



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**Invariantes ante el cambio de fase  
de los quarks en el Modelo Estándar**

T E S I S  
que para obtener el grado de

MAESTRÍA EN CIENCIAS FISICOMATEMÁTICAS

Presenta  
Daniel García Ruiz

Directores de Tesis:  
Dra. Sara Rebeca Juárez Wysozka  
Dr. Piotr Kielanowski



CDMX, México, 2017

## **Agradecimiento**

Agradezco a mis directores de tesis, Dra. Sara Rebeca Juárez Wysozka y Dr. Piotr Kielanowski, por su valiosa ayuda para la realización de este trabajo.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>II</b>
<b>Abstract</b>	<b>II</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Modelo Estándar</b>	<b>3</b>
2.1. Marco teórico . . . . .	3
2.2. Partículas elementales . . . . .	4
2.3. Grupos de norma y Lagrangiana en el Modelo Estándar . . . . .	6
2.4. Mecanismo de Higgs . . . . .	8
2.5. Acoplamiento de Yukawa . . . . .	10
2.6. Matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) . . . . .	11
<b>3. Invariantes de Fase</b>	<b>12</b>
3.1. Acoplamientos de Yukawa e Invariantes de fase . . . . .	12
3.2. Efecto de los cambios de fase de los quarks en la Matriz CKM . . . . .	14
3.3. Forma general de los monomios invariantes ante los cambios de fase . . . . .	17
<b>4. Relevancia de los Invariantes de Fase</b>	<b>18</b>
4.1. Invariante de Jarlskog . . . . .	18
4.2. Triángulo Unitario . . . . .	20
4.3. Violación Carga-Paridad (CP) . . . . .	22
<b>5. Conclusiones</b>	<b>23</b>
<b>A. Monomios Básicos con productos de 4 elementos</b>	<b>24</b>
<b>B. Monomios Básicos con productos de 6 elementos</b>	<b>27</b>
<b>C. Características del Monomio invariante Puro General <math>P(p)</math></b>	<b>29</b>
<b>D. Parte Imaginaria de todos los elementos <math>J_n</math></b>	<b>33</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>36</b>

# Índice de figuras

1.1. Líneas de tiempo transcurrido entre la postulación teórica y su comprobación experimental de partículas que forman parte del Modelo Estándar. Daily chart, (2012). . . . .	1
2.1. Partículas elementales del Modelo Estándar: partículas de materia, mediadores y el campo de Higgs. . . . .	5
4.1. Triángulo unitario asociado a la matriz Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM).	20
4.2. Triángulo unitario, Fuente: Grupo CKMfitter. . . . .	21

## Resumen

La motivación de esta Tesis es resaltar la importancia de los invariantes ante el cambio de fase de los campos de quarks, que se construyen a partir de elementos de la matriz de mezcla CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa). Estos invariantes están relacionados con observables físicas y en particular con la violación de la simetría CP entre la materia y antimateria existente en el universo. Los resultados que se obtienen son útiles para la simplificación de las Ecuaciones del Grupo de Renormalización y para el cálculo, entre otros, de los diagramas de Feynman en el contexto del Modelo Estándar de la Física de Altas Energías.

*Palabras clave:* **Modelo Estándar, matriz CKM, Invariantes de fase, CP.**

## Abstract

The motivation of this Thesis is to emphasize the importance of the phase invariants, under the change of phases of the quark fields, which are build trough the elements of the CM matrix (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa). These invariants are related with physical observables, in particular with the one related to the CP Symmetry Violation between the matter and antimatter of the universe. The obtained results favor the simplification of the Renormalization Group Equations and are useful for the evaluation of the Feynman diagrams in the context of the Standard Model of High Energy Physics.

*Keyword:* **Standard Model, CKM matrix, Phase invariants, CP.**

# Capítulo 1

## Introducción

El Modelo Estándar (ME) de la física de partículas es la teoría que describe las interacciones débil, electromagnética y fuerte entre los quarks y los leptones [1]. La estructura actual de la teoría de las partículas elementales es una construcción matemática muy fina, a medida que se trabaja a través del intrincado formalismo matemático, puede ser fácil perder de vista cómo se relaciona con lo que observamos en la naturaleza. Sin embargo, el ME tiene una gran virtud: la precisión de sus predicciones (Fig. 1.1 y [2]), lo que le otorga validez fenomenológica<sup>1</sup>.

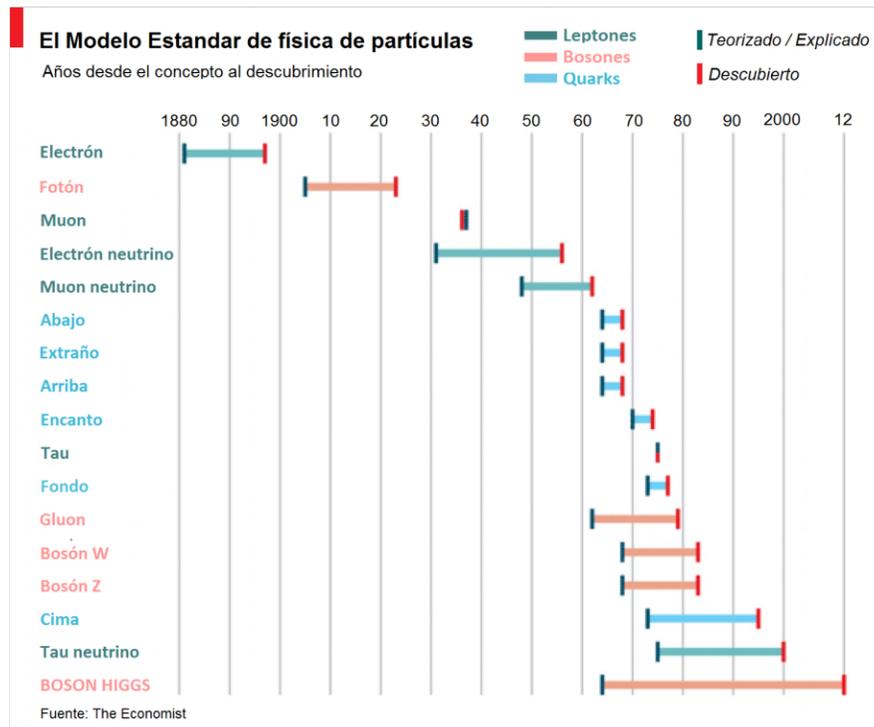


Figura 1.1: Líneas de tiempo transcurrido entre la postulación teórica y su comprobación experimental de partículas que forman parte del Modelo Estándar. Daily chart, (2012).

<sup>1</sup>En 2017 se descubrió un nuevo tipo de partícula en el CERN utilizando datos de 2016 del Large Hadron Collider (LHC). La partícula es el Xi-cc ++, un *baryon doblemente encantado*, pertenece a una familia de quarks pesados predicho por el Modelo Estándar, [3].

Pero también tiene un defecto: la cantidad de parámetros que contiene, dieciocho [4], lo que hace pensar en la posibilidad de buscar una teoría más completa<sup>2</sup> que lo incluya y además suprima el exceso de parámetros libres. De las cuatro interacciones fundamentales: electromagnética, débil, fuerte y gravitacional, lo planteado por Glashow, Weinberg y Salam [5] conduce a la unificación de las dos primeras a través de un principio de simetría de norma local, expresado en la invariancia del lagrangiano ante las transformaciones del grupo  $U(1) \times SU(2)$ . Este principio sin embargo requiere de partículas sin masa, la manera de volver físico tal esquema es proveer un mecanismo de generación de masas que sea compatible con la simetría. Tal mecanismo lo introdujeron primeramente en 1962, Philip Warren Anderson [6]; después Englert y Brout [7] en 1964; luego Higgs [8] en 1964; y también Guralnik, Hagen y Kibble [9] en 1964.

La generación de las masas en el sector fermiónico del modelo (para quarks y leptones) surge a través de las interacciones de Yukawa, donde participa el campo de Higgs tipo doblete usando el mecanismo de rompimiento espontáneo de la simetría. La descripción de las interacciones de Yukawa ocupa 13 parámetros del total de 18 que requiere el modelo. Un buen entendimiento de este sector es crucial para el progreso de la teoría de partículas elementales.

Las interacciones de Yukawa están representadas por tres matrices para los quarks *up* y *down* y para los leptones cargados. La matriz para los leptones cargados es diagonal y sus elementos son proporcionales a la masa de los leptones. Sin embargo las matrices de los acoplamientos de Yukawa de los quarks no son diagonales y los 18 elementos complejos de matriz están descritos por sólo 10 parámetros fenomenológicos: 6 masas de los quarks y 4 correspondientes a la Matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. Una razón para la reducción del número de parámetros se debe a que existe libertad para elegir las fases de los campos de quarks (libertad de refasamiento), por lo tanto todas las observables relacionadas con la matriz Cabibbo-Kobayashi-Maskawa ([10] y [11]) deben ser invariantes ante el cambio de fase.

En este trabajo estudiamos y obtenemos monomios generales construidos a partir de los elementos de la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM). Y está organizado de la siguiente forma. En el Capítulo 1 se presentan algunos aspectos generales del ME; en el Capítulo 2 se presentan los fundamentos del ME y se concluye con la presentación de la matriz CKM; en el Capítulo 3 se estudian las invariantes de fase en la matriz CKM; en el Capítulo 4 se explica la relevancia de los invariantes de fase; y en el Capítulo 5 se presentan las Conclusiones.

---

<sup>2</sup>Nuevas observaciones del quark *top* - la más pesada de todas las partículas fundamentales conocidas - podrían modificar el modelo estándar.

Los datos de las colisiones en el acelerador de partículas de Tevatron en Fermilab en Batavia, Illinois, sugieren que algunas de las interacciones del quark *top* se rigen por una fuerza aún desconocida, transmitida por una partícula hipotética no considerada aún bajo el modelo estándar, llamado gluón superior. De acuerdo con una interpretación, un quark *top* unido a su antipartícula, el antitop, actuaría como una versión del bosón de Higgs, confiriendo masa a otras partículas.

Un posible nuevo modelo fue sugerido por Christopher Hill en 2003, propuso cómo un quark *top* y su antipartícula podrían impartir masa a los bosones W y Z, partículas que llevan la Fuerza nuclear débil, responsable de la desintegración radiativa. La masa relativamente pesada adquirida por las partículas W y Z limita el alcance de la fuerza débil, rompiendo la simetría entre esta fuerza y la fuerza electromagnética de largo alcance que se cree que existe a energías muy altas.[12]

## Capítulo 2

# Modelo Estándar

### 2.1. Marco teórico

El Modelo Estándar de Física de Partículas se formula como una teoría de campo cuántico relativista, la cual es ampliamente considerada como un enfoque correcto para combinar la teoría cuántica de campos y la relatividad especial. En la teoría perturbativa del campo cuántico, la fuerza entre las partículas está mediada por otras partículas, los bosones de norma, los cuales están intrincadamente conectados a las tres interacciones fundamentales del modelo estándar: el electromagnetismo, la interacción débil y la interacción fuerte.

La electrodinámica cuántica (QED) es una descripción de las interacciones electromagnéticas, posiblemente uno de los logros teóricos más exitosos del siglo XX, la QED es la teoría del campo cuántico que conecta el formalismo moderno de la mecánica cuántica con los principios clásicos del electromagnetismo. Uno de sus muchos logros notables es el cálculo preciso del momento magnético del electrón, que concuerda con las mediciones experimentales con al menos 10 decimales. Por sus contribuciones al desarrollo del QED [13], Sinitiro Tomonaga, Julian Schwinger y Richard Feynman compartieron el Premio Nobel de Física en 1965.

En 1954, C.N. Frank Yang y Robert Mills [14] formularon un principio generalizado de invariancia de norma que eventualmente condujo a un nuevo tipo de teoría del campo cuántico. A diferencia de la QED, con un solo fotón mediador de fuerza, la teoría propuesta por Yang y Mills requirió tres bosones de norma sin masa: uno con carga eléctrica positiva, uno con carga eléctrica negativa y otro eléctricamente neutro. La introducción de bosones de norma adicionales implica la existencia de una fuerza capaz de transformar partículas de un tipo a otro, que entre otras cosas, convirtió los protones en neutrones (y viceversa) en la desintegración nuclear.

En 1965, Moo-Young Han, Yoichiro Nambu [15] y Oscar Greenberg [16] sentaron las bases para la cromodinámica cuántica (QCD), la teoría cuántica de norma describe la más fuerte de las cuatro interacciones fundamentales. La interacción fuerte es mediada por bosones de norma sin masa llamados gluones ( $g$ ). Los gluones son los *cuantos* de campo que llevan una clase de carga, llamada color, lo que explica el nombre de la teoría. Así como la carga eléctrica se conserva en el marco de QED, la carga de color de QCD se conserva en todas las interacciones entre quarks y gluones. Hay tres valores distintos de la carga de color - comúnmente se indica como rojo, verde y azul - junto con sus correspondientes anticolores.

