



Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y
Eléctrica

S.E.P.I. E.S.I.M.E. Zacatenco Unidad Profesional

Adolfo López Mateos

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA
MECÁNICA**

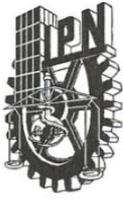
P R E S E N T A

ING. MIGUEL ALEXANDRO ALCÁNTARA GUZMÁN

AMPLIFICACIÓN DE ONDAS SÍSMICAS EN MEDIOS
ESTRATIFICADOS



Director de tesis: Dr. Didier Samayoa Ochoa
Co-director de tesis: Dr. Alejandro Rodríguez Castellanos



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

SIP-14BIS

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D. F. siendo las 18:00 horas del día 08 del mes de Septiembre del 2016 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de E.S.I.M.E. para examinar la tesis titulada:

“AMPLIFICACIÓN DE ONDAS SÍSMICAS EN MEDIOS ESTRATIFICADOS”.

Presentada por el alumno:

ALCÁNTARA

Apellido paterno

GUZMÁN

Apellido materno

MIGUEL ALEXANDRO

Nombre(s)

Con registro:

B	1	0	2	1	3	6
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERIA MECÁNICA

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACIÓN DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Directores de tesis

DR. DIDIER SAMAYOA OCHOA

Presidente

DR. ALEJANDRO RODRÍGUEZ CASTELLANOS

Segundo Vocal

DR. ORLANDO SUSARREY HUERTA

Tercer Vocal

DR. ALEJANDRO RODRÍGUEZ CASTELLANOS

Secretario

DR. MIGUEL ÁNGEL MARTÍNEZ CRUZ

DR. ANDRIY KRYVKO

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

DR. MIGUEL TOLEDO VELÁZQUEZ



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 9 del mes Enero del año 2018, el que suscribe **Ing. Miguel Alejandro Alcántara Guzmán**, alumno del Programa de Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica con número de registro B102136, adscrito a la sección de estudios de posgrado e investigación de la ESIME Unidad Zacatenco, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del **Dr. Didier Samayoa Ochoa** y **Dr. Alejandro Rodríguez Castellanos** y cede los derechos del trabajo intitulado: **“Amplificación de ondas sísmicas en medios estratificados”**, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección electrónica: miguel8708@gmail.com

Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Ing. Miguel Alejandro Alcántara Guzmán

Resumen

En esta tesis se estudia el problema de propagación de ondas que puede enmarcarse dentro del campo de la física perteneciente al problema de propagación de ondas en interfaces; en general y en muchos casos, existe la interacción de medios líquidos en contacto con medios sólidos. Los problemas aquí planteados y desarrollados corresponden a los asociados a interfaces acústicas y sólidas estratificadas. En este sentido y durante el desarrollo del trabajo hemos resaltado que las interfaces fluido-sólido se presentan en una gran variedad de aplicación en el campo de la física y de la ingeniería. Por ejemplo, en recipientes que contienen líquidos, en tanques de almacenamiento, en maquinarias, en ductos, y en el correspondiente a suelos marinos. Todas estas aplicaciones resaltan, sin duda alguna, la importancia de desarrollar metodologías que expliquen y solucionen los comportamientos de este tipo de sistemas mecánicos, llamados en este trabajo como interfaces fluido-sólidas.

En este trabajo se desarrolla una formulación numérica empleando el método de elementos frontera para la solución de este tipo de interfaces. Así también, se da una semblanza de una técnica analítica desarrollada y empleada en este caso para la validación de resultados. El trabajo está dividido en capítulos relacionados con la revisión bibliográfica donde se pretende evidenciar los estudios realizados en torno a interfaces, ya sean soluciones numéricas, analíticas y experimentales. Posteriormente, se establece el capítulo relacionado con los antecedentes teóricos para el estudio de la propagación de ondas en medios elásticos. En este capítulo se incluye también una breve descripción de los diferentes tipos de interfaces. Así también, en los capítulos restantes se desarrolla el Método Indirecto de Elementos Frontera y el de Número de Onda Discreto. Posteriormente, se desarrolla el capítulo casos de estudio donde se plasman varios ejemplos de interfaces. Al final del trabajo se proporcionan las conclusiones más importantes emanadas del mismo y se plasma una idea personal del trabajo futuro.

Abstract

In this work, cases that could be categorized into half space-physics related are studied. Generally and in many other cases, there is an in-contact interaction between liquid and solid media. The problems here proposed and developed belong to those associated with acoustic solid-stratified half spaces, i.e. liquid media in contact with solid/stratified media. According to this, and during the development of this work, we are highlighted that fluid-solid half spaces can be found in a great variety of applications throughout physics and engineering. For instance, in containers filled with liquid, in storage tankers, machinery, ducts, etc. Another special focus is the one related to seabed. All those applications points out the importance of developing methodologies that can be able to explain and solve the different behaviors of these kind of mechanical systems, labeled in this work as solid-fluid interfaces.

A numerical formulation is developed in this work, using the boundary element method to solve this kind of interfaces. Thereby, a semblance is given, this is concerning an analytical technique developed and used in order to validate the obtained results. This work is divided into chapters according to bibliographical study, where, we pretend to show the applied studies, whether numerical, analytical and experimental related to half spaces. Later, we set a chapter related to theoretical background regarding the study of wave propagation on elastic media. In this chapter, a brief description of different kind of interfaces is given. In the final chapters, the indirect boundary element method and discrete wave number method are developed. Later a chapter is devoted to the study and the obtainment of results based on different study cases related to liquid-solid interfaces. At the end of this work the most important conclusions were given and also a personal proposal for a future work was settled down.

Contenido general

Resumen

Abstract

Contenido general	VI
Índice de figuras	VII
Capítulo I Introducción y generalidades.....	1
Capítulo II Marco teórico.....	9
Capítulo III Ecuaciones integrales	21
Capítulo IV Planteamiento del problema	26
Capítulo V Validación y ejemplos numéricos	48
Conclusiones	56
Trabajo futuro	59
Referencias bibliográficas	60
Apéndice A Análisis de Fourier	64
Apéndice B Función de Bessel.....	68

Índice de figuras

Fig.1a Ejes coordenados.

Fig.1b Cuerpo de geometría arbitraria sujeto a fuerzas aplicadas a su superficie

Fig.2 Propagación y comportamiento de una onda de Rayleigh.

Fig.3a Propagación de partículas en las ondas de Love.

Fig.3b Propagación de las partículas en las ondas de Rayleigh.

Fig.4 Comportamiento de una onda de Stoneley.

Fig.5 Onda de Scholte y forma de propagación.

Fig.6 Interface fluido-sólido para la formulación del IBEM.

Fig.7 Campo de ondas reflejado en el líquido provocado por el estrato sólido.

Fig.8 Campo difractado en un sólido.

Fig.9 Modelo de interface sólido-fluido resuelto por DWN.

Fig.10 Interface sólido-fluido-sólido formulado por medio de IBEM.

Fig.11 Modelo para la formulación del DWN en un estrato sólido-fluido-sólido.

Fig.12a Pulso de Ricker en el dominio del tiempo.

Fig.12b Pulso de Ricker en el dominio de la frecuencia.

Fig.13 Discretización de un semi-espacio fluido-sólido para IBEM.

Fig.14a Espectros de presión para un receptor ubicado a 1.0m.

Fig.14b Sismogramas sintéticos de presión en el dominio del tiempo.

Fig.15a Modelo para el estudio de propagación de ondas.

Fig.15b Modelo de propagación para caso agua limonita.

Fig.16a Modelo de propagación para caso agua arenisca.

Fig.16b Modelo de propagación para caso agua hierro.

Fig.17 Discretización de interfaz sólido-fluido-sólido.

Fig.18 Sismogramas sintéticos para configuración sólido-fluido-sólido.

Capítulo I

Introducción y generalidades

I.1 Introducción.

En muchas áreas de la física, el estudio de las interfaces fluido sólido ha sido siempre de interés. En estos campos se presentan problemas que pueden llegar a ser tan complejos como lo es el caso del fenómeno de propagación de ondas en medios continuos estratificados, dichos estudios han generado el desarrollo de métodos numéricos tan complejos, que su implantación ha sido posible gracias al avance en recursos de cómputo actuales. Un aspecto importante en el desarrollo de la ciencia y la ingeniería es el costo para realizar pruebas ya sea en escala real o en laboratorio, es por eso que muchos de los investigadores se apoyan en simulaciones realizadas por computadora, dichas simulaciones pretenden reemplazar dichas pruebas costosas y obtener resultados preliminares o aproximados al fenómeno que se está analizando, dichos resultados se van calibrando posteriormente con la parte experimental. Lo anterior ha contribuido al avance y desarrollo de diferentes métodos numéricos para la búsqueda de solución eficiente de problemas.

Hoy en día existen diversos métodos para simular el comportamiento real de los problemas que se plantean a través de ecuaciones diferenciales, dentro de los cuales podemos mencionar al método de elemento finito (FEM por sus siglas en inglés), el método de diferencias finitas (FDM por sus siglas en inglés), el método de elementos frontera (BEM por sus siglas en inglés) y el método de volumen finito (FVM por sus siglas en inglés), cada uno de estos métodos presentan ventajas y desventajas al momento de su aplicación; uno de los más populares es el FEM, el cual ha abarcado muchos campos de conocimiento y tiene mayor aplicación que el resto de los métodos ya que emplea un mallado en todo el dominio que se desea analizar y modelar, cabe resaltar que el FDM es el segundo más utilizado ya que se aplica ampliamente en problemas que involucran geometrías regulares, este método al igual que el FEM requiere de un mallado en todo el dominio del problema; el BEM en particular se destaca por resolver problemas que involucran elementos en la frontera; a diferencia de los métodos anteriormente mencionados, el BEM se distingue porque no necesita de un mallado de todo el dominio que se está analizando, reduciendo con esto una dimensión espacial el problema, podemos entonces mencionar que el BEM es un método alternativo y especializado del FEM y FDM con la posibilidad de incluso poder combinar ambos métodos dependiendo del tipo de problema a resolver.

Un método muy utilizado para modelar medios estratificados es el método del número de onda discreto (DWN por sus siglas en inglés). En el DWN una onda sísmica irradiada de una fuente se expresa como integración del número de onda mientras el medio no tenga algún elemento de amortiguación inelástico, este método es ampliamente utilizado en la simulación de terremotos y obtención de sismogramas sintéticos.

Por ejemplo, importantes desarrollos para el estudio del comportamiento dinámico de una capa oceánica sobre un sólido elástico por medio de soluciones analíticas se pueden encontrar en los trabajos de Biot [1] y Ewing [2], en los cuales se pone especial atención en las ondas de Rayleigh y Stoneley. Otras aplicaciones han sido enfocadas a entender el comportamiento de las ondas de interfaz siendo enfocadas al estudio del fondo oceánico [3,4]. De esta forma Carcione y Helle [5] estudiaron la física relacionada con estas interfaces en una variedad de lechos marinos con diferentes propiedades

Amplificaciones sísmicas en medios estratificados

mecánicas, desde sedimentos suaves a rocas duras. Estos resultados analíticos muestran la aparición de ondas de Rayleigh en ambientes excitados por sismos profundos y se pueden consultar en [6,7].

Son diversos los casos, ejemplos y aplicaciones que se pueden encontrar; tales como la atenuación y dispersión de ondas de interface que han sido investigadas en casos de varias capas y publicadas en [8-12]. El problema inverso de determinar los parámetros mecánicos de medios estratificados en contacto con fluidos por medio de la medición de las variaciones de los campos de presión en el fluido fue publicado por Zein et al. [13]. Estudios aplicados a medios porosos han evidenciado la enorme influencia de porosidad en la propagación de ondas, particularmente cuando el medio está parcialmente saturado [14-18]. La atenuación y dispersión en ondas de interface debido a la presencia de fracturas fueron estudiadas en [11,19-22]. La utilización de las funciones de Green para formaciones acústicas estratificadas y elásticas en tercera dimensión fueron aplicadas por Tadeu y Antonio [23,24], las cuales pueden ser utilizadas en un modelado numérico.

En el campo de los métodos numéricos tales como elemento finito y el método de diferencias finitas la solución de interfaces fluido-sólido fueron tomadas, por ejemplo, de Zienkiewicz y Bettles [25] y Thomas et al. [26], respectivamente. Por otra parte, un algoritmo basado en los operadores diferenciales de Fourier y Chebyshev para modelos mallados fue propuesto por Carcione et al. [27] para estudiar los métodos pseudoespectrales. En suma, las formulaciones del elemento espectral y pseudo-espectral han revelado ser métodos precisos para el modelado de geometrías realistas. Por otra parte, Komatitsch et al. [28] desarrolló el método de elemento espectral para tratar con problemas de topografías más complejas. Además se resaltaron las numerosas ventajas sobre los métodos clásicos, las cuales fueron extraordinarias.

Por ejemplo, algunas de las áreas de aplicación más importante, tienen que ver con las sismología, geofísica e investigación petrolera. Trabajos recientes, como los de Dineva y Manolis, [29], Budaev y Bogy [30] han hecho especial énfasis en la dispersión de ondas elásticas debido a discontinuidades de este tipo de ondas en semi-espacios.

Mal et al. [31] resolvió la dispersión de objetos simples dentro de un medio infinito y consideraba la presencia de una superficie libre basados en modelos cuasi-analíticos en el dominio de la frecuencia. En el trabajo de Mal, se modelaron diversos tipos de ondas de Rayleigh en los cuales se utilizó la función de Green de segundo orden, derivada de las ecuaciones de Fredholm, las cuales fueron utilizadas a bajas frecuencias [32].

El modelado numérico realista de ondas elásticas en estructuras geológicas fracturadas ha sido estudiado por medio del método de número de onda discreta (DWN) [33]. Este método fue introducido a finales de los años ochenta para modelar la propagación de ondas tipo P y SV en medios fracturados de dos dimensiones con o sin superficie libre [34]. Con este método, han sido estudiadas las distribuciones aleatorias de fracturas vacías colineales en un semi-espacio. En muchas áreas de la investigación sismológica, son importantes los efectos de amplificación en el suelo causados por las capas de

superficie irregular a lo largo del mismo. Generalmente, las áreas de investigación que pueden ser más afectadas por los efectos de amplificación en la geología del sitio son: (a) análisis estadístico de datos de movimientos fuertes. (b) reducción de riesgos en ingeniería de terremotos. Tomando en consideración esto, encontramos que Chang [35] hace mención a una formulación alternativa llamada “eliminación de subestructuras” propuesto por Dasgupta [36] el cual es presentado como una herramienta para formular una ecuación integral de frontera utilizando funciones de Green más simplificadas. Esta idea de “eliminación” está basada en una intuición de carácter físico, la cual es llamativa, pero numéricamente no ha arrojado resultados convincentes hasta la fecha. Otras de las razones por las cuales fue desarrollado este método es la aplicación en la resolución de problemas concernientes a ondas P y SV. Uno de los factores más importantes en la evaluación de respuestas sísmicas locales es la variación de la impedancia en el suelo, el cual, es el responsable de la amplificación de las ondas sísmicas. Uno de los parámetros más importantes que influencia la respuesta dinámica del sitio es la velocidad de corte de la onda, la cual, está estrictamente relacionada al módulo de corte para pequeños desplazamientos. La amplificación de ondas sísmicas debido a la variación vertical del suelo se conoce como “amplificación estratigráfica”. En general, el objetivo del estudio de la amplificación de estratos es la determinación de la función de transferencia, dicha función es la encargada de cuantificar la amplificación de la señal en el dominio de la frecuencia.

En este trabajo se presenta y aplica el método indirecto de elemento frontera (IBEM), para estudiar las interacciones entre las ondas acústicas y elásticas cerca de una interfaz caracterizada por un fluido y un estrato sólido elástico. Se emplea una fuente en uno de los polos caracterizado por una función de Hankel de orden dos, esto con el fin de producir una onda de presión inicial en el fluido. Esta formulación podría ser considerada como una realización numérica del principio de Huygens en el cual las ondas difractadas son construidas en la frontera en la cual son irradiadas.

Matemáticamente hablando, esto es completamente equivalente a la bien conocida representación del teorema de Somigliana. La exactitud de los resultados para una interface solido-fluido esta verificada con respecto a aquellas obtenidas por medio del método de “número de ondas discretas” (DWN). Observaciones previas realizadas por otros autores son comentadas. En las siguientes secciones son detalladas las formulaciones de ambos métodos (IBEM, DWN) aplicadas a interfaces fluido-sólido.

I.2 Desarrollo del BEM.

Dentro de la comunidad de ingenieros, que en la actualidad está familiarizada con los elementos finitos, se cuestiona constantemente sobre la necesidad del porque es necesario el desarrollo de otra técnica computacional de análisis. La respuesta es que los elementos finitos han probado ser inadecuados o ineficientes en diferentes aplicaciones de ingeniería y lo que es más importante aún, es la cuestión de lo poco práctico que puede resultar su uso y por lo tanto, difícil implementación en sistemas de cálculo por medio de softwares de ingeniería asistida por computadora.

Amplificaciones sísmicas en medios estratificados

Los elementos frontera han surgido como una poderosa alternativa a los elementos finitos, particularmente en casos donde se requiere una mayor exactitud en problemas específicos en los cuales están involucrados la concentración de esfuerzos o donde el dominio tiende al infinito. Sin embargo, la característica más importante de los elementos frontera en comparación con los métodos de dominio, tales como el método de diferencias finitas o el método de elemento finito radica en la metodología de la formulación de los problemas como una ecuación integral de frontera, la cual describe el problema a analizar con ecuaciones con estados de frontera conocidos o desconocidos, por lo tanto, solo requiere la discretización de la superficie en lugar del volumen, con esto, la dimensión del problema se reduce a uno. Consecuentemente, el esfuerzo necesario para realizar la discretización es mucho menor, y lo que es más importante, el proceso de mallado puede ser generado de manera más sencilla y por consiguiente, los cambios que sean requeridos por diseño no requieren un proceso adicional de mallado o de nuevamente recrear el proceso anterior.

El método de elementos frontera es especialmente ventajoso en el análisis y resolución de problemas con dominio infinito o semi-infinito, llamados también problemas de dominio exterior, en los cuales, aunque solo es necesario realizar la discretización de la superficie finita del dominio infinito, la solución de cualquier punto arbitrario en el dominio puede ser encontrada después de haber determinado los datos no conocidos de la frontera.

I.2.1 Ventajas y desventajas del método.

Se ha explicado anteriormente la utilidad del método y eficiencia del mismo, sin embargo existe varios factores a considerar antes de poder decidir qué tipo de método de análisis se debe elegir. Los factores a analizar y los más representativos son los que a continuación se enlistan.

Ventajas

- ❖ *Menor tiempo de análisis teórico y preparación del mismo:* Esto es consecuencia directa de la característica principal del método, la cual radica en el enfoque de modelado solo en la superficie, con esto, el tiempo de análisis y preparación de datos es reducido considerablemente, y así, si el problema requiere un cambio es mucho más fácil realizar cambios en la malla.
- ❖ *Resolución de esfuerzos:* Los valores de esfuerzo que se llegan a obtener son completamente exactos, ya que no se requiere una aproximación adicional en la solución de los nodos interiores, por lo tanto, la solución es completamente exacta y continúa dentro del dominio.
- ❖ *Menor tiempo de cálculo y almacenamiento:* Por la misma razón del nivel de exactitud es lógico que este método emplee un menor número de nodos y elementos, por lo tanto, para que en el método de elemento finitos obtengamos este tipo de exactitud es necesario tener un mayor número de

Amplificaciones sísmicas en medios estratificados

divisiones en la malla comparadas con las equivalentes obtenidas con el método de elemento frontera.

- ❖ *Menor número de información no deseada:* En muchos casos de análisis en ingeniería, los peores escenarios (en especial en el estudio relacionado con fractura, concentración de esfuerzos, choque térmico, etc.) usualmente ocurren en la superficie del objeto a analizar, por lo tanto, si se realiza un modelado tridimensional de un cuerpo con elementos finitos, así como también el cálculo de esfuerzos (u otros casos) en cada punto nodal resulta ineficiente ya que solo algunos de estos valores serán incorporados en el análisis de diseño, por consiguiente, la utilización de elementos frontera es más efectiva en el aspecto del tiempo de cómputo, además, nos podemos enfocar en una región específica de análisis y no todo el cuerpo.

Desventajas

- ❖ *Análisis matemático:* El tipo de análisis matemático empleado puede, al principio no ser tan familiar para los ingenieros. Sin embargo, muchos procedimientos numéricos empleados en el método de elemento finito son directamente aplicables a soluciones del método de elemento frontera (tales como integración numérica o el análisis de condiciones iniciales de frontera).
- ❖ *Solución matricial:* La solución que se obtiene del análisis matemático es resultado directo de una matriz asimétrica y con un número considerable de coeficientes diferentes de cero, esto conlleva a que toda la solución de la matriz debe ser almacenada en la memoria de la computadora, requiriendo un almacenamiento mayor de disco.
- ❖ *Pobre desempeño en el análisis tridimensional de estructuras de pared delgada:* Esto se debe principalmente a la enorme relación de volumen en contraste con la superficie, y la cercana proximidad de los puntos nodales en cada extremo del grosor de la estructura, esto causa como consecuencia inexactitudes en las integraciones numéricas.

I.2.2 Aplicaciones prácticas del BEM.

