



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA.**  
**SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN**

---



***“INFLUENCIA DE LA VISCOSIDAD  
VARIABLE EN EL PROCESO DE  
CONDENSACIÓN DE PELÍCULA LAMINAR  
(PROBLEMA CONJUGADO)”***

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA MECÁNICA**

**P R E S E N T A:**

**ING. JOSÉ CARLOS ARCOS HERNÁNDEZ.**

**DIRECTORES DE TESIS:**

**DR. OSCAR ELADIO BAUTISTA GODÍNEZ.**  
**DR. FLORENCIO SÁNCHEZ SILVA.**

**México D.F.**

**Marzo, 2007**

*A mis padres, Elodia Ma. del Carmen y Félix Manuel;  
y hermanos, Verónica, Angélica y Emmanuel.*

*A mi esposa, Gaby.*

*Para ti, Jan Carlo.*

## **AGRADECIMIENTOS:**

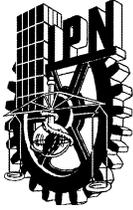
*Al Dr. Oscar Eladio Bautista Godínez, por sus enseñanzas, disposición y gran apoyo para llevar a cabo la realización del presente trabajo.*

*Al Dr. Federico Méndez Lavielle, por sus importantes comentarios y apoyo en esta propuesta de estudio.*

*Al Dr. Florencio Sánchez Silva, por sus valiosos comentarios y sugerencias para el desarrollo de este trabajo.*

*Al Instituto Politécnico Nacional, por la beca SUPERA que se me otorgo durante mis estudios.*

*Al LABINTHAP, por las facilidades y el apoyo que me brindaron durante mi estancia de estudios.*



**INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL  
SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO**

SIP-14

**ACTA DE REVISION DE TESIS**

En la Ciudad de México, D. F. siendo las 12:00 horas del día 7 del mes de Noviembre del 2006 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de la E. S. I. M. E. para examinar la tesis de grado titulada:

**“INFLUENCIA DE LA VISCOSIDAD VARIABLE EN EL PROCESO DE  
CONDENSACIÓN DE PELÍCULA LAMINAR (PROBLEMA CONJUGADO).”**

Presentada por el alumno:

**ARCOS**  
Apellido paterno

**HERNÁNDEZ**  
Apellido materno

**JOSÉ CARLOS**  
Nombre(s)

Con registro: 

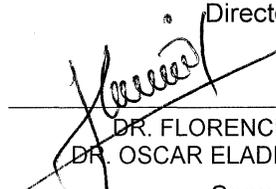
B	0	0	1	0	5	9
---	---	---	---	---	---	---

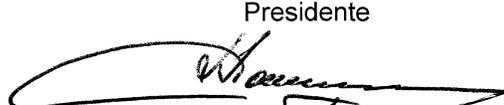
Aspirante al grado de:

**MAESTRO EN CIENCIAS**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

**LA COMISION REVISORA**

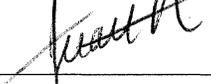
Director de tesis  
  
DR. FLORENCIO SÁNCHEZ SILVA  
DR. OSCAR ELADIO BAUTISTA GODÍNEZ

Presidente  
  
DR. GEORGIY POLUPAN  
Tercer Vocal

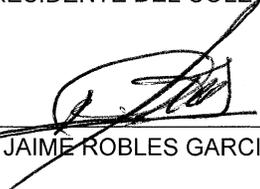
Segundo Vocal  
  
DR. OSCAR ELADIO BAUTISTA GODÍNEZ  
Secretario

M. EN C. Tercer Vocal  
  
M. EN C. GUILBALDO TOLENTINO ESLAVA  
Suplente

  
DR. IGNACIO CARVAJAL MARISCAL

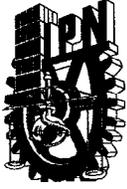
  
M EN C. JUAN ABUGABER FRANCIS

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

  
DR. JAIME ROBLES GARCIA



SECCION DE ESTUDIOS DE  
POSGRADO E INVESTIGACION



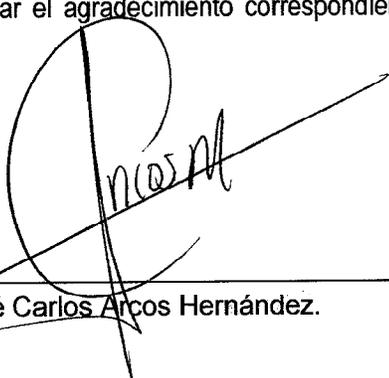
**INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL  
SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO**

**CARTA CESION DE DERECHOS**

En la Ciudad de México, Distrito Federal, el día 13 del mes de Marzo del año 2007, el(la) que suscribe Ing. José Carlos Arcos Hernández alumno(a) del programa de Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica opción Energética con número de registro B001059, adscrito a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME Unidad Zacatenco, manifiesta que es autor(a) intelectual del presente Trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Oscar Eladio Bautista Godínez y del Dr. Florencio Sánchez Silva y cede los derechos del trabajo titulado: Influencia de la Viscosidad Variable en el Proceso de Condensación de Película Laminar (Problema Conjugado), al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección: [jarcos@ipn.mx](mailto:jarcos@ipn.mx)

Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.



Ing. José Carlos Arcos Hernández.

# CONTENIDO

<b>RESUMEN</b>	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>ii</b>
<b>INDICE DE FIGURAS</b>	<b>iii</b>
<b>NOMENCLATURA</b>	<b>vi</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>viii</b>
<b>CAPÍTULO I.- ANTECEDENTES DE LA CONDENSACIÓN</b>	<b>1</b>
1.1 Estado del arte	2
1.2 Tipos de condensación	3
1.2.1 Condensación por película laminar	4
1.2.2 Condensación por goteo	9
<b>CAPITULO II.- MODELO MATEMÁTICO</b>	<b>12</b>
2.1 Formulación del problema	13
2.2 Determinación de los órdenes de magnitud	15
2.3 Órdenes de magnitud en la película de condensado	15
2.4 Planteamiento matemático	28
2.4.1 Adimensionalización de las ecuaciones que describen el proceso de condensación	28
2.4.2 Ecuación en el sólido	28
2.4.3 Condiciones de frontera en el sólido	30
2.4.4 Ecuación en la película de fluido condensado	32
2.4.5 Condiciones de frontera asociadas con la película de condensado	35

<b>CAPITULO III.- ALGORITMO DE SOLUCIÓN</b>	<b>38</b>
3.1 Solución asintótica	39
3.1.1 Generalidades de las técnicas de perturbación regular	39
3.1.2 Solución asintótica para $Ja \rightarrow 0$ y $Pr \sim 1$	40
3.2 Análisis del esquema numérico cerca de los valores críticos	49
<b>CAPITULO IV.- ANÁLISIS DE RESULTADOS</b>	<b>52</b>
4.1 Análisis paramétrico de los resultados numéricos y analíticos	53
4.2 Comparación con los resultados de otros autores	67
4.3 Limitaciones del modelo propuesto	72
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>76</b>
<b>RECOMENDACIONES</b>	<b>77</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>78</b>
<b>Apéndice</b> Desarrollo del método de perturbación	<b>80</b>

# RESUMEN

En esta tesis se presenta el estudio teórico de la influencia de la viscosidad variable en la condensación de película laminar sobre una aleta rectangular que se encuentra inmersa en un vapor saturado.

Las ecuaciones de cantidad de movimiento y de la energía en la película de condensado así como la ecuación de la energía en la aleta, se redujeron a un sistema no lineal de dos ecuaciones diferenciales ordinarias en función de la temperatura adimensional en la aleta  $q(c)$  y del espesor adimensional de la película de condensado  $\Delta(c)$ , además de cinco parámetros adimensionales como son, el número de Prandtl en el condensado,  $Pr_c$ , el número de Jacob,  $Ja$ , un parámetro adimensional de conducción de calor en la aleta,  $a$ , que representa la competencia entre el flujo de calor conducido a través de la aleta y el flujo de calor transferido hacia la placa desde la fase condensada, la razón de esbeltez de la aleta  $e$  y de un parámetro adimensional,  $\bar{b}$ , en el que se involucran efectos de la viscosidad variable con la temperatura del fluido condensado.

Para obtener el espesor adimensional de la película de condensado a lo largo de la aleta y de igual forma la temperatura adimensional en la misma, las ecuaciones de balance acopladas se integran en el límite asintótico, es decir, cuando  $Ja \rightarrow 0$ . Por otro lado para valores finitos de los parámetros  $\bar{b}$  y  $a$ , se muestra que el efecto de la viscosidad variable del fluido condensado con la temperatura considerando que la pared de la aleta es no-isotérmica, modifican sustancialmente la solución clásica de Nusselt (1916), donde  $a \rightarrow \infty$  y  $\bar{b} = 0$ . El problema se resuelve para el caso de pared térmicamente delgada donde  $a/e^2 \gg 1$  y  $\bar{b}$  tiene valores finitos, empleando técnicas de perturbación regular y para la solución numérica se utilizó el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

Por último se obtuvo el número de Nusselt promedio en función de los parámetros  $a$  y  $\bar{b}$  y el espesor característico adimensional de la película de condensado en la base de la aleta  $\Delta_f$ . Con el propósito de presentar resultados realistas de los principales parámetros adimensionales se utilizaron dos fluidos agua y etilen-glicol, para determinar la eficiencia de la aleta para el caso de viscosidad constante y viscosidad variable.

# ABSTRACT

The theoretical study of variable viscosity effects on a laminar film-condensation taking place along a vertical fin immersed in a saturated vapor is treated in this work.

The momentum and energy balance equations for the condensate film and the energy equation for the vertical fin are reduced to a non-linear system of two ordinary differential equations. The resultant equations are function of non-dimensional fin temperature  $q(\mathbf{c})$  and non-dimensional condensate thickness  $\Delta(\mathbf{c})$ . There were obtained, five non-dimensional parameters like, the Prandtl number at the condensate,  $Pr_c$ , the Jakob number  $Ja$ , a conjugate heat transfer parameter  $\mathbf{a}$ , that represents the relationship between the heat conducted by the fin in the longitudinal direction to the heat conducted through the condensate film, the aspect ratio of the fin  $\mathbf{e}$ , and finally a non-dimensional parameter  $\bar{\mathbf{b}}$ , that takes into account the effect of the variable viscosity with the condensate temperature.

In order to predict the non-dimensional thickness of the condensate layer  $\Delta(\mathbf{c})$ , and the non-dimensional temperature  $q(\mathbf{c})$  along the fin, the coupled balance equations were integrated under the asymptotic limit of  $Ja \rightarrow 0$ . On the other hand, for finite values of the parameters  $\bar{\mathbf{b}}$  and  $\mathbf{a}$ , it is shown that the effect of the variable viscosity on the fluid condensate temperature, considering non-isothermal conditions on the wall of the fin, modifies substantially the classical solution of Nusselt (1916), for the case where  $\mathbf{a} \rightarrow \infty$  and  $\bar{\mathbf{b}} = 0$ .

The set of equations was solved for the thermally thin wall regime, where  $\mathbf{a}/\mathbf{e}^2 \gg 1$  and  $\bar{\mathbf{b}}$  has finite values, applying regular perturbation techniques and for the numerical solution we used the Runge-Kutta method of fourth order.

Finally we obtained the average Nusselt number as a function of the parameters  $\mathbf{a}$  and  $\bar{\mathbf{b}}$  and the normalized thickness of the condensate layer at the base fin,  $\Delta_f$ . In order to get realistic values of the main non-dimensional parameters, two fluids like water and ethylene-glycol were considered to obtain the fin efficiency for two different cases for constant viscosity and variable viscosity.

## INDICE DE FIGURAS

		Pagina
1-1	Modos de condensación.	4
1-2	Esquema de la condensación por película sobre una placa vertical.	5
1-3	Condensación por goteo	10
2-1	Esquema del modelo físico en estudio.	14
2-2	Representación esquemática de la condensación de película laminar, para el análisis del flujo másico de condensado por unidad de profundidad de la aleta.	20
2-3	Volumen de control diferencial dentro de la película de condensado.	21
2-4	Representación esquemática de la condición de frontera en la dirección transversal de la aleta.	31
4-1	Solución numérica del perfil de temperatura, $q_w(c)$ como una función de la coordenada longitudinal $c$ , con un $\bar{b} = 1$ , para distintos valores de $a$ y para el valor crítico de $a^*$ .	52
4-2	Solución numérica del perfil de temperatura, $q_w(c)$ como una función de la coordenada longitudinal $c$ , con un $\bar{b} = 0.5$ , para distintos valores de $a$ y para el valor crítico de $a^*$ .	53
4-3	Solución numérica del perfil de temperatura, $q_w(c)$ como una función de la coordenada longitudinal $c$ , con un $\bar{b} = 0.05$ , para distintos valores de $a$ y para el valor crítico de $a^*$ .	54
4-4	Solución numérica del espesor adimensional de la capa de condensado $\Delta$ , como una función de la coordenada $c$ , para diferentes valores del parámetro $a$ y $\bar{b} = 1.0$ con un valor crítico de $a^*$ .	54
4-5	Solución numérica del espesor adimensional de la capa de condensado $\Delta$ , como una función de la coordenada $c$ , para diferentes valores del parámetro $a$ y del valor crítico $a^*$ con un $\bar{b} = 0.5$ .	55
4-6	Solución numérica del espesor adimensional de la capa de condensado $\Delta$ , como una función de la coordenada $c$ , para diferentes valores del parámetro $a$ y del valor crítico $a^*$ con un $\bar{b} = 0.05$ .	55
4-7	Número de Nusselt local modificado para distintos valores de $a$ y un $\bar{b} = 1$ , con un valor crítico de $a^*$ .	56
4-8	Número de Nusselt local modificado para distintos valores de $a$ y un	57

	$\bar{b} = 0.5$ , con un valor crítico de $\mathbf{a}^*$ .	
4-9	Número de Nusselt local modificado para distintos valores de $\mathbf{a}$ y un $\bar{b} = 0.05$ , con un valor crítico de $\mathbf{a}^*$ .	58
4-10	Número de Nusselt promedio modificado como función del parámetro $\bar{b}$ para distintos valores de $\mathbf{a}$ y para un valor crítico de $\mathbf{a} = \mathbf{a}^*$ .	59
4-11	Solución numérica del espesor adimensional en la base de la aleta como función del parámetro $\bar{b}$ para distintos valores de $\mathbf{a}$ y para un valor crítico de $\mathbf{a} = \mathbf{a}^*$ .	61
4-12	Relación del flujo másico de condensado y del parámetro $\Pi$ , en función de $\bar{b}$ para distintos valores de $\mathbf{a}$ y para el valor crítico $\mathbf{a}^*$ .	61
4-13	Solución asintótica del espesor adimensional de la capa de condensado $\Delta$ , como una función de la coordenada $\mathbf{c}$ , para diferentes valores del parámetro $\bar{b}$ con un $\mathbf{a} = 40$ .	63
4-14	Solución asintótica del espesor adimensional de la capa de condensado $\Delta$ , como una función de la coordenada $\mathbf{c}$ , para diferentes valores del parámetro $\bar{b}$ con un $\mathbf{a} = 10$ .	63
4-15	Solución asintótica del espesor adimensional de la capa de condensado $\Delta$ , como una función de la coordenada $\mathbf{c}$ , para diferentes valores del parámetro $\bar{b}$ con un $\mathbf{a} = 5$ .	64
4-16	Solución asintótica del perfil de temperatura, $\mathbf{q}_w(\mathbf{c})$ como una función de la coordenada longitudinal $\mathbf{c}$ , para distintos valores del parámetro $\bar{b}$ con un $\mathbf{a} = 40$ .	64
4-17	Solución asintótica del perfil de temperatura, $\mathbf{q}_w(\mathbf{c})$ como una función de la coordenada longitudinal $\mathbf{c}$ , para distintos valores del parámetro $\bar{b}$ con un $\mathbf{a} = 10$ .	65
4-18	Solución asintótica del perfil de temperatura, $\mathbf{q}_w(\mathbf{c})$ como una función de la coordenada longitudinal $\mathbf{c}$ , para distintos valores del parámetro $\bar{b}$ con un $\mathbf{a} = 5$ .	65
4-19	Comparación de los resultados analíticos y numéricos del espesor adimensional $\Delta$ en función de la coordenada longitudinal $\mathbf{c}$ , para un $\bar{b} = 1$ y un $\mathbf{a} = 40$ .	66

4-20	Comparación de los resultados analíticos y numéricos del espesor adimensional $\Delta$ en función de la coordenada longitudinal $c$ , para un $\bar{b} = 1$ y un $a = 5$ .	67
4-21	Comparación de los resultados numéricos y analíticos de la temperatura adimensional $q_w(c)$ , como una función de la coordenada longitudinal $c$ , con un $\bar{b} = 1$ y un $a = 40$ .	67
4-22	Comparación de los resultados numéricos y analíticos de la temperatura adimensional $q_w(c)$ , como una función de la coordenada longitudinal $c$ , con un $\bar{b} = 1$ y un $a = 5$ .	68
4-23	Comparación de los resultados analíticos y numéricos del espesor adimensional $\Delta$ en función de la coordenada longitudinal $c$ , para un $\bar{b} = 0.5$ y un $a = 40$ .	69
4-24	Comparación de los resultados analíticos y numéricos del espesor adimensional $\Delta$ en función de la coordenada longitudinal $c$ , para un $\bar{b} = 0.5$ y un $a = 5$ .	69
4-25	Comparación de los resultados numéricos y analíticos de la temperatura adimensional $q_w(c)$ , como una función de la coordenada longitudinal $c$ , con un $\bar{b} = 0.5$ y un $a = 40$ .	70
4-26	Comparación de los resultados numéricos y analíticos de la temperatura adimensional $q_w(c)$ , como una función de la coordenada longitudinal $c$ , con un $\bar{b} = 0.5$ y un $a = 5$ .	70
4-27	Comparación de los resultados analíticos y numéricos del espesor adimensional $\Delta$ en función de la coordenada longitudinal $c$ , para un $\bar{b} = 0.05$ y un $a = 40$ .	71
4-28	Comparación de los números de Nusselt modificado y el obtenido de la solución clásica de Nusselt.	72
4-29	Comparación de las eficiencias de la aleta durante el proceso de condensación, para el agua, con un $\Delta T = 10 K$ . (ecs. 4.6 y 4.7)	74
<b>INDICE DE TABLAS</b>		
4-1	Valores numéricos de los parámetros característicos adimensionales de la condensación del vapor de agua y del etilen-glicol a una presión absoluta de $p = 1 atm$ .	73

## NOMENCLATURA

Símbolo	Descripción	Unidades
$A$	Constante de la ec. (2.72).	
$B$	Constante de la ec. (2.72).	
$b$	Profundidad de la aleta.	$m$
$C$	Constante de la ec. (2.72).	
$c_c$	Calor específico del condensado.	$J/kg - K$
$D$	Constante de integración de la ec. (3.13).	
$f_c$	Función de corriente adimensional.	
$g$	Aceleración de la gravedad.	$m/s^2$
$h_f$	Entalpía del condensado.	$J/kg$
$h_g$	Entalpía del vapor saturado.	$J/kg$
$h_{fg}$	Calor latente de condensación.	$J/kg$
$h'_{fg}$	Calor latente de condensación definido en la ec. (1.17).	
$2h$	Espesor de la aleta.	$m$
$Ja$	Número de Jacob definido en la ec. (2.35a).	
$L$	Longitud de la aleta.	$m$
$m'_c$	Tasa de flujo másico de condensado para $\bar{b} \neq 0$	$kg/s$
$(m'_c)_\infty$	Tasa de flujo másico de condensado para $\mathbf{a} \rightarrow \infty$	$kg/s$
$Nu_c$	Número de Nusselt del condensado.	
$Nu_c^*$	Número de Nusselt modificado.	
$\bar{Nu}$	Número de Nusselt promedio	
$Nu_c$	Numero de Nusselt local	
$P$	Presión.	$N/m^2$
$Pr_c$	Número de Prandtl del condensado.	
$q_c$	Flujo de calor a través de la película de condensado.	$W$
$q_p$	Flujo de calor transferido hacia la aleta	$W$
$Re$	Número de Reynolds del condensado.	
$T$	Temperatura.	$K$
$T_0$	Temperatura en la base de la aleta.	$K$
$T_s$	Temperatura del vapor saturado.	$K$
$T_w$	Temperatura de la aleta.	$K$
$T_f$	Temperatura promedio en la película de condensado.	$K$
$\bar{u}_c, \bar{v}_c$	Velocidades longitudinal y transversal del fluido condensado.	$m/s$
$u, v$	Velocidades longitudinal y transversal adimensionales.	
$x, y$	Coordenadas cartesianas.	
$Z$	Coordenada transversal adimensional de la aleta definida en la ec. (2.54).	

## Letras griegas

<b><math>a</math></b>	Parámetro adimensional de conducción de calor definido en la ec. (2.46).	
<b><math>a^*</math></b>	Parámetro adimensional crítico de conducción de calor.	
<b><math>\bar{a}</math></b>	Parámetro adimensional definido en ec. (2.76).	
<b><math>\tilde{a}</math></b>	Parámetro adimensional definido en ec. (2.77).	
<b><math>b</math></b>	Parámetro adimensional definido en ec. (2.78).	
<b><math>\bar{b}</math></b>	Parámetro adimensional definido en ec. (2.81).	
<b><math>f</math></b>	Variable adimensional definida en la ec. (3.47)	
<b><math>c</math></b>	Coordenada longitudinal adimensional.	
$\Delta$	Espesor normalizado de la película de condensado.	
<b><math>d_c</math></b>	Espesor de la capa de condensado.	$m$
<b><math>d_{cL}</math></b>	Espesor normalizado de la película de condensado en la base de la aleta.	$m$
<b><math>e</math></b>	Relación de esbeltez de la aleta.	
<b><math>z</math></b>	Variable adimensional definida en la ec. (3.47)	
$\Gamma$	Flujo másico de condensado por unidad de profundidad de la aleta.	$kg/s - m$
<b><math>g</math></b>	Parámetro adimensional definido en la ec. (2.35b).	
<b><math>h</math></b>	Eficiencia de la aleta	
<b><math>h_c</math></b>	Coordenada transversal adimensional para la película de condensado.	
<b><math>l_c</math></b>	Conductividad térmica de la película de condensado.	$W/m - K$
<b><math>l_w</math></b>	Conductividad térmica de la aleta.	$W/m - K$
<b><math>m_t</math></b>	Viscosidad dinámica del condensado.	$kg/s - m$
<b><math>m_b</math></b>	Viscosidad dinámica definida en la ec. (2.75).	
<b><math>m_{t0}</math></b>	Viscosidad dinámica de referencia para $\bar{b} = 0$	
<b><math>\bar{m}_b</math></b>	Viscosidad dinámica definida en la ec. (2.80).	
<b><math>m^*</math></b>	Viscosidad adimensional definida en la ec. (2.82).	
<b><math>n_c</math></b>	Coefficiente de viscosidad cinemática del condensado.	$m^2/s$
$\Pi$	Parámetro definido en ec. (4.4).	
<b><math>q_c</math></b>	Temperatura adimensional de la película definido en ec. (2.60).	
<b><math>q_w</math></b>	Temperatura adimensional de la aleta definido en ec. (2.55).	
<b><math>q_{wl}</math></b>	Temperatura adimensional en el borde principal de la aleta, ec. (3.50)	
<b><math>r_c</math></b>	Densidad del condensado.	$kg/m^3$
<b><math>r_v</math></b>	Densidad del vapor saturado.	$kg/m^3$
<b><math>S</math></b>	Parámetro de perturbación, $1/a$	

## Subíndices

$c$	Referente al condensado.
$L$	Referente a condiciones en la base de la aleta.
$w$	Referente a condiciones en la aleta.

## INTRODUCCIÓN

Los condensadores de vapor constituyen relevantes sistemas para la ingeniería térmica en los cuales se llevan acabo de forma general, una gran diversidad de procesos combinados de intercambio térmico, a saber: conducción, convección y radiación. El análisis de la transferencia de calor en una película de fluido condensado representa una importante área para el diseño de sistemas de intercambiadores de calor, dentro de los cuales existe un tipo en específico que es el de aletas.

El fenómeno de condensación ocurre cuando un vapor entra en contacto con una superficie cuya temperatura se encuentra por debajo de la temperatura de saturación de dicho vapor, iniciándose el cambio de fase.

Si la condensación toma lugar continuamente sobre la superficie y el líquido condensado se remueve de la superficie por el movimiento que resulta de las fuerzas de gravedad, entonces la superficie condensante se cubrirá con una película nueva, a este mecanismo se le conoce como *condensación pelicular*. Por otro lado, bajo ciertas condiciones, como por ejemplo si existen manchas de grasa durante la condensación del vapor, la película de condensado se divide en pequeñas gotas, a esta situación se le denomina *condensación por gotas*.

Sin considerar cual es la forma del proceso de condensación, la presencia del fluido condensado actúa como una resistencia térmica a la transferencia de calor desde el vapor hacia la superficie metálica. El proceso de condensación de película es el que ofrece mayor resistencia térmica al compararlo con la condensación por gotas; por otro lado, si el vapor es una mezcla que contienen algunos gases no condensables, éstos actúan como una resistencia térmica adicional al flujo de calor en el lado condensante debido a que el vapor debe difundirse a través de los gases no condensables antes de que entre en contacto con la superficie fría. Por lo tanto, un claro entendimiento del mecanismo de transferencia de calor y una predicción precisa del coeficiente de transferencia de calor para vapores condensables con y sin presencia de gases no condensables son de suma importancia en el diseño de los condensadores.

La literatura especializada relacionada con el diseño de intercambiadores de calor [22], de manera simplificada, supone condiciones isotérmicas en los procesos en los que se lleva acabo el proceso de intercambio térmico además de considerar la viscosidad constante de la película de condensado con la temperatura, evidentemente esta situación es hipotética, ya que realmente las condiciones de operación de dichos dispositivos varían en el espacio y tiempo, de tal manera que al considerar condiciones isotérmicas en el diseño de estos se están sobreestimando los coeficientes convectivos de calor.

Lo anterior trae como consecuencia diseños de intercambiadores de calor ineficientes, lo que normalmente se traduce en costos elevados. Debido a lo anterior, en el presente trabajo surge la inquietud de llevar a cabo un análisis teórico del acoplamiento que existe entre los diferentes procesos de transferencia de calor que conforman el fenómeno en estudio: condensación de película laminar sobre la superficie de una aleta rectangular cuya

temperatura varía en dirección longitudinal (condición no isotérmica). A este tipo de problemas se le ha denominado *problemas de transferencia de calor conjugados* [14]. La importancia en el presente estudio es considerar la viscosidad del fluido condensado variable con la temperatura para estudiar su influencia sobre el proceso conjugado de transferencia de calor en el fenómeno de condensación de película laminar, con el propósito de obtener soluciones más realistas a trabajos previos que se han desarrollado en esta área.

Para lograr el objetivo anterior, esta tesis se encuentra integrada en cuatro capítulos:

**En el capítulo uno**, se describen los antecedentes de la condensación, a partir del primer trabajo hecho por Nusselt [1], indicando las principales consideraciones que se han hecho a los diferentes estudios en cuestión. Además se muestran las diferentes maneras en las que se presenta la condensación, haciendo énfasis en los mecanismos de condensación por película y en gotas.

Habiendo revisado las suposiciones hechas en trabajos previos de la condensación, **en el capítulo dos**, se presenta la propuesta de estudio. Partiendo del modelo físico (aleta – película de condensado) se determinan los órdenes de magnitud de las principales variables en cuestión, para posteriormente llevar a cabo la adimensionalización de las ecuaciones de cantidad de movimiento considerando la viscosidad variable para la película de condensado, la ecuación de la energía en la película y la ecuación de Laplace para la aleta de condensado así mismo se determinan las condiciones de frontera tanto para el sólido como para el fluido y finalmente se escriben las ecuaciones diferenciales acoplando la aleta con el fluido condensado (problema conjugados de transferencia de calor).

Posteriormente **en el capítulo tres**, se desarrolla la metodología de solución de las ecuaciones de cantidad de movimiento y de la energía para el fluido condensado considerando  $Ja \rightarrow 0$  y  $Pr_c \sim 1$ , además se muestran las metodologías de las soluciones analítica y numérica de las ecuaciones acopladas en la aleta y el fluido para determinar la temperatura adimensional en dirección longitudinal y el espesor adimensional de la película, empleando técnicas de perturbación para el método analítico y Runge-Kutta de cuarto orden para la solución numérica.

Finalmente **en el capítulo cuatro**, se analizan los resultados numéricos y analíticos de la temperatura y del espesor adimensionales en función de los parámetros  $\bar{b}$  y  $a$ . Por otro lado para la solución numérica se muestran los números de Nusselt local y promedio para diferentes valores de los parámetros involucrados. Para determinar el flujo másico de condensado se presentan los resultados numéricos del espesor característico adimensional en la base de la aleta. También se presenta la eficiencia de la aleta. Por último, se realiza la comparación de la solución asintótica con la numérica y con las soluciones obtenidas por Nusselt y F. Méndez.

# ***CAPITULO I***

## ***ANTECEDENTES SOBRE LA CONDENSACIÓN***

*En este capitulo se presentan los antecedentes sobre los estudios de la condensación, a partir del primer trabajo hecho por Nusselt, indicando las principales consideraciones que se han hecho a los diferentes estudios en cuestión.*

## 1.1 ESTADO DEL ARTE.

Desde el análisis clásico de Nusselt [1] en la condensación de película sobre una placa vertical plana, los estudios teóricos de condensación de película laminar han recibido considerable atención en la literatura. Al igualar las fuerzas de gravedad y viscosas, Nusselt obtuvo el espesor de la capa de condensado de un vapor puro saturado en contacto con una placa vertical de temperatura uniforme, demostrando buena precisión con respecto a observaciones experimentales. Bromley [3], mostró que es posible considerar la capacidad térmica del condensado como una corrección de primer orden para reproducir un número de Nusselt modificado.

Por otro lado, Rohsenow [2], modificó el análisis de Nusselt al incluir los efectos convectivos en la ecuación de balance de energía del condensado, sin embargo su análisis no incluyó las fuerzas inerciales. Sparrow y Gregg [4], introduciendo un tratamiento de capa límite y transformaciones de semejanza de las ecuaciones que describen el fenómeno físico, demostraron que los efectos inerciales en la transferencia de calor no son importantes si el número de Prandtl es mayor a 10 y son muy pequeños aun para números de Prandtl de orden unidad. La importancia de tales resultados ha sido bien reconocida y documentada por Merte [9].

A su vez, Chen [5] resolvió las ecuaciones integrales de la capa límite por métodos de perturbación, incluyendo el efecto retardante del esfuerzo cortante del vapor sobre la película de condensado. Una comparación de los resultados obtenidos por Sparrow y Gregg [4] con las obtenidas por Chen demuestran que la influencia del esfuerzo cortante en la interfase líquido-vapor es despreciable para altos números de Prandtl.

Para tener una estimación más precisa, Koh et al. [6], incluyendo el esfuerzo cortante interfacial por el uso de ecuaciones simultáneas de las ecuaciones de capa límite en el vapor y condensado y concluyeron que el efecto del esfuerzo cortante es únicamente significativo cuando la razón de condensación es suficientemente alta. Resultados semejantes fueron obtenidos por Rose [10], usando una aproximación de semejanza, confirmando las ideas de Chen y obteniendo expresiones más precisas para el número de Nusselt.

Recientemente Churchill [7] desarrolló una solución aproximada para el método de Koh et al., incluyendo, en forma general, el efecto de curvatura en la condensación. El estado del arte en el análisis de condensación de película laminar en placas verticales y otros procesos de condensación se encuentran en Rose [10] y más recientemente en Tanasawa [11].

Los estudios anteriores se aplicaron a placas verticales isotérmicas, con temperatura conocida. Sin embargo, estudios teóricos de procesos de condensación de película con condiciones no isotérmicas han recibido poca atención en la literatura. En particular, Patankar y Sparrow [12] resolvieron el problema de condensación en una superficie extendida considerando la conducción de calor en una aleta acoplada con el proceso de condensación. Su solución numérica de las

---

ecuaciones gobernantes confirma la influencia térmica de la superficie extendida no isotérmica en el proceso de condensación.

Posteriormente, Wilkins [13] demostró que es imposible obtener una solución analítica explícita para la formulación de Pantankar y Sparrow. Para extender esos casos particulares con condiciones no isotérmicas, Sarma et al. [15], estudiaron el proceso de condensación en una aleta plana vertical de espesor variable, acoplando las ecuaciones que describen el fenómeno físico, demostrando que la interacción entre la aleta y el líquido condensado, debido a la transferencia de calor, es muy importante. Chen et. al [14] resolvieron la interacción acoplada en la presencia del esfuerzo cortante en la interfase líquido-vapor, indicando la influencia de los números adimensionales de Prandtl,  $Pr$ , número de Jacob,  $Ja$ , sobre el número de Nusselt,  $Nu$ .

