



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

**“Análisis de la Propiedad de Observabilidad para
sistemas no lineales descritos por modelos difusos tipo
Takagi-Sugeno”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

CON ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA MECÁNICA

PRESENTA:

M. EN C. ARACELI GRANDE MEZA

DIRIGIDA POR:

DR. JESÚS ALBERTO MEDA CAMPAÑA



CIUDAD DE MÉXICO 2019

RESUMEN

Este trabajo de investigación se basa principalmente en el análisis de la propiedad de observabilidad para sistemas no lineales de una y varias salidas; propone el desarrollo de un Observador Difuso tipo Takagi-Sugeno para este tipo de sistemas; presenta una metodología arbitraria en la ubicación robusta de polos para el observador difuso que garantice un desempeño eficaz, al mismo tiempo que se realiza una comparación con otras técnicas de control perfectamente establecidas como son las LMI's.

En esta tesis se plantea procurar pleno conocimiento de todas las variables del sistema no lineal. En su mayoría los sistemas dinámicos son de alta complejidad no lineal, por lo que no es posible conocer todos los estados del sistema. Una ventaja primordial al conocer todos los valores referentes a un sistema dinámico es precisamente que, en su etapa de retroalimentación los procesos de control se faciliten.

El conocimiento previo de todas las variables y parámetros del sistema garantiza un correcto funcionamiento del mismo; la dinámica es totalmente transparente al operador y puede manipular mejor la información para obtener los mejores resultados; es decir, resultados eficaces que permiten una mejor operación del sistema.

En este trabajo se pretende establecer un algoritmo que facilite el análisis de los sistemas de control no lineal. Debido a la dificultad natural que representan los sistemas físicos, los algoritmos de control correspondientes son muy complejos, por lo que es necesario establecer técnicas que reduzcan la dificultad en el diseño de los métodos de control no lineal.

Una aportación importante de este trabajo de investigación es posibilitar el diseño de un observador de estados de orden completo que simplifique la consecución de los estados del sistema no lineal empleando sistemas difusos tipo Takagi-Sugeno. Cuando no es posible tener acceso a todas las variables o estados

del sistema una buena opción es diseñar un observador de estados que propicie bajo cierta técnica, estimar o aproximar estos datos.

En la actualidad los sistemas difusos han adquirido mayor importancia, su procedimiento es accesible en la búsqueda de soluciones a problemas de gran complejidad. Cada vez más se han provisto de un mayor reconocimiento por las diferentes comunidades científicas y técnicas, hacen uso de reglas heurísticas y empíricas parecidas al razonamiento humano que los hace bastante interesantes, simplificando los métodos rigurosos ya establecidos.

Por consiguiente el enfoque principal de esta tesis es especificar la observabilidad de cierta clase de sistemas no lineales, estimar los estados predominantes del sistema, de forma que facilite la etapa de control. El observador es de orden completo basado en los sistemas difusos tipo Takagi-Sugeno que hacen uso de una base lingüística del conocimiento, simplificando el modelo del sistema no lineal.

El observador de tipo difuso propone un método “arbitrario” de asignación de polos que garantice la eficacia del algoritmo de control.

ABSTRACT

This research work is mainly based on the analysis of the observability property for nonlinear systems of one and multiple outputs; proposes the development of a Takagi-Sugeno Fuzzy Observer for this type of systems; the research presents an arbitrary methodology in the robust location of poles for the fuzzy observer that guarantees an efficient performance, at same time a comparison is made with other perfectly established control techniques like LMIs.

In this thesis it is proposed to obtain full knowledge of all the variables of the nonlinear system. Most dynamic systems are of high nonlinear complexity, so it is not possible to know all the states of the system. An important advantage in knowing all the values referring to a dynamic system is precisely that, in its feedback stage, the control processes are facilitated.

The previous knowledge of all variables and parameters about the system guarantees a correct operation of it; dynamic is totally transparent to the operator and can manipulate the information better to obtain the best results; that is, effective results that allow a better operation of the system.

In this work we intend to establish an algorithm that facilitates the analysis of non-linear control systems. Due to the natural difficulty that physical systems represent, control algorithms for nonlinear systems are complicated and it is necessary to stablish new techniques that reduce difficult designing for nonlinear control methods.

An important contribution of this research work is to enable the design of an observer of complete order states that simplifies the achievement of nonlinear system states using Takagi-Sugeno fuzzy systems. When it is not possible to access all system variables or states, a good option is to design a state observer that facilitates states estimation under certain technique.

Nowadays Fuzzy Systems have acquired major importance, their procedure is accessible for looking solutions to very complex problems. Increasingly Fuzzy

Systems have been provided of more recognition by different scientific and technical communities, they use heuristic and empirical rules similar to human reasoning that makes them more interesting, simplifying rigorous methods already established.

Therefore the main focus of this thesis is to specify the observability of a certain class of nonlinear systems, estimate the predominant states of the system, in a way that facilitates the control stage. The observer is of complete order based on the Takagi-Sugeno fuzzy systems that make use of a linguistic base of knowledge, simplifying the model of the nonlinear systems.

The Fuzzy Observer proposes an "arbitrary" method of pole assignment that guarantees the effectiveness of the control algorithm.

DEDICATORIA

Dedico mi trabajo a todas las personas que de alguna forma han contribuido en mi formación académica y personal, ya que gracias a ellas no habría logrado alcanzar mis metas.

A Cin y a Álvaro con todo mi amor.

A Magda y Sergio por su incondicional apoyo durante toda mi vida.

AGRADECIMIENTO

Mi más sincero agradecimiento a Magda y a Sergio por toda su generosidad.

A Cin y a Álvaro por su paciencia, por su amor y el gran apoyo que siempre me han dado.

Agradezco al Dr. Jesús Alberto Meda Campaña por sus conocimientos que me ha transmitido en el desarrollo de mi Doctorado.

Agradezco el apoyo que se me ha brindado a través del CONACYT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología),

Al Instituto Politécnico Nacional por permitirme lograr mi sueño.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. No linealidad por sector global [5]	32
Figura 2. No linealidad por sector local [5]	32
Figura 3. Diagrama esquemático del observador difuso.	43
Figura 4. Péndulo Invertido sobre un carro.	50
Figura 5. Funciones de membresía del modelo de dos reglas para el modelo difuso del péndulo sobre un carro.	50
Figura 6. Estado real vs observado del sistema difuso para el péndulo por el método no conservativo. $s_1 = -1$ y $s_2 = -1$	53
Figura 7. Error entre la señal real y la observada para el péndulo por el método no conservativo. $s_1 = -1$ y $s_2 = -1$	53
Figura 8. Señal de control del sistema difuso para el péndulo por el método no conservativo. $s_1 = -1$ y $s_2 = -1$	54
Figura 9. Estado real vs observado del sistema difuso del péndulo por el método de LMI's.	54
Figura 10. Señal de control del sistema difuso del péndulo por el método de LMI's.....	55
Figura 11. Error entre la señal real y la observada del péndulo por el método de LMI's. ...	55
Figura 12. Estado real vs observado del sistema difuso para el péndulo por el método no conservativo. $s_1 = -100$ y $s_2 = -100$	56
Figura 13. Error entre la señal real y la observada para el péndulo por el método no conservativo. $s_1 = -100$ y $s_2 = -100$	57
Figura 14. Señal de control del sistema difuso para el péndulo por el método no conservativo. $s_1 = -100$ y $s_2 = -100$	57
Figura 15. Estado real vs observado del sistema difuso para el péndulo por el método no conservativo. $s_1 = -1 + 2i$ y $s_2 = -1 - 2i$	58
Figura 16. Error entre la señal real y la observada para el péndulo por el método no conservativo. $s_1 = -1 + 2i$ y $s_2 = -1 - 2i$	59
Figura 17. Señal de control del sistema difuso para el péndulo por el método no conservativo. $s_1 = -1$ y $s_2 = -1$	59
Figura 18. Funciones de membresía para el sistema difuso caótico tipo Lorenz	61
Figura 19. Estado real vs observado para el sistema de Lorenz por el método no conservativo. $s_1 = -5, s_2 = -3, y s_3 = -3$	64
Figura 20. Señal de error real y observado para el sistema de Lorenz por el método no conservativo. $s_1 = -5, s_2 = -3, y s_3 = -3$	65
Figura 21. Estado real vs observado para el sistema de Lorenz por el método de LMI's. ...	65
Figura 22. Señal de error real y señal observada para el sistema de Lorenz por el método de LMI's.	66
Figura 23. Modelo de un Brazo Robot de 2 DOF.	82

Figura 24. Funciones de membresía correspondientes al modelo robótico.	82
Figura 25. Estados del Sistema Ubicación Robusta de Polos.....	86
Figura 26. Señal de Control Ubicación Robusta de Polos.....	86
Figura 27. Estados del sistema enfoque LMI's	87
Figura 28. Señal de Control enfoque LMI's.....	88

ÍNDICE

RESUMEN	4
ABSTRACT	6
DEDICATORIA.....	8
AGRADECIMIENTO.....	9
ÍNDICE DE FIGURAS	10
CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN	15
1.1 Planteamiento del problema.....	16
1.2 Objetivos	16
1.2.1. Objetivos generales	17
1.2.2. Objetivos particulares.....	17
1.3 Justificación	17
1.4 Alcance.....	18
1.4.1 Metodología	18
1.5 Estructura de la Tesis.....	19
CAPÍTULO II. ESTADO DEL ARTE	21
2.1 Generalidades	21
2.2. Modelado de Sistemas.....	23
2.2.1. Modelado de Sistemas Lineales	24
2.2.2. Modelado de Sistemas No Lineales.....	25
2.3. Sistemas Difusos.....	27
2.3.1. Sistemas Difusos tipo Takagi-Sugeno	28
2.3.2. Estructura.....	28
2.4. Construcción del Modelo Difuso.....	30
2.4.1. Sector No Lineal.....	31
2.4.2. Aproximación Local en espacios de partición difusa.....	33
2.5. Compensación Distribuida Paralela	33
CAPÍTULO III. ANÁLISIS DE LA PROPIEDAD DE OBSERVABILIDAD PARA SISTEMAS DIFUSOS	35

3.1. Representación en el Espacio de Estados	36
3.2. Independencia Lineal	36
3.3. Observabilidad	37
3.3.1. Condiciones para Observabilidad Completa	38
CAPÍTULO IV. DISEÑO DEL OBSERVADOR DIFUSO	39
4.1. Observadores.....	39
4.2. Estimación de estados por medio de observadores	40
4.3. Observadores Difusos	41
4.4. Diseño del Observador Difuso.....	41
4.4.1. Observador de Estados	42
4.4.2. Observador de Orden Completo	43
4.4.3. Condición necesaria y suficiente para la observación del sistema.....	43
4.5. Algoritmo de Ackermann	44
4.6. Estabilización Basada en el Observador	46
CAPÍTULO V. ANÁLISIS DE ALGUNOS EJEMPLOS NUMÉRICOS EN LA APLICACIÓN DEL OBSERVADOR DIFUSO TIPO TS	48
5.1. Ejemplo del Péndulo Invertido sobre un vehículo.....	48
5.1.1. Planteamiento del Problema	49
5.1.2. Modelo del Sistema Difuso.....	50
5.2. Ejemplo de un Sistema Caótico	60
5.2.1. Planteamiento del Problema	60
5.2.2. Modelo del Sistema Difuso.....	61
CAPÍTULO VI OBSERVABILIDAD PARA SISTEMAS DE MÚLTIPLES ENTRADAS Y MÚLTIPLES SALIDAS.	67
6.1. Generalidades	67
6.2. Observadores para Sistemas no Lineales de Múltiples Entradas y Múltiples Salidas (MIMO).	69
6.2.1 Consideraciones para el Observador para sistemas no lineales MIMO descritos por modelos difusos tipo Takagi-Sugeno	70
6.3. Observabilidad para Sistemas no Lineales de Múltiples Entradas y Múltiples Salidas (MIMO) Difusos.	73

6.3.1. Observabilidad para sistemas difusos.....	74
6.4. Condiciones para la Existencia del Observador Difuso en Sistemas no lineales mimo	76
6.4.1. Análisis de observabilidad difusa a través de la asignación robusta de polos	78
6.5 Condiciones para la existencia del estabilizador difuso para sistemas mimo.....	79
6.5.1. Análisis de estabilidad difusa a través de la asignación robusta de polos	80
6.6. Ejemplo Numérico	81
CONCLUSIONES	89
TRABAJOS FUTUROS	92
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	94
ANEXOS	99

CAPÍTULO I.

INTRODUCCIÓN

Una de las ocupaciones principales del hombre ha sido por siempre, tener control sobre el entorno físico que lo rodea y, predecir de cierta forma el comportamiento de los sistemas, en afán de adaptarlos precisamente a sus necesidades. Su alcance ha permitido la creación de avanzadas técnicas de diseño, algunas de ellas como la lógica difusa imitan el comportamiento del experto humano en la toma de decisiones para elegir la mejor opción que controle al sistema en operación.

Desde sus inicios los conjuntos difusos y la teoría de la lógica difusa han encontrado oportunidad en una extensa variedad de aplicaciones; por ejemplo, dentro de la ingeniería del control, en los sistemas de potencia, las telecomunicaciones, procesamiento de señales, toma de decisiones, reconocimiento de patrones, finanzas, medicina, robótica, etc., por mencionar algunas. Considerado como parte de los sistemas inteligentes, el control difuso es ampliamente aceptado como una alternativa con respecto a las técnicas de control convencionales.

Para entender cómo trabaja un sistema es importante conocer cierta información relacionada con los estados y parámetros involucrados en él. Debido a la elevada complejidad propia de los sistemas, en su mayoría, hace inaccesible su integro conocimiento, significando un elevado costo en la implantación de dispositivos para su medición. De forma que, para registrar los estados prescindidos en la dinámica del sistema se pretenda estimar con un observador o estimador de estados, que mediante los valores de entrada y salida reconstruyen el vector de estados.

Un requerimiento esencial en el diseño del observador es garantizar la convergencia de los estados estimados a los valores reales o que estén

estrechamente cercanos a ellos. No existen métodos generales que indiquen como analizar y establecer los observadores no lineales.

El diseño y sintonía de los observadores no lineales son generalmente complicados. Por lo que simplificar estas particularidades es una tarea importante que permitiría mejores técnicas de control.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Debido a la perfilada complejidad de los sistemas casi siempre resulta arduo su análisis y desarrollo. El acceso a todas las variables implicadas en el proceso de control, no es del todo fácil al especialista, dificultando de esta forma la etapa de retroalimentación. Una forma de aproximar los estados del sistema es el diseño de un observador o estimador de estados de orden completo que proporcione los datos faltantes simplificando la etapa de control.

1.2 OBJETIVOS

Los objetivos generales formulan el nivel de análisis y el propósito global que se desea cubrir con la investigación; se plantean de esta forma dos objetivos generales.

Se definen los objetivos específicos o particulares tomando como base la capacidad y la eficacia de la investigación, para lo cual se definen dos objetivos específicos.

1.2.1. Objetivos generales

1.- Uno de los principales objetivos es analizar la propiedad de la observabilidad para cierto tipo de sistemas no lineales empleando sistemas difusos tipo Takagi-Sugeno.

2.- Construir un observador eficaz de orden completo para cierta clase de sistemas difusos tipo Takagi-Sugeno.

1.2.2. Objetivos particulares

1.- Se desarrolla y analizan ejemplos en la aplicación del observador propuesto como una mejor alternativa en el desarrollo de sistemas no lineales

2.- Se realizan comparaciones con otros observadores como el realizado con LMI's para comprobar la efectividad del método propuesto.

1.3 JUSTIFICACIÓN

Los métodos convencionales para el análisis y diseño de sistemas de control no proveen una solución general a los problemas de la actualidad. Cada vez el control requiere de métodos más apropiados al notable avance de los sistemas garantizando un funcionamiento óptimo en su aplicación.

En su mayoría los sistemas son de naturaleza no lineal y, regularmente la elevada complejidad en su estructura no permite reconocer todas las variables involucradas en el desempeño de éste, dificultado su proceder en etapas como la de retroalimentación. La falta de información obstaculiza el proceso de control.

Es importante desarrollar técnicas funcionales que nos permitan simplificar el complicado estudio de los sistemas, asegurando una adecuada aplicación de éstos.

1.4 ALCANCE

El presente trabajo se enfoca en la propiedad de observabilidad para cierto tipo de sistemas No lineales bajo el enfoque de sistemas difusos tipo Takagi-Sugeno (TS). Los sistemas difusos son de gran importancia, ya que tienen la capacidad de afrontar la inherente complejidad y ambigüedad del mundo real.

Los sistemas de control multivariable son sistemas con al menos dos entradas y al menos dos salidas, el objetivo es mantener las variables dentro de cierto parámetro que permita el correcto funcionamiento del sistema original. Una entrada induce determinado efecto en algunas salidas y recíprocamente una salida es afectada por diferentes entradas.

Esta investigación se realiza en principio para el análisis de sistemas No lineales con varias entradas y una salida, con lo cual se estimarán los estados faltantes por medio de un observador difuso tipo TS.

El observador difuso tipo TS estima los estados de manera arbitraria haciendo converger los estados estimados a los estados reales, facilitando la eficacia del observador en su aplicación.

1.4.1 Metodología

De inicio es importante obtener el modelo matemático del sistema a controlar, cualquier modelo difiere de la planta real, pero una aproximación razonable asegurará el diseño del control basado en el modelo. Los sistemas modernos tienen muchas entradas y muchas salidas lo cual los hace más y más complejos, su descripción requiere de una gran cantidad de ecuaciones. Para un

sistema de esa magnitud la representación en ecuaciones de estado facilita el entendimiento de su dinámica.

Asumiendo que no todos los estados están disponibles para su medición se utilizará un observador de estados de orden completo, basándose en la teoría de Sistemas Difusos tipo Takagi-Sugeno (TS), se reconstruye el vector de estados. Debido a la aproximación del modelo matemático con el sistema real, se considera que existe un error entre los dos, por lo que, esa incertidumbre o error se debe considerar en el proceso de diseño del sistema de control.

1.5 ESTRUCTURA DE LA TESIS

Esta investigación plantea el tema de observabilidad de sistemas No lineales bajo el punto de vista de sistemas difusos tipo TS y define el diseño de un observador difuso de orden completo que permita la reconstrucción del vector de estados empleando un método práctico.

El trabajo se organiza de la siguiente forma:

En el Capítulo I de la Introducción se especifican ciertas generalidades en referencia a la Tesis, como son los objetivos, el alcance, metodología y estructura del trabajo.

En el Capítulo II de Sistemas Difusos, se conforma una introducción al tema del modelado de sistemas, se especifican conceptos básicos de la teoría de control con sistemas difusos, así como la estructura de los sistemas difusos TS.

En el Capítulo III de la Propiedad de la Observabilidad, se introduce el concepto de la observabilidad para sistemas no lineales y de los observadores o estimadores de estado, los cuales se emplean en la aproximación de los estados ausentes de medición, y como un medio en la reconstrucción del vector de estados.

En el Capítulo IV, de Observador Difuso, en este capítulo se tiene una descripción del desarrollo y análisis del observador difuso tipo TS bajo el enfoque

del algoritmo de Ackermann, con lo cual es posible establecer de forma arbitraria la observación de los estados prescindidos en la estructura del sistema no lineal original.

En el Capítulo V. de Ejemplos. Este capítulo está dedicado a la aplicación de la técnica diseñada para el observador difuso, se dan algunos ejemplos básicos como el del péndulo invertido sobre un carro, y algunos más como es el problema de Lorenz que es un ejemplo caótico.

El Capítulo VI, está dedicado a la sección de Conclusiones, y trabajos futuros donde a partir de la aplicación del observador difuso, como se especifica en el apartado anterior de aplicación, se obtienen ciertos resultados con respecto a la eficiencia del método propuesto. En la sección de Anexos se presentan algunos trabajos relacionados con la tesis, documentos para publicación en revistas de alto impacto como la IEEE Latino Americana relacionadas con temas de interés en el ámbito del Control de Sistemas, Lógica Difusa, etc.

CAPÍTULO II.

ESTADO DEL ARTE

2.1 GENERALIDADES

Hoy en día la complejidad de los sistemas incrementa aún más, poseen gran cantidad de elementos, la interacción entre ellos no es de fácil acceso y su evolución dinámica no se puede predecir con exactitud; lo que ha generado una gran necesidad de crear nuevas técnicas en el análisis y diseño de los sistemas de control.

Los Sistemas de Control Difuso, son una alternativa bien establecida, su objetivo es imitar el comportamiento del razonamiento humano [2], [3].

Los sistemas difusos tienen un extenso campo de aplicación, desde la automatización de enseres domésticos hasta los sofisticados sistemas de pilotaje de naves espaciales [4]

Uno de sus objetivos es simplificar y optimizar el desempeño de los sistemas de control tal como lo haría el experto en el campo de aplicación. Emplean un lenguaje sencillo de reglas de inferencia que intenta reflejar la proximidad e inexactitud del mundo real [5], [6], [7], [8].

La mayoría de los sistemas presentan no linealidades de alto orden y en consecuencia su comportamiento es difícil de predecir y modelar matemáticamente [20]. Muchos problemas en la toma de decisiones, monitoreo, detección de fallas o seguimiento de trayectorias [18], [21], [22], se basan en el conocimiento previo de las variables de estado y los parámetros de variación en el tiempo. Existen situaciones en las que no es posible tener acceso a ciertos datos o simplemente los dispositivos que los miden no son capaces de obtenerlos. En este caso se puede emplear un observador o estimador de estados [10], [11], [12], [13], que utiliza los valores de entrada y salida del sistema para estimar los datos. Los observadores

resultan ser una mejor opción ya que representan un bajo costo y menor percepción al ruido, en comparación con los sensores [9].

Un requerimiento esencial en el diseño de un observador es garantizar la convergencia de los valores estimados a los valores reales o al menos a una vecindad próxima a éstos [16].

Para los sistemas lineales existen algunas técnicas de estimación como el filtro de Kalman, que es un algoritmo aplicado a sistemas lineales [17]. Con respecto a los sistemas no-lineales, el diseño de estimadores es generalmente complicado e involucra un alto costo computacional [15], [23], [24].

Los modelos difusos tipo Takagi-Sugeno (TS) se caracterizan por representar una gran variedad de sistemas no lineales mediante la extensión de técnicas lineales bien conocidas. Incluso son considerados como Aproximadores Universales, por su capacidad de aproximar, arbitrariamente, funciones no lineales.

Su estructura facilita el análisis de estabilidad [1] y, así como el diseño de controladores y observadores. Como ejemplo, se puede mencionar al Compensador Paralelo Distribuido (PDC), que se basa en Desigualdades Lineales Matriciales (LMI's), pero cuyo desempeño ha mostrado ser demasiado conservativo [14], [19].

En este sentido, el presente trabajo, y como se ha mencionado anteriormente, propone el diseño de un observador difuso de orden completo para sistemas TS, empleando un método no conservativo, basado en la ubicación de polos que garantice la estimación del vector de estados, cuando el modelo difuso tipo TS sea observable.

