



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica Y Eléctrica
Unidad Zacatenco
Sección de Estudios de Posgrado e Investigación



**MODELACIÓN FRACTAL DE YACIMIENTOS FRACTURADOS
NATURALMENTE.**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA MECÁNICA.

PRESENTA:

ING. JONATHAN GUERRERO ESCOBAR

DIRECTOR DE TESIS: DR. ALEXANDER S. BALANKIN

México, 2014.

DEDICATORIA.

Dedico este trabajo a mi más grande ídolo, mi padre Félix Guerrero y a mi madre, Rosa Escobar por ser la mejor persona que conozco.

Gracias a ambos por permitirme ser, sin condiciones.

AGRADECIMIENTOS.

A mis hermanos Erika y Omar por su presencia y risa constante.

A María por siempre estar presente apoyándome.

A tía Socorro y tío Benito por su incondicional ayuda en este logro.

A mi compañero Víctor por su apoyo a esta empresa.

Al Dr. Alexander Balankin por su guía y su paciencia.

Al Dr. Orlando Susarrey por su apoyo a los alumnos.

A la Sra. Carmelita por su vigilancia incansable.

Contenido

RESUMEN.	i
ABSTRACT.	ii
Índice de figuras.	iii
Índice de tablas.	v
CAPÍTULO 1 MARCO CONTEXTUAL.	2
1.1 Introducción.	2
1.1.1 Antecedentes.	3
1.2 Problemática.	4
1.3 Objetivos.	5
1.4 Justificación.	5
1.5 Referencias.	6
CAPÍTULO 2. FRACTALES	7
2.1 Topología.	8
2.2 Dimensión topológica.	8
2.3 Fractal.	10
2.4 Dimensión fractal.	11
2.4.1 Dimensión de similitud.	12
2.4.2 Dimensión de Hausdorff	13
2.4.3 Dimensión del conteo de cajas.	17
2.4.4 Propiedades de las Dimensiones.	19
2.5 Estimación de la dimensión Fractal.	20
2.5.1 Imágenes Digitales.	21
2.5.2 Conjuntos de puntos.	22
2.6 Lagunaridad.	23
2.6 Referencias.	24
CAPÍTULO 3. YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS.	26
3.1 Masas rocosas.	27
3.2 Fractura.	28
3.2.1 Propiedades de una fractura.	28

3.3 Condiciones geológicas para la generación de fracturas.....	30
3.4 Asociación de fracturas.	30
3.4.1 Parámetros de multi-fracturas.	31
3.5 Evaluación directa de fracturas.....	32
3.5.1 Fracturas en afloramientos.....	32
3.5.2 Evaluación mediante núcleos.....	33
3.6 Propiedades físicas de las rocas.	33
3.6.1 Porosidad.	33
3.6.2 Doble porosidad.	34
3.6.3 Morfología de la fractura.	34
3.6.4 Permeabilidad.	35
3.6.5 Compresibilidad.....	37
3.7 Propiedades intrínsecas y ambientales de las rocas.	37
3.8 Geometría fractal y cuantificación de fracturas.....	38
3.8.1 Patrones en las rocas.....	38
3.8.2 Fractales en la naturaleza y sus propiedades.	39
3.8.3 Regímenes de escala.....	39
3.8.4 Inhomogeneidad.....	39
3.8.5 Anisotropía.	40
3.8.6 Métodos de Geometría fractal en fracturas.	40
3.8.7 Fractales y Geología.	42
3.9 Referencias.	42
CAPÍTULO 4. DESARROLLO DEL MODELO.....	44
4.1 Introducción.....	45
4.2 Modelo jerárquico de fracturas (carpeta de Sierpinski).	45
4.2.1 Patrón sintético de fracturas.....	45
4.3 Probabilidad de encontrar fracturas en una carpeta de Sierpinski.....	47
4.3.1 Carpeta de Sierpinski heterogénea.	47
4.4 Redes de yacimientos naturalmente fracturados.	54
4.4.1 Imágenes de redes de fractura.	54
4.5 Lagunaridad en las imágenes.....	58

4.5.1 Algoritmo de gliding box (caja deslizante)	59
4.5 Referencias.	61
CONCLUSIONES.....	62
Trabajo futuro.	65
ANEXOS.	66
Imágenes.	67
Tablas y Gráficos.	71
Comparación con $b = 3$ del modelo y las imágenes reales ajustadas.....	77
Lagunaridad.	79

RESUMEN.

En el presente trabajo se propone un modelo jerárquico alternativo de redes de fractura basado en geometría fractal para el estudio de imágenes de redes de fractura naturales que presentan diferentes longitudes, para lo cual, se construyó un patrón de fracturas basado en un fractal (carpeta de Sierpinski), y utilizando variables teóricas de los parámetros elementales para la generación de este patrón: La iteración i , El factor de escala b , y el número de bloques no iterados en cada paso n , obteniendo ecuaciones para un análisis comparativo de las redes de fractura. La distribución de fracturas no se encuentra de forma auto-similar generalmente, por esta razón se debe tomar en consideración las carpetas de Sierpinski heterogéneas, estas se distribuyen de diferente manera pero son caracterizadas también por la probabilidad de contener fracturas p_f que está descrita en función de las mismas variables teóricas que la dimensión fractal obteniendo así un sistema de ecuaciones fácil de resolver. Se analizó las redes de fractura a través de imágenes digitales, con el software Benoit [1] se obtuvo la dimensión fractal y con el software Jasc Paint Shop Pro 9 [2] se examinó la porosidad de fractura de la imagen para obtener la probabilidad de permanecer de la fractura y de esta forma empatar estas variables con las del modelo.

Los resultados obtenidos empleando el modelo propuesto son similares a las imágenes reales permitiendo usarlo como alternativa para la descripción de las redes de fractura como en los yacimientos naturalmente fracturados.

Se realizó también un estudio adicional de lagunaridad en las imágenes reales y del modelo como complemento para el análisis de comparación y aunque los resultados fueron diferentes entre sí en las texturas de las imágenes, se proponen utilizar como base para investigaciones futuras diversas.

ABSTRACT.

In this paper an alternative hierarchical network model based on fractal fracture geometry for the study of images of natural fracture networks having different lengths, for which, a pattern of fractures based on a fractal (Sierpinski carpet), and using the theoretical parameters of the basic variables to generate this pattern: iteration i , the scale factor b , and the number of blocks in each step not iterated n , obtaining equations for a comparative analysis of the networks fracture. The distribution of fractures is not so self-similar generally, therefore should be taken into account heterogeneous Sierpinski carpets, these are distributed differently but are also characterized by the probability of containing fractures p_f is described in terms of the same variables that the theoretical fractal dimension thus obtaining a system of equations easier to solve. Networks of fracture were analyzed via digital images, with software Benoit [1] fractal dimension was obtained and with software Jasc Paint Shop Pro 9 [2] porosity fracture image was examined to obtain the probability of remain fracture and thus tie these variables to the model.

The results obtained using the proposed model are similar to the actual images allowing use as an alternative for describing such fracture networks in naturally fractured reservoirs.

An additional study was also conducted in lacunarity in real images and the model as a complement to the analysis of comparison and although the results were different from each other in the textures of the images, they intend to use as the basis for several future research.

Índice de figuras.

Capítulo 2

FIGURA	PÁGINA
Figura 2.1. Conjunto de Cantor.	8
Figura 2.2. a) Línea recta; b) Línea rugosa.	9
Figura 2.3: a) línea b) una c) dos y d) varias iteraciones de la curva de Koch.	11
Figura 2.4: a) triángulo b) una c) dos y d) varias iteraciones del triángulo de Sierpinski.	11
Figura 2.5: a) Una longitud unitaria magnificada dos veces hará que el objeto magnificado este hecho de dos idénticos segmentos de líneas unitarias. b) Un cuadrado unitario magnificado dos veces, da como resultado cuatro cubos unitarios. c) Un cubo magnificado dos veces da como resultado ocho cubos unitarios.	12
Figura 2.6 Gráfica de $H^s(F)$ contra s para un conjunto F .	16
Figura 2.7 Medición de la dimensión de una curva por el método del conteo de cajas.	19
Figura 2.8 Pendiente de la grafica $\log N_\delta(F)$ y $-\log \delta$	20
Figura 2.9 Diferentes formas de encontrar la dimensión del conteo de cajas, a) conjunto, b) círculos cerrados de radio δ que cubren F , c) número mínimo de cajas de lado δ que cubren F , d) número de cubos de lado δ que intersecan F , e) número mínimo de conjuntos de diámetro de al menos δ que cubren F , y f) el número más grande de círculos abiertos de radio δ con centro en F .	21
Figura 2.10 Método del conteo de cajas para un fractal.	22
Figura 2.11 Carpetas de Sierpinski con la misma dimensión fractal.	23

Capítulo 3

FIGURA	PÁGINA
Figura 3.1 a) falla y b) unión o empalme.	28
Figura 3.2 Propiedades de la Fractura.	29
Figura 3.3 Núcleo de un yacimiento fracturado.	33
Figura 3.4 Porosidad: a) primaria y b) secundaria.	34
Figura 3.5 Matriz que contiene una fractura 1) paralela a la dirección del flujo, 2) con un ángulo θ respecto a la dirección del flujo.	36
Figura 3.6 Diferentes tipos de cuantificación de un patrón de fractura por varios métodos de geometría fractal.	41

Capítulo 4

FIGURA	PÁGINA
Figura 4.1 Construcción del patrón de fractura (fracturas en negro, sólidos en blanco), con $b = 3$, $n = 1$ y a) $i = 0$, b) $i = 1$, c) $i = 2$, d) $i = 3$, e) $i = 4$, f) $i = 5$.	46
Figura 4.2 Carpeta de Sierpinski heterogénea (fracturas en negro, sólidos en blanco).	48
Figura 4.3 Modelos resueltos de carpetas de Sierpinski homogéneas y heterogéneas (fracturas en negro, sólidos en blanco).	51
Figura 4.4 Gráfica de carpetas de Sierpinski con iteración $i = 4$.	54
Figura 4.5 Red de fracturas del cañón de Volfe, California.	56
Figura 4.6 Red de fracturas generada.	56
Figura 4.7 Gráfica de imágenes con iteración $i = 4$.	57
Figura 4.8 Gráfica de imágenes con iteración $i = 4$, $b = 3$ y ajustada.	58
Figura 4.9 Lagunaridad puntual de las imágenes y modelos.	60

Anexos

FIGURA	PÁGINA
Himalaya (Google earth fractals por Paul Bourke) 188 x 188 pixeles.	66
Jafari, Alireza. Babadagli, Tayfun. <i>Estimation of equivalent fracture network permeability using fractal and statistical network properties</i> . Journal of Petroleum Science and Engineering Vol. 92-93, pp 110-123. 2012. 263 x 263 pixeles.	67
Isla del Trocadero, España (Google earth fractals por Paul Bourke). 424 x 424 pixeles.	67
Lago Nasser, Egipto (Google earth fractals por Paul Bourke). 106 x 106 pixeles.	68
Mapa de Noruega, red de fractura Horlen basin (Ankur Roy, et al. <i>Lacunarity analysis of fracture networks: Evidence for scale-dependent clustering</i> . Journal of Structural Geology 32, 2010. 352 x 353 pixeles.	68
Red de fracturas de California (Tourcotte, Donald L. <i>Fractals and Chaos in Geology and Geophysics</i> . 2 nd edition, Cambridge University Press. 2007). 463 x 463 pixeles.	69
z1 afloramiento Cintalpa (OrionEarth). 476 x 476 pixeles.	69
z5 afloramiento Comitán (OrionEarth). 462 x 462 pixeles.	70

Índice de tablas.

Capítulo 4

TABLA	PÁGINA
Tabla 4.1 Carpetas de Sierpinski con iteración $i=4$.	52
Tabla 4.2 Imágenes de redes de fractura con iteración $i=4$.	57

Anexos

TABLA	PÁGINA
Tabla de modelos de carpetas de Sierpinski.	71
Tabla de datos de imágenes.	73
Tabla de datos ajustados	75

Referencias.

[1] **Benoit™** es un software de análisis fractal. Copyright © 1997-2012 TruSoft Int'l Inc. Todos los derechos reservados.

[2] Jasc Paint Shop Pro 9 es un software de edición de imágenes. Copyright ©2012 Corel Corporation. Todos los derechos reservados.

CAPÍTULO 1. MARCO CONTEXTUAL.

El arte de preguntar las cuestiones correctas en matemáticas es más importante que el arte de resolverlas.

Georg Cantor.

MARCO CONTEXTUAL.

1.1 Introducción.

Un yacimiento naturalmente fracturado es un yacimiento que contiene fracturas creadas por la naturaleza. Estas fracturas pueden tener efecto negativo o positivo en el flujo del fluido. Las fracturas abiertas parcialmente mineralizadas pueden tener un efecto positivo en el flujo de petróleo pero también pueden tener un efecto negativo en el flujo de agua o gas debido a efectos “raros”. Las fracturas naturales totalmente mineralizadas pueden crear barreras de permeabilidad a cualquier fluido. Este tipo de situaciones pueden generar pequeños compartimientos dentro de la reserva que nos pueden llevar a bajas recuperaciones económicas [1.1].

La fracturación, asociada a las propiedades mecánicas de la roca y los tipos de esfuerzo, ayuda en la evaluación de zonas altamente fracturadas. Esta evaluación se puede mejorar cuando se usa modelos matemáticos de simulación.

El asunto al estructurar de micro a mega escala (o viceversa) una roca de este tipo se presenta en forma de patrones de complejidad diferente. La mente humana está diseñada para reconocer patrones y hacer una comparación cualitativa de los mismos. Por otra parte hacer una cuantificación de los patrones parece más difícil.

Los patrones encontrados en los YNF (fracturas, fallas, uniones, porosidad, etc.) son considerados geométricos. Los patrones tienen un rango de escala que va desde micrómetros a kilómetros. La mayoría de la información sobre estos patrones está almacenada en sus propiedades geométricas, y en consecuencia, una estructura puede estar representada parcialmente (o en algunos casos totalmente) por un patrón.

Los YNF y sus patrones son siempre una expresión de los procesos por los cuales están formados o han sido cambiados. Por lo tanto, su análisis provee información valiosa sobre el proceso de formación y sus características físicas actuales.

Las estructuras de los yacimientos pueden ser muy simples y ser representadas por la geometría euclidiana, pero en la mayoría de los casos son tan complejas que no es factible. Durante las últimas décadas en todos los campos de las geociencias, los métodos de medición han sido refinados y la experimentación y modelación se volvieron parte significativa de la investigación. Pero la comparación

de la naturaleza con los resultados de la experimentación o la teoría y la modelación solo es efectiva si la estructura puede ser descrita de una forma precisa.

Complejas estructuras como los YNF tienen varios problemas y restricciones en su modelación. Con respecto a la cuantificación de sus patrones, la *geometría fractal* (Mandelbrot 1977) es la mejor opción. El método ofrece una alta efectividad en la cuantificación de la complejidad de las estructuras naturales y tiene un fuerte potencial para su futuro desarrollo [1.2]. Por otra parte la geometría fractal tiene restricciones que impiden el éxito de su aplicación y demanda un enfoque crítico para su uso.

1.1.1 Antecedentes.

La geometría fractal ha sido aplicada ampliamente para la cuantificación de estructuras complejas incluido los YNF. Las propiedades como el escalamiento se pueden cuantificar con el desarrollo de este método [1.3].

En geología estructural, el análisis de la distribución de frecuencia del espaciado de fracturas (fallas, uniones) ha sido una tradición. En muchos casos, esos análisis de conjuntos de datos llevan a distribuciones de leyes de potencia. Las fracturas llenas con diferentes fluidos y de diferentes ambientes han sido analizadas por varios autores [1.3].

La zona de falla y la apertura, la longitud y el desplazamiento de fallas de fractura obedecen leyes de potencia. Por otra parte el espacio entre las pequeñas fracturas puede mostrar una frecuencia de distribución logarítmica-normal y la geometría de las fallas puede no ser fractal.

La fractalidad de varias estructuras rocosas está relacionada con numerosas propiedades y condiciones de formación. El escalamiento de propiedades de uniones, fallas o fracturas está relacionado con varios parámetros: presión confinada, tensión, esfuerzo, intensidad del cortante, conectividad y percolación, fluido y flujo, y a la distribución de metales y depósitos minerales. La fractalidad de poro-espacio está correlacionada con las propiedades eléctricas de las rocas, así como con los procesos diagenéticos. Además la fractalidad de las estructuras de las rocas, como las redes de fractura o tamaño de partículas, es usada en varios estudios y modelos [1.3].

Los patrones de fractura pueden reflejar procesos de fragmentación, por ejemplo en el lento incremento del campo de esfuerzos. La relación de las leyes de potencia de una distribución de falla ha sido usada para predicción de fallas de subsistemas. De cualquier forma, si la relación de leyes de potencia de estructuras forma una base para el escalamiento de sus características geométricas, se necesita precaución donde las propiedades pueden diferir en el cambio de escala [1.3].

1.2 Problemática.

En México la mayor parte de la producción de hidrocarburos proviene de los Yacimientos Naturalmente Fracturados (YNF). La explotación de este tipo de yacimientos requiere de técnicas de explotación especiales con el fin de no alterar la formación del yacimiento. Existe una gran incertidumbre en cuanto a su modelado, lo cual no permite la implantación de programas adecuados de explotación. Principalmente, el problema del modelado de fracturas en los YNF tiene su origen en la complejidad de las estructuras geológicas y en los procesos de alteración que sufren las rocas.

Estas formaciones geológicas presentan una amplia gama de propiedades estructurales cuya descripción cuantitativa es una tarea fundamental para lograr una explotación sustentable y eficiente en la industria petrolera.

Históricamente, se han realizado ciertas inversiones en los YNF sin un conocimiento adecuado de los mismos, lo que ha redundado en recuperaciones limitadas de hidrocarburos, y como consecuencia en bajos resultados económicos. Se considera que el pobre conocimiento en estos pozos se debe principalmente a los siguientes hechos [1.4]:

Se posee un bajo conocimiento acerca del origen, evolución y geometrías de los sistemas de fracturas que caracterizan las rocas almacenadoras de los campos productores de hidrocarburos en México.

No se cuenta con un conocimiento detallado de los modelos de fractura en superficie bajo diferentes condiciones de disolución y su relación con las macro estructuras.

No se cuenta con una metodología ni con las herramientas adecuadas para manejar en forma precisa la información obtenida, ya sea directamente o indirectamente, de los YNF.

Tomando en cuenta los aspectos anteriores, se pueden obtener parámetros para desarrollar modelos para los YNF. Por lo que se deben incorporar herramientas de análisis, experimentación y modelación que permitan obtener un mejor conocimiento de los fenómenos que se presentan en la explotación de petróleo. Dentro de estas herramientas se pueden citar dos: la teoría de la percolación y la geometría fractal, con las cuales es posible obtener parámetros que nos conduzcan al desarrollo de modelos físicos.

1.3 Objetivos

General.

Generar un modelo matemático alternativo tomando como base la geometría fractal para un mejor análisis de los YNF.

Particulares.

Analizar sistemas naturalmente fracturados a diferentes escalas utilizando geometría fractal.

Asignar parámetros de fractura para una mejor comprensión de las mismas.

Relacionar los sistemas naturalmente fracturados de diferentes escalas.

1.4 Justificación.

La naturaleza fractal de los conjuntos de fracturas se ha comprobado dentro de un amplio intervalo de escalas en diferentes sistemas naturales llegando a las siguientes conclusiones: 1) El marco teórico metodológico de la Geometría Fractal es adecuado para caracterizar la distribución y organización de las redes de fracturas dentro de un amplio intervalo de escalas; 2) los modelos jerárquicos de la fragmentación de rocas, que relacionan entre sí el tamaño de bloques, su número y la longitud de fracturas, generan dos tipos de distribuciones comunes: la potencial y la exponencial, siendo la primera (ley de potencia) estadísticamente más representativa; y 3) los modelos fractales incrementan la precisión y exactitud de la representación geométrica de los sistemas fracturados [1.5].

Sin embargo la mayoría de las teorías recientes para la caracterización de fracturas parecen tener serias limitaciones:

- 1) Un comportamiento estadístico regular (distribución de fracturas en grupos iguales) es usualmente asumido para todas las fracturas contenidas dentro de un volumen dado, lo cual no siempre sucede.
- 2) Varios estudios comúnmente asumen que los parámetros de fractura como la apertura y la densidad, pueden ser “trasladados” en términos de coeficientes de permeabilidad para ser aplicados a un espacio de reserva de petróleo pero tienen considerables errores de aproximación.

1.5 Referencias.

- [1.1] Aguilera, Roberto. *Naturally Fractured Reservoirs*. Penn Well Publishing Company, 2^a edición, 1995.
- [1.2] Mandelbrot, Benoit B. *How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and Fractal Dimension*. Science Vol. 156: 636-638, 1967.
- [1.3] Kruhl, J.H. *Fractal geometry techniques in the quantification of complex rock structures: A special view on scaling regimes, inhomogeneity and anisotropy*. Journal of structural Geology, 2012, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsg.2012.10.002>.
- [1.4] Morales, Daniel., Balankin, Alexander; et al. *Modelación de yacimientos naturalmente fracturados mediante geometría fractal*. Científica, No. 22, pp 45-51, 2000.
- [1.5] Guerriero, V., Mazzoli, S. et al. *A permeability model for naturally fractured carbonate reservoirs*. Marine and Petroleum Geology, 2012.
- [1.6] Ackermann, R.V., Schlische, R.W., Withjack, M.O. *The geometric and statistical evolution of normal fault systems: an experimental study of the effects of mechanical layer thickness on scaling laws*. Journal of Structural Geology 23, 2001.
- [1.7] Falconer, Kenneth. *Fractal Geometry*. Wiley, Chichester, 1990, 288 pp.
- [1.8] Falconer, Kenneth. *Techniques in Fractal Geometry*. Wiley, Chichester. 1997, 256 pp.

CAPÍTULO 2.

FRACTALES

La geometría fractal te hará ver todo diferente. Este es su peligro al seguir leyendo. Te arriesgas a perder tu visión infantil de las nubes, bosques, flores, galaxias, hojas, plumas, rocas, montañas, torrentes de agua, carpetas, ladrillos, y mucho más. Nunca tu interpretación de estas cosas será el mismo.

Michael F. Barnsley.

FRACTALES.

2.1 Topología

Surgió a mediados del siglo XIX y fue conocida como Análisis Situs, la topología es una de las herramientas más fuertes de la matemática moderna. Se encarga de estudiar las propiedades de las figuras geométricas que subsisten aun si estas figuras son deformadas tan radicalmente que pierdan sus propiedades métricas y proyectivas.

2.2 Dimensión topológica.

La definición de dimensión es intuitiva racionalmente para figuras geométricas sencillas. Por ejemplo la dimensión de un punto es cero; la línea tiene dimensión uno; la dimensión del plano es dos; la dimensión de un cubo sólido es tres y la dimensión de \mathbb{R}^d es d . Pero la dificultad aumenta cuando se trata ciertos conjuntos "fractales" que requieren una definición más específica.

Una cuestión más difícil se plantea al asignar una dimensión al conjunto que Cantor fue el primero en considerar. Figura 2.1. La dimensión de este conjunto C parece unidimensional; sin embargo, no tiene ningún intervalo completo, por pequeño que se suponga, por lo que también podría suponerse que tiene dimensión cero, como cualquier conjunto finito de puntos. Por lo tanto: ¿debe considerarse el conjunto C de dimensión uno o dos?

