

SEP

SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



Instituto Politécnico Nacional



Escuela Superior de Física y Matemáticas

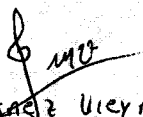


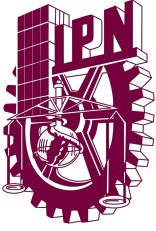
### CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 25 del mes de Octubre del año 2017, el que suscribe Martínez Vieyra José alumno del Programa Académico de Lic. en Física y Matemáticas con número de boleta 2011330143

adscrito a la Escuela Superior de Física y Matemáticas, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Francisco Javier Torrubiatez Saldívar y cede los derechos del trabajo titulado Una comparación entre las ecuaciones de Vanne-Mills y las de Maxwell al Dr. Pablo Paniagua López al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección jvieyra@fis.cinvestav.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

  
José Martínez Vieyra  
Nombre y firma del alumno



Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Licenciatura en Física y Matemáticas



---

Una comparación entre las ecuaciones de  
Yang-Mills y las de Maxwell

---

*Tesis que para obtener el título de*  
**Licenciado en Física y Matemáticas**

*Presenta:*  
**José Martínez Vieyra**

*Directores de tesis:*  
**Dr. Francisco Javier Turrubiates Saldívar**  
**Dr. Pablo Paniagua López**

*Ciudad de México, Octubre 2017*

*Dedicada a mi madre, mi tesoro más grande:  
la Sra. Antonia Vieyra Baltazar*

# Índice general

<b>1. Preliminares Matemáticos</b>	<b>12</b>
1.1. Variedades Diferenciables . . . . .	12
1.2. Campos Vectoriales . . . . .	13
1.3. Formas Diferenciales . . . . .	16
1.3.1. El operador Estrella . . . . .	24
1.4. Grupos de Lie . . . . .	25
1.5. Haces Fibrados . . . . .	30
1.5.1. Haces en general . . . . .	30
1.5.2. Haces Principales . . . . .	31
1.5.3. Haces Asociados . . . . .	32
1.6. Conexiones sobre Haces Principales . . . . .	32
<b>2. Teorías de Norma</b>	<b>34</b>
2.1. Introducción a las Teorías de Norma . . . . .	35
2.2. Relación entre las Teorías de Norma y el formalismo de Haces Fibrados	44
<b>3. Las ecuaciones de Yang-Mills</b>	<b>49</b>
3.1. Operadores Estrella . . . . .	50
3.2. Caso $G = U(1)$ . . . . .	52
3.3. Caso $G \subset U(N)$ . . . . .	58
<b>4. Soluciones particulares a las ecuaciones de Yang-Mills</b>	<b>69</b>
4.1. Teoría de Yang-Mills en $SU(2)$ . . . . .	71
4.2. Soluciones con invarianza de norma $SU(2)$ . . . . .	74
4.2.1. Onda Plana No-Abeliana . . . . .	75
4.2.2. Solución de Ikeda-Miyachi . . . . .	76
4.2.3. Soluciones con Monopolos Magnéticos . . . . .	76
<b>5. Conclusiones</b>	<b>85</b>

# Agradecimientos

*Voy a guardar intacto el recuerdo de este instante porque todo lo que existe ahora mismo nunca volverá a ser igual. Un día lo veré como la más remota prehistoria.  
Voy a conservarlo entero porque hoy me enamoré.*

José Emilio Pacheco, *Las batallas en el desierto*.

## **A mis padres:**

*Queridos Mamá y Papá. Siempre han sido un ejemplo para mí. Gracias a ello estoy alcanzado mis metas con mucho orgullo. Les debo un eterno agradecimiento y mi retribución total por su gran amor y fortaleza en los momentos difíciles que se presentan día con día. Todo lo bueno que he alcanzado es gracias a ustedes.*

## **A mi hermana Dianita:**

*Muchas gracias por ser un remo más en la nave del estudio a altas horas de la noche. Te quiero hermanita.*

## **A mis asesores los doctores Paniagua y Turrubiates:**

*Durante la realización de este trabajo ustedes fueron más que una guía, una fuente de conocimientos, fueron pacientes y muy pacientes. En verdad estoy infinitamente agradecido por el tiempo que se tomaron en planear, dirigir, revisar y corregir este trabajo, más aún por el gesto de seguirme tomando en cuenta cuando estaba en la maestría. Todavía recuerdo que la escritura de esta tesis comenzó con una anécdota contada por el Dr. Turrubiates acerca de un pacto de caballeros.*

## **A mi familia:**

*Aunque siempre me pregunten que cuándo dejaré de estudiar, creanme que algún día lo haré y espero obtener un trabajo pero todavía no es hora de que eso ocurra.*

## **A mis profesores:**

*Todo Nautilus necesita de un Capitán Nemo, agradezco a todos los capitanes Nemo que tuve a lo largo de mi formación académica, en especial a los profesores Granados, Zúñiga, Angulo Brown, Cordero y a la profesora Flor.*

**A mis amigos:**

*A ustedes quiero agradecerles por todas las experiencias que pasamos en los salones de clase, en los pasillos o en cualquier lugar dentro o fuera de la escuela, gracias por el apoyo que me brindaron cuando necesité de algo y espero yo también haberles ayudado en alguna ocasión. Especialmente quiero agradecer a aquellos que se tomaron la molestia de despertarme en las clases.*

**A la música:**

*¿Quién puede imaginarse un mundo sin música? Seeguramente pocos, al menos yo no, siendo una de mis pasiones más grandes en esta vida, he llegado al punto de recordar momentos de mi vida con solo escuchar las primeras notas de un canción.*

Este trabajo ha sido apoyado por COFAA-IPN y por los proyectos de investigación SIP-IPN números **20150975**, **20161370** y **20171168**.

---

# Resumen

Las teorías de norma son de gran importancia en la descripción de la dinámica de las partículas elementales. En este trabajo se presenta primero una revisión de los principales elementos matemáticos que son empleados en el estudio de las teorías de norma. En particular se discuten los conceptos de variedades diferenciables, grupos de Lie, haces fibrados y conexiones sobre haces principales. Estas ideas se emplean más adelante para definir de forma precisa a las teorías de norma y su relación con el formalismo de haces fibrados.

Posteriormente se obtienen en forma detallada las ecuaciones de Yang-Mills para el caso en el que el grupo de norma es  $U(1)$  correspondiente a la teoría electromagnética de Maxwell y también para cuando dicho grupo es  $U(N)$ . Se hace además una comparación entre estos dos conjuntos de ecuaciones.

Finalmente se considera la solución de las ecuaciones de Yang-Mills para cuando el grupo de norma es  $SU(2)$ . Se discuten las soluciones de onda plana no-abeliana, la de Ikeda-Miyachi y las de Wu-Yang y 't Hooft-Polyakov que contienen monopolos magnéticos.

# Abstract

Gauge theories are of great importance in the description of the dynamics of elementary particles. In this work we present first a review of the main mathematical elements that are used in the study of gauge theories. In particular, the concepts of differentiable manifolds, Lie groups, fiber bundles and connections on principal bundles are discussed.

These ideas are used later to define in a precise way the gauge theories and their relation with the formalism of fiber bundles.

Then the Yang-Mills equations are obtained for the case corresponding to Maxwell's electromagnetic theory in which the gauge group is  $U(1)$  as well as when that group is  $U(N)$ . In addition a comparison between these two sets of equations is made.

Finally we consider the solution of the Yang-Mills equations when the gauge group is  $SU(2)$ . The solutions of non-abelian plane wave and of Ikeda-Miyachi are discussed as well as those of Wu-Yang and t'Hooft-Polyakov which contain magnetic monopoles.



# Introducción

El descubrimiento y desarrollo de la teoría de campo es una de las grandes revoluciones conceptuales de la ciencia del siglo XIX. La primera teoría de campos es la teoría electromagnética de J. C. Maxwell la cual describe la interacción entre cargas y corrientes eléctricas. Estas últimas son la fuente del campo eléctrico y del campo magnético respectivamente y su dinámica está descrita mediante las ecuaciones de Maxwell, que son un sistema de ecuaciones diferenciales parciales lineales acopladas. Una segunda revolución conceptual en teoría de campo ocurre con el surgimiento de las teorías de norma para describir la interacción entre partículas elementales, el ejemplo más importante en física son las llamadas teorías de Yang-Mills. En este sentido es importante revisar el concepto de simetría de norma que ha evolucionado desde Maxwell en el año 1864 hasta C. N. Yang en el año 1954 [1]. La idea de simetrías locales o simetrías de norma, ha demostrado ser el enfoque decisivo en desentrañar la estructura de las interacciones fundamentales de la naturaleza. A pesar de que la teoría de Maxwell es la teoría de Yang-Mills original sus simetrías no fueron apreciadas por décadas. El electromagnetismo posee dos importantes simetrías, la invarianza de Lorentz y la invarianza local de norma. Sin embargo, ambas simetrías no fueron reconocidas debido a que el total entendimiento de la invarianza de Lorentz requiere otra revolución conceptual, esto es la teoría de la relatividad especial desarrollada por A. Einstein y publicada a principios del siglo XX en el año de 1905. Fue necesario reconocer que la simetría estaba presente en las ecuaciones de Maxwell y darse cuenta de que ésta era una simetría de la naturaleza. En particular, comprender a fondo la invarianza local de norma requiere ideas de la mecánica cuántica y la relatividad general. El concepto de simetría por sí mismo no fue apreciado hasta finales del siglo diecinueve. El papel prominente que desempeña hoy en día el concepto de simetría fue establecido después del desarrollo de la mecánica cuántica hacia mediados del siglo XX. Matemáticamente, la simetría en este caso, es modelada mediante el concepto de grupo y en particular de grupos de Lie. Por ejemplo, el electromagnetismo posee una simetría de norma que es el grupo abeliano  $U(1)$  (grupo unitario uno dimensional) lo cual le da a la teoría electromagnética el nombre de teoría de norma abeliana. En la década de 1960,

con la construcción del modelo estándar de la física de partículas elementales y sus interacciones se demostró que tres de las cuatro interacciones fundamentales (electromagnetismo, interacciones débiles y fuertes) pueden ser modeladas como teorías de norma abelianas y no abelianas. Las teorías de norma empleadas poseen como grupos de simetría al grupo unitario  $U(n)$  o subgrupos de este. En el caso que el grupo de simetría sea un grupo no conmutativo, la teoría de norma es llamada teoría de Yang-Mills. La teoría de la cuarta interacción fundamental, la gravitación, fue elaborada por A. Einstein en el marco de la pseudo-geometría riemannianna y no como una teoría de campo de norma. Posteriormente, esta teoría fue reformulada usando conexiones sobre el haz de marcos de la variedad de espacio-tiempo. Una revisión histórica a detalle de las teorías de norma puede consultarse en [2] y [3].

La revolución conceptual que conlleva el advenimiento de las teorías de norma tuvo consecuencias matemáticas notables y totalmente inesperadas. Esto en parte se debe a que incluso una teoría pura de Yang-Mills definida en un espacio euclidiano cuatro dimensional tiene una estructura matemática muy interesante incluso a nivel clásico. El descubrimiento de soluciones regulares a las ecuaciones de campo de Yang-Mills que corresponden a mínimos absolutos del funcional de acción de Yang-Mills ha conducido a un estudio intensivo de la teoría clásica, ya que tener un conocimiento profundo de la teoría clásica de norma se vuelve invaluable cuando se intenta hacer su cuantización [4].

Todas las soluciones asociadas a un funcional de acción finito actualmente conocidas se caracterizan por una cantidad topológica llamada el número de instantón, o el índice de Pontryagin, o la segunda clase de Chern. Esta cantidad topológica es una manifestación de la no trivialidad de las condiciones de frontera que son impuestas sobre los potenciales de norma mediante la exigencia de la finitud de la acción y esto conduce a un problema topológico de complejidad considerable [5]. Sin embargo, en matemáticas existe una teoría lo suficientemente general para tratar con este problema. A principios de la década de 1950, mientras Yang y Mills proponían su idea de campos de norma no abelianos, C. Ehresmann [6] desarrolló la noción de conexión sobre haces fibrados principales, la cual resulta ser el marco matemático natural para describir las teorías de campo de Yang-Mills.

La finitud del funcional de acción (un requisito de integrabilidad y, por tanto, una condición de frontera analítica) dicta (bajo hipótesis físicas razonables) el comportamiento asintótico de las componentes del potencial euclidiano. Este comportamiento asintótico a su vez, es incorporado en la construcción de un haz fibrado principal sobre alguna compactificación apropiada del espacio euclidiano cuatro dimensional. En esta forma las condiciones de frontera globales son automáticamente satisfechas. La teoría de haces fibrados, fue originalmente introducida para formular y resol-

---

ver problemas topológicos globales. La noción de un haz fibrado es también muy apropiada para tratar con problemas locales de geometría diferencial y en general teorías de campo. La teoría de haces fibrados resulta ser uno de los lenguajes más convenientes para describir a una teoría de campo de norma, ya que además permite estudiar sus aspectos topológicos. En el lenguaje de los haces fibrados es posible dar una geometrización del potencial de norma, esto es que las componentes del potencial de norma se convierten en las coordenadas de una forma de conexión en un haz fibrado principal [7].

La teoría de haces fibrados es también indispensable en el estudio del grupo de todas las transformaciones de norma, por ejemplo, en el espacio euclidiano cuatro dimensional, este grupo puede ser descrito de manera bastante sencilla. Sin embargo, cuando se realiza la compactificación uno puntual del espacio euclidiano cuatro dimensional el grupo de transformaciones de norma adquiere una topología no trivial. Consecuentemente, el estudio del espacio de orbitas, esto es, el espacio de todos los potenciales de norma inequivalentes sobre el cual se realizan integrales funcionales requiere de gran cuidado. Aquí es donde se observa que el lenguaje de haces fibrados es indispensable ya que no solo muestra ser un lenguaje más apropiado para describir a las teorías de norma si no que cuenta con la estructura matemática para abordar los aspectos topológicos que surgen de manera natural. Sin embargo, como ya se mencionó, las teorías de norma surgen de motivaciones físicas y se desarrollan en un lenguaje propio que podemos llamar la terminología del campo de norma. Por otro lado, a la terminología de teorías de norma en términos de los haces fibrados se le conoce simplemente como terminología de haces. La relación entre la terminología del campo de norma y la terminología de haces para describir a una teoría de norma se encuentra plasmada en el llamado diccionario de Wu-Yang [8].

Es importante comparar una teoría de norma abeliana con una no abeliana para conocer sus diferencias. El caso más simple e importante ocurre en un espacio de Minkowski cuatro dimensional donde es definida la teoría electromagnética de Maxwell cuyo grupo de simetría es el grupo  $U(1)$ . Por otro lado, y con la finalidad de llevar a cabo una comparación, se considera una teoría de Yang-Mills sobre el mismo espacio de Minkowski cuatro dimensional, pero con grupo de simetría  $SU(N)$ . Los resultados que se encuentran son que mientras las ecuaciones de Maxwell resultan ser un sistema de ecuaciones diferenciales parciales lineales acopladas, las ecuaciones de Yang-Mills son un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas lo cual complica su análisis así como encontrar sus soluciones [9].

Este trabajo está organizado de la siguiente forma, en el capítulo 1 se hace una revisión de los conceptos matemáticos que son necesarios para describir las teorías de norma, entre ellos está el formalismo de haces fibrados, dicho formalismo constituye

---

---

el principal elemento en los propósitos de este trabajo. En el capítulo 2 se estudian las teorías de norma desde el punto de vista de la física teórica, a continuación se establece la relación precisa entre las teorías de norma con el lenguaje geométrico en la teoría de haces fibrados. Posteriormente en el capítulo 3 se describe la teoría electromagnética de Maxwell como una teoría de norma con grupo de estructura  $U(1)$ , escribiendo explícitamente las ecuaciones que resultan de esta teoría. Después se presenta de manera detallada la deducción de las ecuaciones de Yang-Mills para el caso de un grupo de estructura subconjunto de  $U(N)$ , esto con el fin de hacer una comparación entre el caso de las ecuaciones de Maxwell y las antes mencionadas ecuaciones de Yang-Mills vistas en el mismo lenguaje. Luego en el capítulo 4 se analizan algunas soluciones a las ecuaciones de Yang-Mills, en particular se estudia la teoría de Yang-Mills en  $SU(2)$  y se realizan los cálculos explícitos relacionados con la solución de monopolo magnético de Wu y Yang. Finalmente se presentan las conclusiones obtenidas de este trabajo.

---

# Capítulo 1

## Preliminares Matemáticos

Las teorías de campo de norma están basadas en ideas físicas que requieren estructuras matemáticas esenciales para poder ser elaboradas. El lenguaje más apropiado para poder describirlas es el proporcionado por la geometría diferencial, en particular el de la teoría de haces fibrados con conexión. Es importante mencionar que aún cuando la terminología de las teorías de norma fue llevada a cabo por físicos, estos conceptos fueron reinterpretados en términos geométricos y su correspondencia se encuentra resumida en el diccionario de Wu-Yang.

En este capítulo se hace una revisión de los principales conceptos y definiciones matemáticas que serán empleadas a lo largo de este trabajo, la intención no es presentar un desarrollo matemático riguroso de estos sino solamente introducir las ideas y la notación que será relevante en los capítulos posteriores.

### 1.1. Variedades Diferenciables

Una variedad diferenciable se puede entender como una generalización de los conceptos de curvas y superficies a cualquier número de dimensiones. Las variedades diferenciables son uno de los conceptos geométricos más empleados en física teórica, por ejemplo en la mecánica analítica, teorías clásicas y cuánticas de campos así como en Relatividad General y teorías de cuerdas. Usualmente el modelo matemático básico del espacio-tiempo es una variedad diferenciable de dimensión 4. De manera rigurosa el concepto de variedades diferenciables está definido de la siguiente forma:

**Definición 1.1.1.** Una **variedad diferenciable** (real) de dimensión finita  $n$  es un espacio topológico  $M$ , provisto de un atlas de cartas locales  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  donde  $\{U_i\}$  es un recubrimiento abierto de  $M$  y cada  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación continua uno-a-uno, y toda vez que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , las funciones de transición  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$  son de clase  $C^\infty$  (suaves).

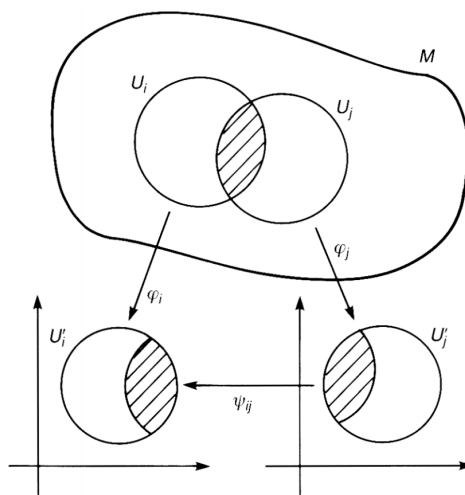


Figura 1.1: Representación gráfica de una variedad  $M$ . Un homeomorfismo  $\varphi_i$  mapea  $U_i$  en un subconjunto abierto  $U'_i \subset \mathbb{R}^n$  y le proporciona coordenadas a cada punto  $p \in U_i$ . Si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  la función de transición de un sistema coordenado a otro es suave.

Algunos ejemplos de variedades diferenciables son  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^n$ , la esfera  $n$ -dimensional  $S^n$  y el toro  $T^2$ .

## 1.2. Campos Vectoriales

La geometría es la rama de la matemática que se encarga del estudio de figuras en el espacio, y siempre ha sido un elemento fundamental en la descripción de fenómenos físicos. La mecánica Newtoniana por ejemplo, hace el uso del análisis vectorial para la descripción de un sistema mecánico. Lo mismo ocurre con la teoría de la Relatividad, que utiliza el lenguaje de la geometría riemanniana. El cálculo vectorial resulta de gran importancia por el hecho de que establece una relación directa entre la geometría y la Física, sin embargo en algunos casos el concepto de vector no es suficiente, de manera que es necesario introducir el cálculo multilineal, aún así existen sistemas que requieren de otras descripciones geométricas más sofisticadas.

Los conceptos geométricos más elementales en la mecánica son los de campo vectorial y espacio tangente.

**Definición 1.2.1.** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $p \in U$ . El conjunto de vectores que tienen origen en el punto  $p$  se llama el **espacio tangente a  $U$  en  $p$** , y se denota como  $T_p U$ . Note que  $T_p U$  es isomorfo a  $\{p\} \times \mathbb{R}^n$  y que es un espacio vectorial de dimensión  $n$ .

Si  $\{e_i\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  entonces una base de  $T_p U$  es el conjunto  $\{e_i\}$

trasladado rígidamente al punto  $p$  y será denotada por  $e_i(p)$  (Ver figura 1.2).

**Definición 1.2.2.** A la unión disjunta de los espacios tangentes se le conoce como **haz tangente** y se define por

$$TU = \bigcup_{p \in U} T_p U. \quad (1.1)$$

**Definición 1.2.3.** Un **campo vectorial**  $X$  sobre  $U$  es un mapeo que asigna a cada punto  $p \in U$  un vector  $X(p) \in T_p U$ . Es posible demostrar que  $X(p)$  puede ser escrito como:

$$X(p) = \sum_{i=1}^n x_i(p) e_i(p), \quad (1.2)$$

donde  $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  son las llamadas funciones coordenadas del campo  $X$ . Se dice que  $X$  es un campo vectorial diferenciable si las funciones  $x_i$  son de clase  $C^\infty$  sobre  $U$ . Se denota por  $\mathfrak{X}(U)$  al conjunto de campos vectoriales diferenciables sobre  $U$ . (En la figura 1.3 se muestra de manera gráfica un campo vectorial sobre un toro  $T^2$ ).

Es posible extender los conceptos de campo vectorial y haz tangente sobre  $\mathbb{R}^n$  y más aún sobre una variedad diferenciable  $M$ . Así se define el haz tangente sobre  $M$  como

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M. \quad (1.3)$$

Un campo vectorial  $X$  sobre  $M$  es un mapeo que asigna a cada punto  $p \in M$  un vector  $X(p) \in T_p M$ . Para  $U \subset M$  abierto y  $p \in U$ , se puede demostrar que en este caso el campo vectorial se puede escribir como

$$X(p) = \sum_{i=1}^n X_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \quad (1.4)$$

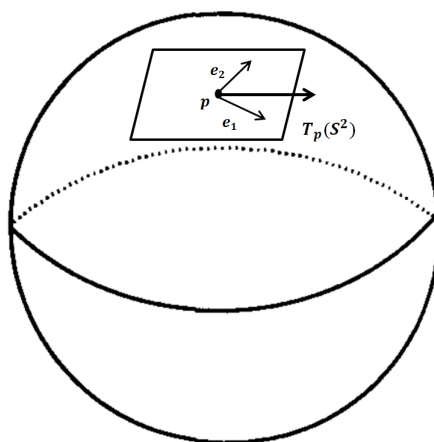
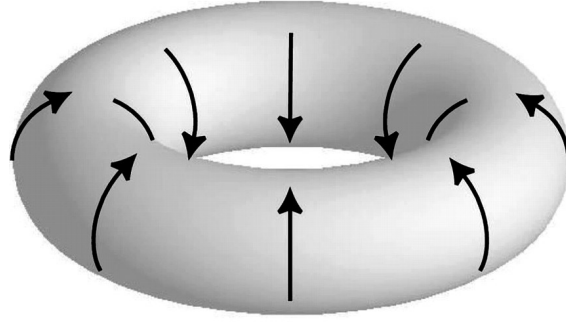


Figura 1.2: Espacio tangente a un punto  $p \in S^2$ .