Como tal, el área de aplicación de este método es bastante diversa, el método ha demostrado ser eficaz en la resolución y simulación de problemas específicos en los que están involucrados, como se mencionó anteriormente, la concentración de esfuerzos, fractura de materiales o agrietamiento de un sólido y en uno en el cual se ha destacado, es su aplicación como método numérico en la resolución de problemas de propagación de ondas en medios continuos, en los cuales, otros métodos numéricos carecen de la habilidad para lograr que las ondas incidentes transiten y finalmente se disipen en el medio, dichos métodos diferentes al BEM, tienden a “atrapar” tales ondas en el volumen de

Amplificaciones sísmicas en medios estratificados

observación, produciendo con esto desplazamientos y esfuerzos que no corresponden con el comportamiento físico del problema que se trata de resolver; con el BEM este fenómeno no ocurre debido a que satisface la condición de Sommerfeld, la cual considera que la energía que se irradia de las fuentes siempre es hacia el infinito y no al revés. En lo concerniente a este trabajo, la aplicación del BEM se ve traducida específicamente en los métodos sísmicos de exploración, los cuales constituyen una herramienta imprescindible en la búsqueda de hidrocarburos mediante la obtención de secciones de análisis las cuales nos permiten interpretar la configuración espacial de los sedimentos en un subsuelo; esta técnica está basada en la teoría de elasticidad y propagación de ondas, la cual se rige por ciertas suposiciones respecto al medio de propagación. Si bien cabe recalcar que la consideración inicial siempre será un medio isotrópico (sin variación de velocidad en la dirección de propagación) ha producido buenos resultados, la necesidad de descubrir yacimientos más pequeños y de optimizar la explotación en los que ya están en producción ha impulsado a la adopción de modelos más complejos. En sistemas mecánicos, como tuberías y edificios los métodos de propagación de ondas permiten la identificación de daño, corrosión y de elementos estructurales con densidad distinta a la de la matriz que lo soporta, entre otros.

I.3 Objetivo.

El presente trabajo de tesis tiene los siguientes objetivos:

- Desarrollar un método numérico encaminado a la solución de problemas dinámicos de propagación de ondas elásticas de interfaces fluido-sólidos estratificados.
- Obtener espectros de respuesta que evidencien el comportamiento de las diferentes interfaces estudiadas.
- Elaborar sismogramas de presiones que pongan en manifiesto la aparición de los diferentes tipos de ondas que aparecen cuando una interfaz es excitada dinámicamente.
- Evidenciar el efecto de los espesores de los estratos en la respuesta dinámica
- Emitir conclusiones y recomendaciones resultadas del estudio realizado

I.4 Justificación.

El presente trabajo de tesis es el resultado de la necesidad industrial de contar con formulaciones numéricas encaminadas al modelado de interfaces, principalmente aquellas que consideren fluidos y sólidos. La creciente necesidad de efectuar estudios o pruebas no destructivas en sistemas formados por este tipo de interfaz, ha conllevado a fomentar el desarrollo científico en el campo de pruebas no destructivas de materiales para la identificación de grietas o de propiedades elásticas de los medios sólidos. Este tipo de estudio se ha requerido para la identificación o caracterización de grietas en ductos o tanques de almacenamiento. Por otro lado, las formulaciones numéricas son de utilidad en la industria del ramo petrolero para

Amplificaciones sísmicas en medios estratificados

caracterizar el subsuelo marino. Estos estudios son una herramienta indirecta para conocer las propiedades físicas y mecánicas del suelo marino, con miras a la instalación de infraestructura petrolera para uso de equipo de perforación profunda. Estos son algunas de las líneas de trabajo que son, y pueden ser derivadas de las formulaciones planteadas en el presente trabajo de tesis.

I.5 Antecedentes.

En el ámbito mecánico, civil, geofísico y sismológico el estudio de la propagación de ondas en interfaces es un problema vigente y común en estas áreas de trabajo. Una de las principales aplicaciones del estudio de la propagación de ondas elásticas en medios estratificados es el estudio de las amplificaciones de esfuerzos y desplazamientos debidos a la acción de cargas dinámicas. En trabajos realizados en la industria petrolera esta formulación será de utilidad para conocer la respuesta dinámica de interfaces fluido-sólido en los lechos marinos, así como el efecto de las interfaces cuando se presenta una estratificación en el sólido. Por ejemplo, el sedimento del lecho marino podría ocultar las características mecánicas de subsuelo. Incluso, podría ocultar la presencia de irregularidades o fallas. Recientemente, investigadores pertenecientes a las instituciones del Instituto Mexicano del Petróleo y del Instituto Politécnico Nacional han colaborado con fines de investigación para el desarrollo de metodologías para estudiar las interfaces mencionadas. Adicionalmente, trabajos similares a los estudiados han sido publicados en revistas científicas internacionales.

Capítulo II

Marco teórico

II.1 Marco teórico.

II.1.1 Fuerzas de superficie externa e interna.

Si consideramos a un cuerpo de geometría arbitraria sujeto a fuerzas aplicadas en su superficie exterior, conocidas como fuerzas de superficie, según la figura (1b).

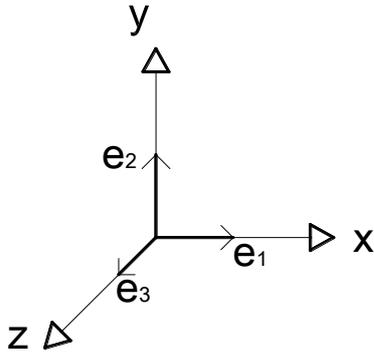


Fig.1a Ejes coordenados.

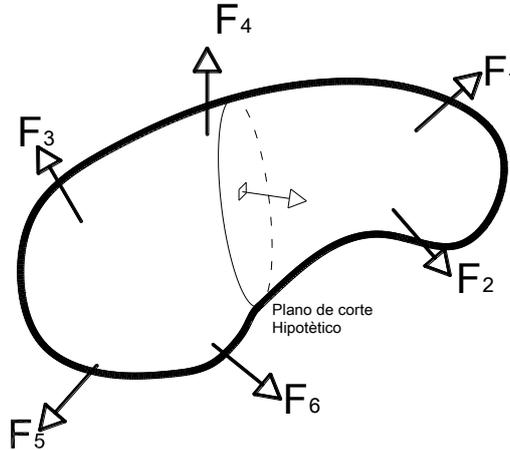


Fig.1b Cuerpo de geometría arbitraria sujeto a fuerzas aplicadas en su superficie exterior.

Y si definimos ΔA como un área muy pequeña localizada en el plano de corte hipotético, y a ΔF , la fuerza resultante que actúa en un área ΔA , entonces podemos definir a T^n como el vector de tracción (o de esfuerzo) que actúa en esa área, como:

$$T^n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (2.1)$$

Dónde: n es el vector unitario a la normal ΔA .

Para el caso en que es tal que cuyo vector unitario normal coincide con los ejes coordenados (cuyos vectores unitarios son e_1, e_2, e_3 , como se mostro en la figura anterior, entonces el vector unitario puede escribirse para cada componente del vector de tracción o esfuerzo, como:

$$T^{e_1} = \sigma_x e_1 + \tau_{xy} e_2 + \tau_{xz} e_3 \quad (2.2)$$

$$T^{e_2} = \tau_{yx} e_1 + \sigma_y e_2 + \tau_{yz} e_3 \quad (2.3)$$

$$T^{e_3} = \tau_{zx} e_1 + \tau_{zy} e_2 + \sigma_z e_3 \quad (2.4)$$

Dónde: las componentes $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, son conocidos como **Esfuerzos Normales**, y $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ son conocidos como esfuerzos cortantes. En su conjunto estos últimos se les conoce como **Componentes de Esfuerzo**.

Y pueden representarse mediante:

$$\sigma = [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Amplificaciones sísmicas en medios estratificados

Por lo tanto la expresión (2.2) a (2.4) pueden expresarse como:

$$\{\mathbf{T}^n\} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{Bmatrix} = [\sigma] \{\mathbf{e}_i\} \quad (2.6)$$

Por otro lado cuando se tiene un plano de corte hipotético con una orientación diferente a los ejes coordenados, el vector unitario normal puede escribirse como:

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{e}_1 + n_y \mathbf{e}_2 + n_z \mathbf{e}_3 \quad (2.7)$$

Para este caso el vector de esfuerzos se presenta como:

$$\mathbf{T}^n = n_x \mathbf{T}^{e1} + n_y \mathbf{T}^{e2} + n_z \mathbf{T}^{e3} \quad (2.8)$$

O también:

$$\mathbf{T}^n = (\sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z) \mathbf{e}_1 \quad (2.9)$$

$$+ (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z) \mathbf{e}_2 \quad (2.10)$$

$$+ (\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z) \mathbf{e}_3 \quad (2.11)$$

En notación tensorial podemos escribir las ecuaciones (2.9) a (2.11) como:

$$\mathbf{T}^n = \sigma_{ji} n_j \mathbf{e}_i \quad (2.12)$$

Y sus componentes como:

$$T_i^n = \sigma_{ji} n_j \quad (2.13)$$

II.1.2 Ecuaciones de Equilibrio y Ecuación de Navier.

Si se tiene un cuerpo de volumen V , delimitado por su frontera S , sujeto a un sistema de fuerzas de superficie, se dice que dicho cuerpo está en equilibrio estático si se tiene que:

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_c \quad (2.14)$$

Dónde: \mathbf{F}_s representa las fuerzas de superficie, mientras que \mathbf{F}_c a las fuerzas de cuerpo, las cuales son proporcionales a la masa del cuerpo, estas fuerzas \mathbf{F}_s y \mathbf{F}_c se definen como:

$$\mathbf{F}_s = \iint_S \mathbf{T}_i^n ds \quad (2.15)$$

$$\mathbf{F}_c = \iiint_V \mathbf{F}_i dV \quad (2.16)$$

Por condiciones de equilibrio entonces puede escribirse como:

$$\iint_S \mathbf{T}_i^n dS + \iiint_V \mathbf{F}_i dV = 0 \quad (2.17)$$

Para poder sumar las integrales de la ecuación (2.17) es necesario emplear el teorema de la Divergencia de Gauss.

II.1.3 Teorema de la Divergencia de Gauss.

Si definimos a U , como campo vectorial continuo y tiene primera derivada continua en V , es válida la siguiente igualdad.

$$\iint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{u} \, dV \quad (2.18)$$

O mediante de la notación indicial el Teorema de Gauss se escribe:

$$\iint_S u_{ij} n_j \, dS = \iiint_V u_{ij,j} \, dV \quad (2.19)$$

Primeramente expresamos la integral de superficie sobre sus componentes:

$$\iint_S T_i^n \, dS = \iint_S \sigma_{ji} n_j \, dS \quad (2.20)$$

De esta manera ya es posible aplicar el Teorema de Gauss

$$\iint_S T_i^n \, dS = \iint_S \sigma_{ji} n_j \, dS = \iiint_V \sigma_{ji,j} \, dV \quad (2.21)$$

Dado que las dos integrales son ahora del mismo tipo, entonces:

$$\iint_S T_i^n \, dS + \iiint_V F_i \, dV = \iiint_V \sigma_{ji,j} \, dV + \iiint_V F_i \, dV = \iiint_V (\sigma_{ji,j} + F_i) \, dV = 0$$

Debido a que la ecuación (2.21) debe ser validada para cualquier volumen V , entonces:

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0 \quad (2.22)$$

Expresando en forma escalar, se tienen las ecuaciones de equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0 \quad (2.25)$$

Si el cuerpo se encuentra en movimiento debe entonces cumplirse el principio de D'Alambert para establecer las condiciones de equilibrio, para esto se incluyen las fuerzas de Inercia y se incorporan a las ecuaciones de equilibrio, esto es:

$$\iint_S \mathbf{T}_i^n dS + \iiint_V \mathbf{F}_i dV - \iiint_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV = 0 \quad (2.26)$$

Dónde: ρ, e es la densidad del material.

Con un desarrollo similar al presentado anteriormente se llega a la siguiente ecuación:

$$\sigma_{j,i,j} + \mathbf{F}_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.27)$$

Y en forma escalar:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \mathbf{F}_x = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \mathbf{F}_y = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \mathbf{F}_z = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.30)$$

La ecuación (2.26) y (2.27) a (2.29) representa la ecuación de Navier.

II.2.1 Tipos de onda de interfaz.

En el presente trabajo se comentan tres tipos de ondas de interfaz elásticas, las cuales son: (a) ondas de Rayleigh (interfaz sólido-vacío) (b) ondas de Stoneley (interfaz sólido-sólido) (c) ondas de Scholte (interfaz sólido-fluido). Si tomamos en cuenta un medio semi-infinito, al producirse un pulso y al estar localizadas en las interfaces, este tipo de ondas se desplazan de manera cilíndrica a lo largo del medio y por lo tanto decaen más lentamente con respecto a la distancia que las ondas volumétricas de compresión y corte [37]. Por otra parte, las ondas de superficie son mucho más fácilmente observadas que detectadas con respecto a las ondas volumétricas en el interior de un sólido. A amplitudes suficientemente grandes, este tipo de ondas se distorsionan y producen sismos como se demostró recientemente en [38,39]. La forma de la distorsión de la onda, asemeja y posee ciertas características que las distinguen de los fluidos, como la distorsión de amplitud finita. Una revisión teórica de modelos no lineales para ondas de Rayleigh es provisto en los trabajos de Knight et al. [40]

El formalismo Hamiltoniano presentado en Zabolotskaya [40] para el modelado de ondas de Stoneley y Scholte fue originalmente desarrollado por Zabolotskaya para ondas de Rayleigh lineales en [41]. La evolución de sus ecuaciones espectrales provee una descripción precisa de la distorsión en la amplitud finita de la forma de onda y en la formación de sismos.

II.2.2 Fundamentos de la propagación de ondas elásticas.

Es importante empezar por comprender, que el fenómeno de propagación de ondas elásticas debe analizarse desde distintas distancias, esto debido a que una excitación producida de manera local no es detectable de manera simultánea en dichas distancias, es necesario que cierto tiempo haya transcurrido para poder identificar el comportamiento que siguió a la excitación, esto con objeto de analizar como la perturbación se propagó por el medio. Este tipo de perturbaciones se presentan en gran cantidad de fenómenos físicos tal es el caso de sismos, por mencionar uno; que se registra a distancias remotas de la fuente después de que ha ocurrido.

En general, las ondas mecánicas se generan por la aplicación de una fuerza en una región de un medio siempre deformable, esta fuerza provoca perturbaciones que se transmiten de partícula a partícula, durante este proceso, la oposición a la deformación es superada, naturalmente debido a las características del medio y la propiedad de inercia.

Como tal, una onda elástica constituye una onda de tipo mecánica, por lo tanto, transmite energía a través del medio en donde se propaga, las ondas mecánicas solo se producen en un medio que posea elasticidad e inercia. Una onda mecánica requiere a su vez de un impulso de energía inicial, una vez que este impulso es aplicado, la onda viaja a través del medio hasta que toda su energía es transmitida por todo el medio, podemos de esta manera indicar que existen tres tipos de ondas mecánicas: ondas transversales, ondas longitudinales y ondas de superficie.

A continuación se da una breve semblanza de los tipos de ondas mecánicas más comunes.

II.2.3 Onda P.

Las ondas P (u ondas primarias o de compresión) viajan a través de cualquier tipo de materiales incluidos los líquidos, sólidos y gases. Las ondas P son las primeras en ser detectadas por las estaciones sísmicas, una onda P generada en el epicentro de un sismo puede alcanzar velocidades de entre 1 a 14 kilómetros por segundo, los valores de velocidad bajos se encuentran cuando las ondas P viajan a través del agua; mientras que los valores altos se localizan cuando las ondas están cerca de la base del manto terrestre. La velocidad precisa depende del medio en el cual esta onda se está desplazando (propiedades elásticas y densidad del material). El movimiento producido por la onda P es de tipo alternante, es decir, comprime y expande el material por el cual viaja. En el caso de una superficie, esta se deforma a lo largo de la dirección por la cual la onda está viajando.

II.2.4 Onda S.

Las ondas S (de cortante o secundarias), viajan solo a través de sólidos, estas ondas viajan a velocidades entre 1 a 8 kilómetros por segundo, los valores de velocidad bajos se producen cuando la onda viaja a través de sedimentos no consolidados, mientras que las velocidades de mayor valor se producen cuando están cerca de la base del manto terrestre. La velocidad precisa depende del tipo de suelo por el cual se esté desplazando. Las ondas S hacen

vibrar el subsuelo en un movimiento de cortante, este movimiento es perpendicular a la dirección en la cual la onda se encuentra viajando.

Las ondas P y S son llamadas ondas elásticas, ya que deforman el material por el cual se desplazan, esto quiere decir que el material es deformado y regresa a su forma y posición original después de que la onda se desplazó, las ondas elásticas también son conocidas como ondas sísmicas.

II.2.5 Ondas de Rayleigh.

Las ondas de Rayleigh son ondas de superficie que viajan cerca de la superficie de los sólidos, este tipo de ondas describen movimientos de tipo longitudinal y transversal que decrecen exponencialmente en amplitud mientras la distancia con respecto a la superficie va aumentando. En sólidos isotrópicos, estas ondas causan que las partículas de la superficie se muevan describiendo un movimiento elíptico en planos normales a la superficie y paralelos a la dirección de propagación. En la superficie y en pequeñas profundidades este movimiento es retrogrado, esto quiere decir, que cuando el movimiento de las partículas ocurre contrario al sentido horario cuando la onda viaja de izquierda a derecha. En suma a esto, la amplitud de movimiento decae y la excentricidad cambia conforme a la profundidad aumenta en el material. La profundidad o distancia de desplazamientos significativos en el sólido es aproximadamente igual a su longitud de onda.

Las ondas de Rayleigh poseen una velocidad ligeramente menor a las ondas de corte gracias a un factor que depende de la constante elástica del material que se esté considerando, la velocidad típica es del orden de los 2-5km/h. tomando en cuenta que las ondas de Rayleigh están confinadas cerca de la superficie su amplitud en el plano decae a una relación de $1/\sqrt{r}$ donde r es la distancia radial. Por lo tanto, las ondas de superficie decaen más lentamente con la distancia en comparación con las ondas volumétricas (ondas P y S), las cuales se dispersan en tres dimensiones desde la fuente. Rayleigh en 1885 predijo la presencia de ondas superficiales diseñando matemáticamente el movimiento de ondas planas en un espacio semi-infinito elástico. Las ondas de Rayleigh causan un movimiento rodante parecido a las ondas del mar y sus partículas se mueven en forma elipsoidal en el plano vertical, que pasa por la dirección de propagación.

En la superficie el movimiento de las partículas es retrógrado con respecto al avance de las ondas. La velocidad de las ondas de Rayleigh, es menor que la velocidad de las ondas transversales. La velocidad de onda es de interés fundamental de los investigadores en sismología, geofísica, y en otros campos de la física y la ciencia de los materiales.

Podemos mencionar que existen ondas en la superficie libre del cuerpo, las cuales representan una distorsión de la superficie. Estas ondas presentan un decaimiento exponencial con respecto a la profundidad. Su velocidad (c_R) está dentro del rango $0 < c < c_S$. c_R solo depende de la relación c_D/c_S por tanto de la relación de Poisson, y para valores típicos de $c \approx 0.30$ a 0.33 , $c_R/c_S \approx 0.91$ a 0.95 , como se observa en la Fig. 2.

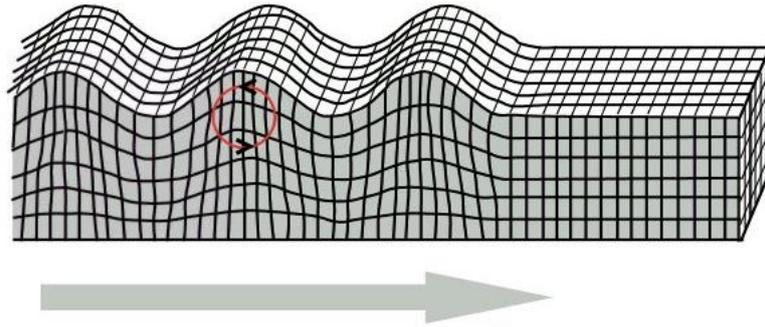


Fig.2 Propagación y comportamiento de una onda de Rayleigh. (Reproducido desde www.geo.mtu.edu Michigan Tech)

Dentro de este tipo de ondas se pueden diferenciar dos modalidades, ondas Rayleigh y ondas Love en honor a los científicos que demostraron teóricamente su existencia. Las ondas Love (Fig. 3a y 3b) se originan en la interface de dos medios con propiedades mecánicas diferentes; en este caso el movimiento de las partículas es perpendicular a la dirección de propagación de la perturbación, similar a las ondas S, pero solo ocurre en el plano de la superficie terrestre.