Resultados experimentales han sido correlacionados por Chen et. al. [16]. Méndez y Treviño [17], al analizar el proceso de condensación de película laminar causada por un flujo de enfriamiento, impuesto sobre una placa plana vertical, en la cual la temperatura varía a lo largo de ésta, obteniendo la solución clásica de Nusselt, como un caso particular del problema conjugado de transferencia de calor. En consecuencia Méndez y Treviño [18], estudiaron el proceso conjugado de la transferencia de calor en la condensación de un vapor puro sobre una aleta rectangular, en su trabajo incluyeron los efectos de la conducción de calor en la dirección longitudinal y transversal; empleando técnicas de perturbación resolvieron las ecuaciones acopladas de cantidad de movimiento y energía comparando los resultados con soluciones numéricas. Los modelos obtenidos fueron aplicados a los fluidos  $R-113$ ,  $H_2O$  y  $NH_3$ .

Finalmente en la mayoría de las investigaciones realizadas sobre transferencia de calor en la condensación que se citaron anteriormente, consideran que la viscosidad de la película de condensado es constante. Esta simplificación en muchos casos prácticos no es válida (diseño de condensadores de vapor). El presente trabajo tiene el propósito de estudiar la transferencia de calor en una aleta rectangular, donde la viscosidad varía como una función de la temperatura del condensado [19].

Después de haber descrito el panorama reciente de la condensación, en el siguiente tema se describen los modos en que se lleva a cabo el fenómeno de la condensación.

## 1.2 TIPOS DE CONDESACIÓN.

La condensación de un vapor puro ocurre cuando su temperatura se reduce por debajo de la temperatura de saturación. En equipos industriales el proceso de condensación resulta principalmente del contacto entre el vapor y una superficie fría; a estos mecanismos se les conoce como *condensación por película* y *condensación por goteo* (Figura 1.1 a, b). Cuando la condensación tiene lugar la energía latente del vapor se libera y se transfiere hacia la superficie formándose una película delgada de líquido condensado. Otras formas comunes en que se

---

presenta el fenómeno de condensación son la homogénea (Figura 1.1 c) donde el vapor se condensa en forma de gotas diminutas suspendidas en un medio gaseoso para formar lo que se conoce como neblina, y la condensación por contacto directo (Figura 1.1 d) que ocurre cuando el vapor se suministra de forma directa sobre un líquido para llevar a cabo el cambio de fase.

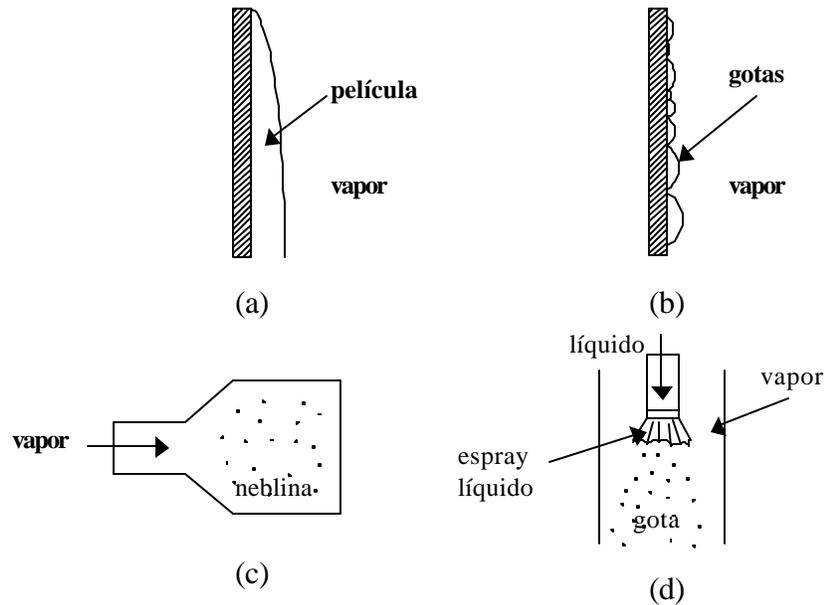


Figura 1.1. Modos de condensación: (a) condensación pelicular, (b) condensación por goteo, (c) condensación homogénea, (d) condensación por contacto directo.

La condensación por película, figura 1.1(a), ocurre cuando el líquido condensado moja la pared de la placa, entonces las gotas se unen formando una película que se desliza por efecto de la gravedad en régimen laminar, con un espesor que aumenta conforme fluye el condensado.

### 1.2.1 CONDESACIÓN POR PELÍCULA LAMINAR.

En 1916, Nusselt obtuvo por primera vez un modelo matemático teórico, para determinar el coeficiente promedio de transferencia de calor en la condensación de un vapor puro sobre una placa vertical. A continuación se presenta su análisis, ya que los modelos que fueron obtenidos mediante este análisis serán la base del presente trabajo. Las consideraciones que Nusselt hizo en su análisis son las siguientes.

1. La temperatura de la placa de condensación,  $T_w$ , se mantiene constante, además  $T_w < T_s$ , donde  $T_s$  es la temperatura de saturación del vapor.
2. El vapor se considera estacionario (es decir, las propiedades del vapor en cualquier punto del campo de flujo se mantienen constantes con respecto al tiempo).

3. Se considera que el flujo de condensado es laminar.

4. La aceleración del flujo de condensado es despreciable, es decir  $\left[ \frac{\partial u_c}{\partial y} \right]_{y=d_c} = 0$ , por tanto el

vapor no genera esfuerzos de corte en la interfase líquido vapor.

5. Las propiedades del fluido permanecen constantes.

6. La transferencia de calor a través de la capa de condensado se lleva a cabo por conducción pura, y se considera una distribución lineal de la temperatura a través de la capa de condensado.

Las fuerzas que actúan sobre la película de condensado de la Figura 1.2, por unidad de volumen, bajo las consideraciones anteriores, son:

- Fuerza de corte viscosa,  $t = m_c \frac{du_c}{dy}$
- Fuerza gravitacional,  $(r_c - r_v)(d_c - y) g dx$

Aplicando las fuerzas anteriores en un balance de fuerzas al volumen diferencial de la película (Figura 1.2), y despreciando los efectos de inercia en esta, se tiene:

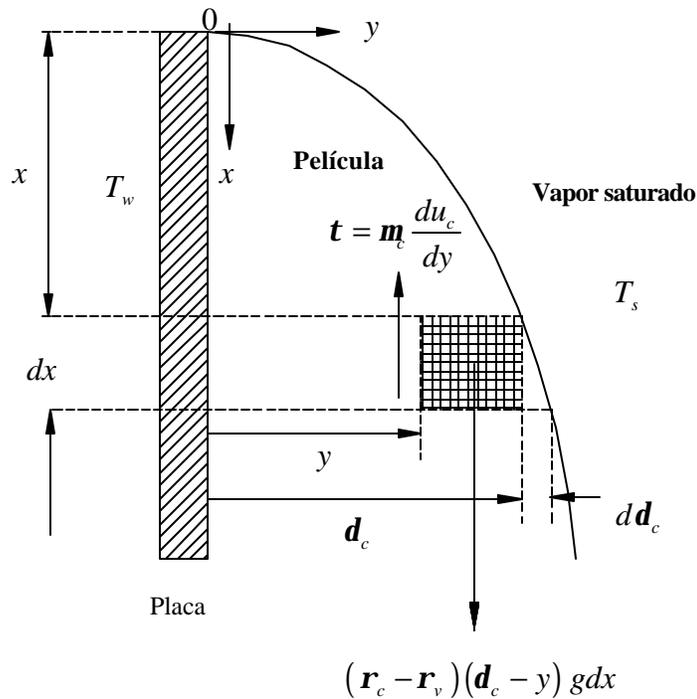


Figura 1.2. Esquema de la condensación por película sobre una placa vertical isotérmica.

$$\mathbf{m} \frac{du_c}{dy} dx = (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_v)(\mathbf{d}_c - y) g dx$$

La ecuación anterior se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{du_c}{dy} = \frac{(\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_v) g}{\mathbf{m}} (\mathbf{d}_c - y), \quad (1.1)$$

la condición de frontera para la ec. (1.1) debido a la condición de no deslizamiento en la superficie de la placa en  $y = 0$  es,

$$u_c(y=0) = 0, \quad (1.2)$$

integrando la ec. (1.1) y sustituyendo la condición de frontera ec. (1.2) se obtiene el perfil de velocidades del tipo parabólico a través de la película de condensado,

$$u_c(y) = \frac{(\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_v) g}{\mathbf{m}} \left[ \mathbf{d}_c y - \frac{y^2}{2} \right]. \quad (1.3)$$

Una vez determinado el perfil de velocidades se puede cuantificar el flujo másico de condensado  $m'_c$ , por unidad de profundidad de la placa, de la siguiente forma

$$m'_c = \int_0^{\mathbf{d}} \mathbf{r}_c u_c dy, \quad (1.4)$$

sustituyendo el valor de  $u_c(y)$  en la ec. (1.4), e integrando se obtiene

$$m'_c = \frac{\mathbf{r}_c (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_v) g}{3\mathbf{m}} \mathbf{d}_c^3, \quad (1.5)$$

como el condensado fluye de la posición  $x$  a  $x + dx$ , el espesor de la película crece de  $\mathbf{d}$  a  $\mathbf{d} + d\mathbf{d}$ , entonces el condensado agregado en cada  $dx$  desde la posición  $x$  por unidad de ancho de la placa, se encuentra representado por  $d\dot{m}_c$ , y se determina al diferenciar la ec. (1.5) de la siguiente manera

$$dm'_c = \frac{\mathbf{r}_c (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_v) g}{\mathbf{m}_c} \mathbf{d}^2 d \mathbf{d}_c. \quad (1.6)$$

Luego, la cantidad de calor liberado  $q_c$ , durante la condensación, esta dado por la siguiente ecuación

$$q_c = h_{fg} dm'_c = h_{fg} \frac{\mathbf{r}_c (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_v) g}{\mathbf{m}_c} \mathbf{d}^2 d \mathbf{d}_c, \quad (1.7)$$

así mismo  $q_c$ , se transfiere por conducción pura a través de la película de condensado hasta la placa en un área de  $1 dx$  con un gradiente de temperatura  $(T_s - T_w)$ , y por la ley de Fourier de la transferencia de calor por conducción, se puede escribir como

$$q_c = \frac{\mathbf{l}_c}{\mathbf{d}_c} (T_s - T_w) dx. \quad (1.8)$$

De las ecs. (1.7) y (1.8) se determina la variación del espesor de la película

$$\frac{d \mathbf{d}_c}{dx} = \frac{\mathbf{l}_c \mathbf{m}_c (T_s - T_w)}{\mathbf{r}_c (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_v) g h_{fg} \mathbf{d}_c^3} \quad (1.9)$$

y la condición inicial para la ec. (1.9), es

$$\mathbf{d}_c (x=0) = 0. \quad (1.10)$$

Integrando la ec. (1.9) se obtiene el espesor de la película de condensado en función de la variable longitudinal  $x$ , donde las propiedades termodinámicas del fluido y del vapor se consideran constantes

$$\mathbf{d}_c (x) = \left[ \frac{4 \mathbf{l}_c \mathbf{m}_c (T_s - T_w) x}{\mathbf{r}_c (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_v) g h_{fg}} \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (1.11)$$

Por otro lado, el coeficiente de transferencia de calor local  $h(x)$  se escribe como

$$h(x) = \frac{\mathbf{l}_c}{\mathbf{d}_c}, \quad (1.12)$$

y al sustituir la ec. (1.11) en la ec. (1.12) se llega a

$$h(x) = \left[ \frac{\mathbf{l}_c^3 \mathbf{r}_c (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_v) g h_{fg}}{4 \mathbf{m}_c (T_s - T_w) x} \right]^{\frac{1}{4}}, \quad (1.13)$$

debido a que  $\mathbf{r}_v \ll \mathbf{r}_c$ , el término  $\mathbf{r}_c (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_v) \approx \mathbf{r}_c^2$  y la ec. (1.13) se transforma en

$$h(x) = \left[ \frac{\mathbf{l}_c^3 \mathbf{r}_c^2 g h_{fg}}{4 \mathbf{m}_c (T_s - T_w) x} \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (1.14)$$

De la misma forma, a partir de la definición del número de Nusselt local,  $Nu_x$ , se llega a la siguiente expresión

$$Nu_x = \left[ \frac{\mathbf{r}_c^2 g h_{fg} x^3}{4 \mathbf{m}_c (T_s - T_w) \mathbf{l}_c} \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (1.15)$$

Las ecuaciones (1.14) y (1.15) definen los valores locales del coeficiente de transferencia de calor y del número de Nusselt, por lo que los valores promedios de estos sobre toda la superficie de la placa desde  $0 \leq x \leq L$  se definen como

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L \left[ \frac{\mathbf{l}_c^3 \mathbf{r}_c^2 g h_{fg}}{4 \mathbf{m}_c (T_s - T_w) x} \right]^{\frac{1}{4}} dx$$

y al integrar la ecuación anterior se obtiene

$$\bar{h} = 0.943 \left[ \frac{\mathbf{l}_c^3 \mathbf{r}_c^2 g h_{fg}}{\mathbf{m}_c (T_s - T_w) L} \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (1.16)$$

Rohsenow [2], consideró la existencia del perfil de temperatura no lineal en la película de condensado haciendo modificaciones en el balance de energía para incluir la energía adicional necesaria para enfriar la película a una temperatura por debajo de la temperatura de saturación. Debido a estos dos efectos Rohsenow recomendó reemplazar  $h_{fg}$  por  $h'_{fg}$  definida como:

$$h'_{fg} = h_{fg} (1 + 0.68Ja), \quad (1.17)$$

$$Ja = \frac{c_c (T_s - T_w)}{h_{fg}}, \quad (1.18)$$

donde el número de Jacob,  $Ja$ , representa la relación del calor sensible y el calor latente absorbido por la película de condensado durante el proceso de condensación. Sustituyendo las ecs. (1.17) y (1.18) en la ec. (1.16), esta se transforma en,

$$\bar{h} = 0.943 \left[ \frac{\mathbf{I}_c^3 \mathbf{r}_c^2 g h'_{fg}}{\mathbf{m}_c (T_s - T_w) L} \right]^{\frac{1}{4}}, \quad (1.19)$$

de la misma forma, el número de Nusselt promedio se puede escribir como

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{h}L}{\mathbf{I}_c} = 0.943 \left[ \frac{\mathbf{r}_c^2 g h'_{fg} L^3}{\mathbf{m}_c (T_s - T_w) \mathbf{I}_c} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (1.20)$$

Las propiedades termodinámicas del fluido en las ecs. (1.19) y (1.20), deben ser evaluadas a la temperatura de la película, además  $h_{fg}$  deberá ser valuada a la temperatura de saturación del vapor  $T_s$ . La temperatura de la película se define como,

$$T_f = \frac{T_s + T_w}{2}. \quad (1.21)$$

La ec. (1.19) se aplica a placas y cilindros verticales, para fluidos donde,

$$\text{Pr}_c > 0.5 \quad \text{y} \quad \frac{c_c (T_s - T_w)}{h_{fg}} \leq 1.0. \quad (1.22)$$

### 1.2.2 CONDENSACIÓN POR GOTEO.

La condensación por película es característica de superficies limpias no contaminadas. Por el contrario, si la superficie esta cubierta de una sustancia que impide que se moje, es posible mantener condensación por goteo. Las gotas se forman en grietas, hoyos y cavidades sobre la superficie y pueden crecer y unirse mediante la condensación.

Normalmente, más del 90% de la superficie se cubre de gotas, que van de unos pocos micrómetros de diámetro hasta aglomeraciones visibles (Figura 1.3). En la condensación por goteo la mayor parte de la transferencia de calor es a través de gotas de menos de 100 $\mu$ m de diámetro, y se pueden alcanzar transferencias de calor que son de un orden de magnitud mayores que las asociadas con la condensación por película. Se utilizan recubrimientos superficiales como silicones, teflón y una variedad de ceras y ácidos grasos que inhiben el humedecimiento de la placa, y estimulan la condensación por goteo.

Sin embargo, tales recubrimientos pierden de forma gradual su efectividad debido a la oxidación, a tal grado de ser eliminados por completo y finalmente ocurre la condensación por película.

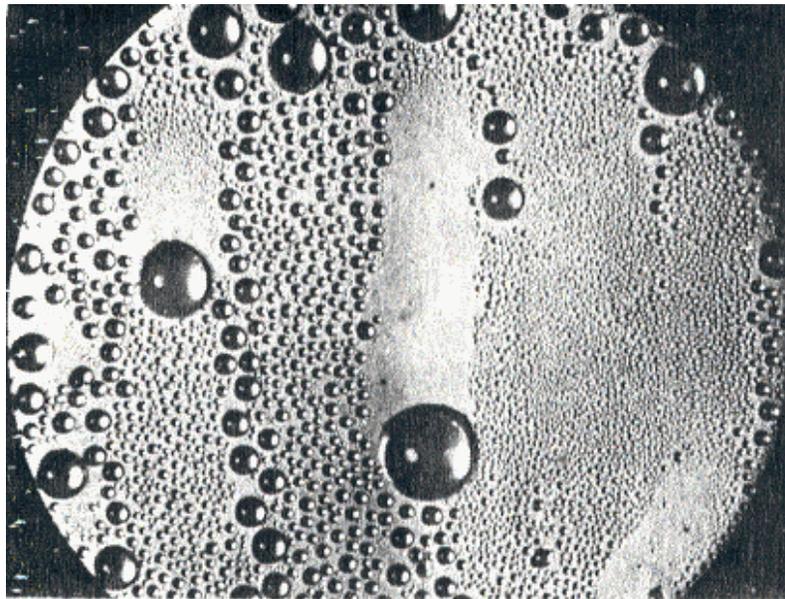


Figura 1.3 Condensación por goteo del vapor.

El fenómeno de coalescencia es despreciable en las gotas más pequeñas, por el contrario es favorable en el crecimiento de las gotas de mayor diámetro, es por eso que las gotas pequeñas crecen principalmente debido a que ofrecen menor resistencia a la transferencia de calor en la condensación por contacto directo por lo que son las principales responsables de transferir el calor.

Durante la condensación del vapor por goteo a la presión de 1 bar aproximadamente 60% de la superficie es cubierta por gotas de mas de  $50\mu m$ , 10% de la superficie esta descubierta y el 30% del resto de la superficie está ocupada por gotas con un radio menor que  $50\mu m$  y son las que transfieren el 90% del calor.

Cuando una gota crece lo suficiente esta es removida de la superficie por la acción de la gravedad o debido a las fuerzas de corte originadas por el movimiento del vapor en la periferia de la gota. En el instante en que una gota inicia su desplazamiento sobre la superficie, ésta hace un barrido a través de la trayectoria que sigue, uniéndose con otras gotas que encuentra en su camino, formándose nuevos agrupamientos de gotas en la superficie libre.

Los procesos de barrido de la superficie como resultado del desprendimiento de las gotas sobre la superficie, y de la formación de nuevos embriones de gotas sobre la superficie barrida son los principales factores de que la condensación por goteo alcance coeficientes de transferencia de calor de hasta diez veces más grandes que los obtenidos en la condensación por película.

Existe otra hipótesis sobre la condensación por goteo, aparentemente fue propuesto por Jacob en 1936, partiendo de la suposición de que inicialmente la condensación se lleva a cabo en forma de película, cubriendo la superficie de condensado por una película muy delgada de líquido.

Debido a que este proceso es continuo, el espesor de la capa de condensado comienza a crecer hasta un valor critico de aproximadamente  $1\mu m$ , y es cuando la película se rompe originando las gotas de condensado. El crecimiento de las gotas de condensado después de la ruptura de la película depende principalmente de dos factores, el primero es debido al condensado formado en los espacios entre las gotas, el cual es atraído por gotas adyacentes debido a la tensión superficial, y el segundo factor de crecimiento es debido a la condensación por contacto directo sobre las superficies de las gotas.

# ***CAPITULO II***

## ***MODELO MATEMÁTICO***

*En este capítulo se determinan los órdenes de magnitud de las principales variables en cuestión. Se lleva a cabo la adimensionalización de las ecuaciones de cantidad de movimiento considerando la viscosidad variable para la película de condensado, la ecuación de la energía en la película y la ecuación de Laplace para la aleta de condensado así mismo se determinan las condiciones de frontera tanto para el sólido como para el fluido y finalmente se escriben las ecuaciones diferenciales acoplado la aleta con el fluido condensado (problema conjugado de transferencia de calor).*

## 2.1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El proceso de condensación de un fluido sobre una superficie extendida, se produce cuando el vapor que se encuentra a temperatura de saturación entra en contacto con una superficie a menor temperatura, lo que generará un cambio de fase de vapor a líquido. El calor absorbido por este proceso provocará un cambio en la temperatura de la superficie donde se realiza la condensación, ocasionando que la relación entre la temperatura de la superficie, en este caso la aleta, y el vapor se vea alterada, este cambio estará determinado por el número de Jacob [8].

Dependiendo de las condiciones físicas del sistema como la presión, la rugosidad de la superficie y la velocidad del gas, entre otras, pueden generarse dos procesos distintos: condensación de película y en gotas, como lo describen Rose [10] y Tanasawa[11], en sus compendios sobre condensación, suponiendo que la presión en la interfase vapor-líquido es la hidrostática y que la velocidad del fluido condensado, en la zona de contacto con la placa es despreciable (condición de no deslizamiento).

El modelo físico en estudio se muestra en la figura 2-1, y consiste de una aleta vertical delgada, con longitud  $L$  y espesor  $2h$  donde  $2h \ll L$ , se encuentra inmersa en un ambiente de vapor saturado con una temperatura  $T_s$ . A su vez, la base de la aleta tiene una temperatura  $T_0 < T_s$ , ocasionando un flujo de calor desde la zona de vapor saturado hacia la placa, y se crea una capa delgada de condensado sobre ambos lados de la aleta; que cae sobre la superficie de la aleta debido a la acción de la gravedad. Las capas de condensado se desarrollan incrementando su espesor corriente abajo. La densidad del fluido condensado,  $\rho_c$ , se supone constante y mucho mayor que la densidad del vapor,  $\rho_v$ , mientras que la viscosidad absoluta  $\mu$ , cambia con la temperatura  $T_c$ , [19]. La existencia de la conductividad térmica finita de la aleta permite que exista conducción de calor en la dirección longitudinal y transversal de la aleta.

Por la simetría del problema se centrará la atención en la superficie derecha de la aleta a partir del centro de esta. La capa de fluido condensado que se forma en el borde superior de la aleta es muy pequeña para aletas delgadas y su contribución al flujo másico de condensado se considera despreciable [20], por lo tanto se considera esta cara de la aleta como adiabática. La esquina superior derecha de la aleta se toma como el origen de las coordenadas cartesianas, donde el eje  $y$  corre en dirección perpendicular a la superficie de la aleta y el eje  $x$  en dirección del vector gravedad.

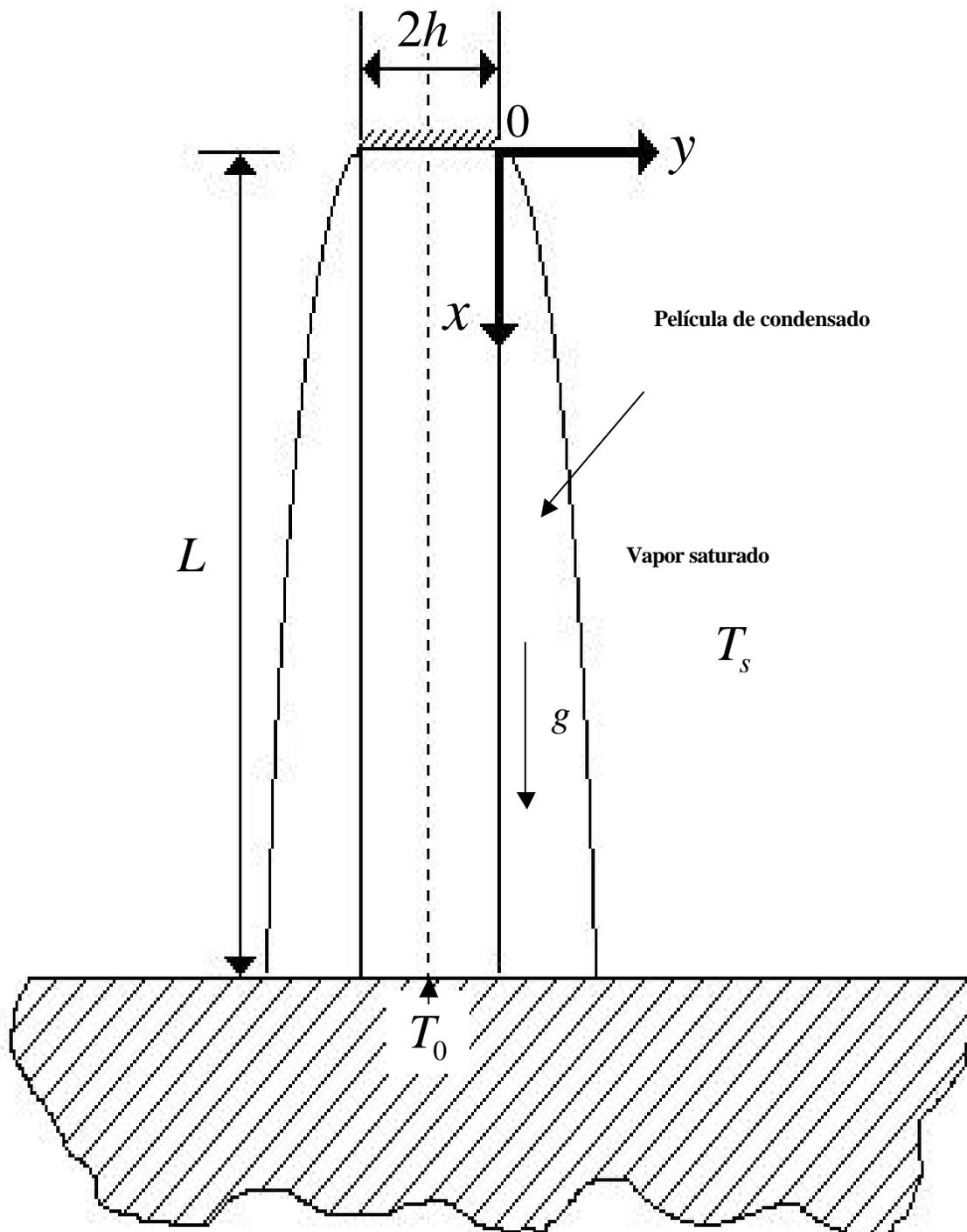


Figura 2-1. Esquema de la condensación del vapor sobre una aleta rectangular.

## 2.2 DETERMINACION DE LOS ÓRDENES DE MAGNITUD

El análisis de escala, frecuentemente se confunde con el análisis dimensional o con la adimensionalización de las ecuaciones gobernantes para llevar a cabo un análisis de perturbación o una simulación numérica. El objetivo del análisis de escala es estimar los órdenes de magnitud aproximados de las variables de interés que se encuentran en las ecuaciones generales de la mecánica de fluidos y de la transferencia de calor. Esto significa, por ejemplo, que si una de las incógnitas de interés es el espesor de la capa límite en convección forzada, el objeto del análisis de escala es determinar cualitativamente la dependencia paramétrica del espesor, sobre las variables físicas involucradas.

Si el análisis de escala se lleva a cabo apropiadamente, este anticipa dentro de un factor de orden unidad los resultados producidos por análisis exactos, por lo tanto el valor del análisis de escala es muy significativo.

Por tal motivo se recurre al análisis de escala para determinar el orden de magnitud de las variables de interés en la zona de condensado, tales como la velocidad de descenso de la película de condensado  $u_c$ , su espesor  $d_c$  y la razón de flujo másico de condensado por unidad de profundidad  $\Gamma(x)$  de la aleta. Además permitirá establecer la adimensionalización de las variables adecuadas.

## 2.3 ÓRDENES DE MAGNITUD EN LA PELÍCULA DE CONDENSADO

Durante el proceso de condensación, se forma una película de condensado en el borde de la aleta y fluye hacia abajo debida a la influencia de la gravedad. El espesor de la capa de condensado  $d_c$  y la razón de flujo másico de condensado  $\Gamma(x)$  aumentan al incrementarse  $x$  debido a la continua condensación en la interfase líquido-vapor, la cual se encuentra en equilibrio termodinámico con el vapor.

En la mayoría de los casos, el vapor se puede encontrar sobrecalentado y puede ser parte de una mezcla que contenga uno o más gases no condensables. Además existe un esfuerzo cortante en la interfase líquido-vapor, contribuyendo a que exista un gradiente de velocidad en el vapor; así mismo la capa de condensado puede estar en régimen turbulento.

Sin embargo, a pesar de las complejidades asociadas con la condensación de película, para el presente análisis se pueden obtener resultados útiles haciendo las siguientes suposiciones:

- i. Se considera que el flujo de condensado es laminar.

- ii. Las propiedades de la película de condensado se consideran constantes excepto la viscosidad ya que esta tiene una fuerte dependencia con la temperatura del condensado que con la densidad y la conductividad térmica del condensado [23].
- iii. El vapor está libre de gases no condensables, y se encuentra en estado estacionario, por lo que la transferencia de calor en la interfase líquido-vapor se debe únicamente al cambio de fase.
- iv. La temperatura en la superficie de la aleta  $T_w(x)$ , es función solo de la coordenada longitudinal  $x$ , y está a una temperatura por debajo de la temperatura de saturación del vapor.
- v. El vapor se encuentra en reposo, de forma que no ejerce fuerza de arrastre sobre la película de condensado, esto finalmente se traduce en que el esfuerzo cortante en la superficie del líquido condensado es despreciable. Con esta suposición y las anteriores no hay necesidad de considerar la velocidad del vapor o capas límites térmicas en éste.
- vi. Debido a que las velocidades asociadas con la película de condensado son bajas, la transferencia de momentum y energía por convección en la película de condensado son insignificantes.
- vii. La distribución de temperatura en la película de condensado es lineal debido a que la transferencia de calor en ésta es por conducción pura, además se considera que la conductividad térmica de la película se mantiene constante.
- viii. Finalmente, Nusselt en su estudio consideró la viscosidad del condensado constante durante el proceso de condensación, en este trabajo se analiza la viscosidad variable del condensado como función de la temperatura del condensado.

La condensación de película es un fenómeno de capa límite en sus aspectos esenciales, de acuerdo a esto y con las suposiciones anteriores, la representación teórica del fenómeno de condensación, figura 2-1, se representa por un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que permiten reproducir la naturaleza de la transferencia de calor entre la aleta y la película de condensado. Por un lado el fenómeno en el vapor condensado esta descrito por las ecuaciones de continuidad, obtenida de la ecuación de la conservación de la masa, la ecuación de cantidad de movimiento en direcciones longitudinal ó transversal con el término de viscosidad del condensado variable, que tiene su origen en la segunda ley de Newton y por último la ecuación de la conservación de la energía proveniente de la primera ley de la termodinámica. Por otro lado se tiene que el calor que fluye a través de la aleta es descrito por la ley de Fourier. Para el caso de película delgada las ecuaciones anteriores se pueden representar de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{r}_c \left( \bar{u}_c \frac{\partial \bar{u}_c}{\partial x} + \bar{v}_c \frac{\partial \bar{u}_c}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mathbf{m}_c \frac{\partial \bar{u}_c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathbf{m}_c \frac{\partial \bar{u}_c}{\partial x} \right) + \mathbf{r}_c g, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{r}_c \left( \bar{u}_c \frac{\partial \bar{v}_c}{\partial x} + \bar{v}_c \frac{\partial \bar{v}_c}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mathbf{m}_c \frac{\partial \bar{v}_c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathbf{m}_c \frac{\partial \bar{v}_c}{\partial x} \right), \quad (2.3)$$

$$\mathbf{r}_c c_p \left( \bar{u}_c \frac{\partial T_c}{\partial x} + \bar{v}_c \frac{\partial T_c}{\partial y} \right) = \mathbf{I}_c \left( \frac{\partial^2 T_c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_c}{\partial x^2} \right). \quad (2.4)$$

En el caso de la aleta, la ecuación que describe la distribución de temperaturas bidimensional en condiciones de estado permanente sin generación interna de calor es la ecuación de Laplace en dos dimensiones, y se expresa como:

$$\frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_w}{\partial y^2} = 0. \quad (2.5)$$

La ecuación anterior es del tipo elíptico por lo que se deben establecer las condiciones de frontera sobre el entorno de la aleta (problema de valor en la frontera), para su solución.