Figura 1.3: Campo vectorial definido sobre  $T^2$ .

donde las funciones  $x_i$  denotan a las funciones coordenadas sobre un abierto  $U$  de  $M$ , el conjunto  $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right\}$  es una base de  $T_pM$  y las funciones  $X_i : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$  son las funciones coordenadas del campo vectorial.

Note que el espacio tangente en  $p$  es el espacio vectorial de dimensión  $n$  generado por el conjunto de derivadas parciales evaluadas en  $p$ , es decir,  $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right\}$ . Este espacio se puede ver como  $\mathbb{R}^n$  con el origen trasladado al punto  $p$ . Si las funciones  $X_i$  son funciones de clase  $C^\infty$  para todo abierto  $U \subset M$  entonces se dice que  $X$  es un campo vectorial diferenciable sobre  $M$ . Al conjunto de campos diferenciables (suaves) sobre  $M$  se acostumbra denotarlo por  $\mathfrak{X}(M)$ .

**Definición 1.2.4.** Una **derivación** en un punto  $p \in M$  es una función lineal  $\delta_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple la siguiente propiedad conocida como la regla de Leibnitz

$$\delta_p(fg) = f(p)\delta_p(g) + g(p)\delta_p(f), \quad (1.5)$$

para  $f$  y  $g \in C^\infty(M)$ .

**Definición 1.2.5.** Una derivación actuando sobre el álgebra  $C^\infty(U)$  es una función lineal  $\delta : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$  tal que

$$\delta(fg) = f\delta(g) + \delta(f)g. \quad (1.6)$$

Como casos particulares de las derivaciones de  $C^\infty(U)$  se encuentran a las derivadas parciales  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ , por lo que los campos vectoriales  $\mathfrak{X}(U)$  son el espacio de derivaciones en  $C^\infty(U)$ .

**Definición 1.2.6.** La **derivada de Lie** de  $f \in C^\infty(U)$  por un campo vectorial  $X$  se define como  $(Xf) \in C^\infty(U)$ , en particular si  $X$  es el campo de las derivadas parciales, es decir,  $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$  entonces

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p = X_p(f). \quad (1.7)$$



Otro caso particular interesante se presenta cuando el campo vectorial es constante, es decir,  $X = v \in U$ , con  $v$  un vector fijo, este caso es precisamente la derivada direccional y se escribe de la siguiente manera

$$Xf = \sum_{i=1}^n v_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i} = \langle v, \nabla f \rangle = v \cdot \nabla f \quad (1.8)$$

### 1.3. Formas Diferenciales

El cálculo de formas diferenciales, también conocido como cálculo exterior, es un lenguaje muy poderoso que se emplea tanto en matemáticas como en física y tiene sus bases en la geometría diferencial. La noción actual que se tiene del concepto de forma diferencial es debida a Elie Cartan [10].

A continuación se presentan algunas definiciones importantes que servirán para hacer una descripción del concepto de formas diferenciales y que será el lenguaje empleado a lo largo de este trabajo.

En geometría diferencial dos de los espacios vectoriales más importantes son  $T_p M$  el espacio tangente a la variedad  $M$  en el punto  $p$  y su espacio dual  $T_p^* M$  llamado el **espacio cotangente** a la variedad  $M$  en el punto  $p$ .

Un funcional lineal  $f \in T_p^* M$  es el objeto dual de un vector  $v \in T_p M$  entonces una pregunta natural es quién es el objeto dual a un campo vectorial sobre  $M$ . La respuesta a esta pregunta nos conduce al concepto de 1-forma diferencial sobre  $M$ . La idea de la construcción de la definición de una 1-forma es como sigue, primero se define el concepto de 1-vector en un punto  $p$  de un abierto de  $\mathbb{R}^n$  para luego emplear el concepto de variedad diferenciable y extender la definición de 1-vector a un punto  $p$  de un abierto de la variedad  $M$ . Posteriormente se extiende la definición a un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  y luego a un abierto de la variedad.

El espacio vectorial que se tendrá en mente para definir un  $p$ -vector será  $T_p U$  y que simplemente se denotará como  $V$ .

De manera más general se puede definir un objeto funcional multilineal alternante mimetizando el concepto de determinante de una matriz, es decir, distinguiendo las columnas en las matrices  $n \times n$  con coeficientes en  $\mathbb{R}$  ( $M_n(\mathbb{R})$ ), el isomorfismo

$$M_n(\mathbb{R}) \cong \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n\text{-veces}} \quad (1.9)$$

como espacios vectoriales. Luego el determinante es una función

$$\det : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n\text{-veces}} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.10)$$

la cual cumple que es multilineal y alternante o antisimétrico.

**Definición 1.3.1.** Para  $1 \leq k \leq n$  la  $k$ -potencia exterior de  $V$  es

$$\Lambda^k(V) = \{\varphi : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{-veces}} \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ es multilineal y alternante}\} \quad (1.11)$$

Note que  $\Lambda^k(V)$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . Además para  $k = 0$   $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$  por definición, para  $k = 1$   $\Lambda^1(V) = V^*$  el espacio dual de  $V$  y para  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$   $k$  funcionales lineales y  $v_1, \dots, v_k$   $k$  vectores en  $V$  se construye la matriz  $(k \times k)$  que tiene por entradas  $\varphi_i(v_j)$  para  $i, j = 1, 2, \dots, k$ .

**Definición 1.3.2.** El producto exterior de  $k$  funcionales lineales  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  está definido por

$$(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j)), \quad (1.12)$$

por lo que  $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k)$  es un elemento de  $\Lambda^k(V)$  y el producto exterior de funcionales lineales cambia de signo si se intercambian dos de sus factores, en particular, se anula si dos de los factores son iguales.

Si  $\{e_i\}$  son una base en  $V$  se define la base en  $V^* = \Lambda^1(V)$  como el conjunto de funcionales  $\{e_i^*\}$  tales que

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}. \quad (1.13)$$

Como todo funcional lineal es una combinación lineal de los funcionales lineales básicos  $\{e_i^*\}$  es relevante estudiar los productos exteriores de los elementos  $\{e_i^*\}$ . Por ejemplo en el caso en que  $\dim V = 3$ , es posible verificar que  $\{e_1^* \wedge e_2^*, e_1^* \wedge e_3^*, e_2^* \wedge e_3^*\}$  es una base para  $\Lambda^2(V)$  y que  $\dim(\Lambda^2(V)) = 3$  donde la base puede ser descrita como los  $e_i^* \wedge e_j^*$  tales que  $1 \leq i, j \leq 3$ . Esta situación se generaliza de la siguiente manera

Para  $I = \{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$  una sucesión admisible, entonces  $e_I^* = e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*$  son una base para  $\Lambda^k(V)$  y consecuentemente

$$\dim \Lambda^k(V) = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (1.14)$$

**Definición 1.3.3.** Una **orientación** en un espacio vectorial  $V$  de dimensión  $n$  es la selección del signo  $+$  o  $-$  como el generador de  $\Lambda^n(V)$ , esto es,  $\pm \det$ . Note que esto es equivalente a la elección de una base  $\{e_i\}$  cuya matriz tiene determinante positivo o negativo.

**Definición 1.3.4.** A los elementos de  $\Lambda^k(V)$  se les denomina  $k$ -**formas lineales** en  $V$ , así, las  $0$ -formas lineales son constantes, las  $1$ -formas son funcionales lineales y las  $n$ -formas son múltiplos del determinante o **forma de volumen**.

**Definición 1.3.5.** Una función bilineal  $\langle -, - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  es un **producto interno** en  $V$  si es antisimétrica y es no degenerada.

Es posible definir un producto interno sobre  $\Lambda^k(V)$  de la siguiente forma. Si  $V$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$  con producto interno  $\langle -, - \rangle$  y  $1 \leq k \leq n$  entonces

$$\langle e_i^*, e_j^* \rangle = \det(\langle e_{i_m}^*, e_{j_l}^* \rangle) = \det(\langle e_{i_m}, e_{j_l} \rangle), \quad 1 \leq m, l \leq k. \quad (1.15)$$

En matemáticas, particularmente en álgebra existen objetos que se dicen graduados, es decir, que se pueden multiplicar objetos de diferente grado y obtener un objeto de grado la suma de los grados de los factores. En nuestro caso, es posible dotar al conjunto de potencias exteriores de  $V$  con una estructura de grado. Por convención se elige que si  $q > n$  entonces  $\Lambda^q(V) = \{0\}$ . La operación se construye por yuxtaposición de un generador  $e_I^* \in \Lambda^k(V)$  con un generador  $e_J^* \in \Lambda^q(V)$ , para  $1 \leq k \leq n$  y  $1 \leq q \leq n$  se entiende la formación del elemento  $e_I^* \wedge e_J^* \in \Lambda^{k+q}(V)$ .

**Definición 1.3.6.** El **producto exterior** de una  $k$ -forma lineal  $\omega = \sum_I \omega_I e_I^*$  por una  $q$ -forma lineal  $\eta = \sum_J \eta_J e_J^*$  es la  $(k+q)$ -forma lineal

$$\omega \wedge \eta = \sum_{I,J} \omega_I \eta_J (e_I^* \wedge e_J^*) \quad (1.16)$$

dada por la yuxtaposición de los generadores.

Las propiedades básicas del producto exterior son:

1.  $\wedge$  es distributivo
2.  $\wedge$  es asociativo
3.  $\wedge$  es anticonmutativo, esto es,  $\omega \wedge \eta = (-1)^{kq} \eta \wedge \omega$  para  $\omega \in \Lambda^k(V)$  y  $\eta \in \Lambda^q(V)$

**Teorema 1.3.1.**  $\{\Lambda^k(V), \wedge\}$  es un álgebra graduada de dimensión

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, \quad (1.17)$$

el álgebra graduada  $\Lambda^*(V) = \sum_{k \geq 0} \Lambda^k(V)$  es el **álgebra exterior o de Grassman**.

Variando la  $n$ , es posible establecer una relación entre las dimensiones de dos espacios en particular, empleando el triángulo de Pascal, se puede observar que existe cierta simetría dada por la siguiente igualdad

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \quad (1.18)$$

de esta forma se concluye que los espacios  $\Lambda^k(V)$  y  $\Lambda^{n-k}(V)$  tienen la misma dimensión, por lo que ambos son isomorfos como espacios vectoriales.

Una manera de establecer dicho isomorfismo es a través del operador estrella de Hodge el cual depende de un producto interno y de la orientación de  $V$ . La definición del operador de Hodge es como sigue:

- a) Para cada  $k = 1, \dots, n$  se sabe que existe un único producto interno sobre  $\Lambda^k(V)$  definido en términos del producto (1.15)
- b) para  $k = 0, \dots, n$  se define un único mapeo  $*$  :  $\Lambda^k(V) \rightarrow \Lambda^{n-k}(V)$  llamado el **operador estrella de Hodge** como  $\omega \wedge * \eta = \langle \omega, \eta \rangle d\text{Vol}_g$ , para todo  $\omega \in \Lambda^k(V)$ ,  $\eta \in \Lambda^k(V)$ ,  $d\text{Vol}_g \in \Lambda^n(V)$  la forma de volumen y  $g$  denota la orientación de  $V$ .

Hasta ahora se ha realizado la descripción del álgebra de Grassman para un espacio vectorial  $V$ . El siguiente objetivo es extender el concepto de álgebra de Grassman al abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , para ello se comienza formalmente estableciendo que  $V = T_p U$ .

**Definición 1.3.7.** Una **1-forma diferencial** en  $p \in U$  es un elemento en  $\Lambda^1 T_p U$  y una  **$k$ -forma diferencial** en  $p \in U$  es un elemento en  $\Lambda^k T_p U$  para  $1 \leq k \leq n$ .

Las **0-formas diferenciales** en  $p$  son, por definición, las funciones en  $C^\infty(U)$  evaluadas en  $p$ . Para dar una descripción en general de una  $k$ -forma diferencial en  $p \in U$  es necesaria la siguiente notación. Sea  $\{dx_I\}$  la base en  $\Lambda^1(T_p U)$  dual a la base  $\{\frac{\partial}{\partial x_I} \Big|_p\}$  definida por

$$dx_i(p) \left( \frac{\partial}{\partial x_I} \Big|_p \right) = \delta_{ij}. \quad (1.19)$$

Para  $I$  un conjunto de índices admisibles de  $k$  elementos

$$dx_I(p) = dx_{i_1}(p) \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}(p) \quad (1.20)$$

denota a un generador en  $\Lambda^k T_p U$ , de hecho todo el conjunto de elementos  $dx_I(p)$  son una base de  $\Lambda^k T_p U$ .

**Definición 1.3.8.** Una  **$k$ -forma diferencial** en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  es una función  $\omega$  que envía a cada elemento  $p \in U$  a un elemento  $\omega_p \in \Lambda^k(T_p U)$  para  $1 \leq k \leq n$ . Luego una  $k$ -forma diferencial se expresa como

$$\omega = \sum_{I \text{ admisible}} \omega_I dx_I, \quad (1.21)$$

donde  $\omega_I \in C^\infty(U)$  y  $dx_I(p)$  son los generadores de  $\Lambda^k T_p U$ . Se denota al espacio de  $k$ -formas diferenciales en  $U \subset \mathbb{R}^n$  como  $\Omega^k(U)$ .

---

En particular note que  $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$ , es decir, el espacio de 0-formas coincide con el espacio de funciones de clase  $C^\infty$  sobre  $U$ .

Las formas diferenciales sobre  $\mathbb{R}^n$  son elementos de

$$\Omega^*(\mathbb{R}) = \{C^\infty \text{ funciones sobre } \mathbb{R}^n\} \otimes \Omega^*, \quad (1.22)$$

El álgebra  $\Omega^*(\mathbb{R}) = \bigoplus_{q=0}^n \Omega^q(\mathbb{R})$  es un objeto graduado, donde  $\Omega^q(\mathbb{R})$  es el conjunto de las  $q$ -formas de clase  $C^\infty$  sobre  $\mathbb{R}$ .

**Definición 1.3.9.** Existe un operador diferencial

$$d : \Omega^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n), \quad (1.23)$$

definido de la siguiente manera

1. Si  $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$  entonces  $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$
2. Si  $\omega = \sum \omega_I dx_I$ , entonces  $d\omega = \sum d\omega_I dx_I$

$d$  es llamada la **diferencial exterior** y es la abstracción más general del gradiente, el rotacional y la divergencia del cálculo vectorial en  $\mathbb{R}^3$ .

Las propiedades de la diferencial exterior son enunciadas en el siguiente teorema.

**Teorema 1.3.2.** *La diferencial en un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$*

$$d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U) \quad \text{para } 0 \leq k \leq n, \quad (1.24)$$

*cumple con:*

1.  $d$  es  $\mathbb{R}$ -lineal.
2.  $d$  es una antiderivación, es decir, para  $\omega \in \Omega^k(U)$  y  $\eta \in \Omega^q(U)$ ,  $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$ .
3. (Lema de Poincaré)  $d \circ d = d^2 = 0$ . i.e.; la composición  $\Omega^k(U) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(U) \xrightarrow{d} \Omega^{k+2}(U)$  es la función lineal nula para  $0 \leq k \leq n$ .

**Definición 1.3.10.** El **complejo de de Rham** de  $U \subset \mathbb{R}^n$  es el objeto graduado  $\Omega^*(U)$  con la operación diferencial  $d$  y se escribe de la siguiente forma

$$0 \longrightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d_0} \Omega^1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n \longrightarrow 0. \quad (1.25)$$

**Ejemplo 1.3.1.** En  $\mathbb{R}^3$  sean  $f$ ,  $g$  y  $h$  una 0-forma, una 1-forma y una 2-forma respectivamente, sus derivadas exteriores están dadas por las siguientes expresiones

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz, \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} dg = d(g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz) &= \left( \frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x} \right) dx \wedge dz \\ &+ \left( \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy, \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$dh = d(h_1 dy \wedge dz - h_2 dx \wedge dz + h_3 dx \wedge dy) = \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial y} + \frac{\partial h_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz. \quad (1.28)$$

En resumen se pueden establecer las siguientes analogías

$$\begin{aligned} d(0 - \text{formas}) &= \text{gradiente} \\ d(1 - \text{formas}) &= \text{rotacional} \\ d(2 - \text{formas}) &= \text{divergencia}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Note que en la construcción de las formas diferenciales se ha llevado a cabo un proceso de dualización en las operaciones de cálculo y esto puede ser resumido en la siguiente tabla.

Cálculo Vectorial	Cálculo de formas diferenciales
Derivada parcial en $p \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right _p$	1-forma diferencial en $p \ dx_i(p)$
Campo vectorial	1-forma diferencial
Derivada de Lie de un campo vectorial	Diferencial de un 1-forma diferencial

Tabla 1.1: Dualidad entre el cálculo vectorial y el de formas diferenciales

En este trabajo se mostrará preferencia por el lado derecho ya que se tiene a disposición el cálculo exterior o álgebra de Grassman y muestra ser un lenguaje en cierto sentido más apropiado para la descripción de las teorías de norma.

$$\begin{array}{ccccccc} 0\text{-formas} & 1\text{-formas} & 2\text{-formas} & & n\text{-formas} & & \\ \mathbb{R} & \Lambda^1(T_p U) & \Lambda^2(T_p U) & \dots & \Lambda^n(T_p U) & & \end{array} \quad (1.30)$$

A modo de resumen se puede reparafrasear al espacio de formas diferenciales en  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Se define  $\Omega^*$  el álgebra sobre  $\mathbb{R}$  generada por  $\{dx_1, \dots, dx_n\}$  con las relaciones siguientes

$$\begin{aligned} (dx_i)^2 &= dx_i \wedge dx_i = 0 \\ dx_i \wedge dx_j &= -dx_j \wedge dx_i \end{aligned} \quad (1.31)$$

Como espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ ,  $\Omega^*$  tiene como base a los elementos siguiente

$$1, dx_i, dx_i \wedge dx_j (i < j), dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k (i < j < k), \dots, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \quad (1.32)$$

**Definición 1.3.11.** Las  $C^\infty$  **formas diferenciales** sobre  $U$  son elementos del siguiente conjunto

$$\Omega^*(U) = \{f \in C^\infty\} \otimes \Omega^*, \quad (1.33)$$

esto es, si  $\omega$  es una forma, entonces se puede escribir de manera única como  $w = \sum_{i=1}^n w_i(dx_i)$ , donde los coeficientes  $w_i$  son funciones  $C^\infty$ .

Finalmente se extienden las estructuras anteriores del álgebra de Grassman sobre una variedad diferenciable  $M$  de dimensión finita  $n$ .

Una generalización al concepto de espacio tangente a un punto  $p$  contenido en un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  es como sigue. Sea  $(U, h)$  una carta suave alrededor de  $p \in M^n$ , existe una relación de equivalencia sobre el conjunto de curvas suaves  $\alpha : I \rightarrow M$ , con  $\alpha(0) = p$  definidas sobre intervalos abiertos alrededor de 0, dicha relación de equivalencia está dada de la siguiente manera

$$\alpha_1 \sim \alpha_2 \iff (h \circ \alpha_1)'(0) = (h \circ \alpha_2)'(0). \quad (1.34)$$

Esta relación de equivalencia es independiente de la elección de  $(U, h)$ .

**Definición 1.3.12.** El espacio tangente  $T_p M^n$  es el conjunto de clases de equivalencia con respecto a (1.34) de curvas suaves  $\alpha : I \rightarrow M$ , con  $\alpha(0) = p$ .

Más aún, dada una carta suave  $(U, h)$  alrededor de un punto  $p \in M^n$  se define la base de  $T_p M^n$  como

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p, \quad (1.35)$$

donde  $\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$  es la imagen bajo el mapeo definido como  $D_{h(p)} h^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$  del  $i$ -ésimo vector canónico de  $\mathbb{R}^n$ . Un vector tangente  $X_p \in T_p M$  se escribe como

$$X_p = \sum_{i=1}^n a_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p. \quad (1.36)$$

Considere la familia  $\omega = \{\omega_p\}, p \in M$  de  $k$ -formas alternantes sobre  $T_p M$ . Es necesaria la noción de  $k$ -forma como función de  $p$ . Sea  $g : W \rightarrow M$  una parametrización local, i.e. la inversa de una carta suave, donde  $W$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Para  $x \in W$

$$D_x g : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{g(x)} M \quad (1.37)$$

es un isomorfismo y que a su vez induce un nuevo isomorfismo de la siguiente manera

$$Alt^k(D_x g) : Alt^k(T_{g(x)} M) \rightarrow Alt^k(\mathbb{R}^n). \quad (1.38)$$

Se define  $g^*(\omega) : W \rightarrow Alt^k(\mathbb{R}^n)$  como la función cuyo valor en  $x$  es

$$g^*(\omega)_x = Alt^k(D_x g)(\omega_{g(x)}), \quad (g^*(\omega)_x = \omega_{g(x)}, \text{ con } k = 0) \quad (1.39)$$

**Definición 1.3.13.** Una familia  $\omega = \{\omega_p\}, p \in M$  de  $k$ -formas alternantes sobre  $T_p M$  se dice suave si  $g^*(\omega)$  es una función suave para cualquier parametrización local. El conjunto de estas familias es un espacio vectorial de  $k$ -formas diferenciales sobre  $M$  y se denota como  $\Omega^k(M)$ . En particular  $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ .

La derivada exterior

$$d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M) \quad (1.40)$$

se puede definir a través de la parametrización local  $g : W \rightarrow M$ . Si  $\omega = \{\omega_p\}_{p \in M}$  es una  $k$ -forma sobre  $M$  entonces

$$d_p \omega = Alt^{k+1}((D_x g)^{-1}) \circ d_x(g^* \omega), \quad p = g(x). \quad (1.41)$$

La derivada exterior cumple las mismas condiciones del teorema (1.3.2) y se define el complejo de de Rham

$$0 \longrightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d_0} \Omega^1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n \longrightarrow 0, \quad (1.42)$$

el cual satisface  $\Omega^k(M) = 0$  si  $k > \dim M$ .

