



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERIA MECANICA
Y ELECTRICA



SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E
INVESTIGACIÓN

**ANÁLISIS DEL PROCEDIMIENTO DE MUESTREO -
RECONSTRUCCIÓN DE PROCESOS ALEATORIOS A TRAVÉS
DE FILTROS DE CHEBYSHEV**

TESIS

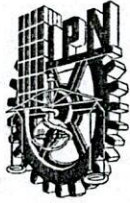
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN
INGENIERIA EN TELECOMUNICACIONES

PRESENTA:

ING. CARLOS RAFAEL CASASOLA PÉREZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. DANIEL RODRÍGUEZ SALDAÑA



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 18:00 horas del día 3 del mes de noviembre del 2022 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Posgrado de: ESIME - ZACATENCO para examinar la tesis titulada:

Análisis del Procedimiento de Muestreo-Reconstrucción de Procesos Aleatorios a través de Filtros de Chebyshev del (la) alumno (a):

Apellido Paterno:	CASASOLA	Apellido Materno:	PÉREZ	Nombre (s):	CARLOS RAFAEL
-------------------	----------	-------------------	-------	-------------	---------------

Número de registro: B 2 0 1 2 0 0

Aspirante del Programa Académico de Posgrado: MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIONES

Una vez que se realizó un análisis de similitud de texto, utilizando el software antiplagio, se encontró que el trabajo de tesis tiene 10 % de similitud. **Se adjunta reporte de software utilizado.**

Después que esta Comisión revisó exhaustivamente el contenido, estructura, intención y ubicación de los textos de la tesis identificados como coincidentes con otros documentos, concluyó que en el presente trabajo **SI** **NO** **SE CONSTITUYE UN POSIBLE PLAGIO.**

JUSTIFICACIÓN DE LA CONCLUSIÓN:


El porcentaje se debe a la cita de los artículos y hace referencia a resultados que sirvieron de antecedentes.


****Es responsabilidad del alumno como autor de la tesis la verificación antiplagio, y del Director o Directores de tesis el análisis del % de similitud para establecer el riesgo o la existencia de un posible plagio.**


Finalmente, y posterior a la lectura, revisión individual, así como el análisis e intercambio de opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR** **SUSPENDER** **NO APROBAR** la tesis por **UNANIMIDAD** o **MAYORÍA** en virtud de los motivos siguientes:

- El trabajo cumple con los requisitos del reglamento de posgrado.
- El alumno respondió adecuadamente a las preguntas realizadas por el jurado evaluador.
- Se comprometió a atender las observaciones de la comisión revisora.

COMISIÓN REVISORA DE TESIS


 Director de Tesis
 DR. DANIEL RODRÍGUEZ SALDAÑA
 16334-ED-22


 2do. Vocal
 DR. RAÚL CASTILLO PÉREZ
 16155-EF-22/6


 Presidente
 DR. LUÍS MANUEL RODRÍGUEZ MÉNDEZ
 16153-EF-22


 3er Vocal
 M. en C. MIGUEL SÁNCHEZ MERAZ
 16203-EI-22


 Secretario
 DR. ELOY RAMÍREZ GARCÍA
 16129-ED-22


 PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE INVESTIGACIÓN ZACATENCO
 DR. JOSÉ MARTÍNEZ TRINIDAD



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA DE AUTORIZACIÓN DE USO DE OBRA PARA DIFUSIÓN

En la Ciudad de México el día 11 del mes de noviembre del año 2022, el (la) que suscribe Carlos Rafael Casasola Pérez alumno(a) del programa Maestría en Ciencias en Ingeniería de Telecomunicaciones con número de registro B201200, adscrito(a) a la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación manifiesta que es autor(a) intelectual del presente trabajo de tesis bajo la dirección del Dr. Daniel Rodríguez Saldaña y cede los derechos del trabajo intitulado Análisis del Procedimiento de Muestreo-Reconstrucción de Procesos Aleatorios a través de Filtros de Chebyshev, al Instituto Politécnico Nacional, para su difusión con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expresado del autor y/o director(es). Este puede ser obtenido escribiendo a las siguiente(s) dirección(es) de correo: carloscasasola53@gmail.com. Si el permiso se otorga, al usuario deberá dar agradecimiento correspondiente y citar la fuente de este.

Carlos Rafael Casasola Pérez

Nombre completo y firma
autógrafa del (de la)
estudiante

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a mi país y a sus instituciones por la formación que me han proporcionado, por ser un ejemplo de cambio y de trabajo.

Agradezco al Dr. Daniel Rodríguez Saldaña y al Dr. Vladimir Kazakov por su orientación.

Con dedicatoria para todos aquellos que de alguna manera permitieron y apoyaron la realización de este trabajo.



Como dice el filósofo Aristóteles al principio de la primera Filosofía (La Metafísica), todos los hombres, por naturaleza, desean saber. La razón de lo cual puede ser el que toda cosa, impulsada por providencia de su propio natural, inclinase a su perfección; de aquí que, pues la ciencia es la última perfección de nuestra alma, y en ella reside nuestra felicidad, todos, por naturaleza, a desearla estamos sujetos.

D. Alighieri

La verdad es universal, no me pertenece a mí, pertenece a todos, ella me tiene a mí, no yo a ella. Mi propiedad es la forma, ella es mi individualidad intelectual. ¡Y cómo! La ley me permite que yo escriba, ¡sólo que en otro estilo que el mío!

M. Lifshitz

Contenido

	Pág.
Índice de tablas	iii
Índice de figuras	iv
Resumen	ix
Abstract	x
Objetivos	xi
Justificación	xi
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS	1
1.2 ACERCA DEL TEOREMA DEL MUESTREO Y SUS GENERALIZACIONES	2
1.3 APORTES AL PROCEDIMIENTO DE MUESTREO-RECONSTRUCCIÓN	3
2. MARCO TEÓRICO	7
2.1 PROCESOS ALEATORIOS	7
2.2 CARACTERÍSTICAS GENERALES	8
2.3 FUNCIÓN DE COVARIANZA	10
2.4 DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA	13
2.5 PROCESOS ALEATORIOS A TRAVÉS DE UN SISTEMA LINEAL	14
2.6 DESCRIPCIÓN DEL FILTRO DE CHEBYSHEV	18
3. METODOLOGÍA	26
3.1 PROCESOS ALEATORIOS GAUSSIANOS	26
3.2 REGLA DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA CONDICIONAL	27
3.3 FUNCIONES BÁSICAS	30
3.4 EJEMPLOS DEL PRM DE REALIZACIONES DE PROCESOS GAUSSIANOS	32
3.5 PMR DE REALIZACIONES DE PROCESOS GAUSSIANOS SIN CONOCER LA FUNCIÓN DE COVARIANZA	45
4. RECONSTRUCCIÓN DE PROCESOS ALEATORIOS A LA SALIDA DE FILTROS CHEBYSHEV TIPO I	51
4.1 FUNCIÓN DE DENSIDAD ESPECTRAL A LA SALIDA DE FILTROS DE CHEBYSHEV TIPO I	51
4.2 FUNCIÓN DE COVARIANZA A LA SALIDA DE FILTROS DE CHEBYSHEV TIPO I	54
4.3 RECONSTRUCCIÓN A LA SALIDA DE FILTRO DE CHEBYSHEV TIPO I DE PRIMER ORDEN	55

4.4	RECONSTRUCCIÓN A LA SALIDA DE FILTRO DE CHEBYSHEV TIPO I PARA DIFERENTE ORDEN	59
5.	RECONSTRUCCIÓN DE PROCESOS ALEATORIOS A LA SALIDA DE FILTROS CHEBYSHEV TIPO II	71
5.1	FUNCIÓN DE DENSIDAD ESPECTRAL A LA SALIDA DE FILTROS DE CHEBYSHEV TIPO II	71
5.2	FUNCIÓN DE COVARIANZA A LA SALIDA DE FILTROS DE CHEBYSHEV TIPO II	74
5.3	RECONSTRUCCIÓN A LA SALIDA DE FILTRO DE CHEBYSHEV TIPO II DE PRIMER ORDEN	76
5.4	RECONSTRUCCIÓN A LA SALIDA DE FILTRO DE CHEBYSHEV TIPO II PARA DIFERENTE ORDEN	78
5.5	PROCEDIMIENTO DE RECONSTRUCCIÓN A LA SALIDA DE FILTRO DE CHEBYSHEV TIPO I, CHEBYSHEV TIPO II Y FILTRO IDEAL	88
6.	CONCLUSIONES	96
6.1	ACERCA DE LA REGLA DE LA ESPERANZA MATEMATICA CONDICIONAL	96
6.2	APORTACION DE LOS FILTROS CHEBYSHEV AL PROCEDIMIENTO DE MUESTREO- RECONSTRUCCIÓN	97
	APÉNDICES	100
A.	VARIABLE ALEATORIA UNIDIMENSIONAL	100
B.	POLINOMIO DE CHEBYSHEV	108
C.	FILTROS DE CHEBYSHEV	113
D.	PROGRAMAS UTILIZADOS	117
E.	PRODUCTOS	127
	REFERENCIAS	134

Índice de tablas

	Pág.
2.1 Respuesta de filtros pasa-bajas lineales para la descripción de reconstrucción de procesos aleatorios.	16
3.1 Valores de muestreo para 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	33
3.2 Valores de error máximos y mínimos de reconstrucción para 9 muestras con un intervalo de muestreo $\Delta T = 0.5$.	41
3.3 Valores de los instantes de muestreo para 5 muestras con un intervalo de muestreo ΔT no periódico.	43
3.4 Comparación de valores máximos y mínimos, calculados y estimados de error de reconstrucción para 9 muestras con un intervalo de muestreo $\Delta T = 0.5$.	48
4.1 Valores de las frecuencias de corte para los filtros de Chebyshev tipo I.	52
4.2 Valores de muestreo para 9 muestras con un intervalo de muestreo $\Delta T = 0.5$.	56
4.3 Valores máximos y mínimos de error de reconstrucción para filtros RC y Chebyshev tipo I de diferente orden.	60
4.4 Valores máximos y mínimos de error de reconstrucción de Chebyshev tipo I de diferente orden.	69
5.1 Frecuencias de corte para diferente orden de filtros de Chebyshev tipo II.	72
5.2 Valores máximos y mínimos de error de reconstrucción de Chebyshev tipo II de diferente orden.	85
5.3 Valores máximos y mínimos de error de reconstrucción de Chebyshev tipo I y II de orden seis y del filtro ideal para un número arbitrario de muestras.	93
5.4 Diferencia de valores máximos y mínimos de error de reconstrucción de Chebyshev tipo I y II de orden seis con 29 muestras con respecto al filtro ideal.	93

Índice de Figuras

CAPITULO 2		Pág.
2.1	Realizaciones de un proceso aleatorio continuo.	6
2.2	Función de covarianza para un proceso aleatorio suave (izquierdo) y un proceso aleatorio caótico (derecho).	10
2.3	Sistema lineal en el tiempo.	13
2.4	Función en términos del tiempo t (izquierda) y función en términos la frecuencia ω bajo la transformada de Fourier (derecha).	14
2.5	Sistema lineal en la frecuencia.	14
2.6	Filtros RC pasa-bajas lineales de una etapa (a), dos etapas (b) y tres etapas (c).	15
2.7	Característica de amplitud de la aproximación de Chebyshev del tipo I para p par (izquierda) e impar (derecha).	18
2.8	Filtros pasivos pasa-bajas de Chebyshev tipo I RCL para tener el mínimo de inductores (a) y RLC para tener el mínimo de condensadores (b).	19
2.9	Filtros activos pasa-bajas de Chebyshev tipo I de orden 3 (a) y de orden 4 (b).	20
2.10	Característica de amplitud de la aproximación de Chebyshev del tipo II para p par (izquierda) e impar (derecha).	22
2.11	Polos del filtro de Chebyshev.	23
CAPITULO 3		
3.1	Funciones básicas con filtro RC de una etapa con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	32
3.2	Función de reconstrucción con filtro RC de una etapa con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	33
3.3	Función de error de reconstrucción con filtro RC de una etapa con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	34

3.4	Funciones básicas con filtro RC de dos etapas con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	35
3.5	Función de reconstrucción con filtro RC de dos etapas con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	36
3.6	Función de error de reconstrucción con filtro RC de dos etapas con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	37
3.7	Funciones básicas con filtro RC de tres etapas con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	38
3.8	Función de reconstrucción con filtro RC de tres etapas con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	39
3.9	Función de error de reconstrucción con filtro RC de tres etapas con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	40
3.10	Función de reconstrucción con filtro RC de una, dos y tres etapas con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	41
3.11	(a) Función de error de reconstrucción de filtros RC de una, dos y tres etapas con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$ en la región de interpolación. (b) Zoom de la región punteada.	42
3.12	Funciones de error de reconstrucción de filtros RC de una, dos y tres etapas con 5 muestras separadas ΔT no periódico.	43
3.13	Filtro RC pasa-bajas de una etapa alimentado con ruido Gaussiano.	44
3.14	Estimación de funciones básicas con filtro RC de una etapa con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	46
3.15	Función de reconstrucción calculada y estimada con filtro RC de una etapa con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	47
3.16	Función de error de reconstrucción calculada y estimada con filtro RC de una etapa con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	47

CAPITULO 4

4.1	Función de densidad espectral con filtro Chebyshev tipo I para diferente orden.	51
------------	---	----

4.2	Función de densidad espectral con filtro Chebyshev tipo I para diferente orden con frecuencias de corte ω_c .	52
4.3	Función de covarianza con filtro Chebyshev tipo I para diferente orden.	53
4.4	Función de covarianza con filtro de Chebyshev tipo I para diferente orden y función Sinc (τ).	54
4.5	Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo I de orden uno con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	55
4.6	Función de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo I de orden uno con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	56
4.7	Función de error de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo I de orden uno con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	57
4.8	Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo I de orden dos con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	59
4.9	Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo I de orden tres con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	60
4.10	Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo I de orden cuatro con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	61
4.11	Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo I de orden cinco con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	62
4.12	Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo I de orden seis con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	62
4.13	Funciones básicas cuando $j = 2$ con filtro Chebyshev tipo I de diferente orden con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	63
4.14	Funciones básicas centrales con filtro Chebyshev tipo I de diferente orden con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	64
4.15	Función de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo I de diferente orden con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	65
4.16	Función de reconstrucción en la región de interpolación con filtro Chebyshev tipo I de diferente orden con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	66

4.17	(a) Función de error de reconstrucción de filtros RC de una, dos y tres etapas con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$ en la región de interpolación. (b) Zoom de la región punteada.	67
4.18	Función de error de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo I de diferente orden con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	68

CAPITULO 5

5.1	Función de densidad espectral con filtro Chebyshev tipo II para diferente orden.	71
5.2	Función de densidad espectral del filtro de Chebyshev tipo II para orden impar y par.	73
5.3	Función de covarianza con filtro Chebyshev tipo II para diferente orden.	74
5.4	Función de covarianza con filtro de Chebyshev tipo II para diferente orden y función Sinc (τ).	74
5.5	Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo II de orden uno con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	75
5.6	Función de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo II de orden uno con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	76
5.7	Función de error de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo II de orden uno con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	77
5.8	Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo II de orden dos con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	78
5.9	Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo II de orden tres con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	79
5.10	Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo II de orden cuatro con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	79
5.11	Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo II de orden quinto con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	80
5.12	Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo II de orden sexto con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	80

5.13	Funciones básicas centrales con filtro Chebyshev tipo II de diferente orden con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	82
5.14	Función de reconstrucción en la región de interpolación con filtro Chebyshev tipo II de diferente orden con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	82
5.15	Función de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo II de diferente orden con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	83
5.16	(a) Función de error de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo II de diferente orden con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$. (b) Zoom de la región punteada.	84
5.17	Función de error de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo II de diferente orden con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	86
5.18	Funciones básicas centrales con filtro Chebyshev tipo I, tipo II de orden seis y filtro ideal con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	88
5.19	Funciones básicas centrales con filtro Chebyshev tipo I, tipo II de orden seis y filtro ideal con 19 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	89
5.20	Funciones básicas centrales con filtro Chebyshev tipo I, tipo II de orden seis y filtro ideal con 29 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	89
5.21	Función de error de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo I, tipo II de orden seis y filtro ideal con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	90
5.22	Función de error de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo I, tipo II de orden seis y filtro ideal con 19 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.	91
5.23	Función de error de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo I, tipo II de orden seis y filtro ideal con 5 muestras ΔT no periódico.	92

RESUMEN

En la Teoría de las Comunicaciones, existen diversos problemas que deben ser resueltos o, en su defecto, atendidos. Dentro de estos, existe uno que es fundamental, se trata del problema de reconstrucción de procesos aleatorios, el cual está sujeto a las realizaciones muestreadas del mismo.

Existen aportaciones en la reconstrucción de procesos aleatorios, dentro de las cuales se encuentran el teorema de Balakrishnan, el cual es ejercido a gran escala y citado con frecuencia. Sin embargo, este trabajo y algunas otras generalizaciones del teorema del muestreo presentan los siguientes detalles: a) son principalmente válidas para procesos limitados en banda; b) la función de densidad espectral de los procesos está caracterizada por la respuesta de un filtro pasa-bajas ideal; c) no se especifica la función de densidad de probabilidad de los procesos; d) la función de interpolación que multiplica a cada muestra es del tipo $Sinc(x)$; e) se considera un número infinito de muestras; f) y no estima el error de reconstrucción. Estos detalles muestran algunas limitaciones y por lo tanto se presentan algunas dificultades para llevarlo a la práctica.

De esta manera, el presente trabajo no pretende dar respuesta final al problema del procedimiento de muestreo y reconstrucción de procesos aleatorios, especialmente los gaussianos, sino atender el problema desde otra perspectiva, la cual está fundamentada en un algoritmo óptimo de reconstrucción, basado en la regla de la esperanza matemática condicional. Este algoritmo, permite conocer las funciones de interpolación o funciones básicas, la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción utilizando diferentes estimaciones de la función de covarianza a partir de filtros de Chebyshev y un número arbitrario de muestras.

Finalmente, se muestran las ventajas que tiene el algoritmo al aplicarlo al procedimiento de muestreo y reconstrucción de procesos aleatorios gaussianos. Aunado a lo anterior, se evaluó la calidad del algoritmo de reconstrucción al comparar diferentes resultados, usando distintas funciones de interpolación con diferente número de muestras.

ABSTRACT

In Communications Theory, there are several problems that must be solved or, failing that, addressed. Among these, there is one that is fundamental: The problem of reconstruction of random processes, which is subject to the sampled realizations of the same.

There are contributions in the reconstruction of random processes, among which is Balakrishnan's theorem, which is exercised on a large scale and frequently cited. However, this work and some other generalizations of the sampling theorem have the following details: a) they are mainly valid for band-limited processes; b) the spectral density function of the processes is characterized by the response of an ideal low-pass filter; c) the probability density function of the processes is not specified; d) the interpolation function that multiplies each sample is of the $Sinc(x)$ type; e) an infinite number of samples is considered; f) and it does not estimate the reconstruction error. These details show some limitations and therefore there are some difficulties to put it into practice.

Thus, the present work does not intend to give a final answer to the problem of the sampling and reconstruction procedure of random processes, especially gaussian ones, but to approach the problem from another perspective, which is based on an optimal reconstruction algorithm, based on the conditional mathematical expectation rule. This algorithm allows to know the interpolation functions or basic functions, the reconstruction function and the reconstruction error function using different estimates of the covariance function from Chebyshev filters and an arbitrary number of samples.

Finally, the advantages of the algorithm when applied to the procedure of sampling and reconstruction of Gaussian random processes are shown. In addition, the quality of the reconstruction algorithm was evaluated by comparing different results, using different interpolation functions with different number of samples.

OBJETIVOS

GENERAL

Describir el procedimiento de muestreo y reconstrucción de procesos gaussianos obtenidos a la salida del filtro de Chebyshev de tipo I y II con diferente respuesta en frecuencia y un número arbitrario de muestras.

PARTICULARES

- Estimar la función de densidad espectral a la salida de filtros de Chebyshev tipo I y tipo II con diferente respuesta en frecuencia.
- Estimar el comportamiento de las funciones básicas de cada muestra utilizando filtros de Chebyshev tipo I y tipo II de diferente orden y con diferente número de muestras.
- Estimar la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción.

JUSTIFICACIÓN

Algunas investigaciones sobre el procedimiento de muestreo y reconstrucción se basan en la aplicación de la regla de la esperanza matemática condicional, la cual permite conocer la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción, así como implementar una función de interpolación denominada función básica. Esta metodología tiene ventajas sobre el teorema clásico del muestreo y sus generalizaciones. Sin embargo, no siempre se tienen expresiones analíticas para cada respuesta del filtro en términos del tiempo; por lo que resulta conveniente realizar una estimación de dicha función. Esto, puede llevarse a cabo mediante la respuesta en frecuencia de algún filtro diferente al ideal, tal es caso del filtro de Chebyshev, aplicado para la reconstrucción de procesos gaussianos, donde al tener procesos aleatorios con diferentes funciones de covarianza, entonces las funciones básicas tendrán que ser diferentes. Por esta razón, es necesario estimar y analizar cada función básica para cada muestra y comparar el error de reconstrucción que se obtiene al utilizar la regla de la esperanza matemática condicional con diferentes filtros Chebyshev y diferentes respuestas en frecuencia.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS [1]

El problema de *reconstrucción* de una señal comienza con el estudio de reconstrucción de funciones, tales funciones pueden reconstruirse a partir de ciertas muestras tomadas de la misma función. De forma general, esta situación se centra en un problema de *interpolación*; los primeros desarrollos relacionados con la interpolación datan de 1665 con la cuadratura del círculo de Wallis, seguido, antes de 1676 de las derivaciones de las series binómicas por Newton. Aunque las fechas y las prioridades son discutibles, las siguientes indican con suficiente precisión el progreso general hasta el siglo XIX: fórmula de Newton, 1687; la de Euler, por lo general llamada de Lagrange, 1775, también atribuida a E. Waring, 1779; la de Gauss, 1812. Sin embargo, se han desarrollado otros métodos a los problemas de interpolación, los cuales juegan un rol importante en investigaciones teóricas y aplicadas. Dentro de algunos métodos reportados de interpolación existe uno de especial interés en la reconstrucción de funciones. Este fue mostrado en 1915 por el matemático E. T. Whittaker [2] y ampliada en 1928 [3]. En el primer trabajo se destaca una función en particular llamada *función cardinal* $C(t)$, la cual está descrita por (1.1).

$$C(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(a + kw) \frac{\operatorname{sen} \left\{ \frac{\pi}{w} (t - a - kw) \right\}}{\frac{\pi}{w} (t - a - kw)} \quad (1.1)$$

Donde a, w son complejos, $k \in \mathbb{Z}$ y $C(t)$ es la función reconstruida a partir de ciertos puntos de la función $f(a + kw)$ multiplicada por una *función de interpolación*. Esta función de interpolación es importante, ya que en trabajos posteriores se corroboraría su practicidad haciendo uso de ella en el ya conocido *teorema del muestreo*.

El teorema del muestreo se anuncia a continuación [6]:

Sea una función del tiempo $f(t)$ de variable real limitada en banda de frecuencia desde $-W$ hasta W es completamente determinada en el tiempo a partir de puntos discretos igualmente espaciados por el siguiente resultado:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\text{sen}\pi(2Wt - n)}{\pi(2Wt - n)} \quad (1.2)$$

Es decir, el teorema del muestreo demuestra que una señal analógica limitada en banda es equivalente a la serie de sus muestras tomadas a una distancia definida por el *intervalo de Nyquist*.

1.2 ACERCA DEL TEOREMA DEL MUESTREO Y SUS GENERALIZACIONES

El teorema de muestreo o también llamado teorema WKS [4-7] ha sido ampliamente utilizado en la transmisión de señales en *procesos determinísticos* y *procesos aleatorios estacionarios* [8,9], éste teorema ha sido generalizado en varios trabajos [10-15]. Dentro de estas generalizaciones destaca la del matemático A. Balakrishnan publicado en 1957, en el cual, el teorema clásico de muestreo fue generalizado para procesos estacionarios. *El teorema de Balakrishnan* tiene gran importancia debido a que es ejercido a gran escala y citado con frecuencia. Sin embargo, éste trabajo y algunas otras generalizaciones del teorema del muestreo, incluyendo la reconstrucción de señales, presentan los siguientes detalles: *a) son principalmente válidas para procesos limitados en banda; b) la función de densidad espectral de los procesos está caracterizada por la respuesta de un filtro pasa-bajas ideal; c) no se especifica la función de densidad de probabilidad de los procesos; d) la función de interpolación que multiplica a cada muestra es del tipo $\text{Sinc}(x)$; e) se considera un número infinito de muestras; f) y no estima el error de reconstrucción*. Estos detalles muestran algunas de sus limitaciones y por lo tanto se presentan algunas dificultades para llevarlo a la práctica.

En las *Comunicaciones*, es bien sabido, que la *respuesta en frecuencia* de los *filtros* utilizados no es del todo ideal, es decir, existe dificultad en la realización de la *función de reconstrucción* y el cálculo de la *función de error de reconstrucción*. De esta manera, es

importante analizar el *procedimiento de muestreo y reconstrucción* con filtros que tengan una respuesta en frecuencia más cercana a lo que se aplica en un escenario real. Por otro lado, hay que destacar la importancia de analizar el error de reconstrucción que se obtiene cuando se aplica un *número arbitrario de muestras* y verificar el comportamiento de las funciones de interpolación de cada muestra.

1.3 APORTES AL PROCEDIMIENTO DE MUESTREO-RECONSTRUCCIÓN

Para abordar el análisis del procedimiento de muestreo-reconstrucción a través de un *sistema* se requieren elementos necesarios y suficientes. Los cuales, parten de la descripción detallada de procesos aleatorios, expuestos en el capítulo 2; y de especial interés para aquellos procesos que tienen como característica principal una función de *densidad de probabilidad gaussiana*, también llamados *procesos gaussianos*, este trabajo está enfocado principalmente a este tipo de procesos. Además, en este capítulo se hace una descripción de *sistemas lineales e invariantes en el tiempo* a través de ejemplos, como son los *filtros RC* de diferentes etapas. Estos, son útiles para el análisis, cuando a la entrada están alimentados con *ruido gaussiano* y a su salida los caracteriza un proceso aleatorio, siendo que, su respuesta en frecuencia es ampliamente conocida.

Varias situaciones expuestas en este capítulo han sido atendidas en trabajos anteriores [16-18]. Estos, han tratado casos con filtros RC para procesos gaussianos tanto *limitados y no limitados en banda*. La manera de abordar el procedimiento de muestreo-reconstrucción dentro de estas investigaciones, es decir, la metodología, se basa en la aplicación de *la regla de la esperanza matemática condicional* expuesta en trabajos previos [19-23], la cual permite conocer con detalle el comportamiento de la *función de reconstrucción* y la *función error de reconstrucción*, así como implementar una función de interpolación denominada, en este trabajo, *función básica*. Esta metodología es descrita a detalle en el capítulo 3, donde se presentan diferentes ejemplos considerando procesos gaussianos estacionarios con un número arbitrario de muestras. También, es de importancia resaltar que esta metodología se puede aplicar en casos donde no se tienen expresiones analíticas para cada respuesta del filtro en términos del tiempo. Por lo que, resulta conveniente realizar una estimación de la función en el tiempo, es decir, la *función de covarianza*. Esto puede llevarse a cabo mediante la respuesta en frecuencia del filtro, y, posteriormente obtener las funciones básicas, función de

reconstrucción y la función de error de reconstrucción. De esta forma, el uso de filtros con diferente respuesta en frecuencia a los filtros RC puede ayudar a describir el procedimiento de muestreo-reconstrucción de procesos que presentan variaciones en sus características estadísticas, principalmente la función de covarianza de los procesos aleatorios.

En otras investigaciones [24-26] se ha trabajado con una función de interpolación diferente a la mostrada con los filtros RC, esta función es la que se obtiene a la salida de filtros *Butterworth* y de *Chebyshev tipo I*. En [24,25] se implementa la metodología basada en la regla de la esperanza matemática condicional para la reconstrucción de señales y se obtienen resultados favorables en su aplicación, por ejemplo, en [24] se trabaja con filtros *Butterworth* de diferente orden, en este trabajo de forma general muestra las siguientes características:

- i. *trabajan con filtros de orden 1, 2, 4, 8, 16 y 32;*
- ii. *la frecuencia de corte es siempre la misma para diferente orden;*
- iii. *la función de covarianza tiene una aproximación a la función Sampling;*
- iv. *el orden uno caracteriza a un proceso Markoviano;*
- v. *los de orden mayor a uno caracterizan a procesos no Markoviano.*

También, en [25] se pueden destacar aspectos, como los siguientes:

- a) *la función de covarianza del filtro de primer orden no está normalizada;*
- b) *las funciones básicas de dicho filtro no caracterizan a un proceso Markoviano;*
- c) *la función de error de reconstrucción del filtro no caracteriza a un proceso Markoviano;*
- d) *el algoritmo de estimación es deficiente.*

Estos aspectos son importantes, ya que en [26], basándose en la misma metodología, la función de interpolación a través de filtros de Chebyshev de tipo I muestra resultados correctos, en comparación con [25]. Sin embargo, no se exponen casos para filtros de orden mayor a tres.

El filtro de Chebyshev tiene una respuesta en frecuencia o *función de densidad espectral* importante, ya que presenta características particulares en la teoría de filtros, las cuales se describen en el capítulo 2. Entonces, al tener elementos suficientes y adecuados para abordar otro tipo de filtros, como los filtros de Chebyshev, en el procedimiento de muestreo-reconstrucción de procesos gaussianos, se puede postular lo siguiente: al tener procesos aleatorios con diferentes funciones de covarianza, las funciones básicas deben ser diferentes,

siendo necesario estimar y analizar cada función básica para cada muestra. También es crucial determinar y comparar el error de reconstrucción que se obtiene al aplicar filtros con diferentes respuestas en frecuencia.

Es importante mencionar que, en éste trabajo, se describe a detalle la respuesta en frecuencia y su función de covarianza de los filtros de Chebyshev tipo I de orden mayor. Además, se requiere comparar esta función con la función de covarianza de un filtro ideal, tal situación se aborda en el capítulo 4. Posteriormente, se aplica la regla de la esperanza matemática condicional para diferentes casos en los filtros de distinto orden con un número arbitrario de muestras. En el primer caso, cuando el filtro es de orden uno, es importante su análisis para poder caracterizar de manera correcta el comportamiento de las funciones básicas.

A lo largo del capítulo 4 se analizan los resultados de cada uno de los filtros con orden mayor a uno, además se incluye una comparación de los valores de error de reconstrucción de los filtros de Chebyshev tipo I con los mostrados por los filtros RC en el capítulo 3. Es de especial interés examinar la función básica central, ya que ésta, provee mayor información del comportamiento del filtro. Al término del capítulo se comparan los valores de errores de reconstrucción con los diferentes filtros de Chebyshev.

Posteriormente, en el capítulo 5 se muestran los resultados que se obtienen a través de un *filtro de Chebyshev tipo II* aplicando la regla de la esperanza matemática condicional al procedimiento de muestreo-reconstrucción de procesos gaussianos. En principio, es importante describir la respuesta en frecuencia del filtro y sus particularidades, así como el comportamiento de la estimación de su función de covarianza y realizar una comparación con la respuesta del filtro ideal. Tal situación es fundamental, ya que a diferencia del comportamiento que presenta el filtro de Chebyshev tipo I, las características del filtro de Chebyshev II son similares al filtro ideal, en algunas regiones, es decir, tiene una mejor aproximación al filtro ideal. Como antecedente, el filtro de Chebyshev tipo I sugiere analizar nuevamente el comportamiento del filtro de orden uno, ya que este caracteriza a un proceso muy en particular. Además, en este capítulo se expone el análisis de las funciones básicas para ordenes mayores a uno, así como la descripción detallada de la función básica central y la función de reconstrucción. La función de error de reconstrucción se analiza de manera más amplia debido al comportamiento que presenta para cada orden diferente. A su vez se hace

una comparación de los resultados mostrados con el filtro de Chebyshev tipo II con los resultados en el capítulo 4 y con el filtro ideal.

Por último, se presentan las conclusiones recopiladas de cada uno de los capítulos a lo largo de este trabajo, destacando las particularidades de cada uno de los filtros utilizados, así como sus ventajas entre cada uno de ellos. Se expone de manera general la utilización de la metodología y las ventajas que ésta brinda en el procedimiento de muestreo-reconstrucción de procesos aleatorios gaussianos.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

2.1 PROCESOS ALEATORIOS

El concepto de *proceso aleatorio* (PA) se puede basar en ampliar el concepto de *variable aleatoria* (VA) para incluir el tiempo, aunque podría ser asociado con espacio o con cualquier otro parámetro físico posible. La descripción de una VA se puede consultar en el apéndice A. Dado que una variable aleatoria X es, por su definición, una función de los posibles resultados s de un experimento, ahora se convierte en una función tanto de s como del tiempo t . En otras palabras, se asume, de acuerdo con alguna regla, como función de tiempo [27].

$$X(t, s) \quad (2.1)$$

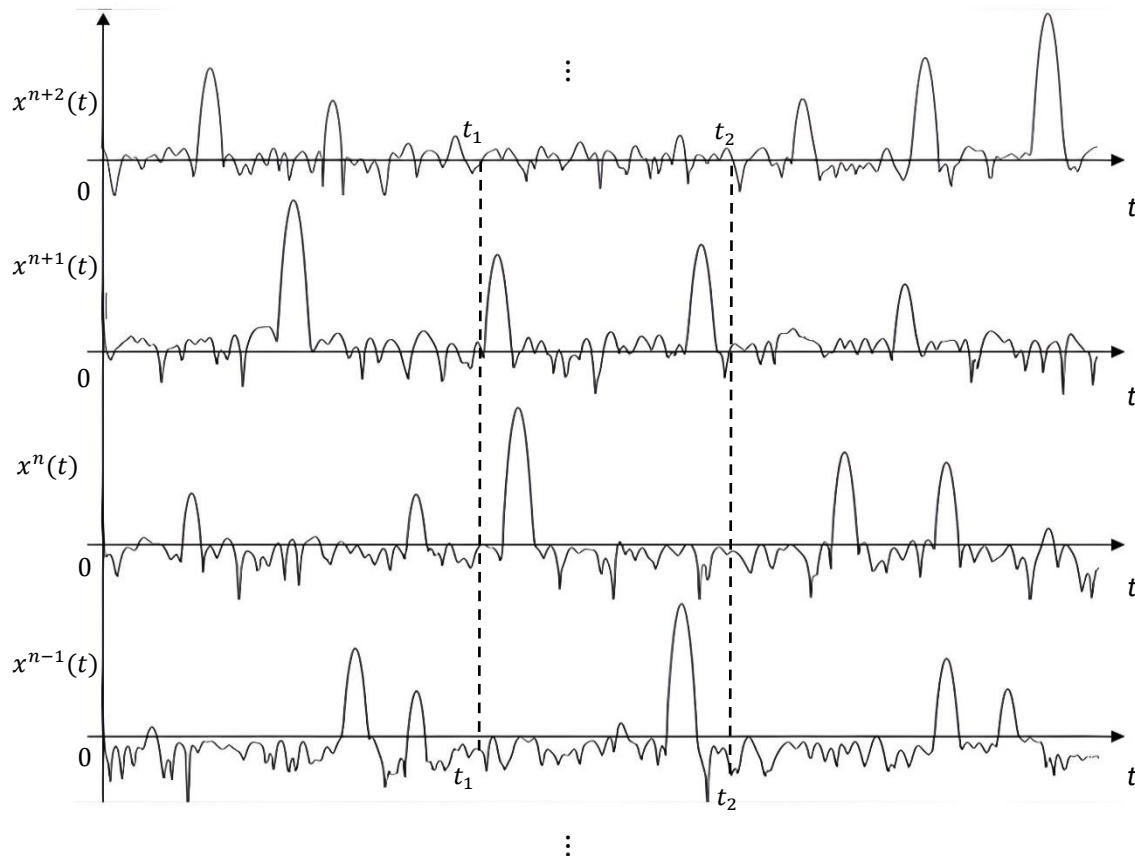


Figura 2.1. Realizaciones de un proceso aleatorio continuo.

Tal conjunto, $X(t, s)$, se llama proceso aleatorio. La figura 2.1 muestra algunos elementos de dicho conjunto, es decir cada función temporal. Por lo tanto, si se deja fijo el valor del argumento s en $X(t, s)$ se tiene una función real $X(t, s) = X^s(t)$ de variable t dependiente del parámetro s , esta función es llamada *realización* [28].

Un proceso aleatorio o *estocástico*, tiene una cantidad infinita de realizaciones, se puede designar la realización separada como $x(t)$. De esta manera, si t es constante se presenta una *variable aleatoria unidimensional* $(X; t)$, la cual está descrita por su *función de densidad de probabilidad* (fdp) *unidimensional* $w_X(x; t)$ [†]. Se pueden elegir muchos instantes de tiempo: t_1, t_2, \dots, t_N . En cada instante de tiempo se va a tener una *VA multidimensional*: $(X_1, X_2, \dots, X_N, t_1, t_2, \dots, t_N)$, la cual debe ser descrita de manera específica para cada tipo de proceso [23].

2.2 CARACTERÍSTICAS GENERALES

Para una descripción matemática de los procesos aleatorios se hace uso de la metodología de la descripción de variables aleatorias. Sin embargo, se necesita que en cada designación se introduzcan los instantes de tiempo, los cuales son parámetros determinísticos, siendo ésta es su principal diferencia entre un PA y una VA.

Función de distribución y función de densidad de probabilidad.

En primer lugar, se definen la *función de distribución* y la *función de densidad de probabilidad* (fdp) de un proceso aleatorio $X(t)$. En un instante de tiempo t_1 , la función de distribución asociada a la variable aleatoria $X_1 = X(t_1)$ se designa por $F_1(x_1; t_1)$, es decir:

$$F_X(x_1; t_1) = P\{X(t_1) \leq x_1\} \text{ para todo } x_1 \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

De forma similar, para N variables aleatorias $X_i = x(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ tal que

$$F_X(x_1, \dots, x_N; t_1, \dots, t_N) = P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_N) \leq x_N\} \quad (2.3)$$

[†] Se debe enfatizar que el tiempo es un parámetro determinístico y no aleatorio dentro de la fdp.

Una vez que se conocen las expresiones (2.2) y (2.3) se pueden calcular las funciones de densidad de probabilidad, es decir:

$$w_X(x_1; t_1) = \frac{d}{dx_1} F_X(x_1; t_1) \quad (2.4)$$

⋮

$$w_X(x_1, \dots, x_N; t_1, \dots, t_N) = \frac{\partial^N}{\partial(x_1, \dots, x_N)} F_X(x_1, \dots, x_N; t_1, \dots, t_N) \quad (2.5)$$

Las características estadísticas de un PA tienen las mismas propiedades de una VA multidimensional.

De manera concreta, conociendo la *fdp multidimensional*: $w_X(x_1, \dots, x_N; t_1, \dots, t_N)$, se pueden calcular muchas funciones, es decir, sus *momentos centrales* y *momentos iniciales*. Todas ellas, serán funciones con argumentos del tiempo (t_1, t_2, \dots, t_N) correspondientes.

Momentos iniciales y momentos centrales.

Cuando $N=1$, el proceso se caracteriza por la fdp unidimensional $w_X(x_1; t_1)$. A continuación, se encuentran los conjuntos correspondientes alrededor del origen $m_k(t_N)$, es decir, los momentos iniciales y los momentos centrales $\mu_k(t_N)$. Tomando el tiempo t_N , arbitrario, entonces consideramos a t_N como simplemente t . Se deduce entonces que, $m_k(t)$ y $\mu_k(t)$ son funciones unidimensionales, puesto que se calculan en la base de la fdp unidimensional.

Si $k=1$, se obtiene la *esperanza matemática* $m_1(t) = m(t)$.

Donde:

$$m(t) = \langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w(x; t) dx \quad (2.6)$$

Si $k=2$, se obtiene $m_2(t)$ y la *varianza* $\mu_2(t) = \sigma^2(t)$

Donde:

$$\sigma^2(t) = \langle (x(t) - m(t))^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - m(t))^2 w(x; t) dx \quad (2.7)$$

De manera análoga, se puede calcular los momentos iniciales y centrales de mayor orden de la siguiente manera:

Momento inicial de orden n,

$$\langle x(t)^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^n w(x; t) dx \quad (2.8)$$

Momento central de orden n,

$$\langle \dot{x}(t)^n \rangle = \langle (x(t) - m(t))^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - m(t))^n w(x; t) dx \quad (2.9)$$

2.3 FUNCIÓN DE COVARIANZA

Es importante considerar otra característica estadística que pueda reflejar las diferencias de la estructura en el tiempo de los diferentes procesos aleatorios, esta es conocida como *función de covarianza*, $K_{X(t)}(t_1, t_2)$ [16].

Donde:

$$\begin{aligned} K_{X(t)}(t_1, t_2) &= \langle \dot{x}(t_1)\dot{x}(t_2) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x(t_1) - m(t_1))(x(t_2) - m(t_2)) w_{X(t)}(x_1 x_2; t_1 t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Para simplificar se omite el subíndice: $K_{X(t)}(t_1, t_2) = K(t_1, t_2)$.

Esta función es determinística con dos argumentos del tiempo t_1 y t_2 los cuales demuestran cómo el momento de covarianza se ve afectado con respecto al cambio de la distancia entre estas dos secciones. La función de covarianza indica si la estructura del proceso descrita en el tiempo es suave o caótica, tal como se muestra en la figura 2.1.

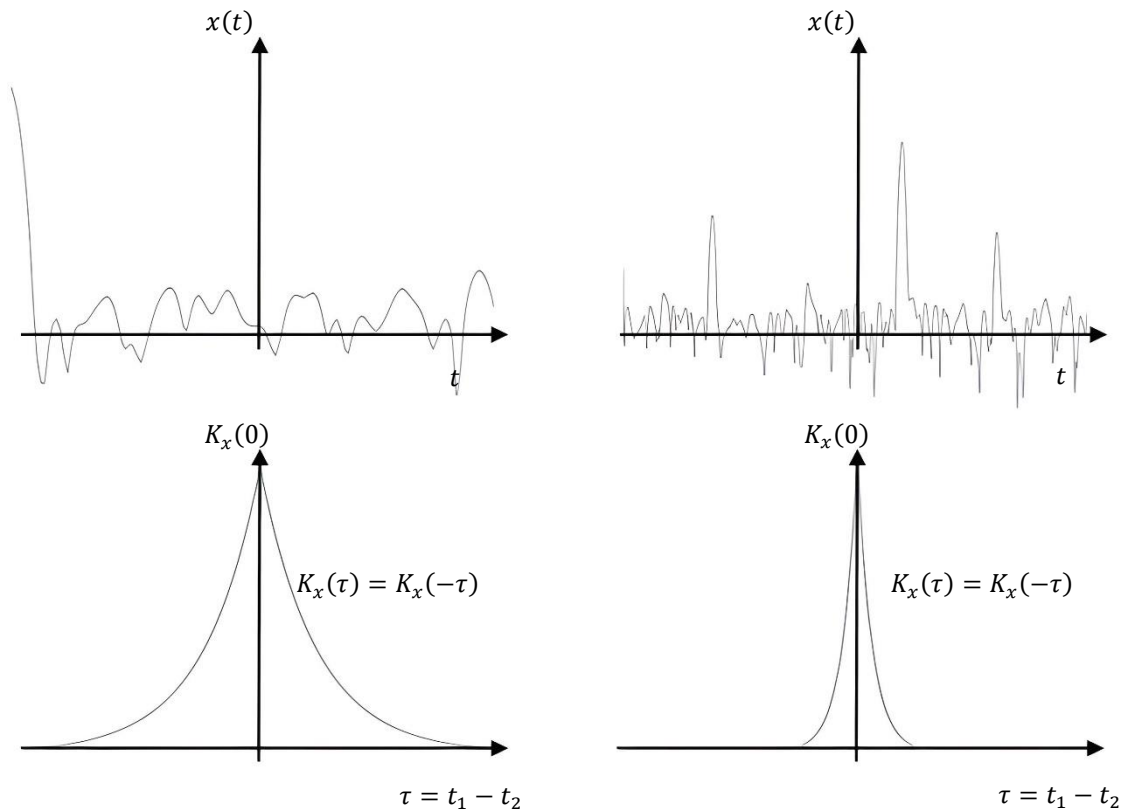


Figura 2.2. Función de covarianza para un proceso aleatorio suave (izquierdo) y un proceso aleatorio caótico (derecho).

Propiedades de la función de covarianza [16,29,30].

- a. Alcanza su valor máximo cuando $t_1 = t_2$ (para un *proceso estacionario de segundo orden*), en donde $\tau = t_2 - t_1 = 0$:

$$K(0) = \langle \dot{x}(t_1)\dot{x}(t_1) \rangle = \langle \dot{x}(t_1)^2 \rangle = \sigma^2(t_1) \quad (2.11)$$

Para un caso arbitrario:

$$K(0) = \langle \dot{x}(t)\dot{x}(t + \tau) \rangle = \langle \dot{x}(t)^2 \rangle = \sigma^2(t) \quad (2.12)$$

- b. Es una función par:

$$K(t_2 - t_1) = K(t_1 - t_2) \quad (2.13)$$

De manera equivalente:

$$K(\tau) = K(-\tau) \quad (2.14)$$

- c. Si $t_2 - t_1 \rightarrow \infty$, las variables aleatorias se convierten en independientes (para la mayor parte de los casos):

$$K[(t_2 - t_1) \rightarrow \infty] = K(\infty) = 0 \quad (2.15)$$

- d. *Función de covarianza normalizada.* Tomando a (2.12) como el valor máximo, tenemos que:

$$R(t_2 - t_1) = \frac{K(t_2 - t_1)}{\max K(t_2 - t_1)} = \frac{K(t_2 - t_1)}{K(0)} = \frac{K(t_2 - t_1)}{\sigma^2(t)} \quad (2.16)$$

$$R(\tau) = \frac{K(\tau)}{\sigma^2(t)} \quad (2.17)$$

Entonces,

$$|K(\tau)| \leq K(0) \rightarrow 0 \leq |R(\tau)| \leq 1$$

Es importante destacar que, la forma de la función de covarianza muestra una representación cualitativa de la estructura en el tiempo de los procesos aleatorios.

- e. *Tiempo de covarianza*[†].

$$\tau_c = \int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau \quad (2.18)$$

Otro parámetro que caracteriza un PA es su *función de densidad espectral*, la cual define como se lleva a cabo la distribución de *potencia* en cada armónico del proceso aleatorio en función de la frecuencia.

[†] Indica el tiempo en que existe dependencia entre los mismos valores del proceso.

2.4 DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA [28,29,31,32]

La densidad espectral de potencia de un proceso aleatorio $x(t)$ se obtiene de (2.19).

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\overline{|X(\omega)|^2}}{T} \quad (2.19)$$

Donde:

$$X(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.20)$$

La expresión (2.19) representa el promedio de la potencia que está transmitiendo un proceso a determinada frecuencia.

La densidad espectral de potencia a menudo se evalúa a partir de la función de covarianza para el PA utilizando el teorema de *Wiener-Khintchine*[†], este se anuncia a continuación.

«Cuando $x(t)$ es un proceso estacionario en sentido amplio, la densidad espectral de potencia puede obtenerse mediante la transformada de Fourier a partir de la función de covarianza».

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega \quad (2.21)$$

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.22)$$

Propiedades del teorema de Wiener-Khintchine:

$$\begin{aligned} a) K_x(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega & c) S_x(\omega) &= S_x(-\omega) \\ b) S_x(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) d\tau & d) S_x(\omega) &\leq 0 \end{aligned}$$

[†] El apellido alemán también puede escribirse como Khinchine o Khinchin.

