

SEP

SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA



Instituto Politécnico Nacional



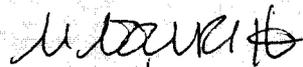
Escuela Superior de Física y Matemáticas



CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 6 del mes de Julio del año 2017, el que suscribe Maricela Itzuri Hernández Velázquez alumno del Programa Académico de Licenciatura en Física y Matemáticas con número de boleta 2009330128 adscrito a la Escuela Superior de Física y Matemáticas, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Alfredo López Ortega y cede los derechos del trabajo titulado Frecuencias Cuasinormales de campos de prueba en un espacio métrico bidimensional, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección itzuri_mua23@hotmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.


Maricela Itzuri Hernández Velázquez
Nombre y firma del alumno



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**Frecuencias cuasinormales
de campos de prueba en
un agujero negro bidimensional**

TESIS

Para obtener el título

Licenciada en Física y Matemáticas

PRESENTA

Maricela Itzuri Hernández Velázquez

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Alfredo López Ortega

México D. F., Junio de 2017



Con todo mi amor

*A mis papás: Maricela y Joel
y a mis hermanas: Sandra y Laura*

Agradecimientos

Al profesor Alfredo, director de esta tesis, gracias por todo su apoyo para concluir este trabajo y a todo lo que he aprendido en el transcurso, agradezco infinitamente su paciencia.

A Mary, Joel, Laura y Sandra, a mis abuelitas Rosy y Taide, mis tías Rosaura, Cristy y Cecy, mis primos Alex y Fer, mis sobrinas adoradas y latosas: Nati y Sofi, mis cuñados Fabian y Daniel, y a mis compañeros en desvelos, mis gatos: Tomás y Casca, infinito amor y agradecimiento siento por todos ustedes, pues en cada uno de los aspectos de mi vida han estado ahí para apoyarme y no imagino un segundo de mi vida sin todo su apoyo y cariño.

A mis amigos Edson, Diana, Hector, Miriam, Ramiro, Juan, Tonatiuh, Gustavo, Julio, Benito, Lety, Jesús, Liliana, y demás compañeros gracias por todos los momentos de estudio, diversión y apoyo desde de los primeros pasos que dimos juntos y en los que nos encontramos después, los quiero y admiro mucho.

A mis compañeros del trabajo: Miguel, Edgar, Christian, Marco, Memo, Ana, Caro y Román, gracias infinitas por el apoyo y empujón que me dieron al final de mi estancia con ustedes ha sido un gran aliento para concluir este trabajo y continuar con mi proyecto de vida.

Finalmente, agradezco el apoyo que recibí del Proyecto SIP-20171817 del Instituto Politécnico Nacional.

RESUMEN

Para varios espaciotiempos bidimensionales es posible determinar analíticamente las frecuencias de los modos cuasinormales de un campo de prueba, sin embargo, pueden encontrarse algunos espaciotiempos bidimensionales para los cuales esto no es posible. En este trabajo consideraremos un agujero negro bidimensional asintóticamente anti-de Sitter para el cual usamos el método numérico de Horowitz-Hubeny para calcular las frecuencias cuasinormales de oscilación de los campos de prueba de Klein-Gordon y de Dirac, puesto que no fuimos capaces de encontrar soluciones exactas a sus ecuaciones de movimiento. Usando estas frecuencias discutimos la estabilidad clásica del agujero negro, el factor de calidad de las frecuencias encontradas y comparamos las frecuencias cuasinormales de los campos de Klein-Gordon y de Dirac.

ABSTRACT

For several two-dimensional spacetimes it is possible to determine analytically the frequencies of the quasinormal modes for a test field, nevertheless, there are two-dimensional backgrounds for which an analytical computation is not possible. In this work we consider a two-dimensional black hole asymptotically anti-de Sitter for which we use the numerical method by Horowitz and Hubeny to calculate the quasinormal oscillation frequencies of the Klein-Gordon and Dirac test fields, since we have not been able to find exact solutions to their equations of motion. Using these frequencies we discuss the classical stability of the black hole, the quality factor for the quasinormal frequencies and compare the quasinormal frequencies of the Klein-Gordon and Dirac fields.

Índice general

1. Introducción	4
2. Agujero negro bidimensional	7
2.1. Ecuación de Klein-Gordon	8
2.2. Ecuación de Dirac	9
3. Modos cuasinormales	14
3.1. Aproximación numérica para el campo de Klein-Gordon	15
3.2. Aproximación numérica para el campo de Dirac	18
4. Resultados numéricos	22
4.1. Campo de Klein-Gordon	23
4.1.1. Masa m variable	24
4.1.2. Radio del horizonte r_H variable	26
4.2. Campo de Dirac	32
4.2.1. Masa m variable	32
4.2.2. Radio del horizonte r_H variable	34
4.3. Comparación de las frecuencias para los campos de Dirac y Klein-Gordon	41
5. Conclusiones	43

Capítulo 1

Introducción

Las perturbaciones de los agujeros negros han sido ampliamente estudiadas, y como es bien conocido estas perturbaciones pueden ser debidas a campos físicos en el exterior de un agujero negro o a variaciones en la métrica y esto permite estudiar diferentes escenarios físicos en los que las perturbaciones ocurren.

Los estudios para saber como afectan las perturbaciones a los agujeros negros comenzaron en la década de 1950, cuando Regge y Wheeler [1] se propusieron responder a la pregunta: ¿Qué pasa cuando un agujero negro de Schwarzschild es perturbado? En su trabajo ellos estudiaron una perturbación de la métrica [1], es decir, se preguntaban acerca de la evolución de esta perturbación, si es que lleva al agujero negro a un objeto diferente o si es como un sistema físico abierto común en el que cuando sucede una perturbación el sistema tarda un tiempo en regresar a un estado de equilibrio. Este estudio y trabajo posterior llevaron a la conclusión de que los agujeros negros perturbados regresan al estado de equilibrio oscilando amortiguadamente con modos de oscilación que se conocen como modos cuasinormales, que además están determinados por los parámetros que caracterizan al agujero negro como la carga, la masa, el momento angular y los parámetros de la perturbación [2].

Después de los resultados iniciales estos modos han sido ampliamente estudiados para diferentes agujeros negros y diferentes campos de prueba [1], [3]. Esto ha sido motivado porque los modos cuasinormales han encontrado varias aplicaciones, como el estudio de la estabilidad clásica de los agujeros negros, y la determinación del espectro de área del horizonte de sucesos [3]. Como una consecuencia, para muchos casos se han calculado las frecuencias de los modos normales de oscilación de las perturbaciones, usualmente conocidas como frecuencias cuasinormales [2]. Debido a la existencia del horizonte de sucesos del agujero negro se espera que las frecuencias de oscilación del campo sean complejas, puesto que el sistema está perdiendo energía y por lo tanto se espera que los campos decaigan en el tiempo.

Recientemente estos estudios, que fueron precursores de la búsqueda de ondas gravitacionales, dieron uno de sus más importantes resultados al ser detectada por LIGO la

señal de la perturbación de la métrica generada por la coalescencia de sistemas binarios. Una parte de la señal buscada por el interferómetro está compuesta por los modos cuasinormales de esta perturbación [4], [5].

Es conveniente mencionar que la evolución de una perturbación alrededor de un agujero negro tiene varias etapas. La primera etapa es cuando comienza la interacción entre la perturbación y el agujero negro, después tenemos la etapa en que esta perturbación se dispersa con las llamadas frecuencias cuasinormales y la tercera etapa es el decaimiento de la perturbación para tiempos muy grandes [3], [6]. En este trabajo nuestro interés es en la segunda etapa de la evolución de las perturbaciones.

En nuestro caso, para estudiar las perturbaciones del agujero negro, consideramos que el campo clásico que perturba al agujero negro es débil pues en lo que sigue suponemos que no afecta a su métrica. Así podemos analizar la ecuación de movimiento del campo en el espaciotiempo del agujero negro y se pueden obtener ecuaciones de tipo Schrödinger en las que podemos imponer condiciones de frontera para sus soluciones que nos indiquen como debe comportarse la perturbación cerca del horizonte de sucesos y en la región asintótica.

Varios métodos para hallar estas soluciones han sido ampliamente estudiados. Se han usado métodos analíticos y numéricos dependiendo del agujero negro, por ejemplo, si este es asintóticamente anti-de Sitter se sugiere usar series para hallar las soluciones a las ecuaciones de movimiento de las cuales pueden obtenerse las frecuencias cuasinormales [7], [8]. Usando estas frecuencias es posible analizar la estabilidad clásica del agujero negro, puesto que si encontramos que la amplitud del campo aumenta entonces el agujero negro podría sufrir inestabilidades.

En particular estamos interesados en las teorías gravitacionales en dos dimensiones en las que existen también soluciones a las ecuaciones de campo, que se comportan como agujeros negros, pues en ellas es más sencillo estudiar efectos que pueden suceder también en agujeros negros en dimensiones mayores [9]. Por ejemplo, el agujero negro bidimensional que estudiamos en esta tesis, es un agujero negro que se obtiene a partir de una teoría de tipo Brans Dicke [10]. Esta teoría tiene dos campos, el gravitón y el dilatón, además de dos parámetros. Un caso límite de la teoría de Brans-Dicke converge a la relatividad general, por lo que los resultados obtenidos para esta teoría pueden ser útiles en esta última. Entre los efectos que se estudian en este tipo de teorías están la entropía y la pérdida de información de los agujeros negros, puesto que se espera que estos aspectos no dependan de la dimensión del espaciotiempo.

En esta tesis nos centramos en estudiar el comportamiento de los campos de Klein-Gordon y Dirac para un agujero negro bidimensional que es asintóticamente anti-de Sitter, puesto que las ecuaciones de movimiento de la teoría de la cual es solución incluye el análogo de la constante cosmológica bidimensional. Para estos dos campos podemos hallar los modos cuasinormales imponiendo condiciones de frontera apropiadas, por ejemplo, una condición es que el campo debe ser puramente entrante en el horizonte, debido a que nada puede escapar de un agujero negro. Puesto que el agujero negro es

asintóticamente anti de Sitter, como es común para esta clase de soluciones, imponemos como condición de frontera que el campo vaya a cero cuando nos alejamos del horizonte de sucesos. Dadas las condiciones de frontera y puesto que no encontramos soluciones analíticas a las ecuaciones de movimiento, se usa un método numérico para calcular los modos cuasinormales, que en nuestro caso es el propuesto por Horowitz y Hubeny [7]. En lo que sigue presentamos las primeras frecuencias cuasinormales para determinar si son estables y de que manera dependen de los parámetros del agujero negro y del campo.

Nuestro interés en el agujero negro bidimensional que estudiamos en el presente trabajo se debe a que su métrica nos recuerda al sector (t, r) de la métrica del agujero negro de Schwarzschild anti-de Sitter en cuatro dimensiones y es idéntica a la métrica del sector (t, r) del límite de horizonte plano del agujero negro de Schwarzschild anti-de Sitter cuadridimensional [7].

Esta tesis está organizada de la siguiente manera. En el capítulo 2 se explica de manera breve como se obtuvo el agujero negro en el artículo de Lemos y Sá y obtenemos el valor del radio del horizonte de sucesos del agujero negro [10]. Es en este agujero negro bidimensional en el que estudiaremos el comportamiento de los campos de Klein-Gordon y de Dirac. En el capítulo 2, también analizamos las ecuaciones de los campos de Klein-Gordon y de Dirac en el agujero negro, obteniendo que las ecuaciones de movimiento de ambos campos se simplifican a ecuaciones tipo Schrödinger. En el capítulo 3, introducimos la definición que usaremos para los modos cuasinormales y describimos como los calculamos numéricamente con el método de Horowitz-Hubeny en el agujero negro de Lemos y Sá. En el capítulo 4 presentamos los resultados y el análisis de las frecuencias cuasinormales obtenidas para los campos de Klein-Gordon y de Dirac en el agujero negro, obteniendo que estas frecuencias están determinadas por los parámetros del agujero negro y de los campos. Para ambos campos se analiza el comportamiento de las frecuencias cuando la masa del campo varía y cuando el radio del horizonte del agujero negro cambia. En el capítulo 5 hacemos un resumen de los principales resultados obtenidos en el capítulo 4.

Capítulo 2

Agujero negro bidimensional

La métrica del agujero negro utilizada para este trabajo se obtuvo en la Ref. [10], los autores de este artículo proponen la acción:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \sqrt{-g} e^{-2\phi} [R - 4\rho(\partial\phi)^2 + 4\lambda^2], \quad (2.1)$$

donde g es el determinante de la métrica, R es la curvatura escalar, ϕ el campo escalar usualmente conocido como dilatón, λ es una constante que puede asociarse con la constante cosmológica, ρ es un parámetro variable que permite obtener distintas soluciones al variar la acción para encontrar las ecuaciones de movimiento de las cuales podemos obtener como soluciones a la métrica $g_{\mu\nu}$ y el campo ϕ [10].

Para este trabajo usamos la métrica que se obtiene tomando $\rho = \frac{1}{2}$. En este caso se obtiene que el dilatón y la métrica bidimensional en coordenadas de Schwarzschild están dadas por:

$$e^{-2\phi} = a^2 r^2, \quad ds^2 = \left(a^2 r^2 - \frac{1}{ar} \right) dt^2 - \frac{1}{\left(a^2 r^2 - \frac{1}{ar} \right)} dr^2, \quad (2.2)$$

donde $a = \sqrt{\frac{2}{3}}|\lambda|$. Es conveniente notar que esta solución puede interpretarse como un agujero negro cuyo horizonte de sucesos está localizado en la raíz real de

$$a^2 r^2 - \frac{1}{ar} = 0, \quad (2.3)$$

así podemos obtener que el horizonte de sucesos para el agujero negro (2.2) es igual a $r_H = 1/a$ [10], [11], [12].

Puesto que cuando $r \rightarrow \infty$ el término dominante de $a^2 r^2 - 1/ar$ es $a^2 r^2$, el agujero negro (2.2) es asintóticamente anti-de Sitter.

