



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas



Diferentes Formulaciones en  
Gravedad Cuántica del Modelo FLRW

Tesis

Que para Obtener el Grado de  
Maestro en Ciencias Fisicomatemáticas

Presenta

Julio Narciso Argota Quiroz

Directores de Tesis

Dr. Francisco Javier Turrubiates Saldívar

Dr. Rubén Cordero Elizalde



México D.F.

Junio del 2016

*En memoria de Julia Quiróz Cervantes,  
quien siempre enseñó con el ejemplo*

*A mi madre Laura Argota Quiróz,  
quien me enseñó a siempre esforzarme*

*En memoria del Dr. Harold V. McIntosh,  
el cual fue un ejemplo de vida.*

# Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia la cual sin importa la situación siempre me han apoyado, en especial a mi madre Laura y a mi hermana Alejandra las cuales a pesar de los diversos imprevistos y contratiempos han estado presentes, y de manera particular apoyando la realización de este trabajo. A mi tía Carmen que siempre ha estado atenta de mi en toda circunstancia.

A mis asesores, los doctores Francisco y Rubén los cuales me guiaron y siempre se preocuparon para que toda mi educación en la ESFM llegara a el mejor fin posible.

De manera muy especial quiero agradecer también a todas las personas que estando a mi alrededor en diversas etapas de mi vida, las cuales influyeron y apoyaron para seguir este camino. De manera particular a mis profesores de la ESCOM: Miguel, Alfredo y Misael a los cuales hasta el día de hoy acudo para conversaciones que disipen dudas. A los compañeros con los que viví el movimiento en el IPN en el 2014 los cuales me enseñaron, entre otras muchas cosas, que siempre vale la pena seguir el camino que uno cree correcto y no aquel que es más fácil o más “propicio”, además que uno nunca esta sólo en dicho camino. A todos aquellos amigos que siempre me hacen poner los pies en la tierra, los cuales no importa el tiempo que deje de ver, siempre me reciben de la mejor manera, con las mejores conversaciones y consejos.

Este trabajo ha sido apoyado por el proyecto CONACYT **103478** y por los proyectos de investigación SIP-IPN números **20141498**, **20150975** y **20161370**.

# Resumen

La aplicación de la relatividad general a la cosmología ha sido muy prolífica ya que reveló la existencia de la *singularidad inicial*, en la cual se centra el problema del origen del universo. Una de las posibles formas de remover dicha singularidad sería mediante el uso de una teoría cuántica que sea consistente con la gravedad. Se han utilizado diferentes formulaciones de la gravedad cuántica con el fin de evitar esta dificultad.

En el presente trabajo se da una introducción al formalismo de la cuantización por deformación de espacios planos para el caso de grados de libertad finitos así como su extensión a espacios métricos. A partir de estos conceptos se desarrolla el formalismo de Weyl-Underhill-Emmrich (WUE) el cual es una generalización posible del mapeo de Weyl para variedades con métrica. Este formalismo de cuantización se utiliza en un minisuperespacio arbitrario y posteriormente es aplicado a los casos de un modelo Friedman-Lemaître-Robertson-Walker con variables canónicas y de Ashtekar-Barbero. Se comparan, para el mismo modelo, las ecuaciones de onda resultantes de WUE en las variables canónicas y las de Ashtekar-Barbero con las ecuaciones de Wheeler-DeWitt correspondientes. Las ecuaciones de onda resultantes difieren únicamente por una constante multiplicativa en el potencial.

# Abstract

The use of general relativity in cosmology has been a very useful tool because it has revealed the existence of the initial singularity which is the most important problem to elucidate the origin of the universe. One of the possible ways to remove such singularity could be by means of a consistent quantum theory of gravity. Different formulations of quantum gravity have been employed with the purpose to avoid that difficulty.

In this thesis an introduction to the deformation quantization formalism is given for flat spaces with finite degrees of freedom as well as its extension to metric spaces. From these concepts the Weyl-Underhill-Emmrich (WUE) formalism is developed which is a possible generalization of the Weyl map for metric manifolds. This quantization formalism is applied to an arbitrary minisuperspace and later it is used in a Friedman-Lemaître-Robertson-Walker model with canonical and Ashtekar-Barbero variables. For the same model the WUE wave equations in the canonical and Ashtekar-Barbero variables are compared with the corresponding Wheeler-DeWitt equations. The obtained wave equations are different just by a multiplicative constant in the potential.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Formulación de la Mecánica Cuántica en el Espacio Fase</b>	<b>4</b>
1.1. Mecánica Hamiltoniana . . . . .	5
1.2. Cuantización . . . . .	8
1.3. Mapeo de Weyl y la Función de Wigner . . . . .	10
1.4. Formalismo de Weyl-Underhill-Emmrich . . . . .	16
1.5. Producto estrella . . . . .	18
<b>2. Formulaciones de la Gravedad y su Cuantización Canónica</b>	<b>21</b>
2.1. Formulación Lagrangiana . . . . .	22
2.1.1. Tetradas y la Conexión de Espín . . . . .	24
2.1.2. Acción de Palatini . . . . .	29
2.2. Formulación Hamiltoniana y su Cuantización Canónica . . . . .	34
2.2.1. Formulación ADM . . . . .	34
2.2.2. Acción de Holst . . . . .	45
<b>3. Cosmología Cuántica</b>	<b>49</b>
3.1. Cosmología Cuántica Canónica . . . . .	50
3.1.1. Modelo Cosmológico Cuántico FLRW . . . . .	51
3.2. Modelo FLRW con Variables de Ashtekar-Barbero . . . . .	55
3.2.1. Cuantización canónica . . . . .	57
3.3. Formalismo de WUE en el Minisuperespacio . . . . .	58
<b>Conclusiones</b>	<b>61</b>
<b>A. Sistemas con Constricciones</b>	<b>63</b>
<b>B. Desarrollos</b>	<b>66</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>77</b>

# Introducción

En 1687 Isaac Newton [1] publicó la teoría de la **gravitación universal**, la cual es una de las teorías más importantes para modelar las órbitas planetarias, en ella se establecía que la fuerza gravitacional entre dos cuerpos esta dada por la siguiente expresión

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}},$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal,  $m$  y  $M$  son las masas de los cuerpos entre las cuales se mide la fuerza de gravedad,  $r$  es el la distancia entre los cuerpos y  $\hat{\mathbf{r}}$  es el el vector unitario que señala la dirección de un cuerpo al otro. Pasaron más de docientos años para que una nueva teoría de la gravedad surgiera, esta fue llamada teoría de la **relatividad general** por Albert Einstein en 1915 [2] y cambio radicalmente la manera en la que se concebiría el tiempo y el espacio. En esta nueva formulación la distribución de masa afecta el espacio-tiempo provocando que la gravedad sea producto de dicha distorsión, convirtiendo la métrica del espacio-tiempo  $g_{\mu\nu}$  en el objeto principal de estudio y su comportamiento se caracteriza por la ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu},$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein y  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento. La aplicación de la relatividad general a la cosmología ha sido muy prolífica, Einstein fue pionero [3] en hacerlo. Sin embargo, el desarrollo de esta línea de investigación en los trabajos de Lemaître [4] y Friedman [5] concluyó en uno de los grandes misterios del origen del universo, la llamada *singularidad de la gran explosión*.

Prácticamente al mismo tiempo que se desarrollaba la relatividad general una nueva teoría emergía la cual describía los efectos a escalas atómicas, la **mecánica cuántica**. Para esta teoría se desarrollarían varias formulaciones, donde una de las más utilizadas está basada en operadores sobre espacios de Hilbert a la cual le dieron su forma final Dirac [6] y von-Neumann [7]. Sin embargo, tiempo después se desarrollaría un formalismo basada en funciones en el espacio fase y un producto no conmutativo resultado de la deformación del producto de funciones. La estructura formal de este formalismo la dieron Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz, y Sternheimer en 1978 [8].



Figura 1: Los cuatro personajes que participaron en la discusión de la cual nació la gravedad cuántica. En orden de izquierda a derecha: Landau, Bohr, Rosenfeld y Bronstein. Foto publicada en el periódico *Khar'kovskii rabochii* el 20 de mayo de 1934.

En 1931 Peierls y Landau [9] publicaron un artículo donde se sugería que la aplicación de la mecánica cuántica al campo electromagnético violaba el principio de incertidumbre de Heisenberg intuyendo que con una localización arbitrariamente precisa en el espacio-tiempo, podría entrar en contradicción con el principio de incertidumbre. Sin embargo, Bohr en uno de sus trabajos con Rosenfeld, publicado en 1933 [10], indicó que las expresiones del principio de incertidumbre no prevenían que una única componente del campo en un punto del espacio-tiempo fuera medida con una precisión arbitraria. A partir de este error un amigo de Landau llamado Matvei Petrovich Bronstein, tuvo la idea de reproducir el análisis hecho por Bohr pero al campo gravitatorio, dando como resultado que la intuición de Landau era correcta. El trabajo de Bronstein [11] demostró que si se tiene en cuenta la relatividad, la mecánica cuántica permite mediciones del campo en una región arbitrariamente pequeña. Así nació la teoría de la gravedad cuántica.

En 1958 Dirac [6] aplicó su método de cuantización para sistemas con constricciones a la relatividad general, desafortunadamente sus resultados eran muy complicados y no se divulgaron con facilidad. Sin embargo en 1962 Arnowitt, Deser y Misner (ADM) [12] generaron un mecanismo para dar una formulación hamiltoniana de la gravedad, dándole un enfoque de teoría de campo. Este método comenzaba con reescribir a la gravedad como una teoría de norma, ya que la evolución temporal depende de funciones arbitrarias, la función de lapso y el vector de corrimiento. Además reveló que el hamiltoniano estaba compuesto solamente por dos constricciones, haciendo que el hamiltoniano total sea idénticamente cero. La cuantización para sistemas con constricciones, desarrollada por Dirac, aplicada al hamiltoniano resultante de la formulación ADM hoy en día se le conoce como **gravedad cuántica canónica** y reveló varios de los problemas a resolver en el surgimiento de una teoría cuántica de la gravedad.



En 1977 Plebański [13] presentó una formulación de la relatividad general basada en 2-formas diferenciales auto-duales en lugar de la métrica, con la cual es mucho más sencillo la realización de cálculos [14]. En 1982 Amitaba Sen [15] y en 1986 Ashtekar [16] de manera independiente propusieron como variable canónica a una conexión compleja. Esta formulación, conocida como gravedad con variables de Ashtekar, daba las constricciones en forma de polinomios lo que facilitaba la cuantización, sin embargo la imposición de condiciones de realidad (para recuperar la gravedad real) complicaba bastante la solución de las constricciones. La formulación dada por Plebański resulto ser la versión covariante del formalismo canónico de Ashtekar [17].

En 1987 Samuel [18] y en 1988 Jacobson y Smolin [19] de manera independiente llegaron a una acción covariante para reproducir la gravedad con variables de Ashtekar, la cual sirvió como base para que Barbero [20] e Immirzi [21] generalizaran la conexión dada por Ashtekar. Todos estos trabajos culminaran con la acción dada por Holst en 1996 [22].

Se cree que una teoría cuántica de la gravedad podría remover la singularidad de la gran explosión, ya que, en los primeros momentos del universo existía una gran cantidad de materia y energía concentradas en un espacio muy pequeño, por lo que los efectos cuánticos dominarían. Incluso existe la posibilidad de que el universo se pudiera generar por un proceso cuántico [23]. Estas aplicaciones a la cosmología son un ejemplo de la importancia que tiene una teoría cuántica de la gravedad, así como la mejor comprensión de conceptos como el *tiempo*, ya que dicho concepto difiere mucho en su naturaleza tanto en la mecánica cuántica como la relatividad. Estás y otras razones más han provocado la búsqueda de nuevas formulaciones de una teoría cuántica de la gravedad y el reforzamiento de las existentes, así como un desarrollo de distintas técnicas de cuantización.

En este trabajo se tiene como objetivo estudiar la descripción cuántica del modelo cosmológico de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) por medio de la cuantización usual con variables canónicas, así como con variables de Ashtekar-Barbero. Además se presentan la ecuaciones de Wheeler-DeWitt correspondientes. También se realiza la cuantización de un minisuperespacio arbitrario por medio del formalismo de Weyl-Underhill-Emmrich, del cual se presenta los casos particulares del modelo FLRW con las variables anteriormente mencionadas.

Esta tesis esta organizada de la siguiente manera. En el primer capítulo se dan los fundamentos de las cuantización por deformación en espacio fase planos con grados de libertad finitos, así como el formalismo de WUE el cual es la generalización de la regla de cuantización de Weyl para variedades con métrica. Al final del capítulo se dan las principales características del producto estrella. En el segundo capítulo se dan los formalismos de la relatividad general con la acción de Palatini, la formulación de Arnowitt-Deser-Misner y su cuantización canónica, así como la acción de Holst. En el tercer capítulo se desarrolla el modelo de FLRW con las diferentes variables y sus respectivas cuantizaciones. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo de tesis.

# Capítulo 1

## Formulación de la Mecánica Cuántica en el Espacio Fase

Este procedimiento introducido en su forma final por Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz, y Sternheimer en 1978 [8] donde afirman que la cuantización se debe entender como la deformación del álgebra de observables clásicos, más que un cambio radical en la naturaleza de los observables. Este formalismo es el resultado de los trabajos de Weyl, Wigner y Moyal. El objeto central en este formalismo es el producto resultante de la deformación del producto usual del álgebra de observables y posteriormente como la deformación del corchete de Poisson. A dicho producto deformado se le llama **producto-\*** y ha sido demostrado que dicho producto existe para cualquier variedad simpléctica [24] y de Poisson [25].

En este capítulo se desarrolla el formalismo de cuantización por deformación comenzando por una breve descripción a la formulación hamiltoniana de la mecánica clásica, para posteriormente definir lo que se entiende por *proceso de cuantización* a partir de una descripción clásica del sistema.

A continuación se expone el mapeo de Weyl para trabajar la mecánica cuántica en el espacio fase y el cual, junto con la función de Wigner, es la piedra angular para introducir este formalismo; seguido de esto se expone la cuantización en espacios planos, primero considerando un espacio fase de dimensión dos y posteriormente generalizando a un espacio plano con un número finito de grados de libertad. Con esto se habrá dado los fundamentos de una formulación totalmente equivalente a la formulación dada por Dirac et.al. de la mecánica cuántica, pero desarrollada con funciones sobre el espacio fase. También se presentan los principios del formalismo de Weyl-Underhill-Emmrich el cual es la generalización, con ciertas limitaciones las cuales se mencionan, del mapeo de Weyl a variedades con métrica.

Finalmente se define el producto estrella describiendo sus características generales, las

cuales son independientes de la topología del espacio. Los productos estrella son el concepto clave y fundamental en este formalismo de cuantización, ya que, encontrando un producto estrella adecuado se dice que se ha *cuantizado* el sistema.

En este capítulo se utilizan varias expresiones las cuales se demuestran en el apéndice B. Estas expresiones tienen la numeración con respecto al apéndice.

## 1.1. Mecánica Hamiltoniana

La formulación hamiltoniana es la más general en la mecánica clásica ya que la formulación lagrangiana es un caso especial de esta, además permite la descripción y solución de sistemas que no la tienen en otra forma de la mecánica clásica y sirve como puente entre otras ramas de la física tal como la óptica o la mecánica cuántica.

Cuando se consideran las ecuaciones de movimiento sobre un espacio de configuración  $M$ , estas tienen las derivadas temporales de segundo orden, sin embargo cuando se consideran sobre el espacio tangente  $TM$ , son de primer orden. En el caso de la mecánica hamiltoniana también son de primer orden pero sobre un espacio cotangente  $\Gamma = T^*M$  el cual funge como espacio fase, definiendo el espacio fase como aquel espacio formado por todos los estados de un sistema.

La descripción de un sistema autónomo<sup>1</sup> donde el espacio fase  $\Gamma$  está caracterizado por las coordenadas  $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ , está dada por las  $2n$  ecuaciones de Hamilton siguientes

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.1)$$

donde  $H = H(q^i, p_i)$  es el hamiltoniano del sistema.<sup>2</sup> A las variables  $(q^i, p_i)$  se les llama variables canónicas conjugadas en el sentido en que cumplen lo siguiente

$$\{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0; \quad \{q^i, p_j\} = \delta_j^i, \quad (1.2)$$

donde  $\{\cdot, \cdot\}$  denota al corchete de Poisson definido de la siguiente manera

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i}. \quad (1.3)$$

Si se deriva con respecto al tiempo el hamiltoniano y se usan (1.1) se obtiene que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} = 0, \quad (1.4)$$

---

<sup>1</sup>Un sistema autónomo es aquel que no tiene una dependencia explícita del tiempo en el hamiltoniano.

<sup>2</sup>De ahora en adelante se considera la convención de suma sobre índices repetidos.

de donde se concluye que bajo las condiciones anteriormente señaladas el hamiltoniano es una constante de movimiento. Realizando un desarrollo parecido se puede encontrar que la derivada temporal de una función arbitraria en el espacio fase  $f = f(q^i, p_i)$  se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} = \{f, H\}, \quad (1.5)$$

por lo que las ecuaciones de Hamilton (1.1) toman la siguiente forma

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\}; \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}. \quad (1.6)$$

Ahora si se re-etiquetan las coordenadas de  $\Gamma$  de tal manera que

$$x^\mu = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n); \quad \mu, \nu = 1, \dots, 2n, \quad (1.7)$$

y se aplica la regla de la cadena al corchete de Poisson (1.3) con estas nuevas coordenadas se obtendrá lo siguiente

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial q^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial p_i} - \frac{\partial x^\mu}{\partial p_i} \frac{\partial x^\nu}{\partial q^i} \right) \frac{df}{dx^\mu} \frac{dg}{dx^\nu} \\ &= \sigma^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial g}{\partial x^\nu}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

donde se ha definido que

$$\sigma^{\mu\nu} = \{x^\mu, x^\nu\}. \quad (1.9)$$

De esta última expresión se observa que  $\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$ , es decir, que  $\sigma^{\mu\nu}$  define una matriz antisimétrica. Esta propiedad es heredada de la definición del corchete de Poisson (1.3).

Una propiedad importante del corchete de Poisson dado por (1.3) es que cumple la identidad de Jacobi, la cual se expresa como sigue

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0. \quad (1.10)$$

Con  $f = x^\mu, g = x^\nu$  y  $h = x^\lambda$  esta identidad produce lo siguiente

$$\{\{x^\mu, x^\nu\}, x^\lambda\} + \{\{x^\nu, x^\lambda\}, x^\mu\} + \{\{x^\lambda, x^\mu\}, x^\nu\} = 0, \quad (1.11)$$

pero usando (1.9) y (1.8) para reescribirla se tendrá que

$$\sigma^{\rho\lambda} \frac{\partial \sigma^{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \sigma^{\rho\mu} \frac{\partial \sigma^{\nu\lambda}}{\partial x^\rho} + \sigma^{\rho\nu} \frac{\partial \sigma^{\lambda\mu}}{\partial x^\rho} = 0. \quad (1.12)$$

Así que un conjunto de funciones  $\sigma^{\mu\nu}$  cumplan la identidad de Jacobi es totalmente equivalente a que cumpla la ecuación diferencial (1.12).

Las ecuaciones de Hamilton se pueden re-escribir usando (1.9) y (1.6) de la siguiente forma

$$\frac{dx^\mu}{dt} = \sigma^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial x^\nu}, \quad (1.13)$$

en donde  $\sigma$  aparece explícitamente.

A  $\sigma^{\mu\nu}$  se le conoce como **tensor de Poisson**, y como ya se menciono debe cumplir la antisimetría, ya sea la identidad de Jacobi (1.10) o la ecuación diferencial (1.12), además de la derivada de Lie

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h. \quad (1.14)$$

Cuando además de lo anterior cumple que es invertible se le llama tensor simpléctico.

Dar el tensor de Poisson  $\sigma$  equivale a definir los corchetes de Poisson, así cuando el tensor de Poisson tiene la forma

$$\sigma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

de las ecuaciones (1.13) se recuperan trivialmente las ecuaciones (1.1). A esta descripción de un sistema se le llama canónica. Para describir a un sistema en el formalismo hamiltoniano basta con dar su espacio fase  $\Gamma$ , su estructura de Poisson y el hamiltoniano  $(\Gamma, \sigma, H)$  [26, 27].

Lo que caracteriza a un sistema dinámico son sus ecuaciones de movimiento por lo que se puede dar una forma del tensor de Poisson diferente a la canónica, además de un hamiltoniano que sea una constante de movimiento, y si dicha combinación recupera las ecuaciones de movimiento, se tendrá otra descripción del sistema. Existen una infinidad de descripciones del sistema, es decir una infinidad de combinaciones  $(\Gamma, \sigma_i, H_i)$  [26, 27] las cuales describen al mismo sistema, sin ser, desde el punto de vista de la mecánica clásica, ninguna preferencial.

En la mecánica hamiltoniana los estados son puntos en el espacio fase, sobre el cual se define a un observable como una función real suaves  $C^\infty(M)$  sobre el espacio fase. El valor que adquieren los observables es el de la función en cada punto. Por ejemplo sea la energía definida como la función sobre un espacio fase  $\Gamma$  tal que  $E : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ . Dado un punto  $x_0 \in \Gamma$ , es decir un estado, la energía adquiere un valor real  $E = E(x_0)$  asociado a dicho estado.

Sin embargo se puede adoptar un formalismo en el que el valor del observable es un funcional [28], mientras que el observables sigue siendo una función sobre el espacio fase y el estado es una distribución de delta de Dirac. Para esclarecer esto se retoma el ejemplo anterior tomando a  $x \in \Gamma$ , se tiene lo siguiente

$$E = E(x_0) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} d^{2n}x E(x)\delta(x - x_0). \quad (1.16)$$

Este punto de vista será empleado en el resto del capítulo.

Para finalizar esta sección sólo resta mencionar que los observables forman un álgebra tanto con la multiplicación punto a punto como con el corchete de Poisson, esta estructura es llamada **álgebra de observables** y es de gran importancia para el formalismo de cuantización por deformación.

## 1.2. Cuantización

De manera general se puede definir a la cuantización como: el proceso por el cual se pasa de una descripción clásica a una descripción cuántica de un sistema.

La necesidad de este proceso viene de que usualmente es más fácil obtener una descripción clásica de un problema, que una cuántica, razón por la cual se encuentran los observables de un sistema mediante la descripción hamiltoniana, y posteriormente se realiza el proceso de cuantización el cual brinda una primera aproximación a la descripción cuántica.

Se han planteado una serie de requisitos los cuales debe de cumplir el proceso de cuantización para que en el límite correspondiente se reproduzca la mecánica clásica, a estos requerimientos se les ha llamado **principio de correspondencia** y se pueden en listar como sigue:

- Existencia del límite clásico.
- A todo observable clásico le debe corresponder uno cuántico.
- Se debe cumplir que  $\{\cdot, \cdot\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[\cdot, \cdot]$ , donde  $[\cdot, \cdot]$  es el conmutador entre operadores.

Con el tiempo se han generado varios procesos de cuantización los cuales usan como guía el principio de correspondencia. Entre los más empleados se encuentran los siguientes

- Cuantización canónica.
- Integral de camino.
- Cuantización geométrica.
- Cuantización por deformación.

La cuantización canónica fue el primer proceso de cuantización y fue planteado por Dirac en 1958 [6], sin embargo sólo funciona en espacios planos. Dada la descripción hamiltoniana de un sistema dinámico aislado, se construye la descripción cuántica del sistema siguiendo los siguientes axiomas

- Existe un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  en el que los vectores  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  representan los estados del sistema. Dos vectores tales que  $|\psi\rangle = \alpha |\phi\rangle$ , para algún  $\alpha \in \mathbb{C}$ , representan el mismo estado. Estos vectores serán función de las variables del espacio de configuraciones i.e.  $|\psi\rangle = |\psi(q^i)\rangle$ .
- Un observable clásico  $A$  del sistema se mapea a un observable cuántico  $\hat{A}$  el cual es un operador hermitiano sobre  $\mathcal{H}$ . Los valores que puede asumir este observable cuántico serán sus eigenvalores. Por ejemplo las variables canónicas se mapean como sigue

$$q^i \rightarrow \hat{q}^i \quad p_i \rightarrow \hat{p}_i. \quad (1.17)$$

- Para dos observables clásicos  $A, B$ , su corchete de Poisson estará relacionado con el conmutador de sus correspondientes observables cuánticos  $\hat{A}, \hat{B}$  de la siguiente manera

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{B}]. \quad (1.18)$$

Tomando esto en cuenta, la versión cuántica de las ecuaciones (1.6) se expresa de la siguiente manera<sup>3</sup>

$$\frac{d\hat{q}^i}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{q}^i, \hat{H}]; \quad \frac{d\hat{p}_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{p}_i, \hat{H}]. \quad (1.19)$$

En forma análoga se obtiene la **ecuación de Heisenberg** para describir la evolución de cualquier observable  $\hat{A}$  que no depende explícitamente del tiempo

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{H}]. \quad (1.20)$$

En la representación de coordenadas, la aplicación de los observables correspondientes a las variables canónicas, a algún estado  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  será como sigue

$$\hat{q}^i |\psi\rangle = q^i |\psi\rangle \quad \hat{p}_i |\psi\rangle = -i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial q^i}. \quad (1.21)$$

- Sea un estado arbitrario  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ , el cual representa el estado inicial de varios sistemas. La medición del observable  $\hat{A}$  a un tiempo  $t$ , en general es aleatorio, sin embargo el valor esperado al tiempo  $t$  está dado como sigue

$$\langle \hat{A} \rangle_t = \frac{\langle \psi | \hat{A}(t) | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}. \quad (1.22)$$

<sup>3</sup>Recuérdese que son relaciones para un sistema autónomo.

Cabe recalcar que el elemento central de la cuantización canónica esta en la definición de un mapeo entre el álgebra de observables de la mecánica clásica a un álgebra de operadores sobre el espacio de Hilbert, donde el producto correspondiente a cada álgebra es el corchete de Poisson y el conmutador respectivamente.

Mientras el producto usual de observables clásicos es conmutativo, el corchete de Poisson de los observables no lo es, así como tampoco el conmutador de los observables cuánticos. Esto conlleva una ambigüedad al aplicar la cuantización canónica a observables clásico que contiene la multiplicación de variables canónicas. Por ejemplo, se considera una función  $f = p^2q$  en el espacio fase bidimensional, las siguientes expresiones son todas equivalentes en el contexto clásico

$$f_1 = pqp; \quad f_2 = p^2q; \quad f_3 = qp^2,$$

sin embargo la cuantización de cada una de estas expresiones será inequivalente, en el sentido que el valor del observable será diferente para cada  $\hat{f}_i$ . Al escoger un orden para los operadores se dice que se definió un **esquema de cuantización** [28], siendo los más usuales los siguientes

- Orden antiestándar:  $qp \rightarrow \hat{p}\hat{q}$ .
- Orden estándar:  $qp \rightarrow \hat{q}\hat{p}$ .
- Orden Weyl:  $qp \rightarrow \frac{1}{2}(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p})$ .