2.5 PROCESOS ALEATORIOS A TRAVÉS DE UN SISTEMA LINEAL [27,29,33]

Si existe un PA $x(t)$ a la salida de un *sistema lineal invariante en el tiempo* con entrada $u(t)$ como se muestra en la figura 2.3, entonces tiene dos propiedades:

- 1) $u(t + \tau) \rightarrow x(t + \tau) \rightarrow$ Invariabilidad en el tiempo.
- 2) $u(t) = a_1u_1(t) + a_2u_2(t) \rightarrow x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \rightarrow$ principio de superposición.

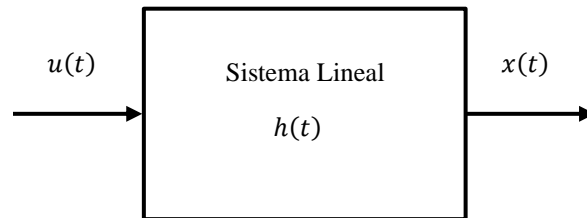


Figura 2.3. Sistema lineal en el tiempo.

Un sistema lineal invariante en el tiempo puede ser caracterizado por su *respuesta al impulso*. Dicha respuesta puede utilizarse para obtener la salida del sistema, tal expresión se denomina *integral de convolución* expresada por (2.23).

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t - \tau)d\tau = u(t) * h(t) \quad (2.23)$$

$$h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau \quad (2.24)$$

El espectro de $x(t)$ se obtiene aplicando la *Transformada de Fourier* de ambos lados de la ecuación (2.23), por lo que:

$$X(\omega) = U(\omega)H(\omega) \quad (2.25)$$

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{U(\omega)} \quad (2.26)$$

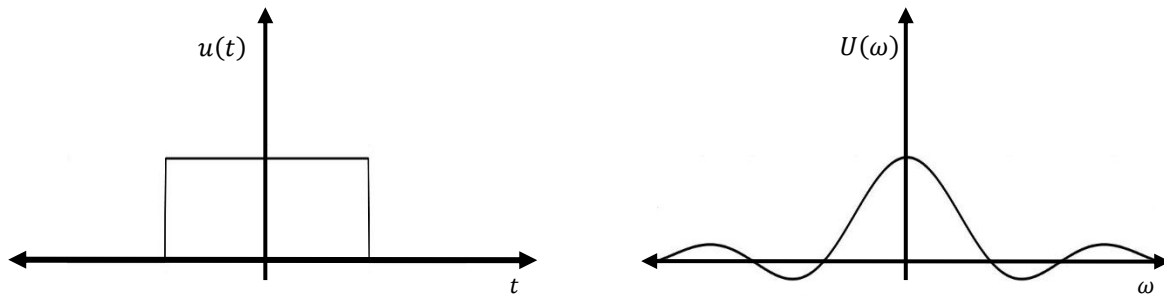


Figura 2.4. Función en términos del tiempo t (izquierda) y función en términos la frecuencia ω bajo la transformada de Fourier (derecha).

Con la relación (2.26) se puede conocer $H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$ denominada *función de transferencia* o respuesta en frecuencia. La representación esquemática en términos de la frecuencia del sistema anteriormente mostrado está en la figura 2.5.

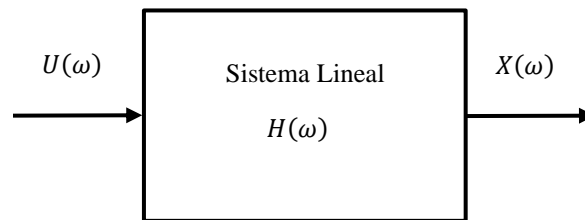


Figura 2.5. Sistema lineal en la frecuencia.

Cuando se tiene en la entrada un PA y se desea conocer su función de covarianza a la salida, se puede considerar a (2.27) tal como se desarrolla a continuación.

$$K_x(t_1, t_2) = \langle \dot{x}(t_1)\dot{x}(t_2) \rangle = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)u(t_1 - \tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)u(t_2 - \tau_2)d\tau_2 \right\rangle \quad (2.27)$$

Si el PA a la entrada es *estacionario en sentido amplio*[†], se tiene que:

$$K_u(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) = K_u(\tau - \tau_1 + \tau_2) \quad (2.28)$$

[†] Un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio solo requiere que el primer y segundo momento inicial no cambie con respecto al tiempo.

Donde $\tau = t_1 + t_2$. Resulta que, la función de covarianza quedara descrita por la siguiente expresión:

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2) d\tau_2 K_u(\tau - \tau_1 + \tau_2) \quad (2.29)$$

Entonces, (2.29) indica que cuando un PA en la entrada de un sistema lineal es estacionario en sentido amplio, entonces a su salida también será estacionario.

Con la expresión 2.30 se puede conocer $S_x(\omega)$ de la salida del sistema.

$$S_x(\omega) = H(j\omega)H^*(j\omega)S_u(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_u(\omega) \quad (2.30)$$

Se pueden considerar algunos ejemplos para determinar la función de densidad espectral $S_x(\omega)$ y la función de covarianza normalizada $R_x(\tau)$, tal sería el caso de los *filtros RC pasa-bajas* de diferentes *etapas*, donde la principal función de este tipo de filtro es pasar las frecuencias bajas con muy pocas pérdidas y atenuar las altas frecuencias, es decir, que conforme la frecuencia va aumentando por arriba de ω_c el voltaje de salida se atenúa. Otra característica que se logra al trabajar con estos filtros es evitar el fenómeno de *Aliasing*, ya que estos limitan la banda de paso sin añadir distorsión de la señal, ruido o variaciones de amplitud con la frecuencia. Los diagramas de los filtros RC de diferentes etapas se muestran en la figura 2.6. Donde $n(t)$ es *ruido blanco gaussiano*, $x(t)$ es un proceso aleatorio, R es un *resistor*, C es un *condensador* e $i(t)$ es la *corriente* que circula por el circuito.

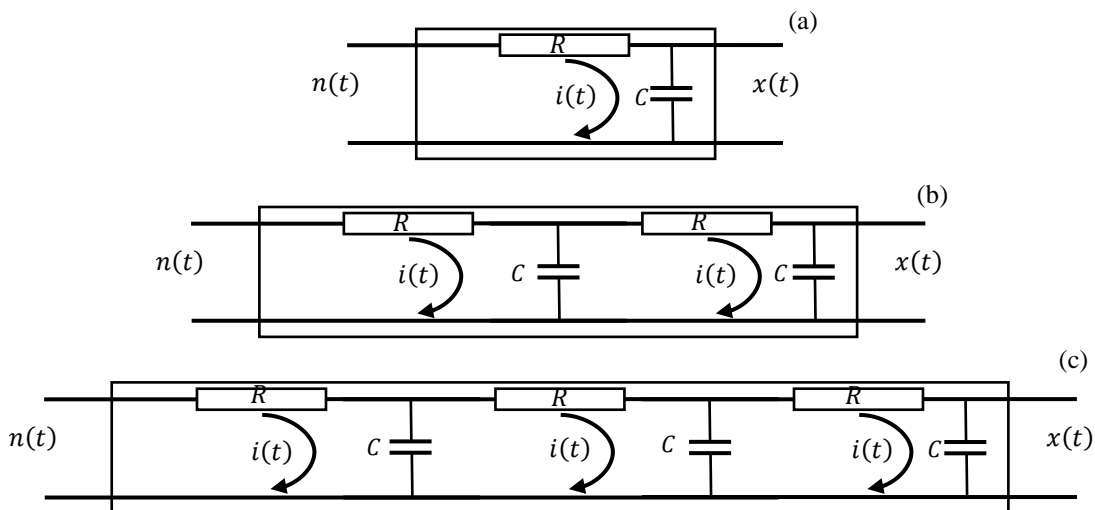


Figura 2.6. Filtros RC pasa-bajas lineales de una etapa (a), dos etapas (b) y tres etapas (c).

En la figura 2.6, se muestran filtros RC conectados en cascada, es decir, que a partir del primer esquema de filtro RC, mostrado en (a), se obtiene un segundo filtro de dos etapas (b) conectando a la salida el filtro RC inicial. De esta manera, sucede algo similar para el filtro de tres etapas. En la tabla 2.1 muestra la función de covarianza normalizada y la función de densidad espectral que se obtienen a la salida de un filtro RC de una, dos y tres etapas alimentando su entrada con ruido blanco.

Tabla 2.1. Respuesta de filtros pasa-bajas lineales para la descripción de reconstrucción de procesos aleatorios.

Tipo de filtro	Función de covarianza normalizada $R_x(\tau)$	Función de densidad espectral $S_x(\omega)$
<i>Filtro RC de una etapa</i>	$e^{-\alpha \tau }$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$
<i>Filtro RC de dos etapas</i>	$(1 + \alpha \tau)e^{-\alpha \tau }$	$\frac{4\alpha^3}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
<i>Filtro RC de tres etapas</i>	$(1 + \alpha \tau + \frac{\alpha^2\tau^2}{3})e^{-\alpha \tau }$	$\frac{16\alpha^5}{(\alpha^2 + \omega^2)^3}$

Al finalizar la caracterización de un sistema lineal invariante en el tiempo y mostrar algunos ejemplos con filtros RC pasa-bajas, como los mostrados en la tabla 2.1, se puede comprender lo siguiente: a) Conociendo la función de covarianza a la entrada $K_u(\tau)$ del sistema se puede conocer la función de covarianza a la salida $K_x(\tau)$; b) Y si se conoce la función de covarianza a la entrada $K_u(\tau)$ es posible conocer su salida en función de su densidad espectral $S_x(\omega)$. Sin embargo, se pueden plantear dos preguntas:

- 1) ¿Siempre que se conozca la función de covarianza será posible conocer su función de densidad espectral?
- 2) Y de manera similar, ¿siempre que se conozca la función de densidad espectral será posible conocer su función de covarianza?

De esta manera, se puede formular una tercera ¿será posible plantear una función $S_x(\omega)$ a la salida de un sistema lineal la cual no tenga una solución analítica como el caso del filtro RC

ideal? Primeramente, se puede asumir que existe tales funciones o en un caso particular existe tal función. Por otra parte, se pueden considerar funciones ya conocidas y estudiadas en teoría de filtros.

Para propósito de este trabajo es necesario conocer de manera amplia las funciones de transferencia de un *filtro Chebyshev del tipo I* y *filtro Chebyshev tipo II*, con las cuales es posible conocer su función de densidad espectral. Sin embargo, no existen propiamente soluciones analíticas cuando se aplica el teorema expresado en (2.21) por las relaciones de Wiener-Khintchine. No obstante, se puede plantear que las funciones de densidad a la salida de estos filtros pueden estimarse de alguna manera. A continuación, de forma general se describirán los filtros de Chebyshev de tipo I y tipo II, con la finalidad de tener elementos suficientes para justificar las preguntas antes planteadas.

2.6 DESCRIPCIÓN DEL FILTRO DE CHEBYSHEV [34-36]

El filtro de Chebyshev se basa en el polinomio de Chebyshev, la descripción de dichos polinomios se muestra en el apéndice B. Existen dos tipos de filtro de Chebyshev, llamados filtro Chebyshev de tipo I y filtro Chebyshev de tipo II.

El polinomio de Chebyshev de tipo I en términos de la frecuencia ω se define como:

$$T_p(\omega) = \begin{cases} \cos[p \arccos(\omega)] & \text{para } |\omega| \leq 1 \\ \cosh[p \operatorname{arcosh}(\omega)] & \text{para } |\omega| > 1 \end{cases} \quad (2.31)$$

Donde ω es la *frecuencia angular* definida como: $\omega = 2\pi f$ y p es el *orden* del filtro. Los polinomios se pueden definir también por su *fórmula de recursión*:

$$T_p(\omega) = 2\omega T_{p-1}(\omega) T_{p-2}(\omega) \quad (2.32)$$

Una característica del filtro de Chebyshev de tipo I es el rizado que presenta en la *banda de paso* en el intervalo $|\omega| \leq 1$ definida por (2.31). La magnitud de la función de transferencia que describe al filtro de Chebyshev de tipo I de orden p se define en función de $T_p(\omega)$ como:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_p^2(\omega)} \quad (2.33)$$

La expresión (2.31) determina el comportamiento del filtro, pues ésta, muestra que para todo p los *polos* de $T_p(\omega)$ se localizan en el intervalo $|\omega| \leq 1$. En el intervalo $|\omega| \leq 1$, la

magnitud de la función de transferencia, $|H(\omega)|^2$, oscila alrededor de la unidad de tal manera que el valor máximo es 1 y el mínimo es $1/(1 + \varepsilon^2)$, donde ε es la *amplitud de rizo*.

La función de amplitud correspondiente al filtro Chebyshev tipo I se muestra en la figura 2.7.

En la figura se puede observar que $|H(\omega)|$ presenta un rizado entre 1 y $1/\sqrt{(1 + \varepsilon^2)}$ en la banda de paso. Mientras que la banda de transición se define entre ω_p y ω_c siendo δ su amplitud correspondiente o también llamada *atenuación mínima*.

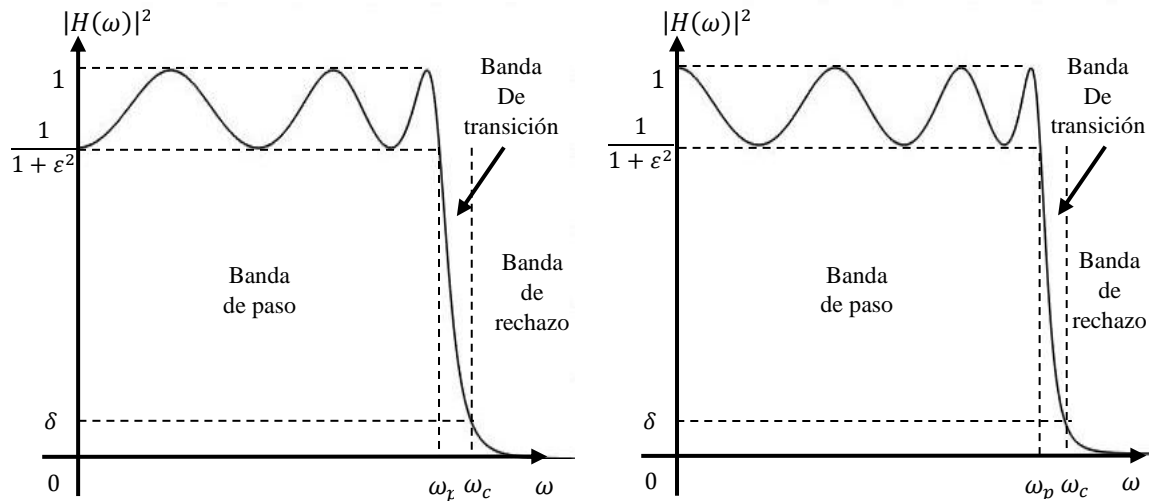


Figura 2.7. Característica de amplitud de la aproximación de Chebyshev del tipo I para p par (izquierda) e impar (derecha).

Dado que $T_p(1)^2=1$ para todo p , se deduce entonces que, para $\omega = 1$ se tiene:

$$|H(1)| = \frac{1}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2)}} \quad (2.34)$$

Y para valores grandes de ω , $|H(\omega)|$ se puede aproximar así:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\varepsilon T_p(\omega)} \quad (2.35)$$

La atenuación β o en este caso las pérdidas en dB cuando $\omega = 0$ se expresa de la siguiente manera:

$$\beta = -20 \log_{10}|H(\omega)| \quad (2.36)$$

Mediante (2.35) se tiene que:

$$\beta = 20 \log \varepsilon + 20 \log T_p(\omega) \quad (2.37)$$

De forma similar para valores grandes de ω , se tiene que:

$$\beta = 20 \log \varepsilon + 6(p - 1) + 20p \log \omega \quad (2.38)$$

De esta manera en la banda de transición se encuentran los valores máximos y mínimos de atenuación.

Las ecuaciones (2.34) y (2.38) se pueden utilizar para determinar los dos parámetros p y ε necesarios para el filtro de Chebyshev de tipo I.

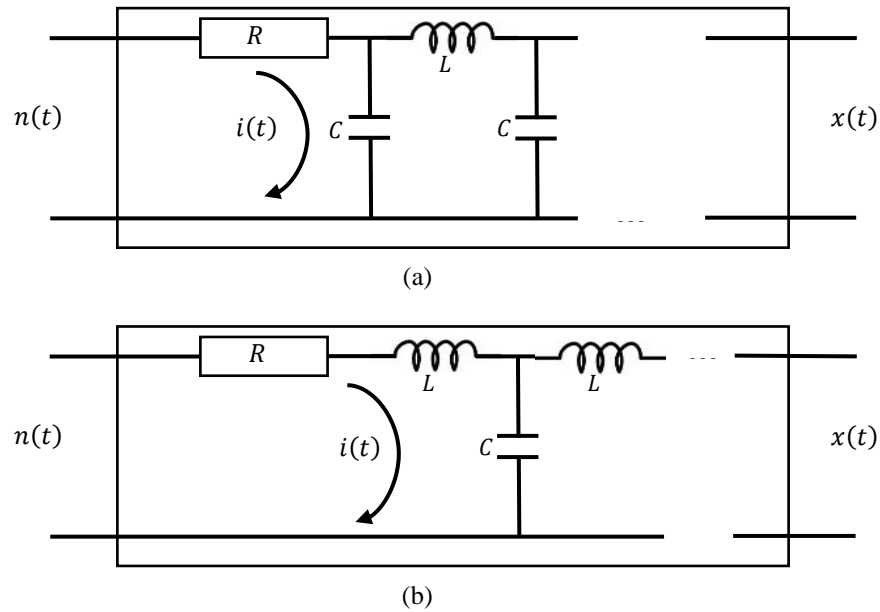


Figura 2.8. Filtros pasivos pasa-bajas de Chebyshev tipo I RCL para tener el mínimo de inductores (a) y RLC para tener el mínimo de condensadores (b).

En la figura 2.8 se observa el diagrama del circuito eléctrico correspondiente al filtro de Chebyshev de tipo I, este presenta elementos pasivos. Es importante mencionar, que en la práctica es poco común este tipo de circuito, debido a que presenta algunas características: a) gran número de bobinas; b) espacio que ocupa cada bobina; y c) la nula ganancia que muestran dichos filtros.

Estas características se deben principalmente a la dependencia que se tiene de la frecuencia de operación del circuito. Sin embargo, existe otro diagrama con el cual se pueden llevar a cabo los filtros de Chebyshev tipo I.

En la figura 2.9 se observa el filtro de Chebyshev de tipo I con dispositivos activos, es decir, con amplificadores operacionales. Con el amplificador se logra sustituir a los inductores y, a su vez, adquirir una ganancia, según se requiera.

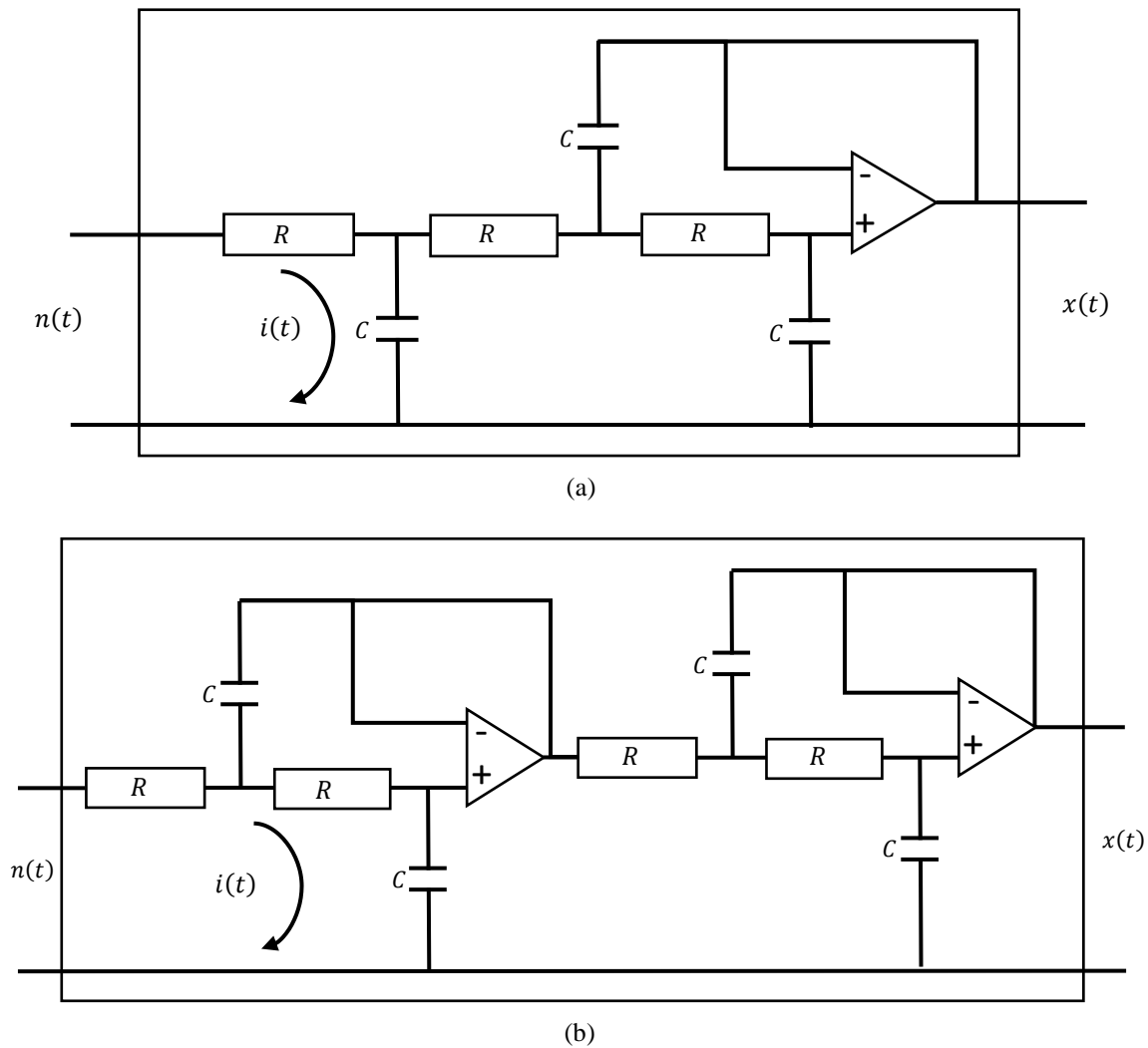


Figura 2.9. Filtros activos pasa-bajas de Chebyshev tipo I de orden 3 (a) y de orden 4 (b).

El filtro Chebyshev de tipo II es también llamado *filtro inverso de Chebyshev*. Él tiene como propósito cambiar el rizado característico en la banda de paso para agregarlo en la *banda de rechazo*. Esta operación se puede llevar a cabo tomando en cuenta las siguientes consideraciones: en primer lugar, agregar ceros a la región de la banda de paso; por otro lado, que sus polos se encuentren en la banda de rechazo. Estas, pueden efectuarse como se muestra a continuación.

Si un sistema lineal, es caracterizado por su función de transferencia $|H(\omega)|$, con sus respectivos polos, entonces es posible caracterizarlo como un sistema con polos y ceros con su función de transferencia inversa, es decir,

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + [\varepsilon^2 T_p^2(\omega)]^{-1}} = \frac{\varepsilon^2 T_p^2(\omega)}{1 + \varepsilon^2 T_p^2(\omega)} \quad (2.39)$$

La expresión (2.39) muestra un sistema con ceros y polos. Sin embargo, para que el rizado quede fuera de la banda de paso es necesario cambiar el intervalo en el que se define el rizado. Pero, al cambiar los intervalos de definición se obtiene otro polinomio, este queda definido con (2.40)

$$C_p(\omega) = \begin{cases} \cos[p \operatorname{arc} \cos (1/\omega)] & \text{para } |\omega| \geq 1 \\ \cosh[p \operatorname{arc} \cosh (1/\omega)] & \text{para } |\omega| < 1 \end{cases} \quad (2.40)$$

De esta manera, se define la función en amplitud con el nuevo polinomio.

$$|H(\omega)|^2 = \frac{\varepsilon^2 C_p^2(1/\omega)}{1 + \varepsilon^2 C_p^2(1/\omega)} \quad (2.41)$$

En la figura 2.10 se muestra el comportamiento en amplitud del filtro de Chebyshev de tipo II. A diferencia del filtro de Chebyshev tipo I, el cual permite que la *banda de transición* sea cada vez más abrupta, y esto traen como consecuencia tener un mayor número de rizados en la banda de paso, el filtro de Chebyshev de tipo II presenta mayor número de rizados en la banda de rechazo al aumentar el orden, quedando libre de rizados la banda de paso. Además, cuando el orden es impar los rizados tienden a cero y cuando el orden es par el rizado tienden a la constante $\varepsilon/1 + \varepsilon^2$, respectivamente.

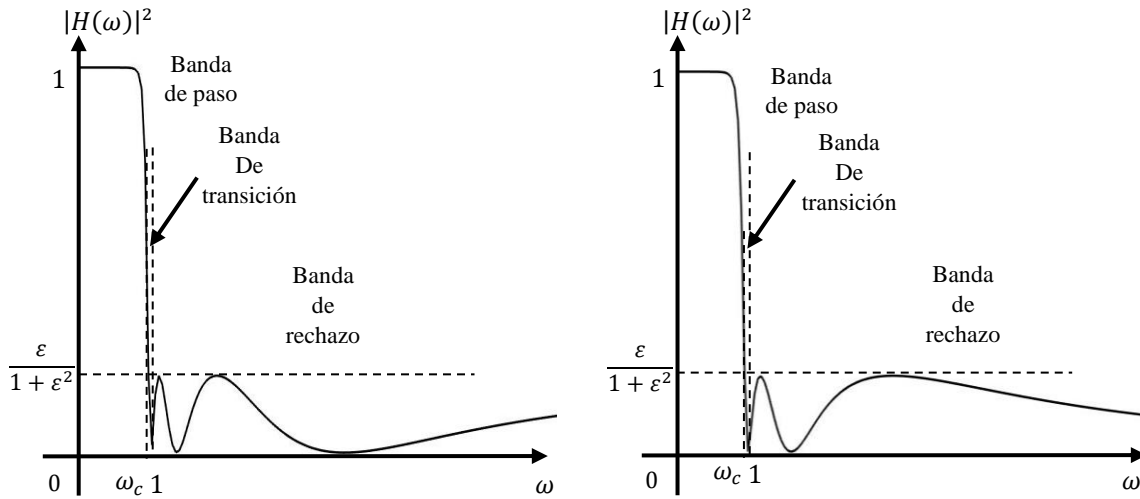


Figura 2.10. Característica de amplitud de la aproximación de Chebyshev del tipo II para p par (izquierda) e impar (derecha).

La ecuación de Chebyshev obliga a que los polos se ubiquen en una elipse. Para calcular $H(s)$ se utiliza el parámetro:

$$\beta = \frac{1}{p} \operatorname{senh}^{-1} \frac{1}{\varepsilon} \quad (2.42)$$

Los polos de $H(s)$, $s_k = \gamma_k + j\omega_k$, para $k = 0, 1, \dots, p-1$, son:

$$\gamma_k = \operatorname{sen} \left(\frac{2k-1}{p} \right) \frac{\pi}{2} \operatorname{senh} \beta \quad (2.43)$$

$$\omega_k = \operatorname{cos} \left(\frac{2k-1}{p} \right) \frac{\pi}{2} \operatorname{cosh} \beta$$

Por deducción, los polos están quedando localizados en una elipse en el plano complejo s , dada por la expresión:

$$\left(\frac{\gamma_k}{\operatorname{senh} \beta} \right)^2 + \left(\frac{\omega_k}{\operatorname{cosh} \beta} \right)^2 = 1 \quad (2.44)$$

El semieje mayor de la elipse está en el eje $j\omega$, y el semieje menor está en el eje γ . Los focos están en $\omega = \pm 1$ como se muestra en la figura 2.11.

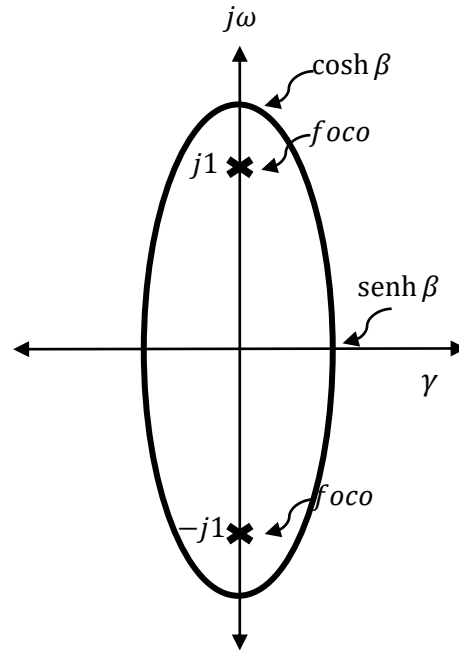


Figura 2.11. Polos del filtro de Chebyshev.

De esta manera, se puede conocer la función de densidad espectral a la salida del filtro de Chebyshev de tipo I y II cuando a la entrada se tiene ruido blanco unitario, es decir, que $S_u(\omega) = 1$. De tal manera que (2.30) queda en términos de la función de transferencia, la cual está descrita por (2.33) para el filtro de Chebyshev tipo I y por la expresión (2.41) para el tipo II, respectivamente.

$$S_x(\omega) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_p^2(\omega)} \quad (2.45)$$

$$S_x(\omega) = \frac{\varepsilon^2 C_p^2(1/\omega)}{1 + \varepsilon^2 C_p^2(1/\omega)} \quad (2.46)$$

Para dar respuesta a las preguntas antes mencionadas, es necesario determinar la función de covarianza a la salida del filtro de Chebyshev tipo I y II mediante el teorema de Wiener-Khintchine, tal como se realizó anteriormente, donde $K_x(\tau)$ se obtiene con (2.21).

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_p^2(\omega)} e^{j\omega\tau} d\omega \quad (2.47)$$

La expresión (2.41) correspondiente a la descripción del filtro de Chebyshev de tipo II también se puede aplicar para conocer $K_x(\tau)$.

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^2 C_p^2\left(\frac{1}{\omega}\right)}{1 + \varepsilon^2 C_p^2\left(\frac{1}{\omega}\right)} e^{j\omega\tau} d\omega \quad (2.48)$$

El cálculo de las expresiones (2.47) y (2.48) es complejo, de aquí que no se cuente con expresiones analíticas. Sin embargo, para resolver esta problemática es necesario plantear al menos una estimación de tales funciones y de esta manera conocer algunos valores numéricos de la función de covarianza. Tales valores de la función de covarianza son necesarios al aplicar la metodología basada en la regla de la esperanza matemática condicional en el procedimiento de reconstrucción de señales.

RESUMEN

En este capítulo, se han expuesto los elementos necesarios y suficientes para la descripción en un primer caso y de manera general de un proceso aleatorio. Posteriormente, se ha caracterizado un proceso aleatorio a través de un sistema lineal invariante en el tiempo, por medio de un filtro lineal RC de diferentes etapas. Para llevar a cabo este análisis es necesario conocer herramientas que permitan caracterizar de manera aceptable y recomendable un sistema mediante su información estadística. Una herramienta ampliamente sugerida es el teorema de Wiener-Khintchine, el cual permite conocer la función de covarianza $K(\tau)$ de un proceso a la salida de un determinado filtro, esta herramienta expone de manera amplia el comportamiento del filtro, tanto en el tiempo como en la frecuencia.

De esta forma, se puede introducir a una problemática general como, por ejemplo, en los casos donde se conoce el comportamiento o la respuesta en la frecuencia de un filtro, pero que no es descrita en forma analítica en el tiempo, tal es el caso de las funciones que definen el filtro de Chebyshev de tipo I y II. En capítulos posteriores se abordará una manera de estimación de la función de covarianza para este tipo de filtros.

Capítulo 3

METODOLOGÍA

La *regla de la esperanza matemática condicional* (REMC) es aceptable y recomendable para ingeniería, en específico para este tipo de trabajos. Debido a las aportaciones que tiene sobre el *proceso aleatorio* (PA) que se estudie.

En este capítulo, la REMC se aplicará en forma general para procesos aleatorios. Posteriormente, a la descripción del *procedimiento de muestreo-reconstrucción* (PMR) para *procesos gaussianos*. Esto, debido a las ventajas que tiene la regla de esperanza matemática condicional sobre otras metodologías aplicadas en la descripción del procedimiento de reconstrucción de señales [23].

3.1 PROCESOS ALEATORIOS GAUSSIANOS

Retomando nuevamente a los procesos aleatorios, los cuales representan situaciones físicas en diferentes instantes de tiempo, existe dentro de estos un proceso, importante, el gaussiano. Dicho proceso tiene la ventaja de trabajar de forma analítica y relativamente sencilla. Un proceso aleatorio continuo, como el que se muestra en la figura 2.1, definido por un conjunto de N variables aleatorias con sus respectivos N instantes de tiempo [27,30,37] se dice gaussiano si tiene una función de densidad definida por:

$$w(\mathbf{x}(t)) = \frac{[Det \mathbf{K}]^{-1/2}}{(2\pi)^{N/2}} \exp \left\{ -\frac{[\mathbf{x} - \mathbf{m}]^T \mathbf{K}^{-1} [\mathbf{x} - \mathbf{m}]}{2} \right\} \quad (3.1)$$

Donde:

$$[\mathbf{x} - \mathbf{m}] = \begin{bmatrix} x_1 - m_1 \\ x_2 - m_2 \\ \vdots \\ x_N - m_N \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{K}_x = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Los procesos aleatorios gaussianos presentan las siguientes propiedades [16,29]:

- 1) Los procesos gaussianos quedan definidos por los *momentos* de primer y segundo orden, estos son: la función de *esperanza matemática*, *varianza* y *covarianza*.
- 2) Sea $x_N = x(t_N)$. Si en cualquier $N=1,2, \dots$ y cualquier instante de tiempo estas variables aleatorias son gaussianas, tal proceso es gaussiano.
- 3) Una transformación lineal de un conjunto de variables aleatorias gaussianas produce otro conjunto de estas.
- 4) Un proceso gaussiano en *sentido amplio* también es *estacionario* en *sentido estricto*.
- 5) Si \mathbf{K}_x llegará a convertirse en una matriz diagonal, se tiene variables aleatorias no correlacionadas. Por lo tanto, las variables aleatorias gaussianas son independientes.

3.2 REGLA DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA CONDICIONAL [17,22,23]

En un PA, $x(t)$, a la salida de un sistema lineal, como el que se describió en el capítulo anterior, y caracterizado por sus *fdp multidimensionales*, se expresa por (3.4).

$$w[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)] \quad (3.4)$$

Con una realización de $x(t)$ discretizada en instantes $T = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ existe un conjunto:

$$X, T = \{x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)\} \quad (3.5)$$

donde (3.5) está determinado por su número de muestras N y los tiempos en que se toma cada una de las muestras, pues dichos parámetros son arbitrarios.

Saber la información anterior del PA cambia en particular las funciones de momentos iniciales y centrales, y las *densidades de probabilidad*, de aquí que sean funciones *condicionales* dependientes del valor de cada muestra, entonces (3.4) se puede expresar de la siguiente manera:

$$w[x(t)|X, T] = w[x(t)|x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)] \quad (3.6)$$

Esta nueva descripción hace que la función de esperanza matemática y la varianza puedan escribirse de la siguiente manera:

$$\tilde{m}(t) = \langle x(t)|X, T \rangle = \langle x(t)|(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N) \rangle \quad (3.7)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \left\langle (x(t) - \tilde{m}(t))^2 \middle| X, T \right\rangle \quad (3.8)$$

Para procesos continuos se tiene que:

$$\tilde{m}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w[x(t)|X, T] dx \quad (3.9)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - \tilde{m}(t))^2 w[x(t)|X, T] dx \quad (3.10)$$

La reconstrucción del PA depende de (3.4) y (3.5), es decir, del conjunto de muestras y de las fdp's multidimensionales. Una condición importante dentro de esta metodología es la siguiente:

Si cada realización es una entre un número infinito de otras realizaciones de un proceso estocástico condicional, $\tilde{x}(t)$, entonces, no es posible conocer exactamente dichas realizaciones.

Sin embargo, tal condición permite abordar el problema estimando la reconstrucción del PA de manera estadística en un momento de tiempo t . Para llevar a cabo esto, se requiere un criterio estadístico bien conocido, en este caso es la regla de la esperanza matemática condicional.

La REMC es un algoritmo que permite conocer el mínimo error de la estimación para las variables aleatorias con fdp arbitraria. Este método permite utilizar algunas de las características del PMR para llevar a cabo la reconstrucción y la *calidad* de reconstrucción. Las expresiones (3.9) y (3.10) son interpretadas a continuación.

$$\tilde{m}(t) = \langle x(t)|X, T \rangle \rightarrow \text{Funcion de reconstrucción}$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \left\langle (x(t) - \tilde{m}(t))^2 \middle| X, T \right\rangle \rightarrow \text{Funcion de error de reconstrucción}$$

Es posible introducir en el PMR otra característica, por ejemplo, la función de covarianza $K_x(\tau)$.

Ejemplo:

Para un caso general de un *proceso gaussiano no estacionario* $x(t)$ se puede escribir la expresión exacta de la fdp multidimensional de orden n arbitraria [22,23,37]:

$$w[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)] = (2\pi)^{-n/2} \left[\text{Det}[\mathbf{K}_x(t_i, t_j)] \right]^{1/2} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [x(t_i) - m(t_i)] a_{ij} [x(t_j) - m(t_j)] \right\} \quad (3.11)$$

Donde:

$$\mathbf{K}_x(t_i, t_j) = \left\| \begin{array}{ccc} K_x(t_1, t_1) & \cdots & K_x(t_1, t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_x(t_n, t_1) & \cdots & K_x(t_n, t_n) \end{array} \right\| \quad (3.12)$$

y a_{ij} representa a cada elemento de la *matriz inversa de covarianza*:

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}_x^{-1}(t_i, t_j) \quad (3.13)$$

Donde:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{K}_x(t_i, t_j) = \delta_{ik} \rightarrow \text{Delta de Kronocker}; \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

Las características estadísticas de un *proceso gaussiano condicional* $\tilde{x}(t)$ están descritas por (3.11), (3.12), (3.13) si se fija un conjunto de muestras: $X, T = \{x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)\}$ [17].

$$\tilde{m}(t) = m(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_x(t, T_i) a_{ij} [x(T_j) - m(T_j)] \quad (3.14)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \sigma^2(t) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_x(t, T_i) a_{ij} K_x(T_j, t) \quad (3.15)$$

$$\tilde{K}_x(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_x(t_1, T_i) a_{ij} K_x(T_j, t_2) \quad (3.16)$$

Considerando la reconstrucción del proceso condicional se puede introducir las siguientes regiones:

1. Si $t < T_1$, el procedimiento de la reconstrucción en esta región se llama *retropolación*.
2. Si $T_1 < t < T_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, N - 1$), se tiene la región de *interpolación*.
3. Y, si $t > T_N$, se tiene la región de *extrapolación*.

A pesar del número limitado de N esta regla permite reconstruir las realizaciones sobre todo el eje del tiempo t .

3.3 FUNCIONES BÁSICAS

Considerando una función de media condicional para un PA de $m(t) = 0$ y una función de covarianza $K(\tau)$, es posible establecer una función *no determinística* que describa la influencia que proporciona cada muestra en la reconstrucción del proceso. De esta manera, se puede establecer lo siguiente:

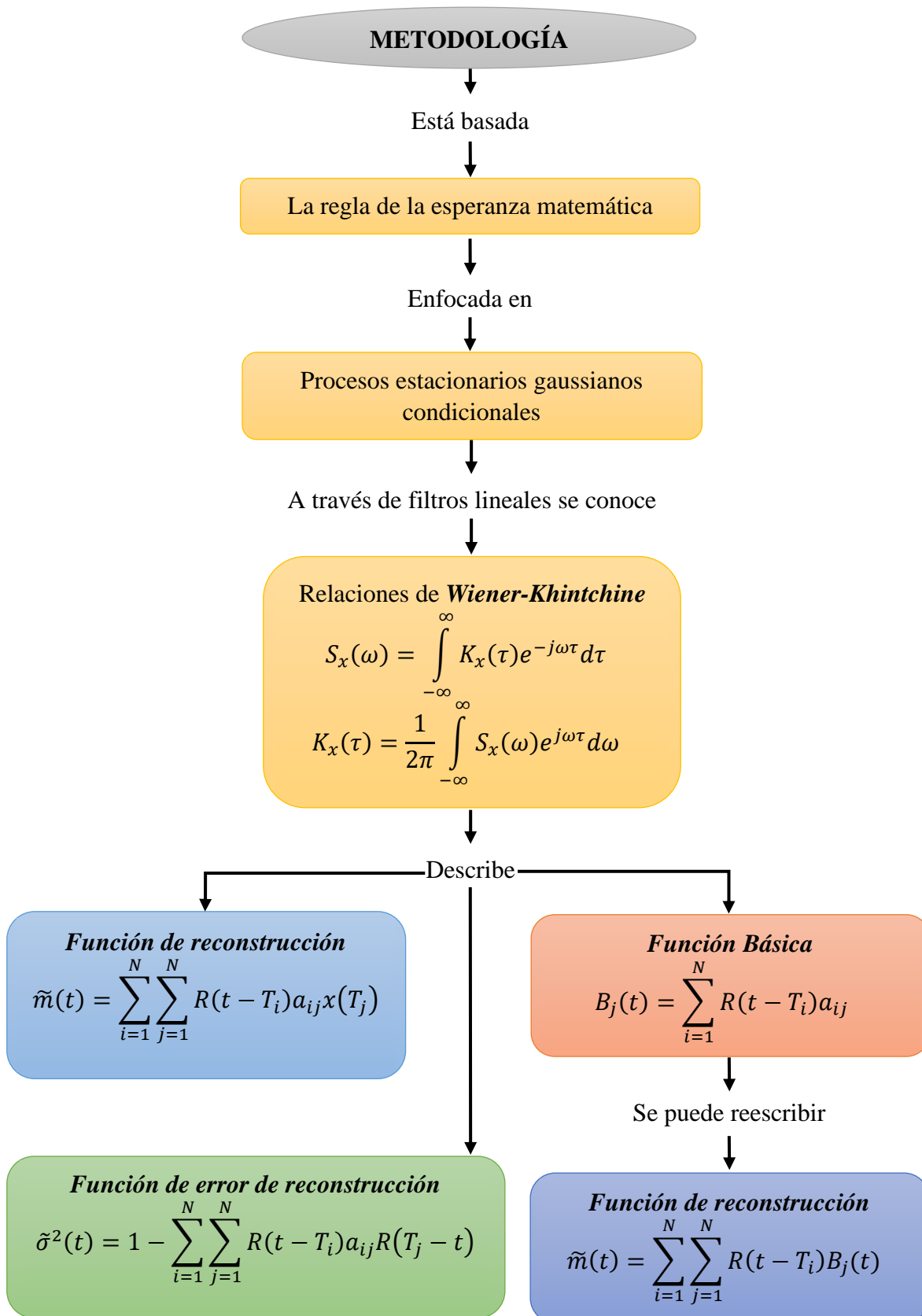
$$\tilde{x}(t) = \tilde{m}(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_x(t - T_j) a_{ij} [x(T_i)] = \sum_{j=1}^N x(T_j) b_j(t) \quad (3.17)$$

Donde (3.17) queda expresada por la suma del producto de cada muestra $x(T_j)$ por una llamada *función básica* expresada por:

$$b_j(t) = \sum_{i=1}^N K_x(t - T_i) a_{ij} \quad (3.18)$$

En conclusión, se puede observar que (3.18) depende de la función de covarianza $K(\tau)$ del PA estudiado, puesto que existe una función básica $b_j(t)$ para cada muestra y cada estas funciones básicas es multiplicada por su muestra correspondiente. Por último, se suman todas las formas resultantes para obtener la reconstrucción del proceso.

En el siguiente diagrama a bloques se muestra de forma sintética la metodología aplicando la regla de la esperanza matemática condicional a la descripción del procedimiento de muestreo-reconstrucción de procesos aleatorios.



3.4 EJEMPLOS DEL PMR DE REALIZACIONES DE PROCESOS GAUSSIANOS

Proceso Markoviano[†] estacionario

Un primer PMR es analizado con un *proceso aleatorio gaussiano Markoviano unidimensional*. Tal proceso, está dado a la salida de un *filtro RC lineal* cuando a la entrada es alimentado por *ruido blanco unitario*. En la tabla 2.1 se muestra la respuesta de dicho filtro expresado por una función de *covarianza normalizada* $R(\tau)$, esta se define por la expresión (3.19).

$$R_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \quad (3.19)$$

Una característica importante de la respuesta de cualquier filtro es su *tiempo de covarianza*, τ_c ; este expresa el tiempo de influencia entre mismos valores de un proceso. Cuando se trabaja una función $R_x(\tau)$, el tiempo de covarianza tiene un valor unitario. La expresión del tiempo de covarianza se muestra a continuación:

$$\tau_c = \int_0^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} d\tau = \frac{1}{\alpha} \quad (3.20)$$

donde $\alpha = \frac{1}{RC}$, de tal forma que, si $\tau_c = 1$, entonces, $\alpha = 1$.

Bajo estas condiciones, la función básica, la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción se pueden expresar de la siguiente manera:

$$b_j(t) = \sum_{i=1}^N R_x(t - T_i) a_{ij} = \sum_{j=1}^N e^{-\alpha|t-T_i|} a_{ij} \quad (3.21)$$

$$\tilde{x}(t) = \tilde{m}(t) = \sum_{j=1}^N x(T_j) b_j(t) = \sum_{j=1}^N x(T_j) \sum_{i=1}^N e^{-\alpha|t-T_i|} a_{ij} \quad (3.22)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = 1 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e^{-\alpha|t-T_i|} a_{ij} e^{-\alpha|T_j-t|} \quad (3.23)$$

[†] Llamado así por el matemático ruso Andréi Andréyevich Márkov.

Las ecuaciones anteriores se expresan en términos de $R(\tau)$ y no de $K(\tau)$, esto se debe a que solamente se trabaja con la función de covarianza normalizada. Y la matriz inversa de covarianza se expresa en (3.24).

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1}(T_i - T_j) \quad (3.24)$$

Las ecuaciones (3.21), (3.22) y (3.23) describen el comportamiento de las funciones básicas, la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción. Ellas se muestran en las figuras 3.1, 3.2 y 3.3 respectivamente.