En este trabajo estamos interesados en estudiar los modos de oscilación de los campos de Klein-Gordon y de Dirac en el agujero negro (2.2), por lo tanto, a continuación simplificamos sus ecuaciones de movimiento en espaciotiempos bidimensionales.

2.1. Ecuación de Klein-Gordon

La métrica más general para un agujero negro bidimensional estático es [9]

$$ds^2 = f dt^2 - \frac{1}{g} dr^2, \quad (2.4)$$

con f y g funciones que dependen de r únicamente, donde r es la coordenada radial del espaciotiempo.¹ La ecuación de movimiento del campo de Klein-Gordon es

$$(\square + m^2)\Phi = 0, \quad (2.5)$$

donde m es la masa del campo, Φ es el campo de prueba y \square denota el operador de D'Alambert que se define de la siguiente manera:

$$\square\Phi = \nabla_\mu \nabla^\mu \Phi \quad (2.6)$$

que en la métrica (2.4) toma la forma

$$\square\Phi = \frac{1}{\sqrt{\left|\frac{f}{g}\right|}} \partial_\mu \left(\sqrt{\left|\frac{f}{g}\right|} (g^{\mu t} \partial_t + g^{\mu r} \partial_r) \right) \Phi. \quad (2.7)$$

Realizando las sumatorias correspondientes para la métrica bidimensional (2.4), la ecuación anterior se transforma en

$$\left(\frac{1}{f} \partial_t^2 - \frac{1}{\sqrt{\frac{f}{g}}} \partial_r \left(\sqrt{fg} \partial_r \right) + m^2 \right) \Phi = 0. \quad (2.8)$$

Para simplificar la ecuación anterior usamos el método de separación de variables proponiendo que el campo de Klein-Gordon Φ toma la forma

$$\Phi = R(r) e^{-i\omega t}, \quad (2.9)$$

donde la función R depende únicamente de la coordenada r . Haciendo esta sustitución nos queda la ecuación radial

$$\left[\sqrt{fg} \frac{d}{dr} \left(\sqrt{fg} \frac{d}{dr} \right) + \omega^2 - fm^2 \right] R = 0. \quad (2.10)$$

Tomando en cuenta la forma de la Ec. (2.10) haremos un cambio de la coordenada espacial y usamos una nueva a la que llamaremos r_* (la coordenada tortuga) que para la métrica (2.4) se define por

$$r_* = \int \frac{dr}{\sqrt{fg}}. \quad (2.11)$$

¹Para el agujero negro (2.2) notamos que $f = g$.

Esta coordenada se usa porque es conveniente para escribir en forma simplificada las ecuaciones de movimiento. Empleando la coordenada r_* encontramos que la Ec. (2.10) se reduce a una ecuación radial tipo Schrödinger [13], [14]

$$\left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2\right) R = VR, \quad (2.12)$$

donde

$$V = m^2 f \quad (2.13)$$

es el potencial efectivo. En particular para la métrica de Lemos y Sá tenemos que

$$f(r) = g(r) = a^2 r^2 - \frac{1}{ar}. \quad (2.14)$$

De acuerdo con la Ec. (2.13) el potencial efectivo para el campo de Klein-Gordon en este agujero negro es igual a

$$V = m^2 \left(a^2 r^2 - \frac{1}{ar} \right). \quad (2.15)$$

Puesto que en el horizonte del agujero negro (2.2) el potencial V va a cero, hallamos que cerca del horizonte las soluciones de la Ec. (2.12) toman la forma

$$R \approx K_1 e^{+i\omega r_*} + K_2 e^{-i\omega r_*}, \quad (2.16)$$

donde K_1 y K_2 son constantes.

2.2. Ecuación de Dirac

Para simplificar la ecuación de Dirac en un espaciotiempo bidimensional conviene definir dos nuevas funciones P y Q , por las relaciones $f = P^2$ y $g = 1/Q^2$, de forma que la métrica (2.4) puede escribirse como:

$$ds^2 = P^2 dt^2 - Q^2 dr^2. \quad (2.17)$$

Como se muestra en la Ref. [14] en la representación quirral de las matrices gamma

$$\gamma^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^r = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

la ecuación de Dirac

$$i\gamma^\mu \nabla_\mu \psi = m\psi, \quad (2.19)$$

en una métrica bidimensional como (2.17), puede simplificarse a un par de ecuaciones diferenciales parciales acopladas

$$\partial_t \Psi_2 - \partial_{r_*} \Psi_2 = -imP\Psi_1 \quad (2.20)$$

$$\partial_t \Psi_1 + \partial_{r_*} \Psi_1 = -imP\Psi_2 \quad (2.21)$$

donde tomamos el espinor ψ como

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{P}} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

y r_* es la coordenada tortuga (2.11) de la métrica, que usando las funciones P y Q toma la forma

$$r_* = \int \frac{Q}{P} dr. \quad (2.23)$$

Considerando una dependencia armónica en el tiempo, esto es, $\Psi_s(r_*, t) = \widehat{R}_s(r_*)e^{-i\omega t}$ con $s = 1, 2$, las Ecs. (2.20) y (2.21) se simplifican a un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas para las funciones \widehat{R}_1 y \widehat{R}_2

$$\frac{d\widehat{R}_2}{dr_*} + i\omega\widehat{R}_2 = imP\widehat{R}_1, \quad (2.24)$$

$$\frac{d\widehat{R}_1}{dr_*} - i\omega\widehat{R}_1 = -imP\widehat{R}_2. \quad (2.25)$$

De estas podemos obtener ecuaciones tipo Schrödinger desacopladas para las funciones \widehat{R}_1 y \widehat{R}_2 . Para nuestro propósito no son muy útiles estas ecuaciones debido a que los potenciales efectivos involucran raíces cuadradas de las funciones f , g [13] y el método numérico no converge apropiadamente. Sin embargo, en el espacio bidimensional (2.17) podemos usar una base de vectores diferente y por lo tanto una representación diferente de las matrices gama. Motivados por el formalismo de Newman-Penrose [3], apropiado para espaciotiempos 4-dimensionales, para la métrica (2.17) escogemos la base de vectores:

$$\widehat{e}_1^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{P}, \frac{1}{Q} \right), \quad \widehat{e}_2^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{P}, -\frac{1}{Q} \right), \quad (2.26)$$

que satisface las relaciones de ortogonalidad

$$\widehat{e}_1^\mu \widehat{e}_{1\mu} = \widehat{e}_2^\mu \widehat{e}_{2\mu} = 0 \quad y \quad \widehat{e}_1^\mu \widehat{e}_{2\mu} = \widehat{e}_2^\mu \widehat{e}_{1\mu} = 1, \quad (2.27)$$

o

$$\widehat{e}_a^\mu \widehat{e}_{b\mu} = \eta_{ab} \quad (2.28)$$

donde $a, b = 1, 2$ y

$$(\eta_{ab}) = (\eta^{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Esto es, \hat{e}_1^μ y \hat{e}_2^μ son vectores nulos.

Para los vectores (2.26) encontramos que los coeficientes de rotación de Ricci [3]

$$\hat{\gamma}_{abc} = \hat{e}_a^\mu (\nabla_\nu \hat{e}_{b\mu}) \hat{e}_c^\nu, \quad (2.30)$$

que son diferentes de cero están dados por

$$\hat{\gamma}_{122} = \hat{\gamma}_{121} = -\frac{1}{\sqrt{2}PQ} \frac{dP}{dr}. \quad (2.31)$$

En lo que sigue usaremos la siguiente representación de las matrices gama

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Note que las matrices gamma γ_1 y γ_2 satisfacen la relación

$$\gamma_a \gamma_b + \gamma_b \gamma_a = 2\eta_{ab} I, \quad (2.33)$$

y utilizando la derivada covariante para espinores

$$\nabla_a = \hat{e}_a + \frac{1}{8} \hat{\gamma}_{bca} [\gamma^b, \gamma^c], \quad (2.34)$$

la base de vectores (2.26) y la representación de las matrices gama (2.32), obtenemos que la ecuación de Dirac se simplifica a las ecuaciones diferenciales parciales acopladas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} \partial_t \psi_2 - \frac{1}{Q} \partial_r \psi_2 - \frac{1}{2PQ} \frac{dP}{dr} \psi_2 &= -im\psi_1, \\ \frac{1}{P} \partial_t \psi_1 + \frac{1}{Q} \partial_r \psi_1 + \frac{1}{2PQ} \frac{dP}{dr} \psi_1 &= -im\psi_2, \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde ψ_1 y ψ_2 son las componentes del 2-espinor

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Si las componentes ψ_1 y ψ_2 toman la forma

$$\psi_1 = R_1(r) e^{-i\omega t} \quad y \quad \psi_2 = R_2(r) e^{-i\omega t}, \quad (2.37)$$

entonces las ecuaciones anteriores se simplifican a

$$\begin{aligned}\frac{1}{Q} \frac{dR_2}{dr} + \frac{i\omega}{P} R_2 + \frac{1}{2PQ} \frac{dP}{dr} R_2 &= imR_1, \\ \frac{1}{Q} \frac{dR_1}{dr} - \frac{i\omega}{P} R_1 + \frac{1}{2PQ} \frac{dP}{dr} R_1 &= -imR_2.\end{aligned}\tag{2.38}$$

De las Ecs. (2.38) es posible obtener ecuaciones desacopladas para las funciones radiales R_1 y R_2 cuando P y Q son funciones arbitrarias. Sin embargo, para varios espaciotiempos relevantes, por ejemplo, el agujero negro de nuestro interés, podemos escoger coordenadas tales que las funciones P y Q satisfagan:

$$(PQ)^2 = 1.\tag{2.39}$$

Para un espaciotiempo tal que se cumpla la relación (2.39) podemos obtener de las Ecs.(2.38) que las funciones radiales R_1 y R_2 son soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales desacopladas:

$$\begin{aligned}P^4 \frac{d^2 R_1}{dr^2} + 2P^3 \frac{dP}{dr} \frac{dR_1}{dr} + \left(\omega^2 + i\omega P \frac{dP}{dr} + \frac{P^3}{2} \frac{d^2 P}{dr^2} + \left(\frac{P}{2} \frac{dP}{dr} \right)^2 - P^2 m^2 \right) R_1 &= 0, \\ P^4 \frac{d^2 R_2}{dr^2} + 2P^3 \frac{dP}{dr} \frac{dR_2}{dr} + \left(\omega^2 - i\omega P \frac{dP}{dr} + \frac{P^3}{2} \frac{d^2 P}{dr^2} + \left(\frac{P}{2} \frac{dP}{dr} \right)^2 - P^2 m^2 \right) R_2 &= 0,\end{aligned}\tag{2.40}$$

y también si se satisface (2.39), note que²

$$\frac{d^2 R_{1/2}}{dr_*^2} = P^2 \frac{d}{dr} \left(P^2 \frac{dR_{1/2}}{dr} \right) = P^4 \frac{d^2 R_{1/2}}{dr^2} + 2P^3 \frac{dP}{dr} \frac{dR_{1/2}}{dr}.\tag{2.42}$$

Por lo que podemos transformar las Ecs. (2.40) a ecuaciones tipo Schrödinger de la forma:

$$\frac{d^2 R_{1/2}}{dr_*^2} + \omega^2 R_{1/2} = V_{1/2} R_{1/2},\tag{2.43}$$

donde los potenciales efectivos están dados por

$$V_{1/2} = m^2 P^2 \mp \frac{i\omega}{2} \frac{dP^2}{dr} - \frac{P^2}{4} \frac{d^2 P^2}{dr^2} + \frac{1}{16} \left(\frac{dP^2}{dr} \right)^2\tag{2.44}$$

²Realizando la sustitución de $P^2 = f$ en la Ec. (2.42) tenemos

$$\frac{d^2 R_{1/2}}{dr_*^2} = f^2 \frac{d^2 R_{1/2}}{dr^2} + 2f \sqrt{f} \frac{d\sqrt{f}}{dr} \frac{dR_{1/2}}{dr} = f^2 \frac{d^2 R_{1/2}}{dr^2} + f \frac{df}{dr} \frac{dR_{1/2}}{dr}.\tag{2.41}$$

y sustituyendo $P^2 = f$ en la Ec. (2.44) los potenciales efectivos para el agujero negro (2.2) nos quedan iguales a

$$V_{1/2} = m^2 \left(a^2 r^2 - \frac{1}{ar} \right) \mp \frac{i\omega}{2} \left(2a^2 r + \frac{1}{ar^2} \right) - \frac{1}{4} \left(a^2 r^2 - \frac{1}{ar} \right) \left(2a^2 - \frac{2}{ar^3} \right) + \frac{1}{16} \left(2a^2 r + \frac{1}{ar^2} \right)^2. \quad (2.45)$$

Es conveniente notar que cerca del horizonte del agujero (2.2) los potenciales $V_{1/2}$ tienen un comportamiento de la forma

$$\lim_{r \rightarrow r_H} V_{1/2} = \mp \frac{i\omega}{2} \left. \frac{dP^2}{dr} \right|_{r=r_H} + \frac{1}{16} \left(\left. \frac{dP^2}{dr} \right|_{r=r_H} \right)^2, \quad (2.46)$$

Esto tiene como consecuencia que cerca del horizonte de sucesos la ecuación diferencial (2.43) se simplifique a

$$\frac{d^2 R_{1/2}}{dr_*^2} + \left(\omega \pm \frac{i}{4} \left. \frac{df}{dr} \right|_{r=r_H} \right)^2 R_{1/2} \approx 0. \quad (2.47)$$

Por lo cual, obtenemos que cerca del horizonte de un agujero negro las funciones radiales para el campo de Dirac se comportan como

$$R_{1/2} = K_{I1/2} e^{-i \left(\omega \pm \frac{i}{4} \left. \frac{df}{dr} \right|_{r=r_H} \right) r_*} + K_{II1/2} e^{+i \left(\omega \pm \frac{i}{4} \left. \frac{df}{dr} \right|_{r=r_H} \right) r_*}, \quad (2.48)$$

donde $K_{I1/2}$ y $K_{II1/2}$ son constantes.