## 2.2. Partículas elementales

A mediados del siglo XX, antes de que los quarks fueran postuladas teóricamente, los físicos de las partículas elementales fueron sorprendidos por la explosión repentina de la población de nuevas partículas descubiertas en el laboratorio. Las cosas parecían demasiado desorganizadas. ¿Cómo podrían todas estas partículas ser elementales? Se estudiaron a estas partículas y eventualmente se hizo evidente que no eran elementales en absoluto, comprendían dos o más partículas. Así como los primeros biólogos clasificaron los organismos vivos por su apariencia y características definitorias, los físicos clasificaron las partículas basándose en sus propiedades medidas tales como la masa, la carga eléctrica y el momento angular intrínseco. La identificación de características comunes dentro del "zoológico" de nuevas partículas llevó al modelo de quarks [17] de la naturaleza. Además, los nombres de las categorías de partículas se han convertido en una parte del vocabulario diario de la física de partículas experimental.

### Fermiones y bosones

Cada tipo de partícula, elemental o compuesta, tiene un momento angular intrínseco, o spin mecánico cuántico. Una partícula con un spin semi-entero ( $1/2, 3/2, 5/2, \dots$ ), en unidades de la constante de Planck, es un fermión. Una partícula con un número entero de spin ( $0, 1, 2, \dots$ ) es un bosón. El spin, además de ser el momento angular intrínseco de la partícula, gobierna la estadística de un conjunto de tales partículas, de modo que los fermiones y los bosones también pueden estar definidos según las estadísticas que satisfacen. Fermiones obedecen la estadística de Fermi-Dirac, y también el principio de exclusión de Pauli. Los bosones, por otro lado, obedecen a la estadística de Bose-Einstein, lo que significa que cualquier número del mismo tipo de partícula puede estar en el mismo estado al mismo tiempo.

Las partículas elementales que componen la materia son quarks y los leptones, tienen spin  $1/2$  y son, por tanto, fermiones. Como veremos, también hay partículas elementales que gobiernan las interacciones fundamentales del modelo estándar, estas son el fotón, los bosones W y Z, y los gluones que tienen spin 1, y por lo tanto son bosones. El bosón de Higgs tiene spin 0.

### Bariones y mesones

Una forma de distinguir los diversos fermiones elementales es si interactúan o no a través de la interacción fuerte: los quarks interactúan a través de la interacción fuerte, mientras que los leptones no lo hacen. Los hadrones son partículas compuestas por quarks unidos por la interacción fuerte. Pueden ser fermiones o bosones, dependiendo del número de quarks que los componen. Tres quarks ligados (o tres antiquarks ligados) forman hadrones de spin- $1/2$  o spin- $3/2$ , que se llaman bariones. Los bariones están hechos de quarks de materia "normal" y sus contrapartes de antimateria están hechas de los antiquarks correspondientes. Los ejemplos más conocidos de bariones son protones y neutrones. Los mesones son hadrones de spin-0 o spin-1 consistentes en un quark y antiquark, aunque no necesariamente del mismo sabor. Los ejemplos incluyen el  $\pi^+$  ( $u\bar{d}$ ) (un *pion* positivamente cargado) y el  $K^-$  ( $\bar{u}s$ ) (un *kaon* negativamente cargado). Debido a sus valores de spin, todos los bariones son fermiones y todos los mesones son bosones.

Partículas Elementales					
Fermiones			Bosones		
<b>Quarks</b> No existen de forma aislada Carga fraccionaria, Espín 1/2			<b>Mediadores</b> Portadores de fuerza Carga entera, Espín 1		
<i>primera generación</i>	<i>segunda generación</i>	<i>tercera generación</i>	$91.19 \text{ GeV}$	$0 \text{ eV}$	
$2/3$ <b><i>u</i></b>	$2/3$ <b><i>c</i></b>	$2/3$ <b><i>t</i></b>	$0$ <b><i>Z</i></b>	$0$ <b><i>g</i></b>	
<i>up</i>	<i>charm</i>	<i>top</i>	<i>bosón Z</i>	<i>gluon</i>	
$4.8 \text{ MeV}$	$95 \text{ MeV}$	$4.18 \text{ GeV}$	$<1 \times 10^{-18} \text{ eV}$	$80.385 \text{ GeV}$	
$-1/3$ <b><i>d</i></b>	$-1/3$ <b><i>s</i></b>	$-1/3$ <b><i>b</i></b>	$0$ <b><i>γ</i></b>	$\pm 1$ <b><i>W<sup>±</sup></i></b>	
<i>down</i>	<i>strange</i>	<i>bottom</i>	<i>fotón</i>	<i>bosón W</i>	
<i>primera generación</i>	<i>segunda generación</i>	<i>tercera generación</i>	<b>Campo de Higgs</b> Origen de la masa Carga entera, Espín 0		
$0.511 \text{ MeV}$	$105 \text{ MeV}$	$1776 \text{ MeV}$	$91.1876 \text{ GeV}$		
$-1$ <b><i>e</i></b>	$-1$ <b><i>μ</i></b>	$-1$ <b><i>τ</i></b>	$0$ <b><i>H</i></b>		
<i>electrón</i>	<i>muon</i>	<i>tau</i>	<i>Boson de Higgs</i>		
$<2 \text{ eV}$	$<0.19 \text{ MeV}$	$<18.2 \text{ MeV}$	<i>masa</i>		
$0$ <b><i>ν<sub>e</sub></i></b>	$0$ <b><i>ν<sub>μ</sub></i></b>	$0$ <b><i>ν<sub>τ</sub></i></b>	<i>carga</i> <b><i>símbolo</i></b>		
<i>electrón neutrino</i>	<i>muon neutrino</i>	<i>tau neutrino</i>	<i>nombre</i>		
<b>Leptones</b> Existen de forma aislada Carga entera, Espín 1/2					

Figura 2.1: Partículas elementales del Modelo Estándar: partículas de materia, mediadores y el campo de Higgs.

Una de las razones de la plétora de partículas descubiertas en el siglo pasado es las numerosas combinaciones posibles de diferentes sabores de quarks que uno puede poner en un barión de tres quarks o mesón de dos quarks. Además, cada una de estas combinaciones puede estar en uno de los múltiples estados mecánicos cuánticos. Por ejemplo, un mesón  $\rho^+$  tiene la misma combinación de quarks que un  $\pi^+$ , pero el  $\rho^+$  es una partícula de spin 1 mientras que el  $\pi^+$  es una partícula spin 0.

### 2.3. Grupos de norma y Lagrangiana en el Modelo Estándar

El ME está representado por el grupo de simetría  $G_{ME} = SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ <sup>1</sup>. El grupo  $SU(3)_C$  es la teoría fuerte, incluye ocho gluones de color acoplados a los quarks y entre sí; el grupo  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  es la teoría electrodébil, que unifica las interacciones débil y electromagnética, e incluye tres bosones de norma masivos, además del fotón sin masa.

En esta sección se presenta una visión resumida del ME [18] y se introduce la notación que se utiliza para los parámetros que aparecen en éste y se establece su estructura basada en la simetría de norma local en la cual se apoya. Con este modelo es posible describir las interacciones y el comportamiento de los leptones y quarks, así como el de los bosones de norma que lo constituyen, como elementos básicos de la materia, los primeros, y mediadores de las interacciones entre ellos, los segundos. Con el propósito de definir los parámetros del ME, se presenta el Lagrangiano de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_{ME} = \mathcal{L}_{electrodébil} + \mathcal{L}_{fuerte}. \quad (2.1)$$

La manera en la que el ME incorpora a los bosones mediadores de las interacciones es mediante el principio de norma. Los acoplamientos de norma son parámetros introducidos en la  $\mathcal{L}_{ME}$  para cuantificar la intensidad de las interacciones. Se considera un parámetro de acoplamiento para cada grupo unitario. De esta manera, los acoplamientos de norma  $g_1 = \sqrt{5/3}g'$ ,  $g_2 = g$  y  $g_3$  están relacionados con los grupos de simetría  $U(1)_Y$ ,  $SU(2)_L$  y  $SU(3)_C$ , respectivamente.

Se analiza primero la parte de la Lagrangiana del ME correspondiente a las interacciones electro débiles. Los términos de la Lagrangiana correspondientes a las interacciones electrodébiles se encuentran en:

$$\mathcal{L}_{electrodébil} = \mathcal{L}_{SU(2) \otimes U(1)} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Yukawa}. \quad (2.2)$$

La  $\mathcal{L}_{electrodébil}$  se forma por los términos asociados a la parte cinética ( $\mathcal{L}_{SU(2) \otimes U(1)}$ ), los términos responsables del rompimiento de la simetría espontánea (RES) a través del mecanismo de Higgs ( $\mathcal{L}_{Higgs}$ ) y los términos que generan las masas de los fermiones ( $\mathcal{L}_{Yukawa}$ ). La parte cinética  $\mathcal{L}_{SU(2) \otimes U(1)}$  es [19]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SU(2) \otimes U(1)} &= i\bar{l}_{fL}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu l_{fL} + i\bar{e}_{fR}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu e_{fR} + i\bar{q}_{fL}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu q_{fL} \\ &+ i\bar{u}_{fR}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu u_{fR} + i\bar{d}_{fR}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu d_{fR} \\ &- \frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu}^i \hat{F}^{i\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Las  $\gamma^\mu$  son las matrices de Dirac, los índices  $f$  e  $i$  toman valores de 1, 2 y 3. Los subíndices  $L$  y  $R$  corresponden a los estados de helicidad izquierda y derecha, respectivamente. Además, para los quarks se debe considerar una suma sobre el color, la cual es omitida en estas ecuaciones

<sup>1</sup>El **Grupo Unitario Especial** de grado  $n$ , denotado por  $SU(n)$ , es el grupo de Lie de matrices unitarias cuyo valor absoluto del determinante complejo es 1. Las matrices de Pauli son una base para el grupo  $SU(2)$ . Las matrices de Gell-Mann son una base para  $SU(3)$ .

para no tener más índices de los ya mostrados. El índice de familia,  $f$ , se usa para denotar a los espinores de Dirac de los leptones como:

$$(e_1, e_2, e_3) \equiv (e, \mu, \tau),$$

$$(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \equiv (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau),$$

y para los espinores de Dirac de los quarks tenemos

$$(u_1, u_2, u_3) \equiv (u, c, t),$$

$$(d_1, d_2, d_3) \equiv (d, s, b).$$

Con esta notación los dobletes izquierdos asignados a  $SU(2)_L$  son

$$l_{fL} = \begin{pmatrix} \nu_{fL} \\ e_{fL} \end{pmatrix},$$

$$q_{fL} = \begin{pmatrix} u_{fL} \\ d_{fL} \end{pmatrix},$$

y los singuletes derechos como

$$e_{fR}, u_{fR}, d_{fR}.$$

Los mediadores que transmiten las interacciones electrodébiles  $W_\mu^i$  y  $B_\mu$  se introducen a través de la invariancia del  $\mathcal{L}_{ME}$  bajo las transformaciones locales que forman el grupo de simetría  $G_{ME}$ . Estos campos bosónicos conforman la derivada covariante [?]:

$$D_\mu = \partial_\mu - igT^i W_\mu^i - \frac{iY}{2} g' B_\mu, \quad (2.4)$$

donde los números cuánticos para los leptones y los quarks se muestran en la Tabla 2.1. Además, los campos bosónicos determinan los tensores

$$\hat{F}_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + \epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k, \quad (2.5)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (2.6)$$

Ahora, para introducir el acoplamiento de norma de las interacciones fuertes  $g_3$ , se analizan los términos de  $\mathcal{L}$  relacionados con las interacciones fuertes, esto es,

$$\mathcal{L}_{fuerte} = \bar{\Psi} \left( \partial_\mu + \frac{i}{2} g_3 \lambda^a G_\mu^a \right) \gamma^\mu \Psi - \frac{1}{2} Tr \left[ \hat{G}_{\mu\nu} \hat{G}^{\mu\nu} \right], \quad (2.7)$$

donde  $\Psi$  es un triplete de color,

$$\Psi = \begin{pmatrix} q_r \\ q_b \\ q_g \end{pmatrix},$$

Fermión	$T$	$T_3$	$Y$	$Q$
$\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	1/2	1/2	-1	0
$e_L, \mu_L, \tau_L$	1/2	-1/2	-1	-1
$e_R, \mu_R, \tau_R$	0	0	-2	-1
$u_L, c_L, t_L$	1/2	1/2	1/3	-2/3
$d_L^c, s_L^c, b_L^c$	1/2	-1/2	1/3	-1/3
$u_R, c_R, t_R$	0	0	4/3	2/3
$d_R^c, s_R^c, b_R^c$	0	0	-2/3	-1/3

Tabla 2.1: Números cuánticos para los campos.