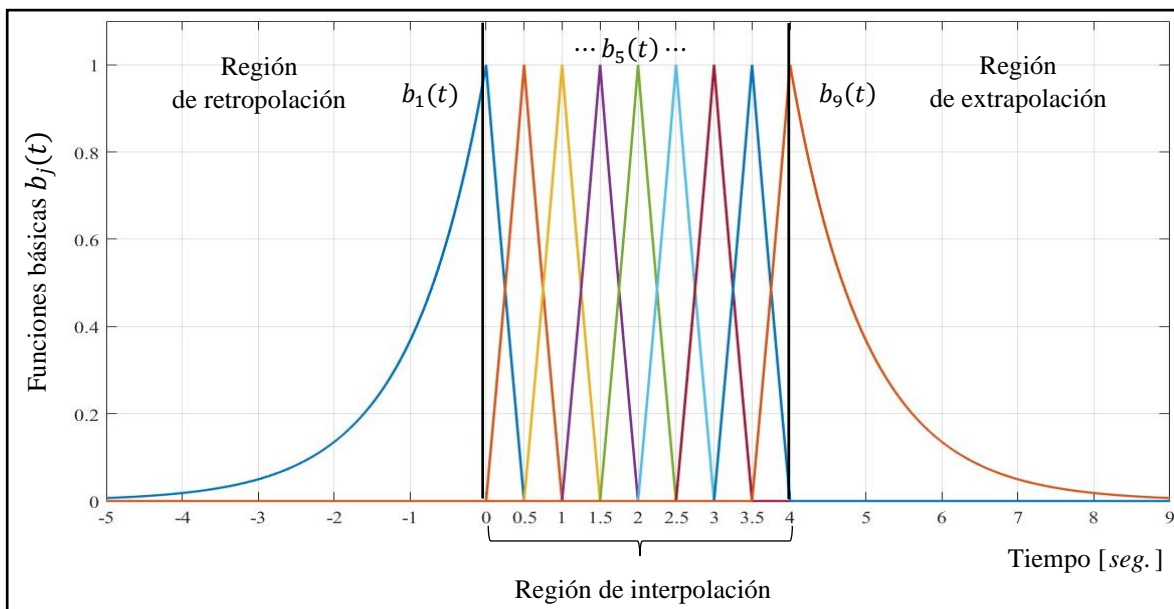


Figura 3.1. Funciones básicas con filtro RC de una etapa con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Anteriormente, se mencionó la existencia de una función básica para cada muestra y que la función básica depende mayormente de la función de covarianza. De esta manera, las funciones básicas, dentro de la región de interpolación, tienen un comportamiento lineal; mientras que fuera de él, es decir, en la región de retropolación y extrapolación se caracterizan por un comportamiento exponencial, como se muestra en la figura 3.1.

La gráfica que muestra la reconstrucción es la que se encuentra en la figura 3.2. La función de reconstrucción es resultado de la suma de productos de cada función básica $b_j(t)$, con el correspondiente valor de su muestra $x(T_i)$. Al analizar esta función, se observa en este caso,

que la reconstrucción de una determinada región depende únicamente de las dos muestras más cercanas. Es decir, $x(T_i)$ y $x(T_{i+1})$. Esto se traduce, por una parte, en que no existe influencia de otras muestras en la reconstrucción, como se muestra en la región de interpolación ($T_1 < t < T_N$). Y, por otro lado, en las otras dos regiones, tanto en la de retroprolación y extrapolación la reconstrucción depende de una sola muestra, es decir, de T_1 y de T_9 . La tabla 3.1 muestra los valores para la reconstrucción en los diferentes instantes de muestreo desde T_1 hasta T_9 , estos están señalados como puntos negros en la figura 3.2.

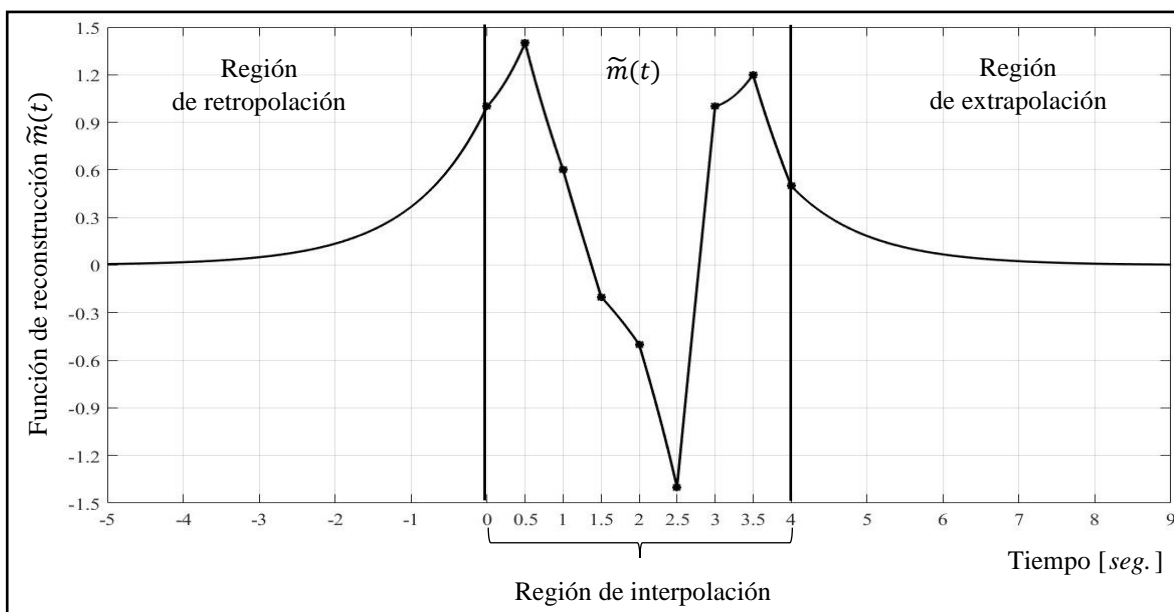


Figura 3.2. Función de reconstrucción con filtro RC de una etapa con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Tabla 3.1. Valores de muestreo para 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Instante de muestreo T_i [seg.]	Valor de la muestra $x(T_i)$
$T_1 = 0$	$x(T_1) = 1$
$T_2 = 0.5$	$x(T_2) = 1.4$
$T_3 = 1$	$x(T_3) = 0.6$
$T_4 = 1.5$	$x(T_4) = -0.2$
$T_5 = 2$	$x(T_5) = -0.5$
$T_6 = 2.5$	$x(T_6) = -1.4$
$T_7 = 3$	$x(T_7) = 1$
$T_8 = 3.5$	$x(T_8) = 1.2$
$T_9 = 4$	$x(T_9) = 0.5$

En la figura 3.3 se observa la influencia que tiene cada muestra en la reconstrucción de la señal. La amplitud de la función en la región de interpolación que se muestra en la gráfica es exactamente igual entre cada intervalo de muestreo, debido a que tal valor depende de la distancia entre muestras adyacentes y no de las muestras existentes. De esta manera, al tener la misma distancia entre cada una de las muestras el valor se mantiene constante. Es precisamente esta característica la que determina a un proceso Markoviano.

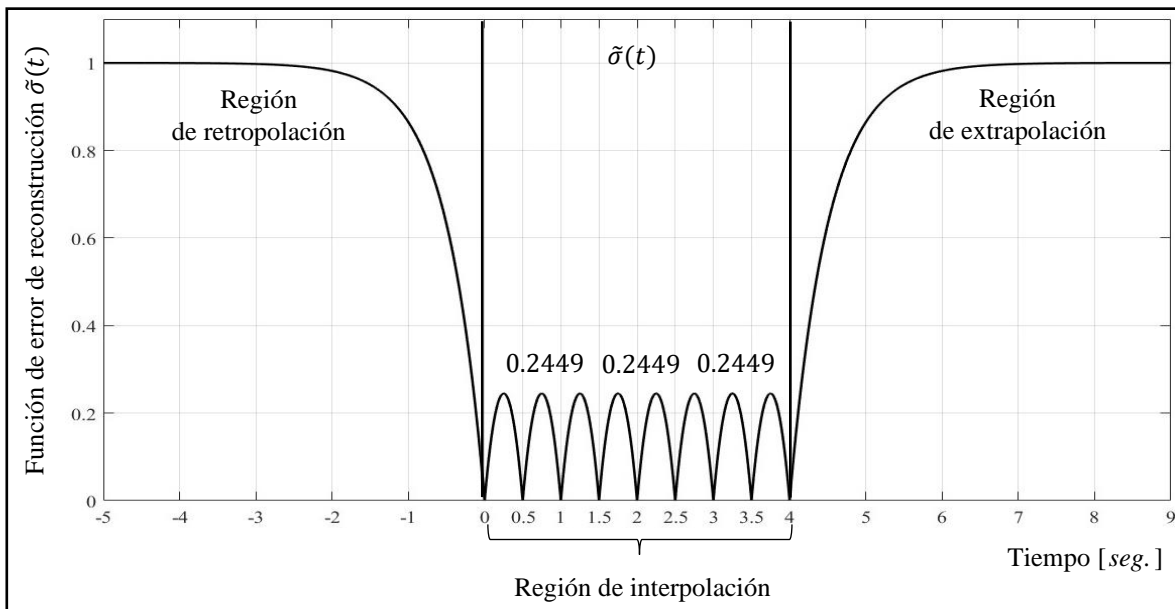


Figura 3.3. Función de error de reconstrucción con filtro RC de una etapa con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Proceso no Markoviano para filtro RC de dos etapas

Ahora se puede abordar el PMR para un caso *no Markoviano*, éste se obtiene a la salida de un *filtro RC de dos etapas* alimentando su entrada con ruido blanco como se mostró en la tabla 2.1 del capítulo anterior. Su función de covarianza normalizada esta descrita por (3.25) y su tiempo de covarianza por (3.26).

$$R_x(\tau) = (1 + \alpha|\tau|)e^{-\alpha|\tau|} \quad (3.25)$$

$$\tau_c = \int_0^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} (1 + \alpha|\tau|)e^{-\alpha|\tau|} d\tau = \frac{2}{\alpha} \quad (3.26)$$

Con los parámetros normalizados y con un tiempo de covarianza unitario necesariamente $\alpha = 2$. Se puede reescribir (3.25) como (3.27).

$$R_x(\tau) = (1 + 2|\tau|)e^{-2|\tau|} \quad (3.27)$$

Y las expresiones para las funciones básicas, la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción son las siguientes:

$$b_j(t) = \sum_{i=1}^N R_x(t - T_i) a_{ij} = \sum_{j=1}^N (1 + \alpha|t - T_i|) e^{-\alpha|t - T_i|} a_{ij} \quad (3.28)$$

$$\tilde{x}(t) = \tilde{m}(t) = \sum_{j=1}^N x(T_j) b_j(t) = \sum_{j=1}^N x(T_j) \sum_{j=1}^N (1 + \alpha|t - T_i|) e^{-\alpha|t - T_i|} a_{ij} \quad (3.29)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = 1 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (1 + \alpha|t - T_i|) e^{-\alpha|t - T_i|} a_{ij} (1 + \alpha|T_j - t|) e^{-\alpha|T_j - t|} \quad (3.30)$$

El procedimiento de reconstrucción, dentro de los procesos no Markovianos, depende de la mayoría de las muestras que se tomen en consideración. Además, se observa que el comportamiento de (3.28), (3.29) y (3.30) depende de la función de covarianza.

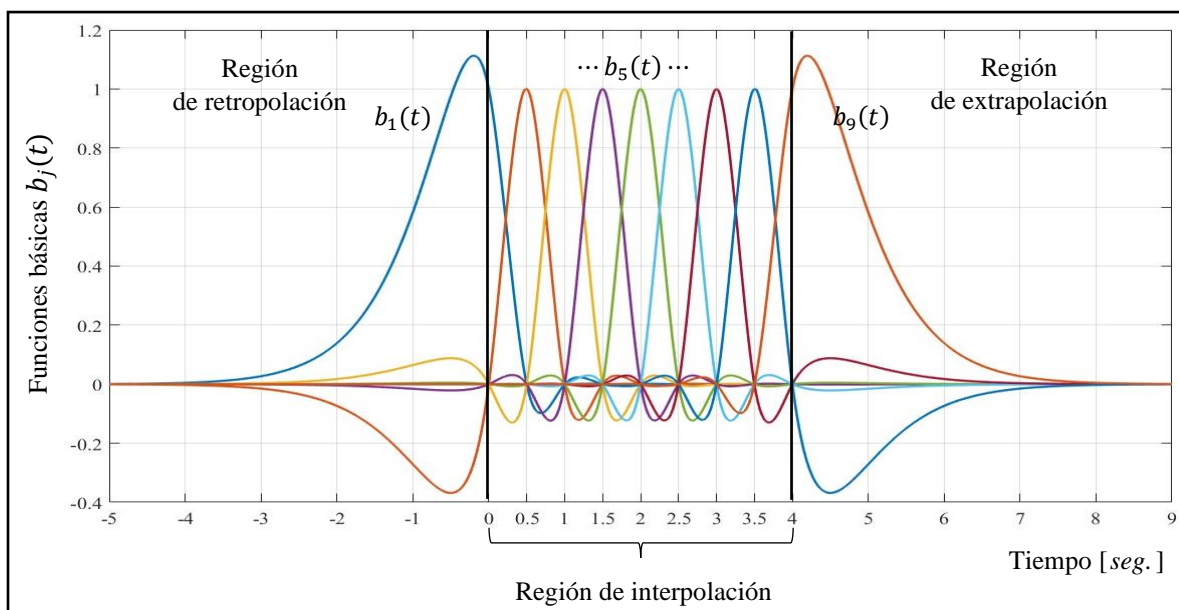


Figura 3.4. Funciones básicas con filtro RC de dos etapas con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

En este ejemplo, se puede observar que las funciones básicas mostradas en la figura 3.4, no tienen un comportamiento lineal, ni exponencial en ninguna de las tres diferentes regiones. Estas son una serie de curvas que mantienen ciertos valores más allá de los intervalos adyacentes. Una característica que se presenta en todas las funciones básicas, en cualquier proceso, es que tiene un valor máximo de uno en la región de interpolación, es decir, toman su valor máximo en el instante de muestreo donde se esté tomando la muestra correspondiente y cero en los demás instantes de muestreo de las otras muestras.

Para el caso no Markoviano, se tiene una reconstrucción con una estructura más suave. Se observa en la figura 3.5 que cada muestra tuvo influencia en cada intervalo de muestreo para definir la forma del proceso, incluso en las regiones de retroalimentación y de extrapolación.

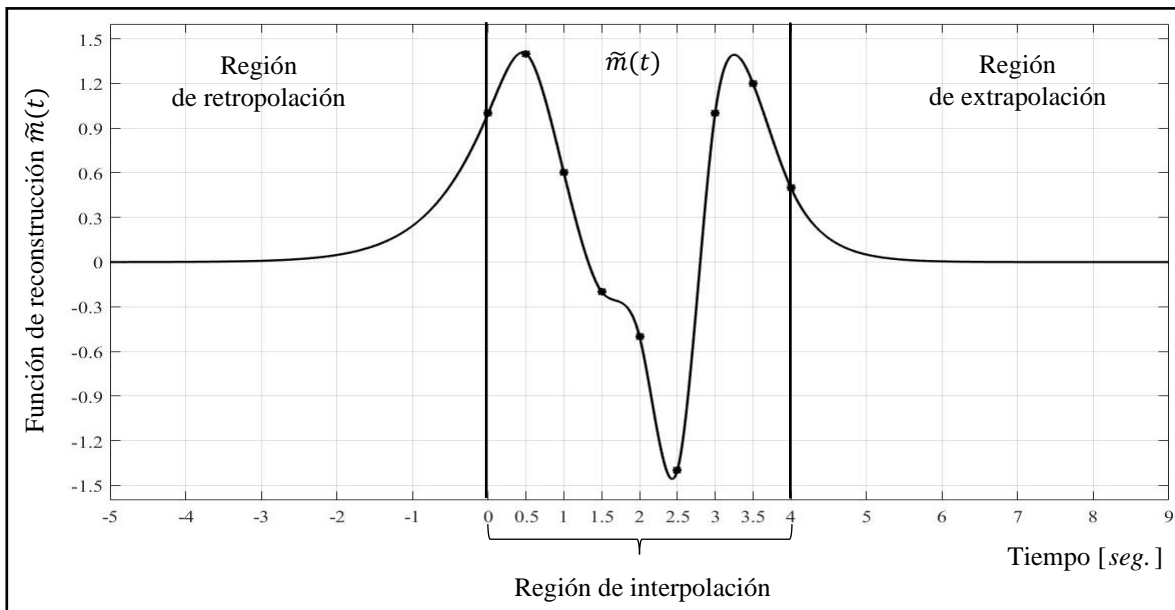


Figura 3.5. Función de reconstrucción con filtro RC de dos etapas con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Existen diferencias en las gráficas de la función de error de reconstrucción entre el caso Markoviano y el no Markoviano, una de ellas es que cada muestra proporciona mayor influencia, dicho enunciado se corrobora observando los instantes próximos a la muestra central. Esto indica que existe un menor error en comparación con los extremos. Además, que existe una simetría a partir de la muestra central, ya que los valores son los mismos en cuanto se hace un recorrido hacia los extremos. Esto se debe a que el intervalo central tiene

la influencia de las muestras que le rodean y son de mayor valor mientras que los intervalos extremos tienen influencia de los valores que le rodean, aunque son valores cada vez más pequeños.

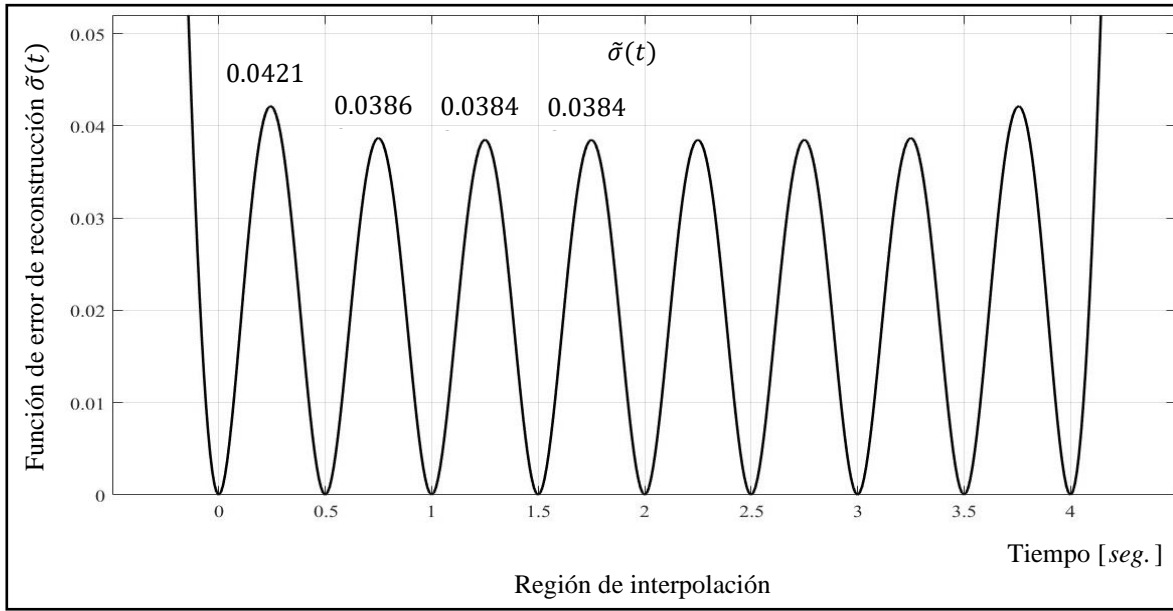


Figura 3.6. Función de error de reconstrucción con filtro RC de dos etapas con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Proceso no Markoviano para filtro RC de tres etapas

Si se observa la figura 2.6 inciso (c), se muestra un *filtro RC de tres etapas* el cual, al ser sometido al PMR, se deduce con base a los resultados anteriores que, tendrá una respuesta más suave, la cual está determinada por su función de covarianza como en los casos anteriores. Su función de covarianza normalizada se muestra en (3.31).

$$R_x(\tau) = \left(1 + \alpha|\tau| + \frac{\alpha^2\tau^2}{3}\right)e^{-\alpha|\tau|} \quad (3.31)$$

Con un tiempo de covarianza descrito por (3.32).

$$\tau_c = \int_0^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} \left(1 + \alpha|\tau| + \frac{\alpha^2\tau^2}{3}\right)e^{-\alpha|\tau|} d\tau = \frac{8}{3\alpha} \quad (3.32)$$

Para que (3.32) tenga un valor unitario es necesario que $\alpha = 8/3$. De tal manera que se reescribe la expresión (3.31) con el nuevo valor de α .

$$R_x(\tau) = \left(1 + \frac{8}{3}|\tau| + \frac{64\tau^2}{27}\right) e^{-\alpha|\tau|} \quad (3.33)$$

Las expresiones de las funciones básicas, la función de reconstrucción, las funciones de error de reconstrucción se muestran a continuación.

$$B_j(t) = \sum_{j=1}^N \left(1 + \alpha|t - T_i| + \frac{\alpha^2(t - T_i)^2}{3}\right) e^{-\alpha|t - T_i|} a_{ij} \quad (3.34)$$

$$\tilde{x}(t) = \tilde{m}(t) = \sum_{j=1}^N x(T_j) \sum_{j=1}^N \left(1 + \alpha|t - T_i| + \frac{\alpha^2(t - T_i)^2}{3}\right) e^{-\alpha|t - T_i|} a_{ij} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^2(t) = 1 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(1 + \alpha|t - T_i| + \frac{\alpha^2(t - T_i)^2}{3}\right) e^{-\alpha|t - T_i|} a_{ij} \times \\ \times \left(1 + \alpha|T_j - t| + \frac{\alpha^2(T_j - t)^2}{3}\right) e^{-\alpha|T_j - t|} \end{aligned} \quad (3.36)$$

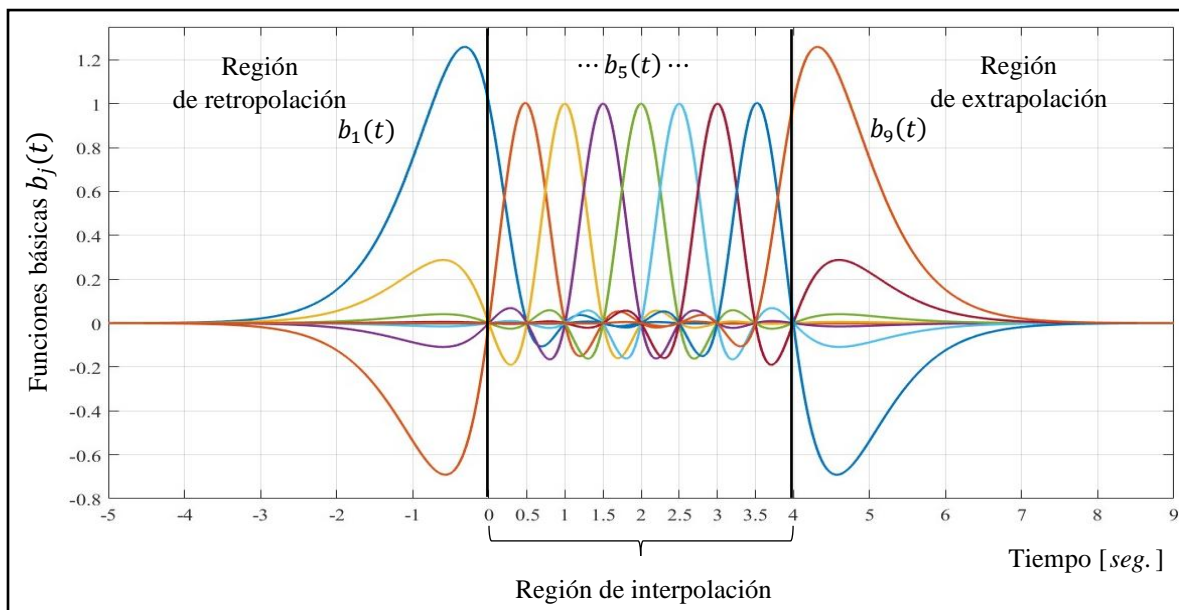


Figura 3.7. Funciones básicas con filtro RC de tres etapas con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

En la figura 3.7 se puede observar la forma de las funciones básicas de cada muestra correspondiente, estas son muy similares a las del filtro RC de dos etapas. Sin embargo, una diferencia es que existe una influencia mayor entre cada muestra, esto se puede observar en las muestras más extremas a la región de interpolación, ya que sus valores en amplitud, al menos aquellas que están por debajo de cero, tiene un mayor pronunciamiento. Inclusive, las funciones en las regiones de retropolación y extrapolación presenta una mayor amplitud.

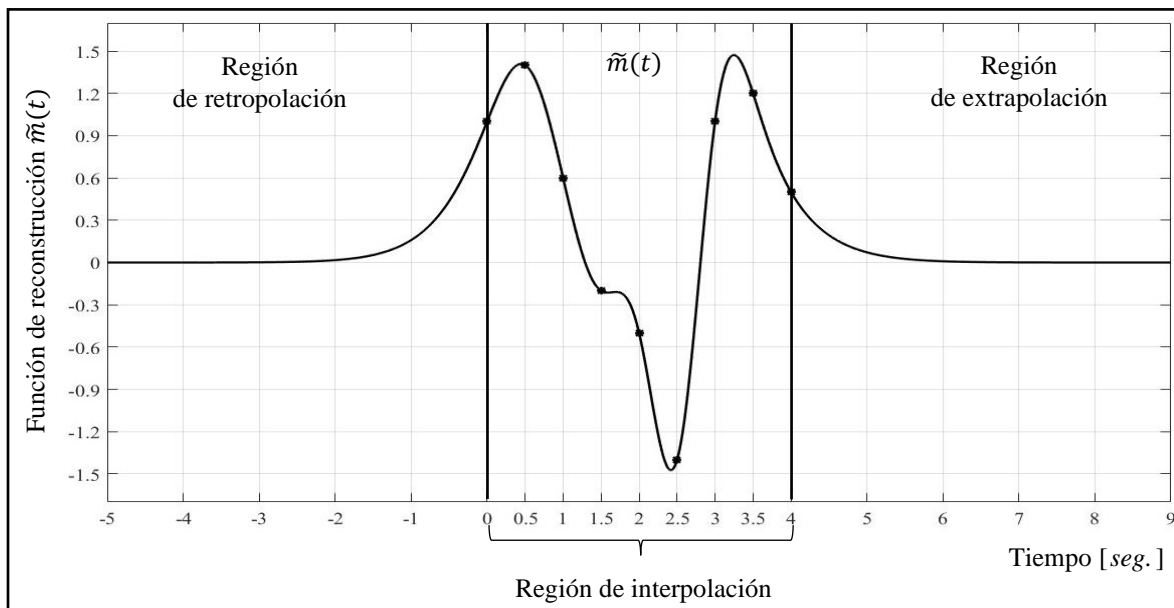


Figura 3.8. Función de reconstrucción con filtro RC de tres etapas con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Como se ha mencionado, el comportamiento de la función de reconstrucción está en dependencia de la función de covarianza, con ella se puede calcular el tiempo de dependencia estadística, es decir, de alguna manera se puede saber la respuesta de cada filtro. Entonces, entre más suave sea la respuesta, el proceso será menos caótico. Por lo tanto, para este caso, el proceso tiene que ser necesariamente más suave en comparación con los anteriores.

En la gráfica 3.9 se muestra una forma similar al caso del filtro RC de dos etapas, ya que el comportamiento en la región de interpolación mantiene valores máximos en sus regiones extremas y valores mínimos en los intervalos más próximos a la muestra central.

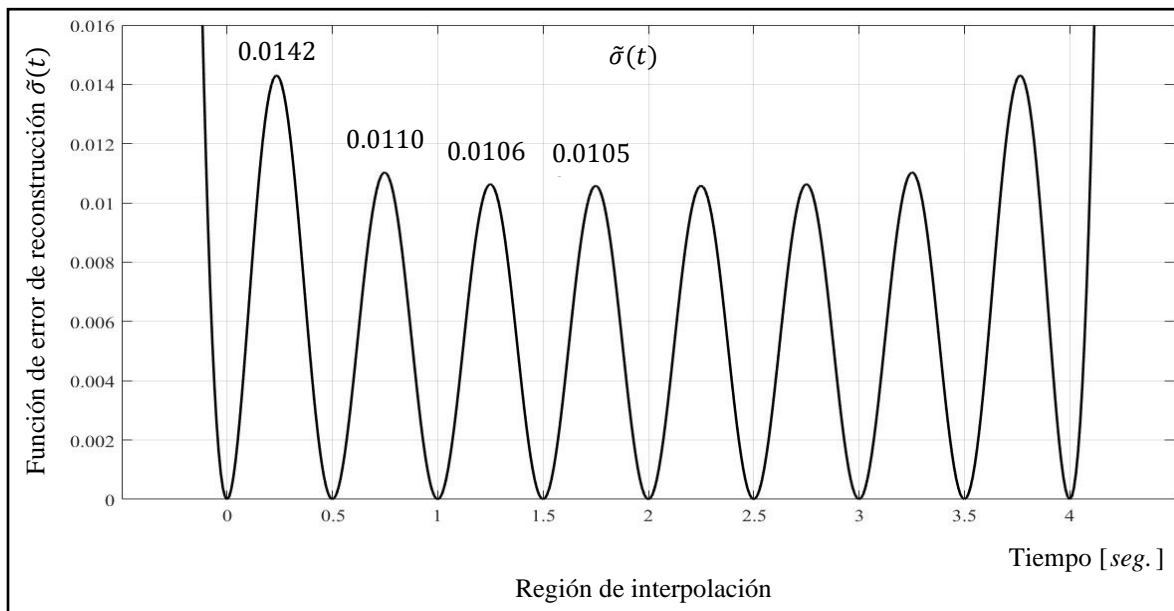


Figura 3.9. Función de error de reconstrucción con filtro RC de tres etapas con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Además, se puede observar en la gráfica de error que sus valores son menores, tanto máximos como mínimos, en comparación con el filtro RC de dos etapas. Entonces, se puede concluir de manera parcial, a partir de estos ejemplos, que los filtros de mayor etapa proporcionan una mejor reconstrucción. De esta manera, esta situación se puede observar en la gráfica de la figura 3.10, donde se muestran las funciones de reconstrucción para los tres diferentes ordenes tratados en esta sección, en donde se muestra que las estructuras correspondientes a cada etapa de los filtros RC son cada vez más suaves. Es decir, que a mayor etapa para el filtro RC se consigue una mejor calidad en la reconstrucción de la señal. Estos resultados se deben a la gran dependencia que existe de las funciones básicas con respecto a la función de covarianza. Cada función básica indica la influencia que proporciona cada muestra en cada intervalo de muestreo, esta información es muy importante para describir el comportamiento de la función de reconstrucción y de error de reconstrucción de un proceso a partir de sus muestras. Debido a que entre mayor sea la influencia que proporciona cada muestra mayor calidad se logra en la reconstrucción del proceso.

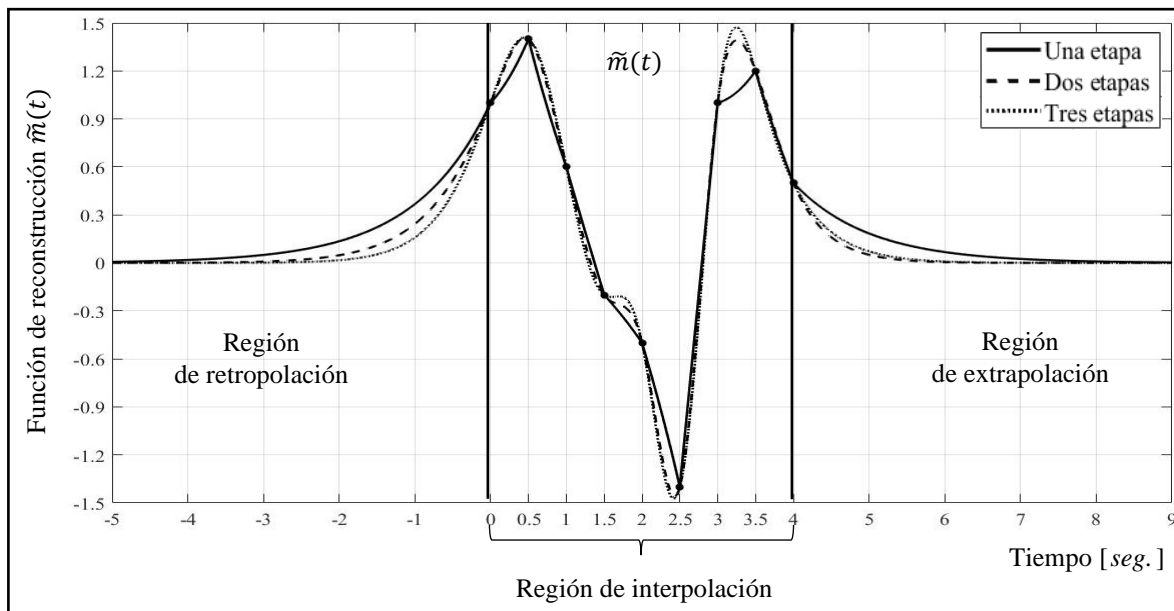


Figura 3.10. Función de reconstrucción con filtro RC de una, dos y tres etapas con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

En la gráfica de la figura 3.11 se muestran las formas de la función de error de reconstrucción para diferentes etapas. Se verifica que existen una correspondencia entre la etapa de cada filtro con los valores de error de reconstrucción. Como ya se mencionó, en el primer caso se caracteriza el caso Markoviano: el cual tiene los mismos valores de error en toda la región de interpolación; mientras que los otros dos casos tienen un comportamiento diferente al Markoviano, ya que este depende de todas las muestras consideradas. En estos ejemplos se puede comprobar la utilidad de aplicar la REMC en la reconstrucción de procesos aleatorios, porque tal regla permite conocer mejor el comportamiento del proceso que se esté estudiando. En la tabla 3.2 se plasman los valores máximos de la función de error de reconstrucción.

Tabla 3.2. Valores de error máximos y mínimos de reconstrucción para 9 muestras con un intervalo de muestreo $\Delta T = 0.5$.

Tipo de filtro	Valor de error de reconstrucción	
	máximo	mínimo
Filtro RC de una etapa	0.2449	0.2449
Filtro RC de dos etapas	0.04212	0.03848
Filtro RC de tres etapas	0.01429	0.01058

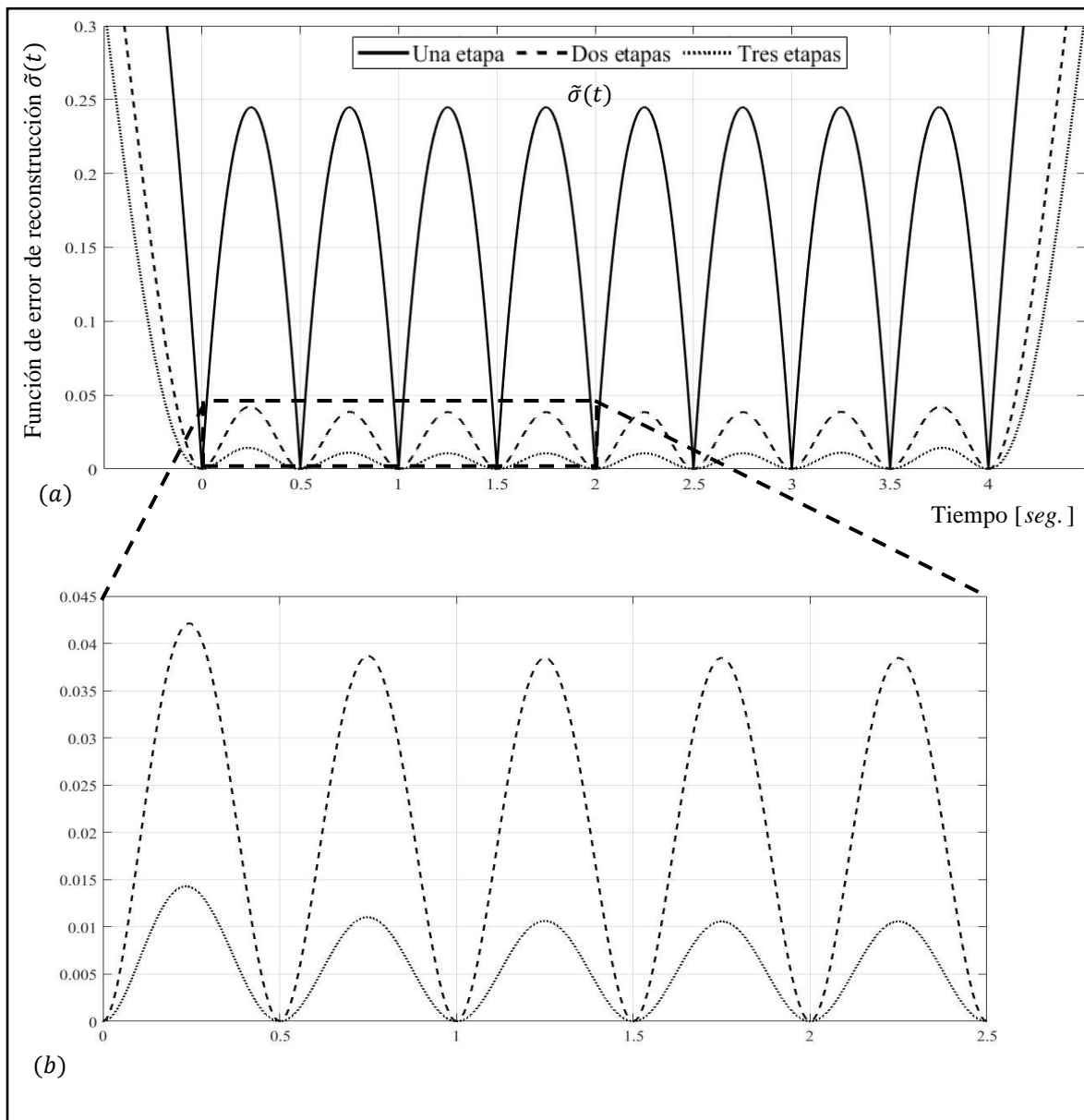


Figura 3.11. (a) Función de error de reconstrucción de filtros RC de una, dos y tres etapas con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$ en la región de interpolación. (b) Zoom de la región punteada.

Para finalizar esta sección, es importante mencionar que en trabajos anteriores [16-18], se han reportado resultados en donde el tiempo de covarianza igual a uno. En los ejemplos anteriores, los valores del tiempo de covarianza que se han establecido son igual a la unidad, esto se logra ajustando el valor de α . La razón de considerar el tiempo de covarianza unitario es por practicidad en el momento de hacer los cálculos, aunado a esta situación, los valores para establecer el intervalo entre cada de una de las muestras que se están considerando deben

ser menores al tiempo de covarianza, ya que a mayor valor en el intervalo de muestro se observa un mayor error en la reconstrucción. Tal comportamiento se puede ilustrar en la figura 3.12.

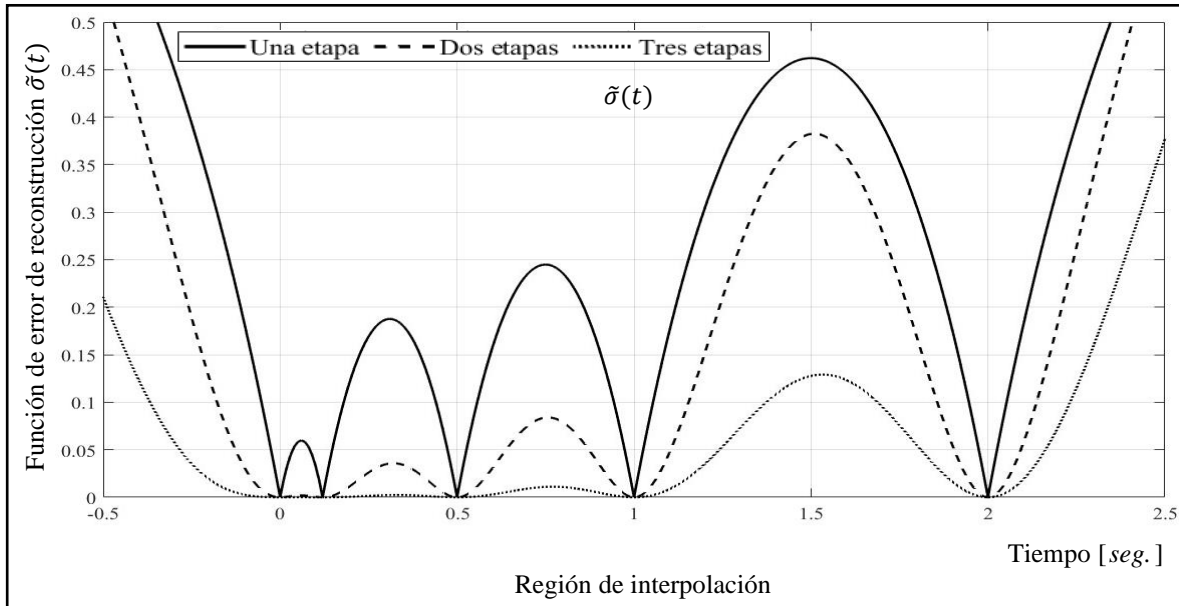


Figura 3.12. Función de error de reconstrucción con filtro RC de tres etapas con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

En esta última figura se observa el comportamiento de la función de error de reconstrucción para 5 muestra separadas un intervalo ΔT no periódico, es decir que las muestra no guardan la misma distancia una de otra. El comportamiento de la función muestra que entre mayor sea el intervalo de muestro se tiene un mayor error de reconstrucción. Además, en este caso, se puede observar que se puede utilizar un intervalo no mayor al tiempo de covarianza para que la reconstrucción sea óptima. La tabla 3.2 muestra los valores de los instantes de muestreo utilizados para la función de error de reconstrucción que se muestra en la figura 3.12.

Tabla 3.3. Valores de los instantes de muestreo para 5 muestras con un intervalo de muestreo ΔT no periódico.

Instante de muestreo [seg.]	$T_1 = 0$	$T_2 = 0.12$	$T_3 = 0.5$	$T_4 = 1$	$T_5 = 2$
-----------------------------	-----------	--------------	-------------	-----------	-----------

3.5 PMR DE REALIZACIONES DE PROCESOS GAUSSIANOS SIN CONOCER SU FUNCION DE COVARIANZA

En los ejemplos anteriores se aplicó la REMC conociendo, de manera anticipada, la función de covarianza a la salida de cada filtro RC, tanto de una, dos y tres etapas. Sin embargo, como se plateó de manera general en el capítulo anterior, la función de covarianza no siempre resulta ser una expresión analítica y en tales situaciones no se puede aplicar dicha regla de la esperanza matemática condicional de manera directa, como se logró anteriormente.

A continuación, se muestra la metodología de la REMC mediante estimación, apoyándose con los resultados de ejemplos anteriores.

En este caso, se puede considerar un proceso estocástico $x(t)$ a la salida de un filtro RC pasabajas de una etapa alimentado con ruido blanco unitario con su respectiva respuesta en frecuencia, como el que se muestra en la figura 3.13, entonces la respuesta en frecuencia se puede expresar como:

$$S_x(\omega) = H(j\omega)H^*(j\omega)S_u(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_u(\omega)$$

Dado que $S_u(\omega) = 1$, entonces:

$$S_x(\omega) = |H(j\omega)|^2 \quad (3.37)$$

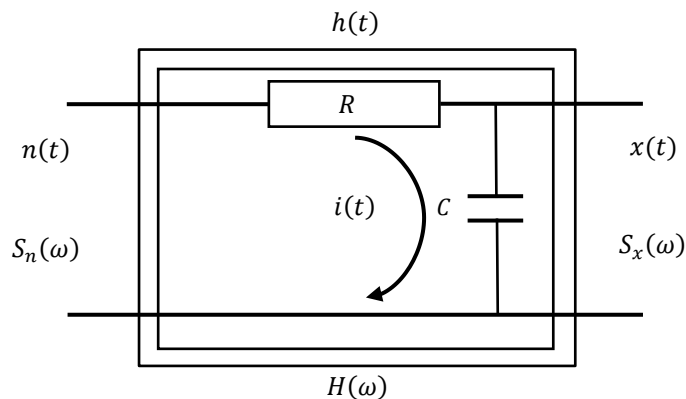


Figura 3.13. Filtro RC pasa-bajas de una etapa alimentado con ruido Gaussiano.

Donde (3.37) es bien conocida en forma analítica. A través de las relaciones de Wiener-Khintchine se obtiene la función de covarianza.

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.38)$$

Entonces, cuando no es posible resolver la expresión (3.38) de forma analítica, debido a la complejidad de $S_x(\omega)$, como se mostró en el capítulo anterior, es apropiado recurrir al cálculo numérico y de esta forma *aproximar* los valores de la función de covarianza. Además, con esta estimación se pueden obtener gráficamente las funciones de covarianza, que permitirán observar su comportamiento en el tiempo.

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \bigg/ \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (3.39)$$

Para lograr la estimación es conveniente considerar la expresión (3.39), la cual establece que: para conocer la función de covarianza normalizada $R_x(\tau)$ se requiere expresarla en términos de su función de densidad espectral $S_x(\omega)$. Este nuevo algoritmo permite hacer la estimación de la función de covarianza, tanto para el caso Markoviano y no Markoviano.

Para poder verificar las aproximaciones que se puedan lograr con este planteamiento, es necesario compararlo con un ejemplo anteriormente trabajado. Para este caso se usará el ejemplo del PRM de un filtro RC de una etapa.

Estimación del PMR de realizaciones de procesos gaussianos para el caso Markoviano

La estimación de las funciones básicas está determinada por su función de covarianza como se expresó en secciones anteriores. Por lo tanto, la expresión para un proceso gaussiano en el caso Markoviano es el siguiente:

$$B_j(t) = \sum_{i=1}^N K_x(t - T_i) a_{ij} \quad (3.40)$$

El comportamiento de las funciones básicas, por medio de una estimación, se puede observar en la figura 3.14. Tal comportamiento de las funciones básicas es muy similar al que se

presentó para el primer caso Markoviano de la sección 3.3, en donde se observa, que las formas son muy similares en las tres diferentes regiones.

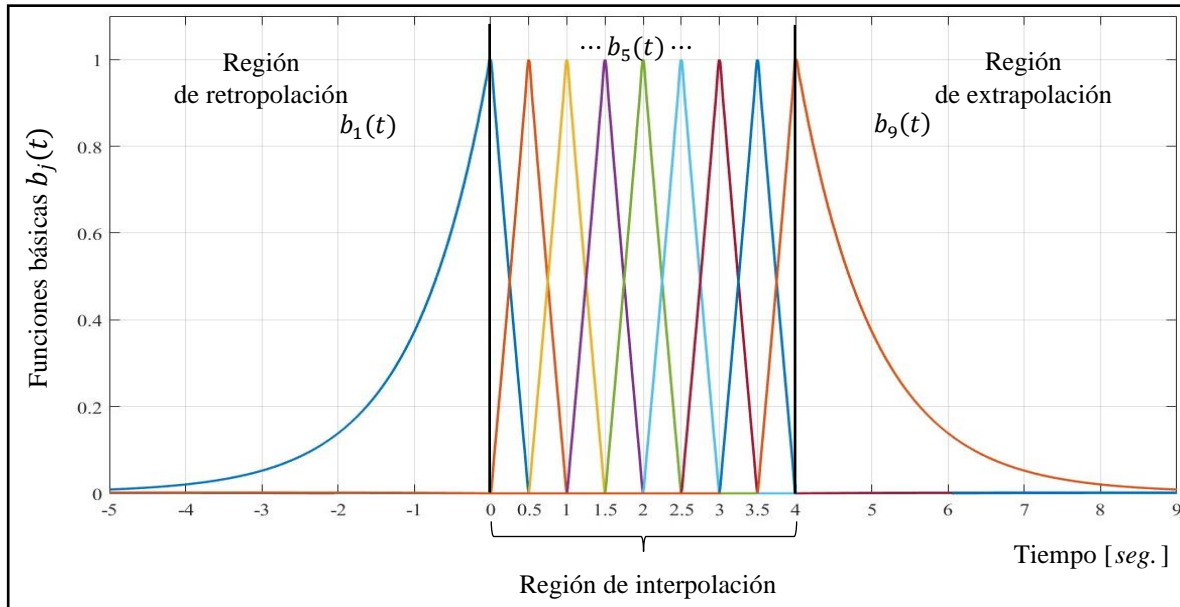


Figura 3.14. Estimación de funciones básicas con filtro RC de una etapa con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Sin embargo, al declarar anteriormente que esta nueva manera de abordar el problema era mediante una estimación, no se puede asegurar que sean en definitiva las mismas funciones. Entonces, es necesario hacer una comparación entre el cálculo y dicha estimación en la función de reconstrucción para notar algunas de sus diferencias. La figura 3.15 muestra la función de reconstrucción de la sección 3.4 del filtro RC de una etapa así como la estimada a partir de las funciones básicas. Se puede observar la similitud en ambas funciones, siendo que en las pequeñas elipses se muestra a detalle la aproximación en algunos puntos, la cual dependerá de la eficiencia del algoritmo empleado para la estimación de las funciones básicas así como de algunos otros factores. De esta manera, se puede mostrar que por medio de la estimación se logra una óptima aproximación de las funciones calculadas.

