



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
UNIDAD ZACATENCO**

**SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIONES**

TESIS

“PROPAGACIÓN DE ONDAS ACÚSTICAS EN EL OCÉANO CUASI ESTRATIFICADO”

**Que para obtener el grado de
M. en C. en Ingeniería de Telecomunicaciones**

**PRESENTA
Ing. EDSON KEVIN ARANA ORTEGA**

**DIRECTORES DE TESIS
DR. VLADIMIR RABINOVITCH LIKHTMAN
DR. RAÚL CASTILLO PÉREZ**



CIUDAD DE MÉXICO, DICIEMBRE 2018

Resumen

Investigamos el campo acústico submarino en el océano cuasi estratificado generado por una fuente estacionaria puntual y se presenta el método SPPS para determinar la pérdida de transmisión del campo acústico generado por una onda acústica que se propaga en el océano, el cual se considera como un medio cuasi estratificado. El transmisor y receptor están colocados a diferentes profundidades en el océano y se encuentran separados por una distancia horizontal grande. Se establece una ecuación de dispersión que satisface las condiciones de frontera y características del problema, además de hacer una relación con la ecuación de onda del problema espectral. Obtenemos los números de onda o valores propios de los modos propagados por medio de la ecuación de dispersión, los cuales son usados para obtener la representación gráfica de las pérdidas de transmisión dependiendo de la distancia y la profundidad, ya que estos modos proporcionan la contribución para la generación del campo acústico mediante la obtención de fórmulas asintóticas para el campo lejano, función de Green, que describe el campo acústico como pérdidas de transmisión en dB en el océano cuasi estratificado el cual depende de un parámetro pequeño que permite esta cuasi estratificación.

Abstract

We investigate the underwater acoustic field in the almost stratified ocean generated by a stationary point source and the SPPS method is presented to determine the transmission losses of the acoustic field generated by an acoustic wave that propagates in the ocean, which is considered as a medium almost stratified. The transmitter and receiver are placed at different depths in the ocean and are separated by a large horizontal distance. A dispersion equation is established that satisfies the boundary conditions and characteristics of the problem, in addition to making a relationship with the wave equation of the spectral problem. We obtain the wave numbers or eigenvalues of the modes propagated by means of the dispersion equation, which are used to obtain the graphic representation of the transmission losses depending on the distance and depth, since these modes provide the contribution for the generation of the acoustic field by obtaining asymptotic formulas for the far field, Green's function, which describes the acoustic field as transmission losses in dB in the almost stratified ocean, which depends on a small parameter that allows this quasi-stratification.

Agradecimientos

Agradezco a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la ESIME Unidad Zacatenco por darme la oportunidad de cursar la Maestría en Ciencias en Ingeniería de Telecomunicaciones y así poder seguir desarrollando y adquiriendo conocimientos en el área de las Telecomunicaciones que decidí cursar, al cuadro académico del posgrado conformado por grandes investigadores los cuales nos brindaron un poco de sus conocimientos, experiencia y trayectoria.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico brindado a lo largo de estos dos años que duró mi estancia en el posgrado y en el desarrollo de este trabajo de investigación.

Al Dr. Vladimir Rabinovitch quien confió en mi para desarrollar este proyecto de investigación, por su paciencia y por los conocimientos compartidos para llevarlo a cabo, además de ayudarme a entender los problemas físicos con el lenguaje universal de las matemáticas.

Al Dr. Raúl Castillo quien me brindó su apoyo, conocimientos y consejos para poder llegar a los objetivos de este trabajo de tesis

A mi madre quien con su amor, paciencia y esfuerzo me han permitido llegar a cumplir hoy un sueño más, una meta, un logro, gracias por inculcar en mi el ejemplo de esfuerzo y valentía, por la comprensión, apoyo y confianza brindado a lo largo de esta etapa.

A mis hermanos y sobrino, por apoyo incondicional durante todo este proceso, por estar conmigo en todo momento, gracias. A toda mi familia porque con sus palabras de aliento hicieron de mi una mejor persona y de una u otra forma me acompañan en todos mis sueños y metas.

Finalmente quiero dedicar esta tesis a todos mis amigos y compañeros, personas con las que comparto el mismo gusto por aprender, en los cuales siempre encontré un apoyo y por extender su mano en momentos difíciles.

Índice general

Resumen	I
Abstract	II
Agradecimientos	III
Objetivo General	XII
Objetivos Particulares	XIII
Justificación	XIV
Introducción	XVI
1. OCEANOGRAFÍA FÍSICA Y FUNDAMENTOS DE ACÚSTICA SUBMARINA	1
1.1. Introducción	1
1.2. Ambiente Acústico y Estratificación del Océano	2
1.3. Perfiles de Velocidad del Sonido	6
1.4. Propagación del Sonido en el Océano	8
1.5. Rutas de Propagación Acústica Básicas	9
1.5.1. Propagación de muy corto alcance	9
1.5.2. Propagación en Aguas Profundas - Largo Alcance	10

1.5.2.1.	Propagación Ártica	10
1.5.2.2.	Propagación en el Conducto Superficial	11
1.5.2.3.	Propagación en el Canal de Sonido Profundo	12
1.5.2.4.	Propagación en la Zona de Convergencia	13
1.5.3.	Propagación en Aguas poco Profundas (Propagación en Guías de Onda)	13
1.6.	Volumen de Atenuación	15
1.7.	Pérdidas de Fondo	15
1.8.	Modelos de Propagación	16
1.8.1.	La Ecuación de Onda y Condiciones de Frontera	17
1.8.2.	Método de Teoría de Rayos	18
1.8.3.	Representación del Número de Onda o Solución Espectral	19
1.8.4.	Modelo de Modo Normal	20
1.8.5.	Modelo de la Ecuación Parabólica	21
1.8.6.	Pérdidas por Propagación y Transmisión	22
2.	CAMPO PRODUCIDO POR UNA FUENTE ESTACIONARIA EN UN MODELO DE OCÉANO ESTRATIFICADO	24
2.1.	Introducción	24
2.2.	Plateamiento del Problema	24
2.3.	Ecuación de Dispersión	27
2.4.	Método de Series de Potencia de Parámetro Espectral (SPPS)	30
2.5.	Construcción de la Función de Green de Problema Estacionario Estratificado	34
2.6.	Pérdidas de Transmisión y la Función de Green	38
2.7.	Resultados del Campo en Modelo Estratificado	39

3. CAMPO PRODUCIDO POR UNA FUENTE ESTACIONARIA EN UN MODELO DE OCÉANO CUASI ESTRATIFICADO	55
3.1. Introducción	55
3.2. Planteamiento del Problema en Tres Dimensiones	56
3.3. Construcción de la Función de Green de Problema Cuasi Estratificado	58
3.4. Variación en una dirección horizontal	63
4. CAMPO PRODUCIDO POR UNA FUENTE ESTACIONARIA EN UN MODELO DE GUÍA DE ONDA PLANA CUASI ESTRATIFICADA	66
4.1. Introducción	66
4.2. Planteamiento del Problema	67
4.3. Construcción de la Función de Green en una Guía de Onda Plana . .	69
5. RESULTADOS NUMÉRICOS	74
5.1. Introducción	74
5.2. Resultados Numéricos para Modelo Cuasi Estratificado con Perfil de Fondo Parabólico Positivo	74
5.3. Resultados Numéricos para Modelo Cuasi Estratificado con Perfil de Fondo Parabólico Negativo	84
CONCLUSIONES	93
Bibliografía	95

Índice de figuras

1.	Extensión de México. Fuente: INEGI, Marco Geoestadístico Nacional 2010.	XIV
1.1.	Perfil de temperatura en el océano.	3
1.2.	Estratificación del océano por su densidad [1].	4
1.3.	Canal Sonoro Profundo [2][3].	6
1.4.	Contorno del perfil de la velocidad del sonido [4][3].	7
1.5.	Diagrama de rayos del canal sonoro [4].	7
1.6.	Tipos de perfiles de velocidades del sonido.	8
1.7.	Tipos de propagación submarina [3][5].	9
1.8.	Propagación de muy corto alcance [3].	10
1.9.	Propagación Ártica [5].	11
1.10.	Propagación en el Conducto Superficial [5].	12
1.11.	Propagación en el Canal de Sonido Profundo [5].	12
1.12.	Propagación en la Zona de Convergencia [5].	13
1.13.	Cono del ángulo crítico [3].	14
1.14.	Propagación en Aguas poco Profundas [5].	15
2.1.	Modelo de océano estratificado.	26
2.2.	Modelo de Océano Estratificado con velocidad del sonido constante.	39
2.3.	Modelo de Océano Estratificado con perfil de velocidad del sonido.	41

2.4. Perfil de Velocidad del Sonido Ideal.	41
2.5. Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 1, 2$	43
2.6. Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 1, 2, 3$	43
2.7. Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 2, 3, 4$	44
2.8. Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 3, 4, 5, 6$	44
2.9. Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 1 - 8$	45
2.10. Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 1, 3, 5$	45
2.11. Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 2, 4, 6, 8$	46
2.12. Pérdidas de Transmisión en una distancia de 20,000m para modos $j = 1, 3, 5, 7$	46
2.13. Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 1, 2$	47
2.14. Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 1, 2, 3$	48
2.15. Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 1, 3, 5$	48
2.16. Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 1 - 8$	49
2.17. Perfil de velocidad del sonido en la región central del Mediterráneo en Febrero.	50
2.18. Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 1, 2$	51
2.19. Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 1, 2, 3$	52
2.20. Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 2, 4, 6$	52

2.21. Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 4, 5, 6$	53
2.22. Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 1 - 6$	53
3.1. Modelo de océano cuasi estratificado.	57
4.1. Modelos de Océano Cuasi Estratificado en dos dimensiones.	68
5.1. Modelo de Océano Cuasi Estratificado con perfil parabólico positivo .	75
5.2. Perfil de velocidad del sonido con cuasi estratificación en la región central del Mediterráneo en Febrero.	76
5.3. Valores Propios Perfil A.	76
5.4. Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 5, 6$	77
5.5. Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 1, 2, 3$	78
5.6. Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 2, 4, 6$	78
5.7. Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 2, 3, 4, 5$	78
5.8. Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 1 - 6$	79
5.9. Perfil de velocidad del sonido con cuasi estratificación en la región central del Mediterráneo en Agosto.	80
5.10. Valores Propios por el Método SPSS en Perfil Parabólico Positivo . .	81
5.11. Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11000m para modos $j = 1, 2, 3$	82
5.12. Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11000m para modos $j = 1, 2$	82
5.13. Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11000m para modos $j = 5, 6$	83

5.14. Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11000m para modos $j = 2, 3, 4, 5$	83
5.15. Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11000m para modos $j = 1 - 6$	83
5.16. Modelo de Océano Cuasi Estratificado con perfil parabólico negativo.	85
5.17. Perfil de velocidad del sonido con cuasi estratificación negativa en la región central del Mediterráneo en Febrero.	85
5.18. Valores Propios en Mar Mediterráneo en Febrero con Perfil Parabólico Negativo.	86
5.19. Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 5, 6$	87
5.20. Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 2, 4, 6$	87
5.21. Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 2, 3, 4, 5$	88
5.22. Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 1 - 6$	88
5.23. Perfil de velocidad del sonido con cuasi estratificación negativa en la región central del Mediterráneo en Agosto.	89
5.24. Valores Propios en Mar Mediterráneo en Agosto con Perfil Parabólico Negativo.	89
5.25. Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 5, 6$	90
5.26. Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 1, 2, 3$	91
5.27. Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 2, 4, 6$	91
5.28. Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 1 - 6$	91

Índice de tablas

1.1. Clasificación de océanos del mundo [6].	2
1.2. Relación temperatura y salinidad.	3
2.1. Valores propios por los métodos de Modos Normales y SPPS.	40
2.2. Velocidades del Sonido Ideal.	41
2.3. Velocidades del Sonido en la región central del Mediterráneo: Febrero.	50
5.1. Velocidades del Sonido en la ubicación central del Mediterráneo: Agosto.	80

Objetivo General

El objetivo de este trabajo es investigar problemas en la propagación de ondas acústicas submarinas para predecir y modelar el comportamiento del campo acústico como pérdidas de transmisión, producido por la propagación de ondas acústicas generadas por una fuente estacionaria ubicada en la profundidad del océano considerado como un medio cuasi estratificado de dos capas.

Se describe la propagación de las ondas acústicas en modelos de océano estratificado y cuasi estratificado, considerados como guías de onda, además de proporcionar modelos de propagación para cada uno de los medios considerados que ayuden a comprender el desempeño de la transmisión de ondas submarinas en el océano, tomando en cuenta o no variaciones en las características físicas del medio.

Objetivos Particulares

- Obtener la ecuación de dispersión en la cual sus raíces se relacionan a los valores propios que actúan como números de onda del problema y con ellos obtener las funciones propias las cuales contribuyen a los modos propagados para el modelo de océano considerado como cuasi estratificado.
- Aplicar el método SPPS para resolver el problema espectral Sturm-Liouville conectado a la propagación de ondas acústicas en el océano cuasi estratificado.
- Modelar el campo acústico producido por una fuente armónica estacionaria puntual representado mediante la obtención de la Función de Green.
- Comparar los resultados de los valores propios obtenidos por el Método de Modos Normales y el Método SPPS cuando se considera un modelo de océano estratificado con velocidad del sonido constante.
- Comparar las pérdidas de transmisión en dB para modelos de océano estratificado y cuasi estratificado con las mismas condiciones del problema.

Justificación

Los océanos cubren más del 70 % de la superficie de la Tierra y es uno de los recursos naturales más abundantes que existen en el planeta, el cual cuenta con propiedades físicas que mediante su interacción producen estratificaciones y perfiles de velocidad del sonido, dependiendo la ubicación geográfica y temporada estacional. La naturaleza de las ondas acústicas les permiten propagarse a cortas y largas distancias en fluidos a diferencia de las ondas electromagnéticas utilizadas en el espacio libre, las cuales sufren una gran atenuación al querer propagarse en líquidos como el océano, por esta razón las ondas de sonido son ampliamente usadas para explorarlos.

La superficie de México se integra por la superficie continental y la superficie marítima, mostrada en la Figura 1, en donde la superficie continental se refiere a la parte del territorio nacional y la parte insular (conjunto de islas) la cual abarca aproximadamente 2 millones de km^2 , la superficie marítima se encuentra constituida por el mar territorial y la zona económica exclusiva que cubre cerca de 3 millones de km^2 ; sin embargo, aunque gran porcentaje de la superficie mundial así como del territorio nacional mexicano es constituido por mares y océanos, ha sido poco el avance que se ha tenido en la investigación de esta área para las comunicaciones submarinas ya que el océano no ha sido explorado en su totalidad.



Figura 1: *Extensión de México. Fuente: INEGI, Marco Geoestadístico Nacional 2010.*

El mayor entendimiento y avance de investigación sobre la propagación del sonido submarino es resultado de investigaciones llevadas a cabo durante la 2ª Guerra Mundial, ya que durante este período un canal profundo fue descubierto en el cual las

ondas de sonido pueden viajar distancias de hasta 3000 km. Este fenómeno dio lugar al canal profundo o al canal de fijación y rango de sonido (SOFAR), el cual fue usado para localizar, por principios acústicos, aviadores caídos en el mar. Una de las más grandes aplicaciones de la acústica submarina es la navegación sonora y el alcance (SONAR). El propósito de la mayoría de los sistemas de sonares es detectar y localizar un objetivo, tal como submarinos, minas, peces, o superficies de barcos. Otros sonares son diseñados para medir algunas cantidades, tales como la profundidad del océano o la velocidad de las corrientes oceánicas.

La velocidad del sonido en el agua, aproximadamente 1500m/s, sufre un incremento conforme la presión estática aumenta, cerca de 1 % por cada 1000 metros de profundidad, asumiendo que la temperatura permanece constante; pero con una variación de la temperatura la velocidad del sonido incrementa cerca del 2 % por °C de aumento de temperatura. La refracción del sonido, debido a estos cambios en la velocidad, junto con la reflexión en la superficie y en el fondo, conduce a guías de onda a varias profundidades del océano.

La acústica submarina, como rama de la Acústica, puede ser definida como la ciencia del sonido en el agua considerando el estudio de la propagación del sonido y es un área joven debido a los avances que se han desarrollado y los cuales tuvieron su máximo desarrollo durante la primera y segunda guerra mundial, debido a las batallas submarinas que se presentaban. Con esto, canales de propagación fueron descubiertos, con los cuales se ha podido investigar el comportamiento de los mares y océanos, así como proponer modelos de propagación para el desarrollo de tecnología submarina para comprender y conocer el fondo del océano. Sin embargo, se buscan modelos que permitan realizar simulaciones numéricas que permitan reducir los tiempo de cálculo y de simulación.

Debido a esto, se presenta la motivación de investigar nuevos modelos matemáticos con menor número de variables que nos permita analizar y obtener resultados con mayor precisión y rapidez de acuerdo al objeto de estudio, además de permitir la innovación y desarrollo de nuevas tecnologías. Con ello, proponer y demostrar que el método SPSS puede aplicarse para la solución de ecuaciones diferenciales, como las relacionadas a la propagación de ondas submarinas y de cualquier naturaleza, así como en diferentes problemas de física matemática, que puedan ser conectadas al problema espectral Sturm-Liouville.

Este método ha sido aplicado exitosamente a problemas de propagación submarina en modelos de océano estratificado en donde el método numérico empleado ha sido efectivo y rápido para la solución de los problemas de propagación.

Introducción

La luz, el radar, las microondas y otras ondas electromagnéticas se atenúan muy rápidamente y no se propagan en distancias significativas a través del agua salada. Como el sonido sufre mucha menos atenuación que las ondas electromagnéticas, llegan a ser una prominente herramienta para sensar, identificar y comunicarse bajo la superficie del océano. Y, sin embargo, durante décadas, la información oceanográfica inadecuada sobre la extraordinaria variabilidad espacial y temporal de este medio ha obstaculizado a los científicos submarinos en su deseo de predecir la propagación del sonido. Era necesario aprender más sobre esas características oceánicas que los instrumentos oceanográficos tradicionales miden de manera bastante cruda, con gran dificultad y a un gran costo. Los oceanógrafos acústicos invierten el problema; utilizan la compleja naturaleza de la propagación del sonido para aprender sobre el océano. Los muchos éxitos de esta joven ciencia van desde la identificación y el recuento de no homogeneidades físicas y biológicas - como micro burbujas, zooplancton frágil, peces y mamíferos - hasta la medición remota de precipitaciones distantes y rugosidad de la superficie del mar, montañas de aguas profundas, rocas y sedimentos suspendidos, así como la forma y la fuerza de las olas internas, los sistemas frontales oceánicos y los inmensos remolinos oceánicos batidos, de cientos de kilómetros de extensión [7].

El desarrollo de la teoría acústica ha seguido un camino histórico diferente a la teoría óptica y la electromagnética. Si bien ha habido una larga batalla en la óptica entre la teoría de los rayos y las ondas, la acústica originalmente desarrollada con conceptos de ondas y vibraciones se remonta a la antigüedad griega. Por ejemplo, el sonido musical es el resultado del movimiento de aire generado por un instrumento musical vibrante. Este sonido se propaga de manera análoga a las ondas de la superficie del agua que propagan las perturbaciones (señales), pero no propaga la materia a largas distancias. La flexión del sonido alrededor de las esquinas se comprende fácilmente en el contexto de la difracción en la analogía de la onda de la superficie del agua. En acústica, la imagen del rayo evolucionó como una aproximación matemática a la teoría de la onda. En la acústica submarina, en la que el medio no es homogéneo y está limitado por interfaces complicadas, la teoría de los rayos ha demostrado históricamente ser una herramienta indispensable para comprender y estudiar la propagación del sonido. Sin embargo, con el advenimiento de las computadoras y los desarrollos recientes de la física numérica, la propagación del sonido en el océano ahora se puede estudiar y describir cuantitativamente con mayor detalle con la teoría de la onda más exacta.

Esta tendencia es particularmente importante para el estudio de la extracción de señales de campos de interferencia complejos en los que es necesaria una comprensión cuantitativa de la amplitud, la fase y los momentos de orden superior de todos los campos relevantes.

Es bien establecido que las ondas de sonido, comparadas con las ondas electromagnéticas, se propagan a distancias largas en el océano. Por lo tanto, en el océano como opuesto al aire o al vacío, uno usa la navegación y el rango de sonido (SONAR) en lugar del radar, la comunicación acústica en lugar de la radio, y la imagen acústica y la tomografía en lugar de la imagen óptica de microondas o tomografía de rayos X.

Existen diferentes métodos que abordan el estudio de la propagación de las ondas acústicas en el océano, tales métodos están limitados por las características físicas del mismo. La propagación del sonido en el océano matemáticamente es descrita por la ecuación de onda, la cual con sus parámetros y condiciones de frontera son capaces de describir el ambiente oceánico. La principal característica física del océano es su estratificación que implica que la densidad, la velocidad del sonido y otros parámetros son función de la profundidad. Esta estratificación tiene efectos considerables en la propagación del sonido en el océano.

En la acústica submarina existe un variedad de diferentes técnicas para resolver la ecuación de onda a través de métodos numéricos para estimar la propagación del sonido en el mar. Algunos de estas técnicas o modelos matemáticos son: la Ecuación Parabólica (PE), la Teoría de Modos Normales, el Programa de Computo Rápido (FFP) y la Teoría de Rayos.

Existe una serie de investigaciones realizadas para conocer y comprender más sobre este recurso natural y sus profundidades, con esto el deseo de investigar más a fondo el comportamiento de la velocidad de propagación del sonido y su comportamiento al interactuar con las características físicas del medio, ya que es una herramienta indispensable para conocer más sobre los océanos. Investigaciones sobre el campo acústico originado por la propagación de ondas acústicas en el océano se han realizado con ayuda de modelos de propagación y métodos matemáticos, sin embargo es de interés el mostrar el rendimiento del Método de Series de Potencias de Parámetro Espectral (SPPS, por sus siglas en inglés) aplicado a la acústica submarina y a la solución de la ecuación de propagación. El método SPPS es utilizado para resolver el problema espectral Sturm-Liouville que es directamente conectado a ecuaciones diferenciales que describen la propagación de ondas electromagnéticas como acústicas; en el área de la acústica submarina se han desarrollado investigaciones para estudiar el campo acústico producido por fuentes estacionarias y en movimiento en modelos de océano estratificado multicapa.

En el presente trabajo se muestra un análisis numérico de la propagación de ondas acústicas originadas por una fuente fija localizada en un modelo cuasi estratificado del océano real. La cuasi estratificación del océano significa que la densidad ρ_0 y la

velocidad de propagación del sonido c_0 en la capa de agua dependen de un parámetro pequeño $\varepsilon > 0$, de manera que

$$\rho_0 = \rho_0(\varepsilon \mathbf{x}, z), \quad c_0 = c_0(\varepsilon \mathbf{x}, z)$$

del mismo modo, la interfaz Ω entre la capa de agua y el fondo marino se encuentra variando lentamente en la dirección horizontal

$$\Omega = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \phi(\varepsilon \mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}$$

La investigación de este tipo de modelos cuasi estratificados ha sido publicada en una variedad de artículos (consultar [8][9][10]). En ellos se muestra la combinación de la descomposición de modo con respecto a las funciones propias de operador transversal Sturm-Liouville dependiente del parámetro horizontal y el método de rayos. La solución de la ecuación de propagación acústica es buscada de la forma

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}, z) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}, z) e^{\frac{i}{\varepsilon} S_j(\mathbf{x})} + O(\varepsilon^2) \quad (1)$$

donde $\varphi_j(\mathbf{x}, z)$ son las funciones propias del operador transversal Sturm-Liouville $\mathcal{L}(\mathbf{x})$ dependiente del punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ como un parámetro, $S_j(\mathbf{x})$ es la fase la cual es la solución de la ecuación eiconal bidimensional

$$(S_j(\mathbf{x}))^2 = \mu_j^2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (2)$$

donde $\mu_j^2(\mathbf{x})$ es un valor propio del operador $\mathcal{L}(\mathbf{x})$. El coeficiente $\alpha_j(\mathbf{x})$ satisface la ecuación de transporte

$$2\nabla S_j(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \alpha_j(\mathbf{x}) + \Delta S_j(\mathbf{x}) \alpha_j(\mathbf{x}) = 0$$

Para la solución de la ecuación eiconal y de transporte, el método de rayos bidimensional es aplicado (ver [4][11]).

Por lo tanto, la simulación numérica del problema de propagación de ondas en el océano cuasi estratificado necesita soluciones rápidas y precisas del problema del operador transversal Sturm-Liouville dependiente del parámetro que varía a lo largo de la distancia. Para este fin se aplicará el método de series de potencia de parámetro espectral (Método SPPS), el cual presenta soluciones de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$\left(\rho(z) \frac{d}{dz} \rho^{-1}(z) \frac{d}{dz} + q(z) \right) u(z, \lambda) = \lambda u(z, \lambda), \quad z \in [0, H] \quad (3)$$

en donde la función solución está dada en forma de una serie

$$u(z, \lambda) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(z) \lambda^j \quad (4)$$

donde $\alpha_j(z)$ son definidas por fórmulas de integración recurrentes (ver [12][13][14][15][16]). Para problemas de acústica submarina, el método SPSS ha sido aplicado en una gran variedad de publicaciones (consultar [17][18][19]).

Capítulo 1

OCEANOGRAFÍA FÍSICA Y FUNDAMENTOS DE ACÚSTICA SUBMARINA

1.1. Introducción

La Oceanografía es la ciencia encargada del estudio de los parámetros, propiedades y procesos físicos del agua de mar mediante el uso activo o pasivo del sonido, así como las especies y comportamientos biológicos en el mar, mientras que la Acústica Submarina es aquella que se encarga del estudio de la propagación del sonido en el océano y la interacción de ondas mecánicas (constituidas por ondas de presión) con el agua y sus fronteras, así como también el enmascaramiento del sonido por los fenómenos acústicos interferentes; esto a partir de las combinación de sus parámetros como la temperatura, densidad, salinidad y profundidad, que forman el medio de propagación [7][3][5].

El primer intento teórico para describir la propagación del sonido en un fluido le es acreditado a Newton, sin embargo, Leonardo Da Vinci notó que el sonido viaja a grandes distancias en el mar y se refirió a los fenómenos de interferencia por lo que sugería detener las naves antes de desplegar un tubo de escucha a través de la interfaz aire-agua para evitar interferencias ocasionadas por ruido propio. Posterior a ello, el primer intento para medir la velocidad del sonido en líquidos fue realizado por los físicos suizos Colladon y Sturm, quienes en 1826 realizaron estudios en el Lago de Ginebra utilizando los tubos de escucha mejorados, y fue encontrado un valor de 1435m/s , pero más tarde notaron que la velocidad en el agua salina es más grande que ese valor obtenido, y que en general la temperatura del agua es un parámetro aún más importante. Hoy en día todavía se cree que el sonido es la única forma práctica de propagar señales a Grandes distancias en el mar. Esta ciencia en parte fue motivada por las dos guerras mundiales, la guerra fría y las amenazas planteadas

por submarinos y minas submarinas. Durante las dos guerras mundiales, se llevaron a cabo estudios acústicos tanto en aguas someras como en aguas profundas, pero durante la Guerra Fría, el énfasis cambió bruscamente a aguas profundas. Dos campos comerciales no militares que han sido fuerzas impulsoras importantes en la acústica submarina son la prospección geofísica y la pesca. La extracción de petróleo del fondo marino ahora suministra el 25 % de nuestro suministro total.

1.2. Ambiente Acústico y Estratificación del Océano

El agua de océanos y mares cubre aproximadamente el 70 % de la superficie de la tierra [6][3][2]. En 1953, el Buro Internacional de Hidrografía por acuerdo internacional dividió el océano en tres partes: Océano Pacífico, Océano Atlántico y Océano Índico [6]. Del mismo modo, existe una clasificación en mares mediterráneos y mares marginales. La Tabla 1.1 muestra la superficie en km^2 de los tres mares ya mencionados:

Tabla 1.1: *Clasificación de océanos del mundo [6].*

Océano	Extensión Territorial
Pacífico	$181.34 \times 10^6 \text{km}^2$
Atlántico	$106.57 \times 10^6 \text{km}^2$
Índico	$74.12 \times 10^6 \text{km}^2$

Las principales características del agua de mar son la salinidad, la temperatura y la densidad, la densidad depende directamente de los valores de la temperatura y de la salinidad, cuando estos parámetros cambian, la densidad puede incrementar o decrementar [2].

La temperatura del océano es el parámetro que primordialmente depende de las radiaciones energéticas del sol que son absorbidas por los primeros metros del océano; este parámetro varía dependiendo la altitud y dependiendo a esta existe una termoclina, lo que significa que hay un cambio rápido de temperatura al entrar en la superficie más profunda del agua, ver la Figura 1.1. Sin embargo, la temperatura principal del agua oceánica es de $T = 3.5^\circ\text{C}$ [6].

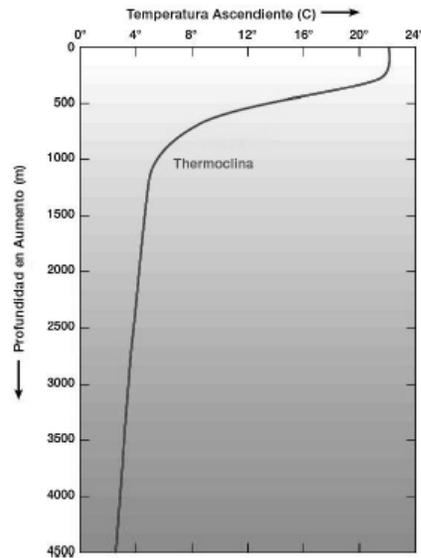


Figura 1.1: Perfil de temperatura en el océano.

La salinidad, es el parámetro que se relaciona a la cantidad de sales disueltas en el agua de mar, definida en gramos de sal por kilogramo de agua de mar o partes por mil. Esta varía uniformemente a lo largo de los meridianos a lo largo de los tres océanos definidos, pero el rango de salinidad generalmente se encuentra desde 34.6 a 34.8 partes por mil (ppt) [6]. La interacción entre la salinidad y la temperatura genera volúmenes de agua de mar conocidos como masa de agua los cuales no son homogéneos, estos se ocasionan a diferentes profundidades y en diferentes puntos geográficos. En la Tabla 1.2, se muestra una relación de los parámetros de temperatura y salinidad.

Tabla 1.2: Relación temperatura y salinidad.

Masas de Agua	Salinidad (ppt)	Temperatura (°C)
Agua antártica	33.80 - 34.76	2.0 - 6.1
Agua subantártica	33.70 - 34.80	5.0 - 10.0
Agua atlántica sur	34.57 - 35.70	7.5 - 18.0
Agua atlántica norte	35.03 - 36.20	7.5 - 18.0
Agua mediterránea	35.00 - 36.50	4.0 - 12.0
Agua índica	34.50 - 35.71	7.7 - 16.0
Agua pacífica sur	34.47 - 35.64	6.2 - 17.0
Agua pacífica norte	34.02 - 34.74	9.0 - 17.05

Entre dos masas de agua adyacentes se encuentran los llamados estratos de transición, los cuales presentan características combinadas de las masas que la conforman. Esta interacción de las masas de agua permite la mezcla e intercambio de temperatura

y salinidad, en donde como resultado afecta directamente la densidad. La densidad mide la cantidad de materia de un volumen dado, en este caso volumen del océano, y este es el responsable de las corrientes oceánicas dependiendo de la temperatura, salinidad y presión. La densidad del agua en la superficie marina es de 1027Kg/cm^3 [2][20]. Esto origina la existencia de cinco principales masas de agua: agua superficial, superior, intermedia, profunda y agua de fondo (ver Figura 1.2).

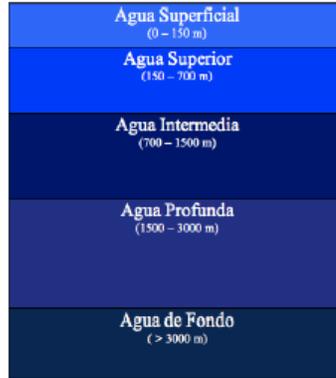


Figura 1.2: *Estratificación del océano por su densidad [1].*

Las propiedades acústicas del océano, como las rutas por las que viaja el sonido de una fuente localizada en el agua, dependen principalmente de la estructura de la velocidad del sonido del océano, que a su vez depende del entorno oceanográfico. La combinación de la columna de agua y las propiedades del fondo conduce a un conjunto de rutas genéricas de propagación del sonido que describen la mayoría de los fenómenos de propagación en el océano, por lo que conocer la velocidad del sonido en el agua es fundamental para muchas de las aplicaciones de la oceanografía acústica.

El conocimiento detallado de la velocidad del sonido en el mar es esencial para comprender la propagación del sonido bajo el agua. La velocidad del sonido en la columna de agua oceánica es una función de la temperatura, salinidad y la presión ambiental, la cual no depende de la dirección del rayo. Dado que la presión del ambiente es una función de la profundidad, es habitual expresar la velocidad del sonido (c) en m/s como una función empírica de la temperatura (T) en grados centígrados, la salinidad (S) en partes por mil y la profundidad (z) en metros. Aunque los mejores valores se obtienen utilizando la formulación empírica de Del Grosso (1974), una fórmula simplificada para la velocidad del sonido en m/s, con precisión de 0.1m/s, pero solamente válida a 1000m de profundidad y para $0 < T[^\circ\text{C}] < 32$ y $22 < \text{Salinidad}[ppt] < 45$, fue dada por Medwin en 1975 [7][3][21]:

$$c = 1449.2 + 4.6T - 0.055T^2 + 0.00029T^3 + (1.34 - 0.01T)(S - 35) + 0.016z \quad (1.1)$$

Mackenzie, en 1981, dio una fórmula más grande, la cual proporciona un error estándar de 0.07m/s y no está restringido a profundidades menores a 1000m [7]:

$$\begin{aligned}
 c = & 1448.96 + 4.591T - 5.304 \times 10^{-2}T^2 + 2.377 \times 10^{-4}T^3 + \\
 & 1.340 (S - 35) + 1.630 \times 10^{-2}z + 10^{-7}z^2 - \\
 & 1.025 \times 10^{-2}T (S - 35) - 7.139 \times 10^{-13}Tz
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Existen más, aunque más complicadas, expresiones empíricas para el cálculo de la velocidad del sonido. Una observación que tiene importantes implicaciones acústicas es que la densidad del agua, la temperatura, la salinidad y la velocidad del sonido se estratifican horizontalmente en la mayoría de los océanos del mundo [7].

