



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
UNIDAD PROFESIONAL INTERDISCIPLINARIA DE BIOTECNOLOGÍA**

**ANÁLISIS BIOMECÁNICO DE LA MARCHA EN TERCERA
DIMENSIÓN BASADO EN ANÁLISIS DE IMAGEN Y
ESTIMADORES DE ESTADO**

**INFORME TÉCNICO DE LA OPCIÓN CURRICULAR EN
LA MODALIDAD DE:
PROYECTO DE INVESTIGACIÓN**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO BIOMÉDICO**

**P R E S E N T A :
MONROY CEREZO AGUSTÍN**

DIRECTOR INTERNO: DR. JORGE ISAAC CHAIREZ ORIA

México D.F., Noviembre 2011



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
UNIDAD PROFESIONAL INTERDISCIPLINARIA DE BIOTECNOLOGÍA**

**M. EN C. ENRIQUE HERNÁNDEZ GARCÍA
COORDINADOR DE PROYECTO TERMINAL III**

Los abajo firmantes designados por el Comité de Proyecto Terminal como miembros del jurado calificador del informe final titulado “Análisis Biomecánico de la Marcha En Tercera Dimensión Basado En Análisis De Imagen Y Estimadores De Estado”, que presenta el C. Agustín Monroy Cerezo de la carrera de Ingeniería Biomédica, informamos que después de haber revisado cuidadosamente el informe escrito, consideramos que reúne las características que se requieren para su impresión y aspirar a la aprobación del Proyecto Terminal III.

NOMBRE

FIRMA

**DR. JORGE ISAAC CHAIREZ ORIA
ASESOR INTERNO**

**M. EN C. RITA QUETZIQUEL FUENTES AGUILAR
EVALUADORA**

Se extiende la presente a los 29 días del mes de Noviembre del año 2011.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco principalmente al director de mi proyecto, el Dr. Jorge Isaac Chairez Orta porque supo guiarme a lo largo del desarrollo del proyecto a pesar de las complicaciones que se presentaron y canalizarme para obtener los resultados esperados.

A mi evaluadora M. en C. Rita Quetziquel Fuentes Aguilar por su dedicación y firmeza en la corrección de la tesis, por demostrar estar comprometida con obtener resultados aceptables para el nivel de la escuela.

A mi mamá Rosalia y mis hermanas Rosalia y Claudia por su enorme apoyo durante mis días de desvelo, durante las cuales su apoyo fue incondicional a través de su enorme amor.

A mis amigos Agustín, Alejandro, Araceli, Beatriz, Daniela, David, Itzel y Nadiyah por su apoyo durante el desarrollo del proyecto y por permitirme hacer más llevadero el tiempo utilizado.



1. ÍNDICE

2. Resumen	1
3. INTRODUCCIÓN	3
4. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	4
5. JUSTIFICACIÓN	5
6. HIPÓTESIS	7
7. OBJETIVOS	8
8. MARCO TEÓRICO	9
Análisis de marcha en una y varias dimensiones.....	9
Aplicaciones del análisis de marcha.....	9
Análisis de marcha asociado a la biomecánica.....	10
Análisis de Marcha por Medidas Antropomórficas	11
Ciclo de la marcha	12
Modelos mecánicos de la marcha	13
<i>Modelo del péndulo invertido</i>	13
<i>Modelo del doble péndulo invertido</i>	14
<i>Modelo de siete eslabones</i>	14
Procesamiento digital de imágenes.....	15
Técnicas de Procesamiento basadas en píxeles.....	17
Histograma	18
Ecuación del histograma	19
Etiquetado (Labeling)	21
Modelos de Color	21
ESTIMADORES DE ESTADOS.....	24
9. METODOLOGÍA.....	27
10. RESULTADOS	46
12. REFERENCIAS.....	57
Anexo 1 Obtención del modelo matemático	61



Índice de Figuras

Fig. 1 Analogía de la caminata con el modelo del péndulo invertido.....	13
Fig. 2 Aplicación del modelo de doble péndulo durante la marcha	14
Fig. 3 Modelo utilizado para la creación del observador de estados	15
Fig. 4 Ejemplos de Histogramas	18
Fig. 5 Ecuación de histograma	20
Fig. 6 Arriba: Imagen original y su histograma. Abajo: Imagen ecualizar histograma ecualizados..	20
Fig. 7 Representación gráfica del modelo RGB.....	22
Fig. 8 Representación de los colores de CMY	23
Fig. 9 Representación gráfica del modelo HSV	23
Fig. 10 Posición correcta de las cámaras	27
Fig. 11 Posicionamiento de los marcadores en un ambiente y fondo correctos	28
Fig. 12 Triangulación utilizada para medida de ángulos para cada extremidad.....	34
Fig. 13 Diagrama para realizar el modelado de 7 eslabones tridimensional	35
Fig. 14 Modelo original obtenido de [25] dondeg.....	44
Fig. 15 Simulación modificada	45
Fig. 16 Desplazamiento angular y comportamiento del observador parte superior	50
Fig. 17 Desplazamiento angular y comportamiento del observador parte inferior	51
Fig. 18 Velocidad angular de la parte superior de las piernas.....	52
Fig. 19 Velocidad angular de la parte inferior de las piernas.....	53
Fig. 20 a) Imagen pre procesada (toma lateral). b) Imagen pre procesada (toma frontal).....	54
Fig. 21 Reconstrucción 3D a partir de las imágenes de la figura 12	54
Fig. 22 Simulación de la marcha en 3D	55

ANÁLISIS BIOMECÁNICO DE LA MARCHA EN TERCERA DIMENSIÓN BASADO EN ANÁLISIS DE IMAGEN Y ESTIMADORES DE ESTADO

Agustín Monroy Cerezo, Dr. Jorge Isaac Chairez Oria*

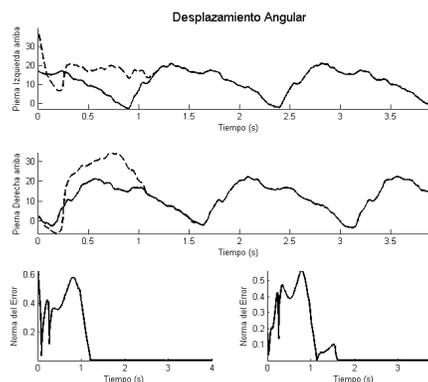
Palabras clave: *Biomecánica, Marcha, Plano Tridimensional, Observadores, Patrones, Modelado*

Introducción: A través de la información digitalizada de c es posible obtener a través de algoritmos matemáticos y de programación diferentes parámetros como los ángulos de flexión durante la marcha e incluso velocidades angulares; ya sea en el momento en que se están tomando (en tiempo real) o al final del estudio. La ventaja de realizarlo de manera digital es que al tener esta información almacenada, se pueden realizar reconstrucciones gráficas y estimaciones precisas a partir de cálculos matemáticos, además de tener la posibilidad de obtener otros parámetros de manera indirecta (por medio de estimadores de estados) y no limitarnos a ángulos y distancias. La velocidad es uno de los parámetros más buscados dentro del análisis de la biomecánica de la marcha.

Metodología: Se desarrolló un algoritmo a partir de dos fotografías para realizar pruebas y medidas directas sobre ellas. Una vez que se logró tener la reconstrucción tridimensional y la medición correcta de cada ángulo dentro de la imagen es posible aplicarlo a las imágenes de un video conjunto por las dos cámaras. Las tareas más significativas realizadas a lo largo del proyecto se separaron de manera general en los siguientes puntos.

- Posicionamiento de las cámaras
- Posicionamiento de marcadores
- Segmentación
- Etiquetado
- Espaciado 3D
- Obtención de parámetros
- Modelado
- Estimador de estados para cálculo de la velocidad angular

Resultados: Se desarrolló un modelo matemático el cual se puede escribir en forma vectorial como:
 $FNP = M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q)$ Donde $q = [\gamma \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6 \ \theta_7]^T$ que son las diferentes variables evaluadas para la evaluación del miembro inferior durante la marcha. Se comprobó la simulación de [25] y su estabilidad, es un observador por modos deslizantes basado en un modelo bidimensional de la marcha.



El cual se utilizó para sustituir la entrada por los datos recopilados por las cámaras. La ventaja de utilizar el observador es la obtención de la velocidad angular sin necesidad de una derivación directa del desplazamiento. Se comprueba que a partir de las dos imágenes realmente se reconstruye el miembro inferior en un plano tridimensional.

Conclusiones: En la actualidad el análisis de la biomecánica de la marcha se realiza basándose solamente en uno de los parámetros más evidentes, que es el desplazamiento angular. A pesar de que se tiene un gran avance en el procesamiento de imágenes aún no es posible asegurar que sin importar las condiciones que rodeen al objeto a analizar, se obtendrán resultados infalibles. Existen parámetros de la biomecánica que no es posible medir directamente, es costoso o entorpece el movimiento original a la hora de medirlo, una forma de lograr obtener estos parámetros es a través de observadores de estados.

Referencias:

- [2] Performance of an inverted pendulum model directly applied to normal human gait.
- [6] Theory and Design of an Orthotic Device for Full or Partial Gravity-Balancing of a Human Leg During Motion
- [9] Development of a walking robot model and its databased modeling and control
- [13] A dynamic model for simulating a trip and fall during gait
- [19] Métodos de Segmentación de Imágenes Médicas
- [21] Procesamiento Digital de Imágenes, Dr. Boris Escalante R, UNAM, Octubre 2006.
- [25] Kävelevän robottimallin kehittäminen sekä sen datapohjainen mallitus ja säätö.



2. Resumen

Introducción: A través de la información digitalizada de c es posible obtener a través de algoritmos matemáticos y de programación diferentes parámetros como los ángulos de flexión durante la marcha e incluso velocidades angulares; ya sea en el momento en que se están tomando (en tiempo real) o al final del estudio. La ventaja de realizarlo de manera digital es que al tener esta información almacenada, se pueden realizar reconstrucciones gráficas y estimaciones precisas a partir de cálculos matemáticos, además de tener la posibilidad de obtener otros parámetros de manera indirecta (por medio de estimadores de estados) y no limitarnos a ángulos y distancias. La velocidad es uno de los parámetros más buscados dentro del análisis de la biomecánica de la marcha.

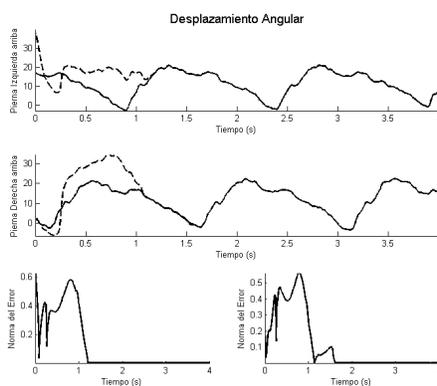
Metodología: Se desarrolló un algoritmo a partir de dos fotografías para realizar pruebas y medidas directas sobre ellas. Una vez que se logró tener la reconstrucción tridimensional y la medición correcta de cada ángulo dentro de la imagen es posible aplicarlo a las imágenes de un video conjunto por las dos cámaras. Las tareas más significativas realizadas a lo largo del proyecto se separaron de manera general en los siguientes puntos.

- Posicionamiento de las cámaras
- Posicionamiento de marcadores
- Segmentación
- Etiquetado
- Espaciado 3D
- Obtención de parámetros
- Modelado
- Estimador de estados para cálculo de la velocidad angular

Resultados: Se desarrolló un modelo matemático el cual se puede escribir en forma vectorial como:

$$FNP = M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q)$$

Donde $q = [\gamma \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6 \ \theta_7]^T$ que son las diferentes variables evaluadas para la evaluación del miembro inferior durante la marcha. Se comprobó la simulación de [25] y su estabilidad, es un observador por modos deslizantes basado en un modelo bidimensional de la marcha.



El cual se utilizó para sustituir la entrada por los datos recopilados por las cámaras. La ventaja de utilizar el observador es la obtención de la velocidad angular sin necesidad de una derivación directa del desplazamiento. Se comprueba que a partir de las dos imágenes realmente se reconstruye el miembro inferior en un plano tridimensional.

Conclusiones: En la actualidad el análisis de la biomecánica de la marcha se realiza basándose solamente en uno de los parámetros más evidentes, que es el desplazamiento angular. A pesar de que se tiene un gran avance en el procesamiento de imágenes aún no es posible asegurar que sin importar las condiciones que rodeen al objeto a analizar, se obtendrán resultados infalibles. Existen parámetros de la biomecánica que no es posible medir directamente, es costoso o entorpece el movimiento original a la hora de medirlo, una forma de lograr obtener estos parámetros es a través de observadores de estados.



3. INTRODUCCIÓN

Las primeras mediciones a distancia de parámetros biomecánicos se realizaban por medio de reglas y transportadores directamente sobre fotografías. Sin embargo estas mediciones no arrojan suficiente información ni es práctica en absoluto, ya que se tenía que esperar a que éstas fueran reveladas y es una gran cantidad de fotografías para un solo estudio. Hoy en día lo que se pretende es realizar estas mediciones de manera automática a partir de fotografías tomadas por cámaras digitales. Teniendo la información obtenida de manera digital es posible obtener, a través de algoritmos matemáticos y de programación, diferentes parámetros como los ángulos de flexión durante la marcha e incluso velocidades angulares; ya sea en el momento en que se están tomando (en tiempo real) o al final del estudio.

La ventaja de realizar todo esto de manera digital es que al tener esta información almacenada, se pueden realizar construcciones gráficas y estimaciones más precisas a partir de algunos cálculos matemáticos, además de tener la posibilidad de obtener otros parámetros de manera indirecta (por medio de estimadores de estados) y no limitarnos a ángulos y distancias. Otra ventaja realmente importante es que se tiene conocimiento de tiempos de movimiento con una gran precisión, ya que se pueden tomar fotografías a una frecuencia muy estable y mucho mayor que la velocidad que se tiene en el método convencional.

Algunos de los sistemas más completos de análisis de la biomecánica ofrecen también reconstrucciones tridimensionales que permiten observar desde diferentes perspectivas el movimiento real del sujeto a evaluar. Son pocos los sistemas que ofrecen aún más, ya que la mayoría ofrece solamente la visualización y permiten la medición de algunos parámetros a partir de las imágenes.

El estudio de la marcha humana se entiende como una interdisciplinariedad que describe, analiza y evalúa el movimiento humano. Esto con la finalidad de evaluar la efectividad de la misma, es decir, evaluar si existe algún daño que merme la facilidad con que una persona realiza la marcha normal o si existe alguna posibilidad de mejorar las condiciones de esta.



4. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Los métodos computacionales para la estimación de parámetros son utilizados cada vez más debido a que son capaces de realizar cálculos matemáticos de una manera rápida y confiable, además, al trabajar más rápido que la percepción humana, permiten detectar detalles que podrían escaparse a la pura observación.

Existen múltiples sistemas de análisis biomecánico de la marcha, la mayoría de estos ofrece opciones donde se despliega el desplazamiento de las articulaciones o indicadores utilizados de manera gráfica, en algunos casos incluso calculan parámetros específicos como desvíos respecto a valores establecidos durante diferentes actividades. Estos sistemas normalmente requieren de indicadores especiales tales como goniómetros, acelerómetros o luces infrarrojas que son captados de manera remota para después procesar esta información. La utilización de este tipo de instrumental agrega un costo extra en estos sistemas.

No hay mucho desarrollo en sistemas de análisis de la biomecánica de la marcha que sean capaces de calcular parámetros de la marcha tales como la zancada, la velocidad angular, la fuerza utilizada para determinado movimiento o el trabajo realizado entre cada una de las etapas de la marcha. Sin embargo, aunque no sea un área muy atacada son estos los parámetros que permiten realizar un buen diagnóstico del estado de la marcha de una persona.

En este trabajo nos concentramos en obtener uno de los parámetros ya mencionados, la velocidad angular. La velocidad angular se puede obtener de dos maneras: Diferenciando la información obtenida de la posición, o utilizando estimadores matemáticos de estados.

La desventaja de utilizar la diferenciación directa es que no considera ningún parámetro cinemático ni dinámico del sistema, de manera que es altamente susceptible al ruido que pueda traer la información de la posición. Por otro lado los observadores de estados actúan como filtros haciéndose inmunes a ruido que pueda traer la señal, de manera que la velocidad mostrada no dará datos disparatados que sería imposible obtener en un ámbito natural. Los estimadores de estados toman en cuenta la cinética y la cinemática de los sistemas que observan, de manera que el problema se reduce a hacer un modelo matemático que considere de manera realística los parámetros biomecánicos normales.



5. JUSTIFICACIÓN

El problema del análisis biomecánico de la marcha se ha estudiado desde diferentes puntos de vista. Entre otros, se han usado técnicas de fotometría y fotogrametría pero éstos no regresan datos suficientemente relevantes para el análisis de la biomecánica de la marcha, al no tener más que unas cuantas fotografías no es posible tener una idea bien establecida de la marcha de una persona. En otros términos podemos decir que se requiere una mayor frecuencia de muestreo para lograr obtener datos relevantes dentro de un sistema, si no se tiene, se cae dentro de un efecto de alisamiento obteniendo datos incorrectos que solo lograrían entorpecer el análisis en lugar de llegar a una conclusión acertada.

En la actualidad se utilizan técnicas de procesamiento de video y con ello se han logrado incrementar la frecuencia de muestreo de dicha información debido a que las cámaras digitales son capaces de captar decenas de imágenes en un segundo (o incluso miles de fotogramas por segundo en el caso de cámaras especializadas). Para el análisis de la biomecánica, no se requieren cámaras tan especializadas de alta velocidad debido a que las extremidades no alcanzan a moverse cientos de veces en un segundo, una cámara web otorga suficiente resolución y velocidad de muestro de manera que utilizar estas cámaras se vuelve también en una ventaja debido a su bajo costo.

La mayoría de los sistemas avanzados de análisis de imágenes utilizan un gran número de sensores de diversa índole. Algunos de los que mejores resultados están basados en sensores infrarrojos ya que permiten hacer un filtrado mucho más sencillo. Al no estar dentro del rango visible, podemos utilizar filtros físicos que solamente captan luz infrarroja teniendo un punto muy bien definido logrando que las condiciones de iluminación y sombras no afecten las mediciones realizadas. Otras técnicas apuestan por sensores físicos que miden el desplazamiento de las articulaciones, por ejemplo los goniómetros. Esta cantidad de sensores requiere de instalaciones muy particulares que usualmente son muy costosas tanto en su fabricación como en su utilización y mantenimiento. Además, al estar directamente en contacto con el paciente pueden entorpecer la marcha natural. La información de ángulos no es suficiente para realizar un análisis regular y completo de marcha. Por lo mismo, se han empleado las velocidades de tales movimientos angulares como una información complementaria y que ha demostrado su gran valía como herramienta de diagnóstico.



La velocidad angular no es una propiedad que pueda ser medida de manera directa sin utilizar aditamentos estorbosos y costosos, y lamentablemente hacer una simple derivación numérica de la posición no devuelve ningún dato realmente relevante dentro de un diagnóstico porque suele ser muy ruidosa.

Por la misma razón, la determinación de la velocidad angular en las articulaciones por los métodos anteriormente descritos suele ofrecer más problemas que beneficios. Una opción interesante es el uso de estimadores de estado que pueden sustituir la operación de derivación numérica y son “sensores suaves” que obtienen la información de manera indirecta tomando en cuenta la dinámica del sistema de marcha.

Una de las opciones más completas para realizar esta estimación de estados es a través del uso de los modos deslizantes que proveen un valor de la derivada muy precisa y converge en tiempo finito. Esto es muy importante para un problema como el de la caminata, ya que en un estudio de análisis de la marcha no se puede perder demasiado tiempo del estudio para que el observador se adecúe a la información, los resultados deben ser inmediatos, o al menos tener un rango a partir del cual los datos sean confiables.

Para realizar una correcta evaluación biomecánica de la marcha, es deseable contar con un sistema que otorgue la información de manera rápida y confiable, un sistema que otorgue diferentes parámetros a los que uno puede percibir por simple observación y que por medio de cálculos matemáticos evalúe la condición de un paciente.

El problema a atacar en esta tesis radica en el diseño de un sistema combinado involucrando un sistema de procesamiento de imágenes conectado a un esquema de estimador de estados por modos deslizantes de alto orden. De esta forma, se obtuvo un sistema integrado de alto desempeño con un gran número de beneficios y a bajo costo, considerando que solo será necesario el uso de un juego reducido de cámaras WEB.



6. HIPÓTESIS

Es posible realizar un sistema completo de análisis de la biomecánica de la marcha basado en procesamiento de imágenes por medio de técnicas de visión artificial a través de sensores suaves, los cuales, al contrario de sensores colocados sobre el paciente, no entorpecen el movimiento natural del sujeto.



7. OBJETIVOS

General

- Desarrollar un sistema de análisis tridimensional de la biomecánica de la marcha basado en procesamiento de imágenes que permita reconstruir la trayectoria del paciente, grafique trayectorias específicas de la rodilla, cadera y tobillo, así como mediciones la estimación de velocidades angulares de los mismos puntos.

Particulares

- Desarrollar el algoritmo de procesamiento de imágenes para obtener la segmentación de las piernas, dividiéndolas en parte superior e inferior, así como distinguir si se trata de la pierna derecha o izquierda.
- Desarrollar el algoritmo de obtención de ángulos y posicionamiento espacial de cada una de las partes segmentadas dentro del área delimitada por el campo visual de las cámaras.
- Obtener un modelo matemático tridimensional bajo el esquema de Euler Lagrange, de los movimientos principales del cuerpo durante la marcha.
- Realizar la simulación del modelado de marcha obtenido por el esquema de Euler-Lagrange.
- Realizar la animación tridimensional del cuerpo en un área delimitada, basada en los parámetros obtenidos a partir de las imágenes y el estimador de estados.



8. MARCO TEÓRICO

Análisis de marcha en una y varias dimensiones

La fotogrametría es la técnica más utilizada para el estudio de la postura, se trata de una técnica de análisis de la cinemática que permite, a partir de un movimiento real estudiar diferentes parámetros biomecánicos del movimiento realizado. Estos sistemas permiten analizar los movimientos captados por una cámara en un plano (más común) o en 3 planos, que ha tomado mayor desarrollo en los últimos tiempos debido a que el análisis en una dimensión no nos permite saber de manera certera la dinámica de la marcha realizada ya durante la marcha existen rotaciones en los 3 planos al momento de dar un paso o incluso al momento de mantenerse de pie.

Si solamente existiera movimiento en un plano el ser humano no sería capaz de mantenerse en equilibrio, tendería siempre a caerse hacia el plano en el cual no podemos ejercer ninguna fuerza para causar una compensación del equilibrio. Por tal motivo realizar un estudio en 3D es necesario ya que si conocemos el movimiento en los 3 ejes coordenados podemos tener una idea completa del comportamiento de la marcha en una persona.

Realizando un análisis en una dimensión se podría dar un diagnóstico erróneo donde, por ejemplo, visto solamente desde el plano sagital indique que el paciente realiza proceso de marcha adecuado, sin embargo al observarlo desde en plano transversal se encuentra que una pierna es más corta que la otra, hay mayor desplazamiento en la cadera del lado derecho que del lado izquierdo, o una infinidad de diferencias que desde el plano sagital no se percibieron dando lugar a diagnósticos erróneos.

Aplicaciones del análisis de marcha

El análisis del movimiento ha hecho su aporte más importante en el tratamiento de problemas a la marcha, tanto en la comprensión de la biomecánica de la marcha normal como en la caracterización de patrones patológicos en individuos con desordenes neuromusculares. La aplicación del análisis del movimiento ha demostrado el rol de las disfunciones de brazo de palanca en la marcha patológica y los beneficios de corregirlas adecuadamente. Por medio de diferentes aplicaciones del análisis de la marcha se puede demostrar un grado de avance al realizarlo antes y después de cierto tiempo de estar bajo



cierto tratamiento. Algunas de las aplicaciones de la biomecánica es su participación en procesos de rehabilitación. Podemos ver la rehabilitación desde dos puntos de vista diferentes, uno es la rehabilitación y recuperación de movilidad de miembros, mientras que también se considera la potenciación y mejora del movimiento. También existe la rehabilitación por medio de estudios y evaluaciones del movimiento actual, para diagnóstico o detección de temblores en ciertas extremidades, donde no debería de haberlos. En general, los pacientes que tienen limitaciones sustanciales de movimiento se deben a daños neurológicos [8], de manera que lo que se necesita es volver a educar las áreas dañadas y rehacer las conexiones neuronales necesarias para poder eliminar desde temblores hasta limitaciones en el movimiento. Por tanto, la rehabilitación robótica tiene muchas ventajas con respecto a la rehabilitación convencional [8], entre otras, podemos mencionar:

- Los robots reducen la carga del personal clínico, realizan tareas sin fatiga y con gran precisión.
- Se tiene acceso a fuerzas y torques muy superiores a los que una persona podría realizar, pero que son necesarios durante la rehabilitación, como cargar al paciente mientras mueve la pierna, etc.
- Pueden trabajar repetidamente con un costo relativamente más bajo.

Análisis de marcha asociado a la biomecánica

La biomecánica no se basa únicamente en el estudio de la marcha, este concepto abarca un rango mucho más amplio, desde el movimiento de la cabeza al observar un objeto, el movimiento de los brazos al cargar un objeto, análisis de la postura, de equilibrio del cuerpo hasta aspectos minúsculos como el movimiento de la sangre, de los órganos e incluso hasta de las células. A estos estudios se les denomina también análisis de la biomecánica del cuerpo humano, pero esta es una pequeña parte de la biomecánica como concepto general debido a que es un área interdisciplinaria que estudia de manera general los modelos, fenómenos y leyes que sean relevantes en los seres vivos. Se busca encontrar parámetros normales de movimiento ya sea para detectar fallas en organismos o para intentar mejorar las condiciones logrando realizar de una mejor manera o con mayor eficacia cierto movimiento, todo esto basándonos en la información biológica que se tiene acerca de dicho ser vivo que realiza cierta tarea. En este trabajo se busca analizar la marcha humana con ayuda de la biomecánica debido a que se toman en



cuenta condiciones biológicas normales (por ejemplo para los movimientos de flexión y extensión sabemos que hay ángulos que no pueden ser rebasados por que el mismo cuerpo está diseñado de esa forma) y que nos permiten darnos una mejor idea del movimiento a partir de palancas, fuerzas ejercidas, impactos, etc.

Análisis de Marcha por Medidas Antropomórficas

Existen dos formas de estudiar la biomecánica de la marcha: medidas cualitativas y cuantitativas. Los médicos utilizan normalmente medidas cualitativas, las cuales se basa únicamente en observación y experiencia de los mismos sin tomar en cuenta medidas de los pacientes, medidas angulares, desviaciones numéricamente, etc. Por otro lado, están las medidas cuantitativas que se basan en medidas directas sobre el paciente, medidas reales que nos dan una idea precisa del movimiento, al contrario de las medidas cualitativas.

En este trabajo se busca obtener medidas cuantitativas por medio de procesamiento de imágenes obteniendo los ángulos reales de una persona durante su marcha. Además no es suficiente con conocer únicamente variables directas como lo es la posición, para conocer la dinámica de un cuerpo debemos considerar también cómo se mueve a través del tiempo, es decir la velocidad, ya que no es lo mismo observar a una persona realizar un movimiento en 1 hr que en 10 segundos, recordemos que durante un proceso de marcha a una velocidad normal la fase de apoyo debe tener aproximadamente un 40% y la fase de balanceo, de manera en influye la velocidad directamente, esta información nos acerca a realizar un mejor diagnóstico ya que nos apoyamos en tiempos o porcentajes que deberían cumplir cada una de las fases o subdivisiones de la marcha.

La velocidad angular no solamente nos ayuda a reconocer los tiempos adecuados durante las fases de la marcha. Conociendo el movimiento de cada una de las articulaciones podemos observar que tienen una velocidad diferente pero se pueden llegar a observar algunas irregularidades en su velocidad si estas presentan debilidades.

Sin embargo, las velocidades angulares no son algo que se pueda medir de manera directa sin utilizar aditamentos que entorpezcan la marcha normal de la persona. Uno de los métodos para medir estas velocidades angulares es la derivación numérica, pero esta no es muy confiable debido a que con un poco de ruido en las señales puede cambiar significativamente la señal de salida.



Otro modo de medición de velocidades son los estimadores de estados, los cuales actúan como un filtro que hace más suaves las señales permitiendo hacer una estimación acertada de las velocidades tomando en cuenta la dinámica del sistema y no una derivación directa que no toma en cuenta nada más que el estado anterior y el tiempo.

Ciclo de la marcha

La locomoción humana es una serie de movimientos alternantes, rítmicos, de las extremidades y del tronco que determinan un desplazamiento hacia delante del centro de gravedad [29]. El primer evento dentro del ciclo de la marcha se considera cuando un pie contacta con el suelo y termina con el siguiente contacto con el suelo del mismo pie. Se consideran dos grandes componentes dentro del ciclo de la marcha que son: la fase de apoyo y la fase de balanceo. Una pierna está en fase de apoyo cuando su pie está tocando el suelo, de lo contrario estará en fase de balanceo.

