



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**Fluctuaciones Cuánticas
de Defectos Topológicos
Cósmicos**

Tesis para obtener grado de Licenciado en
Física y Matemáticas

PRESENTA

Daniel Trejo Ruiz

DIRECTORES DE TESIS

Dr. Rubén Cordero Elizalde
Dr. Juan Efraín Rojas Marcial

Ciudad de México, junio de 2021



“Guy goes to a doctor.

“Doctor, I am depressed.”

Doctor looks at him and says: “The treatment is simple! Tony Hawk is in town. Go watch some sick skateboard tricks. That will cheer you up.”

The man bursts into tears: “But doctor, I am Tony Hawk””

Real Soviet Bear @MDKII

Resumen

Los defectos topológicos cósmicos pueden surgir en transiciones de fase en el universo primigenio. Encontramos la evolución de las cuerdas cósmicas y las burbujas de vacío en un espacio de de Sitter que pueden formarse o “nuclear” durante la época inflacionaria. Utilizando la descripción lagrangiana del tipo Lovelock calculamos las perturbaciones de los defectos topológicos. Estudiamos las fluctuaciones cuánticas de los defectos por medio de las funciones de dos puntos o funciones de Green.

Agradecimientos

Gracias a mi familia, asesores y amigos.

CARTA CESIÓN DE DERECHOS AL IPN

Ciudad de México a 24 de junio de 2021

El que suscribe:

C. Daniel Trejo Ruiz con número de boleta 2011330242

Egresado del Programa

Académico: Licenciatura en Física y Matemáticas

que se imparte en la Escuela Superior de Física y Matemáticas, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de tesis titulado:

Fluctuaciones cuánticas de defectos topológicos cósmicos El

cual fue desarrollado bajo la dirección

de: Dr. Rubén Cordero Elizalde y Dr. Juan Efraín Rojas

Por lo anterior es mi interés manifestar que **SI** cedo los derechos del trabajo antes mencionado, al Instituto Politécnico Nacional, ello con el propósito de que lo ponga a disposición de la comunidad politécnica que requiera consultarlo con fines académicos y de investigación. Es importante aclarar que los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Dicho permiso puede ser solicitado a la siguiente dirección de correo electrónico: danieltrejocv@gmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Atentamente

Daniel Trejo Ruiz *Daniel Trejo Ruiz*
Nombre y firma del alumno

Contenido

Resumen	ii
Agradecimientos	iii
Lista de Figuras	vi
1 Introducción	1
2 Geometría	5
2.1 Ecuaciones de Gauss Weingarten	8
2.2 Condiciones de Integrabilidad	13
2.3 Variación	14
3 Branas	16
3.1 Motivación	16
3.2 Acción de Nambu-Goto	17
3.3 Defectos Topológicos	19
3.3.1 Grupos de Homotopía.	19
3.3.2 Cuerdas Cósmicas	22
3.3.3 Dominios de Pared	25
3.3.4 Burbujas del Vacío	27
3.3.5 Monopolos	28
3.4 Variaciones y Ecuaciones de Movimiento	29
3.5 Acciones Geométricas	31
3.6 Acción de Brana Tipo Lovelock	32
3.6.1 Tensor tipo Lovelock	36
3.7 Brana Esférica	37
4 Perturbaciones de las Branas	41
4.0.1 Perturbaciones de las Branas Tipo Lovelock	43
4.1 Fluctuaciones Cuánticas	48
4.1.1 QFT en Breve	48
4.1.2 Fluctuaciones Cuánticas de Defectos Topológicos	50
5 Conclusiones	62

A Ecuaciones Gauss Weingarten	64
B Función de Green	67
C Condiciones de Integrabilidad	71
Referencias	77

Lista de Figuras

3.1	(a) triángulo con cara (b) bordes del triángulo	20
3.2	0-,1-,2-,y 3-simplejos	20
3.3	(a)Pozo doble con centro en $\phi = 0$ y mínimos en $\pm\eta$. (b)Forma de la solución mejor conocida como solitón.	21
3.4	Sobre la variedad M_1 las funciones α y β son homotópicas, mientras que la variedad M_2 α' y β' no lo son. La variedad M_2 pertenece al grupo de homotopía $\pi_2(M)$	25
3.5	Granos microcristalinos en una pieza de $Nd_2Fe_{14}B$. Los dominios magnéticos son las manchas grises claras y oscuras en cada grano.	26
3.6	Líneas de campo sobre un monopolo; a) b)	29
3.7	35
4.1	Red de resortes donde la perturbación de un resorte indica una partícula que “nace” en un lado y “muere” en otro	49

A la memoria del Dr. Alfonso Martínez Valdez

Capítulo 1

Introducción

Cuando el universo recién comenzaba la materia aún no tomaba la forma que conocemos hoy en día, ni siquiera el tiempo y espacio habían decidido una relación estable y todo se encontraba en proceso de expansión mientras se enfriaba. Como si fueran los estados de equilibrio de la materia que la termodinámica se encarga de estudiar, se tiene de manera anloga que la materia también encontró el equilibrio en ciertos grupos de simetría. Conforme el universo empieza a disminuir su temperatura también se pierde simetría y con esto el primer campo que se separa del resto es el gravitacional. Se rompe la simetría G_{10} y nos despedimos de la gran unificación [1]. Siguiendo el ejemplo, las fuerzas restantes rompen simetría conforme la temperatura continúa en descenso. Por orden primero se separa la gravedad, luego la fuerza fuerte o campos de hadrones que confinan a los quarks en protones y neutrones, a continuación la fuerza débil responsable la fisión nuclear y por último el campo electromagnético. Cada uno de estos pasos donde la naturaleza encuentra nuevos estados de equilibrio se obtienen por el método llamado de rompimiento espontáneo de la simetría. El método tiene consecuencias y desde el punto de vista topológico se producen defectos topológicos [2]. Sin alejarnos mucho de nuestra realidad un defecto topológico lo podemos ver en un vaso con agua carbonatada, cuando se producen o nuclean burbujas de gas dentro del medio líquido. El análogo cosmológico se llama nucleación de burbujas de vacío y sumado a este se encuentran los dominios de pared, cuerdas cósmicas y monopolos como principales defectos topológicos cosmológicos que surgen a partir del rompimiento espontáneo de la simetría.

A lo largo del trabajo necesitaremos introducir conceptos tales como las n branas y la generalización del tensor de Einstein entre otros. Pero como breve introducción a estos conceptos o herramientas podemos elaborar por analogía e intuición ejemplos clave en la comprensión de dichos conceptos. Tomemos como ejemplo una n -brana, donde n es el número de dimensiones espaciales que tiene esta brana, y supongamos que $n = 2$; a

esta 2-brana se le conoce como membrana y su número de dimensiones espaciales es dos. Esta membrana es equivalente a construir un volumen en un diagrama de Minkowski. Claro que estas superficies pueden deformarse de varias maneras y nuestro trabajo es encontrar la dinámica de las superficies mientras evolucionan en el tiempo.

Los físicos Kibble y Turok publicaron a mediados de 1970 [2] una serie de artículos donde se discute una de las posibles consecuencias del rompimiento espontáneo de las simetrías en la topología de objetos continuos. Estos objetos los podemos describir por medio del concepto de branas n dimensionales (o n -branas, donde n es el número de dimensiones espaciales) que le otorgan el aspecto geométrico-diferencial al resto del trabajo. El nombre que reciben estos objetos son por la analogía con las membranas como veremos en el capítulo de branas.

Los distintos defectos topológicos se pueden distinguir por la dimensión de la n -brana, en el caso de cuerdas cósmicas $n = 1$. También se mencionó que haremos uso de una generalización de la gravedad de Einstein o las ecuaciones de Einstein para espacios de mayor dimensión. Las ecuaciones de Einstein están en dimensión $D + 1$ donde $D = 3$ corresponde al mundo que percibimos de manera intuitiva. Estas ecuaciones describen la relación de la deformación del espacio-tiempo con la gravedad. La acción de Nambu-Goto describe la dinámica de las p -branas en la aproximación a orden más bajo geométrico. Fue David Lovelock quien, a principios de los 70's, generalizó la acción de la gravedad en una dimensión N arbitraria, $N \geq 4$ [3]. Tomando esta idea, el lagrangiano que usaremos en la acción resulta una combinación de polinómios en la curvatura extrínseca (K_{ab}) que no son más que relaciones entre el espacio-tiempo en el que se encuentran y las deformaciones de estas n -branas conservando que las ecuaciones de movimiento siguen siendo de segundo orden.

Las fluctuaciones cuánticas son perturbaciones que pueden tener consecuencias drásticas en la evolución del sistema y su actitud probabilística nos permite saber la frecuencia con la que encontraremos ciertos objetos en el cielo cuando se trata de cosmología. Un ejemplo es la formación de agujeros negros debido a fluctuaciones cuánticas en la evolución de una burbuja de vacío que de lo contrario no tendría consecuencia alguna más que desaparecer. Para la evolución de ciertos objetos como una red de cuerdas cósmicas las fluctuaciones cuánticas pueden provocar un crecimiento rápido que estaría de acuerdo con un universo inflacionario, mientras que en otros objetos como burbujas de vacío en expansión, las fluctuaciones cuánticas pueden determinar si la esfericidad se llega a perturbar de manera severa.

Una vez que se tiene un fuerte entendimiento del fenómeno de defectos topológicos podemos incursionar en su descripción a nivel cuántico. La relevancia de un tratamiento

cuántico surge cuando queremos introducir la teoría en los principios del universo temprano, cuando los cambios a nivel cuántico logran crear efectos que, al expandirse el universo, se convierten en objetos medibles. Uno de los fenómenos cuánticos que nos interesan son las perturbaciones cuánticas mientras se forman los defectos topológicos.

Introducimos el espacio de de Sitter como necesidad para explicar eventos en el universo temprano, mientras su aceleración era exponencial y, donde suponemos que el fenómeno de rompimiento espontáneo de simetrías ocurrió [2]. Este espacio-tiempo ampliamente estudiado cuenta con ciertas ventajas al momento de calcular situaciones con simetría. Notaremos que las ecuaciones de movimiento que encontramos para las branas embebidas en este espacio son similares al caso en que estas branas se encuentran en espacio de Minkowski.

En el capítulo dos se desarrolla la geometría diferencial referente a objetos extendidos en diferentes marcos de referencia así como las relaciones entre las variedades que relacionan a las branas con el espacio que habitan y los tensores que describen las deformaciones localmente.

El tratamiento de membranas relativistas se encuentra en el capítulo tres donde la motivación son los defectos topológicos que se han estudiado desde que se propusieron en Ref.[2] como posibles fenómenos que se crearon en el universo temprano. Los principales defectos topológicos que se estudian son los dominios de pared, burbujas de vacío, cuerdas cósmicas y monopolos. Para estudiar la dinámica de estos sistemas utilizamos la acción de Dirac-Nambu-Goto (DNG) que resulta ser un caso particular de gravedad de una generalización propuesta por Lovelock [3] el cual también se analiza al final del mismo capítulo.

Las membranas relativistas han sido reciente objeto de estudio en las llamadas branas tipo Lovelock que mantienen una relación geométrica con la gravedad de Lovelock [4]. Para conocer el destino de algunos de estos defectos topológicos utilizamos, al inicio del capítulo cuatro, los principios de la física de perturbaciones sobre la acción de las branas y sus ecuaciones de movimiento (eom, por sus siglas en inglés). Sobre los hombros de Garriga-Vilenkin y su artículo "*Quantum fluctuations on domain walls, strings and vacuum bubbles*" [5] construimos las fluctuaciones cuánticas de los sistemas descritos clásicamente en el capítulo de branas relativistas. Además tomamos en cuenta perturbaciones clásicas y también cuánticas en donde surge la necesidad de establecer la función de dos puntos o función de Green para tratar el estado de vacío de estos sistemas. En este mismo capítulo se desarrolla la teoría de fluctuaciones cuánticas para los distintos defectos topológicos que se tratan clásicamente. Para el tratamiento cuántico también se incluye una pequeña introducción a la teoría cuántica de campos.

El capítulo cinco termina el trabajo exponiendo las conclusiones así como proponiendo nuevas áreas de investigación que complementan el estudio de branas y sus defectos topológicos como parte fundamental en el desarrollo de universo temprano.

El desarrollo de ciertas operaciones pertinentes en la elaboración de este trabajo se encuentran en los apéndices A-C.

Capítulo 2

Geometría

La geometría diferencial que se utiliza en esta tesis es capaz de describir objetos extendidos que se encuentran inmersos en espacios de más dimensiones y formar vectores que describen el comportamiento físico de dichos objetos. Describimos una hoja de mundo m (una línea de mundo en el contexto de relatividad especial con más variables espaciales) de dimensión \mathcal{D} por un conjunto de coordenadas que, bajo una parametrización, nos permiten establecer la posición espacio temporal de un punto p sobre esta hoja de mundo. Esta hoja de mundo nos permite describir branas como superficies embebidas en espacio-tiempo de fondo fijo. La parametrización que se menciona lleva en la siguiente ecuación:

$$x^\mu = X^\mu(\xi^a) \tag{2.1}$$

$\mu = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ $a = 0, 1, 2, \dots, D - 1$ y se encuentra inmersa en un espacio-tiempo N dimensional \mathcal{M} dotado de la métrica $g_{\mu\nu}$. La ecuación anterior implica que para cada coordenada x_μ existe una parametrización X^μ que es un conjunto de funciones que dependen de la variable ξ^a . Estas variables describen la parte superficial de la hoja de mundo y es por eso que tenemos D de ellas. Esta parametrización nos asegura que obtendremos N nuevas coordenadas las cuales pueden describir al espacio donde se encuentra la hoja de mundo. Dicho de otra manera; los índices griegos toman en cuenta a las coordenadas del espacio-tiempo mientras que los índices latinos se asocian con la hoja de mundo D dimensional. También nombramos a nuestro espacio-tiempo \mathcal{M} con el fin de referirnos a ella con mayor facilidad y evitar confusión con la hoja de mundo. Como se menciona anteriormente \mathcal{M} se encuentra dotado de una métrica, esto quiere decir que tenemos una manera consistente de medir el espacio tiempo que hay entre dos puntos del espacio-tiempo N -dimensional con la signatura $(-, +, \dots, +)$. Al tener una métrica podemos construir objetos en el espacio tiempo que nos serán de gran utilidad. Uno de ellos son los vectores tangentes. Sabemos que la hoja de mundo se encuentra

inmersa en un espacio-tiempo, es claro que la hoja de mundo sólo tiene D parámetros que la describen por completo mientras que \mathcal{M} tiene N donde la inmersión requiere que $D \leq N$. Una manera heurística de ver la hoja de mundo es como una sábana finita que evoluciona en la dirección del tiempo. Pensando en la sábana, podemos ver que si no es totalmente plana, habrá deformaciones que debemos poder describir. Para ello necesitamos tener en cuenta cómo está distribuida la sábana a lo largo de la superficie y también queremos tener información de la parte más alta así como de la más baja y sus partes intermedias. Al igual que lo haríamos para una superficie bidimensional en un espacio tridimensional podemos obtener los vectores tangentes a la hoja de mundo si derivamos respecto a las coordenadas del espacio en el que está contenido. Para ello podemos usar regla de la cadena con lo cual obtenemos los D vectores:

$$e_a = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (2.2)$$

o bien:

$$e_a := X^\mu_{,a} \partial_\mu. \quad (2.3)$$

Los vectores e_a nos permiten describir un objeto continuo de dimensión D que se encuentra embebido en \mathcal{M} . A este objeto lo introducimos en esta sección como una hypersuperficie m que más adelante, en el capítulo de brana, le daremos una interpretación física. Estos mismos vectores forman una base del espacio tangente a m en cada punto de m . Es decir, cualquier vector que viva sobre el espacio tangente a m se puede escribir como combinación lineal de los vectores e_a . Con estos vectores y la métrica de \mathcal{M} podemos encontrar la métrica inducida sobre la hoja de mundo como el producto interno de dos vectores tangentes bajo la métrica del espacio de fondo i.e.

$$\gamma_{ab} = X^\mu_{,a} X^\nu_{,b} g_{\mu\nu} = g(e_a, e_b). \quad (2.4)$$

Esta métrica hereda la signatura $(-, +, \dots, +)$ y nos proporciona una relación de distancia entre los puntos de m . Si queremos conocer cómo se comporta m visto desde \mathcal{M} necesitamos la geometría extrínseca, en correspondencia con la analogía con un ser bidimensional que vive en un plano, la geometría extrínseca de la hoja de mundo demanda que definamos un campo vectorial normal unitario. Sea n^i la i -ésima normal unitaria a m , $i = 1, 2, \dots, N - D, D \neq 1$ definida por

$$g(n^i, n^j) = \delta^{ij}, \quad g(e_a, n^i) = 0. \quad (2.5)$$

Esta definición garantiza la ortonormalidad con los vectores tangentes y la delta de Kronecker especifica la unitariedad en el sentido de que los vectores normales y tangentes (n^i y e_a) tienen longitud uno. La primer relación nos indica que el producto interno

entre dos vectores normales unitarios bajo la métrica del espacio-tiempo de fondo es uno si son el mismo vector y cero si son distintos, mientras que la segunda igualdad define la ortonormalidad entre los vectores de la base tangente y los de la base normal cuando están en el espacio tiempo de fondo \mathcal{M} . Estos vectores, a pesar de que los formamos pensando en m , viven en \mathcal{M} y como tal su producto interno está referido a la métrica $g_{\mu\nu}$. Además es importante resaltar que el campo normal unitario está definido hasta rotaciones $O(N - D)$ y un cambio de signo, si sólo se consideran las dos ecuaciones anteriores. Notemos que la cantidad de vectores con índice i es el complemento de los vectores de la base tangencial con los vectores que definen a \mathcal{M} . En la notación tensorial es común el uso de subíndices (abajo) y superíndices (arriba); estos ayudan a saber si se trata de un tensor covariante o uno contravariante los cuales cumplen ciertas reglas de transformación. A la operación de transformar un vector covariante en uno contravariante se le conoce como "subir" el índice y al proceso inverso se le llama "bajar" el índice. Los índices de los vectores normales se suben y bajan con δ^{ij} y δ_{ij} , respectivamente, mientras que los índices de los vectores tangentes lo hacen con γ^{ab} y γ_{ab} , respectivamente. De manera explícita tenemos lo siguiente:

$$\gamma^{ab}e_a = e^b, \quad \delta^{ij}n_i = n^j. \quad (2.6)$$

Ahora que tenemos estos dos conjuntos de vectores que cubren todo el espacio-tiempo de fondo podemos ver que $\{e_a, n^i\}$ constituyen una base de \mathcal{M} . Esta es la base que utilizaremos para la descripción de m a lo largo de la tesis ya que nos permite desarrollar la geometría intrínseca y extrínseca de la hoja de mundo en el espacio de fondo que se encuentra inmersa, que es exactamente lo que necesitamos.

Como nos interesan los vectores que se encuentran sobre m definimos la proyección de la derivada covariante D_μ de los vectores espacio-temporales sobre la hoja de mundo como:

$$D_a := e^\mu{}_a D_\mu, \quad (2.7)$$

donde D_μ es la derivada covariante, sin torsión, compatible con la métrica $g_{\mu\nu}$. Lo que este proceso intenta hacer es tomar la parte de cualquier vector en el espacio-tiempo de fondo que tiene componentes en la hoja de mundo. Ya que un cambio en \mathcal{M} se verá reflejado en m pero solo en sus primeras D componentes. Estas primeras D componentes son las que constituyen a m y las de interés.

2.1 Ecuaciones de Gauss Weingarten

Analizando la definición de las proyecciones vemos que la derivada covariante (sin torsión) nos permite obtener la componente tangencial de la derivada en el espacio de fondo. La derivada covariante es compatible con la métrica de \mathcal{M} ya que está tomando vectores en el espacio tiempo de fondo. En el caso de la base, tenemos los gradientes de la hoja de mundo de los vectores base $\{e_a, n^i\}$. Estos son $D_a e_b$ y $D_a n^i$, los cuales se pueden descomponer respecto a la base;

$$D_a e_b = g(D_a e_b, e_c) e^c + g(D_a e_b, n^i) n_i, \quad (2.8)$$

$$D_a n^i = g(D_a n^i, e_b) e^b + g(D_a n^i, n^j) n_j. \quad (2.9)$$

Desarrollando los productos internos y tomando las definiciones de algunas formas fundamentales, podemos expresar los gradientes de m como:

$$D_a e_b = \gamma_{ab}{}^c e_c - K_{ab}{}^i n_i, \quad (2.10)$$

$$D_a n^i = K_{ab}{}^i e^b + w_a{}^{ij} n_j. \quad (2.11)$$

Las relaciones anteriores se pueden entender mejor si desarrollamos el álgebra. La ecuación (2.8) toma un vector tangencial, lo deriva covariantemente y obtiene las componentes tangenciales.

$$D_a e_b = e_a{}^\mu D_\mu e_b = e_a{}^\mu \left[\frac{\partial e_b}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu b}{}^c e_c \right], \quad (2.12)$$

donde $\Gamma_{\mu b}{}^c$ son los símbolos de Christoffel compatibles con la métrica $g_{\mu\nu}$. Los vectores tangenciales están definidos como:

$$e_a{}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} \quad y \quad e_b = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^b} \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (2.13)$$

La derivada de un vector tangencial resulta en

$$\frac{\partial e_b}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^b} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^b \partial x^\mu}. \quad (2.14)$$

Teniendo esta derivada procedemos a multiplicar por el tensor original.

$$e_a{}^\mu \frac{\partial e_b}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial^2}{\partial \xi^b \partial x^\mu} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^a \partial \xi^b}. \quad (2.15)$$

Regresando a la estructura de la ecuación (2.12) tenemos:

$$D_a e_b = \frac{\partial^2}{\partial \xi^a \partial \xi^b} - e_a{}^\mu \Gamma_{\mu b}{}^c e_c \quad (2.16)$$

Estas expresiones que acabamos de obtener son en realidad una generalización de las ecuaciones de Gauss Weingarten. Las ecuaciones de Gauss Weingarten son análogos de las ecuaciones de Frenet que describen la cinemática de curvas en espacios euclídeos de tres dimensiones. Las fórmulas de Frenet Serret permiten el análisis de una curva por medio de tres vectores principales: el vector tangencial, el vector normal y el binormal. En el caso de las ecuaciones de Gauss Weingarten, en vez de analizar curvas, estas sirven en superficies bidimensionales. Su generalización, la cual estamos considerando, se adapta a hipersuperficies como la hoja de mundo que hemos descrito. Dicho de otra manera, las ecuaciones de Gauss Weingarten expresan los vectores $D_a e_b$ y $D_a n^i$ como combinación lineal de los vectores e_a , e_b y n^i . Donde γ_{ab}^c son los coeficientes de conexión compatibles con la métrica de la hoja de mundo γ_{ab} :

$$\gamma_{ab}^c = g(D_a e_b, e^c). \quad (2.17)$$

Al segundo término K_{ab}^i , se le conoce como la i -ésima curvatura extrínseca de la hoja de mundo. Este término nos permite extraer información sobre el embebimiento de m en \mathcal{M} . Como su nombre lo indica es parte de la geometría extrínseca y toma en cuenta la desviación entre los vectores normales de punto a punto y su proyección sobre los vectores tangentes, la cual se puede definir como

$$K_{ab}^i = -g(D_a e_b, n^i) = K_{ba}^i. \quad (2.18)$$

Una parte curiosa de la curvatura extrínseca es la simetría espacial ante el cambio de vectores tangentes y sus derivadas. i.e. $D_a e_b = D_b e_a$ esto es una consecuencia de la integrabilidad de la base de vectores tangentes. El signo negativo en el producto interno es parte de la convención para que el vector apunte hacia “adentro” de la curva que genera la superficie.

La forma fundamental normal o potencial de torsión extrínseca es el producto interno de $D_a e_b$ con n^j bajo la métrica del espacio.

$$w_a^{ij} = g(D_a n^i, n^j) = -w_a^{ji}, \quad (2.19)$$

La notación usual de este término es T u Ω pero con el fin de evitar confusión adoptaremos la notación w usada en [6]. En analogía con las formulas de Frenet Serret este término expresa la magnitud del vector binormal. Una diferencia a notar entre las fórmulas de Frenet Serret y las ecuaciones de Gauss Weingarten es que, a pesar de tener tres cantidades (tangencial, de curvatura y de torsión), los vectores base sólo son tangenciales y normales, esto es debido a que trabajamos sobre superficies y lo que sería un vector binormal es ahora otro vector tangencial.

Derivada Covariante.

La derivada covariante es aquella que deriva una función a lo largo de los vectores tangentes de una variedad. Para el caso de una variedad embebida dentro de otra, la derivada covariante es la proyección ortogonal de la derivada direccional euclídea. Así la derivada direccional se expresa de la siguiente manera:

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y; \quad (2.20)$$

$$\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y. \quad (2.21)$$

donde Y y X son campos diferenciables, f es una función diferenciable y ∇ la derivada direccional.