ONDAS DE SUPERFICIE

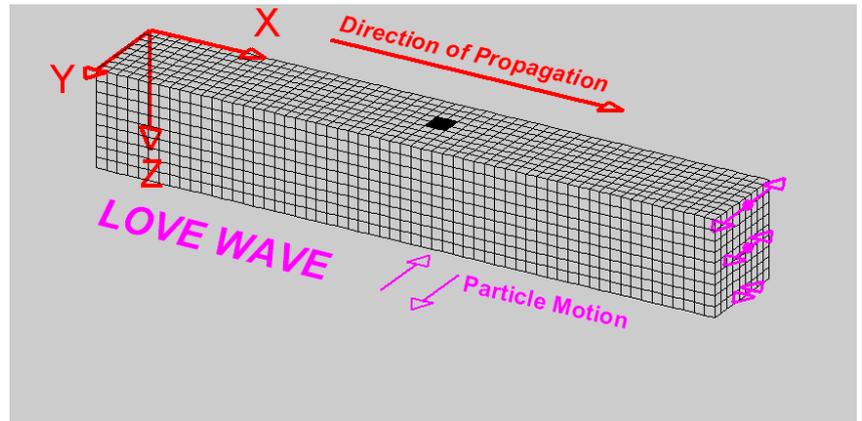


Fig.3a Propagación de las partículas en las ondas de Love.
(Reproducido desde www.geo.mtu.edu, Michigan Tech)

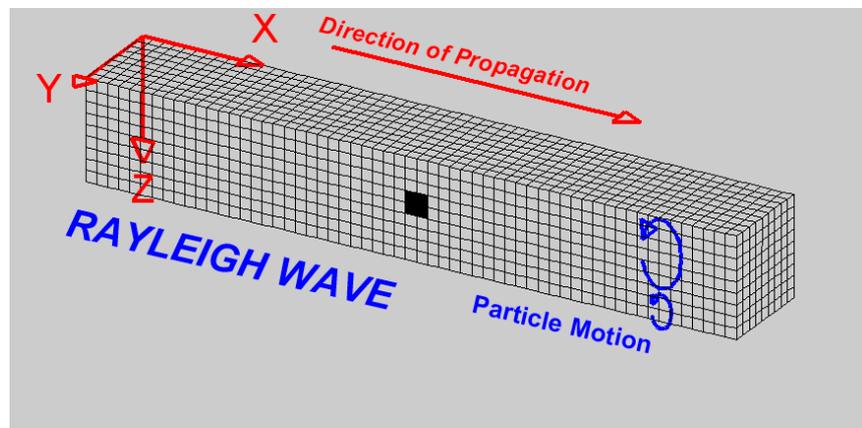


Fig.3b Propagación de las partículas en las ondas de Rayleigh.
(Reproducido desde www.geo.mtu.edu, Michigan Tech)

El análisis de las ondas de superficie generadas mediante impacto o vibración forzada en la superficie de un sólido constituye una técnica de auscultación geofísica con grandes posibilidades en el campo de Ingeniería Civil. La importancia del método radica, en su capacidad para obtener propiedades elásticas del terreno bajo las capas más rígidas. Frente a otros métodos sísmicos, que tienen esta capacidad tales como el «*cross-hole*» (técnica de detección de la velocidad de onda S en subsuelos por medio de una configuración de sensores pares) y «*down-hole*» (técnica de detección de la velocidad de onda S en subsuelos a través de un solo sensor), tiene la ventaja de no necesitar la perforación de sondeos para llevar a cabo el ensayo.

Se sabe que la vibración de un medio elástico, homogéneo, isótropo e infinito se propagaba en forma de ondas esféricas con dos velocidades distintas; una velocidad de corte, tangencial o transversal, c_s o β (onda S) y una velocidad de compresión o longitudinal, c_p o α (onda P), siendo:

$$V_s = \beta = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2.31)$$

Amplificaciones sísmicas en medios estratificados

$$V_s = \alpha = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}} \quad (2.32)$$

$$G = \frac{E}{2(1+2\nu)} \quad (2.33)$$

Dónde:

E= módulo de Young del medio elástico

ρ = densidad

ν = coeficiente de Poisson.

Los métodos sísmicos son un tipo de método geofísico, y constituyen pruebas realizadas para la determinación de las características geotécnicas de un terreno, como parte de las técnicas de un reconocimiento geotécnico.

Las ondas sísmicas que atraviesan un terreno pueden ser:

- Longitudinales o de compresión.
- Transversales o de cizallamiento.
- Superficiales.

La velocidad de propagación de las ondas sísmicas en el terreno depende de sus características de deformidad. En la hipótesis de suponer un comportamiento elástico para el terreno, la velocidad de las ondas longitudinales y transversales es función del módulo elástico y del coeficiente de Poisson (ambos dinámicos), por lo que con ambas expresiones pueden obtenerse dichos parámetros.

Las ondas longitudinales son más rápidas que las transversales, lo que dificulta la detección de estas últimas en campo. Por ello, en general se obtiene el módulo elástico a partir de la velocidad longitudinal, estableciendo hipótesis respecto al valor del coeficiente de Poisson. El módulo dinámico tiene un valor mayor que el estático, ya que se obtiene para incrementos tensionales pequeños como son los producidos por ondas sísmicas. La relación entre el módulo dinámico y el estático se considera normalmente de 4, pero el rango puede estar entre 1 y 20.

El método sísmico de refracción se basa, tanto en el hecho de la diferencia de velocidad de la onda sísmica en los distintos terrenos, como en que las ondas al cruzar la frontera entre dos tipos de terreno distinto sufren refracción, (al igual que sucede con las ondas de luz), cambiando su dirección en un ángulo cuyo valor depende de la relación entre las velocidades de onda de cada terreno

II.2.6 Ondas de Stoneley.

Las ondas de Stoneley son ondas de superficie de alta amplitud (u onda de interfaz) que se propaga a lo largo de una interfaz sólido-sólido. Este tipo de onda tiene una intensidad máxima en la interfaz y decrece de manera exponencial conforme se va alejando de ella. El análisis de este tipo de onda permite estimar la ubicación de fallas y permeabilidad de la formación de estratos. Las ondas de Stoneley son una fuente de ruido en perfiles sísmicos

Amplificaciones sísmicas en medios estratificados

verticales y son comúnmente generadas a lo largo de las paredes de un pozo lleno de fluido, estas ondas son en gran parte, las responsables del componente de baja frecuencia de la señal de la fuente sónica y su atenuación es sensible a las fracturas y formación de estratos. Por lo tanto, el análisis de las ondas de Stoneley hace posible estimar las propiedades de estas rocas [37].

Las ondas de Stoneley se pueden propagar a lo largo de una interface fluido-líquido, como a lo largo de las paredes de un pozo lleno de líquido y son el principal componente de baja frecuencia de la señal generada por las fuentes sonoras en perforaciones. El análisis de las ondas de Stoneley permite la estimación de las ubicaciones de las fracturas y permeabilidad de la formación geológica. Las ondas de Stoneley son una fuente importante de ruido en perfiles sísmicos verticales.

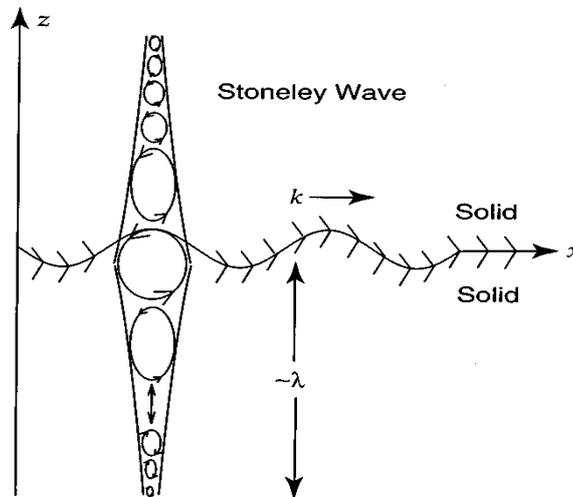


Fig.4 Comportamiento de una onda de Stoneley. (Reproducido desde Meegan et al: *Nonlinear Stoneley and Scholte waves* 1999)

Las ondas de Stoneley no están directamente afectadas por la permeabilidad del suelo, sino por la movilidad, el cual se conoce como la relación de permeabilidad de viscosidad (μ) de un fluido. Qobi [42]; Brie [43]. En general μ es identificada como una constante dentro de un pozo. Por último la permeabilidad puede influenciar la propagación de las ondas de Stoneley en tres formas [44], [43] tales como fracturas, litología (características de las rocas sedimentarias en diversas configuraciones geológicas) o cambios de diámetro en un pozo. Por otra parte, la velocidad de onda de Stoneley decrece en contraste con el incremento de la formación de permeabilidad [45] induciendo así un efecto de dispersión. Otro factor importante es la atenuación de las ondas de Stoneley, que ocurre cuando el fluido es presionado dentro de la formación permeable, debido a esto, se produce una pérdida de energía entre el movimiento relativo del fluido y la matriz del sólido elástico. Como tal, podemos considerar a la onda de Stoneley como una onda análoga a la onda de Rayleigh ya que esta puede converger en una interfaz plana entre dos distintos materiales elásticos, este tipo de onda se atenúa exponencialmente con la distancia respecto a las interfaces de cada material.

II.2.7 Ondas de Scholte.

Las ondas de Scholte son un tipo de onda de superficie que se localiza en la interfaz fluido-sólido. Tienen un movimiento similar al de las partículas de ondas de Rayleigh, pero su velocidad de propagación es ligeramente inferior. La profundidad de penetración en el fluido es pequeña cuando el sólido adyacente es muy suave, esto ocurre cuando la velocidad de la onda S es menor que la velocidad del sonido en el fluido. Esta es la situación para las distintas configuraciones de interfaces fluido-sólido. Pero la profundidad de penetración puede ser mucho más grande si la velocidad de penetración si la velocidad de la onda S en el sólido es más grande que la velocidad del sonido en el sólido como comúnmente se observa en las configuraciones de rocas-agua, por citar un ejemplo.

En la figura 5, se puede observar el movimiento de estas, en cada uno de los medios que componen la interfaz, en la parte del fluido el movimiento de las partículas es de forma elíptica y paralela al límite de la frontera, haciéndose más pequeña conforme se aleja de ésta. En el sólido podemos observar claramente como el fenómeno es inverso o bien perpendicular al límite de la frontera y retrogrado al movimiento natural de la propagación de la onda, del mismo modo que en el fluido, es menos apreciable su propagación conforme se aleja de la interfaz.

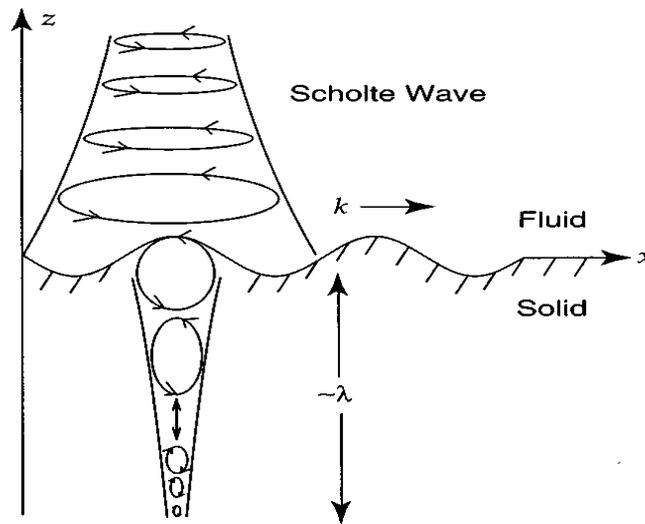


Fig.5 Onda de Scholte y forma de propagación en una interfaz sólido-fluido.

(Reproducido desde Meegan et al: Nonlinear Stoneley and Scholte waves 1999)

Capítulo III

Ecuaciones integrales

III.1 Métodos integrales de elementos frontera.

En algunas áreas de la física tales como la mecánica de sólidos, electromagnetismo, dinámica de fluidos la resolución de problemas que se presentan en estas disciplinas puede ser reducida a una ecuación integral, la cual está definida sobre la frontera del dominio a analizar. Esto significa que la cantidad de información a analizar que se encuentra en el dominio se expresa a través de la frontera. Esto fue propuesto por George Green, aunque algunos lo atribuyen a Carl Friedrich Gauss. Las ecuaciones integrales de frontera expresan la solución de un problema en términos de los diferentes valores que se presentan en la frontera del dominio. Las ecuaciones integrales de frontera son presentadas como la teoría del potencial y se han agrupado en dos categorías: Las ecuaciones integrales de frontera directas, las cuales están relacionadas con las variables físicas (campos de ondas de desplazamientos y tracciones) y las ecuaciones integrales de frontera indirectas las cuales están relacionadas con las incógnitas intermedias, estas están representadas como una distribución de fuentes ficticias o aparentes a lo largo de la frontera.

La solución para los métodos de elementos frontera directos e indirectos se realiza de manera numérica, como procedimiento general, se puede seguir la siguiente metodología:

- Procedemos a discretizar las fronteras en un conjunto de puntos o elementos.
- Se realiza la evaluación de las funciones de Green en el medio que se está analizando, al realizar esto debemos tener en cuenta las singularidades que se presenten al querer evaluar las funciones de Green en las ubicaciones de las fuentes.
- El sistema de ecuaciones resultante se resuelve a través de algún método numérico.

Los métodos de elementos frontera expresan de manera directa la física del problema que se está analizando, aunque no pueden manejar de fácilmente los problemas no lineales, demuestran ser bastante eficientes en el análisis de propagación de ondas acústicas o sísmicas subterráneas, las cuales pueden consistir en capas homogéneas separadas por diferentes configuraciones de frontera. La ecuación integral resultante es considerada la solución exacta de la ecuación diferencial parcial original o ecuación gobernante.

III.2 Métodos integrales de elementos frontera directos.

La formulación de los BIE directos en elastodinámica fueron realizados en los primeros trabajos de Somigliana hace más de un siglo. Esta formulación se basa en la teoría de los potenciales elásticos y establece que el campo de valores de un problema de elasticidad lineal en un dominio dado está completamente determinado por los desplazamientos y tracciones a lo largo de las fronteras del dominio, esto puede ser visto como una aplicación del teorema recíproco de Maxwell-Betti. Los trabajos de Somigliana están basados en los trabajos de Stokes quién encontró la respuesta fundamental (o funciones de Green) para un medio elástico isótropo y homogéneo.

Considerando un volumen de material elástico encerrado por una frontera, el campo de desplazamiento u_i en un punto x y en un tiempo t puede ser expresado como una función del desplazamiento y tracción t_j a lo largo de la frontera por medio del teorema de representación de Somigliana:

$$cu_i(x, t) = \int_0^t d\tau \int_S \left[t_j G_{ji}(\xi, t, x, \tau) - u_j \sum_{jkl} (\xi, t, x, \tau) n_k(\xi) \right] dS(\xi) \quad (3.1)$$

Donde $G_{ji}(\xi, t, x, \tau)$ y $\sum_{jkl}(\xi, t, x, \tau)n_k(\xi)$ son las respuestas en términos de desplazamientos y esfuerzos, en un tiempo t en el punto ξ de un medio infinito homogéneo debido a una fuerza de impulso aplicada a un tiempo τ en el punto x en la dirección i . $n_k(\xi)$ es la normal que apunta fuera de V . El volumen de los elementos en la frontera se asume nulo, pero en caso contrario las contribuciones de estas pueden fácilmente ser sumadas. La constante c toma valores de 1, 0.5 o 0 dependiendo de la posición de x dentro de V , sobre V o fuera de V respectivamente asumiendo que S tiene una frontera suave. Estos valores de c se obtienen del volumen de integración del producto $\delta(x - \xi, t - \tau)u_i(\xi, \tau)$.

Las funciones de Green para un medio elástico, homogéneo e isótropo pueden ser escritas como:

$$G_{ji}(\xi, t, x, \tau) = \frac{1}{4\pi\mu r} (f_2 \delta_{ij} + (f_1 - f_2)\gamma_1 \gamma_2) \quad (3.2)$$

Donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $\gamma_i = (x_i - \xi_i)/r$ es el vector unitario que va de ξ a x y r es la distancia entre estos puntos. Las funciones f_1 y f_2 están dadas por:

$$f_1(r, t) = \left[\frac{\beta}{\alpha} \right]^2 \delta \left(r - \frac{r}{\alpha} \right) + \frac{2}{(r/\beta)^2} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \delta(t - \tau) \tau d\tau \quad (3.3)$$

$$f_2(r, t) = \delta \left(r - \frac{r}{\beta} \right) + \frac{1}{(r/\beta)^2} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \delta(t - \tau) \tau d\tau \quad (3.4)$$

Donde α y β son las velocidades de las ondas P y S respectivamente y μ es el módulo cortante. f_1 es proporcional al desplazamiento radial mientras que f_2 es proporcional al desplazamiento transversal. En la frecuencia dominante la

transformada de Fourier nos permite encontrar las expresiones correspondientes de f_1 y f_2 estas funciones pueden ser expresadas utilizando exponenciales complejas. La solución para el caso 2D es similar al de 1D, podemos expresar las soluciones correspondientes en términos de radicales en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia las funciones de Green se expresan en términos de las funciones cilíndricas de Hankel, en 2D la singularidad en el punto de aplicación de la carga es logarítmica.

Las tracciones asociadas a las funciones de Green están dadas por:

$$T_{ji} = (\xi, t, \mathbf{x}, \tau) = \sum_{jik} (\xi, t, \mathbf{x}, \tau) \eta_k(\xi)$$

Por lo que la ecuación 3.1 puede reescribirse como:

$$cu_i(\mathbf{x}, t) = \int_0^t d\tau \int_S [t_j(\xi, \tau) G_{ji}(\xi, t, \mathbf{x}, \tau) - u_j(\xi, \tau) T_{ji}(\xi, t, \mathbf{x}, \tau)] dS(\xi) \quad (3.5)$$

Esta ecuación es la base para los métodos integrales de frontera, discretizando esta integral, las ecuaciones integrales de frontera pueden ser transformadas en un sistema lineal de ecuaciones con incógnitas de desplazamientos y tracciones en la frontera y si se proporcionan las suficientes condiciones de frontera el sistema puede ser resuelto. Un importante punto aquí es que este procedimiento implica que las funciones de Green tienen que ser evaluadas en la misma ubicación de las fronteras por lo cual se presentan singularidades en dicha función. Para el caso de los desplazamientos de Green la singularidad es débil y puede ser tratada analíticamente, mientras que las singularidades asociadas a las tracciones de Green pueden ser tratadas con las ecuaciones de Cauchy implementando técnicas numéricas de aproximación.

Aplicando la ley de Hooke a las ecuaciones 3.1 y 3.5 se puede evaluar el campo de esfuerzos dentro del dominio, sin embargo: si requerimos el esfuerzo sobre S se necesitan técnicas numéricas importantes que traten las singularidades generadas.

III.3 Métodos integrales de elementos frontera indirectos.

La formulación indirecta en problemas elasto-dinámicos expresa el campo de onda como un integral sobre las fronteras que contienen fuentes elementales de irradiación de onda, debido al hecho de que la fuente es aplicada solamente en el fluido, solo ondas difractadas aparecen en el sólido y estas pueden ser establecidas como sigue.

Considere un dominio V, con una frontera S. Si el dominio está formado por un sólido elástico, el campo de desplazamiento bajo excitación armónica y despreciando las fuerzas de cuerpo, puede ser expresado por medio de una ecuación integral de frontera de capa simple.

$$u_i^d(x) = \int_{\partial S} G_{ij}(x, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi \quad (3.6)$$

Donde $u_i(x)$ = i -ésimo componente de desplazamiento en el punto x , $G_{ij}(x; \xi)$ = función de Green, la cual representa el desplazamiento producido en la dirección i en x debido a la aplicación de una fuerza unitaria en dirección j en el punto ξ . $\phi_j(\xi)$ es la densidad de fuerza en la dirección j en el punto ξ . El producto $\phi_j(\xi) dS_\xi$ es la distribución de fuerza en la superficie S (los subíndices i, j indican que están limitados a ser 1 o 3). El subíndice en la diferencial muestra la variable sobre la cual la integración está hecha. Esta ecuación integral puede ser obtenida de la representación de Somigliana [46]. Se ha demostrado que si $\phi_j(\xi)$ es continuo a lo largo de S , en ese caso el campo de desplazamiento es continuo a través de S [47].

La ecuación 3.6 es análoga al principio de Huygens y puede ser vista como la transcripción matemática de la misma, el cual establece que cada punto de una frontera actúa como como fuente secundaria de irradiación de ondas. Este principio puede aplicarse a cualquier frente de onda. La representación integral (3.6) permite el cálculo de esfuerzos y tracciones aplicando la ley de Hooke directamente y la ecuación de Cauchy, respectivamente. Excepto para la singularidades en la frontera, esto es, cuando x es igual a ξ en la superficie S de un proceso límite establecido en consideraciones de equilibrio, alrededor de una vecindad interior de la frontera, por lo tanto, podemos escribir, para x en S ,

$$t_i^d(x) = c_2 \phi_i(x) + \int_{\partial S} T_{ij}(x, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi \quad (3.7)$$

Donde $t_i(x)$ = es la i -ésima componente de tracciones, $c_2 = 0.5$ si x tiende a la frontera S desde adentro de la región, $c_2 = -0.5$ si x tiende a S desde afuera de la región, o $c_2 = 0$ si x no está en S . $T_{ij}(x, \xi)$ = la función de Green de tracciones. La tracción en la dirección i en el punto x , asociado al vector unitario $n_i(x)$, debido a la aplicación de una fuerza unitaria en la dirección j en ξ sobre S . la función de Green en 2D para espacios infinitos puede verse en [48,49]. Cuando se utilizan métodos de frontera se discretizan únicamente las fronteras del medio, estas se dividen en elementos y en estos se simula la aparición de fuerzas ficticias para poder modelar los campos difractados y de reflejo según sea el caso. La exactitud de los resultados depende enteramente del número de elementos y de la longitud de onda. Si se desea estudiar problemas en alta frecuencia, se tienen longitudes de onda pequeña, esto implica una discretización fina y un mayor número de elementos, por lo tanto, el número de sistemas de ecuaciones se incrementan. Sin embargo las matrices que resultan presentan un gran número de elementos que son nulos. Esta característica ha permitido resolver el problema mediante la técnica de matrices, aunque en problemas de frecuencias altas el número de elementos nulos tiende a disminuir, por lo que es necesario utilizar otras técnicas de resolución.

Capítulo IV

Planteamiento del problema

IV.1 Formulación del problema por medio del método indirecto de elemento frontera.

La formulación del método de elementos frontera en un medio estratificado requiere satisfacer las condiciones de continuidad de desplazamientos y tracciones entre los diferentes estratos. En cada una de estas condiciones se establece una ecuación integral, generada por la superposición de las contribuciones de las fuentes ficticias colocadas en la frontera designada al punto de estudio. Con el conjunto de ecuaciones integrales de frontera se establece un sistema lineal de ecuaciones. Al resolver este sistema se determinan dichas fuerzas ficticias, con lo que por lo tanto es posible determinar los desplazamientos en los puntos de interés.

