



# Instituto Politécnico Nacional

Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y  
Tecnologías Avanzadas

Sección de Estudios de Posgrado e Investigación

Tesis

“Función de Green para un medio estratificado dispersivo con aplicación al  
modelado de la atmósfera terrestre”

*Que para obtener el grado de*

“Maestro en Tecnología Avanzada”

*Presenta:*

Ing. Luis Rafael H.Luz Sánchez,

*Directores de Tesis:*

Dr. Víctor Barrera Figueroa  
Dr Vladimir Rabinovich Likhtman



Barrio la Laguna Ticomán, Ciudad de México, a 30 de enero de 2018.





# Instituto Politécnico Nacional

Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y  
Tecnologías Avanzadas

Sección de Estudios de Posgrado e Investigación

Tesis

“Función de Green para un medio estratificado dispersivo con aplicación al  
modelado de la atmósfera terrestre”

*Que para obtener el grado de*

“Maestro en tecnología avanzada”

*Presenta:*

Ing. Luis Rafael H.Luz Sánchez,

*Directores de Tesis:*

Dr. Víctor Barrera Figueroa  
Dr Vladimir Rabinovich Likhtman



Barrio la Laguna Ticomán, D.F., a 30 de enero de 2018.





# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

## ACTA DE REGISTRO DE TEMA DE TESIS Y DESIGNACIÓN DE DIRECTORES DE TESIS

México, D.F. a 20 de mayo del 2016

El Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de UPIITA en su sesión Ordinaria No. 5 celebrada el día 19 del mes de mayo conoció la solicitud presentada por el(la) alumno(a):

H.Luz	Sánchez	Luis Rafael
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre (s)
Con registro:		
A	1	6 0 0 9 5

Aspirante de:

1.- Se designa al aspirante el tema de tesis titulado:

Función de Green para un medio estratificado dispersivo con aplicaciones al modelado de la atmosfera terrestre.

De manera general el tema abarcará los siguientes aspectos:

Ecuaciones de onda para medios estratificados dispersivos. Función de Green para ecuaciones de Helmholtz con número de onda dependiente de la frecuencia. Problema vertical de Sturm-Liouville para el modelado de atmósfera estratificada. Series de potencias del parámetro espectral para el modelo resultante

2.- Se designan como Directores de Tesis a los Profesores:

Dr. Víctor Barrera Figueroa y Dr. Vladimir Rabinovitch Likhtman

3.- El trabajo de investigación base para el desarrollo de la tesina será elaborado por el alumno en: UPIITA

que cuenta con los recursos e infraestructura necesarios.

4.- El interesado deberá asistir a los seminarios desarrollados en el área de adscripción del trabajo desde la fecha en que se suscribe la presente hasta la aceptación de la tesis por la Comisión Revisora correspondiente:

Directores de Tesis

Dr. Víctor Barrera Figueroa

Aspirante

Luis Rafael H.Luz Sánchez

Dr. Vladimir Rabinovitch Likhtman

Presidente del Colegio

Dr. Gilberto Alejandro García







# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

## ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 9:30 horas del día 18 del mes de diciembre del 2017 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de UPIITA para examinar la tesis titulada:  
**Función de Green para un medio estratificado dispersivo con aplicaciones al modelado de la atmósfera terrestre**

Presentada por el alumno:

H. LUZ SÁNCHEZ LUIS RAFAEL  
Apellido paterno Apellido materno Nombre(s)  
Con registro: 

A	1	6	0	0	9	5
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

### MAESTRÍA EN TECNOLOGÍA AVANZADA

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

### LA COMISIÓN REVISORA

Directores de tesis

Dr. Víctor Barrera Figueroa

Dr. Vladimir Rabinovitch Likhtman

Dr. Lev Guzmán Vargas

Dra. Sara Guadalupe Cruz y Cruz

Dr. Luis Manuel Rodríguez Méndez

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

Dr. Juan Hernández Rosas







**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

**CARTA CESIÓN DE DERECHOS**

En la Ciudad de México el día 30 del mes de enero del año 2018, el que suscribe Luis Rafael H.Luz Sánchez alumno del Programa de Maestría en Tecnología Avanzada con número de registro A160095, adscrito a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de UPIITA, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Vladimir Ravinovich Likhtman y del Dr. Víctor Barrera Figueroa y cede los derechos del trabajo intitulado Función de Green para un medio estratificado dispersivo con aplicación al modelado de la atmósfera terrestre, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección [luishluz2240@gmail.com](mailto:luishluz2240@gmail.com). Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

  
Luis Rafael H.Luz Sánchez

Nombre y firma



# Agradecimientos

Quiero brindar agradecimientos especialmente a mis asesores de tesis el Dr. Víctor Barrera Figueroa y al Dr. Vladimir Rabinovich Likhtman que hicieron posible el aporte del conocimiento para la redacción de este libro, así como a los profesores de posgrado de la línea de investigación Fenómenos Electromagnéticos y Cuánticos en Medios Complejos, donde desarrollé mi trabajo de investigación.

A mis compañeros de posgrado quienes me dieron apoyo personal y didáctico en las aulas, gracias a ellos mi estancia en la escuela fue mas agradable.

A mis padres y familia quienes estuvieron presentes conmigo dando apoyo moral en todo momento.

A todos los miembros de UPIITA y al Instituto Politécnico Nacional, donde obtuve los medios para desempeñar mi trabajo de tesis y las clases impartidas.

Agradecimientos al CONACYT por el apoyo económico que brinda a los estudiantes de posgrado.

Al INIDETAM, la institución que hizo posible mis anhelos de superación.



# Resumen

El uso apropiado del espectro electromagnético es de vital importancia en el campo de las radiocomunicaciones. El estudio de la propagación de las ondas electromagnéticas en medios estratificados permite la caracterización de la radiación electromagnética en estructuras de guía de ondas. Una de esas estructuras consiste en tres estratos apilados, donde el estrato central actúa como el núcleo de la guía de ondas donde las ondas son confinadas y las capas externas establecen las condiciones de frontera que garantizan el confinamiento. Esta guía de ondas puede servir como un modo simple para describir los procesos ondulatorios que son establecidos en el sistema Tierra-tropósfera-ionósfera. Las ecuaciones de onda para medios estratificados dispersivos se estudian de modo que la función de Green se pueda construir para la ecuación de Helmholtz asociada. La transformada de Fourier nos permite simplificar las ecuaciones diferenciales dependientes de tres variables espaciales a una a una ecuación de Sturm-Liouville dependiente de una sola coordenada vertical, que lleva a una ecuación tipo Schrödinger. En esta tesis presentamos un análisis matemático que nos permite encontrar soluciones modales del campo electromagnético así como expresiones asintóticas en la región de campo lejano, que son adecuadas para su análisis numérico

**Palabras clave:** Función de Green; medio estratificado dispersivo; guía de ondas; sistema Tierra-Tropósfera-Ionósfera; expansión en eigen-funciones; ondas transversales eléctrica (TE); ondas transversales Magnéticas (TM).



# *Abstract*

The appropriate usage of the electromagnetic spectrum is of vital importance in the field of radio communications. The study of propagation of electromagnetic waves in stratified media allows the characterization of the electromagnetic radiation in waveguide structures. One of these structures consists of three stacked strata, where the central stratum acts as the nucleus of the waveguide where the waves are confined and the outer layers establish boundary conditions that guarantee the confinement. This waveguide can serve as a simple model to describe the wave processes that are established in the Earth-troposphere-ionosphere system. Wave equations for dispersive stratified media are studied so that the Green's function can be constructed for the associated Helmholtz equation. The Fourier transform allows us to simplify the differential equations depending on the three spatial variables to Sturm-Liouville equations depending on only the vertical coordinate, which leads to a Schrödinger-type equation. In this thesis we present a mathematical analysis that allows us to find modal solutions of the electromagnetic field as well as asymptotic expressions in the far field region, which are suitable for their numerical analysis.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Abstract</b>	<b>IV</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Estado del Arte</b>	<b>5</b>
2.1. Propagación en guías de onda estratificadas . . . . .	6
2.1.1. Propagación en la atmósfera estratificada . . . . .	7
2.2. Hipótesis . . . . .	16
2.3. Objetivos . . . . .	16
2.3.1. Objetivo general . . . . .	16
2.3.2. Objetivos específicos . . . . .	17
2.4. Planteamiento del problema . . . . .	17
2.5. Propuesta de solución . . . . .	17
<b>3. Propagación de ondas electromagnéticas en medios dispersivos</b>	<b>19</b>
3.1. Ecuaciones de Maxwell para los medios dispersivos . . . . .	19
3.2. Condiciones en la frontera para las ecuaciones de Maxwell . . . . .	20
3.3. Ecuaciones de onda para los medios dispersivos, no-homogéneos e isotropos . . . . .	21
3.4. Ecuaciones de onda para los medios dispersivos, estratificados, en el caso de las ondas polarizadas . . . . .	22
3.5. Ecuaciones de onda para los medios dispersivos, en el caso de las ondas no-polarizadas . . . . .	23
3.6. Condiciones en la frontera para los medios estratificados . . . . .	25
3.6.1. Condiciones para ondas polarizadas . . . . .	26
3.6.2. Condiciones para ondas no-polarizadas . . . . .	26
<b>4. Propagación de ondas en guías de onda dispersivas</b>	<b>27</b>
4.1. Descripción de la guía de onda . . . . .	27
4.2. Propagación de ondas en la guía . . . . .	28
4.2.1. Propagación de ondas polarizadas en un medio dispersivo estratificado . . . . .	28
4.2.2. Propagación de ondas no-polarizadas en un medio dispersivo estratificado . . . . .	30
4.3. Términos fuente para los problemas con valores en la frontera . . . . .	31
4.3.1. Fuente para las ondas polarizadas . . . . .	31
4.3.2. Fuente para las ondas no-polarizadas . . . . .	32
4.4. Cálculo de las convoluciones con los términos fuentes . . . . .	33
4.4.1. Para las ondas polarizadas . . . . .	33
4.4.2. Para las ondas no-polarizadas . . . . .	33
4.5. Solución asintótica del problema con valores en la frontera para ondas polarizadas . . . . .	34
4.6. Solución del problema con valores en la frontera para ondas no-polarizadas . . . . .	35

---

<b>5. Determinación de la función de Green para la guía de ondas</b>	<b>37</b>
5.1. Aplicación de la Transformada de Fourier . . . . .	37
5.2. Problema auxiliar de la guía de onda asimétrica . . . . .	38
5.3. La función de Green para las ondas polarizadas . . . . .	42
5.4. La función de Green para las ondas no-polarizadas . . . . .	45
<b>6. Estimaciones asintóticas de la función de Green</b>	<b>49</b>
6.1. Asintótica de la función de Green para las ondas polarizadas . . . . .	49
6.2. Asintótica de la función de Green para las ondas no-polarizadas . . . . .	50
6.3. Expresión de la solución de la ecuación de onda . . . . .	51
6.4. Expresión de la solución de la ecuación de onda . . . . .	52
6.5. Discusión . . . . .	53
<b>7. Conclusiones</b>	<b>57</b>
<b>A. Transformada de Fourier en el sentido de las distribuciones</b>	<b>59</b>
<b>Referencias</b>	<b>61</b>

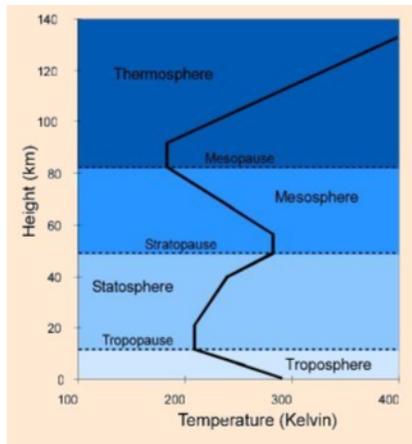
# Capítulo 1

## Introducción

El control del espectro electromagnético es de vital importancia en el ámbito de las telecomunicaciones. El estudio de propagación de ondas electromagnéticas en medios estratificados permite caracterizar el comportamiento de la radiación electromagnética en estructuras de guiado de ondas. Una de estas estructuras consiste en tres estratos apilados, donde el estrato central actúa como el núcleo donde las ondas son confinadas y los estratos exteriores establecen condiciones de frontera que garantizan el confinamiento. Esta guía de onda puede servir como un modelo simple para describir los procesos ondulatorios que se establecen en el sistema Tierra-tropósfera-ionósfera. En esta tesis se presenta un análisis matemático que permite encontrar expresiones modales del campo electromagnético así como expresiones asintóticas en la región del campo lejano, que pueden calcularse por un método numérico.

El movimiento ondulatorio puede ser analizado bajo diferentes perspectivas como lo son acústico donde la propagación necesita un medio mecánico para que la onda viaje, electromagnético donde los campos analizados son el eléctrico y magnético y cuántico en el cual el modelo matemático predice su posición por densidad de probabilidad. El modelo de una ecuación de onda nos lleva a utilizar ecuaciones diferenciales para explicar su comportamiento como una ecuación de onda que se propaga en tres dimensiones, bajo este criterio es necesario utilizar una herramienta matemática que nos permita simplificar el análisis de la onda. En el presente trabajo se estudian las ecuaciones de onda para medios estratificados dispersivos tal que se pueda construir la función de Green para la ecuación de Helmholtz. La transformada de Fourier nos permite simplificar las ecuaciones diferenciales de tres variables a ecuaciones de una sola variable de tipo Sturm-Liouville, lo que nos lleva a una forma de ecuación tipo Schrödinger, que en la literatura han sido ampliamente estudiados, y hacer un análisis de un problema espectral unidimensional. Por un método numérico se pretende modelar la función de Green de ésta guía de onda descrita con una fuente puntual fija.

La atmósfera terrestre es la capa exterior de gases que rodean a la Tierra, conformada por un 78 % de nitrógeno, un 21 % de oxígeno y un 1 % de otros gases. La mayor concentración de masa se encuentra en los primeros 11 Km sobre el nivel del mar. En el ámbito de las radiocomunicaciones la atmósfera es ampliamente estudiada debido a sus efectos sobre la propagación de ondas electromagnéticas en los enlaces de radio. La capa más importante de la atmósfera que afecta la propagación de ondas de radio es la ionósfera, debido a la variación de sus características eléctricas por parte de la actividad solar. La ionósfera es la parte de la atmósfera terrestre ionizada permanentemente, compuesta principalmente de ozono y otros gases como oxígeno, nitrógeno y argón. Tiene una altitud variable aproximadamente de 80 Km a 600 Km [17, pp 231] (en otros textos se considera que la ionósfera se encuentra entre 90 Km a 800 Km). La ionósfera tiene una capa denominada como termósfera en la cual la temperatura ronda alrededor de los  $-73^{\circ}\text{C}$  hasta los  $126^{\circ}\text{C}$  dependiendo de la actividad solar. Así mismo la ionósfera suele dividirse en capas cuyas alturas varían con respecto a la hora del día. Entre estas se encuentra la capa D, la cual se caracteriza por su absorción de frecuencias por debajo de los 10 MHz (actúa como una especie de filtro pasa-bajas). La siguiente capa se le denomina capa E la cual está situada entre los 80 y 100 Km; y por último están las capas F1 y F2, de 180 Km a 300 Km, y de 300 Km a 600 Km, respectivamente [17, pp. 212], ver Figura 1.0.1 Existen modelos matemáticos para tratar de modelar la atmósfera como una guía de onda formada por dos capas, con ciertas condiciones de frontera. Los parámetros constitutivos de estas capas (es decir, la permitividad eléctrica, permeabilidad magnética, y conductividad eléctrica) varían con respecto a la altitud. En nuestro



**Figura 1.0.1.** Perfil de temperatura de las diferentes capas de la atmósfera. Adaptado de <http://www.geociencias.unam.mx/~rmolina/Diplomado/Atmosfera.html>

trabajo se toma en consideración a la atmósfera como una guía de onda de tres capas que forman un sistema litósfera-tropósfera-ionósfera, con condiciones de frontera establecidas entre las interfaces de los estratos.

Los problemas de radiación en la atmósfera han sido considerados desde hace muchos años debido a su importancia en la propagación de señales de radio, en la identificación de partículas energéticas provenientes del espacio exterior, en la propagación de señales extraterrestres generadas por satélites artificiales, así como la influencia del Sol en los sistemas de radiocomunicaciones terrestres, entre otros problemas de interés. Los análisis se basan en las ecuaciones de Maxwell dependientes de la frecuencia ya que se consideran los efectos dispersivos de la atmósfera. Por lo tanto tener un modelo de la atmósfera suficientemente simple pero preciso para describir sus características físicas es importante para analizar la atmósfera correctamente. No obstante, considerar a la atmósfera como homogénea resulta un caso altamente idealizado que conduce a expresiones relativamente simples, sin embargo, las variables principales de las que depende la propagación, por ejemplo los parámetros constitutivos, dependen en general de múltiples factores tales como la hora del día, la actividad solar, la humedad, etc. lo cual complica el análisis. Al analizar el fenómeno de la dispersión en un medio con pérdidas, se tiene que expresar a los parámetros constitutivos en su forma compleja, lo que es de más interés en el estudio de las radiocomunicaciones. Es bien sabido, que la principal capa que influye las radiocomunicaciones atmosféricas es la ionósfera, por lo que un análisis más preciso debería considerar sus cambios con respecto a las horas del día y tomar en cuenta su altura en el análisis de la guía de ondas. En esta tesis, sin embargo, asumimos que el estrato de la guía de ondas que representa a la ionósfera es homogéneo y su altura se mantiene constante. Esto conduce a expresiones que muestran aproximadamente el comportamiento de la radiación electromagnética en la atmósfera lo cual arroja un modelo simple del proceso ondulatorio.

La presente tesis se encuentra organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se encuentra el Estado del Arte, donde se recopilan trabajos realizados con el objeto de investigación, los cuales están relacionados principalmente con la propagación de ondas de radio en la atmósfera y guía de ondas estratificadas. Además, se encuentran los objetivos del trabajo, el planteamiento del problema y la propuesta de solución. En el Capítulo 3 se consideran las ecuaciones de Maxwell armónicas en el tiempo para medios dispersivos. Se divide el análisis en propagación de ondas polarizadas y no-polarizadas, y se establecen las condiciones de frontera para ambos casos con el objetivo de tratar los planos de discontinuidad en la guía de ondas considerada. Se obtienen las ecuaciones de onda para ambos casos y se establecen las condiciones de frontera con el fin de plantear un problema con valores en la frontera. Posteriormente, en el Capítulo 4 se particulariza el problema con valores en la frontera del capítulo anterior con el fin de tratar la guía de ondas considerada en este trabajo. Se introducen los términos fuente para los casos polarizado y no-polarizado, mismos que sirven para obtener las soluciones a los problemas planteados a partir de la función de Green asociada a cada problema, así mismo se expresan las soluciones formalmente a partir de las convoluciones para los casos de estudio. En el Capítulo 5 se toman las ecuaciones de onda y se aplica la transformada de Fourier con respecto a las coordenadas transversales para obtener un problema unidimensional y bidimensional para

los casos polarizado y no-polarizado, respectivamente. Al tener los problemas de este tipo, se introduce un problema espectral auxiliar tipo Schrödinger, del cual se tienen soluciones bien conocidas, mismas que se van a utilizar para dar solución a los problemas en consideración. Por medio de una expansión en eigen-funciones se determina la función de Green para ambos problemas, usando el principio de absorción al límite. En el Capítulo 6 se hacen las estimaciones asintóticas usando el método de la fase estacionaria de las funciones de Green correspondientes que se encontraron en el capítulo anterior y se obtienen expresiones explícitas de la solución a los problemas. Finalmente, se hace la discusión de los resultados obtenidos al final del capítulo donde se especifican las partes de las soluciones encontradas y sus significados físicos.



## Capítulo 2

# Estado del Arte

En 1865 (y posteriormente en 1873) Maxwell publicó un trabajo en el que unificó las teorías de la electricidad y magnetismo proponiendo que la luz se propaga en forma de ondas electromagnéticas. Pero fue hasta 1886 cuando Heinrich Rudolph Hertz demostró experimentalmente la teoría de Maxwell. Hertz observó mediante unos experimentos que las ondas electromagnéticas pueden ser generadas a partir de corrientes eléctricas oscilantes en circuitos resonantes que excitaba con un transformador de alta tensión. Las ondas eran recibidas en un receptor que consistía de otro circuito resonante que mostraba la presencia de las ondas electromagnéticas a través de una chispa que saltaba entre las esferas que formaban un capacitor en el receptor. A partir de los experimentos de Hertz, muchos científicos notables en aquella época fueron inspirados para continuar con la investigación de las ondas electromagnéticas. La propagación de ondas electromagnéticas terrestres ha sido estudiada desde que se tienen aparatos transmisores y receptores de radio utilizados para las comunicaciones a largas distancias. Algunos investigadores de forma notable han pasado a la historia como Marconi, Tesla y Popov, y otros que lograron transmitir ondas de radio a grandes distancias utilizando la ionósfera como un medio reflector. En 1902, Marconi experimentó con la detección de ondas Hertzianas a través del Atlántico, notando así que las ondas recibidas son más intensas en la noche [9], sin embargo Tesla había patentado años antes instrumentos con los que Marconi había realizado sus experimentos. En 1896 en San Petersburgo, Alexander Stepanovich Popov mostró en el Instituto de Física un aparato de radio que transmitía y captaba señales electromagnéticas en lugares distantes del edificio del instituto, y en 1900 se llevó a cabo la construcción de una estación de radio y se estableció una comunicación entre Kokta y una isla llamada Gogland a 25 millas de la estación en el Golfo de Finlandia. En sus experimentos utilizó un cable suspendido para generar la onda electromagnética, por lo que se le atribuye la invención de la antena. En 1909 Sommerfeld hizo un análisis de la propagación de ondas de radio terrestres y consideró a la Tierra como un conductor finito plano y tomó como una fuente de ondas electromagnéticas a una antena vertical idealizada que consiste de un dipolo Hertziano sobre la superficie de la Tierra, asumiendo que el campo electromagnético se compone únicamente de las componentes  $E_r$ ,  $E_\theta$  y  $H_\varphi$ , las cuales son independientes de la coordenada azimutal  $\varphi$  en el sistema de coordenadas esféricas  $(r, \varphi, \theta)$ . Sommerfeld aportó una explicación de la influencia de la ionósfera en las comunicaciones trasatlánticas realizadas por Marconi varios años antes. El análisis de Sommerfeld en 1919 produjo los primeros modelos de propagación de ondas electromagnéticas que involucraba a la atmósfera de la Tierra y a un suelo conductor imperfecto. Por otra parte, K. G. Budden en 1939 analizó la propagación de ondas en una guía acotada por la Tierra y la ionósfera, donde desarrolló varias aproximaciones con respecto a la propagación en extra-bajas frecuencias, y muy bajas frecuencias. La teoría de una ionósfera anisotrópica ha sido considerada con más detalle en los trabajos [32], [42], [10] y [15]. Muchos trabajos abordan la propagación de las ondas electromagnéticas terrestres como una guía de onda plana formada por diferentes partes de la atmósfera tal como se ha realizado en los trabajos [2], [4], [3]. Con el paso del tiempo, los medios electromagnéticos estratificados han sido ampliamente estudiados y sus propiedades como guías de ondas han sido consideradas en diferentes formas. Existen diferentes maneras de abordar matemáticamente un problema para describir la propagación de las ondas electromagnéticas en un medio dispersivo, como por ejemplo, a partir de las ecuaciones de Maxwell, las ecuaciones de onda, o la ecuación de Helmholtz, entre otras. Varios métodos han sido aplicados en la solución de tales ecuaciones, principalmente métodos numéricos. El presente trabajo de tesis es un análisis teórico dedicado al estudio de

la propagación de ondas electromagnéticas en el sistema litósfera-troposfera-ionosfera, a partir de la técnica de la función de Green, el método de fase estacionaria, y el método de series de potencias del parámetro espectral. Este método de análisis puede utilizarse además para realizar cálculos numéricos.

## 2.1. Propagación en guías de onda estratificadas

Existen diferentes modelos de guías de onda dependiendo de la geometría involucrada y de los materiales que conforman a las guías. En nuestro caso analizamos una guía de ondas plana dispersiva estratificada, que se encuentra frecuentemente en la naturaleza como el océano y la atmósfera. En anteriores estudios sobre propagación de ondas como en [30] se usan las ecuaciones de Maxwell armónicas en el tiempo, y se aplica la transformada de Fourier, para encontrar ecuaciones de onda que describan la propagación de ondas TE y TM en medios dieléctricos dispersivos y homogéneos. Este análisis permite simular una fuente puntual en movimiento en un plasma frío no-magnético que genera el campo electromagnético. El objetivo de este trabajo consistió en encontrar para este medio, las ecuaciones que describen las componentes de los campos eléctrico y magnético en forma de ecuaciones diferenciales, y se obtuvieron soluciones a partir de la aplicación del método de la función de Green. Esto permitió encontrar los modos guiados que se establecen en la guía de ondas y sus expresiones asintóticas que pueden ser simuladas por medio de un método numérico. Todo lo anterior se puede ver como una secuencia de pasos para analizar de esta manera ciertas estructuras de guías de ondas plana.

En estudios de guías de onda ópticas como se puede ver en [28], el objetivo consiste en encontrar expresiones modales para el campo electromagnético, donde un modo representa una solución válida de la ecuación de onda (y consecuentemente de las ecuaciones de Maxwell) sometida a las condiciones de frontera impuestas por la guía. Los modos ópticos permiten caracterizar la energía electromagnética de forma precisa, la cual está confinada principalmente en el núcleo de la guía. A partir de la transformada de Fourier aplicada a la ecuación de onda se llega a una representación armónica en el tiempo, lo cual reduce la complejidad del problema original y permite obtener expresiones del campo electromagnético en términos de componentes armónicas. Dado que la geometría de una fibra óptica es cilíndrica se establece una interfaz entre el núcleo y el recubrimiento óptico los cuales son coaxiales, esto implica que las condiciones de frontera se rigen por una simetría cilíndrica. Se construye la función de Green para la ecuación de onda correspondiente y por medio de la introducción de un problema espectral se encuentran soluciones que derivan en una ecuación de dispersión, que describe los números de onda válidos de las ondas transversales que pueden propagarse en la guía. La solución del problema espectral puede implicar la aplicación de un método numérico para encontrar información específica relativa a la propagación de las ondas como son las velocidades de grupo que puede soportar la fibra y la dispersión de la energía a través de la fibra.

En el trabajo [37] se aborda la propagación de ondas acústicas en el océano estratificado producido por una fuente en movimiento. Este estudio puede llevarnos a pensar en una cierta analogía con respecto a la propagación de ondas electromagnéticas. La analogía implica encontrar una ecuación de onda que describa la propagación un medio material estratificado que está en función de la presión, coordenadas espaciales y el tiempo. El análisis implica llegar a una ecuación no homogénea tipo Helmholtz sometida a condiciones en la frontera. Se encuentra la función de Green de esa guía de ondas para obtener una representación del campo que se propaga en su interior y calcular expresiones asintóticas de los modos guiados para ser implementada por un método numérico. De igual manera se implementa una fuente puntual en movimiento con cierta amplitud y frecuencia para producir un campo acústico, a partir de lo cual se encuentran los modos que se establecen en la guía.

Un tipo de guía de onda considerado ampliamente en la literatura es la guía de ondas cuántica. Este tipo de guía de ondas transporta ondas cuánticas que interactúan con las paredes de la guía de la misma forma en que la luz interactúa con una fibra óptica, la diferencia que se tiene es que las dimensiones de la guía de ondas cuántica tienen que ser lo suficientemente pequeñas para que los fenómenos cuánticos se expresen. En [36] se desarrolla una investigación sobre el espectro esencial y discreto del operador de Schrödinger definido en una guía de ondas cuántica en tres dimensiones con un potencial tipo pozo definido en dirección en que viaja una partícula. En ese trabajo se analizan las componentes esencial y discreta del espectro por separado. Se utiliza el método de operadores límite para determinar el espectro del operador de Schrödinger en tres dimensiones. Para el espectro discreto se plantean dos problemas espectrales, el primer problema es de tipo Dirichlet en el plano transversal de la dirección de propagación de la partícula, y otro de tipo Schrödinger en el plano

ortogonal al primero que está en dirección de propagación de la partícula, el cual tiene un potencial tipo pozo. Se realiza el cálculo de los eigen-valores del espectro utilizando el método de series de potencias de parámetro espectral (SPPS). Existen varios trabajos enfocados al estudio de guías de onda planas estratificadas, por ejemplo en el trabajo [3] se considera una guía que se compone de un núcleo y un revestimiento en donde los parámetros constitutivos varían en una sola coordenada espacial. En tal medio estratificado se establecen modos TE y TM descritos por ecuaciones de onda escalares desacopladas [14]. Se establecen condiciones de frontera en los planos de discontinuidad, las cuales conducen a ecuaciones tipo Sturm-Liouville asociadas a las direcciones espaciales donde ocurren las no-homogeneidades de las guías de ondas. Los modos guiados que se establecen en las guías de ondas están representados por expresiones que incluyen a las eigen-funciones de los problemas de Sturm-Liouville asociados. Las representaciones obtenidas permiten calcular soluciones asintóticas del problema que pueden ser modeladas mediante algún método numérico.

De los análisis de los trabajos realizados anteriormente, se puede observar que tienen ciertas características en común. En todos los trabajos implica el estudio del movimiento ondulatorio que puede ser analizado bajo perspectivas de ondas electromagnéticas, acústicas o cuánticas. Implica también analizar el medio por el cual se van a propagar, como el vacío o un medio material como un gas o un dieléctrico. Las ecuaciones de onda obtenidas dependen de dos o tres variables y es necesario la aplicación de un método para transformarla en una ecuación diferencial unidimensional, tal como transformada de Fourier o el método de separación de variables. Esto nos va a llevar a una ecuación diferencial en derivadas ordinarias a la que se puede analizar como un problema espectral unidimensional para encontrar las eigen-funciones del problema, caracterizar el espectro en una representación modal y encontrar un significado físico de nuestro problema.

