2. Ecuaciones dinámicas de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de movimiento se obtienen usando la formulación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = u_i \quad (3.6)$$

donde

$$\begin{aligned} L &= K - P, \\ K &= K_1 + K_2, \\ P &= P_2. \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= [I_1 + m_2(L_1^2 + l_2^2 \sin^2(q_2))] \dot{q}_1 + m_2 l_2 L_1 \cos(q_2) \dot{q}_2, \\ \frac{\partial L}{\partial q_1} &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= m_2 l_2 L_1 \cos(q_2) \dot{q}_1 + [J_2 + m_2 l_2^2] \dot{q}_2, \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} &= m_2 l_2^2 \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_1^2 - m_2 l_2 L_1 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_2 g l_2 \sin(q_2), \end{aligned}$$

y así, el sistema está dado por

$$\begin{aligned} \tau &= [I_1 + m_2(L_1^2 + l_2^2 \sin^2(q_2))] \ddot{q}_1 + m_2 l_2 L_1 \cos(q_2) \ddot{q}_2 \\ &\quad + m_2 l_2^2 \sin(2q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 l_2 L_1 \sin(q_2) \dot{q}_2^2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} 0 &= m_2 l_2 L_1 \cos(q_2) \ddot{q}_1 + [J_2 + m_2 l_2^2] \ddot{q}_2 \\ &\quad - m_2 l_2^2 \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_1^2 - m_2 g l_2 \sin(q_2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

En forma compacta, el sistema se puede escribir como

$$M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}, \quad (3.9)$$

donde

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

son el vector de posiciones articulares y el vector de torque aplicado respectivamente, siendo $\tau \in \mathbb{R}$ la entrada de torque del brazo,

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} I_1 + m_2(L_1^2 + l_2^2 \sin^2(q_2)) & m_2 l_2 L_1 \cos(q_2) \\ m_2 l_2 L_1 \cos(q_2) & J_2 + m_2 l_2^2 \end{bmatrix},$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \sin(2q_2) \dot{q}_2 & -m_2 l_2 L_1 \sin(q_2) \dot{q}_2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \sin(2q_2) \dot{q}_1 \\ -\frac{1}{2} m_2 l_2^2 \sin(2q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 g l_2 \sin(q_2) \end{bmatrix},$$

donde $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la matriz de inercia y $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^2$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, y $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^2$ es conocido como el vector de torques gravitacionales. El significado físico del vector de entrada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ es que el sistema solo está equipado con un actuador, el cual entrega la entrada de torque $\tau \in \mathbb{R}$.

Nótese que $M(\mathbf{q})$ es simétrica, y dado que

$$\begin{aligned} M_{11} &= I_1 + m_2(L_1^2 + l_2^2 \sin^2 q_2) \\ &\geq I_1 + m_2 L_1^2 > 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

y

$$\begin{aligned} \det(M(\mathbf{q})) &= (I_1 + m_2(L_1^2 + l_2^2 \sin^2 q_2))(J_2 + m_2 l_2^2) - m_2^2 l_2^2 L_1^2 \cos^2 q_2, \\ &= (I_1 + m_2 l_2^2 \sin^2 q_2)(J_2 + m_2 l_2^2) + J_2 m_2 L_1^2 \\ &\quad + m_2^2 l_2^2 L_1^2 \cos^2 q_2 > 0, \end{aligned} \tag{3.11}$$

se tiene que $M(\mathbf{q})$ es también definida positiva para toda $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$.

3.2. Plataforma experimental

En esta sección se presentan los resultados del trabajo de identificación de parámetros para la plataforma experimental del péndulo de Furuta disponible en CITEDIPN, en la cual se realizaron los experimentos del presente trabajo de investigación. Así como una breve descripción del hardware y los materiales utilizados para su construcción, los cuales constituyen la descripción física de la misma.

3.2.1. Parámetros del modelo dinámico

El modelo dinámico del péndulo de Furuta, tomando en cuenta la presencia de la fricción viscosa y fricción de Coulomb, puede escribirse como

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_v(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{f}_c(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u}, \tag{3.12}$$

donde

$$\begin{aligned}
M(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 \sin^2(q_2) & \theta_3 \cos(q_2) \\ \theta_3 \cos(q_2) & \theta_4 \end{bmatrix}, \\
C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\theta_2\dot{q}_2 \sin(2q_2) & -\theta_3\dot{q}_2 \sin(q_2) + \frac{1}{2}\theta_2\dot{q}_1 \sin(2q_2) \\ -\frac{1}{2}\theta_2\dot{q}_1 \sin(2q_2) & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\theta_5 \sin(q_2) \end{bmatrix}, \\
\mathbf{f}_v(\dot{\mathbf{q}}) &= F_v \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \theta_6 \dot{q}_1 \\ \theta_7 \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{f}_c(\dot{\mathbf{q}}) &= F_c \tanh(\beta \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \theta_8 \tanh(\beta \dot{q}_1) \\ \theta_9 \tanh(\beta \dot{q}_2) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

siendo $\mathbf{f}_v(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^2$ el vector que contiene los términos de fricción viscosa de cada articulación, y $\mathbf{f}_c(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^2$ es el vector que contiene una versión continua y diferenciable de los términos de fricción de Coulomb de cada articulación, con $\beta > 0$ suficientemente grande. Además, $F_v = \text{diag}(F_{v1}, F_{v2})$ es la matriz que contiene los coeficientes de fricción viscosa de cada articulación, y finalmente $F_c = \text{diag}(F_{c1}, F_{c2})$ es la matriz que contiene los coeficientes de Coulomb de cada articulación.

Por otra parte, la descripción física de los parámetros θ_i están dados en la Tabla 3.2.

Símbolo	Definición
θ_1	$m_2 L_1^2 + J_1$
θ_2	$m_2 (L_1^2 + l_2^2)$
θ_3	$L_1^2 l_2 m_2$
θ_4	$m_2 l_2^2 + J_2$
θ_5	$l_2 m_2 g$
θ_6	F_{v1}
θ_7	F_{v2}
θ_8	F_{c1}
θ_9	F_{c2}

Tabla 3.1: Definición física de los parámetros del modelo dinámico del péndulo de Furuta.

Los valores numéricos de los parámetros θ_i del modelo del péndulo de Furuta en (3.12) fueron obtenidos usando el modelo dinámico filtrado y una identificación clásica por mínimos cuadrados; ver por ejemplo [20], [21] y [22], donde se proponen procedimientos de identificación para sistemas mecánicos.

En el procedimiento de identificación, se consideró

$$\beta = 100,$$

el cual está relacionado con el vector de fricción de Coulomb $\mathbf{f}_c(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^2$ en el modelo del péndulo de Furuta en (3.12). En la Tabla 3.2 se presentan los valores numéricos, resultados de la más reciente identificación de parámetros para el péndulo de Furuta disponible en CITEDIPN.

Símbolo	Valor	Unidades
θ_1	0.20959	Kg · m ² · rad
θ_2	0.04926	Kg · m ² · rad
θ_3	0.06258	Kg · m ² · rad
θ_4	0.04539	Kg · m ² · rad
θ_5	1.71142	Kg · m ² · rad
θ_6	0.08514	N · m · rad/sec
θ_7	0.00238	N · m · rad/sec
θ_8	0.13738	N · m · rad/sec
θ_9	0.02789	N · m · rad/sec

Tabla 3.2: Valores numéricos de los parámetros del modelo dinámico del péndulo de Furuta.

3.2.2. Descripción física de la plataforma experimental

La plataforma experimental en la cual se llevaron a cabo los experimentos del presente trabajo de investigación se encuentra en el laboratorio de sistemas de control en CITEDIPN, y se muestra en la figura 3.2.

Los componentes de hardware utilizados para la instrumentación y control del prototipo del péndulo de Furuta son una tarjeta de adquisición de datos Sensoray[®] 626 la cual se encuentra conectada a una computadora personal de escritorio (PC) mediante el bus de interconexión de componentes periféricos (PCI, del inglés *Peripheral Component Interconnect*).

La PC cuenta con el sistema operativo Windows[®] XP y Matlab[®] 2007a, en donde se usa el entorno de trabajo Simulink[®] para interactuar con la tarjeta de adquisición de datos en tiempo real, esto mediante la librería *Real Time Windows Target*. Además, se utilizaron un par de codificadores ópticos QD200-05/05-1000-4-03-T3-01-02 de Quantum Devices[®] para medir el desplazamiento angular tanto del brazo como del péndulo. Finalmente, como actuador se tiene un motor de corriente directa modelo MBR3410NI en conjunto con un servo-amplificador 30A20AC de la compañía Advanced Motion Controls[®].



Figura 3.2: Fotografía del prototipo del péndulo de Furuta disponible en CITEDI-IPN.

En la figura 3.3 se presenta el diagrama que muestra la estructura generalizada de la plataforma experimental del péndulo de Furuta descrita anteriormente.

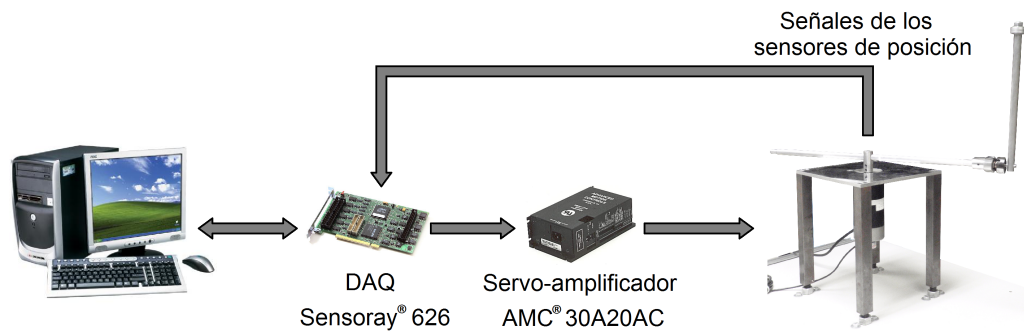


Figura 3.3: Descripción de la estructura de la plataforma experimental del péndulo de Furuta disponible en CITEDI-IPN.

Es posible representar el péndulo de Furuta como un sistema de entrada-salida, tal y como se muestra en la figura 3.4, en donde se aprecia al péndulo de Furuta representado como un bloque con una entrada y múltiples salidas. La única señal de entrada se encuentra a la izquierda, y ésta representa a la entrada de control τ . En la parte derecha del bloque se observan las múltiples salidas que representan las variables de estado del sistema, en donde las señales q_1 y q_2 son la posición angular del brazo y la posición angular del péndulo, respectivamente, y las señales \dot{q}_1 y \dot{q}_2 son la velocidad angular del brazo y la velocidad angular del péndulo, respectivamente.



Figura 3.4: Representación esquemática o de bloques del péndulo de Furuta.

Finalmente, en la figura 3.5 se presenta el diagrama esquemático general del sistema de control de lazo cerrado para el péndulo de Furuta, en donde se observa que la acción de control τ está conformada la salida del bloque “Controlador basado en modelo” y la suma de una señal de perturbación τ_r que representa el ruido eléctrico introducido por la dinámica eléctrica del actuador, las conmutaciones del servo-amplificador y pérdidas debidas a la fricción no modelada del sistema. Particularmente en este trabajo de tesis se presentan dos controladores basados en modelo, el primero de ellos es el controlador de seguimiento de salida presentado en el capítulo 4, y el segundo de ellos es el esquema de control propuesto, basado en linealización por retroalimentación presentado en el capítulo 5. Así mismo, en la figura 3.5 se observa una señal de perturbación $n(t)$, la cual representa la pérdida de información debida a la resolución de los sensores de posición y la cuantización de la señal entregada por éstos, así como el ruido introducido por la derivada discreta utilizada para la estimación de las velocidades articulares.

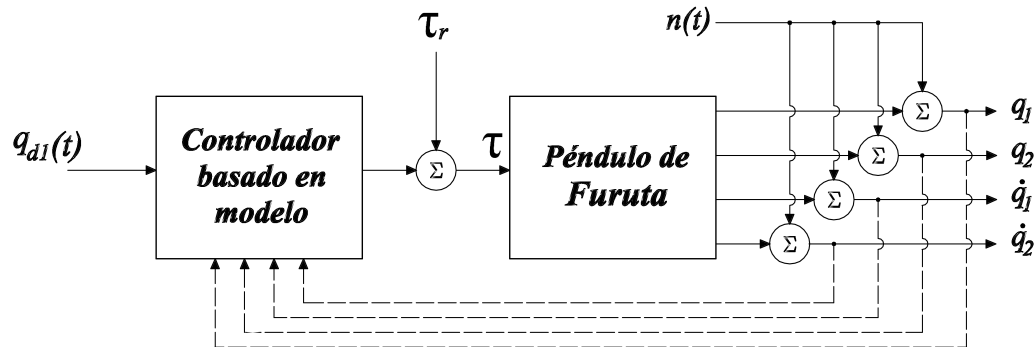


Figura 3.5: Diagrama esquemático general del sistema de control de lazo cerrado para el péndulo de Furuta.

Capítulo 4

Controlador no lineal para seguimiento de salida

En este capítulo se presenta el procedimiento de diseño de un controlador no lineal de seguimiento de salida reportado en [14], el cual es aplicado al modelo dinámico del péndulo de Furuta con fricción. En este esquema de control se combinan distintas técnicas de control no lineal, como nonlinear backstepping, planitud diferencial y el teorema de pequeña ganancia no lineal. Sin embargo en [14] no se considera la fricción presente, lo cual impacta negativamente en el desempeño experimental. Con el fin de mejorar el desempeño experimental del controlador de seguimiento de salida, se agregan en el procedimiento de diseño los términos correspondientes a la fricción viscosa y fricción de Coulomb tanto del brazo como del péndulo.

4.1. Modelo dinámico

A continuación se presenta el modelo dinámico para el péndulo de Furuta utilizado en [14], que incorporando los términos de fricción viscosa y de Coulomb queda como sigue

$$\begin{aligned} & [\theta_1 + \theta_2 \sin^2(q_2)] \ddot{q}_1 + \theta_3 \cos(q_2) \ddot{q}_2 - \theta_3 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \\ & + [2\theta_2 \sin(q_2) \cos(q_2)] \dot{q}_2 \dot{q}_1 + \theta_6 \dot{q}_1 + \theta_8 \tanh(\beta \dot{q}_1) = \tau, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} & \theta_2 \ddot{q}_2 + \theta_3 \cos q_2 \ddot{q}_1 - \theta_2 \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_1^2 \\ & - \theta_5 \sin(q_2) + \theta_7 \dot{q}_2 + \theta_9 \tanh(\beta \dot{q}_2) = 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde q_1 es la posición angular del brazo, q_2 es la posición angular del péndulo, θ_i son los parámetros constantes del modelo dinámico identificado, los cuales son positivos, y τ es

la entrada de control.

Es importante mencionar que el modelo dinámico (4.1)-(4.2) es equivalente al modelo dinámico del péndulo de Furuta presentado en el capítulo 3 en la ecuación (3.12). Para obtener el modelo en [14] a partir del modelo presentado en (3.12), es necesario considerar que los parámetros θ_2 y θ_4 son equivalentes, y aplicar la identidad trigonométrica

$$\sin(2q_2) = 2 \sin(q_2) \cos(q_2). \quad (4.3)$$

Sin embargo en este capítulo se considera el modelo (4.1)-(4.2), esto con el fin de aplicar el procedimiento de diseño del controlador propuesto en [14].

Evidentemente, (4.2) es incontrolable e inestable cuando $|q_2| > \frac{\pi}{2}$, entonces todas las consideraciones deberán ser confinadas dentro del rango $|q_2| < \frac{\pi}{2}$.

4.2. Diseño del controlador

Se define una función de salida

$$Z = r^* q_1 + h \sin(q_2), \quad (4.4)$$

donde r^* y h constantes positivas. La primera y segunda derivada con respecto al tiempo de la función de salida Z en (4.4) son

$$\dot{Z} = r^* \dot{q}_1 + h \cos(q_2) \dot{q}_2, \quad (4.5)$$

$$\ddot{Z} = r^* \ddot{q}_1 + h \cos(q_2) \ddot{q}_2 - h \dot{q}_2^2 \sin(q_2), \quad (4.6)$$

respectivamente.

