

**IPN**  
**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**  
**UNIDAD CULHUACAN**

**TESIS INDIVIDUAL**

Que como prueba escrita de su Examen Profesional para obtener el Título de **INGENIERO EN COMUNICACIONES Y ELECTRÓNICA** deberá desarrollar el C.:

**JOSÉ MARÍA XIQUEZ CHAVARRÍA**

**“DISEÑO DE UN REGULADOR ANALÓGICO PARA UN SISTEMA DE LEVITACIÓN MAGNÉTICO”**

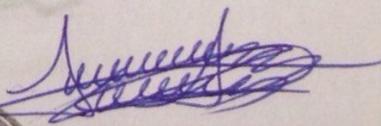
En este trabajo se presenta una generalización para determinar un vector de ganancias  $F$  de realimentación para controlar un levitador electromagnético de segundo orden inestable. Una metodología para estabilizar el levitador electromagnético es con una realimentación de estados; sin embargo, uno de los estados no está disponible para su realimentación. Por lo tanto, se diseñará un estimador de estados analógico que permita obtener la información de los dos estados para su realimentación al sistema de control. La estimación de los estados ofrece robustez ante incertidumbres paramétricas en el modelado. Con el fin de eliminar el error en estado estacionario se agrega un integrador en la trayectoria directa en conjunto con la realimentación de estados estimados, y éste es implementado físicamente con un circuito electrónico utilizando amplificadores operacionales.

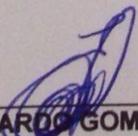
Capitulado:

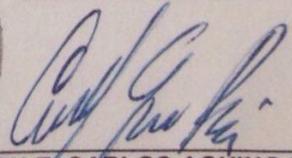
Capítulo 1. Estado del arte.  
Capítulo 2. Marco teórico.  
Capítulo 3. Modelado del sistema.  
Capítulo 4. Diseño e implementación del sistema de control.  
Conclusiones.  
Bibliografía.

México D. F., a 23 de febrero del 2018.

  
M. EN C. OMAR JIMENEZ RAMIREZ  
PRIMER ASESOR

  
M. EN C. MARIO ALAN QUIROZ JUAREZ  
SEGUNDO ASESOR

  
ING. EDGAR RICARDO GOMEZ NAVARRO  
JEFE DE LA CARRERA DE I.C.E

  
M. EN E. CARLOS AQUINO RUIZ  
DIRECTOR INTERINO





INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y  
ELÉCTRICA  
UNIDAD CULHUACAN  
SUBDIRECCIÓN ACADÉMICA  
OFICINA DE TITULACIÓN PROFESIONAL



### CARTA AUTORIZACIÓN DE USO DE OBRA

En la Ciudad de México, a **23 de febrero del año 2018**, el que suscribe **JOSÉ MARÍA XIQUEZ CHAVARRÍA** alumno de la carrera de **Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica**, con número de registro **R-013/18**, egresado de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Culhuacán, manifiesto que soy el autor intelectual del presente trabajo de **Tesis Individual**, bajo la asesoría del **M. en C. Omar Jiménez Ramírez** y el **M. en C. Mario Alán Quiroz Juárez** y otorgo el uso del trabajo titulado **DISEÑO DE UN REGULADOR ANALÓGICO PARA UN SISTEMA DE LEVITACIÓN MAGNÉTICO**, al Instituto Politécnico Nacional, para su difusión con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deberán reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o asesores del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección de correo: [imxiquez@gmail.com](mailto:imxiquez@gmail.com). Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

---

JOSÉ MARÍA XIQUEZ CHAVARRÍA



---

---

**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA  
MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
UNIDAD CULHUACAN**

**DISEÑO DE UN REGULADOR ANALÓGICO  
PARA UN SISTEMA DE LEVITACIÓN  
MAGNÉTICO**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**INGENIERO EN COMUNICACIONES Y  
ELECTRÓNICA**

P R E S E N T A:

**C. JOSÉ MARÍA XIQUEZ CHAVARRÍA**

ASESORES DE TESIS:

**M. EN C. OMAR JIMÉNEZ RAMÍREZ  
M. EN C. MARIO A. QUIROZ JUÁREZ**

Ciudad de México

Diciembre 2018



*“Solo podemos ver poco del futuro,  
pero lo suficiente para darnos cuenta  
de que hay mucho por hacer”*

-Alan Turing

*A mis seres amados...*

# Índice general

<b>Justificación</b>	<b>2</b>
<b>Objetivo general</b>	<b>3</b>
<b>Objetivos específicos</b>	<b>4</b>
<b>1. Estado del arte</b>	<b>5</b>
1.1. Introducción . . . . .	5
1.2. Levitación magnética . . . . .	5
1.2.1. Tren de levitación electromagnética (MagLev) . . . . .	7
1.2.2. Lanzadera espacial de levitación magnética . . . . .	8
1.3. Reseña histórica del control automático . . . . .	9
1.3.1. Control clásico . . . . .	10
1.3.2. Control moderno . . . . .	11
1.4. Trabajos sobre levitación magnética . . . . .	14
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>16</b>
2.1. Introducción . . . . .	16
2.2. Fuerza electromagnética . . . . .	16
2.3. Fuerza mecánica . . . . .	18
2.4. Sistema de control . . . . .	19
2.4.1. Sistemas lineales y no lineales . . . . .	20
2.4.2. Diagrama a bloques . . . . .	21
2.4.3. Función de transferencia . . . . .	25
2.4.4. Control por realimentación . . . . .	28

---

2.4.5. Variables de estado . . . . .	33
2.4.6. Realimentación de estados . . . . .	39
2.4.7. Observadores . . . . .	41
2.5. Amplificadores operacionales . . . . .	44
<b>3. Modelado del sistema de levitación</b>	<b>47</b>
3.1. Introducción . . . . .	47
3.2. Sistema de levitación electromagnético . . . . .	47
3.3. Planta . . . . .	49
3.4. Sensor . . . . .	52
3.5. Actuador . . . . .	54
3.6. Modelo matemático . . . . .	55
3.6.1. Modelo no lineal . . . . .	56
3.6.2. Modelo lineal . . . . .	58
<b>4. Diseño e implementación del sistema de control</b>	<b>61</b>
4.1. Introducción . . . . .	61
4.2. Realimentación de estados para sistema de segundo orden . . .	61
4.3. Realimentación de estados con esquema integral . . . . .	64
4.4. Realimentación de estados estimados . . . . .	67
4.5. Implementación . . . . .	68
4.6. Pruebas y resultados . . . . .	72
<b>Conclusiones</b>	<b>79</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>83</b>
<b>Anexos</b>	<b>84</b>
<b>A. Valores de resistencias y capacitores utilizados</b>	<b>85</b>
<b>B. Evidencia de la implementación del sistema</b>	<b>86</b>

# Índice de figuras

1.1. Levitación magnética . . . . .	5
1.2. Suspensión electromagnética . . . . .	7
1.3. Suspensión electrodinámica . . . . .	7
2.1. Variable. Dirección del flujo de la señal $A$ . . . . .	22
2.2. Bloque funcional. Operación $B = AG_1$ . . . . .	22
2.3. Sumador. Operación $D = A + B - C$ . . . . .	22
2.4. Punto de bifurcación. Bifurcación de la señal $A$ . . . . .	22
2.5. Álgebra de bloques . . . . .	23
2.6. Diagrama a bloques de una función de transferencia . . . . .	25
2.7. Representación de un polo y un cero en el plano $s$ . . . . .	27
2.8. Caracterización de la estabilidad según la ubicación de las raíces de la Ecuación Característica . . . . .	28
2.9. Sistema de control de lazo abierto . . . . .	29
2.10. Sistema de control de lazo cerrado . . . . .	29
2.11. Control proporcional . . . . .	31
2.12. Control proporcional . . . . .	31
2.13. Diagrama a bloques de un sistema continuo en variables de estado . . . . .	36
2.14. Realimentación de estados . . . . .	39
2.15. Observador de estados . . . . .	42
2.16. Realimentación de estados estimados . . . . .	44
2.17. Símbolo del amplificador operacional . . . . .	45
3.1. diagrama a bloques del sistema de levitación electromagnético	48

---

3.2.	planta del sistema de levitación electromagnético . . . . .	50
3.3.	Gráfica de la posición del balón contra la inductancia de la bobina	51
3.4.	Circuito del sistema de medición de la posición del balón . . .	52
3.5.	Gráfica de la posición del balón contra el voltaje del sensor . .	53
3.6.	Circuito del sistema de actuación . . . . .	54
3.7.	Diagrama a bloques de la planta del sistema de levitación en variables de estado . . . . .	59
3.8.	Diagrama a bloques del sistema de levitación en variables de estado . . . . .	60
4.1.	Diagrama a bloques del sistema propuesto . . . . .	62
4.2.	Esquema propuesto de realimentación de estados . . . . .	62
4.3.	Realimentación de estados con integrador . . . . .	64
4.4.	realimentación de estados con integrador para el sistema pro- puesto . . . . .	66
4.5.	Esquema de realimentación de estados estimados con integrador	67
4.6.	Sistema de levitación con 2 ganancias en cascada en la reali- mentación . . . . .	69
4.7.	Nuevo diagrama a bloques del sistema de levitación . . . . .	69
4.8.	Sistema de levitación con realimentación de estados . . . . .	70
4.9.	Sistema de levitación con realimentación de estados estimados e integrador . . . . .	71
4.10.	Implementación del observador con amplificadores operacionales	72
4.11.	XCOS de Scilab . . . . .	73
4.12.	Respuesta a una señal escalón unitario del sistema de levitación	73
4.13.	Respuesta del sistema de levitación con realimentación de estados	74
4.14.	Respuesta del sistema de levitación con realimentación de es- tados y un integrador . . . . .	74
4.15.	Respuesta del sistema de levitación con realimentación de es- tados e integrador a una señal cuadrada . . . . .	75
4.16.	Tarjeta Analog Discovery . . . . .	76
4.17.	Entorno del software WaveForms . . . . .	76
4.18.	Función Scope de WaveForm . . . . .	77

---

4.19. Respuesta medida del sistema de levitación con realimentación de estados estimados con integrador . . . . .	77
4.20. Señal de referencia $r(t)$ y señal de salida $y(t)$ medidas . . . . .	78
B.1. Evidencia de la implementación del sistema de control . . . . .	86

# Índice de tablas

2.1. Configuraciones del amplificador operacional y sus funciones de transferencia . . . . .	46
3.1. Inductancia de la bobina contra posición del balón . . . . .	50
3.2. Posición del balón contra voltaje de salida del sensor . . . . .	53
3.3. Parámetros del sistema de levitación . . . . .	57
A.1. Valores de resistencias y capacitores . . . . .	85

## Planteamiento del problema

Las metodologías de control moderno como la realimentación estática de estados pueden ser aplicadas a los sistemas de levitación electromagnético, sin embargo para su implementación se requiere la información de los estados, entendiéndose como estado una variable del sistema, es decir, una magnitud física que pudiera o no, ser medible. Un sistema de levitación electromagnético cuenta con dos estados: la posición de la esfera de material ferromagnético y el flujo magnético. La posición del balón puede medirse por medio de sensores ópticos, sin embargo, el flujo magnético no se puede medir de manera directa. Para acceder a la información de este estado, se requiere aplicar estrategias de predicción como observadores de estados asintóticos. Los observadores de estados analógicos se pueden construir electrónicamente con amplificadores operacionales y su objetivo es estimar las variables de estado internas o no medibles. A partir de los estados estimados es posible realizar una realimentación estática para controlar el sistema, sin embargo, un reto importante recae en el hecho de calcular un vector de ganancias para la realimentación. Aun más, determinar una generalización robusta para un conjunto de especificaciones temporales acotadas en un rango.

# Justificación

En este trabajo se presenta un modelo generalizado para determinar un vector de ganancias  $F$  de realimentación para controlar un levitador electromagnético de segundo orden inestable.

Una metodología para estabilizar el levitador electromagnético es con una realimentación de estados; sin embargo, uno de los estados no está disponible para su realimentación. Por lo tanto, se diseñará un estimador de estados analógico que permita obtener la información de los dos estados para su realimentación al sistema de control. La estimación de los estados ofrece robustez ante incertidumbres paramétricas en el modelado.

Con el fin de eliminar el error en estado estacionario se agrega un integrador en la trayectoria directa en conjunto con la realimentación de estados estimados, y éste es implementado físicamente con un circuito electrónico utilizando amplificadores operacionales.

# Objetivo general

Proponer un modelo generalizado para determinar un vector de realimentación de ganancias para controlar un sistema de levitación de segundo orden, así como diseñar un observador analógico de orden completo lineal invariante en el tiempo e implementarlo electrónicamente utilizando integradores, ganancias y sumadores con amplificadores operacionales.

# Objetivos específicos

- Obtener el modelo matemático de un sistema levitación electromagnético de segundo orden.
- Proponer un sistema generalizado para obtener un vector de ganancias para el control del sistema de levitación de segundo orden por realimentación de estados.
- Diseñar un observador de estados completo para una realimentación de estados estimados del sistema de levitación.
- Validar los resultados del sistema de levitación a través de simulaciones en Scilab.
- Implementar electrónicamente el observador y la realimentación de estados para el control del sistema de levitación electromagnético.

# Capítulo 1

## Estado del arte

### 1.1. Introducción

Los sistemas de levitación magnética han sido objeto de estudio en las últimas décadas por la disminución de la fricción de Coulomb debido al contacto mecánico. Dichos sistemas se han vuelto populares en sistemas de transportación terrestre de alta velocidad como por ejemplo, trenes de levitación magnética (Campos, 2008) (Cruz, 2009). Su principio de funcionamiento ha sido estudiado por diferentes naciones, principalmente Alemania y Japón (Álvarez y Luque, 2003).

### 1.2. Levitación magnética

Se le llama levitación magnética (Figura 1.1 Levitación magnética figure.caption.10) al fenómeno por el cual un material con ciertas características, se suspende en el aire por atracción o repulsión de fuerzas producidas por la interacción de dos campos magnéticos.

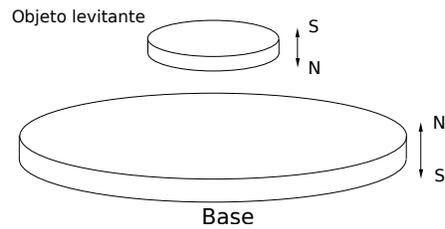


Figura 1.1: Levitación magnética

Una forma de conseguir levitación magnética es mediante el fenómeno que presentan los superconductores conocido como efecto Meissner, el cual, fue descubierto por Walther Meissner y Robert Ochsenfeld en 1933. Ellos encontraron que el campo magnético se anula completamente en el interior del material superconductor y las líneas de campo magnético son expulsadas, por lo que éste se comporta como un material diamagnético perfecto, es decir, cuando se acerca un imán a un superconductor se produce un efecto de levitación. La desventaja principal de estos materiales es que sólo conducen cuando se mantienen por debajo de una temperatura dada llamada temperatura de transición. Para los superconductores prácticos actualmente conocidos, la temperatura está por debajo de  $77^{\circ}\text{K}$ , que es la temperatura del nitrógeno líquido. Para mantener un material superconductor por debajo de esta temperatura se requiere una gran cantidad de tecnología criogénica volviéndolo un método costoso y poco práctico.

Existen dos principios prácticos de levitación (Taghirad et al., 1998):

- 1) Levitación por repulsión: En este tipo de sistemas, el objeto suspendido repele a la parte fija. Este sistema es realizable con materiales de permeabilidad magnética menores que la unidad y con materiales superconductores. Estos sistemas son naturalmente estables con coeficientes de amortiguamiento pequeño.
- 2) Levitación por atracción: en este tipo de sistemas, la parte suspendida es atraída por la parte fija del sistema. La realización de este tipo de sistema es posible con materiales ferromagnéticos o imanes permanentes.

Tiene ventajas significativas ya que provee fuerza de atracción a velocidad cero, pero el sistema es naturalmente inestable.

Los sistemas de levitación electromagnética por atracción son no lineales e inestables a lazo cerrado. Una alternativa para el estudio y análisis de estos sistemas es la linealización de las ecuaciones diferenciales alrededor de un punto de equilibrio. De esta manera se realiza un análisis lineal para determinar las condiciones de estabilidad (Jiménez et al., 2005).

Hoy día el uso más extendido del fenómeno de levitación magnética se da en los trenes de levitación magnética MagLev (Magnetic Levitation). Existen otras aplicaciones como, las montañas rusas de levitación magnética o, lo que en la actualidad se encuentra bajo investigación, la propulsión de naves espaciales mediante levitación magnética.

### 1.2.1. Tren de levitación electromagnética (MagLev)

Un tren de levitación magnética es un vehículo que transita levitando sobre un carril guía mediante fuerzas electromagnéticas, utiliza las ondas magnéticas para suspenderse por encima del carril e impulsarse a lo largo del mismo. La diferencia fundamental con respecto a los trenes convencionales se centra en tres aspectos: el sistema de sustentación, la forma empleada para el guiado y el tipo de propulsión. Existen tres tipos de sistemas para lograr la levitación magnética de un tren (Álvarez y Luque, 2003) (Perren, 2003), nombradas a continuación:

- Suspensión electromagnética o EMS (Figura 1.2Suspensión electromagnéticafigure.ca). Es el método empleado por el diseño alemán (Transrapid). En este sistema, la parte inferior del tren queda por debajo de la guía del material ferromagnético (normalmente acero), mientras unos dispuestos en el tren son atraídos hacia la guía. Ya que el carril no puede moverse, son los electroimanes los que se mueven en dirección a éste, elevando con ellos el tren completo. Por medio de sensores dispuestos en el tren, se regula la

corriente circulante en las bobinas, así el tren circulará a una distancia de aproximadamente un centímetro del carril guía. El sistema EMS emplea imanes convencionales, permitiendo mantener el tren levitando sin necesidad de que haya movimiento del mismo. Estos sistemas son inestables y requieren de sistemas de control para lograr la levitación.

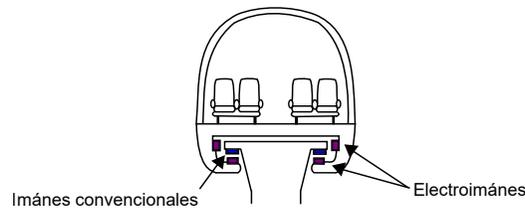


Figura 1.2: Suspensión electromagnética

- Suspensión Electrodinámica o EDS (Figura 1.3Suspensión electrodinámicafigure.capt). Es la utilizada en el diseño japonés (Shikansen), su principio se basa en la propiedad de ciertos materiales de rechazar cualquier campo magnético que intente penetrar en ellos. Esta propiedad se da en superconductores y es llamada Efecto Meissner. El sistema japonés emplea bobinas de materiales superconductores en los laterales del tren que pasan a unos centímetro de distancia de un conjunto de inductores situados en la guía, induciéndose una corriente eléctrica en estas bobinas cuando el tren pasa junto a ellas, dando lugar a un campo magnético que, mediante ciertas fuerzas magnéticas en las bobinas superconductoras, elevan el tren, actuando también como guías laterales.