La representación de los sistemas es un tema cada vez más complejo, es necesario conocer las características dinámicas de éste. Los sistemas modernos poseen más de una entrada y una salida, relacionándose entre sí de forma muy complicada. Para entender su funcionamiento lo más conveniente es reducir la complejidad en su representación matemática además de utilizar algoritmos que permitan realizar bastos cálculos numéricos. Si se tiene un sistema para el cual son medibles (u observables) un conjunto de entradas x_1, \dots, x_n y un conjunto de salidas y_1, \dots, y_n , se quiere encontrar la descripción matemática que caracterice el sistema,

en el sentido de que introduciendo los valores x_1, \dots, x_n dentro de la descripción matemática siempre sea posible obtener las salidas correspondientes y_1, \dots, y_n .

2.2. MODELADO DE SISTEMAS

El modelado, en general se refiere a la descripción del sistema (planta, proceso, etc.) en términos matemáticos que caracteriza el comportamiento entrada-salida de éste [7]. Para describir un sistema físico, se utiliza la fórmula o ecuación matemática que lo represente tanto cualitativa como cuantitativamente. Esta formulación se llama *modelo matemático del sistema físico*.

Muchos sistemas físicos particularmente aquellos muy complejos son extremadamente difíciles de modelar por medio de una fórmula o ecuación matemática precisa, debido a la complejidad en la estructura del sistema, o causado en ocasiones a las no linealidades, la incertidumbre, las aleatoriedades, etc. De forma que un modelo aproximado es en ocasiones necesario y práctico para aplicaciones del mundo real, además de que siempre es posible definirlo.

La mejor aproximación para el modelo del sistema es aquella que por sentido lo defina, que sea matemáticamente rigurosa y proporcione resultados satisfactorios teóricos y prácticos.

Una buena opción para el análisis de sistemas cuando éstos adquieren alta complejidad no lineal es la representación en el espacio de estados. La representación en el espacio de estados se puede aplicar tanto a sistemas lineales como a sistemas no lineales [29], [30]. Basándose en términos de cierto número de ecuaciones diferenciales de primer orden, se centra la atención en las variables de entrada, las variables de salida y las variables de estado. Estas ecuaciones se obtienen a partir de las leyes físicas que gobiernan al sistema en estudio como por ejemplo las leyes de Newton para sistemas mecánicos o las leyes de Kirchhoff para sistemas eléctricos.

Un modelo matemático razonable es imprescindible para un buen análisis. Cabe destacar que un modelo matemático no es único para un sistema

determinado. Un sistema se puede representar de muchas formas diferentes por lo que pueden tener muchos modelos matemáticos dependiendo de las circunstancias de estudio. [28].

2.2.1. Modelado de Sistemas Lineales

El modelo matemático representa en forma general al sistema, abstrae la realidad física, simplificando el análisis de cierto aspecto para su estudio. Lo deseable sería conocer todos los factores internos y externos que condicionan el comportamiento del sistema, tales como la relación que existe entre cada una de las variables, el efecto que producen las perturbaciones sobre éste, los rangos de estabilidad, así como la variación de sus parámetros, etc.

Los sistemas y modelos se clasifican de diferente forma según sus características propias; por ejemplo y siguiendo la clasifican en el campo de los sistemas de control tradicional, los sistemas estáticos, por ejemplo, responden a un comportamiento entrada-salida como un simple mapeo matemático sin involucrar operadores diferenciales. En contraste, los sistemas descritos por operadores diferenciales son llamados sistemas dinámicos, estos sistemas evolucionan o cambian con respecto a cierto parámetro que generalmente es el tiempo. De esta forma y siguiendo otra clasificación, un sistema es lineal cuando la correspondencia entre la entrada y la salida se define por medio de una función proporcional. En otro caso el sistema se dice No lineal.

En general para un sistema lineal se puede aplicar el Principio de superposición, que establece que la respuesta que producen dos funciones excitadoras distintas es la suma de sus respuestas individuales. Para un Sistema L se aplica una entrada u_1 que produce una salida $L(u_1)$ y para un entrada u_2 se produce una salida $L(u_2)$, por lo tanto,

$$L(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1L(u_1) + c_2L(u_2)$$

donde c_1 y c_2 es cualquier valor real o complejo [31].

Los sistemas que no son lineales se pueden aproximar mediante modelos matemáticos lineales, empleando algún método de diseño ya establecido, y de acuerdo a las especificaciones de desempeño definidas para el sistema.

Para analizar un sistema con múltiples entradas y múltiples salidas que se relacionan de forma muy compleja es importante aminorar la dificultad en las expresiones matemáticas, el enfoque en el espacio de estados para el análisis de sistemas es el más apropiado. Esto es la descripción del sistema en n número de ecuaciones diferenciales de primer orden que se combinan en una ecuación diferencial matricial de primer orden. El uso de esta notación matricial simplifica bastante la representación matemática del sistema con gran número de ecuaciones. El incremento en la cantidad de variables de estado, de entradas o de salidas no extiende la complejidad de las ecuaciones.

2.2.2. Modelado de Sistemas No Lineales

En su mayoría las relaciones físicas que existen entre las variables de un sistema son de tipo no lineal, incluso los mismos sistemas lineales lo son únicamente en ciertos rangos de operación limitados, esto se debe en ocasiones a que por ejemplo la salida de algún componente se puede saturar para señales de entrada muy grandes, o pueden existir rangos muy pequeño de variaciones de entrada a las cuales el componente es insensible o puede ocurrir una no linealidad de la ley cuadrática en algunos dispositivo, etc. [28].

El sistema dinámico es modelado por un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden muy bien acopladas [20],

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \end{aligned}$$

donde \dot{x}_i denota la derivada de x_i con respecto a la variable tiempo t , y u_1, \dots, u_p denotan las variables de entrada. Las variables x_1, \dots, x_n son las variables de estado que representan la memoria del sistema dinámico. Los integradores de un sistema funcionan como dispositivos de memoria, y sus salidas funcionan como variables de estado. La cantidad de variables de estado que especifican totalmente la dinámica del sistema es igual a la cantidad de integradores que contiene el sistema.

Usualmente se utiliza notación vectorial para escribir la ecuación en forma compacta definiéndola como

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \quad f(t, x, u) = \begin{bmatrix} f_1(t, x, u) \\ f_2(t, x, u) \\ \vdots \\ f_n(t, x, u) \end{bmatrix}$$

Se escriben las n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden como una sola ecuación diferencial vectorial de primer orden de dimensión n

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

a la cual se asocia otra ecuación de estado que define al vector de salida de dimensión q , la cual comprende variables de interés particular físicamente medibles o variables que se requieren para que el sistema se comporte de manera específica, la cual viene siendo la ecuación de salida

$$y = g(t, x, u)$$

En conjunto las dos ecuaciones definen el modelo en espacio de estados o simplemente el modelo de estados.

Para un sistema lineal, el modelo en espacio de estados toma la forma especial definida por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x + D(t)u \end{aligned}$$

Debido al convencionalismo de los métodos para sistemas lineales, el primer paso en el análisis de un sistema no lineal es generalmente la linealización de éste, de ser posible alrededor de ciertos puntos de operación y así analizar el modelo lineal resultante. Sin embargo, la linealización por sí misma no será suficiente, se deben desarrollar herramientas para el análisis de los sistemas no lineales. [20] La

linealización sólo predice el comportamiento local del sistema no lineal en la vecindad de un punto de operación. No es posible predecir el comportamiento no local más allá del punto de operación, y por lo tanto mucho menos el comportamiento global en todo el espacio de estados. Por lo que las no linealidades no se pueden describir con modelos lineales.

2.3. SISTEMAS DIFUSOS

Muchos sistemas, plantas o procesos físicos reales son muy difíciles para describir con simples ecuaciones numéricas. Una alternativa prometedora para modelar la ambigüedad del mundo real es la lógica difusa y las matemáticas en conjunto, empleándolos como aproximadores, se destaca de esta forma el *modelado de sistemas difusos*. El modelado de sistemas difusos en el campo del control es muy significativo y útil.

La lógica difusa razona a partir de términos lingüísticos difusos. Hace uso de reglas de inferencia del tipo SI-ENTONCES, por ejemplo SI el nivel de agua en el tanque es alta, ENTONCES cerrar la llave de agua o SI la presión es muy alta ENTONCES abrir la válvula, Si la velocidad es muy alta, ENTONCES dejar de apretar el acelerador. Estas implicaciones difusas son en realidad representaciones naturales del conocimiento humano disponibles sobre un problema en particular, en referencia al control del llenado de un tanque o el control de una caldera o el control de frenado de un vehículo, etc.

Esquemáticamente, en el desarrollo de un sistema difuso en primer lugar se proponen las variables lingüísticas que definen al sistema, junto a sus posibles estados y funciones de pertenencia, para dar una solución acertada.

El sistema resultante suele ser sencillo y los recursos de cálculo son reducidos; de manera que, la lógica difusa incorpore de forma simple y directa el conocimiento del experto, integrándolo en dispositivos de control desde electrodomésticos hasta sofisticados sistema de pilotaje para naves espaciales.

2.3.1. Sistemas Difusos tipo Takagi-Sugeno

La teoría de sistemas lineales está muy bien establecida así como los métodos y algoritmos para el diseño de observadores y controladores correspondientes a esta clase de sistemas. Sin embargo, este tipo de sistemas fracasan al describir sistemas totalmente no lineales.

Los sistemas difusos tipo Takagi-Sugeno son modelos con una forma especial capaces de representar exactamente o aproximar arbitrariamente con cierta precisión una extensa clase de sistemas no lineales. [15]

Takagi y Sugeno propusieron un modelo construido a partir de un conjunto de subsistemas lineales que se “mezclan” adecuadamente por medio de reglas de inferencia del tipo SI-ENTONCES capaces de relacionar el conocimiento físico, características lingüísticas y propiedades del sistema; de tal forma que el modelo represente efectivamente al sistema no lineal lo mejor posible dentro de un espacio definido.

2.3.2. Estructura

Considerando el sistema no lineal definido por sus ecuaciones de estado como:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t)) \quad (2)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados de la planta, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ como el vector de entrada y $y(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de salidas.

El modelo difuso TS para el sistema no lineal descrito previamente es de la siguiente forma:

Modelo

Regla i ;

SI $z_1(t)$ es M_1^i y \dots y $z_p(t)$ es M_p^i ,

$$\text{ENTONCES } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad i \\ = 1, 2, \dots, r$$

donde r es el número de reglas del modelo, p es el número de conjuntos difusos, los conjuntos M_j^i con $i=1,2,3,\dots,r$ y $j=1,2,3,\dots,p$ se definen a partir de conocimiento previo de la dinámica del sistema.

Por lo tanto, dado el par $(x(t), u(t))$, la dinámica del sistema difuso se infiere de forma siguiente:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)]$$
$$y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [C_i x(t)]$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados de la planta, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es la señal de entrada al sistema, $h_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, r$, es el peso normalizado de cada regla, el cual depende de la función de membresía para la variable premisa z_j en M_j^i , $j = 1, 2, \dots, p$, es decir,

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_j^i(z_j(t)), \quad h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$$
$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \quad 0 \leq h_i(z(t)) \leq 1,$$

para toda t , donde $M_j^i(z_j(t))$ es el valor de la función de membresía para $z_j(t)$ en

M_j^i con $[z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_p(t)]$ como una función de $x(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$ y $j = 1, 2, \dots, p$.

2.4. CONSTRUCCIÓN DEL MODELO DIFUSO

Al linealizar un sistema no lineal, éste trabaja de forma normal alrededor de un punto de equilibrio, las señales pueden considerarse señales pequeñas en torno al equilibrio. Si el sistema opera alrededor de un punto de equilibrio y si las señales involucradas son pequeñas es posible aproximar el sistema no lineal mediante un sistema lineal. El procedimiento de linealización se basa en el desarrollo de la función no lineal en series de Taylor alrededor del punto de operación y la retención solo del término lineal. Debido a que no se consideran los términos de orden superior del desarrollo en series de Taylor estos términos no considerados deben ser suficientemente pequeños; es decir, las variables solo se desvían ligeramente de la condición de operación de otro modo el resultado sería inexacto [28].

A partir de (1)-(2) el sistema difuso se puede reescribir de la forma siguiente:

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) , \quad (3)$$

$$y(t) = C(x(t))x(t) , \quad (4)$$

donde

$$A(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i, \quad B(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))B_i,$$

$$C(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i ,$$

Se asume que las matrices A_i , B_i y C_i se obtienen linealizando el sistema alrededor de algunos puntos de operación $(x, u) = (x^i, u^i)$; es decir,

$$A_i = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{(x^i, u^i)}, \quad B_i = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{(x^i, u^i)},$$

$$C_i = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{(x^i, u^i)},$$

Considerando el concepto de sector no lineal que se presenta en [5], se conduce a una representación exacta del sistema no lineal original (1) al menos en una región local del diagrama de fase.

2.4.1. Sector No Lineal

La construcción del modelo difuso es de inicio la base más importante del procedimiento en el análisis y diseño del control difuso. Se puede realizar por identificación empleando los datos entrada-salida del sistema o por derivación utilizando las ecuaciones conocidas para el sistema no lineal. En este proceso se identifican la estructura y los parámetros.

Los modelos dinámicos no lineales para sistemas mecánicos se pueden obtener por métodos como el de Lagrange-Euler o Newton-Euler, éste último emplea la idea de la no linealidad por sector.

El objetivo principal de usar el sector no lineal en la construcción del modelo difuso está en considerar un sistema no lineal de la forma $\dot{x}(t) = f(x(t))$, donde $f(0) = 0$. Enseguida la meta es encontrar el sector global tal que $\dot{x}(t) = f(x(t)) \in [a_1 \ a_2]x(t)$.

En la figura 1 se muestra la aproximación de no linealidad por sector. Esta aproximación garantiza la construcción de un modelo difuso exacto. Sin embargo, en ocasiones es difícil encontrar los sectores globales para el sistema no lineal total o general en este caso solo se utiliza el sector no lineal local, esto es debido a que las variables están definidas para cierto rango de valores. La figura 2 muestra la no linealidad del sector local, donde dos líneas limitan la región de los sectores locales

$-d < x(t) < d$. El modelo difuso que se establece representa exactamente al sistema no lineal en la región local $-d < x(t) < d$.

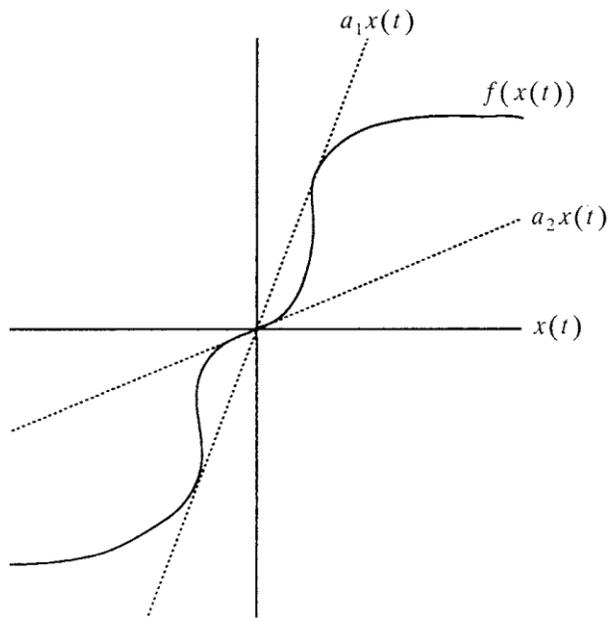


Figura 1. No linealidad por sector global [5]

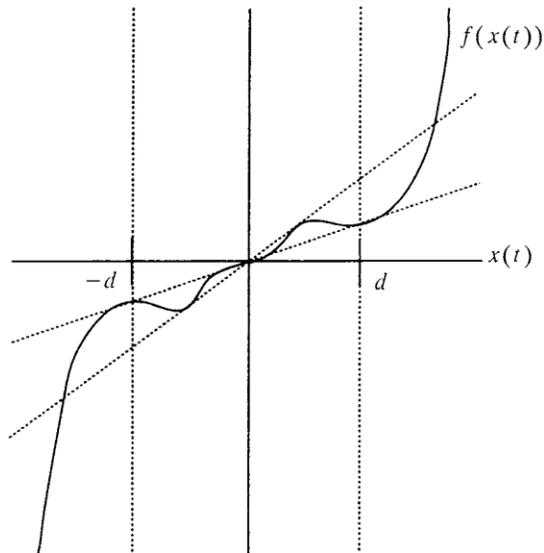


Figura 2. No linealidad por sector local [5]

2.4.2. Aproximación Local en espacios de partición difusa

Otro método para obtener modelos difusos tipo T-S es la denominada aproximación local en espacios de partición difusa, la cual aproxima los términos no lineales mediante términos lineales que se eligen adecuadamente. Este procedimiento conduce a reducir el número de reglas difusas, lo cual simplifica el análisis de sistemas no lineales. En los controladores difusos tradicionales el número de reglas se incrementa exponencialmente al incrementar el número de variables, generando reglas reiteradas y complicando el diseño, que viene siendo el problema de la dimensionalidad. Con n variables de entrada y m funciones de pertenencia para cada variable, se necesitarían m^n reglas, para construir la base de reglas del sistema difuso general. Si n incrementa, se aumenta exponencialmente el número de reglas dificultando la implementación del control difuso. El modelo difuso derivado es una aproximación del sistema original y para garantizar la estabilidad de éste se recomienda incluir un controlador robusto.

2.5. COMPENSACIÓN DISTRIBUIDA PARALELA

En un principio el método de Compensación Distribuida Paralela o PDC por sus siglas en inglés (Parallel Distributed Compensation) inició con el método propuesto por Kang y Sugeno.

Sin embargo, la estabilidad del sistema no se especificaba en el proceso de diseño. Posteriormente el método contempló estas propiedades y fue detallado en [26]. Finalmente el método PDC se define en [27].

El PDC ofrece un proceso de diseño para un sistema de control difuso propuesto empleando modelos difusos tipo Takagi-Sugeno.

Es decir, el sistema no lineal debe representarse inicialmente por medio de un modelo difuso tipo TS.

Cada regla de control se diseña en correspondencia a cada regla del modelo difuso TS. El control difuso comparte los mismos conjuntos difusos que el modelo no lineal respecto a las premisas de cada regla.

CAPÍTULO III.

ANÁLISIS DE LA PROPIEDAD DE OBSERVABILIDAD PARA SISTEMAS DIFUSOS

Frecuentemente en aplicaciones del control, no es posible el acceso a todos los estados del sistema; la lectura de éstos es difícil de realizar y representa un alto costo de ejecución. Sin embargo, la retroalimentación es necesaria, así como, la información completa de los estados del sistema original.

Una alternativa para resolver este problema es la estimación de los estados faltantes mediante el uso de un observador.

Un observador utiliza los datos proporcionados a la salida y las variables de control para reconstruir el vector de estados. Si es posible que todos los estados del sistema sean observados, entonces el observador es de orden completo.

En este caso el diseño del observador difuso se basa en el principio de separación, la implementación del controlador y del observador se desarrollan por separado con el objetivo de no afectar la estabilidad completa del sistema. Ambas propiedades, observabilidad y controlabilidad, garantizan una solución para el diseño del sistema.

Es importante recordar que el sistema original es no lineal y que por medio de la aproximación difusa, que es una técnica que linealiza alrededor de una gama de valores de forma apropiada, es posible una representación, por sector no lineal del sistema original, que garantiza la construcción del modelo difuso exacto.

3.1. REPRESENTACIÓN EN EL ESPACIO DE ESTADOS

La aproximación del modelo de forma simple y concreta facilita la verificación en el funcionamiento del sistema originario. La formulación en variables de estado tiene como característica principal que proporciona un medio con el que se pueden modelar de forma unificada los sistemas lineales y no lineales, los sistemas variantes e invariantes con el tiempo, los sistemas de una variable o multivariable [29]. El sistema difuso global u original queda representado en (3) y (4) en sus ecuaciones de estado, con una forma lineal en su presentación. Generalmente para un sistema no lineal el estudio en su forma de variables de estado es más complicado por lo que el camino más práctico es la linealización.

3.2. INDEPENDENCIA LINEAL

Con una expresión adecuada para el modelo difuso en (3)-(4) se podría escribir a partir de su ecuación de salida

$$y(t) = C(x(t))x(t)$$

derivando la salida

$$\dot{y}(t) = C(x(t))\dot{x}(t) = C(x(t))A(x(t))x(t) + C(x(t))B(x(t))u(t)$$

derivando nuevamente

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) &= C(x(t))A(x(t))\dot{x}(t) + C(x(t))B(x(t))\dot{u}(t) \\ &= C(x(t))A^2(x(t))x(t) + C(x(t))A(x(t))B(x(t))u(t) + C(x(t))B(x(t))\dot{u}(t)\end{aligned}$$

y así sucesivamente, matricialmente se tiene

$$Y(t) = O(x(t))x(t) + T(x(t))U(x(t))$$

donde

$$\begin{aligned}Y(x(t)) &= [y(x(t)) \quad \dot{y}(x(t)) \quad \dots \quad y^{(n-1)}(x(t))]^t \\ U(x(t)) &= [u(x(t)) \quad \dot{u}(x(t)) \quad \dots \quad u^{(n-1)}(x(t))]^t \\ O(x(t)) &= [C^t(x(t)) \quad A^t(x(t))C^t(x(t)) \quad \dots \quad (A^t(x(t)))^{n-1}C^t(x(t))]^t\end{aligned}$$

$$\mathbf{T}(x(t)) = [0 \quad C(x(t))B(x(t)) \quad \dots \quad C(x(t))A^{n-2}(x(t))B(x(t))]^t$$

Se asume que $U(t) = 0$, entonces se tiene

$$Y(0) = O(x(t))x(0)$$

Lo importante es saber si $Y(0)$ puede ser formada por una combinación lineal de las n columnas de la matriz $O(x(t))$.

Si estas n columnas son linealmente independientes, es decir, si la matriz $O(x(t))$ de dimensión $n \times n$ es no singular, entonces siempre es posible encontrar $x(0)$ para cualquier n vector $Y(0)$ tal que,

$$x(0) = O(x(t))^{-1}Y(0)$$

Por otro lado si $O(x(t))$ es singular (no tiene rango completo), es decir, algunas de las columnas de $O(x(t))$ son linealmente dependiente de otras, no será posible encontrar $x(0)$ para cualquier n vector $Y(0)$ que cumpla la condición anterior. La matriz $O(x(t))$ es la **matriz de observabilidad**.

Aún más interesante son los casos donde las condiciones iniciales son diferentes de 0, y es posible tener una matriz $O(x(t))$ de rango pleno o completo, lo que es equivalente a decir que $O(x(t))$ es no singular, tal que cumpla la misma condición.

3.3. OBSERVABILIDAD

A partir del sistema difuso total o global descrito por las ecuaciones en (2) y (3), se dice que el estado $x(t_0)$ es observable si dada cualquier entrada $u(t)$, existe un tiempo finito t_f mayor o igual a t_0 , tal que del conocimiento de $u(t)$ para $t_0 \leq t < t_f$ las matrices A , B , y C ; y la salida $y(t)$ para $t_0 \leq t < t_f$, son suficientes para determinar $x(t_0)$. La matriz de observabilidad se puede describir de la siguiente forma.

$$O(x(t)) = \begin{bmatrix} C(x(t)) \\ C(x(t))A(x(t)) \\ C(x(t))(A(x(t)))^2 \\ \vdots \\ C(x(t))(A(x(t)))^{n-2} \\ C(x(t))(A(x(t)))^{n-1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

3.3.1. Condiciones para Observabilidad Completa

Se expone que un sistema es observable de forma completa si cada una de las variables de estado del sistema produce algún efecto en cierta salida. Siempre es preferible obtener los datos sobre las variables de estados a partir de las medidas que se tienen para las salidas o las entradas. Si alguno de los estados no se pueden observar a partir de las mediciones correspondientes a las salidas o entradas, se dice que el estado no es observable y el sistema no es completamente observable o simplemente no observable.