IV.1.1 Campo de presiones y desplazamientos en el fluido.

El campo de presiones en un fluido obedece ciertas propiedades para su tratamiento las cuales se enlistan a continuación.

- La presión en un punto de un fluido en reposo es igual en todas las direcciones
- La presión en todos los puntos situados en el mismo plano horizontal de un fluido en reposo es la misma
- En un fluido en reposo la fuerza de contacto que se ejerce en el interior de un fluido es normal a la superficie de contacto
- La fuerza asociada a la presión en un fluido ordinario en reposo se dirige siempre hacia el exterior del fluido, por lo que debido al principio de acción y reacción, siempre el fluido está siempre a compresión y jamás en tracción
- En cualquier fluido en reposo, un punto cualquiera de una masa líquida está sometida a una presión en función únicamente de la profundidad a la que se encuentra el punto

Las presiones de campo libre en un fluido debidas a la acción de una fuente puntual pueden ser expresadas como:

$$p^{0F}(\mathbf{x}) = c(\omega)H_0^{(2)}(\omega r/c^F) \quad (4.1)$$

Donde $p^{0F}(\mathbf{x})$ es la presión incidente provocada por la fuente puntual en el fluido, \mathbf{x} es la coordenada $\{x_1, x_2\}$ donde se desea conocer la presión incidente, este también se interpreta como el coeficiente de escala de la presión incidente, $H_0^{(2)}$ es la función de Hankel de orden cero y segunda especie, ω es la frecuencia angular, c^F la velocidad de propagación de las ondas en el fluido y r es la distancia de la fuente al punto donde se calcula la presión incidente.

Amplificaciones sísmicas en medios estratificados

Para el IBEM, el incidente pulsante (fuente) en el fluido está también representado por (4.1) y aplicado como se muestra en la Fig.6

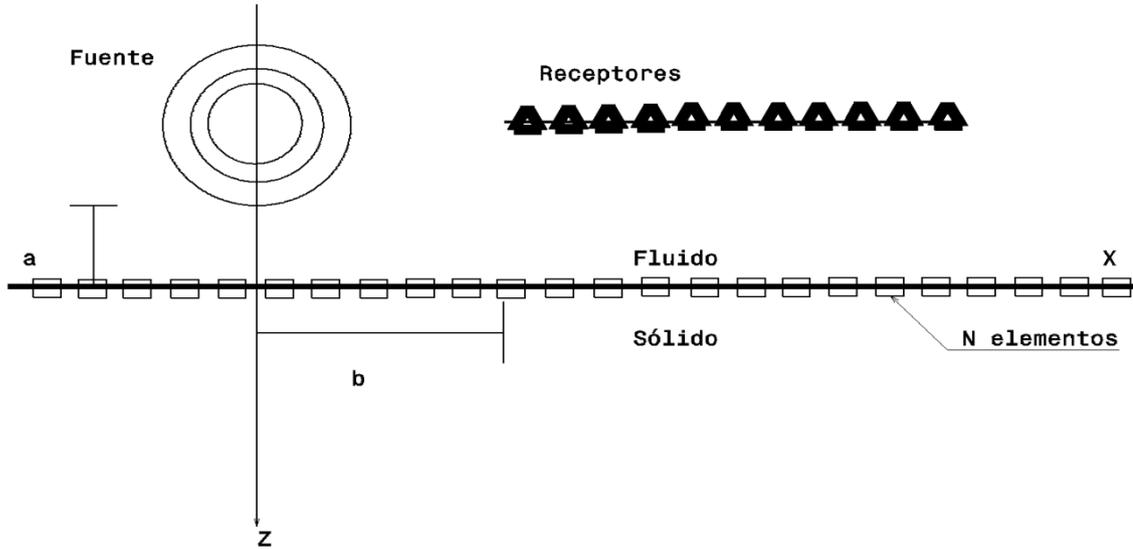


Fig.6 Modelo de interfaz sólido-fluido excitado por una fuente, resueltos por medio de IBEM.

Si asumimos que la ecuación que gobierna la onda de movimiento en el fluido está dada por.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \rho_F \frac{\partial^2 u_1(\mathbf{x})}{\partial t^2}, \quad i, j = 1, 3 \quad (4.2)$$

Si consideramos que los esfuerzos en el fluido pueden ser conectados a la presión generada por el incidente pulsante, entonces, podemos expresar esto como.

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = -p^{0F}(\mathbf{x}) \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 3 \quad (4.3)$$

Entonces el campo de desplazamientos se puede representar por la bien conocida forma:

$$u_n^{0F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho_F \omega^2} \frac{\partial p^{0F}(\mathbf{x})}{\partial n} \quad (4.4)$$

Para expresar el campo de ondas difractadas (para presión y desplazamiento, respectivamente) en el fluido debido a la fuente impactante en el medio elástico, proponemos el uso de la siguiente representación integral:

$$p^{d^F}(\mathbf{x}) = \int_{\partial F} G^F(\mathbf{x}, \xi) \Psi(\xi) dS_\xi, \quad (4.5)$$

$$u_n^{d^F}(\mathbf{x}) = c_1 \Psi(\mathbf{x}) + \frac{1}{\rho_F \omega^2} \int_{\partial F} \frac{\partial G^F(\mathbf{x}, \xi) \Psi(\xi) dS_\xi}{\partial n} \quad (4.6)$$

En donde,

$$G^F(\mathbf{x}, \xi) = \frac{\rho_F \omega^2}{4i} H_0^{(2)}(\omega r / c^F) \quad (4.7)$$

$\Psi(\cdot)$ = la densidad de fuerza para el fluido, $G^F(\cdot)$ = función de Green para el fluido, y $c_1 = -0.5$ define la orientación de la región dado que \mathbf{x} tiende a S hacia afuera (ver la explicación para c_2 , dada abajo).

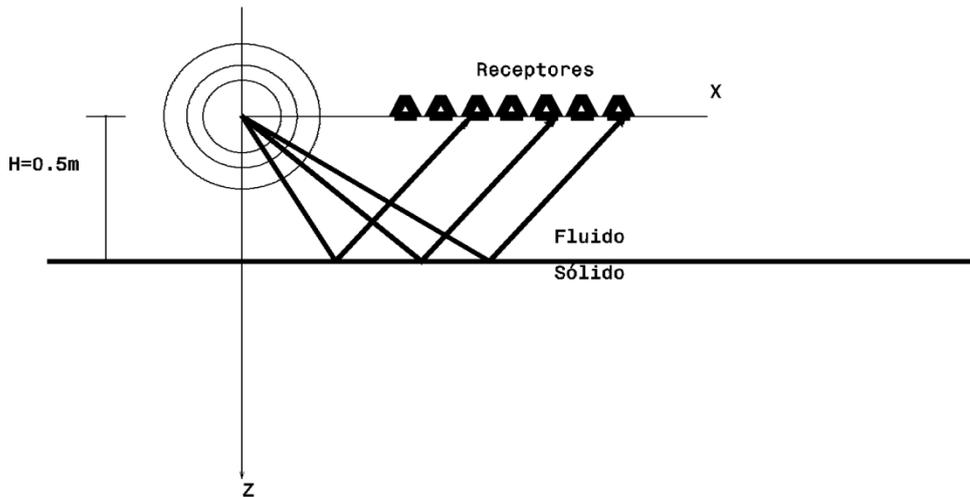


Fig.7 Campo de ondas reflejado en el líquido provocado por el estrato sólido.

El campo completo de presión y desplazamiento en el fluido, además de uno libre y difractado pueden ser escritos respectivamente por:

$$p^F(\mathbf{x}) = p^{0^F}(\mathbf{x}) + p^{d^F}(\mathbf{x}) \quad (4.8)$$

$$u_n^F(\mathbf{x}) = u_n^{0^F}(\mathbf{x}) + u_n^{d^F}(\mathbf{x}) \quad (4.9)$$

Considerando que la fuente está siendo aplicada solamente al fluido, solo ondas difractadas aparecen en el sólido y se puede establecer lo siguiente.

Amplificaciones sísmicas en medios estratificados

Considere un dominio V , con una frontera S . Si el dominio está ocupado por un sólido elástico e ignoramos las fuerzas del cuerpo, el campo de desplazamiento bajo excitación puede ser expresado por medio de una ecuación integral de frontera con un simple estrato, la cual se presenta a continuación:

$$u_i^d(x) = \int_{\partial S} G_{ij}(x, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi, \quad (4.10)$$

Donde $u_i(x)$ = i ésimo componente del desplazamiento en el punto x , $G_{ij} = (x; \xi)$ es la función de Green, la cual representa el desplazamiento producido en la dirección i en x al ser aplicada una fuerza unitaria en la dirección j en el punto ξ , $\phi_j(\xi)$ es la densidad de la fuerza en la dirección j en el punto ξ . El producto $\phi_j(\xi) dS_\xi$ es la distribución de la fuerza en la superficie S (los subíndices i, j corren de 1 a 3). El subíndice en la diferencial muestra la variable sobre la cual se realiza la integración. Esta ecuación integral puede ser obtenida de la representación de Somigliana [30]. Más adelante, se demostró que si $\phi_j(\xi)$ es continua a lo largo de S , en este caso, el campo de desplazamiento es continuo sobre S [47].

Esta representación integral permite el cálculo de esfuerzos y tracciones utilizando la aplicación directa de la ley de Hooke y la ecuación de Cauchy respectivamente, excepto para las singularidades en la frontera, esto es, cuando x es igual a ξ en la superficie S . Desde un proceso limitante establecido en las condiciones de equilibrio alrededor de una vecindad interna de la frontera, uno puede escribir para x en S .

$$t_i^d(x) = c_2 \phi_i(x) + \int_{\partial S} T_{ij}(x, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi \quad (4.11)$$

Donde $t_i(x)$ = es el i ésimo componente de las tracciones, $c_2 = -0.5$ si x tiende a la frontera S “desde adentro” de la región, $c_2 = 0.5$ si x tiende a S “desde afuera” la región, o de $c_2 = 0$ si x no está en S . $T_{ij}(x; \xi)$ el cual es la función de tracción de Green, i.e. la tracción en la dirección i en el punto x , relacionado al vector unitario $n_i(x)$, debido a la aplicación de una fuerza unitaria en la dirección j en ξ sobre S . Se pueden observar en [48,49] las funciones de Green en 2D para espacios infinitos.

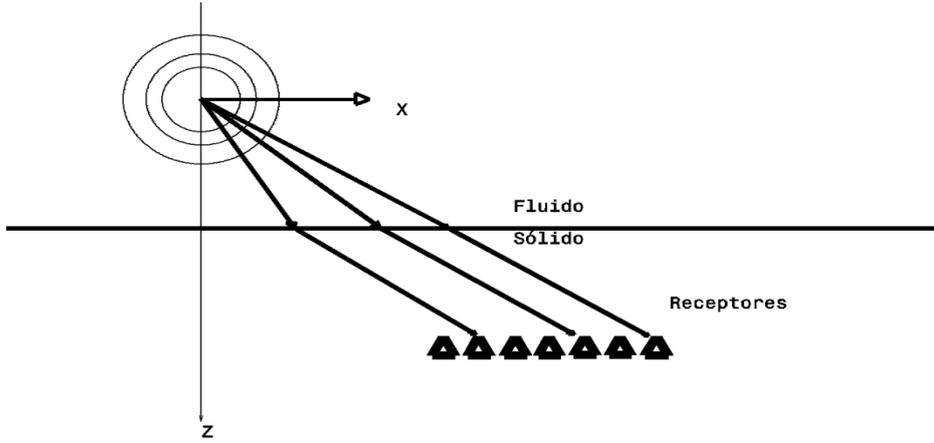


Fig.8 Campo difractado en un sólido.

En un medio infinito, elástico, homogéneo e isótropo, las funciones de Green para dependencia tiempo-armónico $e^{i\omega t}$, donde i^2 es igual a -1, ω la frecuencia angular y t el tiempo, pueden expresarse como:

$$G_{ij} = A\delta_{ij} - B(2\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \tag{4.12}$$

$$T_{ij} = \frac{\mu}{r} \left\{ \left[-4B + \lambda \frac{D(\omega r/\alpha)}{2\mu\alpha^2} \right] \gamma_j n_i + \left[-4B + \frac{D(\omega r/\beta)}{2\beta^2} \right] \times [\gamma_i n_j + \gamma_k n_k \delta_{ij}] \right\} + \frac{\mu}{r} \{ (C + 16B) \gamma_i \gamma_j \gamma_k n_k \} \tag{4.13}$$

Donde,

$$A = \frac{1}{i8\rho} \left[\frac{H_0^{(2)}(\omega r/\alpha)}{\alpha^2} + \frac{H_0^{(2)}(\omega r/\beta)}{\beta^2} \right] \tag{4.14}$$

$$B = \frac{1}{i8\rho} \left[\frac{H_2^{(2)}(\omega r/\alpha)}{\alpha^2} + \frac{H_2^{(2)}(\omega r/\beta)}{\beta^2} \right] \tag{4.15}$$

$$C = \frac{D(\omega r/\alpha)}{\alpha^2} - \frac{D(\omega r/\beta)}{\beta^2} \tag{4.16}$$

$$D(P) = \frac{i}{2\rho} p H_1^{(2)}(p) \quad (4.17)$$

λ y μ son las constantes de Lamé, ρ es la densidad de masa, α y β corresponden a las velocidades de propagación de las ondas P y S respectivamente; $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$, $\gamma_j = \frac{(x_j - \xi_j)}{r}$, δ_{ij} es la delta de Kronecker y $H_m^{(2)}$ es la función de Hankel de segunda especie y orden m .

IV.1.1.2 Condiciones de frontera.

De la configuración descrita en la Fig.6, es conveniente dividir el dominio en 3 regiones (R, E y F), para las cuales se deben establecer las condiciones de frontera apropiadas. Estas condiciones para interfaces solido-fluido pueden escribirse como a continuación se muestra:

Para la interface solido-fluido.

$$u_3^R(\mathbf{x}) = u_3^F(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \partial_1 R = \partial F \quad (4.18)$$

$$t_1^R(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \partial_1 R \quad (4.19)$$

$$t_3^R(\mathbf{x}) = -p^F(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \partial_1 R \quad (4.20)$$

Para la interface solida continua.

$$t_i^R(\mathbf{x}) = t_i^E(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \partial_2 R = \partial E \quad (4.21)$$

$$u_i^R(\mathbf{x}) = u_i^E(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \partial_2 R = \partial E \quad (4.22)$$

Expresando (4.18) como función del campo difractado (4.11) para campos sólidos, incidentes y difractados (4.4 y 4.6 respectivamente) para el fluido obtenemos los siguientes:

$$\int_{\partial_R} G_{3j}^R(\mathbf{x}, \xi) \phi_j^R(\xi) dS_\xi = \frac{1}{\rho_F \omega^2} \frac{\partial p^0(\mathbf{x})}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_3} + c_1 \Psi(\mathbf{x}) + \int_{\partial F} \frac{\partial G^F(\mathbf{x}, \xi)}{\partial x_3} \Psi(\xi) dS_\xi \quad (4.23)$$

$$\forall \mathbf{x} \in \partial F = \partial_1 R$$

La condición de tracción libre (4.19) esta expresada de su forma integral (4.11), resultando

$$c_2 \frac{1}{2} \phi_i^R(x) + \int_{\partial R} T_{1j}^R(x, \xi) \phi_j^R(\xi) dS_\xi = 0, \quad \forall x \in \partial_1 R \quad (4.24)$$

Entonces, 4.11 puede expresarse en términos de las ecuaciones 4.24, 4.1 y 4.18, por lo tanto tenemos.

$$c_2 \phi_i^R(x) + \int_{\partial R} T_{3j}^R(x, \xi) \phi_j^R(\xi) dS_\xi = -c(\omega) H_0^{(2)}(\omega r / c^F) - \int_{\partial R} G^F(x, \xi) \Psi(\xi) dS_\xi, \quad \forall x \in \partial_2 F = \partial E \quad (4.25)$$

Las ecuaciones (4.21) y (4.22) expresan la condición de continuidad que debe existir entre la interfase de las regiones R y E (fronteras $\partial_2 R$ y ∂E). Estas se definen a continuación:

$$c_2 \phi_i^R(x) + \int_{\partial R} T_{ij}^R(x, \xi) \phi_j^R(\xi) dS_\xi = c_2 \phi_i^R(x) + \int_{\partial E} T_{ij}^E(x, \xi) \phi_j^E(\xi) dS_\xi, \quad \forall x \in \partial_2 R = \partial \quad (4.26)$$

$$\int_{\partial R} G_{ij}^R(x, \xi) \phi_j^R(\xi) dS_\xi = \int_{\partial E} G_{ij}^E(x, \xi) \phi_j^E(\xi) dS_\xi, \quad \forall x \in \partial_2 R = \partial E \quad (4.27)$$

IV.1.2 Discretización.

A continuación se presenta la discretización de las ecuaciones 4.23 a 4.27. Considerando que las densidades de fuerza $\phi(x)$ y $\Psi(x)$ son constantes en cada elemento frontera (ver Fig.7) se realiza la integración gaussiana (o integración analítica, donde la función de Green es singular), por lo tanto la Ec.4.23 queda de la siguiente manera

$$\sum_{n=1}^{2N} \phi_j^R(\xi_n) g_{3j}^R(x_l, \xi_n) - \sum_{n=1}^N \Psi(\xi_n) k = \frac{1}{\rho_F \omega^2} \frac{\partial p^{0F}(x_l)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_3}, \quad l = 1, N \quad (4.28)$$

$$g_{3j}^R(x_l, \xi_n) = \int_{\Delta S_n} G_{3j}^R(x_l, \xi_n) dS_\xi \quad (4.29)$$

$$k = c_1 \delta_{ij} \delta_{1n} + \int_{\Delta S_n} \frac{\partial G^F(x_l, \xi_n)}{\partial x_3} dS_\xi \quad (4.30)$$

La ecuación 4.26 conlleva a:

$$\sum_{n=1}^{2N} \phi_i^R(\xi_n) t_{ij}^R(x_l, \xi_n) = 0, l = 1, N \quad (4.31)$$

$$t_{1j}^R(x_l, \xi_n) = c_2 \delta_{ij} \delta_{ln} + \int_{\Delta S_n} T_{1j}^R(x_l, \xi_n) dS_\xi \quad (4.32)$$

La ecuación 4.25 puede ser escrita como:

$$\sum_{n=1}^{2N} \phi_j^R(\xi_n) t_{3j}^R(x_l, \xi_n) + \sum_{n=1}^N \Psi(\xi_n) g^F(x_l, \xi_n) = -c(\omega) H_0^{(2)}\left(\frac{\omega r}{c^F}\right), l = 1, N \quad (4.33)$$

$$G^F(x_l, \xi_n) = \int_{\Delta S_n} G^F(x_l, \xi_n) dS_\xi \quad (4.34)$$

Las ecuaciones 4.26 y 4.27 pueden ser escritas como

$$\sum_{n=1}^{2N} \phi_j^R(\xi_n) t_{ij}^R(x_l, \xi_n) - \sum_{n=1}^N \phi_j^E(\xi_n) t_{ij}^E(x_l, \xi_n) = 0, l = 1, N \quad (4.35)$$

Y

$$\sum_{n=1}^{2N} \phi_i^R(\xi_n) t_{ij}^R(x_l, \xi_n)$$

Donde

$$t_{ij}^{R,E}(x_l, \xi_n) = c_2 \delta_{ij} \delta_{ln} + \int_{\Delta S_n} T_{ij}^{R,E}(x_l, \xi_n) dS_\xi$$

Y

$$g_{ij}^{R,E}(x_l, \xi_n) = \int_{\Delta S_n} G_{ij}^{R,E}(x_l, \xi_n) dS_\xi \quad (4.36)$$

$$G^F(x_l, \xi_n) = \int_{\Delta S_n} G^F(x_l, \xi_n) dS_\xi \quad (4.37)$$

Las ecuaciones 4.28, 4.31, 4.25, 4.35 y 4.36 forman el sistema de ecuaciones integrales a resolver. Una vez que las densidades de fuerza ($\phi(x)$ y $\Psi(x)$) fueron obtenidas, el desplazamiento completo y los campos de presión en el

Amplificaciones sísmicas en medios estratificados

fluido se encuentran por medio de las ecuaciones 4.8 y 4.9. Para el sólido los campos de desplazamiento y tracción se calculan aplicando las ecuaciones 4.10 y 4.11. En la siguiente sección verificamos la exactitud del IBEM y DWN para varios casos aplicados a una interfaz que consiste en la unión de dos semi-espacios, el primero un fluido y el segundo un sólido. Más adelante presentaremos resultados para modelos con capas utilizando el IBEM. Detalles adicionales del esquema de discretización pueden consultarse en [50-54].

$$\begin{bmatrix} G_{ZZ}^{S_1} & G_{ZZ}^{S_1} & -\partial_z G^F \\ T_{XX}^{S_1} & T_{XZ}^{S_1} & 0 \\ -T_{ZX}^{S_1} & -T_{ZZ}^{S_1} & -G^F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_X^{S_1} \\ \phi_Z^{S_1} \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho^{F-1} \omega^{-2} \partial_z p^{0F} \\ 0 \\ p^{0F} \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

IV.2 Desarrollo del método del número de onda discreto (DWN).

El método DWN es una de las técnicas para simular movimiento sísmico. Las ondas sísmicas radiadas desde una fuente pueden ser expresadas como una integral en el dominio del número de ondas. Además, la fuente está representada como una superposición de ondas planas homogéneas propagándose en ángulos discretos (Bouchon y Aki [50]). En este método, cuando el denominador del integrando se vuelve cero para un número de onda particular, entonces, la integración numérica puede ser una labor difícil. Para solucionar este problema, se sugirió un enfoque que incluyera frecuencia compleja como parte de las primeras propuestas del método DWN. A continuación, se muestra una breve descripción de este método aplicado a interfaces fluido-sólido.