$Y$  es la hipercarga débil y  $T_3$  es la tercera componente del isoespín débil. La carga eléctrica está dada por la fórmula de Gell-Mann-Nishijima [21]:

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}, \quad (2.8)$$

Únicamente los quarks y los mediadores de las interacciones fuertes poseen color e interactúan fuertemente a través de él. Los mediadores de las interacciones fuertes son los gluones  $G_\mu^a$  para  $a = 1, \dots, 8$ , los cuales no tienen masa. Para mantener la invariancia del grupo  $SU(3)_C$  se introduce la derivada covariante  $\partial_\mu + \frac{i}{2}g_3\lambda^a G_\mu^a$ . La imposición de dicha invariancia introduce a los mediadores de la interacción fuerte, como en el caso de las interacciones electrodébiles. Finalmente, el tensor de energía cinética para los gluones es:

$$\hat{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_3 f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c \right) \lambda^a. \quad (2.9)$$

## 2.4. Mecanismo de Higgs

Los términos de masa para los mediadores de las interacciones electro-débiles y para los fermiones se introducen de manera especial para respetar la simetría del grupo  $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$  del modelo. El mecanismo para generar las masas de los bosones y fermiones es conocido como mecanismo de Higgs [8]. La idea principal del mecanismo es introducir un campo escalar complejo (Higgs), como doblete de  $SU_L(2)$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi_0 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

y un potencial dependiente de dos parámetros:  $\mu^2$  relacionado con la masa  $M_H$  del Higgs, y  $\lambda_H$ , el autoacoplamiento de este campo. Para el sector de Higgs se tiene

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (D_\nu \Phi)^\dagger (D^\nu \Phi) - V(\Phi), \quad (2.11)$$

donde

$$V(\Phi) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \frac{\lambda_H}{2} (\Phi^\dagger \Phi)^2. \quad (2.12)$$

Se presentan dos casos, cuando  $\mu^2 > 0$  y  $\mu^2 < 0$ , y para asegurar la estabilidad del vacío consideramos siempre el parámetro  $\lambda_H$  positivo ( $\lambda_H > 0$ ). Para el primer caso ( $\mu > 0$ ,  $\lambda_H > 0$ ), el potencial tiene un mínimo en  $\Phi = 0$ , entonces, el valor de expectación del campo es cero, por lo tanto se preserva la simetría de la lagrangiana.

En el segundo caso ( $\mu^2 < 0$ ,  $\lambda_H > 0$ ), el potencial tiene un mínimo distinto de cero, es decir, el sistema tiene una infinidad de estados de vacío. La simetría de norma de la lagrangiana es rota cuando elegimos un valor particular dado por

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

donde  $v \simeq 246 \text{ GeV}$  es el valor de expectación de vacío (VEV) del campo escalar  $\Phi$ , dado por

$$v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda_H}}, \quad (2.14)$$

y en consecuencia se deja invariante la simetría de norma  $U(1)_{EM}$ . Considerando perturbaciones alrededor del estado de vacío, se puede escribir el estado perturbado en la norma unitaria como

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

donde  $H$  es un campo real conocido como bosón de Higgs, y su masa está dada por

$$M_H^2 = v^2 \lambda_H. \quad (2.16)$$

El término cinético (derivada covariante) de la ecuación (2.11) genera las masas de los bosones de norma cuando se realiza el rompimiento espontáneo de la simetría

$$(D_\nu \Phi)^\dagger (D^\nu \Phi) = \left| \left( \partial_\mu - \frac{ig'}{2} B_\mu Y - \frac{ig}{2} W_\mu^a \tau_a \right) \Phi \right|^2. \quad (2.17)$$

Debido a que los campos  $B_\mu$  y  $W_\mu^a$  aparecen mezclados, se pueden expresar en términos de campos rotados  $A_\mu$  y  $Z_\mu$

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_\mu & \sin \theta_\mu \\ -\sin \theta_\mu & \cos \theta_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

donde el ángulo  $\theta_\mu$  es conocido como ángulo de Weinberg o ángulo de mezcla, definido por

$$\cos \theta_\mu = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \sin \theta_\mu = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (2.19)$$

Los campos  $W_\mu^1$  y  $W_\mu^2$  no aparecen mezclados con otros campos, se definen los campos vectoriales cargados  $W_\mu^\pm$  como

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \pm iW_\mu^2}{\sqrt{2}}. \quad (2.20)$$

Así los términos de masa para los bosones de norma cargados  $W_\mu^\pm$  son

$$M_{W_\mu^\pm} = \frac{gv}{2}. \quad (2.21)$$

Definiendo el campo  $Z_\mu$  como

$$Z_\mu = \frac{-g'B_\mu + W_\mu^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad (2.22)$$

entonces, el término masa para  $Z_\mu$  es

$$M_Z = \frac{v}{2} \sqrt{g^2 + g'^2}. \quad (2.23)$$

Y finalmente la combinación ortogonal

$$A_\mu = \frac{gB_\mu + g'W_\mu^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad (2.24)$$

nos deja un campo sin masa

$$M_A = 0, \quad (2.25)$$

que corresponde a la masa del fotón. Los términos de masa para los fermiones se obtienen mediante los acoplamientos de Yukawa al campo escalar  $\Phi$ , y así cuando  $\Phi$  adquiere un VEV se obtienen los términos de masa

$$M_f = \frac{v\lambda_f}{\sqrt{2}}, \quad (2.26)$$

donde el subíndice  $f$  corresponde a leptones y quarks.

## 2.5. Acoplamiento de Yukawa

Para generar la masa de los fermiones del ME se introducen los acoplamientos de Yukawa, lo que significa adicionar nuevos parámetros al lagrangiano del Modelo Estándar. Los acoplamientos de Yukawa están dados por

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = y_{(e)_{ff'}} \bar{l}_{fL} \Phi e_{f'R} + y_{(u)_{ff'}} \bar{q}_{fL} \tilde{\Phi} u_{f'R} + y_{(d)_{ff'}} \bar{q}_{fL} \Phi d_{f'R} + h.c., \quad (2.27)$$

donde se define a  $\tilde{\Phi}$  como

$$\tilde{\Phi} = i\sigma_2 \phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ \phi^- \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Es necesario cambiar la base de norma, en la cual las matrices  $y_{e,u,d}$  no son diagonales, a una base de masas donde si son diagonales las matrices,  $Y_{e,u,d}$ . Para obtener las masas de los campos físicos se requiere de una diagonalización de las matrices de Yukawa y esta se realiza mediante la siguiente transformación biunitaria:

$$Diag(Y_{u,d,e}, Y_{c,s,\mu}, Y_{t,b,\tau}) = (U_{u,d,e})_L y_{u,d,e} (U_{u,d,e})_R^\dagger, \quad (2.29)$$

las matrices unitarias  $(U_{u,d,e})_{L,R}$  cambian los estados de norma  $u_i$  a estados de masa. Para el sector up de los quarks tenemos

$$\begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_{L,R} = (U_u)_{L,R} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{L,R}, \quad (2.30)$$

de forma análoga para el sector down y los leptones cargados

$$\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_{L,R} = (U_d)_{L,R} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}_{L,R}, \quad (2.31)$$

y

$$\begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}_{L,R} = (U_e)_{L,R} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}_{L,R}, \quad (2.32)$$

respectivamente. De esta manera, se tienen nueve parámetros, que serán determinados a partir de la masa de los fermiones de la siguiente manera

$$m_F = \frac{1}{\sqrt{2}} v Y_F, \quad (2.33)$$

donde  $F = e, \mu, \tau, u, d, s, c, b, t$ , corresponde al electrón, muón, tau y los quarks up, down, strange, charm, bottom y top. Se dice que se ha cambiado de un estado de simetría total en el que no existían partículas con masa, a uno donde se ha roto espontáneamente la simetría y adquieren masa todas las partículas del Modelo Estándar, con excepción del fotón y los neutrinos.

## 2.6. Matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)

Cabe mencionar que además de los nuevos parámetros relativos a las masas, se adicionan cuatro parámetros más que están relacionados con la matriz de Cabibbo Kobayashi Maskawa (CKM), la cual se obtiene al realizar el cambio de estados de norma a estados de masa

$$V = (U_u)_L (U_d)_L^\dagger. \quad (2.34)$$

El efecto de esta transformación se manifiesta en el lagrangiano de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_{qW} = -\frac{g}{\sqrt{2}} (\overline{u}_L, \overline{c}_L, \overline{t}_L) \gamma^\mu W_\mu^+ \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} + h.c. \quad (2.35)$$

Los valores de los elementos individuales de la matriz pueden determinarse, en principio, a partir de decaimientos débiles de los quarks relevantes o, en algunos casos, de la dispersión inelástica profunda de los neutrinos. Existen varias parametrizaciones de la matriz CKM. La parametrización estandar [11] de  $V$  utiliza los ángulos  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{23}$ ,  $\theta_{13}$ , y una fase  $\delta_{13}$ . Esto tiene claras ventajas de interpretación, porque los ángulos de rotación están definidos y etiquetados de una manera que se relaciona con la mezcla de tres generaciones específicas y si uno de estos ángulos se desvanece, también lo hace la mezcla entre esas tres generaciones:

$$V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

con  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$  y  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$  para las generaciones con etiquetas  $i, j = 1, 2, 3$ . Kobayashi y Maskawa [20] originalmente eligieron una parametrización que involucra a los ángulos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  y la fase  $\delta$

$$V = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1c_3 & -s_1s_3 \\ s_1c_2 & c_1c_2c_3 - s_2s_3e^{i\delta} & c_1c_2s_3 + s_2c_3e^{i\delta} \\ s_1s_2 & c_1s_2c_3 + c_2s_3e^{i\delta} & c_1s_2s_3 - c_2c_3e^{i\delta} \end{pmatrix},$$

donde  $c_i = \cos \theta_i$  y  $s_i = \sin \theta_i$ . para  $i = 1, 2, 3$ . En el límite  $\theta_2 = \theta_3 = 0$ , esto se reduce a la usual mezcla de Cabibbo con  $\theta_1$  identificado (hasta un signo) con el ángulo de Cabibbo. Una aproximación a la parametrización estandar propuesta por Wolfenstein [22] enfatiza la jerarquía en el tamaño de los ángulos,  $s_{12} \gg s_{23} \gg s_{13}$ . Estableciendo  $\lambda \equiv s_{12}$ , el seno del ángulo de Cabibbo, se pueden expresar los otros elementos en términos de potencias de  $\lambda$ :

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \bar{\rho} - i\bar{\eta}) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix},$$

donde  $A, \rho$  y  $\eta$  son números reales.

## Capítulo 3

# Invariantes de Fase

### 3.1. Acoplamientos de Yukawa e Invariantes de fase

El ME está representado por su Lagrangiano, la parte del Lagrangiano que corresponde a la interacción de Yukawa tiene la siguiente forma

$$y_u \bar{u}_R (\phi^+ u_L) + y_d \bar{d}_R (\phi d_L) + h.c., \quad (3.1)$$

aquí  $y_u$  y  $y_d$  son los acoplamientos de Yukawa para los quarks del sector up y down;  $\phi$  es el campo de Higgs;  $u_{L,R}$  y  $d_{L,R}$  son los campos de quarks. Las  $y_u$  y  $y_d$  son matrices complejas  $3 \times 3$  no observables directamente, y pueden ser diagonalizadas por medio de transformaciones biunitarias, siendo  $Y^{u,d}$  sus eigenvalores.

$$\text{diag}(Y_1^u, Y_2^u Y_3^u) = U_R^u y_u U_L^{u\dagger}, \quad \text{diag}(Y_1^d, Y_2^d Y_3^d) = U_R^d y_d U_L^{d\dagger}, \quad (3.2)$$

el índice  $i = (1, 2, 3)$  se refiere en el caso del sector up a  $(u, c, t)$ , y en el caso del sector down a  $(d, s, b)$ , los campos de quarks se transforman por medio de los operadores unitarios  $U_{L,R}^{u,d}$ . Con esta transformación y después del rompimiento espontáneo de la simetría, los términos del Lagrangiano de Yukawa se convierten en términos que contienen a la masa de los quarks:  $m_i^{u,d} = (\nu/\sqrt{2}) Y_i^{u,d}$ , donde  $\nu$  es el valor de expectación del vacío del campo de Higgs. Las corrientes cargadas dejan de ser diagonales y ahora se encuentran descritas en términos de la matriz CKM denotada por  $V$ :

$$V = U_L^u U_L^{d\dagger}. \quad (3.3)$$

Las matrices  $U_{L,R}^{u,d}$  en (3.2) son distintas para los quarks up y down. Existe una libertad relacionada con el cambio de fase para la matriz CKM. Las masas de los quarks (ó los  $Y_i^{u,d}$ ) y los elementos de la matriz CKM, no obstante, son y generan observables medibles invariantes ante cambio de fases. Los términos típicos relacionados con los acoplamientos de Yukawa en los cálculos de la sección transversal, en el ME, tienen la siguiente forma

$$\text{Tr} \left( \left( y_u^\dagger y_u \right)^{l_1} \left( y_d^\dagger y_d \right)^{l_2} \left( y_u^\dagger y_u \right)^{l_3} \dots \left( y_d^\dagger y_d \right)^{l_r} \right), \quad (3.4)$$

y están relacionados con los observables emanados de la matriz  $V_{CKM}$  y de los eigenvalores  $Y_i^{u,d}$ .