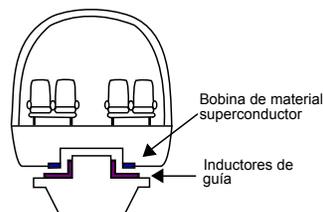


Figura 1.3: Suspensión electrodinámica

- Sistema de suspensión Inductrack: Son esencialmente sistemas EDS que

en vez de materiales superconductores, utilizan imanes permanentes con una distribución especial a lo largo del riel conocido como arreglo Halbach, para crear una fuerza de levitación lo suficientemente poderosa para hacer funcionar un MagLev. En este tipo de arreglo, las barras magnéticas con grandes campos son dispuestas de manera que el campo magnético de cada barra esté orientado en un ángulo correcto con la barra adyacente. La combinación de las líneas de campo magnético de este arreglo, produce un poderoso campo debajo de este y prácticamente ningún campo arriba. Los imanes sobre las bobinas producen la levitación del vehículo, mientras que los imanes a los lados de las bobinas se encargarán del guiado lateral. Como en el sistema EDS, esta levitación sería estable, ya que las fuerzas de repulsión aumentan exponencialmente al disminuir la distancia entre el vehículo y la guía.

### 1.2.2. Lanzadera espacial de levitación magnética

La NASA está estudiando el uso de tecnología MagLev para crear un sistema que asista en el despegue de una nave espacial. Una pista operacional tendría unos 2400 *m* de longitud y sería capaz de acelerar al vehículo a unos 1000 *Km/h* en 9.5 segundos, el que luego debería cambiar a motores a bordo para completar la salida al espacio.

La parte más costosa de una misión a una órbita terrestre baja son los primeros segundos, el despegue. La mayor parte de este gasto se debe al peso del propergol, y como un vehículo MagLev utiliza electricidad para acelerarse, el peso de la nave espacial al momento del despegue podría ser de hasta un 20 % menos que en un cohete normal. Además este sistema es reutilizable, ya que la pista que se usa para acelerar al vehículo se queda en el suelo. Otros beneficios son que la electricidad no contamina y es mucho más barata con respecto a los combustibles utilizados hoy en día. Un sistema MagLev de este tipo, idealmente no necesitaría ningún tipo de mantenimiento, ya que no hay partes móviles y no existe contacto entre el vehículo y la pista. Se espera que este sistema funcione dentro de unos 30 años (Perren, 2003).

### 1.3. Reseña histórica del control automático

El control realimentado es un mecanismo básico a través del cual los sistemas eléctricos, mecánicos, electrónicos, biológicos, etc., mantienen su equilibrio. Para ello utilizan una señal de error, obtenida por comparación del valor actual de la variable a controlar con el valor referencia. Es difícil realizar un análisis imparcial de un área que está en continuo desarrollo, sin embargo mirando hacia atrás sobre el progreso de la teoría del control realimentado, es posible distinguir algunos desarrollos clave en la historia de la humanidad que han afectado el progreso del control realimentado:

- 1) La preocupación de los griegos y árabes para realizar mediciones exactas del tiempo. Esto comprende, aproximadamente, desde el año 300 antes de C. hasta el año 1200 después de C.
- 2) La Revolución Industrial en Europa. Casi todos los historiadores están de acuerdo que la Revolución Industrial comenzó en el tercer cuarto del siglo XVIII; sin embargo sus orígenes o raíces pueden hallarse dentro del siglo XVII .
- 3) El comienzo de la comunicación de masas, durante la primera y segunda guerra mundial, abarcando un periodo que va desde 1910 hasta 1945, aproximadamente.
- 4) El comienzo de la era espacial y de la computadora en 1957.

Se puede decir que el periodo que va desde la antigüedad hasta 1868 (fecha del primer análisis matemático riguroso de un sistema de control realimentado efectuado por J. C. Maxwell) es el “periodo prehistórico” del control automático. De 1868 hasta comienzo de 1900 es el “periodo primitivo” del control automático. Desde principios de 1900 hasta 1960 es el “periodo clásico”. El periodo que va desde 1960 hasta nuestros días se conoce como “periodo moderno” del control automático (Mariani, 2015).

### 1.3.1. Control clásico

Hasta la revolución industrial el diseño de los sistemas de control se realizaba mediante prueba y error, unido con una gran cuota de intuición de ingeniería. De tal manera que era más un arte que una ciencia. En la mitad del siglo XVIII, la matemática fue utilizada para analizar la estabilidad de los sistemas de control realimentado.

El astrónomo inglés G. B. Airy en el año 1840, desarrolló un dispositivo realimentado para apuntar un telescopio. Su dispositivo era un sistema de control de velocidad que retornaba automáticamente el telescopio para compensar la rotación de la tierra, permitiendo el estudio de una estrella durante un tiempo prolongado. Airy descubrió, lamentablemente, que por un diseño inapropiado del lazo de control realimentado, aparecían oscilaciones en el sistema. Así se convirtió en el primero que trató la inestabilidad de un sistema a lazo cerrado y el primero en utilizar las ecuaciones diferenciales para su análisis. La utilización de las ecuaciones diferenciales para analizar el movimiento de los sistemas dinámicos fue establecida por J. L. Lagrange (1736-1813) y W. R. Hamilton (1805-1865).

El primer trabajo sobre análisis matemático de un sistema de control se realizó sobre la base de ecuaciones diferenciales. J. C. Maxwell realizó el análisis del regulador de Watt en 1868. La técnica empleada consistió en linealizar la ecuación diferencial del movimiento, para hallar la ecuación característica del sistema. A través de ella estudió el efecto de los parámetros del sistema sobre la estabilidad y demostró que el sistema es estable si las raíces de la ecuación característica tienen parte real negativa.

En 1877 E. J. Routh introdujo una técnica numérica para determinar si la ecuación característica tiene raíces estables.

En 1877 el ruso I. I. Vishnegradsky analizó la estabilidad de los reguladores utilizando ecuaciones diferenciales, en forma independiente de Maxwell.

En 1893 A. B. Stodola estudió la regulación de una turbina de agua empleando la técnica de Vishnegradsky. Para ello obtuvo el modelo de la dinámica del actuador e incluyó, en su análisis, el retardo del mecanismo de actuación. Stodola fue el primero en mencionar la noción de constante de tiempo del sistema. Sin conocer los trabajos de Maxwell y Routh, le planteó a su compatriota A. Hurwitz el problema de determinar la estabilidad de la ecuación característica, quien lo resolvió independientemente.

El ingeniero inglés O. Heaviside inventó el cálculo operacional en 1892-1898. Aplicó su invento a la solución del comportamiento transitorio de sistemas, e introdujo una noción equivalente a la de función de transferencia (Diaz et al., 2006).

Por ahora, la utilización de las técnicas del dominio frecuencial en la teoría del control automático ha llegado a la mayoría de edad, estableciéndose como un patrón o paradigma. Por una parte se estableció una firme teoría matemática de los servomecanismos y por otra se han provisto técnicas de diseño para la ingeniería.

### 1.3.2. Control moderno

Con la llegada de la era espacial, los diseños de control abandonaron las técnicas en el dominio de la frecuencia y volvieron a las técnicas de ecuaciones diferenciales de finales del siglo XIX, las cuales se desarrollaban en el dominio del tiempo.

A partir del año 1955, se desarrollan los métodos temporales, con el objetivo de solucionar los problemas planteados en aplicaciones aeroespaciales, estos métodos reciben un fuerte impulso con el desarrollo de las computadoras digitales, que constituían la plataforma tecnológica necesaria para su implantación, prueba y desarrollo.

Se crea una nueva teoría de diseño de control, conocido a partir de entonces como teoría de control moderna. Se basaba en representar los sistemas en variables de estado o representación interna y trabajando casi exclusivamente en el dominio del tiempo. La primera formulación en términos de estado, función de transición y de lectura, se hizo en el marco de la teoría de máquinas discretas formulada por Turing, en 1936.

Los investigadores de la Unión Soviética son los primeros que utilizan el método de descripción interna en el estudio de los sistemas continuos. Destacan los trabajos de Aizerman, Lerner, Lurie, Pontryagin, La Salle, Popov, Minorsky, Kabala y Bellman. En 1957, Tsypkin utilizó el plano de fase para el diseño de controles no lineales. Por su parte, V. M. Popov introdujo el criterio del círculo para el análisis de estabilidad no lineal. Toda esta actividad, condujo en 1957 a que la Unión Soviética fuese la primera nación en lanzar un satélite (Sputnik) al espacio. Además tuvo su reconocimiento internacional con la celebración en Moscú en 1960 de la primera conferencia de la recientemente creada IFAC (International Federation of Automatic Control).

La teoría de control moderno esta basada en el concepto de estabilidad de Lyapunov presentado a finales del siglo XIX. Los trabajos desarrollados por Lurie sobre servomecanismos de posicionamiento de torretas de tanques dieron lugar al concepto de estabilidad absoluta, generalizada después por Popov con el concepto de hiper estabilidad, que considera no linealidades en la realimentación.

Los criterios de controlabilidad y observabilidad de sistemas dinámicos lineales, se deben a Kalman, aunque la noción de controlabilidad fue utilizada anteriormente por Pontryagin (Hernández, 2010).

Sin embargo, la teoría de control moderno presentaba ciertas carencias en algunos aspectos. Por ejemplo, permitía diseñar sistemas de control que funcionaban perfectamente a través de la aplicación de ecuaciones matriciales, pero no proporcionaba una noción práctica de lo que ello suponía para el

sistema; es decir, no daba una idea de cómo se traducían todas esas ecuaciones a efectos del sistema. Por otro lado, los sistemas de control modernos que carecían de dinámica de compensación podían perder robustez frente a distorsiones y ruidos. Sin embargo, empleando las nociones de ganancia y margen de fase propuestas por la teoría de control clásica, este problema de robustez se solucionaba. Por tanto, en 1970, y especialmente en Gran Bretaña, se realizaron grandes esfuerzos por extender las técnicas clásicas en el dominio de la frecuencia y del lugar de las raíces a los sistemas multivariables. Se alcanzó un gran éxito empleando los conceptos de lugar característico, dominio diagonal y arreglo inverso de Nyquist. En 1981, algunos estudios realizados por J. Doyle, M. G. Safonov, A. J. Laub y G. L. Hartmann, demostraron la importancia de las técnicas clásicas en el dominio de la frecuencia en el diseño de sistemas de control moderno. Como resultado de todas estas investigaciones, hoy en día podemos hablar de una nueva teoría de control que reúne las mejores características de las teorías clásica y moderna.

## 1.4. Trabajos sobre levitación magnética

El control de los sistemas de levitación magnética por atracción ha sido muy estudiado y se han realizado diversas propuestas tanto de forma analógica como digital:

- O. Jiménez (2005) propone el control del sistema a través de un compensador Proporcional-Integral-Derivativo (PID) implementado con amplificadores operacionales. Los valores de los componentes utilizados en la implantación del controlador analógico  $K_p$ ,  $T_t$  y  $T_d$  se obtuvieron a partir del diseño por el método del lugar geométrico de las raíces, de tal forma que el sistema en lazo cerrado fuera estable, además se propone un tiempo de establecimiento  $t_s = 1s$ . Y un máximo sobreimpulso  $M_p = 4.5\%$ .
- P. Campos (2008) en la Tesis de Maestría “Construcción y control de un levitador magnético” controla el sistema de levitación por medio de un controlador Proporcional-Derivativo (PD) analógico y evita el calentamiento de la bobina y la etapa de potencia con Modulación de Ancho de Pulso (PWM por sus siglas en inglés).
- P. Cruz (2009) en la Tesis de Maestría “Control de un sistema de levitación magnética con compensación de redes neuronales” propone la implementación de un sistema de control con un PID y una red neuronal que elimina las incertidumbres y otras dinámicas no modeladas. Teóricamente, el control no lineal-red neuronal no presenta errores en estado estacionario mientras que el control PID presenta errores en estado estacionario que se refleja en la posición final de la esfera. Finalmente, la implementación del sistema es en tiempo real, comparando los controladores PID, no lineal y la compensación con redes neuronales, obteniendo mejor desempeño el controlador PID-red neuronal.
- D. Luviano (2012) en la Tesis de Maestría “Control no lineal de un sistema de levitación magnética basado en estimación de parámetros

---

electromagnéticos” desarrolla estrategias de control no lineal para el sistema de levitación, tales como la liberalización exacta, backstepping y el control lógico difuso.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

### 2.1. Introducción

Los controladores clásicos como el PI, PD, PID y compensadores de atraso-adelanto de fase son los más comunes para el control de los sistemas de levitación (Jiménez et al., 2005) (Taghirad et al., 1998) (Campos et al., 2008), aunque también se han propuesto técnicas de control con lógica difusa o redes neuronales, control no lineal o control adaptativo por modelo de referencia (Cruz, 2009) (Luviano, 2012) (Picón y de la Cruz, 2007).

En este capítulo se abordan las herramientas necesarias para el análisis y el desarrollo de la estrategia de control propuesta. Primero se aborda la teoría necesaria para obtener el modelo matemático del sistema de levitación electromagnética, después se presentan las herramientas matemáticas necesarias para el análisis del sistema y diseño del controlador y finalmente se presentan las características de los amplificadores operacionales que se utilizarán en la implementación del control propuesto.

### 2.2. Fuerza electromagnética

La fuerza magnética es la fuerza generada por el campo magnético sobre un dipolo magnético. En la fuerza electromagnética este campo magnético está generado por el paso de una corriente eléctrica sobre un conductor.

Las aproximaciones magneto-cuasiestáticas (MQS) son formas a baja frecuencia de las ecuaciones de Maxwell que serán empleadas para el modelado del sistema de levitación magnética. En los sistemas MQS, el almacenamiento de energía magnética es dominante, en comparación con la energía almacenada en el campo magnético (Thompson, 2000).

Las cargas en movimiento, o corrientes, producen campos magnéticos. Cuando un conductor que transporta una corriente tiene una simetría elevada, se puede calcular el campo magnético generado, según la Ley de Ampere, dada por la Ecuación 2.1 Fuerza electromagnética equation.2.2.1.

$$\oint B \cdot ds = \mu_0 I \quad (2.1)$$

Donde la integral curvilínea se realiza sobre cualquier trayectoria cerrada a través de la cual haya una corriente de conducción (Serway y Jewett, 2004). Esta ley se cumple para cualquier curva siempre y cuando la corriente no varíe en el tiempo y no exista acumulación espacial de carga. La forma diferencial de la Ley de Ampere esta expresada por la Ecuación 2.2 Fuerza electromagnética equation.2.2.2.

$$\nabla \times \vec{H} \approx \vec{J} \quad (2.2)$$

Donde  $\vec{H}$ , es el campo magnético ( $A/m$ ) y  $\vec{J}$  es la densidad de corriente ( $A/m^2$ ) (Serway y Jewett, 2004).

La ley de inducción de Faraday (Serway y Jewett, 2004) describe como un campo magnético variable genera un campo eléctrico, su forma integral está dada por la Ecuación 2.3 Fuerza electromagnética equation.2.2.3:

$$\oint E \cdot ds = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (2.3)$$

Por el teorema de Stokes, la forma diferencial de la ley de Faraday se expresa de acuerdo la Ecuación 2.4 Fuerza electromagnética equation.2.2.4:

$$\frac{1}{\sigma} \nabla \times \vec{J} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Donde el campo eléctrico  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ . El término de la derecha de la Ecuación 2.4 Fuerza electromagnética equation.2.2.4 es el negativo de la tasa de cambio del flujo magnético en función del tiempo, que pasa a través de la superficie. Este es el mecanismo por el que un flujo magnético variable que incide sobre un conductor crea corrientes de Foucault (Thompson, 2000). La co-energía almacenada en un campo magnético se calcula con la Ecuación 2.5 Fuerza electromagnética equation.2.2.5:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_v \vec{B} \cdot \vec{H} dt \quad (2.5)$$

Donde  $\vec{H}$  es el valor del campo magnético y  $\vec{B}$  el valor de la inducción magnética. El valor de la fuerza electromagnética se obtiene calculando el gradiente de la co-energía magnética (Milena, 2010), como se expresa por la Ecuación 2.6 Fuerza electromagnética equation.2.2.6:

$$\vec{F}_e = \nabla W_m = \left( \frac{\overrightarrow{W_{mx}}}{\partial x}, \frac{\overrightarrow{W_{my}}}{\partial y}, \frac{\overrightarrow{W_{mz}}}{\partial z} \right) \quad (2.6)$$

## 2.3. Fuerza mecánica

La segunda ley de Newton o principio fundamental de la dinámica, establece que la fuerza sobre una partícula es igual a la razón de cambio de su cantidad de movimiento lineal, producto de su masa y de su velocidad, se expresa de acuerdo a la Ecuación 2.7 Fuerza mecánica equation.2.3.7:

$$f = \frac{d(mv)}{dt} \quad (2.7)$$

Si la masa de una partícula es constante, la fuerza es igual al producto de su masa por su aceleración, esta última se puede expresar como la primera

derivada de la velocidad con respecto al tiempo o como la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo al cuadrado, como se muestra en la Ecuación 2.8 Fuerza mecánica equation.2.3.8:

$$f = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.8)$$

La segunda ley de Newton se postula para una partícula, o pequeño elemento de materia. La ecuación de movimiento para el centro de masa demuestra que la fuerza externa total sobre un cuerpo cualquiera es igual al producto de su masa por la aceleración de su centro de masa, para más de una fuerza, el principio fundamental de la dinámica se da por la Ecuación 2.9 Fuerza mecánica equation.2.3.9:

$$\sum f = ma \quad (2.9)$$

Este resultado no restringe la naturaleza del cuerpo ni su estado de movimiento. La suma de las fuerzas externas sobre un cuerpo o conjunto de cuerpos es igual al producto de la masa total por la aceleración del centro de masa (Bedford y Fowler, 2009).

## 2.4. Sistema de control

De forma general, se define a un sistema como un arreglo, conjunto o combinación de cosas conectadas o relacionadas de manera que constituyen un todo. De forma científica se define como un arreglo de componentes físicos conectados o relacionados de tal manera que formen una unidad completa o que puedan actuar como tal; en otras palabras, un sistema es una combinación de componentes que actúan conjuntamente, con un determinado objetivo a cumplir (Perez et al., 2008).

Dentro de los sistemas se encuentra el concepto de sistema de control. Un sistema de control es un arreglo de componentes físicos conectados de tal manera que el arreglo pueda comandar, dirigir o regular, asimismo o a otro

sistema. Estos sistemas comandan dirigen o controlan dinámicamente. De una manera informal, el problema de control consiste en seleccionar, de un conjunto específico o arbitrario de elementos (o parámetros, configuraciones, funciones, etc), aquellos que aplicados a un sistema fijo, hagan que este se comporte de una manera predeterminada (Perez et al., 2008).

A continuación se define terminología necesaria para el control automático. Estas definiciones están basadas, en parte, en las propuestas de normas de la IEEE.

- Planta: Se designará como planta a cualquier objeto físico que pueda ser controlado. Puede ser un equipo, quizás simplemente un juego de piezas de una máquina funcionando juntas, cuyo objetivo es realizar una operación determinada. Ejemplos de plantas son: horno de calentamiento, reactor químico, etc.
- Entrada de un sistema: Es una variable del sistema elegida de tal manera que se la utiliza como excitación del mismo.
- Salida de un sistema: Es una variable del sistema elegida de tal modo que se la utiliza para analizar los efectos que produjo una excitación en la entrada del mismo.
- Realimentación: Es una propiedad de los sistemas que permiten que la salida del sistema o cualquier variable del mismo sea comparada con la entrada al sistema o con cualquier componente del sistema, de tal manera que pueda establecerse la acción de control apropiada entre la entrada y la salida.

Entonces podemos decir que el problema de control consiste en seleccionar, para un sistema dado, una entrada que haga responder a la planta de una manera deseada; esto es, que se obtenga una salida con cierta característica (Perez et al., 2008).