Es conveniente recalcar que para el campo de Dirac es conocido que su ecuación de movimiento puede reducirse a otro par de ecuaciones tipo Schrödinger con potenciales efectivos que incluyen raíces cuadradas de la función f [13], [14]. En el presente trabajo no usamos estas ecuaciones tipo Schrödinger puesto que el método numérico que empleamos no converge lo suficientemente rápido para obtener resultados confiables para las frecuencias cuasinormales.

Capítulo 3

Modos cuasinormales

Es conocido que al perturbar un agujero negro con un campo, este oscila con modos definidos por las características del agujero negro y las propiedades del campo. A estos modos de oscilación se les denomina modos cuasinormales y para agujeros negros asintóticamente planos se pueden hallar imponiendo condiciones de frontera radiativas al campo cerca del horizonte de sucesos y en la región asintótica. Según el tipo de agujero negro se imponen diversas condiciones de frontera en la región asintótica. En cambio para todos los agujeros negros, cerca del horizonte se impone al campo la condición de que sea puramente entrante al agujero negro, debido a que sabemos que clásicamente un observador en el interior del agujero negro necesita velocidades mayores que la luz para escapar de este. Para calcular sus frecuencias cuasinormales en la región lejana al horizonte se imponen condiciones de frontera que vayan de acuerdo al comportamiento asintótico del agujero negro.

Para el agujero negro bidimensional (2.2), en analogía a otros agujeros negros asintóticamente anti-de Sitter, definimos sus modos cuasinormales como las oscilaciones que satisfacen las siguientes condiciones de frontera [7], [15]

- (a) El campo es puramente entrante cerca del horizonte.
- (b) El campo es igual a cero en el infinito.

Es conveniente recalcar que la condición de frontera que impone que el campo sea puramente entrante cerca del horizonte es una manifestación del hecho físico de que ningún objeto puede escapar del agujero negro y es la misma para todos los agujeros negros [11], [12]. La condición (b) que imponemos en la región asintótica está motivada en el hecho que el potencial efectivo para el campo de Klein-Gordon (2.15) es divergente cuando $r \rightarrow \infty$ y por lo tanto es razonable suponer que el campo va a cero cuando $r \rightarrow \infty$.

Adicionalmente creemos que es relevante mencionar que en lo siguiente la masa del campo es distinta de cero, puesto que en espaciotiempos bidimensionales los campos sin masa no tienen frecuencias cuasinormales bien definidas [13], [14].

3.1. Aproximación numérica para el campo de Klein-Gordon

Sustituyendo el potencial efectivo (2.15) en la Ec. (2.12), la ecuación tipo Schrödinger para el agujero negro bidimensional (2.2) toma la forma

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2 - m^2 \left(a^2 r^2 - \frac{1}{ar} \right) \right] R = 0, \quad (3.1)$$

la cual no hemos sido capaces de resolver de manera exacta en términos de funciones especiales, por lo cual vamos a emplear el método de aproximación numérica propuesto en las Refs. [7], [16] que nos permitirá calcular las frecuencias cuasinormales del agujero negro bidimensional (2.2).

Para aplicar este método utilizamos que la función $R(r)$ debe satisfacer la condición de frontera que el campo sea puramente entrante cerca del horizonte. Puesto que tenemos una dependencia temporal $\exp(-i\omega t)$, suponemos que la función radial toma la siguiente forma [7], [16]

$$R(r) = e^{-i\omega r_*} R_1(r) \quad (3.2)$$

para satisfacer automáticamente la condición de frontera en el horizonte de sucesos. A continuación calculamos su segunda derivada

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr_*} (e^{-i\omega r_*} R_1) &= -i\omega e^{-i\omega r_*} R_1 + e^{-i\omega r_*} \frac{dR_1}{dr_*} \\ \frac{d^2}{dr_*^2} (e^{-i\omega r_*} R_1) &= -\omega^2 e^{-i\omega r_*} R_1 - 2i\omega e^{-i\omega r_*} \frac{dR_1}{dr_*} + e^{-i\omega r_*} \frac{d^2 R_1}{dr_*^2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Sustituyendo las Ecs. (3.2) y (3.3) en (2.12) tenemos:

$$\left(\frac{d^2 R_1}{dr_*^2} - 2i\omega \frac{dR_1}{dr_*} - V R_1 \right) e^{-i\omega r_*} = 0, \quad (3.4)$$

y realizando el cambio de la coordenada tortuga r_* a la coordenada radial r tenemos:

$$f^2 \frac{d^2 R_1}{dr^2} + f \frac{df}{dr} \frac{dR_1}{dr} - 2i\omega f \frac{dR_1}{dr} - V R_1 = 0. \quad (3.5)$$

Dividiendo por f obtenemos que $R_1(r)$ debe ser solución de la ecuación diferencial

$$f \frac{d^2 R_1}{dr^2} + \left(\frac{df}{dr} - 2i\omega \right) \frac{dR_1}{dr} - \frac{V}{f} R_1 = 0. \quad (3.6)$$

Siguiendo a Horowitz y Hubeny [7] hacemos el cambio de variable

$$x = 1/r, \quad (3.7)$$

para cambiar el punto donde imponemos la condición de frontera en el infinito de los modos cuasinormales, pues cuando $r \rightarrow \infty$, la variable x va a cero. Haciendo este cambio de variable obtenemos que la función radial R_1 debe ser solución a una ecuación diferencial de la forma [7], [16]

$$s(x) \frac{d^2 R_1}{dx^2} + \frac{t(x)}{x - x_+} \frac{dR_1}{dx} + \frac{u(x)}{(x - x_+)^2} R_1 = 0, \quad (3.8)$$

donde

$$x_+ = \frac{1}{r_H} = a \quad (3.9)$$

es el inverso del radio del horizonte y las funciones s , t , u se determinan usando la Ec. (3.6). La función radial R_1 puede expandirse en una serie de potencias alrededor de x_+ como

$$R_1 = (x - x_+)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\omega)(x - x_+)^k, \quad (3.10)$$

donde la condición de frontera en el horizonte determina el exponente ν . También podemos expandir la función u como

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\omega)(x - x_+)^k \quad (3.11)$$

y de manera similar para las funciones s y t .

Para emplear el método de Horowitz-Hubeny, primeramente reescribimos la Ec. (3.6) en la forma (3.8) usando la variable x definida en la Ec. (3.7). Notamos que en términos de esta variable la función f del agujero negro (2.2) queda expresada como

$$f = \frac{a^3 - x^3}{ax^2} = \frac{1}{a} \frac{(a - x)(a^2 + ax + x^2)}{x^2}. \quad (3.12)$$

Calculamos también la primera derivada de f respecto a x

$$\frac{df}{dx} = \frac{-x^4 - 2a^3x}{ax^4} = - \left(\frac{1}{a} + \frac{2a^2}{x^3} \right). \quad (3.13)$$

Aplicando el cambio de variable (3.7) a la Ec. (3.6) tenemos

$$f \left(x^2 \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dR_1}{dx} \right) \right) + \left(-x^2 \frac{df}{dx} - 2i\omega \right) \left(-x^2 \frac{dR_1}{dx} \right) - \frac{V}{f} R_1 = 0. \quad (3.14)$$

Sustituyendo las expresiones de f y V en (3.14) obtenemos

$$x^2 \frac{(a - x)(a^2 + ax + x^2)}{a} \frac{d^2 R_1}{dx^2} - \left(\frac{3x^4}{a} - 2i\omega x^2 \right) \frac{dR_1}{dx} - m^2 R_1 = 0. \quad (3.15)$$

Dividiendo la Ec. (3.15) por $(a - x)$ y simplificando para tener la forma de la Ec. (3.8) encontramos

$$\frac{x^2(a^2 + ax + x^2)}{a} \frac{d^2 R_1}{dx^2} + \frac{\left(\frac{3x^4}{a} - 2i\omega x^2\right)}{(x - a)} \frac{dR_1}{dx} + \frac{m^2 R_1}{(x - a)} = 0. \quad (3.16)$$

Así se obtiene que las funciones s , u , t para el campo de Klein-Gordon en el agujero negro bidimensional (2.2) son iguales a

$$s(x) = x^2 \frac{(a^2 + ax + x^2)}{a}, \quad (3.17)$$

$$u(x) = m^2(x - a), \quad (3.18)$$

y

$$t(x) = \left(\frac{3x^2}{a} - 2i\omega\right) x^2. \quad (3.19)$$

Ahora determinaremos el coeficiente ν que aparece en la expansión (3.10). Tenemos que el primer término del sumando (3.10) nos queda en la forma

$$R_1 = (x - a)^\nu, \quad (3.20)$$

sustituyendo (3.20) en (3.8) tenemos

$$(\nu(\nu - 1)s_0 + \nu t_0 + u_0)(x - x_+)^{\nu-2} = 0. \quad (3.21)$$

Calculando $s_0 = s(x_+)$, $t_0 = t(x_+)$ y $u_0 = u(x_+)$ recordando que $x_+ = a$, encontramos

$$s_0 = 3a^3, \quad t_0 = 3a^3 - 2i\omega a^2 \quad \text{y} \quad u_0 = 0. \quad (3.22)$$

Sustituyendo en (3.21) :

$$\nu(\nu - 1)s_0 + \nu t_0 = \nu(s_0(\nu - 1) + t_0) = 0. \quad (3.23)$$

Así tenemos dos soluciones para ν

$$\nu = 0 \quad \text{y} \quad \nu = \frac{s_0 - t_0}{s_0} = \frac{2i\omega}{3a}. \quad (3.24)$$

Tomando en cuenta que el campo tiene la forma (3.2), tomaremos $\nu = 0$ para mantener que R sea puramente entrante cerca del horizonte de sucesos.

Al sustituir las expansiones de la función R_1 con $\nu = 0$ y de las funciones s , t y u en la Ec. (3.8) se obtiene que la relación de recurrencia para los coeficientes a_k está dada por [7]

$$a_k = -\frac{1}{k(k-1)s_0 + kt_0} \sum_{n=0}^{k-1} a_n(n(n-1)s_{k-n} + nt_{k-n} + u_{k-n}). \quad (3.25)$$

Es conveniente mencionar que esta relación de recurrencia es fundamental para lo que sigue, puesto que a partir de los coeficientes a_k construimos los polinomios de los cuales determinaremos las frecuencias cuasinormales.

Usando la condición de frontera que impone que el campo es igual a cero en la región asintótica, es decir, $R = 0$ en infinito ($x = 0$) obtenemos que las frecuencias cuasinormales deben ser las soluciones de la ecuación [7], [16]

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\omega)(-x_+)^k = 0. \quad (3.26)$$

Es claro que no podemos hacer la suma infinita que aparece en la fórmula (3.26). Por lo tanto, para resolver esta ecuación hacemos la suma hasta un valor entero N y encontramos las raíces del polinomio resultante. A continuación calculamos la suma para otro entero N_1 con $N_1 > N$, y encontramos las raíces del polinomio de grado N_1 . Si hallamos que un conjunto de las raíces del polinomio de grado N y las del polinomio grado N_1 coinciden entonces podemos tomar estas como las frecuencias cuasinormales del agujero negro.

Para hacer estos cálculos usamos el programa Mathematica [17]. Primeramente lo empleamos para calcular los coeficientes a_k que obtuvimos en (3.25) tomando $a_0 = 1$, para posteriormente construir el polinomio (3.26). Empleando procedimientos de búsqueda de raíces de este programa determinamos las frecuencias cuasinormales y hacemos las gráficas correspondientes.

3.2. Aproximación numérica para el campo de Dirac

De manera similar al caso del campo de Klein-Gordon, partiendo de las Ecs. (2.43) para el campo de Dirac trataremos de llegar a la forma (3.8) para hallar sus funciones s , t y u .

Tomando en cuenta el comportamiento dado en (2.48), encontramos que la función que satisface la condición de frontera de los modos cuasinormales cerca del horizonte toma la forma

$$R_{1/2} = e^{-i(\omega \pm \frac{i\kappa}{2})r_*} R_{1'/2'}(r), \quad (3.27)$$

donde κ se define como la gravedad de superficie y está dada por

$$\kappa = \frac{1}{2} \left. \frac{df}{dr} \right|_{r=r_H} = \frac{3a}{2}. \quad (3.28)$$

Realizando operaciones similares a aquellas que conducen a la Ec. (3.16) encontramos que las funciones $R_{1'/2'}$ satisfacen

$$f \frac{d^2 R_{1'/2'}}{dr^2} + \left(\frac{df}{dr} - 2i\omega \pm \kappa \right) \frac{dR_{1'/2'}}{dr} + \left(\frac{\kappa^2}{4} \mp i\kappa\omega - V_{1/2} \right) \frac{1}{f} R_{1'/2'} = 0. \quad (3.29)$$

Haciendo el cambio de variable (3.7) tenemos que la ecuación anterior se transforma a

$$x^4 f \frac{dR_{1'/2'}}{dx^2} - \left(-x^4 \frac{df}{dx} - 2x^3 f - 2i\omega x^2 \pm \kappa x^2 \right) \frac{dR_{1'/2'}}{dx} + \left(\frac{\kappa^2}{4} \mp i\kappa\omega - V_{1/2} \right) \frac{1}{f} R_{1'/2'} = 0. \quad (3.30)$$

Notando que el factor que multiplica a la derivada en el segundo término de la Ec. (3.30) se simplifica como

$$-x^4 \frac{df}{dx} - 2x^3 f - 2i\omega x^2 \pm \kappa x^2 = \frac{3x^4}{a} - 2i\omega x^2 \pm \kappa x^2 \quad (3.31)$$

dicha ecuación queda en la forma

$$\frac{x^2(a-x)(x^2+ax+a^2)}{a} \frac{d^2 R_{1'/2'}}{dx^2} - \left(\frac{3x^4}{a} - 2i\omega x^2 \pm \kappa x^2 \right) \frac{dR_{1'/2'}}{dx} + \left(\frac{\kappa^2}{4} \mp i\kappa\omega - V_{1/2} \right) \frac{1}{f} R_{1'/2'} = 0. \quad (3.32)$$

