



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL



ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

ESIME ZACATENCO

**"ESTUDIO DEL CAMBIO DE FRECUENCIAS
NATURALES EN MEMBRANAS PLEXOPLEGADAS"**

T E S I S
PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN
CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA
MECÁNICA.

PRESENTA
ING. GRISEL MA. DEL C. VARGAS ALBARRÁN

DIRECTOR: DR. ORLANDO SUSARREY HUERTA



MÉXICO, D.F

MAYO 2014

DEDICATORIAS

A mis padres.

Por su amor y apoyo incondicional.

Por ser mi fortaleza e inspiración.

Porque sin ustedes nada sería.

Los amo.

A mi hermano Oscar,

Porque siempre nos tendremos el uno al otro.

Alma y Eluzai.

Por ser quienes son.

Por regalarme una de las cosas más bellas de la vida.

AGRADECIMIENTOS

A mi Alma Mater el Instituto Politécnico Nacional, es un orgullo pertenecer a ésta casa de estudios, y donde quiera que vaya llevaré implícito en mi corazón su lema: la técnica al servicio de la patria.

A la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación (SEPI) de la ESIME Zac. Del IPN.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo económico otorgado durante mis estudios de posgrado.

Al Dr. Orlando Susarrey Huerta, por ser un gran investigador y profesor, así como un excelente guía científico. Gracias por el apoyo académico otorgado, pero sobre todo agradezco su gran calidad humana y su amistad.

Al Dr. Fermin Viniestra Heberlein, quién con su excelso conocimiento científico, sabiduría, pasión, humildad y sentido del humor, se convirtió en mi ejemplo académico a seguir.

A todas aquellas maravillosas personas que ahora son grandes amigos, por compartir ésta fantástica etapa de mi vida.

GRACIAS

ÍNDICE	Página
ÍNDICE DE FIGURAS	iii
ÍNDICE DE TABLAS	iv
SIMBOLOGÍA	v
RESUMEN	vi
ABSTRACT	vii
OBJETIVOS	viii
JUSTIFICACIÓN	viii
INTRODUCCIÓN	ix
I.- GENERALIDADES	1
1.1. Series en el Tiempo	1
1.1.1. Auto-Afinidad	1
1.1.2. Multifractales	3
1.1.2.1 Análisis Espectral	3
1.2. Movimiento Browniano	4
1.3. Función Fractal de Weierstrass-Mandelbrot	5
1.4. Análisis de Fourier	7
1.4.1. Funciones Periódicas	7
1.4.2. Series de Fourier	8
1.4.3. Evaluación de los Coeficientes de Fourier	8
1.4.4. Integral de Fourier y Espectros Continuos	9
1.4.5. Transformada de Fourier	10
1.5. Principios de Funcionamiento del VibroMet Láser 500V	11
Bibliografía	14
II.- ESTADO DEL ARTE	16
Bibliografía	20
III.- METODOLOGÍA	22
3.1. Metodología Experimental	22
3.1.1. Elaboración de Probetas	22
3.1.2. Condiciones Ambientales e Iniciales del Equipo	23
3.1.3. Metodología	25
3.2. Solución Analítica Propuesta	28
Bibliografía	29
IV.- DISCUSIÓN DE RESULTADOS	30
Bibliografía	44

CONCLUSIONES	45
TRABAJOS FUTUROS	47
APÉNDICE	48

ÍNDICE DE FIGURAS

	Página	
Figura 1.1.	Superficie auto-afin generada mediante computadora, simulando la rugosidad de superficies de fractura más comunes.	2
Figura 1.2.	Gráfica de movimiento browniano con distintos exponentes de Hurst.	5
Figura 1.3.	Función De Weierstrass-Mandelbrot con señales alternativas de seno.	6
Figura 1.4.	Diferentes señales periódicas	7
Figura 1.5.	Diagrama esquemático del metro láser VibroMet 500V	11
Figura 1.6.	Ilustra el principio del efecto de auto mezclado en el VibroMet 500V	12
Figura 3.1.	Tamaños de Probetas	23
Figura 3.2.	Vibrometro láser Doppler VibroMet 500V	24
Figura 3.3.	Probetas de papel de diferentes tamaños compactadas manualmente	26
Figura 3.4.	Gráfica voltaje-tiempo de papel glasin, obtenida en la primera medición.	26
Figura 3.5.	Diagrama de flujo de la metodología	27
Figura 3.6.	Gráfica de la función original y alterna de una muestra de papel glasin en su primera medición y la campana de Gauss que representa la amplitud de la función alterna propuesta.	28
Figura 4.1.	Comportamiento de la amplitud de la probeta 80x80 mm de papel glasin, kraft y bond.	30
Figura 4.2.	Comportamiento de la amplitud de la probeta 160x160 mm de papel glasin, kraft y bond.	31
Figura 4.3.	Comportamiento de la amplitud de la probeta 320x320 mm de papel glasin, kraft y bond.	31
Figura 4.4.	Comportamiento de la amplitud de la probeta 500x500 mm de papel glasin, kraft y bond.	32
Figura 4.5.	Respuesta de un sistema de amortiguamiento débil.	32
Figura 4.6.	Comportamiento de la frecuencia de las probetas de longitud 80x80 de los tres tipos de papel empleados en el experimento.	36
Figura 4.7.	Comportamiento de la frecuencia de las probetas de longitud 160x160 de los tres tipos de papel empleados en el experimento.	36
Figura 4.8.	Comportamiento de la frecuencia de las probetas de longitud 320x320 de los tres tipos de papel empleados en el experimento.	37
Figura 4.9.	Comportamiento de la frecuencia de las probetas de longitud 500x500 de los tres tipos de papel empleados en el experimento.	37
Figura 4.10.	Comportamiento de la frecuencia a través del tiempo del papel glasin en las cuatro diferentes longitudes de probeta.	38
Figura 4.11.	Comportamiento de la frecuencia a través del tiempo del papel kraft en las cuatro diferentes longitudes de probeta.	38
Figura 4.12.	Comportamiento de la frecuencia a través del tiempo del papel bond en las cuatro diferentes longitudes de probeta.	39
Figura 4.13.	Comportamiento de la frecuencia- tamaño a través del tiempo del papel glasin	41
Figura 4.14.	Comportamiento de la frecuencia- tamaño a través del tiempo del papel kraft	42
Figura 4.15.	Comportamiento de la frecuencia- tamaño a través del tiempo del papel bond	42
Figura 4.16.	Modelo de cuatro elementos de Maxwell-Kelvin o de Burger	43

ÍNDICE DE TABLAS

	Página
Tabla 1. Propiedades mecánicas del papel glasin, papel kraft y papel bond.	23
Tabla 2. Especificaciones del Vibrometro láser Doppler VibroMet 500V.	24
Tabla 3. Periodos y frecuencias obtenidas en las funciones alternas.	33
Tabla 4. Funciones alternas de cada una de las probetas de diferentes longitudes de papel glasin, en los diferentes momentos en los que se realizó la medición.	33
Tabla 5. Funciones alternas de cada una de las probetas de diferentes longitudes de papel kraft, en los diferentes momentos en los que se realizó la medición.	34
Tabla 6. Funciones alternas de cada una de las probetas de diferentes longitudes de papel bond, en los diferentes momentos en los que se realizó la medición.	35
Tabla 7. Intervalos de magnitud de los desplazamientos que se generaron en cada una de las tres diferentes mediciones para cada uno de los tipos y tamaños de papel.	41

SIMBOLOGÍA

H	— Exponente de Hurst
$\lambda_{x,y}$	— Factor de escalamiento
D	— Dimensión Hausdorff-Besicovith
D_f	— Dimensión fractal
$S(f)$	— Poder del espectro
f	— Frecuencia
β	— Exponente espectral
γ	— Exponente de correlación
ϕ_n	— Fase arbitraria
$W(t)$	— Función de Weierstrass
$f(t)$	— Función periódica
T	— Periódica
ω_0	— Frecuencia angular
ω_n	— Enésima armónica
C_n	— Amplitudes armónicas
θ_n	— Ángulos de fase
$F(w)$	— Transformada de Fourier
f_D	— Frecuencia de desplazamiento Doppler
v	— Velocidad vibracional
λ	— Longitud de onda óptica del láser
α	— Ángulo de intersección
X_m	— Máximo desplazamiento
ω_a	— Frecuencia rotacional de vibración
$E_s(t)$	— Campo eléctrico del haz del objeto disperso
f_0	— Frecuencia óptica del láser
$I(t)$	— Intensidad óptica del detector
$F_\delta(t)$	— Relajación del esfuerzo a compresión
δ	— Deformación
L_0	— Tamaño original de la hoja

RESUMEN

El objetivo de este trabajo se enfoca en el comportamiento del fenómeno de vibración intrínseca debida al fenómeno de relajación a través del tiempo, que se suscita al arrugar membranas de materiales de fibra natural, que son conformados en forma semi-esférica (bolas de papel). La metodología experimental propuesta, emplea un vibro-metro láser VibroMet 500V, que captura espectros de frecuencia, cuya gráfica se asemeja una función de Weierstrass y puede ser tratada como un fractal, ya que su dimensión Hausdorff-Besicovitch excede la unidad; dicha función, por su complejidad puede ser analizada mediante una función alternativa como la Serie de Fourier, para obtener la frecuencia intrínseca que es generada por la relajación de la membrana arrugada; tal función a su vez es sometida a una transformación de Fourier, dónde se observan los desplazamientos ocurridos. Así mismo, se comparan diferentes materiales y tamaños de bolas de papel, con el fin de conocer si la vibración tiene alguna tendencia de comportamiento. Dicho comportamiento llevo a la deducción de que las membranas de fibra natural tienen un comportamiento visco-elástico que permite alcancen su estado de relajación. Así mismo, las arrugas generadas en la compactación en bolas, producen una activación en las arrugas vecinas teniendo un comportamiento caótico. A su vez, se propone que las arrugas o vértices pueden ser modeladas por un modelo de cuatro elementos de Maxwell-Kelvin o de Burger.

ABSTRACT

This work is focused on the behavior of intrinsic vibrating dues to relaxion phenomenon over the time, which arises when membranes of natural fiber material are crumpled and acquire a semispherical shape (paper balls). The proposed experimental method employs a laser vibrometer 500V that capture frequency spectra, which graph seems aWeierstrass function and can be treated as a fractal due to its Hausdorff-Besicovith dimension that exceeds the unit; this function is complex therefore it can be analyzed by an alternative function such as Fourier series for obtaining the intrinsic frequency which is generated by relaxation of the crumpled membrane and after submitted it a Fourier transformation for obtaining the displacements. Likewise, different materials and sizes of paper are compared in order to know if the vibration has behavior tend line. This trend permits to deduce that the natural fiber membranes have a visco-elastic behavior that allows reaching their relaxation state. Also, wrinkles generated on the compaction balls produce an activation on neighboring lines having a chaotic behavior At same time, it's proposed that the wrinkles or vertices can be modeled by a for element Maxweei-Kelvin or Burger model.

OBJETIVO GENERAL

Estudiar el cambio de frecuencia intrínseca generada por el proceso de relajación a través del tiempo, que se suscita al arrugar membranas de materiales de fibra natural, que son conformados en forma semi-esférica.

OBJETIVOS PARTICULARES

- Proponer una metodología experimental y de análisis, para el estudio del fenómeno de vibración intrínseca en membranas arrugadas, específicamente en bolas de papel a través del tiempo; con el fin de conocer la tendencia de comportamiento que existe en el cambio de frecuencia de vibración, como parte de un conjunto de propiedades ya conocidas que rigen su conducta general.
- Analizar qué tipo de comportamiento tiene la vibración intrínseca que se presenta debido al fenómeno de relajación para cada tipo de papel.

JUSTIFICACIÓN

En años recientes, estudios acerca de las propiedades físicas y mecánicas de las bolas de papel, como lo son: dimensión de masa, densidad, módulo de Young, exponente de rugosidad local, exponente de escalamiento, han permitido un mejor entendimiento del comportamiento de las membranas arrugadas. Sin embargo, hoy en día aún no se tiene un conocimiento absoluto de ellas. Como parte de este conjunto de propiedades y comprensión de las membranas, es importante estudiar la variación de frecuencia intrínseca que se presenta en las bolas de papel a través del tiempo, que va desde el momento de su arrugamiento hasta su estado de relajación; una vez conocida la tendencia de comportamiento de las vibraciones intrínsecas del fenómeno de arrugado aleatorio en membranas se habrá dado un paso más para el entendimiento de estos sistemas complejos.

INTRODUCCIÓN

La investigación y desarrollo tecnológico en una gran diversidad de áreas, está adoptando los conceptos de una nueva geometría, la geometría de fractales, como alternativa en la resolución de problemas de índole tan diversa. El entendimiento de este tipo de geometría es de gran importancia, puesto que la mayoría de los fenómenos encontrados en la naturaleza muestran un comportamiento errático, irregular o impredecible que evolucionan a través del tiempo, el cual es llamado comportamiento caótico; el cuál abarca desde el mundo microscópico hasta el macroscópico, ejemplos claros de este tipo de comportamiento son: crecimiento de bacterias, la corteza terrestre, fluctuaciones en la bolsa de valores, medición de costas, señales digitales por mencionar algunos [1].

Otros objetos naturales o matemáticos, tales como las superficies de objetos y los perfiles generados por el movimiento browniano, muestran una morfología caótica de sistemas no lineales en el espacio, los cuales son caracterizados por una estructura extremadamente complicada [2]. Las membranas arrugadas presentan una morfología complicada, es por ello que en los últimos años han sido de gran interés, ya que al arrugar el material, la energía empleada para este proceso se concentra en las líneas y puntos de intersección, sin embargo con el tiempo hay una disipación de energía lo que lleva a la membrana a una relajación, no sin antes haber sufrido una deformación elasto-plástica en el material.

El presente trabajo se enfoca en el comportamiento del fenómeno de vibración intrínseca que se suscita al arrugar las bolas de papel (membranas), ya que al suministrar energía para realizar el arrugamiento se produce una excitación intermolecular en el material. Se desea conocer cuál es el comportamiento de ésta energía transformada en vibraciones a través del tiempo, hasta llegar a su estado de relajación, pudiendo definir la frecuencia natural de la membrana.

De acuerdo a lo anterior, el trabajo está dividido de la siguiente manera, en el capítulo 1 se presentan los conceptos de geometría fractal, vibraciones, transformadas y series de Fourier que soportan la teoría fundamental de la tesis. En el capítulo 2 se presenta el estado del arte, donde se mencionan de manera cronológica los aportes científicos referentes a membranas arrugadas en los últimos años.

Por su parte, en el capítulo 3 se presenta la metodología experimental, así como el análisis matemático de los resultados experimentales. Finalmente, en el capítulo 4 se discuten los resultados obtenidos del análisis matemático para llegar a una conclusión general y se plantean las recomendaciones para trabajos futuros.

CAPÍTULO 1

GENERALIDADES.

Un gran número de sistemas físicos tienden a presentar un comportamiento similar a diferentes escalas de observación. En 1960, el matemático Benoît Mandelbrot utiliza el adjetivo *fractal* para denominar a los objetos cuya geometría es compleja y no puede ser caracterizada por una dimensión integral. La principal atracción de la geometría fractal reside en la habilidad para describir la forma irregular o fragmentada de elementos naturales, así como de otros objetos complejos los cuales no pueden ser analizados por la geometría tradicional. Éste fenómeno se expresa a menudo por las leyes de escalamiento estadístico en el dominio del tiempo y por el comportamiento de la ley de potencias [1.1].

El comportamiento de escalamiento fractal, ha sido observado en muchos datos experimentales realizados en diferentes áreas de la ciencia como lo es la geofísica, la medicina, la fisiología e incluso en las ciencias sociales. Aunque las causas subyacentes del escalamiento fractal a menudo no se conocen a detalle, la caracterización fractal o multifractal puede ser utilizada para la modelación de series con respecto al tiempo y en la derivación de predicciones sobre eventos o comportamientos futuros [1.2].

Algunos sistemas se caracterizan por un comportamiento casi o totalmente periódico, que podría ser causado por los componentes oscilatorios o bucles cerrados. Sin embargo, en los sistemas realmente complejos, los componentes periódicos no son usualmente limitados por una o dos frecuencias; más bien se extienden a lo largo de un amplio espectro de frecuencias, ésta dinámica se denota generalmente como fractal o multifractal [1.3].

1.1 Series en el Tiempo

1.1.1. Auto- Afinidad.

Cada parte de un objeto auto- afín es una imagen de la totalidad del objeto (estrictamente o en un sentido estadístico), a diferente escala en diferentes direcciones. La auto- afinidad, obedece a transformaciones o escalamientos como las que se describen en la siguiente ecuación [1.1].

$$(X, Y, Z) \rightarrow (\lambda_X X, \lambda_Y Y, \lambda_Z^H Z) \quad 1.1$$

Donde $\lambda_X = \lambda_Y \neq \lambda_Z^H$ (λ es el factor de escalamiento).

El exponente H se conoce como exponente de auto-afinidad y tiene una relación con la dimensión fractal como se muestra en la ec. 1.2.

$$D_f = D_e + 1 - H \quad 1.2$$

Ejemplos de fractales auto-afines son: la rugosidad que presenta la superficie anisotrópica de la fractura de un metal (véase Fig. 1.1), registros de ruido eléctrico, variaciones del precio del petróleo, así como los registros del movimiento browniano, por mencionar algunos.

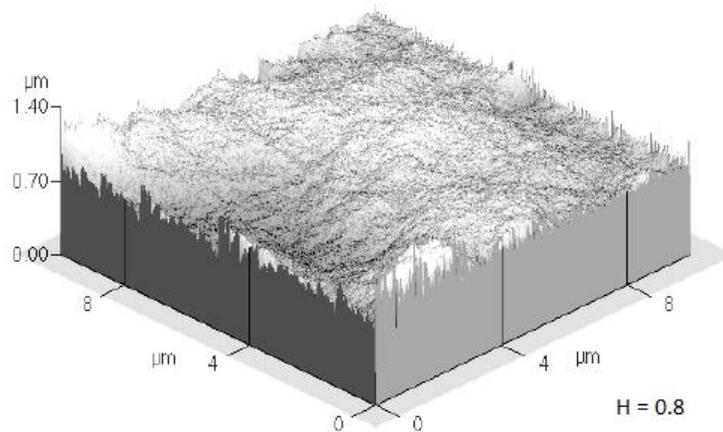


Fig.1.1. Superficie auto-afin generada mediante computadora, simulando la rugosidad de superficies de fractura más comunes. [1.1].

El exponente de Hurst H caracteriza el tipo de auto-afinidad [1.2], dicho exponente está directamente relacionado con la dimensión fractal, la cual mide la suavidad o rugosidad de una superficie o de una serie en el tiempo. La relación existente entre la dimensión fractal y el exponente de Hurst H , está dado por:

$$D = 2 - H \quad 1.3$$

El valor del exponente de Hurst varía entre 0 y 1, si $H=0.5$ implica un proceso independiente; si $0 \leq H < 0.5$ entonces se tiene una anti-persistencia, esto significa que hay un decrecimiento en el proceso o en la serie de tiempo. Si $0.5 < H \leq 1$ entonces existe una persistencia, lo cual significa que es más probable que la serie en el tiempo incremente [1.4].

1.1.2. Multifractales.

El análisis multifractal es un área de estudio relativamente reciente, comenzó a desarrollarse a mediados de los años 80, como continuación a los trabajos en los cuales B. Mandelbrot introdujo sus modelos aleatorios de disipación de energía en turbulencia. En los que Mandelbrot discute en detalle la naturaleza fractal de los conjuntos, sobre los cuales se concentra la energía y observa que dentro de una cascada multiplicativa, la energía se reparte siguiendo un principio de grandes desviaciones. Ésta propiedad sería formulada explícitamente como el término de multifractalidad. El análisis multifractal se interesa en la descripción de conjuntos fractales asociados de manera natural a ciertos fenómenos físicos [1.5].

Estos conjuntos fractales tienen un comportamiento de escalamiento complicado, ya que se requieren diferentes exponentes de escalamiento para distintas partes de la serie. Existen dos tipos generales de multifractalidad en series de tiempo.

1. *Multifractalidad debida al ancho de la distribución de probabilidad (función de densidad) para los valores de la serie de tiempo (distribución de Levy).* En el caso de que la multifractalidad no pueda ser removida por el arrastramiento de la serie.
2. *Multifractalidad debida a diferentes correlaciones a largo plazo de pequeñas y grandes fluctuaciones.* En éste caso la función de densidad de probabilidad de los valores puede ser una regular distribución con momentos finitos y se utiliza la distribución Gaussiana [1.2].

Existen métodos específicos empleados para el análisis de Series en el Tiempo, sin embargo, en el presente trabajo solo se menciona el Análisis Espectral, dado que éste método es aplicable en el estudio del fenómeno.

1.1.2.1 Análisis Espectral.

Si la serie del tiempo es estacionaria, se puede aplicar las técnicas estándares de análisis espectral (Transformadas de Fourier) y calcular el poder del espectro $S(f)$ de series de tiempo (\check{x}_i) como una función de la frecuencia f que determina el comportamiento de escalamiento de auto-afinidad [1.6]. La correlación a largo plazo de datos caracterizados por la correlación del exponente γ , está dada por:

$$S(f) \sim f^{-\beta} \quad \text{con } \beta = 1 - \gamma \quad 1.4$$

El exponente espectral β y el exponente de correlación γ , pueden ser obtenidos mediante la adecuada ley de potencias en una gráfica de doble logaritmo del poder del espectro $S(f)$. La relación 1.4 puede ser derivada del teorema Wiener-Khinchin [1.7]. Si, en lugar de $\check{x}_i = \Delta x_i$ integramos la serie en el tiempo a través de la transformada de Fourier.

$\check{x}_i = x_i \sum_{j=1}^i \Delta x_j$ el resultado de la escala de poder del espectro es $S(f) \sim f^{-2-\beta}$.

El análisis espectral requiere de datos estacionarios [1.2].

1.2 Movimiento Browniano.

El movimiento Browniano es uno de los más famosos y fundamental procesos estocásticos. La formulación de éste proceso estuvo inspirada por el fenómeno físico del movimiento Browniano, el cual es un brusco e irregular movimiento mostrado por una pequeña partícula suspendida en un fluido, que fue observada y estudiada por Robert Brown en 1827. Una explicación física de dicho movimiento fue dada por Albert Einstein, quien analizo el movimiento como el efecto acumulado de innumerables colisiones de partículas suspendidas con las moléculas del fluido. El análisis de Einstein proporcionó un respaldo históricamente importante para la teoría atómica de la materia, la cual causó controversia en aquel momento. La teoría matemática del movimiento Browniano fue bien fundamentada por Robert Wiener en 1923; el modelo matemático es estudiado como el proceso de Wiener [1.8].

Una trayectoria puede ser descrita por una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde $f(t)$ es la posición de la partícula en el tiempo. Es posible estudiar f desde dos puntos de vista; el primero de ellos es, pensar que la trayectoria o imagen es representada por $f([t_1, t_2]) = f(t): t_1 \leq t \leq t_2$ como una sub-trayectoria de \mathbb{R}^n con t visto meramente como un parámetro, o se puede considerar la gráfica f como $f = ([t, ft]): t_1 \leq t \leq t_2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ como un registro de la variación de f con el tiempo. La trayectoria Browniana y sus gráficas son en general fractales [1.9]. La figura 1.2 muestra el movimiento browniano con diferentes exponentes de Hurst, dónde las unidades de los ejes de las abscisas y ordenadas dependen del fenómeno particular de estudio. Como se observa en la figura 1.2, a medida que el exponente de Hurst tiende a la unidad, la línea se suaviza.

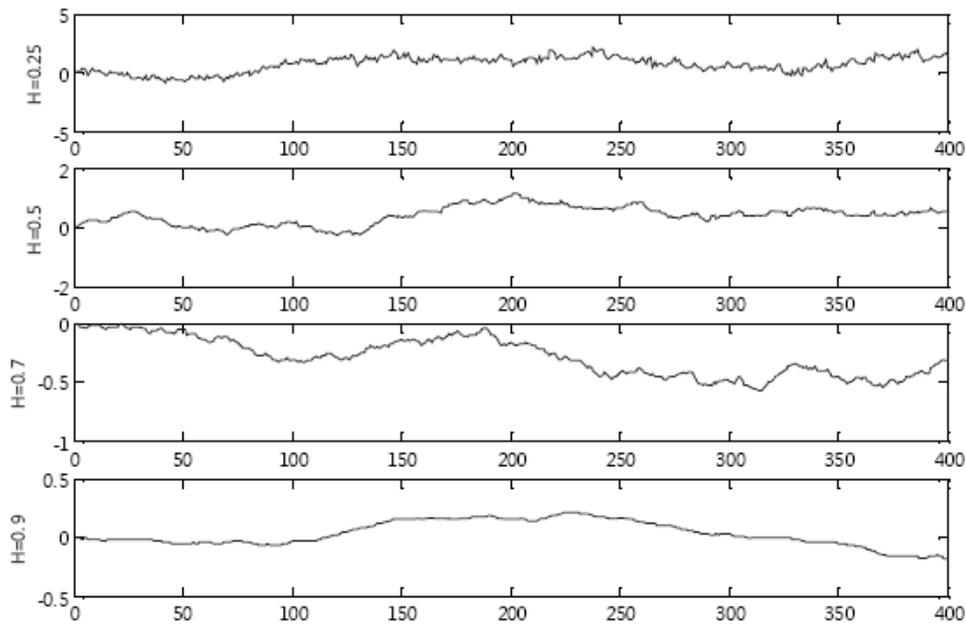


Fig. 1.2. Gráfica de movimiento Browniano con distintos exponentes de Hurst $H=0.25$, $H=0.5$, $H=0.7$ y $H=0.9$. [1.9]

1.3 Función Fractal de Weierstrass-Mandelbrot.

En 1977 Mandelbrot discute la célebre función de Weierstrass, la cual es continua pero no diferenciable; señala que la función de Weierstrass es fractal, en el sentido que su gráfica es una curva, cuya dimensión Hausdorff-Besicovitch excede la unidad. Así como la fractalidad de la función implica que no tiene escalas más pequeñas, pero tiene una escala más grande, lo cual puede ser una desventaja cuando se usa para modelar fenómenos fractales. Sin embargo, Mandelbrot propone la siguiente extensión de la función de Weierstrass, la cual no tiene escala [1.10].

$$W(t) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - e^{i\gamma^n t})e^{i\phi_n}}{\gamma^{(2-D)n}} \quad 1.5$$

$(1 < D < 2, \gamma > 1, \phi_n = \text{fases arbitrarias})$

Dónde D es la dimensión de Hausdorff-Besicovith de la gráfica, γ es un parámetro y ϕ_n la fase, que puede ser escogida para construir una función W que exhiba un comportamiento determinístico o estocástico. La frecuencia γ^n es el espectro de Weierstrass, el cual tiene un rango de cero a infinito en progresión geométrica, en éste sentido W no tiene escala; con lo que indica restricciones en γ y D , las series para W convergen, pero las series para dW/dt no lo hacen.

La naturaleza fractal de W implica que, la magnificación repetida de su gráfica revela cada nivel a detalle, tal comportamiento contrasta con la función diferenciable, cuya gráfica tiende a una línea recta cuando se magnifica. Los niveles de detalle, son auto- similares bajo un escalamiento afín, en el cual el eje t está estrechamente relacionado al factor γ y la función W al eje $\gamma^{(2-D)}$ [1.10].

La figura 1.3 muestra diferentes gráficas de la función de Weierstrass-Mandelbrot, con señales alternativas de seno, en un rango de $0 \leq t \leq 1$, un factor $\gamma = 1.5$ y diferentes dimensiones fractales.

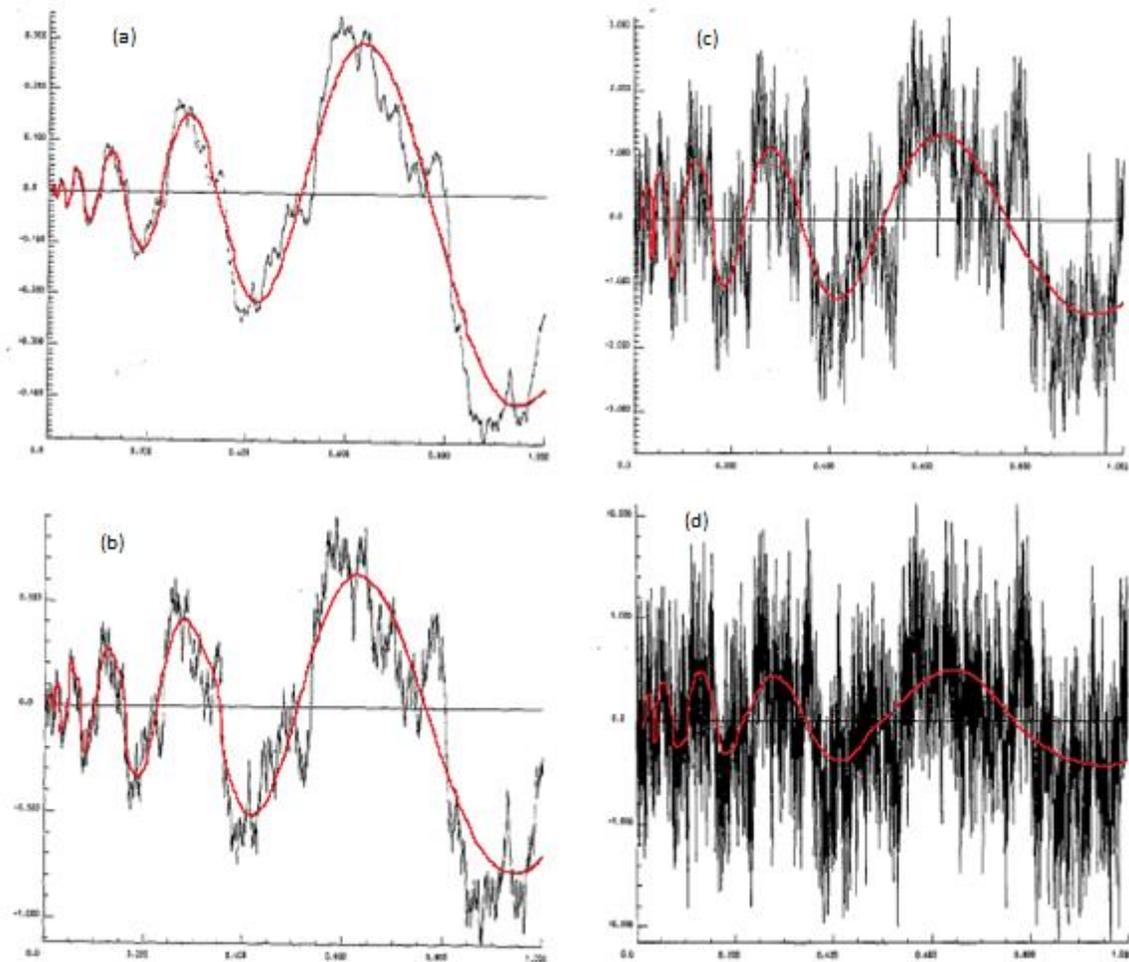


Fig. 1.3 Función de Weierstrass- Mandelbrot con señales alternativas de seno, en un rango de $0 \leq t \leq 1$, un factor $\gamma = 1.5$, con dimensión fractal (a) $D=1.2$, (b) $D=1.5$, (c) $D=1.8$, (d) $D=1.99$. [1.10]

1.4. Análisis de Fourier.

La Teoría Analítica del Calor, de Jean Baptiste Joseph Fourier, introdujo los métodos sencillos para la solución de problemas de valor en la frontera, que se presentan en el tratamiento analítico de la conducción del calor. Sin embargo, este análisis se ha extendido a muchas otras aplicaciones físicas, como lo son: el análisis vibratorio, la acústica, la óptica, procesamiento de imágenes y señales por mencionar algunas. En efecto el análisis de Fourier constituye una herramienta matemática básica para analizar funciones periódicas a través de una suma infinita de funciones seno y coseno. [1.11].