Encontrar soluciones al problema de propagación de ondas en una guía de onda estratificada puede implicar el uso de técnicas analíticas y numéricas a las ecuaciones de onda que resultan del problema bajo análisis. La guía de ondas considerada en esta tesis es una guía de ondas asimétrica compuesta por una capa central (núcleo) que es rodeada por dos capas homogéneas (recubrimiento). Las capas del recubrimiento tienen diferentes índices de refracción, en este sentido la guía es asimétrica. El enfoque considerado en esta tesis consiste en establecer un problema espectral unidimensional auxiliar cuyas soluciones permiten obtener los modos que se establecen en la guía de ondas. Las expresiones resultantes permiten obtener en forma explícita la función de Green del problema, a la cual se puede aplicar el método de fase estacionaria para obtener estimaciones asintóticas del campo electromagnético a grandes distancias. El objetivo de la presente tesis es modelar una guía de ondas electromagnéticas formada por tres estratos con el propósito de obtener un modelo simple para el sistema Tierra-tropósfera-ionósfera. Para esto se sigue un método similar al que se describió anteriormente, el cual implica trabajar con las ecuaciones de Maxwell para encontrar ecuaciones de onda que describan al medio estratificado dispersivo, utilizar la herramienta de la transformada de Fourier con respecto al tiempo y a las coordenadas espaciales con el objetivo de llegar a un problema espectral unidimensional. Esto conduce a ecuaciones escalares no homogéneas tipo Helmholtz, que definen un problema espectral auxiliar. Se encontrarán las eigen-funciones del problema y el espectro discreto a partir de una ecuación de dispersión. Cabe mencionar que a diferencia de los trabajos el tipo de guía de onda considerado es una guía de onda asimétrica y dispersiva. Siguiendo la filosofía de los trabajos realizados en este ámbito, se aplicará la misma metodología para obtener expresiones asintóticas de los campos. A partir de las expresiones obtenidas se puede aplicar un método numérico para analizar los modos guiados y ondas laterales que se establecen en la guía. El presente modelo permitirá entonces considerar la propagación de ondas electromagnéticas en el sistema Tierra-tropósfera-ionósfera, y la validez de los resultados se basa en la correcta elección de los parámetros constitutivos que pueden establecerse en la atmósfera.

### 2.1.1. Propagación en la atmósfera estratificada

El estudio de la propagación de ondas en la atmósfera puede dividirse en dos grupos principalmente: análisis en altas frecuencias y análisis en bajas frecuencias. Con respecto al análisis en bajas frecuencias las bandas consideradas son: menor a 4 MHz para las bandas de baja frecuencia y de 3 a 12 GHz para las bandas de alta frecuencia. En el estudio de la propagación de ondas, debe considerarse el diseño de antenas. Esto depende de la aplicación en que se va a utilizar la banda de frecuencias. Por ejemplo, para bajas frecuencias, una estimación del tamaño de una antena lineal debe ser cercana a la longitud de onda a la frecuencia de trabajo. Con base en esto las señales portadoras de bajas frecuencias tendrán longitudes de onda muy grandes y por lo tanto necesitarán antenas de dimensiones mayores. En microondas, las antenas

se vuelven de un tamaño muy reducido debido a que las frecuencias de operación son muy elevadas. Como se puede ver en el libro [8, Cap. 11] existe una dependencia entre la frecuencia de operación de las señales y las dimensiones de las antenas, de modo que la elección de una antena apropiada depende de las aplicaciones. El diseño de una antena se basa principalmente en el ancho de banda de la información a transmitir así como de la impedancia del equipo transmisor/receptor, los cuales dependen estrechamente de la geometría de la antena. Por otra parte un factor muy importante que depende de la aplicación es la directividad de la antena, es decir la capacidad dirigir el haz hacia una región específica del espacio.

En el artículo [32] se trata la propagación de bajas frecuencias en la atmósfera estratificada donde se analizan los modos guiados generados por una fuente. Debido a las bajas longitudes de onda de la señal portadora es posible que el campo puede propagarse a largas distancias. En este artículo se analiza cómo afectan los disturbios de la ionosfera en la propagación de ondas y su dispersión. El artículo realiza cálculos basados en un modelo de la atmósfera a cierta temperatura y coordenadas geográficas específicas, y se comparan los resultados obtenidos con un análisis numérico basado en los métodos WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) y DSAS (Dissipative Solution Above Source). Con base en los análisis realizados se obtuvieron resultados para la guía de ondas estimando el número de modos que se pueden establecer en la atmósfera baja. El método DSAS da excelentes resultados en comparación con el método WKB en la atmósfera baja.

Con respecto a las altas frecuencias se puede mencionar el artículo [39] dedicado al estudio del haz del radar. En este artículo se analiza a la atmósfera como una guía de ondas cuyo funcionamiento depende de las condiciones climatológicas que puedan influir en la propagación de ondas de radar, sin embargo no descarta la variación vertical del índice refractivo de la atmósfera y su dependencia con el clima. En este trabajo se modela la atmósfera como una guía de ondas formada por dos cascarones esféricos siendo el primero la superficie de la tierra y el segundo localizado a una altura de un tercio del radio de la tierra. Se encuentra la ecuación diferencial que describe la propagación de ondas de radio con base en el fenómeno de la reflexión interna total en el estrato en el que el haz de radar es confinado dentro de la guía. Si bien el análisis es similar al de una guía de ondas de placas paralelas éste no es un modelo adecuado para este caso debido a que no se toma en cuenta el efecto del clima en la atmósfera.

Los libros [14], [21], [11], [33] y [26] dedicados a la propagación de ondas de radio, consideran a la atmósfera como un medio estratificado verticalmente, donde las variaciones instantáneas de temperatura o presión no son tomadas en cuenta. La forma en que atacan el problema consiste en establecer un modelo idealizado, que podría tomar en cuenta las variaciones de la temperatura o la densidad de los iones en la ionósfera. En un medio no homogéneo el cual se puede considerar como una guía de onda plana en capas, la forma de abordar el problema es usando ecuaciones de onda escalares desacopladas para cada estrato como se menciona en [14, Cap 2]. Se garantiza la continuidad de las soluciones que se obtienen aplicando las condiciones en la frontera apropiadas entre los estratos. El campo resultante de una fuente en un medio estratificado, puede expresarse en términos de integrales tipo Fourier, lo cual permite calcular estimaciones a partir de métodos asintóticos tales como el método de la fase estacionaria. En algunos trabajos (*e.g.*, [39],[42]) se consideran también cuestiones geográficas en donde la densidad de los iones depende de la región donde se establece la comunicación.

## Propiedades de la ionósfera

La ionósfera está compuesta por gases ionizados como el oxígeno  $O_2$ , dinitrogeno  $N_2$  y oxido nitroso  $N_2O$  por lo cual se le debe considerar como un plasma. Sobre todo en las capas D y E de la ionósfera y son los principales gases que afectan a las radiocomunicaciones tanto como ondas terrestres como espaciales [10]. La influencia en la propagación de ondas electromagnéticas afectan sobre todo a las altas frecuencias debido a la ionización de los gases y la densidad de electrones. Pueden aparecer efectos como centelleo, dispersión, reflexión, difracción, retardos de propagación o cambios de frecuencia. En la siguiente tabla se muestran las principales fenómenos que afectan a las radiocomunicaciones.

Las ondas de radio cuando se propagan por la atmósfera pueden interactuar con la ionósfera, y ciertas frecuencias presentan un mayor efecto en la dispersión de la energía electromagnética. La interacción de la onda de radio con el plasma de la ionósfera da lugar a fenómenos que afectan las características de propagación de la onda. Ciertas bandas de frecuencias presentan mayores atenuaciones debido a que los gases que la componen tienen frecuencias de resonancia cercanas a las frecuencias de las portadoras, principalmente en las bandas de microondas. Por ejemplo el vapor de agua resuena a 22.3 GHz mientras que el oxígeno

Deterioro de la propagación	Causa física	Importancia primordial
Atenuación y incremento de ruido por el cielo	Gases atmosféricos, nubes y lluvia	frecuencias superiores a 10 GHz
Despolarización de la señal	Lluvia, cristal de hielo	Sistemas de polarización dual en bandas C y Ku (depende de la configuración del sistema)
Refracción, multitrayectoria atmosférica	Gases atmosféricos	Comunicación y seguimientos en ángulos de baja elevación
Centelleo de señal	Fluctuación de refractividad de la ionosférica y troposférica	Troposférica a frecuencias arriba de 10 GHz e ionosférica a frecuencias abajo de 10 GHz
Reflexión multitrayectoria, bloqueo	Superficie de la Tierra, objetos en la superficie	Servicios de satélite para móviles
Retardos en la propagación, variaciones	Tropósfera, ionósfera	Tiempos precisos y sistemas de localización; sistemas de acceso múltiple por división de tiempo (TDMA)
Interferencia entre sistemas	efecto de ducto, dispersión y difracción	Principalmente presente en la banda C; la dispersión por la lluvia puede ser significativa a frecuencias más altas

**Cuadro 2.1.** Problemas de propagación de los sistemas de comunicación por satélite [31]

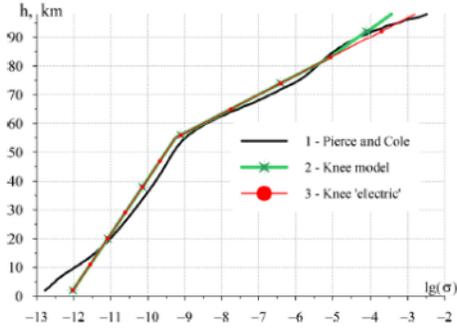
resuena a 60 GHz . Este incremento en la atenuación degrada las señales y se pueden presentar fenómenos de desvanecimiento. La concentración de electrones en la ionósfera hace que se formen varias capas ionosféricas. Su estudio fue hecho por Sydney Chapman [15], quienes consideran los mecanismos de la formación de la capa de ozono. Su aporte fue introducir una ecuación de la densidad del aire a una temperatura constante y una determinada altitud [11]. Otros libros centran su atención a la propagación de ondas cortas (HF, de 3 a 30 MHz) en la tropósfera. Tales libros toman en cuenta las condiciones meteorológicas, debido a que el índice de refracción cambia de tal manera que las condiciones favorables de las capas de la ionósfera forman un “conducto” por el cual a cierta frecuencia las ondas pueden ser guiadas donde existen condiciones de frontera apropiadas establecidas en las masas de aire.

Para las ondas de radio de muy bajas frecuencias (3 a 30 KHz) existe un trabajo [34] que analiza las regiones polares donde la conductividad predominante es reactiva (donde aparece una parte imaginaria en la conductividad debido a que en las zonas polares el suelo interactúa aun más a la frecuencia de propagación) y las ondas transversales electromagnéticas se modelan por funciones de Hankel de primer tipo. Se considera que se forma una guía de ondas de dos estratos: la tierra y la ionósfera. Debido a su fácil generación, las ondas en esta banda de frecuencias se propagan en esta guía de ondas donde la energía electromagnética queda confinada en estas dos capas.

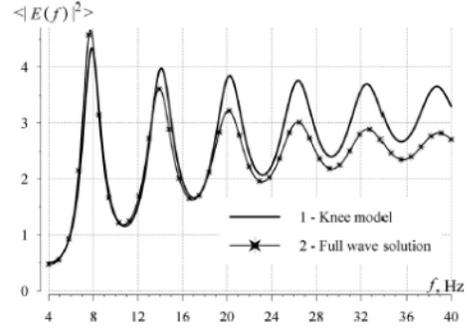
Existen varias formas de modelar la atmósfera terrestre como una guía de onda, donde cada modelo se basa en la descripción de los parámetros constitutivos de la permitividad  $\epsilon$ , permeabilidad  $\mu$ , y conductividad  $\sigma$  de las capas de la atmósfera terrestre. Por ejemplo, el modelo conocido como “*knee-model*”, debido a la apariencia de rodilla que tiene la gráfica semi-logarítmica de la conductividad en función de la altitud, permite representar la conductividad del plasma ionosférico como una función continua a trozos, donde los trozos en la escala semi-logarítmica tienen forma lineal y en el punto de unión forman un ángulo, ver figura (2.1.1). El modelo fue desarrollado para obtener una representación de la conductividad de la ionósfera como función de la altitud, en la banda de las extra bajas frecuencias (ELF). En este medio se define la expresión

$$\sigma(z) = \begin{cases} \sigma_{kn} \exp [(z - h_{kn}) / \zeta_b] & z < h_{kn} \\ \sigma_{kn} \exp [(z - h_{kn}) / \zeta_a] & z > h_{kn} \end{cases},$$

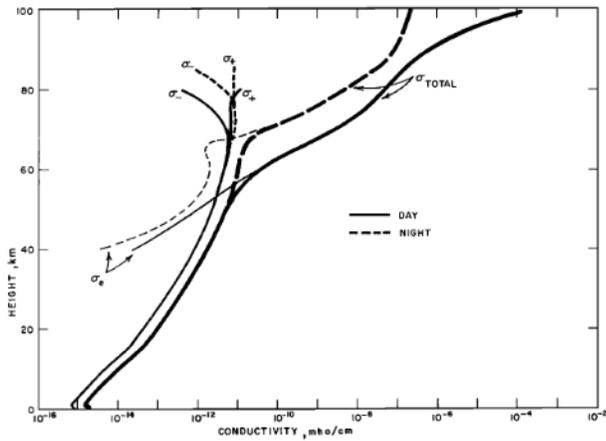
que representa la conductividad  $\sigma$  en función de la altitud  $z$ , donde  $\sigma_{kn}$  representa la conductividad donde ocurre el efecto de “*rodilla*” (*knee effect*),  $h_{kn}$  es la altura donde ocurre el doblez de la gráfica, y  $\zeta_a$ ,  $\zeta_b$  son



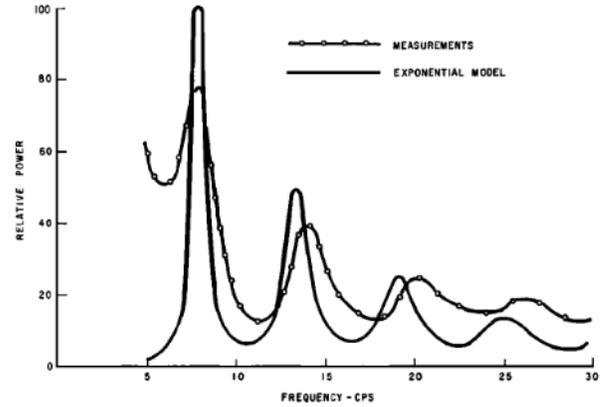
**Figura 2.1.1.** Perfil de conductividad de la atmósfera: Modelo exponencial (1), modelo de rodilla (2)



**Figura 2.1.2.** Espectro de potencia en función de la frecuencia



**Figura 2.1.3.** Perfil de conductividad en función de la altura



**Figura 2.1.4.** Perfil de conductividad en función de la altura

escalas de alturas de la función exponencial.

Por otra parte, el modelo del perfil exponencial es atribuido a Galejs [23] (ver también Pierce y Cole [16]), donde el índice de refracción de la ionósfera es calculado a partir de las mediciones experimentales de la interacción de la portadora de muy baja frecuencia con la densidad de iones de las capas de la ionósfera. Galejs [22] realizó varios intentos para modelar la conductividad de la ionósfera con datos obtenidos experimentalmente para horarios diurnos, donde la aproximación de la conductividad que obtuvo fue

$$\sigma(z) = 10^6 \exp\left[\frac{z-70}{3,25}\right], \quad \text{S} \cdot \text{m}^{-1},$$

donde  $z$  es la altitud medida en kilómetros. Por otra parte Pierce y Cole lograron obtener un modelo de la conductividad de la ionósfera tanto para horarios diurnos como nocturnos, como se muestra a continuación

$$\sigma(z) \approx \begin{cases} 2 \times 10^{-15} \exp\left(\frac{h}{6,4}\right) + 6 \times 10^{-20} \exp\left[\frac{h}{3,0}\right], & \text{día,} \\ 10^{-13} \exp\left(\frac{h}{7,5}\right) + 2 \times 10^{-27} \exp\left[\frac{h}{2,0}\right], & \text{noche,} \end{cases} \quad \text{S} \cdot \text{m}^{-1},$$

donde  $h$  representa la altitud medida en kilómetros. En la figura (2.1.3) se puede ver el perfil de la conductividad de la ionósfera en función de la altitud para ambos horarios.

En los análisis antes mencionados las frecuencias consideradas están en la banda de las extra bajas frecuencias (ELF). Esto tiene una explicación basada en que en la atmósfera la propagación de ondas electromagnéticas confinadas en la cavidad ionosférica ocurre principalmente a bajas frecuencias como se puede ver

en las figuras (2.1.2) y (2.1.4), que representa las frecuencias de resonancia que se establecen de forma natural en esta guía de ondas. Utilizando el modelo matemático de “*knee-model*” se realizó el análisis numérico para determinar las frecuencias de resonancia de la guía de onda. En la figura (2.1.4) podemos apreciar que la solución numérica obtenida es muy cercana a las mediciones experimentales realizadas, en las cuales se midió la densidad de potencia del ruido atmosférico que produce un relámpago cuando éste ocurre.

Modelos más recientes incluyen la descripción de los parámetros de propagación de señales ELF basados en un modelo de la ionósfera baja como una cavidad uniforme con un perfil de conductividad homogéneo y por capas, o una combinación de estratos homogéneas [29]. Otro modelo para la conductividad de la ionósfera en función de la altitud  $z$  es el modelo doble exponencial [29], el cual representa el perfil de conductividad de las capas inferiores y superiores como una función exponencial, a saber,

$$\sigma(z) = \begin{cases} \sigma(h_0) \exp[(z - h_0)/\zeta_0], & \text{capas inferiores,} \\ \sigma(h_1) \exp[(z - h_1)/\zeta_1], & \text{capas superiores,} \end{cases}$$

donde  $z$  es la altitud, y  $h_0, h_1$  son las alturas asociadas a las capas superior e inferior, todas medidas en kilómetros, y  $\zeta_0, \zeta_1$  son escalas de alturas de la función exponencial de cada capa, respectivamente. Los valores de  $h_0$  y  $h_1$  se toman como 50km y 90 km, respectivamente. Cabe mencionar que este modelo se aplica para portadoras de muy bajas frecuencias, sin embargo, las condiciones donde los modelos pueden ser aplicados depende de las características de la ionosfera tales como el grosor de las capas estratificadas formadas, la altitud, ionización y calentamiento.

Un modelo ionosférico encontrado en [19] considera diferentes estratos apilados verticalmente en términos de la altitud  $z$ . En  $z = 0$  se encuentra el suelo, el cual se considera como un conductor perfecto. <sup>1</sup>El plasma a la altitud de 90 Km es magnetizado por el campo geomagnético  $B_0$ . En la región de 150 a 200 Km, que cubre las capas F1 y F2, las ondas MHD (ondas magnetohidrodinámicas, las cuales afectan principalmente a las ondas de Alfvén) se hacen presentes. En la parte mas alta del estrato F2, a una altitud de  $z = 300$  Km, la densidad electrónica es modulada por ondas electromagnéticas de alta frecuencia que llegan hasta la ionósfera. En este modelo se considera un plasma frío Hall-MHD caracterizado por los tensores de conductividad y permitividad

$$\begin{aligned} \sigma &= \omega_{ci} (\Gamma_{in} + \Gamma_{en}), \\ \varepsilon &= - \left( \frac{\varepsilon_0 c^2}{v_A^2} \right) (R_e R_i), \end{aligned}$$

respectivamente, donde  $\Gamma_{en} = v_{en}/\omega_{ce}$ ,  $\Gamma_{in} = v_{in}/\omega_{ci}$ ,  $v_{in}$ ,  $v_{en}$  son las frecuencias de colisión de iones y electrones, siendo  $\omega_{ci}$ ,  $\omega_{ce}$  las frecuencias de ciclotrón del ión y electrón;  $\varepsilon_0$  es la permitividad del vacío,  $c$  es la velocidad de fase de la luz y  $v_A$  es la velocidad de Alfvén; los tensores  $R_i$ ,  $R_e$  son tensores especifican información del campo geomagnético  $B_0$  y de la velocidad de los iones y electrones, respectivamente, ver [19, Ap. A]. Del modelo, se obtienen resultados numéricos del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y el potencial vectorial  $\mathbf{A}$  para las condiciones de frontera establecidas entre la parte baja del plasma frío en  $z_0 = 90$  Km y el espacio libre. El interés particular de este estudio recae en la penetración de las ondas electromagnéticas de ultra baja frecuencia (ULF) en la ionósfera. Se hace la comparación de los resultados obtenidos con HAARP (High Frequency Active Auroral Research Program) el cual su principal objetivo es el estudio de la ionósfera para mejorar las radiocomunicaciones.

En el medio atmosférico donde la ionósfera se puede considerar como un plasma frío, ésta se divide en capas conocidas como D, E, F, siendo la capa F la de mas importancia para las radiocomunicaciones ya que actúa como un reflector de las ondas electromagnéticas. Debido a la influencia del campo magnético de la tierra, en [2] tratan a la ionósfera como un medio anisótropo. La guía de ondas analizada en ese artículo se encuentra formada por dos placas paralelas de diferentes impedancias intrínsecas, y una tercera placa con diferente impedancia intrínseca inmersa en un plasma frío, donde el interés se encuentra en el efecto de la permitividad del medio en la propagación de ondas de radio, donde el tipo de radiación dominante son las

<sup>1</sup>La aproximación del conductor ideal permite simplificar los cálculos grandemente, sin embargo en la práctica el suelo no podría considerarse como tal. De hecho para el suelo se comporte como un conductor sus parámetros constitutivos a la frecuencia de trabajo  $\omega$  deben satisfacer  $\sigma/\omega\varepsilon \gg 1$ . [25, Cap. 12, 387]

ondas TEM. El modelo de la permitividad usado (ver, *e.g.* [21, p. 82]) se representa por una matriz:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & -i\varepsilon_2 & 0 \\ i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_1 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2\right]^{-1}, \varepsilon_2 = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \left[\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)\right]^{-1}$$

$$\varepsilon_z = 1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2$$

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}, \omega_c = \frac{|e|\mu_0 H_{dc}}{m},$$

donde  $e, N, m, \omega, \omega_c, \omega_p$  representan la carga eléctrica del electrón, la densidad electrónica en el plasma, la masa del electrón, la frecuencia de trabajo, la frecuencia de ciclotrón, y la frecuencia del plasma, respectivamente. La solución que gobierna el modelo matemático en el plasma frío es determinada mediante el uso de la técnica de Wiener-Hopf, la cual consiste en considerar una solución a la ecuación de Helmholtz derivada de este modelo donde el campo puede ser expresado como

$$u^T = \begin{cases} H_z^1(x, y) & y > b \\ (H_z^{inc}(x, y) + H_z^2(x, y))\theta(-x) + H_z^3(x, y)\theta(x) & 0 < y < b \end{cases},$$

donde  $b$  es la separación de las placas paralelas y es el punto donde ocurre la diferencia de impedancias intrínsecas;  $\theta(x)$  es la función de Heaviside,  $H_z^{inc}$  es el campo incidente dado por

$$H_z^{inc}(x, y) = e^{ik_{eff}x},$$

y  $H_z^j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) son los campos dispersados que satisfacen la ecuación de Helmholtz en el plasma frío

$$[\Delta_{(x,y)} + k_{eff}^2] H_z^j(x, y) = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

donde  $k_{eff}^2 = k_0^2 \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)$ ,  $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ , sometidas a condiciones de continuidad en  $y = b$ , y condiciones de frontera expresadas por

$$\begin{aligned} (\eta_4 k_{eff} + \partial_y) H_z^1(x, b) &= 0, \quad x < 0, \\ (\eta_3 k_{eff} - \partial_y) H_z^2(x, b) &= 0, \quad x < 0, \\ \theta(-x)(\eta_1 k_{eff} + \partial_y) H_z^2(x, 0) + \theta(x)(\eta_2 k_{eff} + \partial_y) H_z^3(x, 0) &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \\ H_z^1(x, b) &= H_z^3(x, b), \quad x > 0, \\ \partial_y H_z^1(x, b) &= \partial_y H_z^3(x, b), \quad x > 0, \\ H_z^{inc}(0, y) + H_z^2(0, y) &= H_z^3(0, y), \quad 0 < y < b, \\ \partial_x H_z^{inc}(0, y) + \partial_x H_z^2(0, y) &= \partial_x H_z^3(0, y), \quad 0 < y < b, \end{aligned}$$

donde  $\eta_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) es la impedancia intrínseca en la superficie de las placas paralelas, ver figura (2.1.5).

En este estudio se demuestra cómo predomina la propagación de las ondas TEM por el efecto del tensor de permitividad del plasma frío. Para el análisis computacional utilizan un método numérico basado en la discretización de la ecuación de Wiener-Hopf que da a lugar a un sistema de ecuaciones algebraicas que pueden resolverse con métodos usuales del análisis numérico. El efecto del campo radiado es analizado en términos de diferentes parámetros físicos tales como la separación de los estratos, la impedancia de la superficie, y las características de permitividad del plasma frío.

Por otra parte, en el libro [40] se muestra que a las longitudes de onda de súper baja frecuencia y extra baja frecuencia en una guía de onda con altura  $h$  (aproximadamente de 60 a 90 Km), la propagación a estas frecuencias afectan significativamente la trayectoria de propagación. La estructura de esta guía de ondas se muestra en la figura

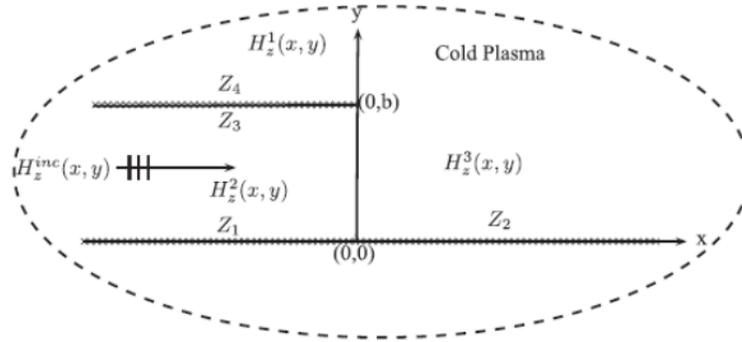


Figura 2.1.5. Geometría de impedancia localizada en las placas paralelas inmersas en un plasma frío

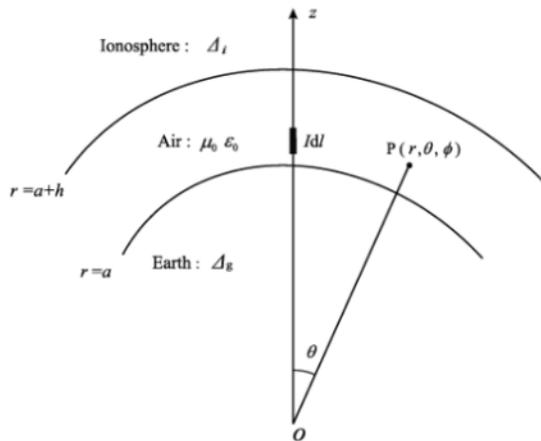


Figura 2.1.6. La tierra como guía de ondas

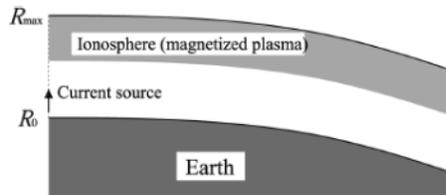


Figura 2.1.7. Guía de ondas conformada por la Tierra e Ionosfera [42]

A estas bajas frecuencias la permeabilidad y la permitividad en la atmósfera (incluyendo la ionósfera) es cercana a permeabilidad y permitividad del vacío  $\mu_0, \varepsilon_0$ , respectivamente. Además, la atmósfera puede considerarse como un medio no conductor con conductividad  $\sigma$  despreciable; mientras que en la litósfera, su permitividad relativa  $\varepsilon_r$  a estas frecuencias no tendrá un efecto dominante en la dirección de propagación. Esto permite construir un modelo de una guía de ondas esférico compuesto por la tierra (la litósfera) y la ionósfera, donde cada estrato se representa por cascarones concéntricos, y la guía de ondas es excitada por una fuente que consiste de un dipolo vertical eléctrico el cual es representado por una densidad de corriente filamentaria  $\hat{z} I dl \delta(x) \delta(y) \delta(z-b)$ , donde  $b = z_s + a$ ,  $z_s > 0$ , denota la altura del dipolo sobre la superficie de la tierra y las componentes del campo electromagnético para las ondas TM generadas por el dipolo se expresan como

$$\begin{aligned} E_r &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) (U_r), \\ E_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} (U_r), \\ H_\phi &= \frac{i\omega\varepsilon}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (U_r), \\ H_r = H_\theta = E_\phi &= 0. \end{aligned}$$

En este modelo se consideran las condiciones de frontera

$$\left[ \frac{E_\theta}{\eta_1 H_\phi} \right]_{r=a} = -\Delta_g, \quad \left[ \frac{E_\theta}{\eta_1 H_\phi} \right]_{r=a+h} = -\Delta_i,$$

donde  $r = a$  representa el cascarón de la tierra, y  $r = a + h$  representa el cascarón de la ionósfera; la impedancia de la onda en el aire se denota por  $\eta$ , y  $\Delta_g, \Delta_i$  son las impedancias normalizadas de la superficie de la tierra y de la ionósfera, respectivamente. En [42] tratan de manera similar, a la tierra como una guía de ondas esférica, donde analiza la propagación de ondas electromagnéticas con el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD por sus siglas en inglés) y a muy bajas frecuencias utilizando una fuente de 22.2 KHz donde se considera que la superficie de la tierra tiene una permitividad relativa de  $\varepsilon_r = 13,0$ , y una conductividad de  $\sigma = 7 \times 10^{-3} \text{S/m}$ . Se considera una antena de un cuarto de onda (es decir un monopolo) y se realizan mediciones a una distancia aproximada de 897 Km entre dos ciudades de China, ver figura 2.1.7. En esta figura el radio de la Tierra es representado por  $R_0 = 6370 \text{Km}$ ,  $R_0 \Delta\theta = 0,5 \text{Km}$  y  $R_{max} = 128 \text{Km}$  es la distancia desde la superficie de la Tierra hasta la ionósfera. La corriente en la antena se expresa por

$$I(t) = \begin{cases} I_0 \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma_t^2}\right) \sin(\omega_0 t) & t < t_0, \\ I_0 \sin(\omega_0 t) & t \geq t_0, \end{cases}$$

donde  $\omega_0 = 2\pi f_0$  (rad/s) es la frecuencia de la portadora,  $t_0 = 10/f_0$ ,  $\sigma_t = 2/f_0$ , y la amplitud  $I_0$  se mide en amperes.

