



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y
ELÉCTRICA

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

Diseño de un regulador difuso simplificado para
una clase de modelos difusos tipo Takagi-Sugeno

TESIS DOCTORAL

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN
INGENIERÍA MECÁNICA

P R E S E N T A:

M. en C. Tonatiuh Hernández Cortés

Directores de tesis:

Dr. Jesús A. Meda Campaña

Dr. Ricardo Tapia Herrera



México, D.F.

18 de junio de 2016

Este trabajo es el resultado de un esfuerzo continuo que no hubiera sido posible sin el apoyo de mis padres y hermanos, a quienes agradezco infinitamente. De igual manera, quiero agradecer a mis profesores, especialmente al Dr. Jesús A. Meda Campaña por su amistad, guía y acompañamiento a lo largo de este proceso.

No quiero dejar de reconocer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo brindado para la consolidación de este proyecto.

A mis amigos: Edith Chávez, Eva Feria, Alonso Oviedo, Ricardo Tapia, Rodolfo Ponce, Ezequiel Celis, Jorge Blanquet y Jorge Rodríguez quienes me alentaron durante este arduo camino.

Tonatiuh Hernández Cortés

RESUMEN

En teoría de control, uno de los problemas clásicos es el seguimiento de referencias, el cual presenta un amplio campo de aplicaciones; es por eso que en la literatura se distinguen varias aproximaciones a este problema. Una de las técnicas propuestas es la **teoría de regulación**, ya que presenta un marco bien definido para el seguimiento asintótico de referencias, incluso cuando se presentan perturbaciones.

Por otra parte, los sistemas difusos tipo *Takagi-Sugeno* **T-S** combinados con la *teoría de regulación* presentan una alternativa para resolver este problema, no lineal, propuesto por Francis-Isidori. Así, esta investigación se centrará en diseñar un regulador total de salida para el sistema difuso T-S, considerando técnicas lineales y no lineales. Para su estudio y la ubicación en el ámbito científico se presenta una descripción de cómo ha evolucionado la *teoría de regulación difusa*, así como los principales trabajos que sustentan la presente investigación.

En teoría de regulación se pueden distinguir dos casos: el primero incluye al estabilizador del sistema, el cual se encarga de llevar al sistema al estado estacionario; el segundo, el regulador, identificado como la entrada en estado estacionario, se encarga del seguimiento de la señal. Bien es cierto que el problema de regulación es tratado mediante la proposición de funciones de membresía que combinan reguladores locales (lineales) para lograr el seguimiento exacto, para este fin se considera una clase de sistemas tipo **(T-S)** debido a que el problema se encuentra abierto.

El diseño del regulador, con nuevas funciones de membresía, estará dado mediante la comparación entre: a) el regulador diseñado sobre el modelo difuso completo y b) la suma ponderada de los reguladores lineales diseñados independientemente. La ventaja presentada en este trabajo, simplifica el método de regulación difusa, haciéndolo más flexible y simple para su implementación.

ABSTRACT

One of the most important problems in control theory is that of controlling a plant in order to have its output tracking reference signals generated by an external generator named exosystem, even in presence of disturbances. This problem has been treated by several authors due to its wide applicability in mechanical systems, aeronautics and telematics, just to name a few.

On the other hand, some techniques have been proven to be an alternative to solve this problem by combining the theory of output regulation and the Takagi-Sugeno fuzzy modeling. So, this research will be focused on design a overall simplified fuzzy output regulator by considering linear and nonlinear techniques. For their study and the location in the scientific scope is presented a description of *fuzzy output regulation* evolution, as well as major works that support this research.

The regulation theory can be summarized in two steps: first one the stabilizer, carrying the states of plant in to the steady-state; and second the regulator, as the steady-state input, achieves the exact tracking. Well, is true that the design of linear local regulators is suggested in this research, but now the adequate membership functions ensure the right combination of the local regulators in the interpolation regions, these membership functions, which are given as mathematical expressions, solve the regulation problem in a simple way. The method presented can be applied on a class of Takagi Sugeno fuzzy models describing a nonlinear system. In the present work the simplicity of the fuzzy regulator obtained from the weighted summation of linear local regulators is exploited

So, the contribution of the present research is to find a control law for a class of Takagi-Sugeno fuzzy models, in order to achieve exact output regulation by means of local regulators, even if different input matrices appear in the linear local subsystems, avoiding in this way one of the restrictions given in others works. This novel approach only requires the computation of the linear local controllers and the computation of the new membership functions making a flexible method and easy to implement.

Índice general

Índice General	VI
Índice de Figuras	VIII
Abreviaturas	XII
Símbolos	XIII
1. Introducción	1
1.1. El problema de la regulación como una aproximación difusa	1
1.1.1. La regulación difusa mediante la aproximación lineal	4
1.2. Justificación	4
1.3. Objetivo general	6
1.3.1. Objetivos particulares	6
1.4. Esbozo de esta tesis	7
2. Regulación de sistemas no lineales	8
2.1. El problema de la regulación de la salida	8
2.1.1. Problema de regulación de la salida (retroalimentación de estados)	11
2.1.2. Problema de regulación de la salida (retroalimentación del error)	11
2.2. Regulación exacta de la salida (información completa)	14
3. Regulación exacta de la salida para sistemas no lineales descritos por modelos T-S	19
3.1. El modelo difuso tipo Takagi-Sugeno	19
3.2. Sector no lineal	20
3.3. Construcción del modelo difuso	22
3.4. Conceptos básicos para el modelado	23
3.5. Modelo Difuso Takagi-Sugeno	28
3.5.1. Modelo difuso T-S del problema de regulación no lineal	30
3.6. El problema de regulación difusa de la salida	32
3.7. La regulación difusa de la salida (reguladores lineales)	33

3.8. Sincronización caótica de modelos difusos T-S	43
3.8.1. Modelado difuso de sistemas caóticos	45
3.8.1.1. Atractor de Lorenz con señal de entrada	45
3.8.1.2. Atractor de Chen con señal de entrada	47
3.8.1.3. Atractor de Rössler con señal de entrada	48
3.8.2. Sincronización Completa	50
3.8.3. Sincronización Generalizada	53
3.9. La regulación difusa exacta de la salida en el modelo difuso completo T-S	60
4. El regulador de salida simplificado	78
4.1. La regulación difusa exacta (reguladores locales con diferentes fun- ciones de membresía)	78
4.2. El problema de regulación difusa exacta de la salida para una clase de sistemas difusos tipo MIMO	90
5. El problema de regulación difusa en tiempo discreto	106
5.1. El problema de regulación difusa para sistemas discretos no lineales	106
5.2. El modelo difuso discreto tipo Takagi-Sugeno para el problema de regulación	108
5.3. El problema de regulación difusa discreta en tiempo discreto	110
5.4. Sincronización caótica de sistemas T-S en tiempo discreto	113
5.4.1. Discretización de sistemas T-S en tiempo continuo	113
5.4.2. Sincronización completa	114
6. Conclusiones	119
6.1. Trabajos futuros	121
A. Teoría de Variedad Central	123
B. Artículos Publicados	128
Bibliografía	140

Índice de figuras

1.1. Diagrama de regulación para sistemas lineales	3
1.2. Diagrama de regulación para sistemas no lineales	3
3.1. Arquitectura del controlador difuso	20
3.2. Sector global no lineal	21
3.3. Sector local no lineal	21
3.4. Base del modelo para el diseño del control difuso	22
3.5. Funciones de membresía $M_1(z_1(t))$, $M_2(z_1(t))$, $N_1(z_2(t))$ y $N_2(z_2(t))$	24
3.6. Funciones de membresía para los valores $z_1 = 2,75$ y $z_2 = 0,25$. . .	27
3.7. Funciones de membresía para péndulo invertido	41
3.8. Salida de la planta vs referencia, con el control basado en reguladores locales con $w(0) = [25\ 0]^T$ y $x(0) = [15\ 0]^T$	42
3.9. Error de seguimiento cuando el control está basado en reguladores locales con $w(0) = [25\ 0]^T$ y $x(0) = [15\ 0]^T$	43
3.10. Señal de control, basado en reguladores locales con $w(0) = [25\ 0]^T$ y $x(0) = [15\ 0]^T$	43
3.11. Atractor de Lorenz difuso con $x(0) = [1\ 1\ 1]^T$	47
3.12. Atractor de Chen difuso con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ y $x_3(0) = 1$	49
3.13. Atractor de Rössler difuso con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ y $x_3(0) = 1$	50
3.14. Señal de control para la sincronización completa de dos sistemas caóticos T-S tipo Rössler	53
3.15. Señal de error para la sincronización completa de dos sistemas caóticos T-S tipo Rössler	53
3.16. Señal de referencia w_1 contra señal de respuesta x_1 de dos sistemas caóticos T-S tipo Rössler	54
3.17. Señal de referencia w_2 contra señal de respuesta x_2 de dos sistemas caóticos T-S tipo Rössler	54
3.18. Señal de referencia w_3 contra señal de respuesta x_3 de dos sistemas caóticos T-S tipo Rössler	55
3.19. Señal de control para la sincronización generalizada de dos sistemas caóticos T-S	57
3.20. Señal de error para la sincronización generalizada de dos sistemas caóticos T-S	58

3.21. Señal de referencia w_1 contra señal de respuesta x_1 de dos sistemas caóticos T-S	58
3.22. Señal de referencia w_2 contra señal de respuesta x_2 de dos sistemas caóticos T-S	59
3.23. Señal de referencia w_3 contra señal de respuesta x_3 de dos sistemas caóticos T-S	59
3.24. Brazo robótico de dos grados de libertad	65
3.25. Funciones de membresía para modelo difuso de un robot de 2 GDL	67
3.26. x_1 vs w_1 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$	68
3.27. x_2 vs w_2 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$	68
3.28. Error de seguimiento e_1 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$	69
3.29. Error de seguimiento e_2 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$	69
3.30. Señal de control u_1 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$	70
3.31. Señal de control u_2 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$	70
3.32. x_1 vs w_1 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$	75
3.33. x_2 vs w_2 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$	75
3.34. Error de seguimiento e_1 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$	76
3.35. Error de seguimiento e_2 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$	76
3.36. Señal de control u_1 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$	77
3.37. Señal de control u_2 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$	77
4.1. Sistema de péndulo invertido	84
4.2. Funciones de membresía para el modelo de dos reglas	85
4.3. x_1 vs w_1 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales	87
4.4. Error de seguimiento e cuando el controlador está diseñado a partir del reguladores locales	87
4.5. Señal de control u cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales	88
4.6. x_1 vs w_1 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales y funciones de membresía adecuadas	88
4.7. Error de seguimiento e cuando el controlador está diseñado a partir del reguladores locales y funciones de membresía adecuadas	89

4.8. Señal de control u cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales y funciones de membresía adecuadas	89
4.9. x_1 vs w_1 con el regulador difuso aplicado al sistema no lineal	89
4.10. Error de seguimiento e con el regulador difuso aplicado al sistema no lineal	90
4.11. Señal de control u con el regulador difuso aplicado al sistema no lineal	90
4.12. Funciones de membresía para el modelo de dos reglas	97
4.13. x_1 vs w_1 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales	99
4.14. x_2 vs w_2 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales	99
4.15. Error de seguimiento e_1 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales	100
4.16. Error de seguimiento e_2 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales	100
4.17. Señal de control u_1 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales	101
4.18. Señal de control u_2 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales	101
4.19. x_1 vs w_1 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo	102
4.20. x_2 vs w_2 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo	102
4.21. Error de seguimiento e_1 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo	103
4.22. Error de seguimiento e_2 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo	103
4.23. Señal de control u_1 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo	104
4.24. Señal de control u_2 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo	104
4.25. Funciones de membresía $\mu_1(1, 1), \mu_2(1, 1)$	104
4.26. Funciones de membresía $\mu_1(2, 2), \mu_2(2, 2)$	105
5.1. Sistema difuso discreto T-S del atractor Rössler	116
5.2. Señal de control de la sincronización completa de dos sistemas difusos T-S Rössler en tiempo discreto	117
5.3. Error de seguimiento de la sincronización completa de dos sistemas difusos T-S Rössler en tiempo discreto	117
5.4. x_1 vs w_1 de la sincronización completa de dos sistemas difusos T-S Rössler en tiempo discreto	118
5.5. x_2 vs w_2 de la sincronización completa de dos sistemas difusos T-S Rössler en tiempo discreto	118
5.6. x_2 vs w_2 de la sincronización completa de dos sistemas difusos T-S Rössler en tiempo discreto	118

A.1. Condición inicial que inicia cerca de la región central converge a la
variedad central conforme $t \rightarrow \infty$ 127

Abreviaturas

CFS	Continuos F uzzy S ystem (Sistema difuso continuo)
DFS	Discrete F uzzy S ystem (Sistema difuso discreto)
FIB	Francis Isidori Byrnes
LMI	Linear M atrix I nequality (Desigualdad matricial lineal)
LTI	Linear T ime I nvariant (lineal invariante en el tiempo)
LTV	Linear T ime V ariant (lineal variante en el tiempo)
MIMO	Multiple I nputs M ultiple O utputs (Varias entradas varias salidas)
PRDES	Problema de R egulación D ifusa E xacta de la S alida
PRES	Problema de R egulación E xacta de la S alida
PDC	Parallel D istributed C ompensation (Compensador paralelo distribuido)
SISO	Single I nput S ingle O utput (Una sola entrada una sola salida)
T-S	Takagi- S ugeno

Símbolos

\equiv	Indécticamente igual
\approx	Aproximadamente igual
\forall	Para todo
\in	Pertenece a
\subset	Subconjunto de
\rightarrow	Tiende a
\Rightarrow	Implica
u_{ss}	Entrada en estado estacionario
x_{ss}	Estado estacionario múltiple de error cero
e_{ss}	Error en estado estacionario
$\ x\ $	Norma del vector x
$ a $	Valor absoluto del escalar a
$P > 0$	Matriz P definida positiva
$P \geq 0$	Matriz P semidefinida positiva
máx	Máximo
mín	Mínimo
\mathbb{R}^n	Espacio Euclidiano n -dimensional
$A^T(x^T)$	Transpuesta de la matriz A (del vector x)
$\frac{\partial f}{\partial x}$	Matriz Jacobiana
$f^{-1}(\cdot)$	Inversa de la función f
\diamond	Designación para fin de teoremas, lemas y corolarios
\square	Designación para fin de comprobación
Σ	Sumatoria

*Excelente cosa es tener la fuerza de un gigante; pero usar
de ella como un gigante es propio de un enano.*

- William Shakespeare

Capítulo 1

Introducción

1.1. El problema de la regulación como una aproximación difusa

Uno de los problemas más importantes en la teoría de control es cómo controlar un sistema no lineal, de tal forma, que su salida converja asintóticamente a través de una *respuesta en estado estacionario* prescrita. En términos generales, el problema de regulación consiste en hallar un control retroalimentado por los estados y el error o solamente el error, tal que, en ausencia de influencias externas el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado sea asintóticamente estable y el error de seguimiento tienda a cero cuando la planta es influenciada por una señal de referencia, incluso en presencia de perturbaciones; ambas generadas por el exosistema.

Este problema ha sido tratado por muchos autores dada su amplia aplicación en sistemas mecánicos, aeronáutica, telemática, robótica, etc. Los trabajos de Francis [1] y Wonham [2] demostraron que la solución al problema de regulación lineal consiste en resolver un sistema lineal de dos ecuaciones matriciales, llamadas: **Ecuaciones de Francis**. También demostraron que, en caso de que solamente se cuente con la señal de error, el regulador que resuelve este problema incluye al exosistema; esta propiedad es conocida como el Principio del Modelo Interno (Internal Model Principle).

Más tarde **Isidori y Byrnes** [3] mostraron que el resultado establecido por Francis podía ser extendido al sector no lineal como caso general, y que las ecuaciones establecidas por Francis son un caso particular del problema no lineal, además, que la solución para este caso requería una retroalimentación de error del regulador, dando un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales llamadas *ecuaciones Francis-Isidori-Byrnes (FIB)*. Desafortunadamente estas ecuaciones, en la mayoría de casos, implican una complejidad al momento de resolverse de manera práctica.

Básicamente, el proceso de regulación puede ser introducido a través de las figs. 1.1-1.2, [4]. En la teoría de regulación, la variedad de estado estacionario de error cero es central e invariante por efecto de la entrada en este estado. Entonces, el proceso de regulación puede ser entendido como:

- El estabilizador es responsable de llevar los estados de la planta a la variedad de error cero en estado estacionario, reduciendo de esta manera el error de seguimiento.
- La entrada en estado estacionario mantiene los estados de la planta en la variedad de estado estacionario de error cero, obteniendo así un seguimiento exacto de las señales de referencia.

Por lo tanto, el problema de regulación consiste en encontrar ambas: la variedad de estado estacionario de error cero y la entrada en estado estacionario [5].

Por otra parte, técnicas como la modelación de sistemas difusos tipo **T-S** han demostrado ser una excelente herramienta para caracterizar sistemas no lineales mediante la correcta “combinación” de *subsistemas lineales*, los cuales corresponden a diferentes puntos de operación; básicamente, la “combinación” se realiza mediante la suma ponderada de subsistemas lineales locales. En consecuencia, controladores locales pueden ser diseñados para cada subsistema, obteniendo en su conjunto un controlador para el sistema difuso global.

Además, la correcta combinación de la teoría de regulación y los sistemas difusos tipo Takagi-Sugeno, permite resolver el *problema de regulación difusa*, el

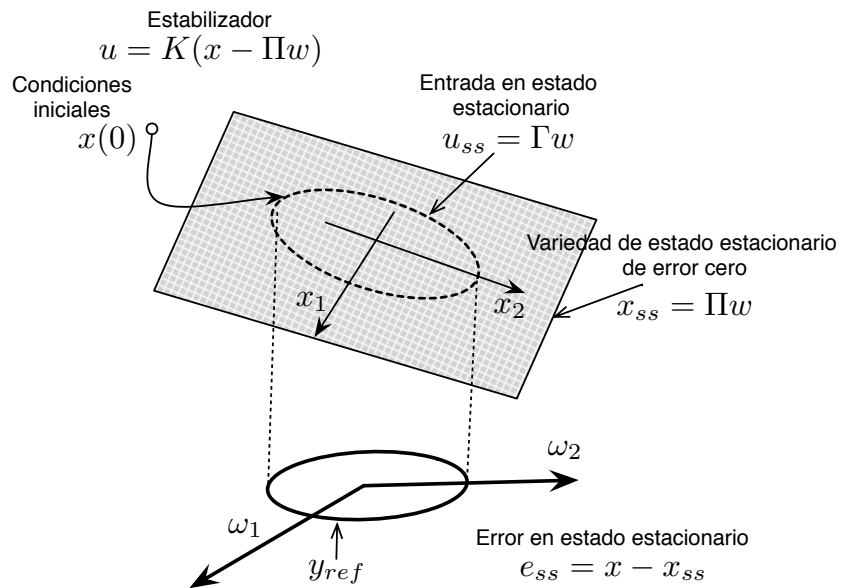


FIGURA 1.1: Diagrama de regulación para sistemas lineales

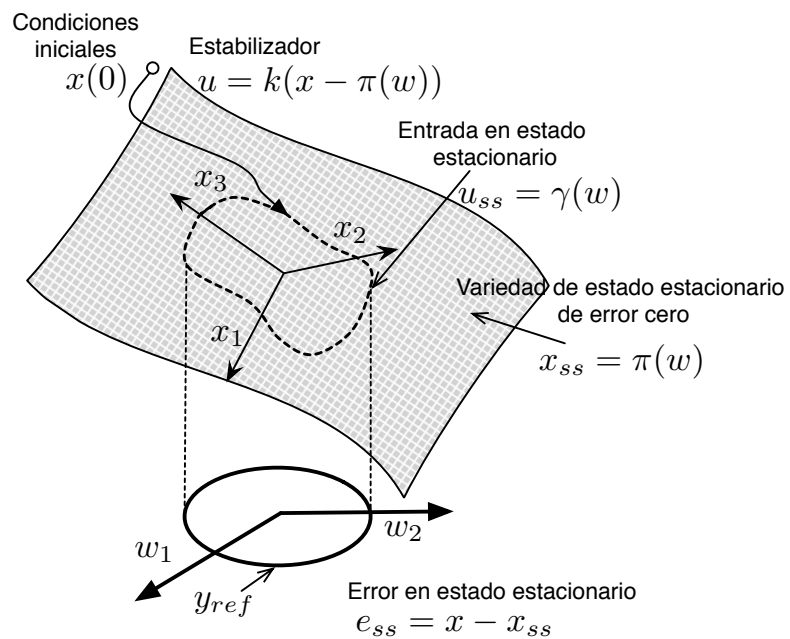


FIGURA 1.2: Diagrama de regulación para sistemas no lineales

cual consiste en forzar la salida de un sistema no lineal descrito por la estructura difusa **T-S**, a seguir una señal de referencia prescrita: véase [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13].

Más adelante en [9], el regulador exacto de salida es directamente diseñado del modelo difuso **T-S** en su expresión completa. Las ecuaciones presentadas en éste, son derivadas del error en estado estacionario y resuelven el problema de la regulación exacta (**PRDES**). Desafortunadamente, tal controlador podría resultar muy complejo de obtener.

1.1.1. La regulación difusa mediante la aproximación lineal

En [8], la sincronización de sistemas caóticos se lleva a cabo mediante la combinación de la teoría de regulación y el modelado difuso tipo **T-S**, en éste se asume que los sistemas caóticos pueden ser representados por modelos difusos tipo **T-S**, permitiendo diseñar un controlador completo mediante el uso de técnicas lineales (suma ponderada de reguladores locales). Sin embargo, dos condiciones deben cumplirse para asegurar la regulación exacta de la salida: 1) la misma matriz de entrada y 2) la misma variedad de error cero $\pi(w(t))$ para todos los subsistemas locales.

Dada la complejidad de obtener un controlador como en [9], el diseño de un regulador difuso de salida, basado en reguladores locales, se propone en este trabajo, pero considerando funciones de membresía en el regulador diferentes a las definidas para la planta difusa. Un resultado preliminar se ha dado en [10], donde las nuevas funciones de membresía son aproximadas mediante técnicas que manejan información incompleta, con incertidumbre o inexacta (**Soft Computing**).

1.2. Justificación

Dado que el problema de regulación es uno de los temas centrales en la teoría de control, se ha dirigido cierta investigación a este problema, comenzando por la

regulación de salida para sistemas lineales, invariantes en el tiempo y de dimensiones finitas; dentro de este contexto cabe destacar los trabajos de Davison, Francis y Wonham. Éstos muestran que el compensador, el cual resuelve el problema de regulación, puede ser siempre visto como la interconexión de dos componentes: un regulador y un estabilizador, cuyos roles son la generación de señales de control necesarias para imponer un comportamiento a la salida del sistema y para estabilizar en lazo cerrado al sistema resultante.

El estudio de regulación es extendido a los sistemas no lineales, invariantes en el tiempo y de dimensiones finitas; iniciado por los trabajos de Francis, Wonham y Hepburn, además, el trabajo con exosistemas neutralmente estables, propuesto por Isidori y Byrnes, conducen a la formulación del llamado *regulador no lineal* cuya existencia está basada en la teoría de la dinámica cero. Esto incluye un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales (**FIB**), las cuales implican una complejidad considerable al momento de resolverse.

Por otra parte, la introducción de los modelos difusos y la teoría de regulación, *regulación difusa*, introducen una alternativa para resolver el problema no lineal mediante el uso de técnicas lineales, esto debido al parecido entre los sistemas lineales y los modelos difusos **T-S**. Sin embargo, para garantizar la regulación exacta es necesario cumplir con las condiciones de tener la misma matriz de entrada y la misma variedad de error cero en todos los subsistemas.

Una forma que garantiza la regulación difusa, se basa en la construcción de un regulador difuso completo, diseñado a partir del error en estado estacionario. Desafortunadamente, tal controlador deberá ser calculado para cada sistema en específico y no se asegura el cumplimiento para todo el rango no lineal predefinido en el modelado difuso, es decir, puede ser complejo y necesitará validarse para todo $t \geq 0$.

Dado que el problema se encuentra abierto, una forma simplificada y válida en toda la región no lineal para el regulador es necesaria, esto implica en primera instancia, siguiendo con el postulado de utilizar reguladores locales y con el fin de evitar resolver las ecuaciones **FIB**, un método sencillo y general aunque el problema este limitado a una clase de sistemas difuso tipo **T-S**.

1.3. Objetivo general

El principal objetivo del presente trabajo es encontrar una ley de control para una clase de modelos **T-S**, que asegure la regulación exacta de la salida mediante el uso de reguladores lineales locales combinados con nuevas funciones de membresía, siendo éstas obtenidas de manera analítica.

1.3.1. Objetivos particulares

Los objetivos particulares de esta investigación son:

- **Diseñar funciones de membresía para el regulador de forma analítica**

Para resolver el problema de regulación de forma sencilla será necesario obtener una metodología que incluya expresiones matemáticas, con la finalidad de reducir el problema al cálculo de: un estado estacionario, un estabilizador (mediante alguna técnica como el **PDC**), reguladores locales y las funciones de membresía.

- **Diseñar un regulador simplificado para una clase de sistemas T-S**

Para lograr que el controlador sea válido en la region predefinida para todo $t \geq 0$, será necesario que las funciones de membresía contengan en su diseño esta restricción.

- **Aplicar la metodología a sistemas SISO y MIMO**

Debido a que el problema de diseño del regulador con funciones de membresía se encuentra abierto, una clase de sistemas difusos **T-S** serán tratados en esta perspectiva, por lo que será necesario incluir sistemas **SISO** y **MIMO**.

- **Implementar la metodología a sistemas reales**

Aplicar el método propuesto a sistemas no lineales, que incluyan la forma propuesta en este trabajo.

1.4. Esbozo de esta tesis

Este trabajo tiene la intención de ser una guía de referencia para investigadores e ingenieros en control. Es particularmente provechoso que usando los enfoques presentados en este trabajo, estudiantes que están entrando al campo de control puedan resolver una cantidad amplia de problemas que normalmente requieren conocimiento de tópicos avanzados.

El presente trabajo está organizado de la siguiente manera:

- **Capítulo 1** Proporciona un estudio preliminar del problema de regulación en sistemas no lineales.
- **Capítulo 2** Introduce al cambio entre sistemas no lineales y modelos difusos **T-S**, con el objetivo de formular el problema de regulación difusa.
- **Capítulo 3** Muestra los avances obtenidos en regulación difusa usando técnicas lineales.
- **Capítulo 4** Desarrolla un nuevo regulador basado en reguladores locales con nuevas funciones de membresía.
- **Capítulo 5** Desarrolla el problema de regulación difusa para sistemas difusos **T-S** en tiempo discreto.
- **Capítulo 6** Muestra las conclusiones obtenidas en la presente investigación, así como, los trabajos futuros.

Capítulo 2

Regulación de sistemas no lineales

2.1. El problema de la regulación de la salida

Uno de los problemas clásicos en teoría de control es el diseño de una ley de control con el fin de imponer una respuesta, en estado estacionario prescrito, a cualquier orden externa en una familia prescrita [5]. Esto puede incluir, por ejemplo, el problema de tener la salida $y(\cdot)$ de una planta controlada siguiendo asintóticamente cualquier referencia de salida prescrita $y_{ref}(\cdot)$, así como, el problema de tener $y(\cdot)$ rechazando asintóticamente cualquier perturbación no deseada $w(\cdot)$. En ambos casos el objetivo es imponer que el *error de seguimiento*, la diferencia entre la salida de referencia y la salida actual, sea una función del tiempo

$$e(t) = y_{ref}(t) - y(t), \quad (2.1)$$

la cual decae a cero a medida que el tiempo tiende a infinito para cualquier salida de referencia y/o perturbación no deseada.

Desde el punto de vista de tener un estado estacionario de error cero, no hay necesidad de mantener separados los roles de la respuesta de salida requerida y las perturbaciones no deseadas, dado que ambas pueden ser vistas como componentes de un sistema exógeno “aumentado”. Dados estos argumentos podemos modelar,

al sistema no lineal por las ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, w, u), \\ e &= h(x, w).\end{aligned}\tag{2.2}$$

La primera ecuación de (2.2), describe la dinámica de la *planta*, cuyo *estado* x está definido en una vecindad U del origen en \mathbb{R}^n , con una *entrada de control* $u \in \mathbb{R}^m$ y sujeta a un conjunto de variables de *entradas exógenas* $w \in \mathbb{R}^s$ la cual incluye *perturbaciones* (a rechazar) y/o *referencias* (a seguir). La segunda ecuación define a la variable de *error* $e \in \mathbb{R}^m$, la cual es expresada como una función del estado x y la entrada exógena w .

Por cuestiones de simplicidad matemática, y también porque de esta manera un amplio número de situaciones relevantes prácticas pueden ser cubiertas, se asume que la familia de entradas exógenas $w(\cdot)$, las cuales afectan a la planta y para las cuales el error decae asintóticamente, es la familia de todas las funciones del tiempo que son solución (posiblemente no lineal) de una ecuación diferencial homogénea

$$\dot{w} = s(w),\tag{2.3}$$

con las condiciones iniciales $w(0)$ que oscilan en una vecindad W del origen de \mathbb{R}^s . Este sistema, el cual es visto como el modelo matemático de un “generador” de todas las posibles funciones de entrada exógenas, es llamado *exosistema*.

Como de costumbre, se asume que $f(x, w, u)$, $h(x, w)$, $s(w)$ son funciones suaves y que $f(0, 0, 0) = 0$, $s(0) = 0$ y $h(0, 0) = 0$. Entonces, para $u = 0$, el sistema compuesto por (2.2)-(2.3) tiene un punto de equilibrio $(x, w) = (0, 0)$ que conduce al error cero.

La acción de control u de (2.2) debe estar dada por un *controlador en lazo cerrado*, el cual procesa la información recibida de la planta a fin de generar la entrada de control apropiada. La estructura del controlador usualmente depende de la información disponible para la retroalimentación. El caso más favorable, desde el punto de vista del diseño retroalimentado, ocurre cuando el conjunto de variables medibles incluye todas las componentes del estado x de la planta y la entrada del exosistema w . En este caso, se puede decir que el controlador está provisto de la *información completa* y es un sistema *sin memoria*, cuya salida u es

una función de los estados (x y w) de la planta y del exosistema:

$$u = \alpha(x, w). \quad (2.4)$$

La interconexión de (2.2) y (2.4) conduce al sistema en lazo cerrado descrito por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, w, \alpha(x, w)), \\ \dot{w} &= s(w). \end{aligned} \quad (2.5)$$

En particular se asume que $\alpha(0, 0) = 0$, entonces, el sistema en lazo cerrado (2.5) tiene un punto de equilibrio en $(x, w) = (0, 0)$.

Una situación más realista y común, es la que solamente los componentes del error e están disponibles para su medición. En este caso, se puede decir que el controlador está dado por la *retroalimentación del error* y por lo tanto es un sistema *dinámico* no lineal, modelado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta(\xi, e), \\ u &= \theta(\xi), \end{aligned} \quad (2.6)$$

con un estado interno ξ definido en una vecindad Ξ en el origen en \mathbb{R}^ν . La interconexión entre (2.2) y (2.6) conduce, en este caso, al siguiente sistema en lazo cerrado:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, w, \theta(\xi)), \\ \dot{\xi} &= \eta(\xi, h(x, w)), \\ \dot{w} &= s(w). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nuevamente se asume que $\eta(0, 0) = 0$ y $\theta(0) = 0$; entonces $(x, \xi, w) = (0, 0, 0)$ es un punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado (2.7).

El propósito del control es obtener un sistema en lazo cerrado, el cual, para cualquier entrada exógena $w(\cdot)$ y para cualquier estado inicial (en alguna vecindad del origen), la salida $e(\cdot)$ tienda a cero a medida que el tiempo tiende a infinito. Cuando éste es el caso, se dice que el sistema en lazo cerrado tiene la *propiedad de regulación de la salida*. Además, hay que tener en cuenta el requerimiento de que cada entrada exógena $w(\cdot)$ induce, en lazo cerrado, a una respuesta en estado

estacionario $x_{ss}(\cdot)$:

$$h(x_{ss}, w(t)) = 0,$$

para todo $t \geq 0$.

2.1.1. Problema de regulación de la salida (retroalimentación de estados)

Dado el sistema no lineal de la forma (2.2) y un exosistema neutral estable (2.3) encontrar, si es posible, un mapeo $\alpha(x, w)$ donde

(S)_{FI} el equilibrio $x = 0$ de

$$\dot{x} = f(x, 0, \alpha(x, 0)), \quad (2.8)$$

es asintóticamente estable en la primera aproximación;

(R)_{FI} entonces existe una vecindad $V \subset U \times W$ de $(0, 0)$ tal que, para cualquier condición inicial $(x(0), w(0)) \in V$, la solución de (2.5) satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(x(t), w(t)) = 0.$$

2.1.2. Problema de regulación de la salida (retroalimentación del error)

Dado un sistema no lineal de la forma (2.2) y un exosistema neutral estable (2.3) encontrar, si es posible, un integrador ν y dos mapeos $\theta(\xi)$ y $\eta(\xi, e)$ donde

(S)_{EF} el equilibrio $(x, \xi) = (0, 0)$ de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, 0, \theta(\xi)) \\ \dot{\xi} &= \eta(\xi, h(x, 0)), \end{aligned} \quad (2.9)$$

es asintóticamente estable en la primera aproximación;

(R)_{EF} entonces existe una vecindad $V \subset U \times \Xi \times W$ de $(0, 0, 0)$ tal que, para cualquier condición inicial $(x(0), \xi(0), w(0)) \in V$, la solución de (2.7) satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(x(t), w(t)) = 0.$$

Observación 1. Note que los requerimientos $(S)_{\text{FI}}$ y $(S)_{\text{EF}}$ son bastante fuertes dado que requiere estabilidad en la primera aproximación para el sistema en lazo cerrado. Una caracterización de este tipo garantiza —bajo la hipótesis de estabilidad neutral del exosistema— la existencia de una respuesta en estado estacionario bien definida. Sin embargo, es bastante exigente el requerimiento de estabilidad asintótica en la aproximación lineal de la planta controlada. La posibilidad de cumplir $(S)_{\text{FI}}$ y $(S)_{\text{EF}}$ dependerá enteramente de las propiedades de la *aproximación lineal* de la planta en $x = 0$ y el diseño de una ley de realimentación; siendo éste un problema cuya solución requiere sólo resultados estándares a partir de la teoría de sistemas lineales. Sin embargo, la solución de cumplir simultáneamente $(S)_{\text{FI}}$ y $(S)_{\text{FI}}$ (así como: $(S)_{\text{EF}}$ y $(R)_{\text{EF}}$) requiere de un análisis no lineal específico.

Dado que, las propiedades de aproximación de la planta controlada juega un rol determinante en la solución del problema de regulación, es conveniente establecer una notación apropiada en la cual los parámetros de esta aproximación sean explícitamente mostrados: el sistema en lazo cerrado (2.5) puede ser escrito en la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)x + (P + BL)w + \phi(x, w), \\ \dot{w} &= Sw + \psi(w), \end{aligned}$$

donde $\phi(x, w)$ y $\psi(w)$ desaparecen en el origen con sus derivadas de primer orden, y A, B, P, K, L, S son matrices definidas por:

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{(0,0,0)}, & B &= \left[\frac{\partial f}{\partial u} \right]_{(0,0,0)}, & P &= \left[\frac{\partial f}{\partial w} \right]_{(0,0,0)}, \\ K &= \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right]_{(0,0)}, & S &= \left[\frac{\partial s}{\partial w} \right]_{(0)}, & L &= \left[\frac{\partial \alpha}{\partial w} \right]_{(0,0)}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Por otra parte, el sistema en lazo cerrado (2.7) puede ser rescrito como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + BH\xi + Pw + \phi(x, \xi, w), \\ \dot{\xi} &= F\xi + GCx + GQw + \chi(x, \xi, w), \\ \dot{w} &= Sw + \psi(w),\end{aligned}$$

donde $\phi(x, \xi, w)$, $\chi(x, \xi, w)$ y $\psi(w)$ desaparecen en el origen con sus derivadas de primer orden, y C, Q, F, H, G son matrices definidas por

$$\begin{aligned}C &= \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right]_{(0,0)} & Q &= \left[\frac{\partial h}{\partial w} \right]_{(0,0)} & F &= \left[\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right]_{(0,0)} \\ G &= \left[\frac{\partial \eta}{\partial e} \right]_{(0,0)} & H &= \left[\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right]_{(0)}.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Usando esta notación, es inmediato darse cuenta que el requerimiento (S)_{FI} se cumplirá cuando la matriz Jacobiana de (2.8) en $x = 0$,

$$J = A + BK,$$

tenga todos sus valores propios con parte real negativa; mientras que (S)_{EF} requerirá que la matriz Jacobiana de (2.9) en $(x, \xi) = (0, 0)$,

$$J = \begin{pmatrix} A & BH \\ GC & F \end{pmatrix},$$

tenga todos los valores propios con parte real negativa.

De la teoría de sistemas lineales es fácil concluir que (S)_{FI} se puede llevar a cabo *solamente si* el par de matrices (A, B) es *estabilizable*, es decir, existe K tal que todos los valores propios de $(A + BK)$ tienen parte real negativa; (S)_{EF} puede ser alcanzado *solamente si* el par de matrices (A, B) es *estabilizable* y el par de matrices (C, A) es *detectable*, es decir, existe G tal que todos los valores propios de $(A + GC)$ tienen parte real negativa. Estas propiedades de la aproximación lineal de la planta (2.2) en $(x, w, u) = (0, 0, 0)$ son de hecho condiciones necesarias para solución del problema de regulación de la salida.

2.2. Regulación exacta de la salida (información completa)

En esta sección, se mostrará como resolver el problema de la regulación de la salida vía información completa. Para este fin, primero se presenta un resultado preliminar, simple pero muy importante, el cual más adelante proporcionará la llave para la solución del problema en cuestión.

Lema 1. *Asumir que, para algún $\alpha(x, w)$, la condición $(S)_{FI}$ se satisface. Entonces, la condición $(R)_{FI}$ también se satisface si y solamente si existe un mapeo $x = \pi(w)$, con $\pi(0) = 0$, definido en una vecindad $W^\circ \subset W$ del origen, satisfaciendo las condiciones*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w), w, \alpha(\pi(w), w)), \\ 0 &= h(\pi(w), w), \end{aligned} \tag{2.12}$$

para todo $w \in W^\circ$ \diamond

Demostración. Note que matriz Jacobiana del sistema en lazo cerrado (2.5) en el equilibrio $(x, w) = (0, 0)$ tiene la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} A + BK & \star \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

Por supuesto, los valores propios de la matriz $(A + BK)$ tienen parte real negativa, y aquellos de la matriz S están en el eje imaginario. Entonces, usando los resultados de la *teoría de variedad central* se puede deducir la existencia de variedad central local en $(0, 0)$ para el sistema (2.5). Esta variedad se puede expresar como una gráfica del mapeo

$$x = \pi(w),$$

con $\pi(w)$ que satisface a la ecuación (A.7) (véase apéndice A). Con la presente configuración, la ecuación en cuestión se reduce con precisión a la primera de (2.12).

Escoja un número real $R > 0$ y sea w° un punto de W° , con $\|w^\circ\| < R$. Ya que, por hipótesis de estabilidad neutral, el equilibrio $w = 0$ del exosistema

es estable; se puede escoger R de modo que la solución $w(t)$ de (2.3) satisfaga $w(0) = w^\circ$ y permanezca en W° para todo $t \geq 0$. Si $x(0) = x^\circ = \pi(w^\circ)$, entonces, la solución correspondiente $x(t)$ de (2.5) será tal que $x(t) = \pi(w(t))$ para todo $t \geq 0$, porque la variedad $x = \pi(w)$ es por definición invariante bajo el flujo de (2.5). Note que el mapeo

$$\begin{aligned} \mu : W^\circ &\rightarrow U \times W^\circ \\ w &\mapsto (\pi(w), w) \end{aligned}$$

(cuyo rango es igual a la dimensión de r de W°), define un difeomorfismo en una región de W° en su imagen. Entonces, la restricción del flujo de (2.5) a su variedad central es una copia difeomórfica del flujo del exosistema y cualquier punto de esta variedad, suficientemente cerca al origen, es *poisson estable* por hipótesis. Podemos mostrar que éste y el requerimiento $(R)_{\text{FI}}$ implican a la segunda ecuación de (2.12).

Porque, supongamos que (2.12) no es cierta en algún $(\pi(w^\circ), w^\circ)$ suficientemente cerca de $(0, 0)$. Entonces

$$M = \|h(\pi(w^\circ), w^\circ)\| > 0$$

y existe una vecindad V de $(\pi(w^\circ), w^\circ)$ tal que

$$\|h(\pi(w), w)\| > M/2$$

en cada $(\pi(w), w) \in V$. Si $(R)_{\text{FI}}$ se mantiene para una trayectoria empezando en $(\pi(w^\circ), w^\circ)$, entonces existe T tal que

$$\|h(\pi(w(t)), w(t))\| < M, \tag{2.13}$$

para todo $t > T$; pero si $(\pi(w^\circ), w^\circ)$ es Poisson estable, entonces para algún $t' > T$, $(\pi(w(t')), w(t')) \in V$ contradiciendo la desigualdad anterior. En consecuencia la segunda ecuación de (2.12) debe ser verdadera.

Con el fin de demostrar la suficiencia, observe que, si la primera ecuación de (2.12) se satisface, la gráfica del mapeo $x = \pi(w)$ es por construcción una variedad central de (2.5). Por otra parte, de la segunda ecuación de (2.12), el error satisface

$$e(t) = h(x(t), w(t)) - (\pi(w(t)), w(t)).$$

Observe que $(x, w) = (0, 0)$ es un punto de equilibrio estable de (2.5). Entonces, para un $(x(0), w(0))$ bastante pequeño, la solución $(x(t), w(t))$ de (2.5) se mantiene en cualquier vecindad arbitrariamente pequeña de $(0, 0)$ para todo $t \geq 0$. Usando la propiedad de *variedad central*, véase Apéndice A, se deduce que existen números reales $M > 0$ y $a > 0$ tal que

$$\|x(t) - \pi(w(t))\| \leq Me^{-at}\|x(0) - \pi(w(0))\|,$$

para todo $t \geq 0$. Por continuidad de $h(x, w)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$, es decir, la condición (R)_{FI} se cumple. \square

Usando este resultado, es sencillo establecer la condición suficiente y necesaria para la solución del problema de regulación de la salida con información completa.

Teorema 2.2.1. *El problema de regulación de la salida con información completa se puede resolver si y sólo si el par (A, B) es estabilizable y existen mapeos $x = \pi(w)$ y $u = \gamma(w)$, con $\pi(0) = 0$ y $\gamma(0) = 0$, ambos definidos en una vecindad $W^\circ \subset W$ del origen, satisfaciendo las condiciones*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w), w, \gamma(w)), \\ 0 &= h(\pi(w), w), \end{aligned} \tag{2.14}$$

para todo $w \in W^\circ$. \diamond

Demostración. La necesidad de que el par (A, B) sea estabilizable ya se ha discutido en la sección anterior. Para deducir la necesidad de (2.14) sólo basta observar que, por el Lema 1, cualquier ley de retroalimentación que resuelva el problema en cuestión es necesariamente aquel que mantenga las identidades (2.12) para algún $\pi(w)$. Ahora, configurando

$$c(w) = \alpha(\pi(w), w),$$

inmediatamente conduce a (2.14).

Con el objetivo de establecer la suficiencia, por hipótesis existe una matriz K tal que $(A + BK)$ tiene sus valores propios con parte real negativa. Además,

suponga que las condiciones (2.14) se cumplen para algún $\pi(w)$ y $\gamma(w)$: se puede definir la señal de control de la siguiente forma

$$\alpha(x, w) = \gamma(w) + K(x - \pi(w)).$$

Se puede notar que la ecuación anterior es la solución al problema de regulación de la salida con la información completa. De hecho, esta selección claramente satisface los requerimientos de (S)_{FI}, ya que $\alpha(x, 0) = Kx$. Además, considerando

$$\alpha(\pi(w), w) = \gamma(w),$$

la primera ecuación de (2.14) se convierte idénticamente en la primera ecuación de (2.12). Por otra parte, la segunda ecuación de (2.14) es exactamente igual a la segunda ecuación de (2.12), por lo que, usando el lema 1 se concluye que el requerimiento (R)_{FI} también se cumple. \square

Observación 2. La primera de las dos condiciones de (2.14) expresa el hecho de que hay una subvariedad en el espacio estado para el sistema compuesto por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, w, u), \\ \dot{w} &= s(w), \\ e &= h(x, w), \end{aligned} \tag{2.15}$$

representada por el mapeo $x = \pi(w)$, el cual es localmente invariante por efecto de una ley apropiada de retroalimentación ($u = c(w)$). La segunda condición expresa el hecho que el error, la salida del sistema compuesto (2.15), es cero en cada punto de esta variedad. En conjunto las condiciones en (2.14) tienen la propiedad que el mapeo $x = \pi(w)$ es una subvariedad que conduce a la salida al error cero del sistema (2.15).