De igual manera se define un producto bilineal  $\omega \wedge \eta$  como  $(\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \eta_p$ , con

$$\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \rightarrow \Omega^{k+l}(M), \quad (1.43)$$

tal que

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \quad (1.44)$$

para  $\omega \in \Omega^k(M)$  y  $\eta \in \Omega^l(M)$ .



**Definición 1.3.14.** Si  $h : M \rightarrow N$  y  $v \in T_p M$  entonces el **pushforward**  $h_*(v)$  en  $T_{h(p)} N$  se define como

$$h_*(v) := [h \circ \sigma], \tag{1.45}$$

donde  $v = [\sigma]$ . Este hecho puede apreciarse en forma esquemática en la figura 1.4.

**Definición 1.3.15.** Sean  $M, N$  dos variedades diferenciables,  $X, Y$  campos vectoriales sobre  $M$  y  $N$  respectivamente y sea  $h : M \rightarrow N$ . Se dice que  $X$  y  $Y$  están  **$h$ -relacionados** si, en todos los puntos  $p \in M$

$$h_*(X_p) = Y_{h(p)}, \tag{1.46}$$

lo que también se escribe como  $Y = h_* X$ .

### 1.3.1. El operador Estrella

Es posible definir ahora otra operación de Hodge sobre formas diferenciales llamada el operador estrella  $*$ , también conocido como **operador estrella de Hodge** ([10], [11], [12]).

Este es un operador lineal introducido por W. V. D. Hodge, cuya existencia es válida solo para una variedad orientada  $M_n$  equipada con una métrica Riemanniana o pseudo Riemanniana. El operador estrella es un mapeo de  $\Lambda$  en si mismo, que actúa de la siguiente manera

$$* : \Omega^p \rightarrow \Omega^{(n-p)}, \tag{1.47}$$

y su expresión para una  $p$ -forma  $\alpha \in \Lambda^p$  es

$$* \alpha = \frac{|det(g_{\alpha\beta})|^{1/2}}{(n-p)!} \epsilon^{\lambda_1 \dots \lambda_p} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} \alpha_{\lambda_1 \dots \lambda_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{n-p}}, \tag{1.48}$$

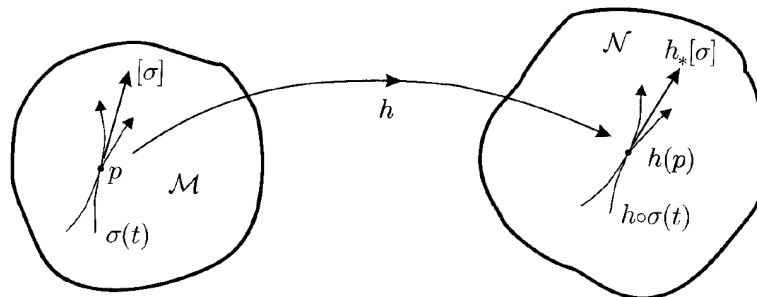


Figura 1.4: *Pushforward* entre vectores tangentes a los puntos  $p$  y  $h(p)$ , contenidos respectivamente en las variedades diferenciables.



Figura 1.5: W. V. D. Hodge

donde el símbolo de Levi-Civita es manipulado por la métrica Riemanniana [13].

Es posible probar que dada una variedad orientada  $M_n$  equipada con una métrica con signatura  $(s, n - s)$ , el operador estrella tiene la siguiente propiedad para  $p$ -formas ([13], [14])

$$*^2 = (-1)^{p(n-p)+s}. \quad (1.49)$$

Los conceptos de esta sección pueden consultarse detalladamente en [15], [16], [17] y [18].

## 1.4. Grupos de Lie

Los grupos de Lie son de gran importancia en la Física teórica. Su introducción aunque no en el sentido actual fue hecha por Sophus Lie. En esta sección se estudiará la relación geométrica entre un grupo de Lie y otra estructura asociada a este llamada álgebra de Lie, posteriormente se establecerá su empleo directo con la teoría de haces fibrados ([19], [14], [7]).

La idea básica de un Grupo de Lie es que es un grupo en el sentido usual pero dotado además con la estructura de variedad diferenciable, y tal que las operaciones en el grupo son mapeos suaves. Como ejemplo considere el conjunto  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = 1\}$  de todos los números complejos con módulo igual a uno. Este conjunto es claramente un grupo bajo la acción de la multiplicación usual de números complejos, pero también es una variedad, la cual es el círculo  $S^1$ .

La definición formal de un grupo de Lie es la siguiente:

**Definición 1.4.1.** Un **grupo de Lie** es un grupo  $G$  en el sentido algebraico usual que a su vez es una variedad diferenciable real, de modo que el producto  $(g, h) \mapsto gh : G \times G \rightarrow G$  y la inversión  $g \mapsto g^{-1} : G \rightarrow G$  son aplicaciones suaves.

---

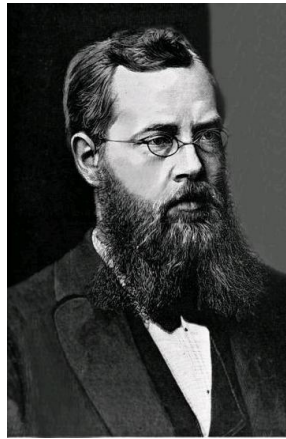


Figura 1.6: Sophus Lie

La dimensión de un grupo de Lie  $G$  se define como la dimensión que tiene  $G$  como variedad diferenciable.

Hay una colección de grupos de Lie, llamados grupos clásicos, que son grupos de matrices reales o complejos.

**Definición 1.4.2.** Un **subgrupo de Lie** es un subconjunto  $H$  de un grupo de Lie  $G$  que es:

- Un subgrupo de  $G$ .
- Una subvariedad de la variedad diferenciable  $G$ .

Algunos ejemplos de grupos de Lie son los siguientes:

- El espacio vectorial real  $\mathbb{R}^n$ , es un grupo de Lie abeliano de dimensión  $n$  con la operación de suma. Un espacio vectorial complejo es un grupo de Lie complejo abeliano.
- El círculo  $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ , este grupo se denota usualmente como  $U(1)$ .
- $\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , con la multiplicación ordinaria, es un grupo de Lie unidimensional no compacto.  $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  es un grupo de Lie unidimensional compacto.  $\mathbb{C}^\times := \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$  es un grupo de Lie complejo unidimensional.
- $GL(n, \mathbb{R}) := \{g \in \mathbb{R}^{n \times n} : g^{-1} \text{ existe}\}$  es un grupo de Lie de dimensión  $n^2$ ; de hecho es el abierto  $\det^{-1}(\mathbb{R})$
- $SO(p, q)$  es el conjunto de matrices en  $O(p, q)$  que tienen determinante 1.

- $SU(n)$  es un subgrupo de  $U(n)$  y lo conforman aquellas matrices cuyo determinante es igual a 1.

Bajo la estructura de grupo de Lie, se pueden definir dos operaciones, las **traslaciones derecha e izquierda**, denotadas como  $r_g$  y  $l_g$  respectivamente, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} r_g : G &\rightarrow G \\ g' &\mapsto g'g \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} l_g : G &\rightarrow G \\ g' &\mapsto gg'. \end{aligned}$$

Las traslaciones en un grupo de Lie son para ambos casos difeomorfismos, cabe mencionar que las traslaciones existen para cualquier grupo  $G$  con la única condición de ser biyecciones.

Otra de las principales características asociadas a un grupo de Lie es la existencia del álgebra de Lie, que encierra varias propiedades interesantes del grupo. Para dar la definición formal de un álgebra de Lie es necesario introducir primero el concepto de campo vectorial invariante.

**Definición 1.4.3.** Un campo vectorial  $X$  sobre un grupo de Lie  $G$  es **izquierdo-invariante** si está  $l_g$ -relacionado consigo mismo para todo  $g \in G$ , entonces

$$l_{g*}X = X, \tag{1.50}$$

o de manera equivalente

$$l_{g*}(X_{g'}) = X_{gg'}. \tag{1.51}$$

Similarmente,  $X$  es **derecho-invariante** si está  $r_g$ -relacionado consigo mismo, entonces

$$r_{g*}X = X, \tag{1.52}$$

o de manera equivalente

$$r_{g*}(X_{g'}) = X_{g'g}, \tag{1.53}$$

para todo  $g \in G$ .

---

**Definición 1.4.4.** El conjunto de todos los campos vectoriales izquierdo-invariantes sobre un grupo de Lie  $G$ , se denota por  $\mathfrak{g}$  y es llamado el **álgebra de Lie** de  $G$ .

**Teorema 1.4.1.** *Hay un isomorfismo entre el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  vista como espacio vectorial y el espacio tangente  $T_e G$  al elemento identidad  $e$  del grupo de Lie  $G$ .*

La prueba a este teorema puede ser consultada en [7].

En otras palabras,  $T_e G$  el espacio tangente a la identidad del grupo de Lie  $G$  es el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ .

**Definición 1.4.5.** Si  $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ , con  $n = \dim G$ , es una base para  $\mathfrak{g}$ , entonces el conmutador de cualquier pareja de estos campos vectoriales izquierdo-invariantes debe ser una combinación lineal de estos. Esto es

$$[E_\alpha, E_\beta] = \sum_{\gamma=1}^n C_{\alpha\beta}^\gamma E_\gamma, \quad (1.54)$$

donde los números  $C_{\alpha\beta}^\gamma$  se les conoce como **constantes de estructura** del grupo de Lie  $G$  o del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  y tienen las siguientes propiedades:

- Son anti-simétricas:  $C_{\beta\alpha}^\gamma = -C_{\alpha\beta}^\gamma$ .
- Satisfacen la **identidad de Jacobi**:  $C_{\alpha\beta}^\delta C_{\delta\eta}^\gamma + C_{\eta\alpha}^\delta C_{\delta\beta}^\gamma + C_{\beta\eta}^\delta C_{\delta\alpha}^\gamma = 0$ .

Un concepto de gran importancia en la teoría de grupos de Lie es el mapeo exponencial, ya que captura la estructura local del grupo contenida en el álgebra de Lie. La función exponencial ordinaria es un caso particular del mapeo exponencial cuando  $G$  es el conjunto de los números reales positivos dotado con la multiplicación (cuya álgebra de Lie es el grupo de todos los números reales con la operación de adición). A continuación se presenta la definición formal del mapeo exponencial.

**Definición 1.4.6.** El **mapeo exponencial**  $exp : T_e G \rightarrow G$  se define como

$$exp(A) := exp(tA) \Big|_{t=1}. \quad (1.55)$$

Para grupos cuyos elementos son matrices, el mapeo exponencial está dado como la función exponencial de la matriz. Así por ejemplo, si  $G = GL(n, \mathbb{R})$  y  $A \in \mathfrak{g}$ , entonces

$$exp(A) = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots, \quad (1.56)$$

donde  $I_n$  es la matriz identidad de orden  $n \times n$ . Los conceptos presentados en esta sección pueden consultarse en forma detallada en [19] y [7].

Para los propósitos de este trabajo es preciso definir el concepto de acción de un grupo, que resulta de gran importancia en la descripción de las teorías de norma.

**Definición 1.4.7.** Si  $G$  es un grupo y  $X$  un conjunto entonces la **acción izquierda**  $\varphi$  de  $G$  sobre  $X$  es una función

$$\varphi : G \times X \rightarrow X : (g, x) \mapsto \varphi(g, x), \quad (1.57)$$

que cumple las siguientes características (se denota  $\varphi(g, x)$  como  $g \cdot x$ ):

- I) **Compatibilidad** Para todo  $g, h \in G$  y para todo  $x \in X$   $(gh) \cdot x = g \cdot (hx)$ , ( $gh$  denota el resultado de aplicar la operación interna del grupo  $G$  sobre los elementos  $g$  y  $h$ ).
- II) **Identidad** Para todo  $x \in X$   $e \cdot x = x$ , ( $e$  es el elemento identidad del grupo  $G$ ).

El conjunto  $X$  es llamado un  $G$ -conjunto izquierdo. El grupo  $G$  se dice que actúa sobre  $X$  por la izquierda.

En completa analogía con esta definición, es posible definir la acción derecha de un grupo como sigue:

**Definición 1.4.8.** Si  $G$  es un grupo y  $X$  un conjunto entonces la **acción derecha**  $\varphi$  de  $G$  sobre  $X$  es una función

$$\varphi : X \times G \rightarrow X : (x, g) \mapsto \varphi(x, g), \quad (1.58)$$

que cumple las siguientes características (se denota  $\varphi(x, g)$  como  $x \cdot g$ ):

- I) **Compatibilidad** Para todo  $g, h \in G$  y para todo  $x \in X$   $x \cdot (gh) = (x \cdot g) \cdot h$ .
- II) **Identidad** Para todo  $x \in X$   $x \cdot e = x$ .

La diferencia entre las acciones izquierda y derecha es el orden en el cual el producto  $gh$  actúa sobre  $x$ .

Algunos ejemplos de la acción de un grupo son los siguientes:

- La acción *trivial* de cualquier grupo  $G$  sobre un conjunto  $X$  está definida por  $g \cdot x = x$  para todo  $g \in G$  y para todo  $x \in X$ .
- En todo grupo  $G$  la multiplicación por la izquierda es una acción de  $G$  sobre sí mismo:  $g \cdot h = gh$  para todo  $g, h \in G$ .
- La acción de grupos de Lie sobre un espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$  (como  $SL(n, \mathbb{R})$ ,  $SO(n, \mathbb{R})$ ), donde las operaciones están dadas por la multiplicación de matrices de los elementos del grupo con vectores en  $\mathbb{R}^n$ .

- **Transitiva** Sea  $X$  un conjunto no vacío entonces para todo  $x, y \in X$ , existe  $g \in G$  tal que  $g \cdot x = y$ .
- **Libre** Sean  $g, h \in G$ , si dado  $x \in X$  se tiene  $g \cdot x = h \cdot x$  entonces  $g = h$ .

**Definición 1.4.9.** Sea  $G$  un grupo de Lie y sea  $\mathfrak{g}$  su álgebra de Lie. Se define el mapeo

$$\Psi : G \rightarrow \text{Aut}(G), \quad g \mapsto \Psi_g, \quad (1.59)$$

donde  $\Psi_g(h) = ghg^{-1}$  para todo  $h \in G$ . La diferencial de  $\Psi : g$  en la identidad es un automorfismo del álgebra de Lie. Se denota este mapeo como

$$d(\Psi_g)_e = \text{Ad}_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}. \quad (1.60)$$

El mapeo

$$\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}), \quad g \mapsto \text{Ad}_g \quad (1.61)$$

es llamado la **representación adjunta** de  $G$ .

Dicho de otra manera, la representación adjunta de un grupo de Lie  $G$  es la manera de representar a los elementos del grupo  $G$  como transformaciones lineales en el álgebra de Lie vista como un espacio vectorial. Por ejemplo si  $G = GL(n)$ , el álgebra de Lie es el espacio vectorial formado por todas las matrices  $n \times n$ , en este caso la representación adjunta de  $G$  es el espacio vectorial de matrices  $n \times n$ , denotado por  $(M_{n \times n})$ , donde cualquier elemento  $g \in GL(n)$  actúa como una transformación lineal sobre  $M_{n \times n}$  de acuerdo a la siguiente expresión  $x \mapsto gxg^{-1}$  para todo  $x \in M_{n \times n}$ .

## 1.5. Hazes Fibrados

### 1.5.1. Hazes en general

**Definición 1.5.1.** Un **haz** es una triada  $(E, \pi, M)$  donde  $E$  y  $M$  son espacios topológicos y  $\pi : E \rightarrow M$  es un mapeo continuo. El espacio  $E$  es llamado el **espacio total**;  $M$  es el **espacio base del haz**; el mapeo  $\pi$  es la **proyección**; y la imagen inversa  $\pi^{-1}$  es la **fibra** sobre  $x \in M$ .

La definición anterior es muy general, sin embargo en las aplicaciones físicas los haces tienen la propiedad de que las fibras  $\pi^{-1}(\{x\})$ , con  $x \in M$ , son todas homeomorfas a un espacio en común  $F$ . En este caso, a  $F$  se le conoce como la **fibra del haz** y el haz se dice también **haz fibrado**.

---

Si  $(E, \pi, M)$  es un haz con fibra  $F$ , resulta conveniente describir al haz fibrado con el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ & & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

Una definición alternativa de haz fibrado con fibra  $F$  y que resulta de gran importancia ya que introduce el concepto de trivialización local es la siguiente.

**Definición 1.5.2.** Un haz fibrado es una estructura  $(E, M, \pi, F)$ , donde  $E, M$  y  $F$  son espacios topológicos y  $\pi : E \rightarrow M$  es una función continua y suprayectiva que satisface la condición de **trivialidad local**, dicha condición consiste en lo siguiente: Se requiere que para todo  $x \in E$  exista una vecindad abierta  $U \subset M$  de  $\pi(x)$  (la cual se conoce como vecindad de la trivialización) tal que exista un homeomorfismo  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  de tal manera que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ \pi \downarrow & \swarrow \text{proj}_1 & \\ U & & \end{array}$$

donde  $\text{proj}_1 : U \times F \rightarrow U$  es la *proyección natural* y. Al conjunto de todas las parejas  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  se le conoce como **trivialización local**. Un ejemplo de haz trivial es el siguiente

Sea  $E = M \times F$  y sea  $\pi : E \rightarrow M$  la proyección, entonces  $E$  es un haz fibrado sobre  $M$ , además  $E$  es un producto globalmente hablando, a este tipo de haces se les llama **haces triviales**.

**Definición 1.5.3.** Una **sección transversal** de un haz  $(E, \pi, M)$  es un mapeo  $s : M \rightarrow E$  tal que la imagen de cada punto  $x$  de  $M$  está en la fibra  $\pi^{-1}(\{x\})$  sobre  $x$ , dicho de otra manera  $\pi \circ s = id_M$

### 1.5.2. Haces Principales

El siguiente objetivo es definir el concepto de  $G$ -haz principal

**Definición 1.5.4.** Un haz  $(P, \pi, M)$  es un  $G$ -**haz** si  $P$  es un  $G$ -espacio derecho y si  $(P, \pi, M)$  es isomorfo al haz  $(P, \rho, P/G)$ , donde  $P/G$  es el espacio órbita de la  $G$ -acción sobre  $P$  y  $\rho$  es el mapeo de proyección usual:

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P \\ \pi \downarrow & \quad u \quad & \downarrow \rho \\ M & \xrightarrow{\cong} & P/G \end{array}$$



Note que las fibras del haz son las órbitas de la  $G$ -acción sobre  $P$  y por lo tanto, en general, no son isomorfas entre ellas.

Si  $G$  actúa libremente sobre  $P$  entonces a  $(P, \pi, M)$  se le llama  $G$ -**haz principal** y  $G$  es llamado el **grupo de estructura** del haz. La libertad de la  $G$ -acción implica que cada órbita es homeomorfa a  $G$  y entonces se tiene un haz fibrado con fibra  $G$ .

**Definición 1.5.5.** Sean  $U$  un subconjunto abierto de  $M$  y  $\sigma : U \rightarrow P$  un mapeo tal que  $\pi \circ \sigma = I_U$  es la identidad sobre  $U$ , entonces  $\sigma$  es llamada *sección local*. Existe una correspondencia uno a uno entre las secciones locales y las trivializaciones. Esto es, dados  $\sigma : U \rightarrow P$  y  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  se define  $\varphi(\sigma(x)g) = (x, g)$ .

### 1.5.3. Haces Asociados

La idea básica de los haces asociados es que dado un haz principal  $(P, \pi, M)$  con grupo de estructura  $G$ , es posible construir un haz fibrado con fibra  $F$  para cada espacio  $F$  en el cual  $G$  actúa como un grupo de transformaciones.

**Definición 1.5.6.** Sea  $\xi = (P, \pi, M)$  un  $G$ -haz principal y sea  $F$  un espacio  $G$ -izquierdo. Se define  $P_F := P \times_G F$ , donde  $(p, v)g := (pg, g^{-1}v)$ , y se define un mapeo  $\pi_F : P_F \rightarrow M$  como  $\pi_F([p, v]) := \pi(p)$ . Entonces  $\xi[F] := (P_F, \pi_F, M)$  es un haz fibrado sobre  $M$  con fibra  $F$  que se dice **asociado** con el haz principal  $\xi$  vía la acción del grupo  $G$  sobre  $F$ .

## 1.6. Conexiones sobre Haces Principales

Una idea de gran importancia en la teoría de haces fibrados es el concepto de conexión junto con el de transporte paralelo y derivada covariante. Se tiene como ejemplo la geometría Riemanniana sobre una variedad  $M$ , donde los símbolos de Christoffel son conexiones sobre un haz de marcos  $B(M)$ . El objetivo principal de las nociones de transporte paralelo y derivada covariante es el de comparar puntos que residen en fibras cercanas, sin importar la trivialización local del haz. La definición formal de conexión se enuncia a continuación.

**Definición 1.6.1.** Una **conexión** en un haz principal  $G \rightarrow P \rightarrow M$  es la asignación suave a cada punto  $p \in P$  de un subespacio  $H_p P$  de  $T_p P$  tal que:

- I)  $T_p P \simeq V_p P \oplus H_p P$  para todo  $p \in P$ ;
- II)  $\delta_g^*(H_p P) = H_{pg} P$  para todo  $g \in G, p \in P$ ,

donde  $\delta_g(p) := pg$  denota a la acción derecha de  $G$  sobre  $P$ .

---

Es importante notar los siguientes hechos

**Observación 1.6.1.** *La primera condición en la definición anterior implica que cualquier vector tangente  $\tau \in T_p P$  puede descomponerse de manera unívoca en la suma de sus componentes vertical y horizontal, estas componentes se denotarán como  $ver(\tau)$  y  $hor(\tau)$  respectivamente.*

**Observación 1.6.2.**  $\pi_* : H_p \rightarrow T_{\pi(p)} M$  es un isomorfismo. Mas aún, si  $R_g : P \rightarrow P$  es la acción derecha de  $g \in G$  sobre  $P$  (es decir,  $R_g(p) = pg$ ), entonces se requiere que  $R_{g^*}(H_p) = H_{pg}$ , lo que significa que el subespacio  $H_p$  sea  $R_g$ -invariante.

**Observación 1.6.3.** Una conexión puede ser asociada con una 1-forma  $\omega$  con la propiedad de ser  $\mathfrak{g}$ -valuada sobre  $P$ , es decir,  $\omega_p(X^A) = A, \forall p \in P, A \in \mathfrak{g}$ , con

$$X_p^A(f) := \left. \frac{d}{dt} f(p \exp(tA)) \right|_{t=0}. \quad (1.62)$$

donde  $f$  es una función de clase  $C^\infty$  sobre  $M$ .