La longitud de la zancada se define como la distancia lineal entre los sucesivos puntos de contacto del talón del mismo pie, mientras que la longitud del paso es la distancia lineal entre el contacto del talón un pie hasta el contacto del talón del otro pie. Existe dentro de estas divisiones la distinción de un doble apoyo, que se da entre la primera y última parte de la fase de apoyo. La presencia de una fase de doble apoyo distingue el andar de correr.

Dentro del análisis de la marcha se evalúan las subdivisiones de la marcha entre cada zancada. La cantidad relativa de tiempo gastado durante cada fase del ciclo de la marcha, a una velocidad normal es de 60% la fase de apoyo, 40% la fase de balanceo y 20% (10% dentro de cada una de las otras fases) el doble apoyo, aunque al aumentar la velocidad de la marcha existe. Un aumento relativo en el tiempo gastado en la fase de balanceo disminuyendo el tiempo que se da durante la fase de doble apoyo, este tiempo tiende a cero mientras más rápida sea la marcha, pero no se considerará correr hasta que haya una ausencia total de esta fase.

En la fase de apoyo destacan cinco subdivisiones: contacto del talón, apoyo plantar, apoyo medio, elevación del talón y despliegue del pie. La fase de balanceo puede también dividirse en tres intervalos: aceleración, balanceo medio y desaceleración.

Podemos dividir las líneas de investigación de la biomecánica de la marcha en dos: la cinemática, que describe los movimientos del cuerpo tomando en cuenta los movimientos del cuerpo durante diferentes fases de la marcha, por ejemplo, a partir de relaciones angulares de los segmentos de la extremidad inferior durante el ciclo de la marcha; cinética que se refiere a las fuerzas que producen dicho movimiento, donde las fuerzas que principalmente influyen en dicho movimiento son la gravedad, inercia, reacciones del suelo y contracciones musculares.

Modelos mecánicos de la marcha

El problema de modelado de la marcha radica principalmente en que una variable depende no solamente de esa variable y el tiempo, cada una de las variables están relacionadas con las otras, este problema ha sido abordado por diferentes investigadores, cada uno lo analiza desde un punto de vista diferente pero no se han unificado todos estos avances. A continuación se citan algunos de los modelos más comunes dentro del análisis de la marcha.

Modelo del péndulo invertido

El modelo más simple de caminata es un péndulo invertido que oscila (cae y se eleva). El centro de masas del cuerpo será análogo a la masa del péndulo, y el centro de presiones del pie será análogo al pivote del péndulo [5].

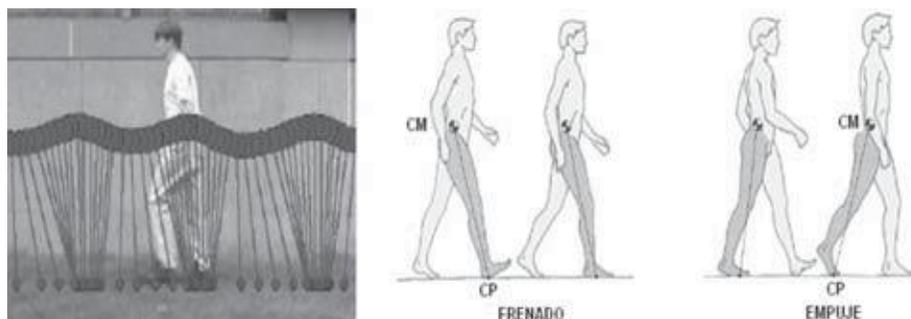


Fig. 1 Analogía de la caminata con el modelo del péndulo invertido

Modelo del doble péndulo invertido

Se considera péndulo invertido durante la fase de apoyo, donde cada uno de los péndulos los conforman la rodilla y la cadera, existe un mayor desplazamiento angular en el segundo péndulo (parte superior), por lo cual da un mayor aporte de información que el modelo de péndulo simple.

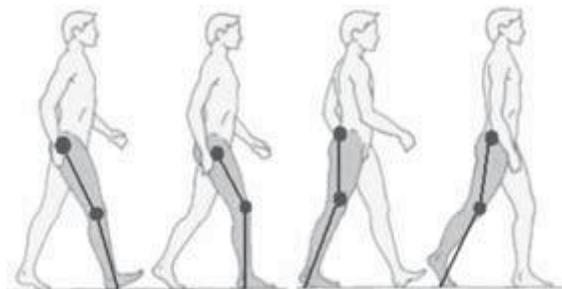


Fig. 2 Aplicación del modelo de doble péndulo durante la marcha

Modelo de siete eslabones

Existen dos aproximaciones para la solución del modelo de siete eslabones denominadas modelos dinámicos directo e inverso, un modelo dinámico directo es aquel que expresa la evolución temporal de las coordenadas articulares en función de las fuerzas y pares que intervienen, un modelo dinámico inverso es aquel que expresa las fuerzas y pares que

La utilización de la dinámica directa no es de gran ayuda dentro de la rama de este tipo de rehabilitación [3], ya que lo que se desea es conocer la fuerza necesaria para llegar a un movimiento dado, y no, que fuerza me da dado movimiento, pero para poder realizar un modelado inverso es necesario realizar el modelado directo y lo que se planea después es desarrollar observadores que permitan obtener los datos verdaderos de velocidad y posición.

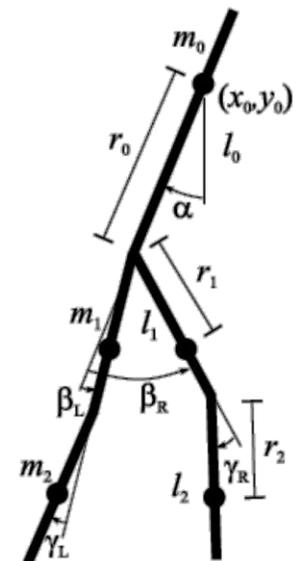


Fig. 3 Modelo utilizado para la creación del observador de estados

La figura 3, obtenida de [25] muestra claramente los parámetros utilizados para el modelado, en este modelado las variables son los ángulos de cada parte de la extremidad mientras que las longitudes y masas son siempre constantes.

Estos datos son obtenidos y enviados al observador por medio de procesamiento de imágenes, este procesamiento se basa principalmente en operaciones morfológicas y propiedades de vecindad dentro de las imágenes.

Procesamiento digital de imágenes

El procesamiento digital de imágenes, incluye un conjunto de técnicas que operan sobre la representación digital de una imagen, a objeto de destacar algunos de los elementos que conforman la escena, de modo que se facilite su posterior análisis, bien sea por parte de un usuario (humano) o un sistema de visión artificial. En general, las técnicas de procesamiento de imágenes son aplicadas cuando resulta necesario realzar o modificar una imagen para mejorar su apariencia o para destacar algún aspecto de la información contenida en la misma, o cuando se requiere, medir, contrastar o clasificar algún elemento contenido en la misma. También se utilizan técnicas de procesamiento, cuando se requiere combinar imágenes o porciones de las mismas o reorganizar su contenido [18].



La imagen digital corresponde a un arreglo de dos dimensiones (2D) que se podría denotar como $f(x,y)$ en donde cada punto se denomina pixel y tiene asociadas las coordenadas espaciales definidas por x e y . La imagen tiene un tamaño de $N \times M$ pixeles en donde N corresponde al ancho de la imagen y M corresponde al largo de la imagen. Cada pixel corresponde a un valor de intensidad representativa de la información visual o emisión que se ha adquirido. Tal valor binario requiere un determinado número de bits para representar la información y lo más usual es 8 bits que corresponde a un byte o bien, 16 bits o 32 bits que corresponden a 2 bytes y 4 bytes respectivamente.

Las imágenes tridimensionales (3D) se denotan como $f(x,y,z)$ en donde cada punto se denomina voxel y tiene asociadas tres coordenadas espaciales definidas por x , y , z . En este caso el tamaño total sería $N \times M \times P$ voxels y es equivalente a manejar P imágenes bidimensionales cada una de tamaño $N \times M$ pixeles. El veloz desarrollo y proliferación de las tecnologías de adquisición de imágenes médicas está revolucionando la medicina. Con el incremento en tamaño y número de imágenes médicas, se ha hecho necesario el uso del computador para facilitar el procesamiento y análisis de las mismas [19].

En particular, los algoritmos para el delineamiento de estructuras anatómicas y otras regiones son un componente clave para asistir y automatizar ciertas tareas, estos algoritmos se denominan algoritmos de segmentación. Los métodos para llevar a cabo las segmentaciones varían ampliamente dependiendo de la aplicación específica, tipo de la imagen, y otros factores. Por ejemplo, la segmentación del tejido del cerebro tiene diferentes requerimientos que la segmentación de un hígado.

Otros factores como el ruido, volúmenes parciales y movimientos en la imagen, también pueden tener consecuencias significativas en el desempeño de los algoritmos de segmentación. Actualmente no existe un método de segmentación que otorgue resultados aceptables para todo tipo de imagen médica. No existen métodos que sean generales y que puedan ser aplicados a cualquier variedad de datos, más aún para el propósito de esta tesis, que es la evaluación de la biomecánica de la marcha, no hay un algoritmo de segmentación que nos regrese de manera 100% certera cada una de las extremidades del cuerpo sea cual sea su entorno.

Sin embargo los métodos que son especializados para aplicaciones particulares pueden obtener mejores resultados tomando en cuenta conocimiento a priori. Por lo tanto, la

selección de un método apropiado para un problema de segmentación puede ser muy difícil. Clásicamente, la segmentación de imágenes se define como la partición de una imagen en regiones constituyentes no encimadas, las cuales son homogéneas con respecto a alguna característica como una intensidad o una textura. Si el dominio de la imagen está dado por I , entonces el problema de segmentación consiste en determinar el conjunto $S_k \subset I$ cuya unión es la imagen I completa. Por lo tanto, el conjunto que conforma la segmentación debe satisfacer

$$I = \bigcup_{K=1}^K S_k$$

Donde $S_k \cap S_j = 0$ para $k \neq j$ y cada S_k está conectado. Idealmente, un método de segmentación encuentra aquellos conjuntos que corresponden a distintas estructuras o regiones anatómicas de interés en la imagen [19].

Al eliminar la restricción de que las regiones estén conectadas, determinar los conjuntos S_k es llamado clasificación de píxel y a los conjuntos se les llama clases. La clasificación de píxeles frecuentemente es un objetivo deseable en el tratamiento de imágenes médicas, particularmente cuando se necesita clasificar regiones desconectadas que pertenecen al mismo tejido.

La determinación del número de clases K en la clasificación de píxeles puede ser un problema complejo, por lo que generalmente se asume conocida, basado en conocimientos previos de la anatomía que se está tomando en consideración

Técnicas de Procesamiento basadas en píxeles

Estas técnicas consisten en algoritmos que modifican el valor de un píxel basados únicamente en el valor previo de tal píxel o en su localización. Ningún otro valor de píxel se involucra en la transformación. El procesamiento se realiza desarrollando un barrido píxel por píxel dentro de la imagen a procesar. De manera general estas técnicas no modifican las relaciones espaciales dentro de la imagen y en consecuencia no pueden modificar el grado de detalle contenido en las mismas, son simples y pueden resultar útiles solas o en conjunto con otras técnicas más complejas.

Histograma

Mediante el histograma de una imagen conseguimos hacernos una idea aproximada de su distribución de niveles de gris y, por tanto, de su contraste. El histograma es una curva que en abscisas representa cada uno de los niveles de gris, mientras que en ordenadas representa la frecuencia relativa de aparición de ese nivel de gris.

Así, una imagen cuyo histograma muestre que sus niveles de gris más abundantes se concentren en torno a un pequeño rango de valores, probablemente será una imagen poco contrastada, mientras que un histograma cuyos pixeles presenten niveles de gris más o menos distribuidos de forma uniforme en el rango dinámico permitido, representará a una imagen fuertemente contrastada. Calcular el histograma de una imagen, es simplemente contar el número de apariciones de cada uno de los posibles niveles de gris presentes en la misma. Si la imagen es en color, es posible extraer tres histogramas, cada uno de ellos correspondiente a un color primario [20].

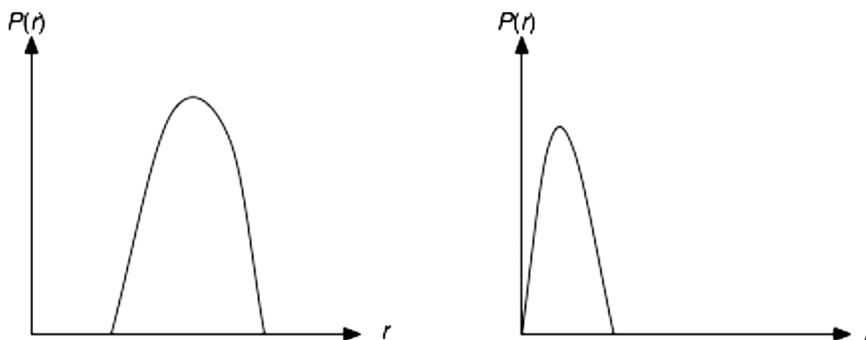


Fig. 4 Ejemplos de Histogramas, a la izquierda muestra el histograma de una imagen de poco contraste, a la derecha una imagen muy oscura

Ecualización del histograma

La ecualización de un histograma consiste en encontrar una transformación con la cual el histograma tenga una representación uniforme, es decir, con la ecualización trataremos de igualar lo más posible el histograma de una imagen al histograma ideal. Consideremos por un momento funciones continuas.

Sea r la variable que representa los niveles de gris de la imagen. Primeramente asumimos que nuestro histograma ha sido normalizado en el intervalo $[0, 1]$, donde $r = 0$ representa el nivel de gris negro y $r = 1$ el nivel de gris blanco.

Para cualquier r que satisfaga las condiciones anteriores, centramos nuestra atención en transformaciones de la forma:

$$s = T(r) \qquad 0 \leq r \leq 1$$

La cual produce un nivel s para cada valor del pixel r en la imagen original. Sin embargo, para llevar a cabo esta ecualización es necesario establecer dos restricciones, ya que sin estas podríamos obtener resultados erróneos [21]:

1. $T(r)$ debe ser *monotónicamente creciente*, esto indica que la pendiente de la función no puede ser negativa, ya que si fuera así, la imagen se vería afectada en su totalidad, porque lo que estaríamos haciendo sería invertirla en sus tonalidades.

$$\frac{ds}{dr} > 0$$

2. $T(r)$ debe tener inversa y debe ser *monotónicamente creciente*. Para resolver un problema como este se debe suponer que r y s son continuas y que además:

- r y s son variables aleatorias y continuas.
- $P(r)$ y $P(s)$ son funciones de densidad de probabilidad de r y s .

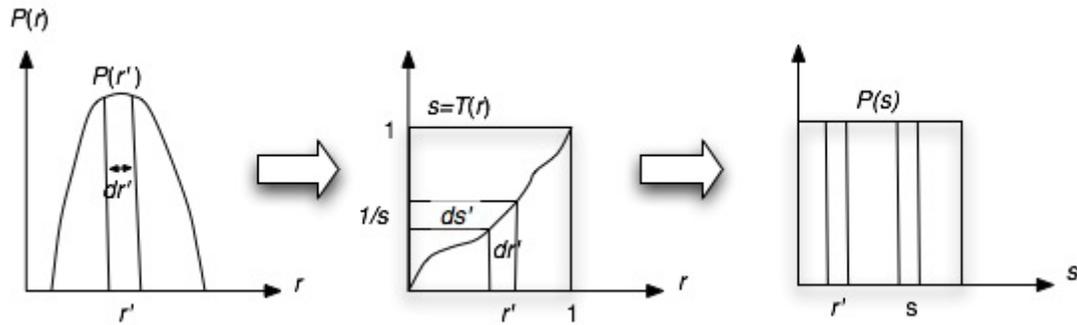


Fig. 5 Ecuación de histograma

La figura 6 muestra un ejemplo de ecualización. Podemos observar del histograma de la imagen original que dicha imagen posee muchos niveles de gris bajos, es decir, la imagen es muy oscura. Después de la ecualización del histograma, podemos observar que los niveles de gris se distribuyen más uniformemente que en la imagen original.

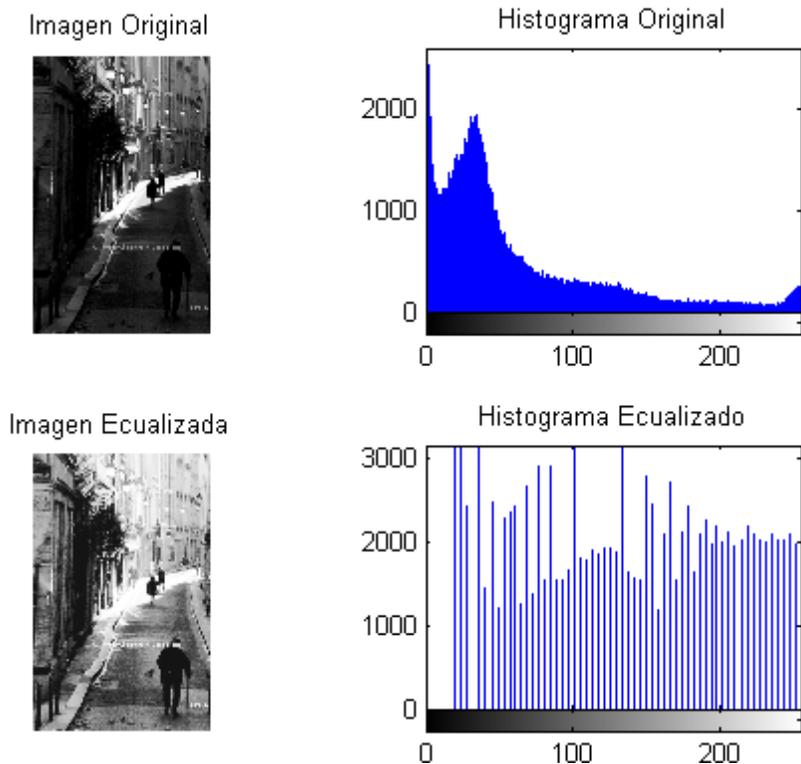


Fig. 6 Arriba: Imagen original y su histograma. Abajo: Imagen ecualizar histograma ecualizados



Las técnicas de procesamiento y análisis de imágenes digitales en color, originalmente eran generalizaciones de aquellas usadas para el procesamiento de las imágenes digitales en blanco y negro (tonos de gris, también llamadas monocromáticas). El proceso consistía en transformar la imagen de color del sistema RGB (de sus siglas en inglés Red, Green and Blue, en español llamados los canales rojo verde y azul) a un modelo de color diferente, que nos otorgue información importante.

Etiquetado (Labeling)

Es el proceso de asignar una designación significativa a cada región clase y puede ser llevada a cabo separadamente de la segmentación. Este proceso mapea el índice numérico del conjunto S_k , a una designación anatómica. En imágenes médicas, frecuentemente las etiquetas son obvias y pueden ser determinadas mediante inspección del técnico o fisiólogo. El etiquetado automático por computador es deseable cuando las etiquetas no son obvias o el sistema realiza procesamiento automático de imágenes. Una situación típica en la que se utiliza el etiquetado ocurre en la mamografía digital cuando se segmenta la imagen en distintas regiones y las regiones se etiquetan como sanas o tumorosas.

Modelos de Color

La luz como fenómeno físico corresponde a una energía electromagnética en el rango de los 400-700 nm, lo cual se percibe como los diferentes colores dentro del espectro. La luz se refleja de los objetos, excitan unas células llamadas conos ubicados en la retina y que son sensibles a la luz roja, azul o verde en diferente proporción cada una.

Modelo HSL

Se denomina Longitud de Onda Dominante a la luz que se ve y que corresponde a una determinada cantidad de "Tono" (hue). La saturación corresponde a la pureza del color. Corresponde a la proporción de luz pura de la longitud de onda dominante y la luz blanca necesaria para definir el color. Un color 100% puro tiene una saturación del 100% y no contiene luz blanca. Colores que se alejen del color puro contiene una mezcla entre luz blanca y color puro comprendida entre 0% y 100% de saturación. La luz blanca y los grises tienen un 0 % de saturación ya que no contienen color ni ninguna longitud de onda dominante.

Modelo RGB

El sistema RGB emplea un sistema de coordenadas cartesianas. Los colores RGB son aditivos, es decir un color se obtiene dependiendo de las diferentes proporciones de RGB. En este espacio se define un cubo de lado la unidad

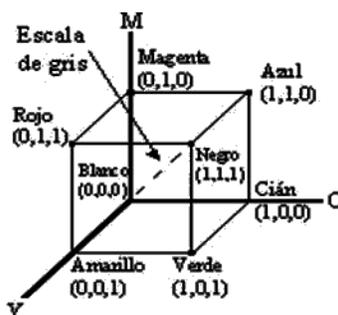


Fig. 7 Representación gráfica del modelo RGB, la línea punteada indica que cuando los 3 componentes tienen el mismo valor, se produce un tono de gris. El negro es (0,0,0), el blanco es (1,1,1)

La gama de colores que cubre el modelo RGB está definida por los colores de los fósforos de la pantalla CRT. Dos pantallas con diferentes calidades de fósforos cubren diferentes gamas de colores.

El modelo CMY

CMY corresponde a Cian, Magenta y amarillo (Yellow) que son los complementarios del rojo, verde y azul (RGB). Se denominan colores sustractivos ya que se utilizan como filtros para sustraer colores de la luz blanca. El sistema coordinado es el mismo que en el modelo RGB pero donde había negro ahora existe luz blanca y viceversa. Este sistema es el más utilizado en impresión. Una superficie impresa con tinta cian, no refleja ningún rojo. El cian sustrae el rojo de la luz blanca, que en sí misma es la suma de rojo, verde y azul. En términos aditivos cian es blanco menos rojo, es decir azul más verde.

Magenta absorbe el verde, luego es azul más rojo, amarillo absorbe azul, luego es rojo + verde. Una superficie pintada con cian y amarillo, absorbe el rojo y el azul, luego solo el verde es visible. Una superficie con magenta, amarillo y cian absorbe el rojo, el azul y el verde, luego sólo se aprecia el negro.

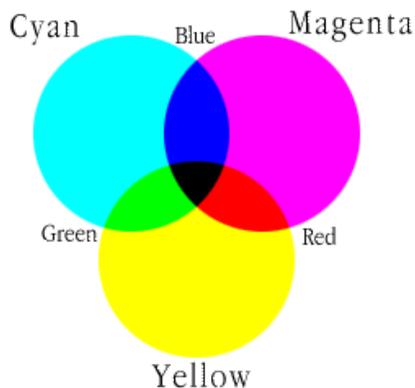


Fig. 8 Representación de los colores de CMY

Modelo HSV

El modelo HSV fue creado en 1978 y está pensado en la definición del color que realizaría un artista. HSV corresponde a Tono (hue), saturación y valor (value). También se denomina HSB, siendo B el brillo.

El sistema coordenado es cilíndrico, y el subconjunto de este espacio donde se define el color es una pirámide de base hexagonal.

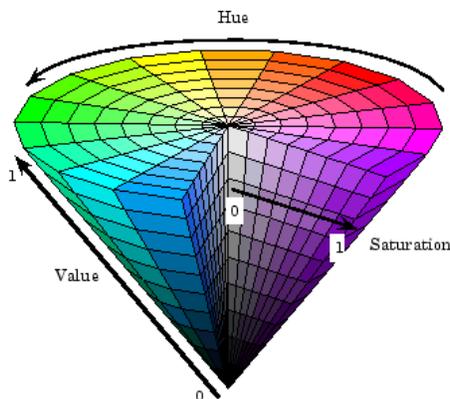


Fig. 9 Representación gráfica del modelo HSV

El área hexagonal corresponde a un valor de $V=1$, conteniendo los colores brillantes. Sin embargo hay que tener en cuenta que los colores con $V=1$ no se perciben con el mismo brillo por el observador. El tono se mide como el ángulo alrededor del eje S. El rojo se sitúa a 0° , el verde a los 120° , etc. Los colores complementarios son aquellos que se encuentren a 180° del señalado. El valor de S corresponde al valor desde 0 (coincidiendo con el eje de la pirámide) hasta 1, coincidiendo con el final del área hexagonal de la

pirámide. La pirámide tiene de altura la unidad. El vértice corresponde al negro con coordenadas $S=0$ y $V=0$. El blanco corresponde a $S=0$ y $V=1$. Los valores coincidentes con la altura y por lo tanto con V variando de 0 a 1, son los grises. Cuando $S = 0$ el valor de $H=0$ no es importante y se dice que está indefinido. Cuando $S > 0$; el valor de H empieza a tener importancia. Por ejemplo, el rojo puro se sitúa a $H=0$, $S=1$, $V=1$. Si se añade blanco S disminuye pero sin cambiar V . Las sombras se crean manteniendo $S=1$ y disminuyendo V . Variando H corresponde a variar el color base de la mezcla. Si el cubo del modelo de color RGB definido anteriormente se corta por planos perpendiculares a su diagonal principal, se obtiene un hexágono similar al de la pirámide (en realidad más pequeña).

Modelo HLS

Corresponde a un modelo de color definido por el tono, la luminosidad y la saturación. El espacio se define en un espacio cilíndrico donde se define una doble pirámide hexagonal. H es el ángulo alrededor del eje vertical, siendo el rojo a 0° . Los colores tienen el mismo orden que en el diagrama CIE siguiéndolos en sentido anti horario. El color complementario está a 180° del color indicado. La saturación se mide radialmente variando desde 0 a 1. La luminosidad es 0 para el negro (en vértice inferior de la doble pirámide) y vale 1 para el blanco (en el vértice superior de la doble pirámide) [23].

ESTIMADORES DE ESTADOS

La estimación u observación de estados resuelve el problema de control por retroalimentación cuando los estados del sistema no pueden ser medidos de manera directa y la única información disponible en cada instante de tiempo está en función de una variable generalmente ruidosa [30]. La observación de sistemas no lineales se concentra en dos aspectos principales: a) estimación de parámetros basada en la lista completa de las variables, y b) estimación del espacio de estado (filtrado) basado en la dinámica del sistema. Consideremos un sistema no lineal continuo en el tiempo, es posible medir su salida y además está dada por la siguiente ecuación:

$$\dot{x}_t = f(x_t, t) + \xi_t, x_0 \text{ está definido}$$

$$y_t = Cx_t + n_t$$



Donde $x_t \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados en $t \geq 0$, $y_t \in \mathbb{R}^m$ es la salida correspondiente, disponible para el diseñador en cualquier tiempo, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la matriz de estados de salida, ξ_t y n_t es ruido en la dinámica del sistema y en la salida respectivamente.

En varios problemas prácticos se tiene un conocimiento a priori que el vector de estados x_t siempre pertenece a un dado conjunto compacto X (incluso en presencia de ruido) que tiene un sentido físico concreto, es decir, $x_t \in X$ y X es un conjunto compacto debido a que se conocen sus propiedades físicas las cuales restringen los valores estén fuera de los rangos físicos del sistema.

El problema de filtrado (estimación de estados) consiste en designar una función vector $\hat{x}_t = \hat{x}_t(\mathcal{Y}_{\tau \in [0,t]}) \in \mathbb{R}^n$ dependiendo solamente de la información $\mathcal{Y}_{\tau \in [0,t]}$ la cual si está disponible hasta el tiempo t de tal forma que x_t se acerca más a su valor real a pesar de no ser medible. De manera que el problema se traduce a encontrar esa función $\hat{x}_t(\mathcal{Y}_{\tau \in [0,t]})$ que a partir de la información disponible se puedan obtener los demás estados.

La cuantificación de la proximidad del estado estimado al real depende de las consideraciones dentro de los estados dinámicos así como de los efectos de ruido. La mayoría de los filtros que resuelven este problema se presentan con la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt} \hat{x}_t = F(t, \hat{x}_t, \mathcal{Y}_{\tau \in [0,t]}), \hat{x}_t \text{ es un vector.}$$

Observador Trivial

La manera trivial de estimar los estados de un sistema conocido

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Es crear una copia

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t)$$



Cuyos estados proveen una $\hat{z}(t)$ estimada del sistema original $\dot{x}(t)$. (Conocemos la entrada $u(t)$, de manera que podemos aplicar esto a la copia al igual que con el sistema original). La simplicidad de este método tiene un lado malo, si el estado inicial de la copia es exactamente el mismo que el del sistema original, por ejemplo $z(0) = x(0)$, la copia obtendrá exactamente los valores iniciales del sistema, pero si los estados iniciales no son exactamente los mismos, el error está dado por

$$\dot{e}(t) = [\dot{z}(t) - \dot{x}(t)] = A[z(t) - x(t)] = Ae(t)$$

Si A es una matriz Hurwitz (que sus eigenvalores están en el plano izquierdo) entonces este error llegará a cero. Por otro lado, si algún eigenvalor de A tiene parte real positiva, un error inicial que no sea cero, llevará siempre a que el error tienda a infinito.

