Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Unidad Zacatenco

Sección de Estudios de Posgrado e Investigación

Análisis de estabilidad de un sistema bioconvectivo en una cavidad

---

Tesis
que para obtener el grado de
DOCTOR EN INGENIERÍA MECÁNICA
presenta

M. en C. Rubén Mil Martínez

Directores:
Dr. José Ángel Lodegario Ortega Herrera
Dr. René Osvaldo Vargas Aguilar

Ciudad de México a 7 de Noviembre del 2019

SIP-14
REP 2017

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 07 del mes de Noviembre del 2019 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Posgrado de: E.S.I.M.E ZACATENCO para examinar la tesis titulada: **"ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE UN SISTEMA BIOCONVECTIVO EN UNA CAVIDAD"** por el (la) alumno (a):

Apellido Paterno:	MIL	Apellido Materno:	MARTÍNEZ	Nombre (s):	RUBÉN

Número de registro: A 1 6 1 0 5 2

Aspirante del Programa Académico de Posgrado: DOCTORADO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA MECÁNICA

Después de la lectura y revisión individual, así como el análisis e intercambio de opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR** [X] **NO APROBAR** [ ] la tesis, en virtud de los motivos siguientes:

EL ALUMNO CUMPLE CON LOS REQUISITOS QUE ESTABLECE EL POSGRADO, COMO SON PROGRAMA INDIVIDUAL DE ACTIVIDADES Y ARTICULO JCR ACEPTADO Y PUBLICADO.

Comisión Revisora de Tesis

DR.JOSÉ ANGEL LODEGARIO ORTEGA HERRERA
13760-EG-18/6 Y COLEGIADO
DIRECTOR DE TESIS

DR. JESÚS ALBERTO MEDA CAMPAÑA
12386-ED-17 Y COLEGIADO
PRESIDENTE

DR. EZEQUIEL ALBERTO GALLARDO HERNANDEZ
14641-ED-19 Y COLEGIADO
SECRETARIO

DR. RENÉ OSVALDO VARGAS AGUILAR
EXTERNO
2° DIRECTOR DE TESIS

DR. MARCO ANTONIO GUTIÉRREZ VILLEGAS
EXTERNO
TERCER VOCAL

Presidente del Colegio de Profesores

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
ESTADOS UNIDOS MEXICANOS
I. P. N.
SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

DR. JOSÉ MARTINEZ TRINIDAD

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 28 del mes de Noviembre del año 2019, el que suscribe Rubén Mil Martínez alumno el Programa de Doctorado en Ciencia en Ingeniería Mecánica con número de registro A161052, adscrito a SEPI ESIME UZ, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. José Ángel Lodegario Ortega Herrera y el Dr. René Osvaldo Vargas Aguilar y cede los derechos del trabajo intitulado Análisis de estabilidad de un sistema bioconvectivo en una cavidad, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección rbnm2@hotmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Rubén Mil Martínez

Resumen

Esta tesis presenta el análisis de estabilidad lineal y simulación numérica de un sistema bioconvectivo en una cavidad. Se utiliza un modelo que acopla las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y concentración de microorganismos considerando la aproximación de Boussinesq. El sistema de ecuaciones adimensional involucra tres números adimensionales: Peclet, Schmidt y Rayleigh que contienen la información física de este problema bioconvectivo. Para validar el código numérico desarrollado se reprodujeron dos casos reportados por Taheri [23]. Se fijaron como condiciones iniciales los estados básicos para la concentración y la función corriente en las simulaciones numéricas. La influencia de la componente horizontal del vector onda en la formación de celdas bioconvectivas, fue analizada mediante curvas marginales y diagramas de bifurcación. Se determinaron los valores del número de Rayleigh crítico, subcrítico y supercrítico, para diferentes valores de la componente horizontal del vector onda. El patrón dominante del sistema fueron tres rollos estables cuando las principales variables del sistema se fluctuaron.

Abstract

This thesis presents the linear stability analysis and the numerical simulation of a bioconvective system in a cavity. The developed model couples the conservation equations of mass, momentum and microorganisms concentration by considering the Boussinesq approximation. The dimensionless equation system involves three dimensionless numbers: Peclet, Schmidt and Rayleigh that contain the physical information of this bioconvective problem. In order to validate the developed numerical code two cases reported by Taheri [23] were reproduced. The initial condition for the numerical simulation the basic states for concentration and stream function were set. The influence of the horizontal component of the wave vector on the formation of convective cells using marginal curves and bifurcation diagrams was analyzed. For different values of the horizontal component of the wave vector, the critical, subcritical and supercritical Rayleigh numbers were determined. When the principal variables of the system were perturbed, the dominant pattern was three stable rolls.

Jurado

Presidente: **Dr. Jesús Alberto Meda Campaña**

Secretario: **Dr. Ezequiel Alberto Gallardo Hernández**

1$^{er.}$ Vocal: **Dr. José Ángel Lodegario Ortega Herrera**

2$^{do.}$ Vocal: **Dr. René Osvaldo Vargas Aguilar**

3$^{er.}$ Vocal: **Dr. Marco Antonio Gutiérrez Villegas**

Suplente: **Dr. Luis Héctor Hernández Gómez**

Agradecimientos

Al Instituto Politécnico Nacional.

A la SEPI ESIME UZ.

Al CONACYT por la beca otorgada para el estudio del doctorado.

A los Proyectos BEIFI, por el estímulo económico otorgado durante mi formación académica.

Al Dr René por el apoyo, la paciencia, la amistad, el conocimiento a lo largo de mi formación. Así mismo por explorar nuevas líneas de investigación como esta.

Al Dr Ortega por confiar en este tema de investigación, por su apoyo y su conocimiento durante los cursos de doctorado.

Dedicatoria

Dedicada a:

El Eterno Dios por su justicia, juicio y misericordia perpetuas, quien me permitió llegar hasta este día.

Mis Padres Benjamín Mil Alegría y María Altagracia Martínez Acua, por su gran amor paternal, su apoyo incondicional y sus consejos que forjaron mi vida.

Mis abuelos Rutilio Mil Olin y María Elena Alegría Azamar†, Francisco Martínez Martínez† y Franca Acua Quinto, por sus sabios consejos, por su constante preocupación y apoyo.

Mis hermanos Alejandra y Benjamín, por su apoyo incondicional y cariño.

A mis hijos, Hadassa y Nehemías quienes son parte fundamental en mi vida.

Índice general

Lista de tablas

Lista de figuras

Nomenclatura

Símbolo	Nombre	Unidades
A	Aspecto radio	-
D_m	Difusividad de microorganismos	m^2/s
g	Gravedad	m/s^2
H	Altura de la cavidad	m
$\tilde{J}$	Flux de microorganismsos adimensional	M/m^2s
L	Ancho de la cavidad	m
n	Concentración de microorganismos	cel/m^3
$\bar{n}$	Concentración promedio dimensional de microorganismos	cel/m^3
$\bar{N}$	Concentración promedio adimensional de microorganismos	-
Pe	Número de Peclet	-
Ra	Número de Rayleigh	-
Sc	Número de Schmidt	-
t	Tiempo	s
$\tilde{u}$	Componente horizontal de la velocidad adimensional	m/s
$\tilde{v}$	Componente vertical de la velocidad adimensional	m/s
$\bar{V}_c$	Velocidad vertical de los microorganismos	m/s
x_1, x_1	Sistema coordenado adimensional	-
Símbolos griegos		
α	Difusividad térmica	m^2/s
ϑ	Volumen de microorganismos	m^3
γ	Vector unitario vertical	-
$\tilde{\Psi}$	Función Corriente adimensional	
$\tilde{\omega}$	Vorticidad adimensional	
Superíndice		
sup	Supercrítico	
$'$	Variables dimensionales	
Subíndice		
sub	Subcrítico	
m	marginal	

Capítulo 1

Introducción

1.1. Convección en fluidos

Los problemas de convección son una rica fuente de material para el desarrollo de nuevas ideas concernientes a la relación entre el orden y el caos en los flujos, entre la simplicidad y la complejidad en la estructura y el comportamiento de los objetos hidrodinámicos. Los flujos convectivos pueden formar estructuras espaciales relativamente ordenadas, y su investigación contribuye sustancialmente a comprender las propiedades generales de los sistemas que forman patrones, los cuales son el tema principal de estudio en sinergética, una rama desarrollada activamente de la ciencia moderna [1].

Las estructuras regulares surgen en todas partes en la naturaleza y prácticamente en todos los procesos tecnológicos implican su formación en algún momento. Al inyectar energía en un sistema dinámico, típicamente un estado de equilibrio inicial se vuelve inestable por encima de cierto umbral y, como resultado de esta inestabilidad, emergen estructuras espacio-temporales bien definidas. Véase Fig.1.1.

Más allá de la situación o sistema específico considerado, estas estructuras se caracterizan por un nivel reconocible de autoorganización (es decir, una morfología y/o topología precisa en el espacio y/o líneas de evolución en el tiempo) y bajo ciertas idealizaciones es natural considerar el proceso que conduce a su formación como la vida del sistema dinámico considerado. Las características de esta se presentan cuando $t \longrightarrow \infty$, luego se determinan los aspectos característicos de estas estructuras, ya sean perfectas o irregulares. Este fenómeno has sido ampliamente analizado, desde diferentes perspectivas, así como diferentes grupos de investigación. Esta sinergia ha llevado a lo largo de los años el establecimiento de un marco teórico común y elegante que ahora se conoce generalmente como el campo de la formación de patrones o, en otras acepciones, el estudio de la estabilidad relacionada y la posible evolución [2].

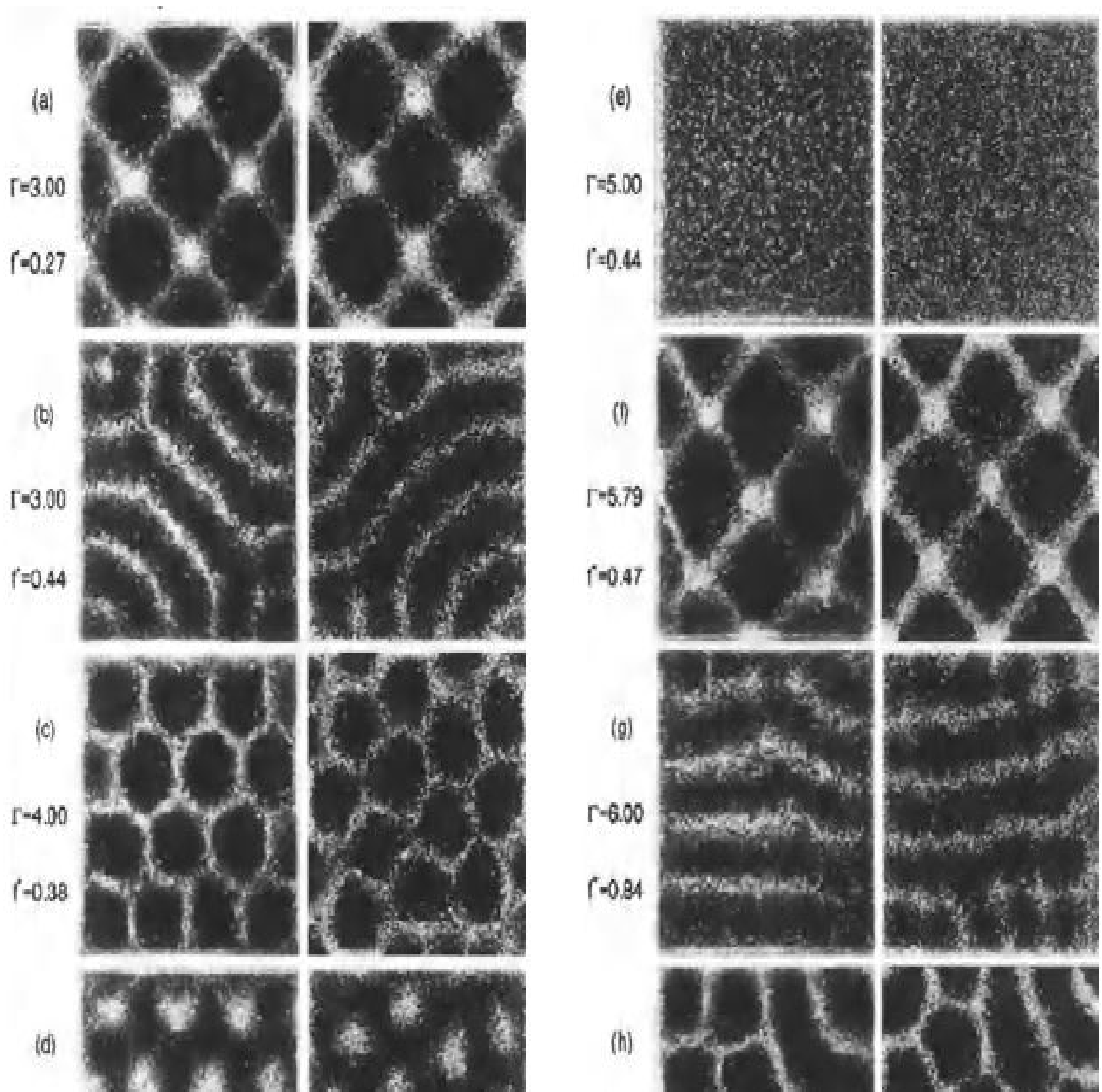

Figura 1.1: Patrones estacionarios, de izquierda a derecha: experimentos y simulaciones, respectivamente. a) cuadros, b) bandas c) y d) fases alternas de hexágonos, e) capas planas, f) cuadros, g) bandas y h) hexágonos. Para los parámetros de simulación, véase [3].

Muchas galaxias tienen una densidad de masa no uniforme en forma de dos o más brazos espirales, como se muestra en la Fig. 1.2. Nuestra propia galaxia, la Vía Láctea, es una galaxia espiral y nuestro Sistema Solar vive en uno de sus brazos espirales de alta densidad. El por qué las galaxias evolucionan para formar brazos espirales es poco conocido y es una pregunta abierta importante en la investigación astrofísica actual [4].