La presión en estado estacionario incrementa al aumentar la profundidad z y es igual al peso total por unidad de área de agua más la atmósfera soportada por encima de esa profundidad. Esta cantidad se llama presión estática (o presión hidrostática) y se puede expresar cuantitativamente por:

$$P_{stat}(z) = P_{atm} + P_{gauge}(z) \tag{1.3}$$

donde P_{atm} es la presión atmosférica (aproximadamente 101 kPa) y $P_{gauge}(z)$ es la presión adicional debido al peso del agua encima de la profundidad z (la presión manométrica) dada por:

$$P_{gauge}(z) = \int_0^z \rho_{water}(\zeta) g(\zeta) d\zeta$$

donde ζ es una variable auxiliar en la dirección vertical z . Las perturbaciones submarinas provocan desviaciones δP de este valor, para un vector de posición arbitrario \mathbf{x} :

$$P_{tot}(\mathbf{x}, t) = P_{stat}(z) + \delta P(\mathbf{x}, t) \tag{1.4}$$

Una vez creado, siempre que se cumplan ciertas condiciones básicas, una perturbación de la presión se propaga con la velocidad del sonido y se conoce como presión acústica δP ([20]) y supuestamente más pequeña en comparación con la presión estática. Tal perturbación acústica se conoce como sonido subacuático, mientras que el estudio de este sonido se llama acústica submarina.

1.3. Perfiles de Velocidad del Sonido

En 1924, Heck and Service publicó tablas sobre la dependencia de la velocidad del sonido con respecto a la temperatura, la salinidad y la presión. Las condiciones de verano, con un fuerte calentamiento solar y una atmósfera cálida, dan lugar a velocidades de sonido que son más altas cerca de la superficie y disminuyen con la profundidad, mientras que las condiciones invernales, con el enfriamiento de la superficie, invierten el gradiente de temperatura. Por lo tanto, las ondas de sonido se doblarán hacia abajo en condiciones de verano y hacia arriba en invierno [3].

En 1943 con Ewing y Worzel descubriendo el canal de sonido profundo (DSC) causado por un mínimo en la velocidad del sonido dependiente de la temperatura. Este mínimo se ha mapeado (ver línea de puntos en la Figura 1.3), y generalmente varía desde la superficie fría en los polos hasta una profundidad de aproximadamente 1300m en el ecuador. Dado que el sonido se refracta hacia velocidades de sonido más bajas, el DSC produce una guía de onda generada por refracción (líneas grises) contenida dentro del océano, de modo que las rutas de sonido oscilan sobre la velocidad mínima del sonido y pueden propagarse miles de kilómetros. Al explotar el DSC, la Marina de los Estados Unidos creó la red del sistema de vigilancia oceánica de sonido multimillonario (SOSUS, por sus siglas en inglés) para monitorear los submarinos nucleares soviéticos de misiles balísticos.

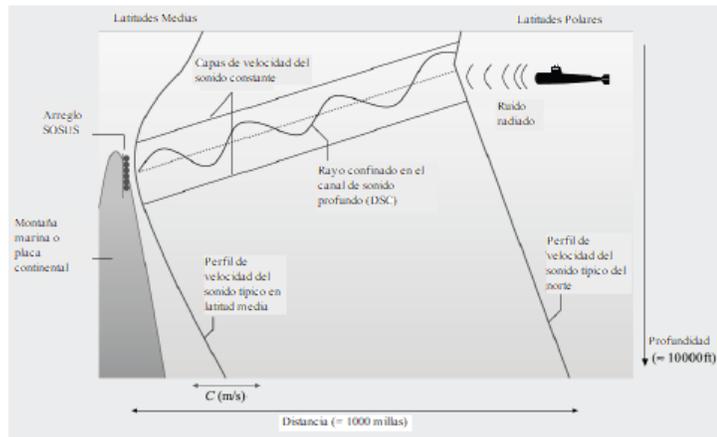


Figura 1.3: Canal Sonoro Profundo [2][3].

En la Figura 1.4, se muestra una visualización de contorno de la velocidad del sonido para el Océano Atlántico Norte. Como se muestra, la profundidad del mínimo varía desde cerca de la superficie para las regiones polares, hasta aproximadamente 1800m en latitudes medias, téngase en cuenta que el canal de sonido profundo (DSC) se encuentra indicado por una línea discontinua gruesa. Tenga en cuenta que el canal de sonido profundo se vuelve menos profundo hacia los polos. Aparte de los efectos de la velocidad del sonido, el volumen del océano es absorbente y provoca una atenuación que aumenta con la frecuencia acústica. La significancia de esta estratificación es

que, si la temperatura decremanta con el incremento de la profundidad, existencia de una termoclina, la velocidad del sonido también tendrá a decremantar. Los rayos de sonido en tal gradiente de velocidad se doblarán (refractarán) hacia abajo, al igual que la luz que pasa a través de un prisma. Por otro lado, donde la temperatura es constante, los rayos de sonido se doblarán hacia arriba, porque la velocidad aumenta a medida que aumenta la profundidad.

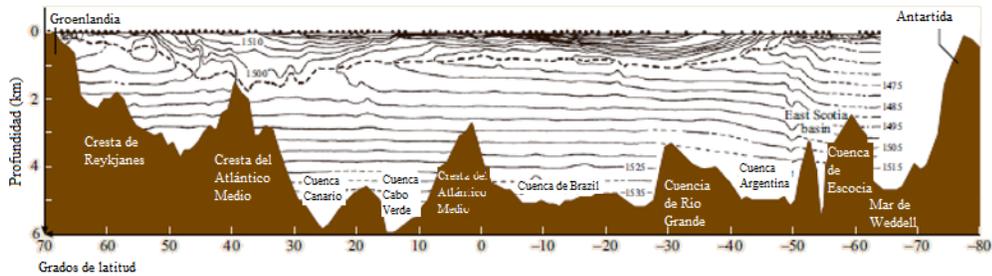


Figura 1.4: Contorno del perfil de la velocidad del sonido [4][3].

La combinación de una termoclina que cubre el agua isotérmica y el efecto de la presión hace que los rayos de sonido se doblen hacia abajo, luego hacia arriba, luego hacia abajo y así sucesivamente, a medida que pasan a través del eje de velocidad mínima, como se muestra en la Figura 1.5. De igual manera se muestra uno de los primeros cálculos del efecto de canalización de sonido que se utilizó para explicar los extraordinarios rangos de propagación observados. El canal fue llamado el canal "sofar" (corrección de sonido y rango) debido a su capacidad originalmente propuesta para localizar una explosión en el mar por triangulación desde la orilla hasta estaciones de escucha [7].

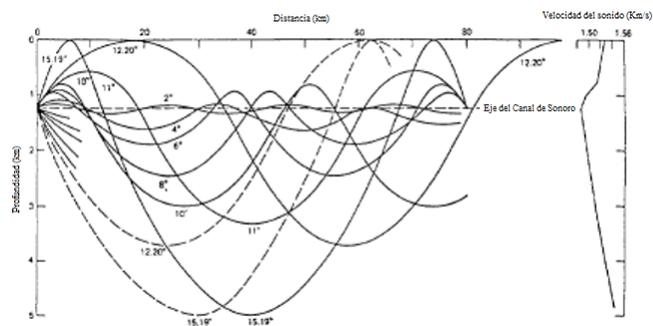


Figura 1.5: Diagrama de rayos del canal sonoro [4].

La Figura 1.6 muestra un conjunto típico de perfiles de velocidad del sonido indicando la más grande variabilidad cerca de la superficie. En una estación más cálida (o en la parte más cálida del día, a veces referida como el efecto tarde), la temperatura incrementa cerca de la superficie y por lo tanto la velocidad del sonido incrementa hacia la superficie del mar. En las regiones no polares donde la mezcla cerca de

la superficie debido al viento y a la actividad de las olas es importante, una capa mezclada de temperatura casi constante se crea a menudo. En esta capa isotérmica la velocidad del sonido incrementa con la profundidad por el incremento de la presión ambiental.

Este es conocido como la Región de Ducto Superficial. Por debajo de la capa mezclada está la termoclina, en donde la temperatura y por lo tanto la velocidad del sonido decrementa con la profundidad. Debajo de la termoclina, la temperatura es contante y la velocidad del sonido incrementa por el incremento de la presión ambiental. Sin embargo, entre la región isotérmica profunda y la capa mezclada, existe una profundidad de velocidad del sonido mínima referida como el eje del canal del sonido profundo. Sin embargo, en las regiones polares, el agua es más fría cerca de la superficie así que la velocidad del sonido mínima está en la superficie.

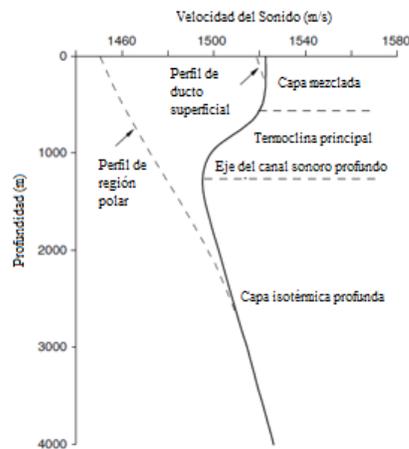


Figura 1.6: Tipos de perfiles de velocidades del sonido.

La estructura de la velocidad del sonido regula la interacción del sonido con los límites. El océano está limitado por el aire, que es un reflector casi perfecto; sin embargo, el fondo del océano es una estructura áspera y complicada, causando que el sonido se disperse en direcciones alejadas del ángulo de reflexión especular. Las dos interfaces básicas, aire-mar y mar-fondo, pueden considerarse como los límites de una guía de onda acústica cuyo índice interno de refracción está determinado por los parámetros oceanográficos fundamentales representados en la ecuación de la velocidad del sonido o de la Ley de Snell.

1.4. Propagación del Sonido en el Océano

La Figura 1.7, es un esquemático de los tipos básicos de propagación en el océano, resultado de los perfiles de velocidad del sonido (líneas punteadas). Estas rutas del sonido pueden ser entendidas por la ley de Snell:

$$\frac{\cos\theta_1}{c_1} = \frac{\cos\theta_2}{c_2} = \frac{\cos(\theta)}{c(z)} = a = \text{constante} \quad (1.5)$$

la cual relaciona el ángulo del rayo $\theta(z)$ el con respecto a la horizontal, a la velocidad del sonido local $c(z)$ en la profundidad z . La ecuación requiere que, a mayor velocidad del sonido, menor sea el ángulo con la horizontal, lo que significa que el sonido se desvía de las regiones de alta velocidad del sonido; o, dicho de otra manera, el sonido se inclina hacia regiones de baja velocidad de sonido [5].

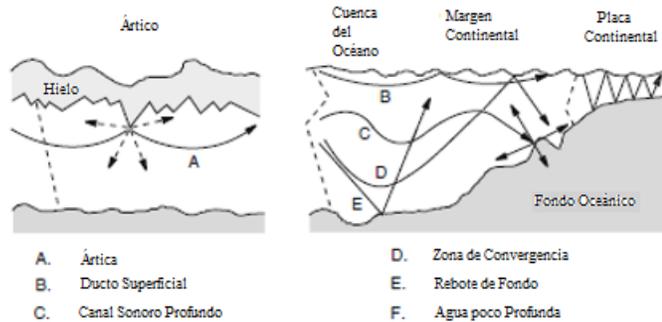


Figura 1.7: Tipos de propagación submarina [3][5].

El modelado de la propagación del sonido en el océano es complicado porque el entorno varía lateralmente, depende del alcance, y todos los efectos ambientales sobre la propagación del sonido dependen de la frecuencia acústica.

1.5. Rutas de Propagación Acústica Básicas

La propagación del sonido en el océano se puede dividir cualitativamente en tres clases: propagación a muy poca distancia, en aguas profundas y en aguas poco profundas [3].

1.5.1. Propagación de muy corto alcance

La amplitud de la presión de una fuente puntual en el espacio libre disminuye con el rango r como r^{-1} ; esta pérdida geométrica es llamada esparcimiento esférico. La mayoría de las fuentes de interés en el océano profundo están más cercanas a la superficie que al fondo. Por lo tanto, las dos principales rutas de corto rango son las rutas directas y las rutas reflejas en la superficie. Cuando esas dos rutas se interfieren, producen una distribución espacial del sonido a menudo referidas como patrón de espejo de Lloyd, como se muestra en la Figura 1.8. Además, con referencia a la

misma figura, notar que las pérdidas de transmisión son una medición en decibeles del decaimiento con la distancia de la intensidad acústica de una fuente con respecto a su valor en unidad de distancia, siendo esta última proporcional al cuadrado de la amplitud acústica [3].

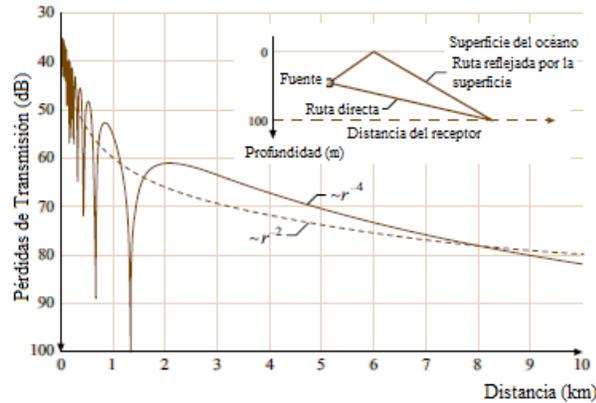


Figura 1.8: Propagación de muy corto alcance [3].

1.5.2. Propagación en Aguas Profundas - Largo Alcance

La característica principal de la propagación en aguas profundas es la existencia de un perfil de velocidad del sonido que refracta hacia arriba y que permite la propagación a grandes distancias sin una interacción significativa del fondo. Por lo tanto, las rutas de los rayos importantes son refractadas o reflejadas en la superficie. Los ambientes de aguas profundas típicos se encuentran en todos los océanos a profundidades que exceden los 2000m [5].

1.5.2.1. Propagación Ártica

La propagación en el Océano Ártico (ver Figura 1.9), se caracteriza por un perfil de refracción ascendente en toda la profundidad del agua que provoca que la energía sufra repetidos reflejos en la parte inferior del hielo. El perfil de la velocidad del sonido a menudo se puede aproximar mediante dos segmentos lineales con un gradiente pronunciado en los 200m superiores, creando un conducto de superficie fuerte seguido de un gradiente de presión hidrostática estándar que origina un cambio de velocidad del sonido con la profundidad (0.016m/s por cada metro de profundidad). La pendiente pronunciada en la capa superior se debe tanto al aumento de la temperatura como a la salinidad con la profundidad. La baja salinidad cerca de la capa de hielo se debe a las contribuciones de agua dulce de la fusión.

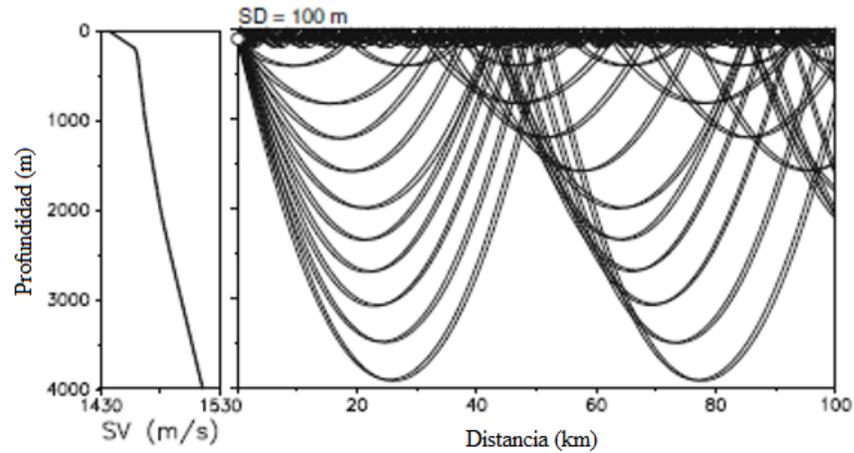


Figura 1.9: Propagación Ártica [5].

1.5.2.2. Propagación en el Conducto Superficial

En las regiones templadas y ventosas de los océanos del mundo, el perfil de temperatura muestra regularmente una capa isotérmica justo debajo de la superficie del mar. Esta capa de agua isotérmica se mantiene mediante la mezcla de viento turbulento, que se extiende más profundamente después de una fuerte tormenta y se vuelve más superficial nuevamente durante un período de vientos leves. Más al norte, se observan consistentemente profundidades de capa mixta de 200m a 300m en el período invernal entre diciembre y abril. Acústicamente, la capa mixta isotérmica actúa como una guía de onda debido al ligero aumento en la velocidad del sonido con la profundidad causado por la presión hidrostática, en donde una porción de la energía acústica emitida por una fuente ubicada en la capa mezclada quedará atrapada en el conducto de superficie, ver la Figura 1.10.

El resultado es que se forma una zona de sombra, limitada arriba por el límite inferior del conducto de superficie ($z = 150\text{m}$) y a la izquierda por los rayos que salen de la fuente en un ángulo ligeramente más pronunciado que el ángulo crítico (determinados a partir de Ley de Snell) para ser atrapados dentro del ducto.

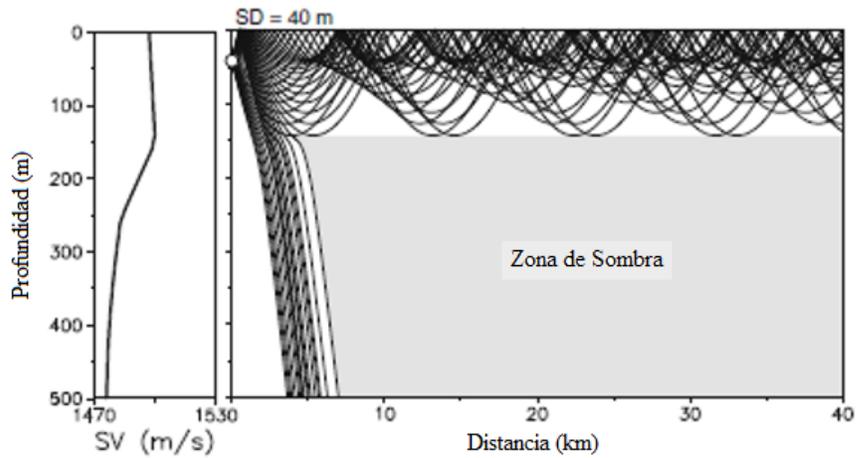


Figura 1.10: Propagación en el Conducto Superficial [5].

1.5.2.3. Propagación en el Canal de Sonido Profundo

La propagación en el canal de sonido profundo permite la transmisión de sonido completamente a través de rutas refractadas (ver Figura 1.11), lo que significa que una parte de la potencia acústica radiada por una fuente en el canal se propaga a distancias largas sin encontrar pérdidas de reflexión en la superficie del mar o en el fondo marino. Debido a la baja pérdida de transmisión, las señales acústicas de pequeñas cargas explosivas en el canal de sonido profundo se han registrado a distancias de miles de kilómetros, en algunos casos incluso en la mitad del mundo.

El canal de sonido profundo no es tan efectivo como una guía de onda en todas las latitudes. Como se mencionó en la sección 1.3, el eje del canal de sonido (velocidad de sonido mínima) varía con la profundidad desde alrededor de 1000m en latitudes medias hasta la superficie del océano en regiones polares.

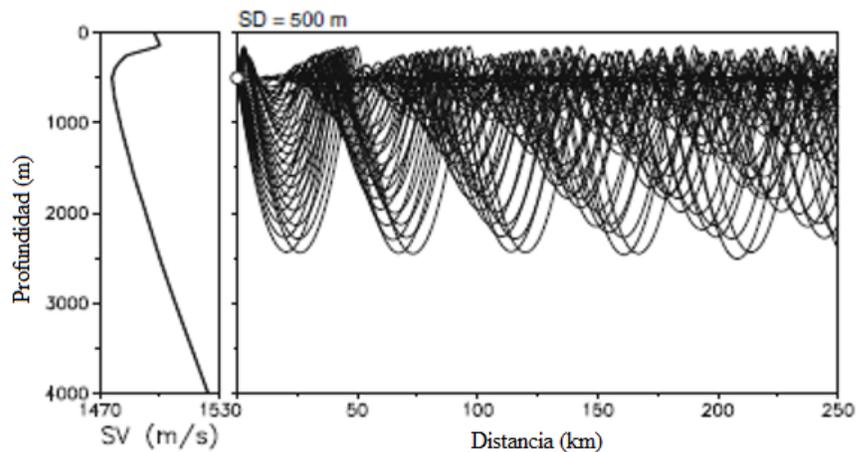


Figura 1.11: Propagación en el Canal de Sonido Profundo [5].

1.5.2.4. Propagación en la Zona de Convergencia

Este patrón se conoce como propagación de la zona de convergencia (CZ) porque el sonido emitido desde una fuente cercana a la superficie forma un rayo dirigido hacia abajo que, después de seguir un camino refractado profundo en el océano, reaparece cerca de la superficie para crear una zona de alta Intensidad del sonido (convergencia o enfoque) a una distancia de decenas de kilómetros de la fuente, como se muestra en la Figura 1.12. El fenómeno es repetitivo en el rango, con la distancia entre las regiones de alta intensidad llamada el rango de la zona de convergencia. La importancia de la propagación de la zona de convergencia (CZ) se debe al hecho de que permite la transmisión a largo plazo de señales acústicas de alta intensidad y baja distorsión.

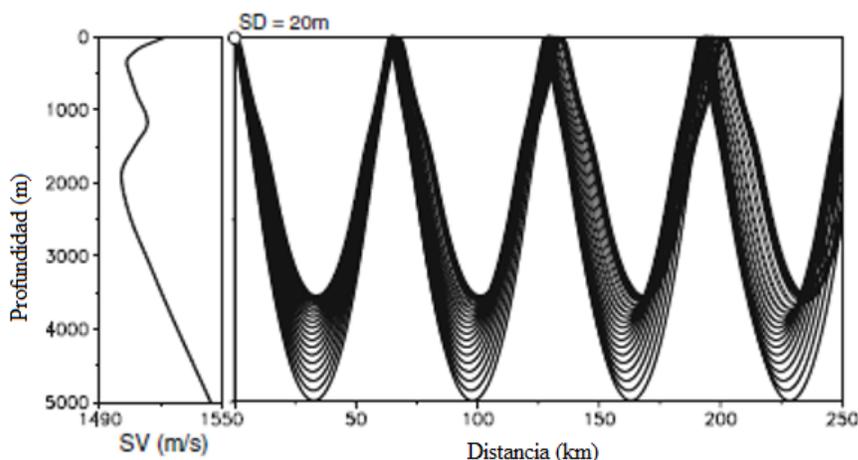


Figura 1.12: Propagación en la Zona de Convergencia [5].

1.5.3. Propagación en Aguas poco Profundas (Propagación en Guías de Onda)

En general, se puede pensar en el océano como una guía de onda acústica [3]; esta física de la guía de ondas es particularmente evidente en aguas poco profundas (en la costa hacia el talud continental, típicamente a profundidades de unos pocos cientos de metros). La ley de Snell aplicada al perfil de verano produce rayos que se inclinan más hacia el fondo que los perfiles de invierno en los que los rayos tienden a ser rectos. Esto implica dos efectos con respecto al fondo oceánico: (1) para un rango dado, hay más rebotes en el fondo oceánico en verano que en invierno, y (2) los ángulos de los rayos que interceptan el fondo son más pronunciados en el verano que en el invierno.

El canal de sonido profundo y la propagación en aguas poco profundas actúan y son definidos como guías de onda. Para simplificar, se considera una guía de ondas de

isovelocidad limitada por la interfaz aire-agua y por una interfaz de dos fluidos que se define clásicamente como una guía de ondas de Pekeris [3][22][23]. Como se indica en la Figura 1.13, las trayectorias de rayos dentro de un cono de $2\theta_c$ se propagarán sin atenuar en la guía de onda. Debido a que los rayos ascendentes y descendentes tienen amplitudes iguales, existirán ángulos preferidos para los cuales se produce la interferencia constructiva. Estos ángulos están asociados con los modos normales de la guía de ondas [5]. Hay un conjunto discreto de ángulos hasta el crítico para el cual se produce una interferencia constructiva y para la cual el sonido se propaga, este conjunto discreto son modos normales.

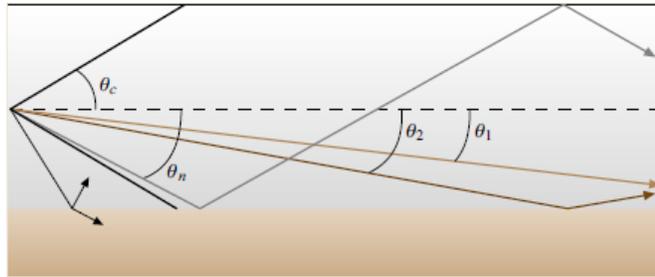


Figura 1.13: Cono del ángulo crítico [3].

La característica principal de la propagación en aguas poco profundas es que el perfil de la velocidad del sonido es refractante hacia abajo o casi constante sobre la profundidad, lo que significa que la propagación de largo alcance se realiza exclusivamente a través de trayectos que interactúan en el fondo. Por lo tanto, los trayectos de rayos importantes se refractan en el fondo o se reflejan en la superficie (ver Figura 1.14). Los ambientes típicos de aguas poco profundas se encuentran en la plataforma continental para profundidades de agua de hasta 200m.

La acústica de las aguas poco profundas ha sido investigada ampliamente, sin embargo, la acumulación de teorías y mediciones no ha proporcionado la comprensión cuantitativa necesaria para una predicción precisa de la propagación a larga distancia en aguas poco profundas. En aguas poco profundas, las propiedades de la superficie, el volumen y el fondo son importantes, varían espacialmente (los parámetros oceanográficos también varían temporalmente) y los parámetros generalmente no se conocen con suficiente detalle y con la suficiente precisión como para permitir predicciones a una larga distancia en una manera satisfactoria.

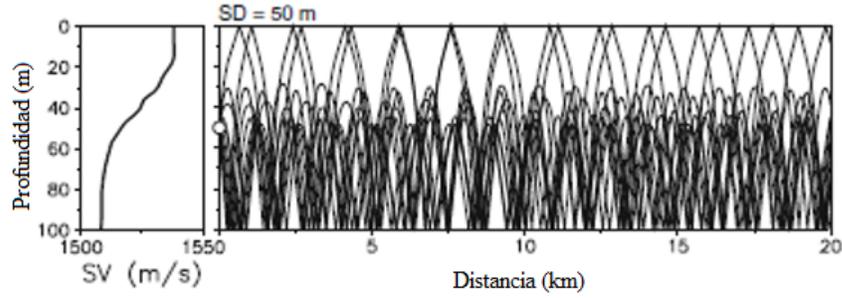


Figura 1.14: *Propagación en Aguas poco Profundas [5].*

1.6. Volumen de Atenuación

La atenuación es caracterizada por una exponencial decreciente del campo de sonido. Si A_0 es la amplitud RMS del campo de sonido en unidad de distancia desde la fuente, entonces la atenuación del campo de sonido causa el decaimiento de la amplitud con la distancia a lo largo de la ruta r [3]:

$$A = A_0 \exp(-\alpha r) \quad (1.6)$$

donde α es el coeficiente de atenuación y sus unidades son Nepers/distancia; α puede ser expresado en decibeles por unidad de distancia por la conversión $\alpha' = 8.686\alpha$. El volumen de atenuación incrementa con la frecuencia y un resumen de la dependencia de frecuencia aproximada (f en kHz) de atenuación (en unidades de dB/km) está dado por:

$$\alpha' \text{ (dB/km)} = 3.3 \times 10^{-3} + \frac{0.11f^2}{1 + f^2} + \frac{43f^2}{4100 + f^2} + 2.98 \times 10^{-4} f^2 \quad (1.7)$$

1.7. Pérdidas de Fondo

La estructura del fondo del océano afecta los caminos acústicos los cuales interactúan con él, esta interacción con el fondo es conocida como reflectividad de fondo. La relación de las amplitudes de las ondas planas reflejadas e incidentes en la interfaz océano-fondo, como una función del ángulo, θ . Por un simple fondo, el cual puede ser representado por un semi infinito espacio medio con velocidad del sonido c_2 y densidad ρ_2 constantes, la reflectividad es dada por [3][2]:

$$R(\theta) = \frac{\rho_2 k_{1z} - \rho_1 k_{2z}}{\rho_2 k_{1z} + \rho_1 k_{2z}} \quad (1.8)$$

con subíndices 1 y 2 para identificar el agua y el fondo oceánico, respectivamente; los números de onda son dados por:

$$k_{iz} = (\omega/c_i) \sin \theta_i = k \sin \theta_i; \quad i = 1, 2 \quad (1.9)$$

Los ángulos incidentes y transmitidos son relacionados por la ley de Snell con la expresión siguiente:

$$c_2 \cos \theta_1 = c_1 \cos \theta_2$$

y el ángulo incidente θ_1 es igual al ángulo de la onda plana reflejada. Para esta interfaz simple océano-fondo para la cual tomamos que $c_2 > c_1$, existe un ángulo crítico θ_c debajo del cual hay una reflexión perfecta dado por:

$$\cos \theta_c = \frac{c_1}{c_2} \quad (1.10)$$

Para un fondo con pérdidas, no hay una reflexión perfecta, sin embargo, para un fondo en capas, la reflectividad tiene una dependencia de frecuencia complicada. Cabe señalar que, si la densidad del segundo medio desaparece, la reflectividad se reduce al caso de liberación de presión de $R(\theta) = -1$.

1.8. Modelos de Propagación

La ecuación de onda que describe la propagación del sonido se deriva de las ecuaciones de la hidrodinámica y sus coeficientes y condiciones de contorno son descriptivos del entorno oceánico. Existen esencialmente cuatro tipos de modelos para describir la propagación del sonido en el mar: teoría de rayos, el método espectral o programa de campo rápido (FFP), modo normal (NM) y ecuación parabólica (PE). Todos estos modelos permiten el hecho de que el ambiente del océano varía con la profundidad. Un modelo que también tiene en cuenta las variaciones horizontales en el medio ambiente (es decir, oceanografía de fondo inclinado o espacialmente variable) se denomina dependiente del rango. Para frecuencias altas (unos pocos kHz o superiores), la teoría de los rayos es la más práctica. Los otros tres tipos de modelos son más aplicables y utilizables en frecuencias más bajas (por debajo de 1 kHz) [3].

Entre estas frecuencias, uno puede elegir cualquiera, observando que la solución de onda es la más precisa y probablemente debería usarse en todos los casos en que el cálculo todavía sea factible y/o práctico. Los modelos discutidos aquí son esencialmente modelos bidimensionales, ya que el índice de refracción tiene una dependencia

mucho mayor en la profundidad que en la distancia horizontal. Sin embargo, la topografía del fondo y las características oceánicas fuertes pueden causar refracción horizontal (fuera del plano de rango-profundidad). Los modelos de rayos se pueden extender más fácilmente para incluir esta complejidad adicional. Los modelos de onda tridimensionales completos son extremadamente intensivos en computación. Un compromiso que a menudo funciona para problemas tridimensionales débiles es la aproximación $N \times 2D$ que combina soluciones bidimensionales a lo largo de los radiales para producir una solución tridimensional.

1.8.1. La Ecuación de Onda y Condiciones de Frontera

La ecuación de onda para la presión p en coordenadas cilíndricas con las variables para representar la distancia denotadas por $\mathbf{r} = (x, y)$, y la coordenada de la profundidad denotada por la variable z para una región libre de fuentes es:

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, z, t) - \frac{1}{c^2(\mathbf{r}, z)} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.11)$$

donde $c(\mathbf{r}, z)$ es la velocidad del sonido en el medio en el que se propaga la onda.

Es conveniente resolver la ecuación anterior en el dominio de la frecuencia para obtener y asumir una solución con dependencia en la frecuencia ($\exp(-i\omega t)$) para obtener la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, z) + K^2(\mathbf{r}, z) p(\mathbf{r}, z) = 0 \quad (1.12)$$

donde

$$K^2(\mathbf{r}, z) = \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{r}, z)} \quad (1.13)$$

El entorno dependiente de la distancia se manifiesta como el coeficiente $K^2(\mathbf{r}, z)$ de la ecuación diferencial parcial para el perfil de velocidad de sonido apropiado. El tipo de fondo y topografía dependiente de la distancia aparecen como condiciones de frontera. En la acústica submarina son de interés los medios de fluidos y elásticos (sedimentos de soporte de corte y estratos de fondo).

Las condiciones de frontera más comunes utilizadas en la acústica submarina, son las condiciones de liberación de presión en la superficie del océano,

$$p = 0 \quad (1.14)$$

mientras que en la interfaz fondo-océano, se tienen las condiciones de continuidad de la presión,

$$p_1 = p_2 \quad (1.15)$$

y las de la velocidad de la partícula

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial z} \quad (1.16)$$

donde ρ_i son las densidades de ambos medios (océano y fondo) [17][18][19].

El ecuación de Helmholtz para un campo acústico originado por una fuente puntual es:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, z) + K^2(\mathbf{r}, z) G(\mathbf{r}, z) = -\delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \delta(z - z_s) \quad (1.17)$$

donde el subíndice ' s ' denota las coordenadas de la fuente en el océano. El campo acústico $G(\mathbf{r}, z)$ de una fuente puntual, se obtiene resolviendo el problema del valor límite de la expresión anterior (por el método de modos normales o el método espectral) o por una aproximación utilizando el problema de valor inicial (por la teoría de rayos o la ecuación parabólica) [1][2][24].

1.8.2. Método de Teoría de Rayos

El método de rayos plantea una solución geométrica aproximada para altas frecuencias de la expresión (1.17) de la forma:

$$G(\mathbf{R}) = A(\mathbf{R}) \exp[iS(\mathbf{R})] \quad (1.18)$$

donde el término exponencial permite variaciones rápidas en función de la distancia y $A(\mathbf{R})$ es una envolvente de variación más lenta que incorpora dispersión geométrica y mecanismos de pérdidas. La aproximación geométrica se refiere a que la amplitud varía lentamente con la distancia, de modo que la ecuación (1.12) produce la ecuación eiconal

$$(\nabla S)^2 = K^2 \quad (1.19)$$

Las trayectorias de los rayos son perpendiculares a las superficies de fase constante (frentes de onda), S , y pueden ser expresadas matemáticamente como

$$\frac{d}{dl} \left(K \frac{d\mathbf{R}}{dl} \right) = \nabla K \quad (1.20)$$

donde l es la arco longitud a lo largo de la dirección del rayo y \mathbf{R} es el vector desplazamiento a un punto en el rayo. La dirección de flujo promedio (energía) sigue que de las trayectorias y la amplitud del campo en cualquier punto puede ser obtenida desde la densidad de los rayos.