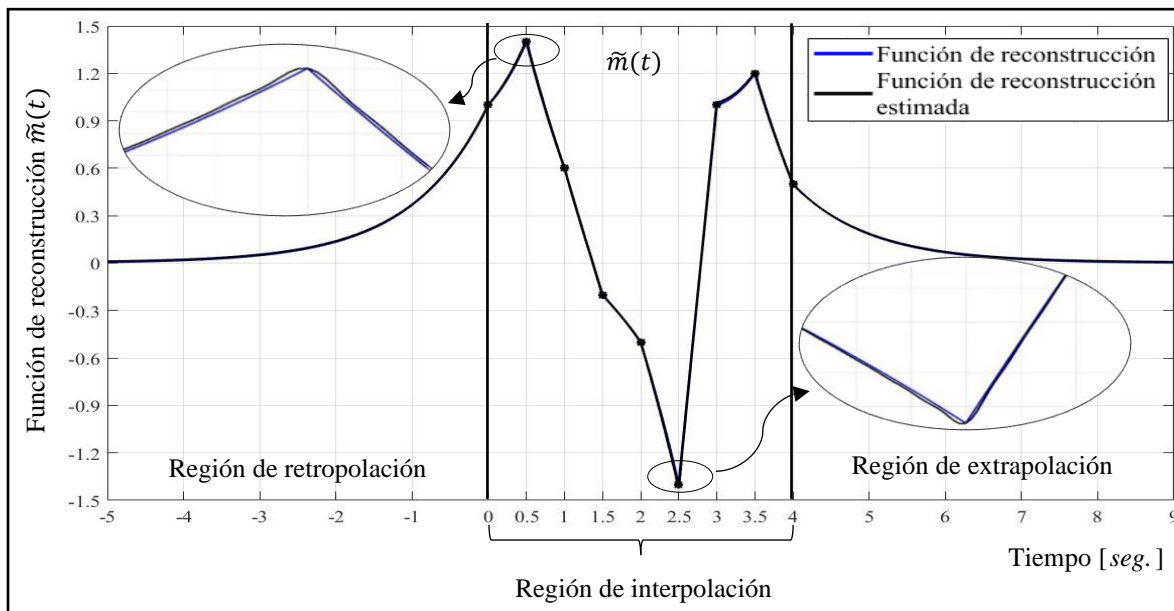


Figura 3.15. Superposición de función de reconstrucción calculada y estimada con filtro RC de una etapa con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Posteriormente, se requiere estimar la función de error de reconstrucción y observar su comportamiento. La función calculada y la función estimada del filtro RC de una etapa se muestra en la figura 3.16.

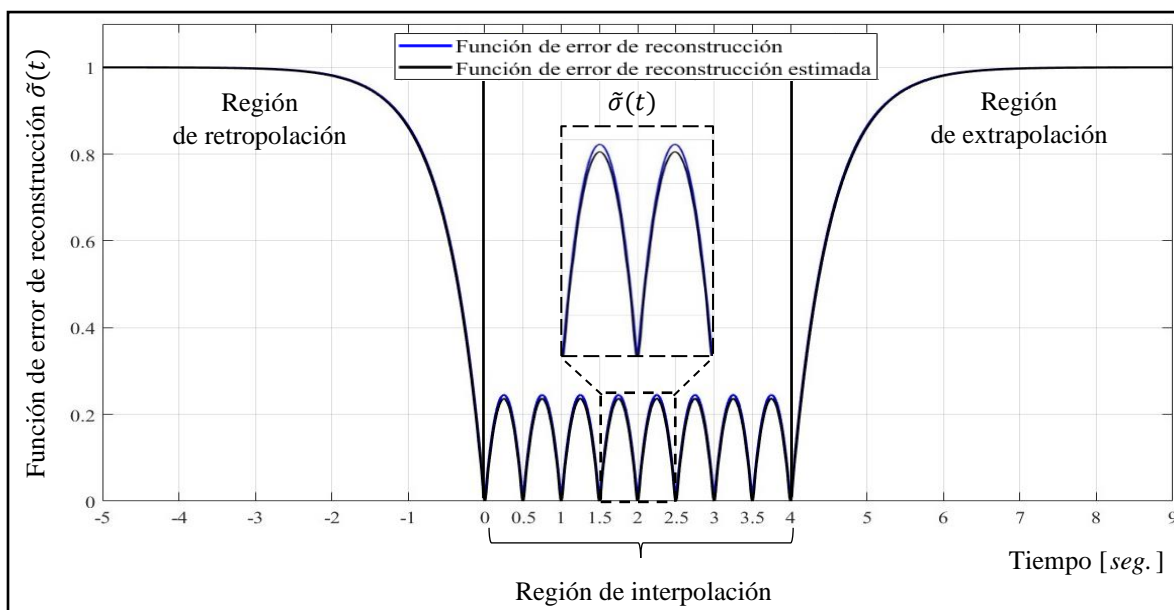


Figura 3.16. Superposición de función de error de reconstrucción calculada y estimada con filtro RC de una etapa con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

En ella se puede observar que los valores de error son aproximados a los obtenidos en la sección 3.3. Esto se debe al algoritmo de estimación, ya que este depende del tipo de cálculo numérico que se este llevando a cabo y los parámetros que influyen en él. Los valores de error para la función calculada y la función estimada en el caso del filtro RC de una, dos y tres etapas se muestran en la tabla 3.2.

Tabla 3.4. Comparación de valores máximos y mínimos, calculados y estimados de error de reconstrucción para 9 muestras con un intervalo de muestreo $\Delta T = 0.5$.

Tipo de filtro	Valor de error de reconstrucción			
	máximo		mínimo	
	calculado	estimado	calculado	estimado
<i>Filtro RC de una etapa</i>	0.2449	0.2364	0.2449	0.2364
<i>Filtro RC de dos etapas</i>	0.04212	0.04195	0.03848	0.03836
<i>Filtro RC de tres etapas</i>	0.01429	0.01425	0.01058	0.01055

Los valores mostrados en la tabla 3.2 corroboran lo siguiente:

- Con el planteamiento anterior se pueden estimar las funciones básicas, la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción.
- Las funciones que se obtienen con dichas estimaciones son aproximadas a las obtenidas en secciones anteriores.
- Los valores de error muestran que se pueden hacer aproximaciones tanto como se requiera. Los errores máximos y mínimos son cercanos a los que se mostraron en la tabla 3.1, los cuales se obtiene con las expresiones analíticas en los ejemplos anteriores del PRM.

Esta forma de estimación permitirá conocer las funciones de covarianza definidas en el tiempo de ciertas funciones definidas en la frecuencia, tal como, la función de densidad espectral de potencia a la salida de un filtro, las cuales no tienen una representación analítica. Estas estimaciones son fundamentales para aplicar la metodología basada en la REMC.

RESUMEN

La regla de la esperanza matemática condicional trabaja principalmente con la función de covarianza del proceso aleatorio a la salida de un filtro, la cual se puede conocer mediante el teorema de Wiener-Khintchine. Cuando se conoce la función de covarianza del proceso se pueden conocer las funciones básicas, la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción. En este capítulo se ha logrado mostrar la utilidad de la regla de la esperanza matemática condicional en el procedimiento de muestreo-reconstrucción de procesos aleatorios y las ventajas del algoritmo, esta se ha aplicado a filtros RC pasa-bajas de diferentes etapas mostrando resultados óptimos, reflejados en la calidad de la reconstrucción, así como caracterizar procesos Markovianos y no Markovianos.

Además, se mostró que la metodología basada en la regla de la esperanza matemática condicional puede aplicarse de igual manera a funciones que no proporcionan expresiones analíticas en el sentido de su solución mediante algoritmos conocidos o formulas conocidas, es decir, se pueden realizar estimaciones de tales funciones, de tal manera que sea viable la metodología antes mencionada. Los resultados de las estimaciones presentan óptimas aproximaciones a las calculadas mediante expresiones analíticas, comprobando una vez más las ventajas que otorga la regla de la esperanza matemática condicional en el procedimiento de muestreo y reconstrucción.

Capítulo 4

RECONSTRUCCIÓN DE PROCESOS ALEATORIOS A LA SALIDA DE FILTROS CHEBYSHEV TIPO I

Anteriormente, se ha mostrado la aplicación de la *regla de la esperanza matemática condicional* (REMC) al *procedimiento de muestro-reconstrucción* (PMR) de *procesos gaussianos* a través de *filtros RC* de diferentes *etapas*. Estos resultados son óptimos en el PRM, ya que mediante esta metodología se obtienen las funciones de interpolación, también llamadas *funciones básicas*, la *función de reconstrucción* y la *función de error de reconstrucción*. Sin embargo, como se planteó en capítulos anteriores existen determinadas funciones, las cuales simplemente pueden trabajarse mediante una estimación en el PRM. Un caso particular de esas funciones, son las que muestran los *filtros de Chebyshev* a su salida. En este capítulo se mostrarán las respectivas estimaciones aplicando la REMC al PMR a la salida de un filtro de *Chebyshev tipo I* para diferente *orden*.

4.1 FUNCIÓN DE DENSIDAD ESPECTRAL A LA SALIDA DE FILTROS DE CHEBYSHEV TIPO I

De manera similar al filtro RC ideal de diferentes etapas, el cual tiene una *función de densidad espectral* característica a la salida, los filtros de Chebyshev tipo I presentan una función de densidad espectral característica cuando están alimentados con *ruido blanco* a la entrada. La figura 4.1 muestra la función de densidad espectral del filtro de Chebyshev tipo I para diferente orden.

La *respuesta en frecuencia*, en este caso, en donde su función de densidad espectral del filtro de Chebyshev tipo I, presenta un *rizado* en la *banda de paso*, el cual incrementa el número de oscilaciones cuando aumenta p , es decir, cuando el orden del filtro es mayor. Además, la función de densidad está caracterizada por dos parámetros adicionales: una *frecuencia de corte* ω_c , descrita en el capítulo 2; y una amplitud de rizo ε . La primera está determinada por

el tiempo de covarianza y para estimar este tiempo, que es unitario[†], es necesario encontrar la frecuencia de corte específica para cada orden del filtro, dicha frecuencia determina la aproximación del tiempo de covarianza unitario. El valor de rizo ε es constante, pero se puede ajustar según el análisis que se requiera, en este caso el valor debe estar ajustado a un valor pico a pico de 1 dB, lo que se traduce en un valor de 0.5.

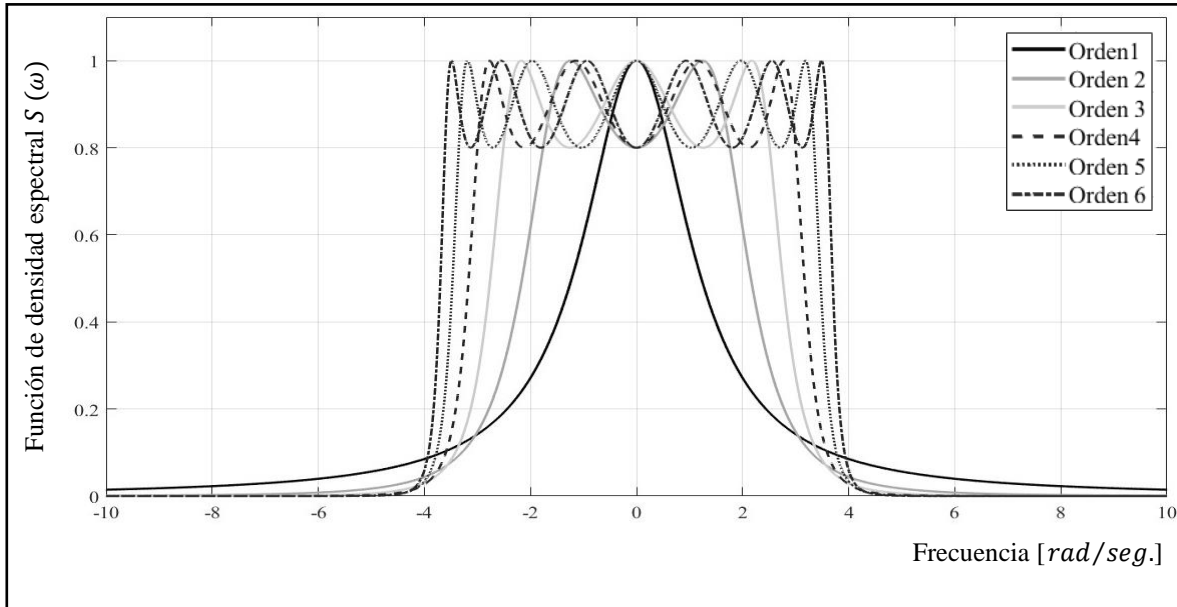


Figura 4.1 Función de densidad espectral con filtro Chebyshev tipo I para diferente orden.

De esta manera, el polinomio de Chebyshev, así como la función de densidad espectral descritos en el capítulo 2 se pueden reescribir como (4.1) y (4.2) con respecto a su frecuencia de corte.

$$T_p(\omega/\omega_c) = \begin{cases} \cos[p \arccos(\omega/\omega_c)] & \text{para } |\omega/\omega_c| \leq 1 \\ \cosh[p \operatorname{arcosh}(\omega/\omega_c)] & \text{para } |\omega/\omega_c| > 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_p^2(\omega/\omega_c)} \quad (4.2)$$

[†] Esta condición se especificó en el capítulo anterior.

La tabla 4.1 muestra las frecuencias de corte estimadas para diferente orden del filtro Chebyshev tipo I cuando su tiempo de covarianza es aproximadamente igual a uno.

Tabla 4.1. Valores de las frecuencias de corte para los filtros de Chebyshev tipo I.

Parámetro	Valores					
Orden del filtro	1	2	3	4	5	6
Frecuencia de corte ω_c [rad/seg.]	0.61	1.76	2.51	3.00	3.35	3.61
Rizado ε	0.5	0.5	0.5	0.5 <td 0.5	0.5	

La función de densidad espectral del filtro de Chebyshev tipo I con sus respectivas frecuencias de corte se muestra en la figura 4.2. En esta figura, a diferencia de la figura 4.1, se muestra la parte positiva del espectro en frecuencia, en ella se observan a detalle las frecuencias de corte, previamente estimadas para el tiempo de covarianza. Se puede observar la amplitud de rizo ε constante, ya que, en él, intersecan todas las frecuencias de corte, es decir, este parámetro también influye en la estimación de la frecuencia de corte.

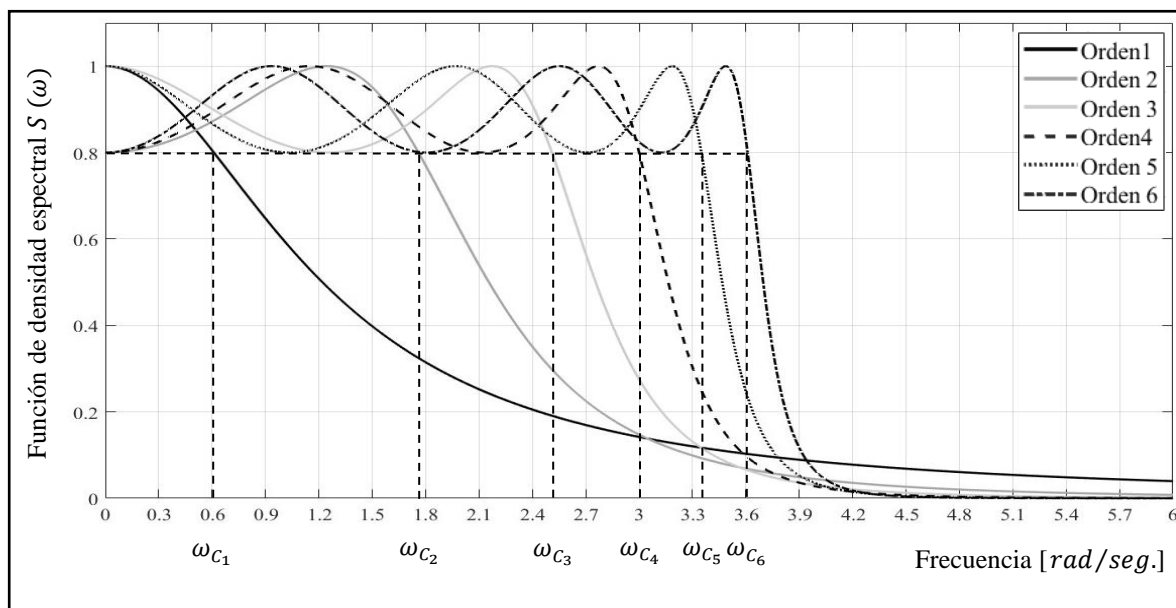


Figura 4.2. Función de densidad espectral con filtro Chebyshev tipo I para diferente orden con frecuencias de corte ω_c .

4.2 FUNCIÓN DE COVARIANZA A LA SALIDA DE FILTROS DE CHEBYSHEV TIPO I

Las *funciones de covarianza* a la salida de los filtros de Chebyshev pueden estimarse aplicando el *Teorema de Wiener-Khintchine* tratado en el capítulo 2. La figura 4.2 muestra el comportamiento de la función de covarianza del filtro Chebyshev tipo I para diferente orden.

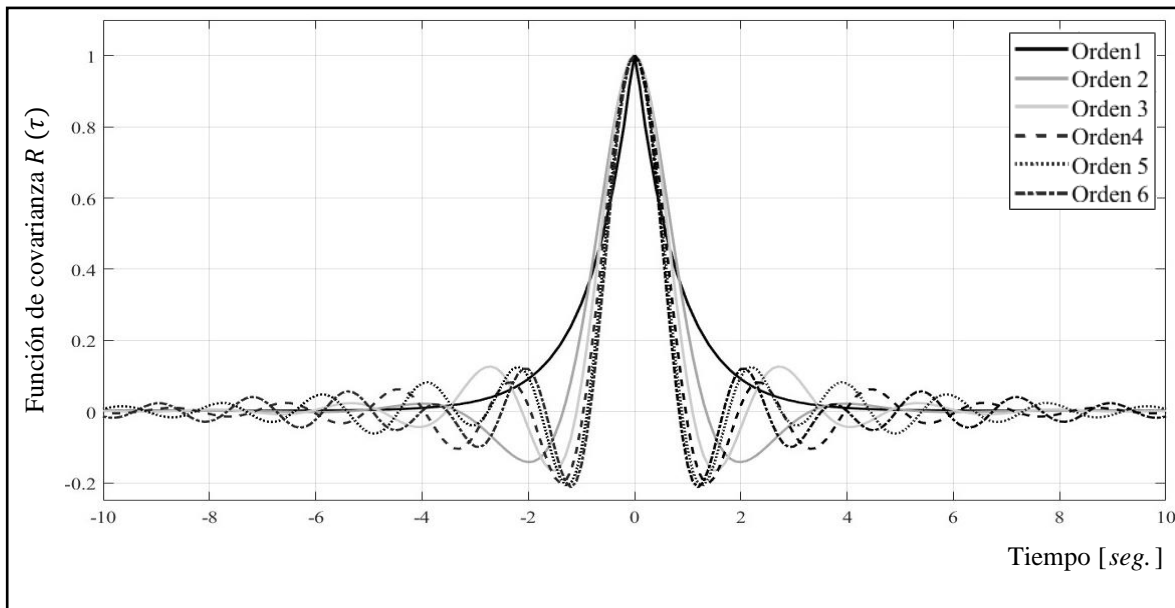


Figura 4.3. Función de covarianza con filtro Chebyshev tipo I para diferente orden.

Para cada función de densidad espectral de diferente orden, le corresponde una función de covarianza particular, donde cada función de covarianza presenta una función amortiguada en el tiempo para diferente orden del filtro. El amortiguamiento en cada una de las funciones de covarianza hace que su valor tienda a cero siendo este más lento. Es necesario aclarar que no se trata de una *función Sinc*(τ), aunque la forma sea similar. Este comportamiento se debe a la estructura que presenta la función de densidad espectral, donde el orden del filtro determina una mejor selectividad en frecuencia, dando una mayor aproximación a un filtro ideal. Tal comparación con la función *Sinc*(τ) se puede visualizar en la figura 4.4.

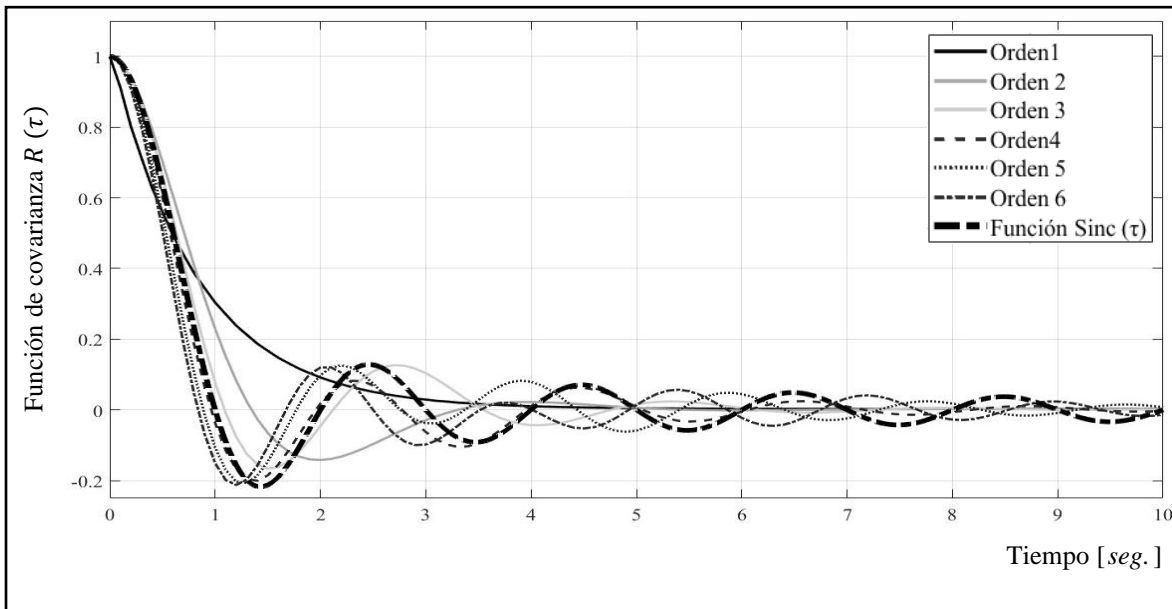


Figura 4.4. Función de covarianza con filtro de Chebyshev tipo I para diferente orden y función Sinc (τ).

Las funciones de la figura 4.4 muestran las diferencias entre función $Sinc(\tau)$ y las funciones de covarianza que se presentan a las salidas del filtro de Chebyshev tipo I. Se observa que las funciones de covarianza de mayor orden del filtro se aproximan cada vez más a la función $Sinc(\tau)$, es decir, se aproximan mejor a la función de un filtro ideal.

4.3 RECONSTRUCCIÓN A LA SALIDA DE FILTRO DE CHEBYSHEV TIPO I DE PRIMER ORDEN

Cuando se conoce de la función de covarianza, o en este caso, la *estimación* de dicha función, se puede aplicar la metodología basada en la regla de la esperanza matemática condicional para la reconstrucción de señales, como se ha mostrado para el caso del filtro RC pasa-bajas ideal en el capítulo anterior. A continuación, se expondrán los PRM a la salida del filtro de Chebyshev aplicando la REMC.

Caso Markoviano

El primer caso se obtiene al aplicar la metodología de la REMC a la salida un filtro de Chebyshev tipo I de primer orden, ya que con ella se puede estimar las funciones básicas, la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción. El valor de la frecuencia

de corte para este primer caso está en la tabla 4.1. Los valores en amplitud para la reconstrucción están en la tabla 4.2. Además, en este ejemplo y los siguientes se trabajará con 9 muestras en un intervalo de tiempo entre cada muestra de 0.5 segundos. Los intervalos de tiempo han sido establecidos en trabajos previos [24,25] y aclaradas en el capítulo anterior. Las funciones básicas, de reconstrucción y de error de reconstrucción se muestran en las figuras 4.5, 4.6 y 4.7 respectivamente.

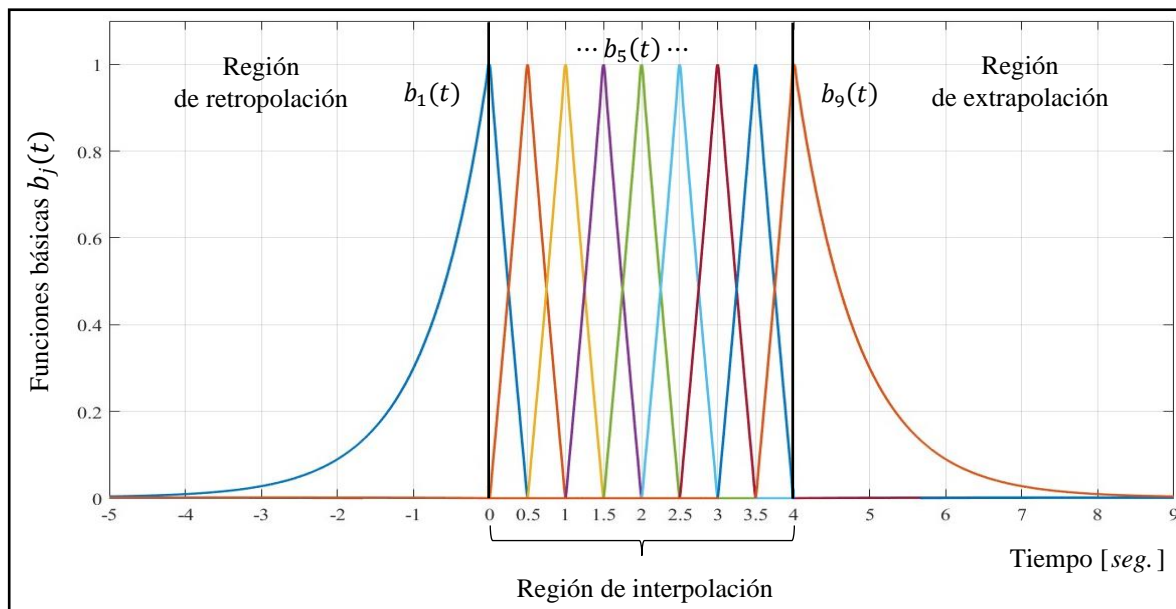


Figura 4.5. Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo I de orden uno con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Las funciones básicas para el filtro de Chebyshev tipo I de primer orden caracterizan al caso Markoviano y son similares al ejemplo mostrado en el capítulo 3, trabajadas con filtro RC de una etapa. Las funciones básicas tienen un comportamiento lineal en la región de *interpolación* y un comportamiento exponencial en las otras dos regiones, tanto en la *retropolación* como en la de *extrapolación*. Sin embargo, en el caso del filtro de Chebyshev de tipo I se tiene otro parámetro adicional, el valor de rizado ε , que afectan el comportamiento en las tres diferentes regiones. Esta situación se presenta debido a la dependencia que existe entre las funciones básicas y la función de covarianza, es decir, si la función de covarianza, para el caso Markoviano, tiene alguna modificación, entonces, las funciones básicas tendrán otro comportamiento. En el apéndice C se puede observar cómo es el comportamiento de las

funciones de covarianza como consecuencia de los diferentes valores de ε para el caso Markoviano.

Tabla 4.2. Valores de muestreo para 9 muestras con un intervalo de muestreo $\Delta T = 0.5$.

<i>Instante de muestreo</i> T_i [seg.]	<i>Valor de la muestra</i> $x(T_i)$
$T_1 = 0$	$x(T_1) = 1$
$T_2 = 0.5$	$x(T_2) = 1.4$
$T_3 = 1$	$x(T_3) = 0.6$
$T_4 = 1.5$	$x(T_4) = -0.2$
$T_5 = 2$	$x(T_5) = -0.5$
$T_6 = 2.5$	$x(T_6) = -1.4$
$T_7 = 3$	$x(T_7) = 1$
$T_8 = 3.5$	$x(T_8) = 1.2$
$T_9 = 4$	$x(T_9) = 0.5$

El comportamiento de la estimación de la función de reconstrucción se puede observar en la figura 4.6. Esta función es similar a la obtenida en el capítulo 3 para el filtro RC de una etapa. En la función, se observa la similitud que existe de las funciones básicas del filtro de Chebyshev tipo I al comportamiento en las diferentes regiones. En la región de interpolación tiene un comportamiento lineal, pero fuera de la región de interpolación tiene una forma exponencial.

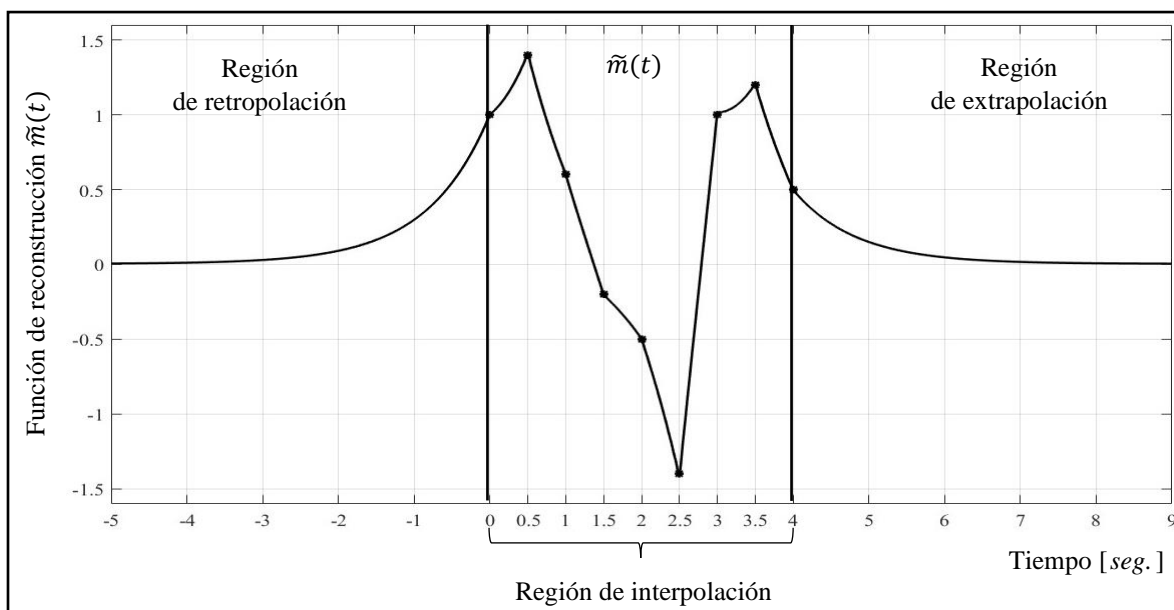


Figura 4.6. Función de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo I de orden uno con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Este comportamiento de la función de reconstrucción es consecuencia de la fuerte influencia que tiene la función de covarianza sobre las funciones básicas, ya que cada una de ellas es multiplicada por el valor de su muestra y posteriormente se suman para obtener la función de reconstrucción. Tal como se mencionó, que existen variaciones cuando se cambia el valor ε , esta función presenta tales variantes en su comportamiento al cambiar el valor de rizo. Tales variantes se muestran en el apéndice C, donde para cada valor diferente de rizo corresponde una función de reconstrucción diferente.

De esta manera, se puede deducir que la función de error de reconstrucción tendrá una forma similar al caso *Markoviano* del filtro RC, este comportamiento se observa en la figura 4.7.

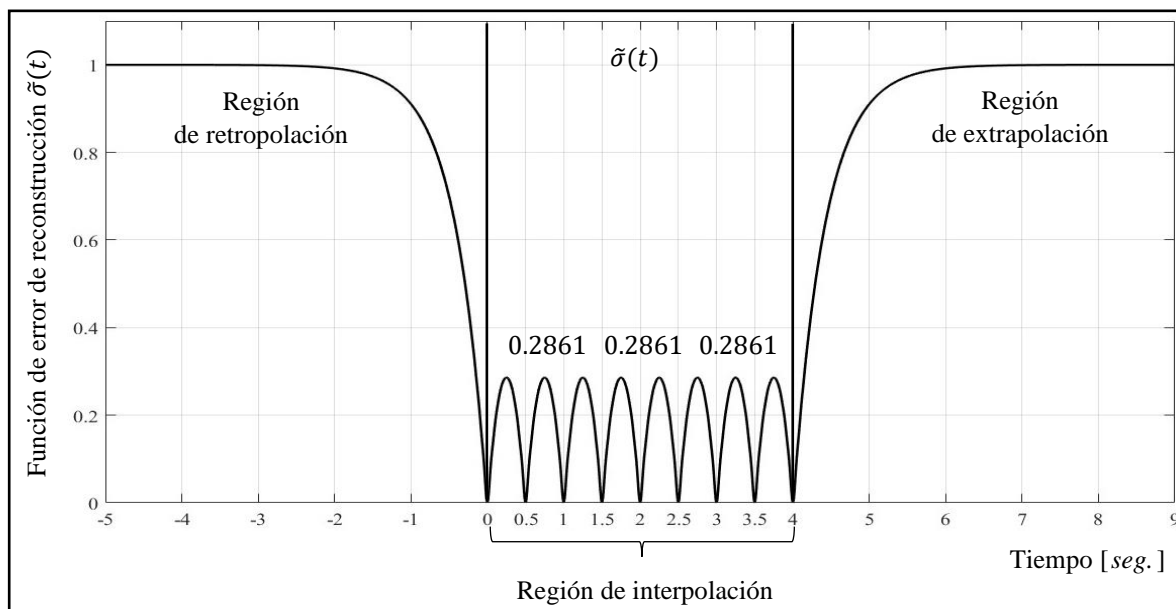


Figura 4.7. Función de error de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo I de orden uno con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

El error máximo de reconstrucción en cada valor intermedio de los instantes de muestreo es el mismo, característica del caso Markoviano, debido a que cada muestra tiene la influencia de cada una de las muestras, tanto la anterior como la siguiente y no del número de muestra que se estén considerando. También, es importante observar la simetría que caracteriza a la función a partir de su valor de muestra central en el tiempo, es decir, los valores de error que se presentan desde la región más próxima a la región de retropolación hacia la muestra central serán iguales a los que se presenten desde la región de extrapolación a la muestra central.

También, el valor de rizo tiene consecuencias en las anteriores funciones, por lo tanto, de la misma forma existen variaciones en la función de error de reconstrucción al modificar este parámetro. Dichas variaciones se muestran en el apéndice C.

Hasta ahora, el comportamiento observado en las gráficas anteriores de las funciones básicas, de reconstrucción y error de reconstrucción es muy similar al que se analizó con el filtro RC pasa-bajas ideal. Esta similitud se debe a lo siguiente: el filtro de Chebyshev de primer orden se reduce a un filtro RC de una etapa, esto se confirma en la función de densidad espectral para ambos filtros, mostrada en el capítulo 1, donde el exponente máximo de cada *polinomio* es el mismo, es decir, es cuadrático. Entonces, en el caso del filtro de Chebyshev no tendrá un mayor número de elementos y su elemento de mayor orden es el mismo al que se presenta en el polinomio del filtro RC, por esta razón los resultados son similares. Sin embargo, la ligera variación que existe es consecuencia del valor del rizo ε , el cual influye en los valores máximos de error de reconstrucción, pero no así en la forma de cada una de las funciones estimadas.

4. 4 RECONSTRUCCIÓN A LA SALIDA DE FILTRO DE CHEBYSHEV TIPO I PARA DIFERENTE ORDEN

Ahora, se pueden exponer los siguientes casos para ordenes diferentes del filtro de Chebyshev tipo I. A continuación, se muestran las funciones básicas correspondientes a cada orden del filtro, desde $p=2$ hasta $p=6$ analizando en cada caso su muestra central. Esta secuencia del trabajo es adecuada debido a las consideraciones de trabajos anteriores donde se han expuesto el comportamiento para diferentes órdenes [24,25]. También, se puede realizar una comparación entre cada función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción, permitiendo así, tener una mejor observación del comportamiento de cada filtro cuando p se incrementa.

Funciones Básicas

En la figura 4.8 se observan las funciones básicas para un filtro de orden dos. Estas funciones son diferentes en las tres regiones en comparación con el primer caso cuando se tenía un filtro de orden uno, caso Markoviano. Es importante mencionar que, cuando es de orden dos o más se presentan casos *no Markovianos*. En la región de interpolación se observa que sus valores

máximos son igual a uno, debido a que son valores normalizados. Además, en la región de interpolación tienen un comportamiento no lineal a diferencia del caso Markoviano. En las otras regiones tienen un comportamiento diferente al exponencial, ya que, se observan valores en amplitud que oscilan por debajo de cero y posteriormente por arriba de cero para ambas regiones. En comparación con los filtros RC de dos etapas mostrados en el capítulo anterior, las curvas presentan cambios más pronunciados en ambas regiones.

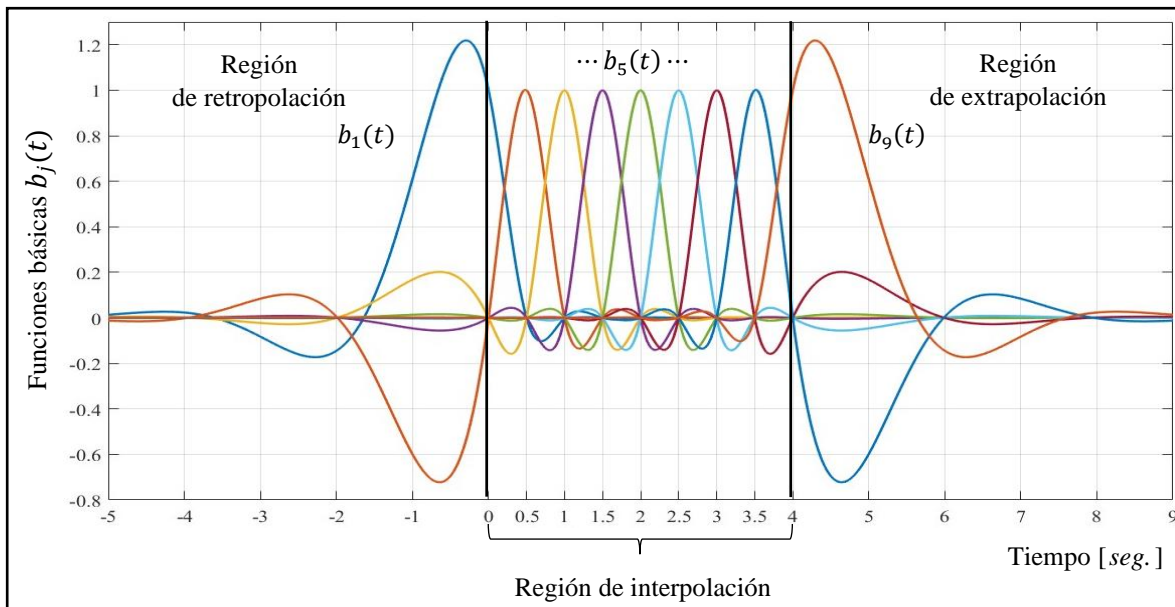


Figura 4.8. Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo I de orden dos con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Las funciones básicas de orden tres, mostradas en la figura 4.9, tienen una forma similar a las del filtro de orden dos. Sin embargo, existen algunas diferencias, una de ellas radica en los valores mínimos dentro de la región de interpolación, estos son menores en comparación con el de orden dos. Además, en las regiones de retroalimentación y extrapolación las curvas tienen mayor pronunciamiento, debido a fuerte influencia que tienen las otras muestras alrededor de cada una de las muestras que se esté considerando. Esta situación, como en el caso del filtro RC, arroja mejores resultados en la función de reconstrucción, ya que esta función se suaviza conforme aumenta el orden del filtro y la función de error de reconstrucción alcanza valores máximos, los cuales son más pequeños para cada orden del filtro.

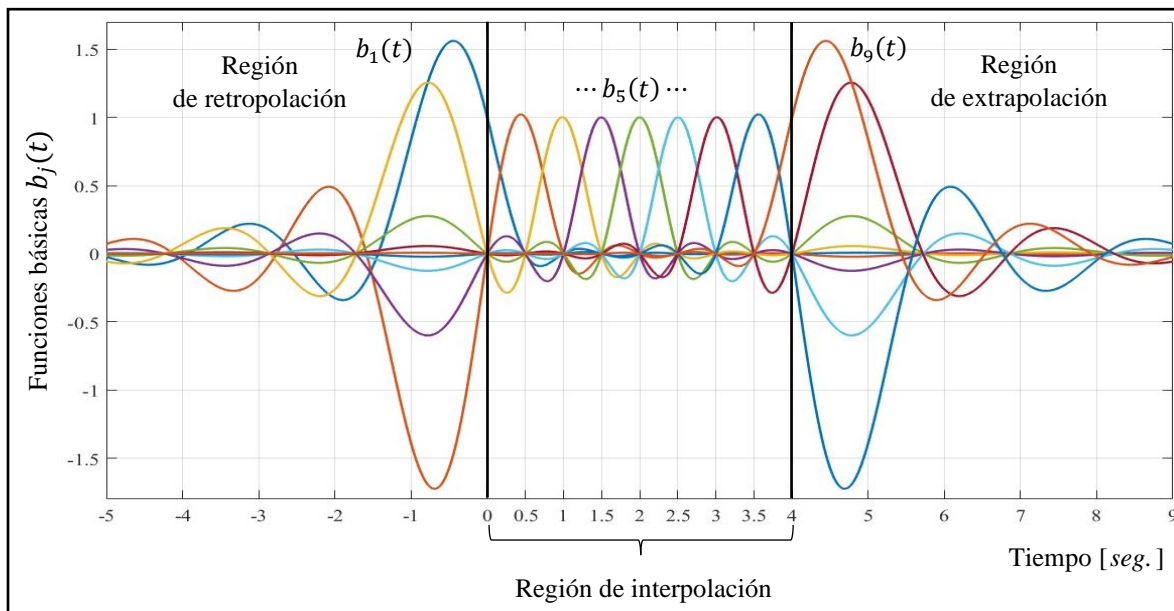


Figura 4.9. Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo I de orden tres con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Hasta este momento, se han mostrados las funciones básicas de tres diferentes ordenes de los filtros de Chebyshev tipo I. Los comportamientos mostrados en la función de reconstrucción y función de error de reconstrucción han sido expuestos con anterioridad en [26]. De esta manera, se puede hacer una comparación de los valores máximos de error de reconstrucción de los filtros RC pasa-bajas (100%) con los filtros Chebyshev tipo I de diferente orden. Esta comparación de los valores que se obtiene en la función de error de reconstrucción de un filtro RC y un filtro de Chebyshev tipo I se muestra en la tabla 4.3.

Tabla 4.3. Valores máximos y mínimos de error de reconstrucción para filtros RC y Chebyshev tipo I de diferente orden.

Tipo de filtro	Valor del Error de reconstrucción					
	Filtro RC pasa-bajas ideal		Filtro de Chebyshev tipo I		Diferencia entre filtro RC y Chebyshev tipo I (%)	
Etapas/orden	máximo	mínimo	máximo	mínimo	máximo	mínimo
Una etapa/ primer orden	0.2449	0.2449	0.28610	0.28610	-16.82 %	-16.82 %
Dos etapas/ segundo orden	0.0421	0.0384	0.02312	0.01939	45.14 %	49.74 %
Tres etapas/ tercer orden	0.0142	0.0105	0.004079	0.001910	71.84 %	81.91 %

La tabla muestra el caso del filtro RC de una etapa, este presenta un valor menor de error en comparación con el filtro de Chebyshev tipo I. Sin embargo, para etapas mayores del filtro RC, tanto de dos y tres etapas, los valores son mayores en comparación con los resultados del filtro de Chebyshev tipo I. Esto se debe a la gran influencia que aportan las funciones básicas de mayor orden del filtro de Chebyshev tipo I. Tal aseveración la justifica también el comportamiento del polinomio de Chebyshev de tipo I, ya que un orden mayor del polinomio implica un mayor número de términos en dicho polinomio. Con esto se puede deducir, que en los casos no Markovianos se tendrá mayor influencia de cada muestra, tanto en las funciones básicas, así como en la reconstrucción y la calidad de esta. Ahora, es recomendable seguir presentando el comportamiento de las funciones básicas de mayor orden.

Las figuras 4.10, 4.11 y 4.12 muestran las funciones básicas de orden mayor a tres funciones.

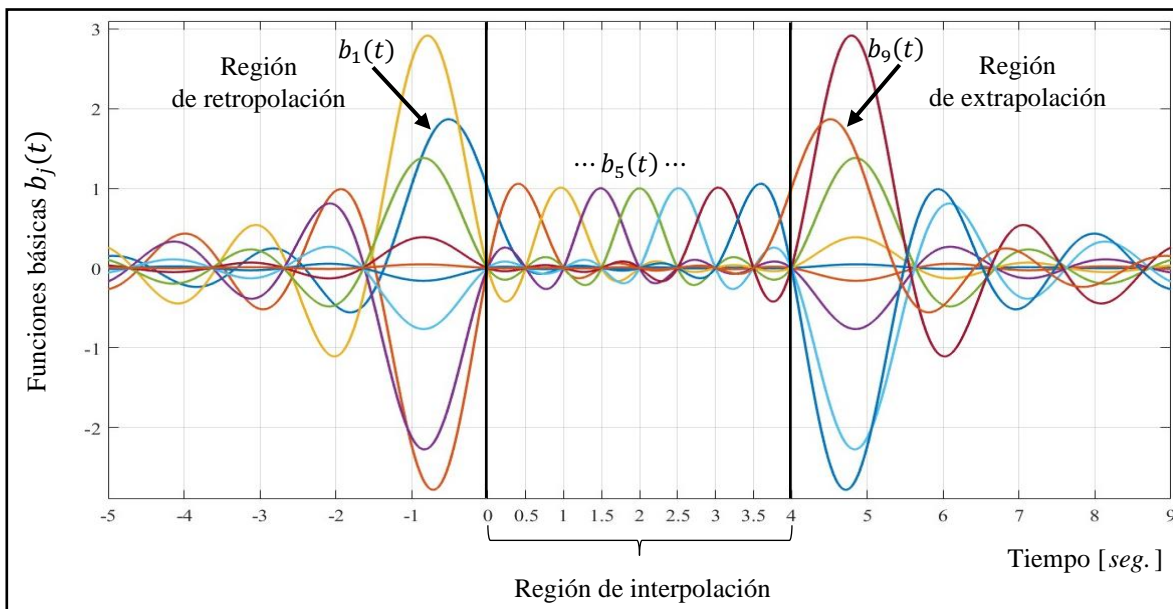


Figura 4.10. Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo I de orden cuatro con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

El comportamiento de las funciones básicas es similar para cada orden en las tres regiones. Sin embargo, en esta región las funciones básicas más cercanas a las regiones extremas de la interpolación toman valores por arriba de uno, antes o después de su muestra correspondiente. Esto se debe a la gran influencia que tienen las demás muestras sobre alguna de ellas.