9. METODOLOGÍA

Se desarrolló un algoritmo a partir de dos fotografías (una simula cada cámara) para realizar pruebas y medidas directas sobre ellas. Una vez que se logró tener la reconstrucción tridimensional y la medición correcta de cada ángulo dentro de la imagen es posible aplicarlo a las imágenes de un video conjunto por las dos cámaras. Este video debe ser tomado en condiciones favorables de iluminación y los dos videos deben estar sincronizados a través de una computadora ya que si intentamos comenzar la grabación al mismo tiempo por medios humanos siempre habrá un retraso sustancial que no permitiría lograr que lo que ve una cámara no es lo mismo que ve la otra, al menos tomando el mismo tiempo cero como referencia.

Las tareas más significativas realizadas a lo largo del proyecto se separaron de manera general en los siguientes puntos.

1. Posicionamiento de las cámaras

Se pensaron dos maneras para el posicionamiento de las cámaras. La primera fue colocarlas separadas por una distancia lineal conocida utilizando conocimientos de visión estereoscópica para poder realizar las medidas de profundidad. La segunda manera pensada fue que las cámaras estén posicionadas de manera que el eje de cada una forme un plano perpendicular con el de la otra. Esto es necesario y se debe tener cuidado debido a que dentro del cálculo de las distancias y ángulos se tiene la consideración de que son perpendiculares y si el ángulo cambiara las mediciones no serían correctas. Se escogió el segundo ya que esto nos permite un mayor rango de detección permitiendo que el paciente tenga cierto grado de giro (Figura 10).

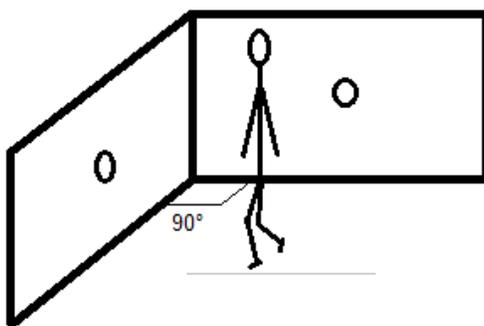


Fig. 10 Posición correcta de las cámaras

2. Posicionamiento de marcadores

Para la detección adecuada de cada una de las extremidades se decidió colocar tiras en cada una de partes móviles de las piernas, es decir, parte alta y baja de cada pierna y pies, dando un total de 6. Estas tiras deben cumplir con ciertos requerimientos que son importantes para que la detección se dé de manera adecuada:

- Sobre las extremidades izquierdas las tiras deben tener un grosor mayor que las de las derechas ya que en el algoritmo se distingue la pierna derecha de la izquierda basado en el grosor de las mismas.
- Color brillante para que el algoritmo de detección funcione correctamente, los colores brillantes son fácilmente detectables ya que se pueden excluir los colores opacos dentro de la imagen.
- Tener un color contrastante con el fondo y la ropa del sujeto a evaluar para que la exclusión de colores se realice de forma adecuada.
- Ser rígidas de modo que no se doblen con el movimiento del paciente. Colocarlas correctamente como se muestra en la figura.

En la figura 14 se muestra como deben estar colocados los marcadores, tanto en grosor como en ambiente y contraste con el fondo y la ropa del sujeto a evaluar.

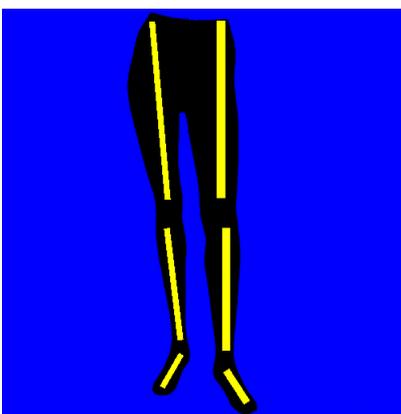


Fig. 11 Posicionamiento de los marcadores en un ambiente y fondo correctos

3. Segmentación

La segmentación es la manera en la que se encuentran los objetos deseados dentro de una imagen, ya sea por redes neuronales, por colores, etc. Se utilizó segmentación por colores utilizando el modelo HSV que nos permite encontrar colores sin preocuparnos demasiado las condiciones de iluminación de la imagen, aunque la iluminación siempre termina definiendo un problema con el que se debe trabajar ya que gracias a la esta se da la formación de colores y muchas veces los objetos no son uniformes y no reflejan la luz de manera uniforme causando problemas. El algoritmo es el siguiente:

1. Leer imagen y guardarla en I
2. Convertir la imagen de formato RGB a HSV de acuerdo a la siguiente ecuación:
3. Crear una nueva imagen binaria que será la imagen segmentada de salida. Todo aquello que no esté dentro de un rango del color de las tiras será cero, aquello que sea del color escogido será 1. Esto se define dentro de la capa H, con una S mayor a 0.3 y V mayor a 0.4 es elegido como otro criterio debido a que una S menor a 0.3 indicaría colores muy parecidos al blanco, y en este caso no es lo que buscamos. Del mismo modo V debe ser mayor a 0.4 ya que no buscamos colores oscuros.

Este pseudocódigo se implemento en software a través del siguiente diagrama de flujo:

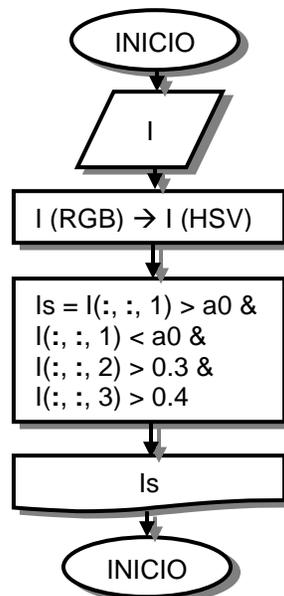


Diagrama de flujo para la segmentación



4. Etiquetado

Una vez que tenemos los objetos (cada una de las extremidades) segmentados se procede a etiquetar cada uno, es decir, reconocer cada uno de los objetos dentro de la imagen ya que cada imagen segmentada tendrá 6 objetos blancos a los cuales se debe encontrar sus características por separado, etiquetarlos es la forma de hacerlo debido a que obtenemos cada uno de los elementos de la imagen con una “etiqueta” que nos dirá que son diferentes y poder sacar la información adecuadamente. El pseudocódigo utilizado para generar el programa encargado de esta parte se describe a continuación:

1. Leer imagen segmentada I_s .
2. Crear una matriz C del mismo tamaño que I_s .
3. Buscar en cada pixel de la imagen, si uno es blanco – paso 4 si no, seguir buscando.
4. Crear una matriz “periferia” que contenga los pixeles en la periferia del pixel blanco encontrado (un cuadro formado de 2 a la izquierda, 2 a la derecha, 2 arriba y 2 abajo).
5. Si alguno de los de los pixeles dentro de la matriz periferia es blanco multiplicar los pixeles de I_s por el máximo de los que contiene la matriz periferia guardándolos en C .
6. Si solo el pixel del centro es 1, se iguala este en la matriz C al contador lab ya que es un objeto nuevo y se incrementa el contador lab .
7. La matriz final C contendrá cada uno de los objetos encontrados con un número diferente.

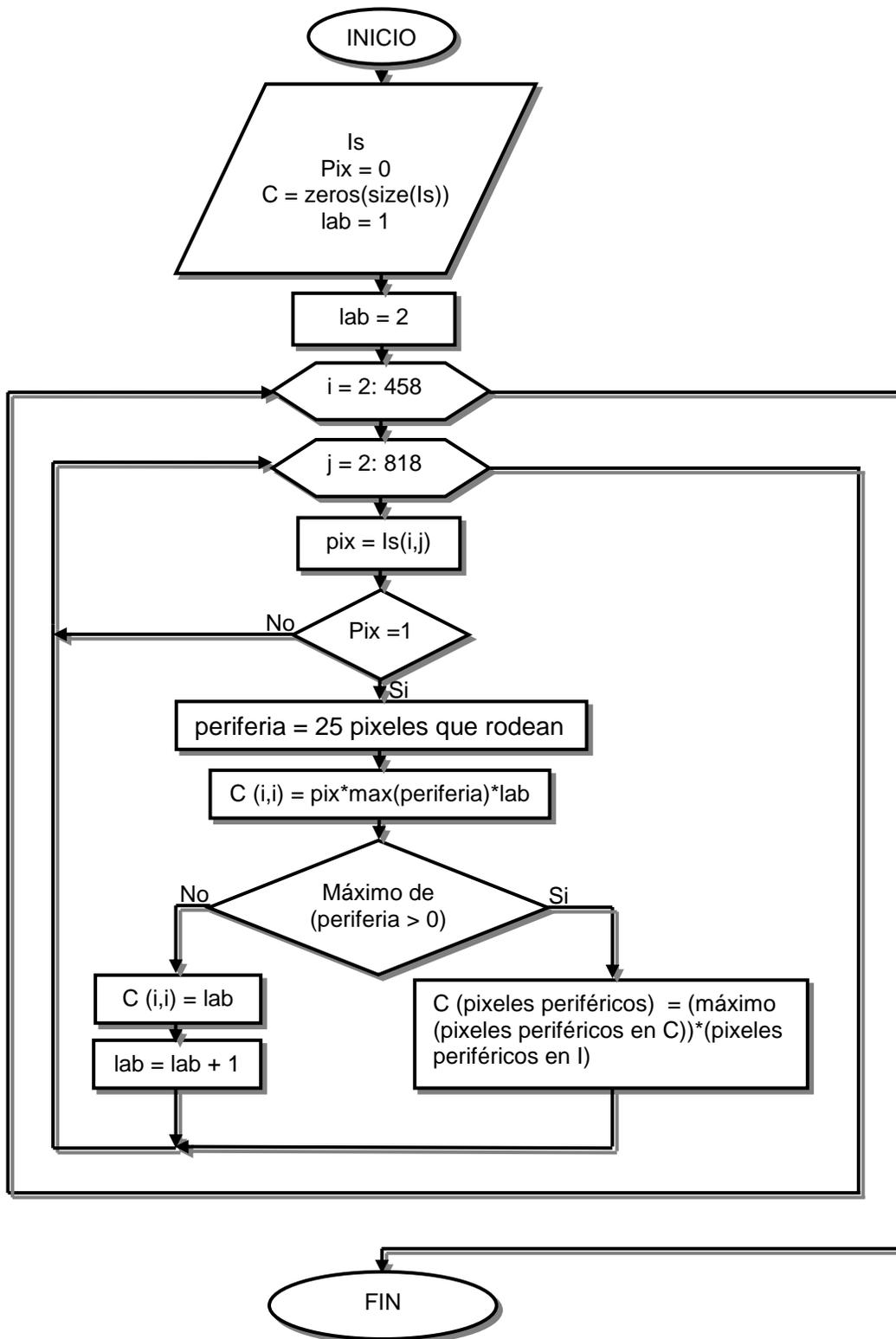


Diagrama de flujo para etiquetado de una imagen.



5. Espaciado 3D

Se realiza el proceso de segmentación y etiquetado con las dos imágenes, una vez reconocida cada extremidad como pierna izquierda o pierna derecha (superiores o inferiores) Tomamos la coordenada x de una proyección, la coordenada y de la otra imagen y para la altura (eje z) se realiza un promedio de cada punto de cada objeto de una imagen con la otra, al obtener estos puntos se realiza la reconstrucción para la visualización en 3D. El reconocimiento de cada extremidad se define por medio de la distinción del área de cada uno, ya que las tiras son de diferente grosor, los objetos que tengan mayor área serán los del lado izquierdo y la altura se diferencia por simple comparación de alturas del centroide de cada uno. El pseudocódigo del algoritmo desarrollado para calcular los ángulos se detalla a continuación:

1. Leer imágenes frontal y lateral (I1 e I2).
2. Binarizar las imágenes de modo que el fondo tenga valor 0.
3. Etiquetar cada objeto separado dentro de la imagen I1.
4. Contar el número de píxeles que tiene cada objeto etiquetado y guardarlo como área.
5. Encontrar las coordenadas de un cuadro que rodee cada uno de los objetos, guardarlos en un vector como $[x \ y \ w \ h]$ donde x e y son las coordenadas de la parte superior izquierda del cuadro, w es el ancho y h es la altura.
6. Encontrar el centroide de cada objeto dentro de la imagen definido como:

$$c_x = x + \frac{w}{2} \qquad c_y = y + \frac{h}{2}$$

7. Definir la orientación del objeto dentro de cada cuadro; dependiendo de qué esquina toque el objeto se definirá la pendiente, el ángulo se definirá como:

$$\theta = \arctan\left(\frac{w}{h}\right) \text{ ó } \theta = \arctan\left(\frac{h}{w}\right)$$

Buscando siempre encontrar el ángulo con respecto a la horizontal.



8. Ordenar en el centroide, área, orientación y el vector del cuadro en un mismo vector con la forma: $Datos = [Centroide\ Areas\ O\ Box]$
9. Ordenar los datos por áreas, ya que el conjunto de datos que tienen la mayor área pertenecerán a la pierna izquierda, los pies tendrán el área más pequeña pero el de menor área pertenecerá a la pierna derecha.
10. Repetir los pasos 3 a 9 con la imagen I2.
11. Iniciar un eje coordenado de 3 dimensiones, donde el eje x e y tendrán el tamaño 'width' de las imágenes obtenidas y el eje z tendrá el tamaño 'height'. El Cual define el espacio de visión de las cámaras.
12. Definir las coordenadas para cada uno de los objetos encontrados en el eje tridimensional, tomando como coordenada x del "x" de la foto de la cámara frontal, la coordenada y del "x" de la foto lateral y la coordenada z del máximo del "y" de las dos fotografías.
13. Calcular las coordenadas generalizadas para cada extremidad y guardarlas en el vector q.

6. Obtención de parámetros

Una vez que conocemos la posición en el espacio 3D de cada extremidad procedemos a calcular los ángulos de cada uno, los ángulos entre ellos.

Para la obtención del ángulo de cada extremidad se debe considerar la información de cada una de las imágenes debido a que el ángulo real se obtiene a través de la proyección de las líneas formadas por cada extremidad con el eje x y el eje y. El algoritmo anterior devuelve los extremos de cada uno, de manera que se traduce a una línea tridimensional cuyas coordenadas conocemos. En la figura 13 se muestra claramente los triángulos para calcular el ángulo correcto.

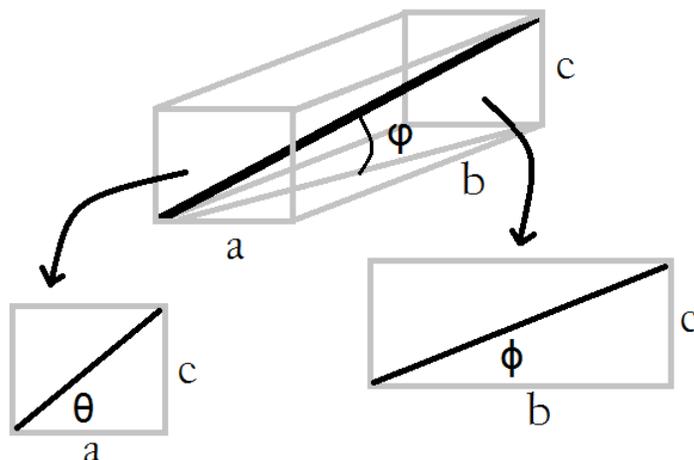


Fig. 12 Triangulación utilizada para medida de ángulos para cada extremidad

El ángulo buscado para cada eslabón se encuentra de manera sencilla basándonos en la caja formada por cada una de las proyecciones de cada cámara. Está definido por:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}\right)$$

Esta operación se realiza con todos los eslabones encontrados y se guarda en un vector que contenga las 7 variables. Este vector puede graficarse directamente punto a punto para obtener una gráfica del movimiento de cada articulación, hablando de movimiento angular. Esta información también se envía al observador para calcular las velocidades angulares.

8. Modelado

Para hacer medidas de los parámetros biomecánicos como la zancada, paso, cadencia, etc. se requiere hacer el reconocimiento en las imágenes sucesivas y hacer la interpretación de las señales. El modelo matemático desarrollado pretende aproximarse a la forma del cuerpo humano, se considera el caso más simple sin inercia ni fuerzas de fricción, y el único giro posible es dado sobre el plano x-y, que está determinado por el ángulo γ . Consta de 7 eslabones cilíndricos descritos en la figura 13 el eje cartesiano se encuentra en el centro del cilindro 1, el cilindro 1 tiene radio r_1 y los demás cilindros tiene radio r_2 , cada cilindro tiene una longitud l_n y masa m_n donde n es el número de cilindro correspondiente.

Para el desarrollo del modelo matemático se utilizó el método de Euler-Lagrange, de acuerdo a método las ecuaciones de movimiento se rigen por la siguiente ecuación:

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_i} - \frac{dL}{dq_i} = FNP$$

Donde $q = [\gamma \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6 \ \theta_7]^T$ denota cada una de las variables dentro de nuestro sistema. L es el lagrangiano del sistema y FNP son las fuerzas no potenciales como fricción, que al ser el caso más simple no fueron consideradas.

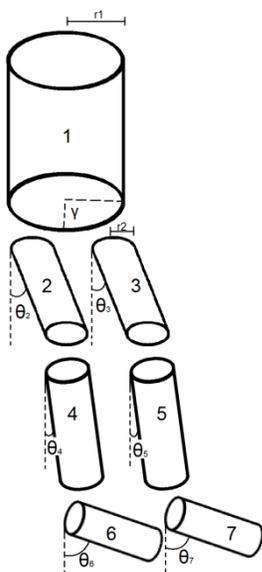


Fig. 13 Diagrama para realizar el modelado de 7 eslabones tridimensional

El lagrangiano está definido como:

$$L = T - V$$

T es la energía cinética de cada eslabón y V la energía potencial, se definen como sigue:

$$T = \frac{1}{2} mV^2 \Rightarrow \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{y}^2) \quad , \quad V = mgh$$

Iniciamos con el cálculo de la energía cinética, para lo cual primero debemos definir las coordenadas cartesianas de cada centro de masa de cada cilindro (menos el cilindro 1 ya

que el origen del eje coordenado se encuentra en el centro de masa de dicho cilindro). Las coordenadas del centro de masa para el eslabón 2 se encuentran definidas por:

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_2}{2} + \frac{l_2}{2} \text{sen } \theta_2 \text{sen } \gamma \\y_2 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_2}{2} + \frac{l_2}{2} \text{sen } \theta_2 \text{cos } \gamma \\z_2 &= \frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{2} \text{cos } \theta_2\end{aligned}$$

Para el eslabón 3:

$$\begin{aligned}x_3 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_3}{2} + \frac{l_3}{2} \text{sen } \theta_3 \text{sen } \gamma \\y_3 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_3}{2} + \frac{l_3}{2} \text{sen } \theta_3 \text{cos } \gamma \\z_3 &= \frac{l_1}{2} + \frac{l_3}{2} \text{cos } \theta_3\end{aligned}$$

Para el eslabón 4:

$$\begin{aligned}x_4 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_2}{2} + l_2 \text{sen } \theta_2 \text{sen } \gamma + \frac{l_4}{2} \text{sen } \theta_4 \text{sen } \gamma \\y_4 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_2}{2} + l_2 \text{sen } \theta_2 \text{cos } \gamma + \frac{l_4}{2} \text{sen } \theta_4 \text{cos } \gamma \\z_4 &= \frac{l_1}{2} + l_2 \text{cos } \theta_2 + \frac{l_4}{2} \text{cos } \theta_4\end{aligned}$$

Para el eslabón 5:

$$\begin{aligned}x_5 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_3}{2} + l_3 \text{sen } \theta_3 \text{sen } \gamma + \frac{l_5}{2} \text{sen } \theta_5 \text{sen } \gamma \\y_5 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_3}{2} + l_3 \text{sen } \theta_3 \text{cos } \gamma + \frac{l_5}{2} \text{sen } \theta_5 \text{cos } \gamma \\z_5 &= \frac{l_1}{2} + l_3 \text{cos } \theta_3 + \frac{l_5}{2} \text{cos } \theta_5\end{aligned}$$

Para el eslabón 6:

$$\begin{aligned}x_6 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_2}{2} + \left(l_2 \text{sen } \theta_2 + l_4 \text{sen } \theta_4 + \frac{l_6}{2} \text{sen } \theta_6 \right) \text{sen } \gamma \\y_6 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_2}{2} + \left(l_2 \text{sen } \theta_2 + l_4 \text{sen } \theta_4 + \frac{l_6}{2} \text{sen } \theta_6 \right) \text{cos } \gamma \\z_6 &= \frac{l_1}{2} + l_2 \text{cos } \theta_2 + l_4 \text{cos } \theta_4 + \frac{l_6}{2} \text{cos } \theta_6\end{aligned}$$

Para el eslabón 7:

$$\begin{aligned}x_7 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_2}{2} + \left(l_3 \text{sen } \theta_3 + l_5 \text{sen } \theta_5 + \frac{l_7}{2} \text{sen } \theta_7 \right) \text{sen } \gamma \\y_7 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_2}{2} + \left(l_3 \text{sen } \theta_3 + l_5 \text{sen } \theta_5 + \frac{l_7}{2} \text{sen } \theta_7 \right) \text{cos } \gamma \\z_7 &= \frac{l_1}{2} + l_3 \text{cos } \theta_3 + l_5 \text{cos } \theta_5 + \frac{l_7}{2} \text{cos } \theta_7\end{aligned}$$

Una vez obtenidas las posiciones de cada centro de masa podemos calcular la velocidad angular y elevar cada una al cuadrado para calcular la energía cinética de cada eslabón (el desarrollo y reducción se puede observar en el Anexo 1), quedan como sigue:

$$\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 = \frac{l_2^2}{4} (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\gamma}^2 \text{sen}^2 \theta_2)$$

$$\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2 = \frac{l_3^2}{4} (\dot{\theta}_3^2 + \dot{\gamma}^2 \text{sen}^2 \theta_3)$$

$$\dot{x}_4^2 + \dot{y}_4^2 + \dot{z}_4^2 = l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{l_4^2}{4} \dot{\theta}_4^2 + \dot{\gamma}^2 \left(l_2 \text{sen} \theta_2 + \frac{l_4}{2} \text{sen} \theta_4 \right)^2 + l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_2 - \theta_4)$$

$$\dot{x}_5^2 + \dot{y}_5^2 + \dot{z}_5^2 = l_3^2 \dot{\theta}_3^2 + \frac{l_5^2}{4} \dot{\theta}_5^2 + \dot{\gamma}^2 \left(l_3 \text{sen} \theta_3 + \frac{l_5}{4} \text{sen} \theta_5 \right)^2 + l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \cos(\theta_3 - \theta_5)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_6^2 + \dot{y}_6^2 + \dot{z}_6^2 = & \dot{\gamma}^2 \left(l_2 \text{sen} \theta_2 + l_4 \text{sen} \theta_4 + \frac{l_6}{2} \text{sen} \theta_6 \right)^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + l_4^2 \dot{\theta}_4^2 + \frac{l_6^2}{4} \dot{\theta}_6^2 \\ & + 2l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) + l_2 l_6 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_6 \cos(\theta_2 - \theta_6) + l_4 l_6 \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 \cos(\theta_4 - \theta_6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_7^2 + \dot{y}_7^2 + \dot{z}_7^2 \\ = & \dot{\gamma}^2 \left(l_3 \text{sen} \theta_3 + l_5 \text{sen} \theta_5 + \frac{l_7}{2} \text{sen} \theta_7 \right)^2 + l_3^2 \dot{\theta}_3^2 + l_5^2 \dot{\theta}_5^2 + \frac{l_7^2}{4} \dot{\theta}_7^2 \\ & + 2l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \cos(\theta_3 - \theta_5) + l_3 l_7 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_7 \cos(\theta_3 - \theta_7) + l_5 l_7 \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_7 \cos(\theta_5 - \theta_7) \end{aligned}$$

La energía cinética y potencial del sistema se define como la sumatoria de cada una de las respectivas energías en cada eslabón. La energía potencial del sistema está dada por:

$$\begin{aligned} V = & m_2 g \left(\frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \right) + m_3 g \left(\frac{l_1}{2} + \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 \right) + m_4 g \left(\frac{l_1}{2} + l_2 \cos \theta_2 + \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 \right) \\ & + m_5 g \left(\frac{l_1}{2} + l_3 \cos \theta_3 + \frac{l_5}{2} \cos \theta_5 \right) \\ & + m_6 g \left(\frac{l_1}{2} + l_2 \cos \theta_2 + l_4 \cos \theta_4 + \frac{l_6}{2} \cos \theta_6 \right) \\ & + m_7 g \left(\frac{l_1}{2} + l_3 \cos \theta_3 + l_5 \cos \theta_5 + \frac{l_7}{2} \cos \theta_7 \right) \end{aligned}$$

Una vez obtenida esta información podemos obtener el lagrangiano del sistema, que recordamos está definido como:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \dots + \frac{1}{2} m_n (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{y}_n^2) - m_1 g h_1 - \dots - m_n g h_n$$

Sustituyendo las ecuaciones obtenidas, el lagrangiano queda como sigue:

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}m_2 \left(\frac{l_2^2}{4} (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\gamma}^2 \text{sen}^2 \theta_2) \right) \\ & + \frac{1}{2}m_3 \left(\frac{l_3^2}{4} (\dot{\theta}_3^2 + \dot{\gamma}^2 \text{sen}^2 \theta_3) \right) \\ & + \frac{1}{2}m_4 \left(l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{l_4^2}{4} \dot{\theta}_4^2 + \dot{\gamma}^2 \left(l_2 \text{sen} \theta_2 + \frac{l_4}{2} \text{sen} \theta_4 \right)^2 + l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) \right) \\ & + \frac{1}{2}m_5 \left(l_3^2 \dot{\theta}_3^2 + \frac{l_5^2}{4} \dot{\theta}_5^2 + \dot{\gamma}^2 \left(l_3 \text{sen} \theta_3 + \frac{l_5}{4} \text{sen} \theta_5 \right)^2 + l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \cos(\theta_3 - \theta_5) \right) \\ & + \frac{1}{2}m_6 \left(\dot{\gamma}^2 \left(l_2 \text{sen} \theta_2 + l_4 \text{sen} \theta_4 + \frac{l_6}{2} \text{sen} \theta_6 \right)^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + l_4^2 \dot{\theta}_4^2 + \frac{l_6^2}{4} \dot{\theta}_6^2 \right. \\ & \quad \left. + 2l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) + l_2 l_6 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_6 \cos(\theta_2 - \theta_6) + l_4 l_6 \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 \cos(\theta_4 - \theta_6) \right) \\ & + \frac{1}{2}m_7 \left(\dot{\gamma}^2 \left(l_3 \text{sen} \theta_3 + l_5 \text{sen} \theta_5 + \frac{l_7}{2} \text{sen} \theta_7 \right)^2 + l_3^2 \dot{\theta}_3^2 + l_5^2 \dot{\theta}_5^2 + \frac{l_7^2}{4} \dot{\theta}_7^2 \right. \\ & \quad \left. + 2l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \cos(\theta_3 - \theta_5) + l_3 l_7 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_7 \cos(\theta_3 - \theta_7) + l_5 l_7 \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_7 \cos(\theta_5 - \theta_7) \right) \\ & - m_2 g \left(\frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \right) - m_3 g \left(\frac{l_1}{2} + \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 \right) - m_4 g \left(\frac{l_1}{2} + l_2 \cos \theta_2 + \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 \right) \\ & - m_5 g \left(\frac{l_1}{2} + l_3 \cos \theta_3 + \frac{l_5}{2} \cos \theta_5 \right) - m_6 g \left(\frac{l_1}{2} + l_2 \cos \theta_2 + l_4 \cos \theta_4 + \frac{l_6}{2} \cos \theta_6 \right) \\ & - m_7 g \left(\frac{l_1}{2} + l_3 \cos \theta_3 + l_5 \cos \theta_5 + \frac{l_7}{2} \cos \theta_7 \right) \end{aligned}$$

Una vez obtenido el lagrangiano podemos proceder a calcular las ecuaciones dinámicas del sistema (véase desarrollo en Anexo 1):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \Rightarrow \dot{\gamma} & \left[\frac{1}{4} m_2 l_2^2 \text{sen}^2 \theta_2 + \frac{1}{4} m_3 l_3^2 \text{sen}^2 \theta_3 + m_4 \left(l_2 \text{sen} \theta_2 + \frac{l_4}{2} \text{sen} \theta_4 \right)^2 \right. \\ & + m_5 \left(l_3 \text{sen} \theta_3 + \frac{l_5}{4} \text{sen} \theta_5 \right)^2 + m_6 \left(l_2 \text{sen} \theta_2 + l_4 \text{sen} \theta_4 + \frac{l_6}{2} \text{sen} \theta_6 \right)^2 \\ & \left. + m_7 \left(l_3 \text{sen} \theta_3 + l_5 \text{sen} \theta_5 + \frac{l_7}{2} \text{sen} \theta_7 \right)^2 \right] \\ & + \dot{\gamma} \left[\frac{1}{2} m_2 l_2^2 \text{sen} \theta_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_3 l_3^2 \text{sen} \theta_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 \right. \\ & + 2m_4 \left(l_2 \text{sen} \theta_2 + \frac{l_4}{2} \text{sen} \theta_4 \right) \left(l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 \dot{\theta}_4 \right) \\ & + 2m_5 \left(l_3 \text{sen} \theta_3 + \frac{l_5}{4} \text{sen} \theta_5 \right) \left(l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 + \frac{l_5}{4} \cos \theta_5 \dot{\theta}_5 \right) \\ & + 2m_6 \left(l_2 \text{sen} \theta_2 + l_4 \text{sen} \theta_4 + \frac{l_6}{2} \text{sen} \theta_6 \right) \left(l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_4 \right. \\ & \left. + \frac{l_6}{2} \cos \theta_6 \dot{\theta}_6 \right) \\ & \left. + 2m_7 \left(l_3 \text{sen} \theta_3 + l_5 \text{sen} \theta_5 + \frac{l_7}{2} \text{sen} \theta_7 \right) \left(l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 + l_5 \cos \theta_5 \dot{\theta}_5 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{l_7}{2} \cos \theta_7 \dot{\theta}_7 \right) \right] = FNP \end{aligned}$$