Se procede expresar las ecuaciones dinámicas del péndulo de Furuta (4.1)-(4.2) en función de la salida Z . Para tal fin, se despeja \ddot{q}_1 de (4.6) y se sustituye en (4.2), la dinámica del péndulo queda como

$$\left[\frac{\theta_3 h}{r^*} \cos^2(q_2) - \theta_2 \right] \ddot{q}_2 + \theta_2 \sin(q_2) \cos(q_2) \left[\frac{\dot{Z}}{r^*} - \frac{h}{r^*} \cos(q_2) \dot{q}_2 \right]^2 - \frac{\theta_3 h}{r^*} \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_2^2 + \theta_5 \sin(q_2) - \theta_7 \dot{q}_2 - \theta_9 \tanh(\beta \dot{q}_2) - \frac{\ddot{Z} \theta_3}{r^*} \cos(q_2) = 0. \quad (4.7)$$

Así mismo, también es posible definir la dinámica del brazo en (4.1) en función de la salida Z . Entonces despejando \ddot{q}_1 de (4.6), \ddot{q}_2 de (4.7) y sustituyéndolos en (4.1), la

dinámica del brazo queda como

$$\begin{aligned} M(q_2)\ddot{Z} + [M(q_2)h - \theta_3] \sin(q_2)\dot{q}_2^2 + 2\theta_2 \sin(q_2) \cos(q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ + \theta_2 G(q_2) \sin(q_2) \cos^2(q_2)\dot{q}_1^2 + \theta_5 G(q_2) \sin(q_2) \cos(q_2) \\ + \theta_6 \dot{q}_1 + \theta_8 \tanh(\beta \dot{q}_1) - G(q_2) \cos(q_2)\theta_7 \dot{q}_2 - G(q_2) \cos(q_2)\theta_9 \tanh(\beta \dot{q}_2) = \tau, \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde

$$G(q_2) = \frac{[\theta_1 + \theta_2 \sin^2(q_2)] h - \theta_3 r^*}{\theta_3 h \cos^2(q_2) - \theta_2 r^*}, \quad (4.9)$$

$$M(q_2) = \frac{1}{r^*} [[\theta_1 + \theta_2 \sin^2(q_2)] - G(q_2)\theta_3 \cos^2(q_2)]. \quad (4.10)$$

Con referencia en (4.8), se propone el siguiente controlador para el sistema conformado por (4.7) y (4.8)

$$\begin{aligned} \tau = [M(q_2)h - \theta_3] \sin(q_2)\dot{q}_2^2 + 2\theta_2 \sin(q_2) \cos(q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \theta_6 \dot{q}_1 + \theta_8 \tanh(\beta \dot{q}_1) \\ + \theta_2 G(q_2) \sin(q_2) \cos^2(q_2)\dot{q}_1^2 + \theta_5 G(q_2) \sin(q_2) \cos(q_2) \\ - G(q_2) \cos(q_2)\theta_7 \dot{q}_2 - G(q_2) \cos(q_2)\theta_9 \tanh(\beta \dot{q}_2) \\ - K_1 M(q_2)\dot{Z} - K_2 M(q_2)Z + M(q_2)v, \end{aligned} \quad (4.11)$$

con

$$v = \ddot{Z}_d + K_1 \dot{Z}_d + K_2 Z_d - K_3 \dot{q}_2, \quad (4.12)$$

$$Z_d = a_0 \sin(w(t + t_0)), \quad (4.13)$$

donde K_1 , K_2 y K_3 son constantes estrictamente positivas, Z_d es la función de salida deseada, a_0 indica la amplitud de la salida deseada, w es la frecuencia angular de la salida deseada y t_0 es el desplazamiento de la salida deseada.

El controlador en (4.11) corresponde al controlador reportado en [14], pero se han incorporado los términos de fricción viscosa y de Coulomb en su desarrollo. Por lo tanto se tiene que al igualar a cero los parámetros correspondientes a la fricción, es decir, considerando θ_6 , θ_7 , θ_8 y θ_9 como nulos, se recupera la estructura del controlador en [14].

4.3. Sistema de lazo cerrado

Se tiene que al aplicar el controlador (4.11) a las ecuaciones dinámicas del péndulo de Furuta (4.1)-(4.2), el sistema de ecuaciones que describe la dinámica de lazo cerrado es

$$\ddot{Z} + K_1 \dot{Z} + K_2 Z = v, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\theta_3 h}{r^*} \cos^2(q_2) - \theta_2 \right] \ddot{q}_2 - \frac{\theta_3 h}{r^*} \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_2^2 + \theta_5 \sin(q_2) - \theta_7 \dot{q}_2 \\ & - \theta_9 \tanh(\beta \dot{q}_2) + \theta_2 \sin(q_2) \cos(q_2) \left[\frac{\dot{Z}}{r^*} - \frac{h}{r^*} \dot{q}_2 \cos(q_2) \right]^2 \\ & + \frac{\theta_3 K_1 \dot{Z}}{r^*} \cos(q_2) + \frac{\theta_3 K_2 Z}{r^*} \cos(q_2) = \frac{\theta_3}{r^*} \cos(q_2) v. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Definiendo el error de seguimiento de salida $Z_e = Z - Z_d$ y sustituyendo (4.12) en (4.14) y (4.15), las ecuaciones de lazo cerrado total quedan expresadas como

$$\ddot{Z}_e + K_1 \dot{Z}_e + K_2 Z_e + K_3 \dot{q}_2 = 0, \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\theta_3 h}{r^*} \cos^2(q_2) - \theta_2 \right] \ddot{q}_2 - \frac{\theta_3 h}{r^*} \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_2^2 + \theta_5 \sin(q_2) - \theta_7 \dot{q}_2 \\ & - \theta_9 \tanh(\beta \dot{q}_2) + \theta_2 \sin(q_2) \cos(q_2) \left[\frac{\dot{Z}_e + \dot{Z}_d}{r^*} - \frac{h}{r^*} \dot{q}_2 \cos(q_2) \right]^2 \\ & + \frac{\theta_3 K_3 \dot{q}_2}{r^*} \cos(q_2) + \frac{\theta_3 K_1 \dot{Z}_e}{r^*} \cos(q_2) \\ & + \frac{\theta_3 K_2 Z_e}{r^*} \cos(q_2) = \frac{\theta_3 \ddot{Z}_d}{r^*} \cos(q_2). \end{aligned} \quad (4.17)$$

En [14] se prueba que las trayectorias del error de seguimiento de salida Z_e y la posición angular del péndulo q_2 , son acotadas últimamente uniformemente. Sin embargo, dicho análisis se realiza despreciando la fricción del modelo del péndulo de Furuta. Siguiendo el procedimiento presentado en [14], es posible probar que las trayectorias de $Z_e(t) = Z(t) - Z_d(t)$ y $q_2(t)$ son acotadas últimamente uniformemente, lo que implica que las trayectorias de $e_1(t) = q_{d1}(t) - q_1(t)$ son también acotadas últimamente uniformemente. Sin embargo, la prueba de éste hecho se dejará fuera de los límites de éste trabajo.

Ganancia	Valor
K_1	5
K_2	8
K_3	1

Tabla 4.1: Ganancias de control utilizadas en simulación y experimento para el controlador en (4.11).

4.4. Resultados experimentales y numéricos

A continuación se presentan los resultados de la implementación práctica del controlador en (4.11), desarrollado en este capítulo. Así como los resultados de la simulación numérica del mismo. En primer lugar se presentan los resultados de simulaciones y experimentos de regulación realizados, es decir, cuando la posición deseada del brazo es un trayectoria costate. Posteriormente en esta misma sección, se presentan los resultados para el caso de seguimiento de trayectoria del brazo, por lo que se propone un señal variante con el tiempo para la posición deseada del brazo. Los valores numéricos de los parámetros θ_i usados, son los presentados en el capítulo 3.

Las condiciones iniciales del sistema fueron

$$\begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ [rad]},$$

y

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ [rad/s]}.$$

Los valores de las ganancias de control para el controlador en (4.11) se muestran en la Tabla 4.1, donde se muestran los valores que presentaron en mejor desempeño experimental, sin embargo, los valores presentados no distan mucho de los utilizados en [14].

Los valores para las ganancias constantes relacionadas con la función de salida $Z(t)$ en (4.4) fueron

$$\begin{aligned} r^* &= 0.55, \\ h &= 0.60, \end{aligned}$$

que son los valores propuestos en [14].

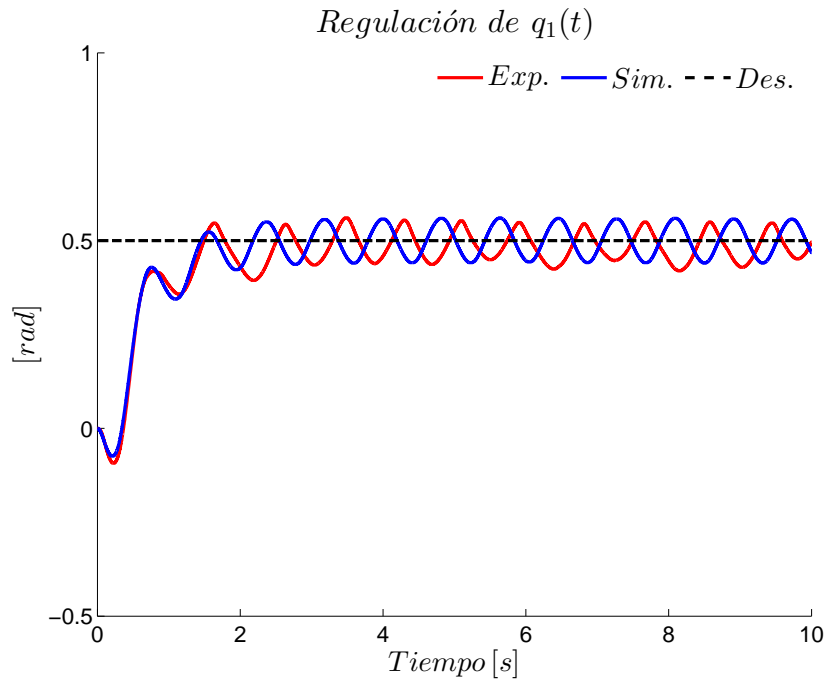


Figura 4.1: Regulación de posición: Evolución temporal de $q_1(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (4.11).

4.4.1. Resultados en el caso de regulación de posición

Para los experimentos de regulación de posición se seleccionó una señal de salida deseada

$$Z_d = \frac{r^*}{2} \text{ [rad]}.$$

Por lo que la posición deseada para el brazo queda definida en términos de la función de salida deseada como

$$q_{d1} = \frac{Z_d}{r^*} \text{ [rad]}.$$

Los resultados numéricos y experimentales para el caso de regulación de posición son mostrados en las figuras 5.3-5.6. En particular, la figura 5.3 muestra la evolución temporal de $q_1(t)$ en comparativa con la posición deseada que es de 0.5 radianes, y la figura 5.4 representa la evolución temporal de $q_2(t)$. El torque aplicado $\tau(t)$ y la función de salida $Z(t)$ son observados en las figuras 5.5 y 5.6, respectivamente.

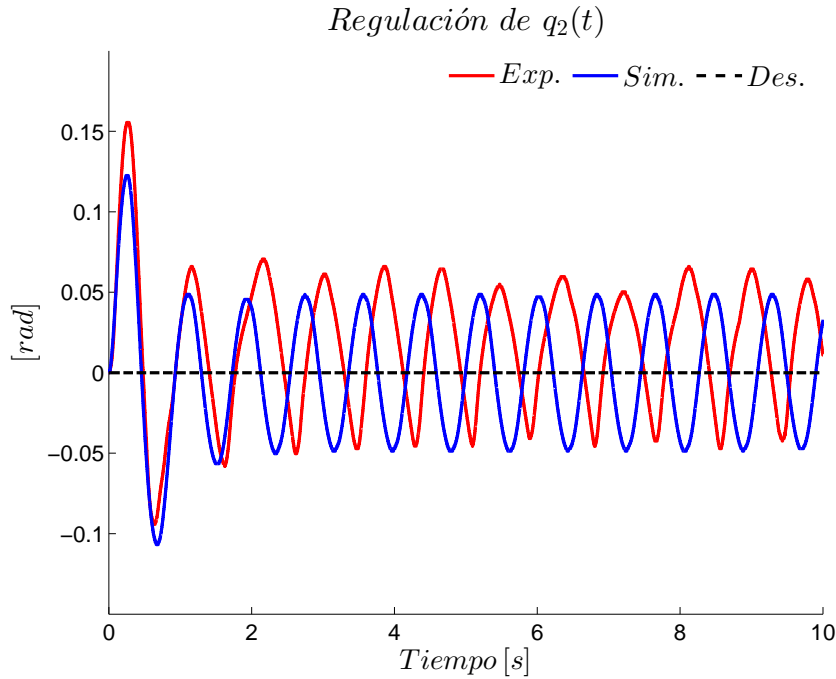


Figura 4.2: Regulación de posición: Evolución temporal de $q_2(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (4.11).

4.4.2. Resultados en el caso de seguimiento de trayectoria

La señal de salida deseada se seleccionó como

$$Z_d = r^* \sin(t) \text{ [rad]}.$$

Como se comentó anteriormente, la trayectoria deseada para el brazo está definida en función de la señal de salida deseada seleccionada, y queda de la misma forma que en el caso de regulación de posición, es decir

$$q_{d1} = \frac{Z_d}{r^*} \text{ [rad]}.$$

Los resultados numéricos y experimentales para el caso de seguimiento de trayectoria son mostrados en las figuras 4.5-4.8. En particular, la figura 4.5 muestra la evolución temporal de $q_1(t)$ en comparativa con la trayectoria deseada $q_{d1}(t)$, y la figura 4.6 representa la evolución temporal de $q_2(t)$. El torque aplicado $\tau(t)$ se observa en la figura 4.7 y finalmente, se tiene la función de salida $Z(t)$ en comparativa con la función de salida deseada $Z_d(t)$ en la figura 4.8.

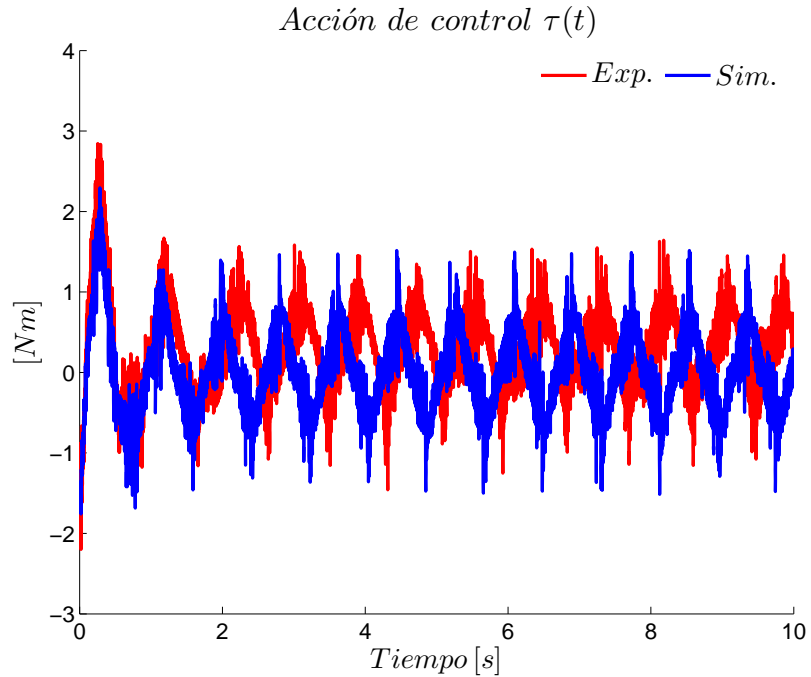


Figura 4.3: Regulación de posición: Acción de control $\tau(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (4.11).

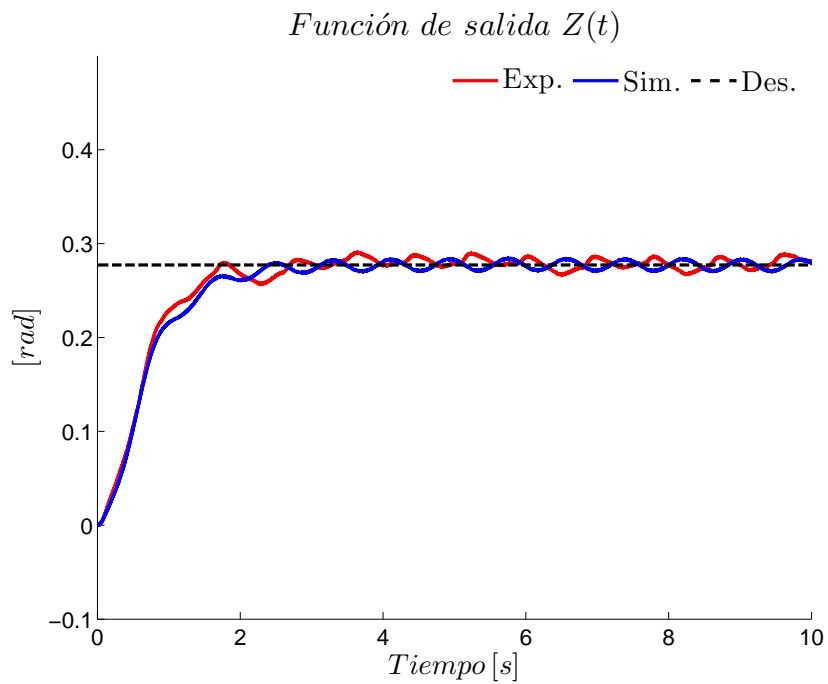


Figura 4.4: Regulación de posición: Evolución temporal de la función de salida $Z(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (4.11).

