SEP
SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA

Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Física y Matemáticas

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 7 del mes de Julio del año 2017, el que suscribe Hugo Miguel Zorza Avalos alumno del Programa Académico de Lic. en Física y Matemáticas con número de boleta 2011330262 adscrito a la Escuela Superior de Física y Matemáticas, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Francisco J. Turrubiates Saldívar Dr. Pablo Paniagua López y cede los derechos del trabajo titulado La ecuación de Korteweg de Vries y la transformada de dispersión inversa, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección zahm00gant@yahoo.com.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Zorza Avalos Hugo Miguel
Nombre y firma del alumno

Instituto Politécnico Nacional

Escuela superior de Física y Matemáticas

La ecuación de Korteweg de Vries y la transformada de dispersión inversa

Tesis

Que para obtener el titulo de Licenciado en Física y Matemáticas

Autor:

Hugo Miguel Zorza Avalos

Directores de tesis:

Dr. Francisco Javier Turrubiates Saldívar
Dr. Pablo Paniagua López

Ciudad de México, Julio 2017

Dedicado a
mi familia
y mis seres queridos

Agradecimientos

Gracias a mi familia por siempre darme una mano en los tiempos difíciles.
A mis padres muchas gracias por el apoyo y la paciencia para realizar mis metas.

Gracias a mis Profesores que me guiaron en mi camino.

Gracias a mis amigos por sus palabras de apoyo.

Este trabajo ha sido apoyado por COFFA-IPN y por los proyectos de investigación SIP-IPN números **20150975**, **20161370** y **20171168**.

Resumen

Las soluciones tipo solitón de ecuaciones diferenciales parciales no lineales se encuentran en muchas ramas de la física y las matemáticas.
En este trabajo se hace una revisión de la ecuación diferencial de Korteweg-de Vries que es considerada como el primer modelo para el estudio de los solitones, presentado de forma detallada un procedimiento para construir esta ecuación diferencial mediante las ecuaciones de la mecánica de fluidos. Después se expone un método directo para encontrar su solución, empleando una onda de choque.
Finalmente se presenta de manera detallada el método de la transformada de dispersión inversa para obtener la solución $n-$solitón, en particular las soluciones uno-solitón y 2-solitón son encontradas por medio de este procedimiento.

Abstract

Soliton type solutions of nonlinear partial differential equations are found in many areas of physics and mathematics.
In this work a review of the Korteweg-de Vries differential equation is presented. This equation is considered as the first model for the study of solitons and a detailed procedure of its construction is given by means of the fluid mechanics equations.
Later a direct method to obtain its solution is presented using a shockwave. Finally, the inverse scattering transform method is described in a detailed way to obtain the n-soliton solution, in particular the one-soliton and 2-soliton solutions are found by this procedure.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Una gran variedad de sistemas dinámicos posee un comportamiento tal que su descripción se lleva a cabo mediante ecuaciones de evolución no lineales y a pesar de que numerosos fenómenos de esta naturaleza ya han sido identificados, el lenguaje matemático necesario para su descripción no se ha desarrollado del todo, de hecho, no existe una teoría general para resolver ecuaciones diferenciales no lineales. Esto ha generado en las últimas décadas un trabajo exhaustivo en el estudio de sistemas no lineales, su modelación mediante ecuaciones diferenciales y el desarrollo de técnicas matemáticas para resolverlas.
Los sistemas no lineales existen en muchas áreas de la física, por ejemplo, a nivel microscópico se tienen los modelos no lineales de partículas elementales, Skyrmions, núcleos superpesados, radioactividad exótica, fisión aneutrónica, clústeres atómicos, óptica no lineal, vórtices de plasma, sistemas moleculares complejos, condensados de Bose-Einstein, etc. A escala del laboratorio, se tienen ejemplos que provienen de la dinámica de fluidos, modelos para dislocación de cristales y biofísica. A escala macroscópica los ejemplos son las estrellas de neutrones y el choque de objetos estelares, entre otros. Ejemplos más abstractos son el monopolo magnético, solitones topológicos e instantones.
Existe un cierto conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, usualmente de primer orden en el tiempo para las cuales su correspondiente problema con valores iniciales puede ser resuelto mediante la trasformada de dispersión inversa. Tales ecuaciones diferenciales parciales no lineales son clasificadas como integrables. Algunas soluciones exactas de estas ecuaciones pueden ser escritas en términos de funciones elementales y dichas soluciones son importantes a favor de entender la no linealidad de una mejor manera.
Ejemplos clásicos de sistemas integrables son la ecuación de Korteweg-de Vries, la ecuación modificada de Korteweg-de Vries, la ecuación de sine-Gordon, la ecuación no lineal de Schrödinger y la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili. Estos sistemas tienen un número infinito de leyes de conservación y poseen un tipo de solución muy particular que exhibe un comportamiento tipo partícula llamada solitón. Un solitón es una onda viajera que es solución de un sistema que evoluciona de forma no lineal el cual preserva asintóticamente su forma a pesar de interaccionar con alguna otra solución (lineal o no lineal) del mismo sistema u otro tipo de perturbación localizada. Es decir, un solitón o un uno-solitón

está caracterizado por preservar su forma, estar localizado en una región del espacio, no obedece el principio de superposición y no es dispersivo. Una solución multi-solitón consiste de varios solitones que interaccionan de forma no lineal cuando se encuentran cerca uno de otro y sin embargo emergen de la interacción sin cambiar su forma presentando solo un cambio en su fase.

Los solitones o como fueron llamados en principio *ondas solitarias* fueron descubiertas en 1834 por el ingeniero John Scott Russell en el canal de la unión entre Edimburgo y Glasgow. J. S. Russell reportó sus observaciones en la *British Association of the Advancement of Science* en septiembre de 1844 y una de sus principales observaciones fue la espectacular estabilidad de la onda, sin embargo, no pareció tener éxito en convencer a la comunidad científica de su importancia. John Scott Russell realizó muchos experimentos para encontrar las propiedades de esta onda y las teorías basadas en aproximaciones lineales concluyen que estas ondas no existen. De hecho, su contemporáneo George Airy, el influyente matemático de la época, no creía en la existencia de estas ondas solitarias. Esta controversia fue aclarada por J. Boussinesq y por Lord Rayleigh quienes mostraron que, si la disipación es despreciada, el aumento en la velocidad de la onda asociada con una amplitud finita es balanceada por una disminución asociada con la dispersión, dando lugar entonces a una onda de forma permanente. Una ecuación que modela la propagación de esta onda solitaria descubierta por Russell fue obtenida por el matemático holandés Diederik Korteweg y su estudiante de doctorado Gustav de Vries, y publicada en el año de 1895 en su famoso artículo titulado "On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves" [1]. Hoy en día, esta ecuación es conocida como la ecuación de Korteweg-de Vries o ecuación KdV. A la solución especial de tipo onda solitaria de la ecuación KdV se le llama Solitón. El término solitón fue introducido por Zabusky y Kruskal en 1965 y fue elegido para denotar a una onda solitaria localizada que es solución de la ecuación KdV la cual se propaga preservado su forma y velocidad tal como una partícula se propagaría. En la actualidad, el concepto de solitón está firmemente establecido y es ampliamente aceptado como una base estructural para comprender el comportamiento dinámico de los sistemas complejos no lineales.

La ecuación KdV aparece extensamente en física cada vez que una onda se propaga en un medio débilmente no lineal y débilmente dispersivo. En este contexto las soluciones tipo solitón de la ecuación KdV resultan del balance de la no linealidad y la dispersión. Este balance es generalmente muy estable, lo cual explica las numerosas aplicaciones de la teoría de solitones. Por ejemplo, la ecuación KdV es empleada para describir ondas superficiales de agua en canales largos, estrechos y poco profundos. La ecuación KdV también surge en la descripción de ondas hidromagnéticas en un plasma frío y ondas acústicas de iones en cristales anarmónicos.

La ecuación KdV dio inicio y motivo las bases matemáticas de la descripción y análisis de solitones, aunque en su momento estos resultados no fueron considerados importantes ni comprendidos sino hasta el año de 1965. En el verano del año 1953 durante una visita de Enrico Fermi al laboratorio *Los Alamos National Laboratory*, junto con J. Pasta y S. Ulam

usaron la computadora llamada *Maniac I* para analizar computacionalmente un sistema dinámico uno-dimensional de 64 partículas en las cuales las partículas adyacentes se unían por resortes y además se incluían algunos términos no lineales.
Su objetivo principal fue determinar la razón de aproximación a la equipartición de energía entre diferentes modelos del sistema. Contrariamente a sus expectativas, había poca tendencia hacia la equipartición de energía, pero en lugar de ello se observó una casi recurrencia al estado inicial, lo cual fue desafiante y definió el acertijo de Fermi-Pasta-Ulam. En 1965 Zabusky y Kruskal explicaron dicho acertijo en términos de soluciones de onda solitaria de la ecuación KdV. En su análisis numérico ellos observaron solitones con todas sus características. Tales interacciones inusuales entre solitones generaron un poco de furor, sin embargo, en ese momento nadie sabía cómo resolver el problema con valores iniciales de la ecuación KdV, excepto de forma numérica.
En 1967 Gardner, Greene, Kruskal y Miura presentaron el método de la transformada de dispersión inversa el cual fue descubierto resolviendo el problema con valores iniciales de la ecuación KdV. Actualmente este método es considerado como uno de los desarrollos más importantes de las matemáticas en las últimas décadas en el área de ecuaciones diferenciales parciales no lineales. En sentido figurado el método es un análogo al de la transformada de Fourier aplicada a ecuaciones diferenciales parciales lineales.
La idea detrás del método de la transformada de dispersión inversa es la siguiente, cada ecuación diferencial parcial no lineal integrable está asociada con una ecuación diferencial ordinaria lineal (o un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales) que contiene un parámetro que es usualmente conocido como el parámetro espectral y la solución a la ecuación diferencial parcial no lineal aparece como un coeficiente (usualmente conocido como el potencial) en la correspondiente ecuación diferencial ordinaria lineal. Asumiendo que el potencial tiende rápidamente a cero en los límites asintóticos de modo que un escenario de dispersión puede ser creado para la ecuación diferencial ordinaria lineal relacionada, en la que el potencial puede ser unívocamente asociado con algunos datos de dispersión. El problema de determinar los datos de dispersión para un potencial dado es conocido como el problema de dispersión directa para la ecuación diferencial ordinaria lineal. Por otro lado, el problema de dispersión inversa para la ecuación diferencial ordinaria lineal determina el potencial que corresponde con un conjunto dado de datos de dispersión. El procedimiento para obtener el potencial consiste de manera resumida en

- Resolver el problema de dispersión directa correspondiente a la ecuación diferencial ordinaria lineal asociada en el tiempo inicial, es decir obtener los datos de dispersión en el tiempo inicial.

- Realizar la evolución temporal de los datos de dispersión de su valor en el tiempo inicial a un tiempo arbitrario.

- Resolver el problema de dispersión inversa para la ecuación diferencial ordinaria lineal asociada en un tiempo arbitrario, es decir determinar el potencial de los datos de dispersión. Es sorprendente que el potencial resultante resuelve el problema con valor inicial de la ecuación diferencial parcial no lineal [2, 3, 4, 5].

En el caso de la ecuación KdV esta ecuación ordinaria asociada es la ecuación de Schrödinger donde el potencial es una función de una coordenada espacial y una temporal. Dicho potencial es justo la función dependiente en la ecuación KdV y su valor inicial corresponde con el valor inicial del problema de Cauchy de la ecuación KdV. El problema de dispersión directa consiste en determinar los datos de dispersión correspondientes a un potencial dado en una ecuación diferencial, mientras que el problema de dispersión inversa determina el potencial que corresponde un conjunto dado de datos de dispersión los cuales consisten de coeficientes de reflexión y de transmisión.
El objetivo de este trabajo es presentar de forma detallada la construcción de la solución multi-solitón de la ecuación KdV mediante el método de la transformada de dispersión inversa. Este trabajo de tesis está organizado de la siguiente manera; en el segundo capítulo se introducen algunos conceptos fundamentales relacionados con la teoría de ecuaciones diferenciales parciales lineales y no lineales. Se hace énfasis en la no linealidad empleando conceptos de ecuaciones diferenciales parciales no lineales de primer orden. En particular se hace una revisión del problema de Cauchy para ecuaciones cuasi-lineales de primer orden y se presenta una solución para la ecuación de choque más simple.
Posteriormente, en el capítulo tres se presenta de forma minuciosa la construcción de la ecuación KdV empleando las ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos y especificando las principales aproximaciones utilizadas en la deducción. Para simplificar la ecuación KdV a una ecuación diferencial ordinaria no lineal se hace uso de una onda de choque u onda viajera, donde se obtiene la llamada solución uno-solitón de la ecuación KdV.
En el capítulo cuatro se presenta el método de la transformada de dispersión inversa y se obtiene de manera minuciosa la solución multi-solitón de la ecuación KdV. En particular se estudian los ejemplos de las soluciones uno-solitón y 2-solitón.
Por último, en el capitulo cinco se presentan las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales parciales

La gran mayoría de los fenómenos físicos se pueden ser modelados mediante ecuaciones diferenciales o sistemas de ecuaciones diferenciales, por ejemplo, la dinámica de una partícula, la dinámica de fluidos, los flujos de calor, fenómenos ondulatorios, la mecánica cuántica, fenómenos electromagnéticos, la física del plasma, la relatividad general, etc.
Por lo cual definir y estudiar ecuaciones diferenciales es de gran importancia. En este trabajo de tesis es de particular interés estudiar las ecuaciones diferenciales parciales no lineales y algunos de su métodos de solución. Debido a esto, en este capítulo se hace una revisión de los fundamentos de las ecuaciones diferenciales parciales y que son empleado extensamente en el estudio de los solitones.

2.1. Ecuaciones diferenciales parciales lineales

Una ecuación diferencial parcial (EDP), se puede definir como una ecuación que relaciona a la función $u(x_1, x_2, ..., x_n)$, las variables independientes $x_1, x_2, ..., x_n$, sus derivadas parciales, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ con $i = 1, ..., n$ y $x_i \in U$ un subconjunto de $\mathbb{R}$. La diferencia entre una EDP y una ecuación diferencial ordinaria (EDO), es que la EDO solo tiene una variable independiente [6, 7, 8, 9].
Una EDP de primer orden con n-variables independientes se escribe de la siguiente forma

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0 \tag{2.1}$$

Una característica importante en una EDP es el orden de la ecuación y que se define a partir de la derivada parcial de mayor orden que aparece en ella. En el caso de la ecuación (2.1) esta expresión corresponde a la forma general de una EDP de primer orden.
Siguiendo esta idea se puede escribir una ecuación diferencial de segundo orden como

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}) = 0. \tag{2.2}$$

En forma más general, para la variable x_i con $p \geq 1$, se define la EDP de p-ésimo orden por

$$F(\frac{\partial^p u}{\partial x_i^p}, \frac{\partial^p u}{\partial x_i^p}, \ldots, \frac{\partial^p u}{\partial x_1^p}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, u, x_i) = 0, \tag{2.3}$$

donde F es una función que cumple $F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$.
Se dice que una EDP es lineal si cumple con las siguientes propiedades:

i) La potencia de la función u y cada una de sus parciales $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, debe ser igual a uno.

ii) Los coeficientes de la función u y de las parciales $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, pueden ser constantes o las variables independientes $x_1, ..., x_n$.

Es decir, para que una ecuación sea lineal debe cumplirse la siguiente condición:

$$\mathcal{L}u = F(x_1, x_2, ..., x_n, u, u_{x_1}, ..., u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, ..., u_{x_1 x_n}, ...), \tag{2.4}$$

donde $\mathcal{L}$, es un operador lineal que satisface la siguiente propiedad:

$$\mathcal{L}(u_1 c_1 + u_2 c_2) = c_1 \mathcal{L}u_1 + c_2 \mathcal{L}u_2. \tag{2.5}$$

Por otro lado una ecuación EDP que no satisface la condición (2.5) se dice que es no lineal [8].
Las EDP se pueden clasificar además en homogéneas y no homogéneas, donde una EPD lineal es homogénea si $\mathcal{L}u = 0$ y solo depende de la función u y de sus derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Pero si $\mathcal{L}u = a$, donde no solo depende de la función u y sus derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, si no que también $a \neq 0$ es función de las variables $x_1, ..., x_n$, entonces se dice que la EDP lineal es no homogénea.

2.1.1. Curvas integrales y superficies de campos vectoriales

Una forma fácil de interpretar las soluciones de las EDP es a partir de los conceptos de curvas integrales y superficies de campos vectoriales.
Se denota por $\mathfrak{X}(\Omega)$ el conjunto de campos vectoriales de clase C^1 sobre Ω.
Sea $V(x, y, z) = \Big(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\Big)$ un campo vectorial definido sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

i) V no es cero en ningún punto de Ω, es decir, las funciones componentes P, Q, R de V no toman el valor de cero simultáneamente para todo $(x, y, z) \in \Omega$.

ii) P, Q, R son funciones que tienen primer derivada y se denota como P, Q, $R \in C^1(\Omega)$

Un concepto de gran importancia en el estudio de las ecuaciones diferenciales es el de curva integral y que se define como sigue.
Definición 2.1.
Se dice que $\mathcal{C} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es una curva integral del campo vectorial V si es tangente a cada punto de $\mathcal{C}$.
Un ejemplo de las curvas integrales se encuentra en física, donde V es el campo de velocidades de un fluido, entonces las curvas integrales son llamadas líneas de flujo.
De esta forma asociamos al campo vectorial $V = (P, Q, R)$ el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, z); \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, z); \qquad \frac{dz}{dt} = R(x, y, z), \tag{2.6}$$

donde la curva $\mathcal{C}$ tiene una representación parametrizada dada por $\alpha(t) = \Big(x(t), y(t), z(t)\Big)$, así $\alpha'(t) = V(x(t), y(t), z(t))$.
Supongamos que $P \neq 0$, $Q \neq 0$ y $R \neq 0$, entonces el sistema de ecuaciones diferenciales (2.6) es equivalente a

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \tag{2.7}$$

Si una de las funciones P, Q o R es igual a cero, por ejemplo $P = 0$ entonces

$$\frac{dx}{dt} = 0, \tag{2.8}$$

lo que implica que x es una constante.
Una propiedad importante de las funciones en Ω se define a continuación.
Definición 2.2
Dos funciones $u_1(x, y, z) = c_1$ y $u_2(x, y, z) = c_2$ en $C^1(\Omega)$, con c_1 y c_2 dos curvas en Ω y donde si u_1 yu_2 satisfacen la condición:

$$\nabla u_1(x, y, z) \times \nabla u_2(x, y, z) \neq 0, (x, y, z) \in \Omega, \tag{2.9}$$

son llamadas funcionales independientes en Ω.
Para cada punto en una curva $\mathcal{C}$ que representa a las funciones u_i, el vector ∇u_i es tangente a la curva $\mathcal{C}$, de esta forma se se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$P\frac{\partial u_1}{\partial x} + Q\frac{\partial u_1}{\partial y} + R\frac{\partial u_1}{\partial z} = 0, \tag{2.10}$$

$$P\frac{\partial u_2}{\partial x} + Q\frac{\partial u_2}{\partial y} + R\frac{\partial u_2}{\partial z} = 0. \tag{2.11}$$

De esta forma se puede introducir el siguiente concepto
Definición 2.3
La función $u \in C^1(\Omega)$, es llamada primera integral del campo vectorial V en Ω, si para cada vector en V es ortogonal a al vector ∇u, es decir, cumple la siguiente condición:

$$P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{2.12}$$

2.1.2. Solución general de $Pu_x + Qu_y + Ru_z = 0$

Para encontrar una solución general a la ecuación (2.12) en Ω se supone que las funciones $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z) \in C^1(\Omega)$ no se hacen cero simultáneamente en ningún punto de Ω.
Entonces se define la función $u(x, y, z) \in C^1(\Omega)$ como una solución a la EDP (2.12), a la cual se le asocia el sistema de EDO asociado a las curvas integrales (2.7) y de manera general se tiene el siguiente teorema, ver [7].
Teorema 2.1
Sean u_1 y u_2 dos soluciones fundamentalmente independientes de las ecuaciones (2.7) en Ω y sea $F(u_1, u_2)$ una función de dos variables en C^1. Entonces

$$u(x, y, z) = F\Big(u_1(x, y, z), u_2(x, y, z)\Big) \tag{2.13}$$

es la solución general de la ecuación (2.12) en Ω.

2.1.3. Construcción de una superficie integral

La superficie integral de un campo vectorial $V = (P, Q, R)$ es una superficie S tal que V es tangente a todo punto de S. De manera formal esta idea se describe de la siguiente forma.

Definición 2.4

Una superficie $S \subset \Omega$ es una superficie integral del campo vectorial V si S es una superficie de nivel de la primera integral de V, es decir, S es descrito por la ecuación

$$u(x, y, z) = c, \tag{2.14}$$

donde u es solución de la ecuación (2.12) en Ω tal que $\nabla u \neq 0$ y $\nabla u \cdot V = 0$ para todo $(x, y, z) \in \Omega$.

De esta manera se define a S como una superficie solución de la ecuación (2.14).

Este resultado se puede generalizar para el caso en que si V es tangente a las curvas integrales y las superficies integrales, entonces las superficies integrales de V son generadas por el sistema de ecuaciones asociado a las curvas integrales (2.7). De manera general se tiene entonces el siguiente teorema.

Teorema 2.2

Si S es una superficie solución de la ecuación (2.12) en Ω, entonces para todo punto de S las curvas solución que genera el sistema (2.7), pasan a través de un punto que se encuentra en S.

Inversamente, si U es una función C^1 en Ω y para cada punto $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, la curva solución (2.12) pasa a través de este punto dentro de la superficie de nivel u que está en el punto (x_0, y_0, z_0), entonces u es una solución de la ecuación (2.12)

2.2. Ecuaciones diferenciales parciales no lineales

Las EDP se pueden clasificar de acuerdo a su linealidad, en el caso de las ecuaciones no lineales se tiene la siguiente clasificación [8, 7, 6].

La EDP (2.1) es llamada semi-lineal con respecto a las variables independientes x_i y $p \geq 1$, si tiene la forma:

$$\sum a_m(x_i) D^m u + a_0(D^{n-1}u, ..., Du, u, x_i) = 0 \tag{2.15}$$

La EDP (2.1) se le conoce como quasi-lineal con respecto a las variables independientes x_i, si es de la forma:

$$\sum a_m(D^{n-1}u, ..., Du, u, x_i D^m u + a_0(D^{n-1}u, ..., Du, u, x_i) = 0. \tag{2.16}$$

A una EDP se le llama totalmente no lineal si esta depende no linealmente hasta las derivadas de orden superior.

A continuación se tiene una lista de las EDP no lineales más conocidas

Ecuación de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.17}$$

Ecuación de Korteweg de-Vries

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \delta u \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \tag{2.18}$$

Ecuación de Bussinesq

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \tag{2.19}$$

Ecuación de sine-Gordon

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha \sin(u), \tag{2.20}$$

Ecuación de Liuville

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{\pm u}, \tag{2.21}$$

Ecuación no lineal de Schrodinger

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma |u|^2 u = 0. \tag{2.22}$$

2.2.1. EDP quasi-lineales de primer orden

Una ecuación diferencial parcial quasi-lineal de primer orden tiene la forma

$$F(x, y, z, z_x, z_y) = P(x, y, z)z_x + Q(x, y, z)z_y = R(x, y, z), \tag{2.23}$$

donde la función F es lineal respecto a las derivadas parciales z_x, z_y, con los coeficientes P, Q, R, dependientes de las variables independientes x, y y de la variable dependiente z [7, 8, 6].

2.2.2. La integral general de $Pz_x + Qz_y = R$

Para encontrar las soluciones de la ecuación (2.23) se asume que las funciones P, Q, R son definidas en algún dominio $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ y cumplen la condición de no anularse simultáneamente en ningún punto de este dominio.
Una solución a la ecuación (2.23) es una función $z = f(x, y)$ tal que satisface las siguientes condiciones:

i) Para cualquier $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, el punto $(x, y, f(x, y))$ pertenece al dominio $\widetilde{\Omega}$ de las funciones P, Q, R.

ii) Cuando se sustituye $z = f(x, y)$ en la ecuación (2.23), esta solo va a depender de las variables x, y.

Otra forma de ver este resultado es usando una superficie solución de la ecuación (2.23), como una superficie integral del campo vectorial $V = (P, Q, R)$ que es descrito por $z = f(x, y)$.

Para encontrar las superficies solución de la ecuación (2.23), se debe observar la superficie solución de la ecuación (2.12), que puede ser descrita por la función $z = f(x, y)$ entonces la superficie de nivel es descrita por $u(x, y, z) = 0$ [7].
Con estas condiciones se puede asumir lo siguiente.
Lema 2.1
Sea $u \in C^1(\widetilde{\Omega})$ una superficie solución de la ecuación (2.23) descrita por $u(x, y, z) = 0$, entonces se satisfacen las siguientes condiciones [7]:

i) $Pu_x + Qu_y + Ru_z = 0$.

ii) $u_z \neq 0$.

Demostración
Usando el teorema de la función implícita

$$z_x = -\frac{u_x}{u_z} \qquad z_y = -\frac{u_y}{u_z} \tag{2.24}$$

se tiene la siguiente relación

$$\begin{aligned} Pz_x + Qz_y = -\frac{Pu_x + Qu_y}{u_z} &= R \\ Pu_x + Qu_y &= -Ru_z \\ Pu_x + Qu_y + Ru_z &= 0 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Este lema indica como obtener la solución a la ecuación (2.23) a partir de la solución de la ecuación (2.12), de esta forma se puede generalizar aún más este resultado a partir del siguiente teorema.

Teorema 2.3
Sean u_1 y u_2 dos funciones soluciones de la ecuación (2.12) en el dominio $\widetilde{\Omega}$ de $\mathbb{R}^3$. Sea $F(u_1, u_2)$ una función arbitraria de dos variables en C^1, y considerando la superficie de nivel

$$F(u_1(x, y, z), u_2(x, y, z)) = 0. \tag{2.26}$$

Entonces, en cada parte de esta superficie que es normal a una componente $z \neq 0$, la ecuación (2.24) define a z como una solución de la ecuación (2.23).
De esta manera se concluye que la ecuación (2.26) es llamada la integral general de la ecuación (2.23), pero la ecuación (2.26) no es la solución general de la ecuación (2.23) y en la práctica la solución se encuentra de forma más sencilla resolviendo el sistema (2.7).

2.2.3. Ecuaciones quasi-lineales de primer orden y su problema de Cauchy

El problema de valor inicial o problema de Cauchy consiste en encontrar una solución a la ecuación (2.23) para una curva dada, es decir, sea $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^2$ una curva descrita por las siguientes ecuaciones paramétricas,

$$x = x_0(t), \qquad y = y_0(t), \qquad t \in I, \tag{2.27}$$

donde $x_0(t), y_0(t)$ son funciones de clase C^1 en $\mathbb{R}$.
Sea $z_0(t)$ una función dada en C^1, que puede ser definida mediante la curva $\mathcal{C}.\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, tal que la solución a al ecuación (2.23) es una función $z = z(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ cumple las siguientes condiciones

i) $z = z(x, y)$ es una solución de la ecuación (2.23) en Ω.

ii) En la curva $\mathcal{C}$, la función $z_0(t) = z(x_0(t), y_0(t))$.