En las ecuaciones (2.1)-(2.4),  $\mathbf{r}_c$  representa la densidad del condensado,  $g$  la aceleración de la gravedad,  $\bar{u}_c$  y  $\bar{v}_c$  son las velocidades longitudinal (dirección  $x$ ) y transversal (dirección  $y$ ) en unidades físicas del flujo de condensado,  $p$  representa la presión dentro de la película de condensado,  $\mathbf{m}_c$  es la viscosidad dinámica del condensado y  $T_c$  es la temperatura del fluido condensado. El término  $\mathbf{r}_c g$  en la ecuación (2.2) representa la fuerza de cuerpo o gravitacional.

Considerando la aproximación de la capa límite [20], ( $y \sim \mathbf{d}_c$ ,  $\mathbf{d}_c \ll L$ ,  $x \sim L$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$ ), mediante un análisis de órdenes de magnitud, la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección longitudinal, ec. (2.2) establece que los órdenes de magnitud de cada término son

$$u_c \frac{u_c}{L} + v_c \frac{u_c}{\mathbf{d}_c} \sim \frac{p}{\mathbf{r}_c L} + \mathbf{n}_c \frac{u_c}{L^2} + \mathbf{n}_c \frac{u_c}{\mathbf{d}_c^2} + \mathbf{r}_c g. \quad (2.6)$$

Analizando la ecuación de continuidad, ec. (2.1), se cumple la siguiente relación,

$$\frac{u_c}{L} \sim \frac{v_c}{\mathbf{d}_c}. \quad (2.7)$$

Sustituyendo la ec. (2.7) en la ec. (2.6) se determina que los términos inerciales, son del orden  $\frac{u_c^2}{L}$ , por lo tanto, estos términos no pueden ser despreciados con respecto a los otros. Sin embargo, si la región de capa límite es muy delgada, tal que  $d_c \ll L$ , entonces el término  $n_c \frac{u_c}{L^2}$  de la ec. (2.6), es el menos representativo. Así, despreciando el término  $\frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2}$  con respecto al término  $\frac{\partial^2 u_c}{\partial y^2}$ , la ecuación de cantidad de movimiento, ec. (2.2), se puede escribir como,

$$\mathbf{r}_c \left( \bar{u}_c \frac{\partial \bar{u}_c}{\partial x} + \bar{v}_c \frac{\partial \bar{u}_c}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mathbf{m}_c \frac{\partial \bar{u}_c}{\partial y} \right) + \mathbf{r}_c g \quad (2.8)$$

De igual forma al aplicar las aproximaciones de la capa límite a la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección transversal ec. (2.3), esta se reduce a

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim 0, \quad (2.9)$$

es decir, la presión es una función únicamente de la posición longitudinal  $x$ , lo que significa que se puede escribir,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx}. \quad (2.10)$$

Lo anterior sugiere que en la capa de condensado, la presión varía en la dirección vertical y por consiguiente la presión dentro de la capa de condensado es la misma que inmediatamente fuera de ella. Tomando en cuenta los órdenes de magnitud establecidos, se concluye que las ecuaciones de cantidad de movimiento se reducen a

$$\mathbf{r}_c \left( \bar{u}_c \frac{\partial \bar{u}_c}{\partial x} + \bar{v}_c \frac{\partial \bar{u}_c}{\partial y} \right) = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mathbf{m}_c \frac{\partial \bar{u}_c}{\partial y} \right) + \mathbf{r}_c g. \quad (2.11)$$

Además, el gradiente de presión vertical en el líquido es el mismo que el gradiente de presión hidrostático en el vapor, es decir,  $\frac{dp}{dx} = \mathbf{r}_v g$ , de aquí que la ec. (2.11) se puede reescribir de la forma

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \mathbf{m}_c \frac{\partial \bar{u}_c}{\partial y} \right) + (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_v) g = \mathbf{r}_c \left( \bar{u}_c \frac{\partial \bar{u}_c}{\partial x} + \bar{v}_c \frac{\partial \bar{u}_c}{\partial y} \right), \quad (2.12)$$

como  $r_c \gg r_v$ , la ecuación (2.12) se reduce a la siguiente expresión

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( m_c \frac{\partial \bar{u}_c}{\partial y} \right) + r_c g = r_c \left( \bar{u}_c \frac{\partial \bar{u}_c}{\partial x} + \bar{v}_c \frac{\partial \bar{u}_c}{\partial y} \right), \quad (2.13)$$

y de manera equivalente, la ecuación de la energía, ec. (2.4), se representa como

$$r_c c_p \left( \bar{u}_c \frac{\partial T_c}{\partial x} + \bar{v}_c \frac{\partial T_c}{\partial y} \right) = I_c \frac{\partial^2 T_c}{\partial y^2}. \quad (2.14)$$

Debido a que las velocidades asociadas con la película de condensado son bajas, la transferencia de calor a través de la película se puede considerar que ocurre únicamente por conducción, en tal caso la distribución de temperatura en la película es lineal, entonces los efectos de inercia (términos convectivos) comparados con los de fricción son insignificantes, por lo que al considerar estos en la ec. (2.13), se puede escribir en términos de ordenes de magnitud el lado izquierdo de la ecuación anterior, como

$$m_c \frac{u_c}{d_c^2} \sim r_c g, \quad (2.15)$$

de esta ecuación se despeja la velocidad de la película de condensado en dirección longitudinal, quedando como

$$u_c \sim \left( \frac{g}{n_c} \right) d_c^2(x), \quad (2.16)$$

donde  $d_c(x)$  es el espesor de la capa de condensado,  $g$  la aceleración de la gravedad y  $n_c$  el coeficiente de la viscosidad cinemática de la película de condensado.

Tomando en cuenta la ec. (2.16), la producción de flujo másico de condensado por unidad de profundidad  $b$  en la dirección perpendicular al plano  $xy$  (Fig. 2-2), se puede escribir como,

$$\Gamma(x) = \frac{m'(x)}{b}, \quad (2.16A)$$

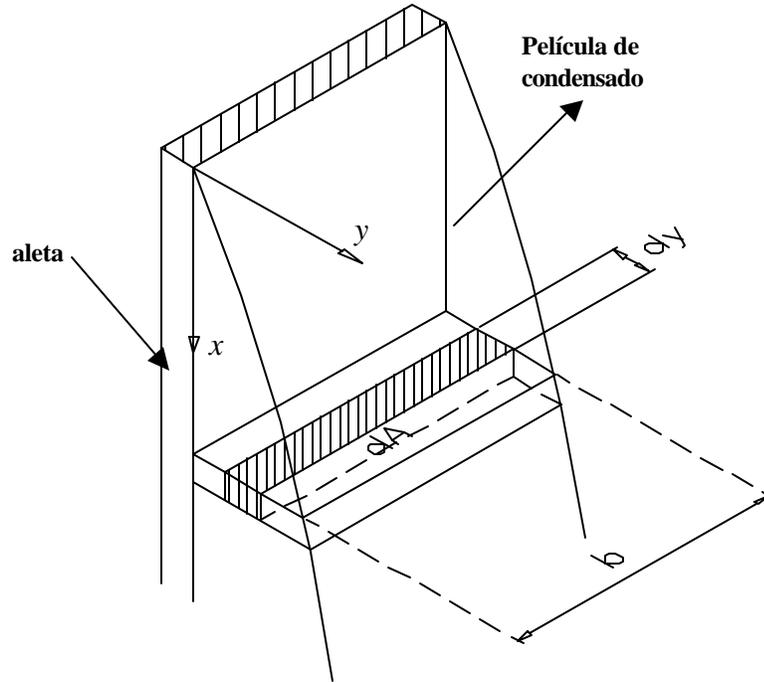


Figura 2-2. Representación esquemática de la condensación de película laminar, para el análisis del flujo másico de condensación por unidad de profundidad de la aleta

donde  $m'_c(x) = \mathbf{r}_c u_c dA$  y  $dA = b dy$ , siendo que la ec. (2.16A) queda de la siguiente forma

$$\Gamma(x) = \int_{y=0}^{d_c} \mathbf{r}_c u_c dy \sim \mathbf{r}_c u_c d_c. \quad (2.17)$$

En orden de magnitud, la ecuación anterior se escribe como,

$$\Gamma(x) \sim \mathbf{r}_c u_c d_c. \quad (2.18)$$

Al sustituir la ec. (2.16) en ec. (2.18) se obtiene el orden de magnitud del flujo másico de condensado en función del espesor de la película

$$\Gamma(c) \sim \frac{\mathbf{r}_c g}{\mathbf{n}_c} d_c^3(x). \quad (2.19)$$

La variación específica con  $x$  de  $d_c$ , y por lo tanto de  $\Gamma(x)$ , puede ser obtenida al aplicar la conservación de masa y energía al elemento diferencial mostrado en la Fig. 2-3.

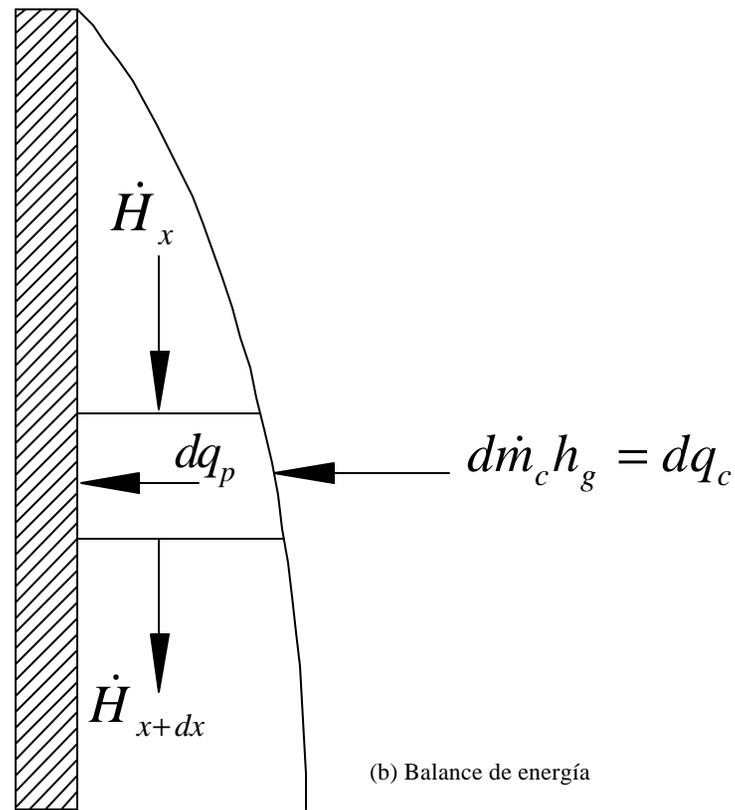
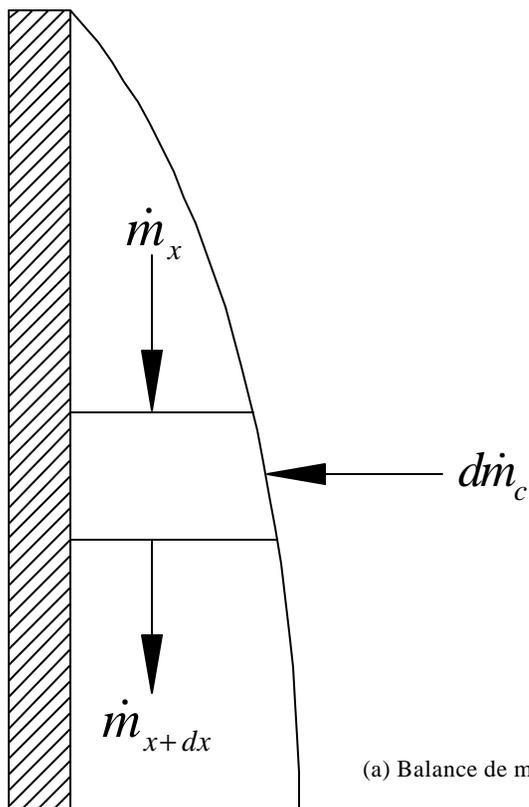


Fig. 2-3. Volumen de control diferencial dentro de la película de condensado.

El balance de masa en el elemento diferencial mostrado en la Figura 2-3(a), indica que

$$dm'_c \sim m'_{x+dx} - m'_x, \quad (2.20)$$

Al hacer una expansión en series de Taylor del término  $m'_{x+dx}$ , se tiene

$$m'_{x+dx} = m'_x + \left( \frac{dm'_x}{dx} \right) dx, \quad (2.21)$$

y sustituyendo la ec. (2.21) en la ec. (2.20) se tiene que

$$dm'_c \sim \frac{dm'_x}{dx} dx,$$

finalmente la relación anterior se expresa como

$$dm'_c \sim dm'_x. \quad (2.22)$$

Considerando que el fenómeno es permanente se puede hacer el siguiente balance de energía, al elemento diferencial mostrado en la Fig. 2-3(b)

$$(bdx) dq_p = (bdx) h_g dm'_x - (\dot{H}_{x+dx} - \dot{H}_x) \quad (2.23)$$

donde  $\dot{H}_x \approx m'_x h_f$  es el flujo de entalpía del condensado, y  $dm'_x h_g = dm'_c h_g = dq_c$  es el calor transferido desde el vapor a la película de condensado y además  $dq_p$  es el calor transferido hacia la aleta. Entonces la ec. (2.23) se puede reescribir como

$$dq_p = dq_c - \frac{1}{b} \frac{d\dot{H}_x}{dx} = dq_c - \frac{1}{b} \frac{dm'_x}{dx} h_f, \quad (2.24)$$

que al combinar con la ec. (2.17) se llega a

$$dq_p \sim dq_c - r_c h_f \frac{\partial}{\partial x} \int_{y=0}^{d_c(x)} u_c dy = dq_c - \frac{\partial}{\partial x} h_f r_c u_c d_c \quad (2.25)$$

de esta ecuación se puede estimar que el calor transmitido a lo largo de la longitud de la aleta  $L$ , desde el vapor al condensado, esta dado por

$$Lq_c \sim Lq_p + \mathbf{r}_c u_c \mathbf{d}_c h_f \quad (2.26)$$

Al considerar el elemento diferencial de la Fig. 2-3(b), en una porción de la interfase líquido-vapor de profundidad unitaria  $b$  y longitud  $dx$ , el flujo de calor hacia la película de condensado,  $dq_c$ , debe ser igual al flujo de energía liberada debida a la condensación en la interfase

$$b dx dq_c = h_{fg} dm'_c \Rightarrow dq_c = \frac{1}{b} \frac{dm'_c}{dx} h_{fg}, \quad (2.27)$$

y al considerar la ec. (2.17) del flujo másico de condensado y sustituyendo en la expresión anterior, se obtiene

$$dq_c = \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_{y=0}^{d_c} \mathbf{r}_c u_c dy \right) h_{fg} \quad (2.28)$$

Integrando la ecuación anterior, el flujo de calor a través de la interfase líquido-vapor a lo largo de la longitud de la aleta,  $L$ , está dado por

$$Lq_c \sim \mathbf{r}_c u_c \mathbf{d}_c h_{fg} \quad (2.29)$$

Al sustituir la ec. (2.29) en la ec. (2.26), esta adquiere la forma

$$\frac{q_c L}{h_{fg}} \sim \mathbf{r}_c u_c \mathbf{d}_c (x) \sim \frac{Lq_p}{h_{fg}} + \frac{\mathbf{r}_c u_c \mathbf{d}_c h_f}{h_{fg}}, \quad (2.30)$$

la cual se simplifica como

$$\frac{q_c L}{h_{fg}} \sim \mathbf{r}_c u_c \mathbf{d}_c \left( 1 - \frac{h_f}{h_{fg}} \right). \quad (2.31)$$

Así mismo, si se considera que  $\frac{h_f}{h_{fg}} \ll 1$ , el calor transferido hacia la aleta, en términos de órdenes de magnitud, está dado por

$$\frac{q_p L}{h_{fg}} \sim \mathbf{r}_c u_c \mathbf{d}_c (x). \quad (2.32)$$

Por otro lado, de la ley de Fourier establece que el calor transferido hacia la aleta es

$$q_p \sim I_c \frac{\Delta T_c}{d_c(x)} \quad (2.33)$$

donde  $I_c$  es la conductividad térmica del condensado y  $\Delta T_c$  es el incremento de la temperatura a través de la película del condensado en la dirección  $y$ . Para obtener el orden de magnitud de  $d_c$ , se sustituye la ec. (2.32) en (2.33) y se escribe como

$$r_c u_c d_c \sim I_c \frac{L}{h_{fg}} \frac{\Delta T_c}{d_c}, \quad (2.34)$$

de igual forma sustituyendo el orden de magnitud de la velocidad de la película de condensado ec. (2.16), en la ec. (2.34), se obtiene el orden de magnitud del espesor de la película de condensado, el cual esta dado por la siguiente expresión:

$$\frac{d_{cf}}{L} \sim \left( \frac{Ja \Delta T_c}{g \Delta T} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (2.35)$$

donde

$$Ja = \frac{C I_c \Delta T}{n_c r_c h_{fg}}, \quad (2.35a)$$

$$g = \frac{g L^3}{n_c^2} \gg 1, \quad (2.35b)$$

$$Pr_c = \frac{n_c r_c c_c}{I_c}, \quad (2.35c)$$

Aquí  $\Delta T = T_s - T_0$  es la caída de temperatura desde el vapor saturado hasta la base de la aleta,  $Pr_c$  es el número de Prandtl,  $c_c$  es el calor específico,  $C$  es una constante que aparece en el número de Jacob y se adopta para normalizar el espesor adimensional del condensado, su valor es de  $C = 4$ . En general el número de Jacob es muy pequeño comparado con la unidad [8], por lo que en el presente trabajo se usará la aproximación de la capa límite para analizar el flujo de fluido condensado en el límite  $Ja \rightarrow 0$ . La velocidad adimensional o el número de Reynolds para la fase condensada,  $Re_c = \frac{u_c L}{n_c}$ , asociado con el fenómeno de condensación es del orden

$Re_c = o(Jag)^{\frac{1}{2}}$ . Por lo tanto el orden de magnitud de la velocidad del fluido condensado se obtiene sustituyendo ec. (2.35) en (2.16) de la siguiente manera

$$u_c \sim \sqrt{\frac{gLJa\Delta T_c}{\Delta T}}. \quad (2.36)$$

De manera equivalente al sustituir las ecuaciones. (2.35) y (2.36) en (2.18) se obtiene el flujo másico de condensado por unidad de profundidad en la dirección perpendicular al plano,

$$\frac{dm'_x}{dx} \sim \frac{I_c(\Delta T_c)}{d_c(x)h_{fg}}. \quad (2.37)$$

A partir del modelo físico, se tiene que el flujo de calor desde el vapor hasta la base de la aleta es del orden de magnitud de,

$$I_c L \frac{\Delta T_c}{d_{cf}} \sim I_w h \frac{\Delta T_{wL}}{L}, \quad (2.38)$$

donde  $I_w$  representa la conductividad térmica de la aleta,  $\Delta T_{wL} = T_w - T_0$  es la diferencia de temperatura característica longitudinal a lo largo de la aleta y  $\Delta T_c = T_s - T_w$  se define como la diferencia de temperatura transversal desde el vapor saturado hasta la superficie de la aleta.

Además la máxima diferencia de temperatura en el sistema es  $\Delta T = T_s - T_0$ , desde el fluido condensado hasta la base de la aleta y esta relacionada con cada parte del sistema de la siguiente forma

$$\frac{\Delta T_c}{\Delta T} + \frac{\Delta T_{wL}}{\Delta T} \sim 1. \quad (2.39)$$

Finalmente aplicando un balance de flujo de calor en la cara vertical de la aleta se tiene

$$I_c \frac{\Delta T_c}{d_{cf}} \sim I_w \frac{\Delta T_w}{h}. \quad (2.40)$$

Si igualamos las ecuaciones (2.38) y (2.40) se llega a,

$$\frac{\Delta T_{wL}}{\Delta T_w} \sim \frac{L^2}{h^2}, \quad (2.41)$$

y como la razón de esbeltez esta definida como

$$\mathbf{e} = \frac{h}{L}, \quad (2.42)$$

sustituyendo la razón de esbeltez,  $\mathbf{e}$ , en ec. (2.41) se escribe como

$$\frac{\Delta T_{wL}}{\Delta T_w} \sim \frac{1}{\mathbf{e}^2}. \quad (2.43)$$

Si la ecuación anterior se multiplica por  $\Delta T$  se tiene

$$\frac{\Delta T_w}{\Delta T} \sim \mathbf{e}^2 \frac{\Delta T_{wL}}{\Delta T}. \quad (2.44)$$

Por otra parte, igualando el término  $\mathbf{d}_{cf}$  de la ecuaciones (2.35) y (2.38) se obtiene

$$\frac{\Delta T_c}{\Delta T_{wL}} \sim \frac{\mathbf{I}_w}{\mathbf{I}_c} \frac{h}{L} \left( \frac{Ja}{\mathbf{g}} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{\Delta T_c}{\Delta T} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (2.45)$$

En la ec. (2.45) surge uno de los parámetros importantes de la investigación, el parámetro conjugado de transferencia de calor entre la aleta y la película de condensado, donde

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{I}_w}{\mathbf{I}_c} \frac{h}{L} \left( \frac{Ja}{\mathbf{g}} \right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{y} \quad \mathbf{e} = \frac{h}{L}. \quad (2.46)$$

El parámetro  $\mathbf{a}$  representa la relación entre el calor conducido por la aleta en la dirección longitudinal con el calor conducido a través de la película de condensado, por lo tanto este parámetro define claramente el carácter conjugado del problema. Desarrollando la ec. (2.45) se tiene,

$$\frac{\Delta T_c}{\Delta T} \sim \left( \frac{1}{\mathbf{a}} \frac{\Delta T_c}{\Delta T} \frac{\Delta T}{\Delta T_{wL}} \right)^4 \quad (2.47)$$

Así mismo despejando  $\frac{\Delta T_c}{\Delta T}$  de la ecuación anterior se escribe que,

$$\frac{\Delta T_c}{\Delta T} \sim \mathbf{a}^{\frac{4}{3}} \left( \frac{\Delta T_{wL}}{\Delta T} \right)^{\frac{4}{3}}. \quad (2.48)$$

Si se combinan las ecuaciones (2.39) y (2.48), se deduce que,

$$\frac{\Delta T_{wL}}{\Delta T} + \mathbf{a}^{\frac{4}{3}} \left( \frac{\Delta T_{wL}}{\Delta T} \right)^{\frac{4}{3}} \sim 1. \quad (2.49)$$

No hay que perder de vista, que en el presente trabajo se lleva a cabo el análisis del acoplamiento entre los diferentes procesos de transferencia de calor que componen el fenómeno en estudio (problema conjugado): condensación de película laminar sobre una aleta, considerando que la temperatura en la superficie de esta tiene efectos significativos en la dirección longitudinal, debido a que  $\frac{h}{L} \ll 1$ , ya que uno de los propósitos de este trabajo es determinar la temperatura de la aleta en dicha dirección  $\mathbf{q}_w(\mathbf{c})$  en función del parámetro adimensional que relaciona la viscosidad variable con la temperatura, y se analizará para el caso de película térmicamente delgada, donde  $\mathbf{a} \gg 1$ .

A partir de las ecuaciones (2.44), (2.48) y (2.49) se obtienen las relaciones  $\frac{\Delta T_{wL}}{\Delta T}$ ,  $\frac{\Delta T_w}{\Delta T}$  y  $\frac{\Delta T_c}{\Delta T}$  para los límites  $\mathbf{a} \ll 1$ ,  $\mathbf{a} \sim 1$  y  $\mathbf{a} \gg 1$  quedando de la siguiente forma

$$\frac{\Delta T_{wL}}{\Delta T} \sim 1, \quad \frac{\Delta T_w}{\Delta T} \sim \mathbf{e}^2, \quad \frac{\Delta T_c}{\Delta T} \sim \mathbf{a}^{\frac{4}{3}}, \quad \text{para } \mathbf{a} \ll 1 \quad (2.50)$$

$$\frac{\Delta T_{wL}}{\Delta T} \sim 1, \quad \frac{\Delta T_w}{\Delta T} \sim \mathbf{e}^2, \quad \frac{\Delta T_c}{\Delta T} \sim 1, \quad \text{para } \mathbf{a} \sim 1 \quad (2.51)$$

$$\frac{\Delta T_{wL}}{\Delta T} \sim \frac{1}{\mathbf{a}}, \quad \frac{\Delta T_w}{\Delta T} \sim \frac{\mathbf{e}^2}{\mathbf{a}}, \quad \frac{\Delta T_c}{\Delta T} \sim 1, \quad \text{para } \mathbf{a} \gg 1 \quad (2.52)$$

El término  $\frac{\Delta T_w}{\Delta T} \sim \frac{\mathbf{e}^2}{\mathbf{a}}$  de la ec. (2.52), es importante ya que en éste descansa la hipótesis del límite térmicamente delgado valido para  $\mathbf{a} \gg 1$ , e indica que la caída transversal de temperatura en la placa,  $\Delta T_w$ , comparada con la caída total del sistema,  $\Delta T$ , es muy pequeña, es decir los

gradientes máximos de temperatura se dan en la dirección longitudinal en comparación con los que se tienen en la dirección transversal, por lo tanto la película de condensado ofrece mayor resistencia térmica al flujo de calor en comparación con la resistencia que ofrece la aleta en la dirección longitudinal.

Por otro lado, para el caso del límite térmicamente grueso, donde la resistencia al flujo de calor a través de la película de condensado es mas pequeña que la resistencia al flujo de calor en la aleta en la dirección longitudinal, donde  $a \ll 1$ , el calor por convección de la película de condensado es extremadamente importante y grandes caídas transversales de temperatura aparecen en la aleta.

## 2.4 PLANTEAMIENTO MATEMATICO

El modelo teórico consiste en establecer las ecuaciones que describen el fenómeno de la condensación para cada uno de los elementos del sistema (aleta, zona de condensado). Se iniciara con el análisis en la aleta; posteriormente se analizará la capa de condensado, planteando las ecuaciones de la energía para el sólido así como las ecuaciones de cantidad de movimiento y energía para la película de condensado, además de las condiciones de frontera para cada zona.

### 2.4.1 ADIMENSIONALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES QUE DESCRIBEN EL PROCESO DE CONDENSACIÓN

En esta sección se adimensionalizán las ecuaciones que describen al fenómeno en cuestión y consiste en reescribir las variables del problema en parámetros universales que permitan describir al sistema independientemente de las magnitudes físicas del problema

Para adimensionalizar un sistema de ecuaciones se toman las variables que definen el problema  $(x, y, \bar{u}_c, \bar{v}_c, T_c, T_w, \mathbf{d}_c(x), \mathbf{m}_c)$ , y se redefinen en términos de las escalas características del problema para ser sustituidos de nuevo en el sistema de ecuaciones (2-1)-(2-4). Finalmente se presenta el sistema completo de ecuaciones para el fluido y la aleta, que junto con las condiciones de frontera representan el sistema físico completo.

### 2.4.2 ECUACION EN EL SÓLIDO

En el caso de la aleta (Fig. 2-1), solo es necesario introducir las siguientes variables adimensionales en la ecuación de Laplace, esto con el fin de obtener la ecuación que describe la distribución de temperaturas en el sólido en forma adimensional,

$$\mathbf{c} = \frac{x}{L} \quad (2.53)$$

$$Z = \frac{y+h}{h}, \quad (2.54)$$

$$\mathbf{q}_w(\mathbf{c}, Z) = \frac{T_s - T_w(x, y)}{T_s - T_0}, \quad (2.55)$$

con estas variables, la ecuación de Laplace, (2.5), adquiere la forma

$$\frac{\partial^2 \mathbf{q}_w}{\partial \mathbf{c}^2} + \frac{1}{\mathbf{e}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{q}_w}{\partial Z^2} = 0. \quad (2.56)$$

Al integrar la ec. (2.56) en el límite térmicamente delgado, en la dirección transversal  $Z$  y considerando que en este límite, únicamente la temperatura adimensional  $\mathbf{q}_w$ , varía en dirección longitudinal, es decir,  $\mathbf{q}_w \sim \mathbf{q}_w(\mathbf{c})$ , se tiene que

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 \mathbf{q}_w}{\partial \mathbf{c}^2} dZ + \frac{1}{\mathbf{e}^2} \int_0^1 \frac{\partial^2 \mathbf{q}_w}{\partial Z^2} dZ = 0, \quad (2.57)$$

después de integrar se llega a

$$\left. \frac{\partial^2 \mathbf{q}_w}{\partial \mathbf{c}^2} + \frac{1}{\mathbf{e}^2} \frac{\partial \mathbf{q}_w}{\partial Z} \right|_{Z=1} - \left. \frac{1}{\mathbf{e}^2} \frac{\partial \mathbf{q}_w}{\partial Z} \right|_{Z=0} = 0. \quad (2.58)$$

Como puede apreciarse, el segundo y tercer término de la ec. (2.58) son los gradientes de temperatura en el centro de la aleta y en la superficie en la dirección transversal. En la siguiente sección se lleva a cabo un balance de energía en la interfase sólido-líquido, para obtener sus respectivos valores.

De la misma forma, las variables adimensionales para la película de condensado son

$$\mathbf{c} = \frac{x}{L},$$

$$\mathbf{h}_c = \frac{y}{d_c(x)}, \quad (2.59)$$

$$\mathbf{q}_c(\mathbf{c}, \mathbf{h}_c) = \frac{T_s - T_c(x, y)}{T_s - T_0}, \quad (2.60)$$

$$\Delta(\mathbf{c}) = \frac{\mathbf{d}_c(x)}{L \left( \frac{Ja}{\mathbf{g}} \right)^{\frac{1}{4}}}, \quad (2.61)$$

aquí  $\mathbf{q}_w(\mathbf{c})$ , es la temperatura adimensional en la superficie de la aleta y  $\Delta(\mathbf{c})$  representa el espesor adimensional de la película de condensado.

### 2.4.3 CONDICIONES DE FRONTERA EN EL SÓLIDO

Las condiciones de frontera en forma adimensional, en dirección longitudinal de la aleta son las siguientes

Como el borde superior de la aleta se considera adiabático (Fig. 2-1), la condición de frontera se escribe como

$$\left. \frac{\partial \mathbf{q}_w}{\partial \mathbf{c}} \right|_{\mathbf{c}=0} = 0. \quad (2.62)$$

Por otro lado, en la base de la aleta ( $\mathbf{c} = 1$ ),  $T_w = T_0$ , y al sustituir en la ec. (2.55) se obtiene

$$\mathbf{q}_w(\mathbf{c} = 1, Z) = 1 \quad (2.63)$$

La condición de frontera en la dirección transversal de la aleta (en el centro de la aleta), es  $\left. \frac{\partial T_w}{\partial y} \right|_{y=-h} = 0$ , ver Fig. 2-4, por lo que al adimensionalizar esta condición, se muestra que los gradientes de temperaturas en  $y = -h$  es cero debido a la simetría en la geometría de la aleta con respecto a la línea central y se afirma que la temperatura máxima en la aleta, ocurrirá en esa línea, por lo anterior se puede representar de la siguiente forma

$$\left. \frac{\partial \mathbf{q}_w}{\partial Z} \right|_{Z=0} = 0, \quad (2.64)$$

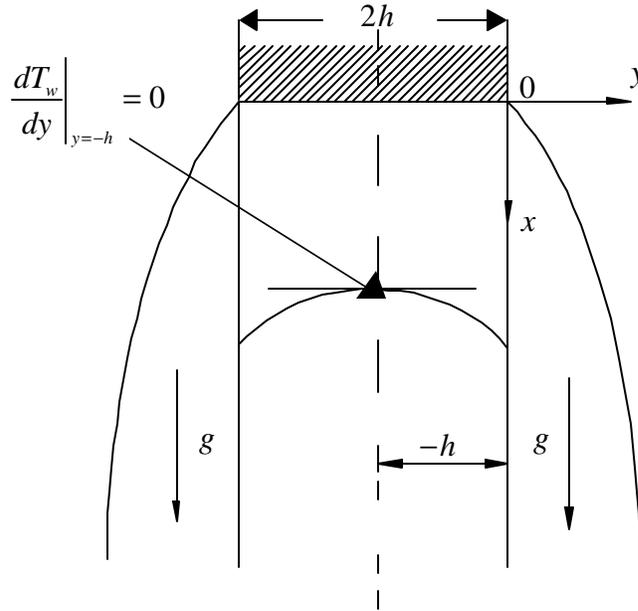


Fig. 2-4. Representación esquemática, de la condición de frontera en la dirección transversal de la aleta, en  $y = -h$ , (centro de la aleta).

