



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN



**Análisis y optimización del sistema de
Suspensión vehicular tipo Macpherson**

Tema de Tesis

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
CON ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA MECÁNICA**

PRESENTA

Ing. Arquímedes Zabdi Macias Guzmán

DIRECTOR: Dr. José Ángel Ortega Herrera

México D.F.

Septiembre 2009.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

ABSTRACT

OBJETIVO

JUSTIFICACIÓN

ALCANCE

CAPÍTULO I. ESTADO DEL ARTE

1.2 Suspensiones delanteras.....	16
1.2.1 Suspensiones Independientes.....	16
1.2.2 Suspensión MacPherson.....	16
1.2.3 Suspensión de doble brazo.....	18
1.2.4 Suspensión frontal de doble pivote conductor.....	20
1.3 Suspensiones traseras.....	21
1.3.1 Suspensión de eje trasero para carga.....	21
1.3.2 Suspensión de Eje De Dion.....	23
1.3.3 Suspensión de eje independiente para autos de dirección delantera.	23
1.3.4 Suspensión de viga inclinada para vehículos de dirección delantera.	24
1.3.5 Suspensión trasera independiente-estructura multi-uniones.....	25
1.4 Justificación del tema y descripción del contenido de los capítulos.....	28

CAPÍTULO II. ECUACIONES DE MOVIMIENTO Y RESPUESTA DINÁMICA DE UN SISTEMA DE SUSPENSIÓN DE 2 GRADOS DE LIBERTAD

2.1 Ecuaciones de Movimiento.....	29
2.2 Respuesta dinámica de la suspensión pasiva.....	35

**CAPITULO III. ANÁLISIS MODAL DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN AUTOMOTRIZ
CON EXCITACIÓN EN LA BASE**

3.1	Determinación de las ecuaciones de movimiento con excitación en la base...	39
3.2	Cálculo de las frecuencias naturales.....	41
3.3	Cálculo del coeficiente de amortiguamiento de la placa.....	42
3.4	Cálculo de la respuesta en el tiempo del sistema de suspensión con la excitación en la base.....	42
3.5	Cálculo de la fuerza transmitida.....	52

**CAPÍTULO IV. ANÁLISIS DEL ACOMPLAMIENTO ENTRE EL SISTEMA DE
SUSPENSIÓN EL LA CARROCERÍA A TRAVES DEL METODO DEL
ELEMENTO FINITO**

4.1	Funciones de interpolación.....	55
4.2	Matrices elementales.....	55
4.3	Conversión a las coordenadas globales.....	60
4.4	Ensamble de los Elementos.....	61
4.5	Condiciones de Restricción.....	64
4.6	Respuesta Dinámica.....	67
4.7	Análisis del acoplamiento entre el sistema de suspensión y la carrocería.....	68

	CONCLUSIONES.....	90
--	-------------------	----

	REFERENCIAS.....	92
--	------------------	----

	ANEXO CAPITULO II.....	96
--	------------------------	----

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1. Sistema de suspensión de un vehículo

FIGURA 2. Suspensión frontal del Audi 100

FIGURA 3. Esquema del brazo L

FIGURA 4. Suspensión frontal de los Jaguars

FIGURA 5. Suspensión frontal multi-link para el Nissan 300ZX 1990

FIGURA 6. Esquema del arreglo de doble pivote

FIGURA 7. Suspensión frontal del Audi A4

FIGURA 8. Esquema desplegado de muelles

FIGURA 9. El clásico eslabón de Watt

FIGURA 10. El clásico eslabón de Watt con dos eslabones equidistantes

FIGURA 11. El eslabón de Scott-Russell

FIGURA 12. Esquema de Scott-Russell en el Nissan Primera

FIGURA 13. Eje Trasero

FIGURA 14. Suspensión trasera del Mercedes Benz SL500

FIGURA 15. Ensamble de la suspensión trasera Mercedes Benz SL500

FIGURA 16. Vista esquemática del mecanismo de Mercedes

RESUMEN

En el primer capítulo se plantea hacer una reseña sobre el sistema de suspensión vehicular que es empleado en la mayoría de los automóviles comerciales, enfatizando en aquellos sistemas que son compuestos por resorte y amortiguador viscoso. Se realiza una documentación de los diferentes tipos de suspensiones que se han analizado así como los parámetros operacionales que se han empleado en el desarrollo de estas, esto debido a la gran importancia que representa el saber cómo se encuentra el estudio de este tema y tener una referencia de la magnitud de éste, así como el área y los parámetros que han sido cubierto por las mas recientes investigaciones.

En el segundo capítulo se realiza un análisis matemático para determinar la dinámica del sistema de suspensión vehicular contemplando las condiciones operacionales a las que un automóvil está expuesto para determinar cuales son los parámetros que el desarrollo de dicho sistema debe contemplar.

El capítulo tres hace un análisis de vibraciones mecánicas para un sistema de suspensión con excitación en la base caracterizando la superficie del camino, considerando los principales componentes de dicho sistema así la determinación de la fuerza máxima que experimenta la carrocería un vez que la suspensión ha filtrado el sistema de suspensión.

En el cuarto capítulo se emplea el método del elemento finito para analizar 3 acoplamientos empleados actualmente entre el sistema de suspensión y la carrocería, una vez determinado el peor acoplamiento se realiza la optimiza del acoplamiento del sistema de suspensión y la carrocería a través de software de elemento finito para que ayude a la selección de la mejor geometría de las propuestas de diseño.

En el capítulo cinco se realiza el análisis de los resultados obtenidos en las simulaciones definiendo así la mejor geometría para la suspensión y las características que este va a mejorar durante la operación de este sistema.

Arquímedes Zabdi Macías Guzmán

OBJETIVO.

Esta tesis tiene como objetivo realizar un análisis para poder optimizar las características que forman parte de una suspensión tipo Macpherson en la filtración y disminución de las vibraciones mecánicas de un auto comercial, mediante un estudio sistemático del comportamiento dinámico del sistema. Definiendo cuales son las mejores geometrías como parte de una suspensión vehicular y realizar un análisis de dinámico del sistema a través de un software de elemento finito, concluyendo en la mejor forma y dimensiones para dicho sistema.

JUSTIFICACIÓN.

El automóvil como medio de transporte ha ido evolucionando de forma tal que se ha buscado no solo un mejor funcionamiento mecánico pero también la comodidad del pasajero. En lo que concierne al confort siempre se ha buscado un sistema que sea capaz de disminuir los efectos causado por las irregularidades de las superficies en las que se desplaza un automóvil. En el afán de satisfacer esta necesidad se desarrollaron diversos sistema de suspensión en los cuales se incrementó la complejidad mecánica teniendo como repercusión el aumento de peso y costos no solo en la fabricación de nuevos dispositivos para la suspensión, pero también en su mantenimiento.

El diseño de un sistema de suspensión vehiculas tiene como principales parámetros los amortiguador viscoso y los resorte. Actualmente no existen investigaciones en las cuales se considere la geometría del punto de sujeción del sistema de suspensión vehicular con la carrocería, dicha configuración filtrará cierto rango de frecuencias.

ALCANCE.

En este análisis se considera únicamente un sistema de suspensión vehicular tipo Macpherson para un automóvil comercial en el cual son contemplados los resortes y amortiguadores viscosos así como las perturbaciones y fuerzas verticales que generan vibraciones. Además se emplean las características de un cuarto del automóvil, por otra parte no será analizado un sistema de suspensión en el cual los componentes como amortiguadores empleen para su funcionamiento algún dispositivo de control.

Capítulo I

Estado del Arte

Para un vehículo, el sistema de suspensión tiene la función de aislar los severos choques y vibraciones inducidos por la superficie del terreno hacia los pasajeros o a la carga que está trasladando. Este aislamiento de choques y vibraciones inducido por la forma del camino también ayuda a la duración de vida media del vehículo. Otra función importante de la suspensión es que permite a la rueda mantener el contacto con la superficie del camino, asegurando así la estabilidad y control del vehículo.

Por definición la suspensión es un sistema utilizado para soportar la carga o fuerza a la que está sometido el vehículo por la forma de la superficie del camino y las vibraciones, desempeñando la función de un medio elástico. En realidad las componentes del mecanismo que aísla a los ocupantes de un vehículo moderno de las irregularidades del camino son, en gran medida el sistema de suspensión. Los tres elementos cruciales de un sistema de suspensión son:

- Flexibilidad, proveída por un resorte que distorsiona y recupera (típicamente compresiones y expansiones) cuando la rueda atraviesa irregularidades en la superficie del camino
- Amortiguamiento, que es esencialmente restringir el cuerpo del vehículo y rueda de los grandes movimientos.
- La ubicación de la rueda ó eje de la rueda.

La Figura 1.1 muestra el concepto básico de un sistema de suspensión en función de la elasticidad y amortiguamiento (pero ignora el aspecto de la ubicación de la rueda). Este esquema es frecuentemente usado en publicaciones técnicas para el desarrollo matemático de un sistema de suspensión, este esquema es normalmente llamado “modelo de un cuarto del vehículo”, es la forma en que se representa para cada sección de rueda. La figura muestra la cuarta parte de masa principal del vehículo (sprung mass), soportada en la parte baja por el sistema de suspensión y la llanta, estos dos últimos componentes forman la segunda masa mostrada en el esquema (unsprung mass), esta segunda parte es la que se encuentra en contacto directo con la superficie de camino por el cual el vehículo se está desplazando. Entre las masas se encuentran el amortiguador y el resorte.

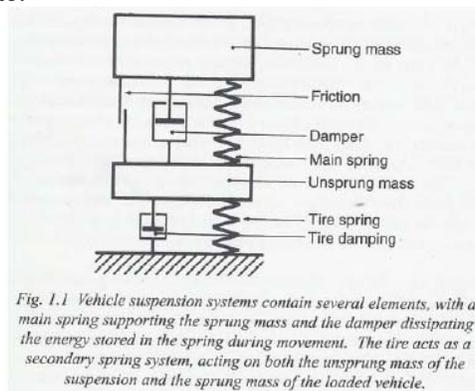


Fig. 1.1 Vehicle suspension systems contain several elements, with a main spring supporting the sprung mass and the damper dissipating the energy stored in the spring during movement. The tire acts as a secondary spring system, acting on both the unsprung mass of the suspension and the sprung mass of the loaded vehicle.

Figura 1.1

Los elementos de un sistema de suspensión usualmente son clasificados dentro de dos grupos: el primer grupo son aquellos que controlan el comportamiento elástico (el resorte principal, amortiguadores y las barras antivolcadura), en el segundo grupo se consideran todo aquellos componentes del sistema que mantienen la llanta en su posición y controlan la ubicación de dichos elementos así como el control de sus movimientos bajo condiciones de cargas dinámicas.

Las primeras formas de generar elasticidad en el sistema de suspensión fueron proporcionadas por un par de muelles. Durante muchos años esta fue la única forma de resorte para la parte trasera y delantera de los vehículos principalmente en los carruajes, comúnmente conocidas para la parte delantera del carro como hoja semi-elíptica. El nombre surge de la necesidad de proporcionar una curvatura entre las hojas de muelle con la finalidad de generar un claro que permitiera la deflexión de éstas hojas metálicas, la forma de éstas se asemeja mucho a una elipse; de aquí su nombre. Coches como el Daimler 1886 usó este sistema de suspensión en cada uno de las cuatro ruedas. Lo que hacía este sistema de muelles atractivo en los primeros días del uso y diseño de un sistema de suspensión era la facilidad con la que estos componentes eran manejados y manufacturados con la herrería de la época.

Por varias décadas, hasta los años de 1960s los sistemas de resortes multi-muelles y de eje trasero flexible fueron establecidos como los diseños estándares para los vehículos y permanecieron como las formas más comunes de suspensión encontrados para vehículos comerciales; desde coches medianos hasta los carros pesados. Otro diseño pionero del sistema de suspensión es en el que los resortes de muelles, son montados de forma transversal, por lo que en esta configuración existe solo un punto de apoyo en el centro del eje sobre el que se encuentra montado el cuerpo del vehículo. A finales de los sesentas el sistema de multi-muelles fue acoplado a cada una de la ruedas. El uso actual de este sistema es principalmente en las camionetas ligeras de uso domestico y en los vehículos deportivos utilitarios (Sport Utility Vehicle ó SUVs).

El uso del resorte helicoidal como componente primario del sistema de suspensión apareció con el incremento del manejo independiente de la suspensión delantera después de la segunda guerra mundial. Incluso después de esta época usualmente estos dos sistemas tanto el de muelle y resorte helicoidal fueron usados en conjunto, el sistema de muelles se empleaba para la parte posterior y para la parte delantera el sistema de resorte helicoidal. La gran ventaja que ofreció el sistema de resorte es que presenta una casi nula fricción interna, esto permitía que la función que tiene el sistema de amortiguamiento sea una forma o unidad más precisa de controlar. A pesar de que el resorte tiene mejor eficiencia para almacenar energía y una mejor deflexión por los desplazamientos o movimientos de alargamiento y compresión, necesita reaccionar al control de los componentes verticales que se encuentran en la parte superior e inferior del resorte principalmente en los puntos de apoyo. También a diferencia del muelle, el resorte no tiene un apoyo, eje ó ubicación directo en la rueda, por lo que requiere un brazo o miembro para poder ser colocado.

Los orígenes de la suspensión independiente no han sido del todo confirmado, pero Morgan de Inglaterra introdujo el sistema de “pilar móvil”, incorporando el resorte circular en 1910. Morgan usó éste en un sistema de configuración con tres ruedas (una sola rueda trasera), el cual fue construido en chasis tubular, para el caso de una configuración de cuatro ruedas fue producido desde 1936 hasta nuestros días.

De cualquier forma, compañía Lancia de Italia tiene la distinción como la primera marca en producir en gran escala este sistema. El Lambda, lanzado en 1922 fue el primer vehículo en emplear la primera versión de suspensión independiente producida por Lancia con una “columna deslizable”, la cual constaba de un resorte helicoidal que incluye un amortiguador hidráulico como parte interna. Un chasis ligero y rígido fabricado de una hoja de acero soldada, formaba el cuerpo principal de la estructura del vehículo.

La función primaria de un sistema de suspensión ha cambiado muy poco a través de los años, incluso en el entendimiento de su comportamiento y la calidad de la comodidad que proporciona en el andar del vehículo ha tenido estas dos características grandes avances. Un sistema de resorte es requerido para absorber las cargas producidas por la forma de la superficie del camino, esto lo hace siendo inicialmente comprimido y subsecuentemente expandido contra la masa del coche. La relación de la energía que es almacenada depende de la relación del resorte en los desplazamientos, o de la rigidez de éste, el límite de energía que es capaz de almacenar es controlado por la frecuencia natural de la masa del vehículo, normalmente en el rango de 1-1.5 Hz.

La energía del resorte es convertida en calor y disipada una pequeña parte por la fricción del sistema pero mayormente por el amortiguador. Un amortiguador usualmente tiene la forma de un embolo trabajando en un cilindro lleno de fluido hidráulico; este ejerce una fuerza que es proporcional a la velocidad del embolo.

En la actualidad la mayoría de las suspensiones emplean un resorte que varía en algunas formas, típicamente colocado concéntrico con el cilindro de la estructura del amortiguador. La flexibilidad en su diseño y la facilidad de ser manufacturado es relativamente barata, cuando este componente se produce en forma industrial mantiene una consistencia en sus características, por esta y varias razones se ha traído al resorte helicoidal al primer plano del diseño en el sistema de la suspensión moderna. La forma más común de una suspensión delantera es la configuración de resorte helicoidal con un amortiguador, esta estructura delantera es conocida como suspensión MacPherson.

El anterior reconocimiento de los sistemas de suspensiones pasivas, se representan en la gran mayoría de los sistemas que actualmente se encuentran en operación. Por muchas décadas las empresas que han manufacturado estos sistemas han empleado sofisticados procesos, considerando las interconexiones entre las suspensiones delanteras y traseras así como su auto nivelación. El proceso más exitoso de los sistemas que se han empleado y aun en uso es, el desarrollo del sistema hidroneumático de Citroën usado en 1953.

Alrededor de 1980, comenzaron los experimentos con la suspensión activa. Un sistema activo es aquel donde el amortiguador y el resorte metálico son reemplazados con actuadores hidráulicos que bajo el control computarizado, ajusta la longitud con base a la entrada de las imperfecciones de la superficie del camino, además es capaz de mantener el sistema sin algún posible giro del sistema en las curvas y el frenado. El primer exponente de este sistema fue Lotus Engineering en el Reino Unido. Desafortunadamente este sistema mostró dos grandes desventajas, el sistema era demasiado caro y la energía requerida para hacer funcionar dicho sistema era muy alta.

1.2 Suspensiones Delanteras.

1.2.1 Suspensiones Independientes.

En el año de 1935, los carros de Estados Unidos principalmente adoptaron el sistema de “Rodilla Activa” que es un tipo de suspensión independiente delantera. La pobre calidad en las carreteras europeas alentaron a las compañías Ford y General Motors a llevar esta tecnología norteamericana a sus subsidiarias en Alemania e Inglaterra. Algunas compañías Europeas como Lancia y Morgan también manufacturaron este tipo de suspensión independiente de rueda delantera, incluso para vehículos comerciales ligeros y medianos.

En el transcurso de los años, varios tipos de suspensión independiente delantera han sido intentados. Varios de ellos han sido descartados por varias razones. Solo dos conceptos básicos han tenido éxito, las estructuras de Doble Brazo y MacPherson.

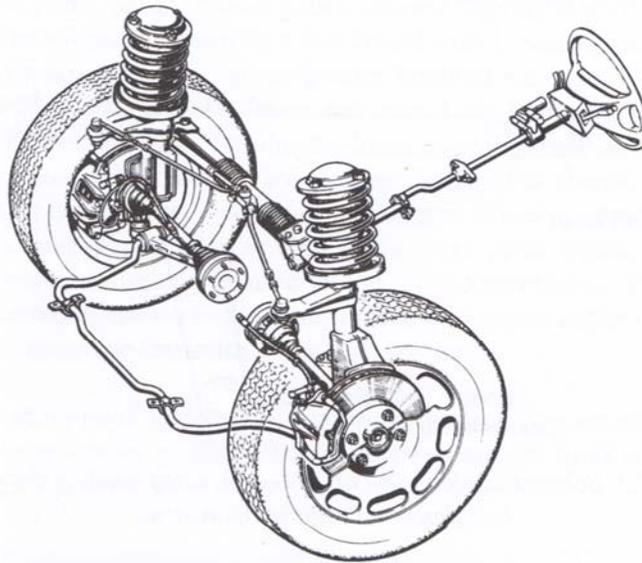
La geometría de cualquier suspensión independiente delantera debe ser elaborada para cumplir con ciertas características:

- Debe permitir un centro de giro a una altura para ser acoplada a un nivel deseado.
- Debe permitir una conexión a una dirección transversal y ser elaborada para cualquier conexión de rueda, que induzca una mínima variación en cualquier configuración con movimientos verticales de la rueda.
- Debe de permitir una geometría anti-inmersión en caso de que sea requerida.
- Debe permitir un resorte helicoidal, barra de torsión ó cualquier otro tipo de resorte para dar la deflexión deseada.
- Debe ser posible el incorporar un amortiguador.
- Debe permitir una barra antivolcadura para ser añadida en caso de que sea necesaria.
- No debe considerar alguna interferencia con la posición del motor.
- Debe resistir todas las fuerzas generadas por el frenado, aceleración, y las curvas del camino con la habilidad para aislar la estructura del vehículo del ruido y vibración.
- Debe restringir fuerzas de inercia, giroscópicas u otras producidas por el movimiento vertical de las ruedas.
- Debe crear la mínima cantidad de fricción asociada con el movimiento vertical de la suspensión.
- Debe operar sin ruido durante todo el recorrido y alcanzar sus límites de forma progresiva.

1.2.2 Suspensión MacPherson.

El diseño mas común empleado en una suspensión frontal en los coches modernos es conocida como MacPherson. Esta es nombrada así después de que el ingeniero de la Ford Earle S. MacPherson quién en America durante los 1950's, fue el primero en patentar la idea de colocar un sistema estructural inclinado lateralmente con una unión transversal y longitudinalmente por medio del brazo nivelador de la barra anti volcadura. El diseño original de la MacPherson tiene el merito de la simplicidad y bajo costo, pero una de las desventajas es la dificultad del cumplimiento longitudinal del

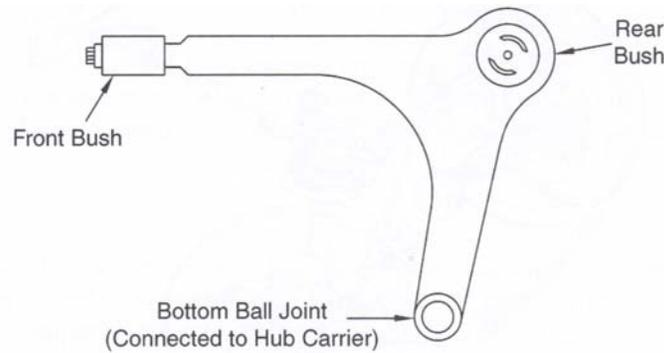
sistema. La figura 1.2 muestra el diseño original de la suspensión MacPherson como fue empleada por Audi. En este sistema es notorio el soporte en el acoplamiento superior del brazo de dirección con el centro del eje de la ruedas para manejar la dirección de los componentes inferiores. Comparado con un acoplamiento inferior del brazo de dirección, se reduce la sensibilidad de las tolerancias en el ensamble de la suspensión y del sistema de dirección.



For the Audi 100 front suspension, the anti-roll bar locates the lower links according to the description in the original MacPherson patent. (Courtesy Audi AG.)

Figura 1.2

La construcción de la estructura MacPherson esta basada en un tubo externo fijado en el núcleo de la carrocería en la parte más baja soldada al asiento de la suspensión en su parte final superior. Dentro del resorte helicoidal esta un amortiguador telescópico con un embolo que se desplaza acoplado a un rodamiento de empuje en el centro de la torre formado a la entrada del arco de la rueda del cuerpo del carro, el cual carga también en acoplamiento superior del sistema. La colocación de la parte final inferior de la estructura del sistema puede ser descrita aquí para el diseño original MacPherson ó el brazo de control puede ser colocado longitudinalmente por una barra de unión. El arreglo mas reciente permite mas libertad para el diseño longitudinal dentro de la suspensión. Incrementando a la fecha, una localización mas baja del sistema que podría ser a través de un brazo en L. Un brazo en L como su nombre lo indica es un componente mecánico en forma de L, como una sección dispuesta longitudinalmente a la masa de la carrocería. Esta sección es ensamblada en sus dos extremos a la carrocería y, unida a esta L esta otra sección que se extiende al exterior lateralmente a la parte baja del núcleo de unión de la rueda (Fig. 1.3). En este arreglo el funcionamiento longitudinal de la rueda es proveído por el funcionamiento lateral del pivote trasero del brazo L, este brazo oscila en el plano horizontal alrededor de su pivote frontal. El pivote trasero usualmente es afectado con un cojinete vacío teniendo un eje vertical, mientras que el pivote frontal es hecho con un cojinete sin vacío, usualmente teniendo un eje longitudinal pero algunas veces teniendo un eje vertical.



Schematic plan view of an L-arm, often used as the lower location for a MacPherson strut.

Figura 1.3

Las ventajas de la estructura MacPherson son que las entradas al cuerpo del vehículo pueden ser generadas por la rigidez y el espacio entre las áreas de contacto. Similar a un sistema de doble brazo con longitudes variables, permitiendo así una considerable flexibilidad en el diseño. De cualquier forma estos sistemas también proveen ventajas significantes que un subsistema frontal no requiere usualmente para asegurar las adecuadas tolerancias cerradas en los puntos de ensamble. Lo que es crucial en un sistema de manejo bajo es que, para asegurar que las características cinemáticas de la llanta coincidan con las propuestas en el diseño, las tolerancias de montaje entre el lugar donde se ensamblan los componentes de la suspensión y los componentes de sistema de dirección sean cerradas. En el caso de acoplamiento con un sistema de dirección elevado este hecho es menos importante (Fig. 1.2).

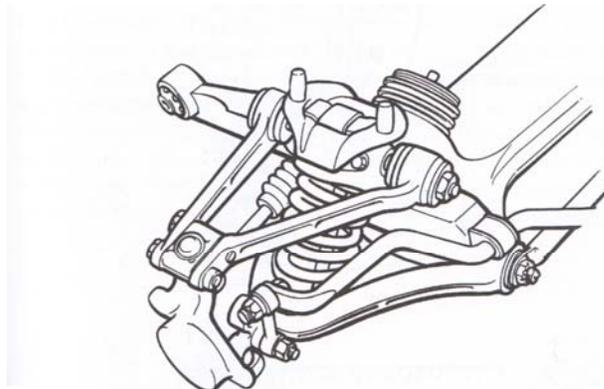
1.2.3 Suspensión de doble brazo.

Existen varias formas en las que un par de brazos paralelos pueden ser acoplados para configurar la geometría de una suspensión. Puede ser un brazo superior y otro inferior en cada lado (empleado con una barra de torsión transversal como en el caso del Volkswagen Beetle) con un arreglo tubular simétrico transversal. El movimiento paralelo de las uniones de igual longitud mantienen la inclinación correcta de la rueda debido cuando ésta es golpeada causando cambios en la tracción y ángulos positivos al ser generados por un deslizamiento de cuerpo, por el desgaste del de la fuerza debido a las curvas.

La mejor forma de controlar el ángulo de inclinación de la rueda en este sistema es acoplar brazos superiores más pequeños que los inferiores, de esta forma la parte superior de la rueda se mueve corrigiéndose como la suspensión es desplazada de la posición principal del recorrido.

Si una subestructura frontal forma parte de un diseño en un vehículo, un sistema de doble brazo puede ser diseñador para tener una mejor atenuación del ruido. Para un control preciso del sistema, tolerancias cerradas en la manufactura en éste son vitales, también es usual maquinar las piezas de éste sistema después de ser ensambladas para obtener un mejor rendimiento.

La forma clásica de una suspensión de doble brazo, como se usa en los carros deportivos como el Lotus Elisa, o como tal vez puede ser en un coche de carreras debe ser similar al mostrado en la figura 1.4

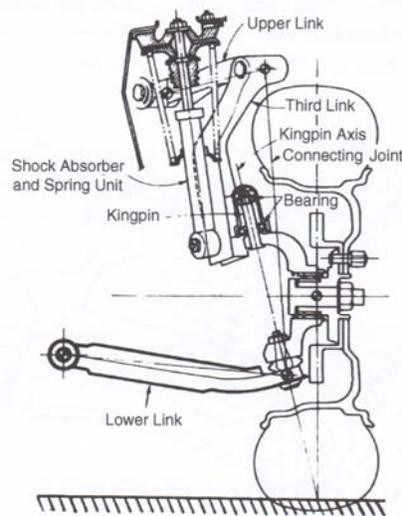


Jaguars used double wishbone front suspensions for many years. The design provides a compact layout with minimal installed height, but it involves extra complexity and cost over simpler strut systems.

Figura 1.4

Esta suspensión puede proveer excelente control del ángulo de la rueda y una rigidez lateral, pero no un buen cumplimiento longitudinal. Esto se debe a que la separación vertical de los pivotes de esta suspensión es pequeña, por lo tanto para el caso de los vehículos de carreras donde el tipo de refinamientos son secundarios o no preocupan y donde los ángulos de los giros son pequeños, la suspensión de doble brazo es popular.

En la suspensión frontal multiuniones de Nissan, la geometría de doble brazo ha sido ingeniosamente incorporada dentro de restricciones por lo ancho de las ruedas y lo bajo de la carrocería, añadiendo una parte curvada superior al acoplamiento del sistema como se muestra en la figura 1.5



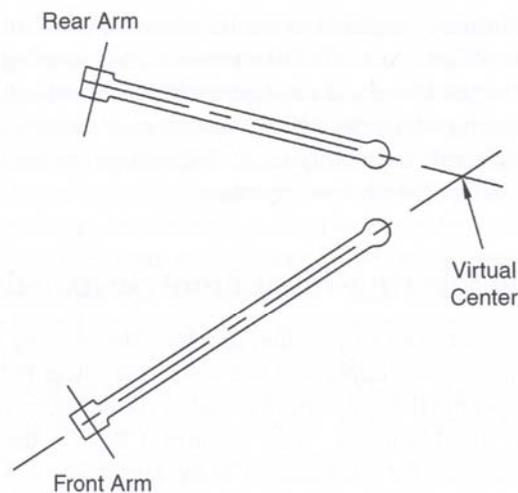
The multi-link front suspension for the 1990 Nissan 300ZX allows a much longer upper wishbone to be used, offset to clear a low-mounted coil spring and damper unit. (Courtesy Nissan Motor Co. Ltd.)

Figura 1.5

1.2.4 Suspensión frontal de doble pivote conductor.

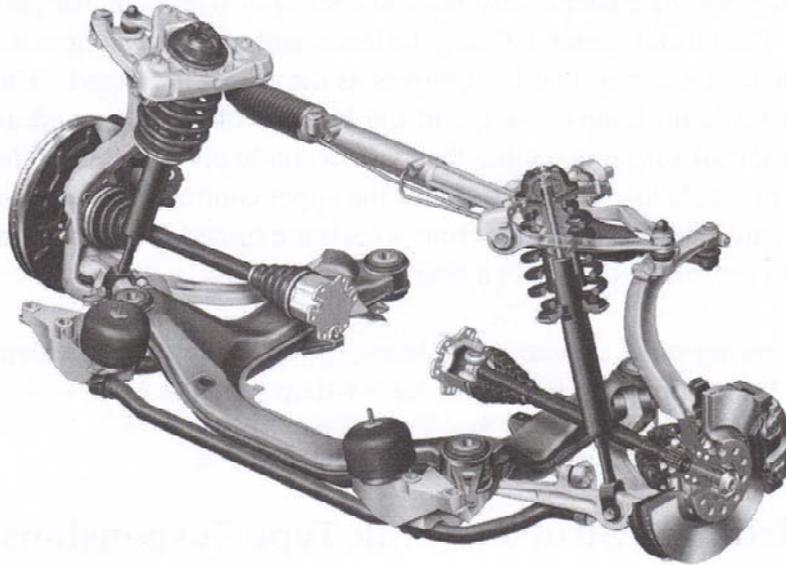
Con una suspensión frontal convencional, en la cual el eje de manejo es definido por dos únicos pivotes, uno superior y otro inferior, la unión inferior debe estar dentro del núcleo de la rueda. Este requiere un disco de rueda pesado y un espacio para acomodar la unión y el sistema de frenos. Un sistema de suspensión frontal de doble pivote conductor es aquel en el que, por ejemplo un control bajo de brazos acoplado a la parte baja de la suspensión en forma vertical vía dos uniones de bola en lugar de una. Una ventaja de éste es que el eje del pivote es ahora definido en la parte final inferior por un centro virtual localizado en la interacción de la proyección brazos de control, y las dos uniones pueden ser colocadas dentro de la cremallera, dejando un mayor alojamiento dentro del núcleo de la rueda y requiriendo así un menor hueco en la rueda. Otra ventaja de este sistema es estar dando un mayor cumplimiento longitudinal mientras se mantiene una adecuada rigidez lateral y control del cambio en el ángulo de la rueda. El centro virtual definido por la parte inferior final del eje de control también es un centro instantáneo que es movido en la misma forma que se mueve la rueda. El principio de doble pivote puede ser usado por los brazos de control superior. El levantamiento vertical experimentado por los coches cuando las llantas son giradas es más complicado determinarlo que con el sistema de pivote simple.

Este sistema, también conocido como sistema frontal de multi-uniones es usado por BMW, Mercedes-Benz y Audi (Figura 1.6 y 1.7)



Schematic plan view of a double steering-pivot arrangement for front suspension lower arms. The steering linkage provides the remainder of the location.

Figura 1.6



Front suspension of the Audi A4, showing double steering-pivot arrangement for both upper and lower suspension arms.

Figura 1.7

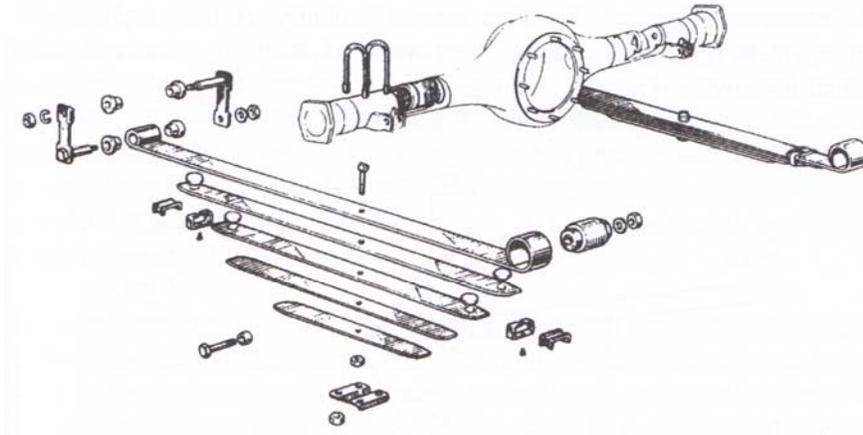
1.3 Suspensiones Traseras.

1.3.1 Suspensión de eje trasero para carga.

Los vehículos largos con tracción trasera ahora requieren de alguna forma de suspensión independiente para proveer un estándar competitivo para el confort y manejo. A pesar, de un cambio completo en el diseño de la rueda trasera a la tracción de la rueda delantera en coches pequeños y medianos, la suspensión de eje trasero para carga sobrevive para carros de pasajeros. De cualquier forma este sistema sobrevive en algunos vehículos deportivos utilitarios y camionetas al igual que en algunos otros coches comerciales.

Por varias décadas este sistema fue un diseño universal que proveía economía, robustez y eficiencia. Su desventaja principal era la considerable masa extra que este sistema aportaba debido al diferencial y su carcasa, además de una parte de la flecha para generar la tracción en el eje. Así pues este excedente de masa comprometía el andar del vehículo y hacia el eje trasero mas propenso a los saltos y a la generación de ruido, especialmente cuando un alto torque era transmitido.

El sistema mas simple de este sistema fue llamado dirección Hotchkiss, donde el eje es acoplado al chasis del vehículo solo por resortes longitudinales de muelles. La figura 1.8 muestra un sistema típico de suspensión trasero con resortes de ballestas. Con este arreglo, el control del torque, para resistir los torques de frenado y avance son proveídos solo por el resorte de muelles. Algunas de las flexiones angulares del eje ocurrirán al rededor del eje de giro de la rueda y posiblemente en la traslación hacia delante y hacia atrás, dependiendo en donde se posiciona el eje verticalmente con respecto a los resortes de muelles. Para una relación dada de las deflexiones del angulares pueden ser reducidas, en proporciones o relaciones inversas de la longitud del resorte entre el alargamiento de los muelles.



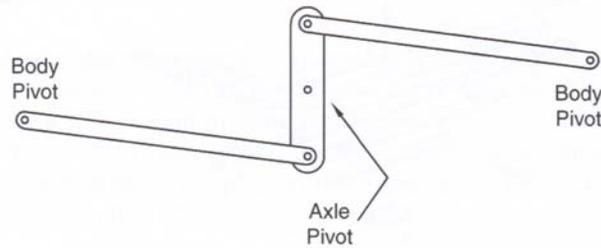
The typical leaf spring comprises several separate leaves and is mounted on a bushed pivot at one end with a swinging shackle at the other. The axle tube is clamped to the central portion by U-bolts.

Figura 1.8

Un eje trasero centrado en un muelle simétrico se moverá hacia arriba y hacia abajo sin flexión angular sobre el eje de giro de la rueda, tan largo como éste sea no será sometido a un torque. La compensación del eje trasero en el resorte longitudinal producirá deflexiones angulares sobre el eje de giro de la rueda como sea flexionado verticalmente.

Durante las aceleraciones fuertes o frenados bruscos, la combinación de los movimientos rotacionales y traslacionales del eje trasero debido al torque y a la flexión vertical pueden llevar a una condición conocida como eje trasero pesado. Esta condición del eje trasero envuelve un giro elíptico del eje y puede ser auto excitado.