Además de esta ambigüedad para el esquema de cuantización también se encuentra la dificultad para escoger una descripción hamiltoniana del sistema. Desafortunadamente las teorías cuánticas resultantes son inequivalentes en el sentido de que el valor de los observables es diferente para cada una [29]. Aunque usualmente se escoge la descripción canónica, el proceso de cuantización debería de ser independiente de la descripción elegida.

### 1.3. Mapeo de Weyl y la Función de Wigner

Con la finalidad de definir un mapeo entre las funciones suaves  $C^\infty(\Gamma)$  del espacio fase  $\Gamma$  (los observables clásicos), y los operadores hermitianos sobre un espacio e Hilbert  $\mathcal{H}$  (los observables cuánticos), Weyl creo la llamada **regla de asignación de Weyl** (o **mapeo de Weyl**). Para describir dicho mapeo se consideran funciones  $f = f(q, p)$  sobre un espacio fase 2-dimensional cuyos puntos están etiquetados por las coordenadas canónicas  $(q, p)$ , el mapeo actúa en dicha funciones de la siguiente manera

$$\hat{f} = W(f), \tag{1.23}$$

donde  $\hat{f}$  es el operador correspondiente a dicha función.



El mapeo de Weyl tiene un mapeo inverso para funciones en  $\Gamma$  las cuales tienen bien definidas su transformada de Fourier, conocidas como funciones temperadas, en tal caso se cumple lo siguiente

$$f(q, p) = W^{-1}(\hat{f}). \quad (1.24)$$

Existe una forma de definir el mapeo de Weyl de tal manera que a través de una función polinomial  $\tau(\eta, \xi)$  se determine el esquema de cuantización, la forma de dicho mapeo es el siguiente

$$W_\tau(f) = \int \tilde{f}(\eta, \xi) e^{-i(\eta\hat{q} + \xi\hat{p})} e^{\tau(\eta, \xi)} d\eta d\xi, \quad (1.25)$$

donde

$$\tau(\eta, \xi) = \frac{\hbar}{4}(\alpha\eta^2 + \beta\xi^2 + 2i\gamma\xi\eta), \quad (1.26)$$

y la transformada de Fourier  $\tilde{f}(\lambda, \mu)$  de  $f = f(q, p)$  esta dada como sigue

$$\tilde{f}(\lambda, \mu) = \int_{\mathbb{R}^2} dp dq f(q, p) \exp\{-i(\lambda p + \mu q)\}. \quad (1.27)$$

Para el uso de coordenadas  $(q, p)$  se usan los valores  $\alpha, \beta = 0$  con los cuales los siguientes valores de  $\gamma$  determinan el esquema de cuantización:

- Orden antiestándar  $\gamma = 1$ .
- Orden estándar  $\gamma = -1$ .
- Orden Weyl  $\gamma = 0$ .

Para el uso de coordenadas holomórficas  $(a, \bar{a})$  se toma  $\gamma = 0, \beta = -\alpha$  y los siguientes valores de  $\alpha$  fijan el esquema de cuantización

- Orden antinormal  $\alpha = -1$  produce  $a\bar{a} \rightarrow \hat{a}\hat{a}^\dagger$ .
- Orden normal  $\alpha = -1$  produce  $a\bar{a} \rightarrow \hat{a}^\dagger\hat{a}$ .
- Orden Weyl  $\alpha = 0$  produce  $a\bar{a} \rightarrow \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger)$ .

Para los propósitos de este trabajo solamente se emplea el orden de Weyl con coordenadas  $(q, p)$  por lo que el mapeo queda definido de la siguiente forma

$$W(f(q, p)) = \int d\eta d\xi \tilde{f}(\eta, \xi) e^{-i(\eta\hat{q} + \xi\hat{p})}. \quad (1.28)$$

Ahora se define una familia de operadores unitarios de la siguiente manera

$$\hat{U}(\lambda, \mu) := \exp\{i(\lambda\hat{p} + \mu\hat{q})\}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad (1.29)$$

que sirven como base para los operadores. La representación de esta familia de operadores en la base coordenada será

$$\hat{U}(\lambda, \mu) = \int_{\mathbb{R}} dq \exp(i\mu q) \left| q - \frac{\hbar\lambda}{2} \right\rangle \left\langle q + \frac{\hbar\lambda}{2} \right|, \quad (\text{B.1})$$

y en la base de momentos

$$\hat{U}(\lambda, \mu) = \int_{\mathbb{R}} dp \exp(i\lambda p) \left| p + \frac{\hbar\mu}{2} \right\rangle \left\langle p - \frac{\hbar\mu}{2} \right|. \quad (\text{B.2})$$

Utilizando esta base de operadores unitarios la regla de Weyl (1.28) tendrá la siguiente forma

$$\hat{f} = W(f(q, p)) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d\lambda d\mu \tilde{f}(\lambda, \mu) \hat{U}(\lambda, \mu), \quad (\text{1.30})$$

de donde se observa que los valores de la transformada de Fourier  $\tilde{f}(\lambda, \mu)$  son los coeficientes de la expansión de Fourier del operador  $\hat{f}$  en la base  $\hat{U}(\lambda, \mu)$ .

Se desea obtener la transformada de Fourier  $\tilde{f}(\lambda, \mu)$  en términos de la base unitaria, para hacerlo multiplíquese por  $\hat{U}^\dagger(\lambda, \mu)$ <sup>4</sup> ambos lados de (1.30) y tomando la traza se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} Tr\{\hat{U}^\dagger(\mu', \lambda') \hat{f}\} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d\lambda d\mu \tilde{f}(\lambda, \mu) Tr\{\hat{U}^\dagger(\mu', \lambda') \hat{U}(\lambda, \mu)\}, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \lambda d\mu \tilde{f}(\lambda, \mu) \frac{2\pi}{\hbar} \delta(\mu - \mu') \delta(\lambda - \lambda') d\lambda d\mu, \\ &= \frac{1}{(2\hbar\pi)} \tilde{f}(\lambda', \mu'), \end{aligned}$$

donde se ha empleado la siguiente relación

$$Tr\{\hat{U}^\dagger(\lambda, \mu) \hat{U}^\dagger(\lambda', \mu')\} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(\lambda - \lambda') \delta(\mu - \mu'). \quad (\text{B.17})$$

De esta forma se encuentra que

$$\tilde{f}(\lambda, \mu) = 2\pi\hbar Tr\{\hat{U}^\dagger(\lambda, \mu) \hat{f}\}. \quad (\text{1.31})$$

Al combinar las expresiones (1.27) y (1.30) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d\lambda d\mu dp dq f(q, p) \exp\{-i(\lambda p + \mu q)\} \hat{U}(\lambda, \mu) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp dq f(q, p) \hat{\Omega}(q, p), \end{aligned} \quad (\text{1.32})$$

<sup>4</sup>Donde el superíndice † indica operador auto-adjunto, i.e. el transpuesto, conjugado del operador original.

en donde se definió la siguiente distribución

$$\hat{\Omega}(q, p) = \frac{\hbar}{2\pi} \int d\lambda d\mu \exp \{-i(\lambda p + \mu q)\} \hat{U}(\lambda, \mu), \quad (1.33)$$

a la cual se le conoce como el **cuantizador de Stratonovich-Weyl** (SW). Como el cuantizador está en términos de la base unitaria, tendrá una expresión en la base coordenada

$$\hat{\Omega}(q, p) = \int d\xi \exp\left(\frac{i\xi p}{2}\right) \left|q + \frac{\xi}{2}\right\rangle \left\langle q - \frac{\xi}{2}\right|, \quad (B.22)$$

y otra en la base de momentos

$$\hat{\Omega}(q, p) = \int d\xi \exp\left(-\frac{i\xi q}{2}\right) \left|p + \frac{\xi}{2}\right\rangle \left\langle p - \frac{\xi}{2}\right|. \quad (B.23)$$

Se puede obtener una expresión de  $f = f(q, p)$  en términos de su operador asociado  $\hat{f}$  y el cuantizador  $\hat{\Omega}(q, p)$ , para esto se multiplica por el cuantizador ambos lados de (1.32) y al calcular la traza se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} Tr\{\hat{\Omega}(q, p)\hat{f}\} &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} dp' dq' f(q', p') Tr\{\hat{\Omega}(q, p)\hat{\Omega}(q', p')\}, \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} dp' dq' f(q', p') \delta(p - p') \delta(q - q'), \\ &= f(q, p)., \end{aligned} \quad (1.34)$$

donde se ha empleado la siguiente ecuación

$$Tr\{\hat{\Omega}(q, p)\hat{\Omega}(q', p')\} = 2\pi\hbar\delta(q - q')\delta(p - p'). \quad (B.30)$$

El resultado (1.34) es uno de los más importantes, y a continuación se usará para realizar el mapeo inverso de Weyl del producto de dos operadores. Dadas dos funciones  $f_1 = f_1(q, p)$  y  $f_2 = f_2(q, p)$  las cuales cumplen

$$f_1(q, p) = W^{-1}(\hat{f}_1) = Tr\{\hat{\Omega}\hat{f}_1\},$$

$$f_2(q, p) = W^{-1}(\hat{f}_2) = Tr\{\hat{\Omega}\hat{f}_2\},$$

se desea obtener la función correspondiente al producto de los operadores  $\hat{f}_1\hat{f}_2$ . Denotando a esta función como  $f_1 * f_2 = W^{-1}(\hat{f}_1\hat{f}_2)$  de la siguiente manera

$$(f_1 * f_2)(q, p) = Tr\{\hat{\Omega}(q, p)\hat{f}_1\hat{f}_2\} \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int dq' dp' dq'' dp'' f_1(q', p') Tr\{\hat{\Omega}(q, p)\hat{\Omega}(q', p')\hat{\Omega}(p'', q'')\} f_2(p'', q'') \\
 (f_1 * f_2)(q, p) &= \frac{4}{(2\pi\hbar)^2} \int dp' dq' dp'' dq'' \{f_1(p + p', q + q') \\
 &\quad \times \exp\{\frac{2i}{\hbar}(q'p'' - q''p')\} f_2(p + p'', q + q'')\}, \quad (1.36)
 \end{aligned}$$

donde se utilizó lo siguiente

$$Tr\{\hat{\Omega}(q, p)\hat{\Omega}(q', p')\hat{\Omega}(p'', q'')\} = 4 \exp\left\{\frac{2\pi}{\hbar}[(q - q')(p - p'') - (q - q'')(p - p')]\right\}. \quad (B.33)$$

Si se asume que  $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  se puede expandir  $f_1(p + p', q + q')$  y  $f_1(p + p'', q + q'')$  en serie de Taylor an el punto  $(q, p) \in \mathbb{R}^2$ , el producto-\* de Moyal está dado de la siguiente forma

$$(f_1 * f_2)(q, p) = f_1(q, p) \exp\left\{\frac{i\hbar}{2} \left( \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \right)\right\} f_2(q, p). \quad (B.38)$$

Por medio del producto de Moyal se puede definir el corchete de Moyal como sigue:

$$\{f_1, f_2\}_M = \frac{1}{i\hbar}(f_1 * f_2 - f_2 * f_1). \quad (1.37)$$

Este formalismo se basa en tomar la mecánica cuántica como una teoría estadística sobre el espacio fase, colocando la mecánica cuántica y la mecánica clásica sobre un mismo lenguaje, razón por la cual la otra estructuras importante de esta formulación es una distribución en el espacio fase, la **función de Wigner**.

Trabajando en el espacio fase con el operador de densidad  $\hat{\rho}$ , que representa el estado del sistema, podemos definir la función de Wigner  $w = w(q, p)$  a través de la regla de Weyl como sigue

$$\rho = \rho(p, q) := W^{-1}(\hat{\rho}) = Tr\left\{\hat{\Omega}(p, q)\hat{\rho}\right\}. \quad (1.38)$$

$$w(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\rho(q, p), \quad (1.39)$$

y en particular para el caso de un estado puro, i.e.  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$  se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \rho(p, q) &= Tr\{\hat{\Omega}(p, q)\hat{\rho}\} \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} \langle q' | \hat{\Omega}^\dagger(p, q) \hat{\rho} | q' \rangle dq' \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \langle q' | \exp(-iy'p) | q - \frac{\hbar'}{2} \rangle \langle q + \frac{\hbar}{2} | \psi \rangle \langle \psi | q' \rangle dq' dy' \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp(-iy'p) \psi\left(q + \frac{\hbar}{2}y'\right) \psi^*\left(q - \frac{\hbar}{2}y'\right) dy', \quad (1.40)
 \end{aligned}$$

la cual es conocida como la representación integral de la función de Wigner.

El valor esperado de un operador se encuentra entonces por medio de la expresión

$$\langle \hat{f} \rangle = \frac{\int_{\mathbb{R}^2} f(q, p) w(q, p) dp dq}{\int_{\mathbb{R}^2} w(q, p) dp dq}, \quad (1.41)$$

y de manera análoga a las ecuaciones (1.6) la evolución temporal está dada por la ecuación de Heisenberg de la siguiente manera

$$\frac{dw}{dt} = \{w, H\}_*; \quad \frac{df}{dt} = \{f, H\}_*.$$

A continuación se generaliza la función de Weyl a un espacio de configuraciones dado por  $\mathbb{R}^n$  por lo que el espacio fase estará dado por  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  con la forma simpléctica

$$\sigma = dp_\alpha \wedge dq^\alpha,$$

donde  $q^1, \dots, q^n$  son las coordenadas cartesianas en el espacio de configuraciones y  $p_1, \dots, p_n$  son los momentos conjugados correspondientes. Descuerdo a la regla de cuantización de Weyl si  $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  es una función en el espacio fase, entonces el operador  $\hat{f}_W$  correspondiente en el espacio de estados cuánticos  $\mathcal{H}$  será entonces

$$\hat{f}_W = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} d\mathbf{p} d\mathbf{q} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \hat{\Omega}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad (1.42)$$

donde  $d\mathbf{p} d\mathbf{q} = dp_1 \dots dp_n dq_1 \dots dq_n$  y  $\hat{\Omega}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  es la distribución valuada en el espacio de operadores definido de la siguiente manera

$$\hat{\Omega}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = 2^n \int_{\mathbb{R}^n} d\xi \exp\left(-\frac{2i\mathbf{p}\xi}{\hbar}\right) |q - \xi\rangle \langle q + \xi| \quad \mathbf{p}\xi := p_\alpha \xi^\alpha, \quad (1.43)$$

la cual es la generalización del cuantizador de SW a  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  y de manera análoga cumple que

$$f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = Tr\{\hat{\Omega}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \hat{f}_W\}. \quad (1.44)$$

Ahora dados dos kets  $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$  y empleando (1.42) y (1.43) se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{f}_W | \phi \rangle &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} d\mathbf{p} d\mathbf{q} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \langle \psi | \hat{\Omega}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) | \phi \rangle \\ \langle \psi | \hat{\Omega}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) | \phi \rangle &= 2^n \int_{\mathbb{R}^n} d\xi \exp\left(-\frac{2i\mathbf{p}\xi}{\hbar}\right) \overline{\psi(-\xi)} \phi(q + \xi), \end{aligned} \quad (1.45)$$

donde  $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$  y  $\phi(x) = \langle x|\phi\rangle$  denotan la representación de Schrödinger de  $|\psi\rangle$  y  $|\phi\rangle$ , respectivamente, y la barra a el complejo conjugado. Con lo anterior se tendrá que

$$\langle \psi | \hat{f}_W | \phi \rangle = \frac{1}{(\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n} d\mathbf{p} d\mathbf{q} d\xi f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \exp\left(-\frac{2i\mathbf{p}\xi}{\hbar}\right) \overline{\psi(x-\xi)} \phi(x+\xi). \quad (1.46)$$

En particular si  $f$  es un monomio con respecto a los momentos de la forma

$$f = X^{\alpha_1 \dots \alpha_m}(x) p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_m}, \quad (1.47)$$

donde  $X^{\alpha_1 \dots \alpha_m}(x)$  es un tensor totalmente simétrico en el espacio de configuraciones. Entonces sustituyendo (1.47) en (1.46) y realizando las operaciones correspondientes se obtiene que

$$\langle \psi | \hat{f}_W | \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} dx \overline{\psi(x)} \left\{ \left(\frac{\hbar}{i}\right)^m \sum_{k=0}^m \frac{1}{2^k} \binom{m}{k} (\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_k} X^{\alpha_1 \dots \alpha_m}(x)) \partial_{\alpha_{k+1}} \dots \partial_{\alpha_m} \right\} \phi(x),$$

por lo que la imagen del mapeo de Weyl del monomio es

$$\hat{f}_W = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^m \sum_{k=0}^m \frac{1}{2^k} \binom{m}{k} (\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_k} X^{\alpha_1 \dots \alpha_m}(x)) \partial_{\alpha_{k+1}} \dots \partial_{\alpha_m}, \quad (1.48)$$

Así si se realiza una extensión lineal de (1.48) es obtener la imagen del mapeo de Weyl de un polinomio arbitrario [30].

## 1.4. Formalismo de Weyl-Underhill-Emmrich

Ahora se generalizara lo anterior al caso en el cual el espacio de configuraciones es una variedad n-dimensional riemanniana  $(M, g)$  donde  $g$  es su métrica. El espacio fase será el haz cotangente  $T^*M$  sobre  $M$ , el cual tiene la forma simpléctica

$$w = dp_\alpha \wedge dq^\alpha \quad \alpha = 1, \dots, n,$$

donde  $q^1, \dots, q^n$  son las coordenadas en  $M$  y  $p_1, \dots, p_n, q^1, \dots, q^n$  son las coordenadas inducidas (coordenadas propias de Darboux) en  $T^*M$ . Dado  $f = f(q, p)$  sea una función en  $T^*M$ , se quiere una generalización natural del mapeo de Weyl de  $\mathbb{R}^{2n}$  a  $T^*M$ . Probablemente la mejor respuesta la dio Underhill y Emmrich, cuyo formalismo se sigue aquí solamente cambiando la medida de integración usada sobre  $TM$ . El principal problema es la generalización del término  $\exp(-2ip\xi/\hbar)$  cuando  $M$  no es más  $\mathbb{R}^n$ . En el formalismo de Underhill-Emmrich es realizado con el uso de coordenadas normales.

Sea  $q$  cualquier punto en  $M$  además de  $T_qM$  y  $T_q^*M$  el espacio tangente y cotangente de  $M$ , respectivamente, correspondiente a  $q$ . Para cualquier  $\xi = \xi^\alpha(\partial/\partial q_\alpha)_q \in T_qM$  y  $p = p_\alpha(dq^\alpha)_q \in T_q^*M$  seguimos teniendo  $p\xi = p_\alpha\xi^\alpha$ . Para cualquier  $q \in M$  se toma una vecindad normal  $V'_q \subset T_qM$ , un abierto  $K_q \subset V'_q$  y una pequeña vecindad de  $q$ ,  $V_q \subset K_q$ . Con lo anterior definimos una función de corte  $\chi = \chi(q, \xi) \in C^\infty(TM)$  tal que para cualquier  $q \in M$

$$\chi(q, \xi) = \begin{cases} 1 & \text{para } \xi \in V_q \\ 0 & \text{para } \xi \notin K_q \end{cases}. \quad (1.49)$$

Dado  $\exp_q : V'_q \rightarrow U_q \subset M$  sea el mapeo exponencial de  $V'_q$  sobre  $U_q$ . Para cualquier función  $\phi$  y  $\psi$  y para cualquier punto  $q \in M$  definimos las funciones  $\Psi^-$  y  $\Phi^+$  en  $T_qM$

$$\begin{aligned} \Psi_q^-(\xi) &= \begin{cases} \chi(q, -\xi)\psi(\exp_q(-\xi)) & \text{para } \xi \in K_q \\ 0 & \text{para } \xi \notin K_q \end{cases} \\ \Phi_q^+(\xi) &= \begin{cases} \chi(q, \xi)\phi(\exp_q(\xi)) & \text{para } \xi \in K_q \\ 0 & \text{para } \xi \notin K_q \end{cases}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Dada  $f = f(q, p)$  una función en  $T^*M$ , definimos por analogía con (1.42) la imagen  $\hat{f}_W$  por

$$\langle \psi | \hat{f}_W | \phi \rangle = \frac{1}{(\pi\hbar)^n} \int_{T^*M} d\mathbf{p}d\mathbf{q} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \int_{T_qM} d\xi \sqrt{g(\xi)} \exp\left(-\frac{2i\mathbf{p}\xi}{\hbar}\right) \overline{\Psi_q^-(\xi)} \Phi_q^+(\xi), \quad (1.51)$$

y de igual manera también tenemos

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{f}_W | \phi \rangle &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{T^*M} d\mathbf{p}d\mathbf{q} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \langle \psi | \hat{\Omega}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) | \phi \rangle \\ \langle \psi | \hat{\Omega}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) | \phi \rangle &= 2^n \int_{T_qM} d\xi \sqrt{g(\xi)} \exp\left(-\frac{2i\mathbf{p}\xi}{\hbar}\right) \overline{\Psi_q^-(\xi)} \Phi_q^+(\xi), \end{aligned}$$

donde  $g(\xi)$  denota el determinante de la métrica de  $M$  en coordenadas normales. Tenemos el problema de que tanto  $\hat{f}_W$  como  $\hat{\Omega}$  dependen de la función de corte  $\chi(q, \xi)$ , por lo que se debería encontrar la forma óptima de  $\xi$ , sin embargo, Underhill demostró que si la función  $f = f(q, p)$  es un polinomio con respecto a los momentos, entonces  $\hat{f}_W$  no dependerá de la función de corte  $\xi(q, \xi)$ , de echo dado

$$f = f(q, p) = X^{\alpha_1 \dots \alpha_m}(q) p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_m}, \quad (1.52)$$

y sustituyéndolo en (1.51), obtendremos

$$\langle \psi | \hat{f}_W | \phi \rangle = \int_M dq \sqrt{g(q)} \overline{\psi(q)} \hat{f}_W \phi(q), \quad (1.53)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{f}_W = & \sum_{k=0}^m \left(\frac{\hbar}{2i}\right)^k \binom{m}{k} \left\{ \left(\frac{\hbar}{i}\right)^{m-k} \sum_{m-k}^{j=0} \left(\frac{1}{2}\right)^j \binom{m-k}{j} \right. \\ & \left. \times (\nabla_{\alpha_1} \dots \nabla_{\alpha_j} \tilde{X}^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-k}}(q)) \nabla_{j+1} \dots \nabla_{\alpha_{m-k}} \right\}, \end{aligned} \quad (1.54)$$

y se definió

$$\tilde{X}^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-k}}(q) = X^{\beta_1 \dots \beta_k \alpha_1 \dots \alpha_j \alpha_{j+a} \dots \alpha_{m-k}}(q) \left\{ \frac{\partial^k}{\partial \xi^{\beta^1} \dots \partial \xi^{\beta^k}} \frac{\sqrt{g(\xi)}}{\sqrt{g(q)}} \right\}_{\xi=0}.$$

## 1.5. Producto estrella

En el formalismo de cuantización por deformación consideramos a la mecánica cuántica como una teoría estadística sobre el espacio fase, con lo cual la naturaleza de los observables no cambia de una forma abrupta. Ambas formulaciones son equivalentes, sin embargo, algunos autores consideran la formulación en el espacio fase más fundamental por diversas razones.

Consideramos una variedad de Poisson  $(M, \{, \})$  y sobre esta funciones suaves con valor en los complejos  $C^\infty(M)$ . Denotamos el conjunto de series de potencia de  $\hbar$  con coeficientes en  $C^\infty(M)$  como  $C^\infty(M)[[\hbar]]$  y un elemento de este conjunto se escribirá como

$$f = \sum_n (i\hbar)^n f_n. \quad (1.55)$$

Así tenemos que la cuantización por deformación de un sistema dado por  $(M, \{, \})$  es una álgebra asociativa  $(C^\infty(M)[[\hbar]], *)$  donde

$$f * g = \sum_k (i\hbar)^k C_k(f, g). \quad (1.56)$$

Cuyos coeficientes deben cumplir

- Asociatividad  $\sum_{j+k=n} C_j(C_k(f, g), h) = \sum_{j+k=n} C_j(f, C_k(g, h))$ .
- Límite clásico  $C_0(f, g) = fg$ .
- Estructura de variedad de Poisson  $C_1(f, g) - C_1(g, f) = \{f, g\}$ .

El último requerimiento tiene la implicación de que se respeta el principio de correspondencia ya que

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{i\hbar} [f, g]_* = \{f, g\}, \quad (1.57)$$



donde

$$[f, g]_* = f * g - g * f. \quad (1.58)$$

También se requiere que  $C_k$  es bidiferencial .

Usualmente se requiere que el producto sea hermitiano  $\overline{f * g} = \bar{g} * \bar{f}$ .

Un producto se dice c-equivalente a otro si cumple que exista un operador diferencial

$$T = 1 + \hbar T_1 + \dots + \sum_k \hbar^k T_k, \quad (1.59)$$

que cumple

$$T(f *' g) = (Tf) * (Tg). \quad (1.60)$$

Entre mas complicada es la topología de un espacio más clases de equivalencia existirán en dicho espacio; en el caso plano todos los productos estrella son equivalentes al producto estrella de Moyal.

Esta equivalencia es sólo matemática, ya que físicamente los productos son inequivalentes en el sentido que dan diferentes valores para los observables.