### 2.4.1. Sistemas lineales y no lineales

Los sistemas pueden dividirse en lineales y no lineales, los sistemas lineales se modelan matemáticamente a través de ecuaciones diferenciales lineales. La propiedad más importante de estos sistemas consiste en que cumplen el principio de superposición, el cual establece que la respuesta producida por la aplicación simultánea de dos o más entradas diferentes, es la suma de las dos o más respuestas si las entradas se aplicaran de forma individual.

Aunque las relaciones físicas a menudo se representan mediante ecuaciones lineales, los sistemas no son del todo lineales. Un estudio cuidadoso de los sistemas físicos revela que los llamados sistemas lineales son realmente lineales dentro del rango de operación limitado.

En los sistemas no lineales, la característica más importante es que el principio de superposición no es aplicable. Los procedimientos para encontrar la solución de problemas que involucran sistemas no lineales son extremadamente complejos. Como lo indica su nombre, se representan matemáticamente por medio de ecuaciones diferenciales no lineales.

Debido a la dificultad matemática que representan los sistemas no lineales, con frecuencia se aproximan a un modelo lineal alrededor de una condición de operación. Una vez que el modelo matemático no lineal del sistema se linealiza, se puede aplicar la teoría lineal con fines de análisis y diseño (Ogata, 1987).

### 2.4.2. Diagrama a bloques

Los sistemas de control se representan a través de ecuaciones diferenciales (sistemas continuos) o por ecuaciones en diferencias (sistemas discretos). Sin embargo, su análisis y diseño de controladores es complicado, por lo que se han desarrollado técnicas para representar estos sistemas que faciliten su análisis. Las técnicas más usadas son los diagramas de bloques, la función de

transferencia y las variables de estado.

Un diagrama a bloques es una representación gráfica de las relaciones entre las componentes existentes de un sistema (Kuo, 1996). Ésta es una representación del modelo en transformada de Laplace para sistemas continuos o en transformada  $Z$  en sistemas discretos. Los diagramas a bloques pueden utilizarse para describir el funcionamiento interno de un sistema y ofrece una alternativa simple para estudiar directamente al sistema.

Un diagrama a bloques consta de varios componentes, con los que se puede representar todas las ecuaciones que describan el comportamiento de algún, tales componentes son:

- Variable (Figura 2.1 Variable. Dirección del flujo de la señal  $A$  figure.caption.13). Es un segmento o trazo de diagrama a bloques, representativo de una señal o variable del sistema. Contiene una flecha que indica la dirección de circulación del flujo de señales.

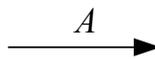


Figura 2.1: Variable. Dirección del flujo de la señal  $A$

- Bloque funcional (Figura 2.2 Bloque funcional. Operación  $B = AG_1$  figure.caption.14) Se utiliza para indicar una correspondencia proporcional entre dos señales.

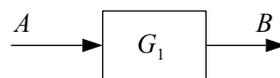


Figura 2.2: Bloque funcional. Operación  $B = AG_1$

- Sumador (Figura 2.3 Sumador. Operación  $D = A+B-C$  figure.caption.15). Se utiliza para indicar una adición o sustracción entre señales, puede tener cualquier número de señales entrantes pero sólo una señal de salida.

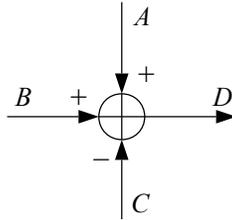


Figura 2.3: Sumador. Operación  $D = A + B - C$

- Punto de bifurcación (Figura 2.4). Bifurcación de la señal  $A$  (Figura 2.4). Es una unión en la cual se reparten diferentes señales para diferentes componentes (Bloques funcionales o sumadores).

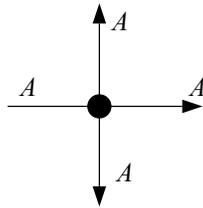


Figura 2.4: Punto de bifurcación. Bifurcación de la señal  $A$

La modificación de los diagramas de bloques de sistemas se denomina álgebra de bloques (Figura 2.5). Álgebra de bloques (Figura 2.5), para efectuar simplificaciones u ordenamientos especiales. La manipulación de los diagramas de bloques es equivalente al manejo algebraico de las ecuaciones originales de Laplace, de una manera mucho más simple, con el propósito de llegar a la función de transferencia de un sistema, para ello se emplean tres reglas principales: Bloques en Cascada, Bloques en Tándem y Bloques con Realimentación.

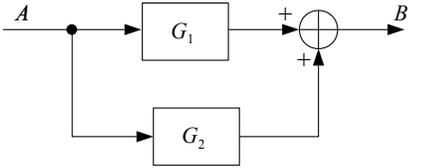
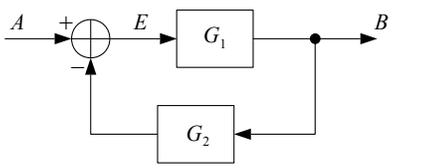
Descripción	Configuración	Salida
Bloques en cascada		$B = AG_1G_2$
Bloques en tándem		$B = A(G_1 + G_2)$
Bloques con realimentación		$B = A\left(\frac{G_1}{1+G_1G_2}\right)$

Figura 2.5: Álgebra de bloques

El bloque de realimentación es el que se encuentra más frecuentemente en los sistemas de control, y caracteriza a los sistemas de lazo cerrado, el cálculo de su función de transferencia es:

$$B = G_1E$$

$$E = A - G_2B$$

$$B = G_1[A - G_2B] = G_1A - G_1G_2B \quad (2.10)$$

$$(1 + G_1G_2)B = G_1A$$

$$\frac{B}{A} = \frac{G_1}{1+G_1G_2}$$

Los diagramas a bloques son muy utilizados para representar sistemas de control ya sean continuos o discretos, su importancia se encuentra en que a partir de estos diagramas se puede obtener una representación en variables de estado a partir de la asignación de estados, o bien, una función de transferencia realizando álgebra de bloques o usando la ecuación de Mason, esta última está dada por la Ecuación 2.11 Diagrama a bloques equation.2.4.11:

$$M = \frac{C(S)}{R(S)} = \sum_{k=1}^N \frac{M_k \Delta_k}{\Delta} \quad (2.11)$$

donde:

- $k =$  Trayectorias directas.
- $N =$  Número de trayectorias directas.
- $M_k =$  Ganancia de trayectoria directa.
- $\Delta = 1 - \left[ \begin{array}{l} \text{Sumatoria de todas} \\ \text{las ganancias} \\ \text{individuales} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{Sumatoria de productos} \\ \text{de lazos individuales} \\ \text{que no se tocan} \end{array} \right] - \dots + \dots$
- $\Delta = 1 - \sum Pm_1 + \sum Pm_2 - \sum Pm_3 + \dots$
- $\Delta_k =$  Es la forma de delta  $\Delta$ , pero en trayectorias que no tocan a los lazos.

Cuando se considera que todos los lazos o trayectorias cerradas se tocan, los términos  $\sum Pm_2 - \sum PM_3 + \dots$  se hacen cero y en el denominador únicamente se conservan los términos  $(1 - \sum Pm_1)$ . De la misma forma cuando consideramos que todas las trayectorias directas tocan a todos los lazos cerrados, matemáticamente, hacen que el termino sea igual a la unidad y por lo consiguiente, solo se conserva el término que se refiere a la ganancia de las trayectorias directas. Con esto, la ecuación de Mason se reduce a la forma de la Ecuación 2.12 Diagrama a bloque [equation.2.4.12](#).

$$M = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + \dots}{1 - \sum Pm_1} \quad (2.12)$$

### 2.4.3. Función de transferencia

La función de transferencia de un sistema  $G(s)$  se define como el cociente de la transformada de Laplace de la salida  $Y(s)$  y de la entrada  $R(s)$ , bajo la

suposición de que todas las condiciones iniciales son cero. De este modo se representa el comportamiento del sistema, es decir, es el modelo matemático que permite determinar las características de un sistema (Ogata, 1998). Un ejemplo está dado por la Ecuación 2.13 Función de transferencia [equation.2.4.13](#).

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \quad (2.13)$$

Con esta última ecuación es muy fácil obtener un diagrama a bloques (Figura 2.6 Diagrama a bloques de una función de transferencia [figure.caption.18](#)) a partir de una función de transferencia y viceversa.

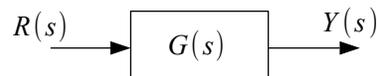


Figura 2.6: Diagrama a bloques de una función de transferencia

Algunas de las características que tiene la función de transferencia son:

- Es una propiedad de un sistema.
- Una función de transferencia siempre será la misma para un sistema sin importar su diagrama a bloques.
- La relación de la función de transferencia es únicamente entrada-salida.
- Está limitada a los sistemas lineales invariantes en el tiempo.
- Incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida.
- No se proporciona información acerca de la estructura física del sistema.
- Se puede comprender la naturaleza del sistema, estudiando la salida en respuesta a varias formas de entradas.
- Se puede obtener experimentalmente introduciendo entradas conocidas y estudiando la salida del sistema.

En forma general, estos son los pasos a seguir para obtener el modelo matemático en control clásico, (función de transferencia) en un sistema:

1. Escribir la ecuación diferencial para el sistema.
2. Realizar la linealización alrededor de un punto, si es que el sistema es no lineal.
3. Aplicarle la transformada de Laplace a la ecuación diferencial.
4. Obtener la relación entre la salida y la entrada.

Una función de transferencia no es más que un cociente de polinomios en  $s$  (una variable compleja), de la forma:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$G(s) = \frac{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (2.14)$$

$$G(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}$$

El orden de la función de transferencia en un sistema causal ( $n \leq m$ ) viene determinado por el grado del su denominador. Se define como Ceros de  $G(s)$  a los valores de  $s$  que hacen cero al numerador de la función de transferencia y Polos a los valores de  $s$  que hacen cero al denominador la función de transferencia. En el caso que se muestra en la Ecuación 2.14 Función de transferencia [equation.2.4.14](#), los ceros son  $-z_1, \dots, -z_m$  y los polos son  $-p_1, \dots, -p_n$  (Colmenares, 2006).

Como los polos y ceros del sistema ocurren bien como números reales o como complejos conjugados, se pueden representar en un plano complejo (Figura 2.7 Representación de un polo y un cero en el plano  $s$  [figure.caption.19](#)), denominado plano  $s$ , el eje horizontal se denomina  $\sigma$  (eje real) y el eje vertical se denomina  $j\omega$  (eje imaginario), los polos se representan como  $\times$  y los ceros como  $\circ$  (Colmenares, 2006).

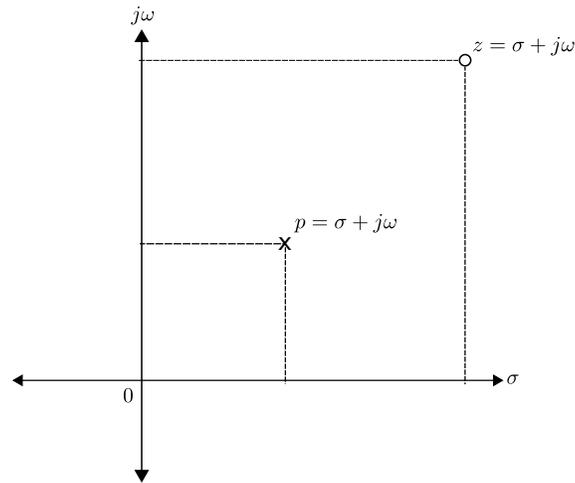


Figura 2.7: Representación de un polo y un cero en el plano  $s$

La naturaleza de las raíces del denominador son las que determinan el patrón de la respuesta temporal a una dada señal de entrada y nos permite un conocimiento cualitativo de la dinámica del sistema. Debido a esta característica tan importante es que al denominador de una función de transferencia, cuando se lo iguala a cero, se lo denomina Ecuación Característica del Sistema (Cesca, 2015).

$$D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0 \quad (2.15)$$

### Estabilidad

El concepto de Estabilidad es de importancia medular en control automático. Existen distintas formas de definirla. Una definición, elemental pero intuitiva, es la conocida como BIBO-estabilidad (Bound input-Bound output), un sistema se dice que es estable si para toda entrada acotada produce una salida acotada, independientemente de su estado inicial (Colmenares, 2006).

Los transitorios de la salida se pueden relacionar con las raíces de la ecuación característica. De modo que el concepto de estabilidad puede definirse en términos matemáticos más precisos de la siguiente forma: un sistema es esta-

ble si las raíces de la ecuación característica son reales negativas o complejas conjugadas con parte real negativa. O dicho en forma más compacta, si todas las raíces se encuentran en el semiplano izquierdo de la variable compleja  $s$  (Figura 2.8 Caracterización de la estabilidad según la ubicación de las raíces de la Ecuación Característica figure.caption.21) (Colmenares, 2006).

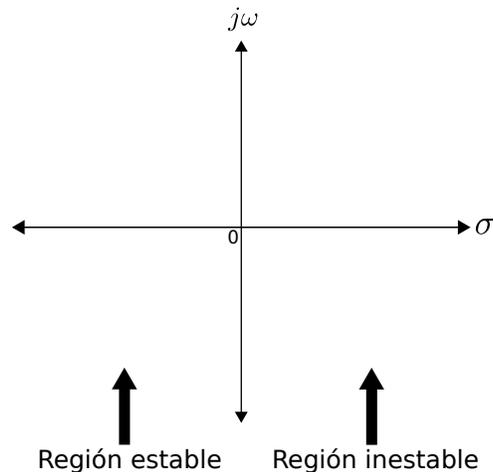


Figura 2.8: Caracterización de la estabilidad según la ubicación de las raíces de la Ecuación Característica

Si alguna raíz se ubica en el eje imaginario, se obtiene un sistema con estabilidad marginal, es decir, un sistema que se halla en el límite entre la estabilidad y la inestabilidad. Para decidir si un sistema en lazo cerrado es estable solo se requiere saber si existen raíces de la ecuación característica en el semiplano derecho, y no es necesario conocer su valor (Colmenares, 2006).

#### 2.4.4. Control por realimentación

Cuando se plantea un problema de control, por lo general se especifican un conjunto de restricciones que debe cumplir el sistema para considerar que está operando adecuadamente. Estas restricciones están dadas en términos de estabilidad y especificaciones temporales. Se dice que un sistema está controlado cuando todas ellas se cumplen satisfactoriamente.

Existen dos tipos básicos de sistemas de control:

- Sistemas de lazo abierto (Figura 2.9 Sistema de control de lazo abierto figure.caption.2). Son aquellos en los cuales la salida no afecta la acción de control, es decir, la salida no se compara con la señal de referencia, por lo que existen una relación fija entre la entrada y la respuesta del sistema (Perez et al., 2008).

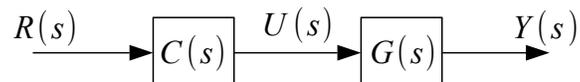


Figura 2.9: Sistema de control de lazo abierto

Donde

$R(s)$  : Señal de referencia.

$U(s)$  : Señal acción de control.

$Y(s)$  : Variable controlada.

$C(s)$  : Controlador.

$G(s)$  : Planta.

- Sistemas de lazo cerrado (Figura 2.10 Sistema de control de lazo cerrado figure.caption.2). Estos comparan la entrada de referencia con la salida, usando una diferencia para realizar la acción de control. A esto se le conoce como realimentación.

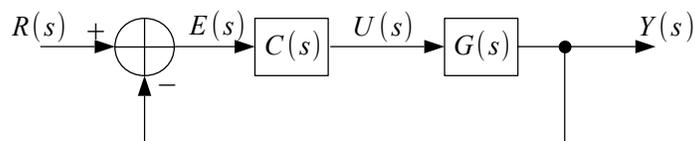


Figura 2.10: Sistema de control de lazo cerrado

Donde

$R(s)$  : Señal de referencia.

$E(s)$  : Señal de error.

$C(s)$  : Controlador.

$U(s)$  : Acción de control.

$Y(s)$  : Salida.

$G(s)$  : Planta.

La realimentación es la propiedad de un sistema en lazo cerrado por la cual la salida  $Y(s)$  se compara con la señal de referencia del sistema  $R(s)$ , de manera que la acción de control se establezca como una función de ambas.

La realimentación junto con la señal de referencia generan la señal de error  $E(s) = R(s) - Y(s)$ , el controlador procesa la señal de error y genera una acción de control  $U(s)$  capaz de disminuir el valor del error para conseguir la máxima precisión. El uso de una realimentación pretende que sistemas de lazo abierto inestables se vuelvan estables al cerrar el lazo, se reduzca la sensibilidad en la ganancia a las variaciones de las condiciones del sistema, se disminuya el error entre la entrada de referencia y la salida y se atenúe el efecto de perturbaciones externas en el desempeño de la planta. Todos estos beneficios son de suma importancia en la ingeniería de control, sin embargo, esto se logra pagando el costo de un comportamiento más complejo de la planta, o bien, la posibilidad de que el sistema realimentado se vuelva inestable (Perez et al., 2008).

### Control proporcional y control integral

- Control proporcional: Este controlador generalmente reduce el tiempo de subida, incrementa el sobreimpulso y reduce el error en estado estable. Para una acción de control proporcional la relación entre la salida del controlador  $U(s)$  y la señal de error  $E(s)$  es:

$$U(s) = K_p E(s) \quad (2.16)$$

Donde  $K_p$  es la ganancia proporcional. Cualquiera que sea el mecanismo real y la forma de aplicar la potencia a los accionamientos, el controlador proporcional es en esencia un amplificador de ganancia ajustable, ya que existe una relación lineal continua entre el valor de la variable controlada y la posición del elemento final de control.

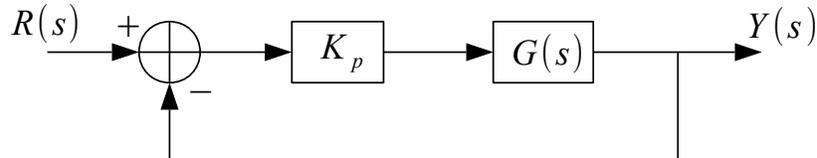


Figura 2.11: Control proporcional

Un aumento de la ganancia del controlador permite REDUCIR el error en estado estacionario. Sin embargo, para poder ELIMINAR el error en estado estacionario es necesario que la función de transferencia de lazo abierto contenga algún elemento integrador (polo  $s = 0$ ) y el sistema sea estable, y el controlador proporcional no añade al sistema ningún elemento integral por lo que no es capaz de eliminar el error en estado estable con este control.

- Control integral: La característica más importante de este tipo de controlador es que la acción correctora se efectúa mediante la integral del error: el control integral proporciona una señal que es función de "la propia historia de la señal de error" (la integral es una operación acumulativa en el tiempo), permitiendo obtener una señal de control diferente de cero aunque la señal de error sea cero (lo cual no ocurre con el controlador proporcional, donde, si la señal de error es cero, la acción de control también es cero).

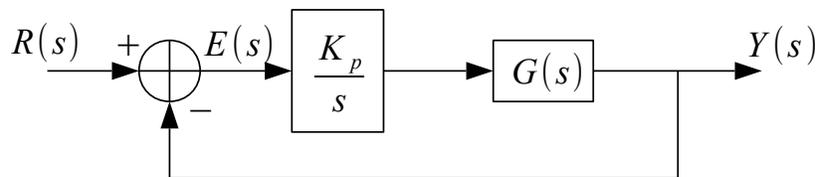


Figura 2.12: Control proporcional

El control integral se utiliza casi universalmente en la industria de control para diseñar sistemas robustos. El control integral, en general, hace seguimiento robusto y rechazo de perturbaciones.