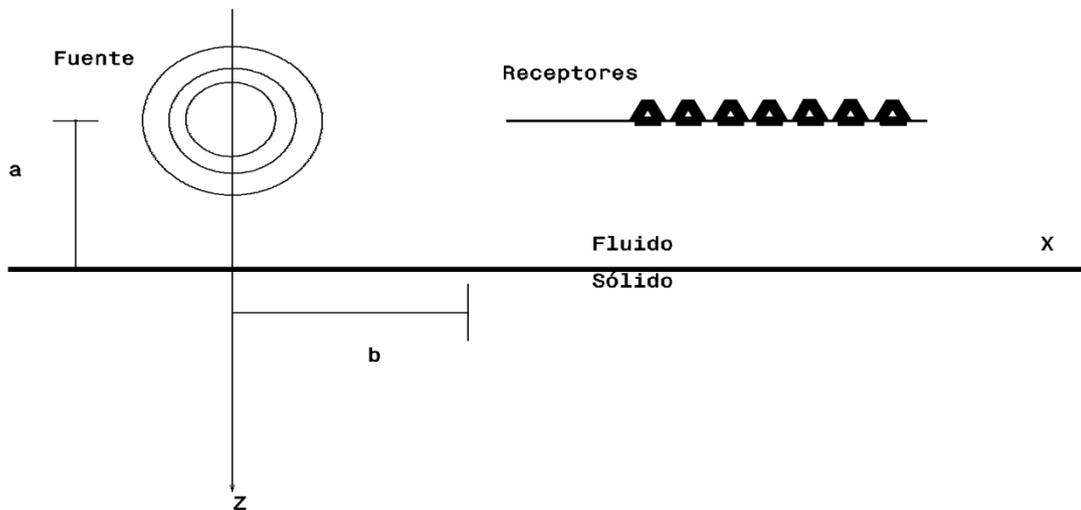


Fig.9 Modelo de interface sólido-fluido resuelto por DWN.

En este método, el problema a analizar consiste en determinar el campo de desplazamientos y de esfuerzos en un estrato sólido-líquido, debido a una fuente puntual en el estrato líquido.

Amplificaciones sísmicas en medios estratificados

Para expresar la presión incidente utilizamos la función de Hankel de segunda especie de orden cero:

$$H_0^2\left(\frac{\omega r}{c^F}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx - i\eta|z|}}{\eta} dk \approx \frac{1}{\pi} \sum_{n=-N}^N \frac{e^{-ik_n x - i\eta_n |z|}}{\eta_n} \Delta k \quad (4.39)$$

Dónde:

$$k = \frac{\omega s \sin \gamma}{c^F} \quad (4.40)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^F{}^2} - k^2} \quad (4.41)$$

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L} \quad (4.42)$$

$$k_n = n \Delta k \quad (4.43)$$

$$\eta_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^F{}^2} - k_n^2} \quad (4.44)$$

La presión incidente queda expresada de la siguiente manera

$$p^0 = \frac{1}{4i} H_0^2\left(\frac{\omega r}{c^F}\right) \quad (4.45)$$

Y el campo de presiones reflejado se puede expresar como:

$$p^r = \sum_{n=-N}^N A_n e^{-ik_n x + i\eta_n z} \quad (4.46)$$

Donde el término $e^{-ik_n x + i\eta_n z}$ indica que la onda se mueve en la dirección de $z < 0$.

El pulso incidente en el fluido mostrado en la figura 9 se puede representar como:

$$\begin{aligned}
 p^{0F}(x) &= C(\omega)H_0^{(2)}\left(\frac{\omega r}{c^F}\right) = \frac{C(\omega)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx_1 - i\eta|x_3|}}{\eta} dk \\
 &\approx \frac{C(\omega)}{\pi} \sum_{n=-N}^N \frac{e^{-ik_n x_1 - i\eta_n |x_3|}}{\eta_n} \Delta k
 \end{aligned}
 \tag{4.47}$$

Donde $p^{0F}(x)$ es el pulso incidente en el fluido, $x = \{x_1, x_2\}$ $C(\omega)$ coeficiente de escala para el pulso incidente, $H_0^{(2)}$ es la función de Hankel de orden cero y dos, ω es la frecuencia circular, c^F es la velocidad de compresión de la onda en el fluido, $r = r(x)$ es la distancia del receptor a la fuente (pulso incidente),

k es el número de ondas y $\eta = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^{F2}} - k^2}$ con $\text{Im } \eta < 0$. Si expresamos k en

valores discretos entonces tenemos $k_n = n\Delta y$ $\eta = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^{F2}} - k^2}$ con $\text{Im } \eta < 0$, Δk = número de incremento de ondas e i es el operador imaginario.

Si consideramos que los campos de presión y desplazamiento en el fluido están expresados como la suma de campos libres y difractados entonces tenemos.

$$p^F(x) = p^{0F}(x) + p^{dF}(x) = p^{0F}(x) + \sum_{n=-N}^N A_n e^{-ik_n x_1 + i\eta_n(x_3 - a)}
 \tag{4.48}$$

Y

$$\begin{aligned}
 u_3^F(x) &= \frac{1}{\rho_F \omega^2} \frac{\partial p^F(x)}{\partial x_3} = \\
 &\frac{1}{\rho_F \omega^2} \left\{ \sum_{n=-N}^N \frac{-i \text{sig}(x_3)}{\pi} e^{-ik_n x_1 - i\eta_n |x_3|} \Delta k + \sum_{n=-N}^N i A_n \eta_n e^{-ik_n x_1 + i\eta_n |x_3 - a|} \Delta k \right\}
 \end{aligned}
 \tag{4.49}$$

Donde ρ_F es la densidad del fluido, a es la distancia entre la fuente y la interfaz, y A_n representa el coeficiente de difracción a calcular para el fluido.

Para el sólido asumimos que los potenciales de desplazamiento tienen la forma.

$$\phi = \sum B_n e^{-ik_n x_1} e^{-i\gamma_n(x_3 - a)} \quad \text{y} \quad \psi = \sum C_n e^{-ik_n x_1} e^{-i\nu_n(x_3 - a)} \quad \text{donde } \gamma_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{\alpha^2} - k_n^2}$$

con $\text{Im} < 0$ y

$\nu_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2} - k_n^2}$ Con $\text{Im} < 0$. α y β Son las velocidades de compresión y cortante de la onda respectivamente. De manera similar B_n y C_n representan los coeficientes de difracción que se quieren encontrar para el sólido.

El campo de desplazamientos para el sólido está expresado como:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \quad \text{y} \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

El campo de esfuerzos puede ser calculado de la bien conocida ecuación:

$$\sigma_{ij}(x) = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}
 \tag{4.50}$$

Amplificaciones sísmicas en medios estratificados

Donde $\sigma_{ij}(x)$ = el tensor de esfuerzo, λ y μ son las constantes de Lamé, ε_{ij} = es el tensor de deformación y δ_{ij} = la delta de Kronecker.

Las condiciones de frontera a ser aplicadas a la interface son:

$$u_3^R(x) = u_3^F(x) \tag{4.51}$$

Y para las tracciones

$$t_1^R(x) = 0 \tag{4.52}$$

$$t_3^R(x) = -p^F(x) \tag{4.53}$$

Una vez que las condiciones de frontera fueron aplicadas los coeficientes desconocidos A_n, B_n, C_n se obtienen de el campo de presión en el fluido es entonces finalmente calculada por medio de (4.2). El sistema de ecuaciones a resolver esta dado por:

$$\begin{bmatrix} \frac{-i\eta_n}{\rho\omega^2} & -i\gamma_n & -ik_n \\ 1 & -\lambda(k_n^2 + \gamma_n^2) - 2\mu\gamma_n^2 & 2\mu k_n v_n \\ 0 & -2k_n \gamma_n & v_n^2 - k_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\Delta k}{\rho\omega^2\pi} e^{-i\eta_n a} \\ -\frac{\Delta k}{4\pi\eta_n} e^{-i\eta_n a} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.54}$$

III.5 Ecuaciones integrales en una región sólido-fluido-sólido para IBEM.

Para este caso en particular, las ecuaciones integrales a desarrollar corresponden al modelo mostrado en la figura 10 que corresponde a tres estratos con dos superficies de frontera.

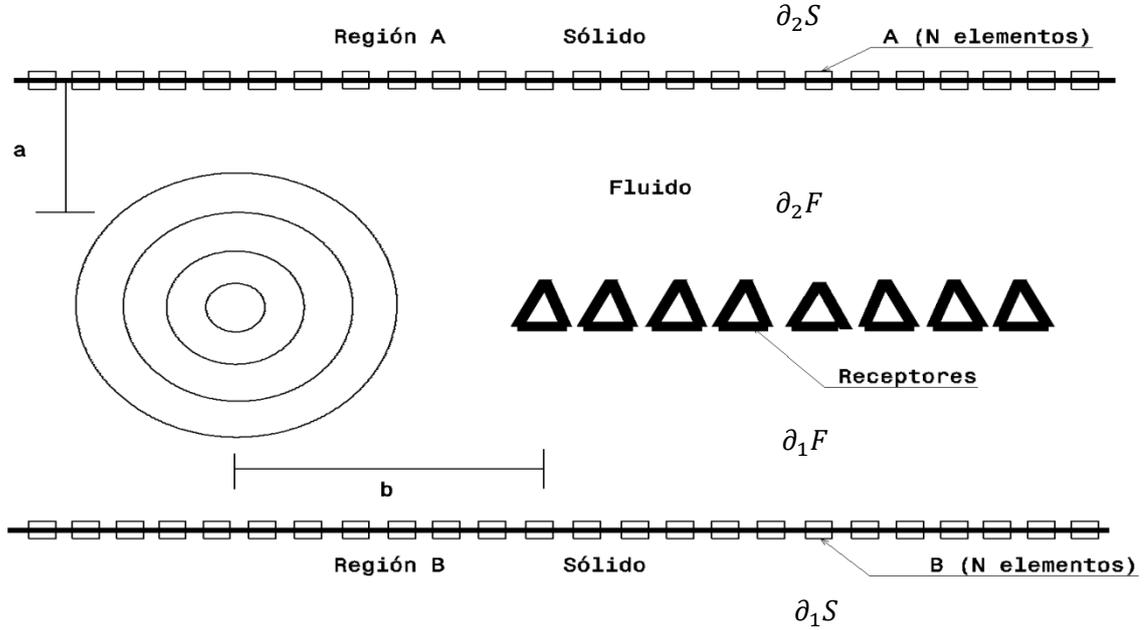


Fig.10 Interface sólido-fluido-sólido formulado por medio de IBEM.

Como podemos observar las condiciones de frontera en las regiones A y B son similares, con la diferencia que la ubicación y la dirección de los campos de presiones y desplazamientos, por lo tanto, la formulación sigue el mismo patrón que el estudiado en un semi-espacio.

Partiendo de las siguientes condiciones de frontera, establecemos que:

$$u_1^S(x) = u_1^F(x), \quad \forall x \in \partial_1 S = \partial_1 F \quad (4.55)$$

El desplazamiento en el fluido está conformado por la suma del campo incidente y el campo difractado a lo largo de la frontera A, por lo tanto podemos expresar la ecuación anterior como:

$$u_1^S = u_1^{0F}(x) + u_1^{dF}(x) \quad (4.56)$$

Por lo tanto, para nuestra primera ecuación integral tendremos:

$$\int_{\partial R} G_{1j}^R(x, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = \frac{1}{\rho_F \omega^2} \frac{\partial p^0(x)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} + c_1 \Psi(x) + \int_{\partial F} \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x_1} \Psi(\xi) dS_\xi$$

$$\forall x \in \partial_1 S = \partial_1 F \quad (4.57)$$

Para la siguiente ecuación partiremos de la siguiente condición de frontera.

$$t_3^S(\mathbf{x}) = 0$$

$$\forall \mathbf{x} \in \partial_1 S$$

(4.58)

Sustituyendo el valor de la tracción, obtenemos:

$$c_2 \frac{1}{2} \phi_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial_1 S} T_{3j}^S(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_1 S$$

(4.59)

Esta ecuación constituye la segunda ecuación integral buscada.

Para la siguiente ecuación integral tomaremos la siguiente condición de frontera:

$$t_1^S(\mathbf{x}) = -p^F(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_1 S$$

(4.60)

Por lo tanto, sustituyendo en 3.25 tenemos:

$$c_2 \phi_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial_1 S} T_{1j}^S(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = -c(\omega) H_0^{(2)}(\omega r / c^F) - \int_{\partial_1 F} G^F(\mathbf{x}, \xi) \Psi(\xi) dS_\xi$$

$$\forall \mathbf{x} \in \partial_1 S$$

(4.61)

La cual constituye nuestra tercera ecuación integral.

Para la cuarta, quinta y sexta ecuación integral se procede de forma similar que las ecuaciones anteriores únicamente cambiando los datos a la frontera dos de la siguiente manera:

Condición de frontera.

$$u_1^S(\mathbf{x}) = u_1^F(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_2 S = \partial_2 F$$

(4.62)

Cuarta ecuación integral.

$$\int_{\partial R} G_{1j}^R(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = \frac{1}{\rho_F \omega^2} \frac{\partial p^0(\mathbf{x})}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{x}_1} + c_1 \Psi(\mathbf{x}) + \int_{\partial F} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \mathbf{x}_1} \Psi(\xi) dS_\xi$$

$$\forall \mathbf{x} \in \partial_2 S = \partial_2 F$$

(4.63)

Condición de frontera.

$$t_3^S(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_2 S$$

(4.64)

Quinta ecuación integral

$$c_2 \frac{1}{2} \phi_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial_1 S} T_{3j}^S(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = 0 \quad (4.65)$$

Condición de frontera

$$t_1^S(\mathbf{x}) = -p^F(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_2 S \quad (4.66)$$

Sexta ecuación integral

$$c_2 \phi_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial_1 S} T_{1j}^S(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = -c(\omega) H_0^{(2)}(\omega r / c^F) - \int_{\partial_1 F} G^F(\mathbf{x}, \xi) \Psi(\xi) dS_\xi$$

$$\forall \mathbf{x} \in \partial_2 S \quad (4.67)$$

III.5.1 Discretización de las ecuaciones integrales para las regiones sólido-fluido-sólido para IBEM.

La discretización se realiza según la figura 10 y se suponen las densidades de fuerza en el sólido y en el fluido, $\phi(\mathbf{x})$ y $\Psi(\mathbf{x})$ respectivamente, entonces, de esta manera, podemos discretizar cada una de las ecuaciones integrales para el estrato sólido-fluido-sólido de la siguiente manera.

Ecuación integral 1

$$\int_{\partial R} G_{1j}^R(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = \frac{1}{\rho_F \omega^2} \frac{\partial p^0(\mathbf{x})}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{x}_1} + c_1 \Psi(\mathbf{x}) + \int_{\partial F} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \mathbf{x}_1} \Psi(\xi) dS_\xi$$

Discretizando la ecuación integral 1 resulta:

$$\sum_{n=1}^{N_1} \phi_j(\xi_n) g_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) - \sum_{n=1}^{N_1+N_2} \Psi(\xi_n) k = \frac{1}{\rho_F \omega^2} \frac{\partial p^0(\mathbf{x})}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{x}_1}, \quad l = 1, N \quad (4.68)$$

$$g_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) = \int_{\Delta S_n} \frac{\partial G_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n)}{\partial \mathbf{x}_1} dS_\xi \quad (4.69)$$

$$k = \pm c_1 \delta_{ij} \delta_{ln} + \int_{\Delta S_n} \frac{\partial G^F(\mathbf{x}_l, \xi_n)}{\partial \mathbf{x}_1} dS_\xi \quad (4.70)$$

Ecuación integral 2

$$c_2 \frac{1}{2} \phi_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial_1 S} T_{3j}^S(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = 0$$

Discretizando la ecuación integral 2 tenemos.

$$\sum_{n=1}^{N_1} \phi_i(\xi_n) t_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) = 0 \quad l = 1, N \quad (4.71)$$

$$t_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) = c_2 \delta_{ij} \delta_{ln} + \int_{\Delta S_n} T_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) dS_\xi \quad (4.72)$$

Ecuación integral 3

$$c_2 \phi_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial_1 S} T_{1j}^S(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = -c(\omega) H_0^{(2)}(\omega r / c^F) - \int_{\partial_1 F} G^F(\mathbf{x}, \xi) \Psi(\xi) dS_\xi$$

La discretización de la ecuación integral 3 resulta en.

$$-\sum_{n=1}^{N_1} \phi_j(\xi_n) t_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) - \sum_{n=1}^{N_1+N_2} \Psi(\xi_n) G^F(\mathbf{x}_l, \xi_n) = c(\omega) H_0^{(2)}(\omega r / c^F), \quad j = 1, N \quad (4.73)$$

$$G^F(\mathbf{x}_l, \xi_n) = \int_{\Delta S_n} G^F(\mathbf{x}_l, \xi_n) dS_\xi \quad (4.74)$$

Ecuación integral 4

$$\int_{\partial R} G_{1j}^R(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = \frac{1}{\rho_F \omega^2} \frac{\partial p^0(\mathbf{x})}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{x}_1} + c_1 \Psi(\mathbf{x}) + \int_{\partial F} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \mathbf{x}_1} \Psi(\xi) dS_\xi$$

Discretizando la ecuación 4 tendremos.

$$\sum_{n=1}^{N_1} \phi_j(\xi_n) g_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) - \sum_{n=1}^{N_1+N_2} \Psi(\xi_n) k = \frac{1}{\rho_F \omega^2} \frac{\partial p^0(\mathbf{x})}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{x}_1}, \quad l = 1, N \quad (4.75)$$

$$g_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) = \int_{\Delta S_n} \frac{\partial G_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n)}{\partial \mathbf{x}_1} dS_\xi \quad (4.76)$$

$$k = \pm c_1 \delta_{ij} \delta_{ln} + \int_{\Delta S_n} \frac{\partial G^F(\mathbf{x}_l, \xi_n)}{\partial \mathbf{x}_1} dS_\xi \quad (4.77)$$

Ecuación integral 5

$$c_2 \frac{1}{2} \phi_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial_1 S} T_{3j}^S(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = 0$$

Discretizando la ecuación anterior tenemos.

$$\sum_{n=1}^{N_1} \phi_i(\xi_n) t_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) = 0 \quad l = 1, N \quad (4.78)$$

$$t_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) = c_2 \delta_{ij} \delta_{ln} + \int_{\Delta S_n} T_{1j}^S(\mathbf{x}_l, \xi_n) dS_\xi \quad (4.79)$$

Ecuación integral 6

$$c_2 \phi_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial_1 S} T_{1j}^S(\mathbf{x}, \xi) \phi_j(\xi) dS_\xi = -c(\omega) H_0^{(2)}(\omega r/c^F) - \int_{\partial_1 F} G^F(\mathbf{x}, \xi) \Psi(\xi) dS_\xi$$

La discretización de la ecuación 6 produce.

$$-\sum_{n=1}^{N_1} \phi_j(\xi_n) t_{1j}^2(\mathbf{x}_l, \xi_n) - \sum_{n=1}^{N_1+N_2} \Psi(\xi_n) G^F(\mathbf{x}_l, \xi_n) = c(\omega) H_0^{(2)}(\omega r/c^F), \quad l = 1, N \tag{4.80}$$

$$G^F(\mathbf{x}_l, \xi_n) = \int_{\Delta S_n} G^F(\mathbf{x}_l, \xi_n) dS_\xi \tag{4.81}$$

Estas seis ecuaciones integrales constituyen el sistema de ecuaciones donde las densidades de fuerza $\phi(\mathbf{x})$ y $\Psi(\mathbf{x})$ son las soluciones buscadas. Mediante el empleo de estos parámetros de densidades se pueden encontrar los estados de presiones y desplazamientos en el fluido, el sistema de ecuaciones formuladas se expresa matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} G_{ZX}^{S_1} & G_{ZZ}^{S_1} & 0 & 0 & -\partial_Z G^F & -\partial_Z G^F \\ 0 & 0 & G_{ZX}^{S_2} & G_{ZX}^{S_2} & -\partial_Z G^F & -\partial_Z G^F \\ T_{XZ}^{S_1} & T_{XZ}^{S_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{XX}^{S_2} & T_{XX}^{S_2} & 0 & 0 \\ -T_{ZX}^{S_1} & -T_{ZX}^{S_1} & 0 & 0 & -G^F & -G^F \\ 0 & 0 & -T_{ZX}^{S_2} & -T_{ZX}^{S_2} & -G^F & -G^F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_X^{S_1} \\ \phi_Z^{S_1} \\ \phi_X^{S_2} \\ \phi_Z^{S_2} \\ \psi \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho^{F-1} \omega^{-2} \partial_Z p^{0F} \\ \rho^{F-1} \omega^{-2} \partial_Z p^{0F} \\ 0 \\ 0 \\ p^{0F} \\ p^{0F} \end{Bmatrix} \tag{4.82}$$

III.6 Desarrollo del método DWN para una región sólido-fluido-sólido.

En este caso la formulación se realizará considerando un estrato sólido-fluido-sólido como se muestra en la siguiente figura.