Si la matriz de observabilidad es de dimensión cuadrada, para verificar que el sistema sea observable, se obtiene el determinante de $O(x(t))$, si es diferente de cero se dice que el sistema es observable o completamente observable, de lo contrario es no observable,

$$O(x(t)) \neq 0 \quad (6)$$

CAPÍTULO IV.

DISEÑO DEL OBSERVADOR DIFUSO

4.1. OBSERVADORES

Casi siempre resulta necesario estimar el valor de ciertas variables de estado que no son medidas en un sistema. La estimación de estas variables da como resultado a la observación de dichas variables. El observador de estados estima u observa las variables de estado implementándose como un dispositivo o programa capaz de reconstruir el vector de estados x de un modelo presentado en sus ecuaciones de estados, en [28] se define al observador de estados como un estimador de las variables de estado con base en las mediciones de las variables de salida y y de control u .

Los conceptos de controlabilidad y de observabilidad fueron introducidos por Kalman, su existencia comprueba una solución para el diseño del sistema de control. Un sistema se dice controlable si es capaz, mediante un vector de control sin acotamiento, llevar al sistema de cualquier estado inicial a cualquier otro estado, en un tiempo determinado. Por lo tanto la concepción de controlabilidad estipula la existencia de un vector de control que ocasione que el estado del sistema alcance cierto estado arbitrario.

Por otro lado la observabilidad se hace cargo del inconveniente de establecer el estado de un sistema dinámico teniendo como base la observación de los vectores de salida y de los vectores de control en un tiempo definido. Se dice que un sistema es observable sí, con el sistema en el estado x_0 , se puede establecer el estado a partir de la observación de los vectores de salida y de control durante un periodo de tiempo preciso.

Los observadores son sistemas dinámicos, muy parecidos al sistema original, de acuerdo al número de variables que son observadas se dice que un observador o estimador es de *Orden completo* si el observador comprende todas las variables del sistema, sin interesar si algunas de ellas están favorables para una medición inmediata. Es de *Orden reducido*: si el estimador evalúa menor número de n variables de estado, en donde n es la dimensión del vector de estado. Y de *Orden mínimo* si es un observador de orden reducido con el mínimo orden posible, es decir, si n es la dimensión del vector de estado y m es la dimensión del vector de salidas, el estimador de orden mínimo estima $n - m$ variables.

Al final del proceso de diseño, la realimentación del estado se realizará por medio del uso de variables de estado observadas, basándose en el diseño de ubicación de polos.

4.2. ESTIMACIÓN DE ESTADOS POR MEDIO DE OBSERVADORES

El inconveniente que existe en el control por medio de la realimentación del estado es que para sistemas de orden mayor, el número extenso de variables de estado implicadas en el planteamiento del problema, demanda de un elevado número de transductores para detectar las variables de estado en la realimentación. De esta forma, el establecimiento del diseño de control mediante la realimentación de estado puede resultar en un alto costo y de igual manera ser impráctico. Aún para sistema de bajo orden, en muchas ocasiones no todas las variables de estado son posibles de obtener directamente, y es importante la construcción de un observador o estimador que estime las variables de estado teniendo como base los datos de las variables de salida.

4.3. OBSERVADORES DIFUSOS

En situaciones en las que el estado del sistema no es asequible, para sistemas lineales es posible determinar el estado a partir de la respuesta del sistema para cierta entrada en un periodo de tiempo definido, aplicando un observador difuso, siempre y cuando el sistema sea observable. El observador y el controlador difusos se diseñan por separado sin afectar la estabilidad del sistema, por el principio de separación.

4.4. DISEÑO DEL OBSERVADOR DIFUSO

El observador representa la misma dinámica que la planta original (1)-(2). La estructura del sistema original quedará representado por el sistema difuso TS que se muestra a continuación

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) - L(x(t))(y(t) - \tilde{y}(t)) \quad (7)$$

$$\tilde{y}(t) = C(x(t))\tilde{x}(t) \quad (8)$$

El término $y(t) - \tilde{y}(t)$ representa el error de observación, dado por la diferencia entre la salida del sistema y la salida estimada, es decir,

$$e(t) = y(t) - \tilde{y}(t) \quad (9)$$

Además, la señal de control está dada por

$$u(t) = -K(\tilde{x}(t)) \tilde{x}(t) \quad (10)$$

donde $\tilde{x}(t)$ es el vector de estados estimado en el observador difuso.

Por otra parte, podemos definir como error estacionario a la diferencia entre los estados reales y los observados como:

$$e_e(t) = x(t) - \tilde{x}(t) \quad (11)$$

Derivando el error en estado estacionario con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{e}_e(t) = \dot{x}(t) - \dot{\tilde{x}}(t) \quad (12)$$

Teniendo en cuenta que $x = e_e + \tilde{x}$ y sustituyendo $\dot{x}(t)$ y $\dot{\tilde{x}}(t)$ en la ecuación anterior (12) se obtiene

$$\dot{e}_e(t) = [A(x(t)) - L(x(t))C(x(t))]e_e \quad (13)$$

Por lo que el sistema es completamente observable si es posible elegir una matriz $L(x(t))$ tal que $A(x(t)) - L(x(t))C(x(t))$ tenga los valores característicos deseables para que el error tienda a cero.

Entonces, el observador está definido por las siguientes ecuaciones

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))Kx(t) - B(x(t))Ke_e \quad (14)$$

$$\dot{e}_e(t) = [A(x(t)) - L(x(t))C(x(t))]e_e \quad (15)$$

4.4.1. Observador de Estados

En el diseño de variables de estado generalmente se asume que todas las variables están dispuesta para ser utilizadas en la ley de control para la retroalimentación de todos los estados. En la práctica solo ciertos estados se disponen y proporcionan una salida al sistema. El siguiente paso es la construcción de un observador de estados que estime los estados difíciles de ser definidos por los sensores. Los observadores pueden ser de orden completo o de orden reducido. Los observadores de orden reducido son considerados cuando algunos de los estados ya son dispuestos como salida del sistema, por lo tanto esos estados no necesitan ser estimados. El último paso a ser considerado en el diseño del sistema de control es la unión apropiada del observador y el control de retroalimentación de todos los estados, frecuentemente se le define como compensador.

El sistema resultante se puede interpretar de manera gráfica como lo indica la Figura 3:

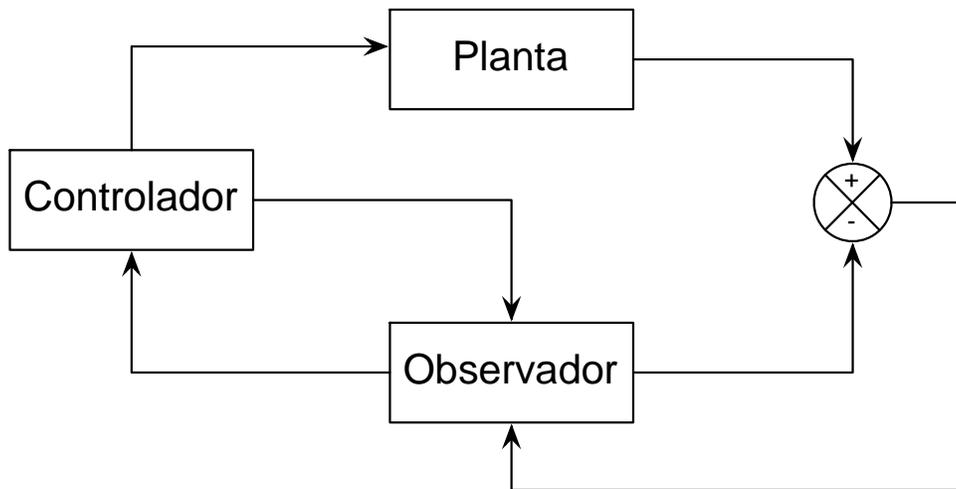


Figura 3. Diagrama esquemático del observador difuso.

4.4.2. Observador de Orden Completo

La cuestión en el diseño de variables de estado es si todos los polos del sistema en lazo cerrado pueden arbitrariamente colocarse en el plano complejo. Recordando que todos los polos en lazo cerrado son equivalentes a los valores propios del sistema presentado en forma de matrices del formato en variables de estado. Como se sabe si el sistema es controlable y observable, se pueden colocar los polos precisamente en la ubicación deseada. La retroalimentación de todos los estados comúnmente recae en las técnicas de ubicación de polos.

4.4.3. Condición necesaria y suficiente para la observación del sistema

Por otra parte la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea observable es que el sistema tenga una matriz de observabilidad $O(x(t))$ de rango completo, es decir, que existan n vectores fila, o n vectores columna, linealmente independientes.

Para verificar la observabilidad de (3)-(4), es necesario tomar en cuenta las $r - 1$ regiones de interpolación y construir, para cada región, la correspondiente matriz $O(x(t))$. Este procedimiento se facilita cuando a lo más, dos reglas difusas están activadas al mismo instante para cualquier $t \geq 0$ y $\sum_{i=1}^r h_i(x(t)) = 1$.

Entonces, el análisis de observabilidad de dos sistemas adyacentes, se puede verificar mediante la existencia de n filas linealmente independientes de la matriz $O(x(t))$, tomando en cuenta que $h_i(x(t)) + h_j(x(t)) = 1$ para $i, j = 1, \dots, r$, y para las regiones de interpolación se debe cumplir que $h_i \cap h_j \neq \emptyset$.

Así pues, considerando que $h_i(x(t)) = 1 - h_j(x(t))$ la matriz de observabilidad difusa $O(x(t))$, para las regiones de interpolación definidas por las reglas i y j , sólo dependerán del valor de la función de membresía $h_j(x(t))$. Por lo que, (4)-(5) es difuso observable si las $r - 1$ regiones de interpolación, tienen rango completo para $h_j(x(t)) \in [0 \ 1]$.

4.5. ALGORITMO DE ACKERMANN

Considerando el modelo difuso en (4)-(5), es posible diseñar el estabilizador correspondiente a partir de un punto de vista lineal, el cual es previamente analizado en algunos trabajos previos [1].

En esta sección, el observador difuso se obtiene a través de la fórmula de Ackermann, que permite ubicar arbitrariamente, los eigenvalores del sistema, el cual se asemeja, al menos en apariencia, a un sistema lineal variante en el tiempo. Esto, por supuesto, en caso de que el sistema completo sea observable.

El algoritmo de la fórmula de Ackermann se explica brevemente para el análisis de la controlabilidad difusa en [1]. Por el problema dual, el observador difuso puede obtenerse desde un punto de vista semejante al estudiado en [1].

El Algoritmo de Ackermann para el caso difuso se presenta a continuación:

A. Fórmula de Ackermann con enfoque Difuso para el Observador Difuso

- 1.- Se considera el Sistema Difuso completo en (4)-(5). Las localidades deseadas para los eigenvalores se definen por s_1, s_2, \dots, s_n . como las coordenadas válidas en el plano complejo.

$$P(s) = (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n) \quad (16)$$

$$P(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n \quad (17)$$

- 2.- Por el Teorema de Cayley-Hamilton se puede obtener la matriz polinomial como se define a continuación.

$$P[A(x(t))] = [A(x(t))]^n + a_1 [A(x(t))]^{n-1} + a_2 [A(x(t))]^{n-2} + \cdots + a_n I \quad (18)$$

donde I es la matriz identidad de dimensión apropiada para la matriz polinomial.

- 3.- En caso de que (4)-(5) pueda considerarse como un sistema de no linealidades lentas, la matriz de observabilidad se construye como:

$$O(x(t)) = \begin{bmatrix} C(x(t)) \\ C(x(t))A(x(t)) \\ C(x(t))(A(x(t)))^2 \\ \vdots \\ C(x(t))(A(x(t)))^{n-2} \\ C(x(t))(A(x(t)))^{n-1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$O(x(t)) = \begin{bmatrix} \xi_0(t) \\ \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \vdots \\ \xi_{n-2}(t) \\ \xi_{n-1}(t) \end{bmatrix} \quad (20)$$

donde $\xi_0(t) = C(x(t))$ y $\xi_j(t) = \xi_{j-1}(t)A(x(t)) - \xi_{j-1}(t)$ para $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

- 4.- Las ganancias del vector observador se definen a continuación

$$L(x(t)) = \begin{bmatrix} l_1(x(t)) \\ l_2(x(t)) \\ l_3(x(t)) \\ \vdots \\ l_{n-1}(x(t)) \\ l_n(x(t)) \end{bmatrix} \quad (21)$$

y se obtienen a partir de la siguiente fórmula

$$L(x(t)) = P[A(x(t))]^T \begin{bmatrix} C(x(t)) \\ C(x(t))A(x(t)) \\ C(x(t))(A(x(t)))^2 \\ \vdots \\ C(x(t))(A(x(t)))^{n-2} \\ C(x(t))(A(x(t)))^{n-1} \end{bmatrix}^{-T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

donde $-T$ representa la inversa de la matriz transpuesta.

5.- Finalmente, la dinámica del error se obtiene como

$$\dot{e}(x(t)) = [A(x(t)) - L(x(t))]e(x(t)) \quad (23)$$

Con el fin de simplificar los cálculos necesarios del observador difuso, se considera que, a lo más, se encuentran activas dos reglas difusas. En la siguiente sección se muestra la aplicación del método propuesto.

4.6. ESTABILIZACIÓN BASADA EN EL OBSERVADOR

Algo de suma importancia en el diseño del control difuso es asegurar la estabilidad global del sistema bajo la influencia del control. La idea principal de la metodología propuesta por el PDC es diseñar de forma proporcional cada regla de control, para que se compense cada una de las reglas del modelo difuso TS. Sin embargo, el PDC es un método conservativo, y las condiciones de equilibrio no se

pueden imponer fácilmente, en general. Una vez determinados los estados prescindidos por el observador propuesto, el controlador se basa en la asignación de polos robusta difusa del sistema difuso TS en lazo cerrado. Es significativo mencionar que en [1], se demuestra un método para estabilizar los sistemas difusos tipo TS en términos de la fórmula de Ackermann.

CAPÍTULO V.

ANÁLISIS DE ALGUNOS EJEMPLOS NUMÉRICOS EN LA APLICACIÓN DEL OBSERVADOR DIFUSO TIPO TS

Con el objeto de comprobar la funcionalidad del método propuesto para el observador difuso tipo TS definido para sistemas no lineales de alta complejidad se realizan los ejemplos propuestos de la forma siguiente.

5.1. EJEMPLO DEL PÉNDULO INVERTIDO SOBRE UN VEHÍCULO

El péndulo invertido sobre un carro es uno de los ejemplos más interesantes debido a la similitud que presenta con procesos reales de gran complejidad como los sistemas de control para las aeronaves espaciales. Inclusive establece un banco de pruebas para la ingeniería de control moderno lineal y no lineal planteando un primer ensayo para problemas de mayor complejidad. Uno de los aspectos es la estabilidad local en torno a la posición de equilibrio y el otro es llevar el péndulo desde la posición de reposo hasta la posición vertical denominado swing up.

5.1.1. Planteamiento del Problema

Se considera el problema de observar uno de los estados de un péndulo invertido sobre un carro, ilustrado en la Figura 4. Las ecuaciones de movimiento para este sistema son (24)-(25) que es un modelo muy bien definido en [5]:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (24)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{g \sin(x_1(t)) - a m l (x_2(t))^2 \sin(2x_1(t)) / 2 - a \cos(x_1(t)) u(t)}{4l/3 - a m l \cos^2(x_1(t))} \quad (25)$$

donde

$x_1(t)$ denota el ángulo del péndulo (en radianes) para el eje vertical,

$x_2(t)$ la velocidad angular,

$g = 9.8 \text{ m/s}^2$ es la constante de gravedad,

m es la masa del péndulo,

M es la masa del carro,

$2l$ es la longitud del péndulo,

u es la fuerza aplicada al carro (en Newtons) y,

$a = 1/(m + M)$.

Para efecto de simulación los siguientes valores están considerados:

$m = 1.0 \text{ kg}$, $M = 4.0 \text{ kg}$, $2l = 1.0 \text{ m}$.

El objetivo es analizar el sistema bajo una condición inicial dentro del rango $x_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$.

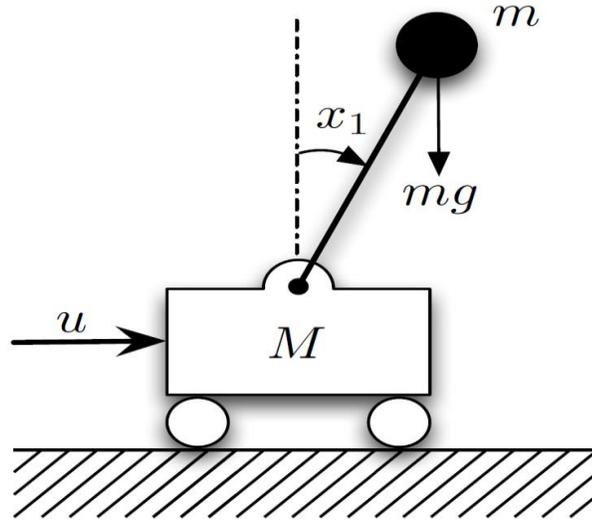


Figura 4. Péndulo Invertido sobre un carro.

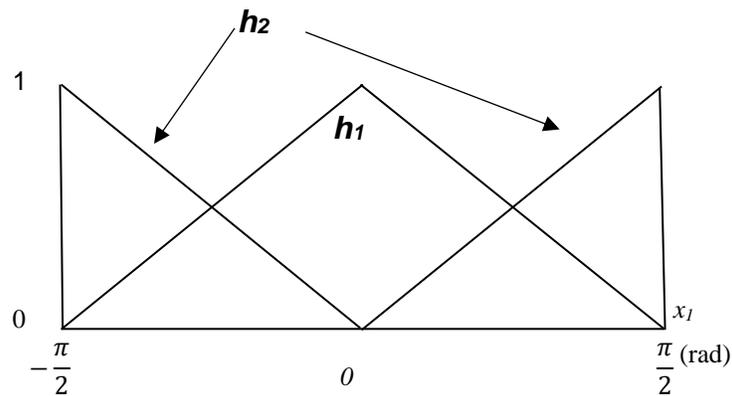


Figura 5. Funciones de membresía del modelo de dos reglas para el modelo difuso del péndulo sobre un carro.

5.1.2. Modelo del Sistema Difuso

El modelo difuso que representa la dinámica no lineal es:

Regla:

1).- Si $x_1(t)$ está alrededor de 0,

$$\text{ENTONCES } \dot{x}_1(t) = A_1x(t) + B_1u(t),$$

2).- Si $x_1(t)$ está alrededor de $\pm \pi/2$ ($|x_1| < \pi/2$)

$$\text{ENTONCES } \dot{x}_2(t) = A_2x(t) + B_2u(t),$$

con

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3 - aml} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\beta}{4l/3 - aml\beta^2} \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [1 \ 0], \quad C_2 = [1 \ 0],$$

donde $\beta = \cos(88^\circ)$. Las funciones de membresía para el modelo difuso se muestran en la Figura 5. La representación global difusa $A(x(t))$ y $B(x(t))$ puede ser fácilmente obtenida de la siguiente forma

$$A(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 17.2941h_1(x_1(t)) + 9.3600h_2(x_1(t)) & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.3529h_1(x_1(t)) - 0.0104h_2(x_1(t)) \end{bmatrix}$$

Con el fin de construir el observador difuso, se propone $s_1 = -1$ y $s_2 = -1$.

De esta forma, se tiene lo siguiente.

$$P(s) = (s - s_1)(s - s_2)$$

$$P(s) = s^2 + 2s + 1$$

Por lo tanto, usando el teorema de Caley-Hamilton se puede obtener la matriz polinomial

$$P(A(x(t))) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

donde

$$a_{11} = (h_1(x_1(t)) + h_2(x_1(t)))(17.29h_1(x_1(t)) + 9.36h_2(x_1(t))) + 1.0$$

$$a_{12} = 2.0h_1(x_1(t)) + 2.0h_2(x_1(t))$$

$$a_{21} = 34.59h_1(x_1(t)) + 18.72h_2(x_1(t))$$

$$a_{22} = (h_1(x_1(t)) + h_2(x_1(t)))(17.29h_1(x_1(t)) + 9.36h_2(x_1(t))) + 1.0$$

Por otro lado, considerando que el sistema varía lentamente, la matriz de observabilidad es:

$$O(x(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h_1(x_1(t)) + h_2(x_1(t)) \end{bmatrix}$$

Como puede observarse, para cualquier valor válido de $h_i(x_1(t))$, la matriz $O(x(t))$ tiene n vectores linealmente independientes; por lo tanto, se concluye que el modelo difuso TS es observable.

Por otra parte, el vector de ganancias $L(x(t))$ puede ser fácilmente obtenido a partir de (22).

Los resultados obtenidos de las simulaciones realizadas en el software correspondiente con $x(0) = [5 \ 0]^T$ se muestran en las Figuras 6-8. Claramente, el observador diseñado facilita una alternativa para la solución de este problema de forma simple y eficiente.

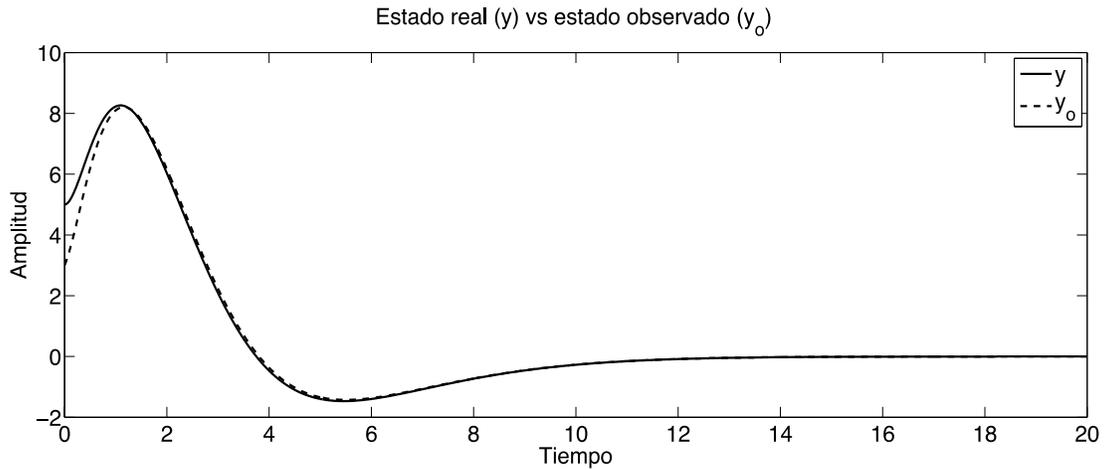


Figura 6. Estado real vs observado del sistema difuso para el péndulo por el método no conservativo. $s_1 = -1$ y $s_2 = -1$

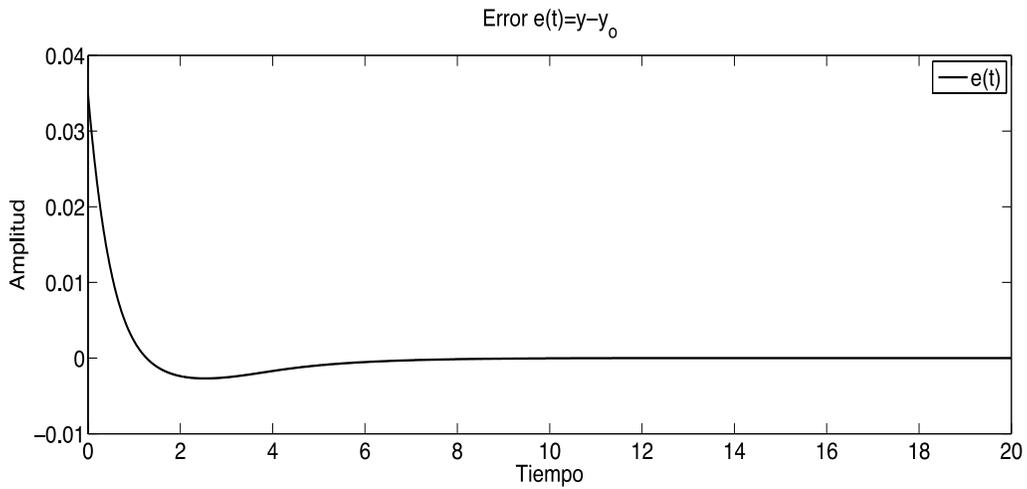


Figura 7. Error entre la señal real y la observada para el péndulo por el método no conservativo. $s_1 = -1$ y $s_2 = -1$

Por otra parte, para verificar la eficiencia del observador propuesto, se realiza una comparación con la aproximación en base a LMI's; los resultados se muestran en las Figuras 9-11. Como se puede observar, el tiempo de desvanecimiento del error es mayor que en el método propuesto, pero lo más importante es que se

puede modificar el comportamiento del observador difuso propuesto, simplemente mediante la selección de nuevos valores propios durante el cálculo de $L(x(t))$.

