SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Física y Matemáticas

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 08 del mes de Mayo del año 2017, el que suscribe Diana Wendolyne Ríos Jarquín alumno del Programa Académico de Licenciatura en Física y Matemáticas con número de boleta 2013330340, adscrito a la Escuela Superior de Física y Matemáticas, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del M. en C. Erick Lee Guzmán y la Dra. Luz María de Guadalupe González Álvarez y cede los derechos del trabajo titulado "Estudio transversal de la noción de función en estudiantes de Física y Matemáticas: un estudio de las dificultades comunes", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección wendolyne.esfm@gmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Diana Wendolyne Ríos Jarquín
Nombre y firma del alumno

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Estudio transversal de la noción de función en estudiantes de Física y Matemáticas: un estudio de las dificultades comunes

TESIS

Que presenta

Diana Wendolyne Ríos Jarquín

Para obtener el grado de

Licenciada en Física y Matemáticas

Directores de Tesis

Dra. Luz María de Guadalupe González Álvarez

M. en C. Erick Lee Guzmán

México, CDMX

Mayo, 2017

Dedico este trabajo…

A mis profesores de la Escuela Superior de Física y Matemáticas,
Por ser los pilares en mi formación académica.

A la comunidad interesada en hacer un cambio en y para la enseñanza de la matemática,
Porque dejar de lado la indiferencia y abrir la mente a nuevas posibilidades,
nos ayuda a mejorar.

A mis padres…
Por alimentar mis sueños y ser mí apoyo en todo momento,
Por enseñarme a ser y hacer con amor y compromiso,
Por inspirarme a ser mejor cada día,
Por el amor y por la vida.

A mis seres amados…
Abejitas, Vale, Concha, mi cielo…
Por el entusiasmo y la motivación,
Por el cariño y los consejos.

Agradecimientos

A mi asesora
Por el apoyo, las enseñanzas y el compromiso con la investigación,

A mi asesor
Por la comprensión y las oportunas observaciones durante el estudio

A los profesores de las asignaturas de estudio
Por su participación y el apoyo a la investigación.

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio ex – post – facto, de carácter cualitativo en el cual se toma como estrategia de interpretación de datos la categorización cualitativa y como herramienta de análisis la construcción de redes sistémicas, con las que se hace un examen de las dificultades que manifiestan las y los estudiantes de la Licenciatura en Física y Matemáticas de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional ante el uso y conceptualización del objeto matemático “función" dentro de cinco asignaturas de los primeros cuatro semestres de la carrera: Cálculo I, Análisis Vectorial, Ecuaciones diferenciales, Cálculo III y Álgebra IV, en las cuales el concepto de función se conceptualiza y significa a través de su uso.

Como marco teórico se tomaron; la teoría de las Representaciones semióticas de Duval y la teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud; aspectos epistemológicos del concepto de función; estudios didácticos acerca de la enseñanza y el aprendizaje de funciones; y algunas consideraciones teóricas de las asignaturas de los grupos de estudio.

Finalmente se presentan las dificultades identificadas de acuerdo a determinados procesos, como la conceptualización, el tratamiento y la conversión de registros semióticos relativos al concepto de **función**.

Tabla de contenido

Índice de Cuadros

Índice de Figuras

Índice de Ilustraciones

INTRODUCCIÓN

El lenguaje de la matemática se caracteriza por poseer variables sintácticas y semánticas, que al ser articuladas a través de relaciones lógicas y formales transforman un conjunto de símbolos y conceptos en una de las herramientas más maravillosas del desarrollo científico. Sin embargo, el uso y el significado de este lenguaje en el contexto educativo presentan importantes dificultades y por ello es importante construir instrumentos que faciliten y optimicen el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En la Escuela Superior de Física y Matemáticas, existen nociones del conocimiento matemático que son indispensables tanto en la formación académica de un matemático como de un físico, ya que, mientras que en la primera se conceptualizan los objetos, en la segunda se significan a través de su uso. Un ejemplo de ellas es la noción de **función,** la cual tiene un papel muy importante en los primeros cuatro semestres de la Licenciatura en Física y Matemáticas, dentro de las asignaturas de Cálculo, Análisis Vectorial, Ecuaciones Diferenciales y Álgebra IV. En este estudio el lector encontrará, además del análisis de algunas de las dificultades que presentan los estudiantes ante el uso y conceptualización del objeto matemático **función**, una postura teórica de carácter didáctico con la que se pretende vislumbrar el camino que se ha de seguir para mejorar los métodos de enseñanza del concepto de función.

Al principio de este escrito se explica cómo esta investigación se encuentra dentro del marco de la creatividad, así mismo se plantean las preguntas de investigación que guían este estudio cualitativo transversal.

En el capítulo dos, se hace un desarrollo teórico de la teoría didáctica: Teoría de las representaciones semióticas de Duval y Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud; y aspectos teóricos de la matemática de los las asignaturas de los grupos de estudio, en los cuales se fundamenta el análisis y la interpretación de los datos. Posteriormente en el tercer capítulo se hace una caracterización de la metodología que se utilizó para la realización de la investigación, esta sección incluye una descripción de la investigación ex – post – facto y el análisis de datos cualitativos. En el capítulo 4 se presenta el análisis de las respuestas que dieron los estudiantes de las cinco materias en las cuales se realizó el estudio: Cálculo I, Cálculo II, Análisis Vectorial, Ecuaciones Diferenciales y Álgebra IV a los exámenes de cada una de ellas.

Dentro del capítulo cinco se hace una discusión final en la cual se revisan las dificultades más comunes a las que se enfrentaron los estudiantes de los diferentes cursos respecto al uso y conceptualización de la noción de función.

Finalmente se hace un apartado de recomendaciones en donde se plantean las futuras oportunidades de investigación respecto al análisis del lenguaje de la Matemática en situaciones dentro y fuera del contexto académico.

CAPÍTULO 1

Planteamiento del problema

Las matemáticas no son un recorrido prudente por una autopista despejada, sino un viaje a un terreno salvaje y extraño, en el cual los exploradores se pierden a menudo.

- W. S. Anglin (1992)

1.1 Estado del arte

En didáctica existen múltiples investigaciones que evidencian las dificultades que presentan los estudiantes en el manejo de determinadas nociones matemáticas, en diferentes niveles educativos. A continuación se presenta un breve resumen de algunas de las investigaciones más recientes respecto al lenguaje de la Matemática:

Montecino y Cantoral (2013), señalan que la relación entre los símbolos *f* y *f(x)* así como su uso, permiten que se signifiquen de manera contextualizada. Esta investigación tuvo su origen en una experiencia de aula en la que se identificó la confusión entre una noción de función con un procedimiento, en una situación de cálculo de sólidos de revolución se confundió la imagen *f(x),* con la función *f.* Así pues, ellos afirman que "*el hecho de que f sólo se ve presente al momento de establecer el concepto de función, refuerza el uso indiferente de f(x) en los diferentes contextos, lo que propicia un predominio en el uso de este último para referirse a todos los aspectos vinculados a la función* (p. 1173).

Por otro lado, en un estudio realizado por Aguilar, Maturano y Núñez (2007) con estudiantes universitarios sobre contenidos de Física (movimiento), se involucraron diferentes representaciones del lenguaje matemático en distintos niveles de abstracción; a través de este estudio no sólo se identificaron dificultades en la comprensión de conceptos de Física, sino que además "se detectaron otras concepciones diferentes a las investigadas sobre el movimiento, correspondientes a dificultades en el uso e interpretación de los lenguajes verbal, gráfica y formal[1], que requerirían intervención didáctica." (p. 1775)

Dado que la situación planteada en este estudio no era la de una clase convencional (cátedra frente al pizarrón), sino que proponía el uso de imágenes para reconocer las preconcepciones que los estudiantes poseían respecto a nociones de movimiento en Física, los autores consideran que las respuestas obtenidas son mucho más aproximadas a las ideas reales de los estudiantes, ya que las imágenes los ayudan a vincular directamente los fenómenos con su representación semiótica. Además afirman que "*a mayor grado de iconicidad, mayor posibilidad de captar el conocimiento cotidiano del alumno y a menor grado de iconicidad (o mayor grado de simbología) mayor tendencia a captar el conocimiento académico"*. (p. 699)

Algunas de las dificultades más interesantes que se encontraron en este estudio, fueron las relacionadas con habilidades de lectura e interpretación de las consignas, así como dificultades para establecer relaciones entre el contenido de las imágenes, además *"Los códigos y formatos sintácticos en los que hemos detectados falta de consenso en el*

[1] Entendemos como lenguaje formal, aquél que involucra el uso de la axiomática de la matemática avanzada así como de las leyes de la lógica simbólica.

aula abarcan tanto el lenguaje verbal (como en el caso del concepto de lanzamiento y caída libre), el gráfico (como en el caso de la cuadrícula) y el formal (como la interpretación de los símbolos)". (Aguilar, Maturano y Núñez, 2007, p. 700)

Otra investigación es la que realizó Romero (2000), en la cual menciona algunas de las ventajas del uso del cambio de registro semiótico, entre ellas se encuentra; la traducción entre sistemas de representación, que es de gran utilidad ya que hay objetos que no pueden ser manipulados en su representación original (como en el caso de la Física) y traducirlas a otro lenguaje facilita su estudio; la economía de tratamiento, es decir, el uso de las representaciones para optimizar los procedimientos; la complementariedad de los sistemas que está vinculada con visualizar a los objetos a través de sus sistemas de representación y así poder estudiar otros objetos cuya visualización requiere de otros objetos, físicos o matemáticos; finalmente se encuentra la conceptualización en la que las representaciones funcionan como puentes para la comprensión de los objetos.

El trabajo de Romero (2000) abordó el tema de sucesiones de números naturales, lineales y cuadráticos que requiere el uso de diferentes sistemas de representación, así pues se reconoció que:

> Muy pocos identificaron el término general con la estructura operatoria común que comparten los términos de una secuencia, cuya notación más adecuada viene dada por el desarrollo aritmético. La comprensión de los escolares de 12-14 años sobre la noción de término general fue prácticamente inexistente dado que no se apreció estructuración entre las representaciones mentales correspondientes a los diferentes sistemas de representación utilizados. Sólo unos pocos estudiantes, que integraron

> total o parcialmente los tres sistemas, dieron muestras de un cierto dominio de la noción de término general de una sucesión. (p. 42)

Éste es un ejemplo de cómo la problemática del cambio de sistemas de representación en matemáticas no es exclusiva de un solo nivel educativo, el dominio de diferentes representaciones semióticas se presenta desde el nivel básico.

Por otra parte en 2011 Camacho-Ríos reporta los resultados de la implementación de una situación didáctica en diferentes etapas; con un grupo de arquitectura (2004), un grupo de ingeniería industrial y de sistemas computacionales (2007) y en 2010 tres grupos de las especialidades anteriores. Las dificultades que mencionaremos a continuación fueron presentadas por los estudiantes de la etapa más reciente (2010), con quienes se trabajó una situación didáctica referente a las funciones trigonométricas con tecnología de lápiz y papel (empleando sólo regla y compás) usando diferentes tipos de representación y un acercamiento histórico a la construcción de la función seno, que consistió de la lectura de una reseña histórica de la cual se debía hacer una síntesis. En términos generales, se observó que:

> Las dos experiencias desarrolladas muestran cómo el conocimiento matemático involucrado fue disociado de su origen y sus coyunturas adecuadas a la enseñanza con cierto éxito. No obstante, la propuesta rompe con la forma tradicional del discurso matemático e irrumpe en éste con un rediseño más dinámico que pone en el centro de la enseñanza a la actividad desarrollada por los estudiantes. (p. 170)

Este trabajo muestra cómo el uso del cambio de registro y la significación de un objeto matemático a través de su uso en diferentes situaciones es de gran utilidad para facilitar el aprendizaje de los estudiantes.

Otro de los estudios referentes al lenguaje de la matemática y las dificultades de su comprensión, es el que presentan Crespo, Homilka y Lestón (2011), en él se describen algunos aspectos del lenguaje que utilizan los estudiantes y profesores en el aula de Matemáticas y cómo el uso del lenguaje formal de la matemática es aceptado aunque éste genere un obstáculo en algunas ocasiones. Una de las características del estudio, que deben resaltarse es el uso de varios registros de representación de manera simultánea incluyendo las definiciones formales del objeto trabajado, que fue límites de funciones.

En las respuestas, uno de los aspectos relevantes es el que a pesar de que algunos estudiantes no supieran resolver adecuadamente los planteamientos, sí mantuvieron el uso del lenguaje formal. En términos de las autoras:

> La formalización es comprendida por los alumnos como parte de la normativa que impone el contrato didáctico. Esto llevó a que se fijara la atención en esta investigación en el lenguaje que se utiliza tanto en los libros de texto de matemática, como por parte del profesor de matemática como actor con un papel importante en el escenario del aula, iniciador del diálogo y quien toma decisiones didácticas, que por lo tanto influye en la construcción de representaciones sociales en este escenario. (Crespo, Homilka y Lestón, 2011, p. 754)

En este caso, los estudiantes enfatizan su aprendizaje en el lenguaje y no en el significado de la idea de límite, es decir, aceptan el uso del lenguaje matemático formal como un requisito indispensable en sus respuestas aún si no comprenden completamente el concepto.

En general, el aprendizaje de la matemática es un proceso complejo y lleno de obstáculos, Ímaz y Moreno (2009) en un estudio sobre el Cálculo y su enseñanza, dan cuenta de que ésta "padece de diversas patologías" a las cuales caracteriza en tres categorías y las describe como persistentes y densas, por ejemplo: el uso excesivo del rigor matemático propio del análisis en el ámbito educativo, que genera confusiones y aversión por parte de los estudiantes.

Finalmente, el caso del pensamiento funcional no es exclusivo de la asignatura de Cálculo ya que los conceptos que se definen y construyen en esta asignatura, son de gran importancia en otras disciplinas de la Matemática como "Probabilidad, Ecuaciones Diferenciales, Ordinarias, Ecuaciones Diferenciales Parciales, Programación, Programación Lineal y no Lineal, Investigación de Operaciones, Métodos Numéricos, Análisis Funcional, Teoría de Operadores, Sistemas Dinámicos". (Cribeiro, Madrid y Fraga, 2013, p. 53)

Respecto a la asignatura de Ecuaciones Diferenciales, Morales y Hernández (2010) en un estudio con estudiantes de nivel superior, muestran que la graficación de la curva solución a partir del campo de pendientes usando tecnología de lápiz y papel (como en el caso de nuestra muestra) presentó dificultad en la visualización de la misma, debido a que dibujar el campo de pendientes suele ser tedioso para los estudiantes, además de que el proceso de visualización de la curva suele ser problemático para los estudiantes.

Por otra parte, en una investigación que Díaz (2009) realizó referente a estudiantes de ciencias Químico Biológicas en los cursos de Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y Ecuaciones Diferenciales, en los cuales recolectó las calificaciones finales e hizo un análisis cuantitativo de ellas, encontrando que el 50% de los estudiantes de Cálculo Diferencial no aprobó el curso; de los 111 estudiantes que se inscribieron en el curso de Cálculo Integral sólo 77 lo aprobaron y; de los 51 estudiantes que se registraron en el curso de Ecuaciones Diferenciales sólo 41 acreditaron el curso. Si consideramos que las tres asignaturas, están ligadas de tal modo que no se puede cursar Ecuaciones Diferenciales sin haber aprobado Cálculo Integral y a su vez, no se puede tomar Cálculo Integral sin haber acreditado Cálculo Diferencial, de los 201 estudiantes que ingresaron en los cursos de Cálculo Diferencial sólo 41 aprobaron los cursos de manera consecutiva, pero ¿qué pasó con el resto? De acuerdo al estudio de Díaz (2009) el resto de los estudiantes se encontraban cursando por segunda o tercera vez alguna de las asignaturas antes mencionadas.

La evidencia de dificultades en los cursos donde se pone en práctica el pensamiento funcional también está presente en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional pues, Aguilar y Simón (2009) realizaron un estudio respecto a la noción de Función y sus Derivadas sucesivas y encontraron que los estudiantes no pueden establecer un manejo simultáneo de estas dos nociones. Además muestran el uso que hacen de los recursos memorísticos, de la falta de comprensión del lenguaje matemático y la falta de comprensión del carácter variacional implícito en la definición analítica de Derivada, pero sobre todo "*Carecen de herramientas que les permitan pasar* *del lenguaje gráfico al lenguaje algebraico, indispensables para establecer el manejo simultáneo entre las derivadas sucesivas"*(p. 651)

1.2 Justificación

La interpretación y el uso de los distintos tipos de lenguaje están rodeados de dificultades no sólo en el contexto de la Matemática, sino en otras disciplinas como el de la Física, en las cuales para algunos autores, la iconicidad y la simbología juegan un papel importante en la interpretación de las concepciones del alumno (Aguilar, Maturano y Núñez, 2007). Sin embargo, este estudio no considera que los conceptos se significan no sólo a través de sus representaciones, sino también a partir de las situaciones en las cuales se ven inmersos es decir, de sus campos conceptuales.

Además, en la investigación de Romero (2000) se observó que los estudiantes de secundaria no presentan estructuración entre las representaciones mentales correspondientes a los sistemas de representación, en este caso el autor no considera las variables semánticas del lenguaje matemático, al igual que en el caso anterior.

Por otro lado, está el uso y la relación entre los símbolos f y *f(x)* en un contexto matemático en el que se define a la función de manera analítica dentro de los libros de texto y cómo esto obstaculiza el tratamiento adecuado de la simbología relacionada al concepto de función, aunado a esto los estudiantes y profesores asumen como necesario e importante el uso de la simbología y el lenguaje formal por encima de la comprensión de los conceptos como es el caso de la noción de límite anteriormente mencionada; así pues, queda manifiesto que el uso excesivo del rigor matemático obstaculiza en muchas ocasiones el aprendizaje en los primeros acercamientos a la matemática avanzada; es en estos casos que cobra importancia el hecho de que los objetos matemáticos no se construyen de manera aislada ni sólo a través de su simbología o sus definiciones formales y por eso es necesario estudiar ambas, las variables semánticas y las sintácticas de manera constante y conjunta, ya que el aprendizaje de la Matemática no es el aprendizaje del lenguaje por el lenguaje sino del lenguaje por su uso y su significado.

Asimismo, existe evidencia de que plantear un objeto en términos de su epistemología y de sus representaciones puede ser una buena opción para la mejora de los métodos de enseñanza, el caso de la función Seno es un ejemplo de esto, pero para ello se requiere de un método de enseñanza no tradicional para optimizar el proceso. En el caso de esta investigación el autor hace énfasis en las variables semánticas dejando de lado las variables sintácticas, que también son importantes. Uno de los estudios mencionados en la sección anterior (Romero, 2000), muestra la pertinencia de considerar los cambios de representación dentro del método de enseñanza debido a que aproximan al concepto, a la economía de tratamiento, y a la conceptualización, sin embargo, el sólo cambio de representación no basta para la conceptualización ni para un óptimo aprendizaje, es necesario involucrar las situaciones en las cuales se significan.

Una de las problemáticas más importantes en el sector educativo es el fenómeno de reprobación y la deserción escolar. Como hemos visto, estos problemas se dan en diferentes niveles y especialidades como la especialidad de Químico Biólogo en asignaturas como Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y Ecuaciones Diferenciales. Respecto a esto, el estudio realizado en la Escuela Superior de Física y Matemáticas por Aguilar y Simón (2009), es evidencia empírica de la necesidad de enfocar nuestra atención en las dificultades relativas al pensamiento funcional, el cual abarca diversas disciplinas de la matemática, y en particular una de las nociones que se mantienen constantes a través de los cursos de los primeros semestres es el de **función**.

La importancia del estudio que se plantea en esta investigación radica en que, en los estudios anteriormente mencionados sólo se toma en cuenta una de las variables del lenguaje matemático ya sea la sintáctica o la semántica en una sola asignatura. Sin embargo, el concepto de función es transversal a la formación académica básica en la Licenciatura en Física y Matemáticas y además, su aprendizaje requiere de la incorporación de ambas variables de manera simultánea y continua. De este modo se podrá iniciar un proceso de revalorización de los métodos de enseñanza actual en la ESFM, en el cual se tome en cuenta la forma en que los estudiantes perciben los objetos matemáticos.

1.3 Objetivo del estudio

El objetivo general de este estudio, se encuentra dentro del marco de las investigaciones en curso que se realizan respecto a la enseñanza y aprendizaje de la Creatividad en las Ciencias. Partiendo de la idea de que la percepción es una de las vías para formación y el desarrollo de la creatividad y de que ésta puede ser estudiada a partir de la interpretación que se manifiesta en el lenguaje, buscamos identificar las dificultades de carácter conceptual y procedimental que manifiesten los alumnos de la Escuela Superior de Física y Matemáticas respecto al uso y conceptualización del objeto matemático conocido como **función**, a través de un estudio cualitativo ex – post – facto en las asignaturas de Cálculo I, Cálculo III, Análisis Vectorial, Ecuaciones Diferenciales y Álgebra IV, con el fin de conocer de manera general cuáles son los aspectos que se deben reforzar en la enseñanza de este concepto.

1.4 Objetivos específicos

- Identificar la forma en que los estudiantes interpretan el objeto matemático **función**.
- Reconocer las dificultades conceptuales y procedimentales respecto al concepto de **función**.
- Establecer una vía pertinente para la enseñanza y resignificación del objeto matemático **función.**

1.5. Preguntas de investigación

Así pues, proponemos como preguntas de investigación:

- ¿Cómo interpretan los estudiantes el objeto matemático función?
- ¿Cuáles son las dificultades conceptuales más comunes en torno al objeto matemático función?
- ¿Cuáles son las dificultades de carácter procedimental, más comunes en el uso del objeto matemático función?
- ¿Qué papel representan los diferentes registros de representación semiótica del concepto función?
- ¿Cuál sería una vía pertinente para la enseñanza y resignificación del concepto de función?

CAPÍTULO 2

Marco Teórico

- ¿Tratan las matemáticas de signos escritos?
Tan poco como el ajedrez trata de figuras de madera.-
- Wittgenstein, Gramática filosófica (1931-1934)

De la Matemática y el Lenguaje

El pensamiento matemático ha vivido inmerso en la actividad humana desde los primeros signos escritos. Puig (1994 p. 3) en un análisis sobre semiótica y matemáticas muestra que, las primeras manifestaciones del lenguaje escrito por un pueblo sumerio en el sur de Mesopotamia y uno elamita en Susa, alrededor del 3500 antes de nuestra era, fueron signos aritméticos. Con el paso del tiempo hubo una evolución progresiva en las expresiones, ya que el conteo evidenciado en la escritura cuneiforme se transformó en la abreviación de las expresiones a través de la construcción de signos elementales dotados de reglas de significación y concatenación que con el paso del tiempo fueron institucionalizadas y que hoy en día son enseñadas en las escuelas.

Fue así como la aritmética desde los símbolos y sus operaciones constituyeron el primer paso hacia el desarrollo del pensamiento matemático hasta llegar a estructuras más abstractas como el Álgebra y el Análisis, las cuales según Puig deben ser concebidas semióticamente como un sistema matemático de signos y no como un sistema de signos matemáticos, pues la matemática no es sólo un conjunto de signos articulados que forman proposiciones lingüísticas ya que esto implicaría ignorar el carácter sistémico y funcional de la matemática (Puig, 1994, p. 16).

Ahora bien, el lenguaje de la matemática que se enseña en el nivel superior es más complejo que el de la Aritmética, por ello el estudio de éste cobra mayor importancia ya que es el puente que comunica los objetos matemáticos con los procedimientos relacionados con su aprendizaje.

Desde esta perspectiva, el lenguaje tiene una función comunicativa en el aula y dentro de este encuadre se consideran cuatro perspectivas de investigación:

(1) elementos curriculares o superestructurales,

(2) influencias interestructurales, en donde se incluye la comunicación,

(3) de desarrollo e implementación, llamadas también investigaciones funcionales, que incluyen el uso de variables sintácticas, inferencias y elementos semánticos diversos,

(4) análisis subestructurales, en donde se habla de contexto, epistemología y política y

(5) reflexiones teóricas. (Giménez, 1994, p. 54)

El estudio que se plantea en esta investigación, de acuerdo al planteamiento de Giménez (1994) se encuentra en el marco de las investigaciones funcionales.

2.1 Sobre las investigaciones funcionales

El análisis de la pareja Lenguaje-Matemática, conlleva a un análisis desde el punto de vista de la función comunicativa del lenguaje y con ello considerar que el sistema matemático de signos es producto de la socialización de la matemática y de su institucionalización[2]. Es por eso que adquiere importancia para la investigación en Matemática Educativa situar al lenguaje como medio de interacción entre conceptos y procedimientos matemáticos.

Este tipo de estudios considera tres tipos de variables: sintácticas, inferenciales y semánticas. Las variables sintácticas están asociadas a las reglas, procedimientos, algoritmos y obstáculos del lenguaje matemático; las inferenciales se relacionan con dificultades del lenguaje propias de los estudiantes como la sordera y otras discapacidades; por último están las variables semánticas entre las que se encuentran la funcionalidad y el significado de las expresiones matemáticas (Giménez, 1994, p. 58).

En este trabajo de tesis se abordarán las variables sintácticas y semánticas del lenguaje matemático. A continuación se hará una explicación detallada de ellas y los elementos teóricos de Didáctica de la Matemática que serán de utilidad en el análisis.

2.1.1 Acerca de las variables sintácticas del lenguaje matemático

De acuerdo a lo revisado en la sección anterior, las variables sintácticas del lenguaje matemático están relacionadas con el tipo de lenguaje, el cual puede ser verbal, escrito,

[2] El saber científico llevado a las instituciones educativas.

algebraico, gráfico, de computación u otro. Así pues, para cada tipo de lenguaje existen variables como las palabras, expresiones, relaciones, secuencias, e incluso los problemas de desarrollo conceptual.

Ahora bien, para el estudio de estas variables se considerará al lenguaje matemático como un sistema simbólico y así, se interpretarán las variantes de las representaciones de los registros semióticos matemáticos.

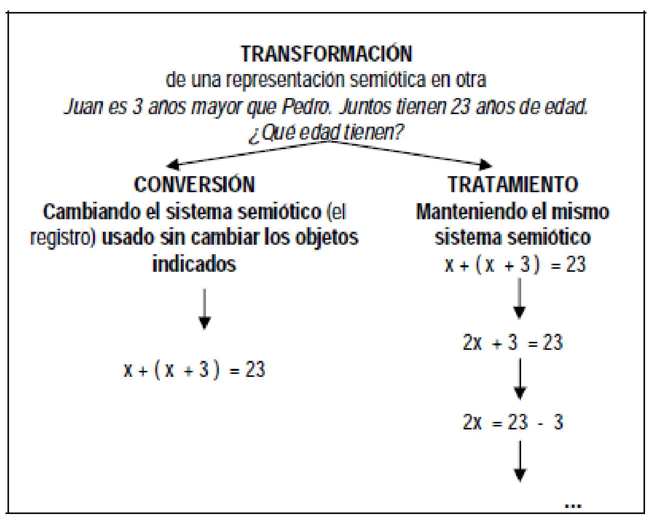
El enfoque de la Teoría de las representaciones semióticas

El pensamiento matemático y en particular los objetos matemáticos son interpretados y manipulados a través de las representaciones semióticas de manera cotidiana como un proceso de socialización del conocimiento matemático, sin embargo, "muchos estudiantes de todos los niveles del currículo, perciben el distanciamiento entre las formas del pensamiento matemático y las formas de pensar fuera de la matemática, aunque el conocimiento matemático se pueda usar en la vida real" (Duval 2006 p. 144).

En general, debido a la naturaleza intangible de los objetos matemáticos, toda actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación, de ahí la importancia de identificar las propiedades de transformación y procesamiento de las representaciones en los diferentes contextos en los que se desarrolle la matemática.

Duval (2006) menciona que las transformaciones dependen del sistema semiótico de representación dentro de las representaciones que se producen. Así, en adelante distinguiremos dos clases de transformaciones de representaciones semióticas: la **conversión** y el **tratamiento.**

Mientras que la **conversión** es una transformación vinculada con un cambio de registro semiótico, por ejemplo del registro de representación numérico (tablas de datos) al registro de representación gráfico o figural (gráficas), el **tratamiento** está relacionado con las transformaciones que se hacen dentro de un mismo registro de representación como es el caso de la factorización dentro del registro algebraico. Ilustraremos estas dos operaciones cognitivas a través del siguiente esquema, en el que se plantea un enunciado en el lenguaje natural y posteriormente se interpretan las transformaciones con las cuales se significa el contexto del objeto matemático relación lineal:



Cuadro 1. Transformaciones de registros semióticos[3]

[3] Extraído de la obra traducida de Duval, 2006.

Además, hay situaciones que requieren el uso continuo de ambas transformaciones de manera implícita, cuando se tienen que movilizar conjunta y paralelamente dos o más registros de representación.

> …en geometría a menudo son necesarios dos tipos de tratamiento: uno se produce de forma discursiva, por deducción válida de propiedades de los datos y de teoremas que implica el uso del lenguaje; el otro se produce de una manera visual a través de las diversas reorganizaciones de las formas. (Ibídem, p. 147)

La apropiación de estas transformaciones es de gran utilidad en la optimización del aprendizaje pues “se pueden desarrollar dos funciones: bien como economía de memoria para tener en cuenta todos los elementos que se relacionan, bien como heurística para encontrar el teorema” lo cual es crucial en los cursos de matemática avanzada de nivel superior, pues la conversión y el tratamiento lo son todo en la resolución de problemas y en la demostración de enunciados matemáticos (Duval, 2006, p. 149). Por otra parte:

> Cambiar la representación de objetos o relaciones matemáticas de un sistema semiótico a otro es siempre un salto cognitivo. A diferencia del tratamiento, no hay reglas ni asociaciones básicas, como entre palabras e imágenes en el lenguaje cotidiano, para este tipo de transformación de representación. La conversión no se reduce pues a una codificación. (Ibídem, p. 150)

En el funcionamiento semiótico existe un principio básico; “nada puede funcionar como una representación fuera del sistema semiótico en el cual su significado toma valor”, es por esto que, comprender un concepto no significa saltar de una representación al concepto puramente matemático representado sino relacionar diversas representaciones del mismo concepto (Ibídem, p. 158). De este modo, la conversión es el resultado de una comprensión conceptual y la existencia de dificultades en ella es indicio de la adquisición de conceptos erróneos.

Por otra parte, existen otras operaciones cognitivas asociadas a la semiótica de las Ciencias; visión y visualización. La visión se significa en el contexto de las Ciencias Naturales, ya que proporciona el acceso directo a algún objeto físico, aquí la percepción juega un papel muy importante pues, "no hay nada más convincente que aquello que puede ser visto" así que la visión parece brindar una inmediata aprehensión de los objetos o las situaciones. En el caso de la matemática, es la visualización la que proporciona el puente entre los objetos matemáticos y sus representaciones debido a la naturaleza abstracta de dichos objetos (Duval, 1999, p. 12), más explícitamente:

> …en matemáticas no son posibles reenvíos ostensibles · todo concepto matemático se ve obligado a servirse de representaciones, dado que no se dispone de "objetos" para exhibir en su lugar; por lo que la conceptualización debe necesariamente pasar a través de registros representativos que, por varios motivos, sobre todo si son de carácter lingüístico, no pueden ser unívocos. (D'Amore, 2004, p. 5)

Duval (1993) menciona que "por una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, por otra, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible un actividad sobre los objetos matemáticos". Este carácter paradójico del conocimiento matemático, tiende a excluir como recurso a las representaciones mentales como un medio de aprehensión de los objetos matemáticos, al menos en el contexto didáctico a pesar de que es a través de las representaciones que los objetos matemáticos pueden ser visualizados.

Otra de las actividades cognitivas más importantes en la matemática y en el lenguaje es la **argumentación**, que a diferencia de la noción de demostración exclusiva de la matemática, menciona que:

> Un razonamiento para que sea considerado como una demostración debe ser un razonamiento válido, y la argumentación no necesita estar vinculada con la validez, sino con la pertinencia. La demostración busca la verdad y la argumentación lo creíble y por ello depende más de la coherencia que de las leyes de la Lógica. (Duval, 2000, p. 150)

Es por eso que la **visualización** al igual que la **conversión**, el **tratamiento** y la **argumentación** conforman la base del aprendizaje de la Matemática.

Ahora bien, en matemática avanzada el proceso de aprendizaje se torna más complejo en el aspecto de la significación de los objetos matemáticos ya que:

> …distinguir el "concepto" de su construcción no es fácil y, quizás, no es ni posible ni deseable: un concepto se halla, por así decirlo, continuamente en fase de construcción y en esta misma construcción se halla la parte más problemática y por lo tanto más rica de su significado. (D'Amore, 2004, p. 3)

En términos de Duval (1993) el proceso de adquisición conceptual de un objeto matemático se basa en dos de sus características "fuertes": el uso de más registros de representación semiótica y; la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos lo cual es símbolo (histórico) de progreso del conocimiento.

En la enseñanza de los formalismos matemáticos, el lenguaje de la Matemática no se debe considerar sólo como una sintaxis de signos matemáticos desprovista de significado referencial, así como tampoco se le debe tratar como un conjunto de expresiones notacionales del significado de conceptos matemáticos acabados (Gómez-Granell, 1989, p. 7)

Por este motivo es importante tomar en cuenta:

> …la importancia que en la construcción de los simbolismos matemáticos tienen la vinculación con los referentes conceptuales y situacionales a través de la utilización de códigos no-formales. El pensamiento y el lenguaje matemático no se pueden producir al margen de la significación. (Gómez-Granell, 1989, p. 13)

Esto nos lleva a la segunda característica de las investigaciones funcionales, que hace referencia a la semántica inmersa en el lenguaje de la Matemática.