El lagrangiano 2 queda como:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 \Rightarrow & \frac{1}{4}m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_4l_2^2\ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_4l_2l_4\ddot{\theta}_4\cos(\theta_2 - \theta_4) - \frac{1}{2}m_4l_2l_4\dot{\theta}_4\sin(\theta_2 - \theta_4)(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_4) \\ & + m_6l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_6l_2l_4\ddot{\theta}_4\cos(\theta_2 - \theta_4) - m_6l_2l_4\dot{\theta}_4\sin(\theta_2 - \theta_4)(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_4) \\ & + \frac{1}{2}m_6l_2l_6\ddot{\theta}_6\cos(\theta_2 - \theta_6) - \frac{1}{2}m_6l_2l_6\dot{\theta}_6\sin(\theta_2 - \theta_6)(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_6) \\ & - \frac{1}{4}m_2l_2^2\dot{\gamma}^2\sin\theta_2\cos\theta_2 - \dot{\gamma}^2m_4l_2\cos\theta_2\left(l_2\sin\theta_2 + \frac{l_4}{2}\sin\theta_4\right) \\ & + \frac{1}{2}m_4l_2l_4\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4\sin(\theta_2 - \theta_4) \\ & - \frac{1}{2}m_6\dot{\gamma}^2l_2\cos\theta_2\left(l_2\sin\theta_2 + l_4\sin\theta_4 + \frac{l_6}{2}\sin\theta_6\right) \\ & + m_6l_2l_4\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4\sin(\theta_2 - \theta_4) + \frac{1}{2}m_6l_2l_6\dot{\theta}_2\dot{\theta}_6\sin(\theta_2 - \theta_6) - \frac{1}{2}m_2gl_2\sin\theta_2 \\ & - m_4gl_2\sin\theta_2 - m_6gl_2\sin\theta_2 = FNP\end{aligned}$$

El lagrangiano 3:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3 \Rightarrow & \frac{1}{4}m_3l_3^2\ddot{\theta}_3 + m_5l_3^2\ddot{\theta}_3 + \frac{1}{2}m_5l_3l_5\ddot{\theta}_5\cos(\theta_3 - \theta_5) - \frac{1}{2}m_5l_3l_5\dot{\theta}_5\sin(\theta_3 - \theta_5)(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_5) \\ & + m_7l_3^2\ddot{\theta}_3 + m_7l_3l_5\ddot{\theta}_5\cos(\theta_3 - \theta_5) - m_7l_3l_5\dot{\theta}_5\sin(\theta_3 - \theta_5)(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_5) \\ & + \frac{1}{2}m_7l_3l_7\ddot{\theta}_7\cos(\theta_3 - \theta_7) - \frac{1}{2}m_7l_3l_7\dot{\theta}_7\sin(\theta_3 - \theta_7)(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_7) \\ & - \frac{1}{4}m_3l_3^2\dot{\gamma}^2\sin\theta_3\cos\theta_3 - \dot{\gamma}^2m_5l_3\cos\theta_3\left(l_3\sin\theta_3 + \frac{l_5}{2}\sin\theta_5\right) \\ & + \frac{1}{2}m_5l_3l_5\dot{\theta}_3\dot{\theta}_5\sin(\theta_3 - \theta_5) \\ & - \frac{1}{2}m_7\dot{\gamma}^2l_3\cos\theta_3\left(l_3\sin\theta_3 + l_5\sin\theta_5 + \frac{l_7}{2}\sin\theta_7\right) \\ & + m_7l_3l_5\dot{\theta}_3\dot{\theta}_5\sin(\theta_3 - \theta_5) + \frac{1}{2}m_7l_3l_7\dot{\theta}_3\dot{\theta}_7\sin(\theta_3 - \theta_7) - \frac{1}{2}m_3gl_3\sin\theta_3 \\ & - m_5gl_3\sin\theta_3 - m_7gl_3\sin\theta_3 = FNP\end{aligned}$$

El lagrangiano 4:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4 \Rightarrow & \frac{1}{4}m_4 l_4^2 \ddot{\theta}_4 + \frac{1}{2}m_4 l_2 l_4 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) - \frac{1}{2}m_4 l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_4)(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_4) \\ & + m_6 l_4^2 \ddot{\theta}_4 + m_6 l_2 l_4 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) - m_6 l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_4)(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_4) \\ & + \frac{1}{2}m_6 l_4 l_6 \ddot{\theta}_6 \cos(\theta_4 - \theta_6) - \frac{1}{2}m_6 l_4 l_6 \dot{\theta}_6 \sin(\theta_4 - \theta_6)(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_6) \\ & - \frac{1}{2}m_4 l_4 \cos \theta_4 \dot{\gamma}^2 \left(l_2 \sin \theta_2 + \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 \right) - \frac{1}{2}m_4 l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) \\ & - m_6 l_4 \cos \theta_4 \dot{\gamma}^2 \left(l_2 \sin \theta_2 + l_4 \sin \theta_4 + \frac{l_6}{2} \sin \theta_6 \right) \\ & - m_6 l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) + \frac{1}{2}m_6 l_4 l_6 \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 \sin(\theta_4 - \theta_6) - \frac{1}{2}m_4 g l_4 \sin \theta_4 \\ & - \frac{1}{2}m_6 g l_4 \sin \theta_4 = FNP\end{aligned}$$

El lagrangiano 5:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_5 \Rightarrow & \frac{1}{4}m_5 l_5^2 \ddot{\theta}_5 + \frac{1}{2}m_5 l_3 l_5 \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_3 - \theta_5) - \frac{1}{2}m_5 l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_3 - \theta_5)(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_5) \\ & + m_7 l_5^2 \ddot{\theta}_5 + m_7 l_3 l_5 \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_3 - \theta_5) - m_7 l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_3 - \theta_5)(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_5) \\ & + \frac{1}{2}m_7 l_5 l_7 \ddot{\theta}_7 \cos(\theta_5 - \theta_7) - \frac{1}{2}m_7 l_5 l_7 \dot{\theta}_7 \sin(\theta_5 - \theta_7)(\dot{\theta}_5 - \dot{\theta}_7) \\ & - \frac{1}{2}m_5 l_5 \cos \theta_5 \dot{\gamma}^2 \left(l_3 \sin \theta_3 + \frac{l_5}{2} \sin \theta_5 \right) - \frac{1}{2}m_5 l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \sin(\theta_3 - \theta_5) \\ & - m_7 l_5 \cos \theta_5 \dot{\gamma}^2 \left(l_3 \sin \theta_3 + l_5 \sin \theta_5 + \frac{l_7}{2} \sin \theta_7 \right) \\ & - m_7 l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \sin(\theta_3 - \theta_5) + \frac{1}{2}m_7 l_5 l_7 \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_7 \sin(\theta_5 - \theta_7) - \frac{1}{2}m_5 g l_5 \sin \theta_5 \\ & - \frac{1}{2}m_7 g l_5 \sin \theta_5 = FNP\end{aligned}$$

El lagrangiano 6:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_6 \Rightarrow & \frac{1}{4}m_6l_6^2\ddot{\theta}_6 + \frac{1}{2}m_6l_2l_6\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_6) - \frac{1}{2}m_6l_2l_6\dot{\theta}_2\sin(\theta_2 - \theta_6)(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_6) \\ & + \frac{1}{2}m_6l_4l_6\ddot{\theta}_4\cos(\theta_4 - \theta_6) - \frac{1}{2}m_6l_4l_6\dot{\theta}_4\sin(\theta_4 - \theta_6)(\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_6) \\ & - \frac{1}{2}m_6l_6\cos\theta_6\dot{\gamma}^2\left(l_2\sin\theta_2 + l_4\sin\theta_4 + \frac{l_6}{2}\sin\theta_6\right) \\ & - \frac{1}{2}m_6l_2l_6\dot{\theta}_2\dot{\theta}_6\sin(\theta_2 - \theta_6) - \frac{1}{2}m_6l_4l_6\dot{\theta}_4\dot{\theta}_6\sin(\theta_4 - \theta_6) - \frac{1}{2}m_6gl_6\sin\theta_6 \\ & = FNP\end{aligned}$$

El lagrangiano 7:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_7 \Rightarrow & \frac{1}{4}m_7l_7^2\ddot{\theta}_7 + \frac{1}{2}m_7l_3l_7\ddot{\theta}_3\cos(\theta_3 - \theta_7) - \frac{1}{2}m_7l_3l_7\dot{\theta}_3\sin(\theta_3 - \theta_7)(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_7) \\ & + \frac{1}{2}m_7l_5l_7\ddot{\theta}_5\cos(\theta_5 - \theta_7) - \frac{1}{2}m_7l_5l_7\dot{\theta}_5\sin(\theta_5 - \theta_7)(\dot{\theta}_5 - \dot{\theta}_7) \\ & - \frac{1}{2}m_7l_7\cos\theta_7\dot{\gamma}^2\left(l_3\sin\theta_3 + l_5\sin\theta_5 + \frac{l_7}{2}\sin\theta_7\right) \\ & - \frac{1}{2}m_7l_3l_7\dot{\theta}_3\dot{\theta}_7\sin(\theta_3 - \theta_7) - \frac{1}{2}m_7l_5l_7\dot{\theta}_5\dot{\theta}_7\sin(\theta_5 - \theta_7) - \frac{1}{2}m_7gl_7\sin\theta_7 \\ & = FNP\end{aligned}$$

9. Estimador de Estados para el cálculo de la velocidad angular

El estimador de estados se realizó a partir del proyecto descrito en [25]. El observador se basa en un modelo matemático muy similar al desarrollado en este trabajo, con la diferencia de que se tomó en cuenta un plano tridimensional. El modelo utilizado para el observador se basa en el esquema de la figura 3. Este modelo describe los estados como:

$$q = [\gamma \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6 \ \theta_7]^T$$

De manera que los resultados obtenidos por el procesamiento de las imágenes lo ordenamos de esta forma y en cada columna se agregan los nuevos valores para cada nuevo dato adquirido a través del tiempo. Para el cálculo de velocidades angulares se utilizó el observador por modos deslizantes diseñado por *Olli Haavisto* [25], el observador propuesto por super-twisting tiene la forma:

$$\hat{\dot{x}}_1 = \hat{x}_2 + z_1$$

$$\hat{\dot{x}}_2 = f(\gamma, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7) + z_2$$

Donde \hat{x}_1 y \hat{x}_2 son los estados estimados y las variables de corrección z_1 y z_2 son funciones de salida con la forma:

$$z_1 = \lambda |x_1 - \hat{x}_1|^{1/2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1)$$

$$z_2 = \alpha \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1)$$

En este trabajo se desarrolla el modelado de un sistema de 7 eslabones en un plano de dos dimensiones, se desarrolla un controlador PD que se encarga de que el “robot” camine y no se caiga, utilizando restricciones.

También incluye una parte que calcula las velocidades angulares de cada uno de los eslabones, en este trabajo se utilizó ese cálculo para medir las velocidades, pero se eliminó la parte del PD ya que no buscamos controlar un robot, así en vez de que la información que ingrese al observador, serán los ángulos medidos por las cámaras, y no los ángulos obtenidos por el modelado matemático, de esta forma obtenemos un cálculo de las velocidades basado en un modelo matemático, pero con ángulos reales.

En la figura 14 podemos observar el modelo inicial de [25], que contiene su controlador, y su observador por modos deslizantes.

Para el cálculo del error (en c) se tiene $x - xe$, donde x es el estado calculado por el modelo y el controlador y xe es el estado estimado. Este error se ocupa en para el siguiente paso del observador, este error se multiplica por una constante de 6.8 y por el signo del error, es aquí donde se aplican los modos deslizantes.

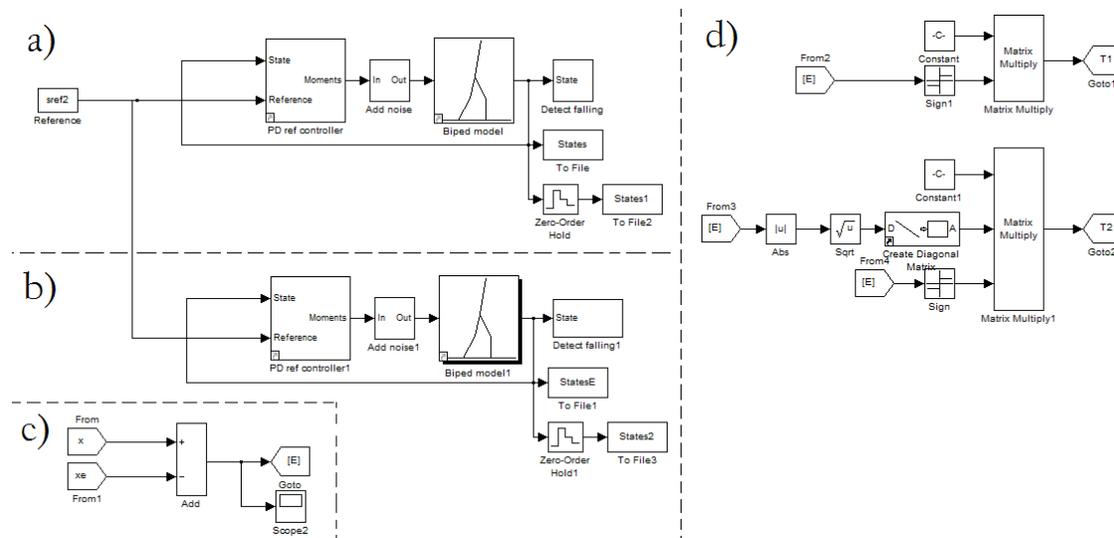


Fig. 14 Modelo original obtenido de [25] donde a) es el modelo matemático y contiene un controlador PD, b) Contiene el observador de estados, c) Es el cálculo del error, d) z1 y z2 respectivas donde se aplica super twisting

El objetivo de este proyecto no es simular la marcha, es estimar la velocidad a partir de estados conocidos. En nuestro caso conocemos los valores de los ángulos que devuelve el controlador (en a) de la figura 14. De manera que se eliminó el controlador y fue sustituido por una entrada directa de un vector V que contiene los datos de cada eslabón, medidos por procesamiento de imagen. En la figura 15 aparece este proceso, ya no se encuentra el controlador y en el cálculo del error se sustituyó “ x ” por el vector V que será enviado una vez que los cálculos de las imágenes sean terminados. En b) podemos observar que se agregó un scope para que ahí se puedan observar las velocidades a partir del Vector V enviado.

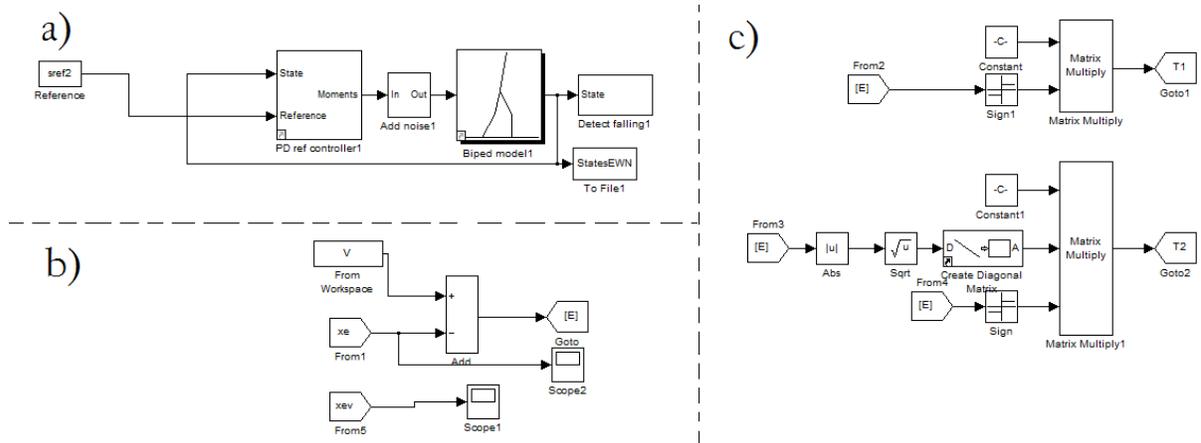


Fig. 15 Simulación modificada, el vector V contiene los ángulos que originalmente estarían dados por el modelo pero que en nuestro caso vienen del procesamiento de las imágenes de las cámaras

10. RESULTADOS

Modelado matemático de 7 eslabones en un plano tridimensional

El modelo del sistema se puede escribir en forma general,

$$FNP = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q)$$

O bien,

$$\begin{bmatrix} FNP_1 \\ FNP_2 \\ FNP_3 \\ FNP_4 \\ FNP_5 \\ FNP_6 \\ FNP_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} & M_{16} & M_{17} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} & M_{26} & M_{27} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} & M_{36} & M_{37} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} & M_{46} & M_{47} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} & M_{56} & M_{57} \\ M_{61} & M_{62} & M_{63} & M_{64} & M_{65} & M_{66} & M_{67} \\ M_{71} & M_{72} & M_{73} & M_{74} & M_{75} & M_{76} & M_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \\ \ddot{\theta}_5 \\ \ddot{\theta}_6 \\ \ddot{\theta}_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & C_{17} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} & C_{27} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} & C_{37} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} & C_{47} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} & C_{57} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} & C_{67} \\ C_{71} & C_{72} & C_{73} & C_{74} & C_{75} & C_{76} & C_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \\ \dot{\theta}_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \\ g_7 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$M_{11} = \frac{1}{4}m_2l_2^2\text{sen}^2\theta_2 + \frac{1}{4}m_3l_3^2\text{sen}^2\theta_3 + m_4\left(l_2\text{sen}\theta_2 + \frac{l_4}{2}\text{sen}\theta_4\right)^2 \\ + m_5\left(l_3\text{sen}\theta_3 + \frac{l_5}{4}\text{sen}\theta_5\right)^2 + m_6\left(l_2\text{sen}\theta_2 + l_4\text{sen}\theta_4 + \frac{l_6}{2}\text{sen}\theta_6\right)^2 \\ + m_7\left(l_3\text{sen}\theta_3 + l_5\text{sen}\theta_5 + \frac{l_7}{2}\text{sen}\theta_7\right)^2$$

$$M_{22} = \frac{1}{4}m_2l_2^2 + m_4l_2^2 + m_6l_2^2$$

$$M_{33} = \frac{1}{4}m_3l_3^2 + m_5l_3^2 + m_7l_3^2$$

$$M_{24} = \frac{1}{2}m_4l_2l_4\cos(\theta_2 - \theta_4) \\ + m_6l_2l_4\cos(\theta_2 - \theta_4)$$

$$M_{35} = \frac{1}{2}m_5l_3l_5\cos(\theta_3 - \theta_5) \\ + m_7l_3l_5\cos(\theta_3 - \theta_5)$$

$$M_{26} = \frac{1}{2}m_6l_2l_6\cos(\theta_2 - \theta_6)$$

$$M_{37} = \frac{1}{2}m_7l_3l_7\cos(\theta_3 - \theta_7)$$

$$M_{42} = \frac{1}{2}m_4l_2l_4\cos(\theta_2 - \theta_4) \\ + m_6l_2l_4\cos(\theta_2 - \theta_4)$$

$$M_{53} = \frac{1}{2}m_5l_3l_5\cos(\theta_3 - \theta_5) \\ + m_7l_3l_5\cos(\theta_3 - \theta_5)$$

$$M_{44} = \frac{1}{4}m_4l_4^2 + m_6l_4^2$$

$$M_{55} = \frac{1}{4}m_5l_5^2 + m_7l_5^2$$

$$M_{46} = \frac{1}{2}m_6l_4l_6\cos(\theta_4 - \theta_6)$$

$$M_{57} = \frac{1}{2}m_7l_5l_7\cos(\theta_5 - \theta_7)$$

$$M_{62} = \frac{1}{2} m_6 l_2 l_6 \cos(\theta_2 - \theta_6)$$

$$M_{64} = \frac{1}{2} m_6 l_4 l_6 \cos(\theta_4 - \theta_6)$$

$$M_{66} = \frac{1}{4} m_6 l_6^2$$

$$M_{73} = \frac{1}{2} m_7 l_3 l_7 \cos(\theta_3 - \theta_7)$$

$$M_{75} = \frac{1}{2} m_7 l_5 l_7 \cos(\theta_5 - \theta_7)$$

$$M_{77} = \frac{1}{4} m_7 l_7^2$$

Todos los demás valores de M son cero

$$\begin{aligned} C_{11} = & \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_3 l_3^2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 \\ & + 2m_4 \left(l_2 \sin \theta_2 + \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 \right) \left(l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 \dot{\theta}_4 \right) \\ & + 2m_5 \left(l_3 \sin \theta_3 + \frac{l_5}{4} \sin \theta_5 \right) \left(l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 + \frac{l_5}{4} \cos \theta_5 \dot{\theta}_5 \right) \\ & + 2m_6 \left(l_2 \sin \theta_2 + l_4 \sin \theta_4 + \frac{l_6}{2} \sin \theta_6 \right) \left(l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_4 \right. \\ & \left. + \frac{l_6}{2} \cos \theta_6 \dot{\theta}_6 \right) \\ & + 2m_7 \left(l_3 \sin \theta_3 + l_5 \sin \theta_5 + \frac{l_7}{2} \sin \theta_7 \right) \left(l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 + l_5 \cos \theta_5 \dot{\theta}_5 \right. \\ & \left. + \frac{l_7}{2} \cos \theta_7 \dot{\theta}_7 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{12} = & \dot{\gamma} \left[\frac{1}{2} m_2 l_2^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + 2m_4 l_2 \cos \theta_2 \left(l_2 \sin \theta_2 + \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 \right) \right. \\ & \left. + 2m_6 l_2 \cos \theta_2 \left(l_2 \sin \theta_2 + l_4 \sin \theta_4 + \frac{l_6}{2} \sin \theta_6 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{13} = & \dot{\gamma} \left[\frac{1}{2} m_3 l_3^2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + 2m_5 l_3 \cos \theta_3 \left(l_3 \sin \theta_3 + \frac{l_5}{4} \sin \theta_5 \right) \right. \\ & \left. + 2m_7 l_3 \cos \theta_3 \left(l_3 \sin \theta_3 + l_5 \sin \theta_5 + \frac{l_7}{2} \sin \theta_7 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{14} = & \dot{\gamma} \left[m_4 l_4 \cos \theta_4 \left(l_2 \sin \theta_2 + \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 \right) \right. \\ & \left. + 2m_6 l_4 \cos \theta_4 \left(l_2 \sin \theta_2 + l_4 \sin \theta_4 + \frac{l_6}{2} \sin \theta_6 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{15} = & \dot{\gamma} \left[\frac{1}{2} m_5 l_5 \cos \theta_5 \left(l_3 \sin \theta_3 + \frac{l_5}{4} \sin \theta_5 \right) \right. \\ & \left. + 2m_7 l_5 \cos \theta_5 \left(l_3 \sin \theta_3 + l_5 \sin \theta_5 + \frac{l_7}{2} \sin \theta_7 \right) \right] \end{aligned}$$

$$C_{16} = \dot{\gamma} \left[m_6 l_6 \cos \theta_6 \left(l_2 \sin \theta_2 + l_4 \sin \theta_4 + \frac{l_6}{2} \sin \theta_6 \right) \right]$$

$$C_{17} = \dot{\gamma} \left[m_7 l_7 \cos \theta_7 \left(l_3 \sin \theta_3 + l_5 \sin \theta_5 + \frac{l_7}{2} \sin \theta_7 \right) \right]$$

$$\begin{aligned}C_{21} &= -\dot{\gamma} \left[\frac{1}{4} m_2 l_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_2 + m_4 l_2 \cos \theta_2 \left(l_2 \operatorname{sen} \theta_2 + \frac{l_4}{2} \operatorname{sen} \theta_4 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} m_6 l_2 \cos \theta_2 \left(l_2 \operatorname{sen} \theta_2 + l_4 \operatorname{sen} \theta_4 + \frac{l_6}{2} \operatorname{sen} \theta_6 \right) \right] \\ C_{22} &= -\frac{1}{2} m_4 l_2 l_4 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4) \dot{\theta}_4 - m_6 l_2 l_4 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4) \dot{\theta}_4 - \frac{1}{2} m_6 l_2 l_6 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_6) \dot{\theta}_6 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_4 l_2 l_4 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4) \dot{\theta}_4 + m_6 l_2 l_4 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4) \dot{\theta}_4 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_6 l_2 l_6 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_6) \dot{\theta}_6 \\ C_{24} &= -\frac{1}{2} m_4 l_2 l_4 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4) (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_4) - m_6 l_2 l_4 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4) (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_4) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_4 l_2 l_4 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4) \dot{\theta}_2 + m_6 l_2 l_4 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4) \dot{\theta}_2 \\ C_{26} &= -\frac{1}{2} m_6 l_2 l_6 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_6) (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_6) + \frac{1}{2} m_6 l_2 l_6 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_6) \dot{\theta}_2 \\ \\ C_{31} &= -\dot{\gamma} \left[\frac{1}{4} m_3 l_3^2 \operatorname{sen} \theta_3 \cos \theta_3 + m_5 l_3 \cos \theta_3 \left(l_3 \operatorname{sen} \theta_3 + \frac{l_5}{2} \operatorname{sen} \theta_5 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} m_7 l_3 \cos \theta_3 \left(l_3 \operatorname{sen} \theta_3 + l_5 \operatorname{sen} \theta_5 + \frac{l_7}{2} \operatorname{sen} \theta_7 \right) \right] \\ C_{33} &= -\frac{1}{2} m_5 l_3 l_5 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_5) \dot{\theta}_5 - m_7 l_3 l_5 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_5) \dot{\theta}_5 - \frac{1}{2} m_7 l_3 l_7 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_7) \dot{\theta}_7 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_5 l_3 l_5 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_5) \dot{\theta}_5 + m_7 l_3 l_5 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_5) \dot{\theta}_5 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_7 l_3 l_7 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_7) \dot{\theta}_7 \\ C_{35} &= -\frac{1}{2} m_5 l_3 l_5 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_5) (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_5) - m_7 l_3 l_5 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_5) (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_5) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_5 l_3 l_5 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_5) \dot{\theta}_3 + m_7 l_3 l_5 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_5) \dot{\theta}_3 \\ C_{37} &= -\frac{1}{2} m_7 l_3 l_7 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_7) (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_7) + \frac{1}{2} m_7 l_3 l_7 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_7) \dot{\theta}_3 \\ \\ C_{41} &= -\dot{\gamma} \left[\frac{1}{2} m_4 l_4 \cos \theta_4 \left(l_2 \operatorname{sen} \theta_2 + \frac{l_4}{2} \operatorname{sen} \theta_4 \right) \right. \\ &\quad \left. + m_6 l_4 \cos \theta_4 \left(l_2 \operatorname{sen} \theta_2 + l_4 \operatorname{sen} \theta_4 + \frac{l_6}{2} \operatorname{sen} \theta_6 \right) \right] \\ C_{42} &= -\frac{1}{2} m_4 l_2 l_4 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4) (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_4) - m_6 l_2 l_4 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4) (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_4) \\ &\quad - \frac{1}{2} m_4 l_2 l_4 \dot{\theta}_4 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4) - m_6 l_2 l_4 \dot{\theta}_4 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4) \\ C_{44} &= +\frac{1}{2} m_4 l_2 l_4 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4) \dot{\theta}_2 + m_6 l_2 l_4 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4) \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2} m_6 l_4 l_6 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_6) \dot{\theta}_6 \\ &\quad - \frac{1}{2} m_4 l_2 l_4 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4) \dot{\theta}_2 - m_6 l_2 l_4 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4) \dot{\theta}_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_6 l_4 l_6 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_6) \dot{\theta}_6 \\ C_{46} &= -\frac{1}{2} m_6 l_4 l_6 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_6) (\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_6) + \frac{1}{2} m_6 l_4 l_6 \dot{\theta}_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_6)\end{aligned}$$

$$C_{51} = -\dot{\gamma} \left[\frac{1}{2} m_5 l_5 \cos \theta_5 \left(l_3 \sin \theta_3 + \frac{l_5}{2} \sin \theta_5 \right) + m_7 l_5 \cos \theta_5 \left(l_3 \sin \theta_3 + l_5 \sin \theta_5 + \frac{l_7}{2} \sin \theta_7 \right) \right]$$

$$C_{53} = -\frac{1}{2} m_5 l_3 l_5 \sin(\theta_3 - \theta_5) (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_5) - m_7 l_3 l_5 \sin(\theta_3 - \theta_5) (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_5) - \frac{1}{2} m_5 l_3 l_5 \sin(\theta_3 - \theta_5) \dot{\theta}_5 - m_7 l_3 l_5 \sin(\theta_3 - \theta_5) \dot{\theta}_5$$

$$C_{55} = \frac{1}{2} m_5 l_3 l_5 \sin(\theta_3 - \theta_5) \dot{\theta}_3 + m_7 l_3 l_5 \sin(\theta_3 - \theta_5) \dot{\theta}_3 - \frac{1}{2} m_7 l_5 l_7 \sin(\theta_5 - \theta_7) \dot{\theta}_7 - \frac{1}{2} m_5 l_3 l_5 \sin(\theta_3 - \theta_5) \dot{\theta}_3 - m_7 l_3 l_5 \sin(\theta_3 - \theta_5) \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} m_7 l_5 l_7 \sin(\theta_5 - \theta_7) \dot{\theta}_7$$

$$C_{57} = -\frac{1}{2} m_7 l_5 l_7 \sin(\theta_5 - \theta_7) (\dot{\theta}_5 - \dot{\theta}_7) + \frac{1}{2} m_7 l_5 l_7 \sin(\theta_5 - \theta_7) \dot{\theta}_5$$

$$C_{61} = -\frac{1}{2} m_6 l_6 \cos \theta_6 \left(l_2 \sin \theta_2 + l_4 \sin \theta_4 + \frac{l_6}{2} \sin \theta_6 \right) \dot{\gamma}$$

$$C_{62} = -\frac{1}{2} m_6 l_2 l_6 \sin(\theta_2 - \theta_6) (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_6) - \frac{1}{2} m_6 l_2 l_6 \sin(\theta_2 - \theta_6) \dot{\theta}_6$$

$$C_{64} = -\frac{1}{2} m_6 l_4 l_6 \sin(\theta_4 - \theta_6) (\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_6) - \frac{1}{2} m_6 l_4 l_6 \sin(\theta_4 - \theta_6) \dot{\theta}_6$$

$$C_{66} = \frac{1}{2} m_6 l_2 l_6 \sin(\theta_2 - \theta_6) \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_6 l_4 l_6 \sin(\theta_4 - \theta_6) \dot{\theta}_4 - \frac{1}{2} m_6 l_2 l_6 \sin(\theta_2 - \theta_6) \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2} m_6 l_4 l_6 \sin(\theta_4 - \theta_6) \dot{\theta}_4$$

$$C_{71} = -\frac{1}{2} m_7 l_7 \cos \theta_7 \left(l_3 \sin \theta_3 + l_5 \sin \theta_5 + \frac{l_7}{2} \sin \theta_7 \right) \dot{\gamma}$$

$$C_{73} = -\frac{1}{2} m_7 l_3 l_7 \sin(\theta_3 - \theta_7) (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_7) - \frac{1}{2} m_7 l_3 l_7 \sin(\theta_3 - \theta_7) \dot{\theta}_7$$

$$C_{75} = -\frac{1}{2} m_7 l_5 l_7 \sin(\theta_5 - \theta_7) (\dot{\theta}_5 - \dot{\theta}_7) - \frac{1}{2} m_7 l_5 l_7 \sin(\theta_5 - \theta_7) \dot{\theta}_7$$

$$C_{77} = \frac{1}{2} m_7 l_3 l_7 \sin(\theta_3 - \theta_7) \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} m_7 l_5 l_7 \sin(\theta_5 - \theta_7) \dot{\theta}_5 - \frac{1}{2} m_7 l_3 l_7 \sin(\theta_3 - \theta_7) \dot{\theta}_3 - \frac{1}{2} m_7 l_5 l_7 \sin(\theta_5 - \theta_7) \dot{\theta}_5$$