El artículo [3] analiza guías de ondas electromagnéticas planas estratificadas no dispersivas. Estas guías de onda se encuentran conformadas por un núcleo no homogéneo entre dos capas homogéneas que forman un recubrimiento. Los parámetros constitutivos  $\varepsilon(x_3), \mu(x_3)$  varían con respecto a la la coordenada vertical  $x_3$ , y se consideran complejo-valuados si el medio es con perdidas o real-valuados si el medio es sin perdidas. En un sistema de coordenadas rectangulares  $(\mathbf{x}, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  se sitúa a la guía de ondas y se asume una dependencia armónica en el tiempo  $e^{-i\omega t}$ , donde  $\omega$  es la frecuencia angular del campo electromagnético. En este medio se establecen ondas TE y TM. Si se asume que el campo eléctrico está polarizado linealmente en la dirección  $y$ , entonces las ondas transversales pueden ser descritas por ecuaciones diferenciales desacopladas [14, p. 45]

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x_3} \mu^{-1} \frac{\partial}{\partial x_3} + \omega^2 \mu \varepsilon \right) E_{x_2} &= -i\omega \mu \mathbf{J}_{x_2}, \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_3} \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial x_3} + \omega^2 \mu \varepsilon \right) H_{x_2} &= -\varepsilon (\nabla \times \varepsilon^{-1} \mathbf{J})_{x_2}. \end{aligned}$$

Por otra parte, si el campo no está polarizado las ecuaciones que representan a las ondas transversales son

$$\left( \Delta_{\mathbf{x}} + \mu \frac{\partial}{\partial x_3} \mu^{-1} \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) B_{x_3} = -\mu \left( \frac{\partial J_{x_2}}{\partial x_1} - \frac{\partial J_{x_1}}{\partial x_2} \right), \quad (2.1.1a)$$

$$\left( \Delta_{\mathbf{x}} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_3} \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) D_{x_3} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial J_{x_3}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_3} (\varepsilon^{-1} \varrho), \quad (2.1.1b)$$

donde  $\Delta_{\mathbf{x}}$  es el operador Laplaciano con respecto a las coordenadas horizontales  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Si se considera una región libre de fuentes y cargas, al aplicar el método de separación de variables, o la trasformada de Fourier con respecto a las coordenadas horizontales, las ecuaciones de onda anteriores pueden reducirse a ecuaciones unidimensionales del tipo Sturm-Liouville como sigue

$$\left( \nu \frac{\partial}{\partial x_3} \nu^{-1} \frac{\partial}{\partial x_3} + \omega^2 \mu \varepsilon \right) \xi = \kappa \xi,$$

donde  $\nu(x_3)$  corresponde a  $\mu(x_3)$  o  $\varepsilon(x_3)$ , dependiendo del problema en consideración. Las condiciones de frontera que gobiernan el campo electromagnético en el plano de discontinuidad  $x_3 = x_{30}$  son

$$[\xi(x_3)]_{x_3=x_{30}} = 0, \quad \left[ \nu^{-1}(x_3) \frac{d\xi(x_3)}{dx_3} \right]_{x_3=x_{30}} = 0,$$

donde la notación  $[\phi(x_3)]_{x_3=a} = l$ , indica que la función  $\phi(x_3)$  tiene un salto de magnitud  $l$  en el punto  $x_3 = a$ .

Se construye la función de Green de la guía de ondas que satisface el principio de absorción al límite en las coordenadas horizontales, para investigar el campo que se propaga en la guía de onda generado por una fuente. El cálculo de la función de Green se reduce a resolver un problema espectral unidimensional, el cual puede resolverse numéricamente mediante el método de series de potencias del parámetro espectral (SPPS por sus siglas en Inglés). Con base en las soluciones del problema espectral unidimensional se obtiene una expresión en forma cerrada para la relación de dispersión que define los eigen-valores del problema los cuales están relacionados con las constantes de propagación de los modos guiados. Las eigen-funciones de este problema dadas como series de potencias del parámetro espectral permiten encontrar los campos que se propagan en la guía de ondas como modos guiados. Las expresiones correspondientes admiten una implementación numérica inmediata ya que las series que los representan pueden truncarse debido a su convergencia uniforme.

En ese mismo artículo se prueba que el comportamiento asintótico de las ondas laterales esta dado por

$$g_{0m}(|\mathbf{x}|, x_3; x'_3) = \mathcal{O} \left( (k_1 |\mathbf{x}|)^{-2} \right), \quad m = 1, 2, \quad (k_1 |\mathbf{x}|) \rightarrow \infty,$$

por lo cual pueden ser despreciados a grandes distancias de la fuente. Por otra parte el comportamiento asintótico de los modos guiados está dado por

$$g_j(|\mathbf{x}|, x_3; x'_3) \sim \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi\nu(x'_3)}} \sum_{j=1}^N \frac{e^{i\kappa_j |x_1|}}{\sqrt{\kappa_j |x_1|}} \varphi_j(x_3) \overline{\varphi_j(x'_3)}, \quad (k_1 |\mathbf{x}|) \rightarrow \infty,$$

por lo cual estos modos pueden propagarse a grandes distancias en la guía de onda.

En [4] se analiza la propagación de una onda electromagnética modulada en amplitud generada por una fuente puntual fija en una guía de ondas plana estratificada. En la región de campo lejano se obtienen las expresiones asintóticas a partir del método de fase estacionaria, al asumir que el espectro de frecuencias de la fuente tiene un ancho de banda reducido. El análisis se basa en un problema espectral auxiliar unidimensional, el cual se encuentra íntimamente relacionado con la ecuación de Helmholtz para medios no homogéneos. El artículo se basa en el cálculo de la función de Green realizado en [3] y considera que los parámetros constitutivos  $\varepsilon(x_3)$ ,  $\mu(x_3)$  varían con la coordenada vertical  $x_3$ , sin embargo, la guía de ondas considerada en ese trabajo es no-dispersiva.

La fuente puntual modulada que se considera en el trabajo [4] tiene la forma

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, x_3, t) = a \left( \frac{t}{\lambda} \right) e^{-i\omega_0 t} \delta(\mathbf{x}) \delta(x_3 - x'_3) \mathbf{e},$$

donde  $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$  es un vector unitario que apunta en la dirección de la densidad de corriente,  $\omega_0$  es la frecuencia de la portadora  $e^{-i\omega_0 t}$ ,  $a$  es la amplitud modulante de la fuente, y  $\lambda \gg 1$  es un parámetro adimensional que controla el ancho de banda de la fuente y que sirve para aplicar el método de fase estacionaria. En ese artículo se muestra que las asintóticas de las soluciones de las ecuaciones de onda (2.1.1) consisten en modos guiados conforme  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , es decir

$$B_{x_3}(\mathbf{x}, x_3, x'_3, t) \sim \sum_{j=1}^{N(\omega_0)} B_j(\mathbf{x}, x_3, x'_3, t), \quad D_{x_3}(\mathbf{x}, x_3, x'_3, t) \sim \sum_{j=1}^{N(\omega_0)} D_j(\mathbf{x}, x_3, x'_3, t),$$

donde los modos TE y TM tienen respectivamente los siguientes comportamientos asintóticos

$$B_j(\mathbf{x}, x_3, x'_3, t) \sim \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}\mu(x_3)}{\sqrt{8\pi\mu(x_3)}} a_\lambda \left( t - \frac{|\mathbf{x}|}{U_j(\omega_0)} \right) \varkappa_j(\omega_0) \varphi_j(x_3; \omega_0) \overline{\varphi_j(x'_3; \omega_0)} b(\mathbf{x}) \frac{\exp[i(\varkappa_j(\omega_0)|\mathbf{x}| - \omega_0 t)]}{(\varkappa_j(\omega_0)|\mathbf{x}|)^{\frac{1}{2}}},$$

$$D_j(\mathbf{x}, x_3, x'_3, t) \sim \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi\omega_0\varepsilon(x'_3)}} \left[ i\varkappa_j(\omega_0) (\varphi_j)_{x_3}'(x_3; \omega_0) \left( e_1 \frac{x_1}{|\mathbf{x}|} + e_2 \frac{x_2}{|\mathbf{x}|} \right) + e_3 (\varphi_j)_{x_3}''(x_3; \omega_0) \right] \\ \times \overline{\varphi_j(x'_3; \omega_0)} a_\lambda \left( t - \frac{|\mathbf{x}|}{U_j(\omega_0)} \right) \frac{\exp[i(\varkappa_j(\omega_0)|\mathbf{x}| - \omega_0 t)]}{(\varkappa_j(\omega_0)|\mathbf{x}|)^{\frac{1}{2}}},$$

donde  $a_\lambda(t) := a(t/\lambda)$  es la amplitud modulante que presenta lentas variaciones en el tiempo y cuyo espectro de frecuencias se encuentra en una vecindad del cero,  $\varkappa_j := \varkappa_j(\omega)$  es la constante de propagación permitida para el  $j$ -ésimo modo guiado y  $U_j(\omega) = 1/\varkappa_j'(\omega)$  es su velocidad de grupo;  $b(\mathbf{x}) := \left( e_2 \frac{x_1}{|\mathbf{x}|} + e_1 \frac{x_2}{|\mathbf{x}|} \right)$  es la dirección de propagación del modo guiado; y  $\varphi_j$  son las eigen-funciones de un problema espectral unidimensional asociada a la dirección vertical. Se puede ver por lo tanto que la aplicación conjunta de las ecuaciones de onda (alternativamente las ecuaciones de Helmholtz) y el método de fase estacionaria conducen de manera natural a la representación modal del campo electromagnético en la guía de ondas estratificada. Por otra parte para determinar las eigen-funciones  $\varphi_j$  del problema espectral unidimensional es posible aplicar el método de series de potencias del parámetro espectral (método SPPS por sus siglas en Inglés). Todo lo anterior permite llegar a métodos numéricos para el análisis de guías de onda lo cual será abordado en esta tesis para el estudio del sistema litósfera-tropósfera-ionósfera, como una guía de ondas estratificada aproximadamente plana con características dispersivas.

## 2.2. Hipótesis

La propagación de ondas electromagnéticas en la atmósfera puede ser descrita en términos de soluciones modales a partir de las cuales es posible obtener expresiones asintóticas utilizando el método de fase estacionaria. Al proponer un modelo simplificado del sistema litósfera-tropósfera-ionósfera como una guía de ondas formada por tres estratos dispersivos, es posible obtener una expresión para la función de Green asociada a este sistema.

## 2.3. Objetivos

### 2.3.1. Objetivo general

Es de constante interés el análisis de la atmósfera terrestre debido a que es el medio principal utilizado por las radiocomunicaciones, por ejemplo para la radiodifusión, para las comunicaciones satelitales, y para las comunicaciones a grandes distancias en banda aérea, marítima y terrestre, entre otras. Existe una gran cantidad de estudios en los que se describe a la atmósfera como una guía de ondas. El objetivo general de la presente tesis es establecer un modelo simple que permita el estudio de la propagación de ondas electromagnéticas producidas por una fuente puntual en el sistema litósfera-tropósfera-ionósfera considerado como una guía de ondas estratificada dispersiva.

### 2.3.2. Objetivos específicos

- Analizar las ecuaciones de Maxwell para medios dispersivos.
- Obtener las ecuaciones de onda para medios dispersivos no-homogéneos e isotropos para ondas polarizadas y no-polarizadas, así como obtener las condiciones de frontera para los medios estratificados.
- Plantear el problema de la función de Green para una guía de ondas estratificada dispersiva.
- Aplicar la transformada de Fourier con respecto al tiempo y a las coordenadas transversales en las ecuaciones de onda de los medios estratificados.
- Establecer problemas con valores en la frontera para el análisis de la propagación en guías de onda dispersivas considerando los términos fuente correspondiente.
- Establecer un problema espectral unidimensional auxiliar en la coordenada vertical donde la guía de ondas presenta sus no-homogeneidades.
- Obtener las eigen-funciones y eigen-funciones generalizadas del problema espectral auxiliar.
- Obtener la ecuación de dispersión que permita calcular los eigen-valores del problema espectral auxiliar, y las constantes de propagación permitidas para los modos guiados y las ondas laterales.
- Obtener expresiones explícitas para la función de Green de la guía de ondas.
- Obtener expresiones asintóticas de los modos guiados en la guía de ondas en la región de campo lejano.

## 2.4. Planteamiento del problema

Los medios estratificados aparecen de forma natural en los problemas de propagación de ondas electromagnéticas. Por ejemplo, la Tierra y su atmósfera establecen de manera natural una guía de ondas en la cual sus parámetros constitutivos varían principalmente en la dirección vertical correspondiente a la altitud. En una forma muy simplificada la guía de ondas puede considerarse compuesta por tres estratos: la litósfera, la tropósfera, y la ionósfera. En las interfaces litósfera-tropósfera y tropósfera-ionósfera se establecen condiciones en la frontera no absorbentes para el campo electromagnético. Tal sistema puede ser modelado como una guía de ondas dieléctrica utilizando métodos convencionales, y el campo electromagnético que produce una fuente puntual puede describirse por la correspondiente la función de Green que satisface las condiciones de frontera en las interfaces y la condición de radiación en el infinito.

## 2.5. Propuesta de solución

A partir de las ecuaciones de Maxwell se establecen las ecuaciones de onda para los medios dispersivos estratificados, y se establecen las condiciones de frontera adecuadas en las interfaces de los medios dieléctricos. A partir de las ecuaciones de onda y de la aplicación de la transformada de Fourier con respecto a las coordenadas espaciales se llega a un problema espectral unidimensional cuyas eigen-funciones y eigen-funciones generalizadas permitan obtener expresiones para los modos transversales que se establecen en la guía de ondas. Esto permite analizar las ondas TE y TM, polarizadas y no-polarizadas en el dominio de la frecuencia. La aplicación de las condiciones de frontera en las interfaces donde ocurre las discontinuidades entre los estratos conduce a una ecuación de dispersión cuyos ceros están relacionados con los números de onda permitidos para los modos guiados y las ondas laterales. Se consideran términos no-homogéneos para los problemas con valores en la frontera que representan las fuentes que establecen el campo electromagnético en el interior de la guía de ondas. A partir de las convoluciones entre los términos fuente y la función de Green se obtiene el comportamiento de los modos guiados y ondas laterales generados por estas fuentes. De las expresiones obtenidas es posible aplicar el método de la fase estacionaria con el objetivo de obtener expresiones asintóticas de los modos guiados y ondas laterales de la guía de onda en estudio cuando se consideran grandes distancias medidas a partir de la fuente, reducidos anchos de banda, y lentas variaciones de las amplitudes modulantes. Las eigen-funciones del problema auxiliar pueden obtenerse de forma explícita a partir de la aplicación del

método de series de potencias del parámetro espectral. El estudio desarrollado de esta forma permite analizar el problema de la propagación de ondas electromagnéticas en el sistema litósfera-tropósfera-ionósfera, el cual es abordado como una guía de ondas estratificada dispersiva y se aplican las soluciones asintóticas obtenidas previamente. Se dan interpretaciones físicas de los resultados obtenidos.

## Capítulo 3

# Propagación de ondas electromagnéticas en medios dispersivos

### 3.1. Ecuaciones de Maxwell para los medios dispersivos

Las ecuaciones de Maxwell en medios dispersivos son obtenidas por sustitución de los parámetros constitutivos  $\varepsilon$ ,  $\mu$  por operadores  $\varepsilon(\partial_t)$ ,  $\mu(\partial_t)$  donde  $\partial_t$  denota la derivada con respecto al tiempo, definidos de la siguiente manera <sup>1</sup>

$$\varepsilon(\partial_t)\mathbf{u}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega)\hat{\mathbf{u}}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega, \quad \mu(\partial_t)\mathbf{u}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\omega)\hat{\mathbf{u}}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega,$$

de manera que las transformadas inversas de Fourier son

$$\varepsilon(\omega)\hat{\mathbf{u}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\partial_t)\mathbf{u}(t)e^{-i\omega t}dt, \quad \mu(\omega)\hat{\mathbf{u}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\partial_t)\mathbf{u}(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Con los parámetros  $\varepsilon(\omega)$  y  $\mu(\omega)$  es posible definir la velocidad de fase en el medio dependiente de la frecuencia como sigue

$$c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}},$$

además es posible introducir el número de onda  $k(\omega) = \frac{\omega}{c(\omega)}$  de la manera usual.

Suponemos que [12]:

1. Las funciones  $\varepsilon(\omega)$ ,  $\mu(\omega)$  son límites en el sentido de las distribuciones de funciones acotadas, analíticas en el semi-plano superior complejo;
2. La función  $k^2(\omega)$  tiene un número finito  $\omega_1 < \dots < \omega_k$  de ceros simples en  $\mathbb{R}$ , y además  $\inf_{\omega \in \mathbb{R} \setminus [\omega_1 - \epsilon, \omega_k + \epsilon]} k^2(\omega) > 0$  para un pequeño  $\epsilon > 0$ ;
3. La velocidad de grupo  $v_g(\omega) = \frac{1}{k'(\omega)} > 0$  para todo  $\omega \in \mathbb{R} \setminus [\omega_1 - \epsilon, \omega_k + \epsilon]$ .

El sistema de las ecuaciones de Maxwell para los medios dispersivos, no-homogéneos es

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon(\partial_t, \mathbf{r}) \mathbf{E}) + \mathbf{J}(\partial_t, \mathbf{r}), \quad (3.1.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu(\partial_t, \mathbf{r}) \mathbf{H}), \quad (3.1.1b)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon(\partial_t, \mathbf{r}) \mathbf{E}) = \rho(\partial_t, \mathbf{r}), \quad (3.1.1c)$$

$$\nabla \cdot (\mu(\partial_t, \mathbf{r}) \mathbf{H}) = 0, \quad (3.1.1d)$$

---

<sup>1</sup>Para una definición de la Transformada de Fourier en el sentido de las distribuciones vea el Apéndice A

con la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\partial_t, \mathbf{r}) + \frac{\partial \rho(\partial_t, \mathbf{r})}{\partial t} = 0.$$

Después de aplicar la transformada de Fourier con respecto al tiempo el sistema de Maxwell y la ecuación de continuidad toman la forma

$$\nabla \times \hat{\mathbf{H}}(\omega, \mathbf{r}) = i\omega\epsilon(\omega, \mathbf{r})\hat{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{r}) + \hat{\mathbf{J}}(\omega, \mathbf{r}), \quad (3.1.2a)$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{r}) = -i\omega\mu(\omega, \mathbf{r})\hat{\mathbf{H}}(\omega, \mathbf{r}), \quad (3.1.2b)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon(\omega, \mathbf{r})\hat{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{r})) = \hat{\rho}(\omega, \mathbf{r}), \quad (3.1.2c)$$

$$\nabla \cdot (\mu(\omega, \mathbf{r})\hat{\mathbf{H}}(\omega, \mathbf{r})) = 0, \quad (3.1.2d)$$

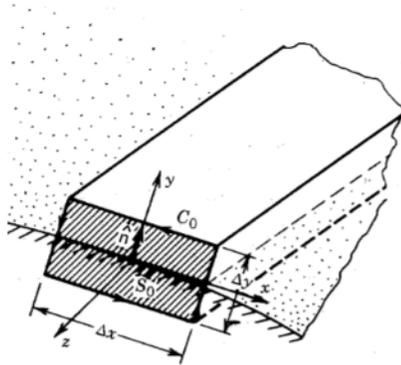
$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{J}}(\omega, \mathbf{r}) + i\omega\hat{\rho}(\omega, \mathbf{r}) = 0. \quad (3.1.2e)$$

### 3.2. Condiciones en la frontera para las ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial consisten en derivadas con respecto a las coordenadas espaciales de los campos vectoriales. En los puntos de discontinuidad de los parámetros constitutivos, las derivadas de los campos vectoriales no tienen significado y no pueden calcularse ser apropiadamente. Sin embargo, el comportamiento de los campos vectoriales en los puntos de discontinuidad debe ser representado en términos de los vectores del mismo campo electromagnético y no de sus derivadas. A partir de la representación integral del sistema de Maxwell es posible deducir el comportamiento del campo electromagnético en las regiones de discontinuidad a partir de integraciones apropiadas [8]. A continuación se muestran las condiciones en la frontera que rigen el comportamiento del campo electromagnético en la interfaces de dos medios diferentes.

#### Medios dieléctricos

Consideremos una interfaz que separa a dos medios dieléctricos con parámetros constitutivos  $\epsilon_1(\omega, \mathbf{r})$ ,  $\mu_1(\omega, \mathbf{r})$ ,  $\sigma_1(\omega, \mathbf{r})$  y  $\epsilon_2(\omega, \mathbf{r})$ ,  $\mu_2(\omega, \mathbf{r})$ ,  $\sigma_2(\omega, \mathbf{r})$ , como se puede observar en la Figura (3.2.1).



**Figura 3.2.1.** Condiciones de frontera en dos estratos

Asumamos que los parámetros constitutivos tienen singularidades de tipo salto en la interfaz, es decir las discontinuidades de los parámetros son finitas. Ante estas circunstancias el campo electromagnético es gobernado por las siguientes condiciones en la frontera

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times (\widehat{\mathbf{E}}_1(\omega, \mathbf{r}) - \widehat{\mathbf{E}}_2(\omega, \mathbf{r})) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{n} \times (\widehat{\mathbf{H}}_1(\omega, \mathbf{r}) - \widehat{\mathbf{H}}_2(\omega, \mathbf{r})) &= \mathbf{0},\end{aligned}$$

las cuales establecen que las componentes tangenciales de los vectores de intensidad  $\widehat{\mathbf{E}}$  y  $\widehat{\mathbf{H}}$  son continuas en la interfaz, donde  $\mathbf{n}$  es un vector unitario normal a la interfaz. Por otra parte también se tienen las siguientes condiciones en la frontera para los vectores de densidad de flujo  $\widehat{\mathbf{D}}$ ,  $\widehat{\mathbf{B}}$

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot (\widehat{\mathbf{D}}_1(\omega, \mathbf{r}) - \widehat{\mathbf{D}}_2(\omega, \mathbf{r})) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{n} \cdot (\widehat{\mathbf{B}}_1(\omega, \mathbf{r}) - \widehat{\mathbf{B}}_2(\omega, \mathbf{r})) &= \mathbf{0},\end{aligned}$$

las cuales establecen que las componentes normales de los vectores de densidad de flujo son continuas, pero además establecen que las componentes normales de los vectores de intensidad del campo son discontinuas como se observa

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot (\varepsilon_1(\omega, \mathbf{r})\widehat{\mathbf{E}}_1(\omega, \mathbf{r}) - \varepsilon_2(\omega, \mathbf{r})\widehat{\mathbf{E}}_2(\omega, \mathbf{r})) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{n} \cdot (\mu_1(\omega, \mathbf{r})\widehat{\mathbf{H}}_1(\omega, \mathbf{r}) - \mu_2(\omega, \mathbf{r})\widehat{\mathbf{H}}_2(\omega, \mathbf{r})) &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Debe tomarse en cuenta que estas condiciones son válidas cuando  $\sigma_1(\omega, \mathbf{r}) < \infty$  y  $\sigma_2(\omega, \mathbf{r}) < \infty$ . En el caso de que esto no se cumpla (por ejemplo si uno de los medios es el conductor ideal), otras condiciones en la frontera deben especificarse.

### 3.3. Ecuaciones de onda para los medios dispersivos, no-homogéneos e isótropos

Al multiplicar la ecuación (3.1.2a) por  $\varepsilon^{-1}$ , y aplicar el operador rotacional a ambos lados de la identidad resulta

$$\nabla \times \varepsilon^{-1}(\omega, \mathbf{r})\nabla \times \widehat{\mathbf{H}}(\omega, \mathbf{r}) = i\omega\nabla \times \widehat{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{r}) + \nabla \times (\varepsilon^{-1}(\omega, \mathbf{r})\widehat{\mathbf{J}}(\omega, \mathbf{r})),$$

Debido a la ecuación (3.1.2b) la identidad anterior toma la forma

$$\nabla \times \varepsilon^{-1}(\omega, \mathbf{r})\nabla \times \widehat{\mathbf{H}}(\omega, \mathbf{r}) = i\omega(i\omega\widehat{\mathbf{B}}) + \nabla \times (\varepsilon^{-1}(\omega, \mathbf{r})\widehat{\mathbf{J}}(\omega, \mathbf{r})),$$

al multiplicar por  $\varepsilon$  la ecuación anterior y al considerar la relación constitutiva para el campo magnético resulta la siguiente ecuación de onda

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{r})\nabla \times \varepsilon^{-1}(\omega, \mathbf{r})\nabla \times \widehat{\mathbf{H}}(\omega, \mathbf{r}) - \omega^2\mu(\omega, \mathbf{r})\varepsilon(\omega, \mathbf{r})\widehat{\mathbf{H}}(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon(\omega, \mathbf{r})\nabla \times (\varepsilon^{-1}(\omega, \mathbf{r})\widehat{\mathbf{J}}(\omega, \mathbf{r})). \quad (3.3.1)$$

De la misma manera tomamos la ecuación (3.1.2b) al multiplicar por  $\mu^{-1}$  y aplicar el operador rotacional resulta

$$\nabla \times \mu^{-1}(\omega, \mathbf{r})\nabla \times \widehat{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{r}) = i\omega\nabla \times \widehat{\mathbf{H}}(\omega, \mathbf{r}).$$

Por la igualdad en (3.1.2a) y multiplicar por  $\mu$  obtenemos la ecuación de onda para el campo eléctrico

$$\mu(\omega, \mathbf{r})\nabla \times \mu^{-1}(\omega, \mathbf{r})\nabla \times \widehat{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{r}) - \omega^2\mu(\omega, \mathbf{r})\varepsilon(\omega, \mathbf{r})\widehat{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{r}) = i\omega\mu(\omega, \mathbf{r})\widehat{\mathbf{J}}(\omega, \mathbf{r}). \quad (3.3.2)$$

Las ecuaciones (3.3.1) y (3.3.2) representan ecuaciones de onda vectoriales en su forma más general con términos fuente en los lados derechos, que son aplicables para medios dispersivos no-homogéneos [14].

### 3.4. Ecuaciones de onda para los medios dispersivos, estratificados, en el caso de las ondas polarizadas

Nos interesa obtener soluciones de las ecuaciones de onda (3.3.1) y (3.3.2) para los medios estratificados. Un medio estratificado es un medio no-homogéneo cuyos parámetros constitutivos dependen de solo una coordenada espacial. En un medio estratificado el campo electromagnético se propaga como ondas transversales (TE o TM). Supongamos que un medio está estratificado en la dirección de  $\mathbf{a}_3$ , es decir,  $\varepsilon(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon(\omega, x_3)$  y  $\mu(\omega, \mathbf{r}) = \mu(\omega, x_3)$ . Con base en esta suposición obtendremos las ecuaciones de onda que describen el comportamiento del campo electromagnético en tales medios.

#### Ondas TE polarizadas

Consideremos la ecuación vectorial del campo eléctrico para describir ondas TE caracterizadas por  $\widehat{E}_3 = 0$ . Supongamos que el campo eléctrico está polarizado en la dirección de  $\mathbf{a}_2$ , es decir

$$\widehat{\mathbf{E}} = \widehat{E}_2(\omega, \mathbf{r})\mathbf{a}_2.$$

La operación que involucra al rotacional del campo eléctrico da como resultado

$$\begin{aligned} \nabla \times \mu^{-1}(\omega, x_3)\nabla \times \widehat{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{r}) &= \mu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial^2 \widehat{E}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_2 \partial x_1} \mathbf{a}_1 - \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \mu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial \widehat{E}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_3} \right) \mathbf{a}_2 \\ &\quad + \mu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial^2 \widehat{E}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_2 \partial x_3} \mathbf{a}_3 - \mu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial^2 \widehat{E}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_1^2} \mathbf{a}_2, \end{aligned}$$

Al sustituir este resultado en la ecuación (3.3.2) e igualar las respectivas componentes vectoriales se obtienen tres ecuaciones escalares

$$\frac{\partial^2 \widehat{E}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_2 \partial x_1} = i\omega\mu(\omega, x_3)\widehat{J}_1(\omega, \mathbf{r}), \quad (3.4.1)$$

$$-\omega^2\mu(\omega, x_3)\varepsilon(\omega, x_3)\widehat{E}_2(\omega, \mathbf{r}) - \frac{\partial^2 \widehat{E}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_1^2} - \mu(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \mu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial \widehat{E}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_3} \right) = i\omega\mu(\omega, x_3)\widehat{J}_2(\omega, \mathbf{r}), \quad (3.4.2)$$

$$\frac{\partial^2 \widehat{E}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_2 \partial x_3} \mathbf{a}_3 = i\omega\mu(\omega, x_3)\widehat{J}_3(\omega, \mathbf{r}), \quad (3.4.3)$$

La ecuación (3.4.2) representa una ecuación de onda escalar para el campo eléctrico en estado estacionario

$$\boxed{\left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \mu(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \mu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + \omega^2\mu(\omega, x_3)\varepsilon(\omega, x_3) \right] \widehat{E}_2(\omega, \mathbf{r}) = -i\omega\mu(\omega, x_3)\widehat{J}_2(\omega, \mathbf{r})} \quad (3.4.4)$$

Por su parte las ecuaciones (3.4.1) y (3.4.3) no representan ecuaciones de onda, por lo cual no serán consideradas en este trabajo.

#### Ondas TM polarizadas

Consideremos ahora la ecuación de onda vectorial del campo magnético para describir ondas *TM* caracterizadas por  $\widehat{H}_3(\omega, \mathbf{r}) = 0$ . Se puede elegir que el campo magnético apunte en la dirección  $x_2$  a partir de una rotación adecuada alrededor del eje  $x_3$ , es decir

$$\widehat{\mathbf{H}} = \widehat{H}_2(\omega, \mathbf{r})\mathbf{a}_2.$$

Al desarrollar la operación  $\nabla \times \varepsilon^{-1}(\omega, x_3)\nabla \times \widehat{\mathbf{H}}(\omega, \mathbf{r})$  se tiene

$$\begin{aligned} \nabla \times \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \nabla \times \widehat{\mathbf{H}}(\omega, \mathbf{r}) = & \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial^2 \widehat{H}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_2 \partial x_1} \mathbf{a}_1 - \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial \widehat{H}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_3} \right) \mathbf{a}_2 \\ & + \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial^2 \widehat{H}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_2 \partial x_3} \mathbf{a}_3 - \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial^2 \widehat{H}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_1^2} \mathbf{a}_2. \end{aligned}$$

De esta forma, al sustituir este resultado en la ecuación de onda (3.3.1) y al igualar las respectivas componentes vectoriales resultan las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial^2 \widehat{H}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial \widehat{J}_3(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_2} - \varepsilon(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \widehat{J}_2(\omega, \mathbf{r}) \right), \quad (3.4.5)$$

$$\begin{aligned} -\omega^2 \mu(\omega, x_3) \varepsilon(\omega, x_3) \widehat{H}_2(\omega, \mathbf{r}) - \varepsilon(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial \widehat{H}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_3} \right) \\ - \frac{\partial^2 \widehat{H}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_1^2} = -\varepsilon(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \widehat{J}_1(\omega, \mathbf{r}) \right) + \frac{\partial \widehat{J}_3(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_1}, \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

$$\frac{\partial^2 \widehat{H}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial \widehat{H}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_3} \frac{\partial \varepsilon^{-1}(\omega, x_3)}{\partial x_2} = \frac{\partial \widehat{J}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_1} - \frac{\partial \widehat{J}_1(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_2}, \quad (3.4.7)$$

Se puede ver que en la ecuación (3.4.6) representa una ecuación de onda escalar para el campo magnético:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + \omega^2 \mu(\omega, x_3) \varepsilon(\omega, x_3) \right] \widehat{H}_2(\omega, \mathbf{r}) \\ = \varepsilon(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \widehat{J}_1(\omega, \mathbf{r}) \right) - \frac{\partial \widehat{J}_3(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_1}. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Las ecuaciones (3.4.5) y (3.4.7) no representan ecuaciones de onda y no serán consideradas en este trabajo.