De esta forma, a la curva $\mathcal{C}$ se le conoce como curva inicial mientras que a $z_0(t)$ se le conoce como condición inicial y tal que

$$z(x_0(t), y_0(t)) = z_0(t). \tag{2.28}$$

Otra forma de ver el problema de Cauchy, es encontrar la superficie solución de la ecuación (2.23) que contenga una curva $\widetilde{\mathcal{C}} \in \mathbb{R}$ que este descrita por el sistema de ecuaciones parametrizadas

$$x = x_0(t), \qquad y = y_0(t), \qquad z = z_0(t), \qquad t \in I. \tag{2.29}$$

La solución que se encuentra es única en cualquier punto de una vecindad en la curva $\mathcal{C}$ cuando se satisfacen las condiciones iniciales.
Para resolver la ecuación (2.23) se construye una superficie integral $V = (P, Q, R)$ que contenga a la curva $\mathcal{C}$.
Teorema 2.4
Suponga que P, Q, R son funciones clase C^1 en el dominio $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$, que contiene un punto (x_0, y_0, z_0) y cumple la condición [7]

$$P(x_0, y_0, z_0)\frac{dy_0(t_0)}{dt} - Q(x_0, y_0, z_0)\frac{dx_0(t_0)}{dt} \neq 0. \tag{2.30}$$

Entonces en una vecindad Ω_0 de (x_0, y_0), existe una solución única para la ecuación (2.23) que cumple la condición inicial (2.28) para cualquier punto de $\mathcal{C}$ contenido en Ω_0.
En la siguiente sección se realiza un breve análisis al problema de ondas de choques, el cual es la base para la solución de la ecucaión Korteweg de-Vries.

2.3. Ondas de choque

Las ondas de choque son un fenómeno que se produce en explosiones, fluidos, cuando un avión rompe la barrera del sonido, etc. Estos fenómenos son descritos por ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas [9].
El modelo mas sencillo que describe estos fenómenos es la siguiente ecuación de primer orden no lineal

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{2.31}$$

Si en particular se considera el caso

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{2.32}$$

donde las curvas características están definidas a partir de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dx}{dt} = a(x,t), \tag{2.33}$$

así, para cada punto (x_0, t_0) en el plano XT pasa una curva característica única a través de este punto.
Ahora, a lo largo de la curva parametrizada t se encuentra que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dt} = 0, \tag{2.34}$$

por lo cual la función $u(x,t)$ es constante sobre estas curvas características y de esta manera toda solución a la ecuación (2.32) es una función constante sobre la curva característica que pasa por el punto (x_0, t_0).
Un caso importante por tratar es la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{2.35}$$

que es una ecuación básica en fluidos con la peculiaridad de ser una ecuación no lineal. Las curvas características de esta ecuación se encuentran dadas por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = u(x,t). \tag{2.36}$$

Debido a la no linealidad de la ecuación (2.35) la ecuación característica depende de la misma función u que se desea encontrar.
Por la existencia y unicidad de las EDO, la curva que pasa por el punto(x_0, t_0) es única y la solución que se propone para u es una familia de curvas que cubren todo el plano xy sin que se intersecten entre ellas.
Como resultado de lo anterior u es constante sobre una recta arbitraria en t. Por lo cual la solución se puede escribir como $u(x(t), t)$ con la condición de ser constante sobre la curva. De esta manera se pueden hacer las siguientes afirmaciones [9]

i) Las curvas características de la ecuación (2.35) son familias de líneas rectas, donde cada una de ellas tiene diferente pendiente.

ii) La solución $u(x,t)$ es constante sobre cada una de estas rectas.

iii) La pendiente de estas rectas es igual a la función $u(x,t)$ evaluada sobre cada recta.

Capítulo 3

La ecuación de Korteweg de Vries y su solución tipo Solitón

Los solitones son ondas solitarias que se mantienen localizadas mientras se propagan a velocidad constante sin deformarse en un medio no lineal y dispersivo. Este comportamiento se debe a que los efectos no lineales y los dispersivos se anulan entre si mientras se propaga la onda [2, 1].
Este fenómeno fue analizado por primera vez por J. Russell en 1845, y a continuación se presenta una traducción de sus observaciones [10]:

Mientras me encontraba observando el movimiento de un bote que era tirado rápidamente por un par de caballos a lo largo de un canal estrecho, cuando el movimiento del bote fue detenido repentinamente, note que la masa de agua siguió su movimiento; este se acumulo al rededor de la proa del bote con una agitación violenta y repentinamente lo dejo atrás avanzando hacia delante a una gran velocidad mientras asumía la forma de una larga elevación de agua, lisa y bien definida, continuo su movimiento a lo largo del canal sin un cambio aparente en su forma, y sin disminuir su velocidad. La seguí a caballo y al alcanzarla se movía a unos 8 o 9 millas por hora preservando su figura original de unos 3 pies de largo y aproximadamente un pie o pie y medio de espesor. Este espesor fue disminuyendo paulatinamente después de seguirlo una o dos millas hasta perderle de vista entre el movimiento del agua en el canal. En Agosto de 1834 fue la primera vez que intervine con un fenómeno tan singular y bello al cual llame "Traslación de ondas".

Años más tarde J. V. Boussinesq introdujo el primer modelo matemático para su tratamiento. Estos trabajos fueron retomados y ampliados por D. Korteweg y G. de Vries en 1895 quienes encontraron la primera ecuación diferencial parcial no lineal exactamente soluble que describe este fenómeno. A esta ecuación se le conoce actualmente como la ecuación KdV [1, 2, 6, 5, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18].
En este capítulo se presenta una revisión de la ecuación de Korteweg de-Vries. Primero se reproduce un método para su construcción basados el la referencia [19] y después se

obtiene directamente su solución empleando una onda de choque, a dicha solución se le conoce como uno-Solitón.

3.1. Construcción de la ecuación KdV

En esta sección se presenta un procedimiento detallado para la construcción de la ecuación KdV [19] a partir de un análisis de las ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos en dos dimensiones. Para un minucioso más detallado revisar las referencias [1, 11, 20, 21]. Considerando la ecuación de conservación de la masa para un fluido

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \overrightarrow{v}) = 0, \tag{3.1}$$

donde ρ denota la densidad del fluido, $\overrightarrow{v}$ su campo de velocidades. La ecuación de la conservación del momento en ausencia de fuerza de viscosidad

$$\rho \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \rho(\overrightarrow{v} \cdot \nabla)\overrightarrow{v} = -\nabla P + \overrightarrow{f}, \tag{3.2}$$

donde P a la presión interna y $\overrightarrow{f}$ a las fuerzas externas por unidad de superficie que actúan sobre el fluido, que en este caso solo se supone que es la fuerza de gravedad

$$\overrightarrow{f} = -\rho g \widehat{y}, \tag{3.3}$$

donde $\widehat{y}$ es un vector unitario.
Si se considera ahora que el fluido es incompresible e irrotacional en las ecuaciones (3.1) y (3.2) se tienen además las siguientes condiciones

$$\nabla \rho = 0, \qquad\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{3.4}$$

$$\nabla \times \overrightarrow{v} = 0. \tag{3.5}$$

A partir de (3.5) se puede considerar a la función $\overrightarrow{v}$ como una función potencial $\overrightarrow{v} = \nabla \phi$ que satisface la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 \phi = 0. \tag{3.6}$$

Con estas condiciones se puede simplificar la ecuación (3.2) usando la siguiente identidad vectorial

$$\overrightarrow{v} \times (\nabla \times \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v} \cdot \nabla)\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\nabla(\overrightarrow{v}^2), \tag{3.7}$$

de donde se encuentra

$$\begin{aligned}
&\rho \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \frac{\rho}{2}\nabla(\overrightarrow{v}^2) = -\nabla P - \rho g \widehat{y}, \\
&\rho \frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi + \frac{\rho}{2}\nabla[(\nabla\phi)^2] + \nabla P + \nabla(\rho g y) = 0, \\
&\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla[(\nabla\phi)^2] + \frac{\nabla P}{\rho} + \nabla(g y) = 0, \\
&\nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{P}{\rho} + (g y)\right) = 0,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

así se tiene que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{P}{\rho} + (gy) = K, \tag{3.9}$$

donde K es una constante arbitraria. El valor más sencillo para tratar es cuando $K = 0$ y es el caso que se desarrollará a continuación.
La ecuación diferencial por resolver es entonces la siguiente

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{P}{\rho} + (gy) = 0. \tag{3.10}$$

El problema consiste en describir el movimiento de un fluido a través de un canal, para simplificarlo se considera el problema en dos dimensiones, donde la longitud del canal es el eje horizontal (eje x) y la profundidad del canal como el eje vertical (eje y). La superficie del liquido en reposo se considera $y = 0$ mientras que la profundidad del canal es $y = -h$ (ver figura (3.1)), la longitud característica de este canal es l, la velocidad lineal de la onda se define como $c_0 = \sqrt{gh}$ y la amplitud característica de la onda es a. Todos estos factores son constantes y característicos del medio de propagación [22], mientras que para simplificar el problema se hace la suposición de que la presión del fluido en la ecuación (3.2) disminuye conforme se acerca a la superficie del fluido.

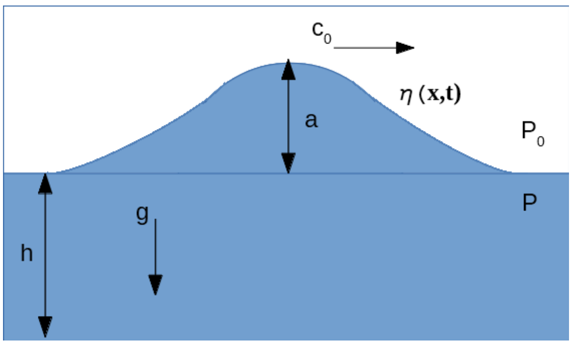


Figura 3.1: Diagrama del transversal del canal donde se propaga la onda.

Las condiciones iniciales que se establecen son las siguientes

$$\vec{v}|_{y=-h} = \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{y=-h} = 0, \tag{3.11}$$

es decir, en el fondo del canal no hay velocidad vertical.
En la superficie del fluido se define la amplitud de onda viajera (condición de frontera de viscosidad en una superficie)

$$y(x,t)|_{superficie} = h + \eta(x,t), \tag{3.12}$$

conocida como la configuración de equilibrio del medio continuo.
de esta manera la velocidad en la superficie es

$$\vec{v}|_{y=sup} = \left[\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x}\frac{dx}{dt}\right]_{y=sup} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{dx}{dt}. \tag{3.13}$$

Así, para la función $\phi(x, y, t)$ se tiene que

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{y=sup} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{3.14}$$

a esta última ecuación se le conoce como la ecuación de la cinemática de la superficie (kinematic free surface).

La ecuación (3.10) para la superficie se reescribe entonces como

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2) + \frac{P}{\rho} + gy\right]_{y=sup} &= 0, \\ \left[\frac{\partial \phi}{\partial t}\right]_{y=sup} + \frac{1}{2}\left[(v_x^2 + v_y^2)\right]_{y=sup} + g(h+\eta) &= 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

A esta última expresión se le conoce como dinámica de superficie libre (dynamic free surface), donde se hace el cambio de variable $v_x = u$ y $v_y = v$ para simplificar la expresión (3.15).

Un resultado importante para describir la función ϕ se encuentra a partir de las ecuaciones (3.15), (3.6), (3.11) al considerar que los términos cuadráticos o de multiplicación entre términos u y v son aproximadamente cero.

La ecuación (3.15) se reescribe como

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{y=sup} + g\eta = 0. \tag{3.16}$$

De la misma forma se aproxima la ecuación (3.14) a

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{y=sup} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} - \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{y=sup} &= 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones dado por (3.16) y (3.17). Primero se calcula la derivada parcial respecto a t de la ecuación (3.16)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{y=sup} + g\eta\right) &= 0, \\ \left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right|_{y=sup} + g\frac{\partial \eta}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \tag{3.18}$$

o bien

$$g\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right|_{y=sup}, \tag{3.19}$$

despejando $\frac{\partial \eta}{\partial t}$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{g}\left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right|_{y=sup}, \tag{3.20}$$

sustituyendo el resultado anterior en la ecuación (3.17) se tiene que

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{y=sup} = 0, \tag{3.21}$$

se obtiene

$$-\frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\bigg|_{y=sup} - \frac{\partial\phi}{\partial y}\bigg|_{y=sup} = 0, \tag{3.22}$$

eliminando el signo

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\bigg|_{y=sup} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\bigg|_{y=sup} = 0. \tag{3.23}$$

La ecuación anterior es una ecuación diferencial parcial de segundo orden que solo depende de la función ϕ, por lo cual se propone que su solución tiene la siguiente forma

$$\phi = Y(y)\sin(\kappa x - \omega t). \tag{3.24}$$

Para encontrar la forma explicita de la función $Y(y)$ se sustituye (3.24) en la ecuación (3.6) obteniendo

$$\nabla^2[Y(y)\sin(\kappa x - \omega t)] = 0, \tag{3.25}$$

en términos de las derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 Y(y)\sin(\kappa x - \omega t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y(y)\sin(\kappa x - \omega t)}{\partial y^2} = 0, \tag{3.26}$$

calculando las respectivas derivadas parciales se encuentra

$$Y(y)\frac{\partial^2 \sin(\kappa x - \omega t)}{\partial x^2} + \sin(\kappa x - \omega t)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0, \tag{3.27}$$

simplificando

$$-Y(y)\kappa^2\sin(\kappa x - \omega t) + \sin(\kappa x - \omega t)Y''(y) = 0, \tag{3.28}$$

finalmente se obtine

$$-Y(y)\kappa^2 + Y''(y) = 0, \tag{3.29}$$

de esta forma el problema se ha podido reducir de la ecuación diferencial parcial (3.23) a una ordinaria cuya solución es de la forma

$$Y(y) = Ae^{\kappa y} + Be^{-\kappa y}. \tag{3.30}$$

Reescribiendo la ecuación (3.24) como

$$\phi = (Ae^{\kappa y} + Be^{-\kappa y})\sin(\kappa x - \omega t), \tag{3.31}$$

y sustituyendo (3.31) en la condición inicial (3.11)

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}\bigg|_{y=-h} = 0, \tag{3.32}$$

se obtiene la siguiente relación entre las constantes A y B

$$(\kappa Ae^{\kappa y} - \kappa Be^{-\kappa y})\sin(\kappa x - \omega t)|_{y=-h} = 0, \tag{3.33}$$

una solución a la ecuación anterior es

$$\kappa A e^{-h\kappa} - \kappa B e^{h\kappa} = 0,$$

simplificando

$$A e^{-h\kappa} = B e^{h\kappa}.$$

de esta manera se obtiene

$$A = B e^{2h\kappa} \tag{3.34}$$

Así la función ϕ se puede escribir como

$$\begin{aligned} \phi &= (B e^{2h\kappa} e^{\kappa y} + B e^{-\kappa y}) \sin(\kappa x - \omega t), \\ &= B e^{h\kappa} [e^{\kappa(y+h)} + e^{-\kappa(y+h)}] \sin(\kappa x - \omega t), \end{aligned} \tag{3.35}$$

en términos del coseno hiperbólico

$$\phi = 2B e^{h\kappa} \cosh(\kappa[y+h]) \sin(\kappa x - \omega t), \tag{3.36}$$

A partir de la ecuación (3.36) se puede obtener una forma detallada para la amplitud η y la frecuencia ω de la onda usando las condiciones iniciales (3.16) y (3.23). La frecuencia esta determinada por la expresión

$$\begin{aligned} &\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\bigg|_{y=sup} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\bigg|_{y=sup} = 0, \\ &-\frac{2B\omega^2 e^{h\kappa}}{g} \cosh(\kappa[y+h]) \sin(\kappa x - \omega t)\bigg|_{y=sup} \\ &+ 2\kappa B e^{h\kappa} \sinh(\kappa[y+h]) \sin(\kappa x - \omega t)\bigg|_{y=sup} = 0, \end{aligned} \tag{3.37}$$

simplificando

$$\begin{aligned} &\frac{2B\omega^2 e^{h\kappa}}{g} \cosh(\kappa[y+h]) \sin(\kappa x - \omega t)\bigg|_{y=sup} = 2\kappa B e^{h\kappa} \sinh(\kappa[y+h]) \sin(\kappa x - \omega t)\bigg|_{y=sup}, \\ &\frac{\omega^2}{g} \cosh(\kappa h) = \kappa \sinh(\kappa h), \end{aligned} \tag{3.38}$$

lo que conduce a

$$\omega^2 = g\kappa \tanh(\kappa h). \tag{3.39}$$

Por otro lado para la amplitud de onda que se expresa en (3.12), se encuentra al sustituir (3.36) en (3.16)

$$\begin{aligned} -2B\omega e^{h\kappa} \cosh(\kappa[y+h]) \cos(\kappa x - \omega t)\bigg|_{y=sup} + g\eta &= 0, \\ g\eta &= 2B\sqrt{g\kappa \tanh(\kappa h)} e^{h\kappa} \cosh(\kappa h) \cos(\kappa x - \omega t), \end{aligned} \tag{3.40}$$

despejando a la función η

$$
\begin{aligned}
\eta &= \frac{2B}{g}\sqrt{g\kappa\tanh(\kappa h)}e^{h\kappa}\cosh(\kappa h)\cos(\kappa x-\omega t),\\
&= 2B\sqrt{\frac{\kappa\sinh(\kappa h)}{g\cosh(\kappa h)}}\cosh(\kappa h)e^{h\kappa}\cos(\kappa x-\omega t),\\
&= 2B\sqrt{\frac{\kappa\sinh(\kappa h)\cosh(\kappa h)}{g}}e^{h\kappa}\cos(\kappa x-\omega t),\\
&= 2B\sqrt{\frac{\kappa\sinh(2\kappa h)}{2g}}e^{h\kappa}\cos(\kappa x-\omega t),\\
&= B\sqrt{\frac{2\kappa\sinh(2\kappa h)}{g}}e^{h\kappa}\cos(\kappa x-\omega t).
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

Las expresiones (3.39) y (3.41) muestran una relación para la amplitud y la frecuencia con respecto a κ con relación a las expresiones (3.16) y (3.17) donde se hizo una aproximación a primer orden.

Para generalizar un poco este problema se procede a suponer una solución en términos de potencias de la variable y.

Calculando la derivada respecto a x en la ecuación (3.9)

$$
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial t}\bigg|_{y=sup}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\bigg|_{y=0}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P}{\rho}\right)\bigg|_{y=sup}+\frac{\partial gy}{\partial x}\bigg|_{y=sup}=0, \tag{3.42}
$$

simplificando y cambiando el orden de derivación en el primer término

$$
\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial x}\bigg|_{y=sup}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2)\bigg|_{y=sup}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P}{\rho}\right)\bigg|_{y=sup}+g\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{y=sup}=0, \tag{3.43}
$$

evaluando en la superficie, donde $P=0$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2)+g\frac{\partial\eta}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+g\frac{\partial\eta}{\partial x}=0.
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

Para resolver la ecuación (3.44) se propone la siguiente expansión en serie de potencias en y

$$
\phi(x,y,t)=\sum_{n=0}^{\infty}y^n\phi_n(x,t). \tag{3.45}
$$

Sustituyendo la expresión anterior en la condición inicial (3.11)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi(x,y,t)}{\partial y}\bigg|_{y=-h} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{n=0}^{\infty}y^n\phi_n(x,t)|_{y=-h}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial y}\left[y^n\phi_n(x,t)|_{y=-h}\right],\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}ny^{n-1}\phi_n(x,t)|_{y=-h}=\phi_1+2y\phi_2+3y^2\phi_3+...=0,
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

de lo cual se concluye que $\phi_1 = 0$ [19], por lo que solo contribuyen los términos pares de n.

La expresión (3.45) debe satisfacer la ecuación de Laplace, así se obtiene la siguiente ecuación

$$\nabla^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} y^n \phi_n(x,t) \right] = 0, \tag{3.47}$$

sustituyendo

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} y^n \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) y^{n-2} \phi_n = 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} y^n \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+2-1) y^{n+2-2} \phi_{n+2} = 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[y^n \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} + (n+2)(n+1) y^n \phi_{n+2} \right] = 0, \end{aligned} \tag{3.48}$$

de esta manera se obtiene la identidad

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n \left[\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} + (n+2)(n+1) \phi_{n+2} \right] = 0. \tag{3.49}$$

De la ecuación anterior se encuentra una relación de recurrencia que depende de la segunda derivada respecto a x de la función ϕ_n.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_n}{\partial x} + (n+2)(n+1)\phi_{n+2} = 0, \\ \phi_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} \frac{\partial \phi_n}{\partial x}, \end{aligned} \tag{3.50}$$

y sustituyendo esta expresión en la ecuación (3.45) se encuentra que es de la forma ϕ

$$\phi(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2m)!} \frac{\partial^{2n} \phi_0}{\partial x^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2m)!} \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^{2n}}, \tag{3.51}$$

donde se ha definido la función $f(x,t) = \phi_0(x,t)$.

De esta forma la derivada parcial respeto a x tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(x,y,t)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2m)!} \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^{2n}}, \\ u(x,y,t) &= \frac{\partial}{\partial x} (f - \frac{1}{2} y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{24} y^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + ...) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2} y^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{1}{24} y^4 \frac{\partial^5 f}{\partial x^5} + ..., \end{aligned} \tag{3.52}$$

y la derivada parcial respecto a y es

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(x,y,t)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2m)!} \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^{2n}}, \\ v(x,y,t) &= \frac{\partial}{\partial y} (f - \frac{1}{2} y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{24} y^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + ...), \\ &= -y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{4}{24} y^3 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + ... \end{aligned} \tag{3.53}$$

Estas funciones son de suma importancia ya que son la base para encontrar la ecuación KdV.
A partir de este punto es conveniente por razones de simplicidad renombrar todas las funciones y variables empleadas en cantidades adimensionales. Esto simplifica los cálculos en el sentido que permite separar términos que no están relacionados físicamente.

$$\overline{x} \equiv \frac{x}{l}, \quad \overline{y} \equiv \frac{y}{h}, \quad \overline{t} \equiv \frac{c_0}{l}t, \quad \overline{\eta} \equiv \frac{\eta}{a}, \quad \overline{f(x,t)} \equiv \frac{hf(x,t)}{ac_0 l}. \tag{3.54}$$

Estas cantidades características representan condiciones iniciales de la geometría del problema [19], de tal forma que la profundidad h del canal y su longitud característica l cumplen con la condición $l >> h$ mientras que la amplitud característica de la onda a se relaciona con la profundidad h del canal por la relación $h >> a$.
Definiendo ahora las pequeñas cantidades

$$\epsilon \equiv \frac{a}{h}, \quad \delta \equiv \left(\frac{h}{l}\right)^2. \tag{3.55}$$

La condición (3.12) se reescribe como

$$y|_{y=sup} = h + \eta(x,t) = h + a\overline{\eta} = h\left(1 + \frac{a}{h}\overline{\eta}\right), \tag{3.56}$$

o bien

$$\begin{aligned} \frac{y|_{y=sup}}{h} &= 1 + \epsilon\overline{\eta}, \\ \overline{y}|_{y=sup} &= 1 + \epsilon\overline{\eta}, \end{aligned} \tag{3.57}$$

mientras que la ecuación (3.51) se puede reescribir en la superficie de la forma

$$\phi(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!}\frac{\partial^{2n} f}{\partial x^{2n}} = f(x,t) - \frac{1}{2}y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{4!}y^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - ..., \tag{3.58}$$

redefiniendo la función ϕ y sus variabes

$$\begin{aligned} \phi(x,y,t) &= \overline{f(x,t)}\epsilon l c_0 - \frac{1}{2}(\overline{y}h)^2\frac{\partial^2\overline{x}}{\partial x^2}\frac{\partial^2\overline{f(x,t)}\epsilon l c_0}{\partial\overline{x}^2} + \frac{1}{4!}(\overline{y}h)^4\frac{\partial^4\overline{x}}{\partial x^4}\frac{\partial^4\overline{f(x,t)}\epsilon l c_0}{\partial\overline{x}^4} - ..., \\ &= \epsilon l c_0\left[\overline{f(x,t)} - h^2\frac{1}{2}(1+\epsilon\eta)^2\frac{1}{l^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\overline{x}^2} + h^4\frac{1}{4!}(1+\epsilon\eta)^4\frac{1}{l^4}\frac{\partial^4 f}{\partial\overline{x}^4} - ...\right], \end{aligned} \tag{3.59}$$

acomodando los términos

$$\frac{\phi(x,y,t)}{\epsilon l c_0} = \overline{f(x,t)} - \frac{h^2}{l^2}\frac{1}{2}(1+\epsilon\eta)^2\frac{\partial^2\overline{f(x,t)}}{\partial\overline{x}^2} + \frac{h^4}{l^4}\frac{1}{4!}(1+\epsilon\eta)^4\frac{\partial^4\overline{f(x,t)}}{\partial\overline{x}^4} - ..., \tag{3.60}$$

re-definiendo la función ϕ

$$\begin{aligned} \overline{\phi(x,y,t)} &= \overline{f(x,t)} - \delta\frac{1}{2}(1+\epsilon\eta)^2\frac{\partial^2\overline{f(x,t)}}{\partial\overline{x}^2} + \delta^2\frac{1}{4!}(1+\epsilon\eta)^4\frac{\partial^4\overline{f(x,t)}}{\partial\overline{x}^4} - ..., \\ &= \overline{f(x,t)} - \delta\frac{1}{2}(1+2\epsilon\eta+\epsilon^2\eta^2)\frac{\partial^2\overline{f(x,t)}}{\partial\overline{x}^2} + O^2, \\ &= \overline{f(x,t)} - \frac{1}{2}(\delta+2\delta\epsilon\eta+\delta\epsilon^2\eta^2)\frac{\partial^2\overline{f(x,t)}}{\partial\overline{x}^2} + O^2, \\ &= \overline{f(x,t)} - \frac{1}{2}\delta\frac{\partial^2\overline{f(x,t)}}{\partial\overline{x}^2} + O^2, \end{aligned} \tag{3.61}$$

donde el termino O^2 denota a todos los sumandos con términos como ϵ^2, δ^2 y $\epsilon\delta$ que tienen potencia dos o superiores.
Con esta notación se reescriben la ecuación (3.52) como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{\phi(x,y,t)}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\overline{f(x,t)} - \frac{1}{2}\delta\frac{\partial^2\overline{f(x,t)}}{\partial\overline{x}^2} + O^2\right],\\
\frac{\partial\overline{x}}{\partial x}\frac{\partial\overline{\phi(x,y,t)}}{\partial\overline{x}} &= \frac{\partial\overline{x}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\overline{x}}\left[\overline{f(x,t)} - \frac{1}{2}\delta\frac{\partial^2\overline{f(x,t)}}{\partial\overline{x}^2} + O^2\right],\\
\frac{1}{l}\frac{\partial\overline{\phi(x,y,t)}}{\partial\overline{x}} &= \frac{1}{l}\left[\frac{\partial\overline{f(x,t)}}{\partial\overline{x}} - \frac{1}{2}\delta\frac{\partial}{\partial\overline{x}}\frac{\partial^3\overline{f(x,t)}}{\partial\overline{x}^3} + O^2\right],
\end{aligned}\tag{3.62}$$

luego de realizar un paso de álgebra se logra obtener la función $\overline{u}$

$$\overline{u(x,y,t)} = \frac{\partial\overline{f(x,t)}}{\partial\overline{x}} - \frac{1}{2}\delta\frac{\partial^3\overline{f}}{\partial\overline{x}^3} + O^2,\tag{3.63}$$

análogamente para encontrar la función $\overline{v}$ (3.53) se tiene

$$\frac{\partial\phi(x,y,t)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[f - \frac{y^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{dx^2} + \frac{y^4}{4!}\frac{\partial^4 f}{dx^4} + ...\right],\tag{3.64}$$

simplificando

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{y}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\overline{y}}\left(\epsilon l c_0\overline{\phi(x,y,t)}\right) &= \frac{\partial\overline{y}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\overline{y}}\left[\epsilon l c_0\overline{f} - \frac{(h\overline{y})^2}{2!l^2}\frac{\partial^2\epsilon l c_0\overline{f}}{\partial\overline{x}^2} + \frac{(h\overline{y})^4}{4!l^4}\frac{\partial^4\epsilon l c_0\overline{f}}{\partial\overline{x}^4} + ...\right],\\
\frac{\epsilon l c_0}{h}\frac{\partial\overline{\phi(x,y,t)}}{\partial\overline{y}} &= \frac{\epsilon l c_0}{h}\frac{\partial}{\partial\overline{y}}\left[\overline{f} - \frac{(h\overline{y})^2}{2!l^2}\frac{\partial^2\overline{f}}{\partial\overline{x}^2} + \frac{(h\overline{y})^4}{4!l^4}\frac{\partial^4\overline{f}}{\partial\overline{x}^4} + ...\right],\\
\frac{\partial\overline{\phi(x,y,t)}}{\partial\overline{y}} &= -\frac{2h^2\overline{y}}{2!l^2}\frac{\partial^2\overline{f}}{\partial\overline{x}^2} + \frac{4h^4\overline{y}^3}{4!l^4}\frac{\partial^4\overline{f}}{\partial\overline{x}^4} + ...,
\end{aligned}\tag{3.65}$$

así se obtine la función $\overline{v}$

$$\begin{aligned}
\overline{v(x,y,t)} &= -\overline{y}\delta\frac{\partial^2\overline{f}}{\partial\overline{x}^2} + \frac{1}{6}\delta^2\overline{y}^3\frac{\partial^4\overline{f}}{\partial\overline{x}^4} + ...,\\
&= -\delta\left[(1+\epsilon\eta)\frac{\partial^2\overline{f}}{\partial\overline{x}^2} - \frac{1}{6}\delta(1+\epsilon\eta)^3\frac{\partial^4\overline{f}}{\partial\overline{x}^4} + ...\right],\\
&= -\delta\left[(1+\epsilon\eta)\frac{\partial^2\overline{f}}{\partial\overline{x}^2} - \frac{1}{6}\delta\frac{\partial^4\overline{f}}{\partial\overline{x}^4} + O^2\right].
\end{aligned}\tag{3.66}$$