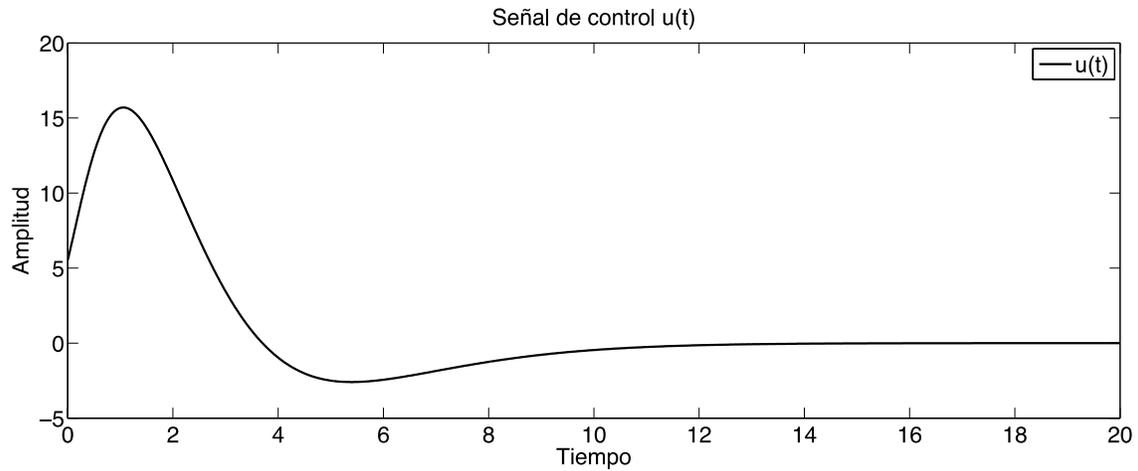


Figura 8. Señal de control del sistema difuso para el péndulo por el método no conservativo. $s_1 = -1$ y $s_2 = -1$

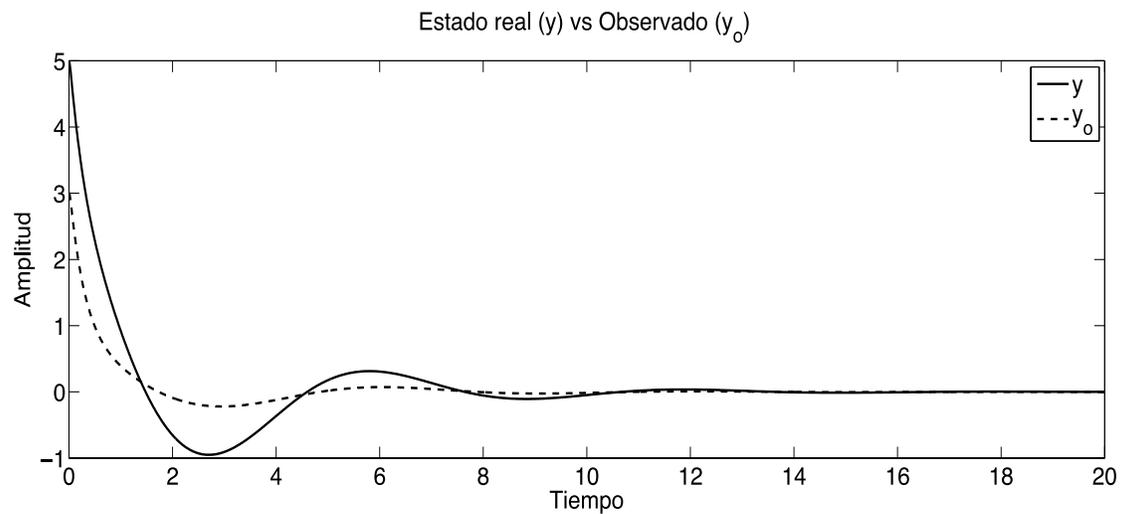


Figura 9. Estado real vs observado del sistema difuso del péndulo por el método de LMI's.

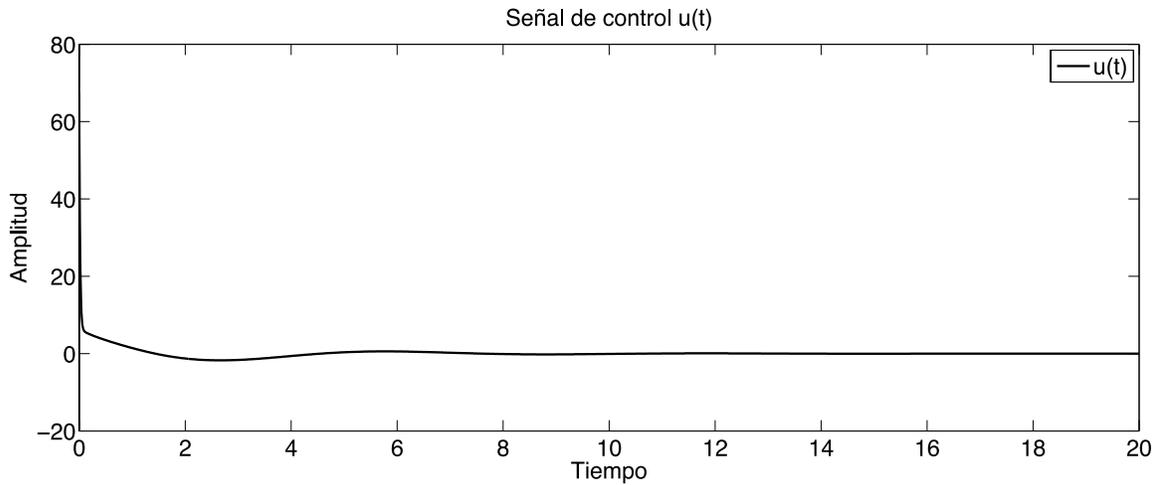


Figura 10. Señal de control del sistema difuso del péndulo por el método de LMI's.

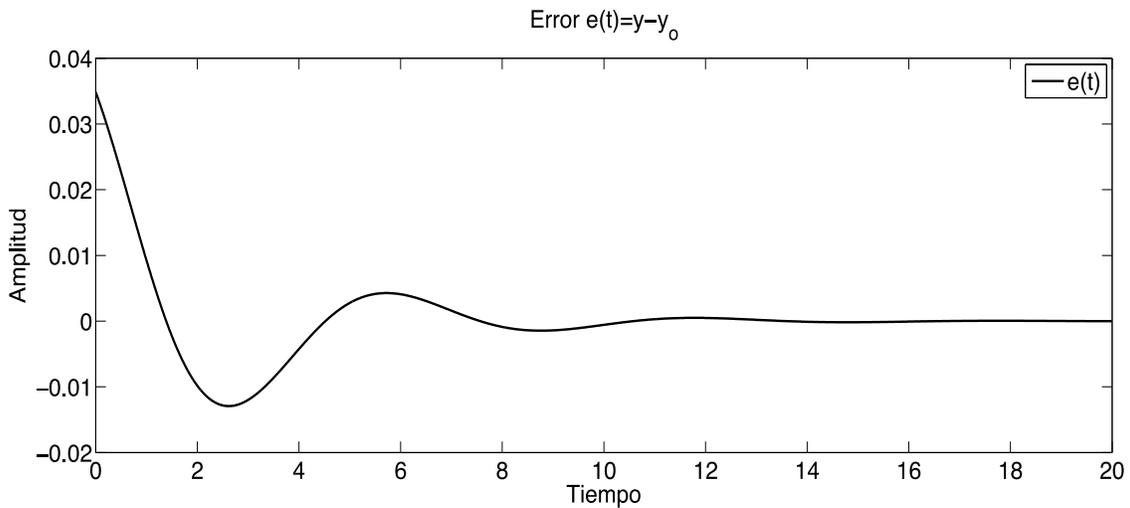


Figura 11. Error entre la señal real y la observada del péndulo por el método de LMI's.

Para demostrar la versatilidad del método propuesto en la construcción del observador en este caso correspondiente al péndulo invertido sobre un carro, se realizan otros dos ejemplos numéricos en los que se proponen diferentes datos para los valores propios del observador.

Los valores propios del controlador difuso se mantienen en la misma ubicación con $s_1 = -1$ y $s_2 = -1$.

Ahora se construye el nuevo observador difuso definiendo para $s_1 = -100$ y $s_2 = -100$. De forma que en las figuras 12-14 se muestran los resultados obtenidos. El desempeño del observador es adecuado precisando la correcta observación de los estados

Como se expone en las gráficas resultantes, el error se recupera inmediatamente.

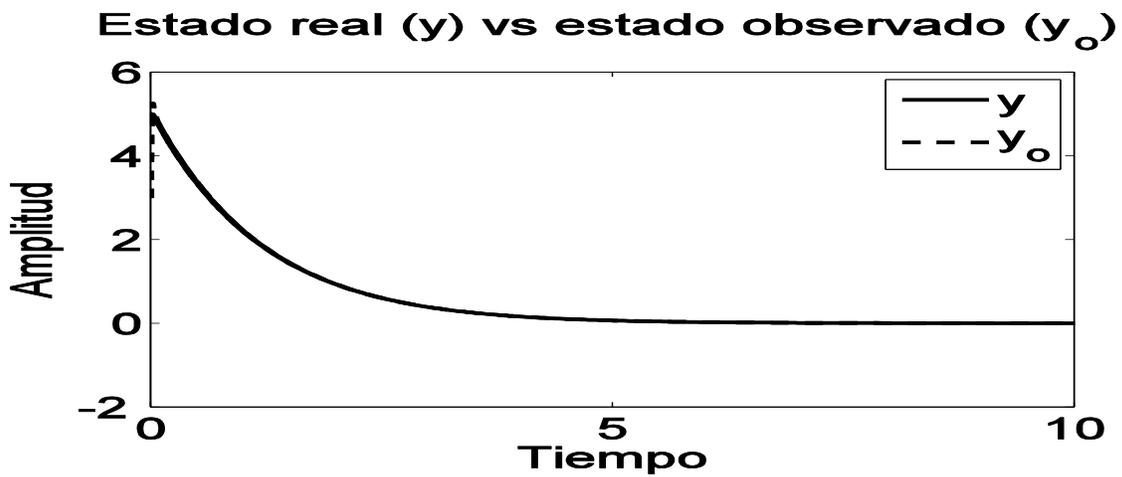


Figura 12. Estado real vs observado del sistema difuso para el péndulo por el método no conservativo. $s_1 = -100$ y $s_2 = -100$

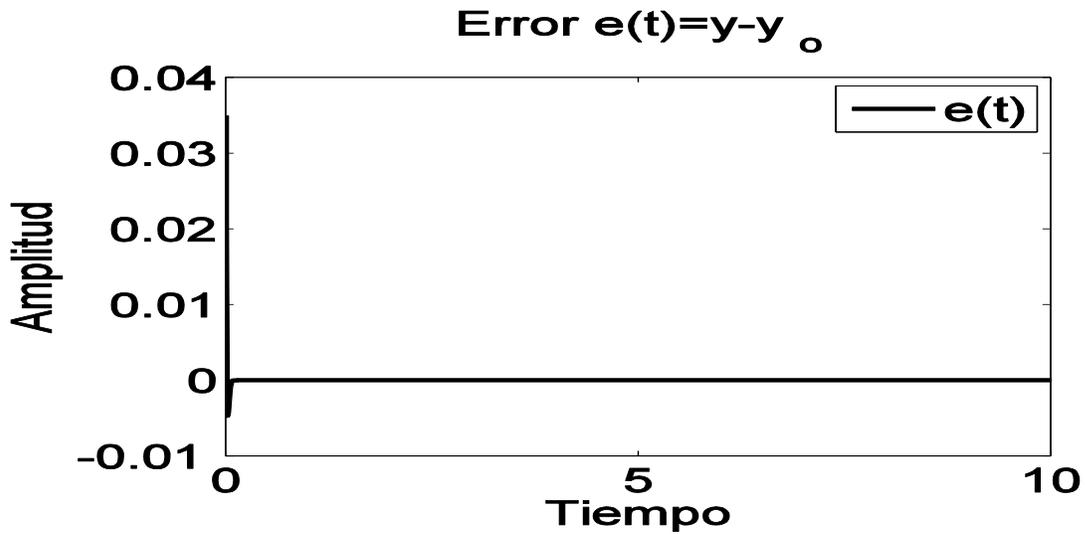


Figura 13. Error entre la señal real y la observada para el péndulo por el método no conservativo. $s_1 = -100$ y $s_2 = -100$

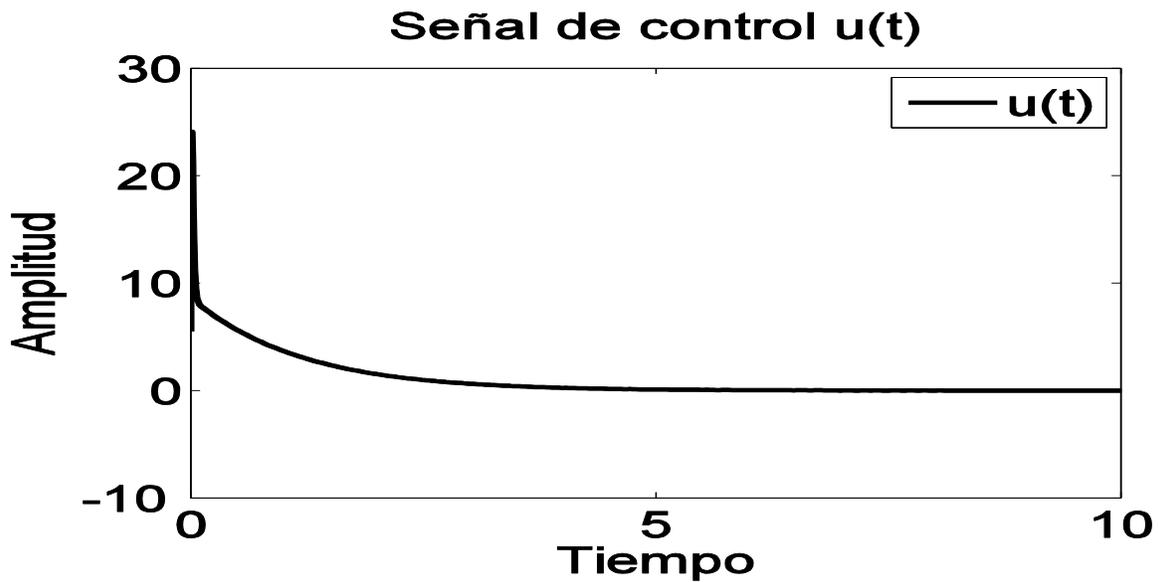


Figura 14. Señal de control del sistema difuso para el péndulo por el método no conservativo. $s_1 = -100$ y $s_2 = -100$

Enseguida se construye el nuevo observador difuso planteando enseguida para los valores propios del observador, valores complejos conjugados $s_1 = -1 +$

$2i$ y $s_2 = -1 - 2i$. De forma que en las figuras 15-17 se muestran los resultados correspondientes.

Como se expone en las gráficas resultantes, el error se tiene con oscilaciones, así como la observación de los estados.

En la realidad se tendría este caso de valores propios complejos conjugados si el diseño del control lo requiriera para aplicaciones más específicas.

Como se demuestra lo más trascendente es que se puede modificar el comportamiento del observador difuso propuesto, a conveniencia, de manera sencilla seleccionando nuevos valores propios durante el cálculo de $L(x(t))$.

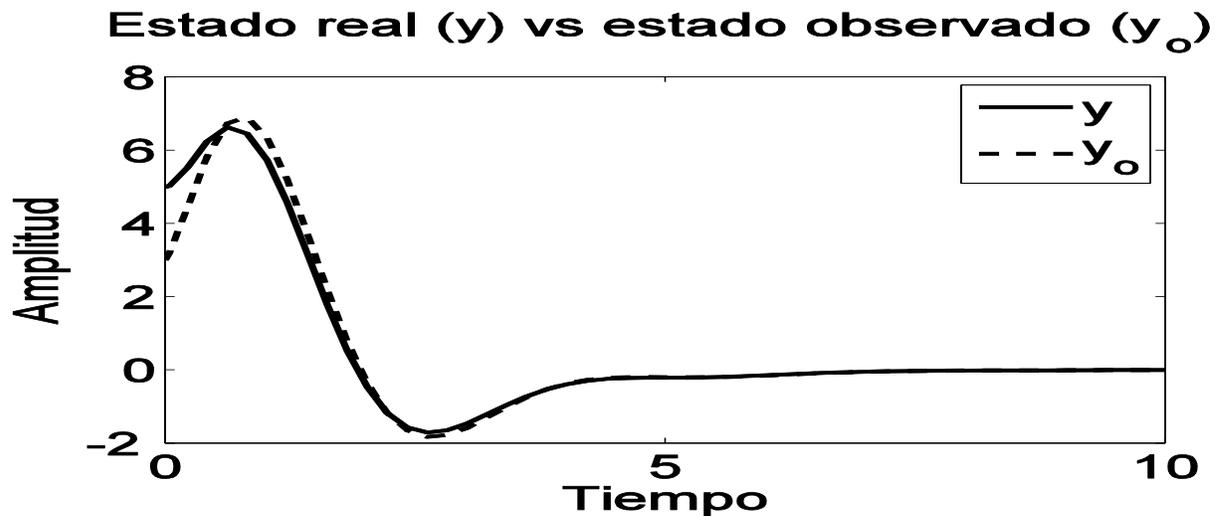


Figura 15. Estado real vs observado del sistema difuso para el péndulo por el método no conservativo. $s_1 = -1 + 2i$ y $s_2 = -1 - 2i$

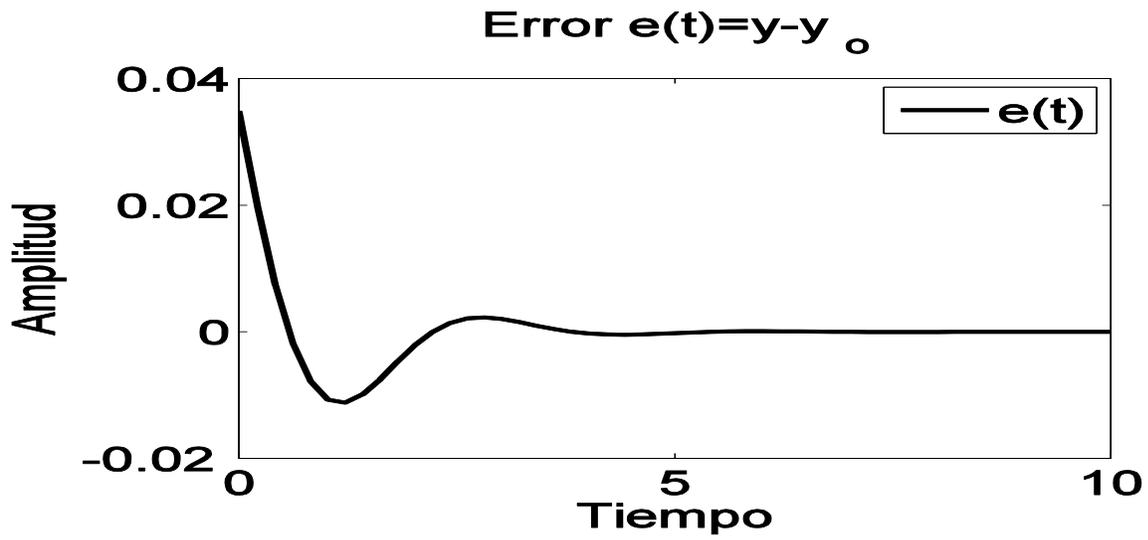


Figura 16. Error entre la señal real y la observada para el péndulo por el método no conservativo. $s_1 = -1 + 2i$ y $s_2 = -1 - 2i$

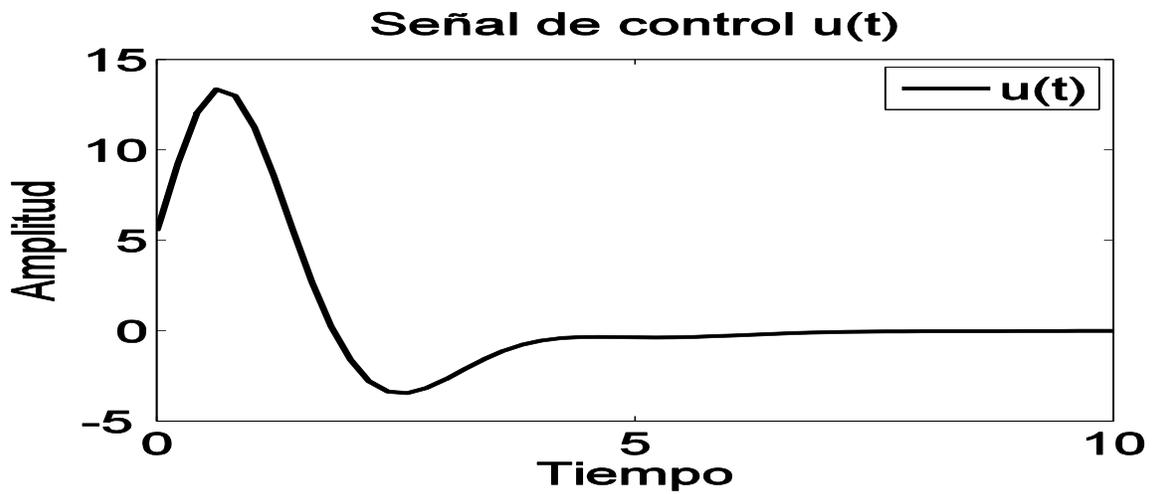


Figura 17. Señal de control del sistema difuso para el péndulo por el método no conservativo. $s_1 = -1$ y $s_2 = -1$

5.2. EJEMPLO DE UN SISTEMA CAÓTICO

El caos es por definición un suceso determinista no lineal. El hecho de que un sistema sea caótico implica que, aunque éste parezca tener un procedimiento errático y aleatorio, en realidad es determinista. Es sensible a las condiciones iniciales. Las técnicas de modelado difuso se utilizan para modelar sistemas dinámicos caóticos, debido a su naturaleza no lineal.