Debido al eje trasero pesado y al deseo de mejorarlo éste eje , otro tipo de sistemas de suspensión para eje trasero son considerados. En muchos casos, estos sistemas alternativos tienen envueltos el reemplazo del resorte de muelles con resortes helicoidales, y la introducción de uniones longitudinales y laterales para proveer la localización y el control del torque. Un arreglo típico usa cuatro uniones longitudinales, dos superiores y dos inferiores, estas uniones dan una localización longitudinal y control del torque, y una unión transversal acoplada al chasis en ambos lados del coche. Esta unión conocida como barra Panhard (debido al fabricante Frances Panhard) y siendo de un largo relativo, otorga una deflexión mínima lateral en el eje trasero como los movimientos laterales. Un arreglo mas sofisticado reemplaza la barra Panhard con una unión Watt, como la que se muestra en la Fig. 1.9.



The classic Watt linkage, with two equal-length lateral links pivoted at their outer ends to the chassis and at their inner ends to a vertical link, which is pivoted at its center to the axle.

Figura 1.9

La ventaja de la unión Watt es que fuerza al eje donde pivota la unión vertical, para moverse verticalmente con una pequeña deflexión lateral. En varias instalaciones de este sistema ha sido más conveniente desviarlo la unión Watt a un lado más que acoplarlo en el centro del eje, esto genera una desigualdad de longitudes en las uniones laterales. Para preservar el movimiento vertical del eje del pivote, la unión vertical del sistema Watt debe tener un punto de pivote en el centro, con la sección larga conectada a la sección lateral más pequeña.

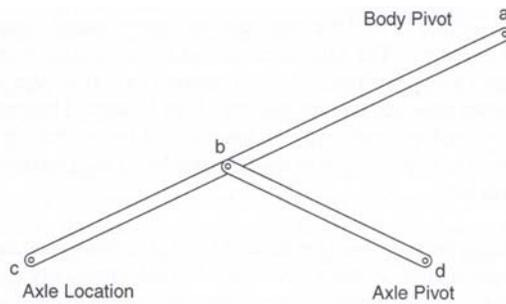
Otra opción para este sistema de suspensión es emplear tres uniones longitudinalmente, donde la unión superior provee las restricciones laterales. Usualmente esto es llevada a cabo haciendo la unión superior en forma de brazo A, donde la base de este brazo es acoplado al chasis a través de pivotes con ejes laterales, el vértice es acoplado al eje trasero a por medio de uniones de bala. Sistemas como este fueron empleados en modelos de Alfa Romeo en 1954, algunos Lotus a principios de los 1960.

1.3.2 Suspensión de Eje De Dion.

Este sistema fue llamado así por un inventor y constructor Francés de carros de los inicios de la industria automotriz, el cual consiste en una mezcla del sistema suspensión de eje trasero para carga y un sistema independiente, el cual contempla una menor cantidad de masa. En ésta propuesta del sistema de suspensión del eje trasero pero el mismo tipo de rigidez del sistema antes explicado. En un concepto básico, el sistema de eje de Dion tiene el diferencial montado al chasis con las dos ruedas conectadas rígidamente a través de un tubo transversal liviano, normalmente curvado para proporcionar el espacio necesario de los accesorios que permiten el buen funcionamiento de la llanta. Este sistema no es completamente independiente por lo que este sistema es normalmente referido como semi- independiente.

1.3.3 Suspensión de eje independiente para autos de dirección delantera.

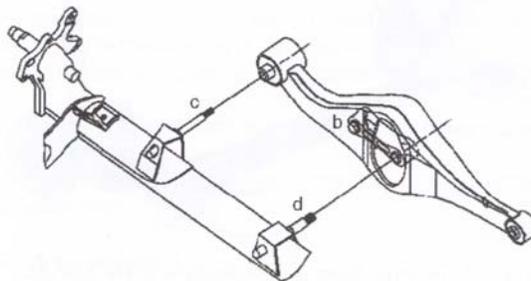
La suspensión de eje independiente, es un ensamble ligero simple usado para sujetar las llantas traseras que no cuentan con un sistema de dirección. Debido a que esta suspensión no contempla un sistema complejo de dirección, puede ser diseñado y manufacturado mucho más simple que los sistemas anteriores reduciendo su costo. Los métodos para la ubicación del sistema de eje independiente son similares a los que son empleados en los ejes independientes en cada una de las ruedas, las ruedas están conectadas directamente. Algunas interesantes variantes de este sistema han sido empleadas por Fiat en el modelo Lancia Y10 y el Fiat Panda, también por Alfa Romeo en el Alfasud.



The Scott-Russell linkage. The two links abc and bd are joined at pivot b.

Figura 1.10

En el caso de Nissan, adoptaron una novedosa alternativa de este sistema llamado multi-barras de unión, el cual sigue siendo empleado en algunos de los modelos actuales. En lugar de emplear el sistema de uniones Watt, Nissan emplea el sistema conocido como Scott-Russell, el cual realiza una función similar al primero pero es más compacto. Usando como referencia la Fig 1.10, si la relación de las longitudes $ab:bc$ es igual a la relación $bc:bd$, entonces cuando los puntos c y d experimentan la misma flexión vertical, el punto d se mueve prácticamente en línea vertical, mientras que simultáneamente el punto c experimenta un movimiento lateral. Nissan adaptó este mecanismo para sujetar algunos de los puntos del sistema al cuerpo del vehículo mientras que los puntos c y d fueron sujetos al eje trasero. El punto c es acoplado a través de un cojinete, el cual trabaja de forma eficiente para los movimientos laterales, pero verticalmente es poco eficiente. La figura 1.11 muestra un esquemático de la implementación de este sistema en el eje primario trasero.

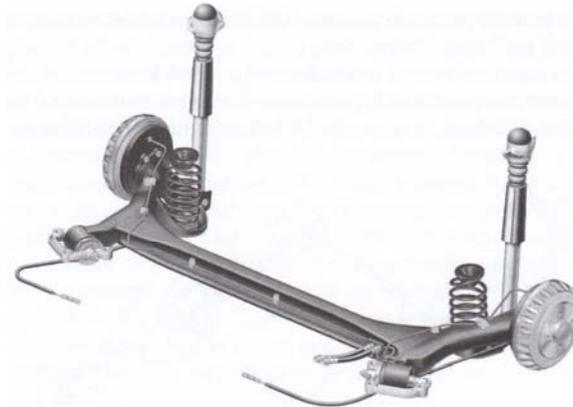


Schematic of the Scott-Russell linkage on the Nissan Primera rear axle. (Courtesy Nissan Motor (GB) Ltd.)

Figura 1.11

1.3.4 Suspensión de viga inclinada para vehículos de dirección delantera.

El sistema de suspensión de eje trasero y viga inclinada es conocida por otros nombres, incluyendo el de “barra de torsión” entre otros. El pionero en el uso de este sistema fue General Motors y Volkswagen. El sistema más moderno de esta suspensión consiste en un ensamble con dos brazos interconectados por una viga transversal rígida acoplada a estos brazos en cada extremo. No tiene uniones flexibles en el eje trasero, a pesar de que en algunas aplicaciones (cuando la viga está en línea con el centro de la rueda) una pequeña sección del sistema barra Panhard es empleado para controlar los movimientos laterales del eje trasero de las ruedas. Siendo una estructura, el sistema de barra de torsión de las grandes deformaciones elásticas de la estructura para cumplir con su función. La figura 1.12 muestra el eje trasero de un Audi A2 que emplea este sistema.



*The twist-beam axle shown here on the Audi A2.
(Courtesy Audi UK.)*

Figura 1.12

Las principales atracciones de este sistema de barra de torsión son: que es una suspensión relativamente económica y compacta, como se puede ver en la figura 1.12. El costo y la fácil colocación por su tamaño la hacen muy atractiva para coches compactos.

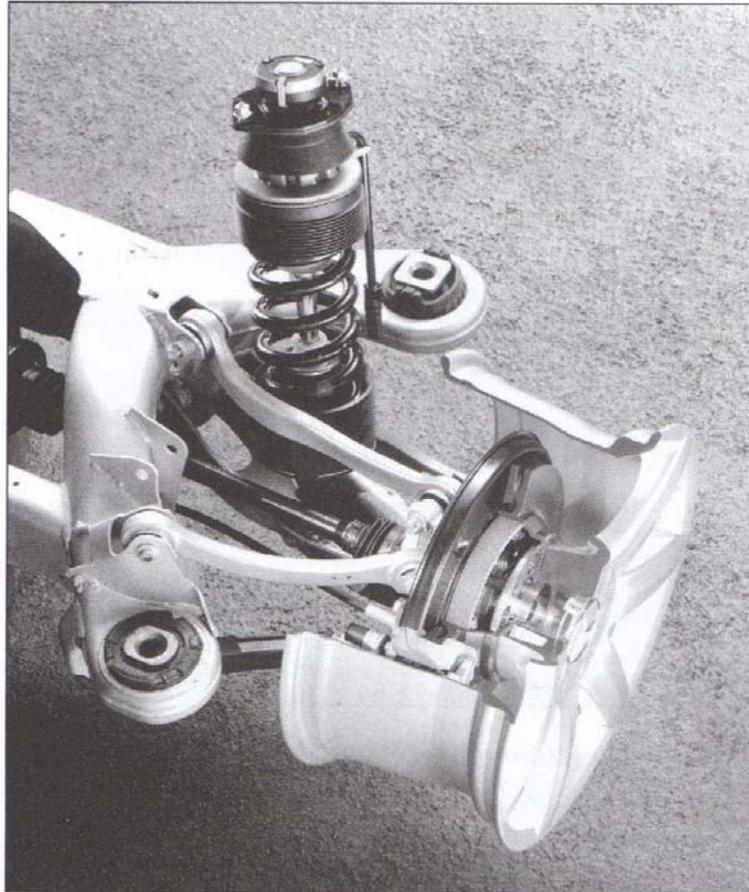
1.3.5 Suspensión trasera independiente-estructura multi-uniones.

La variación de grados de los componentes del sistema debido a la falta de la flexibilidad de los diseñadores pretende llevar a cabo la geometría de la llanta como la suspensión le requiere. A principio de los años 1980s, para el nuevo modelo 190 de Mercedes-Benz llegó con un nuevo diseño de sistema de multi uniones para proveer una flexibilidad total en la geometría cuando el vehículo experimenta desplazamientos verticales, además una buena respuesta en los movimientos longitudinales sin efectos adversos en la rueda, además permita un bajo nivel del coche con respecto del piso y una compensación de levantamiento. Este sistema también contempla una relativa masa pequeña en su composición.

Este sistema de suspensión independiente trasero, depende de dos acoplamientos en el que cada uno tiene un sistema de ensamble de cinco uniones, cada unión permite la flexión. El compacto ensamble de sistema contempla una unidad flexible montada en cuatro puntos en la estructura del vehículo. El resorte en cada lado del eje y el amortiguador están acoplados en la parte superior al coche. Debido al buen acoplamiento de este sistema, se genera una alta eficiencia en el modelo 190 lo cual genera cero cambios en el sistema de dirección incluso con las flexiones verticales o longitudinal de la rueda. Al mismo tiempo este sistema permite una rigidez lateral asegurando una buena posición de la rueda. De esta forma este sistema fue capaz de deslindar algunos requerimientos cruciales en el sistema de dirección para la rueda al sistema de suspensión, pudiendo de esta forma mejorarlos, posibilitando de esta forma un buen funcionamiento de la rueda sin significantes deformaciones de ésta bajo casi todas las condiciones de trabajo.

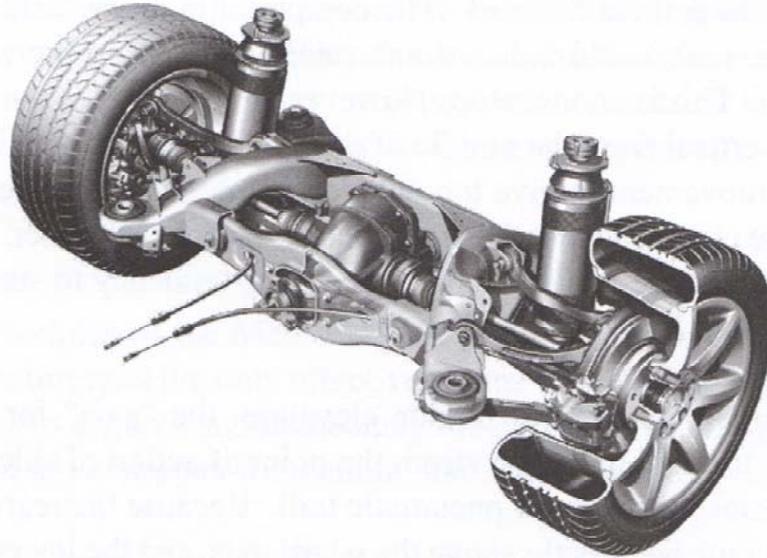
El diseño mas reciente de este sistema de suspensión se encuentra instalado en el modelo Mercedes-Benz clase SL, el cual se muestra en las Figs. 1.13 y 1.14.

La novedad del sistema, como fue acoplado en el modelo 190 es mejor observado en el estudio de que muestra la figura 1.15, que representa la forma de la estructura de unión. Cada triángulo superior e inferior comprime dos uniones, bolas de goma unidas a los extremos, con dos excepciones, una excepción es la unión baja trasera, el cual a la entrada tiene un cojinete de goma para proveer estabilidad para el funcionamiento del resorte y amortiguador, en la parte final tiene una bola de acero en una carcasa de plástico. La segunda excepción es la parte exterior de las cinco uniones, que también tiene una bola metálica dentro de una carcasa plástica. Esta unión provee una influencia en la estabilidad y es una parte esencial del sistema de varias uniones.



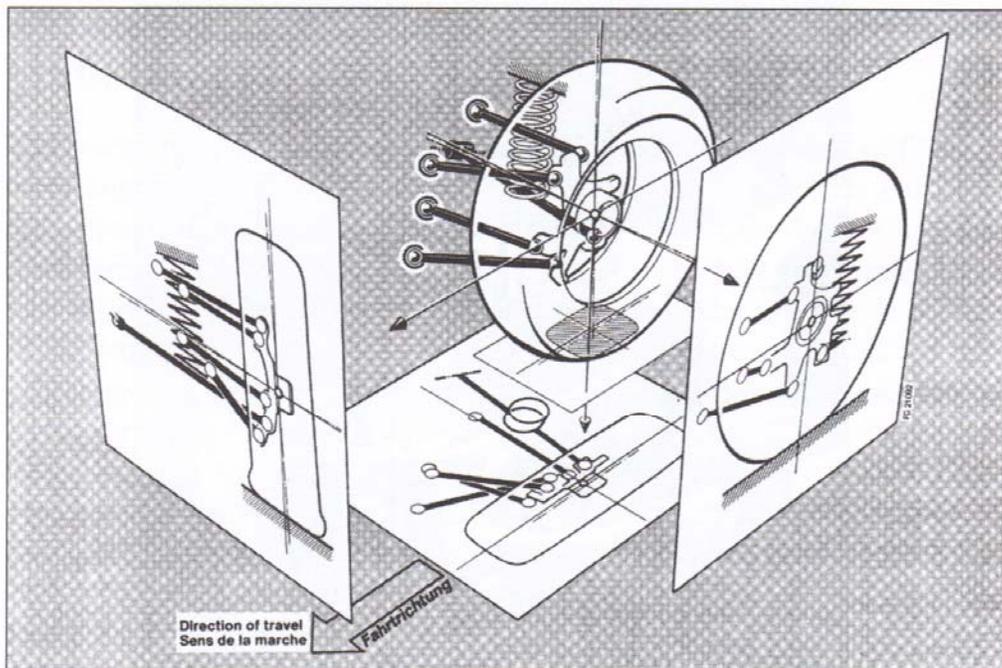
*Single rear-wheel suspension of the Mercedes-Benz SL500.
(Courtesy DaimlerChrysler AG.)*

Figura 1.13



*Rear suspension assembly of the Mercedes-Benz SL500.
(Courtesy DaimlerChrysler AG.)*

Figura 1.14



*The skeleton view of the Mercedes linkage in perspective
requires the corresponding front and side views and plan to be fully
understood. (Courtesy Institution of Mechanical Engineers.)*

Figura 1.15

1.4 Justificación del tema y descripción del contenido de los capítulos.

El análisis de los sistemas de suspensión siempre ha contemplado los elementos principales, en algunos casos la masa y la rigidez son los dos elementos al momento del estudio de dicho sistema, en algunas otras ocasiones se realiza un análisis más complejo al incluir el elemento del amortiguador. De los elementos antes mencionados la masa del vehículo es considerada como un valor numérico al momento resolver estos análisis, sin tomar en cuenta la forma que ésta tenga, principalmente en el punto de unión entre el sistema de suspensión y el cuerpo del vehículo, al observar algunas de las formas empleadas para dicho punto de unión por algunos de los grupos automotrices se observa que cada uno tiene su propia geometría definida. Actualmente no existe algún análisis de este punto importante de unión, pues la forma que toma la geometría en este punto podría ayudar a filtrar los desplazamientos generados por las excitaciones verticales del sistema, es por esto que este trabajo de investigación realiza un análisis y mejora de dicho punto de unión con la finalidad de determinar la mejor geometría que ayude a disminuir los desplazamientos que al final se experimentados por los ocupantes de un vehículo automotriz.

La presente tesis contempla el desarrollo de cuatro capítulos para realizar el estudio del tema propuesto. En el primer capítulo nombrado Estado del Arte, se proporciona un bosquejo histórico del sistema de suspensión, además de una clasificación de los tipos de suspensiones usando como referencia dos grandes grupo; el primero menciona los sistemas frontales más empleados o de mayor éxito en la industria automotriz. El segundo grupo de la clasificación muestra los sistemas más eficientes para las suspensiones empleados en los ejes de las ruedas traseras. La información de la clasificación antes mencionada muestra el funcionamiento y descripción básica de cada sistema así como sus principales componentes.

En el capítulo dos se muestra el desarrollo del modelo matemático para un sistema de suspensión de dos grados de libertad, él describe la dinámica de dicho sistema. Dicho análisis contempla los elementos, resorte y amortiguador en cada uno de los grados de libertad estudiando el sistema con los principales elementos.

Una vez establecido el modelo matemático del sistema de suspensión, se procede al Análisis de las Vibraciones Mecánicas en el capítulo tres, el cual contempla una excitación armónica en la base. Calculando la amplitud máxima debido a la aceleración del sistema se realiza el cálculo de la fuerza máxima que percibe el cuerpo del vehículo una vez que el sistema de suspensión filtra la entrada en la base. El objetivo en este capítulo es determinar la fuerza máxima a la cual está sometida la carrocería de un vehículo.

Por último el cuarto capítulo contempla el método del elemento finito y su relación matemática con la mecánica de Lagrange en el análisis de vibraciones mecánicas con la finalidad de definir y optimizar la geometría en el punto de acoplamiento entre el sistema de suspensión y la carrocería de un vehículo. Para este estudio el uso del software ANSYS® es empleado con la finalidad de hacer los análisis en geometrías complejas. Este capítulo también contempla el análisis de los resultados obtenidos durante el desarrollo de la presente investigación.

Capítulo II

Ecuaciones del Movimiento y respuesta dinámica de un sistema de suspensión de 2 grados de libertad.

2.1 Ecuaciones de Movimiento.

Para una buena simplificación de las ecuaciones de Lagrange se asume que no hay una relación cinemática que satisfacer para las coordenadas generalizadas. Entendiendo por coordenadas generalizadas como variables que posicionan un sistema. De cualquier forma hay algunos sistemas, tales como cuerpos que giran, en los cuales la variable de la velocidad debe satisfacer ciertas condiciones. Esto se debe a que la velocidad es la derivada de la posición limitante de velocidad, como la limitante de la velocidad representa ecuaciones diferenciales que deben de ser satisfechas por las condiciones generales. Siendo que estas ecuaciones diferenciales gobiernan la velocidad del sistema no podrán ser resueltas en forma independiente de las ecuaciones de movimiento.

Si N es el numero de grados de libertad de un sistema, las coordenadas generalizadas N , sin relación con las condiciones cinemáticas auxiliares, definen la posición del sistema. Cualquier combinación de estas variables representan un estado cinemático admisible, el cual ocurre dependiendo de las fuerzas que son aplicadas en el sistema. Por esta razón se dice que las coordenadas generalizadas no deben ser restringidas.

Para el caso en el cual se requiere determinar ecuaciones de movimiento que no contengan fuerzas limitantes se emplea el principio d'Alambert, que considera desplazamientos virtuales. Un desplazamiento virtual es un desplazamiento infinitesimal que podría ser producido si las coordenadas generalizadas a un instante arbitrario estuvieran dando incrementos infinitesimales sin cambio en el valor de la variable tiempo t . La palabra "virtual" describe el hecho de que tal desplazamiento no describe el movimiento real del sistema. Cuando un desplazamiento virtual es aplicado a un sistema, no existe movimiento en la dirección de la fuerza limitante, porque el tiempo no cambia. La fuerza limitante es cualquier fuerza que imponga alguna restricción en el movimiento y no actué en cualquier movimiento que no viole tal restricción.

El trabajo realizado por una fuerza cuando un sistema sufre un desplazamiento virtual es el trabajo virtual δW . Para caracterizar el desplazamiento virtual de una partícula la posición es dependiente de $\vec{r} = \vec{r}(q_j, t)$. El desplazamiento virtual es producido por el incremento de las coordenadas generalizadas por cantidades infinitesimales δq_j . Estos incrementos pueden ser asignados de forma arbitraria. Como t es constante el desplazamiento virtual correspondiente $\delta \vec{r}$ para varias partículas será

$$\delta \vec{r} = \frac{\delta \vec{r}}{\delta q_1} q_1 + \frac{\delta \vec{r}}{\delta q_2} q_2 + \dots = \sum_{j=1}^N \frac{\delta \vec{r}}{\delta q_j} \delta q_j \quad 2.1$$

En la ecuación anterior N , representa le número de grados de libertad. La segunda ley de Newton obviamente aplicada a una simple partícula, por lo que el trabajo virtual para una partícula esta dada por:

$$\delta W \equiv \bar{F} \cdot \delta \bar{r} = m \bar{a} \cdot \delta \bar{r} \quad 2.2$$

Sin embargo Lagrange usó el desarrollo D'Alembert como el punto de partida para una formulación en términos de la energía cinética. Para hacer esto, se sustituye la ecuación 2.1 dentro del término del lado derecho de la ecuación 2.2, recordando que la aceleración es $\bar{a} = d\bar{v}/d\bar{t}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \delta W &= m \bar{a} \cdot \sum_{j=1}^N \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} \delta q_j \equiv \sum_{j=1}^N m \frac{d\bar{v}}{d\bar{t}} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} \delta q_j \\ &\equiv \sum_{j=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(m \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} \right) - m \bar{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j \end{aligned} \quad 2.3$$

El siguiente paso es introducir una identidad derivada de la ecuación 2.1. Como $\bar{r} = \bar{r}(q_j, t)$ la velocidad esta dada

$$\bar{v} = \sum_{n=1}^N \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \quad 2.4$$

Note que el coeficiente de \dot{q}_n en la ecuación anterior es el mismo que el coeficiente en δq_n de la ecuación 2.1. Se puede obtener el mismo coeficiente asociado con el subíndice j derivando \bar{v} con respecto de q_j , lo que muestra

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial q_j} \equiv \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} \quad 2.5$$

Este término es introducido en la ecuación 2.3. Para el segundo término, se observa que la derivada con respecto a diferentes variables puede ser tomada en cualquier secuencia, por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \right) \equiv \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_j} \quad 2.6$$

Estas dos identidades lleva a

$$\delta W = \sum_{j=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(m \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_j} \right) - m \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_j} \right] \delta q_j \quad 2.7$$

La energía cinética de una partícula es $T = m \bar{v} \cdot \bar{v}/2$, derivando $\partial(\bar{v} \cdot \bar{v})/\partial \beta = 2\bar{v} \cdot \partial \bar{v}/\partial \beta$, donde β es un valor arbitrario. Así, el trabajo virtual para una partícula esta relacionada con la energía cinética de una partícula por

$$\delta W = \sum_{j=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j \quad 2.8$$

La ecuación 2.8 fue obtenida contemplando una sola partícula, pero ésta también aplica a cualquier sistema de partículas, incluyendo sistemas de cuerpos rígidos. Para considerar lo anterior como cierto, observamos que el trabajo virtual y la energía cinética de un sistema son equivalentes a las sumas de las respectivas contribuciones por las partículas que constituyen dicho cuerpo rígido. La característica fundamental de esta suma es que la fuerza limitante no contribuye al trabajo virtual. Así la ecuación 2.8 se refiere a las fuerzas externas conocidas de las coordenadas generalizadas.

Hasta el momento no se ha explicado un aspecto básico del desplazamiento virtual, el cual define los estados que los incrementos δq_j dan a las coordenadas generalizadas que en cualquier instante son independientes y arbitrarias. Para hacer uso de dicha arbitrariedad, se usan las ecuaciones 2.1 y 2.2 para representar el trabajo virtual. Se emplea f como subíndice para indicar cual fuerza externa es considerada, y \vec{r}_f es la posición donde la fuerza es aplicada.

$$\delta W = \sum_f F_f \cdot \delta \vec{r}_f = \sum_f F_f \cdot \sum_{j=1}^N \frac{\partial \vec{r}_f}{\partial q_j} \delta q_j \quad 2.9$$

El coeficiente virtual de cada incremento esta definido por δq_j para una fuerza generalizada Q_j . por lo tanto

$$\delta W = \sum_{j=1}^N Q_j \delta q_j, \quad Q_j = \sum_f F_f \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \quad 2.10$$

Usando esta expresión para describir el trabajo virtual en la ecuación 2.8 quedando de la siguiente manera

$$\sum_{j=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0 \quad 2.11$$

Esta relación debe ser satisfecha por cualquier valor de δq_j . Se pueden seleccionar varias combinaciones de N en la que solo un incremento no debe ser cero. En tal circunstancia, la única posibilidad de satisfacer la relación es que el coeficiente de cada δq_j aparezca idéntico.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad 2.12$$

Estas son las ecuaciones de Lagrange, las cuales evalúan el rendimiento de un sistema específico de N ecuaciones diferenciales de movimiento.

Las ecuaciones de Lagrange son implementadas normalmente en formas ligeramente distintas. La fuerza generalizada que esta en la ecuación anterior describe todas las fuerzas externas, independientemente de que sean o no conservativas. Del cualquier forma el de de balance de de fuerza muestra que es más conveniente representar el efecto de las fuerzas conservativas en términos de la energía potencial. La definición de una fuerza conservativa es que el trabajo que ésta hace en la transmisión entre cualquier estado inicial 1 y el estado final 2 de un sistema es relacionada a su energía potencial en estos estados por

$$W_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2 \quad 2.13$$

Tomando estos dos estados como la posición del sistema antes y después del desplazamiento virtual. Debido a que la energía potencial puede depender únicamente de la posición instantánea del sistema, V puede depender solo de las coordenadas generalizadas y del tiempo. El tiempo se mantiene constante en un desplazamiento virtual por lo que $V_1 = V(q_j, t)$ y $V_2 = V(q_j + \delta q_j, t)$. Así el trabajo virtual realizado por una fuerza conservativa es descrito por

$$\delta W_{cons} = V(q_j, t) - V(q_j + \delta q_j, t) \quad 2.14$$

Los incrementos virtuales son infinitesimales en magnitud, lo cual permite usar diferentes cálculos para representar las diferencias de la ecuación anterior

$$\delta W_{cons} = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j \quad 2.15$$

Esta relación es usada para dividir el trabajo virtual en contribuciones de las fuerzas conservativas y no conservativas. Se deben considerar los parámetros de la fuerzas generalizadas Q_j que consisten de solo fuerzas que se han incluido en la energía potencial, así que

$$\delta W = \delta W_{cons} + \delta W_{nc} = \sum_{j=1}^N Q_j \delta q_j - \sum_{j=1}^N \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j \quad 2.16$$

Una comparación de ésta representación del trabajo virtual con la ecuación 2.12 muestra que los parámetros de Q_j que aparecen previamente deben se reemplazados por $Q_j - \partial V / \partial q_j$, donde las únicas fuerzas describan por Q_j son las no contenidas en V . de esta forma las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad 2.17$$

Las ecuaciones de movimiento pueden ser obtenidas por diferentes métodos, para este caso se emplea la mecánica de Lagrange. El principio de de las ecuaciones de Lagrange esta basado en la cantidad del Lagrangiano. El Lagrangiano es una cantidad que describe el balance entre las energías no disipadas. Este se escribe cómo

$$L = T_T - V_T \quad 2.18$$

Donde T_T es la energía cinética y V_T es la energía potencial. Para poder emplear las ecuaciones de Lagrange es importante considerar los grados de libertad del sistema. El número de grados de libertad es el número de coordenadas independientes necesario para la descripción completa del movimiento del sistema. Las coordenadas independientes están dadas por q_1, q_2, \dots, q_n y son referidas como coordenadas generalizadas.

Para los sistemas mecánicos, algunas posiciones (particularmente de las masas) servirán como coordenadas generalizadas. En el caso de sistemas eléctricos, las cargas eléctricas y los flujos magnéticos sirven como coordenadas generalizadas apropiadas.

Hay un número de circunstancias bajo las cuales es permisible ignorar la gravedad en la determinación del coeficiente de rigidez. Tres razones comunes se presentan en el plano horizontal. Traslación a lo largo una línea recta y el movimiento de rotación en donde el centro de masa en la dirección vertical. Incluso cuando ninguna de estas condiciones es conocida es posible que la gravedad pueda ser no importante en comparación con el efecto que representa el total del resorte.

En el caso de la suspensión pasiva el efecto de la gravedad es despreciado en el trabajo o función total del resorte, debido a que el efecto de la gravedad es mínimo en comparación con el desplazamiento producido por las fuerzas externas. Por lo tanto el efecto de la energía potencial desarrollada por la gravedad es omitido al momento de determinar las funcionales Lagrangianas.

Asociada con cada coordenada generalizada q_i , la ecuación de Lagrange es dada por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial P_T}{\partial q_i} = Q_i \quad 2.19$$

Donde P_T es denominado como la función de disipación de energía la cual describe la disipación de la energía en el sistema, Q_i son las entradas generalizadas externas (fuerzas) que actúan en el sistema.

Para analizar el sistema de suspensión pasivo de dos grados de libertad se considera la figura 2.1 que muestra el desplazamiento en el sistema.

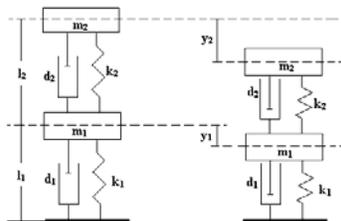


Figura 2.1.

La energía cinética para éste sistema se expresa en las siguientes ecuaciones

$$T_T = T_1 + T_2 \quad 2.20$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 \quad 2.21$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 \quad 2.22$$

En el caso de la energía potencial se puede determinar aplicando las siguientes ecuaciones

$$V_T = V_1 + V_2 \quad 2.23$$

La energía potencial de los resortes de este sistema de suspensión pasiva se define por las siguientes ecuaciones

$$V_1 = \frac{1}{2} k_1 y_1^2 \quad 2.24$$

$$V_2 = \frac{1}{2} k_2 (y_2 - y_1)^2 \quad 2.25$$

Por último la ecuación para el caso de la función de disipación de energía

$$P_T = P_1 + P_2 \quad 2.26$$

$$P_1 = \frac{1}{2} d_1 \dot{y}_1^2 \quad 2.27$$

$$P_2 = \frac{1}{2} d_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 \quad 2.28$$

Utilizando las ecuaciones 2.20, 2.23 se determina la ecuación lagrangiana del sistema.

$$L = T_T - V_T$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 y_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (y_2 - y_1)^2 \quad 2.29$$

Como se muestra en la figura 2.1 el sistema es de dos grados de libertad, por lo tanto se determina primero la ecuación del movimiento ó Lagrangiana correspondiente en este caso en ausencia de fuerzas externas al sistema queda de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_1} + \frac{\partial P_T}{\partial \dot{y}_1} = 0 \quad 2.30$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) = m_1 \dot{y}_1 \quad 2.31$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = -k_1 y_1 + k_2 (y_2 - y_1) \quad 2.32$$

$$\frac{\partial P_T}{\partial \dot{y}_1} = d_1 \dot{y}_1 - d_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \quad 2.33$$

Reemplazando las ecuaciones 2.30, 2.31 y 2.32 en 2.33 la ecuación del movimiento o Lagrangiana es

$$m_1\ddot{y}_1 + k_1y_1 - k_2(y_2 - y_1) + d_1\dot{y}_1 - d_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = 0 \quad 2.34$$

Para el caso de y_2 se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_2} + \frac{\partial P_T}{\partial \dot{y}_2} = 0 \quad 2.35$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) = m_2\ddot{y}_2 \quad 2.36$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = -k_2(y_2 - y_1) \quad 2.37$$

$$\frac{\partial P_T}{\partial \dot{y}_2} = d_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \quad 2.38$$

Finalmente las ecuaciones 2.35, 2.36 y 2.37 se reemplazan en la ecuación 2.38 y la ecuación de movimiento para y_2 es

$$m_2\ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) + d_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = 0 \quad 2.39$$

De esta forma las ecuaciones 2.34 y 2.39 son las Lagrangianas del sistema de suspensión pasivo vehicular con dos grados de libertad.

2.2 Respuesta dinámica de la suspensión pasiva.

Las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de un sistema de suspensión pasiva de dos grados de libertad pueden ser escritas de forma matricial de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 \\ -d_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1(t)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2.40$$

La forma general de las ecuaciones del movimiento para un sistema de n grados de libertad sin excitación externa es

$$M\ddot{Y} + D\dot{Y} + KY = 0 \quad 2.41$$

Donde $X = [x_1, x_2 \dots x_n]$ son las coordenadas generalizadas, M es la matriz de masa, K es la matriz de rigidez y D esa la matriz de amortiguamiento

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 \\ -d_2 & d_2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Un sistema de n grados de libertad tendrá n frecuencias naturales, cada una de las frecuencias naturales corresponderá a un modo de vibración. Un modo de vibración define las relaciones entre las amplitudes de vibración de cada coordenada generalizada. Para realizar el análisis de las frecuencias naturales normalmente el amortiguamiento no es considerado o sea el sistema libre. Por lo que la ecuación de frecuencia natural es de la siguiente forma

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad 2.42$$

Considerando a ω_d como la frecuencia de amortiguamiento, ω_n como la frecuencia natural, aplicando un factor de $\zeta < 0.2$ se considera que las frecuencias natural y de amortiguamiento son casi las mismas. Debido a esta consideración se determinan las frecuencias naturales si amortiguamiento es decir $D = 0$ por lo que la ecuación 2.41 queda de la siguiente forma

$$M\ddot{Y} + KY = 0 \quad 2.42$$

Para determinar las frecuencias naturales la ecuación 2.42 es multiplicada por M^{-1} así se obtiene

$$\ddot{Y} + M^{-1}KY = 0 \quad 2.43$$

Definiendo $A = M^{-1}K$ y proponiendo $Y = \chi e^{j\omega t}$, con χ constante y $j^2 = -1$ como solución de la ecuación 1.4.8 el resultado es

$$-\omega^2 \chi e^{-j\omega t} + A\chi e^{-j\omega t} = -\omega^2 Y + AY = 0 \quad 2.44$$

Agrupando términos y considerando $\lambda = \omega^2$, la ecuación 2.44 toma la siguiente forma

$$[A - \lambda I]X = 0 \quad 2.45$$

Considerando a I como la matriz identidad, esta ecuación es un sistema de ecuaciones algebraicas homogéneas, para obtener la solución de dicho sistema el determinante de la matriz $[A - \lambda I]$ debe ser cero. Dicho determinante esta dado por

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_n = 0 \quad 2.46$$

cuya ecuación 2.46 es conocida como el polinomio característico ó polinomio de frecuencias.