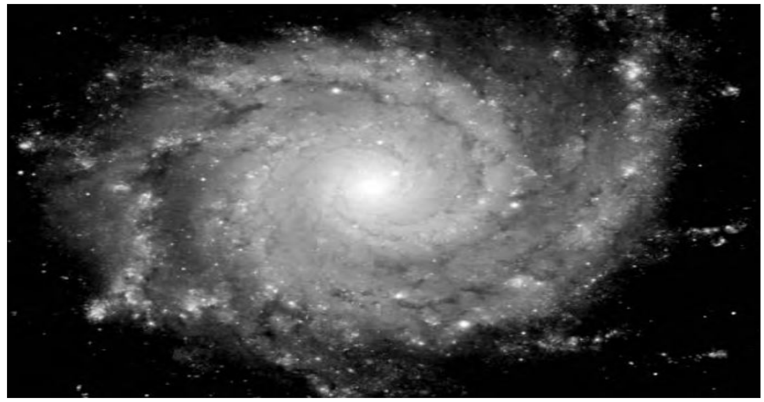

Figura 1.2: Fotografía de la galaxia espiral M74. Por qué las galaxias aparecen en forma de espiral, elíptica e irregular sigue sin entenderse.

La formación de patrones sigue siendo tema de estudio en la actualidad. Identificar la influencia de los principales parámetros que influyen la formación de los mismos, es de gran importancia en diferentes enfoques.

1.2. Convección Rayleigh-Bénard (R-B)

La convección de Rayleigh-Bénard en espacios cerrados ha sido objeto de numerosos estudios teóricos, experimentales y numéricos, debido a la gran importancia que tiene en diversos campos de la ciencia y la ingeniería. Además de sus aplicaciones en diversos campos de ingeniería, se ha dedicado un gran esfuerzo a la convección de Rayleigh-Bénard para investigar la inestabilidad de la dinámica de fluidos y el comportamiento caótico de estos [5].

Considere una capa horizontal de un fluido, la parte inferior más caliente que en la superior. Una diferencia de temperatura muy pequeña reduce el proceso de transferencia de calor por conducción. Sin embargo, por encima de una temperatura crítica, la viscosidad y la conductividad térmica ya no pueden estabilizar este estado con un fluido de menor densidad debajo del fluido de mayor densidad. Se vuelve inestable debido a la flotabilidad: se involucra ahora el proceso convectivo [6]. En la Fig. 1.3 a) se muestra el esquema de una capa de fluido la cual se calienta a una temperatura T_h en x=0 y se enfría a T_c en x=H. b) se presentan celdas o rollos convectivos causados por la inestabilidad inducida por las fuerzas de flotación, se presenta a 5 s. c) la formación de plumas térmicas es presentada a 5 s.

Este fenómeno está sujeto a las siguientes ecuaciones de gobierno adimensionales:

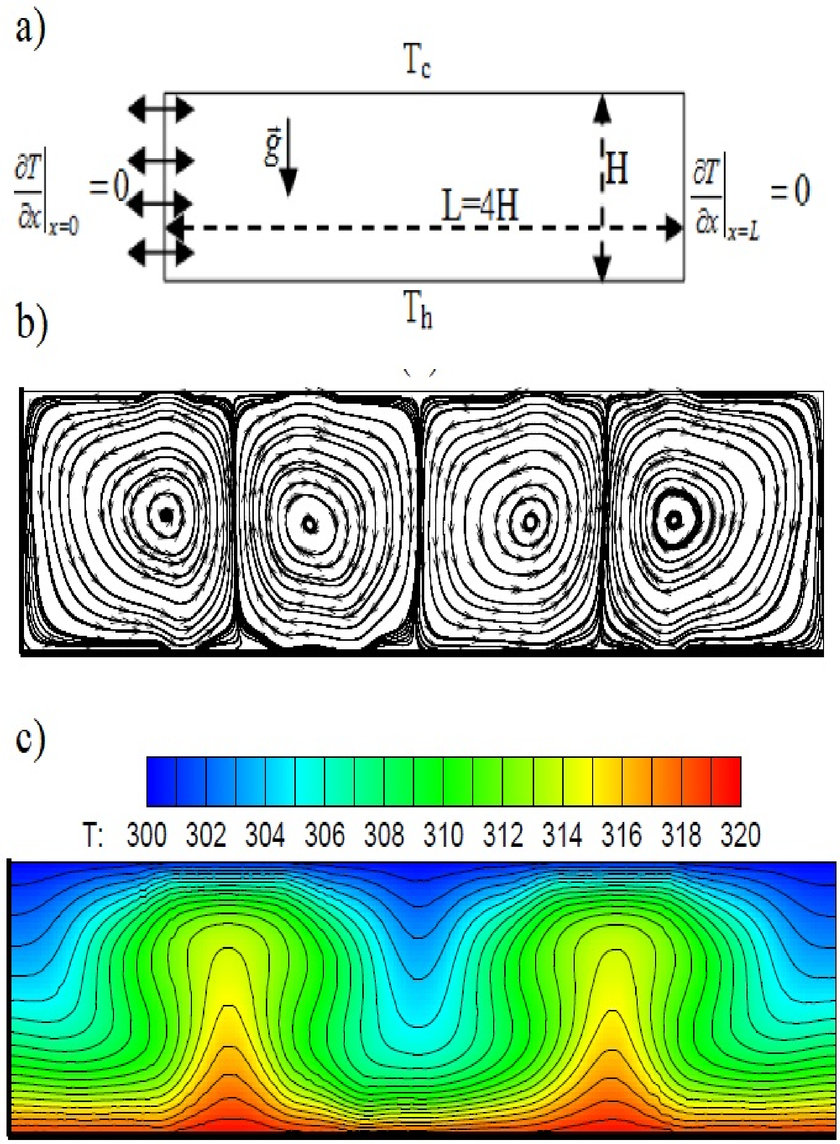

Figura 1.3: Convección Rayleigh-Bénard a) Esquema del problema (R-B), b) Líneas de corriente a 5 s c) Contorno de temperatura a 5 s. [5]

$$\nabla \cdot \underline{u'} = 0 \tag{1.1}$$

$$\rho \frac{\partial \underline{u'}}{\partial t'} + \rho \underline{u'} \cdot \nabla \underline{u'} = -\nabla p' + \mu \nabla^2 \underline{u'} + \underline{g} \rho_2 (1 - \beta (T' - T_c)) \tag{1.2}$$

$$\rho \frac{\partial \underline{T'}}{\partial t'} + \rho \underline{u'} \cdot \nabla \underline{T'} = \kappa \nabla^2 \underline{T'} \tag{1.3}$$

donde ρ_2, β, κ es la densidad del fluido en la parte superior de la capa de este, el coeficiente de expansión térmica, la conductividad térmica, respectivamente.

El sistema de Ecs.1.1-1.3)en su forma adimensional es el siguiente:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i^2} = -\omega, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = Pr \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j^2} - PrRa \frac{\partial \theta}{\partial x_1}, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = Pr \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2}, \tag{1.6}$$

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = 0 \quad at \;\; x_1 = 0, A, \tag{1.7}$$

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = 0, \quad \theta = 1, \quad \theta = 0 \quad at \;\; x_2 = 0, 1, \tag{1.8}$$

donde ω, Ψ, θ, es la función corriente, la vorticidad y la temperatura adimensionales, respectivamente. $A = L/H$ es la relación de aspecto de la cavidad. $Pr = \nu/\alpha$, $Ra = g\beta(T_h - T_c)d^3/\nu\alpha$. Donde α, β, ν, g, d, T_h, T_c es la difusividad térmica, el coeficiente de expansión térmica, la viscosidad cinemática, la gravedad, la longitud característica, la temperatura de calentamiento y la temperatura de enfriamiento, respectivamente.

Cuando Rayleigh $Ra = 1708$ las fuerzas de flotación inducen la convección natural, surgen rollos convectivos y plumas térmicas como se observa en la Fig. 1.3.

1.3. Bioconvección

Los microorganismos han jugado un papel importante en la ecología, en fenómenos biológicos, en la medicina y la ingeniería [7]. Por primera vez en 1961 Plat [8] utilizó el nombre de bioconvección en el análisis para la formación de patrones causados por microorganismos en una suspensión acuosa. Este comportamiento, le pareció muy similar a la convección de Rayleigh-Bénard, el cual fue base para describir a este fenómeno como bioconvección. La principal diferencia entre la convección de Rayleigh-Bénard y la bioconvección es, el gradiente que inicia la formación de patrones. Para que surja la aparición de patrones, debe producirse una lucha entre la energía cinética que origina el gradiente y la energía utilizada del sistema para estabilizarse.

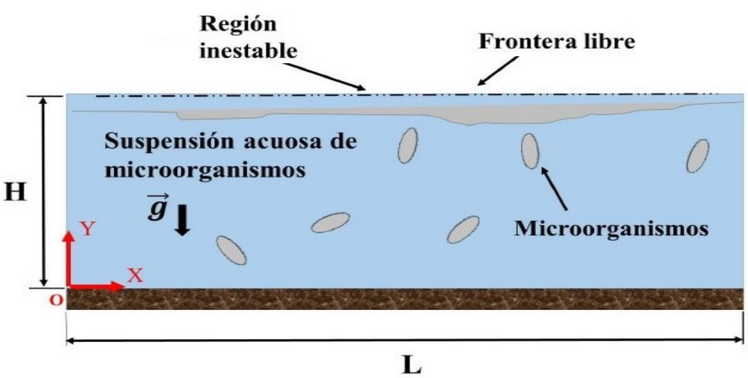

Figura 1.4: Suspensión de microorganismos en una capa de fluido.

En la convección de Rayleigh-Benárd, se presenta un gradiente de térmico, mientras que en la bioconvección produce un gradiente de concentración de microoganismos. Estos microorganismos nadan mediante estímulos denonimados taxis. Dentro de las taxis más comunes se encuentran la gravitaxis, quimiotaxis, oxitaxis, fototaxis.

Como se mencionó previamente, la bioconvección es la formación de patrones causados por el movimiento colectivo de microorganismos. Para asimilar aún más el concepto, considérese una capa de fluido en la cual están inmersos los microorganismos gravitácticos, como se muestra en la Fig. 1.4. Cuando los microorganismos nadan en dirección vertical tienden a acumularse en la parte superior.

En la mayoría de los casos, la formación de patrones ocurre porque los microorganismos activos se concentran al parte superior de la suspensión. Siendo de 5 a 10 % más densos que el medio en el que se encuentran. Cuando la densidad es mayor en la parte superior, ocurre un descenso de los microorganismos conocido como plumas. Entonces, comienza la bioconvección, lo microorganismos luchan por mantenerse en la parte superior de la capa de fluido. Sin embargo, debido a la densidad que alcanzan tienden a caer en la parte inferior. Así comienzan el proceso hasta la formación de celdas convectivas. Es importante mencionar, que a pesar de no haber transferencia de calor en este fenómeno, se producen rollos o celdas por un gradiente de concentración de microorganismos. Los rollos pueden

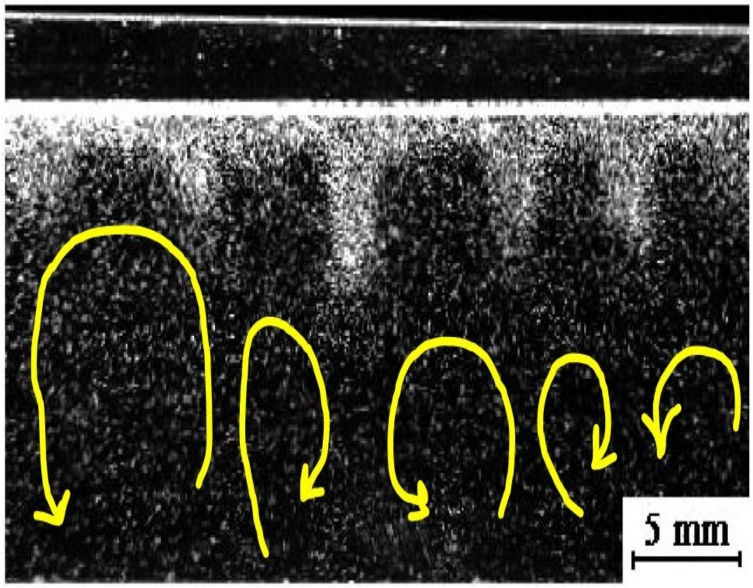

Figura 1.5: Plumas convectivas estacionaras [32] .

girar en dirección horaria o antihoraria. Pueden ser estables o inestables. Como se puede observar en la Fig.1.5, las plumas inducen el desarrollo del rollos similares a la convección Rayleigh-Bénard.

Dependiendo de la estabilidad del sistema. Los patrones serán estables o inestables durante la bioconvección. Dicha estabilidad es crucial en el análisis del sistema. Debido a esto, mediante el análisis de estabilidad lineal o simulaciones numéricas, se puede obtener una mejor comprensión del comportamiento del fenómeno. No sólo se trata de predecir el momento en que ocurrirá la formación de patrones o rollos, sino de entender cuáles son los parámetros que predominan durante la bioconvección. Esto permitirá un apropiado manejo de los mismos en alguna aplicación de tipo biológica o ingenieril. La Fig. 1.5, muestra un ejemplo de la formación de plumas que generan rollos en la suspensión de microorganismos.

Caracterizar este tipo patrones, bajo ciertas consideraciones, sería de gran utilidad en procesos biológicos, bioquímicos y en la mecánica de fluidos, por mencionar algunas líneas de investigación.

La formación de patrones espacio temporales causados por mircoorganismos en suspensiones acuosas, han sido objeto de análisis. A medida que se han desarrollado más investigaciones, surgen aplicaciones en algún proceso en el que los microorganismos puedan ser útiles. La capacidad de describir el fenómeno y predecir el comportamiento de un sistema bioconvectivo es crucial.

1.4. Antecedentes

Se han realizado diferentes investigaciones para comprender las principales características que describen la formación de patrones causados por microorganismos [9]- [14], las cuales fueron las base para el entendimiento de la bioconvección.

Algunos estudios más recientes acerca de la bioconvección se citan a continuación: En 2004, la formación de la pluma en un medio poroso causado por microorganismos, fue estudiada por Kuznetsov et al. [18] usando ecuaciones elípticas completas, sin descuidar ningún término y sin parabolizarlas. Además, el efecto de inestabilidad de una suspensión de microorganismos girotácticos en una capa de profundidad finita además de pequeñas partículas, fueron analizado por Kuznetsov et al. [19].

En 2005 Bahloul et al. [20], analizaron numéricamente la dependencia del número de Rayleigh y el número de onda de la velocidad de nadado al comienzo de la bioconvección en microorganismos gravitácticos en una capa. El problema de la bioconvección, en una capa porosa con una suspensión de microorganismos gravitácticos, fue considerado por Nguyen-Quang et al. [21]. La bioconvección en un cilindro vertical, fue analizada por Alloui et al. [22]; donde para números de bajos de Peclet (Pe), el fenómeno fue similar a la convección Bénard, sin embargo, para números grandes del Pe, la bioconvección gravitáctica fue cualitativa y cuantitativamente diferente.