Como ejemplo, tenemos que

$$\text{Tr} \left( y_u^\dagger y_u \right) = \sum_{i=1}^3 (Y_i^u)^2, \quad \text{Tr} \left( y_d^\dagger y_d \right) = \sum_{i=1}^3 (Y_i^d)^2, \quad (3.5)$$

$$\text{Tr} \left( y_u^\dagger y_u y_d^\dagger y_d \right) = \sum_{i,j=1}^3 \left( Y_i^u Y_j^d \right)^2 |V_{ij}|^2, \quad (3.6)$$

$$\text{Tr} \left( \left( y_u^\dagger y_u \right)^2 \left( y_d^\dagger y_d \right)^2 y_u^\dagger y_u y_d^\dagger y_d \right) = \sum_{i,j,k,l=1}^3 \left( (Y_i^u)^2 (Y_j^d)^2 Y_k^u Y_l^d \right)^2 V_{ik} V_{jl} V_{il}^* V_{jk}^*. \quad (3.7)$$

Todos los términos que aparecen del lado derecho de (3.5) a (3.7) son invariantes de fase. Los eigenvalores  $Y_i^{u,d}$  claramente lo son, sin embargo los términos que se construyen a través de la matriz  $V_{ij}$  son más interesantes. Así que es importante encontrar cual es la forma general de los monomios invariantes de fase que se construyen a través de los elementos de la matriz  $V_{CKM}$ , para relacionarlos con los observables físicos (experimentales).

Los monomios surgen en el sector de Yukawa de la lagrangiana del Modelo Estándar, en este trabajo se clasifican y analizan las condiciones para su invariancia, se definen a los Monomios Invariantes de Fase (MIFs), Monomios Invariantes de Fase Puros (MIFP) y Monomios Invariantes de Fase Básicos (MIFB). Los resultados más importantes son:

1. Cualquier MIFP para tres generaciones de quarks puede ser expresado de una manera única como el producto de potencias positivas de a lo más cuatro MIFB. No más de uno de los invariantes es de orden seis, los restantes son de orden cuatro.
2. Cualquier MIF de la matriz CKM para tres generaciones de quarks puede ser expresado de manera única como el producto de no más de 5 factores: cuatro de ellos como potencias positivas de MIFB s y el producto de cuadrados de los valores absolutos de elementos de la matriz CKM también tomados con potencias positivas. No más de un MIFB es de orden seis.

Este resultado es matemático y físicamente interesante para el Modelo Estándar, ya que con él se pueden simplificar los cálculos de la sección de dispersión y de los diagramas de Feynman que contienen lazos, para expresar el resultado final en términos de un número reducido de MIFs. Los resultados de este trabajo pueden conducir a simplificaciones significativas de las ecuaciones del grupo de renormalización para el Modelo Estándar.

### 3.2. Efecto de los cambios de fase de los quarks en la Matriz CKM

En el ME de tres generaciones, la violación Carga-Paridad se origina a partir del ángulo de fase presente en la matriz unitaria Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. Matemáticamente, se permite que sólo exista un ángulo de fase en una matriz unitaria de tres por tres, y tres ángulos eulerianos. La razón de estudiar los invariantes de fase es su relación directa con la violación de la CP.

La matriz  $V_{CKM}$  aparece en el Lagrangiano relacionado con las corrientes cargadas

$$L_{W^+} = -\frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}, \bar{c}, \bar{t})_L (V_{CKM}) \gamma^\mu \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L W_\mu^+,$$

y es sensible a los siguientes cambios de fase de los campos de los quarks

$$u_{Li} \rightarrow e^{i\phi^u} u_{Li}, \quad d_{Li} \rightarrow e^{i\phi^d} d_{Li},$$

Los elementos de la matriz  $V_{CKM}$  son afectados ante estos elementos de la siguiente manera:

$$V \rightarrow \begin{pmatrix} e^{-i\phi_u} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_c} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\phi_t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi_d} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_s} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_b} \end{pmatrix},$$

es decir

$$V_{\alpha j} \rightarrow \exp\left(i\left(\phi_j^d - \phi_\alpha^u\right)\right) V_{\alpha j}. \quad (3.8)$$

Para ilustrar lo anterior, consideremos un caso particular usando notación numérica para los elementos  $V_{ij}$  de la matriz  $V_{CKM}$ . Ante el cambio de fase de un elemento del sector up, obtenemos

$$V \rightarrow \begin{pmatrix} e^{-i\phi_1^u} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi_1^u} V_{11} & e^{-i\phi_1^u} V_{12} & e^{-i\phi_1^u} V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{pmatrix}$$

En este ejemplo, tenemos que  $\phi_j^d = 0$  para  $j = 1, 2, 3$ , y sólo  $\phi_1^u \neq 0$  en (3.8). Los únicos elementos que cambian corresponden al primer renglón de la matriz  $V$

$$V_{11} \rightarrow \exp(i(-\phi_1)) V_{11}, \quad V_{12} \rightarrow \exp(i(-\phi_1)) V_{12}, \quad V_{13} \rightarrow \exp(i(-\phi_1)) V_{13}.$$

Considerando ahora el complejo conjugado de estos elementos se tiene

$$V_{11}^* \rightarrow \exp(i(\phi_1)) V_{11}^*, \quad V_{12}^* \rightarrow \exp(i(\phi_1)) V_{12}^*, \quad V_{13}^* \rightarrow \exp(i(\phi_1)) V_{13}^*.$$

Como era de esperarse, los siguientes productos no resienten el cambio, es decir, son invariantes de fase

$$V_{11}^* V_{11} = |V_{11}|^2, \quad V_{22}^* V_{22} = |V_{22}|^2, \quad V_{33}^* V_{33} = |V_{33}|^2.$$

Consideremos ahora una representación general de monomios CKM [23]

$$P(m, n) = \prod_{ij} V_{ij}^{m_{ij}} \prod_{kl} (V_{kl}^{n_{kl}})^*, \quad (3.9)$$

donde  $i, j, k, l = 1, 2, 3$  y

$$m = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix},$$

es decir

$$P(m, n) = \prod_{kl} [V_{11}^{m_{11}} V_{12}^{m_{12}} V_{13}^{m_{13}} V_{21}^{m_{21}} V_{22}^{m_{22}} V_{23}^{m_{23}} V_{31}^{m_{31}} V_{32}^{m_{32}} V_{33}^{m_{33}}] (V_{kl}^{n_{kl}})^*. \quad (3.10)$$

En particular para el caso anterior en el que los cambios se dan sólo para los elementos  $V_{1i}$ , tenemos

$$\begin{aligned} P^{(1)}(m, n) &= \prod_{j,l} V_{1j}^{m_{1j}} (V_{1l}^{n_{1l}})^* \quad j, l = 1, 2, 3 \\ &\rightarrow \exp(i(-m_{11}\phi_1)) V_{11}^{m_{11}} \exp(i(-m_{12}\phi_1)) V_{12}^{m_{12}} \exp(i(-m_{13}\phi_1)) V_{13}^{m_{13}} \\ &\quad \exp(i(n_{11}\phi_1)) V_{11}^{*n_{11}} \exp(i(n_{12}\phi_1)) V_{12}^{*n_{12}} \exp(i(n_{13}\phi_1)) V_{13}^{*n_{13}} \\ &= \prod_{j,l} V_{1j}^{m_{1j}} (V_{1l}^{n_{1l}})^* \exp(-i\phi_1(m_{11} + m_{12} + m_{13})) \exp(i\phi_1(n_{11} + n_{12} + n_{13})), \end{aligned}$$

para la invariancia se requiere que

$$(m_{11} + m_{12} + m_{13}) - (n_{11} + n_{12} + n_{13}) = 0$$

ó

$$\sum_{j=1}^3 m_{1j} = \sum_{j=1}^3 n_{1j}$$

con lo que se establece el siguiente teorema:

**Teorema 1.** El monomio asociado a la matriz CKM es un monomio invariante de fase (MIF) si las matrices  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{n}$  satisfacen las siguientes condiciones:

$$\sum_{j=1}^3 m_{ij} = \sum_{j=1}^3 n_{ij}, \quad \sum_{i=1}^3 m_{ij} = \sum_{i=1}^3 n_{ij}.$$

Es decir:

Suma de columnas iguales

1.  $m_{ud} + m_{cd} + m_{td} = n_{ud} + n_{cd} + n_{td}$ ,
2.  $m_{us} + m_{cs} + m_{ts} = n_{us} + n_{cs} + n_{ts}$ ,
3.  $m_{ub} + m_{cb} + m_{tb} = n_{ub} + n_{cb} + n_{tb}$ ,

Suma de renglones iguales

1.  $m_{ud} + m_{us} + m_{ub} = n_{ud} + n_{us} + n_{ub}$ ,
2.  $m_{cd} + m_{cs} + m_{cb} = n_{cd} + n_{cs} + n_{cb}$ ,
3.  $m_{td} + m_{ts} + m_{tb} = n_{td} + n_{ts} + n_{tb}$ .

El resultado del Teorema anterior nos proporciona combinaciones posibles para los elementos de  $m$  y  $n$ . El monomio general (3.9) está parametrizado en términos de dos matrices, sin embargo, el resultado del teorema nos permite escribir un MIF parametrizado en términos de una matriz  $p$  de  $3 \times 3$  con elementos positivos o negativos, para la cual, la suma de los elementos de cada renglón o columna es igual a cero [24].

**Teorema 2.** El monomio:

$$P(p) = \prod_{p_{ij} > 0} (V_{ij})^{p_{ij}} \prod_{p_{kl} < 0} (V_{kl}^*)^{-p_{kl}}, \quad (3.11)$$

donde  $\mathbf{p}$  es una matriz  $3 \times 3$ , cuyos elementos son enteros positivos, negativos o cero, es invariante de fase puro (MIFP) si la suma de cada renglón y la suma de cada columna es cero.

**Definición 1.** El Monomio Invariante de Fase (MIF) de la matriz CKM que no se factoriza en términos del producto de valores absolutos de elementos de la matriz CKM y otros invariantes, se denota como MIF-Puro, es decir MIFP.

La matriz  $p$  para los MIFB se muestra en los apéndices A y B.

**Definición 2.** Un MIF Básico (MIFB) es un MIFP, que consiste en el producto de cuatro o seis elementos de la matriz CKM y sus complejos conjugados.

Sólo existen 18 MIFB de orden cuatro, nueve de ellos son:

$$\begin{aligned} J_1 &= V_{11}V_{22}V_{12}^*V_{21}^*, \\ J_2 &= V_{11}V_{23}V_{13}^*V_{21}^*, \\ J_3 &= V_{12}V_{23}V_{13}^*V_{22}^*, \\ J_4 &= V_{11}V_{32}V_{12}^*V_{31}^*, \\ J_5 &= V_{11}V_{33}V_{13}^*V_{31}^*, \\ J_6 &= V_{12}V_{33}V_{13}^*V_{32}^*, \\ J_7 &= V_{21}V_{32}V_{22}^*V_{31}^*, \\ J_8 &= V_{21}V_{33}V_{23}^*V_{31}^*, \\ J_9 &= V_{22}V_{33}V_{23}^*V_{32}^*, \\ J_{9+i} &= J_i^*, i = 1, \dots, 9. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ver Apéndice A. Monomios Básicos con productos de 4 elementos.

Además existen 12 MIFBs de sexto orden:

$$\begin{aligned} I_1 &= V_{11}V_{22}V_{33}V_{13}^*V_{21}^*V_{32}^*, \\ I_4 &= V_{11}V_{23}V_{32}V_{13}^*V_{22}^*V_{31}^*, \\ I_2 &= V_{11}V_{22}V_{33}V_{12}^*V_{23}^*V_{31}^*, \\ I_5 &= V_{12}V_{23}V_{31}V_{13}^*V_{21}^*V_{32}^*, \\ I_3 &= V_{11}V_{23}V_{32}V_{12}^*V_{21}^*V_{33}^*, \\ I_6 &= V_{12}V_{21}V_{33}V_{13}^*V_{22}^*V_{31}^*, \\ J_{6+i} &= I_i^*, i = 1, \dots, 6. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ver Apéndice B. Monomios Básicos con productos de 6 elementos.

### 3.3. Forma general de los monomios invariantes ante los cambios de fase

Las nociones introducidas acerca de los MIFP y MIFB nos permiten demostrar los siguientes dos teoremas:

**Teorema 3.** Cualquier MIFP para tres generaciones de quarks puede ser expresado de una manera única como el producto de potencias positivas de a lo más 4 MIFB. No más de uno de los invariantes puede tener la forma del conjunto (3.13) y los restantes pertenecen al conjunto (3.12).

**Teorema 4** (Teorema principal para Invariantes de Fase). Cualquier MIF de la matriz CKM para tres generaciones de quarks puede ser expresado de manera única como el producto de no más de 5 factores: 4 de ellos como potencias positivas de MIFBs y el producto de cuadrados de los valores absolutos de elementos de la matriz CKM también tomados con potencias positivas. No más de un MIFB es elemento del conjunto (3.12).