2.1.2 Acerca de las variables semánticas del lenguaje matemático

El significado de las palabras así como su funcionalidad en matemáticas conforman el contenido semántico del lenguaje matemático, entre las variables semánticas se encuentran “las palabras asociadas a significados o acciones asociadas a operaciones o relaciones funcionales que se usan en la resolución de problemas” (Giménez, 1994, p. 58).

Para analizar este tipo de variables no basta el estudio de las representaciones semióticas, es importante profundizar el aspecto cognitivo estructural de los conceptos matemáticos y para ello hemos de recurrir a los campos conceptuales.

El enfoque de la Teoría de los campos conceptuales

Un objeto matemático no se significa a través de su definición sino a través de las situaciones en las cuales se ve inmerso, en esta teoría el aprendizaje de las situaciones y las conceptualizaciones es en torno a los conceptos. Para comprender la teoría de los campos conceptuales, se deben aclarar los términos que en ella se utilizan.

La noción más importante que se debe aclarar es la de **concepto**, para Vergnaud (1990):

> …un concepto es una tripleta de tres conjuntos: C (S, I, G)
>
> S: conjunto de situaciones que dan sentido al concepto (la referencia)
>
> I: conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas (el significado)
>
> G: conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento (el significante). (p. 7)

Para esclarecer la definición conjuntista que propone Vergnaud intentaremos proporcionar algunos ejemplos; en el conjunto **S** se encuentran las tareas escolares como los exámenes, y no escolares como la aplicación de la Matemática a la vida cotidiana las cuales adquieren significado a partir de la diversidad y la constancia en la práctica, que a su vez están íntimamente relacionadas con los esquemas que son evocados por el sujeto (en adelante, la noción de esquema será vinculada con la noción de tratamiento en el sentido de la teoría de representaciones semióticas de Duval) ; el conjunto **I** contiene dos nociones que son fundamentales en la matemática de nivel superior, el concepto-en-acto y el teorema-en-acto también llamados como invariantes operatorios, un teorema-en-acción es una proposición que se considera como verdadera sobre lo real por ejemplo la lógica proposicional en matemáticas, y para el concepto-en-acción la argumentación matemática en el sentido de Duval pues está basado en la pertinencia; por último el conjunto **G** que se vincula con la noción de registro semiótico de la teoría de las representaciones, en él se encuentran los tipos del lenguaje de la Matemática como el algebraico, numérico, gráfico y natural.

Por otro lado, Moreira (2000) afirma que en esta teoría un **campo conceptual** se debe entender como "un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición" entendiendo adquisición como aprendizaje en el sentido didáctico.

Existen tres ideas principales asociadas a la noción de **campo conceptual**: la primera de ellas indica que un concepto no se forma dentro de un solo tipo de situaciones; la segunda, una situación no puede ser analizada bajo un solo concepto y por último, la construcción y la interiorización de las propiedades de un concepto o situación es un proceso de desarrollo constante. Como se ha visto:

> La teoría de los campos conceptuales reposa sobre un principio de elaboración pragmática de los conocimientos. No se puede teorizar sobre el aprendizaje de las matemáticas ni a partir sólo del simbolismo, ni a partir sólo de las situaciones. Es necesario considerar el sentido de las situaciones y de los símbolos. La clave está en considerar la acción del sujeto en situación, y la organización de su conducta. (Vergnaud, 1990, p. 20)

Así pues, se hace necesario "dirigir la atención al desarrollo cognitivo, a sus continuidades, a sus rupturas, a los pasos obligados, a la complejidad relativa de las clases de problemas, procedimientos, representaciones simbólicas, al análisis de los principales errores y de los principales descubrimientos" (Vergnaud, 1990, p. 21).

Al trabajar conjuntamente, la teoría de las representaciones semióticas y la teoría de los campos conceptuales es posible percibir el proceso de aprendizaje desde una perspectiva más amplia, unificadora y sistémica, pues en palabras de Vergnaud "el lenguaje y los símbolos matemáticos juegan por tanto un papel en la conceptualización y la acción. Sin los esquemas y las situaciones, quedarían vacíos de sentido".

Ahora que se tiene una visión más específica del papel que juega el lenguaje como sistema matemático de signos en la didáctica de la Matemática y en el proceso de conceptualización de los objetos matemáticos, haremos un acercamiento al objeto matemático que se trabajará en esta investigación: la función.

Sureda y Otero (2011), afirman que "*las funciones han estado trabajando como conceptos en acción desde la Antigüedad, ya que no se puede abordar sin ellos ni la aritmética ordinaria, ni la geometría"* (p. 9), por esta razón el análisis de la noción de función es de gran importancia. En matemáticas:

> Vergnaud describe al conocimiento como formado por dos partes: la *forma operatoria* y la *forma predicativa*. La *forma operatoria del conocimiento*, es la que permite actuar en situación (y eventualmente tener éxito), mientras que la *forma predicativa del conocimiento*, es la que enuncia los objetos de pensamiento, sus propiedades, sus relaciones y sus transformaciones. (Ibídem, p. 12)

Pero existen dificultades cognitivas en la interacción de ambas partes, lo cual genera obstáculos para los alumnos, en particular en torno al concepto de función. Para dar claridad a esta afirmación se hará un breve análisis teórico de la noción de función desde diferentes estudios didácticos, teóricos y epistemológicos.

2.2 Aspectos epistemológicos del concepto de función

El pensamiento matemático, como se ha mencionado al principio de este capítulo, tuvo sus primeras manifestaciones hace más de 3000 años antes de nuestra era. Aunque el concepto formalizado de función como se maneja hoy en día surgió hace apenas unos dos siglos, su construcción se originó en el pensamiento funcional, y fue el uso en las ciencias experimentales a lo largo de la historia lo que lo evolucionó hasta llegar a las definiciones que ahora encontramos en los libros de Cálculo.

La transformación de este concepto se dio a partir de lo que en adelante llamaremos paradigmas del pensamiento funcional en matemáticas los cuales hacen referencia a determinadas problemáticas de la Física y la vida cotidiana.

2.2.1 La noción de conteo y proporcionalidad

El pensamiento funcional en la cultura babilónica se manifestó a través del Álgebra; *"los problemas algebraicos se enuncian y solucionan sin utilizar de manera sistemática notaciones algebraicas o simbólicas (como hoy)"* (Colette, 1985, p. 26). Hay evidencia de que en la cultura babilónica se daba solución a problemas con ecuaciones cuadráticas, determinadas ecuaciones cúbicas y algunas bicuadradas, el método que utilizaban se basaba en la compleción de cuadrados, incluso en 1945 se logró descifrar por primera vez el contenido de la tablilla de Plimpton 322 (el número corresponde al catálogo de la colección Plimpton de la Universidad de Columbia), una tablilla en escritura cuneiforme que data del periodo 1900-1600 A. C. y que mostraba cierta relación de correspondencia entre los valores de las columnas. Después de un largo periodo de análisis se llegó a la conclusión de que dicha tablilla presentaba los valores correspondientes a la hipotenusa y los cuadrados de los lados de determinados triángulos rectángulos (Colette, 1985, p. 31).

Siglos después surgió la Aritmética griega y con ella la evolución del pensamiento matemático funcional y geométrico, un ejemplo de ello es la Teoría pitagórica de las proporciones; en el VII libro de los *Elementos* de Euclides se encuentra la siguiente definición: "*Los números son proporcionales si el primero es el mismo múltiplo, o la* *misma parte, o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto"* lo cual ya es evidencia de un progreso en el pensamiento funcional.

Así mismo, los trabajos que se desarrollaron sobre proporciones después del siglo XIII, fueron esenciales en el desarrollo de las ciencias cuantitativas hasta la época de Isaac Newton (1643-1727). El Cálculo desarrollado por Newton y Leibniz no era un cálculo de *funciones*, sino que fue más bien una ingeniosa colección de métodos para resolver problemas de curvas. (Kleiner, 1989, p. 2)

Hasta este punto la noción de funcionalidad se mantuvo inmersa en la actividad humana, pero fue hasta cinco siglos después que el concepto de función tendría sus primeras manifestaciones.

2.2.2 El problema de la cuerda vibrante

A principios del siglo XVIII se consideraba que "si dos expresiones analíticas coincidían en un intervalo, entonces ellas coincidían dondequiera", la modelación matemática en el contexto de la Física era un tema sumamente importante.

De acuerdo a Cuevas y Díaz (2013), "*la palabra "función" apareció por primera vez en los manuscritos de G. Leibniz (1646- 1716), en agosto de 1673, y en particular en su manuscrito intitulado, Methodus tangentium inversa, seu de functionibus"*(p. 167). Así pues, Leibniz usó la palabra función para denotar un objeto matemático relacionado con una curva, lo cual significa que no se hacía alusión a la relación formal entre la ordenada de un punto sobre una curva y su abscisa en el sentido matemático actual.

Ahora bien, el problema de la cuerda vibrante representó un reto para los matemáticos de la época, éste consiste de “una cuerda elástica atada a dos extremos fijos (como la cuerda de una guitarra), ésta se estira hasta que adquiere una forma determinada, y en ese momento se suelta para vibrar libremente” (Ibidem, 2013, p. 168), el reto estriba en hallar una expresión analítica que modelase la posición de la cuerda en un determinado instante *t*.

Ante esta problemática, matemáticos geniales como D’Alambert, Daniel Bernoulli, Euler y otros matemáticos contemporáneos dedicaron toda una generación de trabajos enfocados a su solución. En el año de 1749, D’Alambert publicó la primera respuesta a este problema como la solución de la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; y = y(x,t) \text{ y a constante.}$$

Tiempo después, en 1755 el matemático Daniel Bernoulli propuso otra solución a este problema usando argumentos físicos y expresiones analíticas relativas a las vibraciones musicales:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi a t}{l}\right).$$

Al ser sometidas ambas propuestas al juicio de otros matemáticos ejemplares como Euler, se generó una gran controversia ya que la existencia de estas soluciones implicaba que una función *f(x)* definida en el intervalo (0,1) podría ser expresada como la serie:

$$f(x) = y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Sin embargo, “tanto Euler como D’Alambert indicaban que eso era absurdo, puesto que implicaría que cualquier función arbitraria tendría que ser impar y periódica” (Cuevas y Delgado, 2015, p. 113), esta controversia implicaba que el debate entre los matemáticos de la época se enfocara en detallar el concepto de función y la relación entre dependencia funcional y la necesidad de interpretarla por medio de una fórmula o expresión analítica.

En esta época la definición válida de función, era la propuesta por Johan Bernoulli, la cual fue publicada por Euler en 1718: “Por función de una cantidad variable denotamos aquí una expresión analítica construida de un modo u otro con esta cantidad variable y números o constantes*”*, en esta etapa la función se concibe como una ecuación o fórmula (Euler, 1748, citado por Cuevas y Díaz, 2013, p.168).

A finales del siglo XVII surgieron como producto del debate generado por el problema de la cuerda vibrante, otras definiciones como la de Lagrange en su obra de *Teoría de las funciones analíticas* en la que se interpreta a la función como **toda expresión de cálculo:**

> Llamamos función de una o varias cantidades a **toda expresión de cálculo** en la cual estas cantidades entran de cualquier manera, mezcladas o no, con otras cantidades que consideramos como valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones no consideramos más que las cantidades que suponemos variables, sin ninguna consideración a las constantes que pueden estar mezcladas (Lagrange, *Théorie des fonctions analytique*, citado por Cuevas y Delgado, 2015, p. 112)

2.2.3 Los trabajos de Fourier sobre conducción del calor

En 1822 el trabajo de Fourier sobre la conducción del calor, *Analytic Theory of Heat*, dio pauta al desarrollo de la definición formal de función pues dentro de su escrito mostró que:

> En general, la función *f(x)* representa una sucesión de valores u ordenadas cada una de las cuales es arbitraria. Para una infinidad de valores dados a la abscisa x, hay un número igual de ordenadas *f(x)*. Todas tienen verdaderos valores numéricos, ya sean positivos o negativos o nulos. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen una a la otra, de cualquier manera, como sea, y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad única. (Rüting, 1984, citado por Díaz, 2013, p.17)

En esta definición, Euler dejó entrever la propiedad más importante de la definición actual, que es la correspondencia unívoca ya que hace notar que lo principal era la asignación de valores para la función y que ésta asignación “de cualquier manera, como sea,…” estaría dada “como si fuera una cantidad única”.

Sin embargo, la existencia de ambigüedades en torno a las definiciones de función y de continuidad fue motivo para que la comunidad científica del siglo XIX continuara el trabajo de desarrollo del concepto.

En esta etapa el paradigma del pensamiento funcional radica en la **conceptualización** del objeto matemático función, pues si bien se comenzó desde determinadas problemáticas experimentales, un siglo después fue la necesidad de conceptualizar el objeto lo que generó un nuevo debate entre los matemáticos de la época. El matemático alemán G. L. Dirichlet propone por primera vez en 1829 el concepto moderno de una función $y = f(x)$ como: *"***y** es una función de una variable **x**, definida en el intervalo a < **x** < b, si a todo valor de la variable **x** en este intervalo le corresponde un valor definido de la variable **y**. Además, es irrelevante en qué forma se establezca esta correspondencia*"* (Kleiner, 1989, p.9), y años después en 1851 Bernhard Riemann sostuvo que, "*si* ***z*** *es cantidad variable la cual puede asumir, gradualmente, todos los posibles valores reales entonces, si a cada uno de estos valores le corresponde un único valor de la cantidad indeterminada* ***w****,* ***w*** *es llamada función de* ***z****"* (Riemann, 1851 citado por Cuevas y Díaz, 2013, p. 170).

Durante el siglo XX hubo un proceso de consolidación del concepto de función y en esta etapa el grupo de matemáticos franceses Nicolas Bourbaki[4] tuvo un papel sumamente importante. En 1939 presentaron la función como "una regla de correspondencia entre el dominio y el rango, donde ambos conjuntos son arbitrarios", en general su definición fue la siguiente:

> Se dice que un gráfico F es un gráfico funcional si, para toda *x*, existe como máximo un objeto que corresponde a *x* en F. Se dice que una correspondencia $f = (F, A, B)$[5] es una función si el gráfico de F es un gráfico funcional, y si su conjunto de partida es igual al conjunto de definición de F. Dicho de otro modo, una correspondencia

[4] Grupo de matemáticos, en su mayoría franceses de los años 1930´s que "*pretendían poner en orden en las matemáticas…"* a través del análisis de las obras matemáticas y la modernización de los conceptos matemáticos.
[5] La tríada *(F, A, B)* hace referencia al gráfico F de la función, A el conjunto dominio y B el codominio.

> $f = (F, A, B)$ es una función si, para todo *x* que pertenece al conjunto de partida A de f , la relación $(x, y) \in F$es funcional en *y*; el único objeto que corresponde a *x* por *f* se llama valor de *f* para el elemento *x* de A, y se designa por *f(x)* o f_x (o *F(x)*, o F_x) (Bourbaki N., 1968, p. E II.13)

Bourbaki también dio la definición de una función como un cierto subconjunto del Producto Cartesiano *E* X *F*, donde *E* y *F* son subconjuntos de los números reales. Esta es, por supuesto la definición de función como un conjunto de pares ordenados" (Kleiner, 1989. p. 299).

Actualmente la teoría de categorías representa un paradigma en el proceso de conceptualización y axiomatización de la Matemática Moderna, en ella se intenta reemplazar la teoría conjuntista. Esta teoría establece que:

> [La Teoría de Categorías] describe una función como una "asociación" de un "objeto" *A* con otro "objeto" *B*. Los "objetos" *A* y *B* no necesitan tener elementos (es decir, no necesitan ser conjuntos en el sentido usual). De hecho, los objetos *A* y *B* pueden ser eximidos de ello totalmente. Una "categoría" puede, entonces definirse como consistente de funciones (o "mapeo"), *que son tomados como conceptos indefinidos (primitivos)* que satisfacen ciertas relaciones o axiomas (Kleiner, 1989, p. 299).

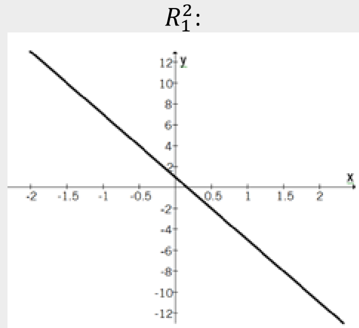
La teoría de categorías, es una teoría en desarrollo y el hecho de que el concepto de función forme parte de su construcción y evolución es un indicativo del carácter dinámico e inacabado del concepto de función.

La conceptualización de los objetos matemáticos, requiere de la integración de las variables semánticas y sintácticas que la conforman; es por ello que los registros de representación semiótica son tan importantes. A continuación se muestra una clasificación de registros de representación semiótica para el objeto matemático función tomando como ejemplo el concepto de **función lineal (FL)**. La notación utilizada será la siguiente:

r^{n} = Registro semiótico n – ésimo, con n = 1, 2, 3,…

$\mathrm{R}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}(\mathrm{A})$ = Representación semiótica i – ésima (i = 1, 2, 3,…) de un objeto A en el registro semiótico r^{n}

Es importante aclarar al lector que, cuando se hace un cambio de registro semiótico (conversión) simultáneamente se produce un cambio en la representación, no obstante el cambio de representación semiótica (tratamiento) no necesariamente genera un cambio en el registro de representación.

Registro semiótico r^n	Representación semiótica $\mathrm{R}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}(\mathrm{FL})$	
r^1: Lenguaje algebraico	R_1^1: {(x, y) : y = -6x +1, x ∈R } (Escritura conjuntista).	R_2^1: y=*f(x)*: x → -6x +1 (Escritura funcional).
r^2: Lenguaje gráfico	R_1^2: 	
r^3: Lenguaje natural, verbal o coloquial	R_1^3: Una recta de pendiente -6 y ordenada al origen 1.	R_2^3: A la variable y se le asigna el valor de la variable x multiplicada por -6 y sumado 1.

Cuadro 2. Registros de representación de una función lineal[6]

[6] Adaptación de la autora, de la obra de Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen y Gorrochategui (2012)

Díaz (2009) propone una clasificación para el lenguaje de la matemática: "Lenguaje verbal (instrucciones generales escritas), Lenguaje algebraico (elaborar la fórmula), Lenguaje aritmético (cálculo de tabla de valores), Lenguaje geométrico (la gráfica)", esta clasificación será utilizada posteriormente como apoyo en la interpretación de las representaciones semióticas del concepto de función.

Hasta este punto hemos intentado conducir al lector por un breve recorrido epistemológico del concepto de función a través de su historia y sus representaciones. Ahora abordaremos los resultados de algunos estudios de corte didáctico que muestran algunas de las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes de nivel superior en la interpretación y uso de funciones.

2.3 Dificultades en el aprendizaje de funciones

De acuerdo al diccionario de la Real Academia Española de la Lengua, en Física y Matemáticas la palabra error es la "*diferencia entre el valor medido o calculado y el valor real*". Sin embargo en diversas investigaciones en educación la palabra error es utilizada usualmente para hacer referencia a los conceptos o procedimientos que llevan al estudiante a una respuesta incorrecta.

Por otro lado, Bachelard (1938) señala que las dificultades y confusiones, que generan estancamientos y retrocesos en el proceso de aprendizaje de las ciencias (inercia), se deben a factores de carácter epistemológico de los conceptos y así introduce la noción de **obstáculo epistemológico.** En 1983 Brousseau innovó la noción de **obstáculo** en el área del aprendizaje de la Matemática, proponiendo una clasificación con base en su naturaleza de origen: los obstáculos **psicogenéticos**, que está vinculados con el estadio de desarrollo del aprendiz (en el sentido de Piaget[2]), es decir, con las capacidades cognitivas de los estudiantes; los de origen **didáctico,** relacionados con el discurso que caracteriza la enseñanza; y los de origen **epistemológico**, asociados con la dificultad intrínseca del concepto que se aprende y que pueden ser rastreados a lo largo de la historia de la matemática, en la génesis misma de los conceptos como la resistencia de un saber mal adaptado y en donde se encuentran las conversiones de registro y representaciones semióticas (Prada, Hernández y Ramírez, 2014, p. 32).

Díaz (2009) menciona que "*en la actualidad el error es considerado parte inseparable del proceso de aprendizaje*". En adelante, trataremos de evitar el uso de la palabra **error** y en su lugar usaremos la palabra **obstáculo o dificultad,** para no generar confusión en el lector y con el fin de hacer hincapié en el carácter evolutivo de la palabra obstáculo, pues todo obstáculo debe ser confrontado y superado. El concepto de **función** es uno de los objetos matemáticos más importantes en el aprendizaje del Cálculo en la Educación Superior. Pero como se ha visto el origen epistemológico de función está vinculado con el surgimiento del pensamiento funcional y por ello identificar los obstáculos en el aprendizaje de funciones implica tomar en cuenta algunas dificultades en la Aritmética y el Álgebra:

Ibarra y Eccius (2012) en su estudio sobre "errores algebraicos" encontraron que algunos de las dificultades pueden ser clasificados como:

Errores de perseverancia	• Cuando una parte de la información recibida se sigue utilizando, por ejemplo: 3 x 0 = 3, en donde se mantiene el uso del número tres y se deja de lado la operación a la que alude el signo "x".
Manejo del cero como elemento neutro	• Cuando se tiene la idea de que el cero "no es nada y se puede omitir" o "el cero no cambia nada", por ejemplo: $\frac{a}{0} = a$ y 0 x 5 = 5
Estructuras de los términos	• Expresiones algebraicas como $\frac{x+y}{x+yc}$ suelen ser simplificados con esquemas de tachado como $\frac{\cancel{x+y}}{\cancel{x+y}c} = \frac{1}{c}$
Ecuaciones y expresiones algebraicas	• No comprender la diferencia entre ecuaciones y una expresión algebraica

Cuadro 3. Errores algebraicos comunes en estudiantes universitarios de nuevo ingreso[7]

Una de las dificultades más comunes relativas a las funciones, es la confusión que existe entre éste y algunos conceptos importantes como relación y ecuación. En ocasiones suele tratarse estos tres conceptos como sinónimos, sin embargo cada uno de ellos tiene características conceptuales que los hacen distintos entre sí. Respecto a esto, Cribeiro, Madrid y Fraga (2013) mencionan que en términos generales:

> ***Relación****:* Basta con poder relacionar algunos elementos de un primer conjunto con algunos de un segundo conjunto, para tener una relación entre los conjuntos. No importa si se relacionan todos los elementos o solamente algunos de los elementos del primer conjunto, con uno o varios elementos del segundo conjunto.

[7] Adaptación de la autora de la obra de Ibarra y Eccius (2012)

Función*:* Para tener una función se necesita además que se cumplan dos propiedades adicionales; la primera propiedad pide que **todos** los elementos del conjunto A de partida estén relacionados con algún elemento del segundo conjunto de llegada, la segunda propiedad establece que a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento del conjunto de llegada.

Ecuación*:* La ecuación expresa la relación (ley ó vínculo) existente entre elementos del dominio de la relación o función, con un **único** elemento del codominio (puede considerarse el 0 como ese elemento de B). El objetivo de una ecuación es hallar el conjunto solución, el cual es el subconjunto del dominio de la función o relación, relacionado con el valor dado del codominio. La ecuación y el conjunto solución son dos objetos matemáticos diferentes. (p. 45)

En el caso de las funciones, el incumplimiento de la segunda propiedad la desliga conceptualmente convirtiéndola en relación, en términos conjuntistas podríamos decir que las funciones son un subconjunto de las relaciones.

Ahora bien, en el lenguaje algebraico estas nociones difieren un poco en su escritura, una relación es la terna (A, B, R) , R = $\{(x,y) \in A \times B\colon y = \mathrm{R}(x)\}$;una función se establece entre la terna (A, B, R) y dos propiedades P1 y P2 (A, B, R, P1, P2) R = $\{(x,y) \in AxB\colon y = R(x)\ ,se\ cumple\ P1\ y\ P2\}$; y una ecuación: R: $A \rightarrow B$; 0 $\in B$ $R(x)$ = 0 a través de su conjunto solución: S = $\{x \in A\colon R(x) = 0\ ;0 \in B\}$. (*Ibídem*, p. 47)

Por otro lado, en la sección **Aspectos epistemológicos del concepto de función** se ha visto cómo la definición ha atravesado múltiples cambios; en los cursos de Matemáticas las definiciones que se enseñan no son únicas.

Prada, Hernández y Ramírez (2014) indican que los *estudiantes "necesitan un apoyo visual o gráfico más que analítico para comprender si una expresión dada es una función, debido a la carencia de competencias algebraicas"*, así mismo asocian sus dificultades con la relación del término función a una **regla de correspondencia** entre cada valor del dominio con un único valor en el contradominio, excluyendo con esto el caso de las funciones constantes. (p. 42)

Por otra parte, López y Sosa (2008) señalan que "*las literales empleadas tanto en las ecuaciones como en las funciones suelen ser las mismas*", lo cual no hace evidente la diferencia entre las literales como variables y como incógnitas.

Guzmán (1998) al hacer un análisis de las respuestas que un grupo de estudiantes de primer año de ingeniería dan a situaciones de funciones en diferentes registros semióticos, señala que éstas se encuentran en su mayoría, dentro de un mismo registro, "las respuestas se quedan en el registro en el cual está planteada la pregunta, o recurren al registro algebraico, con frecuencia privilegiado en las clases" (p. 16). Aunque esto no sea evidencia de que los estudiantes no tienen claro el concepto de función, sí lo es de una dificultad de su uso e interpretación, pero ¿cómo puede tenerse claro un concepto, sin precisar su uso e interpretación?

Así pues, la diversidad de representaciones semióticas del objeto matemático "función" puestas en práctica sin enfatizar en la conexión y las diferencias conceptuales entre ellas no son de utilidad en la construcción correcta del concepto.

2.4 Consideraciones teóricas de las asignaturas de los grupos de estudio

En las asignaturas de los grupos de estudio (Cálculo I, Análisis Vectorial, Ecuaciones Diferenciales, Cálculo III y Álgebra IV), el uso del concepto de función y de sus múltiples representaciones no es explícito salvo por la asignatura de Cálculo 1, por ello es crucial introducir algunas de las nociones matemáticas más importantes que se emplean en las situaciones planteadas a los estudiantes en cada una de las asignaturas.

2.4.1 Nociones de Cálculo

Para identificar la noción de función dentro de las asignaturas, como primer acercamiento se hizo una revisión de los planes de estudio, así para Cálculo I se construyó la siguiente tabla de contenidos:

Cálculo I	
Unidad V. Funciones	Unidad VI. Continuidad
5.1 Definición de función y dominio de una función	6.1 Definición de continuidad de fiunciones
5.2 Operaciones con funciones. Funciones polinomiales, racionales y trascendentales	6.2 Continuidad de funciones polinomiales racionales
5.3 Definición de límites de funciones, empleando sucesiones. Teoremas acerca de límites de funciones	6.3Teoremas de continuidad de sumas, productos, cocientes y composición de funciones contínuas. Continuidad de la función inversa
5.4 Ejemplos. Equivalencia de definiciones de límites de funciones	6.4 Teoremas de funcioens continuas en intervalos cerrados

Cuadro 4. Tabla de contenido de Cálculo I[8]

Para este estudio, las definiciones que tomaremos en cuenta, serán las de **función, Inyectividad, suprayectividad, función inversa, composición de funciones, gráfica e imagen de una función.**

Definición de función

Una **función** es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si *(a,b)* y *(a,c)* pertenecen ambos a la colección, entonces $b = c$; en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento. (Spivak, 1988, p. 59)

Una **función** es un conjunto de pares ordenados de elementos tales que ningunos dos pares distintos tienen el mismo primer elemento. El conjunto de los primeros elementos de los pares ordenados se llama **dominio** de la función, y el conjunto de los segundos elementos **rango** de la función. (Haaser, La Salle y Sullivan, 1993, p. 124)

Ejemplos importantes

Consideremos los siguientes dos conjuntos de pares ordenados de números reales - rectas no verticales $\{(x, mx + b)\}$ y la circunferencia $\{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\}$. El primero de éstos es una función, el segundo no. Si denotamos la función definida

[8] Adaptación de la autora, del plan de estudios del programa académico de la ESFM, 1994

por la recta como $f = \{x, mx + b | x \in \mathbb{R}\}$, entonces la regla de correspondencia es *f(x)=mx+b*. Para ver que la anterior circunferencia no es una función, nótese que $\{(x,y)|x^2 + y^2 = 1\}$ contiene tanto a (0,1) como (0,-1). (Haaser, La Salle y Sullivan, 1993, p. 126)

Inyectividad, suprayectividad y función inversa

$f: A \to B$ es **inyectiva** si siempre que $a \neq a'$en A, se tiene que $f(a) \neq f(a')$ en B, es decir, puntos distintos en A tienen imágenes distintas en B.

Si llamamos q a la proposición lógica: $a = a'$ y llamamos p a la proposición lógica: $f(a) = f(a')$, la definición de que *f* sea inyectiva es la implicación: $\neg q \Longrightarrow \neg p$. Si ahora recordamos que $(\neg q \Longrightarrow \neg p) \equiv (p \Longrightarrow q)$, entonces la definición de que *f* sea inyectiva es equivalente a decir que $f(a) = f(a')$ implica que $a = a'$.

$f: A \to B$ es **suprayectiva** si todo elemento $b \in B$ es imagen de algún elemento $a \in A$, *i.e.*, $f(a) = b$. En otras palabras, $f: A \to B$ es suprayectiva si y sólo si la imagen de *f* es todo B, i.e., $f(A) = B$.

$f: A \to B$ es **biyectiva** si es inyectiva y suprayectiva.

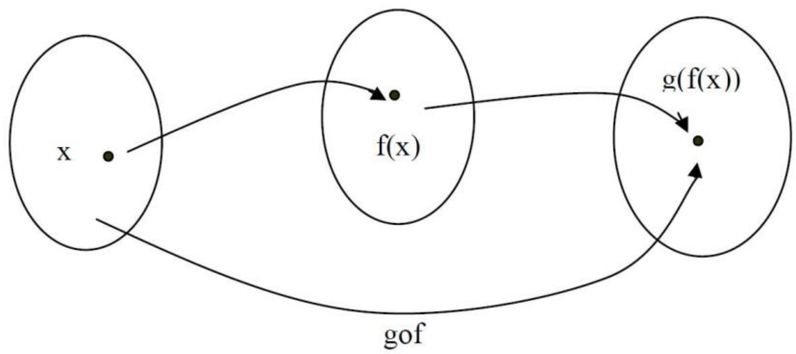
Si $f: A \to B$ es una **función biyectiva,** entonces se puede definir una función $g: B \to A$ que "deshace" lo que f "hace", es decir, si $f(a) = b$ entonces $g(b) = a$. En efecto, como $f: A \to B$ es suprayectiva entonces todo $b \in B$ proviene de algún $a \in A$, *i.e.*, existe algún $a \in A$ tal que $b = f(a)$. Y como *f* es inyectiva entonces el $a \in A$ tal que $f(a) = b$ es único. Se puede entonces definir $g: B \to A$ mediante $g(b) = a$ si y sólo si $f(a) = b$. A la función g así definida se le llama una **inversa** de *f*. (Zaldívar, F., 2005, pp. 40, 44)

Composición de funciones

Si f y g son dos funciones cualesquiera, definimos una nueva función $f \circ g$, la **composición de** f y g por $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$; el dominio de $f \circ g$ es $\{\mathrm{x} \colon \mathrm{x\ está\ en\ el\ dominio\ de\ g\ y\ g(x) está\ en\ el\ dominio\ de\ f}\}$ El símbolo $f \circ g$ se lee a menudo *f círculo g*. (Spivak, 1988, p. 57)

La **composición** de g con *f*, denotada por $g \circ f$ y que se lee "g *círculo f*" o "g *composición f*", es la función cuyo dominio consiste en los elementos $x \in \mathcal{D}_f$ tales que $f(x) \in \mathcal{D}_g$ y cuya regla de correspondencia es $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$. Nótese que para que esté definido $g \circ f$ no es necesario que *f* y g sean funciones reales de variable real. Si *f* tiene dominio en el conjunto A y rango en B y g tiene dominio en

B y rango en C, entonces $g \circ f$ tiene dominio en A y rango en C. La siguiente figura da un diagrama esquemático de $g \circ f$. (Haaser, La Salle y Sullivan, 1993, p. 141)



Esquema. Diagrama de g ∘ f.

Gráfica de una función

Si *f* es una función real de variable real, entonces la **gráfica** de *f* es el conjunto de pares ordenados de *f* considerados como un conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$. (Haaser, La Salle y Sullivan, 1993, p. 128)

Imagen de una función

Definición. Sea *f* una función con dominio D (*f*) en A y rango R (*f*) en B. Si E es un subconjunto de A, entonces la **imagen directa** de E bajo *f* es el subconjunto de R (*f*) dado por $\{f(x) : x \in E \cap D(f)\}$. (Bartle, 1976, p. 19)

Definición. Si H es un subconjunto de B, entonces la **imagen inversa** de H bajo *f* es el subconjunto de D (*f*) dada por $\{x : f(x) \in H\}$. Usualmente denotamos la imagen inversa de un conjunto H bajo *f* por el símbolo $f^{-1}(H)$.