En 2007, la bioconvección de microorganismos gravitácticos en una cavidad rectangular, fue observada por Taheri et al. [23], donde el efecto de la relación de aspecto y el número de Pe, se analizaron al inicio de la bioconvección. En 2011, se estudió la convección biotérmica, inducida por microorganismos girotácticos y gravitácticos por Kuznetsov [24].

En 2013 Md. Jashim et al. [25], implementaron un nanofluido no newtoniano utilizando el modelo de ley de potencia que contenía tanto microorganismos y nanopartículas. Estudiaron la influencia de los parámetros de control en la velocidad adimensional, la temperatura, la concentración de nanopartículas y la densidad de los microorganismos móviles, así como los números locales de Nusselt (Nu), Sherwood (Sh) y el número de microorganismos móviles. En 2014 Li Xiao et al. [26], demostraron la posibilidad de incorporar microorganismos fototróficos en celdas de combustible microbianas, MFC por sus siglas en inglés, para ayudar a la generación de electricidad. Ammarah et al. [27], analizaron el flujo de compresión inestable de un fluido que contiene nanopartículas y microorganismos girotácticos entre las placas paralelas, donde se pueden encontrar aplicaciones directas en la industria farmacéutica, dispositivos microfluídicos, recuperación microbiana de petróleo mejorada, aceite de modelado y cuencas sedimentarias portadoras de gas.

En 2015, una investigación numérica de la caída de las plumas bacterianas, en una cámara tridimensional fue analizada por Hyun et al. [28]. En 2016, Uddin et al. [29] investigaron la influencia colectiva de la velocidad de deslizamiento de segundo orden, además del deslizamiento térmico, el flux de masa y de deslizamiento del microorganismo en la condiciones de frontera en la capa de bioconvección giratoria de convección libre del nanofluido a lo largo de una placa horizontal orientada hacia arriba.

En 2017, Fatema et al. [30] consideraron el flujo del nanofluido bioelectromagnético que contiene microorganismos girotácticos a lo largo de una configuración de cuña con múltiples condiciones de frontera convectiva. Uddin et al. [31] estudiaron celdas de combustible microbianas que explotaban tanto los nanofluidos como la bioconvección. Analizaron los efectos de la velocidad adimensional, la temperatura, la fracción de volumen de las nanopartículas y el microorganismo móvil junto con la fricción de la piel, la rapidez de transferencia de calor y la rapidez de transferencia de microorganismos móviles mediante simulación numérica.

A pesar de que se han realizado algunas investigaciones previas, aún hay mucho que analizar de este fenómeno. En esta tesis se presentará un análisis de estabilidad lineal y simulaciones numéricas que involucran las principales variables del proceso, que ayudarán para una mejor comprensión de este fenómeno.

1.5. Justificación

En la literatura se han realizado tratamientos que predicen tanto analítica como numéricamente el fenómeno bioconvectivo. Sin embargo, no se ha presentado un análisis tanto numérico como analítico de un sistema de bioconvectivo en una cavidad, con una concentración de microorganismos gravitáticos. Además, no se ha reportado la influencia de la componente horizontal del vector onda y la estabilidad del sistema.

1.6. Hipótesis

Mediante el análisis de estabilidad lineal, es posible acoplar la solución del estado básico con las simulaciones numéricas que permitan predecir la aparición de patrones en un sistema bioconvectivo con microorganismos gravitácticos.

1.7. Objetivos

1.7.1. Objetivo general

Determinar el surgimiento de patrones en un sistema bioconvectivo a través de un análisis lineal y de simulaciones numéricas.

1.7.2. Objetivos particulares

1. Determinar la solución del estado básico del sistema bioconvectivo, mediante un análisis lineal.
2. Acoplar la solución del estado básico con las simulaciones numéricas en un esquema ADI en diferencias finitas.
3. Analizar el efecto de los valores característicos del sistema del estado básico.
4. Analizar el efecto la componente horizontal del vector onda en la estabilidad del sistema.
5. Realizar un diagrama de bifurcaciones a través de simulaciones numéricas para determinar la estabilidad del sistema.

Capítulo 2

Formulación del problema

En el capítulo anterior, se presentó de manera general el sistema bioconvectivo. En este capítulo se establecerá las condiciones para el análisis de estabilidad de un sistema bioconvectivo.

Para la solución del problema es necesario plantear un modelo matemático que permita describir el fenómeno que se está investigando. Este trabajo está enfocado en la formación de patrones bioconvectivos. En la Fig. 2.1 se establece un sistema Cartesiano (x_1, x_2), en el que la cavidad tiene una altura H y una longitud L. En el estado inicial, se considera una distribución de concentración uniforme $\bar{n}$, y un estado básico en para la función corriente Ψ, cada microorganismo tiene un volumen ϑ y una densidad ρ_c [23].

En este trabajo se analizará la estabilidad de un sistema bioconvectivo en una cavidad rectangular. Las suposiciones serán las siguientes:

2.1. Suposiciones

- Sistema isotérmico.
- Se considera un fluido incompresible (suspensión acuosa de microorganismos).
- Propiedades físicas constantes excepto en el término de flotación.
- La suspensión acuosa de microorganismos se encuentra en una cavidad.
- Los microorganismos son gravitácticos. Es decir, que nadan en dirección vertical hacia arriba.

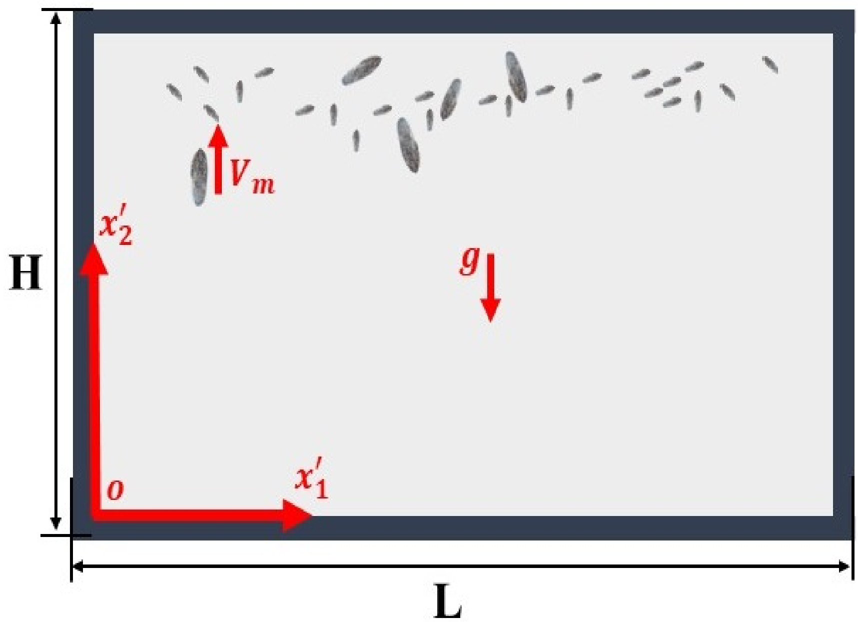

Figura 2.1: Representación esquemática del problema.

- Sistema Cartesiano bidimensional (x_1, x_2).
- Se establece como condición inicial, un estado básico para la concentración y la cantidad de movimiento.
- Se estudian los estados estacionarios del fenómeno bioconvectivo.

2.2. Ecuaciones de gobierno

2.2.1. Ecuaciones de conservación

Para realizar el estudio de bioconvección, son necesarias ecuaciones de gobierno. Childress et al. [9] propusieron un modelo para describir el flujo del fluido, utilizaron la ecuación de Navier-Stokes, y para la concentración de microorganismos una ecuación difusiva-convectiva [9].

2.2.2. Ecuación de conservación de masa.

La ecuación de conservación de masa está dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'} + \nabla \cdot \rho \underline{u'} = 0 \tag{2.1}$$

donde el término del lado izquierdo muestra los cambios temporales de la densidad, $\vec{u'} = (U, V)$ es el vector velocidad del fluido y ρ la densidad. En este trabajo, se utiliza un fluido incompresible como se verá en la Sección 2.1, por lo que la ecuación de conservación de masa utilizada es la siguiente:

$$\nabla \cdot \underline{u'} = 0 \tag{2.2}$$

que es la ecuación de continuidad para un fluido incompresible.

2.2.3. Ecuación de conservación de cantidad de movimiento.

Para la ecuación de conservación de cantidad de movimiento se tiene:

$$\rho \frac{D\underline{u'}}{Dt'} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} \tag{2.3}$$

donde $\frac{D}{Dt'}$ es la derivada material, $\underline{\underline{\sigma}}$ es tensor de esfuerzos de Cauchy, $\underline{f}$ son las fuerzas externas. El tensor de esfuerzos se puede representar de la siguiente forma:

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p'\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}} \tag{2.4}$$

donde p' es la presión, $\underline{\underline{I}}$ es el tensor unitario, $\underline{\underline{\tau}}$ es tensor de esfuerzos que para este trabajo se utiliza la ecuación constutiva de un fluido newtoniano. Sustituyendo la Ec. (2.4) en la Ec. (2.3) se tiene lo siguiente:

$$\rho \frac{D\underline{u'}}{Dt'} = -\nabla p' + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + \underline{f} \tag{2.5}$$

para un fluido incompresible se tiene

$$\rho \frac{\partial \underline{u'}}{\partial t'} + \rho \underline{u'} \cdot \nabla \underline{u'} = -\nabla p' + \mu \nabla^2 \underline{u'} + \rho \underline{g} \tag{2.6}$$

en donde p' es la presión, μ es la viscosidad del fluido, $\underline{u'} = (U, V)$ es el vector velocidad. El primer término representa la aceleración local, y el segundo la aceleración convectiva; del lado derecho de la igualdad está el gradiente de presión, la difusión de cantidad de movimiento y una fuerza externa sobre el fluido (gravedad).

2.2.4. Ecuación para la concentración.

La ecuación propuesta en el modelo de Childress [9] et al. es la siguiente:

$$\frac{\partial n'}{\partial t'} = -\nabla \cdot \underline{J'} \tag{2.7}$$

$$\underline{J'} = (\underline{u'} + V_m \underline{\gamma}) n' - D_c \nabla n' \tag{2.8}$$

donde $\underline{J'}$, V_m, D_c, es el flux de microorganismos, la velocidad de natación y el coeficiente de difusión de los microorganismos, respectivamente, $\underline{\gamma} = (0, 1)$ es el vector unitario vertical. El primer término de la Ec. (2.7), es la acumulación los microorganismos, del lado derecho se describe el flux , incluyendo los términos convectivos y difusivos, respectivamente; como se indica en la Ec. (2.8).

2.2.5. Aproximación de Boussinesq.

Para describir el cambio de densidad de la suspensión [15] se utilizó la aproximación de Boussinessq. Ésta asume que todas las propiedades del fluido se consideran constantes [15,17], excepto en el término de flotación donde las pequeñas fluctuaciones de la densidad varían por la concentración de microorganismos; éstas son importantes y pueden ser expresadas mediante una función lineal [23]:

$$\rho = \rho_w + (\rho_c - \rho_w) n' \vartheta = \rho_w (1 + \vartheta \frac{\Delta \rho}{\rho_w} n') \tag{2.9}$$

en donde ρ es la densidad de la suspensión acuosa, ρ_w es la densidad del agua, ρ_c, ϑ n', la densidad, el volumen, y el número de microorganismo por unidad de volumen, respectivamente.

Implementando la aproximación de Boussinesq en la Ec. (2.6) en variables primitivas se tiene:

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t'} + u_j'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j'} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i'} + \nu\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j' \partial x_j'} + \frac{\triangle\rho}{\rho_w} g\vartheta n'\Lambda_2 \tag{2.10}$$

en donde Λ_2 es el vector unitario vertical asociado a la concentración de microorganismos.

2.3. Formulación función corriente-vorticidad

Debido a que los componentes de velocidad pueden expresarse como gradientes de una función corriente [35] como se ve en la Ec. (2.11), entonces la ecuación de continuidad se puede expresar mediante la formulación función corriente:

$$u_1' = \frac{\partial\Psi'}{\partial x_2'} \;\; ; \;\; u_2' = -\frac{\partial\Psi'}{\partial x_1'} \tag{2.11}$$

en donde Ψ' es la función corriente. Sustituyendo la Ec. (2.11) en la Ec. (2.2) se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial\Psi'}{\partial x_1' \partial x_2'} - \frac{\partial\Psi'}{\partial x_2' \partial x_1'} = 0 \tag{2.12}$$

en donde al ser una función continua se puede satisfacer la igualdad, de la misma forma que la ecuación de continuidad.

Para expresar la ecuación de cantidad de movimiento en términos de la vorticidad se aplica el operador rotacional $\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(*)$ a la Ec. (2.5), como resultado se tiene la Ec. (2.13):

$$\frac{\partial \omega_i'}{\partial t'} + u_j'\frac{\partial \omega_i'}{\partial x_j'} = \nu\frac{\partial^2 \omega_i'}{\partial x_j' \partial x_j'} - \rho g\frac{\partial n'}{\partial x_1'}\Lambda_2 \tag{2.13}$$

en donde $\omega_i' = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(u_k')$ es la vorticidad dimensional.

2.4. Modelo Matemático

En la Sección 2.3 se muestran los arreglos realizados para obtener un modelo matemático que describa el fenómeno bioconvectivo. Así como las ecuaciones resultantes tanto dimensionales como adimensionales.

2.4.1. Escalas características

Las escalas características utilizadas para adimensionalizar las ecuaciones son las siguientes:

$$t = t' \frac{D_m}{H^2},\ x_1 = \frac{x_1'}{H},\ x_2 = \frac{x_2'}{H}, \tag{2.14}$$

$$\tilde{u} = u' \frac{H}{D_m},\ \tilde{v} = v' \frac{H}{D_m},\ \tilde{\omega} = \omega' \frac{H^2}{D_m},\ \tilde{\Psi} = \frac{\Psi'}{D_m},\ \tilde{n} = \frac{n'}{\bar{n}},\ \bar{N} = \frac{\bar{n} - n_0}{n_1 - n_0} \tag{2.15}$$

donde t', D_m, x_1', x_2' son el tiempo, la difusividad de los microorganismos, la componentes horizontal y vertical dimensionales, respectivamente. u', v', Ψ', ω', $\bar{N}$, n_1, n_0 son las componentes de las velocidades dimensionales, la función corriente, la vorticidad, los microorganismos promedio dimensionales, la concentración de microorganismos en la parte superior e inferior, respectivamente. n', $\bar{n}$ and $\bar{N}$ son la concentración dimensional, la concentración promedio dimensional y adimensional, respectivamente. La relación de aspecto se define como $A = L/H$.