### 3.5. Ecuaciones de onda para los medios dispersivos, en el caso de las ondas no-polarizadas

#### Ondas TE no-polarizadas

En las ondas TE el campo eléctrico satisface  $\widehat{E}_3 = 0$ , mientras que el campo magnético cumple con  $\widehat{H}_3 \neq 0$ . Asumamos que todas las componentes del campo magnético existen. Después de desarrollar el rotacional  $\nabla \times \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \nabla \times \widehat{\mathbf{H}}(\omega, \mathbf{r})$  y el término  $\nabla \times \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \widehat{\mathbf{J}}(\omega, \mathbf{r})$ , de la ecuación (3.3.1), y al igualar componentes vectoriales correspondientes obtenemos tres ecuaciones (recordemos que  $\varepsilon$  y  $\mu$  dependen de la frecuencia y la coordenada  $x_3$ )

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \hat{H}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \hat{H}_1}{\partial x_2} \right) - \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \hat{H}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \hat{H}_3}{\partial x_1} \right) - \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \hat{H}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \hat{H}_3}{\partial x_1} \right) \quad (3.5.1)$$

$$-\omega^2 \mu \hat{H}_1 = \varepsilon^{-1} \frac{\partial \hat{J}_3}{\partial x_2} - \varepsilon^{-1} \frac{\partial \hat{J}_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon^{-1}}{\partial x_3} \hat{J}_2,$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \hat{H}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \hat{H}_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial \varepsilon^{-1}}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \hat{H}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \hat{H}_2}{\partial x_3} \right) - \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \hat{H}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \hat{H}_1}{\partial x_2} \right) \quad (3.5.2)$$

$$-\omega^2 \mu \hat{H}_2 = \varepsilon^{-1} \frac{\partial \hat{J}_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon^{-1}}{\partial x_3} \hat{J}_1 - \varepsilon^{-1} \frac{\partial \hat{J}_3}{\partial x_1},$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \hat{H}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \hat{H}_3}{\partial x_1} \right) - \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \hat{H}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \hat{H}_2}{\partial x_3} \right) \quad (3.5.3)$$

$$-\omega^2 \mu \hat{H}_3 = \varepsilon^{-1} \frac{\partial \hat{J}_2}{\partial x_1} - \varepsilon^{-1} \frac{\partial \hat{J}_1}{\partial x_2},$$

Por otra parte, la ley de Gauss del campo magnético da lugar a la ecuación

$$\nabla \cdot \left( \mu(\omega, x_3) \hat{\mathbf{H}}(\omega, \mathbf{r}) \right) = \frac{\partial \left( \mu(\omega, x_3) \hat{H}_1(\omega, \mathbf{r}) \right)}{\partial x_1} + \frac{\partial \left( \mu(\omega, x_3) \hat{H}_2(\omega, \mathbf{r}) \right)}{\partial x_2} + \frac{\partial \left( \mu(\omega, x_3) \hat{H}_3(\omega, \mathbf{r}) \right)}{\partial x_3} = 0$$

que establece la siguiente identidad

$$\frac{\partial \hat{H}_1(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{H}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_2} = -\mu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial \left( \mu(\omega, x_3) \hat{H}_3(\omega, \mathbf{r}) \right)}{\partial x_3} \quad (3.5.4)$$

Al intercambiar el orden de diferenciación en la ecuación (3.5.3), y al agrupar factores comunes se obtiene

$$\varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \hat{H}_1(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{H}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_2} \right) - \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \left( \frac{\partial^2 \hat{H}_3(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \hat{H}_3(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_2^2} \right) \quad (3.5.5)$$

$$-\omega^2 \mu(\omega, x_3) \hat{H}_3(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \left( \frac{\partial \hat{J}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_1} - \frac{\partial \hat{J}_1(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_2} \right),$$

y al sustituir la identidad (3.5.4) en la ecuación anterior (3.5.5) resulta una ecuación en términos de  $\hat{H}_3$  únicamente

$$\frac{\partial^2 \hat{H}_3(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \hat{H}_3(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \mu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \mu(\omega, x_3) \hat{H}_3(\omega, \mathbf{r}) \right) \right] \quad (3.5.6)$$

$$+\omega^2 \mu(\omega, x_3) \varepsilon(\omega, x_3) \hat{H}_3(\omega, \mathbf{r}) = - \left( \frac{\partial \hat{J}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_1} - \frac{\partial \hat{J}_1(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_2} \right).$$

Finalmente al multiplicar la ecuación (3.5.6) por el parámetro  $\mu(\omega, x_3)$  resulta la ecuación de onda escalar

$$\left[ \Delta_{\mathbf{x}} + \mu(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \mu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + \omega^2 \mu(\omega, x_3) \varepsilon(\omega, x_3) \right] \hat{B}_3(\omega, \mathbf{r}) \quad (3.5.7)$$

$$= -\mu(\omega, x_3) \left( \frac{\partial \hat{J}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_1} - \frac{\partial \hat{J}_1(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_2} \right) \quad (3.5.8)$$

donde  $\hat{B}_3(\omega, \mathbf{r}) = \mu(\omega, x_3) \hat{H}_3(\omega, \mathbf{r})$ , y  $\Delta_{\mathbf{x}} := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  es el Laplaciano en el plano horizontal  $(x_1, x_2)$ . La ecuación que se acaba de obtener es una representación alternativa de las ondas TE.

### Ondas TM no-polarizadas

Para las ondas TM tomamos (3.5.9) y desarrollamos para  $\nabla \times \mu^{-1}(\omega, x_3) \nabla \times \widehat{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{r})$ , lo que obtendremos tres ecuaciones al igualar componente a componente

$$\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \widehat{\mathbf{E}} - \omega^2 \varepsilon \widehat{\mathbf{E}} = i\omega \widehat{\mathbf{J}}, \quad (3.5.9)$$

$$\mu^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \widehat{E}_2}{\partial x_2} \right) - \mu^{-1} \frac{\partial^2 \widehat{E}_1}{\partial x_2^2} - \mu^{-1} \frac{\partial^2 \widehat{E}_1}{\partial x_3^2} + \mu^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \widehat{E}_3}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial \mu^{-1}}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \widehat{E}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \widehat{E}_3}{\partial x_1} \right) - \omega^2 \varepsilon \widehat{E}_2 = i\omega \widehat{J}_1, \quad (3.5.10)$$

$$\mu^{-1} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \widehat{E}_3}{\partial x_3} \right) - \mu^{-1} \frac{\partial^2 \widehat{E}_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \mu^{-1}}{\partial x_3^2} \left( \frac{\partial \widehat{E}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \widehat{E}_2}{\partial x_3} \right) - \mu^{-1} \frac{\partial^2 \widehat{E}_2}{\partial x_1^2} + \mu^{-1} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \widehat{E}_1}{\partial x_1} \right) - \omega^2 \varepsilon \widehat{E}_2 = i\omega \widehat{J}_2, \quad (3.5.11)$$

$$\mu^{-1} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \widehat{E}_1}{\partial x_1} \right) - \mu^{-1} \frac{\partial^2 \widehat{E}_3}{\partial x_1^2} - \mu^{-1} \frac{\partial^2 \widehat{E}_3}{\partial x_2^2} + \mu^{-1} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \widehat{E}_2}{\partial x_2} \right) - \omega^2 \varepsilon \widehat{E}_3 = i\omega \widehat{J}_3, \quad (3.5.12)$$

Adicionalmente tenemos a la divergencia de  $\widehat{\mathbf{D}}(\omega, \mathbf{r})$

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbf{D}}(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon(\omega, x_3) \left( \frac{\partial \widehat{E}_1(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_1} + \frac{\partial \widehat{E}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_2} \right) + \varepsilon(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \widehat{E}_3(\omega, \mathbf{r}) + \widehat{E}_3(\omega, \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x_3} \varepsilon(\omega, x_3) = \rho, \quad (3.5.13)$$

al desarrollar (3.5.12) multiplicando toda la ecuación por  $-\mu(\omega, x_3)$  :

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial (\varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \rho)}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3} \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} (\varepsilon(\omega, x_3) \widehat{E}_3(\omega, \mathbf{r})) + \frac{\partial^2 \widehat{E}_3(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_1^2} \\ & + \frac{\partial^2 \widehat{E}_3(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_2^2} + \omega^2 \mu(\omega, x_3) \varepsilon(\omega, x_3) \widehat{E}_3(\omega, \mathbf{r}) = -i\omega \mu(\omega, x_3) \widehat{J}_3(\omega, \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

Multiplicando toda la ecuación (3.5.14) por  $\varepsilon(\omega, x_3)$  y acomodando los términos :

$$\left[ \Delta_{\mathbf{x}} + \varepsilon(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + \omega^2 \mu(\omega, x_3) \varepsilon(\omega, x_3) \right] \widehat{D}_3(\omega, \mathbf{r}) \quad (3.5.15)$$

$$= -i\omega \mu(\omega, x_3) \varepsilon(\omega, x_3) \widehat{J}_3(\omega, \mathbf{r}) + \varepsilon(\omega, x_3) \frac{\partial (\varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \rho)}{\partial x_3} \quad (3.5.16)$$

### 3.6. Condiciones en la frontera para los medios estratificados

En la interfaz de dos medios donde los parámetros constitutivos se hacen discontinuos las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial no pueden ser aplicadas. El campo electromagnético sin embargo debe existir y ser continuo. En este tipo de discontinuidades el campo electromagnético se rige por las condiciones en la frontera que se definieron en la Sección 1.3. En el caso de los medios estratificados las condiciones en la frontera toman una forma más sencilla como se muestra a continuación. Sea  $x_3 = z_0$  el plano donde ocurre una discontinuidad de tipo salto de los parámetros constitutivos.

### 3.6.1. Condiciones para ondas polarizadas

Las condiciones de frontera de las ondas polarizadas TE y TM son respectivamente

$$\begin{aligned} \left[ \widehat{E}_2(\omega, \mathbf{r}) \right]_{x_3=z_0} &= 0, \quad \left[ \mu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial \widehat{E}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_3} \right]_{x_3=z_0} = 0, \\ \left[ \widehat{H}_2(\omega, \mathbf{r}) \right]_{x_3=z_0} &= 0, \quad \left[ \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial \widehat{H}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_3} \right]_{x_3=z_0} = 0. \end{aligned}$$

### 3.6.2. Condiciones para ondas no-polarizadas

Las condiciones en la frontera para las ondas no-polarizadas TE y TM son respectivamente

$$\begin{aligned} \left[ \widehat{B}_3(\omega, \mathbf{r}) \right]_{x_3=z_0} &= 0, \quad \left[ \mu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial \widehat{B}_3(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_3} \right]_{x_3=z_0} = 0, \\ \left[ \widehat{D}_3(\omega, \mathbf{r}) \right]_{x_3=z_0} &= 0, \quad \left[ \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial \widehat{D}_3(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_3} \right]_{x_3=z_0} = 0. \end{aligned}$$

## Capítulo 4

# Propagación de ondas en guías de onda dispersivas

La función de Green juega un papel importante en la solución de ecuaciones diferenciales, ésta permite resolver problemas con términos fuente sometidos a condiciones de frontera, debido a sus propiedades con respecto al operador diferencial del que surge. Más precisamente, consideremos un operador diferencial lineal  $\mathcal{L}$  que actúa sobre una función  $u$  de acuerdo con

$$\mathcal{L}u(x) = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (4.0.1)$$

donde  $f$  es un término fuente conocido. La solución  $u$  de esta ecuación se puede obtener a partir de la función de Green  $g(x; x')$  del problema asociado

$$\mathcal{L}g(x; x') = \delta(x - x'), \quad (4.0.2)$$

como sigue

$$u(x) = \int_{\Omega} g(x; x')f(x')dx', \quad (4.0.3)$$

lo cual es equivalente a encontrar un operador inverso  $\mathcal{L}^{-1}$  para el operador  $\mathcal{L}$  el cual se aplica por la izquierda a ambos lados de la ecuación (4.0.1), es decir,

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1}f(x), \quad (4.0.4)$$

en efecto al aplicar formalmente el operador  $\mathcal{L}$  a la solución (4.0.3) se obtiene igualdad

$$\mathcal{L}u(x) = \mathcal{L} \int_{\Omega} g(x; x')f(x')dx' = \int_{\Omega} \mathcal{L}_x g(x; x')f(x')dx' = \int_{\Omega} \delta(x - x')f(x')dx' = f(x),$$

donde  $\mathcal{L}_x$  denota que el operador  $\mathcal{L}$  actúa únicamente sobre la variable  $x$  de la función de Green  $g$ . Con base en estas ideas calcularemos la función de Green del problema que resulta al analizar la propagación de ondas en la guía de ondas bajo estudio, la cual se describe a continuación.

### 4.1. Descripción de la guía de onda

En el presente trabajo se considera una guía de ondas estratificada, la cual está conformada por tres estratos diferentes, que constituyen el revestimiento electromagnético y un núcleo. Buscamos obtener expresiones para los modos guiados, los cuales se puedan propagar grandes distancias en la guía de ondas, y describiremos de forma explícita la ecuación de dispersión para este medio estratificado y dispersivo. A partir de las ecuaciones de onda consideradas en el capítulo anterior, plantearemos el problema que describe la propagación de ondas en la estructura de la Figura 4.1.1.

Denotemos los parámetros constitutivos en el revestimiento por  $\varepsilon_1(\omega)$ ,  $\mu_1(\omega)$  y  $\varepsilon_3(\omega)$ ,  $\mu_3(\omega)$  lo que indica que estos dependen solamente de la frecuencia  $\omega$ . Por otra parte, en el núcleo los parámetros constitutivos se

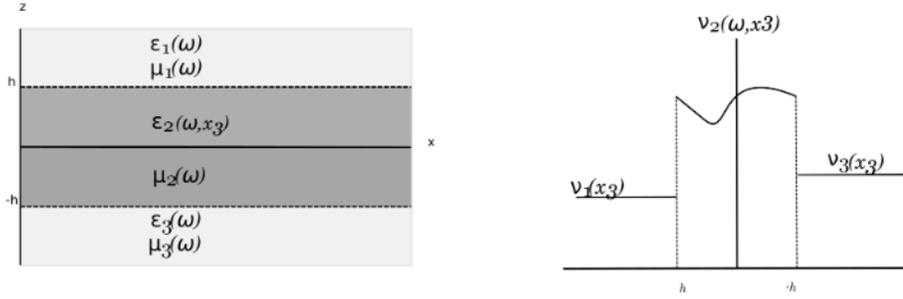


Figura 4.1.1. Estructura de la guía de onda

denotan por  $\varepsilon_2(\omega, x_3)$  y  $\mu_2(\omega, x_3)$ , lo que representa que varían con la frecuencia y con la coordenada vertical  $x_3$ . Los parámetros constitutivos de la guía de onda se describen por las siguientes funciones a trozos

$$\varepsilon(\omega, x_3) = \begin{cases} \varepsilon_1(\omega) & x_3 < h_1 \\ \varepsilon_2(\omega, x_3), & h_1 \leq x_3 \leq h_2, \\ \varepsilon_3(\omega), & x_3 > h_2, \end{cases} \quad \mu(\omega, x_3) = \begin{cases} \mu_1(\omega) & x_3 < h_1 \\ \mu_2(\omega, x_3), & h_1 \leq x_3 \leq h_2, \\ \mu_3(\omega), & x_3 > h_2, \end{cases}$$

que representan los tres estratos de la guía: el núcleo y el revestimiento que lo rodea. Supongamos que estas funciones son suficientemente suaves y que están acotados. Estas funciones tienen discontinuidades tipo salto en los puntos de interfaz entre el núcleo y el revestimiento correspondientes a los planos  $x_3 = h_1$  y  $x_3 = h_2$ . Recordemos del capítulo anterior que el número de onda  $k$  se calcula a partir de la relación  $k^2(\omega, x_3) := \omega^2 \mu(\omega, x_3) \varepsilon(\omega, x_3)$  y que la velocidad de fase  $c$  se determina a partir de la expresión  $c^2(\omega, x_3) := 1/\mu(\omega, x_3) \varepsilon(\omega, x_3)$ , por lo tanto a partir de las expresiones de  $\varepsilon$  y  $\mu$  se tienen expresiones para  $k^2$  y  $c^2$  como sigue,

$$k^2(\omega, x_3) = \begin{cases} k_1^2(\omega) & x_3 < h_1, \\ k_2^2(\omega, x_3), & h_1 \leq x_3 \leq h_2, \\ k_3^2(\omega), & x_3 > h_2, \end{cases} \quad c^2(\omega, x_3) = \begin{cases} c_1^2(\omega) & x_3 < h_1, \\ c_2^2(\omega, x_3), & h_1 \leq x_3 \leq h_2, \\ c_3^2(\omega), & x_3 > h_2, \end{cases}$$

donde  $k_1^2(\omega) := \omega^2 \mu_1(\omega) \varepsilon_1(\omega)$ ,  $k_3^2(\omega) := \omega^2 \mu_3(\omega) \varepsilon_3(\omega)$  para las capas del revestimiento, y  $k_2^2(\omega, x_3) := \omega^2 \mu_2(\omega, x_3) \varepsilon_2(\omega, x_3)$  para el núcleo. Definiciones similares aplican para las funciones que definen a  $c^2$ . Con el objeto de que la guía de ondas permita la propagación en su interior de modos guiados asumimos que la siguiente condición

$$\sup_{x_3 \in [h_1, h_2]} c_2(\omega, x_3) < \min\{c_1, c_3\}$$

se cumple, por lo que el campo propagado quedará confinada principalmente en el núcleo de la guía y se propagarán en la dirección horizontal.

## 4.2. Propagación de ondas en la guía

### 4.2.1. Propagación de ondas polarizadas en un medio dispersivo estratificado

Consideremos el medio estratificado donde los parámetros constitutivos dependen únicamente de la frecuencia y de la coordenada vertical  $x_3$ , es decir,  $\mu = \mu(\omega, x_3)$  y  $\varepsilon = \varepsilon(\omega, x_3)$ . En este caso las ecuaciones de onda para un campo electromagnético linealmente polarizado en la dirección de  $x_2$  son

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + k^2(\omega, x_3) \right) \hat{H}_2(\omega, x_1, x_3) = \varepsilon(\omega, x_3) \left( \nabla \times \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \hat{\mathbf{J}}(\omega, x_1, x_3) \right)_2, \text{ TM,}$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \mu(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \mu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + k^2(\omega, x_3) \right) \hat{E}_2(\omega, x_1, x_3) = i\omega \mu(\omega, x_3) \hat{J}_2(\omega, x_1, x_3), \text{ TE.}$$

Ambas ecuaciones pueden representarse en términos de un mismo operador diferencial como sigue

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \nu(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + k^2(\omega, x_3) \right) \hat{u}(\omega, x_1, x_3) = \hat{f}(\omega, x_1, x_3), \quad (4.2.1)$$

donde las funciones que describen el proceso ondulatorio linealmente polarizado son independientes de  $x_2$ . Dependiendo del problema bajo consideración los coeficientes de la ecuación anterior se definen como sigue

$$\nu(\omega, x_3) = \begin{cases} \varepsilon(\omega, x_3), & \text{TM,} \\ \mu(\omega, x_3), & \text{TE.} \end{cases}, \quad \hat{u}(\omega, x_1, x_3) = \begin{cases} \hat{H}_2(\omega, x_1, x_3), & \text{TM,} \\ \hat{E}_2(\omega, x_1, x_3), & \text{TE.} \end{cases},$$

$$\hat{f}(\omega, x_1, x_3) = \begin{cases} \varepsilon(\omega, x_3) \left( \nabla \times \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \hat{\mathbf{J}}(\omega, x_1, x_3) \right)_2, & \text{TM,} \\ i\omega\mu(\omega, x_3) \hat{J}_2(\omega, x_1, x_3), & \text{TE.} \end{cases}$$

Para la guía de ondas considerada el campo electromagnético en los planos de discontinuidad  $x_3 = h_1$  y  $x_3 = h_2$  es gobernado por las condiciones de frontera

$$[\hat{u}(\omega, x_1, x_3)]_{x_3=h_m} = 0, \quad \left[ \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{u}(\omega, x_1, x_3) \right]_{x_3=h_m} = 0. \quad m = 1, 2, \quad (4.2.2)$$

donde el parámetro  $\nu$  está explícitamente dado por

$$\nu(\omega, x_3) = \begin{cases} \nu_1(\omega), & -\infty < x_3 < h_1, \\ \nu_2(\omega, x_3), & h_1 < x_3 < h_2, \\ \nu_3(\omega), & h_2 < x_3 < \infty, \end{cases},$$

donde  $\nu_j$  corresponde a  $\varepsilon_j$  (TM) ó  $\mu_j$  (TE) ( $j = 1, 2, 3$ ) dependiendo del problema en consideración. La solución de un problema con valores en la frontera (4.2.1)-(4.2.2) que describe la propagación de ondas transversales polarizadas en un medio estratificado puede abordarse a partir del problema bidimensional de la función de Green

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \nu(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + k^2(\omega, x_3) \right) \hat{G}_{2D}(\omega, x_1, x_3; x'_3) = \delta(x_3 - x'_3) \delta(x_1),$$

$$\left[ \hat{G}_{2D}(\omega, x_1, x_3; x'_3) \right]_{x_3=h_m} = 0, \quad \left[ \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{G}_{2D}(\omega, x_1, x_3; x'_3) \right]_{x_3=h_m} = 0,$$

donde  $x'_3$  representa la posición vertical de una fuente puntual, la cual actúa como un parámetro en el cálculo de la función de Green  $\hat{G}_{2D}$ . La solución del problema (4.2.1)-(4.2.2) está dada por la convolución

$$\hat{u}(\omega, x_1, x_3) = \hat{G}_{2D}(\omega, x_1, x_3; x'_3) * \hat{f}(\omega, x_1, x_3),$$

la cual se calcula explícitamente como

$$\left( \hat{G}_{2D} * \hat{f} \right) (\omega, x_1, x_3; x'_3) := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}_{2D}(\omega, x_1, x_3; x'_3) \hat{f}(\omega, x'_1, x'_3) dx'_1 dx'_3.$$

De modo que la solución del problema electrodinámico se calcula a partir de la transformada inversa de Fourier con respecto al tiempo como sigue

$$u(t, x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left( \hat{G}_{2D} * \hat{f} \right) (\omega, x_1, x_3) d\omega. \quad (4.2.3)$$

### 4.2.2. Propagación de ondas no-polarizadas en un medio dispersivo estratificado

Para las ondas no-polarizadas las ecuaciones que describen a las ondas TE y TM son las siguientes

$$\begin{aligned} & \left( \Delta_{\mathbf{x}} + \varepsilon(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + k^2(\omega, x_3) \right) \widehat{D}_3(\omega, \mathbf{r}) \\ &= i \frac{k^2(\omega, x_3)}{\omega} \widehat{J}_3(\omega, \mathbf{r}) + \varepsilon(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} (\varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \widehat{\rho}(\omega, \mathbf{r})), \text{ TM} \\ & \left( \Delta_{\mathbf{x}} + \mu(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \mu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + k^2(\omega, x_3) \right) \widehat{B}_3(\omega, \mathbf{r}) = \mu(\omega, x_3) \left( \frac{\partial \widehat{J}_1(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_2} - \frac{\partial \widehat{J}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_1} \right), \text{ TE} \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{r} := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  es un vector de posición. Ambas ecuaciones pueden describirse en términos del mismo operador diferencial

$$\left( \Delta_{\mathbf{x}} + \nu(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + k^2(\omega, x_3) \right) \widehat{v}(\omega, \mathbf{r}) = \widehat{h}(\omega, \mathbf{r}), \quad (4.2.4)$$

$$\begin{aligned} \widehat{v}(\omega, \mathbf{r}) &= \begin{cases} \widehat{D}_3(\omega, \mathbf{r}), & \text{TM,} \\ \widehat{B}_3(\omega, \mathbf{r}), & \text{TE.} \end{cases} \\ \widehat{h}(\omega, \mathbf{r}) &= \begin{cases} i \frac{k^2(\omega, x_3)}{\omega} \widehat{J}_3(\omega, \mathbf{r}) + \varepsilon(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} (\varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \widehat{\rho}(\omega, \mathbf{r})), & \text{TM,} \\ \mu(\omega, x_3) \left( \frac{\partial \widehat{J}_1(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_2} - \frac{\partial \widehat{J}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_1} \right), & \text{TE.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

donde  $\Delta_{\mathbf{x}} := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ , es el Laplaciano con respecto a las coordenadas horizontales  $\mathbf{x} := (x_1, x_2)$ . En la guía de ondas el campo electromagnético en los planos de discontinuidad  $x_3 = h_1$  y  $x_3 = h_2$  es gobernado por las condiciones de frontera

$$[\widehat{v}(\omega, \mathbf{r})]_{x_3=h_m} = 0, \quad \left[ \nu^{-1}(\omega, \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x_3} \widehat{v}(\omega, \mathbf{r}) \right]_{x_3=h_m} = 0, \quad m = 1, 2. \quad (4.2.6)$$

La solución del problema con valores en la frontera (4.2.4)-(4.2.6) que describe la propagación de ondas transversales no-polarizadas en la guía de ondas puede abordarse a partir del problema tridimensional de la función de Green

$$\begin{aligned} & \left( \Delta_{\mathbf{x}} + \nu(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + k^2(\omega, x_3) \right) \widehat{G}_{3D}(\omega, \mathbf{r}; x'_3) = \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3 - x'_3), \\ & \left[ \widehat{G}_{3D}(\omega, \mathbf{r}; x'_3) \right]_{x_3=h_m} = 0, \quad \left[ \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \widehat{G}_{3D}(\omega, \mathbf{r}; x'_3) \right]_{x_3=h_m} = 0. \end{aligned}$$

La solución del problema (4.2.4)-(4.2.6) se calcula con la convolución

$$\widehat{v}(\omega, \mathbf{r}) = \widehat{G}_{3D}(\omega, \mathbf{r}; x'_3) * \widehat{h}(\omega, \mathbf{r}),$$

la cual se expresa explícitamente como

$$\left( \widehat{G}_{3D} * \widehat{f} \right) (\omega, \mathbf{r}; x'_3) := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{G}_{3D}(\omega, x_1, x_2, x_3; x'_3) \widehat{h}(\omega, x'_1, x'_2, x'_3) dx'_1 dx'_2 dx'_3,$$

donde  $x'_3$  es la posición de la fuente puntual que actúa como un parámetro en el cálculo de la función de Green  $\widehat{G}_{3D}$ . De modo que la solución del problema electrodinámico se calcula a partir de la transformada inversa de Fourier con respecto al tiempo

$$v(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left( \widehat{G}_{3D} * \widehat{h} \right) (\omega, \mathbf{r}) d\omega. \quad (4.2.7)$$

### 4.3. Términos fuente para los problemas con valores en la frontera

Para determinar las convoluciones de las expresiones anteriores es necesario especificar las fuentes en el problema electrodinámico. En nuestro caso consideramos fuentes puntuales armónicas en el tiempo y moduladas en amplitud por señales con espectro de frecuencias angosto como se muestra a lo largo de esta subsección.

La densidad de corriente  $\mathbf{J}$  generalmente es producida por una fuente de corriente que tiene una amplitud variante en el tiempo. La corriente pasa por una antena y produce una onda estacionaria de corriente a lo largo del conductor de la antena. En general, para un elemento infinitesimal de corriente de longitud  $l$  donde la corriente apunta en la dirección  $\mathbf{e}$ , la densidad de corriente puede ser representada por la expresión, ver, *e.g.* [14, Cap 1, p 173]

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = I l \mathbf{e} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

donde  $I$  es la magnitud de la corriente,  $\mathbf{r}'$  es la posición de la fuente puntual, y  $\mathbf{r}$  es la posición del punto de observación. Tal representación es una idealización cuando las dimensiones de una antena tienden a reducirse arbitrariamente quedando en el límite una fuente puntual la cual es representada por la delta de Dirac. Por otra parte una fuente arbitraria no necesariamente infinitesimal puede representarse como una superposición de fuentes puntuales de acuerdo con las propiedades de la delta de Dirac, de tal forma que el campo que genera esta fuente consiste de una superposición de ondas generadas por los elementos puntuales.

#### 4.3.1. Fuente para las ondas polarizadas

Consideremos la fuente puntual expresada por la densidad de corriente

$$\mathbf{J}(t, x_1, x_3) = A(t) e^{i\omega_0 t} \delta(x_1 - x_1^0) \delta(x_3 - x_3^0) \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3), \quad (4.3.1)$$

donde  $A$  representa una señal modulante de banda angosta,  $\omega_0$  es la frecuencia de la portadora  $e^{i\omega_0 t}$ ,  $\mathbf{e}$  es la dirección de la densidad de corriente, y  $(x_1^0, x_3^0) \in \mathbb{R}^2$  es la posición de la fuente. El espectro de frecuencias de esta densidad de corriente se calcula a partir de la transformada de Fourier con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{J}}(\omega, x_1, x_3) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}(t, x_1, x_3) e^{i\omega t} dt \\ &= \delta(x_1 - x_1^0) \delta(x_3 - x_3^0) \mathbf{e} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= \widehat{A}(\omega - \omega_0) \delta(x_1 - x_1^0) \delta(x_3 - x_3^0) \mathbf{e}, \end{aligned}$$

donde  $\widehat{A}(\omega)$  es el espectro de frecuencias de  $A(t)$ . A continuación obtendremos expresiones para el término  $\widehat{f}$  de las ecuaciones de onda para los casos TE y TM a partir de la expresión de  $\widehat{\mathbf{J}}(\omega, x_1, x_3)$  considerada.