Como la transferencia de calor en dirección transversal es por conducción pura, existe una igualdad del flujo de calor conductivo en la interfase de la superficie de la aleta y del condensado, entonces al llevar a cabo un balance de energía se determina la condición de frontera en la aleta en  $y = 0$ , o en forma adimensional para  $Z = 1$ , como se muestra a continuación,

$$l_w \frac{\partial T_w}{\partial y} \Big|_{y=0} = l_c \frac{\partial T_c}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (2.65)$$

Introduciendo las variables adimensionales en la ec. (2.65) se tiene

$$\frac{\partial q_w}{\partial Z} \Big|_{Z=1} = \frac{l_c}{l_w} \frac{1}{d_c(x)} \frac{\partial q_c}{\partial h_c} \Big|_{h_c=0} \quad (2.66)$$

despejando  $d_c(x)$  de la ec. (2.61) y sustituyendo en ec.(2.66), se llega a,

$$\frac{\partial q_w}{\partial Z} \Big|_{Z=1} = \frac{e^2}{a \Delta} \frac{1}{\Delta} \frac{\partial q_c}{\partial h_c} \Big|_{h_c=0} \quad (2.67)$$

Las condiciones de frontera del sólido, ecs. (2.64) y (2.67) se sustituyen en la ec. (2.58), para obtener

$$\frac{\partial^2 \mathbf{q}_w}{\partial \mathbf{c}^2} = -\frac{1}{\mathbf{a}} \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial \mathbf{h}_c} \Big|_{\mathbf{h}_c=0} \quad (2.68)$$

#### 2.4.4 ECUACIÓN EN LA PELÍCULA DE FLUIDO CONDENSADO

Con el fin de reducir la ec. (2.13), a una ecuación en una dimensión se introduce el concepto de la función de corriente adimensional,  $f_c$ , que contendrá a  $\bar{u}_c$  y  $\bar{v}_c$  en una sola variable y que satisface la ecuación de continuidad, donde,

$$u = \frac{\bar{u}_c}{\sqrt{gLJa}} = \Delta^2 \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{h}_c}, \quad (2.69)$$

$$v = \frac{\bar{v}_c \mathbf{g}^{\frac{1}{4}}}{Ja^{\frac{3}{4}} \sqrt{gL}} = -\frac{\partial (\Delta^3 f_c)}{\partial \mathbf{c}} + \Delta^2 \mathbf{h}_c \frac{d\Delta}{d\mathbf{c}} \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{h}_c}, \quad (2.70)$$

siendo  $\bar{u}_c$  y  $\bar{v}_c$  son las componentes de la velocidad longitudinal y transversal en unidades físicas.

Retomando la ec. (2.13), se puede reescribir como,

$$\mathbf{m}_t \frac{\partial^2 \bar{u}_c}{\partial y^2} + \frac{\partial \mathbf{m}_t}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}_c}{\partial y} + \mathbf{r}_c g = \mathbf{r}_c \bar{u}_c \frac{\partial \bar{u}_c}{\partial x} + \mathbf{r}_c \bar{v}_c \frac{\partial \bar{u}_c}{\partial y}, \quad (2.71)$$

donde  $\mathbf{m}_t$  es la viscosidad absoluta de los líquidos y en función de la temperatura puede ser representada por la siguiente relación [21],

$$\mathbf{m}_t = \exp \left( -A + \frac{B}{T_c} - \frac{C}{T_c^2} \right), \quad (2.72)$$

las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$ , de la ecuación anterior dependen del fluido y son obtenidas experimentalmente [19]. Para adimensionalizar  $\mathbf{m}_t$ , se sustituye  $T_c$  de la ec. (2.60) en (2.72) para expresar la viscosidad en función de la temperatura adimensional del condensado  $\mathbf{q}_c$ ,

$$\mathbf{m}_c = \exp(-A) \exp \left( \frac{B}{T_s - (T_s - T_0) \mathbf{q}_c} - \frac{C}{(T_s - (T_s - T_0) \mathbf{q}_c)^2} \right), \quad (2.73)$$

rearrreglando la ec. (2.73) se puede escribir,

$$\mathbf{m}_c = \mathbf{m}_0 \exp \left\{ \frac{\bar{\mathbf{a}}}{1 - \mathbf{b} \mathbf{q}_c} - \frac{\tilde{\mathbf{a}}}{(1 - \mathbf{b} \mathbf{q}_c)^2} \right\}, \quad (2.74)$$

donde,

$$\mathbf{m}_0 = \exp(-A), \quad (2.75)$$

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{B}{T_s}, \quad (2.76)$$

$$\tilde{\mathbf{a}} = \frac{C}{T_s^2}, \quad (2.77)$$

$$\mathbf{b} = \frac{T_s - T_0}{T_s}. \quad (2.78)$$

Para que el fenómeno de condensación pelicular ocurra basta con tener una pequeña variación de temperatura en  $T_s - T_0$  por lo que  $\mathbf{b} \ll 1$ , consecuentemente se puede hacer la linealización de

$\frac{1}{1 - \mathbf{b} \mathbf{q}_c}$  como se muestra a continuación

$$\frac{1}{1 - \mathbf{b} \mathbf{q}_c} = 1 + \mathbf{b} \mathbf{q}_c + \mathbf{b}^2 \mathbf{q}_c^2 + \mathbf{b}^3 \mathbf{q}_c^3 + \mathbf{b}^4 \mathbf{q}_c^4 + 0(\mathbf{q}_c^5),$$

$$\frac{1}{(1 - \mathbf{b} \mathbf{q}_c)^2} = 1 + 2\mathbf{b} \mathbf{q}_c + (3\mathbf{b}^2) \mathbf{q}_c^2 + (4\mathbf{b}^3) \mathbf{q}_c^3 + (5\mathbf{b}^4) \mathbf{q}_c^4 + 0(\mathbf{q}_c^5),$$

en la expansión anterior debido a que  $\mathbf{b} \ll 1$ , se pueden eliminar términos de orden superior de las expansiones anteriores y sustituyendo en ec. (2.74) se llega a

$$\mathbf{m}_c = \mathbf{m}_0 \exp \left\{ \bar{\mathbf{a}} (1 + \mathbf{b} \mathbf{q}_c) - \tilde{\mathbf{a}} (1 + 2\mathbf{b} \mathbf{q}_c) \right\}.$$

simplificando se tiene

$$\mathbf{m}_c = \mathbf{m}_0 \exp(\bar{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{a}}) (1 - 2\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}\mathbf{q}_c + \bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}\mathbf{q}_c - 2\bar{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}^2\mathbf{q}_c)$$

Como  $\mathbf{b}^2 \ll 1$ , la ecuación anterior se puede escribir

$$\mathbf{m}_c = \mathbf{m}_0 \exp(\bar{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{a}}) [1 + \mathbf{q}_c (\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b} - 2\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b})], \quad (2.79)$$

Si se definen nuevos parámetros, se tiene;

$$\bar{\mathbf{m}}_0 = \mathbf{m}_0 \exp(\bar{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{a}}), \quad (2.80)$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b} (\bar{\mathbf{a}} - 2\tilde{\mathbf{a}}). \quad (2.81)$$

Finalmente la viscosidad adimensionalizada se puede escribir como

$$\mathbf{m}^* = \frac{\mathbf{m}_c}{\bar{\mathbf{m}}_0} = 1 + \bar{\mathbf{b}}\mathbf{q}_c. \quad (2.82)$$

Por lo tanto sustituyendo las variables adimensionales (2.69), (2.70) y (2.82) en ec. (2.71), esta se representa como,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f_c}{\partial \mathbf{h}_c^3} + \frac{\bar{\mathbf{b}}}{1 + \bar{\mathbf{b}}\mathbf{q}_c} \frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial \mathbf{h}_c} \frac{\partial^2 f_c}{\partial \mathbf{h}_c^2} + 1 = Ja\Delta^4 \left\{ \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{h}_c} \frac{\partial^2 f_c}{\partial \mathbf{c} \partial \mathbf{h}_c} - \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{c}} \frac{\partial^2 f_c}{\partial \mathbf{h}_c^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\mathbf{c}} \left[ 2 \left( \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{h}_c} \right)^2 - 3f_c \frac{\partial^2 f_c}{\partial \mathbf{h}_c^2} + \mathbf{h}_c \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{h}_c} \frac{\partial^2 f_c}{\partial \mathbf{h}_c^2} \right] \right\} \quad (2.83) \end{aligned}$$

La expansión del término  $\frac{1}{1 + \bar{\mathbf{b}}\mathbf{q}_c}$  de la ec. (2.83) se desarrolla de la forma,

$$\frac{1}{1 + \bar{\mathbf{b}}\mathbf{q}_c} = 1 - \bar{\mathbf{b}}\mathbf{q}_c + \bar{\mathbf{b}}^2\mathbf{q}_c^2 - \bar{\mathbf{b}}^3\mathbf{q}_c^3 + \bar{\mathbf{b}}^4\mathbf{q}_c^4 + 0(\mathbf{q}_c^5),$$

despreciando los términos de orden superior y sustituyendo en la ec. (2.83) se obtiene,

$$\frac{\partial^3 f_c}{\partial \mathbf{h}_c^3} + \bar{\mathbf{b}} \frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial \mathbf{h}_c} \frac{\partial^2 f_c}{\partial \mathbf{h}_c^2} + 1 = Ja \Delta^4 \left\{ \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{h}_c} \frac{\partial^2 f_c}{\partial \mathbf{c} \partial \mathbf{h}_c} - \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{c}} \frac{\partial^2 f_c}{\partial \mathbf{h}_c^2} + \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\mathbf{c}} \left[ 2 \left( \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{h}_c} \right)^2 - 3 f_c \frac{\partial^2 f_c}{\partial \mathbf{h}_c^2} + \mathbf{h}_c \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{h}_c} \frac{\partial^2 f_c}{\partial \mathbf{h}_c^2} \right] \right\} \quad (2.84)$$

De manera equivalente, considerando las variables dadas en (2.59), (2.60), (2.61), (2.69) y (2.70), la ecuación de la energía para la zona de condensado, ec. (2.14), se transforma en la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{q}_c}{\partial \mathbf{h}_c^2} = Ja \text{Pr}_c \Delta^4 \left\{ \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{h}_c} \frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial \mathbf{c}} - \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{c}} \frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial \mathbf{h}_c} - \frac{3}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\mathbf{c}} \left( f_c \frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial \mathbf{h}_c} - \frac{\mathbf{h}_c}{3} \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{h}_c} \frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial \mathbf{h}_c} \right) \right\} \quad (2.85)$$

#### 2.4.5 CONDICIONES DE FRONTERA ASOCIADAS CON LA PELÍCULA DE CONDENSADO.

La primer condición de frontera que se define será en la interfase sólido-líquido es decir en  $y = 0$ , o en  $\mathbf{h}_c = 0$ , en esta zona existe la condición de no deslizamiento en donde  $\bar{u}_c$  y  $\bar{v}_c$  son cero por tanto de la ec. (2.69) y (2.70) se transforman en

$$\left. \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{h}_c} \right|_{\mathbf{h}_c=0} = 0, \quad (2.86a)$$

$$f_c(\mathbf{c}, \mathbf{h}_c = 0) = 0. \quad (2.86b)$$

Además, en la misma interfase, la temperatura de la pared depende únicamente de la coordenada  $\mathbf{c}$ , por lo que en  $y = 0$ ,  $T_c = T_w$ , y al sustituir en ec. (2.60)

$$\mathbf{q}_c(\mathbf{c}, \mathbf{h}_c = 0) = \frac{T_s - T_w}{T_s - T_0} = \mathbf{q}_w(\mathbf{c}), \quad (2.87)$$

de manera que la ecuación anterior se escribe como

$$\mathbf{q}_c(\mathbf{c}, \mathbf{h}_c = 0) - \mathbf{q}_w(\mathbf{c}) = 0. \quad (2.87a)$$

Así mismo para  $y = \mathbf{d}(x)$ ,  $T_c = T_s$ , la ec. (2.60) se transforma en,

$$\mathbf{q}_c(\mathbf{c}, \mathbf{h}_c = 1) = 0. \quad (2.88)$$

Para determinar la siguiente condición de frontera se realiza un balance del esfuerzo cortante en la interfase líquido-vapor [12], donde, se establece que el vapor no ejerce fuerza de arrastre sobre el condensado, es decir se puede considerar despreciable el esfuerzo cortante en la superficie del condensado, esto debido a las bajas velocidades del vapor.

$$\mathbf{m}_c \left. \frac{\partial \bar{u}_c}{\partial y} \right|_{y=d(x)} = 0. \quad (2.89)$$

Adimensionalizando la ecuación anterior, y sustituyendo las ecs. (2.59) y (2.69) en ec.(2.89) se llega a la siguiente condición de frontera

$$\left. \frac{\partial^2 f_c}{\partial \mathbf{h}_c^2} \right|_{\mathbf{h}_c=1} = 0. \quad (2.90)$$

Resumiendo las condiciones de frontera (2.88) y (2.90) se pueden representar como

$$\mathbf{q}_c(\mathbf{c}, \mathbf{h}_c = 1) = \left. \frac{\partial^2 f_c}{\partial \mathbf{h}_c^2} \right|_{\mathbf{h}_c=1} = 0. \quad (2.91)$$

El espesor normalizado adimensional de la capa de condensado,  $\Delta$ , es desconocido y debe ser obtenido del análisis, de tal forma que para obtener su evolución se lleva a cabo un balance de energía en la interfase líquido-vapor como se describe a continuación:

$$\frac{q_c}{h_{fg}} = \frac{\partial \Gamma(\mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}}, \quad (2.92)$$

donde el flujo másico de condensado  $\Gamma(\mathbf{c})$ , por unidad de profundidad de la aleta es

$$\Gamma(\mathbf{c}) = \frac{\dot{m}_x}{b} = \int_{y=0}^{y=d_c(x)} \mathbf{r}_c \bar{u}_c dy, \quad (2.93)$$

y al sustituir las variables adimensionales (2.59), (2.61) y (2.69) en la ec. (2.93) se obtiene

$$\Gamma(\mathbf{c}) = \mathbf{r}_c \int_{\mathbf{h}_c=0}^{\mathbf{h}_c=1} \sqrt{gLJa} \Delta^2 \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{h}_c} L \left( \frac{Ja}{g} \right)^{\frac{1}{4}} \Delta d\mathbf{h}_c, \quad (2.94)$$

$$\frac{\partial \Gamma(\mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}} = \mathbf{r}_c g^{\frac{1}{4}} \mathbf{n}_c^{\frac{1}{2}} Ja^{\frac{3}{4}} L^{\frac{3}{4}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} [\Delta^3 f_c(\mathbf{c}, 1)], \quad (2.95)$$

además el flujo de calor desde el vapor hacia la película de condensado esta dada por

$$q_c = \mathbf{l}_c \left. \frac{\partial T_c}{\partial y} \right|_{y=d_c(x)}. \quad (2.96)$$

Habiendo definido las variables adimensionales en (2.59) y (2.60) en (2.96), se obtiene

$$\frac{q_c}{h_{fg}} = - \frac{\mathbf{l}_c \Delta T g^{\frac{1}{4}}}{h_{fg} \Delta L^{\frac{1}{4}} Ja^{\frac{1}{4}} \mathbf{n}_c^{\frac{1}{2}}} \left. \frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial \mathbf{h}_c} \right|_{h_c=1}. \quad (2.97)$$

Finalmente se sustituyen las ecs. (2.95) y (2.97) en la ecuación de balance de energía, ec. (2.92), de manera que,

$$\frac{h_{fg} \Delta L Ja \mathbf{n}_c \mathbf{r}_c}{\mathbf{l}_c \Delta T} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} [\Delta^3 f_c(\mathbf{c}, 1)] = - \left. \frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial \mathbf{h}_c} \right|_{h_c=1}. \quad (2.98)$$

Retomando la definición del número de Jacob para ser sustituida en la ec. (2.98) se llega a

$$4\Delta \frac{d}{d\mathbf{c}} [\Delta^3 f_c(\mathbf{c}, 1)] = - \left. \frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial \mathbf{h}_c} \right|_{h_c=1}, \quad (2.99)$$

con la condición de frontera

$$\Delta(\mathbf{c} = 0) = 0. \quad (2.100)$$

En la siguiente sección se presenta la metodología de solución del sistema de ecs. (2.68), (2.84), (2.85) y (2.99), en forma analítica y numérica. Las ecuaciones antes mencionadas contienen las incógnitas  $f_c(\mathbf{c}, \mathbf{h}_c)$ ,  $\mathbf{q}_c(\mathbf{c}, \mathbf{h}_c)$ ,  $\Delta(\mathbf{c})$  y  $\mathbf{q}_c(\mathbf{c})$  con cinco parámetros adimensionales: el número de Jacob,  $Ja$  y el número de Prandtl del condensado,  $Pr_c$ ; los parámetros  $\mathbf{a}$ ,  $\bar{\mathbf{b}}$  y  $\mathbf{e}$ . En las siguientes secciones se analizará el límite relevante caracterizado por pequeños números de Jacob,  $Ja \rightarrow 0$ , con el número de Prandtl de la fase condensada de orden unidad. Los límites de grandes y pequeños valores del parámetro  $\mathbf{a}$  para la aproximación de la capa térmicamente delgada son considerados.

# ***CAPITULO III***

## ***ALGORITMO DE SOLUCIÓN***

*En este capítulo se presenta la solución de las ecuaciones de cantidad de movimiento y de la energía para el fluido condensado considerando  $Ja \rightarrow 0$  y  $Pr_c \sim 1$ , además se muestra la metodología de solución de las ecuaciones acopladas de la aleta y del fluido para determinar la temperatura adimensional en dirección longitudinal,  $\mathbf{q}_w(\mathbf{c})$ , y el espesor adimensional de la película,  $\Delta(\mathbf{c})$ , empleando técnicas de perturbación regular y por último se resuelven las ecuaciones para  $\mathbf{q}_w(\mathbf{c})$  y  $\Delta(\mathbf{c})$  en forma numérica.*

### 3.1 SOLUCIÓN ASINTÓTICA

Los métodos de perturbación, también conocidos como asintóticos o como de linealización, son de gran importancia en muchos campos de las matemáticas, ciencias e ingeniería aplicada. En esta sección se aplicarán los métodos asintóticos para resolver las ecuaciones diferenciales que gobiernan el fenómeno de condensación en una aleta vertical. El método consiste en identificar un parámetro pequeño que para nuestro estudio será la inversa del parámetro  $\mathbf{a}$ , ya que para el caso de pared térmicamente delgado  $\mathbf{a} \gg 1$ .

#### 3.1.1 GENERALIDADES DE LAS TÉCNICAS DE PERTURBACIÓN REGULAR

En esta sección se presenta una descripción de la aproximación analítica de los métodos de perturbación. Para tener un panorama general del tema, se considerarán algunos conceptos fundamentales así como el procedimiento del análisis de perturbación:

- I. Identificar un parámetro pequeño  $\mathbf{s}$ . Este debe ser considerado al reconocer las escalas físicas relevantes del problema. Una vez hecho lo anterior, se normalizan todas las variables con respecto a esas escalas características. En la forma normalizada, las ecuaciones gobernantes del fenómeno físico presentarán ciertos parámetros adimensionales, cada uno de estos presenta la importancia relativa de ciertos mecanismos físicos representativos del fenómeno que se está estudiando. Si uno de los parámetros, por ejemplo  $\mathbf{s}$ , es mucho menor que la unidad (si el parámetro es muy grande, su recíproco es pequeño), entonces  $\mathbf{s}$  puede ser tomado como el parámetro de perturbación.
- II. Expandir la solución como una serie ascendente del parámetro pequeño  $\mathbf{s}$ , por ejemplo, una serie de potencias de la forma

$$\mathbf{q} \approx \mathbf{q}_0 + \mathbf{s}\mathbf{q}_1 + \mathbf{s}^2\mathbf{q}_2 + \mathbf{s}^3\mathbf{q}_3 + \dots + \mathbf{s}^n\mathbf{q}_n$$

donde  $\mathbf{q}_n$  es el llamado el término de orden  $n$ . La forma de las series puede variar de acuerdo a la manera en que  $\mathbf{s}$  aparece en las ecuaciones

- III. Agrupar términos del mismo orden en todas las ecuaciones gobernantes así como en las condiciones auxiliares, y de esta forma obtener ecuaciones de perturbación para cada orden
- IV. Iniciar desde el orden más bajo, resolviendo los problemas en cada orden sucesivamente hasta el orden deseado, por ejemplo  $O(n)$

- V. Sustituir los resultados para  $\mathbf{q}_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , en la expansión propuesta para obtener la solución final

El procedimiento anterior es llamado análisis de perturbación regular. Existen sin embargo, muchas situaciones en las cuales las series de perturbación regular fallan en algún rango de la variable independiente, entonces se debe recurrir al análisis de perturbación singular, que contiene los siguientes pasos:

- I. Determinar la falla de la expansión regular; verificar cuál de las suposiciones son violadas cuando la falla ocurre
- II. Seleccionar nuevas escalas y nuevas normalizaciones para rescatar los términos que son importantes cerca de la singularidad e iniciar un nuevo análisis de perturbación

En la siguiente sección se muestra la aplicación del método de perturbación regular, para determinar las variables adimensionales,  $\mathbf{q}(\mathbf{c})$  y  $\Delta(\mathbf{c})$ , usando la inversa de  $\mathbf{a}$  como el parámetro pequeño de expansión o perturbación.

### 3.1.2 SOLUCIÓN ASINTÓTICA PARA $Ja \rightarrow 0$ y $Pr \sim 1$

A continuación se presenta la solución de las ecuaciones (2.84) y (2.85), con sus respectivas condiciones de frontera. En el límite de  $Ja \rightarrow 0$  y  $\mathbf{e}^2 \ll 1$ , la ecuación de la energía en la película de condensado, (2.85), se puede escribir como

$$\frac{\partial^2 \mathbf{q}_c}{\partial \mathbf{h}_c^2} = 0. \quad (3.1)$$

Al integrar la ec. (3.1) dos veces se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial \mathbf{h}_c} = C_1, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{q}_c(\mathbf{c}, \mathbf{h}_c) = C_1 \mathbf{h}_c + C_2, \quad (3.3)$$

aplicando las condiciones de frontera, ecuaciones (2.87)-(2.88), se determinan los valores de las constantes de integración y por tanto el valor de la derivada en la ec. (3.2), de la siguiente forma

$$C_1 = -\mathbf{q}_w(\mathbf{c}) \quad \text{y} \quad C_2 = \mathbf{q}_w(\mathbf{c}), \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial \mathbf{h}_c} = -\mathbf{q}_w(\mathbf{c}), \quad (3.5)$$

de modo que la ec. (3.3) se representa como

$$\mathbf{q}_c(\mathbf{c}, \mathbf{h}_c) = \mathbf{q}_w(\mathbf{c})(1 - \mathbf{h}_c), \quad (3.6)$$

la ecuación anterior indica que la variación de la temperatura en la película de condensado es una función lineal.

De manera equivalente, al introducir el valor de  $\frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial \mathbf{h}_c}$ , en la ecuación de cantidad de movimiento, ec. (2.84) se llega a

$$\frac{\partial^3 f_c}{\partial \mathbf{h}_c^3} + (-\mathbf{q}_w(\mathbf{c}) \bar{\mathbf{b}}) \frac{\partial^2 f_c}{\partial \mathbf{h}_c^2} + 1 = 0. \quad (3.7)$$

Si se define el nuevo parámetro  $A = (-\mathbf{q}_w(\mathbf{c}) \bar{\mathbf{b}})$  que es independiente de  $\mathbf{h}_c$ , la ecuación anterior se reescribe como

$$\frac{\partial^3 f_c}{\partial \mathbf{h}_c^3} + A \frac{\partial^2 f_c}{\partial \mathbf{h}_c^2} + 1 = 0. \quad (3.8)$$

Por otro lado para obtener  $\Delta(\mathbf{c})$  de la ec. (2.99), se determinará en primera instancia  $f_c(\mathbf{c}, 1)$  a partir de la ecuación diferencial, (3.8). Resolviendo la ec. (3.8), se obtiene

$$f(\mathbf{c}, \mathbf{h}_c) = D_1 + D_2 \mathbf{h}_c + D_3 \exp(-A \mathbf{h}_c) - \frac{\mathbf{h}_c^2}{2A}, \quad (3.13)$$

recordando que  $A$  esta definida como

$$A = [-\mathbf{q}_w(\mathbf{c}) \bar{\mathbf{b}}] = -[\mathbf{q}_w(\mathbf{c}) \bar{\mathbf{b}}],$$

sustituyendo la relación anterior en la ec. (3.13),

$$f(\mathbf{c}, \mathbf{h}_c) = D_1 + D_2 \mathbf{h}_c + D_3 \exp(A \mathbf{h}_c) + \frac{\mathbf{h}_c^2}{2A}. \quad (3.14)$$

Las condiciones de frontera para la ec. (3.14), están dadas por ecs. (2.87) y (2.91)

$$\mathbf{q}_c(\mathbf{c}, \mathbf{h}_c = 0) - \mathbf{q}_w(\mathbf{c}) = f_c(\mathbf{c}, \mathbf{h}_c = 0) = \left[ \frac{\partial f_c}{\partial \mathbf{h}_c} \right]_{\mathbf{h}_c=0} = 0$$

$$\mathbf{q}_c(\mathbf{c}, \mathbf{h}_c = 1) = \frac{\partial^2 f_c}{\partial \mathbf{h}_c^2} \Big|_{\mathbf{h}_c=1} = 0,$$

al aplicar estas condiciones de frontera en la ec. (3.14) se obtiene la solución de la ecuación de cantidad de movimiento en el fluido condensado

$$f_c(\mathbf{c}, \mathbf{h}_c) = \frac{\mathbf{h}_c^2}{2A} + \left( \frac{1 - \exp(A\mathbf{h}_c)}{A^3 \exp(A)} \right) + \frac{\mathbf{h}_c}{A^2 \exp(A)}, \quad (3.15)$$

consecuentemente se pueden linealizar los términos  $1 - \exp(A\mathbf{h}_c)$  y  $\frac{1}{\exp(A)}$  de la ecuación anterior, como se muestra a continuación

$$1 - \exp(A\mathbf{h}_c) = -A\mathbf{h}_c - \frac{A^2\mathbf{h}_c^2}{2} - \frac{A^3\mathbf{h}_c^3}{6},$$

$$\frac{1}{\exp(A)} = 1 - A + \frac{A^2}{2}, \quad (3.16)$$

sustituyendo en (3.15) las relaciones anteriores y haciendo los arreglos correspondientes se llega a:

$$f_c(\mathbf{c}, \mathbf{h}_c) = \frac{\mathbf{h}_c^2}{2A} \left[ 1 - \left( 1 - A + \frac{A^2}{2} \right) \right] - \frac{1}{6} \left( 1 - A + \frac{A^2}{2} \right) \mathbf{h}_c^3,$$

como,  $A = \mathbf{q}_w(\mathbf{c}) \bar{\mathbf{b}}$  y  $\mathbf{b} \ll 1$  entonces  $A \rightarrow 0$ , y la ecuación anterior toma la forma siguiente

$$f_c(\mathbf{c}, \mathbf{h}_c) = \frac{\mathbf{h}_c^2}{2} \left[ \left( 1 - \frac{A}{2} \right) - \frac{1}{3} (1 - A) \mathbf{h}_c \right]. \quad (3.17)$$

cuya solución corresponde a la función de corriente. Por otro lado, el flujo de calor adimensional, o número de Nusselt, para el condensado está definido por

$$Nu_c = \frac{q_c L}{\mathbf{I}_c (T_s - T_0)}, \quad (3.18)$$

y se define un número de Nusselt modificado para la zona de condensado dado por

$$Nu_c^* = Nu_c \left( \frac{Ja}{\mathbf{g}} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (3.19)$$

sabiendo además que el flujo de calor a través del fluido condensado está dado por la ley de Fourier como

$$q_c = \mathbf{I}_c \frac{\partial T_c}{\partial y} = -\mathbf{I}_c \frac{(T_s - T_0)}{\Delta \mathbf{d}_L} \left. \frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial \mathbf{h}_c} \right|_{\mathbf{h}_c=0}, \quad (3.20)$$

que justo con las ecuaciones (3.6), (3.18), se llega a,

$$Nu_c^* = \frac{\mathbf{q}_c(\mathbf{c})}{\Delta(\mathbf{c})}. \quad (3.21)$$

Para obtener la ecuación diferencial que relaciona la temperatura adimensional,  $\mathbf{q}(\mathbf{c})$ , en la aleta con el espesor adimensional de la película de condensado,  $\Delta(\mathbf{c})$ , se determina  $\left. \frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial \mathbf{h}_c} \right|_{\mathbf{h}_c=1}$  de la ec.

(3.6), quedando como

$$\mathbf{q}_w(\mathbf{c}) = - \left[ \frac{\partial \mathbf{q}_c}{\partial \mathbf{h}_c} \right]_{\mathbf{h}_c=1}, \quad (3.22)$$

al sustituir la relación anterior en la ec. (2.99) se tiene que,

$$4\Delta \frac{d}{d\mathbf{c}} \left[ \Delta^3 f_c(\mathbf{c}, 1) \right] = \mathbf{q}_w(\mathbf{c}), \quad (3.23)$$

las variables adimensionales  $\Delta(\mathbf{c})$  y  $\mathbf{q}_w(\mathbf{c})$  no se conocen y se determinan mas adelante mediante técnicas de perturbación. Para obtener  $f_c(\mathbf{c}, \mathbf{h}_c=1)$  en la ec. (3.23), se obtiene a partir de ec. (3.17) como

$$f_c(\mathbf{c},1) = -\frac{A}{12} + \frac{1}{3},$$

sustituyendo en (3.23):

$$4\Delta \frac{d}{d\mathbf{c}} \left[ \Delta^3 \frac{d}{d\mathbf{c}} \left( \frac{1}{3} - \frac{A}{12} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{A}{12} \right) \frac{d\Delta^3}{d\mathbf{c}} \right] = \mathbf{q}_w(\mathbf{c}), \quad (3.24)$$

haciendo las operaciones correspondientes en la relación anterior se tiene que

$$-\frac{\bar{\mathbf{b}}}{3} \Delta^4 \frac{d\mathbf{q}_w}{d\mathbf{c}} + \left( 1 - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{4} \mathbf{q}_w \right) \frac{d\Delta^4}{d\mathbf{c}} = \mathbf{q}_w(\mathbf{c}), \quad (3.25)$$

de manera similar para tener la última versión de la ecuación diferencial en el sólido, se sustituye la relación (3.22) en ec. (2.68) rescribiendo esta última como

$$\mathbf{a} \frac{d^2 \mathbf{q}_w}{d\mathbf{c}^2} = \frac{\mathbf{q}_w(\mathbf{c})}{\Delta(\mathbf{c})}. \quad (3.26)$$

Las ecuaciones (3.25) y (3.26) tienen que ser resueltas con la condición inicial  $\Delta(0) = 0$  y la condición adiabática en la parte superior de la aleta, mediante técnicas de perturbación regular, tomando como parámetro de expansión el valor de la inversa de  $\mathbf{a}$ , ya que  $\mathbf{a} \gg 1$ .

El término  $\bar{\mathbf{b}}$  en la ec. (3.25), es un parámetro adimensional que contiene a  $T_s$  y  $T_0$  en unidades físicas, y por consiguiente tendrá efectos importantes en el comportamiento de  $\Delta(\mathbf{c})$  y  $\mathbf{q}_w(\mathbf{c})$  como se mostrará en la próxima sección.

### Solución asintótica para $\mathbf{a} \gg 1$

A continuación se aplicará el procedimiento del análisis de perturbación que fue descrito en la sección 3.1.1 de este trabajo.

I.- En principio se identifica al parámetro  $\mathbf{s} = 1/\mathbf{a}$ , como el parámetro de perturbación, ya que cuando  $\mathbf{a} \rightarrow \infty$ , la solución se puede obtener con la ayuda de técnicas de perturbación regular, utilizando  $1/\mathbf{a}$  como el parámetro pequeño de expansión. Para valores grandes del parámetro  $\mathbf{a}$ , la temperatura adimensional de la aleta,  $\mathbf{q}_w(\mathbf{c})$ , cambia muy poco (del orden  $\mathbf{a}^{-1}$ ) en la dirección longitudinal.