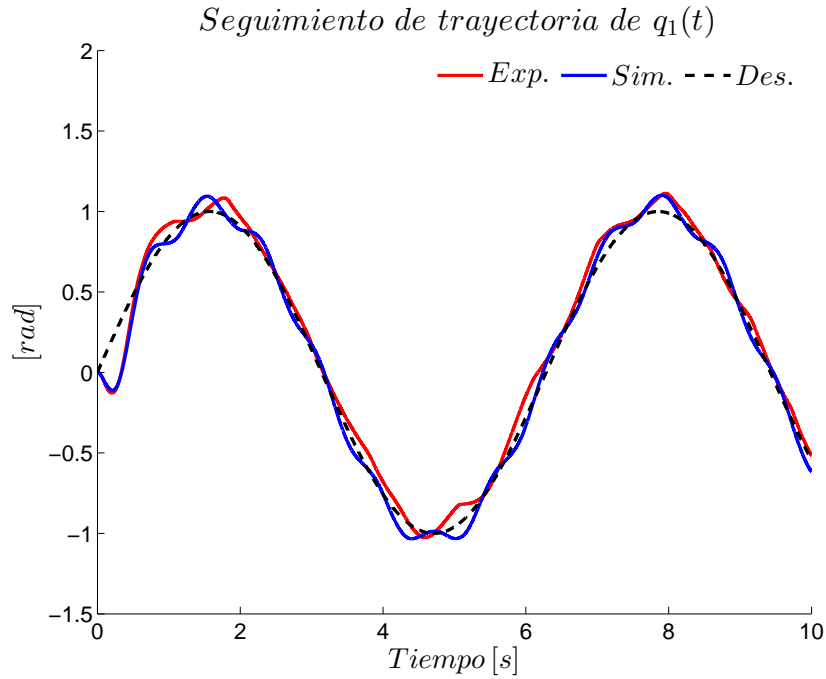


Figura 4.5: Seguimiento de trayectoria: Evolución temporal de $q_1(t)$ y $q_{d1}(t)$ obtenidas en simulación y experimento al aplicar el controlador en (4.11).

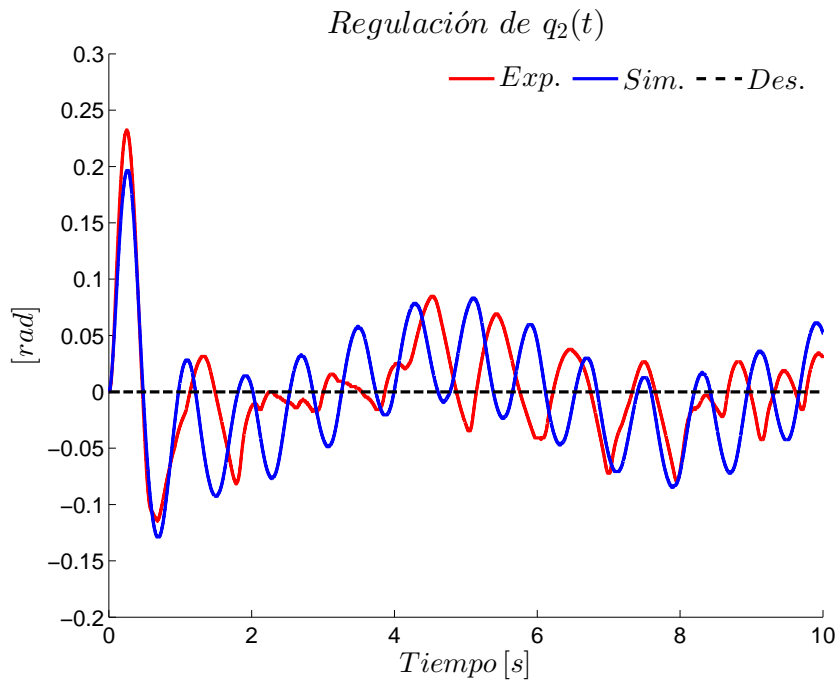


Figura 4.6: Seguimiento de trayectoria: Evolución temporal de $q_2(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (4.11).

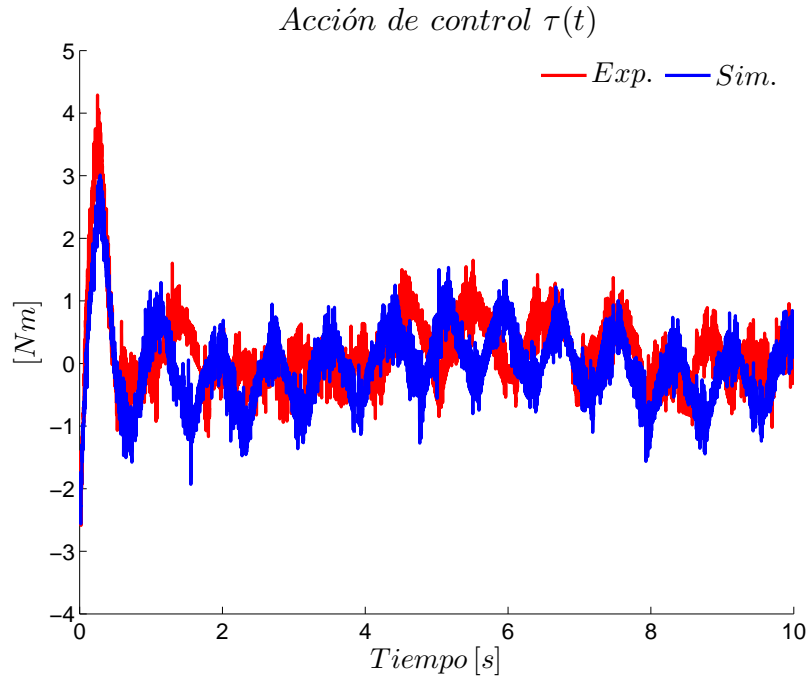


Figura 4.7: Seguimiento de trayectoria: Acción de control $\tau(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (4.11).

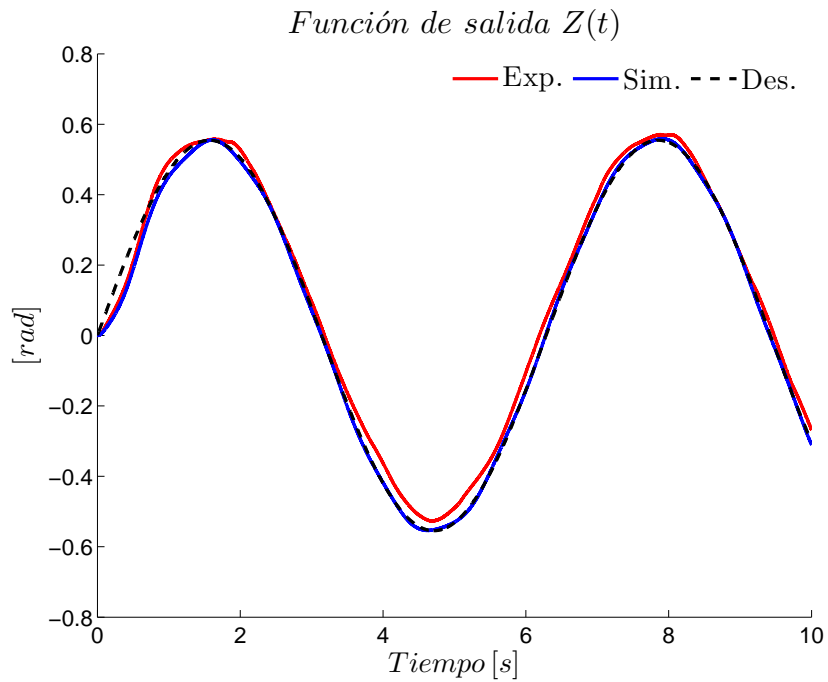


Figura 4.8: Seguimiento de trayectoria: Evolución temporal de la función de salida $Z(t)$ y la salida deseada $Z_d(t)$ obtenidas en simulación y experimento al aplicar el controlador en (4.11).

Capítulo 5

Controlador basado en linealización por retroalimentación

En este capítulo se presenta la aplicación de un nuevo esquema de control basado en la técnica de linealización por retroalimentación (feedback linearization) presentada en [11] y [10], aplicada al péndulo de Furuta para el diseño de un controlador, tanto como para el problema de regulación del péndulo, como para el problema de *seguimiento de trayectoria del brazo*, también conocido como problema de *control de movimiento* [23].

5.1. Diseño del controlador

La técnica de linealización por retroalimentación es comúnmente usada en sistemas no lineales [10], tal es el caso del péndulo de Furuta. De forma general, esta técnica consiste en definir apropiadamente una función de salida y que sea medible y que esté en función de las variables de estado que son de interés. Entonces, calculando la derivada temporal de la función de salida y las veces que sea necesario y conveniente, es posible definir un controlador de tal forma que la ecuación del sistema de lazo cerrado resultante sea lineal e invariante con el tiempo.

En este nuevo esquema de control propuesto, la señal de error es definida como un vector de dimensión dos, cuyo primer elemento está definido como la diferencia entre la trayectoria deseada $q_{d1}(t)$ y la posición del brazo horizontal $q_1(t)$, mientras que el segundo elemento del vector de error está definido como el negativo de la posición del péndulo $q_2(t)$, esto es

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{d1} - q_1 \\ -q_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (5.1)$$

Retomando el modelo dinámico identificado presentado en el capítulo 1, y con el fin de facilitar la expresión del controlador basado en linealización por retroalimentación, se expresa la dinámica en lazo abierto como

$$\frac{d}{dt}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}_z(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}_z(\mathbf{q})\tau, \quad (5.2)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_z(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= M(\mathbf{q})^{-1}[-C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{f}_v(\dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{f}_c(\dot{\mathbf{q}})], \\ \mathbf{g}_z(\mathbf{q}) &= \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} M_{22} \\ -M_{12} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Usando la definición de \mathbf{e} en (5.1), la dinámica de error en lazo abierto se puede definir como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_{d1} - f_{z1} - g_{z1}\tau \\ -f_{z2} - g_{z2}\tau \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Abusando de la notación, se define

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\tau, \quad (5.5)$$

donde

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \ddot{q}_{d1} - f_{z1} \\ -f_{z2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g_{z1} \\ -g_{z2} \end{bmatrix},$$

y

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix}.$$

Se propone la función de salida $y = h(\mathbf{x})$ como

$$y = \Delta_1 e_1 + \Delta_2 e_2 + \dot{e}_1 + \dot{e}_2, \quad (5.6)$$

donde Δ_1 y Δ_2 son constantes estrictamente positivas.

De acuerdo con la definición 6.7, página 244 en [11], para el sistema conformado por (5.5) y la función de salida definida en (5.6), se tiene el grado relativo del sistema $r = 1$. Entonces, se tiene que la transformación de entrada dada por

$$\tau = \frac{-L_f^r h + v}{L_g L_f^{r-1} h}, \quad (5.7)$$

resulta en una relación diferencial lineal entre la salida y y la función v , es decir,

$$y^{(r)} = v, \quad (5.8)$$

donde $h(\mathbf{x})$ es la función de salida, $L_f h(\mathbf{x})$ es la derivada Lie de la función de salida a lo largo de $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$, que a su vez, es la parte de la dinámica que no está directamente relacionada con la entrada de control y es definida en (5.5); y $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ es la parte de la dinámica que está directamente relacionada con la entrada de control, definida también en (5.5).

La función de salida (5.6) puede ser convertida en una señal exponencialmente convergente definiendo

$$v = -K_p y, \quad (5.9)$$

calculando explícitamente (5.7), la señal de entrada de control está dada por

$$\tau = \frac{-\Delta_1 \dot{e}_1 - \Delta_2 \dot{e}_2 - \ddot{q}_{d1} + f_{z1} + f_{z2} - K_p y}{-[g_{z1} + g_{z2}]}, \quad (5.10)$$

donde K_p es una constante positiva.

Nótese que el controlador (5.10) es válido en la región del espacio de estados donde

$$g_{z1} + g_{z2} \neq 0.$$

Sin embargo, sin pérdida de generalidad, para el caso del sistema experimental del péndulo de Furuta disponible, se tiene

$$g_{z1} + g_{z2} < 0, \quad \forall |q_2| < \arccos(\theta_4/\theta_3), \quad (5.11)$$

donde θ_4 y θ_3 son parámetros identificados, cuyos valores son dados en el capítulo 3.

El sistema de lazo cerrado puede ser escrito como

$$\frac{d}{dt}y = -K_p y, \quad (5.12)$$

para el cual se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0,$$

de forma exponencial.

5.2. Obtención y análisis de la dinámica cero

Cuando la técnica de linealización por retroalimentación se aplica a un sistema no lineal, específicamente, un controlador obtenido mediante una linealización de entrada-salida, es necesario estudiar la dinámica cero del sistema. La dinámica cero es un caso particular de la dinámica interna de un sistema. Mediante la linealización de entrada-salida, la dinámica de un sistema no lineal se descompone en un parte externa (entrada-salida) y una parte interna (inobservable).

Definición 5.1 *La dinámica cero del sistema no lineal (5.5)-(5.6) es la dinámica del sistema, sujeto a la restricción de que la salida sea idéntica a cero [11].*

También se dice que la dinámica cero de un sistema es su dinámica cuando su movimiento está restringido a la superficie suave r -dimensional (manifold) \mathbf{M}^* en \mathbb{R}^n definida por [24]

$$\mathbf{M}^* = \{\mathbf{x} \mid h(\mathbf{x}) = L_f h(\mathbf{x}) = \dots = L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) = 0\}. \quad (5.13)$$

Tomando la función de salida definida para el diseño del controlador para el péndulo de Furuta (5.6) donde, de acuerdo con la definición de la dinámica cero se tiene

$$y = h(\mathbf{x}) = 0. \quad (5.14)$$

De acuerdo con [10] y [11], para el cálculo de la dinámica cero es necesario definir un vector de transformación de coordenadas

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ - \\ \boldsymbol{\zeta} \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

donde el vector ζ está compuesto por la función de salida $h(\mathbf{x})$ y sus respectivas $r - 1$ derivadas a lo largo de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, esto es

$$\zeta = \left[h \quad L_f h \quad \dots \quad L_f^{r-1} h \right]^T, \quad (5.16)$$

y la estructura del vector $\boldsymbol{\eta}$ es

$$\boldsymbol{\eta} = \left[\eta_1 \quad \eta_2 \quad \dots \quad \eta_{m-r} \right]^T, \quad (5.17)$$

donde cada uno de los elementos del vector $\boldsymbol{\eta}$ son linealmente independientes, y satisface el sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$L_g \boldsymbol{\eta} = 0. \quad (5.18)$$

Para el caso de la función de salida propuesta para el péndulo de Furuta se tiene que el grado relativo del sistema es $r = 1$, por lo tanto el vector ζ queda como una función escalar definida por

$$\zeta_1 = \Delta_1 e_1 + \Delta_2 e_2 + \dot{e}_1 + \dot{e}_2, \quad (5.19)$$

y se propone el vector $\boldsymbol{\eta}$ como

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ -\frac{g_{z2}}{g_{z1}} \dot{e}_1 + \dot{e}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Es claro que cada uno de los elementos de $\boldsymbol{\eta}$ en (5.20) son linealmente independientes y también que la condición (5.18) es satisfecha. Por lo tanto se tiene que la transformación está dada por

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x}, \quad (5.21)$$

donde

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{g_{z2}}{g_{z1}} & 1 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

A su vez la transformación inversa está dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{z}, \quad (5.22)$$

donde

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\Delta_1 G_1 & -\Delta_2 G_1 & -G_1 & G_1 \\ -\Delta_1 G_2 & -\Delta_2 G_2 & G_1 & G_2 \end{bmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{g_{z1}}{g_{z1} + g_{z2}}, \\ G_2 &= \frac{g_{z2}}{g_{z1} + g_{z2}}. \end{aligned}$$

La dinámica interna (forma general de la dinámica cero) asociada con la linealización de entrada-salida, corresponde simplemente a las $(n - r)$ ecuaciones

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{w}(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) \quad (5.23)$$

de la forma normal. Para la obtención de la dinámica cero por definición se tiene que

$$\boldsymbol{\zeta} = 0,$$

entonces, la dinámica cero está dada por

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{w}(0, \boldsymbol{\eta}). \quad (5.24)$$

De (5.21) se obtiene la expresión de la dinámica cero para el péndulo de Furuta, la cual queda dada por

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} e_1 \\ \frac{d}{dt} e_2 \\ \frac{d}{dt} \left(-\frac{g_{z2}}{g_{z1}} \dot{e}_1 + \dot{e}_2 \right) \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Calculando la derivada temporal, sustituyendo \dot{e}_1 y \dot{e}_2 de (5.22), sustituyendo g_{z1} y g_{z2} obtenidos de (5.2) y tomando en cuenta que $\eta_1 = e_1$ y $\eta_2 = e_2$, la dinámica cero queda

expresada como

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta_1 G_1 \eta_1 - \Delta_2 G_1 \eta_2 - G_1 \eta_3 \\ -\Delta_1 G_2 \eta_1 - \Delta_2 G_2 \eta_2 + G_1 \eta_3 \\ \frac{\theta_3}{\theta_4} \cos(\eta_2) \ddot{e}_1 - \frac{\theta_3}{\theta_4} \sin(\eta_2) \dot{\eta}_1 \dot{\eta}_2 + \ddot{e}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Mediante la sustitución de \ddot{e}_1 y \ddot{e}_2 se se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales que describe la dinámica cero del péndulo de Furuta cuando la función de salida y está definida como (5.6), donde \ddot{e}_1 y \ddot{e}_2 pueden ser obtenidas de la dinámica de error en lazo abierto del péndulo de Furuta en regulación o seguimiento de trayectorias. En este documento se estudian ambos casos. Sin embargo, para facilitar el análisis de estabilidad, los términos correspondientes a la fricción de Coulomb $\mathbf{f}_c(\dot{\mathbf{q}})$ son despreciados.