Otra expresión que es importante reescribir en términos de estas variables adimensionales es la expresión (3.14) la cual es posible obtener mediante la siguiente álgebra

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial\phi(x,y,t)}{\partial y}\right|_{y=sup} &= \frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t} + \left.\frac{\partial\phi(x,y,t)}{\partial x}\right|_{y=sup}\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial x},\\
\left.\frac{\partial\overline{y}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\overline{y}}\left(\epsilon l c_0\overline{\phi}\right)\right|_{y=sup} &= \frac{\partial\overline{t}}{\partial t}\frac{\partial a\overline{\eta}}{\partial\overline{t}} + \left.\frac{\partial\overline{x}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\overline{x}}\left(\epsilon l c_0\overline{\phi}\right)\right|_{y=sup}\frac{\partial\overline{x}}{\partial x}\frac{\partial a\overline{\eta}}{\partial\overline{x}},\\
\left.\frac{\epsilon l c_0}{h}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{y}}\right|_{y=sup} &= \frac{a c_0}{l}\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{t}} + \left.\frac{a\epsilon l c_0}{l^2}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{x}}\right|_{y=sup}\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{x}},\\
\left.\frac{\epsilon l}{h}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{y}}\right|_{y=sup} &= \frac{a}{l}\left[\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{t}} + \epsilon\left.\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{x}}\right|_{y=sup}\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{x}}\right],\\
\left.\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{y}}\right|_{y=sup} &= \frac{ah}{l^2\epsilon}\left[\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{t}} + \epsilon\left.\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{x}}\right|_{y=sup}\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{x}}\right] = \frac{h^2}{l^2}\left[\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{t}} + \epsilon\left.\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{x}}\right|_{y=sup}\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{x}}\right].
\end{aligned}\tag{3.67}$$

O bien

$$
\begin{aligned}
\overline{v} &= \delta\left[\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{t}} + \epsilon\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{x}}\bigg|_{y=sup}\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{x}}\right] = \delta\left[\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{t}} + \epsilon\frac{\partial}{\partial\overline{x}}\left[\overline{f} - \frac{1}{2}(1+\epsilon\eta)^2\delta\frac{\partial^2\overline{f}}{\partial\overline{x}^2} + O^2\right]\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{x}}\right],\\
&= \delta\left[\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{t}} + \epsilon\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}}\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{x}} - \frac{1}{2}(1+\epsilon\eta)^2\delta\epsilon\frac{\partial^3\overline{f}}{\partial\overline{x}^3}\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{x}} + (1+\epsilon\eta)\delta\epsilon\frac{\partial^2\overline{f}}{\partial\overline{x}^2}\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{x}}\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{x}} + O^2\right],\\
&= \delta\left[\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{t}} + \epsilon\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}}\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{x}} + O^2\right]. \qquad (3.68)
\end{aligned}
$$

De las ecuaciones (3.66) y (3.68) se obtiene la siguiente igualdad

$$
\begin{aligned}
-\delta\left[(1+\epsilon\eta)\frac{d^2\overline{f}}{d\overline{x}^2} - \frac{1}{6}\delta\frac{d^4\overline{f}}{d\overline{x}^4} + O^2\right] &= \delta\left[\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{t}} + \epsilon\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}}\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{x}} + O^2\right]\\
(1+\epsilon\eta)\frac{d^2\overline{f}}{d\overline{x}^2} - \frac{1}{6}\delta\frac{d^4\overline{f}}{d\overline{x}^4} + \frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{t}} + \epsilon\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}}\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{x}} + O^2 &= 0. \qquad (3.69)
\end{aligned}
$$

Por último, en forma similar la ecuación (3.15) se reescribe de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\phi}{\partial t}\bigg|_{y=sup} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\bigg|_{y=sup} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\bigg|_{y=sup} + g\eta = 0,\\
&\frac{\partial\overline{t}}{\partial t}\frac{\partial(\epsilon lc_0\overline{\phi})}{\partial\overline{t}}\bigg|_{y=sup} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{x}}{\partial x}\frac{\partial(\epsilon lc_0\overline{\phi})}{\partial\overline{x}}\right)^2\bigg|_{y=sup} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{y}}{\partial y}\frac{\partial(\epsilon lc_0\overline{\phi})}{\partial\overline{y}}\right)^2\bigg|_{y=sup} + ga\overline{\eta} = 0,\\
&\frac{c_0\epsilon lc_0}{l}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{t}}\bigg|_{y=sup} + \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon lc_0}{l}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{x}}\right)^2\bigg|_{y=sup} + \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon lc_0}{h}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{y}}\right)^2\bigg|_{y=sup} + ga\overline{\eta} = 0,\\
&\frac{c_0^2\epsilon}{ga}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{t}}\bigg|_{y=sup} + \frac{(\epsilon c_0)^2}{2ga}\left(\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{x}}\right)^2\bigg|_{y=sup} + \frac{(\epsilon lc_0)^2}{2gah^2}\left(\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{y}}\right)^2\bigg|_{y=sup} + \overline{\eta} = 0,\\
&\frac{gha}{hga}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{t}}\bigg|_{y=sup} + \frac{a^2gh}{2h^2ga}\left(\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{x}}\right)^2\bigg|_{y=sup} + \frac{(al)^2gh}{2gah^4}\left(\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{y}}\right)^2\bigg|_{y=sup} + \overline{\eta} = 0,\\
&\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{t}}\bigg|_{y=sup} + \frac{a}{2h}\left(\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{x}}\right)^2\bigg|_{y=sup} + \frac{al^2}{2h^3}\left(\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{y}}\right)^2\bigg|_{y=sup} + \overline{\eta} = 0,\\
&\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{t}}\bigg|_{y=sup} + \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{x}}\right)^2\bigg|_{y=sup} + \frac{\epsilon}{2\delta}\left(\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{y}}\right)^2\bigg|_{y=sup} + \overline{\eta} = 0,\\
&\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{t}} + \frac{\epsilon}{2}(\overline{u})^2 + \frac{\epsilon}{2\delta}(\overline{v})^2 + \overline{\eta} = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial\overline{t}}\left(\overline{f} - \frac{\delta}{2}\frac{\partial^2\overline{f}}{\partial\overline{x}^2}\right) + \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}} - \frac{\delta}{2}\frac{\partial^3\overline{f}}{\partial\overline{x}^3}\right)^2 + \frac{\epsilon}{2\delta}\left(\delta\left[\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{t}} + \epsilon\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}}\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{x}}\right]\right)^2 + O^2 + \overline{\eta} = 0,\\
&\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{t}} - \frac{\delta}{2}\frac{\partial^3\overline{f}}{\partial t\partial\overline{x}^2} + \frac{\epsilon}{2}\left[\left(\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}}\right)^2 - \delta\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}}\frac{\partial^3\overline{f}}{\partial\overline{x}^3} + \left(\frac{\delta}{2}\frac{\partial^3\overline{f}}{\partial\overline{x}^3}\right)^2\right] + \frac{\epsilon\delta^2}{2\delta}\left(\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{t}} + \epsilon\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}}\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\overline{x}}\right)^2 + O^2 + \overline{\eta} = 0,\\
&\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{t}} - \frac{\delta}{2}\frac{\partial^3\overline{f}}{\partial t\partial\overline{x}^2} + \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}}\right)^2 + \overline{\eta} + O^2 = 0, \qquad (3.70)
\end{aligned}
$$

Para simplificar el problema se propone el cambio de variable

$$
\beta = \frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}}. \qquad (3.71)
$$

De aquí en adelante las cantidades que serán empleadas son las definidas en (3.54), por lo que ya no será necesario denotarlas como $\overline{x}$ y solamente denotarlas como x respectivamente. Calculando la derivada parcial respecto a x en (3.70) se encuentra

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} - \frac{\delta}{2}\frac{\partial^4 f}{\partial t \partial x^3} + \frac{\epsilon}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \eta}{\partial x} + O^2 = 0, \tag{3.72}$$

sustituyendo entonces la ecuación (3.71) en la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial t} - \frac{\delta}{2}\frac{\partial^3 \beta}{\partial t \partial x^2} + \frac{\epsilon}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\beta^2) + \frac{\partial \eta}{\partial x} + O^2 = 0, \\ \frac{\partial \beta}{\partial t} - \frac{\delta}{2}\frac{\partial^3 \beta}{\partial t \partial x^2} + \epsilon\beta\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + O^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.73}$$

Ahora, escribiendo la ecuación (3.69) en términos de la ecuación (3.71) se obtiene

$$(1+\epsilon\eta)\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\delta}{6}\frac{\partial^3 \beta}{\partial x^3} + \frac{\partial \eta}{\partial t} + \epsilon\beta\frac{\partial \eta}{\partial x} + O^2 = 0. \tag{3.74}$$

Las ecuaciones (3.73) y (3.74) relacionan a β y η cuando $\delta = \epsilon = 0$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \beta}{\partial t} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}, \end{aligned} \tag{3.75}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial t}. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Al calcular las derivadas parciales con respecto a x y t en las ecuaciones (3.75) y (3.76) respectivamente se obtienen las ecuaciones de onda

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}, \tag{3.77}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \tag{3.78}$$

Por lo tanto se propone que la función β sea de la forma

$$\beta = \eta + \epsilon F(x,t) + \delta G(x,t) + O^2. \tag{3.79}$$

Es importante observar que las constantes δ, ϵ representan cantidades físicas diferentes a partir de su definición en (3.55).
Bajo estas condiciones se considera que la expresión $\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x}$ es de primer orden en ϵ y δ.
Estas condiciones son de suma importancia ya que establece la siguiente condición

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial t}\right) &= 2\delta\frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial t} &= 2\frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\frac{\partial \eta}{\partial x}. \end{aligned} \tag{3.80}$$

A partir de la ecuación (3.79) se tiene que los términos F y G están multiplicados por ϵ y δ respectivamente, y de manera análoga a la ecuación (3.80) se establecen las siguientes condiciones

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial t}=O^1, \tag{3.81}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial t}=O^1, \tag{3.82}$$

lo cual implica que estas ecuaciones son de primero orden en δ y ϵ.
Sustituyendo la ecuación (3.79) en la ecuación (3.73) y considerando todos los términos de ϵ y δ de orden dos y los términos de orden superior son despreciables y se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\Big(\eta+\epsilon F(x,t)+\delta G(x,t)\Big)-\frac{\delta}{2}\frac{\partial^3}{\partial t\partial x^2}\Big(\eta+\epsilon F(x,t)+\delta G(x,t)\Big)\\
&+\epsilon\Big(\eta+\epsilon F(x,t)+\delta G(x,t)\Big)\frac{\partial}{\partial x}\Big(\eta+\epsilon F(x,t)+\delta G(x,t)\Big)+\frac{\partial\eta}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial\eta}{\partial t}+\epsilon\frac{\partial F}{\partial t}+\delta\frac{\partial G}{\partial t}-\frac{\delta}{2}\frac{\partial^3\eta}{\partial t\partial x^2}+\epsilon\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\eta}{\partial x}+\epsilon\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\delta\left(\frac{\partial G}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^3\eta}{\partial t\partial x^2}\right)=0.
\end{aligned} \tag{3.83}$$

De la misma manera, al sustituir la ecuación (3.79) en la ecuación (3.74) se encuentra la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
&(1+\epsilon\eta)\frac{\partial}{\partial x}\Big(\eta+\epsilon F(x,t)+\delta G(x,t)\Big)-\frac{\delta}{6}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\Big(\eta+\epsilon F(x,t)+\delta G(x,t)\Big)\\
&+\frac{\partial\eta}{\partial t}+\epsilon\Big(\eta+\epsilon F(x,t)+\delta G(x,t)\Big)\frac{\partial\eta}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial t}+\epsilon\frac{\partial F}{\partial x}+\delta\frac{\partial G}{\partial x}+\epsilon\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\delta}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}+\epsilon\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial t}+\epsilon\left(\frac{\partial F}{\partial x}+2\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\delta\left(\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{1}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\right)=0.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Restando las ecuaciones (3.83) y (3.84) se encuentra

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\eta}{\partial x}+\epsilon\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\delta\left(\frac{\partial G}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^3\eta}{\partial t\partial x^2}\right)\\
&-\left[\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial t}+\epsilon\left(\frac{\partial F}{\partial x}+2\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\delta\left(\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{1}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\right)\right]=0,\\
&\epsilon\left(\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial F}{\partial x}-2\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}+\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\delta\left(\frac{\partial G}{\partial t}-\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial^3\eta}{\partial t\partial x^2}+\frac{1}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\right)=0,\\
&\epsilon\left(\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial F}{\partial x}-\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\delta\left(\frac{\partial G}{\partial t}-\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial^3\eta}{\partial t\partial x^2}+\frac{1}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\right)=0.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Ya que las constantes ϵ y δ representan cantidades físicas diferentes, entonces los sumandos de la ecuación anterior deben ser linealmente independientes entre sí, por lo tanto cada

término es igual a cero.
De esta manera se tienen las siguientes EDP para F y para G

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial x} - \eta\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \tag{3.86}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial x^2} + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0, \tag{3.87}$$

respectivamente y que pueden ser resueltas de manera independiente.
Para resolver la ecuación (3.86) se usa la condición (3.81), pero dado que la ecuación (3.86) es un sumando que esta multiplicado por ϵ entonces (3.81) es igual a cero y de esta forma se obtiene $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial t}$.
Por lo tanto la ecuación (3.86) se resuelve como sigue

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial x} - \eta\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0,\\
&-\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} - \eta\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0,\\
&-2\frac{\partial F}{\partial x} - \eta\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0,\\
&2\frac{\partial F}{\partial x} = -\eta\frac{\partial \eta}{\partial x},\\
&2\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \eta^2}{\partial x},
\end{aligned} \tag{3.88}$$

La solución de esta EDP se obtiene simplemente integrando

$$F(x,t) = -\frac{1}{4}\eta^2. \tag{3.89}$$

Para la ecuación (3.87) se sigue un procedimiento análogo.
La condición (3.82) establece la relación $\frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{\partial G}{\partial t}$, de tal forma que junto con la condición (3.80), la ecuación (3.87) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial x^2} + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0,\\
&-\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{6}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = 0,\\
&-2\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = 0,\\
&2\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{2}{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right),\\
&\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{3}\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3},
\end{aligned} \tag{3.90}$$

así integrando se obtiene

$$G(x,t) = \frac{1}{3}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \tag{3.91}$$

Empleando los resultados (3.89) y (3.91) en la solución (3.79) se obtiene que

$$\beta = \eta - \frac{\epsilon}{4}\eta^2 + \frac{\delta}{3}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \tag{3.92}$$

Reemplazando ahora la expresión anterior para la frecuencia en la ecuación (3.74) se encuentra

$$
\begin{aligned}
&(1+\epsilon\eta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta-\frac{\epsilon}{4}\eta^2+\frac{\delta}{3}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)-\frac{\delta}{6}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\eta-\frac{\epsilon}{4}\eta^2+\frac{\delta}{3}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)\\
&+\frac{\partial\eta}{\partial t}+\epsilon\left(\eta-\frac{\epsilon}{4}\eta^2+\frac{\delta}{3}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}=0, \qquad (3.93)
\end{aligned}
$$

simplificando

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\epsilon}{4}\frac{\partial(\eta^2)}{\partial x}+\frac{\delta}{3}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}+\epsilon\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\delta}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}+\frac{\partial\eta}{\partial t}+\epsilon\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial t}-\frac{\epsilon}{2}\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}+2\epsilon\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\delta}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}=0, \qquad (3.94)
\end{aligned}
$$

o bien

$$
\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{3\epsilon}{2}\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\delta}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}=0, \qquad (3.95)
$$

que esencialmente es la ecuación KdV [1].
Para que la ecuación anterior se pueda manipular más fácilmente, es necesario eliminar el término lineal de la derivada parcial respecto a la variable x de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{3\epsilon}{2}\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\delta}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}=0,\\
&\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\left(1+\frac{3\epsilon}{2}\eta\right)+\frac{\delta}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}=0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2}{3\epsilon}+\eta\right)+\frac{2}{3\epsilon}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3\epsilon}+\eta\right)\right]\left(\frac{3\epsilon}{2}+\eta\right)+\frac{\delta}{6}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{2}{3\epsilon}+\eta\right)=0,\\
&\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\frac{3\epsilon\sigma}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\delta}{6}\frac{\partial^3\sigma}{\partial x^3}=0, \qquad (3.96)
\end{aligned}
$$

donde $\sigma(x,t)=\frac{2}{3\epsilon}+\eta$.
La ecuación (3.96) es una de las variantes de la ecuación KdV más usada en la literatura [6], en donde las constantes ϵ y δ están relacionadas con las variables características del problema físico. Es conveniente escoger valores para dichas constantes que simplifiquen la ecuación.
Para otras deducciones diferentes ver [11, 20, 21].

3.2. Solución a la ecuación KdV

En la sección anterior se realizo un procedimiento general para derivar un modelo que describe el comportamiento de fenómenos que se propagan en la superficie de un fluido de un canal por medio de una ecuación diferencial, la ecuación KdV.
En esta sección y en las posteriores se considera que la ecuación KdV tiene la siguiente forma

$$
\frac{\partial u}{\partial t}+\delta u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0, \qquad (3.97)
$$

y que es una de las versiones más usadas para esta ecuación en la literatura [2, 12, 4, 5, 6]. Una manera de resolver la ecuación (3.97) es proponer que la función u sea una onda de choque de la forma

$$u(x,t) = f(x - vt), \tag{3.98}$$

de donde la función f esta por determinar y se supone que satisface las siguientes condiciones asintóticas empleando el cambio de variable, $\xi = x - vt$

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} f(\xi) = \lim_{\xi\to\pm\infty} f'(\xi) = \lim_{\xi\to\pm\infty} f''(\xi) = 0, \tag{3.99}$$

se transforma la EDP se transforma en una EDO

$$-vf' + f''' + \delta f f' = 0, \tag{3.100}$$

donde f' denota la derivada $\frac{df}{d\xi}$.

Uno de los métodos para resolver la ecuación (3.100) es el siguiente.

Primero se integra la ecuación (3.100) para reducir su orden

$$-vf + f'' + \frac{\delta}{2} f^2 = a, \tag{3.101}$$

donde a una constante de integración.

Se multiplica ambos lados de (3.101) por $2f'$ y se integra nuevamente

$$\begin{aligned} -2vff' + 2f'f'' + \delta f' f^2 &= 2af' \\ -vf^2 + (f')^2 + \frac{\delta}{3} f^3 &= 2af + b, \end{aligned} \tag{3.102}$$

donde b es otra constante de integración.

A partir de las condiciones asintóticas (3.99) se tiene que $a = b = 0$

$$-vf^2 + (f')^2 + \eta f^3 = 0, \tag{3.103}$$

con $\eta = \delta/3$.

La ecuación (3.103) se puede resolver por el método de variables separables, el cual consiste en despejar a f' e integrar

$$\begin{aligned} (f')^2 &= vf^2 - \eta f^3 = f^2(v - \eta f) \\ \frac{df}{d\xi} &= \pm f\sqrt{v - \eta f} \\ \frac{df}{f\sqrt{v-\eta f}} &= \pm d\xi. \end{aligned} \tag{3.104}$$

La ecuación (3.104) se resuelve a detalle en el apéndice A, encontrando que

$$\frac{1}{\sqrt{v}} ln \left| \frac{\sqrt{v - \eta f} - \sqrt{v}}{\sqrt{v - \eta f} + \sqrt{v}} \right| = \pm(\xi - \xi_0). \tag{3.105}$$

La última parte del método radica en despejar a la función f.

Haciendo el cambio de variable, $y = \pm\sqrt{v}(\xi - \xi_0)$, en (3.105) se reduce a

$$ln \left| \frac{\sqrt{v - \eta f} - \sqrt{v}}{\sqrt{v - \eta f} + \sqrt{v}} \right| = y, \tag{3.106}$$

simplificando

$$
\begin{aligned}
\pm\frac{\sqrt{v-\eta f}-\sqrt{v}}{\sqrt{v-\eta f}+\sqrt{v}} &= e^{y}, \\
\pm\sqrt{v-\eta f}\mp\sqrt{v} &= (\sqrt{v}+\sqrt{v-\eta f})e^{y}, \\
\pm\sqrt{v-\eta f}\mp\sqrt{v} &= e^{y}\sqrt{v}+e^{y}\sqrt{v-\eta f}, \\
\pm\sqrt{v-\eta f}-e^{y}\sqrt{v-\eta f} &= e^{y}\sqrt{v}\pm\sqrt{v}, \\
\sqrt{v-\eta f}(\pm 1-e^{y}) &= \sqrt{v}(e^{y}\pm 1). \qquad (3.107)
\end{aligned}
$$

Elevando al cuadrado ambos términos de (3.107) se obtiene

$$
(\sqrt{v-\eta f}(\pm 1-e^{y}))^2 = (\sqrt{v}(e^{y}\pm 1))^2, \qquad (3.108)
$$

se realiza un poco de álgebra para despejar a f, así

$$
\begin{aligned}
&(v-\eta f)(\pm 1-e^{y})^2 = v(e^{y}\pm 1)^2, \\
&v-\eta f = \frac{v(e^{y}\pm 1)^2}{(\pm 1-e^{y})^2}, \\
&\eta f = v-\frac{v(e^{y}\pm 1)^2}{(\pm 1-e^{y})^2} = v\left(1-\frac{(e^{y}\pm 1)^2}{(\pm 1-e^{y})^2}\right) = v\left(\frac{(\pm 1-e^{y})^2-(e^{y}\pm 1)^2}{(\pm 1-e^{y})^2}\right) \\
&= v\left(\frac{1\mp 2e^{y}+e^{2y}-(e^{2y}\pm 2e^{y}+1)}{(\pm 1-e^{y})^2}\right) = v\left(\frac{1\mp 2e^{y}+e^{2y}-e^{2y}\mp 2e^{y}-1}{(\pm 1-e^{y})^2}\right), \\
&= v\left(\frac{\mp 4e^{y}}{(\pm 1-e^{y})^2}\right), \qquad (3.109)
\end{aligned}
$$

de esta manera se puede expresar la función f como

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{v}{\eta}\left(\frac{\mp 4}{e^{-y}(\pm 1-e^{y})^2}\right) = \frac{v}{\eta}\left(\frac{\mp 4}{(e^{-y/2}(\pm 1-e^{y}))^2}\right) = \frac{v}{\eta}\left(\frac{\mp 4}{(\pm e^{-y/2}-e^{y/2})^2}\right), \\
&= \frac{3v}{\delta}\left(\frac{\mp 4}{(\pm e^{-y/2}-e^{y/2})^2}\right). \qquad (3.110)
\end{aligned}
$$

De la ecuación anterior se tiene que la solución se puede dividir en dos casos, el primero es considerando el signo $+$ en el numerador y el signo $-$ en el denominador, y usando la identidad $2\cosh(y/2) = e^{y/2}+e^{-y/2}$ entonces

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{3v}{\delta}\left(\frac{+4}{(-e^{-y/2}-e^{y/2})^2}\right) = \frac{3v}{\delta}\left(\frac{4}{(-2\cosh(y/2))^2}\right), \\
&= \frac{3v}{\delta}\left(\frac{4}{4\cosh^2(y/2)}\right) = \frac{3v}{\delta}\mathsf{sech}^2(y/2), \\
&= \frac{3v}{\delta}\mathsf{sech}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x-vt-\xi_0)\right), \qquad (3.111)
\end{aligned}
$$

que es una función bien definida en cero y corresponde a una onda viajera que se propaga a la derecha. Si en su lugar se considera una onda que está viajando a la izquierda, entonces se debe reemplazar $-v$ por $+v$. La constante ξ_0 por otro lado determina la posición inicial de la onda.

A la expresión (3.111) se le conoce como una solución tipo solitón y fue analizada numéricamente en 1965 por R. M. Miura, M. D. Kruskal, C. S. Gardner y J. M. Greene [13, 14, 15, 16, 17, 18]. Los resultados de la simulación revelaron que cuando dos ondas se aproximan sus formas se van distorsionando hasta que eventualmente se sobreponen. Cuando ambas ondas reemergen estas conservan su forma y tamaño originales. El único resultado que se presenta de esta interacción es un cambio de fase relativo debido a la interacción no lineal [2, 12, 4, 6].
A causa de este comportamiento N. J. Zabruski y M. D. Kruskal llamaron a este tipo de ondas solitones ya que se asemejan más a partículas y no a ondas.
Se puede decir entonces que las propiedades principales que cumplen los solitones son las siguientes:

- Preservan su forma.
- Son localizados en una región.
- Cuando dos solitones interaccionan solo se ven afectados por un cambio de fase.