En un controlador integral el valor de la salida  $u(t)$  y su función de transferencia en términos de Laplace son respectivamente:

$$u(t) = k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + u(0) \quad (2.17)$$

$$\frac{du}{dt} = k_i e(t)$$

Y su función de transferencia correspondiente es:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s} \quad (2.18)$$

Donde  $k_i$  es la ganancia del integrador. Supongamos ahora que la salida de  $u(t)$  es una constante, entonces se tiene que:

$$\frac{du}{dt} = 0 = k_i e(t) \quad \forall \quad t > 0 \quad (2.19)$$

La Ecuación 2.19 Control proporcional y control integral Item.8 demuestra los siguientes hechos importantes sobre el funcionamiento de un integrador:

- Si la salida de un integrador es constante en un segmento de tiempo, entonces la entrada debe ser idénticamente cero durante el mismo segmento.
- La salida de un integrador cambia siempre que la entrada es distinta de cero.

Este simple hecho nos sugiere como un integrador puede utilizarse para resolver el problema de error. El control integral introduce un polo en el origen a la función de transferencia en lazo abierto, lo cual ocasiona

un incremento en el orden del sistema, permitiendo eliminar el error en estado estacionario ante una entrada escalón. En efecto:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (2.20)$$

Donde el valor que toma el coeficiente estático de error de posición es:

$$K_p = \lim_{x \rightarrow 0} G_e G_p = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{K_i}{s} G_p(s) \rightarrow \infty \quad (2.21)$$

Y entonces:

$$e_{ss} \rightarrow 0 \quad (2.22)$$

Si una planta de salida  $y(t)$  va a seguir una referencia  $r$  con valor constante a pesar de la presencia de perturbaciones constantes desconocidas, es suficiente con:

- Asegúrese de que el sistema de lazo cerrado es asintóticamente estable, de manera que bajo las entradas de referencia y las perturbaciones constantes, todas las señales, incluyendo la salida del integrador, alcanzan valores de estado estacionario constantes.
- Adjuntar un integrador a la planta y hacer que el error  $e(t) = r(t) - y(t)$  esté a la entrada del integrador.

Sin embargo, la acción de control integral puede empeorar de un modo substancial la estabilidad relativa del sistema, aumentando el sobreimpulso de la respuesta transitoria, y afectando la estabilidad del sistema, debido al desplazamiento de los polos de lazo cerrado hacia la derecha. Por ello puede resultar conveniente que la acción integral se acompañe de otras acciones de control.

### 2.4.5. Variables de estado

Un sistema complejo puede poseer muchas entradas y muchas salidas que se relacionan entre sí de una forma complicada. Para analizar un sistema de este tipo es esencial reducir la complejidad de las expresiones matemáticas. El control moderno tiene como herramienta el espacio de estado, el cual está definido como un espacio de  $n$  dimensiones y cuyos ejes de coordenadas consisten en los ejes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dicho esto, cualquier estado puede representarse en este espacio, de aquí surge un nuevo concepto, las variables de estado (Figura 2.13 Diagrama a bloques de un sistema continuo en variables de estado figure.captio.27).

El término estado se refiere a las condiciones pasadas, presentes y futuras de un sistema, entonces las variables de estado son el menor conjunto de variables que determinan el estado de un sistema dinámico y son capaces de describir completamente el comportamiento del mismo (Ogata, 1998). Tales que su conocimiento en cualquier tiempo  $t_0$  y la información sobre la señal de entrada aplicada subsecuentemente al tiempo son suficientes para determinar el estado del sistema para cualquier tiempo  $t \geq t_0$ .

Se debe tener en cuenta que las variables de estado no necesitan ser físicamente medibles o cantidades observables, tal libertad en la elección de las variables de estado es una ventaja de los métodos en el espacio de estados, es decir, la representación en variables de estado no es única. En la práctica es conveniente seleccionar para las variables de estado cantidades físicamente medibles, si esto es posible, ya que las leyes de control en el espacio de estados se basan en la realimentación de los estados con las ganancias adecuadas.

Las ecuaciones en el espacio de estados son el conjunto de ecuaciones que describen la dinámica de un sistema mediante la relación entre las variables de entrada, las variables de salida y las variables de estado. El modelado de sistemas dinámicos en el espacio de estados permite describir el comportamiento de todo tipo de sistemas (Milena, 2010). La forma general para las

ecuaciones de estado son Ecuación 2.23 Variables de estado equation.2.4.23.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= f_1(X, U, t) \\
 \dot{x}_2(t) &= f_2(X, U, t) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n(t) &= f_n(X, U, t) \\
 \\ 
 y_1(t) &= h_1(X, U, t) \\
 y_2(t) &= h_2(X, U, t) \\
 &\vdots \\
 y_n(t) &= h_n(X, U, t)
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Si se define:

$$\begin{aligned}
 X &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} & F(X, U, t) &= \begin{bmatrix} f_1(X, U, t) \\ f_2(X, U, t) \\ \vdots \\ f_n(X, U, t) \end{bmatrix} \\
 \\ 
 Y(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} & H(X, U, t) &= \begin{bmatrix} h_1(X, U, t) \\ h_2(X, U, t) \\ \vdots \\ h_n(X, U, t) \end{bmatrix} & U(t) &= \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

La Ecuación 2.23 Variables de estado equation.2.4.23 se puede expresar en formato matricial como:

$$\begin{aligned}
 \dot{X} &= F(X, U, t) \\
 Y(t) &= H(X, U, t)
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Para sistemas lineales invariantes en el tiempo, con una entrada y una salida, la representación en variables de estado está dada por:

$$\begin{aligned}
 \dot{X} &= AX + Bu(t) \\
 y(t) &= CX + Du(t)
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Donde  $A$  se denomina matriz de estado,  $B$  vector de entrada,  $C$  vector de salida y  $D$  término de transmisión directa. La Ecuación 2.26 Variables de estado equation.2.4.26 es la representación en variables de estado para un sistema continuo, esta representación se puede llevar a un diagrama de simulación, donde los elementos que lo conforman son integradores, sumadores y ganancias.

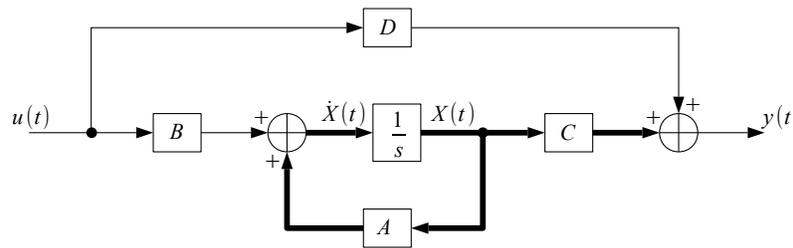


Figura 2.13: Diagrama a bloques de un sistema continuo en variables de estado

En sistemas dinámicos en el espacio de estados nos encontramos con tres tipos de variables involucradas en el modelo de un sistema.

- Variables de entrada.
- Variables de salida.
- Variables de estado.

El sistema dinámico debe incorporar elementos que memoricen los valores de la entrada para  $t \geq t_0$ , dado que los integradores de un sistema de control en tiempo continuo funcionan como dispositivos de memoria, las salidas de los integradores funcionan como variables que definen el estado interno del sistema dinámico. Por lo tanto, las salidas de los integradores funcionan como variables de estado.

La cantidad de variables de estado necesarias para definir completamente la dinámica del sistema es igual a la cantidad de integradores que contiene el sistema.

Un sistema no lineal, que se puede representar por las Ecuaciones 2.25 Variables de estado equation.2.4.25, se puede linealizar alrededor de un punto de equilibrio o punto de operación, para obtener un modelo lineal. La linealización se aproxima a través de series de Taylor, para un sistema de segundo orden la linealización se da por la Ecuación 2.27 Variables de estado equation.2.4.27:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$x = x_n \quad u = u_n$$

Donde  $x_n$  y  $u_n$  son los valores en los que se va a linealizar el modelo matemático.

La función de transferencia de un modelo de espacio de estados continuo e invariante en el tiempo puede ser obtenida de la siguiente manera:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.28)$$

Donde  $I$  representa la matriz identidad. En esta ecuación la ecuación característica de la función de transferencia que representa al sistema esta dado por:

$$|(sI - A)| \quad (2.29)$$

### Representación en espacio de estados de sistemas definidos por su función de transferencia

El hecho de disponer de diferentes representaciones de estado para un mismo sistema, dado que el vector de estado no es único, es una ventaja sustancial de la representación de estado pues permite utilizar formas particulares de la misma, denominadas formas canónicas, cada una de las cuales presentan ciertas ventajas. Considere un sistema definido mediante.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (2.30)$$

Donde  $u$  es la entrada y  $y$  es la salida. A continuación se presentan las representaciones en espacio de estados del sistema definido mediante las Ecuaciones 2.14 Función de transferencia equation.2.4.14 y 2.30 Representación en espacio de estados de sistemas definidos por su función de transferencia equation.2.4.30, en su forma canónica controlable y en su forma canónica observable (Ogata, 1998).

- Forma canónica controlable. La siguiente representación en el espacio de estados se denomina forma canónica controlable.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.31)$$

$$y = [b_n - a_n b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad \cdots \quad b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

La forma canónica controlable es importante cuando se analiza el método de asignación de polos para el diseño de sistemas de control.

- Forma canónica observable. La siguiente representación en el espacio de estados se denomina forma canónica observable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u \quad (2.32)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

Se observa que la matriz de estado de  $n \times n$  de la ecuación obtenida mediante la Ecuación 2.32 Representación en espacio de estados de sistemas definidos por su función de transferencia equation.2.4.32. es la transpuesta de la ecuación de esta definida por la Ecuación 2.31 Representación en espacio de estados de sistemas definidos por su función de transferencia equation.2.4.31.

#### 2.4.6. Realimentación de estados

Las técnicas de control moderno están basadas en la configuración de la realimentación de estados. Esto significa que en lugar de emplear controladores con configuración fija en las trayectorias directas o en la realimentación (control clásico), el control se realiza al realimentar las variables de estado a través de ganancias constantes. Cuando se utilizan técnicas de control clásico, como el lugar geométrico de las raíces, para diseñar sistemas de control, el enfoque general se puede describir como una ubicación de polos. Al conocer los polos de lazo cerrado (raíces de la ecuación característica) y el desempeño del sistema, se puede realizar el diseño al especificar la ubicación de los polos.

El diseño de reubicación de polos por realimentación de estados (Figura 2.14 Realimentación de estados figure.caption.29) consiste en encontrar el vector de realimentación  $F$  tal que los polos del sistema a lazo cerrado se coloquen en los valores deseados. La existencia de la solución al diseño por reubicación de polos con valores de polos asignados en forma arbitraria, está relacionada directamente con la controlabilidad del sistema, es decir, que si el sistema es controlable, existe un vector de realimentación constante que permite asignar de forma arbitraria la ubicación de los polos (Kuo, 1996).

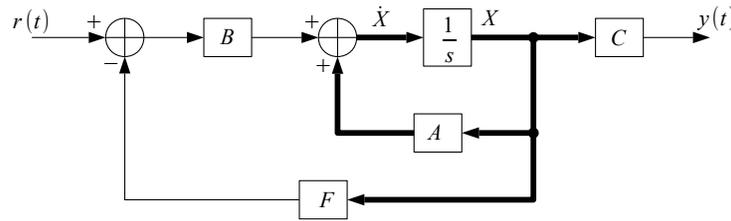


Figura 2.14: Realimentación de estados

Un sistema es controlable si se puede llevar de cualquier estado inicial a cualquier otro estado final mediante un vector de control en un intervalo de tiempo finito (Ogata, 1998). Un sistema de orden  $n$  es controlable si el rango de la matriz de controlabilidad  $\mathcal{C}$  es máximo, es decir  $|\mathcal{C}| \neq 0$ , donde la matriz de controlabilidad está dada por la Ecuación 2.33 Realimentación de estado equation.2.4.33 (Chen, 1999):

$$\mathcal{C} = [ B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B ] \quad (2.33)$$

Para calcular el vector de ganancias  $F$ , según el diagrama (Figura 2.14 Realimentación de estados figure.caption.29),  $\dot{X}(t)$  está dada por:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + B[r(t) - FX(t)] \quad (2.34)$$

Factorizando  $X(t)$  se tiene:

$$\dot{X}(t) = (A - BF)X(t) + Br(t) \quad (2.35)$$

Se calcula  $|sI - (A - BF)|$  para determinar la ecuación característica donde va incluido el vector de ganancias  $F$ , basta con igualarla a la reubicación de polos deseada  $s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$  para encontrar los valores de  $F$  que estabilizan el sistema.

### Formula de Ackermann

La matriz de ganancia de realimentación se puede obtener por diferentes métodos. La ley de control propuesta por Ackermann es la realimentación simple de una combinación de todos los estados, caracterizada por su fácil

aplicación y generalidad. Esta fórmula permite calcular directamente una matriz de ganancia de realimentación  $F$  a partir de la ecuación:

$$F = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \mathcal{C}^{-1} \phi(A) \quad (2.36)$$

Donde  $\mathcal{C}$  es la matriz de controlabilidad y  $\phi(A)$  esta dado por:

$$\phi(A) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n \quad (2.37)$$

Siendo  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$  los coeficientes de la ecuación característica deseada:

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n \quad (2.38)$$

Es requerido encontrar la relación entre los coeficientes  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$  y la matriz  $A$ . Esto se puede lograr a través del teorema de Cayley-Hamilton, el cual establece que una matriz  $A$  satisface su propia ecuación característica.

$$s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \dots + \alpha_n A + \alpha_n I_n = 0 \quad (2.39)$$

Creando el polinomio  $\phi(A)$ , que es la ecuación característica del sistema en lazo cerrado con la matriz  $A$  sustituyendo a la variable compleja  $s$  (Chen, 1999) (Kailath, 1980).

$$\phi(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \dots + \alpha_n A + \alpha_n I_n \quad (2.40)$$

### 2.4.7. Observadores

Para el control por reubicación de polos se miden los estados del sistema, sin embargo, no siempre se puede tener acceso a todos los estados del sistema, o sería muy costoso medir cada uno de los estados. En la práctica la variable de salida  $y(t)$  solamente contiene parte de los componentes del vector de estados  $X(t)$ , por lo que se requiere de alguna técnica para estimar o reconstruir la totalidad de las variables de estado del sistema en estudio (Campomanes, 1998). Para resolver este problema, Luenberger introdujo el

concepto de observador (Luenberger, 2003). Un observador de estados es un dispositivo o programa de computadora que estima u observa las variables de estado con base en las mediciones de la señal de salida y la señal de control. Se puede diseñar un observador de estados si y solo si el sistema cumple la condición de observabilidad (Kuo, 1996).

Un sistema de orden  $n$  es observable si el rango de la matriz de observabilidad  $\mathcal{O}$  es máximo (Chen, 1999), es decir  $|\mathcal{O}| \neq 0$ , donde la matriz de observabilidad está dada por la Ecuación 2.41

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

La idea de un observador de Luenberger es hacer una copia fiel del sistema a controlar y ponerla en paralelo, cuya entrada será la misma señal de control que del sistema real y la salida del observador se compara con la del proceso real para estabilizar al estimador más un término adicional de corrección (Kailath, 1980).

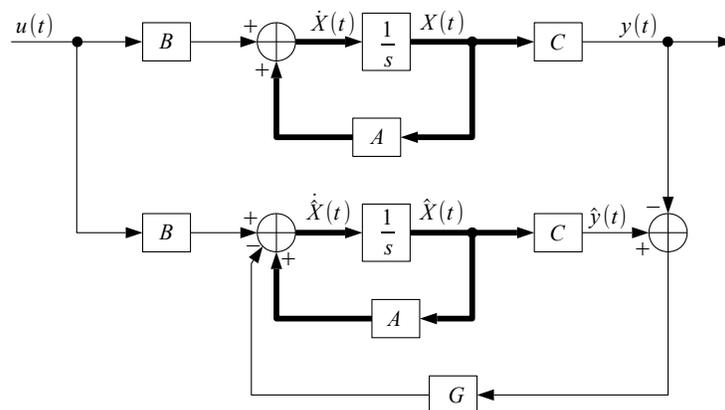


Figura 2.15: Observador de estados

Cuando se diseña un observador que estima  $n$  estados de un sistema de

orden  $n$  se conoce como observador de orden completo. Consideremos un sistema modelado en variables de estado representado por las Ecuaciones 2.26 Variables de estado equation.2.4.26 sin termino de transmisión directa  $D$  donde las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  son perfectamente conocidas. Así, el observador con el vector de ganancias  $G$  es (Williams, 2006):

$$\begin{aligned}\dot{\hat{X}} &= A\hat{X} + Bu(t) - G[y(t) - y(t)] \\ \dot{\hat{X}} &= A\hat{X} + Bu(t) - G[C\hat{X} - CX]\end{aligned}\tag{2.42}$$

Se define el error entre los estados reales del sistema y los estimados como (Williams, 2006):

$$e(t) = X(t) - \hat{X}(t).\tag{2.43}$$

Entonces, la dinámica del error  $\dot{e}(t)$  será:

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \dot{X}(t) - \dot{\hat{X}}(t) \\ \dot{e}(t) &= AX + Bu(t) - [A\hat{X} + Bu(t) - G[C\hat{X} - CX]] \\ \dot{e}(t) &= AX - A\hat{X} + G[C\hat{X} - CX] \\ \dot{e}(t) &= A[X - \hat{X}] - GC[X - \hat{X}] \\ \dot{e}(t) &= Ae - GCe \\ \dot{e}(t) &= (A - GC)e\end{aligned}\tag{2.44}$$

Y entonces,  $\hat{X}(t) \rightarrow X(t)$  si los autovalores de la matriz  $(A - GC)$  son todos estables.

Si la matriz  $A - GC$  es estable significa que el error  $e(t)$  tiende a cero para cualquier valor inicial  $x(0)$ . Si el par  $A, C$  es observable se puede escoger una matriz tal que  $(A - GC)$  presente unos valores característicos deseados definidos para que el observador haga una buena estimación de los estados del sistema (Murillo, 2014).

**Método para obtener las ganancias del observador**

- 1 Verificar que el sistema sea controlable y observable.
- 2 Si el sistema es de orden  $n \leq 3$ , conviene hallar las ganancias del observador por sustitución directa haciendo:

$$|sI - (A - GC)| = (s + \mu_1)(s + \mu_2)(s + \mu_3) \quad (2.45)$$

Donde,  $\mu_i$  son los polos deseados del observador.

- 3 Si el sistema es de orden  $n > 3$ , es recomendable utilizar la fórmula de Ackermann, que para calcular las ganancias de la realimentación de estados es de la forma:

$$G = \phi(A)\mathcal{O}^{-1} [0 \ 0 \ \Lambda \ 0 \ 1]^T \quad (2.46)$$

donde  $\mathcal{O}$  es la matriz de observabilidad y  $\phi(A)$  es el polinomio deseado evaluado en  $A$ .

Para la ubicación de los polos del observador sólo debemos tomar en cuenta que éstos deben ser menores que los polos del sistema con realimentación de estados, esto es, que la dinámica del observador debe ser más rápida que la del sistema que debe observar (Williams, 2006). Cuando el control por reubicación de polos se realiza con los estados observados, se denomina realimentación de estados estimados (Figura 2.16 Realimentación de estados estimados figure.caption.33).