Para la asignatura de Cálculo III, se construyó la siguiente tabla:

Cálculo III		
Unidad I 1.1 R^n como espacio euclideano	Unidad II 2.1 Límite de una transformación 2.2 Continuidad de una transformación 2.4 Continuidad de la inversa de una transformación continua	Unidad III 3.1 Derivada direccional 3.3 Teoremas de la función inversa y de la función implícita. Teorema del rango

Cuadro 5. Tabla de contenido de Cálculo III [9]

Para interpretar la situación que se planteó a los estudiantes, se debe tener una idea clara de las nociones de Cálculo I y el método de **curvas de nivel**:

Curvas de nivel

Antes de definir la noción de **curva de nivel**, es pertinente definir formalmente la gráfica de una función:

> **Definición.** Sea $f: U \subset R^n \to R$. Definimos la **gráfica** de *f* como el subconjunto de R^{n+1}que consta de todos los puntos $(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$ en R^{n+1} para $(x_1, \ldots, x_n,)$ en U. En símbolos: gráfica f = $\{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) \in R^{n+1} | (x_1, \ldots, x_n,) \in U\}$. (Marsden y Tromba, 1991, p. 78)

La idea de conjunto de nivel, surge a partir de la necesidad de visualizar curvas que no están a nuestro alcance, tal es el caso de las gráficas en R^4. Por ejemplo, si suponemos que $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Un conjunto de nivel es un subconjunto de R^3 en donde *f* es constante, digamos *f* = 1, en este caso $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ es un conjunto de nivel para la

[9] Adaptación de la autora, del plan de estudios del programa académico de la ESFM, 1994.

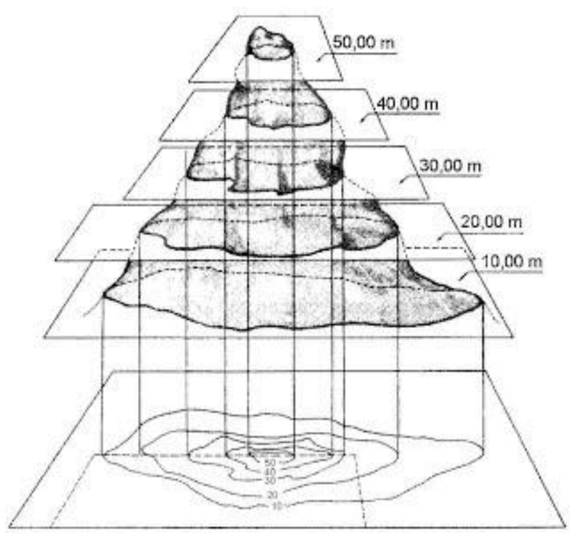
gráfica de *f*, notemos que este conjunto sí puede ser visualizado a través de una esfera de radio 1. Formalmente:

Definición. Sea $f: U \subset R^n \to R$ y sea c $\in R$. Entonces el **conjunto de nivel del valor c** se define como aquellos puntos $x \in U$ para los cuales $f(x) = c$. Si n = 2, hablamos de una **curva de nivel** (de valor c); y si n = 3, hablamos de una **superficie de nivel**. En símbolos, el conjunto de nivel de valor c se escribe como:

$$\{x \in U | f(x) = c\} \subset R^n .$$

Nótese que el conjunto de nivel siempre está en el espacio dominio. (Ibídem, p. 79)

La idea de conjunto de nivel es análoga a la que se usa en topografía para la construcción de mapas de contornos, en donde se corta la superficie de un terreno mediante un conjunto de planos paralelos entre sí, cada plano forma una figura plana a la que se le llama isohipsa, finalmente la proyección de las curvas de nivel sobre un plano proporciona el mapa de las altitudes del terreno como se muestra en la siguiente figura:



Esquema. Curvas de nivel en un mapa topográfico

2.4.2 Nociones de Ecuaciones Diferenciales de primer orden

En la asignatura de Ecuaciones Diferenciales, el concepto de función no es específico de una unidad, sino que se mantiene presente de forma implícita a través del carácter operativo que adquiere el concepto de función. A continuación la tabla de contenidos:

Ecuaciones Diferenciales		
Unidad II. Ecuaciones diferencialesde primer grado 2.1 Ecuaciones diferenciales exactas 2.2 Factor integrante 2.3 Ecuaciones diferenciales incompletas	Unidad III. Ecuaciones diferenciales de orden n con coeficientes constanstes 3.1 Ecuaciones diferenciales de orden n con coeficiente constante 3.2 Ecuaciones diferenciales de orden n afin con coeficiente constante 3.3 Método de variación de parámetros	Unidad IV. Solución de ecuaciónes diferenciales en series de potencias 4.1 Conceptos elementales 4.2 Método de series de potencias para la solución de ecuaciones diferenciales

Cuadro 6. Tabla de contenido de Ecuaciones Diferenciales[10]

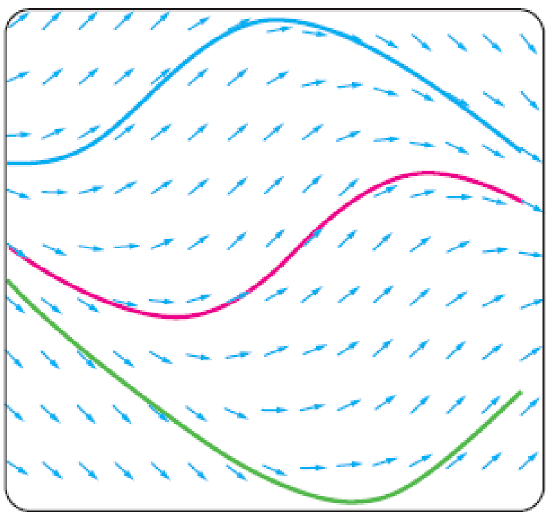
En este caso, el tratamiento geométrico que se debe ilustrar es el de **campo direccional, de pendientes o de isoclinas**

Método de campos direccionales (Isoclinas)

Una derivada $\frac{dy}{dx}$ de una función derivable $y = y(x)$ da las pendientes de las rectas tangentes en puntos de su gráfica.

[10] Adaptación de la autora, del plan de estudios del programa académico de la ESFM, 1994.

Si evaluamos sistemáticamente a f en una cuadrícula rectangular de puntos en el plano xy y se dibuja un elemento lineal en cada punto (x, y) de la cuadrícula con pendiente f (x, y), entonces al conjunto de todos estos elementos lineales se le llama **campo direccional** o **campo de pendientes** de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Visualmente, la dirección del campo indica el aspecto o forma de una familia de curvas solución de la ecuación diferencial dada y, en consecuencia, se pueden ver a simple vista aspectos cualitativos de la solución. Una sola curva solución que pasa por un campo direccional debe seguir el patrón de flujo del campo: el elemento lineal es tangente a la curva cuando intercepta un punto de la cuadrícula. La siguiente figura muestra un campo direccional generado por computadora de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = sen(x + y)$ en una región del plano xy. Observe cómo las tres curvas solución que se muestran a color siguen el flujo del campo. (Zill y Wright, 2013, p. 35-36)



Esquema. Las curvas solución siguen el flujo de un campo direccional

Morales y Hernández (2010) señalan que "*el sólo uso del contexto algebraico deja en la mente del estudiante una restringida e insatisfecha imagen de las ecuaciones diferenciales*".

2.4.3 Nociones de Análisis Vectorial

En Análisis Vectorial al igual que en Cálculo I, las funciones están asociadas a varias variables y a operaciones específicas, en este caso la diferenciación de funciones de varias variables, como podemos ver la siguiente sección del programa:

Análisis Vectorial
Unidad II Diferenciación vectorial
2.1 Funciones de varias variables: límites y conitnuidad
2.2 Diferenciación vectorial: regla de la cadena
2.3 Jacobiano
2.4 Gradiente, divergencia y rotacional
2.5 Aplicaciones geométricas

Cuadro 7. Tabla de contenido de Análisis Vectorial[11]

Campos vectoriales

Si en cada punto *(x, y, z)* de una región *R* del espacio se le puede asociar un vector V(x, y, z), hemos definido un campo vectorial V en R. La función V depende, pues, del punto y, por ello, se llama *función vectorial de posición*, o bien *función de punto vectorial.* Si un campo vectorial es independiente del tiempo se llama *permanente* o *estacionario.*

Operaciones diferenciales

El **operador diferencial vectorial nabla** se representa por ∇ y se define por:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

[11] Adaptación de la autora, del plan de estudios del programa académico de la ESFM, 1994.

Sea la función $\varphi(x, y, z)$ definida y derivable en cada uno de los puntos (x, y, z) de una cierta región del espacio (φ define un campo vectorial derivable). El gradiente de φ, representado por $\nabla\varphi$ o grad φ, viene dado por

$$\nabla\varphi \ = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

Obsérvese que $\nabla\varphi$ define un campo vectorial.

Se dice que un campo vectorial es **solenoidal, incompresible o de divergencia nula** si la operación $\nabla \cdot \varphi = 0$. Por otra parte, un campo vectorial es irrotacional si la operación $\nabla \times \varphi = \vec{0}$. (Spiegel, 1970, p. 58)

2.4.4 Nociones de Álgebra de conjuntos

La asignatura de Álgebra IV es el primer acercamiento de los estudiantes de la especialidad en Matemáticas a la Teoría de conjuntos y al Álgebra abstracta que en ella se trabaja, aquí al abordar la noción de función, se deja de lado el carácter puntual que se había tratado en las asignaturas anteriores:

Álgebra IV

Unidad I. Introducción a a teoría de conjuntos

1.1 Conjuntos. Igualdad de conjuntos y subconjuntos
1.2 Álgebra de conjuntos
1.3 Producto cartesiano
1.4 Relaciones
1.5 Relación de equivalencia
1.6 Relaciones de orden
1.7 Funciones

Cuadro 8. Tabla de contenido de Álgebra IV[12]

[12] Adaptación de la autora, del plan de estudios del programa académico de la ESFM, 1994.

Particiones

Definición. Sea A un conjunto, $\mathcal{P} \neq \emptyset$ y $\mathcal{P} \subseteq$ Sub(A). Decimos que $\mathcal{P}$ es una **partición** de A si cumplen las siguientes condiciones:

1. $\emptyset \notin \mathcal{P}$.
2. $\forall X, Y \in \mathcal{P}(X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset)$.
3. $\cup \mathcal{P} = A$.

Denotamos por Part(A) el conjunto de las particiones de A, y, si $\mathcal{P} \in$ Part(A), entonces al par ordenado $(A, \mathcal{P})$ lo denominamos *espacio estratificado*. Además, si $(A, \mathcal{P})$ y $(B, \mathcal{Q})$ son dos espacios estratificados, un *morfismo* de $(A, \mathcal{P})$ en $(B, \mathcal{Q})$ es un triplo ordenado $((A, \mathcal{P}), f, (B, \mathcal{Q}))$, denotado por $f\colon (A, \mathcal{P}) \rightarrow (B, \mathcal{Q})$, en el que f es una aplicación de A en B tal que:

$$\forall P \in \mathcal{P}\ \exists Q \in \mathcal{Q}\ (f[P] \subseteq Q).$$

Observemos que si A es vacío, entonces Sub(A) = $\{\emptyset\}$. Luego el único subconjunto $\mathcal{P}$ de $\{\emptyset\}$ que es una partición del conjunto vacío es $\emptyset$, i.e., Part $(\emptyset) = \{\emptyset\}$. (Climent, s.f., p. 72)

CAPÍTULO 3

Marco Metodológico

Los diseños de investigación no experimentales son aquellos en los que el investigador no puede controlar las variables que intervienen en el fenómeno que se analiza; el Proceso de Aprendizaje es uno de ellos ya que existen múltiples variables de origen cultural, didáctico o cognitivo que resulta imposible manipular. Hernández, Fernández y Baptista (2010) mencionan que una investigación de este corte se centra en:

> "analizar cuál es el nivel o modalidad de una o diversas variables en un momento dado; evaluar una situación, comunidad, evento, fenómeno o contexto en un punto del tiempo y/o; determinar o ubicar cual es la relación entre un conjunto de variables en un momento". (p. 151)

El diseño de investigación más apropiado en estos casos es el **transversal** o **transeccional**, ya que es de gran utilidad para describir variables y analizar su incidencia e interrelación en un momento dado, este tipo de diseños se caracteriza por recolectar datos que sucedieron en un tiempo único para después ser analizados.

3.1 Investigaciones ex-post-facto

La **investigación ex - post-facto** se entiende como "*una búsqueda sistemática y empírica en la cual el científico no tiene control directo sobre las variables independientes porque ya acontecieron sus manifestaciones o por ser intrínsecamente manipulables"* (Cancela, Cea, Galindo y Valilla, 2010, p. 3). Así mismo, estos autores proponen que dado que las investigaciones *ex post facto* no pertenecen a la investigación experimental, se debe hacer referencia a ellas como **estudios** y no como **diseños.**

Existe una clasificación establecida para las investigaciones *ex post facto*; Estudios descriptivos, Estudios de desarrollo, Estudios comparativo-causales y Estudios correlacionales.

La clasificación a la cual pertenece esta investigación es la de **Estudios descriptivos**, ya que este tipo de estudios, "*centran su atención en determinar el "qué es" de un fenómeno educativo e intentan responder a cuestiones sobre el estado presente de cualquier situación educativa"* (Ibídem, p. 4-5)

3.2 Respecto a la toma de datos

Las asignaturas de los grupos de estudio forman parte del tronco común del plan de estudios de la licenciatura en Física y Matemáticas de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional; de primer semestre se tomó como muestra un grupo de 26 estudiantes de Cálculo I; de segundo semestre se consideraron dos muestras, 29 estudiantes del curso de Análisis Vectorial y 15 estudiantes del curso de Ecuaciones Diferenciales; de tercer semestre un grupo de 19 alumnos de Cálculo III y finalmente del cuarto semestre se tomaron 4 estudiantes del curso de Álgebra IV.

En investigación educativa existe una amplia gama de instrumentos de recolección de datos, como las pruebas estandarizadas de desempeño académico, la observación en clase, escalas de actitud, cuestionarios, entrevistas, análisis de contenido, entre otras.

Los instrumentos para la recogida de datos fueron de dos tipos; en el caso de los estudiantes de Cálculo I se elaboró un cuestionario, en la siguiente tabla se hace una descripción de las preguntas realizadas y el objetivo de cada una de ellas:

De acuerdo a tus conocimientos sobre matemáticas, ¿qué entiendes por **función**?	¿Es una circunferencia la gráfica de una función? Argumenta tu respuesta.	Demuestra que si f(x) = f (y), entonces g(x) = g (y)
• Objetivo: Identificar las concepciones e ideas con las cuales los estudiantes relacionan el concepto de **función**.	• Objetivo 1: Reconocer si el estudiante es capaz de aplicar directamente la definición de **función** en un caso concreto. • Objetivo 2: Distinguir si el estudiante visualiza graficamente la definición de **función**.	• Objetivo : Identificar el tratamiento y la fundamentación lógico-simbólica que proporcionan los estudiantes en sus respuestas

Cuadro 9. Cuestionario de Cálculo I[13]

Para la toma de datos del resto de los grupos, se tomaron como muestras los exámenes de evaluación que presentaron al finalizar el semestre, los cuales fueron elaborados por parte de los profesores expertos de las asignaturas. En el caso de los estudiantes de Cálculo I, las preguntas del cuestionario fueron cuidadosamente seleccionadas de la bibliografía que se sugiere en el curso.

Con la finalidad de facilitar la lectura del trabajo, se optó por establecer una nomenclatura específica para cada grupo de estudiantes. Así pues, la respuesta de un estudiante (hombre) del curso de Cálculo I fue designada por la expresión CI-H5 en donde CI corresponde a las siglas del curso al que pertenece, la letra H fue designada para identificar a los hombres (M en el caso de las mujeres) y el número corresponde al caso

[13] Adaptación de la autora, del plan de estudios del programa académico de la ESFM, 1994.

analizado. Durante la recolección de los datos con el objetivo de mantener la confidencialidad de la identidad de los y las estudiantes se les sugirió proporcionar un seudónimo para identificar sus resultados, sin embargo hubo casos en los cuales no fue posible distinguir el género y por ello a esos casos se les asignó la letra I, aunque este estudio no está enfocado en la línea de investigación de género, el reconocimiento de éste es de gran utilidad para la comunidad científica en Matemática Educativa.

3.3 Del análisis de los datos

El análisis de los datos se llevó a cabo en dos niveles, en el primero se identificaron las unidades de significado, que en nuestro caso están asociadas a los procesos de **tratamiento, conversión y conceptualización** que se mencionaron detalladamente en el capítulo anterior y para ello se utilizó como estrategia de interpretación de datos, las **unidades de análisis y codificación**:

> En la codificación cualitativa los códigos surgen de los datos (más precisamente, de los segmentos de datos): los datos van mostrándose y los "capturamos" en categorías. Usamos la codificación para comenzar a revelar significados potenciales y desarrollar ideas, conceptos e hipótesis; vamos comprendiendo lo que sucede con los datos (empezamos a generar un sentido de entendimiento respecto al planteamiento del problema). Los códigos son etiquetas para identificar categorías, es decir, describen un segmento de texto, imagen, artefacto u otro material. Cuando consideramos que un segmento es relevante (en términos del planteamiento, de representatividad de lo que expresaron los participantes, de importancia a juicio del

investigador) podemos extraerlo como un potencial ejemplo de la categoría o de los datos. (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p. 449)

En términos generales en la codificación cualitativa se consideran extractos del contenido, se analizan y comparan con base en el significado o aspectos específicos (unidades de análisis) y así, a partir de las similitudes y diferencias se generan categorías para clasificar e interpretar los datos.

El segundo nivel de esta etapa se caracterizó por la construcción de **redes sistémicas**, que son un método de análisis de datos cualitativos propuesto por Bliss y Ogborn (1979) el cual toma como base la lingüística funcional sistémica desarrollada por el lingüista inglés M. A. K. Halliday en 1982.

Este tipo de instrumentos tienen como propósito el análisis sistémico de los datos cualitativos. A continuación se hará una descripción detallada de sus características de forma y fondo. Sanmartí (1993) señala que "la red sistémica ha de dar el máximo de información que permita estudiar las expresiones desde los muy diferentes puntos de vista" (p.2).

En esta etapa del análisis ambos niveles, la categorización y la construcción de redes sistémicas se hacen uno, ya que cada categoría generada en el primer nivel se convierte en una entrada de la red sistémica, y a su vez las variaciones de cada categoría se hacen presentes en la red sistémica. El símbolo de reclusión (flecha circular) es usado para identificar cuándo una expresión sea reconocida repetidas veces dentro de una categoría y por último, es usual colocar entre paréntesis la frecuencia con la que se presentaron las categorías y los aspectos de las mismas. El esquema general de una red sistémica es como sigue:

$$\text{Unidad de análisis} \begin{cases} \text{Categoría P } (f_P) \begin{cases} \text{Clase A } (f_A) \begin{cases} A'(f_{A'}) \\ A''(f_{A''}) \end{cases} \\ \vdots \\ \text{Clase B } (f_B) \begin{cases} B'(f_{B'}) \\ B''(f_{B''}) \end{cases} \end{cases} \\ \text{Categoría Q } (f_Q) \begin{cases} \text{Clase X} (f_X) \begin{cases} X'(f_{X'}) \\ X''(f_{X''}) \end{cases} \\ \vdots \\ \text{Clase Y} (f_Y) \begin{cases} Y'(f_{Y'}) \\ Y''(f_{Y''}) \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Esquema 1. Estructura de una red sistémica

Así pues, es importante recalcar que las categorías que se presentan en el análisis de los datos fueron elegidas en la mayor parte de los casos a partir de las características visuales de sus desarrollos, los procedimientos, los conceptos utilizados y de las respuestas textuales de las y los estudiantes.

CAPÍTULO 4

Análisis de resultados

4.1 Cálculo I

4.1.1 ¿Qué entiendes por función?

La primera pregunta que se planteó a los estudiantes de primer semestre fue ¿qué entiendes por función?, ya que hubo una gran diversidad de respuestas se decidió construir una red sistémica como herramienta para el análisis. Advertimos al lector que en adelante, por practicidad sólo se mostrará una ilustración para ejemplificar cada una de las categorías de la red sistémica y en el título de cada ilustración se identificará la categoría a la cual pertenece la respuesta evidenciada. Dentro de las respuestas a esta pregunta se distinguieron cuatro categorías generales: Regla de correspondencia, Conjunto, Valor y Representación.

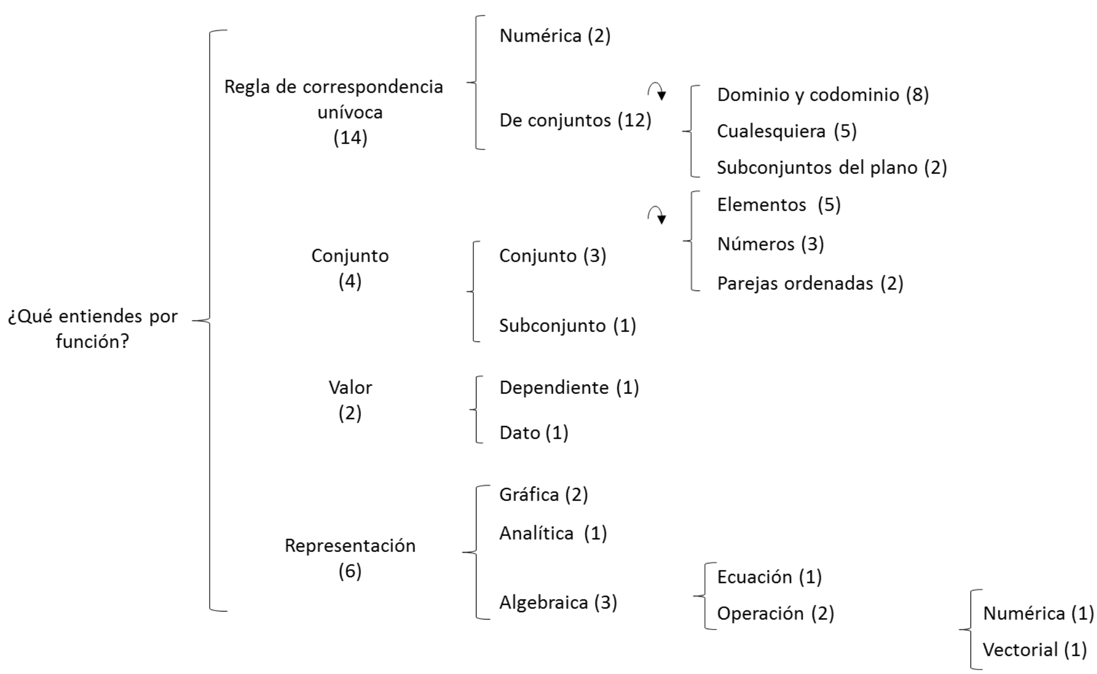


Figura 4.1.1. Red sistémica - ¿Qué entiendes por función?

De los 14 estudiantes que consideran la función como una **regla de correspondencia** la mayor parte (12 de 26), entienden que dicha relación es entre conjuntos y algunos de ellos identifican la correspondencia entre dominio y codominio, tal es el caso de C1-H3:

1.- Es un subconjunto que mapea elementos de un conjunto (dominio) a otro (codominio) y a cada elemento del dominio le corresponde un solo elemento del codominio.

Ilustración 1. C1-H3 categoría regla de correspondencia: elementos

En cuyo caso, no sólo se hace referencia a la regla de correspondencia a través de la frase "…le corresponde…", sino que dicha correspondencia es unívoca lo cual es realmente propio del objeto matemático al que llamamos función. Además, para el caso de C1-H9 se hace alusión de manera gráfica a la idea de **subconjunto del plano** cartesiano a través de las parejas ordenadas, sin embargo en ésta respuesta se logra entrever que la idea de correspondencia unívoca es convertida de un registro de representación verbal (lenguaje natural) a uno puramente algebraico:

(funciones de números reales)

1 Un conjunto de parejas ordenadas de números reales, donde a la primera componente se le asigna un solo número real, es decir

si (a, b) y (a, c) són elementos de una funcion entonces $b=c$ $\forall a \in \mathbb{R}$

Ilustración 2. C1-H9 categoría regla de correspondencia: conjuntos

De este modo resulta importante hacer la aclaración de que las respuestas proporcionadas por los estudiantes y la red sistémica asociada a ellas a través de cada una de las categorías, no son únicas. Por ejemplo, en la categoría de **conjuntos** se encuentran los estudiantes como C1-H9 que entienden a la función como "Un conjunto de parejas ordenadas…", pero este estudiante también se encuentra en la categoría de **regla de correspondencia** pues como ya hemos visto, hace referencia a la idea de correspondencia unívoca. Es así como podemos evidenciar que la intersección entre diferentes categorías no necesariamente es vacía. Por otro lado, hubo estudiantes como C1-I3:

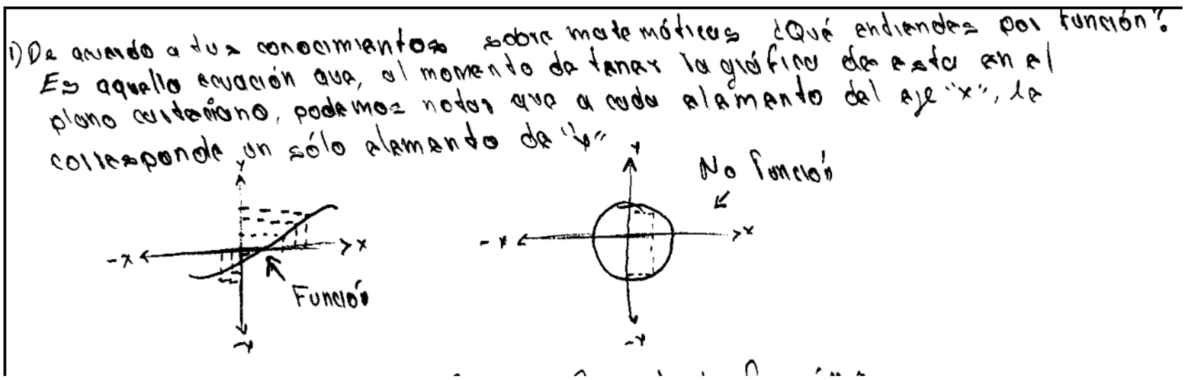
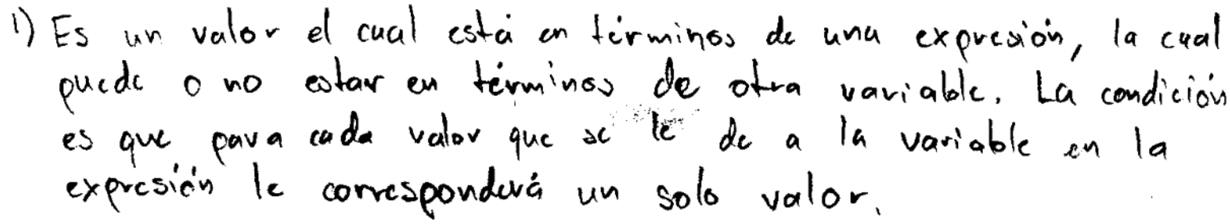


Ilustración 3. C1-I3 categoría representación: algebraica

Este estudiante mencionó entender el objeto función como una ecuación, es decir, como la **representación algebraica** del objeto, tal como lo menciona Duval (1999), al mostrar cómo en diversas ocasiones el objeto matemático suele confundirse con alguna de sus representaciones. Sin embargo, C1-I3 utiliza un argumento geométrico (las gráficas) para ilustrar la idea que ha adquirido respecto a este objeto matemático. Además se puede observar que a pesar de que asocia a la función con una ecuación y su gráfica, no considera a la circunferencia como una función. Este resultado nos permite observar la confusión que existe entre los conceptos función, ecuación y regla de correspondencia unívoca.

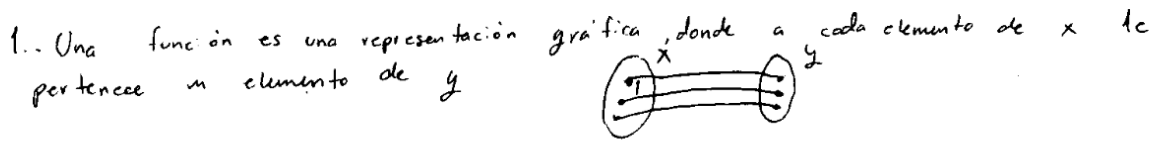
Otra de las definiciones que fueron propuestas fue la del estudiante C1-H7 la cual está dentro de la categoría de **valor** pues, mientras que para C1-H7 una función es:



1) Es un valor el cual está en términos de una expresión, la cual puede o no estar en términos de otra variable. La condición es que para cada valor que se le de a la variable en la expresión le corresponderá un solo valor.

Ilustración 4. C1-H7 categoría valor: dependiente

Para este estudiante, la función puede ser definida como el resultado de la evaluación en un punto; aquí lo más interesante es identificar que la representación numérica (tabular) es importante en la estructura que tiene respecto al concepto. En el caso de C1-H8, la confusión entre el objeto y su representación se hace más evidente pues para él:

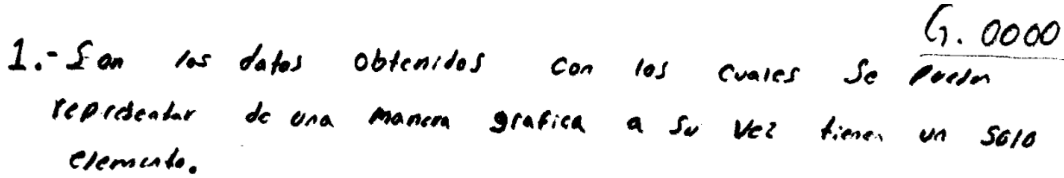


1.- Una función es una representación gráfica, donde a cada elemento de x le pertenece un elemento de y

Ilustración 5. C1- H8 categoría representación: gráfica

Esto parece demostrar que para este estudiante, la **representación gráfica** de una función puede ser la función en sí, respecto a esto Duval (2000) menciona que una representación geométrica no tiene validez como argumento, por lo tanto no podría ser de utilidad para definir un objeto matemático.

En la categoría de valor, se encuentran los casos como el de C1-I6 quien toma como función su representación numérica y posteriormente la representación gráfica:

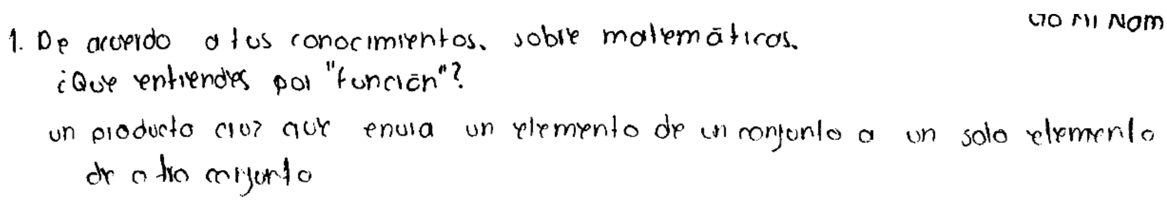


G. 0000

1.- Son los datos obtenidos con los cuales se pueden representar de una manera grafica a su vez tienen un solo elemento.

Ilustración 6. C1-I6 categoría representación y valor

Una de las respuestas más interesantes fue la del estudiante C1-I14:


uo mi Nom

1. De acuerdo a tus conocimientos, sobre matemáticas.
¿Que entiendes por "función"?
un producto cruz que envia un elemento de un conjunto a un solo elemento
de otro conjunto

Ilustración 7. C1-I14 categoría representación: algebraica

La respuesta de este estudiante fue ubicada en la categoría de **representación algebraica operacional**, pues en ella el estudiante manifiesta el carácter operativo de la función, aunque esto en sí evidencia que para el estudiante una operación puede ser una representación del objeto función, basta con que la regla de correspondencia se haga presente. En este caso lo más interesante es que dicha regla de correspondencia no se hace entre elementos cualesquiera, ya que sugiere el uso de vectores a partir de la operación producto cruz. Por otra parte, ésta respuesta podría estar relacionada con la idea de subconjunto del plano cartesiano en cuyo caso la respuesta no estaría en esta categoría, sin embargo no hay evidencia de tal afirmación y por ello la consideraremos como una observación en este análisis.

En las respuestas a la pregunta ¿qué entiendes por función? se mencionaron todas las representaciones verbal, algebraica, gráfica y numérica que aluden al objeto matemático función, y en algunos casos la definición formal de función tal como se enseña en los libros de texto de los primeros semestres de la Licenciatura en Física y Matemáticas. Sin embargo, es importante recordar que los objetos matemáticos no están a nuestro alcance en la realidad externa, son las representaciones semióticas con las cuales trabajamos y por ello es importante no concebirlas como el objeto en sí, sino como lo que son, conversiones de cada una de sus representaciones y tratamientos de las mismas D ’Amore (2004).

4.1.2 ¿Es una circunferencia, la gráfica de una función?