Los estados estarán caracterizados por distribuciones en el espacio fase llamadas proyectores los cuales son idempotentes y normalizados. Un estado caracterizado por la energía  $E$  se denota por  $\rho_E(q, p)$

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int \rho_E(q, p) dq dp = 1; \quad \rho_E * \rho_{E'} = \delta_{E, E'} \rho_E(q, p), \quad (1.61)$$

El echo que el hamiltoniano tome el valor de la energía  $E$  en el estado  $\rho_E$  se puede ver de la siguiente manera. Partiendo de la ecuación para estados estacionarios de la mecánica cuántica dada por

$$\hat{H} |\phi\rangle = E |\phi\rangle, \quad (1.62)$$

se tiene al multiplicar por la derecha por  $\langle\phi|$  que

$$\hat{H} |\phi\rangle \langle\phi| = E |\phi\rangle \langle\phi|. \quad (1.63)$$

Identificando a  $\hat{\rho} = |\phi\rangle \langle\phi|$ , como el *operador de densidad*  $\rho$  la expresión anterior se puede escribir como

$$\hat{H} \hat{\rho} = E \hat{\rho}, \quad (1.64)$$

al aplicar ahora la regla inversa de Weyl (1.34) en (1.64) se encuentra que

$$W^{-1}(\hat{H} \hat{\rho}) = W^{-1}(E \hat{\rho}), \quad (1.65)$$

$$H \star \rho = E \rho \quad (1.66)$$

y la descomposición del hamiltoniano está dada por

$$H(q, p) = \sum_E E \rho_E(q, p). \quad (1.67)$$

El valor del observable  $E$  se puede calcular de la siguiente forma

$$E = \int (H * \rho_E)(q, p) dq dp. \quad (1.68)$$

La cuantización or deformación se puede aplicar a sistemas con espacio fase arbitrarios, sistemas con constricciones y espacios con dimensión infinita colocandolo como uno de los formalismo de cuantización más prometedores.

## Capítulo 2

# Formulaciones de la Gravedad y su Cuantización Canónica

La relatividad general es la formulación para describir la gravedad; ha sido comprobada experimentalmente con gran éxito, desde el eclipse de 1919 hasta las ondas gravitacionales medidas en el 2016. La otra gran rama de la física que ha pasado las pruebas experimentales es la mecánica cuántica, pero ¿Por qué unificarlas? ¿Con que propósito cuantizar la gravedad? A continuación se mencionan algunas razones:

- Para entender los orígenes de universo, la relatividad general debe contemplar efectos cuánticos, ya que se cree que en el universo temprano había una gran cantidad de materia y energía concentrada en un espacio muy pequeño.
- La historia de la ciencia ha mostrado que unificando teorías se han tenido grandes avances, tal es el caso de la electrodinámica y la mecánica clásica dando la relatividad especial, el modelo estándar, por mencionar algunas.
- Por razones de consistencia se debe analizar la aplicación de la mecánica cuántica a el universo como un sistema el cual es el único sistema cerrado. Sin embargo, a escalas cósmicas la gravedad es la fuerza dominante, razón por la cual se intuye la existencia de una teoría cuántica de la gravedad.
- La mecánica cuántica y la relatividad general difieren totalmente en su forma de concebir el tiempo. Una unificación de ambas teorías podría significar un mejor entendimiento de este concepto que juega un papel sumamente importante en la física.

En este capítulo se dan los elementos principales del desarrollo lagrangiano de la relatividad general por medio de la acción de Einstein-Hilbert. Posteriormente se desarrolla la formulación de Palatini para introducir los conceptos de tetradas y de la conexión de espín.

Se describe el formalismo ADM del cual se obtiene el hamiltoniano necesario para el proceso de cuantización. Para finalizar se expone la acción de Holst así como las generalidades de su cuantización canónica.

A lo largo de este capítulo se denotará al conjunto de campos vectoriales definidos sobre una variedad  $M$  como  $\text{Vect}(M)$ , así mismo los campos vectoriales se escribirán tomando la base coordenada  $\{\partial_\mu\}$ . Por ejemplo un campo vectorial arbitrario  $v \in \text{Vect}(M)$  se podrá escribir en la base coordenada como  $v = v^\mu \partial_\mu$ .

Se considera al **espacio-tiempo** como una variedad  $n$ -dimensional lorentziana orientable  $M$  con topología arbitraria y sin frontera, dicha variedad será el espacio base de un haz tangente  $TM$  cuyas fibras son los espacios tangentes  $T_p M$  para cada  $p \in M$ .

## 2.1. Formulaci3n Lagrangiana

La relatividad general es diferente de otras teorías en el sentido que la mayoría partes de un espacio-tiempo fijo, mientras que en ésta el espacio-tiempo es dinámico, va evolucionando y para caracterizar esta evolución nuestra variable dinámica será la métrica. Para construir una lagrangiana de la gravedad se presenta a continuación una breve descripción de los conceptos principales comenzando por el de conexión. Para una revisión mas detallada puede consultarse [31, 32, 33, 34, 35, 36].

Dada una conexión  $\nabla$  en una variedad  $M$ , esta queda completamente definida por su aplicación a los vectores de la base coordenada de la siguiente manera

$$\nabla_{\partial_\nu} \partial_\lambda = \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \partial_\alpha, \quad (2.1)$$

donde  $\Gamma_{\nu\lambda}^\alpha$  son funciones sobre  $M$  llamadas potencial de la conexión, aunque algunos se refieren de manera indistinta al potencial como conexión, ya que la determina por completo.

Una de las características que puede tener una conexión es que preserve la métrica  $g(\cdot, \cdot)$  de la variedad  $M$ , es decir, no altera la magnitud del vector al transportarlo paralelamente, esto se cumple si se mantiene la siguiente expresi3n

$$u g(v, w) = g(\nabla_u v, w) + g(v, \nabla_u w),$$

donde  $u, v, w \in \text{Vect}(M)$ .

Ahora se considera la siguiente cantidad

$$\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu - \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu = (\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha) \partial_\alpha = T_{\mu\nu}^\alpha \partial_\alpha,$$

donde, en general  $\partial_\alpha \in \text{Vect}(M)$  es un vector de la base coordenada. Esta cantidad refleja que tanto difiere el transporte paralelo de  $\partial_\nu$  a través de  $\partial_\mu$  del hecho por  $\partial_\mu$  a través de  $\partial_\nu$ . Si una conexión cumple que  $T_{\mu\nu}^\alpha = 0 \Leftrightarrow \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$  se dice que es **libre de torsión**.

Para cada variedad  $M$  con una métrica  $g_{\mu\nu}$  dada, existe sólo una conexión que cumple ser libre de torsión y que preserva la métrica, a dicha conexión se le conoce como **conexión de Levi-Civita** y esta dada de la siguiente manera

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_{\mu}g_{\nu\beta} + \partial_{\nu}g_{\beta\mu} - \partial_{\beta}g_{\nu\mu}).$$

De ahora en adelante se utilizará  $\nabla$  para denotar la conexión de Levi-Civita; al potencial  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$  de esta conexión se le conoce como **símbolos de Cristoffel**.

Considérese la aplicación sucesiva de  $\nabla$  sobre un vector de la base  $\partial_{\lambda}$  como sigue

$$\nabla_{\partial_{\mu}}\nabla_{\partial_{\nu}}\partial_{\lambda} = \nabla_{\partial_{\mu}}(\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha}\partial_{\alpha}) = (\partial_{\mu}\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\rho})\partial_{\rho}.$$

Al aplicar la conexión en el orden inverso y restarlo a la expresión anterior se tendrá

$$\begin{aligned} (\nabla_{\partial_{\mu}}\nabla_{\partial_{\nu}} - \nabla_{\partial_{\nu}}\nabla_{\partial_{\mu}})\partial_{\beta} &= (\partial_{\mu}\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\nu\beta}^{\gamma}\Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\beta}^{\gamma}\Gamma_{\nu\gamma}^{\alpha})\partial_{\alpha} \\ &= R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}\partial_{\alpha}, \end{aligned}$$

la cual es la definición del tensor de Riemman  $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$  y es conocido como la curvatura de la variedad  $M$  (véase [33, 31, 36, 34, 32]).

Una vez que se tiene el tensor de Riemman se obtiene el **tensor de Ricci**, realizando la siguiente contracción

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu},$$

y tras otra contracción se obtiene el **escalar de Ricci**

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^{\mu\nu}_{\mu\nu}.$$

El escalar de Ricci proporciona información acerca de la curvatura de la variedad además de ser función de la métrica, esta observación sigue usar este escalar en una acción para, después de realizar su variación, obtener ecuaciones de la métrica. La acción correspondiente es la acción de Einstein-Hilbert la cual está dada como sigue

$$S_g[g] = \int_M d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (2.2)$$

donde  $\Lambda$  es la constante cosmológica,  $g$  es el determinante de la métrica y la densidad lagrangiana es  $\mathcal{L} = R - 2\Lambda$ . La variación  $\delta S_g = 0$  produce como resultado las ecuaciones de Einstein en el vacío

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_g}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0.$$

A esta acción se le puede agregar un término relacionado a campos masivos, y obtener entonces una acción total  $S = S_g + S_m$ , donde  $S_m$  es la acción para la materia. La variación da

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_g}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}},$$

donde si se define el llamado **tensor de energía momento** como sigue

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} = -T_{\mu\nu},$$

se recupera las ecuaciones de Einstein tal y como se conocen

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}.$$

### 2.1.1. Tetradas y la Conexión de Espín

Como cada conjunto abierto  $U$  de  $M$  es difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ , entonces los espacios tangentes correspondientes a dichos conjuntos abiertos también lo serán. Esto sugiere la existencia de un mapeo local  $e$ , definido para cada conjunto abierto  $U$ , llamado trivialización del haz tangente tal que

$$e : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM, \quad (2.3)$$

el cual mapea cada fibra  $\{p\} \times \mathbb{R}^n$  del haz trivial  $M \times \mathbb{R}^n$  al espacio tangente correspondiente  $T_p M$ . Al ser este mapeo invertible, se cumple que su mapeo inverso es tal que

$$e^{-1} : TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

Al mapeo  $e$  también se le conoce como **campo de marcos**, ya que para todo  $p \in M$  mapea la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  a una base del espacio tangente  $T_p M$  de  $p$ . Cuando la dimensión del espacio-tiempo es cuatro al campo de marcos se le llama **tetrada**, mientras que si la dimensión es tres se le conoce como **triada**.

Para propósitos operativos es más fácil trabajar en el haz trivial, por lo que la idea principal en esta formulación es realizar la mayoría del trabajo en haz trivial  $M \times \mathbb{R}^n$ , al cual se le llama **espacio interno**, para posteriormente realizar el mapeo al haz tangente  $TM$  usando el campo de marcos  $e$ .

Los campos vectoriales definidos por el haz trivial son funciones sobre  $M$  valuadas en

$\mathbb{R}^n$ , a los cuales les podemos asignar la base canónica

$$\begin{aligned}\xi_0(p) &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ \xi_1(p) &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ \xi_2(p) &= (0, 0, 1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ \xi_n(p) &= (0, 0, 0, \dots, 1),\end{aligned}$$

con lo que cualquier campo vectorial se puede escribir de la forma  $s = s^I \xi_I$ . Los índices del espacio interno están denotados por letras latinas mayúsculas ( $I, J, K, \dots$ ) y las letras griegas ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ) se reservan para los índices del espacio-tiempo correspondientes a los campos vectoriales coordinados en una carta.

Se puede considerar al campo de marcos  $e$  como un mapeo entre los campos vectoriales del haz trivial  $M \times \mathbb{R}^n$  y de  $M$ , donde al aplicar  $e$  a la base  $\xi_I$  se obtiene una base para los campos vectoriales  $e(\xi_I)$  en  $M$ . Lo anterior en una carta está dado como

$$e(\xi_I) = e_I = e_I^\alpha \partial_\alpha,$$

donde las componentes  $e_I^\alpha$  son funciones sobre  $M$ . Ya que tanto las componentes  $e_I^\alpha$  como el campo vectorial  $e_I$  son suficientes para definir la trivialización, a cualquiera de la dos se le llama campo de marcos de manera indistinta.

El espacio interno tiene un producto interno canónico dado por una **métrica interna** la cual define un mapeo entre el espacio interno y su dual. Esto es, dados dos campos vectoriales  $s$  y  $s'$  en  $M \times \mathbb{R}^n$ , su producto interno será

$$\eta(s, s') = \eta(s^I \xi_I, s'^J \xi_J) = s^I s'^J \eta(\xi_I, \xi_J) = s^I s'^J \eta_{IJ},$$

donde  $\eta_{IJ}$  es la métrica de Minkowsky siguiente

$$\eta_{IJ} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Operativamente la métrica interna  $\eta_{IJ}$  y su inversa  $\eta^{IJ}$  sirven para subir y bajar índices en el espacio interno. La métrica de Minkowsky define la métrica interna ya que  $M$  es una variedad lorentziana y tiene una métrica  $g_{\mu\nu}$  con la cual podemos tomar el producto interno de los vectores  $v, v'$  en  $M$

$$g(v, v') = g(v^\alpha \partial_\alpha, v'^\beta \partial_\beta) = v^\alpha v'^\beta g(\partial_\alpha, \partial_\beta) = v^\alpha v'^\beta g_{\alpha\beta}.$$

Se dice que un campo de marcos  $e$  es ortonormal si los campos vectoriales  $e_I$  son ortonormales, i.e.

$$g(e_I, e_J) = \eta(\xi_I, \xi_J) = \eta_{IJ}.$$

La métrica interna en términos de la métrica  $g$  de  $M$  y el campo de marcos queda dada de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \eta_{IJ} &= g(e_I, e_J) = g(e_I^\alpha \partial_\alpha, e_J^\beta \partial_\beta) \\ &= e_I^\alpha e_J^\beta g(\partial_\alpha, \partial_\beta) = e_I^\alpha e_J^\beta g_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Para ver cual es la relación entre los campos vectoriales dados en  $M \times \mathbb{R}^n$  y  $TM$  se consideran dos campos vectoriales arbitrarios  $s, s'$  en  $M \times \mathbb{R}^n$  y se desarrolla su producto interno en  $TM$  a través de  $e$  como sigue

$$\begin{aligned} g(e(s), e(s')) &= g(e(s^I \xi_I), e(s'^J \xi_J)) = s^I s'^J g(e_I, e_J) \\ &= s^I s'^J \eta(\xi_I, \xi_J) = \eta(s^I \xi_I, s'^J \xi_J) \\ &= \eta(s, s'). \end{aligned}$$

En la formulación de Palatini se usa el campo de marcos ortonormal en lugar de la métrica, ya que poseen la misma información. Con un campo de marcos ortonormal y dos campos vectoriales arbitrarios  $v, v'$  en  $M$  y usando el inverso del campo de marcos se tiene que

$$g(v, v') = \eta(e^{-1}v, e^{-1}v').$$

Es posible obtener ahora una expresión para el inverso del campo de marcos. Por medio de la expresión de la delta de Kroneker y (2.5) como sigue

$$\begin{aligned} \delta_J^I &= \eta^{IK} \eta_{JK} = \eta^{IK} e_J^\alpha g_{\alpha\beta} e_K^\beta \\ &= e_J^\alpha g_{\alpha\beta} e^{\beta I} = e_J^\alpha e_\alpha^I. \end{aligned}$$

Las componentes  $e_\alpha^I$  son funciones sobre  $M$  llamadas **campo de co-marcos**, también se les conoce como **cotetradas** o **cotriadas**, según corresponda. Estas funciones representan al mapeo inverso del campo de marcos  $e^{-1}$  de la siguiente manera

$$e^{-1}(\partial_\alpha) = e_\alpha = e_\alpha^I \xi_I.$$

Para verificar la congruencia de la notación se considera un campo vectorial  $v$  en  $M$  y un campo vectorial  $s$  en  $M \times \mathbb{R}^n$  tales que  $v = e(s)$ , de donde se encuentra

$$\begin{aligned} e^{-1}(v) &= e^{-1}(v^\alpha \partial_\alpha) = v^\alpha e^{-1}(\partial_\alpha) \\ &= v^\alpha e_\alpha^I \xi_I = s^J e_J^\alpha e_\alpha^I \xi_I \\ &= \delta_J^I s^J \xi_I = s^I \xi_I = s. \end{aligned}$$



De estos resultados se puede obtener la siguiente expresión de la métrica en términos del campo de co-marcos, partiendo de la definición del producto interno en  $TM$

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g(\partial_\alpha, \partial_\beta) \\ &= \eta(e^{-1}\partial_\alpha, e^{-1}\partial_\beta) = \eta(e_\alpha^I \xi_I, e_\beta^J \xi_J) \\ &= e_\alpha^I e_\beta^J \eta(\xi_I, \xi_J) = e_\alpha^I e_\beta^J \eta_{IJ}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

El espacio interno tiene una simetría asociada al grupo de transformación de Lorentz  $\Lambda_J^I$ , dada de la siguiente forma

$$e_\mu^I \rightarrow e_\mu^K \Lambda_K^I, \quad (2.7)$$

para ver esto se sustituye (2.7) en (2.6) con lo que se tendrá

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= e_\mu^I \eta_{IJ} e_\nu^J = e_\mu^K \Lambda_K^I \eta_{IJ} \Lambda_J^L e_\nu^L \\ &= e_\mu^K \eta_{KL} e_\nu^L = e_\mu^I \eta_{IJ} e_\nu^J, \end{aligned}$$

de donde se observa que la expresión (2.6) es invariante bajo la transformación (2.7).

Ahora se define una conexión preferencial  $D$  en el espacio interno  $M \times \mathbb{R}^n$  a la cual se le conoce como **conexión de Lorentz** (o **conexión de espín**) si para un campo vectorial arbitrario  $v$  en  $TM$  y dos campos vectoriales arbitrarios  $s, s'$  en  $M \times \mathbb{R}^n$  cumple que

$$v\eta(s, s') = \eta(D_v s, s') + \eta(s, D_v s'),$$

lo cual implica que la longitud de los vectores  $s$  y  $s'$  se preserva al realizar sobre ellos un transporte paralelo en dirección de  $v$ . Esta condición es equivalente a que la conexión este en la representación del grupo  $SO(n, 1)$ . Notamos que no tiene sentido en  $M \times \mathbb{R}^n$  pedir que una conexión sea libre de torsión.

La aplicación de una conexión arbitraria  $D$ , en dirección de un campo vectorial  $v$  en  $M$ , a un campo vectorial  $s$  en  $M \times \mathbb{R}^n$  está definida por

$$D_v s = D_v(s^I \xi_I) = (v(s^I) + \omega_\alpha^I J v^\mu s^J) \xi_I,$$

donde

$$D_{\partial_\alpha} \xi_J = \omega_\alpha^I J \xi_I,$$

es el potencial de la conexión.

Una conexión de espín se puede identificar fácilmente por su potencial, para ver esto de

la condición de una conexión lorentziana se tiene

$$\begin{aligned}
 v\eta(s, s') &= \eta(D_v s, s') + \eta(s, D_v s') \\
 &= \eta(v(s^I)\xi_I + \omega_\mu^I{}_K v^\mu s^K \xi_I, s'^J \xi_J) \\
 &\quad + \eta(s^I \xi_I, v(s'^J)\xi_J + \omega_\mu^J{}_K v^\mu s'^K \xi_J) \\
 &= \eta(v(s^I)\xi_I, s'^J \xi_J) + \eta(\omega_\mu^I{}_K v^\mu s^K \xi_I, s'^J \xi_J) \\
 &\quad + \eta(s^I \xi_I, v(s'^J)\xi_J) + \eta(s^I \xi_I, \omega_\mu^J{}_K v^\mu s'^K \xi_J) \\
 &= v(s^I) s'^J \eta(\xi_I, \xi_J) + \omega_\mu^I{}_K v^\mu s^K s'^J \eta(\xi_I, \xi_J) \\
 &\quad + s^I v(s'^J) \eta(\xi_I, \xi_J) + s^I \omega_\mu^J{}_K v^\mu s'^K \eta(\xi_I, \xi_J) \\
 &= v(s^I s'^J) \eta(\xi_I, \xi_J) + \omega_\mu^I{}_K v^\mu s^K s'^J \eta(\xi_I, \xi_J) \\
 &\quad + s^I \omega_\mu^J{}_K v^\mu s'^K \eta(\xi_I, \xi_J) \\
 &= v(s^I s'^J \eta(\xi_I, \xi_J)) \\
 &\quad + v^\mu \eta(\xi_I, \xi_J) (\omega_\mu^I{}_K s^K s'^J + \omega_\mu^J{}_K s^I s'^K) \\
 \cancel{v\eta(s, s')} &= \cancel{v\eta(s, s')} + v^\mu \eta_{IJ} (\omega_\mu^I{}_K s^K s'^J + \omega_\mu^J{}_K s^I s'^K)
 \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned}
 0 &= v^\mu (\omega_\mu^I{}_K s^K s'_I + \omega_\mu^J{}_K s_J s'^K) \\
 0 &= v^\mu (\omega_\mu^{IK} s_K s'_I + \omega_\mu^{JK} s_J s'_K) \\
 0 &= v^\mu (\omega_\mu^{IJ} s_J s'_I + \omega_\mu^{JI} s_J s'_I) \\
 0 &= v^\mu s_J s'_I (\omega_\mu^{IJ} + \omega_\mu^{JI})
 \end{aligned}$$

y como en general  $v^\mu, s_J, s'_I \neq 0$  entonces se encuentra que

$$\omega_\alpha^{IJ} = -\omega_\alpha^{JI} \quad \iff \quad \omega_{\alpha IJ} = -\omega_{\alpha JI}, \quad (2.8)$$

la cual es la condición necesaria y suficiente para que el potencial defina una conexión de lorentz.

La curvatura  $F_{\alpha\beta}^{IJ}$  de una conexión de espín  $A_\alpha^{IJ}$  se puede calcular de manera análoga a como se calcula el tensor de Riemman, considerando los campos vectoriales arbitrarios  $v, w$  en  $M$

$$F(v, w) = D_v D_w - D_w D_v,$$

lo que en coordenadas locales resulta en

$$F_{\alpha\beta}^{IJ} = \partial_\alpha \omega_\beta^{IJ} - \partial_\beta \omega_\alpha^{IJ} + \omega_\alpha^I{}_K \omega_\beta^{KJ} - \omega_\beta^I{}_K \omega_\alpha^{KJ}.$$

Esta última expresión se puede escribir en el lenguaje de formas diferenciales como sigue

$$F^{IJ} = d\omega^{IJ} + \omega^I{}_K \wedge \omega^{KJ},$$

a la cual se le conoce como **segunda forma de Cartan**. Se puede demostrar además que la curvatura cumple

$$F_{\alpha\beta}^{IJ} = -F_{\alpha\beta}^{JI} = -F_{\beta\alpha}^{IJ}. \quad (2.9)$$

La expresión para la torsión en el espacio interno está dada como sigue

$$T_{\mu\nu}^I = \partial_\mu e_\nu^I - \partial_\nu e_\mu^I + \omega_\mu^I{}_J e_\nu^J - \omega_\nu^I{}_J e_\mu^J, \quad (2.10)$$

la cual se puede escribir también en términos de formas diferenciales de la siguiente manera

$$T_{\mu\nu}^I = de^I + \omega^I{}_J \wedge e^J, \quad (2.11)$$

la cual es llamada **primera forma de Cartan**. Al pedir que la conexión sea libre de torsión ( $T_{\mu\nu}^I = 0$ ) se obtiene la expresión que determina de manera única la conexión de espín dadas las tetradas.

### 2.1.2. Acción de Palatini

La acción de Palatini es la acción de Einstein-Hilbert pero escrita como función de tetradas y de la conexión de espín. A continuación desarrollaremos los elementos necesarios para escribirla, para posteriormente obtener las ecuaciones de movimiento correspondientes.

A finales de la década de los cuarenta tanto Schrödinger como Einstein trataron de formular una forma de la relatividad general cuya variable fuera la conexión en lugar de la métrica, pero estos intentos fueron estériles ya que estaban basadas en la conexión de Levi-Civita, la cual es mucho más difícil de trabajar que la conexión de espín.

Se considerará el espacio-tiempo como 4-dimensional, por lo que el campo de marcos serán tetradas, y con ellas se realiza el mapeo de la conexión de espín del haz trivial  $M \times \mathbb{R}^n$  al haz tangente  $TM$ , con lo que se tendrá un conexión  $\tilde{\nabla}$  en  $TM$  dada por

$$\tilde{\nabla}_\alpha \partial_\beta = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma,$$

donde

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \omega_\alpha^I{}_J e_I^\gamma e_\beta^J.$$

Se sigue la notación empleada por la referencia [34], llamaremos a  $\tilde{\nabla}$  **imitación de la conexión de Levi-Civita**, y a  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$  **imitación del símbolo de Cristoffel**. Este último es obtenido al mapear los índices internos de la conexión de espín a los índices del espacio-tiempo a través de las tetradas y las cotetradas. A la curvatura de  $\tilde{\nabla}$  lo llamaremos

**imitación del tensor de Riemman** y esta asociado a la curvatura de la conexión de espín de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} &= \partial_\alpha \tilde{\Gamma}^{\gamma\delta}_\beta - \partial_\beta \tilde{\Gamma}^{\gamma\delta}_\alpha + \tilde{\Gamma}^{\gamma\lambda}_{\alpha\lambda} \tilde{\Gamma}^{\lambda\delta}_\beta - \tilde{\Gamma}^{\gamma\lambda}_{\beta\lambda} \tilde{\Gamma}^{\lambda\delta}_\alpha \\
 &= \partial_\alpha \omega_\beta^{IJ} e_I^\gamma e_J^\delta - \partial_\beta \omega_\alpha^{IJ} e_I^\gamma e_J^\delta + \omega_\alpha^I L e_\lambda^I e_I^\gamma \omega_\beta^{KJ} e_J^\delta e_K^\lambda - \omega_\beta^I L e_I^\gamma e_\lambda^I \omega_\alpha^{KJ} e_K^\lambda e_J^\delta \\
 &= (\partial_\alpha \omega_\beta^{IJ} - \partial_\beta \omega_\alpha^{IJ} + \omega_\alpha^I L \omega_\beta^{KJ} e_K^\lambda e_\lambda^I - \omega_\beta^I L \omega_\alpha^{KJ} e_K^\lambda e_\lambda^I) e_I^\gamma e_J^\delta \\
 &= (\partial_\alpha \omega_\beta^{IJ} - \partial_\beta \omega_\alpha^{IJ} + \omega_\alpha^I L \omega_\beta^{KJ} \delta_K^L - \omega_\beta^I L \omega_\alpha^{KJ} \delta_K^L) e_I^\gamma e_J^\delta \\
 &= (\partial_\alpha \omega_\beta^{IJ} - \partial_\beta \omega_\alpha^{IJ} + \omega_\alpha^I \omega_\beta^{KJ} - \omega_\beta^I \omega_\alpha^{KJ}) e_I^\gamma e_J^\delta \\
 &= F_{\alpha\beta}^{IJ} e_I^\gamma e_J^\delta.
 \end{aligned}$$

Haciendo las contracciones correspondientes podemos obtener la **imitación del tensor de Ricci**

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = \tilde{R}^\rho_{\alpha\rho\beta} = F_{\rho\beta}^{IJ} e_I^\rho e_{\alpha J},$$

y la **imitación del escalar de Ricci**

$$\tilde{R} = \tilde{R}^\alpha_\alpha = F_{\alpha\beta}^{IJ} e_I^\alpha e_J^\beta.$$

Para reescribir la acción de Einstein-Hilbert en términos de estos nuevos objetos geométricos es necesario encontrar la forma diferencial de volumen  $d^4x\sqrt{-g}$  en función de las tetradas, para ello se toma el determinante en ambos lados de (2.6), de donde se obtiene

$$\begin{aligned}
 g &= \det(g_{\alpha\beta}) \\
 &= \det(e_\alpha^I \eta_{IJ} e_\beta^J) \\
 &= \det(\eta_{IJ}) \det(e_\alpha^I) \det(e_\beta^J) \\
 &= -e^2.
 \end{aligned}$$

De esta forma sustituyendo en la acción de Einstein-Hilbert el escalar de Ricci por su imitación y empleando el resultado anterior se obtendrá

$$S[e, A] = \int_M d^4x \sqrt{-g} \tilde{R} = \int_M d^4x e \left( e_I^\alpha e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} - 2\Lambda \right). \quad (2.12)$$

Ahora como  $F_{\alpha\beta}^{IJ} = F_{\alpha\beta}^{IJ}[A]$  tenemos que la acción depende de las tetradas, en lugar de la métrica, y de la conexión de espín.