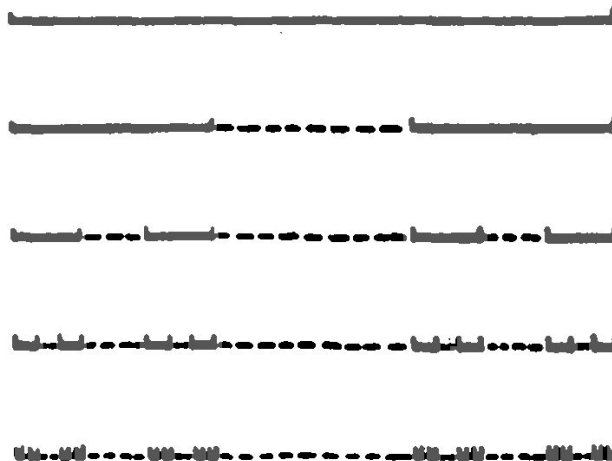


Figura 2.1. Conjunto de Cantor.
Fuente: Editado de Fractal Concepts p. 30

Dar una definición más precisa al concepto de dimensión fue para Poincaré una necesidad. En 1912 Él observó que la recta tiene dimensión uno debido a que se pueden separar dos puntos cualesquiera de ella cortándola en un solo punto (dimensión cero), a su vez el plano es bidimensional porque para separar dos puntos cualesquiera del mismo, se debe cortarlo con una curva cerrada (dimensión uno). Lo que lleva a la naturaleza inductiva de la dimensión: un espacio es n -dimensional, si se pueden separar dos puntos cualesquiera de él suprimiendo un conjunto de $n-1$ dimensiones, mientras que si se suprime un conjunto de menor dimensión, no siempre es posible obtener el mismo resultado. La dimensión inductiva del concepto de dimensión está incluida en los “Elementos de Euclides” [2.1].

Actualmente se conviene en decir que un conjunto vacío (que no contiene ningún punto) tiene dimensión -1 . Entonces un conjunto de puntos S tiene dimensión 0 , si no es de dimensión -1 (es decir, si S contiene al menos un punto), y si cada punto puede encerrarse en una región arbitrariamente pequeña cuya frontera corte a S en un conjunto de dimensión -1 .

En la figura 2.2 se muestran dos líneas con dimensión topológica uno. Se podrían estirar las dos hasta que se ajusten. Pero por otra parte se puede notar que aunque su dimensión topológica sea la misma, las líneas no son del todo similares, por lo que se necesita de alguna otra forma para describirlas.

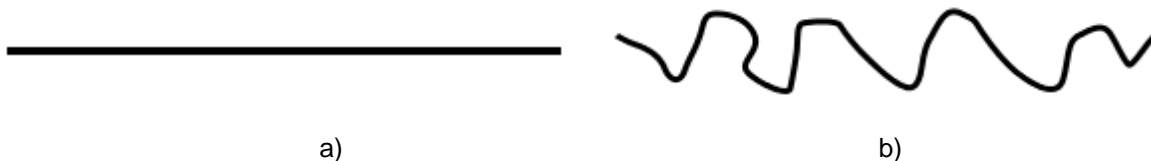


Figura 2.2. a) Línea recta; b) Línea rugosa.
Fuente: Arithmetic Properties of Fractal Estimates, p. 14

Ahora hay que suponer que se quiere medir la longitud de la costa del mar. Si se usan diferentes reglas comunes, se encontrará que la longitud incrementa conforme la regla disminuye porque se está tomando medidas cada vez más finas. Por lo tanto la regla es inadecuada para describir la complejidad de una curva geográfica [2.2].

Mandelbrot sugiere en [2.2] que la dimensión de esta curva debería de ser establecida entre cero e infinito, y en especial este tipo de curvas podrían ser descritas por un número real entre uno y dos para caracterizar su forma [2.3].

2.3 Fractal.

En su primer trabajo [2.5] Benoît Mandelbrot acuñó el término *fractal* y lo describió como:

Un fractal es una figura geométrica fragmentada que puede ser subdividida en partes, cada una de las cuales (al menos aproximadamente) es una copia reducida en tamaño del original.

La palabra Fractal es derivada del latín *Fractus* que significa fracturado. Y es un nombre colectivo para diversas clases de objetos o conjuntos, que tienen en su mayoría o todas las siguientes propiedades [2.4].

- I. El conjunto tiene una estructura fina, tiene detalles en escalas arbitrarias.
- II. El conjunto es muy irregular para ser descrito con geometría clásica euclidiana (local o global).
- III. El conjunto tiene cierta forma autosimilar, puede ser aproximado o estadístico.
- IV. La dimensión de Hausdorff del conjunto es estrictamente más grande que su dimensión topológica.
- V. El conjunto tiene una definición simple; es recursivo.

La definición original de Mandelbrot es la propiedad (IV), pero se ha demostrado que no es suficiente para describir todos los conjuntos que deberían ser considerados como fractales. De hecho cada una de las propiedades no podría definir al menos un fractal. Muchos intentos se han hecho para dar a los fractales una definición matemática pura, pero no han tenido éxito. Por lo tanto, cuando se hable de fractales, se usarán todas las propiedades anteriores para describirlos [2.4].

Se utilizará un par de ejemplos para un mejor entendimiento de los objetos geométricos mencionados.

La curva de von Koch (figura 2.3), es creada de la siguiente forma: Empieza con una línea unitaria que llamada K_0 , divídela en tres, remueve el tercio de en medio y replázalo por dos líneas, cada una de la misma longitud que la pieza removida, Se llamará K_1 a esta nueva curva. Se ha obtenido un triángulo equilátero (sin la base) como se ve en la figura 2.3 b). K_1 ahora tiene cuatro líneas de igual longitud, $\frac{1}{3}$ de la longitud de K_0 . Se puede crear ahora K_2 aplicando el mismo procedimiento utilizado para K_1 , y entonces se obtiene la figura en 2.3 c). De esta

forma aplicando las reglas para K_{n-1} , se obtiene K_n , y cuando n tiende a infinito, se forma la curva de Koch de la figura 2.3 d).

El triángulo de Sierpinski (figura 2.4), es creado remplazando un triángulo equilátero de tamaño unitario (figura 2.4 a)), K_0 , por tres triángulos de la mitad de su tamaño, dejando la región de en medio vacía, obteniendo K_1 , ver figura 2.4 b). K_2 es creado al remplazar cada uno de los tres triángulos de K_1 por tres triángulos de mitad de su tamaño, dejando la región media vacía como antes, ver figura 2.4 c). Y como en el ejemplo anterior, se aplican las reglas en K_{n-1} para obtener K_n , y si n tiende a infinito, queda como resultado el triángulo de Sierpinski de la figura 2.4 d).

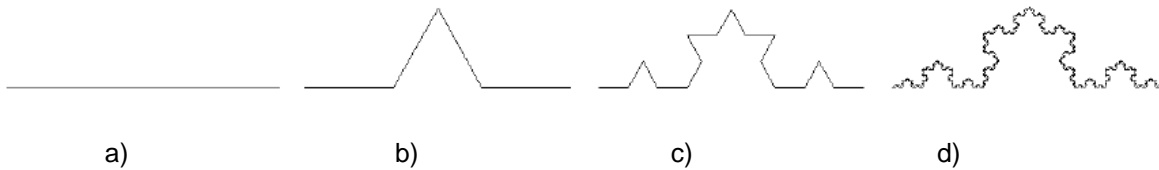


Figura 2.3: a) línea b) una c) dos y d) varias iteraciones de la curva de Koch.

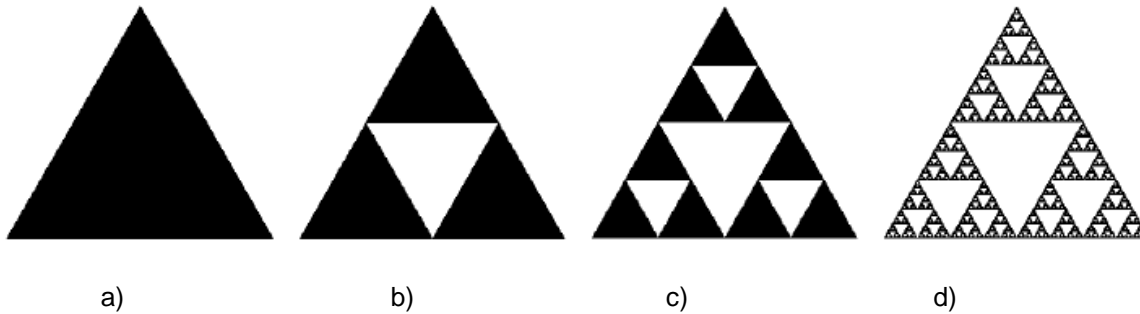


Figura 2.4: a) triángulo b) una c) dos y d) varias iteraciones del triángulo de Sierpinski.

Fuente: Arithmetic Properties of Fractal Estimates, p. 13, 14

Los objetos en la naturaleza a menudo tienen propiedades fractales (por ejemplo un árbol tiene tronco, en el cual cada rama es una reproducción a escala del mismo), por lo tanto los fractales suelen aproximarse más a objetos en la naturaleza que a geometrías clásicas euclidianas [2.6]. Algunos objetos con propiedades fractales podrían ser arboles, nubes, líneas costeras, montañas y rayos.

2.4 Dimensión fractal.

Una importante característica de la geometría fractal es que permite la caracterización de la irregularidad a diferentes escalas a diferencia de la

geometría clásica euclidiana que no lo permite. Como resultado muchas características fractales han sido identificadas, una de las más importantes es la dimensión fractal [2.7].

Se construirá la teoría de dimensión fractal desde la definición euclidiana antes vista hasta las definiciones más complejas como la de Hausdorff y la dimensión del conteo de cajas, la cual es usada cuando empíricamente se estiman las dimensiones fractales de los conjuntos.

Se podrá preguntar porque existen diferentes definiciones de dimensión. La respuesta es simple, porque alguna definición puede ser usada para un propósito, pero no para otro. En varios casos las definiciones son equivalentes, pero cuando no lo son, es porque sus propiedades particulares las vuelven ajustables para cierta característica.

2.4.1 Dimensión de similitud.

Una transformación $S: R^n \rightarrow R^n$ es llamada congruente o simétrica si preserva distancias (y ángulos), por ejemplo: $|T(x) - T(y)| = |x - y|$, para toda $x, y \in R^n$. El mapeo es entonces hecho sin deformar el objeto [2.8]. Una transformación similar es un mapeo $T: R^n \rightarrow R^n$ donde hay una constante c tal que $|T(x) - T(y)| = c|x - y|$, para toda $x, y \in R$ [2.4].

Considerando un segmento de línea unitario, el cual es unidimensional en el clásico sentido. Si se duplica el segmento de línea, se tendrá dos segmentos de líneas conectadas, ambas de la misma magnitud que el original, ver figura 2.5 a). Ahora se puede suponer un cuadrado en el plano, un objeto bidimensional, el cual se puede expandir al doble (las longitudes, no el área) y obtener un cuadrado similar, conformado por cuatro cuadrados unitarios. Figura 2.5 b). Un cubo unidad, tridimensional obviamente, se magnifica dos veces y se obtiene un cubo formado por ocho cubos de tamaño unitario. Figura 2.5 c).

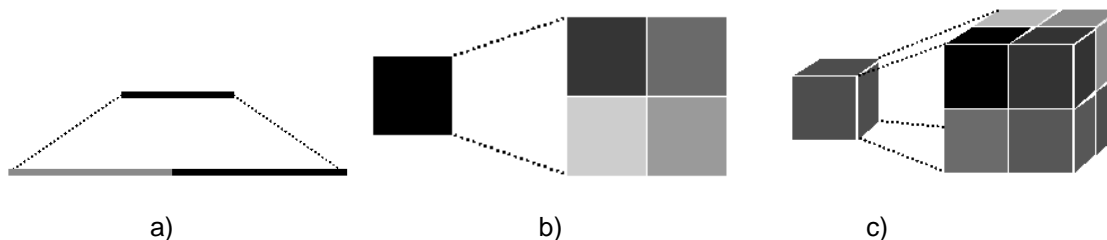


Figura 2.5: a) Una longitud unitaria magnificada dos veces hará que el objeto magnificado este hecho de dos idénticos segmentos de líneas unitarias. b) Un cuadrado unitario magnificado dos veces, da como resultado cuatro cubos unitarios. c) Un cubo magnificado dos veces da como resultado ocho cubos unitarios.

Fuente: Arithmetic Properties of Fractal Estimates, p. 15

Como se puede notar el número de copias del objeto original cuando es magnificado dos veces es dos a la potencia de la dimensión. La expresión matemática es la siguiente.

$$m^D = N \quad (2.1)$$

Donde m es la magnificación, D es la dimensión, y N es el número de copias del objeto original cuando es magnificado m veces. Resolviendo D en la ecuación 2.1 se obtiene:

$$D = \frac{\log N}{\log m} \quad (2.2)$$

Desde luego, esta ecuación es exacta para los objetos en la figura 2.5. Pero, ¿qué pasa con las figuras 2.3 y 2.4?

La curva de Koch da en K_{n+1} , cuatro copias de K_n con tamaño de $\frac{1}{3}$. Por lo tanto, se encuentra que D es igual a $\frac{\log 4}{\log \frac{1}{1/3}} \approx 1.26$, lo que es más que la dimensión uno, pero menos que bidimensional. Lo que concuerda con la idea de la dimensión topológica en la sección 2.2 de que ninguna longitud o área puede describir la curva, porque es más que una línea (la longitud entre dos puntos de la curva es infinita), pero tampoco puede llenar el plano porque su área es cero.

El triángulo de Sierpinski en K_{n+1} está hecha por tres copias de E_k de tamaño $\frac{1}{2}$, entonces la dimensión D es igual a $\frac{\log 3}{\log \frac{1}{1/2}} \approx 1.58$, todos los triángulos son remplazados por pequeños triángulos, pero la distancia entre estos tiende a cero cuando K tiende a infinito. Nótese que la dimensión del triángulo de Sierpinski es más grande que la de la curva de Koch, por lo que se puede decir que el triángulo de Sierpinski llena mejor el plano que la curva de Koch.

El número obtenido es llamado la *dimensión de similitud* de un conjunto, y puede parecer que es ajustable para cualquier conjunto, pero solo puede ser calculada para una pequeña cantidad de conjuntos auto-similares.

2.4.2 Dimensión de Hausdorff

Para un mejor entendimiento de la noción de dimensión, se necesita plantear algunas bases de la teoría sobre la medida.

Noción de medida.

Se usará la medida para la definición de dimensión, también es importante para la geometría fractal y por lo tanto se necesitan algunas bases.

La medida es una forma de dar tamaño numérico a un conjunto tal que la suma de los conjuntos en una colección de subconjuntos desunidos tenga la misma medida que el conjunto completo (unión de subconjuntos). El tamaño numérico de un conjunto podría por ejemplo ser la distribución de masa, o la carga eléctrica del conjunto. Definiendo la medida, μ , en \mathbb{R}^n de la siguiente forma [2.4]:

La medida μ asigna un valor no negativo, posiblemente ∞ , para subconjuntos de \mathbb{R}^n tales como:

$$a) \mu(\emptyset) = 0 \quad (2.3)$$

$$b) \mu(A) \leq \mu(B) \text{ si } A \subseteq B \quad (2.4)$$

c) Sí A_1, A_2, \dots es una secuencia contable (o infinita) de conjuntos entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad (2.5)$$

Esto va de acuerdo con lo planteado. a) Un conjunto vacío no tiene tamaño. b) mientras más pequeño el conjunto, más pequeño es el tamaño. Y, la suma de los tamaños de las piezas es el tamaño del conjunto completo, ecuación 2.5.

Una *medida de probabilidad* es una medida μ en un conjunto A , tal que $\mu(A) = 1$. La *distribución de masa* es definida como la masa de un conjunto cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$ donde $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$.

La *medida de Lebesgue*, L^1 , propone la idea de una longitud a lo largo de una colección de subconjuntos de \mathbb{R} . Para intervalos abiertos y cerrados. Es una forma estándar de asignar una longitud, área o volumen a los subconjuntos. La definición formal de la *medida de Lebesgue* de un conjunto arbitrario es [2.4]:

$$\mathcal{L}^1(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \right\} \quad (2.6)$$

Esta medida sigue nuestra intuición de una longitud en \mathbb{R} , pero se extiende también a áreas en \mathbb{R}^2 , y volúmenes en \mathbb{R}^3 , y más dimensiones \mathbb{R}^n .

La medida de Lebesgue n-dimensional, L^n para un conjunto arbitrario puede ser obtenida por simple extensión de la ecuación 2.6.

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}^n(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [A_i] \right\} \quad (2.7)$$

Por otro lado, interesa principalmente la *medida s-dimensional de Hausdorff*, H^s , en subconjuntos de \mathbb{R}^n , con $0 \leq s \leq n$, donde se desarrolla la teoría de dimensiones. La medida de Hausdorff es una generalización de la medida de Lebesgue para dimensiones no enteras.

A diferencia de otras definiciones, la dimensión de Hausdorff está definida para cualquier conjunto, y es conveniente dado a que se basa en medidas. Se propone lo siguiente [2.4]:

Sea F un subconjunto de \mathbb{R}^n y $s \in \mathbb{R}^+$, entonces para cada $\delta > 0$ se tiene:

$$H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es una } \delta - \text{cubierta de } F \right\} \quad (2.8)$$

Con un diámetro menor que δ , se trata de minimizar la suma de las potencias de s de los diámetros de la cubierta de F . Cuando δ decrece, las posible cubierta de F se reduce y $H_\delta^s(F)$ se incrementa, y por lo tanto se acerca a un límite donde $\delta \rightarrow 0$. Queda:

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F) \quad (2.9)$$

El límite existe para todos los subconjuntos de \mathbb{R}^n , pero usualmente es 0 o ∞ . Llamando a $H^s(F)$ la medida s-dimensional de Hausdorff de F .

La definición de arriba es invariante de la elección al calcular el diámetro en la ecuación 2.8 [2.9].

Se puede ver que H^s cumple con las propiedades de las ecuaciones 2.3-2.5, y particularmente la medida de Hausdorff generaliza a las ideas intuitivas de longitud, área y volumen. También se puede ver que la medida n-dimensional de Hausdorff es solo un múltiplo constante de la medida de Lebesgue. Específicamente si F es un conjunto de Borel de \mathbb{R}^n , de esta forma:

$$H^s(F) = c_n \mathcal{L}^n(F) \quad (2.10)$$

La medida de Hausdorff también puede ser magnificada (aplicando las propiedades normales de escalamiento) con el factor λ^s , dependiendo de la dimensión. Para este escalamiento de la medida de Hausdorff se puede suponer que $F \subset \mathbb{R}^n$ y $\lambda > 0$. Teniendo entonces:

$$H^s(\lambda F) = \lambda^s H^s(F) \quad (2.11)$$

Si se vuelve a la ecuación 2.8, se puede ver que para cada conjunto F y $\delta < 1$, H_δ^s no se incrementa con s , y por lo tanto H^s no incrementa tampoco. Si $t > s$ y $\{U_i\}$ es una cubierta δ de F , se tiene:

$$\sum_i |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s \quad (2.12)$$

Tomando el ínfimo de ambos lados de la ecuación.

$$H_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} H_\delta^s(F) \quad (2.13)$$

Ahora, si $\delta \rightarrow 0$ entonces $H^s(F) < \infty$ y $H^t(F) = 0$ cuando $t > s$. Se puede ver en la figura 2.5 que existe un punto crítico cuando se gráfica $H^s(F)$ contra s , en el cual hay un brinco de ∞ a 0, en el valor de $H^s(F)$. Este valor crítico es conocido como la dimensión de Hausdorff (o también dimensión de Hausdorff-Besicovitch) de F , la cual se denota como $\dim_H F$, o simplemente como d_H .

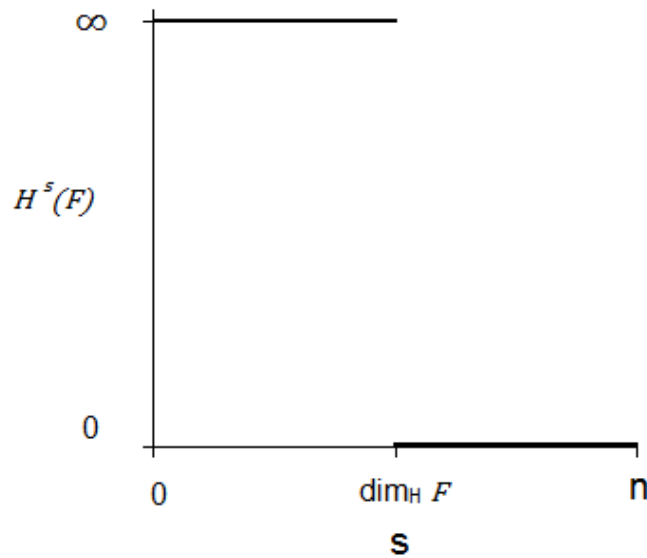


Figura 2.6 Gráfica de $H^s(F)$ contra s para un conjunto F .
Fuente: Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications, p. 28

La dimensión de Hausdorff se define de la siguiente manera [2.4]:

El valor:

$$s = \inf\{s : H^s(F) = 0\} = \sup\{s : H^s(F) = \infty\} \quad (2.14)$$

Por lo tanto:

$$H^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < \dim_H F \\ 0 & \text{si } s > \dim_H F \end{cases} \quad (2.15)$$

Es fácil entender este “brinco” si se consideran los siguientes ejemplos: se pueden encontrar un infinito número de puntos en una curva pero su área sigue siendo igual a cero. La longitud de un cuadrado es infinita (cuando se intenta llenarlo de líneas), pero su volumen es cero. Un cubo tiene área infinita porque se puede llenar de un infinito de planos o un plano curvo con área infinita.

Por lo tanto, si se usa una dimensión muy pequeña para medir un conjunto, la medida es infinita, y si se usa una dimensión muy grande al medir, la medida será igual a cero.

Esta dimensión de Hausdorff- Besicovitch es de un significado substancial teórico, pero en la mayoría de los casos es un reto computarizar, incluso cuando se usan círculos para cubrir el conjunto. La frontera superior es relativamente fácil de obtener, pero la frontera inferior puede ser mucho más difícil porque el valor ínfimo es tomado de una colección de cubiertas δ . Porque el ínfimo valor según la definición, no puede ser medido por ningún objeto físico. Por estas razones se necesita de otra definición de dimensión que pueda ser usada en práctica. La solución a este problema es la dimensión de cajas o dimensión de conteo de cajas.

2.4.3 Dimensión del conteo de cajas.

Este es uno de los métodos más usados en la práctica, principalmente porque es fácil de calcular matemáticamente y porque también es fácil estimar empíricamente.

Para cubrir una curva de longitud l , se necesita un número de segmentos de línea de longitud δ igual a l/δ . De la misma forma para cubrir un cuadrado de área A , se necesita cierto número de cuadrados pequeños de lado δ igual a A / δ^2 , y el número de cubos de lado δ que son necesarios para cubrir un cubo con volumen V es igual a V / δ^3 . Se puede notar que la dimensión del objeto que se trata de cubrir esta en potencia de la longitud del lado δ .

Para generalizar esta forma de dimensionar a cualquier conjunto se propone que F sea un subconjunto no cerrado de \mathbb{R}^n , y $N_\delta(F)$ sea el número más pequeño de los conjuntos de diámetros de longitud δ que cubren F . El número de cajas que se necesita para cubrir el objeto es $N_\delta(F)$. Según la proposición anterior, el número de cajas que es necesario para cubrir el objeto debería ser proporcional al tamaño de la caja [2.4]:

$$N_\delta(F) \sim \frac{C}{\delta^s} \quad (2.16)$$

Cuando $\delta \rightarrow 0$. Se tiene para C .

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{N_\delta(F)}{\delta^{-s}} = C \quad (2.17)$$

Agregando logaritmo para ambos lados.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (\log N_\delta(F) + s \log \delta) = \log C \quad (2.18)$$

Resolviendo para s

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F) - \log C}{-\log \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \quad (2.19)$$

Para el valor superior y el inferior de la dimensión del conteo de cajas de un conjunto F ($\dim_B F$) se tienen las siguientes ecuaciones [2.10]:

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \quad (2.20)$$

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \quad (2.21)$$

Cuando se tiene un valor común, es decir, si los valores de las ecuaciones 2.20 y 2.21 son iguales, se puede referir a este valor como la dimensión del conteo de cajas de F .

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \quad (2.22)$$

Esta dimensión refleja que tan rápidamente las irregularidades de un objeto se desarrollan conforme $\delta \rightarrow 0$ [2.4]. Ver figura 2.6.

