



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA MECANICA Y
ELECTRICA

SECCION DE ESTUDIOS DE POSGRADO E
INVESTIGACION



ANALISIS DE ESFUERZOS (M.E.F.) EN LA UNION DE BOQUILLAS CON RECIPIENTES SUJETOS A PRESION

TESIS DE GRADO

QUE PARA OBTENER EL
GRADO ACADEMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD
EN INGENIERIA MECANICA

P R E S E N T A

ING. CARLOS RUBIO GONZALEZ

MEXICO, D.F. MARZO 1992

ABRIL 1992



AGRADECIMIENTOS Y DEDICATORIA.

Deseo expresar mi agradecimiento a los profesores del Dpto. de Ing. Mecánica de la SEPI que participaron en mi formación profesional. En especial al M.en C. José Luis Muñoz Soria, Director de Tesis, por su amable y amistosa disposición para dirigir este trabajo. Así mismo a los integrantes de la comisión revisora por sus valiosas sugerencias.

A los miembros del inolvidable "Grupo Michoacán" compañeros de muchos años.

Agradezco al CONACyT el apoyo económico brindado durante mis estudios de maestría.

Dedico con mucho cariño este trabajo a mis padres Profr. Carlos Rubio Gutiérrez y Sra. Gracia González Mendoza, mis hermanos: Cólbert, Gracia, Alfredo y Marysol, pues siempre he recibido de ellos apoyo, cariño y comprensión. En la culminación de este trabajo estuvo presente, y en lo sucesivo espero que para siempre, mi novia Dra. Emelia Téllez, a ella dedico este trabajo con todo mi amor.

INDICE

| | |
|--|-----------|
| LISTA DE SIMBOLOS | iii |
| LISTA DE FIGURAS | v |
| RESUMEN | vii |
| ABSTRACT | viii |
| INTRODUCCION | 1 |
| 1. DESCRIPCION DEL MODELO | 6 |
| 1.1 Funcional Asociada | 6 |
| 1.2 Geometria del Elemento | 8 |
| 1.3 Campo de Desplazamientos | 10 |
| 1.4 Esfuerzos y Deformaciones | 12 |
| 1.5 Transformaciones Necesarias | 14 |
| 1.6 Aproximación Utilizada | 16 |
| 1.7 Matriz de Rigidez Elemental | 17 |
| 1.8 Vector de Fuerzas | 19 |
| 2. METODO DE SOLUCION | 22 |
| 2.1 Obtención de la Matriz B | 22 |
| 2.2 Ensamble de la Matriz Global. Condiciones de Frontera | 27 |
| 2.3 Cálculo de los Esfuerzos | 32 |
| 2.4 Diseño del Programa | 33 |
| 2.5 Validación del Programa | 34 |
| 3. APLICACION DEL PROGRAMA | 40 |
| 3.1 Modelo Empleado para Simular el Comportamiento de la Unión Recipiente-Boquilla. | 40 |
| 3.2 Programa Auxiliar Para Generar Datos de Entrada del Programa del M.E.F. | 43 |

| | |
|---|----|
| 4. OBTENCION Y ANALISIS DE RESULTADOS | 46 |
| 4.1 Comparación entre Resultados Obtenidos y Reportados | 46 |
| 4.2 Análisis Comparativo entre Resultados Obtenidos y Especificaciones del código ASME, Sección VIII. | 51 |
| | |
| CONCLUSIONES | 56 |
| REFERENCIAS | 59 |

LISTA DE SIMBOLOS



- \mathbf{a} = vector de desplazamientos nodales de la malla completa
 \mathbf{a}^e = vector de desplazamientos nodales del elemento e
 \mathbf{a}_i = vector de desplazamientos del nodo i en el elemento e
 \mathbf{b} = vector de fuerzas global
 \mathbf{b}^e = vector de fuerzas elemental
 \mathbf{B} = matriz deformación-desplazamiento
BAND = ancho de banda
 \mathbf{D} = matriz de elasticidad
 D_1, D_2 = diámetro medio de la boquilla y recipiente, respectivamente
 E = módulo de elasticidad
 \mathbf{f} = vector de desplazamientos de un punto arbitrario
 \mathbf{F} = vector de fuerzas puntuales
 $\mathbf{h}, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ = vectores columna de la matriz que contiene las derivadas de los desplazamientos respecto de coordenadas curvilíneas
 $\mathbf{H}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$ = matrices intermedias
 \mathbf{i}, \mathbf{j} = vectores unitarios paaarrellos a los ejes x, y , respectivamente
 \mathbf{J} = matriz jacobiana
 $|\mathbf{J}|$ = determinante del jacobiano
 \mathbf{K} = matriz de rigidez global
 \mathbf{K}^e = matriz de rigidez elemental
 L_1, L_2 = longitud de la boquilla y recipiente, respectivamente
 \mathbf{N} = matriz de las funciones de forma
 N_i = funciones de forma
 \mathbf{P} = vector de fuerzas de cuerpo distribuidas
 P = presión
 \mathbf{q} = vector de fuerzas superficiales

$\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}$ = vectores columna de la matriz que contiene las derivadas de los desplazamientos respecto de coordenadas cartesianas
 R = radio de enlace entre boquilla y recipiente
 S = operador diferencial
 t_i = espesor de la lámina en el nodo i
 T_1, T_2 = espesor de la boquilla y recipiente, respectivamente
 u, v, w = componentes cartesianas del desplazamiento de un punto arbitrario
 u_i, v_i, w_i = componentes cartesianas del desplazamiento del nodo i
 $\mathbf{v}_{1i}, \mathbf{v}_{2i}$ = vectores unitarios perpendiculares a \mathbf{V}_{3i}
 \mathbf{V}_{3i} = vector que cruza el nodo i de magnitud igual al espesor
 X = representa un punto arbitrario
 x, y, z = coordenadas cartesianas de un punto cualquiera en el sistema global
 x_i, y_i, z_i = coordenadas cartesianas del nodo i en el sistema global
 x', y', z' = sistema local de coordenadas cartesianas
 α_i, β_i = rotaciones del vector \mathbf{V}_{3i}
 $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})^T$ tensor de deformaciones
 $\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ = matriz de cosenos directores
 ν = coeficiente de Poisson
 ξ, η, ζ = coordenadas curvilíneas
 Π = funcional de energía potencial
 Π_e = contribución del elemento e a la funcional Π
 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})^T$ tensor de esfuerzos

LISTA DE FIGURAS

| FIGURA | TITULO | PAG. |
|--------|--|------|
| 1 | COMPARACION ENTRE LOS ESFUERZOS ADMISIBLES PARA DIVERSOS ACEROS | 3 |
| 1.1 | ELEMENTO FINITO CURVO | 9 |
| 1.2 | COORDENADAS CARTESIANAS GLOBALES Y LOCALES. GRADOS DE LIBERTAD DEL NODO i | 10 |
| 1.3 | PUNTOS NODALES DE LA APROXIMACION CUADRATICA TIPO SERENDIPITICO | 17 |
| 1.4 | DISPOSICION DE LOS PUNTOS GAUSSIANOS DONDE ES EVALUADO EL INTEGRANDO ϕ | 19 |
| 2.1 | NUMERACION DE LOS NODOS DEL ELEMENTO e | 28 |
| 2.2 | NUMERACION DE LOS NODOS Y ELEMENTOS EN LA MALLA COMPLETA Y CONECTIVIDAD | 28 |
| 2.3 | MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL ALMACENADA EN UN ARREGLO CUADRADO, RECTANGULAR Y UNIDIMENSIONAL | 30 |
| 2.4 | IMPOSICION DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA EN LA MATRIZ DE RIGIDEZ | 31 |
| 2.5 | IDENTIFICACION DE LOS PUNTOS GAUSSIANOS Y NODOS PARA LA EXTRAPOLACION DE ESFUERZOS | 32 |
| 2.6 | DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAMA PRINCIPAL NOZZLE. FOR | 34 |
| 2.7 | DIAGRAMA DE FLUJO DE LA SUBROUTINA SHAPE | 36 |
| 2.8 | BOVEDA CILINDRICA SUJETA A PRESION EXTERNA | 38 |
| 2.9 | CILINDRO SUJETO A PRESION INTERNA | 39 |
| 3.1 | INTERSECCION DE DOS CILINDROS | 40 |
| 3.2 | RADIO DE ENLACE ENTRE CILINDRO Y BOQUILLA | 41 |
| 3.3 | DISCRETIZACION DE LA INTERSECCION DE DOS CILINDROS CON ELEMENTOS DE CASCARON | 42 |
| 3.4 | CONFIGURACION BASICA DE LA DISCRETIZACION | 44 |
| 4.1 | ESFUERZOS EN EL RECIPIENTE | 47 |

| | | |
|-----|---|----|
| 4.2 | ESFUERZOS EN LA BOQUILLA | 48 |
| 4.3 | COMPARACION DE ESFUERZOS CALCULADOS Y OBTENIDOS EXPERIMENTALMENTE REPORTADOS EN [16] | 49 |
| 4.4 | COMPARACION DE ESFUERZOS CALCULADOS Y OBTENIDOS EXPERIMENTALMENTE REPORTADOS EN [5] | 49 |
| 4.5 | FACTORES DE CONCENTRACION DE ESFUERZOS PARA TOBERAS RADIALES EN CUERPOS CILINDRICOS | 51 |
| 4.6 | DIRECCION DE LAS COMPONENTES DE ESFUERZO | 52 |

ANALISIS DE ESFUERZOS (M.E.F.) EN LA UNION DE BOQUILLAS CON RECIPIENTES SUJETOS A PRESION

RESUMEN

Se presenta un modelo de elementos finitos y el programa de cómputo correspondiente, para determinar la distribución de esfuerzos en la unión de la boquilla con el recipiente sujetos a presión interna. Se emplea el elemento cascarón con 8 nodos y 5 grados de libertad por nodo y una aproximación cuadrática tipo serendipity.

La unión recipiente-boquilla es modelada con la cuarta parte de la intersección perpendicular de dos cilindros.

Los resultados concuerdan con los que se reportan en otros trabajos, los cuales se obtuvieron experimentalmente y también por el Método del Elemento Finito (M.E.F.)

Se presenta un estudio comparativo de los resultados obtenidos con el programa del M.E.F. presentado y las especificaciones del código ASME, Sección VIII, División 2, a través del método de índices de esfuerzos que éste propone. Se observa cierta semejanza en los resultados obtenidos por el M.E.F. y los índices recomendados en el código.

STRESS ANALYSIS (F.E.M.) IN THE NOZZLE SHELL INTERSECTION SUBJECTED TO INTERNAL PRESSURE

ABSTRACT

A model of finite elements and the corresponding computer program are presented to determine the stress distribution close to the nozzle shell intersection subjected to internal pressure. The *shell* element is utilized with 8 nodes and 5 degrees of freedom per node. A quadratic approximation of *serendipity* class is used.

The nozzle shell junction is modeled with a quarter of perpendicular intersection of two cylinders.

The results are in agreement with those reported in other works, which were obtained experimentally and by Finite Element Methods (F.E.M.).

A comparative study is presented of the results obtained with the program presented here and the ASME code rules. This is made by means of the *stress index method* which is proposed in Division 2 of the code. A similarity is observed between results obtained here and the stress index recommended in the code.

INTRODUCCION

Las boquillas y aberturas son elementos necesarios en los recipientes sujetos a presión para procesos industriales. Tales elementos pueden provocar concentraciones de esfuerzos en la unión recipiente-boquilla y debilitar esta porción del recipiente. El diseño de estos elementos se realiza según reglas especiales contenidas en los códigos de proyecto. Tales reglas suelen basarse en consideraciones semiempíricas así como en análisis teóricos de los esfuerzos existentes.

El diseño por código [1], limita el tamaño de una abertura en el recipiente a 0.5 veces el diámetro interior del mismo, a menos que se haga un estudio detallado de esfuerzos experimental o analítico. Se ha demostrado [2] que las reglas de diseño sugeridas en el código ASME [3] son inadecuadas en ciertos casos, ya que un recipiente falló en la prueba hidráulica aún cuando reunía los requisitos del código, y la relación del diámetro de la boquilla al diámetro del recipiente fue tan sólo de 0.35.

El estudio de la distribución de esfuerzos en la unión recipiente-boquilla se ha efectuado empleando métodos experimentales [4,5] y analíticos [6]. El desarrollo del M.E.F. ha permitido emplear esta poderosa técnica numérica para estudiar el problema con varios tipos de elementos [5,7]. De los resultados de varios de estos estudios se desprende que el diseño de la unión recipiente-boquilla, obtenido con especificaciones del código ASME, es conservador en muchos casos; y por lo mencionado en el párrafo anterior, hay situaciones donde las especificaciones del código son

inadecuadas. Esta discrepancia en la aplicabilidad del código ASME, ha sido observada por algunos investigadores quienes han propuesto métodos de diseño alternativos; algunos puramente empíricos [2], que aprovechan resultados de análisis experimentales, y otros, métodos aproximados para determinar la distribución de esfuerzos usando soluciones simplificadas de la teoría de placas y cascarones [8,9].

Se ha propuesto [2] un método empírico de diseño de boquillas, con o sin refuerzo, que incorpora esfuerzos tanto de área presurizada como de flexión, en lugar del método tradicional del área reemplazada que se usa corrientemente en ambas divisiones del código ASME, sección VIII. Sin embargo, este método se caracteriza por la presencia de factores y coeficientes seleccionados empíricamente, lo cual, desde el punto de vista analítico, resulta poco satisfactorio.

La diferencia más importante entre los códigos europeos y norteamericanos estriba en que, en los primeros, la característica mecánica utilizada para definir la resistencia del material es el esfuerzo de fluencia, a temperatura ambiente, mientras que en los segundos es la resistencia última. Tan sólo en unos pocos códigos se considera la posibilidad de fatiga, aceptándose, en general, el que basta con considerar la resistencia a la rotura bajo carga estática, tanto dúctil como frágil [10].

En la Fig.1 se comparan los esfuerzos admisibles, como función de la temperatura, establecidos por los códigos británico y norteamericano para diversos aceros, de características mecánicas muy parecidas al acero normalizado BS 1501-224, Grado 32. Se observa la disparidad entre los esfuerzos admisibles a bajas temperaturas.