Todos los valores no incluidos de C son cero.

$$g_1 = 0$$

$$g_2 = -\frac{1}{2} m_2 g l_2 \sin \theta_2 - m_4 g l_2 \sin \theta_2 - m_6 g l_2 \sin \theta_2$$

$$g_3 = -\frac{1}{2} m_3 g l_3 \sin \theta_3 - m_5 g l_3 \sin \theta_3 - m_7 g l_3 \sin \theta_3$$

$$g_4 = -\frac{1}{2} m_4 g l_4 \sin \theta_4 - \frac{1}{2} m_6 g l_4 \sin \theta_4$$

$$g_5 = -\frac{1}{2} m_5 g l_5 \sin \theta_5 - \frac{1}{2} m_7 g l_5 \sin \theta_5$$

$$g_6 = -\frac{1}{2} m_6 g l_6 \sin \theta_6$$

$$g_7 = -\frac{1}{2} m_7 g l_7 \sin \theta_7$$

Observador de estados utilizado para calcular las velocidades angulares a partir de las cámaras

Para la implementación del observador se muestran a continuación las trayectorias de las 4 articulaciones principales (ángulo de piernas superiores y ángulo de piernas inferiores). Las líneas punteadas muestran el comportamiento del observador, el cual sigue a la señal en un tiempo menor a 1 segundo. En consecuencia el error de estimación converge a cero (figura 16).

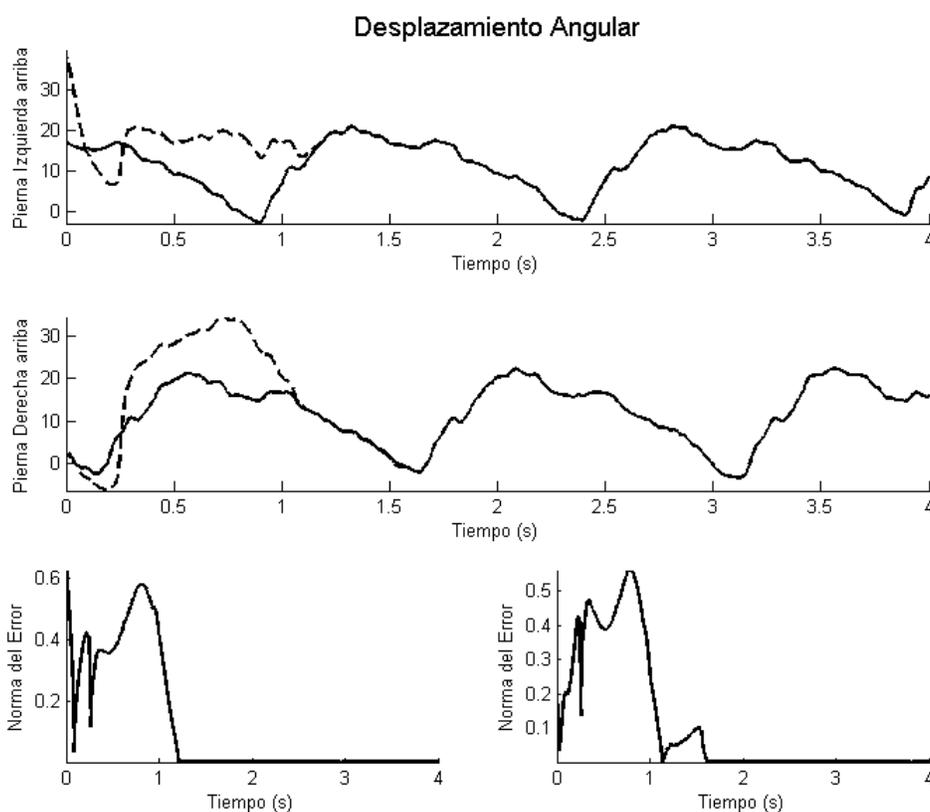


Fig. 16 Desplazamiento angular y comportamiento del observador (líneas punteadas) utilizando el modelo matemático (línea continua) para la parte superior de las extremidades inferiores

Se observa la marcha en las dos figuras (16 y 17) entre pierna y pierna. Siempre la pierna en contacto con el suelo tendrá un menor ángulo mientras que la pierna en fase de balanceo, mostrará el cambio abrupto en los ángulos.

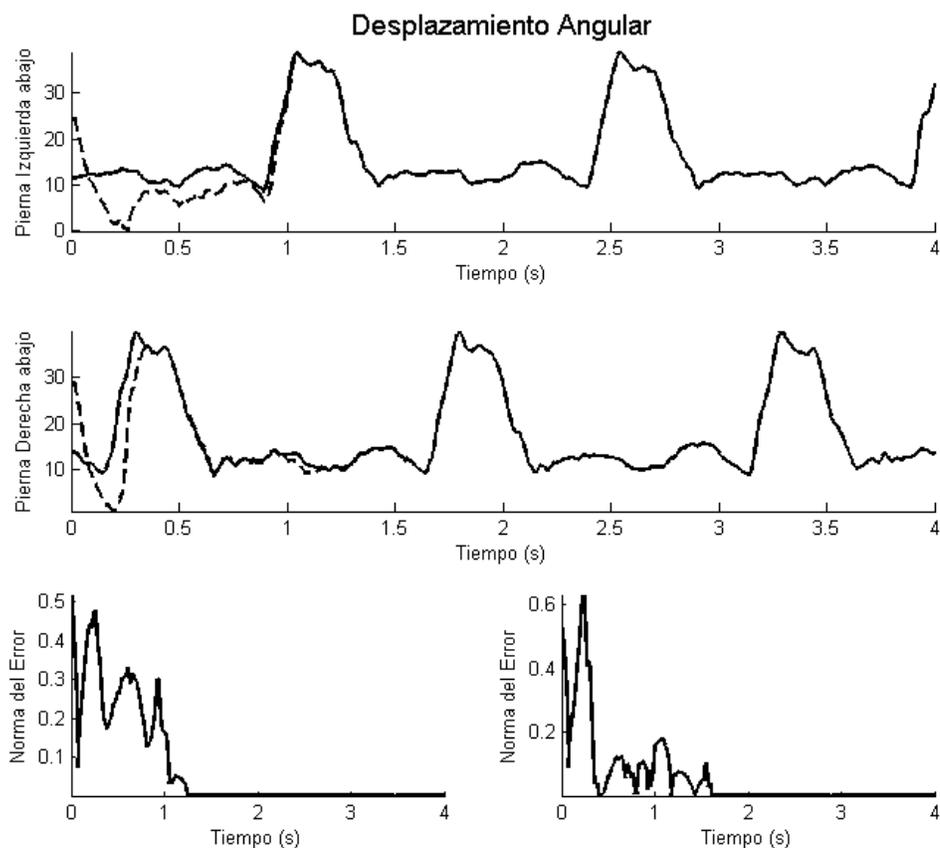


Fig. 17 Desplazamiento angular y comportamiento del observador (líneas punteadas) utilizando el modelo matemático (línea continua) para la parte inferior de las extremidades inferiores

A partir de que el error converge a cero, se puede asegurar que utilizando el observador se pueden obtener las velocidades angulares usando solo la información de las posiciones angulares la cual se puede obtener del procesamiento de imágenes.

Debido a que este modelo matemático no considera los pies no se puede ingresar la información de estos. Los ángulos que durante estas simulaciones (Basadas en el diagrama de la figura 14) fueron otorgadas por el modelo matemático. Se sustituyen por un vector que contiene los datos X reales leídos por las cámaras a través del tiempo.

La siguiente figura muestra la convergencia entre los estados del observador y la velocidad angular de los eslabones correspondientes a la pierna izquierda y derecha (parte superior). Así mismo, se muestra la evolución temporal del error de estimación de ambas variables.

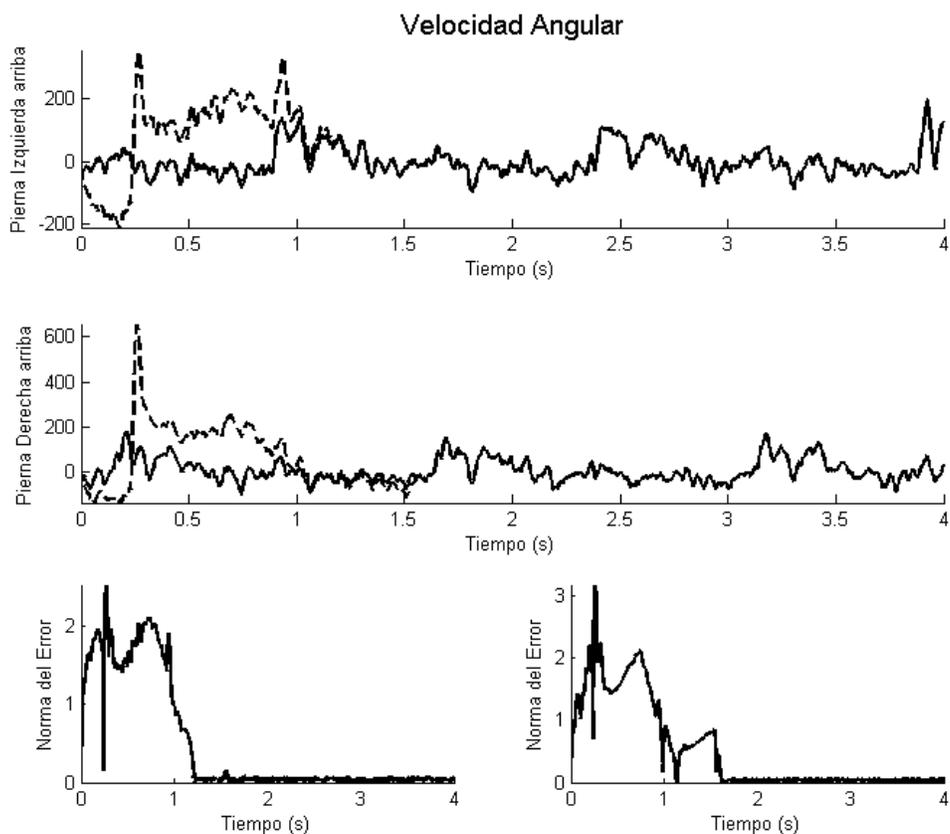


Fig. 18 Velocidad angular de la parte superior de las piernas

La figura 19 muestra la convergencia entre los estados del observador y la velocidad angular de los eslabones correspondientes a la pierna izquierda y derecha (parte inferior). Así mismo, se muestra la evolución temporal del error de estimación de ambas variables.

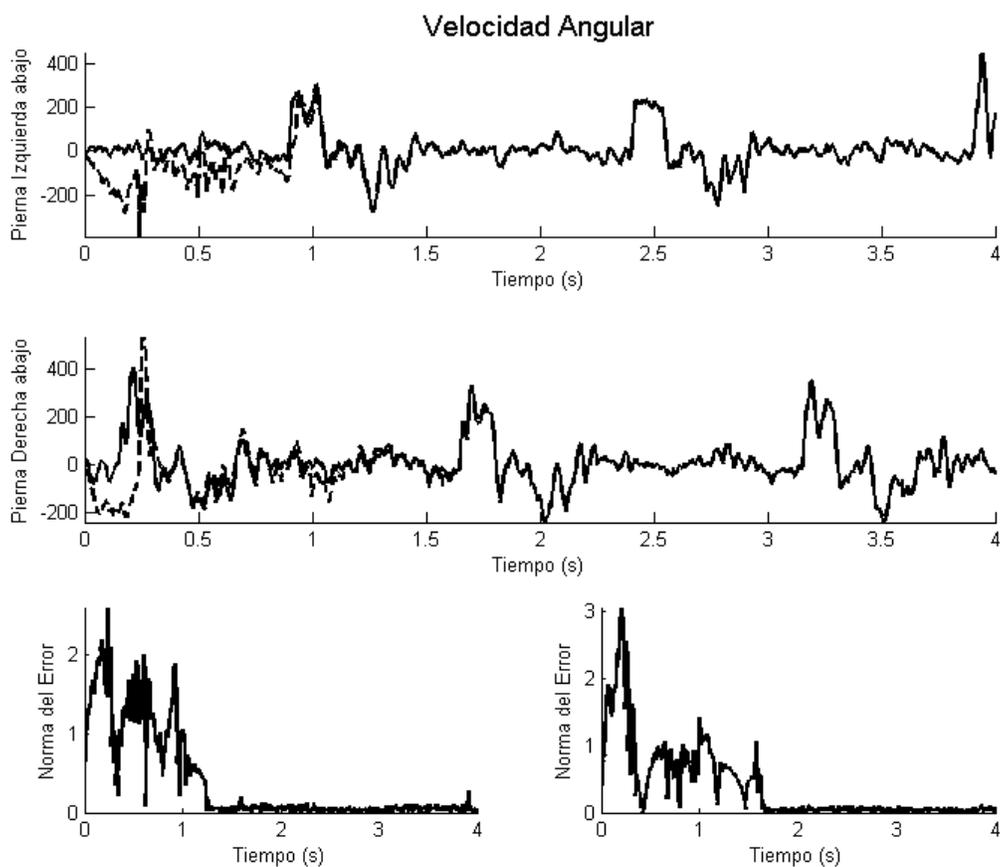


Fig. 19 Velocidad angular de la parte inferior de las piernas

Procesamiento de imagen para obtención de parámetros

El programa desarrollado en MATLAB encuentra los ángulos de los miembros a partir de dos imágenes pre procesadas (frontal y lateral) como las que se muestran en la figura 20, encuentra sus coordenadas dependiendo de la resolución de la imagen de la cámara y realiza la reconstrucción tridimensional del cuerpo observado y guarda en un vector los valores calculados de cada ángulo encontrado.

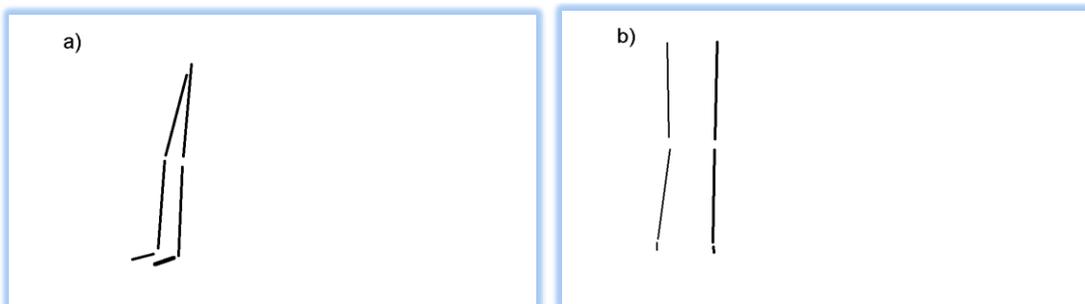


Fig. 20 a) Imagen pre procesada (toma lateral). b) Imagen pre procesada (toma frontal)

Para el desarrollo del algoritmo se utilizaron las imágenes de la figura 20, las cuales fueron creadas por software, sin embargo este tipo de imágenes pueden obtenerse a partir de condiciones bien controladas de iluminación y fondo, lo único que se requiere es cumplir con las indicaciones de los marcadores correctamente.

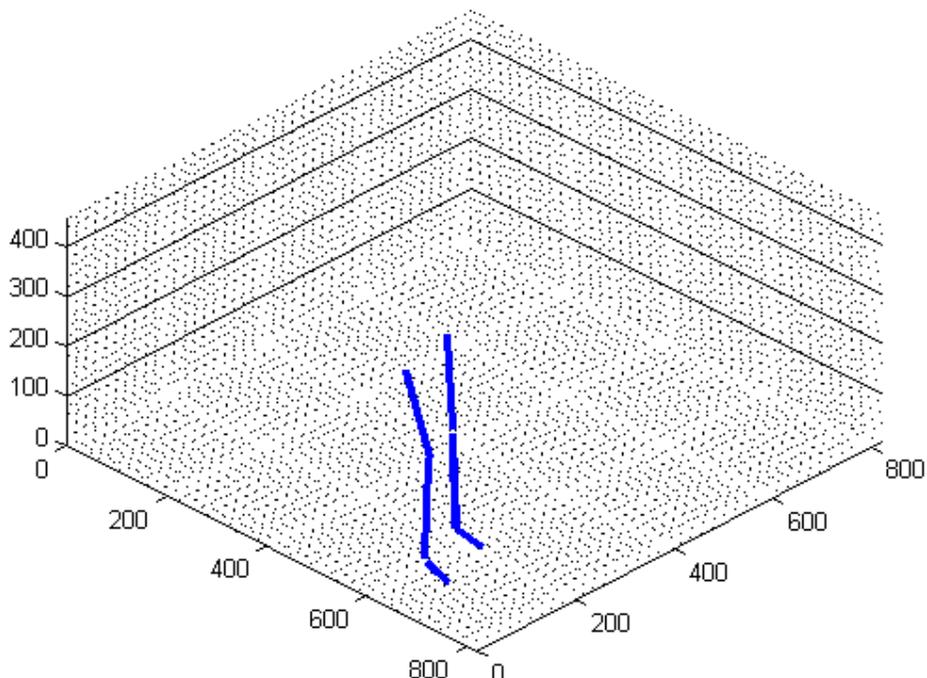


Fig. 21 Reconstrucción 3D a partir de las imágenes de la figura 12

Estas imágenes no formaron parte del proyecto que no se contó con las instalaciones necesarias para tomar los videos con las condiciones necesarias para tomar el video desde dos perspectivas diferentes. A partir de dichas imágenes el programa realiza también la reconstrucción en un plano tridimensional como se muestra en la figura 21.

Animación tridimensional a partir de los valores del modelo

A partir de los valores obtenidos en la simulación con el observador (figuras 16 – 19), se reconstruyó en una animación gráfica el movimiento de cada eslabón y se agregó la tercera coordenada generando una marcha sinusoidal. Durante la trayectoria sinusoidal se calculó el giro completo para cada eslabón de manera que durante la marcha el cuerpo siempre esté orientado de frente a su trayectoria de acuerdo a la tangente en cada punto la cual se consideró como el ángulo de giro. Esto solo con el fin de demostrar que a partir de los valores del observador se puede agregar la información de las cámaras para encontrar el ángulo de giro. Se superpusieron diferentes posiciones para que se observe la trayectoria en un plano (figura 22).

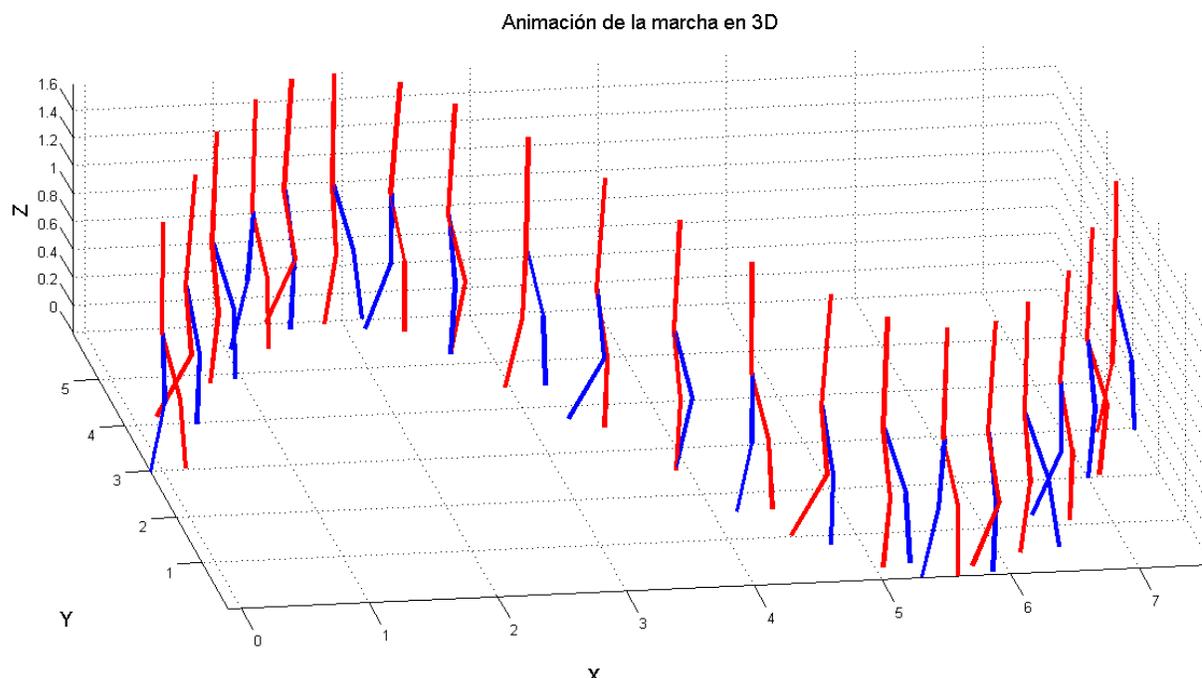


Fig. 22 Simulación de la marcha en 3D



11. CONCLUSIONES

En la actualidad el análisis biomecánico de la marcha se realiza basándose solamente en el desplazamiento angular. Sin embargo, esta información no es suficiente para realizar una correcta evaluación. El análisis puede complementar con parámetros que no pueden ser medidos de forma directa tales como la longitud del paso, de la zancada, trapecio plantar, velocidades angulares, región de sustentabilidad, ritmo, frecuencia, regularidad.

A través de visión por computadora es posible encontrar diferentes estructuras del cuerpo para analizarlas por separado, esto a través de diferentes algoritmos de segmentación de imágenes que dependen de las condiciones que rodeen al objeto que se desea analizar. A pesar de que se tiene un gran avance en el procesamiento de imágenes, aún no es posible asegurar que sin importar las condiciones que rodeen al objeto a analizar, se obtendrán resultados infalibles. Sin embargo, cuidando bien las condiciones de iluminación y contraste del objeto a evaluar con su entorno, se puede asegurar obtener buenos resultados dentro del procesamiento de las imágenes para obtención de parámetros.

Una vez que se logra una segmentación adecuada de las imágenes, se puede posicionar un objeto en un plano tridimensional tomando en cuenta las condiciones geométricas de las cámaras y su resolución espacial. Dos cámaras son suficientes para analizar la marcha de una persona que camina en línea recta, sin embargo, si se desea realizar otro estudio biomecánico que requiera la rotación del cuerpo se requieren más cámaras pues llega un momento en que las cámaras perderían la visión de los marcadores.

Existen parámetros de la biomecánica que no es posible medir directamente, es costoso o entorpece el movimiento original a la hora de medirlo, una forma de lograr obtener estos parámetros es a través de observadores de estados.

Realizar la animación en un plano tridimensional del cuerpo no ofrece mucho más de la biomecánica de la marcha que lo que dice una observación directa del sujeto. Esta es una forma de comprobar que la detección se está realizando de manera correcta, pues la animación se debe mover igual que lo hizo el sujeto. La información que realmente ayuda a una evaluación son las gráficas de posición y velocidad generadas.



12. REFERENCIAS

- [1] **Development of Meal Assistance Orthosis for Disabled Persons with Human Intention Extraction through EOG Signals**; Satoru GOTO, Takenao SUGI, and Masatoshi NAKAMURA; SICE-ICASE International Joint Conference 2006
- [2] **Performance of an inverted pendulum model directly applied to normal human gait**, Frank L. Buczec , Kevin M. Cooney, Matthew R. Walker, Michael J. Rainbow; M. Cecilia Concha, James O. Sanders; Clinical Biomechanics 21 (2006)
- [3] **Simulation of human gait and associated muscle activation strategies using sliding-mode control techniques**; S.J. Lister, N.B. Jones, S.K. Spurgeon, J.J.A. Scott; Simulation Modelling Practice and Theory 14 (2006)
- [4] **Automatic Gait-Pattern Adaptation Algorithms for Rehabilitation With a 4-DOF Robotic Orthosis**, Saso Jezernik, Gery Colombo, and Manfred Morari; IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS AND AUTOMATION, VOL. 20, NO. 3, JUNE 2004
- [5] **Modelamiento de la marcha humana por medio de gráficos de unión**; Leonardo Emiro Contreras Bravo / Máximo Alejandro Roa Garzón; Tecnura año 8 No.16 primer semestre de 2005
- [6] **Theory and Design of an Orthotic Device for Full or Partial Gravity-Balancing of a Human Leg During Motion**; Sunil K. Agrawal and Abbas Fattah; IEEE Transactions On Neural Systems And Rehabilitation Engineering, Vol. 12, NO. 2, JUNE 2004
- [7] **Desarrollo De Un Programa En Matlab Para La Reconstrucción Tridimensional De Imágenes Médicas Usando Crecimiento De Regiones**; S. Mejía, W. Flórez, J. Bustamante; VII Congreso de la Sociedad Cubana de Bioingeniería Habana 2007
- [8] **Powered Leg Orthosis for Gait Rehabilitation of Motor-Impaired Patients**; Sai K. Banala, Alexander Kulpe and Sunil K. Agrawal; 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation Roma, Italy, 10-14 April 2007



- [9] **Development of a walking robot model and its databased modeling and control;** Olli Haavisto; Master's Thesis At Department of Electrical and Communications Engineering (2004)
- [10] **Biomechanics and muscle coordination of human walking Part II: Lessons from dynamical simulations and clinical implications;** Felix E. Zajac, Richard R. Neptune, Steven A. Kautz; Gait and Posture 17 (2003)
- [11] **Design of a Two Degree-of-freedom Ankle-Foot Orthosis for Robotic Rehabilitation;** Abhishek Agrawal, Sai K. Banala, Sunil K. Agrawal, Stuart A. Binder-Macleod; Proceedings of the 2005 IEEE 9th International Conference on Rehabilitation Robotics
- [12] **Spring-mass running:simple approximate solution and application to gait stability;** Hartmut Geyer, Andre Seyfarth, Reinhard Blickhan; Journal of Theoretical Biology 232 (2005)
- [13] **A dynamic model for simulating a trip and fall during gait;** Xiaodong Zhou, Louis F. Draganich, Farid Amirouche; Medical Engineering & Physics 24 (2002)
- [14] **Artificial locomotion control: from human to robots;** Christine Azevedo, Philippe Poignet, Bernard Espiau; Robotics and Autonomous Systems 47 (2004)
- [15] **Analysis and Simulation of an Exoskeleton Controller that Accommodates Static and Reactive Loads;** Behzad Dariush Honda Research Institute USA; Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation
- [16] **A Gravity Balancing Leg Orthosis for Robotic Rehabilitation;** Sai K. Banala, Sunil K. Agrawal, Abbas Fattah, Katherine; Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics & Automation
- [17] **Robótica en Medicina,** Antonio Barrientos, Universidad Politécnica de Cataluña, 2008.