Observación 3. Recuerde que un campo vectorial C^k tiene una variedad central C^{k-1} . Si el problema se resuelve para alguna ley de control C^k ($\gamma(x, w)$), (2.14) se mantiene para el par de mapeos C^k ($x = \pi(w)$ y $u = \gamma(w)$). De manera inversa si (2.14) se mantiene para el par de mapeos C^k ($x = \pi(w)$ y $u = \gamma(w)$), el problema de regulación de la salida se resuelve para una ley de control C^k ($\gamma(x, w)$).

Observación 4. Si el sistema (2.15) es lineal, las condiciones (2.14) se reducen al sistema de ecuaciones lineales matriciales. En este caso el sistema quedará descrito

por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Pw, \\ \dot{w} &= Sw, \\ e &= Cx - Qw,\end{aligned}$$

y si los mapeos $x = \pi(w)$ y $u = \gamma(w)$ cambian a la forma

$$\begin{aligned}\pi(w) &= \Pi w + \tilde{\pi}(w), \\ \gamma(w) &= \Gamma w + \tilde{\gamma}(w),\end{aligned}$$

con

$$\Pi = \left[\frac{\partial \pi}{\partial w} \right]_{w=0}, \quad \Gamma = \left[\frac{\partial \gamma}{\partial w} \right]_{w=0},$$

las ecuaciones de (2.14) tienen la solución, si y solamente si, las ecuaciones matriciales lineales

$$\begin{aligned}\Pi S &= A\Pi + B\Gamma + P, \\ 0 &= C\Pi - Q,\end{aligned}$$

pueden resolverse para Π y Γ . Note que, si este es el caso, los mapeos $\pi(w)$ y $\gamma(w)$ que resuelven a (2.14) son de hecho mapeos lineales, es decir, $\pi(w) = \Pi(w)$ y $\gamma(w) = \Gamma(w)$.

La demostración de suficiencia, en el Teorema 2.2.1 muestra en particular que una vez conocida la solución $\pi(w), \gamma(w)$ de (2.14), la ley de control que resuelve el problema de regulación de la salida estará determinada por

$$\alpha(x, w) = K(x - \pi(w)) + \gamma(w), \quad (2.16)$$

donde K es cualquier matriz que ubica los valores propios de $(A + BK)$ en la parte izquierda del plano complejo abierto.

Capítulo 3

Regulación exacta de la salida para sistemas no lineales descritos por modelos T-S

3.1. El modelo difuso tipo Takagi-Sugeno

En años recientes hemos sido testigos del rápido crecimiento y popularidad de los sistemas de control difuso en ingeniería, donde numerosas aplicaciones exitosas de estos sistemas han provocado un desarrollo de actividades en el análisis y diseño de los mismos.

Un controlador difuso contiene cuatro componentes principales:

1. Las *reglas difusas* contienen el conocimiento, en la forma de un conjunto de reglas, para controlar al sistema de forma adecuada.
2. El *mecanismo de inferencia* que evalúa las reglas de control relevantes en el tiempo correspondiente y decide la señal de entrada a la planta.
3. La *interfase de fusificación* simplemente modifica las entradas para ser interpretadas y comparadas con las reglas base.

4. La *interfase de defusificación* convierte las conclusiones alcanzadas por el mecanismo de inferencia en entradas de la planta.

El controlador difuso se puede resumir en el diagrama de control en lazo cerrado mostrado en la figura 3.1. La salida de la planta está dada por $y(t)$, las entradas por $u(t)$ y la entrada de referencia por $r(t)$. Las reglas difusas, son de-

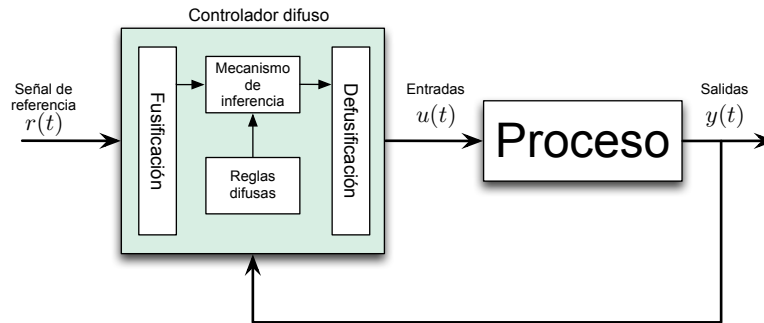


FIGURA 3.1: Arquitectura del controlador difuso

claraciones lingüísticas del tipo **SI-ENTONCES** e involucran conjuntos difusos, lógica difusa e inferencia difusa. Estas reglas juegan un papel muy importante en la representación o modelado del control experto. Dos principales tipos de reglas difusas se pueden distinguir en este contexto: Mamdani y Takagi-Sugeno (**T-S**). Las herramientas desarrolladas en este trabajo están basadas en estructura de los sistemas difusos tipo **T-S**, para esto la idea de sector no lineal es necesaria.

3.2. Sector no lineal

El sector no lineal se basa en la siguiente idea: considere un sistema simple, no lineal, $\dot{x}(t) = f(x(t))$, donde $f(0) = 0$. El propósito es encontrar un sector global tal que $\dot{x}(t) = f(x(t)) \in [a_1 \ a_2] x(t)$. La fig. 3.2 muestra la aproximación de este sector. Esta aproximación garantiza la construcción de un modelo difuso de forma exacta, sin embargo, es difícil encontrar sectores globales para sistemas no lineales en general. En este caso, se puede considerar un *sector local no lineal*; esto es razonable siempre y cuando las variables del sistema físico se encuentren acotadas. La fig. 3.3 muestra el sector local, donde dos líneas se convierten en sectores locales

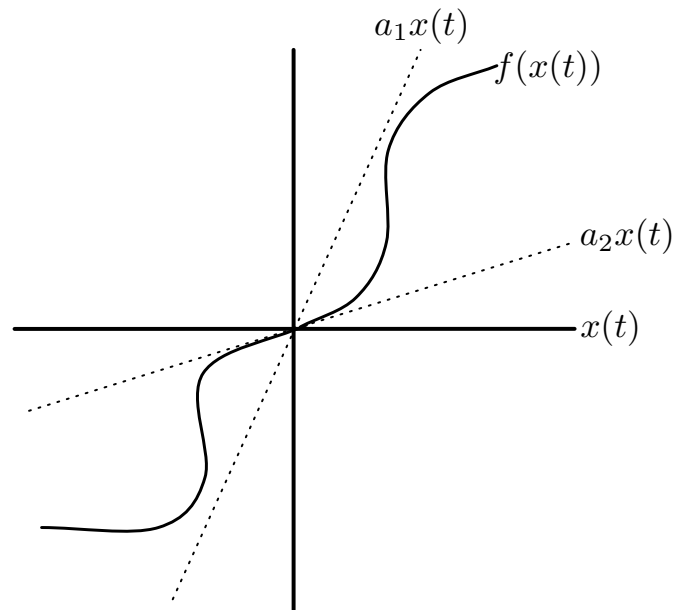


FIGURA 3.2: Sector global no lineal

bajo $-d < x(t) < d$. El modelo no lineal puede ser representado exactamente por un modelo difuso en la región *local*, es decir, $-d < x(t) < d$.

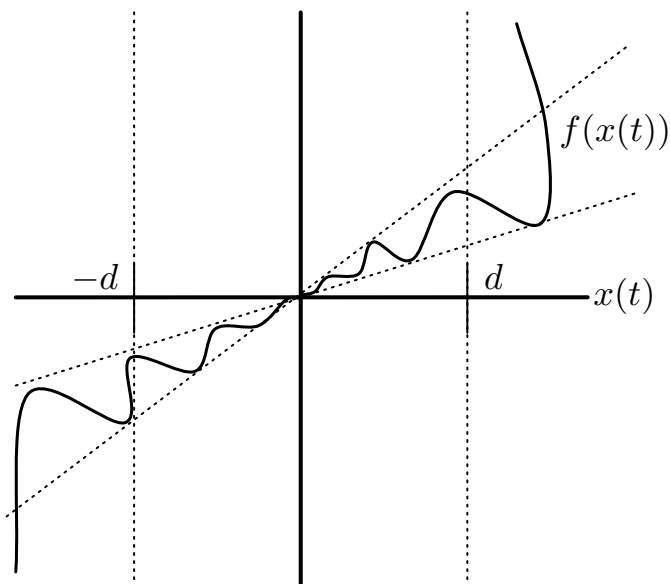


FIGURA 3.3: Sector local no lineal

3.3. Construcción del modelo difuso

Para construir un controlador difuso, se necesita el modelo difuso de un sistema no lineal. Entonces, la construcción de dicho modelo representa un procedimiento importante y básico en esta aproximación. La fig. 3.4 muestra la base para el diseño del control difuso. En general hay dos formas de construir el modelo difuso:

1. Identificación (modelado difuso) usando datos de entrada-salida.
2. Derivación de las ecuaciones del sistema no lineal dado.

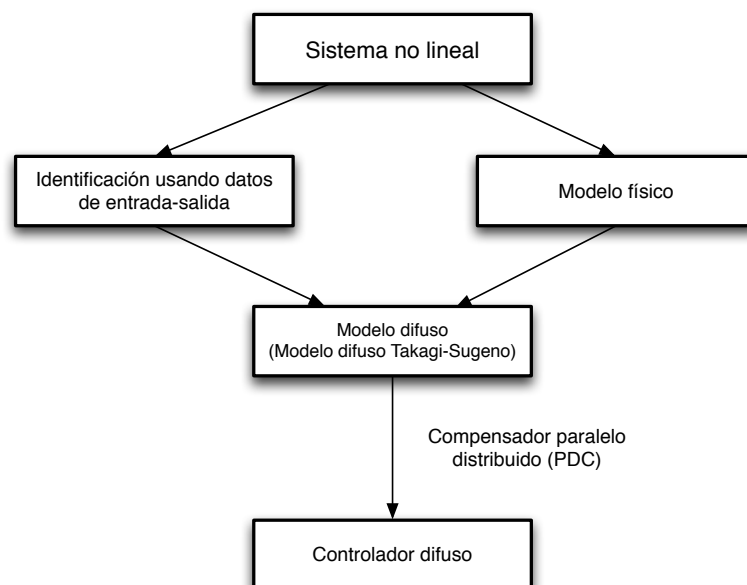


FIGURA 3.4: Base del modelo para el diseño del control difuso

El procedimiento para el caso 1 principalmente consiste de dos partes: primero la identificación de la estructura y segundo la identificación de parámetros. Esta aproximación es adecuada para plantas que son incapaces o muy difíciles de ser representadas por modelos analíticos y/o físicos. Por otra parte, los modelos dinámicos no lineales para sistemas mecánicos pueden ser fácilmente obtenidos, por ejemplo, usando el método de Lagrange o Newton-Euler. En tales casos la segunda aproximación, la cual deriva a un modelo difuso dado por modelos dinámicos no lineales, es más apropiada, pues utiliza la idea de *sector no lineal*, *aproximación local* o una combinación entre ellos para construir dicho modelo.

3.4. Conceptos básicos para el modelado

Considere el sistema no lineal definido de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + x_2^2 + u.\end{aligned}\tag{3.1}$$

El objetivo principal consiste en representar el sistema no lineal en un modelo difuso (**T-S**) [15], mediante la aproximación del sector no lineal *en una región predeterminada*, exactamente igual al sistema original y con la misma señal de entrada.

Los siguientes pasos, para derivar el modelo difuso **T-S** de (3.1), se deben tomar en cuenta. Por simplicidad, se asume que $x_1 \in [0,5, 3,5]$ y $x_2 \in [-1, 4]$, aquí x_1 y x_2 son términos no lineales en la segunda ecuación de (3.1), por lo tanto, se definen como variables difusas. Generalmente, éstas se denotan como z_1 y z_2 y son conocidas como las variables premisa que pueden ser función de las variables de estado, variables de entrada y/o el tiempo. Entonces, $z_1 = x_1$ y $z_2 = x_2$.

La ecuación (3.1) puede ser reescrita como

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} x(t),$$

donde $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$. El primer paso para cualquier modelado difuso es determinar las variables difusas y los conjuntos difusos, llamados comúnmente *funciones de membresía*. Sin embargo, no hay un procedimiento general para este paso y puede estar dado por varios métodos, predominando la prueba y error. Además, por simplicidad se asume que las variables premisa sean sólo funciones de las variables de estado. Esta asunción es necesaria para evitar un proceso de defusificación complejo de los controladores difusos.

Para obtener las funciones de membresía, se deben calcular los valores mínimos y máximos de $z_1(t)$ y $z_2(t)$, los cuales bajo $x_1 \in [0,5, 3,5]$ y $x_2 \in [-1, 4]$

son

$$\begin{aligned} \text{máx } z_1(t) &= 3,5, & \text{mín } z_1(t) &= 0,5, \\ \text{máx } z_2(t) &= 4, & \text{mín } z_2(t) &= -1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, x_1 y x_2 pueden ser representadas por funciones de membresía M_1 , M_2 , N_1 y N_2 de la manera siguiente

$$\begin{aligned} z_1(t) = x_1(t) &= M_1(z_1(t)) \cdot 3,5 + M_2(z_1(t)) \cdot 0,5, \\ z_2(t) = x_2(t) &= N_1(z_2(t)) \cdot 4 + N_2(z_2(t)) \cdot (-1), \end{aligned}$$

y debido a que M_1 , M_2 , N_1 y N_2 son conjuntos difusos se cumple que

$$\begin{aligned} M_1(z_1(t)) + M_2(z_1(t)) &= 1, \\ N_1(z_2(t)) + N_2(z_2(t)) &= 1. \end{aligned}$$

Entonces, las funciones de membresía están descritas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} M_1(z_1(t)) &= \frac{z_1(t) - 0,5}{2,5}, & M_2(z_1(t)) &= \frac{3 - z_1(t)}{2,5}, \\ N_1(z_2(t)) &= \frac{z_2(t) + 1}{5}, & N_2(z_2(t)) &= \frac{4 - z_2(t)}{5}. \end{aligned}$$

Ahora bien, podemos definir las funciones de membresía como: “positivo”, “negativo”, “grande” y “pequeño”. La fig 3.5. muestra gráficamente estas funciones.

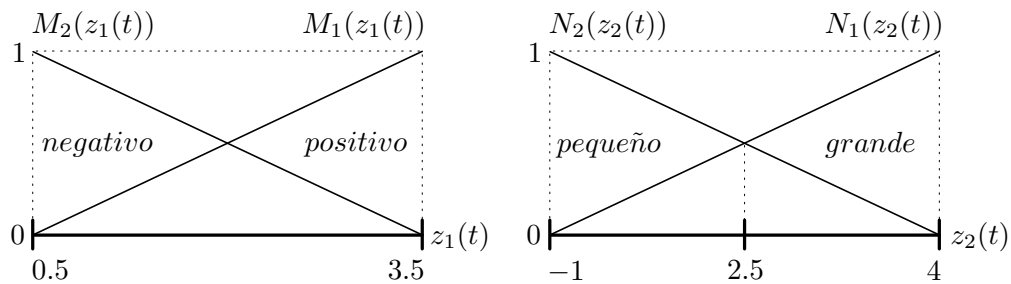


FIGURA 3.5: Funciones de membresía $M_1(z_1(t))$, $M_2(z_1(t))$, $N_1(z_2(t))$ y $N_2(z_2(t))$

De aquí se puede generalizar para la i -ésima regla del modelo difuso tipo **T-S**, en tiempo continuo, como

Regla i del modelo:

SI $z_1(t)$ es M_{i1} y \dots y $z_p(t)$ es M_{ip} ,

$$\mathbf{ENTONCES} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (3.2)$$

Donde M_{ij} es un conjunto difuso; r es el número de reglas del modelo; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada; $y(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de salida; $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$, y $z_1(t), \dots, z_p(t)$ son conocidas como las variables premisa que pueden ser funciones de las variables de estado, perturbaciones externas y/o tiempo. Usaremos $z(t)$ para denotar al vector que contiene los elementos $z_1(t), \dots, z_p(t)$, además, se asume que las variables premisa no son funciones de las variables de entrada $u(t)$, a fin de evitar un proceso complejo de defusificación de los controladores difusos.

Cada ecuación lineal representada mediante $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$ es llamada un *subsistema*.

Entonces, el sistema no lineal (3.1) es modelado por las siguientes reglas difusas.

Regla 1 del modelo:

$$\mathbf{SI} \ z_1(t) \text{ es "positivo" y } z_2(t) \text{ es "grande", } \mathbf{ENTONCES} \left\{ \dot{x}(t) = A_1 x(t). \right.$$

Regla 2 del modelo:

$$\mathbf{SI} \ z_1(t) \text{ es "positivo" y } z_2(t) \text{ es "pequeño", } \mathbf{ENTONCES} \left\{ \dot{x}(t) = A_2 x(t). \right.$$

Regla 3 del modelo:

$$\mathbf{SI} \ z_1(t) \text{ es "negativo" y } z_2(t) \text{ es "grande", } \mathbf{ENTONCES} \left\{ \dot{x}(t) = A_3 x(t). \right.$$

Regla 4 del modelo:

$$\mathbf{SI} \ z_1(t) \text{ es "negativo" y } z_2(t) \text{ es "pequeño", } \mathbf{ENTONCES} \left\{ \dot{x}(t) = A_4 x(t). \right.$$

Además los subsistemas estarán determinados como

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \max_{z_1 \in \text{Positivo}} z_1 & \max_{z_2 \in \text{grande}} z_2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \max_{z_1 \in \text{Positivo}} z_1 & \max_{z_2 \in \text{pequeño}} z_2 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \max_{z_1 \in \text{Negativo}} z_1 & \max_{z_2 \in \text{grande}} z_2 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \max_{z_1 \in \text{Negativo}} z_1 & \max_{z_2 \in \text{pequeño}} z_2 \end{bmatrix}.$$

Substituyendo valores, los subsistemas quedarán definidos de la siguiente forma

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3,5 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3,5 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,5 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ahora, $\dot{x}(t)$ puede ser derivada mediante el siguiente proceso de defusificación

$$\dot{x}(t) = h_1(z(t))A_1x(t) + h_2(z(t))A_2x(t) + h_3(z(t))A_3x(t) + h_4(z(t))A_4x(t),$$

donde

$$\begin{aligned} h_1(z(t)) &= M_1(z_1(t)) \times N_1(z_2(t)), \\ h_2(z(t)) &= M_1(z_1(t)) \times N_2(z_2(t)), \\ h_3(z(t)) &= M_2(z_1(t)) \times N_1(z_2(t)), \\ h_4(z(t)) &= M_2(z_1(t)) \times N_2(z_2(t)). \end{aligned}$$

Este modelo difuso puede representar al sistema no lineal en la región $[0,5, 3,5] \times [-1, 4]$ en el espacio $x_1 - x_2$. Para tener una idea clara del procedimiento de modelado difuso, se calculan la salida de $\dot{x}(t)$ para valores específicos de x_1 y x_2 .

De acuerdo con las reglas del modelo descritas anteriormente tenemos:

Regla 1 del modelo:

$$\text{SI } z_1(t) \text{ es "positivo" y } z_2(t) \text{ es "grande", ENTONCES } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 3,5x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

Regla 2 del modelo:

$$\text{SI } z_1(t) \text{ es "positivo" y } z_2(t) \text{ es "pequeño", ENTONCES } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 3,5x_1 - x_2 \end{cases}$$

Regla 3 del modelo:

$$\text{SI } z_1(t) \text{ es "negativo" y } z_2(t) \text{ es "grande", ENTONCES } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0,5x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

Regla 4 del modelo:

$$\text{SI } z_1(t) \text{ es "negativo" y } z_2(t) \text{ es "pequeño", ENTONCES } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0,5x_1 - x_2 \end{cases}$$

De acuerdo con (3.3), si $z_1 = x_1 = 2,75$ y $z_2 = x_2 = 0,25$, véase fig. 3.6, la implicación de modelación **T-S** estará definida por la tabla 3.1.

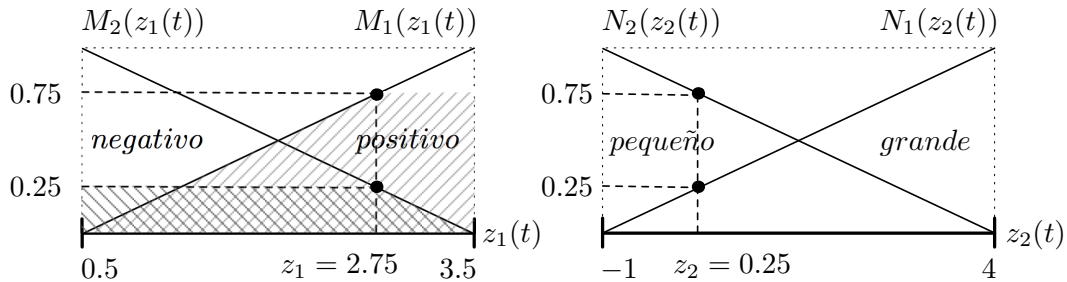


FIGURA 3.6: Funciones de membresía para los valores $z_1 = 2,75$ y $z_2 = 0,25$

Ahora bien, los valores finales para \dot{x}_1 y \dot{x}_2 , en el proceso de defusificación, son calculados mediante

$$\dot{x}(t) = h_1(z(t))A_1x(t) + h_2(z(t))A_2x(t) + h_3(z(t))A_3x(t) + h_4(z(t))A_4x(t),$$

CUADRO 3.1: Modelación Difusa

Regla	Premisa	Consecuencia	Valor $h_i(z(t))$
Regla 1	$M_1(z_1) = 0,75,$ $N_1(z_2) = 0,25$	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0,25 \\ \dot{x}_2 = 3,5 \times 2,75 + 4 \times 0,25 \end{cases}$	$0,75 \wedge 0,25 = 0,1875$
Regla 2	$M_1(z_1) = 0,75,$ $N_2(z_2) = 0,75$	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0,25 \\ \dot{x}_2 = 3,5 \times 2,75 - 0,25 \end{cases}$	$0,75 \wedge 0,75 = 0,5625$
Regla 3	$M_2(z_1) = 0,25,$ $N_1(z_2) = 0,25$	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0,25 \\ \dot{x}_2 = 0,5 \times 2,75 + 4 \times 0,25 \end{cases}$	$0,25 \wedge 0,25 = 0,0625$
Regla 4	$M_2(z_1) = 0,25,$ $N_2(z_2) = 0,75$	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0,25 \\ \dot{x}_2 = 0,5 \times 2,75 - 0,25 \end{cases}$	$0,25 \wedge 0,75 = 0,1875$

entonces

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0,1875 \times 0,25 + 0,5625 \times 0,25 + 0,0625 \times 0,25 + 0,1875 \times 0,25 = 0,25, \\ \dot{x}_2 = 0,1875 \times 10,625 + 0,5625 \times 9,375 + 0,0625 \times 2,375 + 0,1875 \times 1,125 = 7,625. \end{cases}$$

Comparando, los valores de $\dot{x}_1 = 0,25$ y $\dot{x}_2 = 7,6225$ del sistema no lineal, se nota que la aproximación difusa **T-S** se comporta de forma exacta.

3.5. Modelo Difuso Takagi-Sugeno

El modelo difuso propuesto por Takagi y Sugeno [14] está descrito por reglas difusas del tipo **SI-ENTONCES**, las cuales representan relaciones locales lineales de entrada-salida de un sistema no lineal. La principal característica de un sistema difuso **T-S** es expresar la dinámica local de cada implicación difusa (regla) mediante un sistema modelado linealmente. Además, el modelo difuso completo se obtiene mediante “la mezcla difusa” de los sistemas lineales.

Dado un par $(x(t), u(t))$, la salida final del sistema difuso se infiere como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r \omega_i(z_1(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z_1(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z_1(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r \omega_i(z_1(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z_1(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z_1(t)) C_i x(t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde

$$\begin{aligned} z(t) &= \left[z_1(t) \quad z_2(t) \quad \cdots \quad z_p(t) \right], \\ \omega_i(z(t)) &= \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t)), \\ h_i(z(t)) &= \frac{\omega_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t))}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

para todo t . El término $M_{ij}(z_j(t))$ es el grado de pertenencia de $z_j(t)$ en M_{ij} . Dado

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r \omega_i(z_1(t)) > 0, \\ \omega_i(z(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \end{cases} \quad (3.6)$$

tenemos

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r h_i(z_1(t)) = 1, \\ h_i(z(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \end{cases} \quad (3.7)$$

para todo t [15].

3.5.1. Modelo difuso T-S del problema de regulación no lineal

Considere el sistema no lineal formado por:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \omega(t), u(t)), \quad (3.8)$$

$$y(t) = c(x(t)), \quad (3.9)$$

$$\dot{\omega}(t) = s(\omega(t)), \quad (3.10)$$

$$y_{ref}(t) = q(\omega(t)), \quad (3.11)$$

$$e(t) = h(x(t), \omega(t)), \quad (3.12)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados de la planta; $w(t) \in W \subset \mathbb{R}^s$ es el vector de estados del exosistema, el cual genera la señal de referencia a seguir y/o las perturbaciones, y $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es la señal de entrada. La ecuación (3.12) se refiere a la diferencia entre la salida de la planta ($y(t) \in \mathbb{R}^m$) menos la señal de referencia ($y_{ref}(t) \in \mathbb{R}^m$), es decir, $h(x(t), \omega(t)) = y(t) - y_{ref}(t) = c(x(t)) - q(x(t))$, además, es importante distinguir que $m \leq n$. Por otra parte, como es costumbre se asume que $f(\cdot, \cdot, \cdot)$, $h(\cdot, \cdot)$ y $w(\cdot)$ son funciones C^k (para una k grande) en sus argumentos y también que $f(0, 0, 0) = 0$, $s(0) = 0$, y $h(0, 0) = 0$ [16].

Dado que el exosistema y la planta no tienen una relación entre ellos, es posible construir el modelo difuso con diferentes funciones de membresía, es decir, se define el número de reglas r_1 para la planta y r_2 para el exosistema: el modelo difuso estará dado como

Planta:

SI $z_{1,1}(t)$ es $M_{1,i,1}$ y \dots y $z_{1,p_1}(t)$ es M_{1,i,p_1} ,

$$\text{ENTONCES} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + P_i w(t), \\ y(t) = C_i x(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r_1. \quad (3.13)$$

Exosistema:

SI $z_{2,1}(t)$ es $M_{2,i,1}$ y \dots y $z_{2,p_2}(t)$ es M_{2,i,p_2} ,

$$\text{ENTONCES} \quad \begin{cases} \dot{w}(t) &= S_i w(t), \\ y_{ref}(t) &= Q_i w(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r_2. \quad (3.14)$$

Los conjuntos difusos $M_{1,i,j}$ y $M_{2,i,j}$ están definidos sobre el conocimiento previo de la dinámica de ambos sistemas.

Las matrices A_i , B_i , P_i , C_i , S_i y Q_i se obtienen linearizando el sistema, no lineal, en puntos de operación adecuados $(x, w, u) = (x^i, w^i, u^i)$:

$$A_i = \left[\frac{\partial f(x, w, u)}{\partial x} \right]_{(x^i, w^i, u^i)}, \quad B_i = \left[\frac{\partial f(x, w, u)}{\partial u} \right]_{(x^i, w^i, u^i)}, \quad P_i = \left[\frac{\partial f(x, w, u)}{\partial w} \right]_{(x^i, w^i, u^i)},$$

$$C_i = \left[\frac{\partial h(x, w)}{\partial x} \right]_{(x^i, w^i)}, \quad S_i = \left[\frac{\partial s(w)}{\partial w} \right]_{(w^i)}, \quad Q_i = \left[\frac{\partial h(x, w)}{\partial w} \right]_{(x^i, w^i)}.$$

Dado $(x(t), u(t), w(t))$ el modelo difuso completo estará dado por

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t) + P_i w(t)\} \quad (3.15)$$

$$\dot{w}(t) = \sum_{i=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t)) S_i w(t) \quad (3.16)$$

$$e(t) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) C_i x(t) - \sum_{i=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t)) Q_i w(t), \quad (3.17)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados de la planta, $w(t) \in \mathbb{R}^s$ el vector de estados del exosistema, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ la señal de control, $e(t) \in \mathbb{R}^m$ representa el error de seguimiento y $z_{*,1} = [z_{*,1}(t) z_{*,2}(t) \dots z_{*,p}(t)]$ es una función de $x(t)$ y/o de $w(t)$. De la descripción dada en la Sección 3.1, las funciones de membresía deben cumplir con

$$\omega_{*,i}(z_*(t)) = \prod_{j=1}^{p_*} M_{*,i,j}(z_{*,j}(t)),$$

$$h_{*,i}(z_*(t)) = \frac{\omega_{*,i}(z_*(t))}{\sum_{i=1}^{r_*} \omega_{*,i}(z_*(t))}, \quad (3.18)$$

para todo $t \geq 0$, y el término $M_{*,i,j}(z_{*,j}(t))$ es el valor de pertenencia de $z_{*,j}(t)$ en el conjunto $M_{*,i,j}$. Dado que

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{r_*} \omega_{*,i}(z_*(t)) > 0, \\ \omega_{*,i}(z_*(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r_*, \end{cases} \quad (3.19)$$

se tiene lo siguiente

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{r_*} h_{*,i}(z_*(t)) = 1, \\ h_{*,i}(z_*(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r_*, \end{cases} \quad (3.20)$$

para todo $t \geq 0$ y teniendo en cuenta el término “*” (1 para la planta y 2 para el exosistema) [8].

3.6. El problema de regulación difusa de la salida

Como se describió anteriormente el problema de regulación consiste básicamente en encontrar, si es posible, un control en lazo cerrado que cumpla con dos objetivos: a) el sistema debe ser estabilizable y b) debe encontrarse una entrada en estado estacionario o un modelo interno de tal forma que la salida del sistema siga una señal de referencia definida por el exosistema. Entonces, una vez obtenido el modelo difuso **T-S** del sistema no lineal y de forma análoga al **PRES** el *problema de regulación difusa exacta de la salida* (**PRDES**) está definido por un controlador de la forma

$$u(t) = \alpha(x(t), w(t)), \quad (3.21)$$

tal que

(FS)_{FI} el punto de equilibrio $x(t) = 0$ para el sistema en lazo cerrado sin ninguna señal externa

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \{A_i x(t) + B_i \alpha(x(t), 0)\},$$

es asintóticamente estable y

(FR)**FI** la solución del sistema difuso en lazo cerrado satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0,$$

cuando la planta está bajo el efecto del exosistema.

3.7. La regulación difusa de la salida (reguladores lineales)

Si consideramos que cada subsistema local tiene el mismo exosistema, incluso siendo éste no lineal, la propiedad del modelo **T-S** permite el diseño de un regulador *local o lineal* para cada subsistema. Hasta ahora, la propiedad de regulación se ha tratado como el caso descrito en el Teorema 2.2.1, de manera homóloga es necesario encontrar un estado estacionario de error cero y una entrada en estado estacionario (que hace esta variedad invariante) para el sistema no lineal descrito por el modelo difuso **T-S**: se establece el siguiente postulado

Teorema 3.7.1. *El problema de regulación difusa de la salida con información completa se puede resolver si y sólo si el par (A_i, B_i) es estabilizable y existen mapeos $x_{ss} = \pi(w(t))$ y $u_{ss} = \gamma(w(t))$, con $\pi(0) = 0$ y $\gamma(0) = 0$, ambos definidos en una vecindad $W^\circ \subset W$ del origen, satisfaciendo las condiciones*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) &= \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \{A_i \pi(w(t)) + B_i \gamma(w(t)) + P_i w(t)\} \\ 0 &= \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) C_i \pi(w(t)) - \sum_{i=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t)) Q_i w(t) \end{aligned} \quad (3.22)$$

para todo $w \in W^\circ$; $\pi(w(t))$ es la variedad de error cero en estado estacionario, la cual se hace invariante por efecto de la entrada $\gamma(w(t))$. \diamond

Demostración. Refiérase a [8]. □

Observación 5. Para lograr la regulación exacta, es necesario que existan matrices K_i tal que

$$\bar{A}_{ii}^T P + P \bar{A}_{ii} < 0,$$

para todo $i = 1, \dots, r_1$, y

$$\left(\frac{\bar{A}_{ij} + \bar{A}_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{\bar{A}_{ij} + \bar{A}_{ji}}{2} \right) \leq 0,$$

para $i < j \leq r_1$, donde

$$\bar{A}_{ij} = (A_i + B_i K_j).$$

Sin embargo. Existen métodos de relajación para las condiciones de estabilidad de sistemas **T-S**, no siendo única la propuesta del **PDC**, véase [17], [18], [19], [20], [21] y [22].

El primer intento de desarrollar un método para resolver el problema de regulación difusa, basado en el diseño de controladores locales lineales, considera que los mapeos $\pi(w(t))$ y $\gamma(w(t))$ están aproximados mediante

$$\tilde{\pi}(w(t)) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \Pi_i w(t), \quad (3.23)$$

$$\tilde{\gamma}(w(t)) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \Gamma_i w(t), \quad (3.24)$$

respectivamente. Note que las ecuaciones (3.23) y (3.24) no contienen las funciones de membresía del exosistema, debido a que éste está considerado como puramente lineal.

La solución del problema de regulación local esta dada para r_1 subsistemas por Π_i y Γ_i con

$$\Pi_i S_i = A_i \Pi_i + B_i \Gamma_i + P_i, \quad (3.25)$$

$$0 = C_i \Pi_i - Q_i, \quad (3.26)$$

para $i = 1, \dots, r_1$: el siguiente controlador se obtiene

$$u(t) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) K_i \left[x(t) - \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \Pi_i w(t) \right] + \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \Gamma_i w(t). \quad (3.27)$$

Otro problema a considerar, el cual es más común, es cuando hay que diseñar un regulador difuso local para cada subsistema considerando un exosistema no lineal. Entonces, el regulador completo estará dado por la “combinación” de r_1

subsistemas locales. Ahora bien, las aproximaciones de $\pi(w(t))$ y $\gamma(w(t))$ están dadas por

$$\tilde{\pi}(w(t)) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \sum_{j=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t)) \Pi_{ij} w(t), \quad (3.28)$$

$$\tilde{\gamma}(w(t)) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \sum_{j=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t)) \Gamma_{ij} w(t). \quad (3.29)$$

Con Π_{ij} y Γ_{ij} como soluciones de $r_1 \cdot r_2$ problemas locales del regulación lineal

$$\Pi_{ij} S_i = A_i \Pi_{ij} + B_i \Gamma_{ij} + P_i, \quad (3.30)$$

$$0 = C_i \Pi_{ij} - Q_j, \quad (3.31)$$

para todo $i = 1, \dots, r_1$ y $j = 1, \dots, r_2$. Como resultado se obtiene la siguiente ley de control

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) K_i \left[x(t) - \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \sum_{j=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t)) \Pi_{ij} w(t) \right] \\ &+ \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \sum_{j=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t)) \Gamma_{ij} w(t). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Para saber si las aproximaciones (3.23) y (3.24) son válidas y satisfacen las condiciones de regulación, será necesario que cumplan con el Teorema 5.3.1; al ser substituidas en (3.22) se obtiene lo siguiente:

$$a_1(z(t)) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \sum_{j=1}^{r_1} h_{1,j}(z_1(t)) \sum_{k=1}^{r_2} h_{2,k}(z_2(t)) A_i \Pi_{jk} \quad (3.33)$$

$$+ \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \sum_{j=1}^{r_1} h_{1,j}(z_1(t)) \sum_{k=1}^{r_2} h_{2,k}(z_2(t)) B_i \Gamma_{jk} + \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) P_i$$

$$0 = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \sum_{j=1}^{r_1} h_{1,j}(z_1(t)) \sum_{k=1}^{r_2} h_{2,k}(z_2(t)) C_i \Pi_{jk} \quad (3.34)$$

$$- \sum_{i=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t)) Q_i,$$

con $a_1(z(t))$ definido como

$$a_1(z(t)) = \left[\begin{array}{l} \sum_{h=1}^{r_1} \dot{h}_{1,i}(z_1(t)) \sum_{j=1}^{r_2} h_{2,k}(z_2(t)) \Pi_{ij} + \sum_{h=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \sum_{j=1}^{r_2} \dot{h}_{2,k}(z_2(t)) \Pi_{ij} \\ + \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \sum_{j=1}^{r_2} h_{2,j}(z_2(t)) \sum_{k=1}^{r_2} h_{2,k}(z_2(t)) \Pi_{ij} S_k \end{array} \right]. \quad (3.35)$$

Como se puede notar, la condición que resuelve el problema de regulación exacta es

$$\sum_{k=1}^{r_1} \dot{h}_{1,i}(z_1(t)) \sum_{j=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t)) \Pi_{ij} = 0, \quad (3.36)$$

dato que la derivada de la función de membresía $\dot{h}_{1,j}(z(t))$ no está considerada en el proceso de diseño local. Además, la condición

$$\sum_{h=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \sum_{j=1}^{r_2} \dot{h}_{2,k}(z_2(t)) \Pi_{ij} = 0, \quad (3.37)$$

también se debe cumplir para asegurar el seguimiento exacto de las referencias. Sin embargo, este término desaparece cuando el exosistema es puramente lineal.

Por otra parte, si examinamos cuidadosamente las ecuaciones (3.33) y (3.34), inclusive si las condiciones (3.36) y (3.37) se cumplen, la solución de la regulación difusa no es válida para los problemas en general. Lo anterior se debe a los términos cruzados, resultado de expandir (3.33) y (3.34); las técnicas propuestas por Tanaka y Wang [15], [23] para estabilizar los modelos difusos **T-S** pueden ser insuficientes para alcanzar el objetivo de control cuando es necesario un seguimiento exacto; no obstante, es posible encontrar ciertos casos donde la solución al problema puede ser diseñado usando reguladores locales.

Suponga que variedad en estado estacionario para el problema de la regulación difusa es lineal, es decir, $\pi(w(t)) = \Pi w(t)$. Entonces, las condiciones (3.36) y (3.37) se satisfacen porque

$$\sum_{i=1}^{r_*} h_{*,i}(z_*(t)) = 1,$$

además,

$$\sum_{i=1}^{r_*} \dot{h}_{*,i}(z_*(t)) = 0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r_1} \dot{h}_{1,i}(z_1(t)) \sum_{j=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t)) \Pi &= \sum_{i=1}^{r_1} \dot{h}_{1,i}(z_1(t)) \Pi = 0, \\ \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \sum_{j=1}^{r_2} \dot{h}_{2,k}(z_2(t)) \Pi &= \sum_{j=1}^{r_2} \dot{h}_{2,k}(z_2(t)) \Pi = 0, \end{aligned}$$

y las ecuaciones (3.33) y (3.34) se reducen a

$$\begin{aligned} a_2(z(t)) &= \sum_{i,j=1}^{r_1} \sum_{k,l=1}^{r_2} h_{1,i}(z_1(t)) h_{1,j}(z_1(t)) h_{2,k}(z_2(t)) h_{2,l}(z_2(t)) \quad (3.38) \\ &\quad \times [A_i \Pi + B_i \Gamma_{jk} + P_i], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i,j=1}^{r_1} \sum_{k,l=1}^{r_2} h_{1,i}(z_1(t)) h_{1,j}(z_1(t)) h_{2,k}(z_2(t)) h_{2,l}(z_2(t)) \quad (3.39) \\ &\quad \times [C_i \Pi - Q_k], \end{aligned}$$

con

$$a_2(z(t)) = \sum_{i,j=1}^{r_1} \sum_{k,l=1}^{r_2} h_{1,i}(z_1(t)) h_{1,j}(z_1(t)) h_{2,k}(z_2(t)) h_{2,l}(z_2(t)) \Pi S_k,$$

dado que $\sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) = 1$ y $\sum_{j=1}^{r_2} h_{2,j}(z_2(t)) = 1$.

El conjunto de ecuaciones lineales matriciales definidas por (3.38) y (3.39) incluyen las ecuaciones de dimensión $r_1 \cdot r_2$ definidas en (3.30) y (3.31) más las ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \Pi S_k \\ + \\ \Pi S_k \\ + \\ \Pi S_l \\ + \\ \Pi S_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i \Pi + B_i \Gamma_{ij} + P_i \\ + \\ A_i \Pi + B_i \Gamma_{jl} + P_i \\ + \\ A_j \Pi + B_j \Gamma_{jk} + P_j \\ + \\ A_j \Pi + B_j \Gamma_{il} + P_j \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

$$0 = C_i \Pi - Q_k, \quad (3.41)$$

para $i = 1, \dots, r_1$, $j = 1, \dots, r_1$, $k = 1, \dots, r_2$ y $l = 1, \dots, r_2$ tal que $i \neq j$ y $k \neq l$. Como se puede observar, estas ecuaciones incluyen términos cruzados y las soluciones de las ecuaciones (3.30) y (3.31) no se satisfacen en general. Además, hay que recordar que la solución de (3.30), (3.31), (3.38) y (3.39) debe resolverse de manera simultánea; la solución para (3.30) y (3.31) (Π_{ij} y Γ_{ij}) deberá ser única

para todo $i = 1, \dots, r_1$ y $j = 1, \dots, r_2$ [24].

Aunque el seguimiento de referencias no se puede garantizar, se pueden distinguir dos casos particulares, usando controladores locales, los cuales resuelven el problema de regulación difusa cuando el controlador difuso es aplicado al modelo **T-S** propuesto en (3.15)-(3.17).

1. Cuando la matriz de entrada es idéntica en todos los subsistemas, es decir, $B_1 = \dots = B_r = B$. Bajo estas circunstancias las ecuaciones (3.40)-(3.41) se transforman en

$$\begin{bmatrix} \Pi S_k \\ + \\ \Pi S_k \\ + \\ \Pi S_l \\ + \\ \Pi S_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i \Pi + B \Gamma_{ij} + P_i \\ + \\ A_i \Pi + B \Gamma_{jl} + P_i \\ + \\ A_j \Pi + B \Gamma_{jk} + P_j \\ + \\ A_j \Pi + B \Gamma_{il} + P_j \end{bmatrix},$$

$$0 = C_i \Pi - Q_k,$$

y ningún término cruzado se incluye.

2. Cuando la entrada en estado estacionario es idéntica en todos los subsistemas, es decir, $\Gamma_1 = \dots = \Gamma_r = \Gamma$. En este caso (3.40)-(3.41) toman la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \Pi S_k \\ + \\ \Pi S_k \\ + \\ \Pi S_l \\ + \\ \Pi S_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i \Pi + B_i \Gamma + P_i \\ + \\ A_i \Pi + B_i \Gamma + P_i \\ + \\ A_j \Pi + B_j \Gamma + P_j \\ + \\ A_j \Pi + B_j \Gamma + P_j \end{bmatrix},$$

$$0 = C_i \Pi - Q_k,$$

y nuevamente los términos cruzados son removidos del proceso de diseño.