Físicamente los solitones son ondas solitarias que se autosoportan mientras se propagan a velocidad constante y sin deformarse en un medio no lineal y dispersivo. Los solitones se producen a través de una cancelación entre la no linealidad y los efectos dispersivos del medio en el que se propagan. Actualmente en la solución (3.111) de la ecuación KdV se le conoce como *uno*-solitón.
La segunda solución se obtiene al considerar el signo $-$ en el numerador y el signo $+$ en el denominador, usando la identidad $2\sinh(y/2) = e^{y/2} - e^{-y/2}$

$$\begin{aligned} f &= \frac{3v}{\delta}\left(\frac{-4}{(+e^{-y/2}-e^{y/2})^2}\right) = \frac{3v}{\delta}\left(\frac{-4}{(-2\sinh(y/2))^2}\right) = \frac{3v}{\delta}\left(\frac{-4}{4\sinh^2(y/2)}\right), \\ &= \frac{3v}{\delta}\mathsf{csch}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x-vt-\xi_0)\right), \end{aligned} \tag{3.112}$$

pero esta expresión no satisface las condiciones anteriores debido a que no está localizada en una región y por lo tanto no es un solitón.
La tercera solución de la ecuación (3.97) se encuentra al considerar la onda de que de la forma

$$u(x,t) = f(x+vt), \tag{3.113}$$

lo que conlleva a reescribir la ecuación (3.104) como

$$\begin{aligned} (f')^2 &= -vf^2 - \eta f^3 = f^2(-v-\eta f), \\ \frac{df}{d\xi} &= \pm f\sqrt{-v-\eta f}, \\ \frac{df}{if\sqrt{v+\eta f}} &= \pm d\xi, \end{aligned} \tag{3.114}$$

donde $i = \sqrt{-1}$. La solución a la integral anterior es la misma que se encuentra en el A, con la única diferencia que en la ecuación (3.114) tiene un factor de i. Se puede reescribir la ecuación (3.110) como

$$f = v\left(\frac{\mp 4e^{iy}}{(\pm 1 - e^{iy})^2}\right), \tag{3.115}$$

y por lo tanto la solución puede ser expresada como

$$f = \frac{3v}{\delta}\sec^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt - \xi_0)\right), \tag{3.116}$$

Donde la función *sec* es una función que no se encuentra definida en los múltiplos impares de $\pi/2$, por lo tanto no es una solución tipo solitón.
En la gráfica (3.2) se muestra como es el comportamiento de las soluciones de la ecuación (3.98).

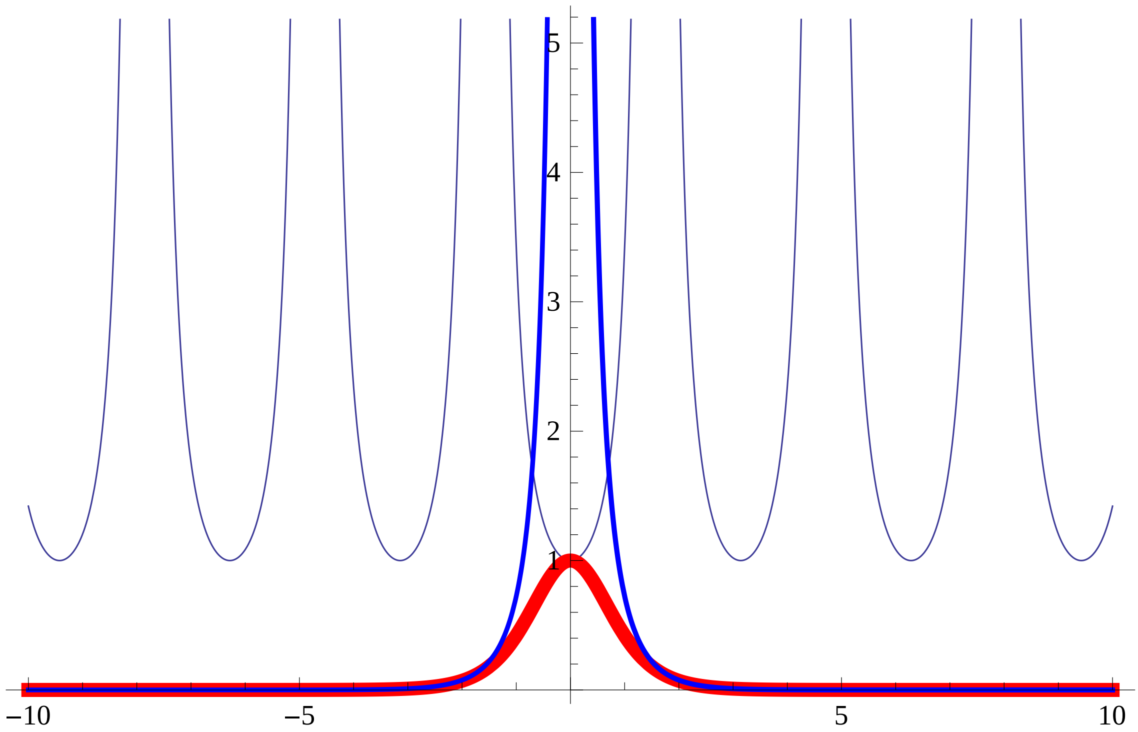


Figura 3.2: Comportamiento de u.

La linea roja representa a la solución (3.111) y se observa que es uniforme en todo el intervalo. La linea azul fina representa la la solución (3.116) donde se observan las discontinuidades de la función, mientras que la linea azul gruesa representa a la solución (3.112) donde se observa que no se encuentra definida en el punto $x = 0$. Concluyendo gráficamente que las soluciones (3.112) y (3.116) no son soluciones tipo solitón.
Para un estudio más detallado de esta sección pueden ser consultadas las siguientes referencias [2, 6, 5, 4, 13, 14, 15, 16, 17, 18].

Capítulo 4

La transformada de dispersión inversa

El método de la transformada de dispersión inversa es una técnica propuesta por V. Marchenko en 1950 para recuperar el potencial de la ecuación de Schrödinger en problemas de dispersión y el principal elemento empleado es la ecuación integral de Gelfand y Levitan en un intervalo semi infinito [3, 5, 4]. Posteriormente R. M. Miura, M. D. Kruskal, C. S. Gardner y J. M. Greene encontraron que este potencial es una solución a la ecuación KdV de tipo solitón [2, 4, 3, 12, 23, 5]
El método de la transformada de dispersión inversa consiste brevemente en los siguientes pasos:

- Resolver el problema de la dispersión directa esto es, encontrar los correspondientes coeficientes de dispersión en $t = 0$ que están dados por los coeficientes de reflexión, transmisión y los niveles de energía del sistema para el potencial $u(x,t)$ que satisface la condición inicial de la ecuación KdV $u(x,0) = u(x)$.

- Usando la formulación de Lax se calcula la evolución temporal de los coeficientes de dispersión, al resolver un sistema de ecuaciones diferenciales.

- Resolver la ecuación integral Gelfand, Levitan y Marchenko (GLM), en la cual se hace uso de los coeficientes de dispersión dependientes del tiempo y de esta forma recuperar el potencial $u(x,t)$ mediante dispersión inversa.

El siguiente diagrama resume el método

$$\begin{tikzcd}
\text{Ecuación KdV} \arrow[r, "\text{Ecuación de Schrödinger}"] \arrow[d] & \text{Dispersión a } t = 0 \arrow[d, "\text{Formulación de Lax}"] \\
u(x,t) & \text{Dispersión a } t > 0 \arrow[l, "\text{Ecuación GLM}"']
\end{tikzcd}$$

La idea detrás del procedimiento está basada en la teoría de dispersión de la mecánica cuántica en la que se consideran haces de partículas libres provenientes desde $\pm\infty$ y que

se encuentran con un potencial dispersivo inicial $u(x,0)$.
En la mecánica cuántica los estados del sistema están dados por funciones cuadrado integrables $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ y que tienen norma 1.
Este espacio de estados tienen un producto interno definido de la siguiente forma
Sean ψ, $\phi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, entonces

$$< \psi, \phi >= \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}\phi(x)dx, \tag{4.1}$$

define un producto interno tal que $\psi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ entonces $< \psi, \psi >< \infty$.
Una forma de caracterizar estas funciones de onda es la siguiente.
Las funciones ψ son llamadas estado base si tienen la forma

$$\psi(x) = e^{-x^2}, \tag{4.2}$$

mientras que, las funciones ψ que son de la forma

$$\psi(x) = e^{-ix}, \tag{4.3}$$

se les conoce como estados dispersivos [2].
La ecuación de Schrödinger describe la evolución temporal de un sistema físico en cierto estado cuántico

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + u\psi \tag{4.4}$$

donde la función $u(x)$ es una función real llamada potencial, $\hbar = h/2\pi$, h es la constante de Plank y m la masa de la partícula.
Los niveles de energía se caracterizan en discretos para los estados base ó continuos para los estados dispersivos [2, 3, 23].
La ecuación de Schrödinger puede ser interpretada como un problema de eigenvalores λ y las eigenfunciones ψ para el problema estacionario, el cual es el caso particular en el que la ecuación (4.4) no depende del tiempo y tiene la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + u(x)\psi = \lambda\psi, \tag{4.5}$$

donde λ también es interpretada como la energía del sistema cuántico. A partir de la interpretación de Copenhagen de la mecánica cuántica, la densidad de probabilidad para la posición de una partícula cuántica se encuentra dada por $|\psi|^2$, en base a esto la ecuación (4.5) implica que está probabilidad se conserva, es decir

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 dx = 0. \tag{4.6}$$

El número de onda κ, esta relacionado con la energía de la forma

$$\lambda := \frac{\sqrt{2m\kappa}}{\hbar}. \tag{4.7}$$

Analíticamente si se conoce el potencial $u(x)$, se puede encontrar la función de onda ψ de la ecuación de Schrödinger. Experimentalmente uno tiene lo contrario, es decir, en los

laboratorios uno busca recuperar el potencial $u(x)$, a través de la información de dispersión medida [2, 3, 23].
Asociado al problema estacionario, la ecuación de Schrödinger es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden que define el siguiente operador lineal

$$\widehat{L}\psi = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + u\psi = \lambda\psi. \tag{4.8}$$

Está última expresión se simplifica al considerar las unidades de tal forma que $\hbar^2/2m = 1$ en la ecuación (4.5).
Se exige que la función $u(x)$ sea una función de Faddeev [24], es decir, una función real valuada finita, que cumple con la condición

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x)|(1+|x|)dx < \infty, \tag{4.9}$$

esto garantiza que existe un número finito de niveles de energía discretos, por lo cual se excluyen los casos del oscilador armónico y el átomo de hidrógeno esto reduce el problema al de una partícula libre donde $\lambda \neq 0$ [2].

4.1. El problema de la dispersión directa

El problema de la dispersión directa consiste en encontrar los coeficientes dispersión en $t = 0$ cuando el potencial es interpretado como la condición inicial $u(x, 0) = u(x)$.
Se analiza primero el caso $\lambda = \kappa^2 > 0$, con $\kappa \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, es decir, valores reales distintos de cero.
Cuando $u(x)$ tiene soporte compacto [12], entonces en el límite asintótico $x \to \pm\infty$, $u(x) \to 0$ y la ecuación (4.8) es de la forma

$$-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \kappa^2\Psi = 0. \tag{4.10}$$

Una forma de resolver la ecuación anterior es utilizando el método del polinomio característico [25, 26, 27], de tal manera que la solución de la ecuación (4.10) es

$$\Psi(x,\kappa) = ae^{i\kappa x} + be^{-i\kappa x}, \tag{4.11}$$

donde a y b son constantes, en general complejas.
La función de onda Ψ se puede escribir en términos de la base $e^{\pm i\kappa x}$ ya que las exponenciales son linealmente independientes

$$\phi(x,\kappa) \sim e^{-i\kappa x}, \quad \overline{\phi(x,\kappa)} \sim e^{i\kappa x}, \text{ cuando } x \to -\infty, \tag{4.12}$$

$$\psi(x,\kappa) \sim e^{i\kappa x}, \quad \overline{\psi(x,\kappa)} \sim e^{-i\kappa x}, \text{ cuando } x \to \infty, \tag{4.13}$$

donde la operación complejo conjugado se denota como $\overline{\phi(x,\kappa)}$ y $\overline{\psi(x,\kappa)}$ para las funciones ϕ y ψ respectivamente.
De está manera se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\phi(x,\kappa) = a^+(\kappa)\psi(x,\kappa) + b^+(\kappa)\overline{\psi(x,\kappa)}, \tag{4.14}$$

$$\psi(x,\kappa) = a^-(\kappa)\phi(x,\kappa) + b^-(\kappa)\overline{\phi(x,\kappa)}, \tag{4.15}$$

a estas funciones se les conoce como soluciones de dispersión, donde la función ϕ corresponde al límite asintótico cuando $x \to -\infty$ y la función ψ al límite asintótico cuando $x \to \infty$.

Las constantes $a^{\pm}$ y $b^{\pm}$ se pueden establecer en términos del Wronskiano de ϕ y ψ de la siguiente forma.

El Wronskiano de ϕ y $\overline{\phi}$ es

$$\begin{aligned} W(\phi,\overline{\phi}) &= \phi\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x} - \overline{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x} = e^{-i\kappa x}\frac{\partial e^{i\kappa x}}{\partial x} - e^{i\kappa x}\frac{\partial e^{-i\kappa x}}{\partial x}, \\ &= i\kappa e^{-i\kappa x}e^{i\kappa x} - (-i\kappa)e^{i\kappa x}e^{-i\kappa x} = i\kappa + i\kappa = 2i\kappa. \end{aligned} \tag{4.16}$$

De forma análoga para ψ y $\overline{\psi}$

$$\begin{aligned} W(\psi,\overline{\psi}) &= \psi\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x} - \overline{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x} = e^{i\kappa x}\frac{\partial e^{-i\kappa x}}{\partial x} - e^{-i\kappa x}\frac{\partial e^{i\kappa x}}{\partial x}, \\ &= -i\kappa e^{i\kappa x}e^{-i\kappa x} - (i\kappa)e^{-i\kappa x}e^{i\kappa x} = -i\kappa - i\kappa = -2i\kappa. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Ambos Wronskianos son constantes respecto a x, para probar este hecho se emplea en el fondo el teorema de Abel, y se calcula la derivada respecto a x

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}W(\phi,\overline{\phi}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\phi\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x} - \overline{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = \phi\frac{\partial^2\overline{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x} - \overline{\phi}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}, \\ &= \phi\frac{\partial^2\overline{\phi}}{\partial x^2} - \overline{\phi}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

sustituyendo el valor de la derivada $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$ a partir de la ecuación (4.8) en la ecuación anterior para obtener

$$\frac{\partial}{\partial x}W(\phi,\overline{\phi}) = \phi(u-\kappa^2)\overline{\phi} - \overline{\phi}(u-\kappa^2)\phi = 0. \tag{4.19}$$

El mismo procedimiento se realiza ahora para la función ψ, de tal forma que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}W(\psi,\overline{\psi}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x} - \overline{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \psi\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x} - \overline{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ &= \psi\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial x^2} - \overline{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \psi(u-\kappa^2)\overline{\psi} - \overline{\psi}(u-\kappa^2)\psi = 0 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Los valores de las constantes a^+ y b^+ se pueden encontrar en términos de los Wronskianos de las funciones definidas en las ecuaciones (4.12) y (4.13) haciendo uso de las propiedades del Wronskiano $W(f,f) = 0$ y $W(f,g) = -W(g,f)$.

Para $W(\phi,\psi)$ se sustituye el valor de ϕ a partir de la ecuación (4.14)

$$\begin{aligned} W(\phi,\psi) &= W(a^+\psi + b^+\overline{\psi},\psi) = a^+W(\psi,\psi) + b^+W(\overline{\psi},\psi) = b^+(-W(\psi,\overline{\psi})), \\ &= -b^+(-2i\kappa) = b^+2i\kappa, \end{aligned} \tag{4.21}$$

de donde se obtiene

$$b^+(\kappa) = \frac{W(\phi,\psi)}{2i\kappa}. \tag{4.22}$$

Mientras que para $W(\phi,\overline{\psi})$ se sustituye de nuevo el valor de ϕ a partir de la ecuación (4.14), así

$$\begin{aligned} W(\phi,\overline{\psi}) &= W(a^+\psi+b^+\overline{\psi},\overline{\psi}) = a^+W(\psi,\overline{\psi})+b^+W(\overline{\psi},\overline{\psi}) = a^+W(\psi,\overline{\psi}), \\ &= a^+(-2i\kappa) = -a^+2i\kappa, \end{aligned} \tag{4.23}$$

por lo que

$$a^+(\kappa) = -\frac{W(\phi,\overline{\psi})}{2i\kappa}. \tag{4.24}$$

Análogamente, al sustituir ψ a partir de la ecuación (4.15) en $W(\psi,\phi)$ se encuentra

$$\begin{aligned} W(\psi,\phi) &= W(a^-\phi+b^-\overline{\phi},\phi) = W(a^-\phi,\phi)+W(b^-\overline{\phi},\phi) \\ &= a^-W(\phi,\phi)+b^-W(\overline{\phi},\phi) = -b^-W(\phi,\overline{\phi}), \\ &= -b^-2i\kappa, \end{aligned} \tag{4.25}$$

así,

$$\begin{aligned} b^-(\kappa) &= -\frac{W(\psi,\phi)}{2i\kappa} = -\frac{-(W(\phi,\psi))}{2i\kappa} = \frac{W(\phi,\psi)}{2i\kappa} \\ &= b^+(\kappa). \end{aligned} \tag{4.26}$$

De esta manera se concluye que $b^+(\kappa) = b^-(\kappa) = b(\kappa)$ para ambas funciones ϕ y ψ. Para el caso de la constante a^- se calcula $W(\psi,\overline{\phi})$, sustituyendo nuevamente el valor de ψ a partir de la ecuación (4.15)

$$\begin{aligned} W(\psi,\overline{\phi}) &= W(a^-\phi+b^-\overline{\phi},\overline{\phi}) = W(a^-\phi,\overline{\phi})+W(b^-\overline{\phi},\overline{\phi}) \\ &= a^-W(\phi,\overline{\phi})+b^-W(\overline{\phi},\overline{\phi}) = a^-W(\phi,\overline{\phi}), \\ &= a^-2i\kappa, \end{aligned} \tag{4.27}$$

y por lo tanto

$$a^-(\kappa) = \frac{W(\psi,\overline{\phi})}{2i\kappa}. \tag{4.28}$$

Al sustituir la ecuación (4.14) en el Wornskiano $W(\phi,\overline{\phi})$ se encuentra la siguiente propiedad

$$\begin{aligned} W(\phi,\overline{\phi}) &= W(a^+\psi+b\overline{\psi},\overline{a^+\psi+b\overline{\psi}}) = W(a^+\psi+b\overline{\psi},\overline{a^+}\overline{\psi}+\overline{b}\psi), \\ &= W(a^+\psi,\overline{a^+\psi})+W(a^+\psi,\overline{b}\psi)+W(b\overline{\psi},\overline{a^+\psi})+W(b\overline{\psi},\overline{b}\psi), \\ &= a^+\overline{a^+}W(\psi,\overline{\psi})+b\overline{b}W(\overline{\psi},\psi)+a^+\overline{b}W(\psi,\psi)+\overline{a^+}bW(\overline{\psi},\overline{\psi}), \\ &= |a^+|^2W(\psi,\overline{\psi})+|b|^2W(\overline{\psi},\psi) = |a^+|^2(-2i\kappa)+|b|^2(2i\kappa), \\ &= 2i\kappa(|b|^2-|a^+|^2), \end{aligned} \tag{4.29}$$

y al comparar este resultado con de la ecuación (4.16) se concluye que $|b|^2 - |a^+|^2 = 1$.
De manera análoga para el Wronskiano de la función ψ y $\overline{\psi}$ se tiene

$$\begin{aligned}
W(\psi, \overline{\psi}) &= W(a^-\phi + b\overline{\phi}, \overline{a^-\phi + b\overline{\phi}}) = W(a^-\phi + b\overline{\phi}, \overline{a^-}\overline{\phi} + \overline{b}\phi), \\
&= W(a^-\phi, \overline{a^-}\overline{\phi}) + W(a^-\phi, \overline{b}\phi) + W(b\overline{\phi}, \overline{a^-}\overline{\phi}) + W(b\overline{\phi}, \overline{b}\phi), \\
&= a^-\overline{a^-}W(\phi, \overline{\phi}) + b\overline{b}W(\overline{\phi}, \phi) + a^-\overline{b}W(\phi, \phi) + \overline{a^-}bW(\overline{\phi}, \overline{\phi}), \\
&= |a^-|^2 W(\phi, \overline{\phi}) + |b|^2 W(\overline{\phi}, \phi) = |a^-|^2(2i\kappa) + |b|^2(-2i\kappa), \\
&= -2i\kappa(|b|^2 - |a^-|^2), \qquad (4.30)
\end{aligned}$$

comparando comparando ahora este resultado con el de la ecuación (4.17) se observa que $|b|^2 - |a^-|^2 = 1$.
De esta manera se introducen los siguientes coeficientes

$$T(\kappa) = \frac{1}{b(\kappa)}, \qquad (4.31)$$

$$R^{\pm}(\kappa) = \frac{a^{\pm}(\kappa)}{b(\kappa)}, \qquad (4.32)$$

llamados coeficientes de dispersión.
A $R^{\pm}(\kappa)$ se le llama el coeficiente de reflexión, donde el signo $+$ se relaciona con las ondas que viajan de izquierda a derecha, mientras que el signo $-$ esta relacionado con las ondas que viajan de derecha a izquierda.
Por otro lado al coeficiente $T(\kappa)$ se le conoce como el coeficiente de transmisión y el cual no cambia con respecto a la dirección de propagación de la onda. De está forma se reescriben las ecuaciones (4.14) y (4.15) como

$$\phi(x, \kappa) = \frac{R^+(\kappa)}{T(\kappa)} e^{i\kappa x} + \frac{1}{T(\kappa)} e^{-i\kappa x} \text{ cuando } x \to \infty, \qquad (4.33)$$

$$\psi(x, \kappa) = \frac{R^-(\kappa)}{T(\kappa)} e^{-i\kappa x} + \frac{1}{T(\kappa)} e^{i\kappa x} \text{ cuando } x \to -\infty. \qquad (4.34)$$

Los pares de ecuaciones (4.12), (4.33) y (4.13), (4.34) se conocen como la solución de Jost para las funciones de onda ϕ y ψ respectivamente.
Los coeficientes de dispersión se pueden escribir como una matriz 2×2

$$S(\kappa) = \begin{pmatrix} T(\kappa) & R^-(\kappa) \\ R^+(\kappa) & T(\kappa) \end{pmatrix}, \qquad (4.35)$$

la matriz S debe pertenecer a $U(2)$ para garantizar que los coeficientes (4.31) y (4.32) satisfacen las siguientes condiciones

$$|T|^2 + |R^{\pm}|^2 = 1, \quad \overline{T}R^- + \overline{R^+}T = 0, \quad T^2 - R^-R^+ = 1. \qquad (4.36)$$

La ecuación (4.36) puede ser interpretada como la conservación de energía en términos de los coeficientes de transmisión y reflexión. Estas relaciones también establecen que las columnas son vectores ortogonales y cada columna tiene magnitud 1. Los coeficientes de

dispersión también pueden ser expresados en una forma integral, pero dicha forma solo es válida si el potencial $u(x)$ es una función real valuada integrable, con $\kappa \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ [3, 23]. Para encontrar está forma integral se consideran las funciones $f(x)$ y $g(x)$ soluciones a las ecuaciones $-f'' = \kappa^2 f$ y $-g'' + ug = \kappa^2$ respectivamente.
Al calcular la derivada respecto a x del Wronskiano de f y g se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}W(f,g) &= \frac{d}{dx}\Big(fg' - gf'\Big) = fg'' + f'g' - gf'' - g'f' = fg'' - gf'', \\ &= f(ug - \kappa^2 g) - g(-\kappa^2 f) = ufg - \kappa^2 fg + \kappa^2 fg = ufg, \end{aligned} \tag{4.37}$$

de manera que, por el teorema fundamental de cálculo se encuentra

$$W(f,g)(b) - W(f,g)(a) = \int_a^b u(x)f(x)g(x)dx. \tag{4.38}$$

La forma integral de (4.32) se encuentra al proponer en la ecuación anterior a como $f(x) = e^{-i\kappa x}$ mientras que $g(x)$ es la solución de Jost (4.33) en el límite asintótico $a \to -\infty$ y $b \to \infty$ obteniendo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{-i\kappa x}\phi(x)dx &= \lim_{b\to\infty} W(e^{-i\kappa x}, \phi)(b) - \lim_{a\to-\infty} W(e^{-i\kappa x}, \phi)(a), \\ &= W\left(e^{-i\kappa x}, \frac{R^+(\kappa)}{T(\kappa)}e^{i\kappa x} + \frac{1}{T(\kappa)}e^{-i\kappa x}\right) - W(e^{-i\kappa x}, e^{-i\kappa x}), \\ &= W\left(e^{-i\kappa x}, \frac{R^+(\kappa)}{T(\kappa)}e^{i\kappa x}\right) + W\left(e^{-i\kappa x}, \frac{1}{T(\kappa)}e^{-i\kappa x}\right), \\ &= \frac{R^+(\kappa)}{T(\kappa)}W(e^{-i\kappa x}, e^{i\kappa x}) + \frac{1}{T(\kappa)}W(e^{-i\kappa x}, e^{-i\kappa x}) \\ &= \frac{R^+(\kappa)}{T(\kappa)}(2i\kappa), \end{aligned} \tag{4.39}$$

despejando R^+ se obtiene

$$R^+(\kappa) = \frac{T(\kappa)}{2i\kappa}\int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{-i\kappa x}\phi(x)dx. \tag{4.40}$$

Análogamente si $g(x) = \psi$ definida a partir de la solución de Jost (4.34), con $f(x) = e^{i\kappa x}$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{i\kappa x}\psi(x)dx &= \lim_{b\to\infty} W(e^{i\kappa x}, \psi)(b) - \lim_{a\to-\infty} W(e^{i\kappa x}, \psi)(a), \\ &= W\Big(e^{i\kappa x}, e^{i\kappa x}\Big) - W\left(e^{i\kappa x}, \frac{R^-(\kappa)}{T(\kappa)}e^{-i\kappa x} + \frac{1}{T(\kappa)}e^{i\kappa x}\right), \\ &= -W\left(e^{i\kappa x}, \frac{R^-(\kappa)}{T(\kappa)}e^{-i\kappa x}\right) - W\left(e^{i\kappa x}, \frac{1}{T(\kappa)}e^{i\kappa x}\right), \\ &= -\frac{R^-(\kappa)}{T(\kappa)}W(e^{i\kappa x}, e^{-i\kappa x}) - \frac{1}{T(\kappa)}W(e^{i\kappa x}, e^{i\kappa x}) \\ &= -\frac{R^-(\kappa)}{T(\kappa)}(2i\kappa), \end{aligned} \tag{4.41}$$

de esta manera R^- tiene la forma

$$R^-(\kappa) = -\frac{T(\kappa)}{2i\kappa}\int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{i\kappa x}\psi(x)dx. \tag{4.42}$$

La forma integral del coeficiente de transmisión (4.31) se encuentra al proponer en la ecuación (4.38) a la función $f(x) = e^{i\kappa x}$ mientras que $g(x)$ es la solución de Jost (4.33) en el límite asintótico $a \to -\infty$ y $b \to \infty$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{i\kappa x}\phi(x)dx &= \lim_{b\to\infty} W(e^{i\kappa x},\phi)(b) - \lim_{a\to-\infty} W(e^{i\kappa x},\phi)(a),\\
&= W\left(e^{i\kappa x}, \frac{R^+(\kappa)}{T(\kappa)}e^{i\kappa x} + \frac{1}{T(\kappa)}e^{-i\kappa x}\right) - W(e^{i\kappa x}, e^{-i\kappa x}),\\
&= W\left(e^{i\kappa x}, \frac{R^+(\kappa)}{T(\kappa)}e^{i\kappa x}\right) + W\left(e^{i\kappa x}, \frac{1}{T(\kappa)}e^{-i\kappa x}\right) - W(e^{i\kappa x}, e^{-i\kappa x}),\\
&= \frac{R^+(\kappa)}{T(\kappa)}W(e^{i\kappa x}, e^{i\kappa x}) + \frac{1}{T(\kappa)}W(e^{i\kappa x}, e^{-i\kappa x}) - (-2i\kappa),\\
&= \frac{1}{T(\kappa)}(-2i\kappa) + 2i\kappa = 2i\kappa\left(-\frac{1}{T(\kappa)} + 1\right),
\end{aligned} \tag{4.43}$$

despejando $\frac{1}{T}$ se encuentra

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{T(\kappa)} + 1 &= \frac{1}{2i\kappa}\int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{i\kappa x}\phi(x)dx,\\
\frac{1}{T(\kappa)} &= 1 - \frac{1}{2i\kappa}\int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{i\kappa x}\phi(x)dx.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

La relación que hay entre $R^{\pm}(\kappa)$ y $T(\kappa)$ con el potencial $u(x)$ se establece a continuación (ver [5]).