II.- Una vez conociendo el parámetro de perturbación, se lleva a cabo la expansión de la temperatura y del espesor adimensionales como una serie de potencias ascendentes de la siguiente forma

$$\mathbf{q}_w(\mathbf{c}) = \mathbf{q}_0(\mathbf{c}) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{a}^j} \mathbf{q}_j(\mathbf{c}),$$

tomando hasta el orden  $j = 2$

$$\mathbf{q}_w(\mathbf{c}) = \mathbf{q}_0(\mathbf{c}) + \frac{1}{\mathbf{a}} \mathbf{q}_1(\mathbf{c}) + \frac{1}{\mathbf{a}^2} \mathbf{q}_2(\mathbf{c}). \quad (3.27)$$

y para el espesor adimensional del condensado se puede escribir como

$$\Delta(\mathbf{c}) = \Delta_0(\mathbf{c}) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{a}^j} \Delta_j(\mathbf{c}),$$

tomando hasta el orden  $j = 2$

$$\Delta(\mathbf{c}) = \Delta_0(\mathbf{c}) + \frac{1}{\mathbf{a}} \Delta_1(\mathbf{c}) + \frac{1}{\mathbf{a}^2} \Delta_2(\mathbf{c}). \quad (3.28)$$

Sustituyendo ecs. (3.27) y (3.28) en ec. (3.25) se puede expresar como

$$\begin{aligned} & -\frac{\bar{\mathbf{b}}}{3} \left( \Delta_0 + \frac{1}{\mathbf{a}} \Delta_1 + \frac{1}{\mathbf{a}^2} \Delta_2 \right)^4 \frac{d}{d\mathbf{c}} \left( \mathbf{q}_0 + \frac{1}{\mathbf{a}} \mathbf{q}_1 + \frac{1}{\mathbf{a}^2} \mathbf{q}_2 \right) \\ & + \left[ 1 - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{4} \left( \mathbf{q}_0 + \frac{1}{\mathbf{a}} \mathbf{q}_1 + \frac{1}{\mathbf{a}^2} \mathbf{q}_2 \right) \right] \frac{d}{d\mathbf{c}} \left( \Delta_0 + \frac{1}{\mathbf{a}} \Delta_1 + \frac{1}{\mathbf{a}^2} \Delta_2 \right)^4 = \mathbf{q}_0 + \frac{1}{\mathbf{a}} \mathbf{q}_1 + \frac{1}{\mathbf{a}^2} \mathbf{q}_2, \end{aligned} \quad (3.29)$$

análogamente, sustituyendo ecs. (3.27) y (3.28) en ec. (3.26) se tiene

$$\mathbf{a} \frac{d^2 \left( \mathbf{q}_0 + \frac{1}{\mathbf{a}} \mathbf{q}_1 + \frac{1}{\mathbf{a}^2} \mathbf{q}_2 \right)}{d\mathbf{c}^2} = \frac{\mathbf{q}_0 + \frac{1}{\mathbf{a}} \mathbf{q}_1 + \frac{1}{\mathbf{a}^2} \mathbf{q}_2}{\Delta_0 + \frac{1}{\mathbf{a}} \Delta_1 + \frac{1}{\mathbf{a}^2} \Delta_2} \quad (3.30)$$

III.- Una vez hecha las expansiones correspondientes, se agrupan los términos de la misma potencia de las ecs. (3.29) y (3.30) obteniéndose los siguientes conjuntos de ecuaciones: para  $\mathbf{a}^0$ ,

$$-\frac{\bar{\mathbf{b}}}{3}\Delta_0^4 \frac{d\mathbf{q}_0}{d\mathbf{c}} + \frac{d\Delta_0^4}{d\mathbf{c}} - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{4}\mathbf{q}_0 \frac{d\Delta_0^4}{d\mathbf{c}} = \mathbf{q}_0 \quad (3.31)$$

$$\frac{d^2\mathbf{q}_0}{d\mathbf{c}^2} = 0 \quad (3.32)$$

para  $\mathbf{a}^{-1}$ ,

$$-\frac{4}{3}\bar{\mathbf{b}}\Delta_0^3\Delta_1 \frac{d\mathbf{q}_0}{d\mathbf{c}} - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{3}\Delta_0^4 \frac{d\mathbf{q}_1}{d\mathbf{c}} + \frac{d(4\Delta_0^3\Delta_1)}{d\mathbf{c}} - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{4}\mathbf{q}_0 \frac{d(4\Delta_0^3\Delta_1)}{d\mathbf{c}} - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{4}\mathbf{q}_1 \frac{d\Delta_0^4}{d\mathbf{c}} = \mathbf{q}_0 \quad (3.33)$$

$$\frac{d^2\mathbf{q}_1}{d\mathbf{c}^2} = \frac{\mathbf{q}_0}{\Delta_0} \quad (3.34)$$

y para  $\mathbf{a}^{-2}$ ,

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{4}{3}\bar{\mathbf{b}}\Delta_0^3 - 2\bar{\mathbf{b}}\Delta_0^2\Delta_1^2 \right) \frac{d\mathbf{q}_0}{d\mathbf{c}} - \frac{4}{3}\bar{\mathbf{b}}\Delta_0^3\Delta_1 \frac{d\mathbf{q}_1}{d\mathbf{c}} - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{3}\Delta_0^4 \frac{d\mathbf{q}_2}{d\mathbf{c}} + \frac{d}{d\mathbf{c}}(4\Delta_0^3\Delta_2 + 6\Delta_0^2\Delta_1^2) \\ & - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{4}\mathbf{q}_0 \frac{d}{d\mathbf{c}}(4\Delta_0^3\Delta_2 + 6\Delta_0^2\Delta_1^2) - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{4}\mathbf{q}_1 \frac{d}{d\mathbf{c}}(4\Delta_0^3\Delta_1) - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{4}\mathbf{q}_2 \frac{d\Delta_0^4}{d\mathbf{c}} = \mathbf{q}_2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\frac{d^2\mathbf{q}_2}{d\mathbf{c}^2} = \frac{\mathbf{q}_0}{\Delta_0} \left[ \frac{\mathbf{q}_1}{\mathbf{q}_0} - \frac{\Delta_1}{\Delta_0} \right] \quad (3.36)$$

con las siguientes condiciones iniciales y de frontera

$$\Delta_i(0) = \mathbf{q}_0(1) - 1 = \left. \frac{d\mathbf{q}_i}{d\mathbf{c}} \right|_{\mathbf{c}=0} = 0, \text{ para todo } i \quad (3.37)$$

$$\mathbf{q}_i(1) = 0, \text{ para toda } i > 0 \quad (3.38)$$

IV.- Se resuelven las ecuaciones obtenidas en el punto III, Iniciando desde el orden ( $\mathbf{a}^0$ ) hasta el orden ( $\mathbf{a}^{-2}$ ).

Siguiendo este orden, se integran las ecs. (3.32) y (3.31), con sus correspondientes condiciones de frontera obteniendo  $\mathbf{q}_0$  y  $\Delta_0$  como se muestra a continuación

$$\mathbf{q}_0 = 1 \quad (3.39)$$

$$\Delta_0 = \left( \frac{4}{4 - \mathbf{b}} \right)^{\frac{1}{4}} \mathbf{c}^{\frac{1}{4}} \quad (3.40)$$

Introduciendo las soluciones de  $\mathbf{q}_0$  y  $\Delta_0$  en la ec. (3.34) e integrando dos veces y aplicando las condiciones de frontera correspondientes se obtiene  $\mathbf{q}_1$ , dada por

$$\mathbf{q}_1 = \frac{8}{21} \sqrt{2} (4 - \mathbf{b})^{\frac{1}{4}} \left[ \mathbf{c}^{\frac{7}{4}} - 1 \right], \quad (3.41)$$

de manera equivalente se sustituyen los valores de  $\mathbf{q}_0$ ,  $\Delta_0$  y  $\mathbf{q}_1$  en la ec. (3.33) y se integra una vez para determinar  $\Delta_1$ , donde

$$\Delta_1 = \frac{4}{21} \left( \frac{4}{11} \mathbf{c}^2 - \mathbf{c}^{\frac{1}{4}} \right) + \frac{\mathbf{b}}{(4 - \mathbf{b})} \left( \frac{160}{693} \mathbf{c}^2 - \frac{4}{21} \mathbf{c}^{\frac{1}{4}} \right). \quad (3.42)$$

Por último con los valores de  $\mathbf{q}_0$ ,  $\Delta_0$ ,  $\mathbf{q}_1$  y  $\Delta_1$  se determina de manera equivalente  $\mathbf{q}_2$  y en seguida se obtiene  $\Delta_2$  obteniendo

$$\mathbf{q}_2 = \left[ \frac{64}{1617}(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{1}{2}} - \frac{64}{4851} \frac{\bar{\mathbf{b}}}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{1}{2}}} \right] \mathbf{c}^{\frac{7}{2}} + \left[ \frac{32}{441} \frac{\bar{\mathbf{b}}}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{1}{2}}} - \frac{32}{147}(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{1}{2}} \right] \mathbf{c}^4 + \frac{32}{539} \left[ 3(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{1}{2}} - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{1}{2}}} \right], \quad (3.43)$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} \Delta_2(\mathbf{c}) = & \frac{\sqrt{2}}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{3}{4}}} \left\{ \frac{515168}{4322241} \frac{\bar{\mathbf{b}}^2}{(4-\bar{\mathbf{b}})} + \frac{65024}{1440747} \bar{\mathbf{b}} - \frac{5120}{53361} \frac{\bar{\mathbf{b}}}{(4-\bar{\mathbf{b}})} \right. \\ & - \frac{25600}{160083} \frac{\bar{\mathbf{b}}^2}{(4-\bar{\mathbf{b}})^2} + \frac{6400}{160083} \frac{\bar{\mathbf{b}}^3}{(4-\bar{\mathbf{b}})^2} + \frac{32}{14553}(4-\bar{\mathbf{b}}) - \frac{256}{17787} \left. \right\} \mathbf{c}^{\frac{15}{4}} \\ & + \frac{\sqrt{2}}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{3}{4}}} \left\{ \frac{544}{4851} \frac{\bar{\mathbf{b}}^2}{(4-\bar{\mathbf{b}})} - \frac{32}{147} \frac{\bar{\mathbf{b}}}{(4-\bar{\mathbf{b}})} + \frac{628}{4851} \bar{\mathbf{b}} - \frac{16}{147} \frac{\bar{\mathbf{b}}^2}{(4-\bar{\mathbf{b}})^2} \right. \\ & + \frac{4}{147} \frac{\bar{\mathbf{b}}^3}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{1}{2}}} + \frac{24}{539}(4-\bar{\mathbf{b}}) - \frac{16}{147} \left. \right\} \mathbf{c}^{\frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{3}{4}}} \left\{ \frac{1280}{4851} \frac{\bar{\mathbf{b}}^2}{(4-\bar{\mathbf{b}})^2} \right. \\ & - \frac{3488}{14553} \frac{\bar{\mathbf{b}}^2}{(4-\bar{\mathbf{b}})} - \frac{256}{1323} \bar{\mathbf{b}} + \frac{1664}{4851} \frac{\bar{\mathbf{b}}}{(4-\bar{\mathbf{b}})} - \frac{320}{4851} \frac{\bar{\mathbf{b}}^3}{(4-\bar{\mathbf{b}})^2} \\ & \left. - \frac{32}{1617}(4-\bar{\mathbf{b}}) + \frac{128}{1617} \right\} \mathbf{c}^2 \end{aligned} \quad (3.44)$$

V.- Finalmente se sustituyen los valores de  $\mathbf{q}_0$ ,  $\mathbf{q}_1$  y  $\mathbf{q}_2$  en la ec. (3.27) para obtener la solución de la temperatura adimensional en la aleta en la dirección longitudinal, representándose como

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(\mathbf{c}) = & 1 + \frac{1}{\mathbf{a}} \frac{8}{21} \sqrt{2} (4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{1}{4}} \left[ \mathbf{c}^{\frac{7}{4}} - 1 \right] + \frac{1}{\mathbf{a}^2} \left\{ \left[ \frac{64}{1617}(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{1}{2}} - \frac{64}{4851} \frac{\bar{\mathbf{b}}}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{1}{2}}} \right] \mathbf{c}^{\frac{7}{2}} \right. \\ & \left. + \left[ \frac{32}{441} \frac{\bar{\mathbf{b}}}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{1}{2}}} - \frac{32}{147}(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{1}{2}} \right] \mathbf{c}^4 + \frac{32}{539} \left[ 3(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{1}{2}} - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{1}{2}}} \right] \right\} + O(\mathbf{a}^{-3}) \end{aligned} \quad (3.45)$$

De la misma forma sustituyendo  $\Delta_0$ ,  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  en la ec. (3.28) se obtiene el espesor adimensional de la película de condensado, escribiéndose como

$$\begin{aligned}
\Delta(\mathbf{c}) = & \left( \frac{4}{4-\bar{\mathbf{b}}} \right)^{\frac{1}{4}} \mathbf{c}^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\mathbf{a}} \left\{ \frac{4}{21} \left( \frac{4}{11} \mathbf{c}^2 - \mathbf{c}^{\frac{1}{4}} \right) + \frac{\bar{\mathbf{b}}}{(4-\bar{\mathbf{b}})} \left( \frac{160}{693} \mathbf{c}^2 - \frac{4}{21} \mathbf{c}^{\frac{1}{4}} \right) \right\} \\
& + \frac{\sqrt{2}}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{3}{4}}} \frac{1}{\mathbf{a}^2} \left\{ \frac{515168}{4322241} \frac{\bar{\mathbf{b}}^2}{(4-\bar{\mathbf{b}})} + \frac{65024}{1440747} \bar{\mathbf{b}} - \frac{5120}{53361} \frac{\bar{\mathbf{b}}}{(4-\bar{\mathbf{b}})} \right. \\
& - \frac{25600}{160083} \frac{\bar{\mathbf{b}}^2}{(4-\bar{\mathbf{b}})^2} + \frac{6400}{160083} \frac{\bar{\mathbf{b}}^3}{(4-\bar{\mathbf{b}})^2} + \frac{32}{14553} (4-\bar{\mathbf{b}}) - \frac{256}{17787} \left. \right\} \mathbf{c}^{\frac{15}{4}} \\
& + \frac{\sqrt{2}}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{3}{4}}} \frac{1}{\mathbf{a}^2} \left\{ \frac{544}{4851} \frac{\bar{\mathbf{b}}^2}{(4-\bar{\mathbf{b}})} - \frac{32}{147} \frac{\bar{\mathbf{b}}}{(4-\bar{\mathbf{b}})} + \frac{628}{4851} \bar{\mathbf{b}} - \frac{16}{147} \frac{\bar{\mathbf{b}}^2}{(4-\bar{\mathbf{b}})^2} \right. \\
& + \frac{4}{147} \frac{\bar{\mathbf{b}}^3}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{1}{2}}} + \frac{24}{539} (4-\bar{\mathbf{b}}) - \frac{16}{147} \left. \right\} \mathbf{c}^{\frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{3}{4}}} \frac{1}{\mathbf{a}^2} \left\{ \frac{1280}{4851} \frac{\bar{\mathbf{b}}^2}{(4-\bar{\mathbf{b}})^2} \right. \\
& - \frac{3488}{14553} \frac{\bar{\mathbf{b}}^2}{(4-\bar{\mathbf{b}})} - \frac{256}{1323} \bar{\mathbf{b}} + \frac{1664}{4851} \frac{\bar{\mathbf{b}}}{(4-\bar{\mathbf{b}})} - \frac{320}{4851} \frac{\bar{\mathbf{b}}^3}{(4-\bar{\mathbf{b}})^2} \\
& \left. - \frac{32}{1617} (4-\bar{\mathbf{b}}) + \frac{128}{1617} \right\} \mathbf{c}^2 + O(\mathbf{a}^{-3})
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Con lo anterior queda determinado, de manera analítica la temperatura  $q_w(\mathbf{c})$  y el espesor de la capa de condensado  $\Delta(\mathbf{c})$ , a lo largo de la aleta, este resultado será comparado en el siguiente capítulo del presente trabajo con el resultado numérico que se obtenga de las ecuaciones que gobiernan el problema.

### 3.2 ANÁLISIS DEL ESQUEMA NUMÉRICO CERCA DE LOS VALORES CRÍTICOS

Con el propósito de completar esta sección, se presenta el método para llevar a cabo la integración numérica de las ecuaciones 3.25 y 3.26 con valores en la frontera transformándolo a un problema con valor inicial y con un solo parámetro  $\bar{\mathbf{b}}$ . Lo anterior se logra introduciendo las siguientes variables adimensionales  $\mathbf{z}$  y  $\mathbf{f}$ .

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}^{\frac{4}{7}}}, \quad \mathbf{f} = \frac{\Delta^4}{\mathbf{a}^{\frac{4}{7}}}, \quad (3.47)$$

al sustituir las nuevas variables adimensionales descritas en ec. (3.47) en las ecuaciones (3.25) y (3.26) se transforman en,

$$\frac{d^2 \mathbf{q}_w}{d\mathbf{z}^2} = \frac{\mathbf{q}_w}{\mathbf{f}^{\frac{1}{4}}} \quad (3.48)$$

$$-\frac{\bar{\mathbf{b}}}{3} \mathbf{f} \frac{d\mathbf{q}_w}{d\mathbf{z}} + \left(1 - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{4} \mathbf{q}_w\right) \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{z}} = \mathbf{q}_w. \quad (3.49)$$

Con el objeto de definir las condiciones iniciales de las ecuaciones anteriores se requiere conocer al inicio el valor de la temperatura en el borde principal de la aleta. Por lo que para cualquier valor inicial de  $\mathbf{q}_{wl} < 1$ , la temperatura adimensional en la pared de la aleta  $\mathbf{q}_w$  en  $\mathbf{z} = 0$  se escribe como,

$$\mathbf{q}_w(\mathbf{z} = 0) = \mathbf{q}_{wl}, \quad \text{en} \quad \mathbf{z} = 0 \quad (3.50)$$

y también,

$$\frac{d\mathbf{q}_w}{d\mathbf{z}} = 0, \quad \text{en} \quad \mathbf{z} = 0 \quad (3.51)$$

$$\mathbf{f} = 0, \quad \text{en} \quad \mathbf{z} = 0 \quad (3.52)$$

Para la solución del sistema de ecuaciones diferenciales con valores iniciales (3.48 y 3.49) se implementó el método de "shooting", y la integración numérica de las ecuaciones se realizó mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Para poder aplicar dicho algoritmo, se requiere conocer el valor de la temperatura en el borde principal de la aleta,  $\mathbf{q}_{wl}$ . Con la subrutina "shooting", se propone un valor de temperatura en el borde,  $\mathbf{q}_{wl}$ , resuelve el sistema de ecuaciones mediante Runge-Kutta, para este valor de temperatura supuesto se almacena en memoria los valores de temperatura correspondientes al borde secundario de la pared de la aleta, ya que debe cumplirse con la condición  $\mathbf{q}(\mathbf{c} = 1) = 1$ , ó hasta que se alcance  $\mathbf{q}(\mathbf{z}_f) = 1$ . En el siguiente paso, la sub-rutina establece otro valor de temperatura para el borde principal,  $\mathbf{q}_{wl}$ , nuevamente el sistema de ecuaciones diferenciales registra los valores de temperatura de la aleta del borde secundario. Con las dos iteraciones anteriores se interpola linealmente para satisfacer la condición  $\mathbf{q}(\mathbf{c} = 1) = 1$  ó hasta que se alcance  $\mathbf{q}(\mathbf{z}_f) = 1$ , en el borde de salida y poder así

obtener el valor adecuado de temperatura en el borde principal de la aleta. Para este valor de  $q_{wl}$  calculado, se obtiene la solución de las ecuaciones que representan el perfil de temperatura adimensional en la pared de la aleta y el espesor adimensional del condensado.

Los valores de  $q_{wl}$  y  $\Delta$  son necesarios para iniciar la integración numérica de las ecuaciones, por lo tanto se requiere conocer sus valores asintóticos, cerca del borde superior de la aleta, es decir cuando  $z \rightarrow 0$ .

$$q_w = q_{wl} + \frac{16}{21} q_{wl}^{3/4} \left( 1 - \frac{\bar{b}}{4} q_{wl} \right)^{1/4} z^{7/4} + \dots \quad \text{en } z \rightarrow 0 \quad (3.53)$$

y

$$f = \left( \frac{q_{wl}}{1 - \frac{\bar{b}}{4} q_{wl}} \right) z + \dots \quad \text{en } z \rightarrow 0 \quad (3.54)$$

en la ec. (3.53) el valor de  $a$  disminuye y  $q_{wl}$  también; como veremos en las gráficas de las soluciones de la de la temperatura adimensional, en la siguiente sección, hay un valor crítico de  $a = a^* = 0.040\dots$ , para el que  $q_{wl}(z=0) = 0$ .

# ***CAPITULO IV***

## ***ANÁLISIS DE RESULTADOS***

*En este capítulo se presentan los resultados numéricos y analíticos de la temperatura y del espesor adimensionales para distintos valores de los parámetros  $\bar{b}$  y  $\mathbf{a}$ . Por otro lado para la solución numérica se muestran los números de Nusselt local y promedio para diferentes valores de los parámetros involucrados. Para determinar el flujo másico de condensado se presentan los resultados numéricos del espesor característico adimensional en la base de la aleta  $\Delta_f$ . Finalmente, se hace la comparación de la solución asintótica con la numérica de  $\mathbf{q}_w(\mathbf{c})$  y  $\Delta(\mathbf{c})$ .*

#### 4.1 ANÁLISIS PARAMÉTRICO DE LOS RESULTADOS NUMÉRICOS Y ANALÍTICOS.

Los resultados numéricos para las ecuaciones acopladas entre la aleta y el fluido condensado (ecs. 3.53, 3.54) se presentan en esta sección mediante las figuras (4-1)-(4-10). En las figuras 4-1, 4-2 y 4-3, se muestra la solución numérica para la temperatura adimensional en dirección longitudinal de la aleta  $q_w(c)$ , para tres valores del parámetro  $\bar{b} = 1.0, 0.5, 0.05$  con  $a = 40, 10, 5, 1, 0.5, 0.1, a^*$ , en el régimen de pared térmicamente delgada.  $\bar{b}$  es el parámetro adimensional que contribuye en la variación de la viscosidad y depende de la máxima variación de temperatura del sistema  $\Delta T$  en unidades físicas, siendo que cuando  $\Delta T$  crece ó  $T_0$  disminuye entonces  $\bar{b}$  crece linealmente y su consideración en las ecuaciones del problema conjugado de transferencia de calor tiene efectos importantes en el comportamiento de  $q(c)$  y  $\Delta(c)$  como se muestra a continuación.

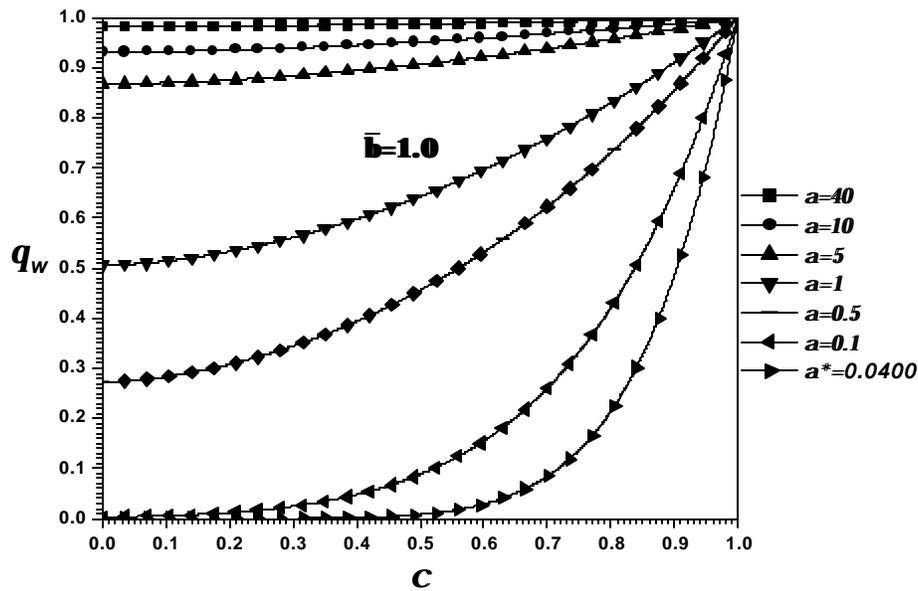


Figura 4-1. Solución numérica del perfil de temperatura,  $q_w(c)$  como una función de la coordenada longitudinal  $c$ , con un  $\bar{b} = 1$ , para distintos valores de  $a$  y para el valor crítico de  $a^*$ .

Para valores grandes de  $a$ , las  $q_w(c)$  se aproximan a la solución clásica de Nusselt,  $q_w(c) \approx 1$ , es decir como se ve en las figuras (4-1)-(4-3), cuando  $a = 40$  el valor de la temperatura adimensional de la aleta tiende al valor de uno para todo valor de  $c$ , esto indica que la temperatura en la pared de la aleta  $T_w$  se aproxima a la temperatura de la base de la aleta  $T_0$ , tratándose de una pared isotérmica, por tanto no hay flujo de calor en la dirección longitudinal  $x$  como lo considera el análisis de Nusselt (1916).

Cuando los valores de  $a$  disminuyen, la temperatura adimensional  $q_w(c)$  también, así mismo las variaciones de la temperatura adimensional a lo largo de la coordenada longitudinal crecen con  $c$  hasta que  $q_w(c=L) \approx 1$  esto significa que el valor de la temperatura en la pared de la aleta  $T_w$ , se aproxima al valor de la temperatura en la base de la aleta  $T_0$ .

Para valores pequeños de  $a$ , como  $a = 0.1$  ó  $a^* \approx 0.0400\dots$ , la temperatura en el tope de la aleta  $T_w(x=0)$  se acerca a la temperatura de saturación del vapor  $T_s$ , de tal forma que la temperatura adimensional debe ser  $q_w(c=0) = 0$ , y se observa que para  $c < 0.4$  no hay condensación de vapor en la aleta permaneciendo seca esta zona de la aleta debido al equilibrio termodinámico entre el vapor y la superficie de la aleta, como se muestra en las Figs. (4-1)-(4-3).

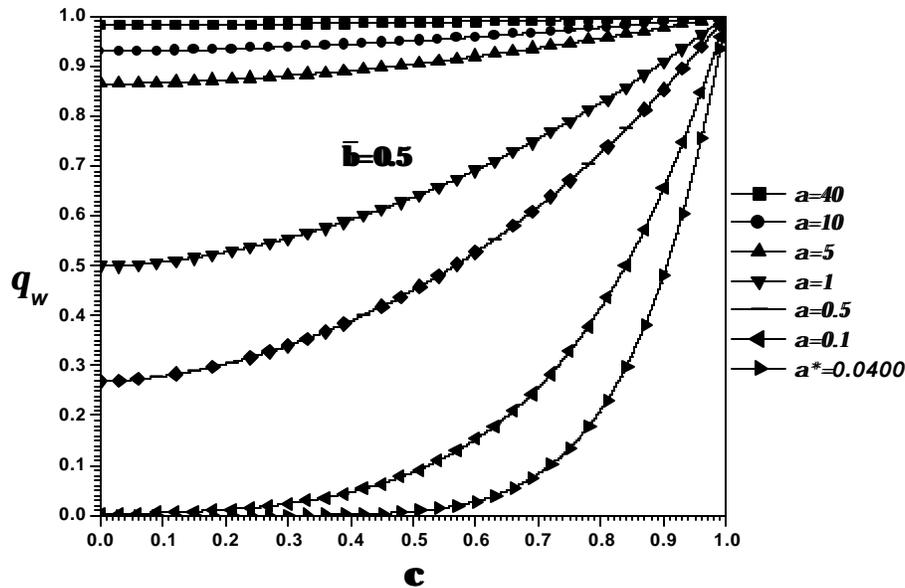


Figura 4-2. Solución numérica del perfil de temperatura,  $q_w(c)$  como una función de la coordenada longitudinal  $c$ , con un  $\bar{b} = 0.5$ , para distintos valores de  $a$  y para el valor crítico de  $a^*$ .

Por otro lado, el parámetro adimensional  $\bar{b}$  no tiene fuerte influencia sobre la temperatura adimensional  $q_w(c)$ , ya que este no modifica sustancialmente los perfiles de temperatura en la aleta, siendo de mayor interés para el caso de una aleta o pared isotérmica.

En las figuras 4-4, 4-5 y 4-6 se presenta la solución numérica del espesor adimensional de la película de condensado,  $\Delta(c)$ , para tres valores del parámetro  $\bar{b} = 1, 0.5, 0.05$  con  $a = 40, 10, 5, 1, 0.5, 0.1, a^*$  en el régimen de pared térmicamente delgada. Para valores  $a \rightarrow \infty$  y  $\bar{b} \rightarrow 0$  el crecimiento de la película de condensado se aproxima a la calculada en la teoría de Nusselt, para el caso de una aleta o pared isotérmica considerando la viscosidad constante. Por

ejemplo cuando  $a = 40$ , el espesor adimensional de la película se comporta de la forma  $\Delta(c) \sim c^{\frac{1}{4}}$  y para  $a \gg 40$  la influencia de este parámetro es totalmente despreciable sobre el crecimiento del espesores al no modificarlo sustancialmente como se muestra en las figuras antes mencionadas.

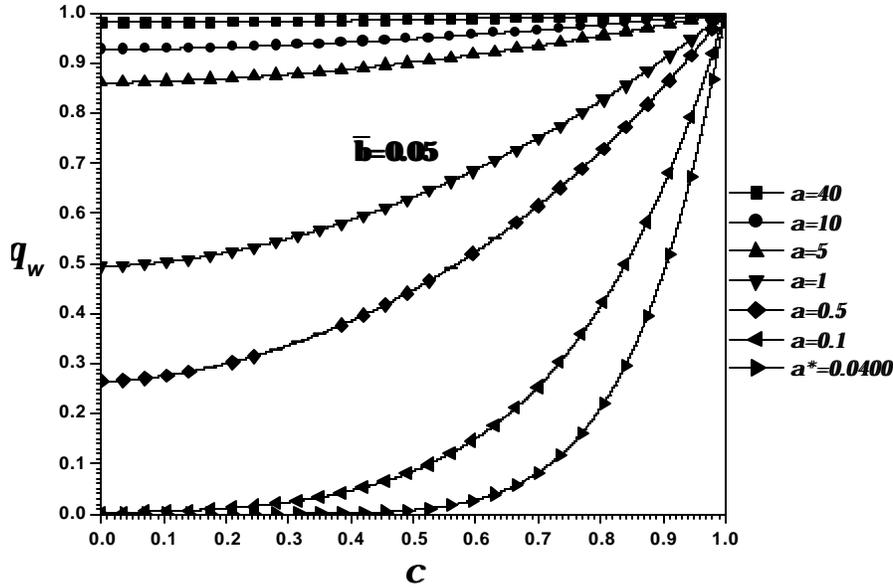


Figura 4-3. Solución numérica del perfil de temperatura,  $q_w(c)$  como una función de la coordenada longitudinal  $c$ , con un  $\bar{b} = 0.05$ , para distintos valores de  $a$  y para el valor crítico de  $a^*$ .

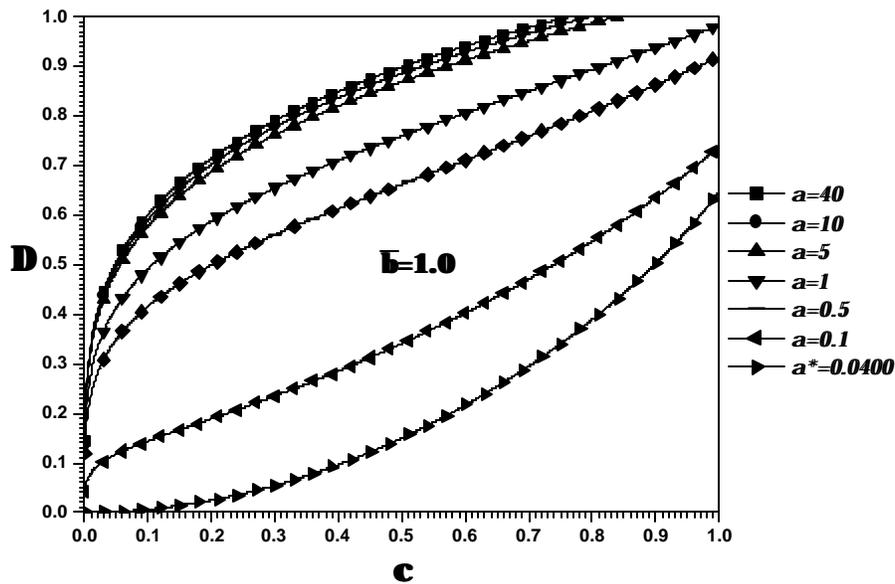


Figura 4-4. Solución numérica del espesor adimensional de la capa de condensado  $\Delta$ , como una función de la coordenada  $c$ , para diferentes valores del parámetro  $a$  y  $\bar{b} = 1.0$  con un valor crítico de  $a^*$ .