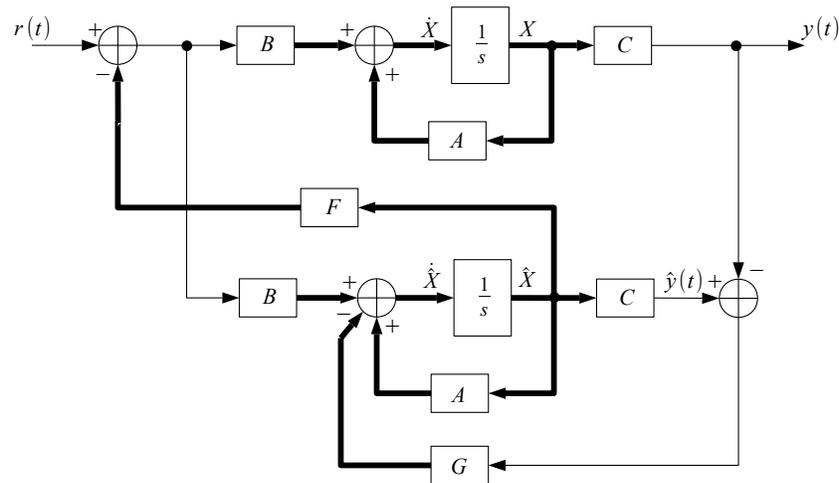


Figura 2.16: Realimentación de estados estimados

## 2.5. Amplificadores operacionales

El Amplificador operacional u opamp (Figura 2.17 Símbolo del amplificador operacional [figure.caption.34](#)) es un circuito electrónico presentado como circuito integrado compuesto con elementos discretos tales como transistores y resistencias, hechos para fines prácticos como amplificador de señales. Además de amplificar una señal (o en general, llevar a un intervalo adecuado para procesamiento y análisis), los opamps tienen muchos otros usos como (Márquez, 2013).

- Acondicionamiento de señales: aumentar su potencia, además de su intensidad, para que no sufra distorsión o atenuación por el proceso de medición, sobre todo si la impedancia de entrada del circuito sensor no es suficientemente alta; esto se logra garantizando que la señal a medir tenga un nivel mínimo de potencia entregada; el acondicionamiento también incluye: paso a escala logarítmica, cambiar offset, polaridad, modulación, mayor inmunidad a ruido y estabilidad, etc.
- Acoplamiento de impedancias: aunque puede considerarse parte del acondicionamiento, es más general; aislamiento de circuitos.

- Filtros activos (pasa altas, pasa bajas, pasa banda, rechaza banda).
- Circuitos osciladores, generadores de pulsos y de formas de onda.
- Procesamiento analógico de señales: comparadores, sumadores, integradores, derivadores, elementos de retardo, cambios de fase, rectificadores, etc.
- Procesamiento lógico de señales: en ciertas aplicaciones se obtiene el mismo efecto de las compuertas lógicas digitales, entregando ya sea un valor de voltaje cero (falso) o de saturación (verdadero o “uno lógico”).
- Simulación analógica de sistemas dinámicos; ventajas de mayor velocidad y mayor resolución que con circuitos digitales.
- Solución analógica de ecuaciones integro-diferenciales inclusive no lineales, entre otras.

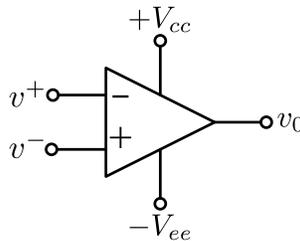


Figura 2.17: Símbolo del amplificador operacional

Donde:

$v^-$ : Terminal inversora.

$v^+$ : Terminal no inversora.

$+V_{cc}$ : Terminal de alimentación positiva.

$-V_{ee}$ : Terminal de alimentación negativa.

$v_0$ : Terminal de Salida.

Como el opamp es un dispositivo activo (está formado por transistores, resistencias y algún condensador), requiere una potencia de continua para funcionar. La mayoría de opamps en circuito integrado requieren dos fuentes de continua, las terminales  $+V_{cc}$  y  $-V_{ee}$  del operacional se conectan a un voltaje positivo y a uno negativo respectivamente, siendo habitual que sean iguales en valor absoluto. Las dos fuentes de alimentación de continua presentan una tierra común. Es interesante observar que el punto tierra de referencia en los opamps es precisamente el terminal común de las dos fuentes de alimentación; esto es, ninguna terminal del opamp se conecta físicamente a tierra (Mejía y Flores, 2015).

Cada ecuación de espacio de estado lineal invariante en el tiempo se puede implementar utilizando un circuito amplificador operacional (Chen, 1999). Las 4 configuraciones utilizadas para este proyecto son las siguientes (Tabla 2.1 Configuraciones del amplificador operacional y sus funciones de transferencia).  
35).

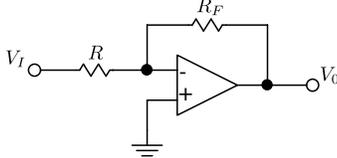
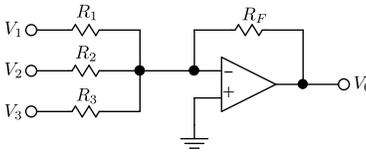
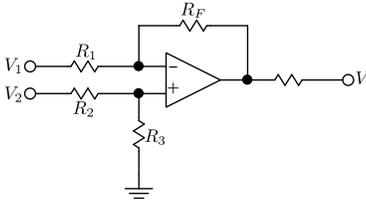
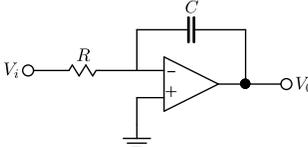
Operador	Configuración	Salida
Amplificador Inversor		$V_0 = -R_F \left( \frac{V_I}{R} \right)$
Sumador inversor		$V_0 = -R_F \left( \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} \right)$
Restador		$V_0 = V_2 \frac{(R_F + R_1)R_3}{(R_3 + R_2)R_1} - V_1 \frac{R_F}{R_1}$
Integrador		$V_0 = -\frac{1}{RC} \int_0^t V_i dt$

Tabla 2.1: Configuraciones del amplificador operacional y sus funciones de transferencia

# Capítulo 3

## Modelado del sistema de levitación

### 3.1. Introducción

Para realizar el diseño de un controlador es necesario contar con un modelo matemático que describa el comportamiento de la planta que se va a controlar, en este caso el levitador. El modelado consiste en captar las características fundamentales del sistema de levitación, de tal manera que sea lo más sencillo posible (Ogata, 1987).

En este capítulo se presenta el modelado del sistema de levitación electromagnética, utilizando la teoría de la fuerza electromagnética y fuerza mecánica. A partir de las leyes físicas se determinó un modelo no lineal en variables de estado que describe el comportamiento del sistema de levitación en el tiempo, se linealizó y se diseñó un observador de orden completo. También se presentan los circuitos electrónicos del sensor y el actuador, describiendo las conversiones de voltaje y corriente que realiza cada uno de ellos, resaltando el valor de las ganancias involucradas en cada conversión.

### 3.2. Sistema de levitación electromagnético

El sistema de levitación electromagnética (Figura 3.1 diagrama a bloques del sistema de levitación electromagnético figure.caption.36) está conformado por 3 elementos con tareas específicas que se relacionan entre ellos (Figura

ra 3.1 diagrama a bloques del sistema de levitación electromagnético (figure.caption.36) con el fin de mantener el objeto levitante, en suspensión.

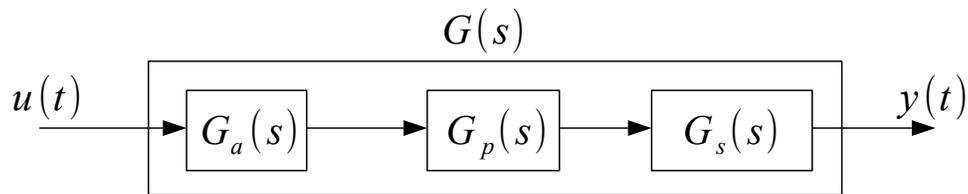


Figura 3.1: diagrama a bloques del sistema de levitación electromagnético

- 1) Planta: Está formada por un electroimán, su labor es suministrar un campo magnético lo suficientemente intenso para poder vencer la fuerza de gravedad que se ejerce en el balón debido a su masa y así mantener un equilibrio de fuerzas, produciendo el fenómeno de la levitación.
- 2) Sensor. Es el circuito encargado de medir la posición del balón en su desplazamiento sobre el eje vertical, entregando un voltaje que depende de la posición, se compara con la salida del observador de orden completo y sirve para estabilizarlo, o bien, es una señal de entrada para el observador.
- 3) Actuador. Es la etapa encargada de regular y adecuar la señal proveniente del sistema de control a una señal de corriente con características específicas, la cual circula en el devanado del electroimán que produce el campo magnético.

Es importante mencionar que, teniendo como objeto levitante un material paramagnético o un ferromagnético se puede realizar levitación por atracción y para un mejor desempeño, en este trabajo se eligió una esfera metálica de hierro (material ferromagnético) con una masa  $m = 8 \times 10^{-3}$  Kg y un diámetro  $D = 0.65$  cm, que además, por su constitución física se desprecia el fenómeno de histéresis al ser sometida a un campo magnético intenso, lo que significa que al ser retirada de la fuente de campo, desaparece casi instantáneamente la imantación que poseía.

### 3.3. Planta

Existen diversas formas de controlar la intensidad de un campo magnético, una de ellas y la que se utilizó en el presente trabajo es usando una bobina como fuente de campo magnético, el cual se produce al circular una corriente eléctrica a través de su devanado. Una bobina es un cilindro de material magnético (núcleo), sobre el cual se enrolla alambre recubierto de barniz que aísla cada una de las vueltas que la forman. La bobina construida para este trabajo está formada por 600 vueltas de alambre magneto de calibre 16 AWG, cuyo núcleo es un cilindro de hierro de 5 cm de longitud y un diámetro  $\Delta = 1.8$  cm y que también presenta características ferromagnéticas e insignificante valor de histéresis.

Los diámetros de la esfera metálica ( $D$ ) y del núcleo de la bobina ( $\Delta$ ) deben guardar la relación mostrada en la Ecuación 3.1 (Hurley y Wolfe, 1997) para obtener un desempeño óptimo, esto es, al tener un núcleo mayor se espera una densidad de líneas de fuerza más distribuida sobre la esfera metálica en la vecindad del centro de la bobina, anulando movimientos horizontales del objeto levitante que podrían causar las líneas de fuerza presentes en los costados de la bobina.

$$\Delta \leq 0.8D \quad (3.1)$$

La distribución del campo magnético en la bobina con geometría cilíndrica es prácticamente uniforme lejos de sus extremos, paralelo al eje de la bobina y proporcional a la intensidad de la corriente eléctrica que recorre la bobina (Jiménez et al., 2005)(Ogata, 1998) así como el número de espiras.

Para realizar las mediciones con exactitud milimétrica, se utilizó un calibrador Vernier que se modificó añadiéndole una base para colocar el balón.

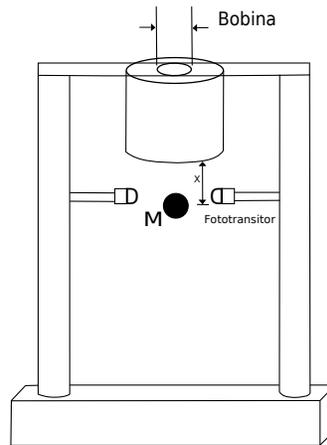


Figura 3.2: planta del sistema de levitación electromagnético

Para obtener la variación de la inductancia con respecto a la posición del balín, se colocó éste sobre la base del Vernier modificado. Se tomó como distancia de referencia  $x = 0\text{mm}$  cuando el balín toca el núcleo de la bobina y se fue bajando el balín milímetro a milímetro midiendo la inductancia en cada una de las posiciones (Tabla 3.1 Inductancia de la bobina contra posición del balín table.caption.38).

Posición $x$ (mm)	Inductancia (mH)
0	16.32
1	15.98
2	15.55
3	15.36
4	15.18
5	15.10
6	15.02
7	14.96
8	14.91
9	14.87
10	14.84
$\infty$	14.69

Tabla 3.1: Inductancia de la bobina contra posición del balín

Los resultados de las mediciones no se consideran valores absolutos sino



### 3.4. Sensor

Para conseguir un buen diseño del sistema de levitación electromagnética, se debe garantizar que la posición del balón sea medida de manera correcta y además que la señal que represente tal medición sea de las mismas características y dimensión a la señal de referencia del sistema de control, para que exista compatibilidad entre ellas. Para esto se propone un circuito (Figura 3.4 Circuito del sistema de medición de la posición del balón) que consta de un LED infrarrojo IR383, un foto-transistor PT1302B como sensor y un amplificador operacional LM358 en configuración de amplificador no inversor como elemento de ganancia para proporcionar un valor adecuado a la señal proveniente del foto-transistor, el potenciómetro se ajustó para que la señal de salida del circuito de medición fuese de 5 V cuando el balón no se interpone entre el foto-transistor y el LED IR.

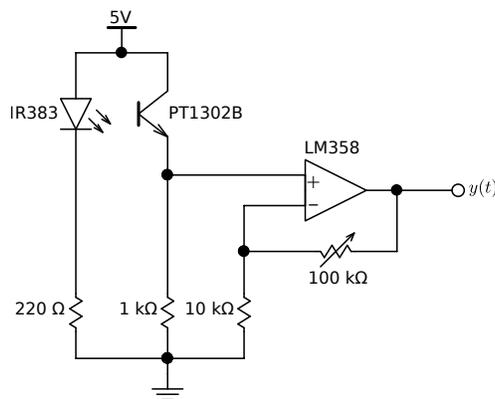


Figura 3.4: Circuito del sistema de medición de la posición del balón

Para caracterizar el sensor se colocó el balón en la base del calibrador Vernier modificado y se procedió de manera similar a la caracterización de la bobina, tomando como referencia cuando el balón entra en contacto con el núcleo de hierro de la bobina y se fue alejando milímetro a milímetro midiendo en esta ocasión el voltaje de salida del circuito (Tabla 3.2 Posición del balón contra voltaje de salida del sensor).table.caption.41).

---

Posición x (mm)	Voltaje (V)
0	0.020
1	0.020
2	0.030
3	0.046
4	0.044
5	0.045
6	0.108
7	1.440
8	4.37
9	4.44
10	4.44

---

Tabla 3.2: Posición del balón contra voltaje de salida del sensor

Con los valores obtenidos, se realizó la gráfica de la posición del balón contra el voltaje que proporciona el sensor a la salida (Figura 3.5 Gráfica de la posición del balón contra el voltaje del sensor [figure.caption.42](#)), en esta se localizó la parte de la gráfica donde se observó la parte más lineal posible con pendiente positiva. Esta comienza aproximadamente en las coordenadas (7, 1.42) y termina en (8, 4.19).

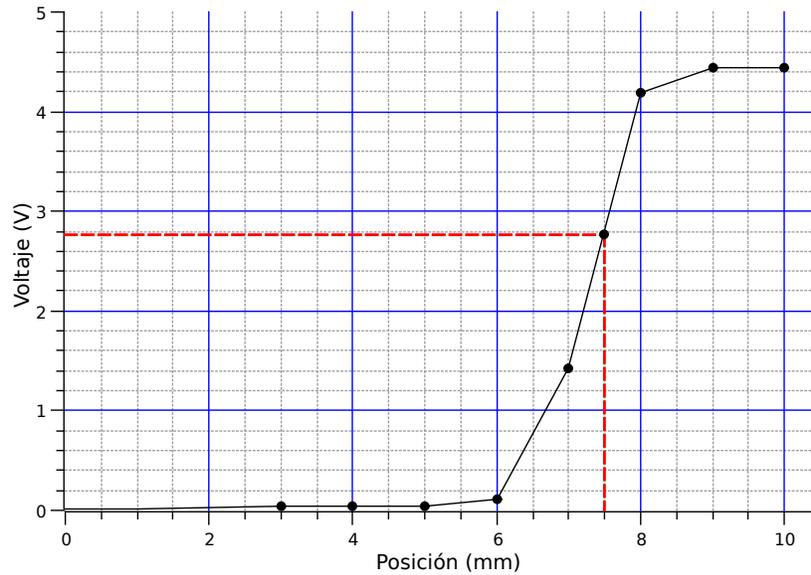


Figura 3.5: Gráfica de la posición del balón contra el voltaje del sensor

El sensor proporciona una función de transferencia  $G_s$  constante, dicho valor es la pendiente de la recta en  $v/m$ . Ecuación 3.3

$$G_s = \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{4.19V - 1.42V}{8mm - 7mm} = \frac{2.77V}{1mm} = 2.77V/mm = 2770V/m \quad (3.3)$$

Se toma el punto intermedio de la recta que se localizó y se proyecta sobre los ejes posición-voltaje para obtener así la distancia y el voltaje de referencia que son a los que va a levitar el balón.

### 3.5. Actuador

El actuador es el elemento que entrega la corriente necesaria dependiendo del voltaje de la señal de control. En los sistemas de control electrónicos los actuadores son circuitos diseñados a base de amplificadores de corriente o de voltaje capaces de soportar las exigencias de la planta. Para el sistema de levitación electromagnética el actuador es el circuito constituido principalmente por un transistor de potencia Darlington TIP142, el cual regula la corriente

y el voltaje que circula a través de la bobina, dicha tarea la realiza con ayuda de un circuito comparador LF353 el cual detecta la variación de corriente en la resistencia de potencia y la señal proveniente del controlador, produciendo una señal que pondrá al amplificador Darlington en corte y saturación, por lo que la bobina será sometida a dos valores de voltaje  $V_{max}$  y  $0V$ .

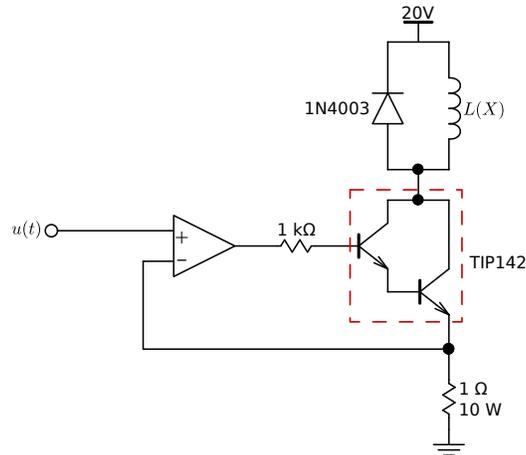


Figura 3.6: Circuito del sistema de actuación

La característica inductiva de la bobina causa que la corriente a través de ella sea proporcional al voltaje entre sus terminales, por lo que al ser sometida a un voltaje máximo, su corriente aumentará rápidamente hasta alcanzar un valor máximo. En contra parte, cuando es sometida a un voltaje de  $0V$ , la corriente se descarga a través del diodo.

Por lo tanto, el amplificador Darlington actúa en las transiciones de encendido y apagado a frecuencias del orden de los 100 Hz, de esta manera es posible controlar el nivel de corriente que circula por la bobina, lo cual se ve reflejado en cambios de intensidad del campo magnético lo que mantiene la esfera en levitación una vez completado el diseño del sistema.

### 3.6. Modelo matemático

Como se mencionó anteriormente, existen dos principios de levitación magnética: por repulsión y por atracción. Este último por naturaleza es inestable, razón por la cual se requieren configuraciones especiales de campos que se repelen o de controladores actuando sobre la magnitud de la fuerza magnética para producir campos que se atraen.

Para que el sistema sea estable debe existir o debe proponerse una región alrededor de un punto de equilibrio en el cual todas las fuerzas que se generaran apunten hacia él. De acuerdo a la caracterización de la bobina, el movimiento del balón queda restringido físicamente a la dirección vertical cuyo movimiento es provocado por las fuerzas que actúan sobre él, las cuales son la fuerza magnética ejercida por la bobina y la fuerza gravitacional debida al peso del balón. Por tanto, cuando las fuerzas actuantes sobre la esfera tienen la misma magnitud implica que la esfera se encuentra en equilibrio o se encuentra flotando a una determinada posición  $x$ .