La prueba de estos teoremas es algebraica. Se demuestra primeramente el Teorema 2 usando la parametrización dada en (3.11) y se prueba que sólo son posibles 7 tipos de matrices  $p$ , después, para cada tipo, uno muestra que el Teorema 3 se cumple. El Teorema 4 se sigue del Teorema 3 debido a que un MIF general es igual a un MIFP multiplicado por el producto de cuadrados de valores absolutos de elementos de la matriz CKM.

Para sus demostraciones, consultar el Apéndice C. Características del Monomio invariante Puro General  $P(p)$ .

## Capítulo 4

# Relevancia de los Invariantes de Fase

### 4.1. Invariante de Jarlskog

En física de partículas, la simetría CP [25] se refiere a la simetría de conjugación de carga C y de paridad P. Las leyes de conservación en la física establecen que no debería haber ningún cambio en éstas ante el intercambio de una partícula por su antipartícula (simetría C) mientras que sus coordenadas espaciales son invertidas (simetría de “espejo” P). Sin embargo en 1964 se descubre que en el decaimiento de partículas conocidas como kaones esta simetría no se conserva, lo que se conoce como la violación de CP (VCP). Este descubrimiento juega un papel muy importante tanto en los intentos de la cosmología para explicar el dominio de la materia frente a la antimateria en el universo presente como en el estudio de las interacciones débiles a través del Modelo Estándar en la física de partículas. Esta observación dió como resultado el Premio Nobel para sus descubridores James Cronin y Val Fitch.

La única fuente de VCP en el Lagrangiano del Modelo Estándar son los acoplamientos de Yukawa de los quarks. Estos acoplamientos están descritos por dos matrices  $Y_u$  y  $Y_d$  complejas de dimensión  $3 \times 3$  para los quarks up  $u$  y down  $d$  respectivamente. Estas matrices están relacionadas con las matrices de Masa de la siguiente manera:

$$M_u = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_u, \quad M_d = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_d, \quad (4.1)$$

donde  $v$  es el valor esperado del vacío del campo del Higgs y  $M_u$  y  $M_d$  son las matrices de masa de los quarks  $u$  y  $d$ . Las masas de los quarks son los eigenvalores de las matrices de masas de éstos y la matriz compleja  $V_{CKM}$  se obtiene a través de la combinación de las matrices biunitarias izquierdas de diagonalización  $U_L^{u,d}$  que actúan de la siguiente manera:

$$U_R^u M U_L^{u\dagger} = \text{Diag}(m_u, m_c, m_t), \quad (4.2)$$

$$U_R^d M U_L^{d\dagger} = \text{Diag}(m_d, m_s, m_b), \quad (4.3)$$

$$V_{CKM} = U_L^u U_L^{d\dagger}. \quad (4.4)$$

La matriz  $V_{CKM}$ , para tres generaciones de quarks, es una matriz unitaria y compleja

$$V_{CKM} V_{CKM}^\dagger = V_{CKM}^\dagger V_{CKM} = U_L^u U_L^{d\dagger} (U_L^d U_L^{u\dagger}) = I, \quad (4.5)$$

que contiene una fase que no puede ser eliminada mediante la libertad de fase de los campos de los quarks del Modelo Estándar.

C. Jarlskog [26] encontró que el conmutador de las matrices de masa de los quarks  $M$  para los del sector up y  $M'$  para los del sector down satisfacen la siguiente relación

$$[M, M'] = iC$$

que provee de una medida, independiente de la convención, para VCP.

Las matrices  $U_L^{u,d}$  también diagonalizan a las matrices Hermitianas  $Y_u^\dagger Y_u$  y  $Y_d^\dagger Y_d$  como sigue:

$$U_L^u Y_u^\dagger Y_u U_L^{u\dagger} = \text{Diag}(y_u^2, y_c^2, y_t^2),$$

$$U_L^d Y_d^\dagger Y_d U_L^{d\dagger} = \text{Diag}(y_d^2, y_s^2, y_b^2),$$

donde  $y_u, y_c, y_t, y_d, y_s$  y  $y_b$  son los eigenvalores de los acoplamientos de Yukawa correspondientes a los quarks up, charm, top, down, strange and bottom, respectivamente.

La propuesta en términos de la matriz  $C$

$$iC = [Y_u^\dagger Y_u, Y_d^\dagger Y_d],$$

que se describe en términos del conmutador entre los acoplamientos de Yukawa, es equivalente a la propuesta de Jarlskog y requiere para la VCP de la no nulidad del determinante

$$\det C \neq 0.$$

Además resulta que el  $\det C$  es igual a

$$\begin{aligned} \det C &= 2 (y_u^2 - y_c^2) (y_c^2 - y_t^2) (y_t^2 - y_u^2) \\ &\quad \times (y_b^2 - y_s^2) (y_s^2 - y_d^2) (y_d^2 - y_b^2) J. \end{aligned}$$

Es aquí donde el invariante  $J$  de Jarlskog (ante el refasamiento de los campos de quarks) se define en términos de los símbolos de Levi-Civita de la siguiente manera:

$$\text{Im} [V_{\alpha j} V_{\beta s} V_{\alpha s}^* V_{\beta j}^*] = J \sum_{m,n} \varepsilon_{\alpha\beta m} \varepsilon_{j s n}.$$

Así que la violación de CP está presente en el ME si  $J \neq 0$  y si las masas de todos los quarks por sectores *up* y *down* son diferentes entre sí.

Los resultados, previamente presentados, son fácilmente verificables de la siguiente manera:

$$\text{Im} J_1 = J \sum_{m,n} \varepsilon_{12m} \varepsilon_{12n} = \varepsilon_{123} \varepsilon_{123} J = J,$$

$$\text{Im} J_2 = J \sum_{m,n} \varepsilon_{12m} \varepsilon_{13n} = \varepsilon_{123} \varepsilon_{132} J = -J,$$

$$\text{Im} J_3 = J \sum_{m,n} \varepsilon_{12m} \varepsilon_{23n} = \varepsilon_{123} \varepsilon_{231} J = J.$$

Siguiendo este procedimiento con (3.12) obtenemos:

$$\text{Im} J_n = J \quad \text{para } n = 1, 3, 4, 5, \text{ y } 9,$$

$$\text{Im} J_n = -J \quad \text{para } n = 2, 6, 7, \text{ y } 8,$$

es decir

$$|\text{Im} J_n| = |J|.$$

lo cual concuerda con el resultado del apéndice D.

## 4.2. Triángulo Unitario

La determinación extremadamente precisa de los valores experimentales de los parámetros involucrados en el triángulo unitario es sumamente importante para considerar la posibilidad de nueva física descrita por medio de modelos teóricos que van más allá del ME. El triángulo unitario surge a través de la unitariedad de la matriz  $V$  de CKM. Consideremos las relaciones derivadas de la unitariedad de la matriz  $V_{CKM}$

$$\sum_{\alpha} V_{\alpha i} V_{\alpha j}^* = \sum_{\alpha} V_{i\alpha} V_{j\alpha}^* = \delta_{ij}.$$

En el caso  $i = d, j = b$  se tiene

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0.$$

Podemos interpretar esta ecuación como un triángulo en el plano complejo, cuyos ángulos son

$$\alpha \equiv \arg(-V_{td}V_{tb}^*/V_{ud}V_{ub}^*) = \arg\left(-V_{td}V_{ub}V_{tb}^*V_{ud}^*/|V_{ud}|^2|V_{ub}|^2\right) \rightarrow \arg J_5,$$

$$\beta \equiv \arg(-V_{cd}V_{cb}^*/V_{td}V_{tb}^*) = \arg\left(-V_{cd}V_{tb}V_{cb}^*V_{td}^*/|V_{td}|^2|V_{tb}|^2\right) \rightarrow \arg J_8,$$

$$\gamma \equiv \arg(-V_{ud}V_{ub}^*/V_{cd}V_{cb}^*) = \arg\left(-V_{ud}V_{cb}V_{ub}^*V_{cd}^*/|V_{cd}|^2|V_{cb}|^2\right) \rightarrow \arg J_3.$$

Los ángulos internos del triángulo satisfacen,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

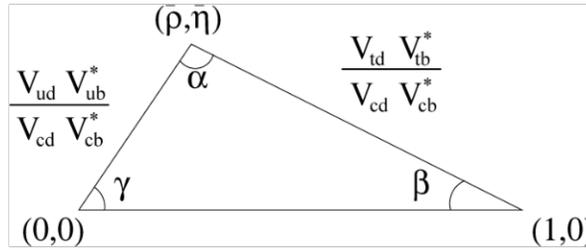


Figura 4.1: Triángulo unitario asociado a la matriz Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM).

Hay diversas parametrizaciones para la matriz CKM, a continuación se muestra la que se da en términos de los parámetros de Wolfenstein  $A, \lambda, \rho$  y  $\eta$ .

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\bar{\rho} - i\bar{\eta}) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \bar{\rho} - i\bar{\eta}) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En la figura se considera la corrección de [27] donde

$$\bar{\rho} = \rho(1 - \lambda^2/2), \quad \bar{\eta} = \eta(1 - \lambda^2/2), \quad \bar{\rho} + i\bar{\eta} = \frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*},$$

y

$$\rho + i\eta = \frac{V_{ud}V_{ub}^*}{|V_{cd}V_{cb}^*|}, \quad \frac{V_{td}V_{tb}^*}{|V_{cd}V_{cb}^*|} = 1 - \rho - i\eta, \quad \frac{V_{cd}V_{cb}^*}{|V_{cd}V_{cb}^*|} = -1.$$

La Interpretación geométrica de  $J$  se obtiene al considerar el área del triángulo cuya altura es  $\bar{\rho}$  y que resulta ser  $A = \frac{1}{2}|J|$ .

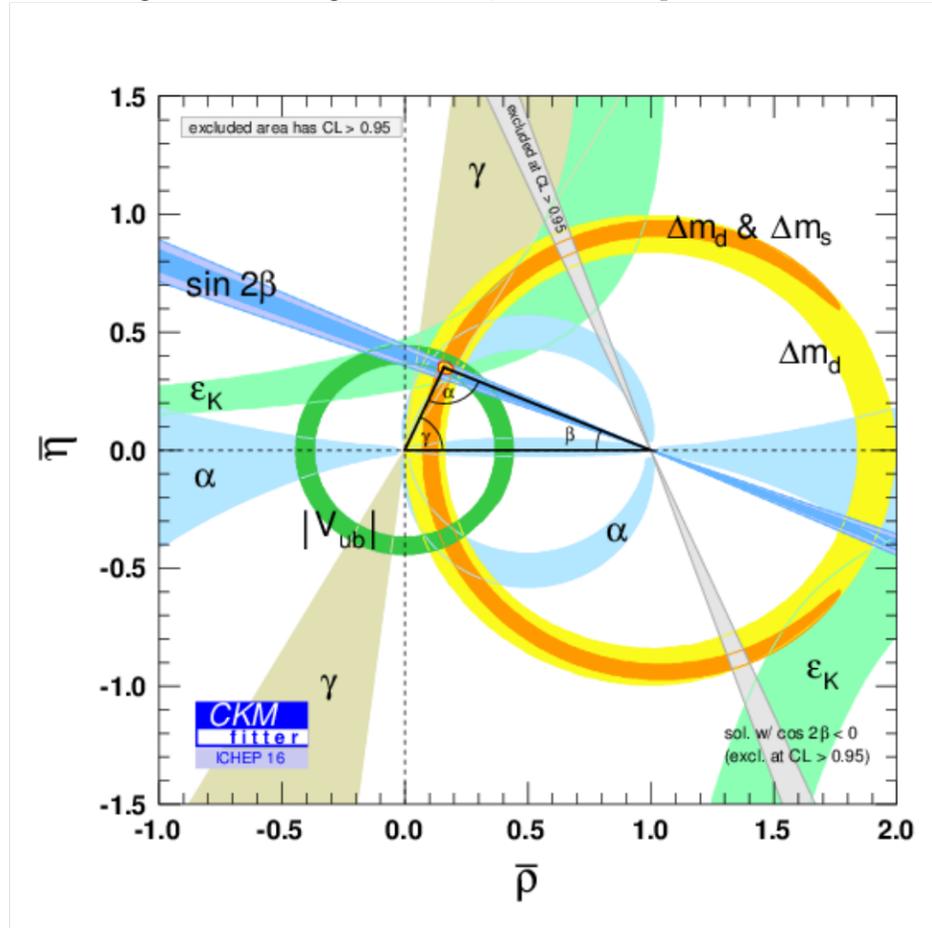
El área de todos los triángulos que se obtienen en base a la unitariedad de  $V_{CKM}$  es la misma, así que, en tanto que  $J \neq 0$ , si habrá violación de la simetría CP.

Las restricciones que impone la unitariedad de la matriz CKM, para tres generaciones de quarks, reduce el rango experimental permitido para el valor de sus elementos de la siguiente manera ([28] y [29]):

$$\lambda = 0.22506 \pm 0.00050, \quad A = 0.811 \pm 0.026 \quad \bar{\rho} = 0.124 \begin{matrix} +0.019 \\ -0.018 \end{matrix}, \quad \bar{\eta} = 0.356 \pm 0.011.$$

En la figura 4.2 se presentan resultados experimentales que proporcionan sólides al Modelo Estandar, por ejemplo, la región del vértice superior representa la región en donde ocurre la violación de la Carga-Paridad (CP).