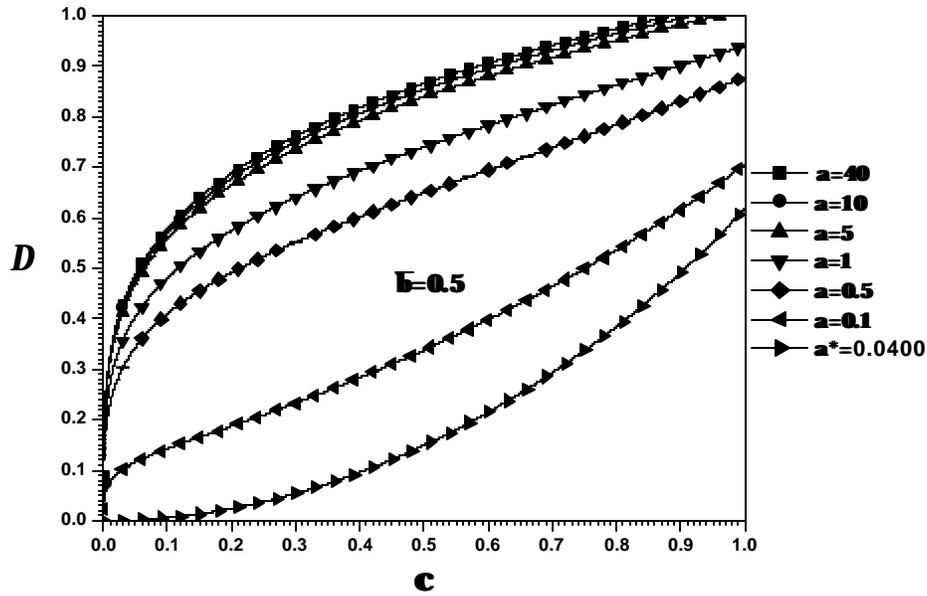


Figura 4-5. Solución numérica del espesor adimensional de la capa de condensado  $\Delta$ , como una función de la coordenada  $c$ , para diferentes valores del parámetro  $a$  y del valor crítico  $a^*$  y un  $\bar{b} = 0.5$ .

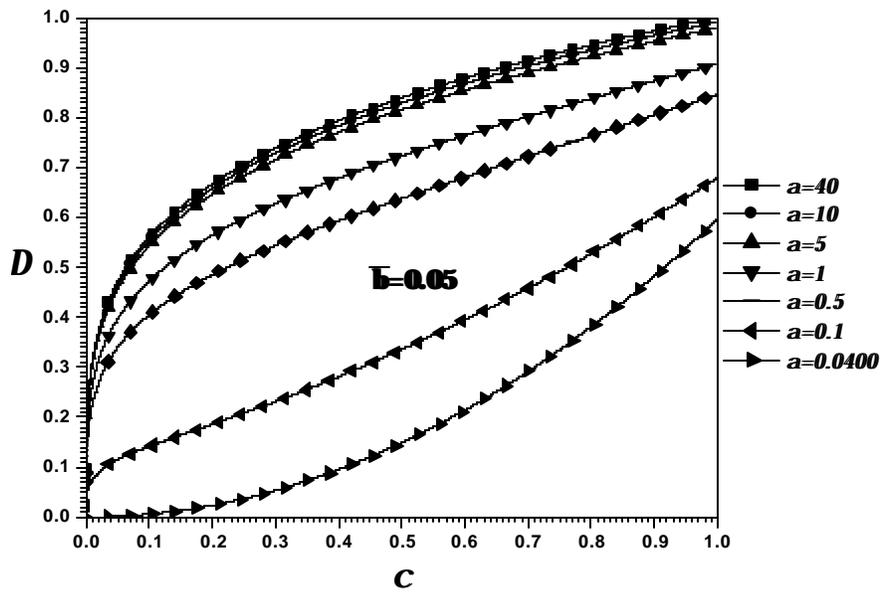


Figura 4-6. Solución numérica del espesor adimensional de la capa de condensado  $\Delta$ , como una función de la coordenada  $c$ , para diferentes valores del parámetro  $a$  y del valor crítico  $a^*$  con un  $\bar{b} = 0.05$ .

Al comparar las figuras 4-4, 4-5 y 4-6, se observa que cuando  $\bar{b}$  aumenta, el espesor adimensional de la película también crece, siendo mas significativos para  $\bar{b} = 1.0$ , con  $a = 40, 10, 5, 1, 0.5$ . Respecto al valor crítico de  $a \approx a^*$ , para  $\bar{b} = 1.0, 0.5, 0.05$  se obtienen los espesores  $\Delta(0.071) = 0.004$ ,  $\Delta(0.0726) = 0.004$  y  $\Delta(0.10) = 0.004$  respectivamente, esto

significa que en  $c < 0.071$ ,  $c < 0.0726$ ,  $c < 0.10$  existe dificultad para que la película de condensado comience a formarse permaneciendo esta zona de la aleta seca, debido al equilibrio termodinámico entre el vapor saturado y la superficie de la aleta donde  $T_w = T_s$  en unidades físicas.

Para cuantificar la cantidad de calor que se transfiere durante el proceso de condensación se obtuvieron las gráficas para el número de Nusselt local modificado ec. (3.19),  $Nu_c$ , (figuras 4-7, 4-8 y 4-9) en función de la coordenada  $c$  para  $b = 1.0, 0.5$  y  $0.05$  con valores de  $a = 40, 10, 5, 1, 0.5, 0.1, a^*$ .

Cuando el parámetro adimensional  $\bar{b}$  crece, el número de Nusselt local,  $Nu_c$ , disminuye. Cuando el espesor adimensional de la capa de condensado  $\Delta(c)$  aumenta, este ofrece mayor resistencia térmica a la transferencia de calor. La variación del número de Nusselt con  $\bar{b}$  es notoria para valores de  $a : 5, 10$  y  $40$ , aproximándose a la solución de Nusselt,  $Nu_c \sim c^{-1/4}$ , cuando  $a \rightarrow \infty$ ; siendo que para nuestro estudio, la cantidad de calor transferido es menor que la obtenida por Nusselt. Con valores de  $a = a^*, 0.1, 0.5, 1$ , el parámetro  $\bar{b}$  no influye en  $Nu_c$ , pero para  $a \approx a^*$  se tienen las máximas variaciones de  $Nu_c$  para  $c \approx 1$  (base de aleta) ya que la temperatura de la pared  $T_w \rightarrow T_0$  rápidamente.

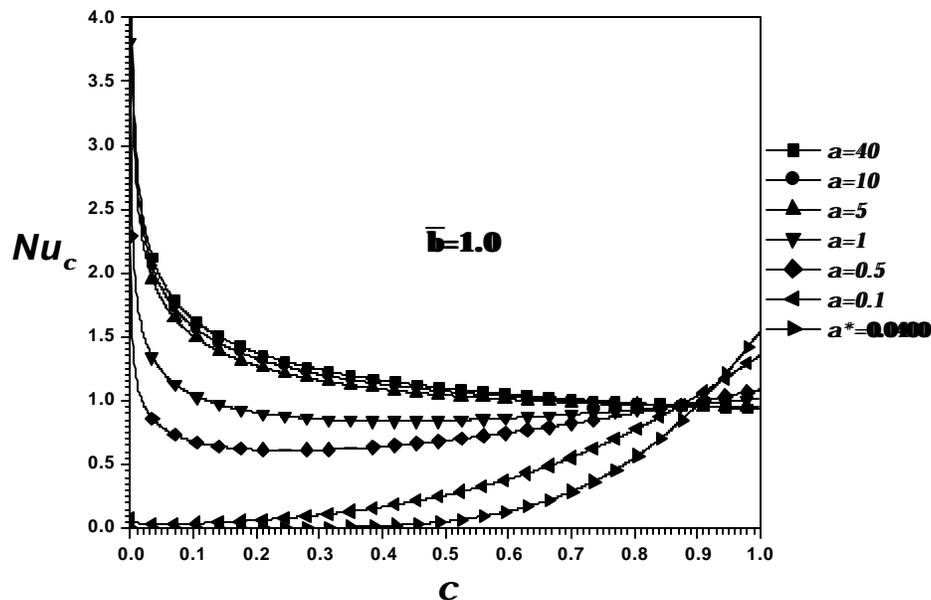


Figura 4-7. Solución numérica del número de Nusselt local modificado, para distintos valores de  $a$  y un  $\bar{b} = 1$ , con un valor crítico de  $a^*$

En las figuras 47, 48 y 49 se tiene que para valores de  $a = 5, 10, 40$  la tendencia de las soluciones del número de Nusselt son similares, de forma que cuando  $c \rightarrow 1$  el valor de  $Nu_c \approx 1$ . Sin embargo para  $a = 0.1, 0.04 \dots$  y  $c < 0.3$  la transferencia de calor adimensional alcanza ordenes prácticamente de  $Nu_x \approx 0$ .

La intersección de las curvas en  $c \approx 0.88$  para  $a = 0.5, 1$  se debe a que la película de condensado se adelgaza de manera significativa disminuyendo la producción de condensado ya que la diferencia de temperatura entre el vapor saturado y la temperatura de la pared de la aleta disminuye; por otro lado para  $a = 0.05$ ,  $a^*$  literalmente no hay condensación en la parte superior derecha de la aleta, lo que se traduce en que una parte de la aleta se conserva seca, por ejemplo haciendo referencia a la figura (4-9), se determina que con  $c = 0.2377$  el número de Nusselt local es  $Nu_c = 0.001306$ .

Así mismo para  $a = 0.05$ ,  $a^*$  el número de Nusselt, tiene un rápido crecimiento cuando  $c \rightarrow 1$  (en la base de la aleta) por causa de que la resistencia térmica a la transferencia de calor en esta zona disminuye considerablemente, por ejemplo para  $a = 0.05$ ,  $a^*$  la película de condensado se forma a partir  $c = 0.1$  lo que hace que el crecimiento de la película para  $c > 0.1$  es menor que para  $a > 5$ .

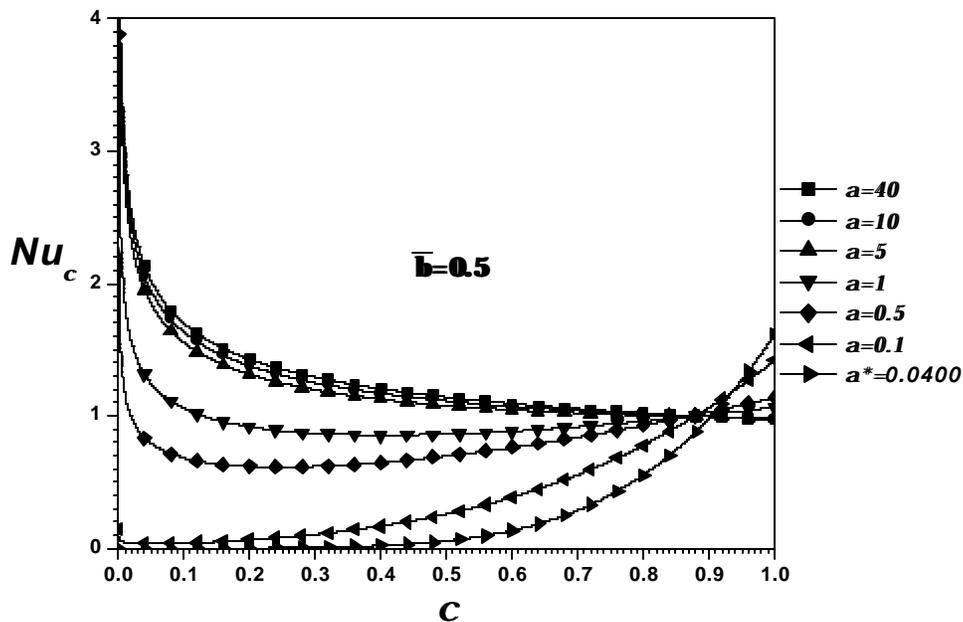


Figura 4-8. Solución numérica del número de Nusselt local modificado, para distintos valores de  $a$  y un  $\bar{b} = 0.5$ , con un valor crítico de  $a^*$

Cuando se considera constante la temperatura de la aleta, el número de Nusselt es mayor que en el caso de temperatura variable, ya que  $\bar{b}$  influye en el crecimiento del espesor adimensional del

condensado aumentando con esto la resistencia térmica a la transferencia de calor, entonces considerar el modelo de Nusselt para el diseño de condensadores se podría incurrir en diseños sobreestimados e ineficientes.

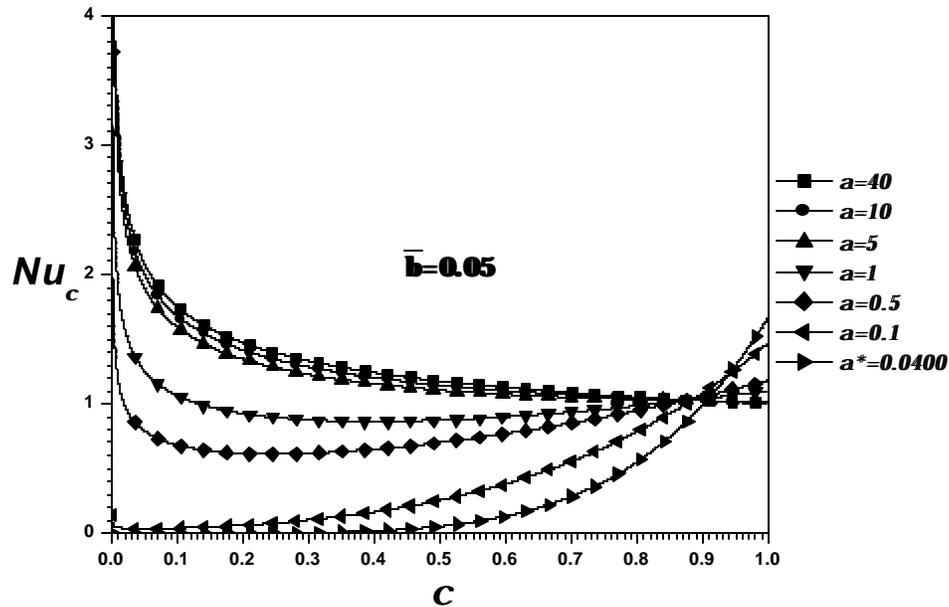


Figura 4-9. Solución numérica del número de Nusselt local modificado, para distintos valores de  $a$  y un  $\bar{b} = 0.05$ , con un valor crítico de  $a^*$

En referencia a la figura 4-9, se muestra que con  $\bar{b} = 0.05$  y  $a^* \approx 0.04$  el valor del número de Nusselt local tiende al valor de cero, esto ocurre para  $c < 0.35778$  lo cual indica que bajo estas condiciones, la transferencia de calor en esta longitud de la aleta es despreciable por razones de equilibrio termodinámico entre la pared de la aleta y el vapor saturado.

En la figura 4-10, se presenta el número de Nusselt promedio como función del parámetro adimensional  $\bar{b}$  definido en la ecuación (3.21), para distintos valores de  $a = 40, 10, 5, 1, 0.5, 0.1, a^*$ . Cuando  $a \rightarrow \infty$  se obtiene la solución de Nusselt con altos coeficientes de transferencia de calor. Para un  $a = 40$  la influencia es mínima sobre el número de Nusselt ya que este no se modifica sustancialmente.

Pero para valores muy pequeños de  $a$ , por ejemplo  $a^* \approx 0.0400$ , el número de Nusselt promedio se mantiene constante, para todo valor de  $\bar{b}$  y conforme este último parámetro crece,  $\bar{Nu}$  disminuye para cada valor de  $a$ , ya que el espesor adimensional aumenta cuando crece  $\bar{b}$ , y como consecuencia la resistencia térmica al flujo de calor en la condensación disminuye, con

esto se demuestra en el análisis del problema conjugado de la aleta y el condensado se obtienen coeficientes de transferencia de calor menores a los que reporta el análisis de Nusselt [1].

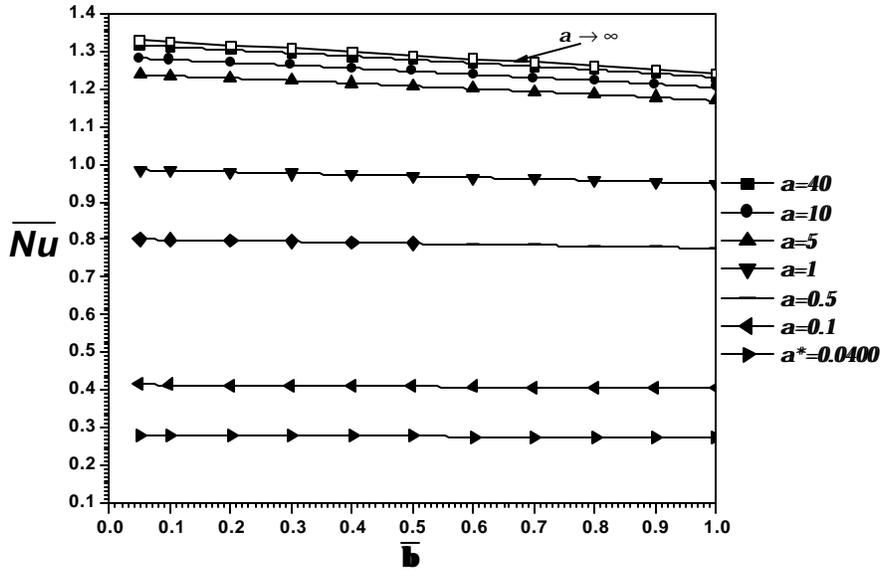


Figura 4-10. Solución numérica del número de Nusselt promedio modificado, como función del parámetro  $\bar{b}$  para distintos valores de  $a$  y para un valor crítico de  $a = a^*$

A continuación se presenta la solución del espesor adimensional en la base de la aleta,  $\Delta_f$ , en función del parámetro  $\bar{b}$ , para valores de  $a = 40, 10, 5, 1, 0.5, 0.1, a^*$ . El máximo espesor adimensional del condensado se tiene en la base de la aleta cuando  $c = 1$ , y esta claro que cuando  $\bar{b}$  disminuye, la película se adelgaza, Fig 4 11, aumentando la transferencia de calor adimensional,  $\overline{Nu}$  como se observa en la figura 4-10.

Con el objeto de cuantificar la cantidad de condensado en la aleta, primero se presenta la ecuación para calcular el flujo másico de condensado  $(m'_c)_\infty$ , para una placa o aleta vertical isotérmica, propuesta por Nusselt,

$$(m'_c)_\infty = \frac{r_c n_{c0}^{\frac{1}{2}}}{3} \left( \frac{4g^{\frac{1}{3}} L l_c \Delta T}{h_{fg} m_{c0}} \right)^{\frac{3}{4}}, \tag{4.1}$$

por otro lado el flujo másico de condensado para el caso de una aleta no-isotérmica y considerando la viscosidad constante fue presentada por F. Méndez [18], como

$$m'_c = \frac{\mathbf{r}_c \mathbf{n}_{c0}^{\frac{1}{2}}}{3} \left( \frac{4g^{\frac{1}{3}} L I_c \Delta T}{h_{fg} \mathbf{m}_{t0}} \right)^{\frac{3}{4}} \Delta_f^3. \quad (4.2)$$

En el presente trabajo el flujo másico de condensado en la base de la aleta tomando en cuenta la viscosidad variable del condensado, en función de  $\bar{\mathbf{b}}$ ,  $\mathbf{a}$  y  $\Delta_f$  esta dada por,

$$m'_c = \left( 1 - \frac{1}{4} \bar{\mathbf{b}} \right) \frac{\mathbf{r}_c \mathbf{n}_{c0}^{\frac{1}{2}}}{3} \left( \frac{4g^{\frac{1}{3}} L I_c \Delta T}{h_{fg} \mathbf{m}_{t0}} \right)^{\frac{3}{4}} \Delta_f^3, \quad (4.3)$$

con el objeto de simplificar la ecuación anterior si, nombramos  $\Pi = \frac{4g^{1/3} \mathbf{r}_c^{2/3} L I_c \Delta T}{h_{fg} \mathbf{m}_{t0}^{2/3}}$ , entonces la ecuación (4.3), se puede escribir como,

$$m'_c = \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \bar{\mathbf{b}} \right) \Pi^{3/4} \Delta_f^3 (\mathbf{a}, \bar{\mathbf{b}}) \quad (4.4)$$

donde  $\mathbf{m}_{t0}$  es el valor de la viscosidad de referencia del fluido a una temperatura de referencia  $T_{c0}$  [19]. Los resultados obtenidos para  $\Delta_f$  en la figura 4-11 fueron utilizados para determinar la relación del flujo másico de condensado  $m'_c$ , en función de  $\bar{\mathbf{b}}$  y para valores de  $\mathbf{a} = 40, 10, 5, 1, 0.5, 0.1, \mathbf{a}^*$  como se muestra en la Fig. 4-12.

En esta figura se muestra que si el valor de  $\bar{\mathbf{b}}$  crece, el flujo másico de condensado  $m'_c$ , también. El máximo flujo de condensado se obtiene en la base de la aleta para un  $\bar{\mathbf{b}} \rightarrow 1$  y  $\mathbf{a} \approx 40$  según la Fig. 4-12. Para el valor crítico  $\mathbf{a}^* \approx 0.04$  el flujo másico de condensado no se modifica sustancialmente permaneciendo constante para todo valor de  $\bar{\mathbf{b}}$ .

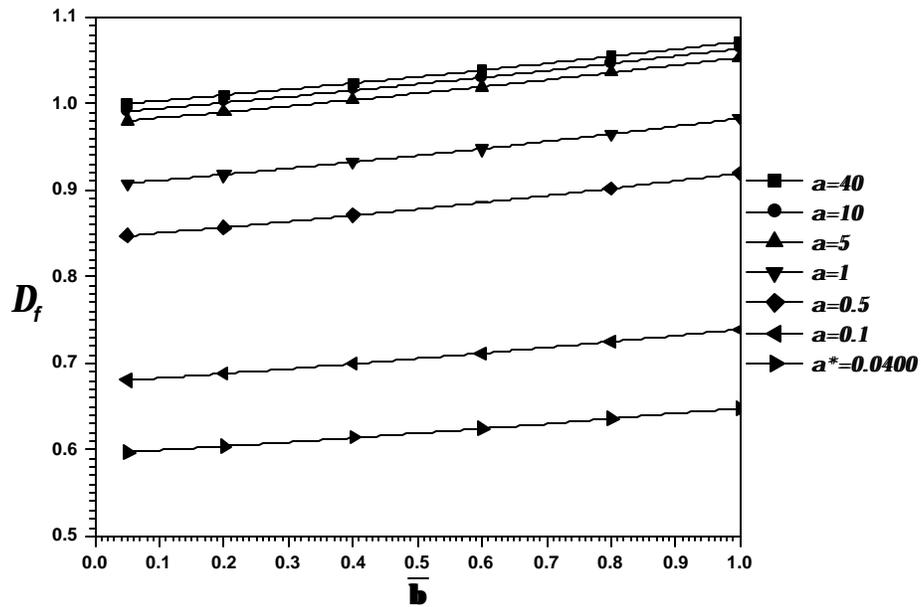


Figura 4-11. Solución numérica del espesor adimensional en la base de la aleta como función del parámetro  $\bar{b}$  para distintos valores de  $a$  y para un valor crítico de  $a = a^*$ .

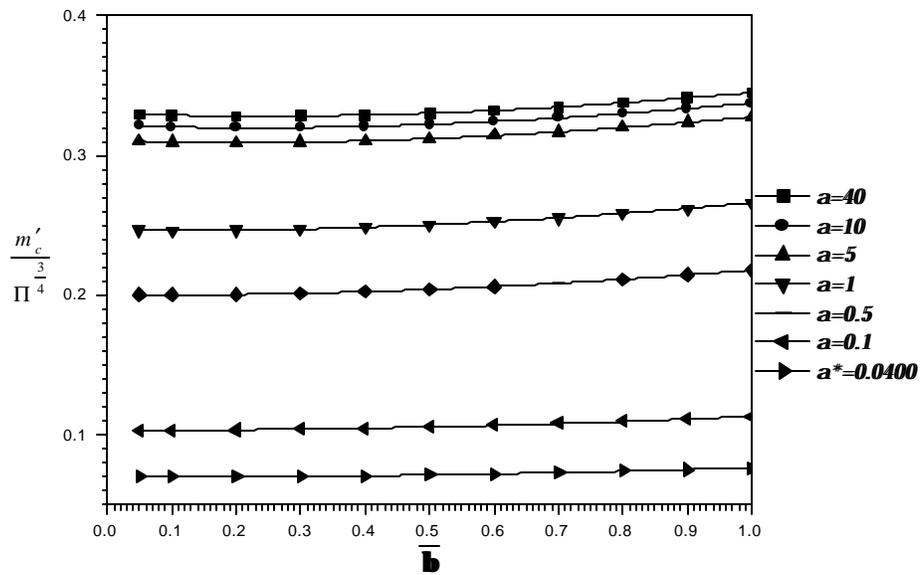


Figura 4-12. Relación del Flujo másico de condensado y del parámetro  $\Pi$ , en función de  $\bar{b}$  para distintos valores de  $a$  y para el valor crítico  $a^*$ .

La eficiencia de la aleta durante el proceso de condensación esta dada por la siguiente relación de flujos máscicos de condensado,

$$\mathbf{h} = \frac{m'_c}{(m'_c)_\infty}, \quad (4.5)$$

donde  $(m'_c)_\infty$  es el flujo máscico de condensado para el caso de una placa o aleta isotérmica y viscosidad constante del condensado, y  $m'_c$  es el flujo máscico de condensado actual sobre una pared no isotérmica.

Al sustituir la ec. (4.1) y (4.2) en la ec. (4.5), se obtiene la eficiencia de la aleta para el caso de pared no-isotérmica y viscosidad constante [18], en función del parámetro  $\mathbf{a}$ ,

$$\mathbf{h} = \Delta_f^3(\mathbf{a}), \quad (4.6)$$

así mismo, en este estudio la eficiencia de la aleta, considerando la viscosidad variable en función de los parámetros  $\bar{\mathbf{b}}, \mathbf{a}$ , se determina al sustituir la ec. (4.1) y (4.3) en la relación (4.5) para obtener,

$$\mathbf{h} = \left(1 - \frac{1}{4}\bar{\mathbf{b}}\right) \Delta_f^3(\bar{\mathbf{b}}, \mathbf{a}). \quad (4.7)$$

Por otro lado, en las figuras 4-13, 14 y 15 se presentan los resultados asintóticos de la película de condensado adimensional, donde se muestra la influencia que tiene el parámetro  $\bar{\mathbf{b}}$  sobre el espesor adimensional  $\Delta$ .

Cuando  $\bar{\mathbf{b}}=1$  y  $\mathbf{a}=40$  el espesor adimensional  $\Delta$  crece por arriba del valor que Nusselt predijo en su análisis, este efecto se presenta en las otras dos figuras, siendo menor este efecto cuando  $\bar{\mathbf{b}}=0$  y  $\mathbf{a}=40$ , debido a que en estas condiciones la viscosidad del condensado se

mantiene constante con la temperatura, y por tanto el espesor de la película adimensional disminuye.

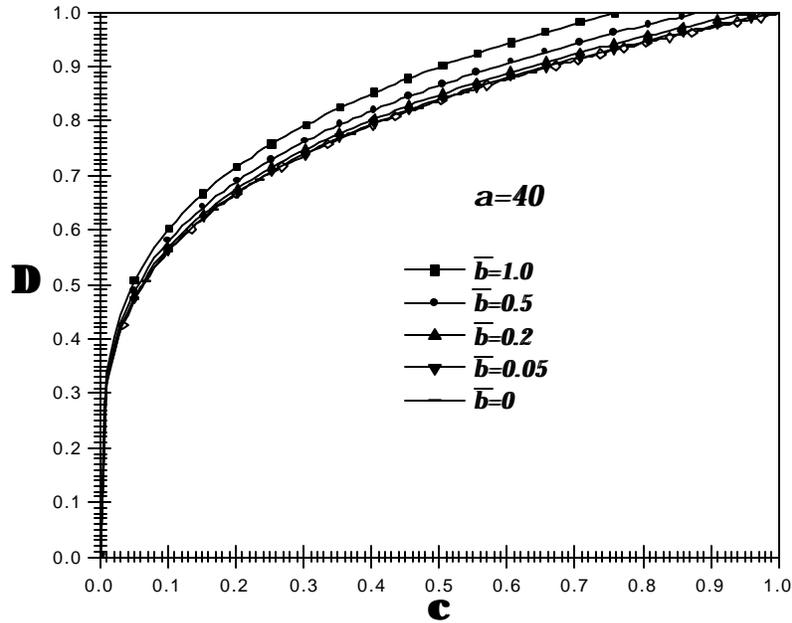


Figura 4-13. Solución asintótica del espesor adimensional de la capa de condensado  $\Delta$ , como una función de la coordenada  $c$ , para diferentes valores del parámetro  $\bar{b}$  con un  $a = 40$ .

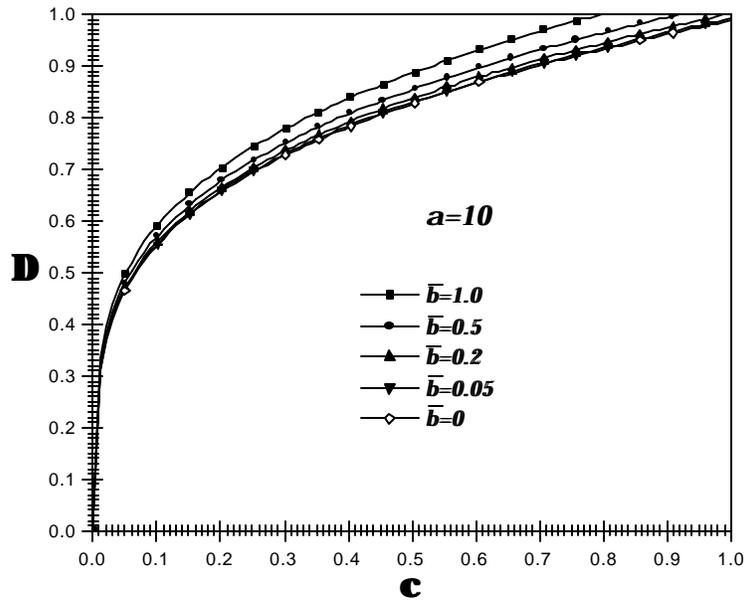


Figura 4-14. Solución asintótica del espesor adimensional de la capa de condensado  $\Delta$ , como una función de la coordenada  $c$ , para diferentes valores del parámetro  $\bar{b}$  con un  $a = 10$ .

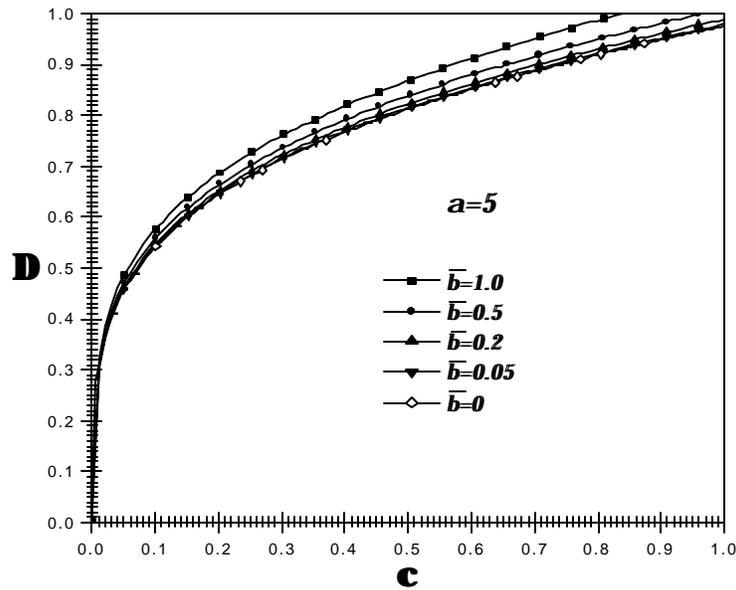


Figura 4-15. Solución asintótica del espesor adimensional de la capa de condensado  $\Delta$ , como una función de la coordenada  $c$ , para diferentes valores del parámetro  $\bar{b}$  con un  $a = 5$ .

En las figuras 4-16, 17 y 18 se presentan los resultados asintóticos de la temperatura adimensional en la aleta, donde se muestra que el parámetro  $\bar{b}$  no modifica sustancialmente la temperatura adimensional, siendo mas notoria la influencia del parámetro  $a$  sobre la temperatura.