5.2.1. Dinámica cero en el caso de regulación de posición

Se tiene que la dinámica de error en lazo abierto para el péndulo de Furuta está dada por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_{d1} - f_{z1} - g_{z1}\tau \\ -f_{z2} - g_{z2}\tau \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

donde, para el caso de regulación de posición, se tiene que

$$\ddot{q}_{d1}, \dot{q}_{d1} = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (5.29)$$

entonces, considerando (5.29), tomando las definiciones de \ddot{e}_1 y \ddot{e}_2 de la dinámica de error en lazo abierto en (5.4) y sustituyendo en (5.26) se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta_1 G_1 \eta_1 - \Delta_2 G_1 \eta_2 - G_1 \eta_3 \\ -\Delta_1 G_2 \eta_1 - \Delta_2 G_2 \eta_2 + G_1 \eta_3 \\ -\frac{\theta_3}{\theta_4} \cos(\eta_2) f_{z1} - \frac{\theta_3}{\theta_4} \cos(\eta_2) g_{z1}\tau - \frac{\theta_3}{\theta_4} \sin(\eta_2) \dot{\eta}_1 \dot{\eta}_2 - f_{z2} - g_{z2}\tau \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

donde f_{z1} , f_{z2} , g_{z1} y g_{z2} fueron definidos en la dinámica en lazo abierto del péndulo de Furuta (5.2). Sustituyendo las definiciones de g_{z1} y g_{z2} , la dinámica cero no lineal para el

péndulo de Furuta es dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta_1 G_1 \eta_1 - \Delta_2 G_1 \eta_2 - G_1 \eta_3 \\ -\Delta_1 G_2 \eta_1 - \Delta_2 G_2 \eta_2 + G_1 \eta_3 \\ -\frac{\theta_3}{\theta_4} \cos(\eta_2) f_{v1} - \frac{\theta_3}{\theta_4} \sin(\eta_2) \dot{\eta}_1 \dot{\eta}_2 - f_{v2} \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Nótese que la entrada de control τ no aparece en la expresión en (5.31). Esto es cierto para cada vector $\boldsymbol{\eta}$ que satisface la condición (5.18), lo que está de acuerdo a la definición de la dinámica cero.

Linealización de la dinámica cero

Como se observa, se tiene un sistema de ecuaciones no lineales del cual es muy complicado hacer alguna conclusión acerca de la estabilidad del mismo. Por lo tanto es útil en este caso estudiar la estabilidad de la dinámica cero alrededor del origen, esto es

$$\eta_1 \approx 0,$$

$$\eta_2 \approx 0,$$

$$\eta_3 \approx 0.$$

Entonces se procede a obtener una expresión linealizada de la dinámica cero no lineal en (5.31).

Tomando en cuenta que

$$\cos(\eta_2) \approx 1, \quad (5.32)$$

$$\sin(\eta_2) \approx \eta_2, \quad (5.33)$$

y eliminando los términos cuadráticos en η_1 y η_2 se obtienen las siguientes expresiones linealizadas de algunos elementos de la dinámica del péndulo de Furuta

$$G_1 = \frac{g_{z1}}{g_{z1} + g_{z2}} = \frac{\theta_4}{\theta_4 - \theta_3 \cos(q_2)} \approx \frac{\theta_4}{\theta_4 - \theta_3}, \quad (5.34)$$

$$G_2 = \frac{g_{z2}}{g_{z1} + g_{z2}} = \frac{-\theta_3 \cos(q_2)}{\theta_4 - \theta_3 \cos(q_2)} \approx \frac{-\theta_3}{\theta_4 - \theta_3}, \quad (5.35)$$

$$\det(\mathbf{M}) = (\theta_1 + \theta_2 \sin^2(q_2))\theta_4 - \theta_3^2 \cos^2(q_2) \approx \theta_1 \theta_4 - \theta_3^2, \quad (5.36)$$

$$f_{z1} \approx (\theta_4 \theta_6 \dot{\eta}_1 + \theta_3 \theta_5 \eta_2 - \theta_3 \theta_7 \dot{\eta}_2) \det(\mathbf{M})^{-1}, \quad (5.37)$$

$$f_{z2} \approx -(\theta_3 \theta_6 \dot{\eta}_1 - \theta_1 \theta_5 \eta_2 + \theta_1 \theta_7 \dot{\eta}_2) \det(\mathbf{M})^{-1}, \quad (5.38)$$

y con base a las expresiones anteriores, se definen los siguientes parámetros linealizados

$$G_{10} = \frac{-\theta_4}{\theta_4 - \theta_3} > 0, \quad (5.39)$$

$$G_{20} = \frac{-\theta_3}{\theta_4 - \theta_3} > 0, \quad (5.40)$$

$$D_m = (\theta_1\theta_4 - \theta_3^2)^{-1} > 0. \quad (5.41)$$

Para el caso de regulación, se tiene que $e_1 = -q_1$ y $e_2 = -q_2$, y por consecuencia

$$f_{z_{10}} = D_m\theta_4\theta_6\dot{\eta}_1 + D_m\theta_3\theta_5\eta_2 - D_m\theta_3\theta_7\dot{\eta}_2, \quad (5.42)$$

$$f_{z_{20}} = -D_m\theta_3\theta_6\dot{\eta}_1 - D_m\theta_1\theta_5\eta_2 + D_m\theta_1\theta_7\dot{\eta}_2. \quad (5.43)$$

Con las expresiones lineales definidas en (5.39)-(5.41), es posible obtener la siguiente expresión linealizada de la dinámica cero para el péndulo de Furuta

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 G_{10}\eta_1 + \Delta_2 G_{10}\eta_2 + G_{10}\eta_3 \\ -\Delta_1 G_{20}\eta_1 - \Delta_2 G_{20}\eta_2 - G_{10}\eta_3 \\ -\frac{\theta_3}{\theta_4} f_{z_{10}} - f_{z_{20}} \end{bmatrix}, \quad (5.44)$$

sustituyendo las definiciones de $f_{z_{10}}$ y $f_{z_{20}}$ en (5.42) y (5.43) respectivamente, la dinámica cero es expresada como

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 G_{10}\eta_1 + \Delta_2 G_{10}\eta_2 + G_{10}\eta_3 \\ -\Delta_1 G_{20}\eta_1 - \Delta_2 G_{20}\eta_2 - G_{10}\eta_3 \\ D_m D_p \theta_7 \Delta_1 G_{20}\eta_1 + D_m D_p \theta_5 \eta_2 + D_m D_p \theta_7 \Delta_2 G_{20}\eta_2 + D_m D_p \theta_7 G_{10}\eta_3 \end{bmatrix}. \quad (5.45)$$

Finalmente es posible expresar (5.45) en la forma clásica de un sistema lineal, esto es

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}, \quad (5.46)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Delta_1 G_{10} & \Delta_2 G_{10} & G_{10} \\ -\Delta_1 G_{20} & -\Delta_2 G_{20} & -G_{10} \\ D_m D_p \theta_7 \Delta_1 G_{20} & D_m D_p \theta_5 + D_m D_p \theta_7 \Delta_2 G_{20} & D_m D_p \theta_7 G_{10} \end{bmatrix},$$

con

$$D_p = \left(\theta_1 - \frac{\theta_3^2}{\theta_4}\right) > 0.$$

Análisis de estabilidad

La expresión en (5.46) es una forma linealizada de la dinámica cero para el péndulo de Furuta, de donde es posible hacer conclusiones acerca de la estabilidad de la dinámica cero del sistema. Es posible aplicar el criterio de Routh-Hurwitz para el análisis de las trayectorias de los estados de la dinámica cero. Para esto, es necesario obtener el polinomio característico del sistema, esto es

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}), \quad (5.47)$$

donde las raíces $\lambda_{1,2,\dots,n}$ son los valores propios de \mathbf{A} .

Tomando en cuenta que

$$G_{20} - G_{10} = 1,$$

se tiene que el polinomio característico es

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= -\lambda^3 + (\Delta_1 G_{10} - \Delta_2 G_{20} + D_m D_p \theta_7 G_{10}) \lambda^2 \\ &+ (D_m D_p \theta_7 G_{10} \Delta_1 - D_m D_p \theta_5 G_{10}) \lambda - D_m D_p \theta_5 G_{10} \Delta_1, \end{aligned} \quad (5.48)$$

con el cual es posible construir la tabla de Routh para determinar cuantas raíces se encuentran en la mitad derecha del plano complejo. La tabla de Routh resultante construida a partir del polinomio característico (5.48) es

$$\begin{array}{c|ccc} \lambda^3 & a_3 & a_1 & 0 \\ \lambda^2 & a_2 & a_0 & 0 \\ \lambda^1 & b_1 & 0 & 0 \\ \lambda & c_1 & 0 & 0 \end{array}$$

donde

$$a_3 = -1,$$

$$a_2 = \Delta_1 G_{10} - \Delta_2 G_{20} + D_m D_p \theta_7 G_{10},$$

$$a_1 = D_m D_p \theta_7 G_{10} \Delta_1 - D_m D_p \theta_5 G_{10},$$

$$a_0 = -D_m D_p \theta_5 G_{10} \Delta_1,$$

$$b_1 = \frac{(\Delta_1 G_{10} - \Delta_2 G_{20} + D_m D_p \theta_7 G_{10})(D_m D_p \theta_7 G_{10} \Delta_1 - D_m D_p \theta_5 G_{10}) - D_m D_p \theta_5 G_{10} \Delta_1}{\Delta_1 G_{10} - \Delta_2 G_{20} + D_m D_p \theta_7 G_{10}},$$

$$c_1 = -D_m D_p \theta_5 G_{10} \Delta_1.$$

La obtención de cada uno de los elementos que conforman la tabla de Routh, es detallada en la descripción del criterio de Routh-Hurwitz que se presentó en los preliminares matemáticos del capítulo 2.

De acuerdo al criterio de Routh-Hurwitz, el número de cambios de signo en los elementos de la primera columna de la tabla (columna izquierda), es igual al número de raíces que se encuentran al lado derecho del plano complejo.

Es claro que los elementos a_3 y c_1 son negativos, entonces es necesario que los elementos a_2 y b_1 también lo sean, por lo que se requiere determinar si existen condiciones en las ganancias de control Δ_1 y Δ_2 que permitan asegurar que los elementos a_2 y b_1 sean negativos.

De a_2 se obtiene que

$$\Delta_2 > \kappa_1(\Delta_1) = \frac{\Delta_1 G_{10} + D_m D_p \theta_7 G_{10}}{G_{20}}, \quad (5.49)$$

y respecto a b_1 se tiene

$$\Delta_2 > \kappa_2(\Delta_1) = \frac{G_{10} \theta_7 \Delta_1^2 + (D_m D_p G_{10} \theta_7^2 - G_{10} \theta_5 - \theta_5) \Delta_1 - D_m D_p G_{10} \theta_5 \theta_7}{G_{20} \theta_7 \Delta_1 - G_{20} \theta_5}. \quad (5.50)$$

Es fácil probar que $\kappa_2(\Delta_1)$ acota superiormente a $\kappa_1(\Delta_1)$ (ver Fig. 5.1), es decir, que $\kappa_2(\Delta_1)$ es una condición dominante sobre $\kappa_1(\Delta_1)$, por lo cual si (5.50) es satisfecha, entonces (5.49) también se satisface, esto es,

$$\kappa_2(\Delta_1) > \kappa_1(\Delta_1) \quad \forall \Delta_1 \in \mathbb{R}^+. \quad (5.51)$$

Por lo tanto se tiene que al cumplir la condición (5.50) se asegura que la linealización de la dinámica cero del péndulo de Furuta es estable, esto es, que la dinámica cero no lineal es estable en una región suficientemente cercana al origen del espacio de estados.

En la figura 5.1 se pueden observar todo el conjunto de ganancias de control $[\Delta_1, \Delta_2]$ en los cuales la dinámica cero es estable. Específicamente, toda la región por encima de κ_2 produce una dinámica cero estable.

Con el fin de comprobar la validez de la condición (5.50) y de ilustrar como afectan las variaciones de la ganancia de control Δ_2 en la estabilidad de la dinámica cero, en la figura 5.2 se muestra la gráfica del lugar de las raíces para $\Delta_1 = 5$ y variaciones de Δ_2 que van de 3 hasta 8 con pasos de 0.05. Adicionalmente, se muestran en azul las raíces para valores de $\Delta_2 < \kappa_2(\Delta_1)$ y en rojo las raíces para valores de $\Delta_2 > \kappa_2(\Delta_1)$.

Como se puede ver en la figura 5.2, sólo cuando $\Delta_2 > \kappa_2(\Delta_1)$ se tienen todas las raíces del sistema en el semiplano izquierdo del plano complejo, esto es, la dinámica cero es

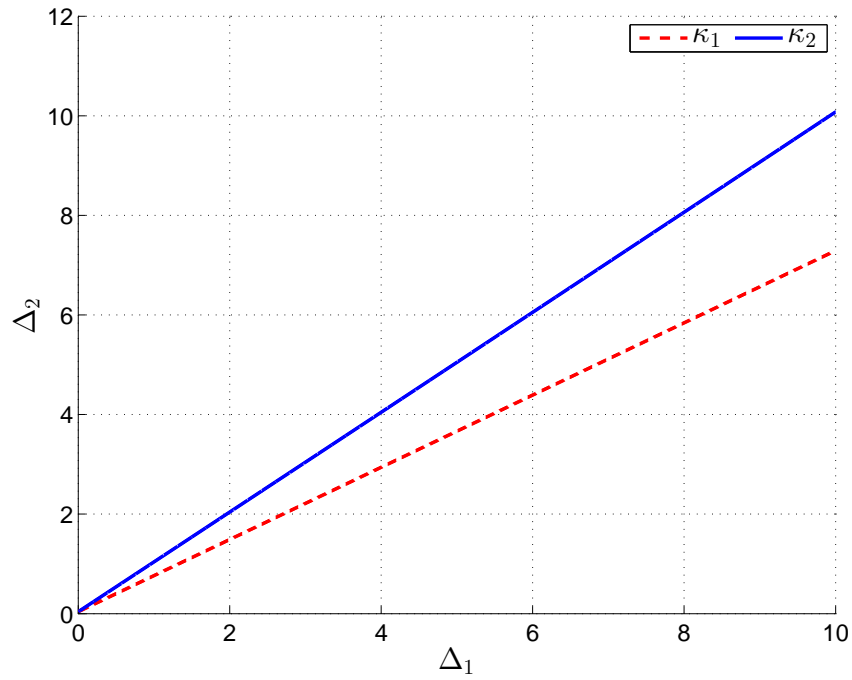


Figura 5.1: Gráfica de las condiciones $\kappa_1(\Delta_1)$ y $\kappa_2(\Delta_1)$ para $0 \leq \Delta_1 \leq 10$. Se ilustra el dominio de la condición $\kappa_2(\Delta_1)$ sobre $\kappa_1(\Delta_1)$.

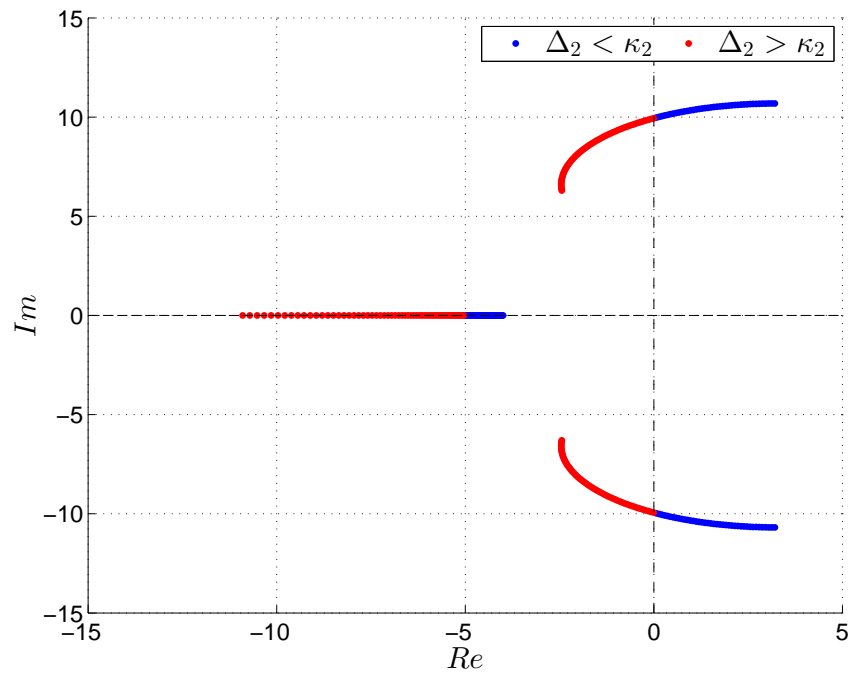


Figura 5.2: Lugar de las raíces del polinomio característico $P(\lambda)$ en (5.48) para $\Delta_1 = 5$ y $3 \leq \Delta_2 \leq 8$.

estable. Para obtener más detalles sobre la gráfica del lugar de las raíces que se muestra en la figura 5.2, consultar el apéndice B.

Dado que la matriz A en (5.46), la cual describe el comportamiento de las trayectorias de la dinámica cero $\boldsymbol{\eta}(t)$, es una matriz Hurwitz; se concluye que las trayectorias de la dinámica cero son asintóticamente estables de forma local, con una tasa de convergencia exponencial.