En México, el diseño de recipientes a presión sigue

básicamente las normas contenidas en el código norteamericano de la ASME (American Society of Mechanical Engineers). Algunos trabajos [7] demuestran que el diseño por código es un tanto conservador y ha habido situaciones donde las recomendaciones de diseño son inadecuadas. No existe un método completamente satisfactorio para el cálculo detallado de la distribución de esfuerzos en la proximidad de la unión recipiente-boquilla; por esta razón, el código propone métodos semiempíricos que son útiles, como una primera aproximación, para el diseño de boquillas en recipientes a presión. Para poder diseñar es necesario conocer la distribución de esfuerzos, de una manera precisa, y limitar éstos a niveles adecuados, buscando seguridad en la operación de los

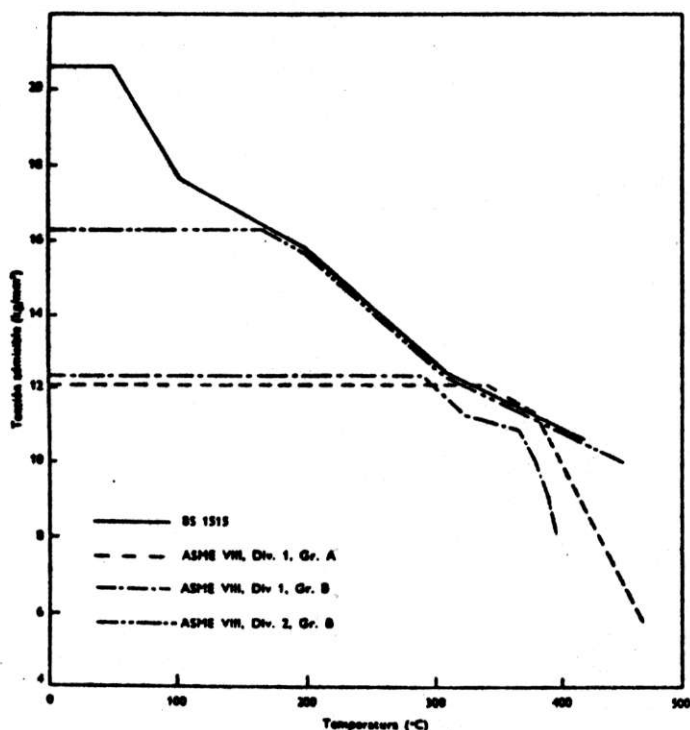


Fig. 1 Comparación entre los esfuerzos admisibles para aceros semejantes al BS 1501-224, Grado 32, según diversos códigos [11].

elementos y diseños racionales y eficientes. Es en este contexto donde se ubica el trabajo, pues el programa de cómputo y el modelo presentados son una herramienta importante de análisis sobre esta cuestión, aprovechan la precisión que puede proporcionar el M.E.F. en la determinación de los esfuerzos en la proximidad de la unión recipiente-boquilla. Por lo anterior, los objetivos de este trabajo son:

- Encontrar la distribución de esfuerzos en la unión recipiente-boquilla mediante la técnica del elemento finito.

- Estudiar el comportamiento de esta distribución de esfuerzos al variar los principales parámetros de diseño que intervienen.

- Analizar los resultados y compararlos con las recomendaciones de diseño del código ASME, sección VIII.

El alcance del trabajo es encontrar la distribución de esfuerzos en la unión recipiente-boquilla, modelando ésta como la intersección perpendicular de dos cilindros. No se contemplan boquillas reforzadas. Se permiten espesores diferentes en boquilla y recipiente. La carga aplicada es sólo una presión estática y no se involucran esfuerzos de origen térmico.

Se ha implementado en el programa de cómputo lo necesario del método para resolver el problema en particular, es decir, no se utiliza paquetería existente sobre el mismo. Lo anterior es por varias razones: primero, a nivel departamental no se cuenta con un paquete de esta naturaleza, y en segundo lugar, el hecho de ser usuario de un paquete no garantiza éxito en la solución del problema, ya que se necesita el conocimiento de algunos conceptos del método y cierta experiencia para superar dificultades, tales como la discretización y el grado de refinamiento. Además, si se requiere hacer modificaciones al programa, sin conocer cómo funciona o cómo está estructurado, resultaría prácticamente imposible hacerlo.

El esquema de la tesis se desarrolla como sigue: En el primer capítulo se describen los conceptos del M.E.F. necesarios para resolver el problema en particular. Se describen los elementos y funciones de forma empleados, las transformaciones de coordenadas necesarias para integrar numéricamente la matriz de rigidez elemental y el vector de fuerzas.

En el segundo capítulo se describen los pasos intermedios que se desarrollaron en la implementación del programa de cómputo a partir de los conceptos descritos en el capítulo anterior. Así mismo se describe un procedimiento para obtener una expresión explícita de la matriz B. Se indica cómo se efectúa el ensamble de las matrices de rigidez elementales en la global, cómo se imponen las condiciones de frontera y cómo se ensambla la matriz global en un arreglo unidimensional para ahorrar memoria. Se describe cómo obtener los esfuerzos en los nodos a partir de los que se calculan en los puntos gaussianos, esto por un proceso de extrapolación. También se describe cómo está estructurado el programa. Se presenta una primera aplicación del programa a dos problemas de prueba para la validación del mismo.

En el capítulo tercero se describe el modelo empleado en la intersección de dos cilindros, su discretización y un programa auxiliar (COORD.FOR) que genera los datos de entrada del programa del M.E.F. (NOZZLE.FOR)

En el capítulo cuarto y último se presentan los resultados obtenidos mediante el programa NOZZLE.FOR, para un caso particular de una unión recipiente-boquilla; se comparan éstos con los reportados. Por último se comparan los resultados obtenidos, para tres casos de ejemplo, con las especificaciones del código ASME, sección VIII a través del método de índices de esfuerzos que éste propone.

1. DESCRIPCIÓN DEL MODELO

1.1 FUNCIONAL ASOCIADA.

Considérese un cuerpo tridimensional sometido a fuerzas de cuerpo distribuidas \mathbf{P} , fuerzas superficiales \mathbf{q} y m cargas puntuales \mathbf{F}_i . Sea \mathbf{f} el vector de desplazamientos, dependiente de la posición, de un punto general X del cuerpo. La energía potencial total del cuerpo bajo la acción de estas cargas está dada por la siguiente expresión [12]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \, dV - \iiint_V \mathbf{P}^T \mathbf{f} \, dV - \iint_S \mathbf{q}^T \mathbf{f} \, dS - \sum_{i=1}^m \mathbf{F}_i^T \mathbf{f}_i \quad 1.1$$

Por lo general, la segunda integral se desprecia ya que las fuerzas de cuerpo, por ejemplo el peso propio, provoca un efecto insignificante comparado con el de las fuerzas externas aplicadas.

La relación entre esfuerzos y deformaciones (Ecs. constitutivas) está dada por la ley de Hooke generalizada

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad 1.2$$

Para la primera integral del segundo miembro de la Ec.1.1, el tensor de deformaciones se expresa en términos de los desplazamientos por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \mathbf{f} \quad 1.3$$

Una de las consideraciones básicas del M.E.F. es escribir el campo de desplazamientos de una pequeña parte (elemento) del cuerpo, en términos del vector de desplazamientos nodales \mathbf{a}^e del elemento e , como

$$\mathbf{f} = \mathbf{N} \mathbf{a}^e \quad 1.4$$

las funciones de forma, agrupadas en \mathbf{N} , para ciertos casos son polinomios de grado 2 o 3.

Sustituyendo la Ec.1.4 en la Ec.1.3 se obtiene

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \mathbf{N} \mathbf{a}^e = \mathbf{B} \mathbf{a}^e \quad 1.5$$

Sustituyendo la Ec.1.5 en la Ec.1.2 y ésto a su vez en la primera integral de la Ec.1.1

$$\iiint_{V_e} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \iiint_{V_e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \iiint_{V_e} \mathbf{a}^{eT} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a}^e dV \quad 1.6$$

Puesto que los desplazamientos nodales son constantes salen del integrando. De esta manera, en ausencia de fuerzas de cuerpo y puntuales la ecuación 1.1 se convierte, para el elemento e , en

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \mathbf{a}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e - \mathbf{b}^{eT} \mathbf{a}^e \quad 1.7a$$

con

$$\mathbf{K}^e = \iiint_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad 1.7b$$

$$\mathbf{b}^{eT} = \iint_{S_e} \mathbf{q}^T \mathbf{N} dS \quad 1.7c$$

La matriz \mathbf{K}^e es llamada matriz de rigidez elemental y \mathbf{b}^e es el vector de fuerzas elemental, ambos del elemento e . En la Ec.1.5 se observa que una vez seleccionadas las funciones de forma, podrá calcularse la matriz \mathbf{B} .

La contribución 1.7a de cada elemento es tomada en cuenta para formar el funcional global, que para problemas estacionarios de análisis de esfuerzos tiene la forma general

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{b}^T \mathbf{a} \quad 1.8$$

Si se impone la condición de que la funcional 1.8 alcance un valor extremo, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales [12]

$$\mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{b} = 0 \quad 1.9$$

que deberá resolverse para el vector de desplazamientos globales \mathbf{a} imponiendo previamente las condiciones de frontera adecuadas.

1.2 GEOMETRIA DEL ELEMENTO.

Hay tres opciones para elegir el tipo de elemento [13]. Primero, aproximar la forma del cuerpo con elementos planos; segundo, utilizar elementos sólidos tridimensionales, los cuales requieren una enorme cantidad de memoria de la computadora por el gran número de grados de libertad asociados; y tercero, emplear elementos curvos de teoría de cascarones, en los cuales el número de grados de libertad por elemento disminuye debido a cierta consideración sobre las deformaciones normales a la placa. La última opción es la empleada en este trabajo, cuyo elemento se ilustra en la Fig.1.1.

Las caras externas del elemento son curvas, mientras que las secciones en el sentido del espesor están generadas por líneas rectas. La forma del elemento está definida por pares de

puntos i_{sup} e i_{inf} , expresados cada uno en coordenadas cartesianas globales. Tiene 8 nodos que se encuentran en el plano medio del elemento, cada uno con 5 grados de libertad (u, v, w, α, β).

En la Fig. 1.1 las coordenadas curvilíneas ξ y η están en el plano medio de la placa y ζ es una coordenada lineal en la dirección del espesor, además las tres varían de -1 a 1 . La relación entre las coordenadas cartesianas globales de un punto

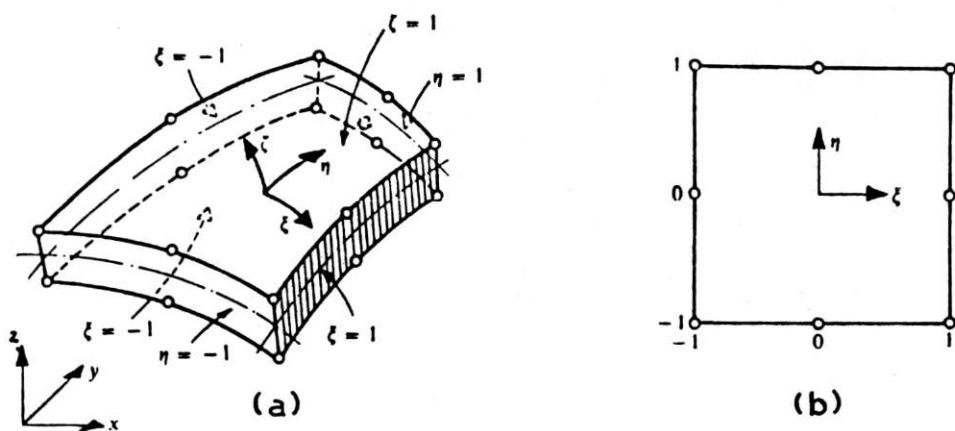


Fig. 1.1 (a) Elemento finito curvo.
(b) Elemento de referencia

cualquiera de la placa y las coordenadas curvilíneas está dada por [14]

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \frac{(1+\zeta)}{2} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}_{sup} + \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \frac{(1-\zeta)}{2} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}_{inf} \quad 1.10$$

la elección de las funciones de forma N_i depende del tipo de elemento y aproximación seleccionados.

Sea V_{3i} el vector que une los puntos inferiores y superiores (i.e. la magnitud de V_{3i} es igual al espesor t_i del elemento en el nodo i)

$$V_{3i} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}_{\text{sup}} - \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}_{\text{inf}} \quad 1.11$$

De esta forma la Ec. 1.10 se reduce a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sum N_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}_{\text{med}} + \sum N_i \frac{\zeta}{2} V_{3i} \quad 1.12$$

1.3 CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS.

Las deformaciones en dirección normal a la superficie media se suponen despreciables, por lo que el desplazamiento para todo el elemento está definido de manera única por las tres componentes cartesianas del desplazamiento del nodo correspondiente y por los giros del vector nodal V_{3i} con respecto a dos direcciones ortogonales al mismo, v_{1i} y v_{2i} , como se observa en la Fig. 1.2

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{pmatrix}_{\text{med}} + \sum_{i=1}^8 N_i \zeta \frac{t_i}{2} [v_{1i}, -v_{2i}] \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} \quad 1.13$$

La segunda sumatoria es la contribución de la rotación de V_{3i} .

Un punto arbitrario X en uno de los vectores V_{3i} está a $\zeta t_i/2$ unidades distante del nodo i . Pequeñas rotaciones α_i y β_i producen desplazamientos u_i^* y v_i^* del punto X

$$u_i^* = (\zeta t_i/2) \alpha_i \quad v_i^* = (\zeta t_i/2) \beta_i \quad 1.14$$

donde u_i^* y v_i^* están en dirección de v_{1i} y $-v_{2i}$, respectivamente en la Fig. 1.2c. Descomponiendo u_i^* y v_i^* en componentes globales xyz , encontramos que α_i y β_i producen

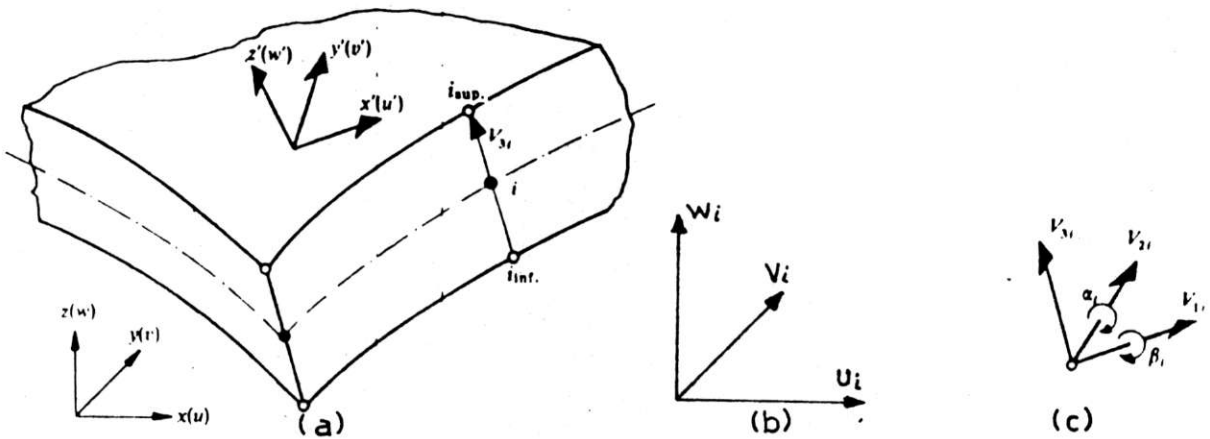


Fig.1.2 (a) Coordenadas cartesianas globales y locales
 (b) Grados de libertad traslacionales del nodo i .
 (c) Grados de libertad rotacionales α_i, β_i en el nodo i .
 Los vectores unitarios v_{1i} y v_{2i} son mutuamente ortogonales con v_{3i} pero arbitrarios.

desplazamientos

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{pmatrix} = [v_{1i}, -v_{2i}] \begin{pmatrix} u_i^* \\ v_i^* \end{pmatrix} \quad 1.15$$

donde $[v_{1i}, -v_{2i}]$ es una matriz de 3×2 . Los desplazamientos totales de un punto arbitrario del elemento son

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \sum N_i \left(\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{pmatrix} \alpha \beta \right) \quad 1.16$$

La ecuación 1.13 describe desplazamientos en las direcciones globales, pero no desplazamientos tangentes y normales a la placa. Hasta aquí el elemento es un sólido tridimensional, caracterizado solamente por las suposiciones de despreciar las deformaciones en la dirección del espesor y que los bordes del elemento se generan por líneas rectas y normales a la superficie media. Estas suposiciones permiten el uso de nodos únicamente en la superficie media, con cinco grados de libertad cada uno. (Los bordes deformados no necesitan

permanecer normales, por lo que no se excluyen efectos cortantes [13]).