Tomando el hecho de que ∇ es una conexión riemanniana, i.e. simétrica, y cumple con $\nabla_x g = 0$; g es el tensor diferenciable definido anteriormente como el producto interno bajo la métrica g_{ab} .

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X. \quad (2.22)$$

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \quad (2.23)$$

Aplicando derivadas de Lie en productos de la métrica tenemos que la suma

$$g(\nabla_{e_a} n^i, n^j) + g(n^i, \nabla_{e_a} n^j), \quad (2.24)$$

resulta ser igual a

$$w_a^{ij} + w_a^{ji} = e_a(g(n^i, n^j)) = e_a(\delta^{ij}) = 0. \quad (2.25)$$

Por lo tanto tenemos que el tensor de torsión es asimétrico bajo el intercambio de superíndices i, j .

$$w_a^{ij} = -w_a^{ji}. \quad (2.26)$$

Recordando que m se encuentra embebido en \mathcal{M} donde m es una hipersuperficie D dimensional y \mathcal{M} el espacio de fondo con N dimensiones, tomemos el caso usual donde la hipersuperficie se encuentra en un espacio de fondo que tiene una dimensión más que la propia superficie, i.e. $D = N - 1$. En este caso el potencial de torsión extrínseco se anula ya que los índices i, j solo pueden tomar el valor 1 y como $w_a^{ij} = -w_a^{ji}$ entonces $w_a^{ij} = 0$. Podemos encontrar un sentido geométrico a este término si recordamos que el marco normal permite rotaciones locales. Para tener un mejor entendimiento de esto regresemos al contexto de una curva descrita por el marco de Frenet. Si la curva existe o se encuentra inmersa en un espacio tridimensional ($N = 3$), el marco de Frenet nos permite tener tres vectores que describen la geometría extrínseca (tangencial, normal y binormal) pero qué sucede en el caso que la curva esté en un espacio bidimensional.

La curva es unidimensional y el espacio donde se encuentra embebida es de tan solo una dimensión mayor (como el caso que estamos considerando para m), es claro que el marco de Frenet sobredetermina la descripción. Solo necesitamos el vector tangencial y el normal para conocer el comportamiento de la curva. Esto es lo que sucede cuando la hipersuperficie m se encuentra embebida en \mathcal{M} tal que m es de dimensión $N - 1$. Ahora, en el caso de que la dimensión $N - D > 1$ tenemos una libertad de rotación sobre el marco normal $\{n^i\}$. Lo que esto implica es que podemos aplicar un operador de rotación y al hacerlo descubrir propiedades de las cantidades que nos interesan así como construir nuevos operadores que tomen en cuenta estas propiedades. El vector normal con respecto a la rotación se transforma como $n^i \rightarrow \mathcal{O}^i_j n^j$.

Es importante ver cómo se comportan los demás términos en las ecuaciones de Gauss Weingarten bajo las rotaciones del vector normal. Para los coeficientes de conexión tenemos:

$$\mathcal{O}\gamma_{ab}{}^c\mathcal{O}^{-1} = \mathcal{O}(g(D_a e_b, e^c))\mathcal{O}^{-1}. \quad (2.27)$$

$$\mathcal{O}\gamma_{ab}{}^c\mathcal{O}^{-1} = \gamma_{ab}{}^c. \quad (2.28)$$

$$\gamma_{ab}{}^c \rightarrow \gamma_{ab}{}^c. \quad (2.29)$$

En este caso la conexión relaciona a los campos vectoriales tangenciales e_a y e_b , por lo que no hay rotaciones sobre vectores normales dejando a la conexión sin cambios; al igual que un escalar. Decimos que $\gamma_{ab}{}^c$ se transforma como escalar ante rotaciones del campo vectorial normal.

Para la curvatura extrínseca tenemos que bajo rotaciones del vector normal, esta se transforma como vector.

Aplicamos una rotación sobre el campo normal.

$$K_{ab}{}^i \rightarrow g(D_a e_b, \mathcal{O}^i_j n^j) = \mathcal{O}^i_j g(D_a e_b, n^j) = \mathcal{O}^i_j K_{ab}{}^j. \quad (2.30)$$

$$K_{ab}{}^i \rightarrow \mathcal{O}^i_j K_{ab}{}^j. \quad (2.31)$$

Ahora veremos que el potencial de torsión intrínseco se transforma como una conexión, es fácil notar que tendremos la suma de dos términos ya que tenemos la dependencia del vector normal y su derivada covariante.

$$w_a \rightarrow \mathcal{O}w_a\mathcal{O}^{-1} + \mathcal{O}_{,a}\mathcal{O}^{-1}. \quad (2.32)$$

Podemos mostrar explícitamente las propiedades de transformación del potencial de torsión intrínseco considerando

$$g(D_a(\mathcal{O}^i_j n^j), \mathcal{O}^k_l n^l) = \mathcal{O}^k_l g(D_a(\mathcal{O}^i_j n^j), n^l), \quad (2.33)$$

$$D_a(\mathcal{O}^i_j n^j) = e_a^\mu \nabla_{\partial_\mu} \mathcal{O}^i_j(n^j) + \mathcal{O}^i_j \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (2.34)$$

$$\nabla_{e_a}(\mathcal{O}^i_j n^j) = \mathcal{O}^i_j \nabla_{e_a} n^j + (e_a \mathcal{O}^i_j) n^j, \quad (2.35)$$

y sustituyendo en la transformación

$$w_a \rightarrow \mathcal{O}^k_l g(\mathcal{O}^i_j \nabla_{e_a} n^j + (e_a \mathcal{O}^i_j) n^j, n^l) \quad (2.36)$$

$$= \mathcal{O}^k_l g(\mathcal{O}^i_j \nabla_{e_a} n^j, n^l) + \mathcal{O}^k_l g(e_a \mathcal{O}^i_j n^j, n^l) \quad (2.37)$$

$$= \mathcal{O}^k_l \mathcal{O}^i_j g(\nabla_{e_a} n^j, n^l) + \mathcal{O}^k_l e_a \mathcal{O}^i_j g(n^j, n^l) \quad (2.38)$$

$$= \mathcal{O}^k_l \mathcal{O}^i_j w_a^{jl} + \mathcal{O}^k_l e_a \mathcal{O}^i_j \delta^{jl}. \quad (2.39)$$

Entonces, como operadores

$$w_a \rightarrow \mathcal{O} w_a \mathcal{O}^{-1} + \mathcal{O}_{,a} \mathcal{O}^{-1}. \quad (2.40)$$

Esto implica que la rotación puede preservar la forma de las ecuaciones. En otras palabras se puede tener una covarianza ante rotaciones del marco normal. Uno puede hacer esta covarianza explícita por medio de derivadas covariantes. Sea ∇_a la derivada covariante sin torsión compatible con la métrica γ_{ab} inducida en m . Para los campos que se transforman como tensores bajo rotaciones del marco normal definimos una nueva derivada covariante $\tilde{\nabla}_a$. Igual que en la Ref. [6] introducimos una derivada covariante de la hoja de mundo $\tilde{\nabla}_a$ definida en campos que se transforman de manera tensorial bajo rotaciones del marco normal. Esta derivada covariante sobre campos Φ^i_j tiene una conexión w_a por cada índice del campo.

$$\tilde{\nabla}_a \Phi^i_j := \nabla_a \Phi^i_j - w_a^{ik} \Phi_{kj} - w_{ajk} \Phi^{ik}. \quad (2.41)$$

El primer término en esta derivada es la derivada covariante sin torsión respecto a la métrica de la hoja de mundo y los otros dos términos resultan de la variación de índices bajo la conexión. Para esta conexión existe una curvatura asociada que se introduce en la Ref. [6] como:

$$\Omega_{ab}{}^{ij} := \nabla_b w_a{}^{ij} - \nabla_a w_b{}^{ij} + w_a{}^{ik} w_{bk}{}^j - w_b{}^{ik} w_{ak}{}^j. \quad (2.42)$$

Recordando que los índices latinos van como $a, b = 0, 1, \dots, D-1$, si $D = 1$ entonces la

curvatura $\Omega_{ab}{}^{ij} = 0$ con lo cual obtenemos una transformación de un campo nulo o la transformada de norma cero a nivel local. A este caso se le conoce como “norma pura”. También implica que la conexión ∇_a es plana.

Por último calculamos deformación de la curvatura extrínseca como se ve sobre la hoja de mundo. La curvatura extrínseca se define como [7]:

$$K_{ab}^i = g(D_a e_b, n^i) = K_{ba}^i, \quad (2.43)$$

donde D_a son las proyecciones sobre la hoja de mundo de las derivadas covariantes espacio temporales definidas en (2.7).

2.2 Condiciones de Integrabilidad

A continuación tenemos que imponer ciertas reglas que debe seguir nuestra geometría ya que las ecuaciones que obtuvimos a partir de la base para la geometría extrínseca e intrínseca (2.10 y 2.11) no siempre son consistentes con cualquier embebimiento ya que $X^\mu(\xi)$ se encuentra sobredeterminado por las mismas ecuaciones (es fácil notarlo si nos fijamos en los índices que corren no sólo de 0 a $D - 1$ sino también los índices contraídos que corren de 1 a $N - D$). Una manera de mantener la consistencia es imponiendo que la geometría extrínseca e intrínseca satisfagan las condiciones de Gauss-Codazzi, Codazzi-Mainardi e integrabilidad de Riemann [8]:

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_a)e_c, e_d) = \mathcal{R}_{abcd} - K_{ac}{}^i K_{bdi} + K_{ad}{}^i K_{bci}, \quad (2.44)$$

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_a)e_c, n^i) = \tilde{\nabla}_a K_{bc}{}^i + \tilde{\nabla}_b K_{ac}{}^i, \quad (2.45)$$

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_a)n^i, n^j) = \Omega_{ab}{}^{ij} - K_{ac}{}^i K_b{}^{cj} + K_{bc}{}^i K_a{}^{cj}. \quad (2.46)$$

Estas condiciones están expresadas por el tensor de Riemann con la siguiente notación: $g(\mathcal{R}(Y_1, Y_2)Y_3, Y_4) = \mathcal{R}_{\alpha\beta\mu\nu} Y_2^\alpha Y_1^\beta Y_3^\mu Y_4^\nu$. Donde $\mathcal{R}_{\alpha\beta\mu\nu}$ es el tensor de Riemann de la derivada covariante de espacio tiempo D_μ mientras que $\mathcal{R}^a{}_{bcd}$ es el tensor de Riemann de derivada covariante de la hoja de mundo ∇_a . En la otra notación podemos expresar al tensor de Riemann con derivadas covariantes de la siguiente manera:

$$\mathcal{R}(e_a, e_b) = \nabla_{e_a} \nabla_{e_b} - \nabla_{e_b} \nabla_{e_a} - \nabla_{[e_a, e_b]}. \quad (2.47)$$

En este caso la derivada covariante en la hoja de mundo $\nabla_{[e_a, e_b]}$ se anula dejando simplemente la resta del producto de derivadas. El desarrollo de las condiciones de integrabilidad se encuentra en el Apéndice C. En la ec. (2.42) podemos ver que si $D = 1$

la curvatura $\Omega_{ab}{}^{ij} = 0$ y los dos productos de curvatura extrínseca se eliminan. Esto también ocurre si tenemos el caso $D = N - 1$ ya que $w_a{}^{ij} = 0$ lo cual nos dice que esta ecuación tiene puras contracciones triviales. Debido a su interés en este trabajo nos fijaremos en un espacio en particular del cual elaboraremos en la siguiente sección. Este espacio es el llamado espacio de de Sitter que se encuentra en las ecuaciones de Einstein cuando se tiene simetría máxima, el espacio es vacío y la constante cosmológica es positiva. En el espacio de de Sitter tenemos que el tensor de Riemann es

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\alpha\beta} = H^2(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}), \quad (2.48)$$

donde H^2 es una constante positiva con unidades del inverso de longitud. El espacio de de Sitter es un análogo al espacio de Minkowski de una esfera en espacios de más dimensiones, donde el producto de las curvaturas extrínsecas es proporcional a la diferencia del producto de productos de campos tangentes, i.e. $K_{ac}{}^i K_{bd}{}^i - K_{ad}{}^i K_{bc}{}^i \propto (\gamma_{ac}\gamma_{bd} - \gamma_{ad}\gamma_{bc})$. Así vemos que

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_a)e_c, e_d) = H^2(\gamma_{ac}\gamma_{bd} - \gamma_{ad}\gamma_{bc}). \quad (2.49)$$

Lo cual hace que la parte derecha de las ecuaciones (2.44) y (2.45) se eliminen. Esto resulta importante ya que nos permite encontrar una transformación de norma bajo

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_a)n^i, n^j) + K_{ac}{}^i K_b{}^{cj} - K_{bc}{}^i K_a{}^{cj} = 0. \quad (2.50)$$

En el caso de de Sitter, si todos excepto un $K_{ab}{}^i$ se anulan, entonces el producto antisimétrico de tensores de curvatura extrínseca se anula y la condición de integrabilidad se satisface automáticamente. Esta última proposición se muestra al final del apéndice C.

2.3 Variación

Para encontrar la dinámica de los objetos geométricos que hemos obtenido se puede utilizar el concepto de variación. Este consiste en permitir que, en el espacio fase, la trayectoria más corta sea la que la física obedece. Entonces al obtener la variación de un objeto se puede entender que se agrega un diferencial δ infinitamente pequeño en las coordenadas del espacio fase. Así la variación de K_{ab} se puede expresar como derivadas de la base.

$$\delta K_{ab}{}^i = -g(\delta n^i, D_a e_b) - g(n^i, \delta D_a e_b). \quad (2.51)$$

La variación del vector n^i se entienden como la perturbación normal a m que tiene consecuencias físicas cuando se contextualiza la hypersuperficie m en términos de una brana, esto se verá en el siguiente capítulo. Por ahora introducimos un campo ϕ que corresponde a esta variación y se puede expresar así:

$$n^i \rightarrow n^i + \phi n^i. \quad (2.52)$$

Utilizando esto y la identidad de Ricci según el Apéndice C tenemos que

$$\delta K_{ab}^i = -\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \phi^i + [g(\mathcal{R}(e_a, n_j)e_b, n^i) + K_{ac}^i K^c_{bj}] \phi^j. \quad (2.53)$$

Además sabemos que el producto del tensor de Ricci sobre los vectores tangentes con los vectores normales bajo la métrica del espacio de fondo es

$$g(\mathcal{R}(e_a, n_j)e_b, n^i) = R_{\alpha\beta\mu\nu} e_b^\alpha e_a^\beta n^\mu n^\nu. \quad (2.54)$$

Y siguiendo la Ref. [8] el tensor de Riemann es:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = H^2 (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}), \quad (2.55)$$

teniendo así:

$$g(\mathcal{R}(e_a, n_j)e_b, n^i) = R_{\alpha\beta\mu\nu} n_j^\alpha e_a^\beta e_b^\mu n^{i\nu} = -H^2 \gamma_{ab} \delta_j^i. \quad (2.56)$$

donde H corresponde a la constante de Hubble en espacio de de Sitter.

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.57)$$

y a es el radio del universo. Con esto podemos escribir la perturbación de la curvatura extrínseca.

$$\delta K_{ab}^i = -\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \phi^i + [-H^2 \gamma_{ab} \delta_j^i + K_{ac}^i K^c_{bj}] \phi^j. \quad (2.58)$$

Además requerimos conocer la perturbación de la traza de la curvatura extrínseca.

$$\delta K^i = -\tilde{\Delta} \phi^i + [-H^2 (p+1) \delta_j^i - K_{ab}^i K_j^{ab}] \phi^j. \quad (2.59)$$

Este término es el que tendrá consecuencias en el capítulo de perturbaciones.

Capítulo 3

Branas

3.1 Motivación

Durante la década de 1970 el estudio del rompimiento espontáneo de simetrías en teorías de gran unificación (GUT) tuvo un gran desarrollo en la cosmología [9]. A mediados de esa misma década Kibble y Turok (1976) [2] publican varios artículos relacionados con el fenómeno a partir de transiciones de fase que proponen modelos cosmológicos en el universo temprano así como la formación de ciertas configuraciones topológicas. Estas configuraciones son llamadas defectos topológicos e incluyen dominios de pared, burbujas de vacío, cuerdas cósmicas y monopolos. Es importante resaltar que estas rupturas de simetría están directamente relacionadas con la variedad que forma el vacío del sistema, sobre todo cuando ocurren los defectos topológicos descritos por un lagrangiano que tiene un valor de expectación de vacío (VEV) del campo escalar es distinto de cero. Las transiciones de fase en donde tiene lugar el rompimiento espontáneo de simetría, se describen con temperaturas críticas que el sistema rebasa. El incremento de temperatura tiene como consecuencia la creación de simetrías pero existen casos, Weinberg (1974) [10], donde temperaturas menores reconstruyen la simetría. El concepto de brana resulta útil cuando se estudian defectos topológicos. Dentro de las aplicaciones está el uso de branas para describir el comportamiento de dominios de pared [8]. Otro uso es modelar al electrón como burbuja cargada con una brana esférica donde las correcciones a segundo orden permiten su cuantización [11].

La descripción de objetos extendidos de varias dimensiones embebidos en espacios de dimensión superior se realiza por medio del concepto de membranas n dimensionales (o n -branas). Este concepto permite relacionar dos o más objetos matemáticos. La teoría de branas es exitosa gracias a su amplio uso en teoría de cuerdas y su utilidad para encontrar la acción en sistemas cuántico relativistas.

La geometría para estudiar las branas toma los principios de la geometría diferencial para su descripción como unos objetos formados por una base de vectores tangentes y normales que permiten la manipulación de su geometría intrínseca y extrínseca. Al describir la dinámica de cuerpos extendidos la forma del lagrangiano se expresa en términos de cantidades geométricas como los tensores de curvatura, vectores y escalares que construyen a la acción invariante bajo parametrizaciones de la brana. El lagrangiano de una brana infinitesimalmente delgada consiste del embebimiento de la brana sobre el espacio-tiempo de coordenadas para encontrar un marco que permita el transporte paralelo de la base de vectores.

3.2 Acción de Nambu-Goto

Para sistemas mecánicos sabemos que podemos encontrar la dinámica de estos por medio de la acción. Este escalar invariante tiene una generalización para branas N dimensionales conocida como la acción de Nambu Goto. En el caso de branas este invariante escalar resulta proporcional al área de la hoja de mundo.

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (3.1)$$

Para una brana tenemos que generalizar la acción por medio del principio de mínima acción tomando en cuenta que las coordenadas espaciales y temporal del objeto se encuentran relacionadas por el invariante ds , y los límites son la superficie misma de la brana. En analogía con la acción de un objeto puntual que crea una línea de mundo, la acción de una brana se relaciona con la acción de una hoja de mundo. Esta hoja de mundo mantiene invariante su área, así como una línea de mundo mantiene invariante el intervalo (o longitud de espacio tiempo). La acción de Nambu Goto resulta proporcional al área propia total. Para la hoja de mundo se necesitan dos parámetros para definir un punto sobre esta, los parámetros son σ y τ . La métrica inducida sobre la hoja de mundo por el espacio tiempo $\eta_{\mu\nu}$ es

$$g_{ab} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial^\mu X}{\partial y^a} \frac{\partial^\nu X}{\partial y^b}, \quad (3.2)$$

donde $a, b=0, 1$; $y^0 = \sigma$ y $y^1 = \tau$.

$$A = d^2\Sigma \sqrt{-g}, \quad (3.3)$$

donde $d^2\Sigma = d\sigma d\tau$ y g es el determinante de la métrica inducida.

Entonces la acción de Nambu Goto se puede expresar como:

$$S = \sigma \int dA, \quad (3.4)$$

donde σ es la tensión de superficie. Este término se agrega para que las unidades coincidan. Si sustituimos dA tenemos que la acción de una pared plana infinitamente delgada es:

$$S_w = -\sigma \int_{\Sigma} \sqrt{-g} d^N \xi. \quad (3.5)$$

A esto es necesario agregarle la acción del vacío. El vacío se tiene cuando la brana se encuentra en su estado energético más bajo o estado base. Este se describe por un lagrangiano que sólo incluye energía potencial ρ_v . Al insertarlo en la acción solo nos es útil la diferencia de energía entre ambos lados de la pared, a esta la llamamos ϵ y se define como:

$$\epsilon = \rho_v^{(2)} - \rho_v^{(1)}, \quad (3.6)$$

donde $\rho_v^{(2)}$ es la parte interna y sobre la cual se considera N la dimensión de la brana. Entonces la acción del vacío que contribuye a la acción de la brana es:

$$S_v = -\epsilon \int dt \int_{vol} d^N x. \quad (3.7)$$

Por último solo falta sumar las partes de la acción para tener la acción total de la brana. Pero la acción de vacío está en términos de las coordenadas del espacio tiempo de fondo mientras que la acción de la pared está dada como la integral sobre la parametrización. Analizando ϵ notamos que $\rho_v^{(2)}$ es la densidad de energía potencial que corresponde al interior y está limitada por los extremos de la pared. Podemos usar este aspecto de la acción para reescribirla como una integral con límites en Σ . Para ello utilizamos el factor de $1 = \partial_{\mu} x^{\mu} / (N + 1)$ y aplicamos el teorema de Gauss, i.e.

$$\oint_{\Sigma} A \cdot dS = \int_{vol} \nabla \cdot A dV. \quad (3.8)$$

En este caso el 1 que sustituimos funciona como la divergencia del vector x mientras que el volumen se generaliza para incluir a la coordenada temporal que también se encuentra en la “superficie” Σ , teniendo así:

$$S_v = \int_{\Sigma} \sqrt{-g} \frac{\epsilon}{N + 1} x^{\mu} n_{\mu} d^N \xi. \quad (3.9)$$

El producto con la base de vectores normales a la superficie es $x^{\mu} n_{\mu}$ donde n^{μ} es el vector espacialoide unitario normal a Σ y utilizando la misma convención de signo tal

que n^μ apunte en la dirección con $\rho_v = \rho_v^{(2)}$. Entonces la acción de una brana es:

$$S = S_w + S_v = - \int_{\Sigma} \sqrt{-g} \left[\sigma - \frac{\epsilon}{N+1} x^\mu n_\mu \right] d^N \xi. \quad (3.10)$$

Vemos que esta acción resulta invariante bajo reparametrizaciones de Σ ya que las coordenadas espacio-temporales están definidas como $x^\mu = x^\mu(\xi^a)$ y el vector normal se encuentra caracterizado por $n^\mu n_\mu = 1$ y $n_\mu \partial_a x^\mu = 0$. Por esto los vectores x^μ y n_μ se transforman como escalares bajo reparametrizaciones.

3.3 Defectos Topológicos

Para introducir defectos topológicos consideremos el modelo de Goldstone generalizado [12].

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^\dagger) (\partial^\mu \phi) - V(\phi), \quad (3.11)$$

donde ϕ es un campo escalar con varias componentes y V es el potencial que al elegir cuidadosamente se obtendrá un valor de expectación distinto de cero.

Tomemos un potencial de la forma

$$V = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \eta^2)^2. \quad (3.12)$$

A este defecto se le conoce como pliegue ϕ^4 y surge de un modelo de Goldstone con un campo escalar real cuando se toma el potencial anterior. Este potencial tiene la forma de la figura 3.3.

3.3.1 Grupos de Homotopía.

Las distintas variedades topológicas se pueden clasificar por medio de la teoría de grupos a través del llamado grupo de homotopía ($\pi_n(X)$); donde X es una variedad y $n \in \mathbb{Z}$; un grupo de homotopía dicta la relación entre variedades topológicas al clasificar espacios topológicos por su forma y agujeros entre otras cosas. Para entender mejor a los grupos de homotopía primero introducimos a los grupos de homología. Los grupos de homología están relacionados directamente con los grupos de homotopía pero resultan más prácticos al momento de estudiarlos ya que su representación gráfica es muy intuitiva. Los grupos de homotopía se pueden entender como refinamientos de la característica de Euler, donde esta se calcula contando el número de vértices, bordes y caras de un poliedro (K)

homeomórfico a la superficie y con la siguiente relación

$$\chi(X) = (\text{número de vértices en } K) - (\text{número de bordes en } K) + (\text{número de caras de } K). \quad (3.13)$$

A diferencia de la característica de Euler los grupos de homología nos permiten diferenciar entre poliedros como los que se muestran en la figura 3.1. El principio que se usa para clasificar este tipo de espacios y la base de los grupos de homología es: encontrar una región sin bordes, i.e. que no sean estas un borde de otra región.