Definición 5.2 (Fase mínima asintótica (exponencial) local) *Se dice que el sistema no lineal (5.5)-(5.6) es de **fase mínima asintótica (exponencial) local** si la dinámica cero del sistema tiene un punto de equilibrio asintóticamente (exponencialmente) estable de forma local. En particular, si el origen es el punto de equilibrio de interés, entonces se dice que el sistema es de fase mínima si el origen de la dinámica cero es asintóticamente (exponencialmente) estable de forma local [10], [11], [12].*

Es posible extender la definición 5.2 a una forma global, simplemente sustituyendo el término “local” por el término “global”.

Por lo tanto, de acuerdo con la definición 5.2, se tiene que para el caso de regulación de posición, donde la trayectoria deseada $q_{d1}(t)$ es igual a una constante, el sistema (5.5)-(5.6) es de fase mínima exponencial en una región suficientemente cercana al origen del espacio de estados.

Dado que el origen del espacio de estados del sistema (5.12), que define la dinámica de $y(t)$, es asintóticamente estable, y la dinámica cero en (5.31) tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable de forma local, se tiene que, de acuerdo con el teorema 6.3, página 252 en [11], el origen del espacio de estados del sistema de lazo cerrado (5.5) y (5.10), con $q_{d1}(t)$ igual a una constante, es asintóticamente estable en forma local.

5.2.2. Dinámica cero en el caso de seguimiento de trayectoria

Se procede con el análisis de la dinámica cero en seguimiento de trayectoria, donde se considera que $q_{d1}(t)$ es una función suave y diferenciable dos veces, por lo tanto se tiene que $\dot{q}_{d1}(t)$ y $\ddot{q}_{d1}(t)$ son funciones del tiempo, pudiendo tomar valores arbitrarios pero satisfacen la hipótesis de acotamiento

$$|\dot{q}_{d1}(t)|, |\ddot{q}_{d1}(t)| \leq \alpha, \quad \forall t \geq 0.$$

Entonces, usando el vector de transformación \boldsymbol{z} en (5.21), tomando las definiciones de \ddot{e}_1 y \ddot{e}_2 de la dinámica de error en lazo abierto (5.28) y sustituyendo en la dinámica cero no

lineal en (5.26) se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta_1 G_1 \eta_1 - \Delta_2 G_1 \eta_2 - G_1 \eta_3 \\ -\Delta_1 G_2 \eta_1 - \Delta_2 G_2 \eta_2 + G_1 \eta_3 \\ \frac{\theta_3}{\theta_4} \cos(\eta_2) \ddot{q}_{d1} - \frac{\theta_3}{\theta_4} \cos(\eta_2) f_{z1} - \frac{\theta_3}{\theta_4} \sin(\eta_2) \dot{\eta}_1 \dot{\eta}_2 - f_{z2} \end{bmatrix}. \quad (5.52)$$

La expresión en (5.52) representa la dinámica cero no lineal para el caso variante con el tiempo.

Linealización de la dinámica cero

Procediendo de manera similar como en el caso de regulación, se puede obtener una expresión linealizada de la dinámica cero (5.52). Entonces, usando las expresiones linealizadas de la dinámica del péndulo de Furuta en (5.39)-(5.41), se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 G_{10} \eta_1 + \Delta_2 G_{10} \eta_2 + G_{10} \eta_3 \\ -\Delta_1 G_{20} \eta_1 - \Delta_2 G_{20} \eta_2 - G_{10} \eta_3 \\ \frac{\theta_3}{\theta_4} \ddot{q}_{d1} - \frac{\theta_3}{\theta_4} f_{z10} - f_{z20} \end{bmatrix}, \quad (5.53)$$

y considerando que los parámetros linealizados f_{z10} y f_{z20} para el caso de seguimiento de trayectorias quedan definidos como

$$f_{z10} = D_m \theta_4 \theta_6 \dot{\eta}_1 - D_m \theta_4 \theta_6 \dot{q}_{d1} + D_m \theta_2 \theta_3 \eta_2 \dot{q}_{d1}^2 + D_m \theta_3 \theta_5 \eta_2 - D_m \theta_3 \theta_7 \dot{\eta}_2, \quad (5.54)$$

$$f_{z20} = -D_m \theta_3 \theta_6 \dot{\eta}_1 + D_m \theta_3 \theta_6 \dot{q}_{d1} - D_m \theta_1 \theta_2 \eta_2 \dot{q}_{d1}^2 - D_m \theta_1 \theta_5 \eta_2 + D_m \theta_1 \theta_7 \dot{\eta}_2, \quad (5.55)$$

se tiene que la expresión linealizada de la dinámica cero del péndulo de Furuta en el caso de seguimiento de trayectorias queda definida como

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 G_{10} \eta_1 + \Delta_2 G_{10} \eta_2 + G_{10} \eta_3 \\ -\Delta_1 G_{20} \eta_1 - \Delta_2 G_{20} \eta_2 - G_{10} \eta_3 \\ D_m D_p \theta_7 \Delta_1 G_{20} \eta_1 + D_m D_p \theta_5 \eta_2 + D_m D_p \theta_7 \Delta_2 G_{20} \eta_2 + D_m D_p \theta_7 G_{10} \eta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\theta_3}{\theta_4} \ddot{q}_{d1} + D_m D_p \theta_2 \eta_2 \dot{q}_{d1}^2 \end{bmatrix}. \quad (5.56)$$

La expresión en (5.56) es una versión lineal de la dinámica cero en (5.52) y, como se puede ver, es similar a la expresión lineal de la dinámica cero en (5.45) para el caso de regulación, para el cual ya se demostró estabilidad usando el criterio de Routh-Hurwitz,

sujeto a que la condición (5.50) sea satisfecha.

Análisis de estabilidad

Se tiene que la dinámica cero no lineal del péndulo de Furuta puede ser expresada como

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{w}_1(0, \boldsymbol{\eta}) + \mathbf{w}_2(t, 0, \boldsymbol{\eta}), \quad (5.57)$$

donde $\mathbf{w}_1(0, \boldsymbol{\eta})$ es la dinámica cero no lineal en el caso invariante con el tiempo en (5.31), y $\mathbf{w}_2(t, 0, \boldsymbol{\eta})$ son las perturbaciones debidas al seguimiento de la trayectoria deseada $q_{d1}(t)$. Por ejemplo, para el caso de la dinámica cero lineal del péndulo de Furuta en (5.56), la versión lineal de \mathbf{w}_2 está dada por

$$B(t, \boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\theta_3}{\theta_4} \ddot{q}_{d1} + D_m D_p \theta_2 \eta_2 \dot{q}_{d1}^2 \end{bmatrix}, \quad (5.58)$$

pero en general, para el caso del péndulo de Furuta, el vector \mathbf{w}_2 tiene la forma

$$\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1(\boldsymbol{\eta}) \ddot{q}_{d1} + b_2(\boldsymbol{\eta}) \dot{q}_{d1} + b_3(\boldsymbol{\eta}) \dot{q}_{d1}^2 \end{bmatrix}, \quad (5.59)$$

donde $b_1(\boldsymbol{\eta})$, $b_2(\boldsymbol{\eta})$ y $b_3(\boldsymbol{\eta})$ son funciones que dependen del vector de estados $\boldsymbol{\eta}$.

Nótese que si la trayectoria deseada q_{d1} es constante, se tiene que tanto \mathbf{w}_2 en (5.59) como su versión lineal B en (5.58) es igual a cero, entonces sólo la expresión de la dinámica cero para el caso de regulación permanece en (5.57) y en (5.56) respectivamente. Es importante destacar la siguiente propiedad para \mathbf{w}_2

Propiedad 5.1 Sea $\mathbf{w}_2(t, 0, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^3$ definido como en (5.59), entonces

$$\|\mathbf{w}_2(t, 0, \boldsymbol{\eta})\| \leq \mu_1 + \mu_2 \|\boldsymbol{\eta}\|, \quad \forall \|\boldsymbol{\eta}\| \leq r_0 \text{ y } t \geq 0,$$

donde $\ddot{q}_{d1}(t)$, $\dot{q}_{d1}(t)$ y $q_{d1}(t)$ son acotadas.

Con el fin de proceder con el análisis, se reescribe (5.57) de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{A} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{w}_2(t, 0, \boldsymbol{\eta}) + [\mathbf{w}_1(0, \boldsymbol{\eta}) - \mathbf{A} \boldsymbol{\eta}], \quad (5.60)$$

donde

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{w}_1(0, \boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right|_{\boldsymbol{\eta}=0}, \quad (5.61)$$

y se define

$$\boldsymbol{\Psi}(t, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{w}_1(0, \boldsymbol{\eta}) - \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}. \quad (5.62)$$

como las perturbaciones debidas a la dinámica despreciada por la linealización.

Nótese que $\boldsymbol{\Psi}(t, 0) = 0$ y que la matriz \mathbf{A} es constante; de hecho, \mathbf{A} está definida como en (5.46).

Usando el teorema del valor medio para $\boldsymbol{\Psi}(t, \boldsymbol{\eta})$, se tiene

$$\boldsymbol{\Psi}(t, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\Psi}(t, \mathbf{y}) = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}(t, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{c}[\mathbf{x}-\mathbf{y}]}, \quad (5.63)$$

y suponiendo $\mathbf{y} = 0$ se tiene

$$\|\boldsymbol{\Psi}(t, \mathbf{x})\| = \left\| \left. \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}(t, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{c}[\mathbf{x}]} \right\| \leq c_0 \|\mathbf{x}\|, \quad (5.64)$$

con

$$c_0 = \max_{\forall \mathbf{z} \in B_r} \left\| \left. \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}(t, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right\|, \quad (5.65)$$

y

$$B_r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| \leq r\}. \quad (5.66)$$

Se propone la función definida positiva

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}, \quad (5.67)$$

donde \mathbf{P} satisface la ecuación de Lyapunov

$$\frac{1}{2} [\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}] = -\mathbf{Q}, \quad (5.68)$$

para \mathbf{A} definido como (5.61), la cual se sabe que es una matriz Hurwitz.

Teorema 5.1 *Una matriz \mathbf{A} es Hurwitz, sí y sólo sí, para cualquier matriz simétrica positiva definida \mathbf{Q} existe una matriz simétrica positiva definida \mathbf{P} que satisface la ecuación de Lyapunov (5.68). Además, si \mathbf{A} es Hurwitz, entonces \mathbf{P} es la única solución de (5.68) [10].*

Por lo tanto, de acuerdo con el teorema 5.1, \mathbf{P} existe y además, es la única solución de (5.68).

La derivada temporal de V está dada por

$$\dot{V} = \boldsymbol{\eta}^T \left[\frac{1}{2} [\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}] \right] \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P} \mathbf{w}_2 + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\Psi}, \quad (5.69)$$

$$= -\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P} \mathbf{w}_2 + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\Psi}, \quad (5.70)$$

$$\leq -\lambda_{\min}\{\mathbf{Q}\} \|\boldsymbol{\eta}\|^2 + \|\mathbf{P}\| \|\mathbf{w}_2\| \|\boldsymbol{\eta}\| + \|\mathbf{P}\| \|\boldsymbol{\eta}\| \|\boldsymbol{\Psi}\|, \quad (5.71)$$

entonces, para $\boldsymbol{\eta} \in B_r$ se tiene

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}\{\mathbf{Q}\} \|\boldsymbol{\eta}\|^2 + \mu_1 \|\mathbf{P}\| \|\boldsymbol{\eta}\| + \mu_2 \|\mathbf{P}\| \|\boldsymbol{\eta}\|^2 + \|\mathbf{P}\| \|\boldsymbol{\eta}\| c_0 \|\boldsymbol{\eta}\|, \quad (5.72)$$

$$\leq -[\lambda_{\min}\{\mathbf{Q}\} \|\boldsymbol{\eta}\| - \mu_1 \|\mathbf{P}\|] \|\boldsymbol{\eta}\| + \mu_2 \|\mathbf{P}\| \|\boldsymbol{\eta}\|^2 + c_0 \|\mathbf{P}\| \|\boldsymbol{\eta}\|^2, \quad (5.73)$$

finalmente

$$\dot{V} \leq -[[\lambda_{\min}\{\mathbf{Q}\} - c_0 \|\mathbf{P}\| - \mu_2 \|\mathbf{P}\|] \|\boldsymbol{\eta}\| - \mu_1 \|\mathbf{P}\|] \|\boldsymbol{\eta}\| < 0, \quad (5.74)$$

para todo

$$\|\boldsymbol{\eta}\| > \frac{\mu_1 \|\mathbf{P}\|}{\lambda_{\min}\{\mathbf{Q}\} - c_0 \|\mathbf{P}\| - \mu_2 \|\mathbf{P}\|}. \quad (5.75)$$

De acuerdo con el lema 9.2, página 347 en [10], hay condiciones suficientes para asegurar que las trayectorias $\boldsymbol{\eta}(t)$ de la dinámica cero son acotadas últimamente uniformemente con cota final.

Nótese que el caso más general, en el que $q_{d1}(t)$ es variante con el tiempo, el sistema que define la dinámica cero en (5.52) no tiene equilibrio.

Dado que el origen del espacio de estados del sistema (5.12) es asintóticamente estable, y las soluciones de la dinámica cero $\boldsymbol{\eta}(t)$ son acotadas últimamente uniformemente con cota final, es posible demostrar siguiendo la prueba del teorema 6.3, página 252 en [11] que las trayectorias $[e_1(t) \ e_2(t) \ \dot{e}_1(t) \ \dot{e}_2(t)]^T$ del sistema de lazo cerrado (5.5) y (5.10), son acotadas últimamente uniformemente con cota final.

Ganancia	Valor
Δ_1	5.0
Δ_2	8.0
K_p	10.0

Tabla 5.1: Ganancias de control utilizadas en simulación y experimento para el controlador en (5.10).

5.3. Resultados experimentales y numéricos

En esta sección se presentan los resultados de la implementación en tiempo real del controlador propuesto (5.10), así como las simulaciones numéricas del mismo. En primer lugar se presentan los resultados de los experimentos de regulación realizados, es decir, cuando la posición deseada del brazo es un trayectoria constante invariante con el tiempo.

Posteriormente en esta misma sección, se presentan los resultados para el caso de seguimiento de trayectoria del brazo, por lo que se propone un señal variante con el tiempo para la posición deseada del brazo. Los valores numéricos de los parámetros θ_i usados, son los presentados en el capítulo 3.

Las condiciones iniciales del sistema en ambos experimentos fueron

$$\begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ [rad]},$$

y

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ [rad/s]}.$$

La ganancias de control concernientes a la función de salida y en (5.6) y el controlador en (5.10) se presentan en la Tabla 5.1. Estas ganancias fueron usadas tanto para el experimento de regulación de posición como para el experimento de seguimiento de trayectoria.

5.3.1. Resultados en el caso de regulación de posición

Para los experimentos de regulación de posición se seleccionó una posición deseada

$$q_{d1} = 0.5 \text{ [rad]}.$$

Los resultados numéricos y experimentales son mostrados en las figuras 5.3-5.6. En particular, la Figura 5.3 muestra la evolución temporal de $q_1(t)$, y la figura 5.4 representa

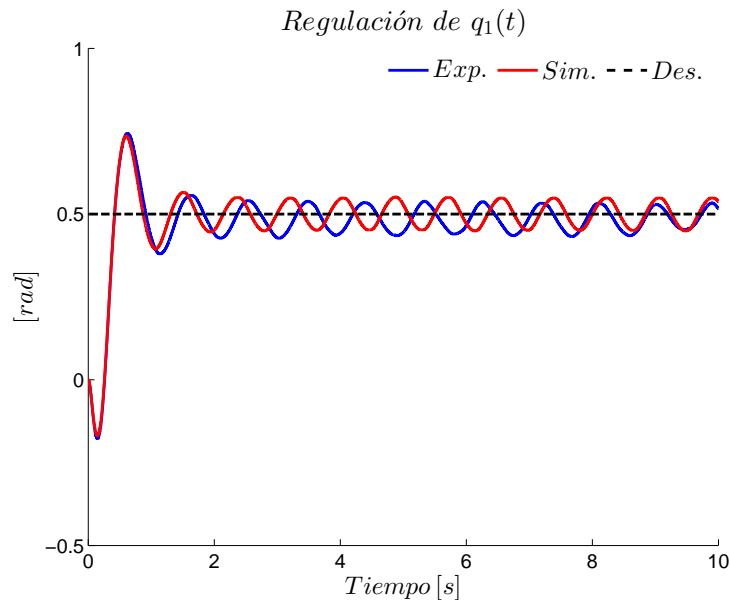


Figura 5.3: Regulación de posición: Evolución temporal de $q_1(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (5.10).

la evolución temporal de $q_2(t)$. La acción de control $\tau(t)$ aplicada y la función de salida $y(t)$ son observados en las figuras 5.5 y 5.6, respectivamente.

5.3.2. Resultados en el caso de seguimiento de trayectoria

En el caso de seguimiento de trayectoria, la trayectoria deseada para la posición del brazo fue definida como

$$q_{d1}(t) = 1.0 \sin(t) \text{ [rad]}.$$

Los resultados numéricos y experimentales son mostrados en las figuras 5.7-5.10. En particular, la figura 5.7 muestra la evolución temporal de $q_{d1}(t)$ y $q_1(t)$, y la figura 5.8 representa la evolución temporal de $q_2(t)$. La acción de control $\tau(t)$ aplicada y la función de salida $y(t)$ son observados en las figuras 5.9 y 5.10, respectivamente.

Como se observa en las figuras 5.7-5.10, los resultados experimentales y las simulaciones son muy similares, lo que muestra que los parámetros identificados θ_i son relativamente precisos.