El segundo planteamiento en el cuestionario fue referente a la comprensión de la propiedad de correspondencia unívoca de la función, obteniendo como resultado la siguiente red:

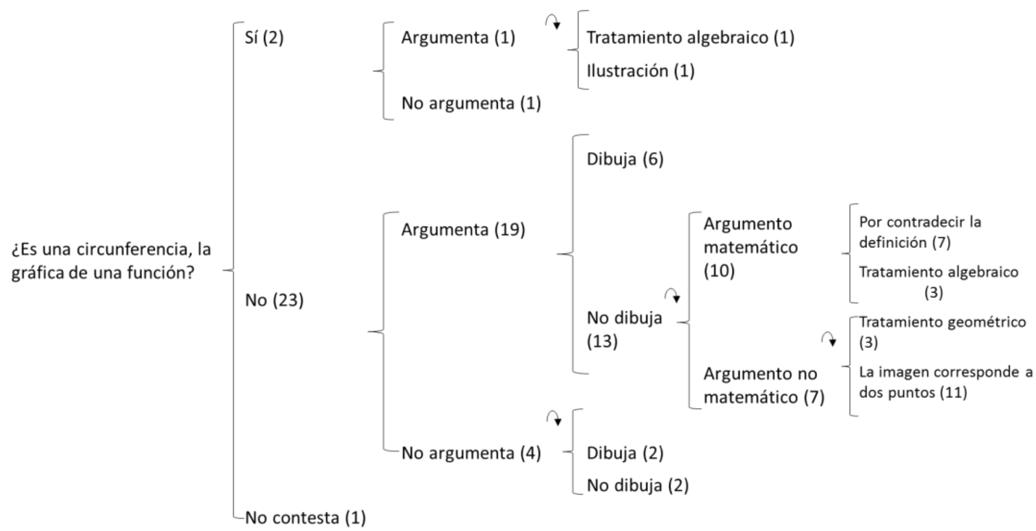


Figura 4.1.2. Red sistémica - ¿Es una circunferencia, la gráfica de una función?

Entre las respuestas se identificaron tres categorías básicas, siendo el proceso de argumentación lo que las diferenciaba. Dos de los estudiantes afirmaron que una circunferencia **sí** corresponde a la gráfica de una función y sólo uno de ellos argumentó de forma algebraica. Quien fundamentó su respuesta fue el estudiante C1-H10:

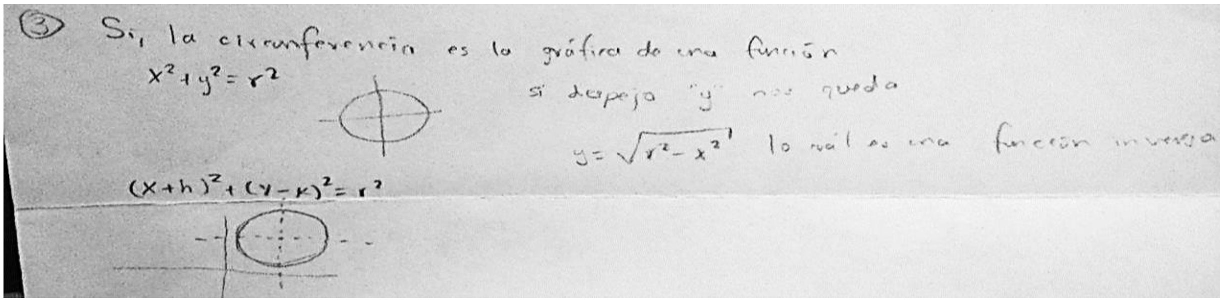


Ilustración 8. C1-H10 categoría sí: argumenta: tratamiento algebraico

Este estudiante argumenta su respuesta a través de un tratamiento algebraico, manipula la ecuación de la circunferencia para obtener una expresión de la forma y = *f(x)* sin darse cuenta de la importancia que adquieren en este caso el dominio y el codominio de la función. Más aún, basta que la expresión quede de la forma antes mencionada para poder llamarla función, sin darse cuenta que al hacer un tratamiento algebraico la gráfica de dicha función difiere de la circunferencia, es decir, la conversión como la concibe D' Amore (2004) no sólo cambia la representación del objeto matemático (circunferencia) sino que también modifica la representación gráfica y con ella el registro semiótico.

Por otro lado, para el estudiante quien **no argumenta** su respuesta C1-H6 basta con saber que al hacer la conversión del registro de representación verbal al registro gráfico existe una regla de correspondencia entre los valores que toma la ecuación y los valores que se obtienen de evaluarla, la representación gráfica o geométrica de la ecuación de la circunferencia.

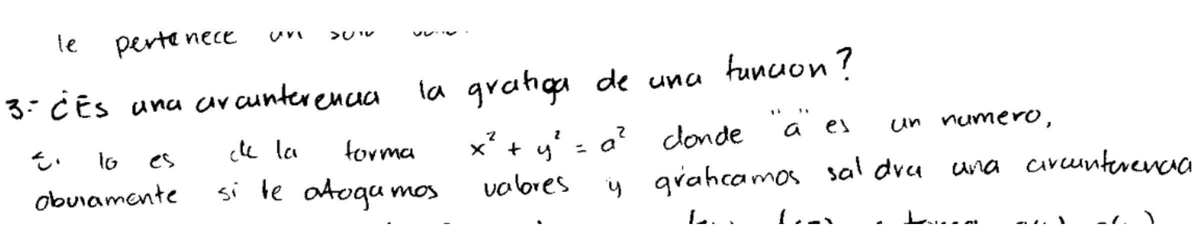


Ilustración 9. C1-H6 categoría sí: no argumenta

Sin embargo, la mayoría de los estudiantes (23 de los 26 que participaron) mencionaron que una circunferencia **no** es la gráfica de una función, los argumentos fueron diversos y algunos de ellos optaron por **dibujar** para ilustrar su **argumento** y otros usaron la geometría como argumento, tal es el caso de C1-I7 en cuya explicación utiliza un argumento de tipo geométrico para hacer referencia a la relación de correspondencia unívoca entre elementos del dominio y elementos del contradominio:

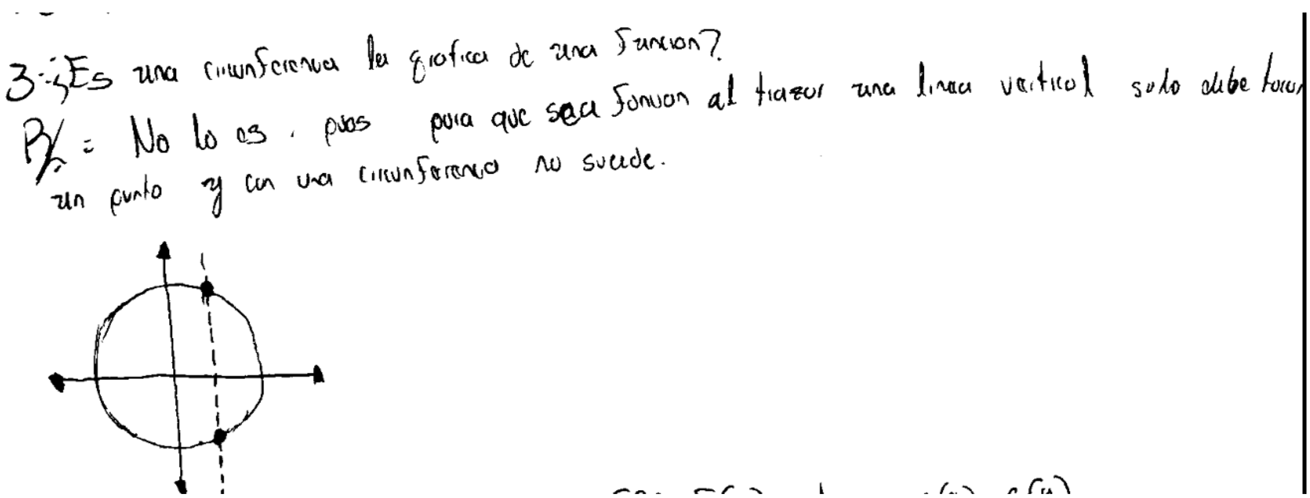


Ilustración 10. C1-I7 categoría no: argumenta: dibuja

En esta respuesta podemos verificar cómo la propiedad de correspondencia unívoca es sustituida por la idea de recta secante en un solo punto de la gráfica; en la pregunta se solicitaba una argumentación a la respuesta que se diera, el estudiante acompaña su argumento verbal de una representación gráfica, lo cual podría implicar que para el estudiante, una representación gráfica puede fungir como un argumento.

Algunos estudiantes como C1-H2, propusieron otro tipo de argumentaciones:

3º Sea $\sqrt{x^2+y^2}=r$ una circunferencia de radio albitrario, y centro en el origen, si tomamos un punto arbitrario que pertenesca a la circunferencia $(0, y')$ tenemos

$$\sqrt{0^2+y'^2}=r$$

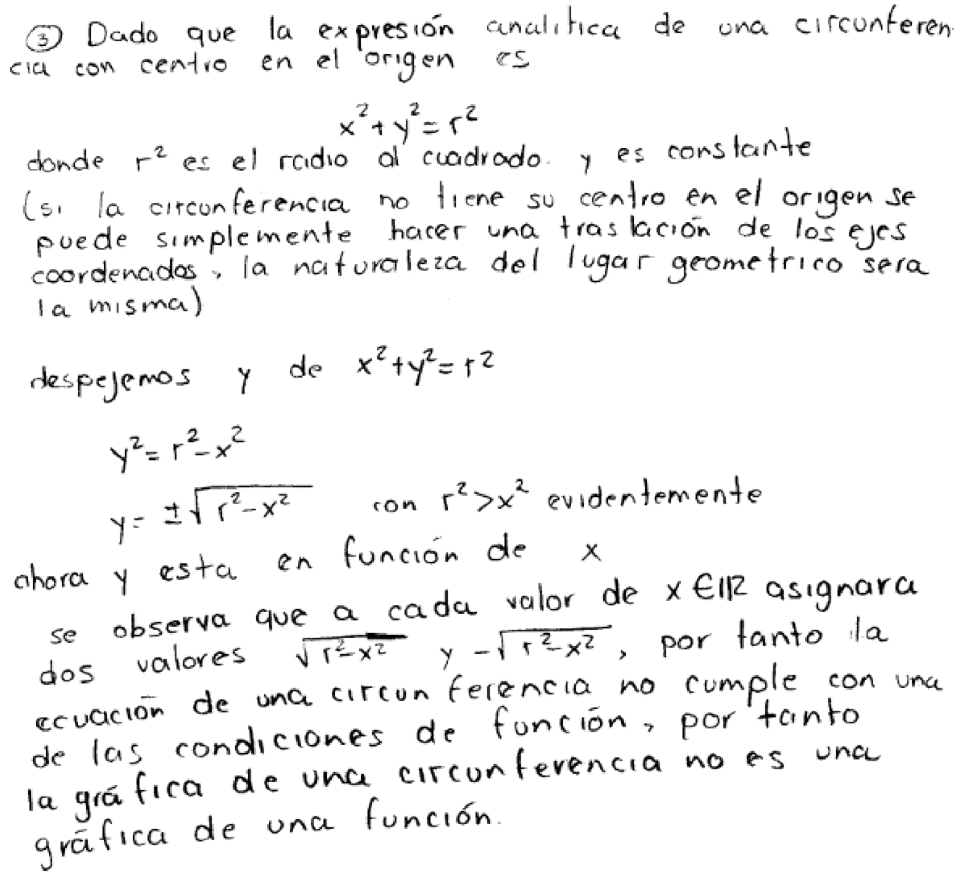
$$\sqrt{y'^2}=r$$

Debido a que son numeros positivos, su raiz tiene 2 valores reales, locual es una contradicción al concepto de función anteriormente descrito

Ilustración 11. C1-H2 categoría no: argumenta: tratamiento algebraico

Estos casos se encuentran en la categoría de aquellos que para hacer referencia a que la circunferencia no cumple con la propiedad de correspondencia unívoca propia de la función, utilizaron argumentos de carácter matemático, buscando alguna **contradicción** en la interpretación del tratamiento algebraico que le dieron a la ecuación de la circunferencia.

Dentro de esta categoría cabe mencionar el caso de C1-I5, cuyas argumentaciones se encuentran en dos registros semióticos, el del lenguaje verbal y el del lenguaje algebraico, en el cual hizo un tratamiento para llegar a una representación algebraica distinta que le dejó ver la naturaleza numérica de la circunferencia y así poder contrastarla con la propiedad de correspondencia unívoca de las funciones.


③ Dado que la expresión analítica de una circunferencia con centro en el origen es

$$x^2+y^2=r^2$$

donde r^2 es el radio al cuadrado. y es constante
(si la circunferencia no tiene su centro en el origen se puede simplemente hacer una traslación de los ejes coordenados, la naturaleza del lugar geometrico sera la misma)

despejemos y de $x^2+y^2=r^2$

$$y^2=r^2-x^2$$

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$$ con $r^2>x^2$ evidentemente

ahora y esta en función de x
se observa que a cada valor de $x \in \mathbb{R}$ asignara dos valores $\sqrt{r^2-x^2}$ y $-\sqrt{r^2-x^2}$, por tanto la ecuación de una circunferencia no cumple con una de las condiciones de función, por tanto la gráfica de una circunferencia no es una gráfica de una función.

Ilustración 12. C1-I5 categoría no: argumenta: contradicción

En esta respuesta no sólo se pueden apreciar los diferentes argumentos matemáticos que puede dar el estudiante, sino que también se puede ver que el lenguaje verbal juega un papel importante en su argumentación.

Por último, para ejemplificar y analizar la categoría de quienes no asumen que una circunferencia es la gráfica de una función pero tampoco dan un argumento matemático o geométrico al respecto, mostraremos el caso de C1-I9 ya que su único argumento es “…los valores de x se repite”, lo cual aunque podría hacer alusión a la propiedad de correspondencia unívoca carece de argumentos “sólidos” para sustentarse.

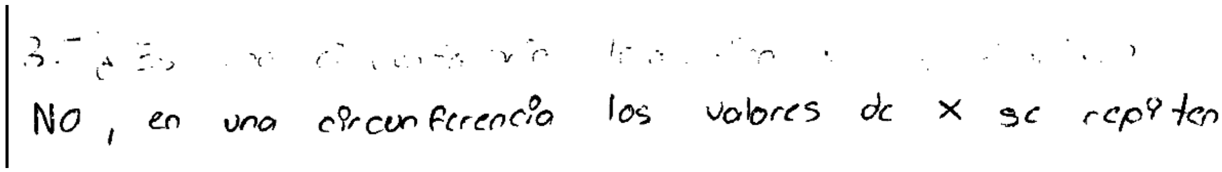

No, en una circunferencia los valores de x se repiten

Ilustración 13. C1-I9 categoría no: argumento no matemático

Para analizar las respuestas a esta pregunta es importante cuestionarnos, ¿es un argumento verbal o geométrico, válido para fundamentar una afirmación en matemáticas?, de no ser así ¿qué argumentos sí serían válidos y por qué? De acuerdo a Duval (2000) y Bachellard[1] (1948) las representaciones geométricas o figurales no pueden ser parte de la argumentación matemática, debido a que carecen de formalidad y abstracción; respecto a esto es importante mencionar que sólo 5 de los estudiantes de Cálculo I que participaron en la investigación, mencionaron explícitamente que el caso de la circunferencia contradecía la definición formal de función.

Las dificultades que se presentan en las argumentaciones de las respuestas a la pregunta ¿es una circunferencia la gráfica de una función? se encuentran dentro del marco de los obstáculos de origen epistemológico propuestos por Brousseau quien es citado por Prada, Hernández y Ramírez (2014), ya que están relacionados con una adaptación inadecuada de la representación matemática que alude a determinado saber matemático.

4.1.3 Demostración sobre composición de funciones

Para la interpretación de éstas respuestas, se reconoció principalmente la forma en que los estudiantes identificaron la expresión $h \circ f$; como **composición** de funciones, como **producto** de funciones o incluso quienes no manipularon la expresión, por lo cual se sugirió una tercera categoría llamada: **no identificó** el significado de $h \circ f$.

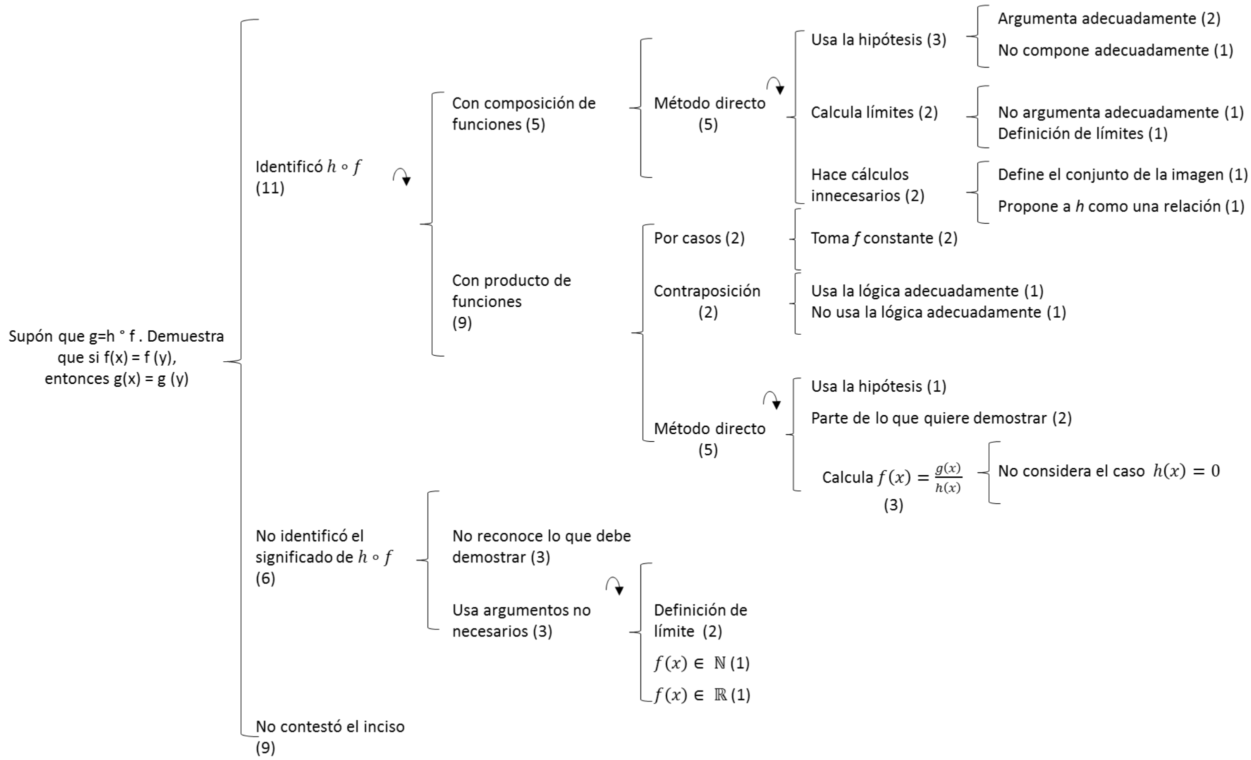


Figura 4.1.3. Red sistémica – Composición de funciones

Así, al interpretar detenidamente los procedimientos que siguió cada estudiante, se continuó la categorización de acuerdo los diferentes intentos de demostración, entre ellos el método **directo**, **contraposición** y **por casos**, una de las características que ayudó en la organización de dichas categorías fue el uso de la hipótesis y las argumentaciones matemáticas.

Comenzaremos con la categoría de quienes sí identificaron $h \circ f$ como una operación entre dos funciones. Ésta es la categoría con respuestas más variadas y numerosas, la dividiremos en dos secciones: **composición** y **multiplicación**.

La composición: h ∘ f

En esta categoría el procedimiento utilizado por todos los estudiantes fue **directo**, es decir, partieron de la hipótesis para llegar directamente a lo que se buscaba demostrar. En el caso de C1-H4, el estudiante hizo un tratamiento analítico y posteriormente renombró la expresión *f(x)* para obtener el resultado deseado:

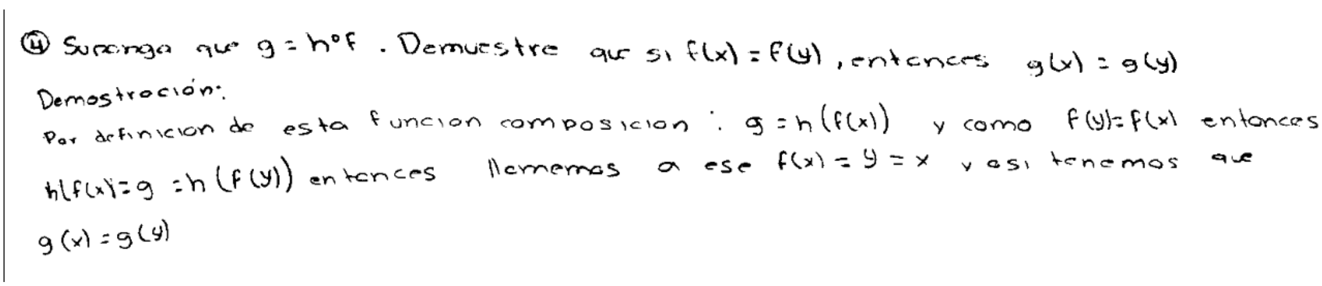


Ilustración 14. C1-H4 categoría identificó h °f: argumenta

Por otro lado está el caso de C1-H8, quien a diferencia de C1-H4 hizo un tratamiento puramente algebraico, **compuso** las funciones en el orden **incorrecto** y dejó de lado la argumentación verbal, proporcionando así una demostración ciertamente ambigua en una representación estrictamente lógico-algebraica.

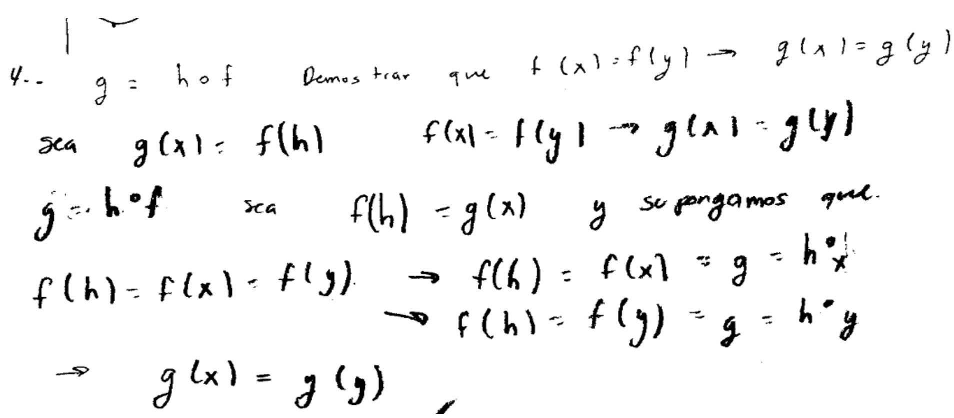
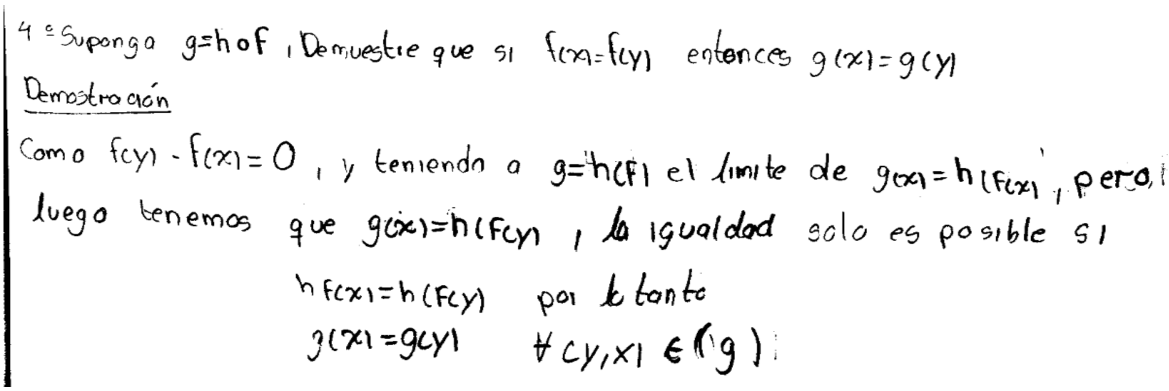


Ilustración 15. C1-H8 categoría identificó h °f: no compone adecuadamente

Otro caso sobresaliente es el de C1-H2, quien a pesar de conocer la operación composición, utilizó nociones matemáticas innecesarias como la de **límite** de funciones, para la demostración del enunciado, el cual demostró satisfactoriamente a pesar del abuso de argumentación. En ocasiones, este tipo de dificultades se deben a la ausencia de una idea clara de los objetos matemáticos, en este caso el de composición de funciones.



4 º Suponga $g=hof$, Demuestre que si $f(x)=f(y)$ entonces $g(x)=g(y)$

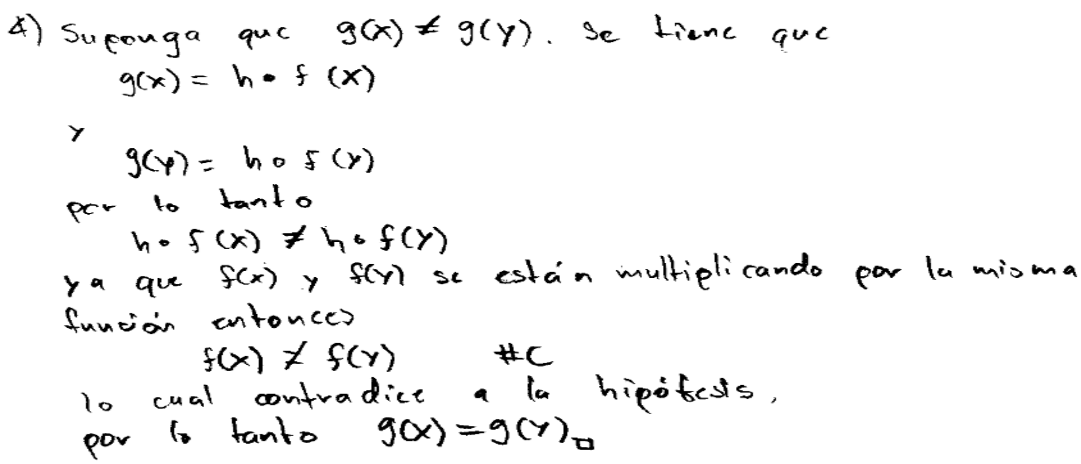
Demostración

Como $f(y)-f(x)=0$, y teniendo a $g=h(f)$ el límite de $g(x)=h(f(x))$, pero,
luego tenemos que $g(x)=h(f(y))$, la igualdad solo es posible si
$h\,f(x)=h(f(y))$ por lo tanto
$g(x)=g(y)$ $\forall\, (y,x) \in \Gamma(g)$

Ilustración 16. C1-H2 categoría identificó h °f: límites

El caso de $h \circ f$ como multiplicación de funciones

En el caso de C1-H7, el procedimiento lógico que decidió utilizar fue la **contraposición**, partió de contradecir la implicación de la hipótesis para hallar la contradicción, cabe mencionar que en este paso el estudiante hizo un uso adecuado de la lógica proposicional:



4) Suponga que $g(x) \neq g(y)$. Se tiene que
$g(x) = h \bullet f(x)$
y
$g(y) = h \circ f(y)$
por lo tanto
$h \circ f(x) \neq h \circ f(y)$
ya que $f(x)$ y $f(y)$ se están multiplicando por la misma función entonces
$f(x) \neq f(y)$ #C
lo cual contradice a la hipótesis,
por lo tanto $g(x)=g(y)$ □

Ilustración 17. C1-H7 categoría identificó h °f: contraposición

El tratamiento algebraico del estudiante pudo ser adecuado, si se hubiese tratado del producto de funciones, y siempre que $h \neq 0$. Dado que el enunciado fue presentado en lenguaje algebraico era de suponerse que el tratamiento también lo fuera; Cuevas y Delgado (2015) mencionan que si el contexto es algebraico, el tratamiento funcional se ve obstaculizado por la inercia que genera el contexto en el que está planteado el ejercicio, sin embargo, ¿cómo se podría resolver este ejercicio si no fuera con tratamientos en el mismo registro de representación?, de nuevo nos encontraríamos cuestionando la naturaleza de los argumentos válidos en Matemáticas.

En uno de los pocos casos de la última categoría, C1-I8 manifiesta que no identifica el significado de la expresión $h \circ f$:

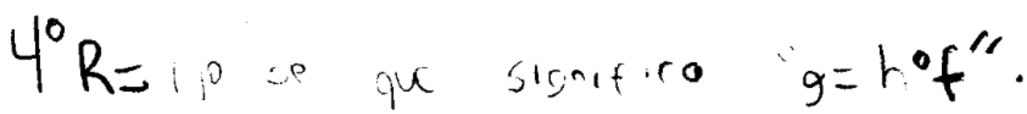


Ilustración 18. C1-I8 categoría no identificó h °f

Con esta respuesta, el estudiante evita hacer falsas o verdaderas aproximaciones al significado de dicha expresión, y con ello a cometer errores de representación, conversión y tratamiento del objeto matemático.

Cuando se trabaja con este tipo de representaciones, cobran importancia las estructuras conceptuales que se tienen respecto a los objetos matemáticos pues desde esta postura teórica, la de los campos conceptuales de Gerard Vergnaud las representaciones semióticas, son sólo la proyección de lo que en realidad es el objeto para el estudiante. Conviene entonces, para estos casos hacer estudios exhaustivos con miras a encontrar cuáles son esas estructuras conceptuales que tienen los estudiantes respecto a determinados objetos matemáticos, cuyo tratamiento a este nivel (Nivel Superior) se reduce a ser algebraico o analítico, entendiendo como analítico aquél en el cual se usan argumentos matemáticos como los teoremas, las definiciones, axiomas y otros, y como algebraico aquél que es simbólico.

Vergnaud (1990) menciona que la comprensión de un concepto carece de sentido sin los esquemas y las situaciones que están asociadas a él, es por esto que al clasificar las dificultades encontradas en el estudio la primera categoría de análisis es la **conceptualización;** la primera dificultad está relacionada con la **confusión del objeto con su representación**, como se puede ver en la Figura 1. Respecto a esto López y Sosa (2008) proponen un cuadro en donde se identifican los factores cognitivo, epistemológico y didáctico que influyen en la generación de ciertas dificultades (véase Cuadro 1).

Dificultad	Cognitivo	Epistemológico	Didáctico
Obtener una expresión analítica o gráfica de una función que modele un fenómeno	Esquemas que responden a situaciones muy similares	La enseñanza el concepto ha tomado una dirección contraria a la génesis del mismo	Los ejercicios planteados suelen ser rutinarios o algorítmicos, excluyendo aquellos problemas o situaciones de variación
Confusión entre función y ecuación	Similitud de gráficas	Función como puente entre la geometría y el álgebra	Operar y manejar funciones como cualquier expresión algebraica. Sintaxis utilizada

Cuadro 10. Factores que influyen en las dificultades en el uso de funciones[14]

[14] Citado del trabajo original, López y Sosa, 2008.

4.2 Análisis Vectorial

4.2.1 Campos vectoriales

Ahora nos corresponde analizar las respuestas de los estudiantes de segundo semestre en la asignatura de Análisis Vectorial, en la cual el objeto matemático función juega un papel importante al trabajar con la noción de Diferenciación vectorial, ya que se trabaja con funciones de varias variables.

El enunciado del ejercicio planteado a los estudiantes fue el siguiente:

"Sean los campos vectoriales $\vec{F}(x,y) = -x\hat{\imath} - y\hat{\jmath}$ *y* $\vec{V}(x,y) = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$ *:*
a) Dibuja un diagrama de los campos vectoriales
b) Verifica cuál de los campos es solenoidal y cual es irrotacional. ¿Corresponden tus resultados con tus diagramas?"

Para el análisis de las respuestas se decidió elaborar una red sistémica que incluyera las interpretaciones de ambos incisos. Esto se decidió por una parte debido a que los estudiantes en muchos casos respondieron a ambos incisos de manera simultánea y por otra, para analizar de manera más completa los procesos de conversión y tratamiento de los objetos matemáticos que se ponen en juego en la resolución del problema.