- [18] **Bases del Procesamiento de Imágenes Médicas**, Ruben Medina, Jesús Bellera, Universidad de Los Andes
- [19] **Métodos de Segmentación de Imágenes Médicas**, Ernesto Coto, Universidad Central de Venezuela Facultad de Ciencias Escuela de Computación, Marzo 2003.
- [20] **Introducción al tratamiento Digital y Clustering de imágenes**, Juan Manuel Miguel Jiménez, Universidad de Alcalá, Marzo 2008
- [21] **Procesamiento Digital de Imágenes**, Dr. Boris Escalante R, UNAM, Octubre 2006.
- [22] **Segmentación de imágenes de color**, J.J. Báez Rojas, Revista Mexicana de Física, Abril 2004.
- [23] **El color**, Grupo de Ingeniería Universidad Politécnica de Madrid
- [24] **Kävelevän robottimallin kehittäminen sekä sen datapohjainen mallitus ja säätö**, Olli Haavisto, Diplomityö, joka on jätetty opinnäytteenä tarkastettavaksi diplomi-insinöörin tutkintoa varten Espoossa 9.2.2004.
- [25] **Simulation of the double limb support phase of human gait**, M. S. Ju, J.M. Mansour, Eng., 110, pp. 223-229, 1988.
- [26] **A dynamic Optimization Solution for a Complete Cycle of Normal Gait**, F. C. Anderson, PhD Thesis. Univ. Texas, Austin. 1999.
- [27] **Asymptotic Stability of a Walking Cycle for a Biped Robot with Knees and Torso**, J.W. Grizzle, G. Abba, Control Systems Laboratory, Electrical Engineering and Computer Science Department, University of Michigan.
- [28] **Protesica del miembro inferior**, John Michael's Corner, Facultad, Protésica y Ortésica Escuela Graduada de Medicina de la Universidad de Nueva York, 2008.



[29] **Projectional Filtering: Analysis and Examples**, Alex Poznyak et al, IEEE
TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS II, VOL. XX, NO. Y, MONTH 2006

Anexo 1 Obtención del modelo matemático

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_2}{2} + \frac{l_2}{2} \text{sen } \theta_2 \text{sen } \gamma \\ y_2 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_2}{2} + \frac{l_2}{2} \text{sen } \theta_2 \text{cos } \gamma \\ z_2 &= \frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{2} \text{cos } \theta_2 \end{aligned}$$

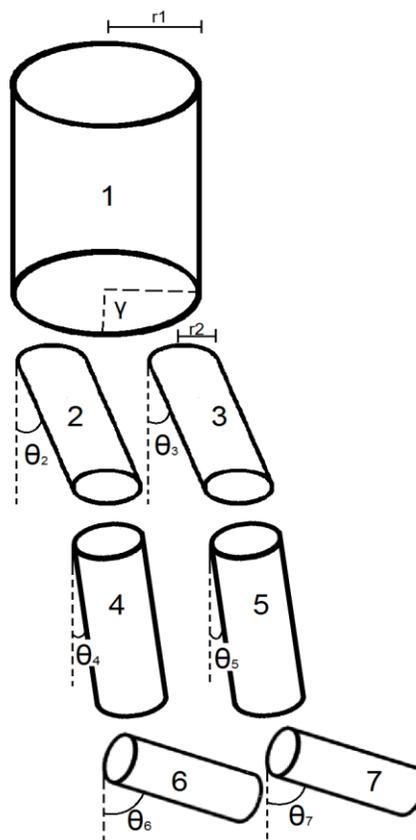
$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_3}{2} + \frac{l_3}{2} \text{sen } \theta_3 \text{sen } \gamma \\ y_3 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_3}{2} + \frac{l_3}{2} \text{sen } \theta_3 \text{cos } \gamma \\ z_3 &= \frac{l_1}{2} + \frac{l_3}{2} \text{cos } \theta_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_2}{2} + l_2 \text{sen } \theta_2 \text{sen } \gamma + \frac{l_4}{2} \text{sen } \theta_4 \text{sen } \gamma \\ y_4 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_2}{2} + l_2 \text{sen } \theta_2 \text{cos } \gamma + \frac{l_4}{2} \text{sen } \theta_4 \text{cos } \gamma \\ z_4 &= \frac{l_1}{2} + l_2 \text{cos } \theta_2 + \frac{l_4}{2} \text{cos } \theta_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_5 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_3}{2} + l_3 \text{sen } \theta_3 \text{sen } \gamma + \frac{l_5}{2} \text{sen } \theta_5 \text{sen } \gamma \\ y_5 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_3}{2} + l_3 \text{sen } \theta_3 \text{cos } \gamma + \frac{l_5}{2} \text{sen } \theta_5 \text{cos } \gamma \\ z_5 &= \frac{l_1}{2} + l_3 \text{cos } \theta_3 + \frac{l_5}{2} \text{cos } \theta_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_6 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_2}{2} + \left(l_2 \text{sen } \theta_2 + l_4 \text{sen } \theta_4 + \frac{l_6}{2} \text{sen } \theta_6 \right) \text{sen } \gamma \\ y_6 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_2}{2} + \left(l_2 \text{sen } \theta_2 + l_4 \text{sen } \theta_4 + \frac{l_6}{2} \text{sen } \theta_6 \right) \text{cos } \gamma \\ z_6 &= \frac{l_1}{2} + l_2 \text{cos } \theta_2 + l_4 \text{cos } \theta_4 + \frac{l_6}{2} \text{cos } \theta_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_7 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_2}{2} + \left(l_3 \text{sen } \theta_3 + l_5 \text{sen } \theta_5 + \frac{l_7}{2} \text{sen } \theta_7 \right) \text{sen } \gamma \\ y_7 &= \frac{r_1}{2} - \frac{r_2}{2} + \left(l_3 \text{sen } \theta_3 + l_5 \text{sen } \theta_5 + \frac{l_7}{2} \text{sen } \theta_7 \right) \text{cos } \gamma \\ z_7 &= \frac{l_1}{2} + l_3 \text{cos } \theta_3 + l_5 \text{cos } \theta_5 + \frac{l_7}{2} \text{cos } \theta_7 \end{aligned}$$



Cálculo del cuadrado de la posición para el eslabón 2:

$$\dot{x}_2 = \frac{l_2}{2} (\cos \theta_2 \operatorname{sen} \gamma \dot{\theta}_2 + \operatorname{sen} \theta_2 \cos \gamma \dot{\gamma})$$

$$\dot{y}_2 = \frac{l_2}{2} (\cos \theta_2 \cos \gamma \dot{\theta}_2 - \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \gamma \dot{\gamma})$$

$$\dot{z}_2 = -\frac{l_2}{2} \operatorname{sen} \theta_2 \dot{\theta}_2$$

$$\dot{x}_2^2 = \frac{l_2^2}{4} (\cos^2 \theta_2 \operatorname{sen}^2 \gamma \dot{\theta}_2^2 + 2 \cos \theta_2 \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \theta_2 \cos \gamma \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2 \cos^2 \gamma \dot{\gamma}^2)$$

$$\dot{y}_2^2 = \frac{l_2^2}{4} (\cos^2 \theta_2 \cos^2 \gamma \dot{\theta}_2^2 - 2 \cos \theta_2 \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \theta_2 \cos \gamma \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2 \operatorname{sen}^2 \gamma \dot{\gamma}^2)$$

$$\dot{z}_2^2 = \frac{l_2^2}{4} \operatorname{sen}^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 &= \frac{l_2^2}{4} (\cos^2 \theta_2 \operatorname{sen}^2 \gamma \dot{\theta}_2^2 + 2 \cos \theta_2 \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \theta_2 \cos \gamma \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2 \cos^2 \gamma \dot{\gamma}^2 \\ &+ \cos^2 \theta_2 \cos^2 \gamma \dot{\theta}_2^2 - 2 \cos \theta_2 \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \theta_2 \cos \gamma \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2 \operatorname{sen}^2 \gamma \dot{\gamma}^2 \\ &+ \operatorname{sen}^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2) \end{aligned}$$

Agrupando términos encontramos que:

$$\dot{\theta}_2^2 (\cos^2 \theta_2 \operatorname{sen}^2 \gamma + \cos^2 \theta_2 \cos^2 \gamma) = \dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 (\operatorname{sen}^2 \gamma + \cos^2 \gamma) = \dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2$$

$$\dot{\gamma}^2 (\operatorname{sen}^2 \theta_2 \cos^2 \gamma + \operatorname{sen}^2 \theta_2 \operatorname{sen}^2 \gamma) = \dot{\gamma}^2 \operatorname{sen}^2 \theta_2 (\cos^2 \gamma + \operatorname{sen}^2 \gamma) = \dot{\gamma}^2 \operatorname{sen}^2 \theta_2$$

Reduciendo

$$\frac{l_2^2}{4} (\cos^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + \dot{\gamma}^2 \operatorname{sen}^2 \theta_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2) = \frac{l_2^2}{4} (\dot{\theta}_2^2 (\cos^2 \theta_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2) + \dot{\gamma}^2 \operatorname{sen}^2 \theta_2)$$

Finalmente

$$\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 = \frac{l_2^2}{4} (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\gamma}^2 \operatorname{sen}^2 \theta_2)$$

Cálculo del cuadrado de la posición para el eslabón 3:

$$\dot{x}_3 = \frac{l_3}{2} (\cos \theta_3 \operatorname{sen} \gamma \dot{\theta}_3 + \operatorname{sen} \theta_3 \cos \gamma \dot{\gamma})$$

$$\dot{y}_3 = \frac{l_3}{2} (\cos \theta_3 \cos \gamma \dot{\theta}_3 - \operatorname{sen} \theta_3 \operatorname{sen} \gamma \dot{\gamma})$$

$$\dot{z}_3 = -\frac{l_3}{2} \operatorname{sen} \theta_3 \dot{\theta}_3$$

$$\dot{x}_3^2 = \frac{l_3^2}{4} (\cos^2 \theta_3 \operatorname{sen}^2 \gamma \dot{\theta}_3^2 + 2 \cos \theta_3 \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \theta_3 \cos \gamma \dot{\gamma} \dot{\theta}_3 + \operatorname{sen}^2 \theta_3 \cos^2 \gamma \dot{\gamma}^2)$$

$$\dot{y}_3^2 = \frac{l_3^2}{4} (\cos^2 \theta_3 \cos^2 \gamma \dot{\theta}_3^2 - 2 \cos \theta_3 \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \theta_3 \cos \gamma \dot{\gamma} \dot{\theta}_3 + \operatorname{sen}^2 \theta_3 \operatorname{sen}^2 \gamma \dot{\gamma}^2)$$

$$\dot{z}_3^2 = \frac{l_3^2}{4} \operatorname{sen}^2 \theta_3 \dot{\theta}_3^2$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2 &= \frac{l_3^2}{4} (\cos^2 \theta_3 \operatorname{sen}^2 \gamma \dot{\theta}_3^2 + 2 \cos \theta_3 \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \theta_3 \cos \gamma \dot{\gamma} \dot{\theta}_3 + \operatorname{sen}^2 \theta_3 \cos^2 \gamma \dot{\gamma}^2 \\ &\quad + \cos^2 \theta_3 \cos^2 \gamma \dot{\theta}_3^2 - 2 \cos \theta_3 \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \theta_3 \cos \gamma \dot{\gamma} \dot{\theta}_3 + \operatorname{sen}^2 \theta_3 \operatorname{sen}^2 \gamma \dot{\gamma}^2 \\ &\quad + \operatorname{sen}^2 \theta_3 \dot{\theta}_3^2) \end{aligned}$$

Agrupando términos encontramos que:

$$\dot{\theta}_3^2 (\cos^2 \theta_3 \operatorname{sen}^2 \gamma + \cos^2 \theta_3 \cos^2 \gamma) = \dot{\theta}_3^2 \cos^2 \theta_3 (\operatorname{sen}^2 \gamma + \cos^2 \gamma) = \dot{\theta}_3^2 \cos^2 \theta_3$$

$$\dot{\gamma}^2 (\operatorname{sen}^2 \theta_3 \cos^2 \gamma + \operatorname{sen}^2 \theta_3 \operatorname{sen}^2 \gamma) = \dot{\gamma}^2 \operatorname{sen}^2 \theta_3 (\cos^2 \gamma + \operatorname{sen}^2 \gamma) = \dot{\gamma}^2 \operatorname{sen}^2 \theta_3$$

Reduciendo

$$\frac{l_3^2}{4} (\cos^2 \theta_3 \dot{\theta}_3^2 + \dot{\gamma}^2 \operatorname{sen}^2 \theta_3 + \operatorname{sen}^2 \theta_3 \dot{\theta}_3^2) = \frac{l_3^2}{4} (\dot{\theta}_3^2 (\cos^2 \theta_3 + \operatorname{sen}^2 \theta_3) + \dot{\gamma}^2 \operatorname{sen}^2 \theta_3)$$

Finalmente

$$\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2 = \frac{l_3^2}{4} (\dot{\theta}_3^2 + \dot{\gamma}^2 \operatorname{sen}^2 \theta_3)$$

Cálculo del cuadrado de la posición para el eslabón 4:

$$\dot{x}_4 = l_2(\cos \theta_2 \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 + \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 \cos \gamma) + \frac{l_4}{2}(\cos \theta_4 \dot{\gamma} \dot{\theta}_4 + \dot{\gamma} \dot{\theta}_4 \cos \gamma)$$

$$\dot{y}_4 = l_2(\cos \theta_2 \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 - \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 \sin \gamma) + \frac{l_4}{2}(\cos \theta_4 \dot{\gamma} \dot{\theta}_4 - \dot{\gamma} \dot{\theta}_4 \sin \gamma)$$

$$\dot{z}_4 = -l_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 - \frac{l_4}{2} \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_4$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4^2 = & l_2^2 (\cos^2 \theta_2 \dot{\gamma}^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 \cos \theta_2 \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 \cos \gamma \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 + \dot{\gamma}^2 \theta_2 \cos^2 \gamma \dot{\gamma}^2) \\ & + l_2 l_4 (\cos \theta_2 \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 + \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 \cos \gamma) (\cos \theta_4 \dot{\gamma} \dot{\theta}_4 + \dot{\gamma} \dot{\theta}_4 \cos \gamma) \\ & + \frac{l_4^2}{4} (\cos^2 \theta_4 \dot{\gamma}^2 \dot{\theta}_4^2 + 2 \cos \theta_4 \dot{\gamma} \dot{\theta}_4 \cos \gamma \dot{\gamma} \dot{\theta}_4 + \dot{\gamma}^2 \theta_4 \cos^2 \gamma \dot{\gamma}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_4^2 = & l_2^2 (\cos^2 \theta_2 \dot{\gamma}^2 \dot{\theta}_2^2 - 2 \cos \theta_2 \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 \sin \gamma \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 + \dot{\gamma}^2 \theta_2 \sin^2 \gamma \dot{\gamma}^2) \\ & + l_2 l_4 (\cos \theta_2 \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 - \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 \sin \gamma) (\cos \theta_4 \dot{\gamma} \dot{\theta}_4 - \dot{\gamma} \dot{\theta}_4 \sin \gamma) \\ & + \frac{l_4^2}{4} (\cos^2 \theta_4 \dot{\gamma}^2 \dot{\theta}_4^2 - 2 \cos \theta_4 \dot{\gamma} \dot{\theta}_4 \sin \gamma \dot{\gamma} \dot{\theta}_4 + \dot{\gamma}^2 \theta_4 \sin^2 \gamma \dot{\gamma}^2) \end{aligned}$$

$$\dot{z}_4^2 = l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \dot{\theta}_2^2 + l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + \frac{l_4^2}{4} \dot{\theta}_4^2 \dot{\theta}_4^2$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 = & l_2^2 (\cos^2 \theta_2 \dot{\gamma}^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 \cos \theta_2 \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 \cos \gamma \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 + \dot{\gamma}^2 \theta_2 \cos^2 \gamma \dot{\gamma}^2 \\ & + \cos^2 \theta_2 \dot{\gamma}^2 \dot{\theta}_2^2 - 2 \cos \theta_2 \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 \sin \gamma \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 + \dot{\gamma}^2 \theta_2 \sin^2 \gamma \dot{\gamma}^2) \\ & + l_2 l_4 ((\cos \theta_2 \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 + \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 \cos \gamma) (\cos \theta_4 \dot{\gamma} \dot{\theta}_4 + \dot{\gamma} \dot{\theta}_4 \cos \gamma) \\ & + (\cos \theta_2 \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 - \dot{\gamma} \dot{\theta}_2 \sin \gamma) (\cos \theta_4 \dot{\gamma} \dot{\theta}_4 - \dot{\gamma} \dot{\theta}_4 \sin \gamma)) \\ & + \frac{l_4^2}{4} (\cos^2 \theta_4 \dot{\gamma}^2 \dot{\theta}_4^2 + 2 \cos \theta_4 \dot{\gamma} \dot{\theta}_4 \cos \gamma \dot{\gamma} \dot{\theta}_4 + \dot{\gamma}^2 \theta_4 \cos^2 \gamma \dot{\gamma}^2 \\ & + \cos^2 \theta_4 \dot{\gamma}^2 \dot{\theta}_4^2 - 2 \cos \theta_4 \dot{\gamma} \dot{\theta}_4 \sin \gamma \dot{\gamma} \dot{\theta}_4 + \dot{\gamma}^2 \theta_4 \sin^2 \gamma \dot{\gamma}^2) \\ & + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \dot{\theta}_2^2 + l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + \frac{l_4^2}{4} \dot{\theta}_4^2 \dot{\theta}_4^2 \end{aligned}$$

Agrupando términos encontramos que:

$$l_2^2 \dot{\theta}_2^2 (\cos^2 \theta_2 \dot{\gamma}^2 + \cos^2 \theta_2 \dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}^2 \theta_2) = l_2^2 \dot{\theta}_2^2 (\cos^2 \theta_2 (\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}^2) + \dot{\gamma}^2 \theta_2)$$

$$l_2^2 \dot{\gamma}^2 (\dot{\gamma}^2 \cos^2 \theta_2 + \dot{\gamma}^2 \theta_2 \sin^2 \gamma) = l_2^2 \dot{\gamma}^2 \dot{\gamma}^2 \theta_2 (\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma) = l_2^2 \dot{\gamma}^2 \dot{\gamma}^2 \theta_2$$

$$\begin{aligned} \frac{l_4^2}{4} \dot{\theta}_4^2 (\cos^2 \theta_4 \sin^2 \gamma + \cos^2 \theta_4 \sin^2 \gamma + \sin^2 \theta_4) \\ = \frac{l_4^2}{4} \dot{\theta}_4^2 (\cos^2 \theta_4 (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) + \sin^2 \theta_4) = \frac{l_4^2}{4} \dot{\theta}_4^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{l_4^2}{4} \dot{\gamma}^2 (\sin^2 \theta_4 \cos^2 \gamma + \sin^2 \theta_4 \sin^2 \gamma) &= \frac{l_4^2}{4} \dot{\gamma}^2 \sin^2 \theta_4 (\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma) = \frac{l_4^2}{4} \dot{\gamma}^2 \sin^2 \theta_4 \\ l_2 l_4 ((\cos \theta_2 \sin \gamma \dot{\theta}_2 + \sin \theta_2 \cos \gamma \dot{\gamma})(\cos \theta_4 \sin \gamma \dot{\theta}_4 + \sin \theta_4 \cos \gamma \dot{\gamma})) \\ &+ (\cos \theta_2 \cos \gamma \dot{\theta}_2 - \sin \theta_2 \sin \gamma \dot{\gamma})(\cos \theta_4 \cos \gamma \dot{\theta}_4 - \sin \theta_4 \sin \gamma \dot{\gamma}) \\ &= l_2 l_4 (\cos \theta_2 \sin \gamma \cos \theta_4 \sin \gamma \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + \cos \theta_2 \sin \gamma \sin \theta_4 \cos \gamma \dot{\theta}_2 \dot{\gamma} \\ &+ \sin \theta_2 \cos \gamma \cos \theta_4 \sin \gamma \dot{\theta}_4 \dot{\gamma} + \sin \theta_2 \cos \gamma \sin \theta_4 \cos \gamma \dot{\gamma}^2 \\ &+ \cos \theta_2 \cos \gamma \cos \theta_4 \cos \gamma \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 - \cos \theta_2 \cos \gamma \sin \theta_4 \sin \gamma \dot{\theta}_2 \dot{\gamma} \\ &- \sin \theta_2 \sin \gamma \cos \theta_4 \cos \gamma \dot{\gamma} \dot{\theta}_4 + \sin \theta_2 \sin \gamma \sin \theta_4 \sin \gamma \dot{\gamma}^2) \end{aligned}$$

Agregamos el término $l_2 l_4 \sin \theta_2 \sin \theta_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4$ para agrupar dentro de $l_2 l_4$:

$$\begin{aligned} l_2 l_4 (\cos \theta_2 \sin \gamma \cos \theta_4 \sin \gamma \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + \cos \theta_2 \sin \gamma \sin \theta_4 \cos \gamma \dot{\theta}_2 \dot{\gamma} \\ + \sin \theta_2 \cos \gamma \cos \theta_4 \sin \gamma \dot{\theta}_4 \dot{\gamma} + \sin \theta_2 \cos \gamma \sin \theta_4 \cos \gamma \dot{\gamma}^2 \\ + \cos \theta_2 \cos \gamma \cos \theta_4 \cos \gamma \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 - \cos \theta_2 \cos \gamma \sin \theta_4 \sin \gamma \dot{\theta}_2 \dot{\gamma} \\ - \sin \theta_2 \sin \gamma \cos \theta_4 \cos \gamma \dot{\gamma} \dot{\theta}_4 + \sin \theta_2 \sin \gamma \sin \theta_4 \sin \gamma \dot{\gamma}^2 \\ + \mathbf{\sin \theta_2 \sin \theta_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4}) \\ = l_2 l_4 (\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 (\cos \theta_2 \cos \theta_4 \sin^2 \gamma + \cos \theta_2 \cos \theta_4 \cos^2 \gamma \dot{\theta}_2 + \mathbf{\sin \theta_2 \sin \theta_4}) \\ + \dot{\theta}_2 \dot{\gamma} (\cos \theta_2 \sin \gamma \sin \theta_4 \cos \gamma - \cos \theta_2 \cos \gamma \sin \theta_4 \sin \gamma) \\ + \dot{\theta}_4 \dot{\gamma} (\sin \theta_2 \cos \gamma \cos \theta_4 \sin \gamma - \sin \theta_2 \sin \gamma \cos \theta_4 \cos \gamma) \\ + \dot{\gamma}^2 (\sin \theta_2 \sin \theta_4 \cos^2 \gamma + \sin \theta_2 \sin \theta_4 \sin^2 \gamma)) \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 (\cos \theta_2 \cos \theta_4 \sin^2 \gamma + \cos \theta_2 \cos \theta_4 \cos^2 \gamma \dot{\theta}_2 + \sin \theta_2 \sin \theta_4) \\ = \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 (\cos \theta_2 \cos \theta_4 + \sin \theta_2 \sin \theta_4) \end{aligned}$$

$$\dot{\theta}_2 \dot{\gamma} (\cos \theta_2 \sin \gamma \sin \theta_4 \cos \gamma - \cos \theta_2 \cos \gamma \sin \theta_4 \sin \gamma) = 0$$

$$\dot{\theta}_4 \dot{\gamma} (\sin \theta_2 \cos \gamma \cos \theta_4 \sin \gamma - \sin \theta_2 \sin \gamma \cos \theta_4 \cos \gamma) = 0$$

$$\dot{\gamma}^2 (\sin \theta_2 \sin \theta_4 \cos^2 \gamma + \sin \theta_2 \sin \theta_4 \sin^2 \gamma) = \dot{\gamma}^2 \sin \theta_2 \sin \theta_4$$

Reuniendo los resultados de la agrupación:

$$\begin{aligned} \dot{x}_4^2 + \dot{y}_4^2 + \dot{z}_4^2 \\ = l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + l_2^2 \dot{\gamma}^2 \sin^2 \theta_2 + \frac{l_4^2}{4} \dot{\theta}_4^2 + \frac{l_4^2}{4} \dot{\gamma}^2 \sin^2 \theta_4 \\ + l_2 l_4 (\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \cos \theta_2 \cos \theta_4 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \sin \theta_2 \sin \theta_4 + \dot{\gamma}^2 \sin \theta_2 \sin \theta_4) \end{aligned}$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{l_4^2}{4} \dot{\theta}_4^2 + l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) &= \dot{\gamma}^2 \left(l_2^2 \sin^2 \theta_2 + \frac{l_4^2}{4} \sin^2 \theta_4 + l_2 l_4 \sin \theta_2 \sin \theta_4 \right) \\ &= \dot{\gamma}^2 \left(l_2 \sin \theta_2 + \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 \right)^2 \end{aligned}$$

$$l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 (\cos \theta_2 \cos \theta_4 + \sin \theta_2 \sin \theta_4) = l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_2 - \theta_4)$$

Finalmente

$$\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 = l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{l_4^2}{4} \dot{\theta}_4^2 + \dot{\gamma}^2 \left(l_2 \sin \theta_2 + \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 \right)^2 + l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_2 - \theta_4)$$

Cálculo del cuadrado de la posición para el eslabón 5:

$$\dot{x}_5 = l_3 (\cos \theta_3 \dot{\theta}_3 \sin \gamma + \sin \theta_3 \cos \gamma \dot{\gamma}) + \frac{l_5}{2} (\cos \theta_5 \dot{\theta}_5 \sin \gamma + \sin \theta_5 \cos \gamma \dot{\gamma})$$

$$\dot{y}_5 = l_3 (\cos \theta_3 \cos \gamma \dot{\theta}_3 - \sin \theta_3 \sin \gamma \dot{\gamma}) + \frac{l_5}{2} (\cos \theta_5 \cos \gamma \dot{\theta}_5 - \sin \theta_5 \sin \gamma \dot{\gamma})$$

$$\dot{z}_5 = -l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 - \frac{l_5}{2} \sin \theta_5 \dot{\theta}_5$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_5^2 &= l_3^2 (\cos^2 \theta_3 \sin^2 \gamma \dot{\theta}_3^2 + 2 \cos \theta_3 \sin \gamma \sin \theta_3 \cos \gamma \dot{\gamma} \dot{\theta}_3 + \sin^2 \theta_3 \cos^2 \gamma \dot{\gamma}^2) \\ &\quad + l_3 l_5 (\cos \theta_3 \sin \gamma \dot{\theta}_3 + \sin \theta_3 \cos \gamma \dot{\gamma}) (\cos \theta_5 \sin \gamma \dot{\theta}_5 + \sin \theta_5 \cos \gamma \dot{\gamma}) \\ &\quad + \frac{l_5^2}{4} (\cos^2 \theta_5 \sin^2 \gamma \dot{\theta}_5^2 + 2 \cos \theta_5 \sin \gamma \sin \theta_5 \cos \gamma \dot{\gamma} \dot{\theta}_5 + \sin^2 \theta_5 \cos^2 \gamma \dot{\gamma}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_5^2 &= l_3^2 (\cos^2 \theta_3 \cos^2 \gamma \dot{\theta}_3^2 - 2 \cos \theta_3 \sin \gamma \sin \theta_3 \cos \gamma \dot{\gamma} \dot{\theta}_3 + \sin^2 \theta_3 \sin^2 \gamma \dot{\gamma}^2) \\ &\quad + l_3 l_5 (\cos \theta_3 \cos \gamma \dot{\theta}_3 - \sin \theta_3 \sin \gamma \dot{\gamma}) (\cos \theta_5 \cos \gamma \dot{\theta}_5 - \sin \theta_5 \sin \gamma \dot{\gamma}) \\ &\quad + \frac{l_5^2}{4} (\cos^2 \theta_5 \cos^2 \gamma \dot{\theta}_5^2 - 2 \cos \theta_5 \sin \gamma \sin \theta_5 \cos \gamma \dot{\gamma} \dot{\theta}_5 + \sin^2 \theta_5 \sin^2 \gamma \dot{\gamma}^2) \end{aligned}$$

$$\dot{z}_5^2 = l_3^2 \sin^2 \theta_3 \dot{\theta}_3^2 + l_3 l_5 \sin \theta_3 \sin \theta_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 + \frac{l_5^2}{4} \sin^2 \theta_5 \dot{\theta}_5^2$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_5^2 + \dot{y}_5^2 + \dot{z}_5^2 &= l_3^2 \left(\cos^2 \theta_3 \sin^2 \gamma \dot{\theta}_3^2 + 2 \cos \theta_3 \sin \gamma \sin \theta_3 \cos \gamma \dot{\theta}_3 \dot{\gamma} + \sin^2 \theta_3 \cos^2 \gamma \dot{\gamma}^2 \right. \\
 &+ \cos^2 \theta_3 \cos^2 \gamma \dot{\theta}_3^2 - 2 \cos \theta_3 \sin \gamma \sin \theta_3 \cos \gamma \dot{\theta}_3 \dot{\gamma} + \sin^2 \theta_3 \sin^2 \gamma \dot{\gamma}^2 \left. \right) \\
 &+ l_2 l_5 \left((\cos \theta_3 \sin \gamma \dot{\theta}_3 + \sin \theta_3 \cos \gamma \dot{\gamma})(\cos \theta_5 \sin \gamma \dot{\theta}_5 + \sin \theta_5 \cos \gamma \dot{\gamma}) \right. \\
 &+ (\cos \theta_3 \cos \gamma \dot{\theta}_3 - \sin \theta_3 \sin \gamma \dot{\gamma})(\cos \theta_5 \cos \gamma \dot{\theta}_5 - \sin \theta_5 \sin \gamma \dot{\gamma}) \left. \right) \\
 &+ \frac{l_5^2}{4} \left(\cos^2 \theta_5 \sin^2 \gamma \dot{\theta}_5^2 + 2 \cos \theta_5 \sin \gamma \sin \theta_5 \cos \gamma \dot{\theta}_5 \dot{\gamma} + \sin^2 \theta_5 \cos^2 \gamma \dot{\gamma}^2 \right. \\
 &+ \cos^2 \theta_5 \cos^2 \gamma \dot{\theta}_5^2 - 2 \cos \theta_5 \sin \gamma \sin \theta_5 \cos \gamma \dot{\theta}_5 \dot{\gamma} + \sin^2 \theta_5 \sin^2 \gamma \dot{\gamma}^2 \left. \right) \\
 &+ l_3^2 \sin^2 \theta_3 \dot{\theta}_3^2 + l_3 l_5 \sin \theta_3 \sin \theta_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 + \frac{l_5^2}{4} \sin^2 \theta_5 \dot{\theta}_5^2
 \end{aligned}$$