2.4.2. Ecuaciones adimensionales

Las ecuaciones adimensionales obtenidas son:

- **Ecuación de vorticidad en términos de función corriente**

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial x_i^2} = -\tilde{\omega}, \tag{2.16}$$

- **Ecuación de cantidad de movimiento en términos de función vorticidad**

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j} = Sc \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x_j^2} - ScRa \frac{\partial \tilde{n}}{\partial x_1}, \tag{2.17}$$

donde $\tilde{u}_j$, Ra, Sc son los componentes del vector velocidad, el número bioconvectivo de Rayleigh y el número bioconvectivo de Schmidt, respectivamente.

- **Ecuación de concentración de microorganismos**

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{J}_i}{\partial x_i}, \tag{2.18}$$

$$\tilde{J}_i = (\tilde{u}_i + Pe\gamma_i)\tilde{n} - \frac{\partial \tilde{n}}{\partial x_i}, \tag{2.19}$$

donde Pe y $\gamma_i, i = 0, 1$ son el número de Pe y un vector unitario en dirección vertical, respectivamente.

2.5. Condiciones de frontera

El conjunto de Ecs. (2.16)-(2.19) están sujetas a la siguientes condiciones de frontera: rígidas tanto en la parte superior como en la inferior, y no deslizamiento en las paredes laterales. Además, no hay flux de microorganismos a través de las paredes.

$$\tilde{\Psi} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial x_1} = 0, \quad -\frac{\partial \tilde{n}}{\partial x_1} = 0 \quad at \ \ x_1 = 0, A, \tag{2.20}$$

$$\tilde{\Psi} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial x_2} = 0, \quad \tilde{n}Pe - \frac{\partial \tilde{n}}{\partial x_2} = 0 \quad at \ \ x_2 = 0, 1, \tag{2.21}$$

donde $A = L/H$ es la relación de aspecto de la cavidad.

Capítulo 3

Análisis de estabilidad lineal

3.1. Introducción

El análisis de los sistemas no lineales es en algunos aspectos similar a los lineales, pero en otros es bastante diferente. La similitud deriva del hecho de que una de las técnicas principales para el análisis de sistemas no lineales es aproximarlos mediante sistemas lineales apropiados, para así poder utilizar técnicas de la teoría lineal. El análisis también es diferente porque las soluciones explícitas rara vez están disponibles para sistemas no lineales, por lo tanto, las características de comportamiento deben inferirse por métodos más sutiles. Sin embargo, teniendo en cuenta tanto las similitudes como las diferencias con el análisis de sistemas lineales, existe un conjunto de principios generales útiles para el análisis de sistemas no lineales que proporcionan coherencia a este importante tema [16].

En este capítulo se muestra el análisis lineal utilizado para determinar tanto el estado básico de los microorganismos y como para la función corriente. Además, se obtiene una aproximación del número de Rayleigh crítico que predice la formación de rollos bioconvectivos.

3.1.1. Estabilidad

El término de estabilidad es definido por la real academia española como la propiedad de un cuerpo de recuperar su equilibrio inicial. Para sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales no lineales, es necesario incluir el concepto de punto de equilibrio.

Como ya se mencionó previamente, es muy común que en sistemas no lineales se puedan realizar aproximaciones lineales. El resultado de lo anterior es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

El estudio de los puntos de equilibrios juega un papel central en las ecuaciones diferenciales ordinarias y en sus aplicaciones. Sin embargo, un punto de equilibrio debe satisfacer cierto criterio de estabilidad para ser físicamente significativo. Se dice que un punto equilibrio es estable si las soluciones permanecen cerca de este para todo tiempo. En las aplicaciones de sistemas dinámicos, generalmente no se pueden determinar las posiciones exactamente, solo pueden aproximarse. Entonces, un punto equilibrio debe ser estable para ser físicamente significativo [36].

Las propiedades de estabilidad caracterizan cómo se comporta un sistema, si su estado inicia cerca o no precisamente, de un punto de equilibrio dado. Si un sistema inicia con el estado exactamente igual a un punto de equilibrio, entonces, por definición, nunca se moverá. Sin embargo, cuando se inicia cerca, el estado puede permanecer cerca o alejarse. Hablando en términos generales, un punto de equilibrio es estable si cada vez que el estado del sistema se inicia cerca de ese punto, el estado permanece cerca de él, tal vez incluso tiende hacia el punto de equilibrio a medida que evoluciona [16].

Definición

1.- Un punto de equilibrio $\bar{x}$ es estable si hay un $R_0 > 0$ para el cual se cumple lo siguiente: por cada $R < R_0$, hay un r, $0 < r < R$, de modo que si $x(0)$ está dentro de $S(\bar{x}, r)$, entonces $x(t)$ está dentro de $S(\bar{x}, R)$ para todo $t > 0$.

2.- Un punto de equilibrio $\bar{x}$ es asintóticamente estable, siempre que sea estable y además hay un $R_0 > 0$, tal que cada vez que se inicia el estado dentro de $S(x, R_0)$, tiende a x a medida que aumenta el tiempo.

3.- Un punto de equilibrio $\bar{x}$ es marginalmente estable, si es estable pero no asintóticamente estable.

4.- Un punto de equilibrio $\bar{x}$ que no es estable, se denomina inestable. De manera equivalente, $\bar{x}$ es inestable si para algún $R > 0$ y cualquier $r > 0$ hay un punto en la región esférica $S(\bar{x}, r)$, de modo que si el estado del sistema inicia allí, eventualmente se moverá fuera de $S(\bar{x}, R)$.

Estas definiciones se entienden mejor en términos de sus interpretaciones geométricas cómo se observa en la Fig. 3.1. Refirámonos a la ruta trazada por el estado de un sistema como la trayectoria de estado. Para cualquier punto inicial se define una trayectoria correspondiente que emana de éste. En esta terminología, la primera definición dice que un punto de equilibrio $\bar{x}$ es estable si es posible limitar la trayectoria del sistema a una distancia arbitraria de $\bar{x}$ restringiendo el estado inicial a otra distancia quizás más pequeña de $\bar{x}$. Según la definición, primero se selecciona un $R > 0$, y luego para asegurar que la trayectoria del estado permanezca dentro de $S(x, R)$, un $r > 0$ más pequeño es definido especificando la región permitida $S(x, r)$ para el estado inicial. Esta es la formalización

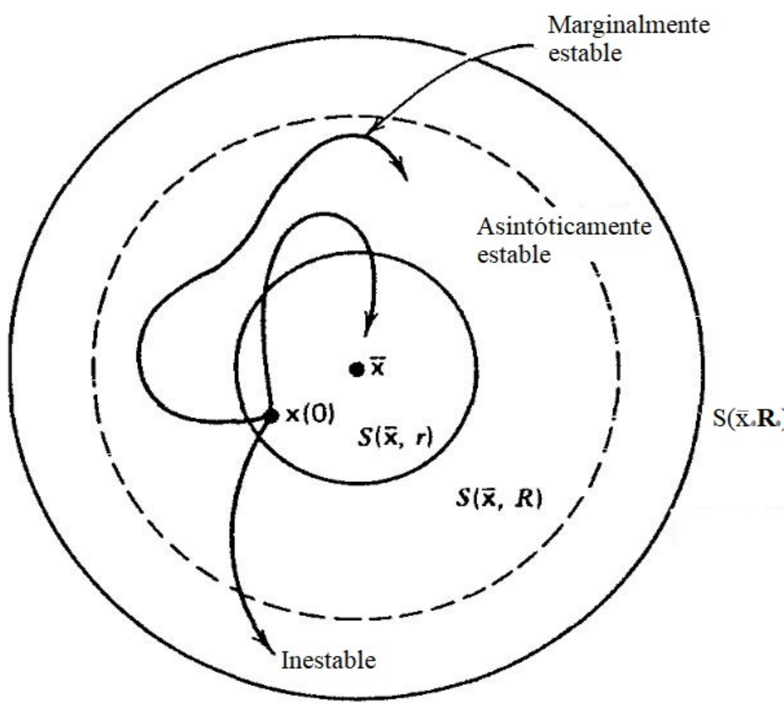

Figura 3.1: Descripción gráfica de estabilidad.

de la noción intuitiva de que la estabilidad significa que si el estado se inicia cerca de x, permanece cerca de $\bar{x}$ [16].

Las otras tres definiciones se basan, por supuesto, en la primera. La estabilidad asintótica requiere que, cuando se inicie la trayectoria del estado cerca de $\bar{x}$, además de permanecer simplemente cerca de $\bar{x}$, debe tender hacia $\bar{x}$. Puede llegar allí en tiempo finito o infinito. La estabilidad asintótica es la más fuerte de las propiedades de estabilidad y la que en la mayoría de los casos se considera más deseable. La definición de estabilidad marginal se introduce principalmente para la conveniencia de la discusión. Distingue la estabilidad de la estabilidad asintótica. La inestabilidad implica que hay trayectorias que comienzan cerca de $\bar{x}$ pero eventualmente se alejan [16].

3.1.2. Linealización

Según las definiciones básicas, las propiedades de estabilidad dependen solo de la naturaleza del sistema cerca del punto de equilibrio. Por lo tanto, para realizar un análisis de estabilidad, a menudo es teóricamente legítimo y matemáticamente conveniente reemplazar la descripción no lineal completa por una descripción más simple que se aproxime al verdadero sistema cerca del punto de equilibrio. A menudo, una aproximación lineal es suficiente para revelar las propiedades de estabilidad. Esta idea de verificar la estabilidad mediante el examen de una versión linealizada del sistema se conoce como el primer método de Liapunov, o, a veces, como el método indirecto de Liapunov. Es una técnica simple y poderosa, y generalmente es el primer paso en el análisis de cualquier punto de equilibrio [16].

La linealización de un sistema no lineal se basa en la linealización de la función no lineal f en su descripción, como se ilustra en la Fig.3.2. Para un sistema de primer orden, definido por una sola función $f(x)$ de una sola variable, el procedimiento es aproximar f cerca $\bar{x}$ por:

$$f(\bar{x} + y) = f(\bar{x}) + \frac{df(\bar{x})}{dx} y. \tag{3.1}$$

Por lo tanto, cuando la linealización del sistema en un punto de equilibrio es hiperbólico, podemos determinar inmediatamente la estabilidad de ese punto. Desafortunadamente, muchos puntos importantes de equilibrio que surgen en las aplicaciones son no hiperbólicos. Sería maravilloso tener una técnica que determinara la estabilidad de un punto de equilibrio que funcione en todos los casos. Desafortunadamente, hasta el momento, no tenemos una forma universal de determinar la estabilidad, excepto encontrar realmente todas las soluciones del sistema, que generalmente es difícil, si no imposible [36].

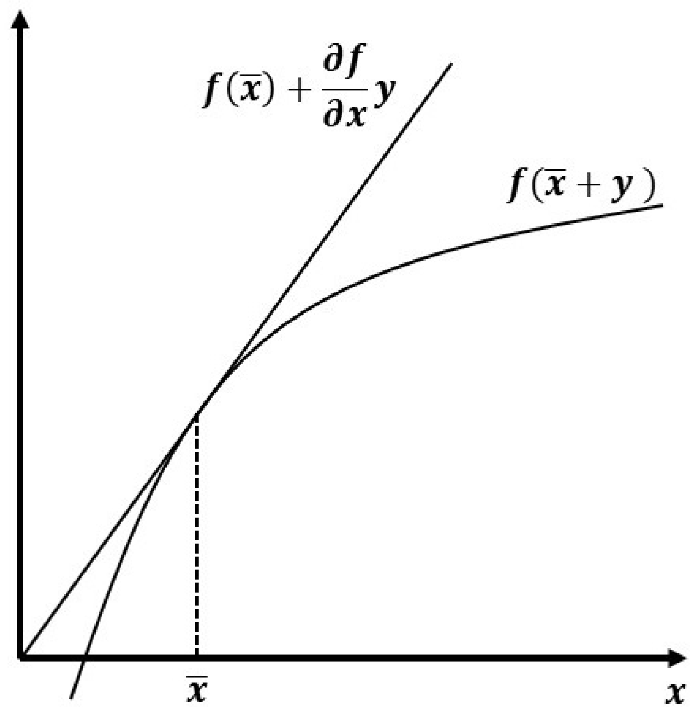

Figura 3.2: Aproximación Lineal.

3.2. Estado base de los microorganismos

Una condición inicial adecuada es crucial en la simulación numérica de la bioconvección gravitáctica. Nguyen et al. [32] usaron el estado básico como condición inicial en su trabajo, lo llamaron ”estado difusivo”. Además, Taheri et al. [23], usaron el estado difusivo. Por lo tanto, es posible predecir la bioconvección a través de la solución del estado básico como condición inicial. El estado básico establece que no hay movimiento y existe una distribución de la concentración. Este capítulo aborda el análisis lineal para establecer la solución del estado básico, tanto para la concentración de microorganismos como para la ecuación de cantidad de movimiento. El estado básico para las Ecs. (2.16) - (2.19) se obtiene siguiendo los siguientes pasos.

Sustituyendo Ec. (2.16) en la Ec. (2.17) y considerando términos lineales en estado estable,

$$0 = -Sc\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\frac{\partial^2\tilde{\Psi}}{\partial x_i^2}\right) - ScRa\frac{\partial \tilde{n}}{\partial x_i}, \tag{3.2}$$

introduciendo las variables totales $\tilde{\Psi} = 0 + \Psi(x_i, t)$ y $\tilde{n} = n_b + n(x_i, t)$ en la ecuación (3.2); la ecuación de cantidad de movimiento se convierte en

$$0 = -Sc\left(\frac{\partial^4\Psi}{\partial x_2^4}\right) - ScRa\frac{\partial n_b}{\partial x_1} - ScRa\frac{\partial n}{\partial x_1}, \tag{3.3}$$

para la concentración de microorganismos:

$$0 = -Pe\frac{\partial n_b}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 n_b}{\partial x_2^2} - Pe\frac{\partial n}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 n}{\partial x_2^2}. \tag{3.4}$$

El estado básico es analizado para ajustar los microorganismos a $t = 0$, entonces Ec. (3.4):

$$0 = -Pe\frac{\partial n_b}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 n_b}{\partial x_2^2}. \tag{3.5}$$

La solución general de Eq. (3.5) es:

$$n_b(x_2) = C_1 + C_2 exp(Pe x_2), \tag{3.6}$$

la cual está sujeta a las condiciones de frontera establecidas en Ec. (2.21) en $t = 0$ y $n_b = \bar{N}$, donde $C_1 = 0$ y C_2 debe de determinarse. El Teorema del valor medio es empleado para satisfacer la concentración de microorganismos [32], además de especificar a C_2

$$\bar{N} = \frac{1}{1-0}\int_0^1 n_b(x_2)dx_2, \tag{3.7}$$

$$C_2 = \frac{Pe\bar{N}}{(exp(Pe)-1)}, \tag{3.8}$$

$$n_b(x_2) = \frac{exp(Pex_2)\bar{N}Pe}{(exp(Pe)-1)}, \tag{3.9}$$

donde Ec. (3.9) es la solución del estado básico para los microorganismos.