Las dos categorías generales, corresponden a los registros semióticos utilizados en el problema, comenzaremos el análisis con los diagramas, en particular con el caso de aquellos en los que se encontraron **cuadrantes vacíos.**

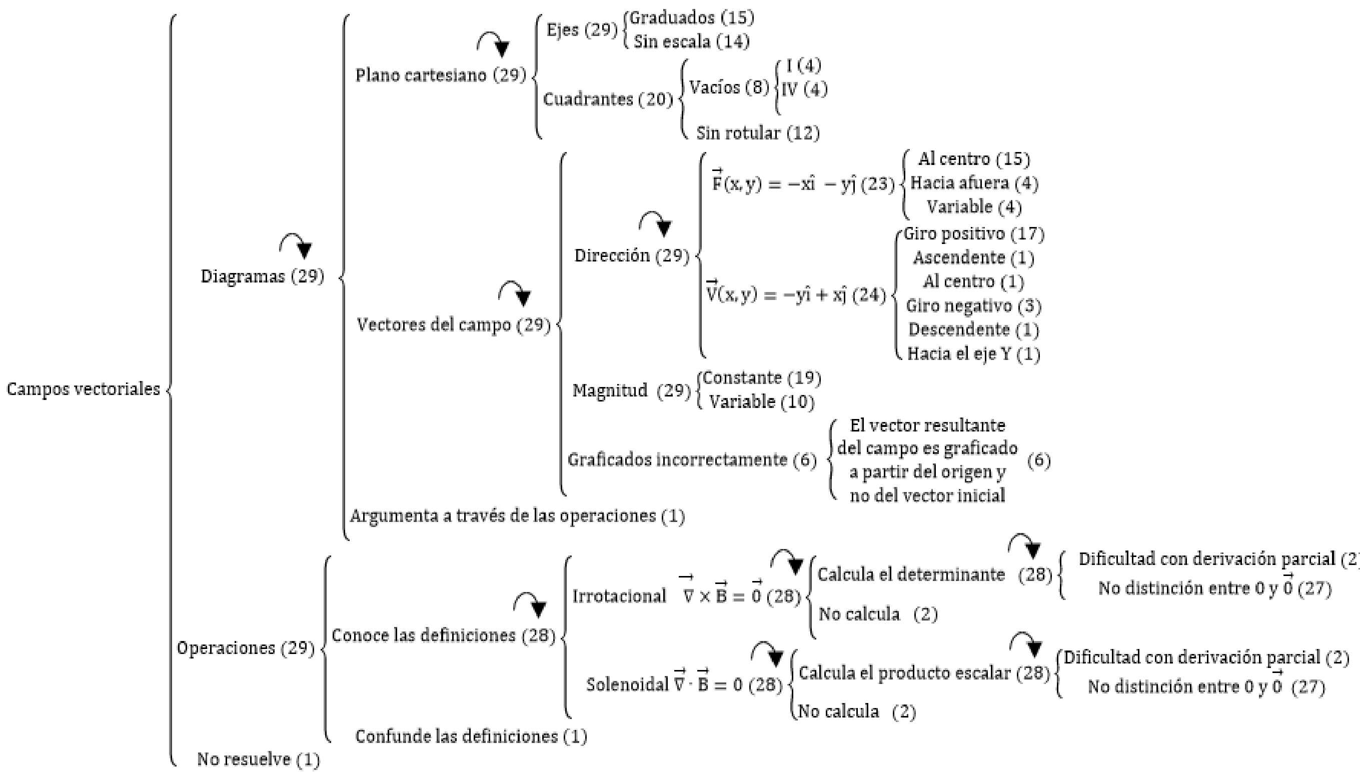


Figura 4.2.1. Red sistémica – Campos vectoriales

La respuesta del estudiante AV-H7 se encuentra en esta categoría:

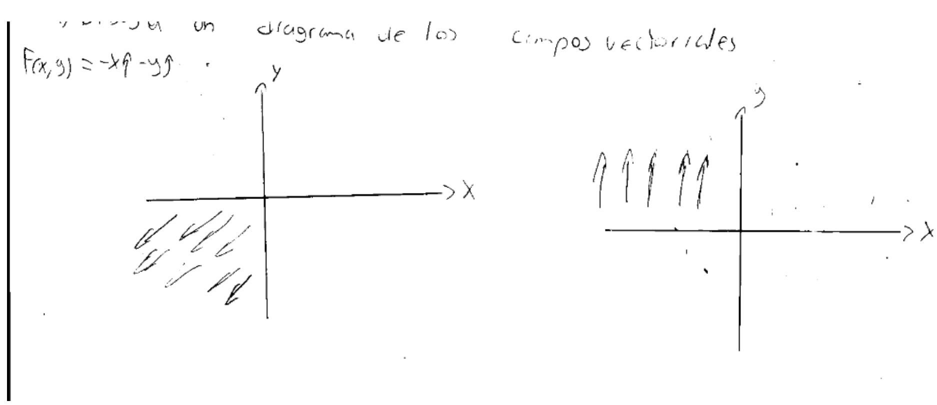


Ilustración 19. AV-H7 categoría diagramas: cuadrantes vacíos

Otra característica de este tipo de gráficos, es que en la mayoría de los casos los ejes no están graduados. Sin embargo, en el caso de las gráficas de las estudiantes todos los ejes fueron graduados, mostraremos el caso de AV-M4, quien además de graduar cada uno de los ejes, dibujó vectores de los campos en cada cuadrante:

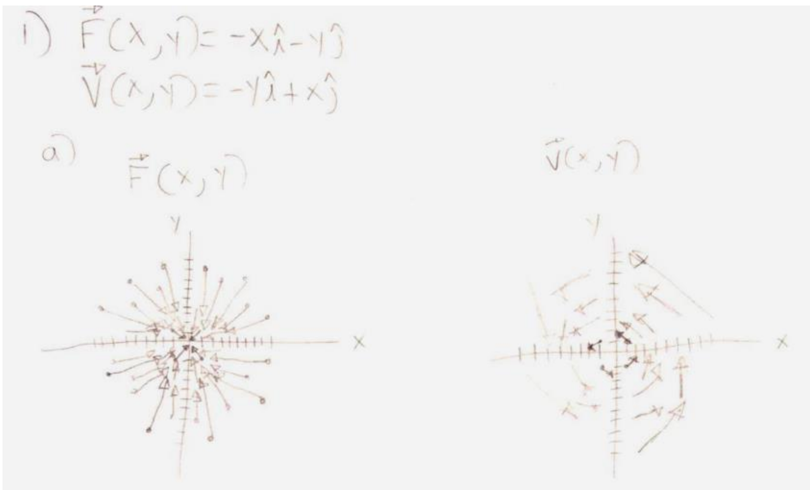


Ilustración 20. AV-M4 diagramas: ejes

La distinción de estas características nos ayuda a mostrar las estructuras conceptuales internas y externas que manejaron hombres y mujeres al resolver este problema. Por otro lado, la dirección con la que fueron dibujados los vectores respecto a cada campo sugiere que, mientras algunos estudiantes dibujaron vectores hacia el centro para el campo $\vec{F}$, otros dibujaron vectores hacia afuera para el mismo campo. Para ejemplificar esto, tomaremos el caso de AV-H1 y de AV-H4:

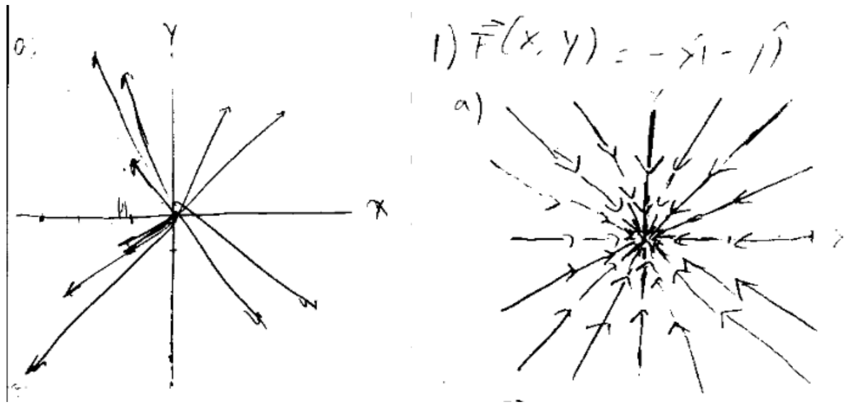


Ilustración 21. AV-H1 y AV-H4 diagramas: vectores: dirección F

Respecto al campo $\vec{V}$, hubo una variación similar en las respuestas pues en este caso los vectores fueron dibujados de tal forma que al observarlos en conjunto, daban el efecto visual de giro. La variante aquí la proporcionó la dirección hacia la cual dicho giro se efectuó y para ejemplificarlo tomaremos en cuenta dos casos, el de H7 y el de H20:

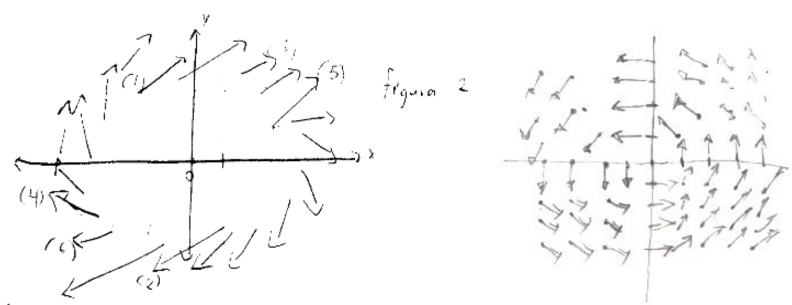


Ilustración 22. AV-H7 y AV-H20 categoría diagramas: vectores: dirección V

Estas variaciones en las respuestas se deben a una inadecuada evaluación de la función que representa el campo, pues en algunos casos el vector resultante no se dibujó a partir del vector inicial (punto correspondiente en el plano), sino a partir del origen coordenado, para ilustrar esta idea veamos el caso de AV-H18:

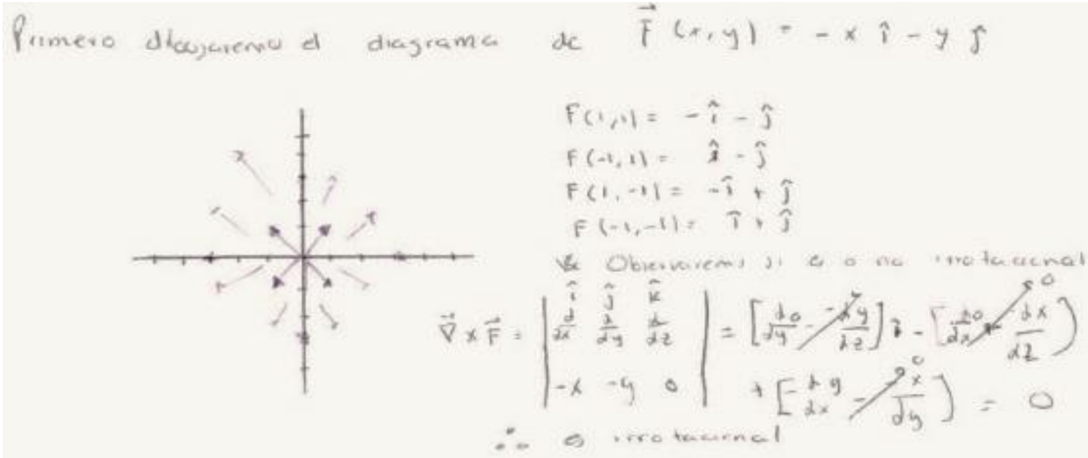


Ilustración 23. AV-H18 graficación incorrecta

De este modo es fácil comprobar que en el caso de los diagramas del campo $\vec{F}$, cuyos vectores fueron dibujados **hacia afuera,** eran incorrectos, lo cual nos lleva a cuestionar ¿qué significa para los estudiantes, evaluar la función de un campo vectorial?, en muchos casos los estudiantes escribieron la conversión de la representación algebraica a la representación numérica y el tratamiento numérico que le siguió, pero dadas las observaciones anteriores podría ser que dichos procesos se hayan reducido a procedimientos de carácter puramente operativos perdiendo así el significado teórico e interpretativo de los objetos.

Algo muy similar sucede en el caso del campo $\vec{V}$, pues al graficar los vectores del campo el giro es positivo, pero si se graficara -$\vec{V}$ entonces el giro sería negativo, esto quiere decir que un grupo considerable de estudiantes evaluó incorrectamente antes de graficar los vectores.

Ahora analizaremos las respuestas que conciernen a la categoría de **operaciones**. Para ésta categoría hubo dos operaciones en práctica, el **rotacional** y la **divergencia**. Todos los estudiantes identificaron estas dos operaciones para la solución del segundo inciso del problema. Sin embargo, hubo dos dificultades que se hicieron presentes; la primera de ellas corresponde a la notación entre 0 como escalar y $\vec{0}$ como vector, mostraremos el caso de AV-H2 y AV-H5:

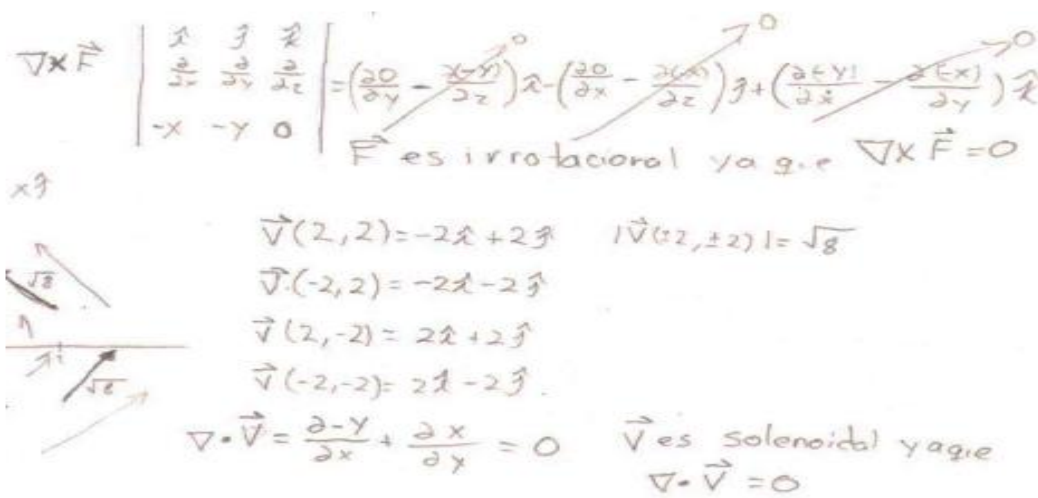


Ilustración 24. AV-H2 categoría operaciones: no distinción 0 y $\vec{0}$: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{0}$

Mientras que AV-H2 representa con 0 ambas operaciones, AV-H5 hace la distinción en la notación con $\vec{0}$ para el resultado del rotacional evidenciando que el resultado del producto cruz entre el operador nabla y el campo vectorial es desde luego, un vector. Este rasgo, puede ser simplemente producto de la notación pero es de suma importancia sobre todo cuando se trata de dar interpretaciones en la Física.

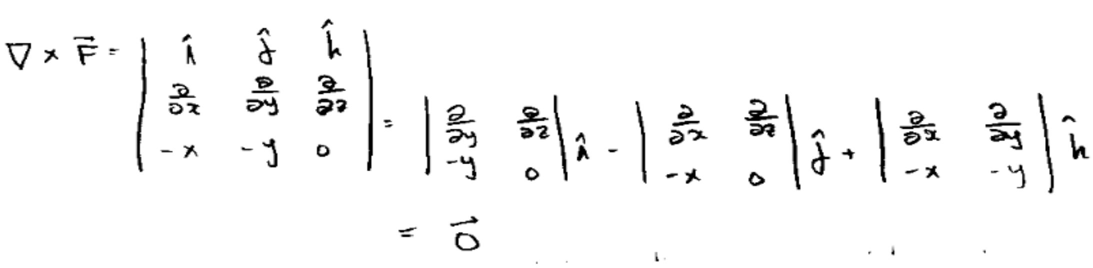


Ilustración 25. AV-H5 categoría operaciones: no distinción 0 y $\vec{0}$: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

La otra dificultad que se observó fue en el tratamiento del operador diferencial pues, se observaron dificultades en el proceso de **derivación parcial** tanto en el rotacional como en la divergencia. Mostraremos un ejemplo para cada caso:

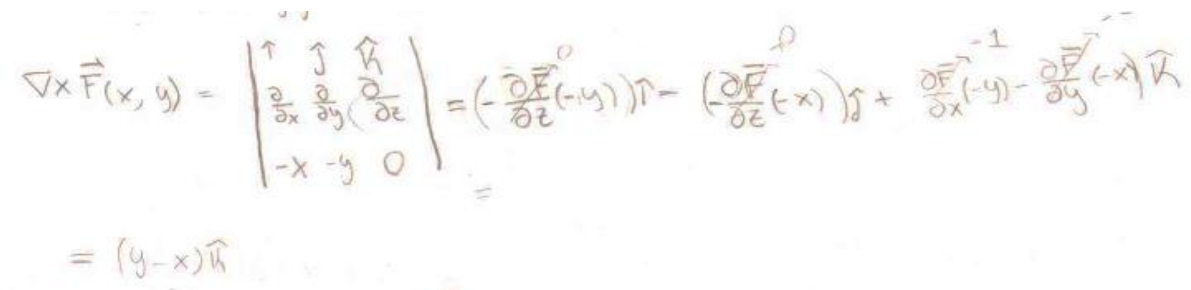


Ilustración 26. AV-H3 categoría operaciones: derivación parcial: $\overrightarrow{\nabla} \times \vec{B} = \vec{0}$

El estudiante AV-H3 deriva incorrectamente la tercera componente del vector rotacional de $\vec{F}$ ya que no considera que al derivar parcialmente, se deriva respecto a una sola variable y el resto se consideran constantes, y por otro lado AV-M2:

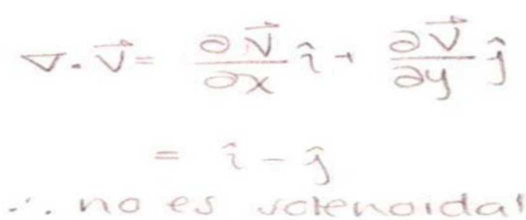


Ilustración 27. AV-M2 operaciones: derivación parcial: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

Esta estudiante, al derivar parcialmente omite que la operación con $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ es un producto escalar y por lo tanto la expresión $\frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\hat{\imath}$ no tiene sentido, salvo que se especifique $\vec{V}$ como la componente de $\vec{V}$ en x. Además no tomó en consideración el hecho de que al calcular la divergencia de un campo, el resultado es un escalar ya que obtiene como resultado los vectores unitarios $\hat{\imath}\ y\ \hat{\jmath}$.

4.2.2 Ley de conducción del calor de Fourier

En Análisis Vectorial el uso de la matemática está orientado, en gran parte a la interpretación de fenómenos físicos, en este caso la Ley de conducción del calor de Fourier se utilizó en el problema siguiente:

> *"La ley de conducción del calor de Fourier se expresa como $\vec{q} = -k\nabla T$ donde k es la conductividad térmica y T es la temperatura. Si el campo de temperatura en una superficie plana está dada por la función $T(x,y) = x^2 + y^2$, calcula T en los puntos (1,0), ($\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$), (0,1), (2,0), ($\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}$), (0,2) e indica la dirección de $\vec{q}$ en esos puntos. ¿Qué interpretación física le puedes dar a esta situación?"*

La red sistémica se construyó a partir de dos categorías principales, las cuales aluden a estructuras cognitivas distintas; la representación y la interpretación.

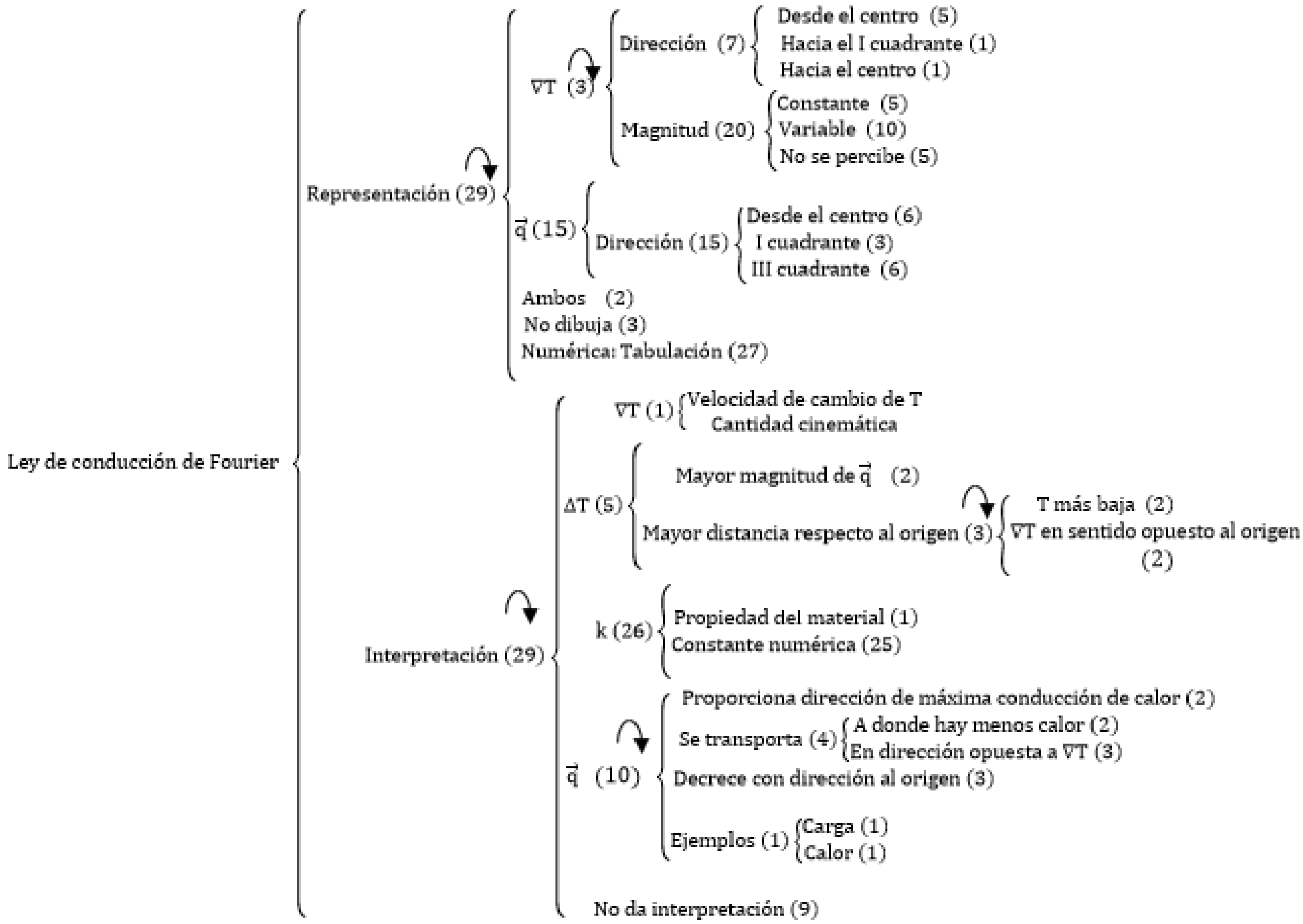


Figura 4.2.2. Red sistémica – Ley de conducción del calor de Fourier

En la categoría de **representación** se caracterizaron los dibujos que los estudiantes construyeron para el vector ∇T y $\vec{q}$. Comenzaremos con el caso de AV-H6 quien dibujó los vectores de $\boldsymbol{\nabla T}$ sin considerar la constante “k” de conductividad para el campo $\vec{q}$, y es por eso que los vectores apuntaban **hacia el centro,** pues el signo “negativo” no fue tomado en cuenta al momento de hacer la conversión del registro algebraico al registro numérico y posteriormente al registro gráfico.

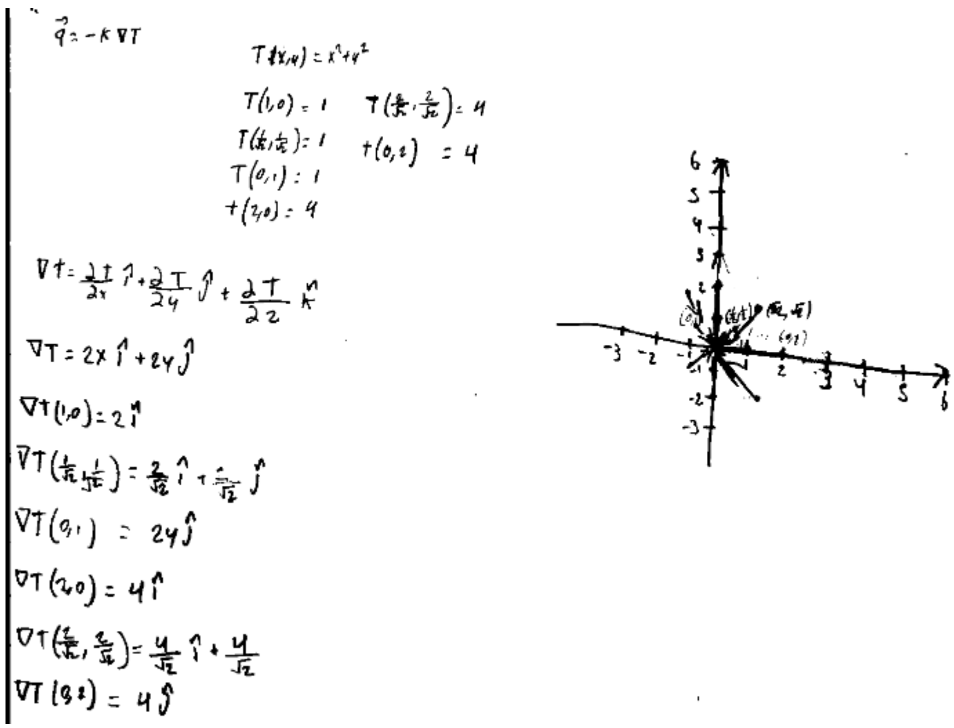


Ilustración 28. AV-H6 categoría representación: ∇T: hacia el centro

Sin embargo, al comparar con la respuesta de AV-H12 se pudo observar que la **dirección** de los vectores es contraria a los de la respuesta de AV-H6 a pesar de que los tratamientos fueron muy similares en ambos casos. Veamos el caso del estudiante AV-H12:

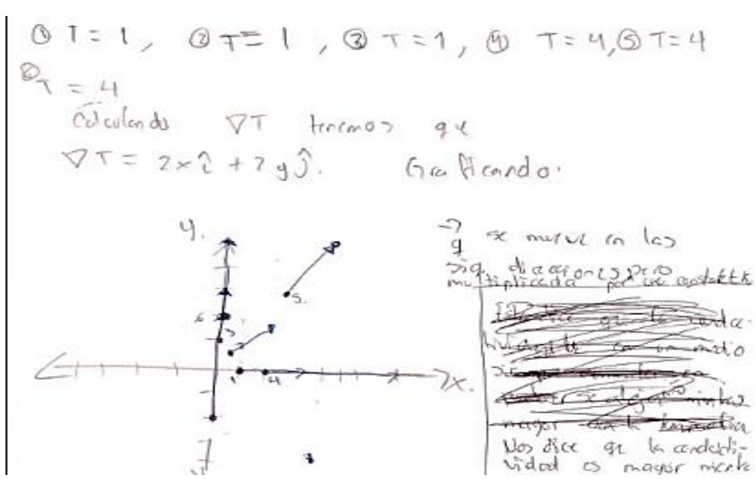


Ilustración 29. AV-H12 categoría representación: ∇T: desde el centro

Por otro lado, para AV-H2 el diagrama muestra los vectores con dirección opuesta al origen y acompaña la **representación** gráfica de una descripción verbal a través de la cual se hace referencia implícita a la relación negativa que aparece en la representación algebraica de la Ley de conducción del calor:

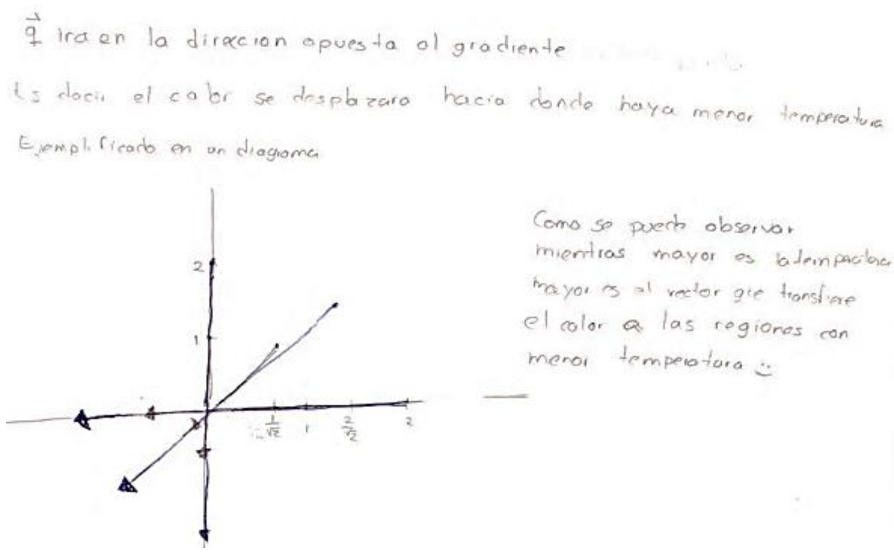


Ilustración 30. AV-H2 categoría representación: $\vec{q}$: III cuadrante

Además de la representación gráfica, también se distinguió la representación numérica a través de la **evaluación** de los campos, como lo hizo el estudiante AV-H8:

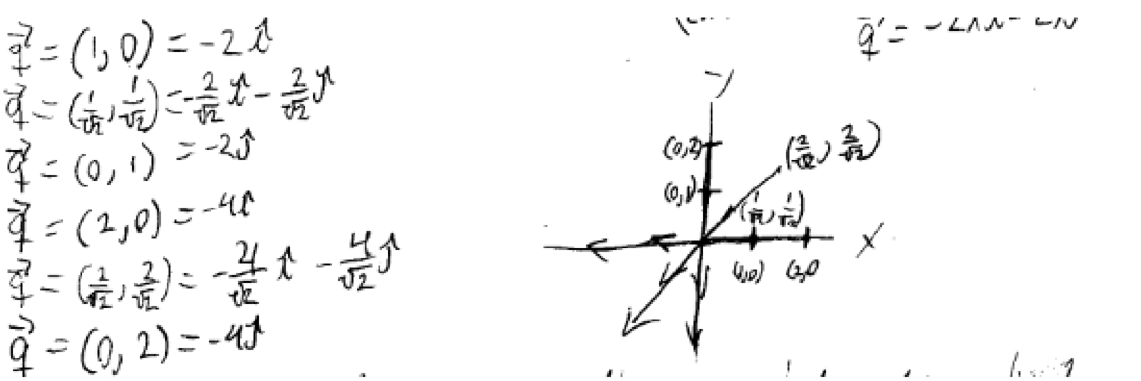


Ilustración 31. AV-H8 categoría representación: numérica

Ahora analizaremos las interpretaciones que se encontraron respecto al ejercicio.

Ésta segunda categoría se dividió en cuatro subcategorías con base en el criterio de "qué se está interpretando"; en el ejercicio la pregunta fue abierta al referirse a la interpretación física de la situación en general no a un sólo objeto. La primer subcategoría encontrada fue ∇T:

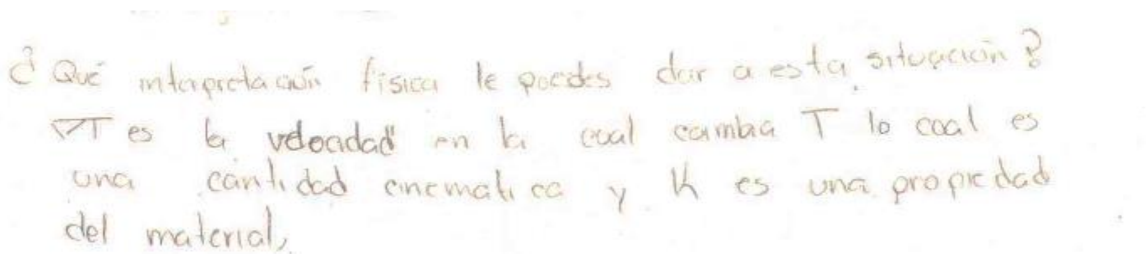

¿Qué interpretación física le puedes dar a esta situación?
∇T es la velocidad en la cual cambia T lo cual es una cantidad cinematica y K es una propiedad del material.

Ilustración 32. AV-H3 categoría interpretación: ∇T y k

En esta respuesta el estudiante asoció la noción de **velocidad** a la operación ∇T; recordemos que el operador nabla es en realidad un operador para diferenciar funciones de varias variables y que en Física la diferenciación suele relacionarse con la rapidez de cambio de una variable respecto de otra y en el caso de la mecánica clásica con la velocidad (pues ésta es vista como la derivada de la posición respecto del tiempo), esto podría ser en Física un caso símil al caso de la algebrización en Matemáticas ya que a pesar de que se cambie el contexto del objeto, el tratamiento algebraico sigue arraigado a las estructuras conceptuales internas del estudiante. Además, en esta respuesta la temperatura T fue definida como una cantidad cinemática lo cual es congruente con la asociación de ∇T con la velocidad.

La segunda subcategoría fue la de Δ**T** "incremento de T", en ella se encuentran respuestas como la de AV-H2 Ilustración 30 en la que a través de un enunciado verbal, el estudiante relaciona el aumento de la temperatura con el aumento de la magnitud del vector de transmisión del calor; pero éste no es un argumento único, más adelante en la categoría cuatro referente al vector $\vec{q}$ se mostrará un ejemplo de un argumento similar.

La constante de conductividad térmica k constituye la tercer subcategoría de objetos interpretados y para ilustrarla usaremos el caso de AV-H3 Ilustración 31. En ella, el estudiante la define como una propiedad del material lo cual coincide con las interpretaciones físicas de otras cantidades constantes en expresiones matemáticas utilizadas en la Física como k "la constante de elasticidad" en la Ley de elasticidad de Hooke.

Por último analizaremos la subcategoría del vector $\vec{q}$ y comenzaremos con la respuesta de AV-H19:

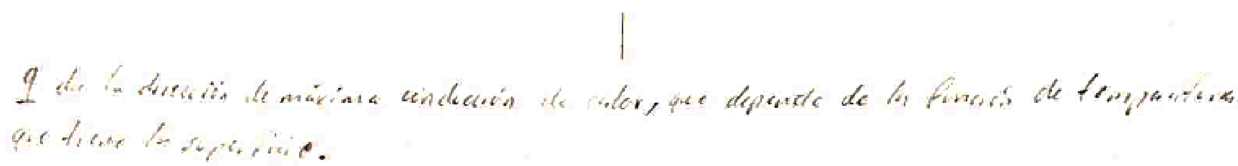
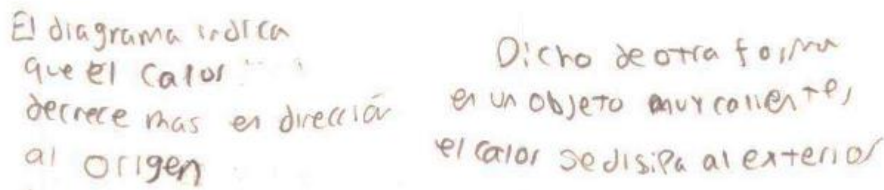

q da la dirección de máxima conducción de calor, que depende de la función de temperatura que tiene la superficie.