Figura 4.2: Triángulo unitario, Fuente: Grupo CKMfitter.



### 4.3. Violación Carga-Paridad (CP)

El mecanismo de Kobayashi-Maskawa proporciona una explicación elegante y simple de la violación de CP. El modelo tiene solamente un parámetro libre que gobierna la violación de la CP, y sin embargo, logra explicar todas las medidas de violación de CP obtenidos en los experimentos de la física de partículas hasta la fecha. Desafortunadamente, a pesar de sus muchos éxitos, esta teoría sigue siendo incapaz de proporcionar una explicación de porqué la cantidad de bariones en el universo cae varios órdenes de magnitud por debajo de lo observado por los astrónomos.

La implicación de esta deficiencia es profunda: el Modelo Estándar es incompleto y otras fuentes de violación de CP deben existir porque ... ¡existimos! Se han propuesto muchas extensiones del ME, y la mayoría de ellas contienen fuentes de violación de CP. La tarea dada a los experimentalistas, por tanto, es medir de manera muy precisa la violación de CP en los procesos que pueden predecirse fiablemente por el ME para encontrar cualquier posible desacuerdo.

## Capítulo 5

# Conclusiones

Para la consolidación de un modelo teórico se requiere su verificación experimental y ésta se da a través de resultados que se relacionen con observables físicos tales como las que aquí se presentan. En este trabajo describimos las condiciones generales para la invariancia, ante el cambio de fases de los campos de quarks, para tres generaciones de ellos. Algunos invariantes, como el de Jarlskog, tienen gran importancia, ya que determina la violación de la simetría CP entre partículas y antipartículas. Los resultados que se presentan, propician además una simplificación en las ecuaciones del Grupo de Renormalización y son útiles para el cálculo entre otros de los diagramas de Feynman en el contexto del Modelo Estándar de la física de Altas Energías.

Primeramente consideramos una breve Introducción relativa a los aciertos del Modelo Estándar. En el Capítulo 2 se presentan los conceptos básicos del modelo y el surgimiento de la matriz CKM. En el Capítulo 3 se entra en materia relativa a los invariantes de fase y se describe con todo detalle la obtención de los 30 monomios invariantes básicos, 18 de los cuales están constituidos por el producto de 4 elementos de la matriz CKM y 12 por el producto de 6 elementos de esta matriz. Los resultados se describen en términos de 4 Teoremas fundamentales cuya demostración se muestra en los Apéndices A, B, y C. El Apéndice D está dedicado a la evaluación de la parte imaginaria de todos y cada uno de los invariantes básicos demostrando que ésta es proporcional al importante Invariante de Jarlskog. El Capítulo 4 se refiere a la relevancia de los Invariantes de fase en el ámbito de la Simetría CP y a través del Triángulo Unitario con un ajuste de los parámetros que aparecen en éste y su evaluación experimental reciente.

De no haber un ajuste adecuado con la matriz CKM, esto será una señal clara de nueva física que va más allá del ME.

## Apéndice A

# Monomios Básicos con productos de 4 elementos

Para los términos que contienen un producto de 4 elementos de la Matriz CKM consideramos las siguientes definiciones [30]:

$$[\alpha\beta; jk] := V_{\alpha j} V_{\beta k} V_{\alpha k}^* V_{\beta j}^*, \quad (\alpha, \beta, i, j, = 1, 2, 3), \quad (\text{A.1})$$

$$(\alpha\beta; jk) := \text{Im} [V_{\alpha j} V_{\beta k} V_{\alpha k}^* V_{\beta j}^*], \quad \langle \alpha\beta; jk \rangle := \text{Re} [V_{\alpha j} V_{\beta k} V_{\alpha k}^* V_{\beta j}^*]. \quad (\text{A.2})$$

Es decir,

$$(\alpha\beta; jk) = \frac{1}{2} (V_{\alpha j} V_{\beta k} V_{\alpha k}^* V_{\beta j}^* - V_{\alpha k} V_{\beta j} V_{\alpha j}^* V_{\beta k}^*), \quad (\text{A.3})$$

$$\langle \alpha\beta; jk \rangle := \frac{1}{2} (V_{\alpha j} V_{\beta k} V_{\alpha k}^* V_{\beta j}^* + V_{\alpha k} V_{\beta j} V_{\alpha j}^* V_{\beta k}^*). \quad (\text{A.4})$$

Algunas propiedades de estos términos son las siguientes:

$$(\alpha\beta; jk) = -(\alpha\beta; kj), \quad (\alpha\beta; jk) = -(\beta\alpha; jk), \quad (\text{A.5})$$

$$\langle \alpha\beta; jk \rangle = \langle \alpha\beta; kj \rangle, \quad \langle \alpha\beta; jk \rangle = \langle \beta\alpha; jk \rangle. \quad (\text{A.6})$$

$$[\alpha\beta; jk] := V_{\alpha j} V_{\alpha k} V_{\alpha k}^* V_{\alpha j}^* = |V_{\alpha k}|^2 |V_{\alpha j}|^2, \quad \alpha = \beta \quad (\text{A.7})$$

$$[\alpha\beta; jk] := V_{\alpha j} V_{\beta j} V_{\alpha j}^* V_{\beta j}^* = |V_{\alpha j}|^2 |V_{\beta j}|^2, \quad j = k \quad (\text{A.8})$$

Como los índices  $\alpha, \beta, i, j = 1, 2, 3$  toman tres valores cada uno, existen 81 términos diferentes.

Para considerar MIFPs hay que eliminar los términos con  $\alpha = \beta$ , y  $j = k$  ya que éstos introducen elementos invariantes de fase cuadráticos de acuerdo a (A.7) y (A.8), así que el número de términos se reduce a 36.

$$\begin{aligned} & [12; 12], [12; 13], [12; 21], [12; 23], [12; 31], [12; 32] \\ & [21; 12], [21; 13], [21; 21], [21; 23], [21; 31], [21; 32] \\ & [31; 12], [31; 13], [31; 21], [31; 23], [31; 31], [31; 32] \\ & [13; 12], [13; 13], [13; 21], [13; 23], [13; 31], [13; 32] \\ & [23; 12], [23; 13], [23; 21], [23; 23], [23; 31], [23; 32] \\ & [32; 12], [32; 13], [32; 21], [32; 23], [32; 31], [32; 32] \end{aligned}$$

=

$$\begin{aligned}
& [12; 12], [12; 13], [12; 12]^*, [12; 23], [12; 13]^*, [12; 23]^* \\
& [21; 12], [21; 13], [21; 12]^*, [21; 23], [21; 13]^*, [21; 23]^* \\
& [31; 12], [31; 13], [31; 12]^*, [31; 23], [31; 13]^*, [31; 23]^* \\
& [13; 12], [13; 13], [13; 12]^*, [13; 23], [13; 13]^*, [13; 23]^* \\
& [23; 12], [23; 13], [23; 12]^*, [23; 23], [23; 13]^*, [23; 23]^* \\
& [32; 12], [32; 13], [32; 12]^*, [32; 23], [32; 13]^*, [32; 23]^*
\end{aligned}$$

Lo anterior, considerando

$$[\alpha\beta; jk]^* = (V_{\alpha j}V_{\beta k}V_{\alpha k}^*V_{\beta j}^*)^* = V_{\alpha k}V_{\beta j}V_{\alpha j}^*V_{\beta k}^* = [\alpha\beta; kj] \quad (\text{A.9})$$

reduce el número de términos a la mitad, por lo que quedan sólo 18 términos de los cuales 9 términos corresponden a los complejos conjugados de ellos mismos, y obtenemos

$$\begin{aligned}
& [12; 12], [12; 13], [12; 23], \\
& [21; 12], [21; 13], [21; 23], \\
& [31; 12], [31; 13], [31; 23], \\
& [13; 12], [13; 13], [13; 23], \\
& [23; 12], [23; 13], [23; 23], \\
& [32; 12], [32; 13], [32; 23].
\end{aligned}$$

con el intercambio de  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$[\beta\alpha; jk]^* = (V_{\beta j}V_{\alpha k}V_{\beta k}^*V_{\alpha j}^*)^* = V_{\beta k}V_{\alpha j}V_{\beta j}^*V_{\alpha k}^* = [\beta\alpha; kj] \quad (\text{A.10})$$

$$[12; 12] = V_{11}V_{22}V_{12}^*V_{21}^* = (V_{21}V_{12}V_{22}^*V_{11}^*)^* = [21; 12]^*$$

Por lo que podemos eliminar más términos

$$\begin{aligned}
& [12; 12], [12; 13], [12; 23], \\
& [31; 12], [31; 13], [31; 23], \\
& [23; 12], [23; 13], [23; 23],
\end{aligned}$$

restando sólo 9 términos y sus complejos conjugados. Resumiendo, consideramos ahora como MIFBs a los siguientes términos.

$$\begin{aligned}
J_1 &= V_{11}V_{22}V_{12}^*V_{21}^*, & J_2 &= V_{11}V_{23}V_{13}^*V_{21}^*, \\
J_3 &= V_{12}V_{23}V_{13}^*V_{22}^*, & J_4 &= V_{31}V_{12}V_{32}^*V_{11}^*, \\
J_5 &= V_{11}V_{33}V_{31}^*V_{13}^*, & J_6 &= V_{33}V_{12}V_{32}^*V_{13}^*, \\
J_7 &= V_{22}V_{31}V_{21}^*V_{32}^*, & J_8 &= V_{21}V_{33}V_{23}^*V_{31}^*, \\
J_9 &= V_{22}V_{33}V_{23}^*V_{32}^*,
\end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

los otros nueve son los complejos conjugados:

$$J_{9+i} = J_i^*, i = 1, \dots, 9. \quad (\text{A.12})$$

Las matrices  $p_i$  (3.11) que las representan, con  $i = 1, \dots, 9$ , contienen 2 números positivos y 2 negativos además de 5 ceros:

$$p_{J_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_{J_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_{J_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13a})$$

$$p_{J_4} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_{J_5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_{J_6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13b})$$

$$p_{J_7} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_{J_8} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_{J_9} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13c})$$

## Apéndice B

# Monomios Básicos con productos de 6 elementos

Definimos

$$I_q = [\alpha\beta\gamma; ijk, lmn] := V_{\alpha i} V_{\beta j} V_{\gamma k} V_{\alpha l}^* V_{\beta m}^* V_{\gamma n}^*, \quad (\text{B.1})$$

donde:  $\alpha, \beta, \gamma, i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3$ ; y  $q = 1, \dots, 6$ . Los índices  $\alpha, \beta, \gamma$  indican los renglones y los índices  $i, j, k, l, m, n$  indican las columnas en la matriz CKM de sus elementos que aparecen en la ec. (B1). Las matrices  $p_q$  (3.11) constituídas por tres ceros, 3 números positivos y tres números negativos que se obtienen mediante la permutación de  $p_1$ , de acuerdo a (3.13) son las siguientes:

$I_1 = [123; 123, 312] = V_{11} V_{22} V_{33} V_{13}^* V_{21}^* V_{32}^*$  cuya matriz  $p_{I_1}$  asociada es

$$p_{I_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$I_2 = [123; 123, 231] = V_{11} V_{22} V_{33} V_{12}^* V_{23}^* V_{31}^*$  cuya matriz  $p_{I_2}$  asociada es

$$p_{I_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$I_3 = [123; 132, 213] = V_{11} V_{23} V_{32} V_{12}^* V_{21}^* V_{33}^*$  cuya matriz  $p_{I_3}$  asociada es

$$p_{I_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$I_4 = [123; 132, 312] = V_{11} V_{23} V_{32} V_{13}^* V_{22}^* V_{31}^*$  cuya matriz  $p_{I_4}$  asociada es

$$p_{I_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$I_5 = [123; 231, 312] = V_{12} V_{23} V_{31} V_{13}^* V_{21}^* V_{32}^*$  cuya matriz  $p_{I_5}$  asociada es

$$p_{I_5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$I_6 = [123; 213, 321] = V_{12}V_{21}V_{33}V_{13}^*V_{22}^*V_{31}^*$  cuya matriz  $p_{I_6}$  asociada es

$$p_{I_6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En resumen, los doce monomios invariantes de fase con seis elementos son:

$$I_1 = [123; 123, 312] = V_{11}V_{22}V_{33}V_{13}^*V_{21}^*V_{32}^*$$

$$I_2 = [123; 123, 231] = V_{11}V_{22}V_{33}V_{12}^*V_{23}^*V_{31}^*$$

$$I_3 = [123; 132, 213] = V_{11}V_{23}V_{32}V_{12}^*V_{21}^*V_{33}^*$$

$$I_4 = [123; 132, 312] = V_{11}V_{23}V_{32}V_{13}^*V_{22}^*V_{31}^*$$

$$I_5 = [123; 231, 312] = V_{12}V_{23}V_{31}V_{13}^*V_{21}^*V_{32}^*$$

$$I_6 = [123; 213, 321] = V_{12}V_{21}V_{33}V_{13}^*V_{22}^*V_{31}^*.$$

$$I_{6+i} = (I_i)^*.$$

En las ecs (B.1)

$$I_q = [\alpha\beta\gamma; ijk, lmn], \quad q = 1, 2, \dots, 6$$

$$I_q = V_{\alpha i}V_{\beta j}V_{\gamma k}V_{\alpha l}^*V_{\beta m}^*V_{\gamma n}^*$$

los índices  $lmn$  están relacionados con los índices  $ijk$  en cada caso  $q$  de la siguiente manera

$$lmn = kij, \quad q = 1, 3, 6, \tag{B.2}$$

$$lmn = jki, \quad q = 2, 5, \tag{B.3}$$

$$lmn = jik, \quad q = 4. \tag{B.4}$$

Sustituídos los índices correspondientes, resulta para las  $I_q$ s:

$$I_1, I_3, I_6 \longrightarrow [\alpha\beta\gamma; ijk, kij], \tag{B.5}$$

$$I_2, I_5 \longrightarrow [\alpha\beta\gamma; ijk, jki] \tag{B.6}$$

$$I_4 \longrightarrow [\alpha\beta\gamma; ijk, jik]. \tag{B.7}$$

## Apéndice C

# Características del Monomio invariante Puro General $P(p)$

$P(p)$  depende de la matriz  $p$  cuyos elementos son números enteros.