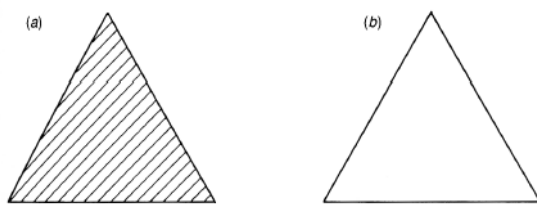


FIGURA 3.1: (a) triángulo con cara (b) bordes del triángulo

Introduciendo el concepto de simplejos se puede generar un ciclo con cierta dirección para cada triángulo que conforma al poliedro y así los grupos de homología permiten asignar estructuras de grupo a ciclos que no son bordes. Los simplexes anteriormente mencionados son los bloques de construcción de un poliedro, estos indican cuantos vértices tiene el poliedro

y la dirección del ciclo como en la figura 3.2.

El álgebra que se utiliza para encontrar los grupos de homología son funciones o mapeos (homomorfismos) que relacionan dos grupos abelianos infinitamente generados a través de espacios topológicos (homeomórficos) [13].

Ahora podemos desarrollar a los grupos de homotopía si partimos de que esta vez la función que mapea a los dos espacios topológicos pertenece a un conjunto de grupos de mapas continuo. Es decir si tenemos dos mapeos $f, g \in \mathcal{F}$ la relación de homotopía (f es homotópica a g) se tiene si bajo los espacios topológicos X y Y , la imagen de $f(X)$ se deforma de manera continua a $g(X)$ en Y . De manera similar a los ciclos introducidos por homología, en homotopía tenemos caminos y bucles o lazos cerrados que nos permiten saber a qué grupo de homotopía pertenece la variedad.

Ahora buscamos homeomorfismos entre estos lazos para clasificar la homotopía. Si se tiene un mapeo homeomórfico entre estos dos lazos entonces decimos que los lazos son homeotópicos entre sí.

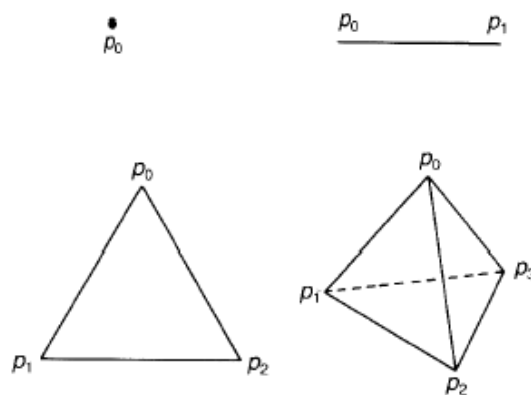


FIGURA 3.2: 0-,1-,2-,y 3-simplejos

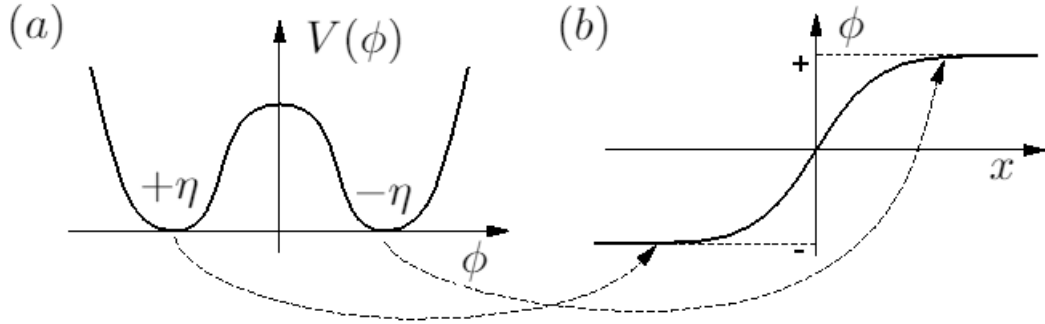


FIGURA 3.3: (a) Pozo doble con centro en $\phi = 0$ y mínimos en $\pm\eta$. (b) Forma de la solución mejor conocida como solitón.

Las soluciones encontradas dentro de la teoría cuántica de campos son distintas a las soluciones para VEV y pertenecen a grupos distintos de homotopía. Estas soluciones a ecuaciones diferenciales forman variedades delimitadas por las condiciones de frontera y forman grupos de homotopía no triviales. Como estas ecuaciones preservan la estructura topológica, las soluciones se pueden clasificar en clases de homotopía. El hecho de que cada variedad tenga una clase de homotopía distinta nos indica que estas variedades no son homeomórficas, es decir no se puede transformar una solución de una variedad a la solución de otra variedad (homotópicamente distinta) de manera continua. El primer grupo de homotopía es el llamado grupo fundamental π_n , este permite que dos funciones continuas sean homotópicas si pueden transformar una variedad topológica en la otra de manera continua.

Teorema 3.1. *Sea G un grupo de simetrías que decae a H , $G \rightarrow H$ y π_n el respectivo grupo fundamental. Sea M la variedad topológica de G , si*

$$\pi_n(G) = \pi_{n-1}(G) = I, \quad (3.14)$$

entonces

$$\pi_n(M) = \pi_{n-1}(H). \quad (3.15)$$

En cada tipo de perturbación que se trata en este trabajo se especifica cuál es el grupo de homotopía al que pertenece. Para un tratamiento más profundo en este tema se puede consultar la Ref. [13].

3.3.2 Cuerdas C3smicas

Empecemos por el caso defectos topol3gicos llamado cuerdas c3smicas. En el caso de estas, a3un no se descarta la posibilidad de que se puedan detectar aunque con el paso del tiempo y avances en la astronom3a estas siguen eludiendo su comprobaci3n observacional. Cabe mencionar que en a3os recientes a este trabajo el l3mite de la tensi3n de la cuerda ($G\mu$) se ha ido reduciendo y ahora se encuentra en $G\mu < 1.5 \times 10^{-11}$ Blanco-Pillado et al. (2018) [14]. Una consecuencia interesante es que las cuerdas c3smicas pudieran generar las fluctuaciones de densidad necesarias para la formaci3n de galaxias. Las cuerdas c3smicas se pueden clasificar en dos categor3as: cuerdas globales y cuerdas locales donde el nombre se refiere al tipo de simetr3a que al romperse espont3neamente genera este tipo de defectos topol3gicos. Primero analizaremos a las cuerdas locales utilizando el grupo de simetr3a $U(1)$. Las condiciones de topolog3a resultan ser las mismas para cuerdas globales que locales pero la f3sica s3 presenta cambios.

Como mencionamos anteriormente los defectos topol3gicos son soluciones donde el VEV es distinto de cero. Para el caso de cuerdas tenemos que $\langle \phi \rangle = \eta e^{i\theta}$, donde el valor de $\langle \phi \rangle$ est3 fijo pero θ var3a seg3n la escala del factor de correlaci3n $\xi < t$. La soluci3n crea una variedad \mathcal{M} que corresponde a un c3rculo en el plano complejo con la ecuaci3n $\phi = \eta$. As3 como en el caso de una part3cula en una caja, ϕ es univaluado, entonces para cada estado se tiene un cambio de fase del VEV de $2\pi n$ donde $n \geq 1$. Para que $\langle \phi \rangle$ sea univaluado, el cambio total en la fase de cada lazo cerrado debe ser:

$$\Delta\theta = 2\pi n. \quad (3.16)$$

De esta manera notamos que para un lazo cerrado con cambio $\Delta\theta = 2\pi$ y que quisi3ramos cerrar hasta tener un punto, no nos ser3a posible debido a que no podemos llevar $n = 1$ a $n = 0$ de manera discontinua sin que haya un punto en la fase de θ indefinido, esto es $\langle \phi \rangle = 0$. As3 se muestra que siempre existe un cilindro o tubo de vac3o falso dentro de la variedad para $\Delta\phi \neq 0$. Adem3s estas cuerdas no pueden tener fin (porque entonces el lazo podr3a cerrarse) lo cual nos da dos opciones que las cuerdas sean infinitas o cerradas.

Primero consideremos el caso para el lagrangiano:

$$L = D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \lambda (\phi^\dagger \phi - \eta^2)^2. \quad (3.17)$$

donde $D = \partial_\mu - igA_\mu$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor de campo electromagn3tico en forma covariante, $A_\mu = (\Phi, \vec{A})$ es el llamado cuadripotencial y g es el factor de acoplamiento de norma. En coordenadas cil3ndricas el campo escalar de Higgs es [7]

$$\phi \approx \eta e^{in\theta}. \quad (3.18)$$

donde n es entero, y el cuadripotencial o campo de norma resulta

$$A_\mu \approx \frac{1}{ig} \partial_\mu \ln \phi. \quad (3.19)$$

Para cantidades grandes o mejor dicho en su forma asintótica el campo escalar de Higgs ϕ y de norma se anulan dejando así:

$$F_{\mu\nu} = 0 \quad y \quad D_\mu \phi = 0. \quad (3.20)$$

Esto quiere decir que para la parte de afuera de la cuerda la densidad de energía se anula. Recordando que estamos en el grupo de simetría U(1) podemos calcular el campo magnético por medio del teorema de Stokes.

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi \frac{n}{g}, \quad (3.21)$$

donde \mathbf{B} es el campo de norma magnético y la integración es en todo el volumen de la cuerda. Una parte importante de este resultado es la “cuantización” de los flujos magnéticos; notemos que la cuerda tiene consigo n flujos magnéticos. Llamaremos a una cuerda “elemental” a aquella que corresponda a $n = \pm 1$. Una cuerda con $|n| > 1$ no es estable y decaerá eventualmente a una cuerda local elemental Ref. [15]. El radio de una cuerda resulta estar relacionado directamente con la longitud de Compton de la masa de los campos asociados, y en este caso tenemos tanto el campo de Higgs como el de mesones o campo de norma i.e. $\delta \sim m_\phi$, donde $m_\phi = \lambda^{1/2}\eta$ es la masa del campo escalar de Higgs y $\delta \sim m_A$, donde $m_A = g\eta$ es el campo de norma. A partir de estas masas y la consideración de que $m_\phi > m_A$ se puede encontrar que la densidad lineal de masa de la cuerda es $\mu \sim \eta^2$ [16].

Como estamos considerando una cuerda local recta y fija que apunta en la dirección z podemos asumir que la densidad del tensor de energía momento es constante y así calcular el tensor de energía momento, hacer esto nos permite ver que la densidad de energía momento es igual a la tensión de la cuerda.

$$\tilde{T}_\mu^\nu = \delta(x)\delta(y) \int T_\mu^\nu dx dy \quad (3.22)$$

Sabemos del tensor de energía momento que:

$$\tilde{T}_0^0 = \tilde{T}_3^3. \quad (3.23)$$

Esta ecuación es resultado de la invariancia de Lorentz de la cuerda sobre el eje z , i.e al aplicar boosts en esta dirección la solución de la cuerda local (ϕ) se mantiene igual. Además podemos tomar el sistema donde $\tilde{T}_1^1 = \tilde{T}_2^2 = 0$. Por último para ver que las

demás componentes de \tilde{T} también son cero tomamos la ley de conservación sobre los índices 1 y 2 de la densidad tensorial ($T_i^j{}_{,j} = 0$).

$$\int T_i^j{}_{,j} x^k dx dy = 0. \quad (3.24)$$

Haciendo integración por partes tenemos

$$\int T_i^k dx dy = 0, \quad (3.25)$$

entonces

$$\tilde{T}_\mu^\nu = \mu \text{diag}(1, 0, 0, 1) \delta(x) \delta(y). \quad (3.26)$$

Ahora podemos generalizar un poco la teoría para cuerdas que no necesariamente están fijas sobre un eje. Nos enfocamos en el grupo de homotopía que clasifica a las cuerdas cósmicas. Para encontrar el grupo utilizamos el teorema 3.1.

Ya que la variedad \mathcal{M} pertenece al grupo de homotopía $\pi_1(\mathcal{M}) \neq I$, es decir los lazos circulares no pueden transformarse a un punto. Generalizamos haciendo una ruptura de simetría que respete este grupo homotópico. Utilizando el teorema tenemos que en el ejemplo anterior $G = U(1)$ y por lo tanto $\pi_1(M) \neq I$ con $\pi_1(M) = Z$. De hecho la variedad M es un círculo con los valores dados por (3.16) y (3.21), pero la condición o clasificación de defectos topológicos para cuerdas es que $\pi_1(M) \neq I$. Esta observación es muy clara en la Figura 3.4 donde el grupo homotópico no es trivial, vemos que las dos funciones α y β que pertenecen a la misma variedad no son homotópicas.

En el caso en que la simetría que se rompe es una simetría global y no local podemos tomar un lagrangiano de la forma

$$L = D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger \phi - \eta^2)^2 = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{2} (\phi^\dagger \phi - \eta^2)^2 \quad (3.27)$$

En este caso el lagrangiano se simplifica (no tenemos derivada covariante ni el campo de norma) ya que la simetría se hace presente únicamente en el potencial.

En este caso la fase de ϕ es igual que en el caso anterior donde el cambio es 2π , el radio del tubo es $\delta \sim \lambda^{-1/2}/\eta$, mientras que la fase fuera del tubo está dada por $\phi = \eta \exp i\theta$, lo que cambia es que esta vez no está el campo de norma que compensaba la variación donde $r \gg \delta$. La densidad lineal de masa de una cuerda global es [7]

$$\mu \sim \eta^2 \int_\delta^R \left| \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|^2 2\pi r dr \sim 2\pi \eta^2 \ln \frac{R}{\delta}, \quad (3.28)$$

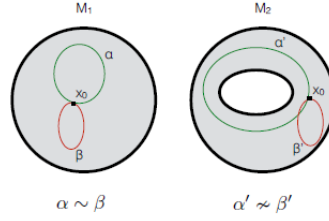


FIGURA 3.4: Sobre la variedad M_1 las funciones α y β son homotópicas, mientras que la variedad M_2 α' y β' no lo son. La variedad M_2 pertenece al grupo de homotopía $\pi_2(M)$.

donde R es el radio de corte. Varias cosas se pueden extraer de la forma que tiene la expresión anterior. Notemos como la densidad lineal de masa diverge cuando R se va al infinito, también vemos que para un lazo cerrado, la energía es finita ya que $n = 1$, entonces $E = \eta^2 R \ln(R/\delta)$ y en este caso R es el radio del tamaño del lazo, para esto se supone que el lazo está quieto momentáneamente. Además el logaritmo presente en la energía muestra una relación de interacción a largo alcance entre dos partes distintas del lazo.

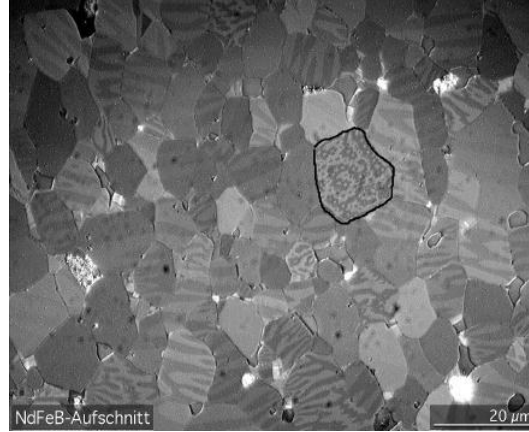
Ahora tomemos el ejemplo de cuerda cósmica infinita ya que la solución a esta resulta ser más simple, sobre todo en el momento de cuantizar las perturbaciones. La cuerda se describe por un campo escalar complejo con un potencial de interacción del tipo (3.12).

3.3.3 Dominios de Pared

Una dominio de pared es una región que separa dos estructuras de dominio contiguas. Una dominio de pared indica que las dos regiones a las que separa tienen distintas propiedades y no existe un camino continuo que las una. De esta manera se puede entender que la ruptura espontánea de simetría generada por un cambio de fase da lugar a la creación de dominios de pared. A las propiedades que tiene cada estructura de dominio les asociaremos un campo escalar ϕ . Es justo sobre la dominio de pared que el valor de ϕ puede tomar los dos valores de los dominios contiguos. Una manera intuitiva de analizar las dominios de pared se puede ver en el caso de dominio magnético.

Para el caso de dominios magnéticos, lo que estas paredes dividen es, como lo dice el nombre, la magnetización del material. En cada dominio magnético sólo hay un valor de la magnetización. La magnetización implica que el momento magnético de cada átomo dentro del dominio apunta en la misma dirección. En la Figura 3.5 lo que el lazo negro indica es un grano del material y dentro de este podemos ver como los dos tipos de regiones están separadas por un tono distinto de gris. Cada tono indica un dominio magnético y lo que los separa es una pared de los dominios. Esto es posible cuando el sistema se enfría más allá de la temperatura crítica conocida como temperatura de Curie

FIGURA 3.5: Granos microcristalinos en una pieza de $Nd_2Fe_{14}B$. Los dominios magnéticos son las manchas grises claras y oscuras en cada grano.



[7] y la simetría magnética se reconstruye. Además el grupo de homotopía relativo a las paredes de dominio es $\pi_1 = \mathbb{Z}$.

El estudio de paredes de los dominios se puede simplificar bastante si se exige que estas sean paredes de dominio planas, donde la elección de coordenadas cartesianas es útil. Esto es, paredes de dominio perpendiculares a un eje. En coordenadas cartesianas tomemos (t, z, x^i) , donde elegimos z como el eje perpendicular a la brana.

La acción para una pared plana de grosor pequeño es

$$S_w = -\sigma \int_{\Sigma} \sqrt{-g} d^N \xi, \quad (3.29)$$

donde σ es la tensión superficial. A esta acción se le conoce como de Nambu-Goto. A esta acción debemos agregarle una contribución por el medio en el que se encuentra embebida. El medio aporta una diferencia de densidades de energía que están divididas por la pared, esta acción toma la forma

$$S_v = -\epsilon \int dt \int_{Vol} d^N x, \quad (3.30)$$

donde $\epsilon = \rho_v^{(2)} - \rho_v^{(1)}$ es la diferencia de densidades de energía de vacío. Estas dos acciones aportan la acción que describe la trayectoria de la pared del dominio [5].

$$S = S_w + S_v = - \int_{\Sigma} \sqrt{-g} \left[\sigma - \frac{\epsilon}{N+1} x^\mu n_\mu \right] d^N \xi, \quad (3.31)$$

donde n^μ es el vector normal definido en la sección anterior.

Variando esta acción tenemos

$$\delta S = \int_{\Sigma} \sqrt{-g} (\sigma g^{ab} K_{ab} + \epsilon) \phi d^N \xi + \int_{\Sigma} \sqrt{-g} \frac{\epsilon}{N+1} x^{\mu} g^{ab} (\nabla_b \partial_a x_{\mu} - K_{ab} n_{\mu}) \phi d^N \xi. \quad (3.32)$$

La segunda integral desaparece ya que $\nabla_b \partial_a x^{\mu} \equiv K_{ab} n^{\mu}$. Dejando así que la ecuación de movimiento para la pared es

$$g^{ab} K_{ab} = -\frac{\epsilon}{\sigma}. \quad (3.33)$$

3.3.4 Burbujas del Vacío

Ahora analizamos al defecto topológico conocido como burbujas del vacío verdadero. El vacío es un estado estable cuando este es verdadero y es donde la materia tiene menor energía, la menor que puede tener no como el vacío falso que aparenta ser la menor energía del estado de la materia mientras existe un estado de menor energía. Recientes observaciones en la física de partículas sugieren lo que la teoría ha predicho desde el siglo pasado, que el universo se encuentra en un estado de vacío falso y que por medio de nucleación se podría llevar al estado de vacío verdadero. Este caso es de extrema importancia ya que puede llevar al fin del universo como lo conocemos [17].

Las burbujas del vacío se estudian por medio de la trayectoria que tiene la burbuja que separa al vacío verdadero del vacío falso, esta es [17]:

$$R^2 - t^2 = H^{-2}, \quad (3.34)$$

donde R es el radio de la burbuja y $H = \epsilon/N\sigma$. Esta trayectoria describe burbujas que nuclean en $t = 0$ con un radio H^{-1} en espacio plano de Minkowski $(N+1)$ dimensional. Esta ecuación es solución de la ecuación de conservación de energía momento que nos permite distinguir qué está sucediendo desde el punto de vista matemático. Como es de esperarse la conservación de energía momento nos indica qué está sucediendo con estas cantidades mientras evoluciona el sistema. Para tener un mejor entendimiento veamos la ecuación de la que hablamos.

$$E = \frac{R^{N-1} S^{(N-1)} \sigma}{(1 - \dot{R}^2)^{1/2}} - R^N V^{(N-1)} \epsilon = 0, \quad (3.35)$$

donde $V^{(N-1)}$ y $S^{(N-1)}$ son el volumen y área de la $(N-1)$ esfera unitaria respectivamente. La resta indica como el segundo término está gastando la energía del primer término que es la energía de la pared de dominio de la burbuja esférica, para poder crecer a expensas de la energía del medio que es el vacío falso. Este crecimiento se da por

medio del radio R en la ecuación (3.34). También hay una manera de ver la invariancia de Lorentz manifiesta tomando al relación

$$\frac{S^{(N-1)}}{V^{(N-1)}} = N. \quad (3.36)$$

Sustituyendo esta ecuación en (3.35) tenemos

$$R(1 - \dot{R}^2)^{1/2} = N \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{1}{H}. \quad (3.37)$$

El hecho de que la ec. (3.34) sea solución de la ecuación anterior es debido a que (3.34) es invariante de Lorentz y por tanto también indica que el crecimiento de la burbuja se vea igual desde cualquier marco de referencia inercial. Para encontrar la ecuación de movimiento de la burbuja pasamos del espacio de Minkowski a otro espacio notando que la ec. (3.34) tiene la forma de un hiperboloide embebido en un espacio $(N + 1)$ dimensional de Minkowski. Esto sugiere utilizar el espacio de de Sitter ya que la métrica inducida sobre el hiperboloide será la de un espacio de de Sitter N dimensional. Esta métrica inducida se puede expresar como

$$ds_{\Sigma}^2 = \frac{1}{H^2 \cos^2 \tilde{t}} (-d\tilde{t}^2 + d\Omega_{(N-1)}^2), \quad (3.38)$$

donde $d\Omega_{N-1}^2$ es el elemento de línea sobre la $(N - 1)$ esfera y \tilde{t} se define como la coordenada temporal en la métrica de de Sitter $-\pi/2 < \tilde{t} < \pi/2$ por la relación

$$R(t) = \frac{1}{H \cos \tilde{t}}, \quad (3.39)$$

con $R(t)$ según ec. (3.34).

3.3.5 Monopolos

Los monopolos están clasificados con una homotopía que se refiere a defectos puntuales, es decir que en una variedad M existe un punto sobre el cual la superficie no puede cerrarse. Los monopolos se forman cuando una variedad de vacío equivalente M tiene superficies que no se pueden cerrar. Este grupo de homotopía es

$$\pi_2(M) \neq I. \quad (3.40)$$

$\pi_2(M)$ es el grupo de homotopía que clasifica a superficies no reducibles en M . Una manera de visualizar esta perturbación es imaginando un cascarón esférico que no se puede reducir para ser un punto porque sobre ese punto el dominio es otro.

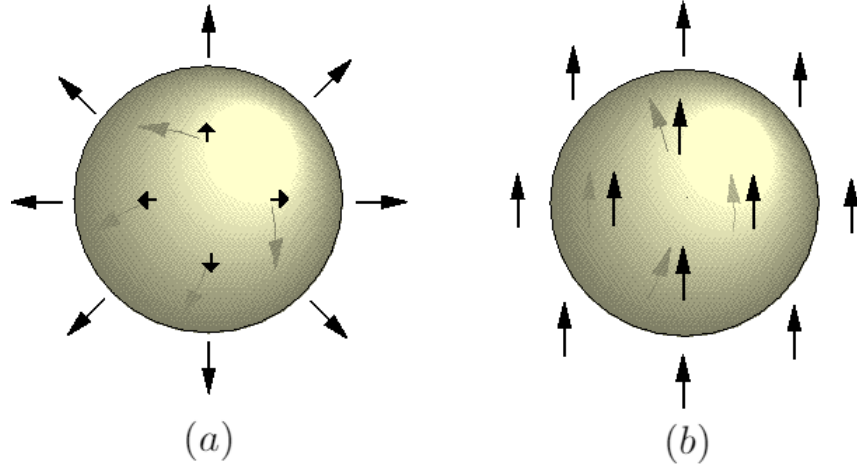


FIGURA 3.6: Líneas de campo sobre un monopolo; a) b)

3.4 Variaciones y Ecuaciones de Movimiento

Ahora que tenemos la acción de una brana en el vacío debemos encontrar la variación de la acción. Para esto empezamos por incluir una perturbación a la coordenada x^μ de la forma:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu. \quad (3.41)$$

Ya que sólo el movimiento perpendicular a la hoja de mundo es observable físicamente, podemos escribir

$$\delta x^\mu = \phi n^\mu, \quad (3.42)$$

donde para este caso ϕ es pequeño, pero normalmente es una función arbitraria de las coordenadas ξ^a .