Sustituyendo las ecuaciones del movimiento 2.34 y 2.39 en A y $[A - \lambda I]$ se obtiene

$$A = M^{-1}K = \begin{bmatrix} \frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{-k_2}{m_1} \\ \frac{-k_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} \quad [A - I\lambda] = \begin{bmatrix} \frac{k_1 + k_2}{m_1} - \lambda & \frac{-k_2}{m_1} \\ \frac{-k_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} - \lambda \end{bmatrix}$$

Y el polinomio de frecuencias queda como

$$\det[A - I\lambda] = \lambda^2 + \lambda \left[-\frac{k_1}{m_1} - \frac{k_2}{m_1} - \frac{k_2}{m_2} \right] + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} \quad 2.47$$

Las raíces de dicho polinomio que definen las frecuencias naturales del sistema son

$$\omega_1 = \frac{k_1 m_2 + k_2 m_2 + k_2 m_1 + \sqrt{k_1^2 m_2^2 + 2k_1 m_2^2 k_2 - 2m_1 m_2 k_1 k_2 + k_2^2 m_2^2 + 2k_2^2 m_2 m_1 + k_2^2 m_1^2}}{2m_1 m_2} \quad 2.48$$

$$\omega_2 = \frac{k_1 m_2 + k_2 m_2 + k_2 m_1 - \sqrt{k_1^2 m_2^2 + 2k_1 m_2^2 k_2 - 2m_1 m_2 k_1 k_2 + k_2^2 m_2^2 + 2k_2^2 m_2 m_1 + k_2^2 m_1^2}}{2m_1 m_2} \quad 2.49$$

El siguiente paso en el análisis de las vibraciones mecánicas de un sistema de suspensión pasiva de dos grados de libertad es encontrar la función de transferencia aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones del movimiento

$$\begin{aligned} m_1 s^2 Y_1 + (k_1 + k_2) Y_1 - k_2 Y_2 &= F \\ m_2 s^2 Y_2 - k_2 Y_1 + k_2 Y_2 &= 0 \end{aligned} \quad 2.50$$

Donde

$$Y_1 = L(y_1), Y_2 = L(y_2), F = L(f(t)) \quad 2.51$$

Y $L(\bullet)$ es el operador Laplaciano. Finalmente las funciones de transferencia $G_1(s) = Y_1/F$, $G_2(s) = Y_2/F$ son obtenidas resolviendo las ecuaciones 2.50 para Y_1 y Y_2

$$Y = A_s^{-1} \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2.52$$

Donde

$$A_s = \begin{bmatrix} m_1 s^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & m_2 s^2 + k_2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad 2.53$$

Esto es

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{k_2 F}{m_1 s^4 m_2 + m_1 s^2 k_2 + k_1 m_2 s^2 + k_1 k_2 + k_2 m_2 s^2} \\ \frac{(m_1 s^2 + k_1 + k_2) F}{m_1 s^4 m_2 + m_1 s^2 k_2 + m_2 k_1 s^2 + k_1 k_2 + k_2 m_2 s^2} \end{bmatrix} \quad 2.54$$

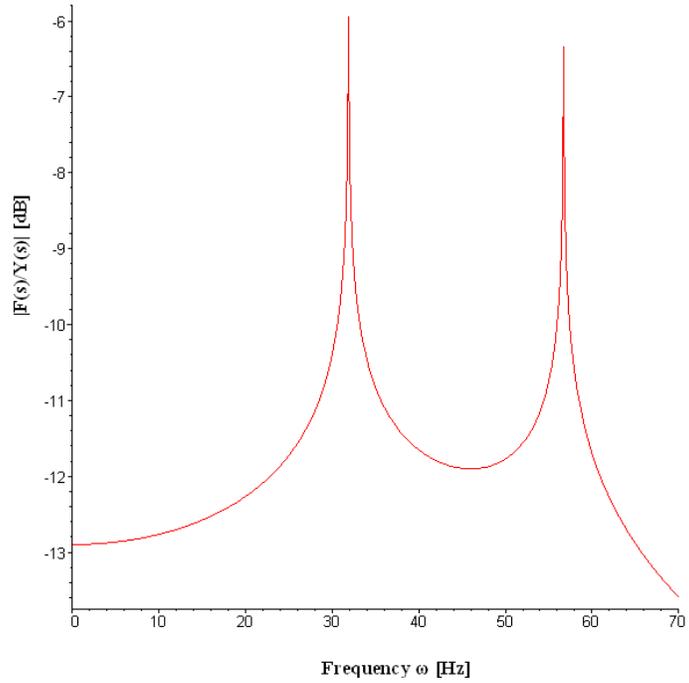
Al dividir el primer componente de la matriz 2.54 entre F

$$G_1 = \frac{k_2}{m_1 s^4 m_2 + m_1 s^2 k_2 + k_1 m_2 s^2 + k_1 k_2 + k_2 m_2 s^2} \quad 2.55$$

Para obtener la frecuencia del sistema en suspensión pasiva con dos grados de libertad es necesario considerar valores para $k_1 = 400000$ N/m, $k_2 = 140000$ N/m, $m_1 = 290$ kg, $m_2 = 59$ kg y $s = i\omega$; obtenido

$$G_{1\omega} = \frac{140000}{17110\omega^4 - 72460000\omega^2 + 56000000000} \quad 2.56$$

Se considera un intervalo para ω de 0 a 70 Hz la respuesta del sistema es la siguiente



CAPÍTULO III

ANÁLISIS MODAL DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN AUTOMOTRIZ CON EXCITACIÓN EN LA BASE

El análisis de la suspensión automotriz desde el punto de vista de diseño mecánico es contemplando un cuarto de la suspensión del automóvil y del sistema de dos grados de libertad como se muestra en la figura 2.1; ésta también muestra la excitación en la base que representa la forma de la superficie por la cual se desplaza un vehículo. En este análisis se considera una excitación de tipo armónica.

3.1 Determinación de las ecuaciones de movimiento con excitación en la base.

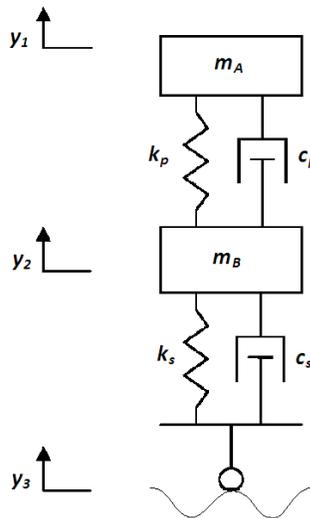


Figura 3.1 Cuarto de suspensión con excitación en la base.

Los datos a considerar para cada una de las variables del modelo propuesto como lo muestra la figura 3.1

Tabla 3.1 Valores numéricos de los parámetros considerados en el sistema.

m_A	Masa de un cuarto de automóvil	500 kg
m_B	Masa de suspensión, placa y empaque	57 kg
k_p	Rigidez del empaque	2.03×10^6 N/m
k_s	Rigidez de la suspensión	46251 N/m
c_p	Coefficiente de amortiguamiento del empaque(calculado en el punto 2.3)	402 000 N s/m
c_s	Coefficiente de amortiguamiento de la suspensión	6874.8 N s/m

Las ecuaciones de movimiento pueden ser determinados por diferentes métodos, en el capítulo I se muestra uno de ellos para determinar dichas ecuaciones, por lo tanto las ecuaciones quedan de la siguiente forma para un sistema del tipo antes mencionado:

$$K_p(y_2 - y_1) + C_p(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = m_A \ddot{y}_1 \quad 3.1$$

$$K_s(y_3 - y_2) + C_p(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + K_p(y_1 - y_2) + C_p(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = m_B \ddot{y}_2 \quad 3.2$$

Para ésta análisis se propone un movimiento de la base de tipo armónico de la siguiente forma

$$y_3(t) = Y \sin \omega_3 t \quad 3.3$$

Derivando con respecto al tiempo se tiene

$$\dot{y}_3(t) = Y \omega_3 \cos \omega_3 t \quad 3.4$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.3 y 3.4 en 3.2 y reacomodando términos, la ecuación antes mencionada queda de la siguiente manera:

$$k_s(Y \sin \omega_3 t - y_2) + c_s(Y \omega_3 \cos \omega_3 t - \dot{y}_2) + k_p(y_1 - y_2) + c_p(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = m_B \ddot{y}_2$$

$$k_s Y \sin \omega_3 t - k_s y_2 + c_s Y \omega_3 \cos \omega_3 t - c_s \dot{y}_2 + k_p(y_1 - y_2) + c_p(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = m_A \ddot{y}_2$$

$$m_A \ddot{y}_2 + k_s y_2 - k_p(y_1 - y_2) + c_s \dot{y}_2 - c_p(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = k_s Y \sin \omega_3 t + c_s Y \omega_3 \cos \omega_3 t \quad 3.5$$

Con la sustitución antes mostrada por las ecuaciones de movimiento pueden ser expresadas como se muestra a continuación.

$$m_A \ddot{y}_1 - K_p(y_2 - y_1) - C_p(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = 0 \quad 3.6$$

$$m_B \ddot{y}_2 + k_s y_2 - k_p(y_1 - y_2) + c_s \dot{y}_2 - c_p(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = k_s Y \sin \omega_3 t + c_s Y \omega_3 \cos \omega_3 t \quad 3.7$$

Las ecuaciones 3.6 y 3.7 pueden ser escritas de forma matricial, quedando de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} m_A & 0 \\ 0 & m_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_p & -C_p \\ -C_p & C_s + C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_p & -K_p \\ -K_p & K_s + K_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_s Y \sin \omega_3 t + C_s Y \omega_3 \cos \omega_3 t \end{bmatrix} \quad 3.8$$

La ecuación 3.8 es de la forma que se neutra a continuación:

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = F(t) \quad 3.9$$

3.2 Cálculo de las frecuencias naturales

Una vez determinadas las ecuaciones que describen la dinámica del sistema el cálculo de las frecuencias naturales es calculado de la siguiente forma:

Para el calculo de las frecuencias naturales se hace la misma consideración que en la sección 2.2 (Considerando a ω_d como la frecuencia de amortiguamiento, ω_n como la frecuencia natural, aplicando un factor de $\zeta < 0.2$ se considera que las frecuencias natural y de amortiguamiento son casi las mismas. Debido a esta consideración se determinan las frecuencias naturales sin amortiguamiento es decir $D = 0$), por lo tanto la ecuación 3.9 queda de la siguiente forma

$$M\ddot{y} + Ky = 0 \quad 3.10$$

Las frecuencias naturales son determinadas mediante la solución del siguiente **problema propio**

$$A = M^{-1}K \quad 3.11$$

Sustituyendo matrices

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_p & -k_p \\ -k_p & k_s + k_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_p}{m_A} & -\frac{k_p}{m_A} \\ -\frac{k_p}{m_B} & \frac{k_s + k_p}{m_B} \end{bmatrix}$$

Obteniendo los **valores propios** de la matriz A como se muestra a continuación:

$$\lambda_1 = \frac{k_p m_A + k_p m_B + k_s m_A + \sqrt{k_p^2 m_A^2 + k_p^2 m_B^2 + k_s^2 m_A^2 + 2k_p^2 m_A m_B + 2m_A^2 k_p k_s - 2m_A m_B k_p k_s}}{2m_A m_B} \quad 3.12$$

$$\lambda_2 = \frac{k_p m_A + k_p m_B + k_s m_A - \sqrt{k_p^2 m_A^2 + k_p^2 m_B^2 + k_s^2 m_A^2 + 2k_p^2 m_A m_B + 2m_A^2 k_p k_s - 2m_A m_B k_p k_s}}{2m_A m_B} \quad 3.13$$

Sustituyendo los valores correspondientes de acuerdo al problema planteado y considerando que $\lambda = \omega^2$ resulta lo siguiente:

$$\lambda_1 = 40403.9 \Rightarrow \omega_1 = \omega_n = \sqrt{\lambda_1} = 201 \text{ rad} / s = 31.99 \text{ Hz}$$

$$\lambda_2 = 81.53 \Rightarrow \omega_2 = \omega_{n_A} = \sqrt{\lambda_2} = 9 \text{ rad/s} = 1.43 \text{ Hz}$$

3.3 Cálculo del coeficiente de amortiguamiento de la placa.

Para el empaque de polímero que se encuentra como absorbedor de vibraciones entre la suspensión y la carrocería del automóvil se considera que tiene una relación de amortiguamiento de tal manera que el sistema desacoplado placa-polímero-automóvil sea sobre amortiguado, entonces proponemos una relación de amortiguamiento de $\zeta \approx 2$ por lo que:

$$\zeta = \frac{C_p}{2m_A\omega_n}; \quad 3.14$$

Despejando C_p de la ecuación 3.14 y sustituyendo los valores de la tabla 3.1 así como la frecuencia natural de m_A se obtiene el coeficiente de amortiguamiento del empaque

$$C_p = 2(2)(500)(201) = 402000 \text{ Ns/m}$$

3.4 Cálculo de la respuesta en el tiempo del sistema de suspensión con la excitación en la base.

Con el cálculo del amortiguamiento del empaque, todos los parámetros necesarios para calcular la fuerza que se transmite a la masa por medio de la suspensión debido a la forma del camino por el cual el vehículo se desplaza: Para realizar dicho cálculo la ecuación 3.8 es empleada nuevamente, ésta ecuación muestra que se tiene que considerar el principio de superposición, ya que la excitación está dada por dos entradas armónicas para obtener la respuesta en el tiempo. Las dos entradas armónicas son: $F_{01} = k_s Y_s \sin \omega_3 t$ y la segunda es $F_{02} = c_s Y_3 \cos \omega_3 t$. Para continuar con los cálculos de la fuerza a la que esta sometida la suspensión se considera $\omega_3 = \omega$ la cual es la frecuencia de excitación en la base.

La respuesta de un sistema de este tipo: $M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = F(t)$ esta dada por:

$$y(i\omega) = Z^{-1}(i\omega)F_0 \quad 3.15$$

Donde $Z^{-1}(i\omega)$ es la inversa de la matriz de impedancia mecánica, F_0 es el vector de fuerzas incluyendo las frecuencias al que se encuentra sometido el sistema.

La respuesta del sistema en cuestión está dada como se menciono anteriormente por la superposición de las respuestas considerando F_{01} y F_{02} por separado por lo que:

$$y(t)_{Total} = y(t)_{F_{01}} + y(t)_{F_{02}} \quad 3.16$$

Donde $y(t)_{Total}$ es la respuesta en el tiempo combinada para el sistema de suspensión, debida a las dos fuerzas armónicas consideradas como F_{01} y F_{02} . El término $y(t)_{F_{01}}$ es la respuesta en el tiempo debida a la fuerza F_{01} y $y(t)_{F_{02}}$ es la respuesta en el tiempo debida a la fuerza F_{02} .

Considerando $F_{01} = k_s Y \text{sen} \omega_3 t$ la respuesta se calcula a continuación. Primero se obtiene la matriz de impedancia mecánica:

$$Z(i\omega) = \begin{bmatrix} -\omega_3^2 m_A + i\omega_3 C_p + K_p & -i\omega_3^2 C_p - K_p \\ -i\omega_3^2 C_p - K_p & -\omega_3^2 m_B + i\omega_3(C_s + C_p) + K_s + K_p \end{bmatrix} \quad 3.17$$

Al sustituir los valores correspondientes a nuestro sistema se determina la matriz de impedancia mecánica

$$Z(i\omega) = \begin{bmatrix} -500\omega_3^2 + i402000\omega_3 + 2.03 \times 10^6 & -i402000\omega_3^2 - 2.03 \times 10^6 \\ -i402000\omega_3^2 - 2.03 \times 10^6 & -57\omega_3^2 + i6874.8\omega_3 + 2.4782 \times 10^6 \end{bmatrix} \quad 3.18$$

El vector de fuerza para el caso cuando la fuerza de excitación es: $F_{01} = k_s Y \text{sen} \omega_3 t$ esta dado de la siguiente manera, donde F_1 es la magnitud de la fuerza F_{01} .

$$F_{01} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_s Y \end{bmatrix} \text{sen} \omega_3 t = F_1 \cdot \text{sen} \omega_3 t \quad 3.19$$

Realizando la operación: $y(t) = Z^{-1}(i\omega) \cdot F_1$

$$y_{F1} = \begin{bmatrix} \frac{-46251(2.03 \times 10^6 + i402000\omega^2)}{-161604028500\omega^4 + 1.655215 \times 10^{11}\omega^2 + i(2.273514 \times 10^{10}\omega^3 + 1.63212 \times 10^{12}\omega^2 - 1.664668 \times 10^{12}\omega) - 9.38895 \times 10^{10}} \\ \frac{-46251(500\omega^2 + 2.03 \times 10^6 + i402000\omega)}{-161604028500\omega^4 + 1.655215 \times 10^{11}\omega^2 + i(2.273514 \times 10^{10}\omega^3 + 1.63212 \times 10^{12}\omega^2 - 1.664668 \times 10^{12}\omega) - 9.38895 \times 10^{10}} \end{bmatrix} \quad 3.20$$

Donde el primer termino del vector anterior es:

$$y_{11}(\omega) = \frac{-46251(2.03 \times 10^6 + i402000\omega^2)}{-161604028500\omega^4 + 1.655215 \times 10^{11}\omega^2 + i(2.273514 \times 10^{10}\omega^3 + 1.63212 \times 10^{12}\omega^2 - 1.664668 \times 10^{12}\omega) - 9.38895 \times 10^{10}} \quad 3.21$$

Debido a la complejidad de las ecuaciones 3.21 se agruparan términos para simplificar el procedimiento. Se puede observar que la ecuación de $Y_{11}(\omega)$ está de la forma:

$$y_{1F01}(\omega) = \frac{A + iB}{C + iD} k_s Y \quad 3.22$$

Separando los términos real e imaginarios:

$$y_{1F01}(\omega) = -\frac{(AC - BD) + i(BC - AD)}{C^2 - D^2} K_s Y \quad 3.23$$

La magnitud de este valor esta dada por:

$$mag_{-y_{1F01}}(\omega) = K_s Y \sqrt{\left(\frac{AC - BD}{C^2 - D^2}\right)^2 + \left(\frac{BC - AD}{C^2 - D^2}\right)^2} \quad 3.24$$

Con un ángulo definido por

$$\varphi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{BC - AD}{AC - BD}\right) \quad 3.25$$

Por lo tanto el valor total de Y_{11} , es decir, el desplazamiento debido a la carga $F_{01} = k_s Y \sin \omega_3 t$ es:

$$y_{11} = mag_{-y_{1F01}}(\omega) \sin(\omega t - \varphi_1) \quad 3.26$$

Donde:

$$A = 2.03 \times 10^6$$

$$B = 402000\omega^2$$

$$C = -161604028500\omega^4 + 1.655215 \times 10^{11}\omega^2 - 9.38895 \times 10^{10}$$

$$D = 2.273514 \times 10^8 \omega^3 + 1.63212 \times 10^{11}\omega^2 - 1.664668 \times 10^{13}\omega$$

Con el mismo procedimiento la magnitud y_{21} debida a la fuerza $F_{01} = k_s Y \sin \omega_3 t$ se calcula

$$y_{21}(\omega) = \frac{-46251(500\omega^2 + 2.03 \times 10^6 + i402000\omega)}{-161604028500\omega^4 + 1.655215 \times 10^{11}\omega^2 + i(2.273514 \times 10^{10}\omega^3 + 1.63212 \times 10^{12}\omega^2 - 1.664668 \times 10^{12}\omega) - 9.38895 \times 10^{10}} \quad 3.27$$

Agrupando términos para simplificar el procedimiento. La ecuación de $Y_{21}(\omega)$ esta de la forma:

$$y_{2F01} = -\frac{a+ib}{c+id} k_s Y \quad 3.28$$

Separando los términos real e imaginarios se tiene:

$$y_{2F01}(\omega) = -\frac{(ac-bd)+i(bc-ad)}{c^2-d^2} k_s Y \quad 3.29$$

La magnitud de este valor está dada por:

$$mag_{-y_{2F01}}(\omega) = k_s Y \sqrt{\left(\frac{ac-bd}{c^2-d^2}\right)^2 + \left(\frac{bc-ad}{c^2-d^2}\right)^2} \quad 2.30$$

Y el ángulo se define por

$$\varphi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{bc-ad}{ac-bd}\right) \quad 2.31$$

Por lo tanto el valor total de Y_{21} , es decir, el desplazamiento debido a la carga $F_{01} = k_s Y \text{sen} \omega_3 t$ será:

$$Y_{21} = mag_{-y_{2F01}}(\omega) \cdot \text{sen}(\omega t - \varphi_2) \quad 3.32$$

Donde:

$$a = 500\omega^2 + 2.03 \times 10^6$$

$$b = 402000\omega$$

$$c = -161604028500\omega^4 + 1.63212 \times 10^{11} \omega^2 - 9.38895 \times 10^{10}$$

$$d = 2.273514 \times 10^8 \omega^3 + 1.63212 \times 10^{12} \omega^2 - 1.664668 \times 10^{13} \omega$$

El cálculo de los desplazamientos generados por la fuerza F_{01} ha sido calculador. La fuerza total a la que el sistema se encuentra sometido el sistema de suspensión en éste análisis esta formada por 2 componentes; la fuerza $F_{02} = c_s Y \omega_3 \cos \omega_3 t$ y la segunda componente de la fuerza total. Para determinar las ecuaciones que describen los desplazamientos es empleado el mismo procedimiento que fue aplicado para determinar los desplazamientos por la fuerza uno. .

La matriz de impedancia mecánica es:

$$Z(i\omega) = \begin{bmatrix} -500\omega_3^2 + i402000\omega_3 + 2.03 \times 10^6 & -i402000\omega_3^2 - 2.03 \times 10^6 \\ -i402000\omega_3^2 - 2.03 \times 10^6 & -57\omega_3^2 + i6874.8\omega_3 + 2.4782 \times 10^6 \end{bmatrix} \quad 3.33$$

El vector fuerza para el caso cuando la fuerza de excitación es: $F_{02} = c_s Y \omega_3 \cos \omega_3 t$ está dado de la siguiente manera, donde F_2 es la magnitud de la fuerza F_{02} .

$$F_{02} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_s Y \omega_3 \end{bmatrix} \cos \omega_3 t = F_2 \cdot \cos \omega_3 t \quad 3.34$$

Realizando la operación $y(t) = Z^{-1}(i\omega) \cdot F_2$, se obtiene como resultado el vector:

$$y_{F2} = \begin{bmatrix} \frac{6874.8\omega(i402000\omega^2 + 2.03 \times 10^6)}{-161604028500\omega^4 + 1.655215 \times 10^{11}\omega^2 + i(2.27351 \times 10^8\omega^3 + 1.63212 \times 10^{12}\omega^2 - 1.664668 \times 10^{12}\omega) - 9.38895 \times 10^{10}} \\ \frac{6874.8\omega(-500\omega^2 + i402000\omega + 2.03 \times 10^6)}{-161604028500\omega^4 + 1.655215 \times 10^{11}\omega^2 + i(2.27351 \times 10^8\omega^3 + 1.63212 \times 10^{12}\omega^2 - 1.664668 \times 10^{12}\omega) - 9.38895 \times 10^{10}} \end{bmatrix} \quad 3.35$$

Obteniendo el primer valor de este vector tenemos:

$$y_{12}(\omega) = \frac{6874.8\omega(i402000\omega^2 + 2.03 \times 10^6)}{-161604028500\omega^4 + 1.655215 \times 10^{11}\omega^2 + i(2.27351 \times 10^8\omega^3 + 1.63212 \times 10^{12}\omega^2 - 1.664668 \times 10^{12}\omega) - 9.38895 \times 10^{10}} \quad 3.36$$

Se observa que esta ecuación es de la forma:

$$y_{1F02}(\omega) = -\frac{E + iF}{G + iH} c_s Y \omega \quad 3.38$$

Separando los términos real e imaginarios obtenemos:

$$y_{1F02}(\omega) = -\frac{(EG - FH) + i(FG - EH)}{G^2 - H^2} c_s Y \omega \quad 3.39$$

La magnitud de este valor esta dada por:

$$mag_{-y_{1F02}}(\omega) = c_s Y \omega \sqrt{\left(\frac{EG - FH}{G^2 - H^2}\right)^2 + \left(\frac{FG - EH}{G^2 - H^2}\right)^2} \quad 3.40$$

El ángulo esta definido por la siguiente ecuación

$$\phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{FG - EH}{EG - FH}\right) \quad 3.41$$

Por lo tanto el valor total de Y_{12} , es decir, el desplazamiento debido a la carga $F_{02} = c_s Y \omega_3 \cos \omega_3 t$ será:

$$Y_{12}(t) = mag_{-y_{1F02}}(\omega) \cdot \cos(\omega t - \phi_1) \quad 3.42$$

Donde:

$$E = 2.03 \times 10^6$$

$$F = 402000 \omega^2$$

$$G = -161604028500 \omega^4 + 1.6552215 \times 10^{11} \omega^2 - 9.38895 \times 10^5$$

$$H = 2.273514 \times 10^8 \omega^4 + 1.63212 \times 10^{12} \omega^2 - 1.664668 \times 10^{13} \omega$$

El cálculo de y_2 debida a la fuerza $F_{02} = c_s Y \omega_3 \cos \omega_3 t$ es:

$$y_{22}(\omega) = \frac{6874.8\omega(-500\omega^2 + i402000\omega + 2.03 \times 10^6)}{-161604028500\omega^4 + 1.655215 \times 10^{11} \omega^2 + i(2.27351 \times 10^8 \omega^3 + 1.63212 \times 10^{12} \omega^2 - 1.664668 \times 10^{12} \omega) - 9.38895 \times 10^{10}} \quad 3.43$$

La cual esta de la forma:

$$y_{2F02}(\omega) = -\frac{e+if}{g+ih} c_s Y \omega \quad 3.44$$

Separando los términos real e imaginarios se tiene:

$$y_{2F02}(\omega) = \frac{(eg - fh) + i(fg - eh)}{g^2 - h^2} c_s Y \omega \quad 3.45$$

La magnitud de este valor está dada por:

$$mag_{-} y_{2F02}(\omega) = c_s Y \omega \sqrt{\left(\frac{eg - fh}{g^2 - h^2}\right)^2 + \left(\frac{fg - eh}{g^2 - h^2}\right)^2} \quad 3.46$$

Con un ángulo

$$\varphi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{fg - eh}{eg - fh}\right) \quad 3.47$$

Por lo tanto el valor total de Y_{22} , es decir, el desplazamiento debido a la carga $F_{02} = c_s Y \omega_3 \cos \omega_3 t$ será:

$$Y_{22} = mag_{-} y_{2F02}(\omega) \cdot \cos(\omega t - \varphi_2) \quad 3.48$$

Donde:

$$e = -500\omega^2 + 2.03 \times 10^6$$

$$f = 402000\omega$$

$$g = -161604028500\omega^4 + 1.655215 \times 10^{11} \omega^2 - 9.38895 \times 10^{10}$$

$$h = 2.273514 \times 10^8 \omega^3 + 1.63212 \times 10^{12} \omega^2 - 1.664668 \times 10^{13} \omega$$

La respuesta combinada estará dada por la suma de las respuestas individuales como se muestra a continuación:

$$Y_1(t) = Y_{11}(t) + Y_{12}(t) \quad 3.49$$

$$Y_2(t) = Y_{21}(t) + Y_{22}(t) \quad 3.50$$

La magnitud de la ecuación 2.49 y el ángulo son obtenidas para obtener el desplazamiento de $Y_1(t)$:

$$Y_1(t) = mag_{-y_{1F01}}(\omega) \cdot \text{sen}(\omega t - \phi_1) + mag_{-y_{1F02}}(\omega) \cdot \text{cos}(\omega t - \phi_1) \quad 3.51$$

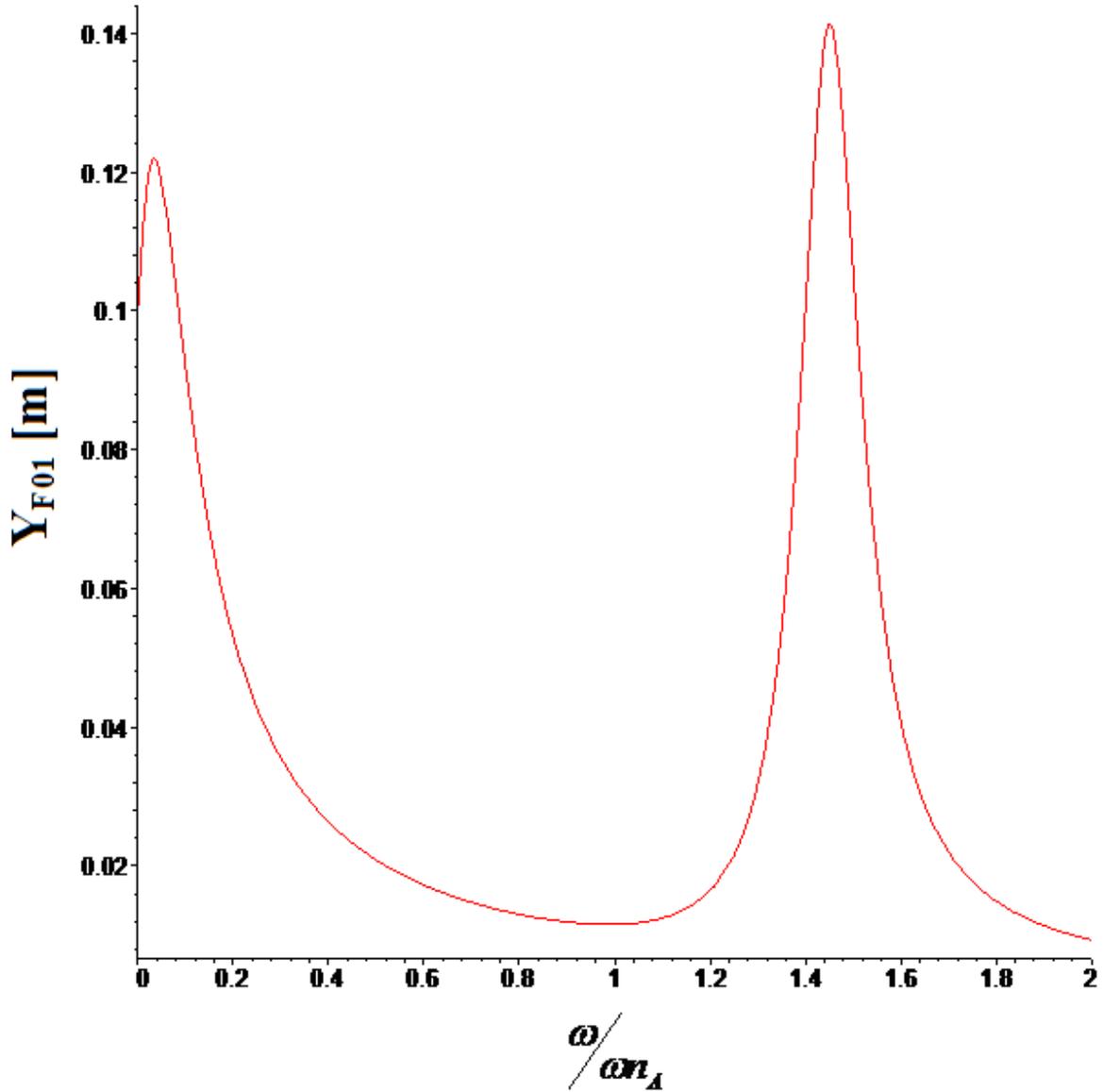
$$Y_{1T} = \sqrt{mag_{-y_{1F01}}(\omega)^2 + mag_{-y_{1F02}}(\omega)^2} \cdot \text{cos}(\omega t - \phi_1 - \phi_1) \quad 3.52$$

Donde el ángulo ϕ_1 es

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{mag_{-y_{1F02}}(\omega)}{mag_{-y_{1F01}}(\omega)} \right) \quad 3.53$$

También se consideran la siguiente relación $r_1 = \frac{\omega}{\omega_1}$ y se grafica.

La gráfica correspondiente a la función de la respuesta combinada del desplazamiento Y_1 se muestra a continuación:



Gráfica 3.1 Desplazamiento de $Y_1(t)$

El procedimiento para calcular el ángulo y la magnitud en la ecuación 3.50 es el mismo empleado en la ecuación 3.49

$$Y_{2T}(t) = mag_{-y_{2F01}}(\omega) \cdot \text{sen}(\omega t - \varphi_2) + mag_{-y_{2F02}}(\omega) \cdot \text{cos}(\omega t - \varphi_2) \quad 3.54$$

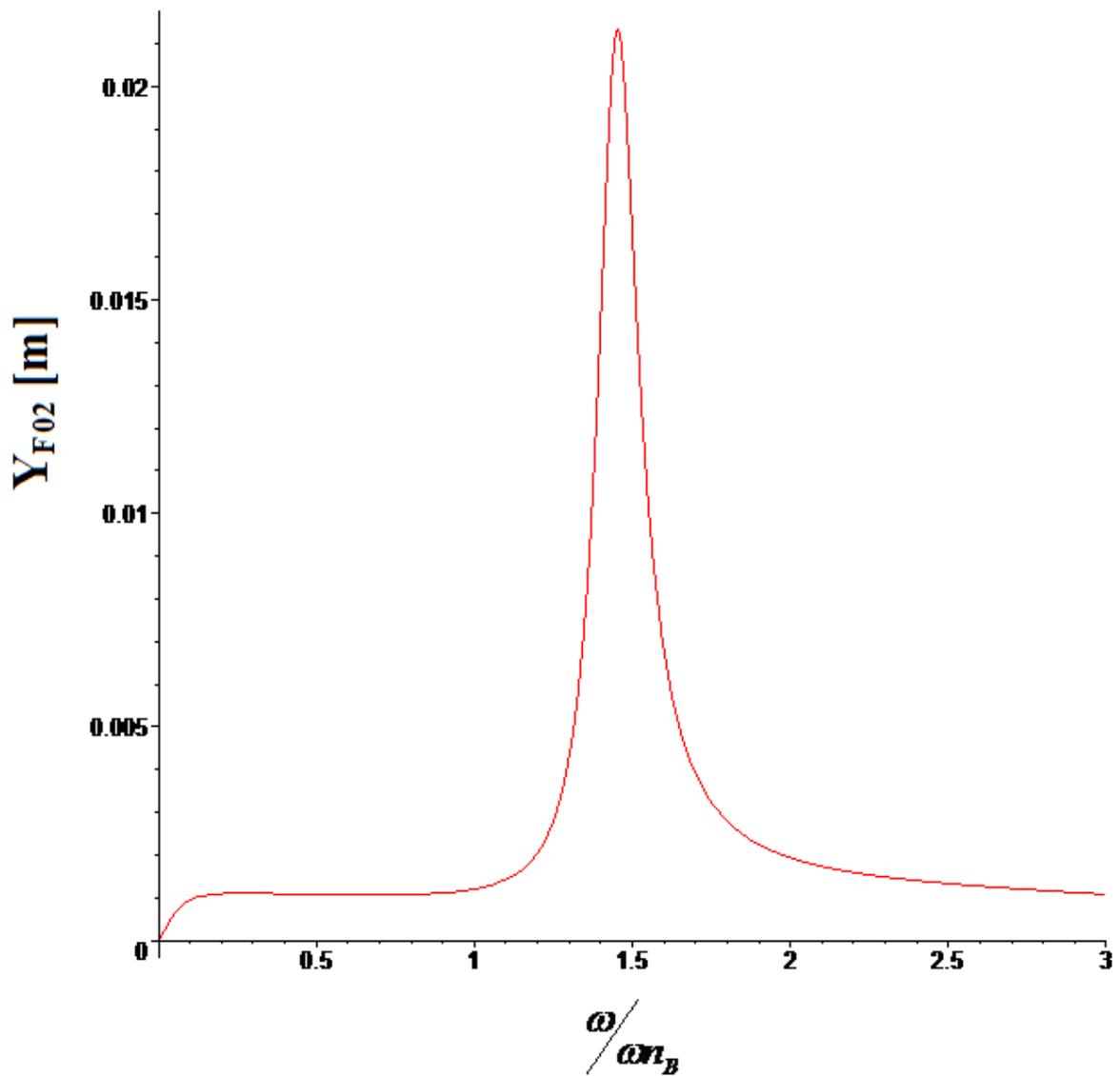
$$Y_{2T} = \sqrt{mag_{-y_{2F01}}(\omega)^2 + mag_{-y_{2F02}}(\omega)^2} \cdot \text{cos}(\omega t - \varphi_2 - \phi_2) \quad 3.55$$

Donde

$$\phi_2 = \tan^{-1} \left(\frac{\text{mag}_{-y_{2F02}}(\omega)}{\text{mag}_{-y_{2F01}}(\omega)} \right) \quad 3.56$$

También se considera la relación $r_2 = \frac{\omega}{\omega_1}$ y se grafica.