Es importante definir ahora una derivada de una sección  $\sigma$ , no obstante nos enfrentamos a una dificultad, esto es la ausencia de una forma natural de comparar los valores de  $\sigma$  en dos puntos cercanos de  $M$ . De forma más precisa estos valores pertenecen a distintas fibras del haz y aunque podrían ser comparados, el resultado dependerá de la trivialización escogida. Sin embargo, cuando el haz está equipado con una conexión, esta puede ser usada para hacer el *pull-back* del segundo punto a la fibra sobre el primero y entonces poder comparar sin ambigüedades. Esta idea conduce al concepto de derivada covariante asociada a la conexión  $\omega$ .

**Definición 1.6.2.** Sea  $\phi$  una  $k$ -forma sobre  $P$  con valores en algún espacio vectorial  $W$ . Se define la **derivada covariante**  $D^\omega \phi$  de  $\phi$  relativa a  $\omega$  como la  $(k+1)$ -forma

$$D^\omega \phi = (d\phi)^H, \quad (1.63)$$

donde el superíndice  $H$  significa la parte horizontal de la forma  $d\phi$  y  $d$  es la derivada exterior ordinaria.

**Definición 1.6.3.** La **curvatura de la conexión**  $\omega$  se define por  $\Omega^\omega = D^\omega \omega$  la cual puede ser escrita como la ecuación siguiente

$$\Omega^\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega], \quad (1.64)$$

donde  $[\omega, \omega]$  es el conmutador de Lie en  $G$  tal que  $[\omega, \omega](X, Y) = [\omega(X), \omega(Y)] - [\omega(Y), \omega(X)] = 2[\omega(X), \omega(Y)]$ .

# Capítulo 2

## Teorías de Norma

Las teorías de norma son los modelos empleados para el estudio de las fuerzas fundamentales de la naturaleza. La electrodinámica cuántica es una teoría de norma abeliana cuyo grupo de estructura es  $U(1)$  y tiene como campo de norma al potencial vectorial y su bosón de norma es el fotón. El modelo estándar es una teoría no abeliana con grupo de simetría  $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$  y tiene doce bosones de norma: el fotón, tres bosones débiles y ocho gluones.

Una teoría de norma es una teoría de campo para la cual el lagrangiano permanece invariante bajo transformaciones locales, estas transformaciones toman valores en un grupo de Lie conocido como grupo de estructura o grupo de norma de la teoría. Las teorías de norma están basadas en un concepto más profundo conocido como invarianza de norma.

Michael Faraday introdujo la idea de campo cuando observó que un campo magnético que cambia en el tiempo generaba un campo eléctrico, posteriormente James Clerk Maxwell estableció esta relación en forma matemática y la llamó ley de Faraday. Dicho resultado se convertiría en una de las cuatro ecuaciones de Maxwell las que a su vez evolucionarían a un modelo físico más general conocido como teoría de campo. Otro de los principios básicos de la invarianza de norma es que unifica aquellas fórmulas matemáticas o modelos físicos que están descritos por campos de la misma clase.

El término norma se refiere a un tratamiento específico de los grados de libertad en el lagrangiano. Las transformaciones de norma forman un grupo de Lie. Asociado con cualquier grupo de Lie está el álgebra de Lie de generadores del grupo. Para cada generador del grupo surge su correspondiente campo (usualmente un campo vectorial) llamado campo de norma. Los campos de norma se incluyen en el lagrangiano para garantizar la invarianza bajo las transformaciones del grupo. De manera más general, cuando la teoría está cuantizada el *cuanto* de los campos de norma es llamado bosón de norma. Si el grupo de norma no es conmutativo, la teoría se

conoce como teoría de norma no-abeliana o teoría de Yang-Mills.

C. N. Yang y R. Mills en 1954 extendieron la idea de una teoría de norma para grupos abelianos a una con grupos no-abelianos para dar una explicación a las interacciones fuertes.

En este capítulo se hace una revisión de las teorías de norma desde el punto de vista de la física teórica y posteriormente se establece su relación con el formalismo geométrico de la teoría de haces fibrados.

## 2.1. Introducción a las Teorías de Norma

La teoría de norma más familiar es la teoría electromagnética de Maxwell la cual está descrita por el conjunto de ecuaciones diferenciales [20]

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}, \quad (2.4)$$

donde el campo magnético  $\vec{B}$  y el campo eléctrico  $\vec{E}$  están expresados en términos del potencial vectorial  $A_\mu = (\Phi, \vec{A})$  de la siguiente forma

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (2.5)$$

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (2.6)$$

Las ecuaciones de Maxwell también se pueden escribir en forma tensorial definiendo el tensor de campo electromagnético  $F_{\mu\nu}$  como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.7)$$

El lagrangiano del campo electromagnético está dado por

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu, \quad (2.8)$$

donde  $j^\mu = (\rho, \vec{J})$  denota a la cuadri-corriente.

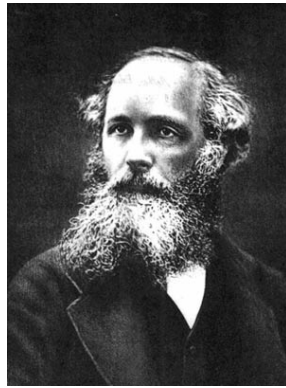


Figura 2.1: James Clerk Maxwell.

Es posible demostrar entonces que las dos ecuaciones de Maxwell sin fuentes (2.1) y (2.2) son equivalentes a la identidad de Bianchi

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0, \quad (2.9)$$

que a su vez es también equivalente a la expresión

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0, \quad (2.10)$$

donde  $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$  es el tensor dual asociado a  $F$  definido como  $\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}$ .

Por otro lado las otras dos ecuaciones con fuentes (2.3) y (2.4) son equivalentes a la expresión

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (2.11)$$

La demostración de (2.10) y (2.11) se obtiene de la siguiente manera

Se toma la métrica de Minkowski  $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  para subir o bajar índices, sea  $\partial_\mu = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$ .

El tensor electromagnético contravariante en su forma matricial está definido de la siguiente manera

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

para obtener la forma covariante de  $F$  se aplica la siguiente operación  $F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}F^{\gamma\delta}g_{\delta\beta}$ , y se tiene el siguiente resultado en forma matricial:

---

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

En forma similar se tiene que la representación matricial del tensor dual es la siguiente

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

de donde se observa que los elementos del tensor dual  $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$  se pueden obtener a partir de  $F^{\alpha\beta}$  haciendo  $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$  y  $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$ .

Para obtener las ecuaciones de Maxwell sin fuentes (2.1) y (2.2) se parte de (2.10) y después se consideran los cuatro posibles valores de  $\beta$  como se muestra a continuación

- $\beta = 0$

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha 0} &= \partial_0 \mathcal{F}^{00} + \partial_1 \mathcal{F}^{10} + \partial_2 \mathcal{F}^{20} + \partial_3 \mathcal{F}^{30} \\ &= \partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z \\ &= \nabla \cdot \vec{B} = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

- $\beta = 1$

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha 1} &= \partial_0 \mathcal{F}^{01} + \partial_1 \mathcal{F}^{11} + \partial_2 \mathcal{F}^{21} + \partial_3 \mathcal{F}^{31} \\ &= -\partial_t B_x - \partial_y E_z + \partial_z E_y \\ &= \left[ -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times \vec{E} \right]_x = 0 \\ &= \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} \right]_x = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

- $\beta = 2$

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha 2} &= \partial_0 \mathcal{F}^{02} + \partial_1 \mathcal{F}^{12} + \partial_2 \mathcal{F}^{22} + \partial_3 \mathcal{F}^{32} \\
&= -\partial_t B_y + \partial_x E_z - \partial_z E_x \\
&= \left[ -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times \vec{E} \right]_y = 0 \\
&= \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} \right]_y = 0.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

- $\beta = 3$

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha 3} &= \partial_0 \mathcal{F}^{03} + \partial_1 \mathcal{F}^{13} + \partial_2 \mathcal{F}^{23} + \partial_3 \mathcal{F}^{33} \\
&= -\partial_t B_z - \partial_x E_y + \partial_y E_x \\
&= \left[ -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times \vec{E} \right]_z = 0 \\
&= \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} \right]_z = 0.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

La ecuación (2.15) por si sola recupera la ecuación de la no existencia de monopolos magnéticos, por otro lado las ecuaciones (2.16) a (2.18) arrojan las componentes de la Ley de Faraday.

De manera análoga para obtener las ecuaciones de Maxwell con fuentes (2.3) y (2.4) se considera a la ecuación (2.11) y se toman los cuatro valores de  $\beta$  de la siguiente manera

- $\beta = 0$

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha F^{\alpha 0} &= \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} \\
&= \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z \\
&= \nabla \cdot \vec{E} = \rho.
\end{aligned} \tag{2.19}$$


---

- $\beta = 1$

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha F^{\alpha 1} &= \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} \\
&= -\partial_t E_x + \partial_y B_z - \partial_z B_y \\
&= \left[ -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} \right]_x = J^x.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

- $\beta = 2$

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha F^{\alpha 2} &= \partial_0 F^{02} + \partial_1 F^{12} + \partial_2 F^{22} + \partial_3 F^{32} \\
&= -\partial_t E_y - \partial_x B_z + \partial_z B_x \\
&= \left[ -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} \right]_y = J^y.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

- $\beta = 3$

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha F^{\alpha 3} &= \partial_0 F^{03} + \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{23} + \partial_3 F^{33} \\
&= -\partial_t E_z + \partial_x B_y - \partial_y B_x \\
&= \left[ -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} \right]_z = J^z.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

La ecuación (2.19) es precisamente la ley de Coulomb, mientras que las ecuaciones (2.20) a (2.22) corresponden a las componentes de la ley de Ampère.

De esta forma se obtiene la derivación completa de las ecuaciones de Maxwell en forma covariante [20].

Por otro lado, en este formalismo es posible reescribir las ecuaciones de Maxwell en términos de los potenciales de la siguiente manera

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{2.23}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left( \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}. \tag{2.24}$$

Como se puede apreciar las ecuaciones anteriores están acopladas, sin embargo, es posible desacoplarlas definiendo de manera apropiada los potenciales.

---



Como  $\vec{B}$  se define a través de (2.5) en términos de  $\vec{A}$ , el potencial vectorial es arbitrario en la medida de que es posible agregarle el gradiente de alguna función escalar arbitraria  $\Lambda$ , dicho de otra manera  $\vec{B}$  no se altera bajo la siguiente transformación

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda, \quad (2.25)$$

De manera análoga el campo eléctrico (2.6) permanece inalterado bajo la transformación siguiente del potencial escalar

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}. \quad (2.26)$$

La elección de (2.25) y (2.26) significa que es posible escoger un conjunto de potenciales  $(\vec{A}, \Phi)$  tal que se cumpla la siguiente expresión

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0, \quad (2.27)$$

este hecho, conocido como *condición de Lorentz*, permite desacoplar las ecuaciones (2.23) y (2.24) y proporciona un par de ecuaciones de onda inhomogéneas para cada potencial:

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.28)$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} \quad (2.29)$$

La transformación dada por las ecuaciones (2.25) y (2.26) es llamada **transformación de norma** y la invarianza de los campos bajo esta transformación es conocida como **invarianza de norma**.

Existe, sin embargo, otra transformación útil en electromagnetismo llamada *norma de Coulomb*, la cual cumple la siguiente condición

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (2.30)$$

Siguiendo estas ideas, es posible observar que las ecuaciones (2.25) y (2.26) son equivalentes a la siguiente transformación de norma

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\lambda, \quad (2.31)$$

la cual es un elemento del grupo abeliano  $U(1)$ .

C. N. Yang y R. Mills [1], introdujeron transformadas de norma no-abelianas las que constituyen la base de las ahora llamadas teorías de Yang-Mills.



Figura 2.2: Chen Ning Yang.

La motivación de Yang y Mills era encontrar ecuaciones que fueran invariantes bajo transformaciones de norma (como las ecuaciones de Maxwell, que como se estudió anteriormente son invariantes bajo la norma de Coulomb) mientras pensaban en la física de hadrones, los cuales interactúan vía la fuerza nuclear fuerte. Los hadrones más comunes son los neutrones y los protones. Estas dos partículas que constituyen los núcleos atómicos, tienen muchas similitudes, por ejemplo ambas son fermiones con espín  $1/2$ , la masa del protón es 1836 veces la masa del electrón, mientras que la masa del neutrón es 1839 veces la masa del electrón. El protón está cargado positivamente y el neutrón es eléctricamente neutro, por lo tanto, al menos bajo la fuerza electromagnética estas dos partículas interactúan de manera distinta, pero interactúan de manera muy similar bajo la acción de la fuerza nuclear fuerte. Por otro lado el protón es una partícula estable salvo algunos experimentos en donde se han observado decaimientos de protones. Un neutrón aislado no es estable, su tiempo de vida media es de aproximadamente de 15 minutos, después de este periodo de tiempo decae en un protón  $p$ , un electrón  $e^-$  y un anti-neutrino del electrón  $\bar{\nu}_e$  en lo que se conoce como *decaimiento beta*.

En los años de 1930 Heisenberg introdujo el concepto de espín isotópico o isospín, intentando explicar algunos de los hechos mencionados en el párrafo anterior. La idea era la siguiente: si de alguna manera se pudieran ignorar todas las interacciones



Figura 2.3: Robert L. Mills.

a excepción de la nuclear fuerte, se podrían tratar al protón y al neutrón como dos estados de una misma partícula llamada *nucleón*. En analogía con el espín, Heisenberg describió los grados de libertad internos de un nucleón por medio un vector unitario en  $\mathbb{C}^2$ , al protón se le asignó un estado de isospín hacia arriba mientras que al neutrón uno hacia abajo. Es importante mencionar que esta asignación fue completamente arbitraria. Entonces el nucleón posee un doblete de isospín de la siguiente forma:

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

mas aún, Heisenberg describió la simetría entre protones y neutrones utilizando la representación de  $SU(2)$  de espín  $1/2$ . Sin embargo esta hipótesis debía ser comprobada empíricamente. En esa época ya se sabía que la fuerza nuclear fuerte era transportada por partículas llamadas piones. Existen tres tipos de piones: positivo  $\pi^+$ , negativo  $\pi^-$  y neutro  $\pi^0$ , los cuales tienen masas similares, justo como ocurre con el protón y el neutrón. Ignorando una vez más todas las interacciones a excepción de la nuclear fuerte, se tuvo la hipótesis de que los tres piones son estados de una misma partícula, *el pión*, el cual se transforma de acuerdo a la representación de  $SU(2)$  de espín  $1$  haciendo las siguientes asignaciones

$$\pi^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \pi^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \pi^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

dicho de otra manera, los piones forman un triplete de isospín.

En estos tratamientos, solo se han considerado los grados de libertad internos del nucleón o del pión, dejando de lado su dinámica en el espacio-tiempo, pero para describir procesos físicos reales es necesario considerar al nucleón y al pión formalmente como campos. Para ello, se introducen respectivamente a

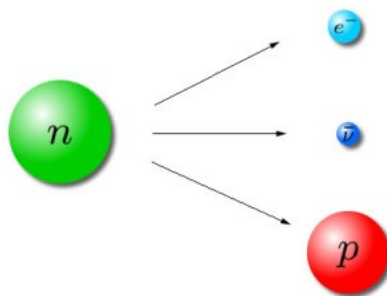


Figura 2.4: Decaimiento  $\beta$ .

$$\psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad (2.34)$$

y

$$\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^3 \quad (2.35)$$

que permiten realizar su tratamiento matemático

La idea es lograr obtener ecuaciones de onda no-lineales que describan el comportamiento de estos campos, asegurando de que si se hace actuar en cualquier solución un elemento  $g \in SU(2)$  de la siguiente forma:

$$\psi'(x) = g\psi(x), \quad (2.36)$$

$$\phi'(x) = g\phi(x), \quad (2.37)$$

entonces  $\psi'$  y  $\phi'$  también sean soluciones.

La propuesta de Yang y Mills fue encontrar simetrías bajo transformaciones de la forma [14]

$$\psi'(x) = g(x)\psi(x), \quad (2.38)$$

$$\phi'(x) = g(x)\phi(x), \quad (2.39)$$

donde  $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow SU(2)$  es cualquier función evaluada en el espacio-tiempo. A esto se le conoce como transformaciones de norma.

Casi en la misma época Gell-Mann [21] propuso más generalizaciones a estas ideas pensando a  $SU(2)$  como un subgrupo de  $SU(3)$ , de hecho esto originó la noción de



Figura 2.5: Werner Heisenberg.

los componentes más fundamentales de los hadrones de acuerdo a la representación de  $SU(3)$ , estos componentes son los quarks arriba, abajo y extraño.

Posteriormente una teoría de norma más desarrollada predijo el *confinamiento de los quarks* que plantea el hecho de que no se pueden observar quarks aislados, la idea clave de esto está contenida en la simetría de color, cuyo grupo de simetría es  $SU(3)$ , la teoría de norma asociada a esta simetría es llamada  *Cromodinámica cuántica* [14]. Similarmente la fuerza electrodébil está descrita por la teoría de norma  $SU(2) \times U(1)$  en el modelo estándar de partículas elementales.

## 2.2. Relación entre las Teorías de Norma y el formalismo de Haces Fibrados

A continuación se presenta la definición formal del concepto de transformación de norma en el lenguaje de haces fibrados.

**Definición 2.2.1.** Una **transformación de norma** de un  $G$ -haz principal  $\pi : P \rightarrow M$  es un difeomorfismo  $\phi : P \rightarrow P$  que satisface

$$\text{I) } \phi(pg) = \phi(p)g.$$

$$\text{II) } \pi(\phi(p)) = \pi(p).$$

para  $g \in G$  y  $p \in P$ . Note que la segunda condición implica que las fibras son mapeadas en sí mismas y que el espacio de transformaciones de norma es un subgrupo del grupo de automorfismos de  $P$  y que será denotado por  $GA(P)$ . Si  $\phi \in GA(P)$  y  $\omega$  es una conexión sobre  $P$ , entonces  $\phi^*(\omega)$  es una 1-forma  $\mathfrak{g}$ -valuada que satisface todos los axiomas de una conexión. El *pull-back*  $\phi^*(\omega)$  es llamado la **transformada de norma** de  $\omega$  por la transformación de norma  $\phi \in GA(P)$ .

Uno de los principales objetivos de este trabajo es responder la siguiente pregunta ¿Cuál es la relación que guarda el formalismo de haces principales con la teoría

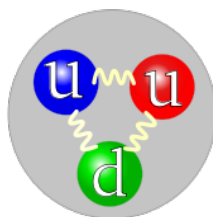


Figura 2.6: Estructura interna del protón.

de Yang-Mills? El concepto geométrico fundamental que describe a las teorías de Yang-Mills es el concepto de haz principal  $G \rightarrow P \rightarrow M$ , donde el campo de Yang-Mills puede identificarse con una conexión sobre el espacio haz  $P$ , en la teoría de Yang-Mills, todos los campos (a excepción del campo de Yang-Mills) son secciones transversales de haces vectoriales que están asociados con el haz principal de Yang-Mills.

El punto de partida es expresar el concepto de conexión de una manera más conveniente, enfocada a la teoría de Yang-Mills.

Un campo de Yang-Mills puede verse en la forma  $A_\mu^a$ , donde  $\mu$  denota un índice de *espacio – tiempo* y el índice  $a$  toma valores en el conjunto  $\{1, 2, \dots, \dim G\}$ , esto corresponde al hecho de que  $A$  se transforma de acuerdo a la representación adjunta de  $G$  bajo transformaciones de norma. Entonces si se tiene

$$A(x) = \sum_{\mu=1}^m \sum_{a=1}^{\dim G} A_\mu^a(x) E_A(dx^\mu)_x, \quad (2.40)$$

donde  $\{E_1, E_2, \dots, E_{\dim G}\}$  es una base para  $\mathfrak{g}$ , es posible ver que se puede escribir un campo de Yang-Mills (al menos localmente) como una 1–forma sobre  $M$  que toma valores en  $\mathfrak{g}$ .

La relación precisa entre un campo de Yang-Mills y la 1–forma de conexión está contenida en el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.1.** *Sea  $\sigma : U \rightarrow P$  una sección sobre el haz principal  $\pi : P \rightarrow M$  equipado con una 1–forma de conexión  $\omega$ . Se define la  $\sigma$ –representación local de  $\omega$  como la 1–forma  $\mathfrak{g}$ –valuada sobre el abierto  $U \subset G$  dada por  $\omega^U = \sigma^*\omega$ . Sea  $h = T^{-1} : U \times G \rightarrow \pi^{-1}(U)$  una trivialización local de  $P$  inducida por  $\sigma$ , entonces si  $(\alpha, \beta) \in T_{(x,g)}(U \times G)$  la representación local  $h^*\omega$  d  $\omega$  sobre  $U \times G$  puede escribirse en términos del campo de Yang-Mills local  $\omega^U$  por*

$$h^*\omega_{(x,g)}(\alpha, \beta) = g^{-1}(\omega_x^U(\alpha))g + \Xi_g(\beta), \quad (2.41)$$

donde  $\Xi$  es la 1–forma  $\mathfrak{g}$ –valuada de Maurer-Cartan definida como

$$\Xi_g^{ij} = \sum_{k=1}^n (g^{-1})^{ik} (dx^{kj})_g. \quad (2.42)$$

La prueba de este teorema puede ser consultada en forma detallada en [7].

**Observación 2.2.1.** *Es importante observar que la 1–forma de conexión  $\omega$  puede ser descompuesta localmente como la suma de un campo de Yang-Mills más una 1–forma  $\mathfrak{g}$ –valuada sobre  $G$ , entonces por lo menos localmente especificar una conexión es equivalente a dar un campo de Yang-Mills.*

---

La siguiente cuestión por resolver es ¿Cómo surge la intensidad de campo de Yang-Mills  $F_{\mu\nu}$  en este formalismo geométrico? La respuesta está dada en términos de la 2-forma de curvatura. De manera más precisa la relación de  $\Omega^\omega$  con la intensidad de campo de Yang-Mills está expresada en la ecuación de estructura de Cartan (1.64), y que puede ser escrita en términos de una base de  $\mathfrak{g}$ . Es decir, si se escribe  $\omega = \omega^a E_a$  entonces

$$\Omega^a = d\omega^a + \frac{1}{2} \sum_{b,c=1}^{\dim G} C_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c, \quad (2.43)$$

donde  $C_{bc}^a$  denota a las correspondientes constantes de estructura de  $\mathfrak{g}$ .