El método de la teoría de rayos es rápido en aspectos computacionales y se extiende para problemas dependientes de la distancia. Además, los trazos de rayos dan una imagen física de las rutas acústicas. Este método es útil para describir cómo el sonido se redistribuye cuando se propaga largas distancias en trayectos que incluyen entornos poco profundos y profundos y/o latitudes medias a regiones polares. La desventaja de la teoría de rayos convencional es que no incluye la difracción, incluidos los efectos que describen la dependencia de baja frecuencia (grado de atrapamiento) de la propagación por conductos [3].

1.8.3. Representación del Número de Onda o Solución Espectral

La ecuación de onda puede ser resuelta mediante la aplicación de métodos espectrales cuando el ambiente oceánico no varía con la distancia. El término programa de campo rápido (FFP, por sus siglas en inglés) había sido utilizado porque los métodos espectrales se volvieron prácticos con la llegada de la transformada rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés). Se asume una solución de la expresión (1.17) de la forma:

$$G(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{2\pi} \int d^2\mathbf{k} g(\mathbf{k}, z, z_s) \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)] \quad (1.21)$$

la cual lleva a la ecuación para la función de Green dependiente de la profundidad $g(\mathbf{k}, z, z_s)$:

$$\frac{d^2g}{dz^2} + [K^2(z) - k^2]g = -\frac{1}{2\pi} \delta(z - z_s) \quad (1.22)$$

Además se asume simetría azimutal, $kr > 2\pi$ y $r_s = 0$, así que la ecuación (1.21) se reduce a:

$$G(\mathbf{r}, z) = \frac{\exp(-i\pi/4)}{(2\pi r)^{1/2}} \times \int d^2k k^{1/2} g(k, z, z_s) \exp(ikr) \quad (1.23)$$

La integral es evaluada utilizando el algoritmo de la FFT. Aunque inicialmente el método fue llamado de campo rápido, este demasiado lento debido al tiempo requerido para calcular las funciones de Green mediante la expresión (1.22). Sin embargo, tiene ventajas cuando se desea calcular la región de campo cercano o incluir efectos de ondas de corte en medios elásticos; también se utiliza a menudo como un punto de referencia para otras técnicas menos exactas. Con una gran cantidad de esfuerzo computacional adicional, este método es extensible a entornos dependientes de la distancia.

1.8.4. Modelo de Modo Normal

En lugar de resolver la (1.22) para cada g , para el conjunto completo de k 's (típicamente miles de veces), uno puede utilizar la expansión de modo normal que tiene la forma:

$$g(\mathbf{k}, z) = \sum a_n(\mathbf{k}) u_n(z) \quad (1.24)$$

en donde $u_n(z)$ son las funciones propias del siguiente problema de valores propios:

$$\frac{d^2 u_n(z)}{dz^2} + [K^2(z) - k_n^2] u_n(z) = 0 \quad (1.25)$$

Las funciones propias $u_n(z)$ son cero en $z = 0$, satisfaciendo las condiciones de frontera locales de las propiedades del fondo oceánico y satisfaciendo la condición para $z \rightarrow \infty$. Para la presión, las funciones propias forman un conjunto ortonormal en un espacio de Hilbert con función de ponderación $\rho^{-1}(z)$, que es la densidad local. El conjunto de eigen-valores discretos correspondiente a los polos en el integrando de la ecuación (1.23) es dado por las condición:

$$\text{mín}[K(z)] < k_n < \text{máx}[K(z)] \quad (1.26)$$

Esos valores propios discretos corresponden a los ángulos discretos dentro del cono de ángulo crítico mostrado en la Figura 1.13. Los valores propios k_n típicamente cuentan con una pequeña parte imaginaria α_n , las cuales indican la atenuación modal representativa de todas las pérdidas en el ambiente oceánico. Resolviendo la ecuación (1.17) por medio de la expansión de modos normales dada por la expresión (1.24) produce (para la fuente en el origen):

$$G(r, z) = \frac{i}{4\rho(z_s)} \sum_n u_n(z_s) u_n(z) H_0^1(k_n r) \quad (1.27)$$

La forma asintótica de la función de Hankel puede ser usada en la ecuación anterior para obtener la bien conocida representación del modo normal de una guía de onda en coordenadas cilíndricas:

$$G(\mathbf{r}, z) = \frac{i}{(8\pi r)^{1/2} \rho(z_s)} \exp(-i\pi/4) \times \sum_n \frac{u_n(z_s) u_n(z)}{k_n^{1/2}} \exp(ik_n r) \quad (1.28)$$

La expresión anterior (1.28) es una solución de campo lejano de la ecuación de onda y no considera el espectro continuo de modos ($k_n < \text{mín}[K(z)]$) de (1.26). Con el propósito de ilustrar las diversas porciones del campo acústico, notamos que k_n es un número de onda horizontal de tal manera que un ángulo de rayo asociado con un modo con respecto a la horizontal puede ser tomado para ser $\theta = \cos^{-1}[k_n/K(z)]$. Para una guía de onda simple, la máxima velocidad del sonido es la velocidad del sonido en el fondo correspondiente al $\text{mín}[K(z)]$. En este valor de $K(z)$, tenemos de la ley de Snell que $\theta = \theta_c$ que es el ángulo crítico del fondo. En efecto, si observamos una imagen de rayos de los modos, la parte continua del espectro de modos corresponde a rayos con ángulos mayores que el ángulo crítico del fondo y, por lo tanto, fuera del cono del ángulo crítico, por lo que esta porción sufre una pérdida severa. Por lo tanto, notamos que el espectro continuo es el campo cercano (vertical) y el espectro discreto es el campo lejano (más horizontal, dependiente del perfil) que cae dentro del cono mostrado en la Figura 1.13.

Las ventajas del método de modo normal son que: la solución está disponible para todas las configuraciones de fuente-receptor una vez que el problema de valores propios ha sido resuelto; es fácilmente extendido a condiciones moderadamente dependientes de la distancia utilizando la aproximación adiabática; puede ser aplicado para ambientes extremadamente dependientes de la distancia utilizando la teoría de modos acoplados. Sin embargo, no incluye una representación completa del campo cercano.

1.8.5. Modelo de la Ecuación Parabólica

El método de la ecuación parabólica (PE) fue introducido a la acústica submarina y hecho viable con el desarrollo del algoritmo de paso dividido de Tappert, el cual utilizó la transformada rápida de Fourier en cada paso del rango. Los desarrollos numéricos posteriores ampliaron enormemente la aplicabilidad y la precisión del método de la ecuación parabólica.

El método de la PE es actualmente el modelo de propagación dependiente de la distancia más práctico. En su forma más simple, es un ángulo estrecho de campo lejano con respecto a la horizontal adecuados para muchas aproximaciones de problemas de propagación submarina para la ecuación de onda. Considerando simetría azimutal sobre la fuente, expresamos la solución de la expresión (1.12) en coordenadas cilíndricas en una región libre de fuentes en la forma:

$$p(r, z) = \psi(r, z) H(r) \quad (1.29)$$

y definimos $K^2(r, z) = K_0^2 n^2$, con n siendo un índice de refracción c_0/c , donde c_0 es una velocidad del sonido de referencia. Sustituyendo (1.29) dentro de (1.12) y tomando a K_0^2 como la constante de separación terminamos con una ecuación de Bessel para H que tiene una función de Hankel como la solución saliente. Si utilizamos la forma asintótica de la función de Hankel, $H_0^1(K_0 r)$, y aplicando la aproximación paraxial:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \ll 2K_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (1.30)$$

obtenemos la ecuación parabólica que es:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2iK_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + K_0^2 (n^2 - 1) \psi = 0 \quad (1.31)$$

donde n es una función de la distancia y la profundidad. Para resolver la ecuación parabólica utilizamos una solución numérica que es el llamado algoritmo de marcha en rango de paso dividido:

$$\psi(r + \Delta r, z) = \exp \left[\frac{iK_0}{2} (n^2 - 1) \Delta r \right] F^{-1} \times \left\{ \left[\exp \left(-\frac{i\Delta r}{2K_0} s^2 \right) \right] F [\psi(r, z)] \right\} \quad (1.32)$$

donde F es la transformada de Fourier y es utilizada aplicando la transformada rápida de Fourier. La ecuación (1.32) es la solución para n constantes, pero el error introducido cuando la n varía con la distancia y la profundidad puede ser disminuido arbitrariamente al incrementar el tamaño de la transformada y decrementar el tamaño del paso de rango. Es posible modificar el algoritmo de paso dividido para incrementar su precisión con respecto a la propagación de ángulo superior.

1.8.6. Pérdidas por Propagación y Transmisión

Las pérdidas por propagación (PL) y pérdidas por transmisión (TL) son cantidades en decibeles que se miden o derivan de modelos de propagación. Estas representan las pérdidas en la intensidad del campo acústico como una función de la distancia. Para su modelado, típicamente se utiliza la intensidad a un metro de distancia de la fuente asumiendo la dispersión esférica dentro de ese metro. Por lo tanto, si P es la salida de un código de propagación, la pérdida por propagación es

$$PL = 20 \log \left| \frac{P}{p_0(r=1)} \right| \equiv -TL \quad (1.33)$$

donde p_0 es la presión de la fuente en el espacio libre. Las pérdidas por transmisión es una cantidad positiva [1][3][5][2].

En este capítulo se muestra y se concluye que el sonido se puede propagar con mayor facilidad a través de fluidos como el agua en comparación con las ondas electromagnéticas, además de que el sonido y las propiedades físicas del océano proporcionan el único medio conveniente para transmitir información a través de él. Se exponen los conceptos fundamentales de la acústica submarina haciendo hincapié en las principales propiedades del océano, como la temperatura, salinidad y densidad, dependientes de la profundidad, regiones del mundo y temporada estacional, que permiten la creación de conductos que permiten la propagación de ondas acústicas a cortas y largas distancias con ayuda de fenómenos como la refracción y la reflexión de los rayos por medio de la ley de Snell. De igual manera se muestran modelos matemáticos que describen esa propagación del sonido en el mar a partir de resolver la ecuación de onda que se convierte en la ecuación de Helmholtz y que sus resultados pueden ser medidos por pérdidas de transmisión. Por último se menciona que el sonido es usado para medir propiedades del suelo marino, medir el fondo del océano, temperatura y corrientes marinas, así como el desarrollo y aplicación de sonares.

Capítulo 2

CAMPO PRODUCIDO POR UNA FUENTE ESTACIONARIA EN UN MODELO DE OCÉANO ESTRATIFICADO

2.1. Introducción

Este capítulo describe la obtención de la Función de Green en el espacio estratificado para el problema estacionario de la propagación de ondas acústicas submarinas, la cual describe el efecto de campo originado por la propagación; para esto se considera un modelo del océano como un medio estratificado con estructura de dos capas, una capa de agua simulando una guía de onda oceánica y un semi espacio simulando el fondo marino. La guía de onda oceánica se encuentra limitada en la parte superior por la superficie y en la parte inferior por una interfaz entre la guía de onda y el fondo marino; cada medio tiene características propias determinadas por la velocidad de propagación del sonido (c) y su densidad (ρ) [1][2].

2.2. Plateamiento del Problema

El campo acústico por describir se origina debido a la propagación de ondas mecánicas generadas por una fuente colocada a cierta profundidad z_0 en la capa de agua, mientras que el receptor se encuentra ubicado a una distancia horizontal x del transmisor y a una profundidad z mayor con respecto a la fuente. La guía de onda considerada se encuentra limitada por el intervalo $z \in (0, H)$, la cual está definida por:

$$\Pi_H = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : z \in \mathbb{R} : 0 \leq z \leq H\} \quad (2.1)$$

donde \mathbf{x} representa la coordenada horizontal y z la coordenada vertical. El fondo marino es simulado por un semi espacio, el cual se encuentra definido como:

$$\Pi_H^+ = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : z \in \mathbb{R} : z > H\} \quad (2.2)$$

La interfaz L_H existe entre la placa de agua del medio uno y el fondo marino, la cual tiene presencia en la dirección horizontal y se encuentra definida por:

$$L_H = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^3 : z = H, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, z \in \mathbb{R}\} \quad (2.3)$$

Las características físicas del océano estratificado son denotadas por la velocidad de propagación del sonido (c) y su densidad (ρ), especificadas por [7][25][26]:

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_0(z) & 0 \leq z \leq H \\ \rho_1 & z > H \end{cases} \quad (2.4)$$

$$c(z) = \begin{cases} c_0(z) & 0 \leq z \leq H \\ c_1 & z > H \end{cases} \quad (2.5)$$

donde $c_0(z) = c_0 > 0$ y $\rho_0(z) = \rho_0 > 0$ son valores constantes definidos para la velocidad de propagación del sonido y para la densidad en el medio simulado por la guía de onda oceánica, y en donde $c_1 > 0$ y $\rho_1 > 0$ son características dadas para el fondo marino, lo que indica que las características físicas establecidas para ambos medios son valores constantes en todo su intervalo, donde se refleja la estratificación del océano. Los parámetros de densidad y velocidad del sonido de cada capa cumplen las siguientes condiciones:

$$\rho_0 < \rho_1, c_0 < c_1 \quad (2.6)$$

Para obtener el comportamiento del campo acústico, se propone una solución al problema de la ecuación de onda considerando las condiciones establecidas, esta solución es conocida como la Función de Green (consultar [24]), la cual nos ayuda a representar las variaciones de la presión acústica al propagarse una onda sonora por el océano, y que toma en cuenta la contribución de los modos propagados, directamente relacionados con las llamadas funciones propias y valores propios obtenidos de la conexión del problema de la ecuación de onda con el problema espectral Sturm-Liouville, y la contribución lateral de la onda. Los métodos utilizados para resolver el problema de la ecuación que describe el comportamiento de la propagación de ondas en los medios definidos por las expresiones (2.1), (2.2) y (2.3), (véase la Figura 2.1), son el Método de Modos Normales y el Método de Series de Potencia de

Parámetro Espectral (SPPS); los cuales serán aplicados para obtener la ecuación de dispersión, los valores propios (valores que satisfacen con la ecuación de dispersión) y las funciones propias.

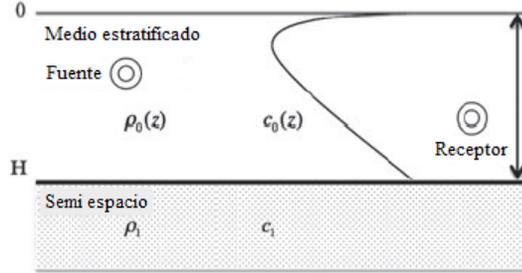


Figura 2.1: Modelo de océano estratificado.

De acuerdo con lo anterior, se propone el modelo de océano definido en capas por (2.1) y (2.2), con una interfaz entre ambas capas definida por (2.3), con las características de densidad y de velocidad del sonido en cada capa según (2.4) y (2.5), lo cual indica que $\rho_0 < \rho_1 < 0$ son densidades constantes, además de que la velocidad del sonido en el medio uno es menor que la velocidad en el medio dos $c_0 < c_1$. Se establece la ecuación de onda que se asocia al fenómeno de la propagación de ondas en el semi espacio estratificado, cuya solución es la función de Green $g(\mathbf{x}, z)$ que satisface la ecuación de Helmholtz (ver [7][26][27][28][29][30]):

$$\left(\Delta_{\mathbf{x}} + \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \rho^{-1}(z) \frac{\partial}{\partial z} + k^2(z) \right) g(\mathbf{x}, z) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(z - z_0)$$

$$(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}_+^3 \setminus L_H, \mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2, z, z_0 \in \mathbb{R}_+ = \{z \in \mathbb{R}, z > 0\}$$
(2.7)

donde $\Delta_{\mathbf{x}} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ es el Laplaciano y $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(z - z_0)$ es la función delta y

$$k^2(z) = \begin{cases} k_0^2(z) = \frac{\omega^2}{c_0^2(z)}, & z \in [0, H] \\ k_1^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2}, & z \in (H, +\infty) \end{cases}, \omega > 0$$
(2.8)

donde $k^2(z)$ es la característica del número de onda presente en el problema y $\omega > 0$ es la frecuencia de la onda armónica de la forma $\mathcal{A}(t, \mathbf{x}, z) = e^{-i\omega t} u(\mathbf{x}, z)$, donde $t \in \mathbb{R}$ es la variable de tiempo.

Asociamos a la ecuación (2.7) la condición de frontera en la superficie del océano y las condiciones en la interfaz L_H entre la capa de agua Π_H y el fondo del océano Π_H^+ , definidas por:

$$g|_{z=0} = g(\mathbf{x}, 0) = 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$$
(2.9)

$$\begin{aligned} [g]_{z=H} &= g(\mathbf{x}, H-0) = g(\mathbf{x}, H+0) = 0 \\ \frac{1}{\rho(z)} \left[\frac{\partial g}{\partial z} \right]_{z=H} &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial g(\mathbf{x}, H-0)}{\partial z} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial g(\mathbf{x}, H+0)}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Las condiciones anteriores son conocidas como las condiciones de frontera del problema, en donde la primera condición (2.9) muestra que la presión acústica o valor de la función de Green en $z = 0$ es inexistente en la superficie del océano. La segunda condición (2.10a) viene de la continuidad de la presión acústica en la interfaz entre la capa de agua superficial y el fondo del océano, mientras que la tercera condición (2.10b) indica la continuidad de la componente normal de la velocidad de las partículas en el fluido en L_H .

Definimos la Transformada de Fourier como:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (2.11)$$

la cual es aplicada a la ecuación de onda (2.7) con respecto a la variable horizontal $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ (consultar [24][31]) con condiciones (2.9) y (2.10), problema que es asociado con la propagación de ondas, el cual resulta estar cercanamente conectado con el problema espectral Sturm-Liouville:

$$\left(\rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \rho^{-1}(z) \frac{\partial}{\partial z} + k^2(z) \right) \varphi(z, \mu) = \mu^2 \varphi(z, \mu), \quad z \in \mathbb{R}_+ \quad (2.12)$$

$$\varphi|_{z=0} = \varphi(0, \mu) = 0 \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} [\varphi]_{z=H} &= \varphi(H-0, \mu) = \varphi(H+0, \mu) = 0 \\ \frac{1}{\rho(z)} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{z=H} &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \varphi(H-0, \mu)}{\partial z} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \varphi(H+0, \mu)}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

en donde $\mu^2 \in R$ es el parámetro espectral del problema.

2.3. Ecuación de Dispersión

Las implementaciones numéricas de las fórmulas (2.12), (2.13), y (2.14), necesitan valores propios y funciones propias del problema espectral vertical Sturm-Liouville dependiente del parámetro horizontal $x \in \mathbb{R}$, los cuales, como ya se mencionó anteriormente, serán obtenidos mediante la aplicación de la ecuación de dispersión. Para

este fin, aplicaremos el método SPSS que será explicado más adelante, el cual da soluciones rápidas y precisas (exactas) del problema Sturm-Liouville. El método SPSS ha sido ampliamente utilizado en solución de problemas de acústica submarina del océano estratificado [1][17][18][19][2], así como en el análisis y solución de otros tipos de problemas como en ondas electromagnéticas en la propagación de ondas transversales en guías de onda [31][32][33] y en análisis de fibras ópticas [15][34][35]. De igual manera se obtendrán por medio del Método de Modos Normales para realizar una comparativa en la precisión del Método SPSS con respecto a este.

Tenemos la ecuación

$$\left(\rho(z) \frac{d}{dz} \rho^{-1}(z) \frac{d}{dz} + q(z) \right) u(z) = 0, \quad z \in [0, H] \quad (2.15)$$

donde $q(z) = k_0^2(z) - k_1^2$ es la relación de los números de onda de cada capa del modelo de océano y es una función continua a trozos. Por simplicidad, se supone que $\rho_0(z) = \rho_0 > 0$, $z \in [0, H]$, por lo que la ecuación (2.15) es reducida e introducida a la ecuación

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + (k_0^2(z) - k_1^2) \right) u(z) = 0, \quad z \in [0, H] \quad (2.16)$$

de tal manera que se plantea el problema espectral asociado a la ecuación (2.16) de la forma

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dz^2} + (k_0^2(z) - k_1^2) \right) \varphi(\alpha, z) &= \alpha^2 \varphi(\alpha, z), \quad z \in [0, H] \\ \frac{d^2 \varphi(\mu, z)}{dz^2} &= \mu^2 \varphi(\mu, z), \quad z \in (H, \infty) \end{aligned} \quad (2.17)$$

con las condiciones de frontera

$$\varphi|_{z=0} = \varphi(\alpha, 0) = 0 \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} [\varphi]_{z=H} &= \varphi(\alpha, H-0) = \varphi(\alpha, H+0) = 0 \\ \frac{1}{\rho(z)} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{z=H} &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \varphi(\alpha, H-0)}{\partial z} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \varphi(\alpha, H+0)}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

El problema espectral (2.17) con condiciones (2.18) y (2.19), tiene un espectro discreto finito localizado en $\alpha^2 \in (0, k_{max}^2 - k_1^2]$ y se busca una solución φ de la forma

$$\varphi(\alpha, z) = \begin{cases} f(\alpha, z), & 0 \leq z \leq H \\ C_1(\alpha) e^{\alpha(z-H)} + C_2(\alpha) e^{-\alpha(z-H)}, & z > H \end{cases} \quad (2.20)$$

donde $f(\alpha, z)$ es la solución del problema de Cauchy

$$f''(\alpha, z) + K(z)f(\alpha, z) = \alpha^2 f(\alpha, z), \quad z \in [0, H] \quad (2.21)$$

$$f(\alpha, 0) = 0, \quad f'(\alpha, 0) = 1 \quad (2.22)$$

Aplicando las condiciones en (2.22), obtenemos que

$$C_1(\alpha) = \frac{1}{2} \left(f(\alpha, H) + \frac{f'(\alpha, H)}{m\alpha} \right) \quad (2.23)$$

$$C_2(\alpha) = \frac{1}{2} \left(f(\alpha, H) - \frac{f'(\alpha, H)}{m\alpha} \right) \quad (2.24)$$

Se nota que el $\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(\alpha, z) = 0$ y dado que $\varphi \in \mathcal{H}$, obtenemos que $C_1(\alpha) = 0$.

Por lo tanto, los valores α^2 que pertenecen al espectro discreto ya definido son valores propios del problema (2.17), (2.18) y (2.19), si y sólo si α es una raíz solución de la ecuación de dispersión con forma

$$D(\alpha) = m\alpha f(\alpha, H) + f'(\alpha, H) = 0, \quad 0 < \alpha_1^2 < \alpha_2^2 < \dots < \alpha_j^2 < k_{max}^2 - k_1^2 \quad (2.25)$$

donde

$$m = \frac{\rho_0(H)}{\rho_1} \quad (2.26)$$

Decimos que ω_{cut}^j es una frecuencia de corte de la guía de onda, del j -avo modo, si $\alpha_j = \alpha_j(\omega)$ es tal que $\alpha_j(\omega) > 0$ para $\omega > \omega_{cut}^j$ y

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_{cut}^j} \alpha_j(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_{cut}^j} \left(\mu_j(\omega) - \frac{\omega}{c_1} \right) = 0 \quad (2.27)$$

Por lo tanto, ω_{cut}^j es la frecuencia del punto de aparición del valor propio $\alpha_j^2(\omega)$ desde el borde $\left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2$ del espectro continuo de \mathcal{H} . El conjunto $\Lambda = \{\omega_{cut}^j\}_{j=1}^{\infty}$ de frecuencias de corte forman una secuencia fuertemente creciente [36]. Esto implica que los valores propios o números de onda forman parte del segmento

$$\alpha_j(\omega) \in (0, k_{max}^2(\omega) - \frac{\omega_{cut}^j}{c_1}]$$

El número de raíces N de la ecuación de dispersión depende de la frecuencia ω y es directamente proporcional al valor de esta, por lo que al aumentar la frecuencia ω aumenta el número de raíces de esta relación. Se denota como α_j^2 a los eigenvalores o valores propios del problema y $\varphi_j(z)$, $j = 1, \dots, N$ como las eigenfunciones o funciones propias.

Es necesario notar que $\varphi_j(\omega, z)$ son funciones continuas en \mathbb{R} con respecto a la frecuencia ω para cada z , y

$$\varphi_j(\omega, z) = 0, \text{ si } |\omega| \leq \omega_{cut}^j \quad (2.28)$$

2.4. Método de Series de Potencia de Parámetro Espectral (SPPS)

En la sección anterior del presente capítulo, se establecieron las condiciones para obtener la ecuación de dispersión mediante la relación del problema espectral Sturm-Liouville (2.17) con la ecuación de onda (2.15), en donde para la solución del problema espectral se utiliza el método SPPS el cual nos da como resultado soluciones precisas para este tipo de problemas. La obtención de las soluciones del problema espectral, nos permite obtener la expresión de la ecuación de dispersión además de los valores propios y funciones propias necesarias para describir el comportamiento del campo acústico en el modelo de océano considerado por medio de la Función de Green.

Recordando la expresión (2.25), la ecuación de dispersión tiene la forma

$$D(\alpha) = m\alpha f(\alpha, H) + f'(\alpha, H) = 0, \quad 0 < \alpha_1^2 < \alpha_2^2 < \dots < \alpha_j^2 < k_{max}^2 - k_1^2$$

en donde $m = \frac{\rho_0(H)}{\rho_1}$ es la relación de densidades de las capas del modelo de océano y α_j^2 son las raíces de la ecuación también conocidos como valores propios.

Para la obtención de $D(\alpha)$ es necesaria la solución del problema de Cauchy (2.21) y (2.22), en donde el método SPPS es utilizado (ver [12][14][15][37][32]). De acuerdo con esto, sea $u_0 \in C^2(0, H) \cap C^1(0, H)$ una solución no desvaneciente de la ecuación

$$u_0''(z) + q(z)u_0(z) = 0, \quad z \in [0, H] \quad (2.29)$$

dado que

$$\inf_{z \in [0, H]} |u_0(z)| > 0 \quad (2.30)$$

la cual indica que $u_0(z)$ es una función acotada en donde su valor inferior es mayor a 0 y como se mencionó $q(z) = k_0^2(z) - k_1^2$ es una función continua a trozos en $[0, H]$. Entonces la solución general de

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + (k_0^2(z) - k_1^2) \right) \varphi(\alpha, z) = \alpha^2 \varphi(\alpha, z), \quad z \in [0, H] \quad (2.31)$$

tiene la forma

$$u(\lambda, z) = b_1(\lambda) u_1(\lambda, z) + b_2(\lambda) u_2(\lambda, z) \quad (2.32)$$

donde $b_1(\lambda)$ y $b_2(\lambda)$ son constantes complejas arbitrarias y

$$\begin{aligned} u_1(\lambda, z) &= u_0(z) \sum_{n=0}^N \lambda^n \tilde{X}^{(2n)}(z) \\ u_2(\lambda, z) &= u_0(z) \sum_{n=0}^N \lambda^n X^{(2n+1)}(z) \end{aligned}, \quad \lambda = \alpha^2 \quad (2.33)$$

con $\tilde{X}^{(2n)}(z)$ y $X^{(2n+1)}(z)$ definidas por las fórmulas integrales recursivas siguientes

$$\tilde{X}^{(0)}(z) \equiv 1, \quad X^{(0)}(z) \equiv 1 \quad (2.34)$$

$$\tilde{X}^{(n)}(z) = \begin{cases} \int_0^z \tilde{X}^{(n-1)}(s) r(s) u_0^2(s) ds & n = \text{impar} \\ \int_0^z \frac{\tilde{X}^{(n-1)}(s)}{p(s)u_0^2(s)} ds & n = \text{par} \end{cases} \quad (2.35)$$

$$X^{(n)}(z) = \begin{cases} \int_0^z \frac{X^{(n-1)}(s)}{p(s)u_0^2(s)} ds & n = \text{impar} \\ \int_0^z X^{(n-1)}(s) r(s) u_0^2(s) ds & n = \text{par} \end{cases} \quad (2.36)$$

y ambas series convergen uniformemente para cada valor de α en $[0, H]$. Aplicando las condiciones del problema de Cauchy mostradas en la expresión (2.22), las constantes arbitrarias $b_j(\lambda)$, $j = 1, 2$, pueden ser obtenidas como

$$b_1(\alpha) = -\frac{u_2(\alpha, 0)}{W(\alpha, 0)}, \quad b_2(\alpha) = \frac{u_1(\alpha, 0)}{W(\alpha, 0)} \quad (2.37)$$

donde

$$W(\alpha, z) = \begin{vmatrix} u_1(\alpha, z) & u_1'(\alpha, z) \\ u_2(\alpha, z) & u_2'(\alpha, z) \end{vmatrix} \quad (2.38)$$

es el Wronskiano de las soluciones $u_1(\alpha, z)$ y $u_2(\alpha, z)$.

Para la solución particular no desvaneciente requerida $u_0(z)$, de acuerdo con la teoría de ecuaciones lineales ordinarias, la ecuación (2.29) posee dos soluciones de valor real linealmente independientes $y_1(z)$ y $y_2(z)$, en las cuales sus ceros son alternados. Por lo tanto, uno puede escoger que

$$u_0(z) = y_1(z) + iy_2(z) \quad (2.39)$$

y así, debido al teorema de la alternancia de Sturm $u_0(z)$ no tiene ceros en $[0, H]$. Además, podemos requerir que $y_1(z)$ y $y_2(z)$ satisfagan las condiciones iniciales

$$y_1(0) = y_2'(0), \quad y_1'(0) = y_2(0) \quad (2.40)$$

Las soluciones $y_1(z)$ y $y_2(z)$ pueden ser representadas y construidas de acuerdo con un caso especial de la representación de la solución del problema espectral Sturm-Liouville [14][15][32]:

$$y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{Y}^{(2n)}(z), \quad y_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Y^{(2n+1)}(z) \quad (2.41)$$

en donde $\tilde{Y}^{(n)}(z)$ y $Y^{(n)}(z)$ son de igual manera definidas por las fórmulas integrales recursivas mencionadas en (2.34), (2.35) y (2.36), además de que las series para $y_1(z)$ y $y_2(z)$ convergen uniformemente en $[0, H]$.

Notemos que como $u_0(0) = 0$ y $u_0'(0) = i$, las condiciones iniciales satisfechas por $u_1(\lambda, z)$ y $u_2(\lambda, z)$ en $z = 0$ tienen la forma

$$\begin{aligned} u_1(\lambda, 0) &= u_0(0) = 0 & u_1'(\lambda, 0) &= u_0'(0) = i \\ u_2(\lambda, 0) &= 0 & u_2'(\lambda, 0) &= \frac{1}{u_0'(0)} = 1 \end{aligned} \quad (2.42)$$

implicando que la solución general del problema espectral tenga la forma

$$f(\lambda, z) = u_2(\lambda, z) = u_0(z) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n X^{(2n+1)}(z), \quad \lambda = \alpha^2 \quad (2.43)$$

Derivando la función solución del problema, tenemos que

$$f'_z(\lambda, z) = u'_2(\lambda, z) = \frac{u'_0(z)}{u_0(z)} u_2(\lambda, z) + \frac{1}{u_0(z)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n X^{(2n)}(z), \quad \lambda = \alpha^2 \quad (2.44)$$

así, la ecuación de dispersión definida en (2.25), de acuerdo al método SPSS tenga la forma

$$D(\lambda) = \left(m\sqrt{\lambda}u_0(H) + u'_0(H) \right) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n X^{(2n+1)}(H) + \frac{1}{u_0(H)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n X^{(2n)}(H) = 0, \quad \lambda = \alpha^2 \quad (2.45)$$

donde $D(\lambda)$ es la función analítica en un vecindario de todas las raíces de la ecuación de dispersión. La ecuación $D(\mu) = 0$ es la ecuación de dispersión para la definición de los valores propios $\alpha_j^2 \in (0, k_{max}^2 - k_1^2]$ del problema espectral Sturm-Liouville.

Entonces, la solución $f(\alpha, z)$ del problema de Cauchy (2.21) y (2.22) es obtenida como una serie de potencias con respecto a $\alpha^2 \in \mathbb{C}$, la cual es convergente para cada $\omega \in \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$ uniformemente con respecto a $z \in [0, H]$, la cual se define como

$$f(\alpha, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{2k} a_k(z), \quad z \in [0, H] \quad (2.46)$$

Además, la serie (2.46) es continuamente diferenciable con respecto a $z \in [0, H]$, que es

$$f'_z(\alpha, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{2k} \frac{da_k(z)}{dz}, \quad z \in [0, H] \quad (2.47)$$

donde la serie (2.47) es uniformemente convergente para $z \in [0, H]$. Para el cálculo numérico de los valores propios del problema (2.17), (2.18) y (2.19), es necesario definir las series (2.46) y (2.47) de manera truncada

$$f_N(\alpha, z) = \sum_{k=0}^N \alpha^{2k} a_k(z), \quad z \in [0, H] \quad (2.48)$$

$$(f_N)'_z(\alpha, z) = \sum_{k=0}^N \alpha^{2k} \frac{da_k(z)}{dz}, \quad z \in [0, H] \quad (2.49)$$

y obtenemos una ecuación de dispersión aproximada que se define como

$$D(\alpha) = m\alpha f_N(\alpha, H) + (f_N)'_z(\alpha, H) = 0 \quad (2.50)$$

Las funciones propias normalizadas son dadas como

$$\varphi_j(z) = \frac{1}{M_j} \begin{cases} f_N(z, \alpha_j), & 0 \leq z \leq H \\ C_2(\alpha) e^{-\alpha_j(z-H)}, & H > z > +\infty \end{cases} \quad (2.51)$$

donde

$$M_j = \int_0^H \rho^{-1}(z) f_N^2(z, \alpha_j) dz + \frac{1}{\alpha \rho_1} \quad (2.52)$$

2.5. Construcción de la Función de Green de Problema Estacionario Estratificado

Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert con norma

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = \left(\int_0^{\infty} \rho^{-1}(z) |\varphi(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.53)$$

Introducimos por las condiciones (2.13) y (2.14) el operador $\mathcal{L}(\omega)$, que es un operador definido por el operador diferencial ordinario

$$\varphi(z) \rightarrow \left(\rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \rho^{-1}(z) \frac{\partial}{\partial z} + k^2(z) - k_1^2 \right) \varphi(z), \quad k_1^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} \quad (2.54)$$

y que cuenta con un dominio

$$D_{\mathcal{L}(\omega)} = \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in \mathcal{H} : \varphi|_{(0,H)} \in W^{2,2}((0, H)), \varphi|_{(H,+\infty)} \in W^2((H, +\infty)), \\ \varphi(\omega, 0) = 0, \varphi(\omega, H-0) = \varphi(\omega, H+0), \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \varphi(\omega, H-0)}{\partial z} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \varphi(\omega, H+0)}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (2.55)$$

donde $W^{2,2}((a, b))$ es el espacio Sobolev en el intervalo (a, b) , que es el espacio de $u \in L^2((a, b))$ continuas, tales que sus derivadas generalizadas u' , u'' pertenecen a $L^2((a, b))$. Es sabido que el operador $\mathcal{L}(\omega)$ asociado al problema espectral tiene un espectro continuo $sp_c \mathcal{H} = (-\infty, 0]$ y un espectro discreto $sp_d \mathcal{H} \subset (0, k_{\max}^2 - k_1^2]$

(consultar [36][38][39]), en donde $k_1^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2}$, $k_{\text{máx}}^2 = \frac{\omega^2}{c_{\text{mín}}^2}$, $c_{\text{mín}}^2 = \inf_{z \in [0, H]} c^2(z)$. La condición (2.6) indica que $k_1^2 < k_{\text{máx}}^2$.