Partiendo de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0, \tag{4.45}$$

se tiene que una forma de resolver esta ecuación es usando la transformada de Fourier

$$\phi(x,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,\kappa)e^{-i\kappa z}d\kappa, \tag{4.46}$$

donde $\psi(x,\kappa)$ se escribe de la forma

$$\psi(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,z)e^{i\kappa z}dz. \tag{4.47}$$

Sustituyendo (4.46) en (4.45) se encuentra

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0,\\
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,\kappa)e^{-i\kappa z}d\kappa\right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,\kappa)e^{-i\kappa z}d\kappa\right) = 0,\\
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,\kappa)e^{-i\kappa z} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\psi(x,\kappa)e^{-i\kappa z}\right)\right\}d\kappa = 0,\\
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\partial^2\psi(x,\kappa)}{\partial x^2}e^{-i\kappa z} - (-i\kappa)^2\psi(x,\kappa)e^{-i\kappa z}\right\}d\kappa = 0,\\
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\partial^2\psi(x,\kappa)}{\partial x^2} + \kappa^2\psi(x,\kappa)\right\}e^{-i\kappa z}d\kappa = 0,
\end{aligned} \tag{4.48}$$

de tal manera que $\psi(x,\kappa)$ debe satisfacer la ecuación

$$\frac{\partial^2\psi(x,\kappa)}{\partial x^2}+\kappa^2\psi(x,\kappa)=0. \tag{4.49}$$

La ecuación (4.49) tiene la forma de una ecuación de eigenfunciones pero además es la transformada de Fourier de la ecuación (4.45). En el problema que se está resolviendo, se conoce el límite asintótico por lo cual es necesario encontrar la solución a (4.49) en el caso cuando $x\to\infty$ y donde $\psi(x,\kappa)\sim e^{i\kappa x}$.
Usando esta condición se propone a ϕ de la siguiente forma

$$\phi(x,z)=\delta(x-z)+G(x,z), \tag{4.50}$$

donde $G(x,z)$ es una función real que cumple las siguientes condiciones: $G(x,z)=0$ si $z<x$ y $G(x,z)=\frac{\partial G(x,z)}{\partial z}=0$ si $z\to\infty$.
Con estas condiciones se escribe ψ como

$$\psi(x,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\{\delta(x-z)+G(x,z)\}e^{i\kappa z}dz=e^{i\kappa x}+\int_x^{\infty}G(x,z)e^{i\kappa z}dz, \tag{4.51}$$

que puede ser reescrita como [5]

$$\psi(x,\kappa)=e^{i\kappa x}\left(1+\frac{1}{\kappa}G(x,x)-\frac{1}{\kappa^2}\left[\frac{\partial G(x,z)}{\partial z}\right]_{z=x}\right)-\frac{1}{\kappa^2}\int_x^{\infty}\frac{\partial^2 G(x,z)}{\partial z^2}e^{i\kappa z}dz. \tag{4.52}$$

El problema que se desea resolver utilizando el método de dispersión inversa es el de la ecuación (4.8) donde $\lambda=\kappa^2$, en este caso particular para $x\to\infty$. Sustituyendo entonces (4.51) en (4.8) se encuentra que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\psi(x,\kappa)}{\partial x^2}+(\kappa^2-u)\psi=0,\\
&\frac{\partial^2\psi(x,\kappa)}{\partial x^2}+\kappa^2\psi-u\psi=0,\\
&e^{i\kappa x}\left(-\kappa^2-\frac{dG(x,x)}{dx}-i\kappa G(x,x)-\frac{\partial G(x,z)}{\partial x}\bigg|_{z=x}\right)+\int_x^{\infty}\frac{\partial^2 G(x,z)}{\partial x^2}e^{i\kappa z}dz+\\
&\kappa^2\left\{e^{i\kappa x}\left(1+\frac{1}{\kappa}G(x,x)-\frac{1}{\kappa^2}\left[\frac{\partial G(x,z)}{\partial z}\right]_{z=x}\right)-\frac{1}{\kappa^2}\int_x^{\infty}\frac{\partial^2 G(x,z)}{\partial z^2}e^{i\kappa z}dz\right\}-\\
&u\left\{e^{i\kappa x}+\int_x^{\infty}G(x,z)e^{i\kappa z}dz\right\}=0,
\end{aligned} \tag{4.53}$$

que simplifica a la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
&e^{i\kappa x}\left\{-\frac{dG(x,x)}{dx}-u-\left(\frac{\partial G(x,z)}{\partial x}+\frac{\partial G(x,z)}{\partial z}\right)_{z=x}\right\}+\\
&\int_x^{\infty}\left\{\frac{\partial^2 G(x,z)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 G(x,z)}{\partial z^2}-uG(x,z)\right\}e^{i\kappa z}dz=0,\\
&e^{i\kappa x}\left\{-2\frac{dG(x,x)}{dx}-u\right\}+\int_x^{\infty}\left\{\frac{\partial^2 G(x,z)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 G(x,z)}{\partial z^2}-uG(x,z)\right\}e^{i\kappa z}dz=0.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

De la expresión anterior se obtienen las siguientes condiciones

$$\frac{\partial^2 G(x,z)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G(x,z)}{\partial z^2} - uG(x,z) = 0, \tag{4.55}$$

y la relación

$$-2\frac{dG(x,x)}{dx} - u = 0, \tag{4.56}$$

o bien

$$-2\frac{dG(x,x)}{dx} = u. \tag{4.57}$$

Esta última ecuación indica la relación entre el potencial $u(x)$ y la función $G(x,x)$ [5, 23]. El problema se reduce entonces a que dada la función de onda $\psi(x,t)$ se debe encontrar a $G(x,z)$ y por medio de ella recuperar a $u(x)$. Sustituyendo de esta forma (4.51) en la ecuación (4.14) se obtiene

$$\begin{aligned} \phi(x,\kappa) &= a(\kappa)\psi(x,\kappa) + b(\kappa)\overline{\psi(x,\kappa)}, \\ &= a(\kappa)\left[e^{i\kappa x} + \int_x^\infty G(x,z)e^{i\kappa z}dz\right] + b(\kappa)\overline{\left[e^{i\kappa x} + \int_x^\infty G(x,z)e^{i\kappa z}dz\right]}, \\ &= a(\kappa)e^{i\kappa x} + b(\kappa)e^{-i\kappa x} + \int_x^\infty \left\{a(\kappa)G(x,z)e^{i\kappa z} + b(\kappa)G(x,z)e^{-i\kappa z}\right\}dz, \end{aligned} \tag{4.58}$$

recordando que la función $G(x,z) = 0$ cuando $z < x$ se puede cambiar los límites de integración en la ecuación (4.58) de $-\infty$ a ∞ y se pueda usar la transformada inversa de Fourier y obtener una ecuación integral que involucre a G como sigue

$$\begin{aligned} &\phi(x,\kappa) = a(\kappa)e^{i\kappa x} + b(\kappa)e^{-i\kappa x} + \int_{-\infty}^\infty \left\{a(\kappa)G(x,z)e^{i\kappa z} + b(\kappa)G(x,z)e^{-i\kappa z}\right\}dz, \\ &b(\kappa)\int_{-\infty}^\infty G(x,z)e^{-i\kappa z}dz = \phi(x,\kappa) - a(\kappa)e^{i\kappa x} - b(\kappa)e^{-i\kappa x} - a(\kappa)\int_{-\infty}^\infty G(x,z)e^{i\kappa z}dz, \\ &\int_{-\infty}^\infty G(x,z)e^{-i\kappa z}dz = \frac{\phi(x,\kappa)}{b(\kappa)} - \frac{a(\kappa)}{b(\kappa)}e^{i\kappa x} - e^{-i\kappa x} - \frac{a(\kappa)}{b(\kappa)}\int_{-\infty}^\infty G(x,z)e^{i\kappa z}dz, \\ &\int_{-\infty}^\infty G(x,z)e^{-i\kappa z}dz = \frac{\phi(x,\kappa)}{b(\kappa)} - R(\kappa)e^{i\kappa x} - e^{-i\kappa x} - R(\kappa)\int_{-\infty}^\infty G(x,z)e^{i\kappa z}dz, \\ &G(x,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left\{\frac{\phi(x,\kappa)}{b(\kappa)} - R(\kappa)e^{i\kappa x} - e^{-i\kappa x} - R(\kappa)\int_{-\infty}^\infty G(x,y)e^{i\kappa y}dy\right\}e^{i\kappa z}d\kappa, \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left\{\frac{\phi(x,\kappa)}{b(\kappa)} - e^{-i\kappa x}\right\}e^{i\kappa z}d\kappa - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty R(\kappa)e^{i\kappa(x+z)}d\kappa \\ &-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty R(\kappa)G(x,y)e^{i\kappa(y+z)}dyd\kappa. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Es posible simplificar de manera conveniente la expresión anterior definiendo

$$B(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty R(\kappa)e^{i\kappa x}d\kappa \tag{4.60}$$

así

$$G(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\phi(x,\kappa)}{b(\kappa)}-e^{-i\kappa x}\right\}e^{i\kappa z}d\kappa-B(x+z)-\int_{-\infty}^{\infty}B(y+z)G(x,y)dy. \quad (4.61)$$

La expresión (4.59) se analizará ahora por dos métodos diferentes [5, 23]. El primero es introducir el contorno C semi circular de radio R, donde el diámetro del círculo es un segmento de la línea real $[-R,R]$ en la parte superior del plano κ complejo (ver figura (4.1)).

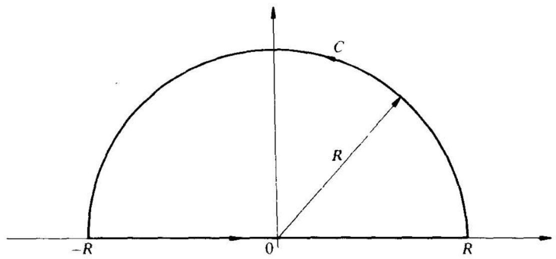


Figura 4.1: Contorno C en el plano complejo.

Se considera que la eigenfunción $\phi(x,\kappa)/b(\kappa)$ no tienen polos en la parte superior del plano y que $|\phi e^{i\kappa x}|\to 1$ cuando $|\kappa|\to\infty$. Escribiendo entonces la integral del lado derecho como

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\phi(x,\kappa)}{b(\kappa)}-e^{-i\kappa x}\right\}e^{i\kappa z}d\kappa=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\phi(x,\kappa)}{b(\kappa)}e^{i\kappa x}-1\right\}e^{i\kappa(z-x)}d\kappa, \quad (4.62)$$

y se observa que su valor decae exponencialmente cuando $R\to\infty$.
Utilizando el teorema integral de Cauchy se puede resolver (4.62), usando el hecho de que para una función $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo U y su derivada es continua en U, entonces la integral sobre un contorno cerrado simple contenido en U es cero [25, 26, 27]

$$\oint_C f(z)dz=0 \quad (4.63)$$

por lo cual para la integral (4.62) $f(z)=\phi(x,\kappa)$ no contribuye en (4.61), así se obtiene que

$$\begin{aligned}G(x,z)&=-B(x+z)-\int_{-\infty}^{\infty}B(y+z)G(x,y)dy,\\ G(x,z)+B(x+z)&+\int_{-\infty}^{\infty}B(y+z)G(x,y)dy=0, \quad (4.64)\end{aligned}$$

llamada la ecuación de Gelfand-Levitan-Marchenko para $G(x,\kappa)$.
El segundo método es considerar $\kappa=i\chi_n$ con $i^2=-1$, es decir, considerar a κ puramente complejo, en este caso la integral (4.62) se resuelve usando el teorema integral del residuo [25, 26, 27], ya que la función $\phi(x,\kappa)/b(\kappa)$ tiene polos en la parte superior del plano complejo.

De esta manera el valor de la integral será

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\phi(x,i\chi_n)}{b(i\chi_n)}e^{-\chi_n x}-1\right\}e^{-\chi_n(z-x)}d(i\chi_n)=2\pi i\sum_{n=1}^{N}R_n \tag{4.65}$$

donde R_n es el residuo de $\phi(x,i\chi_n)/b(i\chi_n)e^{-\chi_n x}$ en $i\chi_n$.
Para el cálculo de este residuo se emplea la otra solución de Jost (4.12) de la forma

$$\phi(x,\kappa)=e^{-i\kappa x}+\int_{-\infty}^{x}E(x,z)e^{-i\kappa z}dz, \tag{4.66}$$

donde la función $E(x,z)$ cumple condiciones similares a la función $G(x,z)$.
Las soluciones de Jost (4.12) y (4.13) para eigenfunciones discretas $i\chi_n$ se escriben como

$$\phi(x,i\chi_n)\sim e^{\chi_n x}\ \text{cuando}\ \to-\infty, \tag{4.67}$$

$$\psi(x,i\chi_n)\sim e^{-\chi_n x}\ \text{cuando}\ \to\infty. \tag{4.68}$$

Se establece así una relación entre las soluciones de Jost (4.67) y (4.68) dada por

$$\Psi_n(x,i\chi_n)=c_n\psi(x,i\chi_n)=d_n\phi(x,i\chi_n), \tag{4.69}$$

donde d_n es una constante real y c_n son las constantes de normalización de la n-ésima eigenfunción [5, 3, 4, 23].
Al principio de la sección se demostró que las ecuaciones (4.16), (4.17) son constantes respecto a la variable x y que los parametros $\kappa=i\chi_n$ son los polos de la ecuación (4.44) [5, 3, 2, 4].
Derivando (4.22) con respecto a κ se obtiene la relación

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W(\phi,\psi)}{\partial\kappa} &= \frac{\partial}{\partial\kappa}\left(\frac{2i\kappa}{T(\kappa)}\right),\\
\frac{\partial}{\partial\kappa}\left(\phi\frac{d\psi}{dx}-\psi\frac{d\phi}{dx}\right) &= \frac{\partial}{\partial\kappa}\left(\frac{2i\kappa}{T(\kappa)}\right),\\
\phi\frac{\partial}{\partial\kappa}\frac{d\psi}{dx}+\frac{d\psi}{dx}\frac{\partial\phi}{\partial\kappa}-\psi\frac{\partial}{\partial\kappa}\frac{d\phi}{dx}-\frac{d\phi}{dx}\frac{\partial\psi}{\partial\kappa} &= \frac{2i}{T(\kappa)}-\frac{2i\kappa}{T(\kappa)^2}\frac{\partial T(\kappa)}{\partial\kappa},\\
W\left(\phi,\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}\right)+W\left(\frac{\partial\phi}{\partial\kappa},\psi\right) &= \frac{2i}{T(\kappa)}-\frac{2i\kappa}{T(\kappa)^2}\frac{dT(\kappa)}{d\kappa}.
\end{aligned} \tag{4.70}$$

De manera análoga para la ecuación (4.8)

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+u\psi=\kappa^2\psi,\\
\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+(\kappa^2-u)\psi=0,
\end{aligned} \tag{4.71}$$

se deriva respecto a κ y se multiplica por ψ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3\psi(x,\kappa)}{\partial x^2\partial\kappa}+2\kappa\psi+(\kappa^2-u)\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}=0,\\
\psi\frac{\partial^3\psi(x,\kappa)}{\partial x^2\partial\kappa}+2\kappa\psi^2+(\kappa^2-u)\psi\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}=0.
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Multiplicando ahora (4.71) por el factor $\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}$ se obtiene

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}+(\kappa^2-u)\psi\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}=0. \tag{4.73}$$

Restando la ecuación (4.72) de la ecuación (4.73) se encuentra la siguiente relación

$$-\psi\frac{\partial^3\psi(x,\kappa)}{\partial x^2\partial\kappa}-2\kappa\psi^2-(\kappa^2-u)\psi\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}+(\kappa^2-u)\psi\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}=0, \tag{4.74}$$

y que cancelando términos se reduce a

$$\begin{aligned}
&-\psi\frac{\partial^3\psi(x,\kappa)}{\partial x^2\partial\kappa}-2\kappa\psi^2+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}=0,\\
&\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}-\psi\frac{\partial^3\psi(x,\kappa)}{\partial x^2\partial\kappa}=2\kappa\psi^2,\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2\psi(x,\kappa)}{\partial x\partial\kappa}\right]\psi=2\kappa\psi^2.
\end{aligned} \tag{4.75}$$

La ecuación anterior puede ser reescrita en términos de la derivada del Wronskiano con respecto a x de manera análoga a la ecuación (4.18)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}W\left(\frac{\partial\psi}{\partial\kappa},\psi\right)=2\kappa\psi^2,\\
&\int_{-\infty}^{\infty}dW\left(\frac{\partial\psi}{\partial\kappa},\psi\right)=2\kappa\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2dx,
\end{aligned} \tag{4.76}$$

pero la condición (4.69) establece una relación entre ψ y Ψ_n que está normalizada para $\kappa=i\chi_n$, por lo cual la ecuación (4.76) tendrá la forma

$$\begin{aligned}
W\left(\frac{\partial\psi}{\partial\kappa},\psi\right)\Big|_{x=\infty}-W\left(\frac{\partial\psi}{\partial\kappa},\psi\right)\Big|_{x=-\infty} &= 2\kappa\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\Psi_n}{c_n}\right)^2dx,\\
W\left(\frac{\partial\psi}{\partial\kappa},\psi\right)\Big|_{x=\infty}-W\left(\frac{\partial\psi}{\partial\kappa},\psi\right)\Big|_{x=-\infty} &= \frac{2i\chi_n}{c_n^2}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_n^2dx,
\end{aligned} \tag{4.77}$$

y que en términos de χ_n se escribe como

$$W\left(\frac{\partial\psi}{\partial\kappa},\psi\right)\Big|_{x=\infty}-W\left(\frac{\partial\psi}{\partial\kappa},\psi\right)\Big|_{x=-\infty} = \frac{2i\chi_n}{c_n^2}. \tag{4.78}$$

Para evaluar los Wronskianos primero se sustituye la ecuación (4.69) en la ecuación (4.70) cuando $\kappa=i\chi_n$, de esta forma se obtiene

$$\begin{aligned}
W\left(\phi,\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}\right)+W\left(\frac{\partial\phi}{\partial\kappa},\psi\right) &= \frac{2i}{T(i\chi_n)}+\frac{2\chi_n}{T(\kappa)^2}\frac{dT(\kappa)}{d\kappa}\\
W\left(\frac{c_n}{d_n}\psi,\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}\right)+W\left(\frac{\partial\phi}{\partial\kappa},\frac{d_n}{c_n}\phi\right) &= \frac{2i}{T(\kappa)}+\frac{2\chi_n}{T(\kappa)^2}\frac{dT(\kappa)}{d\kappa}
\end{aligned} \tag{4.79}$$

o bien

$$\frac{c_n}{d_n}W\left(\psi,\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}\right)+\frac{d_n}{c_n}W\left(\frac{\partial\phi}{\partial\kappa},\phi\right) = \frac{2i}{T(\kappa)}+\frac{2\chi_n}{T(\kappa)^2}\frac{dT(\kappa)}{d\kappa} \tag{4.80}$$

considerando el límite asintótico $x \to -\infty$ en la ecuación anterior y multiplicando por $\frac{d_n}{c_n}$ se encuentra

$$\begin{aligned} \frac{2id_n}{c_nT(\kappa)}\bigg|_{x=-\infty} + \frac{2d_n\chi_n}{c_nT(\kappa)^2}\frac{dT(\kappa)}{d\kappa}\bigg|_{x=-\infty} &= W\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial\kappa}\right)\bigg|_{x=-\infty} + \frac{d_n^2}{c_n^2}W\left(\frac{\partial\phi}{\partial\kappa}, \phi\right)\bigg|_{x=-\infty}, \\ &= -W\left(\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}, \psi\right)\bigg|_{x=-\infty} + \frac{d_n^2}{c_n^2}W\left(\frac{\partial\phi}{\partial\kappa}, \phi\right)\bigg|_{x=-\infty} \end{aligned} \tag{4.81}$$

restando la ecuación (4.81) a la ecuación (4.78) se tiene que

$$\begin{aligned} &\frac{2i\chi_n}{c_n^2} - \frac{2id_n}{c_nT(\kappa)}\bigg|_{x=-\infty} - \frac{2d_n\chi_n}{c_nT(\kappa)^2}\frac{dT(\kappa)}{d\kappa}\bigg|_{x-\infty} \\ &= W\left(\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}, \psi\right)\bigg|_{x=\infty} - W\left(\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}, \psi\right)\bigg|_{x=-\infty} + W\left(\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}, \psi\right)\bigg|_{x=-\infty} - \frac{d_n^2}{c_n^2}W\left(\frac{\partial\phi}{\partial\kappa}, \phi\right)\bigg|_{x=-\infty} \\ &= W\left(\frac{\partial\psi}{\partial\kappa}, \psi\right)\bigg|_{x=\infty} - \frac{d_n^2}{c_n^2}W\left(\frac{\partial\phi}{\partial\kappa}, \phi\right)\bigg|_{x=-\infty}, \end{aligned} \tag{4.82}$$

donde los términos de los Wronskianos son cero por la definición de ψ y ϕ en las ecuaciones (4.51) y (4.66) respectivamente.
Al considerar el límite asintótico $x \to -\infty$ entonces el término $T^{-1}(\kappa)$ será cero ya que κ es un polo simple de T [3, 23]. De esta manera de la ecuación (4.82) se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2i\chi_n}{c_n^2} - \frac{2d_n\chi_n}{c_nT(\kappa)^2}\frac{dT(\kappa)}{d\kappa}, \\ \frac{i}{c_n^2} &= \frac{d_n}{c_nT(\kappa)^2}\frac{dT(\kappa)}{d\kappa}, \\ \frac{i}{c_nd_n} &= \frac{1}{T(\kappa)^2}\frac{dT(\kappa)}{d\kappa}, \end{aligned} \tag{4.83}$$

esta última ecuación reduce el cálculo del residuo de la siguiente forma.
Para calcular el residuo de la ecuación (4.65), se reescribe la ecuación (4.69) usando el resultado de la ecuación (4.83)

$$\Psi_n(x, i\chi_n) = \frac{T(i\chi_n)c_n}{d_n}\psi(x, i\chi_n) = T(i\chi_n)\phi(x, i\chi_n), \tag{4.84}$$

multiplicando ahora (4.84) por $e^{-\chi_n z}$ se obtiene

$$\Psi_n(x, i\chi_n)e^{-\chi_n z} = \frac{T(i\chi_n)c_n}{d_n}\psi(x, i\chi_n)e^{-\chi_n z} = T(i\chi_n)\phi(x, i\chi_n)e^{-\chi_n z}, \tag{4.85}$$

donde solo $T(i\chi_n)$ tiene polos simples. De esta forma el residuo en $\kappa = i\chi_n$ es

$$R_n = \frac{c_n}{d_n}\psi(x, i\chi_n)e^{-\chi_n z}(\text{Residuo de } T(i\chi_n)), \tag{4.86}$$

como $T(i\chi_n)$ tiene polos simples, el residuo de $T(i\chi_n)$ es

$$\text{residuo de } T(\kappa)|_{\kappa=i\chi_n} = -T(i\chi_n)^2\left[\frac{dT(\kappa)}{d\kappa}\right]_{\kappa=i\chi_n}, \tag{4.87}$$

así la ecuación (4.86) se reescribe como

$$\begin{aligned}
R_n &= -\frac{c_n}{d_n}\psi(x,i\chi_n)e^{-\chi_n z}T(i\chi_n)^2\left[\frac{dT(\kappa)}{d\kappa}\right]^{-1}_{\kappa=i\chi_n} = -\frac{c_n}{d_n}\psi(x,i\chi_n)e^{-\chi_n z}(-ic_nd_n), \\
&= ic_n^2\psi(x,i\chi_n)e^{-\chi_n z}. \qquad (4.88)
\end{aligned}$$

La ecuación (4.65) tiene entonces como resultado la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\phi(x,i\chi_n)}{b(i\chi_n)}e^{-\chi_n x}-1\right\}e^{-\chi_n(z-x)}d(i\chi_n) &= 2\pi i\sum_{n=1}^{N} ic_n^2\psi(x,i\chi_n)e^{-\chi_n z}, \\
\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\phi(x,i\chi_n)}{b(i\chi_n)}e^{-\chi_n x}-1\right\}e^{-\chi_n(z-x)}d(i\chi_n) &= -2\pi\sum_{n=1}^{N} c_n^2\psi(x,i\chi_n)e^{-\chi_n z}. \qquad (4.89)
\end{aligned}$$

Sustituyendo entonces las ecuaciones (4.89) y (4.51) en la ecuación (4.59) se encuentra

$$\begin{aligned}
G(x,z) &= \frac{1}{2\pi}(-2\pi\sum_{n=1}^{N}c_n^2\psi(x,i\chi_n)e^{-\chi_n z}) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(i\chi_n)e^{-\chi_n(x+z)}d(i\chi_n) \\
&- \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R(i\chi_n)G(x,y)e^{-\chi_n(y+z)}dyd(i\chi_n), \\
&= -\sum_{n=1}^{N}c_n^2e^{-\chi_n z}\left\{e^{-\chi_n x}+\int_x^{\infty}G(x,y)e^{-\chi_n y}dy\right\} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(i\chi_n)e^{-\chi_n(x+z)}d(i\chi_n) \\
&- \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R(i\chi_n)G(x,y)e^{-\chi_n(y+z)}dyd(i\chi_n), \qquad (4.90)
\end{aligned}$$

o bien que

$$\begin{aligned}
0 &= G(x,z)+\sum_{n=1}^{N}c_n^2e^{-\chi_n(z+x)}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(i\chi_n)e^{-\chi_n(x+z)}d(i\chi_n) \\
&+ \sum_{n=1}^{N}c_n^2e^{-\chi_n z}\int_x^{\infty}G(x,y)e^{-\chi_n y}dy+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R(i\chi_n)G(x,y)e^{-\chi_n(y+z)}dyd(i\chi_n).
\end{aligned} \qquad (4.91)$$

Utilizando la propiedad de la función G es igual a cero cuando $z<x$ se reescribe la integral anterior de $-\infty$ a ∞

$$\begin{aligned}
&G(x,z)+\sum_{n=1}^{N}c_n^2e^{-\chi_n(z+x)}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(i\chi_n)e^{-\chi_n(x+z)}d(i\chi_n) \\
+ &\sum_{n=1}^{N}c_n^2e^{-\chi_n z}\int_{-\infty}^{\infty}G(x,y)e^{-\chi_n y}dy+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R(i\chi_n)G(x,y)e^{-\chi_n(y+z)}dyd(i\chi_n)=0,
\end{aligned} \qquad (4.92)$$

y factorizando la integral en la variable y en las dos últimas integrales se encuentra que

$$\begin{aligned}&G(x,z)+\sum_{n=1}^{N}c_n^2e^{-\chi_n(z+x)}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(i\chi_n)e^{-\chi_n(x+z)}d(i\chi_n)\\+&\int_{-\infty}^{\infty}G(x,y)\Big\{\sum_{n=1}^{N}c_n^2e^{-\chi_n(z+y)}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(i\chi_n)e^{-\chi_n(y+z)}d(i\chi_n)\Big\}dy=0.\end{aligned} \tag{4.93}$$

Definiendo ahora el kernel de la ecuación GLM como

$$F(x+z)=\sum_{n=1}^{N}c_n^2e^{-\chi_n(z+x)}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(i\chi_n)e^{-\chi_n(x+z)}d(i\chi_n), \tag{4.94}$$

la ecuación (4.93) se simplifica a la siguiente expresión

$$G(x,z)+F(x+z)+\int_{-\infty}^{\infty}G(x,y)F(z+y)dy=0. \tag{4.95}$$

La ecuación anterior es la base de la transformada de la dispersión inversa y será analizada en las secciones posteriores.