Ilustración 33. AV-H19 categoría interpretación: $\vec{q}$: dirección de máxima conducción

Aquí el estudiante interpretó al vector de conducción del calor aquél que "da la **dirección de máxima conducción de calor** y que depende de la función de trayectoria que tiene la superficie", ésta definición coincide con la definición del vector $\vec{q}$ que comúnmente se trabaja en el curso de Análisis Vectorial, sin embargo, "la función de trayectoria que tiene la superficie" carece de sentido pues está confundiendo el campo de temperatura con una trayectoria. Otro de los casos especiales es el de AV-H20 ya que el tratamiento que le da a su argumento está en la representación del lenguaje natural:



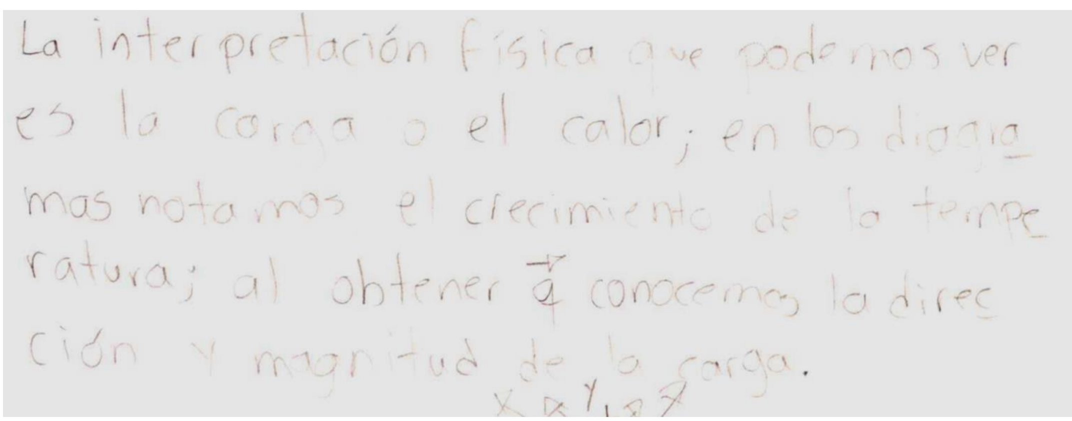
El diagrama indica que el calor decrece mas en dirección al origen

Dicho de otra forma en un objeto muy caliente, el calor se disipa al exterior

Ilustración 34. AV-H20 categoría interpretación: $\vec{q}$: decrece con dirección al origen

La característica más valiosa de este caso es que para que el estudiante pudiera argumentar en el lenguaje natural, debió hacer primero una conversión del registro algebraico al registro gráfico, luego al lenguaje natural y por último al lenguaje coloquial.

Finalmente tenemos el caso de la estudiante AV-M4, quien propone a la **carga y al calor** (nociones físicas distintas) como ejemplos de la situación planteada en el ejercicio:



La interpretación física que podemos ver es la carga o el calor; en los diagramas notamos el crecimiento de la temperatura; al obtener $\vec{q}$ conocemos la dirección y magnitud de la carga.

Ilustración 35. AV-M4 categoría interpretación: $\vec{q}$: ejemplos

En las respuestas a este segundo ejercicio, hemos podido reconocer la diversidad de interpretaciones que proporcionan los estudiantes de segundo semestre a la aplicación de la representación de un objeto matemático en el área de la Física, y así mismo las dificultades a las que se enfrentan al hacerlo.

4.3 Ecuaciones Diferenciales

La asignatura de Ecuaciones Diferenciales forma parte del tronco común de la licenciatura en Física y Matemáticas de la ESFM, en ella el concepto de función es abordado de manera implícita ya que el contenido del curso no gira en torno a este objeto matemático pero sí se hace uso constante de él. Por ello para analizar las dificultades respecto al objeto matemático "función", hemos elegido dos ejercicios con diferente tipo de tratamiento.

4.3.1 Sobre tratamientos geométricos

El planteamiento del primer ejercicio fue:

> *"Dibuja una curva solución aproximada de la ecuación diferencial dada que pase por el punto indicado.* $(xy-1)dx+dy=0, \quad y(0)=1$*"*

Para analizar esta respuesta se tomó como criterios de categorización el tipo de tratamiento que se le dio a la ecuación diferencial, la categoría **método algebraico y gráfico (geométrico)** corresponde a aquellas respuestas en las cuales los estudiantes decidieron resolver a través de un tratamiento algebraico y al no encontrar una solución optaron por el tratamiento geométrico.

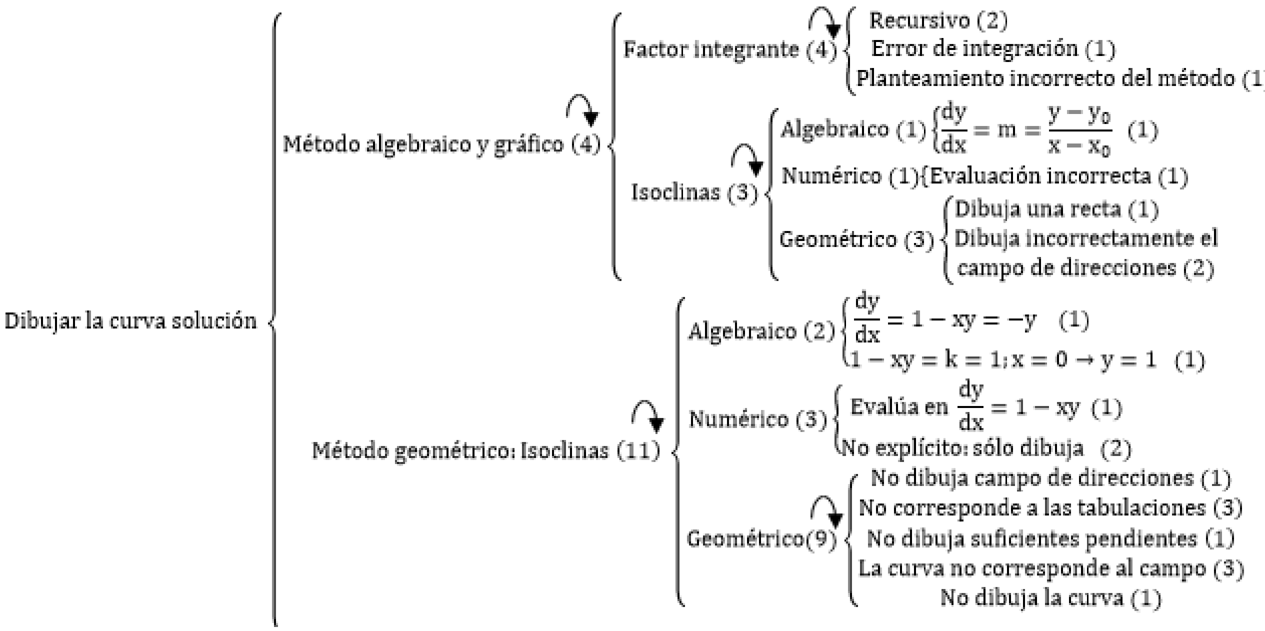


Figura 4.3.1. Red sistémica – Dibujar la curva solución

Para ilustrar esta categoría y en particular el **tratamiento algebraico** que los estudiantes dieron a la ecuación diferencial, mostraremos el caso de ED-H1 quien usó el método de factor integrante y al hacer el tratamiento algebraico se percató de que éste se volvería recursivo y asumió que el tratamiento desarrollado no le sería de utilidad:

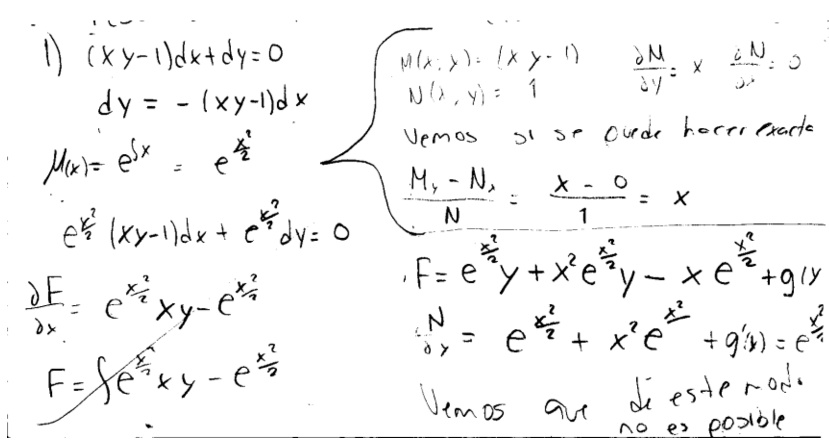


Ilustración 36. ED-H1 categoría método algebraico y gráfico: factor integrante: recursivo

Por otro lado tenemos la respuesta de ED-H2, él comenzó por un tratamiento algebraico, pero cometió un **error** al integrar y eso lo llevó finalmente a una respuesta incorrecta:

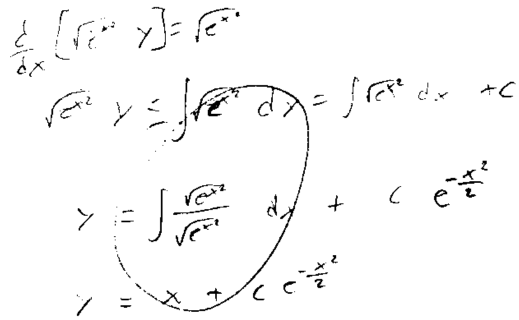


Ilustración 37. ED-H2 categoría factor integrante: error de integración

Es importante observar que la causa de que este estudiante no pudiera llegar a la misma conclusión que el caso anterior, no fue un obstáculo en el manejo del concepto sino en el desarrollo de la integral.

Sin embargo, hubo un estudiante que manifestó dificultad desde el planteamiento del método al no elegir adecuadamente el argumento del **factor integrante**. Veamos que aquí el obstáculo sí fue conceptual ya que tomó como función de x a la expresión $xy - 1$, la cual no depende sólo de la variable x:

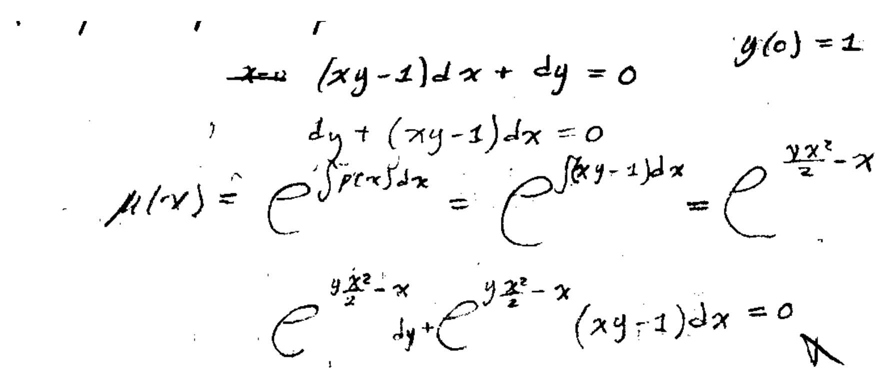


Ilustración 38. ED-H3 categoría factor integrante: no plantea correctamente el método

Este estudiante, al darse cuenta de la dificultad que le presentaba hacer el desarrollo algebraico a partir de un factor integrante con esas características decidió utilizar el método de isoclinas para dibujar la curva aproximada a la solución:

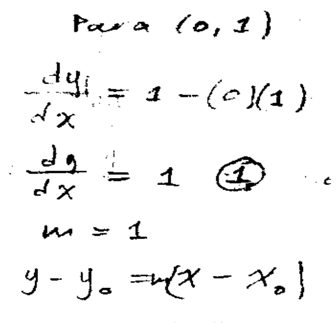


Ilustración 39. ED-H3 categoría tratamiento algebraico: isoclinas

Como se puede observar, después de hacer el tratamiento algebraico evalúa directamente las condiciones iniciales y en seguida interpreta el resultado como la pendiente de una recta motivo por el cual dibuja como curva aproximada, una recta:

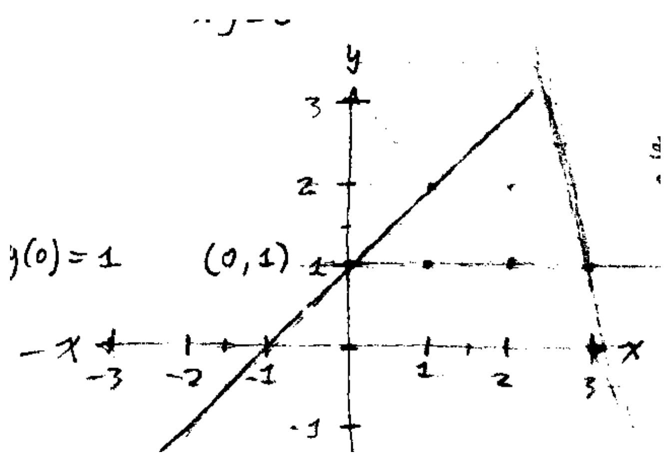


Ilustración 40. ED-H3 categoría tratamiento algebraico y geométrico: isoclinas: dibuja una recta

Claramente, el campo de pendientes o de direcciones no fue dibujado. Morales y Hernández (2010) mencionan que cuando se trabaja con campos de direcciones las respuestas de los estudiantes suelen verse obstaculizadas por los tratamientos algebraicos y analíticos como lo vemos en el caso de ED-H3 ya que para él la idea de derivada está estrictamente relacionada con la pendiente, en particular la de una recta y por ello la relaciona con la expresión analítica $m = \frac{y-y_0}{x-x_0}$.

Otra de las dificultades que manifestaron los estudiantes de segundo semestre, fue la evaluación de la expresión $1 - xy$ ya que al escribirla de la forma $f(x,y) = 1 - xy$ y evaluar directamente, se está creando una función cuyo dominio sería el plano cartesiano.

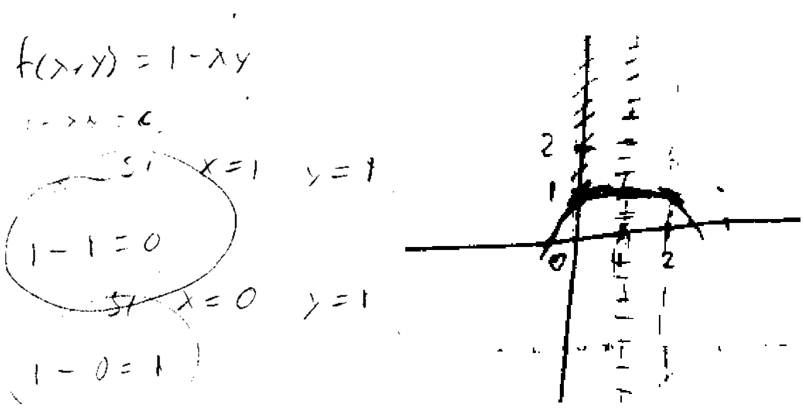


Ilustración 41. ED-H2 categoría tratamiento algebraico y geométrico: isoclinas: no evalúa correctamente

En este caso el error comenzó probablemente con el uso incorrecto de la notación y una vez situado en el registro algebraico (aunque éste no fuera el correcto) y al estar bajo el contexto de las funciones en el plano, la interpretación de la imagen de f se convirtió en un obstáculo para la visualización de la gráfica correspondiente. Por otra parte tenemos a los estudiantes que **dibujaron incorrectamente el campo de direcciones** en ésta categoría está la respuesta del estudiante ED-H1:

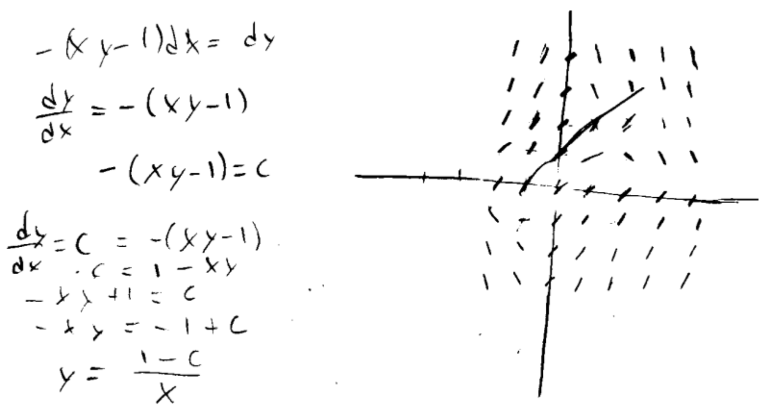


Ilustración 42. ED-H1 categoría tratamiento algebraico y geométrico: dibuja incorrectamente el campo de direcciones

Este estudiante encontró una familia de funciones de la forma $y = \frac{1-c}{x}$, pero al comparar con el campo de direcciones se observó que éstas no coinciden con la expresión matemática encontrada.

Ahora analizaremos la segunda categoría, que corresponde a las respuestas de los estudiantes que sólo resolvieron aplicando el **método geométrico: isoclinas**. Dentro de esta categoría se distinguieron tres subcategorías que corresponden al tipo de tratamiento que se desarrolló a lo largo de sus respuestas: **algebraico, numérico y geométrico.**

Comenzaremos el análisis ilustrando las dos dificultades presentadas durante el tratamiento **algebraico**; la primera de ellas atañe a la interpretación incorrecta de la derivada pues la estudiante ED-M4 iguala la derivada con una función cuya procedencia es desconocida, a continuación su caso:

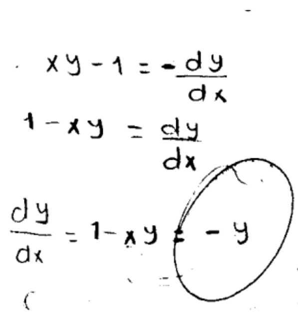


Ilustración 43. ED-M4 categoría isoclina: tratamiento algebraico

En este caso es evidente que la estudiante tiene dificultad en general con el método, ya que propone una función que no tiene nada que ver con el ejercicio planteado. Por otro lado el estudiante ED-H7 al hacer el tratamiento algebraico para su respuesta sólo consideró pertinente uno de los valores de k (la pendiente k=1) y usó las condiciones iniciales $y(0)=1$ como argumento para sustentar su solución:

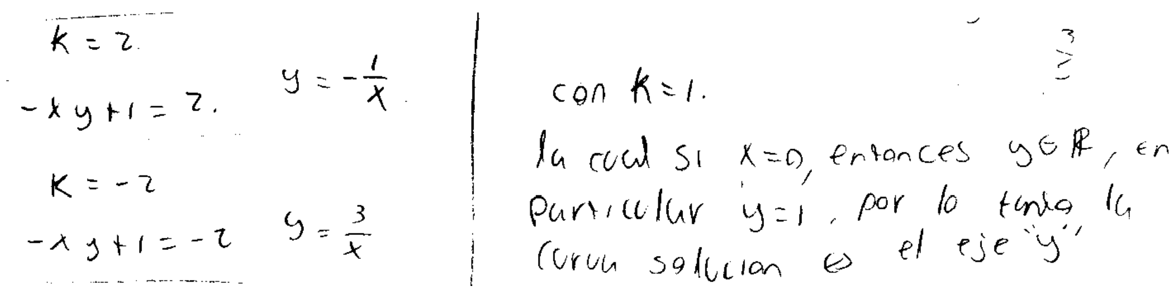


Ilustración 44. ED-H7 categoría isoclinas: tratamiento algebraico

Sin embargo, la curva solución que propone no coincide con la pendiente para la cual está definida, en otras palabras el eje Y no tiene pendiente $k=1$.

Este es un ejemplo de cómo los estudiantes al hacer tratamientos algebraicos frecuentemente dejan de lado las nociones funcionales (D'Amore, 2004).

Ahora analizaremos la categoría del tratamiento **numérico**, presentaremos la respuesta del estudiante ED-H4 y veremos cómo él decidió evaluar directamente la ecuación de $\frac{dy}{dx}$ obteniendo así sólo un conjunto de pendientes iguales a 1 sobre el eje Y, sin darse cuenta del carácter variacional de la constante C y que éste le permitiría dibujar el resto de las pendientes del campo:

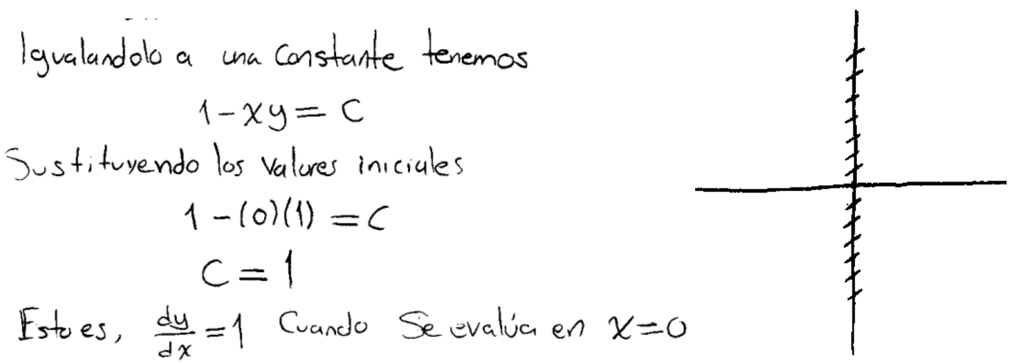


Ilustración 45. ED-H4 categoría isoclinas: tratamiento numérico

Dentro de la misma categoría se encuentra la respuesta de la estudiante ED-M1 quien al igual que ED-H3 consideró la derivada como la pendiente $\frac{y-y_0}{x-x_0}$ sólo que en este caso no se consideró en el sentido de la pendiente de una recta y se desarrolló un tratamiento algebraico. Conviene subrayar que la estudiante ED-M1 no explicitó el tratamiento numérico que desarrolló para llegar a la curva.

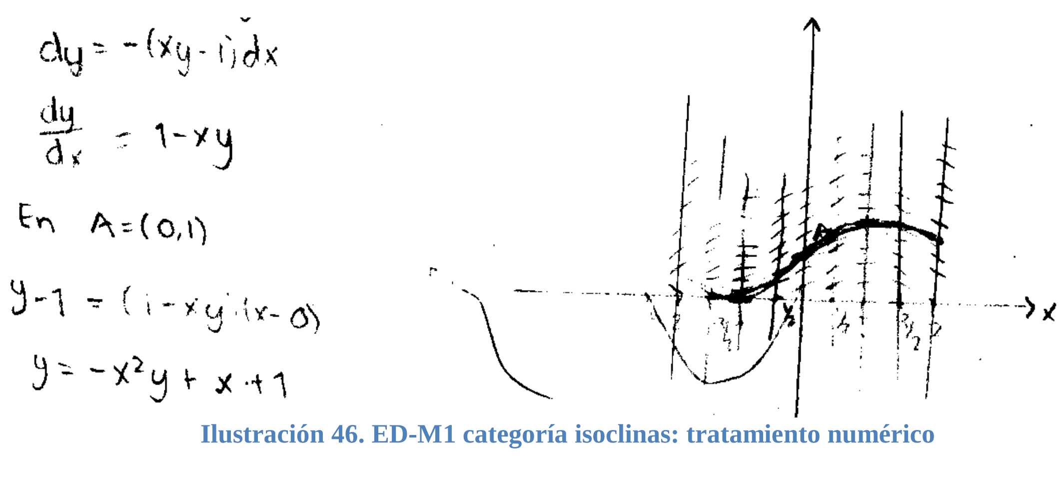


Ilustración 46. ED-M1 categoría isoclinas: tratamiento numérico

Por último, abordaremos la subcategoría del tratamiento **geométrico** que se le dio al método de **isoclinas;** en ella se dieron cinco respuestas distintas: **no dibuja campo de direcciones** (por practicidad se omitirá ilustrar este caso), **no corresponde a las tabulaciones, no dibuja suficientes pendientes, la curva no corresponde al campo y no dibuja la curva** (sólo el campo de direcciones).

La primera respuesta que ilustraremos es aquella en la que el campo de direcciones **no corresponde** a la tabulación de *x e y* pues dado que se tomó c = 2 podemos notar que visualmente las pendientes no son las mismas en todos los puntos del campo. Además, para la primera fila de la tabulación no tomó en consideración el dominio de la función $\frac{1}{x}$ al suponer que si x =0 *y* podría tomar el valor 1, lo cual es imposible ya que en tal caso la función quedaría indefinida.

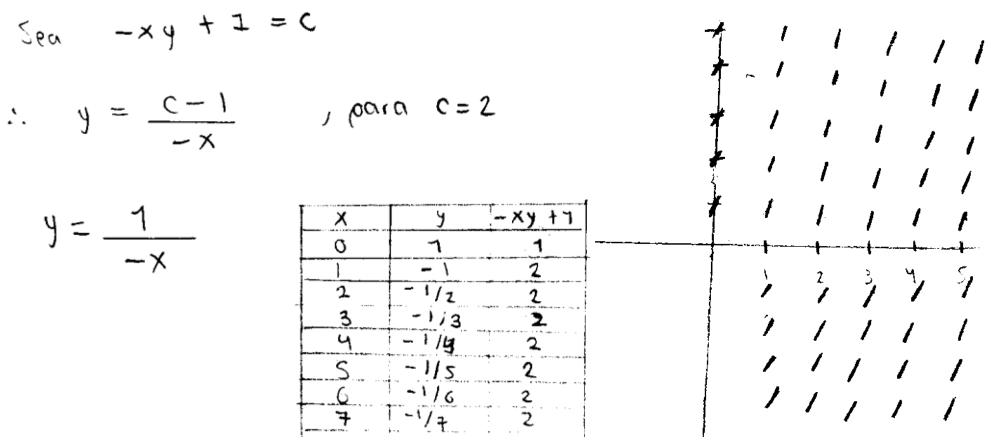


Ilustración 47. ED-H6 categoría isoclinas: tratamiento geométrico: no corresponde

Por otra parte, tenemos la respuesta de ED-H9 quien no dibujó suficientes pendientes, sobre todo en el IV cuadrante, lo cual no le permitió hacer una correcta aproximación a la curva solución:

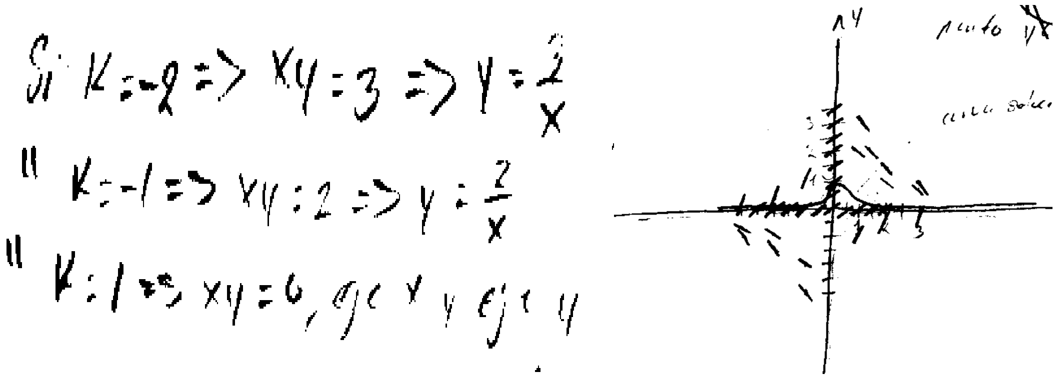


Ilustración 48. ED-H9 categoría isoclinas: tratamiento geométrico

El segundo ejercicio que se trató, tiene que ver con la aplicación a la Física y el cambio de registro del lenguaje natural al registro algebraico.

4.3.2 Una aplicación en la Física

En este ejercicio el planteamiento fue el siguiente:

> *“Un proyectil se introduce en una tabla de 10 cm de espesor con una velocidad* $v_0 = 200\, m/s$ *traspasándola con velocidad* $v_1 = 80\, m/s$. *Suponiendo que la resistencia de la tabla al movimiento del proyectil es proporcional al cuadrado de la velocidad. Halla el tiempo del movimiento del proyectil por la tabla.”*

La existencia de una respuesta cuyo procedimiento no incluyó el uso de ecuaciones diferenciales dio origen a las categorías principales; las subcategorías fueron construidas a partir de la **argumentación física** que se dio al plantear el enunciado algebraicamente, el tratamiento **algebraico** para las **constantes físicas** y los **errores** produjo otra subcategoría, el tratamiento **numérico** desarrollado durante la **evaluación** de las ecuaciones generó una subcategoría más y por último el acto de **ilustrar** fue motivo de la última subcategoría, ya que hubo un estudiante que a pesar de no haber ilustrado no mostró dificultades en el tratamiento algebraico de su respuesta. A continuación la red sistémica que se generó a partir de las categorías mencionadas:

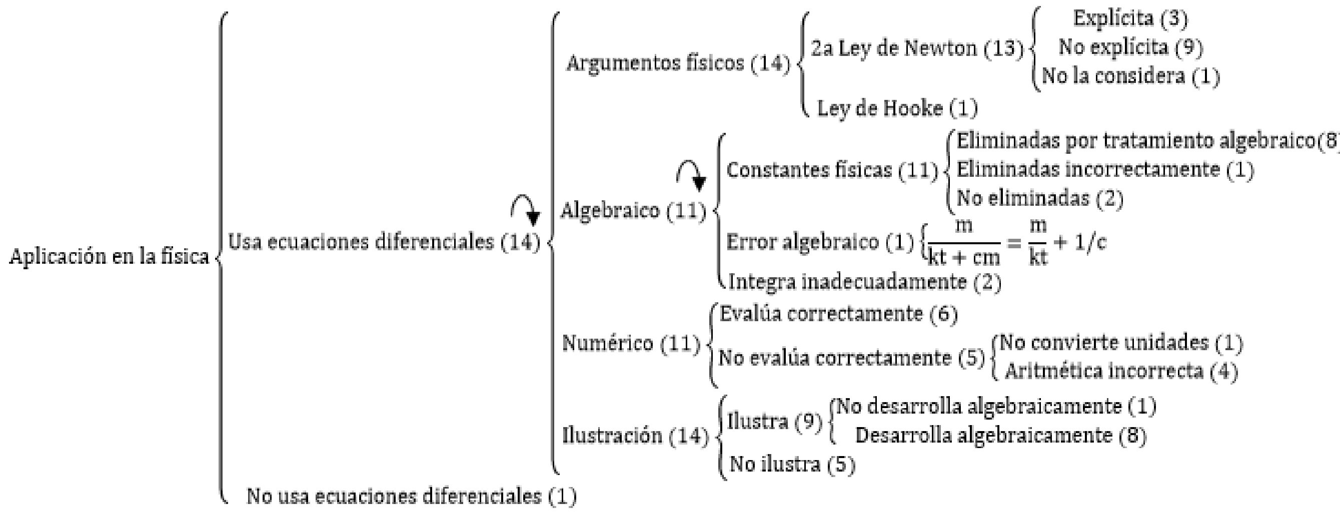


Figura 4.3.2. Red sistémica – Aplicación en la Física

El principal argumento físico que se utilizó fue la **2ª Ley de Newton**, pero no todos los estudiantes la usaron explícitamente.