Sea $\{\mu_j^2 = \mu_j^2(\omega)\}_{j=1}^n$ ($k_1^2 < \mu_1^2(\omega) < \mu_2^2(\omega) < \dots < \mu_n^2(\omega) \leq k_{\text{máx}}^2$) un conjunto de valores propios de $\mathcal{L}(\omega)$, y $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ sea un ortonormal apropiado en el sistema de funciones propias \mathcal{H} . Sea también $\{\psi(\omega, z)\}_{\alpha \in \mathbb{R}_+}$ el ortonormal en el sistema \mathcal{H} de funciones propias generalizadas (ver [36][38]), las cuales son soluciones limitadas $\psi_\alpha(\omega, z)$ de la ecuación

$$\begin{aligned} (\rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \rho^{-1}(z) \frac{\partial}{\partial z} + k^2(z) - k_1^2) \psi_\alpha(z) &= -\alpha^2 \psi_\alpha(z), \quad z \in (0, H) \\ \frac{d^2 \psi_\alpha(z)}{dz^2} &= -\alpha^2 \psi_\alpha(z), \quad z \in (H, +\infty) \\ \alpha &> 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

satisfaciendo las condiciones

$$\psi_\alpha(0) = 0 \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(H-0) &= \psi_\alpha(H+0) \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi_\alpha(H-0)}{\partial z} &= \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \psi_\alpha(H+0)}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.58)$$

y normalizada de manera que

$$\int_0^\infty \rho^{-1}(z) \psi_\alpha(z) \bar{\psi}_\beta(z) dz = \delta(\alpha - \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \quad (2.59)$$

Hay que notar que $\alpha_j = i\beta_j$, donde β_j , son las raíces positivas de la ecuación de dispersión que tiene la forma

$$\beta m f(i\beta_j, H) + f'(i\beta_j, H) = 0, \quad m = \frac{\rho_0(H)}{\rho_1} \quad (2.60)$$

donde $f = f(\alpha, z)$ es la solución del problema de Cauchy del problema espectral (2.56)

$$-f'' - (k^2(z) - k_1^2) f = \alpha^2 f, \quad z \in [0, H] \quad (2.61)$$

$$f(\alpha, 0) = 0, \quad f'(\alpha, 0) = 1 \quad (2.62)$$

Entonces, cada función $f \in \mathcal{H}$ tiene una descomposición espectral como apuntan [36][38][40]:

$$f(z) = \sum_{j=1}^n f_j \varphi_j(z) + \int_0^\infty f(\alpha) \psi_\alpha(z) dz, \quad z \in \mathbb{R}_+ \quad (2.63)$$

en donde

$$f_j = \int_0^\infty \rho^{-1}(z) f(z) \bar{\varphi}_j(z) dz, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.64)$$

$$f(\alpha) = \int_0^\infty \rho^{-1}(z) f(z) \bar{\psi}_\alpha(z) dz, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad (2.65)$$

Sea

$$\xi(\mathbf{x}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x}|), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.66)$$

la solución fundamental del operador Helmholtz $\Delta_{\mathbf{x}} + k^2, k > 0$, que satisface el principio de absorción límite y en donde $H_0^{(1)}$ es la función Hankel de primer tipo y orden cero. Aplicando la transformada de Fourier (2.11) y expansión por funciones propias y funciones generalizadas del operador $\mathcal{L}(\omega)$ mostradas en (2.63), (2.64) y (2.65), los valores de las funciones y la solución del operador Helmholtz, se obtiene la representación de modo para la presión acústica en la guía de ondas oceánicas que igual es la representación de modo para la Función de Green [36]:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0) = \sum_{j=1}^n g_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0) + g_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0) \quad (2.67)$$

donde

$$g_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0) = \frac{i}{4} \varphi_j(z) \bar{\varphi}_j(z_0) H_0^{(1)}(\mu_j(\omega)|\mathbf{x}|), \quad j = 1, \dots, n \quad (2.68)$$

$$\mu_j(\omega) = \sqrt{k_1^2 + \alpha_j^2} \quad (2.69)$$

$$g_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0) = \frac{i}{4} \int_0^\infty \psi_\alpha(z) \bar{\psi}_\alpha(z_0) H_0^{(1)}(v(\alpha)|\mathbf{x}|) d\alpha \quad (2.70)$$

$$v(\alpha) = \sqrt{k_1^2 - \alpha^2} \quad (2.71)$$

Las funciones $g_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0)$ son llamadas los modos propagados y $g_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0)$ es llamada la onda lateral. Aplicando el término principal de la asintótica de la función Hankel $H_0^{(1)}(\zeta)$ (ver [17][25]) bajo la condición $\zeta \rightarrow \infty$

$$H_0^{(1)}(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}} e^{i(\zeta - \frac{\pi}{4})} \left(1 + O\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right), \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad -\pi < \arg(\zeta) < 2\pi \quad (2.72)$$

se obtiene que el termino principal del modo asintótico es

$$g_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0) \simeq \sum_{j=0}^n \frac{\varphi_j(z) \bar{\varphi}_j(z_0) e^{i(\mu_j |\mathbf{x}| + \frac{\pi}{4})}}{(8\pi\mu_j |\mathbf{x}|)^{\frac{1}{2}}}, \quad k_1(\omega) |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.73)$$

y

$$g_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0) \sim \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi}} \int_0^\infty \psi_\alpha(z) \bar{\psi}_\alpha(z_0) \frac{e^{iv(\alpha)|\mathbf{x}|}}{(v(\alpha) |\mathbf{x}|)^{\frac{1}{2}}} d\alpha, \quad k_1(\omega) |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (2.74)$$

Las funciones propias y las funciones propias generalizadas del problema (2.12), (2.13) y (2.14) para $z \in [0, H]$, tienen la siguiente forma

$$\varphi_j(\omega, z) = \frac{f(\omega, \alpha_j, z)}{M_j}, \quad z \in [0, H], \quad j = 1, \dots, n \quad (2.75)$$

$$M_j = \left(\rho_0^{-1}(H) \int_0^H f^2(\omega, \alpha_j, z) dz + (2\alpha_j \rho_1)^{-1} f^2(\omega, \alpha_j, H) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.76)$$

$$\varphi_\alpha(\omega, z) = \sqrt{\frac{2\rho_1}{\pi}} \frac{f(\omega, \alpha, z)}{\left(f^2(\omega, \alpha, H) + (m\alpha)^{-2} \left(\frac{\partial f(\omega, \alpha, H)}{\partial z} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad m = \frac{\rho_0(H)}{\rho_1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad z \in [0, H] \quad (2.77)$$

en donde $f(\omega, \alpha, z)$ son soluciones del problema de Cauchy en $[0, H]$

$$\begin{cases} \left(\rho(z) \frac{d}{dz} \rho^{-1}(z) \frac{d}{dz} + k^2(\omega, z) - k_1^2(\omega) \right) f(\omega, \alpha, z) = \alpha^2 f(\omega, \alpha, z), & z \in (0, H) \\ f(\omega, \alpha, 0) = 0 \\ f'(\omega, \alpha, 0) = 1 \end{cases} \quad (2.78)$$

Conociendo y aplicando el método de fase estacionaria a la integral que aparece en $g_0(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0)$, se muestra que si la frecuencia ω no es crítica, es decir, si $\omega \notin \Lambda$ (ver [40]), entonces

$$g_0(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0) = O\left(\frac{1}{(k_1(\omega) |\mathbf{x}|)^2}\right), \quad k_1(\omega) |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (2.79)$$

Por lo tanto, la onda lateral $g_0(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0)$ no da una contribución en las asintóticas del campo acústico a distancias lejanas y bajo la aplicación numérica del campo lejano es suficiente considerar la contribución del modo en el campo acústico. La expresión (2.73), es la función de Green que satisface la ecuación de onda (2.7) que está relacionada al problema de propagación de ondas, la cual con sus características y sus funciones es una función asintótica que muestra el comportamiento del campo acústico.

2.6. Pérdidas de Transmisión y la Función de Green

Como se mencionó en la sección 1.8.6, definimos las pérdidas de transmisión de la presión acústica en decibeles por la fórmula sugerida en [3][5][24]:

$$TL(t) = -20 \log_{10} \left| \frac{P(t)}{p_0(r=1)} \right| [dB]$$

Las pérdidas de transmisión se representan por medio de una escala logarítmica debido a que existe un gran rango de intensidades de la presión sonora que pueden ser medidas pero no resulta conveniente su manejo debido a su número. Por lo tanto es conveniente utilizar la escala logarítmica para obtener las pérdidas de transmisión entre un transmisor y receptor separados una distancia grande [1]. Para el uso de la expresión anterior, nos apoyamos con que los efectos de la presión acústica son asociados con el comportamiento del asintótico de la función de Green, sea para el caso del modelo estratificado o el modelo cuasi estratificado

$$G_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0) = \sum_{j=1}^n g_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0) + g_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0)$$

por lo que obtenemos

$$TL(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0) = -20 \log_{10} \left| \frac{G_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0)}{G_{\varepsilon_0}(r=1)} \right| [dB] \quad (2.80)$$

Estas expresiones fueron introducidas a un programa realizado en Matlab y se obtuvieron las gráficas del comportamiento del campo acústico o presión acústica definidas en pérdidas de transmisión dadas en decibeles (dB). Los gráficos obtenidos se muestran en dos maneras, con un solo valor propio modo de propagación y con la contribución de un número finito de modos propagados.

En las gráficas del comportamiento del campo se muestra que mediante aumenta la contribución de los valores propios a la expresión de la función de Green que describe el comportamiento del campo acústico se tienen diferentes comportamientos.

2.7. Resultados del Campo en Modelo Estratificado

En esta sección es aplicado el método SPPS para calcular los números de onda o valores propios μ_j^2 para los modos propagados aplicando la aproximación de la ecuación de dispersión con forma:

$$D(\alpha) = m\alpha f_N(\alpha, H) + (f_N)'_z(\alpha, H) = 0, \quad m = \frac{\rho_0(H)}{\rho_1}, \quad \mu_j = \sqrt{k_1^2 + \alpha_j^2}$$

Las soluciones de la ecuación de dispersión exacta obtenida por medio de la aplicación del problema de Cauchy (2.78), es comparada con los valores obtenidos por medio de la ecuación de dispersión construida por el método SPPS (visto en la sección 2.4). Para este escenario, las características del modelo de océano son tomadas como valores constantes, en donde la velocidad del sonido y densidad $c_0 = 1521\text{m/s}$, $\rho_0 = 1000\text{kg/m}^3$ son para la capa de agua y $c_1 = 2000\text{m/s}$, $\rho_1 = 2070\text{kg/m}^3$ para el fondo marino. Se considera una profundidad $H = 2000\text{m}$ en donde se encuentra la interfaz entre la capa de agua y el fondo marino; la fuente armónica cuenta con una frecuencia de operación de $f_0 = 60\text{Hz}$, como se muestra en la Figura 2.2. La ubicación de la fuente es a $z_0 = 50\text{m}$ y del receptor a $z = 185\text{m}$.

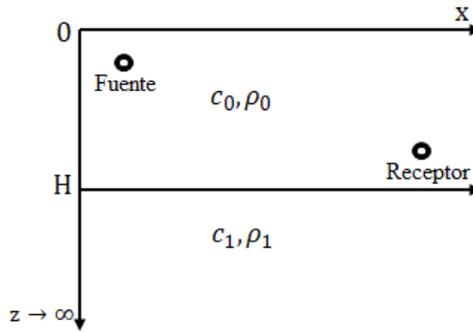


Figura 2.2: Modelo de Océano Estratificado con velocidad del sonido constante.

Utilizando soluciones explícitas del problema de Cauchy (2.21) y (2.22), $f(\alpha, H)$ que forma parte de la ecuación de dispersión buscada, para una velocidad del sonido constante $c_0(z) = c_0 > 0$, tiene la forma

$$f(\alpha, z) = \frac{\sin\left(\sqrt{k_{max}^2 - k_1^2 - \alpha^2}z\right)}{\sqrt{k_{max}^2 - k_1^2 - \alpha^2}}, \quad z \in [0, H]$$

y ya que la ecuación de dispersión es formada por la derivada de esta función, tenemos que

$$f'_z(\alpha, z) = \cos\left(\sqrt{k_{max}^2 - k_1^2 - \alpha^2 z}\right)$$

Aplicando el problema y condiciones de Cauchy y el método SPPS, creados como rutinas en Matlab, se obtuvieron las representaciones de las funciones anteriores para construir la ecuación de dispersión y con ella conocer sus raíces que la satisfacen. Los valores propios obtenidos para el modelo de océano estratificado con una velocidad del sonido constante son mostrados en la Tabla 2.1:

Tabla 2.1: *Valores propios por los métodos de Modos Normales y SPPS.*

Valores Propios $[\mu_j^2 = k_1^2 + \alpha_j^2]$	
Cauchy	SPPS
0.03888906	0.03889574
0.04319867	0.04321138
0.04706863	0.04708786
0.05047740	0.05050166
0.05341951	0.05344488
0.05589471	0.05591631
0.05790587	0.05792023
0.05945827	0.05946509
0.06055891	0.06056082
0.06121527	0.06121546

La precisión de los valores propios obtenidos mediante la aproximación del método SPPS con respecto al problema de Cauchy que se considera como un método exacto, es tal que el error relativo comparando los resultados se encuentra en el orden de 10^{-5} o por debajo del 0.1 % de error.

El método SPPS es utilizado de igual manera para los cálculos numéricos de los valores propios μ_j^2 en el modelo de océano estratificado considerando un perfil de velocidad del sonido $c_0(z)$ (ver la Figura 2.3) que depende únicamente de la profundidad z ; se estableció para un experimento matemático inicial un perfil de velocidad del sonido como una función continua, el cual se describe en la Tabla 2.2.

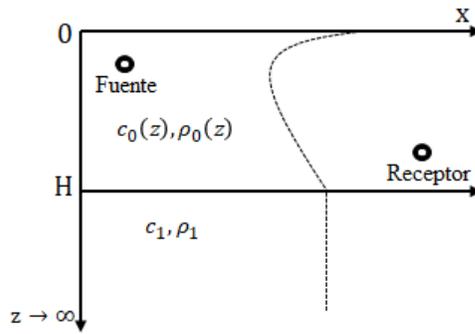


Figura 2.3: Modelo de Océano Estratificado con perfil de velocidad del sonido.

Tabla 2.2: Velocidades del Sonido Ideal.

Profundidad (m)	Velocidad (m/s)
0.00	1521
2000	1999

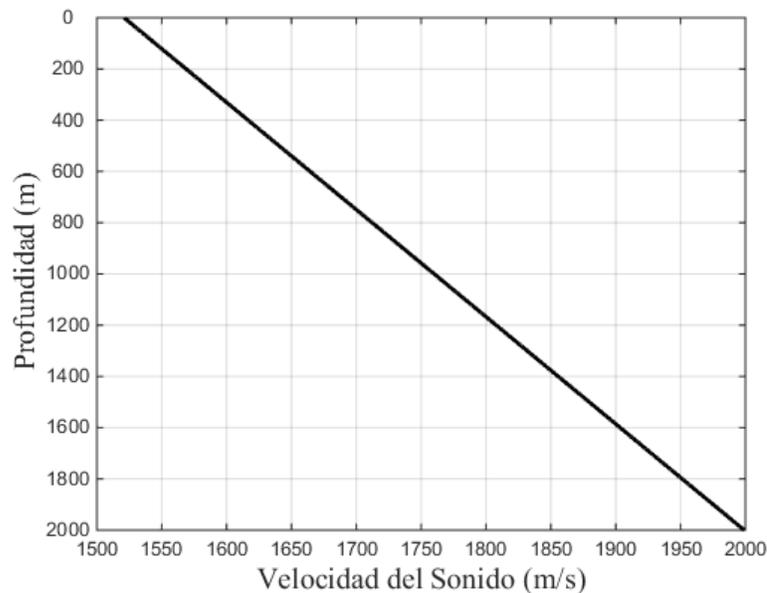


Figura 2.4: Perfil de Velocidad del Sonido Ideal.

Aplicando una función lineal y un proceso de interpolación, se obtuvo un perfil de velocidad del sonido continuo $c_0(z)$ en el intervalo $[0, H]$, el cual es mostrado en la Figura 2.4. Se consideró una frecuencia de operación de la fuente de $f_0 = 80Hz$, además de características físicas del océano como medio de propagación como densidades, $\rho_0 = 1g/cm^3$ y $\rho_1 = 1.5g/cm^3$, y velocidad del sonido en el fondo marino dado por $c_1 = 2000m/s$. La guía de onda oceánica estratificada tiene dimensiones de

longitud $r_x = 11000\text{m}$ y profundidad de $H = 2000\text{m}$ para el modelo estratificado. La fuente armónica cuenta con unas coordenadas de posición $r_x = 0\text{m}$ en el eje horizontal y a una profundidad de $z_0 = 50\text{m}$, mientras que el receptor se encuentra ubicado a una profundidad de $z = 185\text{m}$.

El campo acústico, expresado como pérdidas de transmisión por la ecuación (2.80)

$$TL(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0) = -20 \log_{10} \left| \frac{G_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0)}{G_{\varepsilon_0}(r=1)} \right| [dB]$$

el cual es obtenido mediante la construcción de la Función de Green descrita en la expresión (2.73)

$$g_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0) \simeq \sum_{j=0}^n \frac{\varphi_j(z) \bar{\varphi}_j(z_0) e^{i(\mu_j |\mathbf{x}| + \frac{\pi}{4})}}{(8\pi\mu_j |\mathbf{x}|)^{\frac{1}{2}}}$$

donde los valores μ_j son dados en la Tabla 2.1 y las funciones $\varphi_j(z)$ son dadas por la expresión (2.51) y obtenidas por el método SPPS. Este campo acústico describe las variaciones de la presión acústica o pérdidas de transmisión conforme la onda se propaga y es representado mediante la contribución de los modos propagados obtenidos.

Mediante la aplicación de la ecuación de dispersión con el perfil de velocidad del sonido antes definido (perfil lineal) se obtuvieron $n = 8$ valores propios μ_j^2 , con los cuales se puede calcular los modos propagados en la capa de agua. Las siguientes figuras muestran el comportamiento del campo acústico mediante la contribución de diferentes modos de propagación y la dependencia de las pérdidas de transmisión de la presión acústica (en dB) con la distancia de separación entre la fuente y el receptor. Estas gráficas son obtenidas mediante la aplicación de la ecuación (2.80).

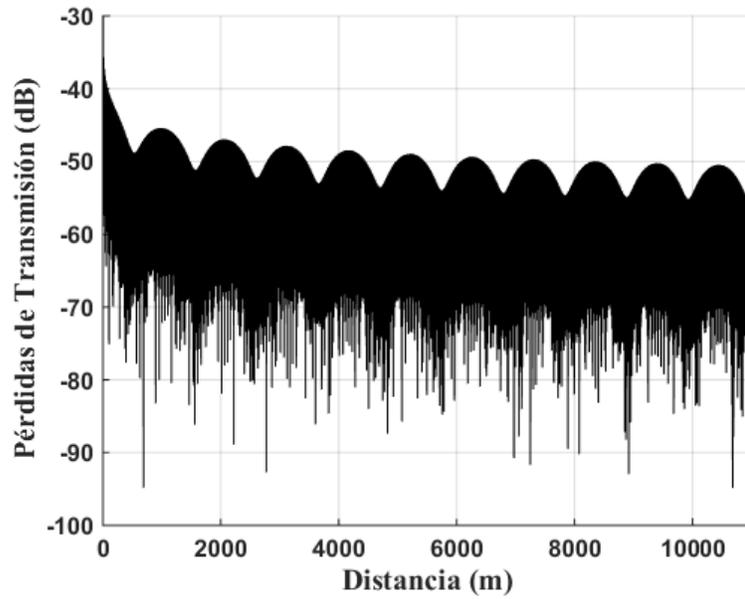


Figura 2.5: Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 1, 2$

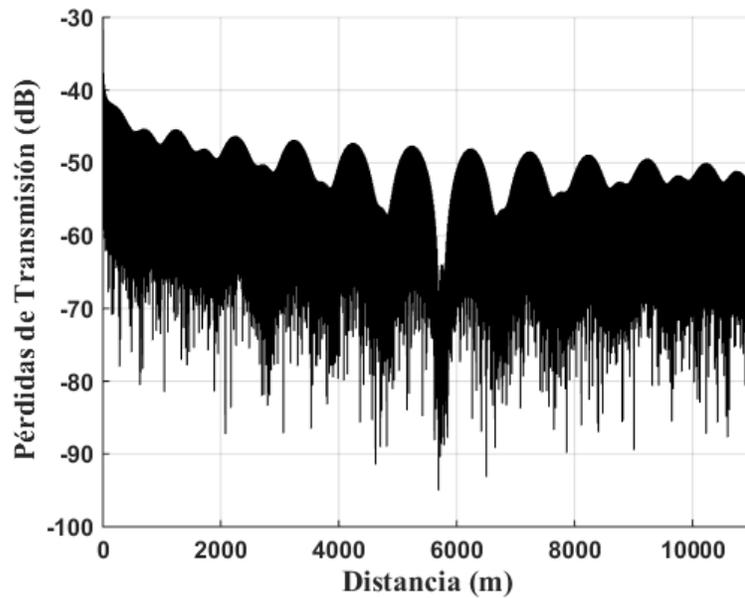


Figura 2.6: Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 1, 2, 3$

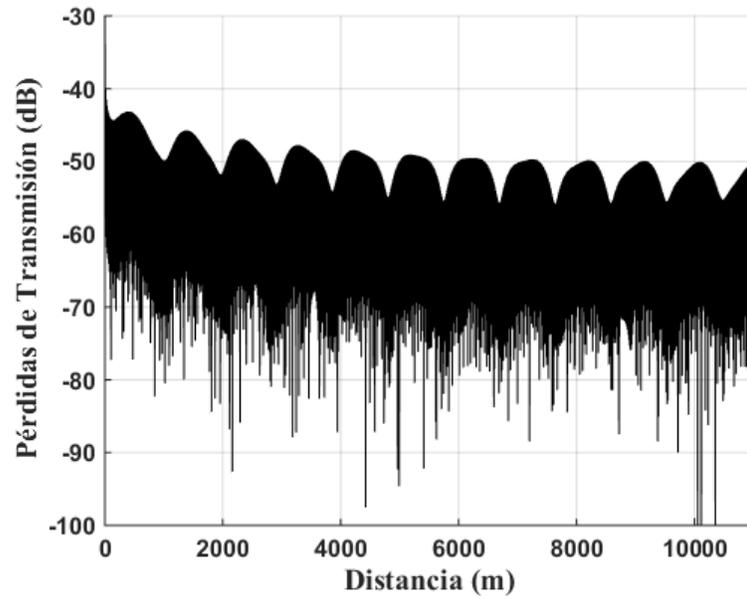


Figura 2.7: Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 2, 3, 4$

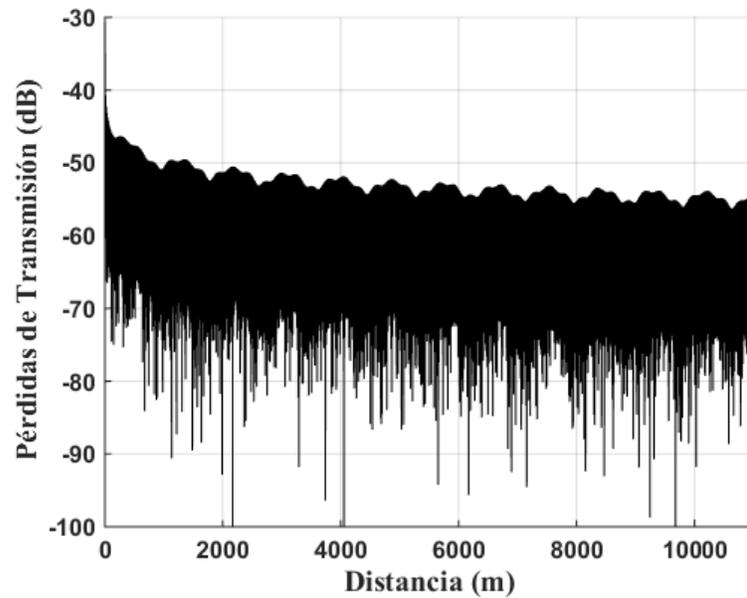


Figura 2.8: Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 3, 4, 5, 6$

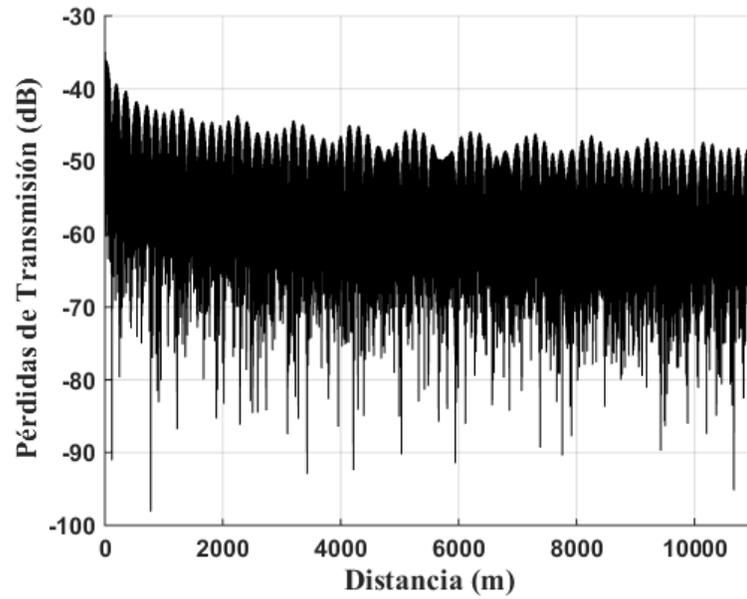


Figura 2.9: Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 1 - 8$

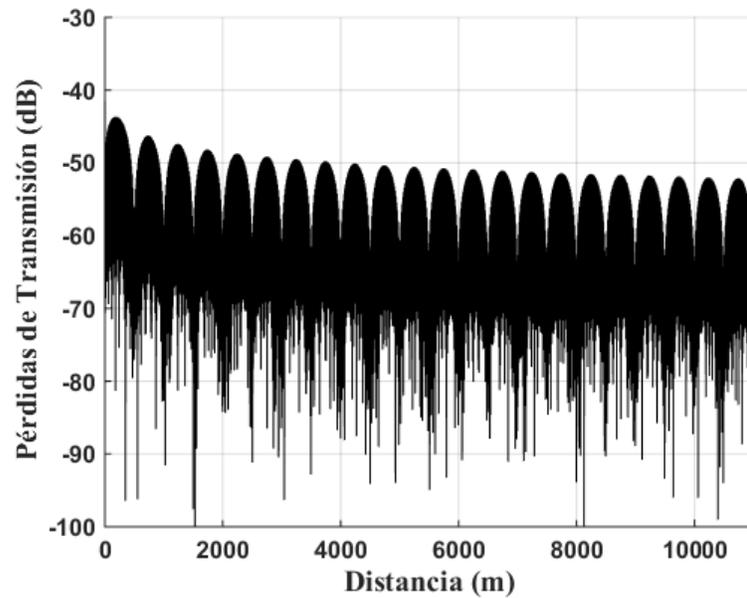


Figura 2.10: Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 1, 3, 5$

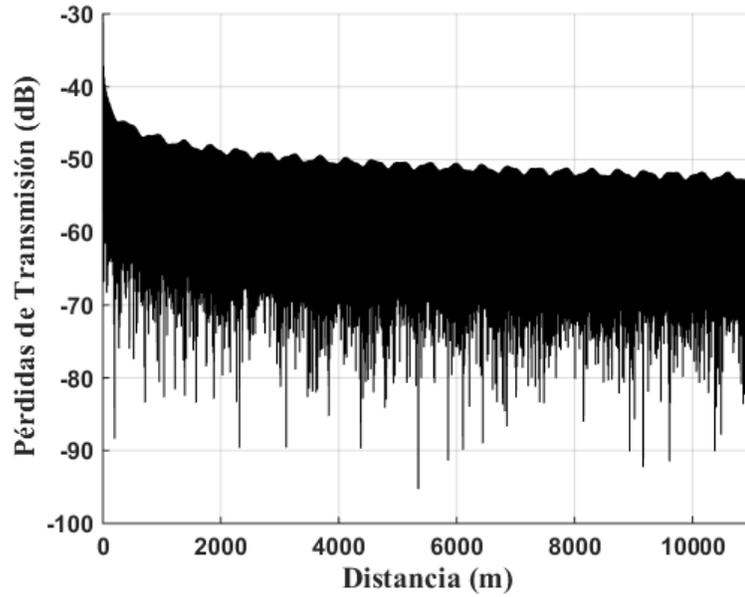


Figura 2.11: Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 2, 4, 6, 8$

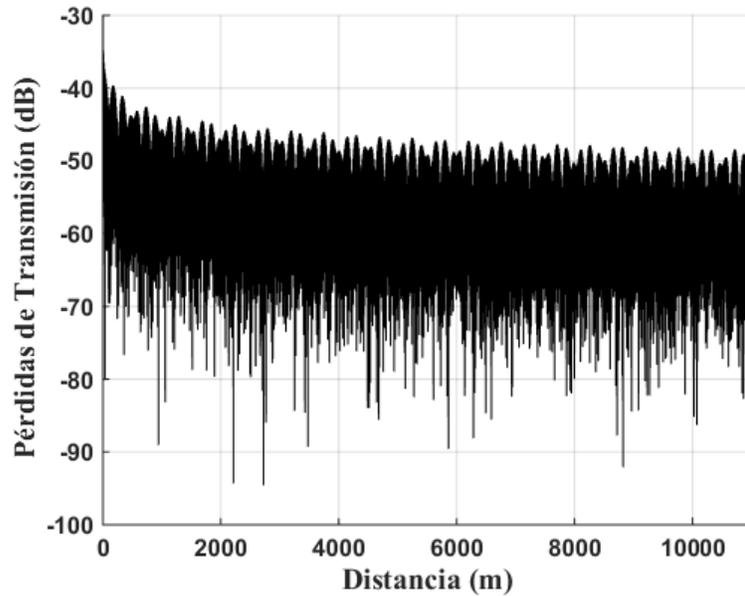


Figura 2.12: Pérdidas de Transmisión en una distancia de 20,000m para modos $j = 1, 3, 5, 7$

Las gráficas resultantes mostradas anteriormente, indican que las pérdidas de transmisión del campo acústico tienen una amplitud decreciente con respecto a la distancia, esto se debe a la dependencia de la distancia de separación r entre la fuente

y el receptor agregadas por la función de Hankel que origina una atenuación conforme las ondas se propagan desde la fuente hasta el receptor. Cuando el receptor se encuentra más alejado de la fuente, la intensidad del campo acústico es menor que cuando la fuente y el receptor están más cerca. Estos resultados proporcionan una idea de cuánta sería la distancia de separación entre fuente-receptor para poder detectar variaciones de presión de acuerdo a la sensibilidad del receptor, además de que a mayor número de modos considerados las pérdidas de transmisión será menor.