5.2.1. Planteamiento del Problema

Considere ahora el sistema caótico de Lorenz como $\dot{x} = f(x, w, u)$. Las ecuaciones para el sistema mencionado anteriormente son descritas de la forma siguiente [5]:

$$\dot{x}_1 = \alpha(x_2 - x_1), \quad (26)$$

$$\dot{x}_2 = rx_1 - x_2 - x_1x_3, \quad (27)$$

$$\dot{x}_3 = x_1w_2 - \beta x_3, \quad (28)$$

con $a = 35, b = 3, c = 28, \alpha = 10, \beta = 8/3$ y $r = 28$. Este sistema puede ser exactamente representado por un modelo difuso TS de dos reglas dentro de la región $x_1 \in [M_1, M_2]$. Descrito por [5]:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\},$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t)) C_i x(t),$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ r & -1 & -M_1 \\ 0 & M_1 & -\beta \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ r & -1 & -M_2 \\ 0 & M_2 & -\beta \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = [0 \quad 1 \quad 0]^T, \quad C_i = [1 \quad 0 \quad 0].$$

Las funciones de membresía para este sistema se presentan en la Figura 18, y son definidas de la siguiente manera como:

$$h_1(x_1) = \frac{-x_1 - M_1}{M_2 - M_1}$$

$$h_2(x_1) = \frac{x_1 + M_2}{M_2 - M_1}$$

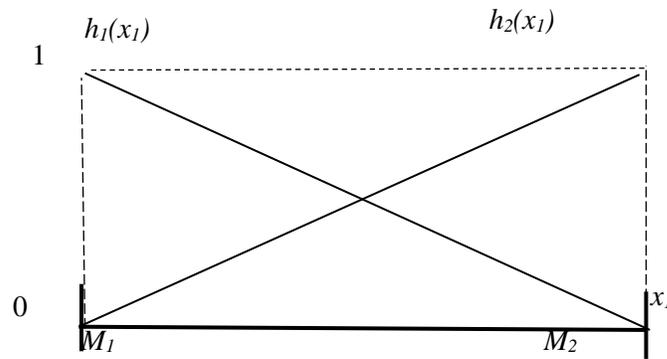


Figura 18. Funciones de membresía para el sistema difuso caótico tipo Lorenz

5.2.2. Modelo del Sistema Difuso

La representación del sistema difuso global es:

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) ,$$

$$y(t) = C(x(t))x(t),$$

con $M_1 = -30$, $M_2 = 30$, y las matrices difusas dadas por:

$$A(x(t)) = \begin{bmatrix} -10h_1(x(t)) - 10h_2(x(t)) & 10h_1(x(t)) + 10h_2(x(t)) & 0 \\ 28h_1(x(t)) + 28h_2(x(t)) & -h_1(x(t)) - h_2(x(t)) & 30h_1(x(t)) - 30h_2(x(t)) \\ 0 & 30h_1(x(t)) - 30h_2(x(t)) & -\frac{8h_1(x(t))}{3} - \frac{8h_2(x(t))}{3} \end{bmatrix}$$

$$C(x(t)) = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Note que en el sistema se encuentra ausente el término $B(x(t))u(t)$, puesto que, en este caso, se requiere estimar el vector de estado $x(t)$ y no estabilizar el sistema caótico.

Debido a que sólo existe una región de interpolación ($r - 1 = 1$) y considerando $h_1(x(t)) = 1 - h_2(x(t))$, entonces, la matriz $O(x(t))$, puede expresarse sólo en términos de la función de membresía $h_2(x(t))$, es decir,

$$O(x(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -10 & 10 & 0 \\ 380 & -110 & 300 - 600 h_2(x(t)) \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, la condición para la observabilidad difusa recae en el rango de la matriz $O(x(t))$. Por lo tanto, mediante el cálculo de las raíces del determinante: $\det(O(x(t))) = 0$, es posible comprobar que el rango de $O(x(t))$ es completo para toda $h_2(x(t)) \in [0 \ 1]$. Lo anterior conduce a la conclusión de que el sistema difuso es observable.

Ahora bien, con el fin de obtener la ganancia del observador, es necesario proponer valores propios tales como: $s_1 = -5, s_2 = -3$, y $s_3 = -3$. Entonces, la ecuación característica está definida como:

$$P(s) = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)$$

$$P(s) = s^3 + 11s^2 + 39s + 45$$

Además, a partir del teorema de Caley-Hamilton se obtiene la matriz polinomial:

$$P(A(x(t))) = A(x(t))^3 + 11A(x(t))^2 + 39A(x(t)) + 45I$$

con I como la matriz identidad de dimensiones apropiadas, resultando:

$$P(A(x(t))) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

con:

$$a_{1,1} = 3045$$

$$a_{1,2} = 3090 - 10(60h_2(x(t)) - 30)^2$$

$$a_{1,3} = 1600h_2(x(t)) - 800$$

$$a_{2,1} = 6852 - 28(60h_2(x(t)) - 30)^2$$

$$a_{2,2} = (60h_2(x(t)) - 30)(220h_2(x(t)) - 110) - 10(60h_2(x(t)) - 30)^2 - 264$$

$$a_{2,3} = (60h_2(x(t)) - 30)((60h_2(x(t)) - 30)^2 - 64/9) - 16940h_2(x(t)) - 8470$$

$$a_{3,1} = 2224 - 4480h_2(x(t))$$

$$a_{3,2} = 1520h_2(x(t))/3 - (60h_2(x(t)) - 30)((60h_2(x(t)) - 30)^2 - 281) - 760/3$$

$$a_{3,3} = (60h_2(x(t)) - 30)(220h_2(x(t)) - 110) - 25(60h_2(x(t)) - 30)^2/3 + 7/27$$

La ganancia del observador se calcula mediante (22), dando como resultado:

$$L(x(t)) = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

$$l_1 = -(1600h_2(x(t)) - 800)/(600h_2(x(t)) - 300)$$

$$l_2 = -((60h_2(x(t)) - 30)((60h_2(x(t)) - 30)^2 - 64/9) - 16940h_2(x(t)) + 8470)/(600h_2(x(t)))$$

$$l_3 = -((60h_2(x(t)) - 30)(220h_2(x(t)) - 110) - (25((60h_2(x(t)) - 30)^2/3 + 7/27))/(600h_2(x(t)) - 300)$$

Los resultados obtenidos con $x(0) = [2 \ 0 \ 0]^T$ y $\bar{x}(0) = [5 \ 0 \ 0]^T$ se muestran en las Figuras 19-20. Claramente, el comportamiento del estado del observador diseñado se estima de forma adecuada.

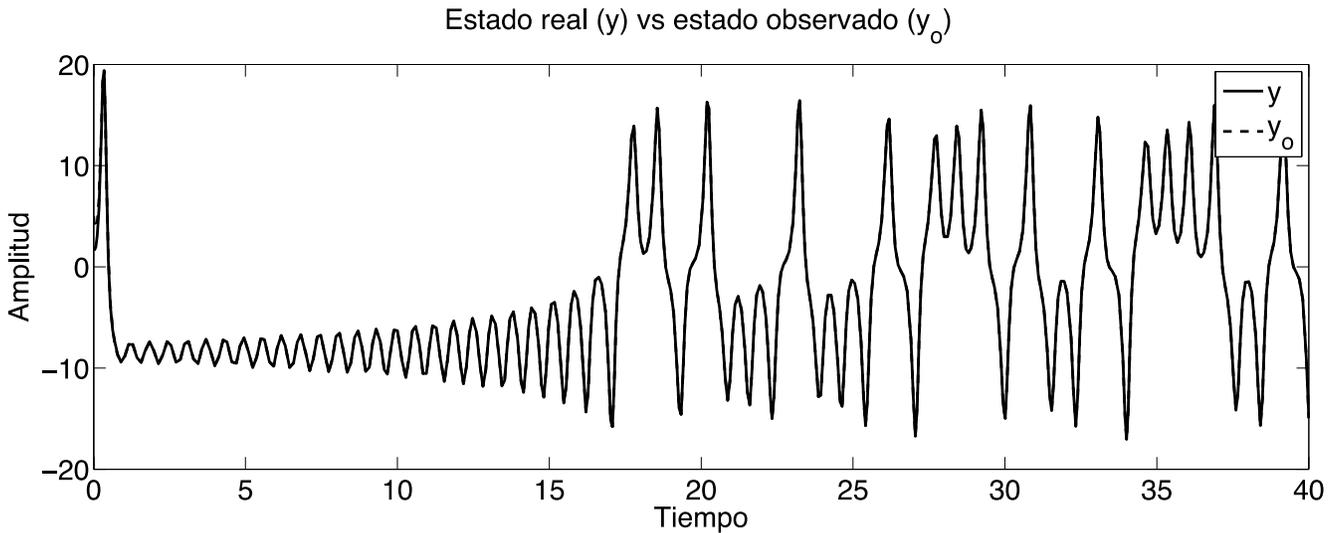


Figura 19. Estado real vs observado para el sistema de Lorenz por el método no conservativo. $s_1 = -5, s_2 = -3, y s_3 = -3$

Además, para verificar la eficiencia del observador propuesto se realiza una comparación con la aproximación con base en LMI's; los resultados se muestran en las Figuras 21-22.

Como se puede observar, el comportamiento del observador propuesto es muy similar a la aproximación dada por LMI's; sin embargo, los métodos difieren en su estructura. No obstante, como se mencionó previamente, el comportamiento

del observador propuesto, puede ser modificado fácilmente, al elegir valores propios diferentes durante el proceso de diseño.

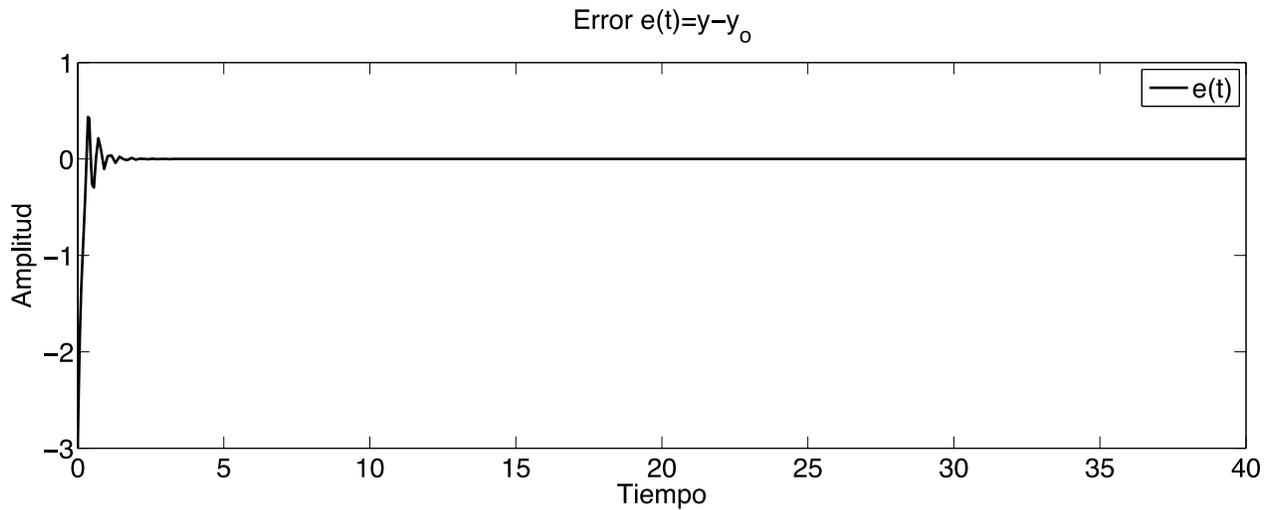


Figura 20. Señal de error real y observado para el sistema de Lorenz por el método no conservativo. $s_1 = -5, s_2 = -3, y s_3 = -3$

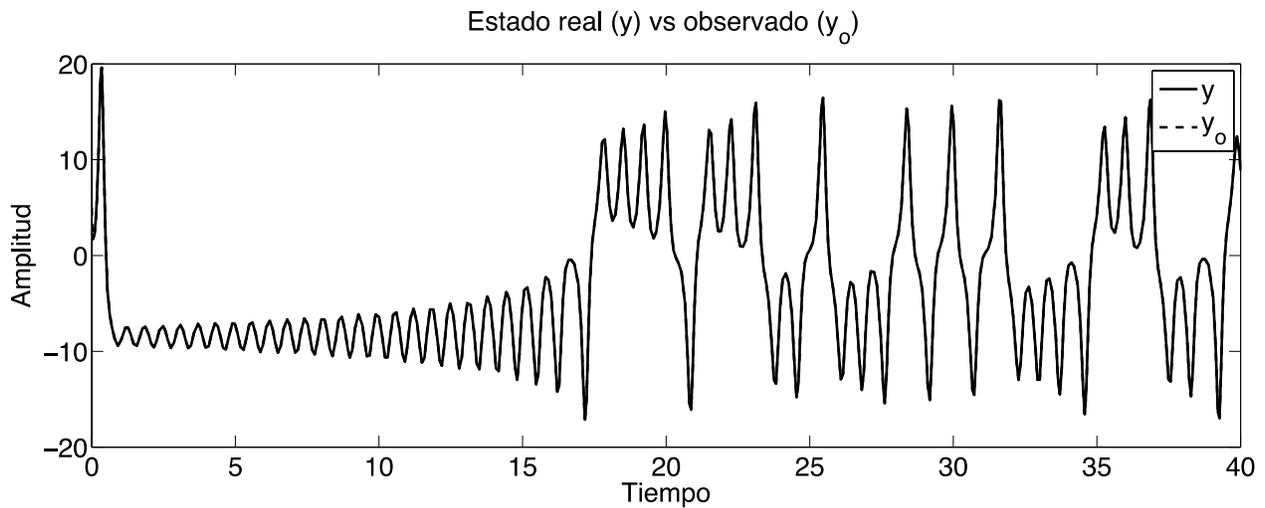


Figura 21. Estado real vs observado para el sistema de Lorenz por el método de LMI's.

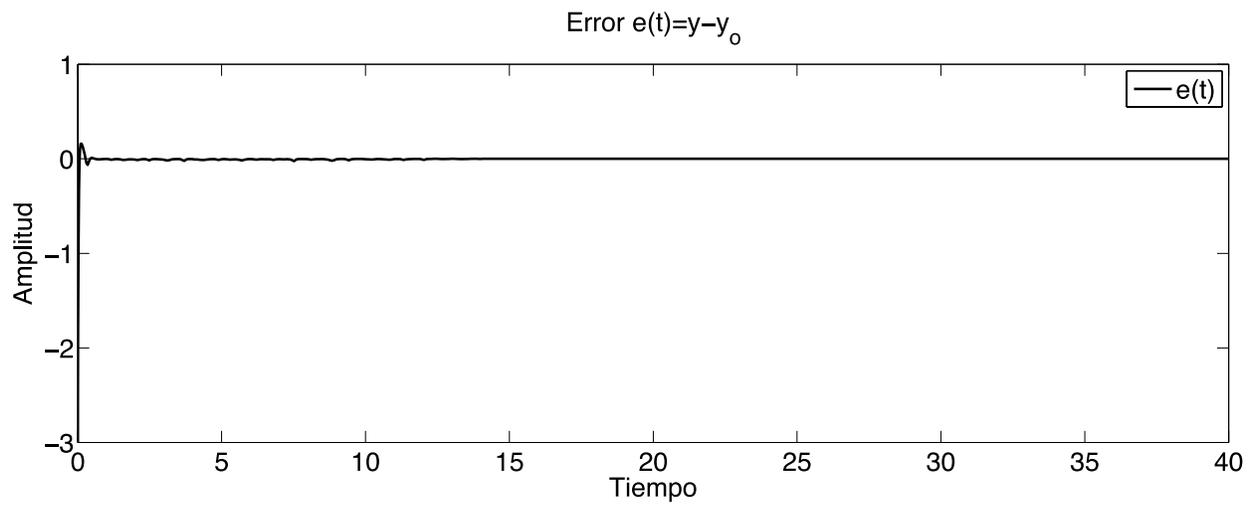


Figura 22. Señal de error real y señal observada para el sistema de Lorenz por el método de LMI's.

CAPÍTULO VI.

OBSERVABILIDAD PARA SISTEMAS DE MÚLTIPLES ENTRADAS Y MÚLTIPLES SALIDAS

En la realidad para los sistemas físicos es necesario controlar más de una sola variable. Generalmente contienen una gran cantidad de variables, su análisis es altamente complejo y existen ciertas consideraciones que se deben tener para su análisis, como la agrupación por pares de variables controladas (salidas) y manipuladas (de entrada), ya que una variable manipulada puede alterar el desarrollo de una o más variables controladas y al contrario una variable controlada modifica a más de una variable manipulada; por lo que, es importante establecer la interacción entre los lazos de control y definir su estabilidad, entre otras características.

6.1. GENERALIDADES

Es importante recordar que uno de los objetivos primordiales de un sistema de control es precisar un determinado número de variables para que se comporten de alguna manera en especial, ya sea cumpliendo algunos requisitos del dominio del tiempo o de la frecuencia o logrando el mejor desempeño expresado por medio de un índice de optimización [32].

Las atribuciones al control de sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas son muy diversas. Los sistemas físicos dinámicos evolucionan continuamente; es decir, que las variables involucradas están en función del tiempo. El objetivo principal del sistema de control podría ser, que mantenga al proceso funcionando alrededor de las condiciones nominales; en otros casos, el propósito del control será transferir la planta de un punto de operación a otro o rastrear una señal de referencia dada. En otra situación se desean obtener las mejores condiciones de la planta, como la producción máxima y el menor consumo de energía, o el tiempo mínimo para realizar alguna actividad definida. Las condiciones de los sistemas de control son muy diversas y se establecen de acuerdo a las necesidades que se plantean en un inicio.

En consecuencia existen diferentes enfoques referidos al control de varias variables. De igual forma se han presentado nuevas técnicas aplicadas al control multivariable. Los sistemas de control inteligente son dispositivos interesantes que emulan el comportamiento humano en la solución de problemas muy complejos. Algunas de estas técnicas se disponen para emplearse en conjunto y diseñar un sistema de control más eficaz. Otras técnicas como los controladores PID se continúan empleando con gran interés a nivel industrial [33]. En este sentido se impulsa la búsqueda de métodos prácticos de control [34] que sean más robustos [35] y que garanticen el desempeño de los mismos. En diferentes áreas de aplicación los sistemas dinámicos como se ha venido mencionando son de naturaleza no lineal y se describen utilizando modelos no lineales de muy alta complejidad [36], [37], [38] y [39].

De forma conveniente, los modelos difusos Takagi-Sugeno (TS) aproximan la dinámica no lineal del sistema por medio de la combinación lineal de subsistemas locales. Derivado de esto, es posible simplificar el análisis y diseño de los controladores no lineales. Algunos de estos resultados se pueden consultar en los diferentes trabajos de investigación [40], [41], [42], [43], [44], [45] y [46].

6.2. OBSERVADORES PARA SISTEMAS NO LINEALES DE MÚLTIPLES ENTRADAS Y MÚLTIPLES SALIDAS (MIMO).

El conocimiento pleno de todas las variables o parámetros de un sistema físico o de un proceso dinámico MIMO es de gran relevancia. Establecer estos datos permite realizar los procesos de control adecuadamente, monitoreando valores que desempeñen una funcionalidad eficaz de los mismos. Sin embargo, en la mayoría de los casos no es posible su evaluación en forma directa por diversas causas como el alto costo de los dispositivos de medición, los factores ambientales extremos no permiten la disposición de estos aparatos de medición, la instrumentación es poco confiable o simplemente no existe para su aplicación.

Por consiguiente, los observadores de estados para sistemas MIMO realizan una tarea importante en la estimación de las variables o estados que no se pueden medir de forma directa. La estimación de los estados es parte esencial en procesos de monitoreo, detección de fallas y optimización.

Los observadores MIMO básicamente utilizan señales de entrada y de salida al sistema, y en conjunto con el modelo matemático generan la estimación de sus estados; es decir, estipulan una reconstrucción del vector de estados.

De primera instancia fueron propuestos y desarrollados gracias al matemático David Luenberger en la década de los 60's. Hasta ahora se han realizado extensas investigaciones en base a este tema que corresponden a la estimación de estados para sistemas lineales y no lineales.

En consecuencia, los estimadores de estados para sistemas MIMO llaman cada vez más la atención, se realizan diversos estudios y se desarrollan nuevas metodologías al respecto enfocadas a simplificar más los cálculos.

En la estimación de estados para diferentes aplicaciones podemos utilizar los Observadores de Luenberger, Observadores Asintóticos, Observadores Adaptables, Observadores de Alta Ganancia, Observadores por Modos Deslizantes que emplean técnicas de optimización entre otros [47].

6.2.1 Consideraciones para el Observador para sistemas no lineales MIMO descritos por modelos difusos tipo Takagi-Sugeno

Los sistemas que poseen muchas entradas y muchas salidas se relacionan entre sí de una forma compleja. Para su análisis es imprescindible reducir la complejidad en las expresiones matemáticas. Además son necesarios los equipos de cómputo para realizar los arduos cálculos que son ineludibles. El enfoque en el espacio de estados para el análisis de sistemas es el más conveniente desde este punto de vista.

Mientras la teoría de control clásico se basa en la relación entrada-salida, o función de transferencia, el control moderno se fundamenta en la descripción de las ecuaciones de un sistema en términos de n ecuaciones diferenciales de primer orden, las cuales se combinan en una ecuación diferencial vectorial de primer orden. El uso de matrices simplifica considerablemente la representación matemática de los sistemas de ecuaciones. El incremento en el número de variables de estado, de entradas o de salidas no aumenta la complejidad de las ecuaciones. De hecho, el análisis de sistemas complicados con múltiples entradas y múltiples salidas se realiza mediante procedimientos sólo ligeramente más complicados que los requeridos para el análisis de sistemas de ecuaciones diferenciales escalares de primer orden [28].

Consideramos al sistema no lineal de múltiples entradas y múltiples salidas en su representación en espacio de estados de la forma siguiente

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (29)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t)) \quad (30)$$

donde

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado de la planta

$u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada

$y(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de salida

En el presente trabajo de investigación se emplea el modelo difuso tipo Takagi-Sugeno para el diseño del observador de múltiples entradas y múltiples

salidas, definido en el caso de un sistema no lineal que consiste de un conjunto de subsistemas lineales "combinados" adecuadamente por reglas del tipo SI-ENTONCES capaces de relacionar el conocimiento y propiedades físicas del sistema. Este modelo representa bastante bien al sistema MIMO no lineal, al menos dentro de una región predefinida del espacio de fase.