El siguiente paso es realizar la variación de la acción (2.12) con respecto a las tetradas y a la conexión de manera separada, con la finalidad de obtener las ecuaciones de movimiento

correspondientes. Así al hacer la variación  $\delta e$  se tendrá  $\delta A = 0$  y se obtendrá la siguiente expresión

$$\delta S[e, A] = \int_{\mathcal{M}} d^4x \left( \delta e e_I^\alpha e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} + e \delta e_I^\alpha e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} + e e_I^\alpha \delta e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} + e e_I^\alpha e_J^\beta \delta F_{\alpha\beta}^{IJ} + 2e\Lambda \right).$$

Tomando la variación para la forma diferencial del volumen tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{e^2}e_\alpha^I \eta_{IJ} e_\beta^J \delta(e_K^\alpha \eta^{KL} e_L^\beta) \\ &= -\frac{1}{2}e e_\alpha^I \eta_{IJ} e_\beta^J (\delta e_K^\alpha \eta^{KL} e_L^\beta + e_K^\alpha \eta^{KL} \delta e_L^\beta) \\ &= -\frac{1}{2}e \eta_{IJ} (e_\alpha^I \delta e_K^\alpha \eta^{KL} \delta_L^J + \delta_K^J \eta^{KL} e_\beta^J \delta e_L^\beta) \\ &= -\frac{1}{2}e (\delta_I^K e_\alpha^I \delta e_K^\alpha + \delta_L^J e_\beta^J \delta e_L^\beta) \\ &= -e e_\alpha^I \delta e_I^\alpha. \end{aligned}$$

Al desarrollar el tercer término de la integral se encuentra

$$\begin{aligned} e e_I^\alpha \delta e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} &= e e_I^\alpha \delta e_J^\beta F_{\beta\alpha}^{JI} \\ &= e e_J^\beta \delta e_I^\alpha F_{\alpha\beta}^{IJ}. \end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión en la variación de la acción se obtiene

$$\begin{aligned} \delta S[e, A] &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \left( -e e_\alpha^I \delta e_I^\alpha e_K^\mu e_L^\nu F_{\mu\nu}^{KL} + e \delta e_I^\alpha e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} + e e_J^\beta \delta e_I^\alpha F_{\alpha\beta}^{IJ} + 2\Lambda e e_\alpha^I \delta e_I^\alpha \right) \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \left( -e e_\alpha^I \delta e_I^\alpha e_K^\mu e_L^\nu F_{\mu\nu}^{KL} + 2e \delta e_I^\alpha e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} + 2\Lambda e e_\alpha^I \delta e_I^\alpha \right) \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \left( -\frac{1}{2} e_\alpha^I e_K^\mu e_L^\nu F_{\mu\nu}^{KL} + e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} + \Lambda e_\alpha^I \right) 2e \delta e_I^\alpha, \end{aligned}$$

y al emplear las definiciones de la imitación del escalar y el tensor de Ricci la expresión anterior se reduce a

$$\delta S[e, A] = \int_{\mathcal{M}} d^4x \left( -\frac{1}{2} e_\alpha^I \tilde{R} + e_J^\beta e_\delta^I e_\sigma^J \tilde{R}^{\delta\sigma}{}_{\alpha\beta} + \Lambda e_\alpha^I \right) 2e \delta e_I^\alpha.$$

Si se usa ahora la contracción de tetradas y cotetradas así como la métrica interna y se factorizan términos se obtendrá el siguiente resultado

$$\begin{aligned}
 \delta S[e, A] &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \left( -\frac{1}{2} e_\alpha^J \delta_J^I \tilde{R} + e_\delta^I \delta_\sigma^\beta \tilde{R}^{\delta\sigma}{}_{\alpha\beta} + \Lambda e_\alpha^K \delta_K^I \right) 2e\delta e_I^\alpha \\
 &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \left( -\frac{1}{2} e_\alpha^J e_\beta^I e_J^\beta \tilde{R} + e_\delta^I \tilde{R}^{\delta\beta}{}_{\alpha\beta} + \Lambda e_\alpha^K \eta_{KJ} \eta^{IJ} \right) 2e\delta e_I^\alpha \\
 &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \left( -\frac{1}{2} e_\alpha^J e_\beta^I e_K^\beta \delta_J^K \tilde{R} + e_\delta^I \tilde{R}^\delta{}_\alpha + \Lambda e_\alpha^K \eta_{KL} \delta_J^L \eta^{IJ} \right) 2e\delta e_I^\alpha \\
 &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \left( -\frac{1}{2} e_\alpha^J e_\beta^I e_K^\beta \eta^{KL} \eta_{LJ} \tilde{R} + e_\delta^I \eta^{IJ} \tilde{R}_{\delta\alpha} + \Lambda e_\alpha^K \eta_{KL} e_\beta^J e_J^\beta \eta^{IJ} \right) 2e\delta e_I^\alpha \\
 &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \left( -\frac{1}{2} e_\alpha^J \eta_{LJ} e_\beta^L e^{I\beta} \tilde{R} + e_\delta^I \eta^{IJ} \tilde{R}_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} e_\beta^J \eta^{IJ} \right) 2e\delta e_I^\alpha \\
 &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \left( -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} e_\beta^J \eta^{IJ} \tilde{R} + e_\delta^I \eta^{IJ} \tilde{R}_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} e_\beta^J \eta^{IJ} \right) 2e\delta e_I^\alpha \\
 &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \left( -\frac{1}{2} \tilde{R} g_{\alpha\beta} + \tilde{R}_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} \right) 2e e_\beta^J \eta^{IJ} \delta e_I^\alpha.
 \end{aligned}$$

Para obtener la ecuación de movimiento se requiere que  $\delta S = 0$ , lo cual sucede cuando se cumple que

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \tilde{R} g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 0.$$

Esta expresión tiene la misma forma que las ecuaciones de Einstein en el vacío, salvo que esta en función de las imitaciones correspondientes.

A continuación se realiza la variación de la conexión de espín  $\delta A$ , considerando tomamos la variación de las tetradas igual a cero, i.e  $\delta e = 0$ , lo que implica que las variaciones de la métrica también son idénticas a cero. Tomando lo anterior en cuenta y para simplificar los cálculos, tomamos la variación de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \delta S[e, A] &= \delta \int_M d^4x \sqrt{-g} \left( \tilde{R} - 2\Lambda \right) \\
 &= \int_M d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta \tilde{R}_{\alpha\beta}.
 \end{aligned}$$

Para realizar la variación de la imitación del tensor de Ricci partimos de la definición de la imitación del tensor de Riemman como curvatura de la imitación de símbolo de Cristoffel,

así

$$\begin{aligned}\delta\tilde{R}^\gamma_{\delta\alpha\beta} &= \delta\left(\partial_\alpha\tilde{\Gamma}^\gamma_{\beta\delta} - \partial_\beta\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\delta} + \tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\lambda}\tilde{\Gamma}^\lambda_{\beta\delta} - \tilde{\Gamma}^\gamma_{\beta\lambda}\tilde{\Gamma}^\lambda_{\alpha\delta}\right) \\ &= \partial_\alpha\delta\tilde{\Gamma}^\gamma_{\beta\delta} - \partial_\beta\delta\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\delta} + \delta\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\lambda}\tilde{\Gamma}^\lambda_{\beta\delta} + \tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\lambda}\delta\tilde{\Gamma}^\lambda_{\beta\delta} - \delta\tilde{\Gamma}^\gamma_{\beta\lambda}\tilde{\Gamma}^\lambda_{\alpha\delta} - \tilde{\Gamma}^\gamma_{\beta\lambda}\delta\tilde{\Gamma}^\lambda_{\alpha\delta},\end{aligned}$$

sumamos un cero a esta expresión

$$\begin{aligned}\delta\tilde{R}^\gamma_{\delta\alpha\beta} &= \partial_\alpha\delta\tilde{\Gamma}^\gamma_{\beta\delta} - \partial_\beta\delta\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\delta} + \delta\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\lambda}\tilde{\Gamma}^\lambda_{\beta\delta} + \tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\lambda}\delta\tilde{\Gamma}^\lambda_{\beta\delta} - \delta\tilde{\Gamma}^\gamma_{\beta\lambda}\tilde{\Gamma}^\lambda_{\alpha\delta} - \tilde{\Gamma}^\gamma_{\beta\lambda}\delta\tilde{\Gamma}^\lambda_{\alpha\delta} \\ &\quad + \tilde{\Gamma}^\gamma_{\beta\lambda}\delta\tilde{\Gamma}^\lambda_{\alpha\delta} - \tilde{\Gamma}^\gamma_{\beta\lambda}\delta\tilde{\Gamma}^\lambda_{\alpha\delta},\end{aligned}$$

y reagrupando términos

$$\begin{aligned}\delta\tilde{R}^\gamma_{\delta\alpha\beta} &= \partial_\alpha\delta\tilde{\Gamma}^\gamma_{\beta\delta} + \tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\lambda}\delta\tilde{\Gamma}^\lambda_{\beta\delta} - \delta\tilde{\Gamma}^\gamma_{\beta\lambda}\tilde{\Gamma}^\lambda_{\alpha\delta} - \tilde{\Gamma}^\gamma_{\beta\lambda}\delta\tilde{\Gamma}^\lambda_{\alpha\delta} \\ &\quad - \partial_\beta\delta\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\delta} + \delta\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\lambda}\tilde{\Gamma}^\lambda_{\beta\delta} - \tilde{\Gamma}^\gamma_{\beta\lambda}\delta\tilde{\Gamma}^\lambda_{\alpha\delta} + \tilde{\Gamma}^\gamma_{\beta\lambda}\delta\tilde{\Gamma}^\lambda_{\alpha\delta} \\ &= \tilde{\nabla}_\alpha\delta\tilde{\Gamma}^\gamma_{\beta\delta} - \tilde{\nabla}_\beta\delta\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\delta} \\ &= 2\tilde{\nabla}_{[\alpha}\delta\tilde{\Gamma}^\gamma_{\beta]\delta}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Ahora usando el hecho que una conexión arbitraria puede escribirse en función un tensor único y la conexión de Levi-Civita

$$\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + C^\gamma_{\alpha\beta},\tag{2.14}$$

la variación de esta expresión queda

$$\delta\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = \delta C^\gamma_{\alpha\beta},$$

esto ya que la conexión de Levi-Civita es función de la métrica, por lo que  $\delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = 0$ . Sustituyendo (2.14) en (2.13) se tendrá

$$\begin{aligned}\delta\tilde{R}^\gamma_{\delta\alpha\beta} &= \partial_\alpha\delta C^\gamma_{\beta\delta} + (\Gamma^\gamma_{\alpha\lambda} + C^\gamma_{\alpha\lambda})\delta C^\lambda_{\beta\delta} - \delta C^\gamma_{\beta\lambda}(\Gamma^\lambda_{\alpha\delta} + C^\lambda_{\alpha\delta}) - (\Gamma^\gamma_{\beta\lambda} + C^\gamma_{\beta\lambda})\delta C^\lambda_{\alpha\delta} \\ &\quad - \partial_\beta\delta C^\gamma_{\alpha\delta} + \delta C^\gamma_{\alpha\lambda}(\Gamma^\lambda_{\beta\delta} + C^\lambda_{\beta\delta}) - (\Gamma^\gamma_{\beta\lambda} + C^\gamma_{\beta\lambda})\delta C^\lambda_{\alpha\delta} + (\Gamma^\gamma_{\beta\lambda} + C^\gamma_{\beta\lambda})\delta C^\lambda_{\alpha\delta} \\ &= \nabla_\alpha\delta C^\gamma_{\beta\delta} - \nabla_\beta\delta C^\gamma_{\alpha\delta} + C^\gamma_{\alpha\lambda}\delta C^\lambda_{\beta\delta} - \delta C^\gamma_{\beta\lambda}C^\lambda_{\alpha\delta} \\ &\quad - \cancel{C^\gamma_{\beta\lambda}\delta C^\lambda_{\alpha\delta}} + \delta C^\gamma_{\alpha\lambda}C^\lambda_{\beta\delta} - C^\gamma_{\beta\lambda}\delta C^\lambda_{\alpha\delta} + \cancel{C^\gamma_{\beta\lambda}\delta C^\lambda_{\alpha\delta}} \\ &= 2\tilde{\nabla}_{[\alpha}\delta\tilde{\Gamma}^\gamma_{\beta]\delta} + C^\gamma_{\alpha\lambda}\delta C^\lambda_{\beta\delta} - \delta C^\gamma_{\beta\lambda}C^\lambda_{\alpha\delta} + \delta C^\gamma_{\alpha\lambda}C^\lambda_{\beta\delta} - C^\gamma_{\beta\lambda}\delta C^\lambda_{\alpha\delta}.\end{aligned}$$

Con esto la variación de la acción es

$$\begin{aligned}\delta S[e, A] &= \int_M d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta\tilde{R}_{\alpha\beta} \\ &= \int_M d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \left( \nabla_{[\gamma}\delta C^\gamma_{\beta]\alpha} + C^\gamma_{\gamma\lambda}\delta C^\lambda_{\beta\alpha} - C^\lambda_{\gamma\alpha}\delta C^\gamma_{\beta\lambda} + C^\lambda_{\beta\alpha}\delta C^\gamma_{\gamma\lambda} - C^\gamma_{\beta\lambda}\delta C^\lambda_{\gamma\alpha} \right).\end{aligned}$$

El primer término es una divergencia, por lo cual no contribuye a la acción, quedando sólo los últimos cuatro términos

$$\left( C_{\gamma\lambda}^{\gamma} - C_{\gamma\alpha}^{\lambda} + C_{\beta\alpha}^{\lambda} - C_{\beta\lambda}^{\gamma} \right) \delta C_{\beta\alpha}^{\lambda} = 0,$$

cuya única solución es  $C_{\beta\alpha}^{\lambda} = 0$  con lo que se concluye que  $\tilde{\nabla} = \nabla$ , por lo que las ecuaciones de movimiento son realmente las ecuaciones de Einstein.

## 2.2. Formulación Hamiltoniana y su Cuantización Canónica

Como se menciono anteriormente cuando se desea cuantizar un sistema, se debe tener el hamiltoniano del mismo. Con el pasar del tiempo se han desarrollado diferentes formalismo de cuantización los cuales responden a diferentes necesidades. Por ejemplo Dirac desarrollo una técnica para cuantizar sistemas con constricciones [37] con la finalidad de poder aplicarlo a la gravedad [38], sin embargo su aplicación a la gravedad dio resultados fueron muy complicados y no se utilizaron. Poco avanza la cuantización de la gravedad hasta que Misner, Arnowitt y Deser [12] desarrollaron la llamada formulación ADM con la cual se obtiene un hamiltoniano el cual parecía se podría cuantizar aplicando el método de Dirac, desafortunadamente no fue así, las razones se mencionan más adelante.

Desde entonces se han dado formulaciones con diferentes variables por medio de sus respectivas acciones, con la finalidad de poder realizar la cuantización. Las llamadas variables de Ashtekar-Barbero junto con la acción de Holst fueron muy prometedoras, y aunque no resolvieron los problemas de la cuantización canónica, si dieron pie a la formulación de la gravedad vista como una teoría de norma con la conexión como una de las variables canónicas. Esto ha permitido una formulación de lazos la cual abrió la posibilidad de una cuantización y a la formulación de Gravedad Cuántica de Lazos (LQG).

### 2.2.1. Formulación ADM

El formalismo Arnowitt-Deser-Misner (ADM) es una formulación de la relatividad general, e incluso de forma más general, una formulación de las teorías de norma desarrollado con la finalidad de enfatizar el carácter de campos más que el geométrico. Fue introducido en 1969 [12] proporcionando el formalismo hamiltoniano del campo gravitacional con la finalidad de cuantizarlo. Desafortunadamente el proceso de cuantización no se ha podido realizar, sin embargo este formalismo ha generado avances en otras direcciones, como la relatividad numérica y un mejor entendimiento de la relatividad en si.

En la formulación lagrangiana de la relatividad general, el espacio-tiempo  $M$  es una variedad con topología arbitraria, esto se pierde cuando deseamos realizar una formulación



hamiltoniana, ya que para poder realizar el formalismo hamiltoniano se necesita que el espacio-tiempo tenga una topología  $\mathbb{R} \times \Sigma$ , donde  $\Sigma$  es una subvariedad 3-dimensional de  $M$  la cual tiene topología arbitraria. La relación entre estas topologías del espacio tiempo se hacen mediante un difeomorfismo

$$\Psi : M \rightarrow \mathbb{R} \times \Sigma. \quad (2.15)$$

el cual no es único y tampoco existe alguno preferencial.

La formulación lagrangiana de la relatividad también es covariante, en el sentido de que ninguna de las coordenadas es preferencial en ningún sentido, esto aparentemente se pierde en el formalismo hamiltoniano, ya que necesitamos definir una *evolución temporal*. La distinción de la coordenada temporal está dada en el difeomorfismo (2.15) ya que corresponderá a la subvariedad  $\mathbb{R}$  de dicho difeomorfismo. Sin embargo, la distinción de la coordenada temporal es ficticia al final, como se vera más adelante, ya que depende de parámetros arbitrarios, la función de lapso y el vector de corrimiento.

Se define la evolución temporal a través de un campo vectorial *time-like*  $t^\mu$  sobre  $M$  el cual debe de cumplir que sus curvas integrales formen una congruencia de curvas <sup>1</sup>. Así mismo tenemos una función real univaluada  $t = t(p)$  ( $p \in M$ ) sobre  $M$  tal que  $t^\mu \nabla_\mu t = 1$ . El valor de  $t(p)$  para cada  $p \in M$  parametriza cada una de las curvas de la congruencia de tal manera que el conjunto de puntos  $\Sigma_{t_0} = \{p / p \in M; t(p) = t_0\}$  forman una **hipersuperficie** la cual es de tipo *space-like*. No existe un campo vectorial  $t^\mu$  único, así como tampoco uno preferencial. Definir el campo vectorial  $t^\mu$  sobre  $M$  es lo mismo escoger un difeomorfismo  $\Psi$ .

Usando las tetradas y cotetradas para realizar el mapeo de la derivada covariante de un vector dado se tendrá los siguiente

$$e^{-1}(\nabla_{\partial_\mu} \partial_\lambda) = D_{\partial_\mu} \xi_J = \omega_\mu^I{}_J \xi_I.$$

Se considerará el espacio interno de tal manera que el campo vectorial  $\xi_0$  es el mapeo del campo vectorial  $n$  el cual es normal a la hipersuperficie  $\Sigma$  en todo punto, i.e.  $e^{-1}(n) = \xi_0$ . Por otro lado siempre se puede encontrar un difeomorfismo por el cual el espacio tangente de la hipersuperficie ( $T_\Sigma M$ ) esté generado por alguna base  $\partial_a$  con  $a = 1, 2, 3$  y el campo  $\partial_0$  este en la dirección del vector que define la evolución temporal. Por lo tanto los vectores  $\xi_i$

---

<sup>1</sup>Una congruencia de curvas es un conjunto de curvas las cuales cumplen que cada  $p \in M$  está en una y sólo en una de las curvas. Asegurando así que ninguna de las curvas se intersecta y que la congruencia abarca por completo la variedad sobre las cual están definidas. No es necesario que estas curvas sean geodésicas. Para un estudio detallado véase [33].

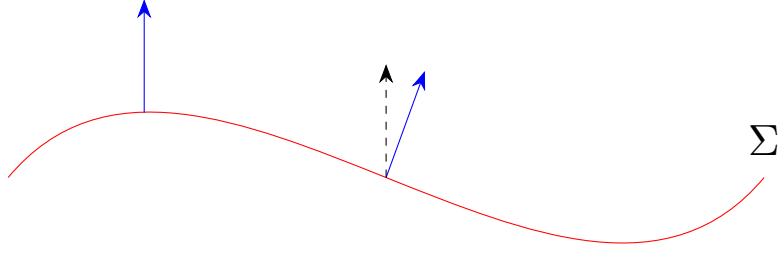


Figura 2.1: Curvatura extrínseca

con  $i = 1, 2, 3$ , expanden el mapeo de  $T_\Sigma M$  en el haz trivial,<sup>2</sup> i.e

$$e^{-1}(\partial_a) = \xi_i \Leftrightarrow e(\xi_i) = \partial_a.$$

Considerando lo anterior la derivada covariante en la hipersuperficie aplicada a un vector  $\partial_c \in T_\Sigma M$  quedará de la siguiente manera

$$\begin{aligned} e^{-1}(\nabla_{\partial_a} \partial_c) &= D_{\partial_a} \xi_j = \omega_a^I{}_j \xi_I \\ &= \omega_a^0{}_j \xi_0 + \omega_a^i{}_j \xi_i \\ &= K_{aj} \xi_0 + \omega_a^i{}_j \xi_i, \end{aligned}$$

donde  $K_{aj}$  es llamada la **curvatura extrínseca** y por definición es la componente de la conexión en dirección normal a la hipersuperficie, midiendo cuanto va cambiado el vector normal a la hipersuperficie (véase figura 2.1).

A continuación se aplica la derivada covariante dos veces de la siguiente forma

$$\begin{aligned} e^{-1}(\nabla_{\partial_a} \nabla_{\partial_b} \partial_c) &= D_{\partial_a} D_{\partial_b} \xi_j = D_{\partial_a} (\omega_b^I{}_j \xi_I) \\ &= (\partial_a \omega_b^K{}_j + \omega_b^I{}_j \omega_a^K{}_I) \xi_K \\ &= (\partial_a \omega_b^0{}_j + \omega_b^i{}_j \omega_a^0{}_i) \xi_0 + (\partial_a \omega_b^k{}_j + \omega_b^i{}_j \omega_a^k{}_i + \omega_b^0{}_j \omega_a^k{}_0) \xi_k \\ &= (\partial_a K_{bj} + \omega_b^i{}_j K_{ai}) \xi_0 + (\partial_a \omega_b^k{}_j + \omega_b^i{}_j \omega_a^k{}_i + K_{bj} K_a^k) \xi_k. \end{aligned}$$

Con este último resultado es posible obtener el mapeo del tensor de Riemman en  $\Sigma$ , el cual

<sup>2</sup>Nótese que se usan la primera parte de las letras minúsculas del alfabeto latino ( $a, b, c, \dots$ ), para índices en el espacio tangente de la hipersuperficie, mientras que se usa la segunda parte del alfabeto  $i, j, k, \dots$ , para denotar los índices correspondientes al mapeo del espacio tangente en la hipersuperficie en el espacio interno.

queda dado de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 e^{-1}(R^{\alpha}_{abc}\partial_{\alpha}) &= e^{-1}(\nabla_{\partial_a}\nabla_{\partial_b}\partial_c - \nabla_{\partial_b}\nabla_{\partial_a}\partial_c) = (D_aD_b - D_bD_a)\partial_c \\
 &= (\partial_aK_{bj} - \partial_bK_{aj} + \omega_b^k{}_jK_{ak} - \omega_a^k{}_jK_{bk})\xi_0 \\
 &\quad + (\partial_a\omega_b^i{}_j - \partial_b\omega_a^i{}_j + \omega_b^k{}_j\omega_a^i{}_k - \omega_a^k{}_j\omega_b^i{}_k + K_{bj}K_a^i - K_{aj}K_b^i)\xi_i \\
 &= (D_aK_{bj} - D_bK_{aj})\xi_0 + (F^i{}_{jab} + K_{bj}K_a^i - K_{aj}K_b^i)\xi_i. \tag{2.16}
 \end{aligned}$$

Es importante observar que por la manera en que se fija la base en el espacio interno las componentes tangenciales y normales están dadas explícitamente.

Ahora se considerará un procedimiento análogo al anterior pero con el mapeo del vector normal, primero se obtiene la expresión correspondiente al aplicar la conexión dos veces

$$\begin{aligned}
 D_{\partial_a}D_{\partial_b}\xi_0 &= D_{\partial_a}(\omega_b^I{}_0\xi_I) \\
 &= (\partial_a\omega_b^K{}_0 + \omega_b^I{}_0\omega_a^K{}_I)\xi_K \\
 &= (\cancel{\partial_a\omega_b^0{}_0} + \omega_b^i{}_0\omega_a^0{}_i)\xi_0 + (\partial_a\omega_b^k{}_0 + \omega_b^i{}_0\omega_a^k{}_i)\xi_k \\
 &= (K_b^iK_{ai})\xi_0 + (\partial_aK_b^k + K_b^i\omega_a^k{}_i)\xi_k \\
 &= (K_b^iK_{ai})\xi_0 + (D_aK_b^k)\xi_k,
 \end{aligned}$$

y después el tensor de Riemman

$$e^{-1}(\nabla_a\nabla_b n - \nabla_b\nabla_a n) = (D_aD_b - D_bD_a)\xi_0 = (D_aK_b^k - D_bK_a^k)\xi_k. \tag{2.17}$$

La suma de (2.17) y (2.16) dan el mapeo del tensor de Riemman de un vector  $\partial_{\alpha} \in TM$  arbitrario, pero de la manera en que se presento se conoce las contribuciones que se tienen en el espacio tangente y normal a  $\Sigma$  por las componentes tangentes y normal de  $\partial_{\alpha}$ .