4.2. Formulación de Lax

Si se hace depender el potencial $u(x)$ en la ecuación de Schrödinger (4.8) del parámetro t, entonces, en general los eigenvalores λ dependen de t. La trasformada de dispersión inversa es un ejemplo del problema isoespectral cuando esto no sucede [12, 2, 4].
La formulación de Lax está relacionada con el principio isoespectral que será usado para la ecuación KdV. Este procedimiento se considera la introducción un par de operadores denotados como $\widehat{L}(t)$ y $\widehat{A}(t)$, que son autoadjuntos y antiadjuntos y que satisfacen la condición

$$\dot{\widehat{L}}=\frac{\partial\widehat{L}}{\partial t}=-[\widehat{L},\widehat{A}], \tag{4.96}$$

también conocida como representación de Lax.
El operador $\widehat{L}$ cumple el problema de eigenvalores $\widehat{L}\psi=\lambda\psi$ y su espectro no depende del parámetro t, mientras que el operador $\widehat{A}$ se define de tal manera que satisface las siguientes condiciones (ver [12, 2, 4])

I. El parámetro λ es constante en el tiempo, es decir, $\frac{\partial\lambda}{\partial t}=0$.

II. Una solución a la ecuación lineal $\widehat{L}\psi=\lambda\psi$ es $\frac{\partial\psi}{\partial t}-\widehat{A}\psi$.

III. El operador $\frac{\partial\widehat{L}}{\partial t}+\widehat{L}\widehat{A}-\widehat{A}\widehat{L}$ es un operador de multiplicación no un operador diferencial [2, 4, 12].

Para probar estos puntos se realiza el siguiente procedimiento.
Se calcula la derivada parcial respecto a t en ambos lados de la ecuación $\widehat{L}\psi=\lambda\psi$ para obtener

$$\widehat{L}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\psi\frac{\partial\widehat{L}}{\partial t}=\lambda\frac{\partial\psi}{\partial t}+\psi\frac{\partial\lambda}{\partial t}. \tag{4.97}$$

Sustituyendo la ecuación (4.96) en la ecuación (4.97), donde $\widehat{A}\widehat{L}\psi = \widehat{A}\lambda\psi = \lambda\widehat{A}\psi$ se encuentra

$$\begin{aligned}
&\widehat{L}\frac{\partial\psi}{\partial t} - (\widehat{L}\widehat{A} - \widehat{A}\widehat{L})\psi = \lambda\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial\lambda}{\partial t}\\
&\widehat{L}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \widehat{L}\widehat{A}\psi + \lambda\widehat{A}\psi = \lambda\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial\lambda}{\partial t}\\
&\widehat{L}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \widehat{L}\widehat{A}\psi + \lambda\widehat{A}\psi - \lambda\frac{\partial\psi}{\partial t} = \psi\frac{\partial\lambda}{\partial t}\\
&(\widehat{L} - \lambda)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} - \widehat{A}\psi\right) = \psi\frac{\partial\lambda}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{4.98}$$

Calculando el producto interno de la ecuación anterior y la función ψ definida por la ecuación (4.1) junto con la propiedad $\widehat{L} = \widehat{L}^\dagger$ se encuentra

$$||\psi||^2\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \left\langle \psi, (\widehat{L} - \lambda)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} - \widehat{A}\psi\right)\right\rangle = \left\langle (\widehat{L} - \lambda)\psi, \frac{\partial\psi}{\partial t} - \widehat{A}\psi\right\rangle = 0, \tag{4.99}$$

de donde se concluye que $\frac{\partial\lambda}{\partial t} = 0$.
Esté resultado implica que si $\psi(x,t)$ es una eigenfunción de $\widehat{L}$ con eigenvalor $\lambda = \kappa^2$, entonces también $\frac{\partial\psi}{\partial t} - \widehat{A}\psi$ es una eigenfuncion de $\widehat{L}$.
Para probar el punto III se sustituye la solución $\frac{\partial\psi}{\partial t} - \widehat{A}\psi$ en la ecuación lineal $\widehat{L}\psi = \lambda\psi$ obteniendo

$$\begin{aligned}
\widehat{L}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} - \widehat{A}\psi\right) &= \lambda\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} - \widehat{A}\psi\right),\\
\widehat{L}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \widehat{L}\widehat{A}\psi &= \lambda\frac{\partial\psi}{\partial t} - \widehat{A}\lambda\psi,
\end{aligned} \tag{4.100}$$

como λ es constante respecto a t, se realiza el siguiente desarrollo en los términos de la derecha

$$\begin{aligned}
\lambda\frac{\partial\psi}{\partial t} - \widehat{A}\lambda\psi &= \lambda\frac{\partial\psi}{\partial t} - \widehat{A}\widehat{L}\psi = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\lambda\psi\Big) - \widehat{A}\widehat{L}\psi = \widehat{L}\psi - \widehat{A}\widehat{L}\psi,\\
&= \psi\frac{\partial\widehat{L}}{\partial t} + \widehat{L}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \widehat{A}\widehat{L}\psi.
\end{aligned} \tag{4.101}$$

De está forma la ecuación (4.100) se transforma en

$$\begin{aligned}
&\widehat{L}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \widehat{L}\widehat{A}\psi = \left(\frac{\partial\widehat{L}}{\partial t}\right)\psi + \widehat{L}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \widehat{A}\widehat{L}\psi,\\
&-\widehat{L}\widehat{A}\psi = \left(\frac{\partial\widehat{L}}{\partial t}\right)\psi - \widehat{A}\widehat{L}\psi,\\
&\left(\frac{\partial\widehat{L}}{\partial t}\right)\psi - \widehat{A}\widehat{L}\psi + \widehat{L}\widehat{A}\psi = 0,\\
&\left(\frac{\partial\widehat{L}}{\partial t} + \widehat{L}\widehat{A} - \widehat{A}\widehat{L}\right)\psi = 0,
\end{aligned} \tag{4.102}$$

ya que la función ψ es arbitraria la ecuación anterior es equivalente a

$$\frac{\partial\widehat{L}}{\partial t} + \widehat{L}\widehat{A} - \widehat{A}\widehat{L} = 0, \tag{4.103}$$

y que en términos del conmutador se escribe como

$$\frac{\partial \widehat{L}}{\partial t} + [\widehat{L}, \widehat{A}] = 0. \tag{4.104}$$

A este resultado se le conoce como condición de compatibilidad [12] y corresponde a una ecuación de evolución con una derivada parcial de primer orden respecto al tiempo.
La ecuación KdV se deriva a partir del operador de Schrödinger (4.8) y el operador $\widehat{A}$.
El problema consiste en determinar al operador $\widehat{A}$ en forma explicita. Para ello se propone que tenga la siguiente forma

$$\widehat{A} = \alpha_3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_0 \tag{4.105}$$

donde los coeficientes α_i con $i = 0, 1, 2, 3$ pueden depender de x y t pero no pueden depender del parámetro λ. Además se debe cumplir la condición $\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$.
Entonces al sustituir las ecuaciones (4.8) y (4.105) en la tercera condición de Lax se encuentra

$$\Big(\frac{\partial \widehat{L}}{\partial t} \quad + \quad \widehat{L}\widehat{A} - \widehat{A}\widehat{L}\Big)\psi = 0, \tag{4.106}$$

usando la condición $\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$ se reescribe la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)\psi \quad &+ \quad \Big(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u\Big)\Big(\alpha_3\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \alpha_2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_1\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_0\Big)\psi \\
&- \quad \Big(\alpha_3\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \alpha_2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_1\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_0\Big)\Big(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u\Big)\psi = 0, \\
\psi\frac{\partial u}{\partial t} \quad &+ \quad \Big(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u\Big)\Big(\alpha_3\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} + \alpha_2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \alpha_1\frac{\partial\psi}{\partial x} + \alpha_0\psi\Big) \\
&- \quad \Big(\alpha_3\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \alpha_2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_1\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_0\Big)\Big(-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + u\psi\Big) = 0, \\
\psi\frac{\partial u}{\partial t} \quad &- \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\alpha_3\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\Big) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\alpha_2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\Big) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\alpha_1\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\alpha_0\psi) \\
&+ \quad u\alpha_3\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} + u\alpha_2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + u\alpha_1\frac{\partial\psi}{\partial x} + u\alpha_0\psi \\
&- \quad \Big[-\alpha_3\frac{\partial^5\psi}{\partial x^5} - \alpha_2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} - \alpha_1\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} - \alpha_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \\
&+ \quad \alpha_3\frac{\partial^3 u\psi}{\partial x^3} + \alpha_2\frac{\partial^2 u\psi}{\partial x^2} + \alpha_1\frac{\partial u\psi}{\partial x} + u\alpha_0\psi\Big] = 0,
\end{aligned} \tag{4.107}$$

desarrollando todos los términos y factorizando las constantes α_i se tiene

$$
\begin{aligned}
\psi\frac{\partial u}{\partial t} &- \alpha_3\frac{\partial^5\psi}{\partial x^5} - 2\frac{\partial\alpha_3}{\partial x}\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} - \frac{\partial^2\alpha_3}{\partial x^2}\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} - \alpha_2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} - 2\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} - \frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\\
&- \alpha_1\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} - 2\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial^2\psi}\partial x^2 - \frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \alpha_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - 2\alpha_0'\frac{\partial\psi}{\partial x} - \alpha_0''\psi\\
&+ u\alpha_3\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} + u\alpha_2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + u\alpha_1\frac{\partial\psi}{\partial x} + u\alpha_0\psi\\
&+ \alpha_3\frac{\partial^5\psi}{\partial x^5} + \alpha_2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} + \alpha_1\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} + \alpha_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\\
&- \alpha_3\Big(u\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} + 3\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\psi\Big) - \alpha_2\Big(u\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\psi\Big)\\
&- \alpha_1\Big(u\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial u}{\partial x}\Big) - \alpha_0 u\psi = 0
\end{aligned}
\tag{4.108}
$$

que se puede simplificar a la siguiente expresión

$$
\begin{aligned}
\psi\frac{\partial u}{\partial t} &- 2\frac{\partial\alpha_3}{\partial x}\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} - \frac{\partial^2\alpha_3}{\partial x^2}\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} - 2\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} - \frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\\
&- 2\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x} - 2\frac{\partial\alpha_0}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial^2\alpha_0}{\partial x^2}\\
&- \alpha_3\Big(3\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big) - \alpha_2\Big(2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big) - \alpha_1\Big(\psi\frac{\partial u}{\partial x}\Big) = 0,
\end{aligned}
\tag{4.109}
$$

finalmente factorizando la función ψ y sus derivadas parciales respecto a x se encuentra

$$
\begin{aligned}
&-2\frac{\partial\alpha_3}{\partial x}\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\Big(-\frac{\partial^2\alpha_3}{\partial x^2} - 2\frac{\partial\alpha_2}{\partial x^2}\Big) + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\Big(-\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial\alpha_1}{\partial x} - 3\alpha_3\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\\
&+\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big(-\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2} - 2\frac{\partial\alpha_0}{\partial x} - 3\alpha_3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\alpha_2\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\\
&+\psi\Big(-\frac{\partial^2\alpha_0}{\partial x^2} - \alpha_3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \alpha_2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha_1\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\Big) = 0.
\end{aligned}
\tag{4.110}
$$

De la ecuación anterior se obtiene un sistema de 5 ecuaciones el cual debera cumplir las siguientes condiciones

$$
\begin{aligned}
&-2\frac{\partial\alpha_3}{\partial x} = 0,\\
&-\frac{\partial^2\alpha_3}{\partial x^2} - 2\frac{\partial\alpha_2}{\partial x} = 0,\\
&-\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial\alpha_1}{\partial x} - 3\alpha_3\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\\
&-\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2} - 2\frac{\partial\alpha_0}{\partial x} - 3\alpha_3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\alpha_2\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\\
&-\frac{\partial^2\alpha_0}{\partial x^2} - \alpha_3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \alpha_2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha_1\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \delta u\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial^3}{\partial x^3}u = 0\\
&.
\end{aligned}
\tag{4.111}
$$

Al resolver este sistema se obtiene que los coeficientes α_i son de la forma

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 3\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha_2 u + c_0,\\
\alpha_1 &= 6u + c_1,\\
\alpha_2 &= \text{constante},\\
\alpha_3 &= -4,
\end{aligned} \tag{4.112}$$

donde c_1, c_0 son constantes de integración y la constante α_2 es arbitraria, para simplificar la expresión (4.105) se proponen estas constantes iguales a cero. Por lo tanto el operador $\widehat{A}$ se reescribe como

$$\widehat{A} = -\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{4.113}$$

Al resultado anterior se le conoce como la representación de Lax para la ecuación KdV [2, 4, 12, 28].

4.3. Evolución de la información de dispersión

Anteriormente se encontraron los datos de dispersión para el potencial $u(x,0) = u(x)$ pero los coeficientes de dispersión evolucionan con el tiempo. Para encontrar dicha evolución se hace uso de los operadores $\widehat{L}$ y $\widehat{A}$ que fueron construidos en la sección anterior. Sustituyendo las soluciones de Jost(4.12), (4.33), (4.13) y (4.34) en la segunda condición de la formulación de Lax para el operador $\widehat{A}$ se encuentra la siguiente ecuación

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \widehat{A}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} + 4\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} - 6u\frac{\partial \phi}{\partial x} + 3\phi\frac{\partial u}{\partial t} = p(x,\kappa)\psi + q(x,\kappa)\phi, \tag{4.114}$$

donde los coeficientes $p(x,\kappa)$ y $q(x,\kappa)$ son los coeficientes que ayudan a determinar la evolución temporal.

Considerando el límite asintótico $x \to -\infty$ se reescribe la ecuación anterior de la forma

$$\frac{\partial e^{-i\kappa x}}{\partial t} + 4i\kappa^3 e^{-i\kappa x} = p_1(x,\kappa)\Big[\frac{e^{i\kappa x}}{T(\kappa)} + \frac{R^-(\kappa)e^{-i\kappa x}}{T(\kappa)}\Big] + q_1(x,\kappa)e^{-i\kappa x}, \tag{4.115}$$

comparando los coeficientes de $e^{i\kappa x}$ y $e^{-i\kappa x}$ en la ecuación (4.115) en ambos lados de la igualdad, se concluye que $p_1(x,\kappa) = 0$ y $q_1(x,\kappa) = 4i\kappa^3$.

Por lo tanto la ecuación (4.114) para ϕ tiene la forma

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - A\phi = 4i\kappa^3\phi. \tag{4.116}$$

Análogamente para la función ψ, se considera el límite asintótico $x \to \infty$ para obtener la siguiente relación

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \widehat{A}\psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} + 4\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - 6u\frac{\partial \psi}{\partial x} + 3\psi\frac{\partial u}{\partial x} = p_2(x,\kappa)\phi + q_2(x,\kappa)\psi, \tag{4.117}$$

entonces la ecuación anterior se simplifica como

$$\frac{\partial e^{i\kappa x}}{\partial t} - 4i\kappa^3 e^{i\kappa x} = p_2(x,\kappa)\Big[\frac{e^{-i\kappa x}}{t(\kappa)} + \frac{R^+(\kappa)e^{i\kappa x}}{T(\kappa)}\Big] + q_2(x,\kappa)e^{i\kappa x}, \tag{4.118}$$

al comparar los coeficientes de $e^{i\kappa x}$ y $e^{-i\kappa x}$ en ambos lados de la igualdad de (4.118) se encuentra que $p_2(x,\kappa)=0$ y $q_2(x,\kappa)=-4i\kappa^3$.
Así la ecuación (4.114) para ψ es

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-A\psi=-4i\kappa^3\psi. \tag{4.119}$$

Las ecuaciones (4.116) y (4.119) forman un sistema de ecuaciones diferenciales que relacionan las soluciones de Jost con el parámetro t.
Para resolver este sistema se sustituye la ecuación (4.14) en la ecuación (4.116) y se despeja $\frac{\partial\phi}{\partial t}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(a^+e^{i\kappa x})+\frac{\partial}{\partial t}(be^{-i\kappa x})=(4i\kappa^3-4\frac{\partial^3}{\partial x^3})(a^+e^{i\kappa x}+be^{-i\kappa x}),\\
&= 4i\kappa^3a^+e^{i\kappa x}+4i\kappa^3be^{-i\kappa x}-4\frac{\partial^3}{\partial x^3}(a^+e^{i\kappa x})-4\frac{\partial^3}{\partial t^3}(be^{-i\kappa x}),\\
&= 4i\kappa^3a^+e^{i\kappa x}+4i\kappa^3be^{-i\kappa x}-4(i\kappa)^3a^+e^{i\kappa x}-4(-i\kappa)^3be^{-i\kappa x},\\
&= 4i\kappa^3a^+e^{i\kappa x}+4i\kappa^3be^{-i\kappa x}+4i\kappa^3a^+e^{i\kappa x}-4i\kappa^3be^{-i\kappa x},\\
&= 8i\kappa^3a^+e^{i\kappa x},
\end{aligned} \tag{4.120}$$

al comparar los coeficientes de $e^{i\kappa x}$ y $e^{-i\kappa x}$ en la ecuación (4.120) se concluye

$$\begin{aligned}
\frac{\partial b}{\partial t} &= 0,\\
b(\kappa,t) &= b(\kappa,0),
\end{aligned} \tag{4.121}$$

por lo tanto $b(\kappa)$ es constante en el tiempo.
De forma análoga para la función ψ, se sustituye la ecuación (4.15) en la ecuación (4.119) de donde se encuentra

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(a^-e^{-i\kappa x})+\frac{\partial}{\partial t}(be^{i\kappa x})=(-4i\kappa^3-4\frac{\partial^3}{\partial x^3})(a^-e^{-i\kappa x}+be^{i\kappa x}),\\
&= -4i\kappa^3a^-e^{-i\kappa x}-4i\kappa^3be^{i\kappa x}-4\frac{\partial^3}{\partial x^3}(a^-e^{-i\kappa x})-4\frac{\partial^3}{\partial x^3}(be^{i\kappa x}),\\
&= -4i\kappa^3a^-e^{-i\kappa x}-4i\kappa^3be^{i\kappa x}-4(-i\kappa)^3a^-e^{-i\kappa x}-4(i\kappa)^3be^{i\kappa x},\\
&= -4i\kappa^3a^-e^{-i\kappa x}-4i\kappa^3be^{i\kappa x}-4i\kappa^3a^-e^{-i\kappa x}+4i\kappa^3be^{i\kappa x}\\
&= -8i\kappa^3a^-e^{i\kappa x},
\end{aligned} \tag{4.122}$$

de tal manera que se obtiene un resultado equivalente en las ecuaciones (4.120) y (4.122).
Para encontrar como varían los coeficientes $a^\pm$ con respecto a t se resuelve la ecuación diferencial que se encuentra al comparar los coeficientes en (4.120) y (4.122)

$$\frac{da^\pm}{dt} = \pm 8i\kappa^3a^\pm, \tag{4.123}$$

y cuya solución es de la forma

$$a^\pm = \pm a(\kappa,0)e^{\pm 8i\kappa^3t}. \tag{4.124}$$

Sustituyendo los resultados de las ecuaciones (4.121) y (4.124) en la ecuación (4.31) y (4.32), se encuentran las siguientes expresiones para los coeficientes de reflexión y transmisión dependientes del tiempo

$$T(\kappa,t)=\frac{1}{b(\kappa,t)}=\frac{1}{b(\kappa,0)}=T(\kappa,0), \tag{4.125}$$

$$R^{\pm}(\kappa,t)=\frac{a^{\pm}(\kappa,t)}{b(\kappa)}=\pm\frac{a^{\pm}(\kappa,0)}{b(\kappa,0)}e^{\pm 8i\kappa^3 t}=\pm R^{\pm}(\kappa,0)e^{\pm 8i\kappa^3 t}. \tag{4.126}$$

La evolución temporal de las constantes de normalización c_n se encuentra a partir de la ecuación (4.69) al definir la siguiente constante

$$\gamma_n := \frac{c_n}{d_n}=\frac{\phi(x,i\chi_n)}{\psi(x,i\chi_n)}, \tag{4.127}$$

donde $n=1,2,3,\dots,N$.
Despejando ϕ en (4.127) y sustituyendo en la ecuación (4.116) se encuentra

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial t}-\widehat{A}\phi &= 4\chi_n^3\phi,\\
\frac{\partial(\gamma_n\psi)}{\partial t}-\widehat{A}\gamma_n\psi &= 4\chi_n^3\gamma_n\psi,\\
\psi\frac{\partial\gamma_n}{\partial t}+\gamma_n\frac{\partial\psi}{\partial t}-\widehat{A}\gamma_n\psi &= 4\chi_n^3\gamma_n\psi.
\end{aligned} \tag{4.128}$$

Con la finalidad de encontrar $\frac{\partial\gamma_n}{\partial t}$ se multiplica la ecuación (4.119) por $-\gamma_n$ se obtiene

$$-\gamma_n\frac{\partial\psi}{\partial t}+\widehat{A}\gamma_n\psi=4\chi_n^3\gamma_n\psi, \tag{4.129}$$

así sumando (4.128) con (4.129) se encuentra la siguiente ecuación diferencial para γ_n con respecto al parámetro t

$$\begin{aligned}
&\psi\frac{\partial\gamma_n}{\partial t}+\gamma_n\frac{\partial\psi}{\partial t}-\widehat{A}\gamma_n\psi-\gamma_n\frac{\partial\psi}{\partial t}+\widehat{A}\gamma_n\psi=4\chi_n^3\gamma_n\psi+4\chi_n^3\gamma_n\psi,\\
&\psi\frac{\partial\gamma_n}{\partial t}=8\gamma_n\chi_n^3\psi,
\end{aligned} \tag{4.130}$$

de donde se obtiene la derivada parcial temporal de γ_n

$$\frac{\partial\gamma_n}{\partial t}=8\gamma_n\chi_n^3. \tag{4.131}$$

La ecuación diferencial (4.131) puede ser resuelta directamente por el método de separación de variables, donde se propone que γ_n depende unicamente del parámetro t para convertir la EDP en la siguiente EDO

$$\frac{d\gamma_n}{dt} = 8\gamma_n\chi_n^3, \tag{4.132}$$

la cual tiene por solución a

$$\gamma_n(t) = \gamma_n(0)e^{8\chi_n^3 t}. \tag{4.133}$$

La dependencia temporal de las constantes c_n se encuentra al sustituir la ecuación (4.127) en (4.133) de tal modo que

$$\frac{c_n(i\chi_n,t)}{d_n} = \gamma_n(t) \quad = \quad \gamma_n(0)e^{8\chi_n^3 t}. \tag{4.134}$$

De la ecuación anterior se propone que las funciones c_n y d_n sean de la forma [4]

$$c_n(i\chi_n,t) = c_n(0)e^{4\chi_n^3 t}, \tag{4.135}$$

y

$$d_n(i\chi_n,t) = d_n(0)e^{-4\chi_n^3 t}, \tag{4.136}$$

Los coeficientes definidos en (4.125), (4.126) y (4.135) junto con la condición de que χ_n no depende del tiempo se conocen como la información de dispersión. Estos son los coeficientes empleados para recuperar el potencial $u(x,t)$ a partir del problema de la dispersión inversa que será analizado en la siguiente sección.

4.4. El problema de dispersión inversa

El problema anteriormente planteado en forma física consiste en encontrar la distribución de masa de un objeto que vibra mecánicamente conociendo su energía o su amplitud y frecuencia [5].

En esta sección se presenta un método para resolver el problema de dispersión inversa. Esta formulación permite recuperar el potencial $u(x,t)$ a partir de la función $G(x,z)$ definida en la ecuación (4.95) al conocer la información de dispersión cuando $R_j^{\pm}(\kappa,t) = 0$, es decir un potencial sin reflexión. Esto se debe a que cuando los coeficientes de reflexión son cero el kernel de la ecuación integral se vuelve separable, de esta manera una ecuación integral con kernel separable puede ser resuelta explícitamente al transformar la ecuación en un sistema de ecuaciones lineales algebraicas [2, 4, 3, 23, 5].

4.4.1. Solución uno-Solitón

La solución uno-Solitón se encuentra al resolver la ecuación integral GLM (4.95) cuando $N = 1$.

Para ese caso el kernel definido a partir de la ecuación (4.94) se reduce a

$$F(x+z) \quad = \quad c^2 e^{-\chi(z+x)}, \tag{4.137}$$

por lo que la correspondiente ecuación GLM (4.95) será entonces

$$G(x,z) + c^2 e^{-\chi(z+x)} + c^2 \int_{-\infty}^{\infty} G(x,y)e^{-\chi(z+y)}dy = 0. \tag{4.138}$$

Para resolver la ecuación anterior se propone que la función $G(x,z)$ sea de la forma

$$G(x,z) = G(x)e^{-\chi z}, \tag{4.139}$$

donde la dependencia en t entra como un parámetro que se encuentra definido a partir de la información de dispersión [3]. Los límites en la integral de la ecuación (4.138) pueden ser cambiados al usar el hecho de que la función $G(x,z)$ es cero cuando $z<x$ y sustituyendo (4.139) en la ecuación (4.138) para despejar la integral se encuentra

$$c^2\int_x^\infty G(x,t)e^{-\chi y}e^{-\chi(y+z)}dy=-G(x,t)e^{-\chi z}-c^2e^{-\chi(x+z)}, \tag{4.140}$$

simplificando

$$\begin{aligned} c^2e^{-\chi z}G(x,t)\int_x^\infty e^{-2\chi y}dy &= -G(x,t)e^{-\chi z}-c^2e^{-\chi x}e^{-\chi z},\\ -\frac{c^2}{2\chi}G(x,t)[-e^{-2\chi x}]e^{-\chi z} &= -G(x,t)e^{-\chi z}-c^2e^{-\chi x}e^{-\chi z}, \end{aligned} \tag{4.141}$$

donde se puede despejar a $G(x,t)$

$$\begin{aligned} G(x,t)e^{-\chi z}\left[1+\frac{c^2}{2\chi}e^{-2\chi x}\right] &= -c^2e^{-\chi x}e^{-\chi z},\\ G(x,t)e^{-\chi z} &= -\frac{c^2e^{-\chi x}e^{-\chi z}}{1+\frac{c^2}{2\chi}e^{-2\chi x}},\\ G(x,z,t) &= -\frac{c^2e^{-\chi(x+z)}}{1+\frac{c^2}{2\chi}e^{-2\chi x}}. \end{aligned} \tag{4.142}$$

La expresión anterior se puede escribir de una forma más conveniente empleando el cambio de variable $\xi=\sqrt{\frac{c^2}{2\chi}}$.