A continuación se muestra la gráfica correspondiente la función del desplazamiento Y_2 :



Gráfica 3.2 Desplazamiento de $Y_2(t)$

3.5 Cálculo de la fuerza transmitida.

Para obtener la fuerza transmitida a la carrocería del vehículo se deriva dos veces el desplazamiento total de la respuesta de los dos grados de libertad y multiplicarla por la masa, las ω que aparecen en estas funciones son la excitación de la base.

Las ecuaciones de movimiento 3.1 y 3.2 son las siguientes

$$K_p(y_2 - y_1) + C_p(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = m_A \ddot{y}_1$$

$$K_s(y_3 - y_2) + C_p(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + K_p(y_1 - y_2) + C_p(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = m_B \ddot{y}_2$$

La respuesta en el tiempo de las dos coordenadas generalizadas del sistema se define con las ecuaciones 3.52 y 3.53, y la aceleración de cada uno de los desplazamientos totales es obtenida mediante la obtención de la segunda derivada de los desplazamientos. La respuesta combinada de la coordenada generalizada Y_1 y la segunda derivada es:

$$\ddot{y}_1 = \ddot{Y}_{1T} = -\omega^2 \sqrt{\text{mag}_{-y_{1F01}}(\omega)^2 + \text{mag}_{-y_{1F02}}(\omega)^2} \cdot \cos(\omega t - \varphi_1 - \phi_1) \quad 3.57$$

La segunda derivada de la coordenada generalizada:

$$\ddot{y}_2 = \ddot{Y}_{2T} = -\omega^2 \sqrt{\text{mag}_{-y_{2F01}}(\omega)^2 + \text{mag}_{-y_{2F02}}(\omega)^2} \cdot \cos(\omega t - \varphi_2 - \phi_2) \quad 3.58$$

Multiplicando por las masas del sistema, las ecuaciones 3.57 y 3.58 se tiene:

$$F_{1T}(t) = -m_A \omega^2 \sqrt{\text{mag}_{-y_{1F01}}(\omega)^2 + \text{mag}_{-y_{1F02}}(\omega)^2} \cdot \cos(\omega t - \varphi_1 - \phi_1) \quad 3.59$$

$$F_{2T}(t) = -m_B \omega^2 \sqrt{\text{mag}_{-y_{2F01}}(\omega)^2 + \text{mag}_{-y_{2F02}}(\omega)^2} \cdot \cos(\omega t - \varphi_2 - \phi_2) \quad 3.60$$

Estas ecuaciones son de la forma:

$$F_{iT}(t) = F_{iT}(\omega/\omega_1) \cdot \text{sen}(\omega t - \varphi_1 - \phi_1) \quad 2.61$$

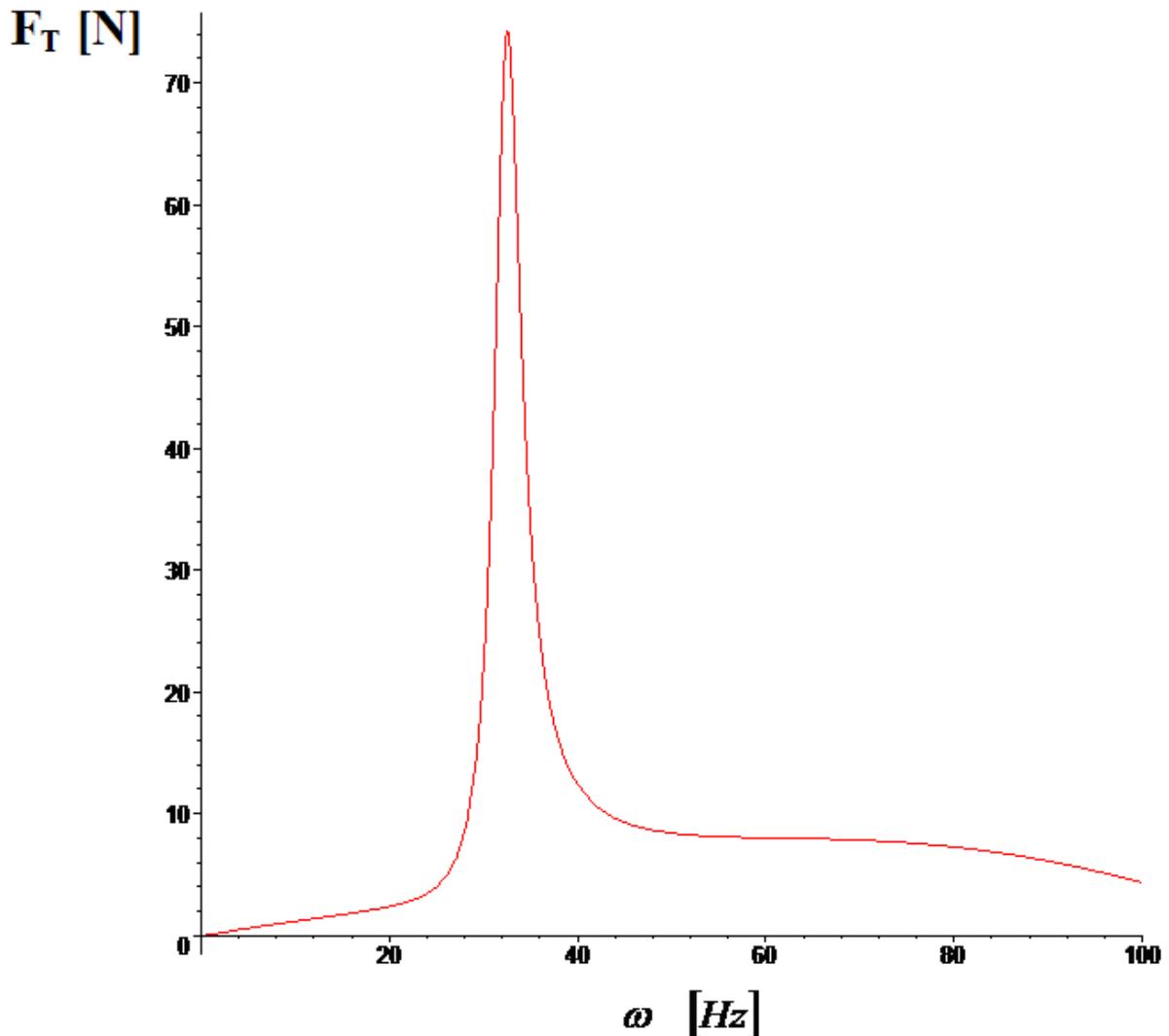
Con $i = 1,2$

Lo que interesa es la $F_{iT}(\omega)$, para después sumar las fuerzas y obtener el valor de la fuerza total, dicha fuerza es la que se transmite hacia la masa m_B .

Por lo que se tendrá que F_T es la fuerza total transmitida a la masa m_B :

$$F_T = F_{1T}(\omega/\omega_1) + F_{2T}(\omega/\omega_1) \quad 3.62$$

La grafica 3.3 muestra el comportamiento de la fuerza a la que se encuentra sometido el sistema en un barrido de relación de frecuencias de 0 a 100.



Gráfica 3.3 Fuerza transmitida a la masa m_B .

CAPITULO IV

ANALISIS DEL ACOMPLAMIENTO DEL SISTEMA DE SUSPENSION Y CARROCERIA

El método de los elementos finitos es utilizado para determinar la solución numérica de las ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan el sistema acoplado entre suspensión y carrocería del vehículo por analizar.

El método se basa en dividir el dominio sobre el que están definidas las relaciones diferenciales de las variables en forma de ecuaciones diferenciales parciales que caracterizan el comportamiento físico del problema en una serie de subdominios no intersectantes entre sí denominados elementos finitos. El conjunto de elementos finitos forma una partición del dominio también denominada discretización. Dentro de cada elemento se distinguen una serie de puntos representativos llamados nodos. Dos nodos son adyacentes si pertenecen al mismo elemento finito; además, un nodo sobre la frontera de un elemento finito puede pertenecer a varios elementos. El conjunto de nodos considerando sus relaciones de adyacencia se llama malla.

Los cálculos se realizan sobre una malla o discretización creada a partir del dominio con programas especiales llamados generadores de mallas, en una etapa previa a los cálculos que se denomina pre-proceso. De acuerdo con estas relaciones de adyacencia o conectividad se relaciona el valor de un conjunto de variables incógnitas definidas en cada nodo y denominadas grados de libertad. El conjunto de relaciones entre el valor de una determinada variable entre los nodos se puede escribir en forma de sistema de ecuaciones lineales. La matriz de dicho sistema de ecuaciones se llama matriz de rigidez del sistema. El número de ecuaciones de dicho sistema es proporcional al número de nodos.

Típicamente el método de los elementos finitos se programa computacionalmente para calcular el campo de desplazamientos y, posteriormente, a través de relaciones cinemáticas constitutivas el cálculo de las tensiones respectivamente cuando se trata de un problema de mecánica de sólidos deformables o más generalmente un problema de mecánica de medios continuos. El método de los elementos finitos es utilizado debido a su generalidad y su versatilidad de considerar dominios de geometría compleja y a la diversidad de campos tanto de la física como de la ingeniería tal como son problemas de transmisión de calor, de mecánica de fluidos para calcular campos de velocidades y presiones (mecánica de fluidos computacional, CFD) o de campos electromagnéticos. Soluciones numéricas debido a la imposibilidad práctica de encontrar la solución analítica de estos problemas, con frecuencia en la ingeniería los métodos numéricos y, en particular, los elementos finitos, se convierten en la única alternativa práctica de cálculo.

4.1. – Funciones de interpolación.

Para establecer el escenario para el desarrollo técnico del Método del Elemento Finito y obtener las matrices de masa y rigidez se considera un elemento finito e con un grado de libertad u , puntos de *mallado* ó *nodo* 1 y 2 y una longitud L como se muestra en la figura 4.1

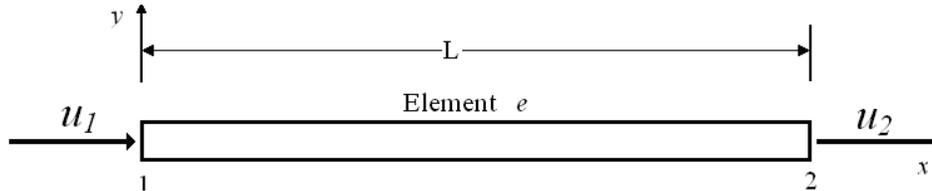


Figura 4.1

De la figura anterior se puede formar el vector de desplazamiento de los nodos

$$\{q^e\} = [u_1, u_2]^T \quad 4.1$$

Si se conectan los nodos (u_1 y u_2) en una línea recta se puede emplear una función de interpolación lineal. De esta forma esta función es equivalente para representar la dependencia de u sobre el elemento de la siguiente forma

$$\begin{aligned} u(x) &= u_1 \psi_{u_1}(x) + u_2 \psi_{u_2}(x) \\ \psi_{u_1}(x) &= 1 - \frac{x}{L}, \quad \psi_{u_2}(x) = \frac{x}{L} \end{aligned} \quad 4.2$$

Sustituyendo la función de interpolación in $u(x)$

$$\begin{aligned} u(x=0) &= u_1 \\ u(x=L) &= u_2 \end{aligned} \quad 4.3$$

El campo de desplazamiento del elemento es relacionado con el desplazamiento de los nodos por

$$[u(x,t)] = [N(x)]\{q^e\} \quad 4.4$$

Donde $[N_{(x)}]$ esta formado por la función de forma

$$[N] = [\psi_{u_1} \quad \psi_{u_2}] \quad 4.5$$

4.2 Matrices Elementales

4.2.1 Matrices elementales de un elemento finito

El siguiente paso es construir las expresiones elementales de energía y fuerza relacionadas con el desplazamiento del elemento. Se deben emplear las funciones de forma para representar la dependencia axial de los parámetros de masa y rigidez en la sección transversal en términos de los respectivos valores en el nodo de acuerdo con

$$\begin{aligned}
\rho A(x) &= (\rho A)_1 \psi_{u1} + (\rho A)_2 \psi_{u2} \\
EA(x) &= (EA)_1 \psi_{u1} + (EA)_2 \psi_{u2} \\
EI(x) &= (EI)_1 \psi_{u1} + (EI)_2 \psi_{u2}
\end{aligned}
\tag{4.6}$$

La energía cinética del elemento es obtenida usando la ecuación 4.4 para caracterizar la velocidad de los componentes, por lo tanto

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho A_{(x)} [\dot{u}^2] dx \\
T &= \frac{1}{2} \int_0^L [(\rho A)_1 \psi_{u1} + (\rho A)_2 \psi_{u2}] \dot{u} \dot{u} dx \\
T &= \frac{1}{2} (\rho A)_1 \int_0^L \psi_{u1} [\dot{q}^e]^T [N]^T [N] [\dot{q}^e] dx + \frac{1}{2} (\rho A)_2 \int_0^L \psi_{u2} [\dot{q}^e]^T [N]^T [N] [\dot{q}^e] dx \\
T &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (\rho A)_j \int_0^L \psi_{uj} [\dot{q}^e]^T [N]^T [N] [\dot{q}^e] dx
\end{aligned}
\tag{4.7}$$

Por definición la representación estándar de la energía cinética T es

$$T = \frac{1}{2} \{ \dot{q}^e \}^T [M^e] \{ \dot{q}^e \}
\tag{4.8}$$

La comparación de estas alternativas que describen la energía cinética T lleva a la matriz de inercia del elemento

$$[M^e] = \sum_{j=1}^2 (\rho A)_j \int_0^L \psi_{uj} [N]^T [N] dx
\tag{4.9}$$

En el caso especial donde la sección transversal es constante sobre el elemento, la función es $\psi_{u1} + \psi_{u2} = 1$, por lo tanto

$$[M^e] = \rho A \int_0^L [N]^T [N] dx
\tag{4.10}$$

La descripción de la energía potencial procede de una forma similar. El operador matricial [D] para indicar las operaciones requeridas para obtener el esfuerzo axial y de flexión del desplazamiento de la siguiente forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial u / \partial x \\ \partial^2 w / \partial w^2 \end{array} \right\} = [D] \left\{ \begin{array}{l} u(x,t) \\ w(x,t) \end{array} \right\} = [D] [N] \{ q^e \}, \quad [D] = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial^2 / \partial x^2 \end{bmatrix}
\tag{4.11}$$

La suma de las energías debido a esfuerzos de flexión y tensión en el elemento esta dada por

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + EI(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad 4.12$$

La variación espacial de EA y EI se describe en las ecuaciones 4.6 y la ecuación 4.11 describe el campo de esfuerzo de donde se define

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \{ [D][N] \{q^e\} \}^T \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^2 \psi_{uj}(EA)_j & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^2 \psi_{uj}(EI)_j \end{bmatrix} [D][N] \{q^e\} dx \quad 4.13$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \int_0^L \psi_{uj} \{q^e\}^T [N]^T [D]^T \begin{bmatrix} (EA)_j & 0 \\ 0 & (EI)_j \end{bmatrix} [D][N] \{q^e\} dx$$

La forma estándar de la energía potencial V por un elemento es

$$V = \frac{1}{2} \{q^e\}^T [K^e] \{q^e\} \quad 4.14$$

Acoplando las dos últimas expresiones se obtiene la matriz de rigidez del elemento.

$$[K^e] = \sum_{j=1}^2 \int_0^L \psi_{uj} [[D][N]]^T \begin{bmatrix} (EA)_j & 0 \\ 0 & (EI)_j \end{bmatrix} [[D][N]] dx \quad 4.15$$

Si la sección transversal es uniforme a través del elemento, la ecuación anterior se reduce a

$$[K^e] = \int_0^L [N]^T [D]^T \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} [D][N] dx \quad 4.16$$

Para el caso de un grado de libertad de un elemento con una sección transversal constante se obtiene la matriz de masa usando la ecuación 4.10. Resolviendo es ecuación se obtiene

$$[N]^T [N] = [\psi_{u1} \quad \psi_{u2}] \begin{bmatrix} \psi_{u1} \\ \psi_{u2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{u1}^2 & \psi_{u1}\psi_{u2} \\ \psi_{u1}\psi_{u2} & \psi_{u2}^2 \end{bmatrix} \quad 4.17$$

Aplicando la integral como muestra la ecuación 4.10 para cada función la matriz anterior se obtiene

$$[M^e] = \begin{bmatrix} \frac{\rho AL}{3} & \frac{\rho AL}{6} \\ \frac{\rho AL}{6} & \frac{\rho AL}{3} \end{bmatrix} = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad 4.18$$

Ahora tomando la ecuación 4.16 y resolviéndola para el caso del elemento en cuestión se obtiene la matriz de rigidez

$$\begin{aligned}
 [N]^T [D]^T \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} [N][D] &= \begin{bmatrix} \partial \psi_{u1} / \partial x \\ \partial \psi_{u2} / \partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA \psi_{u1} \\ EA \psi_{u2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial \psi_{u1} / \partial x & \partial \psi_{u2} / \partial x \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} EA(\psi'_{u1})^2 & EA(\psi'_{u1} \psi'_{u2}) \\ EA(\psi'_{u1} \psi'_{u2}) & EA(\psi'_{u2})^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

Siguiendo el procedimiento de la ecuación e integrando cada termino en la matriz anterior se obtiene la matriz de rigidez del elemento que se esta analizando en este ejemplo.

$$[K^e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
 \tag{4.20}$$

4.2.2 Ensamble de las Matrices Elementales .

El siguiente ejemplo de la figura 4.2 esta compuesto por dos elementos y dos grados de libertad y resuelto con el procedimiento anterior pero ilustrando el método del elemento finito para 2 elementos.

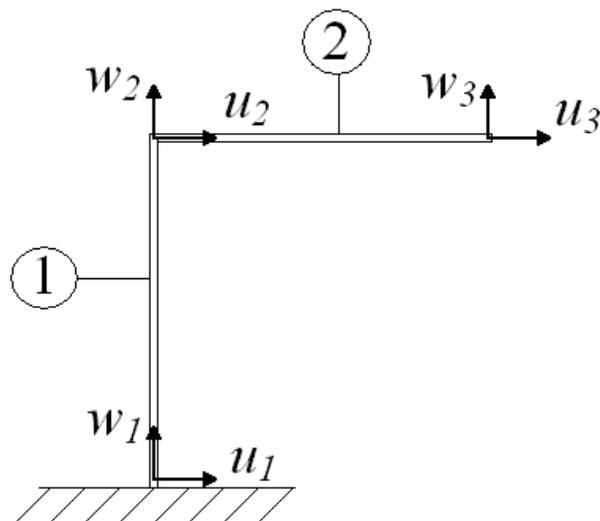


Figura 4.2

El primer paso en la solución de este problema es considerar cada elemento y desarrollar el proceso antes mostrado, por lo tanto se considera el elemento horizontal con el numero 2 como lo indica la figura anterior. Para determinar la matriz de masa se determinan los parámetros necesarios.

$$\begin{aligned}
u(x) &= u_1\psi_{u1}(x) + u_2\psi_{u2}(x) \\
\psi_{u1}(x) &= 1 - \frac{x}{L} & \psi_{u2}(x) &= \frac{x}{L} \\
u(0) &= u_1 & u(L) &= u_2 \\
\rho A(x) &= (\rho A)_1\psi_{u1} + (\rho A)_2\psi_{u2} \\
EA(x) &= (EA)_1\psi_{u1} + (EA)_2\psi_{u2} \\
\psi_{u1}(x) &= \psi_{w1}(x) & \psi_{u2}(x) &= \psi_{w2}(x) \\
\{q^2\} &= \{u_1, w_1, u_2, w_2\} \\
[N^2] &= \begin{bmatrix} \psi_{u1} & 0 & \psi_{u2} & 0 \\ 0 & \psi_{w1} & 0 & \psi_{w2} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Usando la ecuación 4.10 se obtiene

$$\begin{aligned}
[N]^T[N] &= \begin{bmatrix} \psi_{u1} & 0 \\ 0 & \psi_{w1} \\ \psi_{u2} & 0 \\ 0 & \psi_{w2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{u1} & 0 & \psi_{u2} & 0 \\ 0 & \psi_{w1} & 0 & \psi_{w2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \psi_{u1}^2 & 0 & \psi_{u2}\psi_{u1} & 0 \\ 0 & \psi_{w1}^2 & 0 & \psi_{w1}\psi_{w3} \\ \psi_{u1}\psi_{u2} & 0 & \psi_{u2}^2 & 0 \\ 0 & \psi_{w1}\psi_{w3} & 0 & \psi_{w3}^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Integrando cada termino de la matriz de la ecuación 4.22

$$[M^2] = \rho AL \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

Debido a que la matriz [N] es la misma para los dos elementos que componen el sistema mostrado en la figura 4.2, la matriz de masa es la misma para dichos elementos (elemento 1 y elemento 2)

Empleando ahora la ecuación 4.16 se determina la matriz de rigidez para el caso del elemento de dos grados de libertad.

$$\begin{aligned}
[N]^T [D]^T &= \begin{bmatrix} \psi_{u1} & 0 \\ 0 & \psi_{w1} \\ \psi_{u2} & 0 \\ 0 & \psi_{w2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial^2/\partial x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{u1}' & 0 \\ 0 & \psi_{w1}' \\ \psi_{u2}' & 0 \\ 0 & \psi_{w2}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \psi_{u1}' EA & 0 \\ 0 & \psi_{w1}'' EI \\ \psi_{u2}' EA & 0 \\ 0 & \psi_{w2}'' EI \end{bmatrix} [N][D] = \begin{bmatrix} \psi_{u1}' EA & 0 \\ 0 & \psi_{w1}'' EI \\ \psi_{u2}' EA & 0 \\ 0 & \psi_{w2}'' EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{u1}' & 0 & \psi_{u2}' & 0 \\ 0 & \psi_{w1}'' & 0 & \psi_{w2}'' \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} EA(\psi_{u1}')^2 & 0 & EA(\psi_{u1}'\psi_{u2}') & 0 \\ 0 & EI(\psi_{w1}'')^2 & 0 & EI(\psi_{w1}''\psi_{w2}'') \\ EA(\psi_{u1}'\psi_{u2}') & 0 & EA(\psi_{u2}')^2 & 0 \\ 0 & EI(\psi_{w1}''\psi_{w2}'') & 0 & EI(\psi_{w2}'')^2 \end{bmatrix} \quad 4.24
\end{aligned}$$

Resolviendo cada una de los integrales en los elementos de la matriz de rigidez obtenida en la ecuación 4.24 se obtiene

$$[K^2] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 4.25$$

4.3 Conversión a las coordenadas globales.

Para el caso del elemento 1, la matriz de rigidez [K] es la misma debido a que las componentes son iguales. Esta matriz debe ser llevada a las coordenadas globales del sistema. Para poder representarla en forma global dicho se emplea la matriz $[R^e]$, la cual se denomina como la matriz de transformación de rotación y $\{\hat{q}^e\}$ es el vector global de coordenadas generalizadas para el elemento e, si se toma como referencia el elemento 2, por lo que el elemento 1 es movido, debido a que existe un ángulo entre estos elementos de 90° entre ellos por lo que las funciones $\text{sen}\beta$ y $\text{cos}\beta$ son empleadas.

$$\begin{aligned}
\{\hat{q}^e\} &= [R^e][q^e] \\
[\hat{K}^e] &= [R^e]^T [K^e] [R^e]
\end{aligned} \quad 4.26$$

$$\begin{aligned}
[R^1] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
[K^1] = [R^1][K^2][R^1] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

La matriz obtenida en 4.27 para el elemento uno es compatible con el elemento dos por que ahora este elemento esta en el sistema global de coordenadas.

4.4 Ensamble de los Elementos.

Debido a que los dos elementos construyen un componente general es necesario ensamblar las matrices que se han determinado en las secciones anteriores (masa y rigidez). En efecto para poder realizar lo anterior es importante introducir un nuevo concepto que permite crear una nueva matriz para el ejemplo que se esta analizando. Este nuevo concepto es llamado conector de matrices y esta representado por $[S^e]$ y se aplica como se muestra a continuación.

$$\{q^e\} = [S^e]\{q\} \tag{4.28}$$

Para el elemento uno tenemos

$$\{q^1\} \equiv \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{g1} \\ w_{g1} \\ u_{g2} \\ w_{g2} \end{Bmatrix} \tag{4.29}$$

y para el caso del elemento dos

$$\{q^2\} \equiv \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{g2} \\ w_{g2} \\ u_{g3} \\ w_{g3} \end{Bmatrix} \tag{4.30}$$

La letra g indica el elemento y nodo en el que se esta trabajando. Una vez obtenida la matriz $[S]$, el proceso para encontrar las matrices antes mencionadas se procede de la siguiente forma, así para el caso de la matriz de masa, se determina por:

$$[\hat{M}] = \sum_e [S^e]^T [\hat{M}^e] [S^e] \quad 4.31$$

Por otra parte la matriz de rigidez se determina mediante

$$[\hat{K}] = \sum_e [S^e]^T [\hat{K}^e] [S^e] \quad 4.32$$

Donde $[\hat{M}]$ y $[\hat{K}]$ son las matrices de masa y rigidez de todo el sistema que se esta analizando, por lo que queda de la siguiente manera

$$[S^1]^T [M^1] [S^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 4.33$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[S^2]^T [M^2] [S^2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 4.34$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Aplicando la ecuación 4.31 se obtiene

$$[\hat{M}] = [S^1]^T [M^1] [S^1] + [S^2]^T [M^2] [S^2] = \rho AL \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \quad 4.35$$

Para la matriz de rigidez

$$[S^1]^T [K^1] [S^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 4.36$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[S^2]^T [K^2] [S^2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} EA/L & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De la ecuación 4.32 se determina

$$[\hat{K}] = [S^1]^T [K^1] [S^1] + [S^2]^T [K^2] [S^2] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & EA/L & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 4.38$$

4.5 Condiciones de restricción.

Para considerar las condiciones de restricción se deben establecer las coordenadas generalizadas restringidas y no restringidas. En el siguiente análisis de la figura 4.2 se ilustran estas condiciones. Se puede observar en dicha figura que el punto restringido es g_1 . Para llevar este proceso de restricción es necesario determinar la matriz de coeficientes restringidos $[A_{cc}]$, que indica los puntos libres y los restringidos.

$$\{\hat{q}\} = [A_{cc}] \begin{Bmatrix} \{q_f\} \\ \{q_c\} \end{Bmatrix} \quad 4.39$$

Donde $\{q_f\}$ representa los puntos o nodos libres y $\{q_c\}$ representa los nodos restringidos. En el ejemplo empleado para ilustrar este procedimiento g_1 es el punto empotrado por lo que $\{q_c\} = \{0 \ 0\}^T$, por lo que resulta

$$\begin{Bmatrix} u_{g1} \\ w_{g1} \\ u_{g2} \\ w_{g2} \\ u_{g3} \\ w_{g3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{g3} \\ w_{g3} \\ u_{g2} \\ w_{g2} \end{Bmatrix} \quad 4.40$$

Las condiciones de restricción se denota como

$$\{q_c\} = \{G(t)\} \quad 4.41$$

La función $G(t)$ representa los desplazamientos que q_c describe en este caso. Para este caso se considera igual a cero

Finalmente las matrices de inercia y rigidez con en función de las restricciones $[A_{cc}]$ se determina por

$$[M] = [A_{cc}]^T [\hat{M}] [A_{cc}] \quad 4.42$$

$$[K] = [A_{cc}]^T [\hat{K}] [A_{cc}] \quad 4.43$$

Sustituyendo las matrices previamente determinadas en las ecuaciones de inercia 4.42 y rigidez 4.43

$$[M] = [A_{cc}]^T [\hat{M}] [A_{cc}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.44

$$= \rho AL \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = [A_{cc}]^T [\hat{K}] [A_{cc}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA/L & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & EA/L & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.45

$$= \begin{bmatrix} EA/L & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las frecuencias naturales del ejemplo en cuestión se determinan igual que en la sección capítulo 3, sección 3.2 obteniendo

$$\omega_1 = 0 \quad \omega_2 = 1.333 \times 10^4 \text{ rad / seg} \quad \omega_3 = 0 \quad \omega_4 = 6.666 \times 10^3 \text{ rad / seg}$$

Repitiendo el mismo proceso pero considerando el nodo g_3 un grado de libertad y manteniendo el resto de los nodos igual, dicho de otra forma $u_{g3} = \text{sen} wt$, por otra parte $G(t) = \sin wt$. Debido a que $\{q_c\}$ es diferente de cero la matriz $[A_{cc}]$ es modificada de acuerdo a la ecuación 4.39

$$\begin{Bmatrix} u_{g1} \\ w_{g1} \\ u_{g2} \\ w_{g2} \\ u_{g3} \\ w_{g3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{g2} \\ w_{g2} \\ u_{g3} \\ w_{g3} \end{Bmatrix}$$

4.46

Empleando las ecuaciones 4.42 y 4.43 para la matriz de inercia y rigidez pero ahora considerando el grado de libertad del nodo g_3

$$[M] = [A_{cc}]^T [\hat{M}] [A_{cc}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4.47

$$= \rho AL \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 2/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$[K] = [A_{cc}]^T [\hat{K}] [A_{cc}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA/L & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & EA/L & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4.48

$$= \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L \\ 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones del movimiento para el sistema son

$$[M] \begin{Bmatrix} \{\dot{q}_f\} \\ \{\dot{q}_c\} \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} \{q_f\} \\ \{q_c\} \end{Bmatrix} = 0 \quad 4.49$$

Para llegar a la forma de la ecuación anterior, las matrices $[M]$ y $[K]$ son descompuestas conforme a la siguientes ecuaciones (4.50 y 4.51), tomando en cuenta que elementos de estas matrices son parte de q_f y q_c

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{ff}] & [M_{fc}] \\ [M_{cf}] & [M_{cc}] \end{bmatrix} \quad 4.50$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{ff}] & [K_{fc}] \\ [K_{cf}] & [K_{cc}] \end{bmatrix} \quad 4.51$$

Introduciendo los valores para el ejemplo de la figura 4.2 en la ecuación 4.49 llegamos

$$\rho AL \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{g2} \\ \dot{w}_{g2} \\ \dot{w}_{g3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_{g3} + \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{g2} \\ w_{g2} \\ w_{g3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -EA/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_{g3} = 0 \quad 4.52$$

4.6 Respuesta Dinámica

Empleando el operador de Laplace en la ecuaciones del movimiento estas quedan como

$$\rho ALs^2 \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{g2} \\ \ddot{w}_{g2} \\ \ddot{w}_{g3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{g2} \\ w_{g2} \\ w_{g3} \end{bmatrix} + = \left\{ \begin{array}{l} g_0 \left[\frac{EA}{L} + \frac{w^2}{6} \right] \frac{w^2}{s^2 + w^2} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad 4.53$$

La función de transferencia $G_1(s) = Y_1/F$ de la ecuación anterior es

$$Y_1 = A_s^{-1} \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3 \left(\frac{EA}{L} + \frac{w^2}{6} \right) LwF}{A(2s^2 \rho L^2 + 3E)(s^2 + w^2)}, & 0, & 0 \end{bmatrix} \quad 4.54$$

De la ecuación anterior se obtiene $G_1(s)$;

$$G_1(s) = \frac{3 \left(\frac{EA}{L} + \frac{w^2}{6} \right) Lw}{A(2s^2 \rho L^2 + 3E)(s^2 + w^2)} \quad 4.55$$

Sustituyendo los valores $s = i\omega$, $E = 70 \times 10^9$, $A = 0.002m^2$, $\rho = 2700 \text{ km}/m^3$, $L = 0.1m$ y $w = 2\pi(100)$, la ecuación 4.55 queda

$$G_{1w} = \frac{0.131951 \times 10^{15}}{(-54\omega^2 + 0.2101 \times 10^{12})(-\omega^2 + 394773.4561)} \quad 4.56$$

Graficando la función de transferencia anterior y considerando un intervalo para ω de 0 a 16000 Hz el resultado se muestra en la figura 4.3

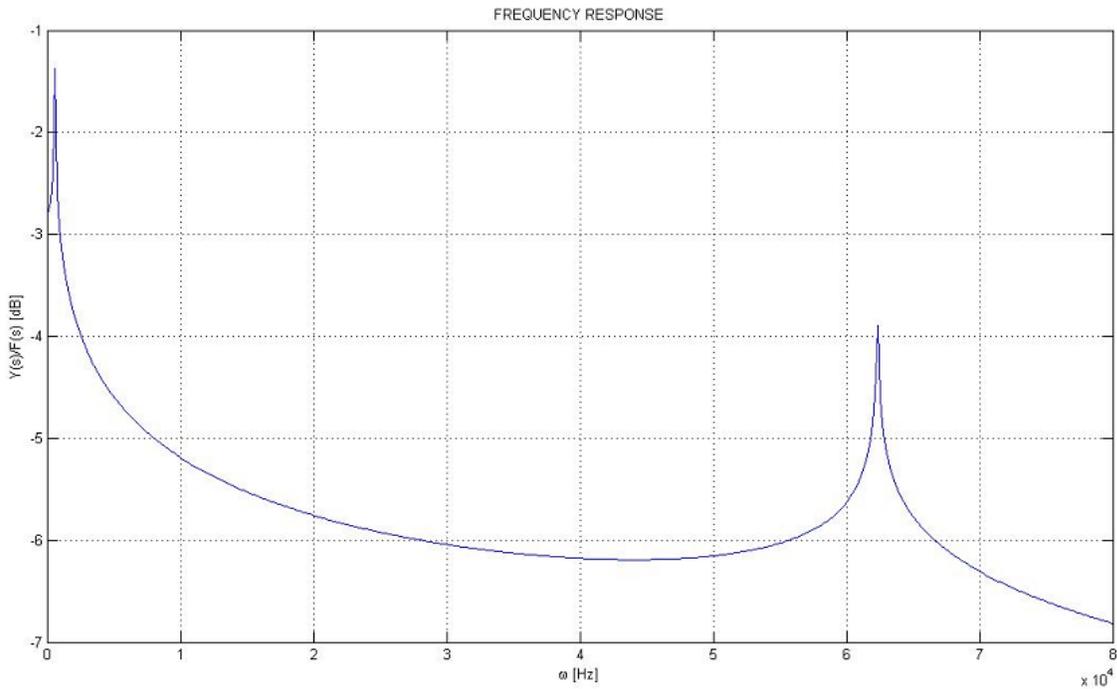


Figura 4.3

4.7 Análisis del acoplamiento entre el sistema de suspensión y la carrocería.

Hasta este punto del análisis se ha realizado el estudio del sistema de suspensión de un vehículo automotriz, considerando una cuarta parte del coche debido a la gran importancia de dicho sistema en la dinámica del vehículo. Como parte de este análisis se considera el estudio del acoplamiento entre el sistema de suspensión y la carrocería del vehículo, dicho acoplamiento forma parte de la carrocería.

Una vez determinada la fuerza máxima que experimenta la carrocería y debido a la complejidad en las geometrías que se emplean como punto de unión entre estos dos componentes del vehículo se emplea un análisis computacional del elemento finito a través del Software ANSYS®. El punto de interés en la carrocería se muestra en la figura 4.4

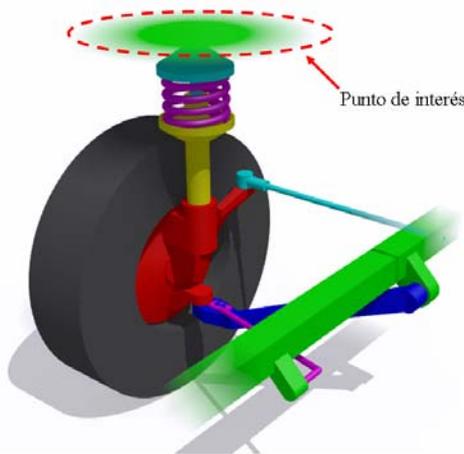


Figura 4.4 Suspensión MacPherson

Este punto de interés se presenta en diversas geometrías en los vehículos automotrices. En el presente estudio se consideran 3 de las geometrías más comunes empleadas en las carrocerías de los vehículos particulares de uso diario.