#### 3.6.1. Modelo no lineal

La co-energía magnética del sistema de levitación está definida en función de la corriente a través de la bobina y de la distancia de separación con el balón (Cruz, 2009)(Jiménez et al., 2005)(Milena, 2010), matemáticamente se expresa como:

$$\omega_m(i, x) = \frac{1}{2}L(x)i^2 \quad (3.4)$$

Sustituyendo la Ecuación 3.2 en la Ecuación 3.4 se tiene:

$$\omega_m(i, x) = \frac{1}{2}i^2(L_I + L_0e^{-\frac{x}{a}}) \quad (3.5)$$

De acuerdo a la Ecuación 2.6 la fuerza electromagnética es el gradiente de la co-energía magnética, en la pro-

puesta de esta tesis, el sistema de levitación electromagnética es de un grado de libertad, por lo que solo interesa la fuerza electromagnética generada en una dirección, por tanto:

$$\vec{F}_e = \frac{\partial \omega_m}{\partial x} = -\frac{1}{2a} i^2 L_0 e^{-\frac{x}{a}} \quad (3.6)$$

En equilibrio estático, esta fuerza es exactamente balanceada por la fuerza gravitacional actuante sobre el balón, esto es:

$$mg = -\frac{1}{2a} i^2 L_0 e^{-\frac{x}{a}} \quad (3.7)$$

Siendo  $m$  la masa del balón y  $g = 9.81m/s^2$  la aceleración de la gravedad, el signo menos indica que la fuerza electromagnética es opuesta al peso del balón. Cuando se cumple que  $x = d$  e  $i = I$ , sustituyendo en Ecuación 3.7 Modelo no lineal equation.3.6.7 y despejando  $I$  se tiene:

$$I = \sqrt{\frac{2mga}{L_0 e^{-\frac{d}{a}}}} \quad (3.8)$$

Donde  $d$  es la distancia de levitación e  $I$  la corriente requerida para generar el campo magnético que mantenga levitando al balón. Se obtuvieron el resto de los parámetros necesarios para el modelo matemático (Tabla 3.3 Parámetros del sistema de levitación table.caption.44).

Parámetro	Valor
$L_0$	0.00163H
$m$	0.008kg
$a$	0.00535m
$d$	0.0075m
$I$	2.09A

Tabla 3.3: Parámetros del sistema de levitación

De acuerdo a la Ecuación 2.9 Fuerza mecánica equation.2.3.9, el modelo que rige el comportamiento de la esfera en levitación está dada por la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
 ma &= \sum f \\
 ma &= mg - F_e \\
 m\ddot{x} &= mg - \frac{1}{2a}i^2L_0e^{-\frac{x}{a}}
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Donde  $F_e$  es la fuerza electromagnética que se genera,  $m$  es la masa y  $g$  es la fuerza de gravedad que contrarresta a la fuerza electromagnética basándonos en la definición de la segunda ley de Newton. Dividiendo entre  $m$  finalmente el modelo del sistema queda como:

$$\ddot{x} = g - \frac{1}{2ma}i^2L_0e^{-\frac{x}{a}}
 \tag{3.10}$$

Éstas ecuaciones están gobernadas por la segunda ley de Newton donde la fuerza electromagnética compensa a la fuerza de gravedad en el objeto levitado y  $x_1$  y  $x_2$  describen como variables de estado a la posición y velocidad respectivamente. Asignando estados:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x \\
 \dot{x}_1 &= \dot{x} = x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \ddot{x}
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

De acuerdo a la Ecuación 3.11 Modelo no lineal equation.3.6.11, la representación en variables de estado del sistema de levitación electromagnética es:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= g - \frac{1}{2ma}i^2L_0e^{-\frac{x_1}{a}} \\
 y(t) &= x_1
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

La salida se obtiene a través del fotosensor mediante el cual se realiza la medición de posición de la esfera.

### 3.6.2. Modelo lineal

La Ecuación 3.18 Modelo lineal equation.3.6.18 es una representación en variables de estado no lineal. Para utilizar técnicas de control lineal, se requirió linealizar el modelo matemático usando la Ecuación 2.27 Variables de estado equation.2.4.27, el punto de operación del cual se va a hacer la linealización es  $x = d$  e  $i = I$ :

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(g - \frac{1}{2ma}i^2L_0e^{-\frac{x_1}{a}})}{\partial x_1} & \frac{\partial(g - \frac{1}{2ma}i^2L_0e^{-\frac{x_1}{a}})}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x_1 = d \\ i = I}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2ma^2}i^2L_0e^{-\frac{x_1}{a}} & 0 \end{bmatrix}_{\substack{x_1 = d \\ i = I}} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3826.73 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial i} \\ \frac{\partial(g - \frac{1}{2ma}i^2L_0e^{-\frac{x_1}{a}})}{\partial i} \end{bmatrix}_{\substack{x_1 = d \\ i = I}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{i}{ma}L_0e^{-\frac{x_1}{a}} \end{bmatrix}_{\substack{x_1 = d \\ i = I}} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -19.59 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Con base en los parámetros de la Tabla 3.3 Parámetros del sistema de levitación table.caption.44 y la linealización de la Ecuación 3.13 Modelo lineal equation.3.6.13, el modelo lineal en variables de estado de la planta del sistema de levitación esta dado por la Ecuación 3.14 Modelo lineal equation.3.6.14.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3826.73 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ -19.59 \end{bmatrix} i(t) \quad (3.14)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} X$$

La ecuación anterior se puede representar con un diagrama a bloques (Figura 3.7 Diagrama a bloques de la planta del sistema de levitación en variables de estado figure.caption.45).

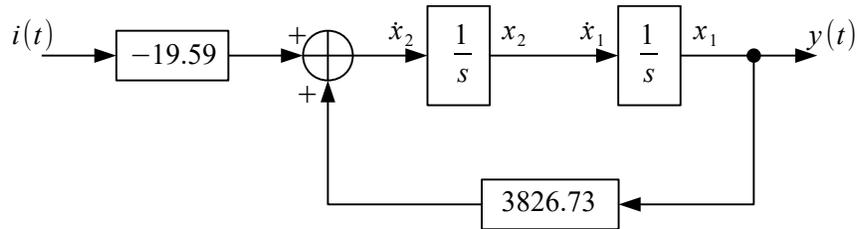


Figura 3.7: Diagrama a bloques de la planta del sistema de levitación en variables de estado

De acuerdo a los parámetros de la ecuación de Mason, el diagrama anterior tiene una trayectoria directa  $M_1 = -\frac{19.59}{s^2}$  y un solo lazo  $P_{11} = \frac{3826.73}{s^2}$ . Aplicando la ecuación de Mason (Ecuación 2.12 Diagrama a bloques equation.2.4.12) la función de transferencia en el dominio de Laplace es:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{M_1}{1 - P_{11}} = -\frac{19.59}{s^2 - 3826.73} \quad (3.15)$$

De acuerdo a la Ecuación 3.3 Sensor equation.3.4.3 el sensor tiene una ganancia  $G_s = 2770\text{V/m}$  y el actuador se considera que tiene una función de transferencia unitaria  $G_a$ , tanto el sensor como el actuador están en cascada con la planta, por lo tanto la función de transferencia del sistema de levitación electromagnética a lazo abierto es:

$$G(s) = G_s G_a G_p = (2770)(1)\left(-\frac{19.59}{s^2 - 3826.73}\right) \quad (3.16)$$

$$G(s) = -\frac{54264.3}{s^2 - 3826.73}$$

Teniendo la función de transferencia del sistema de levitación se llevó a su forma canónica controlador con la Ecuación 2.31 Representación en espacio de estados de sistemas definidos por su función de transferencia equation.2.4.31 para su análisis en espacio de estados:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3826.73 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.17)$$

$$y(t) = [-54264.3 \ 0] X$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = 3826.73x_1 + u(t)$$

$$y(t) = -54264.3x_1$$

Con la ecuación anterior se encontró su representación en diagrama a bloques (Figura 3.8 Diagrama a bloques del sistema de levitación en variables de estado figure.caption.46).

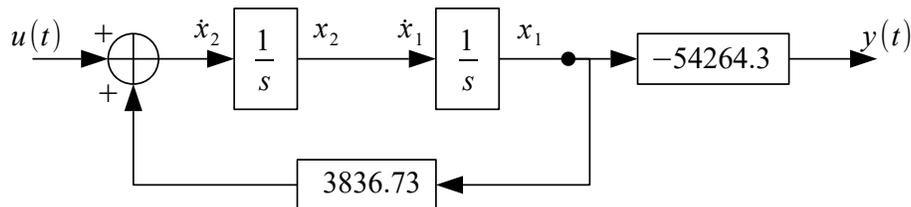


Figura 3.8: Diagrama a bloques del sistema de levitación en variables de estado

# Capítulo 4

## Diseño e implementación del sistema de control

### 4.1. Introducción

En este capítulo se presenta el diseño, análisis e implementación del estimador de estados para realizar el control del sistema de levitación electromagnética por realimentación de estados estimados. La construcción, el diseño y las simulaciones del compensador se efectuaron con ayuda de la herramienta XCOS que está dentro de la paquetería de SciLab.

### 4.2. Realimentación de estados para sistema de segundo orden

Se propone un sistema de la forma dado por la Ecuación 2.26 Variables de estado equation.2.4.26, donde sus matrices de estado están dados por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega_0 x_2 \\ \dot{x}_2 &= \omega_0 x_1 + \omega_0 u(t) \\ y(t) &= -k_0 x_1 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$C = [-k_0 \ 0] \quad D = [0]$$

La función de transferencia de este sistema esta dada por:

$$G_0(s) = \frac{-k_0}{s^2 - \omega_0^2} \quad (4.2)$$

Con una representación a bloques de la siguiente forma:

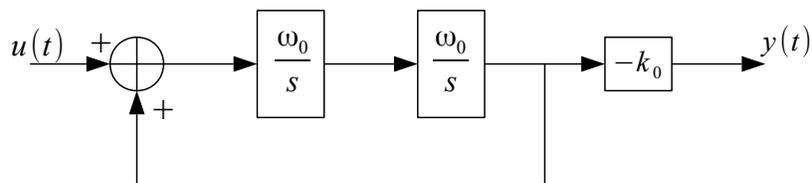


Figura 4.1: Diagrama a bloques del sistema propuesto

Donde  $\omega_0$  representa la dinámica del sistema y  $-k_0$  es la ganancia de lazo abierto. Considerando el sistema anterior y asumiendo que todas las variables de estado están disponibles, se pudo obtener un esquema por realimentación de estados (Figura 4.2 Esquema propuesto de realimentación de estados figure.caption.48).

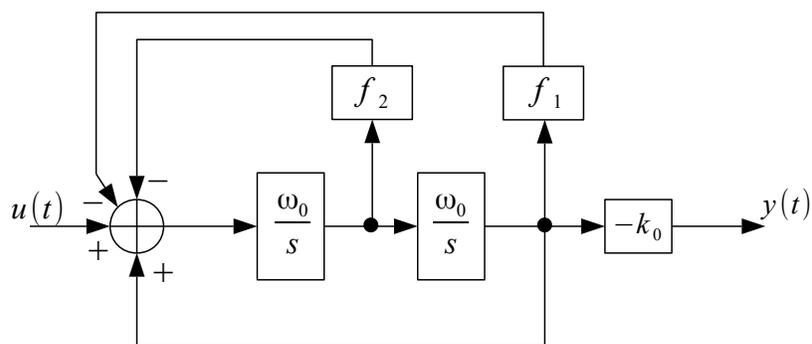


Figura 4.2: Esquema propuesto de realimentación de estados

También se obtuvo la siguiente ley de control, asumiendo que la entrada de referencia es  $r = 0$ .

$$u = -FX = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Existe una entrada  $u_1$  que transfiere el estado inicial  $x_0$  a un estado  $x_1$  en un tiempo finito. Si ahora se escoge  $r_1 = y_1 + Fx$ , entonces la entrada  $r_1$  del sistema de realimentación transferirá el estado inicial  $x_0$  a un estado  $x_1$ . Se utilizó la fórmula de Ackermann para encontrar las ganancias del vector  $F$  para una realimentación de estados.

Para poder encontrar el vector de ganancias  $F$  del controlador, se debe resolver  $[B \ AB]^{-1}$  y  $\phi(A)$ .

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$[B \ AB]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0^2 \\ \omega_0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\omega_0} \\ \frac{1}{\omega_0^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi(A) = (s + \lambda_1)(s + \lambda_2) = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2 \quad (4.5)$$

Donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son la asignación de polos propuesta.  $\phi(A)$  se expresa en términos de la matriz  $A$  mediante el teorema de Cayley-Hamilton (Ecuación 2.40 Fórmula de Ackermannequation.2.4.40) de la siguiente manera:

$$\phi(A) = A^2 + \alpha_1 A + \alpha_2 I_2 \quad (4.6)$$

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} \omega_0^2 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} \omega_0^2 + \alpha_2 & \alpha_1 \omega_0 \\ \alpha_1 \omega_0 & \omega_0^2 + \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Sustituyendo la Ecuación 4.4 Realimentación de estados para sistema de segundo orden equation.4.2.4 y la Ecuación 4.8 Realimentación de estados para sistema de segundo orden equation.4.2.8, en la Ecuación 2.36 Formula de Ackermannequation.2.4.36, se tiene:

$$F = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\omega_0} \\ \frac{1}{\omega_0^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_0^2 + \alpha_2 & \alpha_1 \omega_0 \\ \alpha_1 \omega_0 & \omega_0^2 + \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\omega_0^2 + \alpha_2}{\omega_0^2} & \frac{\alpha_1}{\omega_0} \end{bmatrix}$$

De la ecuación anterior se obtienen los valores de ganancia para la realimentación de estados.

$$f_1 = \frac{\omega_0^2 + \alpha_2}{\omega_0^2} \quad \text{y} \quad f_2 = \frac{\alpha_1}{\omega_0} \quad (4.10)$$

Para diseñar un sistema de control mediante la asignación de polos es suficiente con especificar los polos de lazo cerrado deseados ( $s_1, s_2, \dots, s_n$ ) y con ellos calcular la ganancia de realimentación  $F$ .

### 4.3. Realimentación de estados con esquema integral

Si la planta no tiene integrador en su trayectoria directa (planta tipo 0), para eliminar el error en estado estacionario se inserta un integrador en la trayectoria directa entre el comparador de error y la planta para poder seguir una señal tipo escalón unitario.

Se insertó un integrador con ganancia  $k_i$  al diagrama de realimentación con  $n$  estados del capítulo 2.4.6 con su representación en variables de estado dada por la Ecuación 2.26 Variables de estado equation.2.4.26 se cerró el lazo con la salida  $y(t)$  (Figura 4.3 Realimentación de estados con integrador figure.caption.49).

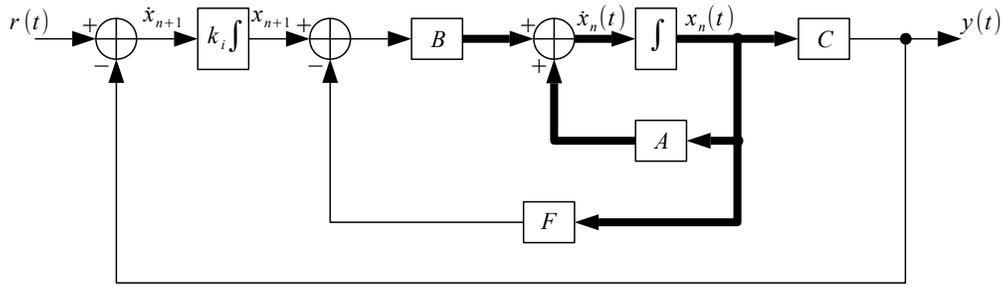


Figura 4.3: Realimentación de estados con integrador

Se considera que ahora el sistema posee dos estados, el vector de estados  $\dot{X}_n(t)$  y un estado  $\dot{X}_{n+1}(t)$  debido a la inclusión del integrador. De la representación anterior se obtuvieron dos representaciones en variables de estado, la del vector de estados  $\dot{X}_n(t)$ :

$$\dot{X}_n = (A - BF)X_n + BX_{n+1} \quad (4.11)$$

$$y = CX_n$$

Y la representación en variables de estado del estado  $\dot{X}_{n+1}$ :

$$\begin{aligned} \dot{X}_{n+1} &= k_i(r(t) - y(t)) \\ &= k_i(r(t) - CX_n) \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\dot{X}_{n+1} = -k_iCX_n + k_ir(t)$$

$$y = CX_n$$

De las Ecuaciones 4.11 Realimentación de estados con esquema integralequation.4.3.11 y 4.12 Realimentación de estados con esquema integralequation.4.3.12 se obtuvo una representación en variables de estado del sistema completo  $\dot{X}$  donde están incluidas el vector de ganancias  $F$  y la ganancia  $k_i$  del integrador agregado:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{X}_n \\ \dot{X}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BF & B \\ -k_i C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n \\ X_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_i \end{bmatrix} r(t) \quad (4.13)$$

$$y(t) = [C \ 0] \begin{bmatrix} X_n \\ X_{n+1} \end{bmatrix}$$

Sus matrices son:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A - BF & B \\ -k_i C & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_i \end{bmatrix} \quad \hat{C} = [C \ 0] \quad (4.14)$$

Basta con proponer una reubicación de polos  $(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, s_{n+1})$  e igualar con el determinante de la matriz  $(sI - \hat{A})$  para encontrar el valor del vector de ganancias  $F$  y la ganancia  $k_i$ .

Aplicando al sistema dado por la Ecuación 4.1 Realimentación de estados para sistema de segundo orden equation.4.2.1

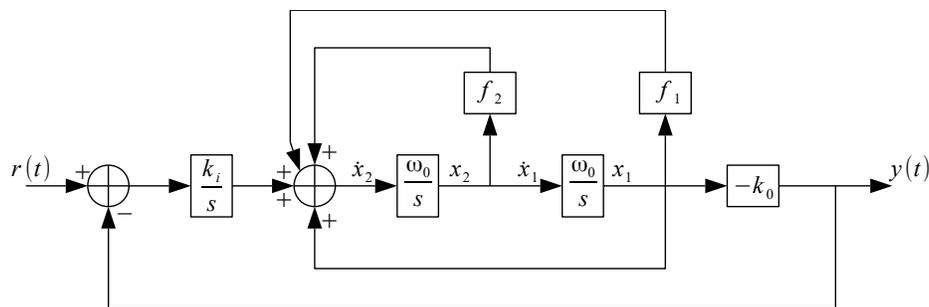


Figura 4.4: realimentación de estados con integrador para el sistema propuesto

Sustituyendo las ecuaciones de estado en la matriz  $\hat{A}$  se tiene:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} [f_1 \ f_2] & \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} \\ -k_i [-k_0 \ 0] & 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 & 0 \\ \omega_0 - f_1\omega_0 & -f_2\omega_0 & \omega_0 \\ k_i k_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se obtuvieron los autovalores de la matriz  $\hat{A}$ .

$$\begin{aligned} |sI - \hat{A}| &= s(s^2 + sf_2\omega_0) + \omega_0(sf_1\omega_0 - \omega_0s - k_ik_0\omega_0) \\ |sI - \hat{A}| &= s^3 + f_2\omega_0s^2 + f_1\omega_0^2s - \omega_0^2s - k_ik_0\omega_0^2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$|sI - \hat{A}| = s^3 + (f_2\omega_0)s^2 + (f_1\omega_0^2 - \omega_0^2)s + (-k_ik_0\omega_0^2)$$

Se propuso una nueva reubicación de polos, como el sistema es de tercer orden debido al integrador agregado, la reubicación es de la forma  $s^3 + \alpha_1s^2 + \alpha_2s + \alpha_3$ , se igualó a la ecuación característica dada por los autovalores de la matriz  $\hat{A}$ .

$$s^3 + (f_2\omega_0)s^2 + (f_1\omega_0^2 - \omega_0^2)s + (-k_ik_0\omega_0^2) = s^3 + \alpha_1s^2 + \alpha_2s + \alpha_3 \quad (4.17)$$

Se igualaron los coeficientes de la función de transferencia con los del polinomio propuesto.

$$f_2\omega_0 = \alpha_1 \quad f_1\omega_0^2 - \omega_0^2 = \alpha_2 \quad -k_ik_0\omega_0^2 = \alpha_3 \quad (4.18)$$

Despejando  $f_1$ ,  $f_2$  y  $k_i$  se obtuvieron las ganancias del integrador y las de la realimentación de estados.

$$k_i = \frac{-\alpha_3}{k_0 \omega_0^2} \quad f_1 = \frac{\omega_0^2 + \alpha_2}{\omega_0^2} \quad f_2 = \frac{\alpha_1}{\omega_0} \quad (4.19)$$

#### 4.4. Realimentación de estados estimados

En el enfoque de asignación de polos para diseñar sistemas de control, se asumió que todas las variables de estado están disponibles para la realimentación. Para el sistema de levitación, sin embargo, no todas las variables de estado están disponibles. Se propone un observador de estado de orden completo para estimar las variables de estado no disponibles (Figura 4.5 Esquema de realimentación de estados estimados con integrador) para el sistema de segundo orden dado por las Ecuaciones 4.1 Realimentación de estados para sistema de segundo orden equation.4.2.1 y 4.2 Realimentación de estados para sistema de segundo orden equation.4.2.2.