- Para las ondas TM el término fuente esta definido como

$$\widehat{f}(\omega, x_1, x_3) = \varepsilon(\omega, x_3) \left( \nabla \times \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \widehat{\mathbf{J}}(\omega, x_1, x_3) \right)_2.$$

Para obtener una expresión del término fuente necesitamos calcular el siguiente rotacional

$$\begin{aligned} \nabla \times \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \widehat{\mathbf{J}}(\omega, x_1, x_3) &= \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \widehat{A}(\omega - \omega_0) [\delta(x_1 - x_1^0) \delta'(x_3 - x_3^0) e_2 \mathbf{a}_1 \\ &\quad + (\delta(x_1 - x_1^0) \delta'(x_3 - x_3^0) e_1 - \delta'(x_1 - x_1^0) \delta(x_3 - x_3^0) e_3) \mathbf{a}_2 \\ &\quad + \delta'(x_1 - x_1^0) \delta(x_3 - x_3^0) e_2 \mathbf{a}_3], \end{aligned}$$

donde  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  representan los vectores unitarios del sistema de coordenadas rectangulares  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . Al tomar la segunda componente del vector que resulta de esta operación y multiplicando por el término  $\varepsilon(\omega, x_3)$  se obtiene el término fuente buscado

$$\widehat{f}(\omega, x_1, x_3) = \widehat{A}(\omega - \omega_0) (\delta(x_1 - x_1^0) \delta'(x_3 - x_3^0) e_1 - \delta'(x_1 - x_1^0) \delta(x_3 - x_3^0) e_3).$$

- Para las ondas TE el término fuente se define como

$$\widehat{f}(\omega, x_1, x_3) = i\omega\mu(\omega, x_3)\widehat{J}_2(\omega, x_1, x_3).$$

En este caso se toma únicamente la segunda componente de la expresión de  $\widehat{\mathbf{J}}(\omega, x_1, x_3)$  y se multiplica por  $i\omega\mu$ ,

$$\widehat{f}(\omega, x_1, x_3) = i\omega\mu(\omega, x_3)\widehat{A}(\omega - \omega_0)\delta(x_1 - x_1^0)\delta(x_3 - x_3^0)e_2.$$

### 4.3.2. Fuente para las ondas no-polarizadas

Consideremos la fuente puntual expresada por la densidad de corriente

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{r}) = A(t)e^{i\omega_0 t}\delta(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0)\delta(x_3 - x_3^0)\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3), \quad (4.3.2)$$

donde  $A$  representa una señal modulante de banda angosta,  $\omega_0$  es la frecuencia de la portadora  $e^{i\omega_0 t}$ ,  $\mathbf{e}$  es la dirección de la densidad de corriente, y  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \mathbb{R}^3$  es la posición de la fuente. Observe que esta fuente, a diferencia de la fuente para las ondas polarizadas, incluye el término  $\delta(x_2 - x_2^0)$ . De forma análoga, el espectro de frecuencias de esta densidad de corriente se calcula a partir de la transformada de Fourier con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{J}}(\omega, \mathbf{r}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}(t, \mathbf{r}) e^{i\omega t} dt \\ &= \delta(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0)\delta(x_3 - x_3^0)\mathbf{e} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= \widehat{A}(\omega - \omega_0)\delta(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0)\delta(x_3 - x_3^0)\mathbf{e}. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Debemos encontrar una expresión para la densidad de carga  $\widehat{\rho}(\omega, \mathbf{r})$  a partir de la densidad de corriente  $\widehat{\mathbf{J}}(\omega, \mathbf{r})$ , lo cual hacemos a partir de la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbf{J}}(\omega, \mathbf{r}) + i\omega\widehat{\rho}(\omega, \mathbf{r}) = 0. \quad (4.3.4)$$

Despejando el término  $\widehat{\rho}(\omega, \mathbf{r})$  de la expresión anterior y realizando la divergencia de (4.3.3) se llega a lo siguiente

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}(\omega, \mathbf{r}) &= \frac{i}{\omega}\widehat{A}(\omega - \omega_0) [\delta'(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0)\delta(x_3 - x_3^0)e_1 + \delta(x_1 - x_1^0)\delta'(x_2 - x_2^0)\delta(x_3 - x_3^0)e_2, \\ &\quad + \delta(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0)\delta'(x_3 - x_3^0)e_3] \end{aligned}$$

donde  $\delta'$  representa la derivada de la distribución de Dirac. A partir de las expresiones de  $\widehat{\mathbf{J}}(\omega, \mathbf{r})$  y  $\widehat{\rho}(\omega, \mathbf{r})$  obtendremos expresiones para el término fuente  $\widehat{h}(\omega, \mathbf{r})$  definido en (4.2.5), para los casos TE y TM.

- Para las ondas TM el término fuente está expresado de la siguiente manera

$$\widehat{h}(\omega, \mathbf{r}) = i\frac{k^2(\omega, x_3)}{\omega}\widehat{J}_3(\omega, \mathbf{r}) + \varepsilon(\omega, x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}(\varepsilon^{-1}(\omega, x_3)\widehat{\rho}(\omega, \mathbf{r})).$$

Observamos que el lado derecho esta compuesto de dos partes, la primera parte toma la forma

$$i\frac{k^2(\omega, x_3)}{\omega}\widehat{J}_3(\omega, \mathbf{r}) = \frac{i}{\omega}k^2(\omega, x_3)\widehat{A}(\omega - \omega_0)\delta(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0)\delta(x_3 - x_3^0)e_3,$$

mientras que la segunda parte resulta en una expresión mas complicada

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}(\varepsilon^{-1}(\omega, x_3)\widehat{\rho}(\omega, \mathbf{r})) &= \frac{i}{\omega}\widehat{A}(\omega - \omega_0)(\delta'(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0)\left(\delta'(x_3 - x_3^0) - \frac{\partial}{\partial x_3}\ln\varepsilon(\omega, x_3)\delta(x_3 - x_3^0)\right)e_1 \\ &\quad + \delta(x_1 - x_1^0)\delta'(x_2 - x_2^0)\left(\delta'(x_3 - x_3^0) - \frac{\partial}{\partial x_3}\ln\varepsilon(\omega, x_3)\delta(x_3 - x_3^0)\right)e_2 \\ &\quad + \delta(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0)\left(\delta''(x_3 - x_3^0) - \frac{\partial}{\partial x_3}\ln\varepsilon(\omega, x_3)\delta'(x_3 - x_3^0)\right)e_3. \end{aligned}$$

Sea  $\eta(\omega, x_3) := \frac{\partial}{\partial x_3} \ln \varepsilon(\omega, x_3)$ , entonces al unir las partes obtenemos el término fuente buscado

$$\begin{aligned} \widehat{h}(\omega, \mathbf{r}) = & \frac{i}{\omega} \widehat{A}(\omega - \omega_0) [(\delta'(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0)e_1 + \delta(x_1 - x_1^0)\delta'(x_2 - x_2^0)e_2) (\delta'(x_3 - x_3^0) - \eta(\omega, x_3)\delta(x_3 - x_3^0))] \\ & + \delta(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0) (k^2(\omega, x_3)\delta(x_3 - x_3^0) - \eta(\omega, x_3)\delta'(x_3 - x_3^0) + \delta''(x_3 - x_3^0)) e_3 \end{aligned}$$

- Para las ondas TE el término fuente está expresado por

$$\widehat{h}(\omega, \mathbf{r}) = \mu(\omega, x_3) \left( \frac{\partial \widehat{J}_1(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_2} - \frac{\partial \widehat{J}_2(\omega, \mathbf{r})}{\partial x_1} \right),$$

lo cual da a lugar a una expresión más sencilla

$$\widehat{h}(\omega, \mathbf{r}) = \mu(\omega, x_3) \widehat{A}(\omega - \omega_0) (\delta(x_1 - x_1^0)\delta'(x_2 - x_2^0)e_2 - \delta'(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0)e_1) \delta(x_3 - x_3^0).$$

## 4.4. Cálculo de las convoluciones con los términos fuentes

Para obtener la solución del problema electrodinámico es necesario realizar las convoluciones entre los términos fuente y las funciones de Green dependiendo del tipo de operador y de la polarización de la onda. A continuación se calculan las convoluciones (4.2.3) y (4.2.7) para usarlas posteriormente.

### 4.4.1. Para las ondas polarizadas

- Caso TM

$$\begin{aligned} (\widehat{G}_{2D} * \widehat{f})(\omega, x_1, x_3) &= \widehat{A}(\omega - \omega_0) \widehat{G}_{2D}(\omega, x_1, x_3; x_3') * (\delta(x_1 - x_1^0)\delta'(x_3 - x_3^0)e_1 - \delta'(x_1 - x_1^0)\delta(x_3 - x_3^0)e_3) \\ &= \widehat{A}(\omega - \omega_0) \left[ \widehat{G}_{2D}^{(0,0,1)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_3 - x_3^0; x_3')e_1 - \widehat{G}_{2D}^{(0,1,0)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_3 - x_3^0; x_3')e_3 \right]. \end{aligned}$$

- Caso TE

$$\begin{aligned} (\widehat{G}_{2D} * \widehat{f})(\omega, x_1, x_3) &= i\omega\mu(x_3, \omega) \widehat{A}(\omega - \omega_0) \widehat{G}_{2D}(\omega, x_1, x_3; x_3') * \delta(x_3 - x_3^0)\delta(x_1 - x_1^0)e_2 \\ &= i\omega\mu(x_3, \omega) \widehat{A}(\omega - \omega_0) \widehat{G}_{2D}(\omega, x_1 - x_1^0, x_3 - x_3^0; x_3')e_2. \end{aligned}$$

### 4.4.2. Para las ondas no-polarizadas

- Caso TM: con el propósito de simplificar, supongamos que  $\mathbf{e} = (1, 0, 0) = \mathbf{a}_1$  lo cual conduce a

$$\begin{aligned} (\widehat{G}_{3D} * \widehat{h})(\omega, x_1, x_2, x_3) &= \frac{i}{\omega} \widehat{A}(\omega - \omega_0) \delta'(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0) \\ & \quad (\delta'(x_3 - x_3^0) - \eta(\omega, x_3)\delta(x_3 - x_3^0)\delta(x_1 - x_1^0)) * \widehat{G}_{3D}(\omega, x_1, x_2, x_3; x_3') \\ &= \frac{i}{\omega} \widehat{A}(\omega - \omega_0) \left[ \widehat{G}_{3D}^{(0,1,0,1)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') \right. \\ & \quad \left. - \eta(\omega, x_3) \widehat{G}_{3D}^{(0,1,0,0)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') \right] \end{aligned}$$

Por otra parte supongamos que  $\mathbf{e} = (0, 1, 0) = \mathbf{a}_2$ , entonces

$$\begin{aligned} (\widehat{G}_{3D} * \widehat{h})(\omega, x_1, x_2, x_3) &= \frac{i}{\omega} \widehat{A}(\omega - \omega_0) \delta(x_1 - x_1^0)\delta'(x_2 - x_2^0) \\ & \quad (\delta'(x_3 - x_3^0) - \eta(\omega, x_3)\delta(x_3 - x_3^0)\delta(x_1 - x_1^0)) * \widehat{G}_{3D}(\omega, x_1, x_2, x_3; x_3') \\ &= \frac{i}{\omega} \widehat{A}(\omega - \omega_0) \left[ \widehat{G}_{3D}^{(0,0,1,1)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') \right. \\ & \quad \left. - \eta(\omega, x_3) \widehat{G}_{3D}^{(0,1,0,0)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') \right] \end{aligned}$$

Finalmente, supongamos que  $\mathbf{e} = (0, 0, 1) = \mathbf{a}_3$ , de modo que

$$\begin{aligned} (\widehat{G}_{3D} * \widehat{h})(\omega, x_1, x_2, x_3) &= \frac{i}{\omega} \widehat{A}(\omega - \omega_0) \delta'(x_1 - x_1^0) \delta(x_2 - x_2^0) \\ &\quad (k^2(x_3, \omega) \delta(x_3 - x_3^0) - \eta(\omega, x_3) \delta'(x_3 - x_3^0) + \delta''(x_3 - x_3^0)) * \widehat{G}_{3D}(\omega, x_1, x_2, x_3; x_3') \\ &= \frac{i}{\omega} \widehat{A}(\omega - \omega_0) \\ &\quad \left[ k^2(x_3, \omega) \widehat{G}_{3D}^{(0,1,0,0)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') - \right. \\ &\quad \eta(\omega, x_3) \widehat{G}_{3D}^{(0,1,0,1)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') \\ &\quad \left. + \widehat{G}_{3D}^{(0,1,0,2)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') \right]. \end{aligned}$$

A partir de una combinación lineal de estas expresiones es posible obtener la expresión correspondiente a una fuente dirigida en la dirección de un vector  $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{R}^3$  arbitrario.

- Caso TE

$$\begin{aligned} (\widehat{G}_{3D} * \widehat{h})(\omega, x_1, x_2, x_3; x_3') &= \mu(\omega, x_3) \widehat{A}(\omega - \omega_0) \\ &\quad (\delta(x_1 - x_1^0) \delta'(x_2 - x_2^0) e_1 - \delta'(x_1 - x_1^0) \delta(x_2 - x_2^0) e_3) * \widehat{G}_{3D}(\omega, x_1, x_2, x_3; x_3') \\ &= \mu(\omega, x_3) \widehat{A}(\omega - \omega_0) \left[ \widehat{G}_{3D}^{(0,0,1,0)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') e_1 \right. \\ &\quad \left. - \widehat{G}_{3D}^{(0,1,0,0)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') e_3 \right] \end{aligned}$$

## 4.5. Solución asintótica del problema con valores en la frontera para ondas polarizadas

Sea  $\widehat{G}_{2D}$  la función de Green del problema con valores en la frontera (4.2.1)-(4.2.2) que satisface el principio de absorción al límite en el infinito con respecto a  $x_1 \in \mathbb{R}$ . Supongamos que el término principal de la asintótica de la función de Green  $\widehat{G}_{2D}$  se expresa por los modos guiados  $\widehat{g}_j$ , es decir

$$\widehat{G}_{2D}(\omega, x_1, x_3; x_3') \sim \sum_{j=1}^{\infty} \widehat{g}_j(\omega, x_1, x_3; x_3'), \quad |x_1| \rightarrow \infty,$$

de modo que resultan las siguientes expresiones asintóticas para los términos de convolución.

- Caso TM

$$\begin{aligned} (\widehat{G}_{2D} * \widehat{f})(\omega, x_1, x_3) &\sim \widehat{A}(\omega - \omega_0) \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \widehat{g}_j^{(0,0,1)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_3 - x_3^0; x_3') e_1 \right. \\ &\quad \left. - \widehat{g}_j^{(0,1,0)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_3 - x_3^0; x_3') e_3 \right], \quad |x_1| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

de modo que el término principal de la solución del problema con valores en la frontera (4.2.1)-(4.2.2) conforme  $|x_1| \rightarrow \infty$  está dado por

$$\begin{aligned} H_2(t, x_1, x_3) &\sim \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{A}(\omega - \omega_0) \left[ \widehat{g}_j^{(0,0,1)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_3 - x_3^0; x_3') e_1 \right. \\ &\quad \left. - \widehat{g}_j^{(0,1,0)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_3 - x_3^0; x_3') e_3 \right] e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

- Caso TE

$$(\widehat{G}_{2D} * \widehat{f})(\omega, x_1, x_3) \sim i\omega \mu(\omega, x_3) \widehat{A}(\omega - \omega_0) e_2 \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{g}_j(\omega, x_1 - x_1^0, x_3 - x_3^0; x_3'),$$

de modo que el término principal de la solución del problema con valores en la frontera (4.2.1)-(4.2.2) conforme  $|x_1| \rightarrow \infty$  está dado por

$$E_2(t, x_1, x_3) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \mu(\omega, x_3) \widehat{A}(\omega - \omega_0) e_2 \widehat{g}_j(\omega, x_1 - x_1^0, x_3 - x_3^0; x_3') e^{i\omega t} d\omega.$$

## 4.6. Solución del problema con valores en la frontera para ondas no-polarizadas

Sea  $\widehat{G}_{3D}$  la función de Green del problema con valores en la frontera (4.2.4)-(4.2.6) que satisface el principio de absorción al límite en el infinito con respecto a  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ . Supongamos que el término principal de la asintótica de la función de Green  $\widehat{G}_{3D}$  se expresa por los modos guiados  $\widehat{g}_j$ , es decir

$$\widehat{G}_{3D}(\omega, \mathbf{x}, x_3; x_3') \sim \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{g}_j(\omega, \mathbf{x}, x_3; x_3'), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty,$$

de modo que resultan las siguientes expresiones asintóticas para los términos de convolución.

- Caso TM: dada la complejidad que tiene el término de la convolución  $\widehat{G}_{3D} * \widehat{h}$  obtenemos algunas expresiones más sencillas considerando que el vector unitario  $\mathbf{e}$  que acompaña a la fuente de corriente apunta solamente en las direcciones de cada uno de los ejes coordenados. Los resultados obtenidos pueden sumarse de forma vectorial cuando se considera un vector  $\mathbf{e}$  arbitrario.
  - Sea  $\mathbf{e} = \mathbf{a}_1$ , entonces conforme  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} \left( \widehat{G}_{3D} * \widehat{h} \right) (\omega, \mathbf{r}) &\sim \frac{i}{\omega} \widehat{A}(\omega - \omega_0) \\ &\sum_{j=0}^{\infty} \left[ \widehat{g}_j^{(0,1,0,1)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') - \right. \\ &\left. \eta(\omega, x_3) \widehat{g}_j^{(0,1,0,0)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') \right] \end{aligned}$$

entonces obtenemos el término principal de la densidad de flujo eléctrico

$$\begin{aligned} D_3(t, \mathbf{r}) &\sim \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{\omega} \widehat{A}(\omega - \omega_0) \\ &\left[ \widehat{g}_j^{(0,1,0,1)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') \right. \\ &\left. - \eta(\omega, x_3) \widehat{g}_j^{(0,1,0,0)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') \right] e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

- Sea  $\mathbf{e} = \mathbf{a}_2$ , conforme  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  resulta

$$\begin{aligned} \left( \widehat{G}_{3D} * \widehat{h} \right) (\omega, \mathbf{r}) &\sim \frac{i}{\omega} \widehat{A}(\omega - \omega_0) \\ &\sum_{j=0}^{\infty} \left[ \widehat{g}_j^{(0,0,1,1)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') \right. \\ &\left. - \eta(\omega, x_3) \widehat{g}_j^{(0,1,0,0)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') \right] e^{i\omega t} d\omega, \end{aligned}$$

entonces obtenemos el término principal de la densidad de flujo eléctrico

$$\begin{aligned} D_3(t, \mathbf{r}) &\sim \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{\omega} \widehat{A}(\omega - \omega_0) \\ &\left[ \widehat{g}_j^{(0,0,1,1)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') \right. \\ &\left. - \eta(\omega, x_3) \widehat{g}_j^{(0,1,0,0)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') \right] e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

- Finalmente sea  $\mathbf{e} = \mathbf{a}_3$ , lo cual conduce a la siguiente expresión asintótica

$$\begin{aligned} (\widehat{G}_{3D} * \widehat{h})(\omega, \mathbf{r}) &\sim \frac{i}{\omega} \widehat{A}(\omega - \omega_0) \\ &\sum_{j=0}^{\infty} \left[ k^2(x_3, \omega) \widehat{g}_j(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') \right. \\ &\quad - \eta(\omega, x_3) \widehat{g}_j^{(0,0,1,0)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') \\ &\quad \left. + \widehat{g}_j^{(0,1,0,0)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') \right] e^{i\omega t} d\omega, \end{aligned}$$

conforme  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , entonces obtenemos el término principal de la densidad de flujo eléctrico

$$\begin{aligned} D_3(t, \mathbf{r}) &\sim \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{\omega} \widehat{A}(\omega - \omega_0) \\ &\quad \left[ k^2(x_3, \omega) \widehat{g}_j(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') \right. \\ &\quad - \eta(\omega, x_3) \widehat{g}_j^{(0,0,1,0)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') \\ &\quad \left. + \widehat{g}_j^{(0,1,0,0)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') \right] e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

- Caso TE: en este caso el término principal de la convolución conforme  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  es

$$\begin{aligned} (\widehat{G}_{3D} * \widehat{h})(\omega, \mathbf{r}) &\sim \mu(\omega, x_3) \widehat{A}(\omega - \omega_0) \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \widehat{g}_j^{(0,0,1,0)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') e_1, \right. \\ &\quad \left. - \widehat{g}_j^{(0,1,0,0)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') e_2 \right] \end{aligned}$$

de modo que el término principal de la densidad de flujo magnético conforme  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} B_3(t, \mathbf{r}) &\sim \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\omega, x_3) \widehat{A}(\omega - \omega_0) \times \\ &\quad \times \left( \widehat{g}_j^{(0,0,1,0)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') e_1 - \widehat{g}_j^{(0,1,0,0)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') e_2 \right) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

En el siguiente capítulo obtendremos expresiones explícitas para los modos guiados  $\widehat{g}_j$  de las funciones de Green  $\widehat{G}_{2D}$  y  $\widehat{G}_{3D}$  de la guía de ondas considerada.

## Capítulo 5

# Determinación de la función de Green para la guía de ondas

### 5.1. Aplicación de la Transformada de Fourier

Vamos a suponer a partir de este momento que las funciones que dependen de  $\omega$  de antemano fueron calculadas con la transformada de Fourier con respecto al tiempo y por cuestiones de escritura suprimiremos el uso del acento  $\hat{\cdot}$  el cual se utilizará ahora para denotar la transformada de Fourier con respecto a las coordenadas espaciales. Consideraremos ahora las ecuaciones de onda para medios dispersivos estratificados que fueron presentadas en el capítulo anterior. Comenzamos con las ecuaciones de ondas polarizadas a las cuales se le aplicará la transformada con respecto a la coordenada  $x_1$ . Continuamos con las ecuaciones de ondas no-polarizadas a las cuales se le aplicará la transformada de Fourier con respecto a las coordenadas horizontales  $\mathbf{x}$ . La definición de la transformada de Fourier puede encontrarse en el Apéndice 1. Cabe mencionar que la aplicación de la transformada de Fourier debe entenderse en el sentido de las distribuciones definidas en el espacio  $S'$ .

#### Ecuaciones de onda para las ondas polarizadas

Anteriormente se estableció que las ondas TE polarizadas en la guía de ondas se rigen por el problema con valores en la frontera (4.2.1)-(4.2.2). Aplicando la transformada de Fourier con respecto a  $x_1$  el problema anterior toma la siguiente forma

$$\left[ -\xi^2 + \nu(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + k^2(\omega, x_3) \right] \hat{u}(\omega, \xi, x_3) = \hat{f}(\omega, \xi, x_3). \quad (5.1.1)$$

con las condiciones de frontera

$$[\hat{u}(\omega, \xi, x_3)]_{x_3=h_m} = 0, \quad \left[ \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{u}(\omega, \xi, x_3) \right]_{x_3=h_m} = 0. \quad m = 1, 2$$

Para la función desconocida  $\hat{u}$  y el término fuente  $\hat{f}$  empleamos las siguientes notaciones

$$\hat{u}(\omega, \xi, x_3) = \begin{cases} \hat{E}_2(\omega, \xi, x_3), & \text{TE,} \\ \hat{H}_2(\omega, \xi, x_3), & \text{TM.} \end{cases}, \quad \hat{f}(\omega, \xi, x_3) = \begin{cases} -i\omega\mu(\omega, x_3)\hat{J}_2(\omega, \xi, x_3), & \text{TE,} \\ \varepsilon(\omega, x_3) \left( \frac{\partial \varepsilon^{-1}(\omega, x_3)\hat{J}(\omega, \xi, x_3)}{\partial x_3} + i\xi\varepsilon^{-1}(\omega, x_3)\hat{J}(\omega, \xi, x_3) \right), & \text{TM.} \end{cases}$$

Con base en el problema con valores en la frontera analizaremos la propagación de ondas polarizadas en la guía de ondas considerada.

## Ecuaciones de onda no-polarizadas

Anteriormente se estableció que las ondas transversales no-polarizadas en la guía de ondas se describían por el problema con valores en la frontera (4.2.4)-(4.2.6). Aplicando la transformada de Fourier con respecto a las coordenadas horizontales  $\mathbf{x}$  se obtiene

$$\left[ -|\boldsymbol{\xi}|^2 + \nu(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + k^2(\omega, x_3) \right] \widehat{v}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3) = \widehat{h}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3). \quad (5.1.2)$$

con las condiciones de frontera

$$[\widehat{v}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3)]_{x_3=h_m} = 0, \quad \left[ \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \widehat{v}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3) \right]_{x_3=h_m} = 0, \quad m = 1, 2,$$

donde la función incógnita y el término fuente se definen de acuerdo con las expresiones

$$\widehat{v}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3) = \begin{cases} \widehat{B}_3(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3), & \text{TE,} \\ \widehat{D}_3(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3), & \text{TM,} \end{cases}$$

$$\widehat{h}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3) = \begin{cases} -i\mu(\omega, x_3) \left( \xi_1 \widehat{J}_2(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3) - \xi_2 \widehat{J}_1(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3) \right), & \text{TE,} \\ i\omega\mu(\omega, x_3) \varepsilon(\omega, x_3) \widehat{J}_3(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3) + \varepsilon(\omega, x_3) \partial_{x_3} \left( \varepsilon^{-1}(\omega, x_3) \widehat{\rho}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3) \right), & \text{TM,} \end{cases}$$

Este problema está relacionado con la propagación de las ondas TE y TM no-polarizadas en la guía de ondas, donde el término  $|\boldsymbol{\xi}|^2$  es formalmente equivalente a  $\xi^2$  en el caso de las ondas polarizadas. A continuación se introduce un problema espectral auxiliar unidimensional que permitirá abordar los problemas unidimensionales que resultaron de aplicar la transformada de Fourier con respecto a las coordenadas espaciales  $\mathbf{x}$  y  $x_1$ , respectivamente.

## 5.2. Problema auxiliar de la guía de onda asimétrica

Vamos a considerar un problema espectral unidimensional el cual nos permitirá analizar una guía de onda asimétrica estratificada dispersiva. Para este problema introducimos el siguiente operador diferencial

$$\mathcal{L}_{\nu, \omega} \varphi(\omega, x_3) := -\nu(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial \varphi(\omega, x_3)}{\partial x_3} \right) + V(\omega, x_3) \varphi(\omega, x_3), \quad x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{h_1, h_2\}, \quad (5.2.1)$$

donde el coeficiente  $\nu$  quedó definido por la función continua a trozos

$$\nu(\omega, x_3) = \begin{cases} \nu_1(\omega), & -\infty < x_3 < h_1, \\ \nu_2(\omega, x_3), & h_1 < x_3 < h_2, \\ \nu_3(\omega), & h_2 < x_3 < \infty, \end{cases} \quad (5.2.2)$$

y la función  $V$  se define como sigue

$$V(\omega, x_3) = \begin{cases} 0, & -\infty < x_3 < h_1, \\ V_0(\omega, x_3), & h_1 < x_3 < h_2, \\ 0, & h_2 < x_3 < \infty, \end{cases}$$

donde  $V_0$  es una función que satisface ciertas condiciones de suavidad. Asociado al operador  $\mathcal{L}_{\nu, \omega}$  consideramos las siguientes condiciones de frontera

$$[\varphi(\omega, x_3)]_{x_3=h_1} = 0; \quad \left[ \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial \varphi(\omega, x_3)}{\partial x_3} \right]_{x_3=h_1} = 0, \quad (5.2.3a)$$

$$[\varphi(\omega, x_3)]_{x_3=h_2} = 0; \quad \left[ \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial \varphi(\omega, x_3)}{\partial x_3} \right]_{x_3=h_2} = 0. \quad (5.2.3b)$$

Consideramos al operador  $\mathcal{L}_{\nu,\omega}$  en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_{\nu,\omega}$  dotado de la norma

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}_{\nu,\omega}} := \left( \int_{\mathbb{R}} \nu^{-1}(x_3, \omega) |\varphi(x_3)|^2 dx_3 \right)^{1/2}$$

la cual es inducida por el producto interno

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}_{\nu,\omega}} := \int_{\mathbb{R}} \nu^{-1}(x_3, \omega) u(x_3) \overline{v(x_3)} dx_3, \quad u, v \in \mathcal{H}_{\nu,\omega}.$$

Las funciones que pertenecen al espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_{\nu,\omega}$  deben satisfacer las condiciones asintóticas en el infinito

$$\lim_{|x_3| \rightarrow \infty} \varphi(x_3, \omega) = 0, \quad \varphi \in \mathcal{H}_{\nu,\omega}, \quad (5.2.4)$$

para todo  $\omega \in \mathbb{R}$ . Si el coeficiente  $\nu(\omega, x_3)$  es una función real-valuada que no se anula, entonces el operador  $\mathcal{L}_{\nu,\omega}$  así definido es auto-adjunto en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_{\nu,\omega}$ , y tiene un conjunto finito de eigen-valores  $\alpha_j^2 < 0$  ( $j = 1, \dots, N$ ), los cuales están localizados en el intervalo

$$\alpha_j^2 \in (V_{\min}, 0), \quad V_{\min} := \inf_{\substack{x_3 \in [h_1, h_2], \\ \omega \in \mathbb{R}}} V_0(x_3, \omega),$$

y tiene también una parte continua del espectro en  $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$ . El dominio de  $\mathcal{L}_{\nu,\omega}$  se especifica por  $\text{Dom}(\mathcal{L}_{\nu,\omega}) = H^2(h_1, h_2) \cup H^2(\mathbb{R}/[h_1, h_2])$ , donde  $H^2(\alpha, \beta)$  es el espacio de Sobolev.