La acción de control $\tau(t)$ obtenida tanto en simulación como experimentos tiene componentes de alta frecuencia. Esto se atribuye a las interrupciones de la modulación por ancho de pulso (PWM por sus siglas en inglés) del servo-amplificador y a la estimación

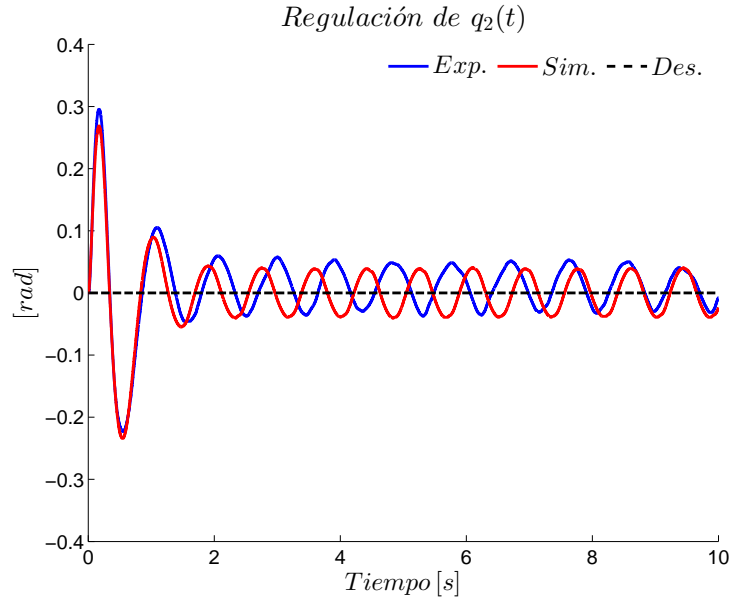


Figura 5.4: Regulación de posición: Evolución temporal de $q_2(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (5.10).

de velocidad la cual es obtenida usando el algoritmo ruidoso de derivación [23]

$$\dot{\mathbf{q}}(Tk) \approx \frac{\mathbf{q}(Tk) - \mathbf{q}(T[k-1])}{T}, \quad (5.76)$$

con el periodo de muestreo $T = 0.001$ [s] y k el índice entero de tiempo.

Respecto a la función de salida $y(t)$ en (5.6) mostrada en la figura 5.10, aunque la teoría demuestra la convergencia exponencial de $y(t)$, se observa un comportamiento oscilatorio con componentes de alta frecuencia. Es importante mencionar que la función de salida $y(t)$ depende de la velocidad angular $\dot{\mathbf{q}}(t) \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto se tiene que el ruido y el comportamiento oscilatorio de $y(t)$ se debe principalmente a que la velocidad angular $\dot{\mathbf{q}}(t)$ es estimada mediante el algoritmo ruidoso de derivación (5.76). Por otro lado, el alto valor relativo de las ganancias de control Δ_1 y Δ_2 en la Tabla 5.1, respectivamente, amplifica este ruido que también es observado en la acción de control en la figura 5.9.

La convergencia exponencial de la señal $y(t)$ fue corroborada por medio de simulaciones numéricas, simulaciones en tiempo continuo del controlador y usando medidas de posición y velocidad angular no cuantizadas.

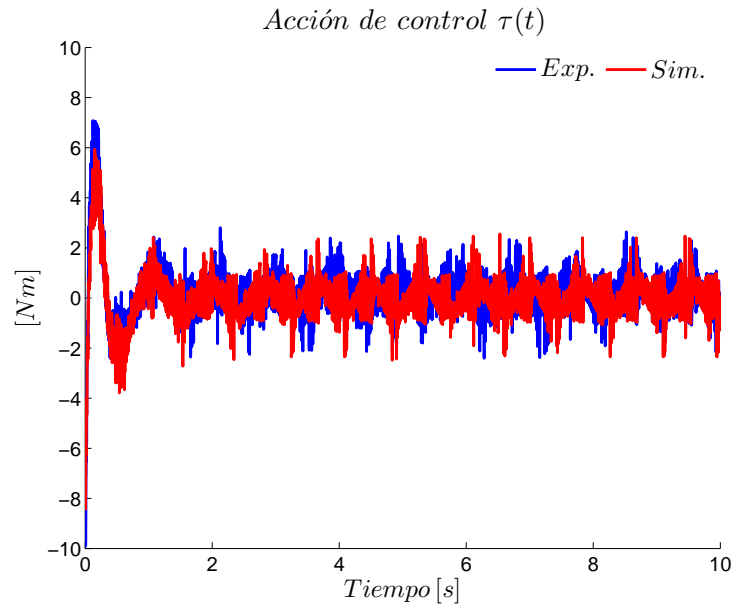


Figura 5.5: Regulación de posición: Acción de control $\tau(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (5.10).

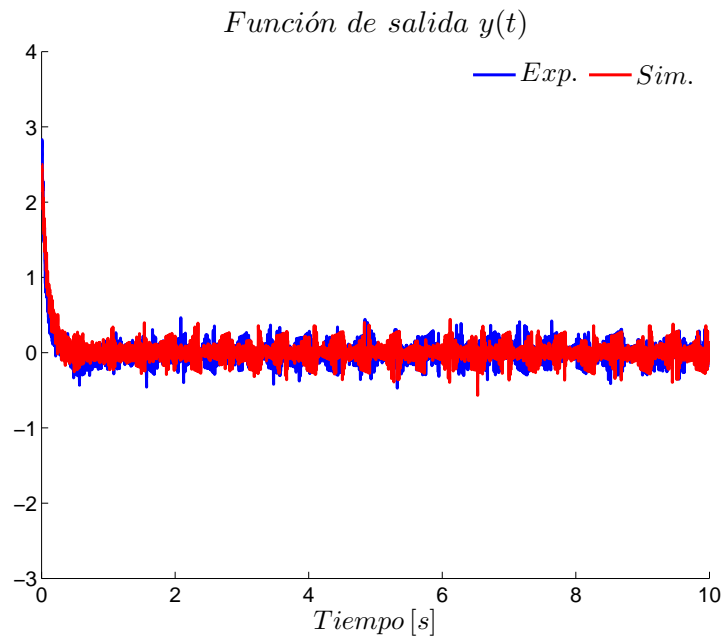


Figura 5.6: Regulación de posición: Evolución temporal de la función de salida $y(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (5.10).

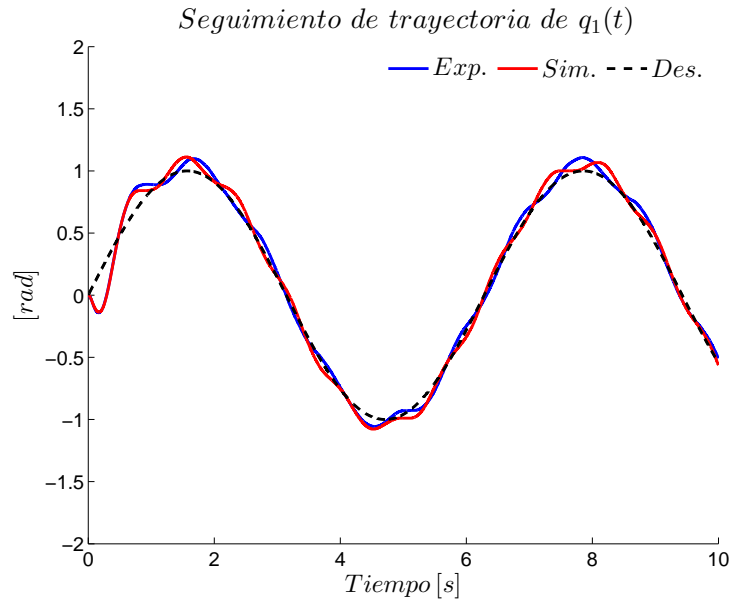


Figura 5.7: Seguimiento de trayectoria: Evolución temporal de $q_d(t)$ y $q_{d1}(t)$ obtenidas en simulación y experimento al aplicar el controlador en (5.10).

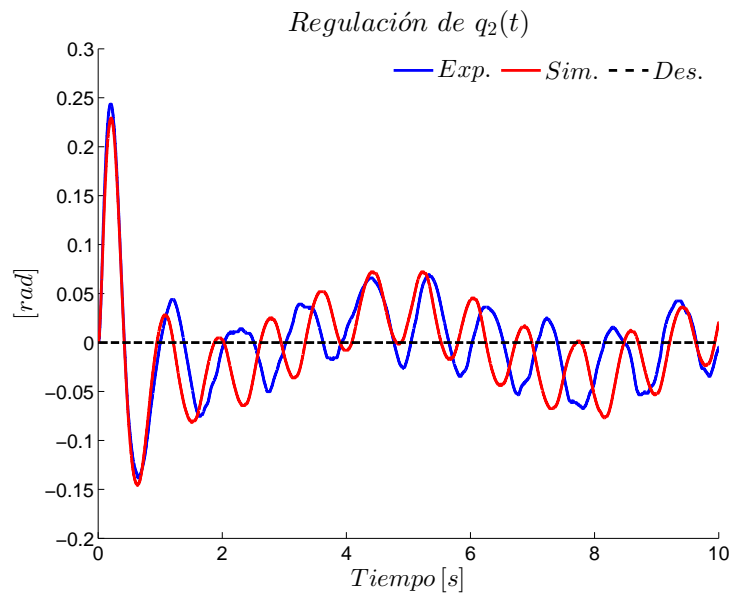


Figura 5.8: Seguimiento de trayectoria: Evolución temporal de $q_2(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (5.10).

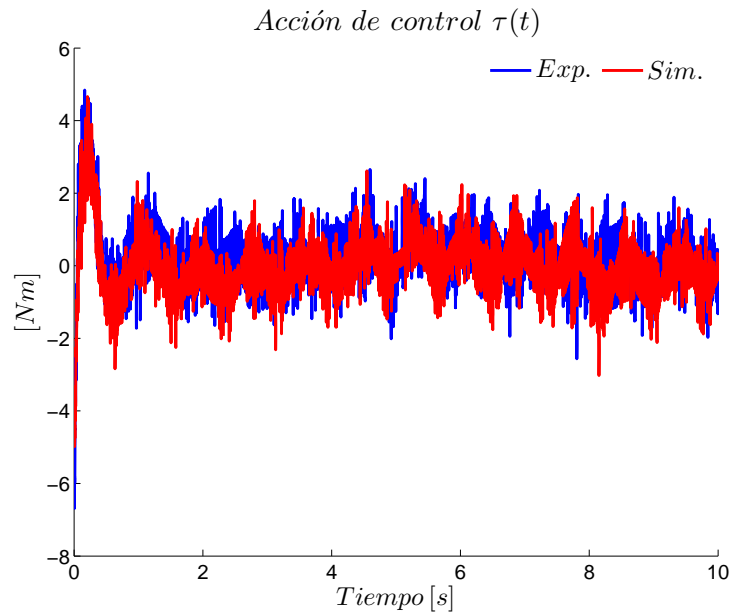


Figura 5.9: Seguimiento de trayectoria: Acción de control $\tau(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (5.10).

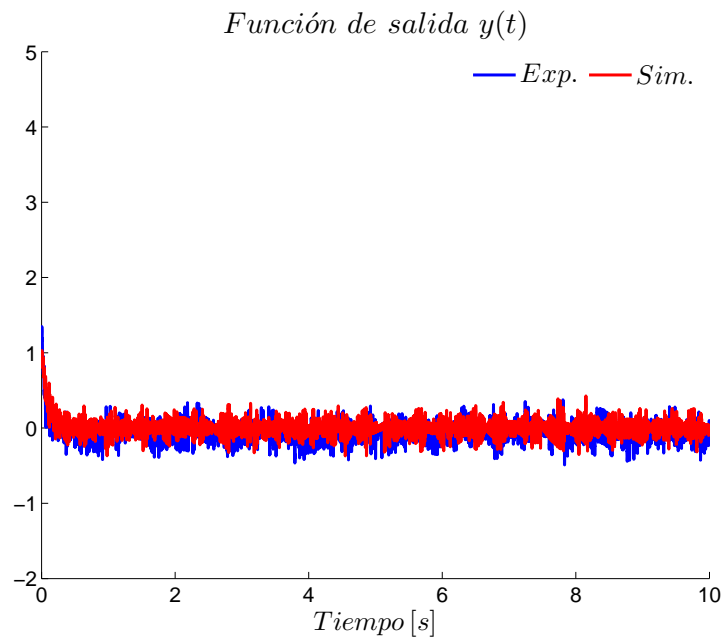


Figura 5.10: Seguimiento de trayectoria: Evolución temporal de la función de salida $y(t)$ obtenida en simulación y experimento al aplicar el controlador en (5.10).

Capítulo 6

Evaluación de desempeño

En este capítulo se realizará una evaluación de desempeño, en donde son considerados el controlador de seguimiento de salida (OTC) presentado en el capítulo 4, y el controlador basado en linealización por retroalimentación (FLC), propuesto en el capítulo 5. En donde se consideraran los resultados experimentales obtenidos para el caso de seguimiento de trayectorias, presentados en el respectivo capítulo de cada uno de los controladores evaluados.

6.1. Índices basados en la magnitud del error y la acción de control

Con el propósito de realizar la evaluación del desempeño de ambos controladores presentados, en esta sección se hará uso de la raíz cuadrática media (RMS) del error de posición y la entrada de control, así como el valor absoluto promedio (AAV) de estas mismas señales.

El valor RMS es una noción clásica del tamaño de una señal, ampliamente usado en muchas áreas de la ingeniería, ya que es menos afectado que otras normas por grandes pero infrecuentes valores de la señal. Por otro lado, la medida que toma menos en cuenta los valores grandes de una señal es el valor absoluto promedio, esta medida es especialmente útil en la medición del promedio de combustible, o en general, el promedio de recursos usados [18].

Procediendo con la evaluación, en la figura 6.1 se presenta la comparativa del error de seguimiento de trayectoria del brazo, para ambos controladores, donde solo se muestran resultados experimentales. De la misma forma, en la figura 6.2 se presenta el error de regulación del péndulo para ambos controladores. Finalmente, en la figura 6.3 se presenta

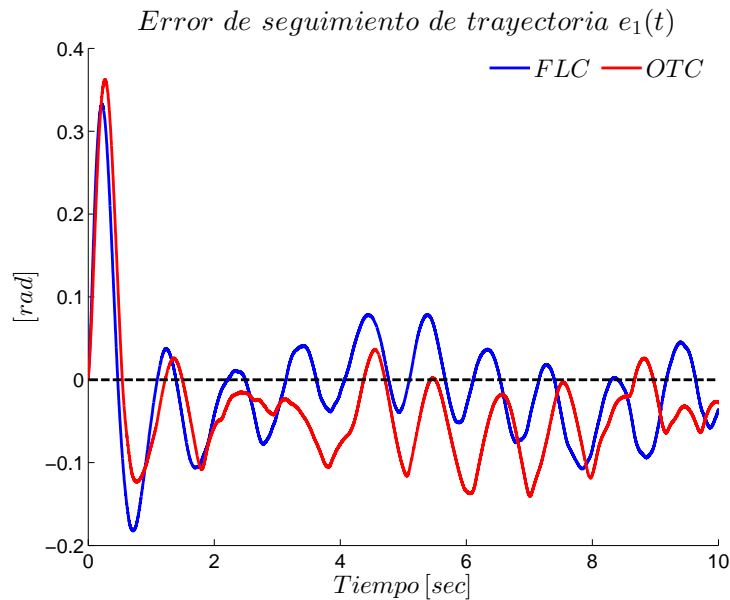


Figura 6.1: Comparativa experimental: Evolución temporal del error de posición del brazo $e_1(t)$ para los controladores FLC y OTC en el experimento de seguimiento de trayectorias.

Index	FLC	OTC
$\ e_1(t)\ _{rms}$ [rad]	0.0516	0.0679
$\ e_2(t)\ _{rms}$ [rad]	0.0350	0.0324
$\ \tau(t)\ _{rms}$ [Nm]	0.6567	0.4854

Tabla 6.1: Comparativa de los valores RMS de error de posición y torque de los controladores FLC y OTC para $5 \leq t \leq 10$.

la comparativa de las señales de control aplicadas por los controladores presentados.

Para una mejor interpretación de la información presentada en las figuras 6.1, 6.2 y 6.3; en la tabla 6.1 se muestra la comparativa de los valores RMS de los errores de posición para ambos controladores, así como el valor RMS de la acción de control aplicada. Para calcular el valor RMS de las señales mostradas en la tabla 6.1, el intervalo de tiempo que se consideró fue $5 \leq t \leq 10$, esto con el propósito de eliminar la respuesta transitoria del sistema y sólo analizar el error en estado estacionario. De manera similar, en la Tabla 6.1 se presenta la comparativa de los valores absolutos promedio para las señales de error de posición y torque aplicado, en este mismo intervalo de tiempo.