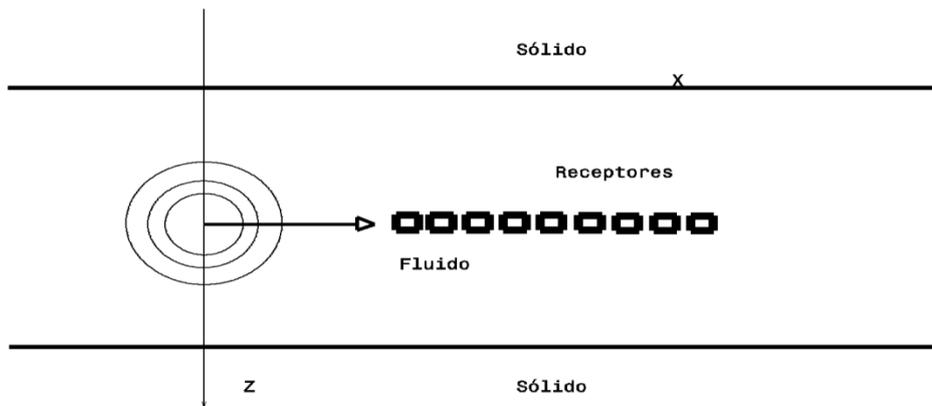


Fig.11 Modelo para la formulación del DWN en un estrato sólido-fluido-sólido.

Amplificaciones sísmicas en medios estratificados

Para el caso del estrato sólido-fluido-sólido, la presión incidente en el fluido se expresa

$$p^0 = \frac{1}{4\pi i} \sum_{n=-N}^N \frac{e^{-ik_n x - i\eta_n |z|}}{\eta_n} \Delta k \quad (4.83)$$

Y la presión reflejada en el fluido como.

$$p^r = \sum_{n=-N}^N A_n e^{-ik_n x} \cos \eta_n x \quad (4.84)$$

Así el campo de presiones totales en el fluido se obtiene sumando el campo incidente con el campo reflejado.

$$p = \sum \left[\frac{1}{4\pi i \eta_n} e^{-ik_n x} + A_n \cos \eta_n x \right] e^{-ik_n x} \quad (4.85)$$

Y derivando el campo de presiones obtenemos el campo de desplazamiento en el fluido.

$$u_z = \frac{1}{\rho \omega^2} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho \omega^2} \sum \left[-\frac{\Delta k}{4\pi} e^{-i\eta_n |z|} \text{sig}(z) - A_n \eta_n \sin \eta_n z \right] e^{-ik_n x} \quad (4.86)$$

Para definir el campo de presiones y desplazamientos en el estrato sólido se proponen los siguientes potenciales

$$\phi = \sum B_n e^{-ik_n x} e^{-i\lambda_n z} \quad (4.87)$$

$$\psi = \sum C_n e^{-ik_n x} e^{-iv_n z} \quad (4.88)$$

El campo de desplazamientos en la dirección x satisface lo siguiente.

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (4.89)$$

Sustituyendo y derivando los potenciales planteados en la ecuación diferencial anterior resulta

Amplificaciones sísmicas en medios estratificados

$$u = \sum [-i\gamma_n B_n e^{-i\gamma_n z} - i\nu_n C_n e^{-i\nu_n z}] e^{-ik_n x} \quad (4.90)$$

Y el campo de desplazamientos en la dirección z satisface lo siguiente

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (4.91)$$

Sustituyendo y derivando los potenciales en la ecuación anterior se tiene:

$$w = \sum [-i\gamma_n B_n e^{-i\gamma_n z} - ik_n C_n e^{-ik_n x}] e^{-i\nu_n z} \quad (4.92)$$

Derivando a u y w con respecto a z y x respectivamente se obtiene

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \sum (-i\gamma_n^2 B_n e^{-i\gamma_n z} + k_n \nu_n C_n e^{-i\nu_n z}) e^{-ik_n x} \quad (4.93)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum (-k_n^2 B_n e^{-i\gamma_n z} + k_n \nu_n C_n e^{-i\nu_n z}) e^{-ik_n x} \quad (4.94)$$

El tensor de esfuerzo para un medio homogéneo, elástico e isótropo satisface que.

$$\sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (4.95)$$

Para los esfuerzos en la dirección zz se tiene.

$$\sigma_{zz} = \lambda \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.96)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.60 y 3.61 en la ecuación anterior se tiene

$$\sigma_{zz} = \sum \left\{ \lambda (-\gamma_n^2 - k_n^2) B_n e^{-i\gamma_n z} + 2\mu (-\gamma_n^2 B_n e^{-i\gamma_n z} + k_n \nu_n C_n e^{-i\nu_n z}) e^{-ik_n x} \right\} \quad (4.95)$$

Se plantean condiciones de frontera en $z = z_{FR}$

Continuidad de desplazamientos.

$$U_z^S = U_z^F \quad (4.96)$$

Transferencia de esfuerzos del sólido al líquido.

$$\sigma_{zz}^S = -p \quad (4.97)$$

Amplificaciones sísmicas en medios estratificados

$$\sigma_{XZ}^S = 0 \quad (4.98)$$

Se aplican las condiciones de frontera al sistema de ecuaciones calculadas anteriormente en $z = a$

$$U_z^S = U_z^F$$

$$-i\gamma_n B_n e^{-i\gamma_n a} + ik_n C_n e^{-i\eta_n a} = -\frac{\Delta k}{\rho\omega^2 4\pi} e^{-i\eta_n a} - \frac{A_n}{\rho\omega^2} \eta_n \sin \eta_n a \quad (4.99)$$

$$\sigma_{ZZ}^S = -p \quad (4.100)$$

$$-\lambda(\gamma_n^2 + k_n^2)B_n e^{-i\gamma_n a} - 2\mu k_n v_n C_n e^{-i\eta_n a} = -\frac{\Delta k}{\rho\omega^2 4\pi} e^{-i\eta_n a} - A_n \cos \eta_n a \quad (4.101)$$

$$\sigma_{XZ}^S = 0$$

Dónde:

$$k_n^2 - v_n^2 = 2k_n^2 - \omega^2/\beta^2 \quad (4.102)$$

Finalmente expresando de forma matricial el sistema de ecuaciones lineales algebraicas tenemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\eta_n}{\rho\omega^2} \sin \eta_n a & -i\gamma_n e^{-i\gamma_n a} & ik_n e^{-i\eta_n a} \\ \cos \eta_n a & \left(-\frac{\lambda\omega^2}{a^2} - 2\mu\gamma_n^2\right) e^{-i\gamma_n a} & 2\mu k_n v_n e^{-i\eta_n a} \\ 0 & -2\mu k_n e^{-i\gamma_n a} & \mu \left(2k_n^2 - \frac{\omega^2}{B^2}\right) e^{-i\eta_n a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\Delta k}{\rho\omega^2 4\pi} e^{-i\eta_n a} \\ -\frac{\Delta k}{4\pi i \eta_n} e^{-i\eta_n a} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.103)$$

Este sistema se resuelve por medio de un software de computadora y se obtiene la propagación de onda en el estrato sólido-fluido-sólido.

IV.2.1 Pulso de Ricker.

Cuando se calcula la respuesta dinámica de sistemas, se utilizan como excitación funciones analíticas que dependen del tiempo, generalmente dichas funciones no son tan complejas y requieren por la misma razón pocos parámetros para graficarse. En particular, el pulso de Ricker es de utilidad pues permite un control directo sobre la eficiencia del muestreo y además, se puede identificar de manera sencilla el pulso apropiado para excitar un modelo con énfasis en una determinada frecuencia.

Analíticamente el pulso de Ricker se define de la forma

$$r(t) = (a^2 - 1/2)e^{-a^2} \quad (4.104)$$

Amplificaciones sísmicas en medios estratificados

Donde $a = \pi(t - t_s)/t_p$, t_p = periodo característica del pulso y t_s definen el centro del pulso. La duración de la parte central del pulso es igual a $\sqrt{6}t_p/\pi$, como se muestra en la figura 12a

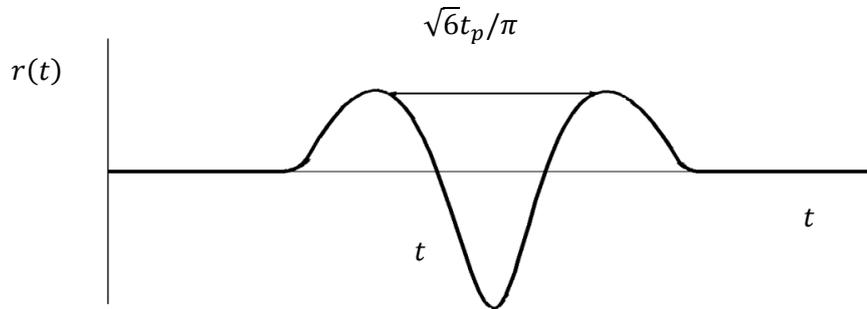


Fig.12a Pulso de Ricker en el dominio del tiempo.

En el dominio de la frecuencia el pulso de Ricker se expresa mediante

$$R(\omega) = -\frac{t_p}{\sqrt{\pi}} b^2 e^{-b^2} e^{-i\omega t_s} \quad (4.105)$$

Donde $b = \omega/\omega_p$, $\omega_p = 2\pi f_p = 2\pi/t_p$; la frecuencia f_p determina el ancho de banda del pulso de Ricker, ya que como se aprecia en la figura 12b el contenido de frecuencias en la señal por arriba de $2f_p$ es muy bajo.

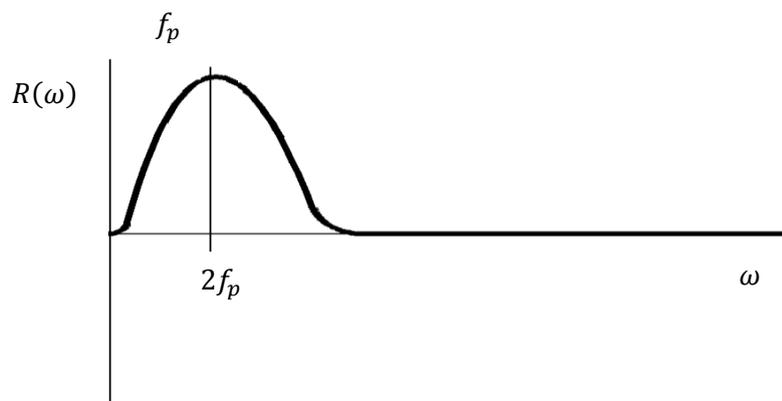


Fig.12b Pulso de Ricker en el dominio de la frecuencia.

Capítulo V

Validación y ejemplos numéricos

V.1 Validación y ejemplos numéricos.

Para verificar la exactitud de IBEM y DWN se analizarán tres casos de interfaces sólido-fluido y sólido-fluido-sólido, el fluido es agua; se analizaron 18 configuraciones que por simplicidad no se incluyeron ya que describen un comportamiento similar. Los modelos a analizar son de acuerdo a las figuras 13 y 20 respectivamente.

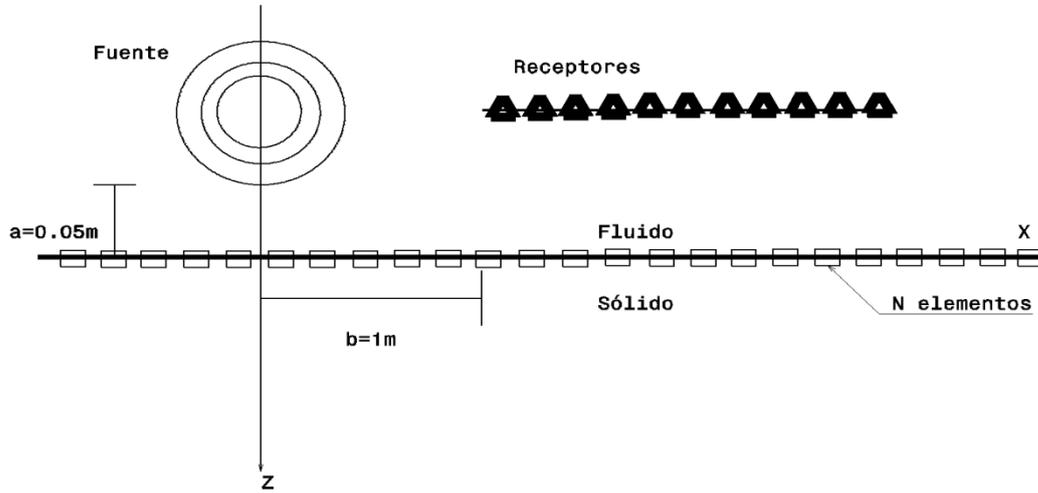


Fig.13 Discretización de un semi-espacio fluido-sólido para IBEM con receptores a 1.0m de la fuente.

- agua-limonita
- agua-arenisca
- agua-hierro

De los casos anteriores, se analizaron tres tipos de graficas de estudio, estas fueron: espectros de presión, sismogramas (en el dominio del tiempo) y capturas de imagen de la propagación de ondas. Las gráficas de espectros y sismogramas se utilizarán para fines comparativos entre IBEM Y DWN para con esto, llegar a una validación entre ambos métodos de análisis. Para los casos de espectro y diferenciar ambas soluciones, el DWN estará graficado con una línea punteada, IBEM será representado por un formato línea-punto; mientras que en el caso de los sismogramas sintéticos de presión la solución por medio de DWN se representa por medio de líneas sólidas, mientras que el IBEM por medio de líneas punteadas. En la siguiente tabla se muestran los casos a analizar.

Tabla A, Fluido: Agua

Fluido	Material	c_f	ρ_f	c_p	c_s	ρ_s
Agua	Limonita	1501m / s	1000kg / m ³	3740m / s	1645m / s	2400kg / m ³
Agua	Arenisca	1501m / s	1000kg / m ³	5837m / s	3247m / s	7874kg / m ³
Agua	Hierro	1501m / s	1000kg / m ³	4810m / s	2195m / s	2500kg / m ³

V.1.1 Caso 1 agua-limonita.

A continuación se discute el caso del semi-espacio agua-limonita. La fuente de presión es aplicada a una distancia horizontal de 1 m del receptor y ambos, fuente y receptor, están ubicados a 0.05 m de la superficie sólida. Para una frecuencia cercana a cero (caso estático) se tiene que el receptor registra el máximo estado de presión, midiéndose una presión cercana a 2.0 kg/m^2 . Posterior a este valor máximo se registra una importante caída de presión, alcanzando su mínimo valor de 0.2 kg/m^2 a una frecuencia cercana a 18000 Hz. A partir de esta frecuencia el estado de presiones muestra un incremento ligeramente parabólico hasta alcanzar la frecuencia máxima analizada. Un aspecto importante a resaltar es que durante la etapa de caída de presión (desde 150 Hz y hasta 18000 Hz) se aprecian ligeras oscilaciones del espectro de presiones, representando cambios de presión de poca importancia. Estas oscilaciones desaparecen a partir de los 18000 Hz. Podemos constatar en la Fig. 14a que en ambos métodos se nota una tendencia de comportamiento similar y también se observa que el tiempo de arribo de las diferentes ondas es similar. En la figura 14b se muestra el campo de presiones para veintiún receptores, para el caso 1 se puede notar el arribo de la onda P casi un segundo después de haberse generado el primer impulso o excitación seguido de la onda incidente y casi después de los 25 segundos se observa el arribo de la onda de Scholte, la magnitud de la onda de Scholte es pequeña en comparación con la onda difractada y la onda incidente.

V.1.2 Caso 2 agua-arenisca.

En el modelo de la Fig.14a se analiza el semi-espacio agua-arenisca, para este caso consideramos una velocidad de propagación de las ondas P en la arenisca de 5837m/s, de las ondas S de 3247m/s y una densidad de 7874 kg/m^3 . Con lo que respecta al agua se tomó una velocidad de propagación de las ondas P de 1484m/s y una densidad de 1000 kg/m^3 . En la figura 14a se muestra la señal registrada por un receptor situada a un metro de distancia de la fuente analizada con IBEM y comprobada con DWN. En la figura 14b se ilustra la propagación de cada una de las ondas por medio de veintiún receptores espaciados a 0.025m entre sí.

V.1.3 Caso 3 agua-hierro.

En el siguiente caso se estudia la propagación de ondas en un semi-espacio agua-hierro considerando la geometría mostrada en la Fig.13 pero modificando las propiedades del semi-espacio. Para el hierro se considera una velocidad de propagación de las ondas P de 5837m/s, de las ondas S de 3247m/s y una densidad de 7874 kg/m^3 . Con lo que respecta al agua se tomó una velocidad de propagación de las ondas p de 1500m/s y una densidad de 1000 kg/m^3 . Los resultados para un receptor se muestran en la figura 14a y se presenta la comparación entre IBEM y DWN. En la figura 14b se observa el campo de presiones para 21 receptores a 1.0m de distancia de la fuente, la frontera se discretizó con 200 elementos espaciados 0.025m entre sí en una geometría de 5.14m, se puede notar la influencia del hierro ya que este material tiene velocidades de propagación de ondas P y S mucho mayores que el del agua, por tal motivo se observa que primero arriba la onda P, seguido de la onda S y por último se aprecia la onda incidente Pd, también se puede ver que para este material la magnitud de las ondas P difractada es pequeña en comparación con la onda S difractada y la onda incidente.

Amplificaciones sísmicas en medios estratificados

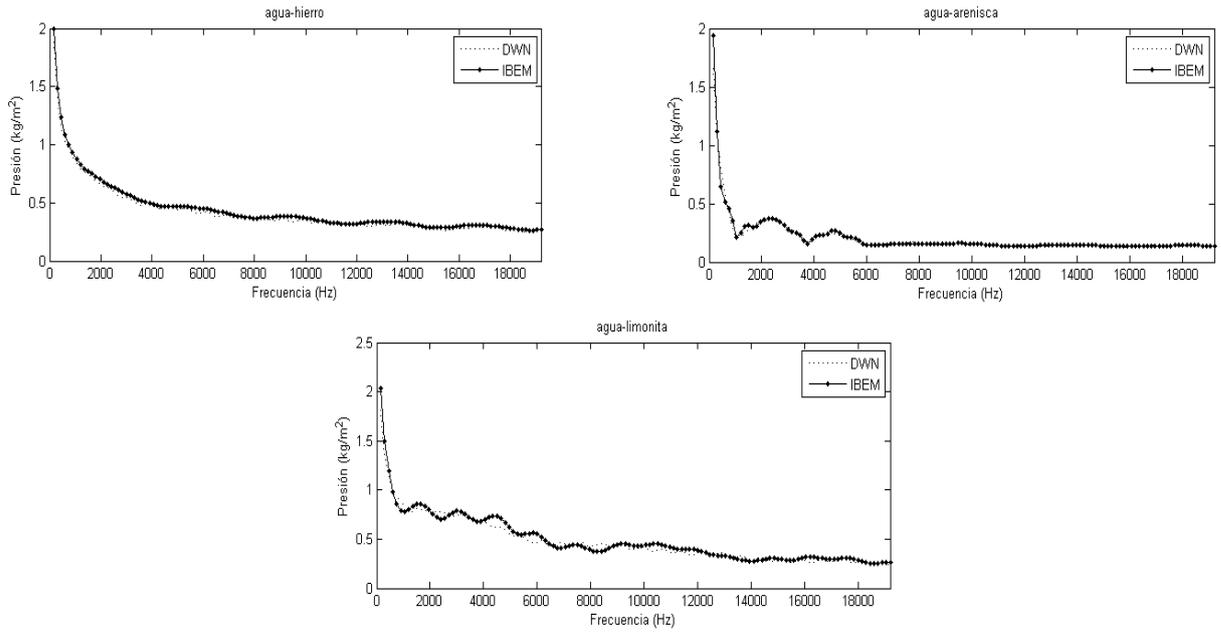


Fig.14a Espectros de presión para un receptor ubicado a 1.0m de la fuente, se observa buena concordancia entre ambos métodos.

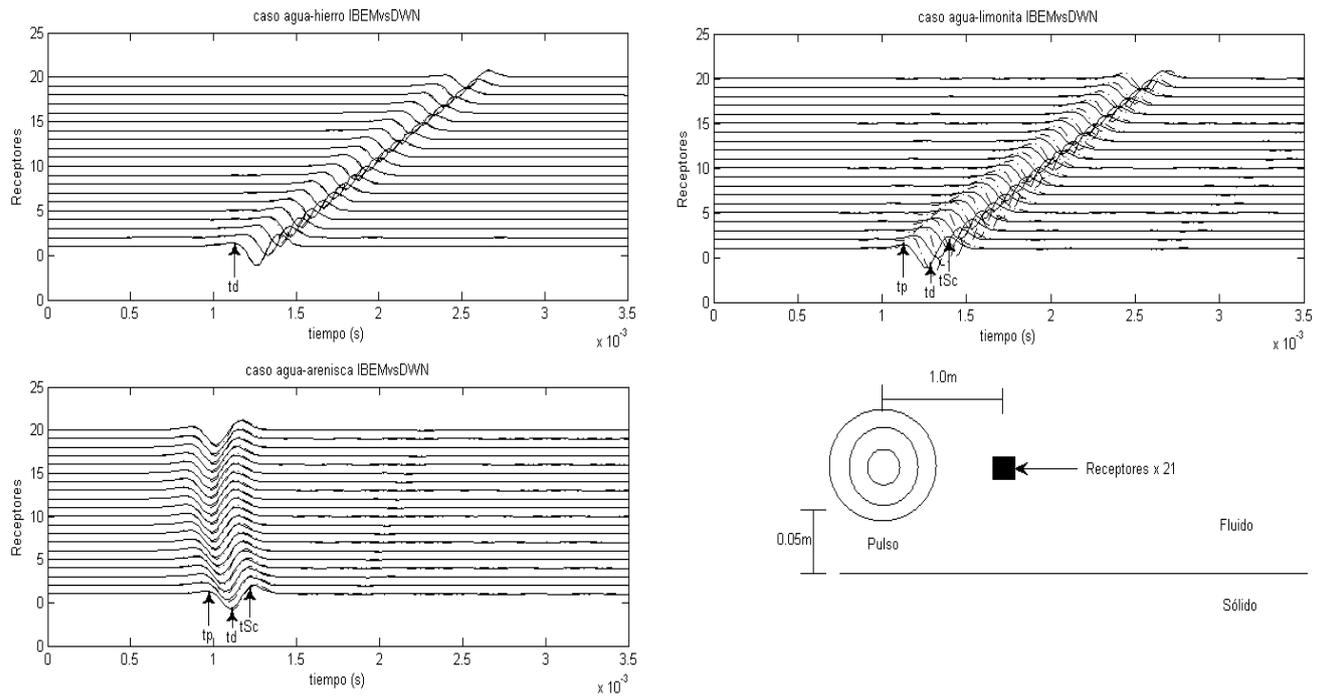


Fig.14b Sismogramas sintéticos de presión en el dominio del tiempo con 21 receptores para los casos de la tabla A.