Consideremos el siguiente problema espectral

$$\mathcal{L}_{\nu,\omega} \varphi(x_3, \omega) = \alpha^2 \varphi(\omega, x_3), \quad -\infty < x_3 < \infty, \quad (5.2.5)$$

donde  $\alpha^2$  es el parámetro espectral. Para el cálculo del espectro discreto del operador  $\mathcal{L}_{\nu,\omega}$  de antemano sabemos que sus eigen-valores son negativos [38, §19, Cap. 5]. Sea  $\alpha = i\beta$ ,  $\beta > 0$ , entonces las soluciones correspondientes de la ecuación diferencial están sometidas a las condiciones de frontera (5.2.3) y las condiciones asintóticas en el infinito (5.2.4). Consideremos la ecuación diferencial (5.2.5) en  $(-\infty, h_1)$ , la cual toma la forma

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \varphi(\omega, x_3) = \beta^2 \varphi(\omega, x_3), \quad -\infty < x_3 < h_1.$$

Las soluciones linealmente independientes de esta ecuación son de la forma  $e^{\pm\beta(x_3-h_1)}$ , de modo que  $\varphi(\omega, x_3; \beta) = C_1(\omega; \beta) e^{\beta(x_3-h_1)} + C_2(\omega; \beta) e^{-\beta(x_3-h_1)}$  es una solución general en la región  $(-\infty, h_1)$ , donde  $C_1$  y  $C_2$  son coeficientes arbitrarios. Para la región  $(h_2, \infty)$  la ecuación diferencial toma la misma forma

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \varphi(\omega, x_3) = \beta^2 \varphi(\omega, x_3), \quad h_2 < x_3 < \infty. \quad (5.2.6)$$

Las soluciones linealmente independientes de esta ecuación son de la forma  $e^{\pm\beta(x_3-h_1)}$ , de modo que  $\varphi(\omega, x_3; \beta) = C_5(\omega; \beta) e^{\beta(x_3-h_1)} + C_6(\omega; \beta) e^{-\beta(x_3-h_1)}$  es una solución general en la región  $(h_2, \infty)$ , donde  $C_5$  y  $C_6$  son coeficientes arbitrarios. Finalmente en la región  $(h_1, h_2)$  la ecuación diferencial toma la forma

$$-\frac{\partial}{\partial x_3} \left( \nu_2^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial \varphi(\omega, x_3)}{\partial x_3} \right) + \nu_2^{-1}(\omega, x_3) V_0(\omega, x_3) \varphi(\omega, x_3) = -\beta^2 \nu_2^{-1}(\omega, x_3) \varphi(\omega, x_3), \quad h_1 < x_3 < h_2. \quad (5.2.7)$$

Denotemos por  $\psi_1$  y  $\psi_2$  las soluciones linealmente independientes de esta ecuación de modo que

$$\psi(\omega, x_3; \beta) = C_3(\omega; \beta) \psi_1(\omega, x_3; \beta) + C_4(\omega; \beta) \psi_2(\omega, x_3; \beta)$$

es una solución general en la región de  $(h_1, h_2)$ , donde  $C_3$  y  $C_4$  son coeficientes arbitrarios. Las condiciones de continuidad en las interfaces  $x_3 = h_1$  y  $x_3 = h_2$  permiten calcular cuatro de las constantes arbitrarias. La condición asintótica conforme  $x_3 \rightarrow -\infty$  implica que  $C_2 = 0$ , por otra parte la condición asintótica conforme  $x_3 \rightarrow \infty$  (5.2.4) da como resultado que  $C_5 = 0$ . Esta condición da lugar a la relación de dispersión

$$\psi(\omega, h_2; \beta) + \frac{\nu_3(\omega)}{\nu_2(\omega, h_2)\beta} (\psi)'_{x_3}(\omega, h_2; \beta) = 0, \beta \neq 0.$$

Finalmente la solución de la ecuación diferencial se expresa como una función continua a trozos

$$\tilde{\varphi}_j(\omega, x_3; \beta_j) = \begin{cases} e^{\beta_j(x_3-h_1)}, & -\infty < x_3 < h_1, \\ \psi(\omega, x_3; \beta_j), & h_1 < x_3 < h_2, \\ \psi(\omega, h_2; \beta_j) e^{\beta_j(h_2-x_3)}, & h_2 < x_3 < \infty, \end{cases}$$

donde  $\beta_j$  es un cero de la ecuación de dispersión. La eigen-función normalizada asociada al eigen-valor  $\alpha_j^2 = -\beta_j^2$  es

$$\varphi_j(\omega, x_3; \beta_j) = \frac{1}{M_j} \begin{cases} e^{\beta_j(x_3-h_1)}, & -\infty < x_3 < h_1, \\ \psi(\omega, x_3; \beta_j), & h_1 < x_3 < h_2, \\ \psi(\omega, h_2; \beta_j) e^{\beta_j(h_2-x_3)}, & h_2 < x_3 < \infty, \end{cases} \quad (5.2.8)$$

donde  $M_j = \|\tilde{\varphi}_j(\omega, x_3; \beta_j)\|_{\mathcal{H}_{\nu, \omega}}$  es la constante de normalización correspondiente.

Las eigen-funciones generalizadas normalizadas correspondientes a  $\alpha^2 > 0$ , denotadas por  $\{\phi_{01}(\omega, x_3; \alpha), \phi_{02}(\omega, x_3; \alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$  son soluciones acotadas de la ecuación (5.2.5), las cuales no pertenecen al espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_{\nu, \omega}$ . Consideremos la ecuación diferencial en la región  $(-\infty, h_1)$ , la cual toma la forma

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \varphi(\omega, x_3) = -\alpha^2 \varphi(\omega, x_3), \quad -\infty < x_3 < h_1.$$

Las soluciones linealmente independientes de esta ecuación son de la forma  $e^{\pm i\alpha(x_3-h_1)}$ , de modo que  $\varphi(\omega, x_3; \alpha) = C_1(\omega, \alpha) e^{i\alpha(x_3-h_1)} + C_2(\omega, \alpha) e^{-i\alpha(x_3-h_1)}$  es una solución general en la región  $(-\infty, h_1)$ , donde  $C_1$  y  $C_2$  son coeficientes arbitrarios. Para la región en donde  $(h_2, \infty)$  la ecuación diferencial toma la misma forma

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \varphi(\omega, x_3) = -\alpha^2 \varphi(\omega, x_3), \quad h_2 < x_3 < \infty.$$

Las soluciones linealmente independientes de esta ecuación son de la forma  $e^{\pm i\alpha(h_2-x_3)}$ , de modo que  $\varphi(\omega, x_3; \alpha) = C_5(\omega, \alpha) e^{i\alpha(h_2-x_3)} + C_6(\omega, \alpha) e^{-i\alpha(h_2-x_3)}$  es una solución general en la región  $(h_2, \infty)$ , donde  $C_5$  y  $C_6$  son coeficientes arbitrarios. Finalmente en la región  $(h_1, h_2)$  la ecuación diferencial toma la forma

$$-\frac{\partial}{\partial x_3} \left( \nu_2^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial \varphi(\omega, x_3)}{\partial x_3} \right) + \nu_2^{-1}(\omega, x_3) V_0(\omega, x_3) \varphi(\omega, x_3) = \alpha^2 \nu_2^{-1}(\omega, x_3) \varphi(\omega, x_3), \quad h_1 < x_3 < h_2. \quad (5.2.9)$$

Denotemos por  $\psi_1$  y  $\psi_2$  las soluciones linealmente independientes de esta ecuación de modo que

$$\phi(\omega, x_3; \alpha) = C_3 \psi_1(\omega, x_3; \alpha) + C_4 \psi_2(\omega, x_3; \alpha)$$

es una solución general. Finalmente las condiciones de continuidad en las interfaces  $x_3 = h_1$  y  $x_3 = h_2$  permiten calcular cuatro de las constantes arbitrarias restantes lo cual da lugar a la siguiente solución de la ecuación diferencial.

Si suponemos que la fuente de las ondas se encuentra a la derecha de la región de interacción ( $x_3 > h_2$ ), entonces existirán una onda incidente  $e^{i\alpha(x_3-h_2)}$  y una onda reflejada  $e^{-i\alpha(x_3-h_2)}$ . A la salida de la región de interacción ( $x_3 < h_1$ ) tendremos solamente una onda transmitida  $e^{i\alpha(x_3-h_1)}$ . Esto permite definir una primera familia de eigen-funciones generalizadas normalizadas

$$\phi_{01}(\omega, x_3; \alpha) := \frac{1}{M_\alpha^+} \begin{cases} e^{i\alpha(x_3-h_1)}, & -\infty < x_3 < h_1, \\ \phi_1(\omega, x_3; \alpha), & h_1 < x_3 < h_2, \\ \phi_1(\omega, h_2; \alpha) \cos \alpha(x_3 - h_2) + \frac{\nu_3(\omega)}{\nu_2(\omega, h_2)\alpha} (\phi_1)'_{x_3}(\omega, h_2; \alpha) \sin \alpha(x_3 - h_2), & h_2 < x_3 < \infty, \end{cases} \quad (5.2.10)$$

$$M_\alpha^+ := \sqrt{\frac{\pi}{2\nu_3(\omega)}} \sqrt{\phi_1^2(\omega, h_2; \alpha) + \left( \frac{\nu_3(\omega)}{\nu_2(\omega, h_2)\alpha} (\phi_1)'_{x_3}(\omega, h_2; \alpha) \right)^2},$$

donde  $\phi_1(\omega, x_3; \alpha)$  es una solución del problema con valores en la frontera

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\nu, \omega} \phi_1(\omega, x_3; \alpha) &= \alpha^2 \phi_1(\omega, x_3; \alpha), \quad h_1 < x_3 < h_2, \\ [\phi_1(\omega, x_3; \alpha)]_{x_3=h_1} &= 0, \quad [\nu_2^{-1}(x_3) (\phi_1)'_{x_3}(\omega, x_3; \alpha)]_{x_3=h_1} = 0. \end{aligned}$$

Si ahora suponemos que la fuente de las ondas se encuentra a la izquierda de la región de interacción ( $x_3 < h_1$ ), entonces existirán una onda incidente  $e^{-i\alpha(x_3-h_1)}$  y una onda reflejada  $e^{+i\alpha(x_3-h_1)}$ . A la salida de la región de interacción ( $x_3 > h_2$ ) tendremos solamente una onda transmitida  $e^{-i\alpha(x_3-h_2)}$ . Esto permite definir una segunda familia de eigen-funciones generalizadas normalizadas como sigue

$$\phi_{02}(\omega, x_3; \alpha) := \frac{1}{M_\alpha^-} \begin{cases} \phi_2(\omega, h_1; \alpha) \cos \alpha(x_3 - h_1) + \frac{\nu_1(\omega)}{\nu_2(\omega, h_1)\alpha} (\phi_2)'_{x_3}(\omega, h_1; \alpha) \sin \alpha(x_3 - h_1), & -\infty < x_3 < h_1, \\ \phi_2(\omega, x_3; \alpha), & h_1 < x_3 < h_2, \\ e^{-i\alpha(x_3-h_2)}, & h_2 < x_3 < \infty, \end{cases} \quad (5.2.11)$$

$$M_\alpha^- := \sqrt{\frac{\pi}{2\nu_1(\omega)} \sqrt{\phi_2^2(\omega, h_1; \alpha) + \left( \frac{\nu_1(\omega)}{\nu_2(h_1, \omega)\alpha} (\phi_2)'_{x_3}(\omega, h_1; \alpha) \right)^2}},$$

donde  $\phi_2(\omega, x_3; \alpha)$  es solución del siguiente problema con valores en la frontera

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\nu, \omega} \phi_2(\omega, x_3; \alpha) &= \alpha^2 \phi_2(\omega, x_3; \alpha), \quad h_1 < x_3 < h_2, \\ [\phi_2(\omega, x_3; \alpha)]_{x_3=h_2} &= 0, \quad [\nu_2^{-1}(\omega, x_3) (\phi_2)'_{x_3}(\omega, x_3; \alpha)]_{x_3=h_2} = 0. \end{aligned}$$

El conjunto de eigen-funciones normalizadas  $\{\varphi_j(z; \beta)\}_{j=1}^N$  y las eigen-funciones generalizadas normalizadas  $\{\phi_{01}(z, \omega; \alpha), \phi_{02}(z, \omega; \alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{R}^+}$  forman un sistema completo de eigen-funciones en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_{\nu, \omega}$ . Por esta razón cualquier función  $f \in L^2(\mathbb{R})$  admite una expansión en eigen-funciones del operador  $\mathcal{L}_{\nu, \omega}$  como se muestra a continuación.

### Expansión en eigen-funciones en $\mathcal{H}_{\nu, \omega}$

**Teorema 1** ([6]). *Sea  $\{\varphi_j(x_3; \beta)\}_{j=1}^N$  un sistema de eigen-funciones normalizadas de  $\mathcal{H}_{\nu, \omega}$  y sean  $\{\phi_{01}(\omega, x_3; \alpha), \phi_{02}(\omega, x_3; \alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{R}^+}$  dos familias de eigen-funciones generalizadas normalizadas del operador  $\mathcal{H}_{\nu, \omega}$ . Entonces cada  $f \in L^2(\mathbb{R})$  admite una expansión de la forma*

$$f(x_3) = \sum_{j=1}^N f_j(\omega) \varphi_j(x_3) + \int_{\mathbb{R}} f_{01}(\omega, \alpha) \phi_{01}(\omega, x_3; \alpha) d\alpha + \int_{\mathbb{R}} f_{02}(\omega, \alpha) \phi_{02}(\omega, x_3; \alpha) d\alpha, \quad (5.2.12)$$

donde los coeficientes de esta expansión se calculan a partir del producto interno definido en  $\mathcal{H}_{\nu, \omega}$ .

$$\begin{aligned} f_j(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \nu^{-1}(\omega, x_3) f(x_3) \overline{\varphi_j(\omega, x_3)} dx_3, \quad j = 1, \dots, N; \\ f_{0m}(\omega, \alpha) &= \int_{\mathbb{R}} \nu^{-1}(\omega, x_3) f(x_3) \overline{\phi_{0m}(\omega, x_3; \alpha)} dx_3, \quad m = 1, 2. \end{aligned}$$

Además, la identidad de Parseval

$$\|f\|_{\mathcal{H}_{\nu, \omega}}^2 = \sum_{j=1}^N |f_j(\omega)|^2 + \int_{\mathbb{R}^+} |f_{01}(\omega, \alpha)|^2 d\alpha + \int_{\mathbb{R}^+} |f_{02}(\omega, \alpha)|^2 d\alpha$$

se cumple.

**Corolario 2.** *[[6]]Formalmente, la distribución de Dirac  $\delta(x_3 - x'_3)$  admite la expansión*

$$\begin{aligned}\delta(x_3 - x'_3) &= \nu^{-1}(\omega, x'_3) \sum_{j=1}^N \varphi_j(\omega, x_3) \overline{\varphi_j(\omega, x'_3)} \\ &+ \nu^{-1}(\omega, x'_3) \int_{\mathbb{R}^+} \phi_{01}(\omega, x_3; \alpha) \overline{\phi_{01}(\omega, x'_3; \alpha)} d\alpha \\ &+ \nu^{-1}(\omega, x'_3) \int_{\mathbb{R}^+} \phi_{02}(\omega, x_3; \alpha) \overline{\phi_{02}(\omega, x'_3; \alpha)} d\alpha,\end{aligned}$$

donde las integrales convergen en el sentido de las distribuciones.

### 5.3. La función de Green para las ondas polarizadas

A continuación determinaremos la función de Green asociada al problema que describe la propagación de ondas polarizadas en la guía de ondas, es decir, el siguiente problema con valores en la frontera que se obtuvo anteriormente

$$\left[ -\xi^2 + \nu(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + k_0^2 n^2(\omega, x_3) \right] \widehat{u}(\omega, \xi, x_3) = \widehat{f}(\omega, \xi, x_3), \quad (5.3.1a)$$

$$\left[ \widehat{u}(\omega, \xi, x_3) \right]_{x_3=h_m} = 0, \quad \left[ \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial \widehat{u}(\omega, \xi, x_3)}{\partial x_3} \right]_{x_3=h_m} = 0, \quad m = 1, 2, \quad (5.3.1b)$$

donde el número de onda  $k$  se expresa ahora en términos del índice de refracción del medio, más precisamente

$$n(\omega, x_3) := \begin{cases} n_1(\omega), & -\infty < x_3 < h_1, \\ n_2(\omega, x_3), & h_1 < x_3 < h_2, \\ n_3(\omega), & h_2 < x_3 < \infty \end{cases} \quad (5.3.2)$$

la cual representa el perfil del índice de refracción de la guía de ondas, y el término  $k_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega/c_0$  es el número de onda en el vacío asociado a la longitud de onda de trabajo  $\lambda_0$ , donde  $c_0$  es la velocidad de fase en el vacío. El problema asociado que define la función de Green es el siguiente

$$\left[ -\xi^2 + \nu(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + k_0^2 n^2(\omega, x_3) \right] \widehat{G}_{2D}(\omega, \xi, x_3; x'_3) = \delta(x_3 - x'_3), \quad (5.3.3a)$$

$$\left[ \widehat{G}_{2D}(\omega, \xi, x_3; x'_3) \right]_{x_3=h_m} = 0, \quad \left[ \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial \widehat{G}_{2D}(\omega, \xi, x_3; x'_3)}{\partial x_3} \right]_{x_3=h_m} = 0, \quad m = 1, 2, \quad (5.3.3b)$$

donde  $\widehat{G}_{2D}(\omega, \xi, x_3; x'_3)$  es la transformada de Fourier con respecto a  $x_1$  de la función de Green  $G_{2D}(\omega, x_1, x_3; x'_3)$ .

La solución  $\widehat{u}(\omega, \xi, x_3)$  del problema con valores en la frontera (5.3.1) está dada por la convolución

$$\widehat{u}(\omega, \xi, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{G}_{2D}(\omega, \xi, x_3; x'_3) \widehat{f}(\omega, \xi, x'_3) dx'_3. \quad (5.3.4)$$

Una vez obtenida esta función será necesario aplicar la transformada de Fourier inversa con respecto a  $x_1$  y después con respecto al tiempo para obtener la solución  $u(t, x_1, x_3)$  del problema original que depende de  $(x_1, x_3)$  y del tiempo  $t$ .

Podemos ver que el problema unidimensional tiene una forma similar a la del problema espectral auxiliar, la única diferencia es que en lugar de tener a  $V(\omega, x_3)$  se tiene una función  $k_0^2 n^2(\omega, x_3)$  que no se anula fuera de la región del núcleo  $(h_1, h_2)$ . Sin embargo, es posible representar la ecuación (5.3.1) en términos del

operador  $\mathcal{L}_{\nu,\omega}$  al restar y sumar un término que permita anular a la función  $k_0^2 n^2(\omega, x_3)$  fuera de la región del núcleo como sigue

$$\left[ -\xi^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \nu(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + k_0^2 n^2(\omega, x_3) - k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) \right] \widehat{G}_{2D}(\omega, \xi, x_3; x'_3) = \delta(x_3 - x'_3),$$

donde la función  $\tilde{n}^2(\omega, x_3)$  se define como

$$\tilde{n}(\omega, x_3) := \begin{cases} n_1(\omega), & -\infty < x_3 < h_1, \\ \frac{n_1(\omega) + n_3(\omega)}{2}, & h_1 < x_3 < h_2, \\ n_3(\omega), & h_2 < x_3 < \infty. \end{cases} \quad (5.3.5)$$

Por lo tanto, podemos identificar que el término  $V_0(\omega, x_3) := k_0^2 (n_2^2(\omega, x_3) - \tilde{n}^2(\omega, x_3))$  juega el papel de la función potencial en el problema espectral auxiliar, por lo tanto podemos reescribir la ecuación (5.3.3a) como

$$\left[ -\xi^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \nu(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + V_0(x_3, \omega) \right] \widehat{G}_{2D}(\omega, \xi, x_3; x'_3) = \delta(x_3 - x'_3),$$

de modo que el problema con valores en la frontera anterior puede ser expresado en términos del operador  $\mathcal{L}_{\nu,\omega}$  como sigue

$$\left[ -\xi^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \mathcal{L}_{\nu,\omega} \right] \widehat{G}_{2D}(\omega, x_3; x'_3) = \delta(x_3 - x'_3), \quad (5.3.6a)$$

$$\left[ \widehat{G}_{2D}(\omega, \xi, x_3; x'_3) \right]_{x_3=h_m} = 0, \quad \left[ \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \widehat{G}_{2D}(\omega, \xi, x_3; x'_3) \right]_{x_3=h_m} = 0, \quad m = 1, 2. \quad (5.3.6b)$$

Asumamos que la solución generalizada de este problema admite una expansión formal en términos de las eigen-funciones del operador  $\mathcal{L}_{\nu,\omega}$

$$\begin{aligned} \widehat{G}_{2D}(\omega, \xi, x_3; x'_3) &= \sum_{j=1}^{N(\omega)} A_j(\omega, \xi, x_3; x'_3) \varphi_j(\omega, x_3) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^+} B_\alpha(\omega, \xi, x_3; x'_3) \phi_{01}(\omega, x_3; \alpha) d\alpha \\ &+ \int_{\mathbb{R}^+} C_\alpha(\omega, \xi, x_3; x'_3) \phi_{02}(\omega, x_3; \alpha) d\alpha, \end{aligned} \quad (5.3.7a)$$

donde  $A_j(\omega, \xi, x_3; x'_3)$ ,  $B_\alpha(\omega, \xi, x_3; x'_3)$  y  $C_\alpha(\omega, \xi, x_3; x'_3)$ , son coeficientes a determinar. La construcción de la función de Green  $\widehat{G}_{2D}$  está determinada por la descomposición espectral de la distribución de Dirac  $\delta(x_3 - x'_3)$  y de la solución fundamental del operador de Helmholtz unidimensional que satisface el principio de absorción al límite conforme  $|x_1| \rightarrow \infty$ . En el problema (5.3.6) sustituimos formalmente la expansión de  $\widehat{G}_{2D}(\omega, \xi, x_3; x'_3)$

$$\begin{aligned} &\left[ -\xi^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \mathcal{L}_{\nu,\omega} \right] \sum_{j=1}^{N(\omega)} A_j(\omega, \xi, x_3; x'_3) \varphi_j(\omega, x_3) + \\ &\left[ -\xi^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \mathcal{L}_{\nu,\omega} \right] \int_{\mathbb{R}^+} B_\alpha(\omega, \xi, x_3; x'_3) \phi_{01}(\omega, x_3; \alpha) d\alpha \\ &\left[ -\xi^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \mathcal{L}_{\nu,\omega} \right] \int_{\mathbb{R}^+} C_\alpha(\omega, \xi, x_3; x'_3) \phi_{02}(\omega, x_3; \alpha) d\alpha = \delta(x_3 - x'_3). \end{aligned}$$

Igualando término a término la expansión anterior con la expansión de la distribución de Dirac dada en el

Corolario (2), obtenemos tres igualdades

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N(\omega)} A_j(\omega, \xi, x_3; x'_3) [-\xi^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \mathcal{L}_{\nu, \omega}] \varphi_j(\omega, x_3) &= \nu^{-1}(\omega, x'_3) \sum_{j=1}^{N(\omega)} \varphi_j(\omega, x_3) \overline{\varphi_j(\omega, x'_3)}, \\ \int_{\mathbb{R}^+} B_\alpha(\omega, \xi, x_3; x'_3) [-\xi^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \mathcal{L}_{\nu, \omega}] \phi_{01}(\omega, x_3; \alpha) d\alpha &= \nu^{-1}(\omega, x'_3) \int_{\mathbb{R}^+} \phi_{01}(\omega, x_3; \alpha) \overline{\phi_{01}(\omega, x'_3; \alpha)} d\alpha, \\ \int_{\mathbb{R}^+} C_\alpha(\omega, \xi, x_3; x'_3) [-\xi^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \mathcal{L}_{\nu, \omega}] \phi_{02}(\omega, x_3; \alpha) d\alpha &= \nu^{-1}(\omega, x'_3) \int_{\mathbb{R}^+} \phi_{02}(\omega, x_3; \alpha) \overline{\phi_{02}(\omega, x'_3; \alpha)} d\alpha, \end{aligned}$$

que permiten determinar los coeficientes  $A_j$ ,  $B_\alpha$  y  $C_\alpha$  de forma directa, a saber

$$\begin{aligned} A_j(\omega, \xi, x_3; x'_3) &= \frac{\nu^{-1}(\omega, x'_3)}{-\xi^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) - \beta_j^2} \overline{\varphi_j(\omega, x'_3)}, \\ B_\alpha(\omega, \xi, x_3; x'_3) &= \frac{\nu^{-1}(\omega, x'_3)}{-\xi^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \alpha^2} \overline{\phi_{01}(\omega, x'_3; \alpha)}, \\ C_\alpha(\omega, \xi, x_3; x'_3) &= \frac{\nu^{-1}(\omega, x'_3)}{-\xi^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \alpha^2} \overline{\phi_{02}(\omega, x'_3; \alpha)}. \end{aligned}$$

Una vez encontrados los coeficientes de la expansión de  $\widehat{G}_{2D}(\omega, \xi, x_3; x'_3)$ , los sustituimos en 5.3.7a para obtener

$$\begin{aligned} \widehat{G}_{2D}(\omega, \xi, x_3; x'_3) &= \sum_{j=1}^{N(\omega)} \left( \frac{\nu^{-1}(\omega, x'_3)}{-\xi^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) - \beta_j^2} \right) \varphi_j(\omega, x_3) \overline{\varphi_j(\omega, x'_3)} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^+} \left( \frac{\nu^{-1}(\omega, x'_3)}{-\xi^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \alpha^2} \right) \phi_{01}(\omega, x_3; \alpha) d\alpha \overline{\phi_{01}(\omega, x'_3; \alpha)} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^+} \left( \frac{\nu^{-1}(\omega, x'_3)}{-\xi^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \alpha^2} \right) \phi_{02}(\omega, x_3; \alpha) d\alpha \overline{\phi_{02}(\omega, x'_3; \alpha)}. \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Para obtener una única solución al problema (5.3.6) que define a la función de Green, aplicamos la transformada inversa de Fourier y el principio de absorción al límite, ambos con respecto a  $x_1$ , lo cual conduce a

$$\begin{aligned} G_{2D}(\omega, x_1, x_3; x'_3) &= \sum_{j=1}^{N(\omega)} \nu^{-1}(\omega, x'_3) \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi x_1}}{-\xi^2 + i\varepsilon + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) - \beta_j^2} d\xi \right) \varphi_j(\omega, x_3) \overline{\varphi_j(\omega, x'_3)} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^+} \nu^{-1}(\omega, x'_3) \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi x_1}}{-\xi^2 + i\varepsilon + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \alpha^2} d\xi \right) \phi_{01}(\omega, x_3; \alpha) \overline{\phi_{01}(\omega, x'_3; \alpha)} d\alpha \\ &+ \int_{\mathbb{R}^+} \nu^{-1}(\omega, x'_3) \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi x_1}}{-\xi^2 + i\varepsilon + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \alpha^2} d\xi \right) \phi_{02}(\omega, x_3; \alpha) \overline{\phi_{02}(\omega, x'_3; \alpha)} d\alpha. \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

El cálculo de las integrales que involucran la transformada inversa de Fourier es bien conocido (ver, *e.g.*, [38, pp. 152-153]) y se expresa en términos de la siguiente fórmula

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi x_1}}{-\xi^2 + i\varepsilon + \vartheta^2} d\xi = \frac{e^{i\vartheta|x_1|}}{2i\vartheta}, \quad \vartheta > 0.$$

De acuerdo con este resultado la función de Green toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} G_{2D}(\omega, x_1, x_3; x'_3) &= \nu^{-1}(\omega, x'_3) \sum_{j=1}^{N(\omega)} \frac{e^{i\kappa_j|x_1|}}{2i\kappa_j} \varphi_j(\omega, x_3) \overline{\varphi_j(\omega, x'_3)} \\ &+ \nu^{-1}(\omega, x'_3) \int_{\mathbb{R}^+} \frac{e^{i\gamma|x_1|}}{2i\gamma} \phi_{01}(\omega, x_3; \alpha) \overline{\phi_{01}(\omega, x'_3; \alpha)} d\alpha \\ &+ \nu^{-1}(\omega, x'_3) \int_{\mathbb{R}^+} \frac{e^{i\gamma|x_1|}}{2i\gamma} \phi_{02}(\omega, x_3; \alpha) \overline{\phi_{02}(\omega, x'_3; \alpha)} d\alpha, \end{aligned}$$

donde

$$\kappa_j(\omega, x_3) := \sqrt{k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) - \beta_j^2}, \quad \gamma(\omega, x_3, \alpha) := \sqrt{k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \alpha^2}.$$

Para que la expresión  $\sqrt{k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) - \beta_j^2}$  tenga sentido es necesario que  $k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) - \beta_j^2 > 0$ . Observe que las expresiones

$$g_j(\omega, x_1, x_3; x'_3) = \nu^{-1}(\omega, x'_3) \frac{e^{i\kappa_j |x_1|}}{2i\kappa_j} \varphi_j(\omega, x_3) \overline{\varphi_j(\omega, x'_3)}$$

están asociados a los modos guiados los cuales decrecen exponencialmente conforme  $|x_3| \rightarrow \infty$ , como se puede observar en la expresión (5.2.8) que define a las eigen-funciones  $\varphi_j$  del operador  $\mathcal{L}_{\nu, \omega}$ , y son oscilatorias con respecto a  $x_1$ . Por otra parte las expresiones

$$g_{0,m}(\omega, x_1, x_3; x'_3) = \nu^{-1}(\omega, x'_3) \int_{\mathbb{R}^+} \frac{e^{i\gamma |x_1|}}{2i\gamma} \phi_{0m}(\omega, x_3; \alpha) \overline{\phi_{0m}(\omega, x'_3; \alpha)} d\alpha, \quad m = 1, 2$$

están asociadas a las ondas laterales en la guía (ver *e.g.* [41] y [13]), los cuales son oscilatorios conforme  $|x_3| \rightarrow \infty$ , así como con respecto a  $x_1$ .

## 5.4. La función de Green para las ondas no-polarizadas

El siguiente problema

$$\left[ -|\boldsymbol{\xi}|^2 + \nu(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + k_0^2 n^2(\omega, x_3) \right] \widehat{v}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3) = \widehat{h}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3), \quad (5.4.1a)$$

$$[\widehat{v}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3)]_{x_3=h_m} = 0, \quad \left[ \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial \widehat{v}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3)}{\partial x_3} \right]_{x_3=h_m} = 0, \quad m = 1, 2 \quad (5.4.1b)$$

caracteriza la propagación de ondas transversales no-polarizadas en la guía de ondas, el cual se encuentra íntimamente ligado al problema de la función de Green

$$\left[ -|\boldsymbol{\xi}|^2 + \nu(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + k_0^2 n^2(\omega, x_3) \right] \widehat{G}_{3D}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3) = \delta(x_3 - x'_3), \quad (5.4.2a)$$

$$\left[ \widehat{G}_{3D}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3) \right]_{x_3=h_m} = 0, \quad \left[ \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial \widehat{G}_{3D}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3)}{\partial x_3} \right]_{x_3=h_m} = 0. \quad (5.4.2b)$$

donde  $\widehat{G}_{3D}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3)$  es la transformada de Fourier con respecto a  $\mathbf{x}$  de la función de Green  $G_{3D}(\omega, \mathbf{x}, x_3; x'_3)$ . La solución  $\widehat{v}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3)$  del problema con valores en la frontera 5.4.1 es

$$\widehat{v}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{G}_{3D}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3) \widehat{f}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x'_3) dx'_3. \quad (5.4.3)$$

Una vez obtenida esta convolución será necesario aplicar la transformada inversa de Fourier con respecto a  $\mathbf{x}$  y después con respecto al tiempo para obtener la solución  $v(t, \mathbf{r})$  del problema original que depende de  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$  y del tiempo  $t$ .