Para visualizar la evolución temporal de la hipersuperficie  $\Sigma$  consideremos los valores  $t_0, t_1, t_2$  de  $t(p)$ , tales que  $t_0 < t_1 < t_2$ , con sus respectivas hipersuperficie  $\Sigma_{t_0}, \Sigma_{t_1}, \Sigma_{t_2}$ . Ahora identificamos un punto  $p \in \Sigma_{t_0}$  con los puntos  $p' \in \Sigma_{t_1}$  y  $p'' \in \Sigma_{t_2}$  de tal manera que los tres puntos pertenecen a la misma curva integral de la congruencia de curvas definida por  $t^{\mu}$ , con lo que  $p'$  y  $p''$  son la evolución temporal de  $p$  para el tiempo correspondiente. Este procedimiento se realiza para cada punto en  $\Sigma_{t_0}$ . Se realiza el mapeo del vector que representa la dirección de la evolución temporal al espacio interno de la siguiente manera

$$e^{-1}(\partial_0) = e_0^I\xi_I = e_0^0\xi_0 + e_0^i\xi_i = N\xi_0 + N^i\xi_i, \tag{2.18}$$

definiendo así el vector de cambio  $N^i = e_0^i$  y la función de lapso  $N = e_0^0$ , también se hace el mapeo de  $T_{\Sigma}M$  al espacio interno, con lo que se obtiene lo siguiente

$$e^{-1}(\partial_a) = e_a^I\xi_I = \cancel{e_a^0\xi_0} + e_a^i\xi_i = e_a^i\xi_i, \tag{2.19}$$

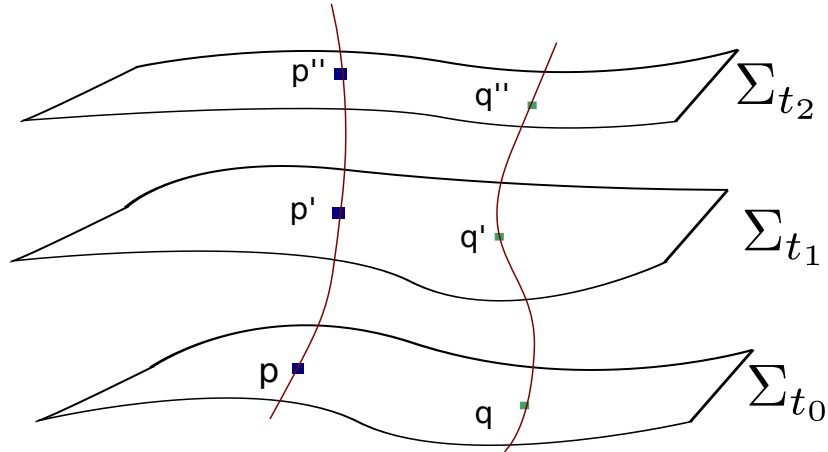


Figura 2.2: Evolución de los puntos  $p$  y  $q$  a través de las hipersuperficies

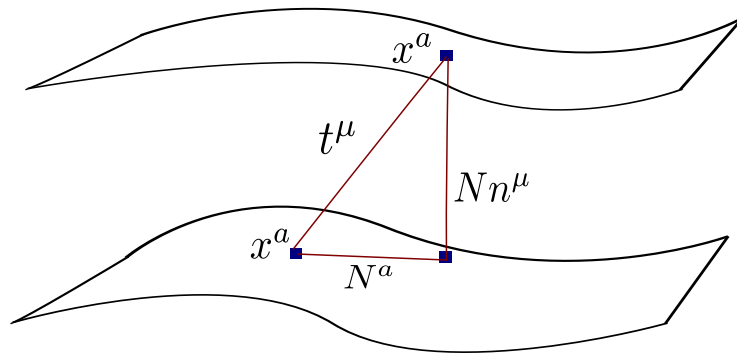


Figura 2.3: Elementos de la evolución temporal de una hipersuperficie: vector de corrimiento  $N^a$ , función de lapso  $N$ , vector de evolución  $t^\mu$  y vector normal  $n^\mu$

donde notamos que  $e_a^0$  es idénticamente cero, ya que ningún campo vectorial del espacio tangente debe tener componentes normales en el espacio interno.

Ahora se vera como queda dada la métrica  $g_{\mu\nu}$  con estas parametrizacion realizando el producto interno pero usando (2.6)

$$\begin{aligned} g(\partial_0, \partial_0) &= \eta(e_a^I \xi_I, e_b^J \xi_J) = \eta(e_0^0 \xi_0 + e_0^i \xi_i, e_0^0 \xi_0 + e_0^j \xi_j) \\ &= (e_0^0)^2 \eta_{00} + e_0^i e_0^j \eta_{ij} = -N^2 + N^i N_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\partial_a, \partial_0) &= \eta(e_a^I \xi_I, e_0^J \xi_J) = \eta(e_a^0 \xi_0 + e_a^i \xi_i, e_0^0 \xi_0 + e_0^j \xi_j) \\ &= e_a^i e_0^j \eta_{ij} = e_a^i N_i = N_a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\partial_a, \partial_b) &= \eta(e_a^I \xi_I, e_b^J \xi_J) = \eta(e_a^0 \xi_0 + e_a^i \xi_i, e_b^0 \xi_0 + e_b^j \xi_j) \\ &= e_a^i e_b^j \eta_{ij} = q_{ab}, \end{aligned}$$

con lo que la métrica queda de la siguiente forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 + N^a N_a & N_a \\ N_a & q_{ab} \end{pmatrix},$$

y su inversa esta dada como sigue

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^a}{N^2} \\ \frac{N^a}{N^2} & q^{ab} - \frac{N^a N^b}{N^2} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

A continuación se presentan las expresiones que se obtienen del mapeo de las ecuaciones (2.17) y (2.16) a  $TM$  obteniendo la siguiente expresión

$$R^\alpha{}_{dab} \partial_\alpha = (\nabla_{\partial_a} K_{bc} - \nabla_{\partial_b} K_{ac}) \partial_0 + (R^c{}_{dab} + K_{bd} K_a^c - K_{ad} K_b^c) \partial_c, \quad (2.21)$$

cabe recalcar que  $\partial_0$  no es, en general, normal a  $\Sigma$ , ya que puede tener componentes normal y tangenciales a ella. Usando la definición del tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu},$$

y la expresión (2.21) se encuentran las llamadas ecuaciones de Gauss y Codazzi [31, 32, 33]

$$G_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = {}^3R - K^{ab} K_{ab} + K_a^a K_b^b,$$

$$G_{\mu a} n^{\mu} = \nabla_{\partial_b} K_a^b - \nabla_{\partial_a} K_b^b,$$

respectivamente. Las cuales son cuatro de las diez ecuaciones de Einstein que representan constricciones que debe cumplir cualquiera de las hipersuperficies en todo momento. Las seis ecuaciones restantes determinan la dinámica de la 3-métrica [39].

La expresión del escalar de Ricci se obtiene realizando las contracciones correspondientes a (2.21), el cual estará dado, hasta una divergencia total, por la siguiente expresión [31, 32, 33, 34] que se desprecia al ser un espacio compacto

$$R = {}^3R + K^{ab} K_{ab} - K_a^a K_b^b. \quad (2.22)$$

Otro elemento necesario la expresión del determinante de la métrica  $g_{\mu\nu}$  en esta descomposición, que se obtiene usando el método de cofactores [31, 32, 40] con las matrices (2.2.1) y (2.20) de tal forma que

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{q}. \quad (2.23)$$

Con las expresiones anteriores es posibles reescribir la densidad lagrangiana de la acción de Hilbert-Einstein con los elementos definidos en la hipersuperficie, de la siguiente manera

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}R = N\sqrt{q} \left( {}^3R + K^{ab} K_{ab} - K_a^a K_b^b \right). \quad (2.24)$$

Esta densidad lagrangiana se puede a su vez escribir en términos de la llamada **supermétrica** inversa, introducida por DeWitt [41], con lo que se tendrá la siguiente expresión

$$\mathcal{L} = \sqrt{q}N ({}^3R - 2\Lambda) + NG^{abcd} K_{ab} K_{cd}, \quad (2.25)$$

donde la supermétrica inversa está dada explícitamente por

$$G^{abcd} = \frac{\sqrt{q}}{2} \left( q^{ac} q^{bd} + q^{ad} q^{bc} - 2q^{ab} q^{cd} \right). \quad (2.26)$$

Así la supermétrica tiene la siguiente forma

$$G_{abcd} = \frac{\sqrt{q}}{2} \left( q_{ac} q_{bd} + q_{ad} q_{bc} - 2q_{ab} q_{cd} \right), \quad (2.27)$$

de donde se verifica que

$$G^{abcd} G_{abef} = \frac{1}{2} \left( \delta_e^c \delta_f^d + \delta_f^c \delta_e^d \right). \quad (2.28)$$

Para obtener ahora el formalismo hamiltoniano es necesario definir la “*derivada temporal*” de la 3-métrica. En general se define la derivada temporal de cualquier cantidad

aplicando la derivada de Lie en dirección del vector que caracteriza la evolución temporal, en el caso de la 3-métrica se tendrá que

$$\begin{aligned}\dot{q}_{ab} &= \mathcal{L}_{\partial_0}(q_{ab}) = 2NK_{ab} + \nabla_{\partial_a}N_b + \nabla_{\partial_b}N_a \\ \Rightarrow K_{ab} &= \frac{1}{2N}(\dot{q}_{ab} - \nabla_{\partial_a}N_b - \nabla_{\partial_b}N_a).\end{aligned}\tag{2.29}$$

pudiéndose calcular el momento conjugado como sigue

$$p^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{ab}} = G^{abcd}K_{cd}.\tag{2.30}$$

Con la finalidad de realizar la transformación de Legendre

$$\mathcal{H} = p^{ab}\dot{q}_{ab} - \mathcal{L},$$

se reescribe la densidad lagrangiana en función de los momentos conjugados de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \sqrt{q}N({}^3R - 2\Lambda) + NG^{abcd}G_{abef}p^{ef}G_{cdgh}p^{gh} \\ &= \sqrt{q}N({}^3R - 2\Lambda) + NG_{cdgh}p^{cd}p^{gh},\end{aligned}$$

Usando ahora (2.29), junto con la simetría en los índices del momento se obtiene la siguiente expresión para la densidad hamiltoniana

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \left(2NG_{abcd}p^{cd} + \nabla_{\partial_a}N_b + \nabla_{\partial_b}N_a\right)p^{ab} - \left(\sqrt{q}N({}^3R - 2\Lambda) + NG_{cdgh}p^{cd}p^{gh}\right) \\ &= N\left(-\sqrt{q}({}^3R + \Lambda) + G_{cdgh}p^{cd}p^{gh}\right) + (\nabla_{\partial_a}N_b + \nabla_{\partial_b}N_a)p^{ab} \\ &= N\left(-\sqrt{q}({}^3R + \Lambda) + G_{cdgh}p^{cd}p^{gh}\right) + N_a\left(-2q^{-1/2}\nabla_{\partial_b}p^{ab}\right) \\ &= NC + N_aC^a,\end{aligned}$$

de donde se encuentra que el hamiltoniano se escribe entonces como

$$H = \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{q} \mathcal{H} = \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{q} (NC + N_aC^a).$$

Otra de las estructuras importantes en el formalismo hamiltoniano son los corchetes de Poisson de las variables canónicas, que en este caso son la 3-métrica y su momento conjugado, así se tiene para dichos corchetes que

$$\begin{aligned}\{p^{ab}(x), q_{cd}(x')\} &= (\delta_c^a\delta_d^b + \delta_d^a\delta_c^b)\delta(x - x') \\ \{p^{ab}(x), p^{cd}(x')\} &= \{q_{ab}(x'), q_{cd}(x)\} = 0.\end{aligned}$$

Como se mencionó anteriormente la función de lapso y el vector de corrimiento determinan la evolución de  $\Sigma$  en las direcciones normal y tangencial respectivamente. Pero si se considera que el vector de corrimiento es cero entonces el hamiltoniano se reduce a

$$C(N) = \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{q} N C, \quad (2.31)$$

por lo que el vector de la evolución temporal está en dirección normal a la hipersuperficie. De manera similar si la función de lapso es cero se encuentra que el hamiltoniano será

$$C(\vec{N}) = \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{q} N_a C^a, \quad (2.32)$$

provocando difeomorfismos sobre  $\Sigma$  generados por el vector de corrimiento, de hecho esta restricción forma una familia 1-paramétrica de difeomorfismos. Estas son las razones por las que a (2.31) se le conoce como **restricción hamiltoniana**.

Es interesante considerar los corchetes de Poisson de las restricciones en su forma integral, es decir dadas por (2.31) y (2.32)

$$\begin{aligned} \{C(N), C(N')\} &= C((N\partial^a N' - N'\partial^a N)\partial_a) \\ \{C(\vec{N}), C(\vec{N}')\} &= C([\vec{N}, \vec{N}']) \\ \{C(\vec{N}), C(N')\} &= C(\vec{N}N'), \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde  $\vec{N}N'$  denota la derivada de  $N'$  en dirección de  $\vec{N}$ , y  $(N\partial^a N' - N'\partial^a N)\partial_a$  es el resultado de convertir la 1-forma  $NdN' - N'dN$  en un campo vectorial, por medio de la métrica. A las relaciones (2.33) se les llama **álgebra de Dirac** de la formulación ADM. Cabe recalcar que esta álgebra es cerrada bajo el corchete de Poisson, es decir, el corchete entre las restricciones da como resultado otra restricción.

En el formalismo lagrangiano se tiene un espacio de configuraciones cuyas coordenadas locales están dadas por las coordenadas generalizadas, en el caso de la gravedad al ser la 3-métrica la variable de configuración, el espacio de configuraciones debe estar relacionado con el espacio de todas las 3-métricas  $\text{Riem}(\Sigma)$ . Sin embargo, las 3-métricas relacionadas por un difeomorfismo forman clases de equivalencia, entonces tendremos que el espacio de configuraciones  $\text{Riem}(\Sigma)/\text{Diff}(\Sigma)$  está dado por el espacio de dichas clases de equivalencia. A esta estructura se le conoce como **superespacio** y es una variedad diferenciable [42], por lo que una curva en el superespacio equivale a definir la evolución de una 3-métrica.

El hecho de que una variedad sea lorentziana implica que para dicha variedad existen los difeomorfismos (2.15), lo cual es necesario para tener un problema de valores iniciales bien definido. Esto ya que si se considera que la función  $t$  como un parámetro temporal,



tendremos que el conjunto las hipersuperficies se puede interpretar como la evolución temporal de una hipersuperficie  $\Sigma$ . Esta condición también indica que tenemos causalidad. Al procedimiento de dividir una variedad en un conjunto de subvariedades de dimensión menor, como el mencionado, se le conoce como **foliación** [39].

### Cuantización Canónica

A continuación se describe el proceso el cual se sigue para implementar el proceso de cuantización en la formulación ADM. Sin embargo, en algunos pasos del procedimiento solo se realizaran las observaciones generales.

Para comenzar se debe definir el espacio de Hilbert, el cual funge como espacio de configuraciones. Lo usual es algún espacio  $L^2$  (funciones cuadrado integrables en el sentido de Lebesgue), pero  $\text{Riem}(\Sigma)$  (el superespacio) tiene dimensión infinita, así que no es claro que funciones deberían pertenecer a este espacio. Se considera entonces una definición del espacio  $L^2(\text{Riem}(\Sigma))$  la cual de alguna manera tenga sentido. Se escogen entonces las variables canónicas, que en este caso serán  $q_{ab}$  y  $k_{ab}$ , las cuales al pasar a operadores deben cumplir las relaciones siguientes

$$\begin{aligned} (\hat{q}_{ab}(x)\psi)(q) &= q_{ab}(x)\psi(q) & x \in \Sigma \\ (\hat{p}_{ab}(x)\psi)(q) &= -i\hbar \frac{\delta\psi(q)}{\delta q_{ab}}, \end{aligned}$$

además de las relaciones conmutación entre las variables canónicas siguientes

$$\begin{aligned} [\hat{q}_{ab}(x), \hat{p}^{cd}(x')] &= i\hbar(\delta_c^a \delta_d^b + \delta_d^a \delta_c^b) \delta(x - x') \\ [\hat{q}_{ab}(x), \hat{q}_{cd}(x')] &= [\hat{p}^{ab}(x), \hat{p}^{cd}(x')] = 0. \end{aligned}$$

El siguiente paso es cuantizar el hamiltoniano, para ello en las constricciones  $C$  y  $C^a$  se realiza la sustitución

$$q_{ab} \rightarrow \hat{q}_{ab}; \quad p^{ab} \rightarrow -i\hbar \frac{\delta}{\delta q_{ab}},$$

obteniendo así la versión cuántica de las constricciones,  $\hat{C}$  y  $\hat{C}^a$  que ahora son operadores sobre  $L^2(\text{Riem}(\Sigma))$ . El ordenamiento de operadores usado debe de cumplir la versión cuantizada del álgebra de constricciones

$$\begin{aligned} [\hat{C}(\vec{N}), \hat{C}(\vec{N}')] &= -i\hbar \hat{C}([\vec{N}, \vec{N}']) \\ [\hat{C}(\vec{N}), \hat{C}(N')] &= -i\hbar \hat{C}(\vec{N}N') \\ [\hat{C}(N), \hat{C}(N')] &= -i\hbar \hat{C}((N\partial^i N' - N'\partial^i N)\partial_i). \end{aligned}$$

Esto en general parece imposible de alcanzarse, principalmente por la presencia de la raíz cuadrada del determinante de la tres-métrica. La cuantización canónica siempre tiene este tipo de problemas cuando las constricciones no son polinomios de las variables canónicas.

Si se supone que se tienen las versiones cuánticas de las constricciones que cumplen con la versión cuántica del álgebra de Dirac, entonces podríamos escribir el hamiltoniano como sigue

$$\hat{H} = \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{q} (N\hat{C} + N^a\hat{C}_a). \quad (2.34)$$

Clásicamente el hamiltoniano es idénticamente cero en el espacio físico  $\mathcal{F}_{phys}$  por las 4 ecuaciones de Einstein que son constricciones. Tratar estas constricciones en la teoría cuántica ha sido muy problemático, y el tratamiento que usualmente se le da es el creado por Dirac, el cual de manera muy simplificada se esboza a continuación.

Supongamos que  $\psi \in L^2(\text{Riem}(\Sigma))$  es un estado físico y por lo tanto satisface

$$\hat{C}(N)\psi = \hat{C}(\vec{N})\psi = 0; \quad \forall N, \vec{N},$$

además se pide que la ecuación de Wheeler-DeWitt se cumpla

$$\hat{H}\psi = 0; \quad \forall N, \vec{N},$$

de estas asunciones surgen 3 problemas que son demasiado grandes para ser ignorados:

- No se han encontrado soluciones a la ecuación de Wheeler-DeWitt en esta forma. Aunque existen expresiones que parecen ser soluciones formales, es muy complicado darles algún significado.
- Los estados físicos (cuando estos sean encontrados), deben pertenecer a algún espacio fase

$$\mathcal{F}_{phys} = \{\psi : \forall N, \vec{N} \quad \hat{C}(\vec{N})\psi = \hat{C}(N)\psi = 0\}$$

No existe algún candidato razonable para definir un producto interno en este espacio fase, y aunque lo hubiera no hay garantía que concordará con el producto interno definido en  $L^2(\text{Riem}(\Sigma))$  (el cual no es un espacio definido). Esto es llamado **problema del producto interno**. La razón para preocuparse tanto por este problema es que el producto interno es necesario para poder construir operadores auto-adjuntos para definir los observables.

- Como  $\hat{H}$  es idénticamente cero en  $\mathcal{F}_{phys}$ , cualquier observable conmuta con él, lo que implica que cualquier observable es constante en el tiempo

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = i\hbar [\hat{A}, \hat{H}] = 0,$$

entonces podríamos preguntarnos ¿Dónde está la dinámica? Resulta que  $\mathcal{F}_{phys}$  no produce los estados físicos para un tiempo dado, sino que nos da los estados físicos validos para cualquier tiempo. Siendo más específicos, nos proporciona la información de los estados que son invariantes bajo todos los difeomorfismos del espacio-tiempo. A esto se le conoce como **problema del tiempo**. Por lo anterior s concluye que no se tienen candidatos a observables que deberían ser operadores auto-adjuntos sobre  $\mathcal{F}_{phys}$ .

### 2.2.2. Acción de Holst

La acción de Palatini más un término topológico<sup>3</sup> es llamada la acción de Holst [22], fue introducida como una acción de la cual emergieran las llamadas variables de Ashtekar-Barbero y es la culminación de los trabajos de Ashtekar [16], Immirzi [21] y Barbero [20]. La motivación para agregar este término es poder considerar a la gravedad como una teoría tipo Yang-Mills a las cuales se les pueden agregar términos los cuales no afecten las ecuaciones de movimiento.

Esta acción induce una transformación canónica en el espacio fase que depende de un parámetro  $\gamma$  el cual es llamado parámetro de Barbero-Immirzi, y que es de gran relevancia en la cuantización de lazos de esta acción.

A continuación se hará la descomposición 3+1 de la siguiente acción con el propósito de obtener su hamiltoniano. La acción está dada por la siguiente expresión

$$S_H[e, A] = \int_M d^4x e e_I^\mu e_J^\nu \left( F_{\mu\nu}^{IJ} + \frac{1}{\gamma} \epsilon^{IJ}_{KL} F_{\mu\nu}^{KL} \right),$$

y se comienza dando la expresión para el determinante como sigue

$$\begin{aligned} \epsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} e &= \epsilon_{PQMN} e_\rho^P e_\sigma^Q e_\alpha^M e_\beta^N \\ \Rightarrow e &= \frac{1}{4!} \epsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} \epsilon_{PQMN} e_\rho^P e_\sigma^Q e_\alpha^M e_\beta^N, \end{aligned}$$

sustituyendo esto en la acción obtiene que

$$\begin{aligned} S_H[e, A] &= \int_M d^4x \epsilon^{\rho\sigma\alpha\beta} \epsilon_{PQMN} e_\rho^P e_\sigma^Q e_\alpha^M e_\beta^N e_I^\mu e_J^\nu \left( F_{\mu\nu}^{IJ} + \frac{1}{\gamma} \epsilon^{IJ}_{KL} F_{\mu\nu}^{KL} \right) \\ &= \int_M d^4x \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{IJMN} e_\alpha^M e_\beta^N \left( F_{\mu\nu}^{IJ} + \frac{1}{\gamma} \epsilon^{IJ}_{KL} F_{\mu\nu}^{KL} \right). \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Se le llama término topológico en el sentido que no cambia las ecuaciones de movimiento.

Al realizar la contracción de los tensores antisimétricos se encuentra que

$$\epsilon_{IJMN}\epsilon^{IJ}{}_{KL}F_{\mu\nu}^{KL} = (\delta_{MK}\delta_{NL} - \delta_{ML}\delta_{NK})F_{\mu\nu}^{KL} = F_{MN\mu\nu} - F_{NM\mu\nu} = 2F_{MN\mu\nu},$$

por lo que la acción se reduce a

$$S_H[e, A] = \int_M d^4x \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} e_\alpha^M e_\beta^N \left( \epsilon_{MN IJ} F_{\mu\nu}^{IJ} + \frac{1}{\gamma} F_{MN\mu\nu} \right). \quad (2.35)$$

A continuación se lleva a cabo la descomposición de los términos entre paréntesis en sus componentes temporales y espaciales considerando los valores de las tetradas dadas por las expresiones (2.18) y (2.19) así como las consideraciones del espacio interno dadas en la sección de la formulación ADM. De esta manera se tiene que

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{MN IJ} e_\alpha^M e_\beta^N F_{\mu\nu}^{IJ} &= \epsilon^{0bcd} \epsilon_{0lmn} e_0^l e_b^l F_{cd}^{mn} + \epsilon^{a0cd} \epsilon_{0lmn} \overset{0}{\not{e}_a^l} e_0^l F_{cd}^{mn} + \epsilon^{abc0} \epsilon_{0lmn} \overset{0}{\not{e}_a^l} e_b^l F_{c0}^{mn} \\ &\quad + \epsilon^{ab0d} \epsilon_{0lmn} \overset{0}{\not{e}_a^l} e_b^l F_{od}^{mn} + 2\epsilon^{0bcd} \epsilon_{klm0} e_0^k e_b^l F_{cd}^{m0} + 2\epsilon^{abc0} \epsilon_{klm0} e_a^k e_b^l F_{c0}^{m0}, \\ \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} e_\alpha^M e_\beta^N F_{MN\mu\nu} &= 2\epsilon^{0bcd} e_0^l e_b^l F_{0lcd} + 2\epsilon^{a0cd} \overset{0}{\not{e}_a^l} e_0^l F_{0lcd} + 2\epsilon^{ab0d} \overset{0}{\not{e}_a^l} e_b^l F_{0l0d} \\ &\quad + 2\epsilon^{abc0} \overset{0}{\not{e}_a^l} e_b^l F_{0lc0} + 2\epsilon^{0bcd} e_0^k e_b^l F_{klcd} + 2\epsilon^{abc0} e_a^k e_b^l F_{klc0}. \end{aligned}$$

Para poder sustituir los resultados anteriores en la acción se toma  $\epsilon^{0abc} = \epsilon^{abc}$  y  $\epsilon_{0lmn} = \epsilon_{lmn}$ , además de hacer un renombramiento de índices, con estas consideraciones la acción (2.35) tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} S_H[e, A] &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x \epsilon^{abc} \left[ e_a^i e_b^j \left( \epsilon_{ijk} F_{0c}^{0k} + \frac{1}{\gamma} F_{ij0c} \right) + N e_a^i \left( \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{bc}^{jk} + \frac{1}{\gamma} F_{0ibc} \right) \right. \\ &\quad \left. + N^i e_a^j \left( \epsilon_{ijk} F_{bc}^{0k} + \frac{1}{\gamma} F_{ijbc} \right) \right]. \quad (2.36) \end{aligned}$$

Ahora se observa que el primer término es el único que involucra derivadas temporales, lo cual da indicios de cuales son las variables canónicas. Para realizar el desarrollo de los términos de esta acción se utilizan las siguientes expresiones

$$F_{\mu\nu}^{0i} = \partial_\mu \omega_\nu^{0i} - \partial_\nu \omega_\mu^{0i} + \epsilon^{ij}{}_k (\omega_\mu^j \omega_\nu^{0k} - \omega_\nu^j \omega_\mu^{0k}) \quad (2.37a)$$

$$F_{\mu\nu}^{ij} = \epsilon^{ij}{}_k (\partial_\mu \omega_\nu^{kj} - \partial_\nu \omega_\mu^{kj}) + \omega_\mu^j \omega_\nu^i - \omega_\nu^j \omega_\mu^i - \omega_\mu^{0i} \omega_\nu^{0j} + \omega_\nu^{0i} \omega_\mu^{0j}. \quad (2.37b)$$