V.2 Simulación de la propagación de ondas en un semi-espacio sólido-fluido.

A continuación se presentarán simulaciones de la propagación de ondas en los casos presentados anteriormente, estos resultados fueron obtenidos con DWN de acuerdo a al modelo presentado en la figura 8. En el sólido se consideró una velocidad de propagación de las ondas P de 3000m/s, de las ondas S de 2000m/s y una densidad de 2000kg/m³, en el fluido se consideró una velocidad de propagación de las ondas P de 1000m/s y una densidad de 1000kg/m³. La fuente se localiza a 0.05m de la frontera con el sólido. Los resultados son mostrados en las siguientes figuras.

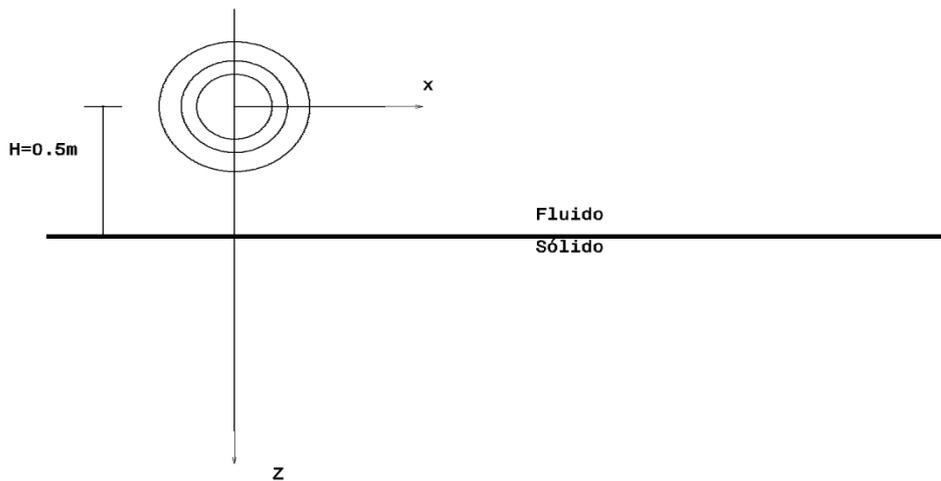


Fig.15a Modelo para el estudio de propagación de ondas en un semi-espacio sólido-fluido.

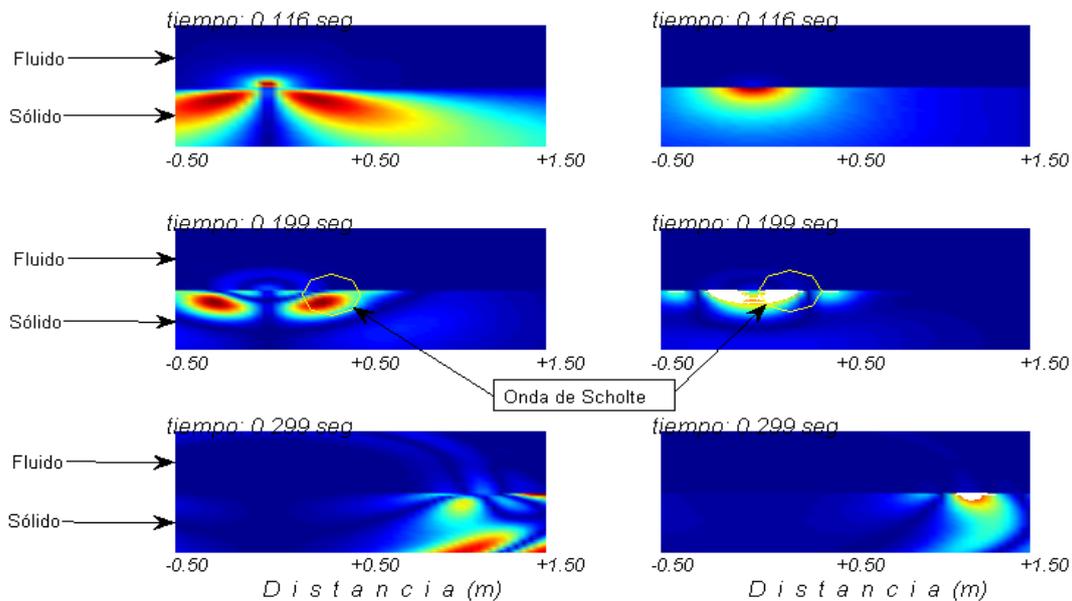


Fig.15b Modelo de propagación para el caso agua-limonita, satisface la condición de irradiación hacia el infinito.

V.2.1 Simulación de propagación de ondas para el caso 2.

En la siguiente figura se muestra la simulación de propagación para el caso 2 agua-arenisca, se aprecia que la velocidad de las ondas P es mayor en el sólido.

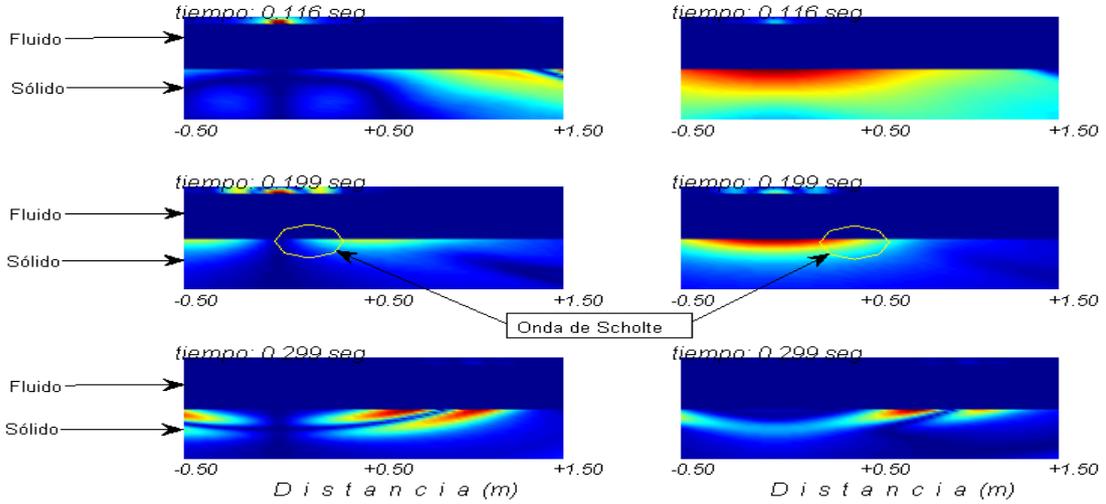


Fig. 16a Modelo de propagación para el caso 2 agua-arenisca.

V.2.2 Simulación de propagación de ondas para el caso 3.

Por último, se presenta la simulación de propagación para el caso 3 agua-hierro, se puede notar el inicio de la transmisión de la onda incidente al estrato sólido, también se aprecia que hay una disminución de la magnitud de la onda al pasar al estrato sólido.

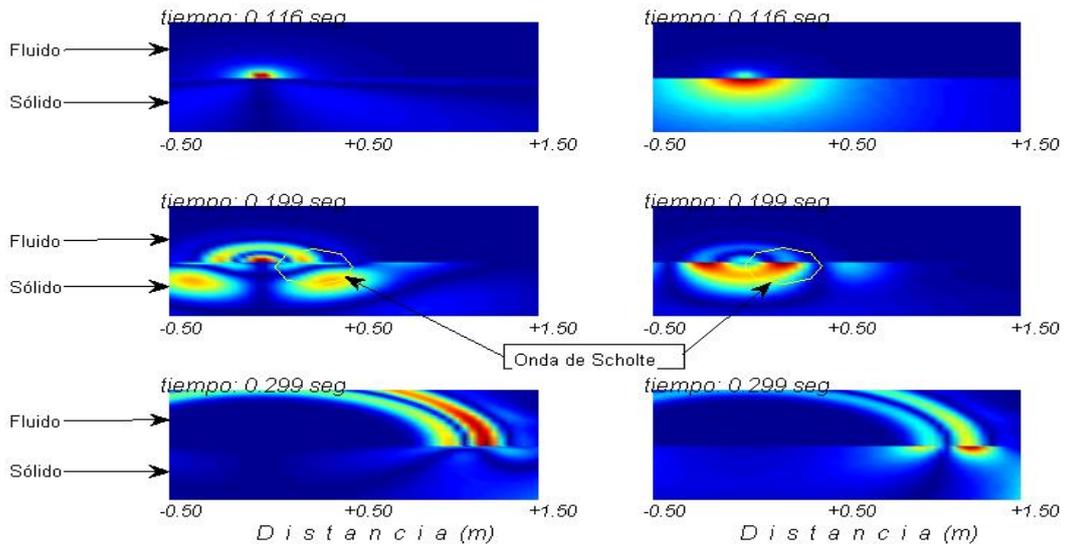


Fig. 16b Modelo de propagación de las ondas P para caso 3 agua-hierro.

V.3 Validación para modelo de interfaz sólido-liquido-sólido.

A continuación, se presentaran los sismogramas sintéticos de presión para una configuración sólido-liquido-sólido, de la misma manera, los tres casos fueron analizados por ambos métodos mostrando nuevamente concordancia entre ambas formulaciones, En esta configuración las pequeñas variaciones observadas se detallan en dos formatos de líneas distinto, las soluciones obtenidas a través de la formulación por medio de IBEM con líneas punteadas mientras que con líneas solidas las obtenidas a través de DWN.

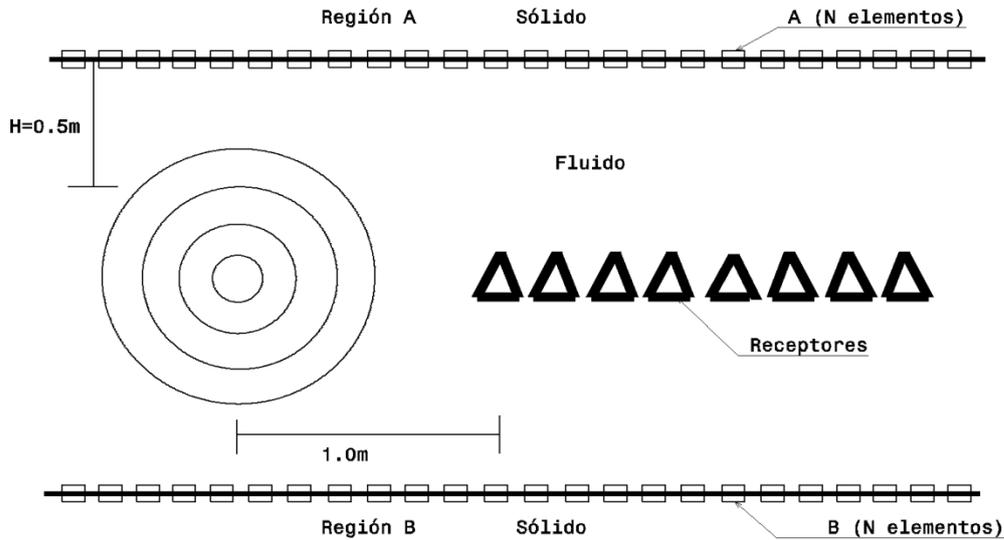


Fig. 17 Discretización de interfaz sólido-liquido-sólido con receptores cercanos a la fuente para IBEM.

V.3.1 Caso 1 hierro-agua-hierro.

En la figura 18 se observa el campo de presiones para 21 receptores, se puede notar la influencia del hierro ya que este material tiene velocidades de propagación de ondas P y S mucho mayores que el del agua, por tal motivo se observa que primero arriba la onda P, seguido de la onda S y por último se aprecia la onda incidente Pd, también se puede ver que para este material la magnitud de las ondas P difractada es pequeña en comparación con la onda S difractada y la onda incidente.

V.3.2 Caso 2 arenisca-agua-arenisca.

Para este estrato, nuevamente se presentan velocidades de propagación altas P y S respectivamente en el sólido en comparación con el agua, en la Fig.18 se muestra el sismograma de presión para una configuración de 21 receptores resuelto con IBEM y DWN en donde se puede visualizar buena concordancia entre ambas formulaciones.

V.3.3 Caso limonita-agua-limonita.

A continuación se muestra la propagación de ondas en un estrato limonita-agua-limonita, considerando la geometría mostrada la Fig.17, para la limonita se nota la influencia de dicho material en el campo de presiones representado por medio de 21 receptores (Fig.18), ya que la limonita posee velocidades de propagación P y S mayores a las del agua, observamos por lo tanto, la llegada

Amplificaciones sísmicas en medios estratificados

de las ondas P y por último las ondas P difractadas, en líneas punteadas se visualiza la solución por medio de IBEM mientras que en líneas solidas se aprecia la solución por medio de DWN.

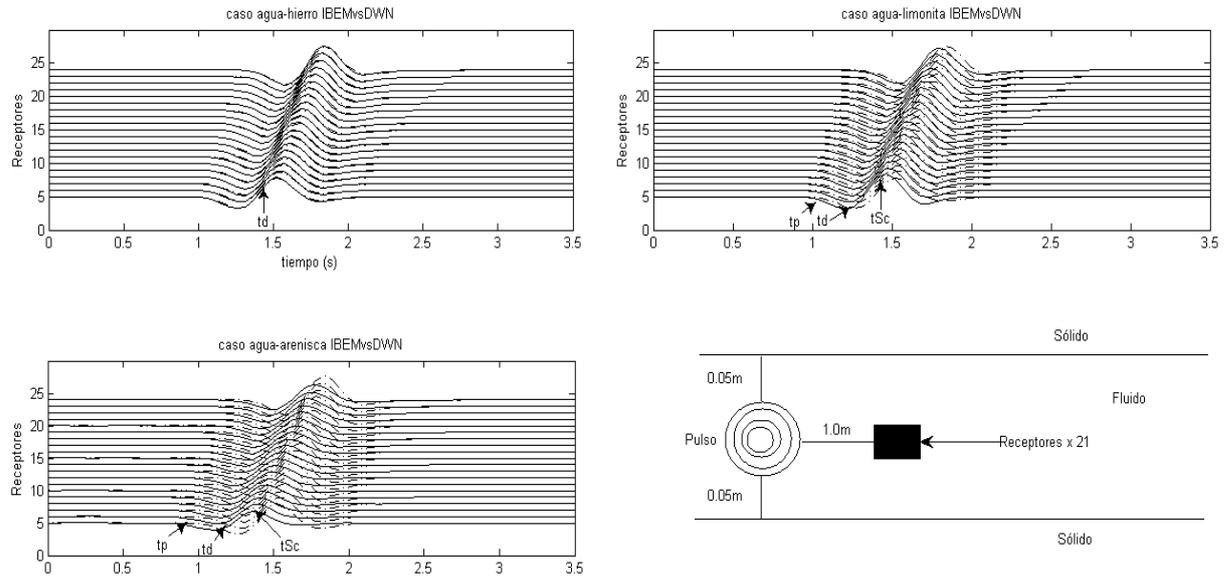


Fig.18 Sismogramas sintéticos para configuración sólido-líquido-sólido para IBEM y DWN con 21 receptores a 1.0m de la fuente.

Conclusiones

Conclusiones.

Este trabajo está enfocado al estudio de la difracción de ondas elásticas en interfaces fluidas en contacto con sólidos estratificados. Para este fin se emplea el Método Indirecto de Elementos Frontera para analizar modelos bidimensionales. La fuente es representada mediante una función de Hankel de segunda especie y es aplicada siempre en el fluido. El método indirecto se basa en una representación integral de fuentes de frontera de capa simple. Este enfoque es llamado indirecto debido a que las densidades de fuerza son obtenidas en un paso intermedio.

Además, esta formulación puede ser concebida como una realización de Principio de Huygens. Los resultados obtenidos se presentan tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia. Para validar los resultados, éstos fueron comparados con aquellos correspondientes a los obtenidos mediante el método del Número de Onda Discreto aplicado a interfaces que unen dos semi espacios, uno fluido y el otro sólido. Se enfatizan varios aspectos relevantes respecto a las ondas de interfaz que emergen en este tipo de problemas. Los pulsos cercanos a las interfaces generan cambios en la presión debidos a las propiedades de medio sólido estratificado, los cuales pueden ser registrados por receptores localizados en el fluido. Entre otros tipos de ondas que aparecen en este fenómeno de interacción de pulsos con sólidos estratificados, se resaltan las ondas de Scholte.

Se estudiaron una amplia gama de materiales sólidos elásticos empleados en la ingeniería. Se ha demostrado que por medio de un análisis de ondas difractadas en un fluido, es posible deducir las características mecánicas del medio sólido, específicamente, sus velocidades de propagación. Para este propósito, el campo difractado de onda de presión y desplazamientos, debido a una onda inicial de presión en el fluido, se expresan usando las representaciones integrales de frontera, las cuales satisfacen la ecuación de movimiento. En primer lugar, se muestran espectros de presiones que ilustran el comportamiento del fluido para cada material sólido considerado, después, se aplica la transformada rápida de Fourier para mostrar los resultados en el dominio del tiempo, donde se ejemplifica la aparición de las ondas de Scholte y la cantidad de energía que ellas transportan.

Con esta técnica numérica, basada en el principio de Huygens y el teorema de representación de Somigliana, los campos de presiones y desplazamientos son expresados en términos de ecuaciones integrales de frontera. Se utilizan las funciones de Green del espacio completo, tanto para tracciones como para desplazamientos, pero son restringidas para satisfacer las condiciones de frontera apropiadas que prevalecen en las interfaces fluido-sólido. Es importante mencionar acerca del cuidado que se debe tener al modelar las interfaces, tanto la del fluido con el sólido, como entre el sólido-sólido debiendo seleccionar tamaños de elementos frontera adecuados para así poder representar de manera correcta el campo difractado. Otro aspecto importante es la longitud de la superficie discretizada. Esta deberá ser de una distancia tal que las ondas, conocidas como espurias, y que son producto de la difracción de las ondas en los extremos del modelo, queden fuera de la ventana de observación. En los medios estratificados son evidentes las resonancias de ondas atrapadas en el estrato sólido, las cuales producen difracción múltiple. El IBEM ofrece una buena alternativa para la simulación de propagación de ondas

Amplificaciones sísmicas en medios estratificados

y constituye una herramienta que puede emplearse para obtener una aproximación práctica y cuantitativa de la propagación de ondas. El método se encuentra aún en desarrollo y restan algunos puntos importantes que deben resolverse antes de poder aplicarlo para la simulación de casos realistas.

Ventajas de la aplicación del método IBEM.

Entre las ventajas que presenta el IBEM con respecto a otros métodos numéricos podemos mencionar:

- La reducción de una dimensión en el modelado del problema.
- El adecuado tratamiento de problemas en los que intervienen regiones con dimensiones infinitas.

Desde el enfoque de ejecución del método cabe resaltar su simplicidad, ya que la aplicación del mismo requiere conocer un número pequeño de parámetros como son:

- Amplitud, frecuencia de la onda incidente
- Las características de los estratos que constituyen el medio, tales como la densidad y las velocidades de propagación de las ondas.

Además cabe resaltar que desde el punto de vista de la geometría se pueden modelar terrenos compuestos por contornos muy suaves, hasta aquellos más realistas que presentan un alto grado de irregularidad.

Aportaciones.

Contar con la formulación basada en el IBEM para el modelado de interfaces fluido-sólido, con la implementación del IBEM a estrato sólido-fluido-sólido, se puede caracterizar a los sólidos que circundan pozos, infiriendo sus velocidades de propagación para determinar la rigidez circundante para asociarlo al tipo de suelo. En lagos, ríos y océanos se puede utilizar el modelo de fluido-sólido para caracterizar los materiales que se encuentran debajo de las aguas en estudio, las gráficas presentadas nos permitirán interpretar resultados experimentales por medio de la técnica de inversión.

Trabajo Futuro.

Se considera que las formulaciones presentadas en este trabajo de tesis podrían aplicarse para considerar casos más generales y realistas. Inclusive, se han identificado nichos para desarrollar formulaciones que podrían solucionar los siguientes aspectos o temas:

- Medios estratificados irregulares.
- Detección de defectos en materiales.
- Estudio de amplificaciones dinámicas debidas a ondas planas.
- Estudio de estratigrafías alternadas fluido-sólido-fluido.
- Optimización del algoritmo de resolución del sistema final de ecuaciones para agilizar la ejecución del método.
- Desarrollar una formulación 3D del IBEM para estimar la respuesta donde las simplificaciones 2D no pueden ser ejecutadas.

Estas líneas se estiman podrían ser de interés en varios campos de la ingeniería mecánica, civil, mecánica de suelos, sismología, etc.

Referencias bibliográficas.