Podemos ver que el problema unidimensional tiene una forma similar a la del problema espectral auxiliar introducido anteriormente, la única diferencia es que en lugar de tener a  $V(\omega, x_3)$  se tiene una función  $k_0^2 n^2(\omega, x_3)$  que no se anula fuera de la región de interacción  $(h_1, h_2)$ . Sin embargo es posible representar la ecuación 5.4.1 en términos del operador  $\mathcal{L}_{\nu, \omega}$  al restar y sumar un término que permita anular a la función  $k_0^2 n^2(\omega, x_3)$  fuera de la región de interacción tal como se hizo en la sección anterior

$$\left[ -|\boldsymbol{\xi}|^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \nu(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + k_0^2 n^2(\omega, x_3) - k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) \right] \widehat{G}_{3D}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3) = \delta(x_3 - x'_3),$$

donde la función  $\tilde{n}^2(\omega, x_3)$  fue definida en (5.3.5). Por lo tanto, podemos identificar que el término  $V_0(\omega, x_3) := k_0^2(n_2^2(\omega, x_3) - \tilde{n}^2(\omega, x_3))$  juega el papel del potencial  $V_0(\omega, x_3)$  en el problema espectral auxiliar, por lo tanto podemos reescribir la ecuación (5.4.2a) como

$$\left[ -|\boldsymbol{\xi}|^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \nu(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + V_0(\omega, x_3) \right] \widehat{G}_{3D}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3) = \delta(x_3 - x'_3).$$

En términos del operador  $\mathcal{L}_{\nu, \omega}$  el problema con valores en la frontera toma la forma

$$\left[ -|\boldsymbol{\xi}|^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \mathcal{L}_{\nu, \omega} \right] \widehat{G}_{3D}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3) = \delta(x_3 - x'_3), \quad (5.4.4a)$$

$$\left[ \widehat{G}_{3D}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3) \right]_{x_3=h_m} = 0, \quad \left[ \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \widehat{G}_{3D}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3) \right]_{x_3=h_m} = 0, \quad m = 1, 2. \quad (5.4.4b)$$

Asumamos que la solución generalizada de este problema admite la expansión formal en términos de las eigen-funciones del operador  $\mathcal{L}_{\nu, \omega}$

$$\begin{aligned} \widehat{G}_{3D}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3) &= \sum_{j=1}^{N(\omega)} A_j(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3) \varphi_j(\omega, x_3) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^+} B_\alpha(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3) \phi_{01}(\omega, x_3; \alpha) d\alpha \\ &+ \int_{\mathbb{R}^+} C_\alpha(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3) \phi_{02}(\omega, x_3; \alpha) d\alpha, \end{aligned} \quad (5.4.5a)$$

donde  $A_j(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3)$ ,  $B_\alpha(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3)$  y  $C_\alpha(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3)$ , son coeficientes a determinar. La construcción de la función de Green está determinada por la descomposición espectral de la delta de Dirac  $\delta(x_3 - x'_3)$  y de la solución fundamental del operador de Helmholtz bidimensional que satisface el principio de absorción al límite conforme  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . En el problema 5.4.4 sustituimos la función  $\widehat{G}_{3D}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3)$

$$\begin{aligned} &\left[ -|\boldsymbol{\xi}|^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \mathcal{L}_{\nu, \omega} \right] \sum_{j=1}^{N(\omega)} A_j(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3) \varphi_j(\omega, x_3) + \\ &\left[ -|\boldsymbol{\xi}|^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \mathcal{L}_{\nu, \omega} \right] \int_{\mathbb{R}^+} B_\alpha(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3) \phi_{01}(\omega, x_3; \alpha) d\alpha \\ &\left[ -|\boldsymbol{\xi}|^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \mathcal{L}_{\nu, \omega} \right] \int_{\mathbb{R}^+} C_\alpha(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3) \phi_{02}(\omega, x_3; \alpha) d\alpha = \delta(x_3 - x'_3). \end{aligned}$$

Igualando término a término la expansión anterior con la expansión de la delta de Dirac dada en el Corolario (2), obtenemos tres igualdades

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N(\omega)} A_j(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3) \left[ -|\boldsymbol{\xi}|^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \mathcal{L}_{\nu, \omega} \right] \varphi_j(\omega, x_3) &= \nu^{-1}(\omega, x'_3) \sum_{j=1}^{N(\omega)} \varphi_j(\omega, x_3) \overline{\varphi_j(\omega, x'_3)}, \\ \int_{\mathbb{R}^+} B_\alpha(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3) \left[ -|\boldsymbol{\xi}|^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \mathcal{L}_{\nu, \omega} \right] \phi_{01}(\omega, x_3; \alpha) d\alpha &= \nu^{-1}(\omega, x'_3) \int_{\mathbb{R}^+} \phi_{01}(\omega, x_3; \alpha) \overline{\phi_{01}(\omega, x'_3; \alpha)} d\alpha, \\ \int_{\mathbb{R}^+} C_\alpha(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3) \left[ -|\boldsymbol{\xi}|^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \mathcal{L}_{\nu, \omega} \right] \phi_{02}(\omega, x_3; \alpha) d\alpha &= \nu^{-1}(\omega, x'_3) \int_{\mathbb{R}^+} \phi_{02}(\omega, x_3; \alpha) \overline{\phi_{02}(\omega, x'_3; \alpha)} d\alpha, \end{aligned}$$

por último haciendo las operaciones indicadas determinamos los coeficientes  $A_j$ ,  $B_\alpha$  y  $C_\alpha$

$$\begin{aligned} A_j(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3) &= \frac{\nu^{-1}(\omega, x'_3)}{-|\boldsymbol{\xi}|^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) - \beta_j^2} \overline{\varphi_j(\omega, x'_3)}, \\ B_\alpha(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3) &= \frac{\nu^{-1}(\omega, x'_3)}{-|\boldsymbol{\xi}|^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \alpha^2} \overline{\phi_{01}(\omega, x'_3; \alpha)}, \\ C_\alpha(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3) &= \frac{\nu^{-1}(\omega, x'_3)}{-|\boldsymbol{\xi}|^2 + k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \alpha^2} \overline{\phi_{02}(\omega, x'_3; \alpha)}. \end{aligned}$$

Una vez encontrados los términos de la expansión  $\widehat{G}_{3D}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3)$  en 5.4.5a sustituimos los coeficientes para obtener

$$\begin{aligned} \widehat{G}_{3D}(\omega, \boldsymbol{\xi}, x_3; x'_3) &= \sum_{j=1}^{N(\omega)} \left( \frac{\nu^{-1}(\omega, x'_3)}{-|\boldsymbol{\xi}|^2 + k_0^2 \bar{n}^2(\omega, x_3) - \beta_j^2} \right) \overline{\varphi_j(\omega, x'_3)} \varphi_j(\omega, x_3) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^+} \left( \frac{\nu^{-1}(\omega, x'_3)}{-|\boldsymbol{\xi}|^2 + k_0^2 \bar{n}^2(\omega, x_3) + \alpha^2} \right) \overline{\phi_{01}(\omega, x'_3; \alpha)} \phi_{01}(\omega, x_3; \alpha) d\alpha \\ &+ \int_{\mathbb{R}^+} \left( \frac{\nu^{-1}(\omega, x'_3)}{-|\boldsymbol{\xi}|^2 + k_0^2 \bar{n}^2(\omega, x_3) + \alpha^2} \right) \overline{\phi_{02}(\omega, x'_3; \alpha)} \phi_{02}(\omega, x_3; \alpha) d\alpha. \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Para obtener una única solución al problema 5.4.4 de la función de Green, aplicamos la transformada inversa de Fourier con respecto a  $\mathbf{x}$  y el principio de absorción al límite con respecto a  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , lo cual conduce a

$$\begin{aligned} G_{3D}(\omega, \mathbf{r}; x'_3) &= \sum_{j=1}^{N(\omega)} \nu^{-1}(\omega, x'_3) \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}}}{-|\boldsymbol{\xi}|^2 + i\varepsilon + k_0^2 \bar{n}^2(\omega, x_3) - \beta_j^2} d\boldsymbol{\xi} \right) \varphi_j(\omega, x_3) \overline{\varphi_j(\omega, x'_3)} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^+} \nu^{-1}(\omega, x'_3) \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}}}{-|\boldsymbol{\xi}|^2 + i\varepsilon + k_0^2 \bar{n}^2(\omega, x_3) + \alpha^2} d\boldsymbol{\xi} \right) \phi_{01}(\omega, x_3; \alpha) \overline{\phi_{01}(\omega, x'_3; \alpha)} d\alpha \\ &+ \int_{\mathbb{R}^+} \nu^{-1}(\omega, x'_3) \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}}}{-|\boldsymbol{\xi}|^2 + i\varepsilon + k_0^2 \bar{n}^2(\omega, x_3) + \alpha^2} d\boldsymbol{\xi} \right) \phi_{02}(\omega, x_3; \alpha) \overline{\phi_{02}(\omega, x'_3; \alpha)} d\alpha. \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

El cálculo de las integrales que involucran la transformada inversa de Fourier es bien conocido (ver, *e.g.*, [38, pp. 153-154]) y se expresa en términos de la función de Hankel de primer tipo y orden cero  $H_0^{(1)}$  como sigue

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}}}{-|\boldsymbol{\xi}|^2 + i\varepsilon + k^2} d\boldsymbol{\xi} = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x}|).$$

De esta manera la función de Green se expresa por

$$\begin{aligned} G_{3D}(\omega, \mathbf{r}; x'_3) &= \sum_{j=1}^{N(\omega)} \nu^{-1}(\omega, x'_3) \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\kappa_j |\mathbf{x}|) \varphi_j(\omega, x_3) \overline{\varphi_j(\omega, x'_3)} \\ &\nu^{-1}(\omega, x'_3) \int_{\mathbb{R}^+} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\gamma |\mathbf{x}|) \phi_{01}(\omega, x_3; \alpha) \overline{\phi_{01}(\omega, x'_3; \alpha)} d\alpha \\ &\nu^{-1}(\omega, x'_3) \int_{\mathbb{R}^+} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\gamma |\mathbf{x}|) \phi_{02}(\omega, x_3; \alpha) \overline{\phi_{02}(\omega, x'_3; \alpha)} d\alpha, \end{aligned}$$

donde

$$\kappa_j(\omega, x_3) := \sqrt{k_0^2 \bar{n}^2(\omega, x_3) + \beta_j^2}, \quad \gamma(\omega, x_3, \alpha) := \sqrt{k_0^2 \bar{n}^2(\omega, x_3) - \alpha^2}.$$

Para que la expresión  $\sqrt{k_0^2 \bar{n}^2(\omega, x_3) + \beta_j^2}$  tenga sentido es necesario que  $k_0^2 \bar{n}^2(\omega, x_3) + \beta_j^2 > 0$  para cualquier  $x_3 \in \mathbb{R}$ . Observe que las expresiones

$$g_j(\omega, \mathbf{r}; x'_3) = \nu^{-1}(\omega, x'_3) \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\kappa_j |\mathbf{x}|) \varphi_j(\omega, x_3) \overline{\varphi_j(\omega, x'_3)}, \quad j = 1, \dots, N(\omega)$$

están asociados a los modos guiados los cuales decrecen exponencialmente conforme  $|x_3| \rightarrow \infty$ . Por otra parte las expresiones

$$g_{0,m}(\omega, \mathbf{r}; x'_3) = \nu^{-1}(\omega, x'_3) \int_{\mathbb{R}^+} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\gamma |\mathbf{x}|) \phi_{0m}(\omega, x_3; \alpha) \overline{\phi_{0m}(\omega, x'_3; \alpha)} d\alpha, \quad m = 1, 2$$

están asociadas a las ondas laterales en la guía, los cuales son oscilatorios conforme  $|x_3| \rightarrow \infty$  así como  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ .

En el siguiente capítulo se obtendrán estimaciones asintóticas de las expansiones de la función de Green obtenidas para los casos polarizado y no-polarizado. Estas estimaciones se basan en el comportamiento de la función de Green en la región del campo lejano y se calculan a partir del método de fase estacionaria.



## Capítulo 6

# Estimaciones asintóticas de la función de Green

### 6.1. Asintótica de la función de Green para las ondas polarizadas

A continuación se busca el comportamiento asintótico de las diferentes partes que componen a la función de Green  $G_{2D}$  que describe a las ondas polarizadas generadas por una fuente puntual. De acuerdo con el análisis del capítulo anterior se estableció que los modos guiados se comportan de la siguiente manera

$$g_j(\omega, x_1, x_3; x'_3) = \nu^{-1}(\omega, x_3^0) \frac{e^{i\kappa_j |x_1|}}{2i\kappa_j} \varphi_j(\omega, x_3) \overline{\varphi_j(\omega, x'_3)}, \quad j = 1, \dots, N,$$

lo cual demuestra el carácter ondulatorio con respecto a  $x_1$  de los modos guiados, los cuales se propagan como ondas planas en la dirección longitudinal  $x_1$ . Sin embargo el comportamiento asintótico de las ondas laterales debe establecerse a partir de las expresiones que los define

$$g_{0,m}(\omega, x_1, x_3; x'_3) = \nu^{-1}(\omega, x'_3) \int_{\mathbb{R}^+} \frac{e^{i\gamma |x_1|}}{2i\gamma} \phi_{0m}(\omega, x_3; \alpha) \overline{\phi_{0m}(\omega, x'_3; \alpha)} d\alpha, \quad m = 1, 2,$$

donde  $\gamma(\omega, x_3, \alpha) := \sqrt{k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) + \alpha^2}$  se definió anteriormente. Busquemos el término principal de la expresión asintótica anterior, la cual en general es una integral divergente. Por las definiciones de  $\phi_{01}(\omega, x_3; \alpha)$ ,  $\phi_{02}(\omega, x_3; \alpha)$  se tiene

$$g_{0,1}(\omega, x_1, x_3; x'_3) = \frac{\nu_1(\omega) e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi^3} \nu_2(\omega, x'_3)} \int_0^\infty \frac{e^{i\gamma |x_1|}}{\gamma} \frac{\alpha^2 \phi_1(\omega, x_3; \alpha) \overline{\phi_1(\omega, x'_3; \alpha)}}{\left[ \alpha^2 \phi_1^2(\omega, h_2; \alpha) + (\nu_1(\omega) \nu_2^{-1}(\omega, h_2) (\phi_1)_{x_3}'(\omega, h_2; \alpha))^2 \right]} d\alpha,$$

$$g_{0,2}(\omega, x_1, x_3; x'_3) = \frac{\nu_3(\omega) e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi^3} \nu_2(\omega, x'_3)} \int_0^\infty \frac{e^{i\gamma |x_1|}}{\gamma} \frac{\alpha^2 \phi_2(\omega, x_3; \alpha) \overline{\phi_2(\omega, x'_3; \alpha)}}{\left[ \alpha^2 \phi_2^2(\omega, h_1; \alpha) + (\nu_3(\omega) \nu_2^{-1}(\omega, h_1) (\phi_2)_{x_3}'(\omega, h_1; \alpha))^2 \right]} d\alpha.$$

Dado el carácter divergente de estas integrales es necesario buscar su regularización para obtener una expresión que describa el comportamiento de los ondas laterales, sin embargo usando el método de fase estacionaria es posible obtener el término principal de las asintóticas de estas integrales, para lo cual se usa la fórmula

$$\int_a^b f(x) e^{i\lambda s(x)} dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |s''(x_0)|}} e^{i\lambda s(x_0) + i\frac{\pi}{4} \text{sgn}(s''(x_0))} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{i}{2\lambda} \right)^k (s''(x_0))^{-k} \left( \frac{d}{dx} \right)^{2k} \left[ f(x) e^{i\lambda h(x, x_0)} \right]_{x=x_0} \right], \quad (6.1.1)$$

donde  $h(x, x_0) = s(x) - s(x_0) - \frac{1}{2} s''(x_0) (x - x_0)^2$ , y  $x_0$  representa un punto de fase estacionaria no degenerado localizado en el intervalo  $[a, b]$ , el cual se calcula a partir de las soluciones de la ecuación  $s'(x_0) = 0$ . Cuando se realizan las operaciones indicadas, se puede identificar que la función  $\gamma(\omega, x_3, \alpha)$  corresponde a la

fase de la integral, de modo que la ecuación  $(\gamma)'_{\alpha}(\omega, x_3, \alpha_0) = 0$  define los puntos de fase estacionaria  $\alpha_0$ . En este caso el único punto de fase estacionaria es  $\alpha_0 = 0$ . Al desarrollar la fórmula asintótica anterior resulta que el término dominante de la expansión anterior ocurre cuando  $k = 1$ . De acuerdo con esto los términos principales de las asintóticas son

$$g_{0,1}(\omega, x_1, x_3; x'_3) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) e^{i\frac{3\pi}{4}} \phi_1(\omega, x_3; 0) \overline{\phi_1(\omega, x'_3; 0)}}{\nu_1(\omega) \nu_2^{-1}(\omega, x'_3) (\nu_1(\omega) \nu_2^{-1}(\omega, h_2) \phi_1(\omega, h_2; 0))^2} \frac{e^{ik_0 \tilde{n}(\omega, x_3) |x_1|}}{(k_0 \tilde{n}(\omega, x_3) |x_1|)^{\frac{3}{2}}}, \quad |x_1| \rightarrow \infty,$$

$$g_{0,2}(\omega, x_1, x_3; x'_3) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k_0^2 \tilde{n}^2(\omega, x_3) e^{i\frac{3\pi}{4}} \phi_2(\omega, x_3; 0) \overline{\phi_2(\omega, x'_3; 0)}}{\nu_3(\omega) \nu_2^{-1}(\omega, x'_3) (\nu_3(\omega) \nu_2^{-1}(\omega, h_1) \phi_2(\omega, h_1; 0))^2} \frac{e^{ik_0 \tilde{n}(\omega, x_3) |x_1|}}{(k_0 \tilde{n}(\omega, x_3) |x_1|)^{\frac{3}{2}}}, \quad |x_1| \rightarrow \infty.$$

Se puede ver que los términos principales de las asintóticas de  $g_{0,m}(\omega, x_1, x_3; x'_3)$  ( $m = 1, 2$ ) se comporten como

$$g_{0,m}(\omega, x_1, x_3; x'_3) = \mathcal{O}\left(|x_1|^{-\frac{3}{2}}\right)$$

conforme  $|x_1| \rightarrow \infty$ , es decir en la región de campo lejano, su influencia es despreciable y la principal contribución en la asintótica de la función de Green se debe solamente a los modos guiados. De esta manera la asintótica de la función de Green esta dada por

$$G_{2D}(\omega, x_1, x_3; x'_3) \sim \frac{1}{2i} \nu^{-1}(\omega, x'_3) \sum_{j=1}^{N(\omega)} \frac{e^{i\chi_j(\omega, x_3) |x_1|}}{\chi_j(\omega, x_3)} \varphi_j(\omega, x_3) \overline{\varphi_j(\omega, x'_3)}, \quad |x_1| \rightarrow \infty. \quad (6.1.2)$$

## 6.2. Asintótica de la función de Green para las ondas no-polarizadas

En el capítulo anterior se determinó que la función de Green  $G_{3D}(\omega, \mathbf{r}; x'_3)$  se componía de una superposición de modos guiados y ondas laterales. La expresión que define los modos guiados es

$$g_{j,j}(\omega, \mathbf{x}, x_3; x'_3) = \nu^{-1}(\omega, x'_3) \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_j |\mathbf{x}|) \varphi_j(\omega, x_3) \overline{\varphi_j(\omega, x'_3)}, \quad j = 1, \dots, N,$$

mientras que la expresión para las ondas laterales es

$$g_{0,m}(\omega, \mathbf{x}, x_3; x'_3) = \nu^{-1}(\omega, x'_3) \int_{\mathbb{R}^+} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\gamma |\mathbf{x}|) \phi_{0m}(\omega, x_3; \alpha) \overline{\phi_{0m}(\omega, x'_3; \alpha)} d\alpha, \quad m = 1, 2.$$

El comportamiento de estas expresiones conforme  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  puede obtenerse a partir del comportamiento asintótico de la función de Hankel  $H_0^{(1)}$  de primer tipo de orden cero [1]

$$H_0^{(1)}(\varrho) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \varrho}} e^{i(\varrho - \pi/4)}, \quad |\varrho| \rightarrow \infty,$$

donde  $\varrho$  es un número complejo arbitrario que satisface  $-\pi < \arg \varrho < 2\pi$ . Con base en esta fórmula se obtienen las siguientes expresiones asintóticas para los modos guiados y las ondas laterales

$$g_{j,j}(\omega, \mathbf{x}, x_3; x'_3) \sim \nu^{-1}(\omega, x'_3) \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi}} \frac{e^{i\chi_j |\mathbf{x}|}}{\sqrt{\chi_j |\mathbf{x}|}} \varphi_j(\omega, x_3) \overline{\varphi_j(\omega, x'_3)}, \quad j = 1, \dots, N,$$

$$g_{0,m}(\omega, \mathbf{x}, x_3; x'_3) \sim \nu^{-1}(\omega, x'_3) \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi}} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{e^{i\gamma |\mathbf{x}|}}{\sqrt{\gamma |\mathbf{x}|}} \phi_{0m}(\omega, x_3; \alpha) \overline{\phi_{0m}(\omega, x'_3; \alpha)} d\alpha, \quad m = 1, 2,$$

conforme  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ . Las integrales que resultan de la estimación asintótica de las ondas laterales en general son divergentes por lo que es necesario regularizarlas. Sin embargo aplicando el método de fase estacionaria es posible obtener el término principal de la asintótica aplicando la fórmula (6.1.1) tal como se hizo en la sección anterior. Por las definiciones de  $\phi_{01}(\omega, x_3; \alpha)$ ,  $\phi_{02}(\omega, x_3; \alpha)$  se tiene

$$g_{0,1}(\omega, \mathbf{x}, x_3; x'_3) \sim \frac{\nu_1(\omega) e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi^3} \nu_2(\omega, x'_3)} \int_0^\infty \frac{e^{i\gamma |\mathbf{x}|}}{\sqrt{\gamma |\mathbf{x}|}} \frac{\alpha^2 \phi_1(\omega, x_3; 0) \overline{\phi_1(\omega, x'_3; \alpha)}}{\left[\alpha^2 \phi_1^2(h_2, \omega; \alpha) + (\nu_1(\omega) \nu_2^{-1}(h_2, \omega) (\phi_1)'_{x_3}(h_2, \omega; \alpha))^2\right]} d\alpha,$$

$$g_{0,2}(\omega, \mathbf{x}, x_3; x'_3) \sim \frac{\nu_3(\omega) e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi^3\nu_2(\omega, x'_3)}} \int_0^\infty \frac{e^{i\gamma|\mathbf{x}|}}{\sqrt{\gamma|\mathbf{x}|}} \frac{\alpha^2 \phi_2(\omega, x_3; \alpha) \overline{\phi_2(\omega, x'_3; \alpha)}}{\left[ \alpha^2 \phi_2^2(h_1, \omega; \alpha) + (\nu_3(\omega) \nu_2^{-1}(h_1, \omega) (\phi_2'_{x_3}(h_1, \omega; \alpha))^2 \right]} d\alpha.$$

Cuando se realizan las operaciones indicadas en la fórmula (6.1.1), se puede identificar que la función  $\gamma(\omega, x_3, \alpha)$  corresponde a la fase de la integral, de modo que la ecuación  $(\gamma)'_\alpha(\omega, x_3, \alpha_0) = 0$  define los puntos de fase estacionaria  $\alpha_0$ . En este caso el único punto de fase estacionaria es  $\alpha_0 = 0$ . Además, se puede notar que el término dominante de la expansión (6.1.1) ocurre cuando  $k = 1$  de modo que

$$g_{0,1}(\omega, \mathbf{x}, x_3; x'_3) \sim \frac{\nu_1(\omega) (k_0 \tilde{n}(\omega, x_3))^3 \phi_1(\omega, x_3; 0) \overline{\phi_1(\omega, x'_3; 0)}}{i\pi\nu_2(\omega, x'_3) (\nu_1(\omega) \nu_2^{-1}(h_2, \omega) (\phi_1'_{x_3}(h_2, \omega; 0))^2 (k_0 \tilde{n}(\omega) |\mathbf{x}|)^2}, \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty,$$

$$g_{0,2}(\omega, \mathbf{x}, x_3; x'_3) \sim \frac{\nu_3(\omega) (k_0 \tilde{n}(\omega, x_3))^3 \phi_2(\omega, x_3; 0) \overline{\phi_2(\omega, x'_3; 0)}}{i\pi\nu_2(\omega, x'_3) (\nu_3(\omega) \nu_2^{-1}(h_1, \omega) (\phi_2'_{x_3}(h_1, \omega; 0))^2 (k_0 \tilde{n}(\omega, x_3) |\mathbf{x}|)^2}, \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty,$$

lo que hace que los términos principales de las asintóticas de  $g_{0,m}(\omega, \mathbf{r}; x'_3)$  ( $m = 1, 2$ ) se comporten como

$$g_{0,m}(\omega, \mathbf{r}; x'_3) = \mathcal{O}\left(|\mathbf{x}|^{-2}\right)$$

cuando  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , es decir en la región de campo lejano, su influencia es despreciable y la principal contribución en la asintótica de la función de Green se debe solamente a los modos guiados

$$G_{3D}(\omega, \mathbf{x}, x_3; x'_3) \sim \nu^{-1}(\omega, x'_3) \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi}} \sum_{j=1}^{N(\omega)} \frac{e^{i\kappa_j |\mathbf{x}|}}{\sqrt{\kappa_j |\mathbf{x}|}} \varphi_j(\omega, x_3) \overline{\varphi_j(\omega, x'_3)}, \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (6.2.1)$$

### 6.3. Expresión de la solución de la ecuación de onda

En la Sección 4.5 del Capítulo 4 se estableció que las soluciones asintóticas de la ecuación de onda

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \nu(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{c^2(\omega, x_3)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u(t, x_1, x_3) = f(t, x_1, x_3)$$

sometida a las condiciones en la frontera en las interfaces entre los estratos y que satisface el principio de absorción al límite conforme  $x_1 \rightarrow \infty$  estaba dada en términos de los modos guiados que se establecen en la guía de ondas como sigue

$$H_2(t, x_1, x_3) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{A}(\omega - \omega_0) \left[ \widehat{g}_j^{(0,0,1)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_3 - x_3^0; x'_3) e_1 - \widehat{g}_j^{(0,1,0)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_3 - x_3^0; x'_3) e_3 \right] e^{i\omega t} d\omega, \quad \text{TM}$$

$$E_2(t, x_1, x_3) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \mu(\omega, x_3) \widehat{A}(\omega - \omega_0) e_2 \widehat{g}_j(\omega, x_1 - x_1^0, x_3 - x_3^0; x'_3) e^{i\omega t} d\omega, \quad \text{TE}$$

dependiendo del problema bajo consideración. Entonces tenemos que realizar las operaciones indicadas en las fórmulas anteriores sobre los modos guiados

$$\widehat{g}_j(\omega, x_1, x_3; x'_3) \sim \frac{1}{2i} \nu^{-1}(\omega, x'_3) \frac{e^{i\kappa_j(\omega, x_3)|x_1|}}{\kappa_j(\omega, x_3)} \varphi_j(\omega, x_3) \overline{\varphi_j(\omega, x'_3)}$$

para obtener el comportamiento asintótico del campo electromagnético en la guía de ondas. Observe que en esta expresión para los modos guiados hemos escrito nuevamente el acento  $\widehat{\phantom{x}}$  para denotar la transformada de Fourier con respecto al tiempo. Con base en la expresión que define a los modos TE se obtiene la siguiente expresión asintótica

$$E_2(t, x_1, x_3) \sim \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{A}(\omega - \omega_0) \frac{e^{i\kappa_j(\omega, x_3 - x_3^0)|x_1 - x_1^0|}}{\kappa_j(\omega, x_3 - x_3^0)} \varphi_j(\omega, x_3 - x_3^0) \overline{\varphi_j(\omega, x_3')} F(\omega, x_3, x_3') e^{i\omega t} d\omega, \quad \text{TE}$$

donde

$$F(\omega, x_3, x_3') := e_2 \omega \mu^{-1}(\omega, x_3') \mu(\omega, x_3).$$

Para las ondas TM la solución del problema con valores en la frontera es

$$H_2(t, x_1, x_3) \sim \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{A}(\omega - \omega_0) \frac{e^{i\kappa_j(\omega, x_3 - x_3^0)|x_1 - x_1^0|}}{\kappa_j(\omega, x_3 - x_3^0)} \varphi_j(\omega, x_3 - x_3^0) \overline{\varphi_j(\omega, x_3')} G(\omega, x_3, x_3') e^{i\omega t} d\omega, \quad \text{TM}$$

donde

$$G(\omega, x_3, x_3') := \varepsilon^{-1}(\omega, x_3') \left[ \frac{\partial}{\partial x_3} \left( |x_1| \kappa_j(\omega, x_3 - x_3^0) - i \ln \frac{\varphi_j(\omega, x_3)}{\kappa_j(\omega, x_3)} \right) e_1 - \kappa_j(\omega, x_3 - x_3^0) \operatorname{sgn}(x_1) e_3 \right]$$

## 6.4. Expresión de la solución de la ecuación de onda

En la Sección 4.6 del Capítulo 4 se estableció que las soluciones asintóticas de la ecuación de onda

$$\left( \Delta_{\mathbf{x}} + \nu(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \nu^{-1}(\omega, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} + k^2(\omega, x_3) \right) \widehat{v}(\omega, \mathbf{r}) = \widehat{h}(\omega, \mathbf{r}),$$

sometida a las condiciones en la frontera en las interfaces entre los estratos y que satisface el principio de absorción al límite conforme  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$  estaba dada en términos de los modos guiados que se establecen en la guía de ondas como sigue

$$B_3(t, \mathbf{r}) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\omega, x_3) \widehat{A}(\omega - \omega_0) \times \\ \times \left( \widehat{g}_j^{(0,0,1,0)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') e_1 - \widehat{g}_j^{(0,1,0,0)}(\omega, x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0; x_3') e_2 \right) e^{i\omega t} d\omega, \quad \text{TE,}$$

Para la expresión anterior que define a la componente  $B_3$  del campo magnético utilizaremos el término principal de la asintótica de los modos guiados

$$\widehat{g}_j(\omega, \mathbf{x}, x_3; x_3') \sim \mu^{-1}(\omega, x_3') \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi}} \frac{e^{i\kappa_j|\mathbf{x}|}}{\sqrt{\kappa_j|\mathbf{x}|}} \varphi_j(\omega, x_3) \overline{\varphi_j(\omega, x_3')},$$

para obtener el comportamiento asintótico del campo electromagnético en la guía de ondas. Observe que en esta expresión para los modos guiados hemos escrito nuevamente el acento  $\widehat{\phantom{x}}$  para denotar la transformada de Fourier con respecto al tiempo.

Para las ondas TE la solución de la ecuación de onda se expresa por

$$B_3(t, \mathbf{r}) \sim \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i3\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \frac{((x_2 - x_2^0) e_1 - (x_1 - x_1^0) e_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\omega, x_3 - x_3^0) \widehat{A}(\omega - \omega_0) \times \\ \times \mu^{-1}(\omega, x_3') \frac{e^{i\kappa_j(\omega, x_3 - x_3^0)|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}}{\sqrt{\kappa_j(\omega, x_3 - x_3^0)|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}} \varphi_j(\omega, x_3 - x_3^0) \overline{\varphi_j(\omega, x_3')} e^{i\omega t} d\omega, \quad \text{TE,}$$

donde  $\mathbf{x}_0 := (x_1^0, x_2^0)$  representa las coordenadas horizontales de la fuente. Para las ondas TM obtenemos una expresión que depende del vector  $\mathbf{e}$  asociado con la fuente puntual, los cálculos para las ondas TM pueden realizarse de forma análoga.