Cuando la variedad en estado estacionario cumple que $\pi(w(t)) = \Pi w(t)$ el término

$$\sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \sum_{j=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t)) \Pi_{ij} w(t) = \Pi w(t), \quad (3.42)$$

en la ley de control definida en (3.32). Como resultado se obtiene la siguiente ley de control

$$u(t) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) K_i [x(t) - \Pi w(t)] + \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \sum_{j=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t)) \Gamma_{ij} w(t). \quad (3.43)$$

Lo anterior permite construir el siguiente teorema

Teorema 3.7.2. *El problema de regulación difusa de la salida con información completa se puede resolver mediante reguladores locales si el par (A_i, B_i) es establezable; existen mapeos*

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(w(t)) &= \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \sum_{j=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t)) \Pi_{ij} w(t), \\ \tilde{\gamma}(w(t)) &= \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t)) \sum_{j=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t)) \Gamma_{ij} w(t), \end{aligned}$$

tal que Π_{ij} y Γ_{ij} son calculadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} S_i &= A_i \Pi_{ij} + B_i \Gamma_{ij} + P_i, \\ 0 &= C_i \Pi_{ij} - Q_j; \end{aligned}$$

la variedad de error cero en estado estacionario es lineal, es decir, $\pi(w(t)) = \Pi w(t)$, además las condiciones $B_1 = \dots = B_r = B$, y/o $\Gamma_1 = \dots = \Gamma_r = \Gamma$ se cumplen. \diamond

Ejemplo 3.7.1. Considere el problema de balancear y seguir una referencia (generada por el exosistema) de una barra invertida. La ecuaciones de movimiento para este sistema son

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{3g}{2l} \sin(x_1) + \frac{3}{ml^2} u, \end{aligned} \quad (3.44)$$

donde $x_1(t)$ representa el ángulo (en radianes) del péndulo desde la vertical, $x_2(t)$ es la velocidad angular, $g = 9,8m/s^2$ es la constante gravitacional, m es la masa del péndulo, l es la longitud del mismo y u es la fuerza aplicada (torque) en Newtons. Se escogen los valores $m = 1 kg$, $l = 1,0 m$ en las simulaciones.

El propósito es seguir la referencia definida por el exosistema con un rango de $x_1 \in (-40, 40)$. Para este fin, el modelo difuso que representa la dinámica del sistema no lineal está representada por:

Regla: 1 SI $x_1(t)$ está alrededor -40,

$$\text{ENTONCES } \dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t).$$

Regla: 2 SI $x_1(t)$ está alrededor -20 ,

$$\text{ENTONCES } \dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t).$$

Regla: 3 SI $x_1(t)$ está alrededor 0,

$$\text{ENTONCES } \dot{x}(t) = A_3x(t) + B_3u(t).$$

Regla: 4 SI $x_1(t)$ está alrededor 20,

$$\text{ENTONCES } \dot{x}(t) = A_4x(t) + B_4u(t).$$

Regla: 5 SI $x_1(t)$ está alrededor 40,

$$\text{ENTONCES } \dot{x}(t) = A_5x(t) + B_5u(t).$$

Las matrices A_i , B_i y C_i están definidas como:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1,0000 \\ 11,2723 & 0 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1,0000 \\ 13,8276 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1,0000 \\ 14,7150 & 0 \end{bmatrix}, & A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1,0000 \\ 13,8276 & 0 \end{bmatrix}, & (3.45) \\ A_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 1,0000 \\ 11,2723 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = B_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las funciones de membresía para las reglas 1 – 5 se muestran en la fig. 3.25. El

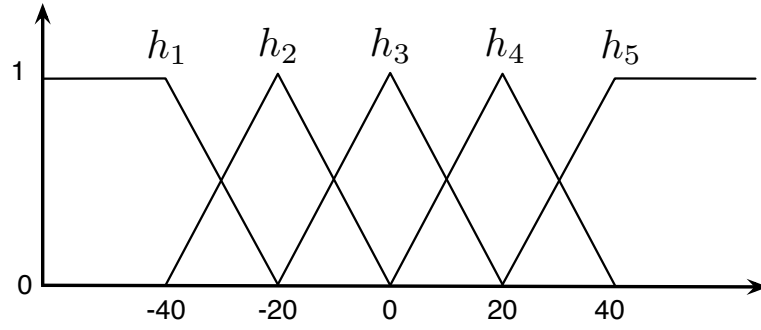


FIGURA 3.7: Funciones de membresía para péndulo invertido

exosistema es puramente lineal y está definido por las siguientes matrices

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Además, la solución para Π_{ij} y Γ_{ij} está dada por (3.30) y (3.31)

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \begin{bmatrix} -4,0908 & 0 \end{bmatrix}, & \Gamma_2 &= \begin{bmatrix} -4,9425 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Gamma_3 &= \begin{bmatrix} -5,2383 & 0 \end{bmatrix}, & \Gamma_4 &= \begin{bmatrix} -4,9425 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Gamma_5 &= \begin{bmatrix} -4,0908 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

De la solución se cumple que la matriz $\Pi_{ij} = \Pi$:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, el estabilizador difuso está construido mediante la aproximación del **PDC** desarrollado en [15].

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} -4,1646 & -0,2443 \end{bmatrix}, & K_2 &= \begin{bmatrix} -5,0063 & -0,2110 \end{bmatrix}, \\ K_3 &= \begin{bmatrix} -5,3072 & -0,2276 \end{bmatrix}, & K_4 &= \begin{bmatrix} -5,0063 & -0,2110 \end{bmatrix}, & (3.49) \\ K_5 &= \begin{bmatrix} -4,1646 & -0,2443 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Los resultados obtenidos usando la señal de control definida en (3.32) se muestran en la figs. 3.8-3.10.

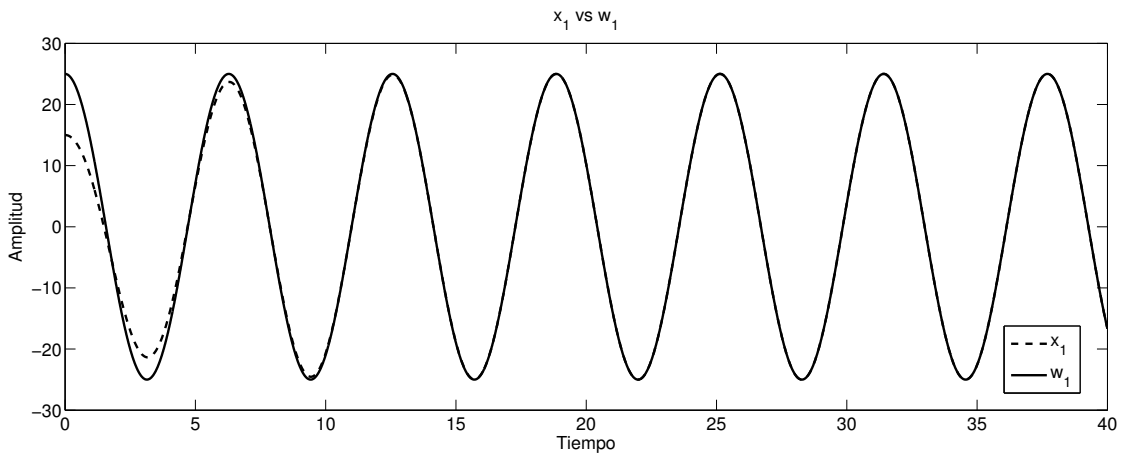


FIGURA 3.8: Salida de la planta vs referencia, con el control basado en reguladores locales con $w(0) = [25 \ 0]^T$ y $x(0) = [15 \ 0]^T$

Como se puede ver, el controlador definido en (3.32) asegura el seguimiento exacto de la salida cuando las condiciones 1 y 2 se cumplen.

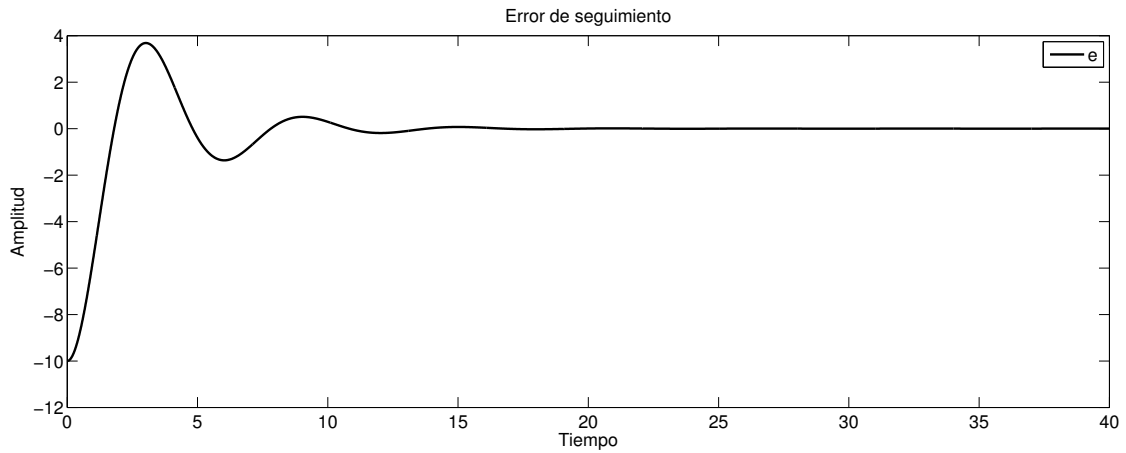


FIGURA 3.9: Error de seguimiento cuando el control está basado en reguladores locales con $w(0) = [25 \ 0]^T$ y $x(0) = [15 \ 0]^T$

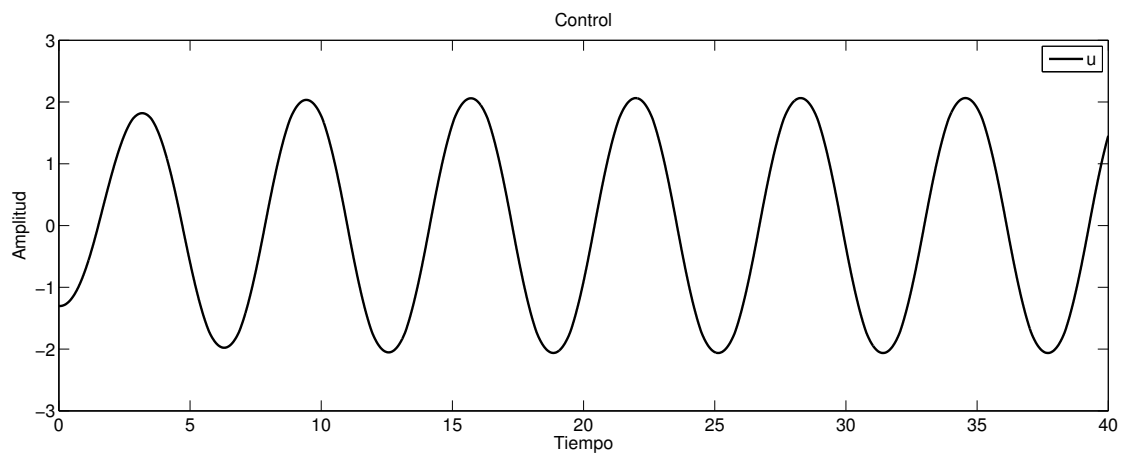


FIGURA 3.10: Señal de control, basado en reguladores locales con $w(0) = [25 \ 0]^T$ y $x(0) = [15 \ 0]^T$

3.8. Sincronización caótica de modelos difusos T-S

Un sistema determinístico descubierto por E.N. Lorenz con un comportamiento aleatorio fue tan inusual que últimamente se le ha nombrado *sistema caótico*. Así como los números irracionales e imaginarios, energía negativa, antimateria, etc., la lógica difusa y caos fueron gradualmente aceptados por muchos, si no es que todos, científicos e ingenieros como conceptos fundamentales, teorías así como tecnologías.

En particular, la tecnología de sistemas difusos ha alcanzado su madurez

con una amplia gama de aplicaciones en muchas industrias, comercios y campos técnicos, que van desde el control, automatización, inteligencia artificial para el procesamiento de señales o reconocimiento de imagen de patrones y comercio electrónico.

Caos por otra parte, fue considerado como uno de los tres descubrimientos monumentales del siglo veinte junto con la teoría de la relatividad y mecánica cuántica; considerado como un fenómeno dinámico no lineal muy especial alcanzado un estatus actual sobresaliente. La interacción entre los sistemas difusos y caos se han desarrollado en los últimos 20 años conduciendo a temas de investigación tales como: modelado difuso de sistemas caóticos usando la aproximación dada por Takagi-Sugeno (T-S), descripciones lingüísticas de éstos sistemas, control difuso del caos, sincronización y la combinación de caos-difuso para problemas de ingeniería [25].

Sincronización de sistemas caóticos es uno de los problemas más desafiantes en la teoría del control y puede ser referido al menos a las observaciones de Huygen [26]; es entendido como una de las trayectorias, de dos sistemas caóticos con condiciones iniciales cercanas, que converge a otra a medida que $t \rightarrow \infty$, en [27] está reportado que algunos de éstos sistemas poseen una propiedad de auto sincronización. Sin embargo, no todos los sistemas caóticos se pueden descomponer en dos respuestas de subsistemas separadas y asegurar la sincronización. Las ideas en estos trabajos han conducido a mejoras en muchos campos de estudio, tales como: comunicaciones [28], sistemas de encriptación, procesamiento de información compleja con el cerebro humano, reactores bioquímicos acoplados, etc.

El comportamiento caótico de un sistema puede ser favorable o desfavorable dependiendo de su aplicación, puede ser benéfico en muchas circunstancias, por ejemplo, el mejoramiento del mezclado en reactores químicos; por otra parte, caos puede generar movimientos y oscilaciones de amplitudes considerables que pueden conducir a que el sistema falle. Los métodos de control caótico han provocado un gran número de esquemas de control en el ámbito lineal y no lineal.

Sincronización puede clasificarse como: **sincronización completa**, cuando dos osciladores caóticos están mutuamente acoplados y uno conduce al otro; **sincronización generalizada**, difiere en caso previo por el hecho que son diferentes

osciladores y los estados de uno están completamente definidos por del otro; **sincronización de fase**, ocurre cuando los osciladores acoplados no son idénticos, tienen diferentes amplitudes y permanecen no sincronizados, mientras que las fases de los osciladores evolucionan sincronizadas [29]. Vale la pena mencionar que estudios en este campo, sobre sistemas no lineales, han sido reformulados con base en resultados clásicos tales como: [15], [30], [31] y muchos otros.

En esta sección exploraremos la interacción entre los sistemas de control difusos y caos. Primero, se mostrará que las técnicas de modelado difuso pueden ser usadas para sistemas dinámicos caóticos, lo cual implica un sistema difuso caótico; no es de sorprenderse, dado el hecho de que los sistemas difusos son esencialmente no lineales. Con el objeto de controlar éstos, la sección presenta una aproximación al problema de sincronización con base en el problema de regulación difusa.

3.8.1. Modelado difuso de sistemas caóticos

Para utilizar la técnica de regulación difusa será necesario la representación de los sistemas caóticos mediante modelos difusos del tipo **T-S**. Para esto, las técnicas descritas anteriormente son usadas para construir dichos modelos. En consecuencia, un número de sistemas caóticos, usados a lo largo de este trabajo con la entrada de control adjunta, serán representados por modelos difusos tipo **T-S**.

3.8.1.1. Atractor de Lorenz con señal de entrada

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -ax_1(t) + ax_2(t) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= cx_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= x_1(t)x_2(t) - bx_3(t),\end{aligned}\tag{3.50}$$

donde a , b y c son constantes y $u(t)$ es el término de control.

Para construir el modelo difuso **T-S** del atractor de Lorenz, los términos cuadráticos no lineales $x_1(t)x_3(t)$ y $x_1(t)x_2(t)$ deben estar expresados como la

suma ponderada de algunas funciones lineales [32], es decir, el término no lineal

$$f(x(t)) = x_1(t)x_2(t)$$

puede ser representador por

$$f(x(t)) = \left[\sum_{i=1}^2 h_i g_i(x(t)) \right] x_2(t),$$

donde

$$g_1(x(t)) = M_1, \quad g_2(x(t)) = M_2,$$

y

$$h_1(x(t)) = \frac{-x_1(t) + M_2}{M_2 - M_1}, \quad (3.51)$$

$$h_2(x(t)) = \frac{x_1(t) - M_1}{M_2 - M_1}. \quad (3.52)$$

Dado que todos los términos de (3.50) son funciones de $x_1(t)$ podemos construir un modelo difuso **T-S** exacto del sistema (3.50) dado por

Regla: 1 SI $x_1(t)$ es M_1 ,

$$\text{ENTONCES } \dot{x}(t) = A_1 x(t) + Bu(t).$$

Regla: 2 SI $x_1(t)$ es M_2 ,

$$\text{ENTONCES } \dot{x}(t) = A_2 x(t) + Bu(t),$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & -M_1 \\ 0 & M_1 & -b \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & -M_2 \\ 0 & M_2 & -b \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

con $a = 10$, $b = 8/3$, y $c = 28$, además, podemos utilizar (3.51) y (3.52) como funciones de membresía escogiendo a $[M_1 \ M_2]$ como $[-20 \ 30]$, debido a que $x_1(t)$ está aparentemente acotado dentro de la region $[-20 \ 30]$ como se muestra en la fig. 3.11.

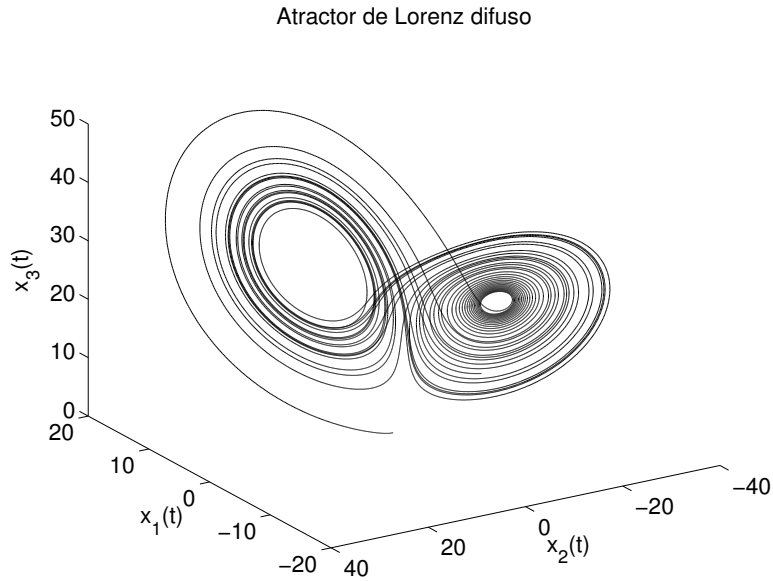


FIGURA 3.11: Atractor de Lorenz difuso con $x(0) = [1 \ 1 \ 1]^T$

3.8.1.2. Atractor de Chen con señal de entrada

Ahora discutiremos el modelado difuso tipo **T-S** del atractor caótico de Chen de forma exacta [33]. La dinámica está dada por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a(x_2(t) - x_1(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= (c - a)x_1(t) - x_1(t)x_3(t) + cx_2(t) + u(t), \\ \dot{x}_3(t) &= x_1(t)x_2(t) + bx_3(t), \end{aligned} \quad (3.54)$$

donde a , b y c son constantes y $u(t)$ es el término de control.

Usando el método del caso anterior, el modelo difuso **T-S** exacto del sistema (3.54) está dado por

Regla: 1 SI $x_1(t)$ es X_{min} ,

$$\text{ENTONCES } \dot{x}(t) = A_1x(t) + Bu(t).$$

Regla: 2 SI $x_1(t)$ es X_{max} ,

$$\text{ENTONCES } \dot{x}(t) = A_2x(t) + Bu(t),$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c - a & c & -X_{min} \\ 0 & X_{min} & -b \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c - a & c & -X_{max} \\ 0 & X_{max} & -b \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Donde las funciones de membresía son

$$h_1(x(t)) = \frac{-x_1(t) + X_{max}}{X_{max} - X_{min}}, \quad (3.56)$$

$$h_2(x(t)) = \frac{x_1(t) - X_{min}}{X_{max} - X_{min}}. \quad (3.57)$$

El proceso de defusificación para el sistema difuso, con las funciones de membresía (3.56) y (3.57), se realiza mediante las técnicas vistas anteriormente, teniendo como resultado la misma respuesta que el sistema no lineal definido en (3.54). El atractor resultante con $a = 35$, $b = 3$, y $c = 28$ puede observarse en la fig. 3.12.

3.8.1.3. Atractor de Rössler con señal de entrada

La dinámica del atractor de Rössler esta dado por las siguientes ecuaciones [34]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_2(t) - x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + ax_2(t), \\ \dot{x}_3(t) &= bx_1(t) - (c - x_1(t))x_3(t) + u(t), \end{aligned} \quad (3.58)$$

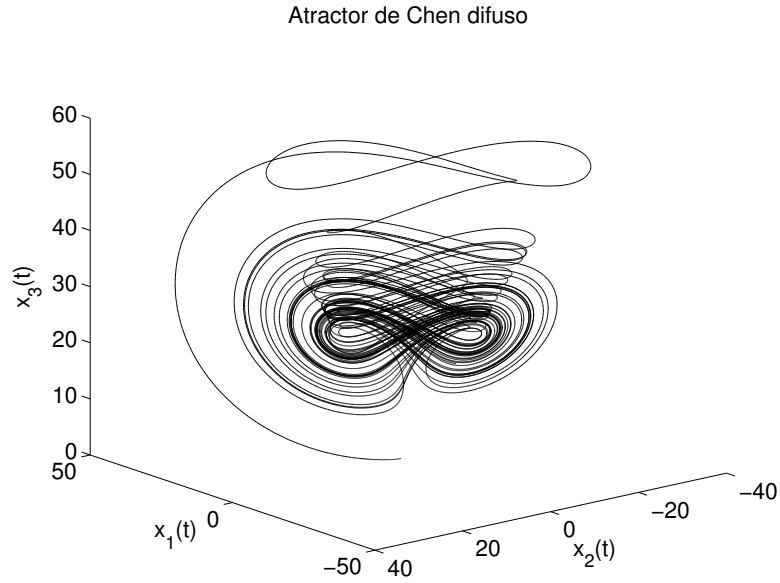


FIGURA 3.12: Atractor de Chen difuso con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ y $x_3(0) = 1$

donde a , b y c son constantes y $u(t)$ el término de control. Asumimos que $x_1(t) \in [c - d \ c + d]$ y $d > 0$. Entonces el modelo difuso que representa al sistema no lineal (3.58) bajo $x_1(t) \in [c - d \ c + d]$ está dado por

Regla: 1 SI $x_1(t)$ es M_1 ,

$$\text{ENTONCES } \dot{x}(t) = A_1 x(t) + Bu(t).$$

Regla: 2 SI $x_1(t)$ es M_2 ,

$$\text{ENTONCES } \dot{x}(t) = A_2 x(t) + Bu(t),$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ b & 0 & -d \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ b & 0 & d \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

con $a = 0,34$, $b = 0,4$, y $c = 4,5$. Donde las funciones de membresía están dadas por

$$h_1(x(t)) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{c - x_1(t)}{d} \right), \quad (3.60)$$

$$h_2(x(t)) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c - x_1(t)}{d} \right). \quad (3.61)$$

Como resultado, se obtiene la misma respuesta que el sistema no lineal definido en (3.58). El atractor se muestra en la fig. 3.13.

Atractor de Rössler difuso

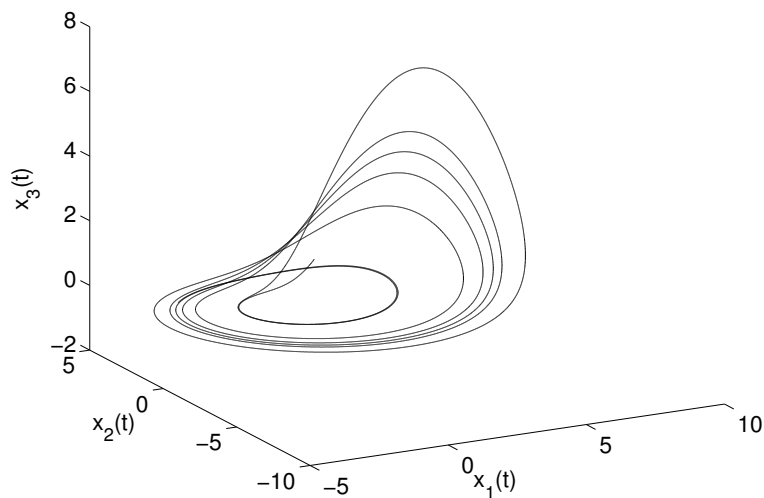


FIGURA 3.13: Atractor de Rössler difuso con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ y $x_3(0) = 1$

3.8.2. Sincronización Completa

Esta sección estudia la sincronización de sistemas idénticos, donde los estados de uno convergen asintóticamente a los estados del otro a medida que el tiempo evoluciona, usando la teoría de regulación difusa, reguladores locales y diseñando el controlador adecuado [8].

Considere $\dot{w} = f(w)$ como el sistema de referencia (exosistema) y $\dot{x} = f(x, w, u)$ como el sistema de respuesta (planta).

Las ecuaciones de estos sistemas caóticos tipo Rössler se describen a continuación:

$$\begin{array}{ll}
 \dot{x}_1(t) = -(x_2(t) + x_3(t)), & \dot{w}_1(t) = -(w_2(t) + w_3(t)), \\
 \dot{x}_2(t) = x_1(t) + ax_2(t), & \dot{w}_2(t) = w_1(t) + aw_2(t), \\
 \dot{x}_3(t) = bx_1(t) - (c - x_1(t))x_3(t) + u. & \dot{w}_3(t) = bw_1(t) - (c - w_1(t))w_3(t), \\
 \text{Planta} & \text{Exosistema}
 \end{array}$$

con $a = 0,34$, $b = 0,4$, y $c = 4,5$. Note que estos sistemas son casi idénticos, donde la diferencia esta dada por la señal de entrada en el sistema de respuesta.

Tomando en cuenta que estos sistemas se pueden representar de forma exacta por los modelos difusos **T-S** cuando $x_1 \in [c - d, c + d]$, el sistema difuso estará definido por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^2 h_{1,i}(x_1(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \\
 \dot{w}(t) &= \sum_{i=1}^2 h_{2,i}(w_1(t)) S_i w(t) \\
 e(t) &= \sum_{i=1}^2 h_{1,i}(x_1(t)) C_i x(t) - \sum_{i=1}^2 h_{2,i}(w_1(t)) Q_i w(t),
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 A_1 = S_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ b & 0 & -d \end{bmatrix}, & A_2 = S_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ b & 0 & d \end{bmatrix}, \\
 B_1 = B_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, & C_i = Q_i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Podemos observar que la matriz de entrada B_i es la misma para los dos subsistemas, cumpliendo así, una de las dos condiciones establecidas para la regulación exacta.

Las funciones de membresía (para la planta y el exosistema) están definidas de la siguiente forma

$$h_{1,1}(x_1(t)) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{c - x_1(t)}{d} \right), \quad h_{1,2}(x_1(t)) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c - x_1(t)}{d} \right),$$

$$h_{2,1}(w_1(t)) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{c - w_1(t)}{d} \right), \quad h_{2,2}(w_1(t)) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c - w_1(t)}{d} \right),$$

donde $d = 10$.

Ahora bien, la solución para Π_{ij} y Γ_{ij} está dada por $r_1 * r_2$ problemas matriciales locales, definidos por (3.30) y (3.31). Del resultado se puede observar que

$$\Pi_{ij} = \Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

es decir, la variedad en estado estacionario $\pi(w(t)) = \Pi w(t)$ es la misma para los cuatro subsistemas. Por lo tanto, se cumple la segunda de las condiciones definidas en el Teorema 3.7.2 asegurando la propiedad de regulación exacta.

También de la solución de (3.30) y (3.31) los términos Γ_{ij} se obtienen

$$\Gamma_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
(3.62)

Por otra parte, el diseño de un estabilizador difuso es necesario, aquí varios métodos son posibles no haciendo única la aproximación del **PDC**, refiérase a [35], [36], [37], [38],[39] y [40]. Las ganancias K_i son

$$K_1 = [4,4736 \quad -0,5830 \quad 5,9600], \quad K_2 = [4,4736 \quad -0,5830 \quad -14,04].$$

Los siguientes resultados, mostrados en la figs. 3.14-3.18 con condiciones iniciales en $x_1(0) = 6$, $x_2(0) = 3$ y $x_3(0) = 5$ y aplicando la ley de control definida en (3.43), muestran un comportamiento satisfactorio del regulador difuso.

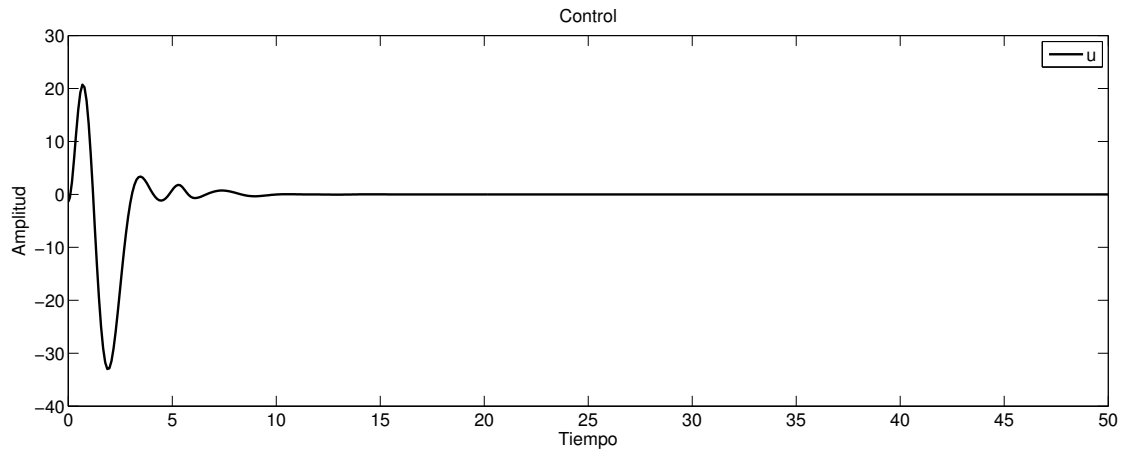


FIGURA 3.14: Señal de control para la sincronización completa de dos sistemas caóticos T-S tipo Rössler

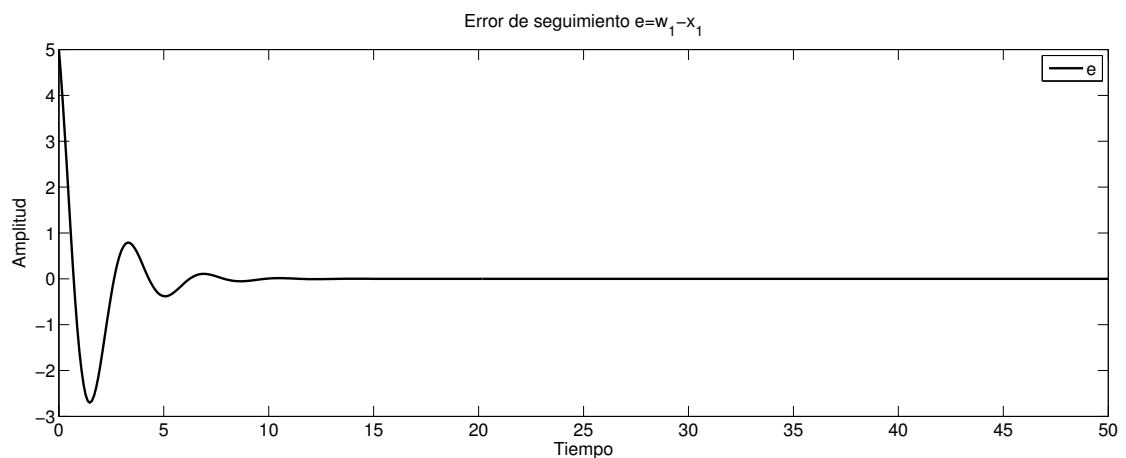


FIGURA 3.15: Señal de error para la sincronización completa de dos sistemas caóticos T-S tipo Rössler

3.8.3. Sincronización Generalizada

Considere ahora la sincronización de dos sistemas caóticos diferentes, *sincronización generalizada*, mediante el uso de regulación difusa exacta. Aunque en general no es posible encontrar una variedad de error cero en estado estacionario, se puede asegurar que el error se mantenga acotado cuando se presente este caso.

Considere al atractor de Lorenz como el sistema de referencia $\dot{w} = f(w)$ y al atractor de Chen como el sistema de respuesta $\dot{x} = f(x, w, u)$.

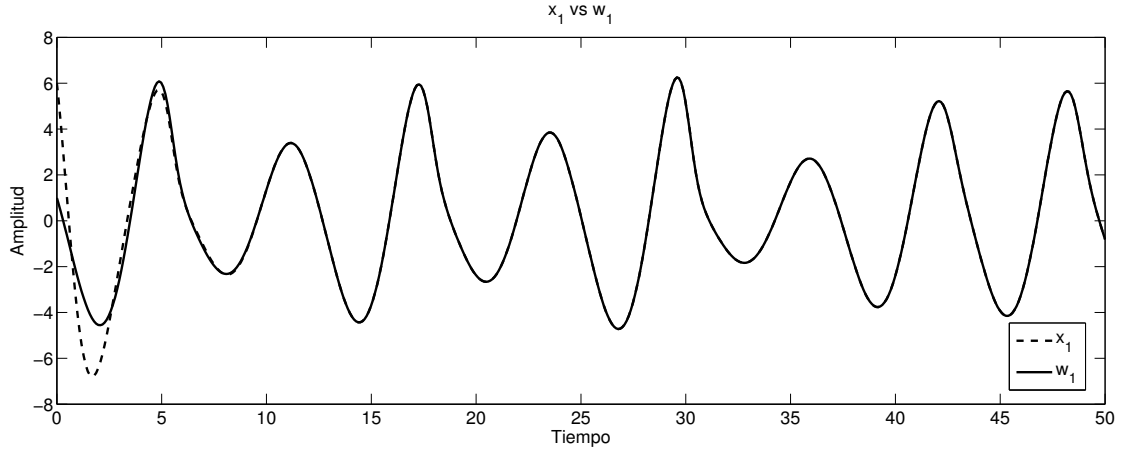


FIGURA 3.16: Señal de referencia w_1 contra señal de respuesta x_1 de dos sistemas caóticos T-S tipo Rössler

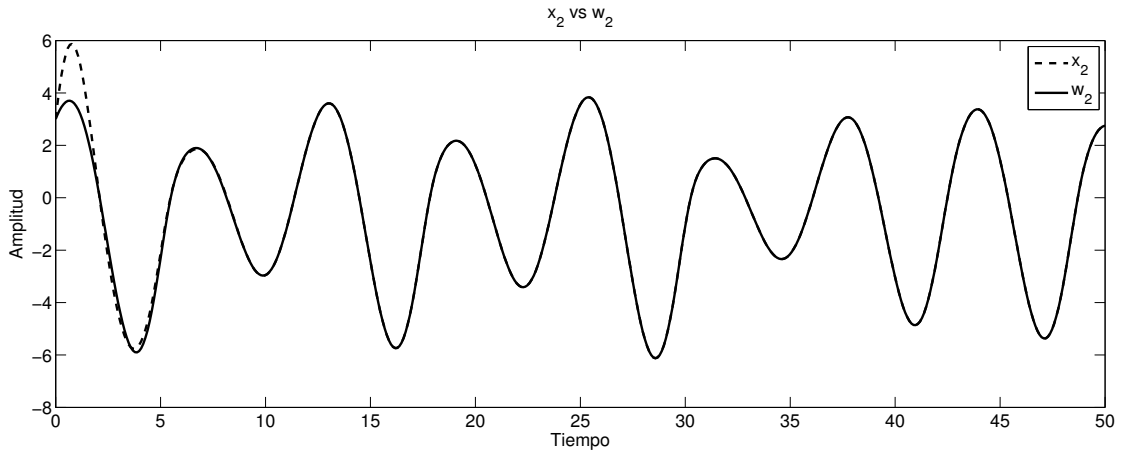


FIGURA 3.17: Señal de referencia w_2 contra señal de respuesta x_2 de dos sistemas caóticos T-S tipo Rössler

Las ecuaciones que describen la dinámica de estos sistemas caóticos se describen a continuación:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= a(x_2(t) - x_1(t)), & \dot{w}_1(t) &= -a_w w_1(t) + a_w w_2(t), \\
 \dot{x}_2(t) &= (c - a)x_1(t) - x_1(t)x_3(t) + cx_2(t) + u(t), & \dot{w}_2(t) &= c_w w_1(t) - w_2(t) - w_1(t)w_3(t), \\
 \dot{x}_3(t) &= x_1(t)x_2(t) + bx_3(t). & \dot{w}_3(t) &= w_1(t)w_2(t) - b_w w_3(t).
 \end{aligned}$$

Planta
Exosistema

con $a = 35$, $b = 3$, $c = 28$, $a_w = 10$, $b_w = 8/3$ y $c_w = 28$.

Tomando en cuenta que estos sistemas pueden ser representados de forma exacta mediante el modelo difuso **T-S** cuando $x_1 \in [X_{min}, X_{max}]$ y $w_1 \in [M_1, M_2]$.

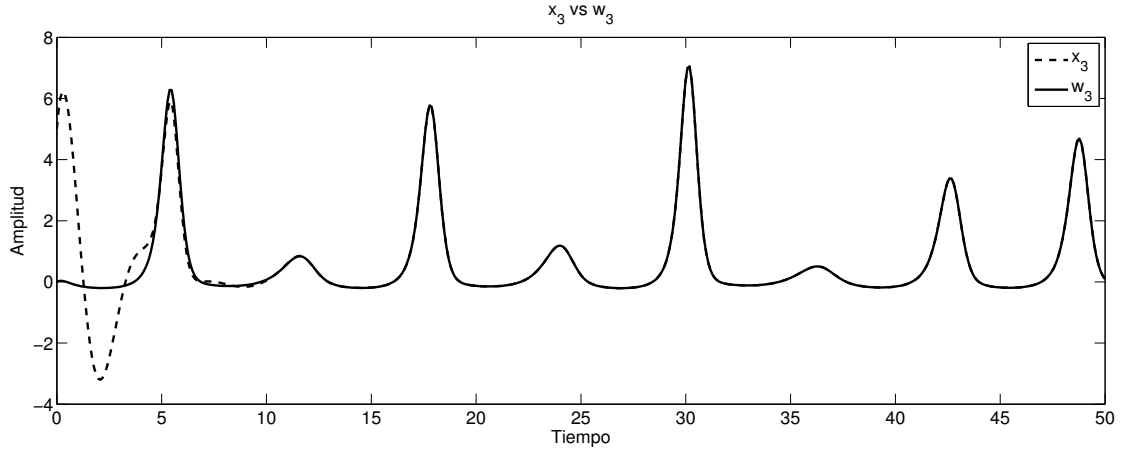


FIGURA 3.18: Señal de referencia w_3 contra señal de respuesta x_3 de dos sistemas caóticos T-S tipo Rössler

Entonces, el sistema difuso estará definido por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^2 h_{1,i}(x_1(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \\ \dot{w}(t) &= \sum_{i=1}^2 h_{2,i}(w_1(t)) S_i w(t) \\ e(t) &= \sum_{i=1}^2 h_{1,i}(x_1(t)) C_i x(t) - \sum_{i=1}^2 h_{2,i}(w_1(t)) Q_i w(t),\end{aligned}$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c - a & c & -X_{min} \\ 0 & X_{min} & -b \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c - a & c & -X_{max} \\ 0 & X_{max} & -b \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} -a_w & a_w & 0 \\ c_w & -1 & -M_1 \\ 0 & M_1 & -b_w \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} -a_w & a_w & 0 \\ c_w & -1 & -M_2 \\ 0 & M_2 & -b_w \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es importante notar que la matriz de entrada B_i es la misma para los dos subsistemas, cumpliendo así, una de las dos condiciones, además, de la salida de la planta y la salida del exosistema se puede deducir que el estado $x_1(t)$ converge al estado $w_1(t)$.

Las funciones de membresía son las siguientes

$$h_{1,1}(x_1(t)) = \frac{-x_1(t) + X_{max}}{X_{max} - X_{min}}, \quad h_{1,2}(x_1(t)) = \frac{x_1(t) - X_{min}}{X_{max} - X_{min}},$$

$$h_{2,1}(w_1(t)) = \frac{-w_1(t) + M_2}{M_2 - M_1}, \quad h_{2,2}(w_1(t)) = \frac{w_1(t) - M_1}{M_2 - M_1},$$

con $[X_{min}, X_{max}] = [-30, 30]$ y $[M_1, M_2] = [-30, 30]$.

La solución para Π_{ij} y Γ_{ij} está dada por $r_1 * r_2$ problemas matriciales locales, definidos por (3.30) y (3.31). Del resultado se puede observar lo siguiente

$$\Pi_{1,1} = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0 & 0 \\ 0,7143 & 0,2857 & 0 \\ 3,0041 & -0,0143 & 1,2861 \end{bmatrix}, \quad \Pi_{1,2} = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0 & 0 \\ 0,7143 & 0,2857 & 0 \\ 3,0041 & -0,0143 & -1,2861 \end{bmatrix},$$

$$\Pi_{2,1} = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0 & 0 \\ 0,7143 & 0,2857 & 0 \\ -3,0041 & 0,0143 & -1,2861 \end{bmatrix}, \quad \Pi_{2,2} = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0 & 0 \\ 0,7143 & 0,2857 & 0 \\ -3,0041 & 0,0143 & 1,2861 \end{bmatrix},$$

es decir, la variedad en estado estacionario $\pi(w(t)) \neq \Pi w(t)$ no es la misma para todos los subsistemas. Por lo tanto, al no cumplirse la segunda de las condiciones definidas en el Teorema 3.7.2, no se asegura la propiedad de regulación exacta. Sin embargo, al utilizar el controlador definido en (3.32) el error se mantiene acotado.

De la solución de $r_1 * r_2$ problemas matriciales locales, los términos $\Gamma_{i,j}$ son

$$\Gamma_{1,1} = \begin{bmatrix} -102,2648 & -0,7142 & -30,0121 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{1,2} = \begin{bmatrix} -102,2648 & -0,7142 & 30,0121 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{2,1} = \begin{bmatrix} -102,2648 & -0,7142 & -30,0121 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{2,2} = \begin{bmatrix} -102,2648 & -0,7142 & 30,0121 \end{bmatrix}.$$

Además, El estabilizador difuso está calculado a partir de la aproximación del **PDC**. Entonces, las ganancias $K_{i,j}$ para este ejemplo son

$$K_{1,1} = [-102,2648 \quad -0,7142 \quad -30,0121], \quad K_{1,2} = [-102,2648 \quad -0,7142 \quad 30,0121],$$

$$K_{2,1} = [-102,2648 \quad -0,7142 \quad -30,0121], \quad K_{2,2} = [-102,2648 \quad -0,7142 \quad 30,0121].$$

Los resultados mostrados en la figs. 3.19-3.23; con condiciones iniciales en $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ y $x_3(0) = 1$ para la planta; $w_1(0) = 10$, $w_2(0) = -10$ y $w_3(0) = -10$ para el exosistema, y la ley de control definida en (3.32) muestran un comportamiento satisfactorio del regulador difuso, si bien no es exacto se mantiene con un error acotado véase fig. 3.20.