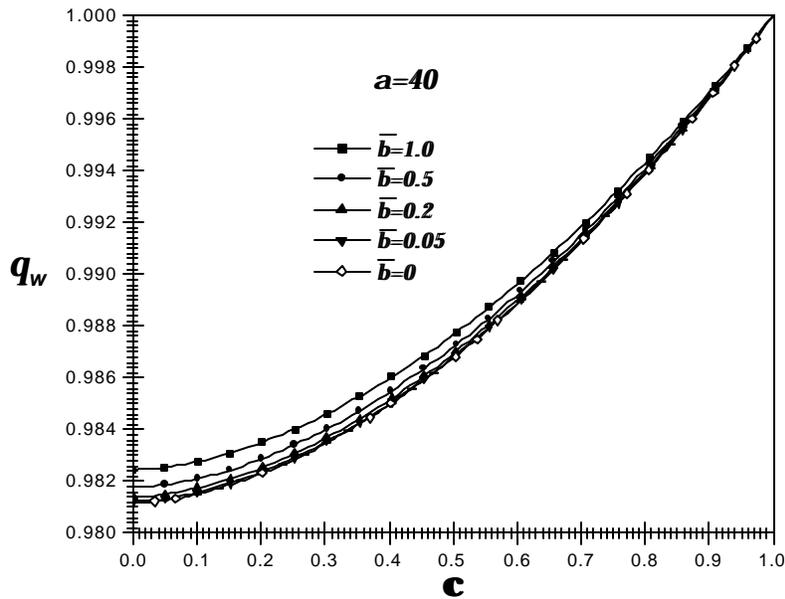


Figura 4-16. Solución asintótica del perfil de temperatura,  $q_w(c)$  como una función de la coordenada longitudinal  $c$ , para distintos valores del parámetro  $\bar{b}$  con un  $a = 40$ .

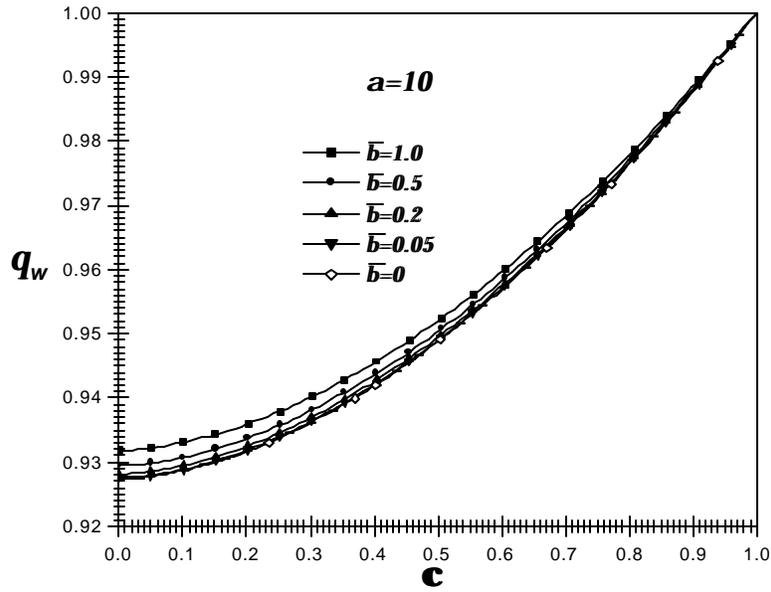


Figura 4-17. Solución asintótica del perfil de temperatura,  $q_w(c)$  como una función de la coordenada longitudinal  $c$ , para distintos valores del parámetro  $\bar{b}$  con un  $a=10$ .

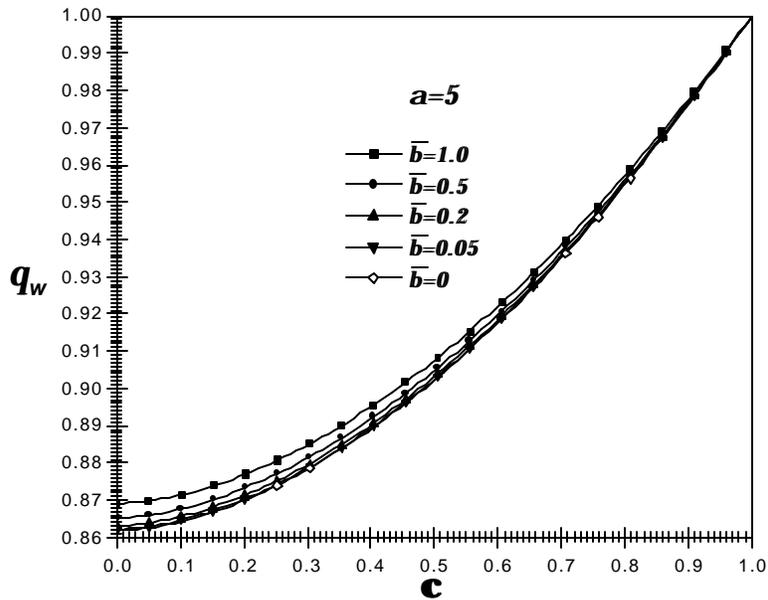


Figura 4-18. Solución asintótica del perfil de temperatura,  $q_w(c)$  como una función de la coordenada longitudinal  $c$ , para distintos valores del parámetro  $\bar{b}$  con un  $a=5$ .

## 4.2 COMPARACIÓN CON LOS RESULTADOS DE OTROS AUTORES.

En las figuras 4-19, 20, 21 y 22 se presenta la comparación de los resultados analíticos y numéricos de  $\Delta(\mathbf{c})$  y  $\mathbf{q}_w(\mathbf{c})$  con resultados analíticos obtenidos por Méndez [18] y Nusselt [1].

En la figura 4-19 para un  $\bar{\mathbf{b}}=1$  y  $\mathbf{a}=40$  las soluciones analítica y numérica son aproximadamente iguales y el modelo asintótico es válido bajo estas consideraciones de  $\bar{\mathbf{b}}$  y  $\mathbf{a}$ , el crecimiento del espesor adimensional es mayor que el de Méndez y Nusselt, de forma similar en la Fig. 4-20 aunque sigue siendo mayor el espesor su crecimiento fue menor para un valor de  $\mathbf{a}=5$ .

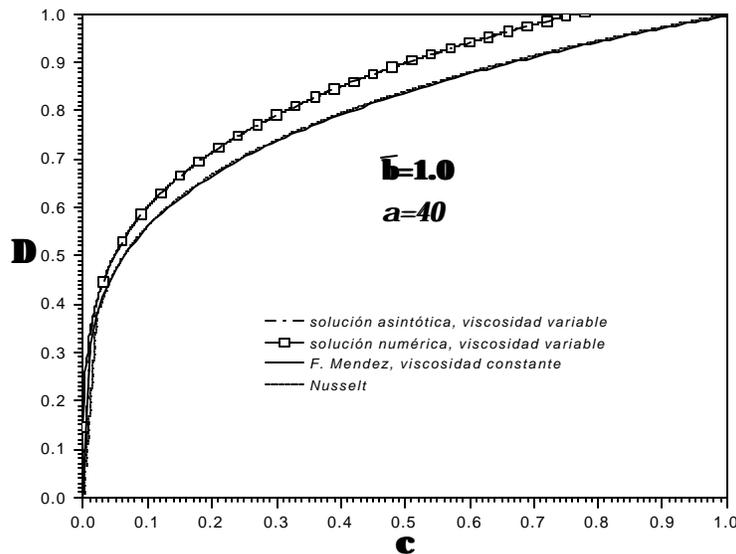


Figura 4-19. Comparación de los resultados analíticos y numéricos del espesor adimensional  $\Delta$  en función de la coordenada longitudinal  $\mathbf{c}$ , para un  $\bar{\mathbf{b}}=1$  y un  $\mathbf{a}=40$ .

En la figura 4-20 se presenta los resultados analíticos y numéricos, para  $\bar{\mathbf{b}}=1$  y  $\mathbf{a}=5$ , obteniendo una buena aproximación de estos resultados, a su vez en el modelo de F. Méndez el espesor es menor que el obtiene Nusselt, por la razón que en el modelo de Méndez la temperatura en la pared de la aleta varía en la dirección longitudinal y el flujo de calor a través de la aleta.

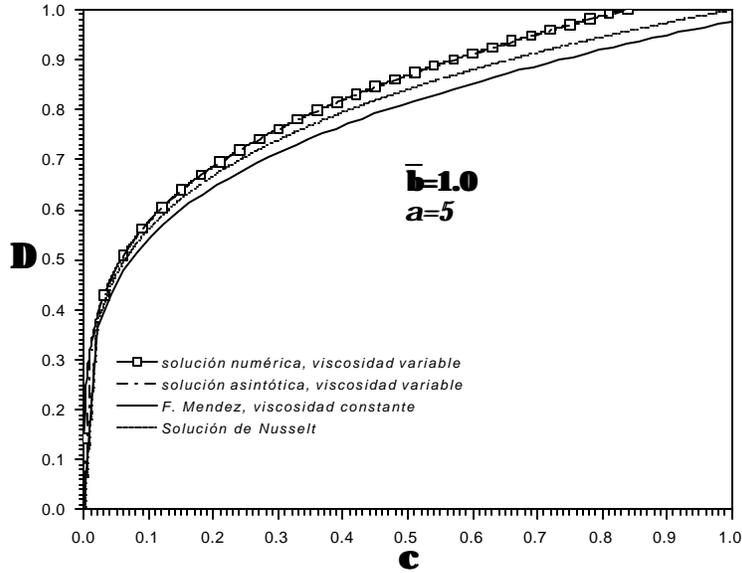


Figura 4-20. Comparación de los resultados analíticos y numéricos del espesor adimensional  $\Delta$  en función de la coordenada longitudinal  $c$ , para un  $\bar{b} = 1$  y un  $a = 5$ .

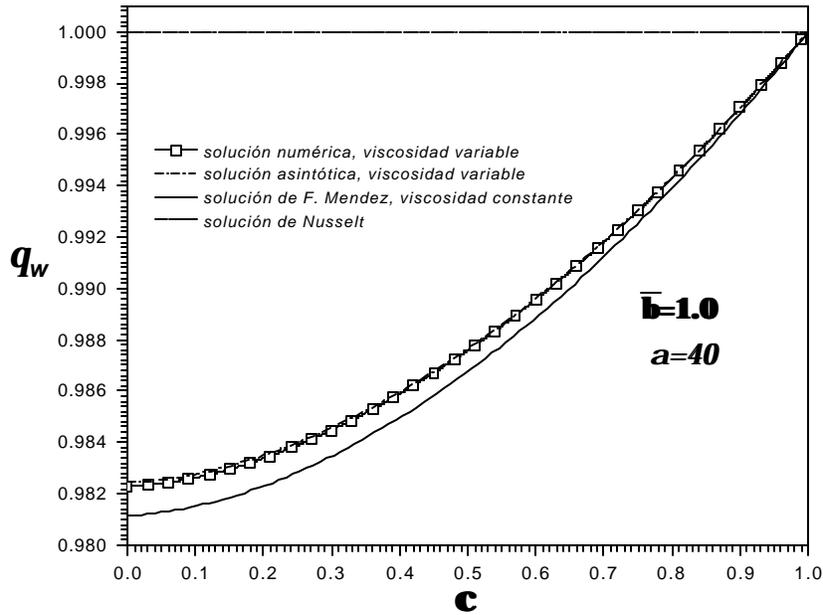


Figura 4-21. Comparación de los resultados numéricos y analíticos de la temperatura adimensional  $q_w(c)$ , como una función de la coordenada longitudinal  $c$ , con un  $\bar{b} = 1$  y un  $a = 40$ .

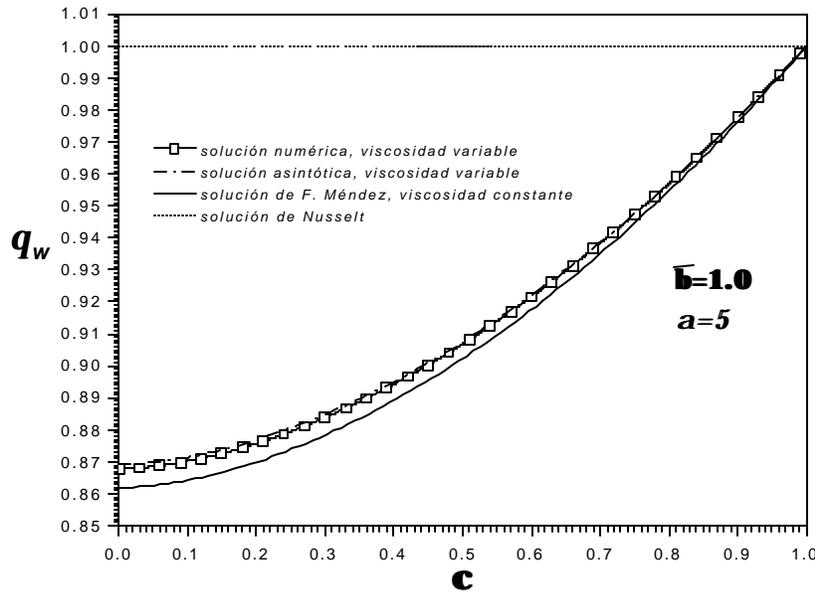


Figura 4-22. Comparación de los resultados numéricos y analíticos de la temperatura adimensional  $q_w(c)$ , como una función de la coordenada longitudinal  $c$ , con un  $\bar{b}=1$  y un  $a=5$ .

Las soluciones analítica y numérica de la temperatura adimensional longitudinal  $q(c)$  se muestran en las figuras 4-21 y 4-22 para un  $\bar{b}=1$  y  $a=40,5$ , en estas figuras se observa que si  $\bar{b}$  aumenta el crecimiento en el perfil de la temperatura adimensional es despreciable, es decir el parámetro  $\bar{b}$  no tiene influencia sobre  $q(c)$ .

En las figuras 4-23, 24, 25 y 26 se muestra la comparación del espesor y temperatura adimensional para un  $\bar{b}=0.5$  y para  $a=40$  y  $5$ . Los resultados obtenidos de  $\Delta(c)$  y  $q(c)$  son aproximadamente iguales por lo que la solución asintótica bajo estas condiciones es válida con la solución numérica.

Respecto a la Fig. 4-23, el crecimiento del espesor adimensional es mayor que el de Méndez y Nusselt, pero con  $a=5$  la solución asintótica se sobrepone con la solución de Nusselt fig. 4-24. Con valores de  $\bar{b}=0.5$  y  $a=40$  la solución asintótica de la temperatura y espesor se aproxima a la de Nusselt, por otro lado para  $\bar{b}=0.5$  y  $a=5$  la variación en  $q(c)$  es insignificante, como se muestra en las Figs. 4-25 y 26.

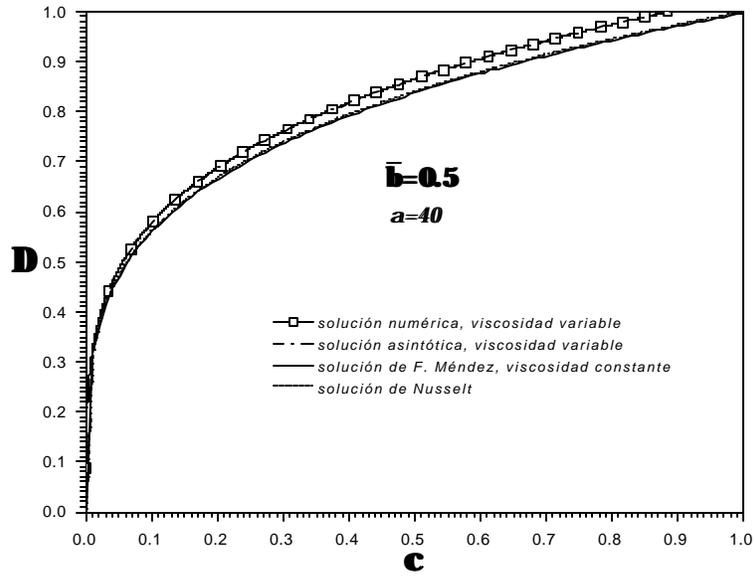


Figura 4-23. Comparación de los resultados analíticos y numéricos del espesor adimensional  $\Delta$  en función de la coordenada longitudinal  $c$ , para un  $\bar{b} = 0.5$  y un  $a = 40$ .

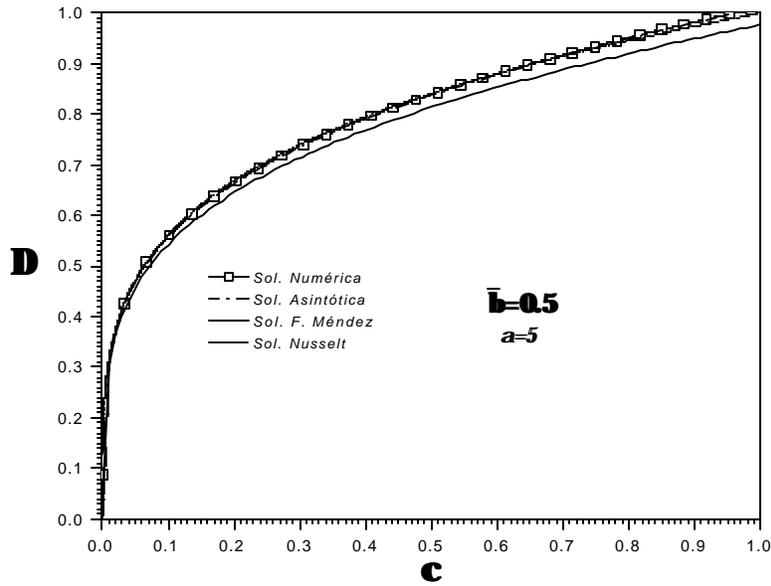


Figura 4-24. Comparación de los resultados analíticos y numéricos del espesor adimensional  $\Delta$  en función de la coordenada longitudinal  $c$ , para un  $\bar{b} = 0.5$  y un  $a = 5$ .

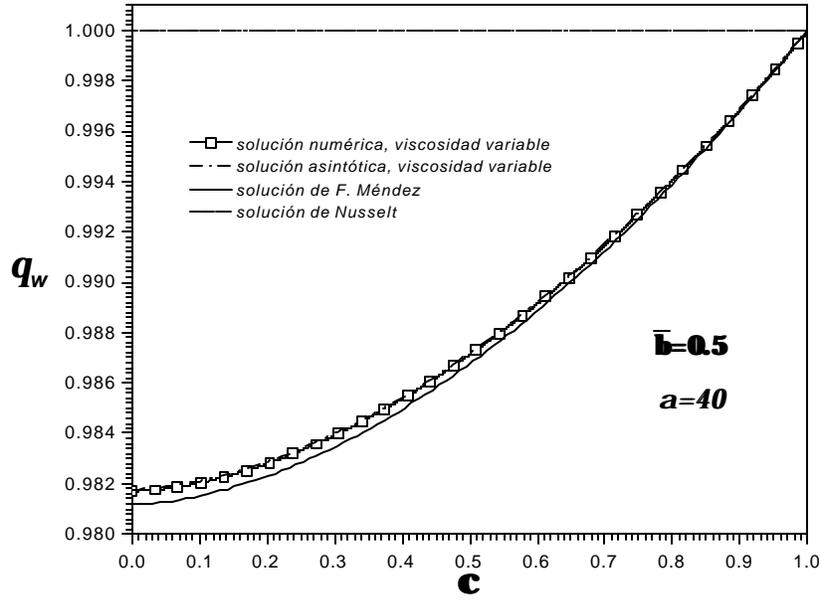


Figura 4-25. Comparación de los resultados numéricos y analíticos de la temperatura adimensional  $q_w(c)$ , como una función de la coordenada longitudinal  $c$ , con un  $\bar{b} = 0.5$  y un  $a = 40$ .

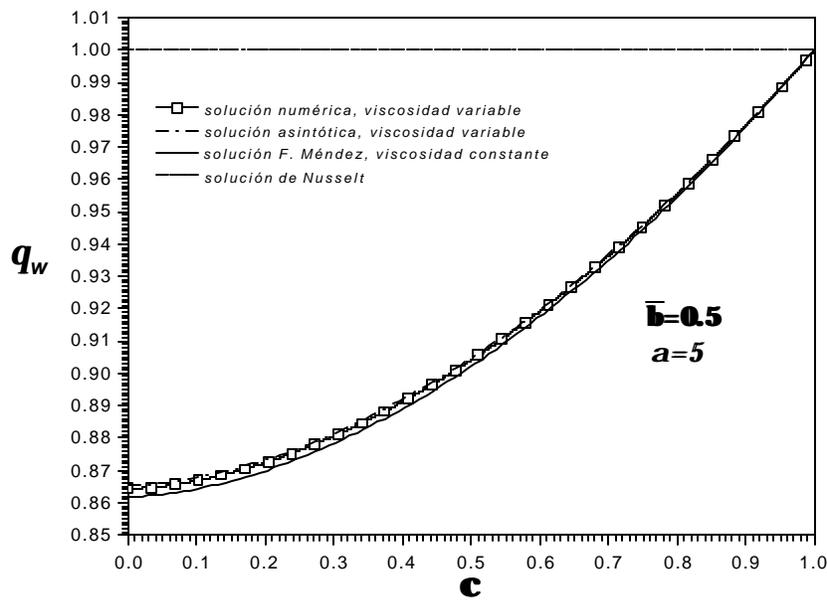


Figura 4-26. Comparación de los resultados numéricos y analíticos de la temperatura adimensional  $q_w(c)$ , como una función de la coordenada longitudinal  $c$ , con un  $\bar{b} = 0.5$  y un  $a = 5$ .

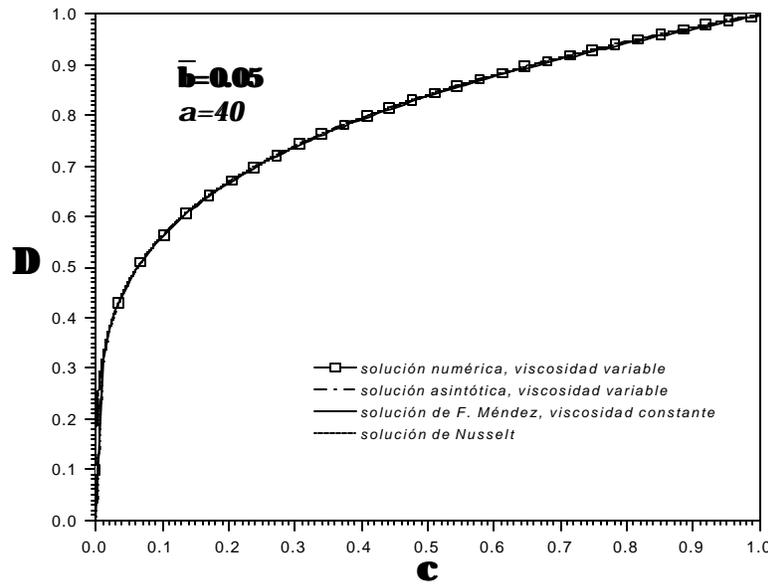


Figura 4-27. Comparación de los resultados analíticos y numéricos del espesor adimensional  $\Delta$  en función de la coordenada longitudinal  $c$ , para un  $\bar{b} = 0.05$  y un  $a = 40$ .

Cuando los valores de  $\bar{b} = 0.05$ , y  $a = 40$  las soluciones numérica y asintótica coinciden con los resultados reportados por Méndez y Nusselt como se muestra en la figura 4-27, debido a que para  $\bar{b} \rightarrow 0$  y  $a \rightarrow \infty$  se llega al modelo ideal de Nusselt el cual considera que la temperatura en la superficie es la misma en la dirección longitudinal y la viscosidad del condensado se mantiene constante con la temperatura del condensado.

### 4.3 LIMITACIONES DEL MODELO PROPUESTO.

En la sección anterior se mostró la comparación de los resultados numéricos y analíticos del espesor y temperatura adimensionales, donde se muestra que las ecs. (3.45) y (3.46) son válidas para  $a = 5, 10, 40$  con valores de  $\bar{b} = 0.05, 0.5, 1.0$ , ya que la solución asintótica presenta una buena aproximación con la solución numérica debido a que el método de perturbación con que se resolvieron las ecuaciones antes mencionadas es válido para valores de  $a \gg 1$ .

Lo anterior se justifica debido a que el método asintótico toma en consideración un parámetro de perturbación que para nuestro caso es  $\frac{1}{a}$ , resolviendo el problema para el caso de pared térmicamente delgado, donde se considera que los gradientes de temperatura en la dirección longitudinal son significantes en comparación con los gradientes de temperatura en la dirección transversal de la aleta, por lo que  $a \gg 1$ .

Por otro lado cuando los modelos analíticos, ecs. (3.45) y (3.46) son evaluados para un  $\bar{b} = 0$ , es decir considerando la viscosidad constante se obtienen los modelos de F. Méndez [18], donde:

$$\Delta(\mathbf{c}) = \mathbf{c}^{\frac{1}{4}} \left[ 1 - \frac{4}{21\mathbf{a}} \left( 1 - \frac{4}{11} \mathbf{c}^{\frac{7}{4}} \right) + \frac{8}{21\mathbf{a}^2} \left( 1 - \frac{8}{99} \mathbf{c}^{\frac{7}{2}} \right) \right] + O(\mathbf{a}^{-3}), \quad (4.8)$$

$$\mathbf{q}_w(\mathbf{c}) = 1 - \frac{16}{21\mathbf{a}} \left( 1 - \mathbf{c}^{\frac{7}{4}} \right) + \frac{192}{539\mathbf{a}^2} \left( 1 - \frac{11}{9} \mathbf{c}^{\frac{7}{4}} + \frac{2}{9} \mathbf{c}^{\frac{7}{2}} \right) + O(\mathbf{a}^{-3}). \quad (4.9)$$

Así mismo, para un  $\mathbf{a} \rightarrow \infty$  y un  $\bar{b} = 0$  se recuperan los modelos propuestos por Nusselt, que en forma adimensionales se representan como:

$$\Delta(\mathbf{c}) = \mathbf{c}^{\frac{1}{4}} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{q}_w(\mathbf{c}) = 1 \quad (4.11)$$

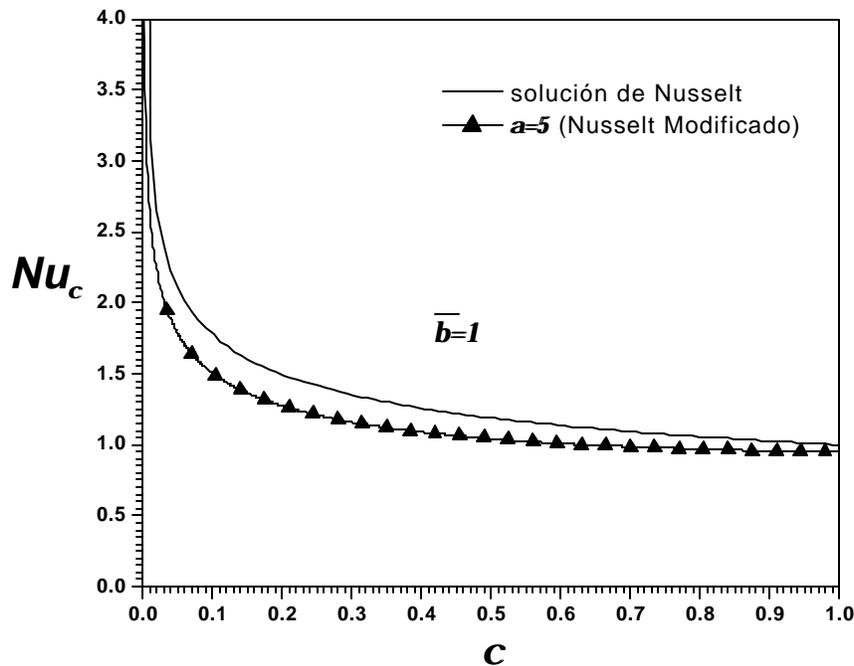


Figura 4-28. Comparación de los números de Nusselt local modificado y el obtenido de la solución clásica de Nusselt.

Finalmente como una contribución importante del presente trabajo, en lo referente a una aplicación práctica, en la fig. (4-28) se presenta una comparación entre las graficas del número de Nusselt modificado del condensado, obtenida en este análisis, con aquella obtenida por Nusselt [1], en dicha gráfica se puede apreciar la diferencia existente entre las dos soluciones, al considerar la viscosidad variable del condensado y viscosidad constante respectivamente haciendo énfasis que en el presente estudio la película de condensado crece y con esto aumenta la resistencia térmica al flujo de calor y por consiguiente existe una disminución en el numero de Nusselt local en comparación con el propuesto por la teoría de Nusselt.

Con el objeto de mostrar valores numéricos de las principales variables características del estudio en cuestión, se obtuvieron los valores de los parámetros adimensionales  $Ja$ ,  $g$ ,  $a$ ,  $\bar{b}$  y  $h$ , mostrados en la tabla (4-1), durante la condensación de vapores puros sobre una aleta rectangular de aluminio con dimensiones de  $h = 0.5\text{cm}$  y  $L = 10\text{cm}$ . Los dos diferentes fluidos utilizados fueron vapor de agua saturado y vapor de etilen-glicol saturado. Los valores de  $\Delta T$  para el agua fueron de 20 y 10K y para el etilen-glicol de 20 y 150K.

Tabla 4-1. Valores numéricos de los parámetros característicos adimensionales de la condensación del vapor de agua y del etilen-glicol a una presión absoluta de  $p = 1\text{ atm}$ .

Viscosidad Constante					
Líquido	$Ja$	$g$	$a$	$\bar{b}$	$h$
H <sub>2</sub> O $\Delta T = 20K$	0.0223	$1.13 \times 10^{11}$	0.02	0	0.17
H <sub>2</sub> O $\Delta T = 10K$	0.040	$1.13 \times 10^{11}$	0.135	0	0.32
Etilenglicol [C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> (OH) <sub>2</sub> ] $\Delta T = 20K$	0.042	$3.20 \times 10^{10}$	0.5	0	0.62
Etilenglicol [C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> (OH) <sub>2</sub> ] $\Delta T = 150K$	0.32	$3.2025 \times 10^{10}$	0.80	0	0.80
Viscosidad Variable					
H <sub>2</sub> O $\Delta T = 20K$	0.0223	$1.13 \times 10^{11}$	0.02	0.463	0.15
H <sub>2</sub> O $\Delta T = 10K$	0.040	$1.13 \times 10^{11}$	0.135	0.23	0.30
Etilenglicol [C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> (OH) <sub>2</sub> ] $\Delta T = 20K$	0.042	$3.20 \times 10^{10}$	0.5	0.05	0.60
Etilenglicol [C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> (OH) <sub>2</sub> ] $\Delta T = 150K$	0.32	$3.2025 \times 10^{10}$	0.80	0.37	0.72

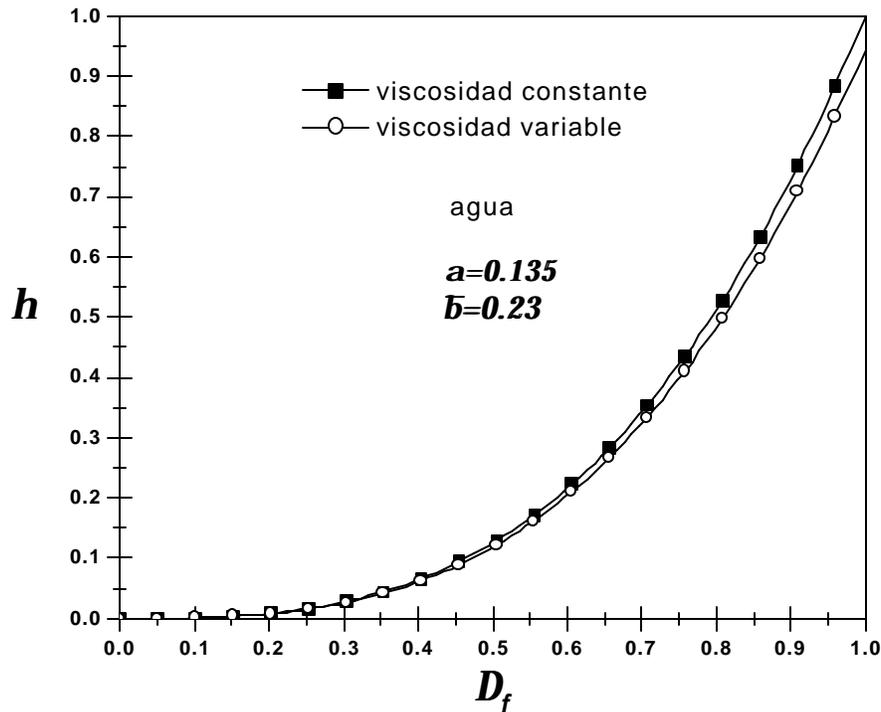


Figura 4-29. Comparación de las eficiencias de la aleta durante el proceso de condensación, para el agua, con un  $\Delta T = 10K$ , (ecs. 4.6,7).

En la figura 4-29 se muestra una comparación de las eficiencias de la aleta para  $a = 0.135$  y  $\bar{b} = 0.23$  del vapor de agua que se condensa con un  $\Delta T = T_s - T_0 = 10K$ , para el caso de viscosidad constante las eficiencias de la aleta son mayores en un 6% que cuando se considera viscosidad variable, lo anterior ocurre para  $\Delta_f > 0.8$ . Por otro lado para  $\Delta_f < 0.45$  las eficiencias de las aletas considerando constante y variable la viscosidad se mantienen constantes.