Dado que existen infinitas direcciones perpendiculares a una dada, conviene establecer un procedimiento especial que asegure una definición única de v_{11} y v_{21} . Si V_{31} es el vector cuya normal ha de construirse, se define el primer eje normal por el producto vectorial

$$V_{11} = i \times V_{31} \quad \text{y el unitario} \quad v_{11} = V_{11}/V_{11} \quad 1.17$$

El vector normal a V_{31} y v_{11} será

$$V_{21} = V_{11} \times V_{31} \quad \text{y el unitario} \quad v_{21} = V_{21}/V_{21} \quad 1.18$$

Este procedimiento para encontrar v_{11} no es aplicable si V_{31} es paralelo al eje x . Si este es el caso, se hace el producto cruz con j en lugar de con i .

Las coordenadas del elemento definidas por la ecuación 1.10 tienen más grados de libertad que la definición de los desplazamientos; el elemento es por tanto superparamétrico.

1.4 ESFUERZOS Y DEFORMACIONES.

Las consideraciones de teoría de placas, hacen indispensable conocer las componentes del esfuerzo y deformación respecto de unos ejes ortogonales ligados a la superficie $\zeta = \text{cte}$. Así, si en un punto cualquiera de esa superficie z' es la normal a dos ejes ortogonales, x' y y' , tangentes a la superficie (Fig.1.2a), las componentes de la deformación que interesan están dadas por

$$\varepsilon' = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \\ \frac{\partial w'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial z'} \end{bmatrix} \quad 1.20$$

Los esfuerzos correspondientes a estas deformaciones se definen por

$$\sigma' = D \varepsilon' \quad 1.21$$

Para el caso de materiales isótopos, la matriz D esta dada [14] por

$$D = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ \text{sim} & & & \frac{1-\nu}{2k} & 0 \\ & & & & \frac{1-\nu}{2k} \end{bmatrix} \quad 1.22$$

El factor k se toma igual a 1.2 y su objeto es mejorar la aproximación cuando se tiene en cuenta la deformación por esfuerzo cortante. La distribución de los esfuerzos cortantes deducidos de la definición de los desplazamientos, es aproximadamente constante a lo largo del espesor de la placa, mientras que en realidad dicha distribución es aproximadamente parabólica. El valor de k igual a 1.2 es el cociente de las energías de deformación correspondientes [13,14].

Es importante hacer notar que la matriz D se obtiene haciendo $\sigma_{z'}=0$ y efectuando las eliminaciones correspondientes, en el caso general tridimensional, donde D es una matriz 6x6.

1.5 TRANSFORMACIONES NECESARIAS.

Para encontrar la matriz de rigidez elemental K^e

$$K^e = \iiint_{V_e} B^T D B \, dx dy dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D B |J| \, d\xi d\eta d\zeta \quad 1.23$$

es necesario hacer dos transformaciones sucesivas antes de integrar respecto de las coordenadas curvilíneas ξ , η y ζ . La matriz B se relaciona con ϵ' mediante la Ec.1.5

$$\epsilon' = B a^e \quad ; \quad a^e = \begin{bmatrix} a_1^e \\ \vdots \\ a_8^e \end{bmatrix} \quad ; \quad a_1^e = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad 1.24$$

La matriz B se define a partir de ϵ' y como este tensor se define usando coordenadas cartesianas locales x', y', z' , (ecuación 1.20), es necesario en primer lugar, transformar la derivada de los desplazamientos respecto de coordenadas cartesianas locales x', y', z' a derivadas respecto de coordenadas cartesianas globales x, y, z mediante

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \theta^T \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \theta \quad 1.26$$

Posteriormente se debe pasar de las coordenadas cartesianas globales a las curvilíneas ξ , η , ζ usando la jacobiana de la transformación, de esta manera

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad 1.26$$

en la que la jacobiana se obtiene derivando las ecuaciones 1.12, tal que

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad 1.27$$

A partir de las transformaciones 1.25 y 1.26 pueden determinarse explícitamente las componentes de ϵ' , y por consiguiente también las de B en términos de coordenadas curvilíneas, y de esta manera efectuar la integral de la Ec.1.23 para la obtención de K° .

Para establecer las direcciones de los ejes locales, se necesita un vector normal a la superficie $\zeta = \text{cte}$. obtenido como un producto vectorial de dos vectores cualesquiera tangentes a la misma. Así

$$\mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad 1.28$$

Procediendo como lo antes expuesto para la determinación única de dos vectores perpendiculares a uno dado, se estructura una matriz de vectores unitarios en las direcciones x', y', z' , (matriz de cosenos directores)

$$\theta = [e_1, e_2, e_3] \quad 1.29$$

1.6 APROXIMACION UTILIZADA.

Puesto que los elementos empleados tienen 8 nodos en su plano medio, las sumatorias de las ecuaciones 1.10 y 1.13 van de 1 hasta 8. Lo anterior se debe a que la aproximación que se utiliza es cuadrática de tipo serendipity, i.e., un polinomio incompleto de tercer grado con 8 coeficientes independientes, de la forma

$$U(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi^2 + \alpha_5\xi\eta + \alpha_6\eta^2 + \alpha_7\xi^2\eta + \alpha_8\xi\eta^2$$

Esta aproximación tiene la propiedad de que, para un valor fijo de una de las variables, es una función cuadrática de la otra variable [12]. El utilizar esta aproximación permite combinar y balancear precisión y economía en el número de grados de libertad.

Con referencia a la Fig.1.3 del elemento generatriz o cuadrado estándar, las funciones de forma asociadas a cada uno de los nodos son

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1) \\ N_2 &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1) \\ N_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1) \\ N_4 &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1) \\ N_5 &= \frac{1}{2} (1 - \xi)(1 - \eta^2) \\ N_6 &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 - \eta) \\ N_7 &= \frac{1}{2} (1 + \xi)(1 - \eta^2) \\ N_8 &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 + \eta) \end{aligned} \tag{1.30}$$

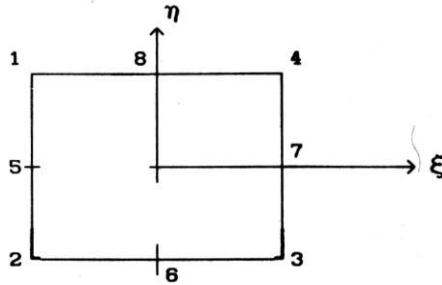


Fig. 1.3 Puntos nodales de la aproximación cuadrática de tipo serendipity

1.7 MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL E INTEGRACION NUMERICA.

El usar coordenadas curvilíneas presenta, entre otras, la ventaja de que los límites de integración son fáciles de imponer como puede observarse en la Ec.1.23; sin embargo, el integrando se vuelve más complejo y ha de recurrirse a la integración numérica.

En la Ec.1.23 es posible efectuar la integración respecto de ζ de manera analítica, lo que permite economizar tiempo de cálculo. Se consideran las siguientes suposiciones: ciertos términos de J tienen a ζ como coeficiente, se sugiere [13] descartar estos términos si la razón t/R es pequeña. De este modo J y su determinante $|J|$ son sólo funciones de ξ y de η . La matriz B se desdobra en dos partes: una de membrana B_0 y otra de flexión ζB_1 . Tal que

$$B = B_0 + \zeta B_1 \quad 1.31$$

donde B_0 y B_1 son independientes de ζ .

De acuerdo con lo anterior

$$B^T D B = B_0^T D B_0 + B_0^T D B_1 \zeta + B_1^T D B_0 \zeta + \zeta^2 B_1^T D B_1$$

La integración de -1 a 1 de $d\zeta$ es 2; la de $\zeta d\zeta$ es 0 y la de $\zeta^2 d\zeta$ es 2/3; por lo tanto la Ec.1.23 se transforma en

$$K^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (2B_0^T D B_0 + \frac{2}{3} B_1^T D B_1) |J| d\xi d\eta \quad 1.32$$

la cual se integra numéricamente usando la fórmula de cuadratura de Gauss con 2x2 puntos.

En dos dimensiones, la fórmula de cuadratura para $\phi=\phi(\xi,\eta)$ integrada respecto de ξ y después respecto de η , es

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\xi, \eta) d\xi d\eta \cong \int_{-1}^1 [\sum_i W_i \phi(\xi_i, \eta)] d\eta \cong \sum_i \sum_j \phi(\xi_i, \eta_j) W_i W_j \quad 1.33$$

donde W_i y W_j son factores de ponderación adecuados. Por ejemplo para la fórmula de 2x2 puntos, se recomienda [14]

| orden n | localización ξ_i, η_i | peso W_i |
|---------|------------------------------|------------|
| 2 | + 0.577350269 | 1.00 |
| | - 0.577350269 | 1.00 |

entonces la Ec.1.33 se convierte en la suma ponderada

$$I = A^2 \phi_1 + A^2 \phi_2 + A^2 \phi_3 + A^2 \phi_4 \quad 1.34$$

donde ϕ_i es el valor numérico de la función integrando en el i-ésimo punto gaussiano, y $A=W=1.00$.

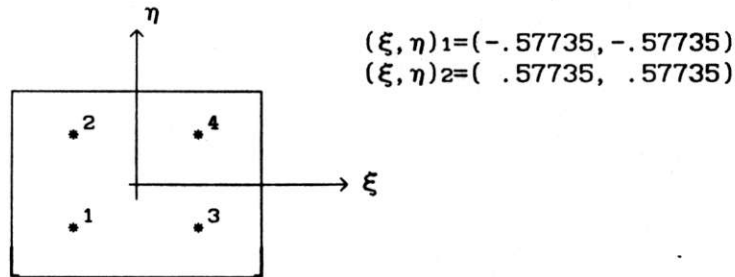


Fig.1.4 Disposición de los puntos gaussianos donde es evaluado el integrando ϕ .

En el análisis por elementos finitos, los cálculos más complicados son los relativos a la determinación de ϕ . El procedimiento de Gauss es el idealmente más favorable, porque requiere un número mínimo de dichas evaluaciones, y el uso de 2 puntos de integración en cada dirección es suficiente para la aproximación cuadrática [14].

1.8 VECTOR DE FUERZAS.

El efecto de la presión aplicada. está contenido en la integral de la Ec.1.1

$$I_q = \iint_S \mathbf{q}^T \mathbf{f} \, dS = \iint_S (q_1 \, q_2 \, q_3) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} dS \quad 1.35$$

Si se supone que la presión es aplicada en el plano medio de la placa, i.e. en $\zeta=0$, entonces de 1.13

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^8 F_i \mathbf{a}_i^e \quad 1.36$$

donde

$$F_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si N es una matriz de 3×40 que agrupa las 8 matrices F_i , entonces

$$I_q = \iint_S (q_1, q_2, q_3) N \mathbf{a}^e dS = \left[\iint_S (q_1, q_2, q_3) N dS \right] \mathbf{a}^e \quad 1.37$$

con $N = [F_1, F_2, \dots, F_8]$ y \mathbf{a}^e definido por al Ec. 1.24. Se observa que la integral encerrada entre paréntesis en la Ec. 1.37 corresponde al vector de fuerzas ya definido en la Ec. 1.7c.

Haciendo una transformación de coordenadas en la Ec. 1.37, para que en lugar de integrar sobre la superficie media del elemento, se efectúe en el elemento de referencia asociado en coordenadas curvilíneas. Para realizar esto, considérese a dS como un vector orientado en la dirección normal a la superficie, y sean

$$d\xi = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} d\xi \quad d\eta = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} d\eta \quad 1.38$$

La magnitud del vector resultante del producto cruz $d\xi \times d\eta$ es igual al área del paralelogramo elemental, por lo que

$$|dS| = |d\xi \times d\eta| d\xi d\eta \quad 1.39$$

este vector es \mathbf{E}_3 obtenido al calcular la matriz θ en 1.28. Es decir, el elemento de área se transforma como

$$dS = |\mathbf{E}_3| d\xi d\eta$$

Como la presión actúa en la dirección normal a la superficie,

entonces E_3 también servirá para describirla

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3) = |\mathbf{q}| (e_3^x, e_3^y, e_3^z) \quad 1.40$$

De esta manera, el vector de fuerzas será

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^e &= \iint_S (q_1, q_2, q_3) N dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (q_1, q_2, q_3) N E_3 d\xi d\eta = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{q} (e_3^x, e_3^y, e_3^z) N E_3 d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{q} E_3 (e_3^x N_1, e_3^y N_1, e_3^z N_1, 0, 0, \dots, e_3^x N_1, e_3^y N_1, e_3^z N_1, 0, 0, \\ &\quad \dots, e_3^x N_8, e_3^y N_8, e_3^z N_8, 0, 0) d\xi d\eta \quad 1.41 \end{aligned}$$

recuérdese que e_3^x, e_3^y, e_3^z forman la tercera columna de θ en la Ec.1.29.

Suponiendo que la presión se aplica en ζ arbitrario entonces

$$F_1 = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_1 \zeta \frac{t_1}{2} & l_{11} & -N_1 \zeta \frac{t_1}{2} & l_{21} \\ 0 & N_1 & 0 & N_1 \zeta \frac{t_1}{2} & m_{11} & -N_1 \zeta \frac{t_1}{2} & m_{21} \\ 0 & 0 & N_1 & N_1 \zeta \frac{t_1}{2} & n_{11} & -N_1 \zeta \frac{t_1}{2} & n_{21} \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{v}_{11}=(l_{11}, m_{11}, n_{11})$ y $\mathbf{v}_{21}=(l_{21}, m_{21}, n_{21})$ son los vectores unitarios en las direcciones de los giros empleados en las Ecs.1.13 y 1.15.

El considerar que la presión es aplicada en el plano medio o en algún otro, no tiene consecuencias significativas ya que los espesores son pequeños y el ahorro en el número de operaciones disminuye de manera apreciable.

2. METODO DE SOLUCION

La solución con herramientas computacionales a partir de conceptos y definiciones del M.E.F. no es un paso sencillo y directo, sobre todo si se toman en cuenta dos restricciones importantes que se presentan: el tiempo de cómputo y la capacidad de memoria. Por esta razón es importante estructurar de manera óptima el programa del M.E.F. y usar técnicas adecuadas para manejar matrices con muchos ceros "ralas".

2.1 OBTENCION DE LA MATRIZ B.

En la estructuración del programa de cómputo se hace necesario introducir algunas matrices intermedias. Aquí el problema específico es encontrar una expresión explícita para la matriz B, (o más propiamente B_0 y B_1) y el determinante de la matriz jacobiana, de manera que pueda elaborarse una subrutina para calcular estos elementos e integrar numéricamente la Ec.1.32 y así encontrar la matriz de rigidez elemental.