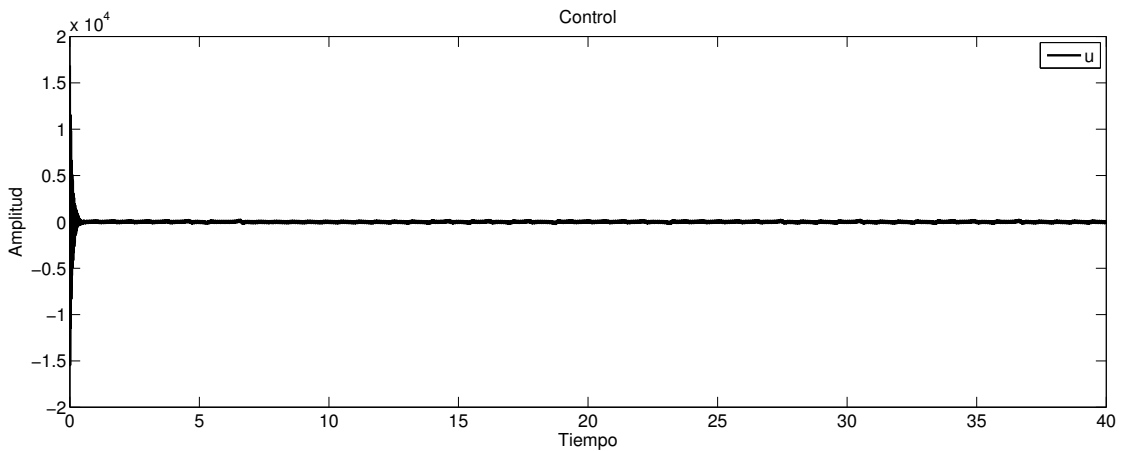


FIGURA 3.19: Señal de control para la sincronización generalizada de dos sistemas caóticos T-S

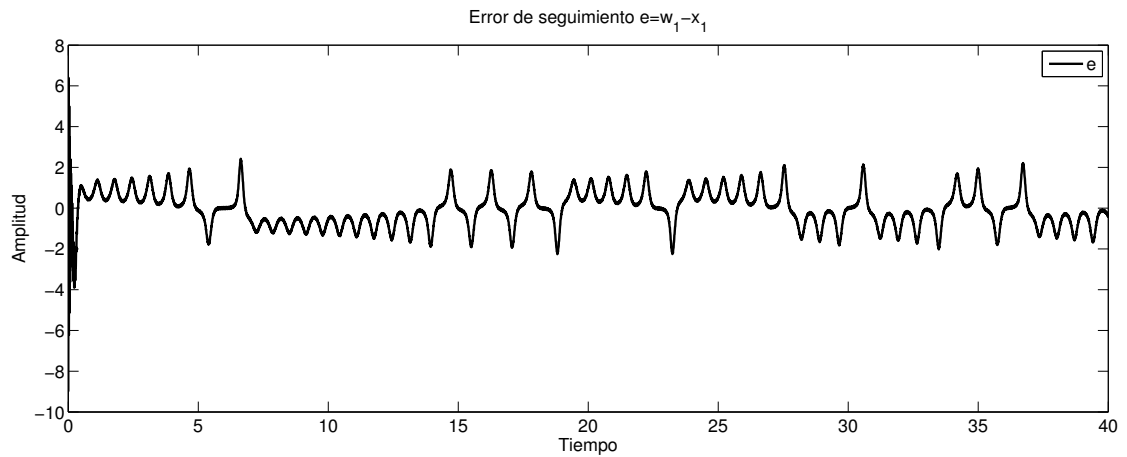


FIGURA 3.20: Señal de error para la sincronización generalizada de dos sistemas caóticos T-S

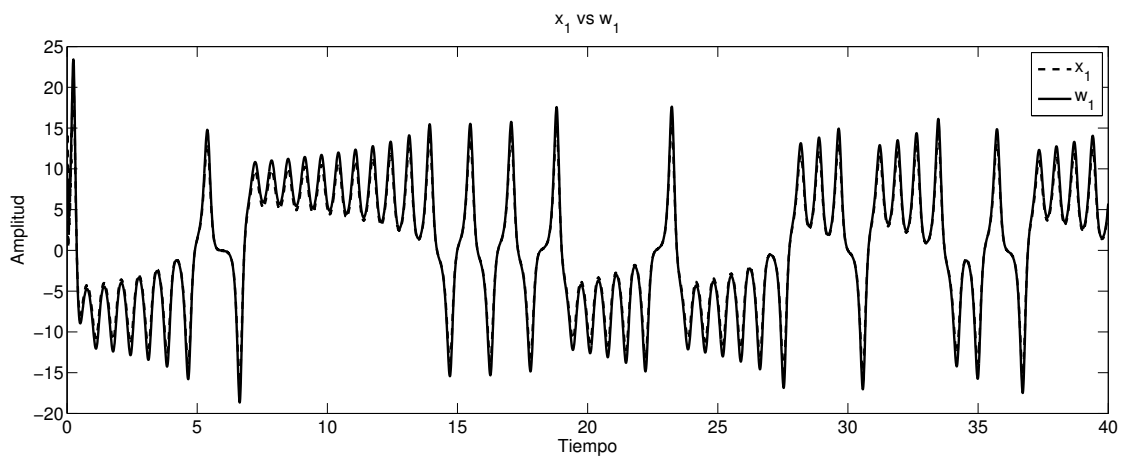


FIGURA 3.21: Señal de referencia w_1 contra señal de respuesta x_1 de dos sistemas caóticos T-S

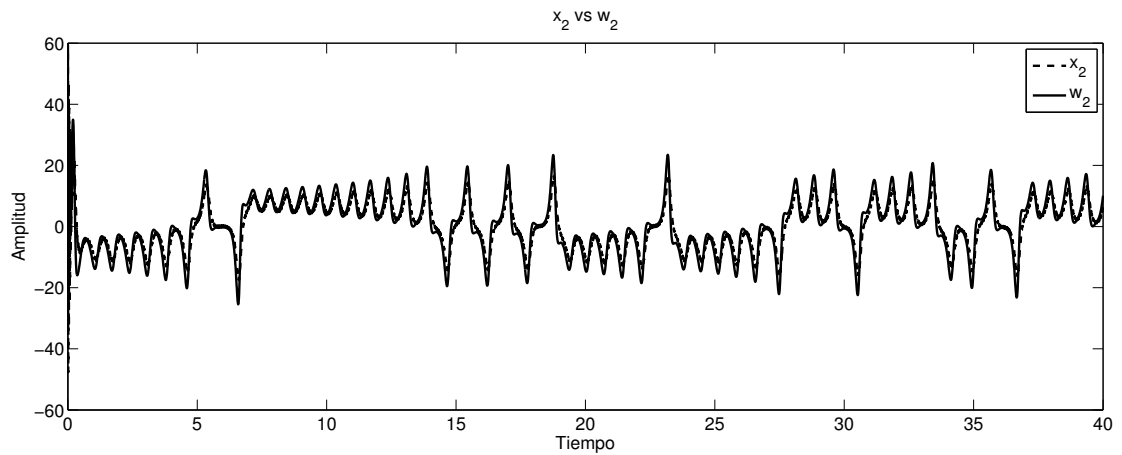


FIGURA 3.22: Señal de referencia w_2 contra señal de respuesta x_2 de dos sistemas caóticos T-S

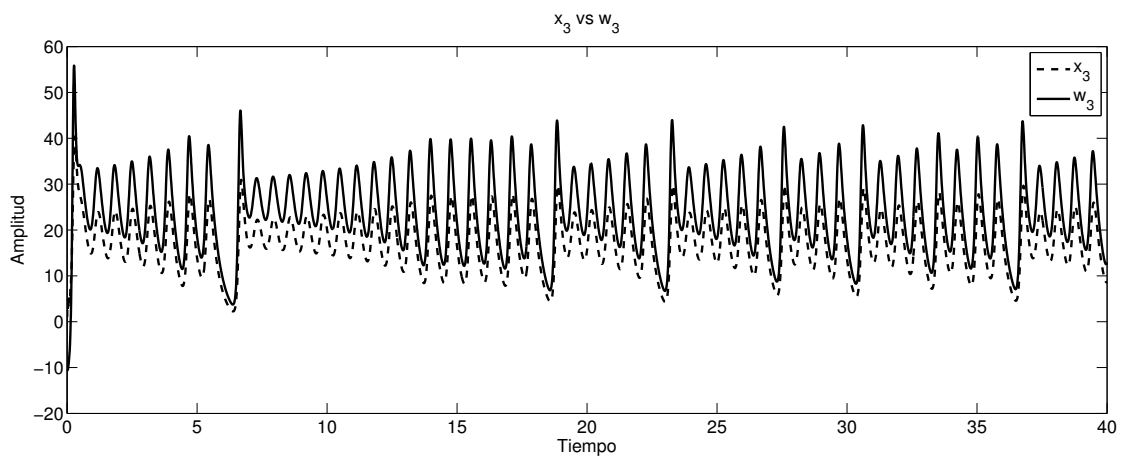


FIGURA 3.23: Señal de referencia w_3 contra señal de respuesta x_3 de dos sistemas caóticos T-S

3.9. La regulación difusa exacta de la salida en el modelo difuso completo T-S

Hasta ahora se ha considerado el diseño de un controlador final a partir un conjunto de reguladores lineales dentro del sistema difuso. Sin embargo, como se ha mostrado en la Sección 3.8 el controlador desarrollado de esta forma, sólo asegura la regulación exacta en casos particulares. El diseño de esta aproximación en general no puede resolver el problema **PRDES** debido a dos aspectos importantes: primero, los términos cruzados, y segundo, la derivada con respecto al tiempo de la funciones de membresía.

En esta sección la ventaja de considerar modelos difusos **T-S**, que describen la dinámica de un sistema no lineal, asemeja *ecuaciones lineales variantes en el tiempo*, tal semejanza será utilizada en el proceso del diseño del regulador difuso final. Para esto, se considera que ambos: la variedad de error cero en estado estacionario $\pi(w(t))$ y la entrada en estado estacionario $\gamma(w(t))$ están diseñadas directamente en el modelo difuso de manera general [9], esta consideración evita el problema de los términos cruzados que implica el problema de regulación en la Sección 3.7.

Es claro que el diseño de un estabilizador es necesario. Sin embargo, dado que el problema de estabilización difusa no es el objetivo en este trabajo, éste estará dado por el concepto de una matriz común de Lyapunov (**PDC**), otras técnicas pueden ser aplicadas para los sistemas difusos sin pérdida de generalidad, el lector puede referirse a [41],[42], [43], [44], [45], [46] y [47].

Considere nuevamente el modelo difuso definido por (3.15) - (3.17), donde éste es posible reescribir como

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}(t)x(t) + \tilde{B}(t)u(t) + \tilde{P}(t)w(t), \quad (3.63)$$

$$\dot{w}(t) = \tilde{S}(t)w(t), \quad (3.64)$$

$$e(t) = \tilde{C}(t)x(t) - \tilde{Q}(t)w(t), \quad (3.65)$$

donde:

$$\begin{aligned}\tilde{A}(t) &= \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t))A_i, & \tilde{B}(t) &= \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t))B_i, \\ \tilde{P}(t) &= \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t))P_i, & \tilde{C}(t) &= \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t))C_i, \\ \tilde{S}(t) &= \sum_{i=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t))S_i, & \tilde{Q}(t) &= \sum_{i=1}^{r_2} h_{2,i}(z_2(t))Q_i.\end{aligned}$$

Esta representación es posible ya que las funciones de la planta y el exosistema dependen íntimamente del tiempo. Por otra parte, las aproximaciones de la variedad de error cero en estado estacionario definida por $x_{ss} = \pi(w(t))$ y la entrada en estado estacionario $u_{ss} = \gamma(w(t))$ no serán aproximadas por mapeos locales lineales. Ahora bien, $\pi(w(t))$ y $\gamma(w(t))$ serán obtenidos de la ecuación de error en estado estacionario definida por

$$e_{ss} = x(t) - x_{ss}(t) = x(t) - \pi(w(t)), \quad (3.66)$$

donde $e_{ss} \in \mathbb{R}^n$ representa el error en estado estacionario sujeto a (3.65).

Hay que distinguir que $e_{ss}(t)$ es el error entre los estados de la planta y la variedad de error cero en estado estacionario $\pi(w(t))$, mientras que $e(t)$ es la diferencia entre la salida de la planta y la señal de referencia del exosistema: $\pi(w(t))$ debe ser calculada tal que la convergencia asintótica de $x(t)$ hacia $\pi(w(t))$ asegure la convergencia asintótica de $y(t)$ hacia $y_{ref}(t)$.

Dada la representación mostrada en (3.63)-(3.65), es posible definir una variedad de error cero en estado estacionario como

$$\pi(w(t)) = \tilde{\Pi}(t)w(t), \quad (3.67)$$

y una entrada en estado estacionario

$$\gamma(w(t)) = \tilde{\Gamma}(t)w(t), \quad (3.68)$$

donde $\tilde{\Pi}(t)$ y $\tilde{\Gamma}(t)$ son matrices continuas variantes en el tiempo de dimensiones $[n \times s]$ y $[m \times s]$, respectivamente. Además, $\pi(w(t)) = \tilde{\Pi}(t)w(t)$ es una función del tipo C^{k-1} .

Si derivamos la ecuación del error en estado estacionario (3.66) con respecto al tiempo y consideramos (3.67)-(3.68) se obtiene el siguiente resultado

$$\dot{e}_{ss}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\tilde{\Pi}}(t)w(t) - \tilde{\Pi}(t)\dot{w}(t). \quad (3.69)$$

Substituyendo $\dot{x}(t)$ y $\dot{w}(t)$ en (3.69) se obtiene

$$\dot{e}_{ss}(t) = \tilde{A}(t)x(t) + \tilde{B}(t)u(t) + \tilde{P}(t)w(t) - \dot{\tilde{\Pi}}(t)w(t) - \tilde{\Pi}(t)\tilde{S}(t)w(t). \quad (3.70)$$

Se puede considerar el control del sistema difuso completo como [48]

$$u(t) = \sum_{h=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t))K_i [x(t) - \pi(w(t))] + \gamma(w(t)), \quad (3.71)$$

el cual puede estar dividido en dos términos:

$$u(t) = u_s(t) + u_{ss}(t), \quad (3.72)$$

con

$$u_s(t) = \sum_{h=1}^{r_1} h_{1,i}(z_1(t))K_i [x(t) - \tilde{\Pi}(t)w(t)], \quad (3.73)$$

$$u_{ss}(t) = \tilde{\Gamma}(t)w(t), \quad (3.74)$$

siendo $u_s(t)$ la parte del estabilizador y $u_{ss}(t)$ la entrada en estado estacionario. Además, considerando la ecuación (3.66) y despejando $x(t)$ de la misma se tiene que $x(t) = e_{ss}(t) + \tilde{\Pi}(t)w(t)$. Ahora, substituyendo este término en (3.70) resulta

$$\begin{aligned} \dot{e}_{ss}(t) &= \tilde{A}(t)e_{ss}(t) + \tilde{B}(t)u_s(t) + \tilde{A}(t)\tilde{\Pi}(t)w(t) + \tilde{B}(t)\tilde{\Gamma}(t)w(t) \\ &+ \tilde{P}(t)w(t) - \dot{\tilde{\Pi}}(t)w(t) - \tilde{\Pi}(t)\tilde{S}(t)w(t). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Considere el exosistema como Poisson estable, con el objetivo de asegurar que la referencia no tienda a cero a medida que el tiempo aumenta e impide que el problema de regulación se convierta en un problema de estabilización.

En estado estacionario $e_{ss}(t) = 0$, es decir, la diferencia entre los estados de la planta y la variedad $\pi(w(t))$ es igual a cero. Por lo tanto, el término $u_s(t)$ en (3.72) es igual a cero ($u_s(t) = 0$), ya que $u_s(t)$ está diseñado para estabilizar

$(\tilde{A}(t), \tilde{B}(t))$. Entonces, la ecuación (3.75) toma la siguiente forma

$$\dot{\tilde{\Pi}}(t)w(t) = \tilde{A}(t)\tilde{\Pi}(t)w(t) + \tilde{B}(t)\tilde{\Gamma}(t)w(t) + \tilde{P}(t)w(t) - \tilde{\Pi}(t)\tilde{S}(t)w(t). \quad (3.76)$$

Dividiendo (3.76) entre $w(t)$ ésta se reduce a la siguiente forma

$$\dot{\tilde{\Pi}}(t) = \tilde{A}(t)\tilde{\Pi}(t) + \tilde{B}(t)\tilde{\Gamma}(t) + \tilde{P}(t) - \tilde{\Pi}(t)\tilde{S}(t), \quad (3.77)$$

en estado estacionario.

Observese que las dimensiones de $\tilde{\Pi}(t)$ ($[n \times s]$) y $\tilde{\Gamma}(t)$ ($[m \times s]$) conducen a que la ecuación matricial diferencial (3.77) contenga $[n \times s] + [m \times s]$ incógnitas y $[n \times s]$ ecuaciones. Entonces, es necesario incluir la ecuación del error, la cual en estado estacionario tiene la forma

$$\tilde{C}(t)\tilde{\Pi}(t)w(t) = \tilde{Q}(t)w(t),$$

$$0 = \tilde{C}(t)\tilde{\Pi}(t) - \tilde{Q}(t), \quad (3.78)$$

con $[n \times s]$ incógnitas y $[m \times s]$ ecuaciones, complementando así una **versión dinámica de las ecuaciones de Francis** definidas por

$$\dot{\tilde{\Pi}}(t) = \tilde{A}(t)\tilde{\Pi}(t) + \tilde{B}(t)\tilde{\Gamma}(t) + \tilde{P}(t) - \tilde{\Pi}(t)\tilde{S}(t), \quad (3.79)$$

$$0 = \tilde{C}(t)\tilde{\Pi}(t) - \tilde{Q}(t). \quad (3.80)$$

Es claro que hay que diseñar un controlador capaz de generar los elementos de la matriz continua variante en el tiempo $\tilde{\Pi}(t)$ de acuerdo con valores iniciales adecuados; sin embargo, si se adopta $\dot{\tilde{\Pi}}(0) = 0$, es decir $\tilde{\Pi}(t) = 0$ en $t = 0$, entonces, la solución al problema de regulación recaerá en encontrar $\tilde{\Pi}(t)$ y $\tilde{\Gamma}(t)$, las cuales están expresadas en función de los valores de las reglas de membresía, ya sea de la planta o del exosistema.

Entonces la ecuaciones (3.79) y (3.80) toman la forma

$$\tilde{\Pi}(t)\tilde{S}(t) = \tilde{A}(t)\tilde{\Pi}(t) + \tilde{B}(t)\tilde{\Gamma}(t) + \tilde{P}(t), \quad (3.81)$$

$$0 = \tilde{C}(t)\tilde{\Pi}(t) - \tilde{Q}(t). \quad (3.82)$$

La lógica de esto responde a que la variedad de error cero es una función suave,

por lo tanto no hay un cambio significativo del instante $t < 0$ a $t = 0$. Consecuentemente, la derivada en $t = 0$ puede ser considerada como $\dot{\tilde{\Pi}}(0) = 0$.

Observación 6. Si las ecuaciones (3.81)-(3.82) no tienen solución, entonces no existe una variedad de error cero y/o una entrada en estado estacionario, es decir, el problema de regulación difusa no tiene solución, pues equivale a la condición de existencia definida por Francis en el caso lineal o Francis-Isidori-Byrnes (FIB) en el no lineal.

Observación 7. En algunos casos la matriz $\tilde{\Pi}(t)$ puede resultar constante, entonces la variedad de error cero en estado estacionario estática es suficiente para resolver el problema de regulación difusa.

Lo anterior conduce al siguiente teorema:

Teorema 3.9.1. *El problema de regulación difusa de la salida con información completa se puede resolver si el par (A_i, B_i) es estabilizable; el exosistema es Poisson estable, y existen matrices continuas variantes en el tiempo $\Pi(t)$ y $\Gamma(t)$, que son funciones de $h_{*,i}(z_*(t)) \geq 0$ para todo $t \geq 0$ con 1 para la planta y 2 para el exosistema, calculadas por las ecuaciones*

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}(t)\tilde{S}(t) &= \tilde{A}(t)\tilde{\Pi}(t) + \tilde{B}(t)\tilde{\Gamma}(t) + \tilde{P}(t), \\ 0 &= \tilde{C}(t)\tilde{\Pi}(t) - \tilde{Q}(t),\end{aligned}$$

tal que $\Gamma(t)$ se obtiene directamente cuando $\tilde{\Pi}(0)$ es calculada al sustituir $x(0)$ y $w(0)$ en $\tilde{\Pi}(t)$. \diamond

Demostración. Véase [9]. □

Ejemplo 3.9.1. Considere el problema de controlar y seguir una referencia (generada por el exosistema) en las articulaciones de un robot de dos grados de libertad representado en la fig. 3.24.

La ecuación de movimiento (Lagrange - Euler) para este sistema es

$$\tau(t) = D(\theta)\ddot{\theta}(t) + h(\theta, \dot{\theta}) + c(\theta),$$

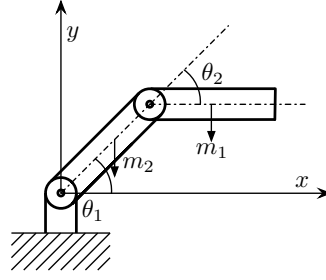


FIGURA 3.24: Brazo robótico de dos grados de libertad

con

$$D(\theta) = \begin{bmatrix} 1/3m_1l^2 + 4/3m_2l^2 + m_2 \cos(\theta_2)l^2 & 1/3m_2l^2 + 1/2m_2l^2 \cos(\theta_2) \\ 1/3m_2l^2 + 1/2m_2l^2 \cos(\theta_2) & 1/3m_2l^2 \end{bmatrix},$$

$$\ddot{\theta}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix},$$

$$h(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 1/2m_2 \sin(\theta_2)l^2\dot{\theta}_2^2 - m_2 \sin(\theta_2)l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ 1/2m_2 \sin(\theta_2)l^2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix},$$

$$c(\theta) = \begin{bmatrix} 1/2m_1gl \cos(\theta_1) + 1/2m_2gl \cos(\theta_1 + \theta_2) + m_2gl \cos(\theta_1) \\ 1/2m_2gl \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix},$$

donde $\theta_1 = x_1(t)$ y representa el ángulo (en radianes) de la primera articulación respecto a la horizontal; $\theta_2 = x_2(t)$ como la segunda articulación, también sobre la horizontal; $g = 9,8m/s^2$ es la constante gravitacional; (m_1, m_2) son las masas de los eslabones; $l = l_1 = l_2$ representan las longitudes de los eslabones de igual tamaño, y (u_1, u_2) son los torques de entrada en Newtons. Se escogen los valores $m_1 = 0,4 \text{ kg}$, $m_2 = 0,3 \text{ kg}$, $l = 0,5 \text{ m}$ en las simulaciones.

El propósito es seguir la referencia definida por el exosistema con un rango de $x_1 \in (-40, 40)$. Para este fin, el modelo difuso que representa la dinámica del sistema no lineal está dado por:

Regla: 1 SI $x_1(t)$ está alrededor -40,

$$\text{ENTONCES } \dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t).$$

Regla: 2 SI $x_1(t)$ está alrededor -20 ,

$$\text{ENTONCES } \dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t).$$

Regla: 3 SI $x_1(t)$ está alrededor 0,

ENTONCES $\dot{x}(t) = A_3x(t) + B_3u(t)$.

Regla: 4 **SI** $x_1(t)$ está alrededor 20,

ENTONCES $\dot{x}(t) = A_4x(t) + B_4u(t)$.

Regla: 5 **SI** $x_1(t)$ está alrededor 40,

ENTONCES $\dot{x}(t) = A_5x(t) + B_5u(t)$.

Las matrices A_i , B_i y C_i están definidas como:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ -9,8753 & 11,0533 & 0 & 0 \\ -7,7601 & -52,7371 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 13,2759 & -28,5308 \\ -28,5308 & 101,3146 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ -2,9352 & 11,3634 & 0 & 0 \\ -11,8447 & -46,2978 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 17,0464 & -41,0740 \\ -41,0740 & 138,9695 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 19,2000 & -48,0000 \\ -48,0000 & 160,0000 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 2,9352 & -11,3634 & 0 & 0 \\ 11,8447 & 46,2978 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 17,0464 & -41,0740 \\ -41,0740 & 138,9695 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 9,8753 & -11,0533 & 0 & 0 \\ 7,7601 & 52,7371 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 13,2759 & -28,5308 \\ -28,5308 & 101,3146 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Además, las funciones de membresía para las reglas 1 – 5 se muestran en la fig. 3.25.

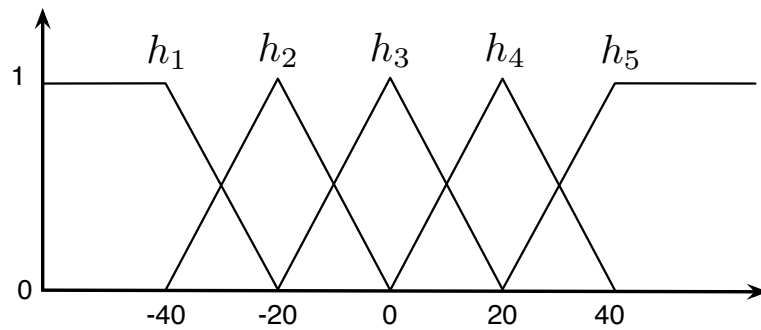


FIGURA 3.25: Funciones de membresía para modelo difuso de un robot de 2 GDL

El exosistema es puramente lineal y está definido por las siguientes matrices.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.83)$$

Utilizando el método presentado en la Sección 3.7, con la señal de control definida en (3.32), se obtienen las figs. 3.26 - 3.31; éstas muestran claramente que el controlador diseñado con base en reguladores locales no asegura el seguimiento exacto; sin embargo, el error permanece acotado.

Por otra parte, la aproximación basada en el cálculo de las ecuaciones dinámicas del Francis se tomará en cuenta para resolver el mismo problema, por lo que

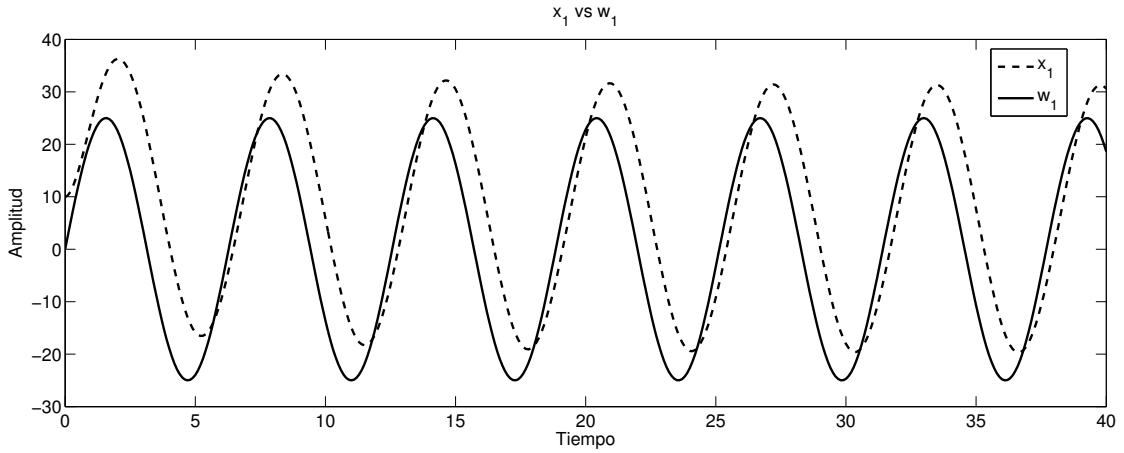


FIGURA 3.26: x_1 vs w_1 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$

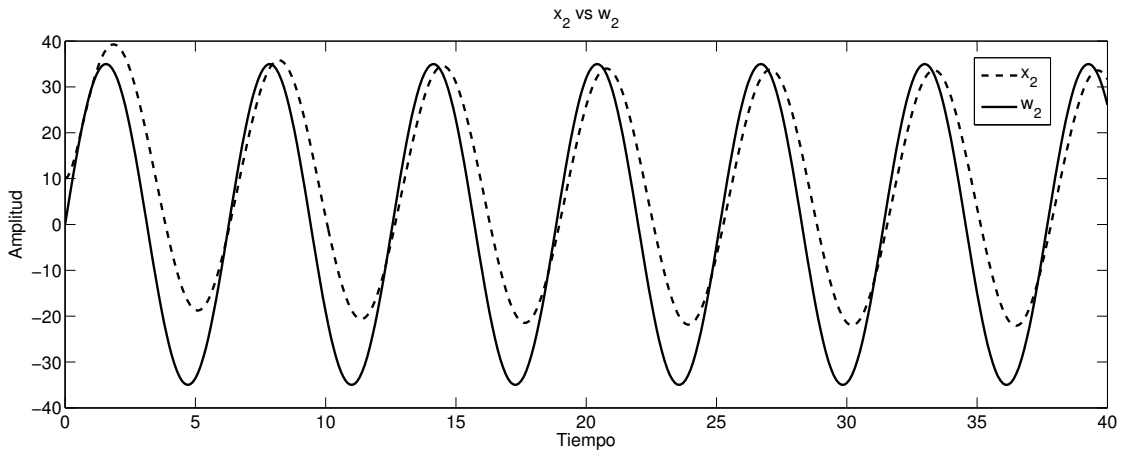


FIGURA 3.27: x_2 vs w_2 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$

será necesario la representación del sistema difuso completo mediante

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (3.84)$$

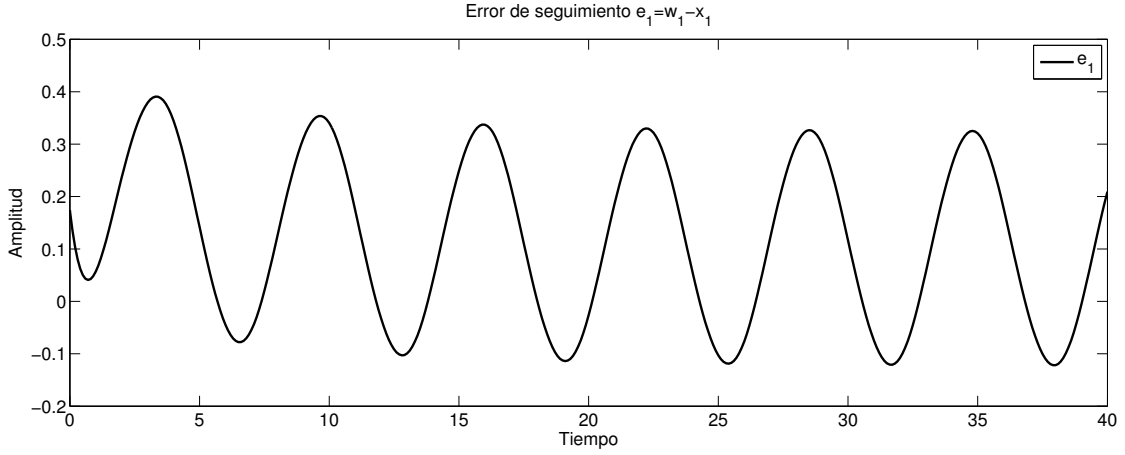


FIGURA 3.28: Error de seguimiento e_1 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$

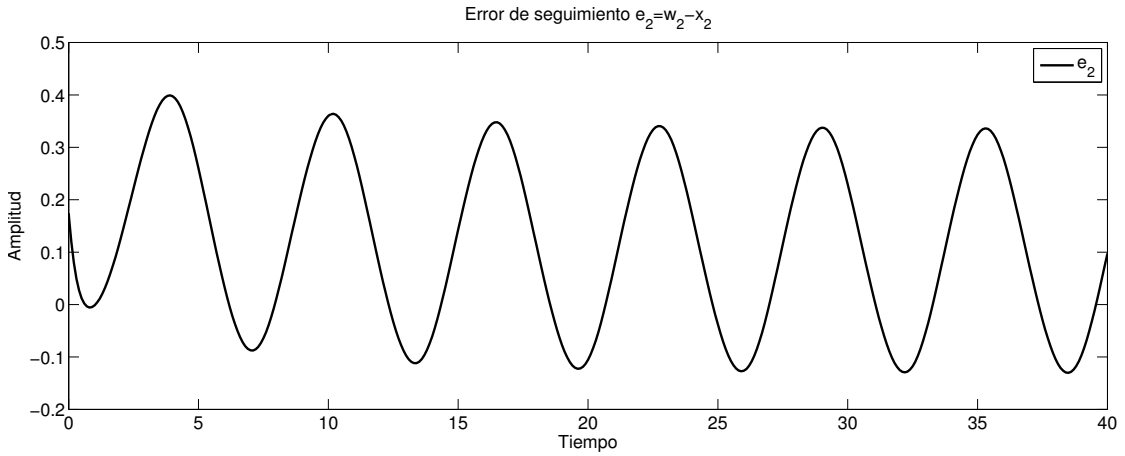


FIGURA 3.29: Error de seguimiento e_2 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$

o bien se puede reescribir como

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \alpha_3 x_3(t) + \alpha_4 x_4(t) + b_1 u_1(t) + b_2 u_2(t) \\ \alpha_5 x_1(t) + \alpha_6 x_2(t) + \alpha_7 x_3(t) + \alpha_8 x_4(t) + b_3 u_1(t) + b_4 u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (3.85)$$

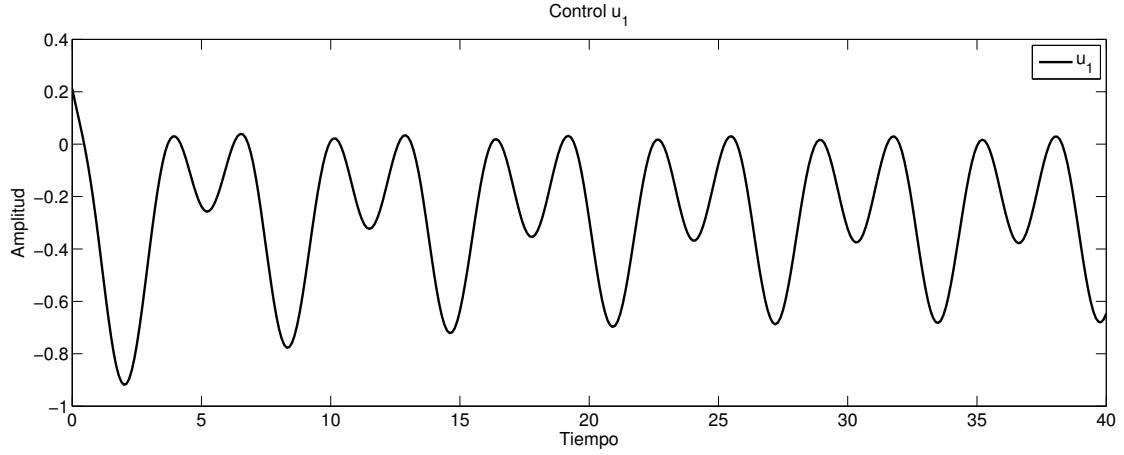


FIGURA 3.30: Señal de control u_1 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$

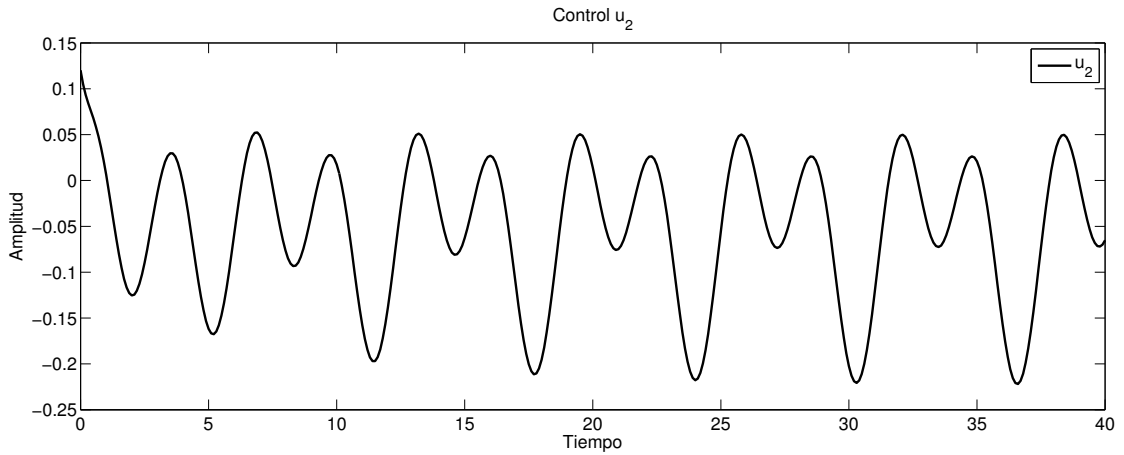


FIGURA 3.31: Señal de control u_2 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$

donde:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= h_1(x_1(t))A_1(3, 1) + \dots + h_5(x_1(t))A_5(3, 1), \\ \alpha_2 &= h_1(x_1(t))A_1(3, 2) + \dots + h_5(x_1(t))A_5(3, 2), \\ \alpha_3 &= h_1(x_1(t))A_1(3, 3) + \dots + h_5(x_1(t))A_5(3, 3), \\ \alpha_4 &= h_1(x_1(t))A_1(3, 4) + \dots + h_5(x_1(t))A_5(3, 4), \\ \alpha_5 &= h_1(x_1(t))A_1(4, 1) + \dots + h_5(x_1(t))A_5(4, 1), \\ \alpha_6 &= h_1(x_1(t))A_1(4, 2) + \dots + h_5(x_1(t))A_5(4, 2), \\ \alpha_7 &= h_1(x_1(t))A_1(4, 3) + \dots + h_5(x_1(t))A_5(4, 3), \\ \alpha_8 &= h_1(x_1(t))A_1(4, 4) + \dots + h_5(x_1(t))A_5(4, 4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= h_1(x_1(t))B_1(3, 1) + \cdots + h_5(x_1(t))B_5(3, 1), \\
 b_2 &= h_1(x_1(t))B_1(3, 2) + \cdots + h_5(x_1(t))B_5(3, 2), \\
 b_3 &= h_1(x_1(t))B_1(4, 1) + \cdots + h_5(x_1(t))B_5(4, 1), \\
 b_4 &= h_1(x_1(t))B_1(4, 2) + \cdots + h_5(x_1(t))B_5(4, 2).
 \end{aligned}$$

De las matrices C_i , con $i = 1, \dots, 5$, se nota que la salida de la planta difusa $y(t) = [x_1(t), x_2(t)]$ debe converger con las salidas del exosistema $y_{ref}(t) = [w_1(t), w_2(t)]$, por lo que será necesario encontrar una variedad de error cero en estado estacionario $\pi(w(t)) = \tilde{\Pi}(t)w(t)$, de dimensión $[n \times s]$; tenga en cuenta que $x_{ss}(t) = \tilde{\Pi}(t)w(t)$.

Para este ejemplo la **variedad de error cero en estado estacionario** será calculada mediante las condiciones

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= w_1(t), \\
 x_2(t) &= w_2(t).
 \end{aligned} \tag{3.86}$$

Si derivamos con respecto al tiempo se tiene

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= \dot{w}_1(t), \\
 \dot{x}_2(t) &= \dot{w}_2(t),
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

y podemos deducir del modelo difuso completo (3.85) que

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_3(t), \\
 \dot{x}_2(t) &= x_4(t),
 \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned}
 \dot{w}_1(t) &= w_3(t), \\
 \dot{w}_2(t) &= w_4(t).
 \end{aligned}$$

En consecuencia, la variedad de error cero en estado estacionario $\tilde{\Pi}(t)w(t)$ tendrá la forma

$$x_{ss}(t) = \tilde{\Pi}(t)w(t), \tag{3.88}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \\ w_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \\ w_4(t) \end{bmatrix}. \tag{3.89}$$

De este resultado se pueden distinguir dos cosas: la primera es que debido a la forma de la planta, la variedad de error cero es igual para todos los subsistemas y la segunda que es invariante en el tiempo, es decir, $\dot{\tilde{\Pi}}(t) = 0$.

Por otra parte, para resolver la **entrada en estado estacionario** $u_{ss}(t) = \gamma(w(t)) = \tilde{\Gamma}(t)w(t)$ se derivan, con respecto al tiempo, los dos últimos elementos de (3.89) ($x_3 = w_3$ y $x_4 = w_4$). Además, Usando el sistema difuso definido en (3.85) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \dot{w}_3, \\ \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \alpha_3 x_3(t) + \alpha_4 x_4(t) + b_1 u_1(t) + b_2 u_2(t) &= -w_1 \end{aligned} \tag{3.90}$$

y

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= \dot{w}_4, \\ \alpha_5 x_1(t) + \alpha_6 x_2(t) + \alpha_7 x_3(t) + \alpha_8 x_4(t) + b_3 u_1(t) + b_4 u_2(t) &= -w_2. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Pero este resultado debe ser tomado en cuenta en estado estacionario. Entonces, de acuerdo con la variedad en estado estacionario $x(t) = \pi(w(t))$ previamente calculada en (3.89), las ecuaciones (3.90) y (3.91) toman la siguiente forma

$$\alpha_1 w_1(t) + \alpha_2 w_2(t) + \alpha_3 w_3(t) + \alpha_4 w_4(t) + b_1 u_1(t) + b_2 u_2(t) = -w_1, \tag{3.92}$$

$$\alpha_5 w_1(t) + \alpha_6 w_2(t) + \alpha_7 w_3(t) + \alpha_8 w_4(t) + b_3 u_1(t) + b_4 u_2(t) = -w_2, \tag{3.93}$$

con

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= h_1(w_1(t))A_1(3, 1) + \cdots + h_5(w_1(t))A_5(3, 1), \\
 \alpha_2 &= h_1(w_1(t))A_1(3, 2) + \cdots + h_5(w_1(t))A_5(3, 2), \\
 \alpha_3 &= h_1(w_1(t))A_1(3, 3) + \cdots + h_5(w_1(t))A_5(3, 3), \\
 \alpha_4 &= h_1(w_1(t))A_1(3, 4) + \cdots + h_5(w_1(t))A_5(3, 4), \\
 \alpha_5 &= h_1(w_1(t))A_1(4, 1) + \cdots + h_5(w_1(t))A_5(4, 1), \\
 \alpha_6 &= h_1(w_1(t))A_1(4, 2) + \cdots + h_5(w_1(t))A_5(4, 2), \\
 \alpha_7 &= h_1(w_1(t))A_1(4, 3) + \cdots + h_5(w_1(t))A_5(4, 3), \\
 \alpha_8 &= h_1(w_1(t))A_1(4, 4) + \cdots + h_5(w_1(t))A_5(4, 4),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= h_1(w_1(t))B_1(3, 1) + \cdots + h_5(w_1(t))B_5(3, 1), \\
 b_2 &= h_1(w_1(t))B_1(3, 2) + \cdots + h_5(w_1(t))B_5(3, 2), \\
 b_3 &= h_1(w_1(t))B_1(4, 1) + \cdots + h_5(w_1(t))B_5(4, 1), \\
 b_4 &= h_1(w_1(t))B_1(4, 2) + \cdots + h_5(w_1(t))B_5(4, 2).
 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones generado por (3.92) y (3.93) para $u_1(t)$ y $u_2(t)$ se obtiene

$$u_1(t) = -\frac{-b_4(d_1) + b_2(d_2)}{b_2b_3 - b_1b_4}, \quad (3.94)$$

$$u_2(t) = -\frac{d_3 + d_4}{b_2b_3 - b_1b_4}, \quad (3.95)$$

donde

$$\begin{aligned}
 d_1 &= w_1(t) + \alpha_1w_1(t) + \alpha_2w_2(t) + \alpha_3w_3(t) + \alpha_4w_4(t), \\
 d_2 &= \alpha_5w_1(t) + w_2(t) + \alpha_6w_2(t) + \alpha_7w_3(t) + \alpha_8w_4(t), \\
 d_3 &= b_3w_1(t) + b_3\alpha_1w_1(t) - b_1\alpha_5w_1(t) - b_1w_2(t) + b_3\alpha_2w_2(t) - b_1\alpha_6w_2(t), \\
 d_4 &= b_3\alpha_3w_3(t) - b_1\alpha_7w_3(t) + b_3\alpha_4w_4(t) - b_1\alpha_8w_4(t).
 \end{aligned}$$

Como $u_{ss}(t) = \tilde{\Gamma}(t)w(t)$, entonces al organizar los términos $u_1(t)$ y $u_2(t)$ en forma matricial se tiene que

$$u_{ss}(t) = \begin{bmatrix} \frac{g_1}{b_2b_3 - b_1b_4} & \frac{g_2}{b_2b_3 - b_1b_4} & \frac{g_3}{b_2b_3 - b_1b_4} & \frac{g_4}{b_2b_3 - b_1b_4} \\ \frac{g_5}{b_2b_3 - b_1b_4} & \frac{g_6}{b_2b_3 - b_1b_4} & \frac{g_7}{b_2b_3 - b_1b_4} & \frac{g_8}{b_2b_3 - b_1b_4} \end{bmatrix} w(t), \quad (3.96)$$

donde

$$\begin{aligned} g_1 &= (1 + \alpha_1)b_4 - \alpha_5b_2, & g_2 &= \alpha_2b_4 - (1 - \alpha_6)b_2, \\ g_3 &= \alpha_3b_4 - \alpha_7b_2, & g_4 &= \alpha_4b_4 - \alpha_8b_2, \\ g_5 &= -(1 + \alpha_1)b_3 + \alpha_5b_1, & g_6 &= -\alpha_2b_3 + (1 + \alpha_6)b_1, \\ g_7 &= -\alpha_3b_3 + \alpha_7b_1, & g_8 &= -\alpha_4b_3 + \alpha_8b_1. \end{aligned}$$

Por otra parte, el estabilizador difuso está dado por la aproximación del **PDC** desarrollado en [15].