Si  $\sigma : U \rightarrow P$  es una sección del haz, la representación local  $A = \sigma^*\omega$  de  $\omega$  está complementada con la representación local  $F = \sigma^*\Omega$  de la 2-forma de curvatura. Entonces se sigue de la ecuación (2.43) que

$$F^a = dA^a + \frac{1}{2} \sum_{b,c=1}^{\dim G} C_{bc}^a A^b \wedge A^c, \quad (2.44)$$

que en términos de coordenadas locales se puede escribir como la expresión

$$F_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} \left( \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \sum_{b,c=1}^{\dim G} C_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \right). \quad (2.45)$$

**Observación 2.2.2.** *En este formalismo la indentidad de Bianchi se expresa mediante la fórmula  $D^\omega\Omega = 0$ .*

**Observación 2.2.3.** *Si  $\sigma_1 : U_1 \rightarrow P$  y  $\sigma_2 : U_2 \rightarrow P$  son un par de secciones locales del haz con  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , entonces existe una función de norma local  $\Omega : U_1 \cap U_2 \rightarrow G$  tal que  $\sigma_2(x) = \sigma_1(x)\Omega(x)$ , además, si existen dos representaciones locales de la 2-forma de curvatura  $\Omega^\omega$  denotadas por  $F^{(1)} = \sigma_1^*G$  y  $F^{(2)} = \sigma_2^*G$  respectivamente, estas están relacionadas de la siguiente manera (ver [7])*

$$F_{\mu\nu}^{(2)}(x) = \Omega(x)^{-1} F_{\mu\nu}^{(1)}(x) \Omega(x), \quad (2.46)$$

para todo  $x \in U_1 \cap U_2$ .

Finalmente hay que responder ahora cómo surgen las transformaciones de norma en el formalismo de haces fibrados. Existen dos respuestas a esta cuestión y sus sutiles diferencias dependen de cómo el grupo de norma está siendo considerado, esto es si de forma pasiva o activa. En general, una transformación de norma en el haz principal  $G \rightarrow P \rightarrow M$  se define como cualquier automorfismo del haz. Si  $\phi : P \rightarrow P$  es un automorfismo y  $\omega$  es una conexión sobre  $P$  entonces el pullback  $\phi^*(\omega)$  es una

1–forma  $\mathfrak{g}$ –valuada que satisface todos los axiomas de una conexión, en este caso el pull-back  $\phi^*(\omega)$  se conoce como la transformada de norma de  $\omega$  vía la transformación de norma  $\phi$ . Esta construcción se realiza en el sentido activo, sin embargo en las teorías de Yang–Mills es más relevante conocer como actúa una transformación de norma en la representación local  $\omega^U$  de la conexión. Esto corresponde al punto de vista pasivo de las transformaciones de norma y que se describe a continuación.

**Teorema 2.2.2.** *Sean  $\sigma_1 : U_1 \rightarrow P$  y  $\sigma_2 : U_2 \rightarrow P$  trivializaciones locales tales que  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ . Si  $A_\mu^{(1)}$  y  $A_\mu^{(2)}$  denotan las representaciones locales de  $\omega$  con respecto a  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  respectivamente, y si  $\Omega : U_1 \cap U_2 \rightarrow G$  es la única función de norma local definida por  $\sigma_2(x) = \sigma_1(x)\Omega(x)$ , entonces las representaciones locales están relacionadas sobre  $U_1 \cap U_2$  por la siguiente expresión (ver [7])*

$$A_\mu^{(2)} = \Omega(x)^{-1}A_\mu^{(1)}\Omega(x) + \Omega(x)^{-1}\partial_\mu\Omega(x). \quad (2.47)$$

La ecuación anterior se ve como una transformación de norma usual, sin embargo no es del todo preciso ya que (2.47) relaciona un par de campos locales de Yang–Mills cuyas regiones de definición son en general diferentes pero cuya intersección es distinta del vacío.

**Observación 2.2.4.** *La transformación de norma para un solo campo local de Yang–Mills está dada como sigue: Si  $\sigma : U \rightarrow P$  es una sección local del haz principal  $\pi : P \rightarrow M$  con  $A = \sigma^*\omega$ , entonces una transformación de norma activa  $\phi : P \rightarrow P$  induce una transformación  $A \mapsto \sigma^*(\phi^*\omega) = (\phi \circ \sigma)^*$  tal que la transformación de la representación local de  $A$  puede ser escrita en la forma siguiente*

$$A \mapsto \Omega(x)A_\mu\Omega(x)^{-1} + \Omega(x)\partial_\mu\Omega(x)^{-1}. \quad (2.48)$$

Note que, si el haz es trivial, es posible definir un sección globalmente sobre  $M$  y entonces la expresión anterior se refiere a una 1–forma  $\mathfrak{g}$ –valuada definida globalmente sobre  $M$ . Pero si el haz principal es no-trivial, entonces no es posible definir una conexión  $\omega$  en términos de un sólo campo de Yang–Mills sobre  $M$ .

El análisis presentado en esta sección permite obtener la derivación de las relaciones básicas para la teoría física de campos de Yang–Mills. Dicha relación está contenida con más detalle en el diccionario de Wu–Yang [8] que se resume en la Tabla 2.1 y que permite identificar cada elemento matemático con su correspondiente elemento físico.



Lenguaje de haces fibrados	Teorías de Norma
Haz principal $P$	Marco geométrico de los potenciales de norma
Conexiones sobre $P$	Potenciales de norma
Haz vectorial asociado $E$	Marco geométrico para el acoplamiento de materia con campos de norma
Secciones locales de $E$	Campos de materia
Grupo de estructura $G$	Grupo de norma
Generadores de $G$	Bosones de norma
Automorfismos de $P$	Transformaciones locales de norma (sentido activo)
Curvatura	Intensidad de campo

Tabla 2.1: El diccionario de Wu-Yang explica las equivalencias entre los conceptos de las teorías de norma y la terminología del lenguaje de haces fibrados

# Capítulo 3

## Las ecuaciones de Yang-Mills

En este capítulo se establecen las expresiones necesarias para escribir de forma detallada las ecuaciones de Yang-Mills. Posteriormente se describe la teoría electromagnética de Maxwell en el formalismo de formas diferenciales y finalmente se escriben explícitamente las ecuaciones de Yang-Mills de forma general.

Se denota por  $G$  a un grupo de Lie compacto semisimple como  $SO(N)$  o  $SU(N)$  y a un campo de Yang-Mills por

$$\mathcal{A}_\mu = \sum_{a=1}^{\dim G} A_\mu^a E_a, \quad (3.1)$$

donde  $\{E_1, E_2, \dots, E_{\dim G}\}$  es una base para el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  del grupo  $G$ . La derivada covariante está definida entonces por

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \mathcal{A}_\mu, \quad (3.2)$$

y el tensor de Yang-Mills como

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu], \quad (3.3)$$

que en términos de las componentes se expresa de la siguiente manera

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \sum_{b,c=1}^{\dim G} C_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c, \quad (3.4)$$

donde  $C_{bc}^a$  son las constantes de estructura del álgebra de Lie.

Por otro lado el tensor de campo dual se encuentra dado por la expresión

$$* \mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\kappa\lambda} \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda}. \quad (3.5)$$

Finalmente el lagrangiano del campo de Yang-Mills invariante de norma está definido por

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2}Tr(\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathcal{F}_{\mu\nu}) = \frac{1}{4}F^{\mu\nu a}F_{\mu\nu a}, \quad (3.6)$$

donde la traza es sobre el grupo de matrices y los elementos de la base  $E_a$  están normalizados de tal modo que  $Tr(E_a E_b) = -\frac{1}{2}\delta_{ab}$ . A partir del lagrangiano (3.6) es posible obtener las ecuaciones de movimiento, que resultan ser las ecuaciones de Yang-Mills sin fuentes que se pueden expresar como

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{F}_{\mu\nu}] = 0. \quad (3.7)$$

El otro conjunto de ecuaciones provienen de la identidad de Bianchi [19], [14] y están dadas por la expresión

$$\mathcal{D}_\mu * \mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu * \mathcal{F}_{\mu\nu} + [\mathcal{A}_\mu, * \mathcal{F}_{\mu\nu}] = 0. \quad (3.8)$$

Estas dos últimas ecuaciones se pueden escribir también en términos de formas diferenciables [19], [14] como

$$dF = 0 \quad y \quad *d*F = J. \quad (3.9)$$

Una deducción de las ecuaciones de Yang-Mills utilizando cálculo variaciones puede consultarse en [9].

En las próximas secciones se calcula el efecto del operador estrella sobre las distintas diferenciales y posteriormente se deducen en forma detallada las ecuaciones de Yang-Mills para los casos  $G = U(1)$  y  $G \subset U(N)$ .

### 3.1. Operadores Estrella

En esta sección se presenta de manera detallada el cálculo de los operadores estrella de los generadores de  $\Omega^k(M^4)$ , los cuales serán de gran utilidad para obtener las ecuaciones de Yang-Mills en las próximas secciones.

Sea  $dx^0, dx^1, dx^2, dx^3$  una base de 1-formas en alguna carta  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  sobre el espacio 4-dimensional de Minkowski entonces utilizando la expresión (1.48) se tiene que

$$\begin{aligned} *(dx^1 \wedge dx^0) &= \frac{1}{2!} \epsilon_{j_1 j_2}^{10} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon_{23}^{10} dx^2 \wedge dx^3 + \epsilon_{32}^{10} dx^3 \wedge dx^2) \\ &= \frac{1}{2} (-\epsilon_{1023} dx^2 \wedge dx^3 - \epsilon_{1032} dx^3 \wedge dx^2) \\ &= \epsilon_{0123} dx^2 \wedge dx^3 \\ &= dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned} \quad (3.10)$$

En forma análoga para las otras posibles combinaciones de 1–formas, 2–formas y 3–formas se encuentran los siguientes resultados

$$\begin{aligned} *(dx^2 \wedge dx^0) &= \frac{1}{2!} \epsilon_{j_1 j_2}^{20} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} = \epsilon_{0123} dx^3 \wedge dx^1 \\ &= dx^3 \wedge dx^1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} *(dx^3 \wedge dx^0) &= \frac{1}{2!} \epsilon_{j_1 j_2}^{30} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} = \epsilon_{0123} dx^1 \wedge dx^2 \\ &= dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} *(dx^2 \wedge dx^3) &= \frac{1}{2!} \epsilon_{j_1 j_2}^{23} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} = -\epsilon_{0123} dx^1 \wedge dx^0 \\ &= -dx^1 \wedge dx^0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} *(dx^3 \wedge dx^1) &= \frac{1}{2!} \epsilon_{j_1 j_2}^{31} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} = \epsilon_{3120} dx^2 \wedge dx^0 \\ &= -dx^2 \wedge dx^0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} *(dx^1 \wedge dx^2) &= \frac{1}{2!} \epsilon_{j_1 j_2}^{12} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \\ &= -dx^1 \wedge dx^0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} *(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) &= \epsilon_0^{123} dx^0 = \epsilon_{1230} dx^0 = -dx^0 \\ *(dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3) &= \epsilon_1^{023} dx^1 = -\epsilon_{0231} dx^1 = -dx^1 \\ *(dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3) &= \epsilon_2^{013} dx^2 = -\epsilon_{0132} dx^2 = dx^2 \\ *(dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2) &= \epsilon_3^{012} dx^0 = -\epsilon_{0123} dx^0 = -dx^0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} *dx^0 &= \frac{1}{3!} \epsilon_{j_1 j_2 j_3}^0 dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge dx^{j_3} = -\epsilon_{0123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = -dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ *dx^1 &= \frac{1}{3!} \epsilon_{j_1 j_2 j_3}^1 dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge dx^{j_3} = \epsilon_{1023} dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = -dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ *dx^2 &= \frac{1}{3!} \epsilon_{j_1 j_2 j_3}^2 dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge dx^{j_3} = \epsilon_{2013} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ *dx^3 &= \frac{1}{3!} \epsilon_{j_1 j_2 j_3}^3 dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge dx^{j_3} = \epsilon_{3012} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 = -dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Finalmente

---

$$* dx^0 = -dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad * dx^1 = -dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (3.18)$$

$$* dx^2 = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \quad * dx^3 = -dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \quad (3.19)$$

$$* (dx^1 \wedge dx^0) = dx^2 \wedge dx^3 \quad * (dx^2 \wedge dx^0) = dx^3 \wedge dx^1 \quad (3.20)$$

$$* (dx^3 \wedge dx^0) = dx^1 \wedge dx^2 \quad * (dx^2 \wedge dx^3) = -dx^1 \wedge dx^0 \quad (3.21)$$

$$* (dx^3 \wedge dx^1) = -dx^2 \wedge dx^0 \quad * (dx^1 \wedge dx^2) = -dx^1 \wedge dx^0 \quad (3.22)$$

$$* (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = -dx^0 \quad * (dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = -dx^1 \quad (3.23)$$

$$* (dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3) = dx^2 \quad * (dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2) = -dx^3 \quad (3.24)$$

Las expresiones anteriores serán necesarias para los cálculos que se realizan posteriormente. En las próximas secciones se obtienen las ecuaciones de Maxwell vistas como una teoría de Yang-Mills con grupo de estructura  $U(1)$  y a continuación el caso general de las ecuaciones de Yang-Mills para un grupo de estructura subconjunto de  $U(N)$ .

### 3.2. Caso $G = U(1)$

Para el caso en que  $G = U(1)$  su álgebra de Lie es simplemente  $\mathbb{R}$ . Si se denota por  $M^4 = \mathbb{R}^4$  al espacio con coordenadas  $(t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  y la métrica de Lorentz con signatura  $(-1, 1, 1, 1)$ , es posible definir el potencial electromagnético de la siguiente forma

$$\begin{aligned} A &= A_\mu dx^\mu = A_0 dx^0 + A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3 \\ &= -A^0 dx^0 + A^1 dx^1 + A^2 dx^2 + A^3 dx^3 \end{aligned} \quad (3.25)$$

La expresión anterior es precisamente la 1-forma de conexión. El siguiente paso es calcular la 2-forma de curvatura.

Dado ahora que  $U(1)$  es un grupo abeliano, sus constantes de estructura se anulan y la derivada covariante se reduce a la derivada exterior usual  $d$ . De este modo la 2-forma de curvatura se reduce a  $F = dA$ . En forma explícita se tiene

$$\begin{aligned}
F &= dA = d(-A^0 dx^0 + A^1 dx^1 + A^2 dx^2 + A^3 dx^3) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^0} (-A^0 dx^0 \wedge dx^0 + A^1 dx^0 \wedge dx^1 + A^2 dx^0 \wedge dx^2 + A^3 dx^0 \wedge dx^3) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x^1} (-A^0 dx^1 \wedge dx^0 + A^1 dx^1 \wedge dx^1 + A^2 dx^1 \wedge dx^2 + A^3 dx^1 \wedge dx^3) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x^2} (-A^0 dx^2 \wedge dx^0 + A^1 dx^2 \wedge dx^1 + A^2 dx^2 \wedge dx^2 + A^3 dx^2 \wedge dx^3) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x^3} (-A^0 dx^3 \wedge dx^0 + A^1 dx^3 \wedge dx^1 + A^2 dx^3 \wedge dx^2 + A^3 dx^3 \wedge dx^3),
\end{aligned} \tag{3.26}$$

reagrupando términos semejantes se encuentra

$$\begin{aligned}
F &= \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) dx^1 \wedge dx^0 + \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) dx^2 \wedge dx^0 + \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) dx^3 \wedge dx^0 \\
&\quad + \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 + \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

de este modo,  $F$  se escribe en términos de los campos eléctrico y magnético como sigue

$$F = E \wedge dx^0 + B, \tag{3.28}$$

donde las componentes de los campos están dadas por las siguientes expresiones

$$E_i = \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^0} \right) dx^i \tag{3.29}$$

$$B_k = \epsilon_{ijk} \left( \frac{\partial A^j}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j. \tag{3.30}$$

A la 2-forma  $F$  también se le conoce como la intensidad de campo de Yang-Mills y las dos ecuaciones de Maxwell sin fuentes provienen de la siguiente identidad  $dF = 0$ , misma que es calculada a continuación

---

$$\begin{aligned}
dF = & \frac{\partial}{\partial x^0} \left\{ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^0 + \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^0 \right. \\
& + \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^0 + \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
& + \left. \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \right\} \\
& + \frac{\partial}{\partial x^1} \left\{ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) dx^1 \wedge dx^1 \wedge dx^0 + \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^0 \right. \\
& + \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^0 + \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
& + \left. \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \right\} \\
& + \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^0 + \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) dx^2 \wedge dx^2 \wedge dx^0 \right. \\
& + \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^0 + \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
& + \left. \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \right\} \\
& + \frac{\partial}{\partial x^3} \left\{ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^0 + \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^0 \right. \\
& + \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) dx^3 \wedge dx^3 \wedge dx^0 + \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
& + \left. \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \right\} = 0,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

reagrupando los términos distintos de cero en coeficientes del generador de  $\Omega^3(M^4)$  se obtiene en un primer caso

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) \right\} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0, \tag{3.32}$$

expresión que en forma vectorial corresponde simplemente a la ley de ausencia de monopolos magnéticos

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{3.33}$$

mientras que los otros términos se reducen a

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\partial}{\partial x^2} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) - \frac{\partial}{\partial x^3} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^0} \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) \right\} dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
& - \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) - \frac{\partial}{\partial x^3} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^0} \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) \right\} dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \\
& + \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) - \frac{\partial}{\partial x^2} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^0} \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) \right\} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 = 0,
\end{aligned} \tag{3.34}$$

que conjuntamente y en forma vectorial es equivalente a la ley de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \tag{3.35}$$

Las otras dos ecuaciones de Maxwell emplean el operador estrella de Hodge, el cual intercambia el papel entre  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ . De este modo las ecuaciones de Maxwell con fuentes se escriben de la siguiente manera

$$*d*F = J, \tag{3.36}$$

donde

$$J = -\rho dx^0 + J^1 dx^1 + J^2 dx^2 + J^3 dx^3, \tag{3.37}$$

es la 1-forma de densidad de corriente.

Aplicando el operador estrella a los generadores de  $\Omega^2(M^4)$  (3.20),(3.21),(3.22) a (3.26) es posible demostrar que

$$\begin{aligned}
*F &= \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) dx^3 \wedge dx^1 + \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) dx^1 \wedge dx^2 \\
&- \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^0 - \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) dx^2 \wedge dx^0 - \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) dx^3 \wedge dx^0,
\end{aligned} \tag{3.38}$$

por otro lado, se calcula la derivada exterior de  $*F$

---



$$\begin{aligned}
d * F = & \frac{\partial}{\partial x^0} \left\{ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \right. \\
& + \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^0 \\
& \left. - \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^0 - \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^0 \right\} \\
& + \frac{\partial}{\partial x^1} \left\{ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \right. \\
& + \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) dx^1 \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^1 \wedge dx^0 \\
& \left. - \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^0 - \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^0 \right\} \\
& + \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) dx^2 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \right. \\
& + \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^0 \\
& \left. - \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) dx^2 \wedge dx^2 \wedge dx^0 - \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^0 \right\} \\
& + \frac{\partial}{\partial x^3} \left\{ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) dx^3 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \right. \\
& + \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^0 \\
& \left. - \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^0 - \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) dx^3 \wedge dx^3 \wedge dx^0 \right\}, \tag{3.39}
\end{aligned}$$

calculando las derivadas y reagrupando terminos semejantes como coeficientes de los generadores de  $\Omega^3(M^4)$  se encuentra que

$$\begin{aligned}
d * F = & \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) \right\} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
& + \left\{ \frac{\partial}{\partial x^0} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) - \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) \right\} dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
& + \left\{ \frac{\partial}{\partial x^0} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) \right\} dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \\
& + \left\{ \frac{\partial}{\partial x^0} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) - \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) \right\} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2. \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Finalmente aplicando el operador estrella (3.23) y (3.24) a (3.40) e igualando con (3.36) se obtiene

$$\begin{aligned}
*d * F &= - \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) \right\} dx^0 \\
&+ \left\{ -\frac{\partial}{\partial x^0} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) \right\} dx^1 \\
&+ \left\{ -\frac{\partial}{\partial x^0} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) - \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) \right\} dx^2 \\
&+ \left\{ -\frac{\partial}{\partial x^0} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) - \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) \right\} dx^3 \\
&= -\rho dx^0 + J^1 dx^1 + J^2 dx^2 + J^3 dx^3.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Igualando ahora componente a componente con los términos de la 1-forma de densidad de corriente se encuentran las siguientes expresiones

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) \right\} = \rho \tag{3.42}$$

$$\left\{ -\frac{\partial}{\partial x^0} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) \right\} = J^1 \tag{3.43}$$

$$\left\{ -\frac{\partial}{\partial x^0} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) - \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) \right\} = J^2 \tag{3.44}$$

$$\left\{ -\frac{\partial}{\partial x^0} \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) - \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) \right\} = J^3 \tag{3.45}$$

que en forma vectorial son equivalentes a las leyes de Coulomb y Ampère respectivamente

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho, \tag{3.46}$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}, \tag{3.47}$$

con este análisis en términos de formas diferenciables se ha demostrado que las ecuaciones de Maxwell son equivalentes a las ecuaciones de Yang-Mills para el grupo de estructura  $G = U(1)$ .

### 3.3. Caso $G \subset U(N)$

En esta sección se obtienen en forma detallada las ecuaciones de Yang-Mills para el caso donde  $G$  es un grupo de Lie, grupo de matrices y subgrupo de  $U(N)$ , con la finalidad de realizar una comparación entre estas y las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell.

Al igual que en la sección anterior se selecciona  $M^4 = \mathbb{R}^4$  con coordenadas  $(t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  y la métrica de Minkowski con signatura  $(-1, 1, 1, 1)$ . Así la 1-forma de conexión tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} A &= A_\mu dx^\mu = A_0 dx^0 + A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3 = -A^0 dx^0 + A^1 dx^1 + A^2 dx^2 + A^3 dx^3 \\ &= A^\mu dx_\mu = A^0 dx_0 + A^1 dx_1 + A^2 dx_2 + A^3 dx_3 = -A^0 dx^0 + A^1 dx^1 + A^2 dx^2 + A^3 dx^3, \end{aligned} \quad (3.48)$$

mientras que, la 2-forma de curvatura se escribe de la siguiente manera

$$F = dA + A \wedge A, \quad (3.49)$$

note que el término  $A \wedge A$  captura la naturaleza no-abeliana del grupo y  $F$  explícitamente se escribe como sigue

$$\begin{aligned} F &= dA + A \wedge A \\ &= \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) dx^1 \wedge dx^0 + \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) dx^2 \wedge dx^0 + \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) dx^3 \wedge dx^0 \\ &\quad + \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 + \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \\ &\quad + [A^0, A^1] dx^1 \wedge dx^0 + [A^0, A^2] dx^2 \wedge dx^0 + [A^0, A^3] dx^3 \wedge dx^0 \\ &\quad + [A^1, A^2] dx^1 \wedge dx^2 + [A^2, A^3] dx^2 \wedge dx^3 + [A^3, A^1] dx^3 \wedge dx^1, \end{aligned} \quad (3.50)$$

reagrupando términos como coeficientes de los generadores de  $\Omega^2(M^4)$  se encuentra la siguiente expresión para la 2-forma de curvatura, la cual también es conocida como intensidad de campo de Yang-Mills

---

$$\begin{aligned}
F = & \left\{ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^1] \right\} dx^1 \wedge dx^0 + \left\{ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^2] \right\} dx^2 \wedge dx^0 \\
& + \left\{ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^3] \right\} dx^3 \wedge dx^0 + \left\{ \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + [A^2, A^3] \right\} dx^2 \wedge dx^3 \\
& + \left\{ \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + [A^3, A^1] \right\} dx^3 \wedge dx^1 + \left\{ \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + [A^1, A^2] \right\} dx^1 \wedge dx^2.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Esta última expresión se puede escribir de forma más compacta como

$$F = E \wedge dx^0 + B, \tag{3.52}$$

donde es posible identificar las componentes de los campos eléctrico y magnético con las siguientes expresiones

$$E_i = \left\{ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^i] \right\} dx^i, \tag{3.53}$$

$$B_k = \epsilon_{ijk} \left\{ \left( \frac{\partial A^j}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \right) + [A^i, A^j] \right\} dx^i \wedge dx^j, \tag{3.54}$$

es interesante notar que a diferencia del caso abeliano, en estas definiciones aparecen conmutadores entre componentes del potencial electromagnético debidos al caracter no abeliano del grupo de estructura.