De los 12 estudiantes que la utilizaron sólo 3 de ellos lo hicieron explícitamente como lo hizo ED-H4:

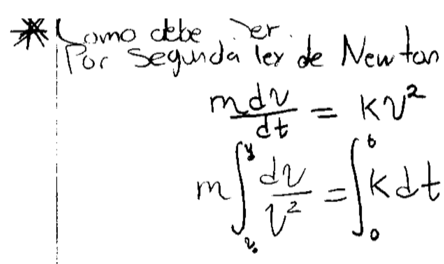


Ilustración 49. ED-H4 categoría argumentos físicos: 2ª Ley de Newton

El resto de los estudiantes, no explicitaron el argumento que utilizaban aunque sí enunciaban la expresión algebraica que representa la **2ª Ley de Newton,** en donde la fuerza es la resistencia de la tabla al movimiento del proyectil, como en el caso de ED-H10:

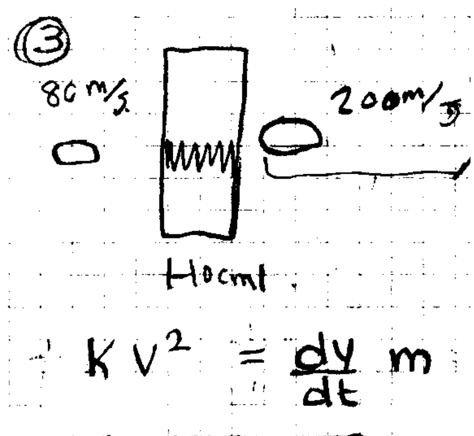


Ilustración 50. ED-H10 categoría argumento físico: 2ª Ley de Newton

Al mismo tiempo ilustraremos el caso de la estudiante ED-M3, quien utilizó como **argumento físico** la **Ley de Hooke**, en este caso la notación que usó la estudiante en contraste con el enunciado del problema deja entrever que relaciona la noción de resistencia (fuerza de resistencia) con la resistencia de un resorte a ser deformado (constante de elasticidad) lo cual es completamente falso:

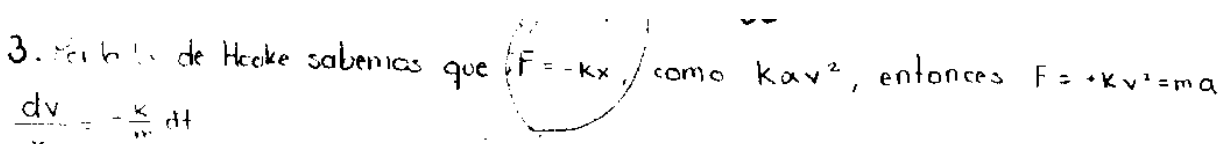


Ilustración 51. ED-M3 categoría argumento físico: Ley de Hooke

Ahora ilustraremos las categorías referentes a los tratamientos que se desarrollaron en las respuestas. Comenzaremos con la respuesta de ED-M1, quien al igual que 7 estudiantes más **eliminó** las **constantes físicas** a través del tratamiento algebraico:

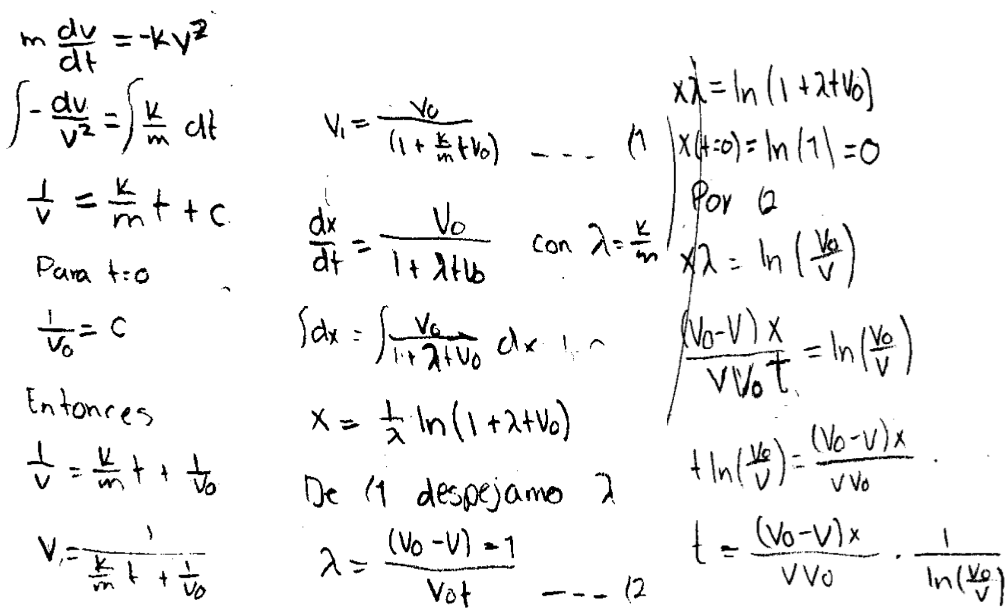


Ilustración 52. ED-M1 categoría tratamiento algebraico: constantes físicas

Dentro de la categoría del tratamiento **algebraico** se encuentran dos errores, el primero de ellos tiene que ver con un inadecuado tratamiento algebraico, Ibarra y Eccius (2012) identifican este tipo de dificultades como errores con la interpretación y comprensión de la estructura de los términos:

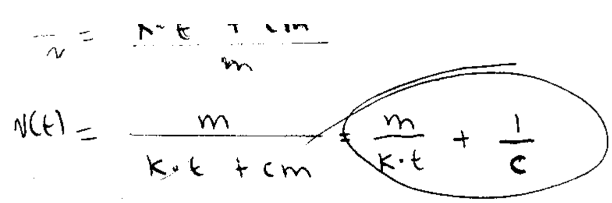


Ilustración 53. ED-H6 categoría tratamiento algebraico

Un error algebraico que se repitió dos veces en las respuestas, fue el integrar incorrectamente funciones como $\frac{1}{u}$ y e^{x}, como fue el caso del estudiante ED-H5:

$\int \frac{du}{u}$ en ambas partes, por lo tanto

$$\ln x = \ln|-x^2-4| + C$$

Ilustración 54. ED-H5 categoría tratamiento algebraico: integra incorrectamente

En cuanto al tratamiento **numérico** se trata del proceso de evaluación de las ecuaciones obtenidas después del tratamiento algebraico, en ella hubo 6 estudiantes que hicieron la sustitución correctamente, sin embargo hubo 5 casos en los cuales el inadecuado uso de la aritmética o simplemente la distracción propiciaron que el resultado no fuese el correcto. El siguiente caso es el de ED-H7 quien no convirtió las unidades del grosor de la tabla y usó cm en lugar de m:

$$t = \left(\frac{10}{\ln(2.5)}\right) \cdot \left(\frac{120}{16\,000}\right)$$

Ilustración 55. ED-H7 categoría tratamiento numérico: no convierte unidades

Sin embargo, debe hacerse la observación de que en Matemáticas la noción de "unidades" en el sentido de la Física, no es una propiedad intrínseca de la o las variables de una función; esto quiere decir que el contexto (matemático) en el cual se sitúa el ejercicio planteado puede representar un obstáculo en el tratamiento de las unidades, ya que estas no son inherentes a él. También ED-M2 cometió un error en el tratamiento numérico, pero en este caso la conversión de unidades no fue la causante sino las operaciones aritméticas, ya que la ecuación final era correcta:

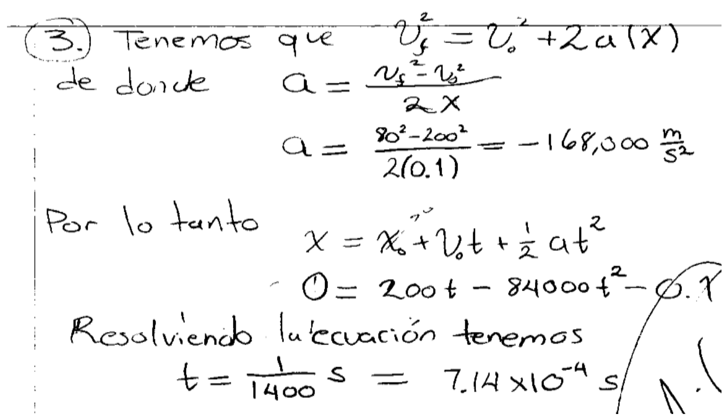
Sustituyendo (2) en (1)

$$t = -\frac{x}{\ln(v_1/v_0)}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right) = \frac{-0.1}{\ln\left(\frac{80}{200}\right)}\left(\frac{1}{80} - \frac{1}{200}\right)$$

$$t = 0.27275$$

Ilustración 56. ED-M2 categoría tratamiento numérico: aritmética incorrecta

Finalmente tenemos el caso del estudiante ED-H4 quien intentó resolver el problema usando únicamente ecuaciones de Física, pero al darse cuenta de que no utilizaba gran parte de los datos del problema, como la resistencia de la tabla y la relación con la velocidad del proyectil, decidió intentar resolverlo con ecuaciones diferenciales.


3.) Tenemos que $v_f^2 = v_0^2 + 2a(x)$

de donde $a = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2x}$

$a = \frac{80^2 - 200^2}{2(0.1)} = -168{,}000 \frac{m}{s^2}$

Por lo tanto $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$0 = 200t - 84000t^2$

Resolviendo la ecuación tenemos

$t = \frac{1}{1400} s = 7.14 \times 10^{-4} s$

Ilustración 57. ED-H4 categoría no usa ecuaciones diferenciales

4.4 Cálculo III

4.4.1 Dibujo de curvas

En el tercer semestre de licenciatura a través de la asignatura de Cálculo III los estudiantes tienen un acercamiento directo al cambio de representación de manera explícita. En esta sección abordaremos el análisis a las respuestas que se proporcionaron al siguiente ejercicio:

"Obtenga las gráficas de las funciones:

a) $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 6$

b) $f(x,y) = \frac{2}{9-x^2-y^2}$"

Para elaborar la red sistémica correspondiente a ésta pregunta se tomaron en cuenta si en las respuestas se llegaba a un dibujo o no.

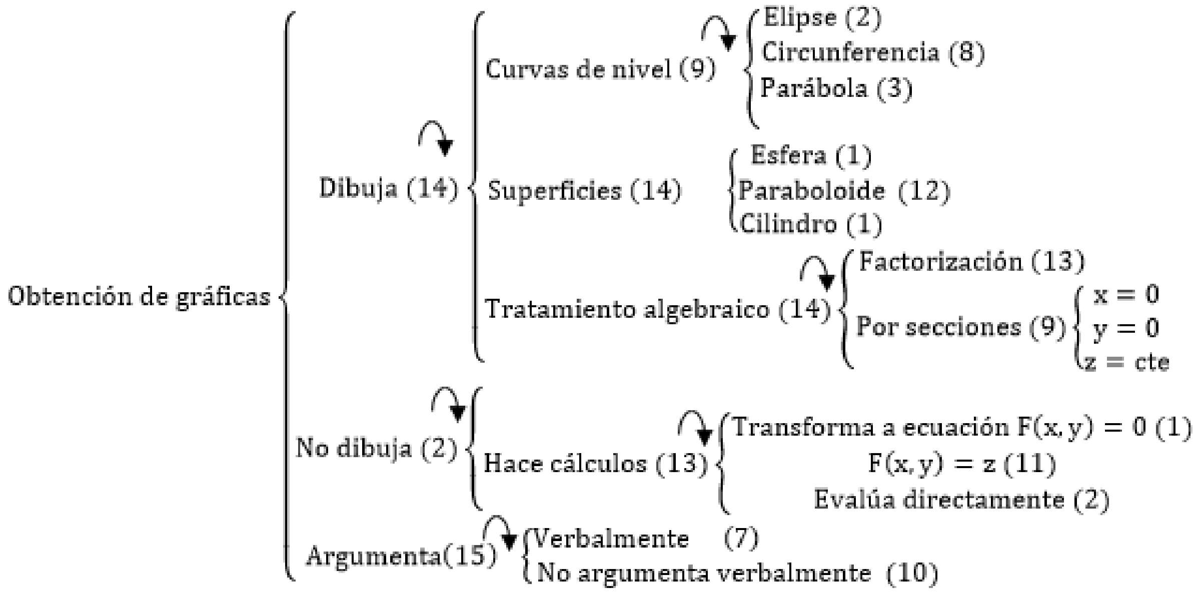


Figura 4.4.1. Red sistémica – Obtención de gráficas

Un caso es el de quienes llegaron a un **dibujo**, en él se identificaron tres fases: **curvas de nivel, función evaluada** y la **superficie dibujada**, otro fue el de quienes **no dibujaron** y por último el de quienes **argumentaron** el tratamiento desarrollado en su respuesta.

De acuerdo a López y Sosa (2008), el cambio de representación de funciones representa en sí mismo una dificultad para los estudiantes; la conversión entre la representación algebraica y la representación gráfica no requiere sólo de un proceso algorítmico sino que incluye también la capacidad de visualización lo cual, en Matemáticas de acuerdo a Duval (1999) requiere de un salto cognitivo. Veamos el caso de CIII-M2, quien a través de la combinación del **tratamiento algebraico** y el tratamiento numérico obtiene como curvas de nivel **elipses y parábolas**, las cuales lo ayudaron a convertir el registro algebraico en un registro gráfico de dimensión 3, el **paraboloide.**

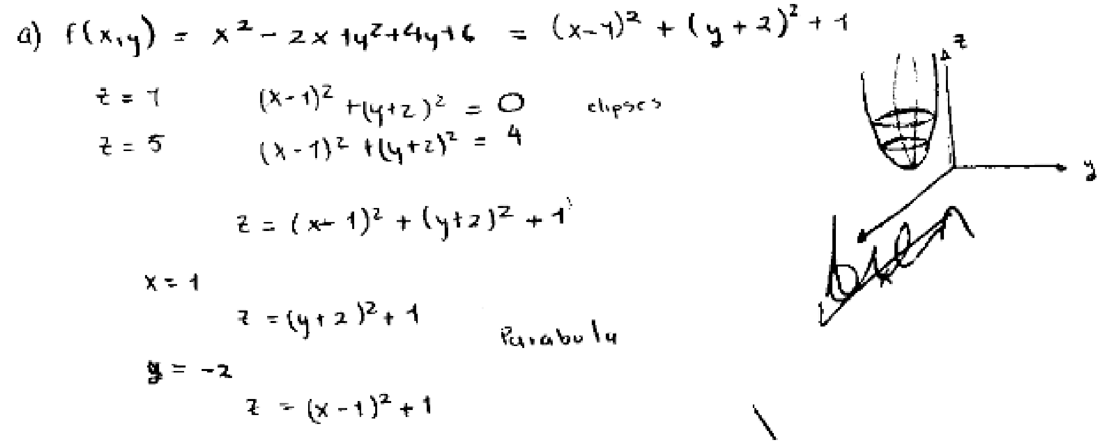
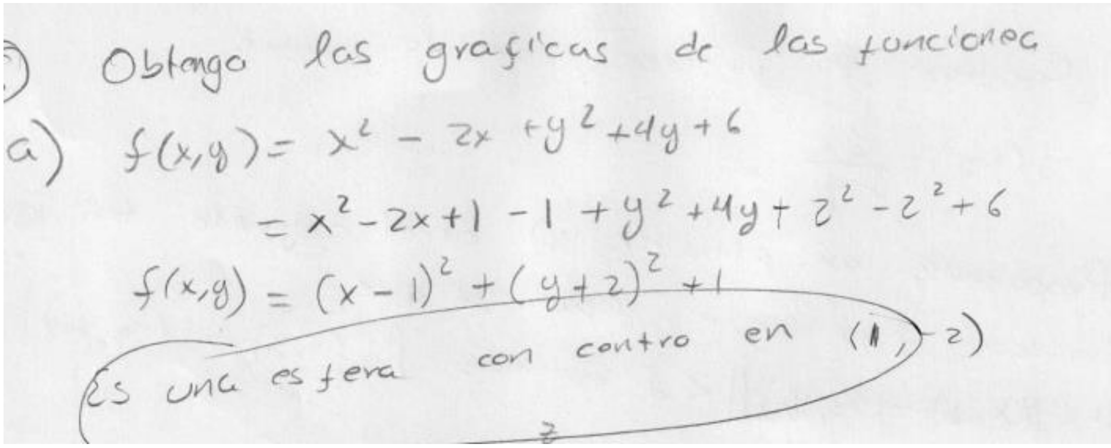


Ilustración 58. CIII-M2 categoría dibuja: curvas de nivel, superficie, tratamiento algebraico

Es por eso que esta respuesta es representativa de la categoría **dibuja** intersección **Argumenta: No verbalmente**. No obstante, nos interesa identificar las dificultades que los estudiantes presentaron al resolver el ejercicio planteado.

Una de las dificultades, dentro de la categoría **dibuja** es la que presenta el estudiante CIII-I11, ya que al aplicar un **tratamiento algebraico** mediante un proceso de **factorización**, obtiene una expresión algebraica muy similar a la ecuación de la esfera ($x^2 + y^2 + z^2 = r^2$), pero que en realidad no lo es. Podríamos pensar que la semejanza entre los términos logró convencerlo de que la expresión que halló fue la de una esfera con centro en el punto (1,-2), lo cual es incorrecto pues el vector que representa el centro debería ser de la forma (a, b, c).


) Obtengo las gráficas de las funciones

a) $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 6$

$= x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 4y + 2^2 - 2^2 + 6$

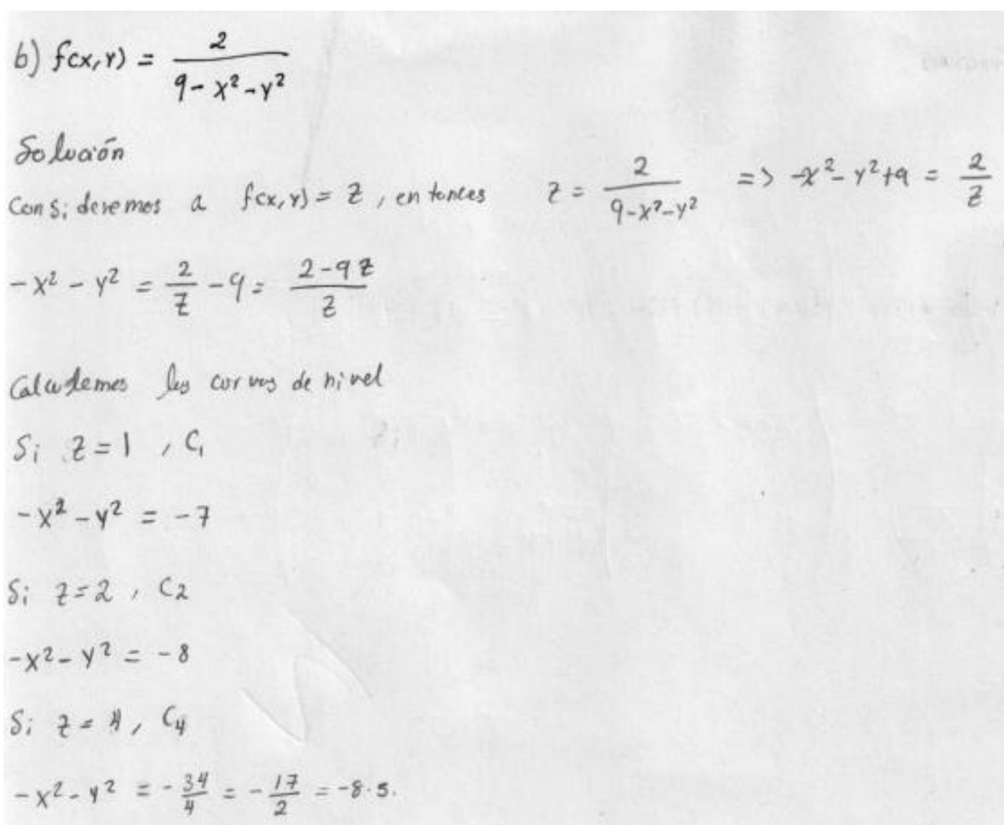
$f(x,y) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + 1$

Es una esfera con centro en $(1, -2)$

z

Ilustración 59. CIII-I11 categoría dibuja: esfera

Por otra parte, se tiene el caso de CIII-I2 quien a pesar de haber representado exitosamente el paraboloide del inciso a), no logró graficar el segundo inciso:


b) $f(x,y) = \frac{2}{9-x^2-y^2}$

Solución

Consideremos a $f(x,y) = z$, entonces $z = \frac{2}{9-x^2-y^2} \Rightarrow -x^2-y^2+9 = \frac{2}{z}$

$-x^2 - y^2 = \frac{2}{z} - 9 = \frac{2-9z}{z}$

Calculemos las curvas de nivel

Si $z = 1$, C_1

$-x^2 - y^2 = -7$

Si $z = 2$, C_2

$-x^2 - y^2 = -8$

Si $z = 4$, C_4

$-x^2 - y^2 = -\frac{34}{4} = -\frac{17}{2} = -8.5$

Ilustración 60. CIII-I2 categoría no dibuja: evalúa directamente

De hecho la segunda función (racional) sólo pudo ser representada por sólo 2 de los 19 estudiantes a los que se les aplicó el ejercicio.

La habilidad de visualizar objetos matemáticos es de suma importancia en el aprendizaje de la Matemática; es fácil desarrollar esta habilidad en nociones del campo de la Física o la biología ya que las representaciones pueden ser obtenidas de la realidad exterior, sin embargo, Duval (1999) sostiene que en el caso de la Matemática, las representaciones no tienen un referente en nuestra realidad externa.

Para finalizar, el caso de CIII-I9:

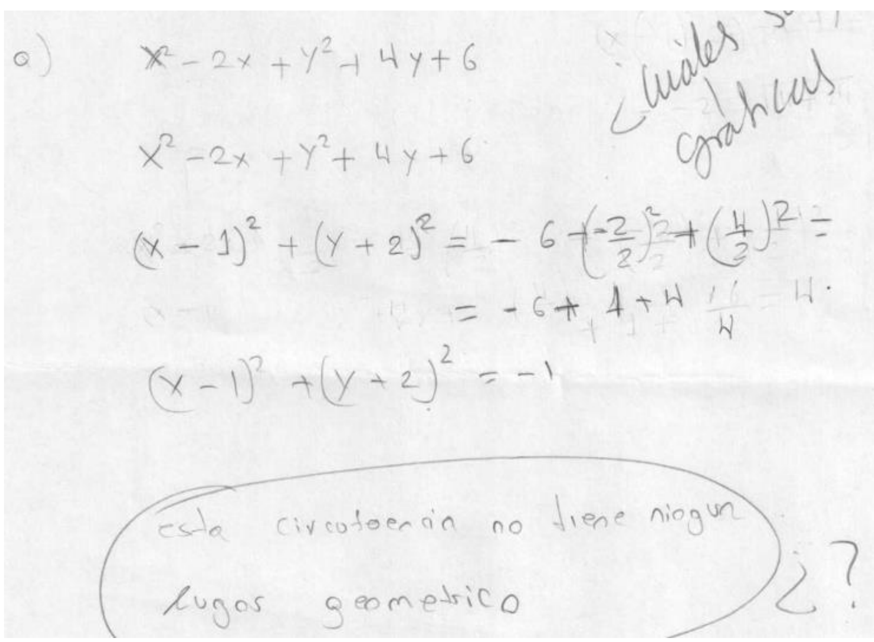


Ilustración 61. CIII-I9 categoría no dibuja: transforma f en ecuación

Como ya se ha mencionado en secciones anteriores, uno de los obstáculos más comunes en la Matemática es confundir un objeto con su representación; la ecuación es una de las diferentes representaciones que tiene la función. D'Amore (2004) menciona que los estudiantes suelen dar tratamientos algebraicos en lugar de tratamientos funcionales; la respuesta de CIII-I9 es un ejemplo de ello ya que al igualar la función con cero, convirtió la función en ecuación y le dio un tratamiento algebraico, razón por la cual su resultado fue funcionalmente difícil de interpretar.

4.5 Álgebra IV

La asignatura de Álgebra IV es una de las que presenta mayor grado de abstracción en los primeros semestres de la Licenciatura en Física y Matemáticas en ella abunda el uso formal de la Matemática a través de las representaciones algebraicas y analíticas. Para el análisis de los datos se construyeron dos redes sistémicas, una para cada ejercicio:

4.5.1 Particiones:

"Sean X, Y dos conjuntos no vacíos y $f: X \to Y$ una función suprayectiva. Demuestre que $S \coloneqq \{f^{-1}(\{y\}) | y \in Y\}$ es una partición de X"

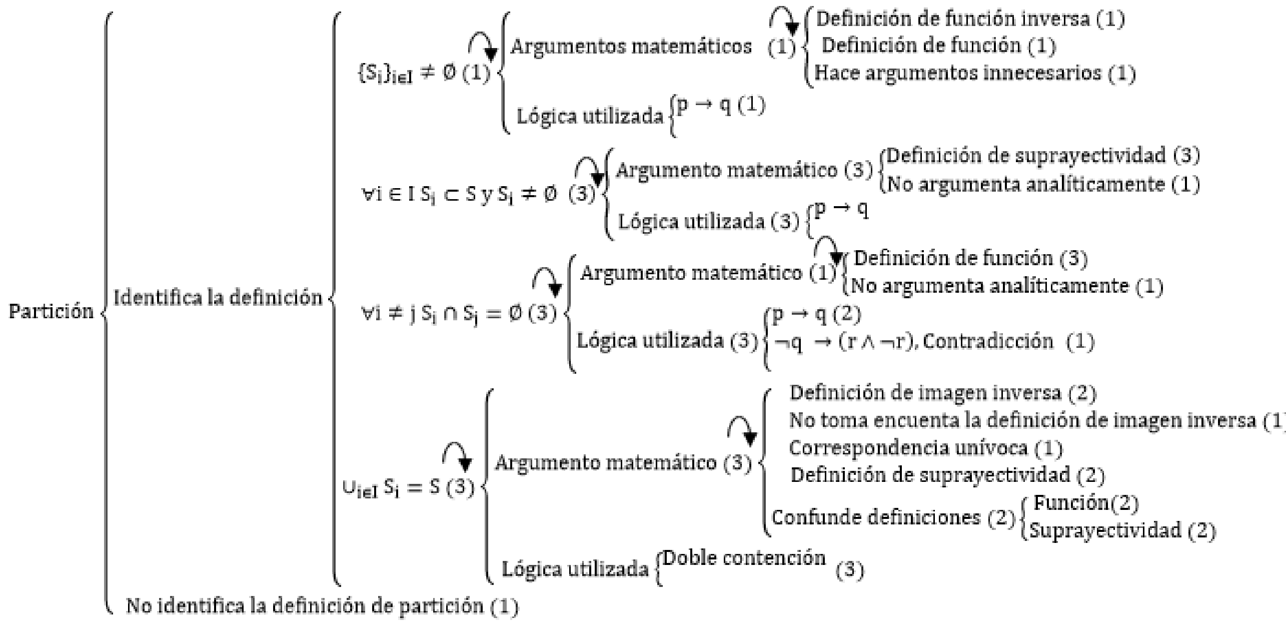


Figura 4.5.1. Red sistémica - Particiones

En este ejercicio se requiere la demostración de una noción algebraica (la de partición) a partir del uso de propiedades del objeto matemático función como la suprayectividad, inversa de una función, definición analítica de función y otras propiedades de la lógica formal de la matemática. Debido a que la noción de partición exige el cumplimiento de cuatro características las cuales sirvieron como categorías de análisis ya que para demostrar cada una de ellas se necesita usar propiedades específicas de la función.

En la primera categoría se encuentran las respuestas de los estudiantes AIV-H1 y AIV-H3.

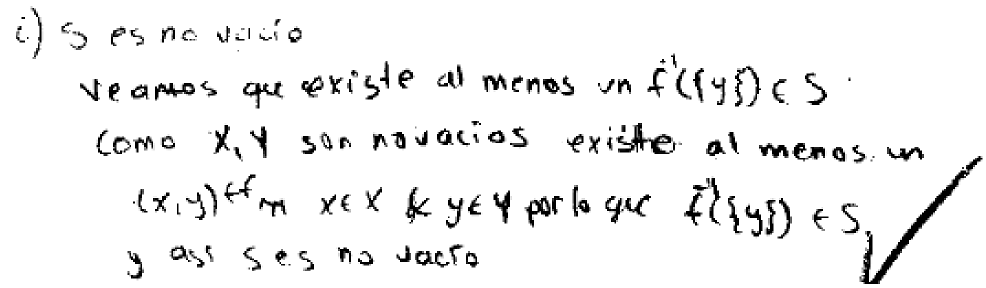

i) S es no vacío
Veamos que existe al menos un $f^{-1}(\{y\}) \in S$.
Como X, Y son novacios existe al menos un
$(x,y) \in f$ m $x \in X$ & $y \in Y$ por lo que $f^{-1}\{\{y\}\} \in S$,
y así S es no vacío

Ilustración 62. AIV-H1 categoría $\{S_i\}_{i\in I} \neq \emptyset$: función inversa

El tratamiento que fue utilizado en esta parte de la respuesta hace referencia a la definición de función inversa aunque el estudiante no lo mencione explícitamente, aquí el tratamiento fue analítico pero no fue argumentado. El caso de AIV-H3 muestra evidencia de una dificultad en el proceso de argumentación ya que para el estudiante la expresión *f(x)* = y garantiza la existencia de la función inversa en dicho punto lo cual no puede asegurarse debido a que x fue considerado de manera arbitraria.

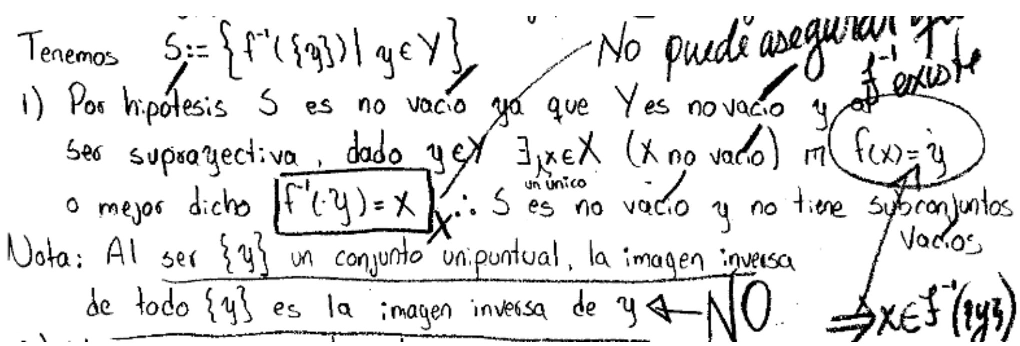

Tenemos $S := \{f^{-1}(\{y\}) \mid y \in Y\}$
No puede asegurar que f^{-1} existe
1) Por hipótesis S es no vacío ya que Y es no vacío y al
ser suprayectiva, dado $y \in Y$ $\exists_1 x \in X$ (X no vacío) m $f(x)=y$
o mejor dicho $\boxed{f^{-1}(y)=X}$ ∴ S (un único) es no vacío y no tiene subconjuntos vacíos
Nota: Al ser $\{y\}$ un conjunto unipuntual, la imagen inversa
de todo $\{y\}$ es la imagen inversa de y ← NO
$\Rightarrow x \in f^{-1}(\{y\})$

Ilustración 63. AIV-H3 categoría hace argumentos innecesarios

Esta respuesta muestra el uso de **argumentos innecesarios** para la demostración (nota al pie de del procedimiento).

Ahora continuaremos con el análisis de la segunda categoría principal, que el conjunto S esté formado por subconjuntos no vacíos. La lógica utilizada en todos los casos fue de la forma $p \rightarrow q$ y aquí mostraremos dos casos representativos el de AIV-H2 y el de AIV-H3.

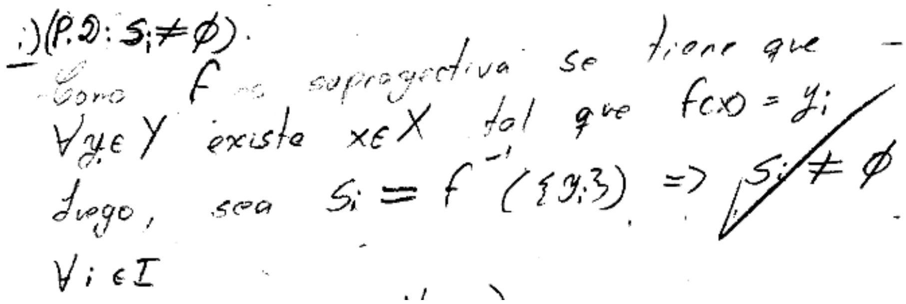

i) (P.D: $S_i \neq \emptyset$).
Como f es supreyectiva se tiene que
$\forall y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y_i$
luego, sea $S_i = f^{-1}(\{y_i\}) \Rightarrow S_i \neq \emptyset$
$\forall i \in I$

Ilustración 64. AIV-H2 categoría segunda propiedad: suprayectividad

El estudiante AIV-H2 procede utilizando la suprayectividad de la función de manera explícita para garantizar la existencia de elementos en cada subconjunto de S, mientras que el estudiante AIV-H3 sigue esta propiedad de la primera, véase Ilustración 63.