1.4.1. Funciones Periódicas.

Una función periódica se puede definir como una función para la cual

$$f(t) = f(t + T) \quad 1.6$$

Para todo valor de t . La constante mínima T que satisface la relación 1.5 se llama el periodo de la función. Mediante repetición de 1.5 se obtiene,

$$f(t) = f(t + nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad 1.7$$

En la figura 1.4 se observan diferentes funciones periódicas.

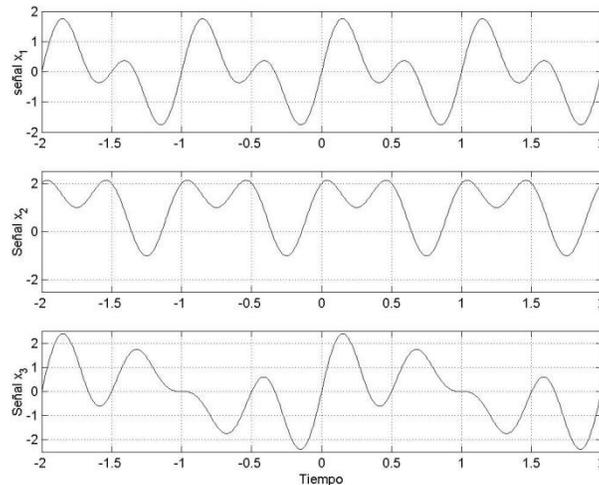


Fig.1.4. Diferentes Señales Periódicas [1.11],

1.4.2. Series de Fourier.

Sea la función $f(t)$ una función periódica de período T , la cual se puede representar por la serie trigonométrica:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + b_1 \sen \omega_0 t + b_2 \sen 2\omega_0 t + \dots$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sen n\omega_0 t) \quad 1.8$$

Donde $\omega_0 = 2\pi/T$, a_0, a_n y b_n son los coeficientes de Fourier. Una serie como la representada por 1.7 es llamada serie trigonométrica de Fourier. Esta serie también puede ser representada por:

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)) \quad 1.9$$

Según 1.8, la representación en series de Fourier de una función periódica, es la suma de componentes sinusoidales que tienen diferentes frecuencias. La componente sinusoidal de frecuencia $\omega_n = n\omega_0$ se denomina la *enésima armónica* de la función periódica. La primera armónica comúnmente se conoce como la componente fundamental porque tiene el mismo periodo de la función $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T$ se conoce como la frecuencia angular fundamental. Los coeficientes C_n y los ángulos θ_n se conocen como amplitudes armónicas y ángulos de fase respectivamente [12].

1.4.3. Evaluación de los Coeficientes de Fourier.

En esta sección sólo se muestran los valores de los coeficientes de Fourier, ya que no es el objetivo hacer la demostración matemática de dichos resultados. [1.11].

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad 1.10$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad 1.11$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad 1.12$$

1.4.4. Integral de Fourier y Espectros Continuos.

Las series de Fourier constituyen una poderosa herramienta en el tratamiento de diversos problemas que implican funciones periódicas. Sin embargo, existen muchos problemas prácticos que no involucran funciones periódicas, por lo que es deseable desarrollar un método de análisis de Fourier que incluya funciones no periódicas.

Si se comienza con una función periódica $f_T(t)$ de periodo T y se hace que T tienda a infinito, entonces la función resultante $f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t)$ deja de ser periódica, ésta función en forma exponencial en serie de Fourier es:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad 1.13$$

Donde
$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad 1.14$$

$$\omega_0 = 2\pi/T \quad 1.15$$

Sustituyendo 1.13 en 1.12, se tiene

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-jn\omega_0 x} dx \right] e^{jn\omega_0 t} \quad 1.16$$

Aquí, la variable comodín x de la integral se utiliza para evitar la confusión con t . Puesto que $1/T = \omega_0/2\pi$, la ecuación 1.15 se expresa como:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-jn\omega_0 x} dx \right] \omega_0 e^{jn\omega_0 t} \quad 1.17$$

Ahora se hace a $T \rightarrow \infty$ y así, por 1.14, ω_0 se anula. Sea $\omega_0 = \Delta\omega$ entonces la frecuencia de cualquier armónico $n\omega_0$ debe corresponder a la variable general de frecuencia que describe el espectro continuo. En otras palabras $n \rightarrow \infty$ a medida que $\omega_0 = \Delta\omega \rightarrow \infty$ tal que el producto es finito, esto es: $n\omega_0 = n\Delta\omega \rightarrow \omega$. De este modo 1.16 se convierte en:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{jn\Delta\omega x} dx \right] e^{jn\Delta\omega t} \Delta\omega \quad 1.18$$

En el límite $T \rightarrow \infty$, $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ y la sumatoria se convierte en la integral sobre ω ; es decir, la función no periódica $f(t)$ se convierte en:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \right] e^{j\omega t} d\omega \quad 1.19$$

Si se define
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad 1.20$$

Entonces 1.18 se convierte en:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad 1.21$$

Las ecuaciones 1.19 y 1.20, son la representación de Fourier de la función no periódica.

El teorema de la integral fundamental de Fourier afirma que si $f(t)$ es real, entonces. [1.11].

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos\omega(t-x) dx d\omega \quad 1.22$$

1.4.5. Transformada de Fourier.

La función $F(\omega)$ definida por 1.19 se conoce como la integral de Fourier o transformada de Fourier de $f(t)$ y la operación de integración se simboliza frecuentemente por \mathcal{F} , esto es:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad 1.23$$

Análogamente \mathcal{F}^{-1} es el símbolo para indicar la operación inversa o sea, para obtener $f(t)$ cuando $F(\omega)$ está dado; esto es.

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad 1.24$$

Donde $f(t)$ se denomina transformada inversa de Fourier de $F(\omega)$. La condición para que exista $F(\omega)$ generalmente está dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad 1.25$$

En otros términos, la integral del valor absoluto de $f(t)$ debe ser finita. [1.11].

1.5. Principios de Funcionamiento del VibroMet Láser 500V.

El sistema emplea un láser de diodo a una longitud de onda de 780 nm para producir tanto el haz objeto (para iluminar el objetivo) y el haz de referencia (oscilador local) y un acústica celular modulador de Bragg (AOM) para impresionar a una frecuencia portadora. El foto detector es una parte integral del módulo de láser de diodo comúnmente utilizado para controlar la potencia del láser. El sistema LDV está basado en una patente configuración electro-óptica y se ilustra esquemáticamente en la figura 1.5. La mayor parte de la luz del diodo láser viene del láser y es colimada por una lente. El haz colimado pasa a través de la AOM, dónde la parte del haz es difractado y desplazado en frecuencia (por lo general de 35 a 40MHz), lo que es el objeto haz. Parte del haz colimado (de orden cero) pasa a través del modelador de Bragg (AOM) no difractado y se bloquea por un tope de haz. El haz objeto ilumina el objeto y parte de la luz dispersada por el blanco se remonta en la AOM donde es difractada y la frecuencia cambió de nuevo (para un total ahora de 70 a 80MHz). Este efecto es conocido como desplazamiento de doble frecuencia y tiene el efecto beneficioso de la creación de una frecuencia portadora en la doble unidad RF lo que ayuda a separar la señal del posible ruido RF. La frecuencia desplazada entra en el láser del diodo en los que experimenta ganancia y se mezcla con el haz de referencia (una pequeña parte del haz de láser de diodo emplea normalmente para controlar la potencia del láser). Los detalles de este proceso se muestran en la figura 1.6. [1.12].

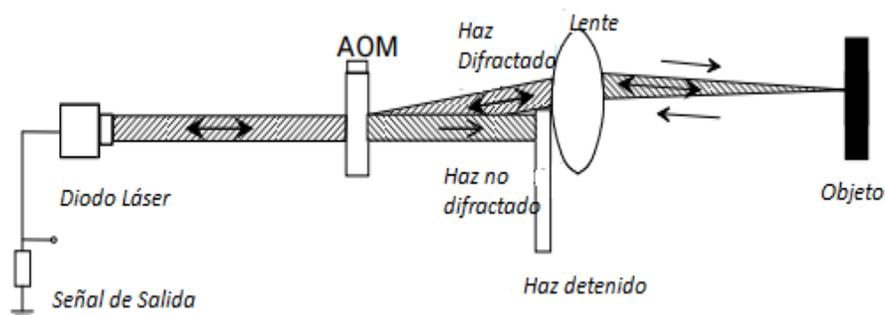


Fig. 1.5. Diagrama Esquemático del MetroLaser VibroMet [1.12].

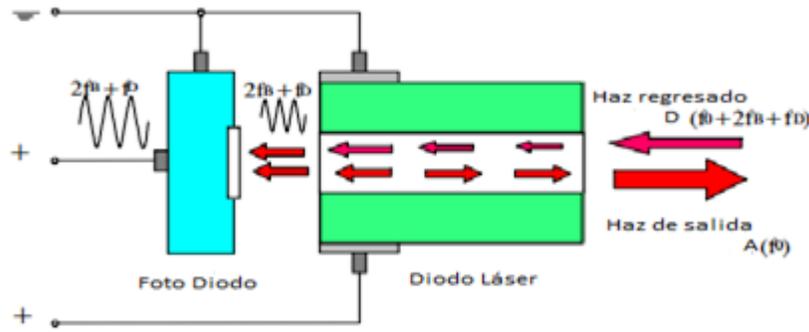


Fig 1.6. Ilustra el principio del efecto de auto mezclado en el VibroMet 500V [1.12].

Para un objeto vibrando, la frecuencia óptica del haz del objeto disperso será el desplazamiento Doppler debido a la velocidad de vibración del objeto. Ésta frecuencia de desplazamiento Doppler f_D esta dada por la ecuación 1.26.

$$f_D = 2v \cos \alpha / \lambda \quad 1.26$$

Donde v es la velocidad vibracional del objetivo, λ es la longitud de onda óptica del láser y α es el ángulo de intersección entre el haz del objeto y la velocidad del objetivo. Para objetivos vibratorios, las ecuaciones relacionan la señal del foto-detector a la vibración, la posición del objetivo está dada por la ec. 1.27.

$$X = X_m \cos(\omega_a t) \quad 1.27$$

Donde X_m es el máximo desplazamiento, y ω_a es la frecuencia rotacional de vibración. La velocidad de vibración v está dada por:

$$v = -X_m \omega_a \text{sen}(\omega_a t) \quad 1.28$$

Sustituyendo la ec. 1.28 en la ec.1.26 el desplazamiento de la frecuencia Doppler f_D del haz de luz disperso esta dado por:

$$f_D = -2X_m \omega_a \text{sen}(\omega_a t) \cos \alpha / \lambda \quad 1.29$$

Entonces, el campo eléctrico del haz del objeto disperso puede ser escrito como:

$$E_s(t) = E_s \cos[2\pi(f_0 + f_D)t + \phi_1] \\ E_s(t) = E_s \cos[2\pi(f_0 - 2X_m \omega_a \text{sen}(\omega_a t) \cos \alpha / \lambda) + \phi_1] \quad 1.30$$

Donde f_0 es la frecuencia óptica del láser y ϕ_1 la fase. Al incrementar la relación de señal-ruido (S/N) y el detector de sensibilidad de una frecuencia portadora, f_D típicamente

impresa en el sistema por desplazamiento de frecuencias ya sea por el objeto o el haz de referencia con una celda de Bragg. En el caso del desplazamiento de la frecuencia el haz de referencia del campo eléctrico está dado por:

$$E_T(t) = E_T \cos[2\pi(f_0 + f_B)t + \phi_2] \quad 1.31$$

Mezclando la luz dispersa con el haz de referencia se producirá una señal de pulso en el detector. La intensidad óptica en el detector está dada por:

$$I(t) = 2E_T E_S \cos[2\pi(f_D + f_B) + \Delta\phi] \quad 1.32$$

$$I(t) = I \cos[2\pi(f(t) + \Delta\phi] \quad 1.32$$

$$A(t) = 2X_m \omega_a \sin(\omega_a t) \cos \alpha / \lambda \quad 1.33$$

La ecuación 1.33 muestra que después de la FM demodulación, la señal de salida contiene solo la vibración de frecuencia ω_a . [1.13]

Bibliografía

- [1] González Virgilio & Guerrero Carlos, "Fractales: Fundamentos y Aplicaciones", Ingenierías. DIMAT-FIME-UANL México. Vol. IV No. 10, págs. 53-58. 2001.
- [2] Bountis Tassos, "Fundamental Concepts of Classical Chaos, Part II: Fractals and Chaotic Dynamics", Open Sys & Information Dyn, Netherlands. págs. 281-322. 1997.
- [1.1] Lopes R. & Betrouni N., "Fractal and Multifractal Analysis: A Review", Medical Image Analysis, Elsevier B.V. págs. 634-649. 2009.
- [1.2] Kantelhardt Jan W. "Fractal and Multifractal Time Series", Institute of Physics, Martin-Luther-University, 06099 Halle, Germany, April 4, 2008.
- [1.3] Benoît B. Mandelbrot, "Multifractals and $1/f$ Noise: wild self-affinity in physics", Springer, Berlin, 1999.
- [1.4] Kale Malhar & Butar Ferry, "Fractal Analysis of Time Series and Distribution Properties of Hurst Exponent", Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education, Vol. 5, No. 1, 2011.
- [1.5] Barral Julien, "Analyse multifractale de Processus Multiplicatifs ou Additifs, et Ubiquité Conditionnée", Centre d'Orsay, Université de Paris-Sud, 23 Mai, 2005.
- [1.6] Hunt G.A., "Random Fourier Transforms", Trans. Amer. Math. Soc. 71, 38 (1991).
- [1.7] Rangarajan G. & Ding M., "Integrated Approach to the Assessment of Long range Correlation in Time Series Data", Phys. Rev. E61,4991, 2000.
- [1.8] Chang J., "Stochastic Processes", Department of Statistics, Yale University, February 2, 2007.
- [1.9] Falconer K.J., "Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications", John Wiley & Sons, 2003.
- [1.10] Berry M. & Lewis Z., "On the Weierstrass-Mandelbrot Fractal Function", H.H. Wills Physics Laboratory, University of Bristol, Proc. R. Soc. Lond. A370.1980.

[1.11] Hsu Hwei P., "Fourier Analysis", Pearson, 1998.

[1.12] Manual VIBROMET 500V: single point laser doppler vibrometer.

[1.13] Shinohara, S., Mochizuki, A., Yoshida, H., and Masao Sumi, Laser Doppler Velocimeter Using the Self-Mixing Effect of a Semiconductor Diode Laser, Appl. Opt. 25, 9 (1986).

CAPÍTULO 2

ESTADO DEL ARTE.

Las membranas arrugadas (bolas de papel) son sistemas desordenados con una aproximación esférica en su forma, por lo cual tiene una dimensión fractal de $D=2.5\pm 0.2$; el complejo comportamiento de una hoja de papel se suscita cuando las fuerzas externas son ejercidas sobre ella, la deformación de la hoja se convierte en energía y esfuerzos que se concentran en solo algunas regiones llamadas *vértices*; la agrupación de dos o más vértices es nombrada *cresta* [2.1]. La tensión en las crestas y los vértices puede ser tan grande que el efecto de arrugamiento puede ser irreversible; otra característica importante es, el aumento de la rigidez de la membrana, incrementando el grado de arrugamiento [2.2].

Estudios experimentales acerca de las bolas de papel arrugadas, se enfocan en propiedades fractales como el escalamiento del radio con respecto al tamaño de la hoja, esta misma propiedad fue usada para caracterizar las fases de membranas microscópicas como lo son las células de la sangre o el óxido de grafito [2.3].

La cinética de la rugosidad de superficies ha jugado un rol importante en la física estadística en las dos últimas décadas, con aplicaciones como el crecimiento de grieta en el fenómeno de fractura. Se ha encontrado que, en muchos casos la dinámica de la rugosidad exhibe un escalamiento invariable; su comportamiento no cambia bajo el re-escalamiento de parámetros [2.4].

A continuación, se hace una reseña cronológica de investigaciones científicas relacionadas con superficies arrugadas desde finales del siglo XX así como los comienzos del siglo XXI a la fecha.

En 1987, Gomes y colaboradores publicaron la relación escalar existente de dos casos de bolas de papel corrugado y sumergidos en tinta negra, para luego desdoblarlas y obtener la dimensión fractal de las zonas pintadas por dicha solución [2.5].

Cerda y Mahadevan en 1988, estudian la geometría y elasticidad de una hoja arrugada, dando una solución analítica, para una forma universal de un cono que caracteriza la singularidad de los filos o vértices y algunas de sus predicciones experimentales se verifican cualitativamente. También, dan una relación escalar para el tamaño del centro del cono [2.6].

En 1989, Gomes y colaboradores, determinan la deformación de esferas de papel aluminio, cuando son sometidas a diferentes cargas; para éste estudio, se describe el comportamiento de ocho relaciones escalares, relacionándolas con la fuerza de deformación, superficies escalares y variables de la geometría de la superficie corrugada [2.7].

Años después, en 1995 Lobkovsky y colaboradores, publican la propiedad escalar que gobierna el estado de una hoja arrugada de un material sólido, que contiene pares de aristas por medio de puntos. Sus resultados exponen que cuando el tamaño lineal aumenta suficientemente, la energía de deformación crece. Sin embargo, ésta energía disminuye, cuando se concentra en un fragmento de la hoja y a pesar de esa concentración la deformación local disminuye [2.8].

En 1996, Plouraboué y Roux, llevan a cabo estudios a superficies arrugadas aleatoriamente, presentando un análisis experimental de las superficies arrugadas, que muestran una geometría auto-afín con un exponente cerca de la unidad, introduciendo así, un modelo simple para mostrar una posible fuente de correlación a lo largo de la geometría analizada [2.9]

En 2002, Albuquerque y Gomes, realizaron estudios sobre el esfuerzo de relajación en superficies arrugadas ya que la medición este relajamiento es comúnmente usado en el estudio del comportamiento visco elástico de los materiales. Llegando a la siguiente conclusión: La relajación del esfuerzo a compresión $F_\delta(t)$, en superficies arrugadas sometidas a deformación plástica, cuando la deformación δ es fija, y según los datos experimentales obtenidos, no prueban que $F_\delta(t)$ para todos los especímenes de superficies arrugadas examinadas obedezcan el decaimiento del exponente de rigidez $F_\delta(t)=F_\delta(0)\exp[-(t/\tau^\beta)]$, con $\beta=0.28\pm 0.03$ independiente de δ en el intervalo $0.2\leq\delta\leq 0.6$, y a lo largo de seis décadas de variabilidad en t/τ . El valor numérico obtenido para β en estos experimentos es similar al exponente correspondiente encontrado en la relajación de polímeros y cristales [2.10].

En 2003, Matan y colaboradores, observaron que las hojas arrugadas tienen una alta resistencia a la compresión; esto lo llevaron a cabo por medio de esferas arrugadas de Mylar, bajo diferentes condiciones de carga [2.11].

En 2006, Sultan y Boudaoud, introducen un simple modelo de 1D, el cual les permitió realizar un estudio estadístico de papel arrugado. Mostrando la transición de la distribución de longitudes en un logaritmo normal, de acuerdo a las predicciones y los experimentos; así como la distribución gamma de longitudes únicamente determinados por el número de capas del sistema [2.12].

Ese mismo año (2006), Balankin y colaboradores, realizaron un estudio acerca de la auto-similaridad de la rugosidad en el secado de papel mojado, concluyendo que las

configuraciones de las hojas de papel secado son auto-similares más que auto-afines. Así, como también notaron la coincidencia numérica entre la dimensión fractal D y el exponente de rugosidad espectral α_s de los perfiles auto-similares de las hojas arrugadas [2.13].

Así mismo, en 2006, Balankin y colaboradores, llevan a cabo un experimento más, ésta vez acerca de la rugosidad intrínsecamente anómala de láminas u hojas delgadas arrugadas aleatoriamente. Llegando a la conclusión que la geometría fractal de dichas hojas, está determinada por las propiedades de escalamiento de la red de arrugado, dónde se acumula la energía de las fuerzas externas. Específicamente se encontró que la dimensión de masa fractal de bolas dobladas aleatoriamente es determinada por la dependencia de la ley de potencias; así como la superficie de las bolas arrugadas y cuando se desdoblán muestran una invariancia auto-afín o una rugosidad intrínsecamente anómala, en ambos casos la rugosidad local es caracterizada por el exponente universal local de rugosidad $H = 0.72 \pm 0.04$. Sin embargo, el exponente global de rugosidad es dependiente del material [2.14].

En 2008, el Dr. Balankin y su equipo de colaboradores, efectúan un estudio acerca del escalamiento de la ley de potencias de deformaciones laterales con el coeficiente de Poisson universal para hojas dobladas aleatoriamente. Éste estudio consistió en el análisis de deformaciones laterales de doblado aleatorio de hojas, sometidas a compresiones uniaxiales y radiales, encontrando que las deformaciones laterales de hojas de papel elasto-plásticas obedecen a la ley de potencias en su comportamiento, con un coeficiente universal de Poisson de $\nu = 0.17 \pm 0.01$, el cual no depende ni del tipo de papel ni del tamaño de la hoja. En contraste, las deformaciones laterales de hojas de aluminio (plásticas) arrugadas aleatoriamente mostraron una dependencia lineal en la compresión axial con un coeficiente de Poisson de $\nu = 0.33 \pm 0.01$. Ésta diferencia es consistente con la diferencia en la topología fractal de hojas elasto-plásticas y hojas plásticas, que son arrugadas aleatoriamente, concluyendo que cada una pertenece a diferentes clases de universalidad [2.15].

Al mismo tiempo (2008), Blair y Kudrolli, realizan experimentos de medición en la geometría de papel arrugado usando métodos no invasivos, en éste caso un láser, el cual les ayuda a hacer una reconstrucción topográfica del papel arrugado. La distribución de las curvas sigue una forma exponencial con regiones de alta curvatura, localizada a lo largo de las crestas; se observó una larga fracción de crestas que termina sin bifurcación. La auto-afinidad de la superficie es caracterizada por el exponente de Hurst de $H = 0.72 \pm 0.01$ [2.16]. Corroborando así el resultado obtenido con anterioridad por Balankin y colaboradores

En el año 2009, Balankin y colaboradores efectúan un estudio sobre las propiedades de escalamiento del plegado forzado en materiales delgados de diferentes geometrías. Sólo se observó los cruces de empaquetamiento de cuerdas unidimensionales y doblado de hojas

bidimensionales, ya que la dimensión fractal del conjunto de hojas elasto-plásticas es dependiente del espesor debido a la deformación por relajación después de retirar la fuerza [2.17].

Una vez más, en 2010, Balankin y colaboradores, realizan un estudio sobre la topología fractal de bolas de papel arrugadas a mano; estudiando la distribución de los dos lados de la hoja a lo largo de la superficie de la bola y la distribución de los fragmentos de la hoja cuando la bola es cortada a la mitad. Se encontró que los patrones obtenidos por el mapeo de las superficie de las bolas dentro del desdoblado, exhiben propiedades fractales caracterizados por dos dimensiones fractales, las cuales son independientes del tamaño y diámetro de la bola. El mosaico de patrones obtenidos por la reconstrucción de los fragmentos de la hoja dividida en dos partes, poseen una escala fractal invariante caracterizada por la dimensión fractal de cajas $D_{BF} = 1.68 \pm 0.04$, la cual es independiente del tamaño de la hoja; además se notó que D_{BF} al menos coincide numéricamente con la dimensión fractal universal de la intersección de bolas de papel arrugadas a mano con un plano [2.18].

En 2011, Balankin y colaboradores llevan a cabo un estudio acerca de la dinámica del esfuerzo y deformación de relajación en hojas elasto-plásticas aleatoriamente arrugadas sometidas a una compresión axial, tanto desde el punto teórico como experimental, encontrando que cuando la bola (ya sea de material elasto-plástico o plástico) es comprimida axialmente, la dinámica de relajación se rige por procesos activados del reordenamiento de la energía que se suscita en la red de arrugamiento. Sin embargo, el esfuerzo de relajación predominantemente en hojas plásticas, es controlado por la energía de disipación de los pliegues del arrugado. Señalan que la termodinámica de los procesos activados en las hojas arrugadas, puede ser entendida con la estadística mecánica de Edwards [2.19].

Bibliografía

- [2.1] Wood A.J., "Witten's Lectures on Crumpling", Special Issue of Physical A 313, 83 (2002).
- [2.2] Aström J.A., Timonen J. & Karttunen M., "Crumpling of a Stiff Tethered Membrane", Physical Review Letter, 2004.
- [2.3] Nelson D., Piran T., & Weinberg S., "Statistical Mechanics of Membranes and Surfaces", Jerusalem Winter School for Theoretical Physics, Vol. 5, Singapore, 1988.
- [2.4] Barabási A. & Stanley H., "Fractal Concepts in Surface Growth", Cambridge University, England, 1995.
- [2.5] Gomes, M.A.F, "Fractal Dimension", Am. J. Physics 55, 649, 1987.
- [2.6] Cerda, E.L. Mahadevan, "Conical Surfaces and Crescent Singularities in Crumpled Sheets", Physical Review Letter, Volume 80, Number 11, 1988.
- [2.7] Gomes M.A.F, Rodrigues C.B.S, "Mechanically Deformed Crumpled Surface", Phys. D: Appli.22,1217-1221, 1989.
- [2.8] Lobkovsky A., Gentges H., Morse T., Witten A., "Scaling Properties of Stretching Ridges in a Crumpled Elastic Sheet", Submitted as a report to Science, November 1995.
- [2.9] Plouraboué F. and Roux S., "Experimental Study of the Roughness of Crumpled Surfaces", Elsevier Science, Physica A227, 173-182, 1996.
- [2.10] Albuquerque R.F. & Gomes M.A.F., "Stress Relaxation in Crumpled Surfaces", Elsevier Science, Physica A 310,377-383, 2002.
- [2.11] Matan K., Williams R., Witten A., and Nagel S.R., "Crumpling a Thin Sheet", November 2003.
- [2.12] Sultan E. & Boudaoud A., "Statistics of Crumpled Paper", Physical Review Letters, PRL96,136103, 2006.
- [2.13] Balankin A, Morales D., Susarrey O., Samayoa D., Mtz.Trinidad J.,Marquéz J., García R., "Self-similar Roughening of Drying Wet Paper", Physical Review E 73, 065105, 2006.
- [2.14] Balankin A., Susarrey O., Cortes R., Samayoa D., Mtz. Trinidad J., Mendoza M., "Intrinsically Anomalous Roughness of Randomly Crumpled Thin Sheets", Physical Review E74, 061602, 2006.

[2.15] Balankin A., Samayoa D., Pineda E., Cortes R., Horta A., Martínez M., "Power Law Scaling of Lateral deformations with Universal Poisson's Index for Randomly Folded Thin Sheets", *Physical Review B* 77, 125421, 2008.

[2.16] Balankin A., Morales D., Pineda E., Horta A., Martínez M., Samayoa D., "Topological Crossovers in the Forced Folding of Self-Avoiding Matter", *Elsevier Physical A* 388, 2009.

[2.17] Balankin A., Samayoa D., Andrés I., Patiño J., Martínez M., "Fractal Topology of Hand-Crumpled Paper", *Physical Review E* 81, 061126, 2010.

[2.18] Balankin A., Susarrey O., Hernández F., Patiño J., "Slow Dynamics of Stress and Strain Relaxation in Randomly Crumpled Elasto-Plastic Sheets", *Physical Review E* 84, 021118, 2011.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

En años recientes, estudios acerca de las propiedades físicas y mecánicas de las bolas de papel, como lo son: dimensión de masa, densidad, módulo de Young, exponente de rugosidad local, exponente de escalamiento, han permitido un mejor entendimiento del comportamiento de las mismas. En este trabajo, se propone una metodología experimental y de análisis, para el estudio del fenómeno de vibración intrínseca en membranas arrugadas, específicamente en bolas de papel a través del tiempo hasta alcanzar su estado de relajación; con el fin de conocer la tendencia de comportamiento que existe en su frecuencia de vibración, como parte de un conjunto de propiedades anteriormente mencionadas que rigen su conducta general.

3.1. Metodología Experimental.

Para el estudio del fenómeno de cambio de frecuencia de vibración intrínseca, se utilizaron tres diferentes tipos de papel: Glasin, Kraft y Bond. Como se sabe, el papel es un material higroscópico, con una estructura anisotrópica asociada con una orientación asimétrica en la distribución de sus fibras debido a su proceso de fabricación [3.1], que al momento de arrugarle se convierte en un sistema desordenado, así mismo, por su espesor el papel es considerado como una membrana, además de que es accesible y de bajo costo adquisitivo.