Cabe hacer mención que la eficiencia está directamente relacionada con la cantidad de condensado producido durante el fenómeno de condensación, por lo que cuando el espesor de la película en la base de la aleta,  $\Delta_f$ , aumenta, la eficiencia también hasta que  $\Delta_f \sim 1$ , para este caso la eficiencia de la aleta es del 90%. Para los valores mostrados en la tabla 4-1, la eficiencia de la aleta es de 30% considerando viscosidad variable y de 32% considerando viscosidad constante, como se puede corroborar en la gráfica 4-29.

## CONCLUSIONES.

En la fig. 4-28 se puede observar la gran influencia que tiene el considerar a la placa con temperatura constante y la viscosidad del condensado constante sobre el número de Nusselt, ya que este parámetro nos indica la cantidad de calor que se transfiere, para este caso, desde la zona de condensado hacia la aleta.

De las graficas es claro que cuando se tiene el caso de la placa de temperatura constante y viscosidad constante, el número de Nusselt es mayor que en el caso de temperatura variable y viscosidad variable en el condensado, con ello se observa, que al llevar acabo el diseño de condensadores tomando en consideración la solución clásica de Nusselt se pudiera incurrir en diseños sobreestimados e ineficientes.

En este trabajo se estudio la influencia de la viscosidad del fluido condensado en el fenómeno de condensación de película laminar y se concluye que  $\bar{b}$  tiene una importante influencia en los resultados de  $\Delta(\mathbf{c})$  obtenidos de forma numérica y analítica, donde se mostró que si  $\bar{b}$  crece, (esto se logra si  $T_0$  disminuye),  $\Delta(\mathbf{c})$  crece también. Por lo tanto la resistencia térmica a la transferencia de calor aumenta debido al crecimiento del espesor, entonces el Numero de Nusselt modificado local,  $Nu_x$ , disminuye ligeramente, siendo este valor menor a los que se obtienen con el modelo de Nusselt. Por consiguiente se puede decir que el parámetro adimensional dela viscosidad variable  $\bar{b}$  no influye de manera importante sobre  $\mathbf{q}(\mathbf{c})$  ya que no lo modifica sustancialmente, por lo que este tiene un impacto importante si se considera en la condensación de un vapor puro sobre una pared o aleta vertical isotérmica.

Así mismo la solución asintótica de los modelos que describen el espesor adimensional  $\Delta(\mathbf{c})$  y la temperatura adimensional  $\mathbf{q}(\mathbf{c})$  son válidos para  $\mathbf{a} \geq 3$ . Las ecs. 3-45 y 3-46 reproducen los resultados numéricos con  $\mathbf{a} = 3, 5, 10, 40$  debido a que el problema conjugado de transferencia de calor se resolvió para el caso de pared térmicamente delgado y es valido para  $\mathbf{a} \gg 1$ , mientras que para  $\mathbf{a} = 1, 0.5, 0.1, \mathbf{a}^*$ , la solución asintótica ya no fue valida, existiendo una discrepancia en los resultados de  $\Delta(\mathbf{c})$  y  $\mathbf{q}(\mathbf{c})$  con las soluciones numéricas.

Los modelos que se obtuvieron para determinar  $\Delta(\mathbf{c})$  y  $\mathbf{q}(\mathbf{c})$  son de gran utilidad y confiables para su aplicación en el estudio de la condensación de vapores puros sobre aletas rectangulares, como se mostró en la tabla 4-1, los valores del numero de Jacob son menores que la unidad. Para el caso contrario se deberán manejar con cuidado los resultados de los parámetros adimensionales mostrados en la tabla antes mencionada ya que los términos convectivos de la ecuación de cantidad de movimiento en el fluido se deberá tomar en consideración en el análisis de la transferencia de calor del fenómeno de condensación.

## RECOMENDACIONES

Con el propósito de que trabajos posteriores en esta área de transferencia de calor con cambio de fase puedan aportar mayor información se hacen las siguientes recomendaciones:

- Es importante llevar a cabo el análisis anterior para el límite cuando  $a < a^*$ , para estudiar la influencia del parámetro adimensional  $\bar{b}$  sobre la temperatura adimensional en la aleta en dirección longitudinal y en el espesor adimensional de la película de condensado; ya que para valores muy pequeños de  $a$ , se desarrolla una capa límite cerca de la base de la aleta.
- En referencia a la figura 2-1 del presente estudio, es necesario considerar que en el tope de la aleta ocurre condensación, por lo que en futuros estudios esta frontera del sistema se debe tratar como una frontera no-adiabática, además falta por incluir el escurrimiento del condensado en la esquina superior derecha de la aleta, ya que en este trabajo también se desprecia este fenómeno.
- En referencia a este trabajo, para estudios posteriores, es importante llevar a cabo estudios experimentales sobre la condensación laminar sobre una aleta vertical rectangular, para validar los modelos matemáticos obtenidos en (3.45) y (3.46).

## REFERENCIAS

- [1] W. Nusselt, Z., Die oberflächenkondensation des wasserdampfes, Z. Ver Dt Ing. 60 (1916) 569-575, 541-546.
- [2] W. M. Rohsenow, Heat transfer and temperature distribution in laminar-film condensation, Trans. Am. Soc. Mech. Engrs 78, 1645-1648 (1956)
- [3] L. A. Bromley, Effect of heat capacity of condensate, Ind. Engng Chem. 44, 2966-2969 (1952)
- [4] E. M. Sparrow and J. L. Gregg, A boundary layer treatment of laminar-film condensation, trans. Am. Soc. Mech. Engrs 81, 13-17 (1959).
- [5] M. M. Chen, An analytical study of laminar film condensation, Part 1 Flat plates, Journal of heat transfer, 83, 48-54 (1961).
- [6] J. C. Y. Koh, E. M. Sparrow and J. P. Hartnett, The two-phase boundary layer in laminar film condensation, International journal of heat mass transfer 2, 69-82 (1961).
- [7] S. W. Churchill, Laminar Film Condensation, Int, J. Heat Mass Transfer, 29, 1219-1226 (1986)
- [8] F.P. Incropera, D.P. De Witt, Fundamentals of Heat and Mass Transfer, Wiley, New York, 1996.
- [9] H. Merte, Jr., Condensation heat transfer, Adv. Heat transfer 15, 181-272 (1973).
- [10] J. W. Rose, Fundamentals of condensation heat transfer: laminar film condensation, JSME Int. J., Ser 2 31 (1988) 357-375.
- [11] I. Tanasawa, Advances in condensation heat transfer, Adv, Heat Transfer 21 (1991) 55-139.
- [12] S. V. Patankar and E. M. Sparrow, Condensation on a extended surface, Journal of heat transfer 101, 434-440 (1979).
- [13] J. E. Wilkins, Condensation on a extended surface, J. Heat Transfer 102 (1980) 186-187.
- [14] H. T. Chen, Z. Lan, T. I. Wang, Study of conjugate conduction-laminar film condensation for a vertical plate fin, Int. J. Heat Mass Transfer 37 (1994) 2592-2597.

- [15] P. K. Sarma, S. P. Chary, V. Drama Rao, Condensation on a vertical plate fin of variable thickness, *Int. J. Heat Mass Transfer* 31 (1988) 1941-1944.
- [16] S. L. Chen, M. F. Gerner, C. L. Tien, General film condensation correlations, *Experimental Heat Transfer* 1 (1987) 93-107.
- [17] F. Méndez, C. Treviño, Film condensation generated by a forced cooling fluid, *Eur. J. Mech. B/Fluids* 15 (2) (1996) 217-240.
- [18] F. Méndez, J.J Lizardi, C. Treviño, Laminar film condensation along a vertical fin, *International journal of heat and mass transfer* 43, 2859-2868 (2000).
- [19] Frank M. White, *Viscous Fluids Flow*, editorial Mc Graw Hill, Third Edition, 2006.
- [20] A. Bejan, *Convection Heat Transfer*, Wiley, New York, 1993, pp. 146-150.
- [21] S.B Memory, J. W. Rose, Effect of variable viscosity in the presence of variable wall temperature on condensation on a horizontal tube, *International J. Heat Mass Transfer* 15, 2321-2326 (1994).
- [22] A. P. Fraas, *Heat Exchanger Design*, 2nd edition, Wiley, 1989
- [23] Kandlikar, S. G, *Handbook of Phase Change: Boiling and Condensation*, Taylor and Francis, Philadelphia, Editor in Chief, 1999.

# ***APENDICE***

## ***DESARROLLO DEL MÉTODO DE PERTURBACIÓN***

En esta sección se presenta de forma detallada la solución de las expansiones de las ecuaciones acopladas del espesor adimensional de la película de condensado y de la temperatura adimensional en la pared de la aleta ecs. 3.29 y 3.30.

Para resolver las ecuaciones antes mencionadas es importante mostrar de manera detallada la condición inicial y condiciones de frontera del sistema. A partir de la figura 2-1, se observa que el espesor adimensional de la película vale cero en el extremo superior derecho de la aleta es decir,

$$\Delta(\mathbf{c} = 0) = 0 \quad (\text{A1})$$

por lo que aplicando la condición inicial anterior a la expansión representada por la ec. (A2),

$$\Delta(\mathbf{c}) = \Delta_0(\mathbf{c}) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{a}^j} \Delta_j(\mathbf{c}), \quad (\text{A2})$$

deberá satisfacer la siguientes condición:

$$\Delta_i(\mathbf{c} = 0) = 0, \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A3})$$

Por otro lado en referencia a la base de la aleta es decir en  $\mathbf{c} = 1$ , se tiene que  $T_w = T_0$ , por lo que según la ec. (2.55) al ser evaluada se obtiene que,

$$\mathbf{q}_w(\mathbf{c} = 1) = 1, \quad (\text{A4})$$

o simplemente,  $\mathbf{q}_w(\mathbf{c} = 1) - 1 = 0$ . De la misma forma, la expansión de la ecuación que define la temperatura adimensional en la dirección longitudinal de la aleta esta dada por

$$\mathbf{q}_w(\mathbf{c}) = \mathbf{q}_0(\mathbf{c}) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{a}^j} \mathbf{q}_j(\mathbf{c}), \quad (\text{A5})$$

de esta manera para que la condición de frontera (A4) sea valida con la ec. (A5) es necesario que,

$$\mathbf{q}_0(\mathbf{c} = 1) = 1, \quad \text{es decir, } \mathbf{q}_0(\mathbf{c} = 1) - 1 = 0 \quad (\text{A6})$$

y

$$\mathbf{q}_i(\mathbf{c} = 1) = 0, \quad \text{para, } i > 0. \quad (\text{A7})$$

Por otro lado en el tope de la aleta, se tiene una condición adiabática, esto indica que no hay transferencia de calor en esa frontera del sistema, por lo que en  $\mathbf{c} = 0$ , se tiene que  $T_w = T_s$ , y según ec. (2.55) esta se puede escribir como,

$$\mathbf{q}_w (\mathbf{c} = 0) = 0 \quad , \quad (A8)$$

de esta forma, se determina que la variación de la temperatura adimensional en esta frontera es cero, siendo que esta se cumple para todos los términos de la expansión de la ec. (A5), de tal forma que podemos escribir que

$$\left. \frac{d\mathbf{q}_i}{d\mathbf{c}} \right|_{\mathbf{c}=0} = 0, \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots \quad (A9)$$

Habiendo definido las condiciones iniciales y de frontera, se resuelven las ecs. (3.31) y (3.32) que se muestran en el capítulo 3, de esta tesis.

Para  $\mathbf{a}^0$ ,

$$\frac{d^2 \mathbf{q}_0}{d\mathbf{c}^2} = 0 \quad (3.31)$$

$$-\frac{\bar{\mathbf{b}}}{3} \Delta_0^4 \frac{d\mathbf{q}_0}{d\mathbf{c}} + \frac{d\Delta_0^4}{d\mathbf{c}} - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{4} \mathbf{q}_0 \frac{d\Delta_0^4}{d\mathbf{c}} = \mathbf{q}_0 \quad (3.32)$$

Integrando dos veces la ecuación (3.31) y aplicando las condiciones de frontera (A6) y (A9) se llega a

$$\mathbf{q}_0 = 1 \quad (A10)$$

Para resolver la ec. (3.32), se puede observar que  $\frac{d\mathbf{q}_0}{d\mathbf{c}} = 0$ , ya que  $\mathbf{q}_0 = 1$ , por lo que se puede reescribir como,

$$\frac{d\Delta_0^4}{d\mathbf{c}} - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{4} \frac{d\Delta_0^4}{d\mathbf{c}} = 1. \quad (A11)$$

Se puede presentar la ecuación anterior en forma de integral de la siguiente manera

$$\int d\Delta_0^4 = \frac{4}{4-\bar{b}} \int d\mathbf{c}, \quad (\text{A12})$$

al integrar y aplicar la condición inicial, ec. (A3), se obtiene,

$$\Delta_0 = \left( \frac{4}{4-\bar{b}} \right)^{\frac{1}{4}} \mathbf{c}^{\frac{1}{4}}. \quad (\text{A13})$$

De manera similar, una vez definidos  $\mathbf{q}_0$  y  $\Delta_0$ , se sustituyen en el siguiente orden de ecuaciones  $\mathbf{a}^{-1}$ , mostradas en el capítulo tres como,

$$\frac{d^2 \mathbf{q}_1}{d\mathbf{c}^2} = \frac{\mathbf{q}_0}{\Delta_0}, \quad (\text{3.33})$$

$$-\frac{4}{3} \bar{b} \Delta_0^3 \Delta_1 \frac{d\mathbf{q}_0}{d\mathbf{c}} - \frac{\bar{b}}{3} \Delta_0^4 \frac{d\mathbf{q}_1}{d\mathbf{c}} + \frac{d(4\Delta_0^3 \Delta_1)}{d\mathbf{c}} - \frac{\bar{b}}{4} \mathbf{q}_0 \frac{d(4\Delta_0^3 \Delta_1)}{d\mathbf{c}} - \frac{\bar{b}}{4} \mathbf{q}_1 \frac{d\Delta_0^4}{d\mathbf{c}} = \mathbf{q}_0, \quad (\text{3.34})$$

al integrar una y dos veces la ec. (3.33), se llega a

$$\frac{d\mathbf{q}_1}{d\mathbf{c}} = \frac{2}{3} \sqrt{2} (4-\bar{b})^{\frac{1}{4}} \mathbf{c}^{\frac{3}{4}} + C_1 \quad (\text{A14})$$

$$\mathbf{q}_1 = \left[ \left( \frac{1024-256\bar{b}}{324} \right) \frac{256}{2401} \right]^{\frac{1}{4}} \mathbf{c}^{\frac{7}{4}} + C_1 \mathbf{c} + C_2 \quad (\text{A15})$$

aplicando las condiciones de frontera (A9) y (A7), para determinar el valor de las constantes de integración de las dos relaciones anteriores se tiene que

$$\mathbf{q}_1 = \frac{8}{21} \sqrt{2} (4-\bar{b})^{\frac{1}{4}} \left( \mathbf{c}^{\frac{7}{4}} - 1 \right), \quad (\text{A16})$$

así mismo se sustituyen  $\mathbf{q}_0$ ,  $\Delta_0$  y  $\mathbf{q}_1$  en la ec. (3.34) para determinar  $\Delta_1$ , como se muestra a continuación

$$\left(\frac{4}{4-\bar{b}}\right)^{\frac{3}{4}}(4-\bar{b})\int d\left(c^{\frac{3}{4}}\Delta_1\right)=\left(\frac{1024-256\bar{b}}{324}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{\left(\frac{4}{7}+\frac{4\bar{b}}{28-7\bar{b}}\right)\int\left(c^{\frac{7}{4}}-1\right)dc+\frac{4\bar{b}}{12-3\bar{b}}\int c^{\frac{7}{4}}dc\right\} \quad (A17)$$

la ecuación anterior se integra y se sustituye la condición inicial, ec. (A3), para obtener  $\Delta_1$ , de la siguiente manera

$$\Delta_1=\left(\frac{1024-256\bar{b}}{1296}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{8}{77}\frac{c^2}{(4-\bar{b})^{\frac{1}{4}}}+\frac{64}{2541}\bar{b}\frac{c^2}{(4-\bar{b})^{\frac{5}{4}}}-\frac{2}{7}\frac{c^{\frac{1}{4}}}{(4-\bar{b})^{\frac{1}{4}}}-\frac{2}{7}\bar{b}\frac{c^{\frac{1}{4}}}{(4-\bar{b})^{\frac{5}{4}}}\right] \quad (A18)$$

finalmente desarrollando el álgebra correspondiente se llega a,

$$\Delta_1=\frac{4}{21}\left(\frac{4}{11}c^2-c^{\frac{1}{4}}\right)+\frac{\bar{b}}{(4-\bar{b})}\left(\frac{160}{693}c^2-\frac{4}{21}c^{\frac{1}{4}}\right). \quad (A19)$$

De manera similar, una vez definidos  $\mathbf{q}_0$ ,  $\mathbf{q}_1$ ,  $\Delta_0$  y  $\Delta_1$  se sustituyen en el siguiente orden de ecuaciones  $\mathbf{a}^{-2}$ , mostradas en el capítulo tres como,

$$\frac{d^2\mathbf{q}_2}{dc^2}=\frac{\mathbf{q}_0}{\Delta_0}\left[\frac{\mathbf{q}_1}{\mathbf{q}_0}-\frac{\Delta_1}{\Delta_0}\right] \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{4}{3}\bar{b}\Delta_0^3-2\bar{b}\Delta_0^2\Delta_1^2\right)\frac{d\mathbf{q}_0}{dc}-\frac{4}{3}\bar{b}\Delta_0^3\Delta_1\frac{d\mathbf{q}_1}{dc}-\frac{\bar{b}}{3}\Delta_0^4\frac{d\mathbf{q}_2}{dc}+\frac{d}{dc}\left(4\Delta_0^3\Delta_2+6\Delta_0^2\Delta_1^2\right) \\ &-\frac{\bar{b}}{4}\mathbf{q}_0\frac{d}{dc}\left(4\Delta_0^3\Delta_2+6\Delta_0^2\Delta_1^2\right)-\frac{\bar{b}}{4}\mathbf{q}_1\frac{d}{dc}\left(4\Delta_0^3\Delta_1\right)-\frac{\bar{b}}{4}\mathbf{q}_2\frac{d\Delta_0^4}{dc}=\mathbf{q}_2 \end{aligned} \quad (3.36)$$

El termino derecho de la ec. (3.35), se puede escribir como

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{q}_0}{\Delta_0}\left[\frac{\mathbf{q}_1}{\mathbf{q}_0}-\frac{\Delta_1}{\Delta_0}\right]&=\left(\frac{1024-256\bar{b}}{1296}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{\bar{b}}{7}(4-\bar{b})^{-\frac{3}{4}}c^{\frac{1}{4}}-\frac{3}{7}(4-\bar{b})^{\frac{1}{4}}c^{-\frac{1}{4}}\right. \\ &\left.+\frac{40}{77}(4-\bar{b})^{\frac{1}{4}}c^{\frac{3}{2}}-\frac{40}{231}(4-\bar{b})^{-\frac{3}{4}}c^{\frac{3}{2}}\right] \end{aligned} \quad (A20)$$

integrando una y dos veces la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{dq_2}{dc} = \left( \frac{1024 - 256\bar{b}}{1296} \right)^{\frac{1}{4}} \left\{ \frac{4}{21} \bar{b} (4 - \bar{b})^{-\frac{3}{4}} c^{\frac{3}{4}} - \frac{12}{21} (4 - \bar{b})^{\frac{1}{4}} c^{\frac{3}{4}} - \frac{16}{77} (4 - \bar{b})^{\frac{1}{4}} c^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{231} (4 - \bar{b})^{\frac{3}{4}} c^{\frac{5}{2}} \right\} + C_1 \quad (A21)$$

$$q_2 = \left( \frac{1024 - 256\bar{b}}{1296} \right)^{\frac{1}{4}} \left\{ \frac{16}{147} \bar{b} (4 - \bar{b})^{-\frac{3}{4}} c^{\frac{7}{4}} - \frac{16}{49} (4 - \bar{b})^{\frac{1}{4}} c^{\frac{7}{4}} - \frac{16}{2695} (4 - \bar{b})^{\frac{1}{4}} c^{\frac{7}{2}} - \frac{16}{2695} (4 - \bar{b})^{-\frac{3}{4}} c^{\frac{7}{2}} - \frac{16}{1155} \bar{b} (4 - \bar{b})^{-\frac{3}{4}} c^{\frac{7}{2}} + \frac{16}{245} (4 - \bar{b})^{\frac{1}{4}} c^{\frac{7}{2}} \right\} + C_1 c + C_2 \quad (A22)$$

aplicando las condiciones de frontera (A7) y (A9), a la ecuación anterior se determina que

$$C_1 = 0$$

y

$$C_2 = \frac{32}{539} \left[ 3(4 - \bar{b})^{\frac{1}{2}} - \bar{b} (4 - \bar{b})^{-\frac{1}{2}} \right]$$

sustituyendo las constantes en la ec. (A22), se llega a

$$q_2 = \left[ \frac{64}{1617} (4 - \bar{b})^{\frac{1}{2}} - \frac{64}{4851} \frac{\bar{b}}{(4 - \bar{b})^{\frac{1}{2}}} \right] c^{\frac{7}{2}} + \left[ \frac{32}{441} \frac{\bar{b}}{(4 - \bar{b})^{\frac{1}{2}}} - \frac{32}{147} (4 - \bar{b})^{\frac{1}{2}} \right] c^{\frac{7}{4}} + \frac{32}{539} \left[ 3(4 - \bar{b})^{\frac{1}{2}} - \frac{\bar{b}}{(4 - \bar{b})^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (A23)$$

Debido a la complejidad en cuanto a la cantidad de álgebra para desarrollar la ec. (3.36), se describe nuevamente a continuación para poder visualizar de mejor forma los terminos que la componen,

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{4}{3} \bar{\mathbf{b}} \Delta_0^3 - 2\bar{\mathbf{b}} \Delta_0^2 \Delta_1^2 \right) \frac{d\mathbf{q}_0}{d\mathbf{c}} - \frac{4}{3} \bar{\mathbf{b}} \Delta_0^3 \Delta_1 \frac{d\mathbf{q}_1}{d\mathbf{c}} - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{3} \Delta_0^4 \frac{d\mathbf{q}_2}{d\mathbf{c}} + \frac{d}{d\mathbf{c}} (4\Delta_0^3 \Delta_2 + 6\Delta_0^2 \Delta_1^2) \\ & - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{4} \mathbf{q}_0 \frac{d}{d\mathbf{c}} (4\Delta_0^3 \Delta_2 + 6\Delta_0^2 \Delta_1^2) - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{4} \mathbf{q}_1 \frac{d}{d\mathbf{c}} (4\Delta_0^3 \Delta_1) - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{4} \mathbf{q}_2 \frac{d\Delta_0^4}{d\mathbf{c}} = \mathbf{q}_2 \end{aligned} \quad (3.36)$$

El primer termino de la izquierda de la ecuación anterior vale cero, ya que  $\frac{d\mathbf{q}_0}{d\mathbf{c}} = 0$ , por tanto se puede escribir,

$$\begin{aligned} & -\frac{4}{3} \bar{\mathbf{b}} \Delta_0^3 \Delta_1 \frac{d\mathbf{q}_1}{d\mathbf{c}} - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{3} \Delta_0^4 \frac{d\mathbf{q}_2}{d\mathbf{c}} + \frac{d}{d\mathbf{c}} (4\Delta_0^3 \Delta_2 + 6\Delta_0^2 \Delta_1^2) \\ & - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{4} \mathbf{q}_0 \frac{d}{d\mathbf{c}} (4\Delta_0^3 \Delta_2 + 6\Delta_0^2 \Delta_1^2) - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{4} \mathbf{q}_1 \frac{d}{d\mathbf{c}} (4\Delta_0^3 \Delta_1) - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{4} \mathbf{q}_2 \frac{d\Delta_0^4}{d\mathbf{c}} = \mathbf{q}_2 \end{aligned} \quad (A24)$$

para determinar  $\Delta_2$  de la relación anterior, se sustituirán los valores de  $\mathbf{q}_0$ ,  $\mathbf{q}_1$ ,  $\Delta_0$  y  $\Delta_1$  en cada termino de la ec. (A24), iniciando con el termino de la izquierda.

El primer termino de la ec. (A24) es,

$$\begin{aligned} & -\frac{4}{3} \bar{\mathbf{b}} \Delta_0^3 \Delta_1 \frac{d\mathbf{q}_1}{d\mathbf{c}} = -\frac{5120}{6237} \frac{\bar{\mathbf{b}}^2}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{3}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{2}} \\ & + \frac{128}{189} \frac{\bar{\mathbf{b}}^2}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{3}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{4}} + \frac{128}{189} \frac{\bar{\mathbf{b}}}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{1}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{4}} - \frac{512}{2079} \frac{\bar{\mathbf{b}}}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{1}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{2}} \end{aligned} \quad (A25)$$

El segundo termino de la ec. (A24) es,

$$\begin{aligned} & -\frac{\bar{\mathbf{b}}}{3} \Delta_0^4 \frac{d\mathbf{q}_2}{d\mathbf{c}} = -\frac{128}{693} \frac{\bar{\mathbf{b}}}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{1}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{2}} + \frac{896}{48510} \frac{\bar{\mathbf{b}}^2}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{3}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{2}} \\ & + \frac{64}{1485} \frac{\bar{\mathbf{b}}^2}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{1}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{2}} - \frac{32}{189} \frac{\bar{\mathbf{b}}^2}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{3}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{4}} + \frac{32}{63} \frac{\bar{\mathbf{b}}}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{1}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{4}} \end{aligned} \quad (A26)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(4\Delta_0^3\Delta_2 + 6\Delta_0^2\Delta_1^2) &= -\frac{1280}{441} \frac{\bar{b}^2}{(4-\bar{b})^{\frac{5}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{4}} - \frac{1024}{441} \frac{\bar{b}}{(4-\bar{b})^{\frac{3}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{4}} \\
 &- \frac{64}{147} \frac{\mathbf{c}^{\frac{7}{4}}}{(4-\bar{b})^{\frac{1}{2}}} + \frac{51200}{17787} \frac{\bar{b}^2}{(4-\bar{b})^{\frac{5}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{2}} + \frac{10240}{5929} \frac{\bar{b}}{(4-\bar{b})^{\frac{3}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{2}} + \frac{1536}{5929} \frac{\mathbf{c}^{\frac{7}{2}}}{(4-\bar{b})^{\frac{1}{2}}} + \frac{8\sqrt{2}}{(4-\bar{b})^{\frac{3}{4}}} \frac{d(\Delta_2 \mathbf{c}^{\frac{3}{4}})}{d\mathbf{c}} \\
 &+ \frac{64}{147} \frac{\bar{b}}{(4-\bar{b})^{\frac{3}{2}}} + \frac{64}{147} \frac{\bar{b}^2}{(4-\bar{b})^{\frac{5}{2}}}
 \end{aligned} \tag{A27}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\bar{b}}{4} \mathbf{q}_0 \frac{d}{dx}(4\Delta_0^3\Delta_2 + 6\Delta_0^2\Delta_1^2) &= -\frac{1280}{1764} \frac{\bar{b}^3}{(4-\bar{b})^{\frac{5}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{4}} + \frac{1024}{1764} \frac{\bar{b}^2}{(4-\bar{b})^{\frac{3}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{4}} \\
 &+ \frac{64}{588} \frac{\bar{b}}{(4-\bar{b})^{\frac{1}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{4}} - \frac{12800}{17787} \frac{\bar{b}^3}{(4-\bar{b})^{\frac{5}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{2}} - \frac{2560}{5929} \frac{\bar{b}^2}{(4-\bar{b})^{\frac{3}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{2}} - \frac{384}{5929} \frac{\bar{b}}{(4-\bar{b})^{\frac{1}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{2}} - 2\sqrt{2} \frac{\bar{b}}{(4-\bar{b})^{\frac{3}{4}}} \frac{d(\Delta_2 \mathbf{c}^{\frac{3}{4}})}{d\mathbf{c}} \\
 &- \frac{64}{147} \frac{\bar{b}^2}{(4-\bar{b})^{\frac{3}{2}}} - \frac{16}{147} \frac{\bar{b}^3}{(4-\bar{b})^{\frac{5}{2}}}
 \end{aligned} \tag{A28}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\bar{b}}{4} \mathbf{q}_1 \frac{d}{dx}(4\Delta_0^3\Delta_1) &= -\frac{10240}{14553} \frac{\bar{b}}{(4-\bar{b})^{\frac{3}{2}}} + \frac{11296}{14553} \frac{\bar{b}^2}{(4-\bar{b})^{\frac{3}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{4}} \\
 &+ \frac{1376}{4851} \frac{\bar{b}}{(4-\bar{b})^{\frac{1}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{4}} - \frac{1024}{4851} \frac{\bar{b}}{(4-\bar{b})^{\frac{1}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{2}} - \frac{32}{441} \frac{\bar{b}^2}{(4-\bar{b})^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned} \tag{A29}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\bar{b}}{4} \mathbf{q}_2 \frac{d\Delta_0^4}{dx} &= -\frac{64}{1617} \frac{\bar{b}}{(4-\bar{b})^{\frac{1}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{2}} + \frac{64}{4851} \frac{\bar{b}^2}{(4-\bar{b})^{\frac{3}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{2}} \\
 &- \frac{32}{441} \frac{\bar{b}^2}{(4-\bar{b})^{\frac{3}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{4}} + \frac{32}{147} \frac{\bar{b}}{(4-\bar{b})^{\frac{1}{2}}} \mathbf{c}^{\frac{7}{4}} - \frac{96}{539} \frac{\bar{b}}{(4-\bar{b})^{\frac{1}{2}}} + \frac{32}{539} \frac{\bar{b}^2}{(4-\bar{b})^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned} \tag{A30}$$

Finalmente sustituyendo sustituyendo, (A25),(A26),(A27),(A28),(A29),(A30), en la ec. (A24), se obtiene

$$\begin{aligned}
 \Delta_2(\mathbf{c}) = & \frac{\sqrt{2}}{(4-\bar{\mathbf{b}})^3} \left\{ \frac{515168}{4322241} \frac{\bar{\mathbf{b}}^2}{(4-\bar{\mathbf{b}})} + \frac{65024}{1440747} \bar{\mathbf{b}} - \frac{5120}{53361} \frac{\bar{\mathbf{b}}}{(4-\bar{\mathbf{b}})} \right. \\
 & - \frac{25600}{160083} \frac{\bar{\mathbf{b}}^2}{(4-\bar{\mathbf{b}})^2} + \frac{6400}{160083} \frac{\bar{\mathbf{b}}^3}{(4-\bar{\mathbf{b}})^2} + \frac{32}{14553} (4-\bar{\mathbf{b}}) - \frac{256}{17787} \left. \right\} \mathbf{c}^{\frac{15}{4}} \\
 & + \frac{\sqrt{2}}{(4-\bar{\mathbf{b}})^3} \left\{ \frac{544}{4851} \frac{\bar{\mathbf{b}}^2}{(4-\bar{\mathbf{b}})} - \frac{32}{147} \frac{\bar{\mathbf{b}}}{(4-\bar{\mathbf{b}})} + \frac{628}{4851} \bar{\mathbf{b}} - \frac{16}{147} \frac{\bar{\mathbf{b}}^2}{(4-\bar{\mathbf{b}})^2} \right. \\
 & + \frac{4}{147} \frac{\bar{\mathbf{b}}^3}{(4-\bar{\mathbf{b}})^{\frac{1}{2}}} + \frac{24}{539} (4-\bar{\mathbf{b}}) - \frac{16}{147} \left. \right\} \mathbf{c}^{\frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{(4-\bar{\mathbf{b}})^3} \left\{ \frac{1280}{4851} \frac{\bar{\mathbf{b}}^2}{(4-\bar{\mathbf{b}})^2} \right. \\
 & - \frac{3488}{14553} \frac{\bar{\mathbf{b}}^2}{(4-\bar{\mathbf{b}})} - \frac{256}{1323} \bar{\mathbf{b}} + \frac{1664}{4851} \frac{\bar{\mathbf{b}}}{(4-\bar{\mathbf{b}})} - \frac{320}{4851} \frac{\bar{\mathbf{b}}^3}{(4-\bar{\mathbf{b}})^2} \\
 & \left. - \frac{32}{1617} (4-\bar{\mathbf{b}}) + \frac{128}{1617} \right\} \mathbf{c}^2
 \end{aligned}
 \tag{A31}$$

Con esto queda determinado  $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$  y  $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ , por lo que se sustituyen en las ecuaciones (A2) y (A5) de este apéndice, para obtener el comportamiento en el espesor adimensional de la película de condensado y la distribución de la temperatura adimensional en dirección longitudinal en la superficie de la aleta.

Estos resultados son mostrados en las ecs. (3.45) y (3.46) del capítulo 3 de esta tesis.