Tomando en cuenta los potenciales (2.44) del campo de Dirac y realizando el cambio de variable (3.7) tenemos que estos toman la forma

$$V_{1/2} = m^2 f \pm \frac{i\omega x^2}{2} \frac{df}{dx} - \frac{f}{4} \left(2x^3 \frac{df}{dx} + x^4 \frac{d^2 f}{dx^2} \right) + \frac{x^4}{16} \left(\frac{df}{dx} \right)^2. \quad (3.33)$$

Notando que la primera derivada de f ya la obtuvimos en (3.13), calculamos su segunda derivada

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{6a^2}{x^4}. \quad (3.34)$$

Sustituyendo en (3.33) y dividiendo por f encontramos

$$\frac{V_{1/2}}{f} = m^2 \mp \frac{i\omega x^2}{2f} \left(\frac{1}{a} + \frac{2a^2}{x^3} \right) - \frac{1}{4} \left(-2x^3 \left(\frac{1}{a} + \frac{2a^2}{x^3} \right) + 6a^2 \right) + \frac{x^4}{16f} \left(\frac{1}{a} + \frac{2a^2}{x^3} \right)^2, \quad (3.35)$$

esto es

$$\frac{V_{1/2}}{f} = \frac{1}{2} \left(2m^2 - 3a^2 + \left(\frac{x^3 + 2a^3}{a} \right) \left(\frac{a^3 - x^3 \mp i\omega ax}{a^3 - x^3} \right) \right) + \frac{(x^3 + 2a^3)^2}{16a(a^3 - x^3)}. \quad (3.36)$$

Regresando a la Ec. (3.32), dividimos todo por $(a-x)$ para obtener

$$\frac{x^2(x^2+ax+a^2)}{a} \frac{d^2 R_{1'/2'}}{dx^2} + \frac{\left(\frac{3x^4}{a} - 2i\omega x^2 \pm \kappa x^2 \right) dR_{1'/2'}}{(x-a) dx} - \left(\frac{\kappa^2}{4} \mp \frac{i\kappa\omega}{f} - \frac{V_{1/2}}{f} \right) (x-a) \frac{1}{(x-a)^2} R_{1'/2'} = 0. \quad (3.37)$$

De esta ecuación diferencial obtenemos que las funciones \tilde{s} , $\tilde{t}_{1/2}$ están dadas por¹

$$\tilde{s}(x) = \frac{x^2(x^2 + ax + a^2)}{a}, \quad (3.38)$$

$$\tilde{t}_{1/2}(x) = \frac{3x^4}{a} - 2i\omega x^2 \pm \kappa x^2. \quad (3.39)$$

Considerando (3.37) encontramos que las funciones $\tilde{u}_{1/2}$ son iguales a

$$\tilde{u}_{1/2}(x) = - \left(\frac{\kappa^2}{f} \mp \frac{i\kappa\omega}{f} - \frac{V_{1/2}}{f} \right) (x - a). \quad (3.40)$$

Note que en la Ec. (3.36) en dos términos aparece dividiendo el factor $a^3 - x^3$. Para simplificar este factor podemos multiplicar las funciones \tilde{s} , $\tilde{t}_{1/2}$ y $\tilde{u}_{1/2}$ por $16a(a^2 + ax + x^2)$ e identificar los resultados con s , $t_{1/2}$ y $u_{1/2}$. Sustituyendo f encontramos que (3.40) se transforma en

$$\begin{aligned} u_{1/2}(x) &= \left(\frac{\kappa^2}{4} \frac{ax^2}{a^3 - x^3} \mp \frac{i\kappa\omega ax^2}{a^3 - x^3} - \frac{V_{1/2}}{f} \right) (a - x) 16a(a^2 + ax + x^2) \\ &= 4\kappa^2 a^2 x^2 \mp 16i\kappa\omega a^2 x^2 - \left(\frac{V_{1/2}}{f} \right) (a^3 - x^3) 16a. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Considerando el valor de κ dado en (3.28) y sustituyendo la Ec. (3.36) en (3.41) tenemos

$$\begin{aligned} u_{1/2}(x) &= 9a^4 x^2 \mp 24i\omega a^3 x^2 + 8a(2m^2 - 3a^2)(x^3 - a^3) \\ &\quad + 8(x^3 + 2a^3)(x^3 - a^3 \pm i\omega ax) - (x^3 + 2a^3)^2. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Adicionalmente hallamos que las funciones s y $t_{1/2}$ son iguales a

$$s(x) = 16x^2(x^2 + ax + a^2)^2, \quad (3.43)$$

$$t_{1/2}(x) = 16a(x^2 + ax + a^2) \left(\frac{3x^4}{a} - 2i\omega x^2 \pm \kappa x^2 \right). \quad (3.44)$$

Es conveniente notar que en el punto $x = a$ las funciones $u_{1/2}$ toman el valor

$$\begin{aligned} u_{1/2}(a) &= 9a^6 \mp 24i\omega a^5 + 8(3a^3)(\pm i\omega a^2) - (3a^3)^2 \\ &= 9a^6 \mp 24i\omega a^5 \pm 24i\omega a^5 - 9a^6 = 0, \end{aligned} \quad (3.45)$$

esto es, $u_{1/2}(a) = 0$, similar al campo de Klein-Gordon.

¹Por el momento denotamos por \tilde{s} , $\tilde{t}_{1/2}$, $\tilde{u}_{1/2}$ a las funciones que en el caso del campo de Klein-Gordon llamamos s, t, u . La razón es que en el caso del campo de Dirac, es necesario realizar algunas operaciones adicionales antes de identificar a las funciones $s, t_{1/2}, u_{1/2}$.

Por lo que podemos determinar, de manera similar al caso del campo de Klein-Gordon, que para el campo de Dirac el coeficiente ν que aparece en (3.10) es igual a cero. Por lo tanto, de las funciones $u_{1/2}(x)$, $s(x)$ y $t_{1/2}(x)$ podemos calcular los coeficientes a_k usando la Ec. (3.25). Para nuestros cálculos usaremos la función $u_1(x)$ (y por lo tanto $t_1(x)$) para encontrar los coeficientes a_k que aparecen en la Ec. (3.26). De esta ecuación determinaremos las frecuencias cuasinormales para el campo de Dirac en el agujero negro (2.2). Esperamos que los resultados que se obtengan usando las funciones $u_2(x)$ y $t_2(x)$ sean similares.

Capítulo 4

Resultados numéricos

A continuación presentamos las frecuencias cuasinormales de los campos de Klein-Gordon y de Dirac propagándose en el agujero negro bidimensional (2.2). Estas frecuencias cuasinormales fueron calculadas usando el método de Horowitz-Hubeny previamente descrito y programado en Mathematica [17], [18].

Recordando que la dependencia temporal del campo es $\exp(-i\omega t)$ y debido a que las frecuencias obtenidas son complejas usaremos la notación

$$\omega = \text{Re}(\omega) + i\text{Im}(\omega), \quad (4.1)$$

donde $\text{Re}(\omega)$ y $\text{Im}(\omega)$ representan la parte real y la parte imaginaria de la frecuencia cuasinormal, respectivamente.

En lo que sigue, etiquetaremos los modos cuasinormales con el número de modo n asignando el primer modo a la frecuencia con $\text{Im}(\omega)$ más grande, o con el valor más pequeño de $|\text{Im}(\omega)|$, y así sucesivamente de tal forma que $\text{Im}(\omega_p) > \text{Im}(\omega_q)$ para $q > p$.

De nuestros resultados también podemos obtener el tiempo de decaimiento τ , que está definido por

$$\tau = \frac{1}{|\text{Im}(\omega)|}. \quad (4.2)$$

Tomaremos τ como la cantidad que determina que tan rápido decae el campo. Por lo que entre más grande sea τ más lentamente decae el campo. En la Ec. (4.2) utilizaremos la primer frecuencia cuasinormal ($n = 1$), que es la que domina las frecuencias cuasinormales al ser la que decae menos rápido.

El factor de calidad definido por

$$Q = \frac{1}{2} \left| \frac{\text{Re}(\omega)}{\text{Im}(\omega)} \right|, \quad (4.3)$$

nos indica que tan bien oscila el campo en el agujero negro de interés [19]. Es conveniente mencionar que en la fórmula (4.3) también usamos la frecuencia cuasinormal fundamental, esto es, la correspondiente a $n = 1$.

4.1. Campo de Klein-Gordon

En las Figuras 4.1, 4.2 y 4.3 presentamos la parte imaginaria contra la parte real de las frecuencias cuasinormales de los primeros 20 modos con $m = 1/10$ y diferentes valores de r_H . En las tres figuras observamos una simetría de las frecuencias,¹ puesto que si ω es cuasinormal entonces $-\omega^*$ también lo es, dicho de otra forma, las frecuencias cuasinormales son simétricas respecto al eje imaginario. Este comportamiento es típico de las frecuencias cuasinormales de agujeros negros [15]. También podemos observar que las frecuencias presentadas en las figuras antes mencionadas tienen parte imaginaria negativa.

Si notamos que

$$e^{-i\omega t} = e^{-i\text{Re}(\omega)t} e^{i\text{Im}(\omega)t}, \quad (4.4)$$

observamos que la parte imaginaria de las frecuencias cuasinormales determina si la amplitud del campo disminuye o se incrementa con el tiempo. Podemos ver que si la frecuencia tiene parte imaginaria negativa, entonces el campo decae con el tiempo, lo que hace que los modos cuasinormales del campo de Klein-Gordon sean estables. Por otro lado, de la expresión (4.4) también concluimos que la parte real de la frecuencia cuasinormal nos indica la frecuencia de oscilación del campo.

En las Figuras 4.1–4.3, podemos notar que conforme r_H aumenta la parte imaginaria del primer modo ($n = 1$) disminuye su valor absoluto, es decir, para la parte imaginaria del primer modo en la Figura 4.1 es aproximadamente de 0.16, que es más grande que el valor absoluto de la parte imaginaria del primer modo de la Figura 4.3 con un valor aproximado de 0.12, por lo que el valor de r_H afecta el decaimiento del campo. Para un modo dado entre más grande es r_H mayor es el tiempo de decaimiento.

En cuanto a la parte real positiva de las frecuencias, relacionada con la frecuencia de oscilación, observando el primer modo cuasinormal ($n = 1$) en la Figura 4.1 vemos que la parte real de este modo es más grande que aquel de la Figura 4.3, además de que el rango en el eje real en Figura 4.1 es (0.1, 0.45) y en la Figura 4.3 es (0.07, 0.15), por lo que conforme r_H aumenta el campo tiene un rango de frecuencias de oscilación más pequeño.

r_H	30	70	150
τ	6.01652	7.33751	7.91358
Q	0.26079	0.28567	0.28859

Tabla 4.1: Tiempo de decaimiento τ y factor de calidad Q de la primera frecuencia cuasinormal del campo de Klein-Gordon de masa $m = 1/10$ para distintos r_H .

En la Tabla 4.1 vemos los diferentes valores para el tiempo de decaimiento y para el factor de calidad para la primera frecuencia cuasinormal del campo de Klein-Gordon.

¹En lo que sigue, el complejo conjugado de z es denotado por z^* .

Observamos que el tiempo de decaimiento aumenta y el factor de calidad también aumenta conforme el valor de r_H se incrementa.

Tomando en cuenta la simetría de la parte real de las frecuencias cuasinormales $\omega \rightarrow -\omega^*$ previamente descrita, cabe mencionar que en todos nuestros resultados siempre obtuvimos 2 frecuencias cuasinormales con la misma parte imaginaria. En lo que sigue, para simplificar la exposición de los resultados sólo presentamos las frecuencias cuasinormales con $Re(\omega) > 0$. A continuación analizaremos como se comporta la parte real y la parte imaginaria de las frecuencias cuasinormales del campo de Klein-Gordon cuando variamos la masa m del campo o el radio del horizonte r_H .

4.1.1. Masa m variable

En las Figuras 4.4–4.9 presentamos las primeras 5 frecuencias cuasinormales para 3 valores fijos del horizonte r_H cuando la masa del campo m varía. Para cada valor de r_H analizaremos como se comporta la parte real y la parte imaginaria de las frecuencias cuasinormales respecto al parámetro variable m .

En estos resultados observamos que la parte real $Re(\omega)$ y la parte imaginaria $Im(\omega)$ varían de forma aproximadamente lineal cuando cambiamos la masa del campo m .

Note que las Figuras 4.4, 4.5 y 4.6 encontramos que para los tres radios estudiados se presenta comportamiento similar. Además los puntos correspondientes al mismo modo tienen un comportamiento lineal, pero para cada modo el valor absoluto de la pendiente es más grande y las ordenadas en el origen son más grandes cuando r_H es más grande.

En particular analizaremos el caso cuando el radio del horizonte es $r_H = 150$ (Figura 4.6). Recordemos que r_H es el inverso del parámetro a del agujero negro (2.2) (ver Ec. (3.9)).

Modo	Ec. de Ajuste		Comparación con a
n	b_n	c_n	$-(2n - 1)a$
1	-0.0076	-1.1871	-0.0066
2	-0.0222	-1.1838	-0.0200
3	-0.0370	-1.1793	-0.0333
4	-0.0521	-1.1744	-0.0466
5	-0.0673	-1.1693	-0.0600

Tabla 4.2: Ecuaciones de ajuste de la forma $Im(\omega_n) = b_n + mc_n$ (Figura 4.6) y comparación con a para $r_H = 150$. Campo de Klein-Gordon.

De las ecuaciones de ajuste en la Tabla 4.2, podemos notar que las líneas que pasan por los puntos correspondientes a un modo dado tienen pendientes que son muy similares entre sí, por lo que las líneas que pasan por los puntos correspondientes a la parte imaginaria de cada uno de los modos cuasinormales no se cruzan cuando varía la masa.

También notamos una similitud entre la ordenada en el origen con la relación $-(2n - 1)a$, esta relación es más precisa cuando r_H más grande.

Físicamente el comportamiento decreciente de la parte imaginaria cuando la masa aumenta nos indica que el campo de Klein-Gordon decae más rápido cuando es más masivo. Esto es, cuando la masa aumenta, el campo tiende al equilibrio más rápidamente.