A partir de las observaciones del párrafo anterior se proponen como variables conjugadas a la siguiente conexión

$$\tilde{A}_\mu^i \equiv \omega_\mu^{0i} + \frac{1}{\gamma} \omega_\mu^i, \quad (2.38)$$

y a las triadas con densidad dadas por

$$E_i^a = \sqrt{q} e_i^a = \det(e_d^l) e_i^a = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \epsilon_{ijk} e_b^j e_c^k. \quad (2.39)$$

La idea es reescribir (2.37a) y (2.37b) en función de  $\tilde{A}_a^i$  y  $\omega_a^i$  usando (2.38) para posteriormente sustituirlo en (2.36). Después de llevar acabo esto se obtiene que

$$\begin{aligned} S_H[e, A] &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x \left[ \left( E_i^a \partial_0 \tilde{A}_a^i + \tilde{\alpha}^i (\partial_a E_i^a - \gamma \epsilon_{ij}{}^k \omega_a^j E_k^a) + \tilde{\beta}^i (\partial_a E_i^a - \epsilon_{ij}{}^k \omega_a^j E_k^a) \right) \right. \\ &+ N \frac{\epsilon_i{}^{mn} E_m^a E_n^b}{2\sqrt{\det(E)}} \left( \frac{2}{\gamma} \partial_a \tilde{A}_b^i - \epsilon_{ijk} \tilde{A}_a^j \tilde{A}_b^k + (1 - \gamma^{-2}) (2\partial_a \omega_b^i - \epsilon_{ijk} \omega_a^j \omega_b^k) \right) \\ &\left. + N^a E_i^b \left( \partial_b \tilde{A}_a^i - \partial_b \tilde{A}_b^i + \gamma \epsilon^i{}_{jk} \tilde{A}_a^j \tilde{A}_b^k + \epsilon^i{}_{jk} (\gamma^{-3} - \gamma^{-1}) (\omega_a^j - \gamma \tilde{A}_a^j) (\omega_b^k - \gamma \tilde{A}_b^k) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  denotan a los multiplicadores de Lagrange siguientes

$$\tilde{\alpha}^i = (1 - \gamma^{-2}) \omega_0^{0i}; \quad \tilde{\beta}^i = \gamma^{-2} \omega_0^{0i} + \gamma \omega_0^i.$$

Como no se tienen derivadas temporales de las variables  $\tilde{\alpha}^i, \tilde{\beta}^i, N$  y  $N^a$ , se identifican como multiplicadores de Lagrange las cuales generan las siguientes constricciones de primera clase

$$\begin{aligned} G_i &\equiv \partial_a E_i^a - \gamma \epsilon_{ij}{}^k \omega_a^j E_k^a \approx 0, \\ S_i &\equiv \partial_a E_i^a - \epsilon_{ij}{}^k \omega_a^j E_k^a \approx 0, \\ C &\equiv \frac{\epsilon_i{}^{mn} E_m^a E_n^b}{2\sqrt{\det(E)}} \left( \frac{2}{\gamma} \partial_a \tilde{A}_b^i - \epsilon_{ijk} \tilde{A}_a^j \tilde{A}_b^k + (1 - \gamma^{-2}) (2\partial_a \omega_b^i - \epsilon_{ijk} \omega_a^j \omega_b^k) \right) \approx 0, \\ C_a &\equiv E_i^b \left( \partial_b \tilde{A}_a^i - \partial_b \tilde{A}_b^i + \gamma \epsilon^i{}_{jk} \tilde{A}_a^j \tilde{A}_b^k + \epsilon^i{}_{jk} (\gamma^{-3} - \gamma^{-1}) (\omega_a^j - \gamma \tilde{A}_a^j) (\omega_b^k - \gamma \tilde{A}_b^k) \right) \approx 0. \end{aligned}$$

Estas expresiones se pueden simplificar introduciendo la conexión  $A \equiv -\gamma \tilde{A}$ , donde se obtiene que las constricciones  $G, C$  y  $C_a$  se escriben entonces como

$$G_i \equiv D_a E_i^a = \partial_a E_i^a + \epsilon_{ij}{}^k A_a^j E_k^a, \quad (2.41)$$

$$C \equiv -\frac{\epsilon_i{}^{mn} E_m^a E_n^b}{2\gamma^2 \sqrt{\det(E)}} (\mathcal{F}_{ab}^i + (1 - \gamma^2) R_{ab}^i), \quad (2.42)$$

$$C_a \equiv \frac{1}{\gamma} E_i^b \mathcal{F}_{ab}^i, \quad (2.43)$$

donde se ha echo uso de las siguientes definiciones

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{ab}^i &= \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \epsilon^i{}_{jk} A_a^j A_b^k, \\ R_{ab}^i &= \partial_a \omega_b^i - \partial_b \omega_a^i - \epsilon^i{}_{jk} \omega_a^j \omega_b^k.\end{aligned}$$

y los corchetes de Poisson de estas variables canónicas  $A$  y  $E$  serán los siguientes

$$\{E_i^a(x), A_b^j(y)\} = \delta_b^a \delta_i^j \delta(x - y). \quad (2.44)$$

Por otra parte los multiplicadores de Lagrange también se modifican por lo que quedan dados como sigue

$$\begin{aligned}\alpha^i &= (1 - \gamma^{-2})(\omega_0^{0i} - N^a \omega_0^{ai}) \\ \beta^i &= -\gamma^{-1} A_0^i - \alpha^i.\end{aligned}$$

Finalmente substituyendo las expresiones anteriores en (2.40) se obtiene el siguiente hamiltoniano total

$$H_{\text{tot}} = - \int_{\Sigma} d^3x (\alpha^i S_i + \beta^i G_i + NC + N^a C_a). \quad (2.45)$$

el cual es el punto de partida para obtener la formulación de la gravedad con variables de lazos.

## Capítulo 3

# Cosmología Cuántica

La aplicación de la relatividad a la cosmología ha sido muy prolífica, sin embargo también ha revelado nuevos problemas tal como la llamada *singularidad inicial*. Se cree que aplicando la mecánica cuántica se podría remover dicha singularidad y describir el origen del universo. La idea de que el nacimiento del universo se debe a un proceso cuántico fue dada por Tyron en 1973 [23], sin embargo en 1958 Georges Lemaître [43] ya planteaba la importancia de la teoría cuántica para el entendimiento del origen del universo.

Como resultado de aplicar la mecánica cuántica al universo como un sistema cerrado nace la **cosmología cuántica** con dos objetivos principales [44]: encontrar la **función de onda del universo** la cual encapsula toda la información del universo, y el mecanismo por el cual se selecciona dicha función de onda de todo un conjunto de posibles funciones de onda. Debido a los trabajos de DeWitt [41], Wheeler [42] y Misner [45] se ha encontrado la ecuación de la cual puede obtenerse dicha función de onda. Esta ecuación es llamada la ecuación de Wheeler-DeWitt. Además de dicha ecuación para determinar la correcta función de onda se necesitan condiciones de frontera, este a sido otro gran problema del cual hay tres propuestas de solución dadas por Linde [46], Vilekin [47] y Hartle-Hawking [48].

En este capítulo damos las generalidades del modelo cosmológico Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) con variables canónicas y de Barbero-Ashtekar además de la cuantización canónica para cada uno, es decir, se encuentra las ecuaciones de Wheeler-DeWitt correspondientes. Finalmente damos una cuantización con el formalismo de WUE, desarrollado en el primer capítulo, para un minisuperespacio arbitrario.

### 3.1. Cosmología Cuántica Canónica

Las constricciones  $C$  y  $C^a$ , dadas por (2.31) y (2.32) respectivamente, contienen toda la información de la gravedad cuántica. Siguiendo el método de Dirac para la cuantización de sistemas con constricciones, estas proporcionan las restricciones físicas para las funciones de onda permitidas. Estas constricciones son difíciles (o posiblemente imposibles en algunos casos) de resolver para todos los grados de libertad. En el tratamiento clásico de la Relatividad General las ecuaciones de campo son tratables si se hacen reducciones por simetrías de los grados de libertad. De esta manera podemos imponer simetría axial, esférica, homogeneidad, isotropía, etc. Por ejemplo, los agujeros negros estacionarios tienen simetría axial o esférica. Si se considera al universo entero como un sistema, este puede ser aproximado como un espacio homogéneo e isótropo a escalas de cientos de megapársecs<sup>1</sup> lo que se le conoce como **principio cosmológico**. La idea de aplicar reducciones de grados de libertad por simetrías se desea explotar para facilitar el proceso de cuantización, lo que permite que sólo se tengan que cuantizar un subconjunto de los grados de libertad del sistema original. Esta reducción viola el principio de incertidumbre, ya que, existen grados de libertad que están siendo ignorados junto con su correspondiente momento canónico. Aun así los modelos resultantes de estas reducciones son adecuados para llevar a cabo un análisis y estudio de aspectos físicos relevantes.

Independientemente de si los modelos obtenidos de esta reducción son realistas o no, existen varias razones para estudiarlos. A continuación mencionamos algunas:

- Sirven como modelos de prueba (*toy models*) para el estudio específico de ciertos aspectos conceptuales, los cuales son independientes del número de grados de libertad. Por ejemplo el problema del tiempo y el papel de los observables en la gravedad cuántica
- El estudio aislado de algunas estructuras matemáticas para darles significado. Por ejemplo la estructura de la ecuación de onda y la imposición de condiciones de frontera.
- Comparación de los diferentes esquemas de cuantización en un contexto de modelos simples.

En la geometrodinámica la función de onda  $\psi$  está definida (además de grados de libertad no gravitacionales) en el espacio de las 3-métrica  $\text{Riem}(\Sigma)$ , pero la presencia de las constricciones debido al grupo de difeomorfismo que actúa sobre las 3-métricas, asegura que el espacio de configuraciones sea el superespacio  $\text{Riem}(\Sigma)/\text{Diff}(\Sigma)$ . El superespacio tiene dimensión infinita, pero si restringimos su número de grados de libertad por simetrías a un número finito de grados de libertad, el espacio de configuraciones resultante es llamado el **minisuperespacio**. Si aún después de la reducción de grados de libertad por simetrías

<sup>1</sup>Un megapársec equivale a 3,26 millones de años luz.



el número de grados de libertad es infinito, al espacio resultante se le llama **midisuperespacio**. Una de las aplicaciones más importantes de esta reducción de grados de libertad es precisamente la cosmología, por lo que, la mayoría de los ejemplos de minisuperespacio son de cosmología cuántica.

El primer modelo de cosmología cuántica con su aproximación clásica la dio DeWitt[41], considerando el caso del universo homogéneo e isótropo. Desde entonces se han hecho diferentes extensiones contemplado diferentes características como la no homogeneidad, anisotropías entre otras.

La reducción de grados de libertad por simetrías comienza considerando una teoría clásica de campo, a la cual se le define la acción de un grupo bajo el cual se pide que el campo sea invariante (el grupo de rotaciones es prominente en este contexto), entonces se construyen los campos invariantes (o “reducidos”) y se evalúan las ecuaciones de campo para ellos. Se han considerando procedimientos más cortos para conseguir el mismo fin, por ejemplo en lugar de considerar reducir las ecuaciones de campo, remover los grados de libertad desde el lagrangiano (o el hamiltoniano) y derivar de él las ecuaciones de campo. En general esto no es posible y sólo es valida bajo ciertas circunstancias. Esto equivale a que los puntos críticos de la acción reducida reproducen los de la acción completa. Esta reducción de grados de libertad será valida cuando se cumpla el llamado **principio de simetría crítica** [49]. En lugar de dar los criterios, se mencionaran tres casos que son de interés para nuestro propósito:

- Un grupo de simetrías compacto siempre satisface estas condiciones. Por lo que la simetría esférica siempre lo cumple.
- En los modelos cosmológicos homogéneos se cumple si las constantes de estructura del grupo  $C_{ab}^c$  cumplen  $C_{ab}^b = 0$ . Los modelos de Bianchi tipo A y el modelo de universo de Kantowski-Sachs cumplen esto.
- Las simetrías axiales y toroidales siempre cumplen estas condiciones. Los sistemas con estas simetrías pueden ser identificadas con teorías de campo parametrizadas con un espacio de fondo plano. Con esta identificación la cuantización es más sencilla, ya que es entendida como una cuantización en un espacio de fondo fijo.

En el caso de modelos homogéneos la función de onda tiene la forma  $\psi(q^i)$  con  $(i = 1, \dots, n)$ , es decir, se tiene la forma usual en la mecánica cuántica.

### 3.1.1. Modelo Cosmológico Cuántico FLRW

A continuación se considerará el caso de un universo con la métrica de FLRW con un campo escalar masivo. Clásicamente el sistema está caracterizado por el factor de escala  $a(t)$  y posiblemente por un campo homogéneo  $\phi(t)$  con masa  $m$ . En la teoría cuántica el

parámetro clásico  $t$  no existe y la función de onda, la cual caracteriza totalmente al sistema, está dada por  $\psi(a, \phi)$ .

El elemento de línea de FLRW con sección espacial cartesiana es

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t)d\Omega^2, \quad (3.1)$$

donde  $d\Omega^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  es el elemento de línea en  $\mathbb{R}^3$ , por lo que la métrica esta dada por la siguiente expresión

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 & 0 \\ 0 & a^2\delta_{ab} \end{pmatrix}.$$

Por la foliación realizada se tienen todas las simetrías del modelo, razón por la cual el vector de corrimiento no aparece en la métrica, solamente la función de lapso.

Así la 3-métrica está totalmente caracterizada por el factor de escala  $a(t)$  y la curvatura extrínseca está dada por la expresión

$$k_{ab} = \frac{1}{2N} \frac{\partial q_{ab}}{\partial t} = \frac{\dot{a}}{aN} q_{ab}, \quad (3.2)$$

de donde se determina que su traza será

$$k = k_{ab}q^{ab} = 3\frac{\dot{a}}{aN},$$

y como puede apreciarse es proporcional al parámetro de Hubble. Como las simetrías del modelo cumplen el principio de simetría crítica [50], se sustituye la métrica en la acción de la gravedad (2.2) y para obtener las ecuaciones de movimiento correspondiente a partir de la lagrangiana reducida.

El escalar de Ricci está dado por [31][40]

$$R = \frac{6}{N^2} \left( -\frac{\dot{N}\dot{a}}{Na} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{6}{\dot{a}^2}. \quad (3.3)$$

con lo que la acción queda dada de la siguiente forma

$$S_g[a] = \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x a^3 N \left( \frac{6}{N^2} \left( -\frac{\dot{N}\dot{a}}{Na} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + \frac{6}{\dot{a}^2} \right), \quad (3.4)$$

a la cual tras integrar por partes y normalizar el volumen se reduce a

$$S_g[a] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \left( -\frac{a\dot{a}^2}{N^2} + a - \Lambda \frac{a^3}{3} \right), \quad (3.5)$$

que es la expresión de la acción en el minisuperespacio.

Para considerar el acoplamiento con materia se agrega la acción para un campo escalar homogéneo y masivo siguiente

$$S_m[\phi] = \int dt N a^3 \left( \frac{\dot{\phi}^2}{N^2} - m^2 \phi^2 \right), \quad (3.6)$$

con lo que la acción total tiene la forma

$$S[a, \phi] = S_g + S_m = \int dt N \left( -\frac{a\dot{a}^2}{N^2} + \frac{\dot{\phi}^2 a^3}{N^2} + a - \Lambda \frac{a^3}{3} - m^2 \phi^2 a^3 \right) \quad (3.7)$$

$$= \int dt N \left( \frac{1}{2} G_{AB} \frac{q^A q^B}{N^2} - V(q) \right), \quad (3.8)$$

donde  $q = \{q^1, q^2\}$ ;  $q^1 = a, q^2 = \phi$ ;  $A, B = 1, 2$  y  $G_{AB}$  es la métrica de DeWitt en el minisuperespacio dada por

$$G_{AB} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}.$$

De esta forma el término asociado al potencial  $V(q)$  queda dado explícitamente por la expresión

$$V(q) = V(a, \phi) = \frac{1}{2} \left( -a + \Lambda \frac{a^3}{3} + m^2 a^3 \phi^2 \right). \quad (3.9)$$

Ahora se obtienen los momentos conjugados correspondientes, para realizar la formulación hamiltoniana

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = -\frac{a\dot{a}}{N}; \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{a^3 \dot{\phi}}{N} \quad (3.10)$$

y se nota que al calcular el momento conjugado correspondiente a  $N$  obtenemos una restricción primaria

$$p_N = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}} \approx 0. \quad (3.11)$$

Realizando la transformación de Legendre para obtener el hamiltoniano se obtiene

$$\begin{aligned} H &= p_N \dot{N} + p_\phi \dot{\phi} + p_a \dot{a} - L \\ &= \frac{N}{2} \left( -\frac{p_a^2}{a} + \frac{p_\phi^2}{a^3} - a + \Lambda \frac{a^3}{3} + m^2 a^3 \phi^2 \right) \\ &\equiv N \left( \frac{1}{2} G^{AB} p_{AP} p_{B} + V(q) \right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde  $G^{AB}$  es la métrica inversa de DeWitt dada explícitamente por

$$G^{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^3} \end{pmatrix}.$$

La condición de consistencia de la constricción primaria  $\{p_N, H\} \approx 0$  proporciona la constricción hamiltoniana  $H \approx 0$  y debido a la forma de la métrica, no existe constricción asociada a difeomorfismos, ya que no hay vector de corrimiento. A nivel lagrangiano la constricción hamiltoniana nos da la ecuación de Friedman, la cual para  $N = 1$  es

$$\dot{a}^2 = -1 + a^2(\dot{\phi}^2 + \frac{\Lambda}{3} + m^2\phi^2), \quad (3.13)$$

mientras que la variación de la acción para  $\phi$  nos da

$$\ddot{\phi} + \frac{3\dot{a}}{a}\dot{\phi} + m^2\phi = 0. \quad (3.14)$$

Ahora que se tiene un hamiltoniano se puede realizar la cuantización canónica del sistema, manteniendo  $H \approx 0$  como condición de la función de onda. Para resolver la ambigüedad del orden de los factores, la cual es parte de la formulación de la mecánica cuántica, se fija el orden que permite que el término cinético de la ecuación resultante de la cuantización sea covariante con respecto al cambio de coordenadas (cambios en el espacio de configuraciones). Por lo anterior la cuantización del término cinético es la siguiente

$$\begin{aligned} G^{AB}p_{Ap}p_B &\rightarrow -\hbar^2\nabla_{LB}^2 \equiv -\frac{\hbar^2}{\sqrt{-G}}\partial_A(\sqrt{-G}G^{AB}\partial_B) \\ &= \frac{\hbar^2}{a^2}\frac{\partial}{\partial a}\left(a\frac{\partial}{\partial a}\right) - \frac{\hbar^2}{a^3}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde  $G$  es el determinante de la métrica de DeWitt y  $\nabla_{LB}^2$  es el operador de Laplace-Beltrami, el cual es la generalización covariante del operador laplaciano [51]. La covarianza del término cinético es una característica de la ecuación de Schrödinger. La ecuación de Wheeler-DeWitt  $\hat{H}\psi = 0$  queda como sigue

$$\left(\frac{\hbar^2}{a^2}\frac{\partial}{\partial a}\left(a\frac{\partial}{\partial a}\right) - \frac{\hbar^2}{a^3}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - a + \Lambda\frac{a^3}{3} + m^2a^3\phi^2\right)\psi(a, \phi) = 0, \quad (3.16)$$

a la cual se le deben de implementar aún condiciones de frontera para determinar  $\psi(a, \phi)$ .

### 3.2. Modelo FLRW con Variables de Ashtekar-Barbero

Ahora se realizara la descripción del modelo cosmológico FLRW con las variables de Ashtekar-Barbero considerado  $N = 1$ . Para dicho propósito se comienza por encontrar las tetradas, ya que la métrica es diagonal fácilmente se observa lo siguiente

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu}^I \eta_{IJ} e_{\nu}^J \Rightarrow e_{\mu}^I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a\delta_a^i \end{pmatrix},$$

con lo que la relación de la 3-métrica con las triadas queda dada por la siguiente expresión

$$q_{ab} = a^2(t)\delta_{ab} = e_a^i \delta_{ij} e_b^j \Rightarrow e_a^i = a\delta_a^i.$$

Se usará el lenguaje de formas diferenciales para describir las tetradas, además considerando la descomposición el espacio tiempo dada en el capítulo anterior se tiene que

$$e^I = e_{\mu}^I dx^{\mu} = e_0^I dt + e_a^I dx^a = dt + a\delta_a^i dx^a.$$

donde se ha empleado que  $\omega^i_0 = \omega^0_i$ .

Ahora que ya se tienen las tetradas y las triadas el siguiente paso es encontrar la conexión de espín correspondiente, para ello usaremos la ecuación (2.11) igualada a cero y descomponiendola en su parte espacial y temporal se tendrán las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} -de^I &= \omega^I_J \wedge e^J \\ \Rightarrow -de^0 &= \omega^0_j \wedge e^j \\ -de^i &= \omega^i_J \wedge e^J, \end{aligned}$$

al evaluar la parte temporal primero del lado izquierdo de la igualdad y después el lado derecho se tendrá

$$\begin{aligned} -de^0 &= d(dt) = 0 \\ \omega^0_j \wedge e^j &= \omega^0_j \wedge e_b^j dx^b = a\delta_b^j \omega^0_j \wedge dx^b \\ \Rightarrow a\delta_b^j \omega^0_j \wedge dx^b &= 0, \end{aligned}$$

de esto se puede intuir que las componentes  $\omega^0_j$  son proporcionales a la uno-forma  $dx^b$ , i.e.  $\omega^0_j = f_b^j dx^b$ , donde  $f_b^j = f_b^j(t)$ .

A continuación evaluaremos de manera análoga la parte espacial, con lo que se tiene

$$\begin{aligned} -de^i &= -d(a\delta_a^i dx^a) = \delta_a^i dx^a \wedge \dot{a} dt \\ \omega^i_J \wedge e^J &= \omega^i_0 \wedge e^0 + \omega^i_j \wedge e^j = \omega^i_0 \wedge e_0^0 dt + \omega^i_j \wedge e_b^j dx^b \\ \Rightarrow \dot{a}\delta_a^i dx^a \wedge dt &= \omega^i_0 \wedge dt + a\delta_b^j \omega^i_j \wedge dx^b, \end{aligned}$$

considerando lo anterior se tiene

$$\dot{a}\delta_a^i dx^a \wedge dt = f_a^j dx^a \wedge dt + a\delta_a^j \omega_j^i \wedge dx^a,$$

así se encuentra que

$$\begin{aligned}\omega_j^i &= 0 \\ \omega_a^{i0} &= \dot{a}\delta_a^i dx^a.\end{aligned}$$

En este punto se tienen los elementos necesarios para calcular las variables de Ashtekar-Barbero del modelo FLRW, se tiene

$$A_a^i = \gamma\omega_a^{i0} + \frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jk}\omega_a^{jk} = c\delta_a^i \quad (3.17)$$

$$E_i^a = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon^{abc}e_b^j e_c^k = p\delta_i^a, \quad (3.18)$$

donde  $c$  y  $p$  son funciones del tiempo tales que  $a^2 = |p|$  y  $c = \gamma\dot{a}$ . Estos valores de las variables no son la única forma de representar a la métrica de FLRW, pero son los más sencillos de utilizar, ya que automáticamente satisfacen la restricción de Gauss.

Como  $A_a^i$  sólo es función del tiempo, la curvatura se puede calcular fácilmente, empleando y se encuentra

$$F_{ab}^k = c^2\epsilon_{ab}^k, \quad (3.19)$$

con lo que la constricción hamiltoniana tiene la siguiente forma

$$H_G = -\frac{6}{\gamma^2}c^2\sqrt{|p|}. \quad (3.20)$$

Esta teoría tiene como única solución en el vacío el espacio plano. A continuación se acoplará materia con un campo escalar homogéneo. La constricción relacionada a los difeomorfismo desaparece por la homogeneidad. Al acoplar materia se tendrá una contribución de un campo escalar sin potencial a la constricción hamiltoniana, dada por  $H_\varphi = p_\varphi^2/|p|^{3/2}$ . Así se tiene que la constricción hamiltoniana total está dada por

$$H = (H_G + H_\varphi) \quad (3.21)$$

$$= \left( \frac{6}{\gamma^2}c^2\sqrt{|p|} + \frac{p_\varphi^2}{|p|^{3/2}} \right) \quad (3.22)$$

$$= \left( \frac{6}{\gamma^2}c^2p^2 + p_\varphi^2 \right) \quad (3.23)$$

$$= G^{AB}p_{AP}p_B = 0, \quad (3.24)$$

donde  $A, B = 0, 1$ ;  $p_0 = c, p_1 = p_\varphi$  y  $G^{AB}$  es la inversa de la supermétrica la cual tiene la forma siguiente

$$G^{AB} = \begin{pmatrix} 6p^2 & 0 \\ \gamma^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Ahora se trabajará un poco con la dinámica de esta teoría cosmológica. Como  $\varphi$  no aparece explícitamente en el hamiltoniano entonces  $p_\varphi$  es una constante de movimiento. La ecuación de movimiento correspondiente a  $p$  es

$$\dot{p} = \{p, H\} = 2\frac{cp}{\gamma}, \quad (3.26)$$

y usando que  $H = 0$  se obtiene entonces que

$$c = \gamma \frac{2}{3} \frac{p_\varphi}{p}, \quad (3.27)$$

por lo que la ecuación (3.26) se puede reescribir como sigue

$$\dot{p} = \frac{4}{3} \frac{p_\varphi}{\sqrt{|p|}}. \quad (3.28)$$

Al integrar la expresión anterior con respecto al tiempo se encuentra la siguiente función para  $p$

$$p^{3/2} = \frac{8}{3} p_\varphi t. \quad (3.29)$$

La variable  $E_i^a$ , y por lo tanto  $p$ , están relacionadas con el volumen del universo. De la ecuación (3.29) se puede observar que al hacer  $t \rightarrow 0$  el volumen del universo decrece, hasta llegar a una singularidad.

### 3.2.1. Cuantización canónica

Hasta el momento sólo se han echo cambios de variable a un sistema con grados de libertad finitos. Ahora se considera la cuantización canónica de dicho sistema con las variables del espacio fase  $(c, p; \varphi, p_\varphi)$ . Al realizar la cuantización canónica de este sistema se recuperan los resultados de la cosmología cuántica tradicional, por el teorema de Stone-von Neumann[52].