3.3. Solución de la función corriente

Ahora se enfocará en los términos de perturbación en la Ecs. (3.3)-(3.4), previamente a considerarlos, la Ec. (3.9) es utilizada para linealizar la Ec. (2.18) en estado estable acoplado con la Ec. (3.9), para determinar el estado básico de la velocidad.

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones perturbadas son las siguientes:

$$0 = -Sc\left(\frac{\partial^4\Psi}{\partial x_2^4}\right) - ScRa\frac{\partial n}{\partial x_1}, \tag{3.10}$$

$$0 = -\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\frac{\partial n_b(x_2)}{\partial x_2} - Pe\frac{\partial n}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 n}{\partial x_2^2}, \tag{3.11}$$

donde

$$\frac{\partial n_b(x_2)}{\partial x_2} = \frac{exp(Pex_2)\bar{N}Pe^2}{(exp(Pe)-1)} = N_b'(x_2), \tag{3.12}$$

usando perturbaciones de modo normal se tiene

$$\Psi(x_i,t)_{i=1,2,3} = \psi(x_2)exp([i(k_{x_1}x_1 + k_{x_3}x_3) + \sigma t)]), \tag{3.13}$$

$$n(x_i,t)_{i=1,2,3} = N(x_2)exp([i(k_{x_1}x_1 + k_{x_3}x_3) + \sigma t)]), \tag{3.14}$$

considerando que las amplitudes $\psi(x_2), N(x_2)$ sólo son función de x_2, y sustituyendo Ecs. (3.13)-(3.14) en Ecs. (3.10)-(3.11), además que $\sigma = 0$, el sistema acoplado puede escribirse como sigue:

$$\psi(x_2)(k^4 + D^4) = -ik_{x_1}RaN(x_2), \tag{3.15}$$

$$-ik_{x_1}N_b'(x_2)\psi(x_2) = N(x_2)((D^2-k^2)-Pe) \tag{3.16}$$

y

$$\psi(x_2)(k^2-D^2)^2 = -ik_{x_1}RaN(x_2), \tag{3.17}$$

donde $k^2 = k_{x_1}^2 + k_{x_3}^2$, $k^4 = k_{x_1}^4 + k_{x_3}^4$, $D = d/dx_2$ y ik_{x_1} son los número de onda, el operador, el componente horizontal del vector onda, respectivamente.

Sustituyendo $N(x_2)$ de Ec. (3.17) en Ec. (3.15)

$$\psi(x_2)\left[(D^2-k^2)-Pe\right](k^4+D^4) - k_{x_1}^2N_b'(x_2)Ra\psi(x_2) = 0, \tag{3.18}$$

y cambiando $N(x_2)$ de Ec. (3.15) en Ec. (3.17)

$$\psi(x_2)\left[(D^2-k^2)-Pe\right](k^2-D^2)^2 - k_{x_1}^2N_b'(x_2)Ra\psi(x_2) = 0. \tag{3.19}$$

En ambas Ecs. (3.18) y (3.19), es evidente que la solución general puede ser expresada como la superposición de las soluciones de la forma [15]:

$$\psi(x_2) = exp(\pm qx_2), \tag{3.20}$$

donde q es el valor característico. Sustituyendo Ec. (3.20) en Ecs. (3.18), (3.19) son las ecuaciones actualizadas, respectivamente

$$\left[(q^2-k^2)-Pe\right](k^4+q^4) = k_{x_1}^2N_b'(x_2)Ra, \tag{3.21}$$

$$\left[(q^2-k^2)-Pe\right](k^2-q^2)^2 = k_{x_1}^2N_b'(x_2)Ra. \tag{3.22}$$

Analizando el término izquierdo de Ec. (3.21), el producto puede ser expresado como:

$$\left[(q^2-k^2)-Pe\right] = 1; \quad (k^4+q^4) = k_{x_1}^2N_b'(x_2)Ra, \tag{3.23}$$

y para Ec. (3.22) son:

$$\left[(q^2-k^2)-Pe\right] = 1; \quad (k^2-q^2)^2 = k_{x_1}^2N_b'(x_2)Ra, \tag{3.24}$$

trabajando con la igualdad de Ec. (3.21), q^2 puede cambiarse a $\lambda = q^2$, por lo tanto, las raíces para el caso homogéneo son $\lambda = \pm k^2 i$ y su solución correspondiente es:

$$\psi(x_2) = C_1cos(k^2x_2) + C_2sen(k^2x_2), \tag{3.25}$$

Ec. (3.25) está sujeta a las condiciones de frontera $x_2 = 0, 1$, es decir;

$$\psi = 0, \tag{3.26}$$

donde la constante no puede ser determinada directamente. Además, considerando que las constantes son globales y están en función de x_2, entonces podría ser posible usar el método de variación de parámetros que incluye también términos no homogéneos. Por lo tanto,

$$C_1(x_2) = -\int \frac{exp(Pex_2)k^2cos(k^2x_2)k_{x_2}^2Pe^2Ra\bar{N}dx_2}{k^2(exp(Pe)-1)} = \gamma \int cos(k^2x_2)exp(Pex_2), \tag{3.27}$$

y

$$C_2(x_2) = -\int \frac{exp(Pex_2)k^2sen(k^2x_2)k_{x_2}^2Pe^2Ra\bar{N}dx_2}{k^2(exp(Pe)-1l)} = \gamma \int sen(k^2x_2)exp(Pex_2), \tag{3.28}$$

donde $\gamma = \frac{-k_{x_2}^2Pe^2\bar{N}Ra}{(e^{Pe}-1)}$, entonces, es posible determinar las constantes.

De acuerdo con Ecs. (3.27)-(3.28) la solución particular de Ec. (3.25) es

$$
\begin{aligned}
\psi(x_2) = & \frac{1}{(k^4+Pe^2)} \\
& * \Bigg[exp(Pex_2)\gamma Pe \Bigg[\Bigg(cos^2(k^2x_2) + sen^2(k^2x_2) \Bigg) \\
& - cos(k^2x_2) \Bigg] \\
& - \Bigg[exp(Pe)\gamma Pe \Bigg[\Bigg(cos^2(k^2) \frac{sen(k^2x_2)}{sen(k^2)} \\
& + sen(k^2) sen(k^2x_2) \Bigg) \\
& - cos(k^2x_2) \frac{sen(k^2x_2)}{sen(k^2)} \Bigg] \Bigg] \Bigg] \\
= & \frac{1}{(k^4+Pe^2)} \\
& * \Bigg[exp(Pex_2)\gamma Pe \Bigg(1 - cos(k^2x_2) \Bigg) \\
& - Pe\gamma exp(Pe) sen(k^2x_2) \\
& * \Bigg[\frac{1}{sen(k^2)} \Bigg(cos^2(k^2) - cos(k^2x_2) \Bigg) \\
& + sen(k^2) \Bigg] \Bigg],
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

esta solución corresponde a $\lambda = k^2 i$, para $\lambda = -k^2 i$, el signo cambia sólo en los argumentos de seno y coseno.

Siguiendo las consideraciones previas, en Eq. (3.24) si $\lambda = q^2$, las raíces para el caso homogéneo del segundo término de la igualdad son $\lambda = q^2 = k^2$, por lo tanto

$$\psi(x_2) = C_1 exp(k^2x_2) + C_2 x_2 exp(k^2x_2), \tag{3.30}$$

$$C_1(x_2) = -\int \frac{\Gamma exp(Pex_2)(k^2x_2exp(k^2x_2) + exp(k^2x_2))dx_2}{exp(2k^2x_2)}, \tag{3.31}$$

$$C_2(x_2) = \int \frac{\Gamma exp(Pex_2)k^2exp(k^2x_2)dx_2}{exp(2k^2x_2)}, \tag{3.32}$$

$$\psi(x_2) = \Gamma\Big(k^2(Pe - k^2) - 1\Big)\Big(exp(Pex_2) - exp(k^2x_2)\Big)\Big(1 - x_2\Big)/(Pe - k^2), \tag{3.33}$$

donde

$$\Gamma = \frac{k_{x_2}Pe^2Ra\bar{N}}{(exp(Pe - 1)}), \tag{3.34}$$

Ec. (3.31) es la solución de las raíces reales repetidas, $\lambda = q^2 = k^2$.

3.4. Número de Rayleigh crítico

A partir de Ecs. 3.22-3.23 se puede determinar expresiones que permitan a calcular el valor crítico del Ra. De esta manera, se predecirá en que valores el fenómeno de bioconvección ocurre.

3.4.1. Raíces imaginarias

Para determinar el valor del Ra, se toman algunas consideraciones que fueron tomadas en la segunda igualdad de Ec. (3.23) como:

$$Ra = \frac{\lambda^2 + k^4}{N_b'(x_2)k_{x_1}^2}, \tag{3.35}$$

$$\frac{\partial Ra}{\partial k} = \frac{4k^3}{N_b'(x_2)k_{x_1}^2} = 0, \tag{3.36}$$

$$0 = \frac{4(k_{x_1}^2 + k_{x_3}^2)^{3/2}}{N_b'(x_2)k_{x_1}^2}, \tag{3.37}$$

donde

$$k_{x_1}^2 = -k_{x_3}^2, \tag{3.38}$$

o

$$k_{x_3}^2 = -k_{x_1}^2. \tag{3.39}$$

Este es el caso trivial, porque se encuentra en un estado de equilibrio, donde la bioconvección no aparece. Sin embargo, se puede asumir que $k_{x_3}^2 = k_{x_1}^2$. Entonces, se propone un valor marginal Ra_m considerando que $k = k_m = \sqrt{2}k_{x_1}$. Por consiguiente se puede determinar un Ra_c usando una curva maestra a partir de Ra_m. Siguiendo el procedimiento por Chandrasekar [15] Ra_c se calcula como

$$Ra_m = \frac{\lambda^2 + 4k_{x_1}^4}{N_b'(x_2)k_{x_1}^2}, \tag{3.40}$$

donde Ra_m es un valor marginal. Esto permitirá comprender el comportamiento del perfil de la curva del valor crítico del Rayleigh. El Ra_c puede encontrarse si Ec. (3.37) es constante, es decir, un valor defasado Ra_o donde

$$\frac{\partial Ra}{\partial k} = Ra_o = \frac{4(k_{x_1}^2 + k_{x_3}^2)^{3/2}}{N_b'(x_2)k_{x_1}^2}, \tag{3.41}$$

añadiendo este valor defasado a la curva maestra Ec. (3.40), se puede determinar una aproximación del Rayleigh crítico como:

$$Ra_c = Ra_m + Ra_o, \tag{3.42}$$

$$Ra_c = \frac{\lambda^2 + 4(k_{x_1}^4 + (k_{x_1}^2 + k_{x_3}^2)^{3/2})}{N_b'(x_2)k_{x_1}^2} = \frac{\lambda^2 + 4(k_{x_1}^4 + k^3)}{N_b'(x_2)k_{x_1}^2}, \tag{3.43}$$

mediante la Ec. (3.43), el valor del Ra_c es determinado a través un procedimiento heurístico.

3.4.2. Raíces reales

Se realiza un procedimiento similar al anterior, para la segunda igualdad de la Ec. (3.22) como:

$$Ra = \frac{(k^2 - \lambda)^2}{N_b'(x_2)k_{x_1}^2}, \tag{3.44}$$

$$\frac{\partial Ra}{\partial k} = \frac{4k^3 - 2\lambda}{N_b'(x_2)k_{x_1}^2} = 0, \tag{3.45}$$

$$0 = \frac{4k^3 - 2\lambda}{N_b'(x_2)k_{x_1}^2}, \tag{3.46}$$

donde

$$k = k_m = a\lambda^{1/3}, \tag{3.47}$$

$a = (1/2)^{1/3}$, sustituyendo k_m en la Ec. (3.42) se tiene

$$Ra_m = \frac{\lambda^{4/3}(a^4 - 2a + \lambda^{2/3})}{N_b'(x_2)k_{x_1}^2}. \tag{3.48}$$

Esta última ecuación no aporta un valor específico para el número crítico del Rayleigh, aunque es posible determinar este número por un método heurístico, observando el perfil de Ra_m para diferentes valores de λ. Sin embargo, se puede asumir un valor de defase como el anterior, por lo tanto:

$$\frac{\partial Ra}{\partial k} = Ra_0 = \frac{4k^3 - 2\lambda}{N_b'(x_2)k_{x_1}^2}, \tag{3.49}$$

$$Ra_c = Ra_m + Ra_o, \tag{3.50}$$

de modo que

$$Ra_c = \frac{4k^3 - 2\lambda + \lambda^{4/3}(a^4 - 2a + \lambda^{2/3})}{N_b'(x_2)k_{x_1}^2}, \tag{3.51}$$

o

$$Ra_c = \frac{4(k_{x_1}^2 + k_{x_3}^2)^3 - 2\lambda + \lambda^{4/3}(a^4 - 2a + \lambda^{2/3})}{N_b'(x_2)k_{x_1}^2}, \tag{3.52}$$

con la Ec. (3.50) puede aproximarse a una curva marginal y determinar el valor de Ra_c.

Capítulo 4

Simulaciones numéricas

Se utilizó un código numérico en diferencias finitas desarrollado en Fortran para resolver las ecuaciones de gobierno. Aplicando el método Implícito de Dirección Alterna (ADI) por sus siglas en inglés, para las Ecs.(2.16)-(2.19) junto con sus correspondientes condiciones de frontera en una malla uniforme de 51×51. La convergencia se alcanzó cuando $f_{i,j}^{m+1} \leq \epsilon$, donde f corresponde a las variables (ω, ψ, n), m es el número de iteración, $\epsilon = 1 \times 10^{-6}$ el valor del criterio de convergencia y i, j son los puntos de la malla. Se utilizó un paso de tiempo adimensional óptimo de $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$ para todos los cálculos. En el Apéndice A se muestra el método ADI en diferencias finitas.

4.1. Validación del código

Para verificar la validez del código numérico, se compararon dos casos reportados por Taheri et al. [23] para la bioconvección gravitáctica en una cavidad rectangular donde se analizaron los efectos del número de Pe bioconvectivo y la relación de aspecto. En la Fig. (4.1) se presenta la comparación de las líneas de flujo y la concentración de microorganismos para A = 1 y A = 5.