Escribiendo la matriz cuyas columnas son los vectores en la dirección de los giros v_{11} y v_{21} , ecuaciones 1.17 y 1.18, se tiene

$$[v_{11}, -v_{21}] = \begin{bmatrix} l_{11} & -l_{21} \\ m_{11} & -m_{21} \\ n_{11} & -n_{21} \end{bmatrix}$$

Volviendo a escribir la ecuación matricial 1.26 y definiendo sus vectores columna

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad 2.1$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ r & s & t \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ h & p & q \end{matrix}$

Derivando el campo de desplazamientos

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum N_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} + \sum N_i \zeta \frac{t_i}{2} [v_{1i}, -v_{2i}] \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} \quad 1.13$$

respecto de las variables correspondientes se obtiene

$$h = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & p \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} + \sum \frac{t_i}{2} \begin{bmatrix} \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & 0 \\ N_i & 0 & 0 \end{bmatrix} [v_{1i}, -v_{2i}] \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix}$$

o también

$$h = \sum_{i=1}^8 H_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^8 H_i a_i^e \quad \text{donde} \quad a_i^e = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix}$$

y

$$H_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{t_i}{2} \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} l_{2i} & -\frac{t_i}{2} \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} l_{2i} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{t_i}{2} \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} l_{2i} & -\frac{t_i}{2} \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} l_{2i} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t_i}{2} N_i l_{1i} & -\frac{t_i}{2} N_i l_{2i} \end{bmatrix} \quad 2.2$$

Definiendo la matriz H de 5x40 como aquella que agrupa las 8 matrices H_i tal que

$$H = [H_1, H_2, \dots, H_8] \quad 2.3$$

y \mathbf{a}^e el vector de los 8 vectores \mathbf{a}_i^e de desplazamientos nodales, entonces se puede escribir

$$\mathbf{h} = \mathbf{H} \mathbf{a}^e \quad 2.4$$

De manera completamente análoga se obtiene

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} \mathbf{a}^e \quad \text{y} \quad \mathbf{q} = \mathbf{Q} \mathbf{a}^e \quad 2.5$$

con $\mathbf{P}=[P_1, P_2, \dots, P_8]$ y $\mathbf{Q}=[Q_1, Q_2, \dots, Q_8]$

donde

$$P_i = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & \frac{t_i}{2} \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} m_{1i} & -\frac{t_i}{2} \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} m_{2i} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & \frac{t_i}{2} \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} m_{1i} & -\frac{t_i}{2} \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} m_{2i} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t_i}{2} N_i m_{1i} & -\frac{t_i}{2} N_i m_{2i} \end{bmatrix} \quad 2.6$$

y

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \frac{t_i}{2} \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} n_{1i} & -\frac{t_i}{2} \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} n_{2i} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \frac{t_i}{2} \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} n_{1i} & -\frac{t_i}{2} \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} n_{2i} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t_i}{2} N_i n_{1i} & -\frac{t_i}{2} N_i n_{2i} \end{bmatrix} \quad 2.7$$

también se observa que

$$\mathbf{r} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{h} \quad \mathbf{s} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{p} \quad \mathbf{t} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{q} \quad 2.8$$

y por las Ecs. 2.4 y 2.5 se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{J}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{a}^e \\ \mathbf{s} &= \mathbf{J}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{a}^e \\ \mathbf{t} &= \mathbf{J}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{a}^e \end{aligned} \quad 2.9$$

Reescribiendo la ecuación matricial 1.25

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix}$

donde las variables con subíndice indican derivadas parciales.
Efectuando operaciones puede demostrarse que

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \mathbf{e}_1 J^{-1} (\theta_{11}H + \theta_{21}P + \theta_{31}Q) \mathbf{a}^e \quad 2.10$$

$\begin{matrix} 1 \times 3 & 3 \times 3 & 3 \times 4 & 4 \times 1 \end{matrix}$

$$\frac{\partial v'}{\partial y'} = \mathbf{e}_2 J^{-1} (\theta_{12}H + \theta_{22}P + \theta_{32}Q) \mathbf{a}^e \quad 2.11$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y'} = \mathbf{e}_2 J^{-1} (\theta_{11}H + \theta_{21}P + \theta_{31}Q) \mathbf{a}^e \quad 2.12$$

$$\frac{\partial v'}{\partial x'} = \mathbf{e}_1 J^{-1} (\theta_{12}H + \theta_{22}P + \theta_{32}Q) \mathbf{a}^e \quad 2.13$$

$$\frac{\partial w'}{\partial x'} = \mathbf{e}_1 J^{-1} (\theta_{13}H + \theta_{23}P + \theta_{33}Q) \mathbf{a}^e \quad 2.14$$

$$\frac{\partial u'}{\partial z'} = \mathbf{e}_3 J^{-1} (\theta_{11}H + \theta_{21}P + \theta_{31}Q) \mathbf{a}^e \quad 2.15$$

$$\frac{\partial w'}{\partial y'} = \mathbf{e}_2 J^{-1} (\theta_{13}H + \theta_{23}P + \theta_{33}Q) \mathbf{a}^e \quad 2.16$$

$$\frac{\partial v'}{\partial z'} = \mathbf{e}_3 J^{-1} (\theta_{12}H + \theta_{22}P + \theta_{32}Q) \mathbf{a}^e \quad 2.17$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.10 a la 2.17 en 1.20 se obtiene

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 J^{-1} (\theta_{11}H + \theta_{21}P + \theta_{31}Q) \\ \mathbf{e}_2 J^{-1} (\theta_{21}H + \theta_{22}P + \theta_{32}Q) \\ \mathbf{e}_2 J^{-1} (\theta_{11}H + \theta_{21}P + \theta_{31}Q) + \mathbf{e}_1 J^{-1} (\theta_{12}H + \theta_{22}P + \theta_{32}Q) \\ \mathbf{e}_1 J^{-1} (\theta_{13}H + \theta_{23}P + \theta_{33}Q) + \mathbf{e}_3 J^{-1} (\theta_{11}H + \theta_{21}P + \theta_{31}Q) \\ \mathbf{e}_2 J^{-1} (\theta_{13}H + \theta_{23}P + \theta_{33}Q) + \mathbf{e}_3 J^{-1} (\theta_{12}H + \theta_{22}P + \theta_{32}Q) \end{bmatrix} \mathbf{a}^e$$

2.18

Comparando 2.18 con la expresión $\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{B}\mathbf{a}^e$ de 1.5 se observa que se ha encontrado la expresión buscada para la matriz B de 5x40. Sin embargo, lo que interesa es encontrar expresiones para \mathbf{B}_0 y \mathbf{B}_1 , como lo requiere la Ec.1.32.

De acuerdo con la Ec.1.31, separar B implica desdoblar H, P y Q. Esto es factible definiendo las siguientes matrices

$$\begin{aligned} H_0 &= [H_1^0, H_2^0, \dots, H_8^0] & H_1 &= [H_1^1, H_2^1, \dots, H_8^1] \\ P_0 &= [P_1^0, P_2^0, \dots, P_8^0] & P_1 &= [P_1^1, P_2^1, \dots, P_8^1] \\ Q_0 &= [Q_1^0, Q_2^0, \dots, Q_8^0] & Q_1 &= [Q_1^1, Q_2^1, \dots, Q_8^1] \end{aligned}$$

donde

$$H_i^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t_i}{2} N_i l_{11} & -\frac{t_i}{2} N_i l_{21} \end{bmatrix}$$

$$P_i^0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t_i}{2} N_i m_{11} & -\frac{t_i}{2} N_i m_{11} \end{bmatrix}$$

$$Q_i^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t_i}{2} N_i n_{11} & -\frac{t_i}{2} N_i n_{21} \end{bmatrix}$$

$$H_i^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{t_i}{2} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} l_{11} & \frac{t_i}{2} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} l_{21} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t_i}{2} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} l_{11} & -\frac{t_i}{2} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} l_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_i^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{t_i}{2} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} m_{11} & -\frac{t_i}{2} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} m_{21} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t_i}{2} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} m_{11} & -\frac{t_i}{2} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} m_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_i^o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{t_i \partial N_i}{2} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} n_{1i} & -\frac{t_i \partial N_i}{2} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} n_{2i} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t_i \partial N_i}{2} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} n_{1i} & -\frac{t_i \partial N_i}{2} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} n_{2i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es decir, $H = H_0 + \zeta H_1$
 $P = P_0 + \zeta P_1$
 $Q = Q_0 + \zeta Q_1$

con H_0 , H_1 , P_0 , P_1 , Q_0 y Q_1 independientes de ζ .

Realizando lo anterior se pueden encontrar B_0 y B_1 de la Ec.2.18 sustituyendo H_0 y H_1 respectivamente en lugar de H , y haciendo lo mismo con P y Q .

2.1 ENSAMBLE DE LA MATRIZ GLOBAL. CONDICIONES DE FRONTERA.

Una vez generada la matriz de rigidez elemental K^e , ésta se ensambla de manera adecuada en la matriz de rigidez global K . Lo mismo se hace con el vector de fuerzas.

Debido a que las matrices de rigidez elementales son simétricas, tan sólo se genera su diagonal principal y su parte inferior. Sean K_{ij}^e submatrices de 5×5 de la matriz K^e . Para el elemento e de la Fig.2.1, la matriz K^e y el vector b^e asociados son

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & & & & \\ K_{21}^e & K_{22}^e & & & \\ \vdots & & & & \\ K_{81}^e & K_{82}^e & \cdots & & K_{88}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^e \\ \vdots \\ a_8^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^e \\ \vdots \\ b_8^e \end{bmatrix} \quad 2.19$$

Adicionalmente a la numeración general que se hace a los nodos de la malla completa, en cada uno de los elementos debe indicarse el número del nodo que corresponda a cada uno de los

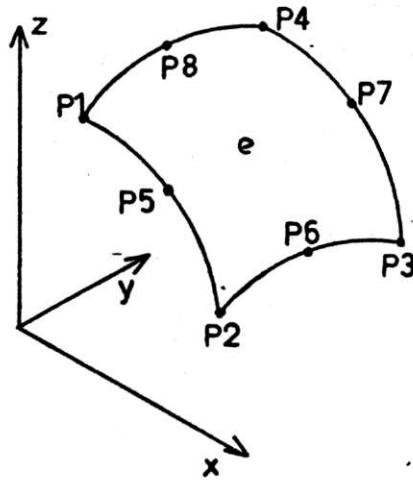
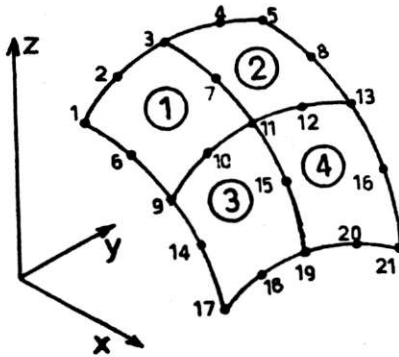


Fig. 2.1 Numeración de los nodos del elemento e.

puntos P1, P2, ..., P8 como se observa en la Fig.2.2.



(a)

| elem. | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 1 | 9 | 11 | 3 | 6 | 10 | 7 | 2 |
| 2 | 3 | 11 | 13 | 5 | 7 | 12 | 8 | 4 |
| 3 | 9 | 17 | 19 | 11 | 14 | 18 | 15 | 10 |
| 4 | 11 | 19 | 21 | 13 | 15 | 20 | 16 | 12 |

(b)

Fig. 2.2 (a) Numeración de los nodos y elementos en la malla completa. (b) Conectividad de los nodos

Para el arreglo mostrado en la Fig.2.2, las ecuaciones matriciales para el elemento e=1, quedan

$$\begin{bmatrix} K_{12}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 \\ \vdots \\ K_{81}^1 & K_{82}^1 & \cdots & K_{88}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_8^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^1 \\ \vdots \\ b_8^1 \end{bmatrix} \quad 2.20$$

para $e=2$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^2 & & & & \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 & & & \\ \vdots & & & & \\ K_{81}^2 & K_{82}^2 & \cdots & & K_{88}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^2 \\ \vdots \\ a_8^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^2 \\ \vdots \\ b_8^2 \end{bmatrix} \quad 2.21$$

y así sucesivamente para el resto de los elementos. Para la colocación de estos sistemas en el global de 105×105 se procede de la manera siguiente. Considérese que los elementos de la tabla de la Fig. 2.2b se guardan en una matriz $P(I, J)$ donde I es el número de elemento y $1 \leq J \leq 8$ es el número de nodo, entonces a la submatriz elemental K_{ij}^e le corresponderá el lugar $K_{P(e, i), P(e, j)}$ en el sistema global. Por ejemplo, a K_{21}^1 de 2.20 le corresponderá el lugar (9, 1) en K . Similarmente, al j -ésimo sub-vector b_j^e del vector de fuerzas del elemento e , le corresponde el lugar $P(e, j)$ en el vector global.

La matriz de rigidez global obtenida con el procedimiento de llenado descrito, tiene la forma que se muestra en la Fig. 2.3a. En lugar de dimensionar una matriz cuadrada $N \times N$ como la de la Fig. 2.3a, es preferible compactarla en una matriz de banda $N \times NBAND$ (Fig. 2.3c) o mejor aún, en un arreglo unidimensional (Fig. 2.3d); obteniéndose un ahorro sustancial en la memoria ocupada de la computadora. Esto porque

$$BAND(I) = 5(\text{MAX}(P(I, J)) - \text{MIN}(P(I, J)) + 1)$$

para todo J , luego $BAND$ es el mayor de los $BAND(I)$ y con una numeración adecuada de los nodos en la malla completa, es posible obtener pequeños valores de $BAND$ comparados con N .

En K compacta el elemento $K(1, J)$ corresponde al j -ésimo elemento de la diagonal principal de la K cuadrada.

ahorro en la cantidad de memoria requerida al unir todos los renglones de la matriz en el arreglo unidimensional de la Fig.2.3d.

Evitar el almacenamiento de elementos ceros como los de la matriz de la Fig.2.3a economiza el tiempo de cómputo y la memoria ocupada de la computadora. Por tal razón las matrices de rigidez elementales se ensamblan directamente en un arreglo unidimensional como el de la Fig.2.3d, aún cuando el proceso de ensamble y la imposición de las condiciones frontera se vuelven más complejos.

Hasta ahora el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$K\mathbf{a} - \mathbf{b} = 0 \quad 2.22$$

es singular. Una vez que se impongan las condiciones de frontera en el sistema de ecuaciones 2.22 podrá resolverse para los valores nodales buscados \mathbf{a} , tal solución hará que la funcional de energía potencial 1.8 alcance un valor extremo.

Por la naturaleza del problema a resolver, sólo se consideran condiciones de frontera homogéneas. Estas corresponden a la restricción del desplazamiento de algún nodo en cierta dirección. La manera de introducirlas en el sistema de ecuaciones es que si un valor cero es asignado a la j -ésima variable (desplazamiento restringido), es suficiente en K de la Fig.2.3a reemplazar el j -ésimo renglón y columna por ceros, después fijar la j -ésima diagonal igual a la unidad y la j -ésima componente de \mathbf{b} hacerla igual a cero. Esto se ilustra en la Fig.2.4.

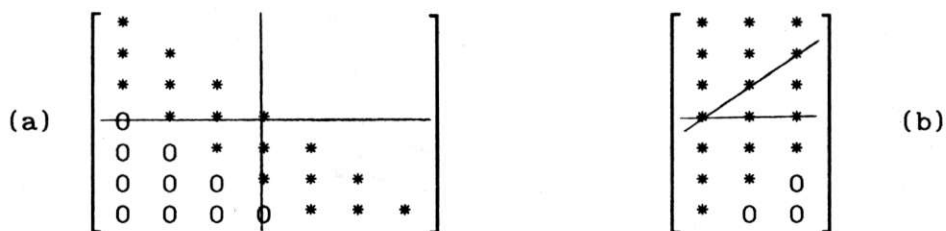


Fig.2.4 Imposición de las condiciones de frontera en la matriz de rigidez.

2.3 CALCULO DE LOS ESFUERZOS.

Los esfuerzos (σ') que corresponden a las deformaciones ϵ' están dados por la Ec.1.21

$$\sigma' = D \epsilon' \quad 1.21$$

Las deformaciones ϵ' están definidas en ejes locales, luego σ' también estará definido en tales direcciones.

De acuerdo con 1.31 y 1.24 las deformaciones están dadas por

$$\epsilon' = B a^e = (B_0 + \zeta B_1) a^e \quad 2.23$$

es decir, podemos calcular las deformaciones (y los esfuerzos) en cualquier punto ζ a lo largo del espesor de la lámina.