Para encontrar las variaciones de los objetos que se encuentran en la acción usamos las definiciones dadas en la sección anterior, con ellas podemos encontrar que

$$g_{ab} = \partial_a(x^\mu + \phi n^\mu) \partial_b(x_\mu + \phi n_\mu). \quad (3.43)$$

Entonces, a primer orden

$$\delta g_{ab} = -2\phi K_{ab}, \quad (3.44)$$

y su determinante es

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ab} \delta g_{ab}, \quad (3.45)$$

sustituyendo tenemos

$$\delta \sqrt{-g} = -\phi \sqrt{-g} g^{ab} K_{ab}. \quad (3.46)$$

La variación del determinante se puede resolver tomando que g_{ab} se puede escribir como la exponencial de una matriz invertible y tomando la variación del logaritmo. De manera

similar a los casos anteriores tenemos la variación del campo vectorial normal

$$\delta n^\mu = -g^{ab}\phi_{,b}\partial_a x^\mu. \quad (3.47)$$

Para probar el resultado anterior podemos expresar la perturbación del vector normal en la base de vectores tangente y normal

$$D_\delta n_i = -J_{ai}e^a + \gamma_{ij}n^j, \quad (3.48)$$

donde $D_\delta n_i$ es el gradiente a lo largo de la deformación del campo vectorial de la base normal, i.e. δn^μ . Esta ecuación es análoga a (2.11) pero en deformaciones infinitesimales. Además, en analogía con la expansión de la deformación de la base de vectores tangentes, J_{ai} es el análogo a K_{ab}^i . La otra parte de la ecuación anterior la analizaremos a continuación. La proyección normal de $D_\delta n_i$ es γ_{ij} ; esta estructura asimétrica no tiene un análogo con las ecuaciones anteriores pero vemos que se elimina en el embebimiento de la hipersuperficie. Esto nos sugiere la idea de analogía con w_a^{ij} en las ecuaciones de Gauss Weingarten. Veamos que γ_{ij} se transforma como conexión ante rotaciones del campo normal, al igual que w_a^{ij} .

$$\gamma \rightarrow O\gamma O^{-1} + (D_\delta O)O^{-1}. \quad (3.49)$$

El término que se debe sumar no depende de γ y por una elección adecuada el término γ_{ij} puede desaparecer de la hoja de mundo por una transformación de norma. Si se quiere expresar la forma covariante explícita bajo rotaciones del marco normal se puede introducir una derivada de deformación covariante como lo hacen en [6] de la forma $\tilde{D}_\delta \Psi_i = D_\delta \Psi_i - \gamma_i^j \Psi_j$. De esta manera tenemos que la deformación del vector normal resulta:

$$\tilde{D}_\delta n_i = -J_{ai}e^a = -(\tilde{\nabla}_a \phi_i)e^a. \quad (3.50)$$

Ahora que tenemos la deformación infinitesimal de las bases tangentes, normales y de la métrica y su determinante podemos construir la variación de la acción obtenida en (3.10).

$$\delta S = \int_\Sigma \sqrt{-g} \left[\frac{\epsilon}{N+1} (\phi - x_\mu g^{ab} \phi_{,b} \partial_a x^\mu) + \left[\sigma - \frac{\epsilon}{N+1} x^\mu n_\mu \right] \phi g^{ab} K_{ab} \right] d^N \xi. \quad (3.51)$$

Por el principio de mínima acción tenemos que cuando la ecuación anterior se iguala a cero se pueden obtener las ecuaciones de movimiento (eom). Antes de igualar la acción a cero podemos simplificar la expresión anterior por medio de integración por partes

obteniendo:

$$\delta S = \int_{\Sigma} \sqrt{-g}(\sigma g^{ab} K_{ab} + \epsilon) \phi d^N \xi + \int_{\Sigma} \sqrt{-g} \frac{\epsilon}{N+1} x^{\mu} g^{ab} (\nabla_b \partial_a x_{\mu} - K_{ab} n_{\mu}) \phi d^N \xi, \quad (3.52)$$

donde ∇_a es el operador de derivada covariante que corresponde a la métrica g_{ab} . Como se muestra en el apéndice la derivada covariante resulta igual $K_{ab} n^{\mu}$ teniendo así que

$$\nabla_b \partial_a x_{\mu} = K_{ab} n_{\mu}. \quad (3.53)$$

Lo cual simplifica mucho la expresión de la acción dejándonos solamente el primer término que igualamos a cero.

$$\delta S = \int_{\Sigma} \sqrt{g}(\sigma g^{ab} K_{ab} + \epsilon) \phi d^N \xi = 0. \quad (3.54)$$

El cual nos da las ecuaciones de movimiento (eom) para la brana

$$g^{ab} K_{ab} = -\frac{\epsilon}{\sigma}. \quad (3.55)$$

3.5 Acciones Geométricas

Para el caso de una variación de la acción que depende proporcionalmente de la curvatura extrínseca y productos de esta veremos que estas se reducen a productos de curvaturas extrínsecas con el tensor métrico. A estas acciones las llamaremos acciones geométricas debido a su fácil interpretación como geometría extrínseca. La forma de la variación depende únicamente del determinante de la métrica y de $K = g_{ab} K^{ab}$ y $K_{ab} K^{ab}$. La variación de la primer acción que veremos corresponde a la acción de Dirac-Nambu-Goto que tiene la forma:

$$\delta S = \int_{\Sigma} \sqrt{-g}(\sigma g_{ab} K^{ab} + \epsilon) d^N \xi. \quad (3.56)$$

Esta acción es la misma que se obtuvo para el caso de la pared plana que separa al vacío de un potencial $\rho_v^{(2)}$. Podemos ver que en el caso que la diferencia de potencial es cero, i.e. $\epsilon = 0$, la ecuación describe una superficie mínima la cual es definida como una superficie de curvatura nula.

$$g_{ab} K^{ab} = 0. \quad (3.57)$$

Para el siguiente caso consideramos la variación de la acción como en la ec. (3.54):

$$\delta S = \int_{\Sigma} \sqrt{-g}(\sigma K_{ab} K^{ab} + \epsilon) \phi d^N \xi. \quad (3.58)$$

El cual tiene como eom las siguientes ecuaciones:

$$K_{ab}K^{ab} = -\frac{\epsilon}{\sigma}. \quad (3.59)$$

Estas dos acciones que llevan a distintos resultados se encuentran relacionadas cuando consideramos las perturbaciones de las soluciones. Nótese que las eom tienen la particularidad de estar incluidas en el escalar de Ricci $\mathcal{R} = (g_{ab}K^{ab})^2 - K_{ab}K^{ab}$. Esto se verá más adelante en la sección de perturbaciones.

3.6 Acción de Brana Tipo Lovelock

Una generalización de la gravedad para dimensiones mayores a 4 fué desarrollada por David Lovelock al imponer un lagrangiano con $n + 1$ términos donde n es la dimensión del espacio tiempo [3]. Estos términos que se agregan en el lagrangiano deben obedecer la condición de que las eom siguen siendo de segundo orden. La densidad lagrangiana de la gravedad de Lovelock es

$$\mathcal{L} = \sum_{n=0}^t \alpha_n \sqrt{-g} \mathcal{R}^n, \quad (3.60)$$

donde

$$\mathcal{R}^n = \frac{1}{2^n} \delta_{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2 \dots \mu_n \nu_n}^{\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \dots \alpha_n \beta_n} \prod_{r=1}^n \mathcal{R}^{\mu_r \nu_r}_{\alpha_r \beta_r}. \quad (3.61)$$

Esta expresión tendrá más sentido cuando desarrollemos las branas tipo Lovelock. Rojas et al. [18] denominan a las branas en las que se les imponen estas condiciones, branas tipo Lovelock.

Para construir la acción de la brana de tipo Lovelock procedemos de manera similar a la acción anterior pero esta vez el espacio donde se encuentra inmerso la brana Σ es un espacio $p + 2$ dimensional de Minkowski donde agregaremos los términos extra que tiene el lagrangiano. Considere una brana espacialoide Σ de dimensión p inmersa en un espacio de Minkowski de dimensión $N = p + 2$. Como sabemos la brana dejará una hipersuperficie de dimensión $p + 1$ durante el trayecto o evolución, a esta hipersuperficie temporaloide le llamamos el volumen de mundo m y su descripción topológica es la que nos permite estudiar su acción. m se describe por las funciones de embebimiento $y^\mu = X^\mu(x^a)$ donde y^μ son las coordenadas del espacio-tiempo de Minkowski \mathcal{M} y x^a las coordenadas de m . A partir de los vectores definidos podemos encontrar los vectores tangentes $e_a^\mu = \partial_a X^\mu$ y con estos, la métrica inducida y la curvatura extrínseca que jugarán un papel importante en la acción de la brana. La métrica inducida sobre la

brana es $g_{ab} = \eta_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu = e_a \cdot e_b$. La acción del volumen de mundo ($p + 1$) dimensional con dependencia de las funciones de embebimiento es:

$$S[X] = \int_m d^{p+1}y \sqrt{-g} \sum_{n=0}^{p+1} \alpha_n L_n(g_{ab}, K_{ab}), \quad (3.62)$$

donde

$$L_n(g_{ab}, K_{ab}) = \delta_{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}^{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} K^{b_1}_{a_1} K^{b_2}_{a_2} K^{b_3}_{a_3} \dots K^{b_n}_{a_n}. \quad (3.63)$$

Este lagrangiano se compone del producto del tensor de curvatura extrínseca contrayendo sus índices con la delta de Kronecker generalizada (gKd). Como la curvatura extrínseca es la derivada covariante de las derivadas tangenciales de las funciones de embebimiento entonces las eom son ecuaciones de segundo orden.

$$\delta_{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2 \dots \mu_n \nu_n}^{\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \dots \alpha_n \beta_n} = \begin{vmatrix} \delta_{\mu_1}^{\alpha_1} \delta_{\nu_1}^{\beta_1} & \dots & \delta_{\mu_n}^{\alpha_n} \delta_{\nu_n}^{\beta_n} \\ \delta_{\mu_1}^{\beta_1} \delta_{\nu_1}^{\alpha_1} & \dots & \delta_{\mu_n}^{\alpha_n} \delta_{\nu_n}^{\beta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{\mu_1}^{\alpha_n} \delta_{\nu_1}^{\beta_n} & \dots & \delta_{\mu_n}^{\alpha_n} \delta_{\nu_n}^{\beta_n} \\ \delta_{\mu_1}^{\beta_n} \delta_{\nu_1}^{\alpha_n} & \dots & \delta_{\mu_n}^{\beta_n} \delta_{\nu_n}^{\alpha_n} \end{vmatrix}. \quad (3.64)$$

Es fácil ver que el reordenamiento de los índices tiene como consecuencia que la contracción con el determinante resulte en

$$\delta_{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2 \dots \mu_n \nu_n}^{\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \dots \alpha_n \beta_n} = \begin{cases} +1 & \text{si } \mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n \text{ son enteros distintos y son} \\ & \text{permutaciones par de } \alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_n \beta_n, \\ -1 & \text{si } \mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n \text{ son enteros distintos y son} \\ & \text{permutaciones impar de } \alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_n \beta_n, \\ 0 & \text{cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (3.65)$$

donde por permutación par se entiende que el número total de índices intercambiados es par mientras que una permutación impar implica que el número total de índices intercambiados es impar. El determinante de una matriz $n \times n$ se puede escribir en términos de la delta de Kronecker generalizada de la siguiente manera:

$$A := \det(A^\alpha_\beta) = \frac{1}{n!} \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n}^{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_n} A^{\alpha_1}_{\beta_1} A^{\alpha_2}_{\beta_2} A^{\alpha_3}_{\beta_3} \dots A^{\alpha_n}_{\beta_n}. \quad (3.66)$$

La inversa de una matriz también se puede construir con la delta de Kronecker generalizada de manera similar usando el determinante de la matriz.

$$(A^{-1})^\alpha_\beta = \frac{1}{(n-1)!A} \delta_{\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n}^{\beta_2\beta_3\cdots\beta_n} A^{\alpha_2}_{\beta_2} A^{\alpha_3}_{\beta_3} \cdots A^{\alpha_n}_{\beta_n}. \quad (3.67)$$

Notamos que para mantener la forma matricial los índices α y β no se contraen. Otra operación que podemos expresar en forma de (gKd) es el determinante característico de una matriz $M^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + f^\alpha_\beta$.

$$\det(M^\alpha_\beta) = 1 + \sum_{s=1}^n \frac{1}{s!} \delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n}^{\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\beta_n} f^{\alpha_1}_{\beta_1} f^{\alpha_2}_{\beta_2} f^{\alpha_3}_{\beta_3} \cdots f^{\alpha_s}_{\beta_s}. \quad (3.68)$$

Con el objetivo de reducir la notación podemos definir $f_{(s)}$

$$\det(M^\alpha_\beta) = 1 + \sum_{s=1}^n \frac{1}{s!} f_{(s)}, \quad (3.69)$$

donde $s!f_{(s)} = \delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n}^{\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\beta_n} f^{\alpha_1}_{\beta_1} f^{\alpha_2}_{\beta_2} f^{\alpha_3}_{\beta_3} \cdots f^{\alpha_s}_{\beta_s}$ son los determinantes de submatrices o menores de la matriz que corresponden a la fila s . Más aún, estos determinantes se pueden expresar en términos de las trazas de las submatrices, por ejemplo, para $s = 2$.

$$f_{(2)} = \frac{1}{2!} \delta_{\beta_1\beta_2}^{\alpha_1\alpha_2} f^{\beta_1}_{\alpha_1} f^{\beta_2}_{\alpha_2}. \quad (3.70)$$

Realizando el determinante de la gKd tenemos

$$f_{(2)} = \frac{1}{2} (\delta_{\beta_1}^{\alpha_1} \delta_{\beta_2}^{\alpha_2} - \delta_{\beta_2}^{\alpha_1} \delta_{\beta_1}^{\alpha_2}) f^{\beta_1}_{\alpha_1} f^{\beta_2}_{\alpha_2}. \quad (3.71)$$

Contraemos los índices correspondientes.

$$f_{(2)} = \frac{1}{2} (f^{\beta_1}_{\beta_1} f^{\beta_2}_{\beta_2} - f^{\beta_1}_{\beta_2} f^{\beta_2}_{\beta_1}). \quad (3.72)$$

Por último encontramos las trazas de f donde $\text{Tr}(f) = f^i_i$, entonces

$$f_{(2)} = \frac{1}{2} [\text{Tr}(f)^2 - \text{Tr}(f^2)]. \quad (3.73)$$

Además de esto también es importante mencionar que la expansión de Taylor de $(1 - x^2)^{1/2}$ en términos de la gKd se encuentra en la Ref. [18].

Regresando al lagrangiano para la gravedad de Lovelock, hacemos $L_0 = 1$ como en la Ref. [18]. La acción resultante de este lagrangiano es invariante bajo reparametrizaciones del volumen de mundo. Como ya se mencionó el lagrangiano es un polinomio de grado $n \leq p+1$ en la curvatura extrínseca garantizando que la acción es una teoría en derivadas de

segundo orden. Ahora podemos introducir a los términos LBI (Lovelock Brane Invariant) que significan invariantes de brana tipo Lovelock, estos son los términos del lagrangiano con n fijo y son invariantes topológicos gracias al teorema de Gauss-Bonnet ilustrado en la figura 3.7.

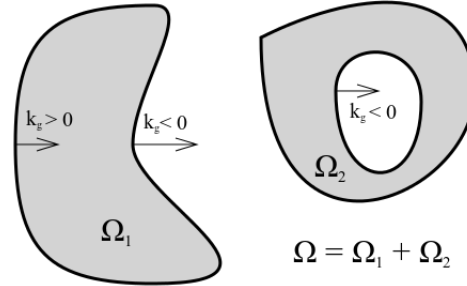


FIGURA 3.7

Teorema de Gauss-Bonnet

Teorema 3.2. Sean M una variedad Riemanniana compacta orientable de dimensión 2, con borde ∂M , K la curvatura Gaussiana en los puntos de M y k_g la curvatura geodésica en los puntos de ∂M . Entonces

$$\int_M K dA + \int_{\partial M} k_g ds = 2\pi\chi(M). \quad (3.74)$$

donde $\chi(M)$ es la característica de Euler de M (3.13).

Para el caso en que la variedad es cerrada (no tiene borde) tenemos que

$$\int_{\partial M} k_g ds = 0. \quad (3.75)$$

De este teorema existe una generalización (Chern-Gauss-Bonnet) para hipersuperficies compactas permite mostrar que los (LBI) son en realidad invariantes topológicos.

A continuación se muestran los primeros 5 lagrangianos para una brana tipo Lovelock donde utilizamos el tensor de Riemann (\mathcal{R}_{abcd}), escalar ($\mathcal{R} = g^{ab}\mathcal{R}_{ab}$) y tensor de Ricci

$$(\mathcal{R}_{ab} = g^{cd}\mathcal{R}_{cabd}).$$

$$\begin{aligned}
L_0 &= 1, \\
L_1 &= K, \\
L_2 &= K^2 - K_{ab}^2, \\
&= \mathcal{R}, \\
L_3 &= K^3 - 3KK_{ab}^2 + 2K_{ab}^3, \\
L_4 &= K^4 - 6K^2K_{ab}^2 + 8KK_{ab}^3 + 3(K_{ab}^2)^2 - 6K_{ab}^4 \\
&= \mathcal{R}^2 - 4\mathcal{R}_{ab}\mathcal{R}^{ab} + \mathcal{R}_{abcd}\mathcal{R}^{abcd}.
\end{aligned} \tag{3.76}$$

En este caso se utilizó la notación adoptada en la Ref. [18] para los productos de K_{ab} donde $K_{ab}^1 := K^a{}_a$, $K_{ab}^2 := K^a{}_b K^b{}_a$, $K_{ab}^3 := K^a{}_c K^c{}_b K^b{}_a$, etc.

Como mencionamos al principio de esta sección la gravedad de Lovelock es una generalización de la gravedad en 3 o 4 dimensiones, vemos que para el caso de la brana tipo Lovelock con $n = 0$ tenemos la acción de Nambu-Goto y para el caso $n = 2$ donde el escalar de Ricci está presente se le conoce como el modelo Regge-Teitelboim [19]. Un caso especial se tiene cuando $p = 3$ que se tiene en $n = 4$ ya que este resulta un invariante topológico según Gauss-Bonnet [4].

3.6.1 Tensor tipo Lovelock

Utilizando las relaciones de la gKd y las ecuaciones de conservación se encuentra el tensor tipo Lovelock $J_{(n)}^{ab}$

$$J_{(n)b}^a = \delta_{bb_1 b_2 b_3 \dots b_n}^{aa_1 a_2 a_3 \dots a_n} K^{b_1}{}_{a_1} K^{b_2}{}_{a_2} K^{b_3}{}_{a_3} \dots K^{b_n}{}_{a_n}. \tag{3.77}$$

Este tensor se contruyó simétrico según las propiedades de la gKd y $\nabla_a K_{bc} = \nabla_b K_{ac}$. Para obtener una relación de recursión desarrollamos la gKd como la suma de sus menores al igual que en la ec. (3.69).

$$J_{(n)b}^a = \delta_b^a L_n - nK^a{}_c J_{(n-1)b}^c. \tag{3.78}$$

Contrayendo los índices de este tensor con el tensor de curvatura extrínseca la expresión se reduce a

$$J_{(n)}^{ab} K_{ab} = L_{n+1}. \tag{3.79}$$

Además podemos expresar L_{n+1} utilizando la ec. (3.78).

$$L_{n+1} = KL_n - nK_{ac}K^c{}_b J_{(n)}^{ab}. \quad (3.80)$$

En la siguiente sección se hace uso de las definiciones anteriores así como del LBT para construir las perturbaciones sobre este tipo de branas.

3.7 Brana Esférica

Un caso que resulta importante debido a su simetría es la brana esférica. Para esta forma geométrica utilizaremos un embebimiento que resulta natural al pasar de un espacio de Minkowski al conocido espacio de de Sitter, el cual resulta análogo a una esfera embebida en espacio euclídeo.

Ahora pasemos a un caso específico en el que la hoja de mundo servirá como base para describir una brana esférica N dimensional en espacio de fondo de de Sitter. Si queremos tener un embebimiento de la hoja de mundo de manera esférica, tenemos que considerar las coordenadas esféricas para $N - 1$ dimensiones tomando en cuenta que la coordenada 0 corresponde a la parte temporal. La coordenada 1 va como el radio mientras que el resto son la parte angular. De la parte angular podemos esperar simetría esférica cuando la brana no es perturbada. Consideremos una N -brana, Σ , evolucionando en un espacio-tiempo de fondo $(N + 1)$ -dimensional de de Sitter con métrica $g_{\mu\nu}$, descrita por el embebimiento $x^\mu = X^\mu(\xi^a)$ donde x^μ son las coordenadas locales para el espacio tiempo de fondo ($\mu\nu = 0, 1, 2, \dots, \mathcal{N} + 1$), ξ^a son las coordenadas locales de la N -brana, \mathcal{N} , que barren la superficie Σ ($a, b = 0, 1, 2, \dots, \mathcal{N}$) y X^μ son las funciones de embebimiento para \mathcal{M} . Notemos que en el espacio de de Sitter tenemos $\mathcal{N} + 2$ coordenadas.

Consideremos un espacio de fondo de de Sitter en coordenadas esféricas [20]. Este espacio tiempo es solución a las ecuaciones de Einstein para un universo vacío maximalmente simétrico en el cual la constante cosmológica $\Lambda \geq 0$ y corresponden a una expansión acelerada. Tomamos este modelo debido a que el interés de la tesis es estudiar burbujas de vacío en el universo temprano sin tomar en cuenta interacciones de tipo gravitacional. El espacio de de Sitter nos describe al universo que tiene inflación en donde encontraríamos la creación de burbujas de vacío. Además resulta útil si se quiere analizar simetría esférica ya que este espacio es análogo a la geometría esférica riemanniana. La métrica de de Sitter viene dada por

$$ds_M^2 = - \left[1 - \frac{r^2}{\alpha^2} \right] dt^2 + \left[1 - \frac{r^2}{\alpha^2} \right]^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 d\theta_2 + \dots), \quad (3.81)$$

donde $\frac{1}{\alpha^2}$ corresponde a la constante cosmológica. Para facilitar la escritura, sustituimos:

$$A = 1 - \frac{r^2}{\alpha^2}, \quad (3.82)$$

obteniendo así:

$$= -Adt^2 + A^{-1}dr^2 + r^2d\Omega_{N-1}^2. \quad (3.83)$$

Como se mencionó anteriormente para tener una parametrización de la hoja de mundo se realiza un embebimiento de esta en el espacio de fondo con las funciones correspondientes.

El embebimiento que utilizamos para la brana esférica es el siguiente :

$$x^\mu = X^\mu(\tau, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots) = \begin{pmatrix} t(\tau) \\ R(\tau) \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (3.84)$$

donde $R(\tau)$ representa el radio de la esfera. Nótese que la coordenada de tiempo ahora es sobre el tiempo propio de la brana, así el radio y el tiempo, llamado tiempo externo, están parametrizados por el tiempo propio. Entonces el elemento de línea queda como:

$$ds^2 = -(\dot{t}^2 - \dot{R}^2)dt^2 + d\Omega_{N-1}^2. \quad (3.85)$$

Una vez que tenemos el elemento de línea podemos obtener, a través de un embebimiento, las coordenadas que se refieren a la brana inmersa en el espacio de fondo de de Sitter. Para obtener la curvatura extrínseca es necesario conocer el vector unitario normal a la brana. En adelante consideraremos la codimensión $\mathcal{D} = 1$. De la sección anterior, el vector normal está caracterizado por las ecuaciones:

$$n_\mu n^\mu = 1, \quad n_\mu \partial_a x^\mu = 0, \quad (3.86)$$

que en este caso resulta:

$$n^\mu = \frac{1}{N} (\dot{R}, \dot{t}, 0, \dots, 0). \quad (3.87)$$

Ahora que tenemos las componentes del vector normal, hace falta encontrar las derivadas covariantes de los vectores tangentes a la brana e_a^μ

$$D_a e_b^\nu = e_a^\mu \nabla_\mu e_b^\nu, \quad (3.88)$$

donde $D_a = e_a^\mu D_\mu$ y D_μ es la derivada covariante en el espacio de fondo o compatible con la métrica $g_{\mu\nu}$.

Desarrollando la derivada covariante con respecto a μ ,

$$e_a^\mu \nabla_\mu e_b^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} \left(\frac{\partial e_b^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\gamma}^\nu e_b^\gamma \right). \quad (3.89)$$

Utilizando regla de la cadena, desarrollamos el primer producto.