Debido al interés en la dinámica de estas tres geometrías propuestas se realiza un análisis modal y armónico para cada una de estas piezas con la finalidad de determinar la amplitud máxima en el desplazamiento vertical de los puntos de unión.

Una vez determinado el acoplamiento y determinando el comportamiento dinámico se procede a observar a la pieza que mostró mayores desplazamientos verticales.

Las propiedades del material y consideraciones a emplear en cada uno de los análisis en el Software ANSYS® se muestran en la tabla 4.1

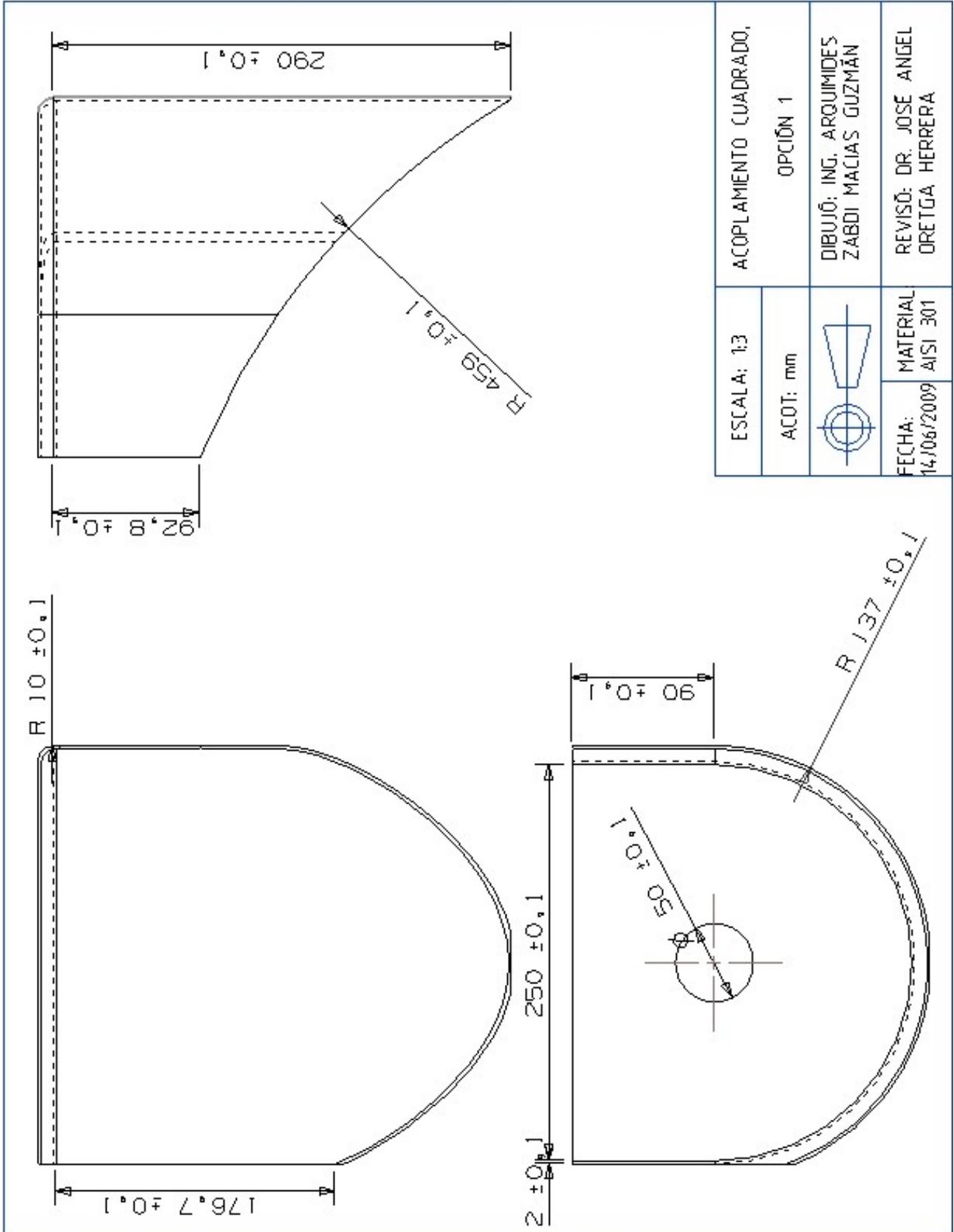
Tabla 4.1 Propiedades del Material y condiciones de análisis

Material	Densidad [10 ³ kg/m ³]	Coefficiente de Poisson	Modulo de Young [GPa]	Relación de Amortiguamiento	Fuerza [N]
AISI 301 Acero Inoxidable	7.92	0.27	193	0.1	74

4.7.1 Análisis de acoplamiento cuadro, opción 1.

Esta primera propuesta muestra características geométricas cuadradas y pocas curvas como lo muestra la figura 4.5 y figura 4.5a

Figura 4.5a Dibujo del acoplamiento cuadrado



4.7.1.1 Análisis Modal Opción 1

El análisis es realizado para determinar el modo de vibración vertical, que es el de interés para el presente estudio, así como la frecuencia en el que dicho modo se presenta. Los resultados y se muestran en la figura 4.5

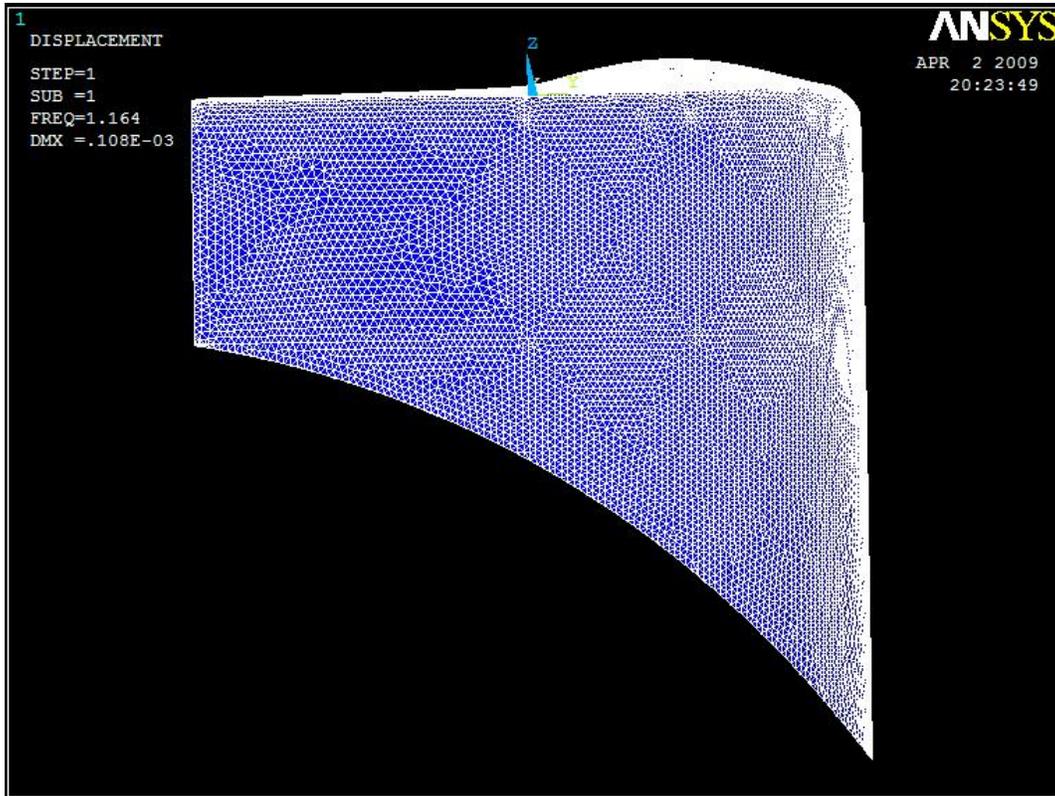


Figura 4.5 Análisis Modal, opción 1

De los resultados de la figura se muestra que el modo vertical de vibración se presenta en $\omega = 1.164$ Hz

4.7.1.2 Análisis Harmónico. Opción 1

Con la finalidad de determinar el comportamiento dinámico de ésta pieza; se realiza un análisis armónico en el cual se emplea la fuerza determinada en el capítulo 3 para el sistema de suspensión, además tomando en cuenta el resultado del análisis modal el rango en el que dicho armónico se lleva acabo es de 0 a 100 Hz.

La siguiente figura 4.6 muestra las consideraciones empleadas en dicho análisis las cuales restringen los desplazamientos en los tres ejes, x y y y z ; condiciones de frontera y la fuerza empleada.

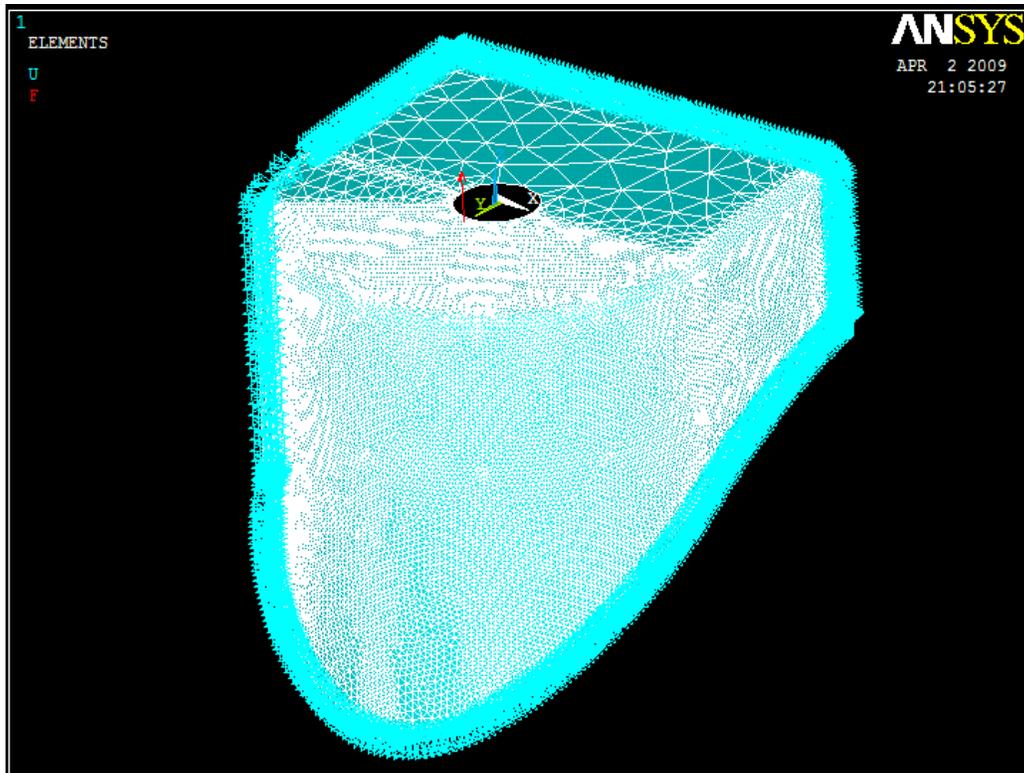


Figura 4.6 Condiciones de Frontera y Fuerza aplicada

Con las condiciones mostradas en la figura anterior 4.6 la gráfica de amplitud es fig 4.7

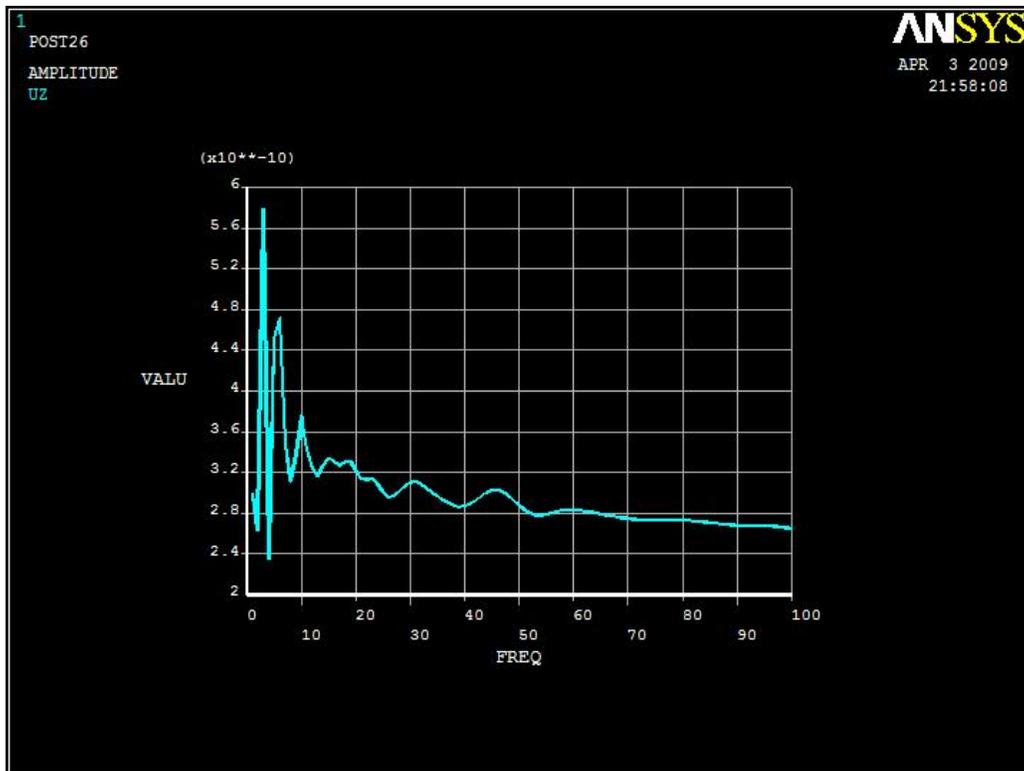


Figura 4.7 Diagrama de Amplitud, opción 1

A continuación se presentan los resultados de la grafica mostrada en la figura 4.7

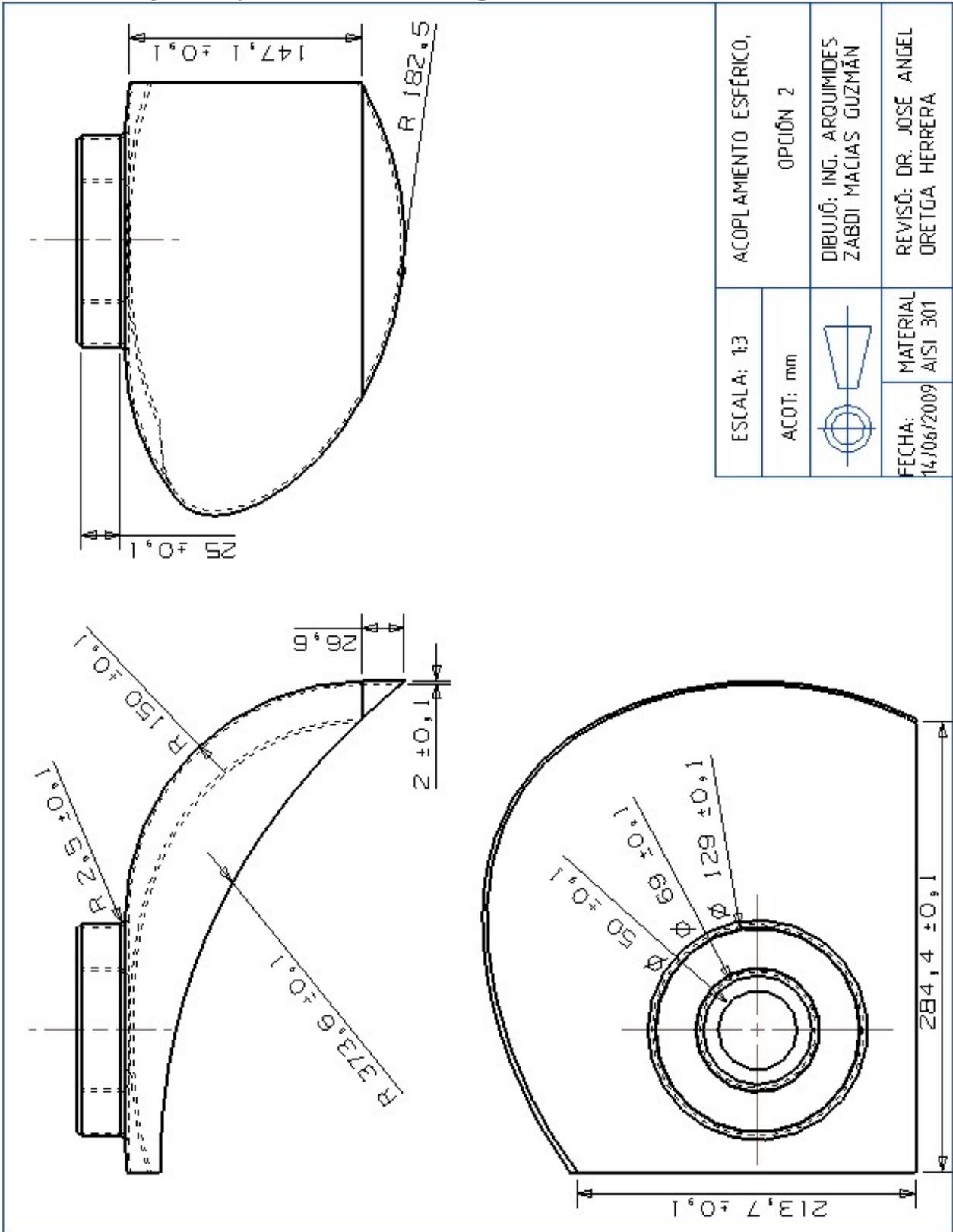
Tabla 4.2, Resultados, opción 1

Frecuencia [Hz]	Amplitud [m]	Ángulo de Fase [°]
1.0000	0.298579E-09	-28.3788
2.0000	0.263630E-09	-34.3165
3.0000	0.578367E-09	-73.6447
4.0000	0.234438E-09	-64.4489
5.0000	0.451255E-09	-62.7732
6.0000	0.471781E-09	-102.259
7.0000	0.347842E-09	-99.4069
8.0000	0.311510E-09	-94.8154
9.0000	0.338124E-09	-89.8100
10.000	0.375512E-09	-95.7065
11.000	0.342488E-09	-101.104
12.000	0.323873E-09	-99.8887
13.000	0.316247E-09	-98.0912
14.000	0.327134E-09	-96.5681
15.000	0.334253E-09	-98.4382
16.000	0.331244E-09	-99.8195
17.000	0.326933E-09	-100.061
18.000	0.330482E-09	-100.426
19.000	0.330502E-09	-102.200
20.000	0.321594E-09	-103.511
21.000	0.313390E-09	-103.149
22.000	0.313237E-09	-102.688
23.000	0.313545E-09	-103.341
24.000	0.308516E-09	-104.161
25.000	0.300802E-09	-104.078
26.000	0.296072E-09	-102.996
27.000	0.297112E-09	-101.799
28.000	0.301934E-09	-101.251
29.000	0.307240E-09	-101.537
30.000	0.310529E-09	-102.383
31.000	0.311075E-09	-103.457
32.000	0.308754E-09	-104.464
33.000	0.304687E-09	-105.122
34.000	0.300465E-09	1-05.432
35.000	0.296554E-09	-105.523
36.000	0.292964E-09	-105.428
37.000	0.289903E-09	-105.150
38.000	0.287641E-09	-104.702
39.000	0.286560E-09	-104.126
40.000	0.286981E-09	-103.524
41.000	0.288948E-09	-103.025
42.000	0.292305E-09	-102.763
43.000	0.296544E-09	-102.881
44.000	0.300558E-09	-103.458
45.000	0.303028E-09	-104.416
46.000	0.303122E-09	-105.540
47.000	0.300871E-09	-106.583
48.000	0.296959E-09	-107.375
49.000	0.292238E-09	-107.841
50.000	0.287440E-09	-107.971
51.000	0.283173E-09	-107.792
52.000	0.279949E-09	-107.368
53.000	0.278137E-09	-106.807
54.000	0.277815E-09	-106.256
55.000	0.278683E-09	-105.852
56.000	0.280165E-09	-105.667
57.000	0.281670E-09	-105.696
58.000	0.282810E-09	-105.882
59.000	0.283423E-09	-106.157
60.000	0.283495E-09	-106.468
61.000	0.283092E-09	-106.770
62.000	0.282340E-09	-107.036
63.000	0.281381E-09	-107.254

64.000	0.280323E-09	-107.424
65.000	0.279232E-09	-107.551
66.000	0.278158E-09	-107.640
67.000	0.277148E-09	-107.693
68.000	0.276244E-09	-107.719
69.000	0.275459E-09	-107.729
70.000	0.274778E-09	-107.731
71.000	0.274182E-09	-107.725
72.000	0.273681E-09	-107.709
73.000	0.273315E-09	-107.686
74.000	0.273121E-09	-107.665
75.000	0.273097E-09	-107.663
76.000	0.273192E-09	-107.696
77.000	0.273330E-09	-107.769
78.000	0.273434E-09	-107.881
79.000	0.273442E-09	-108.024
80.000	0.273314E-09	-108.189
81.000	0.273032E-09	-108.363
82.000	0.272596E-09	-108.534
83.000	0.272031E-09	-108.691
84.000	0.271376E-09	-108.824
85.000	0.270684E-09	-108.929
86.000	0.270010E-09	-109.007
87.000	0.269407E-09	-109.060
88.000	0.268914E-09	-109.098
89.000	0.268554E-09	-109.131
90.000	0.268324E-09	-109.172
91.000	0.268202E-09	-109.231
92.000	0.268147E-09	-109.318
93.000	0.268106E-09	-109.436
94.000	0.268023E-09	-109.585
95.000	0.267849E-09	-109.762
96.000	0.267542E-09	-109.959
97.000	0.267077E-09	-110.165
98.000	0.266444E-09	-110.371
99.000	0.265648E-09	-110.565
100.00	0.264712E-09	-110.738

4.7.2 Análisis de acoplamiento esférico, opción 2.

El dibujo de la opción 2 se muestra en la figura 4.8a



4.7.2.1 Análisis Modal, opción 2

Nuevamente el modo de vibración es vertical determinado para esta segunda pieza de la cual se quiere conocer el comportamiento dinámico, los resultados se muestran en la figura 4.8

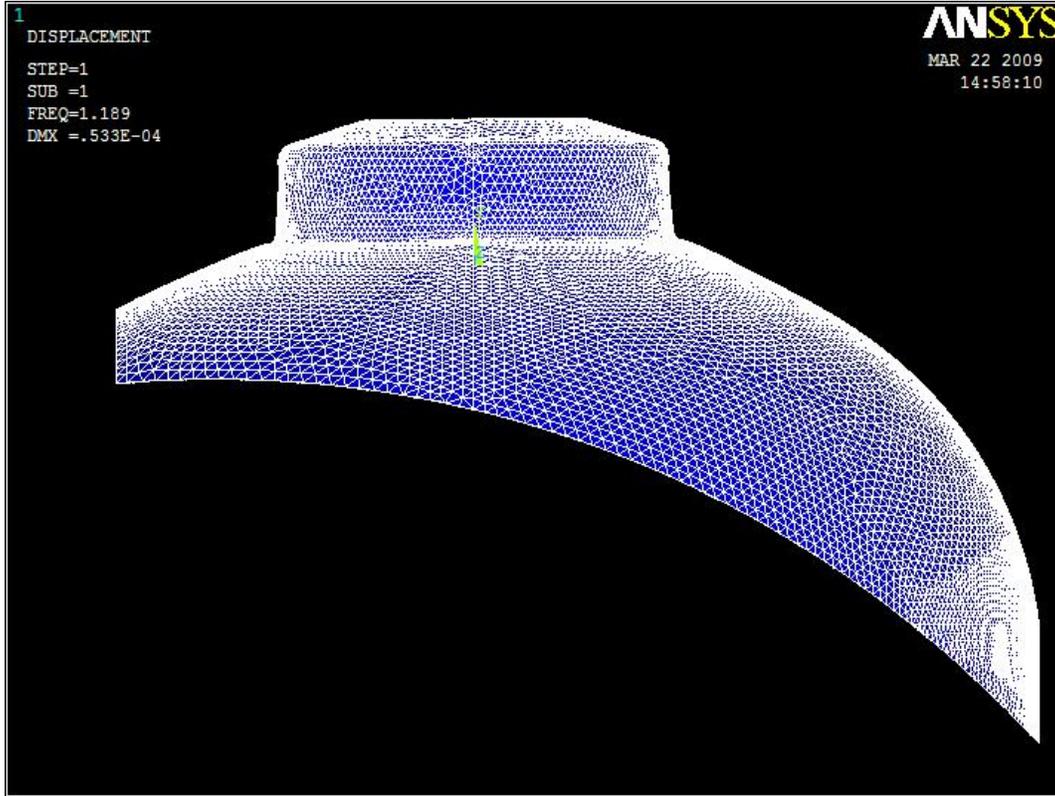


Figura 4.8 Análisis Modal, opción 2

Los resultados para este caso muestran que el modo vertical se presenta en la frecuencia de 1.189 Hz

4.7.2.2 Análisis Armónico. Opción 2.

Para conocer el comportamiento dinámico de este acoplamiento esférico, nuevamente se emplea el análisis armónico bajo las condiciones de frontera mostrados en la Figura 4.9, la cual indica que este componente esta restringido para los desplazamientos en el ejes x , y y z .

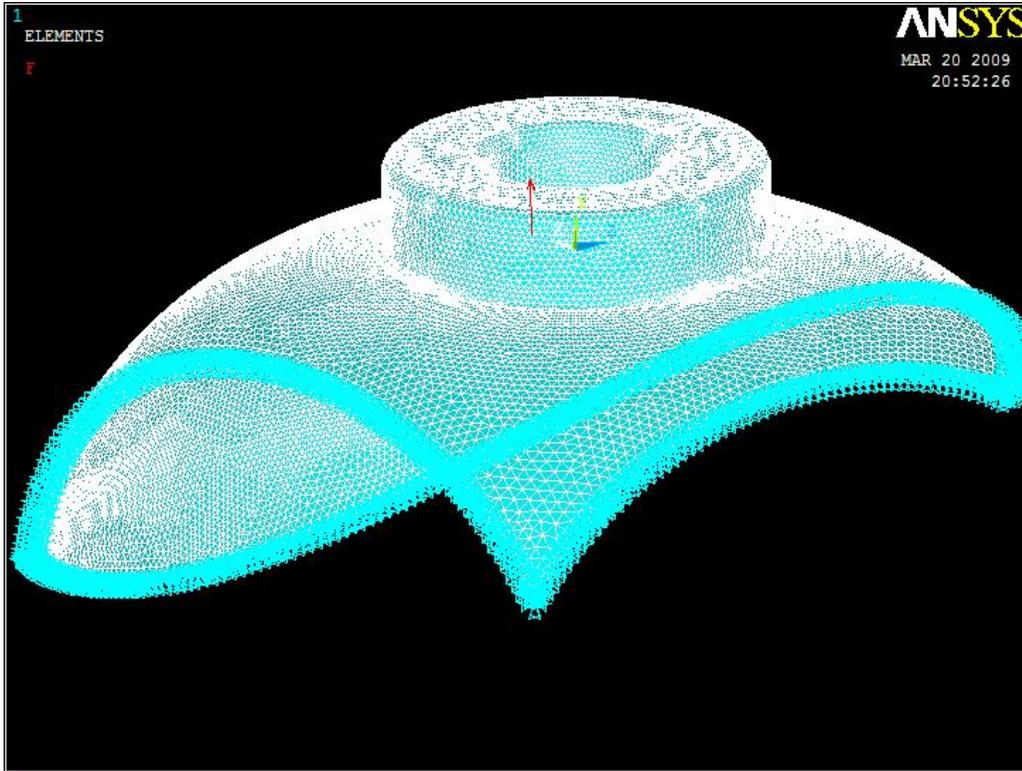


Figura 4.9 Condiciones de Frontera y Fuerza aplicada

Con las condiciones mostradas en la figura 4.9 los resultados obtenidos de amplitud a través de un análisis harmónico de 0 a 100 Hz se muestran en la figura 4.10

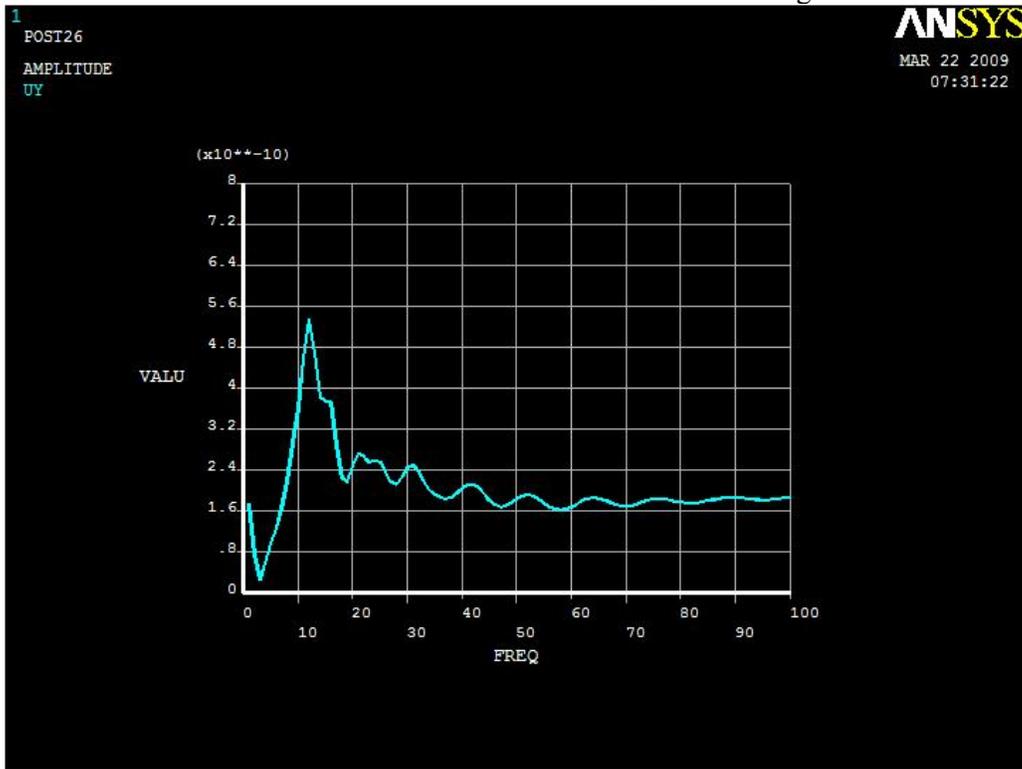


Figura 4.10 Diagrama de Amplitud, opción 2

Los resultados mostrados en la grafica de la figura 4.10 se presenta a continuación en la siguiente tabla.

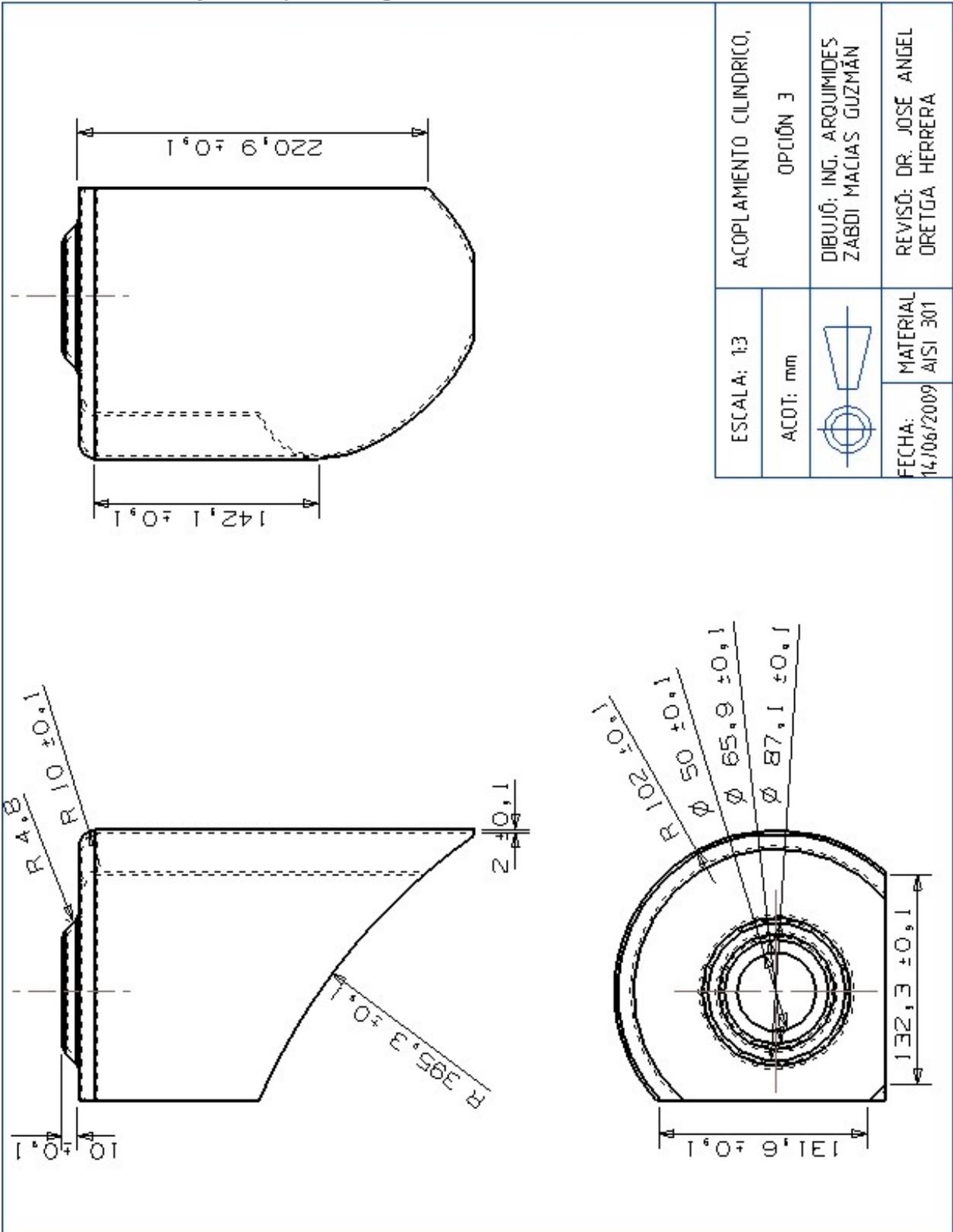
Tabla 4.3 Resultados, opción 2.