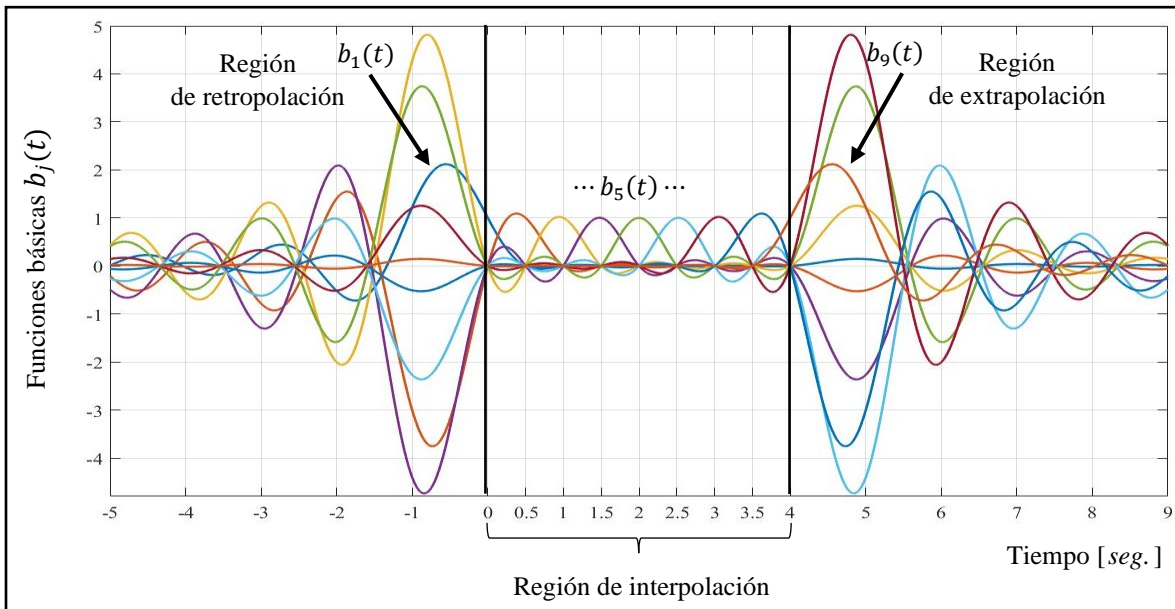


Figura 4.11. Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo I de orden cinco con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

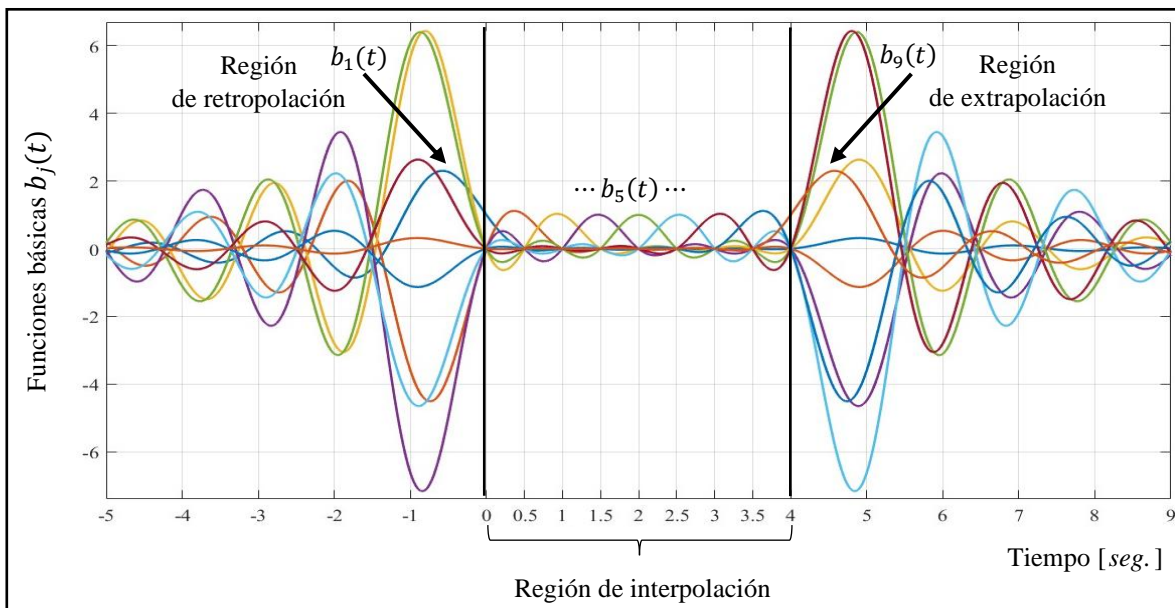


Figura 4.12. Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo I de orden seis con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

En la figura 4.13 se puede observar el comportamiento anteriormente descrito tomando como ejemplo a la segunda función básica, es decir, cuando $b_2(t)$. Además, en el instante de la muestra, siempre, cada función básica toma el valor de uno.

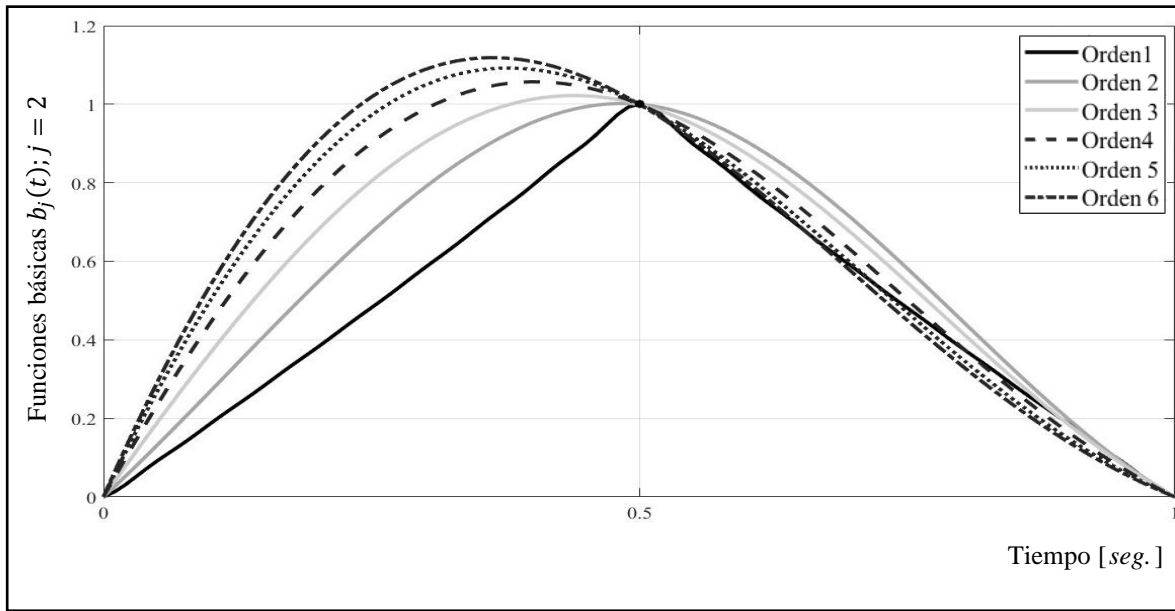


Figura 4.13. Funciones básicas cuando $j = 2$ con filtro Chebyshev tipo I de diferente orden con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Función Básica central

Las funciones básicas mostradas en las figuras anteriores muestran que para cada orden del filtro de Chebyshev tipo I describen comportamientos diferentes en las regiones de retropolación y extrapolación. Cada curva tiene un mayor pronunciamiento en amplitud cuando el orden del filtro es mayor. Esto se puede observar en la figura 4.12, ya que los valores son totalmente diferentes en las tres regiones en comparación con los del filtro de orden dos, mostrados en la figura 4.8 en las diferentes. Otra característica que se puede observar en cada función básica tanto para el caso Markoviano y no Markoviano es que en los instantes de muestreo cada función básica toma los valores de cero, excepto en su muestra correspondiente, tal situación es fácilmente observable con la muestra central.

En la figura 4.14 se muestra el comportamiento de función básica central, es decir cuando $j=5$, para diferente orden del filtro. En la gráfica se observan puntos marcados en color negro

indicando que son los instantes de tiempo donde se toman las muestras y que cada una de ellas toma el valor de cero, pero no así en la función básica central, en este instante toma el valor de uno.

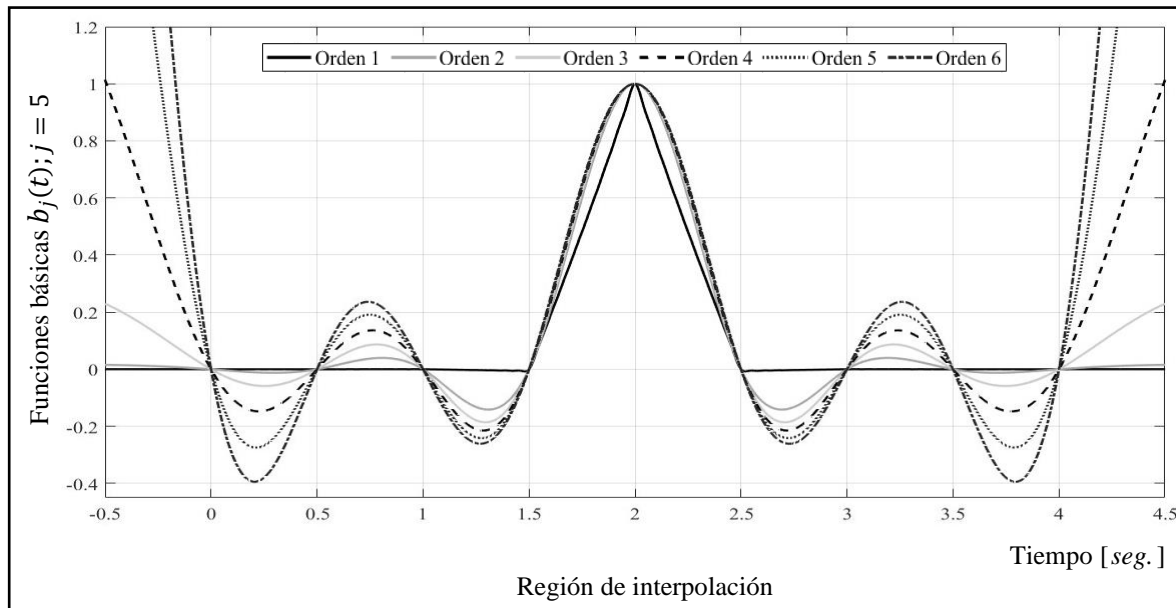


Figura 4.14. Funciones básicas centrales con filtro Chebyshev tipo I de diferente orden con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

En la figura 4.14 se observa solamente la región de interpolación. En la gráfica se muestra que, a mayor orden del filtro, las curvas son más prolongadas en amplitud dentro de la región de interpolación entre cada instante de muestreo, en el caso Markoviano tiene un comportamiento lineal e igual a cero para todos los valores antes y después del instante donde se tome la muestra, en este caso, la muestra central. Para los casos no Markovianos, se observa que los valores son diferentes de cero, excepto en los instantes de muestro como ya se ha mencionado, y tiene valores diferentes en amplitud para cada orden del filtro. Esto es porque cada una de las muestras está normalizada en dicho instante y es donde se tiene la mayor información estadística del proceso, de lo contrario se tendrían valores diferentes de ceros en los demás instantes de muestreo y se tendrían errores en la reconstrucción de la señal.

Función de Reconstrucción

En la gráfica de la figura 4.15 se muestra el comportamiento de la función de reconstrucción en sus tres diferentes regiones, se pueden apreciar ampliamente las regiones de retropolación y extrapolación, ambas regiones muestran las variaciones en amplitud de las curvas para diferente orden. Sin embargo, la región de retropolación tiene valores más reducidos en comparación a los de la región de extrapolación para cada uno de los diferente ordene del filtro. Se puede observar para la región de retropolación que el orden 5 y 6 del filtro son los que muestran mayores variaciones en amplitud, mientras que, para la región de extrapolación las mayores variaciones están dadas a partir del orden tres del filtro de Chebyshev tipo I.

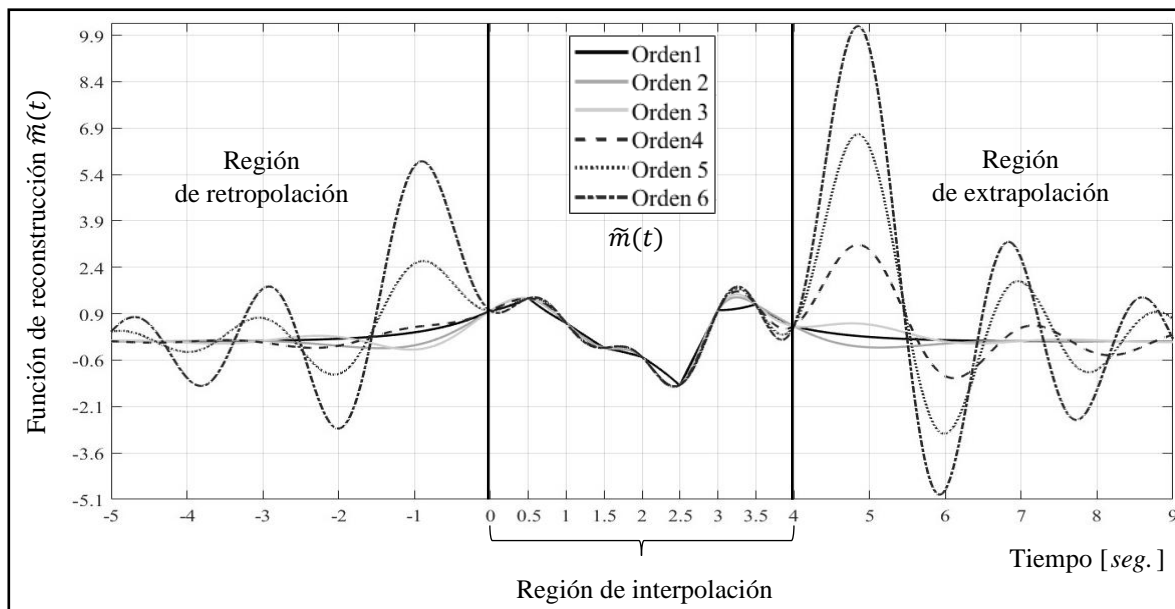


Figura 4.15. Función de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo I de diferente orden con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

En la figura 4.16 se muestra el comportamiento de la función de reconstrucción en la región de interpolación. En ella se observan la reconstrucción para distinto orden del filtro, los puntos en color negro muestran los valores mostrados en la tabla 4.1 debido a que son los valores en amplitud en cada instante de muestreo.

En los valores intermedios a los instantes de muestreo se tienen diferentes valores para cada orden del filtro, es decir las variaciones en cada filtro tiene una mayor amplitud cuando el

orden es mayor. Con el comportamiento de las funciones básicas se puede mostrar que, de manera similar que en el filtro RC de diferentes etapas, se logra una forma más suave con respecto al orden del filtro, es decir, la estructura del proceso es menos caótica y se obtiene una mejor calidad de reconstrucción cuando aumenta el orden del filtro.

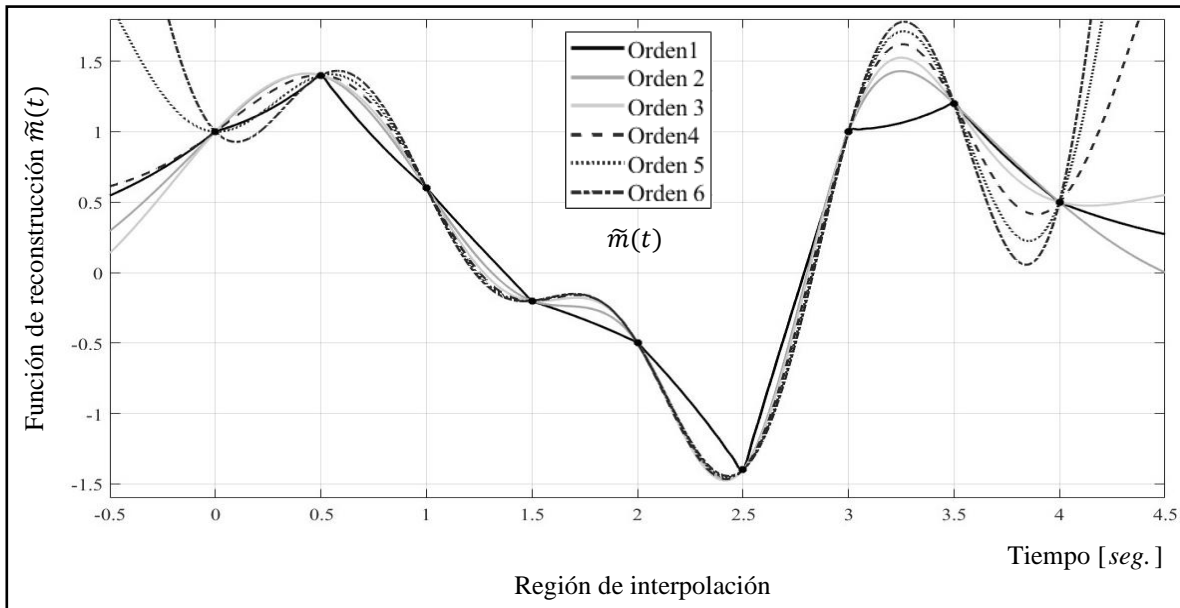


Figura 4.16. Función de reconstrucción en la región de interpolación con filtro Chebyshev tipo I de diferente orden con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Función de Error Reconstrucción

Posteriormente, se puede estimar la función de error de reconstrucción para diferente orden del filtro, dichas funciones se muestran en la figura 4.17. De forma similar como se mostró con los diferentes filtros RC, se logra una mejor calidad en la reconstrucción al aumentar el orden del filtro. A su vez, los valores máximos de error van disminuyendo, incluso al compararlos con los resultados del filtro RC ideal, lo cual, se puede observar tanto en los valores de amplitud de la gráfica de la función de error de reconstrucción del filtro Chebyshev tipo I como en la tabla 4.3. Pero el análisis en esta última sección abarca filtros de orden mayor a los mostrados en los RC, el orden mayor del filtro de Chebyshev tipo I estudiado en este trabajo es de 6. En la figura se observa que la función de error de reconstrucción tiene una simetría a partir de la muestra central, para los casos no Markovianos es importante destacar que los valores de error incrementan cuando se toman de la muestra central a sus

regiones extremas, es decir, cuando se acercan a las regiones de retropolación y extrapolación. Además, se muestra un acercamiento a las gráficas de los filtros de orden 4, 5 y 6, debido a que el valor de error, máximo y mínimo, son muy pequeños comparados con el filtro de orden dos. Se debe destacar que en el acercamiento sigue teniendo la misma forma presentada para filtros de orden mayor a dos.

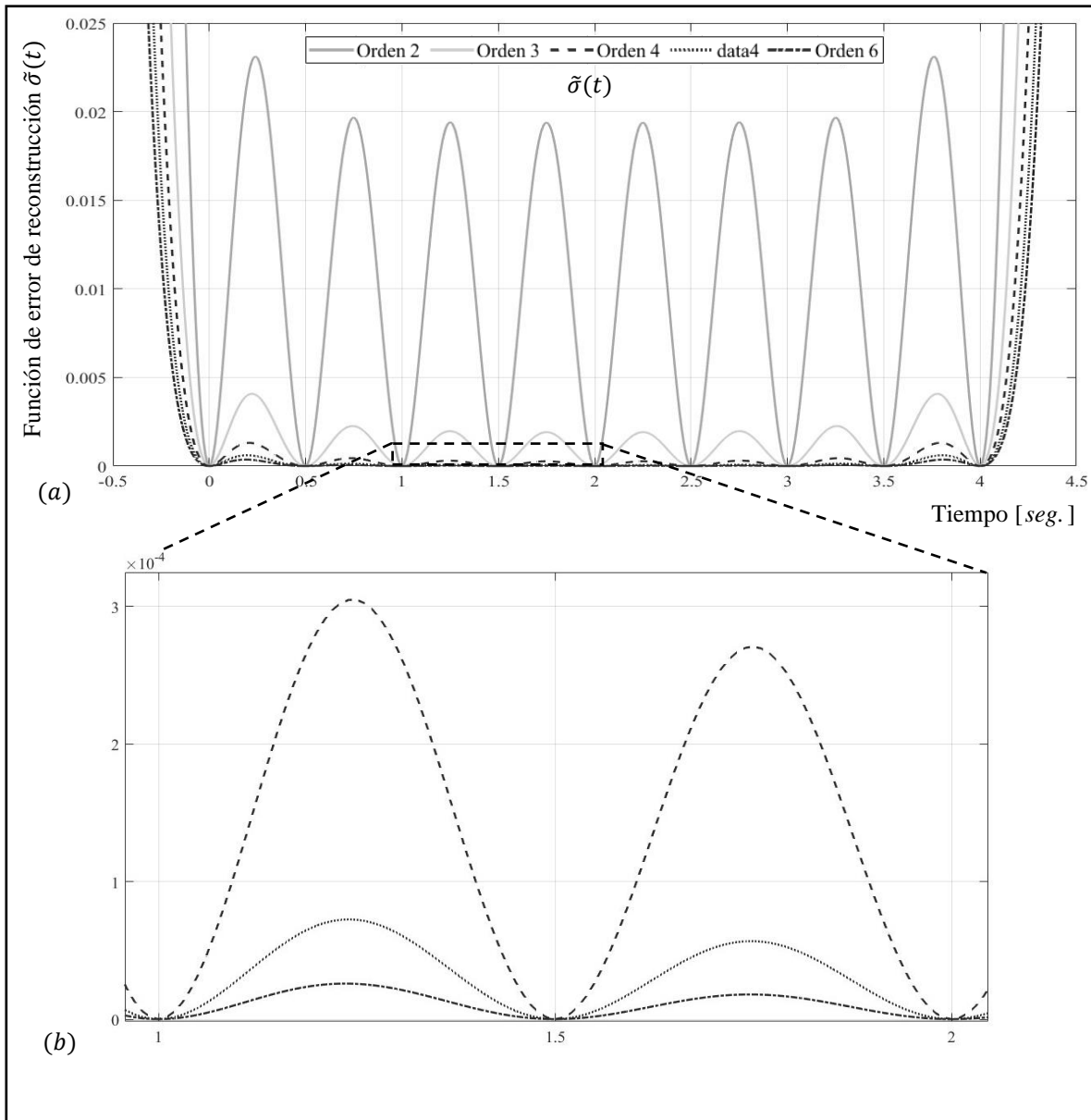


Figura 4.17. (a) Función de error de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo I de diferente orden con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$ en la región de interpolación. (b) Zoom de la región punteada.

También, es conveniente examinar las regiones tanto de retropolación y extrapolación de la función de error, ya que su comportamiento es diferente para cada orden del filtro. En la figura 4.18 se puede observar que, en ambas regiones, las formas de las curvas presentan una oscilación cuando se aproxima a su valor máximo, dicho comportamiento se presenta cuando incrementa el orden del filtro. Es importante observar que las oscilaciones se presentan cercanas a un tercer intervalo de muestro, a partir de este último, en la región de interpolación. Esto solo se presenta a partir del filtro de segundo orden, lo que influye para que cada función tarde mayor tiempo en alcanzar su valor máximo, en comparación con el filtro de orden uno (caso Markoviano), el cual no presentan oscilaciones.

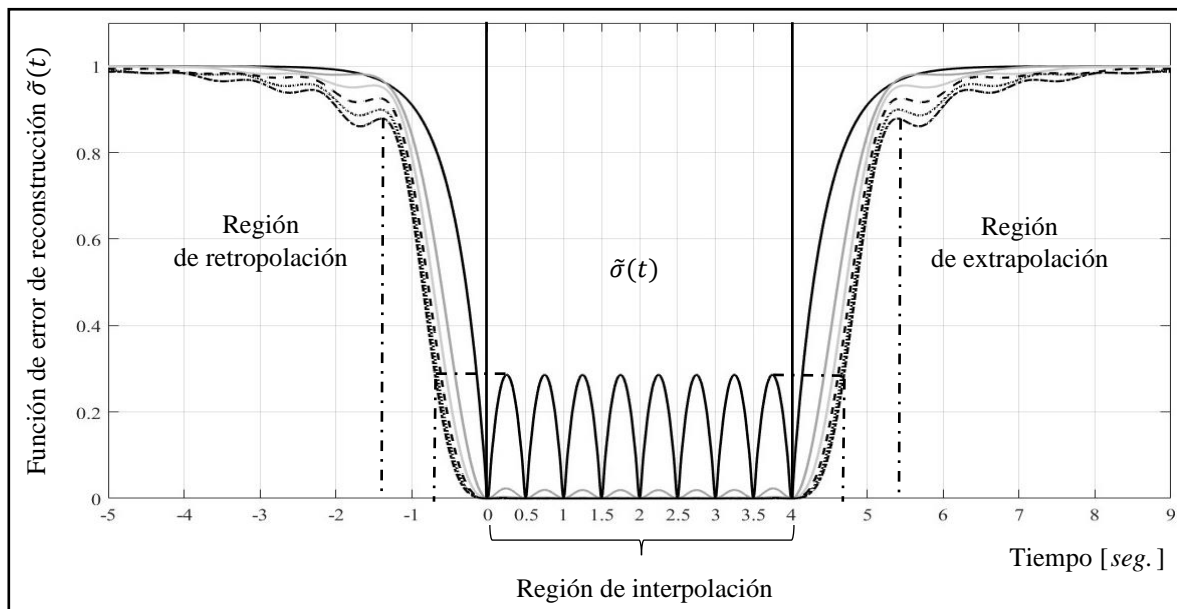


Figura 4.18. Función de error de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo I de diferente orden con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Además, las regiones de retropolación y extrapolación son importantes cuando se quiere realizar un muestreo posterior. Esto se demuestra fuera de la región de interpolación, cuando se compara el valor máximo de error con los valores que alcanza filtros de orden mayor a dos. En la gráfica se observa que para igualar dicho valor máximo del filtro de orden uno, el filtro de orden 6 requiere más de un intervalo de muestro, a partir de la última muestra de la región de interpolación. Por lo tanto, estos comportamientos tienen ventaja para un muestreo posterior. En la tabla 4.4 se muestran los valores máximos y mínimos de error en la

reconstrucción, es recomendable mostrar solamente estos valores, ya que como se ha visto con anterioridad, esta función es simétrica con respecto a su muestra central, teniendo su valor mínimo en los puntos más cercanos a estas y sus máximos y las regiones más alejadas de la misma.

Tabla 4.4. Valores máximos y mínimos de error de reconstrucción de Chebyshev tipo I de diferente orden.

Tipo de filtro	Orden de filtro	Caso	ω_c	Valores del error de reconstrucción	
				máximo	mínimo
Chebyshev tipo I	1	Markoviano	0.61	0.2861	0.2861
	2	No	1.76	0.0231	0.0193
	3		2.51	$4.07 \cdot 10^{-3}$	$1.91 \cdot 10^{-3}$
	4	Markoviano	3.00	$1.30 \cdot 10^{-3}$	$2.70 \cdot 10^{-4}$
	5		3.35	$6.11 \cdot 10^{-4}$	$5.66 \cdot 10^{-5}$
	6		3.61	$3.64 \cdot 10^{-4}$	$1.79 \cdot 10^{-5}$

RESUMEN

En este capítulo, se ha aplicado la regla de la esperanza matemática condicional a la salida de un filtro de Chebyshev de tipo I, esto es posible a través de la estimación de la función de covarianza. Tal metodología ha permitido conocer las funciones básicas, la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción, lo que permite analizar detalladamente cada una de las funciones de procedimiento de reconstrucción para diferente orden del filtro. De esta forma, se logra comparar los resultados obtenidos con los filtros RC de diferentes etapas observando una mejor calidad en la reconstrucción con los filtros Chebyshev tipo I, ya que el valor de su error es menor al aumentar el orden del filtro. Esta es una manera correcta de abordar uno de los problemas planteados para el filtro de Chebyshev tipo I.

Por último, es importante destacar que la función de covarianza estimada, aunque es similar a la función *Sinc* (τ), no es para nada la misma función. Esto se debe al aumento de orden del filtro, pero el filtro de Chebyshev tipo I muestra características que deben tomarse en cuenta en el procedimiento de muestreo-reconstrucción. Tales características se considerarán en el siguiente capítulo, al analizar el procedimiento de muestreo-reconstrucción en un filtro de Chebyshev tipo II.

Capítulo 5

RECONSTRUCCIÓN DE PROCESOS ALEATORIOS A LA SALIDA DE FILTROS CHEBYSHEV TIPO II

Anteriormente, se ha mostrado la aplicación de la *regla de la esperanza matemática condicional* (REMC) al *procedimiento de muestro-reconstrucción* (PMR) de *procesos gaussianos* a la salida de *filtros de Chebyshev tipo I* para diferente *orden*. Los resultados obtenidos son óptimos en el PRM, ya que con esta metodología se muestran *las funciones básicas*, la *función de reconstrucción* y la *función de error de reconstrucción*. Se muestra que el filtro de Chebyshev de tipo I obtiene mejores resultados, de algunos valores, en comparación con el *filtro RC* de diferentes etapas mostrado en el capítulo 3. Sin embargo, el filtro de Chebyshev tipo I tiene como característica principal oscilaciones en su *banda de paso* con una determinada amplitud. De esta manera, surgen nuevas cuestiones: *¿el rizo del filtro de Chebyshev tipo I influye en el PMR? ¿se obtendrá mejores resultados en el PRM al quitar el rizo del filtro de Chebyshev tipo I?*

En este capítulo se expondrá los resultados mostrados por un *filtro de Chebyshev tipo II* aplicando la REMC al PMR de procesos aleatorios gaussianos, tales resultados serán analizados y comparados con los resultados obtenidos por en el filtro de Chebyshev tipo I y los que se obtienen con un *filtro ideal*.

5.1 FUNCIÓN DE DENSIDAD ESPECTRAL A LA SALIDA DE FILTROS DE CHEBYSHEV TIPO II

En los capítulos anteriores se mostró que los filtros RC ideales de diferentes etapas y los filtros de Chebyshev tipo I, tienen una *función de densidad espectral* característica a la salida con la cual se puede conocer su *función de covarianza* a la salida. De esta manera, los filtros de Chebyshev tipo II también presentan una función de densidad espectral característica cuando están alimentados con *ruido blanco* a la entrada.

La función de densidad espectral del filtro de Chebyshev tipo II tiene como característica principal el posicionamiento de los *rizos*, anteriormente definidos en la banda de paso para

el Chebyshev tipo I, ya que estos se presentan en la *banda de rechazo*. De acuerdo con la descripción del filtro de Chebyshev de tipo II en el capítulo 2, ahora la *banda de transición* se puede hacer cada vez más abrupta, pero con un número mayor de oscilaciones en la banda de rechazo. Esta característica del filtro proporciona una mejor aproximación a un filtro ideal pasa-bajas, en el cual su banda de frecuencias está perfectamente definida. Además, la función de densidad espectral, en este caso, presenta *polos y ceros* como se muestra en la ecuación (5.1), donde el *polinomio* queda definido por la expresión (5.2).

$$S(\omega) = \frac{\varepsilon^2 C_p^2(\omega_c/\omega)}{1 + \varepsilon^2 C_p^2(\omega_c/\omega)} \quad (5.1)$$

Donde:

$$C_p(\omega_c/\omega) = \begin{cases} \cos h[p \operatorname{arc} \cosh(\omega_c/\omega)] & \text{para } |\omega_c/\omega| \leq 1 \\ \cos[p \operatorname{arc} \cos(\omega_c/\omega)] & \text{para } |\omega_c/\omega| > 1 \end{cases} \quad (5.2)$$

La figura 5.1 muestra la función de densidad espectral del filtro de Chebyshev tipo II para diferente orden.

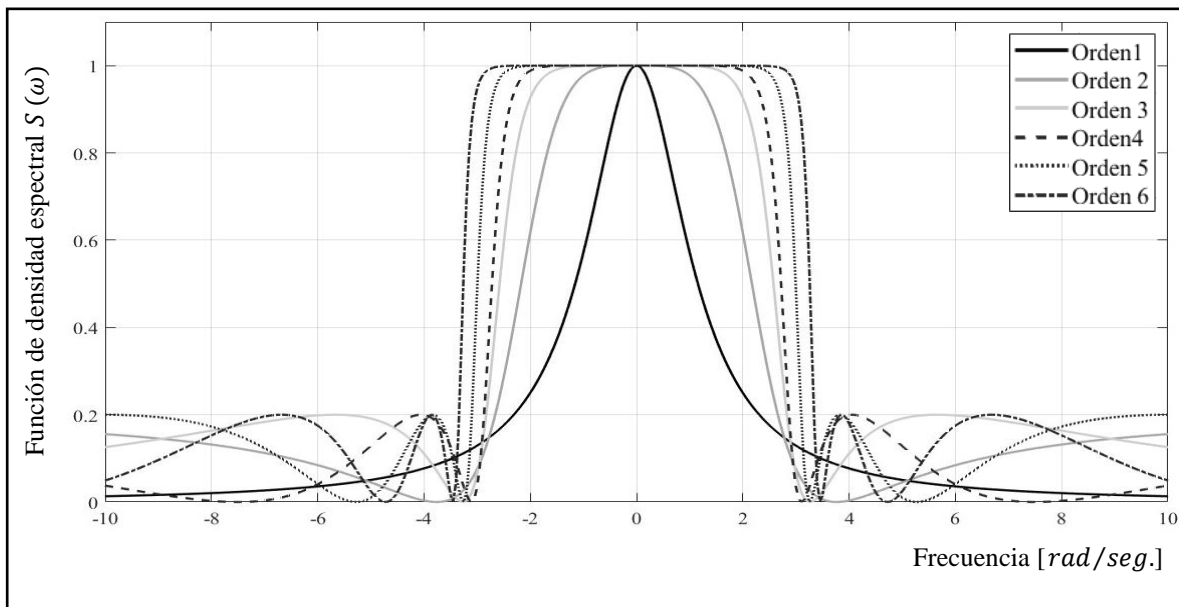


Figura 5.1 Función de densidad espectral con filtro Chebyshev tipo II para diferente orden.

La tabla 5.1 muestra las frecuencias de corte estimadas para diferente orden del filtro de Chebyshev tipo II cuando su tiempo de covarianza es igual a uno. Las *frecuencias de corte* ω_c quedan definidas ajustando el tiempo de covarianza a un valor unitario, tal situación se ha expuesto en el capítulo anterior.

Tabla 5.1. Frecuencias de corte para diferente orden de filtros de Chebyshev tipo II.

Parámetro	Orden del filtro					
	1	2	3	4	5	6
<i>Frecuencias de corte</i> ω_c [rad/seg.]	2.40	2.73	2.94	2.97	3.20	3.45
<i>Rizado</i> ϵ	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5

De acuerdo con las características y parámetros del filtro de Chebyshev tipo II, tratadas en el capítulo 2, el argumento de la ecuación que se muestra en la expresión (5.2) es inverso en comparación al polinomio que de Chebyshev tipo I, por lo que el rizado puede trasladarse a la banda de rechazo.

Otra característica importante en el comportamiento de la función de densidad espectral del filtro de Chebyshev tipo II se presenta cuando el orden p es impar o par. Esta situación se puede exponer de la siguiente manera: cuando el orden es impar, las curvas de la función de densidad espectral tienden a cero; cuando el orden es par, la función tiende al valor de rizo. Estas condiciones influyen en la estimación de la función de covarianza, ya que numéricamente no se puede evaluar la integral de la función de densidad espectral hasta infinito, es decir, el área bajo la curva tiende a infinito cuando p es par, a diferencia del orden impar donde las curvas tienden a cero, haciendo que el área bajo la curva tienda a ser finita. Para este problema se requieren acotar algunos parámetros a la hora de la estimación dentro del algoritmo. Una mejor descripción de esto se puede observar en la figura 5.2, en ella se muestra el comportamiento de las funciones de densidad espectral cuando el orden es impar y par.

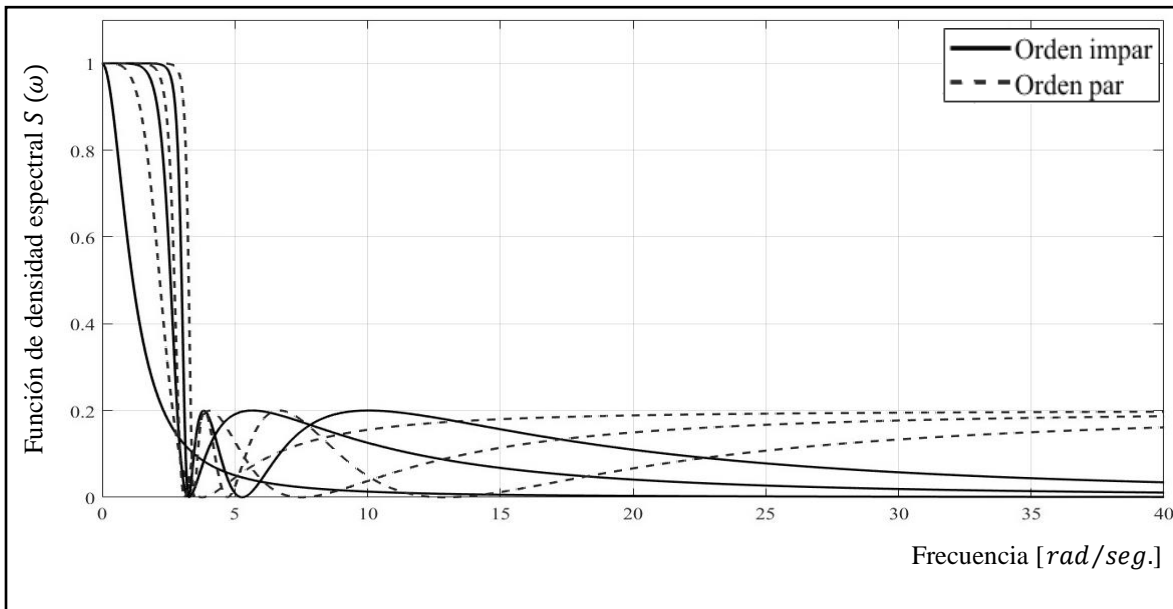


Figura 5.2. Función de densidad espectral del filtro de Chebyshev tipo II para orden impar y par.

5.2 FUNCIÓN DE COVARIANZA A LA SALIDA DE FILTROS DE CHEBYSHEV TIPO II

A priori, el *Teorema de Wiener-Khintchine* proporciona la estimación de la función de covarianza, esto se trató en el capítulo 2. La función de covarianza presenta características similares a las del filtro de Chebyshev tipo I. En principio, cada una de las funciones de densidad espectral presenta una función de covarianza particular, al cambiar su orden. También, presenta un comportamiento amortiguado en función del tiempo para diferentes órdenes del filtro, donde el valor de cada función tiende a cero más lentamente, según el orden de éste. Y, además, cada una de estas funciones de covarianza presenta un mayor número de oscilaciones en el tiempo cuando el orden del filtro se va incrementando. Esta breve descripción de la función de covarianza, del filtro de Chebyshev tipo II de diferentes órdenes, se muestra en la figura 5.3.

Es importante destacar que cada función de covarianza, de los filtros de Chebyshev tipo II, tienen una similitud a la función de covarianza de un filtro ideal, es decir, a la *función Sinc* (τ).

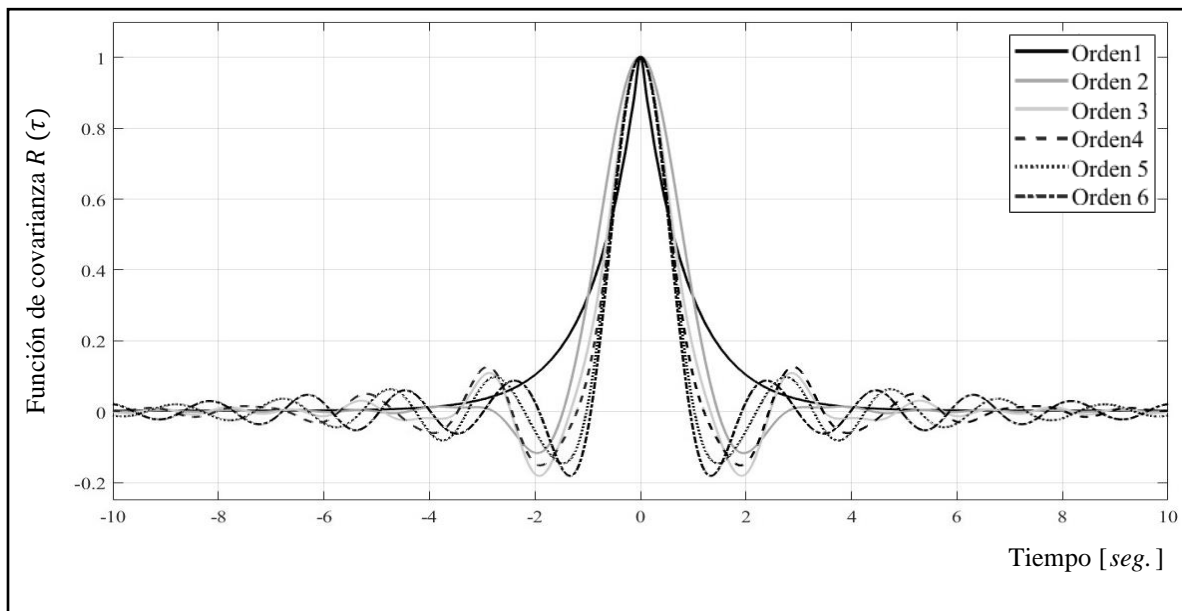


Figura 5.3. Función de covarianza con filtro Chebyshev tipo II para diferente orden.

En la figura 5.4. se muestra la comparación la función de covarianza del Chebyshev tipo II de diferente orden con la función de covarianza del filtro ideal. Es evidente que se tiene una mejor aproximación con los filtros de Chebyshev tipo II al filtro ideal debido a sus características que lo definen. Algunas comparaciones se pueden observar en el apéndice C.

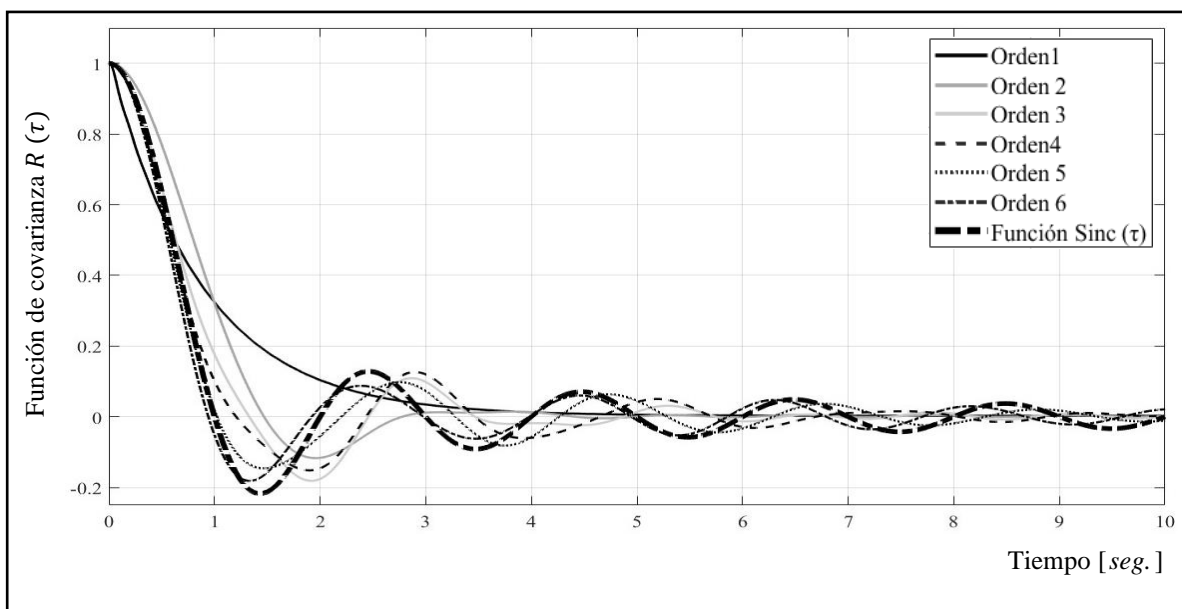


Figura 5.4. Función de covarianza con filtro de Chebyshev tipo II para diferente orden y función Sinc (τ).

5.3 RECONSTRUCCIÓN A LA SALIDA DE FILTRO DE CHEBYSHEV TIPO II DE PRIMER ORDEN

Caso Markoviano

Las funciones básicas para el filtro de Chebyshev tipo II de primer orden se muestra en la figura 5.5. Estas funciones son similares al ejemplo mostrado en el capítulo 3 y 4, trabajadas con filtro RC de una etapa y el filtro Chebyshev tipo I respectivamente, es decir, corresponden con la descripción del caso *Markoviano*, donde las funciones básicas tienen un comportamiento lineal en la región de interpolación y un comportamiento exponencial en las otras dos regiones, tanto en la retropolación como en la de extrapolación. Al igual que en el caso del filtro de Chebyshev de tipo I, se tiene el parámetro de rizado ε , el cual afecta el comportamiento de estas funciones en las tres diferentes regiones. Sin embargo, no hay una diferencia significativa en este caso, aun cuando se comparan ambos filtros, el filtro Chebyshev tipo I y tipo II. Por último, es importante mencionar la importancia del intervalo de tiempo entre cada una de las muestras, en el caso de las funciones básicas, las cuales presentan variaciones entre cada muestra considerada para diferente valor en el intervalo de muestreo. Estas variaciones se observan en el apéndice C.

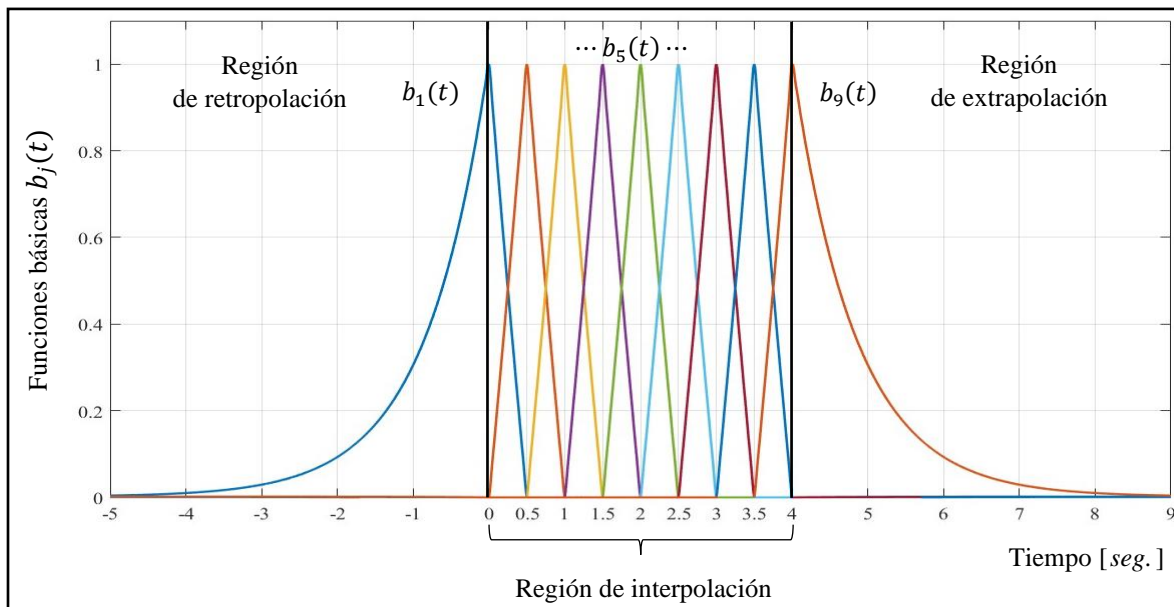


Figura 5.5. Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo II de orden uno con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

En la figura 5.6 se muestra la estimación de la función de reconstrucción, en ella se puede observar el comportamiento en la región de interpolación, el cual es similar al de las funciones básicas del Chebyshev tipo II, es lineal. Fuera de la región de interpolación tiene el comportamiento exponencial de las funciones básicas, por la dependencia que existe de estas funciones con la función de covarianza. En la gráfica también se observan puntos en negro, los cuales corresponden con los valores en amplitud de las muestras consideradas, estos son los que se mostraron en la tabla 4.2.