Considerando ahora que la ubicación de la fuente es $x_r = 0m$, $z = 30m$, operando a una frecuencia de $f = 80Hz$, y el receptor se encuentra a una profundidad de $z = 140m$ a una distancia de separación de la fuente de $r = 11,000m$, se muestran los siguientes resultados del campo acústico:

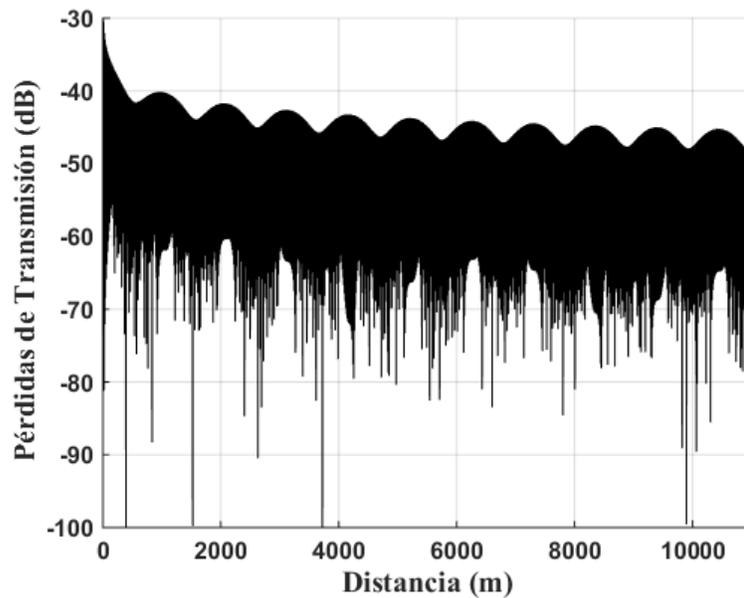


Figura 2.13: *Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 1, 2$*

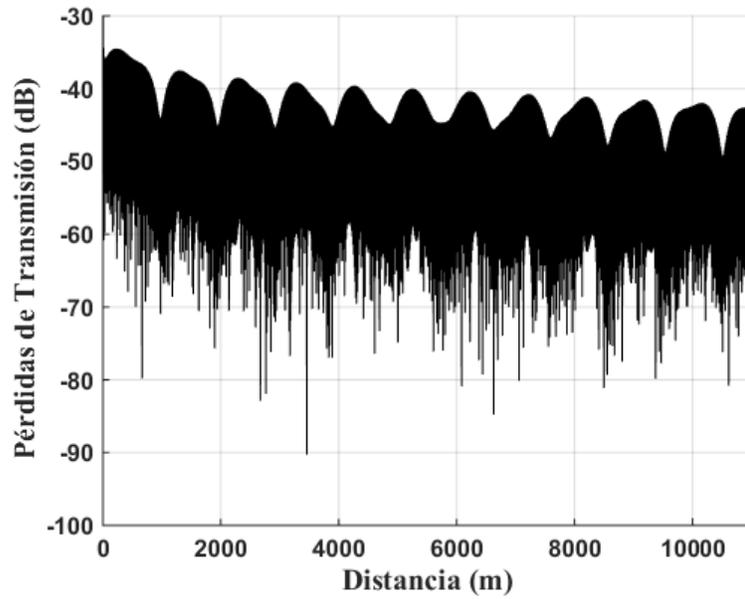


Figura 2.14: Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 1, 2, 3$

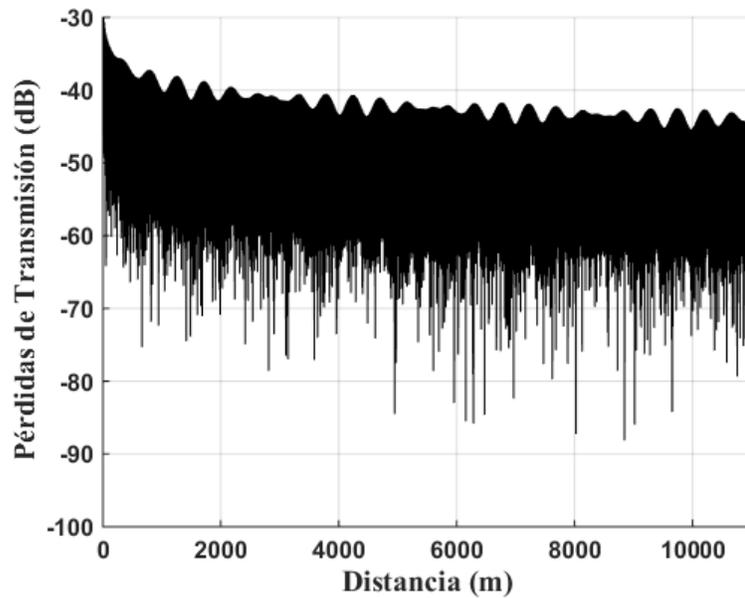


Figura 2.15: Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 1, 3, 5$

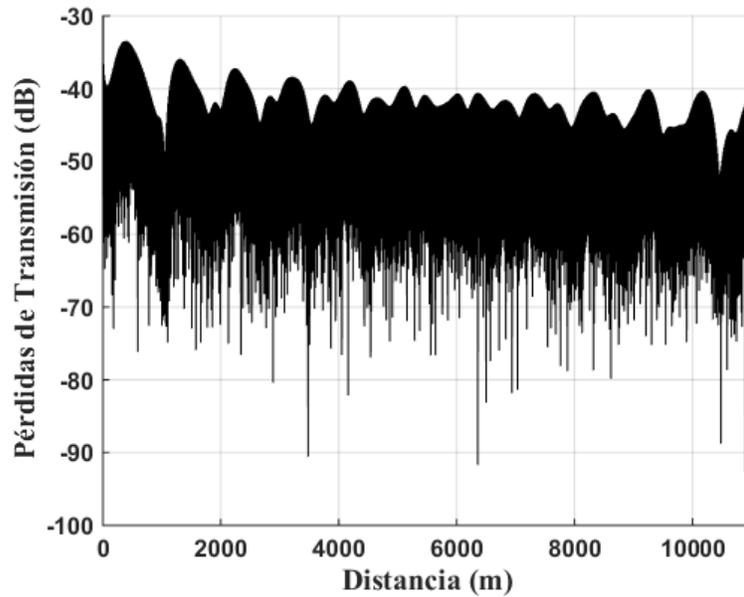


Figura 2.16: *Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 1 - 8$*

Con esta configuración de ubicación de la fuente-receptor, los resultados muestran que el comportamiento del campo acústico dado en pérdidas de transmisión son menores incluso considerando un menor número de modos propagados, ya que se encuentran en el orden de -40 dB mientras que en la configuración considerada inicialmente las pérdidas de transmisión se encontraban cerca de los -50 dB. Con esto se muestra que con el perfil de velocidad del sonido completamente lineal y con una profundidad de fuente y receptor menor, las pérdidas de transmisión serán menores y se podría abarcar una distancia mayor entre la fuente y el receptor, de igual manera que el método SPPS al tener las representaciones de las funciones principales, presentes en la ecuación de dispersión como en la asintótica de la función de Green son independientes de la configuración de posición de la fuente y del receptor.

De acuerdo con [41] y [2], se aplica un perfil de velocidad del sonido obtenido a través de mediciones naturales de la parte central del Mar Mediterráneo en donde los datos son mostrados en la Tabla 2.3. Una vez mostrada la aplicación del método SPPS, los valores propios serán obtenidos únicamente con ese método para la aproximación de la ecuación de dispersión ya que nos da la facilidad de trabajar con este tipo de curvas por medio de polinomios y la solución propuesta por el problema de Cauchy complica el resultado por medio de métodos numéricos.

Tabla 2.3: *Velocidades del Sonido en la región central del Mediterráneo: Febrero.*

Profundidad (m)	Velocidad (m/s)	Profundidad (m)	Velocidad (m/s)
0	1512.75	500	1516.75
10	1512.91	600	1517.92
20	1513.07	700	1519.24
30	1513.24	800	1520.39
50	1513.57	900	1521.67
75	1513.99	1000	1523.44
100	1514.40	1100	1524.96
125	1514.82	1200	1526.52
150	1515.23	1300	1528.09
200	1515.53	1400	1529.75
250	1516.00	1500	1531.50
300	1516.24	1750	1535.69
400	1516.75	2000	1539.95

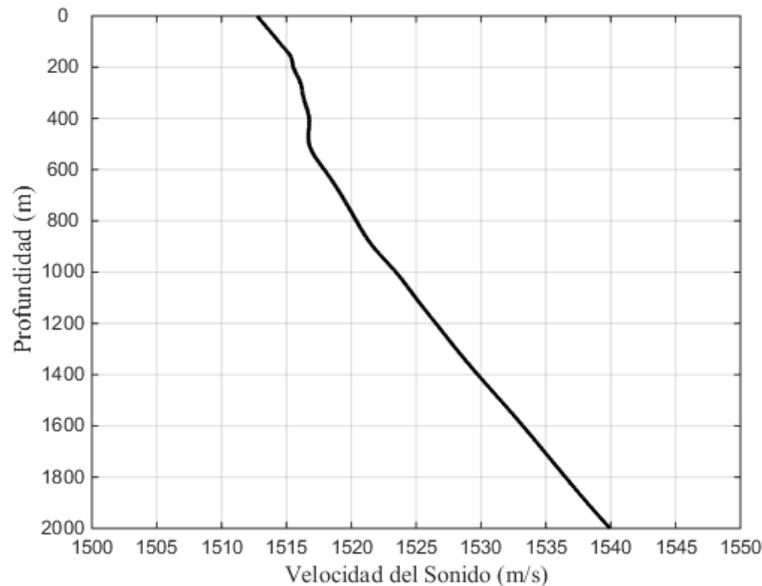


Figura 2.17: *Perfil de velocidad del sonido en la región central del Mediterráneo en Febrero.*

El perfil de velocidad del sonido $c_0(z)$ a utilizar es mostrado en la Figura 2.17, el cual fue obtenido mediante un proceso de interpolación aplicado a la Tabla 2.3. Se considera una frecuencia de operación de la fuente de $f_0 = 180Hz$, además de características físicas del océano como medio de propagación como densidades, $\rho_0 = 1g/cm^3$ y $\rho_1 = 1.5g/cm^3$, y velocidad del sonido en el fondo marino dado por $c_1 = 1580m/s$. La guía de onda oceánica estratificada tiene dimensiones de longitud $r_x =$

11000m y profundidad de $H = 2000\text{m}$ para el modelo estratificado como se muestra en la Figura 2.3. La fuente armónica cuenta con unas coordenadas de posición $r_x = 0\text{m}$ en el eje horizontal y a una profundidad de $z_0 = 50\text{m}$, mientras que el receptor se encuentra ubicado a una profundidad de $z = 190\text{m}$.

Con el perfil de velocidad propuesto $c_0(z)$, se obtuvieron $n = 6$ valores propios μ_j^2 mediante el método SPPS y con ellos se calcularon los modos de propagación que contribuyen al campo acústico originado por una fuente puntual estacionaria dado en pérdidas de transmisión, algunos resultados de la contribución de modos al campo acústico que se obtuvieron se muestran a continuación:

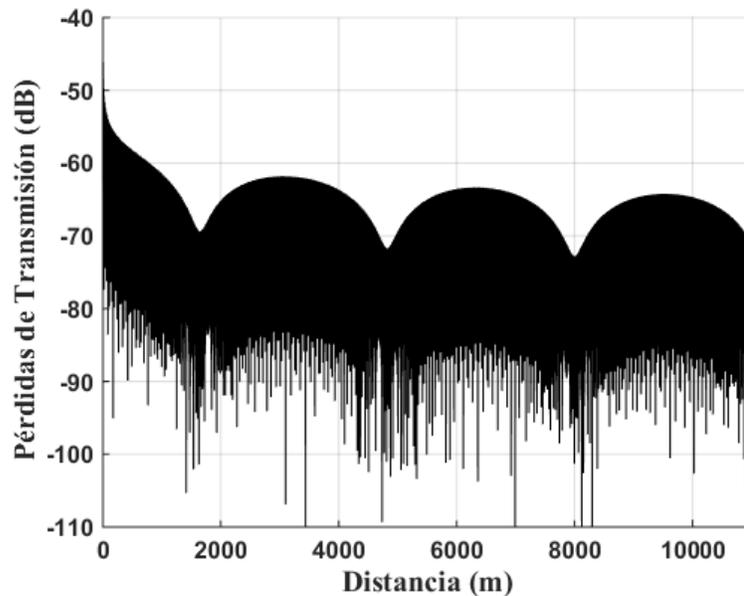


Figura 2.18: *Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 1, 2$*

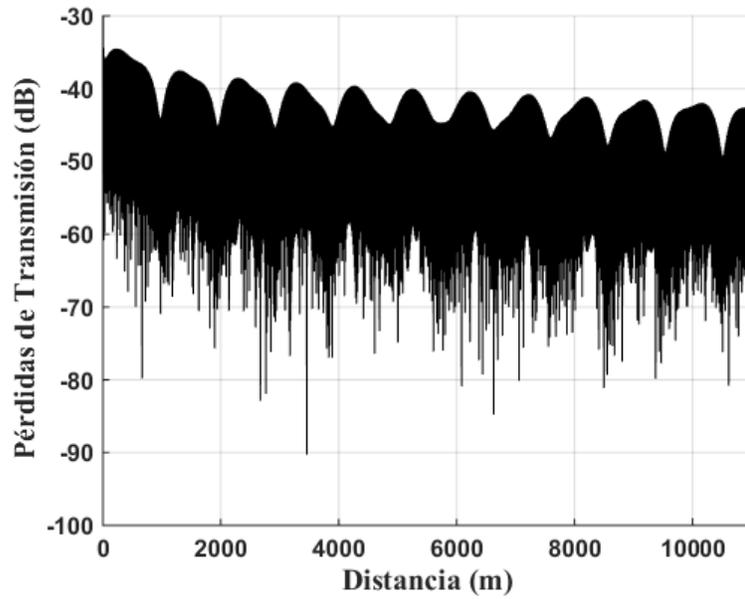


Figura 2.19: Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 1, 2, 3$

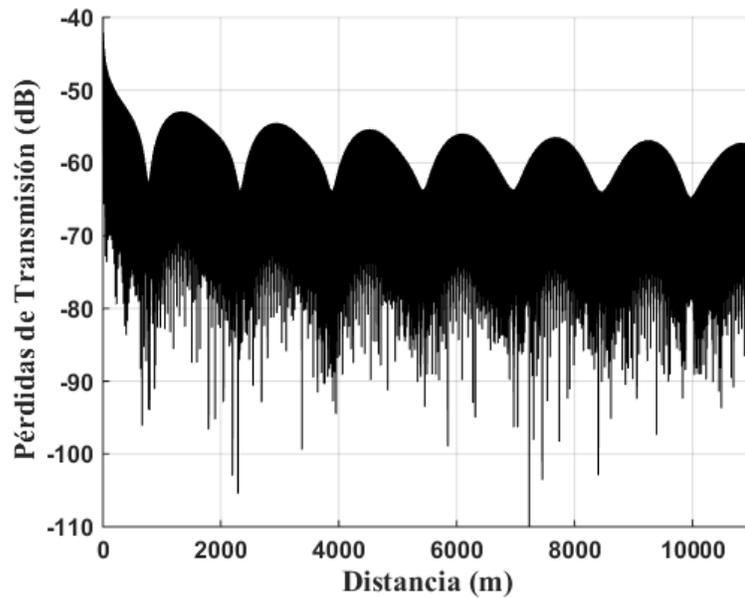


Figura 2.20: Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 2, 4, 6$

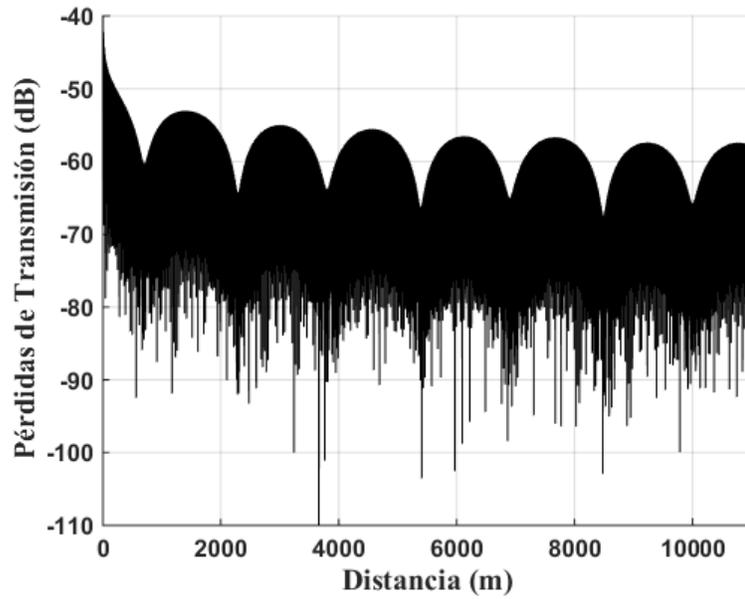


Figura 2.21: Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 4, 5, 6$

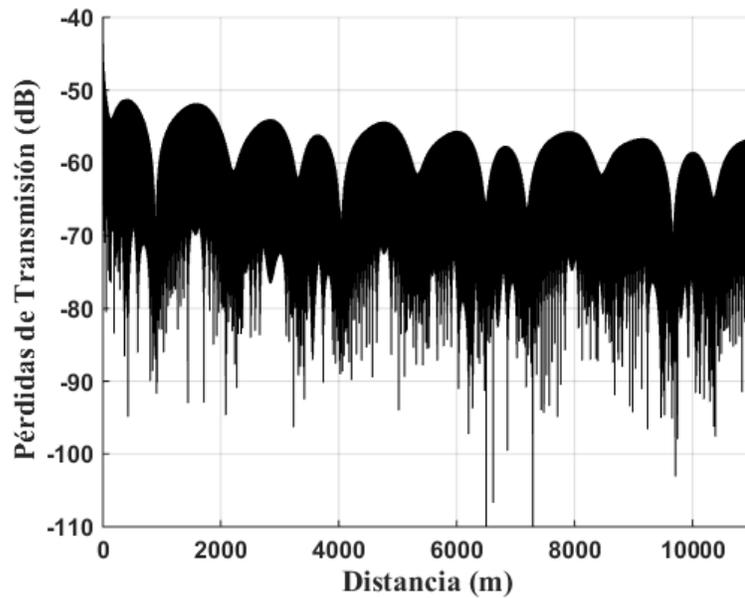


Figura 2.22: Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11,000m para modos $j = 1 - 6$

Se mostraron los resultados relacionados al problema de propagación de ondas originadas por una fuente armónica puntual estacionaria sumergida en el océano, el cual en este capítulo se considera como un medio estratificado; como ya se mencionó,

los resultados son mostrados como pérdidas de transmisión del campo acústico al propagarse las ondas. Se observa que los valores propios obtenidos con el perfil de velocidad del sonido de la parte central del Mediterráneo son menos con respecto a los obtenidos con una velocidad del sonido constante o un perfil de velocidad completamente lineal y de acuerdo a la contribución de cierto número de modos el campo como pérdidas de transmisión varía a lo largo de la distancia de análisis dándonos una idea de la energía que se recibirá en el receptor, así como mostrar la distancia de separación en la que será mejor colocar el receptor. En este caso se observa que las pérdidas de transmisión se encuentran cercanas a los -60dB, que incluso es una intensidad menor (mayores pérdidas) respecto a los escenarios matemáticos considerados anteriormente, en donde se concluye que es por el menor número de valores propios obtenidos y por consiguiente menos número de modos propagados que son los que contribuyen al campo acústico. Con esto, se podría realizar pruebas con profundidades de fuente y receptor menores a las consideradas en el experimento para así obtener menores pérdidas.

En general, en este capítulo se muestra que la descomposición espectral es correctamente utilizada para la representación de modos normales para así obtener la asintótica de la función de Green relacionada a la contribución del campo acústico para campo lejano, aunque igual cuenta con un término relacionado al campo cercano. El problema espectral considerado cuenta con un espectro discreto que actúa como los valores propios del problema y se conectan con los modos propagados y de un espectro continuo relacionado a los modos desvanecientes en el campo cercano. Una de las principales ventajas del método de modos normales es que al obtener las funciones propias no tiene alguna restricción de ubicación y configuración de la fuente como del receptor; funciones propias que se obtienen mediante la aplicación del método SPPS y que permite una facilidad de utilización de funciones polinomiales utilizadas como potenciales del problema espectral, en este caso perfiles de velocidad del sonido, para ser aplicadas en las fórmulas de integración recursivas, además de las funciones propias obtenidas por el método SPPS y que forman parte de la función de Green permiten una descripción de las pérdidas de transmisión dependiente de la distancia r .

Capítulo 3

CAMPO PRODUCIDO POR UNA FUENTE ESTACIONARIA EN UN MODELO DE OCÉANO CUASI ESTRATIFICADO

3.1. Introducción

Este capítulo está dedicado al análisis numérico de la propagación de ondas acústicas submarinas generadas por una fuente en un modelo cuasi estratificado del océano real en tres dimensiones, esto mediante la obtención de la Función de Green, que como se mencionó en el capítulo anterior es una función asintótica que ayuda a obtener el comportamiento del campo generado por la propagación de ondas acústicas. El modelo de cuasi estratificación del océano cuenta con una estructura de dos capas como el modelo estratificado, formado por la guía de onda oceánica y el fondo marino, sin embargo en este modelo, el medio de propagación de la onda cuenta con sus características físicas, la densidad (ρ_0) y la velocidad del sonido (c_0), las cuales dependen de un parámetro pequeño $\varepsilon > 0$ que origina una variación lenta en las coordenadas de la dirección horizontal lo cual hace que se deje un poco el significado de ser un modelo ideal a diferencia de la estructura estratificada, esto es

$$\rho_0 = \rho_0(\varepsilon \mathbf{x}, z), c_0 = c_0(\varepsilon \mathbf{x}, z) \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ representa la coordenada horizontal y $z \in \mathbb{R}$ la coordenada vertical. De igual manera este parámetro pequeño ε afecta la interfaz que se encuentra entre la placa de agua y el fondo, por lo que esta interfaz Ω también está variando en las direcciones horizontales y se define como

$$\Omega = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \phi(\varepsilon \mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\} \quad (3.2)$$

El análisis e investigación del modelo contemplado en este capítulo ha sido desarrollado y publicado en una serie de artículos (consultar [8][9][10]), en donde se muestra la combinación de la descomposición de modo con respecto a las funciones propias del operador transversal Sturm-Liouville dependiente del parámetro horizontal y el método de rayos.

Debido a que la solución de la ecuación de propagación en el océano cuasi estratificado no puede ser expresada en términos de la función de Hankel $H_0^{(1)}$ ya que el problema a resolver no se encuentra representado totalmente como el operador de Helmholtz $\Delta_{\mathbf{x}} + k^2, k > 0$ por el parámetro pequeño que causa la variación lenta en la dirección horizontal de las características del medio y de la interfaz entre la capa de agua y el fondo, la solución de la ecuación de propagación acústica es buscada de la forma

$$u_{\varepsilon}(\mathbf{x}, z) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}, z) e^{\frac{i}{\varepsilon} S_j(\mathbf{x})} + O(\varepsilon^2) \quad (3.3)$$

donde $\varphi_j(\mathbf{x}, z)$ son las funciones propias del operador transversal Sturm-Liouville $\mathcal{L}(\mathbf{x})$ dependiente del punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ como un parámetro horizontal, $S_j(\mathbf{x})$ es la fase la cual es la solución de la ecuación eiconal

$$(\nabla S_j(\mathbf{x}))^2 = \mu_j^2(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (3.4)$$

donde $\mu_j^2(\mathbf{x})$ es un eigen-valor o valor propio del operador $\mathcal{L}(\mathbf{x})$. El coeficiente $\alpha_j(\mathbf{x})$ satisface la ecuación de transporte

$$2\nabla S_j(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \alpha_j(\mathbf{x}) + \Delta S_j(\mathbf{x}) \alpha_j(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.5)$$

Como fue mencionado, para la solución de la ecuación eiconal y la ecuación de transporte, es aplicado el método de rayos.

3.2. Planteamiento del Problema en Tres Dimensiones

Introducimos las coordenadas en \mathbb{R}^3 para la definición de cada una de las capas del modelo cuasi estratificado como $(\mathbf{y}, z) = (y_1, y_2, z)$, en donde la variable \mathbf{y} está

relacionada con las coordenadas horizontales y y z con la coordenada vertical, véase la Figura 3.1. Sea $\Pi_\varepsilon = \Pi_\varepsilon^1 \cup \Pi_\varepsilon^2$ un dominio en \mathbb{R}^3 tal que

$$\Pi_\varepsilon^1 = \{(\mathbf{y}, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \phi(\varepsilon\mathbf{y})\} \quad (3.6)$$

$$\Pi_\varepsilon^2 = \{(\mathbf{y}, z) \in \mathbb{R}^3 : \phi(\varepsilon\mathbf{y}) < z < +\infty\} \quad (3.7)$$

donde $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y $\varepsilon > 0$ es un parámetro pequeño que caracteriza una variación lenta en la dirección horizontal de las características físicas del medio y de la interfaz entre la guía de onda y el fondo marino la cual se define como

$$\Omega_\varepsilon = \{(\mathbf{y}, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \phi(\varepsilon\mathbf{y}), \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2\} \quad (3.8)$$

donde ϕ es una función real valuada limitada con las derivadas parciales ϕ_{y_1} , ϕ_{y_2} tales que

$$\inf_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2} \phi(\varepsilon\mathbf{y}) > 0$$

Las características físicas del océano cuasi estratificado son denotadas por

$$\rho(\varepsilon\mathbf{y}, z) = \begin{cases} \rho_0(\varepsilon\mathbf{y}, z) & 0 \leq z \leq \phi(\varepsilon\mathbf{y}), \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \\ \rho_1 & \phi(\varepsilon\mathbf{y}) < z < +\infty, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$c(\varepsilon\mathbf{y}, z) = \begin{cases} c_0(\varepsilon\mathbf{y}, z) & 0 \leq z \leq \phi(\varepsilon\mathbf{y}), \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \\ c_1 & \phi(\varepsilon\mathbf{y}) < z < +\infty, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (3.10)$$

donde $\rho_0(\varepsilon\mathbf{y}, z) > 0$ es la densidad del agua y ρ_1 es la densidad del fondo, además $c_0(\varepsilon\mathbf{y}, z) > 0$ es la velocidad del sonido en el agua y c_1 es la velocidad del sonido en el fondo. De esto suponemos que

$$\max_{(\mathbf{y}, z) \in \Pi_\varepsilon^1} c_0(\varepsilon\mathbf{y}, z) < c_1, \quad \sup_{(\mathbf{y}, z) \in \Pi_\varepsilon^1} \rho_0(\varepsilon\mathbf{y}, z) < \rho_1 \quad (3.11)$$

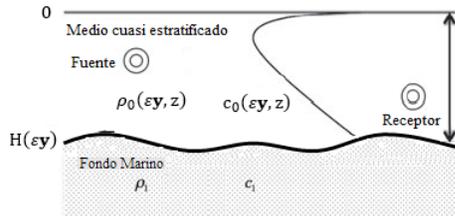


Figura 3.1: Modelo de océano cuasi estratificado.

En el dominio Π_ε consideramos la ecuación de Helmholtz:

$$A g_\varepsilon(\mathbf{y}, z) = \left(\Delta_{\mathbf{y}} + \mathcal{L} \left(\varepsilon \mathbf{y}, z, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) g_\varepsilon(\mathbf{y}, z) = -\delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \delta(z - z_0), \quad (\mathbf{y}, z) \in \Pi_\varepsilon \setminus \Omega_\varepsilon, \quad (\mathbf{y}_0, z_0) \in \Gamma \quad (3.12)$$

donde $\Delta_{\mathbf{y}} = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$ es el Laplaciano, $\mathcal{L}(\varepsilon \mathbf{y}, z, \frac{\partial}{\partial z}) v(z) = \frac{d^2 v(z)}{dz^2} + k^2(\varepsilon \mathbf{y}, z)$, $z \in \mathbb{R} \setminus \phi(\varepsilon \mathbf{y})$ es el operador transversal Sturm-Liouville dependiente de los parámetros $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ y un parámetro pequeño $\varepsilon > 0$ el cual caracteriza la lentitud del cambio del medio en las direcciones horizontales, $\delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \delta(z - z_0)$ es la función delta y

$$k^2(\varepsilon \mathbf{y}, z) = \begin{cases} k_0^2(\varepsilon \mathbf{y}, z) = \frac{\omega^2}{c_0^2(\varepsilon \mathbf{y}, z)} : 0 \leq z \leq \phi(\varepsilon \mathbf{y}), \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \\ k_1^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} : \phi(\varepsilon \mathbf{y}) < z < +\infty, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (3.13)$$

donde $k^2(\varepsilon \mathbf{y}, z)$ es una función continua a trozos que representa los valores de número de onda. Suponemos que las siguientes condiciones en la superficie del océano y entre la interfaz entre la guía de onda oceánica y el fondo son dadas

$$g_\varepsilon(\mathbf{y}, z = 0) = 0, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} [g_\varepsilon]_{z=\phi(\varepsilon \mathbf{y})} &= (g_\varepsilon(\mathbf{y}, \phi(\varepsilon \mathbf{y}) - 0) - g_\varepsilon(\mathbf{y}, \phi(\varepsilon \mathbf{y}) + 0)) = 0 \\ \left[\frac{1}{\rho(\varepsilon \mathbf{y}, z)} \frac{d g_\varepsilon}{d n} \right]_{z=\phi(\varepsilon \mathbf{y})} &= \left(\frac{1}{\rho_0(\varepsilon \mathbf{y}, z)} \frac{d g_\varepsilon}{d n} - \frac{1}{\rho_1} \frac{d g_\varepsilon}{d n} \right) \Big|_{z=\phi(\varepsilon \mathbf{y})} = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Notar que el problema definido en (3.12), (3.13), (3.14) y (3.15), definen la propagación de ondas acústicas en el océano cuasi estratificado de una fuente estacionaria localizada en el agua. El parámetro pequeño antes mencionado ε , describe la variación lenta en la interfaz entre el agua y el fondo oceánico, además de las variaciones en la velocidad del sonido y de la densidad del agua en las direcciones horizontales.

3.3. Construcción de la Función de Green de Problema Cuasi Estratificado

Para el análisis y desarrollo de la obtención de la Función de Green del problema cuasi estratificado aplicamos un cambio de variable $\mathbf{x} = \varepsilon \mathbf{y}$, $\mathbf{x}_0 = \varepsilon \mathbf{y}_0$ sobre la ecuación (3.12), la cual es transformada en:

$$\begin{aligned} (\varepsilon^2 \Delta_{\mathbf{x}} + \mathcal{L}(\mathbf{x}, z, \frac{\partial}{\partial z})) G_\varepsilon(\mathbf{x}, z) &= -\varepsilon^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(z - z_0), (\mathbf{x}, z), (\mathbf{x}_0, z_0) \in \Pi_\varepsilon \setminus \Omega_\varepsilon, \\ \Omega_\varepsilon &= \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \phi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ es la variable en las direcciones horizontales y $z \in \mathbb{R}$ es la variable relacionada a la dirección vertical; además acompañada de las siguientes condiciones de frontera

$$G_\varepsilon(\mathbf{x}, z = 0) = 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} [G_\varepsilon(\mathbf{x}, z)]_{z=\phi(\mathbf{x})} &= (G_\varepsilon(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}) - 0) - G_\varepsilon(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}) + 0)) = 0 \\ \left[\frac{1}{\rho(\mathbf{x}, z)} \frac{\partial G_\varepsilon(\mathbf{x}, z)}{\partial z} + \varepsilon^2 \left(\phi'_{x_1}(\mathbf{x}) \frac{\partial G_\varepsilon(\mathbf{x}, z)}{\partial x_1} + \phi'_{x_2}(\mathbf{x}) \frac{\partial G_\varepsilon(\mathbf{x}, z)}{\partial x_2} \right) \right]_{z=\phi(\mathbf{x})} &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Una solución asintótica del problema (3.16), (3.17) y (3.18) para $\varepsilon \rightarrow 0$ es llamada la aproximación adiabática. La amplia clase de problemas adiabáticos considerados en [42], en donde el bien conocido método de Maslov (ver [43][44][45][46]) ha sido extendido los símbolos de operadores valuados. El asintótico de $G_\varepsilon(\mathbf{x}, z)$ es estudiado en una amplia variedad de artículos, ver [9][8][42], por medio del llamado método de modos verticales (normales) y rayos horizontales, siendo una combinación de la descomposición espectral y el método WKB.

Para la solución del problema planteado en (3.16), consideramos la ecuación homogénea

$$\left(\varepsilon^2 \Delta_{\mathbf{x}} + \mathcal{L} \left(\mathbf{x}, z, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) u_\varepsilon(\mathbf{x}, z) = 0 \quad (3.19)$$

El término principal del asintótico formal de soluciones de la ecuación (3.19) es buscado de la forma

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}, z) = \sum_{j=1}^N e^{i \frac{S_j(\mathbf{x})}{\varepsilon}} b_j(\mathbf{x}, z) \quad (3.20)$$

suponiendo funciones de valor real $S_j(\mathbf{x})$ y $b_j(\mathbf{x}, z)$ tales que

$$\left(\varepsilon^2 \Delta_{\mathbf{x}} + \mathcal{L} \left(\mathbf{x}, z, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) u_\varepsilon(\mathbf{x}, z) = O(\varepsilon^2) \quad (3.21)$$

Entonces, sustituyendo (3.20) dentro de (3.21) y colectando términos bajo ε^0 y ε obtenemos que

$$\left(\varepsilon^2 \Delta_{\mathbf{x}} + \mathcal{L} \left(\mathbf{x}, z, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) e^{i \frac{S_j(\mathbf{x})}{\varepsilon}} b_j(\mathbf{x}, z) = e^{i \frac{S_j(\mathbf{x})}{\varepsilon}} [R_0^j b_j(\mathbf{x}, z) + i \varepsilon R_1^j b_j(\mathbf{x}, z)] + O(\varepsilon^2) \quad (3.22)$$

donde

$$R_0^j b_j(\mathbf{x}, z) = \left[-(\nabla S_j(\mathbf{x}))^2 + \mathcal{L} \left(\mathbf{x}, z, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] b_j(\mathbf{x}, z) \quad (3.23)$$

y

$$R_1^j b_j(\mathbf{x}, z) = [2 \nabla S_j(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \Delta S_j(\mathbf{x})] b_j(\mathbf{x}, z) \quad (3.24)$$

De (3.21) y (3.22), tenemos que

$$R_0^j b_j(\mathbf{x}, z) = 0, R_1^j b_j(\mathbf{x}, z) = 0 \quad (3.25)$$

donde la igualdad $R_0^j b_j(\mathbf{x}, z) = 0$ implica que

$$(\nabla S_j(\mathbf{x}))^2 = \mu_j^2(\mathbf{x}) \quad (3.26)$$

conocida como ecuación eiconal y donde $\mu_j^2(\mathbf{x}) \in (k_1^2, k_{\text{máx}}^2)$ es un valor propio del operador transversal $\mathcal{L}(\mathbf{x}, z, \frac{\partial}{\partial z})$ para una $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, y

$$b_j(\mathbf{x}, z) = \alpha_j(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x}, z) \quad (3.27)$$

donde $\psi_j(\mathbf{x}, z)$ es una función propia de valor real del operador $\mathcal{L}(\mathbf{x}, z, \frac{\partial}{\partial z})$ correspondiente al valor propio $\mu_j^2(\mathbf{x})$. Se puede normalizar $\psi_j(\mathbf{x}, z)$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \psi_j^2(\mathbf{x}, z) dz = 1 \quad (3.28)$$

donde por diferenciación de (3.28) con respecto a \mathbf{x} tenemos

$$\int_{\mathbb{R}_+} \nabla_{\mathbf{x}} \psi_j(\mathbf{x}, z) \psi_j(\mathbf{x}, z) dz = 0 \quad (3.29)$$

Tomando en cuenta que $R_1^j b_j(\mathbf{x}, z) = 0$, además de (3.28) y (3.29), obtenemos que:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} R_1^j b_j(\mathbf{x}, z) \psi_j(\mathbf{x}, z) dz = \\ 2\nabla S_j(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \alpha_j(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}_+} \psi_j^2(\mathbf{x}, z) dz + 2\nabla S_j(\mathbf{x}) \cdot \alpha_j(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}_+} \nabla_{\mathbf{x}} \psi_j(\mathbf{x}, z) \psi_j(\mathbf{x}, z) dz + \\ & \Delta S_j(\mathbf{x}) \alpha_j(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}_+} \psi_j^2(\mathbf{x}, z) dz = 2\nabla S_j(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \alpha_j(\mathbf{x}) + \Delta S_j(\mathbf{x}) \alpha_j(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde la igualdad

$$2\nabla S_j(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \alpha_j(\mathbf{x}) + \Delta S_j(\mathbf{x}) \alpha_j(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.31)$$

es llamada la ecuación de transporte y ayuda para la definición de $\alpha_j(\mathbf{x})$.