Una vez que se han encontrado los desplazamientos nodales a^e del elemento e , es necesario volver a calcular las matrices B_0 y B_1 y así encontrar las deformaciones y los esfuerzos. Tales matrices pueden calcularse en cualquier punto de coordenadas (ξ, η) del elemento de referencia; sin embargo, se recomienda [13] que se calculen nuevamente en los puntos gaussianos, por lo que los esfuerzos obtenidos corresponderán a dichos puntos y luego por extrapolación se calculan los esfuerzos en los puntos nodales.

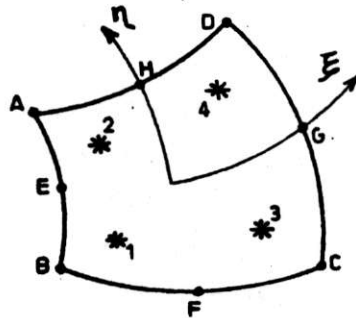


Fig.2.5 Identificación de los puntos gaussianos y nodos para la extrapolación de esfuerzos.

La extrapolación lineal de la Fig.2.5 utiliza los valores del esfuerzo σ de los cuatro puntos gaussianos. Se emplean las funciones de forma lineales siguientes

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & N_2 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) & N_4 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad 2.24$$

y se insertan los valores de ξ y η de la localización deseada, estén dentro o fuera del cuadrilátero definido por los puntos gaussianos.

Por ejemplo, para el punto B, $\xi=\eta=-1/P$ ($P=0.57735$). De esta manera, de 2.24

$$\sigma_B = \frac{1}{4}(b^2, ab, ab, a^2)(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)^T \quad 2.25$$

donde $a=1-1/P$ y $b=1+1/P$. En el punto E, $\xi=-1/P$ y $\eta=0$, entonces

$$\sigma_E = \frac{1}{4}(b, b, a, a)(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)^T \quad 2.26$$

Este procedimiento para encontrar los esfuerzos σ en los 8 puntos nodales se sigue para cada uno de los 5 esfuerzos ($\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$, $\tau_{x'y'}$, $\tau_{x'z'}$, $\tau_{y'z'}$).

2.4 DISEÑO DEL PROGRAMA.

El programa desarrollado está escrito en lenguaje FORTRAN; su estructura sigue la secuencia mostrada en el diagrama de flujo de la Fig.2.6. Los datos de entrada son: el número de elementos, número de nodos y de nodos frontera, las propiedades del material, la presión aplicada, las coordenadas de los nodos, la numeración de los nodos por elemento (conectividad) y las condiciones de frontera.



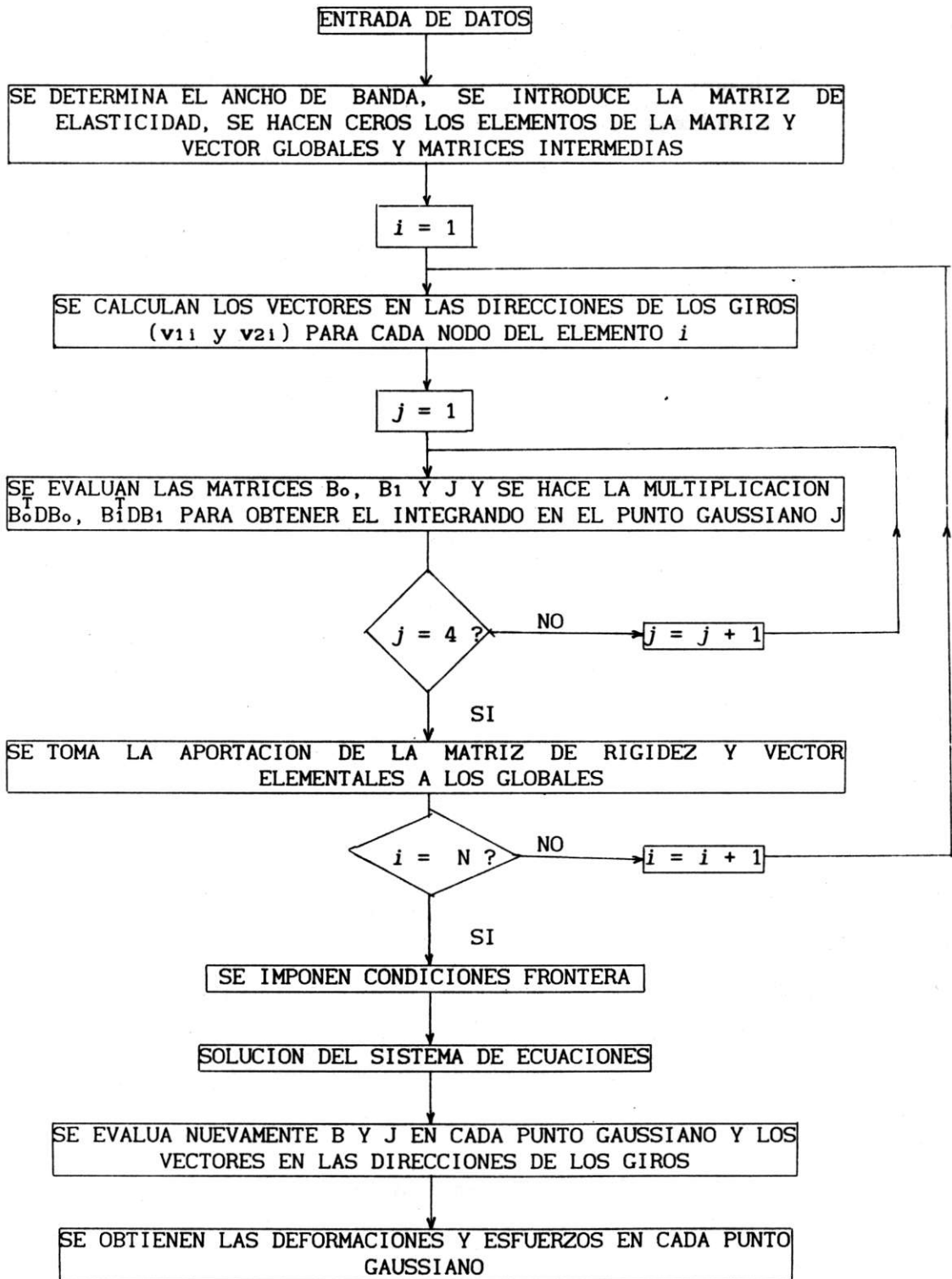


Fig.2.6 Diagrama de flujo del programa principal NOZZLE.FOR

Para cada elemento se calcula la diferencia entre el número de nodo mayor y el menor y se obtiene el ancho de banda variable de todos los elementos. Esto se realiza en una subrutina llamada BAND.

El cálculo de las matrices B_0 , B_1 y J se hace en la subrutina llamada SHAPE cuyo diagrama de flujo se muestra en la Fig.2.7.

La solución del sistema de ecuaciones se realiza mediante el método de eliminación de Gauss, con las modificaciones adecuadas para el caso específico de que la matriz de rigidez se almacena en un arreglo unidimensional.

Determinados los desplazamientos nodales, es necesario calcular nuevamente las matrices B_0 , y B_1 (y por tanto B) en los puntos Gaussianos del elemento donde se desee encontrar los esfuerzos. Mediante la ecuación 2.23 se calcula el vector de deformaciones y posteriormente el de esfuerzos usando la Ec.1.21.

2.5 VALIDACION DEL PROGRAMA.

El programa de cómputo ha sido probado con problemas cuya solución es conocida dando resultados aceptables. En las Figs.2.8 y 2.9 se muestran los problemas con los que ha sido probado el programa de cómputo.

En la Fig.2.8 se tiene una bóveda cilíndrica sujeta a presión en la parte superior; los extremos circulares de la bóveda están restringidos a moverse únicamente en la dirección y , mientras el resto de los nodos lo pueden hacer en todas las direcciones. Los desplazamientos verticales del plano medio y los axiales del apoyo, obtenidos con el programa concuerdan muy

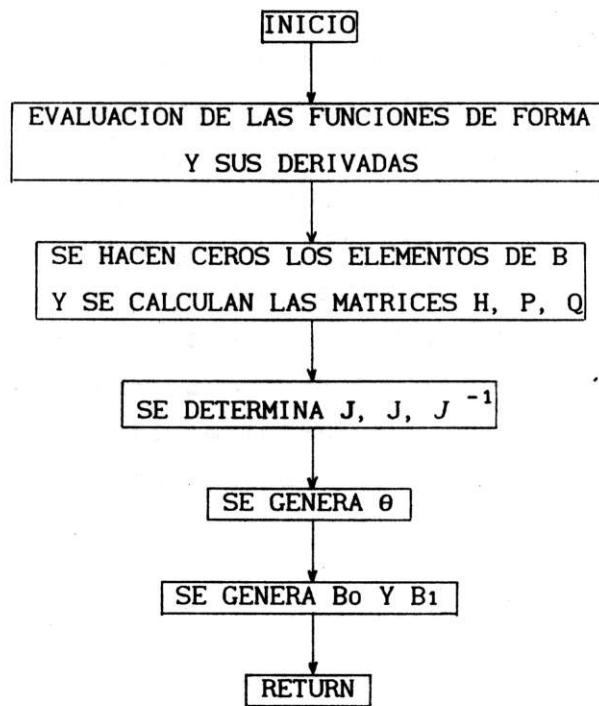


Fig.2.7 Diagrama de flujo de la subrutina SHAPE que calcula B₀, B₁ y J en el punto de coordenadas (ξ,η).

bien con la solución exacta obtenida con teoría de placas, como puede observarse en las gráficas de esta figura.

En la Fig.2.9 se ha representado la cuarta parte de un cilindro sujeto a presión interna, las condiciones de frontera son tales que permiten el movimiento de los nodos sólo en dirección radial. Los resultados del desplazamiento radial y el esfuerzo circunferencial obtenidos con el programa del M.E.F. concuerdan con los que resultan de aplicar la fórmula de resistencia de materiales para cilindros de pared delgada. Cabe hacer notar que con el programa ha sido posible encontrar los esfuerzos en la superficie interior y exterior que corresponden a hacer $\zeta=-1$ y $\zeta=1$, respectivamente en la ecuación 2.23.

10 ELEMENTOS

65 NODOS

325 VARIABLES

$R = 7.02 \text{ m}$

$t = 0.0762 \text{ m}$

$E = 2.068 \times 10^{10} \text{ Pa}$

$\nu = 0$

$P = 4309.2 \text{ Pa}$

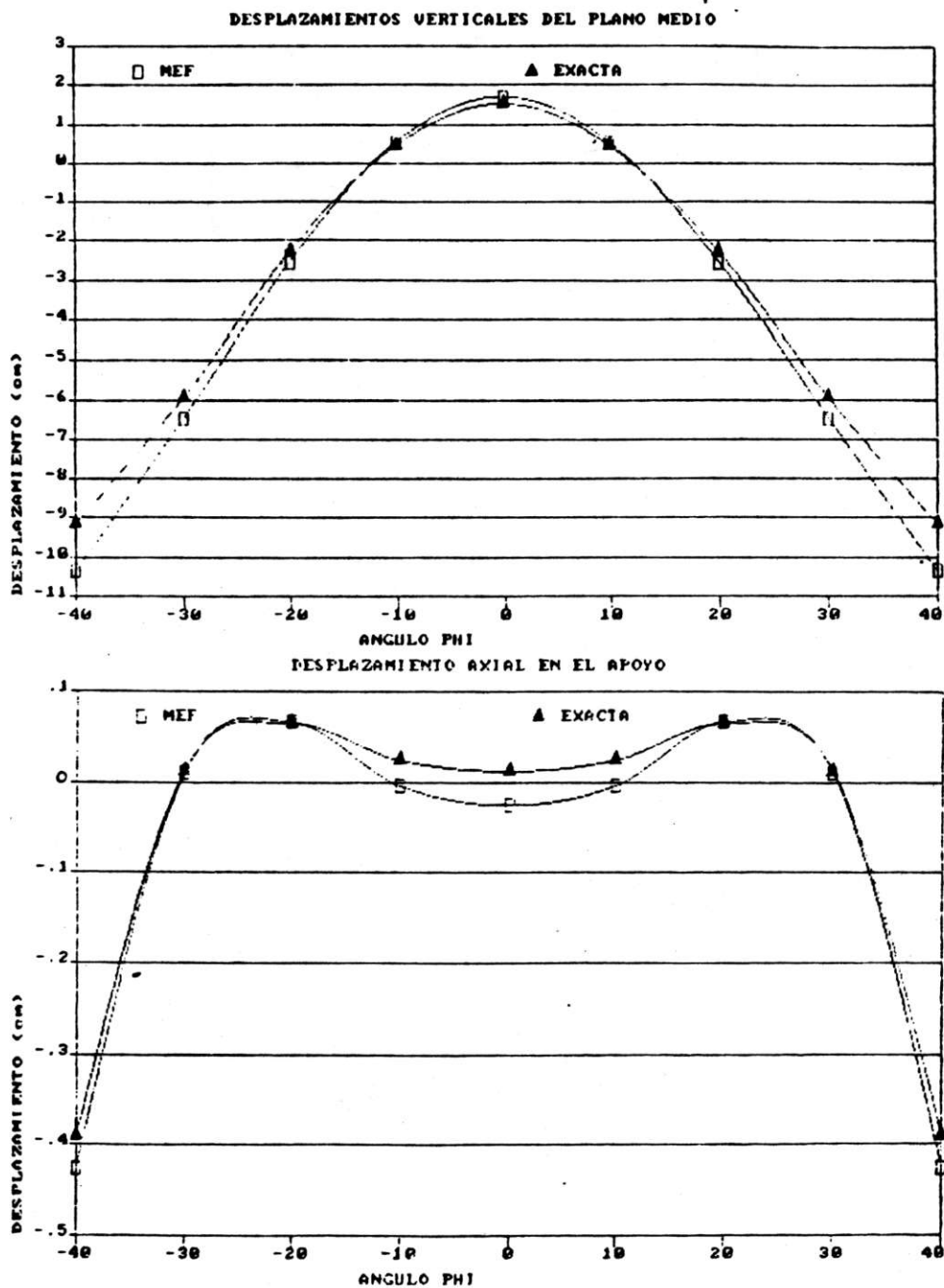
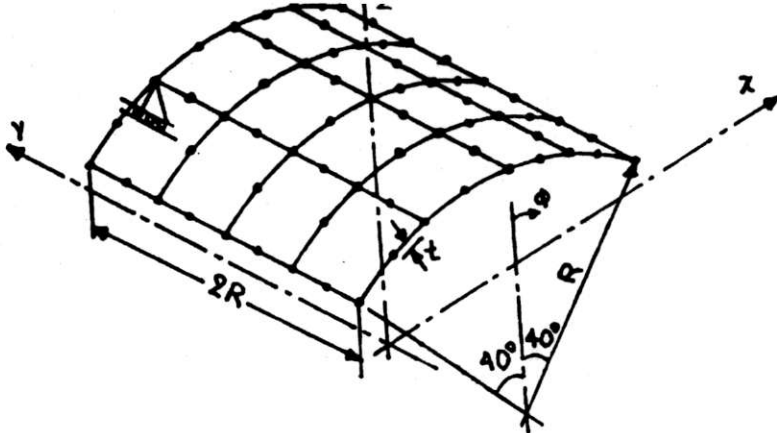
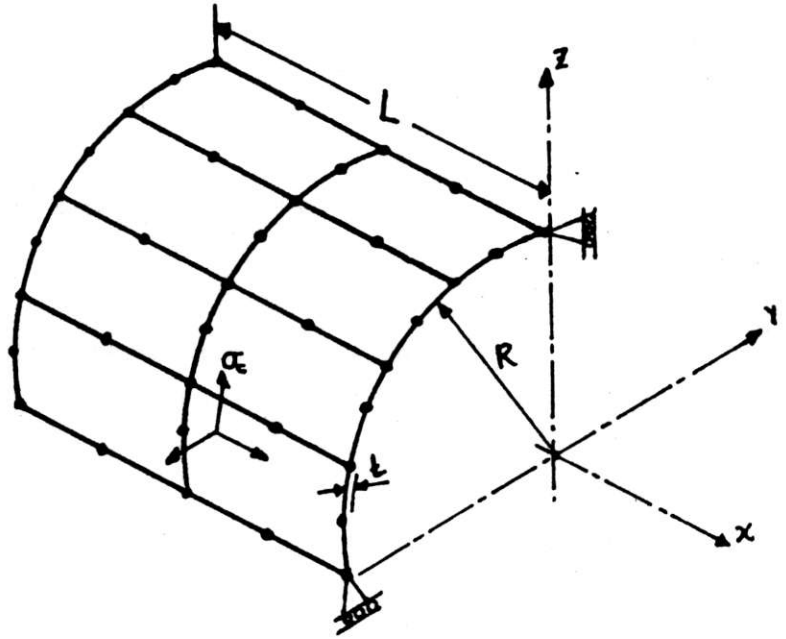


Fig. 2.8 Solución al problema de una bóveda cilíndrica sujeta a presión externa

8 ELEMENTOS
37 NODOS
185 VARIABLES
R = 2 m
L = 6 m
t = 0.05 m
E = 2 x 10¹⁰ Pa
P = 4 MPa



CON LA ECUACION

$$\sigma_c = \frac{P R}{t}$$

$$\Delta R = 1.6 \text{ mm}$$

$$\sigma_c = 160 \text{ Mpa}$$

CON M. E. F

$$\Delta R = 1.82 \text{ mm}$$

$$\sigma_c = 161.4 \text{ MPa}$$

(SUPERFICIE INTERIOR)

$$\sigma_c = 158.5 \text{ MPa}$$

(SUPERFICIE EXTERIOR)

Fig.2.9 Solución al problema de un cilindro sujeto a presión interna.