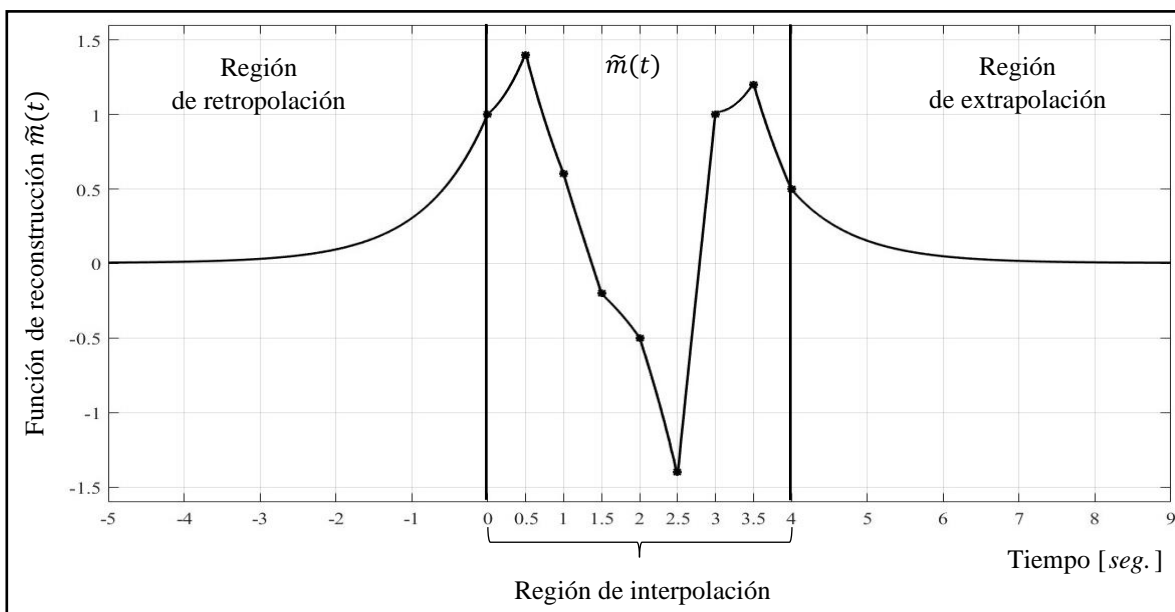


Figura 5.6. Función de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo II de orden uno con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

De esta forma, se puede deducir que la función de error de reconstrucción tendrá una forma similar a los casos mostrados anteriormente trabajados con filtros RC y Chebyshev tipo I. Así, el error que presenta la estimación de la función de error de reconstrucción es el mismo. Además, este valor es máximo y se presenta entre cada una de las muestras que se está examinando, es decir, este valor se muestra entre T_1 y T_2 , y así, de forma sucesiva, independientemente del número de muestras. Este comportamiento se observa en la figura 5.7.

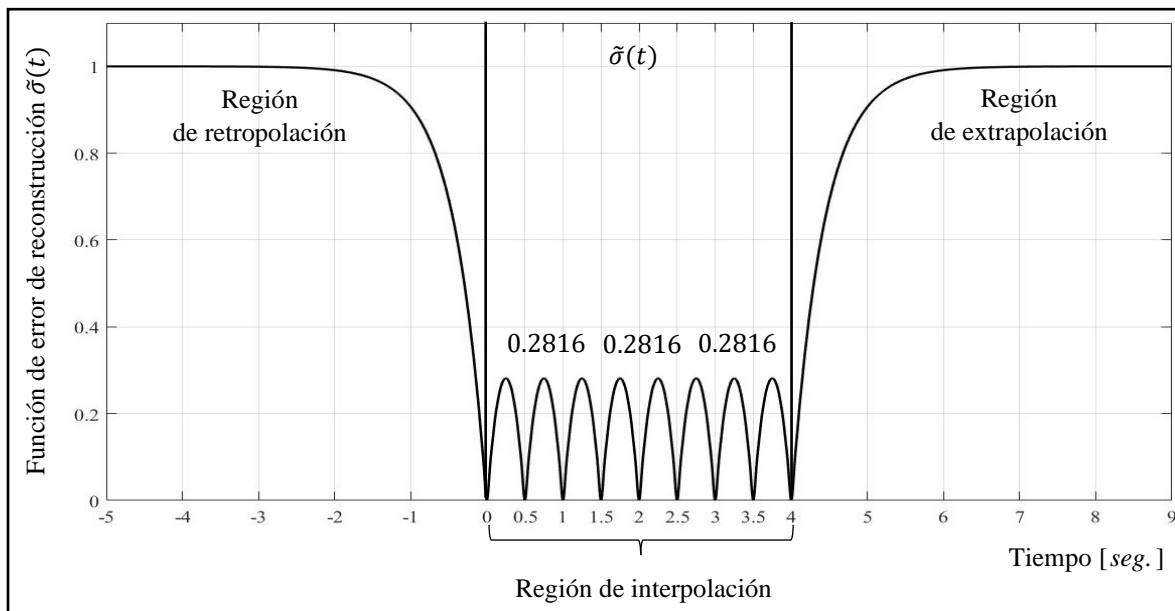


Figura 5.7. Función de error de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo II de orden uno con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Los valores máximos de error de reconstrucción son menores en comparación con el filtro Chebyshev tipo I. Estos valores son resultado principalmente de la frecuencia de corte, ya que las funciones de covarianza para el filtro de orden uno, en ambos casos del filtro Chebyshev tiene un comportamiento muy similar.

5.4 RECONSTRUCCIÓN A LA SALIDA DE FILTRO DE CHEBYSHEV TIPO II PARA DIFERENTE ORDEN.

Caso no Markoviano.

En el caso del filtro de Chebyshev tipo II, se presenta curvas más pronunciadas al aumentar el orden, tal efecto se observa en cada región. Sin embargo, es importante analizar el comportamiento en la región de interpolación, para este caso, como se mostró con el filtro Chebyshev tipo I, se tiene una óptima reconstrucción, aunque presentaba oscilaciones en su banda de paso. Entonces, se requiere conocer el comportamiento sin la oscilación en la banda de paso. La figura 5.8 muestra las funciones básicas para el filtro de Chebyshev tipo II cuando es de orden 2.

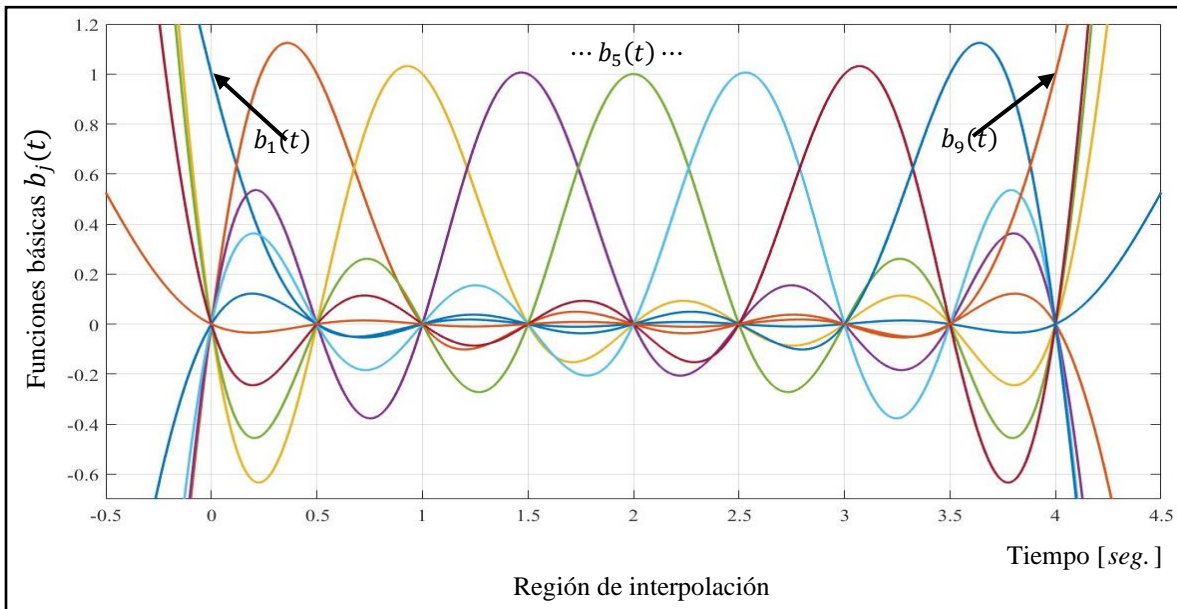


Figura 5.8. Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo II de orden dos con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

En las funciones básicas, aunque normalizadas, tienen algunos valores por arriba de uno, antes y después de la muestra central, según sea la muestra que se examine, esta situación se muestra de manera clara, tanto en la función básica $b_2(t)$ como en la muestra $b_8(t)$. Una diferencia que existe se ve reflejada en la segunda función básica, donde los valores anteriores a la muestra son mayores a uno, en la muestra son igual a uno, y seguido de la muestra, están por debajo de uno. De manera similar, la penúltima función, al contrario de la segunda, los valores anteriores a la muestra están por debajo de uno, en la muestra toman el valor de uno y posteriormente están por arriba de uno. El comportamiento antes mencionado aparece ya también en los filtros de Chebyshev tipo I, aunque no se perciben hasta el orden tres y solamente en la segunda función básica, cuando $j=2$.

En la figura 5.9 se muestra el comportamiento, éste es similar al mencionado en el párrafo anterior, ya que, en esta región de interpolación, se observa que las variaciones de las funciones básicas son mayormente marcadas en comparación con los filtros Chebyshev tipo II anteriormente examinados. Estas características se observan en las funciones básicas con un filtro de orden mayor, así, se puede observar que en la figura 5.10 el comportamiento es el mismo, pero con un ligero pronunciamiento mayor en amplitud de cada una de las funciones.

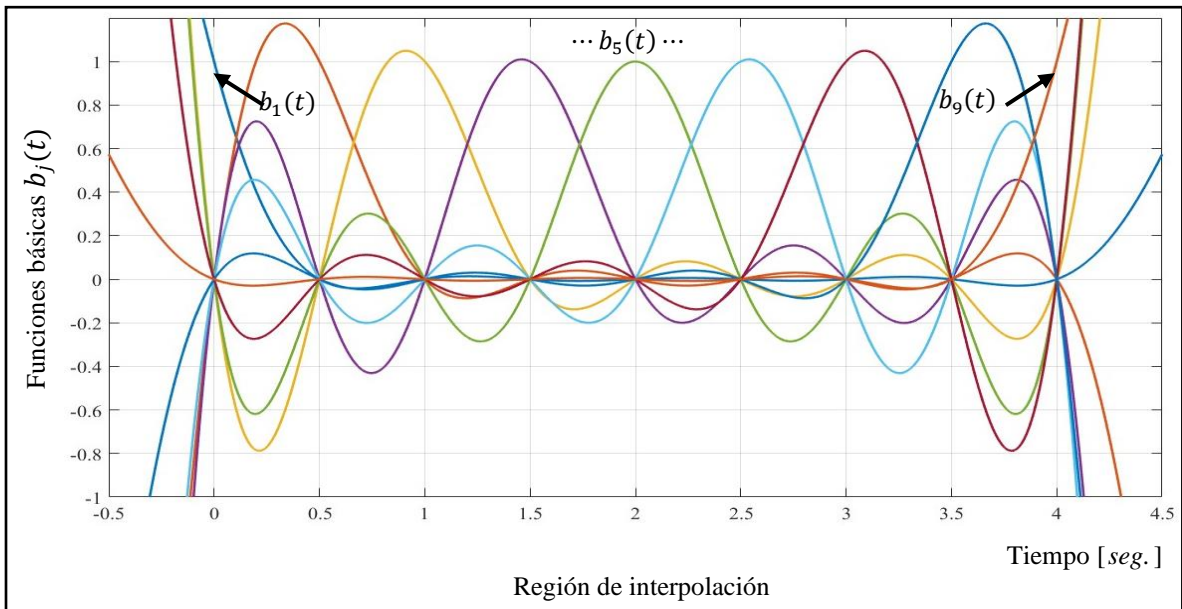


Figura 5.9. Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo II de orden tres con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Con esta información, se puede asumir que el comportamiento de las funciones básicas tendrá mayor influencia en la estimación de la reconstrucción e inclusive se puede considerar que habrá una mejor calidad en la reconstrucción.

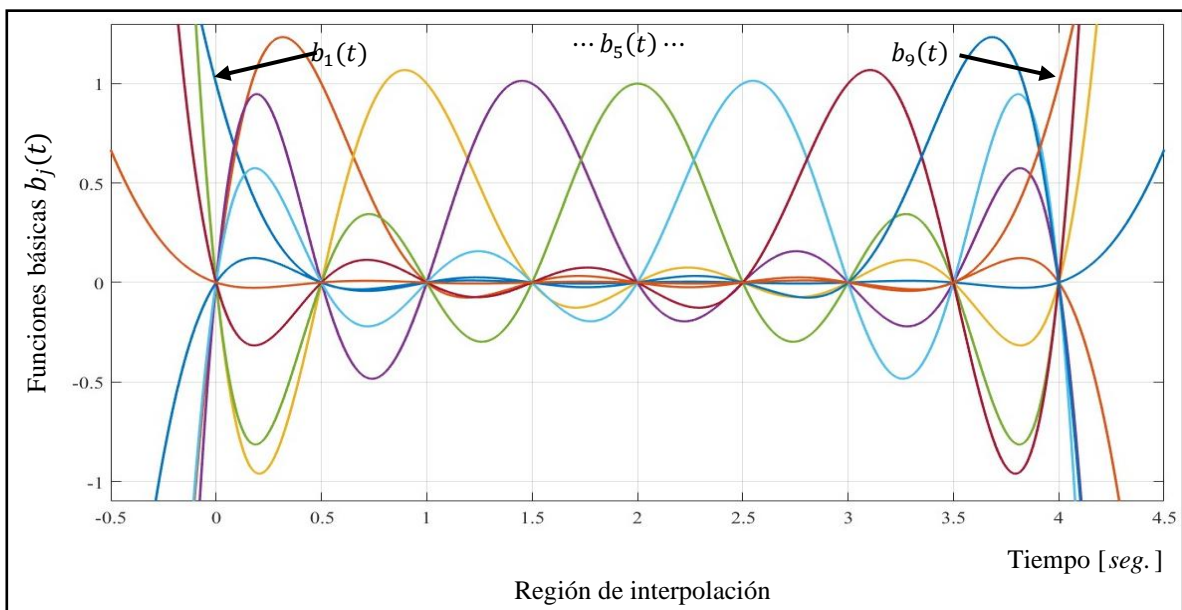


Figura 5.10. Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo II de orden cuatro con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Además, cuando se observan las variaciones de las funciones básicas para el orden cinco y seis respectivamente, la diferencia entre sus variaciones no es tan marcada en comparación con ordenes inferiores. Las funciones básicas de orden cinco y seis se muestran en las figuras 5.11 y 5.12.

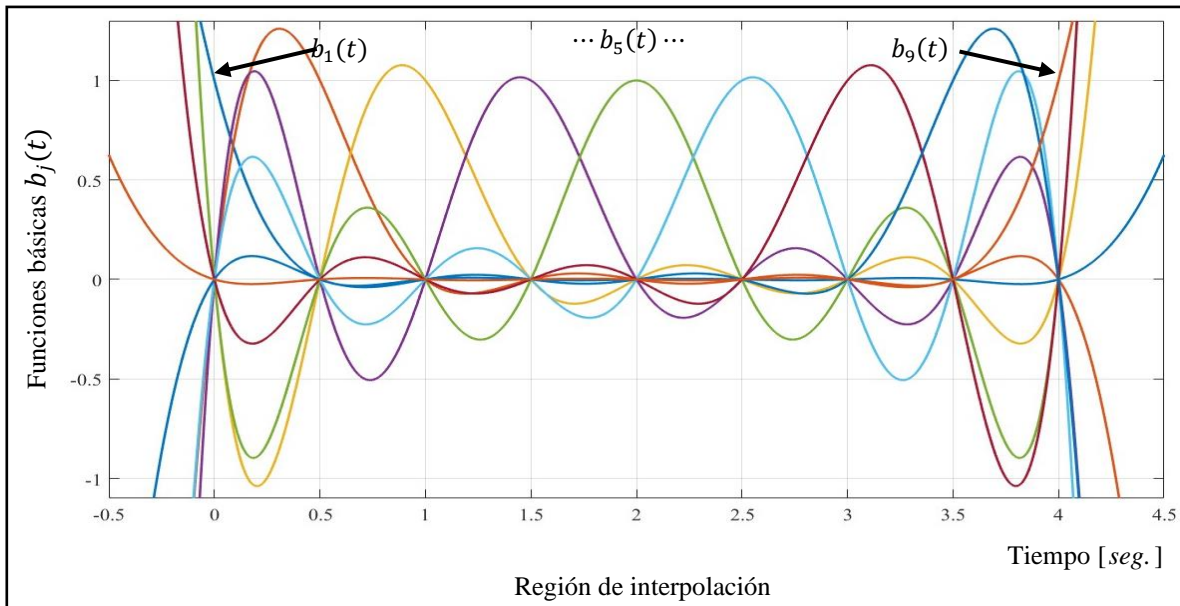


Figura 5.11. Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo II de orden quinto con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

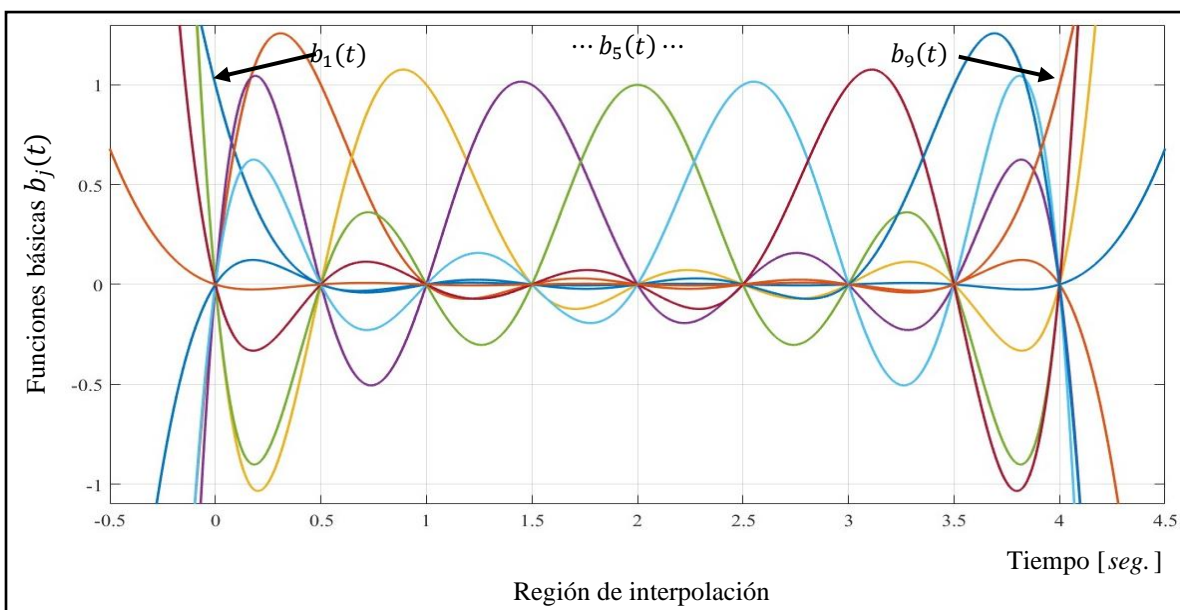


Figura 5.12. Funciones básicas con filtro Chebyshev tipo II de orden sexto con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

En resumen, las funciones básicas, para diferente orden del filtro Chebyshev tipo II, tienen un comportamiento similar al del Chebyshev tipo I, con algunas variaciones en los valores en amplitud en la región de interpolación. Estas variaciones, que son valores mayores en amplitud son fundamentales, además de que son resultado de la mayor influencia que se tiene de cada una de las funciones, es decir, de su número de muestras consideradas. También, en este caso se tiene mayor influencia cuando el intervalo de muestreo sea menor, ya que se tiene mayor información del proceso y con ello se puede esperar una mejor calidad en la reconstrucción de la señal. Los ejemplos para un mayor número de muestras se mostrarán en secciones posteriores. También, es oportuno mencionar que, en sus otras dos regiones se presentan igualmente variaciones. Sin embargo, para propósito de este trabajo, en el caso del filtro de Chebyshev tipo II, las regiones de retro-polación y extrapolación de las funciones básicas no son descritas a detalle.

Función Básica central

La función central permite conocer de una mejor manera el comportamiento de las funciones básicas, ya que esta función, al estar normalizada, su valor máximo es uno, mientras que, los valores anteriores y siguientes son menores a la unidad, a su vez que presentan mayores valores en amplitud entre cada una de las muestras que se estén tomando en consideración. La función básica central se observa en la figura 5.13, esta tiene un comportamiento característico para cada orden del filtro desde el comportamiento para el caso Markoviano hasta los casos *no Markovianos*, en esta gráfica se puede ir observando la poca diferencia que existe en la forma de las gráficas para filtro de orden 5 y 6 siendo la región de interpolación de especial interés. En los instantes de muestreo, tanto anteriores como siguientes, la función es igual a cero. Esto se debe, principalmente a que se han definido valores específicos en cada muestra, entonces cada una tiene una función básica específica y no puede tomar otro valor diferente donde se considere dicha muestra, en este caso debe ser igual a uno en su instante de muestreo y cero en los demás instantes. De otra manera, si los valores fueran diferentes de cero en las otras muestras no se tendría una óptima reconstrucción, ya que podría tomar un valor aleatorio.

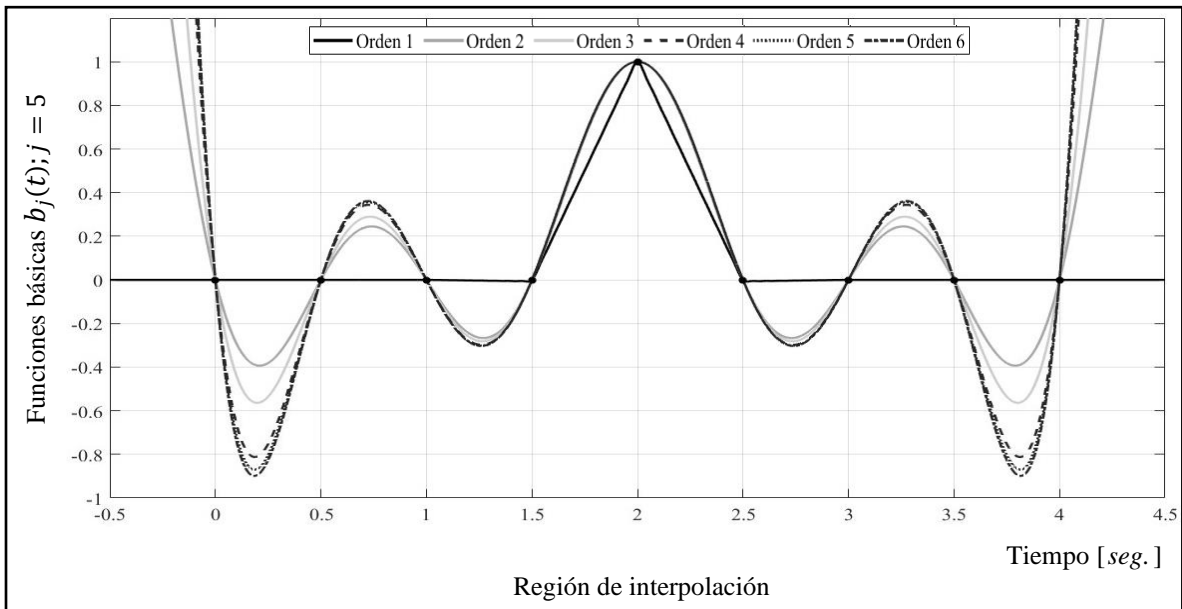


Figura 5.13. Funciones básicas centrales con filtro Chebyshev tipo II de diferente orden con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Función de Reconstrucción

La figura 5.14. muestra la función de reconstrucción con filtro de Chebyshev tipo II para diferente orden de filtro Chebyshev tipo II.

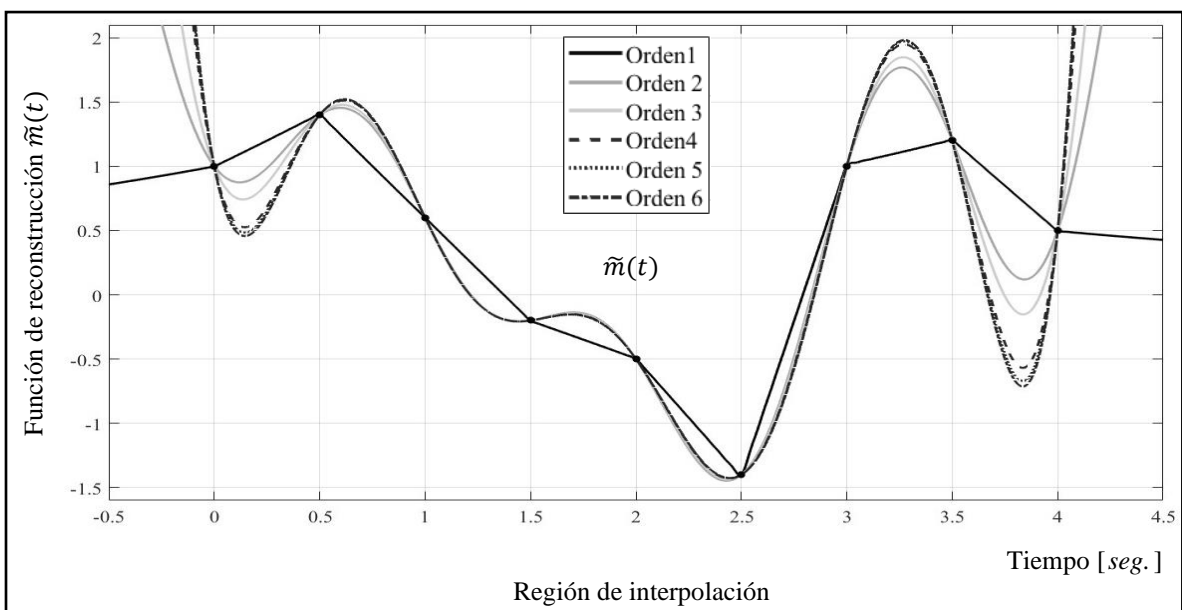


Figura 5.14. Función de reconstrucción en la región de interpolación con filtro Chebyshev tipo II de diferente orden con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Esta función tiene una respuesta cada vez más suave al incrementar el orden del filtro, es decir, la estructura que presenta dicho proceso es menos caótica, aun incluso si se compara con las mostrada con el filtro Chebyshev tipo I. Además, se puede observar que la función de reconstrucción presenta amplitudes más pronunciadas entre cada instante de muestreo que se está considerando conforme el orden de este aumenta.

Es importante mencionar la poca diferencia que existe entre la función de reconstrucción que muestra el filtro de orden 5 y el filtro de orden 6 en la región de interpolación, esto se debe a dos factores importantes: el primero de ellos es, la poca diferencia entre cada una de las frecuencias de corte que existe entre ambos filtros; el segundo, es la forma de las funciones básicas, que determinan a cada filtro, ya que en estas no hay una diferencia significativa. Sin embargo, se puede asegurar que, sí existe una diferencia, esta se encuentra en las regiones fuera de la interpolación, tanto la de retropolación como la de extrapolación. En la figura 5.15 se muestran las diferencias de la función de reconstrucción para diferente orden del filtro.

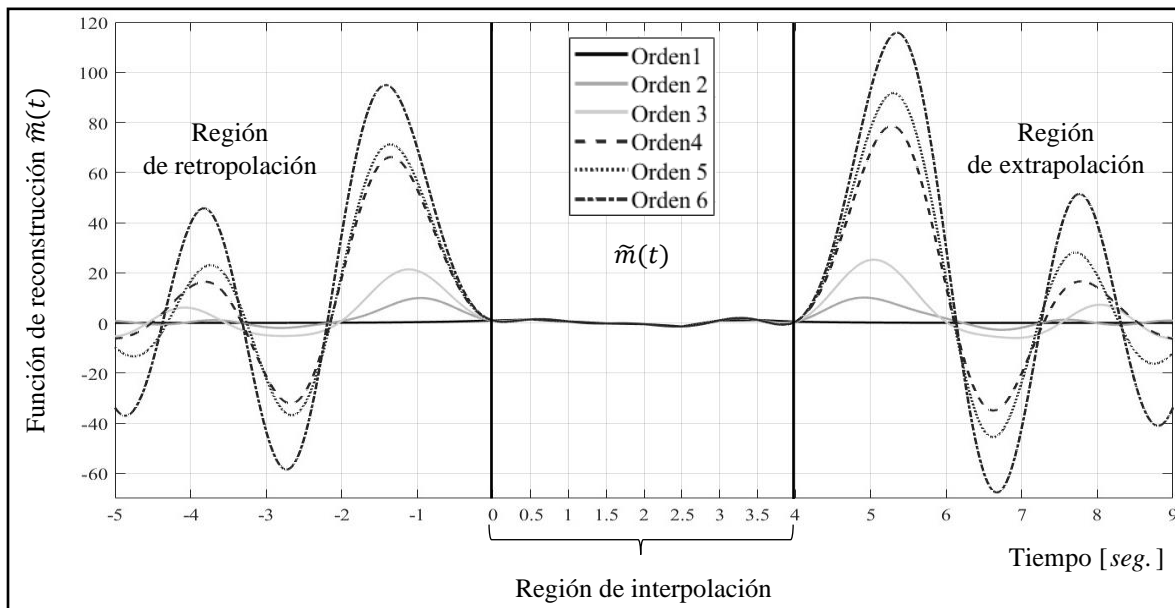


Figura 5.15. Función de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo II de diferente orden con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

La forma de las funciones de reconstrucción muestra la estructura existente para cada filtro, cuando aumenta el orden de este, se muestra una estructura diferente con una respuesta más

suave, aunque fuera de la interpolación mantienen cambios más pronunciados, esto es consecuencia de la poca influencia de las muestras que se encuentran más cercanas a dichas regiones, donde no hay valores definidos, siendo que toman la forma similar de las funciones básicas fuera de la región de interpolación.

Función de Error Reconstrucción

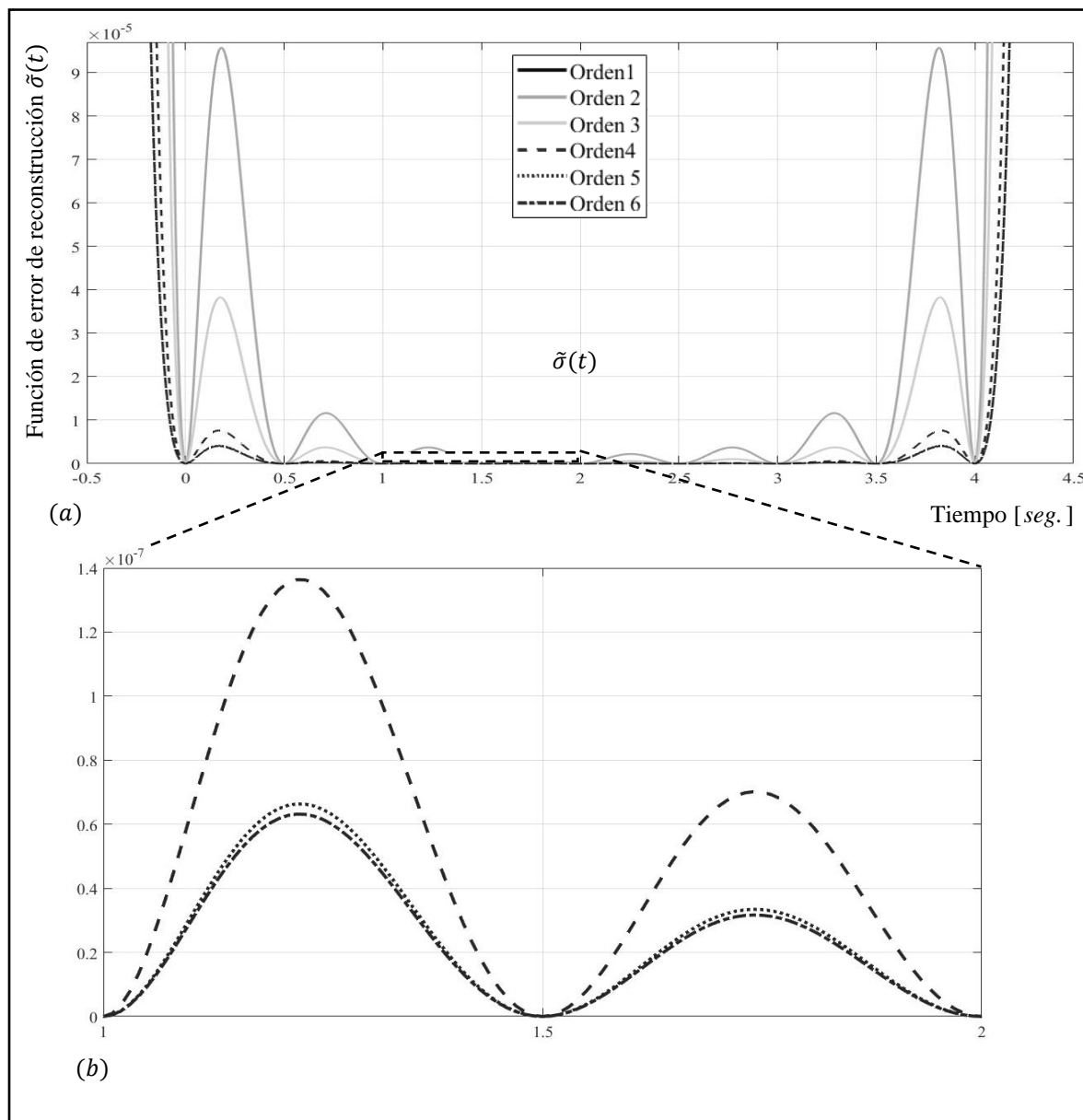


Figura 5.16. (a) Función de error de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo II de diferente orden con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$ en la región de interpolación. (b) Zoom de la región punteada.

La función de error de reconstrucción para este filtro tiene características particulares, el comportamiento de cada función se muestra en la figura 5.16. En la gráfica se muestran los casos no Markovianos, ya que el caso Markoviano se ha presentado anteriormente. De esta manera, se puede observar que se obtiene la forma característica de los procesos no Markovianos, registrada ya con filtros RC y Chebyshev tipo I, la cual muestra una simetría a partir de su muestra central tanto a los valores que se acerca a la región de retropolación, así como los valores que se aproximan a la región de extrapolación. Como se ha corroborado en los casos anteriores la función de error de reconstrucción muestra valores más elevados en amplitud en la muestra más cercana a las regiones de retropolación y extrapolación, y decrecientan conforme se acerca a la muestra central.

En la gráfica de la figura 5.16, se observa que el error más bajo lo presenta el filtro de orden 6, aunque la forma que presentan cada orden se mantiene. Los valores que se registran en amplitud por parte de la función de error de reconstrucción se muestran en la tabla 5.2.

Tabla 5.2. Valores máximos y mínimos de error de reconstrucción de Chebyshev tipo II de diferente orden.

Tipo de filtro	Orden de filtro	Caso	ω_c	Valores del error de reconstrucción	
				máximo	mínimo
Chebyshev tipo II	1	Markoviano	0.61	0.2816	0.2816
	2	No Markoviano	1.76	$9.57 \cdot 10^{-5}$	$2.22 \cdot 10^{-6}$
	3		2.51	$3.82 \cdot 10^{-5}$	$5.78 \cdot 10^{-7}$
	4		3.00	$7.63 \cdot 10^{-6}$	$7.01 \cdot 10^{-8}$
	5		3.35	$4.13 \cdot 10^{-6}$	$3.34 \cdot 10^{-8}$
	6		3.61	$4.03 \cdot 10^{-6}$	$3.16 \cdot 10^{-8}$

La tabla muestra los valores que se obtienen a partir de la función de error de Reconstrucción para cada orden del filtro, en este caso se registran desde el orden 1 para poder hacer una comparación adecuada. La comparación muestra que, entre mayor sea el orden del filtro menor será el error de reconstrucción, por lo tanto, se obtendrá una mejor calidad de reconstrucción con filtros de orden mayor. De esta manera, se puede entender que la calidad en la reconstrucción de señales es óptima con el filtro de Chebyshev tipo II. Sin embargo, se tiene que destacar la importancia de las regiones de retropolación y extrapolación que se presentan en la función de error de reconstrucción, así como su importancia en la reconstrucción de procesos aleatorios gaussianos.

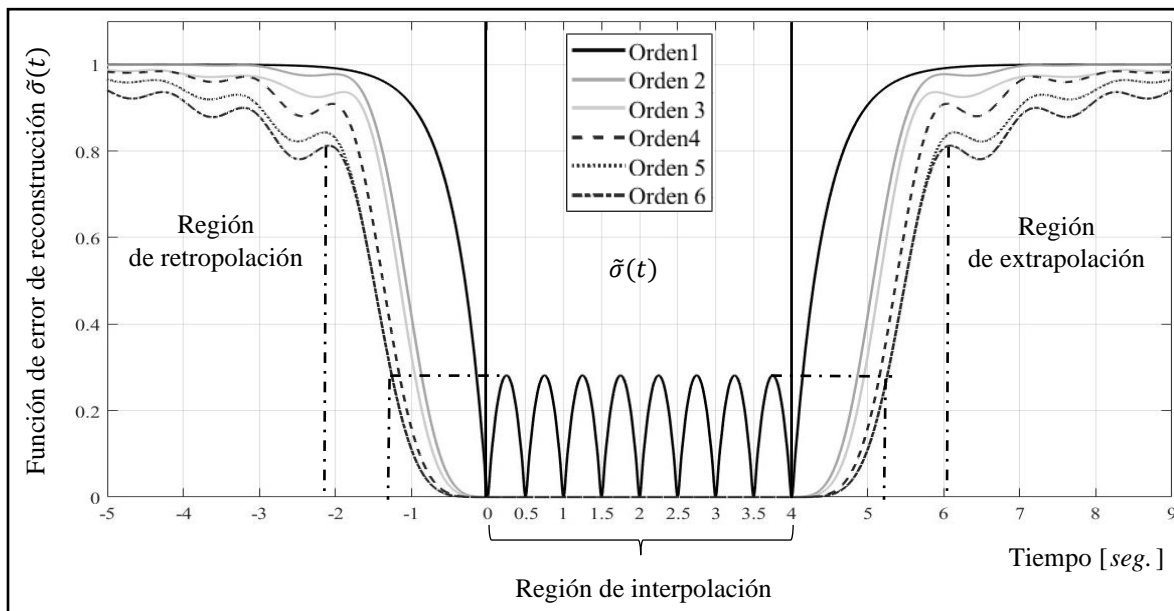


Figura 5.17. Función de error de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo II de diferente orden con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

En la gráfica 5.17 se presentan las funciones de error de reconstrucción de diferente orden en las tres diferentes regiones, en este caso es de especial interés observar las regiones de retropolación y extrapolación ya que ayuda en gran medida a entender el comportamiento que tendrá un muestreo posterior, si es que así se requiere. Esto se muestra en las líneas punteadas, las cuales muestran que el valor de error máximo alcanzado con el filtro, en este caso el filtro de orden uno, corresponde a dos muestras anteriores y posteriores de las muestras extremas a la región de interpolación con el filtro de menor valor en el error, es decir el filtro de orden seis. Además, se observa en ambas regiones que las oscilaciones tardan mayor tiempo en efectuarse, entre mayor sea el orden del filtro. Estas comienzan posterior a una posible cuarta muestra después a los instantes de muestreo respetando el mismo periodo de muestreo utilizado, esto se puede observar en las líneas punteadas. De esta manera, se tiene una mejor respuesta en el error de reconstrucción, aunque se incremente el intervalo que existe entre cada muestra.

5.5 PROCEDIMIENTO DE RECONSTRUCCIÓN A LA SALIDA DE FILTRO DE CHEBYSHEV TIPO I, CHEBYSHEV TIPO II Y FILTRO IDEAL

En el contenido de este capítulo, se ha descrito detalladamente cómo es el comportamiento de las funciones básicas, la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción a la salida del filtro de Chebyshev tipo II, las características generales y particulares del comportamiento de cada filtro. Dichas descripciones pueden llevarse a cabo aplicando la metodología de la esperanza matemática condicional en la reconstrucción de procesos gaussianos. Sin embargo, para comprender los resultados obtenidos es necesario hacer una comparación con el filtro ideal y sus funciones características aplicando la misma metodología. En trabajos anteriores [16,17], se han mostrado los resultados del filtro RC comparándolos con los que muestra un filtro ideal, en este caso la función $Sinc(\tau)$ como función de interpolación, es decir

$$b_j = \frac{\text{sen}2\pi(t - T_j)}{2\pi(t - T_j)} \quad (5.3)$$

De tal manera que se observan ventajas en la metodología aplicada sobre la reconstrucción de procesos gaussianos. A continuación, se presenta un breve análisis de las funciones básicas centrales de los tres diferentes filtros, tanto el de Chebyshev tipo I y II, así como el filtro ideal, es decir, aquel que tiene por función de covarianza una función $Sinc(\tau)$, además con un número de muestras, tanto para 9, 19 y 29, para tener una mejor interpretación de la utilización de cada uno de los filtros. Como se ha mencionado, el comportamiento de la función básica central es de suma importancia porque ella muestra el comportamiento fundamental para determinar la calidad de la reconstrucción. En este caso, en el desarrollo a lo largo de las descripciones de los filtros de Chebyshev de tipo I y II, se ha corroborado la forma y la estructura para cada uno de los filtros. Se ha logrado mostrar que los filtros de mayor orden tienen un comportamiento similar a la función $Sinc(\tau)$, ampliamente conocida. De esta manera se puede incluir los filtros de mayor orden para tener una comparación con la función básica que se obtiene con un filtro ideal.

La figura 5.18 se muestran las funciones básicas centrales que se obtienen con los filtros de Chebyshev tipo I y tipo II, y aquellas que se obtiene de un filtro ideal. En este caso, solo se

consideran 9 muestras para dar continuidad a los resultados anteriormente trabajados y poder observar la diferencia que existen entre cada una de ellas.

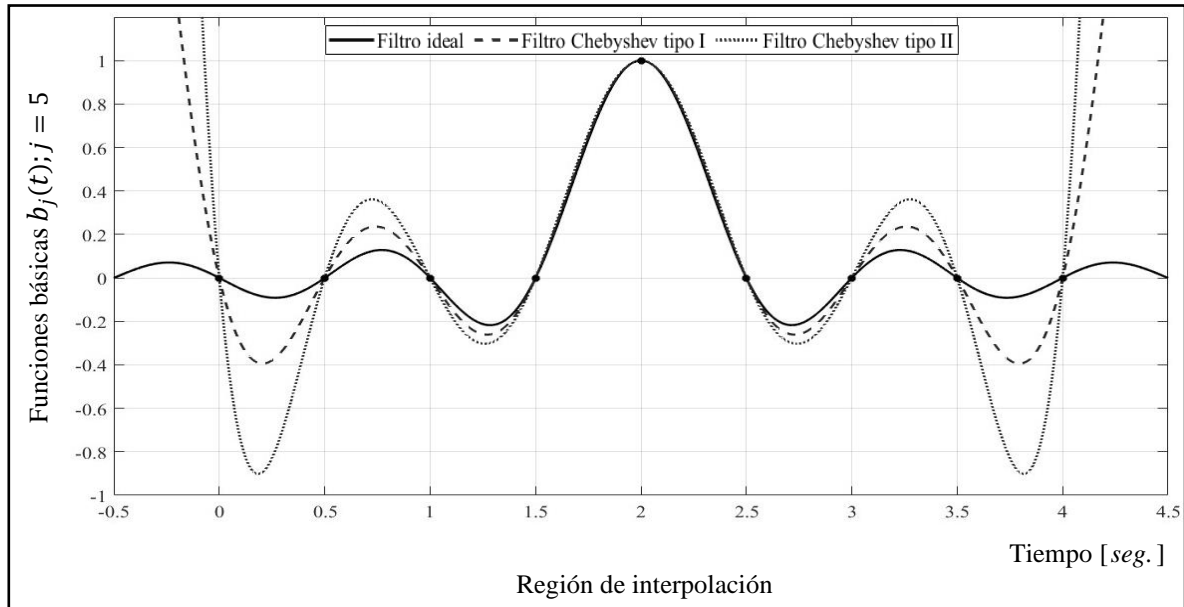


Figura 5.18. Funciones básicas centrales con filtro Chebyshev tipo I, tipo II de orden seis y filtro ideal con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Se puede observar una mejor aproximación en filtro de Chebyshev I a la función *Sinc* (τ) en comparación con la del Chebyshev tipo II, esto se debe a la influencia que tienen las muestra anteriores y posteriores, ya que, como se ha mencionado, entre mayor número de muestras se obtiene una mejor calidad en la reconstrucción. Este punto se debe tener en cuenta para no interpretar de manera errónea el comportamiento que se muestra en la figura 5.18, ya que el filtro de Chebyshev tipo I podría, en este caso tener ventaja sobre el de tipo II, ya que se aproxima mejor a la función *Sinc* (τ). Sin embargo, es necesario observar el comportamiento con un mayor número de muestras.

Las figuras 5.19 y 5.20 muestran a las funciones básicas de los tres diferentes filtros que están en esta última sección con 19 y 29 muestras con un mismo intervalo periódico de 0.5 segundos entre cada muestra. En ambas figuras se puede observar el comportamiento característico de las funciones básicas con los tres diferentes tipos de filtros que se han utilizado en este trabajo.