La ecuación eiconal (3.26) y la ecuación de transporte (3.31) son integradas por medio del método estándar de rayos en dos dimensiones (ver [8][4]). Los rayos son buscados de la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^j(\sigma, \theta) = (x_1^j(\sigma, \theta), x_2^j(\sigma, \theta)) \quad (3.32)$$

donde σ es la longitud del arco, θ es el parámetro de rayo, y $\mathbf{x}^j(\sigma, \theta)$ satisface el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\mu_j(\mathbf{x}^j(\sigma, \theta)) \frac{d(\mathbf{x}^j(\sigma, \theta))}{d\sigma} \right) = \nabla_{\mathbf{x}} \mu_j(\mathbf{x}^j(\sigma, \theta)) \quad (3.33)$$

Suponemos que los rayos inician en el punto \mathbf{x}_0 , entonces el parámetro θ define el rayo $\Gamma_j(\theta)$. Es bien sabido que a lo largo del rayo $\Gamma_j(\theta)$ la fase S_j satisface la ecuación

$$\frac{dS_j(\mathbf{x}^j(\sigma, \theta))}{d\sigma} = \mu_j(\mathbf{x}^j(\sigma, \theta)) \quad (3.34)$$

por lo que

$$S_j(\mathbf{x}^j(\sigma, \theta)) = S_j(\mathbf{x}^j(0, \theta)) + \int_0^\sigma \mu_j(\mathbf{x}^j(\gamma, \theta)) d\gamma \quad (3.35)$$

La ecuación de transporte (3.31) a lo largo del rayo $\Gamma_j(\theta)$ satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{1}{\sqrt{|J_j(\sigma, \theta)|}} \frac{d}{d\sigma} \left(\sqrt{|J_j(\sigma, \theta)|} \alpha_j(\mathbf{x}^j(\sigma, \theta)) \right) = 0 \quad (3.36)$$

donde

$$J_j(\sigma, \theta) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^j(\sigma, \theta)}{\partial \sigma} & \frac{\partial x_1^j(\sigma, \theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2^j(\sigma, \theta)}{\partial \sigma} & \frac{\partial x_2^j(\sigma, \theta)}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

el cual es la divergencia geométrica de los rayos horizontales en el punto $\mathbf{x} = \mathbf{x}^j(\sigma, \theta)$.

La expresión (3.36) implica que

$$\alpha_j(\mathbf{x}^j(\sigma, \theta)) = \frac{B_j(\theta)}{\sqrt{|J_j(\sigma, \theta)|}} \quad (3.38)$$

así

$$b_j(\mathbf{x}^j(\sigma, \theta), z) = \frac{B_j(\theta) \psi_j(\mathbf{x}^j(\sigma, \theta), z)}{\sqrt{|J_j(\sigma, \theta)|}} \quad (3.39)$$

donde el coeficiente $B_j(\theta)$ tiene que ser definido.

Para la definición de $B_j(\theta)$ nos apoyamos por el principio de localización. Este principio establece que en un vecindario pequeño del punto de la fuente (\mathbf{x}, z_0) podemos suponer que $\rho = \rho(\mathbf{x}_0, z)$, $k = k(\mathbf{x}_0, z)$ y $B_j(\theta)$ son definidos bajo la condición que el cuasi modo $e^{i \frac{S_j(\mathbf{x})}{\varepsilon}} b_j(\mathbf{x}, z)$ coincide con el modo de número j de la ecuación

$$\left(\varepsilon^2 \Delta_{\mathbf{x}} + \rho(\mathbf{x}_0, z) \frac{\partial}{\partial z} \rho^{-1}(\mathbf{x}_0, z) \frac{\partial}{\partial z} + k^2(\mathbf{x}_0, z) \right) g_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0) = -\varepsilon^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(z - z_0) \quad (3.40)$$

con las condiciones de frontera

$$g_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z_0, z = 0) = 0 \quad (3.41)$$

$$[g_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z_0, z)]_{z=\phi(\mathbf{x})} = 0, \quad \left[\frac{1}{\rho(\mathbf{x}_0, z)} \frac{\partial g_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z_0, z)}{\partial z} \right]_{z=\phi(\mathbf{x})} = 0 \quad (3.42)$$

Por lo tanto, de acuerdo con (2.73), que es la expresión de los modos propagados en el análisis de la Función de Green del problema estratificado, tenemos

$$g_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z_0, z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} \varphi_j(\mathbf{x}_0, z_0) \varphi_j(\mathbf{x}, z) e^{i(\mu_j(\mathbf{x}_0) \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}{\varepsilon} + \frac{\pi}{4})}}{(8\pi\mu_j(\mathbf{x}_0) |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)^{\frac{1}{2}}} + (1 + O(\varepsilon^2)) \quad (3.43)$$

donde $\varphi_j(\mathbf{x}_0, z)$ son las funciones propias normalizadas en el espacio $L^2_{\rho^{-1}(\mathbf{x}_0, z)}(\mathbb{R}_+)$ del operador $\mathcal{L}(\mathbf{x}, z, \frac{\partial}{\partial z})$ correspondientes al valor propio $\mu_j^2(\mathbf{x}_0)$. La comparación entre (3.39) y (3.43) da la expresión para $B_j(\theta)$ como

$$B_j(\theta) = \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} \varphi_j(\mathbf{x}_0, z_0) e^{i\frac{\pi}{4}}}{(8\pi\mu_j(\mathbf{x}_0))^{\frac{1}{2}} \|\psi_j(\mathbf{x}_0, z_0)\|_{L^2_{\rho^{-1}(\mathbf{x}_0, z)}(\mathbb{R}_+)}} \quad (3.44)$$

Por lo tanto,

$$b_j(\mathbf{x}^j(\sigma, \theta), z) = \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \varphi_j(\mathbf{x}_0, z_0) \psi_j(\mathbf{x}^j(\sigma, \theta), z)}{\sqrt{8\pi\mu_j(\mathbf{x}_0) |J_j(\sigma, \theta)|} \|\psi_j(\mathbf{x}_0, z_0)\|_{L^2_{\rho^{-1}(\mathbf{x}_0, z)}(\mathbb{R}_+)}} \quad (3.45)$$

Así, la solución asintótica del problema (3.16), (3.17) y (3.18) es dada por la fórmula

$$G_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z_0, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \varphi_j(\mathbf{x}_0, z_0) \psi_j(\mathbf{x}^j(\sigma, \theta), z) e^{i\left(\frac{S_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\varepsilon}\right)}}{\sqrt{8\pi\mu_j(\mathbf{x}_0) |J_j(\sigma, \theta)|} \|\psi_j(\mathbf{x}_0, z_0)\|_{L^2_{\rho^{-1}(\mathbf{x}_0, z)}(\mathbb{R}_+)}} + (1 + O(\varepsilon^2)) \quad (3.46)$$

donde $\mathbf{x} = \mathbf{x}^j(\sigma, \theta)$, $j = 1, \dots, N$ son los rayos horizontales conectando el punto \mathbf{x}_0 con el punto \mathbf{x} . La asintótica de la función de Green (3.46) falla en contener dominios caóticos en el rayo horizontal, ese es un dominio en donde la condición $J_j(\sigma, \theta) \neq 0$ no se sostiene. Pero este problema puede ser superado por la aplicación del método de Maslov del operador canónico [43][46].

3.4. Variación en una dirección horizontal

Suponemos ahora que la densidad, la velocidad del sonido, la interfaz entre guía de onda oceánica y el fondo marino varían solamente en una sola variable horizontal y en la variable vertical, esto es

$$\rho = \rho(\varepsilon y_1, z), c = c(\varepsilon y_1, z), H = H(\varepsilon y_1, z) \quad (3.47)$$

El rayo horizontal $\mathbf{x} = \mathbf{x}^j(\sigma, \theta) = (x_1^j(\sigma, \theta), x_2^j(\sigma, \theta))$ en este caso satisface el sistema de ecuaciones

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\mu_j(x_1^j(\sigma, \theta)) \frac{d(x_1^j(\sigma, \theta))}{d\sigma} \right) = \mu_j'(x_1^j(\sigma, \theta)) \quad (3.48)$$

$$\frac{d^2 x_2^j}{d\sigma^2} = 0 \quad (3.49)$$

con punto inicial $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02})$. Sea el parámetro de rayo $\alpha_j(\theta) = \mu_j(x_{01}(\sigma, \theta))$ sin θ donde θ es un ángulo inicial entre el rayo y el eje x_1 . Entonces la ecuación del rayo en el plano (x_1, x_2) es (consultar [7], Capítulo 6.4)

$$x_2 = x_2^j(x_1, x_0, \theta) = x_{02} \pm \int_{x_{01}}^{x_1} (\chi_j^2(\gamma) - \alpha_j^2(\theta))^{-\frac{1}{2}} d\gamma \quad (3.50)$$

Aplicando la expresión (3.35), obtenemos

$$S_j(x_1, x_0, \theta) = \alpha_j(\theta)(x_2 - x_{02}) \pm \int_{x_{01}}^{x_1} (\chi_j^2(\gamma) - \alpha_j^2(\theta))^{\frac{1}{2}} d\gamma \quad (3.51)$$

en donde el signo $+$ es tomado si $x_1 > x_{01}$, y el signo $-$ es el caso opuesto donde $x_1 < x_{01}$.

La divergencia geométrica es dada por la siguiente fórmula (ver [7], Capítulo 6.4)

$$|J_j(x_1, \theta)| = \frac{(\chi_j^2(x_1) - \alpha_j^2(\theta))^{\frac{1}{2}}}{\chi_j(x_1)} \left| \int_{x_{01}}^{x_1} \frac{\chi_j^2(\gamma) d\gamma}{(\chi_j^2(\gamma) - \alpha_j^2(\theta))^{\frac{3}{2}}} \right| \quad (3.52)$$

Sustituyendo (3.50), (3.51) y (3.52) en la expresión (3.46), obtenemos

$$G_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z_0, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \varphi_j(x_{01}, z_0) \psi_j(x_2^j(x_1, x_0, \theta), z) e^{i\left(\frac{S_j(x_1, x_0, \theta)}{\varepsilon}\right)}}{\sqrt{8\pi\mu_j(\mathbf{x}_0)} |J_j(x_1, \theta)| \|\psi_j(\mathbf{x}_0, z_0)\|_{L_{\rho^{-1}(\mathbf{x}_0, z)}^2(\mathbb{R}_+)}} + (1 + O(\varepsilon^2)) \quad (3.53)$$

Suponiendo que la fuente y el receptor están localizados en el plano (x_1, z) , esto es que

$$\mathbf{x}_0 = (x_{01}, 0), \mathbf{x} = (x_1, 0) \quad (3.54)$$

las expresiones (3.50), (3.51) y (3.52) son simplificadas como

$$x_2 = x_2^j(x_1, x_{01}) = \int_{x_{01}}^{x_1} \chi_j^{-1}(\gamma) d\gamma \quad (3.55)$$

$$S_j(x_1, x_{01}) = \left| \int_{x_{01}}^{x_1} \chi_j(\gamma) d\gamma \right| \quad (3.56)$$

$$|J_j(x_1, x_{01})| = \left| \int_{x_{01}}^{x_1} \chi_j^{-1}(\gamma) d\gamma \right| \quad (3.57)$$

por lo que la asintótica de la función de Green del problema estacionario para un modelo cuasi estratificado en tres dimensiones sufre un cambio no tan significativo al representarla analizando una sola variable en la dirección horizontal simplificando la expresión (3.53) quedando de la siguiente forma

$$G_\varepsilon(x_1, x_{01}, z_0, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \varphi_j(x_{01}, z_0) \psi_j(x_2^j(x_1, x_{01}, \theta), z) e^{i\left(\frac{\left|\int_{x_{01}}^{x_1} \chi_j(\gamma) d\gamma\right|}{\varepsilon}\right)}}{\sqrt{8\pi\mu_j(x_{01}) \left|\int_{x_{01}}^{x_1} \chi_j^{-1}(\gamma) d\gamma\right|} \|\psi_j(x_{01}, z_0)\|_{L^2_{\rho^{-1}(x_{01}, z_0)}(\mathbb{R}_+)}} + (1 + O(\varepsilon^2)) \quad (3.58)$$

La expresión anterior es la representación de la asintótica de la Función de Green del modelo cuasi estratificado en tres dimensiones, sin embargo, la variación en las características físicas del modelo de océano así como en la interfaz se aplican solamente a una de las dos dimensiones de la dirección horizontal y que satisface la ecuación de onda (3.16) relacionada al problema de propagación de ondas acústicas en un modelo de océano cuasi estratificado. Tal Función de Green con ayuda de las características del medio y el valor de las funciones propias que la conforman, describen el comportamiento del campo producido por la propagación de ondas originadas por una fuente ubicada en la guía de onda oceánica, sin embargo, el objetivo es obtener una expresión de la Función de Green que nos dé el comportamiento del campo en dos dimensiones, una sola dirección horizontal y la vertical, la cual se tratará en el capítulo siguiente.

Capítulo 4

CAMPO PRODUCIDO POR UNA FUENTE ESTACIONARIA EN UN MODELO DE GUÍA DE ONDA PLANA CUASI ESTRATIFICADA

4.1. Introducción

Para obtener una facilidad en el análisis y simulación de la función de Green del problema estacionario para el modelo de océano cuasi estratificado, la cual, como se ha mencionado en capítulos anteriores, nos da el comportamiento del campo acústico originado por la propagación de ondas en el modelo de océano producidas por una fuente estacionaria, en este capítulo nos centraremos en el análisis de la propagación de ondas acústicas submarinas considerando la capa de agua oceánica como una guía de onda plana, es decir, el análisis para la obtención de la función de Green será desarrollado considerando una sola coordenada horizontal x y la coordenada vertical z .

Como se trabajó en el capítulo anterior, las características físicas de la guía de onda oceánica, en este caso una guía de onda plana, son afectadas directamente por un parámetro pequeño $\varepsilon > 0$ que permite una variación lenta en la dirección horizontal, ya que las condiciones del problema están sujetas a una limitación de una variable de la coordenada x , por lo que estas características físicas son dadas como funciones de una única variable horizontal y la variable vertical, las cuales se definen como

$$\rho_0 = \rho_0(\varepsilon x, z), \quad c_0 = c_0(\varepsilon x, z) \quad (4.1)$$

De igual manera, la presencia de este parámetro pequeño ε , afecta directamente la interfaz que se encuentra entre la capa de agua o guía de onda plana y el fondo marino, por lo que esta interfaz Ω también está variando únicamente en una dirección horizontal y es definida como

$$\Omega = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : z = \phi(\varepsilon x), x \in \mathbb{R}\} \quad (4.2)$$

4.2. Planteamiento del Problema

Se considera la guía de onda plana definida como $\Pi_\varepsilon = \Pi_\varepsilon^1 \cup \Pi_\varepsilon^2 \subset \mathbb{R}^2$, véase la Figura 4.1, en donde cada capa se encuentra definida como

$$\Pi_\varepsilon^1 = \{0 \leq z \leq \phi(\varepsilon y), y \in \mathbb{R}\} \quad (4.3)$$

$$\Pi_\varepsilon^2 = \{\phi(\varepsilon y) < z < +\infty, y \in \mathbb{R}\} \quad (4.4)$$

donde $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$ es un parámetro pequeño que caracteriza una variación lenta en la dirección horizontal de las características físicas del medio y de la interfaz entre la guía de onda oceánica plana y el fondo marino. En este caso la variable y representa la coordenada horizontal y z la coordenada vertical por lo que suponemos que las características de densidad (ρ_0) y velocidad del sonido (c_0) pertenecientes a la guía de onda plana, además de la interfaz mencionada, son dadas como función de estas variables de coordenadas.

La interfaz Ω_ε se encuentra definida como

$$\Omega_\varepsilon = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : z = \phi(\varepsilon y), y \in \mathbb{R}\} \quad (4.5)$$

donde el $\inf_{y \in \mathbb{R}} \phi(\varepsilon y) > 0$, mientras que las características físicas del océano cuasi estratificado son denotadas por

$$\rho(\varepsilon y, z) = \begin{cases} \rho_0(\varepsilon y, z) & 0 \leq z \leq \phi(\varepsilon y), y \in \mathbb{R} \\ \rho_1 & \phi(\varepsilon y) < z < +\infty, y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.6)$$

$$c(\varepsilon y, z) = \begin{cases} c_0(\varepsilon y, z) & 0 \leq z \leq \phi(\varepsilon y), y \in \mathbb{R} \\ c_1 & \phi(\varepsilon y) < z < +\infty, y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.7)$$

CAPÍTULO 4. CAMPO PRODUCIDO POR UNA FUENTE ESTACIONARIA
EN UN MODELO DE GUÍA DE ONDA PLANA CUASI ESTRATIFICADA

donde $\rho_0(\varepsilon y, z) > 0$ es la densidad del agua y ρ_1 es la densidad del fondo, además $c_0(\varepsilon y, z) > 0$ es la velocidad del sonido en la capa de agua y c_1 es la velocidad del sonido en el fondo marino. De esto, suponemos que

$$\max_{(y,z) \in \Pi_\varepsilon^1} c_0(\varepsilon y, z) < c_1, \quad \sup_{(y,z) \in \Pi_\varepsilon^1} \rho_0(\varepsilon y, z) < \rho_1 \quad (4.8)$$

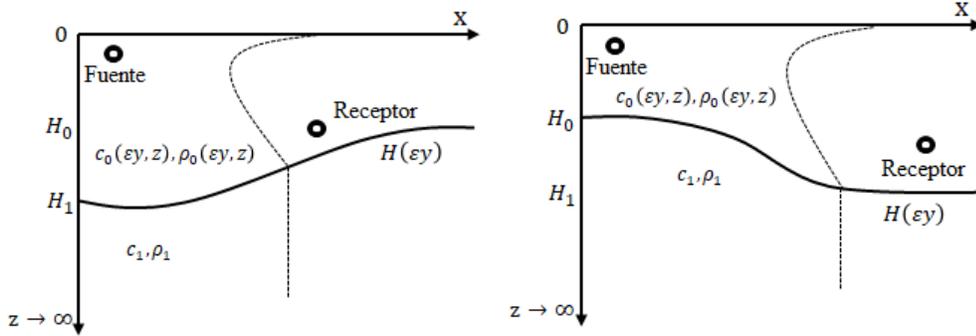


Figura 4.1: Modelos de Océano Cuasi Estratificado en dos dimensiones.

En el dominio Π_ε consideramos la ecuación de Helmholtz

$$A g_\varepsilon(y, z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mathcal{L} \left(\varepsilon y, z, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) g_\varepsilon(y, z) = -\delta(y - y_0) \delta(z - z_0), \quad (y, z), (y_0, z_0) \in \Pi_\varepsilon \setminus \Omega_\varepsilon \quad (4.9)$$

donde

$$\mathcal{L} \left(\varepsilon y, z, \frac{\partial}{\partial z} \right) v(z) = \frac{d^2 v(z)}{dz^2} + k^2(\varepsilon y, z), \quad z \in \mathbb{R} \setminus \{\phi(\varepsilon y)\} \quad (4.10)$$

es el operador transversal Sturm-Liouville dependiente de los parámetros $y \in \mathbb{R}$ y un parámetro pequeño $\varepsilon > 0$ el cual caracteriza la lentitud del cambio del medio en la dirección horizontal, $\delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$ es la función delta y

$$k^2(\varepsilon y, z) = \begin{cases} k_0^2(\varepsilon y, z) = \frac{\omega^2}{c_0^2(\varepsilon y, z)} : 0 \leq z \leq \phi(\varepsilon y), y \in \mathbb{R} \\ k_1^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} : \phi(\varepsilon y) < z < +\infty, y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.11)$$

Suponemos que las siguientes condiciones en la superficie del océano y en la interfaz entre la guía de onda oceánica y el fondo son dadas

$$g_\varepsilon(y, z = 0) = 0, y \in \mathbb{R} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} [g_\varepsilon]_{z=\phi(\varepsilon y)} &= (g_\varepsilon(y, \phi(\varepsilon y) - 0) - g_\varepsilon(y, \phi(\varepsilon y) + 0)) = 0 \\ \left[\frac{1}{\rho(\varepsilon y, z)} \frac{dg_\varepsilon}{dn} \right]_{z=\phi(\varepsilon y)} &= \left(\frac{1}{\rho_0(\varepsilon y, z)} \frac{dg_\varepsilon}{dn} - \frac{1}{\rho_1} \frac{dg_\varepsilon}{dn} \right) \Big|_{z=\phi(\varepsilon y)} = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.3. Construcción de la Función de Green en una Guía de Onda Plana

Como anteriormente se consideró, se aplica el cambio de variable $x = \varepsilon y$, $x_0 = \varepsilon y_0$, y el problema definido por las ecuaciones (4.9), (4.12) y (4.13) es transformado dentro de la ecuación siguiente

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathcal{L} \left(x, z, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) G_\varepsilon(x, z) &= -\varepsilon^2 \delta(x - x_0) \delta(z - z_0), (x, z), (x_0, z_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega, \\ \Omega &= \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : z = \phi(x), x \in \mathbb{R}\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

acompañada de las siguientes condiciones de frontera

$$G_\varepsilon(x, z = 0) = 0, x \in \mathbb{R} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} [G_\varepsilon(x, z)]_{z=\phi(x)} &= (G_\varepsilon(x, \phi(x) - 0) - G_\varepsilon(x, \phi(x) + 0)) = 0 \\ \left[\frac{1}{\rho(x, z)} \frac{\partial G_\varepsilon(x, z)}{\partial z} + \varepsilon^2 \phi'(x) \frac{\partial G_\varepsilon(x, z)}{\partial x} \right]_{z=\phi(x)} &= 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Primeramente, consideramos la ecuación homogénea

$$\left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathcal{L} \left(x, z, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) u_\varepsilon(x, z) = 0 \quad (4.17)$$

Nuevamente, el término principal del asintótico formal de soluciones de la ecuación (4.17) es buscado en la forma

$$u_\varepsilon(x, z) = \sum_{j=1}^N e^{i \frac{S_j(x)}{\varepsilon}} b_j(x, z) \quad (4.18)$$

asumiendo que $S_j(x)$ y $b_j(x, z)$ son funciones de valor real, de tal manera que

$$\left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathcal{L} \left(x, z, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) u_\varepsilon(x, z) = O(\varepsilon^2) \quad (4.19)$$

Entonces, sustituyendo (4.18) dentro de (4.19) y colectando términos bajo ε^0 y ε , obtenemos que

$$\left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathcal{L} \left(x, z, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) e^{i \frac{S_j(x)}{\varepsilon}} b_j(x, z) = e^{i \frac{S_j(x)}{\varepsilon}} [R_0^j b_j(x, z) + i\varepsilon R_1^j b_j(x, z)] + O(\varepsilon^2) \quad (4.20)$$

donde

$$R_0^j b_j(x, z) = \left[- (S_j'(x))^2 + \mathcal{L} \left(x, z, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] b_j(x, z) \quad (4.21)$$

y

$$R_1^j b_j(x, z) = \left[2S_j'(x) \frac{d}{dx} + S_j''(x) \right] b_j(x, z) \quad (4.22)$$

De (4.19) tenemos que

$$R_0^j b_j(x, z) = 0, \quad R_1^j b_j(x, z) = 0 \quad (4.23)$$

donde la igualdad $R_0^j b_j(x, z) = 0$ implica que

$$(S_j'(x))^2 = \mu_j^2(x) \quad (4.24)$$

la cual es llamada ecuación eiconal y donde $\mu_j^2(x) \in (k_1^2, k_{\text{máx}}^2)$ es un valor propio del operador transversal $\mathcal{L} \left(x, z, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ para una $x \in \mathbb{R}^2$, y

$$b_j(x, z) = \alpha_j(x) \psi_j(x, z) \quad (4.25)$$

donde $\psi_j(x, z)$ es una función propia de valor real del operador $\mathcal{L} \left(x, z, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ correspondiente al valor propio $\mu_j^2(x)$. Se puede normalizar $\psi_j(x, z)$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \psi_j^2(x, z) dz = 1 \quad (4.26)$$

y donde por diferenciación de (4.26) con respecto a x tenemos

$$\int_{\mathbb{R}_+} \nabla_x \psi_j(x, z) \psi_j(x, z) dz = 0 \quad (4.27)$$

Tomando en cuenta que $R_1^j b_j(x, z) = 0$, además de (4.26) y (4.27), obtenemos la igualdad

$$2S_j'(x) \alpha_j'(x) + S_j''(x) \alpha_j(x) = 0 \quad (4.28)$$

la cual es llamada la ecuación de transporte y utilizada para definir $\alpha_j(x)$.

De la ecuación eiconal (4.24), tenemos que $S_j'(x) = \pm \mu_j(x)$. Así obtenemos

$$S_j(x) = \pm \int_{x_0}^x \mu_j(\sigma) d\sigma \quad (4.29)$$

Sustituyendo la ecuación (4.29) en (4.28), obtenemos

$$2\mu_j(x) \alpha_j'(x) + \mu_j'(x) \alpha_j(x) = 0 \quad (4.30)$$

Así, (4.30) implica que

$$\alpha_j(x) = C_j \frac{1}{\sqrt{\mu_j(x)}} \quad (4.31)$$

además de que

$$b_j(x, z) = C_j \frac{\psi_j(x, z)}{\sqrt{\mu_j(x)}} \quad (4.32)$$

por lo tanto, el asintótico principal tiene la forma

$$u_\varepsilon(x, z) = \sum_{j=1}^N C_j \frac{\psi_j(x, z)}{\sqrt{\mu_j(x)}} e^{\frac{i}{\varepsilon} \left| \int_{x_0}^x \mu_j(\sigma) d\sigma \right|} \quad (4.33)$$

en donde el coeficiente C_j es obtenido mediante la comparación con la descomposición de modo del problema

$$\left(\varepsilon^2 \Delta_x + \rho(x_0, z) \frac{\partial}{\partial z} \rho^{-1}(x_0, z) \frac{\partial}{\partial z} + k^2(x_0, z) \right) g_\varepsilon^0(x, x_0, z, z_0) = -\varepsilon^2 \delta(x - x_0) \delta(z - z_0),$$

$$x, x_0 \in \mathbb{R}, z, z_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus \phi(x) \quad (4.34)$$

con las condiciones de frontera

$$g_\varepsilon^0(x, x_0, z_0, z = 0) = 0 \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} [g_\varepsilon^0(x, x_0, z_0, z)]_{z=\phi(x)} &= 0 \\ \left[\frac{1}{\rho(x_0, z)} \frac{\partial g_\varepsilon^0(x, x_0, z_0, z)}{\partial z} \right]_{z=\phi(x)} &= 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Tomando en cuenta la ecuación de Helmholtz unidimensional

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) u(x) = \delta(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}, k > 0 \quad (4.37)$$

y que la solución $u(x)$ satisface el principio de absorción múltiple, tenemos que

$$u(x) = \frac{e^{\frac{i}{\varepsilon} k |x - x_0|}}{2ik} \quad (4.38)$$

por lo que obtenemos la solución del problema de descomposición de modo (4.34), (4.35) y (4.36), la cual es

$$g_\varepsilon^0(x, x_0, z_0, z) = \sum_{j=1}^N \frac{\varphi_j(x_0, z_0) \varphi_j(x, z) e^{\frac{i}{\varepsilon} \mu_j(x_0) |x - x_0|}}{2i \mu_j(x_0)} \quad (4.39)$$

Comparando las expresiones (4.33) y (4.39), nos permite llegar a la fórmula

$$G_\varepsilon(x, x_0, z_0, z) = \sum_{j=1}^N \frac{\varphi_j(x_0, z_0) \psi_j(x, z) e^{\frac{i}{\varepsilon} \left| \int_{x_0}^x \mu_j(\sigma) d\sigma \right|}}{2i \mu_j(x_0) \sqrt{\mu_j(x)} \|\psi_j(x_0, z)\|_{L^2_{\rho^{-1}(x_0, z)}(\mathbb{R}_+)}} + O(\varepsilon^2) \quad (4.40)$$

La función (4.40) es la representación de la función de Green del problema estacionario para un modelo cuasi estratificado en una guía de onda plana, es decir, sólo se realizó el análisis en una coordenada de dirección horizontal y la coordenada vertical. De igual manera esta función de Green satisface la ecuación de onda planteada en la expresión (4.9) que se relaciona con el problema de propagación de ondas acústicas a través del océano. Dicha función de Green muestra el comportamiento del campo acústico producido por la propagación de ondas las cuales son generadas por una fuente fija en la guía de onda; los términos que conforman la función de Green dependen del número de raíces que se obtienen de la relación de dispersión, estas raíces que cumplen cierta ecuación son conocidas como valores propios que están directamente conectadas con las funciones propias antes definidas y existentes en la función de Green.

Cabe mencionar que en la expresión de la Función de Green para un modelo cuasi estratificado en una guía de onda plana, como no fue resuelta por medio de la función de Hankel utilizada para modelos estratificados, carece de un término que origina el comportamiento de atenuación a lo largo de la distancia de análisis considerada, conocido como divergencia, que si se muestra en el modelo estratificado. Por lo que en el modelo cuasi estratificado, la contribución a los resultados del campo acústico serán puramente del comportamiento de los valores propios. Un análisis futuro será necesario para obtener una expresión de la función de Green que contemple esta divergencia de los rayos y que sea capaz de mostrar el campo acústico con atenuaciones conforme se propaga la onda.

Capítulo 5

RESULTADOS NUMÉRICOS

5.1. Introducción

Para conocer el comportamiento del campo acústico producido por una fuente fija en un medio cuasi estratificado, de igual manera es utilizado la asintótica de la Función de Green explicada en el capítulo 4. A diferencia de la Función de Green obtenida para medios estratificados, la asintótica para medios cuasi estratificados es afectado por el parámetro pequeño $\varepsilon > 0$ realizando modificaciones lentas en la dirección horizontal, el cual afecta directamente la interfaz que limita la guía de onda por la que se propaga la onda y el fondo oceánico, por lo que como resultado se tiene un comportamiento no lineal para los valores propios, así como la ausencia del término de divergencia geométrica la cual proporciona atenuación conforme las ondas se propagan.

Con este resultado de los valores propios, el comportamiento del campo acústico descrito como pérdidas de transmisión acústica al propagarse la onda desde la posición fija del transmisor hasta el receptor, sufrirá cambios en su comportamiento debido a los perfiles de fondo utilizados.

5.2. Resultados Numéricos para Modelo Cuasi Estratificado con Perfil de Fondo Parabólico Positivo

Para los modelos de océano cuasi estratificado, se aplica el Método SPSS para calcular los valores propios μ_j^2 , aplicando la aproximación de la ecuación de dispersión mostrada en la ecuación (2.45).

$$D(\alpha) = m\alpha f_N(\alpha, H) + (f_N)'_z(\alpha, H) = 0, \quad m = \frac{\rho_0(H)}{\rho_1}, \quad \mu_j = \sqrt{k_1^2 + \alpha_j^2}$$

Inicialmente se realizará una comparativa de los resultados obtenidos del modelo de océano estratificado mostrados en el capítulo 2 con los resultados obtenidos en este modelo cuasi estratificado. En el primer modelo cuasi estratificado utilizamos el perfil $H(x) = \varepsilon x^2 - H_1$ para modelar y simular matemáticamente la interfaz entre la capa de agua y el fondo marino con forma parabólica positiva (pozo marino), el cual se muestra en la Figura 5.1, en donde se puede observar que el parámetro pequeño ε hace variar lentamente la interfaz en la dirección horizontal.

El perfil de velocidad del sonido $c_0(z)$ es el descrito en la Tabla 2.3 mostrada en los resultados del capítulo 2, sin embargo el efecto de cuasi estratificación hace que la característica de velocidad del sonido varíe conforme se desplaza en la dirección horizontal $c_0(\varepsilon x, z)$ como se muestra en la Figura 5.2. Se consideró una frecuencia de operación de la fuente de $f_0 = 180Hz$, además de características físicas del océano como medio de propagación como densidades, $\rho_0 = 1g/cm^3$ y $\rho_1 = 1.5g/cm^3$, y velocidad del sonido en el fondo marino dado por $c_1 = 1580m/s$. La guía de onda oceánica estratificada tiene dimensiones de longitud $r_x = 11000m$ y profundidad de $H = 2000m$ para el modelo estratificado y $H(x) = \varepsilon x^2 - H_1$, $H_1 = 2000m$, $x < 10000m$ para el modelo cuasi estratificado. La fuente armónica cuenta con unas coordenadas de posición $r_x = 0m$ en el eje horizontal y a una profundidad de $z_0 = 25m$, mientras que el receptor se encuentra ubicado a una profundidad de $z = 95m$.