El siguiente paso para obtener el primer par de ecuaciones es calcular la identidad de Bianchi (2.9), que en el lenguaje de formas diferenciables se escribe como

$$dF = 0. \tag{3.55}$$

Para propósitos prácticos se reescribe la derivada exterior de (3.51) de la siguiente forma

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x^0} \wedge dx^0 + \frac{\partial F}{\partial x^1} \wedge dx^1 + \frac{\partial F}{\partial x^2} \wedge dx^2 + \frac{\partial F}{\partial x^3} \wedge dx^3. \tag{3.56}$$

Para expresar de manera explícita la ecuación (3.56) es necesario realizar las siguientes derivadas parciales por componentes

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x^0} \left\{ \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^1] \right] dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^0 \right. \\
& + \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^2] \right] dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^0 \\
& + \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^3] \right] dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^0 \\
& + \left[ \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + [A^2, A^3] \right] dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
& + \left[ \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + [A^3, A^1] \right] dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \\
& \left. + \left[ \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + [A^1, A^2] \right] dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \right\}, \tag{3.57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x^1} \left\{ \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^1] \right] dx^1 \wedge dx^1 \wedge dx^0 \right. \\
& + \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^2] \right] dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^0 \\
& + \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^3] \right] dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^0 \\
& + \left[ \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + [A^2, A^3] \right] dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
& + \left[ \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + [A^3, A^1] \right] dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \\
& \left. + \left[ \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + [A^1, A^2] \right] dx^1 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \right\}, \tag{3.58}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^1] \right] dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^0 \right. \\
& + \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^2] \right] dx^2 \wedge dx^2 \wedge dx^0 \\
& + \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^3] \right] dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^0 \\
& + \left[ \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + [A^2, A^3] \right] dx^2 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
& + \left[ \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + [A^3, A^1] \right] dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \\
& \left. + \left[ \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + [A^1, A^2] \right] dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \right\}, \tag{3.59}
\end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x^3} \left\{ \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^1] \right] dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^0 \right. \\
& + \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^2] \right] dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^0 \\
& + \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^3] \right] dx^3 \wedge dx^3 \wedge dx^0 \\
& + \left[ \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + [A^2, A^3] \right] dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
& + \left[ \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + [A^3, A^1] \right] dx^3 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \\
& \left. + \left[ \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + [A^1, A^2] \right] dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Así, sumando las expresiones (3.57), (3.58), (3.59) y (3.60) e igualando con cero para recuperar la identidad de Bianchi se encuentra la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
dF &= \mathcal{F}_0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&+ \mathcal{F}_1 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&+ \mathcal{F}_2 dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \\
&+ \mathcal{F}_3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 = 0,
\end{aligned} \tag{3.61}$$

donde los coeficientes  $\mathcal{F}_0$ ,  $\mathcal{F}_1$ ,  $\mathcal{F}_2$  y  $\mathcal{F}_3$  de la ecuación (3.61) tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_0 &= \frac{\partial}{\partial x^1} \left[ \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + [A^2, A^3] \right] + \frac{\partial}{\partial x^2} \left[ \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + [A^3, A^1] \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial x^3} \left[ \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + [A^1, A^2] \right],
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= \frac{\partial}{\partial x^0} \left[ \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + [A^2, A^3] \right] + \frac{\partial}{\partial x^2} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^3] \right] \\
&- \frac{\partial}{\partial x^3} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^2] \right],
\end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2 &= \frac{\partial}{\partial x^0} \left[ \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + [A^3, A^1] \right] - \frac{\partial}{\partial x^1} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^3] \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial x^3} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^1] \right],
\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_3 &= \frac{\partial}{\partial x^0} \left[ \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + [A^1, A^2] \right] + \frac{\partial}{\partial x^1} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^2] \right] \\
&- \frac{\partial}{\partial x^2} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^1] \right].
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Desarrollando las derivadas en (3.62), (3.63), (3.64) y (3.65) se encuentran las siguientes expresiones para los coeficientes  $\mathcal{F}_i$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 = & \frac{\partial}{\partial x^1} \left[ \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + [A^2, A^3] \right] + \left[ A^1, \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + [A^2, A^3] \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x^2} \left[ \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + [A^3, A^1] \right] + \left[ A^2, \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + [A^3, A^1] \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x^3} \left[ \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + [A^1, A^2] \right] + \left[ A^3, \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + [A^1, A^2] \right], \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 = & \frac{\partial}{\partial x^0} \left[ \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + [A^2, A^3] \right] + \frac{\partial}{\partial x^2} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^3] \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial x^3} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^2] \right] + \left[ A^2, \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^3] \right] \right] \\ & - \left[ A^3, \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^2] \right] \right] + \left[ A^0, \left[ \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + [A^2, A^3] \right] \right], \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 = & \frac{\partial}{\partial x^0} \left[ \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + [A^3, A^1] \right] - \frac{\partial}{\partial x^1} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^3] \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x^3} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^1] \right] + \left[ A^3, \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^1] \right] \right] \\ & - \left[ A^1, \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^3] \right] \right] + \left[ A^0, \left[ \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + [A^3, A^1] \right] \right], \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3 = & \frac{\partial}{\partial x^0} \left[ \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + [A^1, A^2] \right] + \frac{\partial}{\partial x^1} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^2] \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial x^2} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^1] \right] + \left[ A^1, \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^2] \right] \right] \\ & - \left[ A^2, \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^1] \right] \right] + \left[ A^0, \left[ \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + [A^1, A^2] \right] \right]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Finalmente la ecuación (3.61) es equivalente a

$$\mathcal{F}_0 = 0, \quad (3.70)$$

$$\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3 = 0, \quad (3.71)$$

por un lado (3.70) contiene derivadas espaciales de (3.54) y conmutadores de este con las componentes espaciales de (3.48), así, es posible escribir en forma más compacta como sigue

$$\partial^i B_i + [A^i, B_i] = 0. \quad (3.72)$$

Por otro lado (3.71) contiene derivadas temporales de (3.54) y combinaciones de derivadas espaciales de (3.53) y otros conmutadores, en forma más compacta se puede escribir de la siguiente manera

$$\partial_0 B^i + \epsilon^{ijk}(\partial_j E_k + [A_j, E_k]) + [A_0, B^i] = 0. \quad (3.73)$$

Las dos expresiones anteriores se pueden escribir en lenguaje vectorial como sigue [9]

$$\nabla \cdot \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{A}) = 0 \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} - (\vec{A} \times \vec{E} + \vec{E} \times \vec{A}) - (A_0 \vec{B} - \vec{B} A_0) = 0 \quad (3.75)$$

El otro par de ecuaciones se obtienen empleando el operador estrella de Hodge, es decir

$$* d * F = J, \quad (3.76)$$

donde al igual que en caso de las ecuaciones de Maxwell es preciso definir la 1-forma de densidad de corriente como sigue

$$J = -\rho dx^0 + J^1 dx^1 + J^2 dx^2 + J^3 dx^3. \quad (3.77)$$

De esta forma partiendo la 2-forma de curvatura o intensidad de campo de Yang-Mills dada por

$$\begin{aligned} F = & \left\{ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^1] \right\} dx^1 \wedge dx^0 + \left\{ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^2] \right\} dx^2 \wedge dx^0 \\ & + \left\{ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^3] \right\} dx^3 \wedge dx^0 + \left\{ \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + [A^2, A^3] \right\} dx^2 \wedge dx^3 \\ & + \left\{ \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + [A^3, A^1] \right\} dx^3 \wedge dx^1 + \left\{ \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + [A^1, A^2] \right\} dx^1 \wedge dx^2, \end{aligned} \quad (3.78)$$

Aplicando el operador estrella de Hodge, expresiones (3.20),(3.21),(3.22) a (3.78) entonces

---



$$\begin{aligned}
*F &= \left\{ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^1] \right\} dx^2 \wedge dx^3 + \left\{ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^2] \right\} dx^3 \wedge dx^1 \\
&+ \left\{ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^3] \right\} dx^1 \wedge dx^2 - \left\{ \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + [A^2, A^3] \right\} dx^1 \wedge dx^0 \\
&- \left\{ \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + [A^3, A^1] \right\} dx^2 \wedge dx^0 - \left\{ \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + [A^1, A^2] \right\} dx^3 \wedge dx^0.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

El siguiente paso es calcular la derivada exterior de (3.79), para esto, se reescribe esta derivada de la siguiente manera

$$d * F = \frac{\partial(*F)}{\partial x^0} \wedge dx^0 + \frac{\partial(*F)}{\partial x^1} \wedge dx^1 + \frac{\partial(*F)}{\partial x^2} \wedge dx^2 + \frac{\partial(*F)}{\partial x^3} \wedge dx^3. \tag{3.80}$$

De manera explícita la ecuación (3.80) es equivalente a realizar las siguientes derivadas vistas por componentes

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x^0} \left\{ \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^1] \right] dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \right. \\
&+ \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^2] \right] dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \\
&+ \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^3] \right] dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\
&- \left[ \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + [A^2, A^3] \right] dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^0 \\
&- \left[ \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + [A^3, A^1] \right] dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^0 \\
&\left. - \left[ \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + [A^1, A^2] \right] dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^0 \right\}
\end{aligned} \tag{3.81}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x^1} \left\{ \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^1] \right] dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \right. \\
&+ \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^2] \right] dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \\
&+ \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^3] \right] dx^1 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\
&- \left[ \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + [A^2, A^3] \right] dx^1 \wedge dx^1 \wedge dx^0 \\
&- \left[ \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + [A^3, A^1] \right] dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^0 \\
&\left. - \left[ \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + [A^1, A^2] \right] dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^0 \right\}
\end{aligned} \tag{3.82}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^1] \right] dx^2 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \right. \\
& + \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^2] \right] dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \\
& + \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^3] \right] dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\
& - \left[ \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + [A^2, A^3] \right] dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^0 \\
& - \left[ \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + [A^3, A^1] \right] dx^2 \wedge dx^2 \wedge dx^0 \\
& \left. - \left[ \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + [A^1, A^2] \right] dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^0 \right\}
\end{aligned} \tag{3.83}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x^3} \left\{ \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^1] \right] dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \right. \\
& + \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^2] \right] dx^3 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \\
& + \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^3] \right] dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\
& - \left[ \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + [A^2, A^3] \right] dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^0 \\
& - \left[ \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + [A^3, A^1] \right] dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^0 \\
& \left. - \left[ \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + [A^1, A^2] \right] dx^3 \wedge dx^3 \wedge dx^0 \right\}
\end{aligned} \tag{3.84}$$

y agrupando los términos semejantes de la suma de (3.81),(3.82),(3.83) y (3.84) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
d * F &= \mathcal{F}_0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&+ \mathcal{F}_1 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&+ \mathcal{F}_2 dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \\
&+ \mathcal{F}_3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2,
\end{aligned} \tag{3.85}$$

donde los coeficientes de la ecuación (3.85) tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_0 &= \frac{\partial}{\partial x^1} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^1] \right] + \frac{\partial}{\partial x^2} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^2] \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial x^3} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^3] \right],
\end{aligned} \tag{3.86}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \frac{\partial}{\partial x^0} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^1] \right] - \frac{\partial}{\partial x^2} \left[ \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + [A^1, A^2] \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x^3} \left[ \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + [A^3, A^1] \right], \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 &= \frac{\partial}{\partial x^0} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^2] \right] + \frac{\partial}{\partial x^1} \left[ \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + [A^1, A^2] \right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x^3} \left[ \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + [A^2, A^3] \right], \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3 &= \frac{\partial}{\partial x^0} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^3] \right] - \frac{\partial}{\partial x^1} \left[ \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + [A^3, A^1] \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x^2} \left[ \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + [A^2, A^3] \right]. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Desarrollando las derivadas en (3.24) a (3.86),(3.87),(3.88),(3.89) se encuentra lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &= -\frac{\partial}{\partial x^1} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^1] \right] - \left[ A^1, \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^1] \right] \right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x^2} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^2] \right] - \left[ A^2, \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^2] \right] \right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x^3} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^3] \right] - \left[ A^3, \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^3] \right] \right] \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= -\frac{\partial}{\partial x^0} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^1] \right] + \frac{\partial}{\partial x^2} \left[ \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + [A^1, A^2] \right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x^3} \left[ \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + [A^3, A^1] \right] + \left[ A^2, \left[ \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + [A^1, A^2] \right] \right] \\ &\quad - \left[ A^3, \left[ \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + [A^3, A^1] \right] \right] \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 &= -\frac{\partial}{\partial x^0} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^2] \right] + \frac{\partial}{\partial x^3} \left[ \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + [A^2, A^3] \right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x^1} \left[ \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + [A^1, A^2] \right] + \left[ A^3, \left[ \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + [A^2, A^3] \right] \right] \\ &\quad - \left[ A^1, \left[ \left( \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) + [A^1, A^2] \right] \right] \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_3 = & -\frac{\partial}{\partial x^0} \left[ \left( -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0} \right) + [A^0, A^3] \right] + \frac{\partial}{\partial x^1} \left[ \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + [A^3, A^1] \right] \\
& - \frac{\partial}{\partial x^2} \left[ \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + [A^2, A^3] \right] + \left[ A^1, \left[ \left( \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + [A^3, A^1] \right] \right] \\
& - \left[ A^2, \left[ \left( \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + [A^2, A^3] \right] \right]
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Ahora aplicando el operador estrella de Hodge, expresiones (3.23), (3.24) a (3.85) se obtiene que

$$*d*F = \mathcal{F}_0 dx^0 + \mathcal{F}_1 dx^1 + \mathcal{F}_2 dx^2 + \mathcal{F}_3 dx^3. \tag{3.94}$$

Igualando esta expresión con (3.77) se encuentra que

$$\mathcal{F}_0 = -\rho, \tag{3.95}$$

$$\mathcal{F}_1 = J^1, \tag{3.96}$$

$$\mathcal{F}_2 = J^2, \tag{3.97}$$

$$\mathcal{F}_3 = J^3, \tag{3.98}$$

de esta forma, usando (3.53) y (3.54), las ecuaciones anteriores pueden ser escritas de una forma más compacta como las expresiones

$$\partial^i E_i + [A^i, E_i] = \rho, \tag{3.99}$$

$$-\partial_0 E^i + \epsilon^{ijk} (\partial_j B_k + [A_j, B_k]) + [A_0, E_i] = J^i, \tag{3.100}$$

las cuales en notación vectorial [9] se reducen respectivamente a

$$\nabla \cdot \vec{E} - (\vec{A} \cdot \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{A}) = \rho, \tag{3.101}$$

$$-\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} - (\vec{A} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{A}) + (A_0 \vec{E} - \vec{E} A_0) = \vec{J}. \tag{3.102}$$

De esta forma a manera de resumen se presenta la siguiente tabla comparativa entre las ecuaciones de Maxwell y las de Yang-Mills

---

Ecuaciones de Maxwell	$G \subset U(N)$
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{A}) = 0$
$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0$	$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} - (\vec{A} \times \vec{E} + \vec{E} \times \vec{A}) - (A_0 \vec{B} - \vec{B} A_0) = 0$
$\nabla \cdot \vec{E} = \rho$	$\nabla \cdot \vec{E} - (\vec{A} \cdot \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{A}) = \rho$
$-\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} = \vec{J}$	$-\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} - (\vec{A} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{A}) + (A_0 \vec{E} - \vec{E} A_0) = \vec{J}$

Tabla 3.1: Comparación entre las ecuaciones de Yang-Mills y las de Maxwell

El sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas dado por (3.74), (3.75), (3.101) y (3.102) se conoce simplemente como las ecuaciones de Yang-Mills. En la tabla 3.1 se muestra la comparación directa entre las ecuaciones de Maxwell y las de Yang-Mills escritas en su forma vectorial para tener una mejor interpretación de los resultados. La diferencia entre las ecuaciones de Yang-Mills y las de Maxwell es debida a los conmutadores que exhiben el caracter no-abeliano del grupo de estructura. Esta notable diferencia se ve reflejada en la no-linealidad de las ecuaciones de Yang-Mills en contraste con las ecuaciones de Maxwell que son lineales.

Otra gran diferencia entre las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones de Yang-Mills es el papel que juega el potencial vectorial, por un lado las ecuaciones de Maxwell están en términos de los campos eléctrico y magnético por el otro las ecuaciones de Yang-Mills contienen explícitamente al potencial vectorial.

El hecho de que el potencial vectorial aparezca de forma explícita en las ecuaciones de Yang-Mills refleja también la profunda relación que existe entre la geometría del espacio y los posibles efectos a nivel físico, esta relación viene dada precisamente por el potencial vectorial que en el contexto matemático representa una conexión sobre un  $G$ -haz principal. La equivalencia entre las teorías de norma y el lenguaje geométrico está proyectada en el diccionario propuesto por Wu y Yang.

Por otro lado, en las ecuaciones de Yang-Mills se sugiere la existencia de monopolos magnéticos debido a que en la expresión (3.74) la divergencia del campo magnético es diferente de cero, más aún esta divergencia está en términos del potencial vectorial. En el proximo capítulo se discuten algunos casos particulares de soluciones a las ecuaciones de Yang-Mills encontradas hasta ahora, entre estas soluciones se discuten algunas relacionadas con el concepto de monopolo magnético.

## Capítulo 4

# Soluciones particulares a las ecuaciones de Yang-Mills

Desde su aparición, las teorías de norma han sido un importante área de estudio. Aspectos como su cuantización y renormalización (mecanismo utilizado para obtener términos finitos en un desarrollo perturbativo en una teoría cuántica de campo) son algunos de los principales temas de investigación en este campo. Para teorías físicamente relevantes resulta muy complicado llevar a cabo la renormalización. En 1971 't Hooft [22] estableció que las teorías de Yang-Mills son renormalizables cuando se rompe la simetría de norma local. Otros avances importantes fueron hechos por Glashow en 1961 [23] posteriormente por Weinberg en 1967 [24] y por Salam en 1968 [25], quienes introdujeron un modelo que hoy en día se conoce como modelo de Weinberg-Salam o modelo electrodébil. Este modelo está basado en una teoría de norma  $SU(2) \times U(1)$  y unifica a las interacciones electromagnética y débil, por esta contribución Glashow, Weinberg y Salam recibieron el Premio Nobel de Física en el año de 1979. Otra teoría de gran importancia es la correspondiente al grupo de estructura  $SU(3)$  que describe a la llamada cromodinámica cuántica, cuyo objeto de estudio es la interacción fuerte, la cual es responsable de mantener unidos a los nucleones (protones y neutrones). Los participantes en esta interacción son los quarks y los gluones, los cuales llevan una carga de color, que es precisamente la simetría de norma del grupo  $SU(3)$ . Los quarks experimentan de un fenómeno conocido como confinamiento de quarks, es decir, no se pueden observar quarks aislados. Al unificar los dos modelos mencionados anteriormente se obtiene el llamado modelo estándar de partículas elementales, cuyo grupo de estructura es  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  y que sigue siendo objeto de gran estudio en estos días en el campo de la física de altas energías tanto experimental como teórica [14], [26].

Anteriormente se mencionó que dar solución general a las ecuaciones de Yang-Mills es un problema de gran complejidad [4], sin embargo existen soluciones particulares

que se han encontrado desde los primeros años posteriores a la introducción de las teorías de norma no-abelianas. Estas soluciones corresponden a la teoría de norma con grupo de estructura  $SU(2)$ , que es un grupo no-abeliano y es el caso no trivial más sencillo de tratar.

La primera solución a las ecuaciones de movimiento de la teoría de norma pura de  $SU(2)$  fue encontrada por Ikeda y Miyachi en 1962 [27], esta solución es la solución electromagnética de Coulomb extendida a una teoría más grande, por lo tanto no es una solución real de las ecuaciones de Yang-Mills. Posteriormente, en 1965 Loos demostró que las soluciones extendidas funcionan para cualquier grupo de estructura [28].

Años más tarde en 1968 Wu y Yang [29] encontraron la primera solución formal a las ecuaciones de Yang-Mills, en esta solución el cuadri-potencial vectorial se comporta como  $1/r$  en todas partes. Una propiedad muy interesante de esta solución es que describe un monopolo magnético puntual, que a diferencia del monopolo de Dirac [30] es libre de cuerdas. Más tarde de forma independiente 't Hooft [31] y Polyakov [32] en 1974 descubrieron otra solución del tipo monopolo magnético, esta solución es no singular, tiene energía finita y representa un objeto con carga magnética y estabilidad topológica, por lo que resulta de gran interés. La teoría detrás de las soluciones monopulares puede consultarse en forma detallada en [5], [33], [34].

Por otro lado, también se han estudiado soluciones a las ecuaciones de Yang-Mills en el espacio euclidiano ( $E^4$ ), de estos estudios han surgido resultados que tienen mayor interés físico que los monopolos en  $SU(2)$  en el espacio de Minkowski. Una de estas soluciones fue encontrada por Belavin, Polyakov, Schwartz y Tyupkin en 1975 [35] y es conocida como *instantón* o pseudopartícula. Las propiedades principales de los instantones son las siguientes:

- Es no singular y localizado simétricamente en todas las direcciones de  $E^4$  incluyendo el eje temporal imaginario.
- Es auto-dual (no lleva energía).
- Tiene carga topológica  $q = 1$ .

Posteriormente otras soluciones exactas que representan a un número arbitrario de instantones fueron encontradas por Witten [36] y 'tHooft en 1977 con carga topológica igual al número de instantones.

Otro tipo de solución exacta en el espacio euclidiano fue obtenida por de Alfaro, Fubini y Furlan en 1976, la solución consiste en objetos conocidos como *merones*. Un merón es una concentración puntual de carga topológica  $1/2$  [37].