Es importante recordar que la ecuación (4.57) relaciona a $u(x,t)$ respecto a $G(x,x,t)$, de esta manera al sustituir (4.142) en (4.57) se obtiene después de hacer el desarrollo algebraico que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -2\frac{\partial G(x,x,t)}{\partial x}=-2\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2\chi\xi^2e^{-2\chi x}}{1+\xi^2e^{-2\chi x}}\right)=4\chi\xi^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-2\chi x}}{1+\xi^2e^{-2\chi x}}\right),\\ &= 4\chi\xi^2\left(\frac{1}{1+\xi^2e^{-2\chi x}}\right)(-2\chi e^{-2\chi x})+4\chi\xi^2(e^{-2\chi x})\left(-\left[1+\xi^2e^{-2\chi x}\right]^{-2}\right)\left(-2\chi\xi^2e^{-2\chi x}\right),\\ &= -\frac{8\chi^2\xi^2e^{-2\chi x}}{1+\xi^2e^{-2\chi x}}+\frac{8\chi^2\xi^4e^{-4\chi x}}{\left[1+\xi^2e^{-2\chi x}\right]^2}=8\chi^2\xi^2\left(\frac{\xi^2e^{-4\chi x}-e^{-2\chi x}\left[1+\xi^2e^{-2\chi x}\right]}{\left[1+\xi^2e^{-2\chi x}\right]^2}\right),\\ &= 8\chi^2\xi^2\left(\frac{\xi^2e^{-4\chi x}-e^{-2\chi x}-\xi^2e^{-4\chi x}}{\left[1+\xi^2e^{-2\chi x}\right]^2}\right)=-\frac{8\chi^2\xi^2e^{-2\chi x}}{\left[1+\xi^2e^{-2\chi x}\right]^2},\\ &= -2\chi^2\left[\frac{2\xi e^{-\chi x}}{1+\xi^2e^{-2\chi x}}\right]^2=-2\chi^2\left[\frac{1}{\frac{1}{2}(\xi^{-1}e^{\chi x}+(\xi^{-1}e^{\chi x})\xi^2e^{-2\chi x})}\right]^2\\ &= -2\chi^2\left[\frac{1}{\frac{1}{2}(\xi^{-1}e^{\chi x}+\xi e^{-\chi x})}\right]^2 \end{aligned}$$

$$. \tag{4.143}$$

Por otro lado, aplicando la identidad $e^{\ln|\xi|} = |\xi|$ se encuentra

$$\begin{aligned}
\ln|\xi| &= \ln\left|\sqrt{\frac{c^2}{2\chi}}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{c(0)^2e^{8\chi^3t}}{2\chi}\right| = \frac{1}{2}\left(\ln|e^{8\chi^3t}| + \ln\left|\frac{c(0)^2}{2\chi}\right|\right) = \frac{1}{2}\left(8\chi^3t + \xi_0'\right), \\
&= 4\chi^3t + \frac{\xi_0'}{2} = 4\chi^3t + \xi_0, \qquad (4.144)
\end{aligned}$$

donde $\xi_0' = \ln\left|\frac{c^2(0)}{2\chi}\right|$ y $\xi = \xi_0/2$, así (4.143) se reduce a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= -2\chi^2\left[\frac{1}{\frac{1}{2}(e^{ln|\xi^{-1}|}e^{\chi x} + e^{ln|\xi|}e^{-\chi x})}\right]^2 \\
&= -2\chi^2\left[\frac{1}{\frac{1}{2}(e^{-(4\chi^3t+\xi_0)+\chi x} + e^{-(\chi x-(4\chi^3t+\xi_0))})}\right]^2, \\
&= -2\chi^2\left[\frac{1}{\frac{1}{2}(e^{\chi x-4\chi^3t-\xi_0} + e^{-(\chi x-4\chi^3t-\xi_0)})}\right]^2, \qquad (4.145)
\end{aligned}$$

la ecuación anterior se simplifica usando la definición de las funciones hiperbólicas, $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, obteniendo entonces

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= -\frac{2\chi^2}{\left[\frac{1}{2}e^{\chi x-4\chi^3t-\xi_0} + e^{-(\chi x-4\chi^3t-\xi_0)}\right]^2} = -\frac{2\chi^2}{\left[\cosh(\chi x - 4\chi^3t - \xi_0)\right]^2}, \\
&= -2\chi^2\mathsf{sech}^2(\chi x - 4\chi^3t - \xi_0) = -2\chi^2\mathsf{sech}^2(\chi[x - 4\chi^2t - \xi_0']). \qquad (4.146)
\end{aligned}$$

La ecuación (4.146) es llamada la solución uno-Solitón para la ecuación KdV y al hacer la comparación con la ecuación (3.111) cuando $\delta = -6$ se tiene que

$$u(x,t) = -\frac{v}{2}\mathsf{sech}^2\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt - \xi_0)\right). \qquad (4.147)$$

La ecuación (4.147) se encuentra al resolver la ecuación KdV empleando una onda de choque, mientras que la ecuación (4.146) se encuentra al emplear la transforma de dispersión inversa. Comparando los argumentos de ambas ecuaciones se encuentra una relación entre la energía y la velocidad de la siguiente forma, $v = 4\chi^2$ mostrando que ambas ecuaciones son equivalentes.

4.4.2. Solución 2-Solitón

La transformada de dispersión inversa permite analizar como interaccionan varios solitones. En esta sección se estudia el caso para $N = 2$ en la ecuación (4.94) esto permite ver la interacción entre dos solitones.

Para $N = 2$ el kernel definido por la ecuación (4.94) es de la forma

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{2} c_n^2 e^{-\chi_n x} = c_1^2 e^{-\chi_1 x} + c_2^2 e^{-\chi_2 x}, \qquad (4.148)$$

sustituyendo este kernel en la ecuación se encuentra

$$\begin{aligned}
&G(x,z)+c_1^2e^{-\chi_1(x+z)}+c_2^2e^{-\chi_2(x+z)}\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}G(x,y)\Big(c_1^2e^{-\chi_1(z+y)}+c_2^2e^{-\chi_2(z+y)}\Big)dy=0,\\
&G(x,z)+c_1^2e^{-\chi_1 x}e^{-\chi_1 z}+c_2^2e^{-\chi_2 x}e^{-\chi_2 z}\\
&+c_1^2\int_{-\infty}^{\infty}G(x,y)e^{-\chi_1(z+y)}dy+c_2^2\int_{-\infty}^{\infty}G(x,y)e^{-\chi_2(z+y)}dy=0.
\end{aligned} \tag{4.149}$$

Para resolver las integrales que aparecen en la expresión anterior se propone que la función $G(x,z)$ sea de la siguiente forma

$$G(x,z)=\sum_{1}^{2}G_m(x)e^{-\chi_m z}=G_1(x)e^{-\chi_1 z}+G_2(x)e^{-\chi_2 z}, \tag{4.150}$$

así sustituyendo (4.150) en (4.149) y tomando en consideración la condición de que la función $G(x,z)$ es cero cuando $z<x$ se obtiene

$$\begin{aligned}
&G_1(x,t)e^{-\chi_1 z}+G_2(x,t)e^{-\chi_2 z}+c_1^2e^{-\chi_1 x}e^{-\chi_1 z}+c_2^2e^{-\chi_2 x}e^{-\chi_2 z}\\
+\;&c_1^2\int_{x}^{\infty}\Big(G_1(x,t)e^{-\chi_1 y}+G_2(x,t)e^{-\chi_2 y}\Big)e^{-\chi_1(z+y)}dy\\
+\;&c_2^2\int_{x}^{\infty}\Big(G_1(x,t)e^{-\chi_1 y}+G_2(x,t)e^{-\chi_2 y}\Big)e^{-\chi_2(z+y)}dy=0,
\end{aligned} \tag{4.151}$$

y separando entonces las partes que dependen de la variable y en las integrales, se encuentra que

$$\begin{aligned}
&\Big(G_1(x,t)+c_1^2e^{-\chi_1 x}\Big)e^{-\chi_1 z}+\Big(G_2(x,t)+c_2^2e^{-\chi_2 x}\Big)e^{-\chi_2 z}\\
&+c_1^2G_1(x,t)e^{-\chi_1 z}\int_{x}^{\infty}e^{-2\chi_1 y}dy+c_2^2G_2(x,t)e^{-\chi_2 z}\int_{x}^{\infty}e^{-2\chi_2 y}dy\\
&+\Big(c_1^2G_2(x,t)e^{-\chi_1 z}+c_2^2G_1(x,t)e^{-\chi_2 z}\Big)\int_{x}^{\infty}e^{-(\chi_2+\chi_1)y}dy=0.
\end{aligned} \tag{4.152}$$

Las integrales que se encuentran en la expresión anterior se pueden realizar directamente, así

$$\begin{aligned}
&\Big(G_1(x,t)+c_1^2e^{-\chi_1 x}\Big)e^{-\chi_1 z}+\Big(G_2(x,t)+c_2^2e^{-\chi_2 x}\Big)e^{-\chi_2 z}+c_1^2G_1(x,t)e^{-\chi_1 z}\frac{e^{-2\chi_1 y}}{-2\chi_1}\Big|_x^{\infty}\\
+\;&c_2^2G_2(x,t)e^{-\chi_2 z}\frac{e^{-2\chi_2 y}}{-2\chi_2}\Big|_x^{\infty}+\Big(c_1^2G_2(x,t)e^{-\chi_1 z}+c_2^2G_1(x,t)e^{-\chi_2 z}\Big)\frac{e^{-(\chi_2+\chi_1)y}}{-\chi_1-\chi_2}\Big|_x^{\infty}=0,
\end{aligned} \tag{4.153}$$

y al evaluar en los límites de integración se tiene

$$\begin{aligned}
&\Big(G_1(x,t)+c_1^2e^{-\chi_1 x}\Big)e^{-\chi_1 z}+\Big(G_2(x,t)+c_2^2e^{-\chi_2 x}\Big)e^{-\chi_2 z}+c_1^2G_1(x,t)e^{-\chi_1 z}\frac{e^{-2\chi_1 x}}{2\chi_1}\\
+\;&c_2^2G_2(x,t)e^{-\chi_2 z}\frac{e^{-2\chi_2 x}}{2\chi_2}+\Big(c_1^2G_2(x,t)e^{-\chi_1 z}+c_2^2G_1(x,t)e^{-\chi_2 z}\Big)\frac{e^{-(\chi_2+\chi_1)x}}{\chi_1+\chi_2}=0.
\end{aligned} \tag{4.154}$$

Desarrollando ahora todos los términos en la ecuación (4.154) se llega a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} & G_1(x,t)e^{-\chi_1 z} + c_1^2 e^{-\chi_1(z+x)} + G_2(x,t)e^{-\chi_2 z} + c_2^2 e^{-\chi_2(z+x)} + \frac{c_1^2 G_1(x,t)}{2\chi_1} e^{-\chi_1(z+x)} e^{-\chi_1 x} \\ + & \frac{c_2^2 G_2(x,t)}{2\chi_2} e^{-\chi_2(z+x)} e^{-\chi_2 x} + \frac{c_1^2 G_2(x,t)}{\chi_1+\chi_2} e^{-\chi_1(z+x)} e^{-\chi_2 x} + \frac{c_2^2 G_1(x,t)}{\chi_1+\chi_2} e^{-\chi_2(z+x)} e^{-\chi_1 x} = 0, \end{aligned} \tag{4.155}$$

la cual al agrupar sumandos similares se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \left[G_1(x,t) + c_1^2 e^{-\chi_1 x} + c_1^2 e^{-\chi_1 x} \left(\frac{G_1(x,t)}{2\chi_1} e^{-\chi_1 x} + \frac{G_2(x,t)}{\chi_1+\chi_2} e^{-\chi_2 x} \right) \right] e^{-\chi_1 z} \\ + & \left[G_2(x,t) + c_2^2 e^{-\chi_1 x} + c_2^2 e^{-\chi_2 x} \left(\frac{G_2(x,t)}{2\chi_2} e^{-\chi_2 x} + \frac{G_1(x,t)}{\chi_1+\chi_2} e^{-\chi_1 x} \right) \right] e^{-\chi_2 z} = 0. \end{aligned} \tag{4.156}$$

Como cada sumando en la ecuación anterior es linealmente independiente, se encuentra el siguiente sistema de ecuaciones

$$G_1(x,t) + c_1^2 e^{-\chi_1 x} + c_1^2 e^{-\chi_1 x} \left(\frac{G_1(x,t)}{2\chi_1} e^{-\chi_1 x} + \frac{G_2(x,t)}{\chi_1+\chi_2} e^{-\chi_2 x} \right) = 0, \tag{4.157}$$

$$G_2(x,t) + c_2^2 e^{-\chi_1 x} + c_2^2 e^{-\chi_2 x} \left(\frac{G_2(x,t)}{2\chi_2} e^{-\chi_2 x} + \frac{G_1(x,t)}{\chi_1+\chi_2} e^{-\chi_1 x} \right) = 0. \tag{4.158}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones se define la siguiente matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{c_1^2}{2\chi_1} e^{-2\chi_1 x} & \frac{c_1^2}{\chi_1+\chi_2} e^{-(\chi_1+\chi_2)x} \\ \frac{c_2^2}{\chi_1+\chi_2} e^{-(\chi_1+\chi_2)x} & 1 + \frac{c_2^2}{2\chi_2} e^{-2\chi_1 x} \end{pmatrix}, \tag{4.159}$$

donde sus entradas son de la forma

$$A_{m,j} = \delta_{m,j} + \frac{c_m^2 e^{-(\chi_j+\chi_m)x}}{\chi_j+\chi_m}, \tag{4.160}$$

con $m, j = 1, 2$. El sistema de ecuaciones (4.157) y (4.158) se reduce entonces al siguiente producto de la matriz (4.160) por un vector G de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{c_1^2}{2\chi_1} e^{-2\chi_1 x} & \frac{c_1^2}{\chi_1+\chi_2} e^{-(\chi_1+\chi_2)x} \\ \frac{c_2^2}{\chi_1+\chi_2} e^{-(\chi_1+\chi_2)x} & 1 + \frac{c_2^2}{2\chi_2} e^{-2\chi_1 x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1(x) \\ G_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1^2 e^{-\chi_1 x} \\ -c_2^2 e^{-\chi_2 x} \end{pmatrix}, \tag{4.161}$$

es decir a la ecuación $AG = F$, la cual tiene como solución a $G = A^{-1}F$ donde A^{-1} es la matriz inversa de (4.159).

Para encontrar la forma explicita de este vector G, se emplea el siguiente procedimiento. Derivando la ecuación (4.160) respecto a x se obtiene

$$\frac{dA_{j,m}}{dx} = -c_m^2 e^{-(\chi_m+\chi_j)x}, \tag{4.162}$$

que anterior puede ser expresada en términos del kernel (4.148) como

$$\frac{dA_{j,m}}{dx} = -F_m(x,t)e^{-\chi_j x}, \tag{4.163}$$

y de esta manera reescribir a (4.149) en el punto $z = x$ como

$$G(x,x) = \sum_{j=1}^{2} G_j(x)e^{-\chi_m z} = \sum_{m=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} A^{-1}_{m,j}F_m(x)e^{-\chi_m z} = -\sum_{m=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} A^{-1}_{m,j}\frac{d}{dx}A_{j,m}. \tag{4.164}$$

Utilizando el resultado de álgebra lineal (ver [29]) que relaciona la traza del producto de la matriz inversa de A con la derivada de la matriz A respecto a x es igual al reciproco del determinante de A por LA derivada del determinante de A, se encuentra que

$$G(x,x) = Tr\left(A^{-1}\frac{dA_{j,m}}{dx}\right) = -\frac{1}{det|A|}\frac{d}{dx}\left(det|A|\right) = \frac{d}{dx}\left(\ln|det|A||\right). \tag{4.165}$$

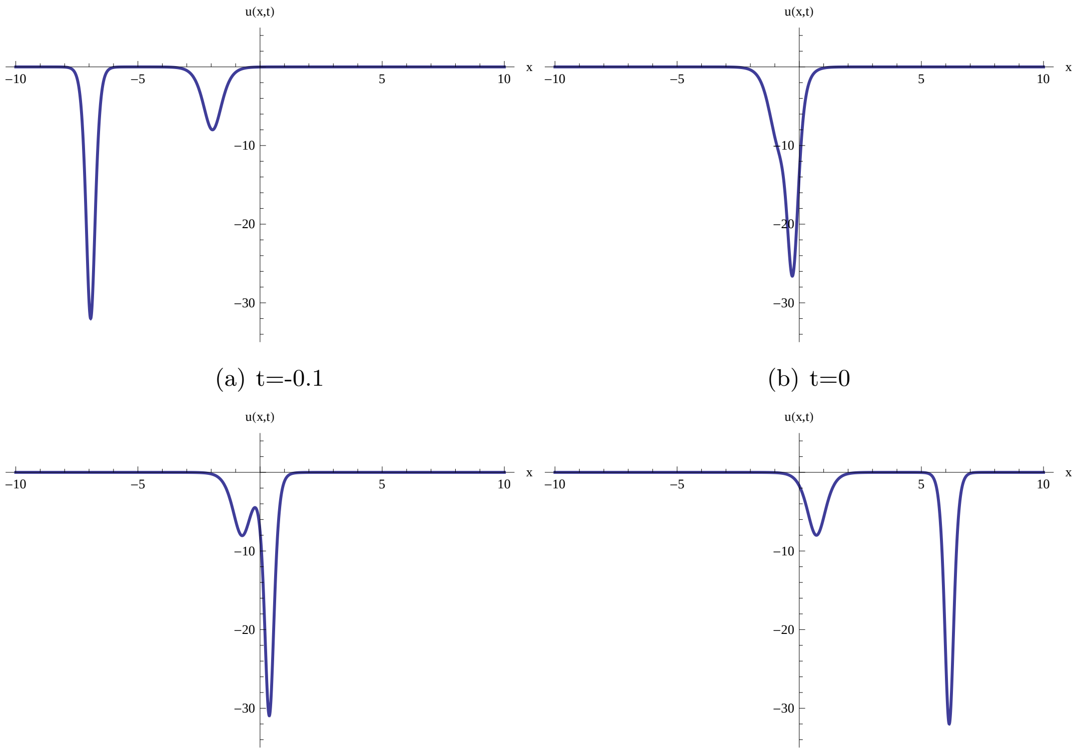
Así al sustituir la ecuación anterior en (4.57)

$$u(x,t) = -2\frac{dG(x,x,t)}{dx} \tag{4.166}$$

se obtiene la solución 2-Solitón

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -2\frac{d^2}{dx^2}\left(\ln|det|A||\right), \\ &= -2\frac{d^2}{dx^2}\left[\ln\left|\left(1+\frac{c_1^2}{2\chi_1}e^{-2\chi_1 x}\right)\left(1+\frac{c_2^2}{2\chi_2}e^{-2\chi_2 x}\right) - \left(\frac{c_1^2 e^{-(\chi_1+\chi_2)x}}{\chi_1+\chi_2}\right)\left(\frac{c_2^2 e^{-(\chi_1+\chi_2)x}}{\chi_1+\chi_2}\right)\right|\right] \end{aligned} \tag{4.167}$$

La ecuación anterior describe el comportamiento de dos solitones que colisionan (ver figura 4.2).
La figura (4.2) describe la interacción entre dos solitones con diferentes amplitudes, se observa que en $t = 0$ los solitones colisionan sumando sus amplitudes y después de la colisión los solitones emergen con la misma amplitud.
La forma más sencilla de analizar la interacción analítica de dos solitones es por medio de las siguientes aproximaciones.



(a) t=-0.1 (b) t=0

(c) t=0.05 (d) t=0.1

Figura 4.2: Solución 2-Solitón

El determinante de (4.160) tiene la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
det|A| &= \left(1+\frac{c_1^2}{2\chi_1}e^{-2\chi_1 x}\right)\left(1+\frac{c_2^2}{2\chi_2}e^{-2\chi_2 x}\right)-\left(\frac{c_1^2}{\chi_1+\chi_2}e^{-(\chi_1+\chi_2)x}\right)\left(\frac{c_2^2}{\chi_1+\chi_2}e^{-(\chi_1+\chi_2)x}\right),\\
&= 1+\frac{c_1^2}{2\chi_1}e^{-2\chi_1 x}+\frac{c_2^2}{2\chi_2}e^{-2\chi_2 x}+\frac{c_1^2c_2^2}{4\chi_1\chi_2}e^{-2(\chi_1+\chi_2)x}-\frac{c_1^2c_2^2}{(\chi_1+\chi_2)^2}e^{-2(\chi_1+\chi_2)x},\\
&= 1+\frac{c_1^2}{2\chi_1}e^{-2\chi_1 x}+\frac{c_2^2}{2\chi_2}e^{-2\chi_2 x}+c_1^2c_2^2e^{-2(\chi_1+\chi_2)x}\left[\frac{1}{4\chi_1\chi_2}-\frac{1}{(\chi_1+\chi_2)^2}\right],\\
&= 1+\frac{c_1^2}{2\chi_1}e^{-2\chi_1 x}+\frac{c_2^2}{2\chi_2}e^{-2\chi_2 x}+c_1^2c_2^2e^{-2(\chi_1+\chi_2)x}\frac{(\chi_1+\chi_2)^2-4\chi_1\chi_2}{4\chi_1\chi_2(\chi_1+\chi_2)^2},\\
&= 1+\frac{c_1^2}{2\chi_1}e^{-2\chi_1 x}+\frac{c_2^2}{2\chi_2}e^{-2\chi_2 x}+c_1^2c_2^2e^{-2(\chi_1+\chi_2)x}\frac{\chi_1^2+2\chi_1\chi_2+\chi_2^2-4\chi_1\chi_2}{4\chi_1\chi_2(\chi_1+\chi_2)^2},\\
&= 1+\frac{c_1^2}{2\chi_1}e^{-2\chi_1 x}+\frac{c_2^2}{2\chi_2}e^{-2\chi_2 x}+c_1^2c_2^2e^{-2(\chi_1+\chi_2)x}\frac{\chi_1^2-2\chi_1\chi_2+\chi_2^2}{4\chi_1\chi_2(\chi_1+\chi_2)^2},\\
&= 1+\frac{c_1^2}{2\chi_1}e^{-2\chi_1 x}+\frac{c_2^2}{2\chi_2}e^{-2\chi_2 x}+c_1^2c_2^2e^{-2(\chi_1+\chi_2)x}\frac{(\chi_1-\chi_2)^2}{4\chi_1\chi_2(\chi_1+\chi_2)^2},\\
&= 1+\frac{c_1^2}{2\chi_1}e^{-2\chi_1 x}+\frac{c_2^2}{2\chi_2}e^{-2\chi_2 x}+\frac{c_1^2c_2^2}{4\chi_1\chi_2}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2e^{-2(\chi_1+\chi_2)x}, \qquad (4.168)
\end{aligned}
$$

y sustituyendo la expresión para las constantes c_i dada por (4.135)

$$\begin{aligned}
det|A| &= 1+\frac{c_1(0)^2e^{8\chi_1^3t}}{2\chi_1}e^{-2\chi_1x}+\frac{c_2(0)^2e^{8\chi_2^3t}}{2\chi_2}e^{-2\chi_2x}\\
&\quad+\frac{c_1(0)^2e^{8\chi_1^3t}c_2(0)^2e^{8\chi_2^3t}}{4\chi_1\chi_2}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2e^{-2(\chi_1+\chi_2)x},\\
&= 1+\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}e^{-2\chi_1x+8\chi_1^3t}+\frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}e^{-2\chi_2x+8\chi_2^3t}\\
&\quad+\frac{c_1(0)^2c_2(0)^2}{4\chi_1\chi_2}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2e^{-2(\chi_1+\chi_2)x+8\chi_1^3t+8\chi_2^3t},\\
&= 1+\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}e^{-2(\chi_1x-4\chi_1^3t)}+\frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}e^{-2(\chi_2x-4\chi_2^3t)}\\
&\quad+\frac{c_1(0)^2c_2(0)^2}{4\chi_1\chi_2}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2e^{-2(\chi_1x-4\chi_1^3t+\chi_2x-4\chi_2^3t)}.
\end{aligned} \tag{4.169}$$

Para simplificar la expresión anterior se propone el cambio de variable $\tau_k=\chi_kx-4\chi_k^3t$, de esta manera

$$det|A|=1+\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}e^{-2\tau_1}+\frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}e^{-2\tau_2}+\frac{c_1(0)^2c_2(0)^2}{4\chi_1\chi_2}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2e^{-2(\tau_1+\tau_2)}. \tag{4.170}$$

Tomando en cuenta que los niveles de energía $\chi_1>\chi_2$ se considera primero el límite asintótico cuando $t\to-\infty$ y $x\to-\infty$.
Para el caso cuando $\tau_1=0$

$$\begin{aligned}
&\chi_1x-4\chi_1^3t=0,\\
&\chi_1x=4\chi_1^3t,\\
&x=4\chi_1^2t,
\end{aligned} \tag{4.171}$$

Sustituyendo este resultado en τ_2 se encuentra que

$$\tau_2 = \chi_2x-4\chi_2^3t=\chi_24\chi_1^2t-4\chi_2^3t=4\chi_2t(\chi_1^2-\chi_2^2)>0, \tag{4.172}$$

Cuando se considera que $t\to-\infty$ se tiene que $\tau_2<<0$ por lo tanto $e^{-2\tau_2}>>0$ así (4.170) se puede aproximar a

$$\begin{aligned}
det|A| &\sim \frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}e^{-2\tau_2}+\frac{c_1(0)^2c_2(0)^2}{4\chi_1\chi_2}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2e^{-2(\tau_1+\tau_2)},\\
&\sim \frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}e^{-2\tau_2}\left[1+\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2e^{-2\tau_1}\right].
\end{aligned} \tag{4.173}$$

El logaritmo de la expresión anterior se aproxima de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\ln|det|A|| &\sim \ln\left|\frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}e^{-2\tau_2}\left[1+\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2 e^{-2\tau_1}\right]\right|,\\
&\sim \ln\left|\frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}e^{-2\tau_2}\right|+\ln\left|1+\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2 e^{-2\tau_1}\right|,\\
&\sim \ln\left|\frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\right|+\ln\left|e^{-2\tau_2}\right|+\ln\left|1+\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2 e^{-2\tau_1}\right|,\\
&\sim \ln\left|\frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\right|-2\tau_2+\ln\left|1+\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2 e^{-2\tau_1}\right|,\\
&\sim \ln\left|\frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\right|-2(\chi_2 x-4\chi_2^3 t)+\ln\left|1+\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2 e^{-2\tau_1}\right|.
\end{aligned} \tag{4.174}$$

Empleando (4.174) se puede aproximar (4.57) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\ln|det|A||\Big),\\
&\sim -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\ln\left|\frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\right|-2(\chi_2 x-4\chi_2^3 t)+\ln\left|1+\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2 e^{-2\tau_1}\right|\right],\\
&\sim -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\ln\left|1+\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2 e^{-2\tau_1}\right|\right],
\end{aligned} \tag{4.175}$$

y de la identidad

$$\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2 = e^{\ln\left|\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2\right|}, \tag{4.176}$$

se encuentra que la solución 2-solitón se aproxima de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
u(x,t) &\sim -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\ln\left|1+e^{\ln\left|\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2\right|}e^{-2(\chi_1 x-4\chi_1^3 t)}\right|\right],\\
&\sim -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\ln\left|1+e^{-2(\chi_1 x-4\chi_1^3 t)+\ln\left|\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2\right|}\right|\right],\\
&\sim -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\ln\left|1+e^{-2\chi_1(x-4\chi_1^2 t-(\phi_1)_-)}\right|\right],
\end{aligned} \tag{4.177}$$

por lo tanto la fase del primer solitón en $t\to-\infty$ es

$$(\phi_1)_- = \frac{1}{2\chi_1}\ln\left|\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2\right|. \tag{4.178}$$

Para el segundo solitón se considera $\tau_2=0$ de donde se encuentra

$$\begin{aligned}
&\chi_2 x-4\chi_2^3 t=0,\\
&\chi_2 x=4\chi_2^3 t,\\
&x=4\chi_2^2 t,
\end{aligned} \tag{4.179}$$

sustituyendo en τ_1 obteniendo entonces que

$$\tau_1 \quad = \quad \chi_1 x - 4\chi_1^3 t = \chi_1 4\chi_2^2 t - 4\chi_1^3 t = 4\chi_1 t(\chi_2^2 - \chi_1^2) < 0. \tag{4.180}$$