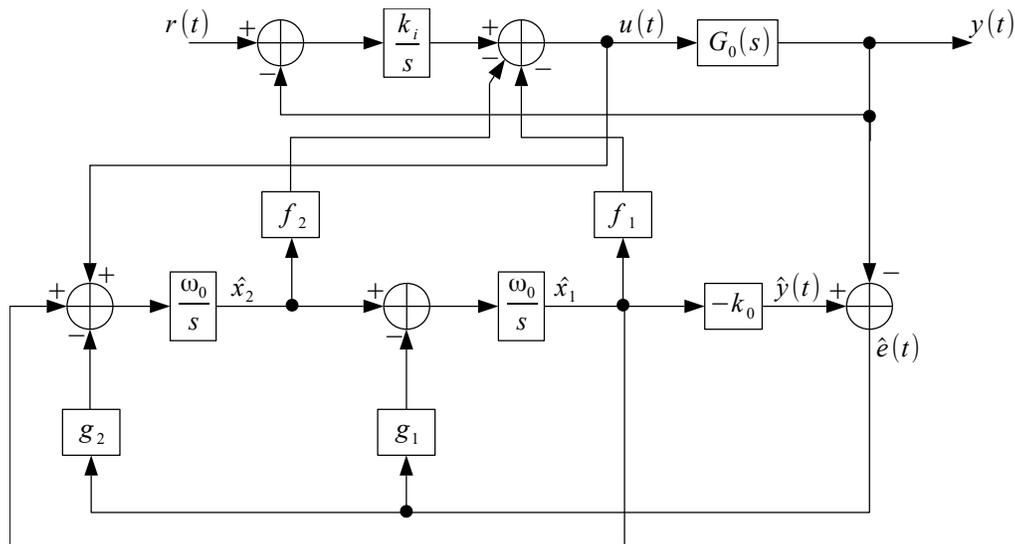


Figura 4.5: Esquema de realimentación de estados estimados con integrador

Donde  $f_1$ ,  $f_2$  y  $k_i$  están dados por la Ecuación 4.19 Realimentación de estados con esquema integrador equation.4.3.19 y  $g_1$  y  $g_2$  son el vector de ganancias  $G$  para estabilizar el observador, usando la formula de Ackermann se calculó el vector de ganancias  $G$ .

$$CA = \begin{bmatrix} -k_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_0\omega_0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -k_0 & 0 \\ 0 & -k_0\omega_0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{k_0} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{k_0\omega_0} \end{bmatrix}$$

$$\phi(A) = (s + \mu_1)(s + \mu_2) = s^2 + \beta_1 s + \beta_2 \quad (4.21)$$

$\mu_1$  y  $\mu_2$  son la reubicación de polos propuestos. Se expresa  $\phi(A)$  mediante el teorema de Cayley-Hamilton:

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} \omega_0^2 + \beta_2 & \beta_1\omega_0 \\ \beta_1\omega_0 & \omega_0^2 + \beta_2 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Sustituyendo la Ecuación 4.20 Realimentación de estados estimado [equation.4.4.20](#) y la Ecuación 4.22 Realimentación de estados estimado [equation.4.4.22](#) en la Ecuación 2.46 Método para obtener las ganancias del observador [equation.2.4.46](#):

$$G = \begin{bmatrix} \omega_0^2 + \beta_2 & \beta_1\omega_0 \\ \beta_1\omega_0 & \omega_0^2 + \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{k_0} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{k_0\omega_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_1}{k_0} \\ -\frac{\omega_0^2 + \beta_2}{k_0\omega_0} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$g_1 = -\frac{\beta_1}{K_0} \quad \text{y} \quad g_2 = -\frac{\omega_0^2 + \beta_2}{K_0\omega_0} \quad (4.24)$$

## 4.5. Implementación

Para poder utilizar el esquema de control propuesto (Figura 4.5 Esquema de realimentación de estados estimados con integrador [figure.caption.51](#)) en el sistema de levitación representado por las Ecuación 3.17 Modelo lineal [equation.3.6.17](#), fue necesario llevarlo a la forma de la Ecuación 4.1 Realimentación de estados para sistema de segundo orden [equation.4.2.1](#), para esto se partió del diagrama a bloques del sistema (Figura 4.1 Diagrama a bloques del sistema

propuestofigure.caption.47).

El valor de la ganancia en la realimentación del sistema dado por el denominador de la función de transferencia en la Ecuación 3.16 Modelo linealequation.3.6.16 es el resultado de una diferencia de cuadrados  $(s + \omega_0)(s - \omega_0) = s^2 - \omega_0^2$  donde  $\omega_0^2 = 3826.73$  por lo que se puede expresar en dos bloques separados  $\omega_0 = 61.8605$  conectados en cascada.

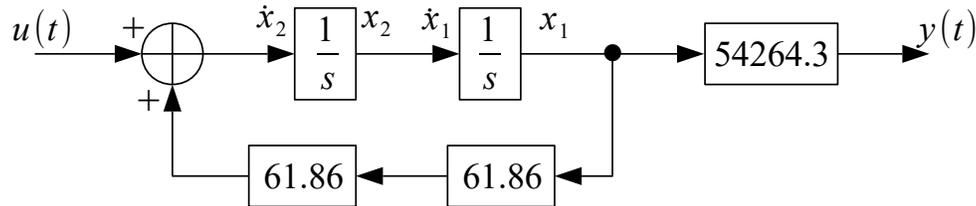


Figura 4.6: Sistema de levitación con 2 ganancias en cascada en la realimentación

Se colocaron los nuevos bloques de ganancia  $\omega_0$  en la trayectoria de los integradores como ganancias de estos, el valor de la ganancia en la realimentación es cambiado por una ganancia unitaria, la señal que pasa por la realimentación unitaria es  $x_1\omega_0^2$  la cual es la misma señal que se tiene en el sistema propuesto.

En el modelo obtenido del sistema de levitación, la salida es  $y(t) = x_1k$ , sin embargo al hacer la realimentación unitaria, la salida se ve alterada por las ganancias  $\omega_0$  dando una salida  $y(t) = \omega_0^2x_1k$ , para evitar este problema y mantener la salida igual al sistema original de se propuso una nueva ganancia  $k_0 = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{-54264.3}{3826.73} = -14.18$ .

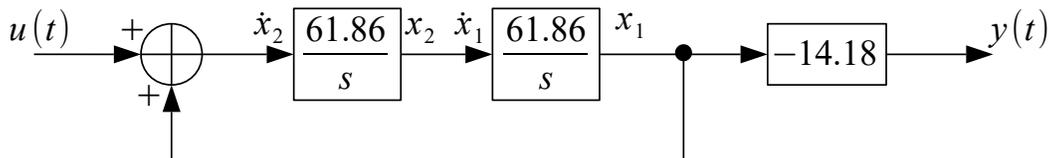


Figura 4.7: Nuevo diagrama a bloques del sistema de levitación

Con esto, el modelo matemático del levitador se puede representar de la

forma de la Ecuación 4.1 Realimentación de estados para sistema de segundo orden equation.4.2.1.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= 61.86x_2 \\
 \dot{x}_2 &= 61.86x_1 + 61.86u(t) \\
 y(t) &= -14.18x_1
 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 61.86 \\ 61.86 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 61.86 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$C = [-14.18 \quad 0] \quad D = [0]$$

Por medio de la instrucción `ss2tf()` de Scilab se comprobó que los sistemas dados por las Ecuaciones 3.17 Modelo lineal equation.3.6.17 y 4.25 Implementación equation.4.5.25 tienen exactamente la misma función de transferencia dejando en evidencia que el sistema no se ha alterado, únicamente cambió su representación en variables de estado.

Para el esquema realimentación de estados se propuso una reubicación de polos en  $\phi(A)$ .

$$\begin{aligned}
 \phi(A) &= (s + 40 + 10j)(s + 40 - 10j) \\
 \phi(A) &= s^2 + 80s + 1700
 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Sustituyendo los valores correspondientes en la Ecuación 4.10, se obtuvieron las ganancias  $f_1$  y  $f_2$ .

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{(61.86)^2 + 1700}{(61.86)^2} & f_2 &= \frac{80}{61.86} \\
 f_1 &= 3.8261 & f_2 &= 1.2932
 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Se sustituyeron los valores obtenidos en el esquema de realimentación para obtener el diagrama a bloques del sistema de control del levitador por realimentación de estados.

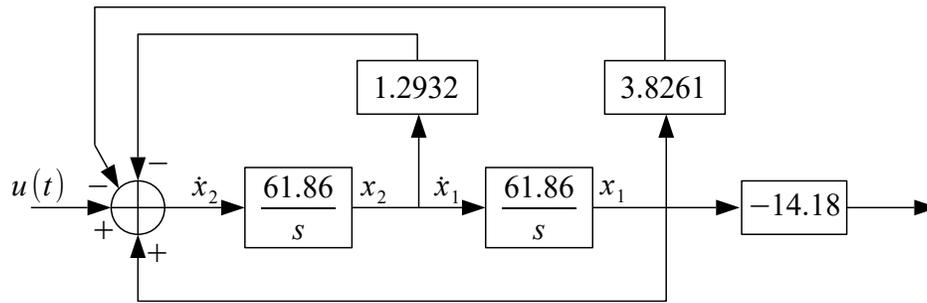


Figura 4.8: Sistema de levitación con realimentación de estados

Se propuso una nueva reubicación de polos  $\phi_1(A)$  para la realimentación de estados estimados y el integrador y otra reubicación de polos  $\phi_2(A)$  para el observador.

$$\begin{aligned}\phi_1(A) &= (s + 40 + 10j)(s + 40 - 10j)(s + 40) \\ \phi_1(A) &= s^3 + 120s^2 + 4900s + 68000\end{aligned}\quad (4.28)$$

$$\begin{aligned}\phi_2(A) &= (s + 100 + 10j)(s + 100 - 10j) \\ \phi_2(A) &= s^2 + 200s + 10100\end{aligned}\quad (4.29)$$

Aplicando las Ecuaciones 4.19 Realimentación de estados con esquema integralequation. y 4.24 Realimentación de estados estimadoequation.4.4.24, y utilizando los valores obtenidos del nuevo modelo, las reubicaciones se tiene:

$$\begin{aligned}k_i &= -\frac{68000}{(14.18)(61.86)^2} & f_1 &= \frac{(61.86)^2 + 4900}{(61.86)^2} & f_2 &= \frac{120}{61.86} \\ k_i &= -1.2531 & f_1 &= 2.2804 & f_2 &= 1.9398\end{aligned}\quad (4.30)$$

$$\begin{aligned}g_1 &= -\frac{200}{14.18} & g_2 &= -\frac{61.86^2 + 10100}{(14.18)(61.86)} \\ g_1 &= -14.1043 & g_2 &= -15.871\end{aligned}\quad (4.31)$$

Se sustituyeron los valores obtenidos en el esquema de realimentación de estados estimados con integrador para obtener el diagrama a bloques del sistema de control del levitador.



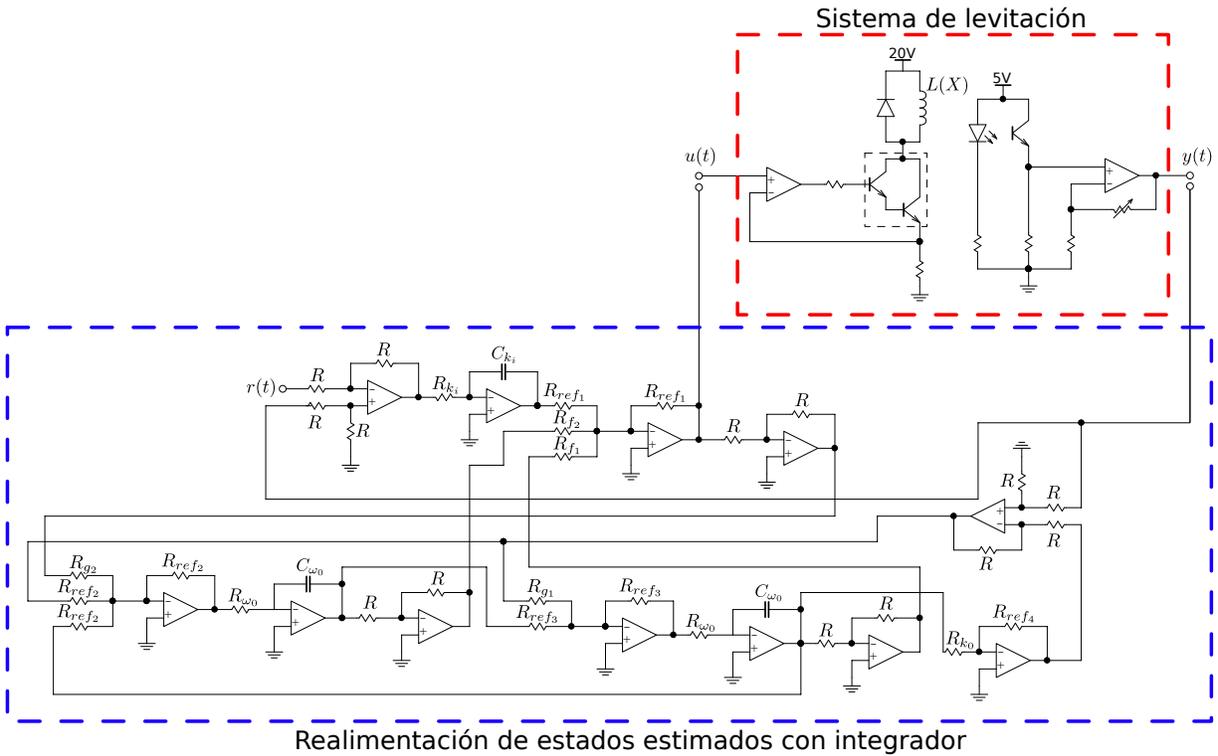


Figura 4.10: Implementación del observador con amplificadores operacionales

El circuito de la realimentación de estados estimados se compone de 3 integradores, dos de ellos son los estados del sistema de levitación con ganancia  $\omega_0 = 61.86$  y el otro el integrador en la trayectoria directa del sistema original con ganancia  $k_i = 1.25$ .

## 4.6. Pruebas y resultados

Se realizaron las simulaciones tanto del sistema de levitación a lazo abierto como las simulaciones con la realimentación de estados diseñada.

Para estas simulaciones se utilizó el entorno de simulación visual XCOS, un editor gráfico para la construcción de modelos de sistemas dinámicos híbridos como Simulink. Los modelos se pueden construir, cargar, guardar, compilar, simular, mediante la GUI de XCOS. Forma parte de Scilab y es una alterna-

tiva de código abierto y gratuita a Simulink de Matlab.

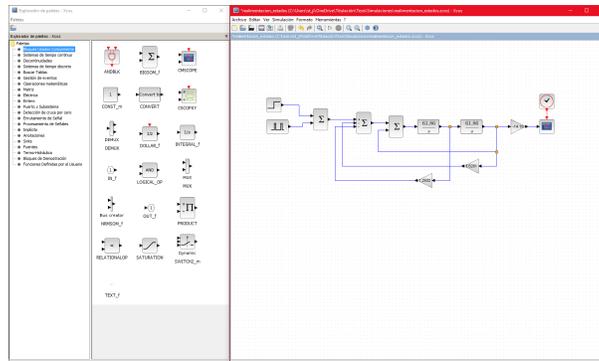


Figura 4.11: XICOS de Scilab

Se armó y simuló el diagrama a bloques del sistema de levitación a lazo abierto (Figura 4.7 Nuevo diagrama a bloques del sistema de levitación figure.caption.53). Analizando su respuesta a una señal escalón unitario:

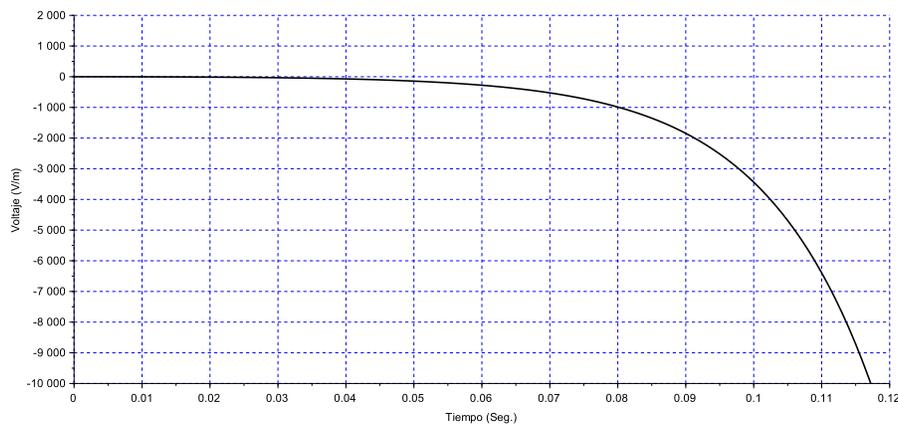


Figura 4.12: Respuesta a una señal escalón unitario del sistema de levitación

Se observó que la señal empieza con una amplitud de cero y con el tiempo, la señal tiende al infinito negativo, lo que indica que la respuesta a la señal escalón del sistema de levitación es inestable.

Se armó el control por realimentación de estados diseñado en XICOS para analizar su respuesta a una señal escalón unitario.