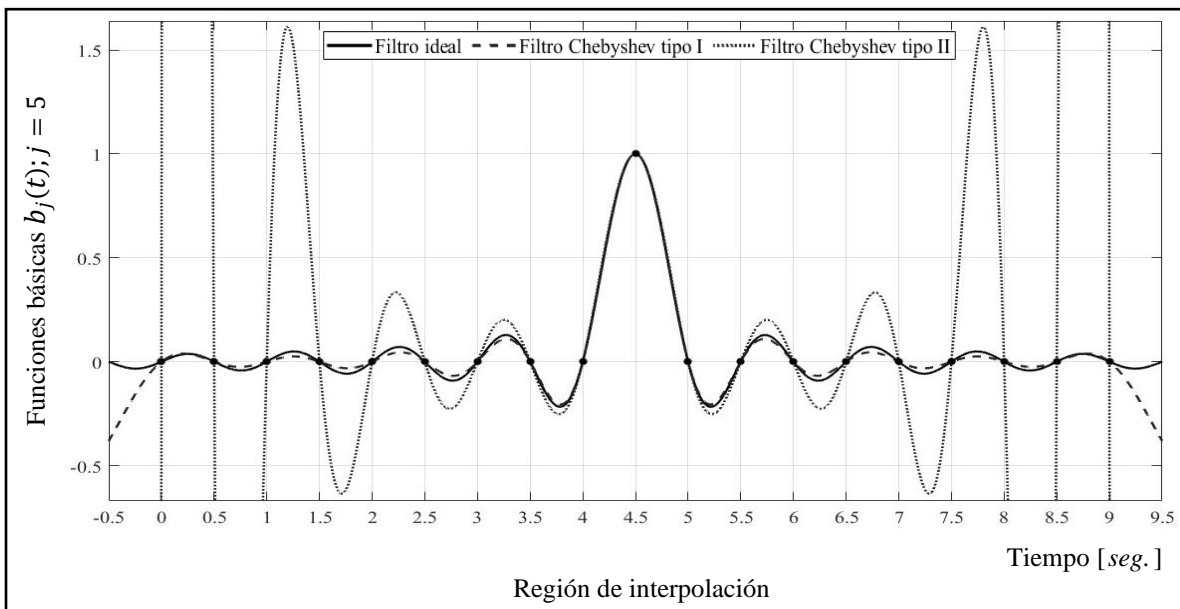


Figura 5.19. Funciones básicas centrales con filtro Chebyshev tipo I, tipo II de orden seis y filtro ideal con 19 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

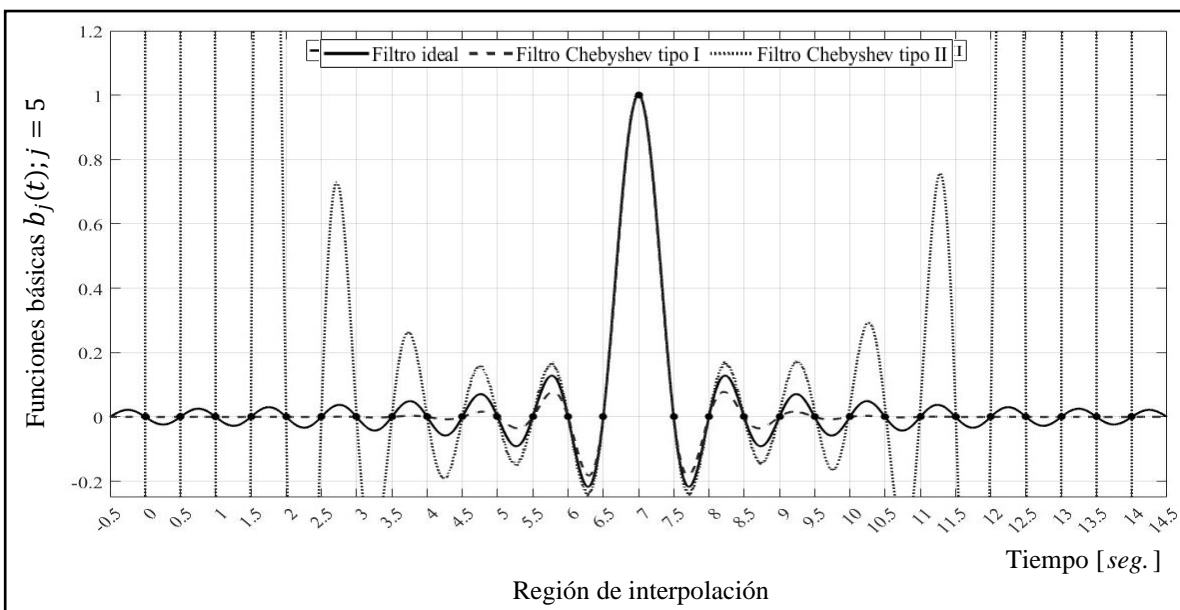


Figura 5.20. Funciones básicas centrales con filtro Chebyshev tipo I, tipo II de orden seis y filtro ideal con 29 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Tal como se mencionó en la descripción de la figura 5.18, donde se observa una mejor aproximación del filtro de Chebyshev tipo I con la función $Sinc(\tau)$, es mejor en cuanto a un número de muestras limitadas, ya que en la figura 5.19 de forma similar la función que muestra el filtro de Chebyshev tipo II tiene una mayor prolongación en amplitud entre cada una de las muestras. Sin embargo, en la figura 5.20 al incrementar el número de muestras se puede apreciar que la forma de la función del filtro de Chebyshev tipo II tiene una mejor aproximación a la función $Sinc(\tau)$, donde ésta, ahora presentan algunas variaciones como consecuencia de mayor número de muestras. Esta situación, de alguna manera podía esperarse debido a que el filtro de Chebyshev tipo II tiene una mejor aproximación al filtro ideal con una selectividad en frecuencia más precisa y en términos del tiempo se asemeje mejor a una función $Sinc(\tau)$.

Para tener una mejor aproximación al filtro ideal, por un lado, hay que incrementar el orden del filtro y por otra parte que el número de muestras tienda a infinito. Tal opción no es práctica, pero el filtro de Chebyshev tipo II muestra algunas ventajas por las características que presenta. Una de estas características puede observarse en la figura 5.21, en ella se muestran las funciones de error de reconstrucción en sus tres diferentes regiones.

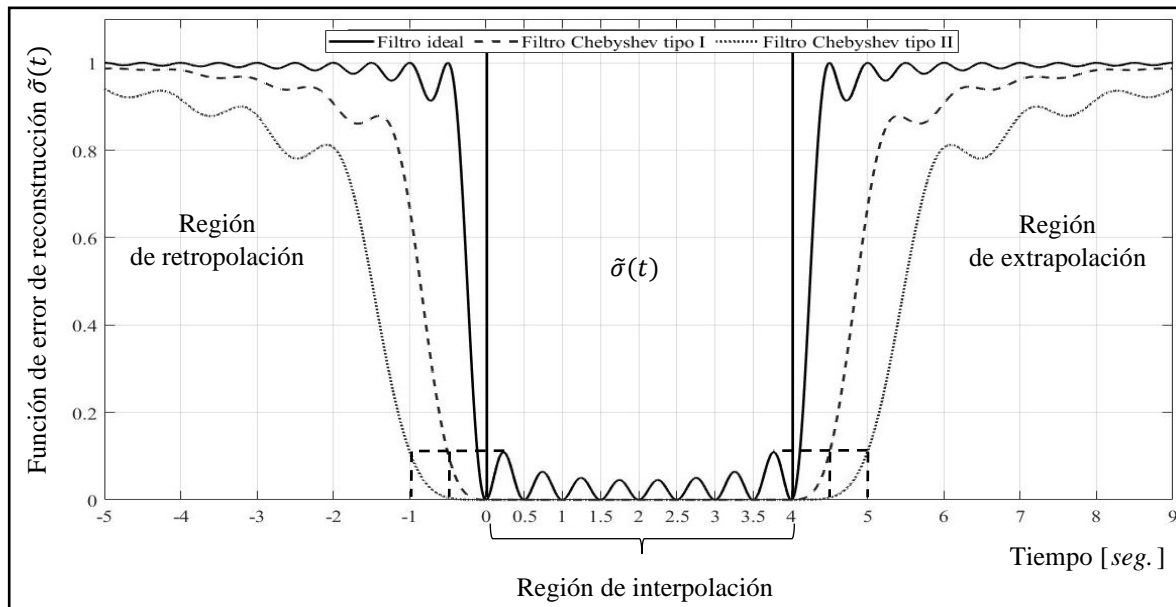


Figura 5.21. Función de error de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo I, tipo II de orden seis y filtro ideal con 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Ya se ha mencionado la relevancia que tiene examinar las regiones de retropolación y extrapolación. La gráfica que se muestra en la figura 5.21 muestra dichas regiones con los tres diferentes filtros cada uno con 9 muestras. Se observa que la gráfica del filtro de Chebyshev tipo II, abarca mayor intervalo de tiempo en llegar a su valor máximo permitiendo que exista una mejor respuesta, ya que ésta presenta un valor menor o igual al valor máximo de error de la gráfica de la función Sinc en dos intervalos posteriores a la última muestra, aunque la gráfica del filtro de Chebyshev tipo I solo toma una muestra siguiente también tiene ventaja sobre la función $Sinc(\tau)$.

En la gráfica de la figura 5.22 se observa el comportamiento de la función de error para los tres filtros aumentado el número de muestras. En este caso, se observa que la función del filtro Chebyshev tipo II tiene un cambio importante, ya que toma cuatro valores siguientes de muestreo para igualar el valor máximo presentado por la función $Sinc(\tau)$. Esto permitirá tener mejor respuesta al momento de retomar un muestreo posterior. En el caso de la función del filtro Chebyshev tipo I, mantiene su comportamiento como el ejemplo anterior, ya que solamente toma un valor siguiente después de su última muestra para alcanzar un valor igual al valor máximo de la función $Sinc(\tau)$.

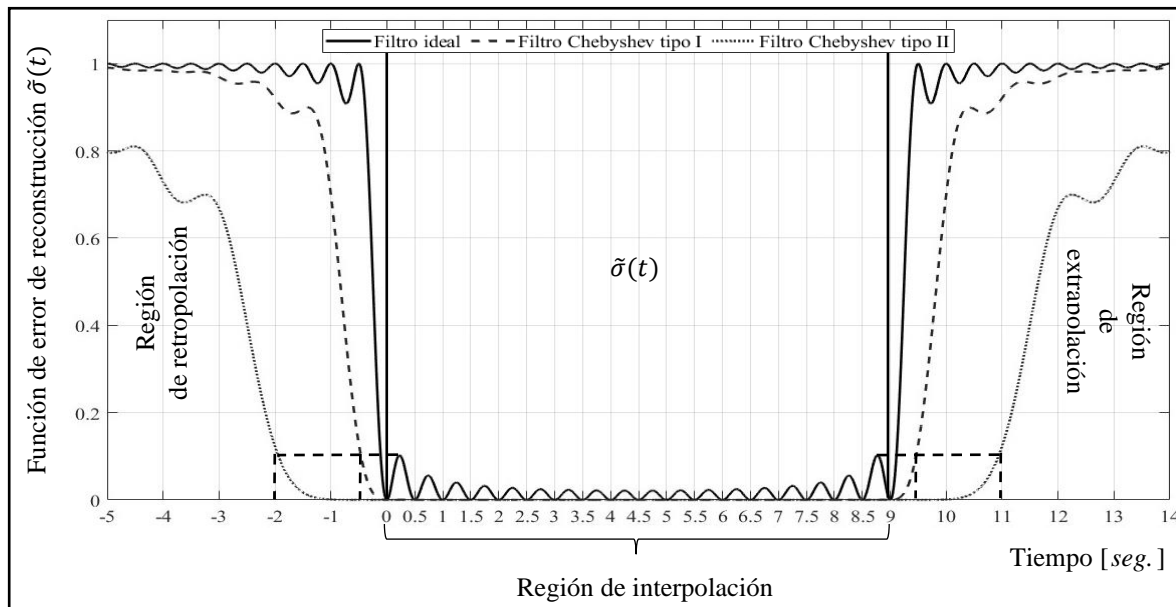


Figura 5.22. Función de error de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo I, tipo II de orden seis y filtro ideal con 19 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

La figura 5.23 ejemplifica la ventaja que se tiene al usar los filtros de Chebyshev sobre el filtro ideal en la respuesta de la función de error al incrementar el intervalo de muestreo, los intervalos de muestreo son: $\Delta T_1 = 0.12, \Delta T_2 = 0.35, \Delta T_3 = 0.5, \Delta T_4 = 1$ para 5 muestras.

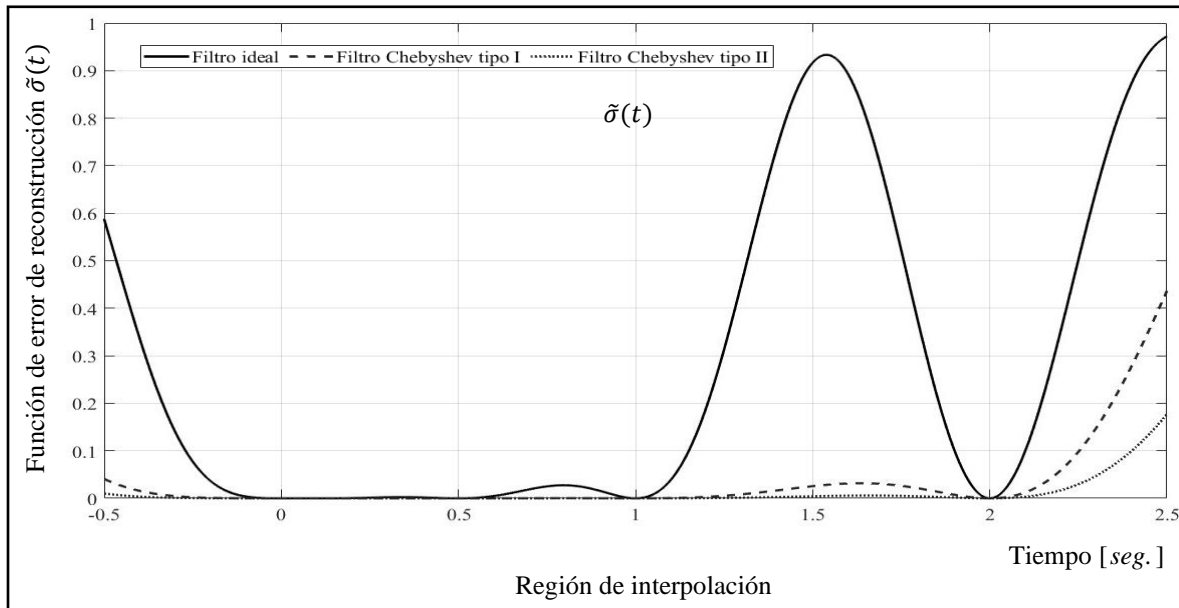


Figura 5.23. Función de error de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo I, tipo II de orden seis y filtro ideal con 5 muestras ΔT no periódico.

Por último, la tabla 5.3 muestra los valores máximos y mínimos de error para los filtros de Chebyshev tipo I y II de orden seis y la función $Sinc(\tau)$. Los valores estimados con los filtros de Chebyshev son menores a los calculados por el filtro ideal, aunque estos no son precisos, ya que el software utilizado no permite conocer con exactitud los valores de escalas tan pequeñas. Lo anterior, se puede corroborar en la tabla 5.4 al realizar la diferencia en porcentaje de los valores máximos y mínimo de error de reconstrucción con 29 muestras, tomando como referencia al filtro ideal, es decir, entre mayor sea la diferencia habrá una mejor calidad en la reconstrucción. Estos resultados pueden ser interpretados como óptimos al aplicar la REMC a procesos gaussianos para filtros de Chebyshev de tipo I y II al compararlos con el filtro ideal.

Tabla 5.3. Valores máximos y mínimos de error de reconstrucción de Chebyshev tipo I y II de orden seis y del filtro ideal para un número arbitrario de muestras.

Tipo de filtro	Número de muestras					
	9		19		29	
	máximo	mínimo	máximo	mínimo	máximo	mínimo
<i>Ideal</i>	0.1089	0.0453	0.1021	0.0218	0.0986	0.0122
<i>Chebyshev tipo I de orden seis</i>	$3.64 \cdot 10^{-4}$	$1.79 \cdot 10^{-5}$	$6.01 \cdot 10^{-4}$	$6.01 \cdot 10^{-5}$	$3.33 \cdot 10^{-4}$	$7.14 \cdot 10^{-6}$
<i>Chebyshev tipo II de orden seis</i>	$4.03 \cdot 10^{-6}$	$3.16 \cdot 10^{-8}$	$2.22 \cdot 10^{-7}$	$1.38 \cdot 10^{-9}$	$2.1 \cdot 10^{-8}$	$3.30 \cdot 10^{-10}$

Tabla 5.4. Diferencia de valores máximos y mínimos de error de reconstrucción de Chebyshev tipo I y II de orden seis con 29 muestras con respecto al filtro ideal.

Tipo de filtro	Número de muestras	
	29	
	<i>Diferencia del valor máximo con respecto al filtro ideal (%)</i>	<i>Diferencia del valor mínimo con respecto al filtro ideal (%)</i>
<i>Chebyshev tipo I de orden seis</i>	99.667 %	99.942 %
<i>Chebyshev tipo II de orden seis</i>	99.99997 %	99.999997 %

RESUMEN

En este capítulo, principalmente se abordó el procedimiento de muestreo-reconstrucción utilizando la regla de la esperanza matemática condicional a procesos gaussianos a través de un filtro de Chebyshev tipo II. Esta metodología permite conocer las funciones básicas, la función de reconstrucción y la función de error de reconstrucción. Tal información es suficiente para conocer la información estadística del proceso aleatorio y con ello tener una mejor descripción de dicho proceso. En el desarrollo de este capítulo se analizaron los resultados de tal metodología aplicada a diferentes filtros de Chebyshev de tipo II, se ha expuesto que para el filtro de orden uno, este caracteriza un proceso Markoviano y para los de orden mayor describe procesos no Markovianos. Esta metodología es óptima en este tipo de filtro. Los resultados se han comparado con valores previamente obtenido con el filtro de

Chebyshev tipo I y con el filtro ideal, evidenciando el buen resultado del filtro de Chebyshev tipo II ante el comportamiento de los diferentes filtros en el procedimiento de reconstrucción mediante el análisis de las funciones básicas centrales para los filtros de mayor orden y para un número arbitrario de muestras. Por último, se han examinado las gráficas del error de reconstrucción en diferentes casos, tanto con el filtro de Chebyshev tipo II, así como con los otros ya mencionados.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1 ACERCA DE LA REGLA DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA CONDICIONAL

En este trabajo se planteó, principalmente, dar una descripción detallada del procedimiento de muestreo-reconstrucción aplicando la regla de la esperanza matemática condicional utilizando procesos aleatorios gaussianos a la salida de diferentes filtros. Estos procesos pueden ser caracterizados por sus variables aleatorias multidimensionales gaussianas, y estas por sus momentos: de esperanza matemática, varianza y momento de covarianza.

En un principio, esta metodología puede aplicarse una vez que se conoce la función de covarianza, ya que está relacionada con el espectro de potencia del proceso mediante las relaciones de Wiener-Khintchine. Entonces, algún sistema caracterizado por su función de densidad espectral a la salida también puede caracterizarse por su función de covarianza, ya sea de manera analítica o no analítica, es decir, mediante un cálculo o una estimación. Esta situación se ha llevado a la práctica mediante algunos filtros con diferente respuesta en frecuencia y un número arbitrario de muestras a lo largo de este trabajo.

Los primeros ejemplos mostrados fueron con filtros RC lineales pasa-bajas, con los cuales se han tenido resultados óptimos en el procedimiento de muestreo reconstrucción de procesos gaussianos no limitado en banda. Estos resultados son importantes y básicos para exponer la eficiencia y ventaja de la regla de la esperanza matemática condicional en el procedimiento de reconstrucción de procesos aleatorios. Algunas características mostradas, mediante esta metodología, por estos filtros se anuncian a continuación:

- Existe una función básica o función de interpolación para cada muestra que se esté considerando dentro de la reconstrucción, esta función básica depende de la función de covarianza, del número de muestra que se esté considerando y del intervalo de muestreo.

- El primer caso, analizado con el filtro RC de una etapa, caracteriza a un proceso Markoviano, en el cual la reconstrucción depende solo de la muestra anterior y posterior, sin considerar las demás muestras.
- Los filtros de mayor etapa caracterizan procesos no Markovianos, los cuales si depende de todas las muestras que se esté tomando en cuenta para la reconstrucción.
- La función de reconstrucción de un proceso Markoviano tiene un comportamiento lineal en las regiones de interpolación, mientras que los casos no Markovianos tiene otro comportamiento determinado por sus funciones básicas.
- El error de reconstrucción, en el caso del proceso Markoviano, tiene la misma amplitud, mientras que para los casos no Markovianos es diferente al variar cuando se aproxima a la muestra central.

Estos ejemplos, con filtros RC, muestra la gran ventaja que se tiene al aplicar la regla de la esperanza matemática condicional al procedimiento de muestreo reconstrucción procesos gaussianos. Sin embargo, con todo y sus ventajas se pueden obtener resultados óptimos en el procedimiento de reconstrucción de señales, con otro tipo de filtros, sin despreciar y mucho menos mencionar que los resultados con filtros RC sean erróneos y poco significativos.

6.2 APORTACIÓN DE LOS FILTROS CHEBYSHEV AL PROCEDIMIENTO DE MUESTREO- RECONSTRUCCION

El estudio de filtros Chebyshev es ampliamente conocido en ingeniería, pero poco aplicado al procedimiento de muestreo y reconstrucción de señales, pero que muestran resultados óptimos y ventajas sobre los filtros RC mencionados anteriormente, estos resultados se han podido observar a lo largo del trabajo.

En el contenido de este trabajo se han expuesto las características que hacen útiles los filtros Chebyshev para resolver problemas prácticos, estas características también son útiles en el procedimiento de reconstrucción de señales, ellas se presentan principalmente en su función de densidad espectral. A través de esta función se pudo estimar su función de covarianza y posteriormente aplicar el algoritmo de muestro y reconstrucción. Los resultados obtenidos son correctos y óptimos en el procedimiento de reconstrucción.

A continuación, se expondrán las conclusiones de este trabajo:

- ❖ Al analizar el procedimiento de reconstrucción mediante filtros Chebyshev de tipo I y tipo II de diferente orden y número arbitrario de muestras, se pudo observar que cada respuesta en frecuencia del filtro determina una función de covarianza diferente, la cual describe la estructura en el tiempo de cada proceso aleatorio obtenido a la salida de cada respuesta del filtro. Entonces, se observa que cada respuesta del filtro determina en el procedimiento de reconstrucción una función básica, la cual es diferente para cada respuesta del filtro y además estas funciones no son exactamente iguales a la forma de la función $Sinc(\tau)$. Además, se tiene ventaja con su respuesta en frecuencia, ya que los resultados mostrados trabajan solamente con filtros de orden 1 hasta 6, a diferencia de los filtros Butterworth [24] que consideran un orden hasta de 32.
- ❖ De aquí que la estimación de las funciones básicas es importante porque contribuye a describir la influencia estadística con la que cada muestra participa en cada intervalo de muestreo para la reconstrucción del proceso aleatorio.
- ❖ Condicionalmente, si la estructura en el tiempo de la respuesta del filtro es más suave entonces se proveerá una mayor influencia estadística, la cual se reflejará en una disminución en el error de reconstrucción del proceso aleatorio.
- ❖ Se observa que la respuesta de los filtros de orden uno caracteriza a un proceso Markoviano, mientras que la respuesta de los filtros orden mayor describen el comportamiento de procesos no Markovianos.
- ❖ Los resultados obtenidos con filtro de Chebyshev tipo I muestran un menor valor en el error cuando se comparan con los filtros RC, debido a una mejor selectividad en frecuencia que los caracteriza, de aquí que, se tenga una mejor calidad en la reconstrucción con los filtros Chebyshev tipo I. Sin embargo, el filtro de Chebyshev de tipo II presenta una mejor calidad de reconstrucción, esto es cuando el orden es mayor a uno. De esta manera, es importante mencionar que este aumento en la calidad no solamente depende de la selectividad en frecuencia del filtro de Chebyshev tipo II, sino que los rizados que presenta el filtro de Chebyshev de tipo I, afectan también la reconstrucción.
- ❖ Además, otra cualidad importante de los filtros Chebyshev de tipo I y tipo II en el procedimiento de reconstrucción se observa en la función de error de reconstrucción,

ya que esta resulta óptima en las regiones no solo de interpolación, sino en las regiones de retropolación y extrapolación, cuando se quiere retomar un muestreo posterior, ya que el tiempo para alcanzar sus valores máximos es mayormente tardado, inclusive con la del filtro ideal.

- ❖ Por último, a lo largo de este trabajo se han podido exponer las características y ventajas que ofrece la regla de la esperanza matemática condicional, siendo que esta permite describir de una mejor manera el procedimiento de reconstrucción de procesos aleatorios con diferentes funciones de covarianza y además provee de mayor información al estimar las funciones básicas y el error de reconstrucción en todo el dominio del tiempo.

APÉNDICE A

VARIABLE ALEATORIA UNIDIMENSIONAL

A-1 FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

A-2 FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

A-3 FUNCIÓN CARACTERÍSTICA

**A-4 MOMENTOS ALREDEDOR DEL ORIGEN Y MOMENTO CENTRALES
DE UNA VARIABLE ALEATORIA**

A-5 VARIABLE ALEATORIA GAUSSIANA

Una *variable aleatoria* (VA) en *Teoría de las Probabilidades*, es definida como una función real de los elementos de un *espacio muestra* S . Es decir, es una variable que puede producir uno de muchos valores posibles como resultado de un *experimento* [23]. Por lo tanto, dado un experimento definido mediante un espacio muestra S con elementos s , se puede asignar para todo s un número real.

$$X(s) \tag{1}$$

X puede considerarse una función que aplica todos los elementos del espacio muestra a todos los puntos de la recta real o algunas partes de ella [27].

Condiciones para que una función sea una variable aleatoria.

Una VA puede ser prácticamente cualquier función que se desee, siempre que cumpla las siguientes condiciones:

- I. No ser múltiplemente evaluada, es decir, todo punto de S debe corresponder solo con un valor de la VA.
- II. El conjunto $\{X \leq x\}$ es un evento para toda x . Tal conjunto se corresponde con aquellos puntos s para los que la VA, $X(s)$, no excede el número x . Tal probabilidad $P\{X \leq x\}$, es igual a la suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales correspondientes a $\{X \leq x\}$ [38].
- III. Las probabilidades de los eventos $\{X = \infty\}$ y $\{X = -\infty\}$ igual a cero [38]:

$$P\{X = -\infty\} = 0; \quad P\{X = \infty\} = 0 \tag{2}$$

Variables aleatorias continuas y discretas

Una *VA continua* es aquella que tiene un rango continuo de valores, de tal manera que no puede ser resultado de un espacio muestra discreto, una VA continua pura tampoco puede ser resultado de un espacio muestra mixto.

De manera análoga, una *VA discreta* es aquella que solo toma valores discretos. El espacio muestra para una VA discreta puede ser discreto, continuo o incluso una mezcla de puntos discretos y continuos (espacio muestra mixto).

En el caso discreto para describir una VA es necesario saber:

- I) El conjunto de todos los valores posibles: x_1, x_2, \dots, x_k .
- II) El conjunto de probabilidades de todos los valores posibles: $P(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

Ambos conjuntos conforman la ley de la distribución de VA, tal ley proporciona la información completa acerca de la VA. Las probabilidades: $P(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) obedecen a la ecuación de normalización:

$$\sum_{i=1}^k P(x_i) = 1 \quad (3)$$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Los elementos del conjunto S que están contenidos en el evento $\{X \leq x\}$ cambian a medida que el número x toma varios valores. La probabilidad $P\{X \leq x\}$ del evento $\{X \leq x\}$ es, por lo tanto, un número que depende de x . Tal número es denotado por $F(x)$ y es llamado *función de distribución* (acumulativa) de una variable aleatoria [38].

Se define a la función de distribución de probabilidad $F(x)$ de la VA X como:

$$F_X(x) = P\{X \leq x\}; \forall x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Propiedades †:

- I. $0 \leq F_X(x) \leq 1$ $F_X(\infty) = 1$; $F_X(-\infty) = 0$
- II. $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ si $x_1 \leq x_2$
- III. $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$
- IV. $F_X(x^+) = F_X(x)$

FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

† x^+ indica $x + \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$ es infinitesimalmente pequeño; es decir, $\varepsilon \rightarrow 0$

Para el caso continuo de una VA, la cantidad de posibles valores es infinito, así que en lugar de N probabilidades, se utiliza una *función de densidad de probabilidad* (fdp) [23].

La fdp, $w_X(x)$, se define a partir de la función de distribución, es decir:

$$w_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (5)$$

O de manera análoga como:

$$w_X(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x} \quad (6)$$

Propiedades:

I.

$$0 \leq w_X(x); \forall x \quad (7)$$

II.

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_X(x) dx = 1 \quad (8)$$

III.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x w_X(\xi) d\xi \quad (9)$$

IV.

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} w_X(x) dx = 1 \quad (10)$$

Para el caso de una VA discreta, la forma general de su función de densidad está caracterizada por (11).

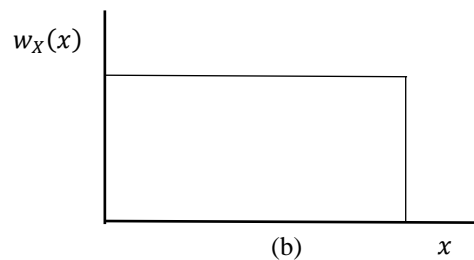
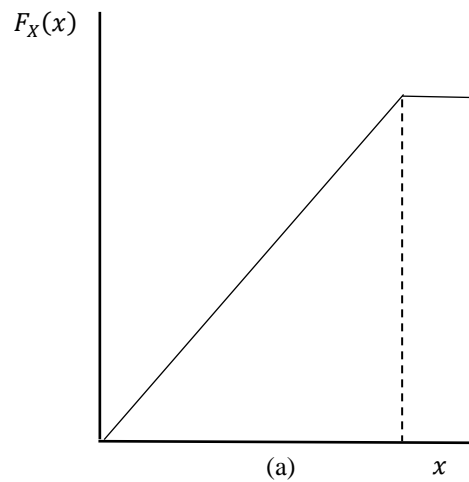
$$w_X(x) = \sum_{i=1}^n p_i \delta(x - x_i) \quad (11)$$

Donde p_i son valores “masas” asociadas a los valores x_i de la variable aleatoria X y $\delta(x - x_i)$ es un operador que extrae del conjunto continuo de valores puntuales x solo aquel, x_i , para el cual hay una ponderación distinta de cero [30,38]. A partir de (8) se puede observar lo siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_X(x) dx = \sum_{i=1}^n p_i \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i) dx = \sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (12)$$

Por lo tanto, la Función de distribución de una VA es:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x w_X(x) dx = \sum_{i=1}^n p_i \int_{-\infty}^x \delta(x - x_i) dx = \sum_{x_i \leq x} p_i \quad (13)$$



Ejemplo de Función de distribución continua (a) y su función de densidad (b) [38].

FUNCIÓN CARACTERÍSTICA

La *función característica* $\Phi_X(j\theta)$ se introduce con la *Transformada de Fourier* de la fdp, $w_X(x)$.

$$\Phi_X(j\theta) = \int w_X(x)e^{j\theta x} dx \quad (14)$$

A continuación, la transformada inversa da:

$$w_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int \Phi_X(j\theta)e^{-j\theta x} d\theta \quad (15)$$

Con el fin de tener la descripción completa de una VA se puede utilizar un enfoque más o menos equivalente basado en la función de distribución, en la función de densidad de probabilidad o la función característica [23].

MOMENTOS ALREDEDOR DEL ORIGEN Y MOMENTO CENTRALES DE UNA VARIABLE ALEATORIA

En la teoría de VA existen operaciones importantes, una de ellas es la del valor esperado o media estadística. Sea $E[X]$ una función arbitraria de VA X , entonces el valor esperado, el promedio estadístico o el valor medio se determina para el caso continuo como:

$$\langle E[X] \rangle = \int f(x)w_X(x)dx \quad (16)$$

Generalizando podemos establecer que $E[X] = E$, entonces en lugar de (16) se tiene:

$$\langle E \rangle = \int xw_X(x)dx \quad (17)$$

La expresión (17) se denomina *esperanza matemática*[†].

Generalizando, se puede establecer lo siguiente:

$$E[X] = (X - c)^n; \forall n \in \mathbb{N} \quad (18)$$

Por lo que existen una gran cantidad de momentos. Un caso particular es cuando $c = 0$, entonces se tiene un conjunto de *momentos iniciales* de n-ésimo orden:

[†] El significado físico de $\langle X \rangle$ es el “centro de gravedad” de la ley de distribución $\omega_X(x)$. El promedio de una constante c es la misma constante $\langle c \rangle = c$.

$$m_n = \langle X^n \rangle = \int x^n w_X(x) dx \quad (19)$$

Es evidente que la esperanza matemática de X está dada por su primer momento inicial, es decir, $m_1 = \langle X^1 \rangle = \langle X \rangle$.

Los momentos de diferente orden de una VA pueden servir de características numéricas de la misma. En este caso, es evidente que una sola esperanza matemática no puede de ningún modo ser característica suficiente de X , sino que determina el valor medio cerca del cual se dispersan los valores posibles de dicha variable. Para caracterizar la fluctuación de la variable aleatoria es necesario valerse de otras características numéricas, como el momento o momentos centrales [31].

Cuando $c = \langle E \rangle$, entonces existe un conjunto de *momentos centrales* definidos como:

$$\mu_n = \langle (X - \langle X \rangle)^n \rangle = \langle (\dot{X})^n \rangle \quad (20)$$

$\dot{X} = X - \langle X \rangle$ se llama VA central

El primer momento central es igual a cero:

$$\mu_1 = \langle \dot{X} \rangle = \langle X - \langle X \rangle \rangle = \langle X \rangle - \langle \langle X \rangle \rangle = \langle X \rangle - \langle X \rangle = 0$$

El segundo momento central (varianza)^{††} es:

$$\begin{aligned} \mu_2 = \langle (\dot{X})^2 \rangle &= \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle X^2 - 2X\langle X \rangle + \langle X \rangle^2 \rangle = \\ &= \langle X^2 \rangle - \langle 2X\langle X \rangle \rangle + \langle \langle X \rangle^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \end{aligned}$$

Existen dos fórmulas en las que se involucran los momentos iniciales y centrales:

$$m_2 = \mu_2 + m_1^2 = \sigma^2 + m_1^2 \quad (21)$$

$$\mu_2 = \sigma^2 = m_2 + m_1^2 \quad (22)$$

VARIABLE ALEATORIA GAUSSIANA

^{††} La varianza es la medida cuadrática de la dispersión de valores posibles con respecto a la esperanza matemática $\langle X \rangle$.

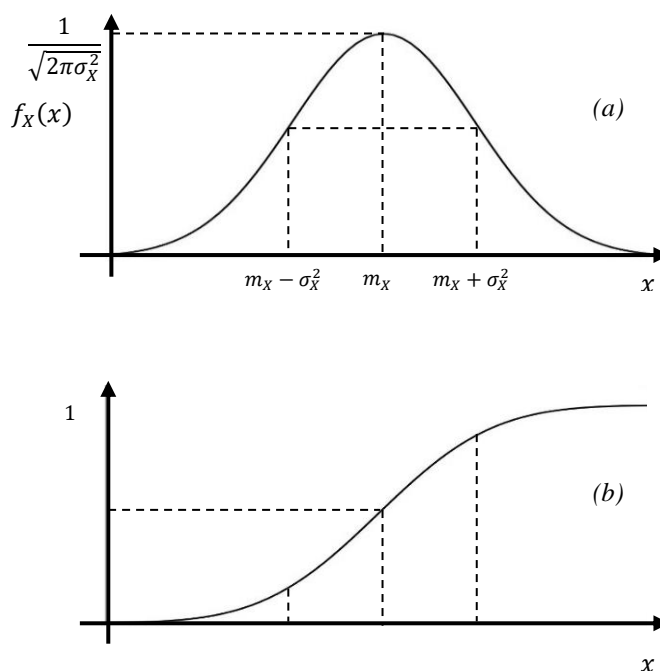
Un tipo de VA continua es la variable aleatoria *Normal o Gaussiana*. Una variable aleatoria es Gaussiana si su fdp tiene la siguiente forma:

$$w_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left\{-\frac{(x - m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\} \quad (23)$$

$$0 < \sigma_X^2 \text{ y } -\infty < m_X < \infty$$

La densidad Gaussiana es la más importante de las densidades, dicha importancia radica en que permite describir de forma precisa muchas magnitudes importantes en la práctica, especialmente cuando dichas magnitudes son el resultado de muchos pequeños efectos aleatorios. La función de distribución se obtiene a partir de (9) usando (23):

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \int_{-\infty}^x e^{-(\xi - m_X)^2 / 2\sigma_X^2} d\xi \quad (24)$$



Ejemplo de función de densidad (a) y Función de distribución (b) de una variable aleatoria Gaussiana.

[†] Esta integral no tiene una solución cerrada conocida y debe evaluarse por métodos numéricos o aproximaciones.

APÉNDICE B

POLINOMIO DE CHEBYSHEV

B-1 DESCRIPCIÓN DEL POLINOMIO DE CHEBYSHEV

DESCRIPCIÓN DEL POLINOMIO DE CHEBYSHEV [39,40]

En teoría de las aproximaciones existen diferentes métodos de interpolación para aproximar una función. Los elementos principales constructivos son: polinomios algebraicos y trigonométricos, funciones racionales y splines.

Un polinomio algebraico de grado n esta expresado de la siguiente manera:

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k \quad (\alpha_k \in \mathbb{C}) \quad (1)$$

De esta manera se establece un resultado conocido como el teorema fundamental del algebra.

Cualquier polinomio de grado $n (\geq 1)$ con coeficientes complejos tiene exactamente n ceros (considerando sus múltiplos) en el plano complejo.

Los ceros de un polinomio son funciones continuas de los coeficientes del polinomio.

Tomando a z sobre el plano complejo sobre la circunferencia $|z| = 1$, es decir, $z = e^{i\theta}$, $p_n(z)$ llega a ser un polinomio trigonométrico $t_n(\theta)$ de grado n ,

$$t_n(\theta) = p_n(e^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta) \quad (2)$$

Con coeficientes complejos en caso general. El siguiente teorema es importante y es conocido como la propiedad de Haar:

Un polinomio arbitrario trigonométrico $t_n(\theta)$ de grado al menos n , el cual no es idénticamente cero, no puede tener más que $2n$ ceros distintos en \mathbb{T} (es decir, en algún intervalo $[a, a + 2\pi]$, $a \in \mathbb{R}$).

Un simple, pero muy importante polinomio trigonométrico real es:

$\cos n\theta$

Se pueden expresar en términos de $\cos \theta$ como polinomios algebraicos de grado n .

Colocando a $x = \cos \theta$ se obtiene el bien conocido polinomio de Chebyshev de tipo I

$$T_n(x) = T_n(\cos \theta) = \cos n\theta \quad (3)$$

Tal representación algebraica para $|x| \leq 1$ es:

$$x = \cos \theta ; \theta = \arccos x$$

$$T_n(x) = T_n(\cos n\theta) = \cos(n \arccos x)$$

Ahora, colocando a $x = \cosh \theta$, se obtiene otro polinomio:

$$x = \cosh \theta ; \theta = \operatorname{arccosh} x$$

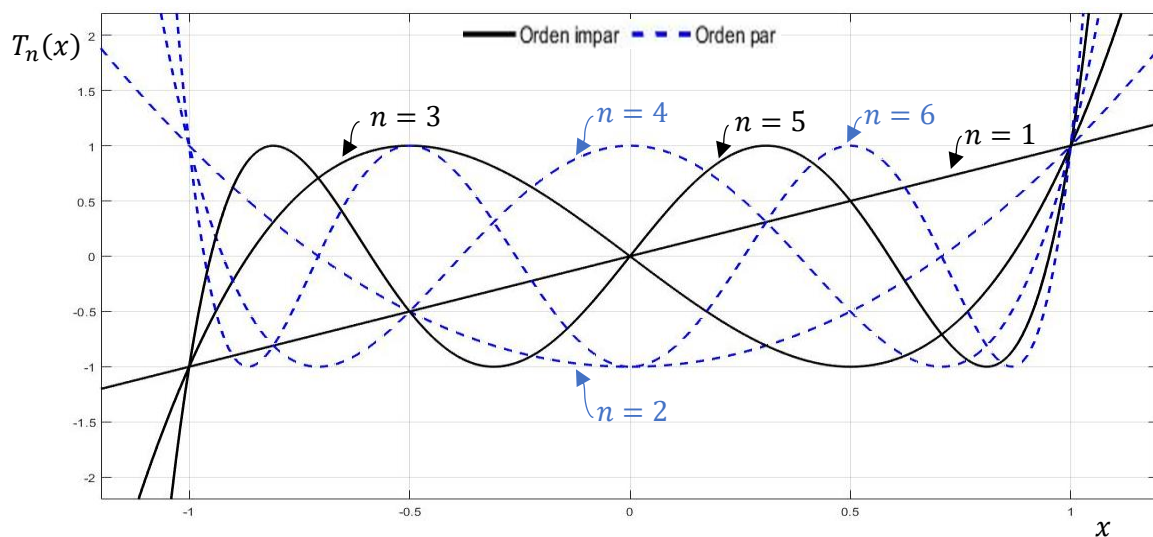
Tal representación algebraica para $|x| > 1$ es:

$$T_n(x) = T_n(\cosh n\theta) = \cosh(n \operatorname{arccosh} x)$$

De esta manera se puede definir al polinomio de Chebyshev del tipo uno como:

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos x) & \text{para } |x| \leq 1 \\ \cosh(n \operatorname{arccosh} x) & \text{para } |x| > 1 \end{cases} \quad (4)$$

En la siguiente figura se muestran el comportamiento de los polinomios de Chebyshev de tipo uno para $n = 1, \dots, 6$ en la región $|x| \leq 1$.



Polinomio de Chebyshev tipo I para diferente orden (n).

Agregando la fórmula:

$$\cos[(n+1)\theta] + \cos[(n-1)\theta] = 2\cos\theta \cos n\theta$$

Se tiene que $T_n(x)$ se muestra definida recursivamente por la relación:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Tal ecuación requiere conocer los términos de $T_0(x)$ y $T_1(x)$, estos términos se pueden deducir de (21) para valores $|x| \leq 1$.

$$T_0(x) = 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

⋮

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

Donde a_1, \dots, a_n son números enteros.

Existe una variación para (4), debido a que las oscilaciones solamente están definidas en el intervalo de $[-1, 1]$, se puede realizar tal operación que permita ver oscilaciones fuera de ese intervalo, es decir:

$$T_n(r) = \cos h(n \operatorname{arccosh} x) \text{ para } |x| > 1$$

Sin embargo, debido a que existe una propiedad que propone lo siguiente :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \cos h(n \operatorname{arccosh} x)$$

Entonces se puede hacer un cambio de variable donde, $r = \frac{1}{x}$

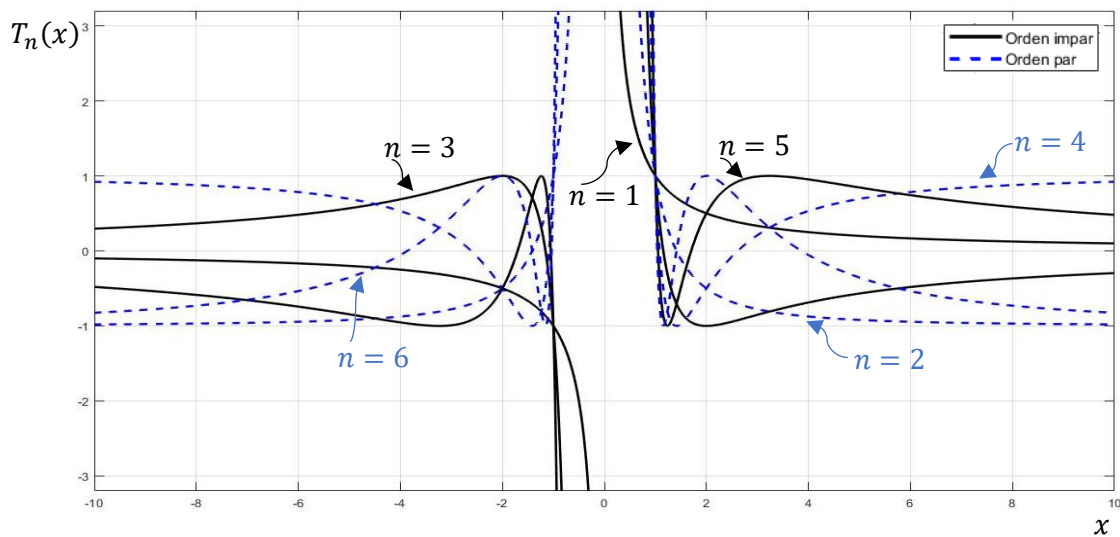
$$T_n(r) = \cos h(n \operatorname{arccosh} r) \text{ para } |r| > 1$$

$$|r| = \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{|1|}{|x|} > 1 \rightarrow 1 > |x|$$

De esta manera:

$$T_n\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \cosh\left(n \operatorname{arccosh}\frac{1}{x}\right) & \text{para } |x| < 1 \\ \cos\left(n \arccos\frac{1}{x}\right) & \text{para } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (5)$$

En la siguiente figura se muestra el comportamiento del polinomio inverso de Chebyshev con respecto a (4) para $n = 1, \dots, 6$ para la región $|x| < 1$.



Polinomio inverso de Chebyshev para diferente orden (n).

Las anteriores expresiones son de gran ayuda en la ingeniería debido a su comportamiento característico en los diseños de algunos sistemas y principalmente en el diseño de filtros con determinadas características.

APÉNDICE C

FILTROS DE CHEBYSHEV

C-1 FILTRO DE CHEBYSHEV TIPO I

FUNCIÓN DE COVARIANZA

FUNCIÓN DE RECONSTRUCCIÓN

FUNCIÓN DE ERROR DE RECONSTRUCCIÓN

C-2 FILTRO DE CHEBYSHEV TIPO II

FUNCIÓN COVARIANZA

FUNCIONES BASICAS

FILTRO DE CHEBYSHEV TIPO I

Función de covarianza.

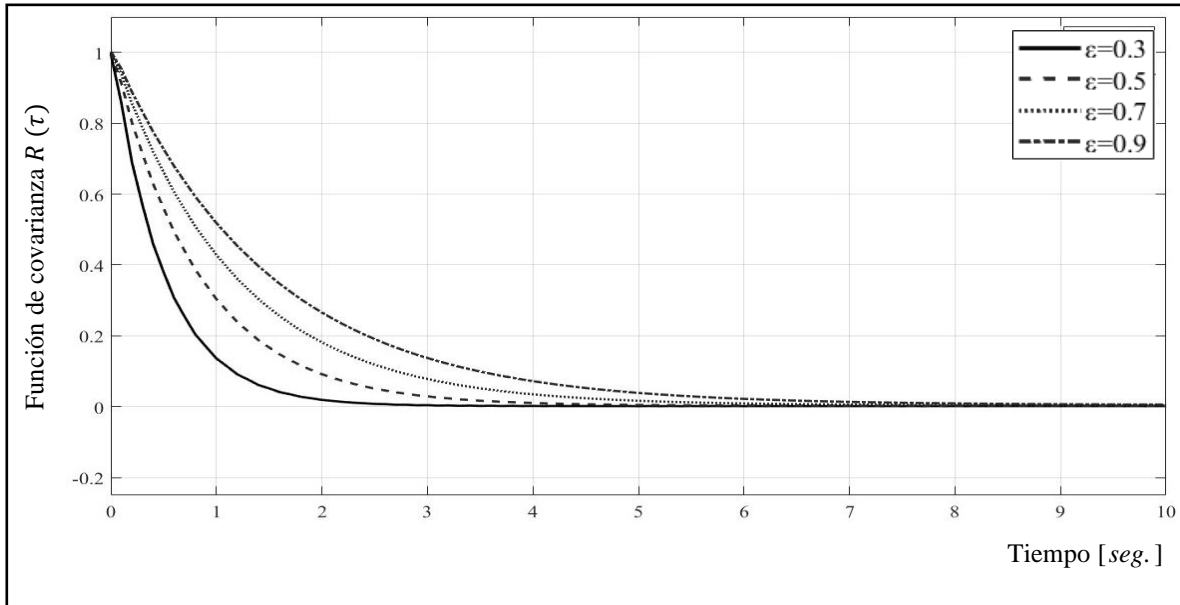


Figura C-1. Función de covarianza con filtro de Chebyshev tipo I de orden uno con diferente valor de rizo.