Para la parte real de las frecuencias cuasinormales también analizamos en detalle el caso cuando $r_H = 150$ de la Figura 4.9 notando que el comportamiento de las Figuras 4.7 y 4.8 es similar. Observamos que para los modos presentados las ordenadas en el origen son más cercanas a cero conforme r_H aumenta. Adicionalmente notamos que para la recta correspondiente a cada modo su pendiente disminuye con el radio del agujero negro.

En la Tabla 4.3 se muestran las ecuaciones de ajuste de las líneas que pasan por los puntos correspondientes a cada modo para $r_H = 150$. De igual forma que para la parte imaginaria de las frecuencias cuasinormales, vemos en las ecuaciones de ajuste de la Tabla 4.3 que para las rectas que pasan por los puntos de un modo dado las pendientes son muy similares entre sí por lo que cuando la masa se incrementa las líneas que pasan por los puntos correspondientes a cada modo no se cruzan con las líneas que pasan por los puntos de los otros modos. Como vemos en la Tabla 4.3 la ordenada en el origen b_n se asemeja al valor de na , donde n indica el modo cuasinormal, por lo que conforme aumenta el número de modo cuasinormal la ordenada en el origen aumenta proporcionalmente.

Físicamente el comportamiento creciente de la parte real de las frecuencias cuasinormales cuando la masa aumenta nos indica que la frecuencia de oscilación del campo aumenta cuando el campo es más masivo. Esto es cuando la masa aumenta, al campo le toma menos tiempo completar un ciclo de oscilación.

Modo	Ec. de Ajuste		Comparación con a
n	b_n	c_n	na
1	0.0043	0.6859	0.0066
2	0.0125	0.6852	0.0133
3	0.0207	0.6845	0.0200
4	0.0290	0.6839	0.0266
5	0.0373	0.6834	0.0333

Tabla 4.3: Ecuaciones de ajuste de la forma $Re(\omega_n) = b_n + mc_n$ y comparación con a para $r_H = 150$. Campo de Klein-Gordon (Figura 4.9).

De estos resultados podemos concluir que los modos cuasinormales para el campo de Klein-Gordon en el agujero negro (2.2) oscilan con una frecuencia más grande y decaen más rápido cuando la masa se incrementa.

4.1.2. Radio del horizonte r_H variable

En las Figuras 4.10–4.15 presentamos las primeras 5 frecuencias cuasinormales para 3 valores de la masa del campo de Klein-Gordon cuando variamos el radio del horizonte r_H . Esto es, a continuación analizaremos como se comporta la parte real y la parte imaginaria de la frecuencia cuasinormal respecto a la variación de r_H .

En las Figuras 4.10–4.12 podemos notar que los modos presentados decaen más lentamente cuanto mayor es r_H , puesto que $Im(\omega)$ crece ($|Im(\omega)|$ disminuye) cuando aumenta r_H .

Observamos también que cuando r_H varía, el crecimiento de $Im(\omega)$ es diferente para cada modo cuasinormal, por ejemplo, el crecimiento de $Im(\omega)$ es más notorio para el quinto modo cuasinormal conforme r_H va aumentando comparado con el crecimiento de $Im(\omega)$ del primer modo. Esto es, notamos que el decaimiento del primer modo es más lento conforme r_H aumenta y se observa un comportamiento similar en los otros cuatro modos. También puede notarse que los valores de $Im(\omega)$ de las 5 frecuencias cuasinormales comienzan a ser más próximos cuando r_H aumenta.

En contraste, para la parte real en las Figuras 4.13–4.15 observamos que $Re(\omega)$ disminuye conforme r_H aumenta. Recordemos que $Re(\omega)$ corresponde a la frecuencia de oscilación del campo, por lo que para un modo dado la frecuencia de oscilación del campo disminuye conforme el horizonte de sucesos crece. En estas figuras se observa también que la disminución de $Re(\omega)$ es mayor en el quinto modo comparada con la del primer modo cuasinormal. En forma similar al comportamiento de la parte imaginaria notamos que los valores de $Re(\omega)$ de los primeros 5 modos son más próximos cuando r_H es más grande.

Hay que notar que para el rango examinado en las gráficas para $Im(\omega)$ y $Re(\omega)$ las líneas imaginarias que unen a los puntos correspondientes a cada modo no se intersectan cuando r_H varía.

Combinando los resultados para $Im(\omega)$ y $Re(\omega)$ de las Figs. 4.10–4.15 podemos decir que cuando la masa es fija, el campo de Klein-Gordon disminuye su frecuencia de oscilación y decae más lentamente conforme aumenta el radio del horizonte r_H .

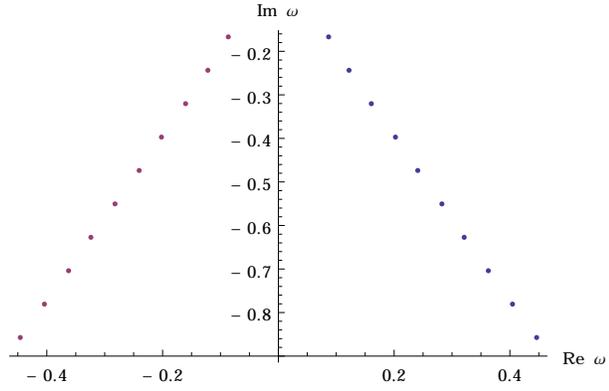


Figura 4.1: Frecuencias cuasinormales para $r_H = 30$ y $m = 1/10$. Campo de Klein-Gordon.

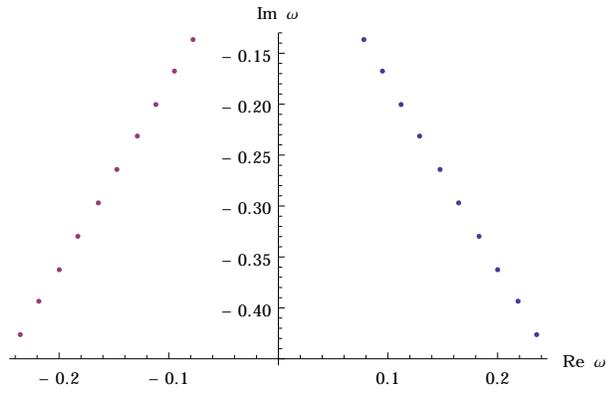


Figura 4.2: Frecuencias cuasinormales para $r_H = 70$ y $m = 1/10$. Campo de Klein-Gordon.

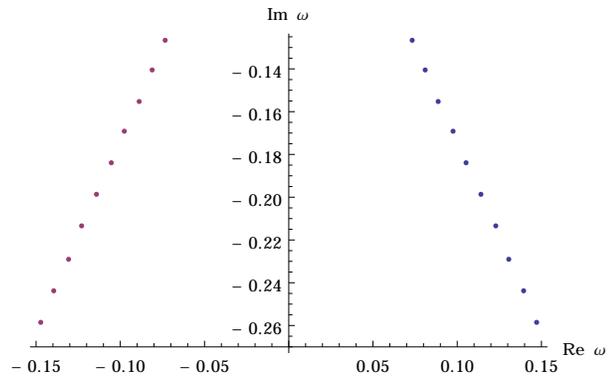


Figura 4.3: Frecuencias cuasinormales para $r_H = 150$ y $m = 1/10$. Campo de Klein-Gordon.

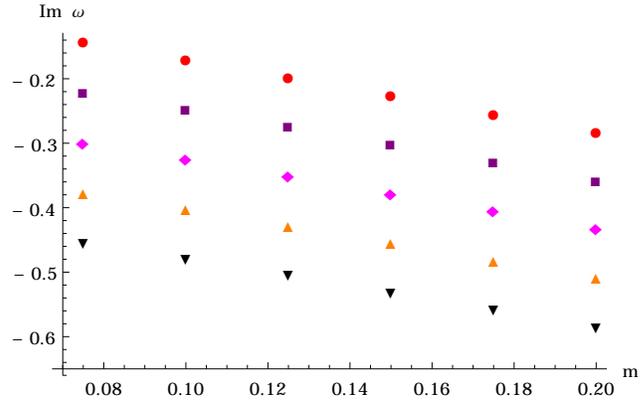


Figura 4.4: $Im(\omega)$ vs. m para $r_H = 30$. Campo de Klein-Gordon.

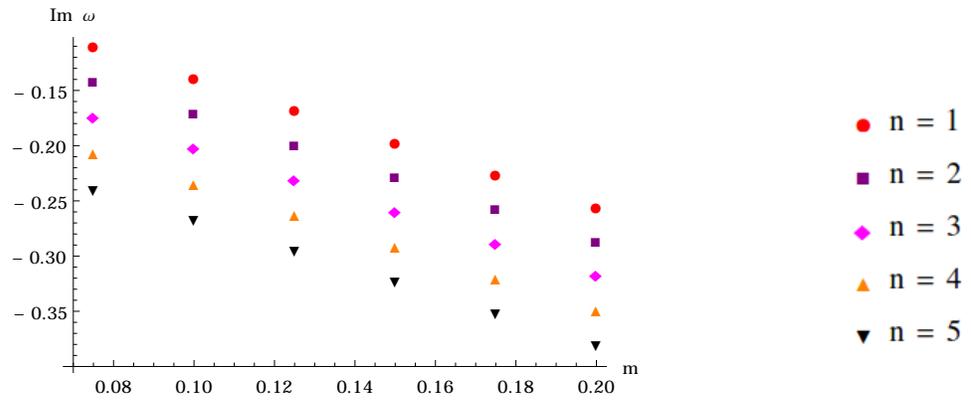


Figura 4.5: $Im(\omega)$ vs. m para $r_H = 70$. Campo de Klein-Gordon.

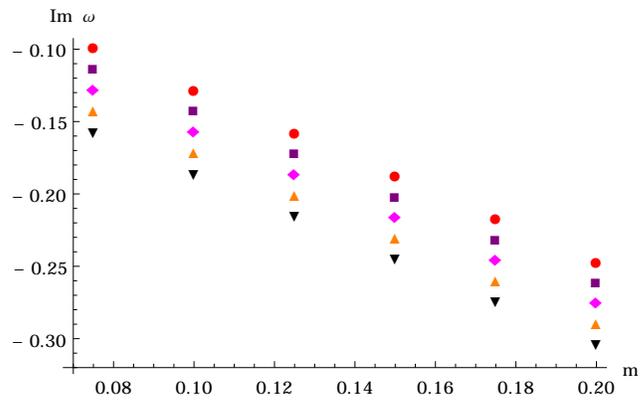


Figura 4.6: $Im(\omega)$ vs. m para $r_H = 150$. Campo de Klein-Gordon.

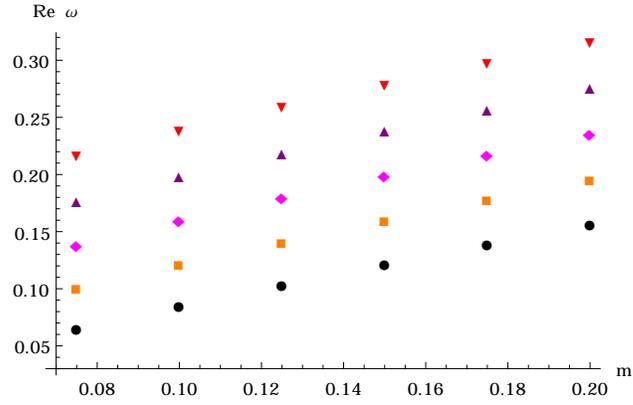


Figura 4.7: $Re(\omega)$ vs. m para $r_H = 30$. Campo de Klein-Gordon.

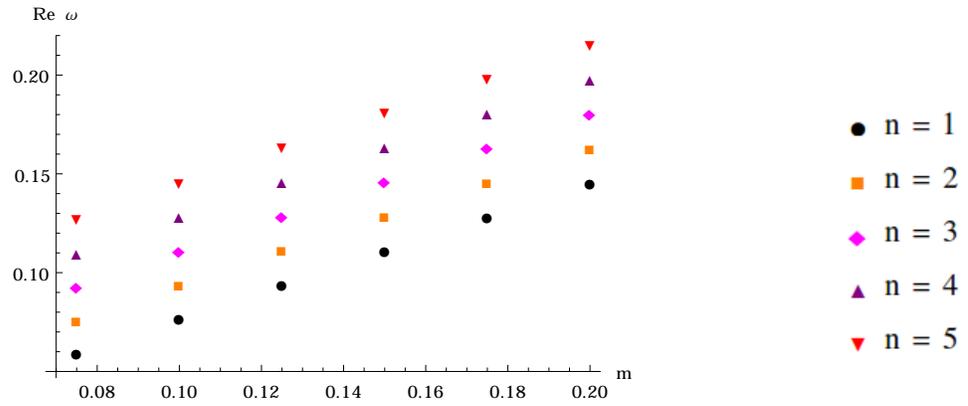


Figura 4.8: $Re(\omega)$ vs. m para $r_H = 70$. Campo de Klein-Gordon.

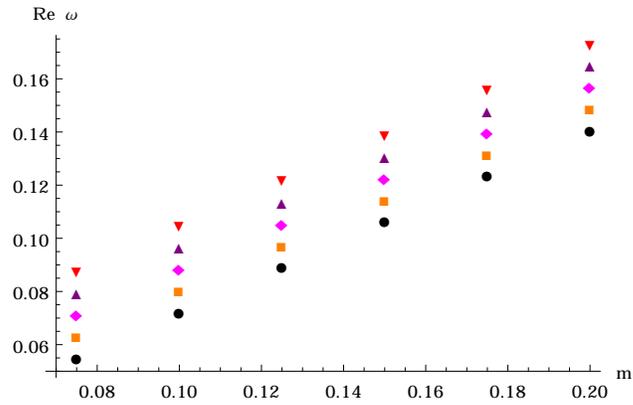


Figura 4.9: $Re(\omega)$ vs. m para $r_H = 150$. Campo de Klein-Gordon.