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} 2,0483 & 0,6659 & -0,4426 & -0,1146 \\ 0,6552 & 0,6910 & -0,1232 & -0,0583 \end{bmatrix}, \\ K_2 &= \begin{bmatrix} 1,0427 & 0,4046 & -0,4720 & -0,1306 \\ 0,3947 & 0,4403 & -0,1385 & -0,0576 \end{bmatrix}, \\ K_3 &= \begin{bmatrix} -0,2747 & -0,0717 & -0,4823 & -0,1361 \\ -0,0813 & -0,0323 & -0,1438 & -0,0573 \end{bmatrix}, \\ K_4 &= \begin{bmatrix} -1,5808 & -0,5413 & -0,4720 & -0,1306 \\ -0,5512 & -0,5056 & -0,1385 & -0,0576 \end{bmatrix}, \\ K_5 &= \begin{bmatrix} -2,5537 & -0,7832 & -0,4426 & -0,1146 \\ -0,7940 & -0,7581 & -0,1232 & -0,0583 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Las figs. 3.32-3.37 muestran los resultados obtenidos usando la señal de control definida en (3.71).

Como se puede observar, el controlador definido en (3.71) con $\Pi(t)$ y $\Gamma(t)$ que resuelven las ecuaciones dinámicas de Francis, supera claramente a las diseñadas mediante reguladores locales, asegurando el seguimiento exacto.

Observación 8. En caso de no haber una solución para $\tilde{\Pi}(t)$ y $\tilde{\Gamma}(t)$, se puede concluir la no existencia de una variedad de error cero y/o una entrada en estado estacionario. Esto significa que el sistema no tiene la propiedad de regulación, dicho de otra forma, equivale a la condición de existencia definida por las ecuaciones **FIB**.

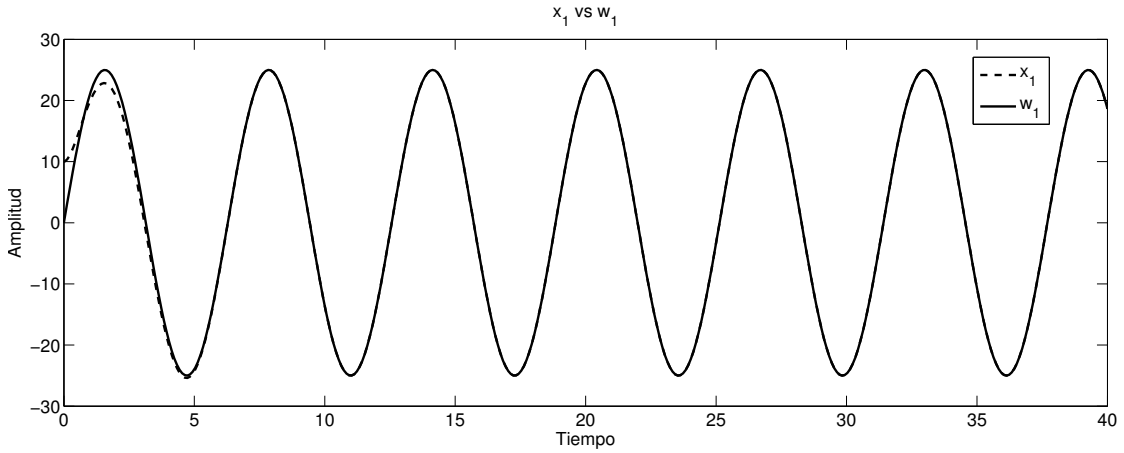


FIGURA 3.32: x_1 vs w_1 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$

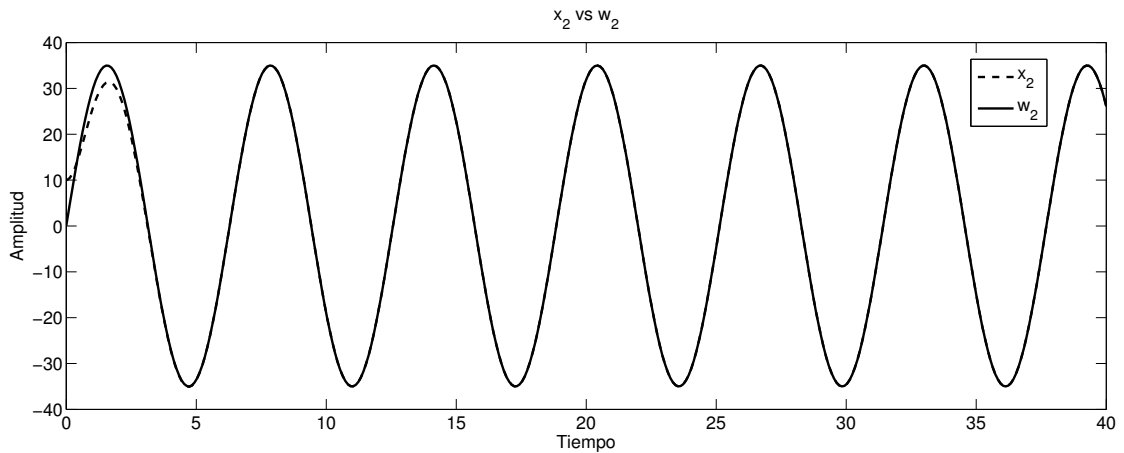


FIGURA 3.33: x_2 vs w_2 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$

Note que debido a la forma de la planta, $\tilde{\Pi}(t)$ resulta constante, teniendo así una variedad en estado estacionario estática; suficiente para resolver el problema de regulación exacta.

Es importante mencionar que el controlador resultante debe ser válido para todo t , por lo que será necesario un estudio del comportamiento de éste dentro del sistema difuso.

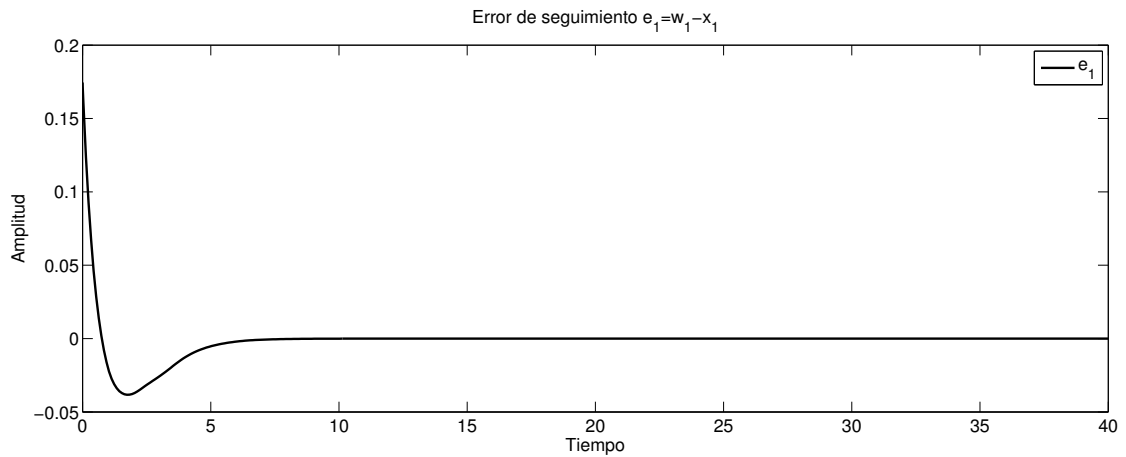


FIGURA 3.34: Error de seguimiento e_1 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$

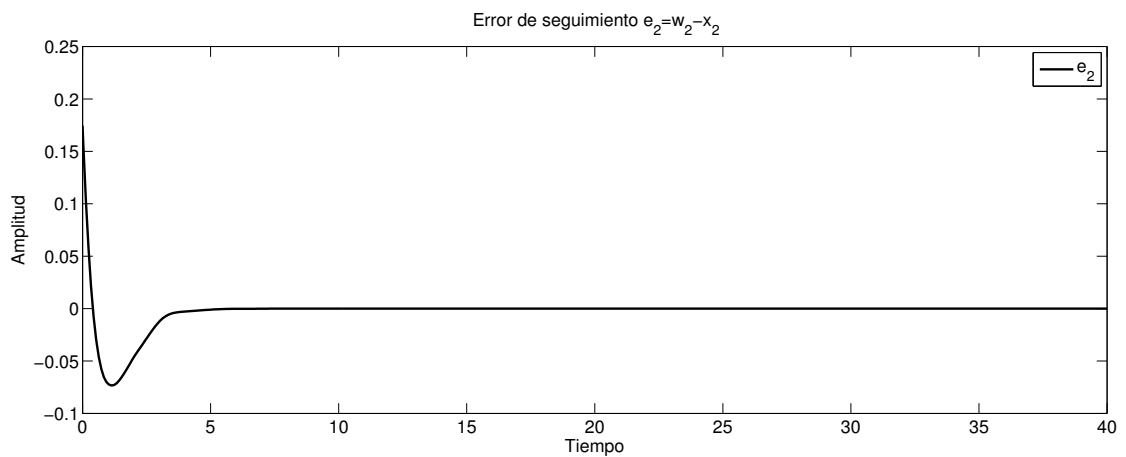


FIGURA 3.35: Error de seguimiento e_2 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$

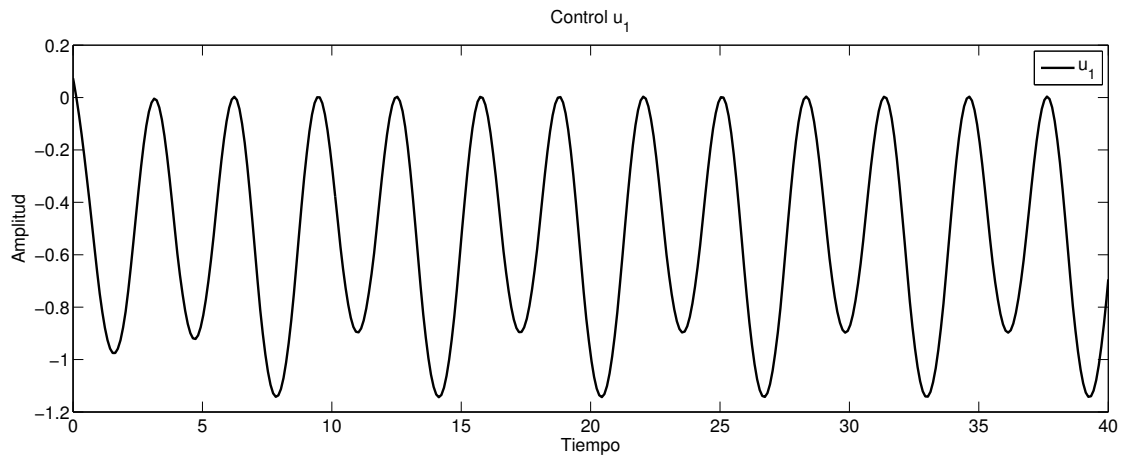


FIGURA 3.36: Señal de control u_1 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$

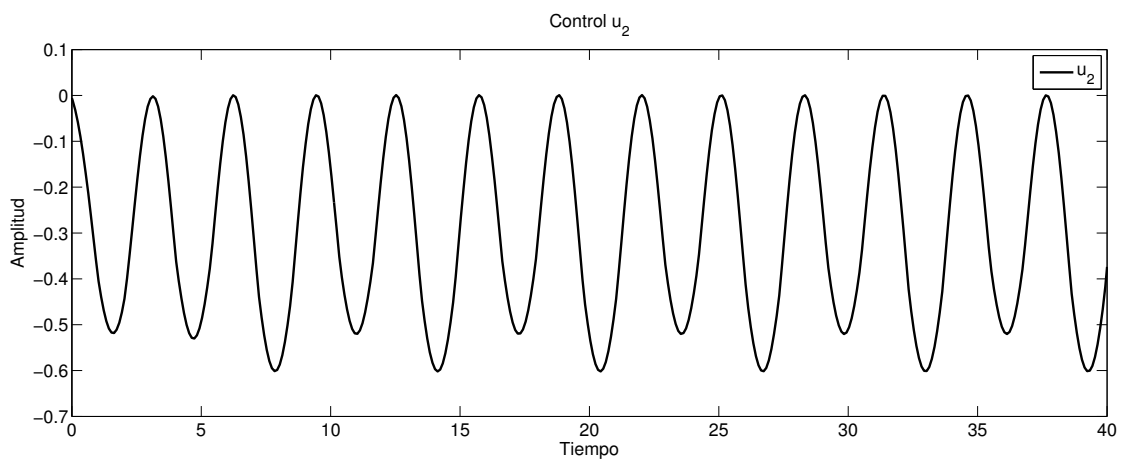


FIGURA 3.37: Señal de control u_2 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo con $x(0) = [10 \ 10 \ 0 \ 0]^T$ y $w(0) = [0 \ 0 \ 25 \ 35]^T$

Capítulo 4

El regulador de salida simplificado

4.1. La regulación difusa exacta (reguladores locales con diferentes funciones de membresía)

En esta sección, una clase particular de modelos **T-S** será considerada con el objetivo de resolver el problema de regulación difusa exacta de la salida, con base en la suma ponderada de reguladores locales lineales, este tipo de modelos puede, comúnmente, encontrarse en sistemas mecánicos, electromecánicos, robóticos, etc. Por lo que, el objetivo principal será diseñar un regulador completo con diferentes funciones de membresía, las cuales no son necesariamente las mismas a las definidas en la planta difusa y/o exosistema, es decir, el problema consiste en encontrar

$$\gamma(w(t)) = \sum_{i=1}^{r_1} \mu_{1,i}(w(t)) \Gamma_i w(t), \quad (4.1)$$

donde el término $\mu_{1,i}(w(t))$ representa las nuevas funciones de membresía.

El regulador de salida difuso dado en (4.1) deberá coincidir con el diseñado a partir del modelo difuso completo, véase [49]; el método propuesto incluye la solución general, pero basada en reguladores lineales.

Considere las matrices de la planta como

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^i & a_2^i & a_3^i & \dots & a_n^i \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_1^i \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

$$C_i = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

además, el exosistema es poisson estable y está definido como

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

donde a_i^j representa los elementos de la última fila de A_i con $j = 1, 2, \dots, r_1$; b_1^i representa al último elemento de la fila de B_i , y $j = 1, 2, \dots, r_1$ representa al subsistema local. Note que A_i , con $i = 1, \dots, r_1$, y S son matrices con la misma dimension $([n \times n])$; las matrices S y Q pueden generar una gran cantidad de señales.

De [8], [5] y (4.1) la señal de control está definida como

$$u(t) = \sum_{i=1}^{r_1} h_i(x(t))k_i\{x(t) - \Pi w(t)\} + \sum_{i=1}^{r_1} \mu_i(w(t))\Gamma_i w(t), \quad (4.4)$$

porque como ya se mencionó $z(t)$ es una función de $x(t)$ y en estado estacionario $x(t) = \pi(w(t))$.

Por otra parte, de C_i y Q resulta $c_1x_1(t) = q_1w_1(t)$ a medida que el tiempo evoluciona. De (4.3) el siguiente exosistema puede ser fácilmente deducido

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_2, \\ \dot{w}_2 &= w_3, \\ &\vdots \\ \dot{w}_n &= s_1w_1 + s_2w_2 + \cdots + s_nw_n, \\ \dot{w}_n &= \sum_{i=1}^n s_iw_i, \end{aligned}$$

donde S es puramente lineal e igual para cada subsistema, por lo tanto $r = r_1$.

Además, cada subsistema tiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + \cdots + a_n^i x_n + b_1^i u_{ss,i}. \end{aligned}$$

Si derivamos $c_1x_1 = q_1w_1$ con respecto al tiempo resulta que

$$c_1\dot{x}_i = q_1\dot{w}_i, \quad (4.5)$$

donde $i = 1, 2, \dots, n$. De este análisis, se pueden obtener dos resultados: primero, la variedad en estado estacionario

$$\Pi_i = \begin{bmatrix} \pi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pi_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \pi_1 \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

con $\pi_1 = \frac{q_1}{c_1}$ y debido a la forma de (4.2) - (4.3) la variedad de error cero en estado estacionario es la misma para todos los subsistemas, es decir, $\Pi_1 = \Pi_2 = \cdots = \Pi_r$.

Y segundo, la entrada en estado estacionario definida por

$$u_{ss,i} = \frac{\pi_1 s_1 w_1 - \pi_1 a_1^i w_1}{b_1^i} + \frac{\pi_1 s_2 w_2 - \pi_1 a_2^i w_2}{b_1^i} + \cdots + \frac{\pi_1 s_n w_n - \pi_1 a_n^i w_n}{b_1^i}.$$

La ecuación previa puede expresarse de manera compacta como

$$u_{ss,i} = \frac{\sum_{j=1}^n \pi_1 [s_j w_j - a_j^i w_j]}{b_1^i} \quad \forall i = 1, \dots, r, \quad (4.7)$$

y de (4.1) la entrada en estado estacionario está definida por

$$u_{ss} = \sum_{i=1}^r \mu_i(w(t)) u_{ss,i} = \sum_{i=1}^r \mu_i(w(t)) \Gamma_i w(t) \quad \forall i = 1, \dots, r. \quad (4.8)$$

Por lo que, del análisis anterior, cada Γ_i local puede ser calculada de la siguiente forma

$$\Gamma_i = \frac{q_1}{c_1} \left[\frac{s_1 - a_1^i}{b_1^i} \quad \frac{s_2 - a_2^i}{b_1^i} \quad \dots \quad \frac{s_n - a_n^i}{b_1^i} \right]. \quad (4.9)$$

Ahora considerando la planta difusa (4.2) de forma completa, se puede observar que la última ecuación \dot{x}_n está dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= [h_1(x(t))(a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n) + \dots + h_r(x(t))(a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n)] \\ &+ [h_1(x(t))b_1^i + \dots + h_r(x(t))b_1^r] u_{ss}, \end{aligned}$$

la cual en forma compacta se escribe

$$\dot{x}_n = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) \left(\sum_{j=1}^n a_j^i x_j \right) + \left(\sum_{i=1}^r h_i(x(t)) b_1^i \right) u_{ss}(t). \quad (4.10)$$

Considerando que en estado estacionario $x(t) = w(t)$, la entrada total en estado estacionario se obtiene directamente al sustituir \dot{x}_n y \dot{w}_n en (4.5), resultando

$$\sum_{i=1}^r h_i(w(t)) \left(\sum_{j=1}^n a_j^i x_j \right) + \left(\sum_{i=1}^r h_i(w(t)) b_1^i \right) u_{ss}(t) = \pi_1 \sum_{i=1}^n s_i w_i.$$

Despejando la entrada en estado estacionario $u_{ss}(t)$ de la ecuación anterior se tiene

$$u_{ss}(t) = \frac{\pi_1 \sum_{i=1}^n s_i w_i - \pi_1 \sum_{i=1}^r h_i(w(t)) \left(\sum_{j=1}^n a_j^i w_j \right)}{\sum_{i=1}^r h_i(w(t)) b_1^i}, \quad (4.11)$$

la cual representa la entrada en estado estacionario *global* del sistema difuso.

Ahora, el objetivo es obtener el mismo resultado de la entrada en estado estacionario definido en (4.11), con la diferencia de estar formado por la suma difusa de reguladores lineales y un conjunto nuevo de funciones de membresía. Para esto, los reguladores locales y el regulador global están definidos como

$$u_{ss,i} = \gamma(w(t)) = \sum_{i=1}^r \mu_i(w(t)) \Gamma_i w(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(w(t)) \frac{\sum_{j=1}^n \pi_1 [s_j w_j - a_j^i w_j]}{b_1^i},$$

$$u_{ss}(t) = \gamma(w(t)) = \frac{\pi_1 \sum_{i=1}^n s_i w_i - \pi_1 \sum_{i=1}^r h_i(w(t)) \left(\sum_{j=1}^n a_j^i w_j \right)}{\sum_{i=1}^r h_i(w(t)) b_1^i}.$$

Entonces, al igualar las dos ecuaciones anteriores tenemos

$$\frac{\pi_1 \sum_{i=1}^n s_i w_i - \pi_1 \sum_{i=1}^r h_i(w(t)) \left(\sum_{j=1}^n a_j^i w_j \right)}{\sum_{i=1}^r h_i(w(t)) b_1^i} = \sum_{i=1}^r \mu_i(w(t)) \frac{\sum_{j=1}^n \pi_1 [s_j w_j - a_j^i w_j]}{b_1^i}.$$

Despejando $\mu_i(w(t))$ de la ecuación anterior, las nuevas funciones de membresía están definidas como (4.12) (con $i = 1, 2, \dots, r$)

$$\mu_i(w(t)) = \frac{b_1^i h_i(w(t))}{\sum_{i=1}^r h_i(w(t)) b_1^i}. \quad (4.12)$$

Es importante remarcar que $\mu_i(w(t))$ está dada en términos de $h_i(w(t))$ por simplicidad. Sin embargo, $h_i(w(t))$ puede ser removida de las nuevas funciones de membresía (4.12), cuando $h_i(w(t))$ sea remplazada por su correspondiente expresión. Note que (4.12) cumple con las condiciones

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(w(t)) = 1,$$

$$\mu_i(w(t)) \geq 0,$$

para todo $i = 1, 2, \dots, r$, además, se puede observar que (4.12) es siempre válida

cuando b_1^i de la matriz de entrada tienen el mismo signo, si esta condición no se cumple los denominadores de las nuevas funciones de membresía presentarán singularidades.

Sin embargo, estas singularidades pueden aparecer fuera de la región de operación, permitiendo más flexibilidad; tales casos requerirán un estudio particular del sistema.

El siguiente teorema proporciona las condiciones de existencia del regulador difuso de salida exacta para una clase de modelos difusos tipo Takagi-Sugeno (T-S).

Teorema 4.1.1. *La regulación difusa de salida exacta con información completa de sistemas definidos como (4.2) se puede resolver sí: a) cada elemento de las matrices de entrada b_1^i para $i = 1, 2, \dots, r$ tienen el mismo signo; b) Existe $u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))K_i x$ para el sistema difuso [17], y c) el exosistema $\dot{w}(t) = Sw(t)$ es Poisson estable. Por lo tanto, el **problema de regulación exacta de la salida** se resuelve mediante el controlador*

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t))k_i \{x(t) - \Pi w(t)\} + \sum_{i=1}^r \mu_i(w(t))\Gamma_i w(t),$$

donde $\mu_i(w(t))$ pueden ser obtenidas de (4.12).

Demostración. Del análisis previo, la existencia de los mapeos $\pi(w(t)) = \Pi w(t)$ y $\gamma(w(t)) = \sum_{i=1}^r \mu_i(w(t))\Gamma_i w(t)$ se pueden garantizar siempre y cuando los subsistemas locales estén definidos como (4.2), mientras que la condición a) evita las singularidades de las nuevas funciones de membresía $\mu_i(w(t))$.

Por otra parte, la incorporación de la condición b) ha sido ya discutida en [5], [6], [16], [50] y [51], e implica la existencia del estabilizador difuso.

Finalmente, la condición c) se introduce para evitar que la señal de referencia converja a cero.

El resto de la demostración está dada directamente del análisis anterior. \square

Observación 9. Aunque, la aproximación del PDC [15] puede ser usado para calcular el estabilizador difuso, otras técnicas pueden ser consideradas para verificar la condición b). El lector puede referirse a: [40].

Ejemplo 4.1.1. Considere el problema de estabilizar y oscilar un péndulo invertido sobre el carro mostrado en la fig. 4.1. Las ecuaciones de movimiento para este

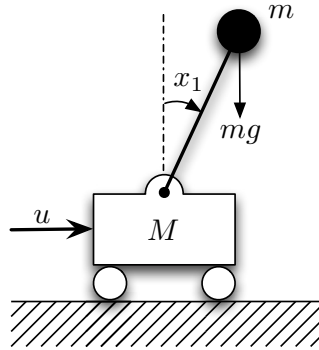


FIGURA 4.1: Sistema de péndulo invertido

sistema son [15]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{g \sin(x_1(t)) - amlx_2^2 \sin(2x_1(t))/2 - a \cos(x_1(t))u(t)}{4l/3 - aml \cos^2(x_1(t))}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde $x_1(t)$ denota el ángulo (en radianes) del péndulo sobre la vertical; $x_2(t)$ es la velocidad angular; $g = 9,8m/s^2$ es la constante gravitatoria; m es la masa del péndulo; M es la masa del carro; $2l$ es la longitud del péndulo; u es la fuerza aplicada al carro (en Newtons), y $a = 1/(m + M)$. Escogemos los valores de $m = 2,0 \text{ kg}$, $M = 8,0 \text{ kg}$, $2l = 1,0 \text{ m}$ para las simulaciones correspondientes.

El objetivo es seguir una señal de referencia previamente definida por el exosistema dentro de un rango de $x_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$. Para este fin, la representación del modelo difuso para el sistema no lineal es [15]:

Regla 1: **Si** $x_1(t)$ is about 0,

ENTONCES $\dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t)$.

Regla 2: **SI** $x_1(t)$ is about $\pm\pi/2$ ($|x_1| < \pi/2$),

ENTONCES $\dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t)$.

Las funciones de membresía para las reglas 1 y 2 se muestran en la fig. 4.2.

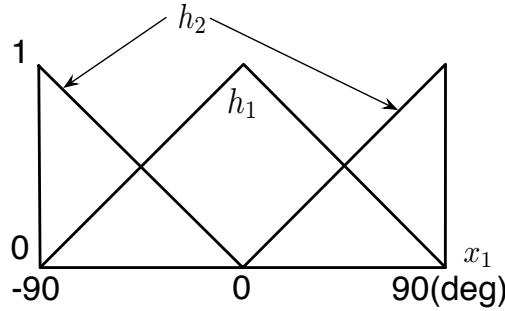


FIGURA 4.2: Funciones de membresía para el modelo de dos reglas

Siendo:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3 - aml} \end{bmatrix}, \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\beta}{4l/3 - aml\beta^2} \end{bmatrix}, \\
 C_1 = C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

y $\beta = \cos(88^\circ)$.

El exosistema está definido por las siguientes matrices:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

Usando el método desarrollado previamente y aplicando (4.9) se tiene que Γ_i es:

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 103,6667 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 1978,6585 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.16}$$

Además, sabiendo que $\frac{a_1}{c_1} = 1$, la matriz Π (4.6) tendrá la siguiente forma

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escogemos los valores propios en lazo cerrado como $[-2 \ -2]$ para $A_1 + B_1K_1$ y $A_2 + B_2K_2$. Entonces, se tiene

$$K_1 = \begin{bmatrix} 120,6667 & 22,6667 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 2551,6279 & 763,9592 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

En consecuencia

$$A_1 + B_1K_1 = A_2 + B_2K_2 = G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Además,

$$G_{12} = \frac{\{A_1 + B_1K_2\} + \{A_2 + B_2K_1\}}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -212,1325 & -67,4675 \end{bmatrix}.$$

Note que G_{12} es Hurwitz. Usando el algoritmo de optimización para LMI se obtiene que

$$P = \begin{bmatrix} 3,6250 & 0,6250 \\ 0,6250 & 0,2812 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Se puede mostrar fácilmente que las siguientes condiciones de estabilidad se satisfacen

$$\{A_1 + B_1K_1\}^T P + P\{A_1 + B_1K_1\} < 0, \quad i = 1, 2, \quad (4.19)$$

$$G_{12}^T P + PG_{12} < 0. \quad (4.20)$$

Las figs. 4.3-4.5, con $x(0) = [10 \ 0]^T$ y $w(0) = [40 \ 0]^T$, muestran la simulación después de aplicar

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t))K_i[x(t) - \Pi w(t)] + \sum_{i=1}^r h_i(w(t))\Gamma_i w(t),$$

definido en (4.4). Aunque, el error de seguimiento se mantiene acotado, el controlador definido en (4.4) no asegura la regulación exacta, esto se puede ver claramente en la fig. 4.4

Por otra parte, aplicando el controlador definido en (4.4) como

$$u(t) = \sum_{i=1}^{r_1} h_i(x(t))k_i\{x(t) - \Pi w(t)\} + \sum_{i=1}^{r_1} \mu_i(w(t))\Gamma_i w(t),$$

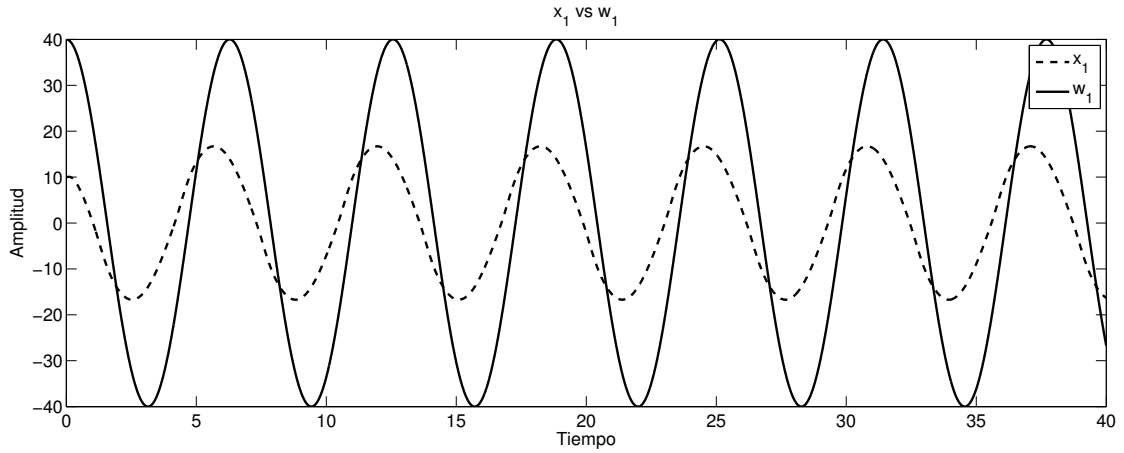


FIGURA 4.3: x_1 vs w_1 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales

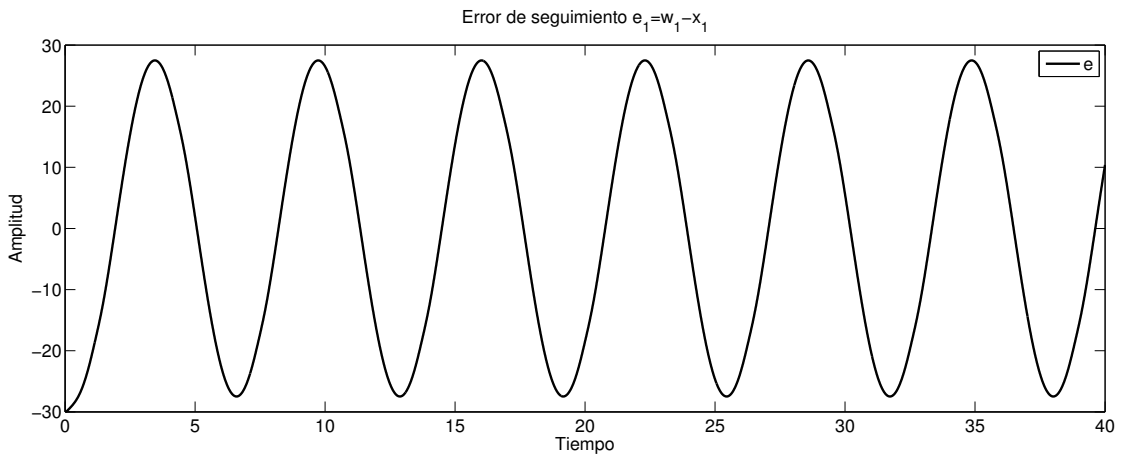


FIGURA 4.4: Error de seguimiento e cuando el controlador está diseñado a partir de los reguladores locales

donde las funciones de membresía del regulador (4.12) están definidas de la siguiente forma

$$\mu_1(w(t)) = \frac{(h_1(w(t)))(-0,1765)}{h_1(w(t))(-0,1765) + h_2(w(t))(-0,0052)},$$

$$\mu_2(w(t)) = \frac{(h_2(w(t)))(-0,0052)}{h_1(w(t))(-0,1765) + h_2(w(t))(-0,0052)}.$$

Las figs. 4.6-4.8 muestran la simulación con el controlador definido en (4.4). Observe que el único cambio son las nuevas funciones de membresía las cuales son

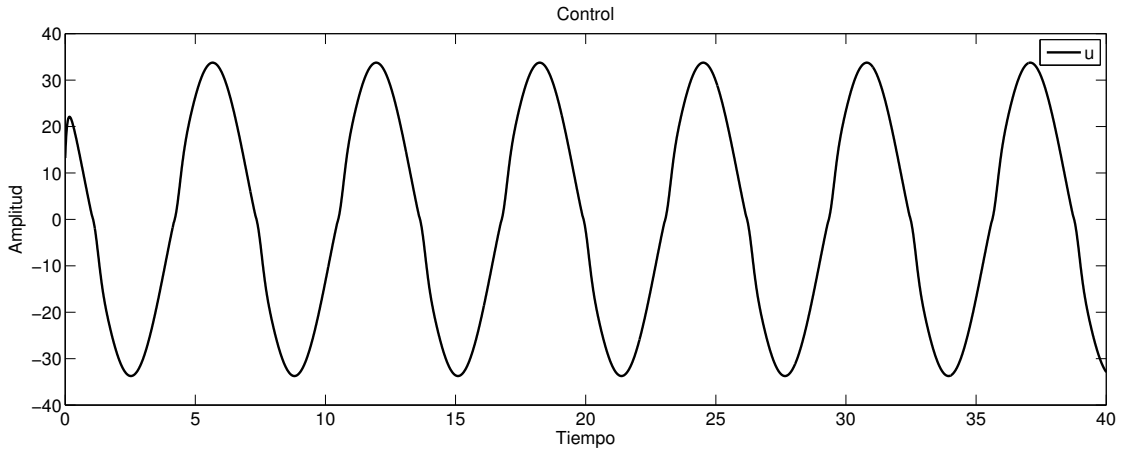


FIGURA 4.5: Señal de control u cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales

capaces de combinar correctamente los reguladores locales para alcanzar el seguimiento asintótico.

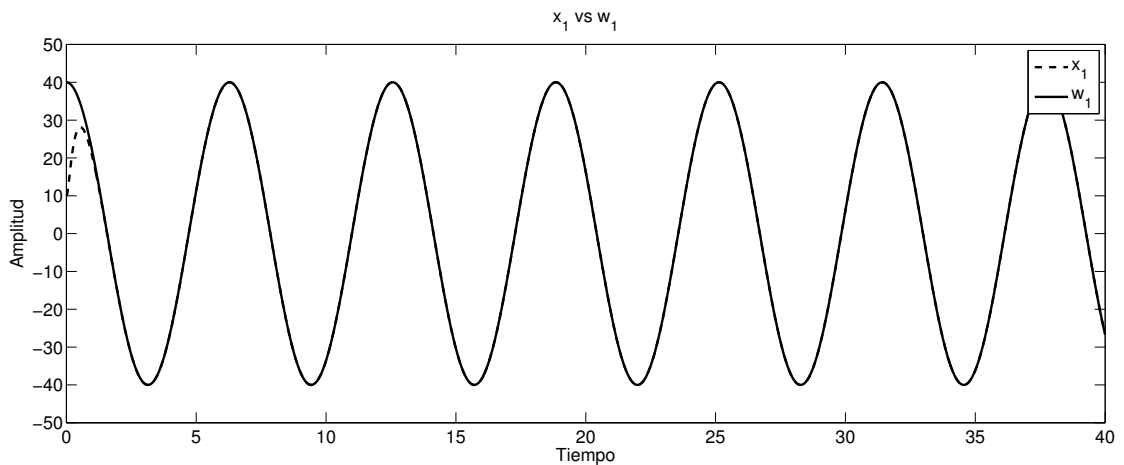


FIGURA 4.6: x_1 vs w_1 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales y funciones de membresía adecuadas

Para verificar la efectividad del controlador propuesto es necesario evaluar su comportamiento en el sistema no lineal definido en (4.13) con $x(0) = [10 \ 0]$ y $w(0) = [40 \ 0]$. Las simulaciones en las Figs. 4.9-4.11 muestran un correcto desempeño del controlador difuso en el sistema no lineal. Es claro que el error de seguimiento, que aparece en la fig. 4.10, es debido a la aproximación dada por el sistema difuso tipo T-S. Tal error, se puede reducir mediante la consideración de la representación exacta del sistema no lineal dada en [15].

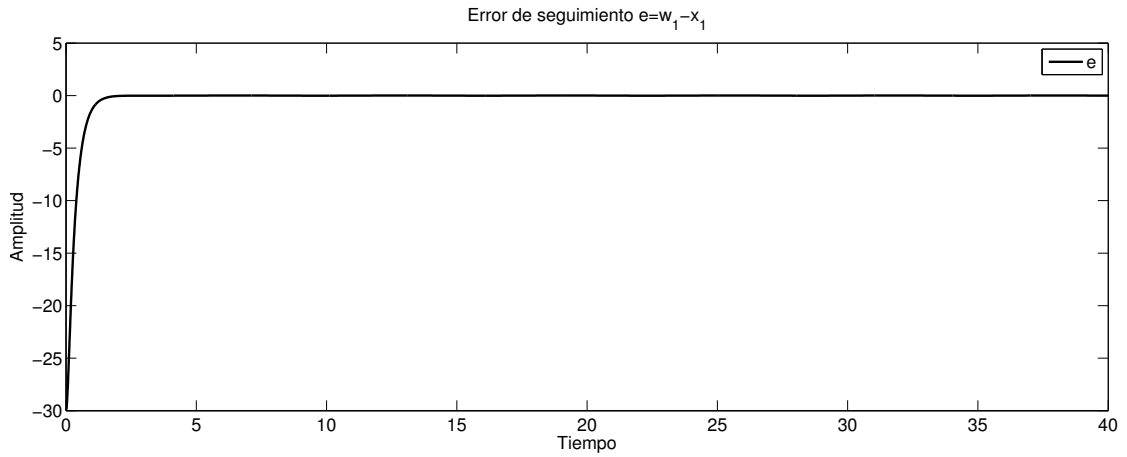


FIGURA 4.7: Error de seguimiento e cuando el controlador está diseñado a partir de los reguladores locales y funciones de membresía adecuadas

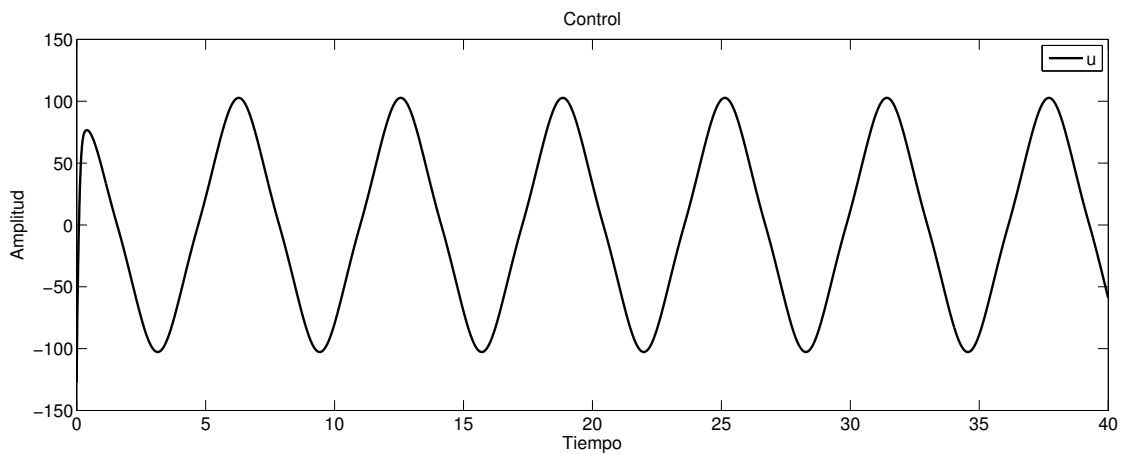


FIGURA 4.8: Señal de control u cuando el controlador está diseñado a partir de los reguladores locales y funciones de membresía adecuadas

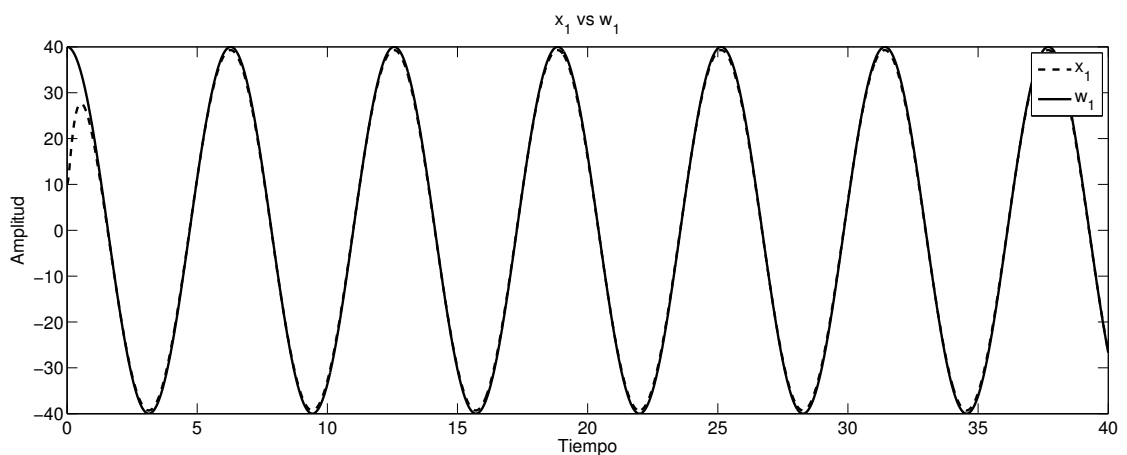


FIGURA 4.9: x_1 vs w_1 con el regulador difuso aplicado al sistema no lineal

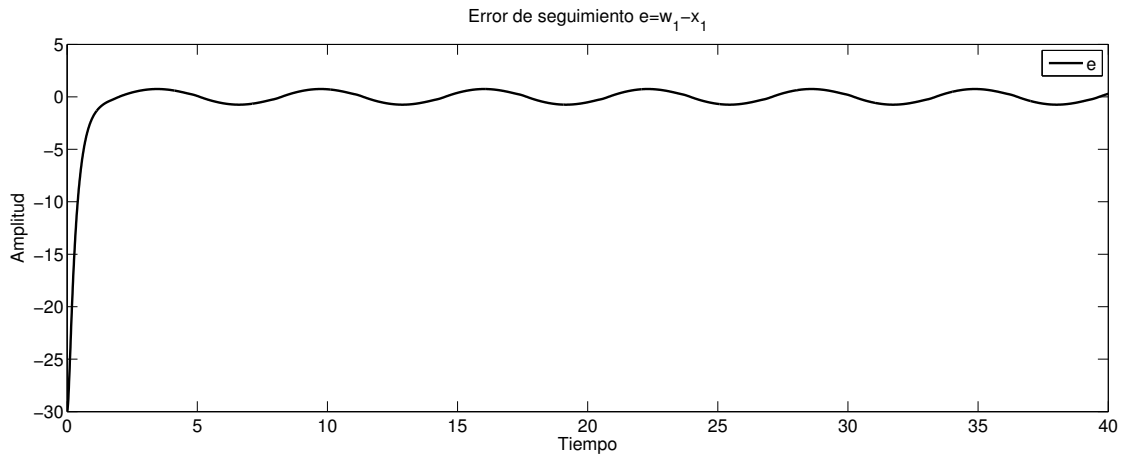


FIGURA 4.10: Error de seguimiento e con el regulador difuso aplicado al sistema no lineal

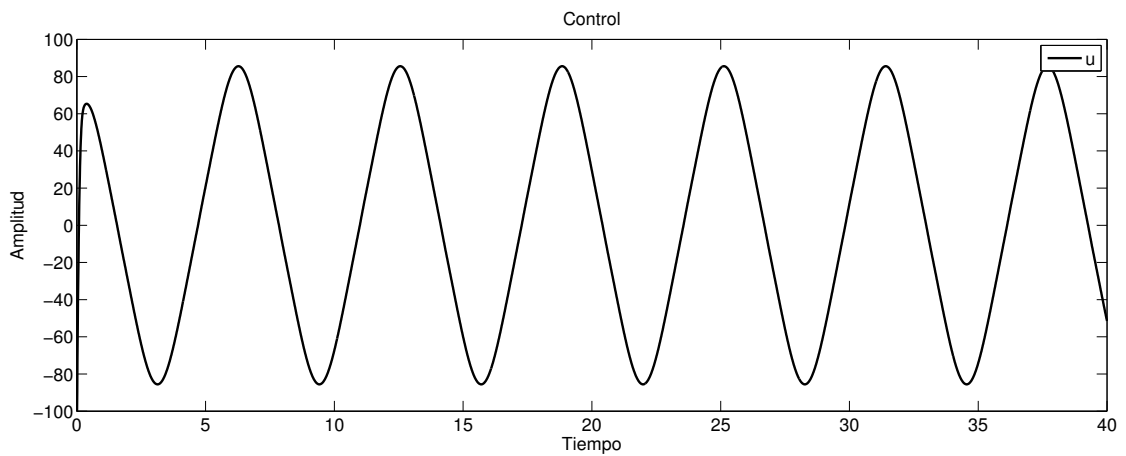


FIGURA 4.11: Señal de control u con el regulador difuso aplicado al sistema no lineal

4.2. El problema de regulación difusa exacta de la salida para una clase de sistemas difusos tipo MIMO

Ahora el problema de regulación difusa será extendido a sistemas con más entradas, teniendo así una clase más amplia de sistemas difusos (T-S). La forma que

deberán adoptar esta clase de sistemas está dada por:

$$\begin{aligned}
 A_i &= \left[\begin{array}{c|c} O & I \\ \hline & D_i \end{array} \right], & B_i &= \left[\begin{array}{c} O \\ \hline F_i \end{array} \right], \\
 S &= \left[\begin{array}{c|c} O & I \\ \hline & G \end{array} \right], & C_i &= \left[\begin{array}{c|c} H_C & O_C \end{array} \right], \\
 Q &= \left[\begin{array}{c|c} H_Q & O_Q \end{array} \right],
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

con:

$$\begin{aligned}
 I &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, & O &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \\
 D_i &= \begin{bmatrix} a_{(k+1),1}^i & a_{(k+1),2}^i & a_{(k+1),3}^i & \dots & a_{(k+1),n}^i \\ a_{(k+2),1}^i & a_{(k+2),2}^i & a_{(k+2),3}^i & \dots & a_{(k+2),n}^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}^i & a_{n,2}^i & a_{n,3}^i & \dots & a_{n,n}^i \end{bmatrix}, & F_i &= \begin{bmatrix} b_{k+1}^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{k+2}^i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_n^i \end{bmatrix}, \\
 G &= \begin{bmatrix} s_{(k+1),1} & s_{(k+1),2} & s_{(k+1),3} & \dots & s_{(k+1),n} \\ s_{(k+2),1} & s_{(k+2),2} & s_{(k+2),3} & \dots & s_{(k+2),n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,1} & s_{n,2} & s_{n,3} & \dots & s_{n,n} \end{bmatrix}, & O_C = O_Q &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \\
 H_C &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_m \end{bmatrix}, & H_Q &= \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_m \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

donde $k = n - m$, $F_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $O \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$, $O_C \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $I \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$, $D_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $H_C \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $H_Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$. La forma adoptada de estos sistemas reside en el hecho de que una gran variedad de sistemas mecánicos son representados con esta estructura.