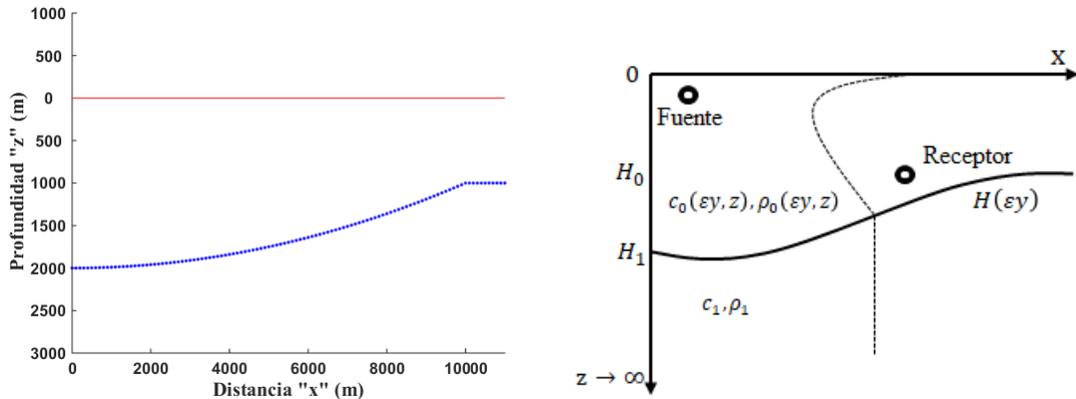


Figura 5.1: Modelo de Océano Cuasi Estratificado con perfil parabólico positivo

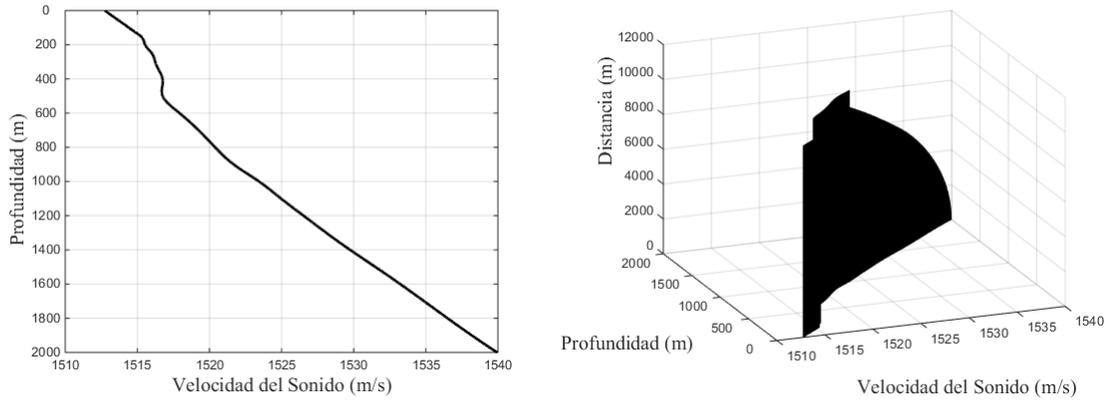


Figura 5.2: Perfil de velocidad del sonido con cuasi estratificación en la región central del Mediterráneo en Febrero.

Como en el caso estratificado, el análisis se lleva a cabo por secciones a lo largo de la distancia de separación entre la fuente y el receptor, sin embargo, en este caso la interfaz entre la capa de agua y fondo varía lentamente en la dirección horizontal, resultando que la solución en cada una de las secciones sea distinta y los ceros de la ecuación de dispersión o valores propios cuenten con un comportamiento ya no constante, además de que en este perfil de fondo se origina una ausencia de valores propios conforme nos vamos desplazando como se muestra en la Figura 5.3.

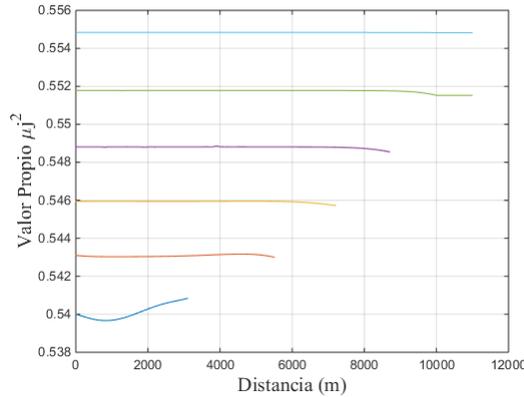


Figura 5.3: Valores Propios Perfil A.

Recordando de las secciones 1.8.6 y 2.6, el campo acústico originado por una fuente estacionaria fija ubicada en el océano es expresado como pérdidas de transmisión en dB por la ecuación (2.80)

$$TL(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0) = -20 \log_{10} \left| \frac{G_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0)}{G_{\varepsilon_0}(r=1)} \right| [dB]$$

el cual es simulado mediante la construcción de la Función de Green para modelos de guías de onda oceánica. Para el modelo de océano estratificado se utiliza la expresión (2.73)

$$g_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0) \simeq \sum_{j=0}^n \frac{\varphi_j(z) \bar{\varphi}_j(z_0) e^{i(\mu_j |\mathbf{x}| + \frac{\pi}{4})}}{(8\pi\mu_j |\mathbf{x}|)^{\frac{1}{2}}}$$

mientras que para el modelo de océano cuasi estratificado se describe por la expresión (4.40), ambas describen las variaciones de la presión acústica o pérdidas de transmisión conforme la onda se propaga en la dirección horizontal

$$G_\varepsilon(x, x_0, z_0, z) = \sum_{j=1}^N \frac{\varphi_j(x_0, z_0) \psi_j(x, z) e^{\frac{i}{\varepsilon} \left| \int_{x_0}^x \mu_j(\sigma) d\sigma \right|}}{2i\mu_j(x_0) \sqrt{\mu_j(x)} \|\psi_j(x_0, z)\|_{L^2_{\rho^{-1}(x_0, z)}(\mathbb{R}_+)}} + O(\varepsilon^2)$$

donde los valores propios μ_j^2 son dados mediante una aproximación numérica a través de rutinas en el programa Matlab y las funciones $\varphi_j(z)$ son dadas por la expresión (2.51) y obtenidas por el método SPPS. Este campo acústico describe las variaciones de la presión acústica o pérdidas de transmisión conforme la onda se propaga por el océano cuasi estratificado y es representado mediante la contribución de los modos propagados obtenidos. Los resultados de comparación de ambos modelos son mostrados a continuación:

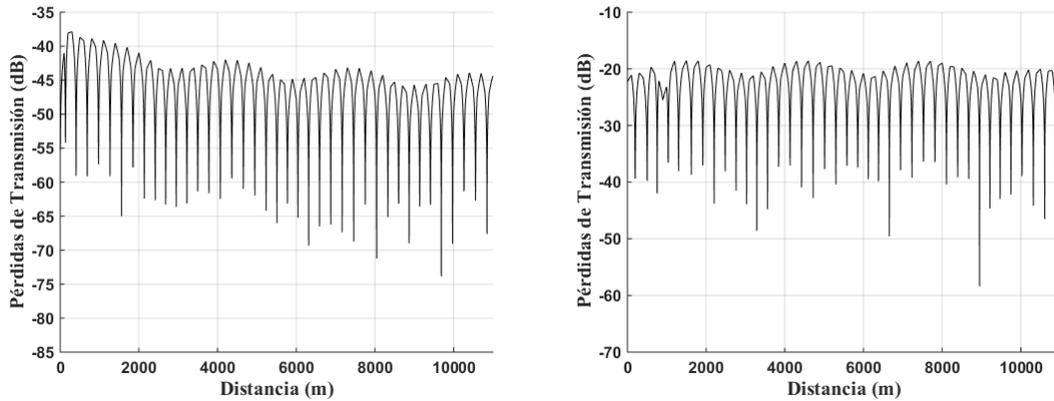


Figura 5.4: *Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 5, 6$*

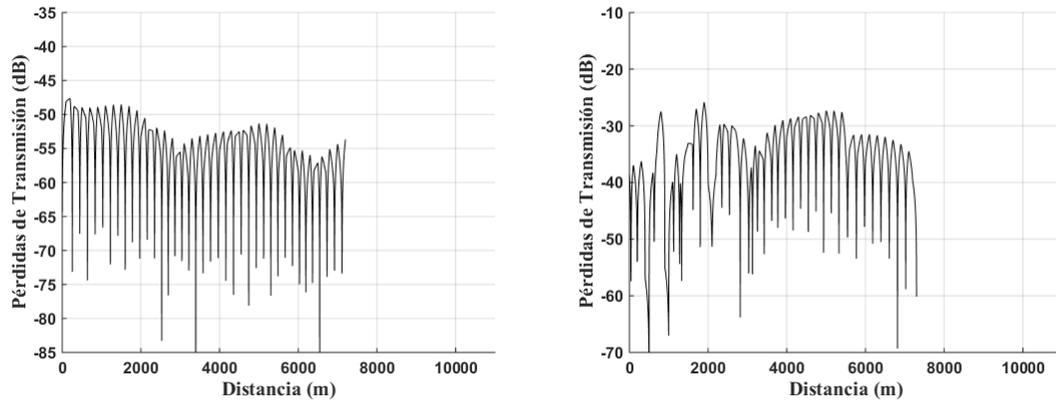


Figura 5.5: Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 1, 2, 3$

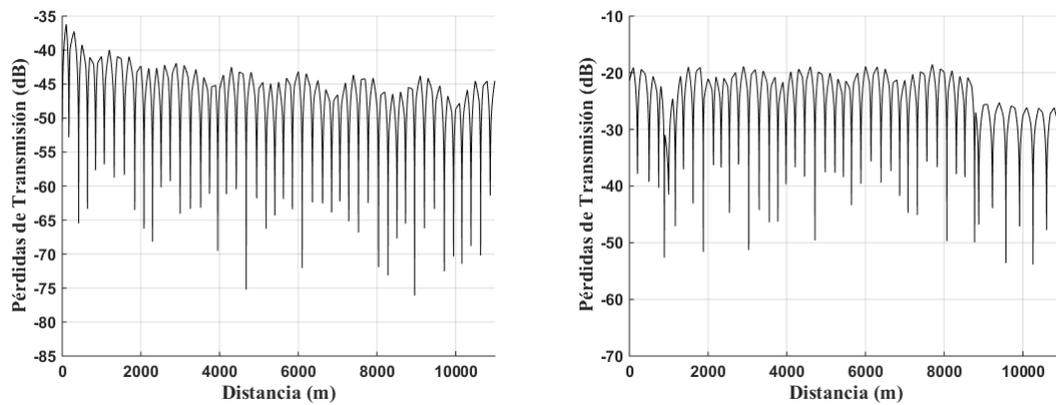


Figura 5.6: Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 2, 4, 6$

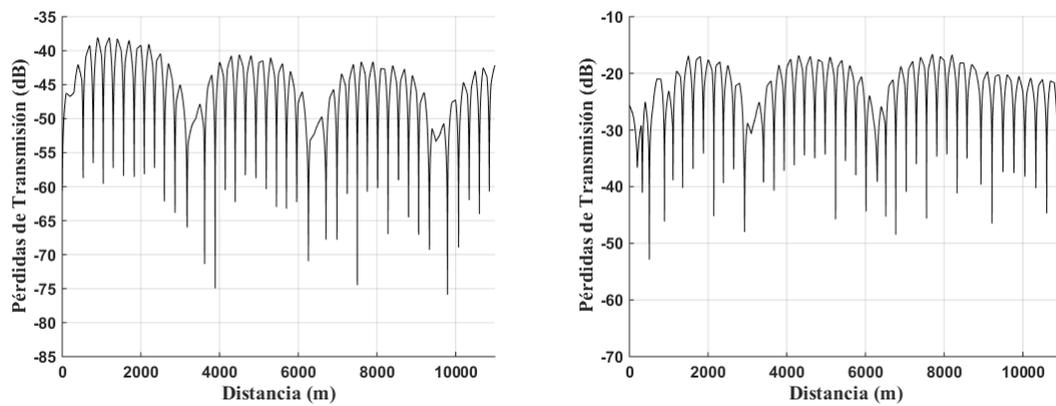


Figura 5.7: Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 2, 3, 4, 5$

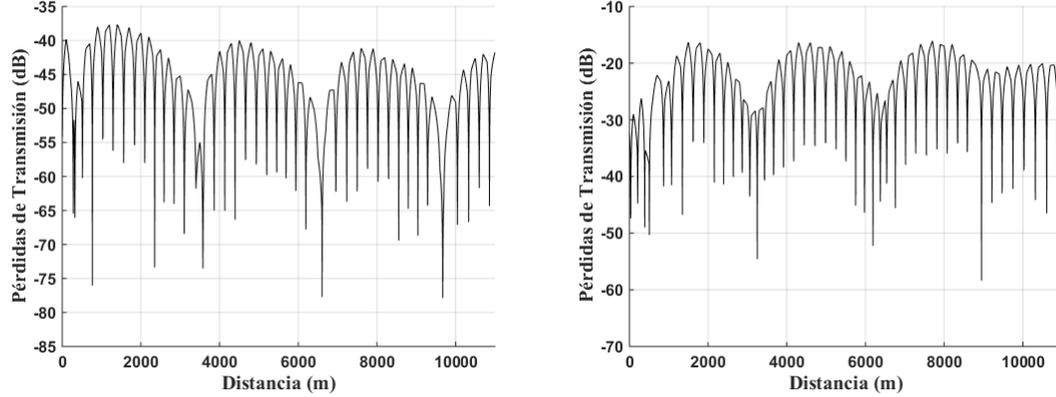


Figura 5.8: *Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 1 - 6$*

Las gráficas anteriores muestran los resultados del campo acústico comparando los obtenidos para un modelo estratificado como para el modelo cuasi estratificado con perfil de fondo parabólico positivo simulando la interfaz entre la capa de agua oceánica y el fondo marino y con las mismas características de fuente-receptor, frecuencia de operación, densidades, pero con el perfil de velocidad del sonido afectado por la cuasi estratificación del medio. En estos se muestra que el campo se comporta de diferente manera debido a las variaciones de los valores propios (ver Figura 5.3) así como la ausencia de los mismos en ciertos lugares de acuerdo al perfil de fondo y perfil de velocidad del sonido considerados. Se puede observar que en los resultados del modelo estratificado, las pérdidas de transmisión son uniformes a lo largo de la distancia considerada mientras es afectada por la atenuación que depende de la distancia y que es originada por absorción y dispersión de las ondas en su propagación. En el caso cuasi estratificado, la variación de los valores propios o el comportamiento de los números de onda a lo largo de la distancia de análisis, afecta directamente el campo, ya que debido a ello deja de tener un comportamiento uniforme, esto porque existe en desvanecimiento de rayos y solamente dos modos dan total contribución en la distancia considerada, los demás modos existentes sólo abarcan cierta región y desaparecen. En el modelo cuasi estratificado se observa que solamente a distancias cortas todos los rayos contribuirán al campo acústico. Se observa que las gráficas que representan el campo acústico con respecto a la distancia no sufren de atenuación, esto porque como fue mencionado en el capítulo 4, en el análisis la guía de onda en dos dimensiones no existe el término de divergencia geométrica que origine estas atenuaciones, sin embargo, las variaciones que muestra el campo son originadas por las mismas variaciones de los valores propios obtenidos.

Para más cálculos numéricos de los valores propios ahora se establece un perfil de velocidad del sonido $c_0(z)$ de la parte central de Mar Mediterráneo en el mes de Agosto [41][2] como una función continua, el cual se describe en la Tabla 5.1. Se utiliza nuevamente el perfil $H(x) = \varepsilon x^2 - H_1$ para modelar el fondo marino parabólico positivo (pozo marino), mostrado anteriormente en la Figura 5.1, en donde

el parámetro pequeño ε hace variar lentamente la interfaz que se encuentra entre la capa de agua y el fondo oceánico, así como afectar los valores del perfil de velocidad del sonido en el océano en la dirección horizontal $c_0(\varepsilon x, z)$, en donde la variación se muestra en la Figura 5.9.

Tabla 5.1: *Velocidades del Sonido en la ubicación central del Mediterráneo: Agosto.*

Profundidad (m)	Velocidad (m/s)	Profundidad (m)	Velocidad (m/s)
0	1539.65	500	1516.76
10	1539.81	600	1517.98
20	1537.67	700	1519.35
30	1530.90	800	1520.40
50	1521.19	900	1521.90
75	1516.38	1000	1523.37
100	1515.42	1100	1524.96
125	1515.16	1200	1526.52
150	1515.05	1300	1528.09
200	1515.37	1400	1529.75
250	1515.37	1500	1531.50
300	1515.83	1750	1535.69
400	1516.51	2000	1539.95

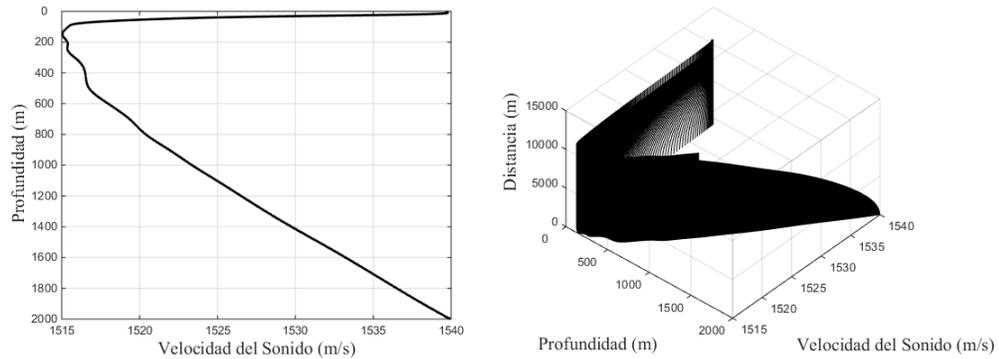


Figura 5.9: *Perfil de velocidad del sonido con cuasi estratificación en la región central del Mediterráneo en Agosto.*

Aplicando un método de interpolación, se obtuvo un perfil de velocidad del sonido continuo $c_0(\varepsilon x, z)$ en el intervalo $[0, H]$, el cual es mostrado en la Figura 5.9. Se consideró una frecuencia de operación de la fuente de $f_0 = 180Hz$, además de características físicas del océano como medio de propagación como densidades, $\rho_0 = 1g/cm^3$ y $\rho_1 = 1.5g/cm^3$, y velocidad del sonido en el fondo marino dado por $c_1 = 1580m/s$. La guía de onda oceánica cuasi estratificada tiene dimensiones de longitud $r_x = 11000m$ y profundidad de $H(x) = \varepsilon x^2 - H_1$, $H_1 = 2000m$, $x < 10000m$ para el modelo cuasi

estratificado. La fuente armónica cuenta con unas coordenadas de posición $r_x = 0\text{m}$ en el eje horizontal y a una profundidad de $z_0 = 25\text{m}$, mientras que el receptor se encuentra ubicado a una profundidad de $z = 95\text{m}$.

Se obtienen los valores propios a lo largo de un intervalo de distancia considerada en donde se encuentra la variación en el fondo marino, esto con la aplicación del método SPPS ya que nos da la facilidad de trabajar con este tipo de curvas de perfiles por medio de polinomios mediante métodos numéricos y subrutinas en Matlab. Este resultado de los valores propios (comportamiento con la distancia) son mostrados en la Figura 5.10, de acuerdo al perfil de fondo parabólico positivo el cual simula ser un pozo marino, en donde se muestra la variación de los valores propios debida al perfil de fondo y al perfil de velocidad del sonido. Con el perfil de velocidad del sonido mostrado en la Figura 5.9, el comportamiento de los valores propios obtenidos es distinto, en este caso el desvanecimiento y desaparición de rayos se origina solamente en dos y cuatro rayos contribuirán al campo en toda la distancia de análisis.

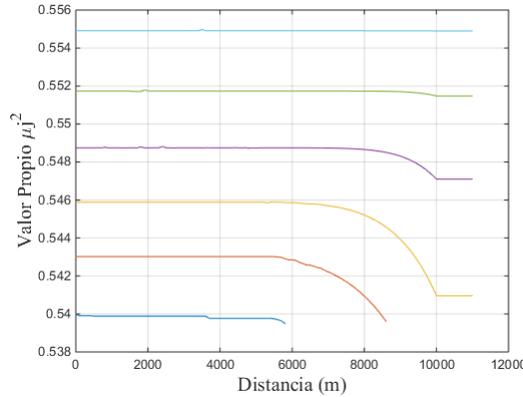


Figura 5.10: *Valores Propios por el Método SPPS en Perfil Parabólico Positivo*

Recordando de las secciones 1.8.6 y 2.6 que el campo acústico originado por una fuente estacionaria fija ubicada en el océano, es expresado como pérdidas de transmisión por la ecuación (2.80), el cual es simulado mediante la construcción de la Función de Green para modelos de guías de onda oceánica cuasi estratificada, la cual es descrita en la expresión (4.40) y describe las variaciones de la presión acústica o pérdidas de transmisión conforme la onda se propaga donde los valores propios μ_j son dados mediante una aproximación numérica a través de rutinas en el programa Matlab y las funciones $\varphi_j(z)$ son dadas por la expresión (2.51) y obtenidas por el método SPPS. Este campo acústico describe las variaciones de la presión acústica o pérdidas de transmisión conforme la onda se propaga por el océano cuasi estratificado y es representado mediante la contribución de los modos propagados obtenidos.

Mediante la aplicación de la ecuación de dispersión con el perfil de velocidad del sonido antes definido, se obtuvieron $n = 6$ valores propios μ_j^2 con los cuales se puede calcular los modos propagados en la capa de agua. Las siguientes figuras muestran el

comportamiento del campo acústico mediante la contribución de diferentes modos de propagación y la dependencia de las pérdidas de transmisión de la presión acústica (en dB) con la distancia de separación entre la fuente y el receptor. Las características físicas del medio son las mismas que las dadas en la sección anterior para un perfil de velocidad del sonido $c_0(\varepsilon x, z)$. Estas gráficas son obtenidas mediante la aplicación de la ecuación (2.80).

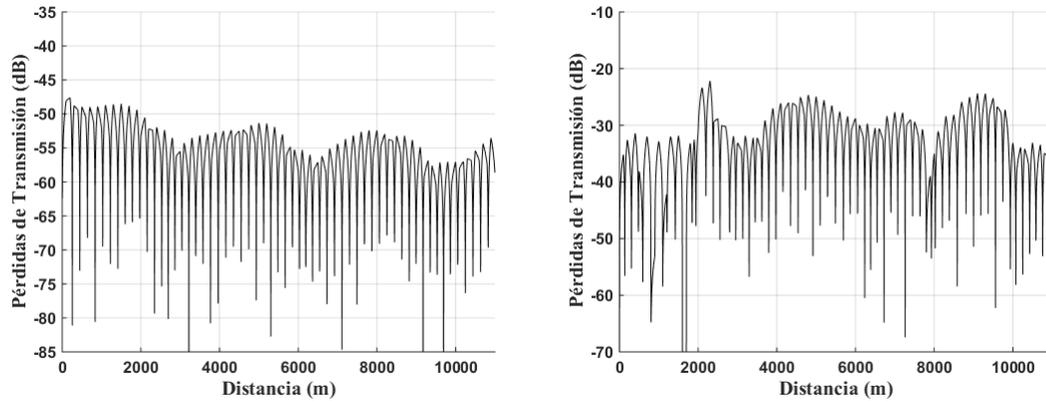


Figura 5.11: Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11000m para modos $j = 1, 2, 3$

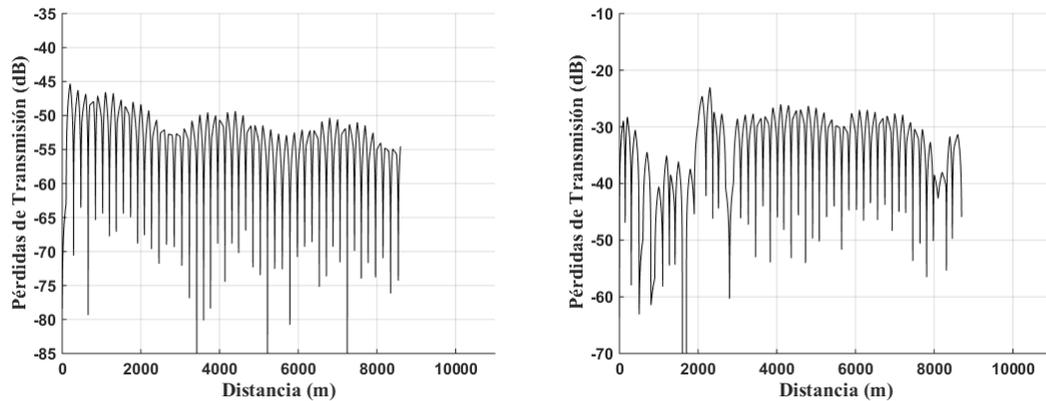


Figura 5.12: Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11000m para modos $j = 1, 2$

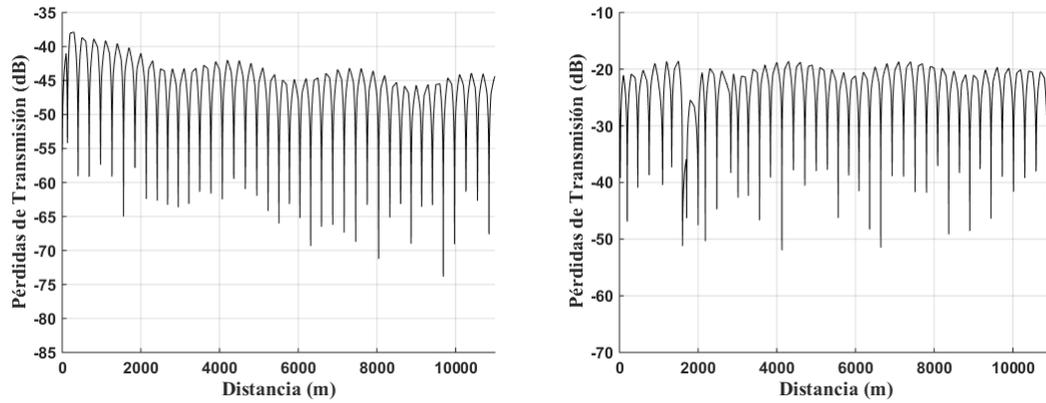


Figura 5.13: Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11000m para modos $j = 5, 6$

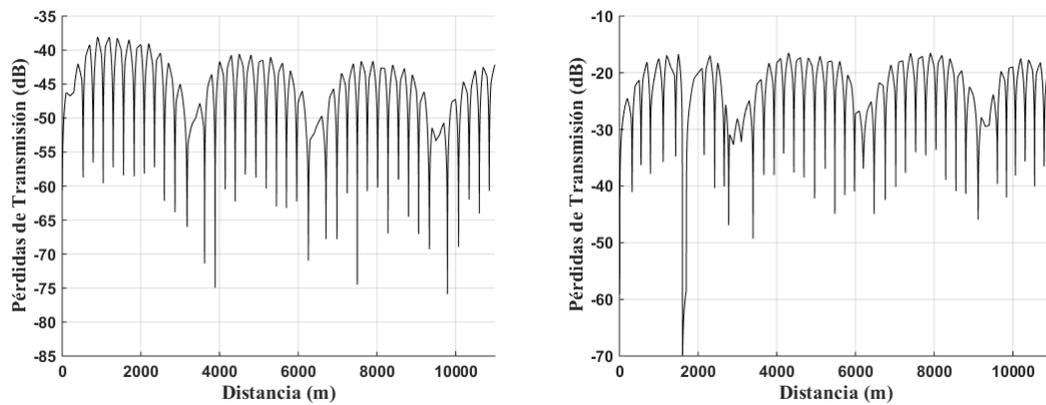


Figura 5.14: Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11000m para modos $j = 2, 3, 4, 5$

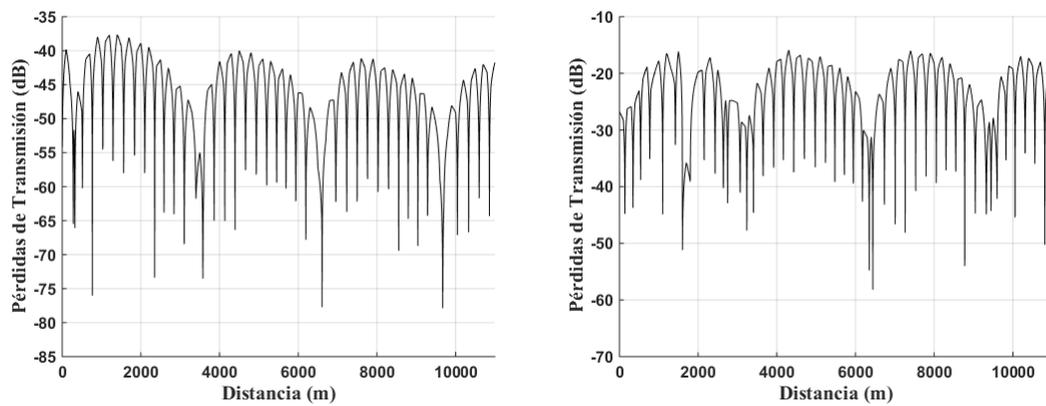


Figura 5.15: Pérdidas de Transmisión en una distancia de 11000m para modos $j = 1 - 6$

Como en el caso anterior, se muestran las gráficas del campo acústico a lo largo de la guía de onda cuasi estratificada, en la Figura 5.10 se muestra como son afectados los valores propios por el perfil de velocidad del sonido aplicado mostrado en la Figura 5.9, se muestra que el comportamiento es distinto en comparación con los valores propios mostrados en la Figura 5.3. Las gráficas anteriores muestran los resultados del campo acústico para un modelo estratificado como para el modelo cuasi estratificado con perfil de fondo parabólico positivo, en este escenario matemático el campo nuevamente se comporta de diferente manera debido a las variaciones de los valores propios así como la ausencia de los mismos en ciertos lugares.

Se muestra que en los resultados del modelo estratificado, las pérdidas de transmisión son uniformes considerando una atenuación a lo largo de la guía de onda que es agregada en la asintótica de la función de Green por la función de Hankel. En los resultados del modelo cuasi estratificado, la variación de los valores propios afecta directamente el campo, ya que debido a ello deja de tener un comportamiento uniforme, esto porque de igual manera existe un desvanecimiento y desaparición de rayos originados por la interfaz entre la capa de agua y el fondo marino y solamente algunos rayos dan contribución en la distancia considerada, los demás modos existentes sólo abarcan cierta región y desaparecen. Aunque las gráficas de modelos estratificados como cuasi estratificados son parecidas, puede notarse que hay regiones en donde las variaciones de los valores propios afectan las pérdidas de transmisión pues se encuentran regiones con mayores variaciones ruidosas que hacen variar el campo, el cual se origina por las variaciones de las fases de las ondas que se propagan. De igual se muestra que en el modelo cuasi estratificado el campo acústico carece de atenuación por la falta del término de la divergencia geométrica a la asintótica de la función de Green.

5.3. Resultados Numéricos para Modelo Cuasi Estratificado con Perfil de Fondo Parabólico Negativo

Considerando ahora, la interfaz entre la capa de agua y el fondo marino como el perfil de fondo con forma $H(x) = -\varepsilon x^2 - H_0$ que simula matemáticamente ser una parábola negativa o un valle marino, el cual se muestra en la Figura 5.16, en donde se puede observar que el parámetro pequeño ε hace variar lentamente la interfaz que se encuentra entre la capa de agua y el fondo oceánico, así como afectar los valores del perfil de velocidad del sonido en el océano en la dirección horizontal $c_0(\varepsilon x, z)$.

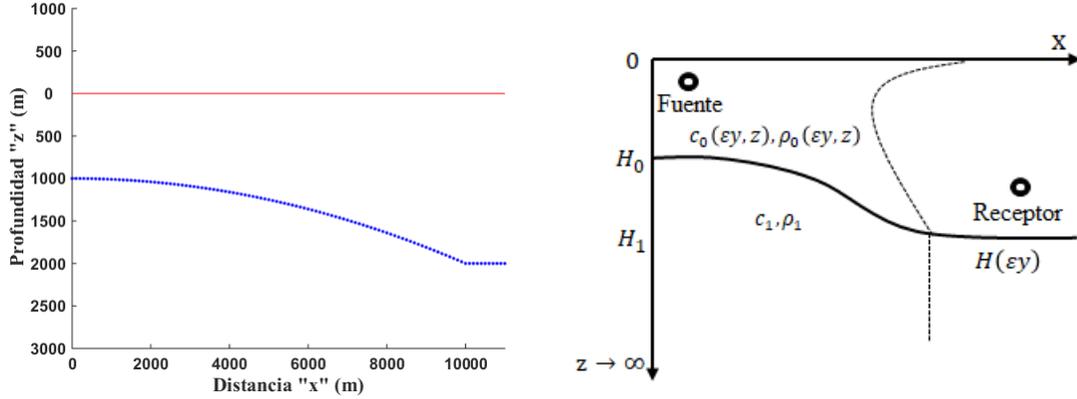


Figura 5.16: *Modelo de Océano Cuasi Estratificado con perfil parabólico negativo.*

Tomando el perfil de velocidad de la región central del Mediterráneo en el mes de Febrero $c_0(z)$ el cual fue definido en la Tabla 2.3 y aplicando la cuasi estratificación mencionada obtenemos un perfil de velocidad $c_0(\epsilon x, z)$ mostrado en la Figura 5.17.

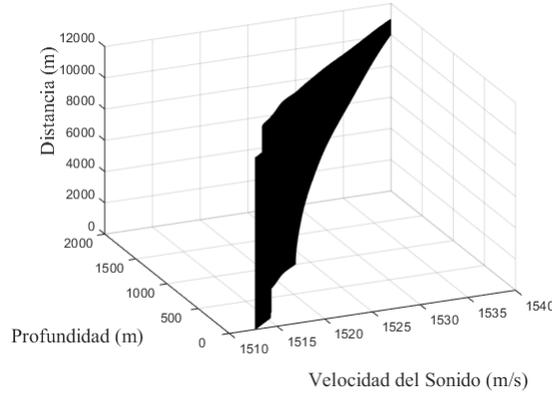


Figura 5.17: *Perfil de velocidad del sonido con cuasi estratificación negativa en la región central del Mediterráneo en Febrero.*

Con condiciones similares a las planteadas en el problema de cuasi estratificación positiva tenemos el perfil de velocidad del sonido el cual varía conforme se desplaza en la dirección horizontal $c_0(\epsilon x, z)$ como se mostró en la figura anterior, así como considerar una frecuencia de operación de la fuente de $f_0 = 180Hz$, además de características físicas del océano como medio de propagación como densidades, $\rho_0 = 1g/cm^3$ y $\rho_1 = 1.5g/cm^3$, y velocidad del sonido en el fondo marino dado por $c_1 = 1580m/s$. La guía de onda oceánica estratificada tiene dimensiones de longitud $r_x = 11000m$ y $H(x) = -\epsilon x^2 - H_0$, $H_0 = 1000m$, $x < 10,000m$. Se realiza un cambio en la posición de la fuente armónica asignándole coordenadas de posición $r_x = 0m$ en el eje horizontal y a una profundidad de $z_0 = 25m$, mientras que el receptor se encuentra ubicado a una profundidad de $z = 190m$. Con estas características, se construyó

la ecuación de dispersión mediante el método SPPS y se obtuvieron $n = 6$ valores propios los cuales sufren un comportamiento variable debido a las características del problema, en donde este comportamiento lo podemos visualizar en la Figura 5.18:

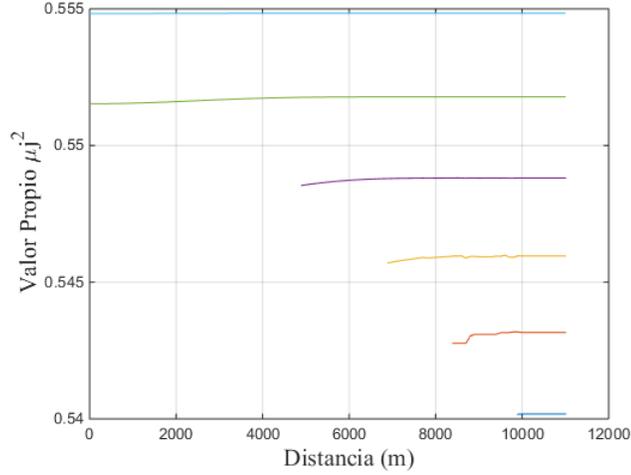


Figura 5.18: *Valores Propios en Mar Mediterráneo en Febrero con Perfil Parabólico Negativo.*

Los valores propios obtenidos en este tipo de interfaz (parabólica negativa) mostrados en la figura anterior cuentan con un comportamiento variable, sin embargo, en comparación con los valores propios obtenidos con un perfil de fondo parabólico positivo que mostraban una desaparición de valores propios, aquí se muestra una aparición de valores propios conforme se analiza la distancia de análisis, todo esto originado por la interfaz afectada por el parámetro de cuasi estratificación. Se muestra que la tendencia del comportamiento de los valores propios es una curvatura hacia valores mayores, por lo que los números de onda de los modos que se propagan aumenta hasta llegar a un punto en el que permanecerá constante, esto cuando se termina la cuasi estratificación y la interfaz comienza a ser constante. De igual manera se observa que sólo dos valores propios son los que existen a lo largo del rango establecido contando cada uno con sus variaciones aunque sean muy pequeñas, los demás van a pareciendo a lo largo de la distancia.