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x^\mu \partial \xi^b} = \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \xi^a \partial \xi^b}, \quad (3.90)$$

entonces

$$D_a e_b^\nu = \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \xi^a \partial \xi^b} + e_a^\mu \Gamma_{\mu\gamma}^\nu e_b^\gamma. \quad (3.91)$$

Así las únicas componentes del tensor de curvatura extrínseca distintas de cero son, [4].

$$K_{\tau\tau} = -\frac{1}{N} \left[-\dot{R}t + t\ddot{R} - \frac{r}{\alpha^2} \left(t^3 A - 3t\dot{R}^2 A^{-1} \right) \right], \quad (3.92)$$

donde

$$A = \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2} \right). \quad (3.93)$$

La primer componente del tensor se escribe como,

$$K_{\theta_1\theta_1} = \frac{R\dot{t}}{N} A. \quad (3.94)$$

La segunda componente del tensor queda como:

$$K_{\theta_2\theta_2} = \frac{R\dot{t}}{N} A \sin^2 \theta_1. \quad (3.95)$$

Expresamos explícitamente la tercer componente también

$$K_{\theta_3\theta_3} = \frac{R\dot{t}}{N} A \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2. \quad (3.96)$$

En general la N -ésima componente es,

$$K_{\theta_{N-1}\theta_{N-1}} = \frac{R\dot{t}}{N} A \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \cdots \sin^2 \theta_{N-1}. \quad (3.97)$$

Con las componentes del tensor podemos construir el escalar $K = g^{ab}K_{ab} = TrK$

$$K = \frac{1}{N^3} \left[-\dot{R}\ddot{t} + t\ddot{R} - \frac{r}{\alpha^2} \left(t^3 A - 3t\dot{R}^2 A^{-1} \right) \right] + (n-1) \frac{R\dot{t}}{N} A. \quad (3.98)$$

También calculamos la traza de K^2

$$Tr(K^2) = (K^2)_a^a = g_{bd}K^{de}g_{ea}K^{ab}, \quad (3.99)$$

que resulta en la suma de los cuadrados de cada término.

$$Tr(K^2) = \left[\frac{1}{N^3} \left[-\dot{R}\ddot{t} + t\ddot{R} - \frac{r}{\alpha^2} \left(t^3 A - 3t\dot{R}^2 A^{-1} \right) \right] \right]^2 + \left(\sqrt{(n-1)} \frac{R\dot{t}}{N} A \right)^2. \quad (3.100)$$

El propósito de calcular las trazas de K y K^2 resulta útil en el cálculo del escalar de Ricci que se muestra a continuación. A partir de las trazas de K y K^2 podemos calcular el escalar de Ricci.

$$\mathcal{R} = Tr(K)^2 - Tr(K^2). \quad (3.101)$$

Sustituyendo (3.100) y (3.98) en la ecuación anterior tenemos:

$$\mathcal{R} = \left[\frac{1}{N^3} B + (n-1) \frac{R\dot{t}}{N} A \right]^2 - \frac{1}{N^6} B^2 - (n-1) \frac{R^2 \dot{t}^2}{N^2} A^2, \quad (3.102)$$

donde B está dado por:

$$B = -\dot{R}\ddot{t} + t\ddot{R} - \frac{r}{\alpha^2} \left(t^3 A - 3t\dot{R}^2 A^{-1} \right). \quad (3.103)$$

Capítulo 4

Perturbaciones de las Branas

La teoría de perturbaciones consiste en tomar la solución de un sistema simple y perturbarlo infinitesimalmente para estudiar las condiciones de estabilidad del sistema. En el caso de cosmología es fácil interpretar que durante la evolución de un objeto este puede ser alterado o perturbado por su interacción con otros sistemas. Suponiendo que la interacción es “pequeña” esta puede aproximar la dinámica del sistema a la situación real. Un ejemplo fácil de imaginar es el de una burbuja idealizada que crece, el modelo a primer orden nos proporciona una esfera con simetría esférica que crece donde cada sección de área se deforma de la misma manera manteniendo así su forma esférica. Notamos que esta situación es muy idealizada ya que si el sistema no es cerrado la burbuja es propensa a interactuar con las demás cosas que están en el universo eventualmente. La manera en que estas interacciones aleatorias afectan la dinámica de la burbuja se estudian introduciendo perturbaciones en el lagrangiano. Esta es una de las maneras en que un sistema idealizado puede llevarse a una situación física.

En esta sección tomaremos un primer paso hacia la cuantización de la brana por medio de perturbaciones en las eom, así como comprobar el resultado obtenido por Garriga y Vilenkin en [6]. Además de esto también determinamos la masa del campo y su acoplamiento a la curvatura de la hoja de mundo.

Lo primero que debemos hacer es considerar una perturbación en las coordenadas de la misma forma que lo hicimos para la variación de la acción, esto es, tomamos que la solución perturbada es de la forma $\tilde{x}^\mu = x^\mu + \phi n^\mu$. Por el mismo argumento que en la acción, sólo las perturbaciones perpendiculares a Σ son de interés pero esta vez no estamos tratando con variaciones matemáticas sino con perturbaciones físicas.

La perturbación en las coordenadas tiene como repercusión una perturbación en todos los términos que derivan de estas.

$$\tilde{g}_{ab} = g_{ab} + \delta g_{ab} \quad (4.1)$$

$$\tilde{K}_{ab} = K_{ab} + \delta K_{ab} \quad (4.2)$$

$$\tilde{n}^\mu = n^\mu + \delta n^\mu \quad (4.3)$$

Al realizar el mismo procedimiento para obtener la solución perturbada de la acción (3.55) tenemos.

$$g^{ab}\delta K_{ab} + K_{ab}\delta g^{ab} = 0. \quad (4.4)$$

Ya que las derivadas covariantes funcionan análogamente a las perturbaciones podemos sustituir las expresiones para las partes infinitesimales de la subsección de variaciones.

$$\square\Phi + K_{ab}K^{ab}\Phi = 0, \quad (4.5)$$

donde \square es el operador d'Alambertiano o la segunda derivada con el producto que mantiene la covarianza en espacio-tiempo N dimensional, i.e. $\square = g^{ab}\nabla_a\nabla_b$. Para encontrar la ecuación anterior consideramos que la perturbación en la curvatura extrínseca se puede expresar como:

$$\delta K_{ab} = -\partial_a(g^{cd}\phi_{,c}\partial_d x^\mu)\partial_b x^\mu - \phi\partial_a n_\mu\partial_b n^\mu. \quad (4.6)$$

Sustituyendo en (4.4) tenemos:

$$g^{ab}(-\partial_a(g^{cd}\phi_{,c}\partial_d x^\mu)\partial_b x_\mu - \phi\partial_a n^\mu\partial_b n_\mu) + K_{ab}2\phi K^{ab} = 0. \quad (4.7)$$

Simplificamos un poco las dos partes del primer término utilizando el mismo desarrollo que se utilizó en la ec.(3.53) expresado en el Apéndice A.

$$g^{ab}(-\nabla_a\partial_b\phi + \phi K_a^c K_{cb}) + 2\phi K_{ab}K^{ab} = 0. \quad (4.8)$$

Esta es la expresión que se tiene para espacio plano de Minkowski como lo hacen en [4] pero en el caso de de Sitter se tiene que agregar un término como se muestra a continuación

$$\delta K_{ab}^i = -\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\phi^i + [g(\mathcal{R}(e_a, n_j)e_b, n^i) + K_{ac}^i K_{bj}^c]\phi^j. \quad (4.9)$$

Por último contraemos uno de los índices que corresponden al producto de la métrica con la derivada covariante del campo escalar así como el producto de la métrica con la curvatura extrínseca para restar con el producto de curvaturas extrínsecas. De esto

obtenemos la perturbación de la solución como se expresó anteriormente.

$$\square\Phi + K_{ab}K^{ab}\Phi = 0. \quad (4.10)$$

Esta solución puede reescribirse en términos de la curvatura intrínseca utilizando el escalar de curvatura (o escalar de Ricci).

$$\mathcal{R} = (g^{ab}K_{ab})^2 - K_{ab}K^{ab}. \quad (4.11)$$

Entonces la eom para un campo escalar en espacio de Minkowski N+1 dimensional es:

$$-\square\phi + \left[\mathcal{R} - \frac{\epsilon}{\sigma} \right] \phi = 0. \quad (4.12)$$

Para el caso de espacio de fondo de de Sitter tomamos las consideraciones que se discutieron anteriormente en la ec. (2.59) dejando la ecuación de movimiento como sigue.

$$\square\Phi + (p+1)H^2\Phi - K_{ab}K^{ab}\Phi = 0. \quad (4.13)$$

4.0.1 Perturbaciones de las Branas Tipo Lovelock

En la Ref. [4] se obtienen la eom para este tipo de branas en el caso de un embebimiento en espacio de fondo de Minkowski. En este caso generalizamos la eom para una brana embebida en un espacio de de Sitter y notamos que en el caso particular cuando el espacio es plano volvemos a obtener los resultado del artículo [4]. El procedimiento es similar a excepción del término extra en la variación de la curvatura extrínseca el cual ya hemos hecho notar anteriormente.

Tomemos la variación de la acción propuesta en (3.62) para ver que las eom resultantes son de segundo orden. Esta variación es la manera en que reacciona la acción a pequeños cambios en el volumen de mundo. La variación se hace sobre las funciones de embebimiento X^μ .

$$\delta S[X] = \int_m \left[\delta(\sqrt{-g}) \sum_{n=0}^{p+1} \alpha_n L_n + \sqrt{-g} \sum_{n=0}^{p+1} \alpha_n \delta L_n \right] d^{p+1}x. \quad (4.14)$$

Esta es apenas la primera variación de la acción, más adelante se realiza una segunda variación. Esta variación es similar a la de la acción de la brana en la ec.(4.4). Ahora debemos aplicar también la variación al producto de la gKd, esta resulta:

$$\delta L_n = n \delta_{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n} K^{\beta_2}_{\alpha_2} K^{\beta_3}_{\alpha_3} \dots K^{\beta_n}_{\alpha_n} \delta K^{\beta_1}_{\alpha_1}. \quad (4.15)$$

Aquí encontramos la variación de la curvatura extrínseca y como se mencionó anteriormente existe un término extra que para el caso de espacio plano no se tiene. En el capítulo 1 se desarrolla la deformación de esta y se tiene como resultado:

$$\tilde{D}_\delta K_{ab}^i = -\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \phi^i - H^2 \gamma_{ab} \phi^i + K_{ac}^i K^c_{bj} \phi^j. \quad (4.16)$$

La ecuación anterior es la misma que la ec. (2.59) pero en este caso hay que recordar que es una deformación física y por tanto las deformaciones que se toman en cuenta son las perpendiculares a la brana. Ya que tenemos la variación de la curvatura extrínseca podemos regresar a la variación del lagrangiano. Utilizando la relación (3.77) y la anti-simetría de la gKd tenemos

$$\delta L_n = n J_{(n-1)\beta}^\alpha \delta K^\beta{}_\alpha. \quad (4.17)$$

Desarrollando la variación de la curvatura extrínseca con la regla de la cadena, la variación del lagrangiano resulta

$$\delta L_n = -n K^c{}_a J_{(n-1)}^{ab} \delta g_{bc} + n J_{(n-1)}^{ab} \delta K_{ab}. \quad (4.18)$$

Utilizamos la relación (3.78) para separar la variación de la métrica de la curvatura extrínseca.

$$\delta L_n = \left(J_{(n-1)}^{ab} - g^{ab} L_n \right) \delta g_{bc} + n J_{(n)}^{ab} \delta K_{ab}. \quad (4.19)$$

Entonces la variación de la acción resulta ser

$$\delta S = \int_m \sqrt{-g} \sum_{n=0}^{p+1} \alpha_n \left[\left(J_{(n-1)}^{ab} - g^{ab} L_n \right) \delta g_{bc} + n J_{(n-1)}^{ab} \delta K_{ab} \right] + L_n \delta \sqrt{-g} d^{p+1}x. \quad (4.20)$$

Como ya mencionamos, la variación es sobre las funciones de embebimiento pero al igual que en las branas anteriores sólo el movimiento transversal al volumen de mundo es un observable físico, así tomamos la misma consideración al introducir el campo escalar ϕ , $\delta_\perp X^\mu = \phi n^\mu$. Entonces la variación de la acción, sustituyendo las variaciones de la métrica y de la curvatura extrínseca según ec.(3.44) y (2.59) es

$$\delta S = \int_m \sqrt{-g} \sum_{n=0}^{p+1} \alpha_n \left[2J_{(n)}^{ab} K_{ab} - 2g^{ab} K_{ab} L_n + n J_{(n-1)}^{ab} K_{ac} K^c{}_b - n H^2 g_{ab} J_{(n-1)}^{ab} \right. \\ \left. - n J_{(n-1)}^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi \right] d^{p+1}x. \quad (4.21)$$

Utilizando la ecuación de conservación de LBT tenemos:

$$\begin{aligned} \delta S = \int_m \sqrt{-g} \sum_{n=0}^{p+1} \alpha_n \left(2J_{(n)}^{ab} K_{ab} - KL_n + nK^c{}_a J_{(n-1)}^{ab} K_{cb} - nH^2 g_{ab} J_{(n-1)}^{ab} \right) \phi \\ + \int_m \nabla_a \left(-\sqrt{-g} \sum_{n=0}^{p+1} \alpha_n n J_{(n-1)}^{ab} \nabla_b \phi \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Podemos simplificar esta expresión si notamos que según la ec.(4.19) el primer término se reduce al producto del tensor de Lovelock con la curvatura extrínseca.

$$\delta S = \int_m \sqrt{-g} \mathcal{E} \phi + \int_m \sqrt{-g} \nabla_a Q^a [\delta \phi], \quad (4.23)$$

donde

$$\mathcal{E} = \sum_{n=0}^{p+1} \alpha_n (J_{(n)}^{ab} K_{ab} - nH^2 J_{(n-1)}^{ab} g_{ab}) = 0, \quad (4.24)$$

es la eom de Euler Lagrange. La separación en dos integrales tiene como propósito hacer notar que el primer término resulta en la ecuación de movimiento que estamos buscando mientras que el segundo término que se expresa como

$$Q^a = \sum_{n=0}^{p+1} \alpha_n Q_{(n)}^a = - \sum_{n=0}^{p+1} \alpha_n n J_{(n-1)}^{ab} \nabla_b \phi, \quad (4.25)$$

el cual es un operador diferencial definido sobre el volumen de mundo. Cuando tenemos un lagrangiano que es una derivada total las eom son las triviales lo que para este caso significa que este lagrangiano no aporta a las eom. El primer término que resulta de la variación de la acción es el que dictará la deformación sobre la brana, este tiene eom de segundo orden y por tanto sólo existe un grado de libertad para estas branas. El grado de libertad existente es el de ϕ normal a la brana debido a que solo tenemos un término que tiene derivada de segundo orden con respecto a las variables del campo ϕ . A esto también se le llama respiración de la brana, en el sentido que la brana solo se mueve a través de sus vectores normales.

Como mencionamos al inicio de esta sección realizaremos la segunda variación de la acción respecto a las funciones de embebimiento. Cabe mencionar que esta vez no sólo tomaremos en cuenta las variaciones perpendiculares sino también las tangenciales debido a que se tienen deformaciones tangenciales finitas y no existe una reparametrización para estas, es decir que estas deformaciones tangenciales afectarán a los observables físicos. Cabe mencionar el cambio en la notación para reflejar la métrica de la brana

embebida γ_{ab} . Iniciamos con el proceso de la segunda variación.

$$\delta^2 S = \int_m \delta \left(\sqrt{-\gamma} (J_{(n)}^{ab} K_{ab} + n \gamma_{ab} H^2 J_{(n-1)}^{ab}) \right). \quad (4.26)$$

Para el término extra podemos utilizar la relación entre el lagrangiano y los LBT.

$$J_{(n)}^{ab} \gamma_{ab} = (p + 1 - n) L_n. \quad (4.27)$$

Nuevamente utilizamos la ec.(4.19)

$$\delta L_n = -n K^c{}_a J_{(n-1)}^{ab} \delta \gamma_{bc} + n J_{(n-1)}^{ab} \delta K_{ab}. \quad (4.28)$$

Junto con la relación

$$\delta \sqrt{-\gamma} = -\phi \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} K_{ab}, \quad (4.29)$$

la segunda variación de la acción resulta

$$\begin{aligned} \delta S^2 = \int_m \sqrt{-\gamma} \left[(n+1) J_{(n)c}^a K_{ab} \delta \gamma^{bc} \right. \\ + (n+1) J_{(n)}^{ab} \delta K_{ab} \\ - (n)(n-1)(p-n+2) H^2 K^c{}_a J_{(n-2)}^{ab} \delta \gamma_{bc} \\ \left. + (n)(n-1)(p-n+2) H^2 J_{(n-2)}^{ab} \delta K_{ab} \right] \phi. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Por último sustituimos δK_{ab} y $\delta \gamma^{ab}$ para espacio curvo.

$$\begin{aligned} \delta S^2 = \int_m \sqrt{-\gamma} \left[(n+1) J_{(n)c}^a K_{ab} (-2K^{bc} \phi) \right. \\ + (n+1) J_{(n)}^{ab} (-\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \phi^i + [-H^2 \gamma_{ab} \delta_j^i + K_{ac}^i K_{bj}^c] \phi^j) \\ - (n)(n-1)(p-n+2) H^2 K^c{}_a J_{(n-2)}^{ab} (2K_{bc} \phi) \\ + (n)(n-1)(p-n+2) H^2 J_{(n-2)}^{ab} (-\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \phi^i \\ \left. + [-H^2 \gamma_{ab} \delta_j^i + K_{ac}^i K_{bj}^c] \phi^j) \right] \phi. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Haciendo la segunda variación igual a cero tenemos que la eom es:

$$\begin{aligned} -2(n+1) J_{(n)c}^a K_{ab} K^{bc} \phi \\ - (n+1) J_{(n)}^{ab} (\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \phi^i + H^2 \gamma_{ab} \phi^i - K_{ac}^i K_{bj}^c \phi^j) \\ - 2(n)(n-1)(p-n+2) H^2 K^c{}_a J_{(n-2)}^{ab} K_{bc} \phi \\ - (n)(n-1)(p-n+2) H^2 J_{(n-2)}^{ab} (\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \phi^i + H^2 \gamma_{ab} \phi^i - K_{ac}^i K_{bj}^c \phi^j) = 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Podemos simplificar un poco esta expresión tomando en cuenta que algunos términos se restan,

$$\begin{aligned}
& -[(n+1)J_{(n)}^{ab} + (n)(n-1)(p+2-n)H^2 J_{(n-2)}^{ab}] \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \phi^i \\
& - (n+1)J_{(n)}^{ab} K_a^c K_{bc} \phi - (n)(n-1)(p+2-n)H^2 J_{(n-2)}^{ab} K_a^c K_{bc} \\
& - (n+1)J_{(n-2)}^{ab} H^2 \gamma_{ab} \phi - (n)(n-1)(p+2-n)H^4 J_{(n-2)}^{ab} \gamma_{ab} \phi = 0.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Notemos que si $H = 0$.

$$-(n+1)J_{(n)}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \phi - (n+1)J_{(n)}^{ab} K_a^c K_{bc} \phi = 0, \tag{4.34}$$

en acuerdo con la Ref. [4]. Podemos expresar la ecuación anterior de la siguiente forma.

$$((n+1)J_{(n)}^{ab} + (n)(n-1)(p-n+2)H^2 J_{(n-2)}^{ab}) \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \phi^i + M_{(n)}^2 \phi = 0, \tag{4.35}$$

donde

$$\begin{aligned}
M_{(n)}^2 = & (n+1)J_{(n)}^{ab} K_a^c K_{bc} + (n)(n-1)(p+2-n)H^2 J_{(n-2)}^{ab} K_a^c K_{bc} \\
& + (n+1)J_{(n-2)}^{ab} H^2 \gamma_{ab} + (n)(n-1)(p+2-n)H^4 J_{(n-2)}^{ab} \gamma_{ab}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Notemos que ahora $M_{(n)}^2$ depende de la dimensión p y que tanto $M_{(0)}^2$ como $M_{(1)}^2$ no están definidos.

Los primeros términos de la masa son

$$\begin{aligned}
M_{(2)}^2 = & -6G_{(1)}^{ab} K_a^c K_{bc} + 2(p)H^2 K_{ab} K^{ab} \\
& + 3(p+1)H^2 + 2(p)(p+1)H^4.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Donde

$$G_{ab}^{(1)} = R_{ab} - \frac{1}{2}R\gamma_{ab} = -\frac{(p)(p-1)}{2}H^2 \gamma_{ab}. \tag{4.38}$$

Simplificando el primer término tenemos

$$\begin{aligned}
M_{(2)}^2 = & (3p+1)(p)H^2 K_{ab} K^{ab} \\
& + 3(p+1)H^2 + 2(p)(p+1)H^4.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

El siguiente término corresponde a $n = 3$.

$$M_{(3)}^2 = 4(\gamma^{ab} L_3 - 3\mathcal{R}K^{ab} + 6K K^a_c K^{cb} - 6K^a_c K^c_d K^{db}). \tag{4.40}$$

Las eom resultantes no son exactamente las mismas que en el capítulo de Branas pero la diferencia sólo es el término que tiene a H^2 . Esto es debido a que la acción con la que comenzamos es una generalización de la acción para una brana y los procedimientos que seguimos para las perturbaciones fue similar. Esto no quiere decir que otro procedimiento no lleve a la misma conclusión, de hecho, otra forma de proceder es de manera no perturbativa sino tomando deformaciones en una descripción cinemática del volumen de mundo. Por otro lado las fluctuaciones en los vectores tangentes no ofrecen cambios en la dirección normal a la brana y por esto no se analizan en este trabajo.

4.1 Fluctuaciones Cuánticas

Tomando el resultado de la perturbación de branas obtenido en la sección anterior, notamos que la perturbación se puede medir como un campo que existe sobre la brana. Tomando este campo, Vilenkin y Garriga [5] proponen una teoría cuántica de campos para el escalar real ϕ . Las fluctuaciones cuánticas sobre los defectos son caracterizados por la función de dos puntos que es un caso particular de funciones de Green donde la función solo tiene un par de argumentos (ξ', ξ'') . En el caso de branas notaremos que la dimensión juega un papel importante aportando resultados típicos de la teoría cuántica de campos.

4.1.1 QFT en Breve

Antes de comenzar con fluctuaciones cuánticas es importante tener un marco teórico sobre la teoría cuántica de campos (QFT). Este marco se restringe a las partes de la teoría que son útiles en esta tesis. QFT surge de la necesidad de relacionar dos grandes teorías: relatividad especial y mecánica cuántica. Una de las principales aportaciones es la creación y aniquilación de partículas así como la integral de camino y su interpretación gráfica en diagramas de Feynman. La QFT se puede desarrollar de varias maneras (Weinberg [1]) pero históricamente se construye proponiendo una cuantización canónica en campos en vez de partículas donde la posición y momento se convierten en operadores que obedecen ciertas reglas de conmutación. Estos campos se encuentran acompañados de operadores $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ que representan la creación y aniquilación de partículas, donde las partículas se interpretan como fluctuaciones en el campo y el campo como propiedad del espacio-tiempo. Una representación de los operadores de creación y aniquilación es

la siguiente:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(\omega_k q + ik), \quad (4.41)$$

$$[\hat{a}(k), \hat{a}^\dagger(k')] = i\delta^D(k - k'), \quad (4.42)$$

donde k y q son los operadores de momento y posición respectivamente y ω_k es la frecuencia definida como $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$. El estado de vacío se define utilizando el operador de aniquilación de la siguiente manera:

$$\hat{a}_n|0\rangle = 0. \quad (4.43)$$

Una manera heurística de entender esto se presenta en la Ref. [12] y en la Figura 4.1. El campo escalar de una partícula libre se expresa de la siguiente forma:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^D k}{\sqrt{(2\pi)^D 2\omega_k}} \left\{ a(k) \exp[-i(\omega_k t - k \cdot x)] + a(k)^\dagger \exp[i(\omega_k t - k \cdot x)] \right\}. \quad (4.44)$$

La amplitud de probabilidad se puede calcular utilizando la integral de camino definida de la siguiente manera:

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{Z} \int_{\mathbf{x}(0)=x} \mathbf{D}\mathbf{x} e^{iS[x,\dot{x}]} \Psi_0(\mathbf{x}(t)), \quad (4.45)$$

donde $\mathbf{D}\mathbf{x}$ es la integración sobre todos los caminos \mathbf{x} donde $\mathbf{x}(0) = x$ y Z es el factor de normalización.

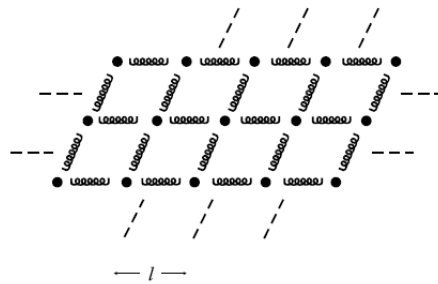


FIGURA 4.1: Red de resortes donde la perturbación de un resorte indica una partícula que “nace” en un lado y “muere” en otro

El estado base o estado de vacío se refiere al estado que toma un campo donde su energía es mínima, no se presentan partículas y se denota por $|0\rangle$. Siguiendo la analogía con la red de resortes, el estado base es cuando la red no tiene ningún resorte en resonancia, es decir no hay partículas creándose y por tanto tampoco se están aniquilando.