De (4.21) el siguiente exosistema puede ser fácilmente obtenido

$$\begin{aligned}
 \dot{w}_1 &= w_{m+1}, \\
 \dot{w}_2 &= w_{m+2}, \\
 &\vdots \\
 \dot{w}_{k+1} &= s_{(k+1),1}w_1 + s_{(k+1),2}w_2 + \cdots + s_{(k+1),n}w_n \\
 &= \sum_{j=1}^n s_{(k+1),j}w_j, \\
 &\vdots \\
 \dot{w}_{k+2} &= s_{(k+2),1}w_1 + s_{(k+2),2}w_2 + \cdots + s_{(k+2),n}w_n \\
 &= \sum_{j=1}^n s_{(k+2),j}w_j, \\
 &\vdots \\
 \dot{w}_n &= s_{n,1}w_1 + s_{n,2}w_2 + \cdots + s_{n,n}w_n \\
 &= \sum_{j=1}^n s_{n,j}w_j.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Además, cada subsistema puede ser descrito de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_{m+1}, \\
 \dot{x}_2 &= x_{m+2}, \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{k+1} &= a_{(k+1),1}^i x_1 + a_{(k+1),2}^i x_2 + \cdots + a_{(k+1),n}^i x_n + b_{k+1}^i u_{ss}^i \\
 &= \sum_{j=1}^n a_{(k+1),j}^i x_j + b_{k+1}^i u_{ss}^i, \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{k+2} &= a_{(k+2),1}^i x_1 + a_{(k+2),2}^i x_2 + \cdots + a_{(k+2),n}^i x_n + b_{k+2}^i u_{ss}^i \\
 &= \sum_{j=1}^n a_{(k+2),j}^i x_j + b_{k+2}^i u_{ss}^i, \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= s_{n,1}w_1 + s_{n,2}w_2 + \cdots + s_{n,n}w_n + b_n^i u_{ss}^i \\
 &= \sum_{j=1}^n s_{n,j}w_j + b_n^i u_{ss}^i.
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Usando las expresiones (4.22) y (4.23), que consideran $c_1 x_1 = q_1 w_1$, $c_2 x_2 = q_2 w_2, \dots, c_m x_m = q_m w_m$ y mediante sustituciones sucesivas $\dot{x}_h = \pi_h \dot{w}_h$ con $h =$

$1, \dots, m$ se obtienen los siguientes resultados:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pi_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \pi_n \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

donde $\Pi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con $i = 1, 2, \dots, r$, además, $\pi_1 = \frac{q_1}{c_1}, \pi_2 = \frac{q_2}{c_2}, \dots, \pi_m = \frac{q_m}{c_m}, \pi_{m+1} = \frac{q_1}{c_1}, \pi_{m+2} = \frac{q_2}{c_2}, \dots, \pi_{m+m} = \frac{q_m}{c_m}$, etc. Note que los valores de π_* se repiten a sí mismos cada m entradas hasta n . En consecuencia, Π es común e igual para todos los subsistemas. La entrada en estado estacionario está definida como

$$u_{ss}^i = \begin{bmatrix} \frac{\pi_1 s_{(k+1),1} w_1 - \pi_1 a_{(k+1),1}^i w_1}{b_{k+1}^1} + \frac{\pi_1 s_{(k+1),2} w_2 - \pi_2 a_{(k+1),2}^i w_2}{b_{k+1}^1} + \dots + \frac{\pi_1 s_{(k+1),n} w_n - \pi_n a_{(k+1),n}^i w_n}{b_{k+1}^1} \\ \frac{\pi_2 s_{(k+2),1} w_1 - \pi_1 a_{(k+2),1}^i w_1}{b_{k+2}^1} + \frac{\pi_2 s_{(k+2),2} w_2 - \pi_2 a_{(k+2),2}^i w_2}{b_{k+2}^1} + \dots + \frac{\pi_2 s_{(k+2),n} w_n - \pi_n a_{(k+2),n}^i w_n}{b_{k+2}^1} \\ \vdots \\ \frac{\pi_n s_{n,1} w_1 - \pi_1 a_{n,1}^i w_1}{b_n^1} + \frac{\pi_n s_{n,2} w_2 - \pi_2 a_{n,2}^i w_2}{b_n^1} + \dots + \frac{\pi_n s_{n,n} w_n - \pi_n a_{n,n}^i w_n}{b_n^1} \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

si reescribimos (4.25) en una forma compacta, se tiene

$$u_{ss}^i = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\pi_1 s_{(k+1),j} w_j - \pi_j a_{(k+1),j}^i w_j}{b_{k+1}^i} \\ \sum_{j=1}^n \frac{\pi_2 s_{(k+2),j} w_j - \pi_j a_{(k+2),j}^i w_j}{b_{k+2}^i} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\pi_n s_{n,j} w_j - \pi_j a_{n,j}^i w_j}{b_n^i} \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

y de (4.8) las matrices locales Γ_i tienen la forma

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} \frac{\pi_1 s_{(k+1),1} - \pi_1 a_{(k+1),1}^i}{b_{k+1}^i} & \frac{\pi_1 s_{(k+1),2} - \pi_2 a_{(k+1),2}^i}{b_{k+1}^i} & \dots & \frac{\pi_1 s_{n,1} - \pi_n a_{(k+1),n}^i}{b_{k+1}^i} \\ \frac{\pi_2 s_{(k+2),1} - \pi_1 a_{(k+2),1}^i}{b_{k+2}^i} & \frac{\pi_2 s_{(k+2),2} - \pi_2 a_{(k+2),2}^i}{b_{k+2}^i} & \dots & \frac{\pi_2 s_{n,1} - \pi_n a_{(k+2),n}^i}{b_{k+2}^i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\pi_n s_{n,1} - \pi_1 a_{n,1}^i}{b_n^i} & \frac{\pi_n s_{n,2} - \pi_2 a_{n,2}^i}{b_n^i} & \dots & \frac{\pi_n s_{n,1} - \pi_n a_{n,n}^i}{b_n^i} \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Ahora, de la planta difusa (4.21) expresada en su forma global, se deduce que

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{k+1} &= \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) \left(\sum_{j=1}^n a_{(k+1),j}^i x_j \right) + \left(\sum_{i=1}^r h_i(x(t)) b_{k+1}^i \right) u_{ss}, \\
 \dot{x}_{k+2} &= \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) \left(\sum_{j=1}^n a_{(k+2),j}^i x_j \right) + \left(\sum_{i=1}^r h_i(x(t)) b_{k+2}^i \right) u_{ss}, \\
 &\quad \vdots \\
 \dot{x}_n &= \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) \left(\sum_{j=1}^n a_{n,j}^i x_j \right) + \left(\sum_{i=1}^r h_i(x(t)) b_n^i \right) u_{ss}.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Mediante sustituciones sucesivas con (4.22) y (4.23) y sabiendo que en estado estacionario $x_j = \pi_j w_j$, las siguientes ecuaciones se deducen

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^r h_i(w(t)) \left(\sum_{j=1}^n a_{(k+1),j}^i \pi_j w_j \right) + \left(\sum_{i=1}^r h_i(w(t)) b_{k+1}^i \right) u_{ss} &= \pi_1 \sum_{i=1}^n s_{(k+1),i} w_i, \\
 \sum_{i=1}^r h_i(w(t)) \left(\sum_{j=1}^n a_{(k+2),j}^i \pi_j w_j \right) + \left(\sum_{i=1}^r h_i(w(t)) b_{k+2}^i \right) u_{ss} &= \pi_2 \sum_{i=1}^n s_{(k+2),i} w_i, \\
 &\quad \vdots \\
 \sum_{i=1}^r h_i(w(t)) \left(\sum_{j=1}^n a_{n,j}^i \pi_j w_j \right) + \left(\sum_{i=1}^r h_i(w(t)) b_n^i \right) u_{ss} &= \pi_n \sum_{i=1}^n s_{n,i} w_i.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la entrada en estado estacionario *global* puede ser construida mediante

$$u_{ss} = \begin{bmatrix} \frac{\pi_1 \sum_{i=1}^n s_{(k+1),i} w_i - \sum_{i=1}^r h_i(w(t)) \left(\sum_{j=1}^n a_{(k+1),j}^i \pi_j w_j \right)}{\sum_{i=1}^r h_i(w(t)) b_{k+1}^i} \\ \frac{\pi_2 \sum_{i=1}^n s_{(k+2),i} w_i - \sum_{i=1}^r h_i(w(t)) \left(\sum_{j=1}^n a_{(k+2),j}^i \pi_j w_j \right)}{\sum_{i=1}^r h_i(w(t)) b_{k+2}^i} \\ \vdots \\ \frac{\pi_n \sum_{i=1}^n s_{n,j} w_i - \sum_{i=1}^r h_i(w(t)) \left(\sum_{j=1}^n a_{n,j}^i \pi_j w_j \right)}{\sum_{i=1}^r h_i(w(t)) b_n^i} \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Además, la entrada en estado estacionario estará definida como

$$u_{ss}(t) = \gamma(w(t)) = \sum_{i=1}^r \mu_i(w(t)) \Gamma_i w(t), \quad (4.30)$$

y si igualamos (4.29) y (4.30) se obtiene la siguiente expresión

$$u_{ss} = \sum_{i=1}^r \mu_i(w(t)) \Gamma_i w(t).$$

Las funciones de membresía adecuadas $\mu_i(w(t))$ se pueden obtener de la forma siguiente

$$\mu_i(w(t)) = \begin{bmatrix} \mu_{i,1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_{i,2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_{i,m,m} \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

donde

$$\mu_{i,j,l} = \frac{b_{k+j}^i h_i(w(t))}{\sum_{i=1}^r h_i(w(t)) b_{k+j}^i}, \quad (4.32)$$

para todo $i = 1, \dots, r$; $j = l = 1, \dots, m$; satisface que la suma de los elementos correspondientes es igual a uno y $\mu_{i,j,l} \geq 0$.

Estas nuevas funciones de membresía $\mu_i(x(t))$, expresadas en términos de $x(t)$ cuando las expresiones $h_i(w(t))$ son remplazadas en (4.32), están organizadas en forma matricial y por ésta razón $\sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) = I$ (donde I es la matriz identidad). El arreglo de (4.31) resulta como consecuencia de asegurar (4.4) y nuevamente la representación es válida sólo cuando los valores de la matriz de entrada B_i tienen el mismo signo en la misma posición dentro de las matrices B_i . Claramente, esta condición evita singularidades en (4.32); Sin embargo, esta condición puede estar fuera de la región de operación, permitiendo más flexibilidad, pero requiere un estudio particular del sistema.

En este punto, se puede definir el siguiente teorema:

Teorema 4.2.1. *La regulación exacta de la salida con información completa de sistemas definidos como (4.21) se puede resolver sí: a) cada entrada de las matrices de entrada B_1^i tiene el mismo signo en la misma posición dentro de las matrices B_i for $i = 1, 2, \dots, r$; b) existe $u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))K_i x$ para el sistema difuso, y c) el exosistema $\dot{w}(t) = Sw(t)$ es Poisson estable.*

Por otra parte, el **Problema de Regulación Difusa Exacta de la Salida** se puede resolver mediante el estabilizador

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t))k_i\{x(t) - \Pi w(t)\} + \sum_{i=1}^r \mu_i(w(t))\Gamma_i w(t),$$

donde $\mu_i(w(t))$ se pueden obtener directamente de (4.31) y (4.32).

Demostración. Proviene directamente del teorema anterior 4.1.1 □

Observación 10. Note que $\mu_i(w(t))$ está definida como una matriz que no corresponde a la función de membresía típica, sin embargo, $\mu_i(w(t))$ contiene un conjunto de funciones de membresía relacionadas con cada entrada de B_i . Esta forma permite el diseño de un controlador de la forma (4.4).

Ejemplo 4.2.1. Considere el sistema difuso T-S con múltiples entradas definido por las siguientes matrices:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \\
 C_1 = C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

El exosistema tiene la siguiente forma:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.34}$$

Las funciones de membresía para las reglas 1 y 2 se muestran en la fig. 4.12.

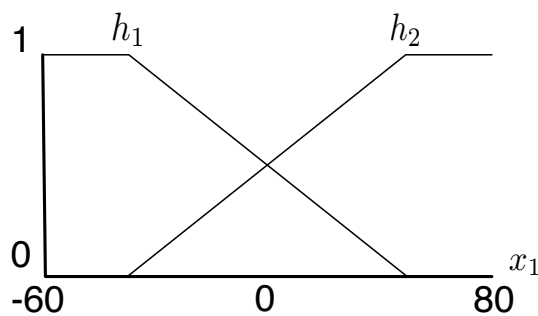


FIGURA 4.12: Funciones de membresía para el modelo de dos reglas

Usando el método derivado en ésta sección, las matrices Γ_i (4.27) son

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \begin{bmatrix} 1,4286 & 0,5714 & 0,2857 & 0,5714 \\ -1,0000 & -9,5000 & -0,5000 & -2,5000 \end{bmatrix}, \\ \Gamma_2 &= \begin{bmatrix} 2,3333 & 1,3333 & 0,6667 & 0,3333 \\ -0,4000 & -4,0000 & -1,2000 & -0,4000 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Además, de la estructura de C_i y Q se deduce que $\frac{q_1}{c_1} = \pi_1 = 1$, $\frac{q_2}{c_2} = \pi_2 = 1$, $\frac{q_1}{c_1} = \pi_3 = 1$, $\frac{q_2}{c_2} = \pi_4 = 1$. Entonces, la matriz Π (4.24) queda definida como

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, el estabilizador difuso está dado mediante la aproximación del PDC desarrollado en [15]:

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} 1,0286 & 0,5714 & 0,6000 & 0,5714 \\ -1,0000 & -2,2500 & -0,5000 & -3,7500 \end{bmatrix}, \\ K_2 &= \begin{bmatrix} 1,4000 & 1,3333 & 1,4000 & 0,3333 \\ -0,4000 & -1,1000 & -1,2000 & -0,9000 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Las figs. 4.13-4.18 muestran los resultados obtenidos después de aplicar reguladores lineales definidos en (4.4).

Ahora bien, calculando las funciones de membresía (4.31) para el regulador definido como

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t))k_i\{x(t) - \Pi w(t)\} + \sum_{i=1}^r \mu_i(w(t))\Gamma_i w(t),$$

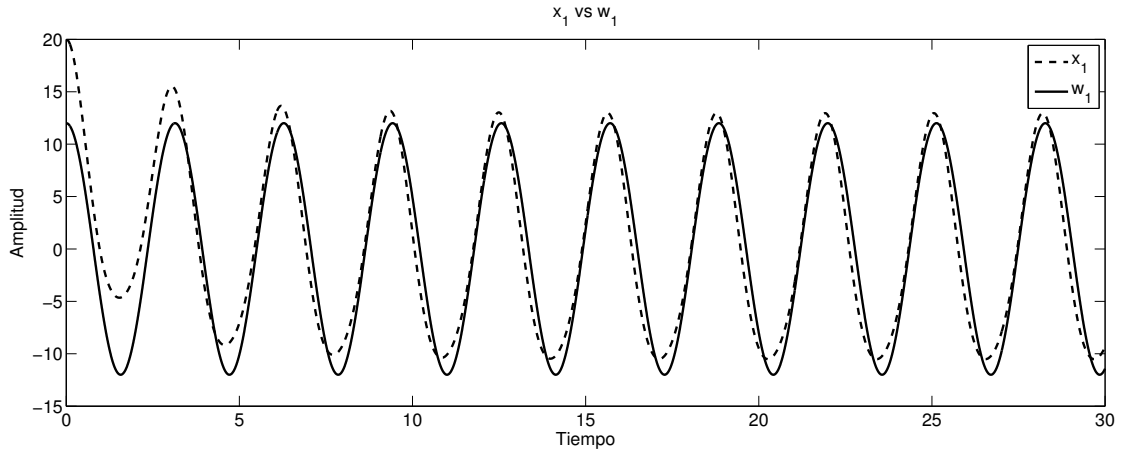


FIGURA 4.13: x_1 vs w_1 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales

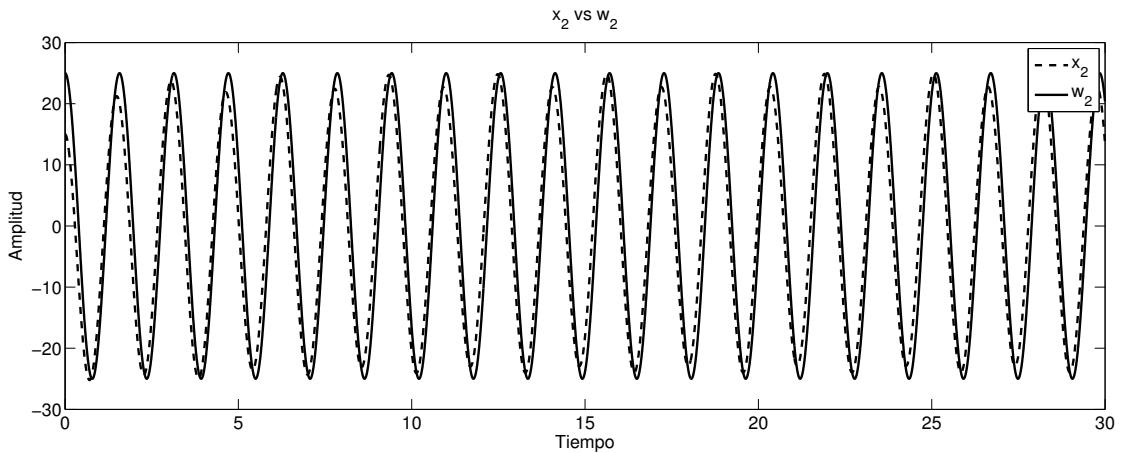


FIGURA 4.14: x_2 vs w_2 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales

tenemos:

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} \frac{(h_1(x(t)))(-7)}{h_1(x(t))(3)+h_2(x(t))(3)} & 0 \\ 0 & \frac{(h_1(x(t)))(2)}{h_1(x(t))(2)+h_2(x(t))(5)} \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

$$\mu_2 = \begin{bmatrix} \frac{(h_2(x(t)))(-3)}{h_1(x(t))(3)+h_2(x(t))(3)} & 0 \\ 0 & \frac{(h_2(x(t)))(5)}{h_1(x(t))(2)+h_2(x(t))(5)} \end{bmatrix}.$$

Las figs. 4.19 - 4.24 muestran los resultados con el controlador definido en (4.4)

Note la diferencia de la forma de las nuevas funciones de membresía mostradas en las figs.4.25-4.26 cuando son comparadas contra las originales dadas en la fig.4.12

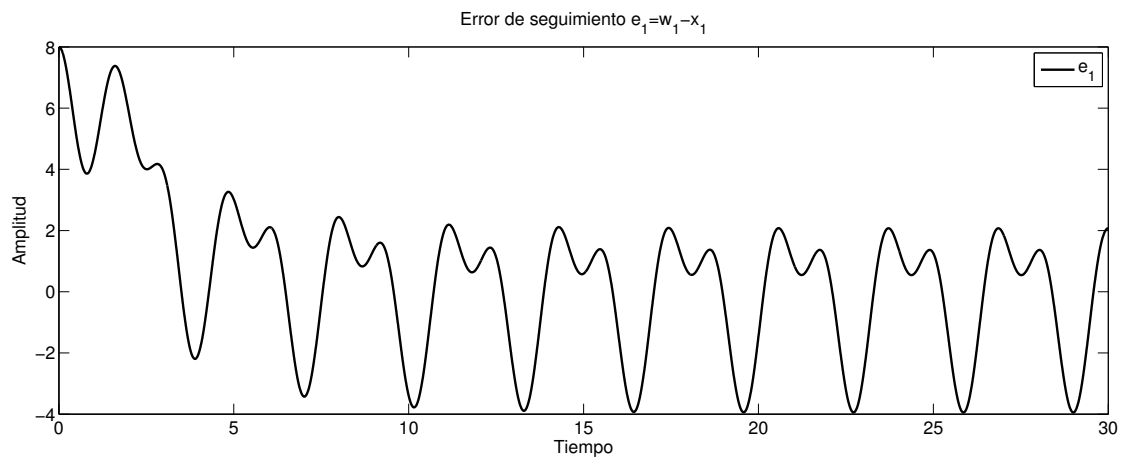


FIGURA 4.15: Error de seguimiento e_1 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales

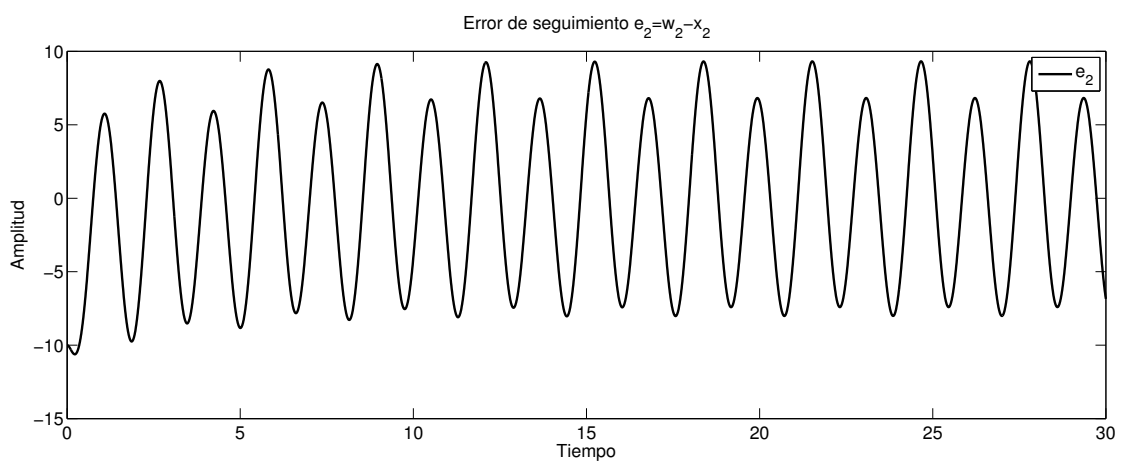


FIGURA 4.16: Error de seguimiento e_2 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales

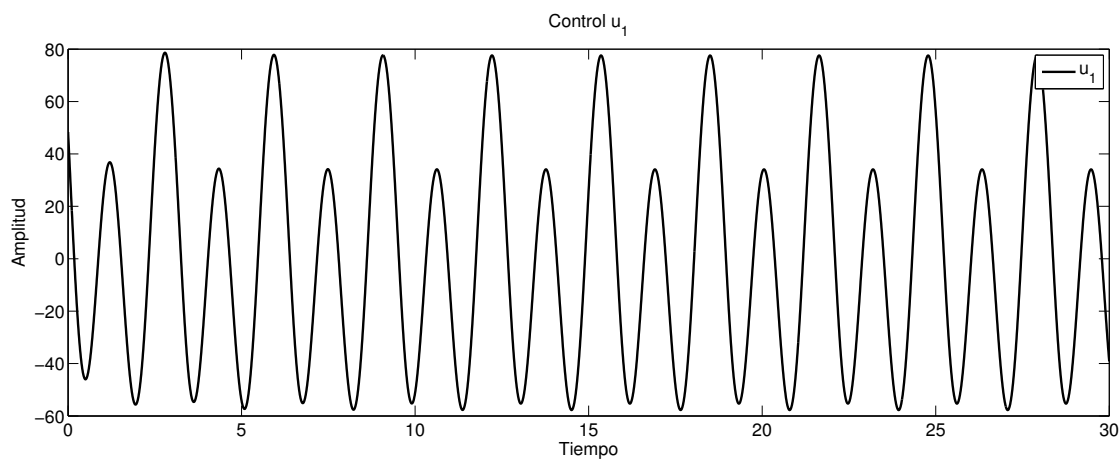


FIGURA 4.17: Señal de control u_1 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales

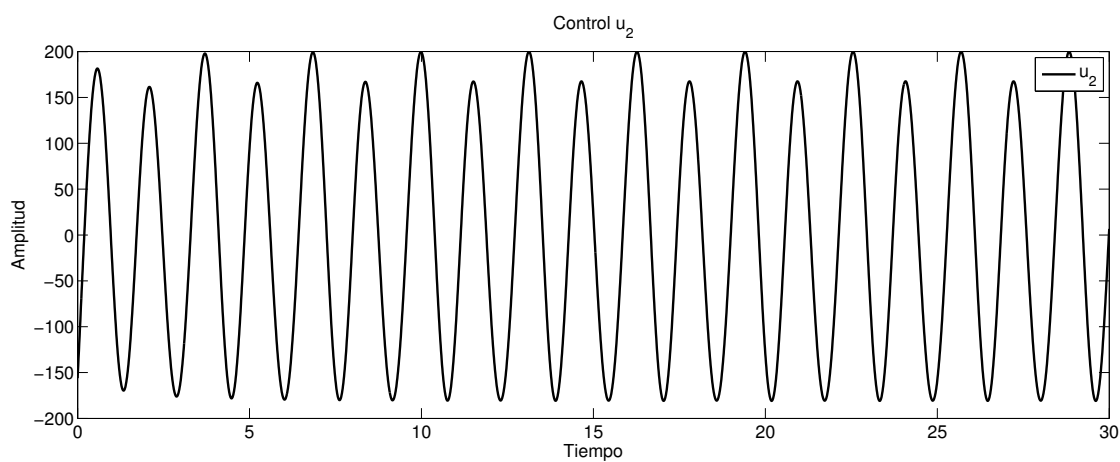


FIGURA 4.18: Señal de control u_2 cuando el controlador está diseñado a partir de reguladores locales

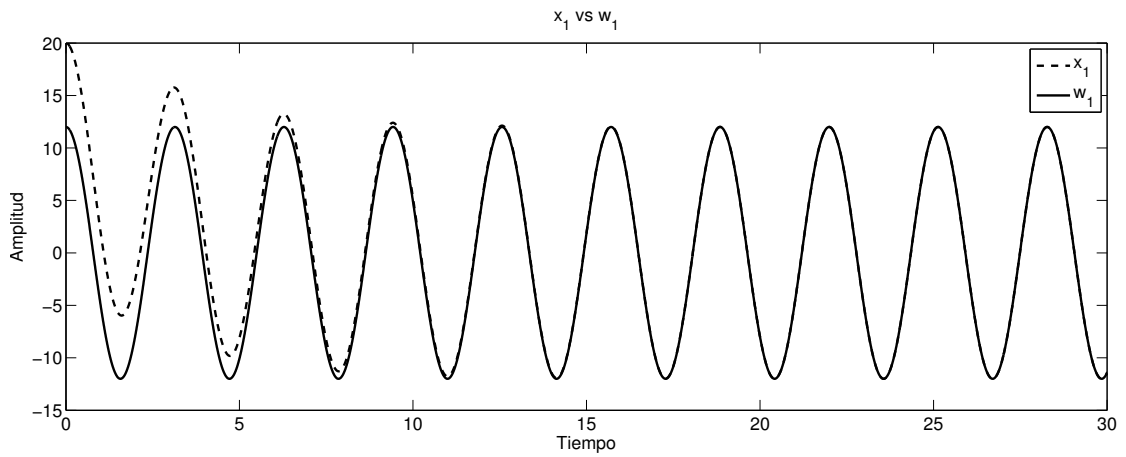


FIGURA 4.19: x_1 vs w_1 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo

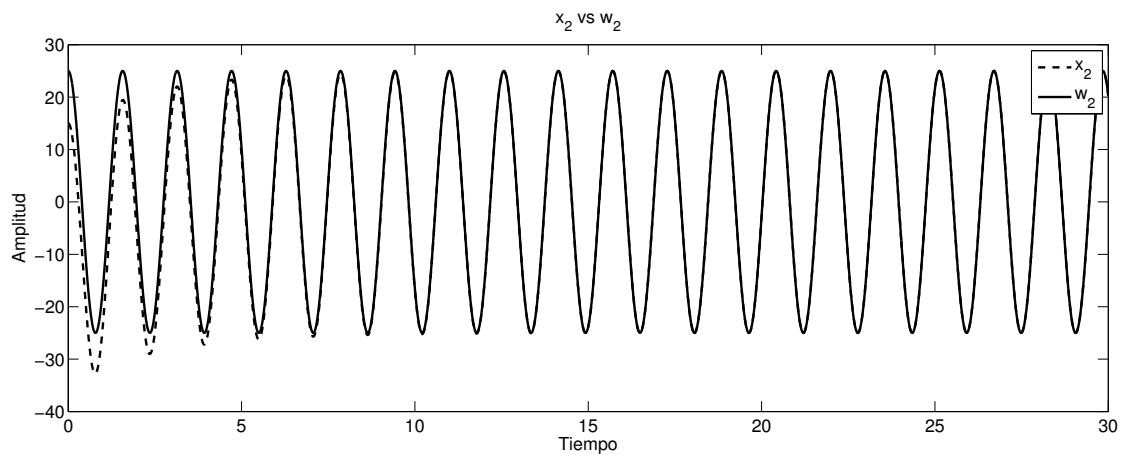


FIGURA 4.20: x_2 vs w_2 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo

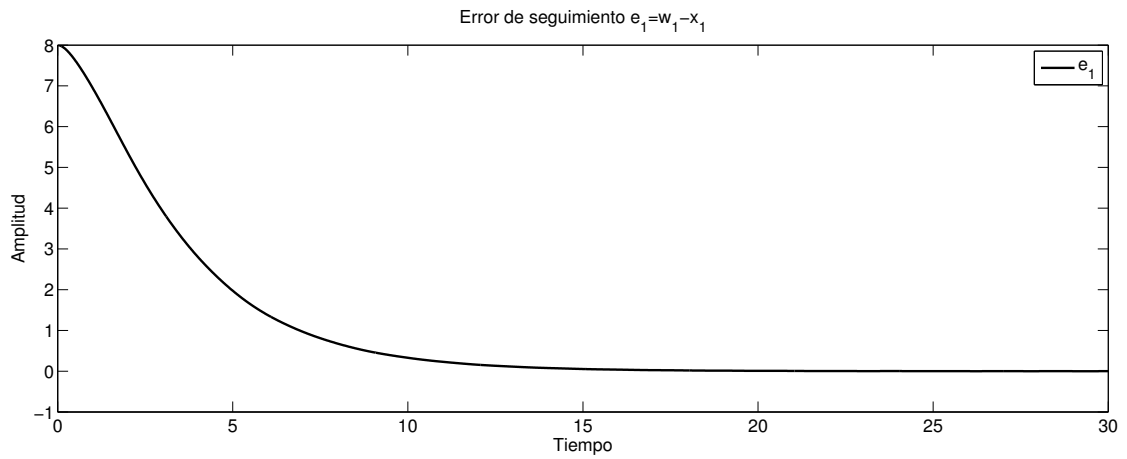


FIGURA 4.21: Error de seguimiento e_1 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo

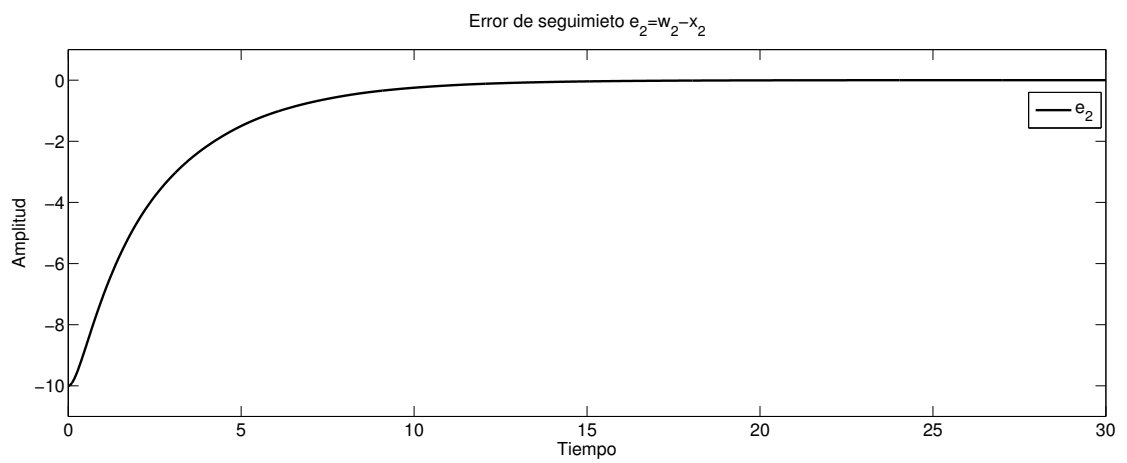


FIGURA 4.22: Error de seguimiento e_2 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo

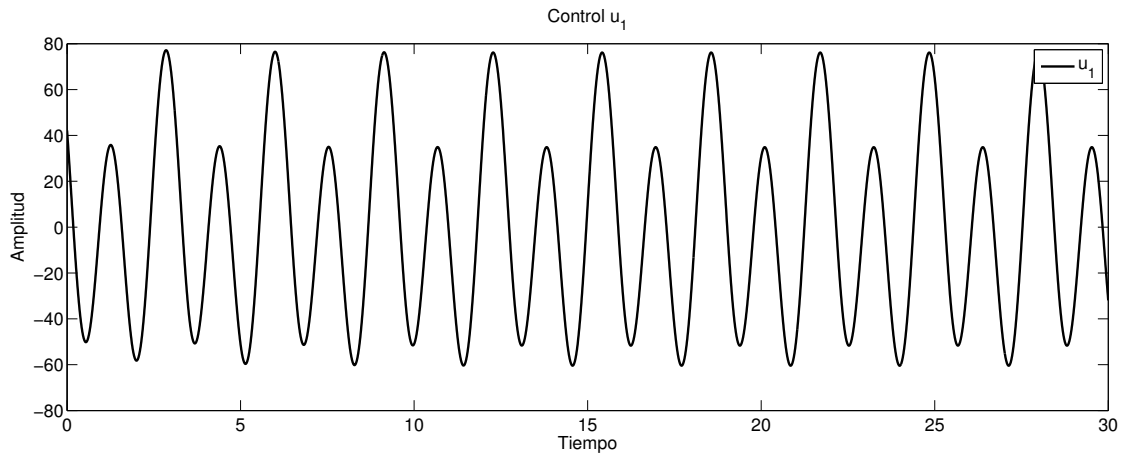


FIGURA 4.23: Señal de control u_1 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo

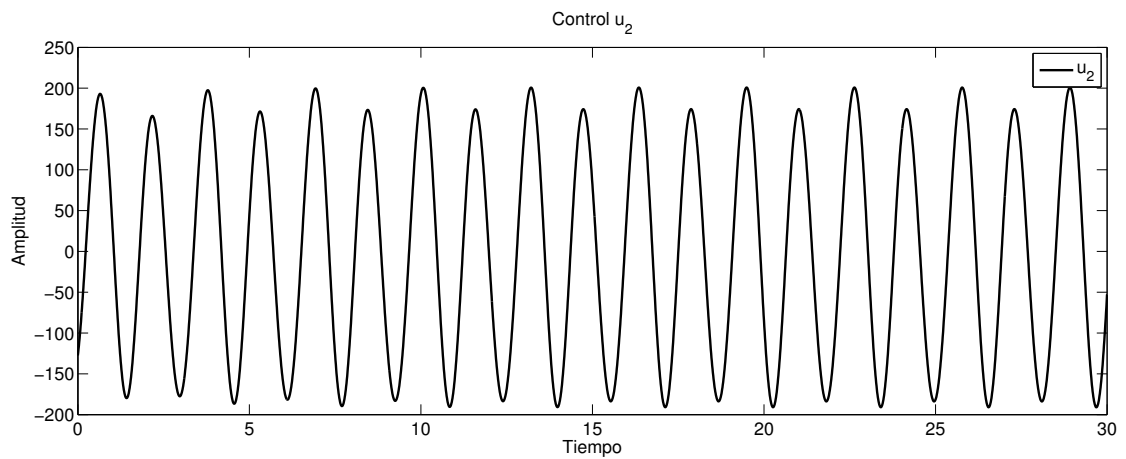


FIGURA 4.24: Señal de control u_2 cuando el controlador está diseñado a partir del regulador completo

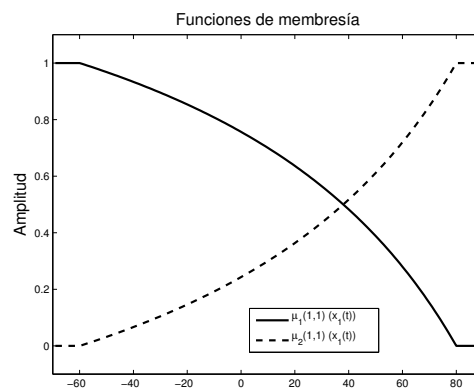


FIGURA 4.25: Funciones de membresía $\mu_1(1, 1), \mu_2(1, 1)$

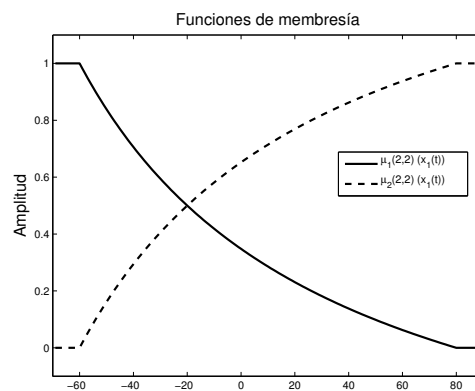


FIGURA 4.26: Funciones de membresía $\mu_1(2, 2), \mu_2(2, 2)$

Capítulo 5

El problema de regulación difusa en tiempo discreto

5.1. El problema de regulación difusa para sistemas discretos no lineales

Considere ahora el sistema no lineal en tiempo discreto definido por

$$x_{k+1} = f(x_k, \omega_k, u_k), \quad (5.1)$$

$$y_k = c(x_k), \quad (5.2)$$

$$\omega_{k+1} = s(\omega_k), \quad (5.3)$$

$$y_{ref,k} = q(\omega_k), \quad (5.4)$$

$$e_k = h(x_k, \omega_k), \quad (5.5)$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados de la planta; $w_k \in W \subset \mathbb{R}^s$ es el vector de estados del exosistema, el cual genera las señales de referencia y/o perturbaciones, y $u_k \in \mathbb{R}^m$ es la señal de entrada. La ecuación(5.5) se refiere a la diferencia entre la salida de la planta ($y_k \in \mathbb{R}^m$) y la señal de referencia ($y_{ref,k} \in \mathbb{R}^m$), es decir, $h(x_k, \omega_k) = y_k - y_{ref,k} = c(x_k) - q(\omega_k)$, teniendo en cuenta que $m \leq n$. Además, se asume que $f(x_k, u_k, w_k)$, $h(x_k, w_k)$ y $s(w_k)$ son funciones analíticas: $f(0, 0, 0) = 0$, $s(0) = 0$ y $h(0, 0) = 0$ [16].

Claramente, mediante la linearización de (5.1)-(5.5) alrededor del punto de equilibrio $x = 0$ se tiene:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k + P_d w_k, \quad (5.6)$$

$$y_k = C_d x_k, \quad (5.7)$$

$$w_{k+1} = S_d w_k, \quad (5.8)$$

$$y_{ref,k} = Q_d w_k, \quad (5.9)$$

$$e_k = C_d x_k - Q_d w_k. \quad (5.10)$$

Entonces, el problema de regulación discreto, [5], [3] y [52], consiste en encontrar una señal de control $u_k = \alpha(x_k, w_k)$, tal que, el sistema en lazo cerrado $x_{k+1} = A_d x_k + B_d \alpha(x_k, 0)$ tenga un punto de equilibrio asintóticamente estable y la solución del sistema (5.6)-(5.10) satisfaga que el $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = 0$.

Ahora, mediante la definición de $\pi(w_k)$, como la variedad de error cero en estado estacionario, y $\gamma(w_k)$, como la entrada en estado estacionario, el siguiente teorema da las condiciones para la solución del problema de regulación discreta del sistema no lineal.

Teorema 5.1.1. *Suponga que $w_{k+1} = s(w_k)$ es Poisson estable; existe una ganancia K tal que la matriz $A + BK$ es estable, y existen los mapeos $x_{ss}(t) = \pi(w_k)$ y $u_{ss} = \gamma(w_k)$ con $\pi(0) = 0$ y $\gamma(0) = 0$ que satisfacen a las siguientes ecuaciones*

$$\pi(s(w_k)) = f(\pi(w_k), w_k, \gamma(w_k)), \quad (5.11)$$

$$0 = h(\pi(w_k), w_k). \quad (5.12)$$

Entonces, la señal de control para la regulación discreta no lineal está dada por

$$u_k = K(x_k - \pi(w_k)) + \gamma(w_k). \quad (5.13)$$

Demostración. Véase [5], [16] y [53]. □

El conjunto de ecuaciones (5.11)-(5.12) son conocidas como las ecuaciones discretas de Francis-Isidori-Byrnes (DTFIB), además, su contraparte lineal se obtiene cuando los mapeos $x_{ss,k} = \pi(w_k)$ y $u_{ss,k} = \gamma(w_k)$ cambian a la forma

$x_{ss,k} = \Pi w_k$ y $u_{ss,k} = \Gamma w_k$, respectivamente. Entonces, el problema de regulación se reduce a resolver un conjunto de ecuaciones lineales matriciales [1] dadas por

$$\Pi S = A_d \Pi + B_d \Gamma + P_d \quad (5.14)$$

$$0 = C_d \Pi - Q_{d,i}. \quad (5.15)$$

5.2. El modelo difuso discreto tipo Takagi-Sugeno para el problema de regulación

Takagi y Sugeno propusieron un modelo difuso compuesto por un conjunto de subsistemas lineales con reglas del tipo **SI-ENTONCES** capaces de relacionar conocimiento físico, características lingüísticas y propiedades de un sistema no lineal. Tal modelo representa exitosamente a este sistema al menos en una región en el espacio de estados [15]. El modelo discreto difuso tipo T-S para la planta y el exosistema es descrito a continuación [23]:

Modelo de la planta

Regla i :

SI $z_{1,1,k}$ es $M_{1,1}^i$ y \dots y $z_{1,p_1,k}$ es M_{1,p_1}^i ,

$$\text{ENTONCES } \left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = A_{d,i} x_k + B_{d,i} u_k + P_{d,i} w_k, \quad i = 1, 2, \dots, r_1, \end{array} \right. \quad (5.16)$$

donde r_1 es el número de reglas en el modelo de la planta y los conjuntos difusos $M_{1,j}^i$ están definidos con base en el conocimiento previo de la dinámica del sistema.