3.1.1. Elaboración de Probetas.

Por cada tipo de papel, se prepararon tres especímenes para cada uno de los diferentes tamaños como se muestra en la fig.3.1. Generándose así 12 probetas por papel, 36 probetas en total.

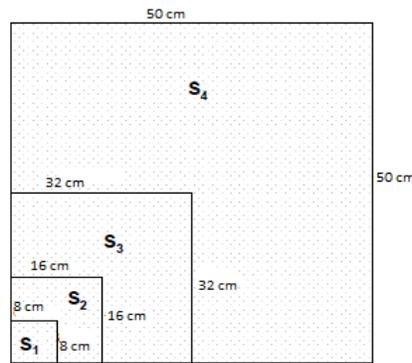


Fig.3.1 Tamaños de las probetas

Las probetas, mantienen la relación de escalamiento:

$$L = \lambda L_0 \tag{3.1}$$

Donde L_0 es el tamaño original de la hoja (0.08m), λ = factor de escalamiento (1, 2, 4, 6.25).

En la tabla 1, se muestran las propiedades mecánicas de cada tipo de papel.

Tabla 1. Propiedades mecánicas del papel glasin, papel kraft y papel bond. [3.2]

PAPEL	Módulo de Elasticidad N/mm ²		Esfuerzo de Cedencia N/mm ²		Esfuerzo de Ruptura N/mm ²		Resiliencia J/mm ²		Tenacidad J/mm ²		Espesor (mm)	Densidad (gr/m ³)
	L	T	L	T	L	T	L	T	L	T		
Glasin	3276	880.2	24	14	37	23.6	0.21	0.144	1.039	0.432	0.077	40
Kraft	1790	612.9	12.6	6.4	26	11.8	0.945	0.131	0.670	0.130	0.142	120
Bond	804	494	5.88	4.10	30.8	11.5	0.532	0.136	0.865	0.140	0.073	75

3.1.2. Condiciones Ambientales e Iniciales del Equipo.

Es importante mencionar las condiciones ambientales a las que se sometió el experimento, dado que el papel tiene la característica de higroscopia, que es la capacidad que tiene el papel para absorber y exhalar moléculas de agua del medio en el que se encuentra. La humedad promedio controlada fue 35-40% a una temperatura de $23.5 \pm 1.0^\circ C$.

Con lo que respecta al equipo empleado para la obtención de datos, se usó un vibro metro láser Doppler VibroMet 500V calibrado, con las especificaciones que se mencionan en la tabla 2:

Tabla 2. Especificaciones del Vibrometro Láser Doppler VibroMet 500V [1.12]

Rango de Velocidad	5µm/s a 800 mm/s	Dimensiones del Controlador Electrónico	30x22x6 cm
Rango de Frecuencia de Vibración	DC s 20kHz	Peso del Cabezal del Láser	1.4 kg
Distancia de Trabajo	1 cm a 5 m	Peso del Controlador Electrónico	3.9 kg
Rango de Desplazamiento Óptica	0.04nm (a 20 KHz) a 120mm (a 1 Kz) Colimada	Filtros de Bajo Paso	1,2,5,10,20 kHz
Superficie de Reflectividad	Sobre una superficie real	Voltaje de Salida Láser	+/- 10 Volts
Señal de Salida	Velocidad análoga y 10.7MHz	Requerimientos de Potencia	650 nm,<1mW, Clase II
Dimensiones del Cabezal del Láser	24x11.4x7.6 cm	Rango de Temperatura	100 a 230 VAC a 50/60 Hz 3-45 °C

En la figura 3.2 se observa el vibrometro, así como la manera en que se realizaron las mediciones; dicho dispositivo fue programado para tomar lecturas en un intervalo de tiempo de 0.000025 segundos, con parámetros del canal de -1.0 como valor mínimo y 1.0 como valor máximo con el objetivo de detectar pequeñas frecuencias. La ubicación del vibro metro láser con respecto a la probeta fue de 0.7 m de distancia, a una altura de 1.10 m con un ángulo de 30⁰. Cabe señalar que los resultados pueden variar si el experimento es sometido a diferentes condiciones ambientales e iniciales.

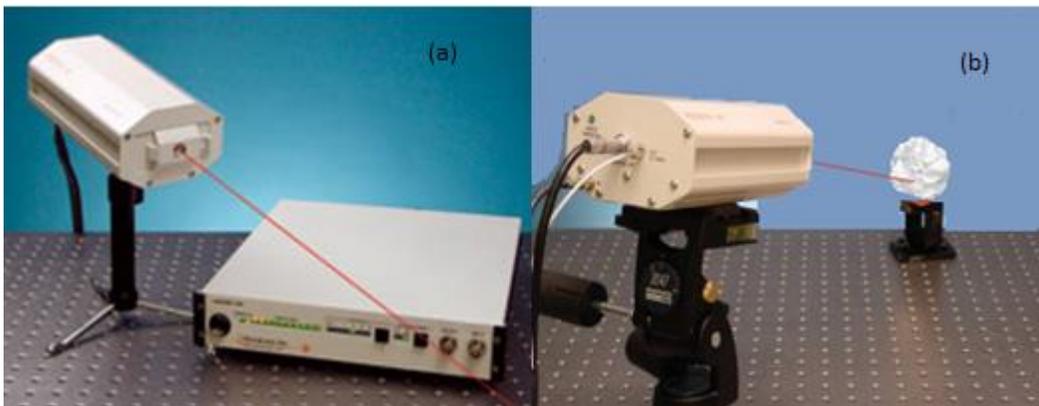


Fig. 3.2 (a) Vibrometro Láser Doppler VibroMet 500V, (b) Vibrometro Láser apuntando al objeto de medición.

3.1.3. Metodología

La metodología experimental propuesta en este trabajo de investigación es la siguiente:

- Se tomaron tres mediciones aleatorias de la hoja de papel antes del arrugado, con el propósito de conocer su frecuencia antes de recibir la fuerza externa de doblado y poder observar la variación de energía que se traducirá posteriormente en frecuencias.
- Las probetas fueron comprimidas mediante una compactación aleatoria, cabe resaltar que dicha compactación fue hecha con ambas manos por una misma persona, hasta alcanzar una forma semi-esférica, como se puede observar en la figura 3.3. Es importante señalar que las probetas no fueron desdobladas, simplemente por su naturaleza tendieron al estado de relajación; así mismo, no fueron sometidas a una excitación externa adicional.
- Inmediatamente, se toman las medidas de 5 puntos diferentes escogidos aleatoriamente, entre los primeros 5 a 10 minutos del arrugamiento.
- Cada medición tiene una duración de 60 segundos y cada punto fue marcado, ya que las próximas mediciones se efectuaron sobre estos mismos puntos.
- Las probetas fueron colocadas en contenedores libres de fuerzas externas que pudieran afectar su comportamiento de relajación.
- Al quinto día del arrugamiento de cada probeta, se realizaron nuevamente mediciones sobre los puntos antes ya marcados.
- Éste mismo procedimiento se realizó al décimo día, donde se sabe que la bola de papel alcanza su estado de relajación total.
- De cada una de las mediciones que tuvieron una duración de un minuto se obtuvieron aproximadamente 32000 datos; en los primeros 20 segundos del minuto, el equipo alcanzaba su estabilidad por lo que los datos de ese intervalo de tiempo fueron descartados, posteriormente se observó que en el lapso de tiempo restante, no hay grandes variaciones en los datos, así que se toman como constantes, por lo que para el análisis del experimento se consideró una ventana aleatoria de posición en los 40 segundos restantes de la medición de 1500 datos.
- De las 5 mediciones hechas por probeta y por día, se hizo un promedio de ellas para obtener una función por cada probeta. Para cada tamaño de papel hay tres pruebas, para cada tipo de papel hay doce de ellas, se obtuvieron 36 probetas, de las cuales se generaron 144 funciones en todo el experimento.

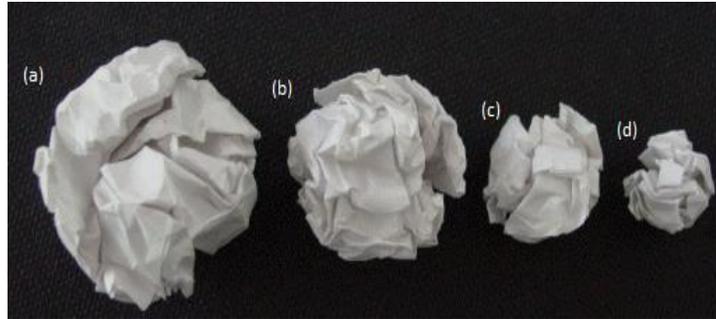


Fig. 3.3. Probetas de papel de diferentes tamaños compactadas manualmente.
 (a) 0.50x0.50 m, (b) 0.32x0.32m, (c) 0.16x0.16m, (d) 0.08x0.80m.

Un ejemplo de las gráficas obtenidas por estos 1500 datos, se observa en la figura 3.4, la cual es una función voltaje-tiempo.



Fig. 3.4. Grafica voltaje-tiempo de papel glasin obtenida en la primera medición, 1500 datos graficados.

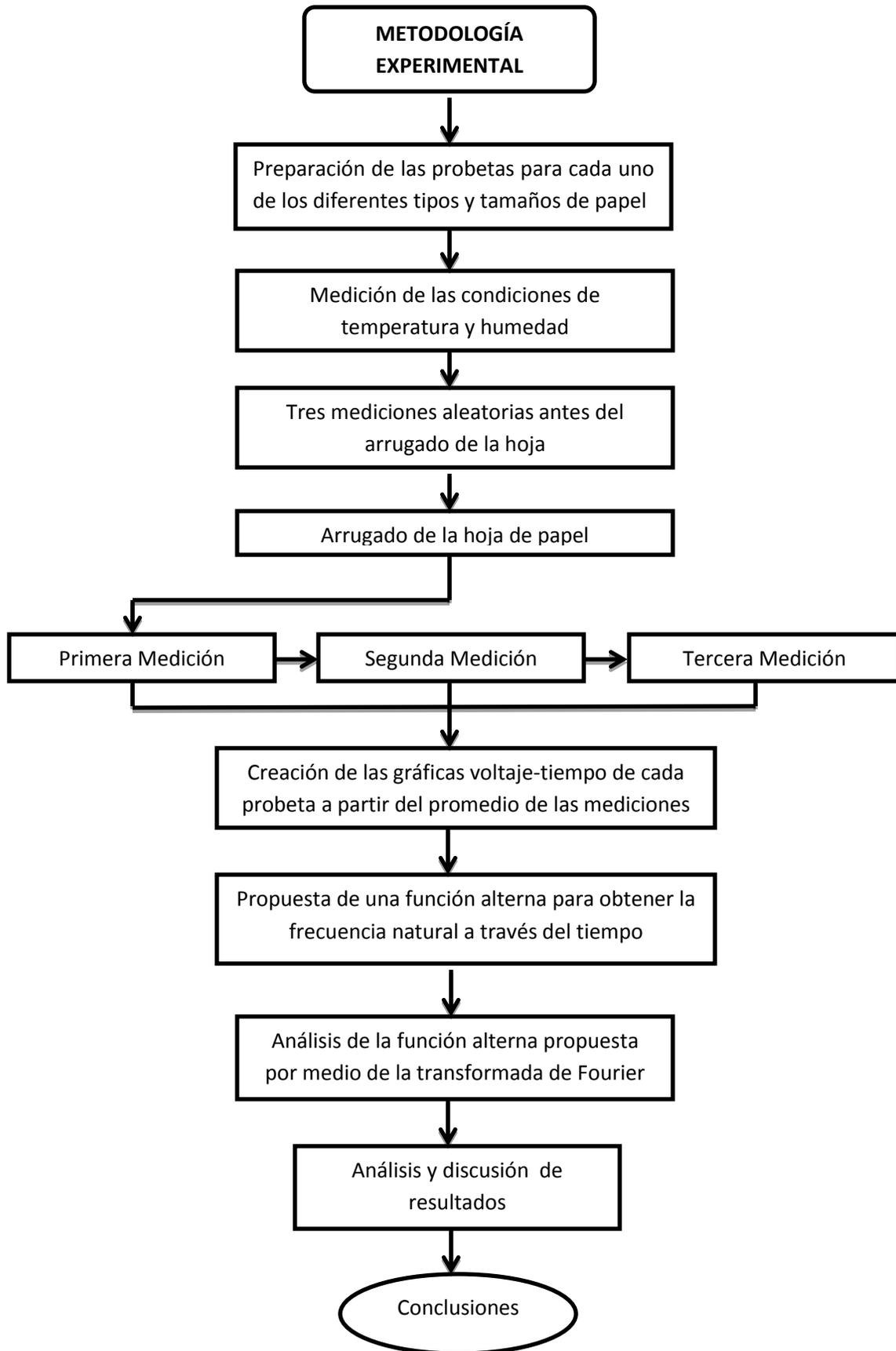


Fig.3.5.Diagrama de Flujo de la Metodología

3.2. Solución Analítica Propuesta.

La gráfica generada por cada una de las mediciones realizadas, como se observa en la fig.3.6, es una gráfica que representa un fenómeno multi-fractal auto afín, debido a su irregularidad y complejidad, asemejándose a una función de Weierstrass.

La solución alternativa propuesta en el presente trabajo, tiene como finalidad una mejor comprensión del fenómeno; la cual se basa en la función de Weierstrass-Mandelbrot que fue citada en el capítulo 1. La cual propone funciones alternativas en senos y cosenos.

De igual manera que lo hizo Mandelbrot en 1977, se ha propuesto una función alterna en senos o cosenos para cada una de las 144 funciones generadas; el conjunto de todas estas funciones alternas propuestas tiende en general a ser una serie de Fourier.

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad 3.2$$

Sin embargo, en lo que respecta a los coeficientes no se determinan en este caso, dado que con los datos obtenidos en los experimentos se calculó la amplitud de cada señal sugerida. El cálculo de la amplitud se obtuvo a partir de los datos experimentales, de ellos se sacó el promedio más menos la desviación estándar, la cual es bien una campana de Gauss, como se muestra en la figura 3.6.

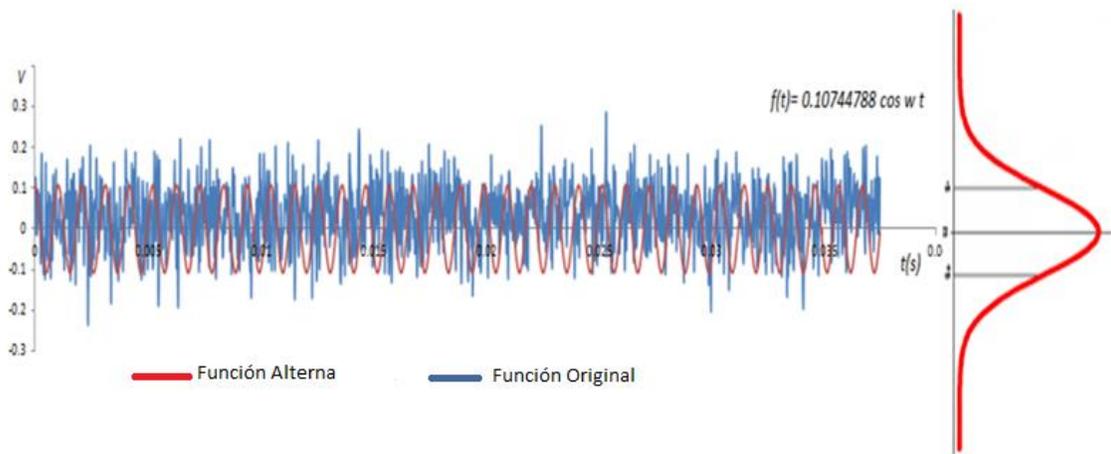


Fig. 3.6 Gráfica de la Función Original y Alterna de una muestra de Papel Glasin en su primera medición y la campana de Gauss que representa la amplitud de la Función Alterna Propuesta.

Para el cálculo de la frecuencia, se analiza la función alterna propuesta y el número de períodos que se repiten en el intervalo de tiempo propuesto para los 1500 datos (véase apéndice 1). Haciendo uso de la ecuación 3.3 se obtiene la frecuencia natural ω_n para cada una de las funciones propuestas.

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} \text{ (rad/s)} \quad 3.3$$

Sin embargo, muchas veces la frecuencia natural es medida en Hertz, por lo que finalmente la ecuación 3.4 es empleada para el cálculo de la frecuencia natural f_n .

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \text{ (Hz)} \quad 3.4$$

Las frecuencias obtenidas se muestran en el siguiente capítulo, dichas frecuencias son muy pequeñas, por tal motivo el dispositivo de medición empleado VibroMet 500V, a través de un transductor solo detecta cambios de voltaje; es por ello que la ver las gráficas de las funciones alternas (véase apéndice 1) antes de la transformada de Fourier, las unidades en el eje vertical están dadas en Volts, cuando en realidad, se esperaría que éstas unidades fuesen dadas en algún submúltiplo de metro, sin embargo, en el momento que se realiza la transformada de Fourier el eje vertical toma unidades de nanómetros como se puede observar en el apéndice 1.

La transformada de Fourier discreta, es usada para transformar cada una de las funciones alternas propuestas que están dadas en el dominio en el tiempo, a una función en el dominio de frecuencia. Para el cálculo se hizo uso de la herramienta matlab debido al gran número de funciones por analizar. En la programación se consideró la variable ruido, el cuál en ningún caso excedió el 15%. Dichas transformaciones se observan en el apéndice 1, de las cuales se obtuvieron los desplazamientos ocurridos en cada una de vibraciones de las membranas arrugadas.

BIBLIOGRAFÍA

- [3.1] Dengy C.T.J., "Paper: An Engineering Stochastic Structure", Atlanta Georgia, Tappi Press, 1994.
- [3.2] Hernández M. Francisco, "Análisis Experimental de la Relajación en Materiales Complejos Plexoplegables", Tesis de Doctorado, IPN, México, 2012.

CAPÍTULO 4

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Todos los sistemas físicos tienen la propiedad de vibrar y estas vibraciones serán el reflejo de su comportamiento dinámico. En el presente capítulo se analizan los resultados obtenidos durante la experimentación, con el fin de dar una explicación científica del fenómeno.

En primera instancia se analizan las gráficas de comportamiento de amplitudes en los diferentes días de medición de cada una de las probetas de los diferentes tipos de material y medidas, que se observan en las figuras 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4. En éstas, se ve claramente una tendencia en el comportamiento de la amplitud. La primera medición de amplitud refleja la vibración por si sola que tiene el material, ya que todo materia tiene una vibración intermolecular implícita.

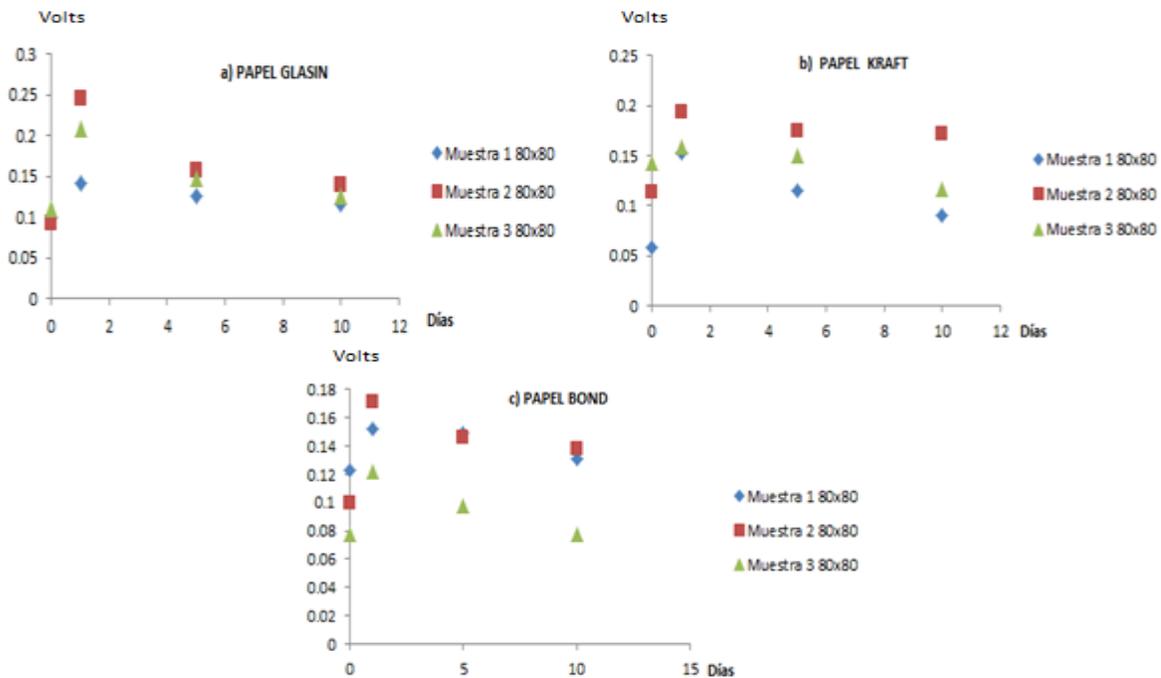


Fig.4.1. (a) Comportamiento de la Amplitud de las Probetas 80x80 mm de Papel Bond, (b) Comportamiento de la Amplitud de las Probetas 80x80 mm de Papel Glasin, (c) Comportamiento de la Amplitud de las Probetas 80x80 mm de Papel Kraft.

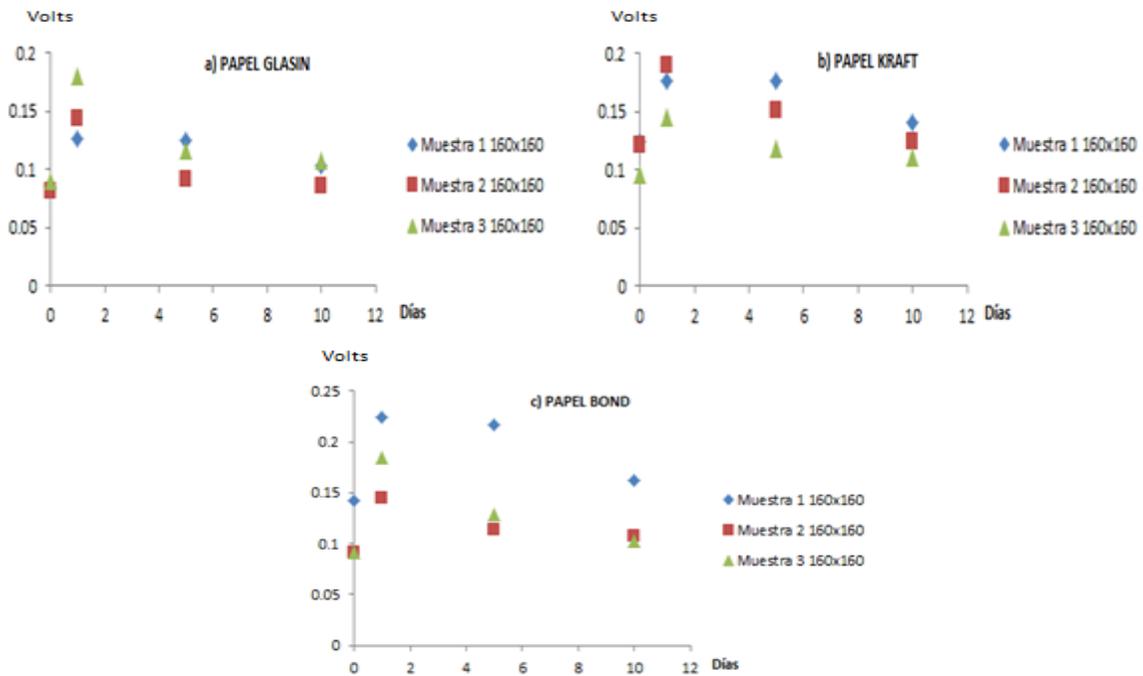


Fig.4.2 (a) Comportamiento de la Amplitud de las Probetas 160x160 mm de Papel Bond, (b) Comportamiento de la Amplitud de las Probetas 160x160 mm de Papel Glasin, (c) Comportamiento de la Amplitud de las Probetas 160x160 mm de Papel Kraft.

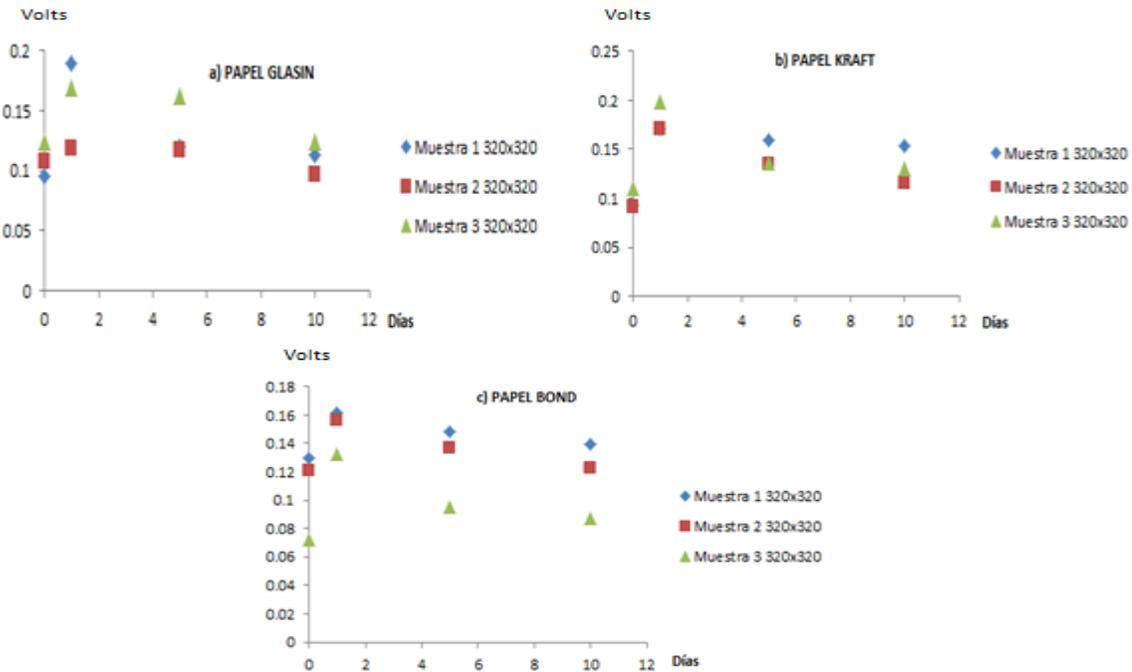


Fig.4.3 (a) Comportamiento de la Amplitud de las Probetas 320x320 mm de Papel Bond, (b) Comportamiento de la Amplitud de las Probetas 320x320 mm de Papel Glasin, (c) Comportamiento de la Amplitud de las Probetas 320x320 mm de Papel Kraft.

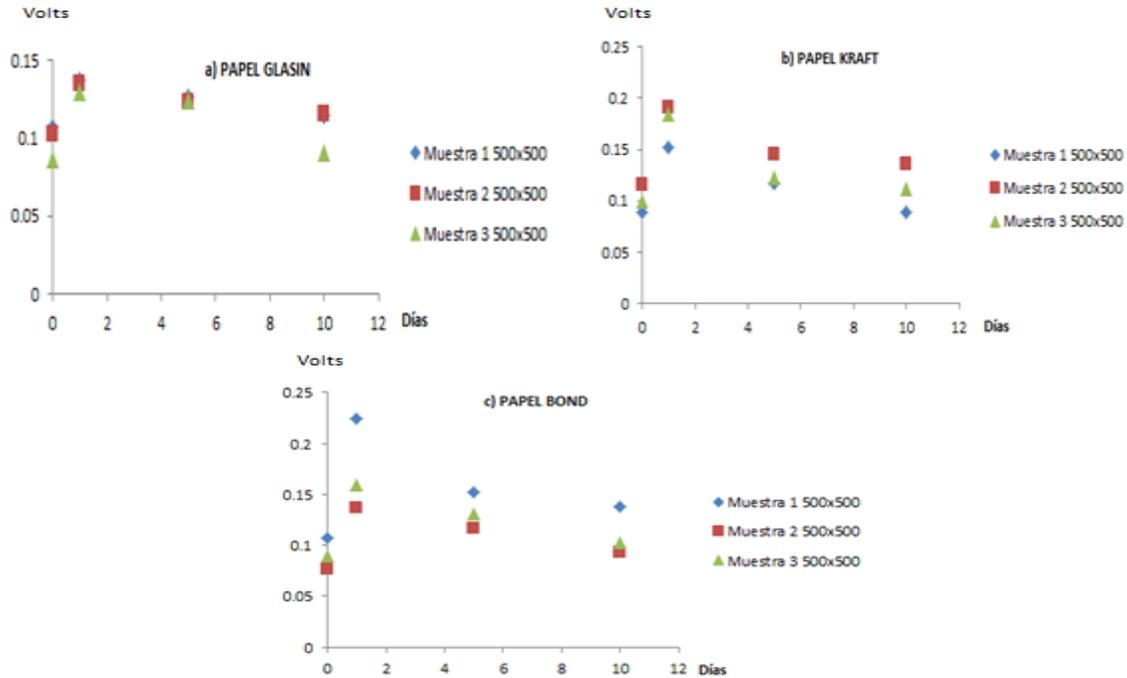


Fig.4.4 (a) Comportamiento de Amplitud de las Probetas 500x500 mm de Papel Bond, (b) Comportamiento de la Amplitud de las Probetas 500x500 mm de Papel Glasin, (c) Comportamiento de la Amplitud de las Probetas 500x500 mm de Papel Kraft.

En la segunda medición, realizada exactamente después de llevar a cabo el arrugado (transferencia de energía), se ve un incremento en la amplitud en todas las probetas no importando material ni tamaño, lo cual indica que la transferencia de energía provocó una excitación intermolecular mayor a la que tiene el material en un estado original. Sin embargo, como ésta transferencia de energía no permanece constante, se produce una disipación de ésta misma a través del tiempo, éste fenómeno es visible en la tercera medición de la amplitud.

Debido al comportamiento de la amplitud en éste experimento, se puede decir que existe un amortiguamiento débil en la membrana, ya que la amplitud decrece a medida que el tiempo aumenta [4.1], como se muestra en la fig. 4.5.