De arriba a abajo, los parámetros son $A = 1$, $Pe = 0{,}1$, $Ra = 17000$ y $A = 5$, $Pe = 1$, $Ra = 2000$ y ambos casos $Sc = 1$. La comparación de la variación de las líneas de flujo y la concentración de microorganismos se muestran en la Tabla4.1e. Los valores reportados en esta figura se tomaron en la misma ubicación en el dominio reportado por Taheri et al. [23]. El acuerdo entre los dos casos es bueno, con una diferencia en los resultados de menos de 4.7 %. Es importante mencionar que Taheri et al. utilizó un enfoque de control de volumen para resolver numéricamente el conjunto completo de ecuaciones de control.

Tabla 4.1: Concentración de microorganismos y líneas de corriente reportados por Taheri et al. [23] y los reportados en este trabajo.

	1) A=1		2) A=5	
	Ψ	n	Ψ	n
Taheri et al. [23]	-0.182	1.045	1.825	1.521
Presente trabajo	-0.182	0.997	1.8	1.5
Variación (%)	0	4.6	1.37	1.38

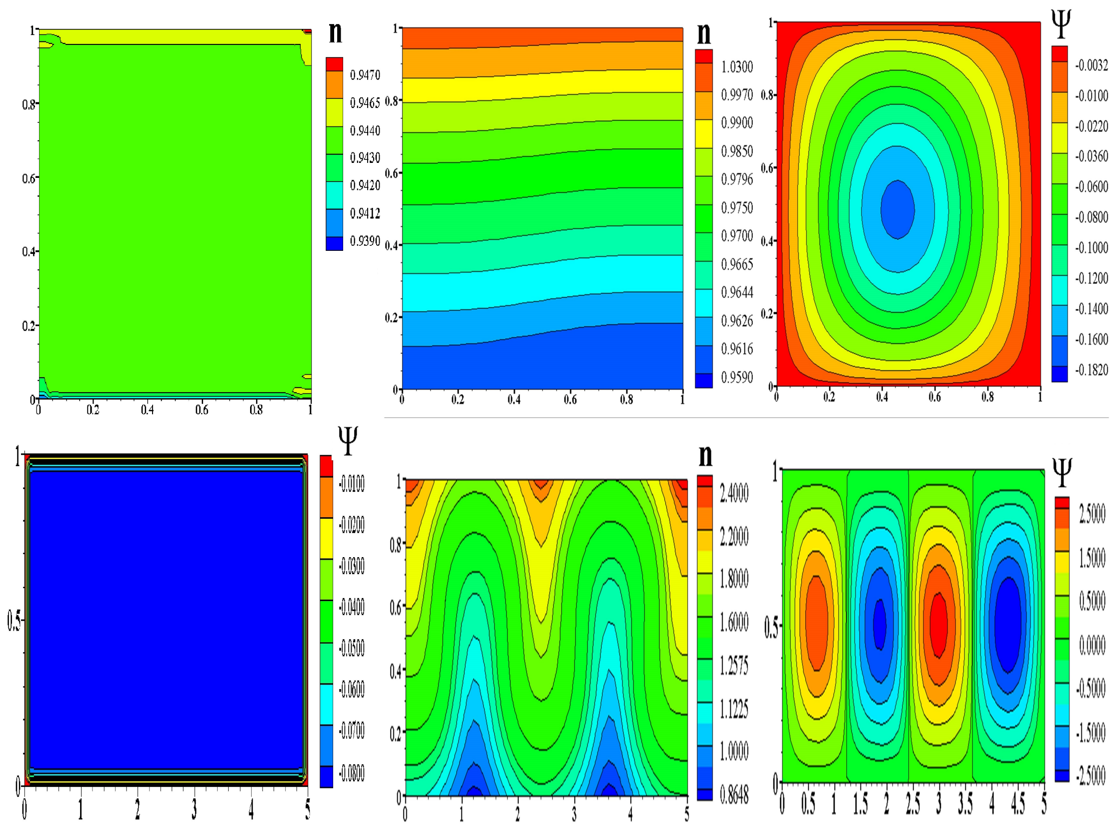

Figura 4.1: En la parte superior están concentración de microorganismos y en la parte inferior los contornos de líneas de corriente para dos relaciones de aspecto, la condición inicial al principio. Para A = 1, Pe = 1, Sc =1, Ra = 17000, y para A = 5, Pe = 1, Sc = 1, Ra = 2000, respectivamente.

Capítulo 5

Análisis y discusión de resultados

En esta sección se discuten y analizan los resultados numéricos obtenidos. Mediante un análisis de estabilidad lineal se determinaron condiciones iniciales para los contornos de las líneas de corriente y para la concentración de los microorganismos. En este, surgieron soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. A partir de las ecuaciones auxiliares características se determinaron soluciones con raíces imaginarias y reales.

Se observó el comportamiento de la solución del sistema al variar sistemáticamente la componente horizontal del vector onda k_{x_1} y el valor característico λ.

5.1. Parámetros adimensionales

Los resultados numéricos se calcularon utilizando los siguientes valores numéricos: $Pe = 1$, $Sc = 1$, $L/H = A = 5$ y modificando el Ra. La evolución del estado difusivo de dos casos diferentes se presenta en esta sección. Ra varía en el intervalo de (0-2000). Con lo anterior, se determinó cuando el sistema se vuelve inestable y surge el fenómeno bioconvectivo.

Tabla 5.1: Valores de los parámetros para las simulaciones numéricas

	Raíces imaginarias		Raíces reales	
	k_{x_1}	λ	k_{x_1}	λ
1)	2.0	0.7	0.5	5
2)	2.05	0.16	0.8	5
3)	2.1	2.5	0.9	5

5.2. Determinación del valor crítico del *Ra*

El valor crítico del número del Rayleigh (Ra_c) se obtuvo mediante la Ec. (3.43) determinada en el análisis lineal. Se puede ver en esta fórmula que $Ra_c[\lambda, k_{x_1}\, k_{x_3}\, N_b'(x_2)]$. Para simplificar el cálculo de Ra_c, k_{x_1} se establecen, $N_b'(x_2)$ es determinando mediante la Ec.(3.12) y k_{x_3} es variable. De acuerdo a las consideraciones establecidas en la subsección (3.4.1), en la Ec.(3.43) se observa que cuando $k_{x_1} \rightarrow 0$ y $k_{x_3} = 0$ $Ra \rightarrow \infty$, para $k_{x_1} > 0$ Ra tiene un crecimiento correspondiente a una función cuarto grado. De manera que si se fija un valor para k_{x_1} y se observa el comportamiento de $Ra(k_{x_3})$, entonces, se podrá determinar un valor particular de Ra. Esto proporciona una aproximación para Ra_c cuando haya un cambio de pendiente, lo cual indica un cambio en el sistema bioconvectivo, como se muestra en la Fig. 5.1.

Cuando este cambio se da, los principales mecanismos involucrados en el número de Rayleigh son la difusividad de la masa y de cantidad de movimiento y los efectos gravitacionales. Mientras el proceso esté dominado por la difusividad de masa y de cantidad de movimiento, el sistema se encuentra muy cerca del estado básico que se puede considerar como un punto de equilibrio, por ende, se encuentran patrones estables. Sin embargo, cuando el proceso está dominado por efectos gravitacionales, se presentan patrones inestables y las soluciones obtenidas se alejan del punto de equilibrio o estado básico.

A partir de simulaciones numéricas, los Ra_c para las Ecs. (3.43) y (3.52), se observó que dependen de λ y k_{x_1}, teniendo más influencia en este último. Manteniendo constante λ, k_{x_1} se varió en el intervalo de (0–7), el proceso de bioconvección se encontró de (2.0– 2.1). Se establecieron tres valores fijos diferentes de k_{x_1} y λ como se muestra en la Tabla 5.1.

5.3. Raíces imaginarias

Las curvas marginales para diferentes valores de Ra_c, λ y k_{x_1} se muestran en la Fig.5.1. Como se mencionó previamente, al observar el comportamiento de $Ra(k_{x_3})$, cuando $k_{x_3} = 0$ se presentan un Ra_c para cada valor de k_{x_1}, 226.6, 258.2 y 314.9, respectivamente. En relación con el mínimo de las curvas, observe que al aumentar k_{x_1} y λ, Ra_c también se incrementa. Es decir, se requiere un valor mayor para que en el sistema bioconvectivo se presente algún movimiento del punto de equilibrio o estado básico.

En la Fig 5.2, se muestra la concentración y las líneas de corriente con λ= 2.5 y k_{x_1}= 2.1. Estos valores se determinaron sistemáticamente, en el intervalo de $Ra(0-1700)$, los principales cambios de estabilidad se presentan en: 200, 793, 814, 1173, 1199, 1448 y 1700. Para $Ra = 200$ surge un rollo. Para $Ra = 793$ se muestran dos rollos dominantes y uno más comienza a aparecer. Cuando $Ra = 814$, se alcanzan tres rollos bien definidos. La formación de cuatro y cinco rollos se muestra cuando $Ra = 1173$ y 1199, respectivamente.

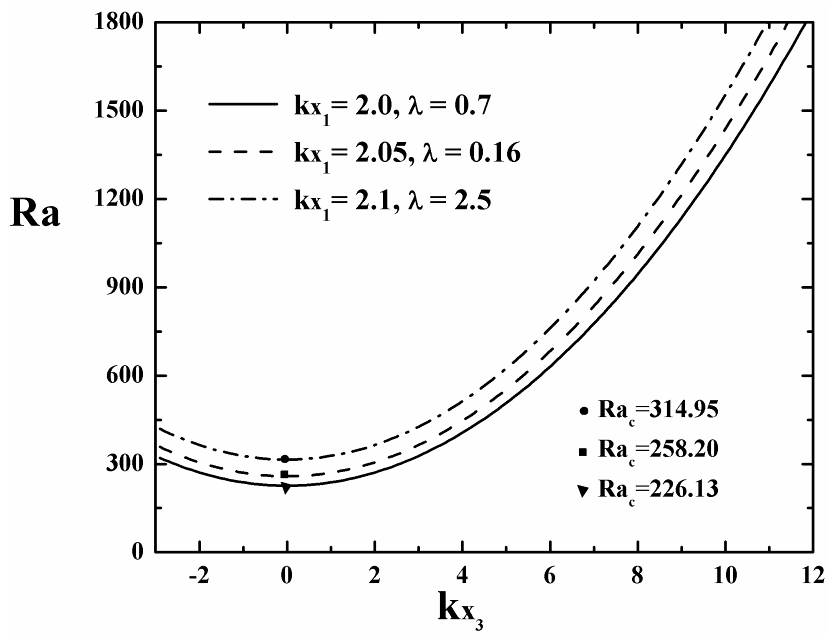

Figura 5.1: Curvas marginales para diferentes valores de λ and k_{x_1}.

Finalmente, para Ra más altos, el sistema regresa de cuatro a tres rollos, siendo el último el patrón dominante. Se realizaron experimentos numéricos utilizando los valores de k_{x_1} y λ de acuerdo con la Tabla 5.1. Los resultados fueron casi los mismos que en la Fig. 5.2, tres rollos fueron el patrón dominante. Las figuras correspondientes a estas simulaciones no se presentan en este trabajo, debido a la similitud descrita. Taheri et al. [23] analizaron y clasificaron la formación de las celdas bioconvectivas con un diagrama de bifurcación similar al diagrama de la Fig.5.3. Taheri llamó Rayleigh subcrítico Ra_c^{sub} al punto cuando surge el primer rollo aparece. En el momento en que el estado difusivo se convirtió en un estado convectivo a $Ra = 793$, se le denominó Rayleigh supercrítico (Ra_c^{sup}), debido al aumento de la formación de rollo bioconvectivos.

En la Fig.5.3 a) y b) se muestra el mismo comportamiento. A pesar presentar un punto de inflexión, se observa un rollo cuando se tiene la concavidad hacia arriba. Un estado convectivo de tres rollos se obtiene después del punto de inflexión. En la Fig.5.3 c) se muestra que, al tener la primera concavidad hacia arriba, surge un sólo rollo. Después del primer punto de inflexión, se encuentra una región estable en el intervalo de $Ra(793-1100)$ alcanzando un máximo local de 1173, donde aparece un cuarto rollo. Posteriormente, otro punto de inflexión es mostrado y en $Ra = 1199$ se encuentran cinco rollos casi estables. Después de la transición de la primera concavidad hacia abajo y la segunda hacia arriba, se forman cuatro rollos casi estables. En Ra = 1400 tres rollos son el patrón dominante, después del tercer punto de inflexión.

5.4. Raíces reales

Siguiendo el mismo procedimiento de la sección 5.3, las curvas marginales con λ constante y variable k_{x_1} se presentan en la Fig. 5.6. Los Ra_c correspondientes son 266.51, 383.81, 682.72 y 864.68, respectivamente. El diagrama de bifurcación muestra un rollo para valores de Ra que se encuentran debajo del punto de inflexión. Como se muestra en la Fig. 5.5 a), b) y c) tres rollos estables dominantes surgen después de éste punto de inflexión.

En la Fig.5.4 se presentan los contornos de concentración y de líneas de corriente cuando se varía Ra con k_{x_1}= 0.16 y λ= 2.05. Las simulaciones numéricas comienzan desde Ra = 0 buscando un cambio en el comportamiento del sistema. Para Ra = 200 y Ra = 258 se obtiene que la concentración y las líneas de corriente exhiben un sólo rollo. Para Ra = 514 se observa una pluma bioconvectiva en la concentración y aparecen dos rollos dominantes, lo que indica una modificación de la estabilidad. Desde Ra = 990 − 2000 la concentración de la forma de la pluma permanece y tres rollos indican que el sistema en este intervalo es estable.