1. **Biot M.A.** *The interaction of Rayleigh and Stoneley waves in the ocean bottom.* *Bull. Seism. Soc. Am.* 1952. 42:81-93.
2. **Ewing W.M., Jardetzky W.S., Press F.** *Elastic waves in layered earth.* McGraw-Hill Book Co.; 1957.
3. **Roever W.L., Rosenbaum J.H., Vining T.F.** *Acoustic waves from an impulsive source in a fluid-filled borehole.* *Journal of the Acoustical Society of America* 1974. 55:1144-1157.
4. **Van Vossen R, Robertsson JOA, Chapman CH.** *Finite-difference modeling of wave propagation in a fluid-solid configuration.* *Geophysics* 2002. 67:618-624.
5. **Carcione J.M., Helle H.B.** *The physics and simulation of wave propagation at the ocean bottom.* *Geophysics* 2004. 69:825-839.
6. **Yoshida M.** *Velocity and response of higher mode Rayleigh waves for the Pacific Ocean.* *Bull. Earthq. Res. Inst.* 1978. 53:1135-1150.
7. **Yoshida M.** *Group velocity distributions of Rayleigh waves and two upper mantle models in the Pacific Ocean.* *Bull. Earthq. Res. Inst.* 1978. 53:319-338.
8. **Karasalo I.** *Exact finite elements for wave propagation in range-independent fluid-solid media.* *Journal of Sound and Vibration* 1994. 172:671-688.
9. **Schoenberg M.** *Wave propagation in alternating solid and fluid layers.* *Wave Motion* 1984. 6:303-320.
10. **Nayfeh A.H., Taylor T.W., Chimenti D.E.** *Theoretical wave propagation in multilayered orthotropic media.* *AMD (Symposia Series) (American Society of Mechanical Engineers, Applied Mechanics Division), Wave Propagation in Structural Composites* 1988. 90:17-27.
11. **Xia T, Chen H, Wu S.** *Further discussion on Rayleigh wave characteristics in layered fluid-solid media.* *Zhendong Gongcheng Xuebao/Journal of Vibration Engineering* 1999. 12:348-353.
12. **Gurevich B, Ciz R.** *Shear wave dispersion and attenuation in periodic systems of alternating solid and viscous fluid layers.* *International Journal of Solids and Structures* 2006. 43:7673-7683.
13. **Zein S, Canot E, Erhel J, Nassif N.** *Determination of the mechanical properties of a solid elastic medium from a seismic wave propagation using two statistical estimators.* *Mathematics and Mechanics of Solids* 2008. 13:388-407.
14. **Mayes M.J., Nagy P.B., Adler L., Bonner B., Streit R.** *Excitation of surface waves of different modes at fluid-porous solid interface.* *J. Acoust. Soc. Am.* 1986. 79:249-252.
15. **Wang J., Zhang C., Jin F.** *Analytical solutions for dynamic pressures of coupling fluid-solid-porous medium due to P wave incidence.* *Earthquake Engineering and Engineering Vibration* 2004. 3:263-271.
16. **Liu Y., Liu K.X.** *Characteristic analysis for stress wave propagation in transversely isotropic fluid-saturated porous media.* *Applied Mathematics and Mechanics* 2004. 25:656-663.

17. **Sharma J.N., Pathania V.** *Propagation of leaky surface waves in thermoelastic solids due to inviscid fluid loadings. Journal of Thermal Stresses* 2005. 28:485-519.
18. **Malinouskaya I., Mourzenko V.V., Thovert J.F., Adler P.M.** *Wave propagation through saturated porous media. Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 2008. 77:066302.
19. **Varadan V.V., Pillai T.A.K., Varadan V.K.** *Ultrasonic wave scattering by a subsurface flaw in joined fluid-solid half spaces. Journal of Applied Mechanics Transactions ASME* 1983. 50:802-806.
20. **Tang X., Cheng C.H., Toksoez M.N.** *Stoneley-wave propagation in a fluid-filled borehole with a vertical fracture. Geophysics* 1991. 56:447-460.
21. **Eriksson A.S., Bostrom A., Datta S.K.** *Ultrasonic wave propagation through a cracked solid. Wave Motion* 1995. 22:297-310.
22. **Ashour A.S.** *Propagation of guided waves in a fluid layer bounded by two viscoelastic transversely isotropic solids. Journal of Applied Geophysics* 2000. 44:327-336.
23. **Tadeu A., António J.** *2.5D Green's functions for elastodynamic problems in layered acoustic and elastic formations. Journal of Computer Modeling in Engineering and Sciences* 2001. 2:477-495.
24. **Tadeu A., António J.** *Acoustic insulation of single panel walls provided by analytical expressions versus the mass law. Journal of Sound and Vibration* 2002. 257:457-475.
25. **Zienkiewicz O.C., Bettess P.** *Fluid-structure dynamic interaction and wave forces, an introduction to numerical treatment. Internat. J. Numer. Meth. Eng.* 1978. 13:1-16.
26. **Thomas C., Igel H., Weber M., Scherbaum F.** *Acoustic simulation of P-wave propagation in a heterogeneous spherical earth: numerical method and application to precursor waves to PKPdf. Geophys. J. Int.* 2000. 141:6441-6464.
27. **Carcione J.M., Helle B.H., Seriani G., Plasencia-Linares M.P.** *Simulation of seismograms in a 2-D viscoelastic Earth by pseudospectral methods. Geofísica Internacional* 2005. 44:123-142.
28. **Komatitsch D., Barnes C., Tromp J.** *Wave propagation near a fluid-solid interface: a spectral-element approach. Geophysics* 2000. 65:623-631.
29. **Dineva, P. S. and G. D. Manolis.** *Scattering of seismic waves by cracks in multi-layered geological regions: I Mechanical model, Soil Dyn. Earthquake Eng.* 21, 615-625. 2001.
30. **Budaev, B., and D. B. Bogy.** *Wave scattering by surface-breaking cracks and cavities, Wave Motion* 40, 163-172. 2004.
31. **Mal, A. K., D. D. Ang, and L. Knopoff.** *Diffraction of elastic waves, Proc. Camb. Philos. Soc.* 64, 237-247. 1968
32. **Mal, A. K.** *Elastic waves in two component systems, J. Inst. Math. Appl.* 67, 376-387. 1967.

33. **A. Rodríguez-Castellanos, F. J. Sánchez-Sesma, F. Luzón and R. Martin.** *Multiple scattering of elastic waves by subsurface fractures and cavities. Seismo. Soc. Ame. No4A pp. 1359-1374. 2006.*
34. **Bouchon M.** *Diffraction of elastic waves by cracks or cavities using the discrete wave number method, J. Acoust. Soc. Am. 81, 1671–1676. 1987.*
35. **Chang Lung-Wei.** *Boundary integral equation method for the diffraction of elastic waves using simplified Green's functions. Eart. Eng. Strc. Dyn. Vol22 773-789. 1993.*
36. **Dasgupta G.** *Foundation impedance matrices for embedded structures by substructure deletion Proc. ASCE Specialty I conference Austin Texas, pp. 742-745. 1979.*
37. **G. D. Meegan, M. F. Hamilton, Yu. A. Il'inskii, and E. A. Zabolotskaya.** *Nonlinear Stoneley and Scholte waves. Acoust. Soc. Am. Vol. 106, No. 4, Pt. 1. 1999.*
38. **A. Lomonosov, P. Hess.** *Laser excitation and propagation of nonlinear surface acoustic wave pulses in Nonlinear acoustics in perspective, edited by R. J. Wei, Nanjing University Press, Nanjing 1996, p.p. 106-111.*
39. **A. Lomonosov, V. G. Mikhalevich, P. Hess, E. Yu Knight, M.H. Hamilton and E.A. Zabolotskaya.** *Laser generated nonlinear Rayleigh Waves with J. Acoust. Soc. Am. 105, 2093-2096. 1999.*
40. **E. Yu. Knight, M. F. Hamilton, Yu. A. Il'inskii and E. A. Zabolotskaya.** *General theory for the spectral evolution of nonlinear Rayleigh Waves J. Acoust. Soc. Am. 102, 1402-1417. 1997.*
41. **E. A. Zabolotskaya.** *Nonlinear propagation of plane and circular Rayleigh waves in isotropic solids. J. Acoust. Soc. Am. 105, 639-651. 1999.*
42. **L. Qobi, A. de Kuijper, X.M. Tang and J. Strauss.** *Permeability determination from Stoneley waves in the Ara Group carbonates, Oman. GeArabia, 6(4) 2001.*
43. **A. Brie, T. Endo, D. L. Johnson and F. Lampuri.** *Quantitative formation permeability evaluation from Stoneley waves. SPE Reservoir Eval. Eng. pp 109-117. 2000.*
44. **S. Gelinsky, D. Patterson, X. Tang and A. Cheng.** *Anisotropic permeability in fractured reservoirs from integrated acoustic measurements. SEG. Tech. Program expanded abstr. 956-959. 1998.*
45. **K. W. Winkler, H. L. Liu and D. L. Johnson.** *Permeability borehole Stoneley waves: comparison between experiment and theory. Geophysics 66-75. 1989.*
46. **Sánchez-Sesma F.J., Campillo M.** *Diffraction of P, SV and Rayleigh waves by topographic features; a boundary integral formulation. Bull. Seism. Soc. Am. 1991.81:1-20.*
47. **Kupradze V.D.** *Dynamical problems in elasticity. In Progress in Solid Mechanics. I. N. Sneddon and R. Hill (eds), North-Holland, Amsterdam, vol. III; 1963.*
48. **Rodríguez-Castellanos A., Luzón F., Sánchez-Sesma F.J.** *Diffraction of seismic waves in an elastic cracked half-plane using a Boundary Integral Formulation. Soil Dynam.and Earthq. Eng. 2005. 25:827-837.*

49. **Rodríguez-Castellanos A., Sánchez-Sesma F.J., Luzón F., Martín R.** *Multiple scattering of elastic waves by subsurface fractures and cavities. Bull. Seis. Soc. Am. 2006. 96: 1359-1374.*
50. **Bouchon M., Aki K.** *Discrete wave number representation of seismic source wave fields. Bull. Seismol. Soc. Am. 1977.67: 259-277.*
51. **Rodríguez-Castellanos A., Sánchez-Sesma F.J.** *Numerical simulation of multiple scattering by hidden cracks under the incidence of elastic waves. Advanced Materials Research 2009. 65:1-8.*
52. **Rodríguez-Castellanos A., Avila-Carrera R., Sánchez-Sesma F.J.** *Scattering of elastic waves by shallow elliptical cracks. Revista Mexicana de Física 2007.53: 254-259.*
53. **Rodríguez-Castellanos A., Ávila-Carrera R., Sánchez-Sesma F.J.** *Scattering of Rayleigh-waves by surface-breaking cracks: an integral formulation. Geofísica Internacional 2007. 46: 241-248.*
54. **Avila-Carrera R., Rodríguez-Castellanos A., Sánchez-Sesma F.J., Ortiz-Alemán C.** *Rayleigh-wave scattering by shallow cracks using the indirect boundary element method. J. Geophys. Eng. 2009.*

Apéndice A

Análisis de Fourier

A.1 Análisis de Fourier.

En sismología se utilizan varias técnicas para estudiar el campo de desplazamientos como una función de la posición y del tiempo, asociada a las ondas sísmicas en la tierra así como para darnos una idea de la naturaleza de las fuentes sísmicas en ella. Aunque algunas técnicas dependen de aspectos específicos de las ondas sísmicas, otras se basan en las propiedades generales de las funciones del espacio y el tiempo.

Al análisis de Fourier permite descomponer la señal, originalmente en el dominio del tiempo, en una serie de ondas armónicas, considerando cada onda armónica por separado y luego recombinarlas. Esta metodología se utiliza para analizar los casos donde los efectos de la tierra o de un sismograma pueden ser explicados al filtrar los datos. Este análisis se utiliza también para filtrar una señal cuando la parte que nos interesa, está en el dominio del tiempo o el espacio, se traslapa con otra parte que no interesa en el análisis que se esté llevando a cabo.

A.1.1 Transformada de Fourier.

La transformada de Fourier de una señal temporal permite expresar a la señal como una superposición continua de las señales armónicas de frecuencias variables con una amplitud dependiente de cada frecuencia. Matemáticamente está definida como:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt \quad (\text{A.1})$$

Donde $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de la función $f(t)$ y la transformada inversa se define como:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{A.2})$$

Para comprender mejor la importancia de la transformada de Fourier al analizar las ondas conviene examinar los argumentos de ambas funciones $F(\omega)$, $f(t)$. La ecuación de onda plana admite soluciones de la forma $f(t - x/c)$, si aplicamos este corrimiento en el tiempo a la definición de la transformada inversa de Fourier se tiene

$$f(t - x/c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega(t-x/c)} d\omega \quad (\text{A.3})$$

Amplificaciones sísmicas en medios estratificados

Como $e^{i\omega(t-x/c)}$ es igual a $e^{i\omega t/c}$; $e^{i\omega t}$ se suele llamar al primer término propagador o función de transferencia. Si además se considera la velocidad compleja este término puede tener un factor de atenuación. La función de transferencia es un ente matemático que propaga la solución a través del medio. La función $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de la señal que perturba el medio. Generalmente, la función de transferencia se ve afectada por factores que contienen información sobre las amplitudes que sufre la onda viaja en el medio. La función de transferencia es un operador que permite conocer la solución en la posición de interés. Suele representarse comparando su módulo contra la frecuencia. Si bien no existe un método de solución universal para resolver el problema de propagación de ondas planas en medio estáticos, si existe una metodología que seguir para encontrar el campo de desplazamientos o esfuerzos en el medio a partir de soluciones en el dominio de la frecuencia. Una vez que se tiene la función de transferencia, esta debe convolucionarse con la excitación (representada en el dominio de la frecuencia). La convolución de funciones es un concepto matemático que se define como:

$$h(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t - x/c)d\tau \quad (\text{A.4})$$

Al aplicarse este teorema a la transformada de Fourier, se encuentra que si $F(\omega)$ y $H(\omega)$ respectivamente, entonces la convolución de ambas funciones tiene como transformada de Fourier al producto $F(\omega)H(\omega)$, es decir, la convolución de dos funciones en el dominio del tiempo se transforma en un producto de números complejos punto a punto en el dominio de la frecuencia. Una vez hecha la convolución entre la función de transferencia y la señal de excitación, basta con aplicar a dicho producto la transformada inversa de Fourier, la función que se obtenga será la respuesta del medio en el punto de estudio, a este resultado se le conoce como sismograma sintético representa la respuesta del medio en el dominio del tiempo.

A.1.2 Transformada discreta de Fourier.

Debido a que en la práctica los cálculos numéricos se hacen a través de programas que se escriben, es necesario discretizar las expresiones de la transformada de Fourier y de la transformada inversa. Así, definimos respectivamente a la transformada discreta de Fourier como:

$$F(\omega_j) = F_j = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t) e^{-i\omega_j n\Delta t} \quad (\text{A.5})$$

Donde Δt es la tasa de muestreo y n es el número de puntos que tiene la señal de interés. La transformada inversa discreta de Fourier se define como:

Amplificaciones sísmicas en medios estratificados

$$f(t_n) = f(n\Delta t) = f = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{j=0}^{N-1} F_j e^{i\omega_j n\Delta t} \quad (\text{A.6})$$

La representación gráfica de la transformada de Fourier suele hacerse como el módulo de cada uno de los valores de la función $F(\omega)$ en función de la frecuencia, es decir, $|F(\omega)|$ versus ω , a dicha grafica se le llama espectro de Fourier e indica la manera en que la energía varia respecto a la frecuencia.

Apéndice B

Función de Bessel

B.1 Función de Bessel.

En matemáticas, las funciones de Bessel, primera definidas por el matemático Daniel Bernoulli y más tarde generalizadas por Friedrich Bessel, son soluciones canónicas $y(x)$ de la ecuación diferencial de Bessel:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 + \alpha^2)y = 0 \quad (\text{B.1})$$

Donde α es un número real o complejo. El caso más común es cuando α es un entero n , aunque la solución para α no entero es similar. El número α se denomina orden de las funciones de Bessel asociadas a dicha ecuación.

La ecuación de Bessel se utiliza cuando se buscan soluciones a la ecuación de Laplace o a la ecuación de Helmholtz por el método de separación de variables en coordenadas cilíndricas o esféricas. Por ello, las funciones de Bessel son especialmente importantes en muchos problemas de propagación de ondas, potenciales estáticos y cualquier otro problema descrito por las ecuaciones de Helmholtz o Laplace en simetrías cilíndricas o esféricas. Cuando se resuelven sistemas en coordenadas cilíndricas, se obtienen funciones de Bessel de orden entero ($\alpha = n$) y en problemas resueltos en coordenadas esféricas, se obtienen funciones de Bessel de orden semi-entero ($\alpha = n + 1/2$).

B.1.2 Funciones de Bessel ordinarias.

Las funciones de Bessel ordinarias del tipo α , son soluciones de la ecuación de Bessel. Existen dos formas simples de expresar la solución general de la ecuación diferencial de Bessel con parámetro α , que están asociadas a las funciones de Bessel ordinarias de primera y segunda especie.

B.1.3 Funciones de Bessel de primera especie: J_α

Las funciones de Bessel de primera especie y orden α son las soluciones de la ecuación diferencial de Bessel que son finitas en el origen ($x = 0$) para enteros no negativos α y divergen en el límite para α negativo no entero. Para las soluciones de orden entero es posible definir la función $J_\alpha(x)$ para su expansión en serie de Taylor en torno a $x = 0$:

$$J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha} \quad (\text{B.2})$$

$$J_\alpha(x) = \frac{x^\alpha}{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1)} \left[1 - \frac{x^2}{2(2\alpha + 2)} + \frac{x^4}{2(4)(2\alpha + 2)(2\alpha + 4)} \right] \quad (\text{B.3})$$

Donde $\Gamma(z)$ es la función Gamma de Euler.

Estas funciones cumplen lo siguiente:

- Si $\alpha \notin Z$, entonces $J_\alpha(x)$ y $J_{-\alpha}(x)$ son linealmente independientes, y por lo tanto proporcionan una solución general a la ecuación de Bessel
- Si $\alpha \notin Z$, entonces $J_{-\alpha}(x)$ no está definida en $x = 0$.
- Si $\alpha \notin Z$, entonces se cumple: $J_{-\alpha}(x) = (-1)^n J_n(x)$, por lo que las dos soluciones dejan de ser linealmente independientes. En este caso, la segunda solución linealmente independiente será una función de Bessel de segunda especie.

B.1.4 Funciones de Bessel de segunda especie: Y_α

Las funciones de Bessel de segunda especie, denotadas por $Y_\alpha(x)$, son soluciones de la ecuación diferencial de Bessel. Estas funciones divergen en el origen ($x = 0$). A estas funciones $Y_\alpha(x)$ también se les llama funciones de Neumann o de Weber, y se denotan por $N_\alpha(x)$. Para α no enteros, se definen a partir de las funciones de primera especie $J_\alpha(x)$ mediante la siguiente fórmula:

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}, \quad \forall \alpha \notin Z \quad (\text{B.4})$$

B.2 Funciones de Hankel: H_α

Otra formulación importante de las soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel son las funciones de Hankel $H_\alpha^{(1)}(x)$ y $H_\alpha^{(2)}(x)$ definidas por:

$$H_\alpha^{(1)}(x) = J_\alpha(x) + iY_\alpha(x) \quad (\text{B.5})$$

$$H_\alpha^{(2)}(x) = J_\alpha(x) - iY_\alpha(x) \quad (\text{B.6})$$

Donde i es la unidad imaginaria. Estas combinaciones lineales son también conocidas como las funciones de Bessel de tercera especie. Las funciones de Hankel de primera y segunda especie son usadas para representar las soluciones de ondas entrantes y salientes de una ecuación de onda en simetría cilíndrica respectivamente (o viceversa dependiendo de la convención de signo de la frecuencia). Estas funciones son nombradas en honor a Hermann Hankel. Utilizando la definición mencionada anteriormente, estas funciones se pueden escribir en términos de las funciones de Bessel de primer orden $J_\alpha(x)$ como:

$$H_n^{(1)}(x) = \frac{J_{-\alpha}(x) - e^{-\alpha\pi i} J_\alpha(x)}{i \sin(\alpha\pi)} \quad (\text{B.7})$$

$$H_n^{(2)}(x) = \frac{J_{-\alpha}(x) - e^{-\alpha\pi t} J_{\alpha}(x)}{-i \sin(\alpha\pi)} \quad (\text{B.8})$$

Si α es un entero, las expresiones anteriores se pueden reescribir como:

$$H_n^{(1)}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} H_{\alpha}^1(x) \quad \forall \quad n \in Z \quad (\text{B.9})$$

$$H_n^{(2)}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} H_{\alpha}^2(x) \quad \forall \quad n \in Z \quad (\text{B.10})$$

La siguiente relación es válida para todo valor de α , sea entero o no:

$$H_{-\alpha}^{(1)}(x) = e^{\alpha\pi t} H_{\alpha}^{(1)}(x) \quad (\text{B.11})$$

$$H_{-\alpha}^{(2)}(x) = e^{-\alpha\pi t} H_{\alpha}^{(2)}(x) \quad (\text{B.12})$$

B.2.1 Solución general de la ecuación de Bessel.

La solución general de la ecuación diferencial de Bessel con parámetro α viene dada en términos de las funciones de Bessel ordinarias o de las funciones de Hankel. Dicha solución general puede expresarse como:

$$y(x) = AJ_{\alpha}(x) + BJ_{-\alpha}(x) \quad \forall \quad \alpha \in Z$$

$$y(x) = AJ_{\alpha}(x) + BY_{-\alpha}(x) \quad \forall \quad \alpha \in R$$

$$y(x) = AJ_{\alpha}(x) + BJ_{\alpha}(x) \int \frac{dx}{xJ_{\alpha}^2(x)} \quad \forall \quad \alpha \in R$$

$$y(x) = AH_{\alpha}^{(1)}(x) + BH_{\alpha}^{(2)}(x) \quad \forall \quad \alpha \in R$$