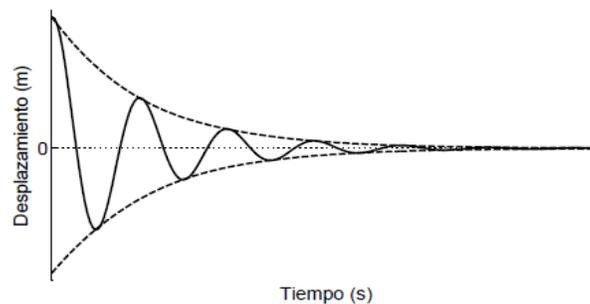


Fig.4.5 Respuesta de un sistema con amortiguamiento débil

A partir de las funciones alternas propuestas para cada una de las probetas, se calcularon los periodos y frecuencias, en un intervalo de tiempo de $0 \leq t \leq 0.037525$ s, que es el tiempo de los 1500 datos analizados. Véase la tabla 3.

Tabla 3. Periodos y frecuencias obtenidas de las funciones alternas.

PERIODO	$f_n(\text{Hz})$	$\omega_n(\text{rad/s})$
200 ciclos/s	0.005 Hz	31.41×10^{-3}
400 ciclos/s	0.0025 Hz	15.70×10^{-3}
600 ciclos/s	0.00166 Hz	10.47×10^{-3}
800 ciclos/s	0.00125 Hz	7.85×10^{-3}
1000 ciclos/s	0.001 Hz	6.28×10^{-3}
1100 ciclos/s	0.0009 Hz	5.71×10^{-3}

Sustituyendo estos valores en cada una de las funciones seno y/o coseno alternas propuestas, correspondientes a cada probeta, se obtuvieron las funciones que describen cada tipo de papel y tamaño de muestra en los tres diferentes días de medición.

A continuación se muestra las tablas con las funciones alternas para cada tipo de papel.

Tabla 4. Funciones alternas de cada una de las probetas de diferentes longitudes de papel glasin, en los diferentes momentos en los que se realizó la medición (antes del arrugamiento, primer, quinto y décimo día).

FUNCIONES PROPUESTAS PARA PAPEL GLASIN				
	Longitud (mm)	Probeta 1	Probeta 2	Probeta 3
Medición sin arrugar	80x80	$0.09855 \cos 6.28 \times 10^{-3}t$	$0.09275 \cos 10.47 \times 10^{-3}t$	$0.11105 \cos 6.28 \times 10^{-3}t$
	160x160	$0.08490 \cos 10.47 \times 10^{-3}t$	$0.08103 \cos 5.23 \times 10^{-4}t$	$0.090709 \cos 7.85 \times 10^{-3}t$
	320x320	$0.09572 \cos 10.47 \times 10^{-3}t$	$0.10774 \cos 6.28 \times 10^{-3}t$	$0.12473 \cos 7.85 \times 10^{-3}t$
	500x500	$0.10693 \cos 5.71 \times 10^{-3}t$	$0.10241 \cos 7.85 \times 10^{-3}t$	$0.08656 \cos 10.47 \times 10^{-3}t$
Medición Primer día	80x80	$0.14196 \cos 10.47 \times 10^{-3}t$	$0.24487 \cos 6.28 \times 10^{-3}t$	$0.20854 \cos 6.28 \times 10^{-3}t$
	160x160	$0.12586 \cos 6.28 \times 10^{-3}t$	$0.14376 \cos 7.85 \times 10^{-3}t$	$0.18083 \cos 10.47 \times 10^{-3}t$
	320x320	$0.18946 \cos 10.47 \times 10^{-3}t$	$0.11885 \cos 6.28 \times 10^{-3}t$	$0.16967 \cos 7.85 \times 10^{-3}t$
	500x500	$0.13727 \cos 10.47 \times 10^{-3}t$	$0.13476 \cos 5.23 \times 10^{-3}t$	$0.12947 \cos 6.28 \times 10^{-3}t$
Medición Quinto día	80x80	$0.12533 \cos 10.47 \times 10^{-3}t$	$0.15692 \cos 7.85 \times 10^{-3}t$	$0.14761 \cos 10.47 \times 10^{-3}t$
	160x160	$0.12528 \cos 10.47 \times 10^{-3}t$	$0.09105 \cos 10.47 \times 10^{-3}t$	$0.11653 \cos 10.47 \times 10^{-3}t$
	320x320	$0.11972 \cos 6.28 \times 10^{-3}t$	$0.11717 \cos 10.47 \times 10^{-3}t$	$0.16234 \cos 10.47 \times 10^{-3}t$
	500x500	$0.12680 \cos 10.47 \times 10^{-3}t$	$0.12368 \cos 10.47 \times 10^{-3}t$	$0.12454 \cos 10.47 \times 10^{-3}t$

	Longitud (mm)	Probeta 1	Probeta 2	Probeta 3
Medición Décimo día	80x80	0.11670 sen $6.28 \times 10^{-3}t$	0.14006 sen $10.47 \times 10^{-3}t$	0.12670 sen $10.47 \times 10^{-3}t$
	160x160	0.10256 sen $7.85 \times 10^{-3}t$	0.08590 cos $10.47 \times 10^{-3}t$	0.10744 cos $6.28 \times 10^{-3}t$
	320x320	0.11362 sen $6.28 \times 10^{-3}t$	0.09741 sen $10.47 \times 10^{-3}t$	0.12445 cos $10.47 \times 10^{-3}t$
	500x500	0.11516 cos $6.28 \times 10^{-3}t$	0.11525 cos $7.85 \times 10^{-3}t$	0.09131 cos $6.28 \times 10^{-3}t$

Tabla 5. Funciones alternas de cada una de las probetas de diferentes longitudes de papel kraft, en los diferentes momentos en los que se realizó la medición (antes del arrugamiento, primer, quinto y décimo día).

FUNCIONES PROPUESTAS PARA PAPEL KRAFT				
	Longitud (mm)	Probeta 1	Probeta 2	Probeta 3
Medición sin arrugar	80x80	0.08520 cos $7.85 \times 10^{-3}t$	0.11352 cos $7.85 \times 10^{-3}t$	0.14313 cos $10.47 \times 10^{-3}t$
	160x160	0.12409 cos $10.47 \times 10^{-3}t$	0.12155 sen $10.47 \times 10^{-3}t$	0.09543 cos $10.47 \times 10^{-3}t$
	320x320	0.09244 cos $6.28 \times 10^{-3}t$	0.09070 cos $10.47 \times 10^{-3}t$	0.11056 sen $10.47 \times 10^{-3}t$
	500x500	0.08900 cos $10.47 \times 10^{-3}t$	0.11576 cos $10.47 \times 10^{-3}t$	0.09932 sen $10.47 \times 10^{-3}t$
Medición Primer día	80x80	0.15249 sen $7.85 \times 10^{-3}t$	0.19297 cos $7.85 \times 10^{-3}t$	0.15840 sen $10.47 \times 10^{-3}t$
	160x160	0.17628 cos $10.47 \times 10^{-3}t$	0.18947 cos $7.85 \times 10^{-3}t$	0.14581 cos $7.85 \times 10^{-3}t$
	320x320	0.17116 cos $6.28 \times 10^{-3}t$	0.17042 sen $10.47 \times 10^{-3}t$	0.19826 cos $7.85 \times 10^{-3}t$
	500x500	0.15282 sen $31.41 \times 10^{-3}t$	0.19136 cos $7.85 \times 10^{-3}t$	0.18439 sen $7.85 \times 10^{-3}t$
Medición Quinto día	80x80	0.11533 cos $10.47 \times 10^{-3}t$	0.17536 sen $7.85 \times 10^{-3}t$	0.14975 sen $7.85 \times 10^{-3}t$
	160x160	0.17590 sen $7.85 \times 10^{-3}t$	0.15132 sen $10.47 \times 10^{-3}t$	0.11772 cos $7.85 \times 10^{-3}t$
	320x320	0.15933 sen $10.47 \times 10^{-3}t$	0.13483 sen $7.85 \times 10^{-3}t$	0.13665 cos $7.85 \times 10^{-3}t$
	500x500	0.11705 cos $10.47 \times 10^{-3}t$	0.14520 sen $10.47 \times 10^{-3}t$	0.12196 sen $10.47 \times 10^{-3}t$
Medición Décimo día	80x80	0.09022 sen $7.85 \times 10^{-3}t$	0.17126 cos $10.47 \times 10^{-3}t$	0.11614 sen $7.85 \times 10^{-3}t$
	160x160	0.14096 cos $7.85 \times 10^{-3}t$	0.12448 sen $7.85 \times 10^{-3}t$	0.11091 sen $10.47 \times 10^{-3}t$
	320x320	0.15374 sen $7.85 \times 10^{-3}t$	0.11553 cos $7.85 \times 10^{-3}t$	0.13095 sen $10.47 \times 10^{-3}t$
	500x500	0.08925 cos $7.85 \times 10^{-3}t$	0.13574 sen $15.70 \times 10^{-3}t$	0.11127 cos $7.85 \times 10^{-3}t$

Tabla 6. Funciones alternas de cada una de las probetas de diferentes longitudes de papel kraft, en los diferentes momentos en los que se realizó la medición (antes del arrugamiento, primer, quinto y décimo día).

FUNCIONES PROPUESTAS PARA PAPEL BOND				
	Longitud (mm)	Probeta 1	Probeta 2	Probeta 3
Medición sin arrugar	80x80	0.12253 cos 10.47x10 ⁻³ t	0.10008 sen 6.28x10 ⁻³ t	0.07729 sen 15.70x10 ⁻³ t
	160x160	0.14211 cos 7.85x10 ⁻³ t	0.09159 cos 10.47x10 ⁻⁴ t	0.09172 cos 7.85x10 ⁻³ t
	320x320	0.12985 cos 10.47x10 ⁻³ t	0.12096 sen 7.85x10 ⁻³ t	0.07260 cos 10.47x10 ⁻³ t
	500x500	0.10705 cos 10.47x10 ⁻³ t	0.07699 cos 10.47x10 ⁻³ t	0.08935 cos 10.47x10 ⁻³ t
Medición Primer día	80x80	0.15199 cos 7.85x10 ⁻³ t	0.17094 cos 10.47x10 ⁻³ t	0.12195 cos 10.47x10 ⁻³ t
	160x160	0.22490 cos 10.47x10 ⁻³ t	0.14426 sen 6.28x10 ⁻³ t	0.18460 sen 6.28x10 ⁻³ t
	320x320	0.16176 cos 7.85x10 ⁻³ t	0.15600 cos 10.47x10 ⁻³ t	0.13213 cos 10.47x10 ⁻³ t
	500x500	0.22414 cos 15.70x10 ⁻³ t	0.13620 cos 6.28x10 ⁻³ t	0.15930 cos 6.28x10 ⁻³ t
Medición Quinto día	80x80	0.14927 cos 6.28x10 ⁻³ t	0.14603 cos 7.85x10 ⁻³ t	0.09789 cos 10.47x10 ⁻³ t
	160x160	0.21652 cos 10.47x10 ⁻³ t	0.11354 sen 7.85x10 ⁻³ t	0.12805 cos 10.47x10 ⁻³ t
	320x320	0.14808 sen 7.85x10 ⁻³ t	0.13732 sen 10.47x10 ⁻³ t	0.09519 cos 7.85x10 ⁻³ t
	500x500	0.15264 cos 6.28x10 ⁻³ t	0.11656 sen 10.47x10 ⁻³ t	0.13138 cos 10.47x10 ⁻³ t
Medición Décimo día	80x80	0.13084 sen 10.47x10 ⁻³ t	0.13807 cos 10.47x10 ⁻³ t	0.077516 sen 6.28x10 ⁻³ t
	160x160	0.16207 cos 6.28x10 ⁻³ t	0.10739 cos 10.47x10 ⁻³ t	0.10302 sen 10.47x10 ⁻³ t
	320x320	0.13974 cos 10.47x10 ⁻³ t	0.12301 sen 7.85x10 ⁻³ t	0.08725 cos 7.85x10 ⁻³ t
	500x500	0.13833 cos 10.47x10 ⁻³ t	0.09252 sen 10.47x10 ⁻³ t	0.10234 sen 10.47x10 ⁻³ t

De acuerdo a las tablas anteriores, se observa que todas las funciones están expresadas en senos y cosenos, que finalmente se puede representar en una serie trigonométrica de Fourier, como lo muestra la ecuación 4.1, que es otra forma de representar dichas series.

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)) \quad 4.1$$

La componente sinusoidal de frecuencia $\omega_n = n\omega_0$ se denomina la *enésima armónica* de la función periódica. La primera armónica comúnmente se conoce como la componente fundamental porque tiene el mismo periodo de la función $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T$ se conoce como la frecuencia angular fundamental. Los coeficientes C_n y los ángulos θ_n se conocen como amplitudes armónicas y ángulos de fase respectivamente [4.1].

Recordando que el fenómeno del arrugado de las membranas es de índole estadístico; para el análisis del comportamiento de las frecuencias con respecto al tiempo, se efectuó el promedio de ellas, obteniendo las siguientes gráficas.

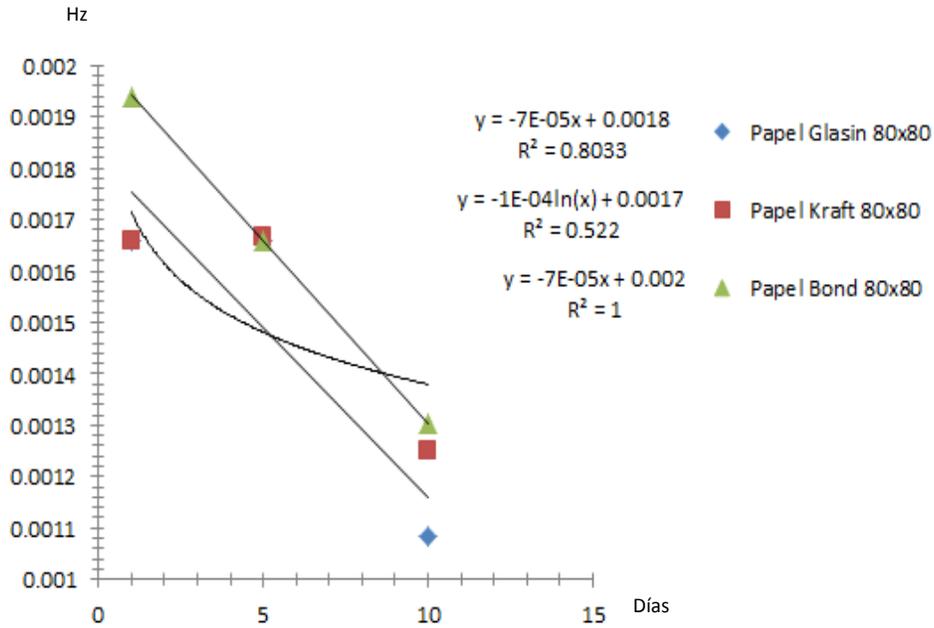


Fig. 4.6 Comportamiento de la frecuencia de las probetas de longitud 80x80 mm de los tres tipos de papel, desde el momento del arrugado hasta el momento de relajación total.

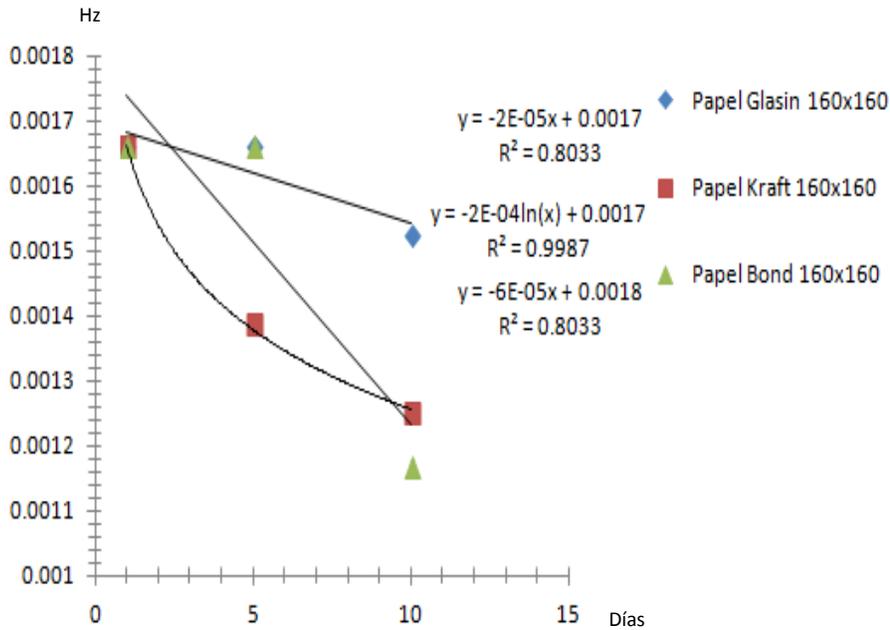


Fig. 4.7 Comportamiento de la frecuencia de las probetas de longitud 160x160 mm de los tres tipos de papel, desde el momento del arrugado hasta el momento de relajación total.

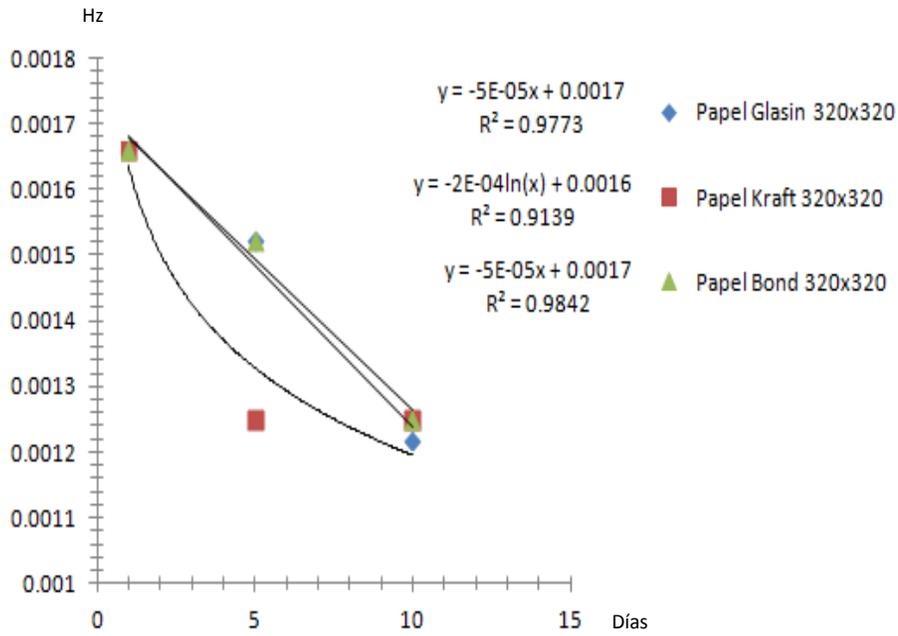


Fig 4.8 Comportamiento de la frecuencia de las probetas de longitud 320x320 mm de los tres tipos de papel, desde el momento del arrugado hasta el momento de relajación total.

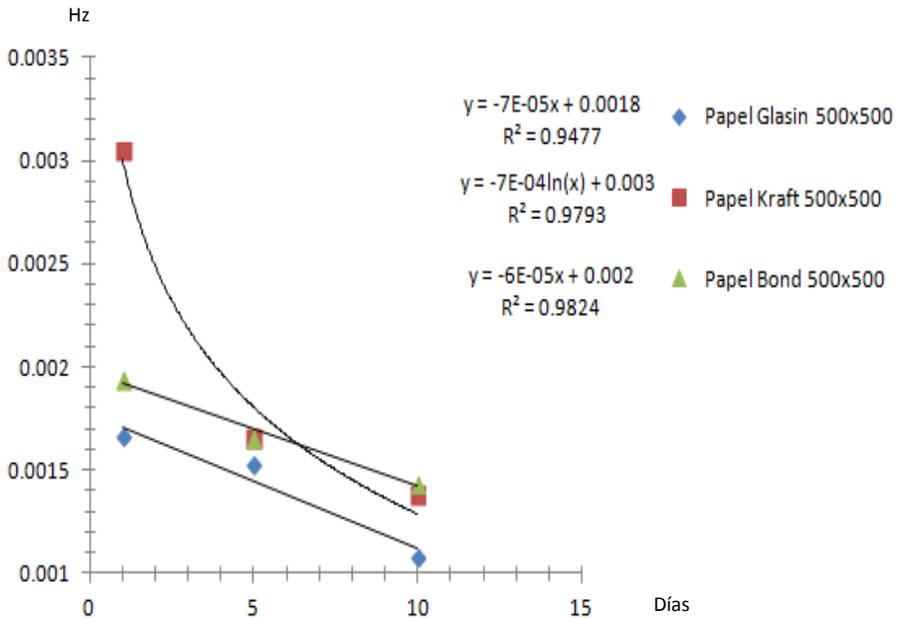


Fig 4.9 Comportamiento de la frecuencia de las probetas de longitud 500x500 mm de los tres tipos de papel, desde el momento del arrugado hasta el momento de relajación total.

Las gráficas anteriores muestran el comportamiento de la frecuencia a través del tiempo por longitudes; en las siguientes figuras se observa el comportamiento de la frecuencia por tipo de papel.

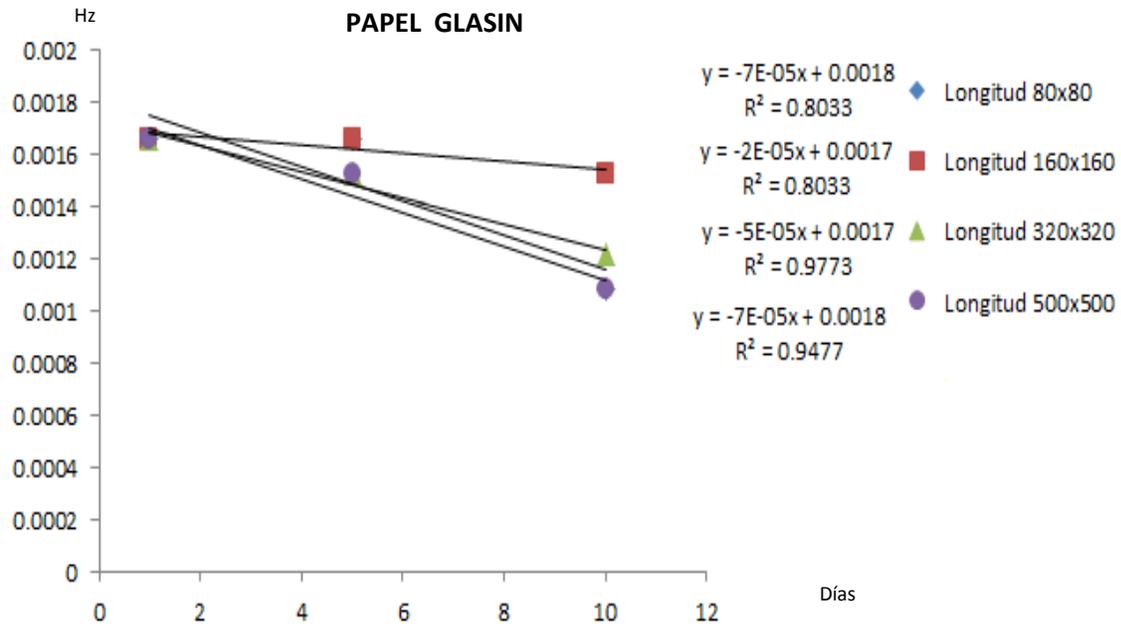


Fig. 4.10 Comportamiento de la frecuencia a través del tiempo del papel glasin, en las cuatro diferentes longitudes de probetas en las que se realizó el experimento.

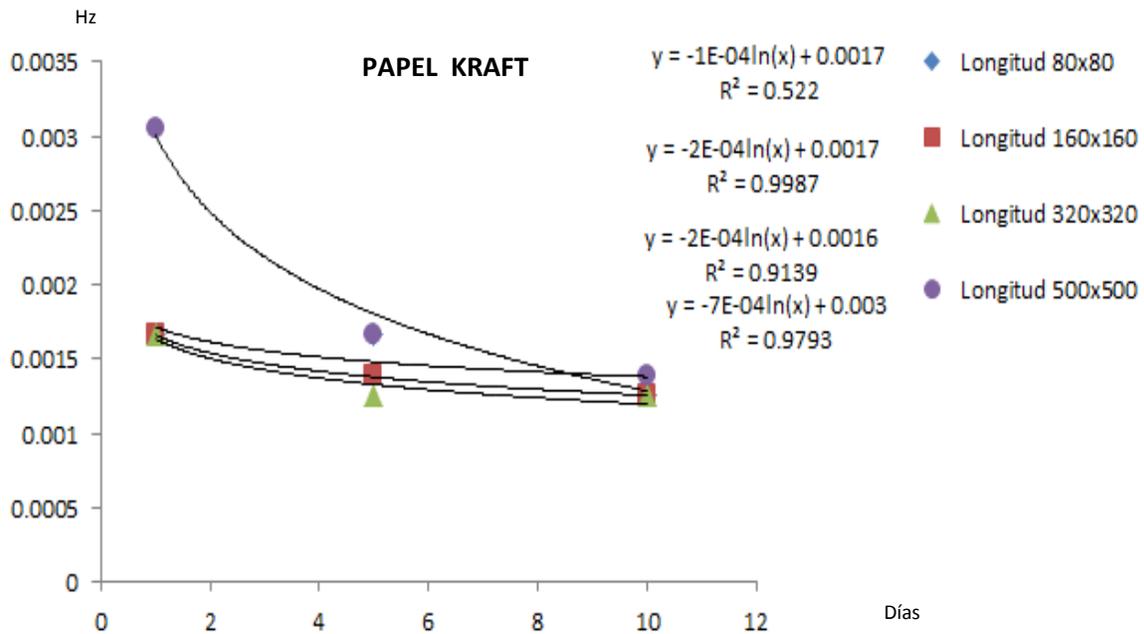


Fig. 4.11 Comportamiento de la frecuencia a través del tiempo del papel kraft, en las cuatro diferentes longitudes de probetas en las que se realizó el experimento.

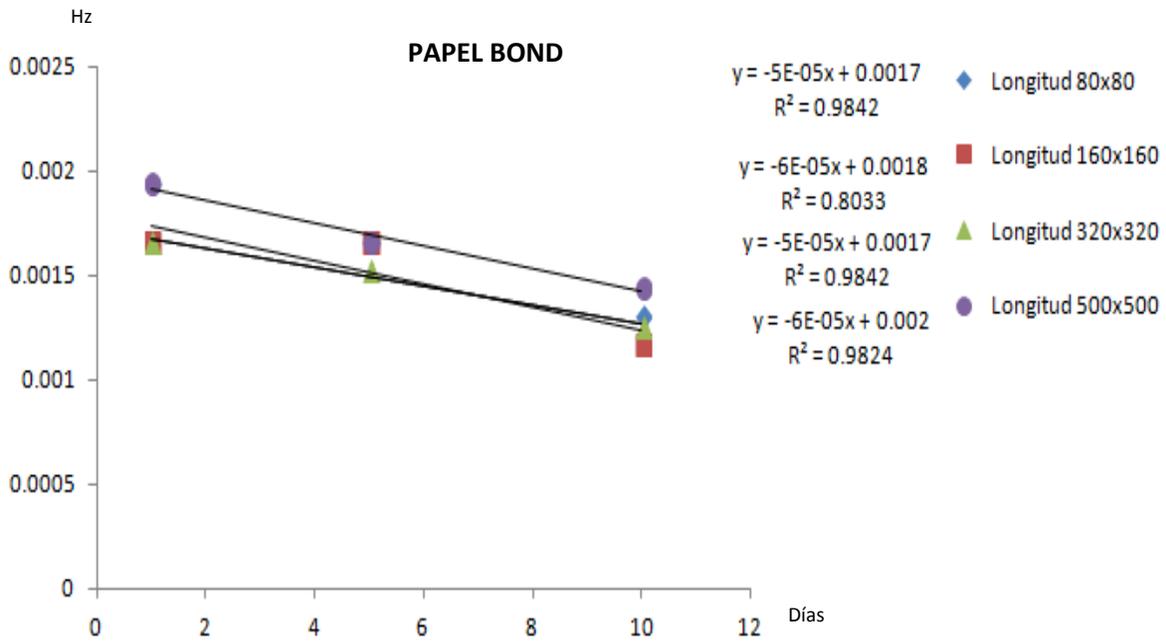


Fig. 4.12 Comportamiento de la frecuencia a través del tiempo del papel bond, en las cuatro diferentes longitudes de probetas en las que se realizó el experimento.

Las membranas arrugadas son un sistema mecánico, donde cada pliegue o doblez puede ser considerado como un sistema masa-resorte que está íntimamente ligado al fenómeno de relajación, suscitando deformaciones elasto-plásticas en cadena en la bola de papel, generando cierta vibración.

En las figuras 4.10 y 4.12 que son las gráficas correspondientes al papel glasin y bond respectivamente, se observa que el promedio de las frecuencias de cada una de las probetas de dichos materiales, así como las cuatro longitudes, tienen una tendencia de decrecimiento lineal con respecto al tiempo. Por lo que en general, se puede decir que la vibración tiene el comportamiento de una vibración amortiguada, debido a que el sistema (membrana) disipa energía. Si todos los componentes básicos del sistema vibratorio (resorte, masa, y amortiguamiento) se comportan linealmente se trata de una vibración lineal [4.2].

Recordando que las funciones alternas son funciones periódicas con periodo T , se pueden representar por una serie infinita de Fourier, y una vez que se ha determinado que el sistema vibratorio es lineal, la solución particular $x_p(t)$ es: [4.3].