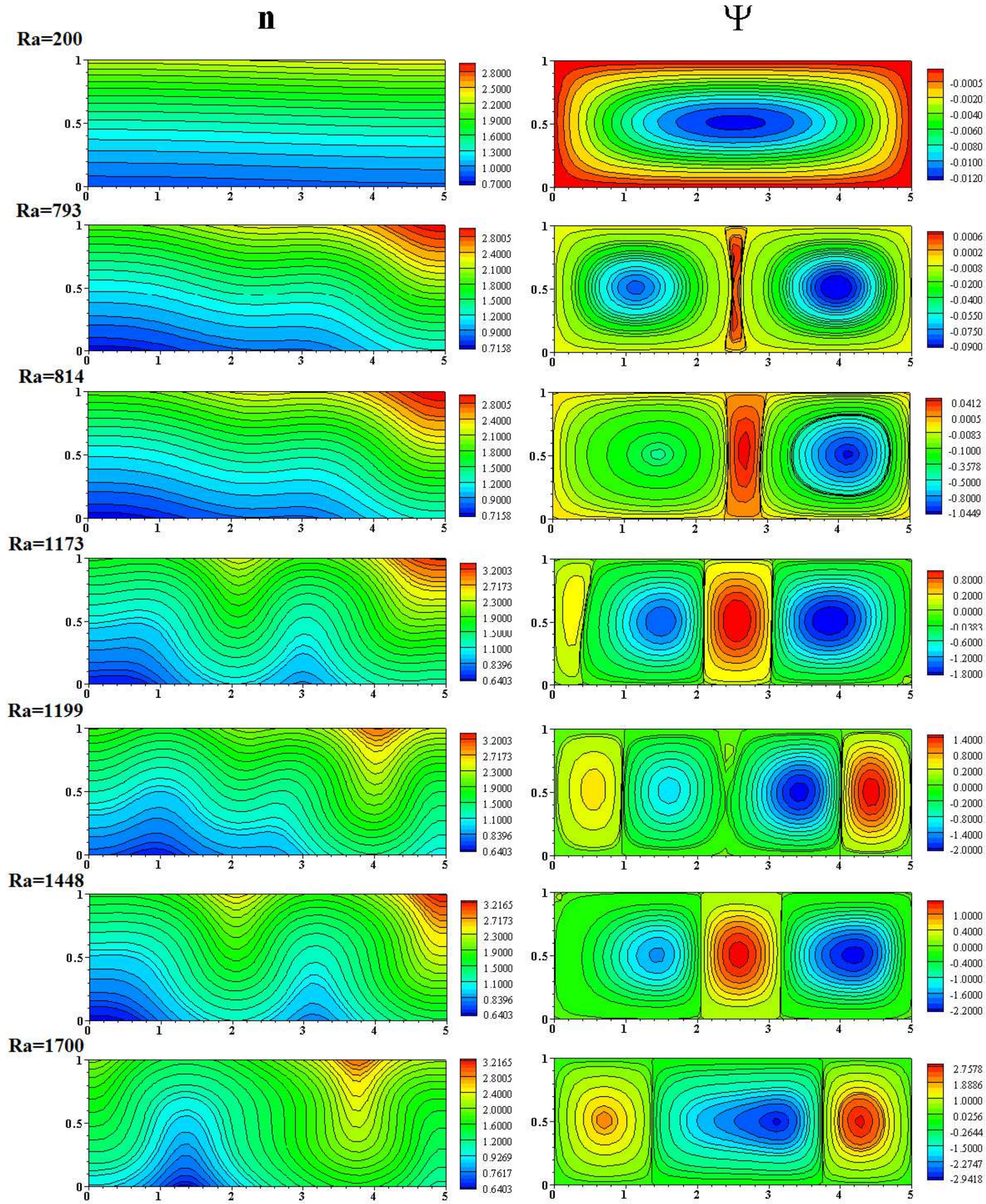

Figura 5.2: Isoconcentración a la izquierda y contornos de líneas de corriente a la derecha para diferentes números de Ra con $\lambda = 2.5$, $k_{x_1} = 2.1$.

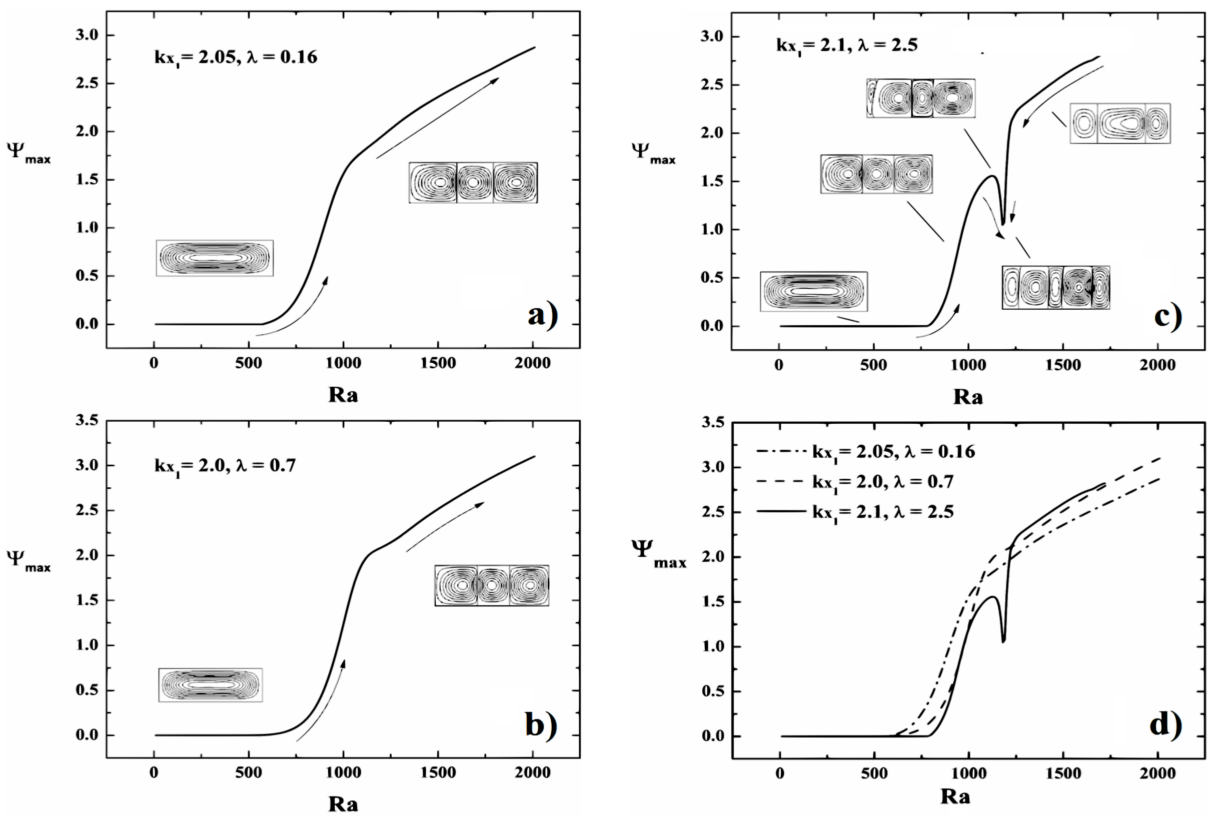

Figura 5.3: Diagrama de bifurcación: Ψ como función de Ra, con Pe=1 y Sc=1 para diferentes λ y k_{x_1}.

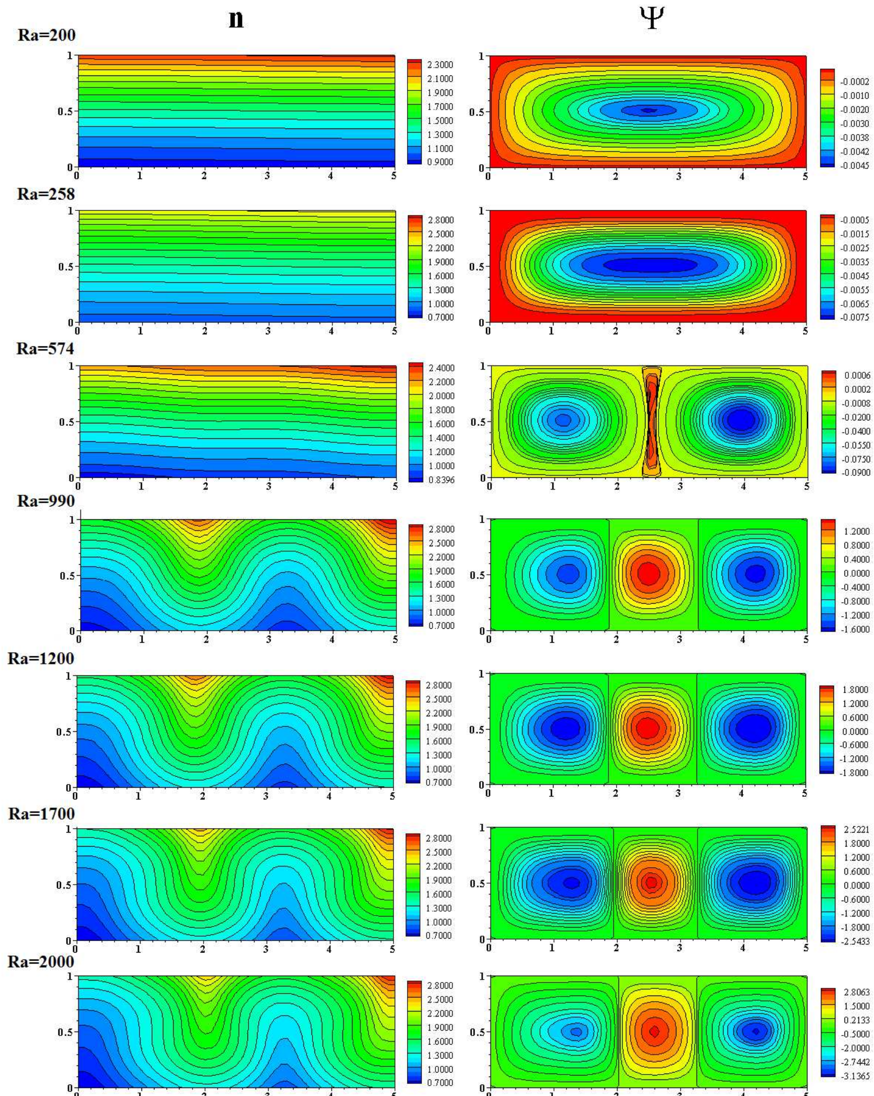

Figura 5.4: Isoconcentración a la izquierda y contornos de líneas de corriente a la derecha para diferentes números de Ra con λ=0.16, k_{x_1}=2.05

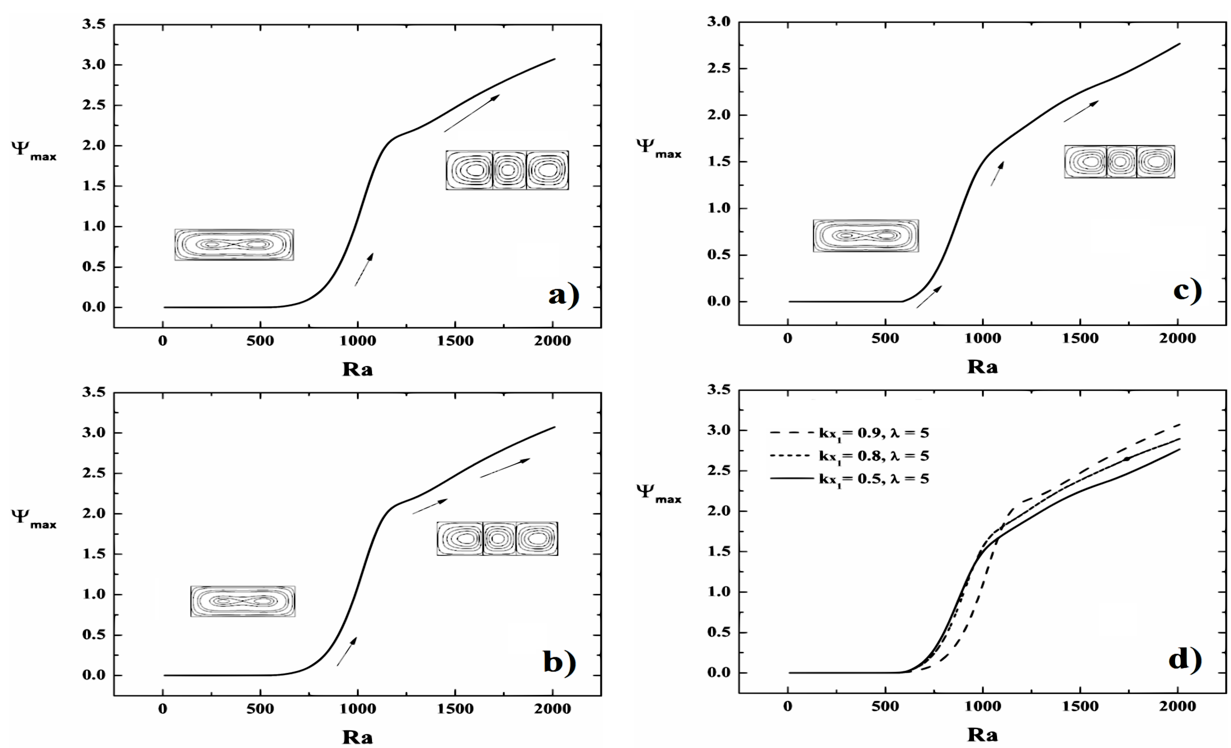

Figura 5.5: Diagrama de bifurcación a Pe=1, Sc=1, Ra variable a)λ = 5, k_{x_1}= 0.5, b) λ = 5, k_{x_1}= 0.8, c) λ = 5, k_{x_1} = 0.9, d) diferente valores de λ y k_{x_1}.