Agrupando términos encontramos que:

$$l_3^2 \dot{\theta}_3^2 (\cos^2 \theta_3 \sin^2 \gamma + \cos^2 \theta_3 \cos^2 \gamma + \sin^2 \theta_3) = l_3^2 \dot{\theta}_3^2 (\cos^2 \theta_3 (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) + \sin^2 \theta_3) = l_3^2 \dot{\theta}_3^2$$

$$l_3^2 \dot{\gamma}^2 (\sin^2 \theta_3 \cos^2 \gamma + \sin^2 \theta_3 \sin^2 \gamma) = l_3^2 \dot{\gamma}^2 \sin^2 \theta_3 (\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma) = l_3^2 \dot{\gamma}^2 \sin^2 \theta_3$$

$$\frac{l_5^2}{4} \dot{\theta}_5^2 (\cos^2 \theta_5 \sin^2 \gamma + \cos^2 \theta_5 \cos^2 \gamma + \sin^2 \theta_5)$$

$$= \frac{l_5^2}{4} \dot{\theta}_5^2 (\cos^2 \theta_5 (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) + \sin^2 \theta_5) = \frac{l_5^2}{4} \dot{\theta}_5^2$$

$$\frac{l_5^2}{4} \dot{\gamma}^2 (\sin^2 \theta_5 \cos^2 \gamma + \sin^2 \theta_5 \sin^2 \gamma) = \frac{l_5^2}{4} \dot{\gamma}^2 \sin^2 \theta_5 (\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma) = \frac{l_5^2}{4} \dot{\gamma}^2 \sin^2 \theta_5$$

$$\begin{aligned}
 &l_3 l_5 \left((\cos \theta_3 \sin \gamma \dot{\theta}_3 + \sin \theta_3 \cos \gamma \dot{\gamma})(\cos \theta_5 \sin \gamma \dot{\theta}_5 + \sin \theta_5 \cos \gamma \dot{\gamma}) \right. \\
 &+ (\cos \theta_3 \cos \gamma \dot{\theta}_3 - \sin \theta_3 \sin \gamma \dot{\gamma})(\cos \theta_5 \cos \gamma \dot{\theta}_5 - \sin \theta_5 \sin \gamma \dot{\gamma}) \left. \right) \\
 &= l_3 l_5 (\cos \theta_3 \sin \gamma \cos \theta_5 \sin \gamma \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 + \cos \theta_3 \sin \gamma \sin \theta_5 \cos \gamma \dot{\theta}_3 \dot{\gamma} \\
 &+ \sin \theta_3 \cos \gamma \cos \theta_5 \sin \gamma \dot{\theta}_5 \dot{\gamma} + \sin \theta_3 \cos \gamma \sin \theta_5 \cos \gamma \dot{\gamma}^2 \\
 &+ \cos \theta_3 \cos \gamma \cos \theta_5 \cos \gamma \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 - \cos \theta_3 \cos \gamma \sin \theta_5 \sin \gamma \dot{\theta}_3 \dot{\gamma} \\
 &- \sin \theta_3 \sin \gamma \cos \theta_5 \cos \gamma \dot{\theta}_5 \dot{\gamma} + \sin \theta_3 \sin \gamma \sin \theta_5 \sin \gamma \dot{\gamma}^2)
 \end{aligned}$$

Agregamos el término $l_3 l_5 \sin \theta_3 \sin \theta_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5$ para agrupar dentro de $l_3 l_5$:

$$\begin{aligned}
 &l_3 l_5 (\cos \theta_3 \sin \gamma \cos \theta_5 \sin \gamma \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 + \cos \theta_3 \sin \gamma \sin \theta_5 \cos \gamma \dot{\theta}_3 \dot{\gamma} \\
 &+ \sin \theta_3 \cos \gamma \cos \theta_5 \sin \gamma \dot{\theta}_5 \dot{\gamma} + \sin \theta_3 \cos \gamma \sin \theta_5 \cos \gamma \dot{\gamma}^2 \\
 &+ \cos \theta_3 \cos \gamma \cos \theta_5 \cos \gamma \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 - \cos \theta_3 \cos \gamma \sin \theta_5 \sin \gamma \dot{\theta}_3 \dot{\gamma} \\
 &- \sin \theta_3 \sin \gamma \cos \theta_5 \cos \gamma \dot{\theta}_5 \dot{\gamma} + \sin \theta_3 \sin \gamma \sin \theta_5 \sin \gamma \dot{\gamma}^2 \\
 &+ \mathbf{\sin \theta_3 \sin \theta_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 = & l_3 l_5 \left(\dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 (\cos \theta_3 \cos \theta_5 \sin^2 \gamma + \cos \theta_3 \cos \theta_5 \cos^2 \gamma \dot{\theta}_3 + \text{sen } \theta_3 \text{sen } \theta_5) \right. \\
 & + \dot{\theta}_3 \dot{\gamma} (\cos \theta_3 \text{sen } \gamma \text{sen } \theta_5 \cos \gamma - \cos \theta_3 \cos \gamma \text{sen } \theta_5 \text{sen } \gamma) \\
 & + \dot{\theta}_5 \dot{\gamma} (\text{sen } \theta_3 \cos \gamma \cos \theta_5 \text{sen } \gamma - \text{sen } \theta_3 \text{sen } \gamma \cos \theta_5 \cos \gamma) \\
 & \left. + \dot{\gamma}^2 (\text{sen } \theta_3 \text{sen } \theta_5 \cos^2 \gamma + \text{sen } \theta_3 \text{sen } \theta_5 \sin^2 \gamma) \right)
 \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 (\cos \theta_2 \cos \theta_5 \sin^2 \gamma + \cos \theta_2 \cos \theta_5 \cos^2 \gamma \dot{\theta}_2 + \text{sen } \theta_2 \text{sen } \theta_5) \\
 = \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 (\cos \theta_2 \cos \theta_5 + \text{sen } \theta_2 \text{sen } \theta_5)
 \end{aligned}$$

$$\dot{\theta}_3 \dot{\gamma} (\cos \theta_3 \text{sen } \gamma \text{sen } \theta_5 \cos \gamma - \cos \theta_3 \cos \gamma \text{sen } \theta_5 \text{sen } \gamma) = 0$$

$$\dot{\theta}_5 \dot{\gamma} (\text{sen } \theta_3 \cos \gamma \cos \theta_5 \text{sen } \gamma - \text{sen } \theta_3 \text{sen } \gamma \cos \theta_5 \cos \gamma) = 0$$

$$\dot{\gamma}^2 (\text{sen } \theta_3 \text{sen } \theta_5 \cos^2 \gamma + \text{sen } \theta_3 \text{sen } \theta_5 \sin^2 \gamma) = \dot{\gamma}^2 \text{sen } \theta_3 \text{sen } \theta_5$$

Reuniendo los resultados de la agrupación:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_5^2 + \dot{y}_5^2 + \dot{z}_5^2 \\
 = l_3^2 \dot{\theta}_3^2 + l_3^2 \dot{\gamma}^2 \text{sen}^2 \theta_3 + \frac{l_5^2}{4} \dot{\theta}_5^2 + \frac{l_5^2}{4} \dot{\gamma}^2 \text{sen}^2 \theta_3 \\
 + l_3 l_5 (\dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \cos \theta_3 \cos \theta_5 + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \text{sen } \theta_3 \text{sen } \theta_5 + \dot{\gamma}^2 \text{sen } \theta_3 \text{sen } \theta_5)
 \end{aligned}$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned}
 l_3^2 \text{sen}^2 \theta_3 \dot{\gamma}^2 + \frac{l_5^2}{4} \text{sen}^2 \theta_3 \dot{\gamma}^2 + l_3 l_5 \text{sen } \theta_3 \text{sen } \theta_5 \dot{\gamma}^2 \\
 = \dot{\gamma}^2 \left(l_3^2 \text{sen}^2 \theta_3 + \frac{l_5^2}{4} \text{sen}^2 \theta_3 + l_3 l_5 \text{sen } \theta_3 \text{sen } \theta_5 \right) \\
 = \dot{\gamma}^2 \left(l_3 \text{sen } \theta_3 + \frac{l_5}{4} \text{sen } \theta_5 \right)^2
 \end{aligned}$$

$$l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 (\cos \theta_3 \cos \theta_5 + \text{sen } \theta_3 \text{sen } \theta_5) = l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \cos(\theta_3 - \theta_5)$$

Finalmente

$$\dot{x}_5^2 + \dot{y}_5^2 + \dot{z}_5^2 = l_3^2 \dot{\theta}_3^2 + \frac{l_5^2}{4} \dot{\theta}_5^2 + \dot{\gamma}^2 \left(l_3 \text{sen } \theta_3 + \frac{l_5}{4} \text{sen } \theta_5 \right)^2 + l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \cos(\theta_3 - \theta_5)$$

Cálculo del cuadrado de la posición para el eslabón 6:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_6 = & \cos \gamma \left(l_2 \text{sen } \theta_2 + l_4 \text{sen } \theta_4 + \frac{l_6}{2} \text{sen } \theta_6 \right) \dot{\gamma} \\
 & + \text{sen } \gamma \left(l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_4 + \frac{l_6}{2} \cos \theta_6 \dot{\theta}_6 \right)
 \end{aligned}$$

$$\dot{y}_6 = -\operatorname{sen} \gamma \left(l_2 \operatorname{sen} \theta_2 + l_4 \operatorname{sen} \theta_4 + \frac{l_6}{2} \operatorname{sen} \theta_6 \right) \dot{\gamma} \\ + \cos \gamma \left(l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_4 + \frac{l_6}{2} \cos \theta_6 \dot{\theta}_6 \right)$$

$$\dot{z}_6 = - \left(l_2 \operatorname{sen} \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_4 \operatorname{sen} \theta_4 \dot{\theta}_4 + \frac{l_6}{2} \operatorname{sen} \theta_6 \dot{\theta}_6 \right)$$

$$\dot{x}_6^2 = \dot{\gamma}^2 \cos^2 \gamma \left(l_2 \operatorname{sen} \theta_2 + l_4 \operatorname{sen} \theta_4 + \frac{l_6}{2} \operatorname{sen} \theta_6 \right)^2 \\ + 2\dot{\gamma} \cos \gamma \operatorname{sen} \gamma \left(l_2 \operatorname{sen} \theta_2 + l_4 \operatorname{sen} \theta_4 + \frac{l_6}{2} \operatorname{sen} \theta_6 \right) \left(l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_4 \right. \\ \left. + \frac{l_6}{2} \cos \theta_6 \dot{\theta}_6 \right) \\ + \operatorname{sen}^2 \gamma \left(l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_4 + \frac{l_6}{2} \cos \theta_6 \dot{\theta}_6 \right)^2$$

$$\dot{y}_6^2 = \dot{\gamma}^2 \operatorname{sen}^2 \gamma \left(l_2 \operatorname{sen} \theta_2 + l_4 \operatorname{sen} \theta_4 + \frac{l_6}{2} \operatorname{sen} \theta_6 \right)^2 \\ - 2\dot{\gamma} \cos \gamma \operatorname{sen} \gamma \left(l_2 \operatorname{sen} \theta_2 + l_4 \operatorname{sen} \theta_4 + \frac{l_6}{2} \operatorname{sen} \theta_6 \right) \left(l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_4 \right. \\ \left. + \frac{l_6}{2} \cos \theta_6 \dot{\theta}_6 \right) \\ + \cos^2 \gamma \left(l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_4 + \frac{l_6}{2} \cos \theta_6 \dot{\theta}_6 \right)^2$$

$$\dot{z}_6^2 = \left(l_2 \operatorname{sen} \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_4 \operatorname{sen} \theta_4 \dot{\theta}_4 + \frac{l_6}{2} \operatorname{sen} \theta_6 \dot{\theta}_6 \right)^2$$

Entonces tenemos que:

$$\dot{x}_6^2 + \dot{y}_6^2 + \dot{z}_6^2 = \dot{\gamma}^2 \cos^2 \gamma \left(l_2 \operatorname{sen} \theta_2 + l_4 \operatorname{sen} \theta_4 + \frac{l_6}{2} \operatorname{sen} \theta_6 \right)^2 \\ + 2\dot{\gamma} \cos \gamma \operatorname{sen} \gamma \left(l_2 \operatorname{sen} \theta_2 + l_4 \operatorname{sen} \theta_4 + \frac{l_6}{2} \operatorname{sen} \theta_6 \right) \left(l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_4 \right. \\ \left. + \frac{l_6}{2} \cos \theta_6 \dot{\theta}_6 \right) \\ + \operatorname{sen}^2 \gamma \left(l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_4 + \frac{l_6}{2} \cos \theta_6 \dot{\theta}_6 \right)^2 \\ + \dot{\gamma}^2 \operatorname{sen}^2 \gamma \left(l_2 \operatorname{sen} \theta_2 + l_4 \operatorname{sen} \theta_4 + \frac{l_6}{2} \operatorname{sen} \theta_6 \right)^2 \\ - 2\dot{\gamma} \cos \gamma \operatorname{sen} \gamma \left(l_2 \operatorname{sen} \theta_2 + l_4 \operatorname{sen} \theta_4 + \frac{l_6}{2} \operatorname{sen} \theta_6 \right) \left(l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_4 \right. \\ \left. + \frac{l_6}{2} \cos \theta_6 \dot{\theta}_6 \right) \\ + \cos^2 \gamma \left(l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_4 + \frac{l_6}{2} \cos \theta_6 \dot{\theta}_6 \right)^2 \\ + \left(l_2 \operatorname{sen} \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_4 \operatorname{sen} \theta_4 \dot{\theta}_4 + \frac{l_6}{2} \operatorname{sen} \theta_6 \dot{\theta}_6 \right)^2$$

Agrupando términos iguales encontramos que:

$$\dot{\gamma}^2 \cos^2 \gamma \left(l_2 \sin \theta_2 + l_4 \sin \theta_4 + \frac{l_6}{2} \sin \theta_6 \right)^2 + \dot{\gamma}^2 \sin^2 \gamma \left(l_2 \sin \theta_2 + l_4 \sin \theta_4 + l_6 \sin \theta_6 \right)^2 = \gamma^2 l_2^2 \sin^2 \theta_2 + l_4^2 \sin^2 \theta_4 + l_6^2 \sin^2 \theta_6 + 2 \cos^2 \gamma \left(l_2 l_4 \sin \theta_2 \sin \theta_4 + l_2 l_6 \sin \theta_2 \sin \theta_6 + l_4 l_6 \sin \theta_4 \sin \theta_6 \right) + \sin^2 \gamma \left(l_2 l_4 \sin \theta_2 \sin \theta_4 + l_2 l_6 \sin \theta_2 \sin \theta_6 + l_4 l_6 \sin \theta_4 \sin \theta_6 \right)$$

Por otro lado

$$\sin^2 \gamma \left(l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_4 + \frac{l_6}{2} \cos \theta_6 \dot{\theta}_6 \right)^2 + \cos^2 \gamma \left(l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_4 + l_6 \cos \theta_6 \dot{\theta}_6 \right)^2 = l_2^2 \cos^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + l_4^2 \cos^2 \theta_4 \dot{\theta}_4^2 + \frac{l_6^2}{4} \cos^2 \theta_6 \dot{\theta}_6^2 + 2 l_2 l_4 \cos \theta_2 \cos \theta_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + 2 l_2 l_6 \cos \theta_2 \cos \theta_6 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_6 + 2 l_4 l_6 \cos \theta_4 \cos \theta_6 \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 + 2 \cos^2 \gamma \left(l_2 l_4 \cos \theta_2 \cos \theta_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + l_2 l_6 \cos \theta_2 \cos \theta_6 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_6 + l_4 l_6 \cos \theta_4 \cos \theta_6 \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 \right) + 2 \sin^2 \gamma \left(l_2 l_4 \cos \theta_2 \cos \theta_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + l_2 l_6 \cos \theta_2 \cos \theta_6 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_6 + l_4 l_6 \cos \theta_4 \cos \theta_6 \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 \right)$$

Desarrollando los cuadrados y aplicando identidades trigonométricas pitagóricas y de producto a suma, lo anterior se reduce a:

$$l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + l_4^2 \dot{\theta}_4^2 + \frac{l_6^2}{4} \dot{\theta}_6^2 + 2 l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) + 2 l_2 l_6 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_6 \cos(\theta_2 - \theta_6) + 2 l_4 l_6 \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 \cos(\theta_4 - \theta_6)$$

Uniendo los resultados obtenidos tenemos finalmente:

$$\begin{aligned} \dot{x}_6^2 + \dot{y}_6^2 + \dot{z}_6^2 &= \dot{\gamma}^2 \left(l_2 \sin \theta_2 + l_4 \sin \theta_4 + \frac{l_6}{2} \sin \theta_6 \right)^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + l_4^2 \dot{\theta}_4^2 + \frac{l_6^2}{4} \dot{\theta}_6^2 \\ &+ 2 l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) + 2 l_2 l_6 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_6 \cos(\theta_2 - \theta_6) \\ &+ 2 l_4 l_6 \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 \cos(\theta_4 - \theta_6) \end{aligned}$$

Cálculo del cuadrado de la posición para el eslabón 7:

$$\begin{aligned} x_7 &= \cos \gamma \left(l_3 \sin \theta_3 + l_5 \sin \theta_5 + \frac{l_7}{2} \sin \theta_7 \right) \dot{\gamma} \\ &+ \sin \gamma \left(l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 + l_5 \cos \theta_5 \dot{\theta}_5 + \frac{l_7}{2} \cos \theta_7 \dot{\theta}_7 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_7 &= -\sin \gamma \left(l_3 \sin \theta_3 + l_5 \sin \theta_5 + \frac{l_7}{2} \sin \theta_7 \right) \dot{\gamma} \\ &+ \cos \gamma \left(l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 + l_5 \cos \theta_5 \dot{\theta}_5 + \frac{l_7}{2} \cos \theta_7 \dot{\theta}_7 \right) \end{aligned}$$

$$z_7 = - \left(l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 + l_5 \cos \theta_5 \dot{\theta}_5 + \frac{l_7}{2} \cos \theta_7 \dot{\theta}_7 \right)$$

$$\dot{x}_7^2 = \dot{\gamma}^2 \cos^2 \gamma \left(l_3 \sin \theta_3 + l_5 \sin \theta_5 + \frac{l_7}{2} \sin \theta_7 \right)^2$$

$$+ 2\dot{\gamma} \cos \gamma \operatorname{sen} \gamma \left(l_3 \operatorname{sen} \theta_3 + l_5 \operatorname{sen} \theta_5 + \frac{l_7}{2} \operatorname{sen} \theta_7 \right) \left(l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 + l_5 \cos \theta_5 \dot{\theta}_5 + \frac{l_7}{2} \cos \theta_7 \dot{\theta}_7 \right) \\ + \operatorname{sen}^2 \gamma \left(l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 + l_5 \cos \theta_5 \dot{\theta}_5 + \frac{l_7}{2} \cos \theta_7 \dot{\theta}_7 \right)^2$$

$$y_7^2 = \dot{\gamma}^2 \operatorname{sen}^2 \gamma \left(l_3 \operatorname{sen} \theta_3 + l_5 \operatorname{sen} \theta_5 + \frac{l_7}{2} \operatorname{sen} \theta_7 \right)^2 \\ - 2\dot{\gamma} \cos \gamma \operatorname{sen} \gamma \left(l_3 \operatorname{sen} \theta_3 + l_5 \operatorname{sen} \theta_5 + \frac{l_7}{2} \operatorname{sen} \theta_7 \right) \left(l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 + l_5 \cos \theta_5 \dot{\theta}_5 + \frac{l_7}{2} \cos \theta_7 \dot{\theta}_7 \right) \\ + \cos^2 \gamma \left(l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 + l_5 \cos \theta_5 \dot{\theta}_5 + \frac{l_7}{2} \cos \theta_7 \dot{\theta}_7 \right)^2$$

$$z_7^2 = \left(l_3 \operatorname{sen} \theta_3 \dot{\theta}_3 + l_5 \operatorname{sen} \theta_5 \dot{\theta}_5 + \frac{l_7}{2} \operatorname{sen} \theta_7 \dot{\theta}_7 \right)^2$$

$$l_2^2 \operatorname{sen}^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + l_4^2 \operatorname{sen}^2 \theta_4 \dot{\theta}_4^2 + \frac{l_6^2}{4} \operatorname{sen}^2 \theta_6 \dot{\theta}_6^2 + 2l_2 l_4 \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + l_2 l_6 \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_6 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_6 \\ + l_4 l_6 \operatorname{sen} \theta_4 \operatorname{sen} \theta_6 \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6$$

$$\dot{x}_7^2 + \dot{y}_7^2 + \dot{z}_7^2 = \dot{\gamma}^2 \cos^2 \gamma \left(l_3 \operatorname{sen} \theta_3 + l_5 \operatorname{sen} \theta_5 + \frac{l_7}{2} \operatorname{sen} \theta_7 \right)^2 \\ - 2\dot{\gamma} \cos \gamma \operatorname{sen} \gamma \left(l_3 \operatorname{sen} \theta_3 + l_5 \operatorname{sen} \theta_5 + \frac{l_7}{2} \operatorname{sen} \theta_7 \right) \left(l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 + l_5 \cos \theta_5 \dot{\theta}_5 + \frac{l_7}{2} \cos \theta_7 \dot{\theta}_7 \right) \\ + \operatorname{sen}^2 \gamma \left(l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 + l_5 \cos \theta_5 \dot{\theta}_5 + \frac{l_7}{2} \cos \theta_7 \dot{\theta}_7 \right)^2 \\ + \dot{\gamma}^2 \operatorname{sen}^2 \gamma \left(l_3 \operatorname{sen} \theta_3 + l_5 \operatorname{sen} \theta_5 + \frac{l_7}{2} \operatorname{sen} \theta_7 \right)^2 \\ - 2\dot{\gamma} \cos \gamma \operatorname{sen} \gamma \left(l_3 \operatorname{sen} \theta_3 + l_5 \operatorname{sen} \theta_5 + \frac{l_7}{2} \operatorname{sen} \theta_7 \right) \left(l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 + l_5 \cos \theta_5 \dot{\theta}_5 + \frac{l_7}{2} \cos \theta_7 \dot{\theta}_7 \right) \\ + \cos^2 \gamma \left(l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 + l_5 \cos \theta_5 \dot{\theta}_5 + \frac{l_7}{2} \cos \theta_7 \dot{\theta}_7 \right)^2 \\ + \left(l_3 \operatorname{sen} \theta_3 \dot{\theta}_3 + l_5 \operatorname{sen} \theta_5 \dot{\theta}_5 + \frac{l_7}{2} \operatorname{sen} \theta_7 \dot{\theta}_7 \right)^2$$

Agrupando términos iguales encontramos que:

$$\dot{\gamma}^2 \cos^2 \gamma \left(l_3 \sin \theta_3 + l_5 \sin \theta_5 + \frac{l_7}{2} \sin \theta_7 \right)^2 + \dot{\gamma}^2 \sin^2 \gamma \left(l_3 \sin \theta_3 + l_5 \sin \theta_5 + \frac{l_7}{2} \sin \theta_7 \right)^2 = \dot{\gamma}^2 \left(l_3 \sin \theta_3 + l_5 \sin \theta_5 + \frac{l_7}{2} \sin \theta_7 \right)^2$$

$$\begin{aligned} & \sin^2 \gamma \left(l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 + l_5 \cos \theta_5 \dot{\theta}_5 + \frac{l_7}{2} \cos \theta_7 \dot{\theta}_7 \right)^2 + \cos^2 \gamma \left(l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 + l_5 \cos \theta_5 \dot{\theta}_5 + \frac{l_7}{2} \cos \theta_7 \dot{\theta}_7 \right)^2 + \left(l_3 \sin \theta_3 + l_5 \sin \theta_5 + \frac{l_7}{2} \sin \theta_7 \right)^2 = \left(l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 + l_5 \cos \theta_5 \dot{\theta}_5 + \frac{l_7}{2} \cos \theta_7 \dot{\theta}_7 \right)^2 + \left(l_3 \sin \theta_3 + l_5 \sin \theta_5 + \frac{l_7}{2} \sin \theta_7 \right)^2 = \\ & l_3^2 \dot{\theta}_3^2 + l_5^2 \dot{\theta}_5^2 + \frac{l_7^2}{4} \dot{\theta}_7^2 + 2l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \cos(\theta_3 - \theta_5) + 2l_3 l_7 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_7 \cos(\theta_3 - \theta_7) + 2l_5 l_7 \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_7 \cos(\theta_5 - \theta_7) \end{aligned}$$

Uniendo los resultados obtenidos tenemos finalmente:

$$\begin{aligned} \dot{x}_7^2 + \dot{y}_7^2 + \dot{z}_7^2 &= \dot{\gamma}^2 \left(l_3 \sin \theta_3 + l_5 \sin \theta_5 + \frac{l_7}{2} \sin \theta_7 \right)^2 + l_3^2 \dot{\theta}_3^2 + l_5^2 \dot{\theta}_5^2 + \frac{l_7^2}{4} \dot{\theta}_7^2 \\ &+ 2l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \cos(\theta_3 - \theta_5) + 2l_3 l_7 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_7 \cos(\theta_3 - \theta_7) \\ &+ 2l_5 l_7 \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_7 \cos(\theta_5 - \theta_7) \end{aligned}$$

Cálculo del Lagrangiano

$$L = T - V$$

donde **T** es la energía cinética de cada eslabón y **V** la energía potencial, se definen como sigue:

$$T = \frac{1}{2} m V^2 \Rightarrow \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$V = mgh$$