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad 4.1$$

Donde $F(t)$ es periódica, se puede escribir como:

$$x_p(t) = x_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [x_c(t) + x_s(t)] \quad 4.2$$

La solución particular $x_c(t)$ satisface la ecuación:

$$m\ddot{x}_c + cx_c + kx_c \doteq a_n \cos n\omega_T t \quad 4.3$$

Para todos los valores de n y la solución particular $x_s(t)$ satisface la ecuación:

$$m\ddot{x}_s + cx_s + kx_s \doteq a_n \sin n\omega_T t \quad 4.4$$

Las soluciones a las ecuaciones anteriores son:

$$x_c(t) = \frac{a_n/m}{[\omega_n^2 - (n\omega)^2]^2 + (2\zeta\omega_n n\omega_T)^2]^{1/2}} \cos n\omega_T t - \theta_n \quad 4.5$$

$$x_s(t) = \frac{b_n/m}{[\omega_n^2 - (n\omega)^2]^2 + (2\zeta\omega_n n\omega_T)^2]^{1/2}} \sin n\omega_T t - \theta_n \quad 4.6$$

$$\theta_n(t) = \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega_n n\omega_T}{\omega_n^2 - (n\omega_T)^2} \quad 4.7$$

Por lo que la solución general para el caso de un amortiguamiento débil es:

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) + \frac{a_0}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} [x_c(t) + x_s(t)] \quad 4.8$$

Cabe mencionar que, cada una de las funciones que se observan en las tablas 3,4 y 5, son casos particulares de las series de Fourier, por lo cual cada una de ellas tendría una solución general (ec. 4.8), considerando las condiciones iniciales de amplitud y ángulo de desfase.

Sin embargo, el comportamiento de las frecuencias del papel kraft como se observa en la figura 4.11, no tiende a seguir ésta linealidad decreciente que ha caracterizado al papel glasin y bond. Por lo que se habla de una vibración no lineal, causada por sus características físicas y químicas, así como por sus propiedades mecánicas del papel. La solución a tal problema no lineal, no es tratada en éste trabajo.

Con respecto a los desplazamientos, estos han sido causados por el fenómeno de cascada que produce la relajación en sí misma, causando un cambio de geometría a través del tiempo. Los desplazamientos detectados a través de la transformada discreta de Fourier, oscilan entre magnitudes del orden de nanómetros como se muestran en la tabla 7.

Al observar los desplazamientos, es notable que estos disminuyan a través del tiempo, lo que indica una disminución de la energía cinética existente a nivel intermolecular.

Tabla 7. Intervalos de magnitud de los desplazamientos que se generaron en cada una de las tres diferentes mediciones para cada uno de los tipos de papel y los respectivos tamaños de muestra.

PAPEL GLASIN				PAPEL KRAFT				PAPEL BOND			
Prueba (mm)	1 ^a Med (Nm)	2 ^a Med (Nm)	3 ^a Med (Nm)	Prueba (mm)	1 ^a Med (Nm)	2 ^a Med (Nm)	3 ^a Med (Nm)	Prueba (mm)	1 ^a Med (Nm)	2 ^a Med (Nm)	3 ^a Med (Nm)
80x80	1.4-2.5	0.9-1.55	1.2-1.38	80x80	0.7-1.6	1.22-1.5	1.2-1.48	80x80	1.3-1.64	1.25-1.5	1.25-1.5
160x160	1.5-1.76	1.1-1.6	0.7-1.37	160x160	1.22-1.8	1.2-1.5	1.1-1.48	160x160	1.2-1.8	1.25-1.64	1.2-1.62
320x320	1.16-1.56	1.42-1.6	1.15-1.58	320x320	1.22-1.9	1.25-1.48	1.25-1.42	320x320	1.2-1.7	1.4-1.6	1.22-1.48
500x500	1.25-1.65	1.1-1.6	0.35-1.6	500x500	1.42-1.78	1.4-1.6	1.4-1.56	500x500	1.15-1.9	1.35-1.7	1.4-1.52

En lo referente a la relación existente entre vibración y escalamiento, las siguientes figuras muestran el comportamiento.

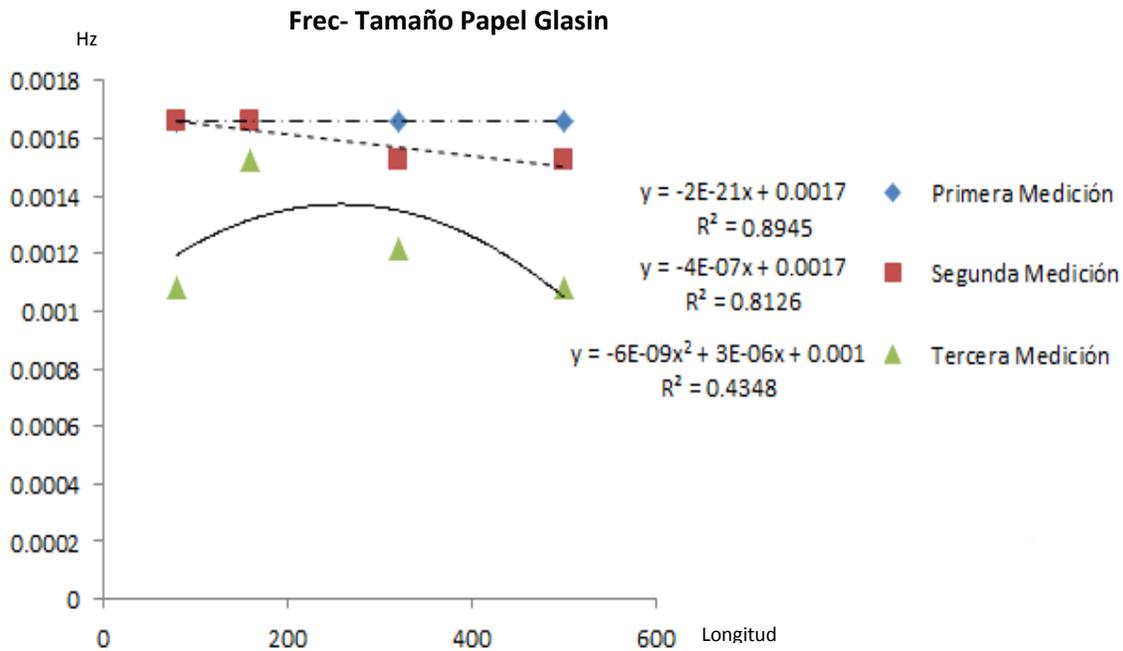


Fig. 4.13 Comportamiento de la frecuencia- tamaño a través del tiempo del papel glasin, en las cuatro diferentes longitudes de probetas en las que se realizó el experimento.

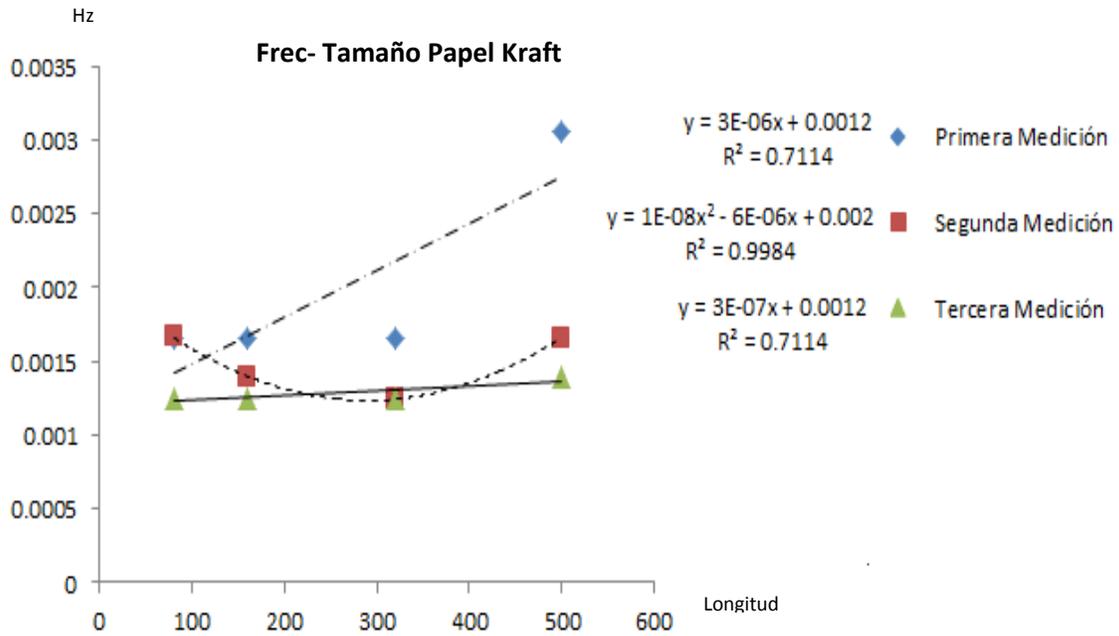


Fig. 4.14 Comportamiento de la frecuencia- tamaño a través del tiempo del papel kraft, en las cuatro diferentes longitudes de probetas en las que se realizó el experimento.

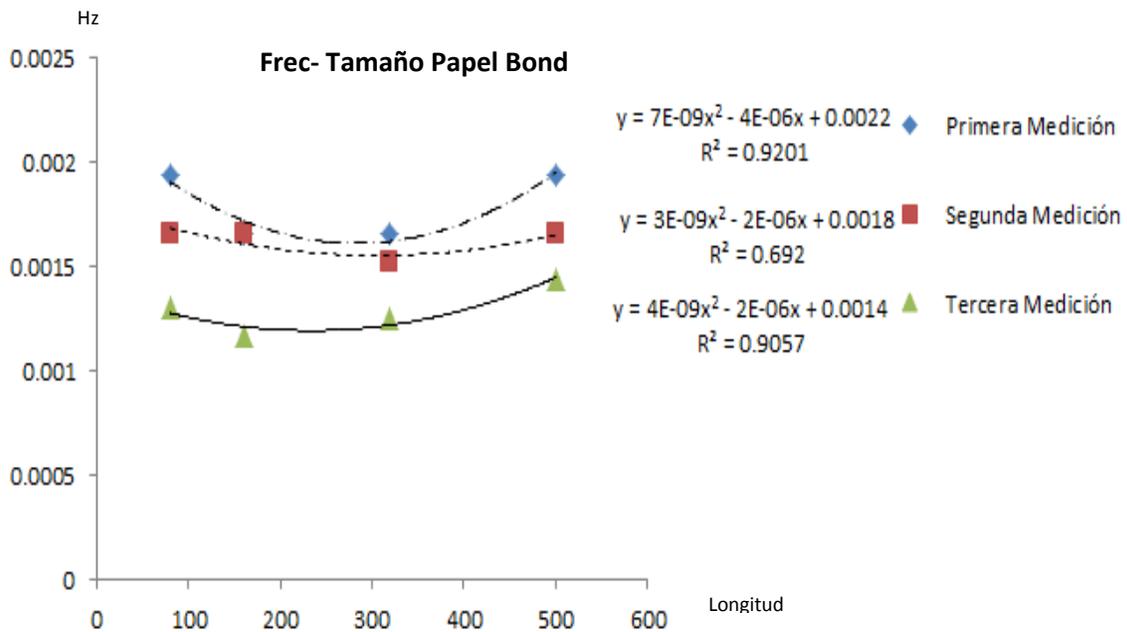


Fig. 4.15 Comportamiento de la frecuencia-tamaño a través del tiempo del papel bond, en las cuatro diferentes longitudes de probetas en las que se realizó el experimento.

Al observar las figuras 4.13, 4.14 y 4.15, es notable la existencia de una dependencia de la frecuencia con respecto al tiempo sin importar el tamaño de la probeta; entre el tiempo y el tamaño existe una pequeña relación, sin embargo, el comportamiento de cada probeta, no es regido por un patrón al cual se pudiera aplicar la ley de escalamiento.

Analizando el fenómeno en general y considerando el comportamiento que se presenta en la amplitud, en la vibración intrínseca y en los desplazamientos, es notable que las membranas, al adquirir una forma semi- esférica y sin suministrarles una fuerza adicional a la del arrugado, tiendan a un comportamiento de un material visco-elástico. Estos cuerpos materiales tienden a recuperar parcialmente sus configuraciones iniciales cuando desaparecen los agentes físicos que causan su deformación; no se les puede calificar como elásticos o plásticos, ni se les puede ubicar propiamente como fluidos, sin embargo, fluyen a lo largo del tiempo en forma muy parecida a los líquidos [4.4].

En lo referente a las membranas arrugadas (bolas de papel) y sabiendo su conducta visco-elástica; en el instante en el que es retirada la fuerza de arrugamiento de ella, tiende a un estado de relajación; cada una de las arrugas que se formaron en la compactación son concentraciones de energía y deformaciones, que a su vez pueden ser vistas como un sistema de masa-resorte-amortiguador. Con base en esto, el fenómeno natural de relajación es una activación en cadena de las arrugas con un comportamiento caótico entre ellas.

Teniendo en cuenta la visco-elasticidad de la membrana, se puede utilizar el modelo visco-elástico de cuatro elementos de Maxwell-Kelvin o de Burger que describe el comportamiento de los vértices (arrugas) de la bola de papel. Véase figura 4.16.

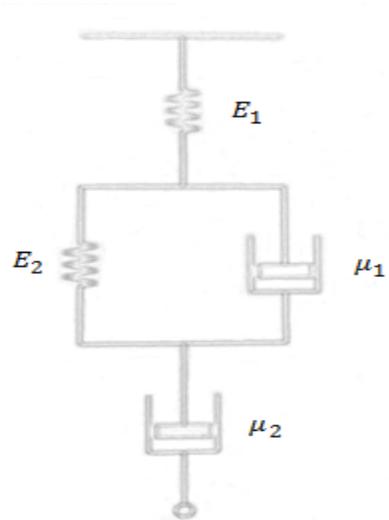


Fig.4.16 Modelo de cuatro elementos de Maxwell-Kelvin o de Burger [4.4].

Observando la figura de arriba hacia abajo se identifican los siguientes efectos:

- a) Debido al resorte con constante E_1 , es de esperar una respuesta inmediata del cuerpo ante un esfuerzo repentino. Esta respuesta es la que corresponde a la elasticidad instantánea [4.4].

- b) Efecto de fluencia primaria debido al sistema de dos elementos mecánicos en paralelo (Kelvin- Voigt), con un resorte E_2 , y un amortiguador μ_2 .
- c) Debido al amortiguador μ_1 se presenta la fluencia secundaria, es decir, un segmento de recta ascendente [4.4].

BIBLIOGRAFÍA

[4.1]. Hsu Hwei P., "Fourier Analysis", Pearson, 1998

[4.2] Steidel Robert F., "An Introduction to Mechanical Vibrations", University of Michigan, Wiley, 1979.

[4.3]. Meruane V., "Vibraciones Mecánicas", Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, 2012.

[4.4]. Viniestra Heberlein Fermín, "Mecánica de los Cuerpos Deformables", Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2010.

CONCLUSIONES

Por primera vez, se propone una metodología experimental y de análisis, para el estudio del fenómeno de vibración en membranas arrugadas, específicamente en bolas de papel a través del tiempo; con el fin de conocer la tendencia de comportamiento que existe en su frecuencia de vibración, como parte de un conjunto de propiedades ya conocidas que rigen su conducta general.

El análisis de los datos obtenidos, se basa en el fundamento teórico de la función de Weierstrass-Mandelbrot y las señales alternativas, ya que es la mayor aproximación teórica al fenómeno real de acuerdo a los datos experimentales.

La metodología experimental y de análisis propuesta en este trabajo, es solo una solución alternativa del fenómeno.

En el momento del arrugado de la membrana, a través de la fuerza externa (arrugado con la mano) se transfirió energía a ella, provocando una excitación intermolecular mayor a la que tiene el material en su estado original. Sin embargo, como la fuerza externa no permanece constante, se produce una disipación de energía a través del tiempo, lo que conlleva una disminución en la amplitud de las funciones alternas propuestas para cada probeta. Debido al comportamiento de la amplitud, se dice que existe un amortiguamiento débil en la membrana, ya que decrece a medida que el tiempo aumenta.

Así mismo, las frecuencias calculadas para el papel glasin y bond, son el resultado del cambio de geometría que la misma membrana experimenta a través del tiempo hasta alcanzar su estado de relajación; estas frecuencias tienden a tener un comportamiento lineal decreciente con amortiguamiento débil; no obstante, el papel kraft no presentó esta linealidad, aunque si se observa un amortiguamiento débil. Por lo que se puede decir que a través de éste análisis que, dependiendo de las características físicas y químicas del material, dependerá el tipo de vibración que se presente en las membranas plexoplegadas.

Cada una de las funciones alternas propuestas, es una función particular de las series trigonométricas de Fourier.

En todos los tipos de papel analizados, existe una disipación de energía en forma de cascada debida a la deformación elástico-plástica que presenta la propia membrana plexoplegada en su periodo de relajación.

Existe una dependencia de la frecuencia con respecto al tiempo sin importar el tamaño de la probeta; entre el tiempo y el tamaño existe una pequeña vinculación, sin embargo, el comportamiento de este vínculo, no es regido por un patrón al cual se pudiera aplicar la ley de escalamiento.

Por primera vez se observó el fenómeno de que las membranas al ser compactadas de manera aleatoria en forma semi-esférica sin una excitación externa adicional al arrugado, tienen un comportamiento de un material visco-elástico, lo que produce la relajación a través del tiempo.

Cada una de las arrugas que se formaron en la compactación son concentraciones de energía y deformaciones, que a su vez pueden ser vistas como un sistema de masa-resorte-amortiguador. Con base en esto, el fenómeno natural de relajación es una activación en cadena de las arrugas con un comportamiento caótico entre ellas.

Debido al comportamiento visco-elástico de las membranas, se propone que las arrugas de la bola de papel, pueden ser modeladas mediante el modelo de cuatro elementos de Maxwell-Kelvin o Burger.

TRABAJOS FUTUROS

Se mencionan las siguientes recomendaciones a futuro.

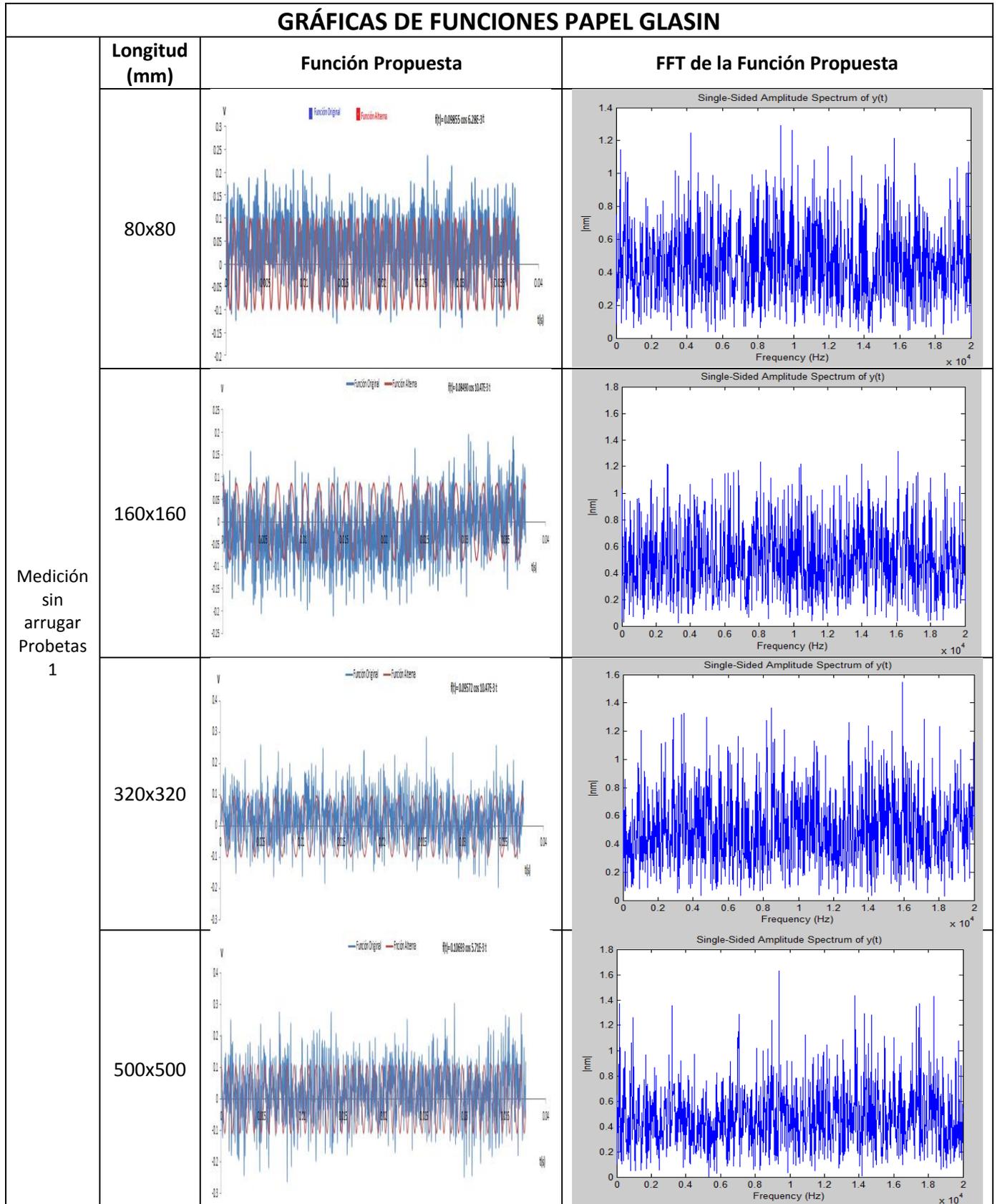
Análisis del fenómeno con una solución diferente, como lo sería el caso del estudio sobre la función original con métodos multifractales de correlación de altura-altura, con el fin de corroborar las conclusiones expuestas en éste trabajo.

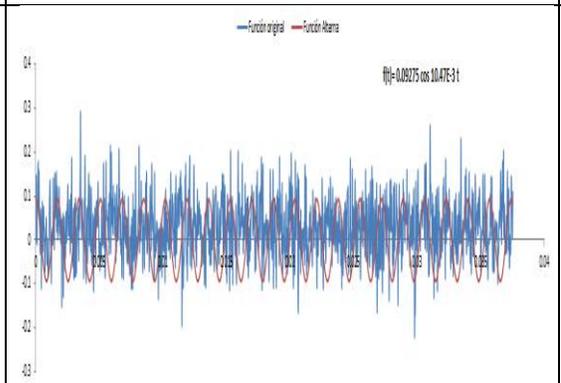
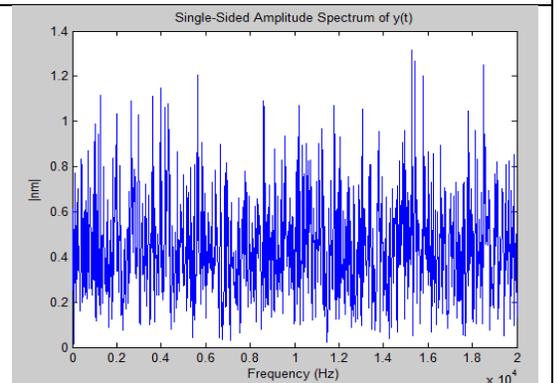
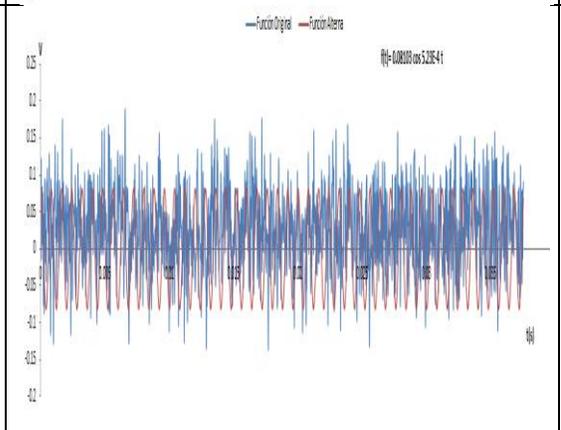
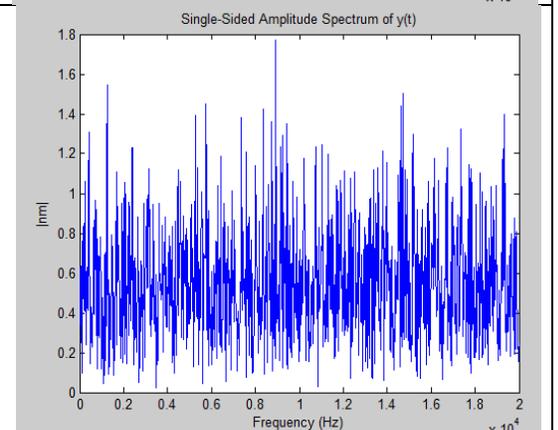
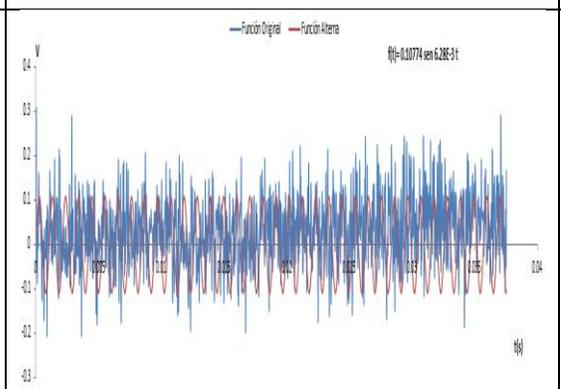
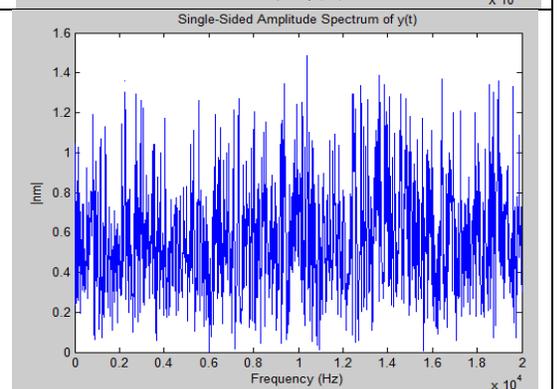
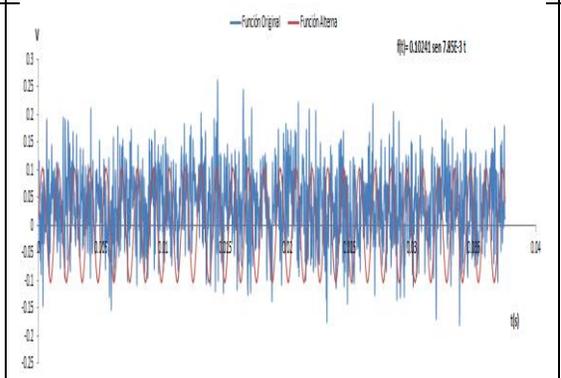
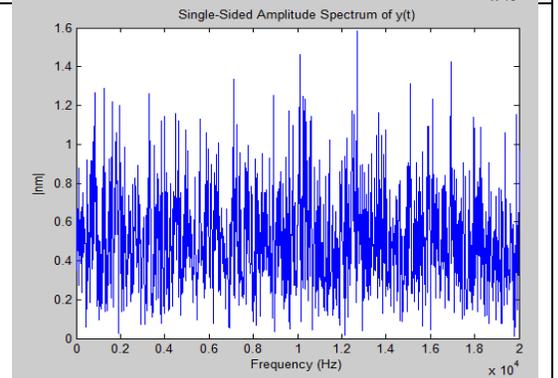
Someter a la membrana plexoplegada a una vibración forzada constante y analizar su comportamiento.

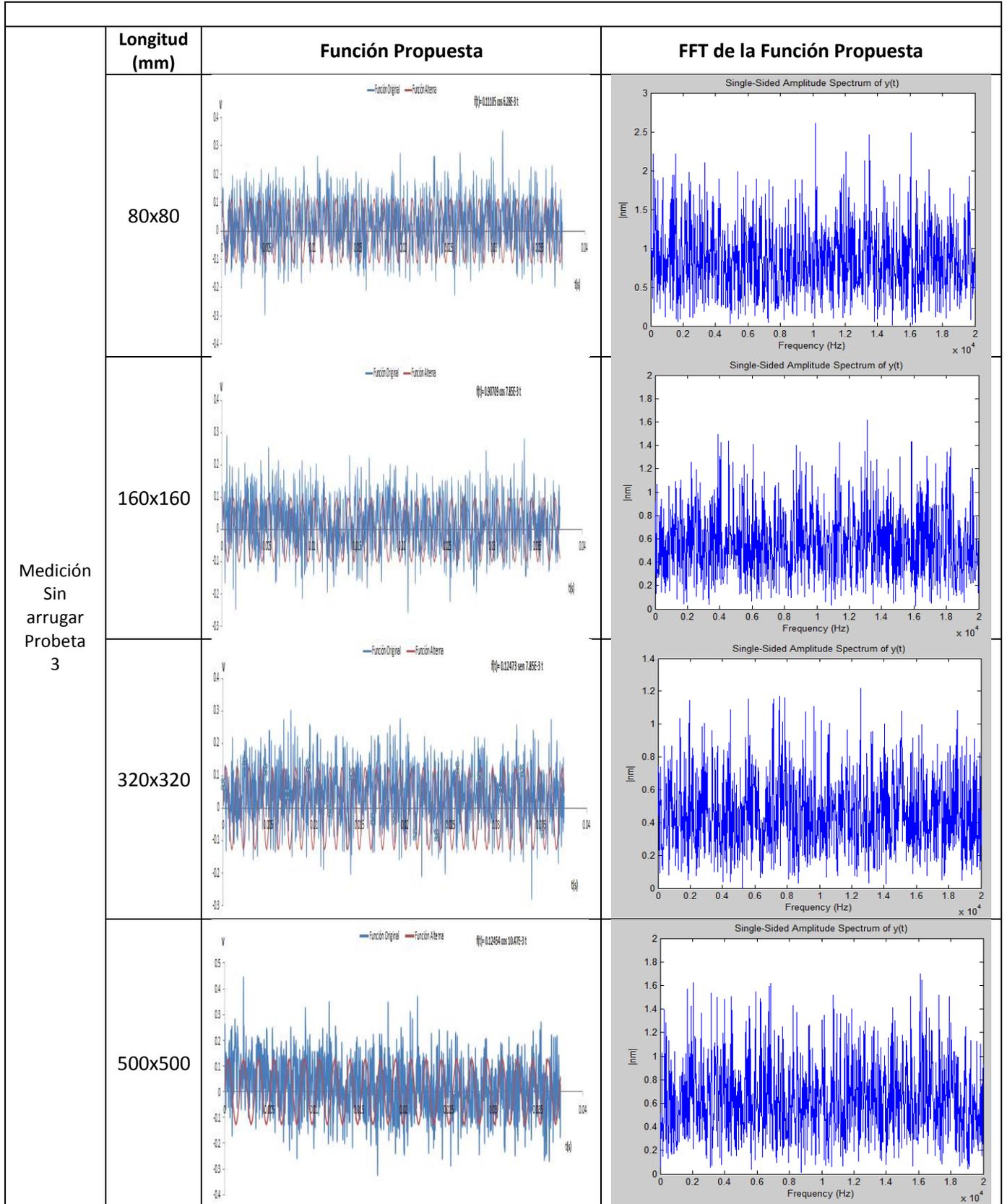
Obtener las frecuencias instantáneas en diferentes intervalos de tiempo, posteriormente someterlas a un análisis FFT con el fin de obtener los modos de vibración.