Se realiza la cuantización en la representación de coordenadas por lo que  $\hat{p}$  y  $\hat{\varphi}$  actúan multiplicativamente de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \hat{p}\Psi &= p\Psi \\ \hat{\varphi}\Psi &= \varphi\Psi, \end{aligned}$$

mientras que  $\hat{c}$  y  $\hat{p}_\varphi$  lo hacen de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\hat{c}\Psi &= -\gamma i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial c} \\ \hat{p}_\varphi\Psi &= -i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}.\end{aligned}$$

Para escoger un orden de operadores que sea covariante la cuantización de manera análogo al caso anterior, se tendrá lo siguiente

$$G^{AB}p_Ap_B \rightarrow -\hbar^2\nabla_{LB}^2 \equiv -\frac{\hbar^2}{\sqrt{-G}}\partial_A(\sqrt{-G}G^{AB}\partial_B),$$

de donde la ecuación de Wheeler-DeWitt se escribe como

$$-\hbar\left(\frac{\gamma}{p}\frac{\partial}{\partial p}\left(p^2\frac{\partial}{\partial p}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\Psi(p, \varphi) = 0. \quad (3.30)$$

De la forma cuantizada de la constricción hamiltoniana notamos que  $p_\varphi$  es una constante de movimiento, por lo que  $\varphi$  es una función monótona en cada trayectoria clásica. Así  $\varphi$  puede ser vista como una coordenada *temporal* y la ecuación de Wheeler-DeWitt como una ecuación de evolución de este *tiempo emergente*  $\varphi$ . En este contexto  $p_\varphi$  es un observable de Dirac y junto con otro observable que representa el volumen del universo en un tiempo dado, son un conjunto completo de observables para este modelo.

### 3.3. Formalismo de WUE en el Minisuperespacio

Al tener el hamiltoniano de un sistema dado y realizar en él la cuantización, se obtiene la ecuación de Schrödinger correspondiente. Pero para un mismo hamiltoniano en diferentes sistemas de coordenadas, las ecuaciones de Schrödinger correspondientes a cada sistema de coordenadas son diferentes y no son equivalentes[53]. La razón es que usualmente hay términos de la métrica del espacio de configuraciones los cuales pasamos por alto, los cuales son funciones de las coordenadas y no conmutan con los momentos conjugados correspondientes. La ecuación de Schrödinger es covariante, en el sentido que aunque se cambie de coordenadas la forma de la ecuación se mantiene, se desea que las ecuaciones resultantes de un proceso de cuantización cumplan esta condición tal y como lo hace la ecuación de Wheeler-DeWitt.

Partiendo de un lagrangiano de la forma  $L = g_{\mu\nu}\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu - V(q^\mu)$ , se encuentra después de la transformación de Legendre correspondiente el hamiltoniano siguiente  $H = g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu + V(q^\mu)$ . La cuantización canónica de este hamiltoniano es

$$\hat{H} = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + \hat{V},$$



donde para que la ecuación resultante es covariante en el mismo sentido que la de Schrödinger (es decir, que el término cinético sea invariante ante cambios de coordenadas), es necesario que el término cinético sea el operador de Laplace-Beltrami por lo que  $\nabla_\mu$  debe denotar la derivada covariante. Con esta condición la cuantización canónica parece funcionar de la manera correcta, y esto sucede cuando el espacio de configuración es plano. Cuando el espacio de configuraciones tiene una geometría diferente esta cuantización ya no funciona más. Es aquí donde entra la formulación WUE de cuantización.

Partiendo de que se tiene una variedad  $n$ -dimensional  $M$  con métrica de DeWitt  $g_{\mu\nu}(q^\alpha)$ , sea esta variedad el minisuperespacio resultado de la reducción grados de libertad para algunas simetrías dadas. También es necesario que el espacio fase sea el haz cotangente de  $M$ . Con lo anterior y sabiendo que el hamiltoniano en el minisuperespacio usualmente tiene la siguiente forma

$$H = g^{\mu\nu}(q^\alpha)p_\mu p_\nu + V(q^\mu), \quad (3.31)$$

aplicaremos el formalismo de WUE, el cual funciona para las condiciones anteriormente dichas y funcionara aun si  $M$  tiene topología no trivial.

Sustituyendo  $g^{\mu\nu}(q^\alpha)p_\mu p_\nu$  en (1.54) tendremos

$$W(g^{\mu\nu}(q^\alpha)p_\mu p_\nu) = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 [g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + (\nabla_\mu g^{\mu\nu})\nabla_\nu + \frac{1}{4}\nabla_\mu\nabla_\nu g^{\mu\nu} + \frac{1}{12}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}], \quad (3.32)$$

donde  $\nabla_\mu$  es la derivada covariante en  $M$  y  $R_{\mu\nu}$  es el escalar de Ricci con respecto a la métrica de DeWitt.

Como la derivada covariante es compatible con la métrica se tendrá que

$$W(g^{\mu\nu}(q^\alpha)p_\mu p_\nu) = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \left[ \frac{9}{4}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + \frac{1}{12}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \right] \quad (3.33)$$

$$= -\frac{9\hbar^2}{4\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu) - \frac{\hbar^2}{12}R, \quad (3.34)$$

el cual es el operador de Laplace-Beltrami más un término proporcional a la curvatura cuyo coeficiente ha sido controversial. Misner dio un valor preferencial dependiente de la dimensión de la variedad  $M$  [54][55] para dimensiones mayores a uno y espacios conformes.

Si se considera un hamiltoniano con la forma indicada por (3.31) y usando (3.34) para su cuantización, se tendrá

$$\begin{aligned} W(H)\psi(q^\mu) &= \hat{H}\psi(q^\mu) \\ &= \left( -\frac{9\hbar^2}{4\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu) - \frac{\hbar^2}{12}R + V(q^\mu) \right) \psi(q^\mu) \\ &= \left( -\frac{\hbar^2}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu) - \frac{\hbar^2}{27}R + \frac{4}{9}V(q^\mu) \right) \psi(q^\mu) = 0, \end{aligned}$$

si se toma que un espacio tal que  $R = 0$  se tendrá que

$$\left( -\frac{\hbar^2}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) + \frac{4}{9} V(q^\mu) \right) \psi(q^\mu) = 0, \quad (3.35)$$

lo cual coincide, hasta la constante  $4/9$  que multiplica el potencial, con la ecuación de Wheeler-DeWitt en el minisuperespacio. Sin embargo, esta constante no afecta los intervalos de monotoneidad, ni el comportamiento de la función de onda en sus puntos críticos.

Como ejemplo del uso de esta ecuación se retoma la métrica inversa de DeWitt (3.1.1) y se sustituye en (3.35), con lo que se tendrá

$$\left( \frac{\hbar^2}{a^2} \frac{\partial}{\partial a} \left( a \frac{\partial}{\partial a} \right) - \frac{\hbar^2}{a^3} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{4}{9} \left( -a + \Lambda \frac{a^3}{3} + m^2 a^3 \phi^2 \right) \right) \psi(a, \phi) = 0, \quad (3.36)$$

que corresponde al modelo FLRW con variables canónicas. De manera análoga pero con la métrica inversa (3.25) se tendrá

$$-\hbar \left( \frac{\gamma}{p} \frac{\partial}{\partial p} \left( p^2 \frac{\partial}{\partial p} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \Psi(p, \varphi) = 0. \quad (3.37)$$

que en este caso coincide idénticamente, ya que no existe potencial.

# Conclusiones

Uno de los problemas más importantes que enfrenta la física teórica contemporánea es el de construir una teoría cuántica de la gravedad. Entre los obstáculos principales se encuentra el hecho de que no existe un experimento para comparar con los resultados teóricos, ya que los niveles de energía requeridos en los colisionadores de partículas están muy por debajo de la energía necesarios para observar los efectos de la gravedad a escalas cuánticas. Sin embargo, se ha tratado de contemplar la posibilidad de que algunas observaciones cosmológicas pudieran ser usadas para comprobar si las predicciones teóricas son o no acertadas, razón por la cual, es importante tener predicciones de efectos cosmológicos basadas en modelos de gravedad cuántica.

El formalismo de WUE da una cuantización covariante en el sentido que la ecuación de onda es invariante ante cambio de coordenadas (difeomorfismos) de la variedad usada como espacio de configuraciones, lo cual es sumamente deseable para reproducir la cuantización dada por la ecuación de Wheeler-DeWitt en el minisuperespacio. Siguiendo esta guía en el presente trabajo se toma el minisuperespacio y la métrica de DeWitt como una variedad pseudo-riemanniana en la cual se puede utilizar el formalismo de cuantización de WUE, con lo que los modelos cosmológicos pueden ser cuantizados obteniendo la métrica de DeWitt.

La comparación entre las ecuaciones de onda dadas tanto por la ecuación de Wheeler-DeWitt como la cuantización de WUE muestra que éstas difieren hasta una constante multiplicativa en el potencial. Dicho término no afecta el comportamiento en los puntos críticos ni la forma de la función de onda resultante.

Una primera extensión del presente trabajo es realizar la cuantización de WUE para un modelo cosmológico con curvatura y comparar con la ecuación de Wheeler-DeWitt con la finalidad de encontrar las coincidencias o discrepancias que produce el término de curvatura.

Existen formalismos los cuales permiten análisis de comportamientos cuánticos en el espacio fase de sistemas con grados de libertad infinitos (teorías de campo), el uso de un formalismo de este tipo en modelos cosmológicos más complejos es interesante, principalmente para poder realizar una comparación con la ecuación de Wheeler-DeWitt en el midisuperespacio ( o incluso el superespacio), lo cual podría revelar nuevos aspectos de la

cosmología cuántica.

## Apéndice A

# Sistemas con Constricciones

En física es muy utilizado realizar la descripción de los sistemas con una cantidad de variables mayor a los grados de libertad, lo que implica la existencia de constricciones en el sistema. Esto es consecuencia de no conocer los grados de libertad del sistema a priori, por ejemplo en el electromagnetismo usualmente se toma al potencial  $A_\mu$  como variable de configuración, lo que implica cuatro grados de libertad, sin embargo, después del análisis lagrangiano se nota la existencia de dos grados de libertad los cuales corresponden a las posibles polarizaciones de la onda electromagnética. La gravedad es un caso similar.

Para realizar el análisis del sistema partimos de que se tiene el lagrangiano del sistema  $L = L(q^i, \dot{q}^i)$ , del cual se obtiene el hamiltoniano  $H = H(q^i, p_i)$ . Para realizar este procedimiento se define el momento conjugado canónico  $p_i$  para cada  $q^i$  como sigue

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad (\text{A.1})$$

de donde se tiene  $p_i = p_i(q^j, \dot{q}^j)$ , de estas ecuaciones en principio se podrán obtener las expresiones  $\dot{q}^i = \dot{q}^i(q^j, p_j)$  de manera única. Tomando en cuenta lo anterior se podría realizar la transformación de Legendre  $H = \dot{q}^i(q^j, p_j)p_j - L(q^i, p_i)$ . Esto implica la realización de un mapeo entre dos espacios

$$(q^i, \dot{q}^i) \rightarrow (q^i, p_i). \quad (\text{A.2})$$

La matriz hessiana del mapeo (A.2) esta dada como sigue

$$M_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad (\text{A.3})$$

de la cual, si queremos que dicho mapeo sea invertible, se debe cumplir que

$$|M_{ij}| = \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right| \neq 0. \quad (\text{A.4})$$

Si este determinante es cero no se pueden obtener las velocidades en función de los momentos y las coordenadas, dando pie a la existencia de relaciones de la forma  $\phi^a(q^i, p_i) = 0$  a las cuales se les conoce como **constricciones primarias**. Si se considera el rango  $r$  de la matriz (A.3) se tendrá que  $0 < a < (2n - r)$ , donde  $n$  es la dimensión del espacio de configuraciones y  $a$  es el índice para las constricciones. Esto implica que se tienen  $r$  ecuaciones que relacionan los momentos conjugados y las velocidades.

Tomando al espacio fase como una variedad, se tendrá que las constricciones primarias definen una subvariedad del espacio fase con dimensión  $(2n - r)$ . Como las constricciones se cumplen en todo momento podemos definir un nuevo hamiltoniano total como sigue

$$H_T = H + \lambda^a \phi_a, \quad (\text{A.5})$$

donde  $\lambda^a$  son multiplicadores de Lagrange. Si se obtienen las ecuaciones de Hamilton correspondientes se tendrán las siguientes expresiones

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda_a \frac{\partial \phi^a}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} + \lambda_a \frac{\partial \phi^a}{\partial q^i}. \quad (\text{A.6})$$

Para que estas constricciones impliquen un lagrangiano, y por lo tanto un hamiltoniano, consistente se tiene que verificar que la derivada temporal de las  $\phi^a$ , también son idénticamente cero, i.e.  $\dot{\phi}^a(q^i, p_i) = 0$ . Para verificar esto se realiza la modificación a los corchetes de Poisson de tal manera que la derivada temporal de un observable  $f = f(q^i, p_i)$  dada por (1.5) se realiza con el hamiltoniano total  $H_T$  de la siguiente manera

$$\frac{df}{dt} = \{f, H_T\} = \{f, H\} + \lambda_a \{f, \phi^a\}. \quad (\text{A.7})$$

Aplicando lo anterior para las constricciones primarias se tendrá las siguientes expresiones

$$\frac{d\phi^a}{dt} = \{\phi^a, H_T\} = \{\phi^a, H\} + \lambda_b \{\phi^a, \phi^b\} = 0. \quad (\text{A.8})$$

De estas ecuaciones pueden suceder los siguientes casos:

- Las ecuaciones resultantes son consistentes, es decir tenemos una expresión como  $0 = 0$ .
- Las expresiones resultantes dan un conjunto de condiciones para los multiplicadores de Lagrange  $\lambda_a$ .
- Se obtiene otro conjunto de funciones  $\chi^a(q^i, p_i)$ , las cuales son constricciones nuevas. Estas son llamadas constricciones secundarias. Ha estas constricciones secundarias también se les debe verificar la consistencia de la misma manera que a las constricciones primarias.

Finalmente al grupo de constricciones las cuales son cerradas con respecto al corchete de Poisson como sigue

$$\{\phi^a, \phi^b\} = C_c^{ab} \phi^c, \quad (\text{A.9})$$

donde  $C_c^{ab}$  es la constante de estructura, se les conoce como constricciones de primera clase. De no cumplir esto se les conoce como constricciones de segunda clase.

# Apéndice B

## Desarrollos

El objetivo de este apéndice es mostrar los desarrollos y demostraciones que se omitieron a lo largo del capítulo 1.

**Teorema 1.** *La base de operadores unitarios tiene la siguiente representación en la base coordenada*

$$\hat{U}(\lambda, \mu) = \int_{\mathbb{R}} dq \exp(i\mu q) |q - \frac{\hbar\lambda}{2}\rangle \langle q + \frac{\hbar\lambda}{2}|, \quad (\text{B.1})$$

y la siguiente representación en la base de momentos

$$\hat{U}(\lambda, \mu) = \int_{\mathbb{R}} dp \exp(i\lambda p) |p + \frac{\hbar\mu}{2}\rangle \langle p - \frac{\hbar\mu}{2}|. \quad (\text{B.2})$$

*Demostración.* De la relación de Baker-Campbell-Hausdorff para dos operadores arbitrarios  $\hat{A}, \hat{B}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \exp(\hat{A}) \exp(\hat{B}) &= \exp(\hat{C}) \\ \hat{C} &= \hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{12} \left( [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] \right) + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Si se considera  $\hat{A} = i\lambda\hat{p}$ ,  $\hat{B} = i\mu\hat{q}$  y se emplea la relación de conmutación canónica  $[\hat{p}, \hat{q}] = -i\hbar$  se encuentra de (B.3) que

$$\exp(i\lambda\hat{p}) \exp(i\mu\hat{q}) = \exp\{i(\lambda\hat{p} + \mu\hat{q})\} \exp\left(\frac{i}{2}\hbar\lambda\mu\right), \quad (\text{B.4})$$



con lo que se la base  $\hat{U}$  se puede escribir de la siguiente manera

$$\hat{U}(\lambda, \mu) = \exp\left(-\frac{i}{2}\hbar\lambda\mu\right) \exp(i\lambda\hat{p}) \exp(i\mu\hat{q}) \quad (\text{B.5})$$

$$= \exp\left(\frac{i}{2}\hbar\lambda\mu\right) \exp(i\mu\hat{q}) \exp(i\lambda\hat{p}). \quad (\text{B.6})$$

Al ser la base coordenada una base completa se la siguiente resolución a la identidad

$$\hat{I} = \int dq |q\rangle \langle q|, \quad (\text{B.7})$$

donde  $\hat{I}$  es el operador identidad. Si se toman en cuenta la expresión del generador de traslaciones

$$\exp(i\lambda\hat{p}) |q\rangle = |q - \hbar\lambda\rangle, \quad (\text{B.8})$$

junto con (B.5) y (B.7) se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \hat{U}(\lambda, \mu) &= \hat{I}\hat{U}(\lambda, \mu) = \int_{\mathbb{R}} dq \exp\left(-\frac{i}{2}\hbar\lambda\mu\right) \exp(i\lambda\hat{p}) \exp(i\mu\hat{q}) |q\rangle \langle q| \\ &= \int_{\mathbb{R}} dq \exp\left(-\frac{i}{2}\hbar\lambda\mu\right) \exp(i\mu q) \exp(i\lambda\hat{p}) |q\rangle \langle q| \\ &= \int_{\mathbb{R}} dq \exp\left(i\mu\left(-\frac{1}{2}\hbar\lambda + q\right)\right) |q - \hbar\lambda\rangle \langle q| \\ &= \int_{\mathbb{R}} dq \exp(i\mu q) \left|q - \frac{\hbar\lambda}{2}\right\rangle \left\langle q + \frac{\hbar\lambda}{2}\right|, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

con lo que se tiene la expresión de  $\hat{U}(\lambda, \mu)$  en términos de la base coordenada, para obtener la expresión correspondiente en la base de momentos, se debe tener en cuenta la expresión (B.6), la resolución a la identidad en la base de momentos

$$\hat{I} = \int dp |p\rangle \langle p|, \quad (\text{B.10})$$

y el operador de traslación siguiente

$$\exp(i\mu\hat{q}) |p\rangle = |p + \hbar\mu\rangle, \quad (\text{B.11})$$

con lo que de manera análoga se tendrá

$$\begin{aligned} \hat{U}(\lambda, \mu)\hat{I} &= \int_{\mathbb{R}} dp \hat{U}(\lambda, \mu) |p\rangle \langle p|, \\ &= \int_{\mathbb{R}} dp \exp(i\lambda p) \left|p + \frac{\hbar\mu}{2}\right\rangle \left\langle p - \frac{\hbar\mu}{2}\right|. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Con lo que se tienen las dos expresiones deseadas.  $\square$

**Teorema 2.** La traza de  $\hat{U}(\lambda, \mu)$  esta dada de la siguiente manera

$$\text{Tr}\{\hat{U}(\lambda, \mu)\} = \frac{2\pi}{\hbar}\delta(\mu)\delta(\lambda). \quad (\text{B.13})$$

*Demostración.* Se considera la traza de  $\hat{U}(\lambda, \mu)$  en la base de momentos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\hat{U}(\lambda, \mu)\} &= \int_{\mathbb{R}^2} \langle p' | \hat{U}(\lambda, \mu) | p' \rangle dp dp', \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \exp(i\lambda p) \langle p' | p + \frac{\hbar\mu}{2} \rangle \langle p - \frac{\hbar\mu}{2} | p' \rangle dp dp' \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \exp(i\lambda p) \delta\left(p + \frac{\hbar\mu}{2} - p'\right) \delta\left(p' - \left(p - \frac{\hbar\mu}{2}\right)\right) dp dp', \end{aligned}$$

utilizando ahora la identidad

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(\zeta - x) \delta(x - \eta) dx = \delta(\zeta - \eta), \quad (\text{B.14})$$

y que la distribución  $\delta$  de Dirac se puede representar como

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\{-i(x - x')t\} dt, \quad (\text{B.15})$$

se encuentra finalmente que

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\hat{U}(\lambda, \mu)\} &= \int_{\mathbb{R}} \exp(i\lambda p) \delta(\hbar\mu) dp, \\ &= 2\pi\delta(\mu)\delta(\hbar\lambda), \\ &= \frac{2\pi}{\hbar}\delta(\mu)\delta(\lambda). \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

□

**Teorema 3.** La traza del producto de los operadores  $\hat{U}^\dagger(\lambda, \mu)$ ,  $\hat{U}(\lambda', \mu')$  esta dada como sigue

$$\text{Tr}\{\hat{U}^\dagger(\lambda, \mu) \hat{U}(\lambda', \mu')\} = \frac{2\pi}{\hbar}\delta(\lambda - \lambda')\delta(\mu - \mu'). \quad (\text{B.17})$$

*Demostración.* De (B.12) se tiene que

$$\hat{U}^\dagger(\lambda, \mu) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-i\lambda p) |p - \frac{\hbar\mu}{2}\rangle dp \langle p + \frac{\hbar\mu}{2}|, \quad (\text{B.18})$$

entonces

$$\begin{aligned}
 Tr\{\hat{U}^\dagger(\lambda, \mu)\hat{U}(\lambda', \mu')\} &= \int_{\mathbb{R}} \langle p'' | \hat{U}^\dagger(\lambda, \mu)\hat{U}(\lambda', \mu') | p'' \rangle dp'', \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-i\lambda p) \exp(i\lambda' p') \langle p'' | p - \frac{\hbar\mu}{2} \rangle \langle p + \frac{\hbar\mu}{2} | p' + \frac{\hbar\mu'}{2} \rangle, \\
 &\times \langle p' - \frac{\hbar\mu'}{2} | p'' \rangle dp'' dp' dp, \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-i\lambda p) \exp(i\lambda' p') \delta\left(p - \frac{\hbar\mu}{2} - p''\right) \\
 &\times \delta\left(p' - \left(p + \frac{\hbar\mu}{2} - \frac{\hbar\mu'}{2}\right)\right) \delta\left(p'' - \left(p' - \frac{\hbar\mu'}{2}\right)\right) dp'' dp' dp, \quad (\text{B.19})
 \end{aligned}$$

integrando esta última expresión, primero con respecto a  $p'$  se obtiene

$$\begin{aligned}
 Tr\{\hat{U}^\dagger(\lambda, \mu)\hat{U}(\lambda', \mu')\} &= \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-i\lambda p) \exp\left(i\lambda' \left(p + \frac{\hbar\mu}{2} - \frac{\hbar\mu'}{2}\right)\right) \delta\left(p - \frac{\hbar\mu}{2} - p''\right) \\
 &\times \delta\left(p'' - \left(p + \frac{\hbar\mu}{2} - \frac{\hbar\mu'}{2} - \frac{\hbar\mu'}{2}\right)\right) dp'' dp, \quad (\text{B.20})
 \end{aligned}$$

y haciendo ahora la integración con respecto a  $p''$  se tiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 Tr\{\hat{U}^\dagger(\lambda, \mu)\hat{U}(\lambda', \mu')\} &= \int_{\mathbb{R}} \exp(ip(\lambda' - \lambda)) \exp\left(i\lambda' \left(\frac{\hbar\mu}{2} - \frac{\hbar\mu'}{2}\right)\right), \\
 &\times \delta\left(p - \frac{\hbar\mu}{2} - p - \frac{\hbar\mu}{2} + \hbar\mu'\right) dp, \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \exp(ip(\lambda' - \lambda)) \exp\left(i\lambda' \left(\frac{\hbar\mu}{2} - \frac{\hbar\mu'}{2}\right)\right) \delta(\hbar\mu' - \hbar\mu') dp, \\
 &= \frac{2\pi}{\hbar} \delta(\mu - \mu') \delta(\lambda - \lambda'). \quad (\text{B.21})
 \end{aligned}$$

□

**Teorema 4.** La Representación de  $\hat{\Omega}(q, p)$  en las bases de momento y posición son las siguientes

$$\hat{\Omega}(q, p) = \int d\xi \exp\left(\frac{i\xi p}{2}\right) \left| q + \frac{\xi}{2} \right\rangle \left\langle q - \frac{\xi}{2} \right|, \quad (\text{B.22})$$

$$\hat{\Omega}(q, p) = \int d\xi \exp\left(-\frac{i\xi q}{2}\right) \left| p + \frac{\xi}{2} \right\rangle \left\langle p - \frac{\xi}{2} \right|, \quad (\text{B.23})$$

respectivamente.