Modelo del exosistema

Regla i :

SI $z_{2,1,k}$ es $M_{2,1}^i$ y \dots y $z_{2,p_2,k}$ es M_{2,p_2}^i ,

$$\text{ENTONCES } \left\{ \begin{array}{l} w_{k+1} = S_{d,i}w_k, \quad i = 1, 2, \dots, r_2, \end{array} \right. \quad (5.17)$$

donde r_2 es el número de reglas en el modelo del exosistema y $M_{2,j}^i$ son los conjuntos difusos.

Las matrices $A_{d,i}$, $B_{d,i}$, $P_{d,i}$, $C_{d,i}$, $S_{d,i}$ y $Q_{d,i}$ se obtienen linearizando el sistema, no lineal, en puntos de operación adecuados $(x, w, u) = (x_i^0, w_i^0, u_i^0)$:

$$A_{d,i} = \left[\frac{\partial f(x, w, u)}{\partial x} \right]_{(x_i^0, w_i^0, u_i^0)}, \quad B_{d,i} = \left[\frac{\partial f(x, w, u)}{\partial u} \right]_{(x_i^0, w_i^0, u_i^0)},$$

$$P_{d,i} = \left[\frac{\partial f(x, w, u)}{\partial w} \right]_{(x_i^0, w_i^0, u_i^0)}, \quad C_{d,i} = \left[\frac{\partial h(x, w)}{\partial x} \right]_{(x_i^0, w_i^0)},$$

$$S_{d,i} = \left[\frac{\partial s(w)}{\partial w} \right]_{(w_i^0)}, \quad Q_{d,i} = \left[\frac{\partial h(x, w)}{\partial w} \right]_{(x_i^0, w_i^0)}.$$

Dado (x_k, w_k, u_k) el modelo difuso para el problema de regulation difusa para sistemas discretos definido por las ecuaciones (5.1)-(5.5) es representado mediante:

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_{1,k}) \{A_{d,i}x_k + B_{d,i}u_k + P_{d,i}w_k\}, \quad (5.18)$$

$$w_{k+1} = \sum_{i=1}^{r_2} h_{2,i}(z_{2,k}) S_{d,i}w_k, \quad (5.19)$$

$$e_k = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_{1,k}) C_{d,i}x_k - \sum_{i=1}^{r_2} h_{2,i}(z_{2,k}) Q_{d,i}w_k, \quad (5.20)$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados de la planta; $w_k \in \mathbb{R}^s$ es el vector de estados del exosistema; $u_k \in \mathbb{R}^m$ es la señal de control; $e_k \in \mathbb{R}^m$, y $h_{*,i}(z)$ es el peso normalizado de cada regla, 1 para la planta, 2 para el exosistema, además,

dependen de la variable premisa de la función de membresía $z_{*,k}$ en $M_{*,j}^i$, es decir,

$$\bar{\omega}_{*,i}(z_{*,k}) = \prod_{j=1}^{p_*} M_{*,j}^i(z_{*,j,k}), \quad (5.21)$$

$$h_{*,i}(z_{*,k}) = \frac{\bar{\omega}_{*,i}(z_{*,k})}{\sum_{i=1}^{r_*} \bar{\omega}_{*,i}(z_{*,k})}, \quad (5.22)$$

$$\sum_{i=1}^{r_*} h_{*,i}(z_{*,k}) = 1, \quad (5.23)$$

$$h_{*,i}(z_{*,k}) \geq 0 \quad (5.24)$$

con $z_{*,k} = [z_{*,1,k} \quad z_{*,2,k} \quad \dots \quad z_{*,p_*,k}]$ como función de x_k y/o w_k , para $i = 1, \dots, r_*$ y $j = 1, \dots, p$.

5.3. El problema de regulación difusa discreta en tiempo discreto

El problema de regulación difusa de la salida en tiempo discreto consiste en encontrar un controlador $u_k = \alpha(x_k, w_k)$, tal que el sistema en lazo cerrado sin señal externa

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_{1,k}) \{A_{d,i}x_k + B_{d,i}\alpha(x_k, 0)\},$$

tenga un punto de equilibrio asintóticamente estable.

La solución del sistema (5.18)-(5.20) satisface que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = 0. \quad (5.25)$$

Teorema 5.3.1. *El problema de regulación difusa discreta de la salida con información completa para el sistema (5.18)-(5.20) se puede resolver si y sólo si los pares $(A_{d,i}, B_{d,i})$ son estabilizables y existen mapeos $\pi(w_k)$ y $\gamma(w_k)$, con $\pi(0) = 0$ y $\gamma(0) = 0$, ambos definidos en una vecindad $W^\circ \subset W$ del origen, satisfaciendo*

las condiciones

$$\pi(s(w_k)) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_{1,k}) \{A_{d,i}\pi(w_k) + B_{d,i}\gamma(w_k) + P_{d,i}w_k\}, \quad (5.26)$$

$$0 = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_{1,k})C_{d,i}\pi(w_k) - \sum_{i=1}^{r_2} h_{2,i}(z_{2,k})Q_{d,i}w_k, \quad (5.27)$$

para todo $w \in W^\circ$; $\pi(w_k)$ es la variedad de error cero en estado estacionario, la cual se hace invariante por efecto de la entrada $\gamma(w_k)$. \diamond

Demostración. Refiérase a [8]. □

Si asumimos la solución de los mapeos $\pi(w_k)$ y $\gamma(w_k)$ como

$$\tilde{\pi}(w_k) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_{1,k}) \sum_{j=1}^{r_2} h_{2,i}(z_{2,k}) \Pi_{i,j} w_k, \quad (5.28)$$

$$\tilde{\gamma}(w_k) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_{1,k}) \sum_{j=1}^{r_2} h_{2,i}(z_{2,k}) \Gamma_{i,j} w_k, \quad (5.29)$$

respectivamente, con $\Pi_{i,j}$ y $\Gamma_{i,j}$ como solución de $r_1 \cdot r_2$ problemas lineales locales, definidos como

$$\Pi_{ij} S_j = A_{d,i} \Pi_{ij} + B_{d,i} \Gamma_{ij} + P_{d,i}, \quad (5.30)$$

$$0 = C_{d,i} \Pi_{i,j} - Q_{d,i}, \quad (5.31)$$

para todo $i = 1, \dots, r_1$ y $j = 1, \dots, r_2$, la siguiente ley de control se obtiene [8], [16] y [5],

$$u_k = \sum_{h=1}^{r_1} h_{1,i}(z_{1,k}) K_i \left[x_k - \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_{1,k}) \sum_{j=1}^{r_2} h_{2,j}(z_{2,k}) \Pi_{i,j} w_k \right] + \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_{1,k}) \sum_{j=1}^{r_2} h_{2,j}(z_{2,k}) \Gamma_{i,j} w_k. \quad (5.32)$$

Sin embargo, este controlador no siempre es válido y será necesario comprobar su validez mediante la sustitución de $\pi(w_k)$ y $\gamma(w_k)$ en (5.26) y (5.27). Lo anterior conduce a dos condiciones necesarias para asegurar la regulación exacta:

1. La variedad de error cero en estado estacionario es la misma para todos los subsistemas $\pi(w_k) = \Pi w_k$, es decir, $\Pi_{ij} = \Pi$,
2. La matriz de entrada es la misma para todos los subsistemas $B_i = B$ y/o $\Gamma_{ij} = \Gamma$,

para todo $i = 1, \dots, r_1$ y $j = 1, \dots, r_2$. Entonces, si las condiciones 1 y 2 se cumplen la siguiente señal de control u_k emerge

$$u_k = \sum_{h=1}^{r_1} h_{1,i}(z_{1,k}) K_i [x_k - \Pi w_k] + \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_{1,k}) \sum_{j=1}^{r_2} h_{2,j}(z_{2,k}) \Gamma_{ij} w_k. \quad (5.33)$$

Por otra parte, la existencia de un estabilizador difuso de la forma $u_k = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_{1,k}) K_i x_k$, asegurando que el error de seguimiento converja asintóticamente a cero, puede ser obtenido mediante el compensador paralelo distribuido (PDC) [54], [55] u otro análisis de estabilidad difusa para modelos T-S discretos tal como [40].

El siguiente teorema proporciona las condiciones de existencia para la regulación difusa exacta de sistemas discretos difusos tipo T-S:

Teorema 5.3.2. *La regulación difusa exacta con información completa de sistemas definidos como (5.18)-(5.20) tiene solución si a) existe la misma variedad de error cero en estado estacionario $\pi(w_k) = \Pi$; b) existe $u_k = \sum_{i=1}^{r_1} h_{i,k}(z_{1,k}) K_i x_k$ para el sistema difuso discreto; c) el exosistema $\omega_{k+1} = s(\omega_k)$ es Poisson estable, y las matriz de entrada es igual para todos los subsistemas $B_i = B$. Además, el **problema de la regulación difusa exacta de sistemas discretos** tiene solución aplicando*

$$u_k = \sum_{h=1}^{r_1} h_{1,i}(z_{1,k}) K_i [x_k - \Pi w_k] + \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_{1,k}) \sum_{j=1}^{r_2} h_{2,j}(z_{2,k}) \Gamma_{ij} w_k.$$

Demostración. Del análisis previo, la existencia de los mapeos $\pi(w_k) = \Pi w_k$ y $\gamma(w_k) = \sum_{i=1}^{r_1} h_{1,i}(z_{1,k}) \sum_{j=1}^{r_2} h_{2,j}(z_{2,k}) \Gamma_{ij} w_k$ se garantizan cuando las matrices de entrada B_i son iguales para todos los subsistemas y la solución de $r_1 \cdot r_2$ problemas locales lineales con

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} S_j &= A_{d,i} \Pi_{ij} + B_{d,i} \Gamma_{ij} + P_{d,i}, \\ 0 &= C_{d,i} \Pi_{i,j} - Q_{d,i}, \end{aligned}$$

conducen a que $\Pi_{ij} = \Pi$ para todo $i = 1, \dots, r_1$ y $j = 1, \dots, r_2$.

Por otra parte, la inclusión de la condición b) ha sido discutida ampliamente en [16], [5], [50], [51], [40] y [6], e implica la existencia del estabilizador difuso.

Condición c) asegura la no existencia de términos cruzados en las ecuaciones locales de Francis. Finalmente, la condición d) para evitar que la señal de referencia y_{ref} converja a cero, lo cual convertiría el problema de regulación a un problema simple de estabilidad. El resto de la prueba viene directo del análisis previo. \square

5.4. Sincronización caótica de sistemas T-S en tiempo discreto

Como se ha mencionado anteriormente la estabilización y sincronización de sistemas caóticos son problemas desafiantes y estimulantes, debido a sus capacidades de describir una gran variedad de fenómenos interesantes. Esta sección incluye éste problema, mediante el uso de la teoría de regulación en su versión extendida a los sistemas **T-S** en tiempo discreto.

5.4.1. Discretización de sistemas T-S en tiempo continuo

Existen pocos métodos para discretizar sistemas lineales invariantes en el tiempo (**LTI**). Sin embargo, estos métodos no se pueden aplicar directamente a los modelos difusos en tiempo continuo, dado de que el proceso de defusificación no es **LTI** pero si variante en el tiempo. Una matriz de transición de estados para su discretización es muy compleja de obtener. El siguiente teorema provee un fundamento matemático riguroso para la discretización de un modelo difuso **T-S** en tiempo continuo [25], [56] y [57].

Teorema 5.4.1. *El sistema difuso T-S en tiempo continuo*

Regla i del modelo:

SI $z_1(t)$ es M_1^i y \dots y $z_p(t)$ es M_p^i ,

$$\mathbf{ENTONCES} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (5.34)$$

es posible expresarlo a su forma discreta

Regla i del modelo:

SI $z_{1,k}$ es M_1^i y \dots y $z_{p,k}$ es M_p^i ,

$$\mathbf{ENTONCES} \begin{cases} x_{k+1} = A_{d,i} x_k + B_{d,i} u_k, \\ y_k = C_{d,i} x_k, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (5.35)$$

con

$$A_{d,i} = \exp(A_i T_s) = I + A_i T_s + A_i^2 \frac{T_s^2}{2!} + \dots, \quad (5.36)$$

$$B_{d,i} = \int_0^{T_s} \exp(A_i \tau) B_i d\tau = (G_i - I) A_i^{-1} B_i. \quad (5.37)$$

donde T_s es el tiempo de muestreo.

Demostración. véase [25], [56] y [57]. □

5.4.2. Sincronización completa

Nuevamente, ambos el sistema de referencia y el sistema de respuesta están modelados por el mismo atractor (Rössler), sincronización completa [58], con la diferencia del sistema de respuesta que está influenciado por la de entrada $u(t)$.

Considere dos osciladores caóticos Rössler como $\dot{w} = f(w)$ (sistema de referencia) y $\dot{x} = f(x, w, u)$ (sistema de respuesta); el modelo difuso **T-S** en tiempo discreto, de dos reglas para $x_{1,k} \in [c - d, c + d]$, que representa exactamente este sistema está representado por

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^2 h_{1,i}(x_{1,k}) \{A_i x_k + B_i u_k + P_i w_k\}, \quad (5.38)$$

$$w_{k+1} = \sum_{i=1}^2 h_{2,i}(w_{1,k}) S_i w_k, \quad (5.39)$$

$$e_k = \sum_{i=1}^{r2} h_{1,i}(x_{1,k}) C_i x_k - \sum_{i=1}^2 h_{2,i}(w_{1,k}) Q_i w_k, \quad (5.40)$$

donde

$$A_{d,1} = \begin{bmatrix} 1 & -T_s & -T_s \\ T_s & aT_s + 1 & 0 \\ bT_s & 0 & 1 - dT_s \end{bmatrix}, \quad S_{d,1} = \begin{bmatrix} 1 & -T_s & -T_s \\ T_s & a_w T_s + 1 & 0 \\ b_w T_s & 0 & 1 - d_w T_s \end{bmatrix},$$

$$A_{d,2} = \begin{bmatrix} 1 & -T_s & -T_s \\ T_s & aT_s + 1 & 0 \\ bT_s & 0 & T_s d + 1 \end{bmatrix}, \quad S_{d,2} = \begin{bmatrix} 1 & -T_s & -T_s \\ T_s & a_w T_s + 1 & 0 \\ b_w T_s & 0 & d_w T_s + 1 \end{bmatrix},$$

$$B_{d,1} = B_{d,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & T_s \end{bmatrix}^T, \quad C_{i,k} = Q_{i,k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

con $a = 0,34$, $b = 0,4$, $c = 4,5$, $a_w = 0,34$, $b_w = 0,4$, $c_w = 4,5$ y $T_s = 0,0036$.

Además, las funciones de membresía para este sistema son

$$h_{1,1}(x_{1,k}) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{c - x_{1,k}}{d} \right), \quad h_{1,2}(x_{1,k}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c - x_{1,k}}{d} \right),$$

$$h_{2,1}(w_{1,k}) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{c - w_{1,k}}{d} \right), \quad h_{2,2}(w_{1,k}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c - w_{1,k}}{d} \right).$$

El atractor resultante puede verse en la fig.5.1

Atractor de Rössler difuso en tiempo discreto

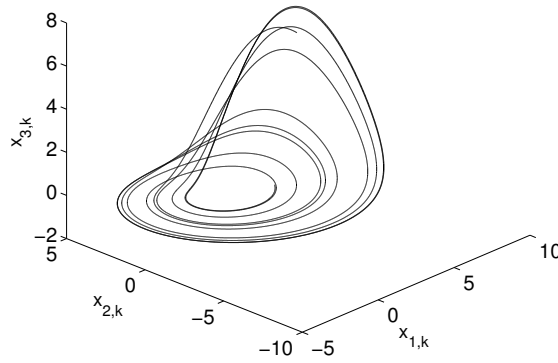


FIGURA 5.1: Sistema difuso discreto T-S del atractor Rössler

Entonces, usando el método derivado de este trabajo y de (5.30)-(5.31), la variedad de error cero en estado estacionario $\pi(w_k) = \Pi$, es decir, $\Pi_{ij} = \Pi$

$$\Pi_{ij} = \Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

además, Γ_{ij} están definidas como

$$\Gamma_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -20 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, el estabilizador difuso para este sistema está calculado a partir de la *fórmula de Ackermann* y localizado los valores propios como:

1. Subsistema $[0,9980 + 0,0062i \quad 0,9980 - 0,0062i \quad 0,9982]$,
2. Subsistema $[0,9980 + 0,0062i \quad 0,9980 - 0,0062i \quad 0,9982]$,

las siguientes ganancias se obtienen

$$K_1 = \begin{bmatrix} 3,1629 & 0,9257 & 8,0354 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 3,1629 & 0,9257 & -11,9646 \end{bmatrix}.$$

Observación 11. Es importante verificar que el estabilizador difuso sea válido para el modelo difuso T-S completo, mediante la comprobación de los valores propios en las regiones de interpolación dentro del círculo unitario [40].

Entonces, colocando las condiciones iniciales $x(0)$ y $w(0)$ como $x(0) = [5 \ 0 \ 6]^T$ y $w(0) = [1 \ 0 \ 0]^T$; aplicando la ley de control descrita en (5.33), los siguientes resultados, mostrados en las figs. 5.2 y 5.3, se obtienen.

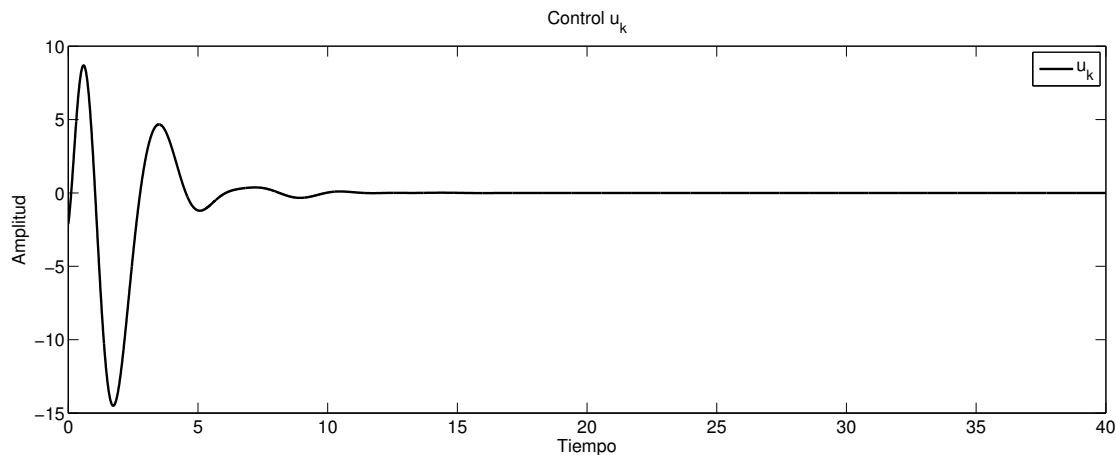


FIGURA 5.2: Señal de control de la sincronización completa de dos sistemas difusos T-S Rössler en tiempo discreto

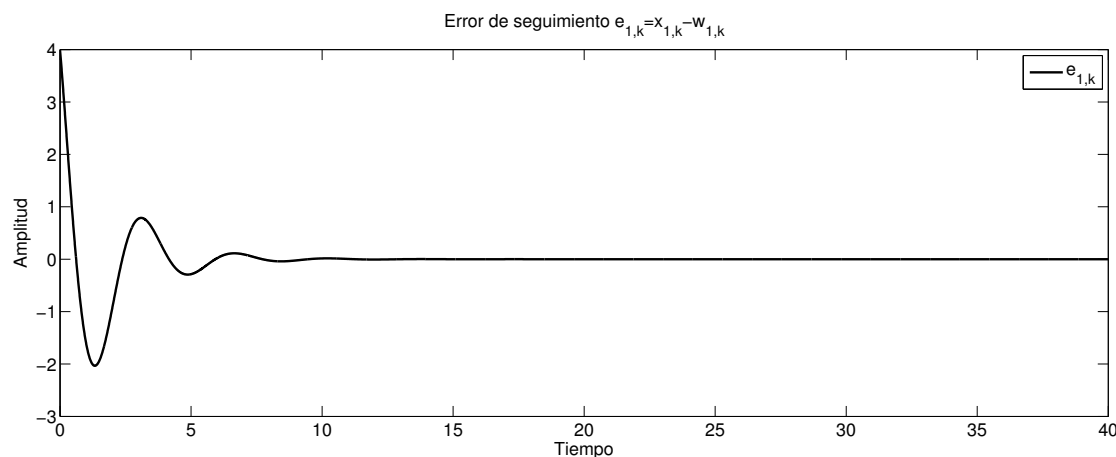


FIGURA 5.3: Error de seguimiento de la sincronización completa de dos sistemas difusos T-S Rössler en tiempo discreto

El seguimiento de los estados de respuesta contra los de seguimiento son mostrados en las figs. 5.4-5.6.

Como se puede observar, el error tiende asintóticamente a cero, debido a que el problema en cuestión cumple con los requerimientos de teorema 5.3.2.

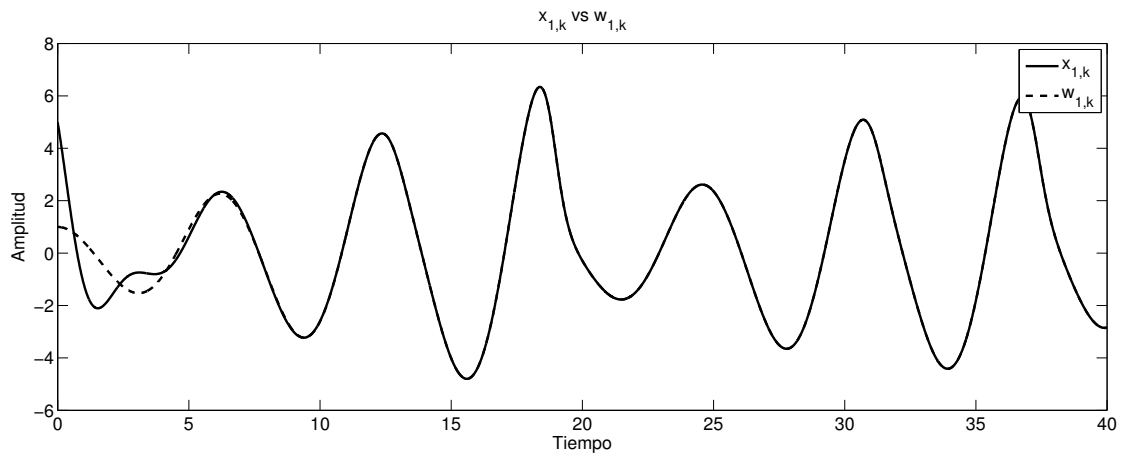


FIGURA 5.4: x_1 vs w_1 de la sincronización completa de dos sistemas difusos T-S Rössler en tiempo discreto

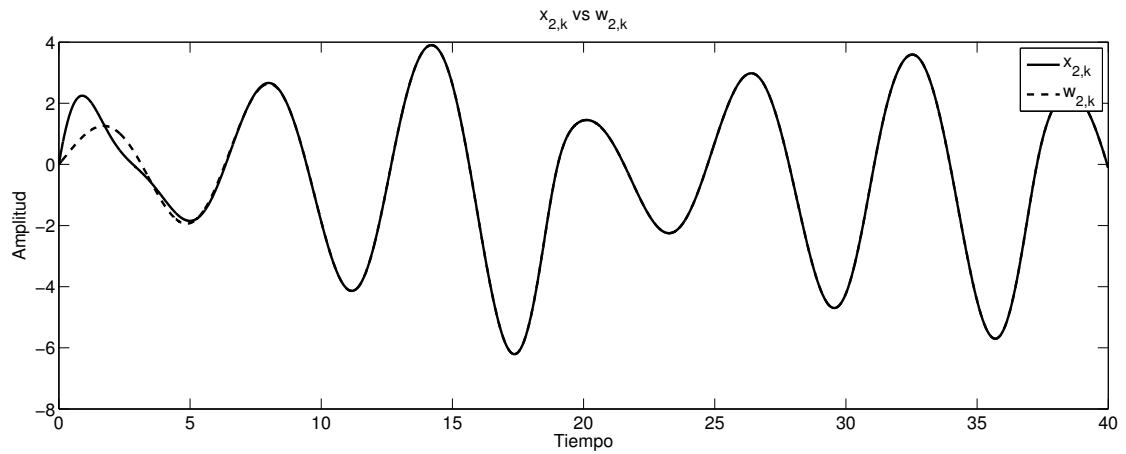


FIGURA 5.5: x_2 vs w_2 de la sincronización completa de dos sistemas difusos T-S Rössler en tiempo discreto

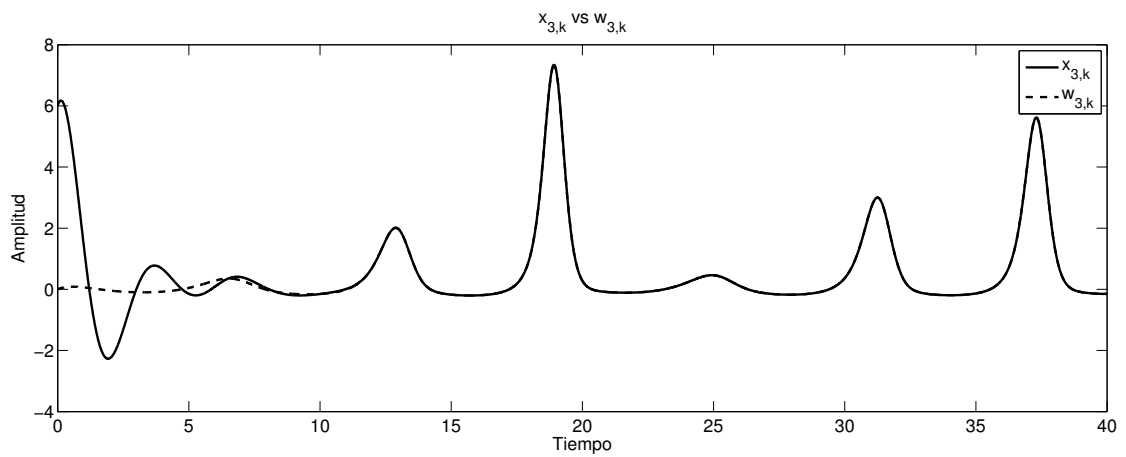


FIGURA 5.6: x_2 vs w_2 de la sincronización completa de dos sistemas difusos T-S Rössler en tiempo discreto

Capítulo 6

Conclusiones

El diseño de un controlador difuso para sistemas continuos e invariantes en el tiempo, con base en la combinación de reguladores locales ajustados por funciones de membresía, es tratado en este trabajo. La idea principal se basada en la construcción de un regulador global formado por un conjunto de reguladores lineales. Sin embargo, éstos incluyen en su forma funciones de membresía diferentes a las establecidas en la planta difusa. Estas nuevas funciones están obtenidas de forma analítica, mediante la igualación del regulador difuso global y la suma ponderada de reguladores locales.

El regulador presentado permite flexibilidad en la forma de las matrices de entrada, restricción que se presenta cuando el regulador está basado en la suma ponderada de reguladores locales y con funciones de membresía iguales a las definidas en la planta difusa, aplicándose a un rango más amplio de sistemas difusos **T-S**. Debido a que el problema aún se encuentra abierto, una clase de sistemas **T-S** están considerados con el objetivo de resolver el problema mediante la suma ponderada de reguladores locales; esta clase de sistemas difusos puede, comúnmente, encontrarse en sistemas mecánicos, electromecánicos, electrónicos, robóticos, etc. Por lo tanto, el enfoque propuesto incluye el análisis para modelos tipo SISO y MIMO, al menos para esta clase de sistemas **T-S**.

Por otra parte, las funciones de membresía propuestas permiten encontrar un regulador difuso válido para todo $t \geq 0$, evitando verificar la validez del controlador

cuando se calcula a partir del modelo difuso global; éstas aseguran un controlador válido para toda la region previamente definida (sector no lineal) del modelo difuso.

La principal ventaja que ofrecen estas expresiones analíticas, es que permiten resolver el problema de regulación difusa de la salida de manera exacta, además, pueden ser implementadas de manera sencilla. Como consecuencia, dos aspectos fundamentales del problema de regulación son necesarios: la variedad de error cero en estado estacionario, la cual por la forma de la planta, es invariante y la entrada en estado estacionario que incluye nuevas funciones de membresía que combinan los reguladores locales.

Nótese, que el método propuestos incluye la expresión analítica del los reguladores locales; la variedad de error cero, común para todos los subsistemas; el estabilizador, y nuevas funciones de membresía en el regulador. Entonces, el problema de regulación difusa existe para una clase de sistemas difusos **T-S** si se cumplen las condiciones de: variedad en estado estacionario estática y que los elementos de la matriz de entrada tengan el mismo signo, restricción que puede aparecer fuera del rango de operación, pero esto, requerirá de un estudio particular del sistema.

Además, el método utilizado en este trabajo evita construir, de forma particular, un regulador difuso global, el cual en muchos casos es complejo. Contrario a esto, la aproximación propuesta ofrece una forma simple de diseño del regulador completo, basado en reguladores locales, pero ahora con diferentes funciones de membresía en el regulador. Claramente, estos resultados deben coincidir con los establecidos por Francis en el caso lineal y Francis-Isidori-Byrnes para el no lineal; la efectividad del método aplicado al modelo no lineal dependerá en gran medida de como fue modelado el sistema, ya que los resultados presentados están diseñados sobre el modelo difuso **T-S**.

Adicionalmente, la regulación de sistemas difusos en tiempo discreto para sistemas Takagi-Sugeno con base en la combinación de reguladores locales lineales se ha presentado, teniendo así, una extensión natural del trabajo. Además, las condiciones suficientes para la existencia del controlador, que asegura la regulación exacta, se han proporcionado, evitando de esta manera resolver un complejo problema no lineal.

Por otra parte, los mapeos $\pi(w_k)$ y $\gamma(w_k)$ que garantizan la propiedad de regulación pueden ser fácilmente obtenidos mediante un conjunto de ecuaciones lineales simultáneas, expresiones que se pueden programar mediante programas de cálculo como Mathematica y/o Matlab.

Aplicaciones como el problema de sincronización caótica se exhiben, permitiendo resolver ésta mediante técnicas lineales de una manera práctica y de fácil implementación. Lo anterior conduce a que usando los enfoques presentados es este trabajo, estudiantes que están entrando al campo de control puedan resolver una cantidad amplia de problemas que normalmente requieren conocimiento de tópicos avanzados.

Sincronización de atractores caóticos descritos por modelos difusos T-S en tiempo continuo y discreto es ahora posible usando teoría de regulación difusa, ejemplos ilustrativos son considerados con el objetivo de mostrar la efectividad del método propuesto.

6.1. Trabajos futuros

Este estudio está centrado en una clase de sistemas que debido a la forma de la planta (4.21) la variedad en estado estacionario es lineal, es decir, igual para todos los subsistemas. Por lo tanto, el término de estabilización en el control global esta bien definido. Sin embargo, el problema de regulación difusa de la salida de forma exacta, implica cierta complejidad al resolverse, cuando la variedad de error cero es no lineal. En la mayoría de los problemas la forma de planta implica no linealidades en ésta, lo que implica los siguientes aspectos a considerar:

- Ampliar la clase de sistemas tipo Takagi-Sugeno
- Resolver el problema del estabilizador cuando la variedad en estado estacionario es no lineal
- Encontrar las funciones de membresía de estabilizador y regulador que resuelven el problema de regulación difusa

-
- Considerar el problema de regulación difusa cuando no se cuenta con la retroalimentación de los estados
 - Implementar nuevas funciones de membresía, que involucren diversas técnicas computacionales (soft computing), para asegurar la regulación exacta

Apéndice A

Teoría de Variedad Central

Considere el sistema no lineal definido por

$$\dot{x} = f(x), \tag{A.1}$$

donde f es un campo vectorial C^r con $r \geq 2$ definido en un subconjunto U de \mathbb{R}^n , y sea $x^\circ \in U$ un punto de *equilibrio* de f , es decir, un punto que cumple con $f(x^\circ) = 0$. Se sabe que para determinar la estabilidad asintótica de un punto (local) es necesario el comportamiento en la aproximación lineal de f en $x = 0$. Tenemos que la ecuación

$$F = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=0},$$

denota la matriz jacobiana de f en $x = 0$. Entonces:

1. si todos los valores propios de F están en el lado izquierdo de plano complejo, entonces, $x = 0$ es un punto asintóticamente estable de (A.1),
2. si alguno o más de los valores propios de F están en el lado derecho del plano complejo, entonces, $x = 0$ es un punto inestable de (A.1).

Este importante resultado es comúnmente conocido como el *principio de estabilidad en la primera aproximación*. Además, se sabe que este principio no cumple completamente con el análisis de la estabilidad local del equilibrio $x = 0$, ya que nada se puede inferir acerca de las propiedades asintóticas de (A.1) cuando

algún valor propio de F tiene parte real cero. El caso donde el sistema F contiene algunos valores propios con parte real cero es comúnmente conocido como *caso crítico* del análisis asintótico.

Definición A.0.1. Una subvariedad (C^r) S de U se dice que es localmente invariante para (A.1), si para cada $x^\circ \in E$, existe $t_1 < 0 < t_2$ con la propiedad de que la integral de la curva $x(t)$ de (A.1), satisfaciendo $x(0) = x^\circ$, es tal que $x(t) \in S$ para todo $t \in (t_1, t_2)$.

Supongase que la matrix F tiene n^c valores propios con parte real cero, n^s con parte real negativa y n^u con parte real positiva. Entonces, se sabe por álgebra lineal que el dominio del mapeo lineal F puede ser descompuesto como la suma directa de tres espacios invariantes, denotados como E^c, E^s, E^u (que tienen dimensiones n^c, n^s, n^u), con la propiedad que $F|_{E^c}$ tiene todos sus valores propios con parte real cero, $F|_{E^s}$ con parte real negativa y $F|_{E^u}$ con parte real positiva. Si el mapeo lineal de F es visto como una representación de la diferencial (en $x = 0$) del mapeo no lineal $f : x \in U \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}^n$, su dominio es el espacio tangente $T_\circ U$ a U en $x = 0$, y los tres subespacios involucrados pueden verse como subespacios de $T_\circ U$ satisfaciendo

$$T_\circ U = E^c \oplus E^s \oplus E^u.$$

Definición A.0.2. Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de (A.1). La variedad S , pasando a través de $x = 0$, se dice ser una variedad central para (A.1) en $x = 0$, si es localmente invariante y el espacio tangente a S en 0 es exactamente E^c .

Ahora bien, se considera solamente los casos donde la matriz F tiene todos los valores propios con parte real negativa o cero, ya que estos son los únicos casos en los cuales $x = 0$ puede ser de equilibrio estable. En cualquiera de estos casos, uno siempre puede escoger coordenadas en U tal que el sistema (A.1) pueda representarse como

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + g(y, z), \\ \dot{z} &= Bz + f(y, z), \end{aligned} \tag{A.2}$$

donde las matrices A ($n^s \times n^s$) y B ($n^c \times n^c$) tienen todos los valores propios con parte real negativa y con parte real cero respectivamente, además, las funciones g y f son funciones C^r que desaparecen en $(y, z) = (0, 0)$ junto con todas sus

derivadas de primer orden. De hecho, basta con expandir el lado derecho de (A.1) a la forma

$$f(x) = Fx + \tilde{f}(x),$$

donde $\tilde{f}(x)$ desaparece en $x = 0$ junto con todas sus derivadas de primer orden y F se reduce a una forma de bloque diagonal

$$TFT^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

mediante un cambio lineal de coordenadas

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = Tx.$$

De ahora en adelante sólo consideraremos sistemas en la forma (A.2). La existencia de variedades centrales para (A.2) se ilustra a continuación.

Teorema A.0.1. *Existe una vecindad $V \subset \mathbb{R}^{n^c}$ de $z = 0$ y un mapeo (C^r) $\pi : V \rightarrow \mathbb{R}^{n^s}$ tal que*

$$S = \{(y, z) \in \mathbb{R}^{n^s} \times V : y = \pi(z), \}$$

es una variedad central de (A.2). \diamond

Por definición, una variedad central para el sistema (A.2) pasa a través de $(0, 0)$ y es tangente al subconjunto de puntos cuya coordenada y es 0. Entonces, los mapeos π satisfacen

$$\pi(0) = 0, \quad \frac{\partial \pi}{\partial z}(0) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Además, esta variedad es localmente invariante para (A.2), y esto impone en el mapeo π una restricción que puede ser fácilmente deducida de la siguiente forma. Sea $(y(t), z(t))$ una curva solución de (A.2) y suponga que esta curva pertenece a la variedad S , es decir, es tal que $y(t) = \pi(z(t))$. Diferenciando esto con respecto al tiempo se obtiene la relación

$$\frac{dy}{dt} = A\pi(z(t)) + g(\pi(z(t)), z(t)) = \frac{\partial \pi}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \pi}{\partial z}(Bz(t)) + f(\pi(z(t)), z(t)).$$

Dado que una relación de este tipo se debe satisfacer para cualquier curva solución de (A.2) contenida en S , podemos concluir que el mapeo π satisface la ecuación

diferencial parcial

$$\frac{\partial \pi}{\partial z}(Bz + f(\pi(z(t), z), z)) = A\pi(z) + g(\pi(z), z). \quad (\text{A.4})$$

Observación A.0.1. Considere, en vez del sistema (A.2), un sistema de la forma

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + Pz + g(y, z), \\ \dot{z} &= Bz + f(y, z), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

donde A es una matriz ($n^s \times n^s$) que tiene todos sus valores propios con parte real negativa, B es una matriz ($n^c \times n^c$) con todos los valores propios con parte real cero. Suponga que $\pi : V \rightarrow \mathbb{R}^{n^s}$ es un mapeo que satisface $\pi(0) = 0$. La variedad

$$S = \{(y, z) \in \mathbb{R}^{n^s} \times V : y = \pi(z)\}, \quad (\text{A.6})$$

es localmente invariante para (A.5) si el mapeo π satisface la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial \pi}{\partial z}(Bz + f(\pi(z(t), z), z)) = A\pi(z) + Pz + g(\pi(z), z). \quad (\text{A.7})$$

Comparando los términos de primer orden en ambos lados, se puede ver que la matriz

$$\Pi = \frac{\partial \pi}{\partial z}(0)$$

satisface

$$\begin{pmatrix} A & P \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi \\ I \end{pmatrix} B,$$

de lo cual se deduce que

$$Im \left(\begin{pmatrix} \Pi \\ I \end{pmatrix} \right) = E^c.$$

Entonces, en vista de la definición dada anteriormente, se concluye que S es una variedad central para (A.5) si y solo si (A.7) se mantiene. \diamond

La oración anterior describe la existencia, pero no la unicidad de una variedad central para (A.5). De hecho un sistema puede tener muchas variedades centrales.

Lema A.0.1. *Supóngase que $y = \pi(z(t))$ es una variedad central para (A.2) en $(0, 0)$. Sea $(y(t), z(t))$ una solución de (A.2). Existirá una región U° de $(0, 0)$ y*

números reales $M > 0$, $K > 0$ tal que, si $(y(0), z(0)) \in U^\circ$, entonces

$$\|y(t) - \pi(z(t))\| \leq Me^{-Kt} \|y(0) - \pi(z(0))\|$$

para todo $t \geq 0$, siempre que $(y(t), z(t)) \in U^\circ$ \diamond

Este lema muestra que cualquier trayectoria del sistema (A.2) empezando en un punto lo suficiente cercano a $(0, 0)$, es decir, cercano al punto donde la variedad central ha sido definida, converge a la variedad central a medida que t tiende a ∞ , con decaimiento exponencial (ver fig. A.1). En particular, esto muestra que si

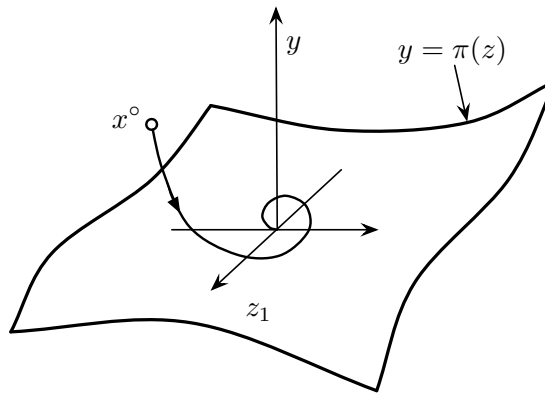


FIGURA A.1: Condición inicial que inicia cerca de la región central converge a la variedad central conforme $t \rightarrow \infty$.

(y°, z°) es un punto de equilibrio de (A.2) suficientemente cerca de $(0, 0)$, entonces, este punto debe pertenecer a cualquier variedad central de (A.2) pasando a través de $(0, 0)$. De hecho, en este caso la curva solución de (A.2) que pasa a través de $(0, 0)$ y satisface $(y(0), z(0)) = (y^\circ, z^\circ)$ es tal que

$$y(t) = y^\circ \quad z(t) = z^\circ \quad \forall t > 0$$

y esto concuerda con lo estimado en el Lema A.0.1, solamente si $y^\circ = \pi(z^\circ)$.

Apéndice B

Artículos Publicados

Analysis of the fuzzy controllability property and stabilization for a class of TS fuzzy models

Jesús Alberto Meda-Campaña¹, *Member, IEEE*, Jorge Rodríguez-Valdez, Tonatiuh Hernández-Cortés, Ricardo Tapia-Herrera, and Valeriy Nosov

In this paper, the controllability property for a class of Takagi-Sugeno (TS) fuzzy models is analyzed, while a fully nonlinear stabilizer is designed in a practical way. It is shown that global fuzzy stabilizers can be constructed in a non-conservative way by means of a relatively simple approach. The existence of such controllers depends on the fuzzy controllability conditions which are derived in a straightforward way. The main advantage of the proposed approach is that the convergence of the closed-loop system can be imposed arbitrarily. Some examples are given in order to illustrate the validity of the method. Finally, the proposed controller is applied on an underactuated system known as “the pendubot” and the results are compared with an stabilizer designed on the basis of LMIs.

***Index Terms*—Fuzzy controllability, fuzzy stability, Takagi-Sugeno Fuzzy models, fuzzy Ackermann’s formula.**

I. INTRODUCTION

IN recent years, some techniques have been developed in order to characterize nonlinear systems by means of linear local subsystems [19], [20]. One of this approaches is the well-known Takagi-Sugeno (TS) fuzzy modelling. This technique allows describing the nonlinear dynamics by means of a suitable “blending” of linear subsystems. Thus, local controllers can be designed for each subsystems, obtaining the aggregate controller by the same procedure used to compute the TS overall fuzzy system.

In [21], a practical approach based on numerical techniques, namely Linear Matrix Inequalities (LMIs), is derived to design the overall fuzzy stabilizer, known as Parallel Distributed Compensator (PDC). This approach depends on finding a common positive definite matrix P , which has to fulfill local and global Lyapunov conditions.

Unfortunately, the PDC has been proved to be a conservative approach. The relaxation of the conditions to design the fuzzy stabilizers for Takagi-Sugeno (TS) fuzzy models has been thoroughly investigated by many authors [1], [4], [6], [8], [9], [10], [13], [17], [18], [22], [23], [24], [27], [28], [29], [30], [31].

For instance, while some works consider the inclusion of basis-dependent Lyapunov function, which can be described

as the fuzzy version of the well-known Lyapunov function proposed in [22]; other authors suggest the addition of positive definite matrices in order to relax the approach based on the common positive definite matrix P , but knowledge of the membership function overlap has to be taken into account [17].