Realizar las mediciones de las vibraciones en intervalos de tiempo más pequeños.

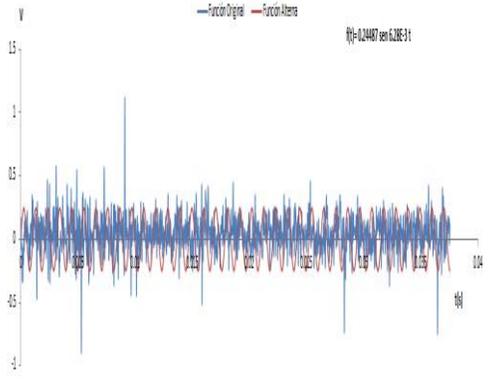
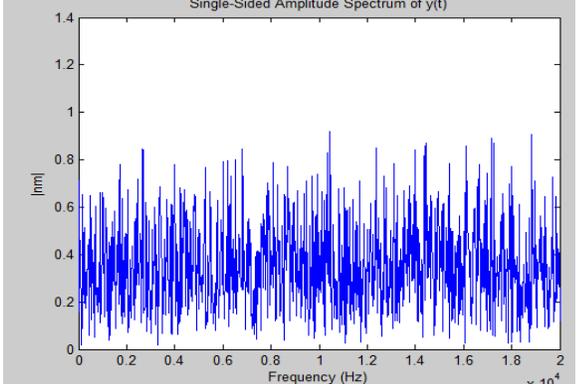
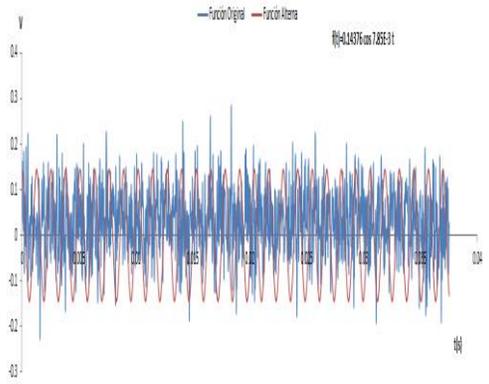
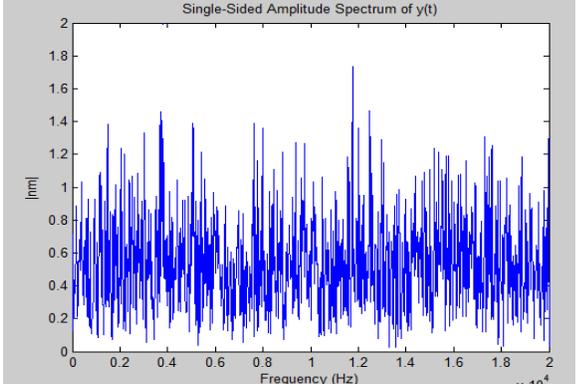
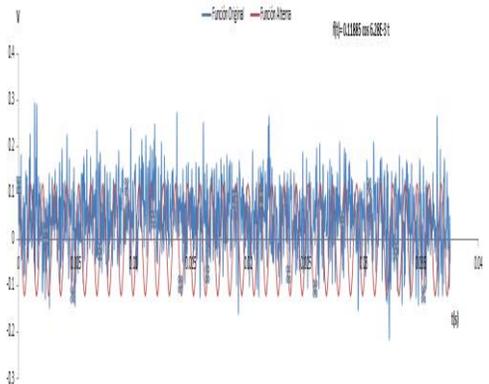
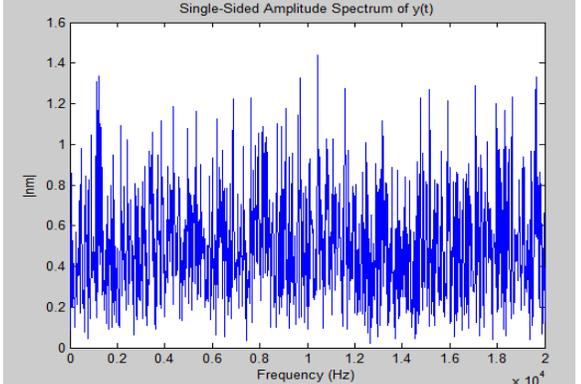
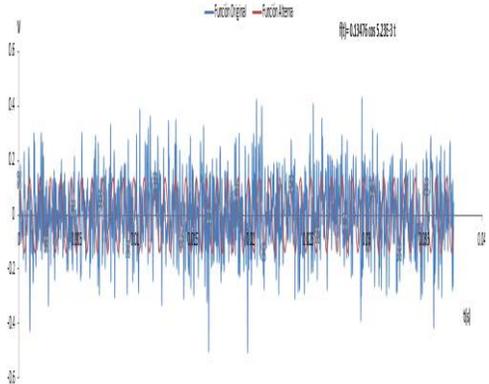
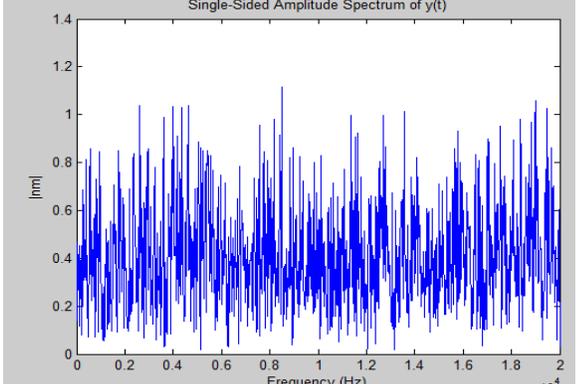
Someter membranas de materiales diferentes a los de fibra natural, con el fin de saber si tienen un comportamiento elástico, plástico o visco-elástico.



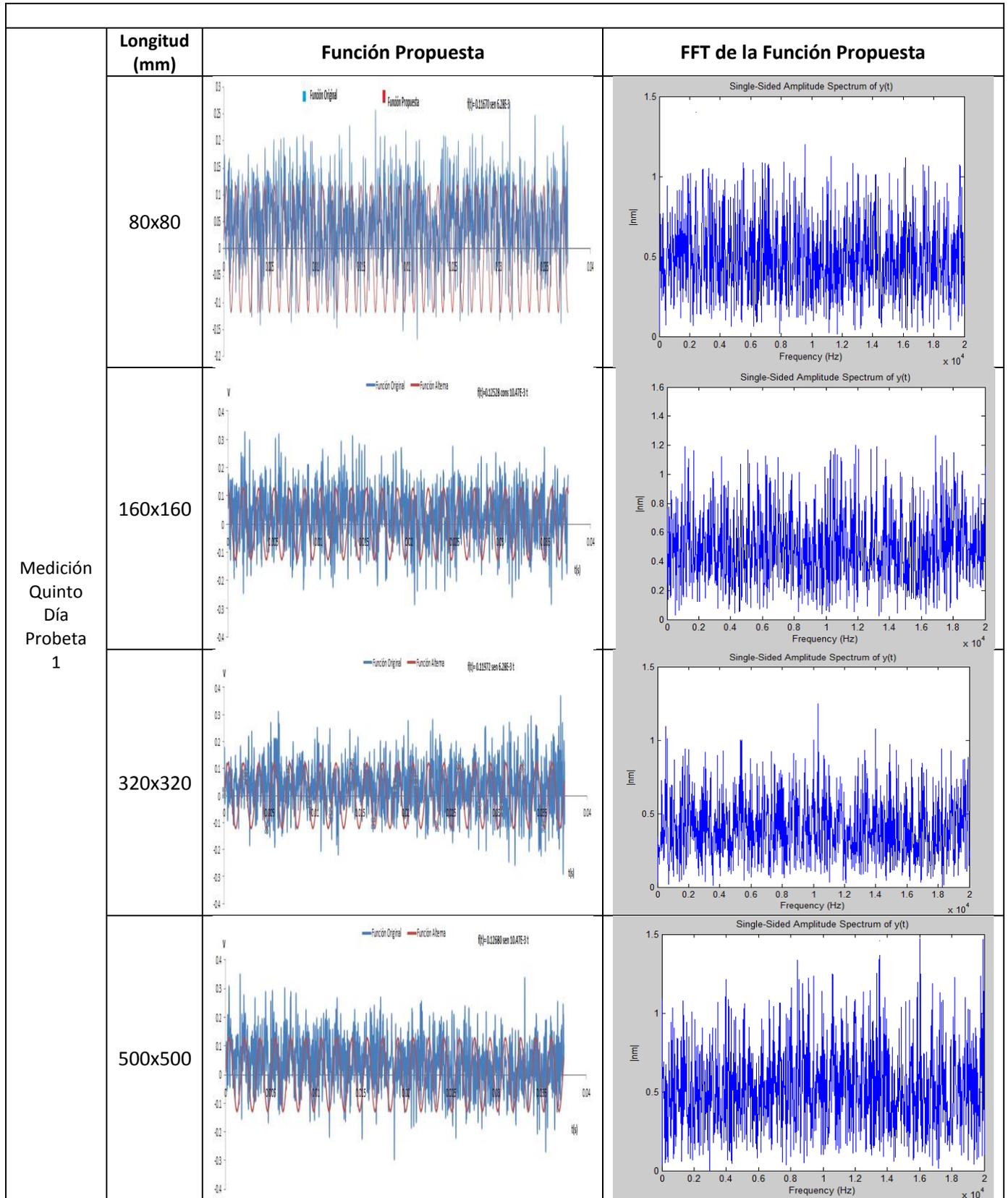
	Longitud (mm)	Función Propuesta	FFT de la Función Propuesta
Medición Sin arrugar Probetas 2	80x80		
	160x160		
	320x320		
	500x500		

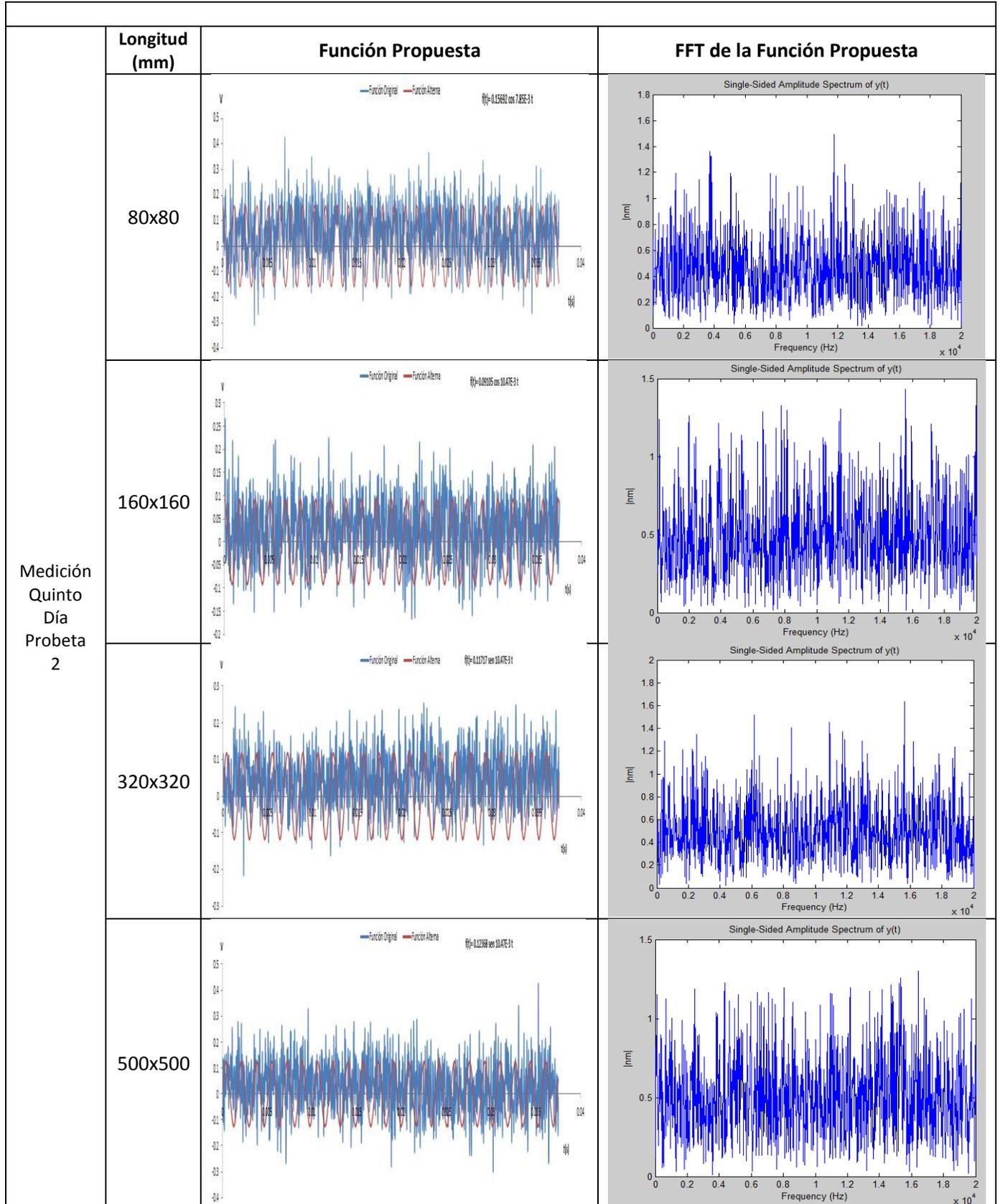


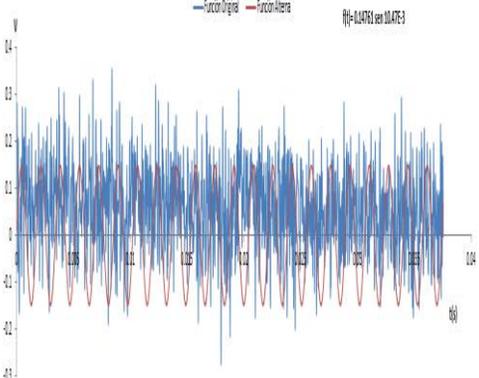
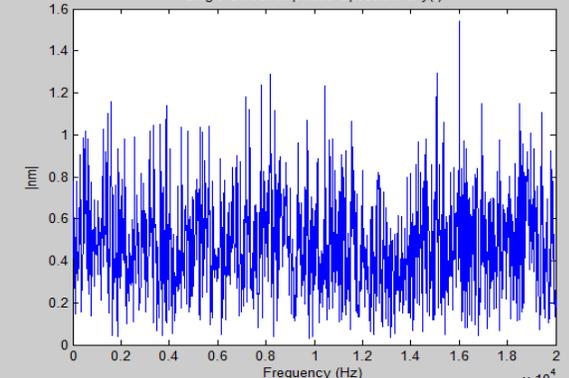
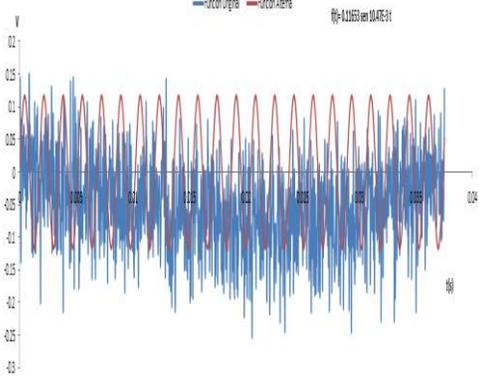
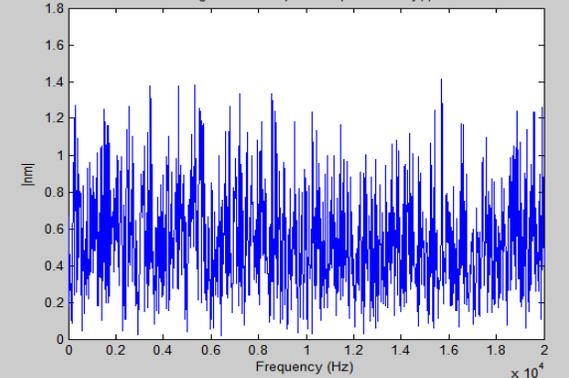
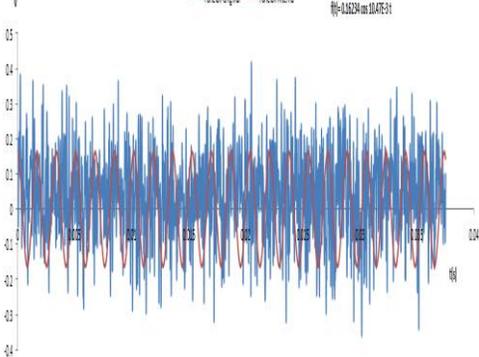
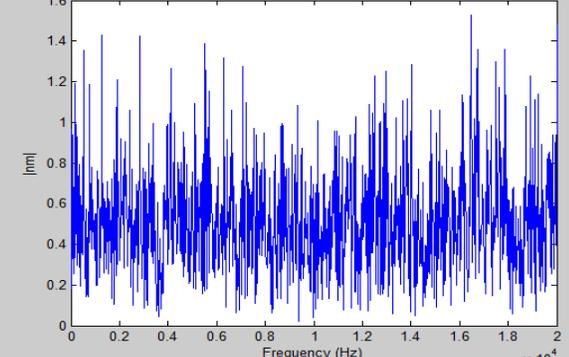
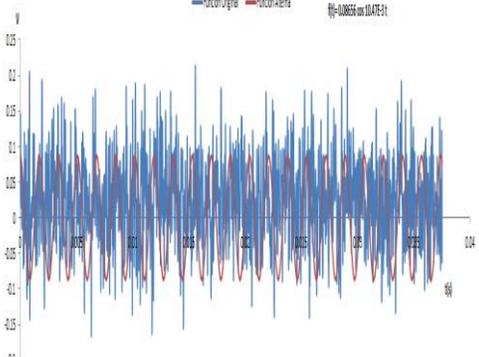
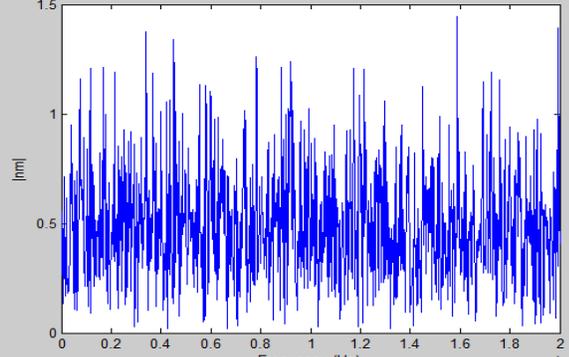
Medición Primer Día Probetas 1	Longitud (mm)	Función Propuesta	FFT de la Función Propuesta
	80x80		
	160x160		
	320x320		
	500x500		

	Longitud (mm)	Función Propuesta	FFT de la Función Propuesta
Medición Primer Día Probetas 2	80x80		
	160x160		
	320x320		
	500x500		

	Longitud (mm)	Función Propuesta	FFT de la Función Propuesta
Medición Primer Día Probetas 3	80x80		
	160x160		
	320x320		
	500x500		

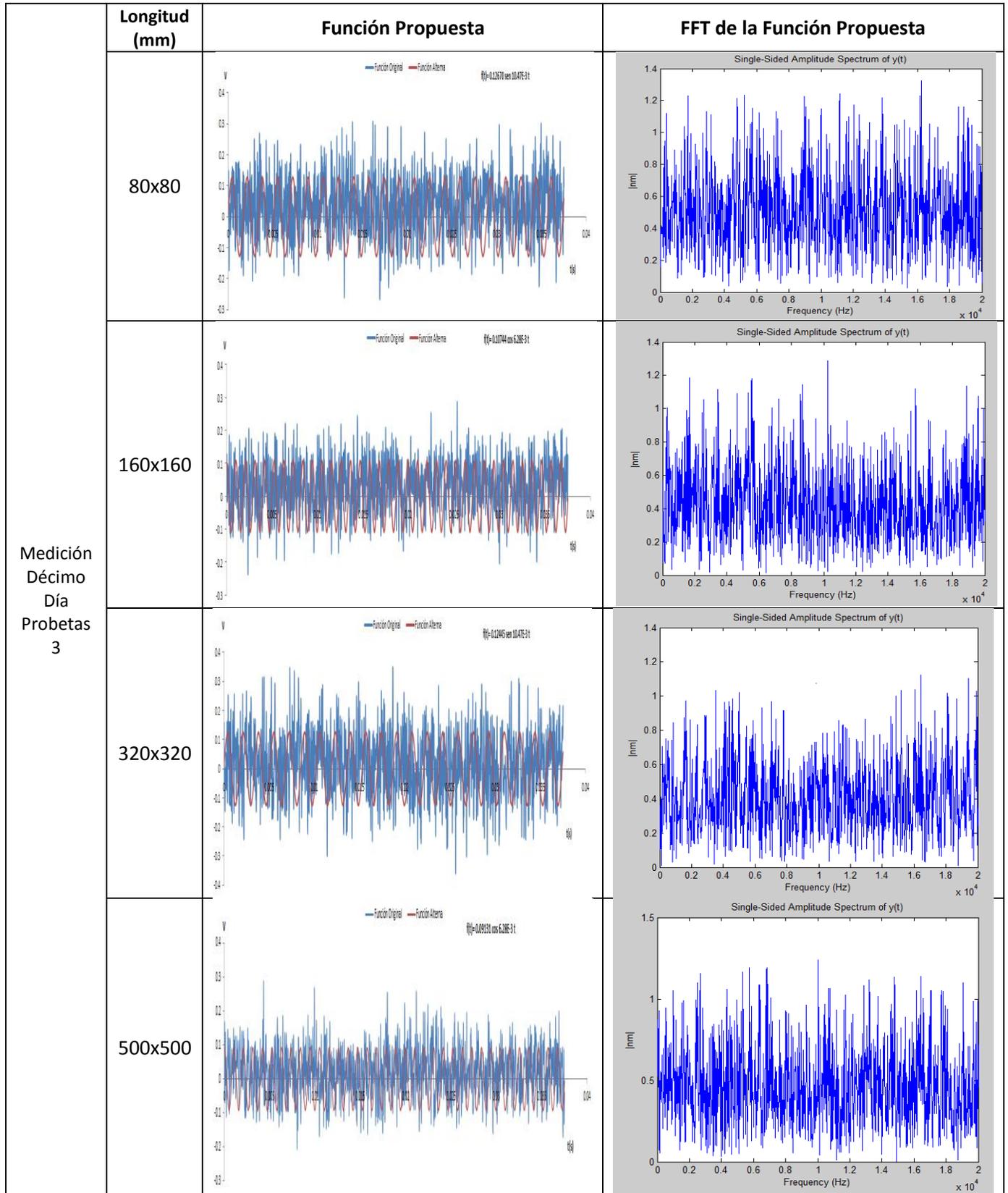




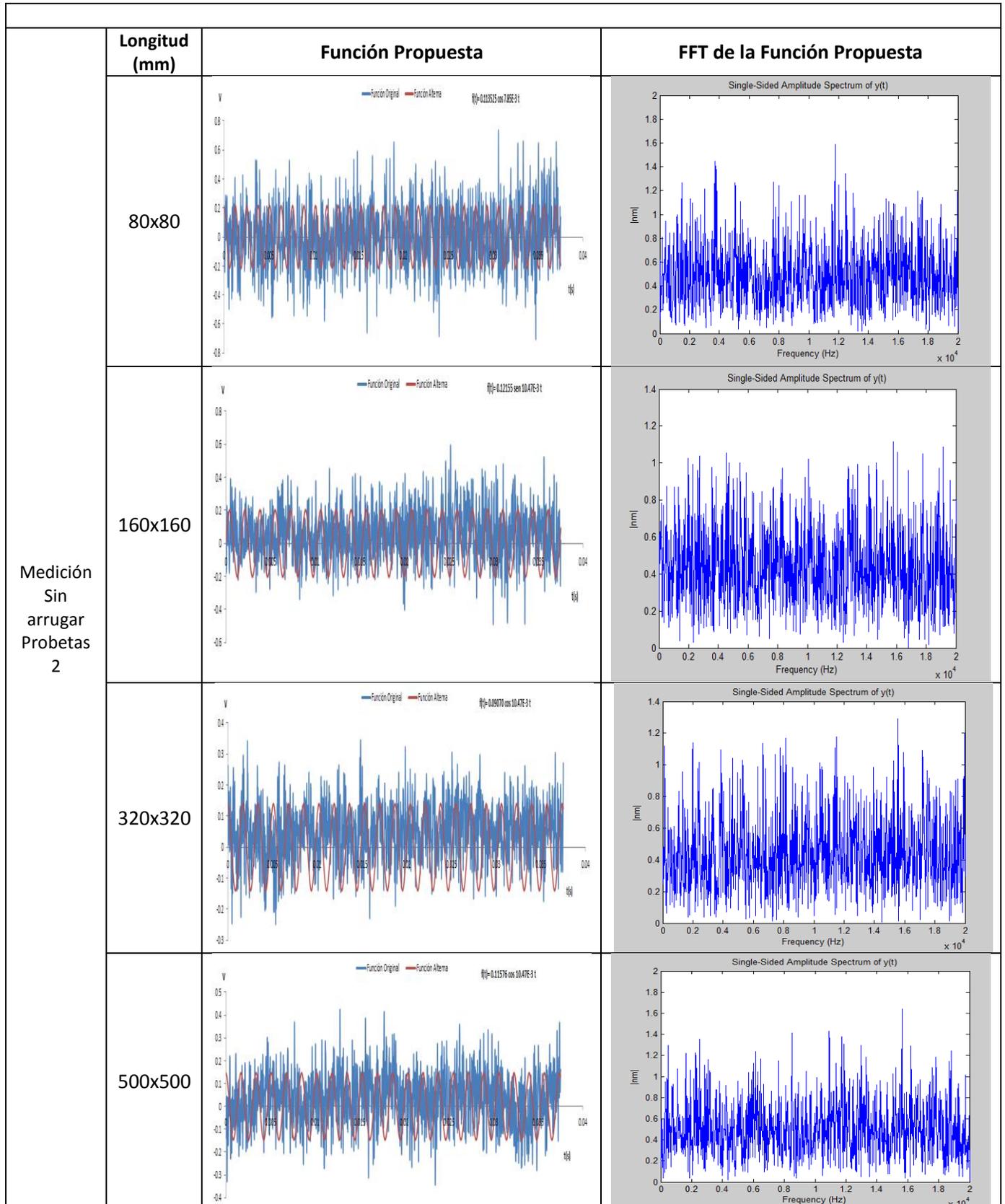
	Longitud (mm)	Función Propuesta	FFT de la Función Propuesta
Medición Quinto Día Probetas 3	80x80		
	160x160		
	320x320		
	500x500		

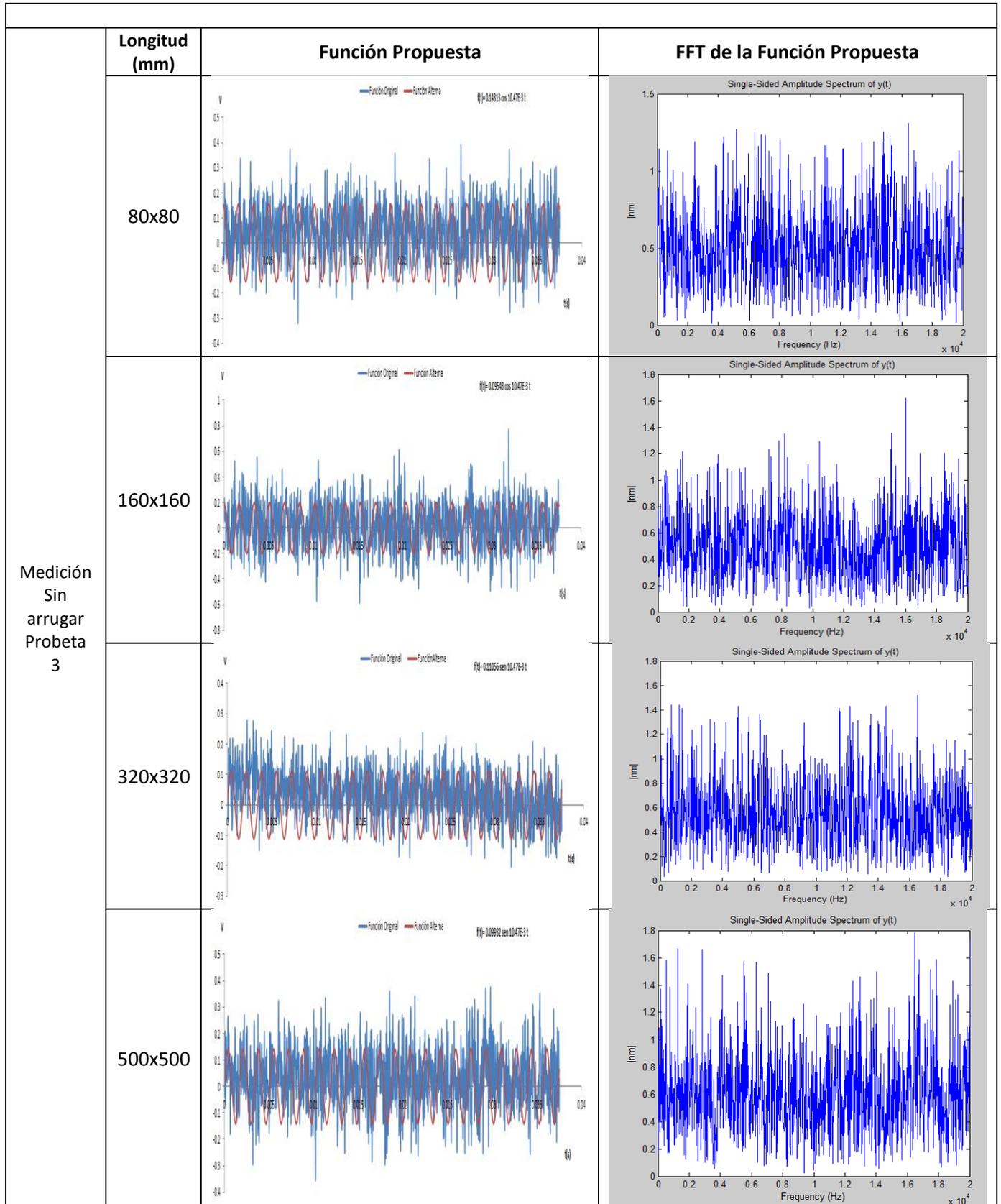
	Longitud (mm)	Función Propuesta	FFT de la Función Propuesta
Medición Décimo Día Probetas 1	80x80		
	160x160		
	320x320		
	500x500		