La forma de las cajas no es específica, no tiene importancia, se pueden usar cuadrados o círculos, y sus respectivas equivalencias dimensionales mayores. Esto es porque en el límite, la forma no importa [2.10].

Pero existe un problema con la dimensión del conteo de cajas que tiene consecuencias no deseables [2.4]. Si F es el conjunto contable de los números racionales entre cero y uno, entonces $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = 1$. Lo que haría que F fuera el intervalo entero entre cero y uno. La dimensión del conteo de cajas de cada número racional es cero, pero la unión contable de esos puntos tiene dimensión uno.

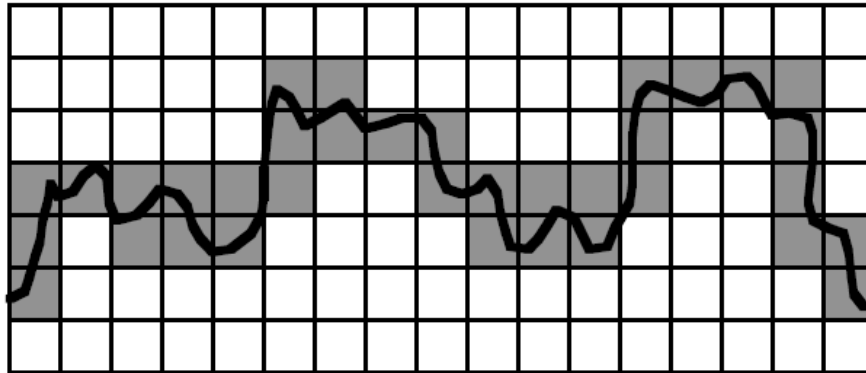


Figura 2.7 Medición de la dimensión de una curva por el método del conteo de cajas.
Fuente: Fractal geometries, p. 7

2.4.4 Propiedades de las Dimensiones.

Las definiciones antes descritas de dimensión (similitud, Hausdorff y conteo de cajas) cumplen con las siguientes propiedades [2.10]:

Monotonicidad: Si $E_1 \subset E_2$ entonces $\dim E_1 \leq \dim E_2$.

Conjuntos finitos: Si E es finito entonces $\dim E = 0$.

Conjuntos abiertos: Si E es un conjunto abierto (no vacío) de \mathbb{R}^n entonces $\dim E = n$.

Variedades diferenciables: Si E es una variedad diferencial de dimensión m entonces $\dim E = m$.

Mapeos de Lipschitz: Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función de Lipschitz entonces $\dim f(E) \leq \dim E$.

Invariancia Bi-Lipschitz: Si $f : E \rightarrow f(E)$ es una función Bi-Lipschitz (función de Lipschitz con una inversa que también es Lipschitz) entonces $\dim f(E) = \dim E$.

Invariancia geométrica: Si f es una transformación similar o afín entonces $\dim f(E) = \dim E$.

La mayoría de las definiciones de dimensión se encuentran entre la dimensión de Hausdorff y el límite superior de la dimensión del conteo de cajas. Esto es, si $\dim_H E = \overline{\dim_B F}$, entonces todas las definiciones normales de dimensión tomarán este último valor [2.10].

2.5 Estimación de la dimensión Fractal.

Existen muchas formas de estimar la dimensión fractal de un conjunto, con sus respectivos pros y contras. Cuando se trabaja con sistemas físicos surge el problema obvio, el número de puntos en un conjunto o el número de pixeles en una imagen es finito, y contable, la dimensión teórica del conjunto o la imagen que se está considerando es siempre cero (ver sección 2.4.4). Por lo que solo se puede *estimar* la dimensión del fractal que la imagen muestra dando resultados diferentes.

Cuando se trata con imágenes se tiene un límite inferior de medida, el pixel. Debido a esto no se puede conseguir que $\delta \rightarrow 0$, así que se debe detener cuando $\delta = 1$. Esto significa que no se obtendrá el valor real de la dimensión de esta forma. Pero si se usa un valor de δ lo suficientemente pequeño, el valor de la dimensión obtenido solo diferirá un poco del cantidad real. Se puede ahora estimar el valor de s (dimensión) graficando $\log N_\delta(F)$ y $-\log \delta$, y tomar la pendiente de los cuadrados pequeños que concuerdan con los puntos del valor de s . Ver figura 2.7. La dimensión es entonces una velocidad logarítmica a la cual $N_\delta(F)$ se incrementa conforme $\delta \rightarrow 0$, de esta manera, se estima la pendiente de los puntos obtenidos en la gráfica bi-logarítmica.

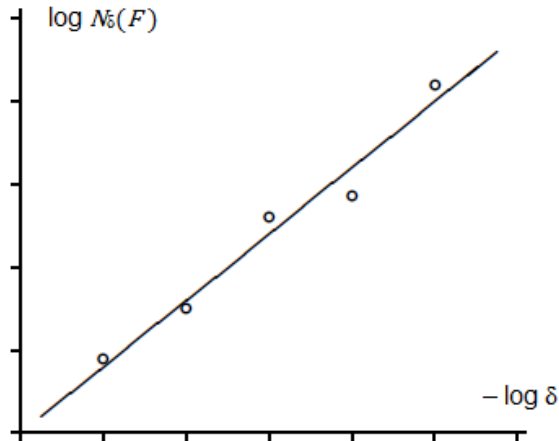


Figura 2.8 Pendiente de la grafica $\log N_\delta(F)$ y $-\log \delta$.
Fuente: Arithmetic Properties of Fractal Estimates, p. 23

Como se menciono anteriormente la forma de la caja no importa cuando se estima la dimensión, es decisión particular la selección de la forma de la caja según la aplicación. En la figura 2.9 se pueden ver diferentes métodos con los que se cubre el conjunto F .

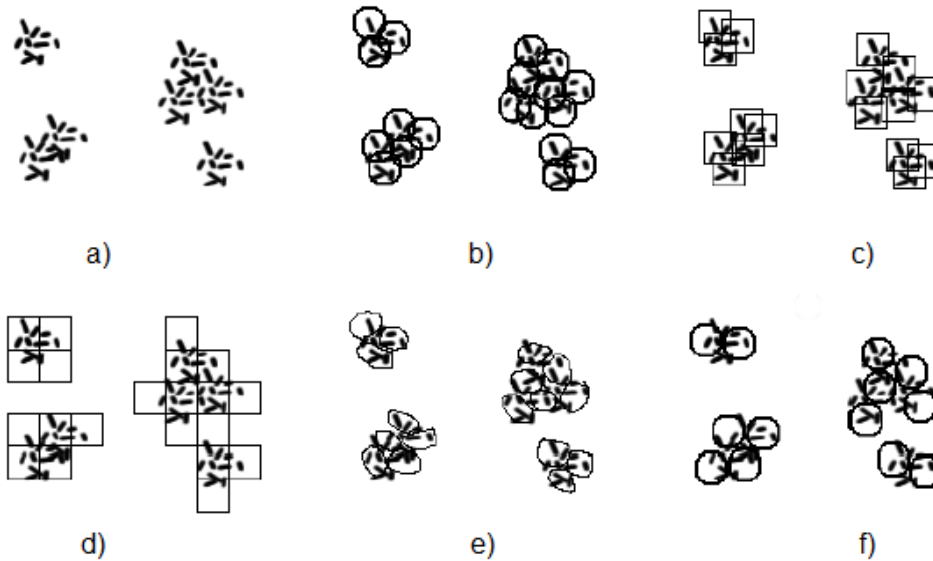


Figura 2.9 Diferentes formas de encontrar la dimensión del conteo de cajas, a) conjunto, b) círculos cerrados de radio δ que cubren F , c) número mínimo de cajas de lado δ que cubren F , d) número de cubos de lado δ que intersecan F , e) número mínimo de conjuntos de diámetro de al menos δ que cubren F , y f) el número más grande de círculos abiertos de radio δ con centro en F .

Fuente: Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications, p. 26

2.5.1 Imágenes Digitales.

Una imagen digital de tamaño $M \times N$ es una función $f(x,y)$ con un valor de intensidad por cada par de coordenadas (x,y) de la imagen. La intensidad del rango de valores va desde 0 a un valor máximo, usualmente 255. Se puede representar una imagen como una matriz de la siguiente forma:

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \dots & f(0,N-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \dots & f(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(M-1,0) & f(M-1,1) & \dots & f(M-1,N-1) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Cada elemento de la matriz se llama pixel, y cada imagen está hecha de un número finito de pixeles con una variedad de intensidad de valores cada uno.

Cuando la imagen está en una escala de grises se puede aplicar de una forma muy sencilla la teoría del conteo de cajas. Se coloca en la imagen una malla con lados de longitud δ y se cuenta el número de cuadrados con el que al menos un pixel con intensidad diferente de cero está en la malla.

Para ejemplificar el método cubrimos con cajas de longitud de $1/3$ y $1/9$ la figura 2.9, la cual tiene una dimensión de similitud de 1.46.

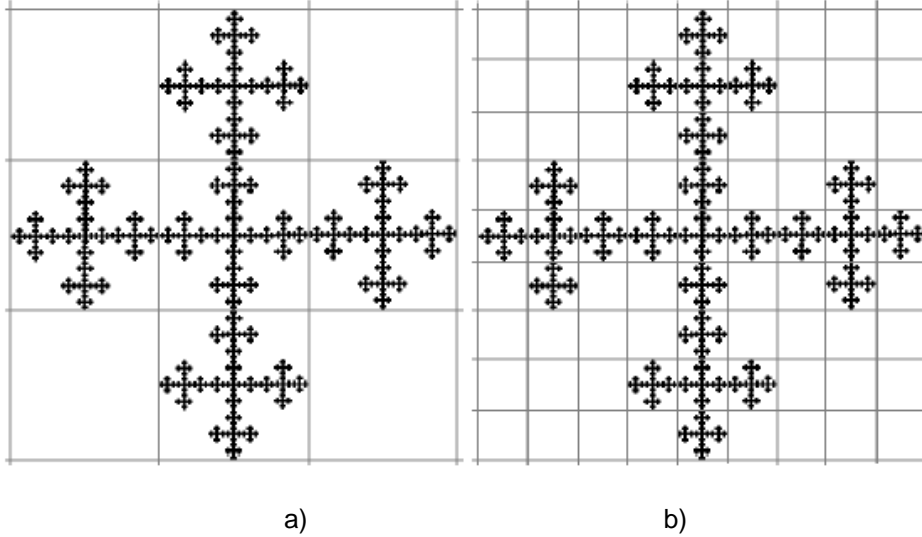


Figura 2.10 Método del conteo de cajas para un fractal.
Fuente: Arithmetic Properties of Fractal Estimates, p. 23

En la figura 2.9 a) se tiene 5 cajas no vacías y de tamaño $1/3$, dando la dimensión:

$$D_1 = -\frac{\log 5}{\log \frac{1}{3}} = \frac{\log 5}{\log 3} \approx 1.465 = D$$

En la figura 2.9 b) se tiene 25 cajas no vacías y de tamaño $1/9$, dando la dimensión:

$$D_1 = -\frac{\log 25}{\log \frac{1}{9}} = \frac{\log 5}{\log 3} \approx 1.465 = D$$

Como se puede observar, la imagen verdaderamente tiene una dimensión de similitud.

2.5.2 Conjuntos de puntos.

Para los conjuntos de puntos también se puede utilizar de forma sencilla la teoría del conteo de cajas. La matriz es la siguiente:

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Donde $x_i, y_i, z_i \in [0,1]$. Esta matriz puede ser transformada fácilmente por operaciones lineares (proyección) por una simple multiplicación de matrices.

Se coloca una malla en el conjunto de puntos, para ver si la caja está vacía o no, el número de puntos con coordenadas x, y y z dentro de una caja están

simplemente conectados, permitiendo a la caja de lado δ acercarse a cero. El único problema es que δ es menor que la distancia más pequeña entre los puntos del conjunto, por lo que no concuerda con el actual número de puntos. Entonces la distancia más pequeña entre puntos decrecerá conforme los nuevos puntos son añadidos al conjunto. Por lo que la longitud δ más corta razonable puede ser encontrada, dado el número de puntos del conjunto.

2.6 Lagunaridad.

Existen muchos ejemplos sobre fractales que tienen la misma dimensión fractal pero son diferentes en su aspecto. Por ejemplo las dos carpetas de Sierpinski en la figura 2.11 comparten la dimensión $\log 40/\log 7$. Los espacios están distribuidos uniformemente mejor en la izquierda que en la imagen derecha. La cuantificación de esta diferencia fue establecida por Mandelbrot en 1982 [2.6]. En este postulado se introduce la lagunaridad como una expresión de esta diferencia entre las figuras y nos da otro nivel en la caracterización de fractales a través de números asociados.

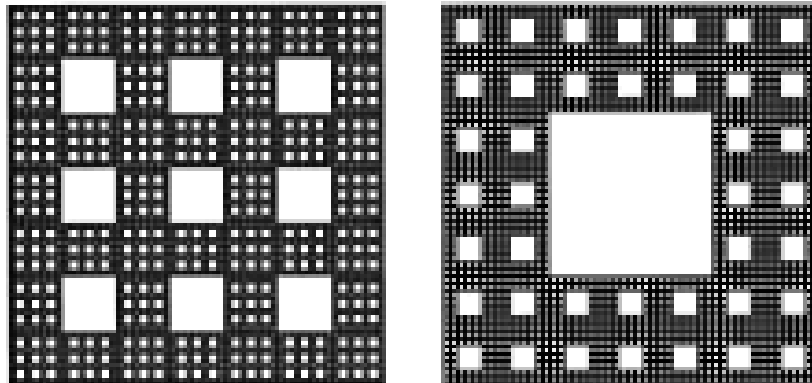


Figura 2.11 Carpetas de Sierpinski con la misma dimensión fractal.
Fuente: Encyclopedia of Physical Science and Technology, Fractals, p. 199

Para cuantificar esta distribución de espacios o agujeros en las imágenes se puede suponer que A es cualquiera de las dos carpetas en la figura 2.11, y proponer A_δ como el ancho de A . de esta forma se tiene:

$$(A_\delta) \sim \Lambda \delta^{2-\log 40/\log 7} \quad (2.25)$$

Donde $1/\Lambda$ es una medida de la lagunaridad si el límite apropiado existe.

Para la dimensión de cajas, el límite $\delta \rightarrow 0$ puede ser remplazado por el límite secuencial $\delta_n \rightarrow 0$, para condiciones suaves. Para estas carpetas, la elección natural es δ_n el cual llena sucesivamente la generación de los espacios. Si se aplica a la figura 2.10, δ_n da $1/\Lambda \approx 0.7075$ y 0.7934 , aclarando que una mayor lagunaridad corresponde a una mayor distribución desigual de agujeros. Desafortunadamente estos pre-factores son mucho más sensibles que el exponente: diferentes secuencias de δ_n dan diferentes límites. Promedios logarítmicos pueden ser usados, pero esto es un trabajo en proceso.

Solo cuando se trata de una imagen con diferentes intensidades, se puede extraer más información de la que se obtiene con la dimensión de cajas. En los siguientes capítulos se especifica las formas de obtener información de las imágenes para el modelo.

2.6 Referencias.

[2.1] Courant, R., Robbins, Herbert. *¿Qué es la matemática?* Editorial Aguilar, Quinta edición. 1971.

[2.2] Mandelbrot, Benoit B. *How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and Fractal Dimension.* Science Vol. 156: 636-638, 1967.

[2.3] Kaye, Brian H. *A random walk through fractal dimensions.* VCH, second edition, 1994.

[2.4] Falconer, Kenneth. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and applications.* Jhon Wiley & Sons, 1990.

[2.5] Mandelbrot, Benoit B. *the fractal objects.* Paris. Flammarion, 1975.

[2.6] Mandelbrot, Benoit B. *The fractal geometry of nature.* W. H. Freeman and company, first edition, 1982.

[2.7] X. C. Jin, S. H. Ong, and Jayasooriah. *A practical method for estimating fractal dimension.* Pattern Recognition Letters, Vol. 16. 457-464, May 1995.

[2.8] Roe, John. *Elementary Geometry.* Oxford University Press. 2003.

[2.9] Theiler, James. *Estimating Fractal Dimension.* Journal of the optical society of America, Vol. 7:1055, June 1990.

[2.10] Falconer, Kenneth. *Techniques in fractal geometry.* Jhon Wiley & sons, 1997.

[2.11] Mandelbrot, Benoit B. *Fractals in Physics: Squig clusters, diffusions, Fractal measures, and unicity of fractal dimensionality*. Journal of statistical Physics, Vol. 34. Nos. 5/6, 1984.

[2.12] Balankin, Alexander. *Fractal Behavior of Complex Systems*. Científica, Vol. 7, Num. 3, pp. 109-128. 2003.

[2.13] Mandelbrot, Benoit B., Frame, Michael. *Encyclopedia of Physical Science and Technology*. Yale University Press, Third edition, Vol. 6, June, 2001.

[2.14] Balankin, Alexander. *Physics of Fracture and Mechanics of self-affine cracks*. Engineering Fracture Mechanics, Vol. 57, Nos. 2/3, pp. 135-203. 1997.

CAPÍTULO 3. YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS.

Nada en la naturaleza es al azar... cualquier cosa parece aleatoria a través de nuestro conocimiento incompleto.

Spinoza.

YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS.

El estudio de los yacimientos naturalmente fracturados (YNF) consiste en la relación de estos con la producción de hidrocarburos de los que no siempre se obtiene la recuperación deseada. No obstante, también forman parte de algunos de los yacimientos más grandes del mundo. Comprender y modelar con la mayor exactitud posible esta clase de yacimientos es el propósito de muchas investigaciones.

Para comprender mejor los YNF y su modelado, en esta sección se describirán y analizarán.

3.1 Masas rocosas.

Una masa típica rocosa consiste en una roca intacta y discontinuidades o fracturas incrustadas en ella. Estas fracturas tienen un amplio rango de longitudes, desde milímetros hasta decenas de metros. El ancho o las aperturas de las fracturas también pueden variar desde casi cero hasta milímetros, y más en algunos casos. Las aperturas pueden variar sobre el plano de la fractura y algunas veces las aperturas están llenas de algún material diferente al de la masa rocosa.

Para rocas intactas (sin alguna fractura) el flujo de fluido será a través de pequeños poros distribuidos aleatoriamente en su matriz. El comportamiento mecánico e hidrológico de estas rocas puede ser descrito por la mecánica del medio continuo en un medio homogéneo. El modelado de estos sistemas es relativamente sencillo, excepto para aquellos con variables geométricas que provocan dificultades numéricas significantes.

Por otro lado, la presencia de fracturas cambia cualitativamente el comportamiento del sistema. El flujo estaría principalmente en estas fracturas las cuales comúnmente conforman una red en esta masa rocosa. De modo que a veces la roca fracturada es referida como un sistema de doble permeabilidad, un sistema largo asociado con la red de fractura y otro pequeño asociado con la matriz de la roca [3.1].

Antes de proceder al análisis del fenómeno de la fractura se deben tener claros algunos conceptos.

3.2 Fractura.

La definición de fractura varía de acuerdo al autor, estas son algunas propuestas [3.2]:

- “Es una discontinuidad plana que resulta de los esfuerzos que exceden el punto de ruptura de una roca”.
- “Es una discontinuidad plana macroscópica y natural que ocurre en una roca debido a la deformación o diagénesis física”

Pero en un sentido estricto de la geo-mecánica, una fractura es la superficie en la cual tuvo lugar una pérdida de cohesión. Esta pérdida de cohesión es resultado del proceso de ruptura. Ahora, una fractura en la cual se observa un desplazamiento relativo puede ser definida como una falla, por otra parte, cuando una fractura no presenta un desplazamiento notable se le llama unión o empalme (figura 3.1).

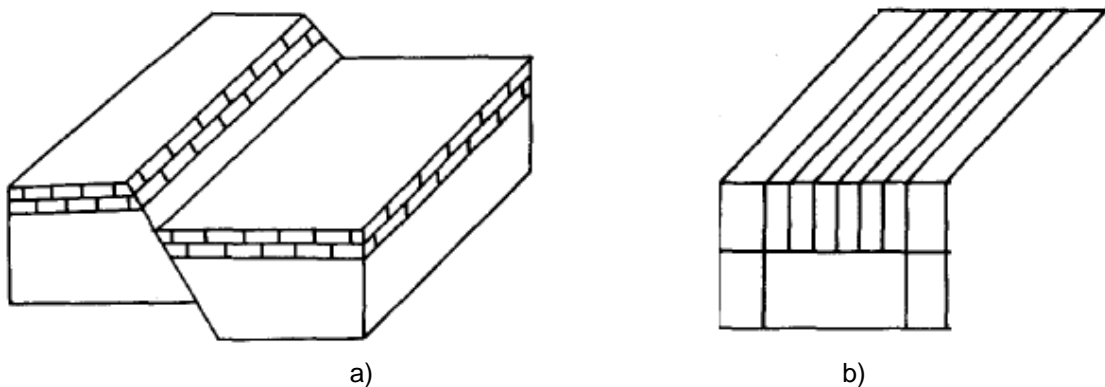


Figura 3.1 a) falla y b) unión o empalme.

Fuente: Editado de Fundamentals of fractured reservoir engineering, p. 6

Una fractura además puede ser definida como la discontinuidad que rompe la masa rocosa en bloques a lo largo de fisuras, uniones o grietas, y a lo largo del cual no hay desplazamiento paralelo con los planos de discontinuidad.

3.2.1 Propiedades de una fractura.

Se propone una sola fractura en una masa rocosa, se puede pensar que está compuesta por dos superficies rocosas separadas por una pequeña apertura. Estas superficies son comúnmente rugosas, de esta forma la apertura no es constante sino variable sobre el plano de la fractura. Se pueden definir ocho términos usados en el contexto del comportamiento de la fractura (figura 3.2) [3.1].

La rugosidad es la desigualdad entre las dos superficies de rocas que forman la fractura. Si la fractura fue creada bajo tensión, entonces la rugosidad de arriba y abajo debe ser la misma.

La apertura es el espacio entre la superficie superior e inferior de la fractura.

El acoplamiento es la descripción de que tanto encajan las superficies de una fractura.

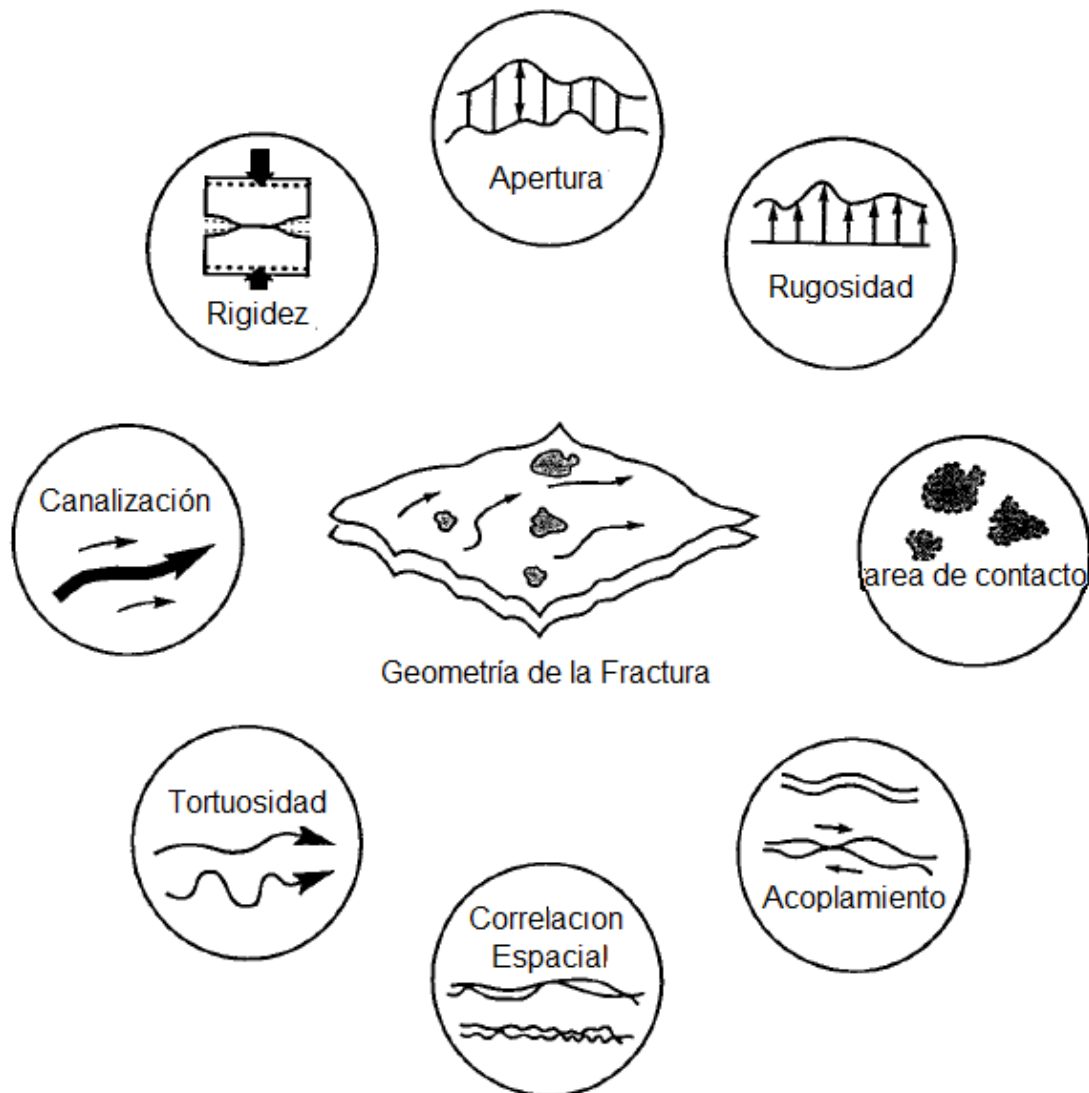


Figura 3.2 Propiedades de la Fractura.