Con respecto a la tercera categoría **Todos los subconjuntos de S son disjuntos a pares** analizaremos dos casos de acuerdo a la lógica utilizada en la demostración. El primer caso (AIV-H1) es el de la demostración directa, es decir, de la forma $p \to q$:

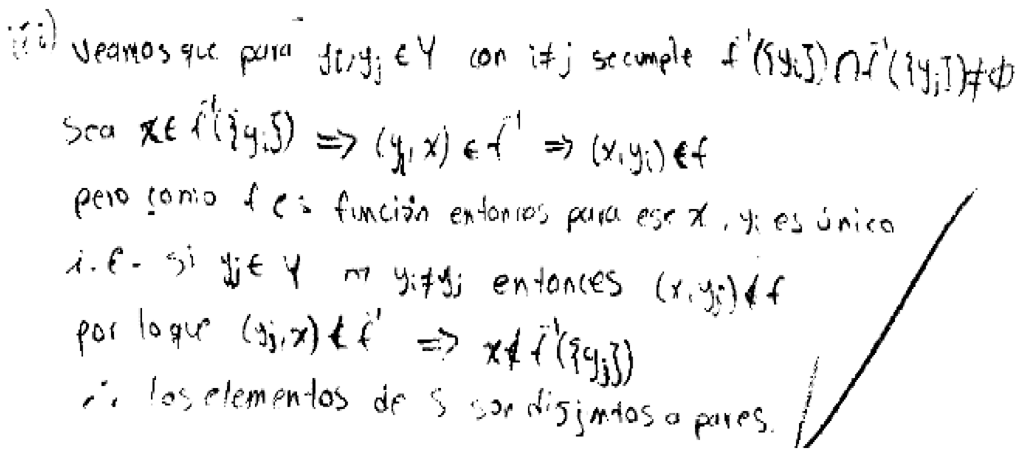
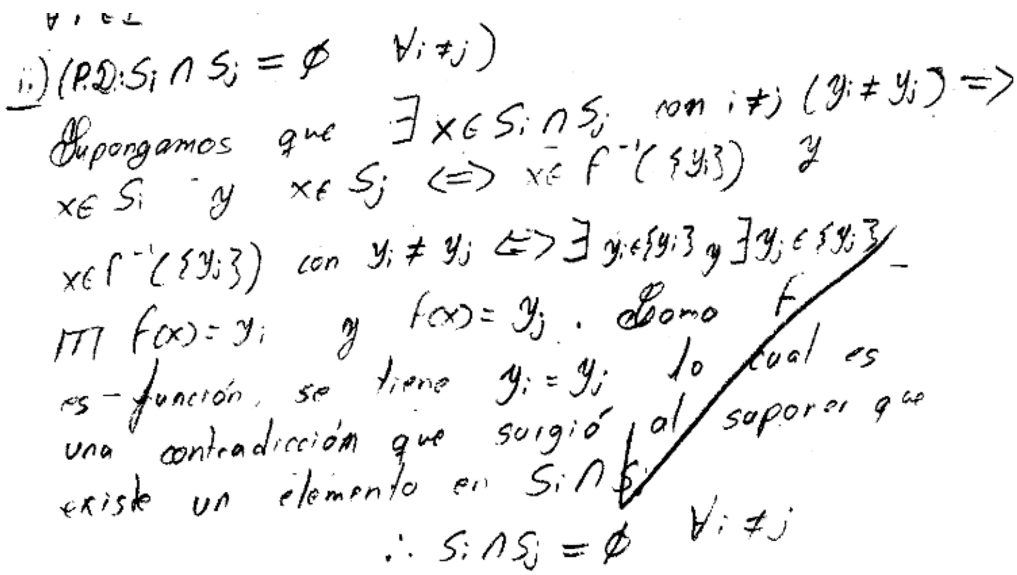

iii) Veamos que para $y_i, y_j \in Y$ con $i \neq j$ se cumple $f^{-1}(\{y_i\}) \cap f^{-1}(\{y_j\}) \neq \emptyset$
Sea $x \in f^{-1}(\{y_i\}) \Rightarrow (y_i, x) \in f^{-1} \Rightarrow (x, y_i) \in f$
pero como f es función entonces para ese x, y_i es único
i.e. si $y_j \in Y$ y $y_i \neq y_j$ entonces $(x, y_j) \notin f$
por lo que $(y_j, x) \notin f^{-1} \Rightarrow x \notin f^{-1}(\{y_j\})$
$\therefore$ los elementos de S son disjuntos a pares.

Ilustración 65. AIV-H1 tercera propiedad: $p \to q$ y definición de función

En esta respuesta se hizo presente el uso de la definición analítica de función en donde la propiedad de correspondencia unívoca fue crucial para argumentar el tratamiento algebraico.

El segundo caso es el de AIV-H2, quien utilizó la **contradicción** como instrumento lógico para demostrar la propiedad requerida:



ii) (P.D: $S_i \cap S_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$)
Supongamos que $\exists x \in S_i \cap S_j$ con $i \neq j$ $(y_i \neq y_j) \Rightarrow$
$x \in S_i$ y $x \in S_j \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\{y_i\})$ y
$x \in f^{-1}(\{y_j\})$ con $y_i \neq y_j \Leftrightarrow \exists y_i \in \{y_i\}$ y $\exists y_j \in \{y_j\}$
m $f(x) = y_i$ y $f(x) = y_j$. Como f es función, se tiene $y_i = y_j$ lo cual es una contradicción que surgió al suponer que existe un elemento en $S_i \cap S_j$
$\therefore S_i \cap S_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

Ilustración 66. AIV-H2 tercera propiedad: contradicción

El procedimiento comenzó suponiendo que la intersección de dos subconjuntos cualesquiera es distinta del vacío y a través del tratamiento de la representación algebraica del conjunto se llegó a una **contradicción** a la propiedad de correspondencia unívoca de la función.

Existe un tercer caso, el de AIV-H3 quien confundió la definición analítica de **función** con la propiedad de **suprayectividad**. Vergnaud (1990) hace referencia a la inercia que suele tenerse respecto a las estructuras conceptuales, no sólo se trata de saber hacer conversiones entre representaciones sino de que las estructuras relacionadas con ellas sean claras y precisas.

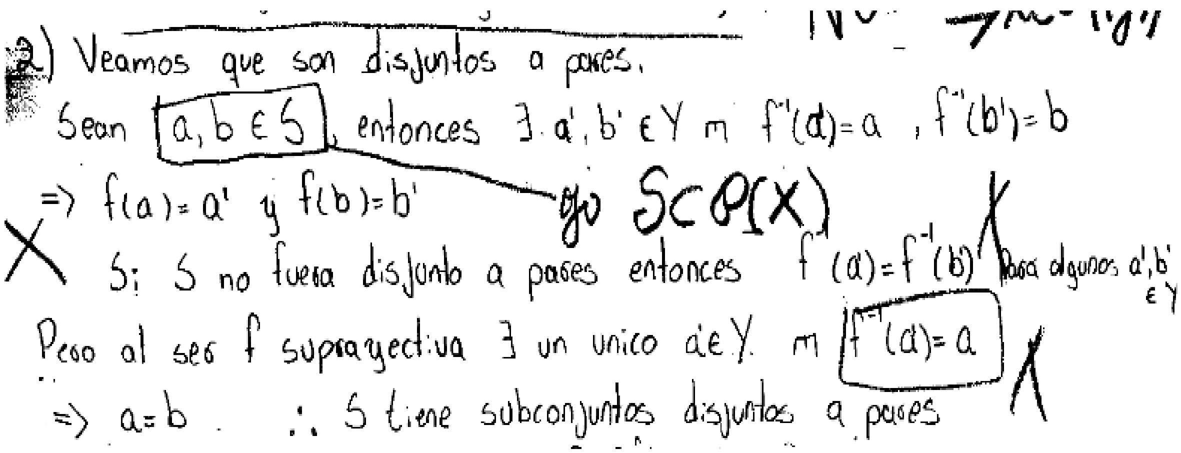


Ilustración 67. AIV-H3 tercera propiedad: argumento matemático

Finalmente, en la cuarta categoría todos los casos analizados optaron por demostrar por **doble contención** que “la unión de todos los subconjuntos de S es igual a S”. Para ilustrar esta categoría y la dificultad que se presentó en ella, usaremos el caso de AIV-H2:

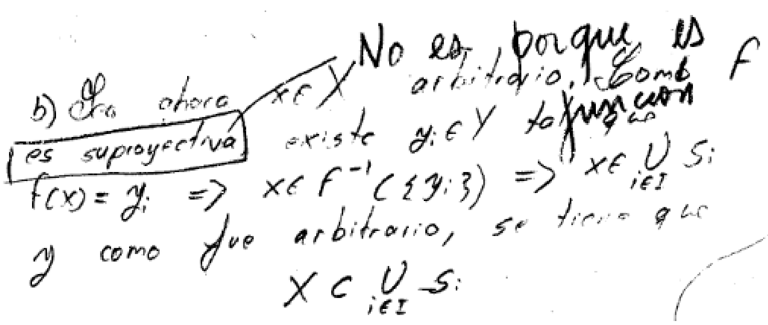


Ilustración 68. AIV-H2 cuarta propiedad: confunde definiciones

La dificultad de diferenciar las definiciones función y suprayectividad de una función se hizo evidente en esta respuesta pues permaneció el uso indistinto de ellas. De acuerdo con las definiciones de función y suprayectividad:

> *"Una función F es un conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tienen el mismo primer elemento. Esto es, si (x, y) pertenece a F y (x, z) pertenece a F, entonces y = z". (Apostol, 1979)*
>
> *"Una función f entre los conjuntos A y B se dice que es suprayectiva, sobreyectiva o exhaustiva, cuando cada elemento de B es imagen de, al menos, un elemento de A. Es decir, f: A → B es suprayectiva $\Longleftrightarrow \forall b \in B$, $\exists a \in A$ tal que f(a) = b En otras palabras, f es sobreyectiva si la imagen de f es todo el conjunto B, es decir si Img (f) = B." (González, 2004)*

Las cuales se encuentran bajo el registro semiótico del álgebra y el análisis matemático, las representaciones pueden ser muy similares de ahí que los estudiantes al intentar memorizarlas muestren dificultades para diferenciarlas.

4.5.2 Imágenes de funciones:

> *"Sea $f: X \to Y$ una función inyectiva y $A, B \subset X$, demuestre que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$"*

Debido a la naturaleza de las respuestas, se consideró conveniente usar como categorías de análisis para la red sistémica tres nociones: la lógica utilizada para demostrar el enunciado (que fue la misma en todos los casos), el tipo de argumentación dada y la notación con la cual el estudiante construyó el registro semiótico.

- $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
  - Tratamiento (4)
    - Lógico – proposicional(4)
      - $y \in f(A \cap B) \rightarrow y \in f(A) \cap f(B)$ (4)
      - $y \in f(A) \cap f(B) \rightarrow y \in f(A \cap B)$
    - Analítico (4)
      - Uso de la hipótesis (4)
      - f inyectiva (4)
  - Notación (4)
    - Simbólica (4)
      - Uso de $f_{(A \cap B)} \equiv f(A \cap B)$ (1)
      - Uso de $\subset \equiv \subseteq$ (2)
      - $\rightarrow$, $\in$, $\exists$, $\therefore$, $\subset$ (4)
    - Verbal (4)
      - existe
      - además
      - lo cual implica que
      - veamos
      - por lo tanto

Figura 4.5.2. Red sistémica – Operaciones: Imágenes de funciones

Comenzaremos ilustrando la categoría de la argumentación utilizada a través de la respuesta del estudiante AIV-H3:

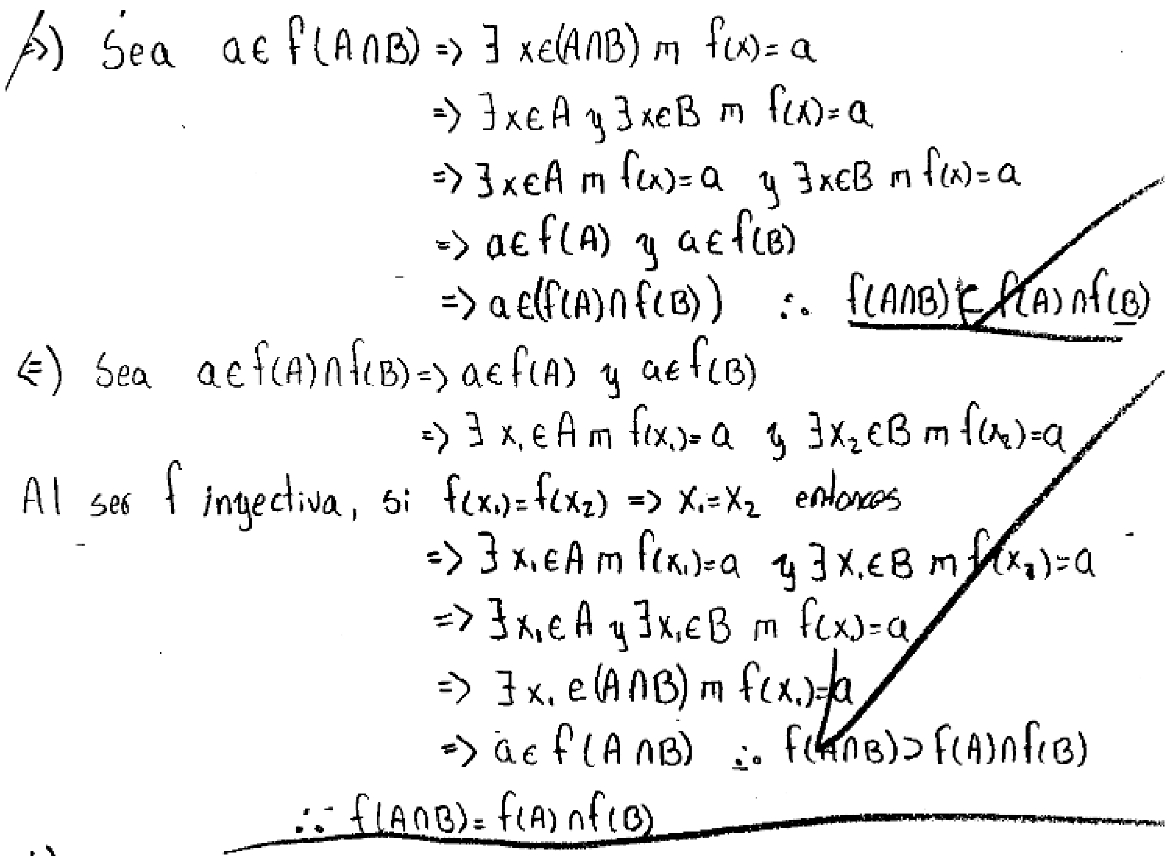


Ilustración 69. AIV-H3 categoría tratamiento: lógico-proposicional

El tratamiento que desarrolla el estudiante en esta respuesta es algebraico, y la notación es estrictamente simbólica salvo por el argumento matemático en el cual utiliza la hipótesis de que la función es inyectiva.

Otro caso que debe mostrarse es el de AIV-H4, ya que en su respuesta hace uso de una notación distinta a la que plantea el ejercicio sin aclarar previamente cómo debía ser interpretada por el lector:

Dem:

$A\cap B\subset Y$

En primer lugar, notemos que $A\cap B\subset X$, por lo que $f_{(A\cap B)}\subset Y$, mientras que $f_{(A)}, f_{(B)}\subset Y$, por lo que $f_{(A)}\cap f_{(B)}\subset Y$, por lo que se cumple la definición de $f: X\longrightarrow Y$

Sea $x\in A\cap B\subset X$. Entonces $x\in A\subset X$ y $x\in B\subset X$. En general, $x\in X$

Aplicando la definición de función, existe un único y t.q. $f_{(x)}=y$. Pero también, dado que $x\in A$ y x ... $f_{(x)}\in f_{(A)}$ y $f_{(x)}\in f_{(B)} \Rightarrow f_{(x)}\in f_{(A)}\cap f_{(B)}$.

Como para $x\in A\cap B$ arbitrario se cumple $f_{(x)}\in f_{(A)}\cap f_{(B)}$, se puede afirmar que $f_{(A\cap B)}\subseteq f_{(A)}\cap f_{(B)}$

Sea $y\in f_{(A)}\cap f_{(B)}$. Entonces $y\in f_{(A)}$ y $y\in f_{(B)} \Rightarrow \exists x_1\in A$ t.q. $f_{(x_1)}=y$; $\exists x_2\in B$ t.q. $f_{(x_2)}=y \Rightarrow f_{(x_1)}=f_{(x_2)}$

Tomando la hipótesis de f inyectiva, se concluye que $x_1=x_2$ (Elemento que en adelante se denominará x, por comodidad). Entonces existe un único x tanto en A como en B t.q. $f_{(x)}=y$

Es decir, $\exists! \, x\in(A\cap B)$ t.q. $f_{(x)}=y$.

Como para $y\in f_{(A)}\cap f_{(B)}$ arbitrario se encontró un único $x\in A\cap B$ t.q. $f_{(x)}=y\in f_{(A)}\cap f_{(B)}$, se puede afirmar $f_{(A)}\cap f_{(B)}\subseteq f_{(A\cap B)}$

De ambas contenciones podemos concluir que $f_{(A)}\cap f_{(B)}=f_{(A\cap B)}$, Q.E.D.

Ilustración 70. AIV-H4 categoría notación: simbólica

La simbología con la cual representa la imagen de los conjuntos A *y* B bajo f no coincide con la notación propuesta en el planteamiento del ejercicio. Además al hacer la demostración maneja los símbolos $\subset$ *y* $\subseteq$ como equivalentes; aunque $\subset$ excluye la posibilidad del caso en que los conjuntos sean iguales, cuando el estudiante utiliza la expresión $f_{(A\cap B)} \subseteq f_{(A)} \cap f_{(B)}$ indica que está considerando como verdadero lo que en realidad desea demostrar. Es posible que el estudiante no se haya percatado de este detalle, sin embargo, esto nos da evidencia de la importancia que tiene el esclarecer el significado de los símbolos usados en la Matemática para así operarlos con la misma naturalidad con la que nos expresamos de manera escrita.

Para analizar la diversidad que ofrecen las respuestas, retomemos a Giménez (1994) quien menciona que en matemática, especialmente en la Matemática Abstracta (como es el caso de álgebra IV) el lenguaje depende de variables sintácticas como las palabras: implica que, note, veamos entre otras, las expresiones, relaciones, secuencias y los problemas de desarrollo conceptual, como es el caso de la notación.

CAPÍTULO 5

5.1 Discusión

En el capítulo anterior hemos abordado las respuestas de los estudiantes a partir de **redes sistémicas** las cuales han sido de utilidad en la interpretación de los tratamientos que dan los estudiantes a los planteamientos propuestos en cada curso. A lo largo del análisis de resultados se pudieron identificar diversas dificultades, sin embargo no todas ellas tienen relación directa con el objeto matemático que ha sido de interés en esta investigación, es por ello que dedicaremos esta sección a discutir las dificultades que tienen relación con la noción de función. Las categorías principales que se utilizaron en esta sección fueron construidas con base en nociones de didáctica de las ciencias, en particular la teoría de **cambio de representación de Duval** y de los **campos conceptuales de Vergnaud**. En cada subcategoría se identifica el número de casos que presentaron dicha dificultad y el subíndice hace referencia al curso al cual pertenece:

- Dificultades: uso de funciones
  - Conceptualización (15)
    - Confundir el objeto con su representación $(8)_{CI}$
    - Basta con que una expresión sea de la forma $y = f(x)$ para que sea función $(1)_{CI}$
    - Confundir la definición de función con la de suprayectividad $(2)_{AIV}$
    - Entender $h \circ f$ como producto de funciones $(9)_{CI}$
  - Tratamiento (8)
    - Operar como ecuación la función, $f(x, y) = 0$ $(1)_{CIII}$
    - Usar $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ sin considerar el caso $h(x) = 0$ $(3)_{CI}$
    - No tomar en cuenta la naturaleza del dominio de la función $\dfrac{1}{x}$ $(2)_{ED}$
    - Escribir f en función de x e y, pero grafica en el plano cartesiano $(1)_{ED}^{1}$
    - Uso indistinto de los símbolos $\subset$ y $\subseteq$ $(2)_{AIV}^{1}$
  - Conversión (8)
    - El campo de direcciones no coincide con las tablas $(3)_{ED}$
    - La curva solución no coincide con el campo de pendientes $(3)_{ED}$
    - No visuaizar geométricamente una expresión algebraica $(2)_{CIII}$

1. Se piensa que el error tiene que ver con la notación pero no se encontró evidencia de ello. (Importancia de explicar el significado de los símbolos en matemáticas)

Figura 5. Red sistémica – Dificultades: uso de funciones

Por otra parte tenemos el caso del estudiante CI-H10 de Cálculo I quien para responder a la pregunta ¿es una circunferencia, la gráfica de una función? hizo un tratamiento algebraico de la ecuación de la circunferencia hasta obtener una expresión de la forma $y = f(x)$, lo cual bastó para que considerara a la circunferencia como una función, respecto a esto Cuevas y Delgado (2015) mencionan que *"…la disposición de unas reglas algebraicas conocidas hace invisible el concepto de operación de funciones"* lo cual nos indica que el álgebra representa un obstáculo en la comprensión de los objetos matemáticos de carácter operativo y funcional como lo es el concepto de función, una de posible causa de esto es el hecho de que comúnmente en los cursos de cálculo predomina el uso de la representación algebraica de los objetos matemáticos, esto se ve reflejado por ejemplo, en las respuestas que los estudiantes del curso de Ecuaciones Diferenciales proporcionan respecto a la solución de una situación a través del campo de pendientes pues aunque en el planteamiento del problema se pida explícitamente **dibujar la curva,** 4 de los 15 estudiantes cuyos exámenes fueron revisados decidieron comenzar por un tratamiento algebraico, factor integrante.

En el curso de Álgebra IV la dificultad en la conceptualización se manifiesta en la confusión de las definiciones formales de **función y suprayectividad**; como ya se comentó en el capítulo anterior la sintaxis en cada definición es muy similar, de ahí que si el estudiante se enfoca en memorizarlas al utilizarlas sea más susceptible de cometer un error. Por último 9 de los 26 estudiantes de Cálculo I entendieron la expresión $h \circ f$ como el producto de funciones, lo cual evidenció la ausencia de significado a la operación composición.

Las dos categorías de análisis restantes; **tratamiento y conversión,** están relacionadas con los registros semióticos de representación de los objetos matemáticos en el sentido de Duval (1999). Un ejemplo de tratamiento es la factorización la cual se enmarca en el registro semiótico del álgebra; en esta categoría se reconoció una dificultad vinculada con la categoría de **conceptualización** y fue la de **operar como ecuación la función**; en el curso de Cálculo III para la obtención de gráficas el estudiante CIII-I11 igualó la función a 0 convirtiéndola en una ecuación, por lo cual la conversión al registro gráfico fue difícil de interpretar. En el caso de los estudiantes de Cálculo I que entendieron la composición de funciones como producto, al hacer el tratamiento algebraico olvidaron considerar si el divisor sea 0, en cuyo caso la división quedaría indefinida.

Asimismo tenemos el caso de los estudiantes de Ecuaciones Diferenciales que **no tomaron en cuenta la naturaleza del dominio de la función** $\frac{1}{x}$, dificultad que no sólo está relacionada con el tratamiento algebraico del objeto sino también con las nociones de dominio y contradominio de una función, esto quiere decir que el estudiante no asocia oportunamente el carácter variacional de la variable x.

Las dos últimas dificultades clasificadas en la categoría de **tratamiento** fueron marcadas con un subíndice ya que, al observar los procedimientos de los estudiantes éstos resultaron ser correctos en cuanto a resultados, por ello este obstáculo se vincula con el uso inadecuado de la **notación,** pues al escribir inadecuadamente alguna de las representaciones del objeto, la interpretación de éste se torna difícil ya que no existe un registro en la memoria al cual asociar dicha notación.

Por último, la categoría de **conversión** dentro de la teoría de Duval hace referencia al cambio en el registro semiótico, por ejemplo pasar del álgebra a la gráfica. El cambio de representación constituye en sí mismo un salto cognitivo (Duval, 1990), ya que requiere del desarrollo del **tratamiento** en un registro semiótico, del conocimiento de los invariantes operatorios (en el sentido de Vergnaud) y por consiguiente del cambio de registro.

En el curso de Ecuaciones Diferenciales se presentaron dos dificultades, la primera corresponde a las respuestas en las que **el campo de direcciones no coincide con las tablas**, es decir, el cambio de representación del registro numérico (tablas) al registro gráfico (campo de pendientes). El uso del método de isoclinas es un ejemplo de cómo la conversión de registros semióticos requiere más que un conocimiento algorítmico, esto nos lleva a abordar la segunda dificultad que presentaron los estudiantes del curso de Ecuaciones Diferenciales en la que **la curva solución no coincide con el campo de pendientes,** Cordero (2000) citado por Morales y Hernández (2010) menciona que el método de aproximación por isoclinas o campo de direcciones requiere de una noción más compleja en el pensamiento matemático; la visualización. Duval (1999) sugiere que la visualización es una función cognitiva que requiere de un conocimiento claro de los objetos matemáticos, ésta se construye con la práctica y está estrechamente conectada con el modelo de la noción epistemológica de intuición en matemáticas. Esto nos lleva a la última dificultad, la que presentaron dos de los estudiantes de Cálculo III que **no visualizaron geométricamente una expresión algebraica**.

A través de esta discusión, se han podido identificar algunas de las funciones cognitivas que deben ser reforzadas a la luz de la didáctica de la ciencia en diferentes cursos de la licenciatura en Física y Matemáticas, dejando así al descubierto un largo camino de trabajo para investigaciones posteriores.

5.2 Conclusiones

A lo largo de esta investigación hemos podido identificar cómo los estudiantes de los cursos de Cálculo I, Análisis Vectorial, Ecuaciones Diferenciales, Cálculo III y Álgebra IV interpretan el objeto matemático función como: una ecuación, una gráfica, valores numéricos, regla de correspondencia y operación, en otras palabras, confunden el objeto con sus representaciones semióticas

Además las dificultades que presentaron los estudiantes al usar el concepto en las soluciones a sus exámenes de evaluación se enfrentaron a dificultades conceptuales como: la confusión del objeto matemático **función** con sus representaciones gráfica, numérica y algebraica; la ausencia de significado del dominio de una función al usarla de manera operativa en una situación distinta a la del concepto en sí mismo; así como dificultades procedimentales como: la priorización del álgebra al operar la función como ecuación; la conversión del registro algebraico al registro gráfico y la visualización de la representación gráfica de una función ante una situación de campo de pendientes.

En general se han podido identificar algunos de los inconvenientes a los que se enfrentan las y los estudiantes de la licenciatura en Física y Matemáticas ante la resolución de problemas en los cuales participa explícita o implícitamente el concepto de función, en los cuales los diferentes registros de representación semiótica funcionan como herramientas cognitivas y operativas para interpretar en el caso de la Física fenómenos como: la conducción de calor usando de la Ley de Fourier y el del movimiento de un proyectil al atravesar una tabla usando leyes de Newton; y en el caso de la Matemática, nociones como: curvas de nivel en el Cálculo, campos de direcciones en las Ecuaciones

Diferenciales, campos vectoriales en Análisis Vectorial, particiones e imágenes de funciones en Álgebra IV.

Sin embargo, después de identificar estos obstáculos se pudo reconocer que no todos ellos tienen su origen en la compresión del concepto formal de función, sino en los diferentes entornos en los que ella se significa dentro de la matemática, en términos de la teoría utilizada podríamos decir que son las variables sintácticas (lenguaje y representaciones de la matemática) y semánticas (estructuras conceptuales de la matemática) las que conflictúan el quehacer matemático de los estudiantes.

Así pues, se propone no dar por acabados los conceptos y los algoritmos de la matemática, pues éstos se resignifican y aprenden de forma continua a través de su uso. En particular el concepto de función, como hemos visto, se hace presente de manera transversal en la formación de los estudiantes de Física y Matemáticas y por ello su aprendizaje tiende a ser constante, resignificarse a través de las situaciones escolares y no escolares, pues si bien la Matemática que se trabaja en la licenciatura es avanzada y sumamente abstracta, su significación cobra sentido en los escenarios en los cuales se aplica.

Recomendaciones

Los resultados de esta investigación nos ayudan a visualizar futuras oportunidades en las que los objetos matemáticos se signifiquen a través del lenguaje de la Matemática y de su uso en otras disciplinas como la Física.

Así pues, investigar y generar situaciones didácticas que involucren objetos matemáticos en el plano conceptual y operativo es crucial en la generación de conocimiento científico innovador dentro y fuera de la Matemática. Por otra parte, un factor que es crucial para lo anterior lo conforman las investigaciones en curso respecto a la formación de la creatividad en la ciencia, en particular la Física y la Matemática, ya que la percepción (una de las vías de la formación de la creatividad) es un medio de utilidad para analizar la información relacionando el mundo exterior con el universo interno, lo cual está íntimamente relacionado con la formación de campos conceptuales relativos a los objetos matemáticos.

LISTA DE REFERENCIAS

Aguilar, S., Maturano, C., & Núñez, G. (2007). Utilización de imágenes para la detección de concepciones alternativas: Un estudio exploratorio con estudiantes universitarios. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias 6(3),* 691-713.

Apostol, T. (1978). Calculus. Vol 1. Editorial Reverté, S. A., 813 pp.

Bachelard, G. (1938). *La formación del espíritu científico: Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. 23ª Ed. Siglo XXI Editores, 302 pp.

Bartle, R. (1964). *The Elements of Real Analysis*. University of Illinois, 2nd Ed., 480 pp.

Bourbaki, N. (1970). *Théorie des ensembles.* Editorial Diffusion C.C.L.S., París Francia. 349 pp.

Camacho-Ríos, A. (2011). Socioepistemología y prácticas sociales: Hacia una enseñanza dinámica de cálculo diferencial. *Revista Iberoamericana de Educación Superior 2(3)*, 152-171.

Cancela, R., Cea, N., Galindo., G., & Valilla, S. (2010). *Metodología de la Investigación Educativa: Investigación ex post facto*. Universidad Autónoma de Madrid, 19 pp.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., & Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa Núm. Esp*, 83-102.

Climent, J. (2010). *Teoría de Conjuntos.* Mathematics Subject Classification, 243 pp.

Crespo, C., Homilka, L., & Lestón, P. (2011). Acerca del lenguaje utilizado en el discurso matemático escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 729-737 pp.

Criberio, J., Madrid, H., & Fraga, J. L. (2013). ¿Relación, función ó ecuación? *El Cálculo y su Enseñanza 5*, 41-56.

Cuevas, C. A., & Delgado, M. (2015). ¿Por qué el concepto de función genera dificultad en el estudiante? *Revista de Cálculo 7*, 108-119.

Cuevas, C. A., & Díaz, J. L. (2013). La historia de la matemática un factor imprescindible en la elaboración de una propuesta didáctica: El caso del concepto de función. *El Cálculo y su Enseñanza 5*, 165-179.

Díaz, H. (2009). El lenguaje verbal como instrumento matemático. *Educación y Educadores 12(3)*, 14-31.

Díaz, J. L. (2009). Los estudiantes de Cálculo a través de los errores algebraicos. *El Cálculo y su Enseñanza 1* (pp. 91-97).

Díaz, J. L. (2013). El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. *El Cálculo y su Enseñanza 4* (pp. 13-25).

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* (pp. 37-65).

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Congnitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-26).

Duval, R. (2000). Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva? *Educación Matemática 12(2)* 149-151.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME 9* (pp. 143-168).

Eccius, C., & Ibarra, K. (2012). *Temas y errores comunes que han provocado baja en el desempeño matemático de los alumnos de primer ingreso a la Universidad.* Premio FIMPES, Primer Lugar en Ivestigación 2012. FIMPES, Federación de Instituciones Mexicanas Particulares de Educación Superior.

Escuela Superior de Física y Matemáticas. (2010). *ESFM, Conócenos 2010.* [CD-ROM]. CDMX, Sin Editar.

Farfán, R. M., & García, M. (2005). El concepto de función: Un breve recorrido epistemológico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 489-494 pp.

Giménez, J. (1994). Lenguaje verbal y matemáticas: separación sin relaciones. Estado de la investigación. *I Seminario Nacional sobre Lenguaje y Matemáticas* (pp. 54-67).

Gómez-Granell, C. (1989). La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y el significado. *Comunicación, Lenguaje y Educación 3-4,* 5-15.

González, F. J. (2004). *Apuntes de Matemática Discreta: 9. Funciones.* Universidad de Cádiz, 225-264 pp.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 1(1),* 5-21.

Haaser, N., La Salle, J. y Sullivan, J. (1993). *Análisis Matemático: Curso de Introducción.* Vol. 1 Editorial TRILLAS. 808 pp.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. 5ª Ed. McGraw Hill, México, 614 pp.

Ímaz, C., & Moreno, L. (2009). Sobre el desarrollo del Cálculo y su enseñanza. *Revista El Cálculo y su Enseñanza,* 99-112 pp.

Kleiner, I. (1989). Evolution if the Function Concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal, 20(4),* 282-300 pp.

López, J., & Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21,* 308-318.

Marsden, J., & Tromba, A. (1991). *Cálculo Vectorial.* Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, 679 pp.

Miguel, M., & Simón, M. G. (2009). Estudio de la función y sus derivadas sucesivas en la Licenciatura en Física y Matemáticas de ESFM-IPN, con base en el pensamiento y lenguaje variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22* (pp. 645-653).

Montecino, A., & Cantoral, R. (2013). F y *f(x)*: *f(x)* determina a f y a su vez la obstaculiza. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26,* 1143-1150.

Morales, E., & Hernández, H. (2010). *Argumentos de una ecuación diferencial de un circuito eléctrico a través de su campo de pendientes. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23,* 1227-1236 pp.

Moreira, M. A. (2002). La Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. *Investigaciones en Enseñanza de las Ciencias, 7(1)*, 1-28 pp.

Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., & Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria 13*, 29-36.

Prada, R., Hernández, C., & Ramírez, P. (2014). Comprensión del concepto de función en los primeros cursos de educación superior. *El Cálculo y su Enseñanza 6*, 29-44.

Puig, L. (1994). *Semiótica y Matemáticas. Eutopías Series.* Universidad Politécnica de Valencia 51, 1-21.

Real Academia Española (2014). *Diccionario de la lengua española (2017).* (XXIII). (2 vols.). Madrid, España.

Romero, I. (2000). Representación y comprensión en pensamiento numérico. En N. Climent, L. Contreras, & J. Carrillo (Eds.), *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática,* (pp. 35-46).

Sanmartí, N. (1993). *Las redes sistémicas: construcción y aplicaciones.* Universidad Autónoma de Barcelona, 14 pp.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Revista Números 77*, 5-34 pp.

Spiegel, M. (1998). *Análisis Vectorial y una introducción al análisis tensorial.* Editorial Mc Graw Hill, 222 pp.

Spivak, M. (1988). *Cálculo Infinitesimal.* Ediciones REPLA, S. A. 2ª Ed. 926 pp.

Sureda, P., & Otero, M. (2011). Nociones fundamentales de la Teoría de Campos Conceptuales. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias 6(1)*, 1-14.

Vergnaud, G. (1990). La Teoría de los Campos Conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques 10(2)*, 133-170.

Zaldívar, F. (2005). *Fundamentos de álgebra*. Edición Fondo de Cultura Económica, 2ª Ed. 318 pp.

Zill, D., & Wright, W. (2015). *Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera.* Editorial CENFAGE Learning 8ª Ed., 539 pp.