Frecuencia [Hz]	Amplitud [m]	Ángulo de Fase [°]
1.0000	0.173201E-09	-32.8912
2.0000	0.746748E-10	-115.215
3.0000	0.252936E-10	-63.9256
4.0000	0.576613E-10	-24.6164
5.0000	0.958435E-10	-19.8041
6.0000	0.126633E-09	-21.3950
7.0000	0.164378E-09	-18.9903
8.0000	0.218775E-09	-20.4695
9.0000	0.291465E-09	-25.9802
10.000	0.360386E-09	-36.0615
11.000	0.458482E-09	-45.3292
12.000	0.534826E-09	-68.1489
13.000	0.469705E-09	-86.7093
14.000	0.382536E-09	-93.6923
15.000	0.374004E-09	-93.2120
16.000	0.373406E-09	-105.134
17.000	0.290415E-09	-113.924
18.000	0.224221E-09	-107.802
19.000	0.217568E-09	-95.0515
20.000	0.248487E-09	-90.5530
21.000	0.270846E-09	-94.5546
22.000	0.265021E-09	-98.9692
23.000	0.255304E-09	-99.6564
24.000	0.256917E-09	-100.135
25.000	0.255828E-09	-103.577
26.000	0.236621E-09	-106.429
27.000	0.215791E-09	-104.330
28.000	0.211965E-09	-99.2281
29.000	0.226049E-09	-96.2098
30.000	0.244557E-09	-98.1124
31.000	0.249597E-09	-103.287
32.000	0.237128E-09	-107.895
33.000	0.217707E-09	-109.621
34.000	0.201536E-09	-108.603
35.000	0.191584E-09	-106.278
36.000	0.186005E-09	-103.622
37.000	0.183812E-09	-100.691
38.000	0.186224E-09	-97.7851
39.000	0.193584E-09	-95.8970
40.000	0.203320E-09	-95.9103
41.000	0.210834E-09	-97.8484
42.000	0.212014E-09	-100.902
43.000	0.205490E-09	-103.811
44.000	0.193589E-09	-105.332
45.000	0.180823E-09	-104.778
46.000	0.171293E-09	-102.276
47.000	0.167319E-09	-98.6877
48.000	0.169212E-09	-95.2461
49.000	0.175503E-09	-93.0222
50.000	0.183456E-09	-92.5143
51.000	0.189853E-09	-93.5734
52.000	0.192072E-09	-95.5456
53.000	0.189242E-09	-97.5247
54.000	0.182616E-09	-98.6918
55.000	0.174642E-09	-98.5983
56.000	0.167641E-09	-97.2402
57.000	0.163116E-09	-94.9524
58.000	0.161718E-09	-92.2464
59.000	0.163447E-09	-89.6741
60.000	0.167760E-09	-87.7201
61.000	0.173603E-09	-86.7045
62.000	0.179518E-09	-86.7085
63.000	0.183946E-09	-87.5533
64.000	0.185716E-09	-88.8437

65.000	0.184523E-09	-90.0822
66.000	0.181042E-09	-90.8226
67.000	0.176582E-09	-90.8025
68.000	0.172537E-09	-90.0020
69.000	0.169948E-09	-88.6192
70.000	0.169318E-09	-86.9870
71.000	0.170612E-09	-85.4622
72.000	0.173353E-09	-84.3275
73.000	0.176784E-09	-83.7322
74.000	0.180039E-09	-83.6760
75.000	0.182348E-09	-84.0264
76.000	0.183240E-09	-84.5613
77.000	0.182677E-09	-85.0321
78.000	0.181040E-09	-85.2334
79.000	0.178952E-09	-85.0553
80.000	0.177059E-09	-84.4998
81.000	0.175847E-09	-83.6600
82.000	0.175571E-09	-82.6794
83.000	0.176261E-09	-81.7114
84.000	0.177764E-09	-80.8874
85.000	0.179793E-09	-80.2970
86.000	0.181979E-09	-79.9777
87.000	0.183936E-09	-79.9113
88.000	0.185333E-09	-80.0296
89.000	0.185972E-09	-80.2290
90.000	0.185831E-09	-80.3938
91.000	0.185068E-09	-80.4228
92.000	0.183965E-09	-80.2507
93.000	0.182847E-09	-79.8600
94.000	0.182005E-09	-79.2783
95.000	0.181640E-09	-78.5664
96.000	0.181842E-09	-77.8009
97.000	0.182593E-09	-77.0574
98.000	0.183785E-09	-76.3966
99.000	0.185255E-09	-75.8551
100.00	0.186814E-09	-75.4418

4.7.3 Análisis de acoplamiento cilíndrico. Opción 3.

Dibujo de la opción 3, Figura 4.11a



4.7.3.1 Análisis Modal. Opción 3

La importancia que reviste del análisis modal en esta pieza obedece al hecho de determinar la frecuencia a la cual se presenta el **modo de vibración vertical en el cual esta interesado el presente estudio**. Nuevamente ésta frecuencia es determinada donde los resultados se muestran en la figura 4.11.

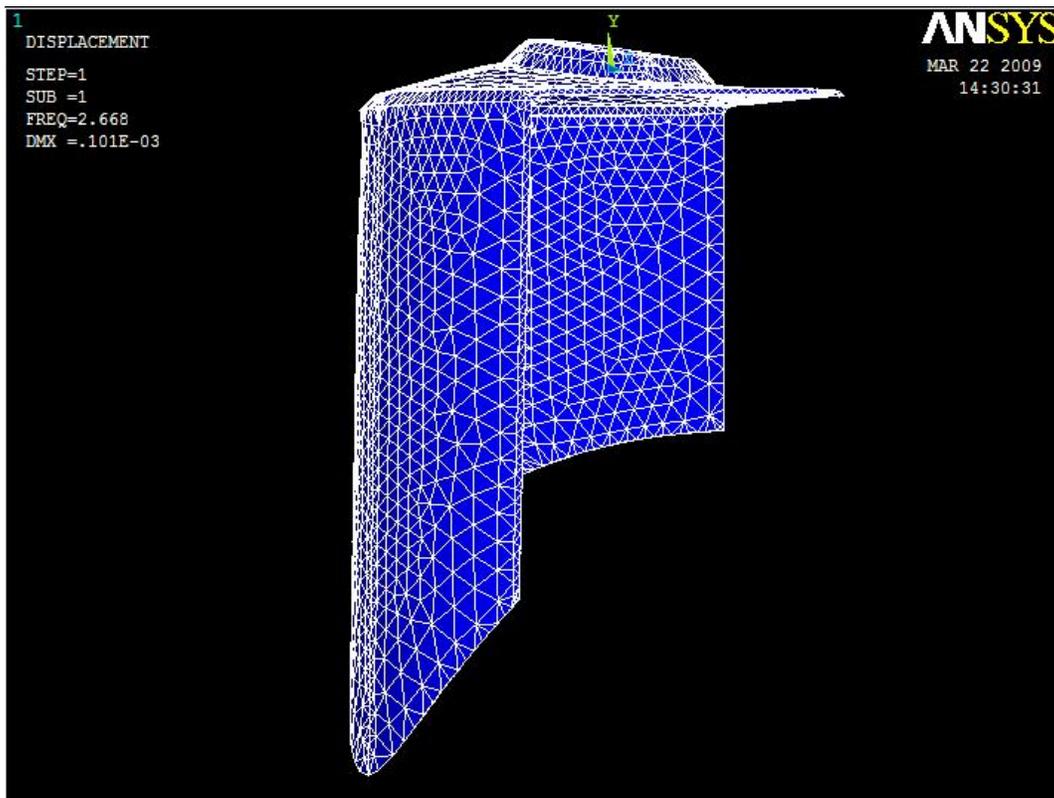


Figura 4.11 Análisis Modal, opción 3

De los resultados anteriores se observa que el modo de vibración vertical de la pieza se presenta a una frecuencia de 2.668 Hz

4.7.3.2 Análisis Armónico. Opción 3.

El comportamiento dinámico de la **Opción 3** está determinado mediante análisis armónico con las debidas condiciones de frontera y la fuerza a la que está sometido éste componente como se muestran en la figura 4.12, sin desplazamientos en los ejes x , y y z .

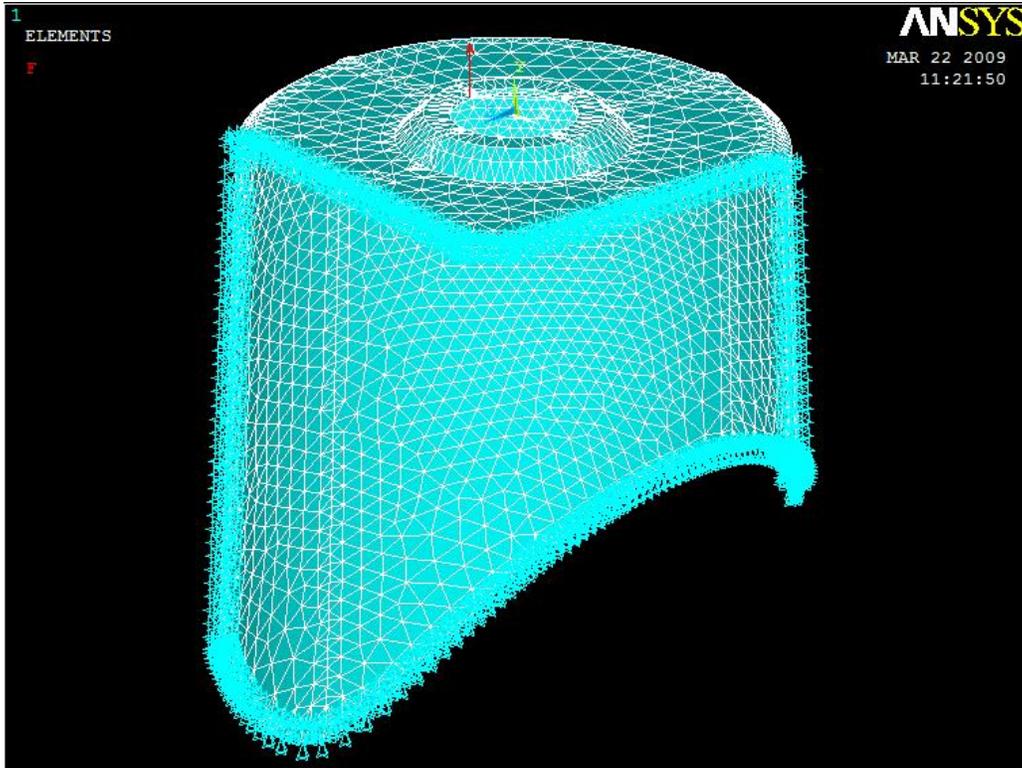


Figura 4.12 condiciones de frontera y fuerza aplicada
 Los resultados obtenidos del análisis se muestran en la figura 4.13

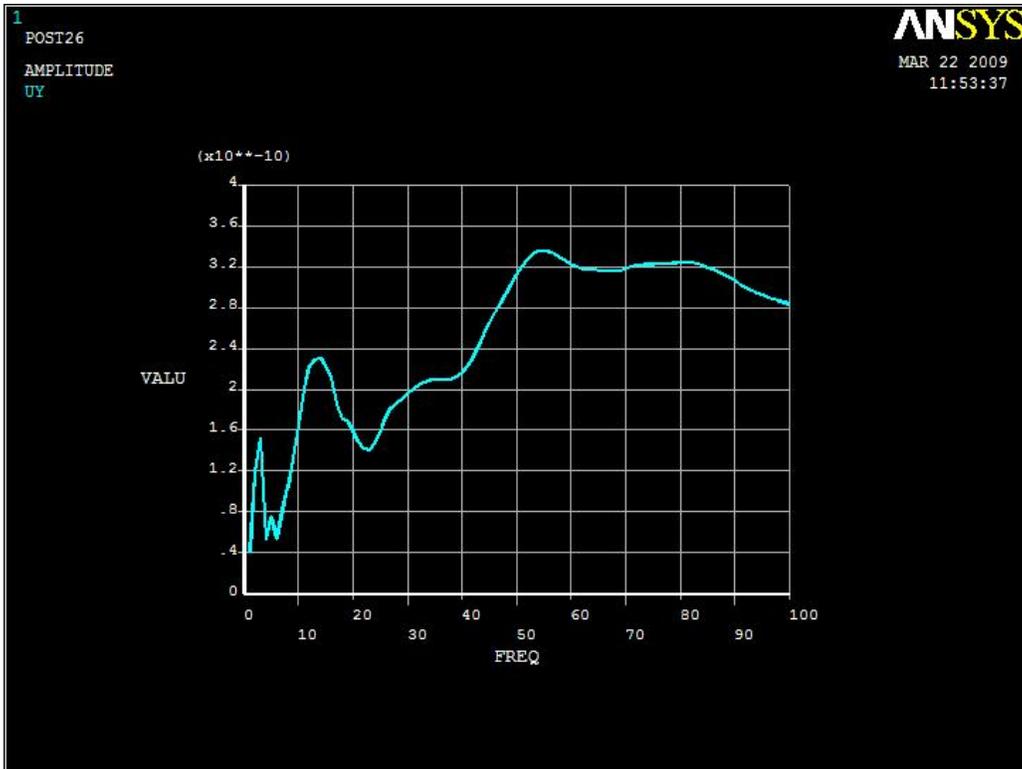


Figura 4.13 Diagrama de Amplitud. Opción 3

Los resultados mostrados en la grafica de la figura 4.12 se listan en la tabla 4.4

Tabla 4.4 Resultados, opción 3

Frecuencia [Hz]	Amplitud [m]	Ángulo de Fase [°]
1.0000	0.398876E-10	-12.3915
2.0000	0.118481E-09	-20.7818
3.0000	0.152000E-09	-125.142
4.0000	0.529675E-10	-61.3789
5.0000	0.751224E-10	-92.0298
6.0000	0.537127E-10	-47.0526
7.0000	0.823920E-10	-36.7187
8.0000	0.104544E-09	-34.1825
9.0000	0.131402E-09	-32.9496
10.000	0.165487E-09	-35.9582
11.000	0.200458E-09	-42.9578
12.000	0.222907E-09	-53.5411
13.000	0.228718E-09	-61.1318
14.000	0.230188E-09	-69.5594
15.000	0.223389E-09	-74.9384
16.000	0.212011E-09	-81.8366
17.000	0.185977E-09	-84.9466
18.000	0.170565E-09	-82.1365
19.000	0.168949E-09	-81.1342
20.000	0.159607E-09	-81.8798
21.000	0.148262E-09	-79.2991
22.000	0.142168E-09	-74.9079
23.000	0.140966E-09	-69.3326
24.000	0.147312E-09	-63.9042
25.000	0.159613E-09	-60.7201
26.000	0.173196E-09	-60.2373
27.000	0.182516E-09	-61.5495
28.000	0.186285E-09	-62.4257
29.000	0.190196E-09	-62.3235
30.000	0.195614E-09	-62.4081
31.000	0.200473E-09	-62.8634
32.000	0.204320E-09	-63.4227
33.000	0.207171E-09	-63.9930
34.000	0.208906E-09	-64.4979
35.000	0.209432E-09	-64.7820
36.000	0.209184E-09	-64.6423
37.000	0.209150E-09	-63.9902
38.000	0.210271E-09	-62.9584
39.000	0.212744E-09	-61.7440
40.000	0.216633E-09	-60.3914
41.000	0.222573E-09	-58.9792
42.000	0.231114E-09	-57.7791
43.000	0.241961E-09	-57.1184
44.000	0.253879E-09	-57.1645
45.000	0.265289E-09	-57.8092
46.000	0.275312E-09	-58.7450
47.000	0.284354E-09	-59.7132
48.000	0.293386E-09	-60.6971
49.000	0.302761E-09	-61.8431
50.000	0.312001E-09	-63.2569
51.000	0.320394E-09	-64.9349
52.000	0.327380E-09	-66.8213
53.000	0.332488E-09	-68.8446
54.000	0.335354E-09	-70.9008
55.000	0.335958E-09	-72.8595
56.000	0.334700E-09	-74.6110
57.000	0.332170E-09	-76.0989
58.000	0.328906E-09	-77.3061
59.000	0.325382E-09	-78.2284
60.000	0.322109E-09	-78.8796
61.000	0.319575E-09	-79.3174
62.000	0.318012E-09	-79.6453
63.000	0.317253E-09	-79.9657
64.000	0.316869E-09	-80.3261
65.000	0.316482E-09	-80.7054
66.000	0.316009E-09	-81.0478

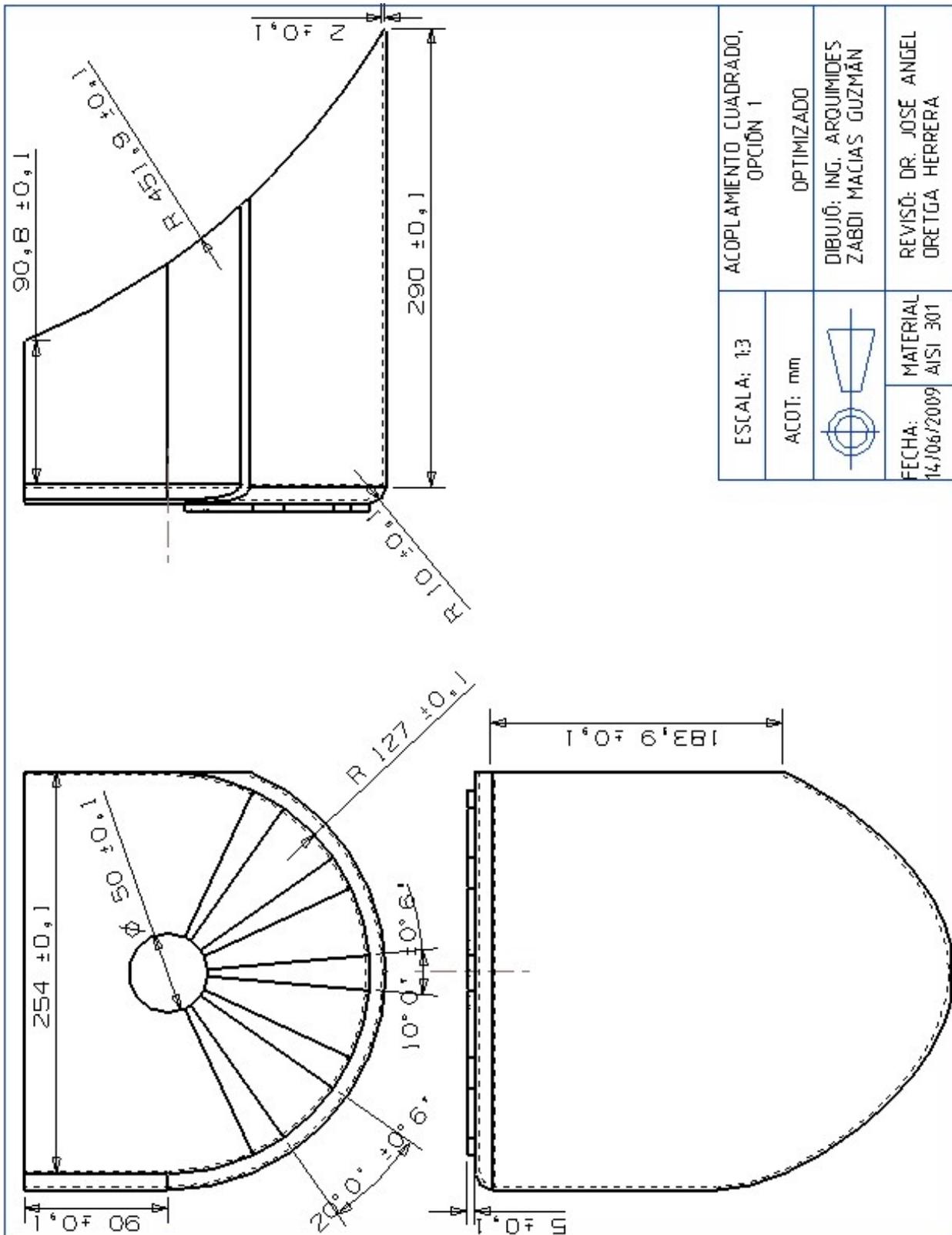
67.000	0.315674E-09	-81.3152
68.000	0.315813E-09	-81.5209
69.000	0.316619E-09	-81.7264
70.000	0.318002E-09	-82.0065
71.000	0.319611E-09	-82.4076
72.000	0.321018E-09	-82.9246
73.000	0.321927E-09	-83.5066
74.000	0.322305E-09	-84.0873
75.000	0.322360E-09	-84.6201
76.000	0.322389E-09	-85.0987
77.000	0.322609E-09	-85.5528
78.000	0.323060E-09	-86.0271
79.000	0.323620E-09	-86.5585
80.000	0.324076E-09	-87.1632
81.000	0.324210E-09	-87.8353
82.000	0.323855E-09	-88.5518
83.000	0.322931E-09	-89.2813
84.000	0.321444E-09	-89.9923
85.000	0.319462E-09	-90.6589
86.000	0.317089E-09	-91.2632
87.000	0.314437E-09	-91.7953
88.000	0.311608E-09	-92.2516
89.000	0.308690E-09	-92.6330
90.000	0.305751E-09	-92.9433
91.000	0.302836E-09	-93.1867
92.000	0.299983E-09	-93.3661
93.000	0.297230E-09	-93.4839
94.000	0.294623E-09	-93.5433
95.000	0.292212E-09	-93.5512
96.000	0.290033E-09	-93.5186
97.000	0.288101E-09	-93.4592
98.000	0.286404E-09	-93.3869
99.000	0.284911E-09	-93.3137
100.00	0.283573E-09	-93.2480

Después del análisis de los tres acoplamientos mas comunes entre el sistema de suspensión y carrocería se puede determinar que la opción numero uno muestra los mayores desplazamientos de acuerdo con las graficas de amplitud.

En los capítulos anteriores se muestra que la dinámica de un sistema puede modificarse si variamos los parámetros como son tanto propiedades del material como la geometría y la masa de los elementos así para llevar acabo la optimización de la **Opción 1** se modifica la masa y por consiguiente la geometría de dicho acoplamiento.

4.8.1 Análisis Optimizado del Acoplamiento de la Opción 1.

El dibujo de la opción optimizada se muestra a continuación, figura 4.14a



4.8.1.1 Análisis Modal. Opción 1 Optimizado.

Debido a la modificación geométrica de la **Opción1** y el incremento de masa que ahora se muestra, es importante **determinar el modo de vibración vertical**. Como en los análisis anteriores determinado y los resultados obtenidos se muestran en la figura 4.14

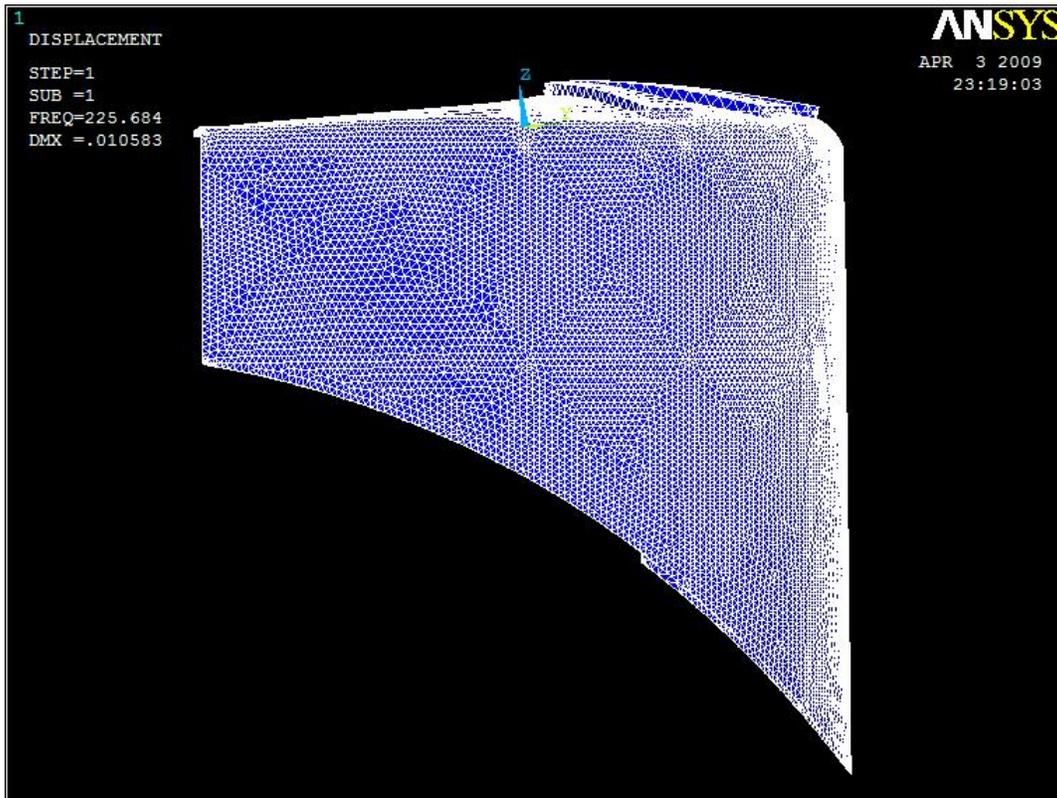


Figura 4.14 Análisis Modal, opción 1 optimizada

De la figura anterior se puede determinar que el modo de vibración vertical se presenta en una frecuencias de 225. 684 Hz

4.8.1.1 Análisis Armónico. .Opción 1 Optimizado.

El análisis armónico es empleado para conocer el comportamiento dinámico de esta pieza modificada. Empleando como referencia la frecuencia natural determinada en el análisis modal se emplea un barrido frecuencial de 200 a 300 Hz, bajo las condiciones de frontera que muestra la figura 4.15, las cuales no permiten desplazamientos en los ejes x , y y z .

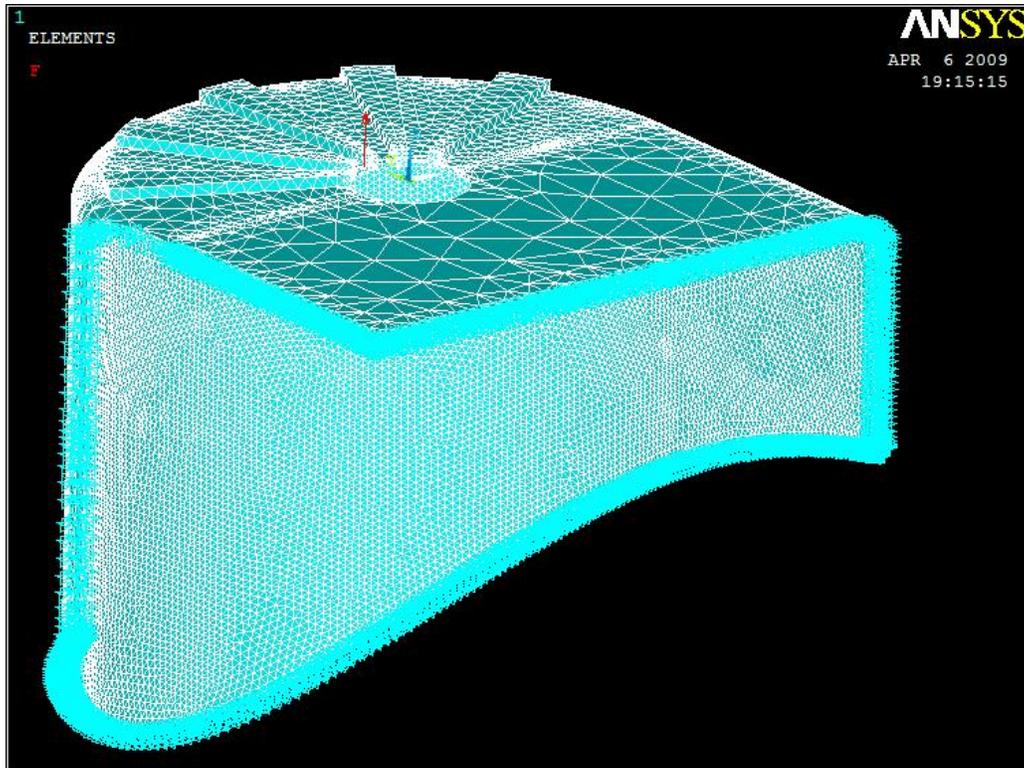


Figura 4.15 condiciones de frontera y fuerza aplicada.
 Bajo las condiciones mostradas en la figura 4.15 el análisis harmónico muestra los resultados en la figura 4.16

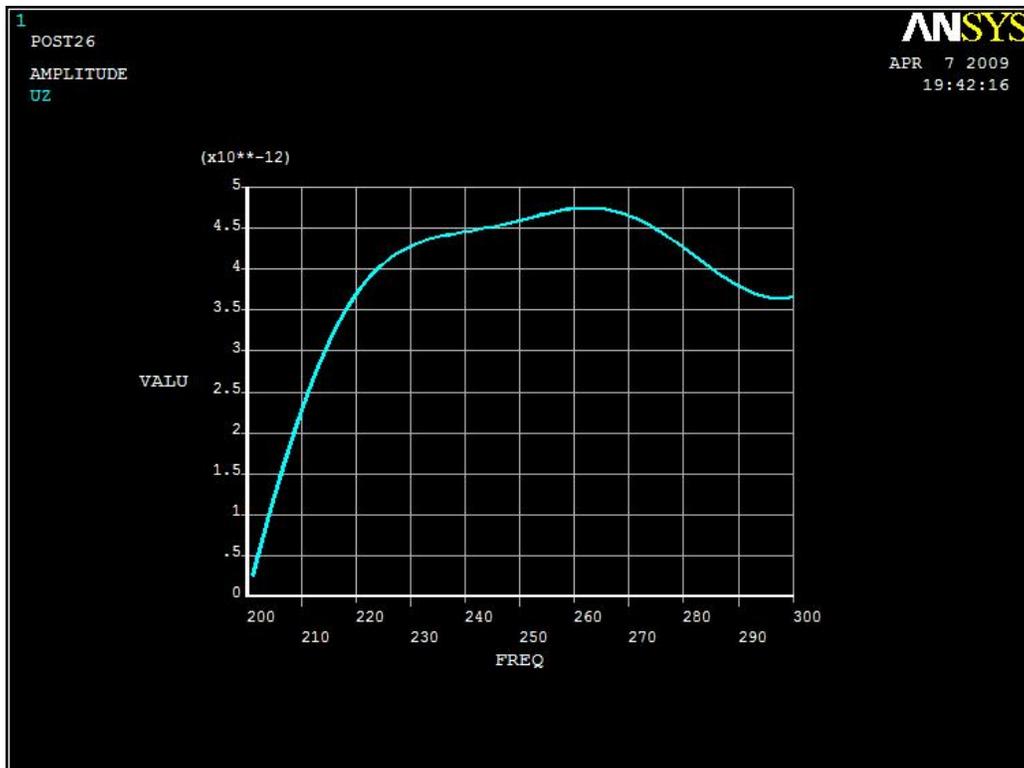


Figura 4.16 Diagrama de Amplitud. Opción 1 optimizada

Los resultados de la grafica mostrados en la figura 4.16 se listan en la tabla 4.5

Tabla 4.5 Resultados, opción 1 optimizado.

Frecuencia [Hz]	Amplitud [m]	Ángulo de Fase [°]
201.00	0.255335E-12	91.4064
202.00	0.505945E-12	89.6753
203.00	0.751278E-12	87.9350
204.00	0.990791E-12	86.1877
205.00	0.122395E-11	84.4357
206.00	0.145023E-11	82.6815
207.00	0.166914E-11	80.9280
208.00	0.188020E-11	79.1781
209.00	0.208299E-11	77.4348
210.00	0.227710E-11	75.7013
211.00	0.246220E-11	73.9810
212.00	0.263799E-11	72.2773
213.00	0.280427E-11	70.5937
214.00	0.296086E-11	68.9336
215.00	0.310770E-11	67.3004
216.00	0.324478E-11	65.6973
217.00	0.337215E-11	64.1273
218.00	0.348997E-11	62.5932
219.00	0.359844E-11	61.0976
220.00	0.369784E-11	59.6426
221.00	0.378848E-11	58.2300
222.00	0.387076E-11	56.8614
223.00	0.394509E-11	55.5379
224.00	0.401193E-11	54.2601
225.00	0.407173E-11	53.0285
226.00	0.412501E-11	51.8430
227.00	0.417225E-11	50.7034
228.00	0.421396E-11	49.6090
229.00	0.425064E-11	48.5590
230.00	0.428279E-11	47.5523
231.00	0.431088E-11	46.5875
232.00	0.433542E-11	45.6630
233.00	0.435685E-11	44.7770
234.00	0.437564E-11	43.9273
235.00	0.439223E-11	43.1115
236.00	0.440704E-11	42.3271
237.00	0.442049E-11	41.5708
238.00	0.443296E-11	40.8394
239.00	0.444482E-11	40.1290
240.00	0.445639E-11	39.4356
241.00	0.446797E-11	38.7545
242.00	0.447983E-11	38.0810
243.00	0.449216E-11	37.4100
244.00	0.450515E-11	36.7360
245.00	0.451889E-11	36.0536
246.00	0.453344E-11	35.3572
247.00	0.454882E-11	34.6414
248.00	0.456496E-11	33.9007
249.00	0.458176E-11	33.1301
250.00	0.459907E-11	32.3248
251.00	0.461670E-11	31.4803
252.00	0.463440E-11	30.5927
253.00	0.465192E-11	29.6585
254.00	0.466895E-11	28.6748
255.00	0.468520E-11	27.6392
256.00	0.470035E-11	26.5497
257.00	0.471407E-11	25.4049
258.00	0.472606E-11	24.2039
259.00	0.473601E-11	22.9461
260.00	0.474365E-11	21.6312
261.00	0.474871E-11	20.2593
262.00	0.475098E-11	18.8307
263.00	0.475025E-11	17.3459
264.00	0.474635E-11	15.8054
265.00	0.473917E-11	14.2098
266.00	0.472861E-11	12.5599
267.00	0.471462E-11	10.8562

268.00	0.469718E-11	9.09911
269.00	0.467632E-11	7.28913
270.00	0.465209E-11	5.42647
271.00	0.462458E-11	3.51121
272.00	0.459391E-11	1.54320
273.00	0.456024E-11	-0.477880
274.00	0.452376E-11	-2.55260
275.00	0.448467E-11	-4.68173
276.00	0.444321E-11	-6.86632
277.00	0.439965E-11	-9.10761
278.00	0.435427E-11	-11.4071
279.00	0.430738E-11	-13.7665
280.00	0.425930E-11	-16.1876
281.00	0.421039E-11	-18.6726
282.00	0.416100E-11	-21.2236
283.00	0.411152E-11	-23.8429
284.00	0.406234E-11	-26.5328
285.00	0.401386E-11	-29.2955
286.00	0.396652E-11	-32.1333
287.00	0.392073E-11	-35.0480
288.00	0.387694E-11	-38.0412
289.00	0.383559E-11	-41.1142
290.00	0.379713E-11	-44.2674
291.00	0.376200E-11	-47.5009
292.00	0.373065E-11	-50.8136
293.00	0.370350E-11	-54.2039
294.00	0.368099E-11	-57.6686
295.00	0.366349E-11	-61.2040
296.00	0.365138E-11	-64.8047
297.00	0.364499E-11	-68.4644
298.00	0.364461E-11	-72.1757
299.00	0.365047E-11	-75.9302
300.00	0.366275E-11	-79.7184

CONCLUSIONES

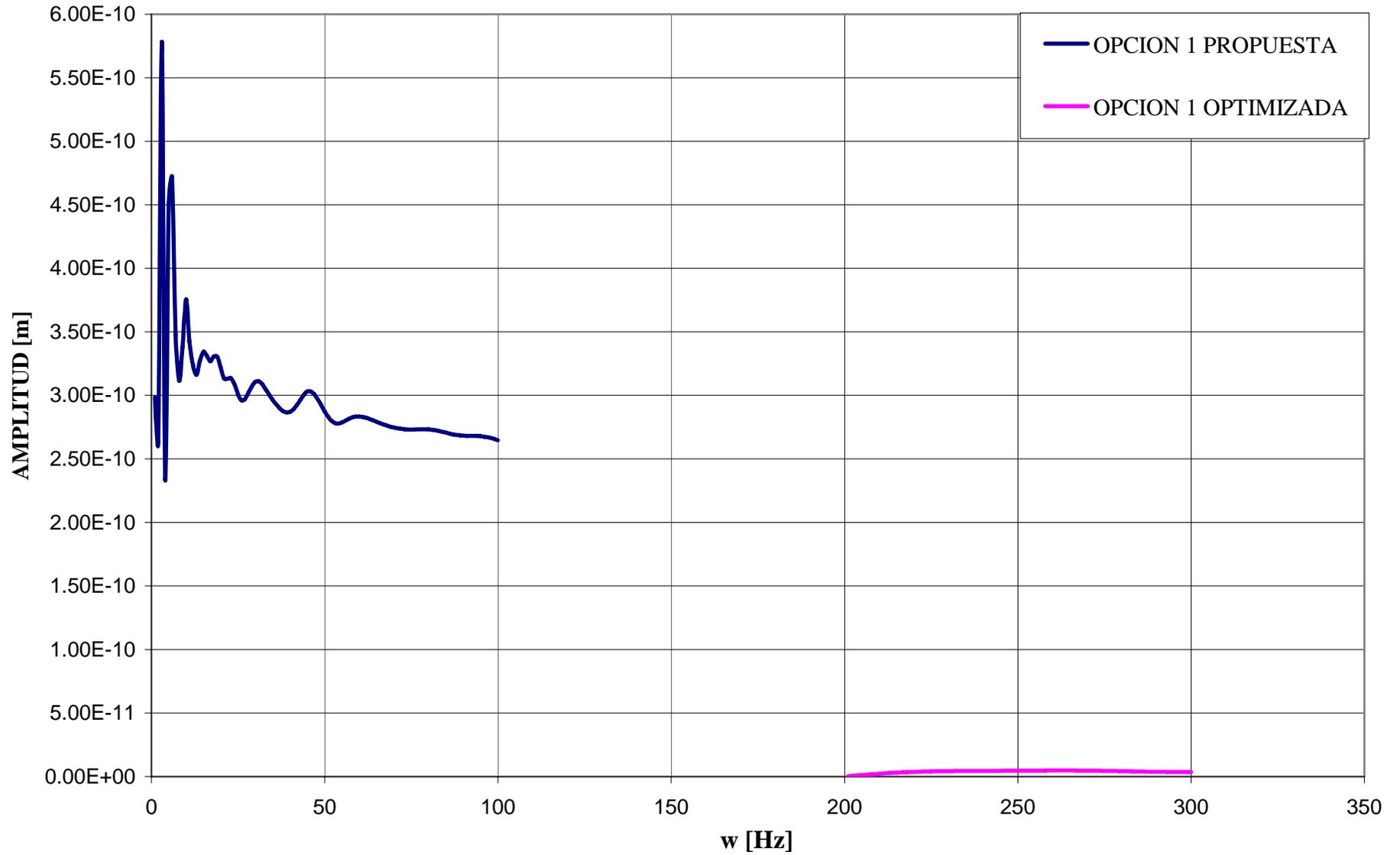
El análisis modal y el análisis de respuesta armónica tienen fundamental importancia en el diseño del sistema de suspensión de un vehículo automotor, las cargas transmitidas desde las ruedas por la irregularidad del camino, pueden conducir a serios problemas de fatiga en otras partes y sistemas del vehículo, así también a la generación de ruido al interior de la cabina disminuyendo la calidad en el confort acústico.