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{l_2^2}{4} (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\gamma}^2 \operatorname{sen}^2 \theta_2) \right) \\
 & + \frac{1}{2} m_3 \left(\frac{l_3^2}{4} (\dot{\theta}_3^2 + \dot{\gamma}^2 \operatorname{sen}^2 \theta_3) \right) \\
 & + \frac{1}{2} m_4 \left(l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{l_4^2}{4} \dot{\theta}_4^2 + \dot{\gamma}^2 \left(l_2 \operatorname{sen} \theta_2 + \frac{l_4}{2} \operatorname{sen} \theta_4 \right)^2 + l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) \right) \\
 & + \frac{1}{2} m_5 \left(l_3^2 \dot{\theta}_3^2 + \frac{l_5^2}{4} \dot{\theta}_5^2 + \dot{\gamma}^2 \left(l_3 \operatorname{sen} \theta_3 + \frac{l_5}{4} \operatorname{sen} \theta_5 \right)^2 + l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \cos(\theta_3 - \theta_5) \right) \\
 & + \frac{1}{2} m_6 \left(\dot{\gamma}^2 \left(l_2 \operatorname{sen} \theta_2 + l_4 \operatorname{sen} \theta_4 + \frac{l_6}{2} \operatorname{sen} \theta_6 \right)^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + l_4^2 \dot{\theta}_4^2 + \frac{l_6^2}{4} \dot{\theta}_6^2 \right. \\
 & \quad \left. + 2l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) + l_2 l_6 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_6 \cos(\theta_2 - \theta_6) + l_4 l_6 \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 \cos(\theta_4 - \theta_6) \right) \\
 & + \frac{1}{2} m_7 \left(\dot{\gamma}^2 \left(l_3 \operatorname{sen} \theta_3 + l_5 \operatorname{sen} \theta_5 + \frac{l_7}{2} \operatorname{sen} \theta_7 \right)^2 + l_3^2 \dot{\theta}_3^2 + l_5^2 \dot{\theta}_5^2 + \frac{l_7^2}{4} \dot{\theta}_7^2 \right. \\
 & \quad \left. + 2l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \cos(\theta_3 - \theta_5) + l_3 l_7 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_7 \cos(\theta_3 - \theta_7) + l_5 l_7 \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_7 \cos(\theta_5 - \theta_7) \right) \\
 & - m_2 g \left(\frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \right) - m_3 g \left(\frac{l_1}{2} + \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 \right) - m_4 g \left(\frac{l_1}{2} + l_2 \cos \theta_2 + \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 \right) \\
 & - m_5 g \left(\frac{l_1}{2} + l_3 \cos \theta_3 + \frac{l_5}{2} \cos \theta_5 \right) - m_6 g \left(\frac{l_1}{2} + l_2 \cos \theta_2 + l_4 \cos \theta_4 + \frac{l_6}{2} \cos \theta_6 \right) \\
 & - m_7 g \left(\frac{l_1}{2} + l_3 \cos \theta_3 + l_5 \cos \theta_5 + \frac{l_7}{2} \cos \theta_7 \right)
 \end{aligned}$$

Procedemos a calcular cada uno de los Lagrangianos para cada variable, que de forma generalizada llamaremos q, definidos como:

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dt} \frac{dL}{dq} - \frac{dL}{dq} = FNP$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{\gamma}} - \frac{dL}{d\gamma} = FNP$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\dot{\gamma}} = & \frac{1}{4} m_2 l_2^2 \text{sen}^2 \theta_2 \dot{\gamma} + \frac{1}{4} m_3 l_3^2 \text{sen}^2 \theta_3 \dot{\gamma} + m_4 \left(l_2 \text{sen} \theta_2 + \frac{l_4}{2} \text{sen} \theta_4 \right)^2 \dot{\gamma} \\ & + m_5 \left(l_3 \text{sen} \theta_3 + \frac{l_5}{4} \text{sen} \theta_5 \right)^2 \dot{\gamma} + m_6 \left(l_2 \text{sen} \theta_2 + l_4 \text{sen} \theta_4 + \frac{l_6}{2} \text{sen} \theta_6 \right)^2 \dot{\gamma} \\ & + m_7 \left(l_3 \text{sen} \theta_3 + l_5 \text{sen} \theta_5 + \frac{l_7}{2} \text{sen} \theta_7 \right)^2 \dot{\gamma} \end{aligned}$$

$$\frac{dL}{d\gamma} = 0$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\dot{\gamma} \left(\frac{1}{4} m_2 l_2^2 \text{sen}^2 \theta_2 + \frac{1}{4} m_3 l_3^2 \text{sen}^2 \theta_3 + m_4 \left(l_2 \text{sen} \theta_2 + \frac{l_4}{2} \text{sen} \theta_4 \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + m_5 \left(l_3 \text{sen} \theta_3 + \frac{l_5}{4} \text{sen} \theta_5 \right)^2 + m_6 \left(l_2 \text{sen} \theta_2 + l_4 \text{sen} \theta_4 + \frac{l_6}{2} \text{sen} \theta_6 \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + m_7 \left(l_3 \text{sen} \theta_3 + l_5 \text{sen} \theta_5 + \frac{l_7}{2} \text{sen} \theta_7 \right)^2 \right) \right] - 0 = FNP \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \Rightarrow \dot{\gamma} \left[\frac{1}{4} m_2 l_2^2 \text{sen}^2 \theta_2 + \frac{1}{4} m_3 l_3^2 \text{sen}^2 \theta_3 + m_4 \left(l_2 \text{sen} \theta_2 + \frac{l_4}{2} \text{sen} \theta_4 \right)^2 \right. \\ \left. + m_5 \left(l_3 \text{sen} \theta_3 + \frac{l_5}{4} \text{sen} \theta_5 \right)^2 + m_6 \left(l_2 \text{sen} \theta_2 + l_4 \text{sen} \theta_4 + \frac{l_6}{2} \text{sen} \theta_6 \right)^2 \right. \\ \left. + m_7 \left(l_3 \text{sen} \theta_3 + l_5 \text{sen} \theta_5 + \frac{l_7}{2} \text{sen} \theta_7 \right)^2 \right] \\ + \dot{\gamma} \left[\frac{1}{2} m_2 l_2^2 \text{sen} \theta_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_3 l_3^2 \text{sen} \theta_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 \right. \\ + 2m_4 \left(l_2 \text{sen} \theta_2 + \frac{l_4}{2} \text{sen} \theta_4 \right) \left(l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 \dot{\theta}_4 \right) \\ + 2m_5 \left(l_3 \text{sen} \theta_3 + \frac{l_5}{4} \text{sen} \theta_5 \right) \left(l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 + \frac{l_5}{4} \cos \theta_5 \dot{\theta}_5 \right) \\ + 2m_6 \left(l_2 \text{sen} \theta_2 + l_4 \text{sen} \theta_4 + \frac{l_6}{2} \text{sen} \theta_6 \right) \left(l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_4 \right. \\ \left. + \frac{l_6}{2} \cos \theta_6 \dot{\theta}_6 \right) \\ \left. + 2m_7 \left(l_3 \text{sen} \theta_3 + l_5 \text{sen} \theta_5 + \frac{l_7}{2} \text{sen} \theta_7 \right) \left(l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 + l_5 \cos \theta_5 \dot{\theta}_5 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{l_7}{2} \cos \theta_7 \dot{\theta}_7 \right) \right] = FNP \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{\theta}_2} - \frac{dL}{d\theta_2} = FNP$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\dot{\theta}_2} &= \frac{1}{4}m_2l_2^2\dot{\theta}_2 + m_4l_2^2\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_4l_2l_4\dot{\theta}_4\cos(\theta_2 - \theta_4) + m_6l_2^2\dot{\theta}_2 + m_6l_2l_4\dot{\theta}_4\cos(\theta_2 - \theta_4) \\ &\quad + \frac{1}{2}m_6l_2l_6\dot{\theta}_6\cos(\theta_2 - \theta_6) \\ \frac{dL}{d\theta_2} &= \frac{1}{4}m_2l_2^2\dot{\gamma}^2\sin\theta_2\cos\theta_2 + \dot{\gamma}^2m_4l_2\cos\theta_2\left(l_2\sin\theta_2 + \frac{l_4}{2}\sin\theta_4\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}m_4l_2l_4\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4\sin(\theta_2 - \theta_4) \\ &\quad + \frac{1}{2}m_6\dot{\gamma}^2l_2\cos\theta_2\left(l_2\sin\theta_2 + l_4\sin\theta_4 + \frac{l_6}{2}\sin\theta_6\right) \\ &\quad - m_6l_2l_4\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4\sin(\theta_2 - \theta_4) - \frac{1}{2}m_6l_2l_6\dot{\theta}_2\dot{\theta}_6\sin(\theta_2 - \theta_6) + \frac{1}{2}m_2gl_2\sin\theta_2 \\ &\quad + m_4gl_2\sin\theta_2 + m_6gl_2\sin\theta_2 \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 \Rightarrow &\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{4}m_2l_2^2\dot{\theta}_2 + m_4l_2^2\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_4l_2l_4\dot{\theta}_4\cos(\theta_2 - \theta_4) + m_6l_2^2\dot{\theta}_2 \right. \\ &\quad \left. + m_6l_2l_4\dot{\theta}_4\cos(\theta_2 - \theta_4) + \frac{1}{2}m_6l_2l_6\dot{\theta}_6\cos(\theta_2 - \theta_6) \right] \\ &- \left[\frac{1}{4}m_2l_2^2\dot{\gamma}^2\sin\theta_2\cos\theta_2 + \dot{\gamma}^2m_4l_2\cos\theta_2\left(l_2\sin\theta_2 + \frac{l_4}{2}\sin\theta_4\right) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2}m_4l_2l_4\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4\sin(\theta_2 - \theta_4) \\ &\quad + \frac{1}{2}m_6\dot{\gamma}^2l_2\cos\theta_2\left(l_2\sin\theta_2 + l_4\sin\theta_4 + \frac{l_6}{2}\sin\theta_6\right) \\ &\quad - m_6l_2l_4\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4\sin(\theta_2 - \theta_4) - \frac{1}{2}m_6l_2l_6\dot{\theta}_2\dot{\theta}_6\sin(\theta_2 - \theta_6) + \frac{1}{2}m_2gl_2\sin\theta_2 \\ &\quad \left. + m_4gl_2\sin\theta_2 + m_6gl_2\sin\theta_2 \right] = FNP \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 \Rightarrow &\frac{1}{4}m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_4l_2^2\ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_4l_2l_4\ddot{\theta}_4\cos(\theta_2 - \theta_4) - \frac{1}{2}m_4l_2l_4\dot{\theta}_4\sin(\theta_2 - \theta_4)(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_4) \\ &+ m_6l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_6l_2l_4\ddot{\theta}_4\cos(\theta_2 - \theta_4) - m_6l_2l_4\dot{\theta}_4\sin(\theta_2 - \theta_4)(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_4) \\ &+ \frac{1}{2}m_6l_2l_6\ddot{\theta}_6\cos(\theta_2 - \theta_6) - \frac{1}{2}m_6l_2l_6\dot{\theta}_6\sin(\theta_2 - \theta_6)(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_6) \\ &- \frac{1}{4}m_2l_2^2\dot{\gamma}^2\sin\theta_2\cos\theta_2 - \dot{\gamma}^2m_4l_2\cos\theta_2\left(l_2\sin\theta_2 + \frac{l_4}{2}\sin\theta_4\right) \\ &+ \frac{1}{2}m_4l_2l_4\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4\sin(\theta_2 - \theta_4) \\ &- \frac{1}{2}m_6\dot{\gamma}^2l_2\cos\theta_2\left(l_2\sin\theta_2 + l_4\sin\theta_4 + \frac{l_6}{2}\sin\theta_6\right) \\ &+ m_6l_2l_4\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4\sin(\theta_2 - \theta_4) + \frac{1}{2}m_6l_2l_6\dot{\theta}_2\dot{\theta}_6\sin(\theta_2 - \theta_6) - \frac{1}{2}m_2gl_2\sin\theta_2 \\ &- m_4gl_2\sin\theta_2 - m_6gl_2\sin\theta_2 = FNP \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_3 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{\theta}_3} - \frac{dL}{d\theta_3} = FNP$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\dot{\theta}_3} = & \frac{1}{4} m_3 l_3^2 \dot{\theta}_3 + m_5 l_3^2 \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} m_5 l_3 l_5 \dot{\theta}_5 \cos(\theta_3 - \theta_5) + m_7 l_3^2 \dot{\theta}_3 + m_7 l_3 l_5 \dot{\theta}_5 \cos(\theta_3 \\ & - \theta_5) + \frac{1}{2} m_7 l_3 l_7 \dot{\theta}_7 \cos(\theta_3 - \theta_7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\theta_3} = & \frac{1}{4} m_3 l_3^2 \dot{\gamma}^2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + \dot{\gamma}^2 m_5 l_3 \cos \theta_3 \left(l_3 \sin \theta_3 + \frac{l_5}{2} \sin \theta_5 \right) \\ & - \frac{1}{2} m_5 l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \sin(\theta_3 - \theta_5) \\ & + \frac{1}{2} m_7 \dot{\gamma}^2 l_3 \cos \theta_3 \left(l_3 \sin \theta_3 + l_5 \sin \theta_5 + \frac{l_7}{2} \sin \theta_7 \right) - m_7 l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \sin(\theta_3 \\ & - \theta_5) - \frac{1}{2} m_7 l_3 l_7 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_7 \sin(\theta_3 - \theta_7) + \frac{1}{2} m_3 g l_3 \sin \theta_3 + m_5 g l_3 \sin \theta_3 \\ & + m_7 g l_3 \sin \theta_3 \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 \Rightarrow & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{4} m_3 l_3^2 \dot{\theta}_3 + m_5 l_3^2 \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} m_5 l_3 l_5 \dot{\theta}_5 \cos(\theta_3 - \theta_5) + m_7 l_3^2 \dot{\theta}_3 \right. \\ & \left. + m_7 l_3 l_5 \dot{\theta}_5 \cos(\theta_3 - \theta_5) + \frac{1}{2} m_7 l_3 l_7 \dot{\theta}_7 \cos(\theta_3 - \theta_7) \right] \\ & - \left[\frac{1}{4} m_3 l_3^2 \dot{\gamma}^2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 + \dot{\gamma}^2 m_5 l_3 \cos \theta_3 \left(l_3 \sin \theta_3 + \frac{l_5}{2} \sin \theta_5 \right) \right. \\ & - \frac{1}{2} m_5 l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \sin(\theta_3 - \theta_5) \\ & + \frac{1}{2} m_7 \dot{\gamma}^2 l_3 \cos \theta_3 \left(l_3 \sin \theta_3 + l_5 \sin \theta_5 + \frac{l_7}{2} \sin \theta_7 \right) - m_7 l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \sin(\theta_3 \\ & - \theta_5) - \frac{1}{2} m_7 l_3 l_7 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_7 \sin(\theta_3 - \theta_7) + \frac{1}{2} m_3 g l_3 \sin \theta_3 + m_5 g l_3 \sin \theta_3 \\ & \left. + m_7 g l_3 \sin \theta_3 \right] = FNP \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 \Rightarrow & \frac{1}{4} m_3 l_3^2 \ddot{\theta}_3 + m_5 l_3^2 \ddot{\theta}_3 + \frac{1}{2} m_5 l_3 l_5 \ddot{\theta}_5 \cos(\theta_3 - \theta_5) - \frac{1}{2} m_5 l_3 l_5 \dot{\theta}_5 \sin(\theta_3 - \theta_5) (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_5) \\ & + m_7 l_3^2 \ddot{\theta}_3 + m_7 l_3 l_5 \ddot{\theta}_5 \cos(\theta_3 - \theta_5) - m_7 l_3 l_5 \dot{\theta}_5 \sin(\theta_3 - \theta_5) (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_5) \\ & + \frac{1}{2} m_7 l_3 l_7 \ddot{\theta}_7 \cos(\theta_3 - \theta_7) - \frac{1}{2} m_7 l_3 l_7 \dot{\theta}_7 \sin(\theta_3 - \theta_7) (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_7) \\ & - \frac{1}{4} m_3 l_3^2 \dot{\gamma}^2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 - \dot{\gamma}^2 m_5 l_3 \cos \theta_3 \left(l_3 \sin \theta_3 + \frac{l_5}{2} \sin \theta_5 \right) \\ & + \frac{1}{2} m_5 l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \sin(\theta_3 - \theta_5) \\ & - \frac{1}{2} m_7 \dot{\gamma}^2 l_3 \cos \theta_3 \left(l_3 \sin \theta_3 + l_5 \sin \theta_5 + \frac{l_7}{2} \sin \theta_7 \right) \\ & + m_7 l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \sin(\theta_3 - \theta_5) + \frac{1}{2} m_7 l_3 l_7 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_7 \sin(\theta_3 - \theta_7) - \frac{1}{2} m_3 g l_3 \sin \theta_3 \\ & - m_5 g l_3 \sin \theta_3 - m_7 g l_3 \sin \theta_3 = FNP \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_4 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{\theta}_4} - \frac{dL}{d\theta_4} = FNP$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\dot{\theta}_4} = & \frac{1}{4} m_4 l_4^2 \dot{\theta}_4 + \frac{1}{2} m_4 l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) + m_6 l_4^2 \dot{\theta}_4 + m_6 l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) \\ & + \frac{1}{2} m_6 l_4 l_6 \dot{\theta}_6 \cos(\theta_4 - \theta_6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\theta_4} = & \frac{1}{2} m_4 l_4 \cos \theta_4 \dot{\gamma}^2 \left(l_2 \sin \theta_2 + \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 \right) + \frac{1}{2} m_4 l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) \\ & + m_6 l_4 \cos \theta_4 \dot{\gamma}^2 \left(l_2 \sin \theta_2 + l_4 \sin \theta_4 + \frac{l_6}{2} \sin \theta_6 \right) \\ & + m_6 l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) - \frac{1}{2} m_6 l_4 l_6 \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 \sin(\theta_4 - \theta_6) + \frac{1}{2} m_4 g l_4 \sin \theta_4 \\ & + \frac{1}{2} m_6 g l_4 \sin \theta_4 \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 \Rightarrow & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{4} m_4 l_4^2 \dot{\theta}_4 + \frac{1}{2} m_4 l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) + m_6 l_4^2 \dot{\theta}_4 + m_6 l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} m_6 l_4 l_6 \dot{\theta}_6 \cos(\theta_4 - \theta_6) \right] \\ & - \left[\frac{1}{2} m_4 l_4 \cos \theta_4 \dot{\gamma}^2 \left(l_2 \sin \theta_2 + \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 \right) + \frac{1}{2} m_4 l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) \right. \\ & + m_6 l_4 \cos \theta_4 \dot{\gamma}^2 \left(l_2 \sin \theta_2 + l_4 \sin \theta_4 + \frac{l_6}{2} \sin \theta_6 \right) \\ & + m_6 l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) - \frac{1}{2} m_6 l_4 l_6 \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 \sin(\theta_4 - \theta_6) + \frac{1}{2} m_4 g l_4 \sin \theta_4 \\ & \left. + \frac{1}{2} m_6 g l_4 \sin \theta_4 \right] = FNP \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 \Rightarrow & \frac{1}{4} m_4 l_4^2 \ddot{\theta}_4 + \frac{1}{2} m_4 l_2 l_4 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) - \frac{1}{2} m_4 l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_4) (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_4) \\ & + m_6 l_4^2 \ddot{\theta}_4 + m_6 l_2 l_4 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) - m_6 l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_4) (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_4) \\ & + \frac{1}{2} m_6 l_4 l_6 \ddot{\theta}_6 \cos(\theta_4 - \theta_6) - \frac{1}{2} m_6 l_4 l_6 \dot{\theta}_6 \sin(\theta_4 - \theta_6) (\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_6) \\ & - \frac{1}{2} m_4 l_4 \cos \theta_4 \dot{\gamma}^2 \left(l_2 \sin \theta_2 + \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 \right) - \frac{1}{2} m_4 l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) \\ & - m_6 l_4 \cos \theta_4 \dot{\gamma}^2 \left(l_2 \sin \theta_2 + l_4 \sin \theta_4 + \frac{l_6}{2} \sin \theta_6 \right) \\ & - m_6 l_2 l_4 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) + \frac{1}{2} m_6 l_4 l_6 \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 \sin(\theta_4 - \theta_6) - \frac{1}{2} m_4 g l_4 \sin \theta_4 \\ & - \frac{1}{2} m_6 g l_4 \sin \theta_4 = FNP \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_5 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{\theta}_5} - \frac{dL}{d\theta_5} = FNP$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\dot{\theta}_5} = & \frac{1}{4} m_5 l_5^2 \dot{\theta}_5 + \frac{1}{2} m_5 l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_3 - \theta_5) + m_7 l_5^2 \dot{\theta}_5 + m_7 l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_3 - \theta_5) \\ & + \frac{1}{2} m_7 l_5 l_7 \dot{\theta}_7 \cos(\theta_5 - \theta_7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\theta_5} = & \frac{1}{2} m_5 l_5 \cos \theta_5 \dot{\gamma}^2 \left(l_3 \operatorname{sen} \theta_3 + \frac{l_5}{2} \operatorname{sen} \theta_5 \right) + \frac{1}{2} m_5 l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_5) \\ & + m_7 l_5 \cos \theta_5 \dot{\gamma}^2 \left(l_3 \operatorname{sen} \theta_3 + l_5 \operatorname{sen} \theta_5 + \frac{l_7}{2} \operatorname{sen} \theta_7 \right) \\ & + m_7 l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_5) - \frac{1}{2} m_7 l_5 l_7 \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_7 \operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_7) + \frac{1}{2} m_5 g l_5 \operatorname{sen} \theta_5 \\ & + \frac{1}{2} m_7 g l_5 \operatorname{sen} \theta_5 \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 \Rightarrow & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{4} m_5 l_5^2 \dot{\theta}_5 + \frac{1}{2} m_5 l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_3 - \theta_5) + m_7 l_5^2 \dot{\theta}_5 + m_7 l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_3 - \theta_5) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} m_7 l_5 l_7 \dot{\theta}_7 \cos(\theta_5 - \theta_7) \right] \\ & - \left[\frac{1}{2} m_5 l_5 \cos \theta_5 \dot{\gamma}^2 \left(l_3 \operatorname{sen} \theta_3 + \frac{l_5}{2} \operatorname{sen} \theta_5 \right) + \frac{1}{2} m_5 l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_5) \right. \\ & + m_7 l_5 \cos \theta_5 \dot{\gamma}^2 \left(l_3 \operatorname{sen} \theta_3 + l_5 \operatorname{sen} \theta_5 + \frac{l_7}{2} \operatorname{sen} \theta_7 \right) \\ & + m_7 l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_5) - \frac{1}{2} m_7 l_5 l_7 \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_7 \operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_7) + \frac{1}{2} m_5 g l_5 \operatorname{sen} \theta_5 \\ & \left. + \frac{1}{2} m_7 g l_5 \operatorname{sen} \theta_5 \right] = FNP \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 \Rightarrow & \frac{1}{4} m_5 l_5^2 \ddot{\theta}_5 + \frac{1}{2} m_5 l_3 l_5 \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_3 - \theta_5) - \frac{1}{2} m_5 l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_5) (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_5) \\ & + m_7 l_5^2 \ddot{\theta}_5 + m_7 l_3 l_5 \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_3 - \theta_5) - m_7 l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_5) (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_5) \\ & + \frac{1}{2} m_7 l_5 l_7 \ddot{\theta}_7 \cos(\theta_5 - \theta_7) - \frac{1}{2} m_7 l_5 l_7 \dot{\theta}_7 \operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_7) (\dot{\theta}_5 - \dot{\theta}_7) \\ & - \frac{1}{2} m_5 l_5 \cos \theta_5 \dot{\gamma}^2 \left(l_3 \operatorname{sen} \theta_3 + \frac{l_5}{2} \operatorname{sen} \theta_5 \right) - \frac{1}{2} m_5 l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_5) \\ & - m_7 l_5 \cos \theta_5 \dot{\gamma}^2 \left(l_3 \operatorname{sen} \theta_3 + l_5 \operatorname{sen} \theta_5 + \frac{l_7}{2} \operatorname{sen} \theta_7 \right) \\ & - m_7 l_3 l_5 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_5) + \frac{1}{2} m_7 l_5 l_7 \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_7 \operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_7) - \frac{1}{2} m_5 g l_5 \operatorname{sen} \theta_5 \\ & - \frac{1}{2} m_7 g l_5 \operatorname{sen} \theta_5 = FNP \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_6 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{\theta}_6} - \frac{dL}{d\theta_6} = FNP$$

donde:

$$\frac{dL}{d\dot{\theta}_6} = \frac{1}{4} m_6 l_6^2 \dot{\theta}_6 + \frac{1}{2} m_6 l_2 l_6 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_6) + \frac{1}{2} m_6 l_4 l_6 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_4 - \theta_6)$$

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\theta_6} = & \frac{1}{2} m_6 l_6 \cos \theta_6 \dot{\gamma}^2 \left(l_2 \operatorname{sen} \theta_2 + l_4 \operatorname{sen} \theta_4 + \frac{l_6}{2} \operatorname{sen} \theta_6 \right) + \frac{1}{2} m_6 l_2 l_6 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_6 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_6) \\ & + \frac{1}{2} m_6 l_4 l_6 \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_6) + \frac{1}{2} m_6 g l_6 \operatorname{sen} \theta_6 \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6 \Rightarrow & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{4} m_6 l_6^2 \dot{\theta}_6 + \frac{1}{2} m_6 l_2 l_6 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_6) + \frac{1}{2} m_6 l_4 l_6 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_4 - \theta_6) \right] \\ & - \left[\frac{1}{2} m_6 l_6 \cos \theta_6 \dot{\gamma}^2 \left(l_2 \operatorname{sen} \theta_2 + l_4 \operatorname{sen} \theta_4 + \frac{l_6}{2} \operatorname{sen} \theta_6 \right) + \frac{1}{2} m_6 l_2 l_6 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_6 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_6) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} m_6 l_4 l_6 \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_6) + \frac{1}{2} m_6 g l_6 \operatorname{sen} \theta_6 \right] = FNP \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6 \Rightarrow & \frac{1}{4} m_6 l_6^2 \ddot{\theta}_6 + \frac{1}{2} m_6 l_2 l_6 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_6) - \frac{1}{2} m_6 l_2 l_6 \dot{\theta}_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_6) (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_6) \\ & + \frac{1}{2} m_6 l_4 l_6 \ddot{\theta}_4 \cos(\theta_4 - \theta_6) - \frac{1}{2} m_6 l_4 l_6 \dot{\theta}_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_6) (\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_6) \\ & - \frac{1}{2} m_6 l_6 \cos \theta_6 \dot{\gamma}^2 \left(l_2 \operatorname{sen} \theta_2 + l_4 \operatorname{sen} \theta_4 + \frac{l_6}{2} \operatorname{sen} \theta_6 \right) \\ & - \frac{1}{2} m_6 l_2 l_6 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_6 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_6) - \frac{1}{2} m_6 l_4 l_6 \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_6) \\ & - \frac{1}{2} m_6 g l_6 \operatorname{sen} \theta_6 = FNP \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_7 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{\theta}_7} - \frac{dL}{d\theta_7} = FNP$$

donde:

$$\frac{dL}{d\dot{\theta}_7} = \frac{1}{4} m_7 l_7^2 \dot{\theta}_7 + \frac{1}{2} m_7 l_3 l_7 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_3 - \theta_7) + \frac{1}{2} m_7 l_5 l_7 \dot{\theta}_5 \cos(\theta_5 - \theta_7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\theta_7} = & \frac{1}{2} m_7 l_7 \cos \theta_7 \dot{\gamma}^2 \left(l_3 \operatorname{sen} \theta_3 + l_5 \operatorname{sen} \theta_5 + \frac{l_7}{2} \operatorname{sen} \theta_7 \right) + \frac{1}{2} m_7 l_3 l_7 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_7 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_7) \\ & + \frac{1}{2} m_7 l_5 l_7 \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_7 \operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_7) + \frac{1}{2} m_7 g l_7 \operatorname{sen} \theta_7 \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_7 \Rightarrow & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{4} m_7 l_7^2 \dot{\theta}_7 + \frac{1}{2} m_7 l_3 l_7 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_3 - \theta_7) + \frac{1}{2} m_7 l_5 l_7 \dot{\theta}_5 \cos(\theta_5 - \theta_7) \right] \\ - & \left[\frac{1}{2} m_7 l_7 \cos \theta_7 \dot{\gamma}^2 \left(l_3 \operatorname{sen} \theta_3 + l_5 \operatorname{sen} \theta_5 + \frac{l_7}{2} \operatorname{sen} \theta_7 \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} m_7 l_3 l_7 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_7 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_7) + \frac{1}{2} m_7 l_5 l_7 \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_7 \operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_7) + \frac{1}{2} m_7 g l_7 \operatorname{sen} \theta_7 \right] \\ = & FNP \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_7 \Rightarrow & \frac{1}{4} m_7 l_7^2 \ddot{\theta}_7 + \frac{1}{2} m_7 l_3 l_7 \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_3 - \theta_7) - \frac{1}{2} m_7 l_3 l_7 \dot{\theta}_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_7) (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_7) \\ & + \frac{1}{2} m_7 l_5 l_7 \ddot{\theta}_5 \cos(\theta_5 - \theta_7) - \frac{1}{2} m_7 l_5 l_7 \dot{\theta}_5 \operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_7) (\dot{\theta}_5 - \dot{\theta}_7) \\ & - \frac{1}{2} m_7 l_7 \cos \theta_7 \dot{\gamma}^2 \left(l_3 \operatorname{sen} \theta_3 + l_5 \operatorname{sen} \theta_5 + \frac{l_7}{2} \operatorname{sen} \theta_7 \right) \\ & - \frac{1}{2} m_7 l_3 l_7 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_7 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_7) - \frac{1}{2} m_7 l_5 l_7 \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_7 \operatorname{sen}(\theta_5 - \theta_7) - \frac{1}{2} m_7 g l_7 \operatorname{sen} \theta_7 \\ = & FNP \end{aligned}$$