Fuente: Editado de Thermo-hydro-Mechanical Processes of fracture media, p. 4

Las áreas de contacto son, como el nombre lo indica, áreas de la superficie de fractura donde la parte superior y la parte inferior están en contacto.

La rigidez es la medida de que tanto la fractura se deforma bajo cargas normales y cortantes.

La correlación espacial es la longitud sobre la cual el valor de la apertura de la fractura en una locación es correlacionado con sus puntos vecinos.

Tortuosidad es el término que relaciona el hecho de que el flujo a través de una fractura con apertura variable no sigue un camino recto, sino un camino tortuoso (lleno de cambios) que es más largo. Dicho de otra forma, la tortuosidad es el ratio de la longitud del camino tortuoso de un punto a otro, entre una línea recta de los mismos puntos.

La Canalización describe el fenómeno donde el fluido tiende a fluir a lo largo de los caminos con menor resistencia.

3.3 Condiciones geológicas para la generación de fracturas.

De acuerdo a la historia del estudio de los yacimientos fracturados, estos suelen estar en una roca frágil de baja porosidad donde los eventos tectónicos favorables se han desarrollado. En este caso las fracturas resultantes son de gran extensión y se llaman *macrofracturas*. Si la roca no es tan frágil y tiene una porosidad alta, las fracturas son generalmente de extensión pequeñas y por lo tanto se llaman *microfracturas* o *fisuras*.

Los eventos geológicos que pueden generar fracturas son [3.3]:

- a) Diastrofismo en caso de una falla.
- b) Erosión profunda, que causará esfuerzos diferentes en la roca.
- c) Contracción del volumen de la roca como resultado de la pérdida de agua cuando la roca pertenece a arenas arcillosas.
- d) Contracción del volumen de la roca en caso de variación de temperatura en rocas ígneas.

3.4 Asociación de fracturas.

La totalidad de fracturas puede ser asociada con su dirección, por lo tanto se tienen dos bases:

- a) El *sistema de fracturas* está formado por fracturas que tienen la misma dirección (mutuamente paralelas).
- b) La *red de fracturas* es el resultado de varios sistemas de fracturas.

3.4.1 Parámetros de multi-fracturas.

Si varios sistemas de fracturas están intercomunicados en un yacimiento, estos formaran la red del yacimiento fracturado que tendrá las siguientes características:

Distribución de fractura. En una red de fractura que contiene dos o más sistemas de fractura, cada fractura estará generada por un cierto estado de esfuerzo. Pares de fracturas conjugadas los cuales han sido generados por el mismo estado de esfuerzo son una excepción. La distribución de fractura es entonces expresada por un grado de fracturación. Este factor de fracturación será más fuerte si existe una intercomunicación continua entre los sistemas de fractura y si los sistemas son equivalentes entre sí. El grado de fracturación será más débil si la intercomunicación entre los sistemas de fractura es interrumpida y si la fracturación de un sistema prevalece sobre otro.

Matriz de bloque unidad. Se refiere a las fracturas que cortan la roca del yacimiento en varias direcciones, trazando un volumen unidad. Es correcto considerar que cada volumen unidad esta “atrapado” dentro de la red de fractura.

La forma del bloque es irregular, pero por practicidad se reduce a volúmenes geométricos simplificados, como cubos o delgados paralelepípedos.

Densidad de fractura. Es el grado de fracturación de la roca a través de varios radios relativos. Si el radio refiere al volumen, la densidad de fractura es llamada densidad volumétrica de fractura. Si el radio refiere al área o a la longitud de densidad de fractura es llamado densidad de área o densidad linear de fractura. Las expresiones analíticas son las siguientes:

La densidad volumétrica de fractura V_{fD} ; es el radio de la fractura de superficie S entre la matriz de volumen V_B :

$$V_{fD} = \frac{S}{V_B} \quad (3.1)$$

Densidad de fractura de área A_{fD} ; es el radio entre el cúmulo de longitud de las fracturas $l_t = n_f \times l$ y la matriz (S_B de la sección transversal).

$$A_{fD} = \frac{n_f \times l}{S_B} = \frac{l_T}{S_B} \quad (3.2)$$

Densidad de fractura lineal; es el radio del número de fracturas (n) que interseca una línea recta (normal o en dirección de la corriente) entre la longitud de la línea recta:

$$L_{fD} = \frac{n_f}{L_B} \quad (3.3)$$

La densidad de fractura lineal es también conocida como velocidad de fractura, frecuencia de fractura o frecuencia lineal.

Intensidad de fractura (FINT). Define el papel de las características intrínsecas de cada capa (permeabilidad, porosidad, cementación, etc.) durante el proceso de fractura, debido a su espesor y su locación estructural.

Este parametro expresa el radio de la frecuencia de fractura (FF) entre la frecuencia de espesor (THF).

$$FINT = \frac{FF}{THF} \quad (3.4)$$

3.5 Evaluación directa de fracturas.

La información que se obtiene durante varias fases de trabajo de campo como expolración, perforación, obtención de núcleos y pruebas, da como resultado la detección y evaluación de fracturas. Algunos de estos resultados muestran información directa, como observaciones en afloramientos durante la fase de exploración, análisis de núcleos en el laboratorio, etc.

La evaluación directa de afloramientos y núcleos es principalmente orientada a la determinación de las características básicas de fracturas simples, como amplitud, orientación, longitud, etc. El grupo de fracturas es examinado en orden para evaluar su interconexión, geometría y distribución, y eventualmente su densidad e intensidad.

3.5.1 Fracturas en afloramientos.

El estudio de fracturas en afloramientos incluye información diversa, relativa a la posición de las capas del yacimiento, la orientación de los sistemas de fracturas, el número de fracturas en cada sistema, la morfología, etc.

El modo más fácil de medir fracturas es marcar el afloramiento con una cinta, independiente de la orientación del sistema de fractura.

3.5.2 Evaluación mediante núcleos.

De examinar núcleos se espera la mayor cantidad de información, como amplitud, profundidad y localización de fracturas medibles. La imagen de un núcleo es mostrado en la figura 3.3.

En un núcleo es importante evaluar el plano de estratificación y su profundidad para evitar la confusión entre el plano de estratificación real y cualquier aparente plano de ruptura en el núcleo.

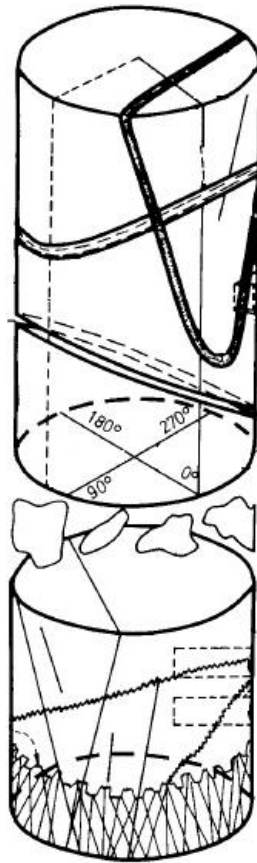


Figura 3.3 Núcleo de un yacimiento fracturado.

Fuente: Editado de Fundamentals of fractured reservoir engineering p.69

3.6 Propiedades físicas de las rocas.

3.6.1 Porosidad.

La porosidad representa el espacio vacío en una roca. Puede ser cuantificado al dividir el espacio vacío entre el volumen de la roca. En general la porosidad puede ser clasificada como primaria y secundaria.

La *porosidad primaria* es una inherente característica de la roca que refiere al espacio vacío intergranular con respecto al espacio granular de la roca (figura 3.4 a).

La *porosidad secundaria* es la porosidad formada por los espacios vacíos de las fracturas y las cavidades o vugulos (figura 3.4 b). La porosidad secundaria es la porosidad encontrada en rocas frágiles con relativa porosidad intergranular baja, es adamas causada por la fracturación de la roca.

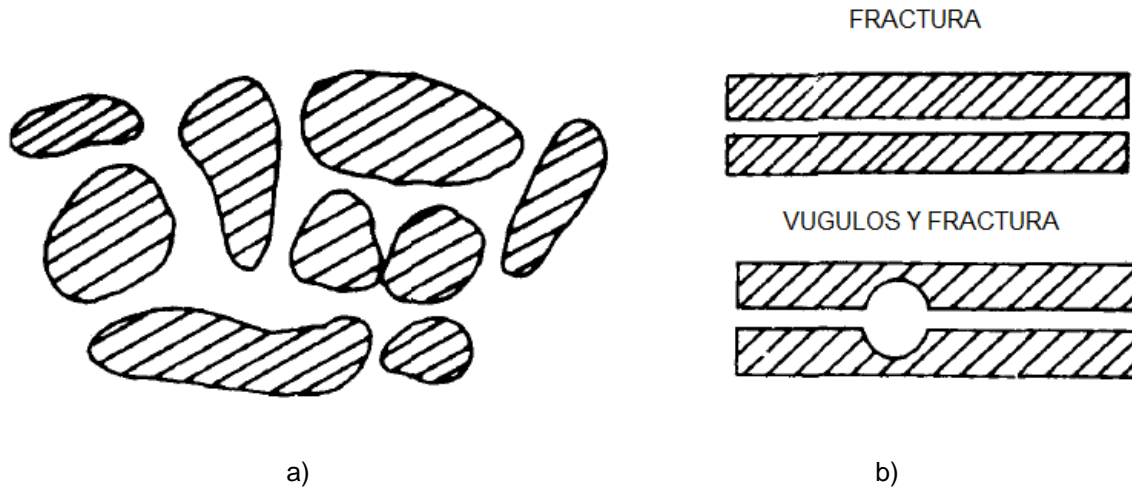


Figura 3.4 Porosidad: a) primaria y b) secundaria.
 Fuente: Editado de Fundamentals of fractured reservoir engineering p.148

3.6.2 Doble porosidad.

En yacimientos fracturados la porosidad total (Φ_t) es el resultado de la adición de las dos porosidades (primaria y secundaria).

$$\Phi_t = \Phi_1 + \Phi_2 \quad (3.5)$$

Esta porosidad total es equivalente a la definición estática de almacenamiento de la roca o el espacio vacío total.

3.6.3 Morfología de la fractura.

Fracturas abiertas. No contienen mineralización y no están cementadas. El ancho de la fractura es muy pequeño, probablemente del ancho de un poro, pero si incrementa la permeabilidad significativamente con la fractura. La porosidad de estas fracturas es muy pequeña aunque existen excepciones.

Fracturas deformadas. Tienen reducida permeabilidad. Son resultado de la fricción a lo largo de la fractura. Genera una superficie pulida o estriada que puede incrementar la permeabilidad paralela a la fractura. Es causa de una fuerte anisotropía en la roca.

Fracturas llenas de mineral. Están cementadas por una mineralización secundaria. Los materiales secundarios incluyen al cuarzo y la calcita. Este tipo de fracturas pueden ser barreras de permeabilidad. Por otra parte la parcial mineralización secundaria podría tener efectos en la recuperación de hidrocarburos porque puede actuar como un agente natural que elimina o reduce el cierre de las fracturas cuando el yacimiento es “pobre”.

Fracturas vugulosas. Pueden proveer porosidades y permeabilidades. Debido a la forma de estas cavidades, este tipo de fracturas no cierran cuando el yacimiento es pobre. Este tipo de fracturas son resultado de la percolación y pueden llevar al desarrollo de yacimientos prolíficos.

3.6.4 Permeabilidad.

La permeabilidad es la propiedad de los medios porosos que mide la capacidad del mismo medio para transmitir fluidos. Los yacimientos pueden tener permeabilidad primaria y secundaria. La permeabilidad primaria es también conocida como la matriz de permeabilidad. La permeabilidad secundaria puede ser referida como solución de fracturas.

Estas definiciones de fractura pueden ser confusas, especialmente la permeabilidad de fractura, que puede ser interpretada como una fractura simple o como una red de fracturas, o algunas veces como una permeabilidad de un volumen de fractura.

La matriz de permeabilidad puede ser evaluada con la ley de Darcy que describe cuantitativamente el flujo a través de un medio poroso [3.4].

$$v = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dl} \quad (3.6)$$

Donde: v = velocidad aparente del flujo.

μ = viscosidad del fluido.

dp/dl = gradiente de potencial en dirección del flujo.

k = permeabilidad de la roca.

La ley de Darcy es válida cuando el flujo está en estado estacionario, es linear, laminar, la viscosidad es constante, las condiciones son isotérmicas y el espacio poroso está completamente saturado por el fluido.

Despejando para k , se tiene la permeabilidad de un fluido incompresible y linear:

$$k = v \frac{\mu L}{\Delta p} = \frac{q \mu L}{A \Delta p} \quad (3.7)$$

Donde: q = velocidad de flujo.
 A = área.

La *permeabilidad intrínseca de fractura* (k_{ff}) se asocia a la conductividad medida durante el flujo a través de una fractura o una red de fracturas. Es la conductividad de un canal o fractura o de una red de fracturas. En este caso el área transversal del flujo es representada sólo por las áreas vacías de las fracturas (excluyendo el área alrededor de la matriz). En la figura 3.5 se puede ver el caso de una simple roca donde una fractura es paralela a la dirección de flujo y la segunda fractura forma un ángulo con la dirección del flujo. En este tipo de permeabilidad no importa el volumen de la roca asociado con las fracturas.

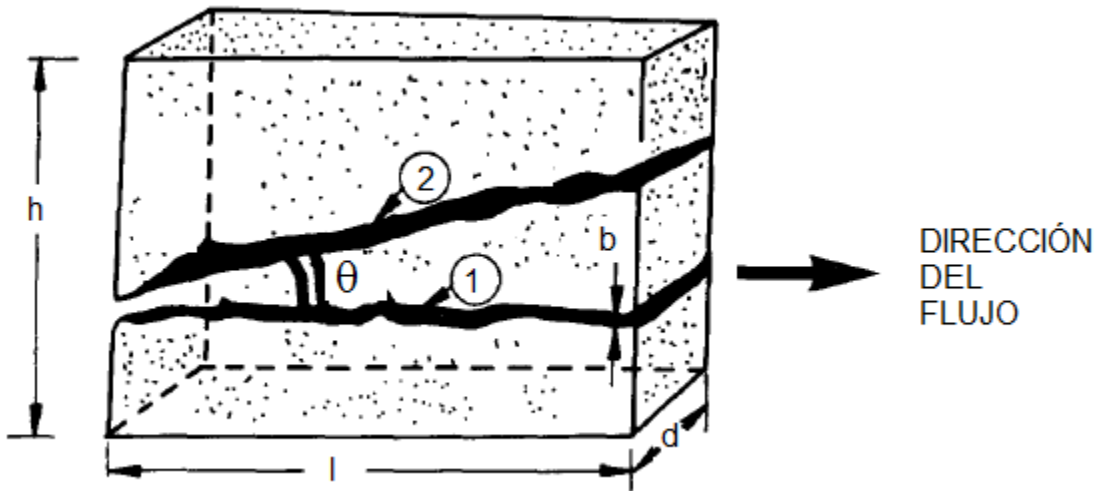


Figura 3.5 Matriz que contiene una fractura 1) paralela a la dirección del flujo, 2) con un ángulo θ respecto a la dirección del flujo.

Fuente: Editado de Fundamentals of fractured reservoir engineering p.157

$$k_{ff} = \frac{b^2}{12} \cos^2 \theta \quad (3.8)$$

La *permeabilidad convencional de la fractura* (k_f) forma la unidad hidrodinámica entre la fractura y el volumen de la roca. Significa que la sección transversal del flujo no será $b \times d$, sino $d \times h$, quedando:

$$k_f = k_{ff} = \frac{b^3}{12h} \quad (3.9)$$

La *permeabilidad de un sistema matriz-fractura* (k_t) se representa por la adición de la permeabilidad de la matriz k_m y la permeabilidad de las fracturas k_f .

$$k_t = k_m + k_f \quad (3.10)$$

Cuando la ecuación 3.10 hace referencia a un bloque como el de la figura 3.5, la permeabilidad total dependerá de la dirección del flujo, porque cualquier cambio en esta cambiará el valor de k_f .

3.6.5 Compresibilidad.

Si en un yacimiento fracturado hay un gran contraste entre las dos porosidades de la matriz ($\Phi_f \ll \Phi_m$), la compresibilidad entonces se vuelve muy importante porque controla el comportamiento de la presión asociado con la capacidad de almacenamiento.

La compresibilidad se define como el cambio de volumen por unidad de volumen para una presión aplicada.

$$C = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta P} \quad (3.11)$$

El volumen al que se hace referencia es el sometido a la compresión, como el volumen del poro, el volumen del fluido o el volumen de la matriz.

3.7 Propiedades intrínsecas y ambientales de las rocas.

Las propiedades mecánicas de las rocas son determinadas por la interacción de propiedades intrínsecas y ambientales.

Propiedades intrínsecas. Son los efectos causados por la misma roca, como la composición, el tamaño, la matriz de porosidad, la permeabilidad y el espesor de la roca.

Propiedades ambientales. Tales como la presión efectiva o la temperatura.

3.8 Geometría fractal y cuantificación de fracturas.

La relación entre la distribución fractal y los datos de conjuntos reales se puede mostrar mediante la fragmentación. Este fenómeno da origen a la propagación de fracturas. La propagación es un proceso no lineal que requiere de modelos complicados hasta para las configuraciones más simples. La fragmentación incluye la interacción entre fracturas a varias escalas, por lo que se esperan distribuciones fractales en la roca.

3.8.1 Patrones en las rocas.

Una roca podría ser caracterizada por ejemplo por el porcentaje del volumen de los minerales, pero no mostraría la información necesaria sobre las propiedades físicas o la historia de la roca. Esta información es generada por la estructura de la roca.

Los arreglos complejos de un patrón, o la forma en que el material está distribuido, contienen gran cantidad de información sobre las propiedades del material, su historia y los procesos sobre la formación de la estructura. Por lo tanto las características de cualquier conjunto estructurado están representadas por la organización de sus fragmentos. El estudio de estos patrones es lo que se busca en este estudio.

La suma de los fragmentos no es un ensamble; la relación entre los fragmentos y su arreglo agrega un componente importante y esto define las características del ensamble. Con pequeños fragmentos del mismo tipo se pueden arreglar diferentes ensambles. Los patrones de una roca poseen propiedades que son inmanentes para la mayoría de los patrones naturales: aleatoriedad y complejidad.

La complejidad de una estructura rocosa se reduce a sus componentes estáticos. Las estructuras complejas no están compuestas por partes complejas, están formadas por partes que son casi iguales o similares entre sí y que son más pequeñas que la estructura total. En estructuras complejas las partes pequeñas están unidas unas a otras, lo que significa que con probabilidad estas partes de la estructura son ligeramente diferentes de las otras y son diferentes en otras escalas.

Finalmente una roca con estructura compleja se puede definir como una estructura conformada de partes simples o similares que son claramente más pequeñas que la estructura completa y que se repiten in una forma difusa en un cierto rango de magnitud [3.5]. La estructura compleja está formada por un proceso simple pero iterativo.

3.8.2 Fractales en la naturaleza y sus propiedades.

Desde un punto de vista puramente matemático, las estructuras o patrones en las rocas no son fractales porque no completan los requerimientos fundamentales de la fractalidad: No son auto-similares en un rango de escala infinito. En contraste con los patrones fractales matemáticos, las estructuras geológicas presentan un comportamiento aleatorio causado por la falta de homogeneidad del material y por la interacción de los diferentes procesos naturales. Como consecuencia se tienen tres principales propiedades que son geológicamente significantes [3.5]:

- a) Las estructuras geológicas son usualmente diferentes en el escalamiento.
- b) Las estructuras naturales no son homogéneas.
- c) Las estructuras naturales son diferentes dependiendo de su dirección (anisotropía).

3.8.3 Regímenes de escala.

El escalamiento de propiedades de una estructura rocosa no es constante por lo general en varios órdenes de magnitud. La auto-similitud de los patrones naturales puede variar dependiendo de la escala (regímenes de escala) por lo que una fractalidad diferente en escalas diferentes es regular y no una excepción. El escalamiento es una característica fundamental en los materiales, por ejemplo, los granos de mineral y un aglomerado del mismo poseen diferente fractalidad.

Sin embargo, existen las estructuras auto-similares de varios órdenes de magnitud. Específicamente, la fractalidad de patrones de fractura puede ser constante desde milímetros hasta algunos kilómetros [3.6]. La razón de esto aún es desconocida y solo se especula que tienen que ver ciertas características del campo de esfuerzos.

3.8.4 Inhomogeneidad.

La inhomogeneidad es una característica de las estructuras rocosas. Es consecuencia de varios procesos. Por lo tanto, los estudios para la inhomogeneidad deben ser una parte integral de la cuantificación de la estructura. Es también un problema en el escalamiento. Una roca pequeña y sus patrones tienden hacia la inhomogeneidad, y en consecuencia, ganan homogeneidad con el incremento de tamaño. La cuantificación de los patrones cerca al tamaño de pequeñas fracturas depende de en donde la línea, el área o el volumen de análisis son colocados con respecto a las porciones del patrón. Esto significa a su vez que el patrón se vuelve inhomogéneo a su límite de resolución más baja. Por otro lado un patrón homogéneo se puede volver inhomogéneo en una escala mayor.

La inhomogeneidad con respecto a la escala significa que las sub-estructuras pueden mostrar diversas dimensiones fractales o incluso pueden no ser un fractal. Por otra parte, la variación de una dimensión fractal en diferentes partes del patrón y una sola dimensión fractal del patrón entero no son excluyentes.

3.8.5 Anisotropía.

La deformación es un proceso fluido y por lo tanto direccional, en consecuencia, la deformación deja estructuras anisotrópicas que pueden proveer información importante sobre el proceso de la formación de la estructura.

3.8.6 Métodos de Geometría fractal en fracturas.

Diferentes métodos de la geometría fractal pueden aplicarse a el mismo patrón lo que llevaría a diferentes dimensiones fractales. El método se indica usualmente junto con la dimensión. En esta sección se discutirá brevemente el método más común en la cuantificación de estructuras rocosas y YNF.

Los métodos de geometría fractal consideran la estructura interna de un patrón en formas diferentes. Se considera la descomposición interna del patrón en piezas separadas. Estas piezas están puestas en una caja y están estadísticamente representadas (figura 3.6a).