3. APLICACION DEL PROGRAMA.

3.1 MODELO EMPLEADO PARA SIMULAR EL COMPORTAMIENTO DE LA UNION RECIPIENTE-BOQUILLA.

Para estudiar el comportamiento de la unión recipiente-boquilla, sometida a presión interna, se emplea la intersección perpendicular de dos cilindros. Por la simetría del problema, únicamente se analiza la cuarta parte de la intersección, Fig.3.1.

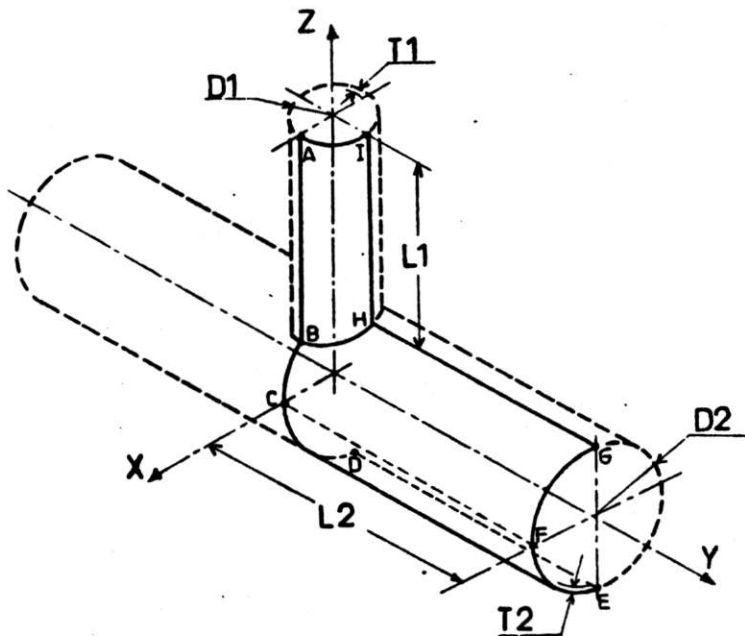


Fig.3.1 Intersección de dos cilindros

Las condiciones de frontera adecuadas a la simplificación anterior son tales, que se restringe el movimiento de los nodos frontera de la manera siguiente: a los nodos que se encuentran sobre la línea $ABCD$ se les impide su movimiento en la dirección y ; los de la línea GHI en la

dirección x y los que están en la línea DE también se les impide desplazarse en la dirección x . De esta manera se da libertad a los nodos de ambos cilindros de desplazarse bajo una presión interna.

La transición entre el cilindro menor (boquilla) y el cilindro mayor (recipiente) se efectúa a través de un pequeño radio de enlace o de transición R . Tal curvatura se contempla en [15] y además es necesario considerarla en el modelo de elementos finitos, pues una unión en esquina no puede modelarse con el tipo de elemento empleados aquí.

El modelo empleado puede aceptar espesores diferentes en boquilla y recipiente. El radio de enlace está asociado al plano medio de las paredes, Fig.3.2.

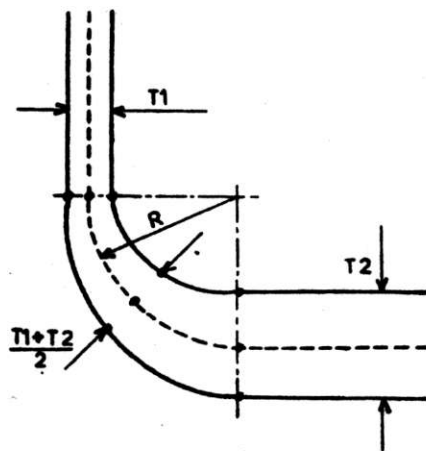


Fig.3.2 Radio de enlace entre las paredes del cilindro y la boquilla.

En la Fig.3.3 se muestra la discretización del modelo con elementos de casacarones. El modelo se ha dividido en 249 elementos y 828 nodos que implican 4140 grados de libertad. En la boquilla hay 233 nodos y 568 en el recipiente, los 27 nodos restantes se encuentran en la zona de transición.

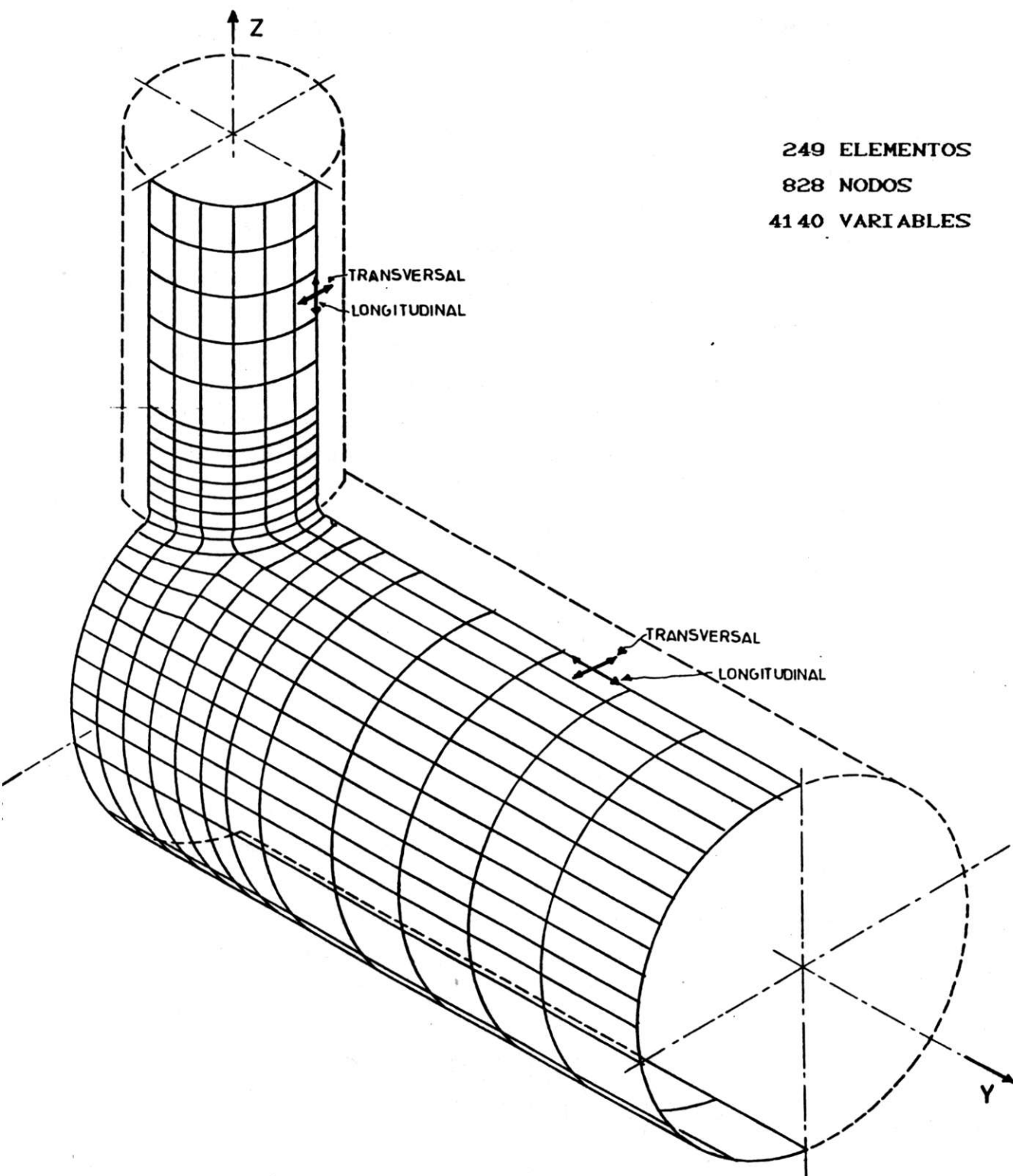


Fig. 3.3 Discretización de la intersección de dos cilindros con elementos de cascarones

3.2 PROGRAMA AUXILIAR PARA GENERAR DATOS DE ENTRADA DEL PROGRAMA DEL M. E. F.

La cantidad de datos de entrada relacionados con las coordenadas y conectividad de los nodos en el programa principal NOZZLE.FOR es enorme. Por tal motivo se ha desarrollado el programa auxiliar COORD.FOR que genera automáticamente la mayoría de estos datos para alimentar el programa principal.

En la Fig.3.4 se muestra la configuración básica de la discretización. El programa auxiliar está diseñado exclusivamente para este arreglo y los datos geométricos que pueden variarse son: los diámetros D_1 , D_2 ; espesores T_1 , T_2 ; longitudes L_1, L_2 y el radio de enlace R ; y entrega como resultado las coordenadas θ y z de los nodos de la boquilla, las coordenadas θ y y de los nodos del recipiente y las coordenadas superiores, medias e inferiores de los 27 nodos de la zona de transición.

La manera de numerar los nodos en la malla completa es de gran importancia, pues de ello depende el tamaño del ancho de banda y en última instancia, la longitud del arreglo unidimensional que almacena la matriz de rigidez global. Existen algoritmos [12] para efectuar una numeración adecuada de los nodos de la malla y minimizar tal longitud; sin embargo, éstos son un tanto empíricos. La numeración de la malla de la Fig.3.3 se hizo buscando que la diferencia entre el nodo con número mayor y el menor de cada elemento sea lo más pequeña posible, así se asegura que el ancho de banda sea mínimo pues éste depende de tal diferencia.

La numeración de los elementos para el arreglo mostrado en la Fig.3.3 se mantiene invariable y existe cierta regularidad en ella. Esto facilita que la conectividad en la

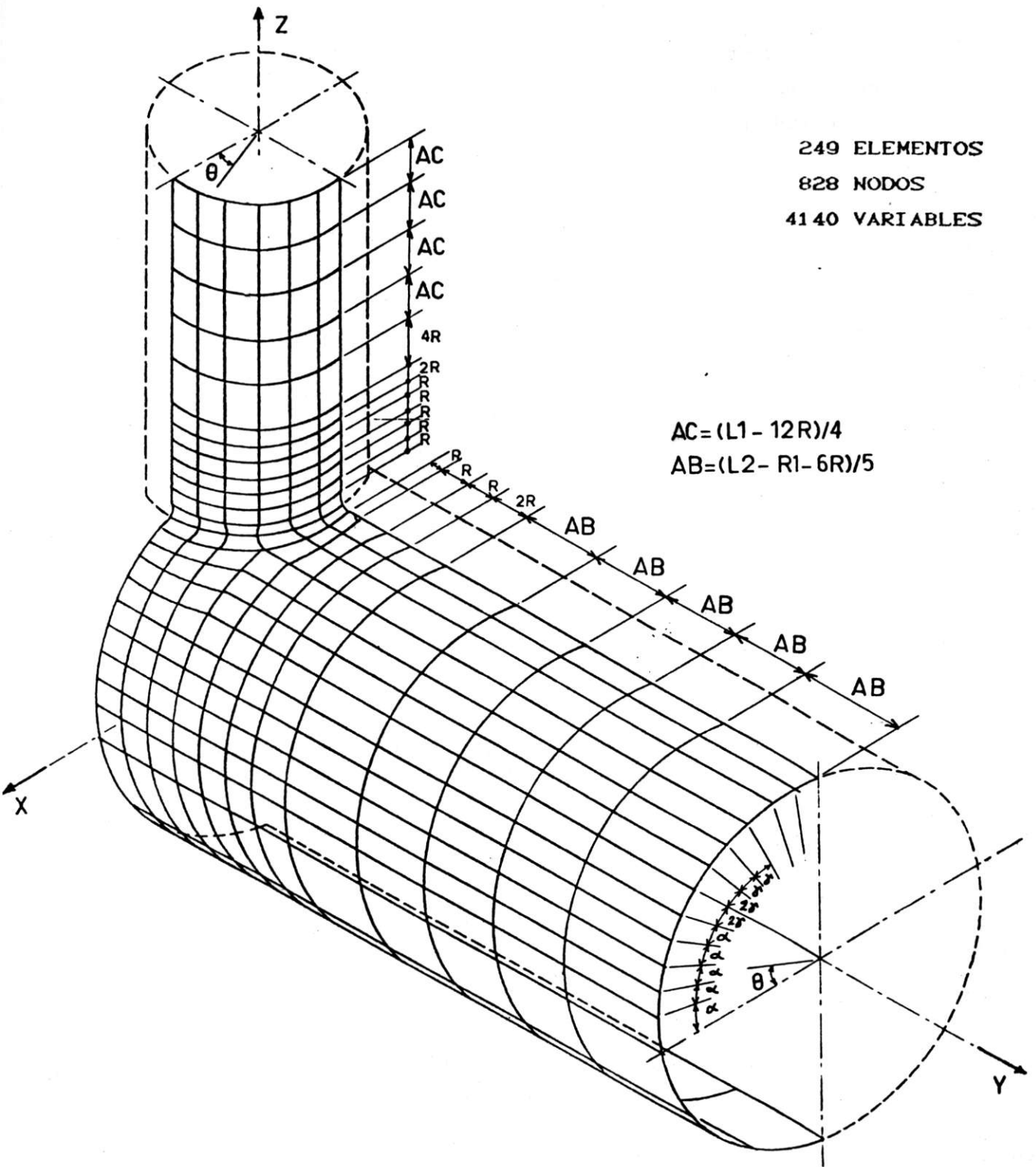


Fig. 3.4 Configuración básica de la discretización

mayoría de los elementos se genere automáticamente en el programa auxiliar. En los elementos cuyos nodos no están numerados con regularidad, la conectividad se introduce como datos de entrada del programa auxiliar.