---

Así, las soluciones más importantes que se han encontrado a las ecuaciones de Yang-Mills son los monopolos, los instantones y los merones.

En este capítulo se presenta una revisión de la teoría de Yang-Mills en  $SU(2)$  y algunas de las soluciones que se han encontrado desde su descubrimiento. Una revisión detallada con más soluciones puede consultarse en [5].

## 4.1. Teoría de Yang-Mills en $SU(2)$

Los campos de Yang-Mills se pueden introducir de la siguiente manera. Considere un multiplete  $\psi(x)$  (en teoría de representaciones y en particular en teoría de grupos un multiplete es la forma de describir grupos en términos de transformaciones lineales sobre espacios vectoriales, en este caso un multiplete de  $SU(2)$  se representa como un vector columna con dos entradas), el cual se transforma localmente bajo la acción de algún grupo de norma  $G$  de acuerdo a la siguiente regla

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \omega(x)\psi(x), \quad (4.1)$$

donde  $\omega(x)$  denota a un elemento de alguna representación de  $G$ .

El siguiente paso es definir la derivada covariante  $D_\mu$  de  $\psi$ , la cual debe tener la misma propiedad de transformación que  $\psi$ . Para ello se propone el siguiente *ansatz*

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu - ieA_\mu(x))\psi(x), \quad (4.2)$$

donde  $A_\mu(x)$  es una función matricial. Por hipótesis,  $D_\mu$  se transforma como

$$D_\mu\psi \rightarrow D'_\mu\psi' = \omega D_\mu\psi, \quad (4.3)$$

donde

$$D'_\mu = \partial_\mu - ieA'_\mu(x). \quad (4.4)$$

Combinando las ecuaciones (4.2) y (4.4) se obtiene lo siguiente

$$A'_\mu = \omega A_\mu \omega^{-1} - (i/e)(\partial_\mu \omega) \omega^{-1}. \quad (4.5)$$

De esta forma  $A_\mu(x)$  es el potencial de Yang-Mills en su forma matricial, y la ecuación (4.5) es la regla de transformación local para este potencial bajo el grupo de norma  $G$ .

Es importante notar que la existencia de  $A_\mu$  es el punto clave para poder definir la derivada covariante  $D_\mu\psi$  con la regla de transformación (4.3). La existencia de esta derivada covariante es de gran importancia ya que permite construir los términos cinemáticos en el lagrangiano, que son invariantes bajo el grupo de estructura  $G$ .



Al igual que en los capítulos anteriores  $A_\mu$  es el análogo al cuadri-potencial en la teoría electromagnética, de esta manera es posible definir la intensidad de campo de Yang-Mills como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + (e/i)[A_\mu, A_\nu]. \quad (4.6)$$

el cual se transforma bajo el grupo de norma  $G$  de acuerdo a la siguiente regla

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = \omega F_{\mu\nu} \omega^{-1}, \quad (4.7)$$

naturalmente como ya se estudió en el capítulo anterior (4.6) es una generalización del tensor de intensidad de campo electromagnético. Es importante observar que en el caso electromagnético,  $F_{\mu\nu}$  es invariante bajo transformaciones de norma como se discutió en la sección 2.1, sin embargo, (4.6) no lo es. Esta es una diferencia notable entre las teorías de norma abelianas y no-abelianas.

En el caso particular del grupo de norma  $G = SU(2)$  se tienen los siguientes resultados en la representación  $2 \times 2$

$$A_\mu = \frac{1}{2} \sigma_\nu A_\mu^\nu, \quad F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sigma_\gamma F_{\mu\nu}^\gamma, \quad (4.8)$$

donde  $\sigma_\mu$  son las matrices de Pauli y

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + e \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma, \quad (4.9)$$

donde  $e$  es una constante de acoplamiento.

Las transformaciones locales de norma de  $SU(2)$  se denotan como  $\omega(x)$  y se pueden escribir como

$$\omega = f_0 + i\sigma_b f_b, \quad \omega^{-1} = f_0 - i\sigma_b f_b, \quad f_0 f_0 + f_b f_b \equiv 1 \quad (4.10)$$

para transformaciones reales, se tiene que  $\omega$ ,  $\omega_{-1}$ ,  $f_0$  y  $f_b$  son funciones reales, mientras que para transformaciones complejas estas funciones también lo serán.

Un lagrangiano que es invariante bajo cualquier transformación sea real o compleja, se construye de la siguiente manera

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}. \quad (4.11)$$

Este lagrangiano proporciona las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\partial^\nu F_{\mu\nu}^a = e \epsilon_{abc} F_{\mu\nu}^b A_c^\nu \quad (4.12)$$

Existen otras dos diferencias muy importantes entre una teoría de norma abeliana y una no-abeliana. La primera consiste en la linealidad en el potencial de las ecuaciones, así las ecuaciones de movimiento son lineales en la teoría de norma abeliana, mientras que en la teoría de norma no-abeliana (las ecuaciones) no lo son.

La otra gran diferencia es que en la teoría no-abeliana el potencial aparece explícitamente en las ecuaciones de movimiento, este hecho no sucede en la teoría de norma abeliana. Lo anterior se puede verificar fácilmente observando las ecuaciones de Maxwell (teoría abeliana) que están en términos de los campos eléctricos y magnéticos, aunque implícitamente contengan información acerca del potencial, este no aparece de manera explícita en las ecuaciones de Maxwell.

En las teorías de norma abelianas, la intensidad de campo puede determinar localmente el potencial de norma hasta una transformación de norma arbitraria, esto no ocurre para la teoría de norma no-abeliana. Wu y Yang encontraron que dos potenciales de Yang-Mills pueden proporcionar la misma intensidad de campo de Yang-Mills [8].

Esto origina un problema de gran interés, el determinar todos los potenciales de norma posibles que proporcionen una cierta intensidad de campo.

Las transformaciones de norma locales en  $SU(2)$  se escriben usualmente como matrices  $2 \times 2$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\omega(x) &= \exp\left\{\frac{1}{2}i\sigma_a\theta_a(x)\right\} \\ &= \cos\left\{\frac{1}{2}\theta(x)\right\} + i\hat{n}_a(x)\sigma_a \sin\left\{\frac{1}{2}\theta(x)\right\},\end{aligned}\tag{4.13}$$

donde  $\hat{n}_a(x)$  es un vector unitario definido de la siguiente manera

$$\theta_a(x) \equiv \hat{n}_a(x)\theta(x),\tag{4.14}$$

para cierto ángulo  $\theta$ .

Resulta entonces de gran importancia tener expresiones de las transformaciones de norma para las componentes del potencial de norma. El término de norma pura es el siguiente

$$\begin{aligned}eA_\mu^a(\text{norma-pura}) &\equiv -iTr\sigma_a(\partial_\mu\omega)\omega^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\hat{n}_a\partial_\mu\theta + \frac{1}{2}\sin\theta(\partial_\mu\hat{n}_a) + \sin^2(\theta/2)\epsilon_{abc}(\partial_\mu\hat{n}_b)\hat{n}_c.\end{aligned}\tag{4.15}$$

Cuando  $\hat{n}$  es constante, el término de norma pura es simplemente

$$eA_\mu^a(\text{norma-pura}) = \hat{n}_a\frac{1}{2}\partial_\mu\theta.\tag{4.16}$$

Para calcular el término  $\omega A_\mu \omega^{-1}$  es preciso utilizar la siguiente expresión

$$\omega \sigma_a \omega^{-1} = \sigma_a \cos \theta + \sin \theta \epsilon_{abc} \hat{n}_b \sigma_c + 2 \hat{n}_a (\hat{n} \cdot \sigma) \sin^2(\theta/2), \quad (4.17)$$

de donde se tiene que

$$\omega \sigma_a A_\mu^a \omega^{-1} = \cos \theta \sigma_a A_\mu^a + \sin \theta \epsilon_{abc} A_\mu^a \hat{n}_b \sigma_c + 2 \sin^2(\theta/2) \hat{n}_a A_\mu^a (\hat{n} \cdot \sigma) \quad (4.18)$$

Finalmente se encuentra el siguiente resultado

$$\begin{aligned} A_\mu^{\prime a} &= \cos \theta A_\mu^a + \sin \theta \epsilon_{abc} A_\mu^b \hat{n}_c + 2 \sin^2(\theta/2) (\hat{n}_b A_\mu^b) \\ &+ \frac{1}{e} \left\{ \frac{1}{2} \hat{n}_a \partial_\mu \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \partial_\mu \hat{n}_a + \sin^2(\theta/2) \epsilon_{abc} (\partial_\mu \hat{n}_b) \hat{n}_c \right\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

En cualquier punto  $x$  del espacio-tiempo, la componente  $A_\mu^a$  paralela a  $\hat{n}_a(x)$  se transforma como un potencial abeliano

$$\hat{n}_a A_\mu^{\prime a} = \hat{n}_a A_\mu^a + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta. \quad (4.20)$$

Además si se proyectan las componentes paralelas a  $\hat{n}_a(x)$  se obtiene que

$$\hat{e}_1^a A_\mu^a \equiv \{ \epsilon_{abc} \hat{e}_2^b \hat{n}_c \} A_\mu^a \quad (4.21)$$

$$\hat{e}_2^a A_\mu^a \equiv \{ \epsilon_{abc} \hat{n}^b \hat{e}_1^c \} A_\mu^a, \quad (4.22)$$

los cuales cumplen la siguiente regla de transformación

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{e}_1^a A_\mu^{\prime a} \\ \hat{e}_2^a A_\mu^{\prime a} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_1^a A_\mu^a \\ \hat{e}_2^a A_\mu^a \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{e} \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_1^a \partial_\mu \hat{n}_a \\ \hat{e}_2^a \partial_\mu \hat{n}_a \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde  $\hat{e}_1^a, \hat{e}_2^a$  y  $\hat{n}_a = \epsilon_{abc} \hat{e}_1^b \hat{e}_2^c$  son una base ortonormal de vectores sobre el espacio-tiempo.

## 4.2. Soluciones con invarianza de norma $SU(2)$

En esta sección se analizan algunas soluciones en el espacio de Minkowski bajo la invarianza de norma del grupo  $SU(2)$ , cuyas ecuaciones de movimiento son de la siguiente forma

---

$$\partial^\nu F_{\mu\nu}^a = e\epsilon_{abc}F_{\mu\nu}^b A_c^\nu. \quad (4.24)$$

Algunas de las soluciones más conocidas son: ondas planas no-abelianas, soluciones abelianas extendidas, monopolos magnéticos (una clase de soluciones complejas obtenidas a través de un cierto *ansatz*), una solución real que representa una pareja merón-antimerón en el espacio de Minkowski y una generalización elíptica de la solución merón-antimerón [5]. Estas soluciones son de gran interés tanto matemático como histórico, sin embargo algunas de ellas no han encontrado aplicaciones físicas hasta el momento. Una excepción de esto es la solución del monopolo de Wu-Yang [29], la cual, es el prototipo de una solución no-abeliana de monopolo magnético libre de cuerda de Dirac [30]. Además se discuten las propiedades de algunas de las soluciones antes mencionadas y sus posibles aplicaciones físicas.

### 4.2.1. Onda Plana No-Abeliana

Una solución de onda plana no-abeliana a la ecuación (4.24) fue dada por Coleman en 1977 [38]. El procedimiento consiste en considerar a la onda moviéndose en la dirección positiva del eje  $x$  con velocidad  $v = c$ , el potencial entonces tiene las siguientes componentes

$$\begin{aligned} A_1^a &= A_2^a = 0, \\ A_0^a &= -A_3^a = x_1 G_a(x_0 - x_3) + x_2 H_a(x_0 - x_3), \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde  $G_a$  y  $H_a$  son funciones arbitrarias. Sustituyendo (4.25) en (4.9) se puede verificar que las intensidades de campo de  $SU(2)$  son [38]

$$\begin{aligned} F_{01}^a &= F_{13}^a = -G_a, \\ F_{02}^a &= F_{23}^a = -H_a, \\ F_{03}^a &= F_{12}^a = 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Estas componentes de  $F_{\mu\nu}^a$  satisfacen la ecuación (4.24) por lo que (4.26) es una solución para cualesquiera  $G_a$  y  $H_a$ . Es importante mencionar que la solución de onda plana (4.26) tiene naturaleza no-abeliana, es decir, ondas que se mueven en direcciones diferentes no pueden ser superpuestas en contraste con una onda plana abeliana descrita por  $A_\mu^a = \lambda_a e^{(ik \cdot x)}$  con  $\lambda_a$  una constante, donde las ondas pueden ser superpuestas para valores fijos de  $\lambda_a$ .

### 4.2.2. Solución de Ikeda-Miyachi

La primera solución explícita de (4.24) fue encontrada en 1962 por Ikeda y Miyachi [27]. Esta solución puede ser escrita de la forma siguiente

$$A_0^a = \delta_{a3} \left( \frac{A}{r} + B \right), \quad A_i^a = 0, \quad (4.27)$$

donde  $\delta_{a3}$  denota a la delta de Kronecker y A, B constantes arbitrarias. Otras formas equivalentes de esta solución se pueden encontrar en el artículo original [27]. El potencial (4.27) con  $B = 0$  es un potencial estático puntual como el de Coulomb. Las intensidades de campo se obtienen sustituyendo (4.27) en (4.9) y se pueden escribir de la siguiente manera

$$F_{0j}^a = -\delta_{a3} \nabla^2 \left( \frac{A}{r} + B \right); \quad F_{ij}^a = 0. \quad (4.28)$$

Las ecuaciones de movimiento se satisfacen excepto en el siguiente caso

$$\partial^j F_{0j}^a = \delta_{a3} \nabla^2 \left( \frac{A}{r} + B \right) = 0, \quad (4.29)$$

que se cumple en todas partes excepto en  $r = 0$ . Este tipo de solución es conocida como puntual y no resulta de gran interés, sin embargo es importante en el contexto histórico pues es la primera solución a las ecuaciones de Yang-Mills.

En la sección siguiente se discuten algunas soluciones con monopolos magnéticos que al igual que la solución de Ikeda y Miyachi son del tipo puntual pero en estos casos es posible remover la singularidad utilizando una transformación de norma.

### 4.2.3. Soluciones con Monopolos Magnéticos

#### La cuerda de Dirac

En 1931 Dirac [30] introdujo monopolos magnéticos en la teoría electromagnética extendiendo la teoría del cuadri-vector de potencial  $A_\mu$ . Dirac tuvo que incluir el concepto de *cuerda* que no es otra cosa más que una línea continua a lo largo de la cual el potencial vectorial tiene una singularidad. Todo cuadri-vector de potencial que produzca un campo magnético asociado a un monopolo tiene necesariamente esta línea de singularidad. De acuerdo a la definición de campo magnético a través del cuadri-potencial vectorial y haciendo una analogía con la ley de Coulomb para cargas eléctricas, una carga magnética de magnitud  $g$  debe cumplir la siguiente relación

$$\vec{B} = g \frac{\vec{r}}{r^3} = \nabla \times \vec{A}, \quad (4.30)$$



Figura 4.1: P. A. M. Dirac

Calculando la divergencia del campo magnético (4.30) se obtiene lo siguiente

$$\nabla \cdot \vec{B} = 4\pi g \delta^{(3)}(\vec{r}), \quad (4.31)$$

lo cual es una contradicción a la primera ecuación de Maxwell (2.1). Una forma de resolver este problema es aprovechando la simetría esférica del campo magnético, se supone que el potencial vectorial tiene la siguiente forma

$$\vec{A}(\vec{r}) = A(\theta) \nabla \varphi, \quad (4.32)$$

donde  $\varphi$  es el ángulo azimutal en coordenadas esféricas y  $A(\theta)$  es una función que solo depende del ángulo polar. Si se elige  $A(\theta) = -g(1 + \cos\theta)$  se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \nabla \varphi &= \left( -\frac{\text{sen}\varphi}{r \text{sen}\theta}, \frac{\text{cos}\varphi}{r \text{sen}\theta}, 0 \right), \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \left( g \frac{1 + \text{cos}\theta}{r \text{sen}\theta} \text{sen}\varphi, -g \frac{1 + \text{cos}\theta}{r \text{sen}\theta} \text{cos}\varphi, 0 \right). \end{aligned} \quad (4.33)$$

La expresión (4.33) puede ser escrita en forma covariante de la siguiente manera

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{g}{r} \left( \frac{\vec{r} \times \hat{n}}{r - (\vec{r} \cdot \hat{n})} \right), \quad (4.34)$$

conocido como el *potencial de Dirac* y donde el vector unitario  $\hat{n}$  está dirigido a lo largo del eje  $z$ . En primera instancia (4.34) es el potencial correcto asociado a un monopolo magnético, sin embargo es importante notar que este potencial es singular en dos regiones, una es  $\theta = 0$  y la otra es  $\theta = \pi$ . Esto significa que el cálculo del campo magnético asociado a este potencial no es el correcto en las regiones mencionadas. Estrictamente el potencial (4.34) debe escribirse de la siguiente forma

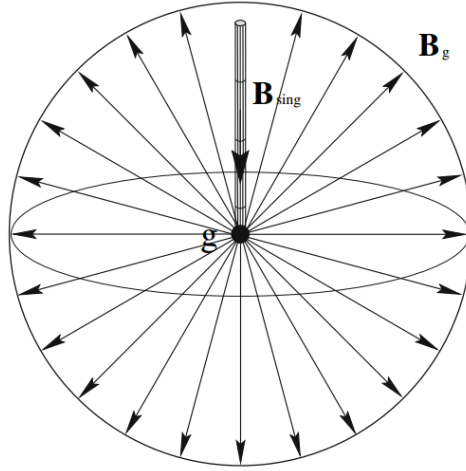


Figura 4.2: Campo Magnético del potencial de Dirac.

$$\vec{A}(\vec{r}) = -g(1 + \cos\theta)\nabla\varphi = (1 + \cos\theta)\frac{i}{e}U^{-1}\nabla U, \quad (4.35)$$

donde  $U = e^{-ieg\varphi}$ , esto es, el potencial de Dirac puede verse como una transformación de norma pura dentro del grupo de norma  $U(1)$ . De esta manera, calculando la integral sobre un elemento infinitesimal de superficie, el flujo de campo magnético correcto es el siguiente

$$\vec{B}(\vec{r}) = g\frac{\vec{r}}{r^3} - 4\pi g\hat{n}\theta(z)\delta(x)\delta(y) = \vec{B}_g + \vec{B}_{sing}. \quad (4.36)$$

Finalmente es posible expresar el potencial de Dirac como sigue

$$\vec{A} = g \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (4.37)$$

### Solución de Wu-Yang

Otra solución a las ecuaciones de Yang-Mills fue obtenida por Wu y Yang en 1968 [29], de hecho esta es la primera solución formal conocida y está basada en una extensión del monopolo de Dirac a una teoría no-abeliana. Se supone que el potencial de Dirac es extendido a una teoría con grupo de norma  $SU(2)$  de la siguiente manera  $A_\mu = A_\mu^{Dirac}\sigma_3/2$ , de esta forma las componentes del nuevo potencial no-abeliano son las siguientes

$$\begin{aligned} A_\mu^1 &= 0, & A_\mu^2 &= 0, \\ A_r^3 &= 0, & A_\theta^3 &= 0, & A_\varphi^3 &= -\frac{g}{r} \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

y de manera similar como en el caso de Dirac se toma  $A_\mu^3 = -g(1 + \cos\theta)\partial_\mu\varphi$ , donde el cuadri-vector  $\partial_\mu\varphi$  tiene la siguiente expresión

$$\partial_\mu\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}(0, -\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad (4.39)$$

el cual posee una singularidad a lo largo de todo el eje  $z$ . En analogía con el potencial de Dirac, este problema se puede resolver haciendo uso de una transformación de norma adecuada.

Se propone que el potencial vectorial se transforma de acuerdo a la siguiente expresión

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e}U\partial_k U^{-1}, \quad (4.40)$$

donde  $U$  es la matriz de transformaciones de norma dentro del grupo  $SU(2)$  la cual tiene la forma siguiente

$$U = e^{i\sigma_3\frac{\varphi}{2}}e^{i\sigma_2\frac{\theta}{2}}e^{-i\sigma_3\frac{\varphi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -e^{-i\phi}\sin(\theta/2) \\ e^{-i\phi}\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

Los parámetros  $\theta$  y  $\varphi$  del grupo se pueden identificar con los ángulos polar y azimutal en coordenadas esféricas.

Sustituyendo (4.41) en (4.40) se obtiene lo siguiente

$$A'_n = A_n^a \frac{\sigma^a}{2} = \epsilon_{amn} \frac{r_m}{r^2} \frac{\sigma^a}{2}. \quad (4.42)$$

El potencial (4.42) posee ahora solamente una singularidad y es en el origen.