Las estructuras complejas están caracterizadas por un arreglo de pequeñas fracciones del total. En consecuencia, un método es más valioso si toma su arreglo y la geometría interna en consideración. Más valioso porque menos información sobre la geometría de la estructura se pierde y más información sobre el proceso de formación de la estructura es preservada. La mayoría de la información se pierde por el desensamble del patrón o de la estructura. Un poco más de información se conserva si la estructura es segmentada a lo largo de líneas de cierta orientación (figura 3.6b) y si los segmentos son tratados estadísticamente; por ejemplo con fragmentos paralelos a la línea escaneada, la conexión interna de la estructura no está totalmente perdida porque la relación entre la estructura y la orientación de la línea contiene información que puede ser usada para su análisis. La situación es similar si el espacio de las estructuras (fracturas) o las fracciones de las estructuras más complejas 3D son medidas (figura 3.6c). Esto lleva a los conjuntos de datos con una relación para la información adicional. Si la secuencia de segmentos o puntos de intersección a lo largo de la línea escaneada es preservada (conjunto de Cantor, figura 3.6d) la información contenida y el patrón es representado de forma más “completa”, al menos a lo largo de la dirección de análisis. Donde muchas porciones de la estructura son más o menos planas y paralelas entre sí, cuya extensión del ancho

del espacio puede ser suficientemente caracterizado, basado en mediciones a lo largo de los perfiles. Para estructuras no lineares o que no son planas, la mayoría de la información es conservada con esos métodos que consideran la orientación de las fracciones de los patrones. El método mejor conocido es el conteo de cajas (figura 3.6e).

El patrón de complejidad es mejor cuantificado con el conteo de cajas seleccionado sistemáticamente en sub-patrones (figura 3.6f). La anisotropía puede ser cuantificada aplicando métodos unidimensionales en diferentes direcciones (figura 3.6g). La mayoría de la información sobre patrones puede ser provista por una combinación de anisotropía y la no homogeneidad (figura 3.6h).

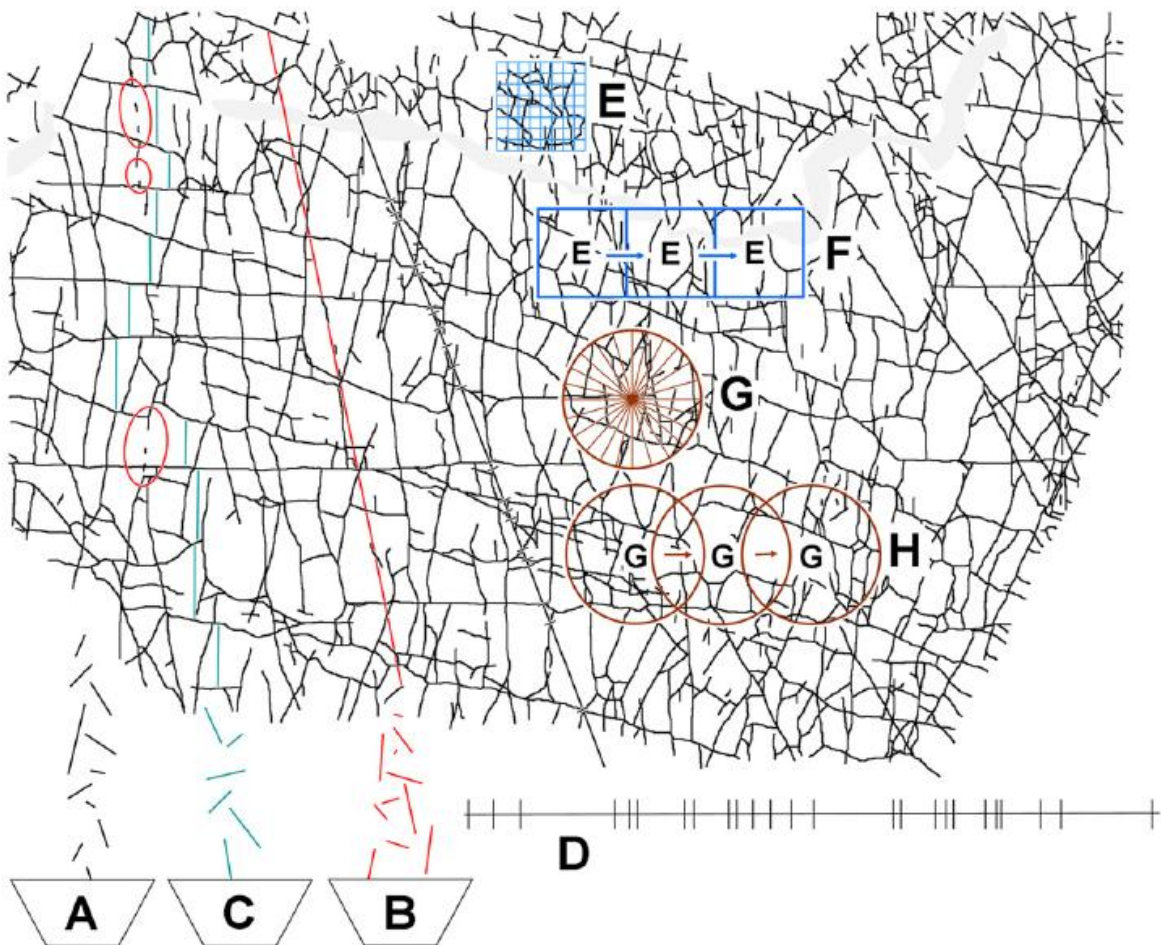


Figura 3.6 Diferentes tipos de cuantificación de un patrón de fractura por varios métodos de geometría fractal.

Fuente: Fractal-geometry techniques in the quantification of complex rock structures, p. 7

3.8.7 Fractales y Geología.

Las técnicas de la geometría fractal son herramientas para el estudio de estructuras complejas como las fracturas en las rocas porque proveen un simbolismo para cuantificar las geometrías y patrones de estas estructuras. La cuantificación puede llevar a información valiosa que no solo incluye las propiedades del material sino también el proceso de formación de la estructura, es un puente entre la naturaleza y el modelo.

Las estructuras geológicas están caracterizadas por su patrón de escalamiento, su falta de homogeneidad y su anisotropía. Estos patrones son propiedades geológicas significantes que reflejan varios procesos geológicos.

Las ventajas de la geometría fractal son la interpolación para completar patrones con solo una base de pocos datos, y la extrapolación de una escala a otra. El problema es que estas ventajas funcionan solo si los patrones son homogéneos y presentan la misma fractalidad en diferentes escalas.

Los resultados de la geometría fractal suelen tener fluctuaciones que deben considerarse como parte de los patrones.

3.9 Referencias.

- [3.1] Stephanson, O., Jing, L., Tsang, C. F. *Coupled Thermo-Hydro-Mechanical Processes of Fractured Media*. Elsevier Science B. V. 1996.
- [3.2] Aguilera, Roberto. *Naturally Fractured Reservoirs*. 2nd edition, Penn Well Publishing Company, 1995.
- [3.3] Van Golf-Racht, T. D. *Fundamentals of fractured reservoir engineering*. Elsevier Scientist Publishing Company. 1982.
- [3.4] Nelson, Ronald A. *Geologic analysis of Naturally Fractured Reservoirs*. 2nd edition, Gulf Professional Publishing, 2001.
- [3.5] J. H. Kruhl. *Fractal Geometry techniques in the quantification of complex rock structures: A special view on scaling regimes, inhomogeneity and anisotropy*. Journal of structural geology (2012). <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsg.2012.002>
- [3.6] J. J. Long. *Geological controls on fault relay zone scaling*. Journal of structural geology No. 22, pp. 1790-1800. 2011.

[3.7] Tourcotte, *Donald L. Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*. 2nd edition, Cambridge University Press. 2007.

[3.8] Barabási, A. L., Stanley, H. E. *Fractal concepts in surface growth*. Cambridge University Press. 1995.

[3.9] Dimri, V. P. *Fractal Behavior of the earth system*. Springer. 2005.

[3.10] David, Guy., Semmes, Stephen. *Fractured Fractals and Broken Dreams*. Clarendon Press. Oxford. 1997.

CAPÍTULO 4. DESARROLLO DEL MODELO.

La naturaleza no exhibe simplemente un grado más alto, sino un nivel completamente diferente de complejidad.

Benoit B. Mandelbrot.

DESARROLLO DEL MODELO.

4.1 Introducción.

Las fracturas, ya sea a gran escala o micro fracturas, son comunes en estructuras geológicas en la parte superior de la corteza terrestre. La modelación de las fracturas es un componente fundamental en el estudio de las masas rocosas. Un mejor entendimiento de las redes de fractura es necesario, por ejemplo, para la recuperación de petróleo de los yacimientos naturales. Las fracturas permiten el rápido transporte de fluidos a través de las masas rocosas y no son directamente accesibles excepto en sus intersecciones con las perforaciones o afloramientos. De los primeros pasos para el estudio de un cuerpo rocoso es la modelación de las fracturas para simularlas [4.1].

Las redes de fractura han sido establecidas como fractales de la naturaleza, pero el valor de esta dimensión fractal varía de acuerdo al método o puede ser similar en diferentes patrones de fracturas. Por lo tanto, establecer las diferencias y similitudes entre las redes de fracturas y su descripción como fractales es muy importante, así que se necesita un modelo alternativo para su caracterización.

4.2 Modelo jerárquico de fracturas (carpeta de Sierpinski).

Se construye un patrón de fracturas basado en un fractal (carpeta de Sierpinski), y con base en las variables teóricas se obtienen ecuaciones para un análisis comparativo de las redes de fractura.

4.2.1 Patrón sintético de fracturas.

El patrón sintético es construido usando una red jerárquica de fracturas generada como una carpeta de Sierpinski compuesta por segmentos de línea en 2D. Los parámetros elementales para la generación de este patrón son tres: La iteración (i), El factor de escala (b), y el número de bloques no iterados en cada paso (n). El primer paso donde $i = 0$, la plantilla inicial es un bloque de dimensión $l = 1$. El factor de escala usado en la plantilla inicial es $b = 3$, el cual consiste en varias fracturas ortogonales que dividen el área inicial en nueve bloques, cada uno con longitud de lado de 0.333 (figura 4.1a), se llama a esta segunda plantilla la iniciadora donde $i = 1$. En el siguiente paso, un bloque se deja sin fracturar y los otros se iteran por el factor 3. Este generador es entonces aplicado sobre sí mismo en sucesivas iteraciones hasta $i = 5$ creando seis patrones (figura 4.1a-f).

Doughthy y Karasaki [4.2] usaron un modelo similar con $b = 3$ y $n = 1$ hasta 8 para simular flujo a través de rocas fracturadas.

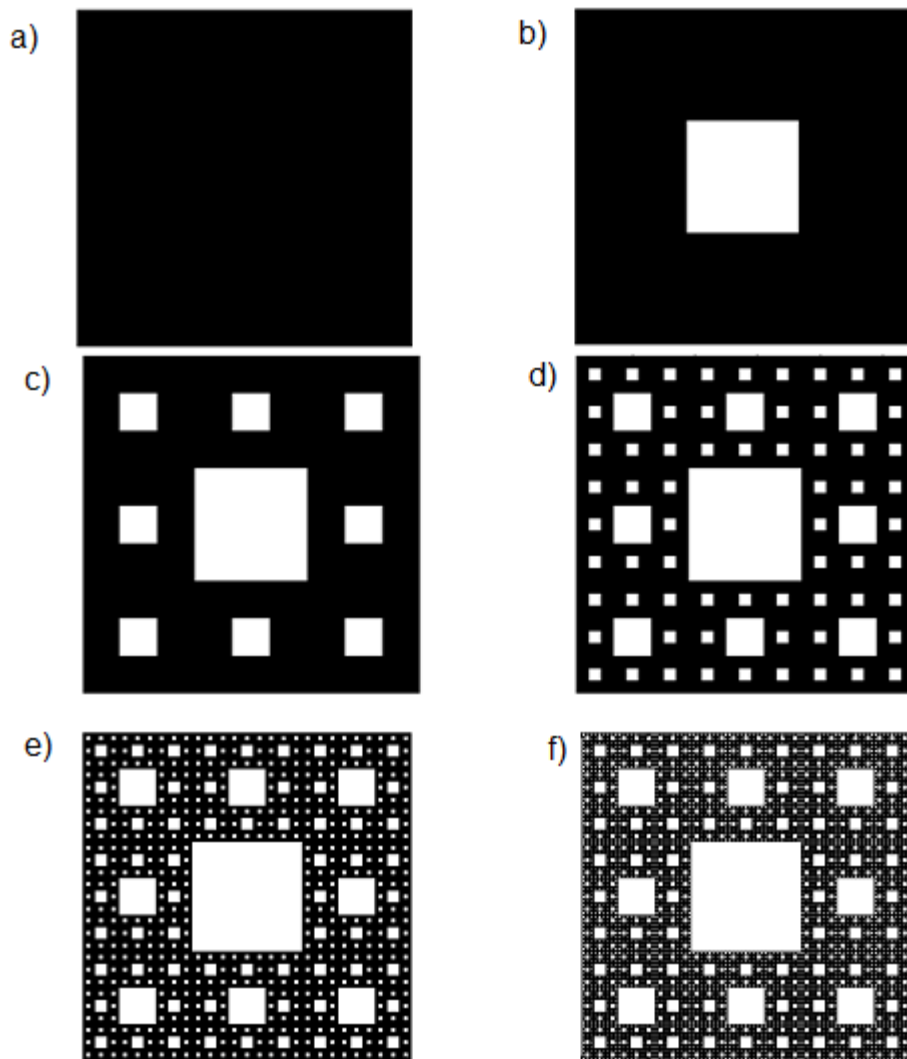


Figura 4.1 Construcción del patrón de fractura (fracturas en negro, sólidos en blanco), con $b = 3$, $n = 1$ y a) $i = 0$, b) $i = 1$, c) $i = 2$, d) $i = 3$, e) $i = 4$, f) $i = 5$.
Fuente: Elaboración propia.

La dimensión fractal teórica D , de los patrones generados es la misma para cualquier i además de que puede ser encontrada con la siguiente ecuación [4.3]:

$$D = \frac{\log(b^2 - n)}{\log b} \quad (4.1)$$

En las figuras 4.1b-f:

$$D = \frac{\log(3^2 - 1)}{\log 3} = 1.8927$$

La distribución de longitud de las fracturas en estos patrones se representa por las ecuación:

$$l = \frac{1}{b^i} \quad (4.2)$$

Donde l es la longitud de las fracturas en una iteración i . Las ecuaciones 4.1 a 4.2 funcionan para cualquier conjunto de valores b y n . en este caso particular $b = 3$ y $n = 1$. Además se puede notar que D es independiente de i , también que todos los patrones que se han generado tienen la misma dimensión fractal.

4.3 Probabilidad de encontrar fracturas en una carpeta de Sierpinski.

Los fractales que se han considerado son construcciones que no varían con la escala que siguen una relación sencilla. Estos fractales de redes fractura son generados usualmente de un sólido con fracturas que mediante un proceso iterativo se re-escala.

Las carpetas de Sierpinski de las figuras 4.1 tienen una dimensión $E = 2$ (euclidiana), un factor de reducción $b = 3$, y una probabilidad de permanecer de las fracturas en el sólido o la probabilidad de encontrar fracturas en la plantilla. $p_f = 8/9$,

4.3.1 Carpeta de Sierpinski heterogénea.

En la naturaleza generalmente la distribución de fracturas no se encuentra de forma auto-similar. Por esta razón se debe tomar en consideración las carpetas de Sierpinski heterogéneas, que se distribuyen de diferente manera pero que son caracterizadas también por la probabilidad de contener fracturas (figura 4.2). Esta probabilidad de permanecer de la fractura p_f se describe con la siguiente ecuación:

$$p_f = \left(1 - \frac{n}{b^2}\right) \quad (4.3)$$

La ecuación 4.3 permite caracterizar la red de fractura desde un punto probabilístico y al igual que la ecuación 4.1 es independiente de la iteración y depende de las mismas variables n y b , por lo tanto se pueden usar para tener un sistema de ecuaciones con las cuales se pueden obtener valores de dos variables si son conocidas las otras dos.



Figura 4.2 Carpeta de Sierpinski heterogénea (fracturas en negro, sólidos en blanco).
Fuente: Elaboración propia.

Las ecuaciones de n , despejando de 4.1 y 4.3 quedan:

$$n = b^2 - b^{D_f} \quad (4.4)$$

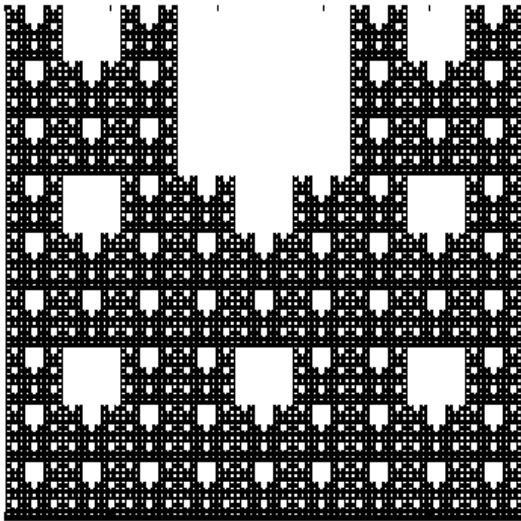
$$n = (1 - p_f)b^2 \quad (4.5)$$

Por otro lado despejando b de la ecuación 4.3 se tiene:

$$b = \sqrt{\frac{n}{(1 - p_f)}} \quad (4.6)$$

Con estas ecuaciones se pueden caracterizar redes de fractura de una forma más específica.

Ejemplos:



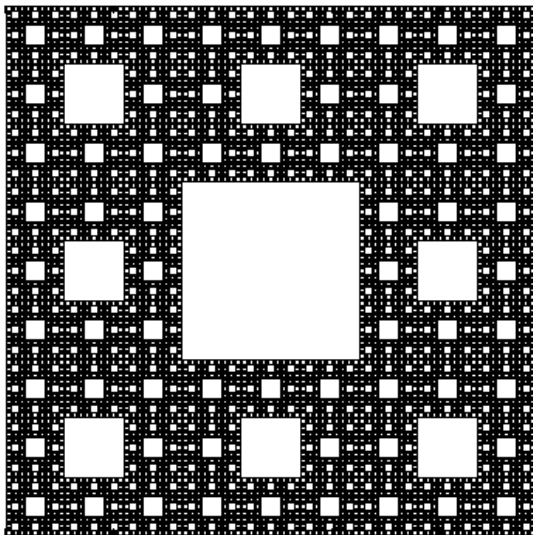
Datos:

$$D = 1.892$$

$$p_f = 8/9$$

$$n = 1$$

$$b = 3$$



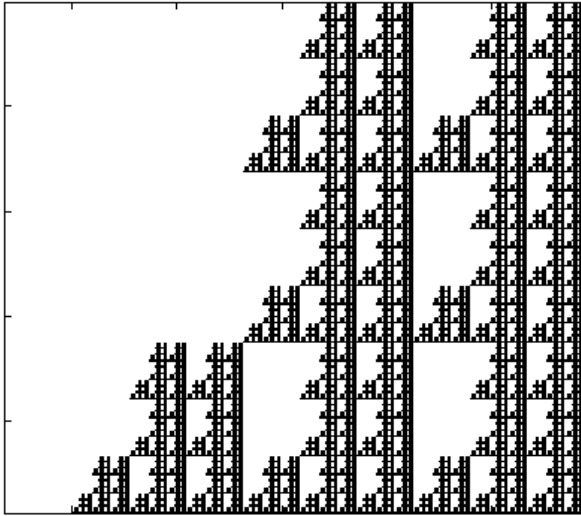
Datos:

$$D = 1.892$$

$$p_f = 8/9$$

$$n = 1$$

$$b = 3$$



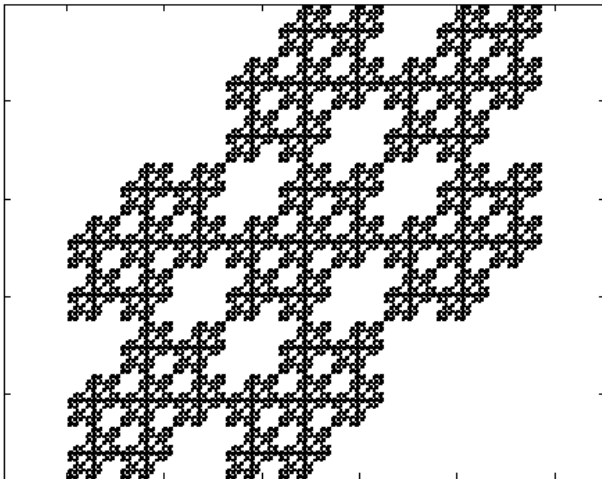
Datos:

$$b = 3$$

$$D = 1.7712$$

$$p_f = 7/9$$

$$n = 2$$



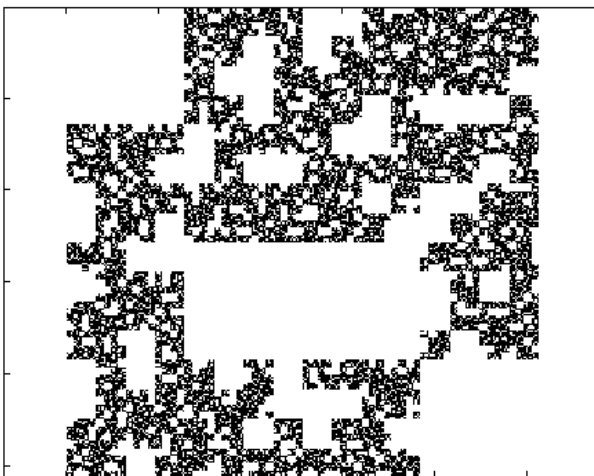
Datos:

$$D = 1.7712$$

$$p_f = 7/9$$

$$n = 2$$

$$b = 3$$



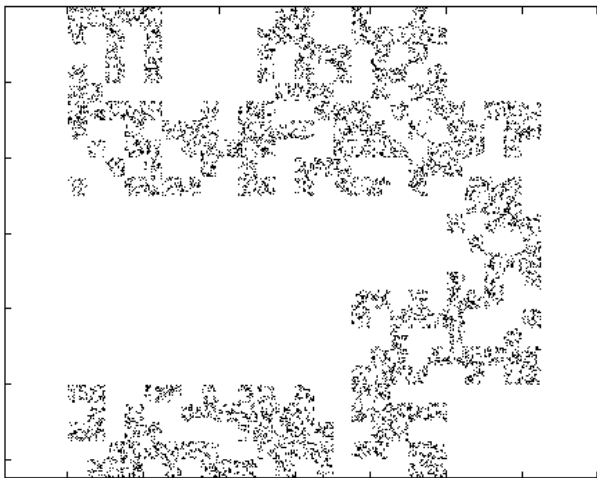
Datos:

$$D = 1.7925$$

$$p_f = 0.75$$

$$n = 4$$

$$b = 4$$



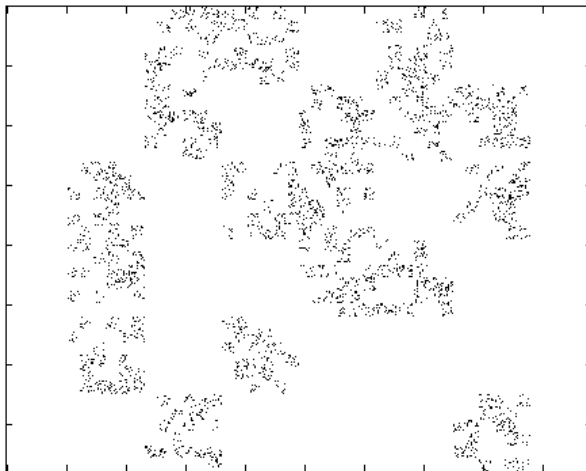
Datos:

$$b = 5$$

$$p_f = 0.6$$

$$n = 10$$

$$D = 1.6826$$



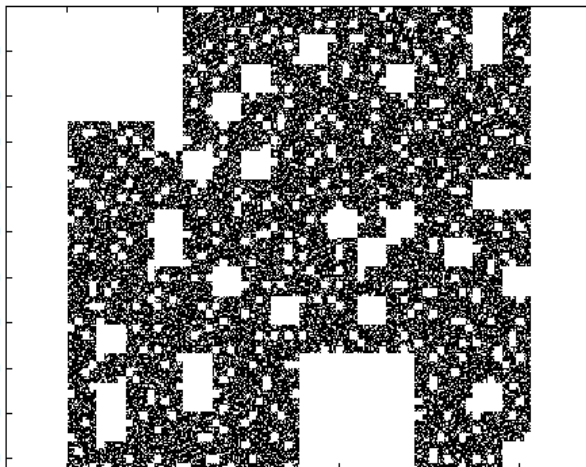
Datos:

$$D = 1.6131$$

$$p_f = 0.49$$

$$n = 18$$

$$b = 6$$



Datos:

$$D = 1.9037$$

$$p_f = 0.85$$

$$n = 2$$

$$b = 4$$

Figura 4.3 Modelos resueltos de carpetas de Sierpinski homogéneas y heterogéneas (fracturas en negro, sólidos en blanco).
Fuente: Elaboración propia.