4. OBTENCION Y ANALISIS DE RESULTADOS.

4.1 COMPARACION ENTRE RESULTADOS OBTENIDOS Y REPORTADOS.

En las siguientes figuras se muestran los resultados que se obtuvieron al aplicar el programa a un caso de ejemplo. Las dimensiones del modelo usado y demás datos del problema se resumen en la tabla 4.1.

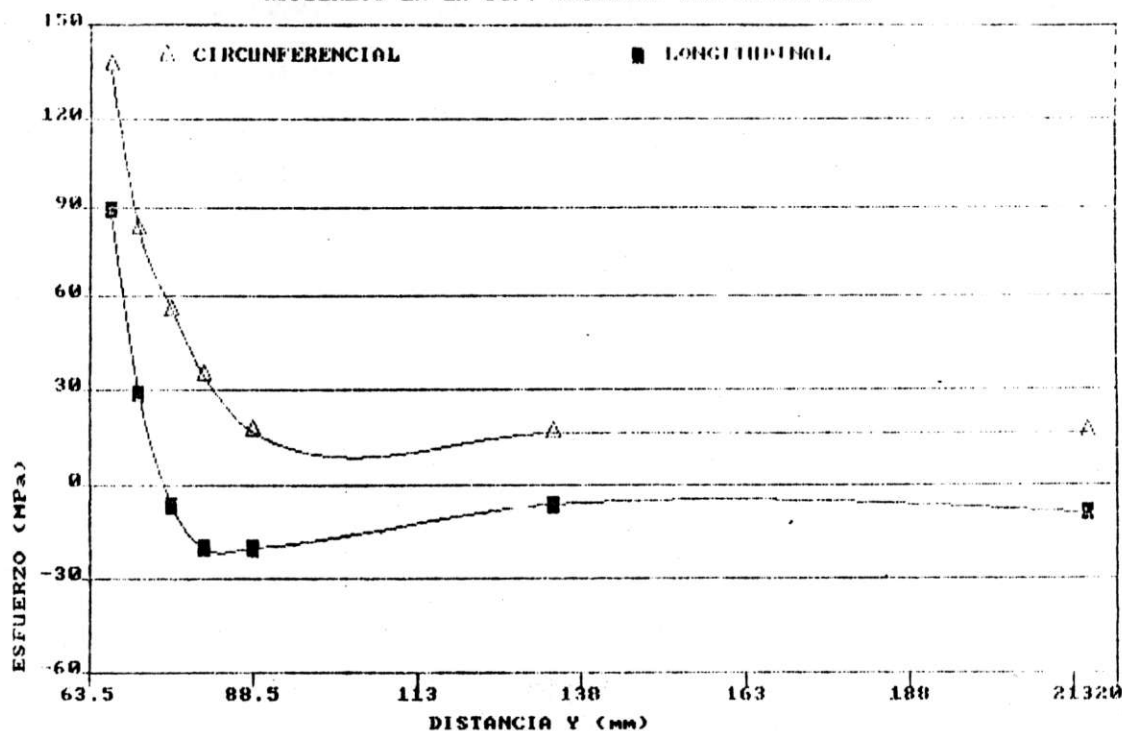
| D1 | D2 | T1 | T2 | L1 | L2 | |
|--------------------------|-----|------|------|-------|-------|------|
| 127 | 254 | 1.27 | 2.54 | 368.3 | 495.3 | mm |
| 5 | 10 | 0.05 | 0.1 | 14.5 | 19.5 | pul. |
| P = 0.3445 MPa = 50 PSI | | | | | | |
| E = 207 GPa = 30000 KPSI | | | | | | |
| $\nu = 0.3$ | | | | | | |
| R = 5 mm | | | | | | |

Tabla 4.1 Datos del problema de ejemplo.

En la Fig.4.1 se muestran los esfuerzos longitudinal y circunferencial tanto en la superficie exterior como interior del recipiente. Estos esfuerzos corresponden a los obtenidos en los puntos de la línea H-G de la Fig.3.1.

La Fig.4.2 es similar a la Fig.4.1, pero ahora los esfuerzos corresponden a la boquilla en la línea H-I. Obsérvese que en ambas figuras los esfuerzos circunferenciales, lejos de la unión, tienden a los de membrana obtenidos por la ecuación para recipientes de pared delgada

ESFUERZOS EN LA SUP. EXTERIOR DEL RECIPIENTE



ESFUERZOS EN LA SUP. INTERIOR DEL RECIPIENTE

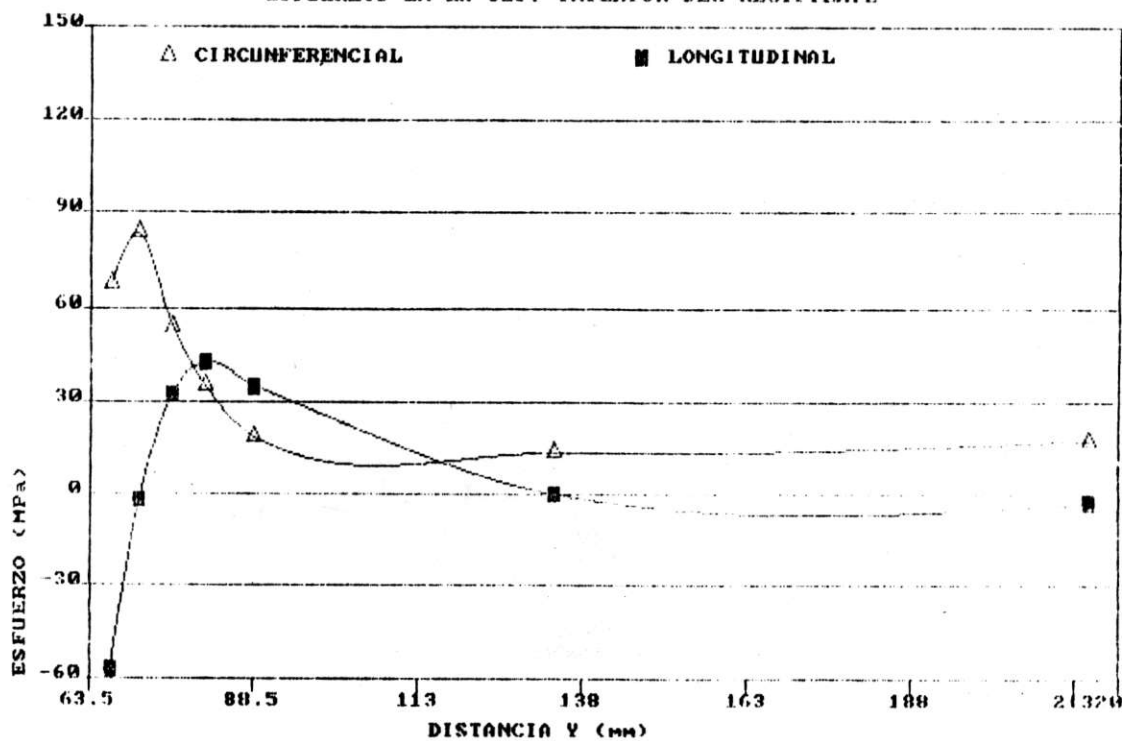
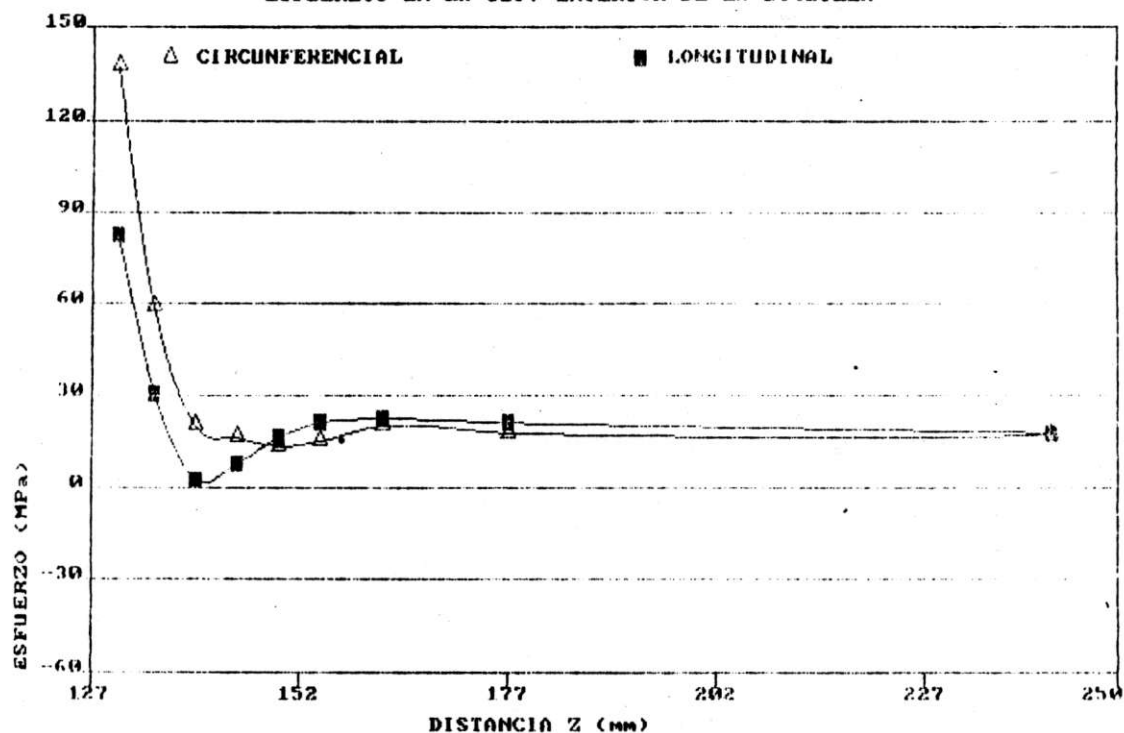


Fig. 4.1 Esfuerzos en el recipiente

ESFUERZOS EN LA SUP. EXTERIOR DE LA BOQUILLA



ESFUERZOS EN LA SUP. INTERIOR DE LA BOQUILLA

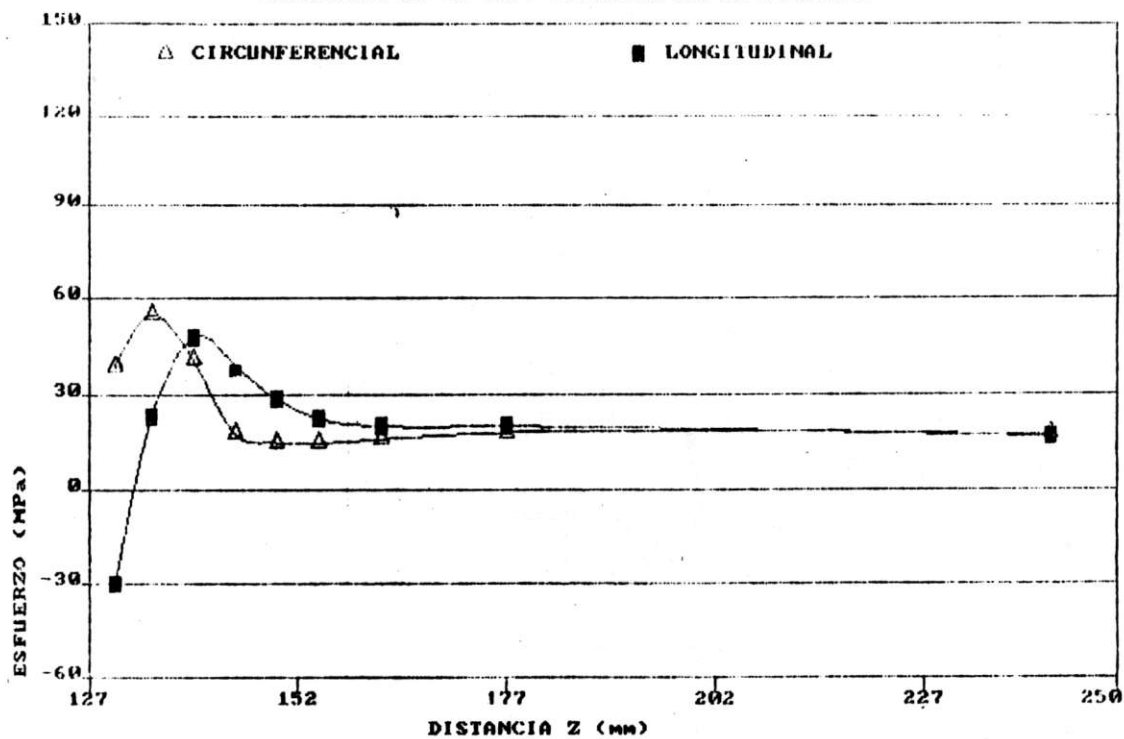


Fig. 4.2 Esfuerzos en la boquilla

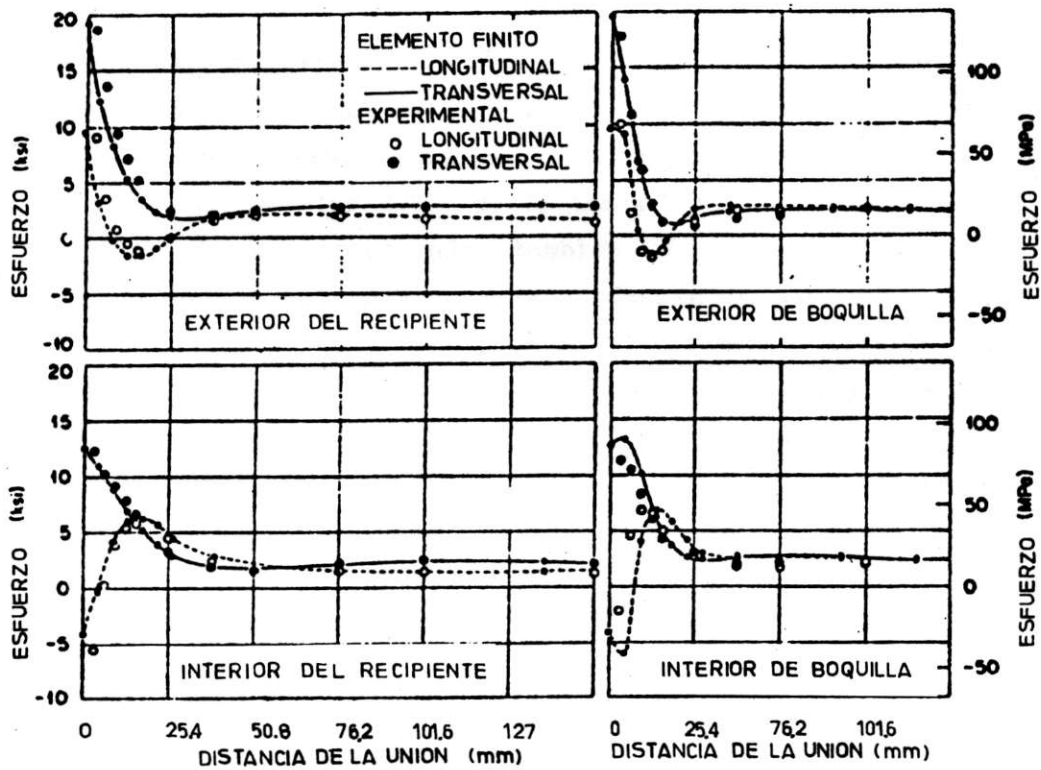


Fig.4.3 Comparación de esfuerzos calculados y obtenidos experimentalmente, reportados en [16].