A pesar de que en la comparativa de los controladores presentados no se muestran resultados concluyentes a cerca de una importante mejora en el desempeño de un controlador con respecto del otro, es importante resaltar que con el fin de obtener una mejor comparativa, se agregaron los términos correspondientes a la compensación de fricción en

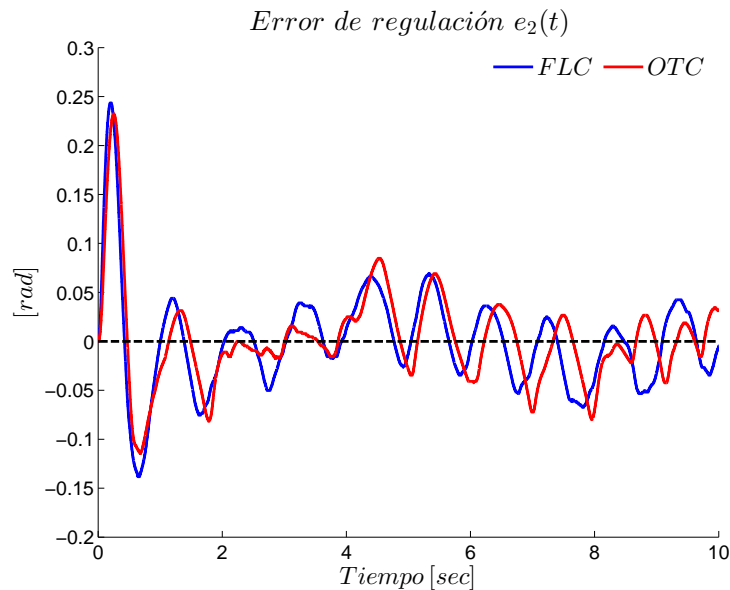


Figura 6.2: Comparativa experimental: Evolución temporal del error de posición del péndulo $e_2(t)$ para los controladores FCL y OTC en el experimento de seguimiento de trayectorias.

Index	FLC	OTC
$\ e_1(t)\ _{aa}$ [rad]	0.0426	0.0556
$\ e_2(t)\ _{aa}$ [rad]	0.0296	0.0264
$\ \tau(t)\ _{aa}$ [Nm]	0.5255	0.3873

Tabla 6.2: Comparativa de los valores AAV de error de posición y torque de los controladores FLC y OTC para $5 \leq t \leq 10$.

el controlador OTC, lo cual se tiene como contribución de este trabajo.

También es conveniente mencionar que en la implementación del controlador OTC, se presentaron algunos problemas con la repetitividad del experimento. Por ejemplo, en algunas ejecuciones del experimento se obtenían desempeños comparables con los presentados anteriormente. Sin embargo, en otras ejecuciones del experimento se obtenían desempeños muy pobres, nada comparable con lo presentado. Dicho problema se presentaba de forma aleatoria. Sin embargo, este tipo de comportamiento no fue tan evidente en el controlador FLC propuesto.

Para obtener más detalles acerca de como fueron calculados los valores RMS y AAV puede consultar el apéndice C, en donde se muestra el código m para calcular los índices mostrados en las tablas 6.1 y 6.1.

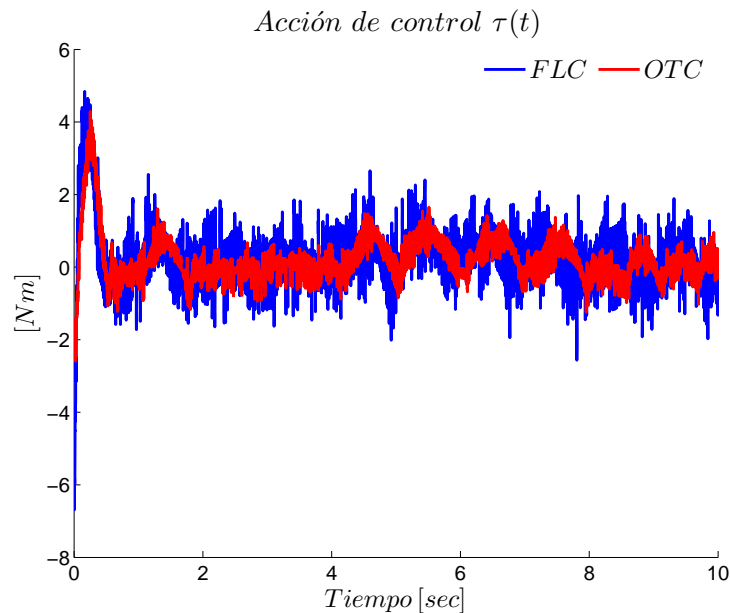


Figura 6.3: Comparativa experimental: Evolución temporal de la acción de control $\tau(t)$ aplicada por los controladores FCL y OTC en el experimento de seguimiento de trayectorias.

6.2. Índices basados en energía

En esta sección se abordan algunos índices de evaluación de los efectos no lineales durante el movimiento del péndulo de Furuta, pero en general estos índices son válidos para cualquier sistema multi-cuerpo rígido, como robots manipuladores. Estos índices son presentados en [25], y están basados en la energía cinética del sistema. Surgen del análisis de las ecuaciones de movimiento expresadas en términos de las semi-velocidades inerciales (IQV, del inglés *Inertial Quasi-Velocities*). Con estos índices es posible detectar la deformación de la velocidad articular como consecuencia del movimiento del manipulador, la energía cinética resultante del acoplamiento dinámico, y la energía transferida por cada articulación individualmente.

El objetivo del cálculo de estos índices es determinar la influencia de los acoplamientos en el comportamiento del manipulador, y de esta forma es posible usar esta información en la etapa de diseño para el análisis y reducción de los efectos no lineales en el movimiento.

6.2.1. Dinámica en términos del vector de semi-velocidades inerciales

Todos los índices de evaluación que se presentarán se basan en la energía cinética total del sistema, y son obtenidos de las ecuaciones dinámicas del péndulo de Furuta

presentadas en el capítulo 3 y una versión diagonal de la matriz de inercia obtenida a partir de la propuesta de una matriz de transformación. La descomposición de la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ lleva a la expresión de las ecuaciones dinámicas del péndulo de Furuta en términos del vector de IQV en lugar del vector de velocidades $\dot{\mathbf{q}}$.

De acuerdo con [25], el vector IQV se puede obtener mediante la proposición de la matriz de transformación

$$\Upsilon(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-\theta_3 \cos(q_2)}{\theta_1 + \theta_2 \sin^2(q_2)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

En general, la matriz de transformación $\Upsilon(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz triangular, invertible, con unos en la diagonal principal y es congruente con la matriz de inercia original del sistema. Para más detalles en la obtención de la matriz $\Upsilon(\mathbf{q})$ consultar [26] y [27].

Se tiene entonces que

$$\mathbf{v} = \Upsilon^{-1} \dot{\mathbf{q}}, \quad (6.2)$$

donde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de IQV y $\dot{\mathbf{q}}$ es el vector de velocidades angulares del péndulo de Furuta.

Finalmente se tiene

$$N(\mathbf{q}) = \Upsilon^T M(\mathbf{q}) \Upsilon, \quad (6.3)$$

donde $N(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal de configuración dependiente que es congruente con la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$, la cual queda explícitamente dada por

$$N(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 \sin^2(q_2) & 0 \\ 0 & \frac{-\theta_3 \cos(q_2)}{\theta_1 + \theta_2 \sin^2(q_2)} + \theta_4 \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

6.2.2. Índice de la tasa de variación

El índice de la tasa de variación (IRV del inglés *Index of Rate Variation*) se basa en el historial de tiempo del IQV en la k -ésima articulación. Usando este índice se determina la influencia de los parámetros mecánicos para la realización de trayectoria de la velocidad articular.

De acuerdo con [25] el IRV se define como

$$i_{RVk} = (v_k - \dot{q}_k)^2, \quad i_{RV} = \sum_{k=1}^n (v_k - \dot{q}_k)^2, \quad (6.5)$$

para cada articulación y para el sistema total, respectivamente.

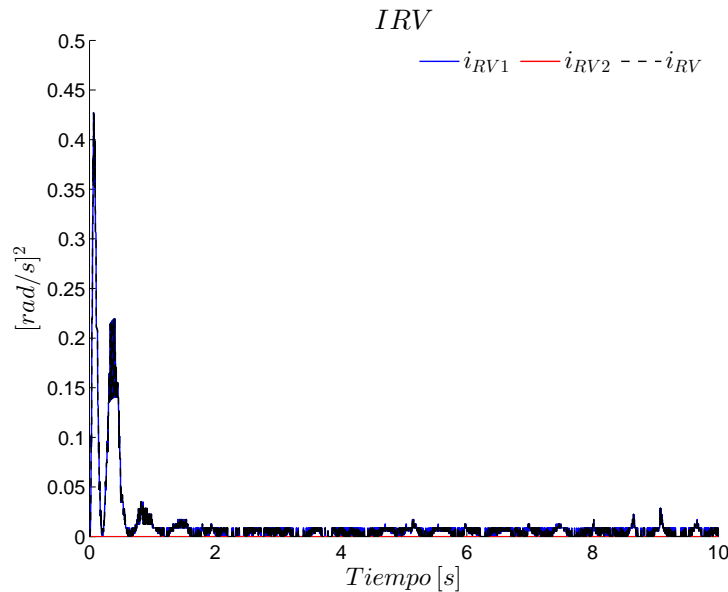


Figura 6.4: Índices basados en energía: Valores del índice i_{RV} de cada articulación y del sistema total, obtenidos en el experimento de seguimiento de trayectorias.

En la figura 6.4 se muestra los valores de este índice para el péndulo de Furuta durante el experimento de seguimiento de trayectorias presentado en el capítulo 5.

La diferencia $(v_k - \dot{q}_k)$ describe la deformación del k -ésimo perfil de velocidad articular como resultado del acoplamiento mecánico existente en el sistema. Por lo tanto, i_{RVk} refleja la influencia del acoplamiento entre los elementos de la matriz $M(\mathbf{q})$ para la k -ésima velocidad. Si la diferencia entre ambas cantidades es cero, entonces la k -ésima velocidad articular está desacoplada de las otras velocidades. Por el contrario, grandes valores del i_{RVk} llevan a la conclusión de que tanto las velocidades como las articulaciones están fuertemente acopladas [25].

De acuerdo con los resultados mostrados en la figura 6.4, la primera articulación del péndulo de Furuta (el brazo) está fuertemente influenciada por el acoplamiento mecánico del sistema, ya que se observan valores relativamente altos del índice i_{RV1} . De hecho, la magnitud del índice i_{RV} para el péndulo de Furuta está dada en su totalidad por el acoplamiento del brazo, ya que la segunda articulación (el péndulo) está desacoplada de las otras velocidades, dado que se tiene un valor nulo del índice i_{RV2} .

6.2.3. Índice de energía cinética de los acoplamientos

El índice de energía cinética de los acoplamientos (IKC del inglés *Index of Kinetic Energy of Couplings*) determina cuanta energía cinética está relacionada con el acoplamiento

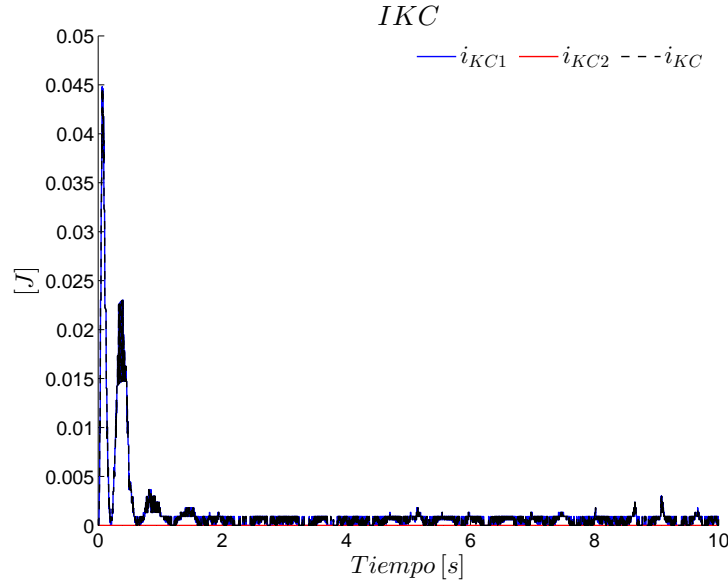


Figura 6.5: Índices basados en energía: Valores del índice i_{KC} de cada articulación y del sistema total, obtenidos en el experimento de seguimiento de trayectorias.

dinámico de las articulaciones. No sólo se toma en cuenta la deformación de la velocidad articular, si no que también se toma en cuenta la inercia rotacional con respecto a la k -ésima unión articular.

El índice IKC está definido para cada articulación y para el sistema total como

$$i_{KCk} = \frac{1}{2} N_k (v_k - \dot{q}_k)^2, \quad i_{KC} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n N_k (v_k - \dot{q}_k)^2, \quad (6.6)$$

donde N_k indica el k -ésimo elemento de la matriz diagonal N definida en (6.4).

En la figura 6.5 se muestran los valores de este índice para el péndulo de Furuta durante el experimento de seguimiento de trayectorias presentado en el capítulo 5.

Se puede decir que este índice permite detectar la energía cinética que surge del acoplamiento entre todos los cuerpos unidos. Acoplamientos fuertes causan que mas energía cinética sea transferida mientras que el sistema realiza la tarea deseada. Por lo cual, valores grandes de i_{KCk} e i_{KC} indican que los acoplamientos entre el sistema son significativos [25].

De acuerdo con lo mostrado en la figura 6.5, se tiene que la primera articulación del péndulo de Furuta es altamente afectada por la transferencia de energía cinética del sistema, ya que se observan valores relativamente altos del índice i_{KC1} . La segunda articulación se ve poco afectada por la transferencia de energía cinética en el sistema, dado que se tiene un valor nulo del índice i_{KC2} . Estos resultados son congruentes con los

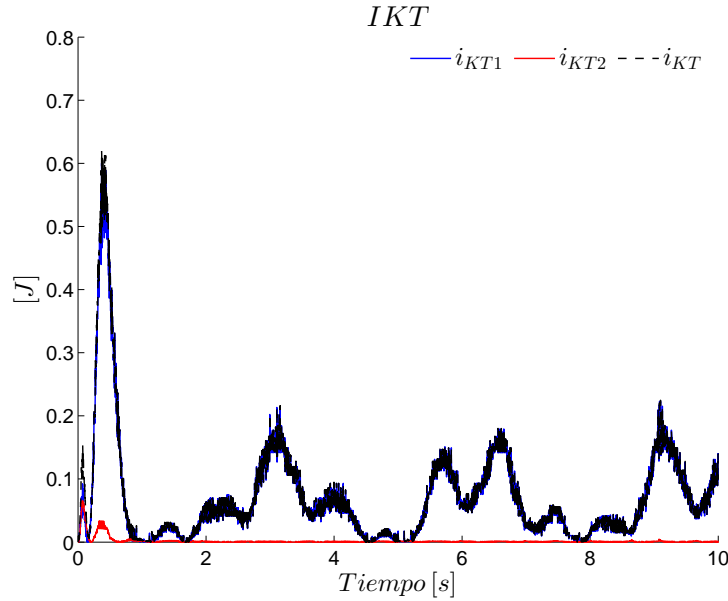


Figura 6.6: Índices basados en energía: Valores del índice i_{KT} de cada articulación y del sistema total, obtenidos en el experimento de seguimiento de trayectorias.

obtenidos para el índice IRV analizado anteriormente.

6.2.4. Índice de energía cinética transferida

El índice de energía cinética transferida (IKT del inglés *Index of Kinetic Energy Transfer*) es interesante ya que ayuda a determinar cuanta energía cinética es “reducida” por cada articulación.

En [25] se propone y define el índice IKT como

$$i_{KCk} = \frac{1}{2} N_k v_k^2, \quad i_{KC} = K, \quad (6.7)$$

para cada articulación y para el sistema total, respectivamente.

En la figura 6.6 se muestra los valores del índice IKT para el péndulo de Furuta durante el experimento de seguimiento de trayectorias presentado en el capítulo 5.

Este índice está relacionado con el consumo de energía cinética durante el movimiento del sistema. Valores pequeños en este índice indican que menos energía cinética ha de ser transferida por la k -ésima articulación. Por el contrario, un valor grande lleva a la conclusión de que se necesita más energía cinética para que el sistema realice su tarea [25].

De lo mostrado en la figura 6.6, se puede concluir que la mayor parte de la energía

cinética presente cuando el sistema realiza la tarea de seguimiento de trayectorias, es reducida por el brazo, esto por los valores relativamente altos del índice i_{KT1} comparados con los valores del índice i_{KT2} , correspondiente a la energía reducida por el péndulo en la misma tarea. Estos resultados son congruentes con la tarea de seguimiento de trayectorias realizada por el sistema, ya que el brazo es quien está siguiendo una trayectoria deseada variante con el tiempo, mientras que el péndulo trata de mantener una posición constante en el origen.

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo de tesis se ha presentado el procedimiento de diseño e implementación de un nuevo esquema de control, el cual se basa en la técnica de linealización por retroalimentación, desarrollado a partir de la proposición de una función de salida novedosa. Este nuevo esquema de control fue aplicado exitosamente al péndulo de Furuta; tanto para resolver el problema de regulación de posición, como para el problema de seguimiento de trayectorias. En el procedimiento de diseño del controlador, se ha considerado la presencia de los componentes de fricción viscosa y fricción de Coulomb en el modelo dinámico.

Para el péndulo de Furuta, se ha obtenido la expresión de la dinámica cero de acuerdo a la teoría reportada en literatura, así como el correspondiente análisis formal de estabilidad, en donde se ha probado la convergencia asintótica exponencial de las trayectorias de la dinámica cero para el caso de regulación de posición, concluyendo así que el sistema es de fase mínima local. También se prueba el acotamiento último uniforme de las trayectorias de la dinámica cero en el caso de seguimiento de trayectorias, concluyendo para este caso que el sistema es de fase mínima débil.