	Longitud (mm)	Función Propuesta	FFT de la Función Propuesta
Medición Décimo Día Probetas 2	80x80		
	160x160		
	320x320		
	500x500		

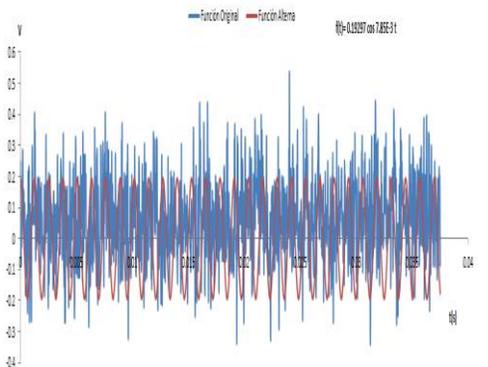
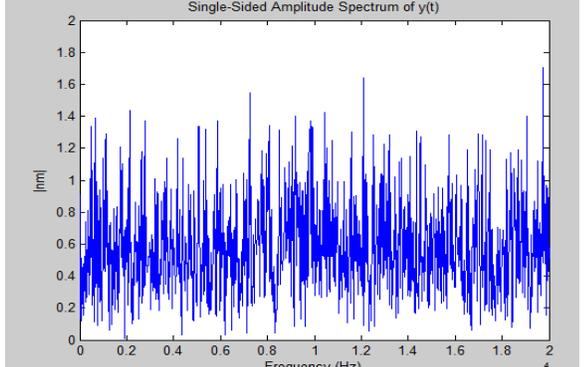
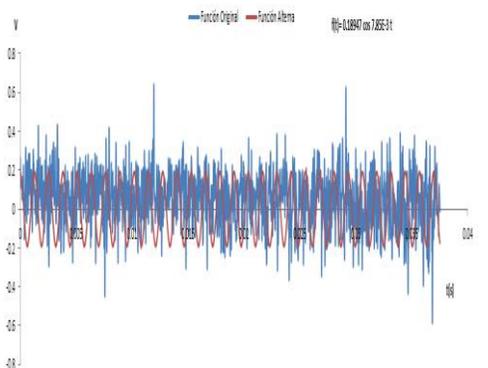
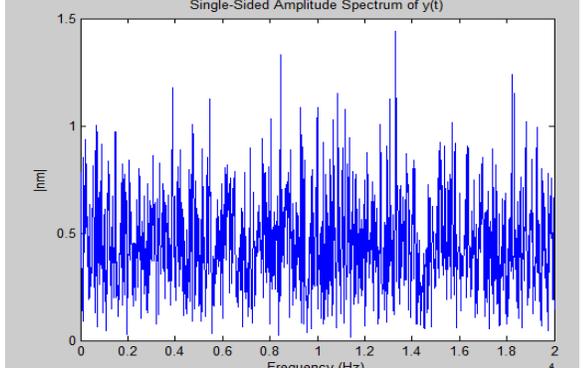
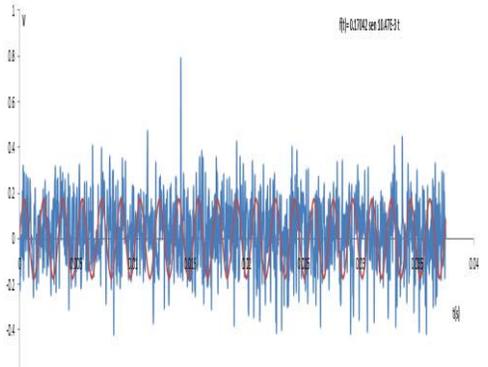
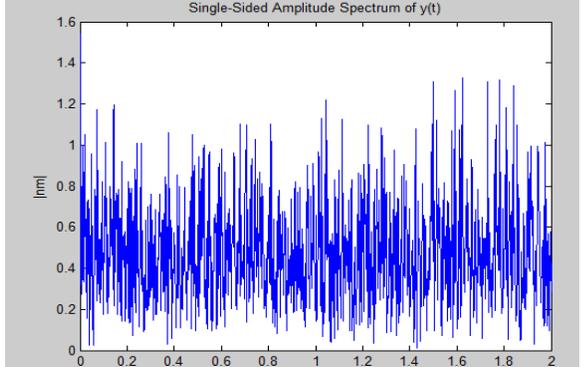
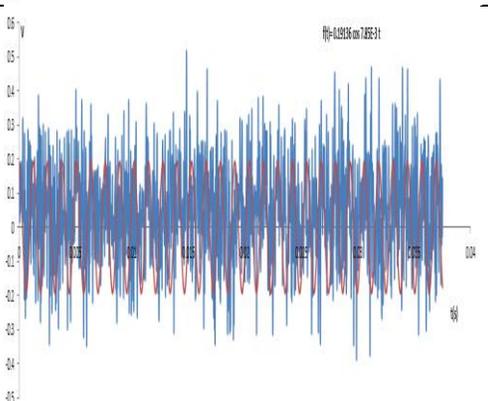
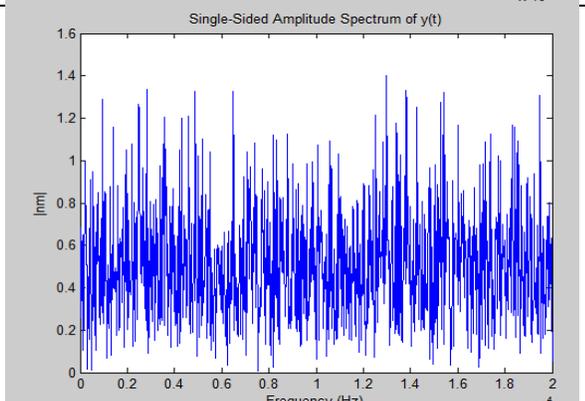


GRÁFICAS DE FUNCIONES PAPEL KRAFT			
Medición sin arrugar Probetas 1	Longitud (mm)	Función Propuesta	FFT de la Función Propuesta
	80x80		
	160x160		
	320x320		
	500x500		

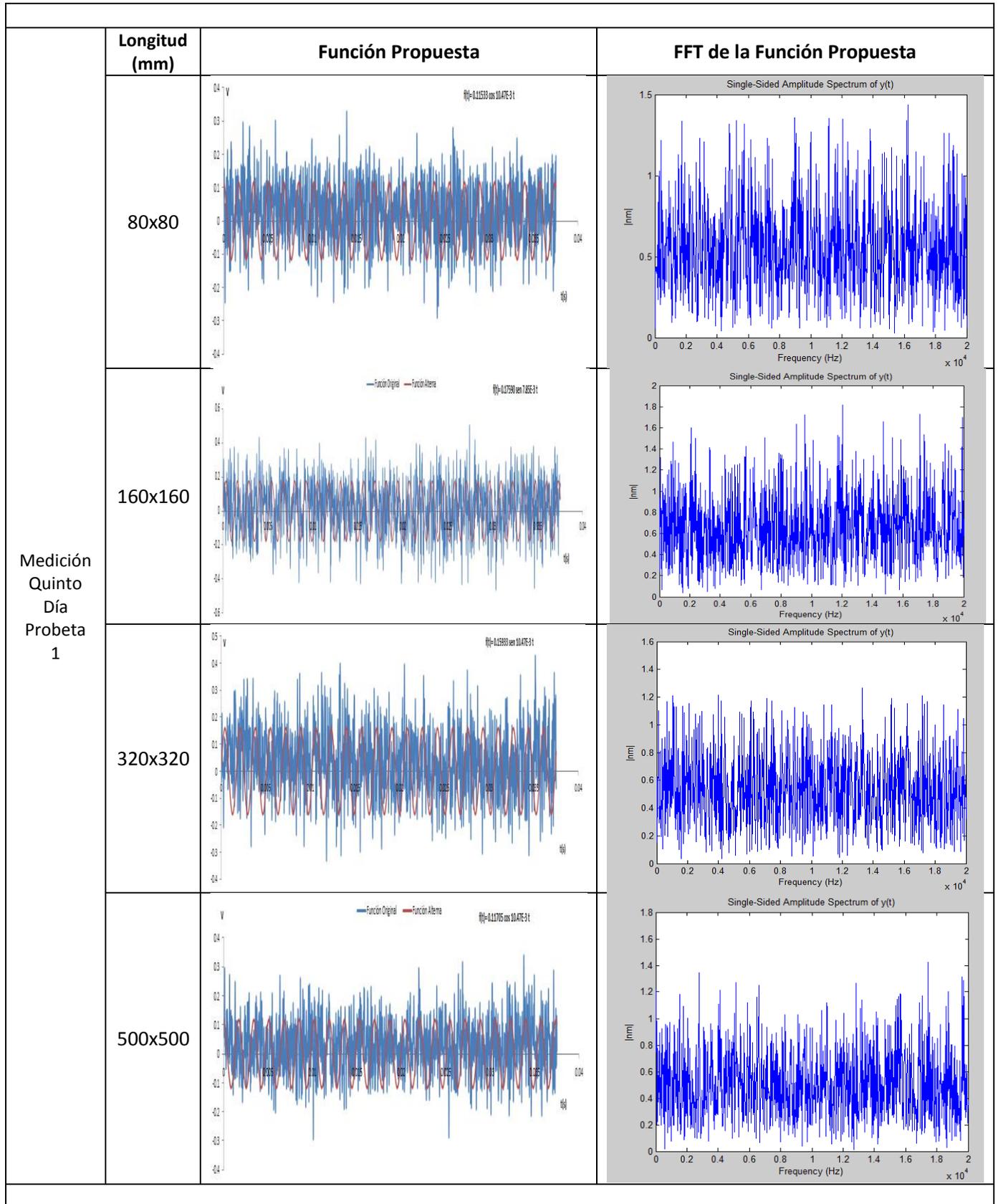


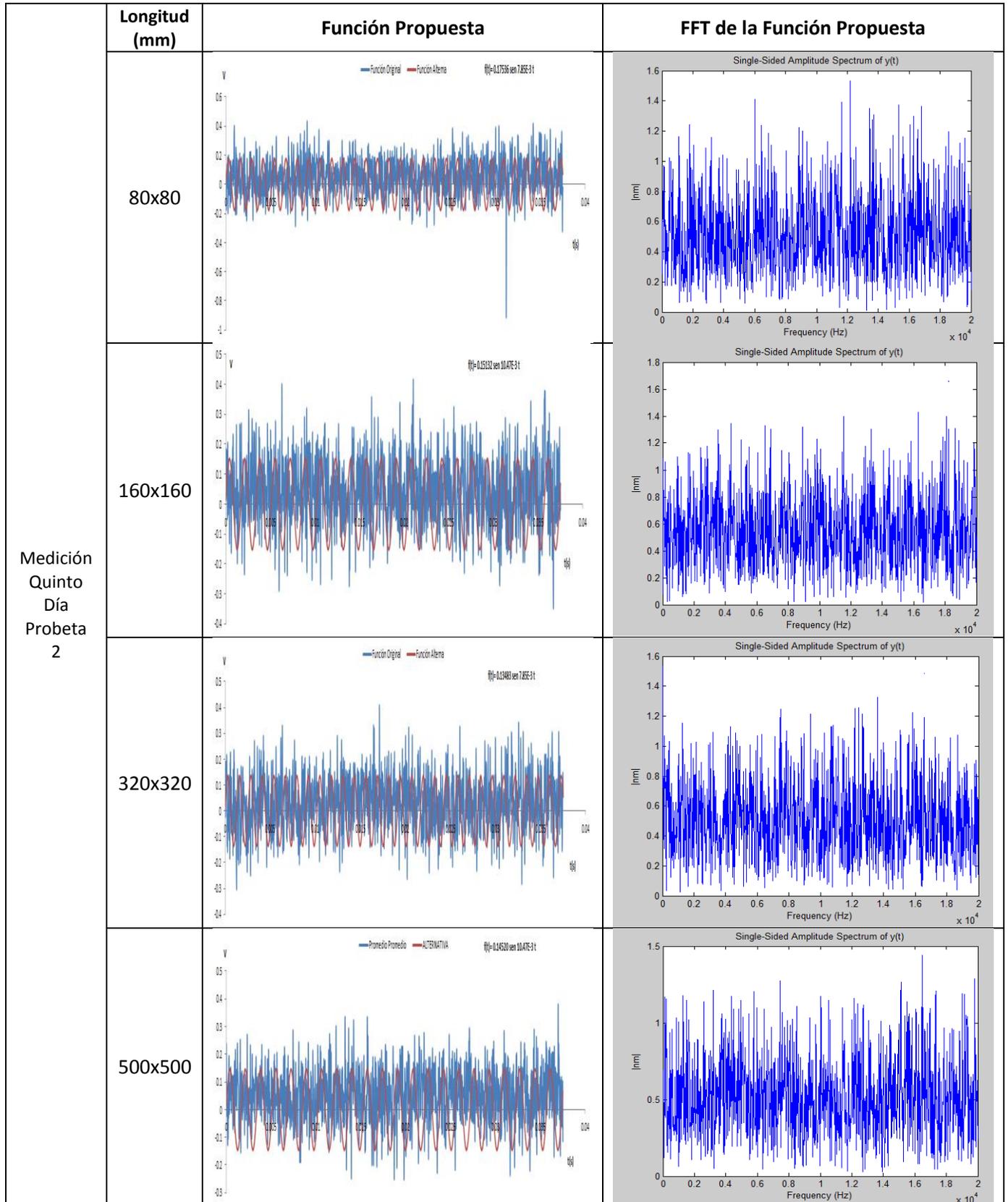


	Longitud (mm)	Función Propuesta	FFT de la Función Propuesta
Medición Primer Día Probetas 1	80x80		
	160x160		
	320x320		
	500x500		

	Longitud (mm)	Función Propuesta	FFT de la Función Propuesta
Medición Primer Día Probetas 2	80x80		
	160x160		
	320x320		
	500x500		

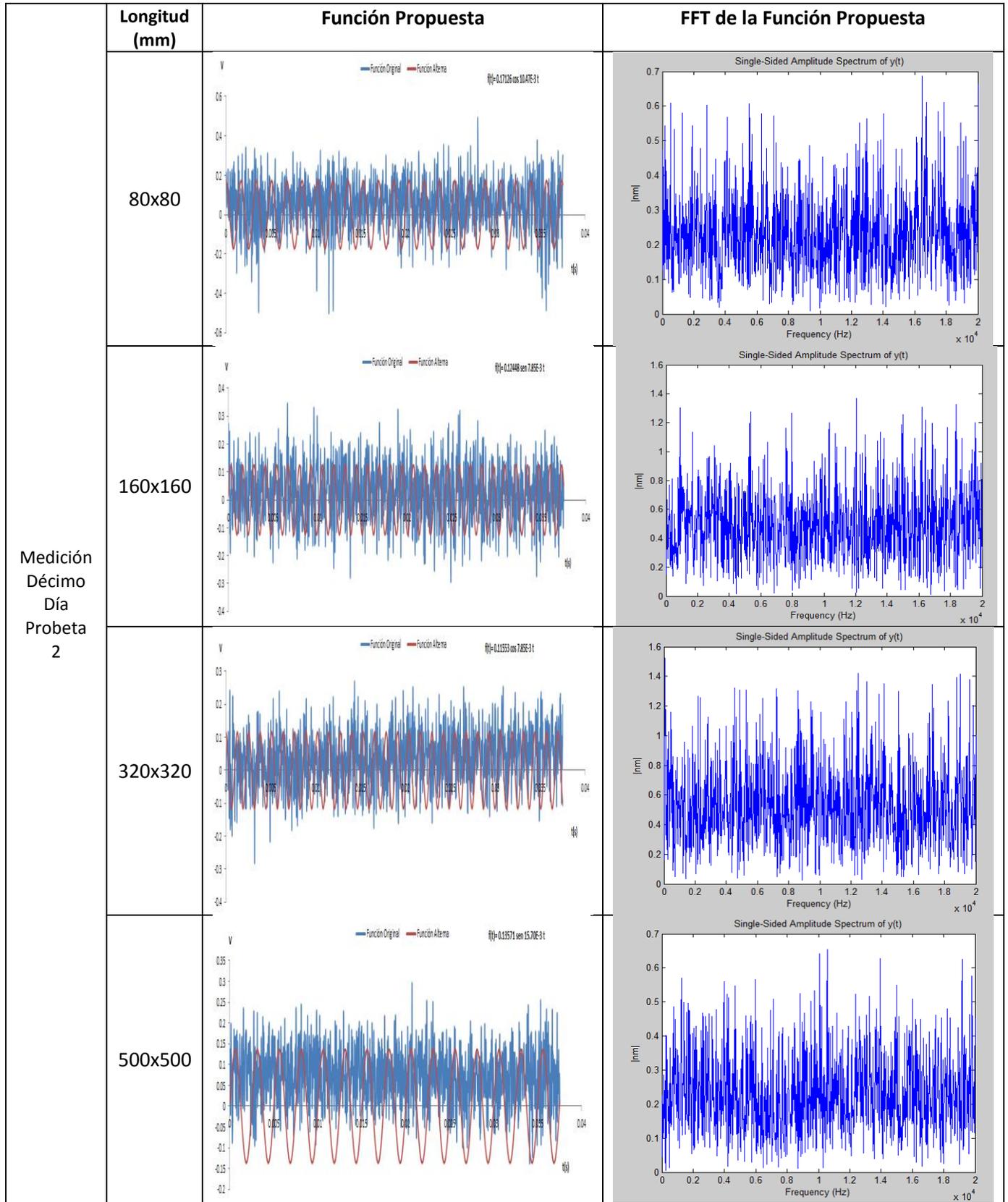
	Longitud (mm)	Función Propuesta	FFT de la Función Propuesta
Medición Primer Día Probetas 3	80x80		
	160x160		
	320x320		
	500x500		

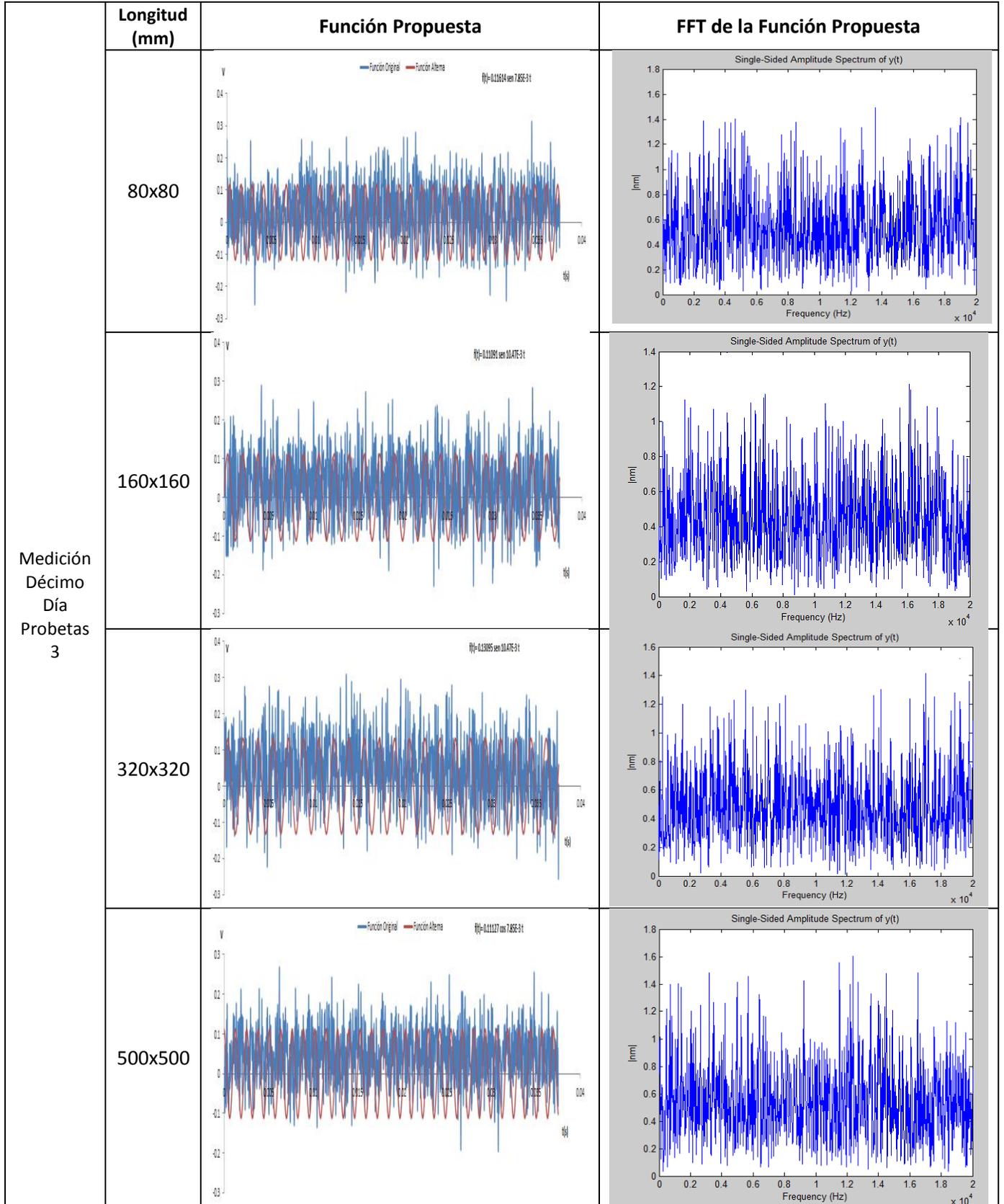


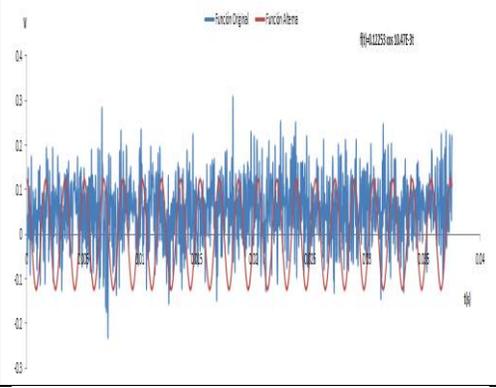
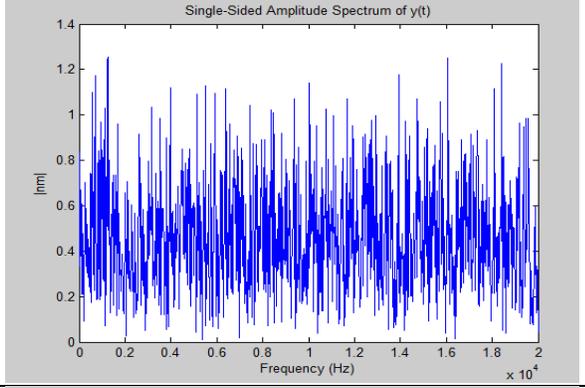
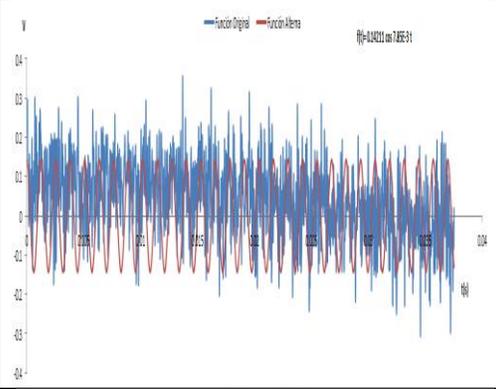
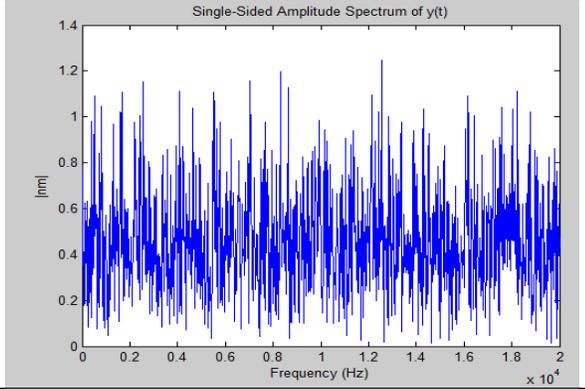
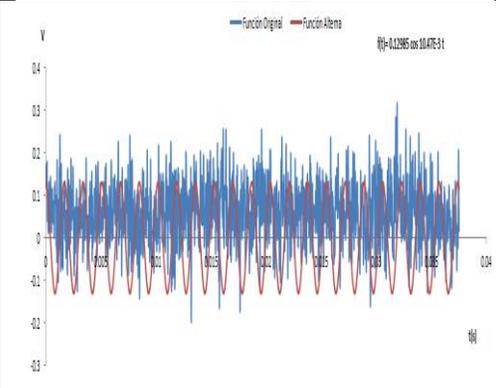
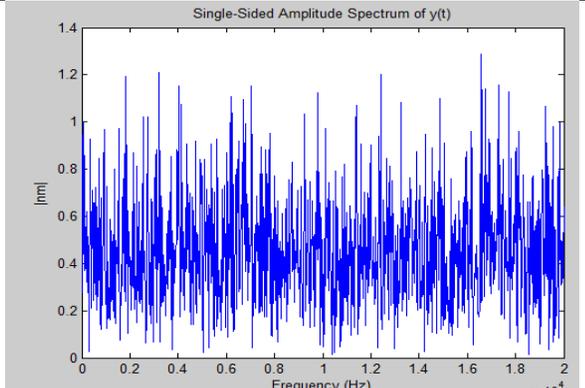
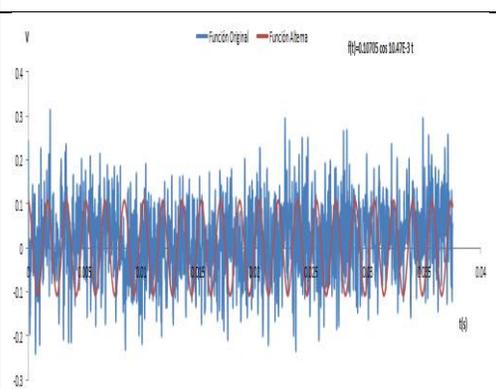
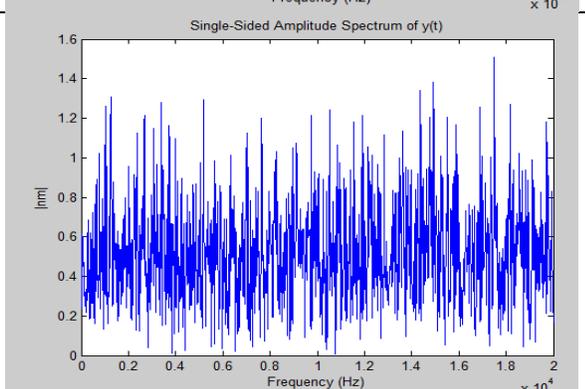


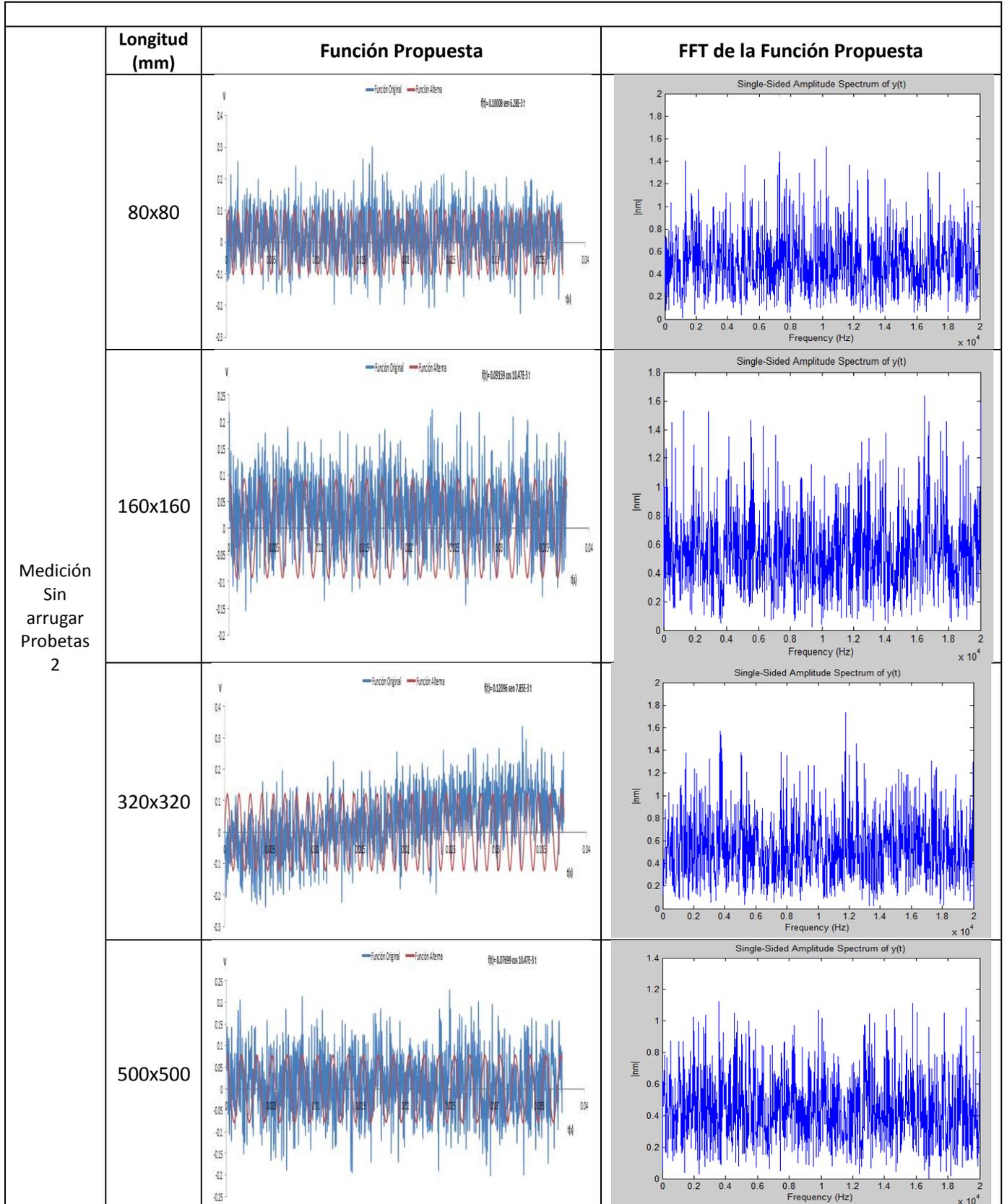
	Longitud (mm)	Función Propuesta	FFT de la Función Propuesta
Medición Quinto Día Probetas 3	80x80		
	160x160		
	320x320		
	500x500		