La amplitud de propagación se puede calcular por medio de la función de correlación que es un funcional que funciona como un promedio de la integral de camino de Feynmann cuando se divide sobre todos los caminos.

$$\langle \phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_n) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n)}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}} \quad (4.46)$$

Un caso particular es el propagador de Feynmann ($n=2$) de donde parte la función de dos puntos también conocida como función de Green aunque este término no se restringe a $n = 2$.

Ecuación de Klein-Gordon

En QFT es importante la teoría de representaciones ya que esta define al grupo de Lie que la teoría utiliza. La representación del grupo de Lie nos permite saber la manera en que los operadores conmutan utilizando el paréntesis de Lie. La teoría que suponemos a lo largo del trabajo es principalmente la de partícula libre que está relacionada con el escalar de Higgs mediante el modelo de Goldstone. Esta teoría especifica a un campo escalar pero cuando se requieren más propiedades se utiliza otra representación, para el caso de partículas cargadas de spin $\frac{1}{2}$ la representación es la de Klein-Gordon. Para el caso de la ecuación de Klein Gordon se tiene que los campos no conmutan sino que gracias a los operadores de creación y aniquilación estos operan de la siguiente manera:

$$[\phi(\vec{x}, t), \phi^\dagger(\vec{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.47)$$

donde

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3(2w_p)} (a(p)e^{-i\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a^\dagger(p)e^{i\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}). \quad (4.48)$$

La ecuación de Klein Gordon tiene la siguiente forma:

$$(\square + m^2)\Psi = 0, \quad (4.49)$$

donde \square es el operador D'Alambertiano y m el término de masa. Aquí termina el breve resumen de las partes de QFT pertinentes a este trabajo y continuamos con las fluctuaciones cuánticas de perturbaciones.

4.1.2 Fluctuaciones Cuánticas de Defectos Topológicos

En el libro "Cosmic Strings and Other Topological Defects" [7] se discute la creación de defectos topológicos durante inflación y se llega a la conclusión que estos defectos

topológicos no pueden sobrevivir inflación y en su defecto desaparecen debido a la velocidad constante con la que se desarrollan. Esto parece poner un alto a la investigación de tales defectos durante el universo temprano que pudieran afectar al universo visible. De hecho decide renombrarlos de defectos a ceros de la función ϕ ya que sus propiedades como defectos ya no son importantes. Además dentro de ese mismo capítulo encuentran las condiciones en espacio de de Sitter para que se obtengan estos ceros de la función ϕ sobre los cuales se pueden crear defectos en el universo visible y con esto recobra el sentido de analizar los defectos durante inflación.

El primer defecto topológico que analizaremos es la pared de dominio plana. Las perturbaciones en la pared de dominio resultaron ser un campo que vive sobre el defecto. Este campo es el que podemos cuantizar. Es importante notar que en el tratamiento de estos defectos topológicos se asume que el grosor de la pared que separa a los dos medios es muy delgada y así no contribuye al lagrangiano ni a las eoms. Recordemos que la acción para el caso de una pared plana embebida en un espacio de Minkowski plano con $R = \epsilon = 0$ es:

$$S_\phi = \int \frac{-\sigma}{2} (\partial_a \phi \partial^a \phi) d^3 \xi. \quad (4.50)$$

Esta ecuación resulta ser la acción para un campo escalar sin masa en espacio de Minkowski (2+1) dimensional. El estado de vacío resulta ser el estado asociado con los modos positivos de frecuencia. Es importante notar que en espacio curvo no existe una prescripción “natural” para elegir los modos de frecuencia en el estado de vacío. Las dos frecuencias se originan cuando se define ω_k ya que esta puede tomar dos valores; positivo y negativo donde ambos valores resultan en la ecuación de Klein-Gordon. La frecuencia que se elige es positiva para el caso de espacio plano y la función de onda tiene la forma:

$$\phi_k = (2\pi)^{-1} (2\omega_k) e^{-i\omega_k t + i\vec{k} \cdot \vec{x}}. \quad (4.51)$$

En este caso las funciones de embebimiento sólo se encuentran definidas por tres coordenadas (t, x, y) . La forma de este estado tiene como propiedad ser invariante bajo traslaciones, rotaciones y “boosts” de Lorentz. A esta simetría “máxima” se le denomina invariancia de Poincaré. Esta invariancia no se expresa manifiestamente en el estado pero si lo hace en la función de correlación.

$$\langle 0 | \phi(x') \phi(x'') | 0 \rangle = \frac{\sigma^{-1}}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 k}{2\omega} \exp [ik(x'' - x') - i\omega(t'' - t')] \quad (4.52)$$

Esta integral se resuelve en el Apéndice B que resulta

$$\langle 0|\phi(x')\phi(x'')|0\rangle = \frac{\sigma^{-1}}{4\pi\delta^{1/2}}. \quad (4.53)$$

Notamos que la invariancia se muestra en el intervalo δ donde $\delta = (x'' - x')^2 - (t'' - t')$ y también podemos ver que para dos puntos en el espacio la correlación decae con la distancia. Este resultado tiene como consecuencia el hecho de que si intentamos calcular la función de correlación para la misma partícula este diverge, lo cual nos indica que el operador $\phi(x)$ no es bien comportado, sino que es un operador de distribución. Lo que nos obliga a construir un operador con ayuda de una función de “smear” o función de suavizado. Lo que estamos haciendo es definir una sección donde se puede medir la función al mismo tiempo de manera similar a una función escalón $f(y)$ en donde mantenemos su valor constante en un círculo de radio s centrado en el punto x y al igual que la función escalón su valor es nulo fuera de s . Este operador lo definimos como

$$\phi_s(x, t) = \frac{1}{\pi s^2} \int_{|y-x|<s} d^2y \int_{|z-x|<s} d^2z < \phi(y)\phi(z) >. \quad (4.54)$$

Este nuevo operador nos permite calcular la función de Green para encontrar el valor de expectación del operador al cuadrado.

$$< \phi_s^2(x) > = \left(\frac{1}{2} + \mathcal{G}\right) \frac{\sigma^{-1}}{s}. \quad (4.55)$$

donde \mathcal{G} es la constante de Catalán. Notemos que $< \phi_s^2 >$ depende de s y tiende a infinito cuando s va a cero. Esto aparenta un problema de infinitos pero no es posible hacer $s = 0$ debido a que esta acotada por la longitud de Compton (m^{-1}). Este radio mínimo corresponde a

$$s \geq \sigma^{-1/3}. \quad (4.56)$$

También es importante considerar la cantidad llamada distorsión de la pared, $D(x, y)$.

$$\begin{aligned} D^2(x, y) &= < (\phi_s(x) - \phi_s(y)) > \\ &= 2 < \phi_s^2 > - 2 < \phi_s(x) - \phi_s(y) >. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Paredes en de Sitter

Como ya se mencionó el interés de este trabajo es estudiar las fluctuaciones cuánticas para el caso de cosmología y dentro de esta rama un espacio que es de interés es el espacio de de Sitter debido a su naturaleza expansiva en el periodo de inflación. En

este caso se recurre a un ejemplo análogo a las burbujas de vacío, este es el de paredes esféricas o burbujas de vacío con $N = 3$. Utilizando el mismo método que para cuerdas en de Sitter tenemos que la hoja de mundo no perturbada es todo el espacio de de Sitter (2+1)-dimensional y sus perturbaciones tienen un campo masivo asociado con $m^2 = -3H^2$ que viven sobre la hoja de mundo no perturbada. Además se puede calcular la razón de la fluctuación media de la amplitud con el radio de la pared esférica [21], este es:

$$\frac{\tilde{\Delta}}{R} \equiv \frac{H^{3/2}}{\sqrt{3\phi^2\sigma}} \quad (4.58)$$

La conclusión importante que resulta de esta razón es que comparando (4.58) con (4.85) vemos que en las paredes el radio de Schwarzschild crece de manera cuadrática con R y no de manera lineal como las cuerdas y como resultado, las paredes con radio

$$R > (8\pi G\sigma)^{-1} \left[\frac{H^3}{3\pi^2\sigma} \right]^{1/2} \quad (4.59)$$

colapsarán a hoyos negros.

Cuerdas Cómicas

Ahora pasemos a los defectos topológicos categorizados como cuerdas cósmicas. Las cuerdas cósmicas se diferencian en mayor parte de las paredes por tener dos vectores normales en vez de uno, a estos vectores los diferenciaremos con el subíndice A . Aunque esta diferencia pareciera ser pequeña, el tratamiento cuántico nos lleva por otra dirección haciendo que el caso sea totalmente distinto al de la pared. Ya que los campos que estamos analizando son perturbaciones normales tendremos a los dos campos escalares ϕ^A , ($A = 1, 2$), que son las dos direcciones ortonormales de la cuerda. La acción de una cuerda es similar a la de una pared a excepción de la dimensión y el factor dimensional.

$$S_\phi = -\frac{\mu}{2} \int (\partial_a \phi^A \partial^a \phi^A) dx dt. \quad (4.60)$$

Al igual que para el caso de la pared, y ya que la acción es bastante similar, tenemos que esta es la acción para campo escalar sin masa, dos campos de hecho, en espacio plano de dimensión (1+1). Dentro de QFT se tiene una solución invariante de Lorentz tomando los modos:

$$\phi_k = (2\pi)^{-1/2} (2\omega)^{-1/2} \exp(ikx - i|k|t). \quad (4.61)$$

Teniendo los estados definidos del sistema podemos calcular la función de Green para cada uno de los campos:

$$\langle \phi(x'', t'') \phi(x', t') \rangle = \frac{1}{2\pi\mu} \int \frac{dk}{2|k|} \exp[ik(x'' - x') - i|k|(t'' - t')]. \quad (4.62)$$

Esta función de Green diverge en el infrarrojo, i.e. para frecuencias pequeñas. Se elige que la función tenga problemas en el infrarrojo para no pagar el precio de elegir otros modos que nos harían perder la invariancia de Lorentz de la hoja de mundo. Esto no nos detiene porque podemos continuar el análisis de las cuerdas calculando una cantidad similar que resulte libre de divergencias infrarrojas.

$$\begin{aligned} \langle \phi(x'', t'') \phi(x', t') - \phi(y'', \tau'') \phi(y', \tau') \rangle = \\ \frac{1}{4\pi\mu} \ln \frac{(y'' - y')^2 - (\tau'' - \tau')^2}{(x'' - x')^2 - (t'' - t')^2}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Tener esta cantidad nos libra de varios problemas y resulta ser invariante de Lorentz además que resulta bastante práctica en el cálculo de la distorsión ($D(x, y)$) que calculamos para la pared en el limite $|x - y| \gg s$ en la función de correlación a tiempos iguales.

$$D^2(x, y) \approx \frac{1}{2\pi\mu} \left[3 + 2 \ln \left| \frac{x - y}{2s} \right| \right] \quad (4.64)$$

Si analizamos la ecuación anterior vemos que cuando $|x - y| \rightarrow \infty$ la distorsión crece sin estar acotada, de aquí que las distorsiones que crean las fluctuaciones cuánticas sobre las cuerdas sean de interés, sobre todo a escalas grandes. Esto no implica que se tengan consecuencias cosmológicas ya que vemos que por más grande que sea la separación todavía tenemos un logaritmo. Como menciona Vilenkin [5], aun si la distancia $|x - y| \sim 10^{28} \text{cm}$ (el radio del universo observable), tendremos que $D(x, y) < 10\mu^{-1/2}$. Mencionamos anteriormente que se prefería preservar la invariancia de Lorentz en vez de tener una función de Green que no diverja, en otros trabajos se deja ir la invariancia de Lorentz y se describe a la cuerda de distintas maneras [5] aunque siempre se puede reconstruir de la forma que lo hicimos aquí.

Cuerdas en de Sitter

Ahora realizamos las mismas fluctuaciones cuánticas a las cuerdas cósmicas pero en el espacio que nos interesa, de Sitter. Para este espacio veremos cuerdas esféricas por su relación con la paredes circulares analizadas anteriormente. Sabemos que este espacio describe al universo inflacionario como un hiperboloide embebido en un espacio de

Minkowski 5-dimensional de la siguiente manera:

$$-(X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 + (X^4)^2 = H^2, \quad (4.65)$$

donde H^2 es el ritmo de expansión durante el periodo inflacionario y X^α es el vector de posición en el embebimiento con $\alpha = 0, \dots, 4$. Esta métrica tiene un análogo con la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) para hiperboloides planas y utilizando esta forma la métrica se escribe:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht}(dx)^2, \quad (4.66)$$

donde las coordenadas (t, x^i) están definidas por

$$t = H^{-1} \ln[H(X^4 + X^0)], \quad (4.67)$$

$$x^i = H^{-1} X^i (X^4 + X^0)^{-1}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.68)$$

De donde podemos despejar las coordenadas temporal, normal y espaciales.

$$X^0 = H^{-1} \sinh(Ht) + \frac{Hx^2}{2} e^{Ht}, \quad (4.69)$$

$$X^4 = H^{-1} \cosh(Ht) - \frac{Hx^2}{2} e^{Ht}, \quad (4.70)$$

$$X^i = x^i e^{Ht}. \quad (4.71)$$

Tomando el resultado de la Ref. [21] la hoja de mundo de una cuerda o bucle circular después de nucleación tiene una trayectoria dada por la siguiente ecuación.

$$-(X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 = H^{-2}, \quad (4.72)$$

$$X^3 = X^4 = 0. \quad (4.73)$$

Esta ecuación resulta ser la misma que para un hiperboloide embebido en el hiperboloide que mencionamos anteriormente donde el hiperboloide embebido es de dimensión (1+1) y su radio es maximal. Aprovechando esta relación notamos que la geometría interna de esta hoja de mundo es aquella de un espacio de de Sitter (1+1)-dimensional. Como nos interesa utilizar la forma FRW necesitamos saber cómo se ve la hoja de mundo en las coordenadas (t, x^i) . Para lograr esto solo es necesario utilizar las ecuaciones (4.69) a (4.73) obteniendo así:

$$x^2 + y^2 = H^{-2}(1 + e^{-2Ht}), \quad (4.74)$$

$$z = 0. \quad (4.75)$$

Esta ecuación describe a un bucle circular centrado en $x = y = 0$ de radio $R(t) = H^{-1}\sqrt{e^{2Ht} + 1}$. En la Ref. [21] se tratan distintas formas para este mismo bucle aplicando transformación de de Sitter a la trayectoria (4.73). Haciendo esto se puede encontrar un bucle circular en las coordenadas FRW desde $z = 0$ centrado en $(x, y) = (0, H^{-1} \tan \theta)$ y con radio físico $R(t) = H^{-1}\sqrt{e^{2Ht}(1 + \tan^2 \theta) + 1}$. Esta solución tiene la propiedad que para $\theta = \pi/2$ las coordenadas $X^2 = X^3 = 0$ que nos da un radio divergente ($R \rightarrow \infty$), con lo cual se concluye que una cuerda recta que yace sobre el eje x se obtiene como el caso límite en el que el radio del bucle se va a infinito. Analizando además las perturbaciones pequeñas para la solución (4.73) esta se puede parametrizar por

$$-(X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 = H^{-2} - \phi_A \phi_A, \quad A = 1, 2 \quad (4.76)$$

$$X^3 = \phi_1, \quad (4.77)$$

$$X^4 = \phi_2. \quad (4.78)$$

Estos campos que estamos introduciendo corresponden a perturbaciones en las dos direcciones ortogonales a la hoja de mundo no perturbada que tratamos en la sección de Branas. Estas parametrizaciones se reescriben utilizando las coordenadas FRW con el fin de que sean lineales en ϕ_A de la siguiente manera

$$\phi_1(\xi^a) = e^{Ht} z \equiv z_{phy}(\xi^a), \quad (4.79)$$

$$\phi_2(\xi^a) = -(r - R) \frac{HR}{(H^2 R^2 - 1)^{1/2}}. \quad (4.80)$$

Aquí $r(\xi^a) = e^{Ht}(x^2 + y^2)^{1/2}$ es el radio físico perturbado y R es el no perturbado mencionado anteriormente. De esta forma ϕ_1 representa perturbaciones transversales al plano del bucle mientras que ϕ_2 representa perturbaciones del radio. Así la acción de estas perturbaciones es:

$$S_\phi = \frac{\mu}{2} \int_\Sigma \sqrt{-g} (g^{ab} \phi_{A,a} \phi_{A,b} - 2H^2 \phi_A \phi_A) d^2 \xi, \quad (4.81)$$

donde g^{ab} es la métrica de la hoja de mundo sin perturbar. Esta acción es la misma que para dos campos escalares masivos desacoplados con $m^2 = -2H^2$ en un espacio de de Sitter (1+1)-dimensional.

También es importante analizar los grupos de simetría y el número de modos nulos que se tienen en las eom de esta acción. Solo existe un estado cuántico para las perturbaciones ϕ_A que comparten la simetría de cuatro parámetros que sobra para dejar invariante a la burbuja de vacío bajo transformaciones de Lorentz dándonos el estado de invariancia de de Sitter para el caso (1+1)-dimensional. Para construir estos estados se toman

resultados de las fluctuaciones cuánticas de burbujas de vacío que está a continuación. En esa sección se introduce el operador \hat{G} que no es más que la función de Green truncada a tiempos iguales. Con ella podemos calcular las desviaciones que tiene el bucle de un círculo, así introduciendo los campos de las perturbaciones ϕ_A tenemos que la fluctuación promedio radial es

$$\bar{\Delta}^2 \equiv \langle (r - R)^2 \rangle = \langle (\hat{\phi}_2(t))^2 \rangle > \frac{H^2 R^2 - 1}{H^2 R^2}. \quad (4.82)$$

Mientras que la fluctuación promedio transversal es

$$\bar{z}_{phy}^2 \equiv \langle (\hat{\phi}_1(t))^2 \rangle. \quad (4.83)$$

Además obviamente se tiene la versión suavizada de la función de Green truncada (\hat{G}_s) que para $R \gg H^{-1}$ nos da [6]

$$\bar{\Delta} \approx \bar{z}_{phy} \approx \frac{HR}{\sqrt{8\pi\mu}}. \quad (4.84)$$

Así la razón de fluctuación media de la amplitud con el radio del bucle es

$$\bar{\Delta}/R \sim H\mu^{-1/2}. \quad (4.85)$$

Lo que podemos ver de estas últimas relaciones es que después del periodo inflacionario los bucles que se habían nucleado durante este van a colapsar y como mencionan en la Ref. [5] todos se convertirían en hoyos negros si no fuera por las perturbaciones Δ . Esta probabilidad se reporta en la misma referencia donde concluyen que es realmente pequeña y es preciso tener más evidencia observacional para asegurar que la teoría funciona.

Burbujas de vacío

Por último retomamos el análisis realizado en el capítulo de Branas para construir las fluctuaciones cuánticas sobre burbujas de vacío verdadero. Además notaremos que para el caso de dimensiones $N = 2$ y $N = 3$ estas fluctuaciones disminuyen conforme la burbuja crece dejando el comportamiento esférico de la burbuja conforme esta se desarrolla en el tiempo. Es importante resaltar que los cálculos de esta sección se facilitan tomando soluciones con armónicos esféricos y por tanto no está demás repasar soluciones de ecuaciones diferenciales en literatura de métodos matemáticos como [22]. Otra nota importante es que para obtener cantidades físicas se tiene que recurrir a una serie de consideraciones algo rebuscadas pero no menos válidas. De gran utilidad son los apéndices A-D de la Ref. [5].

En el análisis clásico llegamos a que la ecuación de campo que cumple la burbuja es (??)

$$-\square\phi + m^2\phi = 0, \quad (4.86)$$

donde

$$m^2 = -NH^2. \quad (4.87)$$

Notaremos que tomar esta masa introducirá complicaciones en el espacio que nos gustaría usar. Necesitaremos un estado base para el campo de perturbación ϕ que tomamos en base a las simetrías de la hoja de mundo. Como estado base se toma la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar de masa m para espacio de de Sitter. La elección de este estado base viene debido al siguiente razonamiento: Notamos que el grupo de simetría del espacio de de Sitter coincide con el grupo de transformaciones de Lorentz $(N + 1)$ -dimensional y por tanto este es el único grupo de simetría que no rompe la simetría de Lorentz de la trayectoria de la burbuja que es la que nos concierne. Los modos funcionales para el campo escalar masivo de la ecuación de Schrödinger son:

$$\phi_{LM} = \varphi_L(\tilde{t})Y_{LM}(\Omega), \quad (4.88)$$

donde Y_{LM} son los armónicos esféricos para la N -esfera. Estos armónicos esféricos satisfacen la siguiente relación.

$$\tilde{\Delta}Y_{LM} = -JY_{LM}, \quad (4.89)$$

donde $\tilde{\Delta}$ es el laplaciano sobre la $(N - 1)$ esfera y sus eigenvalores están dados por

$$J = L(L + N - 2), \quad (4.90)$$

$L = 0, 1, 2, \dots, \infty$. Aquí notamos por qué se eligen armónicos esféricos para resolver la ecuación diferencial ya que la ecuación de campo se reduce a [6]

$$\ddot{\varphi}_L + (N - 2) \tan(\tilde{t})\dot{\varphi}_L + \left[J + \frac{m^2}{H \cos \tilde{t}} \right] \varphi_L = 0, \quad (4.91)$$

donde $\partial\varphi/\partial\tilde{t} = \dot{\varphi}$. La ecuación que resulta es de segundo orden y por ello cuenta con dos soluciones independientes. Los modos que son solución resultan

$$\varphi_L = A_L(\cos \tilde{t})^{(N-1)/2} R_\nu^\lambda(\sin \tilde{t}), \quad (4.92)$$

donde se introdujeron las funciones de Legendre del primer tipo (P_ν^λ) que son soluciones a ecuaciones diferenciales de Legendre y la segunda solución (Q_ν^λ). Esta combinación

lineal de funciones de Legendre está definida como:

$$R_\nu^\lambda = P_\nu^\lambda - (2i/\pi)Q_\nu^\lambda, \quad (4.93)$$

con

$$\lambda = \left[\frac{(N-1)^2}{4} - \frac{m^2}{H^2} \right]^{1/2}, \quad (4.94)$$

$$\nu = L + \frac{N-3}{2}. \quad (4.95)$$

Este modo normal tiene un factor de normalización A_L dado por

$$A_L = \frac{\sqrt{\pi}}{2} H^{(N-2)/2} e^{i\lambda\pi/2} \left[\frac{\Gamma[L + \frac{N-1}{2} - \lambda]}{\Gamma[L + \frac{N-1}{2} + \lambda]} \right]^{1/2}. \quad (4.96)$$

donde Γ es la función gamma. Para estos modos podemos calcular la función de Green según la Ref. [23] teniendo así

$$G_{m^2}(\xi, \xi') = \frac{H^{(N-2)}}{(4\pi)^{N-2}\sigma} \frac{\Gamma\left[\frac{N-1}{2} - \lambda\right] \Gamma\left[\frac{N-1}{2} + \lambda\right]}{\Gamma(N/2)} \times F\left[\frac{N-1}{2} + \lambda, \frac{N-1}{2} - \lambda; \frac{N}{2}; \frac{1+Z}{2}\right], \quad (4.97)$$

donde F es la función hipergeométrica y Z es el producto escalar de los vectores de posición en los puntos ξ y ξ' . El producto de vectores en este caso resulta

$$Z(\xi, \xi') \equiv H^2 x^\mu(\xi) x_\mu(\xi') = \frac{-\sin \tilde{t} \sin \tilde{t}' + \cos \gamma}{\cos \tilde{t} \cos \tilde{t}'}, \quad (4.98)$$

donde γ es el ángulo entre dos puntos sobre la burbuja desde el centro. Este producto es invariante de Lorentz en el espacio de embebimiento y no es coincidencia que la función de Green sólo dependa de Z . Esto nos ayuda a ver que esta función está bien definida para valores de $m^2 \neq 0$, el problema es que para ciertos valores m^2 diverge, este conjunto de valores es donde el argumento de la función gamma es cero y el conjunto consiste de los siguientes valores

$$m^2 = -s(s + N - 1)H^2, \quad s = 0, 1, \dots \quad (4.99)$$

Peor aún para $s = 1$ la masa que tenemos es la misma que para el campo ϕ sobre la burbuja clásica $m^2 = -NH^2$, este valor para la masa resulta ser independiente de la aproximación que se usó para el grosor de la brana esférica y se puede encontrar una relación con el menor de los eigenvalores del laplaciano de la N -esfera. Esta N -esfera no

es por la burbuja de vacío sino que el espacio de de Sitter N -dimensional resulta ser una N -esfera en espacio Euclídeo con radio H^{-1} . Además el tratamiento del espacio como una N -esfera nos permite ver que las divergencias de la función de Green no son más que una expansión sobre los armónicos esféricos como se trata la Ref. [24]. Para tratar las anomalías donde $m^2 \rightarrow -NH^2$ tomamos los armónicos esféricos definidos en (4.92) y notamos que el factor de normalización A_L , para $L = 0, 1$, diverge. Esto es porque la función R_ν^λ se vuelve real y su norma de Klein-Gordon, que invierte el signo cuando $\phi \rightarrow \phi^*$, se va a cero. Veamos como resultan las funciones en este punto:

$$R_0 = C_0 \frac{\sin \tilde{t}}{(\cos \tilde{t})^{(N+1)/2}}, \quad (4.100)$$

$$R_1 = C_1 \frac{1}{(\cos \tilde{t})^{(N+1)/2}}, \quad (4.101)$$

donde R_0 y R_1 son las funciones R_ν^λ cuando $m^2 = -NH^2$ y $\lambda = (N+1)/2$ para $L = 0$ y $L = 1$ respectivamente, y las constantes son $|C_1| = |C_0| = \pi^{-1} 2^{(N+1)/2} \Gamma((N+1)/2)$. Con esto podemos enfocarnos a los casos donde $L = 0$ y $L = 1$ que se pueden ver como simples traslaciones sobre la burbuja. Podemos separar las traslaciones espaciales de las temporales notando las siguientes consideraciones. Las traslaciones se obtienen como en la ec.(4.89):

$$\Delta_{00} \equiv \cos \tilde{t} \phi_{00} \sin \tilde{t}, \quad (4.102)$$

$$\Delta_{1M} \equiv \cos \tilde{t} \phi_{1M} Y_{1M}(\omega). \quad (4.103)$$

Todo esto nos permite redefinir la expansión que utilizamos para el campo, una expansión que resulte adecuada para los estados de vacío sin encontrarnos con divergencias y donde las haya, poder eliminarlas.

$$\phi = \hat{\phi} + \sum_{\mu} [q^{\mu} \mathcal{Z}_{\mu}(\tilde{t}) + p^{\mu} \mathcal{N}_{\mu}(\tilde{t})] \mathcal{Y}_{\mu}(\omega), \quad (4.104)$$

donde $\hat{\phi}$ es la expansión que utilizamos anteriormente en términos de los operadores de creación y aniquilación para el caso $L = 1$. El término \mathcal{Z}_{μ} que corre sobre los índices de modo cero de traslación esta dado por:

$$\mathcal{Z}_0 = \tan \tilde{t}, \quad (4.105)$$

$$\mathcal{Z}_i = \sec \tilde{t}. \quad (4.106)$$

La expansión en términos de los operadores es:

$$\hat{\phi} = \phi^{-1/2} \sum_{L < 1} \sum_M (\hat{a}_{LM} \phi_{LM} + \hat{a}_{LM}^{\dagger} \phi_{LM}^*). \quad (4.107)$$

Las funciones \mathcal{Z}_0 y \mathcal{Z}_i corresponden a pequeños cambios temporales y espaciales en el centro del hiperboloide respectivamente.