De la evaluación y comparativa experimental realizada, se tiene que el desempeño de este nuevo esquema de control propuesto es comparable con los esquemas ya reportados. Sin embargo las expresiones de la dinámica cero presentadas y analizadas en trabajos previos, no son obtenidas con base en la teoría disponible.

Finalmente se tiene que es posible extender la aplicación del esquema de control propuesto a otros sistemas experimentales, como el péndulo de rueda inercial, el sistema carro-péndulo, el acrobot y otros sistemas subactuados. También es posible llevar este esquema de control a una expresión generalizada con la cual sea posible la aplicación de este esquema de control a otros sistemas subactuados de más grados de libertad. Lo anteriormente mencionado se tiene como oportunidades de trabajo futuro.

Apéndice A

Publicaciones

- C. Aguilar-Avelar, Y. Quevedo-Pillado, J. Guzmán-Guemez y J. Moreno-Valenzuela. Control por modelo de referencia adaptable para un motor de CD con carga pendular. En memorias del *XIV Congreso Mexicano de Robótica*, 2012.
- C. Aguilar-Avelar y J. Moreno-Valenzuela. A control scheme for the tracking control of the Furuta pendulum. *Advances in Computing Science and Control*, Vol. 59, pp. 99-110, noviembre 2012.
- O. García-Alarcón, J. Moreno-Valenzuela, C. Aguilar-Avelar y S. Puga-Guzmán. A composite controller for the Furuta pendulum. *Elektronika ir Elektrotechnika*, sometido en febrero 18, 2013.
- C. Aguilar-Avelar y J. Moreno-Valenzuela. A feedback linearization controller for trajectory tracking of the Furuta pendulum. Sometido al *39th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, abril 18, 2013.

Apéndice B

Código *m* para generar la gráfica del lugar de las raíces

```
% Código para generar la gráfica del lugar de las raíces      %  
% para el polinomio característico  $P(\lambda)$  de la          %  
% linealización de la dinámica cero.                        %  
  
% Figura 5.2 en el documento de tesis.                      %  
% Modificado Mayo del 2013.                                  %  
  
% Parámetros del modelo dinámico del péndulo de Furuta.    %  
p1=0.20959;  
p2=0.04926;  
p3=0.06258;  
p4=0.04539;  
p5=1.71142;  
p6=0.08514;  
p7=0.00238;  
  
% Variables auxiliares definidas para la linealización      %  
% de la dinámica cero.                                      %  
G10=(-p4)/(p4-p3);  
G20=(-p3)/(p4-p3);  
Dm=1/(p1*p4-p3*p3);  
Dp=(p1-((p3*p3)/p4));
```

```

% Valor inicial de la ganancia de control \Delta_1.           %
D1=5;

% Variable auxiliar usada para graficar en diferentes         %
% colores las raíces.                                         %
C=0;

% Bucle utilizado para calcular los valores de las raíces    %
% del sistema, para variaciones de la ganancia de control    %
% \Delta_2, que van de 3.0 a 8.0 con incrementos de 0.05.    %

for D2=3:0.05:8
% Definición de la matriz que describe la dinámica cero     %
% lineal del sistema.                                         %
A=[[      D1*G10                D2*G10                G10      ]];
  [ -D1*G20                -D2*G20                -G10      ]];
  [Dm*Dp*p7*D1*G20  Dm*p5*Dp+Dm*Dp*p7*D2*G20  Dm*Dp*p7*G10 ]];

% Cálculo de los valores propios de la matriz A, que a su     %
% vez corresponden a las raíces del polinomio                 %
% característico P(\lambda).                                   %
Z=eig(A)

% Condición para cambiar el color de la línea en la gráfica  %
% cuando la ganancia de control \Delta_2 supere el valor de  %
% la condición \kappa(\Delta_1).                               %
if D2>5.047

C=C+1;                % Incremento de la variable auxiliar.   %
z1r(C)=real(Z(1));    % Se separa la parte real de la parte   %
z1i(C)=imag(Z(1));    % imaginaria de cada raíz del sistema.   %

z2r(C)=real(Z(2));    % Se separa la parte real de la parte   %
z2i(C)=imag(Z(2));    % imaginaria de cada raíz del sistema.   %

```

```

z3r(C)=real(Z(3)); % Se separa la parte real de la parte %
z3i(C)=imag(Z(3)); % imaginaria de cada raíz del sistema. %
else
C=C+1; % Incremento de la variable auxiliar. %
Z1r(C)=real(Z(1)); % Se separa la parte real de la parte %
Z1i(C)=imag(Z(1)); % imaginaria de cada raíz del sistema. %

Z2r(C)=real(Z(2)); % Se separa la parte real de la parte %
Z2i(C)=imag(Z(2)); % imaginaria de cada raíz del sistema. %

Z3r(C)=real(Z(3)); % Se separa la parte real de la parte %
Z3i(C)=imag(Z(3)); % imaginaria de cada raíz del sistema. %

    if D2==5.0 % Condición para reiniciar el valor de %
        C=0; % la variable auxiliar C, esto para que %
    end % las dimensiones de los vectores a %
end % graficar coincidan. %
end

% Vector de tiempo auxiliar para graficar la linea de %
% referencia horizontal. %
th=(-15:0.001:5-0.001)';
% Vector de tiempo auxiliar para graficar la linea de %
% referencia vertical. %
tv=(-15:0.001:15-0.001)';
% Vector con los valores de la linea de referencia %
% horizontal. %
ceroh=0*(-15:0.001:5-0.001)';
% Vector con los valores de la linea de referencia %
% vertical. %
cerov=0*(-15:0.001:15-0.001)';

% Definición de la figura a generar, que corresponde a la %
% gráfica del lugar de las raíces. %
% Declaración de la figura. %
f1 = figure(1);

```

```

% Comando para gráficas en la misma ventana. %
hold on
% Se grafican las raíces en diferentes colores. %
plot(Z1r,Z1i, '.', 'MarkerSize',12) %\lambda_1<\Delta_1 %
plot(z1r,z1i, '.r', 'MarkerSize',12) %\lambda_1>\Delta_1 %
plot(Z2r,Z2i, '.', 'MarkerSize',12) %\lambda_2<\Delta_1 %
plot(z2r,z2i, '.r', 'MarkerSize',12) %\lambda_2>\Delta_1 %
plot(Z3r,Z3i, '.', 'MarkerSize',12) %\lambda_3<\Delta_1 %
plot(z3r,z3i, '.r', 'MarkerSize',12) %\lambda_3>\Delta_1 %
% Se gráfica la referencia horizontal en cero. %
plot(th,ceroh, '—k', 'MarkerSize',10)
% Se gráfica la referencia vertical en cero. %
plot(cerov,tv, '—k', 'MarkerSize',10)
% Comando para mostrar una rejilla en la figura. %
grid on
% Etiqueta del eje vertical y sus propiedades. %
ylabel('$Im$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize',18,...
    'FontName', 'Times_New_Roman');
% Etiqueta del eje horizontal y sus propiedades. %
xlabel('$Re$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize',18,...
    'FontName', 'Times_New_Roman');
% Título o encabezado de la figura. Se dejó en blanco. %
title('_', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize',18);
% Declaración del cuadro de leyenda y sus propiedades. %
l = legend('$\Delta_2<\kappa_2$', '$\Delta_2>\kappa_2$', ...
    'Location', 'NorthEast', 'Orientation', 'horizontal');
% Impresión del cuadro de leyenda. %
set(l, 'Interpreter', 'latex', 'FontSize',18, 'FontName', ...
    'Times_New_Roman');
% Definición del tamaño de la letra para los números de los %
% ejes en la figura. %
set(gca, 'fontsize',14);
% Impresión de la figura en formato .EPS
print -fl -depsc roots.eps

```


Apéndice C

Código *m* para calcular los valores RMS y AAV en la evaluación de desempeño

```
% Código para calcular la norma RMS y AAV de los errores      %  
% de posición y de la acción de control aplicada por los      %  
% controladores FLC y OTC, para realizar la comparativa      %  
% presentada en el capítulo 6.                                %
```

```
% Tabla 6.1 en el documento de tesis.                        %  
% Modificado Mayo del 2013.                                  %
```

```
% Nota: Es necesario contar con los archivos de datos        %  
% "TrackSimExp74.mat" y "TrackYanSimExp84.mat", para          %  
% que el programa se ejecute correctamente.                 %
```

```
clc;                    % Se limpia el Command Window.      %  
clear all;             % Se borran los datos del Workspace.  %
```

```
% Se cargan los datos obtenidos experimentalmente.          %  
load TrackSimExp74.mat    % Datos del controlador FLC.      %  
load TrackYanSimExp84.mat % Datos del controlador OTC.      %
```

```

% Se declaran las variables auxiliares de tiempo, %
% considerando una ventana de 5.0 < t < 10.0, para eliminar %
% el transitorio. %
ini=5001; % Inicio de los datos a tomar en cuenta. %
fin=10000; % Fin de los datos a tomar en cuenta. %

% Se asignan los datos de error de seguimiento de %
% trayectoria, error de regulación y acción de control, %
% respectivamente, para el controlador FLC. %
error1FLC = qtildeExp.signals.values(ini:fin,1);
error2FLC = StateVarsExp.signals(1,2).values(ini:fin,1);
tauFLC = TauExp.signals.values(ini:fin,1);

% Se asignan los datos de error de seguimiento de %
% trayectoria, error de regulación y acción de control, %
% respectivamente, para el controlador OTC. %
error1OTC = -qtildePortExp.signals.values(ini:fin,1);
error2OTC = StateVarsPortExp.signals(1,2).values(ini:fin,1);
tauOTC = TauPortExp.signals.values(ini:fin,1);

% Calculo la norma RMS para el error de seguimiento de %
% trayectoria, error de regulación y acción de control, %
% respectivamente, para el controlador FLC. %
e1_FLC_rms=sqrt(mean(error1FLC.^2)) % Error de seguimiento. %
e2_FLC_rms=sqrt(mean(error2FLC.^2)) % Error de regulación. %
tau_FLC_rms=sqrt(mean(tauFLC.^2)) % Acción de control. %

% Calculo la norma RMS para el error de seguimiento de %
% trayectoria, error de regulación y acción de control, %
% respectivamente, para el controlador PTC. %
e1_OTC_rms=sqrt(mean(error1OTC.^2)) % Error de seguimiento. %
e2_OTC_rms=sqrt(mean(error2OTC.^2)) % Error de regulación. %
tau_OTC_rms= sqrt(mean(tauOTC.^2)) % Acción de control. %

```

```
% Calculo la norma AAV para el error de seguimiento de      %  
% trayectoria, error de regulación y acción de control,    %  
% respectivamente, para el controlador FLC.                %  
e1_FLC_aav=mean(abs(error1FLC))      % Error de seguimiento. %  
e2_FLC_aav=mean(abs(error2FLC))      % Error de regulación. %  
tau_FLC_aav=mean(abs(tauFLC))        % Acción de control.   %  
  
% Calculo la norma AAV para el error de seguimiento de      %  
% trayectoria, error de regulación y acción de control,    %  
% respectivamente, para el controlador OTC.                %  
e1_OTC_aav=mean(abs(error1OTC))      % Error de seguimiento. %  
e2_OTC_aav=mean(abs(error2OTC))      % Error de regulación. %  
tau_OTC_aav=mean(abs(tauOTC))        % Acción de control.   %
```

Referencias

- [1] I. Fantoni y R. Lozano. *Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems*. Springer-Verlag, Londres, 2002.
- [2] L. Sciavicco y B. Siciliano. *Modelling and Control of Robots Manipulator*. Springer-Verlag, Londres, 2000.
- [3] J. A. Acosta. Furuta's pendulum: A conservative nonlinear model for theory and practice. *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2010, pp. 1-29, 2010.
- [4] K. Furuta, M. Yamakita, y S. Kobayashi. Swing up control of inverted pendulum. En memorias del *1991 International Conf. on Industrial Electronics, Control and Instrumentation*, Vol.3, pp. 2193-2198, noviembre 1991.
- [5] K. Furuta, M. Yamakita, y S. Kobayashi. Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback. *Journal of Systems and Control Engineering*, Vol. 206, Núm. 4, pp. 263-269, 1992.
- [6] K. Furuta, M. Yamakita, y S. Kobayashi. VSS adaptive control based on nonlinear model for TITech pendulum. En memorias del *1992 International Conf. on Industrial Electronics, Control, Instrumentation and Automation*, Vol. 3, pp. 1488-1493, noviembre 1992.
- [7] M. W. Spong. Partial feedback linearization of underactuated mechanical systems. En memorias del *1994 IEEE/RSJ/GI International Conf. on Intelligent Robots and Systems*, Vol. 1, pp. 314-321, septiembre 1994.
- [8] O. García-Alarcón, J. Moreno-Valenzuela, C. Aguilar-Avelar, y S. Puga-Guzmán. A composite controller for the Furuta pendulum. *Elektronika ir Elektrotechnika*, sometido en febrero 18, 2013.
- [9] Y. C. Fu y J. S. Lin. Nonlinear backstepping control design of the furuta pendulum. En memorias del *2005 IEEE Conf. on Control Applications*, pp. 96-101, agosto 2005.

-
- [10] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1996.
- [11] J.-J. E. Slotine y W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1991.
- [12] S. Sastry. *Nonlinear Systems*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [13] J. A. Acosta y M. López-Martínez. Constructive feedback linearization of underactuated mechanical systems with 2-DOF. En memorias del *44th IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 4909-4914, diciembre 2005.
- [14] Q. Yan. Output tracking of underactuated rotary inverted pendulum by nonlinear controller. En memorias del *42nd IEEE Conf. on Decision and Control*, Vol. 3, pp. 2395-2400, diciembre 2003.
- [15] M. I. El-Hawwary, A. L. Elshafei, H. M. Emara, y H. A. Abdel Fattah. Adaptive fuzzy control of the inverted pendulum problem. *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, Vol. 14, Núm. 6, pp. 1135-144, 2006.
- [16] K. Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002.
- [17] R. C. Dorf y R. H. Bishop. *Modern Control Systems*. Pearson Education, Upper Saddle River, 2008.
- [18] S. Boyd y C. Barratt. *Linear Controller Design: Limits of Performance*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1991.
- [19] B. S. Cazzolato y Z. Prime. On the dynamics of the Furuta pendulum. *Journal of Control Science and Engineering*, Vol. 2011, pp. 8, 2011.
- [20] O. García-Alarcón, S. Puga-Guzmán, y J. Moreno-Valenzuela. On parameter identification of the Furuta pendulum. *Procedia Engineering*, Vol. 35, pp. 77-84, 2012.
- [21] P. Logothetis y J. Kieffer. On the identification of the robot dynamics without acceleration measurements. Reporte interno, Faculty of Engineering and Information Technology, Australian National University, disponible en <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.55.8716>, 1996.
- [22] M. Gautier y Ph. Poignet. Extended Kalman filtering and weighted least squares dynamic identification of robot. *Control Engineering Practice*, Vol. 9, Núm. 12, pp. 1361-1372, noviembre 2001.

-
- [23] R. Kelly, V. Santibáñez, y A. Loria. *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Springer-Verlag, Londres, 2005.
- [24] R. Lozano, B. Brogliato, O. Egeland, y B. Maschke. *Dissipative Systems Analysis and Control*. Springer-Verlag, Londres, 2000.
- [25] P. Herman. Energy-based indexes for manipulator dynamics improvement. *Journal of Intelligent and Robotics Systems*, Vol. 44, Núm. 4, pp. 313-325, diciembre 2005.
- [26] T. A. Loduha y B. Ravani. On first-order decoupling of equations of motion for constrained dynamical systems. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 62, Núm. 1, pp. 216-222, marzo 1995.
- [27] A. Meghdari y F. Fahimi. On the first-order decoupling of dynamical equations of motion for elastic multibody systems as applied to a two-link flexible manipulator. *Multibody System Dynamics*, Vol. 5, Núm. 1, pp. 1-20, febrero 2001.

Glosario

A

AAV Valor Absoluto Promedio, las siglas provienen del inglés *Average-Absolute Value*, p. 11.

C

CITEDI-IPN Centro de Investigación y Desarrollo de Tecnología Digital del Instituto Politécnico Nacional, p. 5.

F

FLC Controlador Basado en Linealización por Retroalimentación, las siglas provienen del inglés *Feedback Linearization Controller*, p. 54.

I

IKC Índice de Energía Cinética de los Acoplamientos, las siglas provienen del inglés *Index of Kinetic Energy of Couplings*, p. 59.

IKT Índice de Energía Cinética Transferida, las siglas provienen del inglés *Index of Kinetic Energy Transfer*, p. 61.

IQV Semi-Velocidades Inerciales, las siglas provienen del inglés *Inertial Quasi-Velocities*, p. 57.

IRV Índice de la Tasa de Variación, las siglas provienen del inglés *Index of Rate Variation*, p. 58.

O

OTC Controlador de Seguimiento de Salida, las siglas provienen del inglés *Output Tracking Controller*, p. 54.

P

PCI Bus de Interconexión de Componentes Periféricos, las siglas provienen del inglés *Peripheral Component Interconnect*, p. 18.

PWM Modulación por Ancho de Pulso, las siglas provienen del inglés *Pulse Wide Modulation*, p. 49.

R

RMS Raíz Cuadrática Media, las siglas provienen del inglés *Root Mean Square*, p. 5.