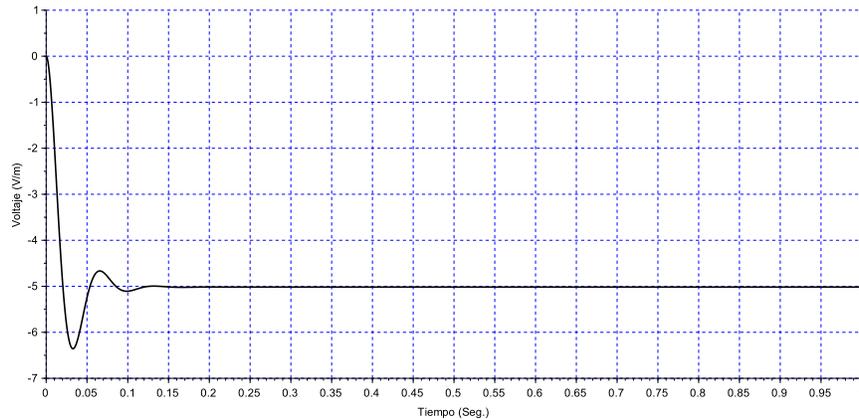


Figura 4.13: Respuesta del sistema de levitación con realimentación de estados

Se observó que con este control se produce un pequeño sobreimpulso pero el sistema se estabiliza cerca de  $-5$ , las ganancias obtenidas sirven para reubicar los polos del sistema en  $\phi(A)$  y la planta ya no se dispara al infinito negativo, llegando a su estado estacionario a los 0.2 segundos.

Se armó en XCOS el segundo control, la realimentación de estados con un integrador. De igual manera que en los casos anteriores se analizó su respuesta a una señal escalón unitario.

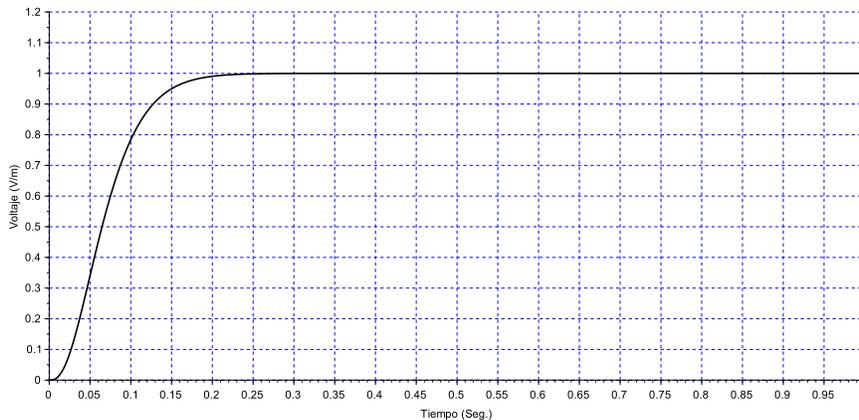


Figura 4.14: Respuesta del sistema de levitación con realimentación de estados y un integrador

Con este control, el sistema de igual manera se estabilizó llegando a su es-

tado estacionario en menos de 0.3 segundos, a diferencia del caso anterior, se estabilizó en la referencia dada por la señal escalón y no existe sobreimpulso, llegando al estado estacionario de manera suave.

Para dejar en evidencia que el sistema sigue referencias, se le proporcionó una señal cuadrada de 1 volt como referencia con una frecuencia de 0.16 Hz y un offset de 0.8 volts.

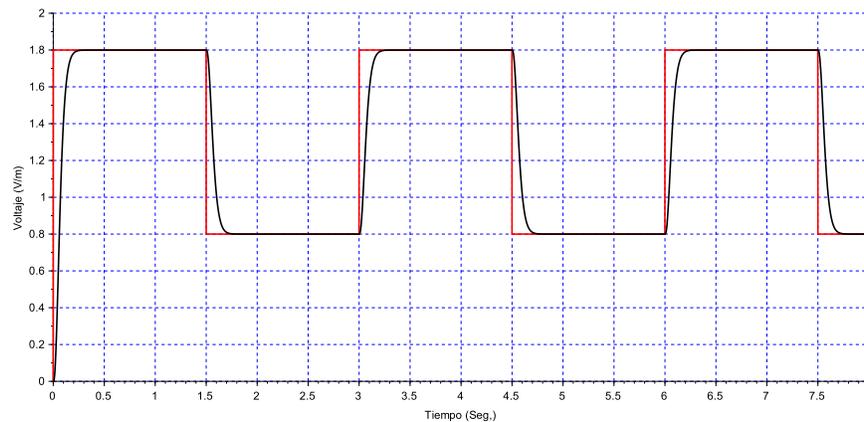


Figura 4.15: Respuesta del sistema de levitación con realimentación de estados e integrador a una señal cuadrada

Analizando la señal de referencia  $r(t)$  y la señal de salida  $u(t)$ , el seguimiento es visible, extrapolando la respuestas obtenida con la del escalón unitario se observa como la salida tarda aproximadamente 0.3 segundos en alcanzar a la señal de referencia. Se armó físicamente el circuito con operacionales propuesto (Figura 4.10 Implementación del observador con amplificadores operacionales figure.caption.56) para aplicar el control por realimentación de estados estimados con integrador al sistema de levitación (Anexos B Evidencia de la implementación del sistema appendix.Alph2).

Utilizando la tarjeta Analog Discovery de Digilent se obtuvieron las señales de salida y referencia.

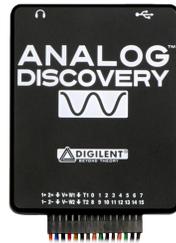


Figura 4.16: Tarjeta Analog Discovery

La tarjeta Analog Discovery es un instrumento conectado por USB que permite medir, visualizar, analizar, grabar y controlar circuitos mixtos de señales analógicas y digitales de todo tipo.

El software que controla la Analog Discovery se llama WaveForms. Con su función Scope es posible observar señales de voltaje, típicamente en un gráfico bidimensional, con el eje horizontal que representa el tiempo y eje vertical que representa el voltaje de la (s) señal (es).



Figura 4.17: Entorno del software WaveForms

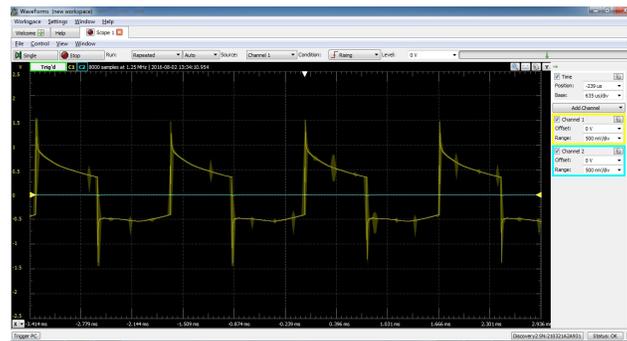


Figura 4.18: Función Scope de WaveForm

Usando un circuito 555 se generó una señal de referencia con las mismas características que en la simulación (señal cuadrada de 1 volt con una frecuencia de 0.16 Hz y un offset de 0.8 volts) y con ayuda de la tarjeta Analog Discovery se obtuvieron datos (Anexos BEvidencia de la implementación del sistemaappendix.Alph2) como la señal de salida. Con Scope fue posible obtener los puntos que el software utiliza para graficar la señal medida, permitiendo utilizar el software de graficado SciDavis para recrear punto a punto la misma señal medida con WaveForm.

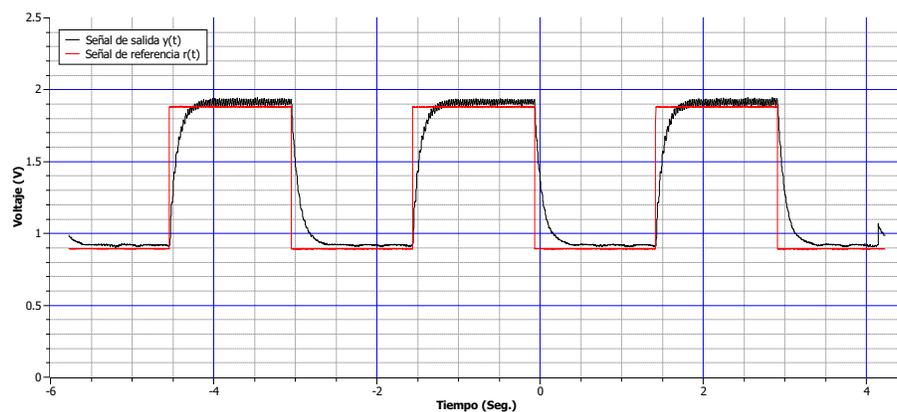


Figura 4.19: Respuesta medida del sistema de levitación con realimentación de estados estimados con integrador

En rojo se observa la señal de referencia  $r(t)$  creada con el circuito 555 y en negro la señal de salida  $y(t)$  la cual se obtuvo del sistema de medición, se observó que es muy similar a la señal obtenida en la simulación.

También se midieron la señal de control  $u(t)$  generada por el estimador de estados, la señal del integrador y la señal resultante de la diferencia de la salida de sistema  $y(t)$  y la señal de salida estimada  $\hat{y}(t)$ .

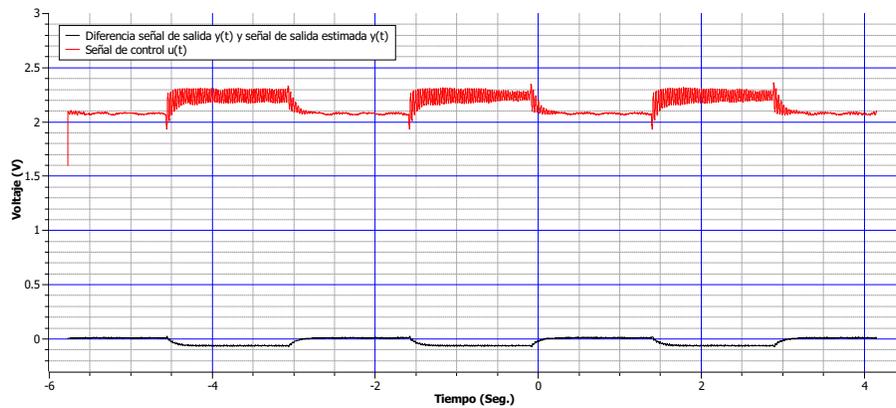


Figura 4.20: Señal de referencia  $r(t)$  y señal de salida  $y(t)$  medidas

En rojo, se observa la señal de control y en negro la señal de error  $e(t)$ , siendo la diferencia entre la señal de salida  $y(t)$  del sistema de levitación y la salida estimada  $\hat{y}(t)$  del observador, en ella se puede apreciar que  $e(t)$  es muy cercana a cero, lo que implica que el observador está haciendo bien su trabajo al estimar las variables de estado del sistema, aun cuando existen cambios más bruscos en la señal de referencia  $r(t)$ .

# Conclusiones

Se obtuvo el modelo matemático no lineal de un sistema de levitación electromagnético y se linealizó al rededor de un punto de operación. Se propuso un modelo generalizado de un sistema de segundo orden inestable con el cual se pudo encontrar un vector de ganancias  $K_i$  y  $F$  para su control y un vector de ganancias  $G$  para un estimador de estados, llevando el modelo matemático del levitador obtenido al modelo propuesto se pudo obtener, simular e implementar físicamente un circuito con amplificadores operacionales de un control por realimentación de estados estimados con un integrador capaz de seguir señales tipo escalón unitario al sistema de levitación obteniendo buenos resultados.

El modelo propuesto en la Ecuación 4.1 Realimentación de estados para sistema de segundo orden  $equation.4.2.1$  permitió encontrar una forma general para calcular las ganancias de realimentación de estados siempre que el sistema de segundo orden se pueda representar de la forma propuesta, además permitió hacer mas pequeños los valores de la representación en variables de estado, esto fue útil al momento de implementar el circuito del sistema de control de manera física ya que con estas ganancias el amplificador operacional no se satura, en cambio utilizando las ganancias del modelo de la Ecuación 3.17 Modelo lineal  $equation.3.6.17$ , al ser ganancias muy altas dan como resultado la saturación del amplificador operacional.

El control por realimentación de estados fue capaz de estabilizar el sistema de levitación pero manteniendo un error en estado estacionario, en cambio, la realimentación con el integrador en la trayectoria directa permitió al sis-

tema seguir la señal de referencia tipo escalón unitario eliminando el error en estado estacionario. Ambos controles permitieron que el sistema de levitación se estabilizara en menos de un segundo. En la implementación con amplificadores operacionales se aumentó la ganancia del integrador para que la señal de salida siguiera a la señal cuadrada de referencia, mientras en la simulaciones la ganancia del integrador fue de 1.25, en la implementación se tuvo que usar una ganancia de 4.88 para obtener una salida similar a la simulada, esto pudo deberse principalmente a los errores de diseño y modelado y en las limitaciones físicas de los componentes utilizados en la implementación del control ya que a diferencia de la simulación los valores no son ideales.

El observador estima correctamente las variables de estado del sistema de levitación ya que la señal de error entre la salida del sistema y la salida del observador es muy cercana a cero como lo debería ser idealmente, salvo en los casos donde la señal cuadrada cambia mas bruscamente que es donde la señal de error igual tiene los cambios mas bruscos.

# Bibliografía

- Álvarez, D. y Luque, P. (2003). *Ingeniería e Infraestructura de los Transportes*. Universidad de Oviedo, Oviedo, España.
- Bedford, A. y Fowler, W. (2009). *Dinámica: mecánica para ingeniería*. Pearson Educación, Naucalpan, Edomex., 5 edición.
- Campomanes, J. (1998). *Sistemas digitales de control. Análisis y diseño*. Servicio de Publicaciones, Universidad de Oviedo, España.
- Campos, P. J. (2008). Construcción y control de un levitador magnético. Tesis de maestría, Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigación y Desarrollo, Tijuana, México.
- Campos, P. J., Ancho, L., y Calvillo, A. (2008). Planta de levitación magnética. Encuentro de Investigación de Ingeniería Eléctrica.
- Cesca, M. (2015). Estabilidad de los sistemas en lazo cerrado. Curso control de procesos, Tucumán, Argentina.
- Chen, C. (1999). *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, Oxford, New York, 3 edición.
- Colmenares, W. (2006). Respuesta temporal de sistemas. la función de transferencia. Sistemas de control ii, Caracas, Venezuela.
- Cruz, P. (2009). Control de un sistema de levitación magnética con compensación de redes neuronales. Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México.

- Diaz, J., Aranda, J., y de la Cruz, J. (2006). Apuntes de automatica ii. Departamento de Informatica y Automatica, E.T.S.I. Informatica, U.N.E.D.
- Hernández, V. (2010). Implementación y monitoreo de un sistema anticongelante para una celda dinamométrica. Tesis de diplomado de especialización, Instituto Politecnico Nacional, Escuela Superior de Ingenieria Mecanica y Electrica UA.
- Hurley, W. y Wolfe, W. (1997). Electromagnetic design of a magnetic suspension system. *IEEE Transactions on education*, 40(2).
- Jiménez, O., Rashkovan, V., Marzquez, J. F., y Méndez, D. (2005). "diseño de un compensador del tipo proporcional-integral-derivativo para controlar un sistema de levitación electromagnético". 4to. CIIE.
- Kailath, T. (1980). *Linear Systems*. Prentice Hall, United States of America.
- Kuo, B. (1996). *Sistemas de control automático*. Prentice Hall, Naucalpan, Edomex., 7 edición.
- Luenberger, D. (2003). An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6).
- Luviano, D. (2012). Control no lineal de un sistema de levitación magnética basado en estimacion de parametros electromagneticos. Tesis de maestria, Centro de investigacion y de estudis avanzadcos del instituto politecnico nacional, Cd. de México.
- Mariani, A. (2015). Breve reseña historica sobre el control automatico.
- Mejía, J. y Flores, M. (2015). Amplificadores operacionales. Laboratorio de electrónica, Culiacán, Sinaloa.
- Milena, J. C. (2010). Control lineal y no lineal de un levitador magnético. estudio comparativo. Proyecto de fin de carrera, Universitat Politecnica de Catalunya, Escola Tecnica Superior D'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona, Barcelona, España.

- Murillo, J. (2014). Diseño de observadores de estado. Catedra, Santiago de Cali, Colombia.
- Márquez, J. (2013). Amplificadores operacionales. Catedra, D.F., México.
- Ogata, K. (1987). *Dinamica de sistemas*. Pearson Educación, Naucalpan, Edomex., 5 edición.
- Ogata, K. (1998). *Ingeniería de control moderno*. Pearson Educación, Naucalpan, Edomex., 3er. edición.
- Perez, M., Perez, A., y Perez, E. (2008). Introducción a los sistemas de control y modelado matemático para sistemas lineales invariantes en el tiempo. Catedra, San Juan, Argentina.
- Perren, G. (2003). Estudio de las aplicaciones de la levitación magnética.
- Picón, M. y de la Cruz, F. (2007). Control adaptativo por modelo de referencia de un sistema de levitación magnética. *Revista Ingeniería UC*, 14(2):7–13.
- Serway, R. y Jewett, J. (2004). *Física II: Electricidad, Magnetismo y Física Moderna*, page 241. Thompson, Mexico, D.F., 3 edición.
- Taghirad, H., Abrishacmhian, M., y Gehabcheloo, R. (1998). Electromagnetic levitation system: An experimental approach. 7th international Conference on Electrical Engineering.
- Thompson, M. (2000). ‘electrodynamic magnetic suspension – models, scaling laws, and experimental results.’. *IEEE Transactions on Education*, 43(3).
- Williams, M. (2006). Estimadores de estado. Catedra, Caracas, Venezuela.

# Anexos

# Anexos A

## Valores de resistencias y capacitores utilizados

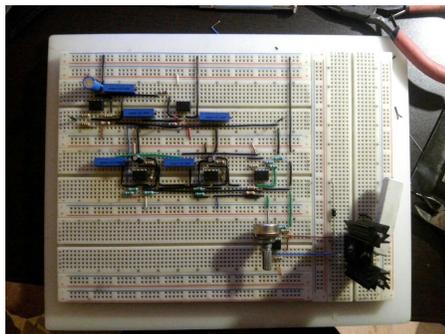
Los valores cerrados o comerciales de resistencias mencionados en la siguiente tabla fueron los valores propuestos para calcular las resistencias para las configuraciones del amplificador operacional, los capacitores fueron todos propuestos puesto que es mas sencillo usar resistencias variables para obtener los valores de ganancias deseados.

Tabla A.1: Valores de resistencias y capacitores

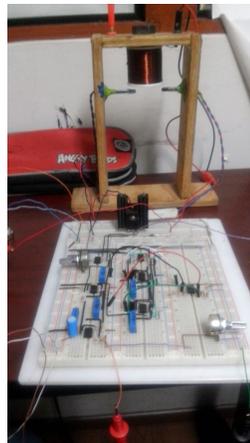
Resistencias	Capacitores
$R = 10K\Omega$	$C_{\omega_0} = 10\mu F$
$R_{ref1} = 1K\Omega$	$C_{k_i} = 10\mu F$
$R_{ref2} = 10K\Omega$	
$R_{ref3} = 10K\Omega$	
$R_{ref4} = 1K\Omega$	
$R_{f_1} = 438\Omega$ (Variable)	
$R_{f_2} = 518\Omega$ (Variable)	
$R_{g_1} = 709\Omega$ (Variable)	
$R_{g_2} = 603\Omega$ (Variable)	
$R_{k_0} = 705\Omega$	
$R_{k_i} = 80K\Omega$ (Variable)	
$R_{\omega_0} = 1.6K\Omega$	

## Anexos B

### Evidencia de la implementación del sistema



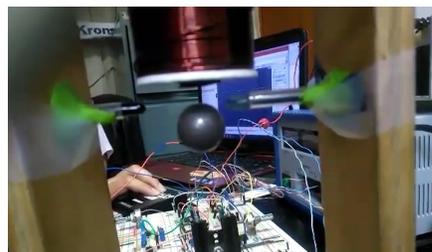
(a) Implementación del sistema de control



(b) Control conectado al sistema de levitación



(c) Balín levitando



(d) Midiendo señal de salida

Figura B.1: Evidencia de la implementación del sistema de control