$$P(m, n) = \prod_{ijkl} (V_{ij})^{m_{ij}} (V_{kl}^*)^{n_{kl}} \quad m_{ij}, n_{kl} > 0, \quad p = m - n. \quad (\text{C.1})$$

Para tres generaciones los índices adoptan tres valores  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ . En  $P(p)$  no están incluidos los términos con módulo cuadráticos que resulten cuando  $ij = kl$  y  $m_{ij} = n_{ij}$ . De acuerdo al Teorema 1, la matriz  $p$  satisface los siguientes requisitos:

$$\sum_{i=1}^3 p_{ij} = 0, \quad \sum_{j=1}^3 p_{ij} = 0,$$

además para  $n$  entero,

$$P(p_1 + p_2) = P(p_1)P(p_2), \quad (P(p))^n = P(np).$$

Para ver ejemplos consultar los Apéndices A y B. Ahora consideraremos a la matriz  $p$ , que satisface el Teorema 1 en su forma más general, en base a matrices que contienen únicamente ceros y  $\pm 1$ s. Para ello consideremos en la siguiente Tabla [24] que contiene a todas las posibles formas de distribuir a los elementos de  $p$ .

Tipo	1	2	3	4	5	6	7				
$\# > 0$	2	3	3	4	5	3	4	3	6	4	5
$\# < 0$	2	3	4	3	3	5	4	6	3	5	4
$\# = 0$	5	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0

Tabla C.1. Todas las posibles distribuciones de elementos positivos ( $\# > 0$ ), negativos ( $\# < 0$ ) y ceros ( $\# = 0$ ) que contiene la matriz  $p$ .

Ejemplos:

**Tipo 1.** Para el caso con 5 ceros, 2 números positivos y 2 números negativos

$$\begin{pmatrix} n & 0 & -n \\ 0 & 0 & 0 \\ -n & 0 & n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n > 0$$

esta matriz genera a  $n$  veces  $p_{J_5}$

$$\begin{pmatrix} n & 0 & -n \\ 0 & 0 & 0 \\ -n & 0 & n \end{pmatrix} \longrightarrow (J_5)^n, \quad (\text{C.2})$$

a la que le corresponde una potencia del invariante básico  $J_5$  es decir,  $(J_5)^n = (V_{11}V_{33}V_{31}^*V_{13}^*)^n$ . Notar que todas las matrices correspondientes directamente a los invariantes básicos  $J_n$  con  $n = 1, \dots, 18$  son del tipo 1 (ver apéndice A).

**Tipo 2.** Caso con 3 ceros, 3 números s positivos y 3 números negativos

$$\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & -(n_1 + n_2) \\ 0 & 0 & 0 \\ -n_1 & -n_2 & (n_1 + n_2) \end{pmatrix} = n_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad n_1, n_2 > 0$$

Esta matriz genera

$$\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & -(n_1 + n_2) \\ 0 & 0 & 0 \\ -n_1 & -n_2 & (n_1 + n_2) \end{pmatrix} \longrightarrow (J_5)^{n_1} \cdot (J_6)^{n_2}. \quad (\text{C.3})$$

Así que el invariante resultante corresponde al producto de dos MIFBs del grupo  $J_n$ . Otro ejemplo de este Tipo 2 es

$$\begin{pmatrix} n & -n & 0 \\ 0 & n & -n \\ -n & 0 & n \end{pmatrix} \longrightarrow (I_2)^n. \quad n > 0 \quad (\text{C.4})$$

Aquí aparece un sólo MIFB tipo  $I_n$  (ver apéndice B).

**Tipo 3a.** Primer caso con 2 ceros, 3 números positivos y 4 números negativos

$$\begin{pmatrix} n_1 + n_2 & 0 & -(n_1 + n_2) \\ -n_2 & n_2 & 0 \\ -n_1 & -n_2 & (n_1 + n_2) \end{pmatrix} = n_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad n_1, n_2 > 0$$

esta matriz genera

$$\begin{pmatrix} n_1 + n_2 & 0 & -(n_1 + n_2) \\ -n_2 & n_2 & 0 \\ -n_1 & -n_2 & (n_1 + n_2) \end{pmatrix} \longrightarrow (J_5)^{n_1} \cdot (I_1)^{n_2}, \quad (\text{C.5})$$

cuyo invariante resultante corresponde al producto de un MIFB del grupo  $J_n$  y uno del grupo  $I_n$ .

**Tipo 3b.** Segundo caso con 2 ceros, 4 números positivos y 3 números negativos

$$\begin{pmatrix} -(n_1 + n_2) & 0 & n_1 + n_2 \\ n_2 & -n_2 & 0 \\ n_1 & n_2 & -(n_1 + n_2) \end{pmatrix} = n_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + n_2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad n_1, n_2 > 0$$

esta matriz genera

$$\begin{pmatrix} n_1 + n_2 & 0 & -(n_1 + n_2) \\ -n_2 & n_2 & 0 \\ -n_1 & -n_2 & (n_1 + n_2) \end{pmatrix} \longrightarrow (J_{14})^{n_1} \cdot (I_7)^{n_2}, \quad (\text{C.6})$$

cuyo invariante resultante corresponde al producto de un MIFB del grupo  $J_n$  y uno del grupo  $I_n$ .

**Tipo 4.** Para el caso con 1 cero, 5 números positivos y 3 números negativos,  $n_1, n_2, n_3 > 0$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & -(n_1 + n_2) \\ n_3 & -(n_1 + n_2 + n_3) & (n_1 + n_2) \\ -(n_1 + n_3) & (n_1 + n_3) & 0 \end{pmatrix} \\ = & n_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + n_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \longrightarrow & (I_4)^{n_1} (J_3)^{n_2} (J_7)^{n_3}, \quad (\text{C.7}) \end{aligned}$$

cuyo invariante resultante corresponde al producto de un MIFBs del grupo  $J_n$  y sólo uno del grupo  $I_n$ .

**Tipo 5.** Para el caso con 1 cero, 4 números positivos y 4 números negativos,  $n_1, n_2, n_3 > 0$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} n_1 + n_3 & n_2 & -(n_1 + n_2 + n_3) \\ -n_3 & n_3 & 0 \\ -n_1 & -(n_2 + n_3) & n_1 + n_2 + n_3 \end{pmatrix} \\ = & n_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + n_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \longrightarrow & (J_5)^{n_1} (J_6)^{n_2} (I_1)^{n_3}, \quad (\text{C.8}) \end{aligned}$$

cuyo invariante resultante corresponde al producto de dos MIFBs del grupo  $J_n$  y sólo uno del grupo  $I_n$ .

**Tipo 6.** Para el caso con 3 números positivos y 6 números negativos,  $n_1, n_2, n_3, n_4 > 0$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} n_1 + n_3 + n_4 & -(n_1 + n_4) & -n_3 \\ -n_1 & n_1 + n_2 + n_4 & -(n_2 + n_4) \\ --(n_3 + n_4) & -n_2 & n_2 + n_3 + n_4 \end{pmatrix} \\ = & n_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ & + n_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n_4 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \longrightarrow & (J_1)^{n_1} (J_9)^{n_2} (J_5)^{n_3} (I_6)^{n_4}, \quad (\text{C.9}) \end{aligned}$$

cuyo invariante resultante corresponde al producto de tres MIFBs del grupo  $J_n$  y sólo uno del grupo  $I_n$ .

**Tipo 7.** El caso con 4 números positivos, 5 números negativos y sin ceros,  $n_1, n_2, n_3, n_4 > 0$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} n_1 + n_4 & n_3 & -(n_1 + n_3 + n_4) \\ -n_4 & n_2 + n_4 & -n_2 \\ -n_1 & -(n_2 + n_3 + n_4) & n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \end{pmatrix} \\
= & n_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
& + n_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + n_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
\rightarrow & (J_5)^{n_1} (J_9)^{n_2} (J_6)^{n_3} (I_1)^{n_4}, \tag{C.10}
\end{aligned}$$

cuyo invariante resultante corresponde al producto de tres MIFBs del grupo  $J_n$  y sólo uno del grupo  $I_n$ .

Para finalizar demostraremos que el producto de dos MIFBs con seis factores  $I_n I_m$  genera a lo mas un sólo  $I_s$  multiplicado por  $J_s$ s. Particularmente para 3 generaciones, considerando la unitariedad de la matriz CKM, los MIFB tipo  $I_n$  pueden ser reducidos a MIFBs multiplicando por  $|V_{nj}|^2$ .

	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	$I_5$	$I_6$
$I_1$	$(I_1)^2$	$J_1 J_5 J_9$	$J_1 J_2$	$(J_2)^2 J_8$	$(J_1)^2 (J_5)^2 (J_9)^2 (I_8)^3$	$J_5 J_6$
$I_2$	$J_1 J_5 J_9$	$(I_2)^2$	$J_1 J_4$	$J_4 J_5$	$J_2 J_9$	$J_2 (J_8)^2$
$I_3$	$J_1 J_2$	$J_1 J_4$	$(I_3)^2$	$J_1 J_5 (J_{18})^2$	$J_2 J_{17}$	$J_2 J_7$
$I_4$	$(J_2)^2 J_8$	$J_4 J_5$	$J_1 J_5 (J_{18})^2$	$(I_4)^2$	$J_2 J_3$	$(J_5)^2 J_{10} J_{18}$
$I_5$	$(J_1)^2 (J_5)^2 (J_9)^2 (I_8)^3$	$J_2 J_9$	$J_2 J_{17}$	$J_2 J_3$	$(I_5)^2$	$J_3 J_6$
$I_6$	$J_5 J_6$	$J_2 (J_8)^2$	$J_2 J_7$	$(J_5)^2 J_{10} J_{18}$	$J_3 J_6$	$(I_6)^2$

Tabla C.2. Producto de MIFBs.

## Apéndice D

# Parte Imaginaria de todos los elementos $J_n$

Para la demostración de la existencia de una fase única para todos los invariantes básicos  $J_n$ , que corresponde a un múltiplo entero, 0 ó  $\pm 1$  del invariante de Jarlskog, nos vamos a apoyar en las siguientes ecuaciones del Apéndice A:

$$[\alpha\beta; jk] := V_{\alpha j} V_{\beta k} V_{\alpha k}^* V_{\beta j}^*, \quad (\alpha, \beta, i, j, = 1, 2, 3), \quad (\text{A.1})$$

$$(\alpha\beta; jk) := \text{Im} [V_{\alpha j} V_{\beta k} V_{\alpha k}^* V_{\beta j}^*], \quad \langle \alpha\beta; jk \rangle := \text{Re} [V_{\alpha j} V_{\beta k} V_{\alpha k}^* V_{\beta j}^*]. \quad (\text{A.2})$$

Es decir,

$$(\alpha\beta; jk) = \frac{1}{2} (V_{\alpha j} V_{\beta k} V_{\alpha k}^* V_{\beta j}^* - V_{\alpha k} V_{\beta j} V_{\alpha j}^* V_{\beta k}^*), \quad (\text{A.3})$$

$$(\alpha\beta; jk) = -(\alpha\beta; kj), \quad (\alpha\beta; jk) = -(\beta\alpha; jk), \quad (\text{A.5})$$

y en relaciones derivadas de la unitaridad de la matriz CKM

$$\sum_{\alpha} V_{\alpha i} V_{\alpha j}^* = \delta_{ij}, \quad \sum_j V_{\alpha j} V_{\beta j}^* = \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{D.1})$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 [\alpha\beta : ij] = \delta_{ij} |V_{\beta j}|^2, \quad \sum_{\beta=1}^3 [\alpha\beta : ij] = \delta_{ij} |V_{\alpha j}|^2 \quad (\text{D.2})$$

$$\sum_{j=1}^3 [\alpha\beta : ij] = \delta_{\alpha\beta} |V_{\alpha i}|^2, \quad \sum_{i=1}^3 [\alpha\beta : ij] = \delta_{\alpha\beta} |V_{\alpha j}|^2 \quad (\text{D.3})$$

recordando (A.11) que los monomios básicos son:

$$J_1 = [12; 12], \quad J_2 = [12; 13], \quad J_3 = [12; 23],$$

$$J_4 = [31; 12], \quad J_5 = [13; 13], \quad J_6 = [31; 32],$$

$$J_7 = [23; 21], \quad J_8 = [23; 13], \quad J_9 = [23; 23].$$

Primer Caso usando (D.1) Para  $J_2$  en (D.4)

$$(12; 13) = \frac{1}{2} [V_{11} V_{23} V_{13}^* V_{21}^* - hc]. \quad (\text{D.4})$$