Se ha realizado el análisis de vibraciones en el sistema de suspensión tipo Macpherson que es el sistema más ampliamente utilizado en la actualidad en la industria automotriz, para tal efecto, se empleó el software comercial de Elementos Finitos ANSYS®.

El análisis de vibraciones mecánicas consistió en el análisis modal para determinar las frecuencias naturales del sistema y el análisis de respuesta debida a una excitación armónica en la base. Estos permitieron calcular las amplitudes máximas debidas a la aceleración del sistema, se determinaron también las fuerzas máximas que percibe el cuerpo del vehículo una vez que el sistema de suspensión actúa de filtro en la base.

Podemos concluir que el método de elementos finitos representa una herramienta importante en el análisis de vibraciones especialmente, aplicado a este tipo de geometrías complejas. Los resultados obtenidos pueden utilizarse como primer paso para realizar otros estudios de mayor especialización como estudios de fatiga, análisis de sensibilidad y acentuar en la optimización del diseño.

COMPARACIÓN DE LA RESPUESTA DE LA OPCION 1, PROPUESTA vs OPTIMIZADA



REFERENCIAS

BASTOW Donald, HOWARD Geoffrey, WHITEHEAD John P.
“Car Suspension and Handling”
SAE International 4a Edición
2004 United States of America

DE SILVA Clarence W.
“Vibration Fundamental and Practice”
Taylor & Francis 2a Edición
2007 United States of America

MAOVENI Saeed
“Finite Element Analysis theory and Application with ANSYS”
Pearson Prentice Hall 3a Edición
2008 United States of America

KAMAL Mounir M., WOLF Joseph A.
“Modern Automotive Structural Analysis”
Van Nostrand Reinhold
1982 United States of America

KELLY S. Graham
“Fundamentals of Mechanical Vibrations”
MacGraw-Hill 2a Edición
1993 United States of America

OGATA Katsuhiko
“System Dynamics”
Prentice Hall 3a Edición
1998 United States of America

HARRIS M. Cyril, PIERSON G. Allan
“Harris’ Shock and Vibration Handbook”
MacGraw-Hill 5a Edición
2002 United States of America

CARROLL W. F.
“A Primer for Finite Elements in Elastic Structures”
Edit. Wiley
1999 United States of America

RAO Singiresu S.
“Mechanical Vibrations”
Addison-Wesley 3a Edición
1995 United States of America

GINSBERG Jerry H.
“Mechanical and Structural Vibrations Theory and Applications”
Wiley 1a Edición
2001 United States of America

BORESI Arthur P., SCHMIDT Richard J.
“Advanced Mechanics of Materials”
Wiley 6a Edición
2003 United States of America

JAMES M. I., SMITH G. M., WOLFORD J. C. y WHALEY P. W.
“Vibration of Mechanical and Structural Systems with Microcomputer Applications”
Harper Collis Publishers 2a Edición
1994 United States of America

Technical Paper
PAZ Robert A.
“System Modeling: The Lagrange Equations”
Klipsch School of Electrical and Computer Engineering
June 5, 2001

Technical Paper
LIN Jung-Shan, KANELLAKOPOULOS Ioannis
“Nonlinear Design of Active Suspension”
June 1997

Technical Paper
CHRISTIAN R. GUENTHER AND CORNELIUS T. LEONDES
“Synthesis of a High-speed Tracked Vehicle Suspension System - Part I: Problem Statement, Suspension Structure, and Decomposition”
Abril, 1995

Technical Paper
CHRISTIAN R. GUENTHER AND CORNELIUS T. LEONDES
“Synthesis of a High-speed Tracked Vehicle Suspension System - Part II: Definition and Solution of the Control Problem”
Abril, 1995

Technical Paper
Kisaburo Hayakawa, Kenichiro Matsumoto, Masashi Yamashita, Yoshiaki Suzuki,
Kazuo Fujimori, and Hidenori Kimura
“Robust H -Output Feedback Control of Decoupled Automobile Active Suspension
Systems”
Febrero, 1999

Technical Paper
Marcus Börner , Harald Straky, Thomas Weispfenning, Rolf Isermann
“Model based fault detection of vehicle suspension and hydraulic brake systems”
Institute of Automatic Control, Laboratory of Control Engineering and Process
Automation, Darmstadt University of Technology Landgraf-Georg-Str. 4, D-64283
Darmstadt, Germany
2002

Technical Paper
Seung-Bok Choi , Sang-Soo Han
“H1 control of electrorheological suspension system subjected to parameter
uncertainties”
Smart Structures and Systems Laboratory, Department of Mechanical Engineering, Inha
University, Incheon 402-751, South Korea
2002

Technical Paper
Steffen Gruber , Martin Semsch, Thomas Strothjohann, Bert Breuer
“Elements of a mechatronic vehicle corner”
Department of Automotive Engineering, Darmstadt University of Technology,
Petersenstrasse 30, D-64287 Darmstadt, Germany
2002

Technical Paper
G.Z. Yao, F.F. Yap, G. Chen, W.H. Li, S.H. Yeo
“MR damper and its application for semi-active control of vehicle suspension system”
School of Mechanical & Production Engineering, Nanyang Technological University,
50 Nanyang Avenue, Singapore 639798, Singapore
Marzo 2001

SAE Technical Paper
Keum-Shik Hong, Dong-Seop Jeon and Wan-Suk Yoo, School of Mechanical
Engineering, Pusan National University Pusan, Korea
Hyun Sunwoo, Sang-Yoon Shin and Cheol-Min Kim Daewoo Precision Industries, Ltd.,
Technical Center Pusan, Korea
Byung-Suk Park Korea Atomic Energy Research Institute Taejon, Korea
“A New Model and an Optimal Pole-Placement
Control of the Macpherson Suspension System”
1999

Tesis
Erik Ryan Andersen
“Multibody Dynamics Modeling and System Identification for a Quarter-Car Test Rig
with McPherson Strut Suspension”
Mayo 3 de 2007

Tesis
Christopher A. Paré
“Experimental Evaluation of Semiactive Magneto-Rheological Suspensions for
Passenger Vehicles”
Mayo de 1998

Tesis
Fernando D. Goncalves
“Dynamic Analysis of Semi-Active Control Techniques for Vehicle Applications”
Agosto de 2001

Technical Paper
David Vetturi, Marco Gadola, Danilo Cambiaghi, and Luca Manzo
“Semi-Active Strategies for Racing Car Suspension Control”
1996

ANEXO CAPÍTULO II

FORMULACIÓN VARIACIONAL DE VIBRACIONES MECÁNICAS.

2.1 FORMULACIÓN VARIACIONAL PARA PROBLEMAS HIPERBÓLICOS.

Deduciremos la formulación variacional de los problemas hiperbólicos tales como los gobernados por la ecuación de la onda que en una dimensión podemos expresar como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

En la mecánica del medio continuo una gran mayoría de problemas involucran elementos y/o máquinas consideradas como cuerpos continuos, por ejemplo, el estudio de los modos de vibración axial, transversal o torsional de una flecha de transmisión, conduce al estudio de vibraciones en medios continuos.

Ahora bien, al abordar un problema del medio continuo desde un punto variacional, es necesario deducir antes la formulación variacional del problema. En efecto, vamos a considerar el caso unidimensional seleccionando una barra elástica homogénea e infinitamente larga que sea susceptible de experimentar oscilaciones axiales; es decir, vibración axial o en otras palabras, desplazamientos oscilatorios a lo largo de su eje. Nuestro procedimiento consistirá en deducir la formulación variacional de esta barra continua a partir de un modelo discretizado de ella, y para el cual si conocemos las ecuaciones del movimiento que son las ecuaciones de Euler-Lagrange y refinando cada vez más nuestro modelo discretizado de tal manera que al pasar al límite de una distribución discreta al continuo se tenga la formulación deseada. En efecto, si tomamos como modelo discreto una cadena de masas puntuales acopladas por resortes de masa despreciable y constante de rigidez K , espaciadas una cantidad Δx considerada como constante (figura 2.1).

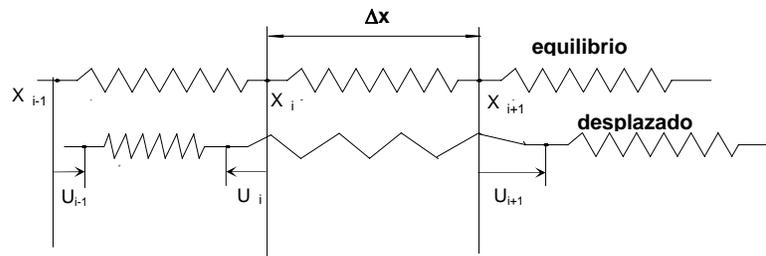


Figura 2.1. Sistema acoplado de resortes, mostrando la posición de equilibrio y el sistema desplazado.

Sí u_i denota el desplazamiento de la partícula i , es decir, del desplazamiento del nodo i de masa Δm , la energía cinética T del sistema de partículas será la suma de las

$$T_i = \frac{1}{2} \Delta m \dot{u}_i^2 :$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i \dot{u}_i^2 ; \quad \text{donde: } \dot{u} = \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (2.2)$$

Por otro lado, la energía potencial para cada una de las partículas es la debida al potencial elástico de las fuerzas de tensión y compresión que experimenta la partícula i (figura 3.2), obteniendo de la misma manera un potencial total V de toda la cadena, para lo cual plantearemos lo siguiente: $-K(u_i - u_{i-1})$ para el sistema en compresión y $K(u_{i+1} - u_i)$ para el mismo en tensión; siendo el desplazamiento neto hacia la derecha de la partícula $/ u_{i+1} - u_i /$ y el correspondiente a la izquierda $/ u_i - u_{i-1} /$. Así entonces, la fuerza actuando sobre la partícula i será:

$$F_i = K(u_{i+1} - u_i) - K(u_i - u_{i-1}). \quad \text{Ley de Hooke} \quad (2.3)$$

esta fuerza F_i puede derivarse de una función de potencial V_i , como es fácil ver de:

$$V_i = \frac{1}{2} K(u_i - u_{i-1})^2 + \frac{1}{2} K(u_{i+1} - u_i)^2 \quad (2.4)$$

derivándola:

$$\frac{\partial V_i}{\partial u_i} = K(u_i - u_{i-1}) - K(u_{i+1} - u_i) \quad (2.5)$$

y observando que:

$$F_i = - \frac{\partial V_i}{\partial u_i} = K(u_{i-1} - u_i) - K(u_i - u_{i+1}) \quad (2.6)$$

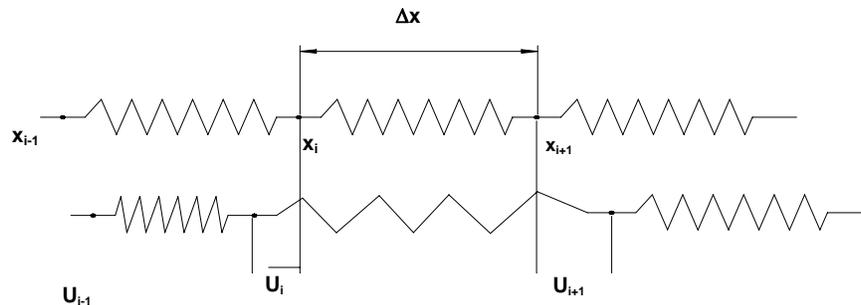


Figura 2.2. Sistema de resortes mostrando puntos de tensión y compresión.

Ahora bien, del hecho de que la función Lagrangiana viene dada por:

$$L = T - V$$

tenemos, para nuestro sistema de partículas que discretizan la barra:

$$L = \frac{1}{2} \sum \Delta m \dot{u}_i^2 - \frac{1}{2} \sum K(u_{i+1} - u_i)^2 - \frac{1}{2} \sum K(u_i - u_{i-1})^2 \quad (2.7)$$

$$\text{Así: } L_i = \frac{1}{2} \Delta x \sum_i \left[\frac{\Delta m}{\Delta x} \dot{u}_i^2 - K \Delta x \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right)^2 - K \Delta x \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \right)^2 \right] = \sum_i \Delta x L_i \quad (2.8)$$

donde L_i es la Lagrangiana de la i -ésima partícula, $L_i = (T_i - V_i)\Delta x$.

$$L_i = L_i(u_i, \dot{u}_i, t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\Delta m}{\Delta x} \dot{u}_i^2 - K \Delta x \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{\Delta x^2} - K \Delta x \frac{(u_i - u_{i-1})^2}{\Delta x^2} \right\} \Delta x \quad (2.9)$$

Así, las ecuaciones de Euler-Lagrange para cada masa puntual i quedan:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{u}_i} \right) - \left(\frac{\partial L_i}{\partial u_i} \right) = 0 \quad (2.10)$$

haciendo cálculos en L_i y substituyendo en la expresión anterior:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{u}_i} \right) = \frac{\Delta m}{\Delta x} \ddot{u}_i$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial u_i} = \frac{\Delta m}{\Delta x} \dot{u}_i$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial u_i} = K \Delta x \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x^2} \right) - K \Delta x \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x^2} \right)$$

obtenemos como la ecuación de Euler-Lagrange para i :

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} \ddot{u}_i + K \Delta x \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x^2} \right) - K \Delta x \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x^2} \right) = 0 \quad (2.11)$$

Ahora vamos a proceder al límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, es decir, refinando la discretización lo que se consigue aumentando el número de partículas a lo largo de la barra y por consiguiente disminuyendo el espacio Δx entre ellas. Esto constituye el meollo del asunto en el modelaje de modelos continuos mediante la aproximación de modelos discretos. Pero

antes de proceder vamos a hacer algunas consideraciones a lo que se refieren algunas cantidades: $\Delta m/\Delta x$ y $K\Delta x$ al pasar al límite $\Delta x \rightarrow 0$.

De la ley de Hooke de relación esfuerzo-deformación, se tiene que:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{(u_{i+1} - u_i)}{\Delta x} & (a) \\ f_i &= K(u_{i+1} - u_i) = K\Delta x \frac{(u_{i+1} - u_i)}{\Delta x} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Las ecuaciones 3.12 representan (a) la deformación y (b) el esfuerzo unitario que experimenta la partícula i en el nodo x_i , de esta manera, al tender al límite $\Delta x \rightarrow 0$, las cantidades $\Delta m/\Delta x$ y $K\Delta x$, representan la densidad $\sigma(x)$, es decir, la constante módulo de Young (E) del material, siendo:

$$\sigma(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} \quad ; \quad E = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}$$

Por otro lado, el nodo i de la cadena x_i , que experimenta un desplazamiento u_i , entonces podemos considerar:

$$u_i = u(x_i, t)$$

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x, t)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x, t)$$

Así las deformaciones unitarias quedarán:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} &= \frac{u(x_i + \Delta x, t) - u(x_i, t)}{\Delta x} \\ \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} &= \frac{u(x_i, t) - u(x_i - \Delta x, t)}{\Delta x} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

que substituidas en las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t) - K\Delta x \frac{[u(x_i + \Delta x, t) - u(x_i, t)]}{\Delta x^2} + K\Delta x \frac{[u(x_i, t) - u(x_i - \Delta x, t)]}{\Delta x^2} = 0 \quad (2.14)$$

procediendo al límite y del hecho de que:

$$\sigma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t) = \lim_{x \rightarrow 0} K \Delta x \left[\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} \right] \quad (2.15)$$

se obtiene que para cada x_i :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial L_i}{\partial u} \right\} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t) - E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t) = 0 \quad (2.16)$$

que es la ecuación de la i -ésima partícula.

$$\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t) - E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t) = 0 \quad (2.17)$$

Por otro lado, con relación a la Lagrangiana, se tiene que:

$$L = \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{\Delta m}{\Delta x} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t) \right)^2 - K \Delta x \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right)^2 \right) \Delta x \quad (2.18)$$

y reemplazando a x_i por x , se tiene en general $L(u, \dot{u}, t)$ como:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{\Delta m}{\Delta x} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t) \right)^2 - K \Delta x \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right)^2 \right) \Delta x = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (2.19)$$

de donde se obtiene:

$$L(u, \dot{u}, t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (2.20)$$

que es la funcional energía para la vibración axial de la barra.

Sin embargo, por conveniencia haremos $\sigma/E = 1/c^2$ de tal manera que la Lagrangiana adopte la forma:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (2.21)$$

Ahora bien, el principio de Hamilton dice que, de entre todas las trayectorias posibles en que el sistema se traslada durante los tiempos t_1 y t_2 , existe una trayectoria tal que la funcional: $I[u] = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ satisface a: $\delta I[u] = 0$ (2.22)

Además, sabemos que el principio de Hamilton es una condición necesaria y suficiente para que se verifiquen las ecuaciones de Euler-Lagrange del movimiento, entonces se tiene que: la trayectoria $u(x, t)$ representa un valor estacionario de la energía $I(u)$, esto es:

$$\delta I(u) = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dt = 0 \quad (2.23)$$

nótese que el término $-1/2$ no afecta en absoluto el proceso de derivación de $I(u)$. Por lo que podemos tomar como expresión definitiva para nuestra funcional a:

$$I(u) = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right\} dx dt = 0 \quad (2.24)$$

lo que representa la funcional energía de nuestro sistema continuo o sea, la cuerda elástica homogénea de longitud l y cuya ecuación es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad ; \quad 0 < x < l \quad ; \quad 0 < t$$

donde: $c^2 = T/\sigma$ representa la razón de la tensión de la cuerda a su masa por unidad de longitud, la cual, para un problema real, estará sujeta a condiciones tanto de frontera como iniciales.

$$\text{Condiciones de frontera: } u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad (2.25)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Condiciones iniciales: } u(x, 0) = f(x) \quad ; \quad 0 < x < l \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \quad ; \quad 0 < x < l \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

La energía cinética está dada por:

$$T = \frac{1}{2} \sigma \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.27(a))$$

y la energía potencial será entonces:

$$V = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.27(b))$$

Ahora bien, el principio de Hamilton implica la verificación de las ecuaciones de Euler-Lagrange para el sistema de partículas discretizado de nuestra barra sometida a vibración axial:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 \text{ y cuya funcional Energía } I[u, \dot{u}, t] \text{ corresponde a la ecuación (2.1)}$$

bajo condiciones iniciales (2.25) y de frontera (2.26):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad ; \quad 0 < x < l \quad ; \quad 0 < t < \infty$$

que es una ecuación diferencial hiperbólica, donde el operador diferencial: $D[] = \frac{\partial^2 []}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 []}{\partial t^2}$ es un operador Hiperbólico, lo que significa que $I(u)$ no necesariamente tiene un valor extremal (maximal o minimal), sino que apenas representa un valor estacionario de $I(u)$, o sea, solución a $\delta I(u) = 0$. A diferencia de las ecuaciones Elípticas en donde el operador diferencial era definido positivo y por consiguiente aseguraba que toda solución u de ella, representaba un valor extremal de $I(u)$. Esto significa que los algoritmos numéricos basados en este funcional no necesariamente convergen, como es el caso de los diferenciales elípticos definidos positivos. Esto vale en general, para los problemas de ingeniería con valores iniciales, no existe una formulación variacional que asegure valores extremales, sin embargo, sirven en el sentido de que podemos determinar soluciones aproximadas a la solución del problema, es decir, a los valores estacionarios de $I(u)$. Para este fin se requiere que las funciones u sobre las que se este ensayando la solución deban de satisfacer las condiciones de frontera: $u(0,t) = u(l,t) = 0$ en forma esencial.

2.2 LA FORMULACIÓN VARIACIONAL LAGRANGIANA Y EL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

2.2.1 Cuerpos con geometría regular.

A fin de deducir las ecuaciones generales del método del elemento finito para el análisis de vibraciones lineales, continuaremos nuestra línea de exposición al analizar una barra prismática (Figura 2.3) de longitud L y de sección transversal A susceptible de experimentar desplazamientos periódicos a lo largo de su eje x ; es decir, vibraciones axiales.

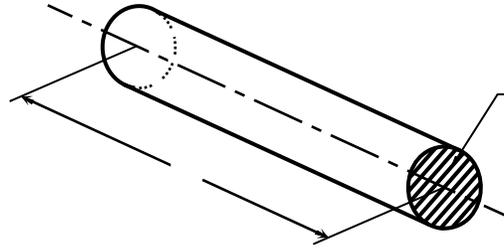


Figura 2.3. Barra prismática susceptible de vibraciones axiales.

Para esto, vamos a dividir nuestro modelo $\bar{\Omega}$, o sea la barra, en una familia de elementos:

$$P(\bar{\Omega}) = \{\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \dots, \Delta^{(E)}\} \quad (2.28)$$

Esto se logra seleccionando una serie de puntos x_1, x_2, \dots, x_p a lo largo del eje de la barra con cierto criterio de ingeniería y que depende de $\bar{\Omega}$ (Figura 2.4).

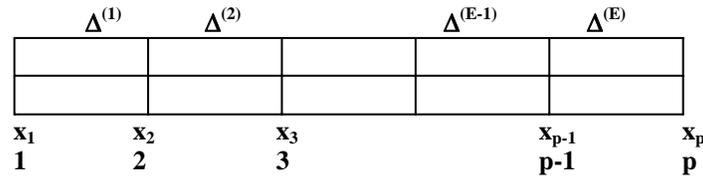


Figura 2.4. Representación con elementos finitos.

donde cada uno de los elementos $\Delta^{(e)}$ tiene por extremos i, j (figura 2.5) y de masa $\Delta m^{(e)} = \rho^{(e)} A^{(e)} L^{(e)}$. Donde $\rho^{(e)}, A^{(e)}, L^{(e)}$ son respectivamente la densidad, área de sección transversal y longitud del elemento $\Delta^{(e)}$. Siendo que nuestro estudio es el analizar los desplazamientos axiales de la barra, esto equivale a analizar los desplazamientos de cada uno de los $\Delta^{(e)}$ y por consiguiente el análisis de los desplazamientos axiales que sufren los nodos i, j de cada elemento $\Delta^{(e)}$.

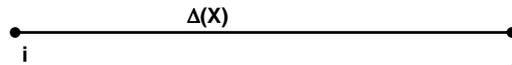


Figura 2.5. Representación de un elemento con sus nodos.

esto se logra asumiendo una cantidad variable que nos aproxime linealmente los desplazamientos que experimentan los puntos x del elemento $\Delta^{(e)}$ en el instante t . Sea $u(x, t)$ el desplazamiento del punto x en el instante t , como $x_i \leq x \leq x_j$, donde $L^{(e)} = x_j - x_i$ denotaremos a $\tilde{U}^{(e)}(x, t)$ los desplazamientos del elemento $\Delta^{(e)}$. De esta manera:

$$\tilde{U}^{(e)}(x, t) = N_i^{(e)}(x)U_i(t) + N_j(x)U_j(t) \quad (2.29)$$

será un polinomio de interpolación lineal local que aproximará los desplazamientos de los puntos $x \in \Delta^{(e)}$ en el instante t . Las funciones $N_i^{(e)}, N_j^{(e)}$ conocidas como las funciones de forma del polinomio, $\tilde{U}^{(e)}(x, t)$, estas funciones vienen expresadas como:

$$\left. \begin{aligned} N_i^{(e)}(x) &= \left(1 - \frac{x}{L^{(e)}}\right) \quad ; \quad 0 \leq x \leq L^{(e)} \\ N_j^{(e)}(x) &= \frac{x}{L^{(e)}} \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

y tienen las siguientes propiedades:

$$\left. \begin{aligned} N_i^{(e)}(x_j) &= N_j^{(e)}(x_i) = 0 \\ N_i^{(e)}(x_i) &= N_j^{(e)}(x_j) = 1 \\ N_i^{(e)}(x) &= N_j^{(e)}(x) = 1 \quad ; \quad x_i \leq x \leq x_j \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

resultando que los desplazamientos $\tilde{U}^{(e)}(x, t)$ en los nodos i, j de $\Delta^{(e)}$ sean:

$$\begin{aligned} U^{(e)}(x_i, t) &= N_i^{(e)}(x_i)U_i(t) + N_j^{(e)}(x_i)U_j(t) = U_i(t) \\ U^{(e)}(x_j, t) &= N_i^{(e)}(x_j)U_i(t) + N_j^{(e)}(x_j)U_j(t) = U_j(t) \end{aligned}$$

donde $U_i(t), U_j(t)$ son los valores nodales en el instante t , o valores nodales dinámico del polinomio $\tilde{U}^{(e)}(x, t)$. También observe que:

$$U^{(e)}(x_i, t) = [N_i^{(e)}(x), N_j^{(e)}(x)] \begin{Bmatrix} U_i(t) \\ U_j(t) \end{Bmatrix} = [N^{(e)}(x)] \{U(t)\} \quad (2.32)$$

permite determinar la velocidad de los desplazamientos de los nodos i, j para cada $\Delta^{(e)}$.

$$\dot{U}^{(e)}(x_i, t) = \frac{\partial U^{(e)}}{\partial t}(x, t) = [N_i^{(e)}(x), N_j^{(e)}(x)] \begin{Bmatrix} \dot{U}_i(t) \\ \dot{U}_j(t) \end{Bmatrix} = [N^{(e)}(x)] \{\dot{U}(t)\} \quad (2.33)$$

y por consiguiente la energía cinética de la masa $\Delta m^{(e)}$, llamada también energía cinética local, de cada elemento $\Delta^{(e)}$ queda expresada por:

$$T^{(e)}(t) = \frac{1}{2} \int_0^{L^{(e)}} \Delta m^{(e)} \left[\frac{\partial U^{(e)}}{\partial t}(x, t) \right]^2 dx \quad (2.34)$$

En cuanto a su energía potencial $V^{(e)}(t)$ que es el trabajo realizado por las fuerzas elásticas la variación $\tilde{U}^{(e)}(x, t)$ con relación a x, t :

$$V^{(e)}(t) = \frac{1}{2} \int_0^{L^{(e)}} EA^{(e)} \left[\frac{\partial U^{(e)}}{\partial t}(x, t) \right]^2 dx \quad (2.35)$$

Estas expresiones locales de las energías cinética y potencial pueden ser expresadas también en forma interpolada:

$$T^{(e)}(t) = \frac{1}{2} \int_0^{L^{(e)}} \Delta m^{(e)} \left[\left(1 - \frac{x}{L^{(e)}} \right) \dot{U}_i(t) + \frac{x}{L^{(e)}} \dot{U}_j(t) \right]^2 dx = \frac{1}{2} \frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{3} \left[\dot{U}_i^2(t) + \dot{U}_i(t) \dot{U}_j(t) + \dot{U}_j^2(t) \right] \quad (2.36)$$

$$V^{(e)}(t) = \frac{1}{2} \int_0^{L^{(e)}} EA^{(e)} \left[\left[\frac{dN_i^{(e)}}{dx}, \frac{dN_j^{(e)}}{dx} \right] \begin{Bmatrix} U_i(t) \\ U_j(t) \end{Bmatrix} \right]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{L^{(e)}} EA^{(e)} \left[-\frac{U_i(t)}{L^{(e)}}, \frac{U_j(t)}{L^{(e)}} \right]^2 dx = \frac{1}{2} \frac{EA^{(e)}}{L^{(e)}} \left[U_i^2(t) - 2U_i(t)U_j(t) + U_j^2(t) \right] \quad (2.37)$$

Ahora bien, la energía local asociada al elemento $\Delta^{(e)}$ que nos permite establecer las ecuaciones del movimiento es la función de Lagrange $L^{(e)}(t)$:

$$L^{(e)}(t) = T^{(e)}(t) - V^{(e)}(t) \quad (2.38)$$

$$L^{(e)}(t) = \frac{1}{2} \frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{3} \left[\dot{U}_i^2(t) + \dot{U}_i(t) \dot{U}_j(t) + \dot{U}_j^2(t) \right] - \frac{1}{2} \frac{EA^{(e)}}{L^{(e)}} \left[U_i^2(t) - 2U_i(t)U_j(t) + U_j^2(t) \right] \quad (2.39)$$

así, esta Lagrangiana local $L^{(e)}(t) = L^{(e)}(U_i, \dot{U}_i, U_j, \dot{U}_j, t)$ permitirá establecer las ecuaciones de Euler-Lagrange para cada elemento $\Delta^{(e)}$. Entonces, calculando localmente se obtiene:

$$\frac{\partial L^{(e)}}{\partial U_i} = -\frac{EA^{(e)}}{L^{(e)}} U_i(t) + \frac{EA^{(e)}}{L^{(e)}} U_j(t)$$

$$\frac{\partial L^{(e)}}{\partial \dot{U}_i} = \frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{3} \dot{U}_i(t) + \frac{1}{2} \frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{3} \dot{U}_j(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^{(e)}}{\partial \dot{U}_i} \right) = \frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{3} \ddot{U}_i(t) + \frac{1}{2} \frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{3} \ddot{U}_j(t)$$

$$\frac{\partial L^{(e)}}{\partial \dot{U}_j} = \frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{3} \dot{U}_j(t) + \frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{3} \dot{U}_i(t)$$

$$\frac{\partial L^{(e)}}{\partial U_j} = \frac{EA^{(e)}}{L^{(e)}} U_i(t) - \frac{EA^{(e)}}{L^{(e)}} U_j(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^{(e)}}{\partial \dot{U}_j} \right) = \frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{3} \ddot{U}_j(t) + \frac{1}{2} \frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{3} \ddot{U}_i(t)$$

Substituyendo en las ecuaciones de Euler-Lagrange locales, para los nodos i, j , tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^{(e)}}{\partial \dot{U}_i} \right) - \frac{\partial L^{(e)}}{\partial U_i} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^{(e)}}{\partial \dot{U}_j} \right) - \frac{\partial L^{(e)}}{\partial U_j} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.40) \quad (3.40)$$

obteniéndose:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{3} \ddot{U}_i(t) + \frac{1}{2} \frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{3} \ddot{U}_j(t) + \frac{EA^{(e)}}{L^{(e)}} U_i(t) - \frac{EA^{(e)}}{L^{(e)}} U_j(t) &= 0 \\ \frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{3} \ddot{U}_j(t) + \frac{1}{2} \frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{3} \ddot{U}_i(t) - \frac{EA^{(e)}}{L^{(e)}} U_i(t) + \frac{EA^{(e)}}{L^{(e)}} U_j(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

que en su forma matricial queda:

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{3} & \frac{1}{2} \frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{3} \\ \frac{1}{2} \frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{3} & \frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{3} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \ddot{U}_i(t) \\ \ddot{U}_j(t) \end{Bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} \frac{EA^{(e)}}{L^{(e)}} & -\frac{EA^{(e)}}{L^{(e)}} \\ -\frac{EA^{(e)}}{L^{(e)}} & \frac{EA^{(e)}}{L^{(e)}} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} U_i(t) \\ U_j(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

o bien:

$$\frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_i(t) \\ \ddot{U}_j(t) \end{Bmatrix} + \frac{EA^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i(t) \\ U_j(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

donde:

$$[\Delta m^{(e)}] = \frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$[K^{(e)}] = \frac{EA^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Las matrices de masa y rigidez local y los vectores de posición y aceleración de los nodos i, j del elemento $\Delta^{(e)}$ en t son:

$$\left. \begin{aligned} \{\ddot{U}(t)\} &= \begin{Bmatrix} \ddot{U}_i(t) \\ \ddot{U}_j(t) \end{Bmatrix} \\ \{U(t)\} &= \begin{Bmatrix} U_i(t) \\ U_j(t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

Finalmente, las ecuaciones del movimiento locales son:

$$[\Delta m^{(e)}] \{\ddot{U}(t)\} + [K^{(e)}] \{U(t)\} = \{0\} \quad (2.47)$$

ecuación que es conocida como oscilación libre de los nodos i, j del elemento $\Delta^{(e)}$.

Para el caso en que el movimiento se viera sujeto a fuerzas de fricción o disipativas del tipo Rayleigh, tendríamos para ese elemento $\Delta^{(e)}$ la expresión de la fuerza de disipación de Rayleigh:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left\{ N_i^{(e)}(x) \left(\frac{\partial U_i(t)}{\partial t} \right)^2 + N_j^{(e)}(x) \left(\frac{\partial U_j(t)}{\partial t} \right)^2 \right\} \\ F^{(e)} &= \frac{1}{2} (\alpha_i \dot{U}_i^2 + \alpha_j \dot{U}_j^2) \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde:

$$-\frac{\partial F^{(e)}}{\partial \dot{U}_j} = -\alpha_j \dot{U}_j \quad ; \quad -\frac{\partial F^{(e)}}{\partial \dot{U}_i} = -\alpha_i \dot{U}_i$$

que serán las fuerzas de fricción de los nodos i, j , de esta manera las ecuaciones de Euler-Lagrange quedan:

$$\delta W = \left\{ \int_0^{L^{(e)}} f^{(e)}(x, t) \left(1 - \frac{x}{L^{(e)}} \right) dx + f_i^{(e)}(t) \right\} \delta U_i(t) + \left\{ \int_0^{L^{(e)}} \frac{x}{L^{(e)}} dx + f_j^{(e)}(t) \right\} \delta U_j(t) \quad (2.49(a))$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^{(e)}}{\partial \dot{U}_j} \right) - \left(\frac{\partial L^{(e)}}{\partial U_j} \right) + \frac{\partial F^{(e)}}{\partial \dot{U}_j} = 0 \quad (2.49(b))$$

o expresadas en forma matricial:

$$[\Delta m^{(e)}] \{\ddot{U}(t)\} + [\alpha^{(e)}] \{\dot{U}(t)\} + [K^{(e)}] \{U(t)\} = \{0\} \quad (2.50)$$

conocida como la ecuación de las oscilaciones amortiguadas.