Modelo Difuso

Regla i ;

SI $z_1(t)$ es M_1^i y \dots y $z_p(t)$ es M_p^i ,

$$\text{ENTONCES } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \\ i = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$

donde

r es el número de reglas difusas del modelo

p es el número de conjuntos difusos

M_j^i son las reglas difusas con $i = 1, 2, 3, \dots, r$, y $j = 1, 2, 3, \dots, p$, definidas a partir del conocimiento previo de la dinámica del sistema.

Entonces, dado un par $(x(t), u(t))$, la dinámica del sistema difuso se infiere de la siguiente forma

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)]$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [C_i x(t)]$$

donde

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados de la planta

$u(t) \in \mathbb{R}^m$ es la señal de entrada al sistema

$y(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de salida del sistema

$h_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, r$, es el peso normalizado de cada regla, el cual depende de la función de membresía para la variable premisa z_j en M_j^i con $j = 1, 2, \dots, p$, es decir,

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_j^i(z_j(t)),$$

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$$

con la característica de que

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \quad h_i(z(t)) \geq 0,$$

para toda t , donde $M_j^i(z_j(t))$ es el valor de la función de membresía de $z_j(t)$ en M_j^i con $z(t)=[z_1(t) z_2(t) \cdots z_p(t)]$ como una función de $x(t)$, $i = 1,2, \dots, r$ y $j = 1,2, \dots, p$.

A partir de (29) y (30) el sistema difuso se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t), \quad (31)$$

$$y(t) = C(x(t))x(t), \quad (32)$$

donde

$$A(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i,$$

$$B(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))B_i,$$

$$C(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i$$

La representación del modelo no lineal (29)-(30) se establece mediante el modelo difuso tipo TS en (31)-(32) conocido como el Modelo Difuso General o Global o Total o Completo. El análisis de observabilidad se realiza a través de este modelo extendiendo algunos conceptos para sistemas lineales variantes en el tiempo.

6.3. OBSERVABILIDAD PARA SISTEMAS NO LINEALES DE MÚLTIPLES ENTRADAS Y MÚLTIPLES SALIDAS (MIMO) DIFUSOS.

Se dice que un sistema es **observable** en el tiempo t_0 si, con el sistema en el estado $x(t_0)$, es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito.

La propiedad de observabilidad da solución al inconveniente de reconstruir el vector de estados a partir de las variables que sí están disponibles, esto en un tiempo mínimo posible.

El control por realimentación requiere que todas las variables propicias estén presentes para su medición. Con la observación de los estados se facilita la construcción de las señales de control.

La teoría de control lineal involucra la modificación del comportamiento de un sistema de m entradas, q salidas y n estados.

Para los sistemas lineales invariantes en el tiempo las condiciones de observabilidad se determinan a continuación.

Un sistema lineal MIMO invariante en el tiempo definido de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

donde A, B y C son matrices constantes de dimensión $n \times n$, $n \times m$, y $q \times n$ respectivamente; se dice que el sistema es observable si y solo si la matriz de observabilidad O definida como

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (33)$$

tiene rango pleno, es decir, igual a n y además el sistema varía lentamente en el

tiempo [48]. Para sistemas variante en el tiempo definidos a continuación

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y &= C(t)x(t)\end{aligned}$$

donde

$$x(t) \in \mathbb{R}^n,$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m$$

$$y(t) \in \mathbb{R}^q$$

$A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ continuas diferenciables hasta $n - 1$.

Sean las matrices $\mathbf{O}_i(t)$ donde

$$\mathbf{O}_1(t) = C^T(t),$$

$$\mathbf{O}_i(t) = A^T(t)\mathbf{O}_{i-1}(t) - \dot{\mathbf{O}}_{i-1}(t),$$

para todo $i = 2, \dots, n$.

Un sistema lineal variante en el tiempo, es observable en $[t_0, t_1]$, si y solo si existe un punto $\tau \in [t_0, t_1]$, en el cual la matriz

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_1 \\ \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{O}_{n-1} \\ \mathbf{O}_n \end{bmatrix} \quad (34)$$

tiene rango pleno igual a n .

Es importante mencionar que (34) se reduce a $\mathbf{O} = [C^T \ A^T C^T \ (A^T)^2 C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T]$ cuando el sistema es considerado como lentamente variante en el tiempo.

6.3.1. Observabilidad para sistemas difusos

Los resultados para observadores lineales MIMO variantes en el tiempo se pueden extender a sistemas difusos verificando el rango de la matriz de observabilidad difusa. Para garantizar la observabilidad de (31)-(32), es necesario tomar en cuenta las $r - 1$ regiones de interpolación difusas y construir, para cada

región, la matriz $O(x(t))$ correspondiente.

Este procedimiento se simplifica cuando un máximo de dos reglas difusas se activan en el mismo instante de tiempo para cualquier $t \geq 0$ y $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$.

Entonces, el análisis de observabilidad de dos subsistemas adyacentes, se puede verificar por medio de la existencia de n columnas o renglones linealmente independientes de la matriz $O(x(t))$, teniendo en cuenta que $h_i(z(t)) + h_j(z(t)) = 1, \forall i, j = 1, \dots, r$, y que las regiones de interpolación difusas deben cumplir $h_i \cap h_j \neq 0$.

Por lo tanto, considerando $h_i(z(t)) = 1 - h_j(z(t))$, la matriz de observabilidad difusa $O(x(t))$ para la región de interpolación definida por las reglas de i y j , solamente dependerá del valor de la función de membresía $h_j(z(t))$.

Entonces, (31)-(32) será observable si las $r - 1$ matrices de observabilidad, que se definen en las regiones de interpolación difusas correspondientes, tienen rango pleno para $h_j(z(t)) \in [0,1]$.

Además, la matriz de observabilidad difusa se obtiene sustituyendo las matrices $A(x(t)), C(x(t))$ en (34). Note que cuando el sistema difuso varía lentamente en el tiempo esta matriz toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{O}(x(t)) = & [C^T(x(t)) \quad A^T(x(t))C^T(x(t)) \quad (A^T(x(t)))^2 C^T(x(t)) \\ & \dots \quad (A^T(x(t)))^{n-1} C^T(x(t))] \end{aligned} \quad (35)$$

Del análisis anterior, se establece que un modelo difuso TS de la forma (31)-(32) es observable si las $r-1$ matrices de observabilidad correspondientes a la región de interpolación difusa, definidas por (34) tiene rango pleno con no más de dos reglas difusas activadas en el mismo instante para cualquier $t \geq 0$ y $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$.

Un conjunto de vectores v_1, v_2, \dots, v_n son linealmente independientes si se cumple que la ecuación

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0 \quad (36)$$

sólo es verdad cuando $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, donde c_1, c_2, \dots, c_n son constantes. El procedimiento para verificar la independencia lineal para todo $t \geq 0$, puede ser determinado por la solución de un conjunto de ecuaciones con c_1, c_2, \dots, c_n y, posiblemente $h_j(z(t))$ como incógnitas. Sin embargo, cuando aparezca el término $h_j(z(t))$, será necesario verificar que $h_j(z(t)) \notin [0,1]$ para todo $t \geq 0$.

Se dice que un sistema es observable si es posible conocer el estado inicial $x(t_0)$ a partir de la observación de la salida $y(t)$ y teniendo conocimiento pleno de la entrada $u(t)$ para un tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$.

Anteriormente se ha definido la observabilidad para sistemas difusos de una sola entrada y múltiples salidas.

6.4. CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DEL OBSERVADOR DIFUSO EN SISTEMAS NO LINEALES MIMO

Por lo tanto, para la propiedad de observabilidad y, haciendo referencia al método de asignación robusta de polos por retroalimentación de estados, se precisa lo siguiente:

Dadas las matrices reales (A^T, C^T) , de orden $(n \times n, n \times q)$, respectivamente, y un conjunto cerrado de n números complejos, $S = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, bajo la conjugación compleja, se debe encontrar una matriz L^T real de $q \times n$, tal que los valores propios de $A^T - C^T L^T$ sean λ_j , $j = 1, 2, \dots, n$.

Por otra parte la asignación robusta de polos se especifica de la siguiente manera:

Dadas A^T, C^T y S , debemos encontrar una matriz real L^T y una matriz X no singular que satisfagan $(A^T - C^T L^T) X = X \Lambda$, donde $\Lambda = \text{diag} \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

Por lo tanto, para la asignación robusta de polos difusos el sistema puede ser visto como un sistema no lineal descrito de la forma (31)-(32) con matrices difusas $A^T(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C^T(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times q}$, reales para todo t , y un conjunto de números complejos: $S = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ cerrado bajo la conjugación compleja, y

buscar una matriz difusa $L^T(x(t))$, real para todo t , de manera que los valores propios de $A^T(x(t)) - C^T(x(t))L^T(x(t))$ sean precisamente λ_j para todo $j = 1, 2, \dots, n$.

Por otro lado, el problema de asignación robusta de polos puede ser visto como sigue: dadas las matrices $A^T(x(t))$, $C^T(x(t))$ y S , definidas anteriormente, se debe encontrar una matriz $X(x(t))$ no singular, y una matriz $L^T(x(t))$, ambas reales para todo t , que satisfagan

$$(A^T(x(t)) - C^T(x(t))L^T(x(t)))X(x(t)) = X(x(t))\Lambda,$$

donde

$$\Lambda = \text{diag} \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$

Si y solo si

$$U_1^T(x(t))(A^T(x(t))X(x(t)) - X(x(t))\Lambda) = 0$$

donde

$U_1(x(t))$ se obtiene de la descomposición de $C^T(x(t))$, es decir

$$C^T(x(t)) = [U_0(x(t)) \quad U_1(x(t))] \begin{bmatrix} Z(x(t)) \\ 0 \end{bmatrix},$$

la descomposición QR puede ser de gran utilidad para definir $U_1(x(t))$.

Por lo tanto, con base en la asignación de polos, la matriz $X(x(t))$, no singular y real para todo t , se construye para garantizar la existencia del observador del sistema (31)-(32). En otras palabras, el sistema difuso TS (31)-(32) es observable si es posible encontrar dicha matriz. Por lo tanto, para simplificar el diseño del controlador difuso TS, se tendrá como máximo dos reglas activadas en cualquier instante con $t \geq 0$ y con la condición $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$.

Es importante mencionar que el enfoque propuesto puede ser aplicado en modelos difusos TS con más de dos reglas, con la restricción de que como máximo solo dos reglas estén activas al mismo tiempo.

Ciertamente, la existencia del observador para el sistema difuso general TS, con un máximo de dos funciones de membresía activadas al mismo tiempo, se puede determinar mediante la verificación de la singularidad de las matrices $X_i(x(t))$, para todo $i = 1, \dots, r - 1$ regiones de interpolación difusas, de manera

similar a la dada en [11]. La existencia del observador difuso para dos subsistemas adyacentes puede ser analizado por medio del determinante de $X(x(t))$, teniendo en cuenta que $h_i(z(t)) + h_j(z(t)) = 1$, para todo $i, j = 1, \dots, r$, y que las regiones de interpolación difusas deben cumplir $h_i \cap h_j \neq 0$.

Por lo tanto, considerando $h_i(z(t)) = 1 - h_j(z(t))$ la ecuación característica $\det(X(t)) = 0$, para la región de interpolación definida por las reglas i y j , sólo depende del valor de la función de membresía $h_j(z(t))$. Por lo tanto, $X(t)$ será no singular, en la región difusa mencionada, si no hay raíces de $\det(X(t)) = 0$ para $h_j(z(t)) \in [0,1]$. Por otra parte, las raíces de $\det(X(t)) = 0$ para valores de $h_j(z(t))$ fuera de $[0,1]$ serán descartadas y no implicarán singularidades de $X(t)$ debido a que $h_j(z(t)) \in [0,1]$, con $j = 1, \dots, r$.

Por último, la construcción de $X(x(t))$, de ser posible, se obtiene a partir de $N = \{U_1^T(x(t))(A^T(x(t)) - \lambda_j I)\}$ para cada una de las $r - 1$ regiones de interpolación, donde $N\{M\}$ indica el espacio nulo de la matriz M .

Se toma en cuenta que las matrices dadas $A^T(x(t))$, $C^T(x(t))$, $L^T(x(t))$ y la matriz no singular $X(x(t))$, deben satisfacer

$$(A^T(x(t)) - C^T(x(t))L^T(x(t)))X(x(t)) = X(x(t))\Lambda,$$

con el propósito de asegurar la existencia del observador difuso.

6.4.1. Análisis de observabilidad difusa a través de la asignación robusta de polos

En esta sección se propone un observador difuso para sistemas tipo T-S mediante la localización arbitraria de polos difusos en lazo cerrado dentro del plano complejo. La idea consiste en combinar el enfoque de asignación de polos y el modelo difuso TS descrito en (31)-(32) de la siguiente forma:

Algoritmo: Compensador por asignación de polos.

- 1) Calcular la descomposición de la matriz de entrada $C^T(x(t))$ con el fin de determinar $U_0(x(t))$, $U_1(x(t))$ y $Z(x(t))$.
- 2) Construir, de ser posible $X(x(t))$, mediante la selección de n vectores

linealmente independientes de $N = \{U_1^T(x(t))(A^T(x(t)) - \lambda_j I)\} = 0$, donde $N \{M\}$ denota el espacio nulo de la matriz M .

3) La ganancia $L^T(x(t))$ se calcula a partir de

$$L^T(x(t)) = Z^{-1}(x(t))U_0^T(x(t))(X(x(t))\Lambda X^{-1}(x(t)) - A^T(x(t)))$$

donde $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

4) Finalmente, la dinámica del observador difuso no lineal será definido por

$$\dot{e}_e(t) = [A(x(t)) - L(x(t))C(x(t))]e_e$$

para el sistema en lazo cerrado definido como

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t)$$

$$y(t) = C(x(t))x(t)$$

Es importante mencionar que este método puede aplicarse a sistemas difusos TS con más de dos reglas. Sin embargo, como se ha explicado antes, este enfoque requiere que a lo menos dos reglas se activen simultáneamente, con el fin de verificar la no singularidad de $X(x(t))$ dentro de las regiones de interpolación, por medio del $\det(X(t))$.

Por otra parte, y por el principio de dualidad es posible definir la controlabilidad del sistema (31)-(32) mediante el cambio del par de matrices $(A(x(t)), B(x(t)))$ con el mismo análisis ya mencionado.

6.5 CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DEL ESTABILIZADOR DIFUSO PARA SISTEMAS MIMO

Por el principio de dualidad se valida la propiedad de controlabilidad para el sistema no lineal MIMO difuso.

Teorema (Dualidad entre Observabilidad y Controlabilidad). El par (A, B) es controlable si y solo si el par (A^T, B^T) es observable.

El principio establece que una planta será observable (controlable), si y solo si su planta dual es controlable (observable).

Es decir, al verificar la observabilidad (controlabilidad) de una planta cualquiera se puede comprobar la controlabilidad (observabilidad) de su planta dual.

6.5.1. Análisis de estabilidad difusa a través de la asignación robusta de polos

En esta sección se propone un estabilizador difuso para sistemas tipo T-S mediante la localización arbitraria de polos difusos en lazo cerrado dentro del plano complejo. La idea consiste en combinar el enfoque de asignación de polos y el modelo difuso TS descrito en (31)-(32) de la siguiente forma:

Algoritmo: Compensador por asignación de polos.

- 1) Calcular la descomposición de la matriz de entrada $B(x(t))$ con el fin de determinar $U_0(x(t))$, $U_1(x(t))$ y $Z(x(t))$.
- 2) Construir, de ser posible $X(t)$, mediante la selección de n vectores linealmente independientes de $N = \{U_1^T(x(t))(A(x(t)) - \lambda_j I)\} = 0$, donde $N \{M\}$ denota el espacio nulo de la matriz M .

- 3) La ganancia $K(t)$ se calcula a partir de

$$K(x(t)) = Z^{-1}(x(t))U_0^T(x(t))(X(x(t))\Lambda X^{-1}(x(t)) - A(x(t)))$$

donde $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

- 4) Finalmente, el estabilizador difuso no lineal será definido por

$$u(t) = K(x(t))x(t),$$

para el sistema en lazo cerrado definido como

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t)$$

Es importante mencionar que este método puede aplicarse a sistemas difusos TS con más de dos reglas. Sin embargo, como se ha explicado antes, este enfoque requiere que a lo menos dos reglas se activen simultáneamente, con el fin de verificar la no singularidad de $X(x(t))$ dentro de las regiones de interpolación, por medio del $\det(X(t))$.

6.6. EJEMPLO NUMÉRICO

Se considera la situación de controlar un robot planar de dos grados de libertad mostrado a continuación para ejemplificar la estabilidad de sistemas no lineales difusos MIMO utilizando el método de asignación robusta de polos.

Por otra parte y de acuerdo con el principio de dualidad es posible definir la observabilidad para el siguiente ejemplo, especificando el cambio del par de matrices $(A(x(t)), B(x(t)))$ por $(A(x(t))^T, C(x(t))^T)$ utilizando el mismo enfoque que a continuación se plantea.

La ecuación de movimiento (Lagrange-Euler) para este sistema se describe por

$$\tau(t) = D(\theta)\ddot{\theta}(t) + h(\theta, \dot{\theta}) + c(\theta)$$

con:

$$D(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_1l^2 + \frac{4}{3}m_2l^2 + m_2\cos(\theta_2)l^2 & \frac{1}{3}m_2l^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\cos(\theta_2) \\ \frac{1}{3}m_2l^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\cos(\theta_2) & \frac{1}{3}m_2l^2 \end{bmatrix},$$

$$h(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}m_2\sin(\theta_2)l^2\dot{\theta}_2^2 - m_2\sin(\theta_2)l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ \frac{1}{2}m_2\sin(\theta_2)l^2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix},$$

$$c(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}m_1gl\cos(\theta_1) + \frac{1}{2}m_2gl\cos(\theta_1 + \theta_2) + m_2gl\cos(\theta_1) \\ \frac{1}{2}m_2gl\cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix},$$

donde

$\theta_1 = x_1(t)$ denota el ángulo en radianes entre el eslabón rígido y el eje horizontal;

$\theta_2 = x_2(t)$ es el ángulo en radianes entre el eslabón externo respecto al primer eslabón;

$g = 9.8 \text{ m/s}^2$ es la constante de gravedad;

m_1 y m_2 son las masas correspondientes a los eslabones;

$l = l_1 = l_2$ son las longitudes de los eslabones,

(u_1, u_2) son los torques de entrada en $[N \cdot m]$.

Para este caso los valores de los parámetros son: $m_1 = 0.4 \text{ kg}$, $m_2 = 0.3 \text{ kg}$ y $l = 0.5 \text{ m}$.

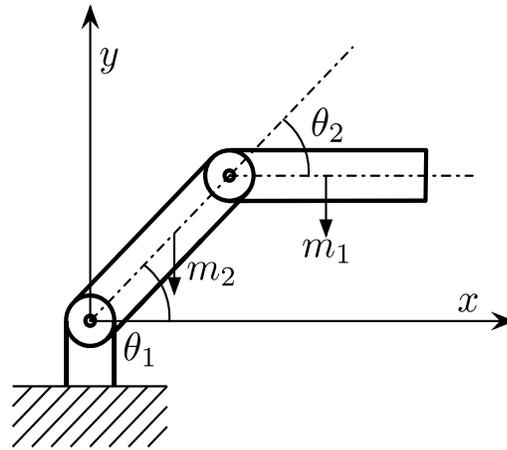


Figura 23. Modelo de un Brazo Robot de 2 DOF.

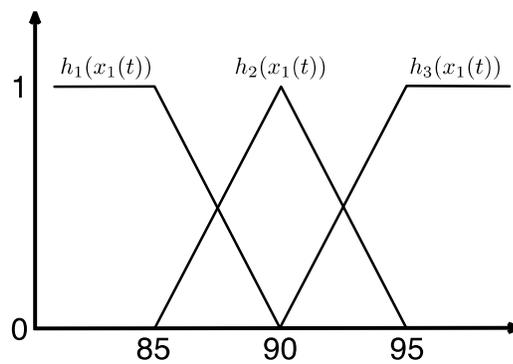


Figura 24. Funciones de membresía correspondientes al modelo robótico.

El modelo difuso que representa la dinámica no lineal alrededor de la posición vertical es:

Regla 1: **SI** $x_1(t)$ es aproximadamente 85° ,

ENTONCES $\dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t)$,

Regla 2: **SI** $x_1(t)$ es aproximadamente 90°

ENTONCES $\dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t)$,

Regla 3: **SI** $x_1(t)$ es aproximadamente 95°

ENTONCES $\dot{x}(t) = A_3x(t) + B_3u(t)$,

Las funciones de membresía para el sistema del brazo robótico de dos grados de libertad están representadas en la Figura 24.

Por lo que el sistema difuso estará descrito como:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^3 h_1(z(t))\{A_{ix(t)} + B_iu(t)\},$$

donde

$$A_1 = A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 25.58 & -20.93 & 0 & 0 \\ -34.39 & 81.65 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 25.89 & -20.93 & 0 & 0 \\ -34.31 & 82.40 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 19.04 & -47.50 \\ -47.50 & 158.48 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 19.20 & -48.00 \\ -48.000 & 160.00 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el sistema difuso de forma general puede ser escrito nuevamente como:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

Se consideran dos regiones, donde solo dos funciones de membresía se activan al mismo tiempo.

Las matrices de controlabilidad se definen como:

$$C(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{1,3} & c_{1,4} & 0 & 0 & c_{1,7} & c_{1,8} \\ 0 & 0 & c_{2,3} & c_{2,4} & 0 & 0 & c_{2,7} & c_{2,8} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & 0 & 0 & c_{3,5} & c_{3,6} & 0 & 0 \\ c_{4,1} & c_{4,2} & 0 & 0 & c_{4,5} & c_{4,6} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} c_{1,3} &= c_{3,1} = 0.1562h_2 + 19.0437, \\ c_{1,4} &= c_{3,2} = -0.4992h_2 - 47.5007, \\ c_{2,3} &= c_{4,1} = 0.1562h_2 + 19.0437, \\ c_{2,4} &= c_{4,2} = -1.5193h_2 + 158.4806, \\ c_{1,7} &= c_{3,5} = 0.1562h_2^2 + 32.3151h_2 + 1481.8605, \\ c_{1,8} &= c_{3,6} = -0.5374h_2^2 - 99.2405h_2 - 4533.6811. \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación de independencia lineal para los vectores de la matriz $C(x(t))$ se obtiene para los parámetros siguientes:

$$c_1 = 0; c_2 = 0; c_3 = 0; c_4 = 0$$

$h_2 = \alpha$, donde α puede tomar cualquier valor.

Por lo tanto, el sistema es difuso controlable.

De la descomposición de $B(x(t))$ y a partir del espacio nulo se elige un conjunto de vectores linealmente independientes que genera la siguiente matriz $X(x(t))$ constante.

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -0.8333 & 0 \\ 0 & -0.667 & 0 & -0.7692 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

además, $\det(X) = -0.017$.