- Sea  $\mathbf{e} = \mathbf{a}_1$ , entonces conforme  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , entonces

$$D_3(t, \mathbf{r}) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{\omega} \hat{A}(\omega - \omega_0) \mu^{-1}(\omega, x'_3) \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi}} \frac{e^{i\kappa_j(\omega, x_3 - x_3^0)|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}}{\sqrt{\kappa_j(\omega, x_3 - x_3^0)|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}} \varphi_j(\omega, x_3 - x_3^0) \\ \overline{\varphi_j(\omega, x'_3)} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} F_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, x_3 - x_3^0) + \frac{\partial}{\partial x_3} (F_1 G_1)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, x_3 - x_3^0) \right) \right. \\ \left. - \eta(\omega, x_3 - x_3^0) G_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, x_3 - x_3^0) \right] e^{i\omega t} d\omega.$$

donde

$$F_1(\mathbf{x}, x_3) := \ln \frac{\varphi_j(\omega, x_3)}{\sqrt{\kappa_j|\mathbf{x}|}} + i|\mathbf{x}| \sqrt{\kappa_j|\mathbf{x}|}, \\ G_1(\mathbf{x}, x_3) := i\kappa_j(\omega, x_3) \frac{x_1}{|\mathbf{x}|}$$

- Sea  $\mathbf{e} = \mathbf{a}_2$ , conforme  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  resulta

$$D_3(t, \mathbf{r}) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{\omega} \hat{A}(\omega - \omega_0) \mu^{-1}(\omega, x'_3) \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi}} \frac{e^{i\kappa_j(\omega, x_3 - x_3^0)|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}}{\sqrt{\kappa_j(\omega, x_3 - x_3^0)|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}} \varphi_j(\omega, x_3 - x_3^0) \\ \overline{\varphi_j(\omega, x'_3)} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} F_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, x_3 - x_3^0) + \frac{\partial}{\partial x_3} F_2 G_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, x_3 - x_3^0) \right) \right. \\ \left. - \eta(\omega, x_3) G_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, x_3 - x_3^0) \right] e^{i\omega t} d\omega.$$

donde

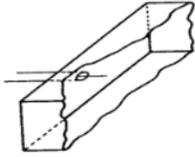
$$F_2(\mathbf{x}, x_3) := \ln \frac{\varphi_j(\omega, x_3)}{\sqrt{\kappa_j(\omega, x_3 - x_3^0)|\mathbf{x}|}} + i|\mathbf{x}| \sqrt{\kappa_j|\mathbf{x}|}, \\ G_2(\mathbf{x}, x_3) := i\kappa_j(\omega, x_3) \frac{x_2}{|\mathbf{x}|}$$

- Finalmente sea  $\mathbf{e} = \mathbf{a}_3$ , lo cual conduce a la siguiente expresión asintótica

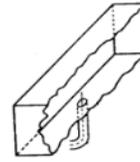
$$D_3(t, \mathbf{r}) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{\omega} \hat{A}(\omega - \omega_0) \\ \mu^{-1}(\omega, x'_3) \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi}} \frac{e^{i\kappa_j(\omega, x_3 - x_3^0)|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}}{\sqrt{\kappa_j(\omega, x_3 - x_3^0)|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}} \varphi_j(\omega, x_3 - x_3^0) \overline{\varphi_j(\omega, x'_3)} [k^2(x_3, \omega) \\ - \eta(\omega, x_3 - x_3^0) G_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, x_3 - x_3^0) + G_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, x_3 - x_3^0)] e^{i\omega t} d\omega.$$

## 6.5. Discusión

El análisis considerado aborda el problema de propagación de ondas en dos casos bien definidos cada uno de los cuales tiene dos variantes clasificadas como TE o TM, a saber, los casos polarizado y no-polarizado. En el caso polarizado el campo eléctrico tiene una dirección bien definida especificada por la única componente que puede propagarse. Por ejemplo en el caso TE polarizado la única componente que tiene el campo eléctrico es la componente  $E_2$ , la cual es horizontal con respecto al sistema de coordenadas utilizado. En el caso TM polarizado, el cual está descrito por la componente  $H_2$  del campo magnético, el campo eléctrico asociado debe ser ortogonal a  $H_2$ , es decir, el campo eléctrico debe tener una componente vertical. Por lo tanto para



**Figura 6.5.1.** Antena polarizada horizontal.  
Adaptado de Figura 8-6[26]



**Figura 6.5.2.** Antena polarizada vertical. Adaptado de Figura 8-6[26]

generar un modo TE polarizado se necesita de una fuente de ondas electromagnéticas que genere un campo eléctrico con componente horizontal, mientras que para producir un modo TM polarizado se necesita una fuente que genere un campo eléctrico con una componente vertical. Una de las formas más simples de lograr esto es por medio de una antena lineal delgada, por ejemplo, una antena dipolar. De esta manera si se tiene una antena dipolar con orientación horizontal esta podría generar un campo electromagnético que se propague como modos TE en la guía de ondas, mientras que si la antena dipolar tiene orientación vertical el campo electromagnético generado se propagaría como modos TM. Por supuesto, es posible generar modos TE o TM con una antena arbitraria, a condición de que ésta tenga las componentes horizontal o vertical, respectivamente, adecuadas.

El caso no-polarizado abordado en este trabajo está representado por las componentes  $B_3$ (TE) y  $D_3$ (TM) del campo electromagnético. Por ejemplo, en el caso TE el campo eléctrico está definido a partir de las componentes  $E_1$  y  $E_2$  (recordando que el caso TE está caracterizado por  $E_3 = 0$ ) sin embargo el vector resultante podría tener cualquier orientación en el plano horizontal. Por lo tanto si se quisiera generar un modo TE no-polarizado podría lograrse a partir de una antena que genere un campo magnético vertical, por ejemplo, una antena de lazo circular colocada horizontalmente. Por otra parte, el caso TM está definido por la componente  $D_3$  de la densidad de flujo eléctrico (la cual se genera a partir de la componente  $E_3$  del campo eléctrico), de modo que el campo magnético tendrá componentes  $H_1$  y  $H_2$  (recordando que el caso TM está caracterizado por  $H_3 = 0$ ). En este caso es posible que existan las otras dos componentes del campo eléctrico es decir, las componentes  $E_1$  y  $E_2$ , por lo que para producir un modo TM no-polarizado es necesario contar con una antena cuyo campo magnético tenga una orientación horizontal arbitraria, por ejemplo una antena de lazo circular en posición vertical.

Debe tenerse en cuenta, sin embargo, que para una antena arbitraria el campo electromagnético que genera puede dar lugar a modos TE y TM que se propagarían simultáneamente en la guía de ondas dependiendo de si el campo eléctrico que genera la antena tiene componentes horizontales y verticales. La guía de ondas establece qué componentes y con qué frecuencia de corte los modos empezaran a propagarse. Sin embargo, en la práctica es deseable generar únicamente un modo guiado para disminuir problemas de dispersión en la guía de ondas los cuales limitan la velocidad de transmisión de datos y afectan negativamente el enlace radioeléctrico. En la búsqueda de establecer un modo específico en nuestra guía de ondas, la fuente que genera el campo electromagnético debe ser lo suficientemente simple. Por ejemplo si se usa una antena dipolar, la cual tiene una polarización lineal, al orientarla de forma horizontal se producen modos TE 6.5.1, mientras que si se desea establecer modos TM debemos orientar la antena en forma vertical 6.5.2 (ver, *e.g.*, [26, p. 252] donde analizan la forma de excitar una guía de ondas metálica por medio de una sonda construida a partir del conductor central de un cable coaxial).

Los resultados obtenidos para las ondas polarizadas para los modos TE y TM se encuentran conformados por un conjunto de expresiones tales que forman la solución a nuestro problema de guía de ondas. Existen en las soluciones, parámetros que normalmente aparecen, como la amplitud  $A$ , frecuencia  $\omega$ ,  $\omega_0$ , constante de propagación,  $\kappa_j$  y eigen-funciones normalizadas  $\varphi_j$ , cada una con un significado específico. En las soluciones, la suma nos indica que para la guía de ondas en consideración, va a establecerse una superposición de modos los cuales comienzan a expresarse dependiendo de si la frecuencia  $\omega$  es mayor que la frecuencia de corte correspondiente a cada modo. En este sentido  $\omega$  es un parámetro fundamental el cual determina las características dispersivas de la guía y la constante de propagación  $\kappa_j$  que define la periodicidad espacial de

los modos. En el caso polarizado, la expresión que define los modos guiados tiene un término oscilatorio

$$\frac{e^{i\kappa_j(\omega, x_3 - x_3^0)|x_1 - x_1^0|}}{\kappa_j(\omega, x_3 - x_3^0)},$$

donde el parámetro  $x_n^0$  indica el punto donde se encuentra localizada la fuente puntual, mientras que el punto de observación se representa por  $x_n$ . Por lo cual  $|x_n^0 - x_n|$  denota la distancia entre la fuente puntual y el punto de observación. Observe que el término oscilatorio incluye un factor de amplitud  $1/\kappa_j$  el cual depende de la frecuencia. Por lo tanto si este término es creciente con respecto a la frecuencia el término oscilatorio disminuirá su amplitud.

Los términos que involucran a las eigen-funciones normalizadas  $\varphi_j$  nos indica el comportamiento del campo electromagnético con respecto a  $x_3$  el cual es exponencialmente decreciente conforme  $|x_3| \rightarrow \infty$ . En el intervalo de  $h_1$  a  $h_2$  el comportamiento del campo electromagnético es oscilatorio. De esta manera se puede ver que  $h_1$  y  $h_2$  definen en efecto las fronteras del núcleo de la guía, ya que dentro del núcleo se tienen modos guiados con el comportamiento oscilatorio usual tanto en la dirección horizontal como en la dirección vertical, mientras que fuera del núcleo el campo se atenúa rápidamente. Por otra parte aquellos campos que no están confinados al núcleo se propagan de forma oscilatoria sin atenuación formando ondas laterales, que consisten de una superposición continua de modos de radiación, los cuales se encuentran caracterizados por las eigen-funciones generalizadas del problema [41]. De acuerdo con el análisis presentado, el comportamiento asintótico de las ondas laterales en la región del campo lejano permite despreciarlos comparado con los modos guiados, por lo cual las expresiones obtenidas solo consisten de modos guiados.

En el caso no-polarizado, las expresiones encontradas se vuelven mas interesantes. Observamos un término oscilatorio

$$\frac{e^{i\kappa_j(\omega, x_3 - x_3^0)|\mathbf{x}|} \kappa_j(\omega, x_3 - x_3^0)}{\sqrt{\kappa_j(\omega, x_3 - x_3^0)|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}},$$

para ambos tipos de modos TE y TM, los cuales expresan que existe una atenuación que depende de las componentes horizontales conforme  $\mathcal{O}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{-1/2})$  lo cual establece de qué forma se atenúan las ondas conforme se alejan de la fuente. El término  $\hat{A}(\omega - \omega_0)$  que aparece en todas las expresiones, es la transformada de Fourier con respecto al tiempo de la amplitud modulante  $A(t)$  de la fuente puntual, la cual se asume que es de banda angosta. Físicamente, el término  $\hat{A}(\omega - \omega_0)$  representa el espectro de frecuencias de  $A(t)$  el cual esta desplazado a la frecuencia  $\omega_0$  que representa la frecuencia de la portadora  $e^{i\omega_0 t}$  por lo cual se puede ver que se trata de un esquema de modulación en amplitud. Se puede ver en las expresiones obtenidas que cada modo transporta la misma información de  $A(t)$  contenida en el espectro  $\hat{A}(\omega - \omega_0)$ , y cada modo tiene su propia portadora dentro del término oscilatorio explicado anteriormente. Por lo tanto a grandes distancias de la fuente es posible recuperar la información transmitida a partir del proceso de demodulación correspondiente.

Las expresiones de las soluciones se encuentran únicamente en términos de la frecuencia  $\omega$ , pero al expresar el espectro de frecuencias  $\hat{A}(\omega - \omega_0)$  en términos de la transformada de Fourier, a saber,

$$\hat{A}(\omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau) e^{-i(\omega - \omega_0)\tau} d\tau$$

y al sustituirlo en las expresiones anteriores se obtendrán integrales oscilatorias del tiempo y la frecuencia, por lo cual es posible aplicar una vez más el método de fase estacionaria a condición de expresar la amplitud  $A(t)$  en términos de un parámetro adimensional grande  $\lambda$  como sigue

$$A(t) = a(t/\lambda)$$

y hacer tender  $\lambda$  hacia infinito tal como se hace en los artículos [12] y [4]. Este análisis sin embargo no se realiza en esta tesis y queda como trabajo a futuro.

Es importante considerar que en este trabajo, al considerar la guía de ondas sin perdidas, se genera un problema más sencillo de resolver, debido a que los parámetros constitutivos considerados en este tipo de guía de ondas están dados por funciones real-valuadas. En el Capítulo 5 donde se considera el problema espectral auxiliar y se hace la expansión en eigen-funciones. La expansión obtenida es válida para los problemas auto-adjuntos donde la teoría de los problemas de tipo Sturm-Liouville nos permiten obtener soluciones acordes

con el modelo de la guía de ondas sin pérdidas considerada en este trabajo. Cabe mencionar que al considerar una guía de onda con pérdidas, los parámetros constitutivos que describen al medio serán funciones complejo-valuadas de la forma

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon' + i\varepsilon'', \\ \mu &= \mu' + i\mu'',\end{aligned}$$

los cuales están asociados con una tangente de pérdidas, donde el medio puede afectar la propagación por medio de absorciones de energía (pérdidas) o regeneraciones (ganancia). Esto nos llevara a considerar otro tipo de condiciones en la frontera para el problema, el cual estará expresado por un operador no auto-adjunto. Por lo tanto la expansión en eigen-funciones previamente obtenida ya no es posible aplicarla en este caso. Al obtener un operador que no es Hermitiano, las eigen-funciones y eigen-valores resultarán complejos y se pueden obtener expresiones que describan la propagación modal mediante otro método como se puede ver en [12] y [35], por lo que un medio con pérdidas puede considerarse como un trabajo a futuro que se pueda complementar con la presente tesis.

Otro trabajo a futuro es considerar una fuente en movimiento de la forma

$$A(t) e^{i\omega_0 t} \delta(x_1 - v_1(t)t) \delta(x_2 - v_2(t)t) \delta(x_3 - v_3(t)t),$$

donde  $v_j(t)$  son las componentes de un vector de velocidad que describe el movimiento de la fuente. Al incluir una fuente en movimiento se pueden analizar efectos de interés como el efecto Doppler. Este fenómeno en las radiocomunicaciones, crea un aparente corrimiento en la frecuencia a medida que el transmisor se mueve con respecto al receptor. El análisis de este problema nos permitiría tratar de compensar los efectos adversos en los sistemas de radiocomunicaciones. Otro fenómeno que se produce al introducir fuentes en movimiento es la radiación de Cherenkov. Al ser una fuente de tipo puntual, podemos considerar la radiación que emite cuando se mueve con velocidad uniforme siempre y cuando las fuentes tengan velocidades mayores a la velocidad de fase en el medio atmosférico. Este efecto es considerado de gran utilidad en los observatorios, detectores de partículas y de radiaciones ionizantes.

# Capítulo 7

## Conclusiones

En este trabajo, se analizó la propagación de ondas electromagnéticas en una guía de ondas estratificada, no-homogénea, y dispersiva por medio de las ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo, donde se consideraron los parámetros constitutivos como operadores dependientes del tiempo. Esto nos permite la aplicación de la transformada de Fourier con respecto al tiempo para obtener las ecuaciones dinámicas del campo electromagnético en términos de la frecuencia angular. Además se consideran las condiciones de frontera que se establecen en las interfaces entre los diferentes estratos. Las ecuaciones de Maxwell junto con las condiciones en la frontera conducen a las ecuaciones de onda para medios dispersivos no-homogéneos que caracterizan las ondas transversales TE y TM que se propagan en esta estructura en la forma de ondas polarizadas y no-polarizadas. Se obtienen expresiones para las ecuaciones de onda cuando se consideran términos no-homogéneos que representan las fuentes del campo electromagnético, las cuales se obtienen por medio de la función de Green del problema con valores en la frontera asociado. Además se obtienen expresiones asintóticas del campo electromagnético en la región del campo lejano debidas a fuentes que varían lentamente en el tiempo y que tienen un espectro de frecuencias de banda angosta. El análisis presentado en esta tesis puede ser aplicado al sistema Litósfera-Tropósfera-Ionósfera, el cual puede ser aproximado con un modelo sencillo que consiste de una estructura de guía de ondas plana, en la cual se desprecian los efectos de curvatura de la Tierra, así como las variaciones de altitud de la capa ionosférica la cual depende fuertemente de la interacción de la atmósfera con el sol.

La guía de ondas considerada se compone de tres estratos diferentes, por lo que se estableció un problema con valores en la frontera que describe la propagación de ondas electromagnéticas en esta estructura. El término no-homogéneo de este problema condujo a considerar una fuente puntual que representa una señal modulada de banda angosta montada en una portadora de frecuencia  $\omega_0$ . A partir de esta fuente se encontraron aproximaciones asintóticas a largas distancias del campo electromagnético propagado en esta guía de ondas.

El cálculo de las soluciones de las ecuaciones de onda se desarrolló a partir de la determinación de la función de Green de la guía de ondas la cual se representa en términos de modos guiados y ondas laterales, para ambos campos polarizados y no-polarizados. El cálculo de la función de Green se basa en la aplicación de la transformada de Fourier con respecto a las coordenadas horizontales a los problemas con valores en la frontera que describen la propagación de ondas transversales. Esto conduce a problemas espectrales unidimensionales que se resuelven a partir de un problema auxiliar espectral en términos de un operador tipo Schrödinger, el cual es caracterizado espectralmente en esta tesis. El cálculo de la función de Green se reduce a encontrar un conjunto de eigen-funciones normalizadas y dos sistemas de eigen-funciones normalizadas generalizadas del problema espectral unidimensional. Estas familias de eigen-funciones forman un sistema completo que conduce a una expansión para las soluciones del problema unidimensional. La relación que existe entre el problema espectral auxiliar y el problema unidimensional que se deriva del análisis de la guía de ondas, nos llevó a considerar una función que representa el potencial en la ecuación de Schrödinger que queda descrita en términos del índice de refracción del medio. Por aplicación del método de fase estacionaria encontramos expresiones asintóticas que describen los modos guiados, los cuales están caracterizados por sus constantes de propagación permitidas que se calculan a partir de una relación de dispersión. Así mismo se utilizó el método de fase estacionaria para encontrar las expresiones asintóticas de las integrales divergentes que representan

---

a las ondas laterales, las cuales se comportan como  $\mathcal{O}\left(|x_1|^{-\frac{3}{2}}\right)$  y  $\mathcal{O}\left(|\mathbf{x}|^{-2}\right)$  para los casos polarizado y no-polarizado, respectivamente, lo cual indica que estas ondas se atenúan rápidamente conforme se alejan de la fuente, por lo cual la principal contribución del campo electromagnético proviene solamente de los modos guiados.

Como trabajo a futuro podemos considerar aplicar nuevamente el método de fase estacionaria a las expresiones obtenidas que consisten de integrales oscilatorias del tiempo y la frecuencia, para encontrar los términos principales de las asintóticas que describen a los modos guiados en la región del campo lejano. Otra consideración importante es introducir perfiles específicos  $\mu$  y  $\varepsilon$  que modelen la atmósfera como una guía de ondas, y obtener datos numéricos. En este sentido es posible aplicar el método de las series de potencias del parámetro espectral (método SPPS) para obtener las soluciones del problema espectral auxiliar en términos del parámetro espectral  $\beta$  del problema lo cual conduce a expresiones analíticas de la relación de dispersión que pueden truncarse para obtener polinomios cuyas raíces pueden encontrarse con métodos numéricos usuales. Esto permitirá hacer modelado numérico de los problemas de propagación en la atmósfera de forma aproximada.

En la presente tesis se consideró una fuente puntual modulada en amplitud fija con respecto a un sistema de coordenadas la cual generaba el campo electromagnético propagado en la guía. Como trabajo a futuro también se puede considerar introducir un parámetro adimensional  $\lambda$  tal que  $A(t) = a(t/\lambda)$ , donde se puede modelar la fuente puntual en banda angosta. Así mismo esta misma fuente, pueda desplazarse con una velocidad y analizar los efectos de una fuente puntual en movimiento y desarrollar los efectos que causan en la propagación de ondas como el efecto Doppler y radiación de Cherenkov los cuales son de importancia en el tema de las radiocomunicaciones.

## Apéndice A

# Transformada de Fourier en el sentido de las distribuciones

En la sección anterior se procedió a utilizar la transformada de Fourier con respecto al tiempo, en la cual se desarrollaron las ecuaciones de Maxwell, así como también las ecuaciones de onda. En este capítulo se desarrollará el problema unidimensional tomando en cuenta que las ecuaciones ya están transformadas con respecto al tiempo y a partir de ahora se aplicará la transformada con respecto a las coordenadas espaciales. Vamos a introducir por definición la transformada de Fourier

$$F[\phi](\boldsymbol{\xi}) = \int \phi(\mathbf{r})e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad \phi \in S, \quad (\text{A.0.1})$$

y su respectiva transformada inversa

$$F^{-1}[\psi](\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(\boldsymbol{\xi})e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{r}} d\boldsymbol{\xi}, \quad \psi \in S'. \quad (\text{A.0.2})$$

en el cual actúa en un espacio recíproco, donde  $S$  es el espacio de prueba las cuales son todas las funciones de clase  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  que decrecen conforme  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$  junto con todas sus derivadas, mas rápido que cualquier potencia de  $|\mathbf{r}|^{-1}$ , y  $S'$  son las funciones generalizadas de lento crecimiento tal que cada funcional lineal actuando sobre una función de prueba  $S$  es conocida como función generalizada. En las formulas anteriores el producto punto  $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{r}$  es el producto punto usual del espacio  $\mathbb{R}^n$ , es decir  $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{r} = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n$ . Aquí  $F[\phi](\boldsymbol{\xi})$  es la transformada de Fourier de la función  $\phi(\mathbf{r})$ , la cual se define en el sentido de las distribuciones de la siguiente manera:

$$(F[\phi], \psi) = (\phi, F[\psi]), \quad \psi \in S, \quad \phi \in S'. \quad (\text{A.0.3})$$

Una vez definido esto, la transformada de Fourier puede diferenciarse bajo el signo de la integral como se observa a continuación:

$$D^\alpha F[\phi](\boldsymbol{\xi}) = \int (i\mathbf{r})^\alpha \phi(\mathbf{r}) e^{i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{r})} d\mathbf{r} = F[(i\mathbf{r})^\alpha \phi](\boldsymbol{\xi}), \quad (\text{A.0.4})$$

$$F[D^\alpha \phi](\boldsymbol{\xi}) = \int D^\alpha \phi(\boldsymbol{\xi}) e^{i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{r})} d\mathbf{r} = (-i\boldsymbol{\xi})^\alpha F[\phi](\boldsymbol{\xi}), \quad (\text{A.0.5})$$

[38] donde  $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  es un multi-índice que en conjunto con el símbolo  $D^\alpha$  indican el número de veces en que se tienen que realizar las derivadas parciales

$$D^\alpha f(\mathbf{r}) := \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad D^0 f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \quad (\text{A.0.6})$$

En el caso particular de las funciones escalares que representan a señales en el tiempo  $t \in \mathbb{R}$ , la transformada de Fourier toma la forma particular

---

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-i\omega t} d\omega,$$

donde  $\omega$  se define como la frecuencia angular de la señal la cual se mide en rad/seg. A partir de ahora el símbolo  $\hat{\cdot}$  denotará la transformada de Fourier con respecto al tiempo. Para las funciones vector-valoradas la transformada de Fourier se define en forma similar

$$\hat{\mathbf{u}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(t)e^{i\omega t} dt, \quad \mathbf{u}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{u}}(\omega)e^{-i\omega t} d\omega, \quad (\text{A.0.7})$$

donde las integrales se entienden en el sentido de las distribuciones.

# Referencias

- [1] Abramowitz M, Stegun A, Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical tables. Applied Mathematics, National Bureau of Standards, Washington, 1972.
- [2] Ayub M, Khan T A, Jilani K, *Effect of cold plasma permittivity on the radiation of the dominant TEM-wave by an impedance loaded parallel-plate waveguide radiator*, Math. Meth. in the App. Sci.
- [3] Barrera Figueroa V, Kravchenko V V, Rabinovich V S, *Spectral parameter power series analysis of isotropic planarly layered waveguides*. Appl. An.: An International Journal **93**: 729–755, 2014.
- [4] Barrera Figueroa V, Rabinovich V, *Asymptotics of the far field generated by a modulated point source in a planarly layered electromagnetic waveguide*. Math. Methods Appl. Sci. **38**: 1970–1989, 2015.
- [5] Barrera Figueroa V, Rabinovich V, *Cherenkov radiation in a planarly layered waveguide in the case of polarized waves*. Sociedad Matematica Mexicana, 2016.
- [6] Berezin FA, Shubin MA, The Shrödinger Equation. Kluwer Academic: Amsterdam, 1991.
- [7] Balanis C, Advanced Engineering Electromagnetics. Wiley and Sons, USA, 1976.
- [8] Balanis C A, Antenna Theory Analysis and Design, Wiley and Sons, New York, 1997.
- [9] Beynon W J G, *Marconi radiowaves and the ionosphere*, Radio Sci. **10**: 657–664, 1975
- [10] Bora S, *Ionosphere and Radio Communication*, Resonance 22: 123-133, 2017.
- [11] Budden K G, The Propagation of Radio Waves. Cambridge University Press: New York, 1985.
- [12] Burlak G, Rabinovich V, *Time frequency integrals and the stationary phase method in problems of waves propagation from moving sources*, Sigma **8**: 096, 2012.
- [13] Brekhovskika L M, Waves in Layered Media. Academic Press, Moscow, 1980.
- [14] Chew W C, Waves and Fields in Inhomogeneous Media. IEEE Press, New York 1995.
- [15] Chapman S, *Noctilucent clouds and thermospheric dust: their diffusion and height distribution*, Qu. Journal of the Royal Met. Society **92**: 311–313, 1966.
- [16] Cole K, Pierce E T, *Electrification in the earth's atmosphere for altitudes between 0 and 100 kilometers*, Journal Geo. Res. **70**: 2735–2749, 1965.
- [17] Doukhanov M, Propagation of Radio Waves, URSS, Moscow, 1995.
- [18] Dudley D G, Mathematical Foundations for Electromagnetic Theory, IEEE Press, Piscataway, 1994.
- [19] Eliason B, Chang C L, Papadopoulos K, *Generation of ELF and ULF electromagnetic waves by modulated heating of the ionospheric F2 region*, Journal Geo. Res. **117**: A10320, 2012.
- [20] Fedoryuk M V, The Saddle-Point Method. Nauka, Moskov, 1977. (In Russian)
- [21] Felsen L B, Marcuvitz N, Radiation and Scattering of Waves. Prentice-Hall: New Jersey, 1973.

- 
- [22] Galejs J, *Terrestrial extremely low frequency noise spectrum in the presence of exponential ionospheric conductivity profiles*, Journal Geo. Res. **66** (9): 2787–2792, 1961.
- [23] Galejs J, *Terrestrial Propagation of Long Electromagnetic Waves*. Pergamon Press, Oxford, 1972.
- [24] Galuk Y, Nickolaenko A P, Hayakawa M, *Knee model: Comparison between heuristic and rigorous solutions for the Schumann resonance problem*, Journal of Atm. and Solar-Terr. Ph. **135**: 85–91, 2015.
- [25] Hayt W, Buck J, *Engineering Electromagnetics*, McGraw-Hill, Michigan, 1958.
- [26] Jordan C E, Keith G B, *Electromagnetic Waves and Radiating System*. Prentice Hall, New Jersey, 1968.
- [27] Khan T A, Ayub M, Jilani K, *E-polarized plane wave diffraction by an impedance loaded parallel-plate waveguide located in cold plasma*, Physica Scripta **89**: 09527, 2014.
- [28] Magos Pérez O R, *Aplicación de métodos asintóticos para el cálculo de una onda electromagnética propagándose a través de una guía de onda dieléctrica casi-estratificada*. IPN, México, 2008. (Disertación Doctoral)
- [29] Mushtak V C, Williams E R, *ELF propagation parameters for uniform models of the Earth-ionosphere waveguide*. Journal Atm. and Solar-Terrestrial Ph. **64**: 1989–2001, 2002.
- [30] Rabinovich V, Vega Alcantar J A, *Electromagnetic waves propagation from moving sources in waveguides filled by a dispersive dielectric media*, Comm. Math. Ann. **16** (1), 84–101, 2014.
- [31] Roddy D, *Satellite communication*, McGraw-Hill, New York, 1996.
- [32] Rudenko G V, Dmitrienko I S, *Oscillations of a vertically stratified dissipative atmosphere II. Low frequency trapped modes*. Journal of Atm. and Solar-Terrestrial Ph. **142**: 137–149, 2016.
- [33] Sommerfeld A, *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, Princeton, 1949.
- [34] Tripathi V K, Chang C L, Papadopoulos K, *Excitation of the Earth-ionosphere waveguide by an ELF source in the ionosphere*, Radio Sci. **17** (5): 1321–1326, 1982.
- [35] Tsoy E N, Tadjimuratov S S, Abdullaev F K, *Beam propagation in gain-loss balanced waveguides*. Optic Comm. **285**: 3441–3444, 2012.
- [36] Urbano Altamirano F A, *Investigación de propiedades espectrales de guías de ondas cuánticas por medio de los métodos de Operadores límite y funciones pseudo analíticas*, IPN, México, 2013. (Tesis de Maestría)
- [37] Vera Amaro R, *Propagación de ondas acústicas en un océano profundo producido por una fuente en movimiento en la atmósfera*, IPN, México, 2007. (Tesis de Maestría)
- [38] Vladimirov V S, *Equations of mathematical physics*. Marcel Dekker Inc., Moscow, 1971.
- [39] Yuefei Z, Ulrich B, Malte N, Dorit J, *Radar beam tracing methods based on atmospheric refractive index*. Journal Atm. and Oc. Tecn. **31**: 2651–2670, 2014.
- [40] Weiyan P, Li K, *Propagation of SLF/ELF Electromagnetic Waves*, Springer, Hangzhou, 1995,
- [41] Wilcox C H, *Sound Propagation in Stratified Fluids*, Springer-Verlag, Singapore, 1984.
- [42] Yoshiaki A, Ito H, *A Consideration on appropriate parameters for identifying electron density profile in the lower ionosphere by using VLF-wave propagation in the Earth-ionosphere waveguide*, Elect. and Comm. in Japan **100**: 304–309, 2017.