Por último, el caso en que existen fuerzas externas y no conservativas, que fuerzan al elemento $\Delta^{(e)}$ a oscilar. Estas fuerzas las podemos representar por $f(x, t)$, donde $f(x, t)$ comprende la fuerza distribuida en el elemento $\Delta^{(e)}$, digamos $f(x, t)$ y las fuerzas en los extremos i, j del elemento producidas por los elementos adyacentes $\Delta^{(e-1)}$, digamos $f_i(t), f_j(t)$. Para determinar la expresión de las fuerzas generalizadas $Q_i(t), Q_j(t)$ en los nodos del elemento $\Delta^{(e)}$, consideremos un desplazamiento virtual $\delta U^{(e)}(x, t)$ del elemento $\Delta^{(e)}$, el cual vendrá expresado por los desplazamientos virtuales de los nodos i, j , es decir:

$$\delta U^{(e)}(x, t) = N_i^{(e)}(x) \delta U_i(t) + N_j^{(e)}(x) \delta U_j(t) \quad (2.51)$$

De acuerdo con el principio de D'Alambert el trabajo desarrollado por las fuerzas externas sobre el sistema para cualquier desplazamiento virtual debe ser nulo, entonces:

$$\delta W = f^{(e)}(x, t) \delta U^{(e)}(x, t) = f^{(e)}(x, t) \delta U^{(e)}(x, t) + f_i^{(e)} \delta U_i(t) + f_j^{(e)} \delta U_j(t) \quad (2.52)$$

$$\delta W = \int_0^{L^{(e)}} f^{(e)}(x, t) \left[\left(1 - \frac{x}{L^{(e)}} \right) \delta U_i(t) + \frac{x}{L^{(e)}} \delta U_j(t) \right] dx + f_i^{(e)} \delta U_i(t) + f_j^{(e)} \delta U_j(t)$$

$$\delta W = \left\{ \int_0^{L^{(e)}} f^{(e)}(x, t) \left(1 - \frac{x}{L^{(e)}} \right) dx + f_i^{(e)}(t) \right\} \delta U_i(t) + \left\{ \int_0^{L^{(e)}} \frac{x}{L^{(e)}} dx + f_j^{(e)}(t) \right\} \delta U_j(t) \quad (2.53)$$

$$\delta W = Q_i(t) \delta U_i(t) + Q_j(t) \delta U_j(t) \quad (2.54)$$

Donde:

$$Q_i(t) = \int_0^{L^{(e)}} f^{(e)}(x,t) \left(1 - \frac{x}{L^{(e)}}\right) dx + f_i^{(e)}(t) \quad (2.55(a))$$

$$Q_j(t) = \int_0^{L^{(e)}} \frac{x}{L^{(e)}} dx + f_j^{(e)}(t) \quad (2.55(b))$$

y tomando:

$$Q(t) = \begin{Bmatrix} Q_i(t) \\ Q_j(t) \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

finalmente, la ecuación para el caso de las oscilaciones amortiguadas y forzadas queda expresada como:

$$[\Delta m^{(e)}] \{\ddot{U}(t)\} + [\alpha^{(e)}] \{\dot{U}(t)\} + [K^{(e)}] \{U(t)\} = \{Q^{(e)}(t)\} \quad (2.57)$$

2.2.2 Cuerpos con geometría no lineal.

Para este caso la barra $\bar{\Omega}$ no es de sección transversal constante A , sino que cambia conforme varía el punto x sobre el eje de la barra (Figura 2.6).

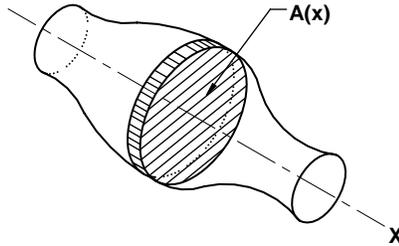


Figura 2.6. Cuerpo con geometría no lineal.

Nuestro modelo, entonces, será el siguiente:

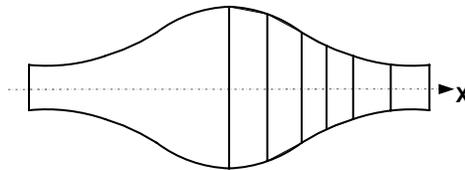


Figura 2.7. Modelo con elementos finitos.

Debido a la simetría geométrica del problema, solo la parte de la derecha es aproximada por elementos de la forma de sección constante y variable (figura 2.8), el primero $A^{(e)}(x)$ es función lineal de x , el segundo $A^{(e)} = cte.$, y es el caso que ya se ha tratado. De manera que deduciremos las ecuaciones del movimiento para el caso de sección variable $A^{(e)}(x)$.

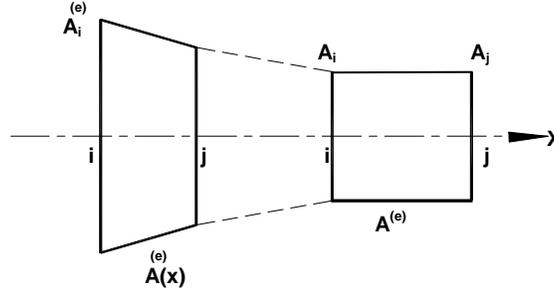


Figura 2.8. Aproximación geométrica para elementos finitos.

Observemos que tan solo basta modificar las cantidades $\Delta m^{(e)}(x) = \rho^{(e)} A^{(e)}(x) L^{(e)}$; $EA^{(e)}(x)$ que dependen de $A^{(e)}(x)$. Ambas cantidades pueden ser modificadas con tan solo tomar por $A^{(e)}(x)$ a $\bar{A}^{(e)}$, donde:

$$\bar{A}_i^{(e)} = \frac{A_i^{(e)} + A_j^{(e)}}{2} \quad (2.58)$$

En efecto, reemplazando:

$$\Delta m^{(e)}(x) = \rho^{(e)} A^{(e)}(x) L^{(e)}$$

$$\text{con: } A^{(e)}(x) = N_i^{(e)}(x) A_i^{(e)} + N_j^{(e)}(x) A_j^{(e)}$$

en la integral:

$$\Delta m^{(e)} = \int_0^{L^{(e)}} \rho^{(e)} \left[N_i^{(e)}(x) A_i^{(e)} + N_j^{(e)}(x) A_j^{(e)} \right] dx \quad (2.59)$$

$$\Delta m^{(e)} = \int_0^{L^{(e)}} \rho^{(e)} \left\{ \left(1 - \frac{x}{L^{(e)}} \right) A_i^{(e)} + \frac{x}{L^{(e)}} A_j^{(e)} \right\} dx = \int_0^{L^{(e)}} \left[\rho^{(e)} A_i^{(e)} - \frac{\rho^{(e)} x}{L^{(e)}} A_i^{(e)} + \frac{\rho^{(e)} x}{L^{(e)}} A_j^{(e)} \right] dx$$

$$\Delta m^{(e)} = \rho^{(e)} A_i^{(e)} x \Big|_0^{L^{(e)}} - \frac{\rho^{(e)} x^2}{2L^{(e)}} A_i^{(e)} \Big|_0^{L^{(e)}} + \frac{1}{2} \frac{\rho^{(e)} x^2}{2L^{(e)}} A_j^{(e)} \Big|_0^{L^{(e)}}$$

$$\Delta m^{(e)} = \rho^{(e)} A_i^{(e)} L^{(e)} - \frac{\rho^{(e)} A_i^{(e)} L^{(e)}}{2} + \frac{\rho^{(e)} A_j^{(e)} L^{(e)}}{2} = \frac{\rho^{(e)} A_i^{(e)} L^{(e)}}{2} + \frac{\rho^{(e)} A_j^{(e)} L^{(e)}}{2}$$

$$\Delta m^{(e)} = \rho^{(e)} \frac{A_i^{(e)} + A_j^{(e)}}{2} L^{(e)} = \rho^{(e)} \bar{A}^{(e)} L^{(e)} \quad (2.60)$$

De donde:

$$\Delta m^{(e)} = \rho^{(e)} \bar{A}^{(e)} L^{(e)}$$

que es la misma expresión del caso de sección constante con tan solo tomar $\bar{A}^{(e)}$ por $A^{(e)}$; esto nos permite tomar las mismas ecuaciones que el caso anterior con tan solo tomar $\bar{A}^{(e)}$ por $A^{(e)}$, se llamó $[\bar{\Delta}m^{(e)}]$ a la matriz masa del elemento $\Delta^{(e)}$ obtenida de esta forma y $[\bar{K}^{(e)}]$ la matriz rigidez obtenida reemplazando en $EA^{(e)}$ por $E\bar{A}^{(e)}$, entonces:

$$[\bar{\Delta}m^{(e)}] \{\ddot{U}(t)\} + [\alpha^{(e)}] \{\dot{U}(t)\} + [\bar{K}^{(e)}] \{U(t)\} = \{Q^{(e)}(t)\} \quad (2.61)$$

representa la ecuación del movimiento de oscilaciones forzadas y amortiguadas del elemento $\Delta^{(e)}$ cuando su sección no es constante.

Es claro que en una red fina, es decir, con suficientes elementos (Figura 2.9), la aproximación lineal de $\Delta^{(e)}$ al elemento sección de la barra es mayor cuanto mayor es el número de nodos en que se parta la longitud de la flecha.

En cuanto al ensamble de los elementos $\Delta^{(e)}$ en toda la estructura que constituyen $\bar{\Omega}$.

$$\bar{\Omega} = \sum_{e=1}^E \Delta^{(e)}$$

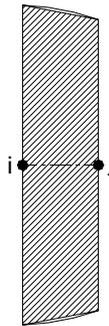


Figura 2.9. Elemento finito mostrando los nodos i, j.

Mostramos, mediante el caso de oscilaciones libres:

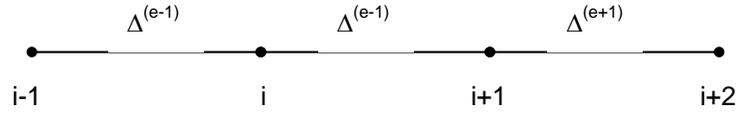


Figura 3.10.

Para el elemento $\Delta^{(e)}$ de extremos $i-1, i$ se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta m^{(e-1)} L^{(e-1)}}{3} \ddot{U}_i(t) + \frac{1}{2} \frac{\Delta m^{(e-1)} L^{(e-1)}}{3} \ddot{U}_{i-1}(t) + \frac{EA^{(e-1)}}{L^{(e-1)}} U_i(t) - \frac{EA^{(e-1)}}{L^{(e-1)}} U_{i-1}(t) &= 0 \\ \frac{\Delta m^{(e-1)} L^{(e-1)}}{3} \ddot{U}_{i-1}(t) + \frac{1}{2} \frac{\Delta m^{(e-1)} L^{(e-1)}}{3} \ddot{U}_i(t) + \frac{EA^{(e-1)}}{L^{(e-1)}} U_{i-1}(t) - \frac{EA^{(e-1)}}{L^{(e-1)}} U_i(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$

y para el elemento $\Delta^{(e)}$ de extremos $i, i+1$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{3} \ddot{U}_{i+1}(t) + \frac{1}{2} \frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{3} \ddot{U}_i(t) + \frac{EA^{(e)}}{L^{(e)}} U_{i+1}(t) - \frac{EA^{(e)}}{L^{(e)}} U_i(t) &= 0 \\ \frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{3} \ddot{U}_i(t) + \frac{1}{2} \frac{\Delta m^{(e)} L^{(e)}}{3} \ddot{U}_{i+1}(t) + \frac{EA^{(e)}}{L^{(e)}} U_i(t) - \frac{EA^{(e)}}{L^{(e)}} U_{i+1}(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

Con relación a las matrices de masa $[\Delta m^{(e-1)}]$ y $[\Delta m^{(e)}]$, quedando sumadas $[\Delta m^{(e-1)}] + [\Delta m^{(e)}]$ dentro de una matriz de orden $p \times p$, como sigue:

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \cdot \\
 \dots & \cdot \\
 \dots & \cdot \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \cdot \\
 \dots & \cdot \\
 \dots & \cdot \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 U_1(t) \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 U_{i-1}(t) \\
 U_i(t) \\
 U_{i+1}(t) \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 U_p(t)
 \end{bmatrix}$$

(2.64)

De manera similar para $[K^{(e-1)}] + [K^{(e)}]$; Si definimos a las matrices de rigidez y masa totales de la barra, por:

$$\left. \begin{aligned} [K] &= \sum_{e=1}^E K^{(e)} \\ [M] &= \sum_{e=1}^E \Delta m^{(e)} \end{aligned} \right\} \quad (2.65)$$

la función de disipación de Rayleigh: $F = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \{ \alpha_i^e \dot{U}_i^2(t) + \alpha_j^e \dot{U}_j^2(t) \}$ (2.66)

donde la matriz de amortiguamiento como: $[\alpha] = \sum_{e=1}^E [\alpha^{(e)}]$

y por $\{Q(t)\}$ la matriz global de las fuerzas generalizadas:

$$\left\{ \begin{aligned} Q_i^{(e)}(t) \\ Q_j^{(e)}(t) \end{aligned} \right\} = Q^{(e)}(t) \quad (2.67)$$

Entonces, la ecuación general del movimiento de todos los nodos de la barra será:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [\alpha]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{Q(t)\} \quad (2.68)$$

donde, $[M]$, $[\alpha]$ y $[K]$ son matrices de $p \times p$, mientras $\{Q(t)\}$ es una matriz de $p \times 1$.

De las expresiones (2.36) y (2.37) para $T^{(e)}(t)$, $V^{(e)}(t)$ se obtienen las energías cinética y potencial:

$$\left. \begin{aligned} T(t) &= \sum_{e=1}^E T^{(e)} \\ V(t) &= \sum_{e=1}^E V^{(e)} \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

Como $L = T(t) - V(t)$ es la Lagrangiana, finalmente obtenemos la ecuación de Lagrange correspondiente a la barra total $\bar{\Omega}$ como un continuo.:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{U}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial U} \right) + \frac{\partial F}{\partial \dot{U}} = Q(t) \quad (2.70)$$

2.3 EL MÉTODO DE RITZ-RAYLEIGH.

El método de Ritz-Rayleigh consiste en aproximar numéricamente la solución de una ecuación diferencial o integral dada, bajo condiciones iniciales o de frontera, cuando se ha determinado explícitamente la expresión de la energía del sistema de una manera funcional, la cual es evaluada en la solución numérica propuesta y así poder determinar en los puntos críticos de esta funcional derivándola e igualándola a cero. En realidad lo que se obtiene son los coeficientes de la expresión numérica de la posible solución, que para el caso dinámico, como enseguida lo veremos a través de la aplicación a la membrana vibrante, $\bar{\Omega} \subset R^2$.

Sean $\chi_1(x, y), \chi_2(x, y), \dots, \chi_n(x, y)$ una familia finita de funciones base, las cuales son normales y linealmente independientes tales que el espacio $E^n = \langle \psi_1, \dots, \psi_n \rangle$ es el espacio de todas las funciones definidas en $\bar{\Omega}$ que son combinaciones lineales de las funciones base $\psi_i(x, y)$, espacio en el cual es buscada la solución $\tilde{u}(x, y)$ de aproximación, a la solución $u(x, y)$ exacta del problema planteado. De esta manera: $\tilde{u}(x, y) = \sum_{i=1}^n C_i \psi_i(x, y)$ será la función a determinar del problema planteado en $\bar{\Omega} \subset R^2$.

$$Lu = f \text{ en } \Omega \quad (2.71)$$

$$Bu = g \text{ en } \angle\Omega \quad (2.72)$$

cuya funcional Energía $I[u]$ está determinada explícitamente como:

$$I[u] = \int_{\Omega} (uLu - 2fu) d\Omega + \int_{\Omega} (uLv - vLu) d\Omega \quad (2.73)$$

donde v es una función que satisface las condiciones de frontera (3.102) del problema dado, dichas condiciones comprenden en general a las condiciones de frontera tipo Dirichlet y Mixta, esta última a su vez, considera como un caso particular a la condición de Neumann. Si $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ donde Γ_1, Γ_2 y Γ_3 significan respectivamente la parte de $\angle\Omega$ que satisface las condiciones de frontera del tipo Dirichlet, Neumann o Mixta. Por la consideración anterior, solo serán consideradas Γ_1 y Γ_3 , es decir:

$$Lu = f \text{ en } \Omega \quad (2.71)$$

$$Bu = \begin{cases} u|_{\Gamma_1} = g_1(s) \\ \nabla u \circ \hat{n} + \sigma(s)u|_{\Gamma_3} = g_3(s) \end{cases} \quad (2.72)$$

donde, haciendo $\sigma(s) \equiv 0$ se obtiene:

$$Bu = \nabla u \circ \hat{n}|_{\Gamma_2} = g_2(s) \text{ como un caso particular del tipo mixto.}$$

Explícitamente hablando, la funcional (2.73) queda:

$$I[u] = \int_{\Omega} (uLu - 2fu) d\Omega + \int_{\Omega} (uLv - vLu) d\Omega \quad (2.73)$$

Ahora bien, como debemos determinar los puntos críticos de (2.73), que son las soluciones de (2.71) bajo (2.72), derivamos la expresión anterior y la igualamos a cero, es decir:

$$\frac{dI[u]}{du} = 0 \quad (2.74)$$

de donde es posible determinar a u , la cual es la solución de (2.71) bajo (2.72). El proceso de Ritz-Rayleigh consiste en resolver (2.74) cuando u es substituida por \tilde{u} :

$$I[\tilde{u}] = I\left[\sum_{i=1}^n C_i \psi_i\right] = I[C_1, C_2, C_3, \dots, C_{n-1}, C_n] \quad (2.75)$$

donde: $\tilde{u}(x, y) = \sum_{i=1}^n C_i \psi_i(x, y)$. La derivación de $I[u]$ con relación a \tilde{u} es equivalente al sistema de derivadas parciales $\frac{\partial I[C_1, C_2, \dots, C_n]}{\partial C_i} = 0$ con $0 \leq i \leq n$, que debe ser resuelto para C_1, C_2, \dots, C_n , los cuales definen en forma única a la función $\tilde{u}(x, y)$.

En efecto, evaluemos a $I[u]$ en \tilde{u} :

$$\begin{aligned} I[\tilde{u}] &= I[C_1, C_2, \dots, C_n] = \int_{\Omega} \left\{ \left(\sum_{i=1}^n C_i \psi_i \right) L \left(\sum_{i=1}^n C_i \psi_i \right) - 2f \left(\sum_{i=1}^n C_i \psi_i \right) \right\} d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \left\{ \left(\sum_{i=1}^n C_i \psi_i \right) Lv - vL \left(\sum_{i=1}^n C_i \psi_i \right) \right\} d\Omega = \\ &= \sum_{i=1}^n C_i^2 \int_{\Omega} \psi_i L \psi_i d\Omega + \sum_{j \neq i}^n C_i C_j \int_{\Omega} (\psi_i L \psi_j + \psi_j L \psi_i) d\Omega + \sum_{i=1}^n C_i \int_{\Omega} (2\psi_i f + \psi_i Lv + vL \psi_i) d\Omega \end{aligned} \quad (2.76)$$

donde, derivando con relación a C_i , tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial C_i} &= 2 \sum_{i=1}^n C_i \int_{\Omega} \psi_i L \psi_i d\Omega + \sum_{j \neq i}^n C_i C_j \int_{\Omega} (\psi_i L \psi_j + \psi_j L \psi_i) d\Omega + \\ &+ \sum_{i=1}^n C_i \int_{\Omega} (-2\psi_i f + \psi_i Lv - vL\psi_i) d\Omega \equiv 0 \end{aligned} \quad (2.77)$$

$1 \leq i \leq n.$

para el cual, derivando con relación a C_i obtenemos:

$$\frac{\partial I}{\partial C_i} = 2 \sum_{i=1}^n C_i \int_{\Omega} \psi_i L \psi_j d\Omega + \sum_{j \neq i}^n C_j \int_{\Omega} (\psi_i L \psi_j + \psi_j L \psi_i) d\Omega + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (-2\psi_i f + \psi_i Lv - vL\psi_i) d\Omega \quad (2.78)$$

Este sistema puede también ser expresado como:

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} C_j = h_i \quad ; \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.79)$$

$$\text{donde: } A_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\psi_i L \psi_j + \psi_j L \psi_i) d\Omega \quad ; \quad h_i = \int_{\Omega} \left\{ \psi_i f + \frac{1}{2} (vL\psi_i - \psi_i Lv) \right\} d\Omega \quad (2.80)$$

que expresado en forma matricial quedará:

$$A \bar{C} = \bar{h} \quad (2.81)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{C} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{Bmatrix} \quad ; \quad \bar{h} = \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{Bmatrix} \quad (2.82)$$

de donde se pondrá determinar a C , en forma única siempre y cuando A no sea singular, lo cual sucede si el operador L es definido positivo. A manera de ejemplificar este método, lo aplicaremos a problemas de vibraciones en una y dos dimensiones.

Problema 1. Considérese el siguiente problema, con valores en la frontera:

$$Lu = -u''(x) = x^2 \quad ; \quad 0 < x < 1$$

$$B(u) = \begin{cases} u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

A fin de resolver (E.1) bajo (E.2), supondremos una solución polinomial cúbica:

$$\tilde{u}(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$$

la cual debe satisfacer las condiciones de frontera del problema. De manera que de: $\tilde{u}(0) = C_0 = 0$ y $\tilde{u}(1) = C_1 + C_2 + C_3 = 0$, se tiene: $C_3 = -(C_1 + C_2)$, de donde se obtiene:

$$\tilde{u}(x) = C_1x + C_2x^2 - (C_1 + C_2)x^3 = C_1(1-x^2)x + C_2(1-x)x^2$$

$$\tilde{u}(x) = C_1\psi_1(x) + C_2\psi_2(x)$$

Calculando las entradas de A , tenemos:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \int_0^1 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) dx & ; & & A_{12} &= \int_0^1 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) dx \\ A_{21} &= \int_0^1 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) dx & ; & & A_{22} &= \int_0^1 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) dx \end{aligned}$$

de esta manera, derivando las ψ_i , $i = 1, 2$ e integrando para obtener A_{ij} , $1 \leq i \leq 2$; $1 \leq j \leq 2$:

$$A_{11} = \int_0^1 (1-x^2)^2 dx = \frac{1}{3} \quad ; \quad A_{12} = \int_0^1 (1-x^2)(2x-3x^2) dx = A_{21} = \frac{1}{6}$$

$$A_{22} = \int_0^1 (2x-3x^2)^2 dx = \frac{1}{30} \quad ; \quad h_1 = \int_0^1 x(1-x^2) dx = \frac{1}{20} \quad ; \quad h_2 = \int_0^1 x^2(1-x)x^2 dx = \frac{1}{30}$$

por lo que el sistema $A\bar{C} = \bar{h}$ queda:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{30} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{1}{30} \end{Bmatrix}$$

de donde resultan: $C_1 = \frac{1}{15}$ y $C_2 = \frac{1}{6}$; de esta manera la función solución $\tilde{u}(x)$:

$\tilde{u}(x) = \frac{x}{30}(1-x)(2+5x)$ diferirá de la solución exacta: $u(x) = \frac{x}{12}(1-x^3)$ cuyo error puede ser evaluado a partir de una tabla.

El caso bidimensional lo trataremos mediante un ejemplo para la ecuación de Poisson.

Problema 2. Considérese la región $\bar{\Omega} \subset \mathfrak{R}^2$, bajo condiciones de frontera no homogéneas, es decir:

$$- \nabla^2 u = f \text{ en } \Omega \quad (\text{P2.1})$$

sujeta a las condiciones de frontera:

$$\left. \begin{array}{l} u|_{\Gamma_1} = g_1(s) \quad ; \quad \Gamma_1 \subset \partial\Omega \quad \text{Dirichlet} \\ \nabla u \circ \hat{n} + \sigma(s)u|_{\Gamma_3} = g_3(s) \quad ; \quad \Gamma_3 \subset \partial\Omega \quad \text{Mixta} \end{array} \right\} \quad (\text{P2.2})$$

donde : $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$; $g|_{\partial\Omega} = g_1|_{\Gamma_1} \cup g_2|_{\Gamma_2}$.

Y la condición de frontera del tipo Neumann se obtiene como un caso particular de la Mixta, haciendo $\sigma(s) \equiv 0$, en la parte en que se cumple.

La funcional de (P2.1) bajo (P2.2) fue deducida como:

$$I[u] = \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^2 - 2fu) d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\sigma u^2 - 2gu) dS \quad (\text{P2.3})$$

explícitamente hablando, $I[u]$ queda como:

$$I[u] = \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2fu \right\} d\Omega + \int_{\Omega} (\sigma u^2 - 2gu) ds \quad (\text{P2.4})$$

la cual será minimizada numéricamente si: $\tilde{u} = \sum_{i=1}^n C_i \psi_i(x, y) + g(x, y)$ (P2.5)

es la solución propuesta de (P2.1) bajo (P2.2); obsérvese que para que \tilde{u} satisfaga la condición de Dirichlet, se requiere que necesariamente $\psi_i(x(s), y(s)) = \psi_i(s)|_{\Gamma_1} = 0$ $1 \leq i \leq n$. Así:

$$\tilde{u} = (x(s), y(s)) = g(x(s), y(s)) = g(s) \text{ en } \Gamma_1$$

haciendo: $\psi_{n+1}(x, y) = g(x, y)$; $C_{n+1} = 1$, \tilde{u} queda como:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n+1} C_i \psi_i(x, y) \quad (\text{P2.6})$$

Evaluando a (P2.4) en \tilde{u} obtenemos:

$$I[C_1, C_2, \dots, C_{n+1}] = \int_{\Omega} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n+1} C_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n+1} C_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right)^2 - \sum_{i=1}^{n+1} 2fC_i\psi_i \right\} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \left\{ \sigma \left(\sum_{i=1}^{n+1} C_i \psi_i \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^{n+1} C_i \psi_i g \right\} ds \quad (\text{P2.7})$$

derivando esta última ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I[C_1, \dots, C_{n+1}]}{\partial C_i} &= \sum_{i=1}^n 2 \int_{\Omega} C_i \left\{ \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy + \\ &+ \sum_{i \neq j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \int_{\Omega} 2C_j \left\{ \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) \right\} dx dy - \sum_{i=1}^{n+1} \int_{\Omega} 2f\psi_i dx dy + \sum_{i=1}^{n+1} 2 \int_{\Gamma_3} \sigma C_i \psi_i^2 ds + \\ &+ \sum_{i \neq j=1}^{n+1} \int_{\Gamma_3} 2\sigma C_j \psi_i \psi_j ds - \sum_{i=1}^{n+1} \int_{\Gamma_3} 2\psi_i g ds = 0 \end{aligned} \quad (\text{P2.8})$$

de donde, reconociendo para los índices i, j se obtienen:

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) \right\} dx dy \quad (\text{P2.9})$$

$$S_{ij} = \int_{\Gamma_3} \sigma \psi_i \psi_j ds \quad (\text{P2.10})$$

$$K_i = \int_{\Gamma_3} g \psi_i ds \quad (\text{P2.11})$$

$$h_i = \int_{\Omega} f \psi_i dx dy \quad (\text{P2.12})$$

$$\sum_{j=1}^n [A_{ij} + S_{ij}] C_j = h_i + K_i = l_i \quad ; \quad 1 \leq i \leq n.$$

haciendo $B_{ij} = A_{ij} + S_{ij}$, se obtiene el sistema matricial: $B (n \times (n+1))$;

$$C^T = \{C_1, C_2, \dots, C_{n+1}\} \quad ; \quad l = \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{Bmatrix} \quad ; \quad BC = l \quad (\text{P2.13})$$

El sistema representado por la ecuación (P2.13) debe ser modificado, a fin de obtener un sistema de $n \times n$ en C_1, C_2, \dots, C_n , ya que $C_{n+1} = I$. Para esto consideremos la primera modificación y luego para las demás en $2, 3, \dots, n$, obteniendo así el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} B_{11}C_1 + B_{12}C_2 + \dots + B_{1n}C_n + B_{1n+1}C_{n+1} &= I_1 \\ B_{21}C_1 + B_{22}C_2 + \dots + B_{2n}C_n &= I_2 - B_{2n+1}C_{n+1} \\ B_{31}C_1 + B_{32}C_2 + \dots + B_{3n}C_n &= I_3 - B_{3n+1}C_{n+1} \\ \vdots & \\ B_{n1}C_1 + B_{n2}C_2 + \dots + B_{nn}C_n &= I_n - B_{nn+1}C_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{P2.14})$$

y que finalmente queda representado como:

$$B' C = l' \quad (\text{P2.15})$$

donde B' es una matriz de $n \times n$, C el vector en C_1, C_2, \dots, C_n , y así:
 $\tilde{u}(x, y) = g(x, y) + \sum_{i=1}^n C_i \psi_i(x, y)$ es la solución de (P2.1) bajo (P2.2).

En el caso dinámico, que es aquel que nos ocupa, al resolver la ecuación diferencial parcial de la membrana vibrante para el caso forzado y amortiguado, los coeficientes $C_i(t)$ serán dinámicos, luego la solución propuesta $\tilde{u}(x, y, t)$ para cada instante t dependerá de la expresión:

$$\tilde{u}(x, y, t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) \psi_i(x, y) \quad (2.83)$$

donde $\psi_1(x, y), \dots, \psi_n(x, y)$ son las funciones base que generan el espacio de funciones de dimensión finita E^n .

Propiamente hablando, la ecuación diferencial parcial de la membrana vibrante $\bar{\Omega} \subset \mathfrak{R}^2$ fue deducida como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2b \frac{\partial u}{\partial t} + ku = f(x, y, t) \quad (2.84)$$

cuyas condiciones de frontera las supusimos homogéneas, es decir:

$$u(x(s), y(s), t) = 0 \quad (2.85)$$

y las condiciones iniciales son consideradas como:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, 0) &= u_0(x, y) \\ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} &= v_0(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2.86)$$

Así también, para este problema fue deducida la funcional Energía $I[u, \dot{u}, t]$ en términos de los operadores diferenciales $L[u] = -\nabla^T \cdot (K \nabla u) = F(x, y, t)$ cuando:

$$-\nabla^T \cdot (K \nabla u) = - \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t} \right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix}$$

$$\text{y } F(x, y, t) = f(x, y, t) - 2b \frac{\partial u}{\partial t} + ku$$

De esta manera la funcional Energía queda como:

$$I[u; \dot{u}, t] = \int_0^t \int_{\Omega} (uLu - 2Fu) d\Omega dt \quad (2.87)$$

donde, substituyendo las expresiones de $L[u]$ y F obtenemos:

$$I[u] = \int_0^t \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\delta u}{\delta x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - 2uku + 2ub \frac{\partial u}{\partial t} - 2fu \right\} d\Omega dt \quad (2.88)$$

como los puntos críticos de la funcional (3.118) son los candidatos a ser soluciones de (2.83) bajo (3.114 y (3.115), debemos derivar e igualar a cero con el fin de resolverla

$$\frac{dI[u]}{du} \equiv 0 \quad (2.89)$$

Como el método de Ritz-Rayleigh resuelve numéricamente (2.89), entonces debemos evaluar (2.88) en \tilde{u} , con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned}
& I[\tilde{u}] \int_0^t \int_{\Omega} \left\{ \left(\sum_{i=1}^n C_i(t) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n C_i(t) \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\sum_{i=1}^n \dot{C}_i(t) \psi_i \right) \right\} d\Omega dt - \int_0^t \int_{\Omega} \left\{ \left(\sum_{i=1}^n 2b C_i(t) \psi_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \dot{C}_j(t) \psi_j \right) \right\} d\Omega dt - \\
& - \int_0^t \int_{\Omega} \left\{ \left(\sum_{i=1}^n 2k C_i(t) \psi_i \right) \left(\sum_{j=1}^n C_j(t) \psi_j \right) \right\} d\Omega dt + \int_0^t \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n 2f C_i(t) \psi_i \right) = \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} C_i^2(t) \left\{ \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right)^2 \right\} d\Omega dt - \\
& - \sum_{i=1}^n \frac{1}{c^2} \int_0^t \int_{\Omega} (\dot{C}_i^2(t) \psi_i^2) d\Omega dt + \sum_{l \neq j} \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} 2C_i(t) C_j(t) \left\{ \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) \right\} d\Omega dt - \\
& - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} 2b C_i(t) \dot{C}_j(t) \psi_i \psi_j d\Omega dt - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} (2k C_i(t) C_j(t) \psi_i \psi_j) d\Omega dt + \\
& + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} 2[f C_i(t) \psi_i] d\Omega dt \tag{2.90}
\end{aligned}$$

derivando la ecuación anterior con relación a $C_i(t)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dC_i(t)} [C_1(t), \dots, C_n(t)] &= \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} 2C_i(t) \left\{ \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right)^2 \right\} d\Omega dt - \sum_{l \neq j} \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} 2b \dot{C}_j(t) \psi_i \psi_j d\Omega dt \\
& - \sum_{l \neq j} \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} 2C_j(t) \left\{ \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) \right\} d\Omega dt - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} (2k C_j(t) \psi_i \psi_j) d\Omega dt + \\
& + \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} 2(f \psi_i) d\Omega dt = 0 \tag{2.91}
\end{aligned}$$

Si denominamos por:

$$A_{ij} = \int_0^t \int_{\Omega} b \psi_i \psi_j d\Omega dt ; \quad B_{ij} = \int_0^t \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) \right\} d\Omega dt ;$$

$$K_{ij} = \int_0^t \int_{\Omega} k \psi_i \psi_j d\Omega dt \quad \text{y} \quad h_i = \int_0^t \int_{\Omega} f \psi_i d\Omega dt \quad \text{obtenemos el sistema ordinario de } n \text{ ecuaciones}$$

con n incógnitas:

$$\left(\sum_{j=1}^n A_{ij} \right) \dot{C}_i(t) + \sum_{j=1}^n (B_{ij} - K_{ij}) C_j(t) + h_i = 0 \quad ; \quad 1 \leq i \leq n \tag{2.92}$$

de donde se obtienen los valores de C_i :

$$C_i(0) = \langle u_o(x, y), \psi_i(x, y) \rangle = \int_{\Omega} u_o(x, y) \psi_i(x, y) d\Omega \tag{2.93}$$

- ◆ **HAAR, D. TER.** *“ELEMENTS OF HAMILTONIAN MECHANICS”*. Ed. North Holland Publishing Co. 1961.
- ◆ **LAYTON, RICHARD A.** *“PRINCIPLES OF ANALYTICAL SYSTEM DYNAMICS”*. Ed. Springer Verlag. 1998.
- ◆ **BEREZIN, I.S. ZHIDKOV, N.P.** *“COMPUTING METHODS”*. Ed. Pergamon Press. 1965. Vol. II. Cap. 10.
- ◆ **LAPIDUS, LEON. PINDER, GEORGE F.** *“NUMERICAL SOLUTIONS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN SCIENCE AND ENGINEERING”*. Ed. John Wiley & Sons. 1982. Capítulo 6.
- ◆ **SMITH, GORDON DENNIS.** *“NUMERICAL SOLUTION OF PARTIAL DIFERENTIAL EQUATION: FINITE DIFFERENCE METHODS”*. Capítulo 4. 1978.
- ◆ **STAKGOLD, IVAR.** *“BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS”*. Ed. MacMillan Company. 1967.
- ◆ **ARTICOLO, GEORGE A.** *“PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AND BOUNDARY VALUE PROBLEMES WITH MAPLE V”*. Ed. Academic Press. 1989. Cap. 4, 6, 7 y 8.
- ◆ **ZWILLINGER, DANIEL.** *“HANDBOOK OF DIFFERENTIAL EQUATIONS”*. Ed. Academic Press. 1989.
- ◆ **SEARS, FRANCIS W.** *“MECANICA, MOVIMIENTO ONDULATORIO Y CALOR”*. Ed. Aguilar Ediciones. 1965. Cap. 12, 16 y 17.
- ◆ **ALONSO, MARCELO. FINN, EDWARD J.** *“FISICA VOLUMEN I: MECANICA”*. Ed. Fondo Educativo Interamericano S. A. 1976. Cap.12.
- ◆ **FEYNMAN, RICHARD P. LEIGTON & SANDS.** *“THE FEYNMAN LECTURES ON PHYSICS. VOL. I”*. ED. Fondo Educativo Interamericano. 1971. Cap. 21, 47, 48, 49, 50 y 51.
- ◆ **JOSS, GEORG.** *“THEORETICAL PHYSICS”*. Ed. Blackie & Son Ltd. 1958. Parte I, Cap. II.
- ◆ **THOMSON, WILLIAM T.** *“TEORIA DE VIBRACIONES: APLICACIONES”*. Ed. Prentice Hall. 1983.
- ◆ **CHEN, YU.** *“VIBRATIONS: THEORETICAL METHODS”*. Ed. Addison-Wesley Co., Inc. 1966. Cap. 3 y 8.