Por lo tanto, es posible obtener un estabilizador, ubicando polos de $A(x(t)) + B(x(t))K(x(t))$ en $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1.5$, $\lambda_3 = -1.2$ y $\lambda_4 = -1.3$, es decir, $\Lambda = \text{diag}[-1 \quad -1.5 \quad -1.2 \quad -1.3]$, de tal forma que, el cálculo del estabilizador estará dado por la ecuación

$$K(x_1(t)) = Z^{-1}(x(t))U_0^T(x(t))(X(x(t))\Lambda X^{-1}(x(t)) + A(x(t))).$$

Realizando la comparación correspondiente con el método de LMI's para $u(t) = \sum_{i=1}^3 h_1(z(t))K_i x(t)$ se define lo siguiente:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -1.5778 & -7.0529 & 5.9867 & -20.5403 \\ -0.0669 & -2.6374 & 2.4155 & -6.1616 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -1.5778 & -7.0529 & 5.9867 & -20.5403 \\ -0.0669 & -2.6374 & 2.4155 & -6.1616 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -1.5778 & -7.0529 & 5.9867 & -20.5403 \\ -0.0669 & -2.6374 & 2.4155 & -6.1616 \end{bmatrix}.$$

Al realizar las simulaciones correspondientes empleando un software apropiado, se puede observar un comportamiento más suave para el estabilizador que se propone con respecto al conservativo. De igual forma al definir otros valores propios el estabilizador se modificará según las características que se establezcan para el sistema no lineal.

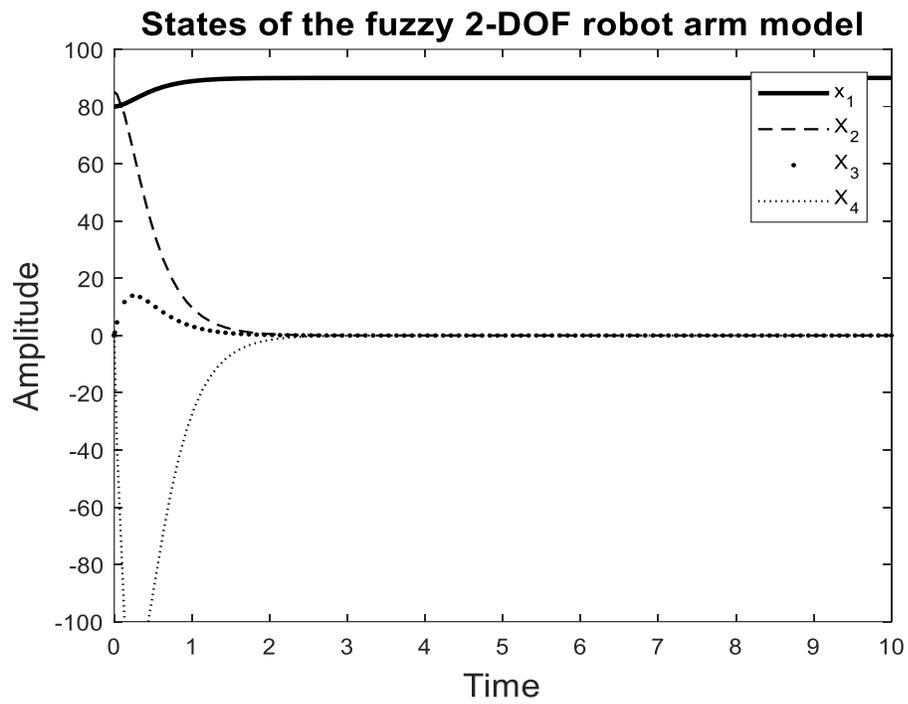


Figura 25. Estados del Sistema Ubicación Robusta de Polos.

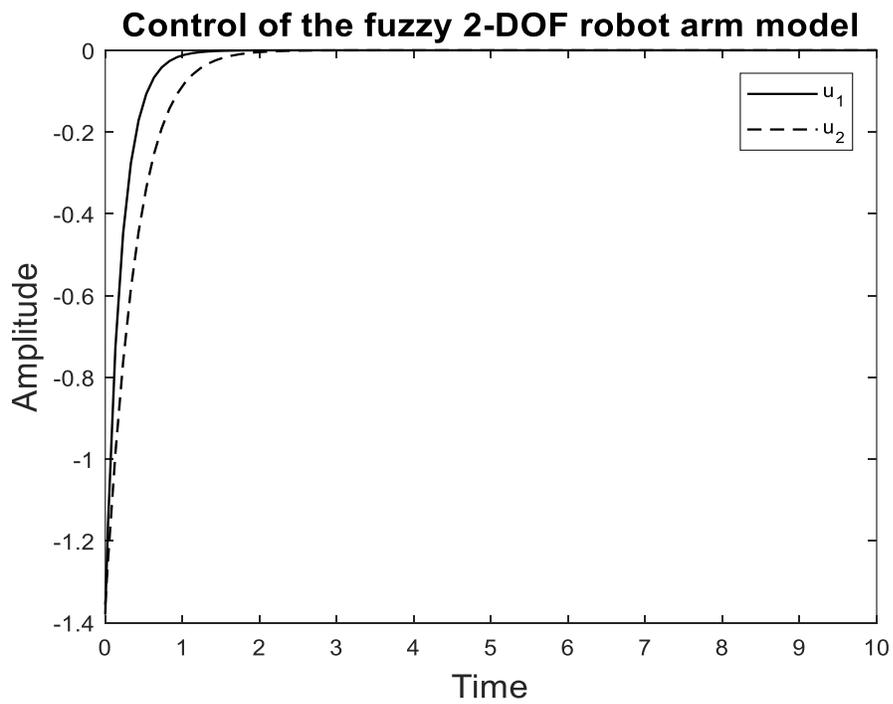


Figura 26. Señal de Control Ubicación Robusta de Polos.

Es posible validar el control del sistema robótico empleando el método que se plantea con una adecuada eficacia.

Para el método de LMI's se obtienen los siguientes resultados que se pueden verificar en la simulación correspondiente.

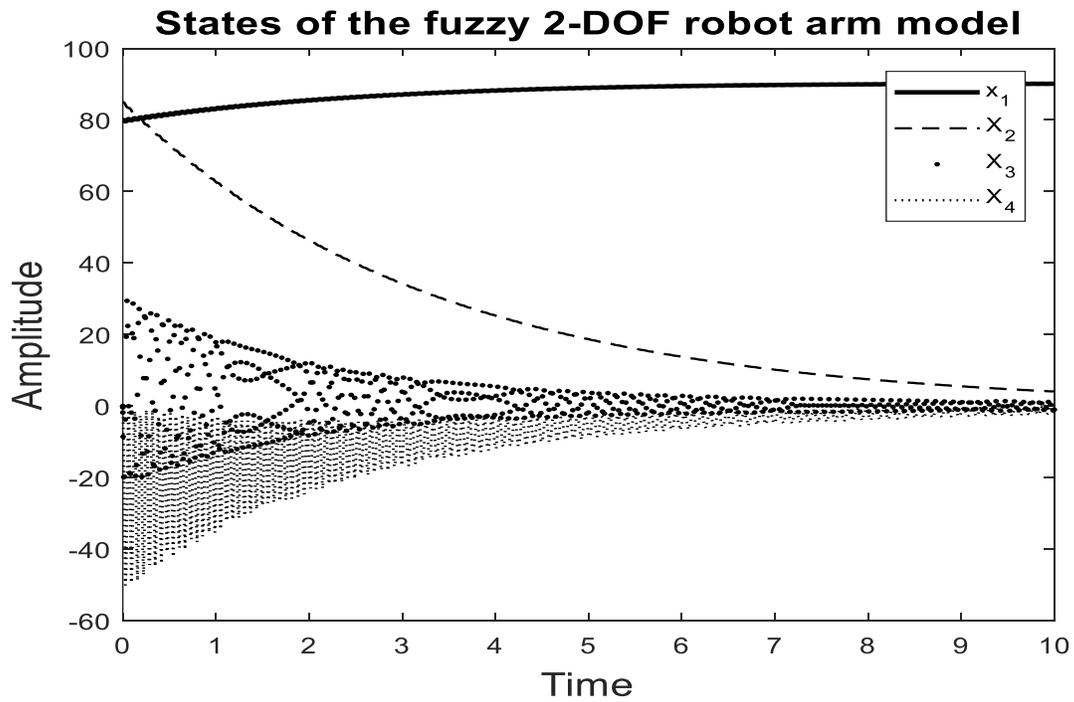


Figura 27. Estados del sistema enfoque LMI's

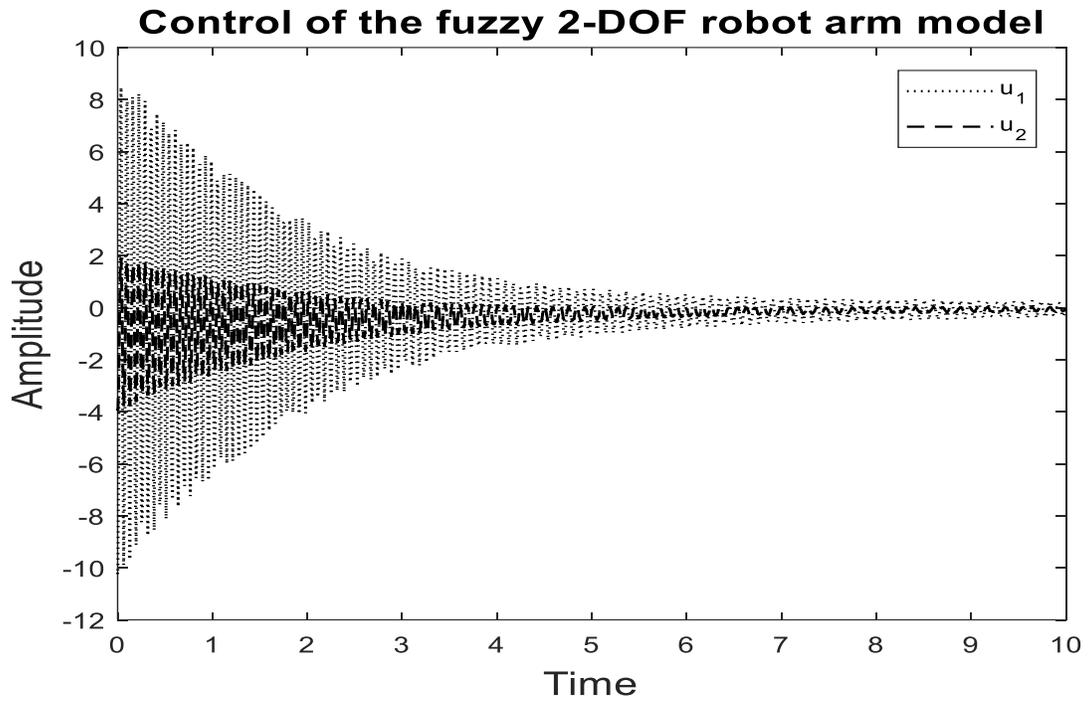


Figura 28. Señal de Control enfoque LMI's

CONCLUSIONES

En este trabajo se especificó el diseño de un observador difuso tipo Takagi-Sugeno, que se adapte a cierto tipo de sistemas no lineales basándose en la ubicación robusta de valores propios.

Una característica significativa del observador propuesto es que, su construcción puede ser fácilmente modificada mediante la selección de valores propios adecuados.

De esta forma se dispone de un observador difuso que tiene como ventaja, la elección de valores propios arbitrariamente deseables que permitan cierto comportamiento del sistema no lineal, el cual se requiere precisar en el diseño del sistema de control de forma práctica y eficiente.

Para demostrar la eficacia del método propuesto se realiza una comparación con el método conservativo basado en LMI's, cuya estructura en el observador requiere del cálculo de ciertas matrices, comunes a todos los subsistemas del modelo difuso tipo TS que garanticen su estabilidad. La construcción del observador difuso basado en LMI's requiere de condiciones específicas para cada situación, garantizando un comportamiento estable. En cada caso no es posible predecir dicho comportamiento hasta que es simulado.

A diferencia del anterior, el observador difuso tipo TS planteado en este trabajo de investigación, se basa en el algoritmo de Ackermann para determinar la matriz de ganancias del observador $L(x(t))$.

La propiedad de observabilidad se analizó a través de la matriz correspondiente. Como son matrices de dimensión $n \times n$, con la definición de su determinante se precisó que el sistema es completamente observable.

Para el sistema definido la matriz $L(x(t))$ no es única. En cada caso se especifica la posición deseada de los valores propios del estimador que determinarán la velocidad y amortiguamiento de respuesta de la observación del estado.

Para mostrar la practicidad o versatilidad del observador propuesto, específicamente en el ejemplo del péndulo invertido sobre un carro, se han dado diferentes ubicaciones para los valores propios. En el primer caso se dan valores propios pequeños negativos, más adecuados a un diseño convencional con $s_1 = -1$ y $s_2 = -1$. Se muestra una convergencia del error más suave que para valores propios más severos. En el segundo caso se tienen valores propios más estables con $s_1 = -100$ y $s_2 = -100$, la convergencia del error se tiene de forma severa al inicio de su desempeño. Sin embargo, la eficacia del método permite que el observador estime los estados de forma correcta.

En el tercer caso se dan valores propios con parte real negativa cercanos al eje vertical y parte imaginaria, ubicados en el plano complejo definidos como complejos conjugados $s_1 = -1 + 2i$ y $s_2 = -1 - 2i$. Estos valores propios proporcionan una convergencia del error con oscilaciones. Este caso y el anterior son ilustrativos, para demostrar la ventaja que tiene el observador propuesto sobre el método conservativo de definir diferentes valores propios incluso complejos conjugados para el diseño del observador si es que así se requieren a conveniencia del diseño del sistema de control.

Cabe mencionar que se encuentran activas a lo más dos reglas de membresía al mismo tiempo con lo que el observador es capaz de estimar los estados del sistema.

En los ejemplos planteados queda de manifiesto el desempeño del algoritmo al compararse con el observador basado en LMI's.

Para el caso de asignación robusta de polos se verifica que el estabilizador se define de forma relativamente simple, se establece un comportamiento arbitrario en el equilibrio del sistema simplemente eligiendo valores propios difusos deferentes.

Hay que señalar que el enfoque propuesto es válido para sistemas de una sola entrada y de múltiples entradas, en el caso del estabilizador, la cual, es una ventaja significativa, en términos de implementación, cuando se compara con el enfoque dado en LMI's. Para verificarlo se presenta el ejemplo de un brazo robótico de dos grados de libertad.

Por lo tanto, esta tesis propuso una forma alterna para encontrar la ganancia de estabilizador difuso así como la matriz de ganancias del observador difuso aplicando el teorema de dualidad.

Evita cálculos complicados y funciona de forma eficaz en comparación con el método de LMI's

TRABAJOS FUTUROS

Implementar el Observador Difuso tipo Takagi-Sugeno en el modelo físico, haciendo referencia a los sistemas no lineales de una salida y, cuyo diseño se precisó bajo el algoritmo de Ackermann; así de esta forma verificar su eficacia. Como se ha indicado el observador tiene un comportamiento arbitrario en la convergencia de los estados del sistema, validar su funcionamiento es un aspecto interesante en el desarrollo de esta tesis como trabajo futuro.

Implementar el Observador Difuso tipo Takagi-Sugeno para sistemas no lineales de múltiples entradas y múltiples salidas en el modelo físico correspondiente utilizando asignación robusta de polos y, así mismo comprobar su funcionalidad. Los modelos difusos tipo Takagi-Sugeno son adecuados para representar las dinámicas altamente no lineales de sistemas físicos complejos. Su esquema está muy bien definido por medio de la combinación de subsistemas lineales locales facilitando el diseño del observador difuso no lineal.

Es importante establecer cierta técnica o metodología que permita procesar matrices variables de considerable dificultad en el menor tiempo posible. Asimismo, este trabajo de investigación se ha enfocado en el estudio de la propiedad de observabilidad para sistema no lineales de una y varias salidas, con el propósito de facilitar la etapa de control. Por lo que es indispensable conocer todas las variables que comprenden al sistema físico. Para el estudio de la propiedad de observabilidad, en este caso, se ha realizado a través de la matriz correspondiente para el sistema difuso global o general. Su construcción es relativamente simple; sin embargo, estas matrices no son constantes, las matrices de observabilidad que se plantean son matrices variables con respecto a las funciones de membresía. De tal forma que para sistemas con múltiples salidas, esta matriz adquiere gran complejidad, su manejo computacional es arduo, requiriendo de equipo con gran capacidad de procesamiento para que los resultados se puedan obtener en un tiempo mínimo. Este es uno de los inconvenientes con el cual uno se enfrenta al

pretender dar solución a los sistemas físicos planteados ya que la información que contienen es extensa.

Otro trabajo a futuro que se plantea es la construcción del observador difuso activando más de dos reglas de pertenencia al mismo tiempo. En el presente estudio se estableció la activación de solo dos reglas de pertenencia para simplificar el diseño del observado no lineal

Así mismo, se considera la publicación de nuevos artículos en revistas indexadas con respecto al trabajo planteado en esta tesis con respecto a la propiedad de observabilidad y diseño de observadores difusos para sistemas no lineales descritos por modelos difusos tipo Takagi-Sugeno. Desarrollar ejemplos prácticos que permitan demostrar la eficacia de los métodos propuestos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] J. Meda-Campaña, J. Rodriguez-Valdez, T. Hernandez-Cortes, R. Tapia-Herrera, and V. Nosov. *Analysis of the fuzzy controllability property and stabilization for a class of TS fuzzy models*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 23(2):291–301, April 2015.
- [2] L A. Zadeh, *Fuzzy Sets*, Information and Control, Vol. 8, 338-353, 1965.
- [3] L. A. Zadeh, *Fuzzy Logic*, Computer, No, 4, pp 83-93, April 1988.
- [4] Ahmad M. Ibrahim, *Fuzzy Logic for Embedded Systems Applications*, Embedded Technology Series. ELSEVER, 2004.
- [5] K. Tanaka and H. O. Wang, *Fuzzy Control Systems Design and Analysis. A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley and Sons, Inc., 2001.
- [6] L.-X. Wang, *A Course in Fuzzy, Systems and Control*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 1997.
- [7] G. Chen and T.T. Phan, *Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Control Systems*, CRC Press LLC, 2001.
- [8] K. H. Lee, *First Course on Fuzzy Theory and Applications*, Springer-Verlag, 2005.
- [9] J. de J. Rubio, J. Pacheco, C. F. Juarez and E. Soriano, *Comparison Between Two Observers*, IEEE Latin America Transactions, Vol. 14, No. 5, pp. 2077-2083, May 2016.
- [10] D. Luenberger, *Observing the State of a Linear System*. IEEE Transactions on Military Electronics, 8, pp. 74-80, 1964.
- [11] D. Luenberger, *Observers for multivariable systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 11. No. 2, pp. 190 – 197, Apr 1966.
- [12] D. Luenberger, *An Introduction to Observers*, IEEE Transactions on Automatic Control, No. 16, pp. 596-602, 1971.
- [13] K. K. Busawon, M. Saif, *A state observer for nonlinear system*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44, No. 11, 2098-2103, Nov. 1999.

- [14] A. Alzate Gómez and J.E. Bravo B., *Estabilidad de Sistemas Difusos con LMIs*, Scientia et Technica Año XIII, No 35, pp 133-138. Universidad Tecnológica de Pereira, Agosto de 2007
- [15] Z. Lendek, T.M. Guerra, R. Babuska, B. Schutter, *Stability Analysis and Nonlinear Observer Design Using Takagi-Sugeno Fuzzy Model*, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Vol 262, Springer, 2010.
- [16] J. Trumpf, *Observers for linear time-varying systems*, Linear Algebra and its Applications, ELSEVIER, 425, pp. 303–312, Feb 2007.
- [17] R. Olivera, R. Olivera, O. Vite, H. Gamboa, M. A. Navarrete and C. A. Rivera, *Application of the Three State Kalman Filtering for Moving Vehicle Tracking*, IEEE Latin America Transactions, Vol. 14, No. 5, pp. 2072-2076, May 2016.
- [18] P. Shi, and S. K. Nguang, *H_∞ Output Feedback Control of Fuzzy System Models under Sampled Measurements*, Computers and mathematics with applications, No 46, pp. 705-717, 2003.
- [19] K. Tanaka and H. O. Wang, *Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers: A Linear Matrix Inequality Approach*. Proceedings of the 36th Conference on Decision & Control, San Diego, CA, Vol. 2, pp. 1315-1320, Dec. 1997.
- [20] H. Khalil, *Nonlinear Systems*, 2nd ed., Prentice Hall, 1996.
- [21] J. R. G. Sanchez, S. T. Mosqueda, R. S. Ortigoza, M. A. Cruz, G. S. Ortigoza, J. J. Rubio, *Assessment of an Average Tracking Controller that Considers all the Subsystems Involved in a WMR: Implementation via PWM or Sigma-Delta Modulation*, IEEE Latin America Transactions, Vol. 14, No. 3, 2016.
- [22] R. S. Ortigoza, J. R. G. Sanchez, V. M. H. Guzman, C. M. Sanchez, M. M. Aranda, *Trajectory Tracking Control for a Differential Drive Wheeled Mobile Robot Considering the Dynamics Related to the Actuators and Power Stage*. IEEE Latin America Transactions, Vol. 14, No. 2, pp. 657-664, 2016.
- [23] W. Chen and M. Saif, *Unknown Input Observer Design for a Class of Nonlinear Systems: an LMI Approach*. Proceedings of the 2006 American Control Conference Minneapolis, Minnesota, USA, June 14-16, 2006.
- [24] C. Fantuzzi, R. Rovatti, *On the Approximation Capabilities of the Homogeneous Takagi-Sugeno Model Fuzzy Systems*, Proceedings of the Fifth IEEE

- International Conference on Fuzzy Systems, New Orleans, LA. USA, pp. 1067-1072, 1996.
- [25] H.T. Nguyen and M. Sugeno, *Fuzzy Systems Modeling and Control*, The Handbooks of Fuzzy Sets Series editors Didier Dubois and Henri Prade Springer Science & Business Media, Dec 6, 2012
- [26] K. Tanaka and M. Sugeno, *Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems*, Fuzzy Sets Syst., Vol. 45, No. 2, pp. 135-156, 1992.
- [27] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. F. Griffin, *Parallel Distributed Compensation of Nonlinear Systems*, International Joint Conference, pp. 531-538, 1995.
- [28] K. Ogata, *Ingeniería de Control Moderna*, Ed. Prentice Hall, Quinta Edición, Madrid, España, 2010.
- [29] B.C. Kuo, *Sistemas de Control Automático*, Ed. Prentice Hall, Séptima Edición, México, 1995.
- [30] R.C. Dorf and R.H. Bishop, *Modern Control Systems*, Ed. Prentice Hall, Twelfth Edition, USA, 2011.
- [31] T. Kailath, *Linear Systems*, Ed. Prentice Hall, USA, 1980.
- [32] P. Albertos, A. Sala, *Multivariable Control Systems; an Engineering Approach*, Springer-Verlag London 2004.
- [33] D.A. Mejía, R.A. Bolaños, C.A. Correa, *Técnicas de Control Adaptativas Aplicadas a Sistemas Multivariabes (M.I.M.O.)*, Scientia et Technica Año XIII, No 35, pp. 37-42, Agosto de 2007.
- [34] H. Aboukheir, *Closed Loop Identification Using Takagi Sugeno Models*, IEEE Latin America Transactions, Vol. 8, No.3, pp. 199-204, June 2010.
- [35] J. A. Hernández and G. A. Ramírez, *Control for Coupled Process by Collaborative Set Points Movement over MIMO Systems*, IEEE Latin America Transactions, Vol. 14, No. 12, pp. 4663-4673, December 2016.
- [36] F. G. Rossomando and C. M. Soria, *Adaptive Neural Sliding Mode Control in Discrete Time for a SCARA Robot Arm*, IEEE Latin America Transactions, Vol. 14, No. 6, pp. 2556-2564, June 2016

- [37] J. J. Rubio, P. Cruz, L. A. Paramo, J. A. Meda, D. Mujica and R. S. Ortigoza, *PID Anti-Vibration Control of a Robotic Arm*, IEEE Latin America Transactions, Vol. 14, No. 7, pp. 3144-3150, July 2016
- [38] K. Tanaka, T. Kosaki, and H. Wang. *Backing control problem of a mobile robot with multiple trailers: fuzzy modeling and LMI-based design*. *Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews*, IEEE Transactions on, 28(3):329–337, Aug. 1998.
- [39] F. J. Torres, G. V. Guerrero, C. D. García, J. F. Gómez, M. Adam and R. F. Escobar, *Master-Slave Synchronization of Robot Manipulators Driven by Induction Motors*, IEEE Latin America Transactions, Vol. 14, No. 9, pp. 3986-3991, September 2016.
- [40] Abdelmalek, N. Gole´a, and M. Laid Hadjili. *A new fuzzy Lyapunov approach to non-quadratic stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy models*. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 17(1), 2007.
- [41] N. Kumar, M. Takács and Z. Vámosy, *Robot Navigation in Unknown Environment using Fuzzy Logic*, IEEE 15th International Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics, pp. 279-283, 2017.
- [42] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [43] D. D. Palm R. and H. H. *Model Based Fuzzy Control: Fuzzy Gain Schedules and Sliding Mode Fuzzy Controllers*. Springer-Verlag, 1997.
- [44] Chieh-Li Chen, Pey-Chung Chen and Cha'o-Kuang Chen, *Analysis and design of fuzzy control system*, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 57, No, 2, pp.125-140, 1993.
- [45] Yong-ai Zhen, Yi-bei Nian and Fei Sun, *Synchronization of discrete-time chaotic systems based on Takagi-Sugeno fuzzy Model*, *International Conference on Computational Intelligence and Natural Computing*, pp. 320-323, 2009.
- [46] M. Ramírez, and O. P. Malik, *Simplified Fuzzy Logic Controller and its Application as a Power System Stabilizer*, *15th International Conference on Intelligent System Applications to Power Systems*, pp. 1-6, 2009.