Para probar el modelo se muestra la siguiente tabla de comparación con varias dimensiones fractales.

Tabla 4.1 Carpetas de Sierpinski con iteración $i = 4$.
Fuente: Elaboración propia.

b	n	D	p_f
2	1	1.5850	0.7500
2	1.25	1.4594	0.6875
2	1.5	1.3219	0.6250
2	1.75	1.1699	0.5625
2	2	1.0000	0.5000
3	1	1.8928	0.8889
3	2	1.7712	0.7778
3	3	1.6309	0.6667
3	4	1.4650	0.5556
3	5	1.2619	0.4444
3	6	1.0000	0.3333
4	1	1.9534	0.9375
4	2	1.9037	0.8750
4	3	1.8502	0.8125
4	4	1.7925	0.7500
4	5	1.7297	0.6875
4	6	1.6610	0.6250
4	7	1.5850	0.5625
4	8	1.5000	0.5000
4	9	1.4037	0.4375
4	10	1.2925	0.3750

b	n	D	p_f
4	11	1.1610	0.3125
4	12	1.0000	0.2500
5	1	1.9746	0.9600
5	2	1.9482	0.9200
5	3	1.9206	0.8800
5	4	1.8917	0.8400
5	5	1.8614	0.8000
5	6	1.8295	0.7600
5	7	1.7959	0.7200
5	8	1.7604	0.6800
5	9	1.7227	0.6400
5	10	1.6826	0.6000
5	11	1.6397	0.5600
5	12	1.5937	0.5200
5	13	1.5440	0.4800
5	14	1.4899	0.4400
5	15	1.4307	0.4000
5	16	1.3652	0.3600
5	17	1.2920	0.3200
5	18	1.2091	0.2800
5	19	1.1133	0.2400
5	20	1.0000	0.2000

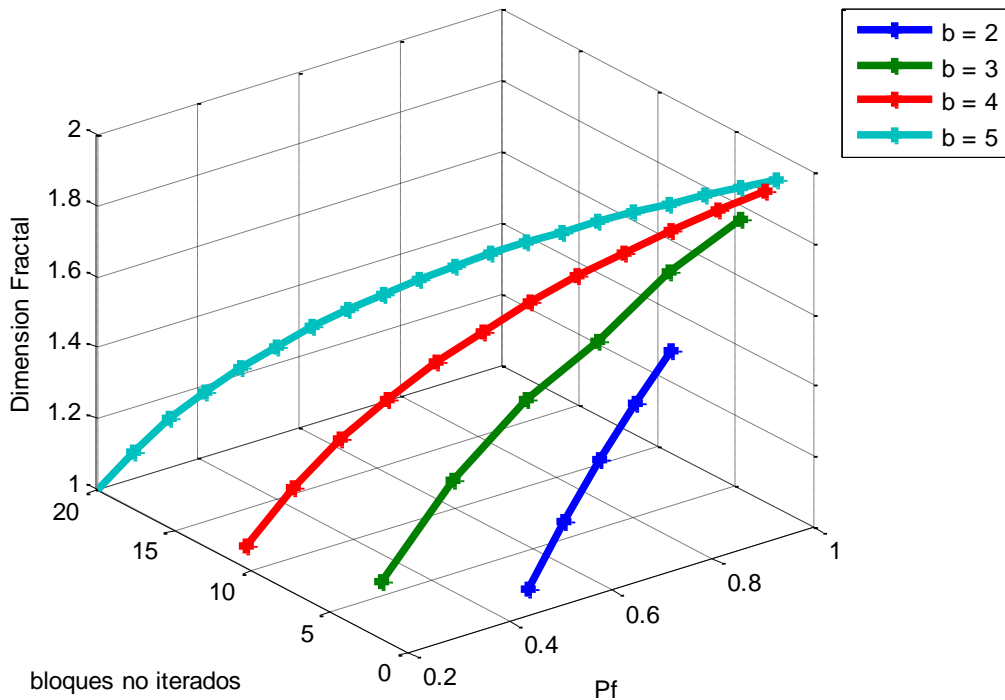


Figura 4.4 Gráfica de carpetas de Sierpinski con iteración $i = 4$.
Fuente: Elaboración propia.

4.4 Redes de yacimientos naturalmente fracturados.

Desde una perspectiva de redes naturales de fractura, las longitudes comúnmente varían de una a dos órdenes de magnitud [4.4]. Este rango es importante porque si se comienza en $i = 3$, las longitudes de estas fracturas sintéticas están distribuidas en las mismas dos órdenes de magnitud donde $l_{min} = 1/b^i = 1/3^3 = 0.037$ y $l_{max} = 1$.

Por lo tanto, este método debería ajustarse bien a los YNF donde se encuentren rangos de longitud relativa similares a los del patrón sintético.

4.4.1 Imágenes de redes de fractura.

El análisis de las redes de fractura se desarrolló a través de imágenes digitales, preferentemente binarias (blanco y negro) de origen, y otras se convirtieron utilizando el software de edición de imágenes “Jasc Paint Shop Pro 9”. Con la imagen binaria o umbral se realiza un conteo de zonas blancas y negras de la red de fractura obteniendo un porcentaje de color siendo las fracturas el color blanco, y los sólidos, el color negro.

El porcentaje de color blanco obtenido del software de edición de imágenes se considera como porosidad de fractura (ver sección 3.6) que es la porción de la imagen ocupada por fracturas. De este porcentaje se obtiene la probabilidad de fractura con la siguiente ecuación:

$$\Phi_f = p_f^i \quad (4.7)$$

Donde i (iteración del patrón seleccionada) es igual a 4 para mantener un orden de magnitud de fractura coherente con las imágenes estudiadas.

El siguiente paso es examinar las imágenes con el software de análisis Fractal Benoit, con el cual se obtiene el segundo parámetro: la dimensión fractal, de esta forma de nuevo se tienen dos constantes y dos variables que con las ecuaciones 4.4 - 4.6 se pueden resolver.

La figura 4.5 [4.5] es un ejemplo de las redes de fractura naturales usadas para el análisis del modelo. Su dimensión fractal es 1.56 (con la imagen en negativo) y su probabilidad de permanecer de la fractura con una iteración $i = 4$ es $p_f = 0.6117$. Los resultados obtenidos de su análisis son: $b = 3.056$ y $n = 3.626$, los cuales pueden ser manipulados para un manejo más fácil si se desea, por ejemplo, cambiar el valor de $b = 3.27$ por $b = 3$ y ajustar las formulas para obtener $n = 3.449$ con un error del 0%, en la dimensión fractal y 0.81% en la probabilidad de permanecer de la fractura.

De igual manera se puede comparar cada imagen de fracturas con el modelo matemático para obtener valores precisos o generar una carpeta de Sierpinski específica para asignar valores cercanos a los reales si lo que nos interesa es una comparación cualitativa de la imagen (figura 4.6).

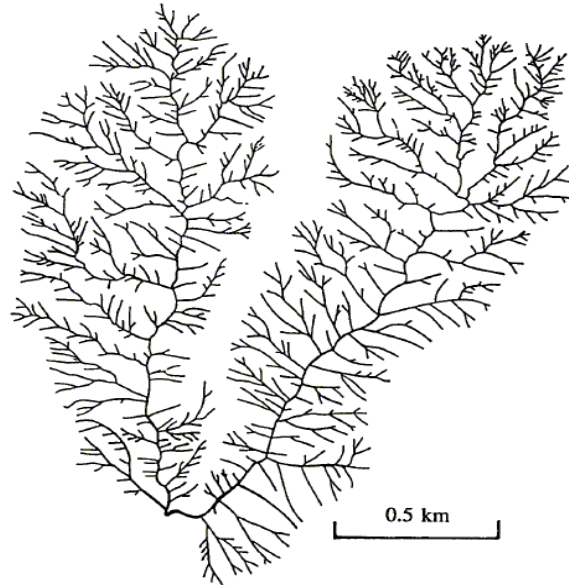


Figura 4.5 Red de fracturas del cañón de Volfe, California. $D = 1.56$, $p_f = 0.6117$, $b = 3.056$, $n = 3.626$

Fuente: Fractals and Chaos in Geology and Geophysics, p. 184

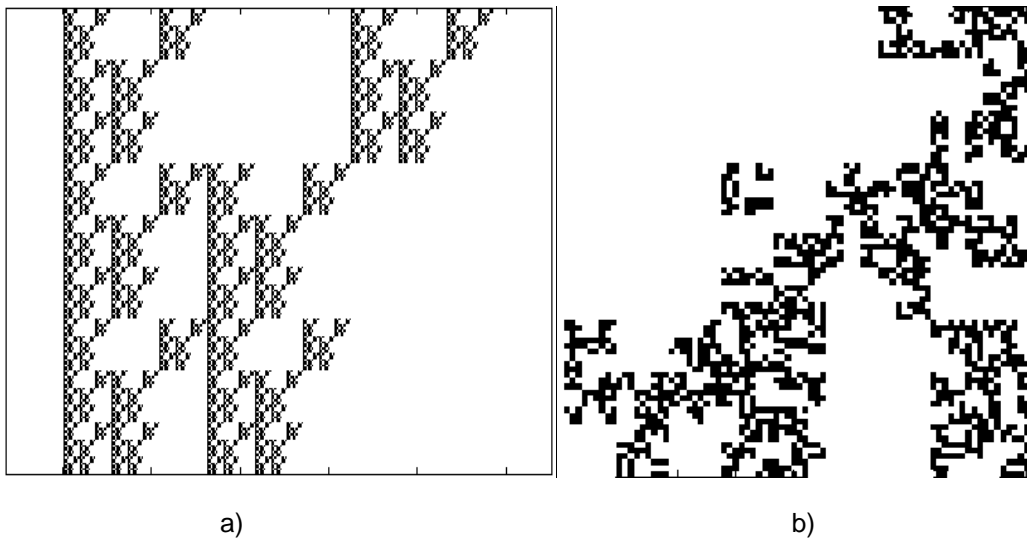


Figura 4.6 Red de fracturas generada. a) cualitativa (buscando igualar la imagen original). $D = 1.63$, $p_f = 0.6667$, $b = 3$, $n = 3$. Y b) cuantitativa (valores aproximados al original) $D = 1.56$, $p_f = 0.6167$, $b = 3$, $n = 3.449$

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4.2 Imágenes de redes de fractura con iteración $i=4$.
Fuente: Elaboración propia.

imagen	D	POROSIDAD DE FRACTURA	PROBABILIDAD DE PERMANECER DE LA FRACTURA	b	n
yacimiento Turquía	1.19	4.5	0.4606	2.6042	3.6583
Z1	1.38	5	0.4729	3.3466	5.9038
Z5	1.46	6.1	0.4970	3.6505	6.7033
red de fracturas, California	1.56	14	0.6117	3.0560	3.6265
lago Nasser, Egipto	1.65	44.9	0.8186	1.7717	0.5695
mapa de Noruega	1.77	36	0.7746	3.0358	2.0774
Himalaya	1.78	56.7	0.8678	1.9055	0.4802
Isla del Trocadero, España	1.8	47.5	0.8302	2.5359	1.0921

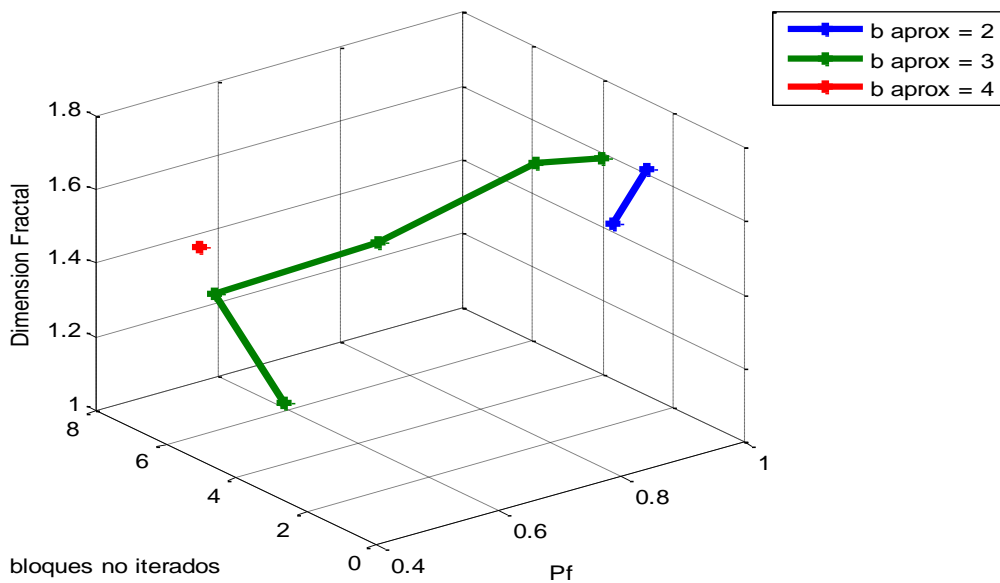


Figura 4.7 Gráfica de imágenes con iteración $i=4$.
Fuente: Elaboración propia.

Las imágenes con $b = 3$ y aproximados se ajustaron y se excluyeron los valores de b con un solo valor para una mejor comparación del modelo.

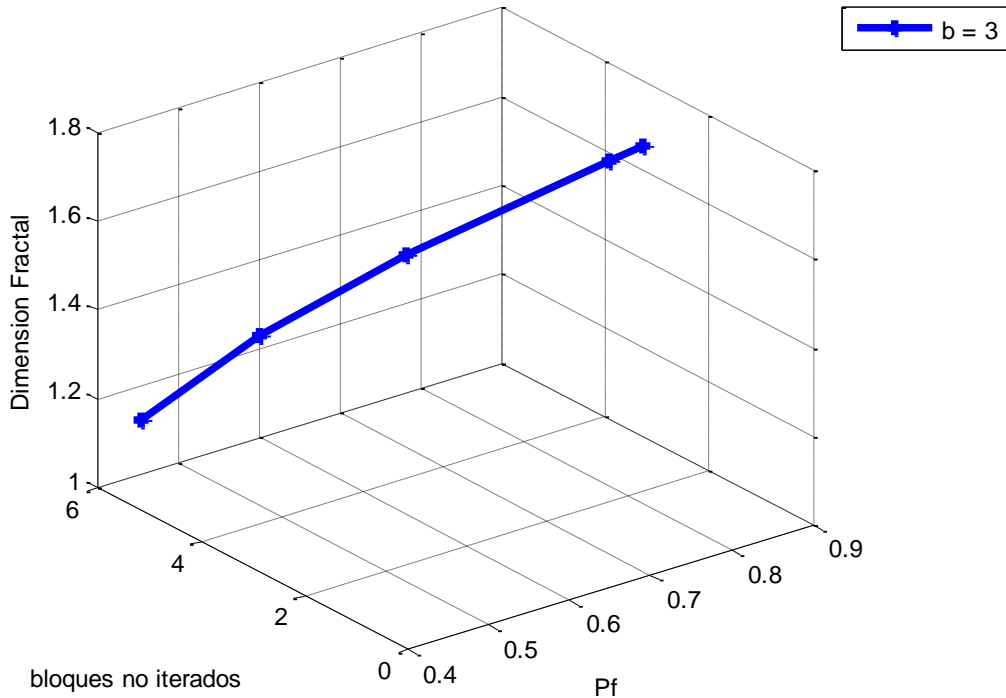


Figura 4.8 Gráfica de imágenes con iteración $i = 4$, $b = 3$ y ajustada.
Fuente: Elaboración propia.

Como se puede ver en la figura 4.6 las curvas del modelo se ajustan bien a la curva de las imágenes reales.

Los modelos fractales ofrecen una conveniente manera de generar complejos medios fracturados en una forma rigurosa y reproducible. Además de ser una forma de aplicación para el estudio de los YNF.

4.5 Lagunaridad en las imágenes.

En la sección 2.6 se explica el concepto de lagunaridad propuesto por Mandelbrot. Para el estudio del modelo, se utilizará el método para calcular la lagunaridad propuesto por Allain y Cloitre [4.7] como medida de la heterogeneidad o textura de un objeto.

4.5.1 Algoritmo de gliding box (caja deslizante).

Para calcular la lagunaridad, una caja de lado r se mueve sobre la imagen entera en 2D, y el número de cajas $[n_k(r)]$ es contada donde sea que la masa de la caja es igual a k . este procedimiento se repite variando k desde 0 a un valor igual al número total de cajas $[N(r)]$. Entonces la probabilidad de función de distribución $Q(k,r)$, se define como:

$$Q(k,r) = \frac{n_k(r)}{N(r)} \quad (4.8)$$

La lagunaridad $[\Lambda(r)]$ se define:

$$\Lambda(r) = \frac{\sum_{k=0}^{r^2} k^2 Q(k,r)}{\left[\sum_{k=0}^{r^2} k Q(k,r) \right]^2} \quad (4.9)$$

Donde el denominador es el cuadrado del primer momento de la distribución de la probabilidad, y el numerador es el segundo momento de la distribución de la probabilidad, el cual es entonces una medida de la varianza del radio medio de la masa de la caja [4.8].

Las lagunaridades de las imágenes y los modelos fueron diferentes dejando como conclusión que aunque son equivalentes en los demás parámetros, la cuantificación de la forma en que se visualizan no es la misma. La figura 4.7 muestra lagunaridades puntuales con una caja de radio de 10% del tamaño de las imágenes y modelos.

En los anexos se pueden encontrar las curvas de lagunaridad de cada imagen y modelo.

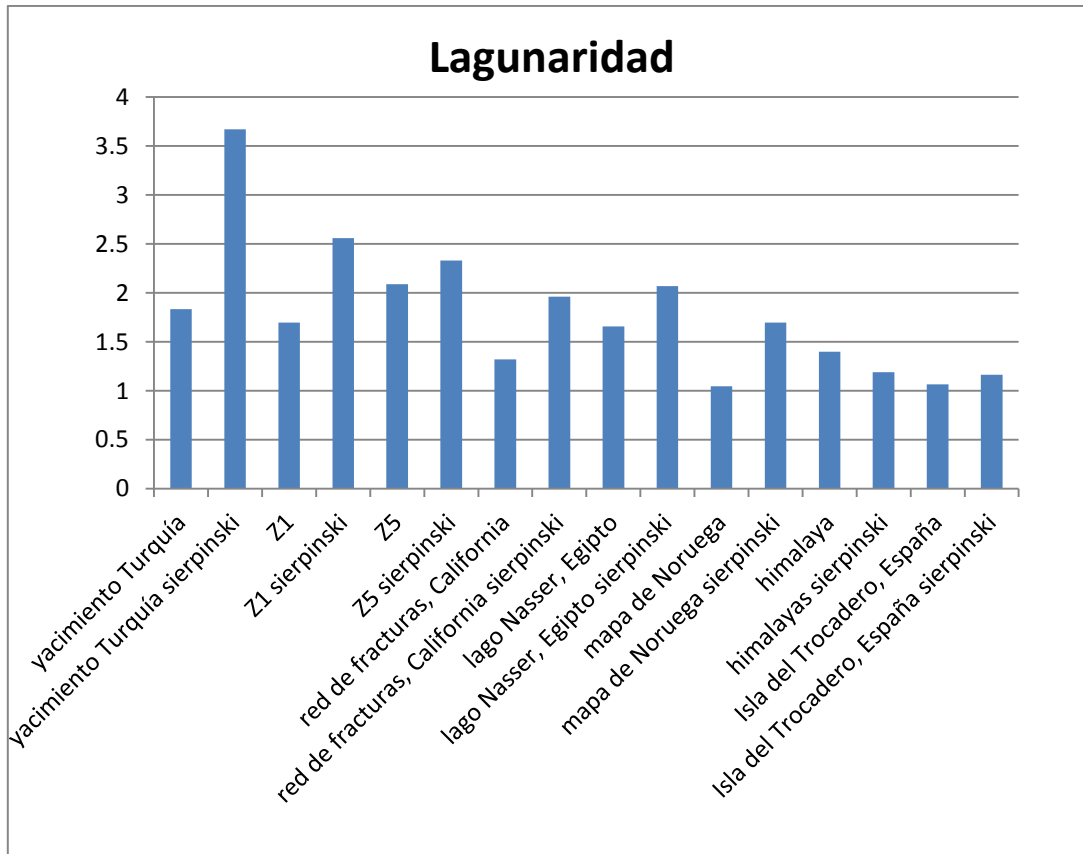


Figura 4.9 Lagunaridad puntual de las imágenes y modelos.
Fuente: Elaboración propia.

4.5 Referencias.

- [4.1] Chiles, J. P., *Fractal and Geostatistical Methods for Modeling of a fracture network*. Journal of Mathematical Geology, Vol. 20, pp 631-654. 1987.
- [4.2] Doughty, C., and Karasaki K., *Flow and transport in hierarchically fractured rock*. Journal of Hydrology, Vol. 263, 2002.
- [4.3] Roy, Ankur., *A quantitative study of scaling properties of fracture networks*. University of Tennessee, 2006.
- [4.4] Barton, C. C., *Fractal analysis of scaling and spatial clustering of fractures*. Fractals in earth sciences, Plenum, New York, 265 pp. 1995.
- [4.5] Tourcotte, Donald L. *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*. 2nd edition, Cambridge University Press. 2007.
- [4.6] Jafari, Alireza. Babadagli, Tayfun. *Estimation of equivalent fracture network permeability using fractal and statistical network properties*. Journal of Petroleum Science and Engineering Vol. 92-93, pp 110-123. 2012.
- [4.7] Allain, C., Cloitre, M. *Characterizing the lacunarity of random and deterministic fractal sets*. Phys. Rev. A 44 (6), 3552–3558. 1991.
- [4.8] Plotnick, R.E., Gardner, R.H., Hargrove, W.W., Prestegard, K., Perlmutter, M. *Lacunarity analysis: a general technique for the analysis of spatial patterns*. Phys. Rev. E 53 (5), 5461–5468. 1996

CONCLUSIONES.

Lo importante es no dejar de hacerse preguntas.

Albert Einstein.

CONCLUSIONES.

Se presento un nuevo modelo jerárquico en el cual, a través de carpetas de Sierpinski generadas en Matlab, se pueden variar los parámetros b y n para obtener diferentes dimensiones fractales D y probabilidades de permanecer de la fractura p_f . Con éste enfoque se comparan las imágenes de los yacimientos naturalmente fracturados o cualquier tipo de red de fracturas y entender mejor su comportamiento.

El objetivo general de esta tesis se alcanzó en su desarrollo porque se generó un modelo alternativo a los conocidos para el análisis de los YNF con parámetros diferentes, un enfoque distinto y una nueva forma de ver este tipo de yacimientos. Tener un modelo diferente permitió ampliar la visión de los fractales y su utilización en el estudio de las redes de fractura.

El modelo se puede ajustar a cualquier escala deseada dado que se controla la iteración que se quiere permitiendo un rango amplio de longitudes de fractura. Este hecho es muy importante dado que el manejo de escalas no siempre es posible en todos los modelos de fracturas porque se limitan a una longitud específica de imágenes.