Al considerar el límite asintótico en $t \to -\infty$ se tiene que $\tau_1 >> 0$ entonces $e^{-2\tau_2} \to 0$, así el determinante de (4.159) se aproxima a

$$det|A| \sim 1 + \frac{c_2(0)^2}{2\chi_2} e^{-2\tau_2}. \tag{4.181}$$

Sustituyendo (4.181) en la ecuación (4.57)

$$\begin{aligned} u(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln|det|A|| &= -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\left|1 + \frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}e^{-2\tau_2}\right|, \\ = \quad -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\left|1 + e^{ln\left|\frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\right|}e^{-2\tau_2}\right| &= -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\left|1 + e^{-2(\chi_2 x - 4\chi_2^3 t) + \ln\left|\frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\right|}\right|, \\ = \quad -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\left|1 + e^{-2\chi_2[x - 4\chi_2^2 t - (\phi_2)_-]}\right|, \end{aligned} \tag{4.182}$$

donde la fase del segundo solitón es de la forma

$$(\phi_2)_- = \frac{1}{2\chi_2}\ln\left|\frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\right|. \tag{4.183}$$

El análisis anterior muestra el comportamiento de las fases antes de la colisión, para analizar las fases de los solitones después de la colisión se considera el límite asintótico $t \to \infty$ y se realiza un procedimiento análogo.
De esta manera cuando $\tau_1 = 0$

$$\begin{aligned} &\chi_1 x - 4\chi_1^3 t = 0, \\ &\chi_1 x = 4\chi_1^3 t, \\ &x = 4\chi_1^2 t, \end{aligned} \tag{4.184}$$

y sustituyendo este resultado en τ_2 se encuentra que

$$\tau_2 \quad = \quad \chi_2 x - 4\chi_2^3 t = \chi_2 4\chi_1^2 t - 4\chi_2^3 t = 4\chi_2 t(\chi_1^2 - \chi_2^2) > 0. \tag{4.185}$$

Cuando se considera que $t \to \infty$ se tiene que $\tau_2 >> 0$ por lo tanto $e^{-2\tau_2} \to 0$ y (4.170) se puede aproximar a

$$det|A| \sim 1 + \frac{c_1(0)^2}{2\chi_1} e^{-2\tau_1} \tag{4.186}$$

De la expresión anterior se puede aproximar entonces a(4.57) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\ln|det|A||\Big) \sim -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\ln\left|1 + \frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}e^{-2\tau_1}\right|\right], \\ &\sim -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\ln\left|1 + e^{\ln\left|\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\right|}e^{-2(\chi_1 x - 4\chi_1^3 t)}\right|\right] \sim -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\ln\left|1 + e^{-2(\chi_1 x - 4\chi_1^3 t) + \ln\left|\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\right|}\right|\right], \\ &\sim -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\ln\left|1 + e^{-2\chi_1[x - 4\chi_1^2 t - (\phi_1)_+}\right|\right], \end{aligned} \tag{4.187}$$

por lo tanto la fase del primer solitón después de la colisión es

$$(\phi_1)_+ = \frac{1}{2\chi_1}\ln\left|\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\right|. \tag{4.188}$$

Para el segundo solitón se considera $\tau_2 = 0$

$$\begin{aligned}
\chi_2 x - 4\chi_2^3 t &= 0,\\
\chi_2 x &= 4\chi_2^3 t,\\
x &= 4\chi_2^2 t,
\end{aligned} \tag{4.189}$$

Sustituyendo este resultado en τ_1 se encuentra que

$$\tau_1 \;=\; \chi_1 x - 4\chi_1^3 t = \chi_1 4\chi_2^2 t - 4\chi_1^3 t = 4\chi_1 t(\chi_2^2 - \chi_1^2) < 0, \tag{4.190}$$

Cuando se considera que $t \to \infty$ se tiene que $\tau_2 >> 0$ por lo tanto $e^{-2\tau_2} >> 0$ donde (4.170) se puede aproximar a

$$\begin{aligned}
det|A| &\sim \frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}e^{-2\tau_1} + \frac{c_1(0)^2 c_2(0)^2}{4\chi_1\chi_2}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2 e^{-2(\tau_1+\tau_2)},\\
&\sim \frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}e^{-2\tau_1}\left[1 + \frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2 e^{-2\tau_2}\right].
\end{aligned} \tag{4.191}$$

Así el logaritmo de (4.191) se puede aproximar de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\ln|det|A|| &\sim \ln\left|\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}e^{-2\tau_1}\left[1 + \frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2 e^{-2\tau_2}\right]\right|,\\
&\sim \ln\left|\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}e^{-2\tau_1}\right| + \ln\left|1 + \frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2 e^{-2\tau_2}\right|,\\
&\sim \ln\left|\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\right| + \ln\left|e^{-2\tau_1}\right| + \ln\left|1 + \frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2 e^{-2\tau_2}\right|,\\
&\sim \ln\left|\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\right| - 2\tau_1 + \ln\left|1 + \frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2 e^{-2\tau_2}\right|,\\
&\sim \ln\left|\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\right| - 2(\chi_1 x - 4\chi_1^3 t) + \ln\left|1 + \frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2 e^{-2\tau_2}\right|.
\end{aligned} \tag{4.192}$$

Del resultado anterior se puede aproximar (4.57) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\ln|det|A||\Big),\\
&\sim -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\ln\left|\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\right| - 2(\chi_1 x - 4\chi_1^3 t) + \ln\left|1 + \frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2 e^{-2\tau_2}\right|\right],\\
&\sim -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\ln\left|1 + \frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2 e^{-2\tau_2}\right|\right],
\end{aligned} \tag{4.193}$$

y usando la identidad

$$\frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2 = e^{\ln\left|\frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2\right|}, \tag{4.194}$$

se aproxima la solución 2-solitón de la siguiente forma

$$\begin{aligned} u(x,t) &\sim -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\ln\left|1+e^{\ln\left|\frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2\right|}e^{-2(\chi_1 x-4\chi_1^3 t)}\right|\right], \\ &\sim -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\ln\left|1+e^{-2(\chi_1 x-4\chi_1^3 t)+\ln\left|\frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2\right|}\right|\right], \\ &\sim -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\ln\left|1+e^{-2\chi_1(x-4\chi_1^2 t-(\phi_2)_+)}\right|\right], \end{aligned} \tag{4.195}$$

por lo tanto la fase del segundo solitón en $t\to\infty$ es

$$(\phi_2)_+ = \frac{1}{2\chi_2}\ln\left|\frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2\right|. \tag{4.196}$$

De las expresiones (4.178) y (4.188) se obtiene el cambio de fase del primer solitón

$$\begin{aligned} \Delta\phi_1 &= (\phi_1)_+ - (\phi_1)_-, \\ &= \frac{1}{2\chi_1}\ln\left|\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\right| - \frac{1}{2\chi_1}\ln\left|\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2\right|, \\ &= \frac{1}{2\chi_1}\ln\left|\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\right| - \frac{1}{2\chi_1}\ln\left|\frac{c_1(0)^2}{2\chi_1}\right| - \frac{1}{2\chi_1}\ln\left|\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2\right|, \\ &= -\frac{1}{\chi_1}\ln\left|\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right|, \end{aligned} \tag{4.197}$$

mientras que de las expresiones (4.183) y (4.196) se encuentra el cambio de fase del segundo solitón

$$\begin{aligned} \Delta\phi_2 &= (\phi_2)_+ - (\phi_2)_-, \\ &= \frac{1}{2\chi_2}\ln\left|\frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2\right| - \frac{1}{2\chi_2}\ln\left|\frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\right|, \\ &= \frac{1}{2\chi_2}\ln\left|\frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\right| + \frac{1}{2\chi_2}\ln\left|\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right)^2\right| - \frac{1}{2\chi_2}\ln\left|\frac{c_2(0)^2}{2\chi_2}\right|, \\ &= \frac{1}{\chi_2}\ln\left|\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\right|, \end{aligned} \tag{4.198}$$

Por lo tanto las ecuaciones (4.197) y (4.198) muestran de manera explicita que el cambio de fase después de la colisión de los dos solitones es proporcional a la razón entre la diferencia de sus energías y la suma de las mismas [2].

4.4.3. Solución n-Solitón

La transformada de dispersión inversa es un método que permite mostrar la interacción de solitones con diferentes niveles de energía. En la sección anterior se mostró la solución 2-solitón que muestra como interaccionan dos solitones, en esta sección se analizara el caso para N solitones también conocida como la solución N-Solitón y se encuentra al resolver la ecuación (4.95) para un N arbitrario. El Kernel (4.94) es de la forma

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{N} (c_n)^2 e^{-\chi_n x}. \tag{4.199}$$

Se tienen entonces N niveles de energía ordenados, $\chi_1 > \ldots > \chi_N > 0$.
Al sustituir el Kernel (4.199) en la ecuación GLM (4.95) se encuentra

$$G(x,z) \quad + \quad \sum_{n=1}^{N} \Big[(c_n)^2 e^{-\chi_n(x+z)} + \int_x^\infty (c_n)^2 G(x,y,t) e^{-\chi_n(z+y)} dy \Big] = 0, \tag{4.200}$$

y para resolverla se propone que $G(x,z)$ sea de la forma

$$G(x,z) = \sum_{n=1}^{N} G_n(x) e^{-\chi_n z}. \tag{4.201}$$

substituyendo la ecuación anterior en (4.200) se tiene

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{N} G_n(x) e^{-\chi_n z} + \sum_{n=1}^{N} \Big[(c_n)^2 e^{-\chi_n(x+z)} \\ &+ \int_x^\infty (c_n)^2 \Big(\sum_{m=1}^{N} G_m(x) e^{-\chi_m y} \Big) e^{-\chi_n z} e^{-\chi_n y} dy \Big] = 0, \end{aligned} \tag{4.202}$$

agrupando las sumatorias con respecto a n y simplificando la integral con respecto a y se tiene

$$\sum_{n=1}^{N} \Big[G_n(x) e^{-\chi_n z} + (c_n)^2 e^{-\chi_n x} e^{-\chi_n z} + (c_n)^2 e^{-\chi_n z} \sum_{m=1}^{N} G_m(x) \int_x^\infty e^{-(\chi_m+\chi_n)y} dy \Big] = 0, \tag{4.203}$$

factorizando $e^{-\chi_n z}$ y resolviendo la integral se encuentra la siguiente ecuación

$$\sum_{n=1}^{N} \left[G_n(x) + (c_n)^2 e^{-\chi_n x} + (c_n)^2 \sum_{m=1}^{N} \frac{G_m(x) e^{-(\chi_m+\chi_n)x}}{\chi_m + \chi_n} \right] e^{-\chi_n z} = 0. \tag{4.204}$$

Como los niveles de energía χ_j son distintos entre ellos entonces cada sumando será linealmente independiente, por lo tanto la ecuación anterior se puede expresar como

$$G_n(x) + (c_n)^2 e^{-\chi_n x} + (c_n)^2 \sum_{m=1}^{n} \frac{G_m(x) e^{-(\chi_m+\chi_n)x}}{\chi_m + \chi_n} = 0. \tag{4.205}$$

Para despejar a G se define la siguiente matriz A a partir de sus entradas

$$A_{mn}(x,t) = \delta_{mn} + \frac{(c_n)^2 e^{-(\chi_n+\chi_m)x}}{\chi_m + \chi_n}, \tag{4.206}$$

con $m, n = 1, 2, ..., N$. De esta manera la ecuación (4.204) se simplifica a

$$\begin{aligned}
&G_n(x) + (c_n)^2 e^{-\chi_n x} + \sum_{m=1}^{N} \Big(A_{mn} - \delta_{mn}\Big) G_m(x) = 0, \\
&G_n(x) + (c_n)^2 e^{-\chi_n x} + \sum_{m=1}^{N} \Big(A_{mn} G_m(x) - \delta_{mn} G_m(x)\Big) = 0, \\
&G_n(x) + (c_n)^2 e^{-\chi_n x} - G_n(x) + \sum_{m=1}^{N} A_{mn} G_m(x) = 0, \\
&(c_n)^2 e^{-\chi_n x} + \sum_{m=1}^{N} A_{mn} G_m(x) = 0.
\end{aligned} \tag{4.207}$$

La ecuación anterior tiene la forma $AK + B = 0$ con B el vector columna definido como

$$\begin{pmatrix} (c_1)^2 e^{-\chi_1 x} \\ (c_2)^2 e^{-\chi_2 x} \\ \vdots \\ (c_n)^2 e^{-\chi_n x} \end{pmatrix}, \tag{4.208}$$

así la solución al sistema es $K = -A^{-1}B$.
Al derivar la ecuación (4.206) respecto a x se obtiene la relación

$$\begin{aligned}
\frac{dA_{mn}(x)}{dx} &= -(c_n)^2 e^{-(\chi_n+\chi_m)x} = -(c_n)^2 e^{-\chi_n x} e^{-\chi_m x}, \\
&= -B_n e^{-\chi_m x}.
\end{aligned} \tag{4.209}$$

A partir de las propiedades de las matrices junto con la ecuación anterior se puede reescribir la ecuación (4.201) en el punto $z = x$ como

$$\begin{aligned}
G(x,x,t) &= \sum_{n=1}^{N} G_n(x,t) e^{-\chi_n x} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} (A^{-1})_{mn}(x,t) B_m e^{-\chi_n x}, \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} (A^{-1})_{mn}(x,t) \frac{dA_{mn}}{dx} = Tr\left((A^{-1})\frac{dA}{dx}\right), \\
&= \left(\frac{1}{detA}\right)\frac{ddet|A|}{dx} = \frac{d}{dx}\Big(\ln|detA(x,t)|\Big).
\end{aligned} \tag{4.210}$$

Finalmente el potencial $u(x,t)$ puede ser encontrado explícitamente la sustituir la ecuación (4.210) en la ecuación (4.57)

$$u(x,t) = -2\frac{d^2}{dx^2} \ln|detA(x,t)|. \tag{4.211}$$

a la ecuación anterior se le conoce como la solución "N-Solitón"de la ecuación KdV estándar. Como puede apreciarse, la transformada de dispersión inversa resulta dar un resultado más general que el resultado obtenido en el capítulo 3, en el cual se empleo una onda de choque para resolver la ecuación KdV. En el capítulo 3 se encontró que al resolver la ecuación diferencial con la onda de choque solo se obtenía una solución tipo solitón, mientras que el método planteado en este capítulo, la transformada de dispersión inversa, resuelve de manera más general el problema al encontrar la interacción entre N solitones con diferentes niveles de energía [30, 2, 4, 5].

Capítulo 5

Conclusiones

Muchas de las leyes fundamentales de la física, por ejemplo, las del electromagnetismo y la mecánica cuántica están formuladas en el lenguaje matemático de las ecuaciones diferenciales parciales lineales. Sin embargo, otros sistemas tienen una naturaleza inherentemente no lineal. La descripción de un sistema no lineal se realiza usualmente mediante ecuaciones diferenciales no lineales. En la actualidad no existe una teoría matemática que permita resolver en general ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales no lineales por lo que esto resulta un problema muy difícil de resolver. En vez de esto, para cada problema no lineal por resolver se realiza una construcción matemática particular que resulta a menudo solo aplicable a un conjunto de problemas similares o equivalentes. Uno de los ejemplos más representativos en el contexto de física no lineal es la ecuación KdV que dentro de su espacio de soluciones se encuentran un tipo muy especial de funciones, las soluciones tipo solitón.
En este trabajo de tesis se presentó una revisión de los aspectos de la ecuación KdV la cual es una ecuación diferencial parcial no lineal, haciendo énfasis solo en los detalles característicos de este problema que mantiene relación con problemas no lineales de primer orden solubles. En general, estos problemas solubles de primer orden son algunas ecuaciones diferenciales parciales no lineales tales como las cuasi-lineales y algunas pocas ecuaciones totalmente no lineales como por ejemplo la ecuación de la eikonal. Lejos de estos ejemplos didácticos el resolver una ecuación diferencial parcial no lineal de tercer orden, como lo es la ecuación KdV, resulta todo un reto para la física y las matemáticas.
Primero se presentó una construcción detallada más no rigurosa de la ecuación KdV empleando elementos de la mecánica de fluidos, es decir se hizo uso de las ecuaciones de un fluido no viscoso, incompresible e irrotacional. La ecuación KdV surge de modelar la propagación de una perturbación viajera solitaria en la superficie de un fluido donde existen efectos de no linealidad y dispersión simultáneamente. Estos se pueden presentar en un canal de agua poco profundo donde pueden propagarse ondas de longitud de onda larga en un medio dispersivo. Después se presentó un método para resolver la ecuación KdV empleando una onda de choque como ansatz, lo que permite simplificar la ecuación KdV en una ecuación diferencial ordinaria que es posible resolver. Una de las soluciones obte-

nidas por este método es el llamado uno-solitón.
Uno de los aspectos más importantes de la ecuación KdV como ya se mencionó es su naturaleza no lineal. Sin embargo, también posee un gran valor histórico ya que representa el primer sistema dinámico completamente integrable que contiene un número infinito de cantidades conservadas. Las matemáticas que fueron desarrolladas para demostrar este hecho y que proporcionan un método mucho más eficaz de resolución de la ecuación KdV se concretan en lo que actualmente es conocido como la transformada de dispersión inversa. Los principales elementos del método de la transformada de dispersión inversa son, el problema de dispersión directa, la formulación de Lax, la evolución de los datos de dispersión y el problema de dispersión inversa.
En el caso de la ecuación KdV el método de la transformada inversa no solo reproduce la solución uno-solitón, si no que permite encontrar las soluciones N-solitón. En particular se obtuvo la solución 2-solitón que puede ser interpretada como la interacción de dos solitones. Dicha interacción es no trivial ya que la suma de dos soluciones tipo solitón no es solución debido a que el principio de superposición no es válido para sistemas no lineales observándose así que los solitones preservan su forma antes y después de la interacción con solo un cambio de fase que depende de las energías de cada solitón.
Es importante mencionar que muchos de los métodos e ideas empleados para resolver ecuaciones diferenciales no lineales están motivados por diferentes áreas del conocimiento. En el caso de la ecuación KdV fue posible encontrar diferentes soluciones exactas haciendo uso de algunas ideas de la mecánica cuántica.
Por lo tanto el estudio de los solitones es un tema de gran interés ya que permite el análisis de fenómenos no lineales que se presentan en la naturaleza y son difíciles de modelar, razón por la cual es importante estudiar la ecuación KdV y sus aplicaciones. Algunos ejemplos de ellas son la resolución del acertijo de Fermi-Pasta-Ulam, solitones internos en el océano, acústica no lineal de líquidos burbujeantes, flujos de magma y ondas de conducto, física de plasmas, líneas de transmisión eléctrica, entre otras.

Apéndice A

Solución a la integral (3.104)

En el capitulo 3 se planteo la ecuación diferencial ordinaria

$$-vf' + f''' + \delta f f' = 0 \tag{A.1}$$

la cual se pudo reducir a la ecuación

$$\frac{df}{f\sqrt{v-\eta f}} = \pm d\xi \tag{A.2}$$

Para resolver la ecuación anterior, se propone el cambio de variable $u = \sqrt{v - \eta f}$, para transformar a la ecuación (A.2) en

$$\frac{-2du}{v-u^2} = \frac{2du}{u^2-v} = \pm d\xi \tag{A.3}$$

y puede ser resuelta al hacer una integral con sustitución trigonométrica con,

$$\begin{aligned} sen(\theta) &= \frac{\sqrt{v}}{u}, \\ cos(\theta) &= \frac{\sqrt{v-u^2}}{u} \\ tan(\theta) &= \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{v-u^2}} \end{aligned} \tag{A.4}$$

De esta manera la ecuación (A.3) tiene la forma

$$2\int \frac{du}{u^2-v} = 2\int \frac{tan^2(\theta)}{v}\left(-\sqrt{v}\frac{cos(\theta)}{sen^2(\theta)}\right)d\theta = \\ -2\frac{\sqrt{v}}{v}\int \frac{sen^2(\theta)}{cos^2(\theta)}\left(\frac{cos(\theta)}{sen^2(\theta)}\right)d\theta = -\frac{2}{\sqrt{v}}\int \frac{d\theta}{cos(\theta)} = -\frac{2}{\sqrt{v}}\int sec(\theta)d\theta, \tag{A.5}$$

multiplicando y dividiendo por el término de $sec(\theta) + tan(\theta)$ se puede resolver la integral anterior usando identidades trigonométricas

$$-\frac{2}{\sqrt{v}}\int sec(\theta)\left(\frac{sec(\theta)+tan(\theta)}{sec(\theta)+tan(\theta)}\right)d\theta = \\ -\frac{2}{\sqrt{v}}\int \frac{sec^2(\theta)+sec(\theta)tan(\theta)}{sec(\theta)+tan(\theta)}d\theta, \tag{A.6}$$

ya que la derivada de $tan(\theta)$ es $sec^2(\theta)$ y la derivada de la $sec(\theta)$ es $sec(\theta)tan(\theta)$ entonces la derivada de la suma es

$$\frac{d}{d\theta}(sec(\theta) + tan(\theta)) = sec(\theta)tan(\theta) + sec^2(\theta) \tag{A.7}$$

por lo tanto la integral (A.6) se resuelve sabiendo que

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\sqrt{v}} \int \frac{d(sec(\theta) + tan(\theta))}{sec(\theta) + tan(\theta)} d\theta \\ = -\frac{2}{\sqrt{v}} ln|sec(\theta) + tan(\theta)| \end{aligned} \tag{A.8}$$

Regresando a las variables originales se encuentra que

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\sqrt{v}} ln|sec(\theta) + tan(\theta)| \\ = -\frac{2}{\sqrt{v}} ln\left|\frac{1}{cos(\theta)} + tan(\theta)\right| \\ = -\frac{2}{\sqrt{v}} ln\left|\frac{1}{\frac{\sqrt{u^2-v}}{u}} + \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u^2-v}}\right| \\ = -\frac{2}{\sqrt{v}} ln\left|\frac{u}{\sqrt{u^2-v}} + \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u^2-v}}\right| \\ = -\frac{2}{\sqrt{v}} ln\left|\frac{u+\sqrt{v}}{\sqrt{u^2-v}}\right|, \end{aligned} \tag{A.9}$$

Utilizando las propiedades de los logaritmos se reduce la expresión anterior como

$$\begin{aligned} = -\frac{2}{\sqrt{v}} ln\left|\frac{u+\sqrt{v}}{\sqrt{u^2-v}}\right| = -\frac{1}{\sqrt{v}} ln\left|\left(\frac{u+\sqrt{v}}{\sqrt{u^2-v}}\right)^2\right| \\ = -\frac{1}{\sqrt{v}} ln\left|\frac{(u+\sqrt{v})^2}{(\sqrt{u^2-v})^2}\right| = -\frac{1}{\sqrt{v}} ln\left|\frac{(u+\sqrt{v})^2}{u^2-v}\right| \\ = -\frac{1}{\sqrt{v}} ln\left|\frac{(u+\sqrt{v})^2}{(u-\sqrt{v})(u+\sqrt{v})}\right| = -\frac{1}{\sqrt{v}} ln\left|\frac{u+\sqrt{v}}{u-\sqrt{v}}\right| \\ = \frac{1}{\sqrt{v}} ln\left|\frac{u-\sqrt{v}}{u+\sqrt{v}}\right|, \end{aligned} \tag{A.10}$$

y sustituyendo el valor de $u = \sqrt{v - \eta f}$ se obtiene el resultado

$$\frac{1}{\sqrt{v}} ln\left|\frac{\sqrt{v-\eta f} - \sqrt{v}}{\sqrt{v-\eta f} + \sqrt{v}}\right| = \pm\xi - \xi_0 \tag{A.11}$$

Bibliografía

[1] G. d.-V. J. Korteweg, "On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves," *Philosophical megazine*, vol. 39, pp. 422–443, 1895.

[2] M. Dunajski, *Solitons Instantons and Twistors.* Oxford University press, first ed., 2010.

[3] L. Master, *Scattering Theory.* Radboud Universiteit Nijmegen, first ed., 2008.

[4] T. Aktosun, "Inverse Scattering Transform and Theory of Solitons," *Springer New York*, vol. Springer eBook Mathematics of Complaxity and Dinamical Systems, pp. 771–782, 2011.

[5] R. S. Johnson and P. G. Drazin, *Solitons an Introduction.* Cambridge University Press, first ed., 1989.

[6] A.-M. Wazwaz, *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory.* Springer, first ed., 2009.

[7] E. C. Zachmnoglou and D. W. Thoe, *Introduction to Partial Differential Equations with Applications.* Dover, first ed., 1976.

[8] L. C. Evans, *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, first ed., 1997.

[9] W. A. Strauss, *Partial Differential Equations An Introduction.* Jonh Wiley & Sons, second ed., 2007.

[10] K. Brauer, "The Korteweg de Vries Equation: History, exact solutions and graphical representation." preimpresión http://people.seas.harvard.edu/ jones/solitons/pdf/025.pdf, 2000.

[11] V. Y. Belashov and S. V. Vladimirov, *Solitary Waves in Dispersive Complex Media, Theory, Simulation, Applications.* Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[12] R. S. Palais, *An Introduction to Wave Equations and Solitons.* Chinese Academy of Sciences, first ed., 2000.

[13] R. M. Miura, "Korteweg de Vries Equation and Generalizations. I. A Remarkable Explicit Nonlinear Transformation," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 9, pp. 1202–1204, 1968.

[14] M. D. K. Robert M. Miura, Clifford S. Gardner, "Korteweg de Vries Equation and Generalizations. II. Existence of Conservation Laws and Constants of Motion," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 9, pp. 1204–1209, 1968.

[15] C. H. Su and C. S. Gardner, "Korteweg de Vries Equation and Generalizations. III. Derivation of the Korteweg de Vries Equation and Burgers Equation," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 10, p. 536, 1969.

[16] C. S. Gardner, "Korteweg de Vries Equation and Generalizations. IV. The Korteweg de Vries Equation as a Hamiltonian System," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 12, pp. 1548–1551, 1971.

[17] C. S. G. Martin D. Kruskal, Robert M. Miura, "Korteweg de Vries Equation and Generalizations. V. Uniqueness and Nonexistence of Polynomial Conservation Laws," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 11, pp. 952–960, 1970.

[18] M. D. K. . R. M. M. Clifford S. Gardner, John M. Greene, "Korteweg de Vries Equation and Generalizations. VI. Methods for Exact Solution," *Communications on pure and applied mathematics*, vol. 27, pp. 97–133, 1974.

[19] U. o. C. Laboratory for computational dynamics, "The Korteweg de Vries Equation: A Derivation." https://es.scribd.com/document/42763773/KdV-Derivation.

[20] K. Banks, "Solitons and Korteweg de Vries Equation: Staring with Shallow Water Waves." https://pdfs.semanticscholar.org/76da/2684a1df354e24a44473dbe0728df7495142.pdf, 2012.

[21] H.-J. Schmidt, *Nonlinear Wave Equations.* University of Osnabrück 2003, first ed., 2003.

[22] R. P. Feymann, R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feymann Lectures on Physics Vol 3.* Addiison Wesley, 1967.

[23] W. Eckhaus and A. van Harten, *The Inverse Scattering Transformation and the Theory of Solitons, An introduction.* North Holland, first ed., 1981.

[24] V. E. Zakharov and L. D. Faddeev, "Korteweg de Vries Equation: A Completely Integrable Hamiltonian System," *Functional Analysis and Its Applications*, vol. 5, pp. 280–287, 1971.

[25] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists.* Acadmic Press Inc, third ed., 1985.

[26] M. L. Boas, *Mathematical methods in the Physical Sciences.* John Wiley & Sons, second ed., 1983.

[27] M. H. Ken Riley and S. Bence, *Mathematical methods for Physics and Engineering.* Cambridge University Press, third ed., 2006.

[28] P. D. Lax, “Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves,” *Communications on pure and applied Mathematics*, vol. XXI, pp. 467–490, 1968.

[29] A. J. I. Stephen H. Friedberg and L. E. Spence, *Linear Algebra.* Prentice Hall, fourth ed., 2003.

[30] R. Hirota, “Exact Solution of the Korteweg de Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons,” *Physical Review Letters*, vol. 27, pp. 1192–1194, 1971.