As expected, in many of the references mentioned above, the improvement achieved by the proposed approaches has been notable, but the stability relaxation for TS fuzzy models is not fully solved, in general. For that reason, the designing of non-conservative fuzzy stabilizers is addressed in the present paper.

In this work, the TS fuzzy model is considered as a particular type of linear time-varying systems, such that, very well-known linear techniques can be applied to design the fuzzy stabilizer.

It is important mentioning, that although linear techniques are used to design the stabilizer, a nonlinear controller is obtained. Such a stabilizer is defined on the basis of the membership functions included in the TS fuzzy model, guaranteeing the efficacy of the stabilizer along the whole approximation region of the TS fuzzy system.

On the other hand, a priori determination of controllability property for TS fuzzy models is an open problem. There exist very few works related with this issue, one of them is [3], where the authors proposed an approach based on the linearization of the TS fuzzy model. Unfortunately, when the resulting linearized system is non controllable, the controllability property of the overall fuzzy model must be analyzed through of a complex algorithm. And, as it is presented in Section IV, in some cases this method may fail at the moment of analyzing the overall fuzzy controllability property.

Therefore, the contributions of present work are: 1) To propose a practical approach to achieve arbitrary stabilization of a TS fuzzy model, and 2) To analyze the controllability property for a class of TS fuzzy systems in a practical way for all $t \geq 0$, independently of the form of the membership functions; but considering that, at most, two fuzzy rules are activated at the same instant (Observe that this condition is fulfilled by a great variety of TS fuzzy models).

This work was partially supported by CONACYT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología) through scholarship SNI (Sistema Nacional de Investigadores) and by IPN (Instituto Politécnico Nacional) through research projects 20130760 and 20140659; and scholarships EDI (Estímulo al Desempeño de los Investigadores), COFAA (Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas) and PIFI (Programa Institucional de Formación de Investigadores).

J. A. Meda-Campaña (jmeda@ipn.mx, jesus.meda@gmail.com), J. Rodríguez-Valdez (jrvalonica@hotmail.com), T. Hernández-Cortés (tona_hernand@yahoo.com.mx) and V. Nosov (nosovval@hotmail.com) are with the Department of Mechanical Engineering of Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. Campus Zacatenco del Instituto Politécnico Nacional. Av. IPN S/N. Colonia Lindavista. 07738. México, D.F. ¹Corresponding author.

R. Tapia-Herrera (rtapiah@ipn.mx, odracyr_gni@hotmail.com) is with Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. Campus Zacatenco del Instituto Politécnico Nacional. Av. IPN S/N. Colonia Lindavista. 07738. México, D.F.

This paper is organized as follows. A brief remainder of the Takagi-Sugeno fuzzy models is given in Section II. The overall fuzzy stabilizer is obtained in Section III. The analysis of the overall fuzzy controllability property is carried out in Section IV by using some simple examples. Then, in Section V, the approach is applied on the underactuated system. And finally, in Section VI some conclusions are drawn.

II. TAKAGI-SUGENO FUZZY MODELS

Consider the nonlinear system given by

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (1)$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the state vector of the plant and $u(t) \in \mathbb{R}$ is the input signal.

It is now well-known that a good approximation, or exact representation, for nonlinear systems is provided by the so-called TS fuzzy modelling [21]. In this way, the nonlinear behavior can be approximated, or exactly represented, by the suitable choice of a set of linear subsystems, according to rules associated with some physical knowledge and some linguistic characterization of the properties of the system. These linear subsystems properly describe, at least locally, the behavior of the nonlinear system for a predefined region of the state space.

So, nonlinear dynamics defined by equation (1) can be approximated, or exactly described, by the following TS fuzzy model [20], [21]:

Plant
Rule i
IF $z_1(t)$ is $M_{i,1}$ and ... and $z_p(t)$ is $M_{i,p}$ THEN

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i u(t), \quad (2)$$

where sets $M_{i,j}$ are fuzzy sets defined on the basis of a previous knowledge of the dynamics of the system, and premise variable $z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_p(t)]$ is a function of $x(t)$.

Matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, and $b_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ can be obtained by linearizing the nonlinear system around some suitable operation points $(x, u) = (x^i, u^i)$, i.e

$$A_i = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{(x^i, u^i)}, \quad b_i = \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{(x^i, u^i)}.$$

Then, the membership functions need to be chosen, taking into account that the overall fuzzy model has to approximate the nonlinear dynamics (1), at least in the operation region.

On the other hand, one can apply the Sector Nonlinearity approach presented in [21] (pages 10 to 23) which allows to obtain a TS fuzzy model capable of exactly representing the original nonlinear dynamics. This method produces both, linear matrices and membership functions needed to conform the TS fuzzy model.

In any case, the resulting composite system is defined by [21]

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + b_i u(t)\}, \quad (3)$$

where r is the number of rules for the fuzzy plant, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the state of the plant, and $u(t) \in \mathbb{R}$ is the control signal. Besides, membership functions for the fuzzy plant satisfy

$$\varpi_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{i,j}(z_j(t)), \quad (4)$$

$$h_i(z(t)) = \frac{\varpi_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r \varpi_i(z(t))}, \quad (5)$$

for all $t \geq 0$, and the term $M_{i,j}(z_j(t))$ is the membership value for $M_{i,j}$ at $z_j(t)$. Also, since

$$\sum_{i=1}^r \varpi_i(z(t)) > 0, \quad (6)$$

$$\varpi_i(z(t)) \geq 0, \quad i = 1, \dots, r,$$

one has

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \quad (7)$$

$$h_i(z(t)) \geq 0, \quad i = 1, \dots, r,$$

for all $t \geq 0$.

The TS fuzzy models are nonlinear systems and the membership functions are responsible to reproduce such a nonlinear behavior. However, the TS fuzzy models can be also viewed as the weighted summation of linear systems, where the weights are instantaneously defined by the membership functions which in turn depend on the states of the system.

At this point, system (3) can be rewritten as

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t), \quad (8)$$

with

$$A(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i,$$

$$b(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))b_i.$$

The rationale behind this representation is that the membership functions depend on the states of the plant $x(t)$ which in turn depend on time. Therefore the membership functions ultimately depend on time t . However, it must be kept in mind that equations (8) describe a nonlinear system.

Thus, the system (8) is actually the TS fuzzy model to be analyzed and stabilized. Interested readers are referred to [5], [14], and [16], where the stability of linear time-varying systems is deeply studied.

In the following section, an approach based on Ackermann's formula is proposed to obtain a nonlinear gain $K(t)$ by considering the TS fuzzy model as a special case of linear time-varying systems. As consequence a controller of the form $u(t) = -K(t)x(t)$ will be easily obtained. The interested reader is referred to [11], [26] and references therein, where the authors have shown how the Ackermann's formula can be used to stabilize linear time-varying systems.

Research Article

Synchronization of Discrete-Time Chaotic Fuzzy Systems by means of Fuzzy Output Regulation Using Genetic Algorithm

Tonatiuh Hernández Cortés,¹ A. Verónica Curtidor López,¹ Jorge Rodríguez Valdez,¹ Jesús A. Meda Campaña,¹ Ricardo Tapia Herrera,¹ and José de Jesús Rubio²

¹*Instituto Politécnico Nacional, SEPI-ESIME Zacatenco, Avenida IPN S/N, 07738 México, DF, Mexico*

²*Instituto Politécnico Nacional, SEPI-ESIME Azcapotzalco, Avenida de las Granjas No. 682, 02250 Azcapotzalco, México, DF, Mexico*

Correspondence should be addressed to Tonatiuh Hernández Cortés; tona.hernand@yahoo.com.mx

Received 7 August 2015; Accepted 4 November 2015

Academic Editor: Rongwei Guo

Copyright © 2015 Tonatiuh Hernández Cortés et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

The synchronization of chaotic systems, described by discrete-time T-S fuzzy models, is treated by means of fuzzy output regulation theory. The conditions for designing a discrete-time output regulator are given in this paper. Besides, when the system does not fulfill the conditions for exact tracking, a new regulator based on genetic algorithms is considered. The genetic algorithms are used to approximate the adequate membership functions, which allow the adequate combination of local regulators. As a result, the tracking error is significantly reduced. Both the Complete Synchronization and the Generalized Synchronization problem are studied. Some numerical examples are used to illustrate the effectiveness of the proposed approach.

1. Introduction

A special nonlinear dynamical phenomenon, known as chaos, emerged in mid-1960s and reached applicable technology in the late 1990s and was considered as one of the three monumental discoveries of the twentieth century. On the other hand, fuzzy logic, a set theory and then an infinite-valued logic, gets a wide applicability in many industrial, commercial, and technical fields, ranging from control, automation, and artificial intelligence, just to name a few. Fuzzy logic and chaos had been considered by many researches and engineers as fundamental concepts and theories and their broad applicability in technology as well. The interaction between fuzzy logic and chaos has been developed for the last 20 years leading to research topics as fuzzy modeling of chaotic systems using Takagi-Sugeno models, linguistic descriptions of chaotic systems, fuzzy control of chaos, synchronization, and a combination of fuzzy chaos for engineering applications [1, 2].

In the 1960s, Rechenberg [3] introduced “evolution strategies,” a method to optimize real-valued parameters for

devices such as airfoils. This idea was further developed by Schwefel in [4]. Genetic algorithms (GAs) were initially developed by Bremermann [5] in 1958 but popularized and developed by Holland in the 1960s. In contrast with evolution strategies and evolutionary programming, Holland’s idea was not to design algorithms to solve specific problems but rather to formally study the phenomenon of adaptation, as it occurs in nature, and develop ways in which the mechanisms of natural adaptation might be transferred into computer systems [6]. The genetic algorithm is presented as abstraction of biological evolution and theoretical framework for adaptation for moving from one population of “chromosomes” (e.g., strings of ones and zeros, or “bits”) to a new population by using a kind of “natural selection” together with the genetics-inspired operators of crossover, mutation, and inversion. Each chromosome consists of “genes” (e.g., bits); each gene is being an instance of a particular “allele” (e.g., 0 or 1). The operator selection chooses those chromosomes in the population that will be allowed to reproduce and those adjusted chromosomes produce more offspring than the less ones [7].

According to Fogel and Aderson [8], Bremermann was the first to implement real-coded genetic algorithms as well as providing a mathematic model of GA known as the one-max function. In contrast to genetic algorithms, Evolutionary Strategies were initially developed for the purpose of parameter optimization. The idea was to imitate the principles of organic evolution in experimental parameter optimization for applications such as pipe bending or PID control for a nonlinear system [9].

Synchronization of chaotic systems is one of the more exiting problems in control science and can be referred at least to Huygen's observations [10]; it is understood as one of the trajectories of two autonomous chaotic systems, starting from nearly initial conditions and converging to the other, and remains as $t \rightarrow \infty$; in [11] it was reported that some kind of chaotic systems possesses a self-synchronization property. However, not all chaotic systems can be decomposed in two separate responses subsystems and be able to synchronize the drive system. The ideas of these works have led to improvement in many fields, such as communications [12], encrypted systems, the complex information processing within the human brain, coupled biochemical reactors, and earthquake engineering [13].

Synchronization can be classified as follows: Complete Synchronization: it is when two identical chaos oscillators are mutually coupled and one drives to the other; Generalized Synchronization: it differs from the previous case by the fact that there are different chaos oscillators and the states of one are completely defined by the other; Phase Synchronization: it occurs when the coupled oscillators are not identical and have different amplitude that is still unsynchronized, while the phases of oscillators evolve to be synchronized [14]. It is worth mentioning that studies in synchronization of nonlinear systems have been reformulated based on the previous results from classical control theory such as [15–18].

In this paper, the fuzzy output regulation theory and Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy models are used to solve the Complete and Generalized Synchronization by using linear local regulators. Isidori and Byrnes [19] showed that the output regulation established by Francis could be extended for a nonlinear sector as a general case, resulting in a set of nonlinear partial differential equations called Francis-Isidori-Byrnes (FIB). Unfortunately these equations in many cases are too difficult to solve in a practical manner. For this reason in [20] the approach based on the weighted summation of local linear regulators is presented and in [21] the new membership functions in the regulator are approximated by soft computing techniques.

So, the main contribution of the present work is to find a control law for synchronizing of chaotic systems described by discrete-time Takagi-Sugeno fuzzy models, first when the system fulfills the following: (1) the input matrix for all subsystems is the same and (2) the local regulators share the same zero error manifold $\pi(w_k)$. In this way, the results given in [20] are extended to the discrete-time domain. On the other hand, when the system *master-slave* does not fulfill the aforementioned conditions, new membership functions are computed in order to enhance the performance of the fuzzy regulator. Such proposed membership functions are

different from those given in the plant or exosystem and are tuned by using the GA. The tuning of the new membership functions, which is as generalized bell-shaped function, is given by optimization of the form parameter.

The rest of the paper is organized as follows. In Section 2 the discrete-time output regulation problem formulation is given with a brief review of the Takagi-Sugeno models and the discrete-time fuzzy regulation problem. In Section 3 the tuning of membership functions by means of GAs is thoroughly discussed. In Section 4 Complete and Generalized Synchronization with some examples are presented and finally, in Section 5, some conclusions are drawn.

2. The Discrete-Time Fuzzy Output Regulation Problem

Consider a nonlinear discrete-time system defined by

$$x_{k+1} = f(x_k, \omega_k, u_k), \quad (1)$$

$$y_k = c(x_k), \quad (2)$$

$$\omega_{k+1} = s(\omega_k), \quad (3)$$

$$y_{\text{ref},k} = q(\omega_k), \quad (4)$$

$$e_k = h(x_k, \omega_k), \quad (5)$$

where $x_k \in \mathbb{R}^n$ is the state vector of the plant, $w_k \in W \subset \mathbb{R}^s$ is the state vector of the exosystem, which generates the reference and/or the perturbation signals, and $u_k \in \mathbb{R}^m$ is the input signal. Equation (5) refers to difference between output system of the plant ($y_k \in \mathbb{R}^m$) and the reference signal ($y_{\text{ref},k} \in \mathbb{R}^m$); that is, $h(x_k, \omega_k) = y_k - y_{\text{ref},k} = c(x_k) - q(\omega_k)$ and take into account that $m \leq n$. Besides, it is assumed that $f(x_k, u_k, w_k)$, $h(x_k, w_k)$, and $s(w_k)$ are analytical functions and also that $f(0, 0, 0) = 0$, $s(0) = 0$, and $h(0, 0) = 0$ [22].

Clearly, by linearizing (1)–(5) around $x_k = 0$, one gets

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Pw_k, \\ y_k &= Cx_k, \\ w_{k+1} &= Sw_k, \\ y_{\text{ref},k} &= Qw_k, \\ e_k &= Cx_k - Qw_k. \end{aligned} \quad (6)$$

Thus, the Nonlinear Regulator Problem [19, 23] consists of finding a controller $u_k = \alpha(x_k, w_k)$, such that the closed-loop system $x_{k+1} = Ax_k + B\alpha(x_k, 0)$ has an asymptotically stable equilibrium point, and the solution of system (6) satisfies $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = 0$.

So, by defining $\pi(w_k)$ as the steady-state zero error manifold and $\gamma(w_k)$ as the steady-state input, the following theorem gives the conditions for the solution of nonlinear regulation problem.

Theorem 1. *Suppose that $w_{k+1} = s(w_k)$ is Poisson stable and there exists a gain K such that the matrix $A + BK$ is stable and*

Research Article

A Simplified Output Regulator for a Class of Takagi-Sugeno Fuzzy Models

**Tonatiuh Hernández-Cortés, Jesús A. Meda Campaña,
Luis A. Páramo Carranza, and Julio C. Gómez Mancilla**

Instituto Politécnico Nacional, SEPI-ESIME Zacatenco, Avenue IPN S/N, 07738 México, DF, Mexico

Correspondence should be addressed to Jesús A. Meda Campaña; jmedac@ipn.mx

Received 10 January 2015; Revised 1 April 2015; Accepted 1 April 2015

Academic Editor: Qingling Zhang

Copyright © 2015 Tonatiuh Hernández-Cortés et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

This paper is devoted to solve the regulation problem on the basis of local regulators, which are combined using “new” membership functions. As a result, the exact tracking of references is achieved. The design of linear local regulators is suggested in this paper, but now adequate membership functions are computed in order to ensure the proper combination of the local regulators in the interpolation regions. These membership functions, which are given as mathematical expressions, solve the fuzzy regulation problem in a relative simple way. The form of the new membership functions is systematically derived for a class of Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy systems. Some numerical examples are used to illustrate the viability of the proposed approach.

1. Introduction

One of the most important problems in control theory consists of finding a controller capable of taking the outputs of a plant towards the reference signals generated by an external system, named exosystem.

This problem has been studied by several authors due to its wide applicability in mechanical systems, aeronautics, and telematics, just to name a few.

The works of Francis [1] and Francis and Wonham [2] have shown that the solvability of a multivariable linear regulator problem corresponds to the solvability of a system of two linear matrix equations, called Francis Equations. Also they have shown that, in the case of error feedback, the regulator which solves the problem includes the exosystem. This property is commonly known as Internal Model Principle.

Later, Isidori, and Byrnes [3] showed that the result established by Francis could be extended to the nonlinear field as a general case and that the equations of Francis represent a particular case of a set of nonlinear equations. They showed that the solvability for the nonlinear case depends on the solution of a set of nonlinear partial differential equations, called Francis-Isidori-Byrnes (FIB) equations. Unfortunately,

such equations are too difficult to solve in a practical manner, in general.

On the other hand, some techniques have been proven to be an alternative to solve this problem by combining the theory of output regulation and the Takagi-Sugeno fuzzy modeling [4–9].

In [10], the authors propose an approach based on the weighted summation of local linear regulators in order to synchronize chaotic systems by means of regulation theory. However, to ensure the exact output regulation, two conditions need to be fulfilled: (1) the same input matrix for all subsystems, that is, $B_1 = B_2 = \dots = B_r$, where r is the number of rules in the fuzzy model, and (2) same zero error manifold $\pi(w(t))$ for every local subsystem.

Later in [11], the exact output regulator is directly designed for the overall T-S fuzzy model. Although such a controller achieves the exact output regulation where the weighted summation of linear local regulators fails, its expression may be very large.

For that reason, in the present paper the simplicity of the fuzzy regulator obtained from the weighted summation of linear local regulators is exploited; the effectiveness of the controller given in this approach guarantees at least for a class

of T-S fuzzy models the exact output regulation. To this end, new membership functions will be systematically computed in order to adequately combine the linear local regulators, guaranteeing in this way the proper performance of the fuzzy regulator in the interpolation regions. A preliminary result has been given in [6], where the new membership functions are approximated by soft computing techniques.

The main idea comes from the fact that each local controller is valid, at least, for its corresponding local system, while the fuzzy interpolation regions require more attention at the moment of evaluating the performance of the overall fuzzy controller. For that reason, the proposed approach consists of finding new membership functions capable of adequately combine adjacent local controllers in order to achieve the control goal.

So, the main contribution of the present work is to find a control law for a class of Takagi-Sugeno fuzzy models, in order to achieve exact output regulation on the basis of local regulators and computing of new membership functions, even if different input matrices appear in the linear local subsystems. Consequently, one of the restrictions given in [10] is avoided, and there is no need of verifying the existence of the fuzzy regulator for all $t \geq 0$ [11]. Besides, the new membership functions, allowing the proper combination the local regulators, are given as a mathematical expressions.

The rest of the paper is organized as follows. In Section 2 the nonlinear regulation problem formulation is given with a brief review of the Takagi-Sugeno models and the fuzzy regulation problem. The main result is developed in Section 3. In Section 4 some examples are presented and finally, in Section 5, some conclusions are drawn.

2. The Output Regulation Problem

Consider a nonlinear system defined by

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \omega(t), u(t)), \quad (1)$$

$$y(t) = c(x(t)), \quad (2)$$

$$\dot{\omega}(t) = s(\omega(t)), \quad (3)$$

$$y_{\text{ref}}(t) = q(\omega(t)), \quad (4)$$

$$e(t) = h(x(t), \omega(t)), \quad (5)$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the state vector of the plant, $\omega(t) \in W \subset \mathbb{R}^s$ is the state vector of the exosystem, which generates the reference and/or the perturbation signals, and $u(t) \in \mathbb{R}^m$ is the input signal. Equation (5) refers to difference between output system of the plant ($y(t) \in \mathbb{R}^m$) and the reference signal ($y_{\text{ref}}(t) \in \mathbb{R}^m$), that is, $h(x(t), \omega(t)) = y(t) - y_{\text{ref}} = c(x(t)) - q(\omega(t))$, taking into account that $m \leq n$. Besides, it is assumed that $f(x, u, w)$, $h(x, w)$ and $w(t)$ are C^k functions (for some large k) of their arguments and also that $f(0, 0, 0) = 0$, $s(0) = 0$, and $h(0, 0) = 0$ [12].

Clearly, by linearizing (1)–(5) around $x = 0$ one gets

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Pw(t), \\ y(t) &= Cx(t), \\ \dot{\omega}(t) &= S\omega(t), \\ y_{\text{ref}}(t) &= Q\omega(t), \\ e(t) &= Cx(t) - Q\omega(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Thus, the Nonlinear Regulator Problem [3, 13] consists of finding a controller $u(t) = \alpha(x(t), w(t))$, such that the closed-loop system, $\dot{x}(t) = Ax(t) + B\alpha(x(t), 0)$, has an asymptotically stable equilibrium point, and the solution of the system (6) satisfies $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

So, by defining $\pi(w(t))$ as the steady-state zero error manifold and $\gamma(w(t))$ as the steady-state input, the following theorem gives the conditions for the solution of nonlinear regulation problem.

Theorem 1. *Suppose that $\dot{w}(t) = s(w(t))$ is Poisson stable and a gain K exists such that the matrix $A + BK$ is stable and there exist mappings $x_{ss}(t) = \pi(w(t))$ and $u_{ss} = \gamma(w(t))$ with $\pi(0) = 0$ and $\gamma(0) = 0$ satisfying*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi(w(t))}{\partial w(t)} s(w(t)) &= f(\pi(w(t)), w(t), \gamma(w(t))), \\ 0 &= h(\pi(w(t)), w(t)). \end{aligned} \quad (7)$$

Then the signal control for the nonlinear regulation is given by

$$u(t) = K(x(t) - \pi(w(t))) + \gamma(w(t)). \quad (8)$$

Proof. See [12, 13]. \square

Nonlinear partial differential equations (7) are known as Francis-Isidori-Byrnes (FIB) equations and their linear counterparts are obtained when the mappings $x_{ss}(t) = \pi(w(t))$ and $u_{ss}(t) = \gamma(w(t))$ become into $x_{ss}(t) = \Pi w(t)$ and $u_{ss}(t) = \Gamma w(t)$, respectively. Thus, the linear problem is reduced to solve a set of linear matrix equations (Francis equations) [1]:

$$\begin{aligned} \Pi S &= A\Pi + B\Gamma + P, \\ 0 &= C\Pi - Q. \end{aligned} \quad (9)$$

2.1. The Exact Output Fuzzy Regulation Problem. Takagi and Sugeno proposed a fuzzy model composed by a set of linear subsystem with IF-THEN rules capable of relating physical knowledge, linguistic characteristics, and properties of the system. Such a model successfully represents a nonlinear system at least in a predefined region of phase space [14]. It is important to remark that in this work the exosystem is purely “linear,” because the computation of new membership functions for the general case is still an open problem.

The T-S model for system (1)–(5) is given by [15].

Model. Rule i:

$$\text{IF } z_1(t) \text{ is } M_1^i \text{ and } \dots \text{ and } z_p(t) \text{ is } M_p^i,$$

Research Article

Tuning of a TS Fuzzy Output Regulator Using the Steepest Descent Approach and ANFIS

Ricardo Tapia-Herrera, Jesús Alberto Meda-Campaña, Samuel Alcántara-Montes, Tonatihu Hernández-Cortés, and Lizbeth Salgado-Conrado

Instituto Politécnico Nacional, SEPI-ESIME Zacatenco, Avenue IPN S/N, 07738 México, DF, Mexico

Correspondence should be addressed to Jesús Alberto Meda-Campaña; jmedac@ipn.mx

Received 15 March 2013; Accepted 27 May 2013

Academic Editor: Qingsong Xu

Copyright © 2013 Ricardo Tapia-Herrera et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

The exact output regulation problem for Takagi-Sugeno (TS) fuzzy models, designed from linear local subsystems, may have a solution if input matrices are the same for every local linear subsystem. Unfortunately, such a condition is difficult to accomplish in general. Therefore, in this work, an adaptive network-based fuzzy inference system (ANFIS) is integrated into the fuzzy controller in order to obtain the optimal fuzzy membership functions yielding adequate combination of the local regulators such that the output regulation error in steady-state is reduced, avoiding in this way the aforementioned condition. In comparison with the steepest descent method employed for tuning fuzzy controllers, ANFIS approximates the mappings between local regulators with membership functions which are not necessary known functions as Gaussian bell (gbell), sigmoidal, and triangular membership functions. Due to the structure of the fuzzy controller, Levenberg-Marquardt method is employed during the training of ANFIS.

1. Introduction

A fundamental problem in dynamic systems is to control a plant in order to have its outputs tracking some reference signals produced by an exosystem (external generator), while the stability property of the closed-loop system is guaranteed. In this regard, the output regulation problem [1] consists of finding the control law capable of

- (a) stabilizing the closed-loop system when the plant is not influenced by the exosystem,
- (b) taking the tracking error asymptotically to zero when the plant is under the action of the exosystem.

One of the first works on output regulation theory presented in the literature was developed by Francis and Wonham in 1975 [2]. This paper obtains structural criteria necessary to synthesize multivariable linear regulators with structural stability to small perturbations. The main contribution of this work is that structural stability requires feedback from the regulate variable, and these structural features are called “internal model principle.” Later in 1977 [3], the linear regulation theory for tracking a reference is proposed by Francis,

by finding that the solution for the output regulation of an autonomous linear system subject to perturbations and reference signals can be obtained from a system of linear matrix equations.

Isidori and Byrnes [1] extend the results obtained by Francis to the general case in which the plant and/or the exosystem are nonlinear. They also show that Francis equations are a particular case of nonlinear output regulation equations. In addition, they also show, as in linear case, that if the plant is exponentially stabilizable via output feedback, the solution for the nonlinear case requires an error feedback regulator. Unfortunately, the so-called Francis-Isidori-Byrnes (FIB) equations used to solve the nonlinear output regulation problem involve a set of nonlinear partial differential equations which in many cases are too difficult, or even impossible to solve in a practical way (see Figure 1).

On the other hand, in the real world, there exists a wide range of problems that involve the analysis of uncertain and inaccurate information, and that is the main reason for the “soft computing.” The term soft computing, according to Zadeh, is “A collection of methodologies that aim to exploit the tolerance for imprecision and uncertainty to achieve

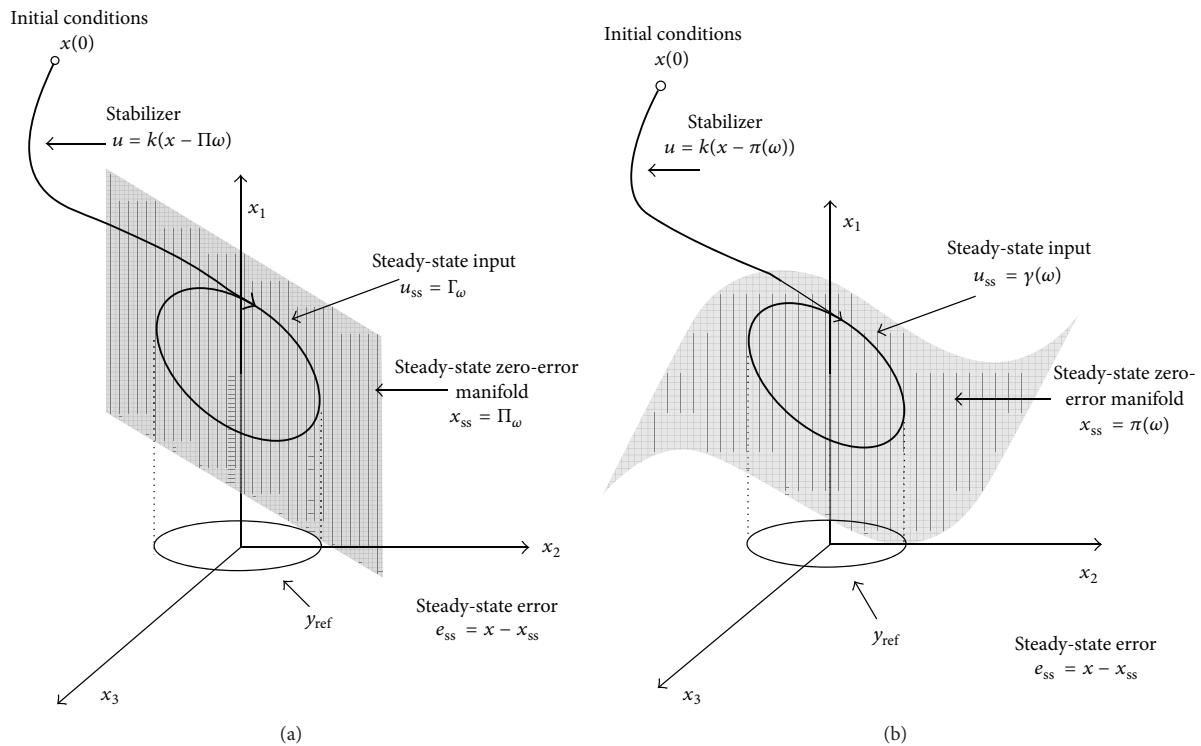


FIGURE 1: Output regulation scheme for (a) linear systems and (b) nonlinear systems [4].

tractability, robustness, and low solution cost.” Its principal constituents are fuzzy logic, neurocomputing, and probabilistic reasoning [5]. Each of these approaches has features that make them suitable to solve different problems. Fuzzy systems are characterized by their ability to handle and use inaccurate approximate reasoning, while neural networks have the property of learning. Many of these tools have been used with efficiency to solve complex real world problems as diagnosis, estimation, control, and autonomy of systems.

In that sense, some techniques have been developed to characterize nonlinear systems by means of linear local subsystems [5]. One of these approaches is the well-known Takagi Sugeno (TS) fuzzy modeling. This technique allows describing the nonlinear dynamics by means of a suitable “blending” of linear subsystems, each of them corresponding to different operation points. Basically, the “combination” is performed by a weighted summation of linear local subsystems. Thus, local controllers can be designed for each subsystem, obtaining the aggregate controller by using the same membership functions of the TS fuzzy plant.

As mentioned previously, the set of differential equations derived by Isidori and Byrnes in nonlinear regulation is difficult to solve, representing an interesting opportunity to apply soft computing: in particular neural networks and fuzzy logic.

For instance, in [6], an iterative algorithm with the structure of a recurrent neural network is presented. The network is introduced with the purpose of dealing with model errors caused by the estimation of parameters of an off-line

training and the possible dynamic changes; an online learning approach providing the necessary parameters for the network is also used. In this sense, the network can capture the uncertainties of the system, and the regulator adjusts the control action in order to guarantee the regulation condition. That is an attempt to combine the identification capability of neural networks and the stability properties of the control theory. As a result, the control structure learns the system dynamics and ensures the asymptotic convergence of the error. Subsequently, this method was applied at the control scheme of a solar plant [7]. Zhang and Wang [8] propose an approximation in power series form, wherein a neural network carries out the synthesis and self-tuning of controller in real time. This method ensures regulation properties, namely, stability and asymptotic tracking.

Later in [9], the fuzzy output regulation is formulated, in which a nonlinear system described by a Takagi-Sugeno fuzzy model follows a reference signal generated by a fuzzy exosystem. It was also shown that the fuzzy regulation problem can be solved by means of local linear regulator only if the following conditions are satisfied.

- (i) The zero error manifold $\pi(\omega)$ is equal for every local linear subsystem (see Figure 1).
- (ii) Input matrices B_i are equal for every local linear subsystem, that is, $(B_1 = B_2 = \dots = B_i)$.

Unfortunately, the aforementioned conditions are not satisfied in a great number of systems. A proposal to overcome this problem is presented in [5, 10], wherein the fuzzy

Bibliografía

- [1] B. A. Francis. The linear multivariable regulator problem. *SIAM J. Cont. Optimiz.*, 15:486–505, 1977.
- [2] B. A. Francis and W. M. Wonham. The internal model principle of control theory. *Automatica*, 12:457–465, 1976.
- [3] A. Isidori and C. I. Byrnes. Output regulation of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(2):131–140, 1990.
- [4] A. Serrani. The nonlinear output regulation problem local and stucturally stable regulation. [http://http://www.cesos.ntnu.no/cesos/activities/workshops/orn-
ls/lecture2.pdf](http://http://www.cesos.ntnu.no/cesos/activities/workshops/orn-ls/lecture2.pdf), Ohio State University, 2005.
- [5] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer, Berlin, 1995.
- [6] B. Castillo-Toledo, J. A. Meda-Campaña, and A. Titli. A fuzzy output regulator for takagi-sugeno fuzzy models. In *Proceedings of the 2003 IEEE International Symposium on Intelligent Control*, volume 2, pages 310 – 315, Houston, Texas, December 2003.
- [7] J. A. Meda-Campaña, B. Castillo-Toledo, and V. Zúññiga. On the Nonlinear Fuzzy Regulation for under-actuated systems. In *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 2195–2202, Vancouver, Canada, July 16-21 2006.
- [8] J. A. Meda-Campaña, B. Castillo-Toledo, and G. Chen. Synchronization of chaotic systems from a fuzzy regulation approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 160, 2009.

-
- [9] J. A. Meda-Campaña, J.C. Gómez-Mancilla, and B. Castillo-Toledo. Exact output regulation for nonlinear systems described by takagi sugeno fuzzy models. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 20(2):235–247, 2012. ISSN 1063-6706. doi: 10.1109/TFUZZ.2011.2172689.
- [10] R. Tapia-Herrera, J. A. Meda-Campaña, S. Alcántara-Montes, and T. Hernández-Cortés. Tuning of a TS fuzzy output regulator using the steepest descent aproach and anfis. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013: 14, 2013.
- [11] M. X.-Jun and S. Z.-Qi. Output tracking and regulation on nonlinear system based on Takagi-Sugeno fuzzy model. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybertics-Part B: Cybernetics*, 30(1):47–59, February 2000.
- [12] Kuang-Yow Lian and Jehi-Jang Liou. Output tracking control for fuzzy systems via output feedback design. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 14(5):628–639, 2006. ISSN 1063-6706. doi: 10.1109/TFUZZ.2006.876725.
- [13] H. J. Lee, J. B. Park, and Y. H. Joo. Comments on output tracking and regulation on nonlinear system based on Takagi-Sugeno fuzzy model. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybertics-Part B: Cybernetics*, 33(3):521–523, June 2003.
- [14] T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 15(1):116–132, 1985.
- [15] K. Tanaka and H. O. Wang. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis. A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley and Sons, Inc., 2001.
- [16] C.I. Byrnes, F.D. Priscoli, and A. Isidori. *Output Regulation of Uncertain Nonlinear Systems*. Birkhäuser, 1997.
- [17] Ibtissem Abdelmalek, Noureddine Goléa, and Mohamed Laid Hadjili. A new fuzzy Lyapunov approach to non-quadratic stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy models. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 17(1), 2007.
- [18] Miguel Bernal and Petr Hušek. Non-quadratic performance design for Takagi-Sugeno fuzzy systems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 15(3), 2005.

- [19] Bing Chen, Xiao-Ping Liu, Shao-Cheng Tong, and Chong Lin. Observer-based stabilization of T-S fuzzy systems with input delay. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 16(3):652–663, 2008. ISSN 1063-6706. doi: 10.1109/TFUZZ.2007.903329.
- [20] Bao-Cang Ding, He-Xu Sun, and Yu-E Qiao. Stability analysis of T-S fuzzy control systems based on parameter-dependent Lyapunov function. *Acta Automatica Sinica*, 31(4), July 2005.
- [21] M. Narimani, H.K. Lam, R. Dilmaghani, and C. Wolfe. Lmi-based stability analysis of fuzzy-model-based control systems using approximated polynomial membership functions. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on*, 41(3):713–724, 2011. ISSN 1083-4419. doi: 10.1109/TSMCB.2010.2086443.
- [22] H.K. Lam. Polynomial fuzzy-model-based control systems: Stability analysis via piecewise-linear membership functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 19(3):588–593, 2011.
- [23] L.-X. Wang. *A Course in Fuzzy Systems and Control*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 1997.
- [24] H. W. Knobloch, A. Isidori, and D. Flockerzi. *Topics in Control Theory*. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1993.
- [25] Guanrong Chen Zhong Li, Wolfgang A. Halang. *Integration of Fuzzy Logic and Chaos Theory*, volume 187. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [26] C. Huguenii. *Horologium oscillatorium (parisiis, france, 1973)*. english translation: The pendulum clock (iowa state university press). Technical report, Ames, 1986.
- [27] Louis M. Pecora and Thomas L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 64:821–824, Feb 1990. doi: 10.1103/PhysRevLett.64.821. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.64.821>.
- [28] Kevin M. Cuomo and Alan V. Oppenheim. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. *Phys. Rev. Lett.*, 71: 65–68, Jul 1993. doi: 10.1103/PhysRevLett.71.65. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.71.65>.

- [29] I. Zelinka, S. Celikovský, H. Richter, and G. Chen. *Evolutionary Algorithms and Chaotic Systems*. Studies in Computational Intelligence. Springer Berlin Heidelberg, 2010. ISBN 9783642107078. URL <https://books.google.com.mx/books?id=th1rCQAAQBAJ>.
- [30] Ercan Solak, Ömer Morgül, and Umut Ersoy. Observer-based control of a class of chaotic systems. *Physics Letters A*, 279(1-2):47 – 55, 2001. ISSN 0375-9601. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601\(00\)00808-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00808-2). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960100008082>.
- [31] Ömer Morgül and Ercan Solak. On the synchronization of chaos systems by using state observers. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 07(06):1307–1322, 1997. doi: [10.1142/S0218127497001047](https://doi.org/10.1142/S0218127497001047). URL <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218127497001047>.
- [32] Ho Jae Lee, Jin Bae Park, and Guanrong Chen. Robust fuzzy control of nonlinear systems with parametric uncertainties. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 9(2):369–379, Apr 2001. ISSN 1063-6706. doi: [10.1109/91.919258](https://doi.org/10.1109/91.919258).
- [33] Wook Chang, Jin Bae Park, and Young Hoon Joo. Output feedback control of chen’s chaotic attractor using fuzzy logic. In *Industrial Electronics Society, 2000. IECON 2000. 26th Annual Conference of the IEEE*, volume 3, pages 2159–2164 vol.3, 2000. doi: [10.1109/IECON.2000.972610](https://doi.org/10.1109/IECON.2000.972610).
- [34] O.E. RöSSLer. An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, 57(5):397–398, 1976.
- [35] H.K. Lam and M. Narimani. Quadratic-stability analysis of fuzzy-model-based control systems using staircase membership functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 18(1):125–137, 2010.
- [36] Dong-Hwan Lee, Jin-Bae Park, and Young-Hoon Joo. Further theoretical justification of the -samples variation approach for discrete-time takagi-sugeno fuzzy systems. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 19(3):594–597, 2011. ISSN 1063-6706. doi: [10.1109/TFUZZ.2010.2102039](https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2010.2102039).
- [37] Xiaodong Liu and QingLing Zhang. Approaches to quadratic stability conditions and h_∞ control designs for T-S fuzzy systems. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 11(6):830–839, 2003. ISSN 1063-6706. doi: [10.1109/TFUZZ.2003.819834](https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2003.819834).

- [38] M. Narimani and H.K. Lam. SOS-based stability analysis of polynomial fuzzy-model-based control systems via polynomial membership functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 18(5):862–871, 2010.
- [39] Antonio Sala and Carlos Ariño. Relaxed stability and performance conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems with knowledge on membership function overlap. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics*, 37(3), June 2007.
- [40] J.A. Meda-Campana, J. Rodriguez-Valdez, T. Hernandez-Cortes, R. Tapia-Herrera, and V. Nosov. Analysis of the fuzzy controllability property and stabilization for a class of ts fuzzy models. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 23(2):291–301, April 2015. ISSN 1063-6706. doi: 10.1109/TFUZZ.2014.2312025.
- [41] Kazuo Tanaka, Tsuyoshi Hori, and Hua O. Wnag. A fuzzy Lyapunov approach to fuzzy control system design. In *Proceedings of the 2001 American Control Conference, 2001*, pages 4790–4795, Arlington, VA, USA, June 2001.
- [42] Kazuo Tanaka, Tsuyoshi Hori, and Hua O. Wnag. A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(4), August 2003.
- [43] K. Tanaka, H. Yoshida, H. Ohtake, and H.O. Wang. A sum-of-squares approach to modeling and control of nonlinear dynamical systems with polynomial fuzzy systems. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 17(4):911–922, 2009. ISSN 1063-6706. doi: 10.1109/TFUZZ.2008.924341.
- [44] Engang Tian, Dong Yue, Tai Cheng Yang, Zhou Gu, and Guoping Lu. T-s fuzzy model-based robust stabilization for networked control systems with probabilistic sensor and actuator failure. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 19(3):553–561, 2011. ISSN 1063-6706. doi: 10.1109/TFUZZ.2011.2121069.
- [45] Huaguang Zhang and Xiangpeng Xie. Relaxed stability conditions for continuous-time t-s fuzzy-control systems via augmented multi-indexed matrix approach. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 19(3):478–492, 2011. ISSN 1063-6706. doi: 10.1109/TFUZZ.2011.2114887.
- [46] Shaosheng Zhou, Gang Feng, James Lam, and Shengyuan Xu. Robust H_∞ control for discrete-time fuzzy systems via basis-dependent Lyapunov functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 174:197–217, 2005.

- [47] Shaosheng Zhou, J. Lam, and Wei Xing Zheng. Control Design for Fuzzy Systems Based on Relaxed Nonquadratic Stability and H_∞ Performance Conditions. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 15(2):188–199, April 2007.
- [48] J.A. Meda-Campaña, J.C. Gómez-Mancilla, and B. Castillo-Toledo. On the exact output regulation for takagi-sugeno fuzzy systems. In *Control and Automation (ICCA), 2010 8th IEEE International Conference on*, pages 417–422, June 2010. doi: 10.1109/ICCA.2010.5524347.
- [49] T. Hernández Cortés, J.A. Meda Campaña, L.A Páramo Carranza, and J.C. Gómez Mancilla. A simplified output regulator for a class of takagi-sugeno fuzzy models. *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 148173, 2015.
- [50] J. A. Meda-Campaña and B. Castillo-Toledo. On the output regulation for ts fuzzy models using sliding modes. In *Proceedings of the 2005 American Control Conference, 2005*, pages 4062–4067, Portland, OR, USA, June 2005.
- [51] B. Castillo-Toledo and J. A. Meda-Campaña. The fuzzy discrete-time robust regulation problem: a LMI approach. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 2159 – 2164, Las Vegas, Nevada, December 2002.
- [52] Tonatiuh Hernández-Cortés, A. Verónica Curtidor López, Jorge Rodríguez-Valdez, Jesús A. Meda Campaña, Ricardo Tapia Herrera, and José de Jesús Rubio. Synchronization of discrete-time chaotic fuzzy systems by means of fuzzy output regulation using genetic algorithm. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015:18, 2015. URL <http://dx.doi.org/10.1155/2015/198371>].
- [53] B. Castillo-Toledo and Meda-Campaña J. A. The fuzzy discrete-time robust regulation problem: An lmi approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 12(3):360–367, June 2004.
- [54] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. Griffin. Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model. *Proc. FUZZ-/IFES*, pages 531–538, 1995.
- [55] K. Tanaka and M. Sugeno. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy sets Syst.*, 45(2):135–156, 1992.

-
- [56] Wook Chang, Jin Bae Park, Young Hoon Joo, and Liang Chen. Design of sampled-data fuzzy-model-based control systems by using intelligent digital redesign. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, 49(4):509–517, Apr 2002. ISSN 1057-7122. doi: 10.1109/TCSI.2002.995668.
- [57] Zhong Li, Jin Bae Park, and Young Hoon Joo. Chaotifying continuous-time ts fuzzy systems via discretization. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, 48(10):1237–1243, Oct 2001. ISSN 1057-7122. doi: 10.1109/81.956020.
- [58] K. Pyragas. Weak and strong synchronization of chaos. *Phys. Rev. E*, 54(5): R4508–4512, 1996.