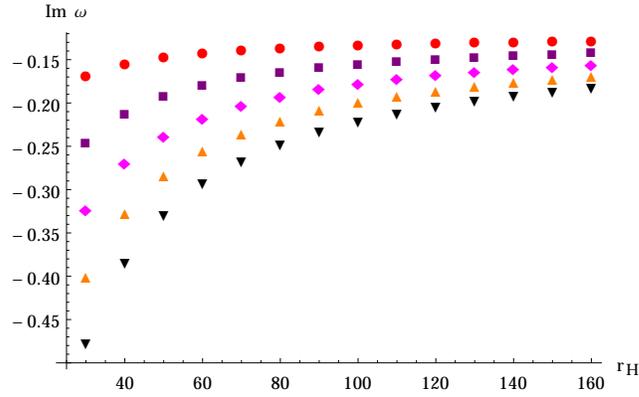


Figura 4.10: $Im(\omega)$ vs. r_H para $m = 1/10$. Campo de Klein-Gordon.

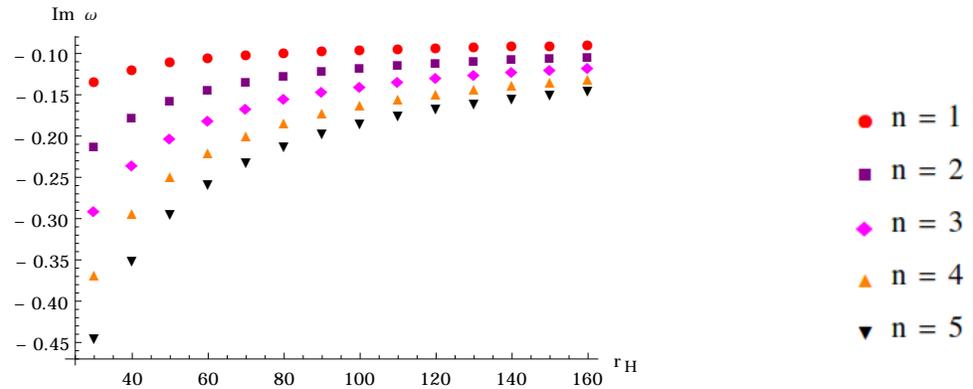


Figura 4.11: $Im(\omega)$ vs. r_H para $m = 1/15$. Campo de Klein-Gordon.

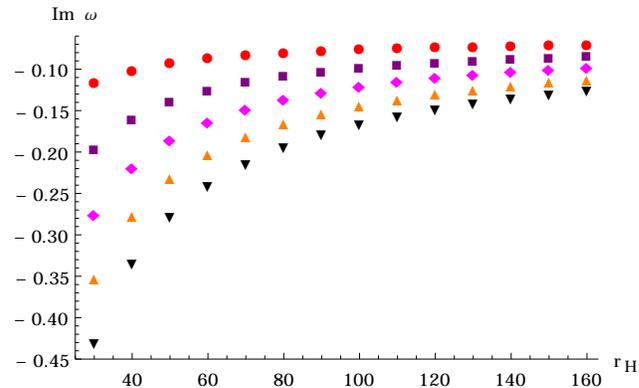


Figura 4.12: $Im(\omega)$ vs. r_H para $m = 1/20$. Campo de Klein-Gordon.

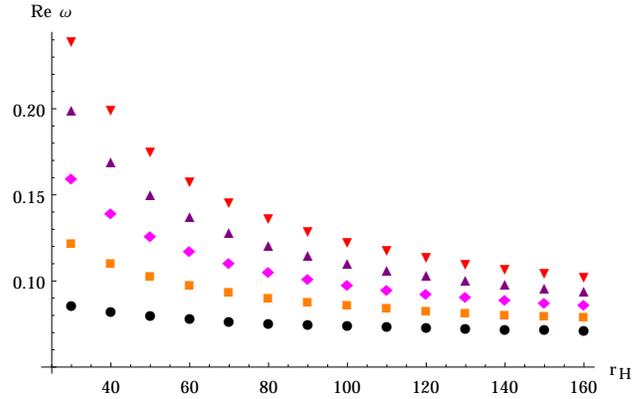


Figura 4.13: $Re(\omega)$ vs. r_H para $m = 1/10$. Campo de Klein-Gordon.

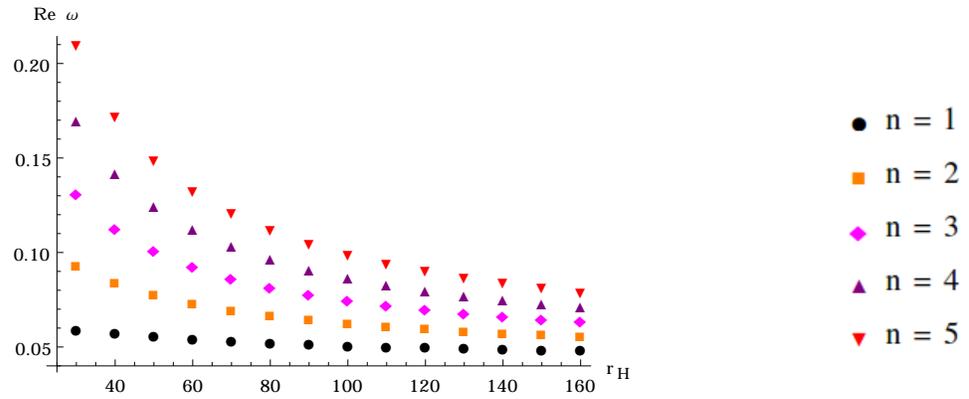


Figura 4.14: $Re(\omega)$ vs. r_H para $m = 1/15$. Campo de Klein-Gordon.

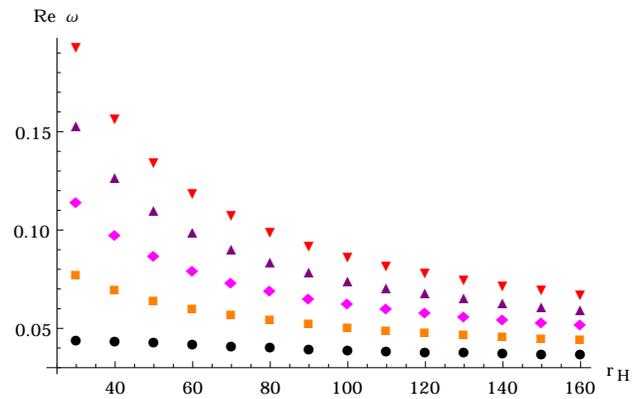


Figura 4.15: $Re(\omega)$ vs. r_H para $m = 1/20$. Campo de Klein-Gordon.

4.2. Campo de Dirac

Para el campo de Dirac, en las Figuras 4.16–4.18 presentamos la parte imaginaria contra la parte real de las frecuencias cuasinormales de los primeros 20 modos con $m = 1/10$ y tres diferentes valores de r_H .

En estas 3 figuras se observa la simetría de la parte real de las frecuencias cuasinormales, esto es, que ω y $-\omega^*$ son cuasinormales. Además observamos que las frecuencias tienen parte imaginaria negativa, por lo que el campo de Dirac es estable cuando se propaga en el agujero negro (2.2).

Note que las figuras presentan el mismo comportamiento que obtuvimos para el campo de Klein-Gordon, pues el valor absoluto de la parte imaginaria del primer modo es más pequeño conforme r_H aumenta, esto es, el tiempo de decaimiento aumenta con r_H , además el rango de valores de la parte real también disminuye conforme r_H aumenta, por lo que el campo tiene un rango de frecuencias de oscilación más pequeño.

En la Tabla 4.4 exponemos los valores para el tiempo de decaimiento y el factor de calidad del campo de Dirac. Notamos que estas cantidades presentan un comportamiento creciente conforme r_H aumenta, mismo comportamiento que encontramos antes para el campo de Klein-Gordon.

r_H	30	70	150
τ	6.26943	7.41119	7.92883
Q	0.27417	0.28730	0.28864

Tabla 4.4: Tiempo de decaimiento τ y factor de calidad Q de la primera frecuencia cuasinormal del campo de Dirac con masa $m = 1/10$ y para distintos r_H .

De nuevo, para el campo de Dirac estudiaremos la variación de la parte imaginaria y de la parte real de las frecuencias con respecto a m y r_H . Es conveniente comentar que para el campo de Dirac en todos los casos que analizamos obtuvimos que las frecuencias presentan la simetría que nos dice que ω y $-\omega^*$ son cuasinormales, por lo tanto, en lo que sigue para simplificar la exposición de los resultados sólo presentamos las frecuencias cuasinormales con $Re(\omega) > 0$.

4.2.1. Masa m variable

En las Figuras 4.19–4.24 presentamos la parte imaginaria y la parte real de las primeras 5 frecuencias cuasinormales para 3 valores del horizonte r_H fijos cuando la masa del campo m varía. Tanto para $Re(\omega)$ como para $Im(\omega)$ obtuvimos que varían de forma lineal cuando variamos la masa del campo.

Note que para los tres radios estudiados el comportamiento de $Im(\omega)$ vs. m es parecido. De manera similar al campo de Klein-Gordon, en las Figuras 4.19–4.21 para la

parte imaginaria de las frecuencias, los puntos correspondientes a un modo dado tienen un comportamiento lineal. Es conveniente observar que para r_H más grandes y para cada modo, el valor absoluto de la pendiente es más grande y las ordenadas en el origen son más pequeñas en valor absoluto.

Para este campo también analizaremos en detalle el caso cuando el radio del horizonte es $r_H = 150$. Escribimos las ecuaciones de ajuste para este caso en la Tabla 4.5.

Modo	Ec. de Ajuste		Comparación con a
n	b_n	c_n	$-(2n - 1)a$
1	-0.0072	-1.1890	-0.0066
2	-0.0215	-1.1866	-0.0200
3	-0.0362	-1.1831	-0.0333
4	-0.0510	-1.1791	-0.0466
5	-0.0661	-1.1748	-0.0600

Tabla 4.5: Ecuaciones de ajuste de la forma $Im(\omega_n) = b_n + c_n m$ (Figura 4.21) y comparación con a para $r_H = 150$. Campo de Dirac.

De las ecuaciones en la Tabla 4.5 podemos notar que las pendientes son muy similares entre sí, por lo que la línea imaginaria que pasa por los puntos que corresponden a un modo cuasinormal no se cruza con las líneas de los demás modos. También podemos ver que las ordenadas en el origen son reproducidas aproximadamente por la relación $-(2n - 1)a$ y corroboramos que para r_H más grandes esta relación es más precisa.

Físicamente el comportamiento decreciente de la parte imaginaria cuando la masa aumenta nos indica que el campo de Dirac decae más rápido cuando su masa se incrementa.

Para la parte real de las frecuencias cuasinormales notamos que el comportamiento es similar para $r_H = 30, 70, 150$ (Figuras 4.22, 4.23, 4.24, respectivamente). En estas figuras es posible notar que para un modo dado las ordenadas en el origen son más cercanas a cero conforme r_H aumenta. Además la pendiente de las rectas disminuye cuando el radio aumenta.

En la Tabla 4.6 se muestran las ecuaciones de ajuste de las líneas que pasan por los puntos correspondientes a cada modo para $r_H = 150$, y similar a la parte imaginaria, vemos en las ecuaciones de ajuste que las pendientes son muy similares entre sí y debido a esto se observa que las líneas imaginarias que unen los puntos de cada modo cuasinormal no se cruzan con las líneas de los otros modos.

En cuanto a las ordenadas en el origen de los ajustes de la Tabla 4.6 encontramos que su valor se aproxima razonablemente por el valor de na donde n indica el modo cuasinormal, por lo que conforme aumenta el número de modo cuasinormal la ordenada en el origen aumenta de manera proporcional.

Modo	Ec. de Ajuste		Comparación con a
n	b_n	c_n	na
1	0.0041	0.6867	0.0066
2	0.0123	0.6859	0.0133
3	0.0206	0.6848	0.0200
4	0.0289	0.6836	0.0266
5	0.0374	0.6824	0.0333

Tabla 4.6: Ecuaciones de ajuste de la forma $Re(\omega_n) = b_n + c_n m$ para $r_H = 150$ (Figura 4.24) y comparación con a para el campo de Dirac.

Físicamente el comportamiento creciente de la parte real de las frecuencias cuasinormales cuando la masa aumenta nos indica que la frecuencia de oscilación del campo de Dirac aumenta cuando el campo es más masivo.

De los resultados de las Figs. 4.19–4.24 podemos concluir que los modos cuasinormales para el campo de Dirac en el agujero negro (2.2) oscilan con una frecuencia más grande y decaen más rápidamente cuando la masa del campo se incrementa. Un comportamiento similar al previamente encontrado para el campo de Klein-Gordon.

4.2.2. Radio del horizonte r_H variable

En las Figuras 4.25–4.30 presentamos la parte imaginaria y la parte real de las primeras 5 frecuencias cuasinormales para 3 valores de la masa del campo de Dirac cuando variamos el radio del horizonte r_H con el fin de analizar como se comporta la parte real y la parte imaginaria de la frecuencia cuasinormal respecto a la variación de r_H .

Es posible notar que las Figuras 4.25–4.27 tienen un comportamiento similar, pues puede verse en los modos presentados que $|Im(\omega)|$ disminuye cuando aumenta r_H ($Im(\omega)$ aumenta cuando r_H se incrementa). Observamos también que el crecimiento de $Im(\omega)$ es diferente para cada modo cuasinormal, es decir, el crecimiento de $Im(\omega)$ es más notorio para el quinto modo cuasinormal comparado con el crecimiento de $Im(\omega)$ del primer modo conforme r_H va aumentando. De lo anterior concluimos que el decaimiento del primer modo es más lento conforme r_H aumenta y de forma similar para los otros modos. También puede notarse que los valores de $Im(\omega)$ de los 5 modos cuasinormales comienzan a ser más próximos cuando r_H aumenta, en forma parecida al campo de Klein-Gordon.

Para la parte real, en las Figuras 4.28–4.30 observamos que $Re(\omega)$ disminuye conforme r_H aumenta, y recordando que la parte real de las frecuencias cuasinormales corresponde a la frecuencia de oscilación del campo vemos que para un modo dado la frecuencia de oscilación del campo disminuye conforme el horizonte de sucesos crece.