En la generación del modelo se pudieron empatar las ecuaciones de probabilidad de permanecer de la fractura que es básicamente la probabilidad de una fractura de mantenerse en la una imagen o carpeta de Sierpinski y dimensión fractal con parámetros variables iguales en ambas b (factor de escala) y n (el número de bloques no iterados en cada repetición, o visto de otra forma, el sólido que queda en la imagen), que permitieron una relación para cualquier escala e imagen. Los resultados mostraron en general que el factor de escala b más común es igual a 3 aproximadamente.

Los algoritmos homogéneo y heterogéneo, que han sido usados para generar los modelos fractales de medios fracturados muestran una estructura muy parecida a la real, en particular para valores de $b = 3$ y 4 . La probabilidad de permanecer de la fractura y la dimensión fractal pueden variar ampliamente dependiendo de la cantidad de sólido en la imagen. Pero el porcentaje de error al empatar los datos del modelo y las imágenes reales no supera el 11% en la probabilidad de permanecer de la fractura cuando se iguala la dimensión fractal, que es un resultado prometedor para un nuevo modelo.

En los gráficos de las figuras 4.4 y 4.8 se puede observar que mientras la dimensión fractal aumenta, también lo hace la probabilidad de permanecer de la fractura proporcionalmente, la cantidad de sólido lógicamente disminuye pero el factor de escala no necesariamente tiene que cambiar.

Se puede ajustar el modelo de la forma que se deseé, ya sea cualitativamente buscando una imagen similar a la real, o cuantitativamente obteniendo los números de los parámetros que se quiere o necesite.

Como un análisis complementario se estudio la lagunaridad de las imágenes para revisar las diferencias en cuanto a la distribución de los espacios donde no hay fracturas. Los huecos o vacíos están distribuidos aleatoriamente en el modelo y por lo tanto no concuerdan con la de las imágenes reales en este sentido.

El estudio de la lagunaridad permitió comparar otro parámetro entre las imágenes reales y las carpetas generadas, aunque solo como datos extras porque no forma parte del modelo presentado aquí presentado.

Trabajo futuro.

El modelo presentado para caracterizar fracturas describe de buena forma las imágenes de redes de fractura reales, pero al ser una propuesta nueva y teórica tiene varias oportunidades de crecimiento, un punto importante es lograr una ecuación que permita empatar la lagunaridad con los parámetros de dimensión fractal y la probabilidad de que permanezca la fractura para también obtener una visualización semejante de las imágenes.

Por otra parte también cualquier dimensión fractal como la dimensión química podría ser utilizada para mejorar la descripción de las redes de fractura y dar otra perspectiva de la realidad.

Un punto también importante sería llevar el modelo a una caracterización en 3 dimensiones con lo que se puede involucrar la percolación como parámetro alternativo para la descripción del modelo.

ANEXOS.

Los patrones que la geometría euclidiana hace a un lado por “no tener forma” nos retan a estudiar la morfología de lo amorfo.

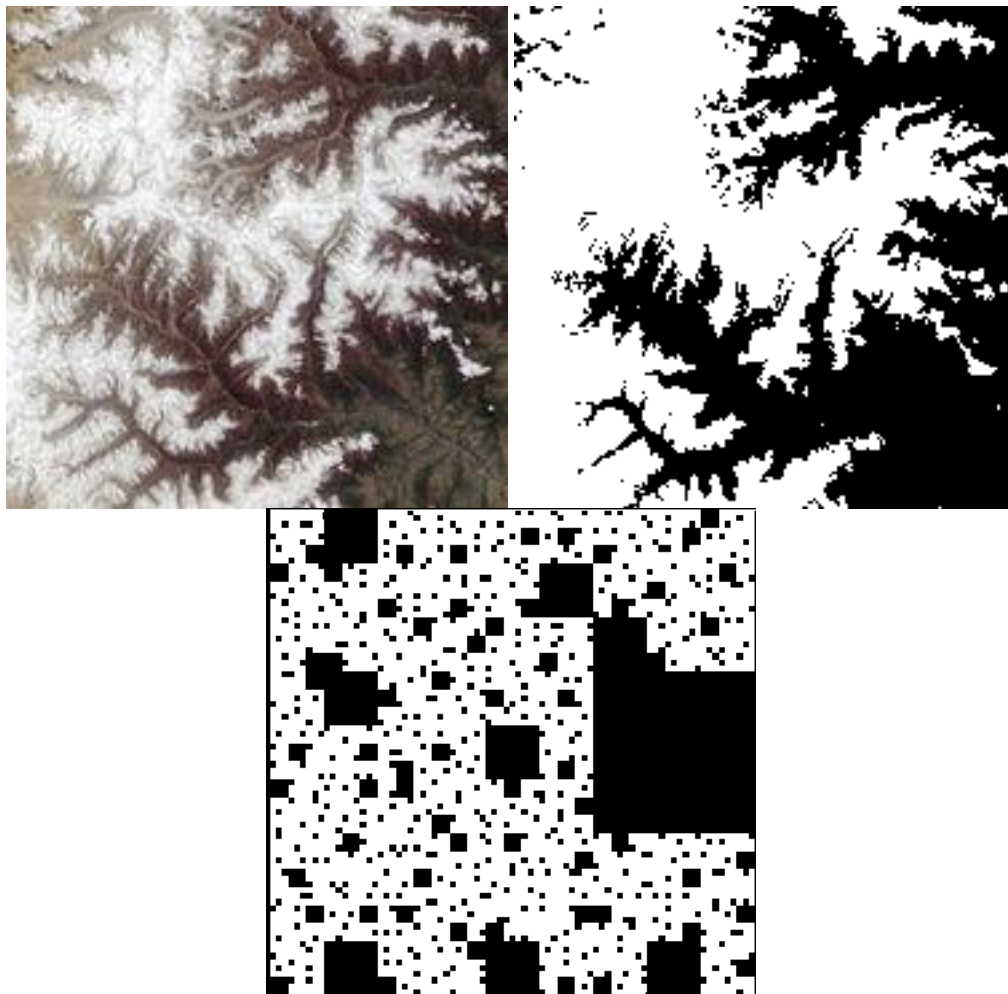
Benoit B. Mandelbrot.

ANEXOS.

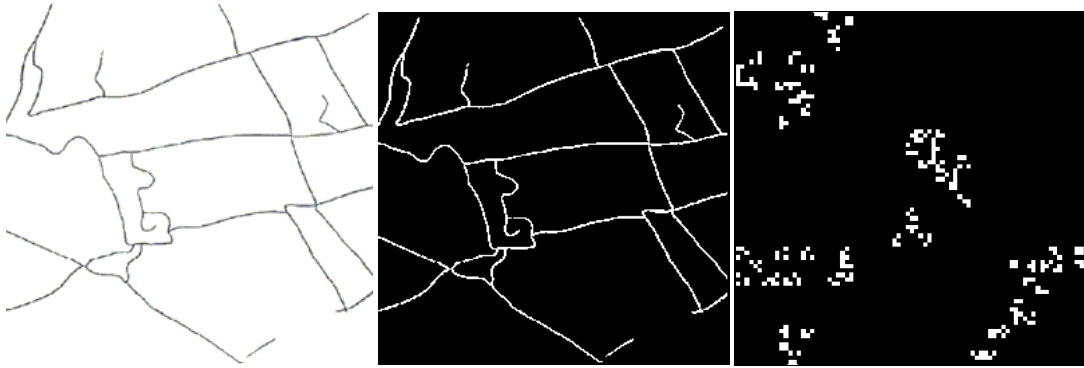
Imágenes.

Las imágenes se presentan originales. Para su análisis se umbralizaron quedando las fracturas en blanco y el sólido en negro.

Los modelos en seguida de las imágenes son generados con los mismos parámetros D , ρ_f , n y b .

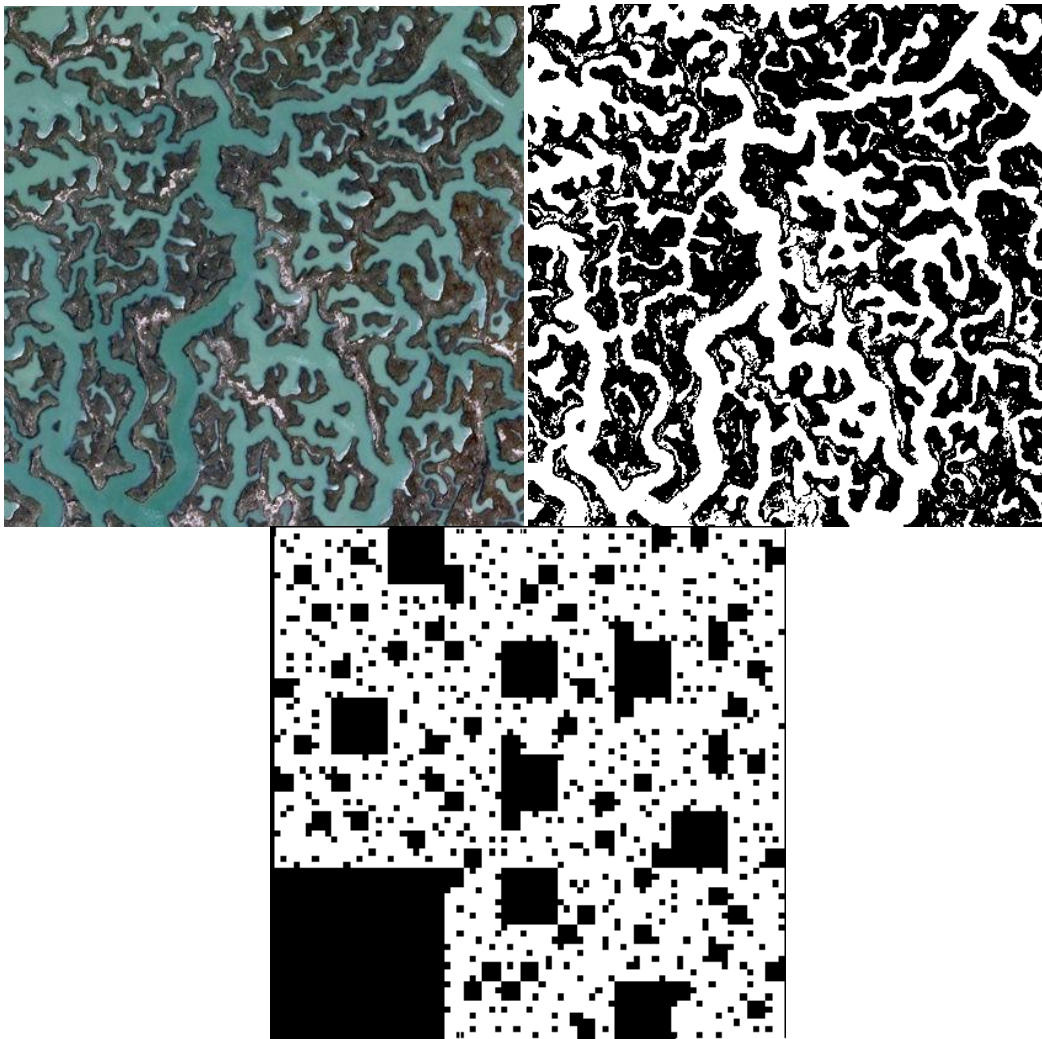


Himalaya (Google earth fractals por Paul Bourke) 188 x 188 pixeles.
Fuente: Carpeta de Sierpinski, Elaboración propia.



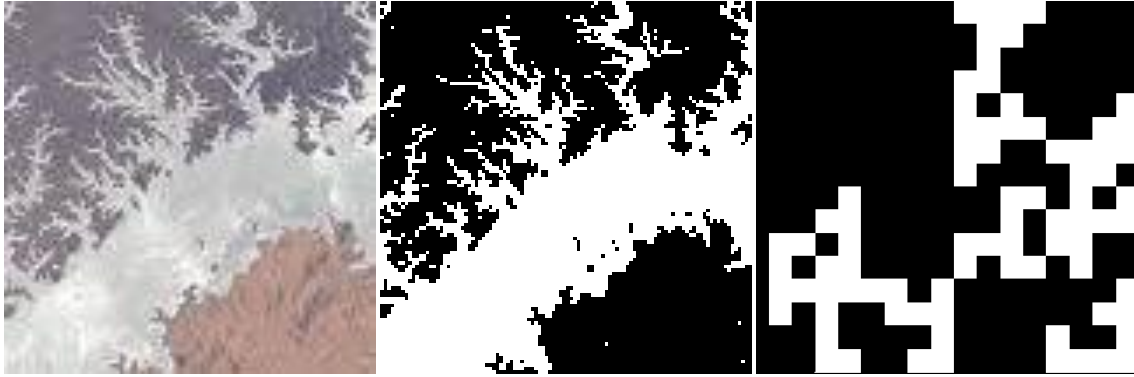
Jafari, Alireza. Babadagli, Tayfun. *Estimation of equivalent fracture network permeability using fractal and statistical network properties*. Journal of Petroleum Science and Engineering Vol. 92-93, pp 110-123. 2012. 263 x 263 pixeles.

Fuente: Carpeta de Sierpinski, Elaboración propia.

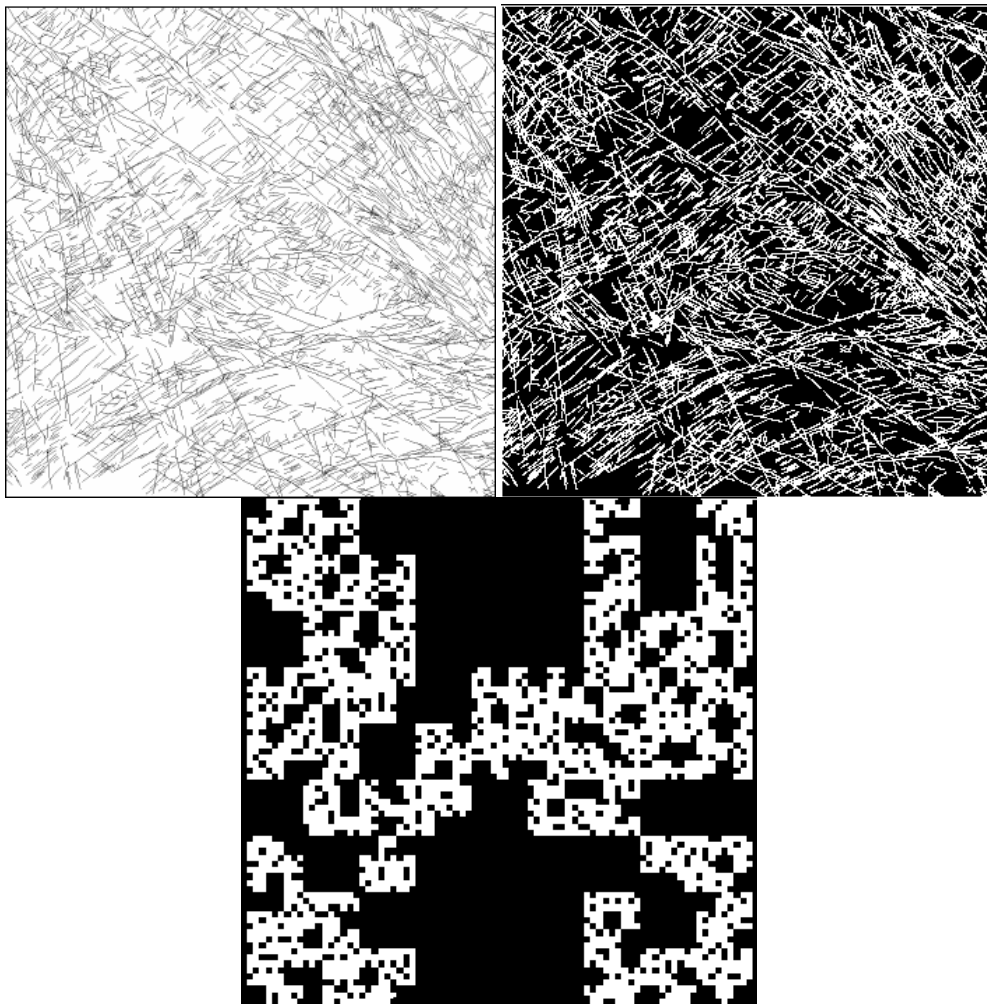


Isla del Trocadero, España (Google earth fractals por Paul Bourke). 424 x 424 pixeles.

Fuente: Carpeta de Sierpinski, Elaboración propia.

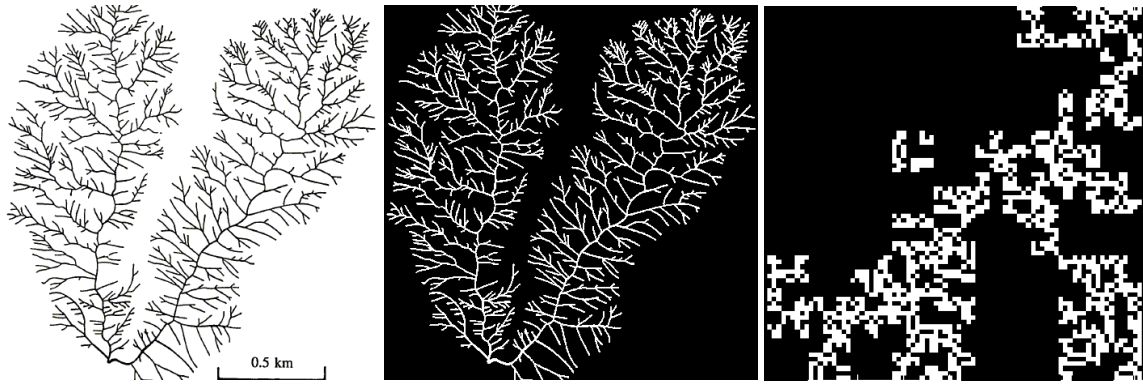


Lago Nasser, Egipto (Google earth fractals por Paul Bourke). 106 x 106 pixeles.
Fuente: Carpeta de Sierpinski, Elaboración propia.



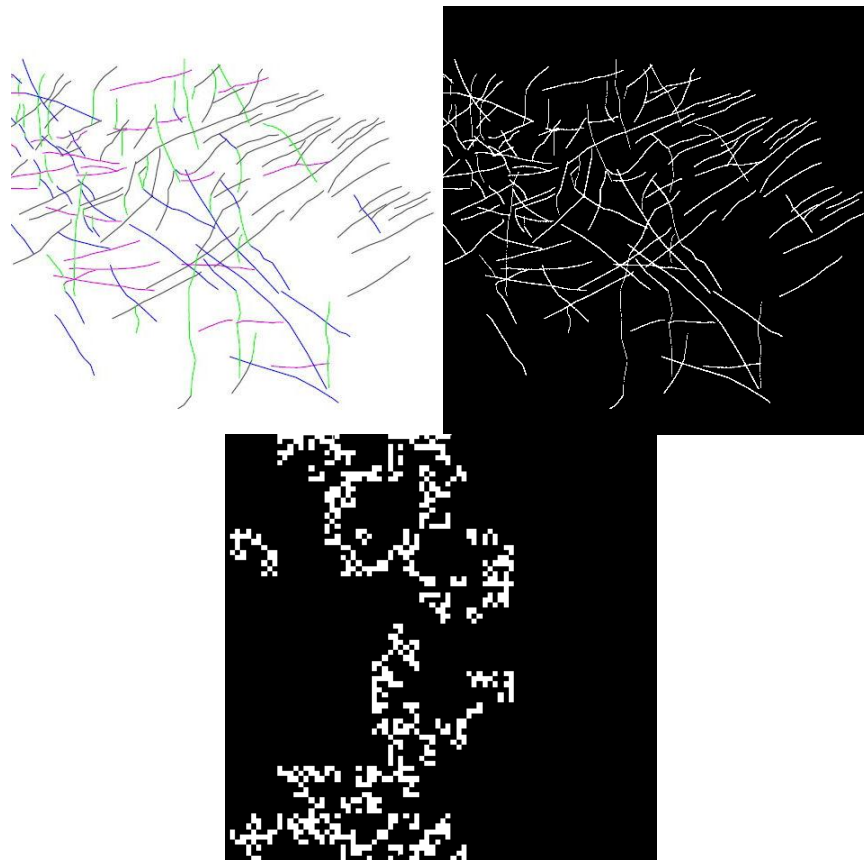
Mapa de Noruega, red de fractura Horlen basin (Ankur Roy, et al. *Lacunarity analysis of fracture networks: Evidence for scale-dependent clustering*. Journal of Structural Geology 32, 2010. 352 x 353 pixeles.

Fuente: Carpeta de Sierpinski, Elaboración propia.



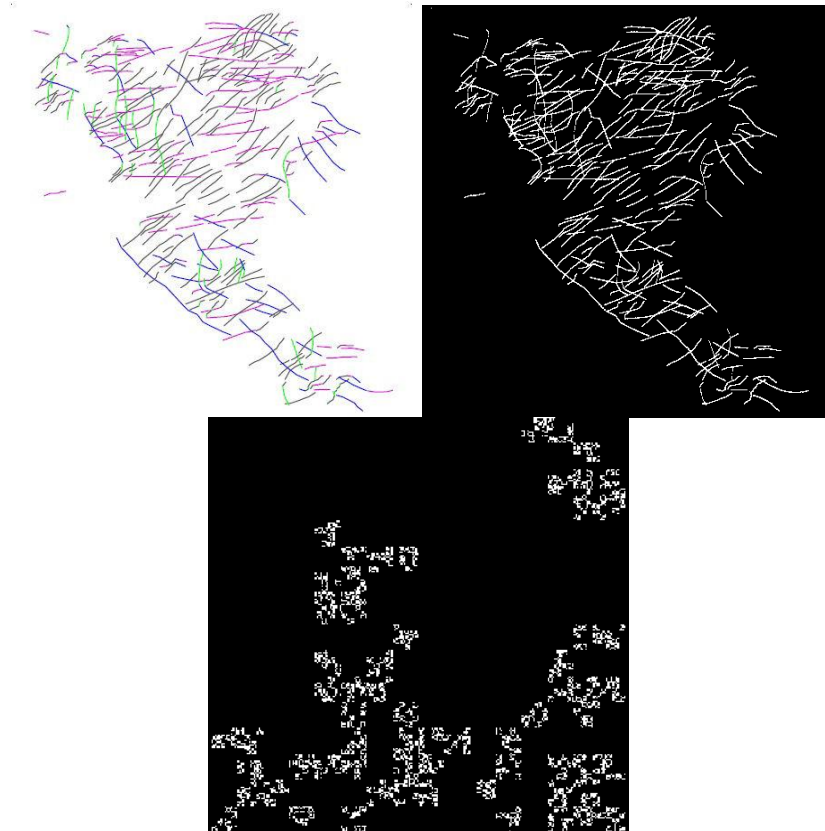
Red de fracturas de California (Tourcotte, *Donald L. Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*. 2nd edition, Cambridge University Press. 2007). 463 x 463 pixeles.

Fuente: Carpeta de Sierpinski, Elaboración propia.



z1 afloramiento Cintalpa (oriONearth). 476 x 476 pixeles.

Fuente: Carpeta de Sierpinski, Elaboración propia.



z5 afloramiento Comitán (OrionEarth). 462 x 462 pixeles.
Fuente: Carpeta de Sierpinski, Elaboración propia.

Tablas y Gráficos.

Factor de escala b , número de bloques no iterados en cada paso n , dimensión fractal D , y probabilidad de permanecer de la fractura en la carpeta de Sierpinski p_f .