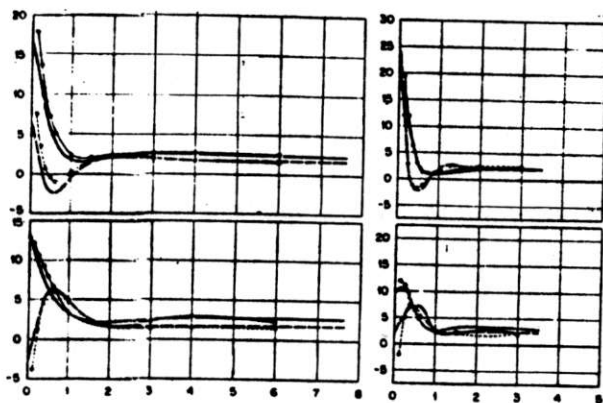


Fig.4.4 Reportada en [5].

$$\sigma = \frac{P D1}{2 T1} = \frac{P D2}{2 T2} \quad 4.1$$

$$\sigma = 17.24 \text{ MPa} = 2.5 \text{ KPSI}$$

Resulta interesante comparar las gráficas de las Figs.4.1 y 4.2 con las de la Fig.4.3. La Fig.4.3 se reporta en [16] y corresponde a un ejemplo de iguales características al resuelto aquí con los datos de la tabla 4.1. En [5] se reporta la Fig.4.4 y corresponde también a un ejemplo cuyas características son iguales a las dadas en la tabla 4.1; pero la geometría del modelo se aproximó con elementos triangulares planos. Tanto en la Fig.4.3 como en la Fig.4.4 aparecen graficados los resultados experimentales, los cuales concuerdan muy bien con los obtenidos con el M.E.F. La semejanza entre las Figs.4.3 y 4.4 reportadas y las Figs.4.1 y 4.2 obtenidas en este trabajo, permite confiar en el modelo de elementos finitos que se ha descrito y en el programa NOZZLE.FOR que se ha desarrollado.

Es necesario señalar que en los resultados reportados [5] y [16] no se indica cómo se representa la transición en los cilindros, por lo que los resultados de la Fig.4.1 para el esfuerzo longitudinal difieren ligeramente de los correspondientes de las Figs.4.3 y 4.4. No obstante, la tendencia de las curvas es la misma, esto es, los esfuerzos longitudinales cerca de la unión son de compresión (negativos) en el interior del recipiente y boquilla, y los restantes son de tensión.

Ahora que se ha comprobado la validez del programa de cómputo presentado y de la discretización propuesta del modelo; se pueden emplear éstos como instrumento de análisis para continuar el estudio sobre este problema.

En la Fig.4.5 obtenida en [10] se observan las curvas de



factores de concentración de esfuerzos para toberas en recipientes cilíndricos. De estas curvas se obtiene un factor aproximadamente de 8 para el ejemplo cuyos datos se dan en la tabla 4.1. En los resultados del programa se encuentra un esfuerzo máximo de 137 MPa en la superficie exterior, tanto en la boquilla como en el recipiente, y como lejos de la unión el esfuerzo circunferencial es de 17.24 MPa, entonces el factor de concentración de esfuerzos será de 7.94, el cual concuerda muy bien con el leído de la Fig.4.5.

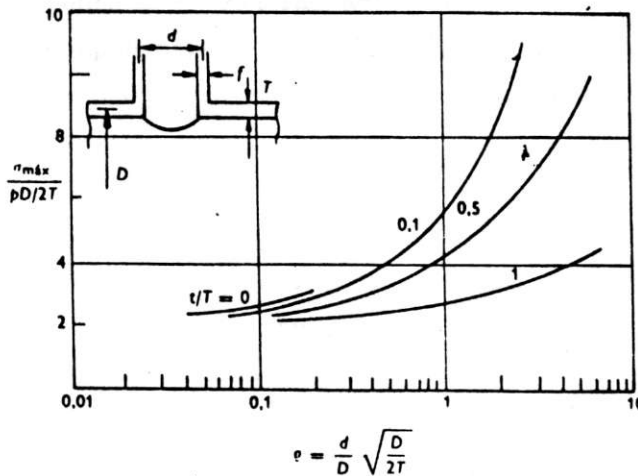


Fig.4.5 Factores de concentración de esfuerzos para toberas radiales en cuerpos cilíndricos [10].

4.2 ANALISIS COMPARATIVO ENTRE RESULTADOS OBTENIDOS Y ESPECIFICACIONES DEL CODIGO ASME, SECCION VIII.

Ante la ausencia de métodos analíticos para determinar en detalle la distribución de esfuerzos en la proximidad de la unión recipiente-boquilla; el código ASME sección VIII, división 2, propone dos métodos para su determinación: el método de índices de esfuerzos y el de análisis experimental de esfuerzos. A continuación se describe brevemente el primero de ellos.

El término índice de esfuerzos, se define como el cociente de la componente de esfuerzo correspondiente, σ_t , σ_n , y σ_r sobre la intensidad de esfuerzos de membrana (σ_h) en el recipiente sin orificio, ecuación 4.1.

Los símbolos para las componentes de esfuerzo se muestran en la Fig.4.6 y se definen como sigue:

S = intensidad de esfuerzos (esfuerzo combinado) en el punto bajo consideración

σ_t = componente de esfuerzo en el plano de la sección bajo consideración, paralela a la frontera de la sección

σ_n = componente de esfuerzo normal al plano de la sección

σ_r = componente normal a la frontera de la sección

σ_h = esfuerzo de membrana, Ec.4.1

t = espesor nominal del recipiente

D = diámetro interior del recipiente

R = radio interior del recipiente

d = diámetro interior de la boquilla

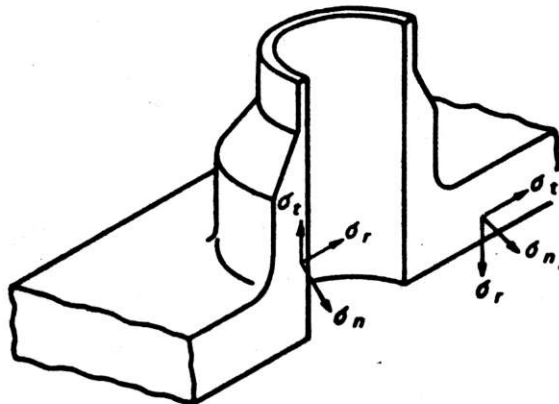


Fig.4.6 Dirección de las componentes de esfuerzo.

La intensidad equivalente de esfuerzos combinados S, se define como dos veces el esfuerzo cortante máximo. En otras

palabras, la intensidad de esfuerzos es la diferencia algebraica entre el esfuerzo principal mayor y el esfuerzo principal menor en un punto dado. Los esfuerzos principales son los valores característicos del tensor de esfuerzos, y son obtenidos al encontrar las raíces del polinomio característico el cual es de tercer grado [17].

Para el caso de boquillas en recipientes cilíndricos se usan los siguientes índices de esfuerzos.

| índice de esfuerzo | Plano longitudinal | | Plano transversal | |
|-----------------------|--------------------|----------|-------------------|----------|
| | interior | exterior | interior | exterior |
| σ_n | 3.1 | 1.2 | 1.0 | 2.1 |
| σ_t | -0.2 | 1.0 | -0.2 | 2.6 |
| σ_r | -t/R | 0.0 | -t/R | 0.0 |
| S | 3.3 | 1.2 | 1.2 | 2.6 |

Las dimensiones deben satisfacer las siguientes condiciones

$$\frac{D}{t} \leq 100 \quad (a)$$

$$\frac{d}{D} \leq 0.5 \quad (b)$$

$$\frac{d}{\sqrt{Dt}} \leq 0.8 \quad (c)$$

Una primera conclusión sobre las restricciones anteriores, es que la limitante (c) es demasiado severa, pues si se satisface (b) y (c) entonces se tiene que cumplir que $D/t \leq 2.56$, por lo cual la presencia de (a) resulta superflua y absurda. Ahora bien, si se satisface (a) y (c) entonces $d/D \leq 0.08$ por lo que no tiene sentido imponer el límite tan grande en (b).

Se simuló el comportamiento de tres modelos cuyas



características geométricas se muestran en la tabla 4.2, con referencia a la Fig.3.1. Se observa que los modelos 1 y 2 satisfacen rigurosamente las restricciones (a), (b) y (c) y el modelo 3 satisface aproximadamente la restricción (c), pero en rigor satisface las (a) y (b). Para estos modelos se encontraron los esfuerzos en el plano longitudinal del recipiente. Los índices de esfuerzos calculados se encuentran en la tabla 4.3.

| MODELO | D1 | D2 | T1 | T2 | R | D/t | d/D | d/√Dt |
|--------|--------|-------|-------|-------|-----|------|-------|-------|
| 1 | 123.18 | 783.4 | 21.59 | 21.52 | 5.0 | 35.2 | 0.133 | 0.781 |
| 2 | 123.18 | 783.4 | 21.59 | 21.59 | 10. | 35.2 | 0.133 | 0.781 |
| 3 | 164.20 | 825.0 | 9.00 | 45.00 | 15. | 17.3 | 0.198 | 0.828 |

Tabla 4.2 Características geométricas de los modelos estudiados dimensiones en mm.

| Índice de esfuerzo | Modelo 1 | | Modelo 2 | | Modelo 3 | | ASME | |
|--------------------|----------|------|----------|------|----------|------|------|------|
| | int. | ext. | int. | ext. | int. | ext. | int. | ext. |
| σ_n | 2.41 | 2.43 | 2.22 | 2.35 | 3.27 | 3.41 | 3.1 | 1.2 |
| σ_t | -.34 | 2.28 | -.07 | 2.22 | 0.36 | 1.93 | -.2 | 1.0 |
| S | 3.49 | 2.51 | 3.02 | 2.38 | 3.60 | 3.47 | 3.3 | 1.2 |

Tabla 4.3 Índices de esfuerzos de los modelos estudiados en el plano longitudinal.

Al observar la tabla 4.3 se encuentran algunas conclusiones. El hacer más suave la transición recipiente-boquilla, es decir, el aumentar el radio de enlace R, disminuye los esfuerzos en la unión; ésto se concluye porque los índices de esfuerzos del modelo 2 son menores que sus correspondientes en el modelo 1.

Aún cuando los tres modelos satisfacen las restricciones

geométricas (a), (b) y (c) del código ASME, tan sólo los índices del modelo 2 correspondientes a la superficie interior concuerdan (son menores) con los dados por el código; el resto de los índices son mayores. Lo anterior demuestra, que no es válido pretender un modelo general para determinar la distribución de esfuerzos en la unión recipiente-boquilla en términos de índices para los diferentes tipos de esfuerzos, pues existe una gran variedad de posibles combinaciones geométricas que satisfacen las restricciones (a), (b) y (c). Esto a pesar de que los índices de esfuerzos calculados caen en una vecindad pequeña alrededor de los propuestos por el código.

CONCLUSIONES.

El pasar de los conceptos teóricos del M.E.F. a la implementación del programa de cómputo no es una tarea sencilla y directa. No se trata tan sólo de un trabajo de programación.

Se tuvieron que desarrollar algunos pasos intermedios, mostrados en el capítulo 2, para poner en práctica los conceptos dados en el capítulo 1. En particular, se puede mencionar por ejemplo, el procedimiento expuesto para la determinación explícita de la matriz B; que es de suma importancia desde el punto de vista de programación para la obtención de la matriz de rigidez elemental.

En la medida en que se avanzó en el trabajo se fue optimizando el programa de cómputo. Se inició almacenando la matriz de rigidez global en una matriz cuadrada, y ante la restricción de la capacidad de memoria de la computadora, se utilizó un arreglo rectangular para almacenar la matriz de banda y finalmente, un arreglo unidimensional, lo que hizo más eficiente y elegante este proceso. La discretización de la intersección de los dos cilindros se fue refinando, hasta llegar a la presentada en la Fig.3.3, con el fin de obtener resultados más confiables.

El suponer que la presión se aplicaba en el plano medio de la lámina no tuvo consecuencia alguna. Los resultados lo demostraron. Prácticamente no hay variación de resultados si se aplica la presión en el plano medio o en la superficie interna de la unión.

En la solución de los problemas de prueba, presentados en el capítulo 2, se pone de manifiesto la validez del programa y la efectividad de los modelos, aún con pocos elementos.

De los resultados presentados en las Figs.4.1 a 4.4 se concluye, que la discretización propuesta al modelo de la unión recipiente-boquilla es aceptable. Los resultados obtenidos en este trabajo para los esfuerzos circunferencial y longitudinal en la boquilla y recipiente, mostrados en las Figs.4.1 y 4.2, son bastante similares a los reportados, los cuales fueron obtenidos experimentalmente y por el M.E.F., Figs.4.3 y 4.4.

El radio de enlace entre la boquilla y el recipiente es una característica introducida en este trabajo, éste no se menciona en los trabajos cuyos resultados son referidos. Tal curvatura es importante. Ello se demostró en los resultados de la tabla 4.3, pues al hacer más suave la transición se reducen los índices de esfuerzos.

Hay cierta discrepancia entre los índices de esfuerzos presentados en el código ASME, Sección VIII, División 2 y los obtenidos con el programa del M.E.F. desarrollado aquí. Ello es, hasta cierto punto, explicable porque las posibles combinaciones en las proporciones de la unión recipiente-boquilla son bastantes, y lo que ahí se pretende es que sean valores de índices de esfuerzos únicos para todas ellas.

Ante la ausencia de una metodología analítica general para determinar la distribución de esfuerzos en la unión, resulta un tanto aceptable, como primera aproximación, el método de índices de esfuerzos presentado en el código. Sin embargo, éste no es aplicable fuera del rango de dimensiones preestablecidas. Es en estos casos, donde una herramienta de análisis, como la presentada en este trabajo, cobra mayor importancia.

El programa de cómputo que se presenta, puede tener múltiples aplicaciones adicionales al estudio de los esfuerzos en la unión recipiente-boquilla, modelada ésta como la unión de 2 cilindros; se pueden considerar otros tipos o geometrías de recipientes y boquillas. Se pueden analizar elementos o discontinuidades estructurales de los recipientes sujetos a presión, tales como, uniones de cuerpo con cabeza, cuerpo con bridas, uniones de recipientes con diferentes diámetros y espesores, entre otros.

En la consecución del objetivo inicialmente propuesto, de determinar la distribución de esfuerzos en la unión recipiente-boquilla, se optó por los métodos numéricos, en particular, el M.E.F. Para lograr ésto se tuvo que apropiarse de la técnica del elemento finito y asimilar lo suficiente de ella para estar en condiciones de elaborar un programa propio y resolver el problema en particular. No se pretendió desarrollar un paquete computacional de características o propósitos generales. Se pretende llamar la atención en dejar de ser únicamente usuarios de paquetes y en que se debe conocer el contenido teórico que subyace en él.

No basta con tener un paquete de cómputo del M.E.F. para resolver el problema en particular. Existen múltiples dificultades inherentes a la solución del problema mediante éste método. Se debe efectuar una discretización adecuada, refinándola en las partes de mayor gradiente de esfuerzos; indicarle al programa las condiciones de frontera correspondientes; tomar en cuenta las dimensiones del modelo porque de ello depende la posible influencia de efectos de borde. Lo anterior es posible, sólo si se tiene conocimiento del fenómeno y del posible comportamiento del sistema. La experiencia obtenida en este trabajo así lo demuestra.