Para propósitos de simplicidad en los cálculos resulta conveniente utilizar otra parametrización equivalente del *ansatz* dado por Wu y Yang [39], la cual está en términos de coordenadas cartesianas sobre el espacio de Minkowski. El *ansatz* es el siguiente

$$A_i = -\frac{1}{e}\epsilon_{ijk}\frac{x^j}{r^2}\sigma_k, \quad (4.43)$$

donde  $\hat{r} = \vec{r}/r$ ,  $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$  y  $\sigma_k$  son los generadores de  $\mathfrak{su}(2)$ , que cumplen las siguientes relaciones de conmutación  $[\sigma_i, \sigma_j] = \epsilon_{ijk}\sigma_k$ . De forma individual las componentes del *ansatz* tienen las siguientes expresiones

$$A_0 = 0 \quad (4.44)$$

$$A_1 = -\frac{1}{e}\frac{x^2}{r^2}\sigma_3 + \frac{1}{e}\frac{x^3}{r^2}\sigma_2 \quad (4.45)$$

$$A_2 = -\frac{1}{e}\frac{x^3}{r^2}\sigma_1 + \frac{1}{e}\frac{x^1}{r^2}\sigma_3 \quad (4.46)$$



$$A_3 = -\frac{1}{e} \frac{x^1}{r^2} \sigma_2 + \frac{1}{e} \frac{x^2}{r^2} \sigma_1 \quad (4.47)$$

El siguiente paso es calcular las componentes de la intensidad de campo de Yang-Mills, para ello se emplea (4.9) modificada con el factor de acoplamiento  $ie$  y que tiene la siguiente expresión

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie[A_\mu, A_\nu] \quad (4.48)$$

Dada la propiedad de antisimetría de la intensidad de campo de Yang-Mills (4.48)  $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$  se tienen los siguientes resultados inmediatos

$$F_{0i} = F_{i0} = F_{ii} = 0, \quad (4.49)$$

de esta manera los términos independientes distintos de cero son  $F_{12}$ ,  $F_{13}$  y  $F_{23}$ . Asignando los valores de  $\mu$  y  $\nu$  correspondientes a (4.48) se obtiene lo siguiente

$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 + ie[A_1, A_2], \quad (4.50)$$

$$F_{13} = \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1 + ie[A_1, A_3], \quad (4.51)$$

$$F_{23} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 + ie[A_2, A_3] \quad (4.52)$$

Sustituyendo las expresiones (4.45), (4.46), (4.47) en (4.50), (4.51), (4.52), se encuentra lo siguiente

$$F_{12} = \partial_1 \left( -\frac{1}{e} \frac{x^2}{r^2} \sigma_3 + \frac{1}{e} \frac{x^3}{r^2} \sigma_2 \right) - \partial_2 \left( -\frac{1}{e} \frac{x^3}{r^2} \sigma_1 + \frac{1}{e} \frac{x^1}{r^2} \sigma_3 \right) + ie[A_1, A_2], \quad (4.53)$$

$$F_{13} = \partial_1 \left( -\frac{1}{e} \frac{x^1}{r^2} \sigma_2 + \frac{1}{e} \frac{x^2}{r^2} \sigma_1 \right) - \partial_3 \left( -\frac{1}{e} \frac{x^3}{r^2} \sigma_1 + \frac{1}{e} \frac{x^1}{r^2} \sigma_3 \right) + ie[A_1, A_3], \quad (4.54)$$

$$F_{23} = \partial_2 \left( -\frac{1}{e} \frac{x^1}{r^2} \sigma_2 + \frac{1}{e} \frac{x^2}{r^2} \sigma_1 \right) - \partial_3 \left( -\frac{1}{e} \frac{x^3}{r^2} \sigma_1 + \frac{1}{e} \frac{x^1}{r^2} \sigma_3 \right) + ie[A_2, A_3]. \quad (4.55)$$

Desarrollando las derivadas y los conmutadores en (4.53), (4.54), (4.55) se obtienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
 F_{12} = & \frac{2}{e} \frac{x^1 x^3}{r^4} \sigma_1 + \frac{1}{e} \frac{1}{r^2} \sigma_3 - \frac{2}{e} \frac{(x^1)^2}{r^4} \sigma_3 + \frac{1}{e} \frac{1}{r^2} \sigma_3 - \frac{2}{e} \frac{(x^2)^2}{r^4} \sigma_3 + \frac{2}{e} \frac{x^2 x^3}{r^4} \sigma_2 \\
 & + ie \left\{ \frac{1}{e^2} \frac{x^2 x^3}{r^4} [\sigma_3, \sigma_1] - \frac{1}{e^2} \frac{x^1 x^2}{r^4} [\sigma_3, \sigma_3] - \frac{1}{e^2} \frac{x^2 x^3}{r^4} [\sigma_2, \sigma_1] + \frac{1}{e^2} \frac{x^1 x^3}{r^4} [\sigma_2, \sigma_3] \right\},
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

$$\begin{aligned}
 F_{13} = & -\frac{1}{e} \frac{1}{r^2} \sigma_2 + \frac{2}{e} \frac{(x^1)^2}{r^4} \sigma_2 - \frac{2}{e} \frac{x^1 x^2}{r^4} \sigma_1 - \frac{2}{e} \frac{x^2 x^3}{r^4} \sigma_3 - \frac{1}{e} \frac{1}{r^2} \sigma_2 + \frac{2}{e} \frac{(x^3)^2}{r^4} \sigma_2 \\
 & + ie \left\{ \frac{1}{e^2} \frac{x^1 x^2}{r^4} [\sigma_3, \sigma_2] - \frac{1}{e^2} \frac{(x^2)^2}{r^4} [\sigma_3, \sigma_1] - \frac{1}{e^2} \frac{x^1 x^2}{r^4} [\sigma_2, \sigma_2] + \frac{1}{e^2} \frac{x^2 x^3}{r^4} [\sigma_2, \sigma_1] \right\},
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}
 F_{23} = & \frac{2}{e} \frac{x^1 x^2}{r^4} \sigma_2 + \frac{1}{e} \frac{1}{r^2} \sigma_1 - \frac{2}{e} \frac{(x^2)^2}{r^4} \sigma_1 + \frac{1}{e} \frac{1}{r^2} \sigma_1 - \frac{2}{e} \frac{(x^3)^2}{r^4} \sigma_1 + \frac{2}{e} \frac{x^1 x^3}{r^4} \sigma_3 \\
 & + ie \left\{ \frac{1}{e^2} \frac{x^1 x^3}{r^4} [\sigma_1, \sigma_2] - \frac{1}{e^2} \frac{x^2 x^3}{r^4} [\sigma_1, \sigma_1] - \frac{1}{e^2} \frac{(x^1)^2}{r^4} [\sigma_3, \sigma_2] + \frac{1}{e^2} \frac{x^1 x^2}{r^4} [\sigma_3, \sigma_1] \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

Finalmente desarrollando los conmutadores y reagrupando términos semejantes en (4.56), (4.57), (4.58) las intensidades de campo de Wu y Yang se escriben de la siguiente manera

$$F_{12} = \frac{1}{e} \frac{x^1 x^3}{r^4} \sigma_1 + \frac{1}{e} \frac{x^2 x^3}{r^4} \sigma_2 + \frac{2}{e} \frac{1}{r^2} \sigma_3 - \frac{1}{e} \frac{1}{r^4} \left[ 2(x^1)^2 + 2(x^2)^2 + (x^3)^2 \right] \sigma_3, \tag{4.59}$$

$$F_{13} = -\frac{1}{e} \frac{x^1 x^2}{r^4} \sigma_1 - \frac{1}{e} \frac{x^2 x^3}{r^4} \sigma_2 - \frac{2}{e} \frac{1}{r^2} \sigma_2 + \frac{1}{e} \frac{1}{r^4} \left[ 2(x^1)^2 + (x^2)^2 + 2(x^3)^2 \right] \sigma_2, \tag{4.60}$$

$$F_{23} = \frac{1}{e} \frac{x^1 x^2}{r^4} \sigma_2 + \frac{1}{e} \frac{x^1 x^3}{r^4} \sigma_3 + \frac{2}{e} \frac{1}{r^2} \sigma_1 - \frac{1}{e} \frac{1}{r^4} \left[ (x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 2(x^3)^2 \right] \sigma_1. \tag{4.61}$$

Además en analogía con (3.54) las componentes de la intensidad de campo de Yang-Mills definen un campo magnético no-abeliano dado por la siguiente expresión

$$B_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}. \tag{4.62}$$

De esta manera se puede ver que los campos magnéticos asociados al *ansatz* de Wu y Yang son los siguientes

$$B_1 = -F_{23}, \quad B_2 = F_{13}, \quad B_3 = -F_{12}. \quad (4.63)$$

Sustituyendo entonces los valores correspondientes de (4.59), (4.60), (4.61) en (4.63) los campos magnéticos tienen las siguientes expresiones

$$B_1 = -\frac{1}{e} \frac{x^1 x^2}{r^4} \sigma_2 - \frac{1}{e} \frac{x^1 x^3}{r^4} \sigma_3 + \frac{1}{e} \frac{1}{r^4} \left[ (x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 2(x^3)^2 \right] \sigma_1 - \frac{2}{e} \frac{1}{r^2} \sigma_1, \quad (4.64)$$

$$B_2 = -\frac{1}{e} \frac{x^1 x^2}{r^4} \sigma_1 - \frac{1}{e} \frac{x^2 x^3}{r^4} \sigma_2 + \frac{1}{e} \frac{1}{r^4} \left[ 2(x^1)^2 + (x^2)^2 + 2(x^3)^2 \right] \sigma_2 - \frac{2}{e} \frac{1}{r^2} \sigma_2, \quad (4.65)$$

$$B_3 = -\frac{1}{e} \frac{x^1 x^3}{r^4} \sigma_1 - \frac{1}{e} \frac{x^2 x^3}{r^4} \sigma_2 + \frac{1}{e} \frac{1}{r^4} \left[ 2(x^1)^2 + 2(x^2)^2 + (x^3)^2 \right] \sigma_3 - \frac{2}{e} \frac{1}{r^2} \sigma_3. \quad (4.66)$$

El hecho fundamental de estos campos magnéticos y donde reside la importancia del *ansatz* de Wu y Yang es que tienen el siguiente comportamiento

$$B_i \sim \frac{1}{r^2}, \quad (4.67)$$

además dada la expresión (4.49) se puede observar que el *ansatz* (4.42) no arroja campos eléctricos, todas las componentes de la intensidad de campo están dadas por campos magnéticos puros.

La expresión (4.67) sugiere que el potencial (4.42) podría ser una fuente de campo magnético no-abeliano del tipo coulombiano.

La singularidad en el origen que presenta la solución de Wu y Yang trae consigo problemas en la definición de la energía dentro del sistema [34]. El problema fue resuelto en 1974 por 't Hooft y Polyakov e involucra otros elementos de la física de altas energías como el campo de Higgs y la ruptura espontánea de la simetría. Aún cuando estos conceptos están fuera del alcance de este trabajo, en la siguiente sección se discute la solución de 't Hooft y Polyakov desde el punto de vista de la teoría de Yang-Mills sin profundizar en los detalles de los cálculos correspondientes.

### Monopolo de 't Hooft y Polyakov

Nuevas soluciones con monopolos magnéticos fueron encontradas en 1974 por 't Hooft y Polyakov [31], [32], dentro de una teoría conocida como modelo de Georgi-Glashow [40]. A diferencia del monopolo de Wu-Yang que es una extensión del monopolo de Dirac a una teoría no-abeliana, en el modelo de Georgi-Glashow se encuentran de forma natural soluciones de tipo monopolo magnético.

El modelo de Georgi-Glashow plantea la siguiente densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}(D^\mu\phi^a)(D_\mu\phi^a) - V(\phi), \quad (4.68)$$

donde  $\phi^a$  son campos escalares correspondientes al mecanismo de Higgs y  $V = \frac{\lambda}{4}(\phi^a\phi^a - v^2)^2$ , [31], [34]. A partir de esta densidad lagrangiana se define el tensor de energía-momento como sigue [34]

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}^a F_{\nu}^{a\rho} + (D^\mu\phi^a)(D_\nu\phi^a) - g_{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (4.69)$$

Posteriormente partiendo de (4.69) se obtiene la energía total del sistema, que tiene la siguiente expresión

$$E = \int d^3x \frac{1}{2} [E_n^a E_n^a + B_n^a B_n^a + (D^\mu\phi^a)(D_\mu\phi^a)] + V(\phi), \quad (4.70)$$

donde  $E_n^a = F_{0n}^a$  y  $B_n^a = \frac{1}{2}\epsilon_{nmk}F_{mk}^a$ .

Las soluciones se construyen tomando los mínimos del funcional de energía (4.70), para esto se consideran los siguientes comportamientos asintóticos

$$\phi^a \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{vr^a}{r}, \quad A_k^a(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{e}\epsilon_{ank}\frac{r_n}{r^2}, \quad (4.71)$$

Estas expresiones corresponden a un campo magnético no-abeliano que tiene la siguiente forma

$$B_n^a \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{r_a r_n}{er^4}. \quad (4.72)$$

Otra aproximación a estos resultados puede obtenerse proponiendo el siguiente *ansatz* [34]

$$\phi^a = \frac{r^a}{er^2}H(\xi), \quad A_n^a = \epsilon_{amn}\frac{r^m}{er^2}[1 - K(\xi)], \quad A_0^a, \quad (4.73)$$

donde  $K$  y  $H$  son funciones de la variable sin dimensiones  $\xi = evr$ .

Si se sustituye (4.73) en (4.70) y se hace la variación respecto a las funciones  $K$  y  $H$  se encuentra el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\xi^2 \frac{d^2 K}{d\xi^2} = KH^2 + K(K^2 - 1), \quad \xi^2 \frac{d^2 H}{d\xi^2} = 2K^2 H + \frac{\lambda}{e^2} H(H^2 - \xi^2). \quad (4.74)$$

Las funciones  $K$  y  $H$  deben satisfacer las siguientes condiciones de frontera, que son equivalentes a (4.71)

$$\begin{aligned} K(\xi) &\rightarrow 1, & H(\xi) &\rightarrow 0 & \text{cuando } \xi &\rightarrow 0, \\ K(\xi) &\rightarrow 0, & H(\xi) &\rightarrow \xi & \text{cuando } \xi &\rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.75)$$

finalmente tomando el *ansatz* (4.73) y considerando las condiciones de frontera (4.75) se obtiene el siguiente campo magnético no-abeliano

$$B_n^a = \frac{r_n r^a}{er^4} \left( 1 - K^2 + \xi \frac{dK}{d\xi} \right) - \frac{\delta_{an}}{er^2} \xi \frac{dK}{d\xi} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{r_n r^a}{er^4}. \quad (4.76)$$

Este campo magnético tiene una expresión muy similar a la obtenida en la solución de Wu y Yang (4.67). Cabe mencionar que en este desarrollo no se consideran soluciones abelianas extendidas a una teoría no-abeliana como en el caso de Wu y Yang.

Con esto se finaliza la discusión de las soluciones a las ecuaciones de Yang-Mills del tipo monopolar, sin embargo los resultados mencionados en esta sección pueden consultarse en forma detallada en [5] y [34].

---

# Capítulo 5

## Conclusiones

Las teorías de norma son una de las grandes revoluciones conceptuales en teoría clásica de campos y en teoría cuántica de campos. La característica que las define es la invarianza de su funcional de acción con respecto a un grupo de transformaciones locales que posee la estructura de grupo de Lie y que es referido como el grupo de simetría o el grupo de norma de la teoría. El término “norma o calibre” hace referencia a cualquier procedimiento matemático específico que permite regular grados de libertad redundantes en el Lagrangiano de la teoría y que no modifica ninguna propiedad observable física. La primera teoría clásica de norma fue el electromagnetismo de Maxwell la cual está definida sobre el espacio de Minkowski cuatro dimensional y tiene como grupo de simetría de norma al grupo unitario uno-dimensional, es decir el círculo unitario. La naturaleza abeliana de este grupo le da el nombre al electromagnetismo de Maxwell de teoría de norma abeliana. Si el grupo de simetría es no conmutativo, entonces la teoría de norma es no abeliana y el ejemplo más importante es la teoría de Yang-Mills. Muchas teorías interesantes en física, como el modelo estándar de partículas elementales son teorías de norma. En particular, la materia esta descrita por campos. La idea fundamental de las teorías de norma es que la simetría de norma genera interacciones físicas. Es decir, dado que la derivada covariante de los campos de materia involucran los campos de norma, las ecuaciones de campo se convertirán en un cierto sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas para los multipletes de materia y los campos de norma. La existencia de un sistema de ecuaciones no lineales acopladas significa que hay una interacción entre los campos de la materia y los campos de norma. En general, términos no lineales en las ecuaciones de campo corresponden a interacciones.

Como toda simetría, la simetría de norma consiste de dos partes: la acción o las transformaciones y la llamada invarianza. En el caso de la simetría de norma, la acción consiste de transformaciones de norma locales. Por otro lado, la invarianza en el caso de las teorías de norma significa que las ecuaciones de campo son invariantes

bajo transformaciones de norma.

Existe un lenguaje matemático en el contexto de la geometría que resulta ser bastante apropiado para describir las teorías de norma, esto es la teoría de haces fibrados con conexión. En este sentido, un potencial de norma es una conexión en algún haz fibrado, y los correspondientes campos de norma son la curvatura asociada a la conexión. Una de las principales ventajas de este lenguaje geométrico es que los aspectos globales (topológicos) de la teoría de norma están codificados en la estructura del haz. Las transformaciones de norma y las ecuaciones de movimiento adquieren un carácter global una vez que son definidas en términos de la geometría del haz. La relación entre la terminología del campo de norma y la terminología de haces para describir a una teoría de norma se encuentra plasmada y resumida en el llamado diccionario de Wu-Yang, donde por ejemplo, la norma es la elección de una trivialización o una trivialización local de un haz principal, un campo de norma o potencial vectorial es una conexión sobre un haz principal, el grupo de norma es el grupo de estructura de un haz principal, la transformación de norma o cambio de norma es un automorfismo de un haz principal.

El resultado de comparar sobre el espacio de Minkowski cuatro dimensional una teoría de norma abeliana (Maxwell) con una no abeliana (Yang-Mills) para conocer sus diferencias nos conduce a la siguiente conclusión: la teoría electromagnética de Maxwell cuyo grupo de simetría es el grupo unitario uno dimensional nos define un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales lineales acopladas. Por otro lado, para una teoría de Yang-Mills con grupo de simetría el grupo especial unitario, las ecuaciones de Yang-Mills resultan ser un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas. Resolver las ecuaciones de Yang-Mills resulta una labor muy complicada y de hecho son parte de la lista de problemas del millón propuesta por el Instituto de Matemáticas Clay [4]. El problema planteado al respecto es como sigue. Experimentos y las simulaciones por computadora sugieren la existencia de una “brecha de masa” en la solución de la versión cuántica de las ecuaciones de Yang-Mills. Pero no se conoce ninguna prueba de esta propiedad. A pesar de esta dificultad existen algunos casos particulares de soluciones a las ecuaciones de Yang-Mills como lo son las soluciones autoduales y las tratadas en este trabajo: la onda plana no abeliana, la solución de Ikeda-Miyachi y las soluciones con monopolos magnéticos. Por último, hay que mencionar que uno de los principales éxitos de las teorías de norma es su cuantización y en particular la gran importancia que representan al describir tres de las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza de carácter cuántico: el electromagnetismo y las interacciones débil y fuerte. Por otro lado la gravitación también acepta una descripción en términos de una teoría de norma empleando conexiones sobre el haz de marcos del espacio tiempo.

---

Las teorías de norma continúan siendo un importante tema de estudio en la actualidad tanto desde el punto de vista físico como matemático. Su completa comprensión implicaría poder explicar importantes propiedades de la física de partículas elementales aún pendientes por resolver como son el fenómeno de confinamiento y la libertad asintótica en cromodinámica cuántica.

---



# Bibliografía

- [1] R. Mills and C. N. Yang, *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, Phys. Rev **96**, 191 1954.
- [2] L. O’Raifeartaigh, *The Dawning of Gauge Theory*, Princeton Univerisy Press, 1997.
- [3] K. Moriyasu, *An Elementary Primer For Gauge Theory*, World Scientific Singapore 1983.
- [4] A. Jaffee and E. Witten, *Quantum Yang-Mills Theory*, Official problem description. <http://www.claymath.org/sites/default/files/yangmills.pdf>.
- [5] A. Actor, *Classical Solutions of  $SU(2)$  Yang-Mills Theories*, Rev. Mod. Phys. **51**, 461 1979.
- [6] C. M. Marle, *The Works of Charles Ehresmann on Connections: from Cartan Connections to Connections on Fibre Bundles*, Banach Center Publications, **76**, 2007.
- [7] C. J. Isham, *Modern Differential Geometry for Physicists*, World Scientific, Singapore 1999.
- [8] T. T. Wu and C. N. Yang, *Concept of Nonintegrable Phase Factors and Global Formulation of Gauge Fields*, Phys. Rev. D **12**, 3845 1975.
- [9] T. Frankel, *The Geometry of Physics, An Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge 1997.
- [10] H. Flanders, *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*, Academic Press, New York 1963.
- [11] T. Eguchi, P. B. Gilkey and A. J. Hanson, Physics Reports **66**, No. 6 213 1980.
- [12] M. Gökeler and T. Schücker, *Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity*, Cambridge University Press, Cambridge 1987.

- 
- [13] J. Plebański, G. R. Moreno and F. J. Turrubiates, *Differential forms, Hopf algebra and General Relativity. I.*, Acta Phys. Pol. B **28**, 1515-1552 1997.
- [14] J. Baez and J. P. Muniain, *Gauge fields, Knots and Gravity*, World Scientific, Singapore 1994.
- [15] G. Moreno, *Notas de un Curso sobre Formas Diferenciales y sus Aplicaciones*, Publicaciones del Departamento de Matemáticas, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N.
- [16] R. Bott and L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, New York 1982.
- [17] I. Madsen and J. Tornehave, *From Calculus to Cohomology, de Rham Cohomology and Characteristic Classes*, Cambridge University Press, United Kingdom 1997.
- [18] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, New York 2002.
- [19] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Institute of Physics Publishing, Bristol 1990.
- [20] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, California 1999.
- [21] M. Gell-Man, *A Schematic Model of Baryons and Mesons*, Phys. Lett. **8**, 214 1964.
- [22] G. 't Hooft, *Renormalizable Lagrangians for Massive Yang-Mills Fields*, Nucl. Phys. B **35**, 172 1971.
- [23] S. Glashow, *Partial Symetries of Weak Interactions*, Nucl. Phys. **22**, 579 1961.
- [24] S. Weinberg, *A model of Leptons*, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 1967.
- [25] A. Salam and J. C. Ward, *Weak and Electromagnetic Interactions*, Il Nuovo Cimento **11**, 568 1959.
- [26] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley & Sons, New York 1987.
- [27] M. Ikeda and Y. Miyachi, *On the Static and Spherically Symmetric Solutions of the Yang-Mills Field*, Prog. Theor. Phys. **27**, 474 1962.
- [28] H. G. Loos, *The Range of Gauge Fields*, Nucl. Phys. **72**, 677 1965.
-

- 
- [29] T. T. Wu and C. N. Yang, *Some Solutions of the Classical Isotopic Gauge Field Equations* Selected Papers (1945-1980), 400 1968.
- [30] P. A. M. Dirac, *Quantised Singularities in the Electromagnetic Field*, Proc. R. Soc. Lond. A **133**, 60 1931.
- [31] G. 't Hooft, *Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories*, Nucl. Phys. B **79**, 276 1974.
- [32] A. M. Polyakov, *Particle Spectrum in Quantum Field Theory*, JETP Lett. **20**, 194 1974.
- [33] P. Goddard and D. Olive, *Magnetic Monopoles in Gauge Field Theories*, Rep. Prog. Phys. **41**, 1357 1978.
- [34] Y. M. Shnir, *Magnetic Monopoles*, Springer, Netherlands 2005.
- [35] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz and Yu. S. Tyupkin, *Pseudoparticle Solutions of the Yang-Mills Equations*, Phys. Lett. B **59**, 85 1975.
- [36] E. Witten, *Some Exact Multipseudoparticle Solutions of Classical Yang-Mills Theory*, Phys. Rev. Lett. **38**, 121 1977.
- [37] V. De Alfaro, S. Fubini and G. Furlan, *A New Classical Solution of the Yang-Mills field Equations*, Phys. Lett. B **65**, 163 1976.
- [38] S. Coleman, *Non-Abelian Plane Waves*, Phys. Lett. B **70**, 59 1977.
- [39] C. P. Constantinidis, L. A. Ferreira and G. Luchini, *A Mild Source for the Wu-Yang Magnetic Monopole* [arXiv:1611.07041v1].
- [40] H. Georgi and S. L. Glashow, *Spontaneously Broken Gauge Symmetry and Elementary Particle Masses*, Phys. Rev. D **6**, 2977 1972.
-