De manera similar a la parte imaginaria se observa que la variación del valor de $Re(\omega)$

es mayor en el quinto modo en comparación al primer modo conforme r_H aumenta. Similarmente al comportamiento de la parte imaginaria, notamos que los valores de $Re(\omega)$ de los primeros 5 modos son más próximos cuando r_H es más grande.

De nuevo podemos notar que, en el rango de parámetros examinado para la parte imaginaria y la parte real de las frecuencias, las líneas imaginarias que unen a los puntos correspondientes a cada modo cuando r_H varía no se intersectan.

Para masa fija, combinando los resultados para $Im(\omega)$ y $Re(\omega)$ de las Figs. 4.25–4.30, podemos decir que el campo de Dirac disminuye su frecuencia de oscilación y decae más lentamente conforme aumenta el radio del horizonte r_H .

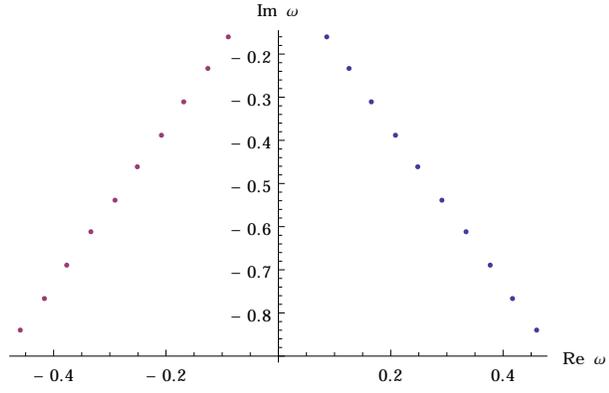


Figura 4.16: Frecuencias cuasinormales para $r_H = 30$ y $m = 1/10$. Campo de Dirac.

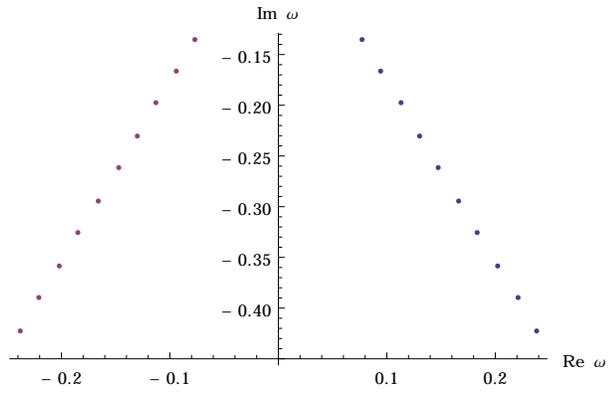


Figura 4.17: Frecuencias cuasinormales para $r_H = 70$ y $m = 1/10$. Campo de Dirac.

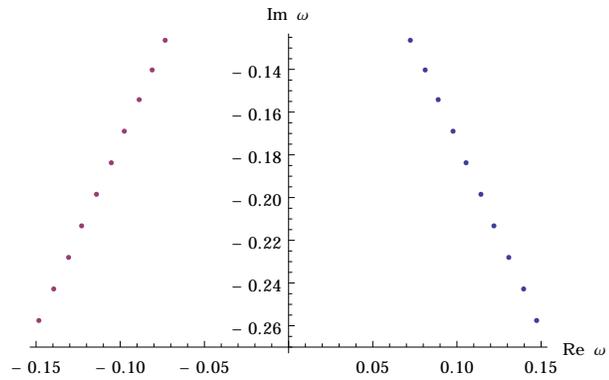


Figura 4.18: Frecuencias cuasinormales para $r_H = 150$ y $m = 1/10$. Campo de Dirac.

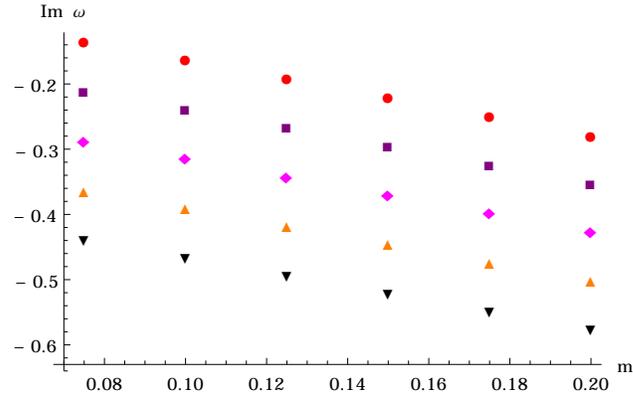


Figura 4.19: $Im(\omega)$ vs. m para $r_H = 30$. Campo de Dirac.

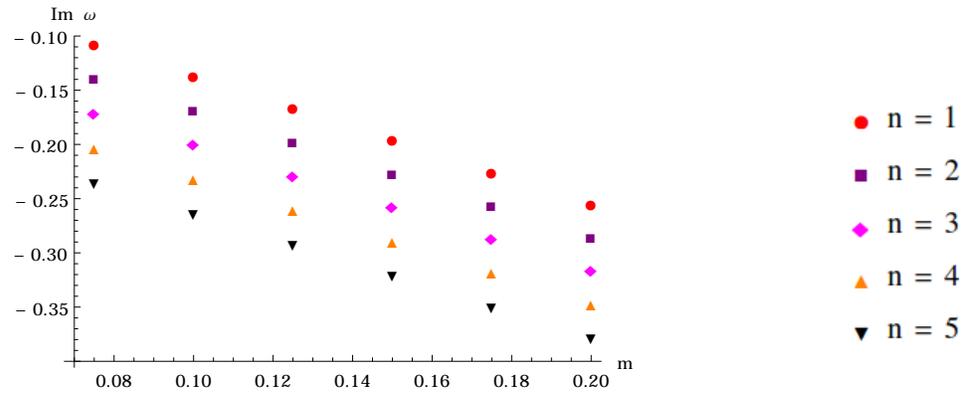


Figura 4.20: $Im(\omega)$ vs. m para $r_H = 70$. Campo de Dirac.

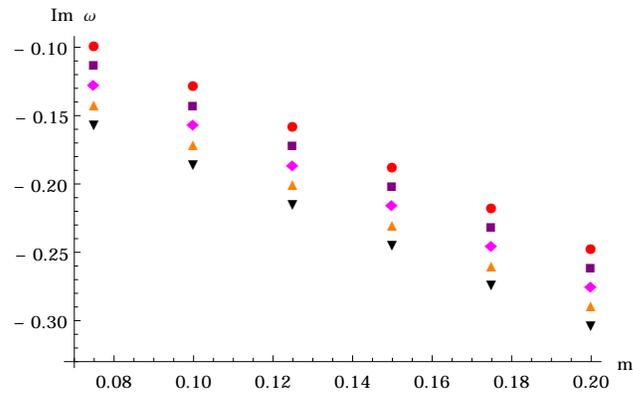


Figura 4.21: $Im(\omega)$ vs. m para $r_H = 150$. Campo de Dirac.

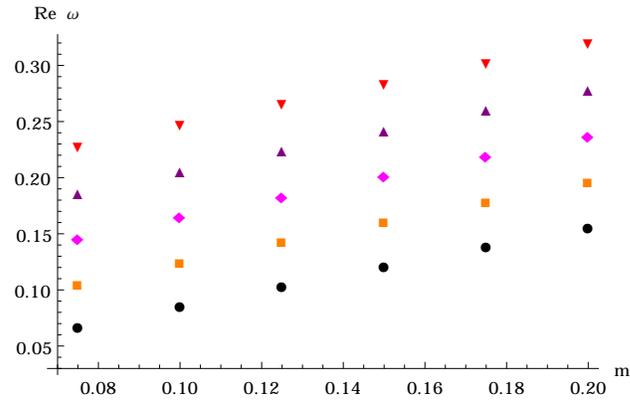


Figura 4.22: $Re(\omega)$ vs. m para $r_H = 30$. Campo de Dirac.

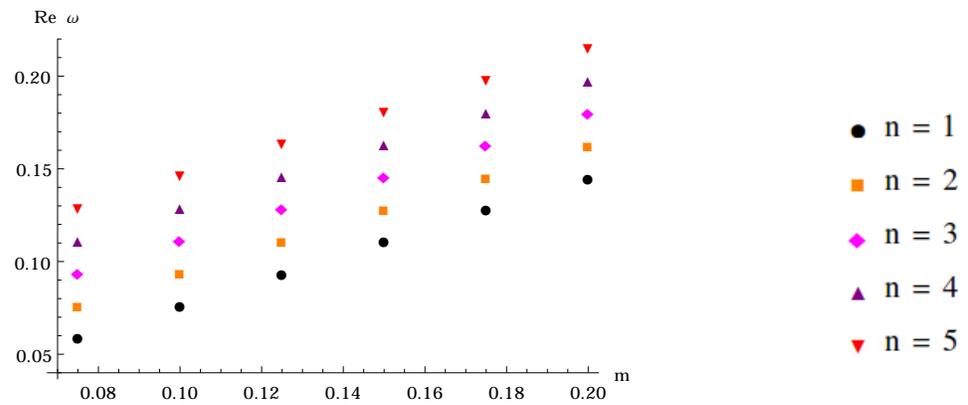


Figura 4.23: $Re(\omega)$ vs. m para $r_H = 70$. Campo de Dirac.

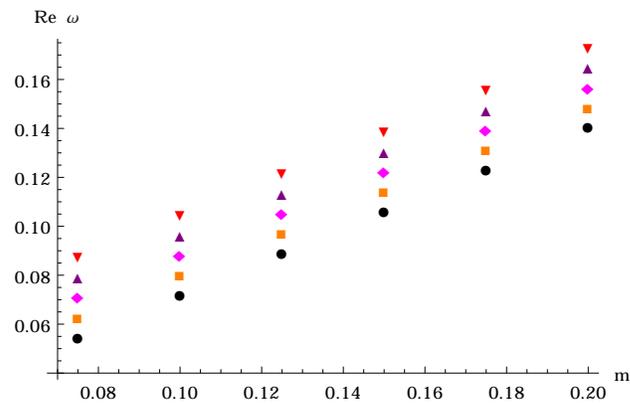


Figura 4.24: $Re(\omega)$ vs. m para $r_H = 150$. Campo de Dirac.

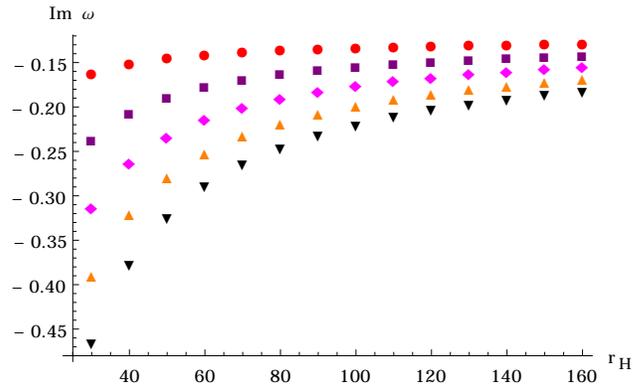


Figura 4.25: $Im(\omega)$ vs. r_H para $m = 1/10$. Campo de Dirac.

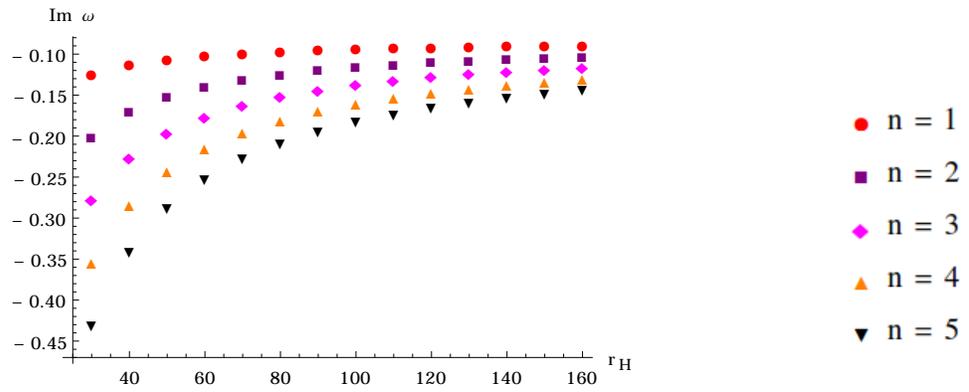


Figura 4.26: $Im(\omega)$ vs. r_H para $m = 1/15$. Campo de Dirac.

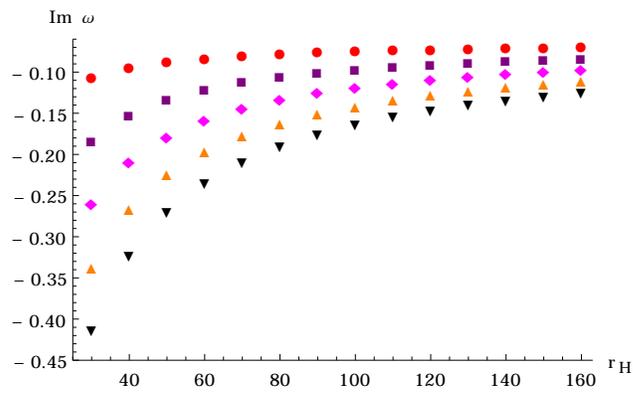


Figura 4.27: $Im(\omega)$ vs. r_H para $m = 1/20$. Campo de Dirac.

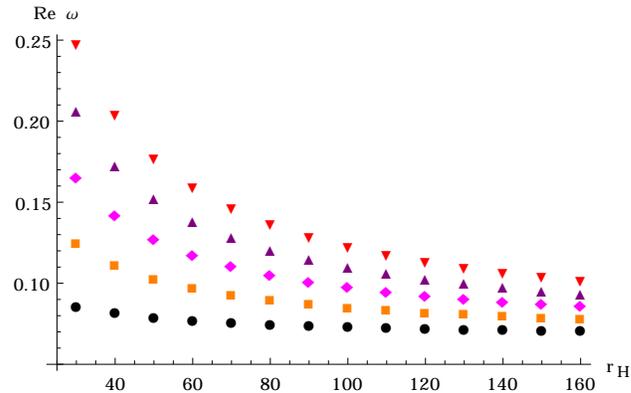


Figura 4.28: $Re(\omega)$ vs. r_H para $m = 1/10$. Campo de Dirac.