Así logramos tener la regla de conmutación que esperábamos con los operadores q^μ y p^μ que representan la posición del centro de la burbuja y el momento de esta.

$$[q^\mu, p^\nu] = i\delta^{\mu\nu} \quad (4.108)$$

Esto nos permite definir el estado de vacío $|0\rangle$ con

$$p^\mu|0\rangle = 0, \quad (4.109)$$

$$\hat{a}_{LM}|0\rangle = 0 \quad (L > 1). \quad (4.110)$$

Estos operadores nos permiten tener una función de Green bien definida cuando tomamos una relación que no depende de los modos de traslación cero, esta relación resulta de la traza de la curvatura extrínseca K_{ab} .

$$K_{ab}^\top = K_{ab} - \frac{1}{N} K_c^c g_{ab}. \quad (4.111)$$

Tendiendo así la función de Green:

$$G_{aba'b'}(\xi, \xi') = \langle 0 | K_{ab}^\top(\xi) K_{a'b'}^\top(\xi') | 0 \rangle. \quad (4.112)$$

Esta función para $N = 2$, donde el objeto es parecido a una cuerda, resulta divergente a tiempos grandes en el límite de coordenadas iguales. Pero al igual que con los objetos anteriores determinamos un radio para calcular la función suavizante a tiempos grandes.

$$\hat{G}_s(0, \tilde{t}) \approx \frac{1}{8\pi\mu} \frac{1}{\cos^2 \tilde{t}} = \frac{H^2 R^2(t)}{8\pi\mu}. \quad (4.113)$$

Esta ecuación se cumple para $s < H^{-1}$ o visto de otra manera, cuando el radio de la burbuja $R(t) \gg H^{-1} |\ln Hs|$. Esto implica que para tiempos grandes las fluctuaciones cuadráticas del radio llegan a un valor constante el cual está dado por:

$$\bar{\Delta}^2 = \langle \Delta^2 \rangle = \cos^2(\tilde{t}) \hat{G}_s(0, \tilde{t}) \approx \frac{1}{8\pi\mu}, \quad (N = 2). \quad (4.114)$$

Para el caso $N=3$ según la Ref. [5] tenemos que la constante es:

$$\bar{\Delta}^2 \approx \frac{H}{3\pi\sigma}, \quad (N = 3). \quad (4.115)$$

Capítulo 5

Conclusiones

Las fluctuaciones cuánticas deciden de manera aleatoria el destino de los fenómenos topológicos que tienen magnitudes más grandes de lo que podemos imaginar y es por eso que resulta importante predecir sino cuáles, al menos cuántos, de estos defectos podemos esperar y si la participación de estas fluctuaciones cederá con el tiempo o no.

Cuando suponemos un universo temprano que sufrió una época de inflación debemos llevar el marco del espacio-tiempo al espacio de de Sitter y para ello resulta más fácil (en ocasiones) ver el embebimiento de una esfera en espacio euclídeo (cuando el tiempo tiene el mismo signo que el resto de las coordenadas) que tomar el espacio de de Sitter antes de iniciar el tratamiento cuántico de las branas. Realizando esto se logró obtener una función de Green bien definida (excepto en los polos que se pueden aislar) que nos permitiera encontrar el estado de vacío verdadero para las fluctuaciones cuánticas de la burbuja de vacío.

Por medio de la descripción de branas de los defectos topológicos cosmológicos logramos obtener una descripción, a partir de teoría de perturbaciones, de la dinámica que rige a estos fenómenos cuando se suponen inmersos en espacio de de Sitter como lo indican teorías de inflación. Es importante remarcar la forma que tiene el espacio de de Sitter ya que los resultados obtenidos en este espacio son bastante parecidos a los obtenidos en espacio de Minkowski. El espacio de de Sitter es maximalmente simétrico y una solución a las ecuaciones de Einstein con masa cero y constante cosmológica positiva.

El término de masa resultante de esta descripción es ahora dependiente de la dimensión del espacio tiempo así como de la geometría como era de esperarse ya que estamos tratando con una generalización de la gravedad de Lovelock dependiente de la dimensión y en el hecho de que su descripción sea meramente geométrica prueba que estamos tratando con una gravedad donde las eom son de segundo orden al igual que en la de

Einstein. Mientras que las eom para el espacio de fondo de Minkowski ese término no aparece. En la ref.[4] la constante H^2 se puede encontrar a partir de las relaciones de la curvatura extrínseca con un embebimiento hiperbólico.

El campo ϕ que se obtiene como perturbaciones normales a los defectos nos permite tener una teoría cuántica de campos aunque no sin sus complicaciones en cuanto a que se tuvo que utilizar un suavizado en la necesidad de evadir la divergencia en el ultravioleta, dejándonos únicamente con la amplitud de estas fluctuaciones. Sin embargo esta amplitud es todo lo que se necesita para calcular las distorsiones en las que estamos interesados ya que el propósito es medir las perturbaciones de los defectos.

La generalización de conceptos y ecuaciones nos ha permitido relacionar efectos gravitacionales con fenómenos que previamente no se tenía noción. El estudio de la física con un enfoque puramente matemático nos permite construir relaciones que en espacios tridimensionales son intuitivos y también aplicar el resto de la matemática que es más extensa que el conocimiento meramente físico que tenemos. Sobre todo cuando tenemos herramientas como teoría de perturbaciones en la cual es difícil intuir los efectos del sistema. En el desarrollo de los resultados obtenidos en este trabajo existe la posibilidad de encontrar relaciones probabilísticas que son útiles cuando se quiere comparar algún resultado con mediciones para establecer la teoría. En cuanto a las mediciones cosmológicas que se tienen hasta ahora no hay ningún indicio de que las cuerdas cósmicas, que tendrían un efecto similar al desvío de los rayos de luz por un agujero negro, existan, al menos no con una densidad de energía mayor a $G\mu < 1.5 \times 10^{-11}$ [14], donde G es la constante de Newton y μ la tensión de la cuerda que hemos usado en el trabajo.

Las burbujas de vacío para $N = 2$ evolucionan en el tiempo de manera que aproximan a una esfera y como va pasando el tiempo las perturbaciones ocasionadas por las fluctuaciones cuánticas ceden para dar lugar a un comportamiento esférico para tiempos grandes. Lo que esto nos indica es que si en el universo temprano se crearon estos defectos topológicos la materia que se encuentra en vacío verdadero está creciendo a la velocidad de la luz y de forma radial. Estas distorsiones tienen un comportamiento asintótico que se vuelve constante dejando que la forma esférica, mientras esta crece, predomine la topología de la burbuja. Se dice que las perturbaciones normales a la esfera se congelan mientras esta evoluciona.

Apéndice A

Ecuaciones Gauss Weingarten

Desarrollo de las ecuaciones de Gauss Weingarten. En los apéndices se desarrolla paso por paso el procedimiento utilizado para obtener los resultados que se usan en el trabajo. Lo que tenemos a continuación es una serie de equivalencias donde se desarrolla el producto bajo la métrica del espacio de la derivada covariante de un vector tangente con otro.

$$g(D_a e_b, e^c) = g(\nabla_{e_a} e_b, e^c) = g(e_a^\mu \nabla_{\partial_\mu} (e_b^\nu \partial_\nu), e^c) \quad (\text{A.1})$$

$$= g(e_a^\mu (\partial_\mu e_b^\nu) \partial_\nu + e_a^\mu e_b^\nu \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu, e^c) \quad (\text{A.2})$$

$$= g((e_a^\mu \partial_\mu e_b^\nu) \partial_\nu + e_a^\mu e_b^\nu \Gamma_{\gamma\mu}^\sigma \partial_\sigma, e^c) \quad (\text{A.3})$$

$$= g((e_a^\mu \partial_\mu e_b^\nu) \partial_\nu + e_a^\mu e_b^\nu \Gamma_{\gamma\mu}^\sigma \partial_\sigma, X^{\delta c} \partial_\delta) \quad (\text{A.4})$$

$$= g((X^\mu{}_{,a} \partial_\mu X^\nu{}_{,b}) \partial_\nu, X^{\sigma c} \partial_\sigma) + g(e_a^\mu e_b^\nu \Gamma_{\gamma\mu}^\sigma \partial_\sigma X^{\delta c}, \partial_\delta) \quad (\text{A.5})$$

$$= g\left(\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^b}\right) \partial_\nu, X^{\sigma c} \partial_\sigma\right) + g(e_a^\mu e_b^\nu \Gamma_{\gamma\mu}^\sigma e^{\delta c} \partial_\sigma, \partial_\sigma) \quad (\text{A.6})$$

$$= g\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^a \partial \xi^b} \partial_\nu, X^{\sigma c} \partial_\sigma\right) + g(e_a^\mu e_b^\nu e^{\delta c} \Gamma_{\gamma\mu}^\sigma \partial_\sigma, \partial_\delta) \quad (\text{A.7})$$

$$= g(X^\nu{}_{,ab} \partial_\nu, X^{\sigma c} \partial_\sigma) + g(e_a^\mu e_b^\nu \gamma^{dc} e^\delta{}_d \Gamma_{\gamma\mu}^\sigma \partial_\sigma, \partial_\delta) \quad (\text{A.8})$$

$$= X^\nu{}_{,ab} X^{\sigma c} g(\partial_\nu, \partial_\sigma) + e_a^\mu e_b^\nu \gamma^{dc} e^\delta{}_d \Gamma_{\gamma\mu}^\sigma g(\partial_\sigma, \partial_\delta) \quad (\text{A.9})$$

$$= X^\nu{}_{,ab} X^{\sigma c} g_{\nu\sigma} + e_a^\mu e_b^\nu e^\delta{}_d \gamma^{dc} \Gamma_{\gamma\mu}^\sigma g_{\sigma\delta} \quad (\text{A.10})$$

$$= \gamma^{cd} X^\nu{}_{,ab} X^\sigma{}_{,d} g_{\nu\sigma} + e_a^\mu e_b^\nu e^\delta{}_d \gamma^{dc} \Gamma_{\gamma\mu}^\sigma \quad (\text{A.11})$$

Por otro lado

$$\gamma_{ab}{}^c = \frac{1}{2} \gamma^{dc} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^b} \gamma_{ad} + \frac{\partial}{\partial \xi^a} \gamma_{db} - \frac{\partial}{\partial \xi^d} \gamma_{ab} \right) \quad (\text{A.12})$$

Y usando el hecho que

$$\gamma_{ab} = g(e_a, e_b) = e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu} = X^\mu{}_{,a} X^\nu{}_{,b} g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.13})$$

tenemos

$$\begin{aligned} \gamma_{ab}{}^c = \frac{1}{2} \gamma^{dc} & (X^\mu{}_{,ab} X^\nu{}_{,d} g_{\mu\nu} + X^\mu{}_{,a} X^\nu{}_{,db} g_{\mu\nu} + X^\mu{}_{,da} X^\nu{}_{,b} g_{\mu\nu} \\ & + X^\mu{}_{,d} X^\nu{}_{,ba} g_{\mu\nu} - X^\mu{}_{,ad} X^\nu{}_{,b} g_{\mu\nu} - X^\mu{}_{,a} X^\nu{}_{,bd} g_{\mu\nu} \\ & + X^\mu{}_{,a} X^\nu{}_{,d} \frac{\partial}{\partial \xi^b} g_{\mu\nu} + X^\mu{}_{,d} X^\nu{}_{,b} \frac{\partial}{\partial \xi^a} g_{\mu\nu} - X^\mu{}_{,a} X^\nu{}_{,b} \frac{\partial}{\partial \xi^d} g_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Utilizamos la regla de la cadena en los últimos tres términos para encontrar términos comunes.

$$\begin{aligned} \gamma_{ab}{}^c = \frac{1}{2} \gamma^{dc} & (X^\mu{}_{,ab} X^\nu{}_{,d} g_{\mu\nu} + X^\mu{}_{,a} X^\nu{}_{,db} g_{\mu\nu} + X^\mu{}_{,da} X^\nu{}_{,b} g_{\mu\nu} \\ & + X^\mu{}_{,d} X^\nu{}_{,ba} g_{\mu\nu} - X^\mu{}_{,ad} X^\nu{}_{,b} g_{\mu\nu} - X^\mu{}_{,a} X^\nu{}_{,bd} g_{\mu\nu} \\ & + X^\mu{}_{,a} X^\nu{}_{,d} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^b} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} g_{\mu\nu} + X^\mu{}_{,d} X^\nu{}_{,b} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^a} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} g_{\mu\nu} - X^\mu{}_{,a} X^\nu{}_{,b} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^d} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} g_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Podemos regresar a la notación tensorial que estábamos usando.

$$\begin{aligned} \gamma_{ab}{}^c = \frac{1}{2} \gamma^{dc} & (X^\mu{}_{,ab} X^\nu{}_{,d} g_{\mu\nu} + X^\mu{}_{,a} X^\nu{}_{,db} g_{\mu\nu} + X^\mu{}_{,da} X^\nu{}_{,b} g_{\mu\nu} + \\ & + X^\mu{}_{,d} X^\nu{}_{,ba} g_{\mu\nu} - X^\mu{}_{,ad} X^\nu{}_{,b} g_{\mu\nu} - X^\mu{}_{,a} X^\nu{}_{,bd} g_{\mu\nu} \\ & + X^\mu{}_{,a} X^\nu{}_{,d} X^\sigma{}_{,b} g_{\mu\nu,\sigma} + X^\mu{}_{,d} X^\nu{}_{,b} X^\sigma{}_{,a} g_{\mu\nu,\sigma} - X^\mu{}_{,a} X^\nu{}_{,b} X^\sigma{}_{,d} g_{\mu\nu,\sigma}). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Eliminamos y sumamos los primeros términos.

$$\begin{aligned} \gamma_{ab}{}^c = \frac{1}{2} \gamma^{dc} & (2X^\mu{}_{,ab} X^\nu{}_{,d} g_{\mu\nu} \\ & + X^\mu{}_{,a} X^\nu{}_{,d} X^\sigma{}_{,b} g_{\mu\nu,\sigma} + X^\mu{}_{,d} X^\nu{}_{,b} X^\sigma{}_{,a} g_{\mu\nu,\sigma} - X^\mu{}_{,a} X^\nu{}_{,b} X^\sigma{}_{,d} g_{\mu\nu,\sigma}). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Multiplicamos el primer término y lo separamos del resto.

$$\begin{aligned} \gamma_{ab}{}^c = \gamma^{dc} X^\mu{}_{,ab} X^\nu{}_{,d} g_{\mu\nu} \\ + \frac{1}{2} \gamma^{dc} & (X^\mu{}_{,a} X^\sigma{}_{,d} X^\nu{}_{,b} g_{\mu\sigma,\nu} + X^\sigma{}_{,d} X^\nu{}_{,b} X^\mu{}_{,a} g_{\sigma\nu,\mu} - X^\mu{}_{,a} X^\nu{}_{,b} X^\sigma{}_{,d} g_{\mu\nu,\sigma}). \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Utilizando los vectores tangentes reescribimos la ecuación anterior.

$$\begin{aligned} \gamma_{ab}{}^c = \gamma^{dc} X^\mu{}_{,ab} X^\nu{}_{,d} g_{\mu\nu} \\ + \frac{1}{2} \gamma^{dc} e^\mu{}_{,a} e^\nu{}_{,b} e^\sigma{}_{,d} \{g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}\}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Notamos que ahora tenemos la definición de los llamados símbolos de Christoffel y sustituimos.

$$\gamma_{ab}{}^c = \gamma^{dc} X^\mu{}_{,ab} X^\nu{}_{,d} g_{\mu\nu} + e^\mu{}_{,a} e^\nu{}_{,b} e^\sigma{}_{,d} \gamma^{dc} g_{\epsilon\sigma} \Gamma_{\mu\nu}{}^\epsilon. \quad (\text{A.20})$$

Por último contraemos el símbolo con el tensor métrico para poder expresar el tensor que encontramos en el producto al inicio del apéndice.

$$\gamma_{ab}{}^c = \gamma^{dc} X^\mu{}_{,ab} X^\nu{}_{,d} g_{\mu\nu} + e^\mu{}_{,a} e^\nu{}_{,b} e^\sigma{}_{,d} \gamma^{dc} \Gamma_{\mu\nu\sigma}. \quad (\text{A.21})$$

Apéndice B

Función de Green

En este apéndice resolvemos la ecuación (4.52) que se refiere a la función de dos puntos o función de Green que caracteriza las fluctuaciones cuánticas sobre la hoja de mundo. Se tratan dos casos distintos para su solución. La ecuación tiene la forma:

$$\langle 0|\phi(x'')\phi(x')|0\rangle = \frac{\sigma^{-1}}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2k}{2\omega} e^{ik(x''-x')-i\omega(t''-t')}, \quad (\text{B.1})$$

donde $\omega = |\mathbf{k}| = k$, $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ y $d^2k = dk_x dk_y$.

Tomamos coordenadas polares debido a la forma de B.1. Con el diferencial de superficie $d^2k = k dk d\theta_k$. La ecuación se convierte en:

$$\langle 0|\phi(x'')\phi(x')|0\rangle = \frac{\sigma^{-1}}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{dk d\theta_k}{2\omega} k e^{ik[r \cos \theta_k - (t''-t')]} \quad (\text{B.2})$$

donde $k(x'' - x') = kr \cos \theta_k$ y $r = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}$.

Primer caso

Usando la relación

$$e^{ikr \cos \theta_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ikr \cos \theta_k)^n}{n!}, \quad (\text{B.3})$$

tenemos

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi(x'')\phi(x')|0\rangle &= \frac{\sigma^{-1}}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{dk d\theta_k}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ikr \cos \theta_k)^n}{n!} e^{-ik(t''-t')}, \\ &= \frac{\sigma^{-1}}{8\pi^2} \int_0^\infty dk \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ikr)^n}{n!} \left(\int_0^{2\pi} d\theta_k \cos^n \theta_k \right) e^{-ik(t''-t')}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

La integral del coseno se resuelve con la siguiente solución.

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\theta \cos^{2m} \theta &= \left\{ \frac{\sin \theta}{2m} \left[\cos^{2m-1} \theta + \sum_{l=1}^{m-1} \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots(2m-2k+1)}{2^k(m-1)(m-2)\cdots(m-k)} \cos^{2m-2k-1} \theta \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{(2m-1)!!}{2^m m!} \theta \right\}_0^{2\pi}, \\
&= \frac{2\pi(2m-1)!!}{2^m m!}.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Sustituyendo B.5 en B.2 obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle 0|\phi(x'')\phi(x')|0\rangle &= \frac{\sigma^{-1}}{8\pi^2} \int_0^\infty dk \sum_{m=0}^\infty \frac{(ikr)^{2m}}{(2m)!} \left(\frac{2\pi(2m-1)!!}{2^m m!} \right) e^{-ik(t''-t')}, \\
&= \frac{\sigma^{-1}}{4\pi} \int_0^\infty dk \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m (kr)^{2m}}{(2m)!} \left(\frac{(2m-1)!!}{2^m m!} \right) e^{-ik(t''-t')}, \\
&= \frac{\sigma^{-1}}{4\pi} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\frac{(2m-1)!!}{2^m m!} \right) \int_0^\infty dk (kr)^{2m} e^{-ik(t''-t')} \tag{B.6}
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{2m}}{\partial t''^{(2m)}} e^{-ik(t''-t')} &= (-ik)^{2m} e^{-ik(t''-t')}, \\
&= (-1)^m \frac{1}{r^{2m}} (kr)^{2m} e^{-ik(t''-t')}.
\end{aligned} \tag{B.7}$$

De esta manera podemos expresar

$$(kr)^{2m} e^{-ik(t''-t')} = (-1)^m r^{2m} \frac{\partial^{2m}}{\partial t''^{(2m)}} e^{-ik(t''-t')}. \tag{B.8}$$

Sustituyendo la ecuación anterior en B.6 para obtener el resultado.

$$\begin{aligned}
\langle 0|\phi(x'')\phi(x')|0\rangle &= \frac{\sigma^{-1}}{4\pi} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\frac{(2m-1)!!}{2^m m!} \right) (-1)^m r^{2m} \frac{\partial^{2m}}{\partial t''^{(2m)}} \int_0^\infty dk e^{-ik(t''-t')}, \\
&= \frac{\sigma^{-1}}{4\pi} \sum_{m=0}^\infty \frac{(2m-1)!!}{(2m)! 2^m m!} r^{2m} \frac{\partial^{2m}}{\partial t''^{(2m)}} \int_0^\infty dk e^{-ik(t''-t')}.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Ahora sólo queda la integral en t por resolver. Pasando al plano complejo con α pequeño y tomando el limite cuando α tiende a cero.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dk e^{-ik(t''-t')} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^\infty dk e^{-ik[(t''-t')-i\alpha]}, \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{e^{-ik(t''-t')-k\alpha}}{-i[(t''-t')-i\alpha]} \right]_0^\infty, \\
&= (-i) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{1}{[(t''-t')-i\alpha]} \right],
\end{aligned}$$

El límite cuando α tiende a cero se puede expresar como una serie infinita donde la parte principal es

$$\left(\frac{1}{t'' - t'}\right),$$

y el límite resulta

$$(-i) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{1}{[(t'' - t') - i\alpha]} \right] = (-i) \left[P \left(\frac{1}{t'' - t'} \right) + \pi i \delta(t'' - t') \right],$$

donde P es la parte principal. La integral queda como:

$$(-i) \left[P \left(\frac{1}{t'' - t'} \right) + \pi i \delta(t'' - t') \right] = (-i) \left[\frac{1}{t'' - t'} + \pi i \delta(t'' - t') \right]. \quad (\text{B.10})$$

Sustituimos la integral en la ecuación B.9

$$\langle 0 | \phi(x'') \phi(x') | 0 \rangle = \frac{\sigma^{-1}}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m)! 2^m m!} r^{2m} \frac{\partial^{2m}}{\partial t''^{(2m)}} (-i) \left[\frac{1}{t'' - t'} + \pi i \delta(t'' - t') \right] \quad (\text{B.11})$$

Realizamos las $2m$ derivadas.