A partir de los valores propios, obtenemos el campo acústico originado por una fuente fija ubicada en el océano como pérdidas de transmisión en dB por la ecuación (2.80)

$$TL(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0) = -20 \log_{10} \left| \frac{G_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, z, z_0)}{G_{\varepsilon_0}(r=1)} \right| [dB]$$

Las siguientes figuras muestran el comportamiento del campo acústico mediante la contribución de diferentes modos de propagación y la dependencia de las pérdidas de transmisión de la presión acústica (en dB) con la distancia de separación entre

la fuente y el receptor, comparando lo obtenido en un modelo de guía de onda estratificada y este modelo de guía de onda cuasi estratificada.

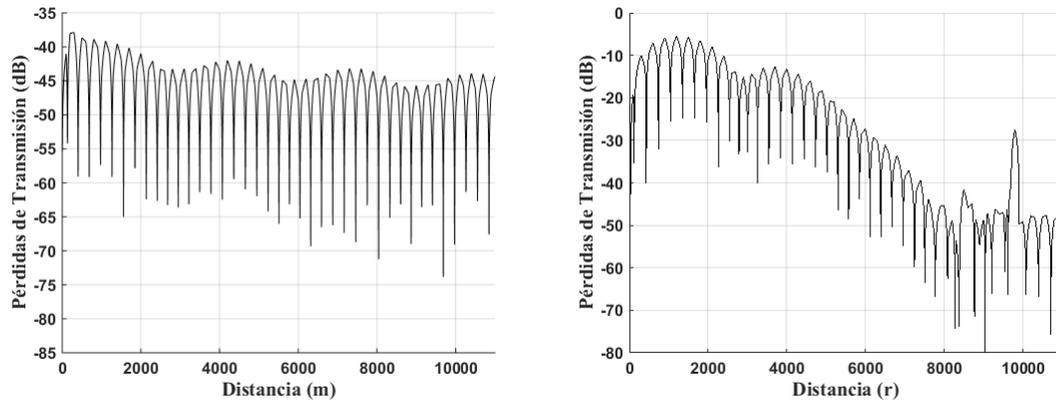


Figura 5.19: *Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 5, 6$*

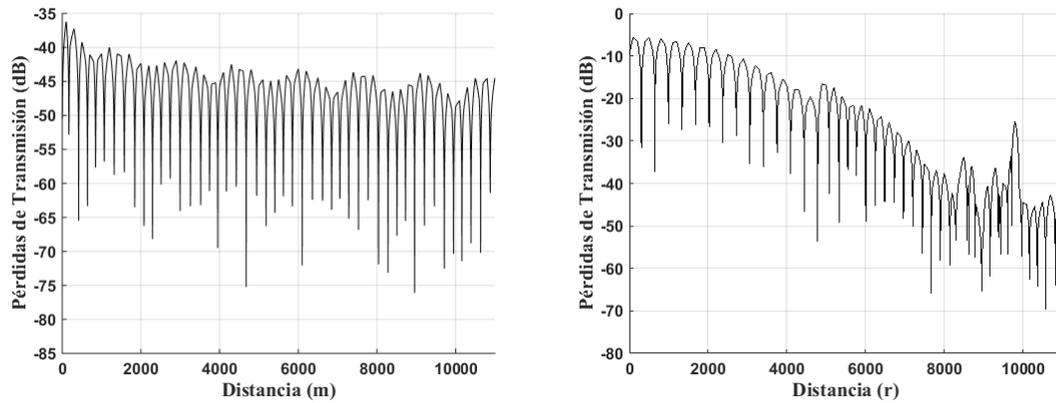


Figura 5.20: *Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 2, 4, 6$*

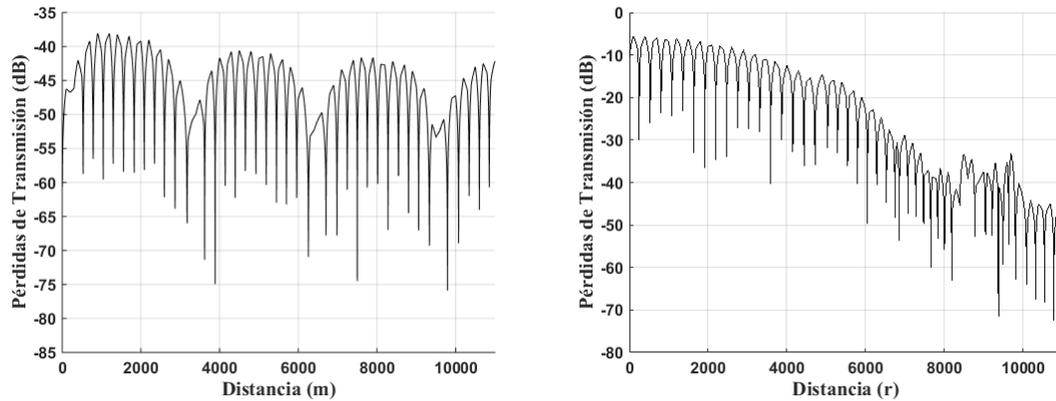


Figura 5.21: *Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 2, 3, 4, 5$*

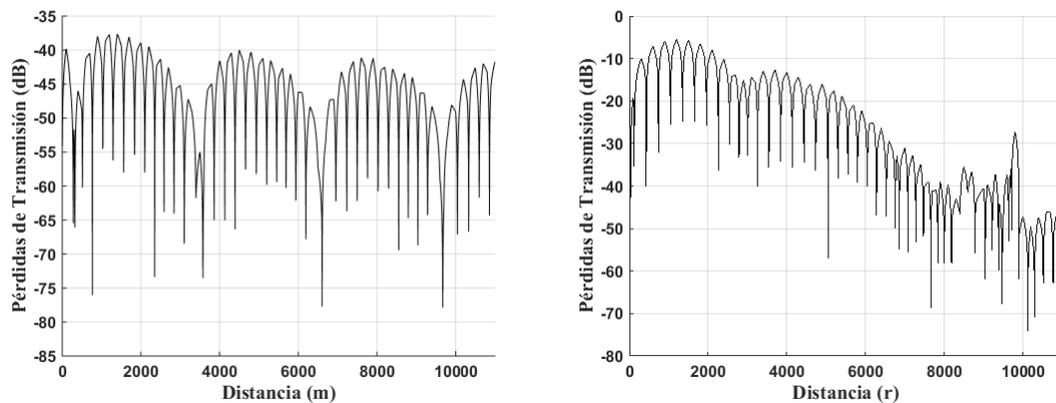


Figura 5.22: *Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 1 - 6$*

En los resultados anteriores se muestra que el campo acústico en el modelo cuasi estratificado con interfaz simulada como un perfil de fondo parabólico negativo es distinto en comparación al modelo de guía de onda estratificada debido a las variaciones de los valores propios obtenidos mostradas en la Figura 5.18. Se observa que a pesar de que un menor número de valores propios sea considerado, las pérdidas de transmisión son menores del modelo cuasi estratificado al modelo estratificado por la falta de la divergencia geométrica, sin embargo muestra el comportamiento que el campo tiene a lo largo de la distancia de análisis y las variaciones que originan los cambios de los valores propios.

Para estimar las pérdidas de transmisión y realizar una comparativa entre el modelo estratificado y el modelo cuasi estratificado aplicamos el perfil de velocidad de la región central del Mediterráneo en el mes de Agosto $c_0(z)$ el cual fue definido y utilizado en la sección anterior, este fue definido en la Tabla 5.1. Aplicando la cuasi

estratificación ocasionada por el perfil de fondo negativo obtenemos el perfil de velocidad cuasi estratificado $c_0(\varepsilon x, z)$ mostrado en la Figura 5.23 el cual sufre de una lenta variación en la dirección horizontal.

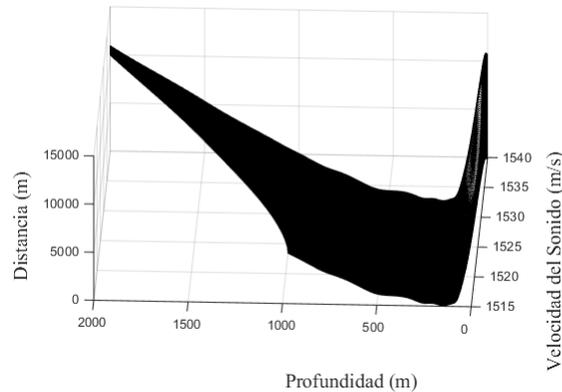


Figura 5.23: Perfil de velocidad del sonido con cuasi estratificación negativa en la región central del Mediterráneo en Agosto.

Aplicando los mismos parámetros que al perfil de velocidad del Mar Mediterráneo en el mes de Febrero, tal como frecuencia de operación de la fuente, densidades de la capa de agua y del fondo marino, ubicación de la fuente y receptor, etc, se obtuvo la ecuación de dispersión correspondiente la cual fue construida por el método SPSS y se obtuvieron $n = 6$ valores propios los cuales sufren un comportamiento variable debido a las características del problema, en donde este comportamiento lo podemos visualizar en la Figura 5.24:

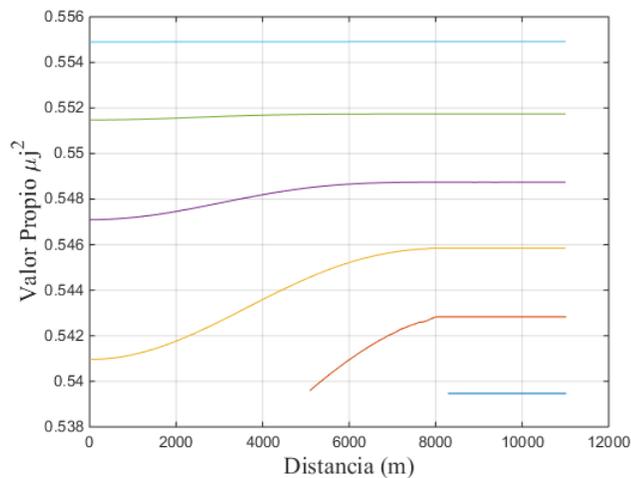


Figura 5.24: Valores Propios en Mar Mediterráneo en Agosto con Perfil Parabólico Negativo.

En este tipo de perfil de velocidad del sonido los valores propios mostrados en la figura

anterior sufren de igual manera una variación con tendencia positiva, sin embargo en este caso hay cuatro valores propios que existen en todo el segmento de análisis horizontal, se nota que las variaciones son más notorias y extendidas, por lo que los números onda cuenta con un mayor cambio desde el valor inicial hasta el final que es cuando se comportan de manera constante por presentarse la interfaz con comportamiento constante. En este escenario como en el caso anterior existe una aparición de valores propios conforme se desplazan en la dirección horizontal, por lo que la contribución de modos propagados será mayor en el receptor aunque no se hayan originado inicialmente por la fuente sino por las características del medio de propagación.

A partir de los valores propios, obtenemos el campo acústico originado por una fuente fija ubicada en el océano como pérdidas de transmisión en dB a través de la asintótica de la función de Green para una guía de onda cuasi estratificada expresada por las ecuaciones (2.80) y (4.40). Las siguientes figuras muestran el comportamiento del campo acústico mediante la contribución de diferentes modos de propagación y la dependencia de las pérdidas de transmisión de la presión acústica (en dB) con la distancia de separación entre la fuente y el receptor, además de la comparativa del campo obtenido para un modelo estratificado como cuasi estratificado considerando en ambos casos $n = 6$ valores propios.

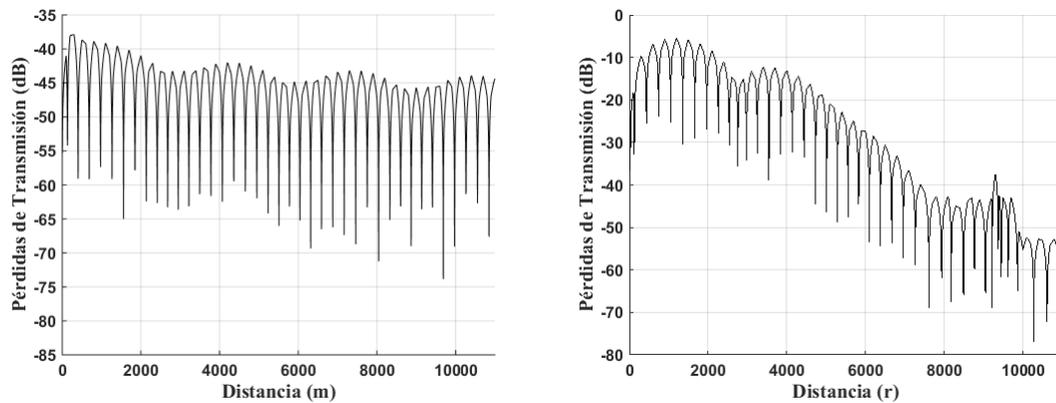


Figura 5.25: *Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 5, 6$*

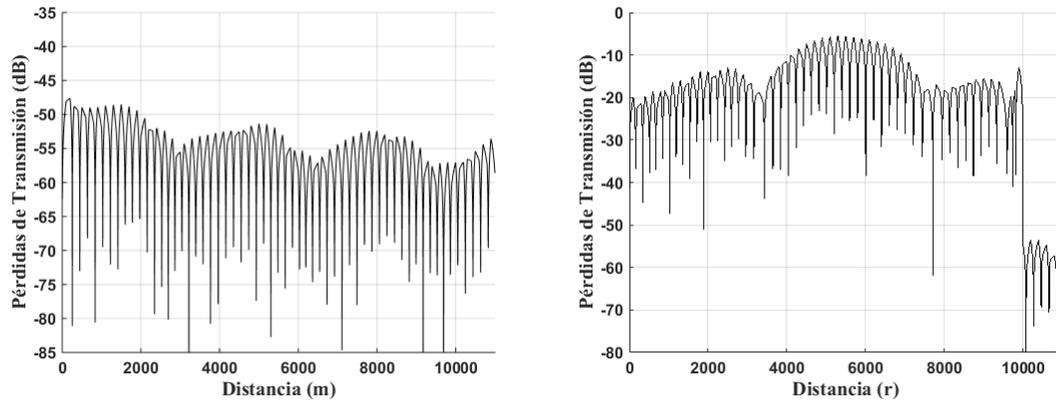


Figura 5.26: Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 1, 2, 3$

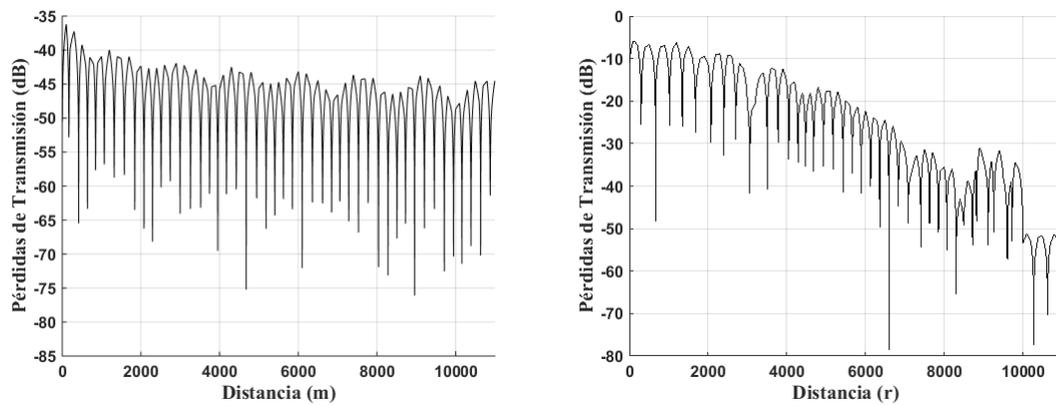


Figura 5.27: Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 2, 4, 6$

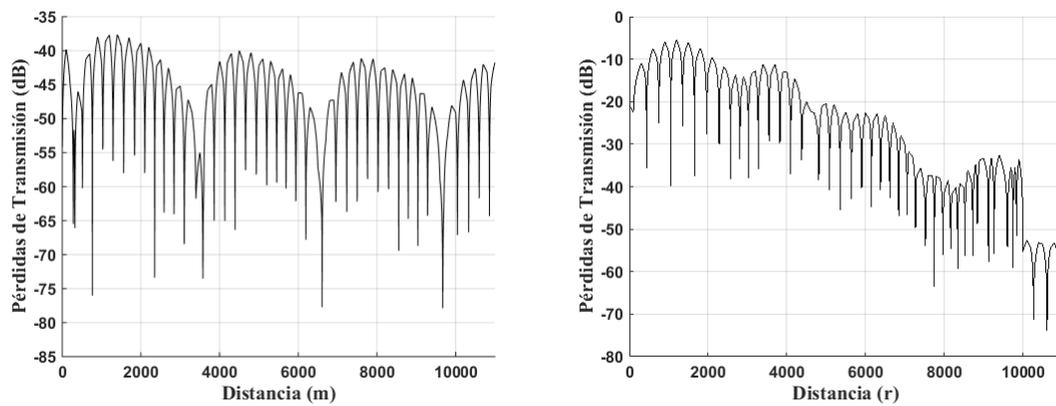


Figura 5.28: Pérdidas de Transmisión Modelo Estratificado y Cuasi Estratificado para modos $j = 1 - 6$

Las resultados anteriores muestran el campo acústico comparando el modelo estratificado y cuasi estratificado con una interfaz entre la guía de onda y el fondo marino además del perfil de velocidad del sonido afectado por la cuasi estratificación perteneciente al Mar Mediterráneo en el mes de Agosto; ambos muestran el campo originado por la contribución de cierto número de modos propagados. El campo acústico se comporta de diferente manera debido a las variaciones de los valores propios mostrados en la Figura 5.24, así como la aparición de otros a cierta distancia en la dirección horizontal. Como en los experimentos anteriores, el campo acústico en pérdidas de transmisión en el modelo estratificado es uniforme y atenuado a lo largo de la distancia considerada, atenuación que como ya fue mencionado puede ser ocasionada por fenómenos de dispersión y absorción. El campo acústico en el modelo cuasi estratificado, la variación de los valores propios afecta el campo directamente ya que esa variación, así como la aparición de valores propios, hacen que el campo forme una estructura diferente al modelo estratificado.

Lo anterior muestra que el campo acústico en el modelo cuasi estratificado en dos dimensiones es modificado debido a las variaciones de los valores propios obtenidos, estos dependientes de la interfaz agua-fondo y del perfil de velocidad del sonido afectado por las variaciones lentas en la dirección horizontal. Las pérdidas de transmisión expresadas, muestran como las variaciones en la geometría de la guía de onda así como en las características del medio afectan la propagación de las ondas, puede que existan interferencias positivas como negativas y originen cambios que afecten o beneficien la propagación. En los resultados se muestra que al manejar una interfaz con perfil parabólico negativo las pérdidas de transmisión son menores en los primeros kilómetros de análisis, posterior a ello la energía decae bastante, sin embargo al manejar un perfil parabólico positivo las pérdidas son mayores pero se conserva su comportamiento a lo largo de la guía de onda (considerando la falta del término de divergencia geométrica), por lo que se puede concluir que a cortas distancias el perfil parabólico negativo beneficiaría la transmisión pero a largas distancias el perfil parabólico positivo daría mejores resultados.

CONCLUSIONES

Este trabajo está dedicado al análisis numérico de la propagación de ondas acústicas submarinas generadas por una fuente puntual en el modelo cuasi estratificado del océano real. Se obtuvieron expresiones convenientes para la obtención de los valores propios que son el número de onda de los modos de propagación y la contribución de estos modos al campo acústico en dos distintos modelos de océano cuasi estratificado de perfil parabólico teniendo una variación lenta en la interfaz entre la capa de agua y el fondo oceánico así como en las características de velocidad del sonido. Se observó que debido a esta cuasi estratificación los valores propios presentaron variaciones a lo largo de la distancia de análisis resultando un cambio de fase para cada uno de los modos existentes y un comportamiento del campo acústico diferente con respecto a modelos con océano estratificado o de fondo plano.

Es posible realizar un análisis matemático de la propagación de ondas acústicas submarinas generadas por una fuente en el modelo estratificado y cuasi estratificado del océano real. El modelo cuasi estratificado del océano presenta una variación lenta en el fondo oceánico así como sus características presentadas, la cual da como resultado una variación en los valores propios obtenidos, misma que afecta directamente la propagación de las ondas acústicas y el comportamiento del campo. El método SPPS resultó ser una herramienta matemática capaz de resolver el problema espectral Sturm-Liouville mediante el trato de funciones polinomiales más fáciles de manipular y que es capaz de obtener los valores propios mediante la construcción de la ecuación de dispersión con gran precisión al método de modos normales igual empleado.

Mediante la construcción de la función de Green fue posible modelar el campo acústico por medio de las pérdidas de transmisión, en dB, de la onda acústica que se propaga en donde estas pérdidas son dependientes de la distancia y la profundidad, este campo que representa las variaciones de la intensidad de la presión que ocasionan las perturbaciones al propagarse por los modelos considerados como océano real. Los métodos empleados para la construcción de las funciones de Green para los modelos estratificados y cuasi estratificados del océano son distintos, ya que en el primer caso no existe un factor que origine variaciones en los términos del operador de Helmholtz, que es como se representa la ecuación de propagación de ondas, por lo que se utiliza la función de Hankel ya que satisface el principio de absorción límite que establece la atenuación de las ondas al propagarse hacia el infinito. En el segundo caso, el modelo

cuasi estratificado, el método de solución excluye la función de Hankel por existir el parámetro ε que origina una lenta variación en la dirección horizontal, por lo que emplea el método de rayos, además de la solución de la ecuación de transporte y la solución eiconal, considerando el principio de absorción límite para agregarlo a la solución.

Sin embargo, al pasar del análisis de tres dimensiones a dos dimensiones, por las condiciones del problema no fue posible agregar un factor de atenuación a la asintótica de la Función de Green llamado divergencia geométrica, término que depende directamente de los números de onda de los modos propagados y de la distancia que recorren los modos desde la ubicación de la fuente hasta el receptor, que da como resultado la fase de cada uno de los modos conforme se propagan. Debido a esto, el análisis en modelos cuasi estratificados nos muestra el comportamiento del campo acústico sin mostrar una atenuación directa en la propagación de la onda, en cambio nos muestra el campo afectado por el comportamiento de los valores propios o números de onda. Este término de atenuación o divergencia geométrica aplica en modelos de tres dimensiones en donde los rayos a parte de tener curvatura en dos dimensiones pueden contar con una rotación presente en el modelo 3D, sin embargo es posible obtener una expresión de la asintótica de la función de Green en modelos cuasi estratificados con divergencia geométrica mediante análisis más complejo.

El campo acústico o las variaciones de presión conforme se propaga la onda acústica cambia en los modelos estratificados y cuasi estratificados, se observa que conforme varía la interfaz entre la capa de agua y el fondo, y a su vez la variación del perfil de la velocidad del sonido, ocasionadas por el parámetro pequeño en la dirección horizontal, esto es a raíz de la modificación de los números de onda relacionados a la fase con respecto a la distancia. En el modelo estratificado la fase de los modos propagados es constante en toda la distancia considerada, sin embargo, en los modelos cuasi estratificados esta fase cambia de acuerdo a las características del modelo empleado, con un comportamiento curvo, hasta la existencia o no de valores propios en ciertas regiones; con esto, el campo es perjudicado y el comportamiento de las pérdidas de transmisión cambian al propagarse la onda por la región variable.

El método SPSS es una herramienta que siendo independiente de la distancia permite construir una ecuación de dispersión efectiva para obtener los números de onda y expresiones explícitas para los modos propagados por medio de series de potencias, las cuales tienen un fácil manejo para métodos numéricos y programación. Para la propagación en guías de onda, los números de onda que forman el espectro discreto son aquellos que dan la contribución del campo lejano, a diferencia del espectro continuo que contribuye al campo cercano ya que esa contribución decae en un factor $1/r^2$. Una fuente localizada dentro del canal de sonido profundo radia energía, esta energía es confinada dentro de la guía de onda y es directamente proporcional al ángulo de apertura que se encuentra limitado por el ángulo crítico θ_c , los rayos que cuentan con un ángulo menor a este ángulo crítico serán los modos que serán propagados sin embargo, los rayos que tengan un ángulo mayor a este θ_c no se propagarán y serán atenuados rápidamente.

Bibliografía

- [1] J. Hernandez-Juarez. *Propagacion de onda acustica en el oceano estratificado*. Tesis de Maestria, Dept. Telecomunicaciones, ESIME IPN. Mexico D.F., 2011.
- [2] J. Hernandez-Juarez. *Spectral Parameter Power Series Method in underwater acoustic wave propagation*. Tesis doctoral, Dept. Telecomunicaciones, ESIME IPN. Mexico D.F., 2016.
- [3] T. D. Rossing. *Springer Handbook of Acoustics*. Springer, 2nd. Edition, ISBN: 978-1-4939-0754-0, 2014.
- [4] H. Medwin and C. S. Clay. *Fundamentals of acoustical oceanography*. NewYork: Academic Press, 1998.
- [5] F. B. Jensen, W. A. Kuperman, M. B. Porter, and H. Schmidt. *Computational Ocean Acoustics*. Modern Acoustics and Signal Processing, Springer New York, 2nd. Edition, ISBN 978-1-4419-8677-1, 2011.
- [6] H. Steward. *Introduction to Physical Oceanography*. Departament of Oceanography, Texas A and M University, 2008.
- [7] Daljit S. Ahluwalia and Joseph B. Keller. *Exact and asymptotic representations of the sound field in a stratified ocean, Lecture Notes in Physics, 70*. Wave Propagation and Underwater Acoustics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977, 14-85.
- [8] R. Burridge and G. Weinberg. *Horizontal rays and vertical modes, in Lecture Notes un Physics, 70*. Wave Propagation and Underwater Acoustics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977, 86-152.
- [9] A.D. Pierce. Extention of the method of normal modes to sound propagation in an almost stratified medium. *J. Acoustic Soc. Am.* 37, 1965.
- [10] A.D. Pierce. Guided mode disappearance during upslope propagation invariable depth shallow water overlying a fluid bottom. *J. Acoustic Soc. Am., v.72, 2, 523-531*, 1982.

-
- [11] V. M. Babich. *Multidimensional WKB method. Its analogs and generalization.* Itogi Nauki i Tekniki, Ser. Sovr. Probl. mat. Fundamental nie Napravlenia, 1988, tom 34, 93-143.
- [12] Khmelnytskaya K. V. and Kravchenko V.V. Eigenvalue problems, spectral parameter power series, and modern applications. *Applied Mathematics and Computation* 219, 3610-3624., 2012.
- [13] V. V. Kravchenko. Applied pseudoanalytic theory. *Frontier in Mathematics, Birkhauser Verlag, Basel Boston Berlin*, 2009.
- [14] Kravchenko V.V. and Porter R.M. Spectral parameter power series for sturm-liouville problems. *Mathematical methods in the applied sciences, V. 33 . A. issue 4, 459-468*, 2010.
- [15] Raul Castillo, Vladislav V. Kravchenko, Hector Oviedo, and Vladimir S. Rabinovich. Dispersion equation and eigenvalues for quantum wells using spectral parameter power series. *Journal of mathematical physics* 52, 043522, 2011.
- [16] V. V. Kravchenko. A representation for solutions of the sturm-liouville equation. *Complex Variables and Elliptic Equations. 53:8, 775-789.*
- [17] V. Rabinovich and J. Hernandez-Juarez. Method of spectral parameter power series in problems of underwater acoustics of the stratified ocean. *Mateemtical Methods in Applied Sciences, wileyonlinelibrary.com, DOI:10.1002/mma.3197,vol. 38, pp. 1970-1989*, 2015.
- [18] V. Rabinovich and J. Hernandez Juarez. Effective methods of estimates of acoustic fields in the ocean generated by moving sources. *Applicable Analysis, 2015, <http://dx.doi.org/10.1080/00036811.2014.998655>, 95, Issue 1, 124-137*, 2016.
- [19] V. Rabinovich and J. Hernandez Juarez. Numerical estimates of acoustic fields in the ocean generated by moving airborne sources. *Applicable Analysis, ISSN: 0003-6811 (Print) 1563-504X (Online) Journal homepage: <http://www.tandfonline.com/loi/gapa> 20*, 2016.
- [20] M. A. Ainslie. *Principles of Sonar Performance Modeling.* Springer Praxis Books in Geophysical Sciences, ISBN 978-3-540-87661-8, 2010.
- [21] Jens M. Hoven. Underwater acoustics: Propagation, devices and systems. *Springer Science + Business Media, DOI 10.1007/s10832-007-9059-9*, 2007.
- [22] M. J. Buckingham and E. M. Giddens. Theory of sound propagation from a moving source in three-layer Pekeris waveguide. *J. Acoust. Soc. Am., 120 (4), Pages:1825-1841*, October 2006.
- [23] C. L. Pekeris. Theory of propagation of explosive sound in shallow water. *Geological Society of America Memoir, Propagation of Sound in the Ocean, Geological Society of America, New York, Vol. 27, pp. 1-117*, 1948.

-
- [24] M. Quino. *Propagacion de onda acustica en 3 medios para oceanos estratificados mediante el metodo de modos normales*. Tesis doctoral, Dept. Telecomunicaciones, ESIME IPN. MÃ©xico D.F., 2008.
- [25] O. A. Obrezanova and V. S. Rabinovich. Acoustic field of a source moving along stratified waveguide surface. *Akusticheskii Jurnal*, 39, no. 3, pp. 517-521 (in Russian), 1993.
- [26] E. Kinsler. *Fundamentals of acoustics*. 3rd ed. United States of America: John Wiley and Sons, 1973.
- [27] L. M. Brekhovskikh and O. A. Godin. *Acoustics of Layered Media I: Plane and Quasi-Plane Waves*. Springer Series on Wave Phenomena, Vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [28] L. M. Brekhovskikh and Yu. P. Lysanov. *Fundamentals of Ocean Acoustics, Modern Acoustics and Signal Processing*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [29] L. M. Brekhovskikh and O. A. Godin. *Acoustics of Layered Media II: Point Source and Bounded Beams*. Springer Series on Wave Phenomena, Vol. 10, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [30] I. Tolstoy and C.S. Clay. *Ocean Acoustic, Theory and Experiment in Underwater Sound*. Ac. Society of America, 1987.
- [31] J. L. Lagunas-Perez, V. Barrera-Figueroa, and V. S. Rabinovich. Analisis de propagacion de ondas electromagneticas en guias de onda estratificada. *XVI CNIES, SEPI ESIME IPN*, 2017.
- [32] V. Barrera-Figuera, V. Kravchenko, and V. S. Rabinovich. Spectral parameter power series analysis of isotropic planarly layered waveguides. *Applicable Analysis*, <http://dx.doi.org/10.1080/00036811.2013.794940>, 27 pages, 2013.
- [33] Victor Barrera-Figueroa, Vladislav V. Kravchenko, and Vladimir S. Rabinovich. Spectral parameter power series analysis of isotropic planarly layered waveguides. *Applicable Analysis: An International Journal*, 93:4, 729-755, DOI: 10.1080/00036811.2013.794940, 2014.
- [34] Raul Castillo-Perez, Vladislav V. Kravchenko, and Sergii M. Torba. Spectral parameter power series for perturbed bessel equations. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier Inc., 2013.
- [35] Raul Castillo-Perez, Vladislav V. Kravchenko, and Sergii M. Torba. Analysis of graded-index optical fibers by the spectral parameter power series method. *Journal of Optics*, doi:10.1088/2040-8978/17/2/025607, 2015.
- [36] Weng Cho Chew. *Waves and fields in inhomogeneous media*. IEEE, Press, New York, 1995.

-
- [37] V. V. Kravchenko. A representation for solutions of the sturm-liouville equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 53:8, 775-789.
- [38] Berezin F. A. and Shubin M. A. The schrodinger equation. *Kluwer Academic Press, Dordrecht/Boston/London*, 1991.
- [39] C. H. Wilcox. Sound propagation in stratified fluids. *Applied Mathematical Science, Vol. 50, Springer- Verlag New York Berlin Heidelberg Tokyo*, 1990.
- [40] L. M. Brekhovskikh. Waves in layered media. *New York, Academic Press*, 1960.
- [41] A. D. Waite. *SONAR for practising engineers*. 3rd. Ed. John Wiley and Sons, 1998.
- [42] V.V. Belov, Dobrokhotov S. Yu., and Tudorovskiy T. Ya. *Operator separation of variables for adiabatic problems in quantum and wave mechanics*.
- [43] V.P. Maslov. *Perturbation Theory and Asymptotic Methods*. M. Izd. MGU, 1965, (In Russian).
- [44] V.P. Maslov. *Operator Methods*. M. Nauka, 1973, (In Russian).
- [45] V.P. Maslov. *Complex Method of WKB in Nonlinear Equations*. M. Nauka, 1977 (In Russian).
- [46] V.P. Maslov and M.V. Fedoruk. *Quasi-Classic Approximation for Equations of Quantum Mechanics*. Nauka, Moskow, 1976 (In Russian).