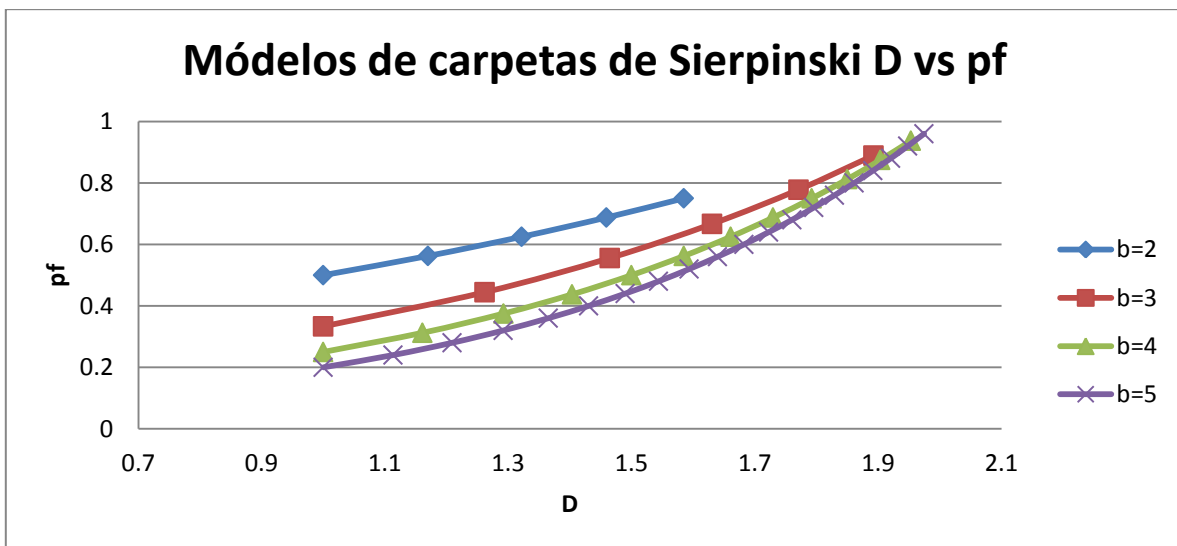
Fuente: Elaboración propia.

b	n	D	p_f
2	1	1.5850	0.7500
2	1.25	1.4594	0.6875
2	1.5	1.3219	0.6250
2	1.75	1.1699	0.5625
2	2	1.0000	0.5000
3	1	1.8928	0.8889
3	2	1.7712	0.7778
3	3	1.6309	0.6667

b	n	D	p_f
3	4	1.4650	0.5556
3	5	1.2619	0.4444
3	6	1.0000	0.3333
4	1	1.9534	0.9375
4	2	1.9037	0.8750
4	3	1.8502	0.8125
4	4	1.7925	0.7500
4	5	1.7297	0.6875
4	6	1.6610	0.6250
4	7	1.5850	0.5625
4	8	1.5000	0.5000
4	9	1.4037	0.4375
4	10	1.2925	0.3750
4	11	1.1610	0.3125
4	12	1.0000	0.2500
5	1	1.9746	0.9600
5	2	1.9482	0.9200
5	3	1.9206	0.8800
5	4	1.8917	0.8400
5	5	1.8614	0.8000
5	6	1.8295	0.7600
5	7	1.7959	0.7200
5	8	1.7604	0.6800
5	9	1.7227	0.6400

b	n	D	p_f
5	10	1.6826	0.6000
5	11	1.6397	0.5600
5	12	1.5937	0.5200
5	13	1.5440	0.4800
5	14	1.4899	0.4400
5	15	1.4307	0.4000
5	16	1.3652	0.3600
5	17	1.2920	0.3200
5	18	1.2091	0.2800
5	19	1.1133	0.2400
5	20	1.0000	0.2000

Tabla de modelos de carpetas de Sierpinski.



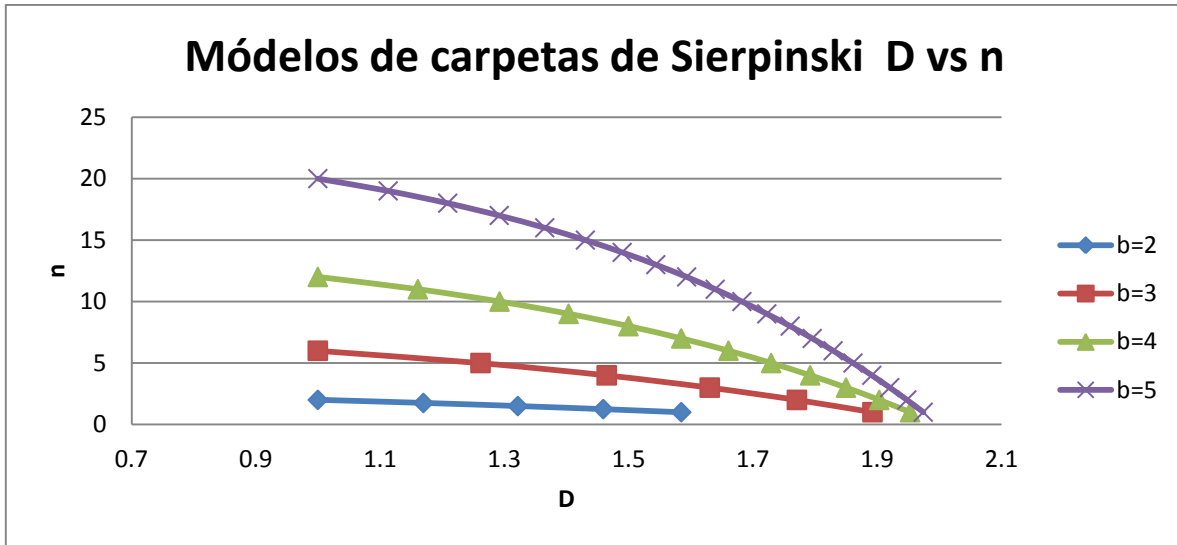


Tabla de datos de imágenes.
Fuente: Elaboración propia.

imagen	D	POROSIDAD DE FRACTURA	PROBABILIDAD DE PERMANECER DE LA FRACTURA	i	b	n
yacimiento Turquía	1.19	4.5	0.4606	4	2.6042	3.6583
Z1	1.38	5	0.4729	4	3.3466	5.9038
Z5	1.46	6.1	0.4970	4	3.6505	6.7033
red de fracturas, California	1.56	14	0.6117	4	3.0560	3.6265
lago Nasser, Egipto	1.65	44.9	0.8186	4	1.7717	0.5695
mapa de Noruega	1.77	36	0.7746	4	3.0358	2.0774
Himalaya	1.78	56.7	0.8678	4	1.9055	0.4802
Isla del Trocadero, España	1.8	47.5	0.8302	4	2.5359	1.0921

Gráficos de Elaboración propia.

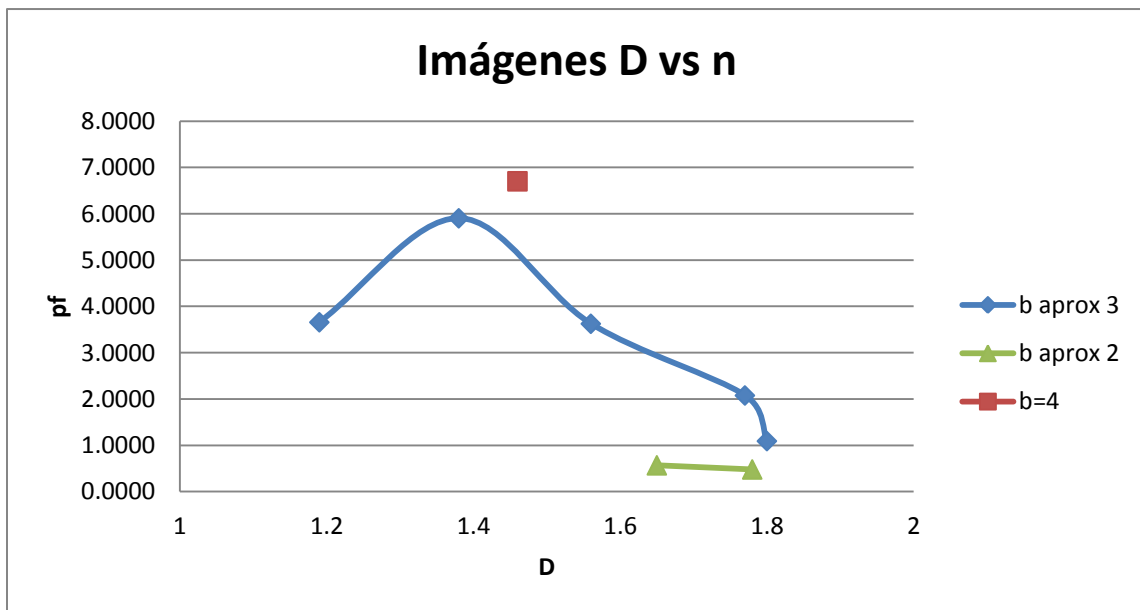
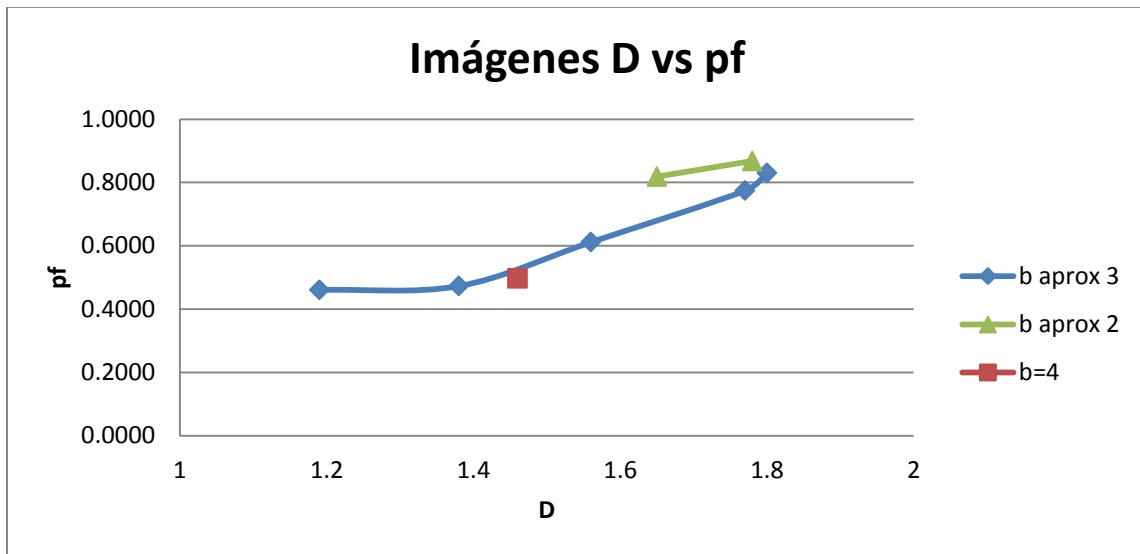
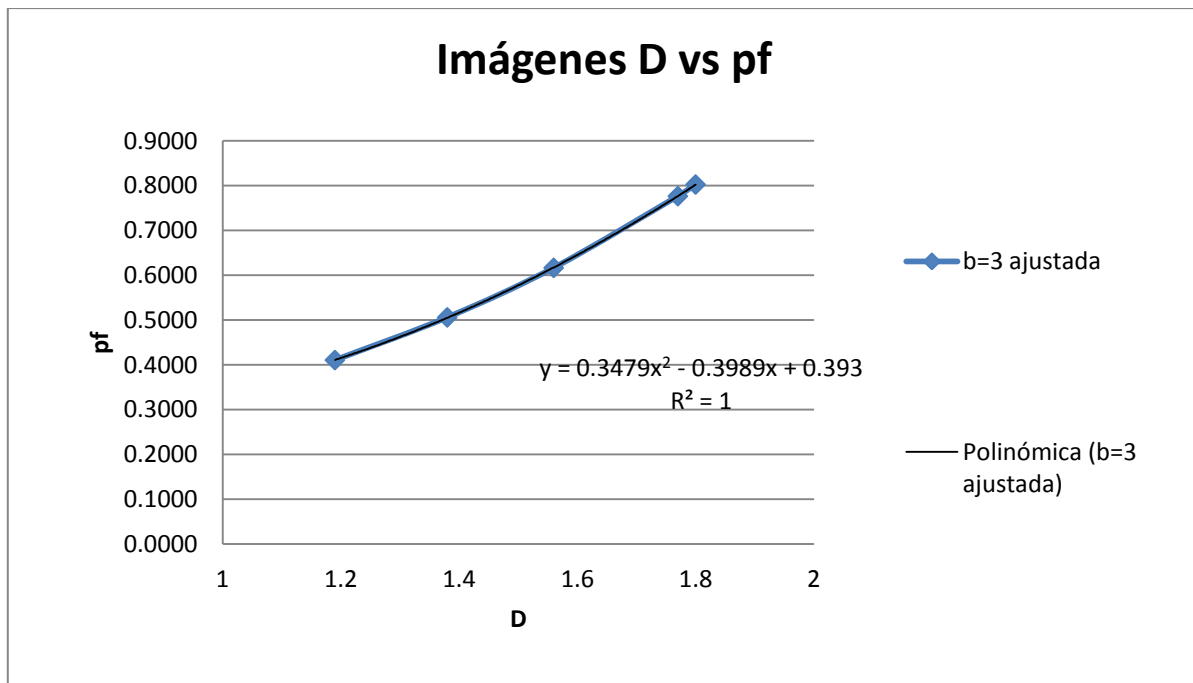
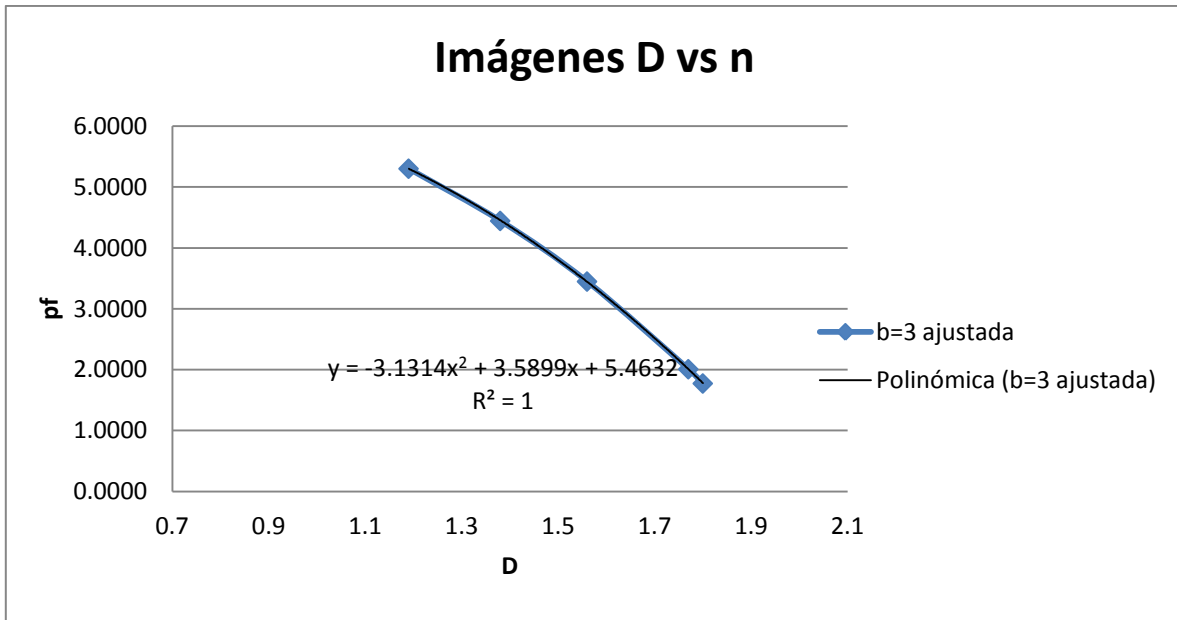


Tabla de datos ajustados.
Fuente: Elaboración propia.

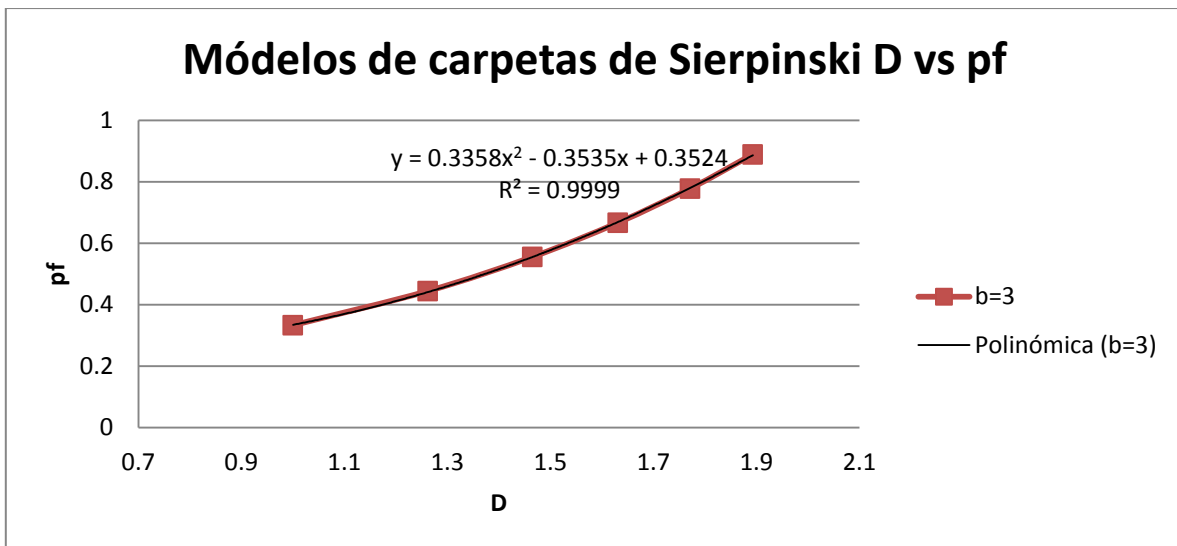
imagen	b ajustada	D	n nueva	pf nueva
yacimiento Turquía	3	1.19	5.3036	0.4107
Z1	3	1.38	4.4456	0.5060
Z5	4	1.46	8.4315	0.4730
red de fracturas, California	3	1.56	3.4498	0.6167
lago Nasser, Egipto	2	1.65	0.8617	0.7846
mapa de Noruega	3	1.77	2.0096	0.7767
Himalaya	2	1.78	0.5657	0.8586
Isla del Trocadero, España	3	1.8	1.7753	0.8027

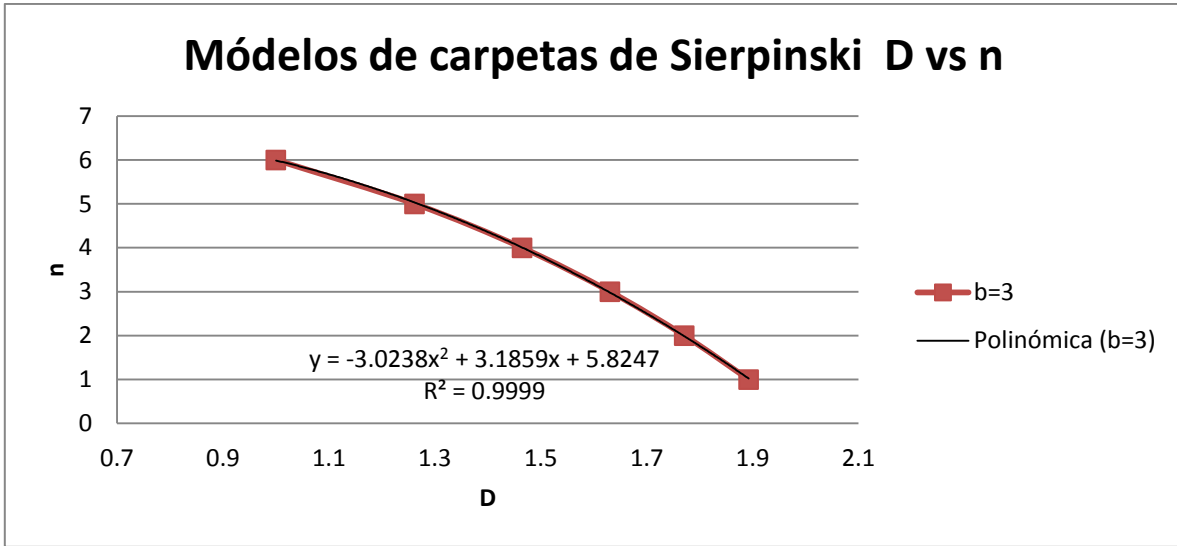
Gráficos de elaboración propia.



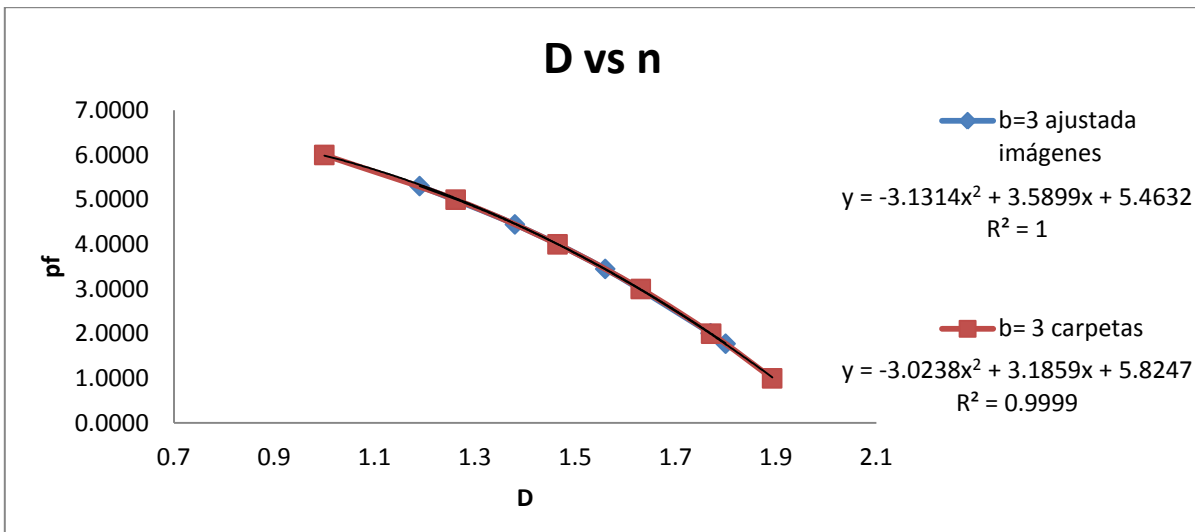
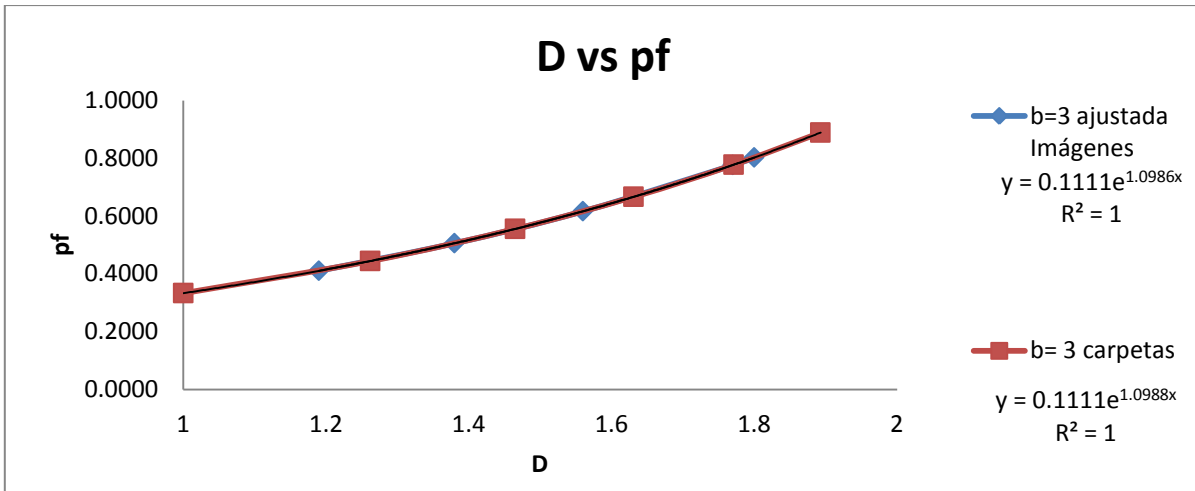


Comparación con $b = 3$ del modelo y las imágenes reales ajustadas.





COMPARACIÓN.



Lagunaridad.

El estudio de la textura de las imágenes o del tamaño de la organización de los vacíos (espacio en negro) en las imágenes se representa en las siguientes curvas de lagunaridad que se grafican contra el lado de la caja r .

Gráficos de elaboración propia.