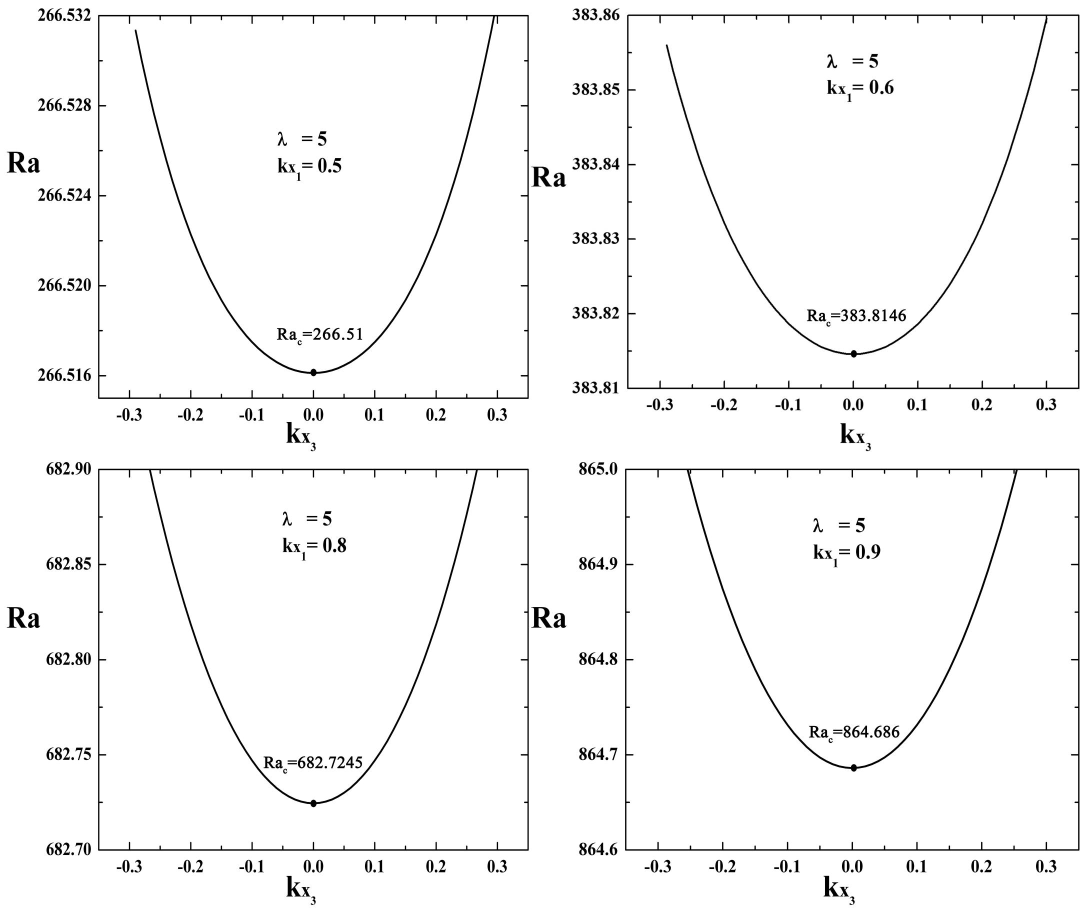

Figura 5.6: Curvas marginales para diferentes valores de λ y k_{x_1}.

Conclusiones

- Mediante un análisis lineal y numérico se analizó la estabilidad de un sistema bioconvectivo.

- A partir del análisis lineal, se logró una expresión analítica para el estado básico de la concentración de microorganismos y líneas de corriente, siendo esto un punto de equilibrio en el sistema.

- El comportamiento del sistema está influenciado por la distribución espacial inicial.

- La estabilidad del sistema depende de la componente horizontal k_{x_1} del vector onda que está inversamente relacionado con la longitud de onda. El número de formación de plumas bioconvectivas está relacionado con la longitud de onda y este con el número de rollos.

- Para valores propios complejos en la solución del estado básico de cantidad de movimiento, cuando k_{x_1} =2.1 el sistema se vuelve inestable formando cinco rollos y es atraído a ser asintóticamente estable, es decir se posiciona dentro de una región donde se forman tres rollos casi estables.

- Para valores propios reales, el sistema es asintóticamente estable.

- Cuando el número $Ra = 0$, el sistema se encuentra cerca del estado básico. Para $Ra > 0$ el sistema cambia en la mayoría de los resultados de marginalmente estable a asintóticamente estable.

- El patrón dominante en el sistema involucra tres rollos estables cuando se varían las variables principales del fenómeno bioconvectivo.

Referencias

[1] A. V. Getling,Rayleigh-Benard Convection Structures And Dynamics,World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.,Singapore, 1998.

[2] M. LAPPA, Thermal Convection: Patterns, Evolution and Stability, A John Wiley and Sons, Ltd., Publication, Naples, Italy, 2010.

[3] C. Bizon, M. D. Shattuck, J. B. Swift, W. D. McCormick, y Harry L. Swinney, Patterns in 3D Vertically Oscillated Granular Layers: Simulation and Experiment, Physical Review Letters Volume 80, Number 1, 57-60, 1998

[4] M. Cross and H. Greenside, Pattern Formation And Dynamics In Nonequilibrium Systems, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[5] S. Cetindag, M. K. Aktas, Numerical Simulation of Rayleigh-Bénard Convection in an Enclosure : Effect of Vibrating Side Wall, Proceedings of the World Congress on Engineering 2014 Vol II.

[6] R. Meyer-Spasche, Pattern formation in viscous flows: The Taylor-Couette Problem and Rayleigh-Benard Convection, Springer Basel AG, Verlag, 1999.

[7] Ishikawa T., Suspension biomechanics of swimming microbes, J. R. Soc. Interface 6 (3) (2009) 815–834.

[8] J. R. Platt, Bioconvection patterns in cultures of free-swimming organisms, Science 133 (3) (1961) 1766–1767.

[9] M. Childress, S. Levandowsky, E. A. Spiegel, Pattern formartion in a suspension of swimming microorganisms: equations and stability theory, J. Fluid Mech. 63 (1975) 591–613.

[10] J. O. Kessler, Individual and collective fluid dynamics of swimming cells, J. Fluid Mech. 173 (1986) 191–205.

[11] A. Turing, The chemical basis of morphogenesis, Philos. Trans. R. Soc. Londond B 237 (641) (1952) 37–72.

[12] B. M., U. Feudel, Turing patterns in a simple model of nutrient-microorganism system in the sediment, Ecol. Com. 1 (2004) 77–94.

[13] D. Rui, Turing instabilities and patterns near a Hopf bifurcation, Appl. Math. Comp. 164 (2) (2005) 391–414.

[14] M. A. Bees, N. A. Hill, Linear bioconvection in a suspension of randomly swimming, gyrotactic micro–organisms, Phys. Fluids 10 (8) (1998) 1864–1881.

[15] S. Chandrasekhar, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Dover Publications, Inc., New York, USA, 1981.

[16] David G. Luenberger, Introduction to Dynamic systems Theory, Models, and Applications, Standford University, John Wiley and Sons Inc., New York, USA, 1979.

[17] C. Godreche, M. Manneville, Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[18] A. V. Kuznetsov, A. A. Avramenko, P. Geng, Analytical investigation of a falling plume caused by bioconvection of oxytactic bacteria in a fluid saturated porous medium, Int. J. Eng. Sci. 42 (2004) 557–569.

[19] A. V. Kuznetsov, A. A. Avramenko, Effect of small particles on the stability of bioconvection in a suspension of gyrotactic microorganisms in a layer of finite depth, Int. Comm. Heat Mass Transfer 31 (1) (2004) 1–10.

[20] B. A., T. Nguyen-Quang, T. H. Nguyen, Bioconvection of gravitactic microorganisms in a fluid layer, Int. Comm. Heat Mass Transfer 32 (2005) 64–71.

[21] T. Nguyen-Quang, A. Bahloul, T. H. Nguyen, Stability of gravitactic micro-organisms in a fluid-saturated porous medium, Int. Comm. Heat Mass Transfer 32 (2005) 54–63.

[22] Z. Alloui, T. H. Nguyen, E. Bilgen, Bioconvection of gravitactic microorganisms in a vertical cylinder, Int. Comm. Heat Mass Transfer 32 (2005) 739–747.

[23] M. Taheri, E. Bilgen, Bioconvection of gravitactic micro-organisms in rectangular enclosures, Int. J. Heat Mass Transfer 50 (2007) 4652–4660.

[24] A. V. Kuznetsov, Bio-thermal convection induced by two different species of microorganisms, Int. Comm. Heat Mass Transfer 38 (2011) 548–553.

[25] A. I. M. I. . Md. Jashim Uddin, W. A. Khan, Free convective flow of non-newtonian nanofluids in porous media with gyrotactic microorganism, JOURNAL OF THERMOPHYSICS AND HEAT TRANSFER 27 (2) (2013) 326–333.

[26] Z. H. Li Xiao, Applications and perspectives of phototrophic microorganisms for electricity generation from organic compounds inmicrobial fuel cells, Chinese Journal of Physics 37 (2014) 550-559.

[27] S. L. Ammarah Raees a, Hang Xu, Unsteady mixed nano-bioconvection flow in a horizontal channel with its upper plate expanding or contracting, International Journal of Heat and Mass Transfer 86 (2014) 174-182.

[28] H. G. Lee, J. Kim, Numerical investigation of falling bacterial plumes caused by bioconvection in a three-dimensional chamber, Eur. J. Mech. B Fluids 52 (2015) 120–130.

[29] O. A. B. M. K. M.J. Uddin, Yasser Alginahi, Numerical solutions for gyrotactic bioconvection in nanofluid-saturated porous media with stefan blowing and multiple slip effects, Computers and Mathematics with Applications 72 (2016) 2562-2581.

[30] A. M. I. O. A. . Fatema T. Tuz Zohra, Mohammed Jashim Uddin, Bioconvective electromagnetic nanofluid transport from a wedge geometry: Simulation of smart electro-conductive bio-nanopolymer processing, Heat Transfer Asian Research 47 (2017) 231–250.

[31] S. Q. O. A. M.J. Uddin, W.A. Khan, Bioconvection nanofluid slip flow past a wavy surface with applications in nano-biofuel cells, Chinese Journal of Physics 55 (2017) 2048–2063.

[32] T. Nguyen-Quang, T. Nguyen, F. Guichard, A. Nicolau, G. Szatmari, G. LePalec, M. Dusser, J. Lafossee, J. L. Bonnet, J. Bohatier, Two-Dimensional Gravitactic Bioconvection in a Protozoan (Tetrahymena pyriformis) Culture, Vol. 26, 2009.

[33] T. J. Chung. Computational fluid dynamics. Cambridge University Press, Cambridge,UK, 2002.

[34] R. H. Pletcher, J. C. Tannehill, D. A. Anderson. Computational fluid mechanics and heat transfer. Taylor and Francis publisher, Whasintong DC, USA, 1798.

[35] F. Durst. Fluid mechanics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 2008.

[36] Morris W. Hirsch, Stephen S, Robert L. D. Differential Equations, Dynamical Systems, And An Introduction To Chaos. California USA, 2004.

Apéndice A

Método de diferencias finitas

A.1. Diferencias finitas

Las ecuaciones de gobierno fueron discretizadas a través del método de diferencias finitas. La idea fundamental de este método es simple: las ecuaciones diferenciales se escriben en cantidades discretas de variables dependientes o independientes, del cual resultan ecuaciones algebraicas simultáneas con valores desconocidos en un punto discreto de la malla o en todo el dominio [33]. La representación de una derivada en diferencias finitas se puede realizar a partir de la definición de derivada de una función [34] $u(x, y)$ en $x = x_0$, $y = y_0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x}; \tag{A.1}$$

si u es una función continua, se espera que $u(x_0+\Delta x, y_0)-u(x_0, y_0)/\Delta x$ sea una aproximación razonable de $\partial u/\partial x$ para pequeñas diferencias de Δx. El teorema del valor medio asegura que esta representación es exacta para cualquier punto en el intervalo de Δx. A su vez esta aproximación se puede representar mediante una expansión de series de Taylor para $u(x_0 + \Delta x, y_0)$ alrededor del punto $u(x_0, y_0)$ que se escribe como [34]:

$$u(x_0 + \Delta x, y_0) = u(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2!} + ... + \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}\frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\frac{(\Delta x)^n}{(n)!}; \tag{A.2}$$

donde el último término puede ser identificado como residuo. Realizando la aproximación

hacia adelante del punto $u(x_0, y_0)$, es decir $u(x_0 + \Delta x, y_0)$ la Ec. (A.2) se puede arreglar de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2!} - ...; \tag{A.3}$$

cambiando la notación a (i, j) la Ec. (A.3) se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{(i+1,j)} - u_{(i,j)}}{\Delta x} + ET; \tag{A.4}$$

donde $u_{(i+1,j)} - u_{(i,j)}/\Delta x$ es una aproximación de $\partial u/\partial x$ y ET es el error de truncado que puede escribirse como $O(h)$.

A.2. Esquema ADI

El esquema ADI es un método implícito que se divide en dos pasos. Dedido a esta división el algorito implementado solo resuelva la tridiagonal del sistema de ecuaciones algebraicas. Durante el primer paso se resuelve la matriz para cada punto del eje X, y durante el paso 2 se resuelve la matriz para cada punto del eje Y [34]. Este método se considera condicionalmente estable, utilizando hasta el segundo orden de aproximación [34]. De acuerdo a literatura se puede mostrar que el sistema es estable si [33]:

$$d_x + d_y < 1/2 \tag{A.5}$$

donde $d_x = \Delta t/\Delta x^2$ y $d_y = \Delta t/\Delta y^2$.

A.3. Discretización temporal y espacial

En la Sección A.1 se describió de manera general el método de diferencias finitas que es utilizado para discretizar las ecuaciones de conservación. Los términos temporales y espaciales de la ecuaciones de conservación se discretizaron hacia atrás y centrados, respectivamente, como se muestra en las siguientes ecuaciones [34]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(h) \tag{A.7}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(h) \tag{A.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} + O(h) \tag{A.9}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} + O(h) \tag{A.10}$$

Utilizando este esquema y discretizando las Ecs. (2.16), (2.18) y (2.18) de la Sección 2.4.2 se tienen las siguientes expresiones:

$$\left(\frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right) = -\omega_{i,j} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega^{m+1} - \omega^m}{\Delta t} &+ u_{i,j}\frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ &+ v_{i,j}\frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}}{2\Delta y} \\ &= Sc\left(\frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right) \\ &+ Sc\left(\frac{\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right) \\ &- ScRa\left(\frac{n_{i+1,j} - n_{i-1,j}}{2\Delta x}\right) \end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned} \frac{n^{m+1} - n^m}{\Delta t} &+ u_{i,j}\frac{n_{i+1,j} - n_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ &+ v_{i,j}\frac{n_{i,j+1} - n_{i,j-1}}{2\Delta y} \\ &+ Pe\frac{n_{i+1,j} - n_{i-1,j}}{2\Delta x} = \frac{n_{i+1,j} - 2n_{i,j} + n_{i-1,j}}{\Delta x^2} \\ &+ \frac{n_{i,j+1} - 2n_{i,j} + n_{i,j-1}}{\Delta y^2} \end{aligned} \tag{A.13}$$

Apéndice B

Glosario

- **Fototáxis**: se le denomina al estímulo causado por la luz y que bien podría ser luz solar o de algúna otra longitud de onda; tal que los microorganismos se mueven en la dirección de la fuente de luz.

- **Gravitáxis**: se le denomina a un estímulo causado por el campo gravitatorio tal que los microorganismos se mueven a través de las líneas de campo gravitacional.

- **Oxitáxis**: es en realidad un caso partícular de la quimiotáxis. En este caso el estímulo es un gradiente de concentración de oxígeno en donde el oxígeno podría formar un elemento importante del metabolismo de los microorganismos.

- **Quimiotáxis**: se le denomina al estímulo causado por un agente químico que en términos prácticos podría ser un sustrato; tal que los microorganismos se mueven a través de un gradiente de concentración.