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x'') \phi(x') | 0 \rangle &= \frac{\sigma^{-1}}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m)! 2^m m!} r^{2m} (-i) \frac{(2m)!}{(t'' - t')^{2m+1}} \\ &= (-i) \frac{\sigma^{-1}}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{2^m m!} \left[\left(\frac{r}{t'' - t'} \right)^2 \right]^m \frac{1}{(t'' - t')}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Por otro lado utilizamos la relación

$$(1+x)^{-1/2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^j j!} (2j-1)!! x^j, \quad (\text{B.13})$$

con el cambio $x \rightarrow -x$

$$(1-x)^{-1/2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j-1)!!}{2^j j!} x^j. \quad (\text{B.14})$$

Entonces la función de Green resulta

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x'') \phi(x') | 0 \rangle &= (-i) \frac{\sigma^{-1}}{4\pi} \left[1 - \left(\frac{r}{t'' - t'} \right)^2 \right]^{1/2} \frac{1}{(t'' - t')}, \\ &= \frac{\sigma^{-1}}{4\pi} \frac{1}{[r^2 - (t'' - t')^2]^{1/2}}, \\ &= \frac{\sigma^{-1}}{4\pi} \frac{1}{\delta^{1/2}}, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Segundo caso

Aprovechando el hecho de que hemos estado usando coordenadas polares podemos pasar fácilmente a usar coordenadas cilíndricas y expresar en funciones de Bessel la siguiente parte.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{ip \cos \theta} = J_0(p). \quad (\text{B.16})$$

La ecuación B.2 se escribe como

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x'') \phi(x') | 0 \rangle &= \frac{\sigma^{-1}}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{1}{2} dk \left(\int_0^{2\pi} d\theta_k e^{ikr \cos \theta_k} \right) e^{-ik(t''-t')}, \\ &= \frac{\sigma^{-1}}{8\pi^2} \int_0^\infty dk (2\pi J_0(kr)) e^{-ik(t''-t')}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Desarrollamos la exponencial con la Fórmula de Euler.

$$\langle 0 | \phi(x'') \phi(x') | 0 \rangle = \frac{\sigma^{-1}}{4\pi} \left\{ \int_0^\infty dk J_0(kr) \cos[k(t'' - t')] - i \int_0^\infty dk J_0(kr) \sin[k(t'' - t')] \right\} \quad (\text{B.18})$$

Para poder utilizar la siguiente expresión debemos notar primero que para que el intervalo esté bien definido tenemos que relacionar las variables de la siguiente manera: $\alpha := r$ y $\beta := t'' - t'$ tal que $\alpha > \beta$. Ahora podemos utilizar las relaciones de la Ref. [25]

$$\begin{aligned} \int_0^\infty J_\nu(\alpha x) \sin(\beta x) dx &= \begin{cases} \frac{\sin(\nu \arcsin \frac{\beta}{\alpha})}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} & [\beta < \alpha], \\ \infty \quad \text{or} \quad 0 & [\beta = \alpha], \quad [\text{Re } \nu > -2] \\ \frac{\alpha^\nu \cos(\frac{\nu\pi}{2})}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} (\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2})^\nu} & [\beta > \alpha] \end{cases} \\ \int_0^\infty J_\nu(\alpha x) \cos(\beta x) dx &= \begin{cases} \frac{\cos(\nu \arcsin \frac{\beta}{\alpha})}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} & [\beta < \alpha], \\ \infty \quad \text{or} \quad 0 & [\beta = \alpha], \quad [\text{Re } \nu > -1] \\ \frac{-\alpha^\nu \sin(\frac{\nu\pi}{2})}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} (\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2})^\nu} & [\beta > \alpha] \end{cases} \end{aligned}$$

Como tenemos $J_0 \implies \nu = 0$, la condiciones nos permiten tomar el primer caso de la segunda integral. Teniendo así

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x'') \phi(x') | 0 \rangle &= \frac{\sigma^{-1}}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 - (t'' - t')^2}}, \\ &= \frac{\sigma^{-1}}{4\pi} \frac{1}{\delta^{1/2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Apéndice C

Condiciones de Integrabilidad

En este apéndice se muestran las condiciones de integrabilidad para los términos geométricos que aparecen a lo largo del trabajo.

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_a)e_c, e_d). \quad (\text{C.1})$$

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_a)e_c, e_d) = g((\nabla_b \nabla_a e_c - \nabla_a \nabla_b e_c - \nabla_{[e_b, e_a]}), e_d). \quad (\text{C.2})$$

Ya que $\nabla_{[e_b, e_a]} = 0$, tenemos

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_a)e_c, e_d) = g(\nabla_b \nabla_a e_c, e_d) - g(\nabla_a \nabla_b e_c, e_d). \quad (\text{C.3})$$

Utilizando las ecuaciones de Gauss Weingarten en las primeras derivadas covariantes del vector tangente e_c la ecuación anterior se transforma en:

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_a)e_c, e_d) = g(\nabla_b(\gamma_{ac}^f e_f - K_{ac}^i n_i), e_d) - g(\nabla_a(\gamma_{bc}^f e_f - K_{bc}^i n_i), e_d). \quad (\text{C.4})$$

Separamos la derivada del producto en 8 términos.

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_a)e_c, e_d) = g(e_f \nabla_b \gamma_{ac}^f, e_d) + g(\gamma_{ac}^f \nabla_b e_f, e_d) - g(n_i \nabla_b K_{ac}^i, e_d) - g(K_{ac}^i \nabla_b n_i, e_d) - g(e_f \nabla_a \gamma_{bc}^f, e_d) - g(\gamma_{bc}^f \nabla_a e_f, e_d) + g(n_i \nabla_a K_{bc}^i, e_d) + g(K_{bc}^i \nabla_a n_i, e_d). \quad (\text{C.5})$$

Utilizando la definición del campo vectorial normal n^i , eliminamos los términos que multiplican vectores tangentes con normales.

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{R}(e_b, e_a)e_c, e_d) &= \nabla_b \gamma_{ac}^f \gamma_{fd} + g(\gamma_{ac}^f (\gamma_{bf}^h e_h - K_{bf}^i n_i), e_d) - \\
&\quad g(K_{ac}^i (K_{bfi} e^f + w_{bi}^j n_j), e_d) - \nabla_a \gamma_{bc}^f \gamma_{fd} - \\
&\quad g(\gamma_{bc}^f (\gamma_{af}^h e_h - K_{af}^j n_j), e_d) + g(K_{bc}^i (K_{afi} e^f + w_{ai}^j n_j), e_d)
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Para los términos que no se habían desarrollado realizamos lo mismo.

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{R}(e_b, e_a)e_c, e_d) &= \nabla_b \gamma_{ac}^f \gamma_{fd} + \gamma_{ac}^f \gamma_{bf}^h \gamma_{hd} - \\
&\quad K_{ac}^i K_{bfi} \gamma_d^f - \nabla_a \gamma_{bc}^f \gamma_{fd} - \\
&\quad \gamma_{ac}^f \gamma_{af}^h \gamma_{hd} + K_{bc}^i K_{afi} \gamma_d^f.
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Contraemos los índices repetidos

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_a)e_c, e_d) = \nabla_b \gamma_{acd} + \gamma_{ac}^f \gamma_{bfd} - K_{ac}^i K_{bdi} - \gamma_{bc}^f \gamma_{afd} + K_{bc}^i K_{adi}. \tag{C.8}$$

Reordenamos los términos para ver que:

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_a)e_c, e_d) = \nabla_b \gamma_{acd} - \nabla_a \gamma_{bcd} + \gamma_{ac}^f \gamma_{bfd} - \gamma_{bc}^f \gamma_{afd} - K_{ac}^i K_{bdi} + K_{bc}^i K_{adi}. \tag{C.9}$$

Entonces tenemos:

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_a)e_c, e_d) = \mathcal{R}_{abcd} - K_{ac}^i K_{bdi} + K_{bc}^i K_{adi}. \tag{C.10}$$

También necesitamos calcular el producto del vector normal con el producto de los vectores tangentes con el tensor de Riemann $g(\mathcal{R}(e_b, e_a)e_c, n^j)$ que se encuentra en la ec. (2.45)

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_a)e_c, n^j) = g(\nabla_b \nabla_a e_c - \nabla_a \nabla_b e_c, n^j). \tag{C.11}$$

Expandimos la resta y utilizamos las relaciones de la derivada del vector tangente.

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{R}(e_b, e_a)e_c, n^j) &= \\
&\quad g(\nabla_b (\gamma_{ac}^d e_d - K_{ac}^i n_i), n^j) - g(\nabla_a (\gamma_{bc}^d e_d - K_{bc}^i n_i), n^j).
\end{aligned} \tag{C.12}$$

Volvemos a expandir.

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{R}(e_b, e_a)e_c, n^j) = & \\
& g(e_d \nabla_b \gamma_{ac}^d, n^j) + g(\gamma_{ac}^d \nabla_b e_d, n^j) - \\
& g(n_i \nabla_b K_{ac}^i, n^j) - g(K_{ac}^i \nabla_b n_i, n^j) - \\
& g(e_d \nabla_a \gamma_{bc}^d, n^j) - g(\gamma_{bc}^d \nabla_a e_d, n^j) + \\
& g(n_i \nabla_a K_{bc}^i, n^j) + g(K_{bc}^i \nabla_a n_i, n^j).
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Ahora factorizamos términos comunes.

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{R}(e_b, e_a)e_c, n^j) = & \\
& g(\gamma_{ac}^d (\gamma_{bd}^f e_f - K_{bd}^l n_l), n^j) - \nabla_b K_{ac}^i \partial_i^j - \\
& g(K_{ac}^i (K_{bdi} e^d + w_{bi}^l n_l), n^j) - g(\gamma_{bc}^d (\gamma_{ad}^f e_f - K_{ad}^l n_l), n^j) + \\
& \nabla_a K_{bc}^i \partial_i^j + g(K_{bc}^i (K_{abi} e^b + w_{ai}^l n_l), n^j).
\end{aligned} \tag{C.14}$$

Aplicamos el producto bajo la métrica g_{ab} .

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{R}(e_b, e_a)e_c, n^j) = & \\
& - \gamma_{ac}^d K_{bd}^l \partial_l^j - \nabla_b K_{ac}^j - K_{ac}^i w_{bi}^l \partial_l^j + \gamma_{bc}^d K_{ad}^l \partial_l^j + \nabla_a K_{bc}^j + K_{bc}^i w_{ai}^l \partial_l^j.
\end{aligned} \tag{C.15}$$

Contraemos índices con las deltas de Kronecker.

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{R}(e_b, e_a)e_c, n^j) = & \\
& - \gamma_{ac}^d K_{bd}^j - \nabla_b K_{ac}^j - K_{ac}^i w_{bi}^j + \gamma_{bc}^d K_{ad}^j + \nabla_a K_{bc}^j + K_{bc}^i w_{ai}^j.
\end{aligned} \tag{C.16}$$

Reacomodamos los términos

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{R}(e_b, e_a)e_c, n^j) = & \\
& \nabla_a K_{bc}^j - K_{ac}^i w_{bi}^j - \gamma_{ac}^d K_{bd}^j - (\nabla_b K_{ac}^j - K_{bc}^i w_{ai}^j - \gamma_{bc}^d K_{ad}^j).
\end{aligned} \tag{C.17}$$

Y notamos que bajo la definición de $\tilde{\nabla}_a$ tenemos:

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_a)e_c, n^j) = \tilde{\nabla}_a K_{bc}^j - \tilde{\nabla}_b K_{ac}^j. \tag{C.18}$$

Ahora pasamos a la siguiente condición de integrabilidad, la que se encuentra en la ec. (2.46) $(g(\mathcal{R}(e_b, e_z)n^i, n^j))$.

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_z)n^i, n^j) = g(\nabla_b \nabla_a n^i - \nabla_a \nabla_b n^i, n^j) \tag{C.19}$$

Separamos los dos términos

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_z)n^i, n^j) = g(\nabla_b \nabla_a n^i, n^j) - g(\nabla_a \nabla_b n^i, n^j). \quad (\text{C.20})$$

Utilizamos las ecuaciones de Gauss Weingarten

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_z)n^i, n^j) = g(\nabla_b(K_{ac}{}^i e^c + w_a{}^{ik} n_k), n^j) - g(\nabla_a(K_{bc}{}^i e^c + w_b{}^{ik} n_k), n^j). \quad (\text{C.21})$$

Volvemos a separar cada término

$$\begin{aligned} g(\mathcal{R}(e_b, e_z)n^i, n^j) = & \\ & g(\nabla_b(K_{ac}{}^i e^c), n^j) + g(\nabla_b(w_a{}^{ik} n_k), n^j) - \\ & g(\nabla_a(K_{bc}{}^i e^c), n^j) - g(\nabla_a(w_b{}^{ik} n_k), n^j). \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Aplicamos la derivada covariante al producto

$$\begin{aligned} g(\mathcal{R}(e_b, e_z)n^i, n^j) = & \\ & g(e^c \nabla_b K_{ac}{}^i, n^j) + g(K_{ac}{}^i \nabla_b e^c, n^j) + \\ & g(n_k \nabla_b w_a{}^{ik}, n^j) + g(w_a{}^{ik} \nabla_b n_k, n^j) - \\ & g(e^c \nabla_a K_{bc}{}^i, n^j) - g(K_{bc}{}^i \nabla_a e^c) - \\ & g(n_k \nabla_a w_b{}^{ik}, n^j) - g(w_a{}^{ik} \nabla_a n_k, n^j). \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Sustituimos las derivadas covariantes por la resta de productos

$$\begin{aligned} g(\mathcal{R}(e_b, e_z)n^i, n^j) = & \\ & \nabla_b K_{ac}{}^i g(e^c, n^j) - \nabla_a K_{bc}{}^i g(e^c, n^j) + \\ & g(K_{ac}(\Gamma_b{}^{cd} e_d - K_b{}^{ck} n_k), n^j) + g(n_k \nabla_b w_a{}^{ik}, n^j) + \\ & g(w_a{}^{ik}(K_{bck} e^c + w_{bk}{}^l n_l), n^j) - g(K_{bc}{}^i(\Gamma_a{}^{cd} e_d - K_a{}^{ck} n_k), n^j) - \\ & g(n_k \nabla_a w_b{}^{ik}, n^j) - g(w_b{}^{ik}(K_{ac}{}^k e^c + w_{ak}{}^l n_l), n^j). \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Sacamos las partes a las que el producto bajo la métrica no afecta

$$\begin{aligned} g(\mathcal{R}(e_b, e_z)n^i, n^j) = & \\ & K_{ac}{}^i \Gamma_b{}^{cd} g(e_d, n^j) - K_{ac}{}^i K_a{}^{ck} g(n_k, n^j) + \\ & \nabla_b w_a{}^{ik} \partial_k{}^j + w_a{}^{ik} K_{bck} g(e^c, n^j) + \\ & w_a{}^{ik} w_{bk}{}^l g(n_l, n^j) - K_{bc}{}^i \Gamma_a{}^{cd} g(e_d, n^j) + \\ & K_{bc}{}^i K_b{}^{ck} g(n_k, n^j) - \nabla_a w_b{}^{ik} \partial_k{}^j - \\ & w_b{}^{ik} K_{ac}{}^k g(e^c, n^j) - w_b{}^{ik} w_{ak}{}^l g(n_l, n^j). \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

con $g(n^i, n^j) = \delta^{ij}$ y $g(e_a, n^j) = 0$

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{R}(e_b, e_z)n^i, n^j) = & \\
& K_{ac}{}^i K_b{}^{ck} \delta_k{}^j + \nabla_b w_a{}^{ik} \delta_k{}^j \\
& + w_a{}^{ik} w_{bk}{}^l \delta_l{}^j + K_{bc}{}^i K_a{}^{ck} \delta_k{}^j \\
& - \nabla_a w_b{}^{ik} \delta_k{}^j - w_b{}^{ik} w_a{}^{kl} \delta_l{}^j.
\end{aligned} \tag{C.26}$$

Aplicamos las deltas de Kronecker

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_z)n^i, n^j) = K_{ac}{}^i K_b{}^{cj} + \nabla_b w_a{}^{ij} + w_a{}^{ik} w_{bk}{}^j + K_{bc}{}^i K_a{}^{cj} - \nabla_a w_b{}^{ij} - w_b{}^{ik} w_a{}^{kj}. \tag{C.27}$$

Encontramos $\Omega_{ab}{}^{ij}$

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_a)n^i, n^j) = \Omega_{ab}{}^{ij} + K_{ac}{}^i K_b{}^{cj} + K_{bc}{}^i K_a{}^{cj}. \tag{C.28}$$

Por último desarrollamos las ecuaciones (2.45) y (2.46) donde se encuentra una relación entre las derivadas covariantes de la curvatura extrínseca y la derivada del producto de la métrica que para este caso es la métrica de de Sitter (γ_{ab}).

Ecuación (2.45)

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_a)e_c, n^i) = \tilde{\nabla}_a K_{bc}{}^i - \tilde{\nabla}_b K_{ac}{}^i. \tag{C.29}$$

Usando la relación

$$K_{ac}{}^i K_{bdi} - K_{ad}{}^i K_{bci} \propto (\gamma_{ac}\gamma_{bd} - \gamma_{ad}\gamma_{bc}). \tag{C.30}$$

$$\tilde{\nabla}_a (K_{ac}{}^i K_{bdi}) = K_{bdi} \tilde{\nabla}_a K_{ac}{}^i + K_{ac}{}^i \tilde{\nabla}_a K_{bdi}. \tag{C.31}$$

$$= \tilde{\nabla}_a (\gamma_{ac}\gamma_{bd} - \gamma_{ad}\gamma_{bc} + AK_{ad}{}^i K_{bdi}). \tag{C.32}$$

Ecuación (2.46)

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_a)n^i, n^j) = (\Omega_{ab}{}^{ij} - K_{ac}{}^i K_b{}^{cj} + K_{bc}{}^i K_a{}^{cj}) \gamma_{ac} \delta_j{}^i. \tag{C.33}$$

Veamos como lado derecho de la ecuación se cancela. Primero distribuimos el tensor métrico y la delta de Kronecker que están multiplicando a los tres términos de adentro

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{R}(e_b, e_a)n^i, n^j) = & \\
& \Omega_{ab}{}^{ij} \gamma_{cd} - K_{ac}{}^i K_{bdi} + K_{bc}{}^i K_{adi}.
\end{aligned} \tag{C.34}$$

Como buscamos la relación de las curvaturas extrínsecas con la métrica bajamos y subimos el índice i en el último término

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_a)n^i, n^j) = \Omega_{ab}{}^{ii}\gamma_{cd} - K_{ac}{}^i K_{bdi} + K_{bci} K_{ad}{}^i. \quad (\text{C.35})$$

El índice repetido en el tensor $\Omega_{ab}{}^{ii} = 0$ hace que se anule y la relación con el producto de tensores métricos se cumple

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_a)n^i, n^j) = -K_{ac}{}^i K_{bdi} + K_{bci} K_{ad}{}^i = -\gamma_{ac}\gamma_{bd} + \gamma_{ad}\gamma_{bc}. \quad (\text{C.36})$$

Por último contraemos índices con el tensor métrico y obtenemos lo que estábamos buscando

$$g(\mathcal{R}(e_b, e_a)n^i, n^j) = \gamma^{cd}(-\gamma_{ac}\gamma_{bd} + \gamma_{ad}\gamma_{bc}) = -\gamma_a{}^d\gamma_{bd} + \gamma_{ad}\gamma_b{}^d = 0. \quad (\text{C.37})$$

Referencias

- [1] Steven Weinberg. *The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications*. Cambridge University Press, 2013. ISBN 9781139632478, 9780521670548, 9780521550024.
- [2] T W B Kibble. Topology of cosmic domains and strings. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 9(8):1387, 1976. URL <http://stacks.iop.org/0305-4470/9/i=8/a=029>.
- [3] David Lovelock. The einstein tensor and its generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, 12(3):498–501, 1971. doi: 10.1063/1.1665613. URL <https://doi.org/10.1063/1.1665613>.
- [4] Norma Bagatella-Flores, Cuauhtemoc Campuzano, Miguel Cruz, and Efraín Rojas. Covariant approach of perturbations in lovelock type brane gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 33(24):245012, 2016. URL <http://stacks.iop.org/0264-9381/33/i=24/a=245012>.
- [5] Jaume Garriga and Alexander Vilenkin. Quantum fluctuations on domain walls, strings, and vacuum bubbles. *Phys. Rev. D*, 45:3469–3486, May 1992. doi: 10.1103/PhysRevD.45.3469. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.45.3469>.
- [6] Jaume Garriga and Alexander Vilenkin. Perturbations on domain walls and strings: A covariant theory. *Phys. Rev. D*, 44:1007–1014, Aug 1991. doi: 10.1103/PhysRevD.44.1007. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.44.1007>.
- [7] E.P.S. Shellard A.Vilenkin. *Cosmic String And Other Topological Defects*. Press Syndicate of the University of Cambridge, 1994.
- [8] Riccardo Capovilla and Jemal Guven. Geometry of deformations of relativistic membranes. *Phys. Rev. D*, 51:6736–6743, Jun 1995. doi: 10.1103/PhysRevD.51.6736. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.51.6736>.
- [9] D. A. Krizhnits. Weinberg model and the "hot universe". *JETP Letters*, 15:529–531, May 1972. URL http://www.jetpletters.ac.ru/ps/1756/article_26709.pdf.

- [10] Steven Weinberg. Gauge and global symmetries at high temperature. *Phys. Rev. D*, 9:3357–3378, Jun 1974. doi: 10.1103/PhysRevD.9.3357. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.9.3357>.
- [11] Ruben Cordero, Alberto Molgado, and Efraín Rojas. Quantum charged rigid membrane. *Classical and Quantum Gravity*, 28(6):065010, 2011. URL <http://stacks.iop.org/0264-9381/28/i=6/a=065010>.
- [12] A Zee. *Quantum Field Theory in a Nutshell*. Nutshell handbook. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2003. URL <https://cds.cern.ch/record/706825>.
- [13] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. Taylor & Francis, 2003.
- [14] Jose J. Blanco-Pillado, Ken D. Olum, and Xavier Siemens. New limits on cosmic strings from gravitational wave observations. *Physics Letters B*, 778:392–396, March 2018. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269318300583?via%3Dihub>.
- [15] R. Consiglio, O. Sazhina, G. Longo, M. Sazhin, and F. Pezzella. On the number of cosmic strings. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 439(4):3213–3224, 2014. doi: 10.1093/mnras/stu048. URL <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stu048>.
- [16] N. K. Nielsen. Gauge Invariance and Broken Conformal Symmetry. *Nucl. Phys.*, B97:527–540, 1975. doi: 10.1016/0550-3213(75)90378-8.
- [17] Sidney Coleman. *Aspects of Symmetry: Selected Erice Lectures*. Cambridge University Press, 1985. doi: 10.1017/CBO9780511565045.
- [18] Miguel Cruz and Efraín Rojas. Born–infeld extension of lovelock brane gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 30(11):115012, 2013. URL <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/30/11/115012/meta>.
- [19] Riccardo Capovilla, Alberto Escalante, Jemal Guven, and Efran Rojas. Hamiltonian dynamics of extended objects: Regge-teitelboim model. 48, 03 2006.
- [20] AC Ripken. Coordinate systems in de sitter spacetime, 2013.
- [21] Rama Basu, Alan H. Guth, and Alexander Vilenkin. Quantum creation of topological defects during inflation. *Phys. Rev. D*, 44:340–351, Jul 1991. doi: 10.1103/PhysRevD.44.340. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.44.340>.
- [22] Uribe Araujo Angelina Jaurequi Dias Antonio. *Funciones Especiales*. Editorial Universidad de Sonora. Departamento de Fisica, 2006. ISBN 970-689-281-8.

-
- [23] P. Candelas and D. J. Raine. General-relativistic quantum field theory: An exactly soluble model. *Phys. Rev. D*, 12:965–974, Aug 1975. doi: 10.1103/PhysRevD.12.965. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.12.965>.
- [24] B. Allen. Graviton propagator in de sitter space. *Phys. Rev. D*, 34:3670–3675, Dec 1986. doi: 10.1103/PhysRevD.34.3670. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.34.3670>.
- [25] Iosif M. Ryzik I.S. Gradshteyn. 6-7 - definite integrals of special functions. In Daniel Zwillinger, Victor Moll, I.S. Gradshteyn, and I.M. Ryzhik, editors, *Table of Integrals, Series, and Products (Eighth Edition)*, pages 637 – 775. Academic Press, Boston, eighth edition edition, 2014. ISBN 978-0-12-384933-5. doi: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-384933-5.00006-0>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780123849335000060>.