Vamos a considerar cuatro posibilidades de factorización para el uso de (D1), las cuales son

$$a) (V_{11}V_{21}^*) V_{23}V_{13}^*, \quad b) (V_{11}V_{13}^*) V_{23}V_{21}^*, \quad c) (V_{23}V_{13}^*) V_{11}V_{21}^*, \quad d) (V_{23}V_{21}^*) V_{11}V_{13}^*, \quad (D.5)$$

1.a)

$$(V_{11}V_{21}^*) = -(V_{12}V_{22}^* + V_{13}V_{23}^*),$$

$$(V_{11}V_{21}^*) V_{23}V_{13}^* = -(V_{12}V_{22}^* + V_{13}V_{23}^*) V_{23}V_{13}^* = -V_{12}V_{23}V_{13}^*V_{22}^* - |V_{13}|^2 |V_{23}|^2,$$

resulta

$$ImJ_2 = -ImJ_3.$$

1.b)

$$(V_{11}V_{13}^*) = -(V_{21}V_{23}^* + V_{31}V_{33}^*),$$

$$(V_{11}V_{13}^*) V_{23}V_{21}^* = -(|V_{21}|^2 |V_{23}|^2 + V_{31}V_{23}V_{33}^*V_{21}^*),$$

por lo tanto resulta

$$ImJ_2 = ImJ_8.$$

1.c)

$$(V_{23}V_{21}^*) = -(V_{33}V_{31}^* + V_{13}V_{11}^*),$$

$$(V_{23}V_{21}^*) V_{11}V_{13}^* = -(V_{11}V_{33}V_{13}^*V_{31}^* + |V_{13}|^2 |V_{11}|^2),$$

resulta

$$ImJ_2 = -ImJ_5.$$

1.d)

$$(V_{23}V_{21}^*) = -(V_{13}V_{11}^* + V_{33}V_{31}^*),$$

$$V_{23}V_{21}^* V_{11}V_{13}^* = -( |V_{13}|^2 |V_{11}|^2 + V_{33}V_{11}V_{31}^*V_{13}^* ),$$

resulta

$$ImJ_2 = -ImJ_5.$$

2. Para  $J_4$  en (D.6)

$$(31; 12) = \frac{1}{2} [V_{31}V_{12}V_{32}^*V_{11}^* - hc]. \quad (D.6)$$

Vamos a considerar cuatro posibilidades de factorización para el uso de (D1), las cuales son

$$a) : (V_{31}V_{32}^*) V_{12}V_{11}^*, \quad b) : (V_{31}V_{11}^*) V_{12}V_{32}^*, \quad c) : (V_{12}V_{32}^*) V_{31}V_{11}^*, \quad d) : (V_{12}V_{11}^*) V_{31}V_{32}^*. \quad (D.7)$$

2.a)

$$V_{31}V_{32}^* = -(V_{11}V_{12}^* + V_{21}V_{22}^*),$$

$$(V_{31}V_{32}^*) V_{12}V_{11}^* = -(V_{11}V_{12}^* + V_{21}V_{22}^*) V_{12}V_{11}^* = -( |V_{11}|^2 |V_{12}|^2 + V_{21}V_{12}V_{22}^*V_{11}^* ),$$

resulta

$$ImJ_4 = ImJ_1.$$

2.b)

$$V_{31}V_{11}^* = -(V_{32}V_{12}^* + V_{33}V_{13}^*),$$

$$(V_{31}V_{11}^*)V_{12}V_{32}^* = - (V_{32}V_{12}^* + V_{33}V_{13}^*)V_{12}V_{32}^* = - \left( |V_{32}|^2 |V_{12}|^2 + V_{12}V_{33}V_{13}^*V_{32}^* \right),$$

resulta

$$ImJ_4 = -ImJ_6.$$

2.c)

$$V_{12}V_{32}^* = - (V_{11}V_{31}^* + V_{13}V_{33}^*),$$

$$(V_{12}V_{32}^*)V_{31}V_{11}^* = - (V_{11}V_{31}^* + V_{13}V_{33}^*)V_{31}V_{11}^* = - \left( |V_{31}|^2 |V_{11}|^2 + V_{31}V_{13}V_{33}^*V_{11}^* \right),$$

resulta

$$ImJ_4 = ImJ_5.$$

2.d)

$$V_{12}V_{11}^* = - (V_{22}V_{21}^* + V_{32}V_{31}^*),$$

$$(V_{12}V_{11}^*)V_{31}V_{32}^* = - (V_{22}V_{21}^* + V_{32}V_{31}^*)V_{31}V_{32}^* = - V_{22}V_{31}V_{21}^*V_{32}^* + |V_{31}|^2 |V_{32}|^2,$$

resulta

$$ImJ_4 = -ImJ_7.$$

Resumiendo:

$$ImJ_2 = -ImJ_3 = -ImJ_1 = -ImJ_5 = ImJ_8,$$

$$ImJ_4 = ImJ_1 = -ImJ_6 = ImJ_5 = -ImJ_7,$$

$$ImJ_1 = -ImJ_2 = ImJ_3 = ImJ_4 = ImJ_5 = -ImJ_6 = -ImJ_7 = -ImJ_8.$$

3. Para  $J_9$  en (D.8)

$$(2\mathbf{3}; 2\mathbf{3}) = \frac{1}{2} [V_{22}V_{33}V_{23}^*V_{32}^* - hc] \quad (D.8)$$

Vamos a considerar la posibilidad de factorización para el uso de (D1),

$$(V_{22}V_{23}^*)V_{33}V_{32}^*, \quad (D.9)$$

$$(V_{22}V_{23}^*) = - (V_{12}V_{13}^* + V_{32}V_{33}^*),$$

$$\begin{aligned} (V_{22}V_{23}^*)V_{33}V_{32}^* &= - (V_{12}V_{13}^* + V_{32}V_{33}^*)V_{33}V_{32}^* = - (V_{33}V_{32}^*V_{12}V_{13}^* + V_{32}V_{33}^*V_{33}V_{32}^*), \\ &= - \left( V_{33}V_{12}V_{32}^*V_{13}^* + |V_{32}|^2 |V_{33}|^2 \right), \end{aligned}$$

resulta

$$ImJ_9 = -ImJ_6.$$

Resumiendo:

$$ImJ_1 = -ImJ_2 = ImJ_3 = ImJ_4 = ImJ_5 = -ImJ_6 = -ImJ_7 = -ImJ_8 = ImJ_9. \quad (D.10)$$

# Bibliografía

- [1] Robinson, R. (2011). *Symmetry and the Standard Model*. New York, NY: Springer.
- [2] A timeline of the Standard Model of particle physics. (2012, Julio 4). Recuperado de <https://www.economist.com/blogs/graphicdetail/2012/07/daily-chart-1>.
- [3] Osborne, H. (2017, Julio 7). LHC: Charming particle Xi-cc++ discovered at CERN fits with standard model and opens new window on the universe. Recuperado de <http://www.newsweek.com/cern-lhc-new-particle-charming-standard-model-632532>.
- [4] Cahn, R. (1996). The eighteen arbitrary parameters of the standard model in your everyday life. *Reviews of Modern Physics*, 68(3), 951. DOI: 10.1103/RevModPhys.68.951.
- [5] Glashow, L., Salam A., & Weinberg. (1962). Broken Symmetries. *American Physical Society*, 127(3), 965-970. DOI: 10.1103/PhysRev.127.965.
- [6] Anderson, P. W., (1962). Plasmons, Gauge Invariance, and Mass. *Physical Review*. 130(1), 439-442. DOI:10.1103/PhysRev.130.439.
- [7] Englert, F. & Brout, R., (1964). Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons. *Physical Review Letters*. 13(9), 321–323. DOI:10.1103/PhysRevLett.13.321..
- [8] Higgs, P. (1964). Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. *Physical Review Letters*, 13(16), 508-509. DOI: 10.1103/PhysRevLett.13.508.
- [9] Guralnik, G. S., Hagen, C. R. & Kibble T. W. B. (1964). Global Conservation Laws and Massless Particles. *Physical Review Letters*, 13(20), 585–587. DOI: 10.1103/PhysRevLett.13.585.
- [10] Cabibbo, N. (1963). Unitary Symmetry and Leptonic Decays. *Physical Review Letters*, 10(12), 531-533. DOI: 10.1103/PhysRevLett.10.531.
- [11] Kobayashi, M. & Maskawa, T. N. (1973). CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction. *Progress of Theoretical Physics*, 49(2), 652-657. DOI: 10.1143/PTP.49.652.
- [12] New Physics, Observations Challenge Standard Model of Universe. (2013, Agosto 24). Recuperado de <http://www.dailygalaxy.com>.
- [13] Dudley, J.M. & Kwan, A.M. (1966). Richard Feynman’s popular lectures on quantum electrodynamics: The 1979 Robb Lectures at Auckland University. *American Journal of Physics*, 64(6), 694. DOI: 10.1119/1.18234.

- [14] Yang, C. N. & Mills, R. (1954). Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Physical Review*, *96*(1), 191–195. DOI: 10.1103/PhysRev.96.191.
- [15] Han, M. Y & Nambu, Y. (1965). Three-Triplet Model with Double SU(3) Symmetry. *Physical Review*, *139*(4B), B1006–B1010.
- [16] Greenberg, O. W. (1964). Spin and Unitary Spin Independence in a Paraquark Model of Baryons and Mesons. *Physical Review Letters*, *13*, 598–602.
- [17] Gell-Mann M. (1964). A schematic model of baryons and mesons. *Physics Letters*, *8*(3), 214–215. DOI: 10.1016/S0031-9163(64)92001-3.
- [18] Ryder, L. (1996). *Quantum Field Theory* (2nd edition), New York, NY, USA: Cambridge University Press.
- [19] Pich A. (2000), Aspects of Quantum Chromodynamics, *High Energy Physics - Phenomenology*, arXiv:hep-ph/0001118.
- [20] Chau, L.L. & Keung W.Y. (1984). Comments on the Parametrization of the Kobayashi-Maskawa Matrix. *Physical Review Letters*, *53*(19), 1802. DOI: 10.1103/PhysRevLett.53.1802.
- [21] Nishijima, K (1955). Charge Independence Theory of V Particles. *Progress of Theoretical Physics*. *13* (3), DOI:10.1143/PTP.13.285.
- [22] Wolfenstein, L. (1983). Parametrization of the Kobayashi-Maskawa Matrix. *Physical Review Letters*, *51*(21), 1945. DOI: 10.1103/PhysRevLett.51.1945.
- [23] Pérez, H., Kielanowski, P., Juárez W, S. R. & Mora, G. (2015). Erratum: Asymptotic properties of CP violation in the standard model. *Physical Review D*, *91*(3), 1-3. DOI: 10.1103/PhysRevD.91.039904.
- [24] Pérez, H., Kielanowski, P., & Juárez W, S. R. (2016). Rephasing invariants of the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa matrix. *Journal of Mathematical Physics*, *57*(3), 1-11. DOI: 10.1063/1.4944427.
- [25] Bjorken, J. D. & Dunietz, I. (1987). Rephasing-invariant parametrizations of generalized Kobayashi-Maskawa matrices. *Physical Review D*, *36*(7), 2109. DOI: 10.1103/PhysRevD.36.2109.
- [26] Jarlskog, C. (1985). Commutator of the Quark Mass Matrices in the Standard Electroweak Model and a Measure of Maximal CP Nonconservation. *Physical Review Letters*, *55*(10), 1039–1043. DOI: 10.1103/PhysRevLett.55.1039.
- [27] Buras, A. J., Parodi, F., & Stocchi, A. (2001). Flavour Dynamics: CP Violation and Rare Decays. *High Energy Physics - Phenomenology*, *1*, 1-117. DOI: 10.1142/9789812778253.
- [28] Preliminary results as of Summer 2016, ICHEP 2016 conference. (2016). Recuperado de [http://ckmfitter.in2p3.fr/www/results/plots/ichep16/png/rhoeta\\_large.png](http://ckmfitter.in2p3.fr/www/results/plots/ichep16/png/rhoeta_large.png).
- [29] Ceccucci, A., Ligeti, Z. & Sakai, Y. (2016). The CKM quark-mixing matrix. *Particle Data Group*.

- [30] Suzuki, T. (2009). Some formulas for invariant phases of unitary matrices by Jarlskog. *Journal of Mathematical Physics*, 50(12), 1–9. DOI: 10.1063/1.3272544.