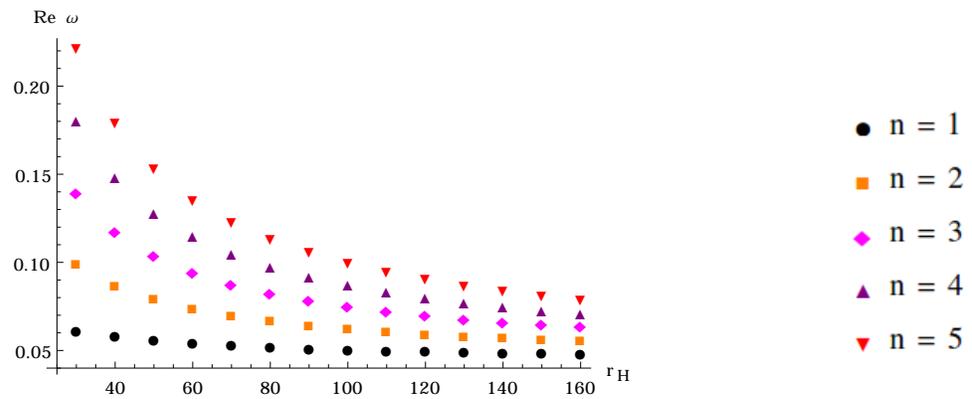


Figura 4.29: $Re(\omega)$ vs. r_H para $m = 1/15$. Campo de Dirac.

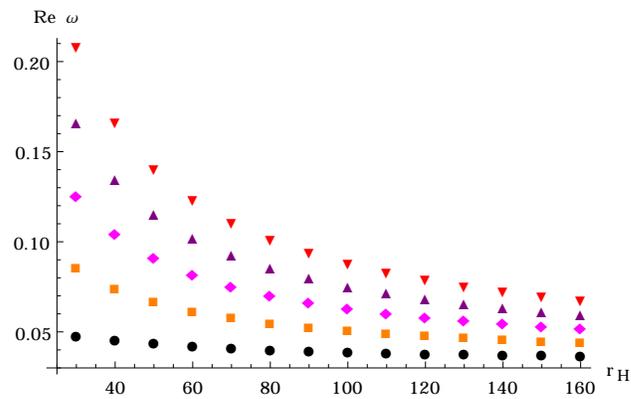


Figura 4.30: $Re(\omega)$ vs. r_H para $m = 1/20$. Campo de Dirac.

4.3. Comparación de las frecuencias para los campos de Dirac y Klein-Gordon

Debido a que para los dos campos estudiados obtuvimos resultados muy similares para el comportamiento de la parte imaginaria y de la parte real de las frecuencias cuasinormales con respecto a la variación de r_H y m , a continuación presentamos dos gráficas de comparación de sus frecuencias cuasinormales para $r_H = 30$ y $r_H = 150$ con la masa de los campos igual a $m = 1/10$ (Figuras 4.31 y 4.32).

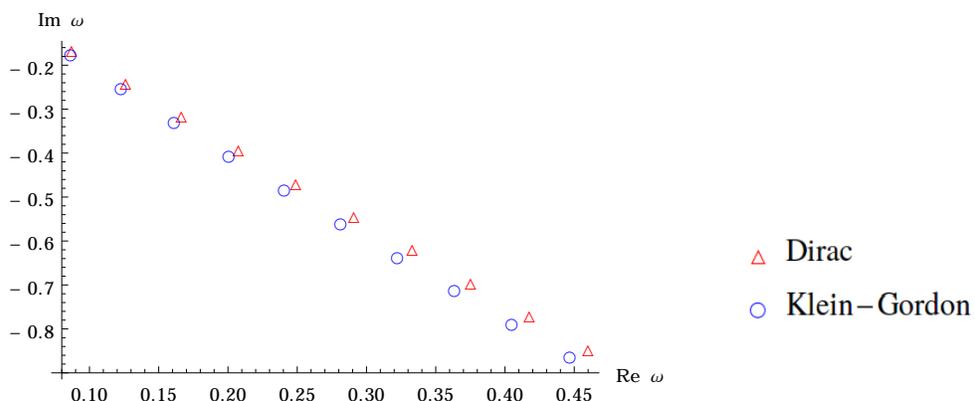


Figura 4.31: $Im(\omega)$ vs. $Re(\omega)$ de las primeras 10 frecuencias de los campos de Dirac y Klein-Gordon para $r_H = 30$ y $m = 1/10$.

Vemos que las frecuencias cuasinormales son muy parecidas y son casi idénticas para $r_H = 150$, esto a pesar de que los potenciales para el campo de Klein-Gordon (2.15) y el campo de Dirac (2.45) tienen formas matemáticas muy distintas. Note que para r_H más pequeño esta casi-igualdad de los valores comienza a ser menos precisa.

Recordamos que para los campos de Klein-Gordon y de Dirac propagándose en un agujero negro con $r_H = 150$, en las Tablas 4.2 y 4.5 obtuvimos una dependencia similar entre la parte imaginaria de las frecuencias cuasinormales y la masa. Notemos que en ambas tablas encontramos la misma relación para la ordenada en el origen de los distintos modos con el inverso del radio del horizonte $(-2(n-1)a)$. Además para los dos campos en las Tablas 4.3 y 4.6 también obtuvimos una dependencia similar para la parte real de las frecuencias cuasinormales con la masa. Adicionalmente para ambos campos las ordenadas en el origen de los distintos modos casi corresponden a na .

Finalmente, comparando los valores de c_n (las pendientes de las rectas) dados en las Tablas 4.2 y 4.5 observamos que para el mismo modo estos son muy parecidos. También obtenemos una conclusión parecida cuando comparamos los valores de c_n dados en las

Tablas 4.3 y 4.6. Por lo tanto, esperamos que la similitud de las frecuencias sea válida para otros valores de la masa de los campos.

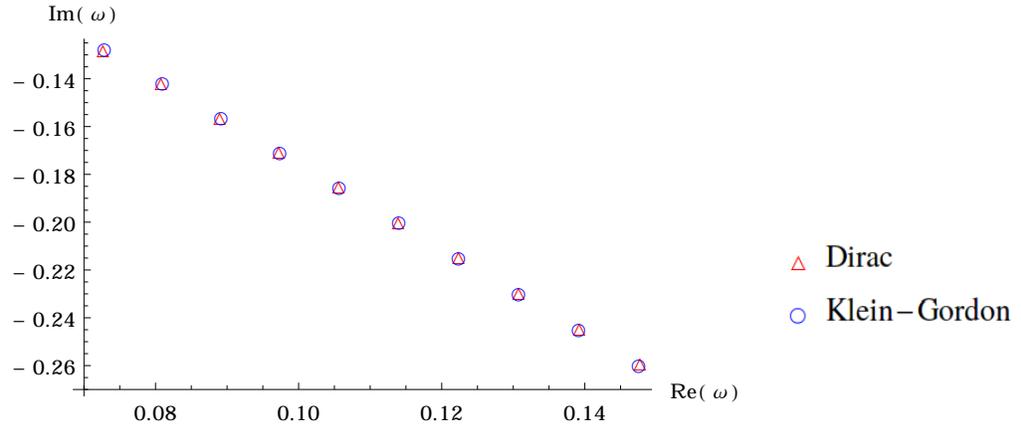


Figura 4.32: $Im(\omega)$ vs. $Re(\omega)$ de las primeras 10 frecuencias de los campos de Dirac y Klein-Gordon para $r_H = 150$ y $m = 1/10$.

Capítulo 5

Conclusiones

Nuestros principales resultados numéricos fueron presentados y discutidos en el capítulo anterior, a continuación exponemos una síntesis de los mismos.

Para los campos de Klein-Gordon y Dirac encontramos que sus frecuencias cuasinormales aparecen a pares con la misma parte imaginaria y son simétricas respecto al eje imaginario. Además la parte imaginaria de las frecuencias es negativa, por lo que podemos concluir que los modos cuasinormales de ambos campos decaen en el tiempo y por lo tanto son estables en el agujero negro bidimensional (2.2).

Adicionalmente, para ambos campos encontramos que el tiempo de decaimiento y el factor de calidad son mayores cuando el horizonte de sucesos del agujero negro se incrementa, por lo que el campo decae más lentamente y oscila mejor, en el sentido de que el factor de calidad Q aumenta, cuando el radio del horizonte de sucesos se incrementa.

Cuando variamos la masa, para las frecuencias de ambos campos encontramos comportamientos similares para su parte real y su parte imaginaria. Esto se observa también en las Tablas 4.2, 4.3, 4.5 y 4.6, pues para ambos campos obtenemos valores parecidos para las pendientes y ordenadas en el origen. Es conveniente mencionar que hallamos una expresión algebraica que aproxima razonablemente la ordenada en el origen. Para la parte imaginaria es $-(2n - 1)a$ y para la parte real es na .

También para ambos campos obtuvimos que los modos cuasinormales oscilan con una frecuencia más grande y decaen más rápido conforme la masa se incrementa.

Cuando cambiamos el radio del horizonte, para los modos cuasinormales de los campos de Klein-Gordon y de Dirac encontramos que disminuye la frecuencia de oscilación y decaen más lentamente conforme aumenta el radio del horizonte del agujero negro.

Como encontramos resultados muy similares para las frecuencias de ambos campos, sobre todo para cuando el radio del horizonte es grande, también comparamos las frecuencias cuasinormales de ambos campos cuando $r_H = 150$ y $r_H = 30$ con la masa de ambos igual a $m = 1/10$. Hallamos que para $r_H = 150$ las frecuencias cuasinormales de ambos campos son aproximadamente las mismas, pero para $r_H = 30$ esto no pasa,

aunque son parecidas. Esto ocurre a pesar de que los potenciales efectivos de ambos campos son muy diferentes, por lo cual este resultado merece un análisis más amplio. Así que podemos esperar que para radios grandes las frecuencias cuasinormales de ambos campos sean casi idénticas, mientras que para radios más pequeños ellas sean menos parecidas. Sin duda, la búsqueda de una explicación de este hecho es un problema interesante.

Nuestros resultados también señalan que existe un número infinito de frecuencias cuasinormales. Adicionalmente indican que la parte real y la parte imaginaria de las frecuencias no están acotadas y sus valores absolutos crecen con el número de modo.

Finalmente, notamos que el presente trabajo puede extenderse al menos en las siguientes direcciones:

- 1) Ampliar el rango explorado de los parámetros r_+ y m .
- 2) Debido a que en el presente trabajo, para ambos campos, solamente determinamos sus primeras veinte frecuencias cuasinormales sería conveniente determinar algunas frecuencias adicionales y correspondientes a números de modo n más grandes.

Bibliografía

- [1] T. Regge, J. A. Wheeler, “Stability of a Schwarzschild Singularity”, *Physical Review* vol. **108**, pp. 1063, (1957).
- [2] H. P. Nollert, “Quasinormal modes: the characteristic “sound” of black holes and neutron stars”, *Class. Quantum Grav.* vol. **16**, pp. R159, (1999).
- [3] V. P. Frolov, I. D. Novikov, *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*. (Kluwer) (1997).
- [4] B. P. Abbott, et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”, *Phys. Rev. Lett.* vol. **116**, pp. 061102-1 (2016).
- [5] J. Aasi, et al. (The LIGO Scientific Collaboration and the Virgo Collaboration), “Search for gravitational wave ringdowns from perturbed intermediate mass black holes in LIGO-Virgo data from 2005-2010”, *Phys. Rev. D* vol. **89**, pp. 102006, (2014) [arXiv:gr-qc/1403.5306].
- [6] M. Y. Rojas-Luis, “*Comportamiento para tiempos largos de un campo clásico en espaciotiempos planos*”, Tesis de Licenciatura, ESFM, (2015).
- [7] G. T. Horowitz, V. E. Hubeny, “Quasinormal modes of AdS black holes and the approach to thermal equilibrium” *Phys. Rev. D* vol. **62**, pp. 024027-1, (2000).
- [8] E. Berti, V. Cardoso, A. O. Starinets, “Quasinormal modes of black holes and black branes”, *Class. Quantum Grav.* vol. **26**, pp. 163001, (2009) [arXiv:0905.2975] [gr-qc].
- [9] D. Grumiller, W. Kummer, D. V. Vasilevich, “Dilaton gravity in two dimensions”, *Phys. Rept.* vol. **369**, pp. 327, (2002).
- [10] J. P. S. Lemos, P. M. Sá, “Black holes of a general two-dimensional dilaton gravity theory”, *Phys. Rev. D* vol. **49**, pp. 2897, (1994).
- [11] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity*. (Cambridge University Press) (1985).

- [12] S. Carroll, *Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity*. (Addison Wesley) (2004).
- [13] A. López-Ortega, I. Vega-Acevedo, “Quasinormal frequencies of asymptotically flat two-dimensional black holes”, *Gen. Rel. Grav.* vol. **43**, pp. 2631, (2011).
- [14] I. Vega-Acevedo, “*Modos cuasinormales y estabilidad clásica de agujeros negros en dos dimensiones*”, Tesis de Licenciatura, ESFM, (2011).
- [15] K. D. Kokkotas, B. G. Schmidt, “Quasinormal modes of stars and black holes”, *Living Rev. Rel.* vol. **2**, pp. 2, (1999) [arXiv:gr-qc/9909058].
- [16] R. Cordero, A. López-Ortega, I. Vega-Acevedo, “Quasinormal frequencies of asymptotically anti-de Sitter black holes in two dimensions”, *Gen. Rel. Grav.* vol. **44**, pp. 917, (2012).
- [17] H. F. W. Höft, M. Höft, *Computing with Mathematica. Second Edition*. (Academic Press) (2003).
- [18] S. Wolfram, *The Mathematica Book. 5th ed.* (Wolfram Media) (2003).
- [19] V. P. Frolov, A. Zelnikov, *Introduction to Black Hole Physics*. (Oxford University Press) (2011).