- [47] H.A. Botero, H.D. Álvarez, *Una Revisión de los Métodos más Frecuentes para la Estimación del Estado en Procesos Químicos* DYNA, Vol. 76, No. 158, pp. 135-146, 2009.
- [48] V. N. Afanas'ev, V. B. Kolmanovskii, and V. R. Nosov. *Mathematical Theory Of Control Systems Design*. Kluwer Academic Publishers, 1996.

ANEXOS

Trabajos Publicados en Revistas

Parte de este trabajo ha sido considerado en un documento enviado a la IEEE Latin America Transactions para su revisión; el cual ya fue publicado, detallado con el título “*Analysis of Fuzzy Observability Property for a Class of TS Fuzzy Models*”, como una opción a nuevas técnicas de estimación de estados para sistemas de control no lineal empleando el enfoque de sistemas difusos tipo Takagi-Sugeno, lo que permite reconstruir el vector de estados para una correcta retroalimentación. Se anexa evidencia del artículo ya publicado.

Como parte de la investigación de observadores difusos tipo TS se tiene otro documento revisado y ya publicado en detalle como “*Design of Stabilizers and Observers for a Class of Multivariable T–S Fuzzy Models on the Basis of New Interpolation Functions*” que propone una aproximación en el diseño de estabilizadores y observadores para cierta clase de modelos difusos de sistemas dinámicos no lineales de múltiples entradas y múltiples salidas utilizando precisamente el enfoque de sistemas difusos. Se utiliza como base las ganancias locales y se busca un conjunto de funciones de interpolación capaces de combinar apropiadamente tales ganancias. Para ello es preciso analizar las propiedades de observabilidad y controlabilidad planteadas para sistemas difusos TS de múltiples entradas múltiples y múltiples salidas. Se anexa evidencia de la publicación de éste trabajo.

Así mismo, el documento cuyo título es “*Discrete-time Kalman filter for Takagi–Sugeno fuzzy models*”, establece la combinación de las técnicas de Filtro de Kalman y modelos difusos tipo Takagi-Sugeno, lo que permite establecer una herramienta más eficaz en comparación con el Filtro Extendido de Kalman que se emplea cotidianamente. Estableciendo como ventajas que se tiene un tiempo de

procesamiento mucho menor en comparación con el Filtro Extendido; además el error medio cuadrático se reduce significativamente. Este documento ya fue evaluado y publicado.

De igual forma se encuentra en revisión otro trabajo relacionado con la Asignación Robusta de Polos propuesta para Sistemas no lineales de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO) bajo el enfoque de Sistemas Difusos tipo TS. Se hace un análisis de las propiedades de observabilidad y controlabilidad estableciendo las condiciones propicias para la existencia del observador y estabilizador correspondiente. El documento se detalla como "*Analysis of Controllability, Observability and Stabilization of Robotic Systems Described by Takagi-Sugeno Fuzzy Models by means of Fuzzy Robust Pole Assignment*". Se anexa evidencia del trabajo en revisión.

Analysis of Fuzzy Observability Property for a Class of TS Fuzzy Models

A. Grande, T. Hernández, A. V. Curtidor, L. A. Páramo, R. Tapia, I. O. Cázares and
J. A. Meda, *Member, IEEE*

Abstract— In this paper, the observability property for a class of Nonlinear systems is analyzed under the theoretical framework of Takagi-Sugeno (TS) fuzzy systems. The main contribution of this work is the designing of a full-order TS fuzzy observer, which allows estimating the state vector in a practical way. The analyzed TS fuzzy observer reconstructs the state vector of nonlinear system by using the overall TS fuzzy model represented by the appropriate blending of linear subsystems that operate around certain operation regions. It is considered that at most two membership functions are activated at the same time to facilitate the analysis of the nonlinear system. The proposed approach allows the behavior of the observer to be easily modified by choosing a set of adequate eigenvalues permitting an arbitrary error convergence according to the design requirements. Some numerical simulations are considered to validate the efficacy of the presented approach. Besides, a comparison between the proposed observer and the one settled down under Parallel Distributed Compensation (PDC) concept is given.

Keywords— Fuzzy Observer, Observability, TS Fuzzy System.

I. INTRODUCCIÓN

EN la actualidad la complejidad natural de los sistemas en general ha establecido la necesidad de innovar nuevas técnicas en el análisis y diseño de sistemas de control. Un ejemplo son los Sistemas de Control Difuso, una alternativa bien desarrollada, que pretende simular el comportamiento del razonamiento humano [2, 3].

Los sistemas difusos tienen un extenso campo de aplicación, desde la automatización de enseres domésticos hasta los sofisticados sistemas de pilotaje de naves espaciales [4].

Uno de sus objetivos es simplificar y optimizar el desempeño de los sistemas de control tal como lo haría el experto en el campo de aplicación. Emplean un lenguaje sencillo de reglas de inferencia que intenta reflejar la

proximidad e inexactitud del mundo real [5-8].

La mayoría de los sistemas presentan no linealidades de alto orden y en consecuencia su comportamiento es difícil de predecir y modelar matemáticamente [20]. Muchos problemas en la toma de decisiones, monitoreo, detección de fallas o seguimiento de trayectorias [18, 21, 22], se basan en el conocimiento previo de las variables de estado y los parámetros de variación en el tiempo. Existen situaciones en las que no es posible tener acceso a ciertos datos o simplemente los dispositivos que los miden no son capaces de obtenerlos. En este caso se puede emplear un observador o estimador de estados [10-13], que utiliza los valores de entrada y salida del sistema para estimar los datos. Los observadores resultan ser una mejor opción ya que representan un bajo costo y menor percepción al ruido, en comparación con los sensores [9].

Un requerimiento esencial en el diseño de un observador es garantizar la convergencia de los valores estimados a los valores reales o al menos a una vecindad próxima a éstos [16].

Para los sistemas lineales existen algunas técnicas de estimación como el filtro de Kalman, que es un algoritmo aplicado a sistemas lineales [17]. Con respecto a los sistemas no-lineales, el diseño de estimadores es generalmente complicado e involucra un alto costo computacional [15, 23, 24].

Los modelos difusos tipo Takagi-Sugeno (TS) se caracterizan por representar una gran variedad de sistemas no lineales mediante la extensión de técnicas lineales bien conocidas. Incluso son considerados como Aproximadores Universales, por su capacidad de aproximar, arbitrariamente, funciones no lineales.

Su estructura facilita el análisis de estabilidad [1] y, así como el diseño de controladores y observadores. Como ejemplo, se puede mencionar al Compensador Paralelo Distribuido (PDC), que se basa en Desigualdades Lineales Matriciales (LMI's), pero cuyo desempeño ha mostrado ser demasiado conservativo [14, 19].

En este sentido, el presente trabajo propone el diseño de un observador difuso de orden completo para sistemas TS, empleando un método no conservativo, basado en la ubicación de polos que garantice la estimación del vector de estados, cuando el modelo difuso tipo TS sea observable. Se muestran algunas comparaciones con el método de LMI's comprobando la eficacia del método propuesto.

El resto de este trabajo está organizado como sigue. En la sección II se da un breve resumen de los modelos difusos tipo TS. El análisis de la observabilidad para sistemas difusos se presenta en la Sección III. El diseño del observador difuso se desarrolla en la Sección IV. Un par de ejemplos se analizan en

A. Grande, SEPI-ESIME Zacateco, Instituto Politécnico Nacional, México, agrandem1500@alumno.ipn.mx.

T. Hernández, SEPI-ESIME Zacateco, Instituto Politécnico Nacional, México, tona_hernand@yahoo.com.mx.

A. V. Curtidor, SEPI-ESIME Zacateco, Instituto Politécnico Nacional, México, vuro_cl83@hotmail.com.

L. A. Páramo, SEPI-ESIME Zacateco, Instituto Politécnico Nacional, México, paramo_lualb@hotmail.com.

R. Tapia, ESIME Zacateco, Instituto Politécnico Nacional, México, rtapia@ipn.mx.

I. O. Cázares, SEPI-ESIME Zacateco, Instituto Politécnico Nacional, México, cazares0300@hotmail.com.

J. A. Meda, SEPI-ESIME Zacateco, Instituto Politécnico Nacional, México, jmedac@ipn.mx.

Corresponding Author: Araceli Grande Meza.

Design of Stabilizers and Observers for a Class of Multivariable T–S Fuzzy Models on the Basis of New Interpolation Functions

Jesús Alberto Meda-Campaña , Member, IEEE, Araceli Grande-Meza, José de Jesús Rubio , Member, IEEE, Ricardo Tapia-Herrera , Tonatiuh Hernández-Cortés , Airam V. Curtidor-López, Luis Alberto Páramo-Carranza, and Irving Omar Cázares-Ramírez

Abstract—An approach to design stabilizers and observers for a class of multiple-input multiple-output (MIMO) Takagi–Sugeno (T–S) fuzzy models is developed on the basis of local gains and the searching for a set of interpolation functions capable of properly combining the aforementioned local gains. As expected, the existence of such interpolation functions depends on the controllability and observability properties of the overall multivariable T–S fuzzy model. For that reason, practical controllability and observability tests are also proposed for MIMO T–S fuzzy systems. Some numerical simulations are used in order to validate the efficacy of the method. Besides, the results are compared with an approach based on linear matrix inequalities, namely parallel distributed compensation.

Index Terms—Fuzzy controllability, fuzzy observability, fuzzy observer, fuzzy stabilizer, multivariable systems, Takagi–Sugeno (T–S) fuzzy models.

I. INTRODUCTION

RECENTLY, the effort of some authors has been oriented to the design of control techniques ensuring the stability property of the equilibrium in the whole validity region of the

Takagi–Sugeno (T–S) fuzzy model [1], [2] by extending well-known methodologies of the linear field [3], [4]. Unfortunately, although such controllers can be designed in a straightforward way, the resulting expressions can be very large, in general.

In order to overcome this drawback, the search for new membership functions capable of properly combining linear local controllers has been proposed. In [5], the search for correct membership functions has been carried out in an analytical way. However, a particular form of the matrices defining the T–S fuzzy model is required. This approach can be relaxed by including soft-computing techniques during the search for the adequate membership functions as shown in [6] and [7]. In the former, a genetic algorithm is implemented to approximate the adequate membership functions, while in the latter, ANFIS is considered for the same purpose. In [8], the authors address the local stabilization problem for T–S fuzzy systems with time delay, while the design of observers for T–S fuzzy in discrete time is studied in [9] through a ranking-based switching approach. The latter work is based on a subdivision of spanning space composed of normalized fuzzy weighting functions, which results in a new ranking-based switching mechanism.

It is important to mention that techniques based on linear matrix inequalities (LMIs) have been successfully applied during the design of stabilizers and observers for T–S fuzzy models. In [10], a practical approach to design fuzzy stabilizers and fuzzy observers is thoroughly analyzed. This method, known as parallel distributed compensator (PDC), relies in searching for a common positive-definite matrix P , which has to fulfill local and global Lyapunov conditions.

Because the PDC has been proven to be a conservative approach, in the literature, one can find several works devoted to the relaxation of the conditions involved in the design of stabilizers and observers for Takagi–Sugeno (T–S) fuzzy models. Some authors propose the inclusion of the basis-dependent Lyapunov function, which, roughly speaking, can be considered as the fuzzy version of the typical Lyapunov function. Some other authors have defined a more general approach involving polynomial fuzzy systems. In this case, the design process relies on the sum of squares technique. The interested reader can be referred to [11]–[24].

Despite great advances achieved in the above-mentioned works, it is still difficult to impose an arbitrary route to

Manuscript received April 10, 2017; revised August 14, 2017; accepted December 14, 2017. Date of publication December 22, 2017; date of current version October 4, 2018. This work was partially supported by the Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología through scholarship Sistema Nacional de Investigadores, by the Instituto Politécnico Nacional through Research Projects 20150487, 20160579, and 20170629, and by scholarships Estímulo al Desempeño de los Investigadores, Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas, and Beca de Estímulo Institucional de Formación de Investigadores. (Corresponding author: Jesús Alberto Meda-Campaña.)

J. A. Meda-Campaña, A. Grande-Meza, A. V. Curtidor-López, L. A. Páramo-Carranza, and I. O. Cázares-Ramírez are with the Department of Mechanical Engineering, Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Campus Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, 07738 México City, México (e-mail: jmedac@ipn.mx; agrandem 1500@alumno.ipn.mx; vero_cl83@hotmail.com; pantrowolverine@hotmail.com; cazares0300@hotmail.com).

J. de J. Rubio is with the Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Campus Aztatzalco, Instituto Politécnico Nacional, 02250 México City, México (e-mail: jrubioc@ipn.mx).

R. Tapia-Herrera is with the Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Campus Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, 07738 México City, México (e-mail: rtapiah@ipn.mx).

T. Hernández-Cortés is with the Universidad Politécnica de Pachuca, 43830 Zempoala, México (e-mail: tonatiuh@upp.edu.mx).

Color versions of one or more of the figures in this paper are available online at <http://ieeexplore.ieee.org>.

Digital Object Identifier 10.1109/TFUZZ.2017.2786244

Discrete-time Kalman filter for Takagi–Sugeno fuzzy models

L. A. Páramo-Carranza¹ · J. A. Meda-Campaña¹ · José de Jesús Rubio² ·
R. Tapia-Herrera¹ · A. V. Curtidor-López¹ · A. Grande-Meza¹ · I. Cázares-Ramírez¹

Received: 4 January 2017 / Accepted: 12 March 2017 / Published online: 11 April 2017
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2017

Abstract In this work, the Kalman Filter (KF) and Takagi–Sugeno fuzzy modeling technique are combined to extend the classical Kalman linear state estimation to the nonlinear field. The framework for such extension is given, and in this sense the discrete-time fuzzy Kalman filter (DFKF) is obtained. It will be shown that the fuzzy version gives some advantages when is compared with the Extended Kalman Filter (EKF), which is the most typical extension of the KF to the nonlinear field. The proposed approach provides a significantly smaller processing time than the processing time of the EKF while the mean square error is also reduced. Finally, some examples, such as the Lorenz chaotic attractor and under actuated mechatronic system (pendubot), are used to compare the DFKF and EKF.

Keywords Kalman filtering · Fuzzy systems · Chaotic systems

1 Introduction

Evolving intelligent systems are distinguished by skills to adjust their parameters as well as structure to the varying features of processes. Some important results are described by Abdallah et al. (2016), Angelov and Yager (2012), Iliadis et al. (2016), Kangin et al. (2016), Khamassi et al.

(2016), Maciel et al. (2016), Marques Silva et al. (2014), Moallem et al. (2015), Pratama et al. (2016a, b), Pratama et al. (2016), Precup et al. (2012), and Venkatesan et al. (2016). From the aforementioned papers, in Iliadis et al. (2016), Maciel et al. (2016), Marques Silva et al. (2014), Pratama et al. (2016a, b), Pratama et al. (2016), and Venkatesan et al. (2016), authors use the recursive least square or Kalman filter algorithms; since it is highly used to adjust parameters of evolving intelligent systems, it is important to make some investigations about this issue.

Kalman Filter (KF) since its publication in 1960 by Rudolf E. Kalman (1965) is one of the most useful techniques for estimating the non-measurable state even in presence of process and/or channel noise. It is an optimal observer that works quite well in a number of nonlinear estimation and tracking applications and, nowadays, is widely used in technology applications. It is well-known as an important tool in engineering, used in applications as tracking of systems, satellite navigation, spacecraft, robotics, ballistic missile trajectory estimation or radar control. It has become in a very useful tool and its mathematical framework has been validated by many researchers.

KF is an optimal state estimation algorithm developed for linear systems involving random perturbations (noise), in order to estimate the non-measurable state of such systems. It gives a linear and minimum error variance recursive algorithm to optimally estimate the unknown state of a dynamic system from noisy data taken at discrete time (Chui and Chen 2009).

Basically the KF is an estimator for what is called the linear quadratic problem, which is the problem of estimating the instantaneous state of a linearized dynamic system perturbed with noise, and the process performed is carried out, by knowing the current behavior, estimates the future state of the system by applying a proportional gain to the predictor

✉ José de Jesús Rubio
jrubioa@ipn.mx

¹ Instituto Politécnico Nacional, SEPI-ESIME Zacatenco,
07738 México, DF, Mexico

² Instituto Politécnico Nacional, SEPI-ESIME Azcapotzalco,
02250 México, DF, Mexico

Analysis of Controllability, Observability and Stabilization of Robotic Systems Described by Takagi-Sugeno Fuzzy Models by means of Fuzzy Robust Pole Assignment

T. Hernández, A. Grande, J. Rodríguez, L. A. Páramo, R. Tapia,
J. A. Meda, *Member, IEEE*

Abstract— The present work is concerned to solve the problem of nonlinear robotic control systems on the basis of Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy models. In addition, controllability and observability studies for T-S fuzzy model systems are considered for Single-Input Single-Output (SISO) and Multiple-Input Multiple-Output (MIMO) systems. In particular, the robust pole assignment approach is extended to the fuzzy field. This approach is used to design fuzzy stabilizers and fuzzy observers directly on the overall T-S fuzzy system. The latter one is the representation of the nonlinear robotic system, which is linearized around certain operation regions. The suggested method is considered for either SISO or MIMO systems. Furthermore, the method allows inducing an arbitrary behavior into the fuzzy plant in a relatively easy way. Two examples are used to verify the effectiveness of the proposed approach. The results are compared with the well-known Parallel Distributed Compensation (PDC) method, which is designed on the basis of Linear Matrix Inequalities (LMIs).

Keywords— Takagi-Sugeno Fuzzy Model, Fuzzy Control Systems, Fuzzy Controllability, Fuzzy Observability, Robust Pole Assignment.

I. INTRODUCCIÓN

LOS SISTEMAS robóticos adquieren cada vez más importancia en muchos campos de la ciencia, la industria e incluso en el hogar (robots domésticos). Esta tendencia impulsa la búsqueda de métodos prácticos de control [26] que sean más robustos [9] y que garanticen el desempeño de estos sistemas. En un número considerable de casos los sistemas robóticos están descritos por modelos no lineales, complejos y de gran interés en diferentes áreas de aplicación [16], [17], [21] y [24].

Afortunadamente, el modelado difuso Takagi-Sugeno (T-S) permite aproximar la dinámica no lineal mediante la combinación de subsistemas lineales locales. En

consecuencia, es posible simplificar el análisis y diseño de los controladores. Muchos de estos resultados se encuentran publicados en [1], [3], [4], [14], [23], [25] y [26].

En [10] particularmente, se presenta el análisis de estabilidad con base en el método directo de Lyapunov, donde se propone una función candidata y se establece un criterio de estabilidad local en los parámetros del sistema, finalmente el principio de invariancia de LaSalle se utiliza para garantizar la estabilidad asintótica. Como es de esperar, uno de los problemas principales en el diseño del control difuso es el de asegurar la estabilidad global y robusta del sistema bajo la influencia de la señal de control. Otros enfoques de estabilidad difusa se pueden encontrar en trabajos como [5], [6], [19], [22] y [28].

Entre los métodos de estabilidad difusa existentes, se tiene un resultado particularmente interesante, debido a su simplicidad para estabilizar modelos difusos tipo T-S, conocido como compensador paralelo distribuido (PDC, Parallel Distributed Compensation). La idea principal del método PDC es diseñar de forma distribuida cada regla de control, compensando cada regla del modelo difuso TS, además, se deriva una condición de estabilidad con base en el enfoque de Lyapunov y se expresa en términos de un conjunto de desigualdades matriciales lineales (LMI). Por lo tanto, el diseño del estabilizador difuso se reduce al problema de la búsqueda numérica de una matriz común de Lyapunov y un conjunto de ganancias locales que satisfagan las desigualdades antes mencionadas [25].

Sin embargo, el PDC es en general, un método conservador y las condiciones de equilibrio no se pueden imponer fácilmente, (véase el ejemplo 2). El lector puede consultar [12], [15], [18], [19], [28], [29], [30] y [31] y sus referencias, donde se estudian enfoques más relajados de estabilidad difusa.

En este trabajo se propone un método alternativo para estabilizar una clase de modelos robóticos empleando sistemas difusos Tipo T-S, considerando algunas propiedades del sistema en lazo cerrado. En términos generales, el controlador propuesto se basa en la asignación de polos para el sistema difuso T-S en lazo cerrado. Este enfoque se aplica a dos modelos robóticos con el fin de ilustrar su validez.

Es importante mencionar que en [13], se demuestra un método para estabilizar los sistemas difusos T-S en términos de la fórmula de Ackermann, así mismo, en [8] se propone el

T. Hernández, Universidad Politécnica de Puebla, México, tonstih@upp.edu.mx

A. Grande, SEPI-ESIME Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, México, agrandem1500@alumno.ipn.mx

J. Rodríguez, SEPI-ESIME Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, México, jrvalonica@hotmail.com

L. A. Páramo, SEPI-ESIME Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, México, paramo_lualb@hotmail.com

R. Tapia, ESIME Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, México, rtapia@ipn.mx

J. A. Meda, SEPI-ESIME Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, México, jmeda@ipn.mx

Corresponding Author: Araceli Grande Meda.