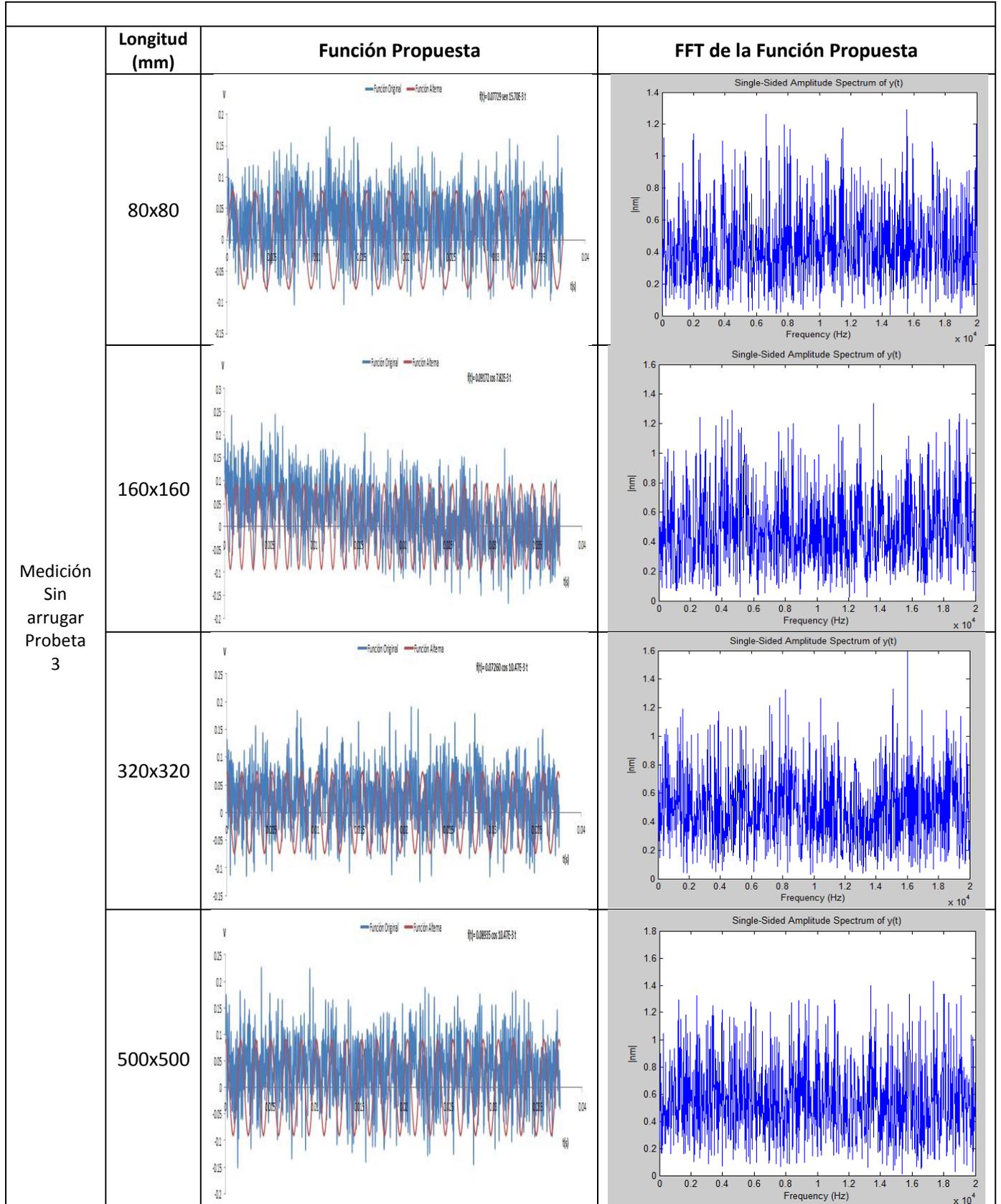
	Longitud (mm)	Función Propuesta	FFT de la Función Propuesta
Medición Décimo Día Probetas 1	80x80		
	160x160		
	320x320		
	500x500		



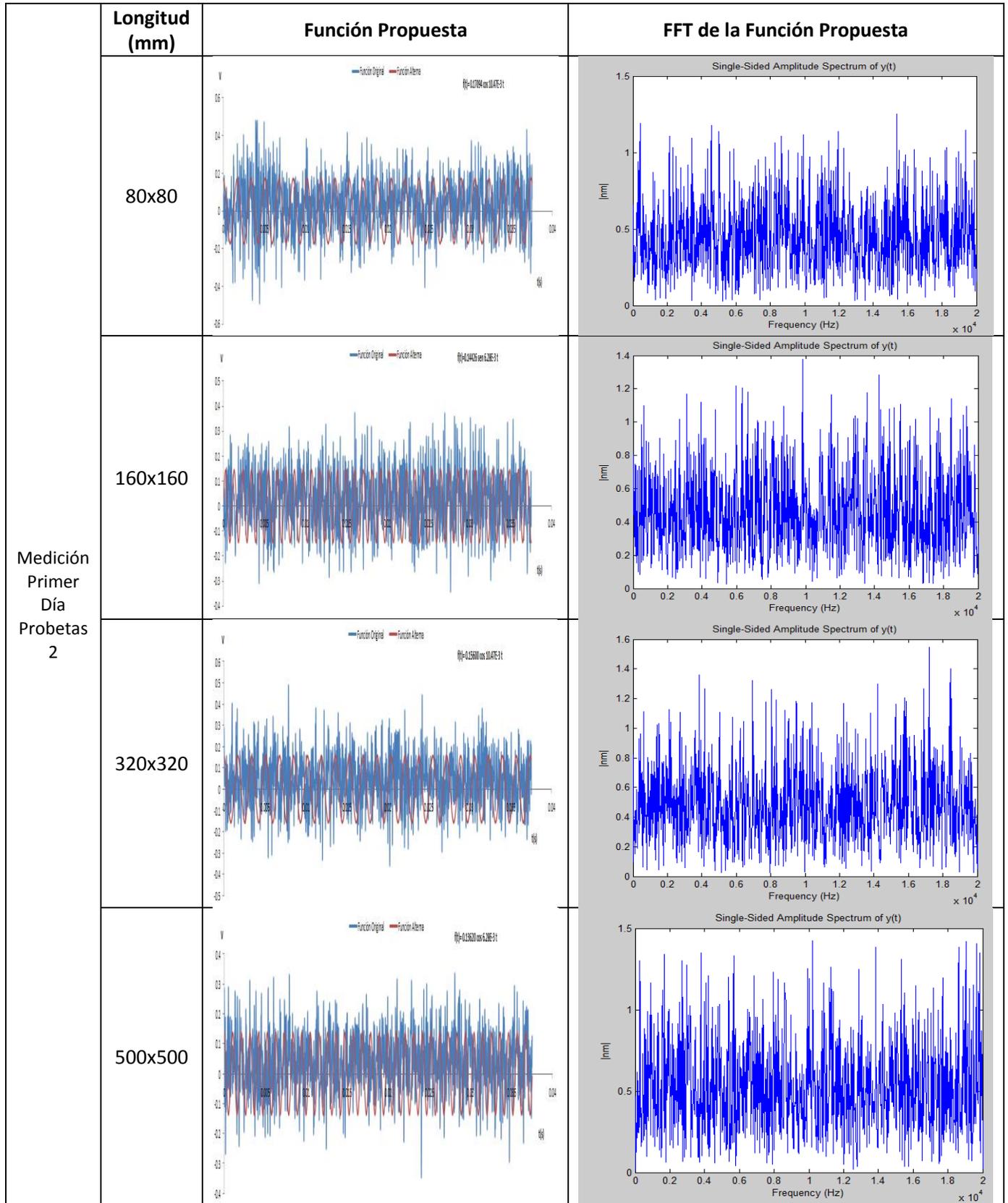


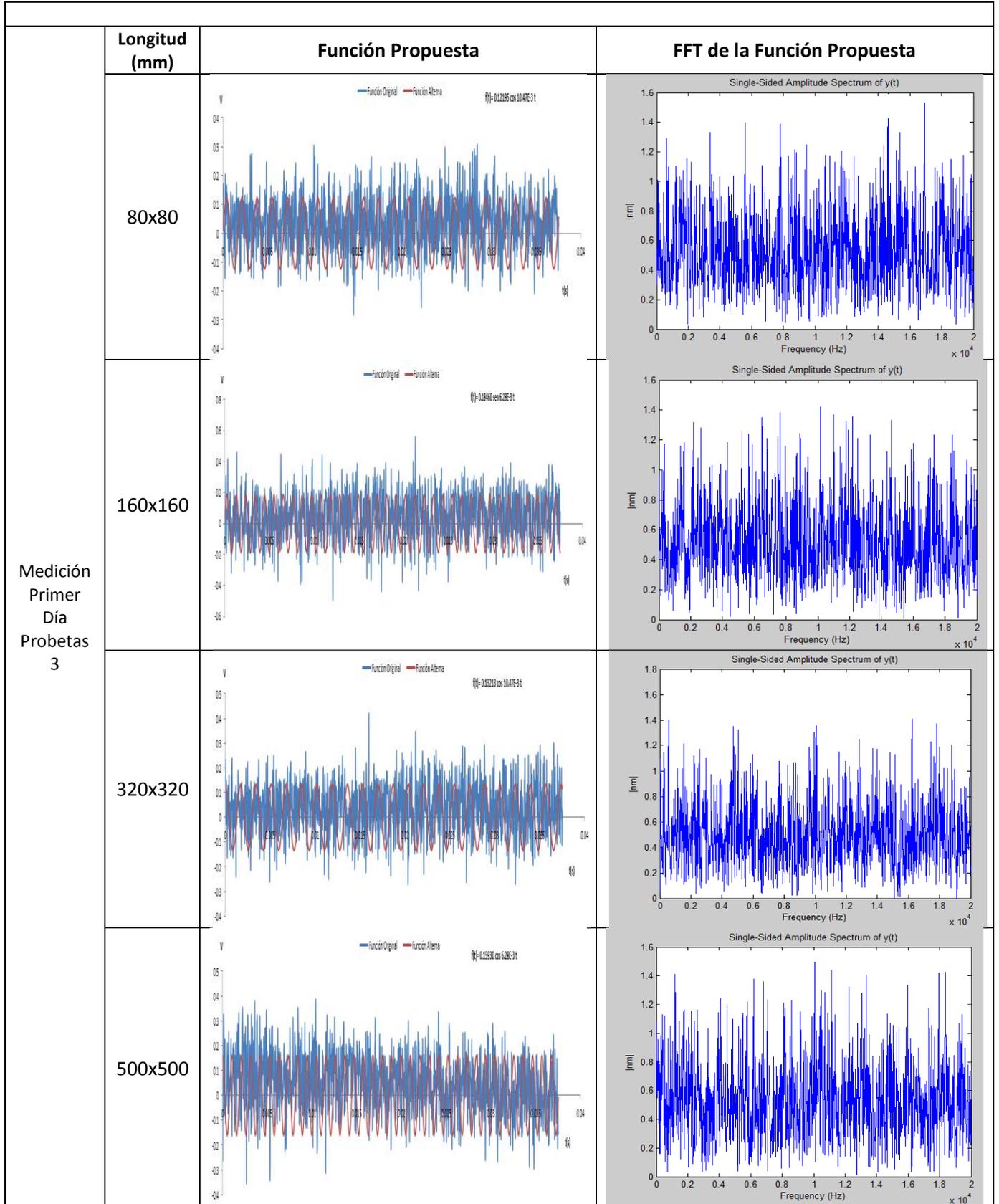
GRÁFICAS DE FUNCIONES PAPEL BOND			
Medición sin arrugar Probetas 1	Longitud (mm)	Función Propuesta	FFT de la Función Propuesta
	80x80		
	160x160		
	320x320		
	500x500		

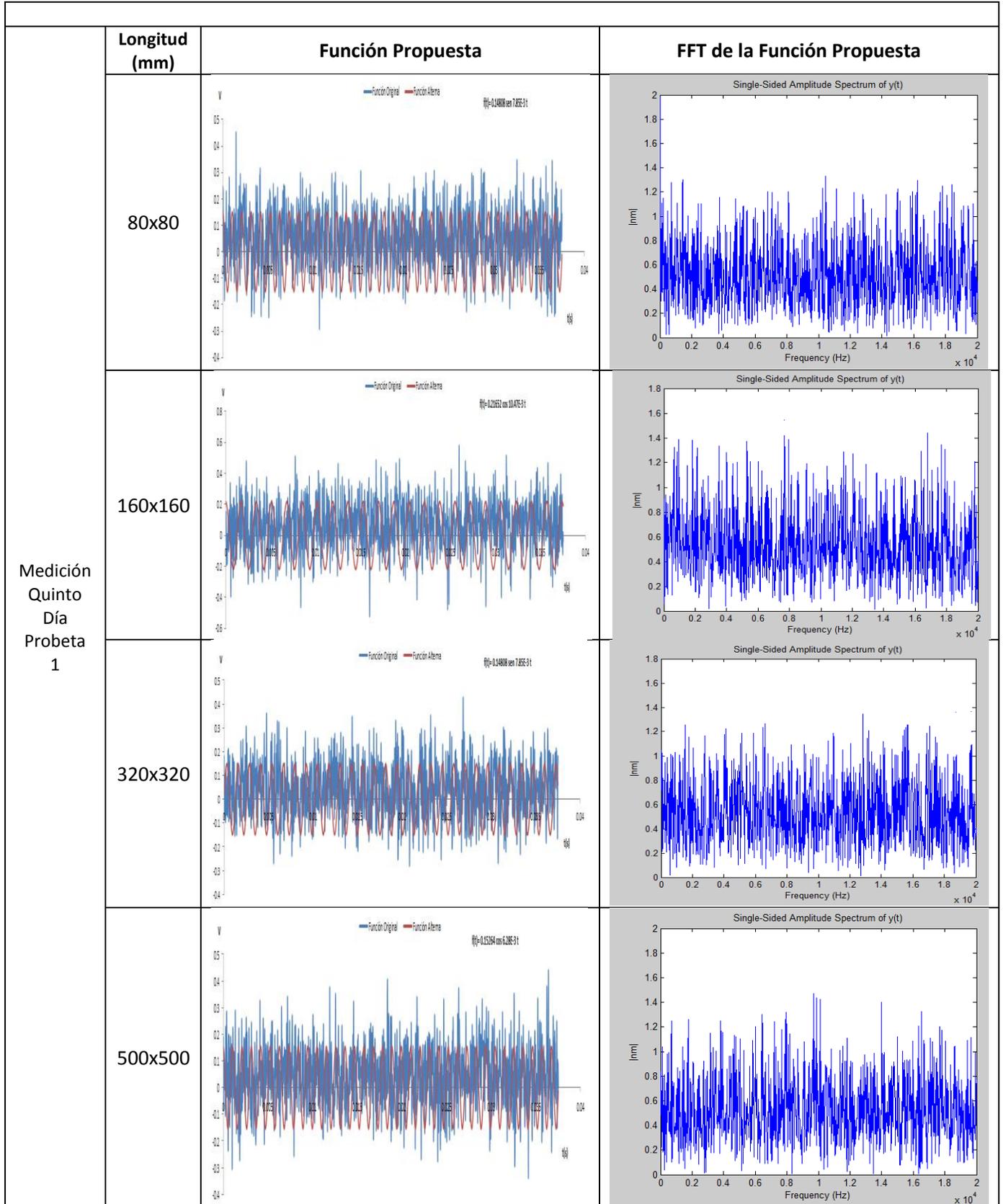


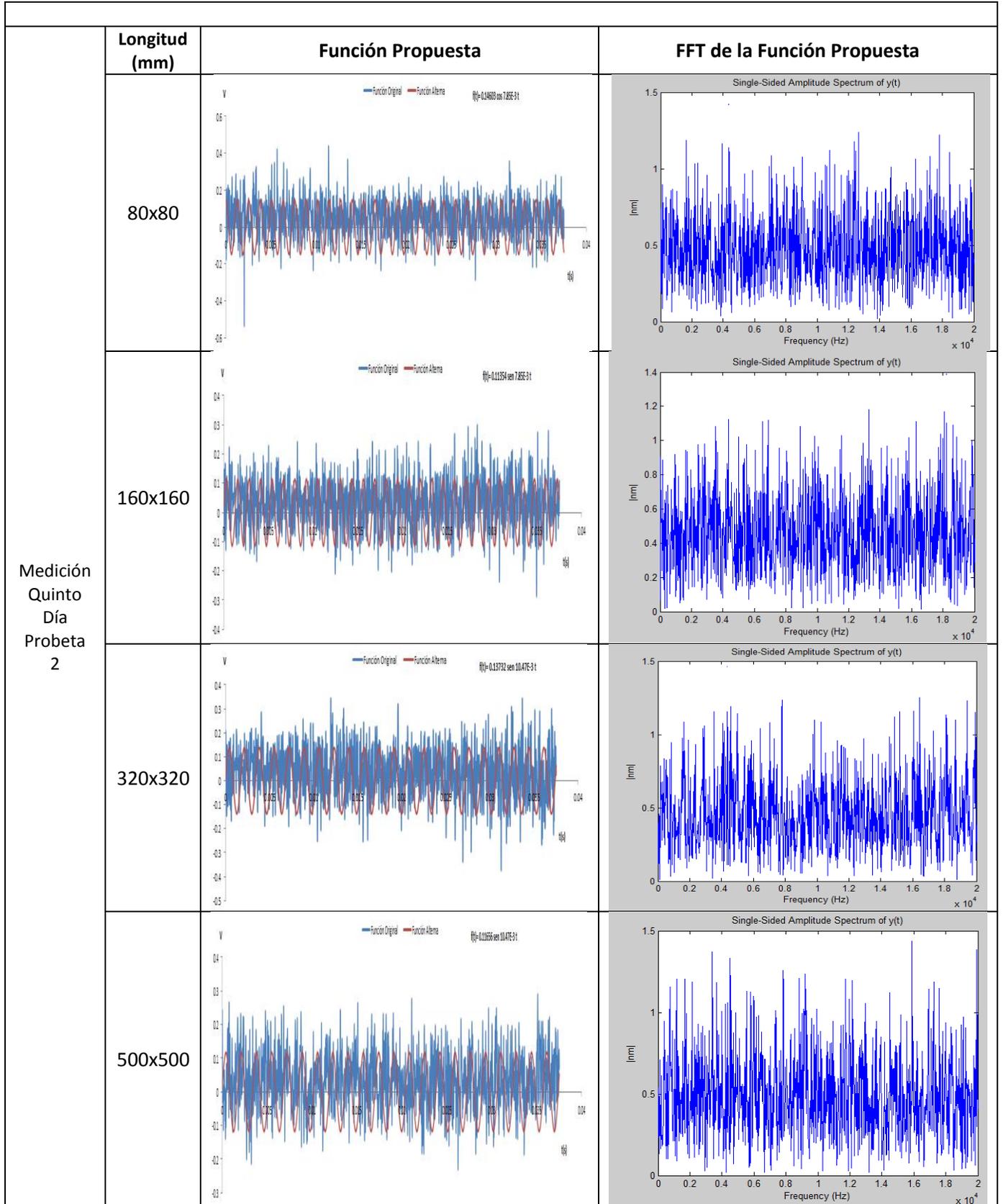


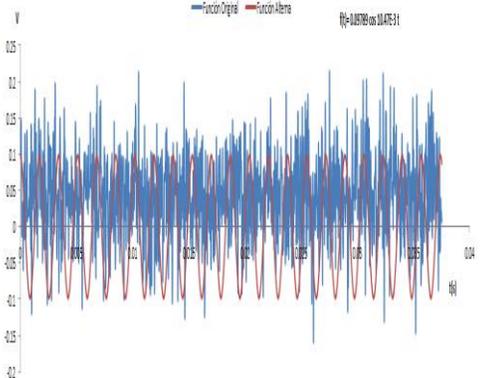
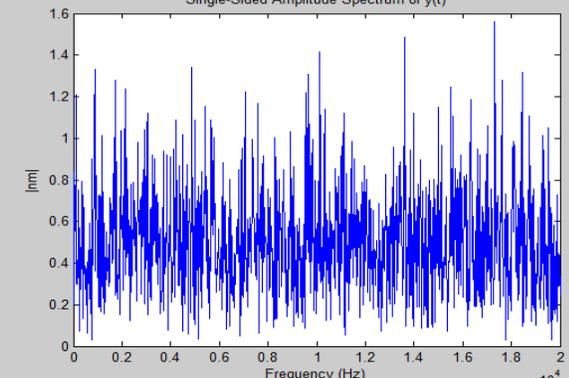
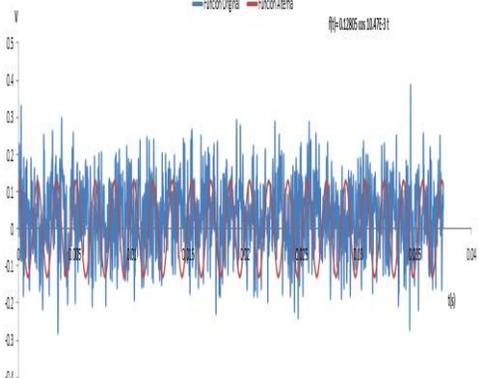
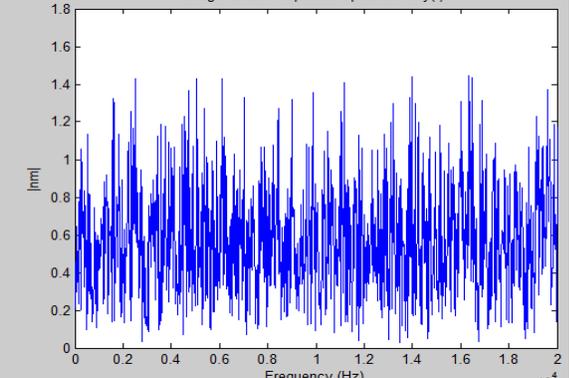
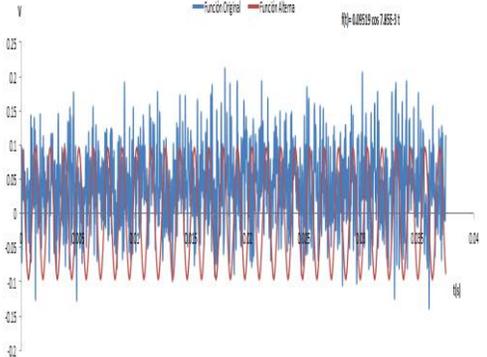
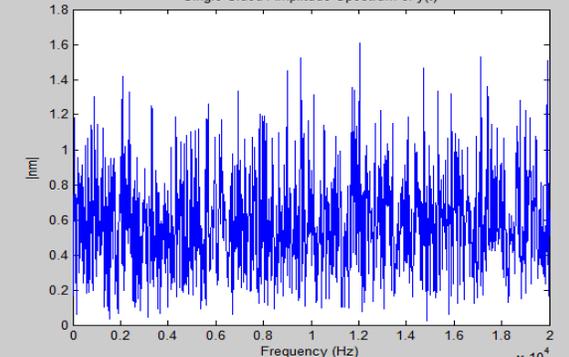
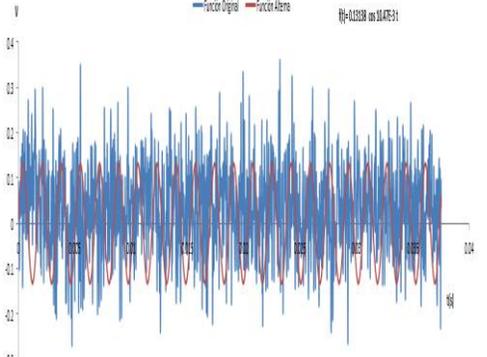
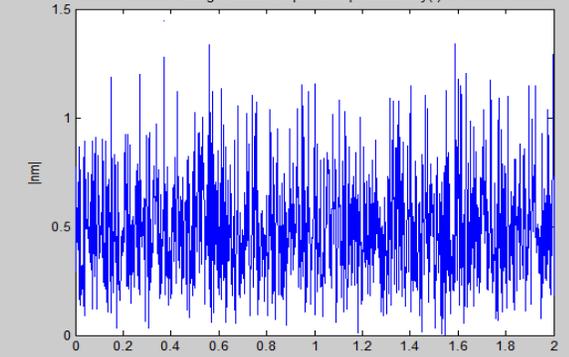
	Longitud (mm)	Función Propuesta	FFT de la Función Propuesta
Medición Primer Día Probetas 1	80x80		
	160x160		
	320x320		
	500x500		

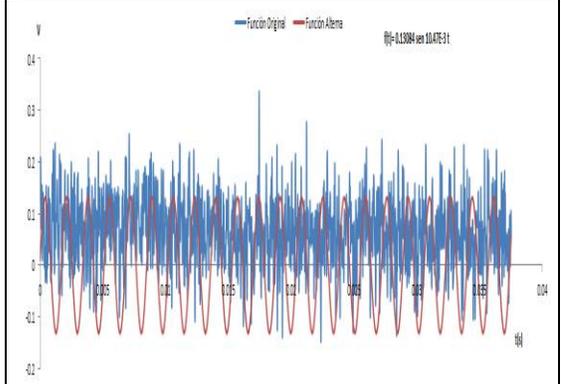
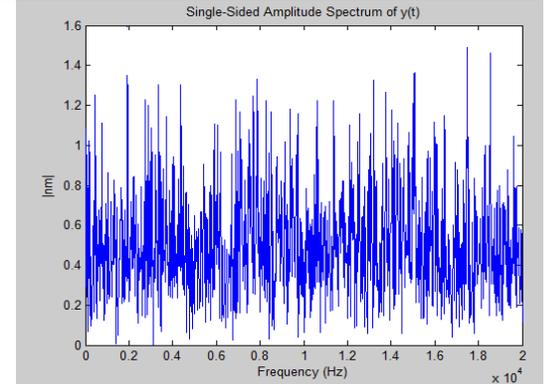
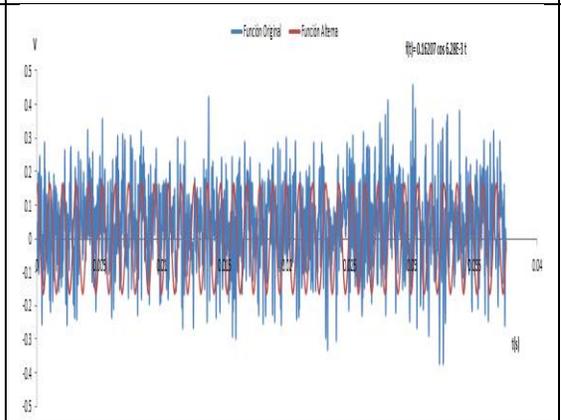
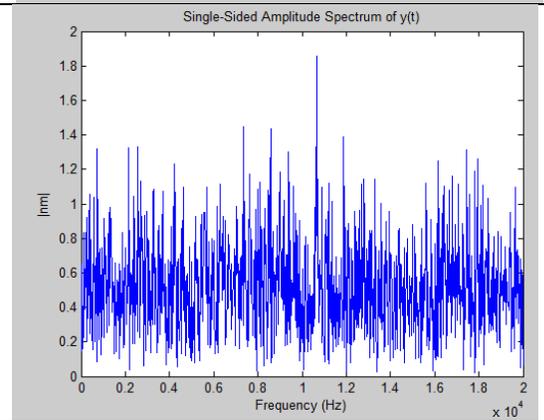
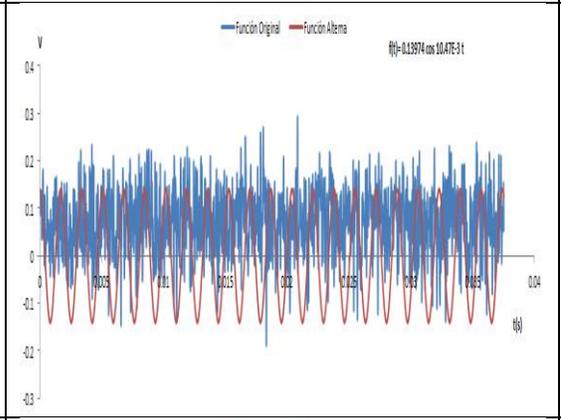
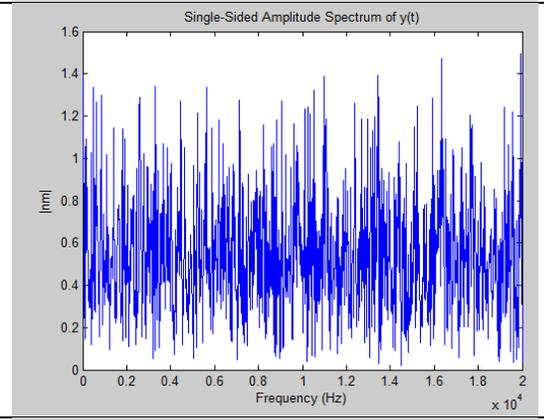








	Longitud (mm)	Función Propuesta	FFT de la Función Propuesta
Medición Quinto Día Probetas 3	80x80		
	160x160		
	320x320		
	500x500		

	Longitud (mm)	Función Propuesta	FFT de la Función Propuesta
Medición Décimo Día Probetas 1	80x80		
	160x160		
	320x320		
	500x500	