*Demostración.* De la definición del cuantizador (1.33) y la expresión de  $\hat{U}(\lambda, \mu)$  en la base de momentos (B.2) se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \hat{\Omega}(q, p) &= \frac{\hbar}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d\lambda d\mu \exp\{-i(\lambda p + \mu q)\} \hat{U}(\lambda, \mu) \\
 &= \frac{\hbar}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d\lambda d\mu \exp\{-i(\lambda p + \mu q)\} \int_{\mathbb{R}} dp' \exp(i\lambda p') |p' + \frac{\hbar\mu}{2}\rangle \langle p' - \frac{\hbar\mu}{2}| \\
 &= \frac{\hbar}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d\mu dp' \exp\{-i\mu q\} |p' + \frac{\hbar\mu}{2}\rangle \langle p' - \frac{\hbar\mu}{2}| 2\pi\delta(p' - p) \\
 &= \hbar \int_{\mathbb{R}} \exp\{-i\mu q\} |p + \frac{\hbar\mu}{2}\rangle \langle p - \frac{\hbar\mu}{2}| d\mu,
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

haciendo el cambio de variable  $\xi = \hbar\mu$  se obtiene

$$\hat{\Omega}(q, p) = \int_{\mathbb{R}} d\xi \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\xi q\right) \left|p + \frac{\xi}{2}\right\rangle \left\langle p - \frac{\xi}{2}\right|. \tag{B.25}$$

De manera análoga considerando la representación del cuantizador de Stratonovich-Weyl en la base de coordenadas (B.1) en lugar de la de momentos, se obtiene lo siguiente

$$\hat{\Omega}(q, p) = \int_{\mathbb{R}} d\xi \exp\left(\frac{i}{\hbar}\xi p\right) \left|q + \frac{\xi}{2}\right\rangle \left\langle q - \frac{\xi}{2}\right|. \tag{B.26}$$

□

**Teorema 5.** *El cuantizador  $\hat{\Omega}(\lambda, \mu)$  es hermitiano*

*Demostración.* Tomando el auto-adjunto de  $\hat{\Omega}(\lambda, \mu)$  se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \hat{\Omega}^\dagger(q, p) &= \left\{ \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\xi p\right\} \left|q + \frac{\xi}{2}\right\rangle \left\langle q - \frac{\xi}{2}\right| d\xi \right\}^\dagger, \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\xi p\right\} \left|q - \frac{\xi}{2}\right\rangle \left\langle q + \frac{\xi}{2}\right| d\xi,
 \end{aligned} \tag{B.27}$$

y haciendo el cambio de variable  $\xi' = -\xi$  se tiene

$$\hat{\Omega}^\dagger(q, p) = \hat{\Omega}(q, p). \tag{B.28}$$

□

**Teorema 6.** *La traza de  $\hat{\Omega}(\lambda, \mu)$  es la unidad.*

*Demostración.* Al tomar la traza de (1.33) y usar (B.13) se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
 Tr\{\hat{\Omega}(q, p)\} &= \frac{\hbar}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dp' d\lambda d\mu \langle p' | \exp\{-i(\lambda p + \mu q)\} \hat{U}(\lambda, \mu) | p' \rangle, \\
 &= \frac{\hbar}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dp' d\lambda d\mu \exp\{-i(\lambda p + \mu q)\} \langle p' | \hat{U}(\lambda, \mu) | p' \rangle \\
 &= \frac{\hbar}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d\lambda d\mu \exp\{-i(\lambda p + \mu q)\} \delta(\mu) \delta(\lambda) \\
 &= 1.
 \end{aligned} \tag{B.29}$$

□

**Teorema 7.** La traza del producto de dos operadores de Stratonovich-Weyl esta dada de la siguiente forma

$$Tr\{\hat{\Omega}(q, p)\hat{\Omega}(q', p')\} = 2\pi\hbar\delta(q - q')\delta(p - p'). \tag{B.30}$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
 Tr\{\hat{\Omega}(q, p)\hat{\Omega}(q', p')\} &= \int_{\mathbb{R}^2} \exp\{-\frac{i}{\hbar}\xi q\} \exp\{-\frac{i}{\hbar}\xi' q'\} \langle p'' | p + \frac{\xi}{2} \rangle \\
 &\quad \times \langle p - \frac{\xi}{2} | p' + \frac{\xi'}{2} \rangle \langle p' - \frac{\xi'}{2} | p'' \rangle dp'' d\xi' d\xi,
 \end{aligned} \tag{B.31}$$

y haciendo el cambio  $\xi \rightarrow \xi/2$

$$\begin{aligned}
 Tr\{\hat{\Omega}(q, p)\hat{\Omega}(q', p')\} &= \int_{\mathbb{R}^2} \exp\{-\frac{i}{\hbar}\xi q\} \exp\{-\frac{i}{\hbar}\xi' q'\} \langle p'' | p + \frac{\xi}{2} \rangle \\
 &\quad \times \langle p - \frac{\xi}{2} | p' + \frac{\xi'}{2} \rangle \langle p' - \frac{\xi'}{2} | p'' \rangle dp'' d\xi' d\xi, \\
 &= 4 \int_{\mathbb{R}^3} \exp\{-\frac{i}{\hbar}2\xi q\} \exp\{-\frac{i}{\hbar}2\xi' q'\} \\
 &\quad \times \langle p'' | p + \xi \rangle \delta(p' + \xi' - p + \xi) \langle p' - \xi | p'' \rangle dp'' d\xi' d\xi, \\
 &= 4 \int_{\mathbb{R}^2} \exp\{-\frac{i}{\hbar}2\xi q\} \exp\{-\frac{i}{\hbar}2q'(-p' + p - \xi)\} \\
 &\quad \times \langle p'' | p + \xi \rangle \langle 2p' - p + \xi | p'' \rangle dp'' d\xi, \\
 &= 4 \int_{\mathbb{R}} \exp\{-\frac{i}{\hbar}2\xi q\} \exp\{-\frac{i}{\hbar}2q'(-p' + p - \xi)\} \delta(2p - 2p') d\xi, \\
 &= 2\pi\hbar\delta(q - q')\delta(p - p').
 \end{aligned} \tag{B.32}$$

□

**Teorema 8.** La traza del producto de tres operadores de Stratonovich-Weyl esta dada por la siguiente expresión

$$Tr\{\hat{\Omega}(q, p)\hat{\Omega}(q', p')\hat{\Omega}(q'', p'')\} = 4 \exp\{\frac{2i}{\hbar}[(q - q')(p - p'') - (q - q'')(p - p')]\}. \tag{B.33}$$

*Demostración.* Se comienza obteniendo la traza de la multiplicación de los tres cuantizadores de SW en términos de la base de momentos (B.23) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 Tr\{\hat{\Omega}(q,p)\hat{\Omega}(q',p')\hat{\Omega}(q'',p'')\} &= \int_{\mathbb{R}^4} \exp\{-\frac{i}{\hbar}\xi q\} \exp\{-\frac{i}{\hbar}\xi' q'\} \exp\{-\frac{i}{\hbar}\xi'' q''\} \\
 &\times \langle p'''|p + \frac{\xi}{2}\rangle \langle p - \frac{\xi}{2}|p' + \frac{\xi'}{2}\rangle \langle p' - \frac{\xi'}{2}|p'' + \frac{\xi''}{2}\rangle \\
 &\times \langle p'' - \frac{\xi''}{2}|p'''\rangle dp''' d\xi'' d\xi' d\xi, \\
 &= 2^3 \int_{\mathbb{R}^4} \exp\{-\frac{2i}{\hbar}\xi q\} \exp\{-\frac{2i}{\hbar}\xi' q'\} \exp\{-\frac{2i}{\hbar}\xi'' q''\} \\
 &\times \langle p'''|p + \xi\rangle \delta(\xi' - (p - \xi - p')) \langle p' - \xi'|p'' + \xi''\rangle \\
 &\times \langle p'' - \xi''|p'''\rangle dp''' d\xi'' d\xi' d\xi, \tag{B.34}
 \end{aligned}$$

integrando respecto a la variable  $\xi'$

$$\begin{aligned}
 Tr\{\hat{\Omega}(q,p)\hat{\Omega}(q',p')\hat{\Omega}(q'',p'')\} &= 2^3 \int_{\mathbb{R}^4} \exp\{-\frac{2i}{\hbar}\xi q\} \exp\{-\frac{2i}{\hbar}q'(p - \xi - p')\} \\
 &\times \exp\{-\frac{2i}{\hbar}\xi'' q''\} \langle p'''|p + \xi\rangle \langle 2p' - (p - \xi)|p'' + \xi''\rangle \\
 &\times \langle p'' - \xi''|p'''\rangle dp''' d\xi'' d\xi, \\
 &= 2^3 \int_{\mathbb{R}^3} \exp\{-\frac{2i}{\hbar}\xi q\} \exp\{-\frac{2i}{\hbar}q'(p - \xi - p')\} \\
 &\times \exp\{-\frac{2i}{\hbar}\xi'' q''\} \langle p'''|p + \xi\rangle \delta(\xi'' - (-p'' + 2p' - p + \xi)) \\
 &\times \langle p'' - \xi''|p'''\rangle dp''' d\xi'' d\xi, \tag{B.35}
 \end{aligned}$$

y ahora respecto a  $\xi''$

$$\begin{aligned}
 Tr\{\hat{\Omega}(q,p)\hat{\Omega}(q',p')\hat{\Omega}(q'',p'')\} &= 2^3 \int_{\mathbb{R}^2} \exp\{-\frac{2i}{\hbar}\xi q\} \exp\{-\frac{2i}{\hbar}q'(p - \xi - p')\} \\
 &\times \exp\{-\frac{2i}{\hbar}q''(-p'' + 2p' - p + \xi)\} \langle p'''|p + \xi\rangle \\
 &\times \langle p'' - (-p'' + 2p' - p + \xi)|p'''\rangle dp''' d\xi, \\
 &= 2^3 \int_{\mathbb{R}^2} \exp\{-\frac{2i}{\hbar}\xi q\} \exp\{-\frac{2i}{\hbar}q'(p - \xi - p')\} \\
 &\times \exp\{-\frac{2i}{\hbar}q''(-p'' + 2p' - p + \xi)\} \\
 &\times \delta(2p'' - (+2p' - p + \xi) - p - \xi) dp''' d\xi. \tag{B.36}
 \end{aligned}$$

Realizando ahora la integración en la variable  $p'''$  se obtiene entonces

$$\begin{aligned}
 Tr\{\hat{\Omega}(q, p)\hat{\Omega}(q', p')\hat{\Omega}(q'', p'')\} &= 2^3 \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left\{-\frac{2i}{\hbar}\xi q\right\} \exp\left\{-\frac{2i}{\hbar}q'(p - \xi - p')\right\}, \\
 &\times \exp\left\{-\frac{2i}{\hbar}q''(-p'' + 2p' - p + \xi)\right\} \delta(2p'' - 2p' + 2\xi) d\xi, \\
 &= 4 \exp\left\{-\frac{2i}{\hbar}q'(p - p')\right\} \exp\left\{-\frac{2i}{\hbar}q''(2p' - p'' - p)\right\} \\
 &\times \exp\left\{\frac{2i}{\hbar}(p'' - p')(q' - q'' - q)\right\}, \\
 &= 4 \exp\left\{\frac{2i}{\hbar}[(q - q')(p - p'') - (q - q'')(p - p')]\right\}. \quad (\text{B.37})
 \end{aligned}$$

□

**Teorema 9.** Si se asume que dos funciones en el espacio fase  $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  se puede expandir  $f_1(p + p', q + q')$  y  $f_1(p + p'', q + q'')$  en serie de Taylor al rededor del punto el punto  $(q, p) \in \mathbb{R}^2$ , el producto-\* de Moyal estará dado de la siguiente forma

$$(f_1 * f_2)(q, p) = f_1(q, p) \exp\left\{\frac{i\hbar}{2} \left( \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \right)\right\} f_2(q, p). \quad (\text{B.38})$$

*Demostración.* Considerando ahora que  $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ , entonces se pueden desarrollar en serie de Taylor al rededor del punto  $(q, p) \in \mathbb{R}^2$  de la forma

$$\begin{aligned}
 f_1(p + p', q + q') &= \sum_{k, l=0}^{\infty} \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^k}{\partial p^k} \frac{\partial^l}{\partial q^l} f_1(q, p) p'^k q'^l \\
 &= \sum_{k, l=0}^{\infty} \frac{1}{k!l!} f_1(q, p) \overleftarrow{\frac{\partial^k}{\partial p^k}} \overleftarrow{\frac{\partial^l}{\partial q^l}} p'^k q'^l, \quad (\text{B.39})
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 f_2(p + p'', q + q'') &= \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^m}{\partial p^m} \frac{\partial^n}{\partial q^n} f_2(q, p) p''^m q''^n \\
 &= \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} p''^m q''^n \overrightarrow{\frac{\partial^m}{\partial p^m}} \overrightarrow{\frac{\partial^n}{\partial q^n}} f_2(q, p). \quad (\text{B.40})
 \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la relación (1.36), se tiene

$$\begin{aligned}
 W^{-1}(\hat{f}_1 \hat{f}_2) &= \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \left[ \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{1}{k!l!} f_1(q,p) \overleftarrow{\partial}^k \overleftarrow{\partial}^l p'^k q'^l \right] \exp \left\{ \frac{2i}{\hbar} (q'p'' - q''p') \right\} \\
 &\times \left[ \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} p''^m q''^n \overrightarrow{\partial}^m \overrightarrow{\partial}^n f_2(q,p) \right] \frac{dp' dq' dp'' dq''}{(\pi \hbar)^2}. \quad (\text{B.41})
 \end{aligned}$$

Para simplificar el resultado, se emplea la relación de Cauchy para series convergentes que establece lo siguiente

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{n-k}. \quad (\text{B.42})$$

Aplicando la relación de Cauchy dado por (B.42) en (B.41), se obtiene

$$\begin{aligned}
 W^{-1}(\hat{f}_1 \hat{f}_2) &= \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \left[ \sum_{k,l=0}^{\infty} \sum_{m,n=0}^{k,l} \frac{f_1(q,p)}{(k-m)!(l-n)!} \overleftarrow{\partial}^{k-m} \overleftarrow{\partial}^{l-n} p'^{k-m} q'^{l-n} \right] \\
 &\times \exp \left\{ \frac{2i}{\hbar} (q'p'' - q''p') \right\} \left[ \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} p''^m q''^n \overrightarrow{\partial}^m \overrightarrow{\partial}^n f_2(q,p) \right] \frac{dp' dq' dp'' dq''}{(\pi \hbar)^2}. \quad (\text{B.43})
 \end{aligned}$$

Definiendo la función  $\Theta(k, l, m, n)$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \Theta(k, l, m, n) &:= \frac{1}{(k-l)!(l-n)!n!m!} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} p'^{k-m} q'^{l-n} p''^m q''^n \exp \left\{ \frac{2i}{\hbar} (q'p'' - q''p') \right\} \\
 &\times \frac{dp' dq' dp'' dq''}{(\pi \hbar)^2}, \quad (\text{B.44})
 \end{aligned}$$

substituyendo la función (B.44) en la expresión (B.43), se tiene

$$W^{-1}(\hat{f}_1 \hat{f}_2) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \sum_{m,n=0}^{k,l} f_1(q,p) \overleftarrow{\partial}^{k-m} \overleftarrow{\partial}^{l-n} \Theta(k, l, m, n) \overrightarrow{\partial}^m \overrightarrow{\partial}^n f_2(q,p). \quad (\text{B.45})$$

Para calcular la integral que aparece en la ecuación (B.44), se utilizan las siguientes relaciones

$$\frac{\partial^m}{\partial q''^m} \exp \left\{ \frac{2i}{\hbar} (q'p'' - q''p') \right\} = \left( \frac{2i}{\hbar} \right)^m p''^m \left\{ \frac{2i}{\hbar} (q'p'' - q''p') \right\}, \quad (\text{B.46})$$

y

$$\frac{\partial^{k-m}}{\partial q''^{k-m}} \exp \left\{ \frac{2i}{\hbar} (q'p'' - q''p') \right\} = \left( -\frac{2i}{\hbar} \right)^{k-m} p''^{k-m} \left\{ \frac{2i}{\hbar} (q'p'' - q''p') \right\}. \quad (\text{B.47})$$



Sustituyendo dentro de la integral obtenemos

$$\begin{aligned}\Theta(k, l, m, n) &= \frac{1}{(k-m)!(l-n)!n!m!} \left(\frac{\hbar}{2i}\right)^m \left(-\frac{\hbar}{2i}\right)^{k-m} \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} q'^{l-n} q''^m \frac{\partial^{k-m}}{\partial q'^{k-m}} \frac{\partial^m}{\partial q''^m} \exp\left\{\frac{2i}{\hbar}(q'p'' - q''p')\right\} \frac{dp'dq'dp''dq''}{(\pi\hbar)^2}.\end{aligned}\quad (\text{B.48})$$

Realizando las integrales sobre las variables  $p'$ ,  $p''$  y usando la expresión de la delta de Dirac (B.15) se tiene

$$\begin{aligned}\Theta(k, l, m, n) &= \frac{1}{(k-m)!(l-n)!n!m!} \left(\frac{\hbar}{2i}\right)^m \left(-\frac{\hbar}{2i}\right)^{k-m} \int_{\mathbb{R}^2} q'^{l-n} q''^m \frac{d^{k-m}}{dq'^{k-m}} \frac{d^m}{dq''^m} \\ &\times \delta\left(\frac{2q'}{\hbar}\right) \delta\left(\frac{2q''}{\hbar}\right) \frac{dq'dq''}{(\pi\hbar)^2} \\ &= \frac{1}{(k-m)!(l-n)!n!m!} \left(\frac{\hbar}{2i}\right)^m \left(-\frac{\hbar}{2i}\right)^{k-m} \int_{\mathbb{R}^2} q'^{l-n} q''^m \frac{d^{k-m}}{dq'^{k-m}} \frac{d^m}{dq''^m} \\ &\times \delta(q') \delta(q'') dq'dq''.\end{aligned}\quad (\text{B.49})$$

Ahora, de expresión para las derivadas de la delta de Dirac

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta^{(n)}(x-a)dx = (-1)^n f^{(n)}(a), \quad (\text{B.50})$$

se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}} q'^{l-n} \frac{d^m}{dq'^m} \delta(q') dq' = (-1)^m (l-n)! \delta_{l-n}^m, \quad (\text{B.51})$$

y

$$\int_{\mathbb{R}} q''^n \frac{d^{k-m}}{dq''^{k-m}} \delta(q'') dq'' = (-1)^{k-m} (n)! \delta_{k-m}^n. \quad (\text{B.52})$$

Finalmente sustituyendo todos los valores obtenidos se encuentra que

$$\Theta(k, l, m, n) = \frac{1}{k!} \binom{k}{m} \left(-\frac{\hbar}{2i}\right)^m \left(\frac{\hbar}{2i}\right)^{k-m} \delta_{l-n}^m \delta_{k-m}^n. \quad (\text{B.53})$$

Empleando así el resultado anterior (B.53) en la ecuación (B.45) se obtiene el siguiente

$$\begin{aligned}
W^{-1}(\hat{f}_1 \hat{f}_2) &= f_1(q, p) \left[ \sum_{k,l=0}^{\infty} \sum_{m,n=0}^{k,l} \frac{1}{k!} \binom{k}{m} \left(-\frac{\hbar}{2i}\right)^m \left(\frac{\hbar}{2i}\right)^{k-m} \frac{\overleftarrow{\partial}^{k-m} \overleftarrow{\partial}^{l-n} \overrightarrow{\partial}^m \overrightarrow{\partial}^n}{\partial p^{k-m} \partial q^{l-n} \partial p^m \partial q^n} \delta_{l-n}^m \delta_{k-m}^n \right] f_2(q, p) \\
&= f_1(q, p) \left[ \sum_{k,n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{1}{k!} \binom{k}{m} \left(-\frac{\hbar}{2i}\right)^m \left(\frac{\hbar}{2i}\right)^{k-m} \frac{\overleftarrow{\partial}^{k-m} \overleftarrow{\partial}^m \overrightarrow{\partial}^m \overrightarrow{\partial}^n}{\partial p^{k-m} \partial q^m \partial p^m \partial q^n} \delta_{k-m}^n \right] f_2(q, p) \\
&= f_1(q, p) \left[ \sum_k \sum_{m=0}^k \frac{1}{k!} \binom{k}{m} \left(\frac{i\hbar}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p}\right)^m \left(-\frac{i\hbar}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}\right)^{k-m} \right] f_2(q, p) \\
&= f_1(q, p) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \frac{i\hbar}{2} \left( \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q} \right) \right]^k \right\} f_2(q, p) \\
&= f_1(q, p) \exp \left\{ \frac{i\hbar}{2} \left( \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q} \right) \right\} f_2(q, p). \tag{B.54}
\end{aligned}$$

□

# Bibliografía

- [1] I. Newton, *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. 1687.
- [2] A. Einstein, “On the general theory of relativity,” *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, vol. 1915, pp. 778–786, 1915. [Addendum: *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*1915,799 (1915)].
- [3] A. Einstein, “Cosmological considerations in the general theory of relativity,” *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, vol. 1917, pp. 142–152, 1917.
- [4] G. Lemaitre, “The expanding universe,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. 29, pp. 641–680, 1997. [Annales Soc. Sci. Brux. Ser. I Sci. Math. Astron. Phys.A53,51 (1933)].
- [5] A. Friedmann, “On the possibility of a world with constant negative curvature of space,” *Z. Phys.*, vol. 21, pp. 326–332, 1924. [Gen. Rel. Grav.31,2001 (1999)].
- [6] P. A. M. Dirac, *The principles of quantum mechanics*. Clarendon press, 1958.
- [7] J. von Neumann, *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Investigations in physics, Princeton University Press, 1955.
- [8] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer, “Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures,” *Annals Phys.*, vol. 111, p. 61, 1978.
- [9] L. Landau and R. Peierls, “Erweiterung des Unbestimmtheitsprinzips für die Relativistische Quantentheorie,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 69, pp. 56–69, 1931.
- [10] N. Bohr and L. Rosenfeld, “Zur Frage der Messbarkeit der elektromagnetischen Feldgrößen,” *Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs, Matematiks-fysike Meddeleser.*, vol. 12, no. 65, 1933.
- [11] M. Bronstein, “Republication of: Quantum theory of weak gravitational fields,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 44, no. 1, pp. 267–283, 2012.

- 
- [12] R. L. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, “The dynamics of general relativity,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. 40, pp. 1997–2027, 2008.
- [13] J. F. Plebański, “On the separation of einsteinian substructures,” *J. Math. Phys.*, vol. 18, pp. 2511–2520, 1977.
- [14] K. Krasnov, “Plebański formulation of general relativity: A practical introduction,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 43, no. 1, pp. 1–15, 2011.
- [15] A. Sen, “Gravity as a spin system,” *Phys. Lett.*, vol. B119, pp. 89–91, 1982.
- [16] A. Ashtekar, “New variables for classical and quantum gravity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 57, pp. 2244–2247, Nov 1986.
- [17] R. Capovilla, T. Jacobson, J. Dell, and L. J. Mason, “Selfdual two forms and gravity,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 8, pp. 41–57, 1991.
- [18] J. Samuel, “A lagrangian basis for Ashtekar’s reformulation of canonical gravity,” *Pramana*, vol. 28, no. 4, pp. L429–L432, 1987.
- [19] T. Jacobson and L. Smolin, “Covariant action for Ashtekar’s form of canonical gravity,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 5, no. 4, p. 583, 1988.
- [20] J. F. Barbero G., “Real Ashtekar variables for Lorentzian signature space-times,” *Phys. Rev. D*, vol. 51, pp. 5507–5510, May 1995.
- [21] G. Immirzi, “Real and complex connections for canonical gravity,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 14, pp. L177–L181, 1997.
- [22] S. Holst, “Barbero’s hamiltonian derived from a generalized Hilbert-Palatini action,” *Phys. Rev. D*, vol. 53, pp. 5966–5969, May 1996.
- [23] E. P. Tryon, “Is the universe a vacuum fluctuation,” *Nature*, vol. 246, p. 396, 1973.
- [24] B. V. Fedosov, “A simple geometrical construction of deformation quantization,” *J. Diff. Geom.*, vol. 40, pp. 213–238, 1994.
- [25] M. Kontsevich, “Deformation quantization of Poisson manifolds. I,” *Lett. Math. Phys.*, vol. 66, pp. 157–216, 2003.
- [26] V. I. Arnol’d, *Mathematical methods of classical mechanics*. Graduate texts in mathematics, Springer, 1989.
- [27] G. F. Torres del Castillo and G. Mendoza Torres, “Symplectic structures and hamiltonians of a mechanical system,” *Rev. Mex. Fis.*, vol. 49, pp. 445–449, 2003.
- [28] A. Hirshfeld and P. Henselder, “Deformation quantization in the teaching of quantum mechanics,” *Am. J. Phys.*, vol. 70, pp. 537–547, 2002.

- 
- [29] M. Montesinos and G. F. Torres del Castillo, “Symplectic quantization, inequivalent quantum theories, and Heisenberg’s principle of uncertainty,” *Phys.Rev.*, vol. A70, p. 032104, 2004.
- [30] J. F. Plebański, M. Przanowski, and F. J. Turrubiates, “Weyl-Underhill-Emmrich Quantization and the Stratonovich-Weyl quantizer,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 33, no. 4, p. 795, 2000.
- [31] R. M. Wald, *General relativity*. Chicago, USA: University of Chicago Press, 1984.
- [32] E. Poisson, *A relativist’s toolkit: The mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge University Press, 2004.
- [33] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. Addison Wesley, 2004.
- [34] J. Baez and J. P. Muniain, *Gauge fields, knots and gravity*. World Scientific Pub Co Inc, 1994.
- [35] G. F. Torres del Castillo, *Differentiable manifolds: A theoretical physics approach*. Birkhäuser Boston, 2011.
- [36] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*. Taylor & Francis, 2003.
- [37] P. A. M. Dirac, “Generalized hamiltonian dynamics,” *Can. J. Math.*, vol. 2, pp. 129–148, 1950.
- [38] P. A. M. Dirac, “The theory of gravitation in hamiltonian form,” *Proc. Roy. Soc. Lond.*, vol. A246, pp. 333–343, 1958.
- [39] E.ourgoulhon, *3+1 Formalism in general relativity: Bases of numerical relativity*. Lecture Notes in Physics, Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [40] M. Bojowald, *Canonical gravity and applications cosmology, black holes, and quantum gravity*. Cambridge University Press, 2010.
- [41] B. S. DeWitt, “Quantum theory of gravity. 1. The canonical theory,” *Phys. Rev.*, vol. 160, pp. 1113–1148, 1967.
- [42] J. A. Wheeler, “Superspace and the nature of quantum geometrodynamics,” pp 242–307 of *Battelle Rencontres. DeWitt, Cecile M. (ed.). New York W. A. Benjamin, Inc. (1968).*, Jan 1968.
- [43] G. Lemaitre, “The Primaeval atom hypothesis and the problem of the clusters of galaxies,” in *Proceedings, 11ème Conseil de Physique de l’Institut International de Physique Solvay: La structure et l’évolution de l’univers : rapports et discussions: Brussels, Belgium, June 9-13, 1958*, pp. 1–32, 1958.

- 
- [44] D. Atkatz, “Quantum cosmology for pedestrians,” *Am. J. Phys.*, vol. 62, pp. 619–627, 1994.
- [45] C. W. Misner, “Quantum cosmology I,” *Phys. Rev.*, vol. 186, pp. 1319–1327, Oct 1969.
- [46] A. D. Linde, “Quantum creation of the inflationary universe,” *Lett. Nuovo Cim.*, vol. 39, pp. 401–405, 1984.
- [47] A. Vilenkin, “Quantum origin of the universe,” *Nucl. Phys.*, vol. B252, pp. 141–152, 1985.
- [48] J. B. Hartle and S. W. Hawking, “Wave function of the universe,” *Phys. Rev.*, vol. D28, pp. 2960–2975, 1983.
- [49] R. S. Palais, “The principle of symmetric criticality,” *Comm. Math. Phys.*, vol. 69, no. 1, pp. 19–30, 1979.
- [50] C. Kiefer, *Quantum gravity*, vol. 155 of *International series of monographs on physics*. Oxford, UK: Oxford Univ. Pr., 2012.
- [51] S. Hassani, *Mathematical physics: A modern introduction to its foundations*. Springer, 1999.
- [52] R. Gambini and J. Pullin, *A first course in loop quantum gravity*. Oxford University Press, 2013.
- [53] B. Podolsky, “Quantum-mechanically correct form of hamiltonian function for conservative systems,” *Phys. Rev.*, vol. 32, pp. 812–816, Nov 1928.
- [54] C. W. Misner, “Minisuperspace,” in *Book, In Magic Without Magic: John Archibald Wheeler*, pp. 441–73, 1972.
- [55] J. J. Halliwell, “Derivation of the Wheeler-DeWitt equation from a path integral for minisuperspace models,” *Phys. Rev. D*, vol. 38, pp. 2468–2481, Oct 1988.