Función de reconstrucción

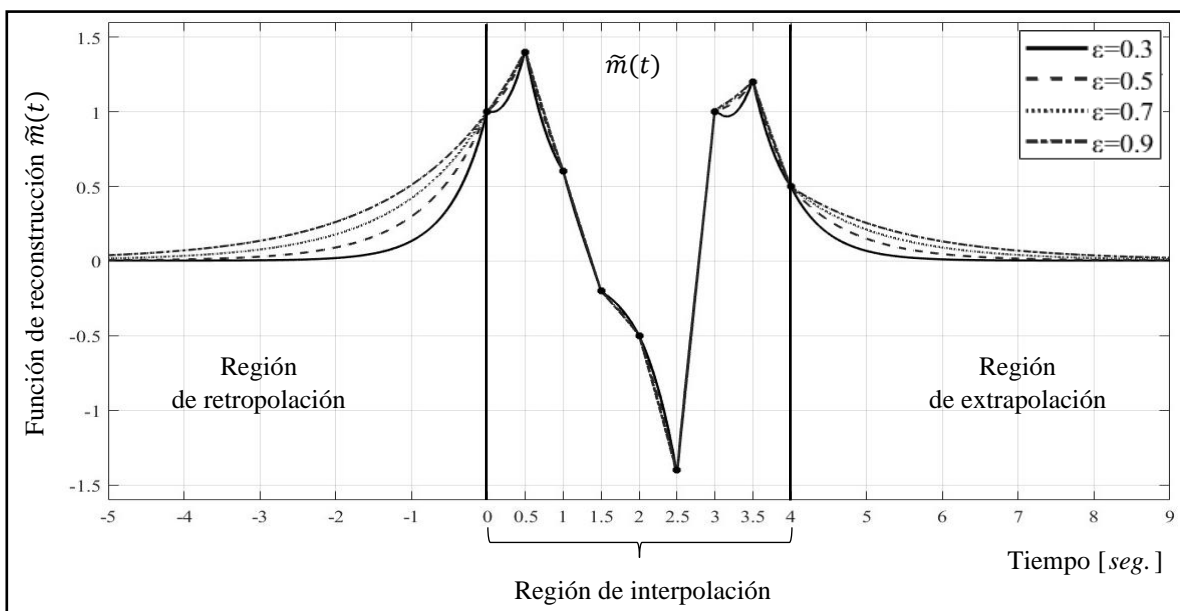


Figura C-2. Función de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo I de orden uno con diferente valor de rizo para 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

Función de error de reconstrucción

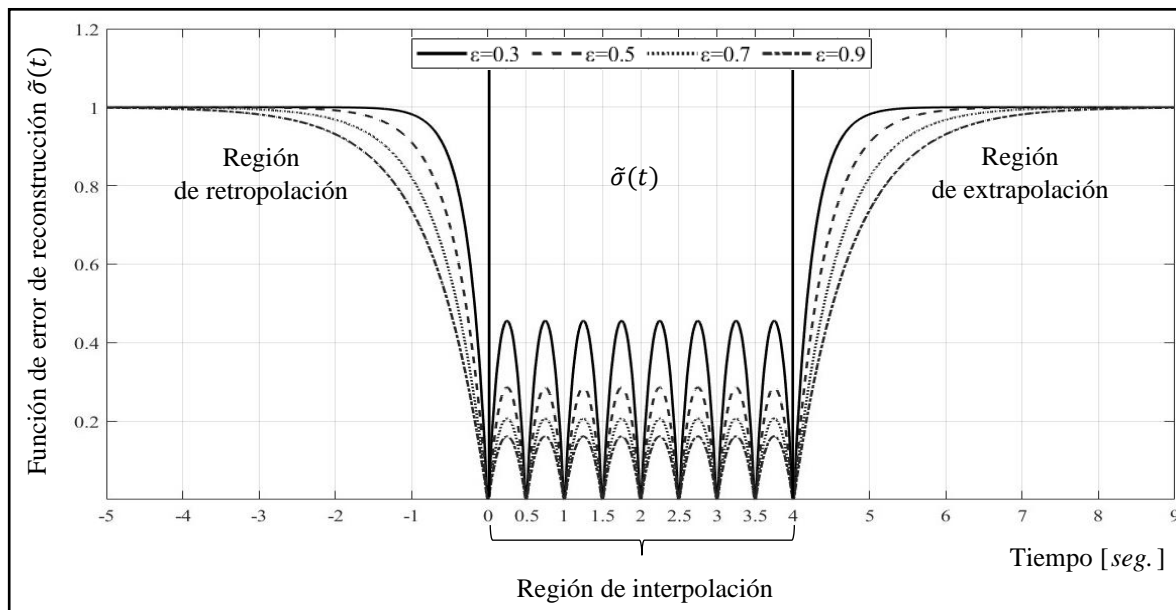
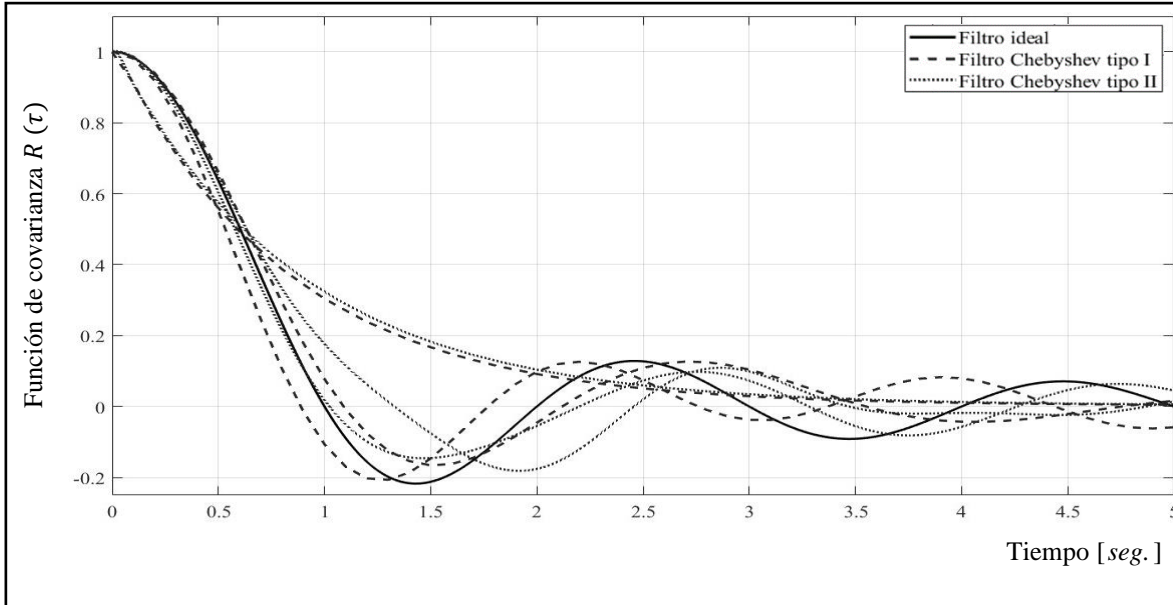


Figura C-3. Función de error de reconstrucción con filtro Chebyshev tipo I de orden uno con diferente valor de rizo para 9 muestras separadas $\Delta T = 0.5$.

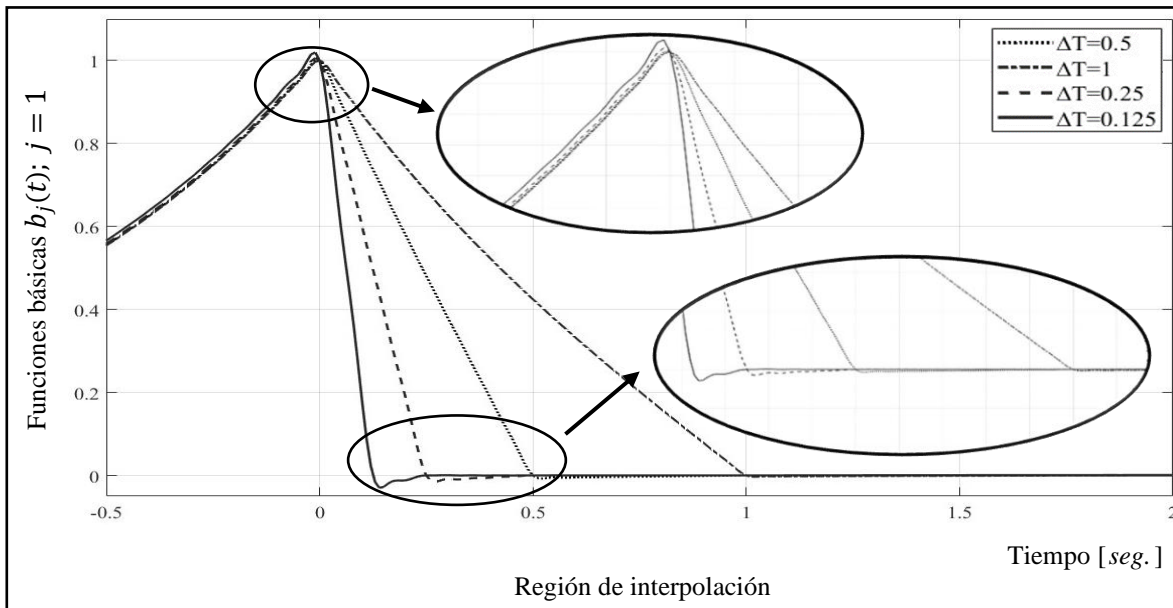
FILTRO DE CHEBYSHEV TIPO II

Función de covarianza



Comparación de la función de covarianza con filtro de Chebyshev tipo I, tipo I para diferente orden y función *Sinc* (τ).

Funciones básicas



Funciones básicas ($j = 1$) con filtro Chebyshev tipo II de orden uno con 9 muestras con diferente ΔT .

APÉNDICE D

PROGRAMAS UTILIZADOS

D-1 FILTROS RC

FILTRO DE UNA ETAPA

FILTRO DE DOS ETAPAS

FILTRO DE TRES ETAPAS

D-2 FILTROS DE CHEBYSHEV TIPO I

FUNCION DE DENSIDAD ESPECTRAL

FUNCION DE COVARIANZA

PMR PARA DIFERENTE ORDEN

D-3 FILTROS DE CHEBYSHEV TIPO II

FUNCION DE DENSIDAD ESPECTRAL

FUNCION DE COVARIANZA

PMR PARA DIFERENTE ORDEN

FILTROS RC

FILTRO DE UNA ETAPA

```

%% FILTRO RC PASA-BAJAS DE UNA ETAPA PARA 9 MUESTRAS %%
%% PARAMETROS:
alfa=1;
Tc=1;
nm=9;
tref = -5:0.01:(nm/2)+9.5;
%% Vector de 9 muestras en el tiempo:
T=[0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4];
%% Vector de 9 amplitudes:
xT=[1 1.4 0.6 -0.2 -0.5 -1.4 1 1.2 0.5];
%% FUNCION DE COVARIANZA NORMALIZADA:
Tc=0;
for fila = 1:nm
    for columna = 1:nm
        R(fila,columna) = exp((-1*alfa)*abs(T(fila)-T(columna)));
    end
end
A=inv(R);
%% FUNCION BASICA:
%%
for j = 1:nm
    for i = 1:nm
        con1 = 1;
        for t = -5:0.01:(nm/2)+9.5
            imp(con1,i) = exp( (-1*alfa)*abs(t - T(i))) * A(i,j);
            con1=con1+1;
        end
        B(:,j) = sum(imp,2);
    end
end
%% FUNCION DE RECONSTRUCCION:
%%
for jm= 1:nm
    con2 = 1;
    for tm = -5:0.01:(nm/2)+9.5
        m(con2,jm)=B(con2,jm)*xT(jm);
        con2 = con2 + 1;
    end
end
mf= sum(m,2);
%% FUNCION DE ERROR DE RECONSTRUCCION:
%%
for je = 1:nm
    con3 = 1;
    for te = -5:0.01:(nm/2)+9.5
        E(con3,je)=B(con3,je)*exp((-1*alfa)*abs(T(je) - te));
        con3 = con3 + 1;
    end
end
Errorf = 1-sum(E,2);

```

FILTRO DE DOS ETAPAS

```

%% FILTRO RC PASA-BAJAS DE DOS ETAPAS PARA 9 MUESTRAS %%
%% PARAMETROS:
    alfa=2;
    Tc=1;
    nm=9;
    tref = -5:0.01:(nm/2)+9.5;
%% Vector de 9 muestras en el tiempo:
    T=[0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4];
%% Vector de 9 amplitudes:
    xT=[1 1.4 0.6 -0.2 -0.5 -1.4 1 1.2 0.5];
%%
%% FUNCION DE COVARIANZA:
for fila = 1:1:nm
    con = 1;
    for columna = 1:1:nm
        R(fila,columna) = (1+(alfa*abs(T(fila)-T(columna))))*exp((-1*alfa)*abs(T(fila)-T(columna)));
    end
end
A=inv(R);
%% FUNCION BASICA:
%%
for j = 1:1:nm
    for i = 1:1:nm
        con1 = 1;
        for t = -5:0.01:(nm/2)+9.5;
            imp(con1,i) = (1+(alfa*abs(t-T(i))))*exp((-1*alfa)*abs(t - T(i)))*A(i,j);
            con1=con1+1;
        end
        B(:,j) = sum(imp,2);
    end
end
%% FUNCION DE RECONSTRUCCION:
%%
for jm= 1:1:nm
    con2 = 1;
    for tm = -5:0.01:(nm/2)+9.5
        m(con2,jm)=B(con2,jm)*xT(jm);
        con2 = con2 + 1;
    end
end
mf= sum(m,2);
%% FUNCION DE ERROR DE RECONSTRUCCION:
%%
for je = 1:1:nm
    con3 = 1;
    for te = -5:0.01:(nm/2)+9.5
        E(con3,je)=B(con3,je)*(1+(alfa*abs(T(je)-te)))*exp((-1*alfa)*abs(T(je) - te));
        con3 = con3 + 1;
    end
end
Errorf = 1 - sum(E,2);

```

FILTRO DE TRES ETAPAS

```

%% FILTRO RC PASA-BAJAS DE TRES ETAPAS PARA 9 MUESTRAS %%
%% PARAMETROS:
    alfa=2;
    Tc=1;
    nm=9;
    tref = -5:0.01:(nm/2)+9.5;
%% Vector de 9 muestras en el tiempo:
    T=[0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4];
%% Vector de 9 amplitudes:
    xT=[1 1.4 0.6 -0.2 -0.5 -1.4 1 1.2 0.5];
% FUNCION DE COVARIANZA:
for fila = 1:1:nm
    con = 1;
    for columna = 1:1:nm
        K(fila,columna) = (1+(alfa*abs(T(fila)-T(columna)))+((alfa^2)*((T(fila)-T(columna))^2))/3)*exp((-1)*alfa*abs(T(fila)-T(columna)));
    end
end
A=inv(K);
%% FUNCION BASICA:
%%
for j = 1:1:nm
    for i = 1:1:nm
        con1 = 1;
        for t = -5:0.01:(nm/2)+9.5;
            imp(con1,i) = (1+alfa*abs(t-T(i)))+(((alfa(1))^2)*((t-T(i))^2))/3)*exp((-1)*alfa(1)*abs(t-T(i)))*A(i,j);
            con1=con1+1;
        end
        B(:,j) = sum(imp,2);
    end
end
%% FUNCION DE RECONSTRUCCION:
%%
for jm= 1:1:nm
    con2 = 1;
    for tm = -5:0.01:(nm/2)+9.5
        m(con2,jm)=B(con2,jm)*xT(jm);
        con2= con2+ 1;
    end
end
mf= sum(m,2);
%% FUNCION DE ERROR DE RECONSTRUCCION:
%%
for je = 1:1:nm
    con3 = 1;
    for te = -5:0.01:(nm/2)+9.5
        E(con3,je)=b(con3,je)*(1+(alfa*(abs(T(je)-te)))+((alfa^2)*((T(je)-te)^2))/3))*(exp((-1)*alfa*abs(T(je)-te)));
        con3 = con3 + 1;
    end
end
Errorf=1-sum(E,2);

```

FILTRO DE CHEBYSHEV TIPO I FUNCION DE DENSIDAD ESPECTRAL

```

%% FUNCIÓN DE DENSIDAD ESPECTRAL PARA FILTRO DE CHEBYSHEV TIPO I %%
%% PARÁMETROS:
ep=0.5;
orden1=1; orden2=2; orden3=3; orden4=4; orden5=5; orden6=6;
wc1=0.61; wc2=1.76; wc3=2.51; wc4=3.00; wc5=3.35; wc6=3.61;
%% DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA:
%%
for r=1:801
    w1(r)=-15+(r-1)*0.05;
    sw1(r)=(1/(1+(ep*cos(orden1*acos(w1(r)/wc1)))^2));
    sw4(r)=(1/(1+(ep*cos(orden4*acos(w1(r)/wc4)))^2));
    sw2(r)=(1/(1+(ep*cos(orden2*acos(w1(r)/wc2)))^2));
    sw5(r)=(1/(1+(ep*cos(orden5*acos(w1(r)/wc5)))^2));
    sw3(r)=(1/(1+(ep*cos(orden3*acos(w1(r)/wc3)))^2));
    sw6(r)=(1/(1+(ep*cos(orden6*acos(w1(r)/wc6)))^2));
end

```


FUNCION DE COVARIANZA

```

%% FUNCIÓN DE COVARIANZA PARA FILTRO DE CHEBYSHEV TIPO I %%
%% PARÁMETROS:
ep=0.5;
orden1=1; orden2=2; orden3=3; orden4=4; orden5=5; orden6=6;
wc1=0.61; wc2=1.76; wc3=2.51; wc4=3.00; wc5=3.35; wc6=3.61;
% Intervalos de tiempo y frecuencia:
nt=301; nw=3001;
dt=0.1; dw=0.01;
%% FUNCIÓN DE VARIANZA:
funcion1=@(w)(1./(1+(ep.*cos(orden1.*acos(w./wc1))).^2));
funcion4=@(w)(1./(1+(ep.*cos(orden4.*acos(w./wc4))).^2));
funcion2=@(w)(1./(1+(ep.*cos(orden2.*acos(w./wc2))).^2));
funcion5=@(w)(1./(1+(ep.*cos(orden5.*acos(w./wc5))).^2));
funcion3=@(w)(1./(1+(ep.*cos(orden3.*acos(w./wc3))).^2));
funcion6=@(w)(1./(1+(ep.*cos(orden6.*acos(w./wc6))).^2));
Ko1=(1/(2*pi))*integral(funcion1,-35,35)
Ko3=(1/(2*pi))*integral(funcion3,-15,15)
Ko2=(1/(2*pi))*integral(funcion2,-15,15)
Ko4=(1/(2*pi))*integral(funcion4,-15,15)
Ko5=(1/(2*pi))*integral(funcion5,-15,15)
Ko6=(1/(2*pi))*integral(funcion6,-15,15)
%% FUNCION DE COVARIANZA
tc1=0;tc2=0;tc3=0;tc4=0;tc5=0;tc6=0;
for i=1:nt
t(i)=(i-1)*dt;
K1=0;K2=0;K3=0;K4=0;K5=0;K6=0;
for j=1:nw
w(j)=(j-1)*dw;
k1=(dw/(1+(ep*cos(orden1*acos(w(j)/wc1)))^2))*cos(w(j)*t(i));
k4=(dw/(1+(ep*cos(orden4*acos(w(j)/wc4)))^2))*cos(w(j)*t(i));
k2=(dw/(1+(ep*cos(orden2*acos(w(j)/wc2)))^2))*cos(w(j)*t(i));
k5=(dw/(1+(ep*cos(orden5*acos(w(j)/wc5)))^2))*cos(w(j)*t(i));
k3=(dw/(1+(ep*cos(orden3*acos(w(j)/wc3)))^2))*cos(w(j)*t(i));
k6=(dw/(1+(ep*cos(orden6*acos(w(j)/wc6)))^2))*cos(w(j)*t(i));
K1=K1+k1;K4=K4+k4;
K2=K2+k2;K5=K5+k5;
K3=K3+k3;K6=K6+k6;
end
% Función de covarianza Normalizada:
R1(i)=(K1)/(Ko1*pi);R4(i)=(K4)/(Ko4*pi);
R2(i)=(K2)/(Ko2*pi);R5(i)=(K5)/(Ko5*pi);
R3(i)=(K3)/(Ko3*pi);R6(i)=(K6)/(Ko6*pi);
% TIEMPO DE COVARIANZA:
tc1=tc1+abs(R1(i)*dt);tc4=tc4+abs(R4(i)*dt);
tc2=tc2+abs(R2(i)*dt);tc5=tc5+abs(R5(i)*dt);
tc3=tc3+abs(R3(i)*dt);tc6=tc6+abs(R6(i)*dt);
end

```

PMR PARA DIFERENTE ORDEN

```

%% FILTRO CHEBYSHEV DEL TIPO UNO DE DIFERENTE ORDEN PARA 9 MUESTRAS %%
%% PARÁMETROS:
orden=1;wc=0.61; %orden=2;wc=1.76; %orden=3;wc=2.51;
%orden=4;wc=3.00; %orden=5;wc=3.35; %orden=6; wc=3.61;
epsilon=0.5; nm=9;
%% Intervalos de tiempo y frecuencia:
int=0.01;inw=0.01;nw=10001;nt=1401;
%% Vector de 9 muestras:
T=[0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4];
%% FUNCION DE COVARIANZA:
k=0;
for con=1:nw
    w(con)=(con-1)*inw;
    Sw=(inw/(2*pi))*(1/(1+(epsilon*cos(orden*acos(w(con)/wc)))^2));
    k=k+Sw;
end
Ko=k;
%% MATRIZ DE COVARIANZA:
Tc=0;
ima=sqrt(-1);
for fila=1:nm
    for columna=1:nm
        K=0;
        for con=1:nw
            w(con)=(con-1)*inw;
            Kaux=(int/(1+(epsilon*cos(orden*acos(w(con)/wc)))^2))*real(exp(ima*w(con)*(T(fila)-T(columna))));
            K=K+Kaux;
        end
        R(fila,columna)=(K)/(2*pi*Ko);
    end
end
A=inv(R);
%% FUNCIONES BASICAS:
%%
inic=-5;
for i=1:nt
    t(i)=inic+(i-1)*int;
    Var(i)=1;
    F1(i)=0;F2(i)=0;F3(i)=0;F4(i)=0;F5(i)=0;F6(i)=0;F7(i)=0;F8(i)=0;F9(i)=0;
    for j=1:nm
        K1=0;
        for con=1:nw
            w(con)=(con-1)*inw;
            k1aux=(1/(1+(epsilon*cos(orden*acos(w(con)/wc)))^2))*real(exp(ima*w(con)*(t(i)-T(j))));
            K1=K1+k1aux;
        end
        R2=(K1*int)/(2*Ko*pi);
        F1(i)=F1(i)+(R2*A(j,1));F4(i)=F4(i)+(R2*A(j,4));F6(i)=F6(i)+(R2*A(j,6));
        F2(i)=F2(i)+(R2*A(j,2));F5(i)=F5(i)+(R2*A(j,5));F7(i)=F7(i)+(R2*A(j,7));
        F3(i)=F3(i)+(R2*A(j,3));F8(i)=F8(i)+(R2*A(j,8));F9(i)=F9(i)+(R2*A(j,9));
    end
end
%% FUNCION DE RECONSTRUCCION:
FR=(F1*1)+(F2*1.4)+(F3*0.6)+(F4*-.2)+(F5*-.5)+(F6*-.1.4)+(F7*1)+(F8*1.2)+(F9*0.5);
%% FUNCION DE ERROR DE RECONSTRUCCION:
%%
for k=1:nm
    K2=0;
    for con=1:nw
        w(con)=(con-1)*inw;
        k2aux=(1/(1+(epsilon*cos(orden*acos(w(con)/wc)))^2))*cos(w(con)*(T(k)-t(i)));
        K2=K2+k2aux;
    end
    R3=(K2*inw)/(2*Ko*pi);
    Var(i)=Var(i)-(R2*A(j,k)*R3);
end
end
end
end

```

FILTRO DE CHEBYSHEV TIPO II

FUNCION DE DENSIDAD ESPECTRAL

```

%% FUNCIÓN DE DENSIDAD ESPECTRAL PARA FILTRO DE CHEBYSHEV TIPO II %%
%% PARÁMETROS:
ep=0.5;
orden1=1; orden2=2; orden3=3; orden4=4; orden5=5; orden6=6;
wc1=2.31; wc2=2.66; wc3=2.83; wc4=2.87; wc5=3.1; wc6=3.34;
%% DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA:
%%
for r=1:801
    w1(r)=-15+(r-1)*0.05;
    sw1(r)=(1/(1+(ep*cosh(orden1*acosh(wc1/w1(r))))^-2));
    sw2(r)=(1/(1+(ep*cosh(orden2*acosh(wc2/w1(r))))^-2));
    sw3(r)=(1/(1+(ep*cosh(orden3*acosh(wc3/w1(r))))^-2));
    sw4(r)=(1/(1+(ep*cosh(orden4*acosh(wc4/w1(r))))^-2));
    sw5(r)=(1/(1+(ep*cosh(orden5*acosh(wc5/w1(r))))^-2));
    sw6(r)=(1/(1+(ep*cosh(orden6*acosh(wc6/w1(r))))^-2));
end

```

FUNCION DE COVARIANZA

```

%% FUNCIÓN DE COVARIANZA PARA FILTRO DE CHEBYSHEV TIPO II %%
%% PARÁMETROS:
ep=0.5;
orden1=1; orden2=2; orden3=3; orden4=4; orden5=5; orden6=6;
wc1=2.31; wc2=2.66; wc3=2.83; wc4=2.87; wc5=3.1; wc6=3.34;
% Intervalos de tiempo y frecuencia:
nt=4001; nw1=4001; nw=501;
dt=0.01; dw=0.01;
%% FUNCIONES DE VARIANZA:
%%
funcion1=@(w)(1./(1+(ep.*cosh(orden1.*acosh(wc1./w))).^-2));
funcion2=@(w)(1./(1+(ep.*cosh(orden2.*acosh(wc2./w))).^-2));
funcion3=@(w)(1./(1+(ep.*cosh(orden3.*acosh(wc3./w))).^-2));
funcion4=@(w)(1./(1+(ep.*cosh(orden4.*acosh(wc4./w))).^-2));
funcion5=@(w)(1./(1+(ep.*cosh(orden5.*acosh(wc5./w))).^-2));
funcion6=@(w)(1./(1+(ep.*cosh(orden6.*acosh(wc6./w))).^-2));
Ko1=(1/(2*pi))*quad(funcion1,-40,40); Ko4=(1/(2*pi))*integral(funcion4,-5,5);
Ko2=(1/(2*pi))*integral(funcion2,-5,5); Ko5=(1/(2*pi))*integral(funcion5,-5,5);
Ko3=(1/(2*pi))*integral(funcion3,-5,5); Ko6=(1/(2*pi))*integral(funcion6,-5,5);
%% FUNCION DE COVARIANZA:
%%
t1=0;t2=0;t3=0;t4=0;t5=0;t6=0;
for m=1:nt
    T1(m)=(m-1)*dt;
    K1=0;
    for j=1:nw1
        w(j)=(j-1)*dw;
        k1=(dw/(1+(ep.*cosh(orden1.*acosh(wc1./w(j))).^-2))*cos(w(j)*T1(m)));
        K1=K1+k1;
    end
    R1(m)=(K1)/(Ko1*pi);
    t1=t1+abs(R1(m)*dt);
end
for m=1:nt
    T(m)=(m-1)*dt;
    K2=0;K3=0;K4=0;K5=0;K6=0;
    for j=1:nw
        w(j)=(j-1)*dw;
        k2=(dw/(1+(ep.*cosh(orden2.*acosh(wc2./w(j))).^-2))*cos(w(j)*T(m)));
        k3=(dw/(1+(ep.*cosh(orden3.*acosh(wc3./w(j))).^-2))*cos(w(j)*T(m)));
        k4=(dw/(1+(ep.*cosh(orden4.*acosh(wc4./w(j))).^-2))*cos(w(j)*T(m)));
        k5=(dw/(1+(ep.*cosh(orden5.*acosh(wc5./w(j))).^-2))*cos(w(j)*T(m)));
        k6=(dw/(1+(ep.*cosh(orden6.*acosh(wc6./w(j))).^-2))*cos(w(j)*T(m)));
        K2=K2+k2;K4=K4+k4;K6=K6+k6;
        K3=K3+k3;K5=K5+k5;
    end
    % Función de covarianza Normalizada:
    R2(m)=(K2)/(Ko2*pi);R4(m)=(K4)/(Ko4*pi);R6(m)=(K6)/(Ko6*pi);
    R3(m)=(K3)/(Ko3*pi);R5(m)=(K5)/(Ko5*pi);
% TIEMPO DE COVARIANZA:
    t2=t2+abs(R2(m)*dt);t4=t4+abs(R4(m)*dt);t6=t6+abs(R6(m)*dt);
    t3=t3+abs(R3(m)*dt);t5=t5+abs(R5(m)*dt);
end

```

PMR PARA DIFERENTE ORDEN

```

%% FILTRO CHEBYSHEV DEL TIPO DOS DE DIFERENTE ORDEN PARA 9 MUESTRAS%%
%% PARÁMETROS:
%%
orden=1; wc=2.40; nw=10001;%orden=2; wc=2.73; nw=460;%orden=3; wc=2.94; nw=411;
%orden=4; wc=2.97; nw=361;%orden=5; wc=3.20; nw=350;%orden=6; wc=3.45; nw=330;
epsilon=0.5; nm=9;
%% Intervalos de tiempo y frecuencia:
int=0.01;inw=0.01;nt=1401;
%% Vector de 9 muestras:
T=[0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4];
%% FUNCION DE COVARIANZA:
k=0;
for con=1:nw
w(con)=(con-1)*inw;
Sw=(inw/(2*pi))*(1/(1+(epsilon*cosh(orden*acosh(wc/w(con))))^-2));
k=k+Sw;
end
Ko=k;
%% MATRIZ DE COVARIANZA:
Tc=0;
ima=sqrt(-1);
for fila=1:nm
for columna=1:nm
K=0;
for con=1:nw
w(con)=(con-1)*inw;
Kaux=(int/(1+(epsilon*cosh(orden*acosh(wc/w(con))))^-2))*real(exp(ima*w(con)*(T(fila)-T(columna))));
K=K+Kaux;
end
R(fila,columna)=(K)/(2*pi*Ko);
end
end
A=inv(R);
%% FUNCIONES BASICAS:
%%
inic=-5;
for i=1:nt
t(i)=inic+(i-1)*int;
Var(i)=1;
F1(i)=0;F2(i)=0;F3(i)=0;F4(i)=0;F5(i)=0;F6(i)=0;F7(i)=0;F8(i)=0;F9(i)=0;
K1=0;
for con=1:nw
w(con)=(con-1)*inw;
k1aux=(1/(1+(epsilon*cosh(orden*acosh(wc/w(con))))^-2))*real(exp(ima*w(con)*(t(i)-T(j))));
K1=K1+k1aux;
end
R2=(K1*int)/(2*Ko*pi);
F1(i)=F1(i)+(R2*A(j,1));F3(i)=F3(i)+(R2*A(j,3));F5(i)=F5(i)+(R2*A(j,5));F7(i)=F7(i)+(R2*A(j,7)); F9(i)=F9(i)+(R2*A(j,9));
F2(i)=F2(i)+(R2*A(j,2));F4(i)=F4(i)+(R2*A(j,4));F6(i)=F6(i)+(R2*A(j,6));F8(i)=F8(i)+(R2*A(j,8));
%% FUNCION DE RECONSTRUCCION:
%%
FR=(F1*1)+(F2*1.4)+(F3*0.6)+(F4*-.2)+(F5*-.5)+(F6*-1.4)+(F7*1)+(F8*1.2)+(F9*0.5);
%% FUNCION DE ERROR DE RECONSTRUCCION:
%%
for k=1:nm
K2=0;
for con=1:nw
w(con)=(con-1)*inw;
k2aux=(1/(1+(epsilon*cosh(orden*acosh(wc/w(con))))^-2))*cos(w(con)*(T(k)-t(i)));
K2=K2+k2aux;
end
R3=(K2*inw)/(2*Ko*pi);
Var(i)=Var(i)-(R2*A(j,k)*R3);
end
end
end

```

APÉNDICE E

PRODUCTOS

Procedimiento de Muestreo y Reconstrucción a la salida del Filtro de Chebyshev

Carlos R. Casasola Pérez, Daniel Rodríguez Saldaña y Vladimir Kazakov

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica – Zacatenco, Maestría en Ingeniería de Telecomunicaciones,
Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Instituto Politécnico Nacional
ccasasolap1100@alumno.ipn.mx, darodriguezs@ipn.mx, vkazakov@ipn.mx

Resumen— De manera general, es común representar la reconstrucción de señales como una suma ponderada de funciones exponenciales complejas. En donde, la reconstrucción de un proceso aleatorio se lleva a cabo al pasar un conjunto de muestras a través de un filtro de interpolación, el cual tiene la característica de un filtro pasa-bajas ideal. Por lo que la densidad espectral de potencia del proceso a la salida del filtro de interpolación está limitada en banda. De aquí que cada muestra es multiplicada de manera particular por una función del tipo $\text{Sen } x/x$, la cual denominamos como función básica. Pero si se considera que el filtro de interpolación presenta una respuesta en frecuencia diferente, entonces es necesario analizar cómo se realiza el proceso de reconstrucción. En este trabajo se investiga cómo la función de reconstrucción, las funciones básicas y el error de reconstrucción de un proceso aleatorio Gaussiano son afectadas al considerar diferentes respuestas en frecuencia del filtro de Chebyshev del tipo I de orden p .

Palabras Clave — Densidad espectral de potencia, error de reconstrucción, filtro de Chebyshev, función de covarianza, función de reconstrucción.

Abstract— In general, it is common to represent signal reconstruction as a weighted sum of complex exponential functions. Where, the reconstruction of a random process is carried out by passing a set of samples through an interpolation filter, which has the characteristic of an ideal low-pass filter. Therefore, the power spectral density of the process at the output of the interpolation filter is band limited. Hence, each sample is multiplied in a particular way by a function of the type $\text{Sen } x/x$, which we call the basic function. But if the interpolation filter is considered to have a different frequency response, then it is necessary to analyze how the reconstruction process is carried out. In this work we investigate how the reconstruction function, the basic functions and the reconstruction error of a Gaussian random process are affected when considering different frequency responses of the Chebyshev filter of type I of order p .

Keywords – Chebyshev filter, covariance function, Power Spectral Density, reconstruction error, reconstruction function.

I. INTRODUCCIÓN

El teorema de muestreo se difundió en la literatura soviética cuando Vladimir Kotelnikov publica su estudio [1] en 1933. Posteriormente en 1948, Claude E. Shannon [2, 3] emplea el teorema de muestreo para demostrar que una señal analógica limitada en banda es equivalente a sus muestras siempre y

cuando la tasa de muestreo quede determinada por el intervalo de Nyquist [4]. Así, dando a conocer el teorema de muestreo de Whittaker-Nyquist-Kotelnikov-Shannon, el cual es esencial en la teoría de la información y de especial interés en las telecomunicaciones.

Años más tarde en 1957, A. V. Balakrishnan [5], generaliza el teorema de muestreo para la reconstrucción de funciones de señales de energía finita, con el fin de reconstruir procesos estocásticos estacionarios en el sentido amplio. Esta generalización se establece en el siguiente teorema:

Teorema: “Sea $\{x(t), -\infty < t < +\infty\}$ un proceso estocástico que puede tener valores reales ó complejos, y que es estacionario en el sentido amplio, el cual está caracterizado por una densidad espectral que es nula fuera del intervalo de frecuencias angulares $[-2\pi W, 2\pi W]$, $W > 0$. Entonces $x(t)$ tiene la siguiente representación:

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N x\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\text{Sen } \pi(2Wt - n)}{\pi(2Wt - n)} \quad (1)$$

para toda t , donde \lim indica el límite en el sentido del valor cuadrático medio, es decir:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \left[x(t) - \sum_{n=-N}^N x\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\text{Sen } \pi(2Wt - n)}{\pi(2Wt - n)} \right]^2 \right\} = 0. \quad (2)$$

La mayoría de las generalizaciones del teorema de muestreo están consideradas para señales limitadas en banda, es decir, presentan una densidad espectral de tipo rectangular. Esta respuesta en frecuencia corresponde a un filtro pasa-baja ideal cuya respuesta al impulso es una función $\text{Sinc}(t)$.

Por lo tanto, es posible observar de la expresión (1) que la reconstrucción de una función original $x(t)$, la cual es continua en el tiempo, se lleva a cabo al multiplicar cada una de las muestras $x(n/2W)$ por un tipo particular de función. Esta función es denominada en este trabajo como *función básica*, la cual es representada por $B(t)$. En muchas de las generalizaciones del teorema de muestreo [6–9], la función básica $B(t)$ corresponde a una función del tipo:

$$\text{Sinc}(t) = \frac{\text{Sen } \pi t}{\pi t}.$$

Por otra parte, la descripción del Procedimiento de Muestreo-Reconstrucción (PMR) de procesos estocásticos donde se emplea el teorema de muestreo se ha tratado en diversas publicaciones [6–9] y en la mayoría de los trabajos la función de densidad de probabilidad (fdp) de las señales ó procesos aleatorios no es mencionada. Por simplicidad, en este trabajo nos enfocamos principalmente al estudio de procesos aleatorios que presentan una función de densidad de probabilidad Gaussiana.

El método que aquí se propone para describir estadísticamente el PMR de los procesos aleatorios Gaussianos está basado en la regla de la esperanza matemática condicional [10], con la cual se consigue el mínimo error cuadrático medio en el procedimiento de reconstrucción. Algunos trabajos que describen el procedimiento de reconstrucción de diferentes tipos de procesos aleatorios y campos Gaussianos que han sido analizadas con la regla de la esperanza matemática condicional son [11–13] y [14], respectivamente.

Además, en este trabajo se propone cambiar las características del filtro de interpolación. No solo nos limitamos a analizar el procedimiento de reconstrucción con filtros pasa-bajas que presentan un espectro en frecuencia rectangular. En su lugar, se describe estadísticamente el procedimiento de reconstrucción con diferentes respuestas en frecuencia del filtro de interpolación. Para ello se utilizan diferentes respuestas en frecuencia del filtro de Chebyshev de tipo I al hacer cambiar el orden p de este filtro.

Algunas de las principales diferencias que se observan entre la literatura científica previa y la metodología propuesta en este trabajo son presentadas a continuación. Con base al procedimiento de reconstrucción definida por el teorema de Balakrishnan se observa lo siguiente: 1) La función de densidad de probabilidad de los procesos a reconstruir no está definida; 2) Este teorema considera un número infinito de muestras; 3) Especifica únicamente un valor que representa el límite de la banda de frecuencia del proceso, lo cual es válido cuando su espectro de frecuencia es de forma rectangular; 4) La forma de onda de la función básica para cada muestra es la misma y está determinada por una función del tipo $\text{Sinc}(t)$; 5) El error de reconstrucción definido por este teorema solo es un valor promedio igual cero.

Por otra parte, el procedimiento de reconstrucción con base a la regla de la esperanza matemática condicional presenta las siguientes características: 1) La función de densidad de probabilidad de los procesos aleatorios presenta una distribución Gaussiana; 2) Se puede considerar un número arbitrario limitado o no limitado de muestras; 3) El procedimiento de reconstrucción se puede describir con diferentes espectros en frecuencia del filtro de interpolación; 4) Es posible analizar la forma de las funciones básicas para cada muestra de diferentes procesos y no necesariamente deben tener la forma de la función $\text{Sinc}(t)$; 5) Esta

metodología permite estimar el error de reconstrucción en todo el dominio del tiempo.

Es importante mencionar que con esta metodología la función de reconstrucción óptima y la función del error de reconstrucción están dadas directamente por la función de la media condicional y la función de la varianza condicional, respectivamente.

II. METODOLOGÍA

Si se considera un proceso aleatorio que está definido por su función de densidad de probabilidad multidimensional $f(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m))$, el cual es discretizado en ciertos instantes del tiempo $T = \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$, entonces se tiene un conjunto de muestras donde el número de muestras N y sus instantes de ocurrencia T_i son arbitrarios. Esta información cambia los datos iniciales concernientes al proceso aleatorio, especialmente, la función de densidad de probabilidad, las funciones de los momentos iniciales y momentos centrales donde, la nueva función de densidad de probabilidad y momentos son ahora condicionales y dependen del valor de cada muestra $x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)$. Las características estadísticas de los procesos Gaussianos condicionales [10] son conocidas, de aquí que las expresiones que describen a la función de la media condicional y la función de la varianza condicional están dadas de la siguiente manera:

$$\tilde{m}(t) = m(t) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(t, T_i) a_{ij} [x(T_j) - m(T_j)], \quad (3)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \sigma^2(t) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(t, T_i) a_{ij} K(T_j, t), \quad (4)$$

donde $m(t)$ representa el valor medio del proceso, $\sigma^2(t)$ es la varianza no condicional del proceso $x(t)$, $K(t, T_i)$ es el momento de covarianza entre el tiempo actual t y el instante de muestreo T_i , $x(T_j)$ representa el valor de las muestras, N indica el número de muestras y los coeficientes a_{ij} son los elementos de la matriz inversa de covarianza \mathbf{A} , tal como se muestra a continuación:

$$\mathbf{A} = \left[K(T_i, T_j) \right]^{-1} = \begin{bmatrix} K(T_1, T_1) & \cdots & K(T_1, T_m) \\ K(T_2, T_1) & \cdots & K(T_2, T_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K(T_m, T_1) & \cdots & K(T_m, T_m) \end{bmatrix}^{-1} \quad (5)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}.$$

Al aplicar esta regla, la función de la media matemática condicional $\tilde{m}(t)$ y la función de la varianza matemática condicional $\tilde{\sigma}^2(t)$ son empleadas para calcular la función de

reconstrucción y la función de error de reconstrucción del proceso aleatorio, respectivamente.

Para el caso de procesos estacionarios, por simplicidad consideraremos el valor medio del proceso $m(t)=0$ y la varianza no condicional como $\sigma^2(t) = 1$. Además, en el caso estacionario la función de covarianza queda expresada ahora en base a la diferencia de tiempos $K(\tau)=K(t_i-t_j)$. De esta manera, las expresiones (3) y (4) se simplifican de la siguiente forma:

$$\tilde{m}(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(t-T_i) a_{ij} x(T_j), \quad (6)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = 1 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(t-T_i) a_{ij} K(T_j-t), \quad (7)$$

Si simplificamos aún más la función de reconstrucción, entonces ésta puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\tilde{m}(t) = \sum_{j=1}^N x(T_j) B_j(t), \quad (8)$$

donde:

$$B_j(t) = \sum_{i=1}^N K(t-T_i) a_{ij}. \quad (9)$$

La expresión (8) que representa a la función de reconstrucción está ahora expresada de manera similar a la expresión (1). Solo que en este caso el conjunto de muestras no es multiplicado por una función determinística del tipo *Sinc*(t) sino por una función básica $B_j(t)$, la cual ahora está definida por la expresión (9) y se observa que ésta depende principalmente de las propiedades estadísticas de la función de covarianza $K(\tau)$ del proceso aleatorio y existe una función básica $B_j(t)$ para cada muestra, según el número de muestras $j=1, 2, \dots, N$ que se tomen en consideración. Como se observa en (8) cada función básica se multiplica por su correspondiente muestra y al final se suman todas las formas de onda resultante para obtener la reconstrucción del proceso.

Cabe señalar que en este caso, la función de covarianza $K(\tau)$ del proceso a reconstruir no es conocida de manera directa. Debido a que el proceso aleatorio va a estar descrito por el espectro en frecuencia que se obtiene a la salida del filtro de interpolación que se utilice, la cual va a estar caracterizado por su densidad espectral de potencia $S(\omega)$.

Como se mencionó anteriormente, en este trabajo el filtro de reconstrucción va a estar determinado por la respuesta en frecuencia del filtro de Chebyshev de tipo I con diferente orden p . La respuesta de este filtro está descrita por la siguiente expresión:

$$S(\omega) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_p^2(\omega/\omega_c)}, \quad (10)$$

donde ε representa la amplitud del rizo, $T_p(\omega/\omega_c)$ es el polinomio de Chebyshev, p determina el orden del filtro y ω_c define la frecuencia de corte del filtro pasa-bajas. El polinomio de Chebyshev de orden p esta expresado por la siguiente función:

$$T_p(\omega/\omega_c) = \begin{cases} \text{Cos}(p \text{ arcCos}(\omega/\omega_c)), & |\omega/\omega_c| \leq 1, \\ \text{Cosh}(p \text{ arcCosh}(\omega/\omega_c)), & |\omega/\omega_c| > 1. \end{cases} \quad (11)$$

Si la densidad espectral de potencia $S(\omega)$ de un proceso aleatorio es conocido, entonces es posible obtener la función de covarianza $K(\tau)$ de dicho proceso, ya que estas dos funciones están relacionadas mediante la transformada de Fourier, tal como lo define el *teorema de Wiener-Khinchine*:

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (12)$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (13)$$

Así al determinar la función de covarianza $K(\tau)$ para cada respuesta en frecuencia del filtro de interpolación, entonces es posible estimar la función de reconstrucción en base a la expresión (8) y la función de error de reconstrucción mediante la expresión (7).

Sin embargo, una vez estimada la función de covarianza $K(\tau)$ de los procesos aleatorios se debe de realizar un procedimiento de normalización, el cual nos permite comparar el desempeño de reconstrucción entre las diferentes respuestas del filtro de interpolación. El proceso de normalización se realiza tanto en la potencia del proceso aleatorio, así como una normalización en el tiempo de covarianza.

Para la normalización en potencia se divide la función de covarianza $K(\tau)$ con respecto a la varianza del proceso, el cual consiste en la función de covarianza evaluada en cero. Así, al normalizar en función de la potencia se obtiene la función de covarianza normalizada $R(\tau)$, la cual está definida con la siguiente expresión:

$$R(\tau) = \frac{K(\tau)}{K(0)}. \quad (14)$$

Por otra parte, para la normalización con respecto al tiempo se calcula primero el tiempo de covarianza τ_c del proceso aleatorio de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$\tau_c = \int_0^{\infty} |R(\tau)| d\tau. \quad (15)$$

Una vez que se conoce el tiempo de covarianza de cada proceso aleatorio, entonces se divide la base del tiempo de la función de covarianza normalizada $R(\tau)$ entre el valor del resultado de dicha estimación de τ_c para mantener un tiempo de covarianza unitario.

III. DESARROLLO Y RESULTADOS

A. Función de Densidad Espectral

Como se mencionó, la respuesta en frecuencia del filtro de Chebyshev esta descrita por (10) y el polinomio por (11) con diferente orden. Los parámetros que se establecen para el filtro de Chebyshev están dados en la tabla 1.

TABLA 1 Parámetros del filtro de Chebyshev

Parámetro	Valores		
Orden del filtro	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
Frecuencia de corte	$w_c = 0.6$	$w_c = 1.89$	$w_c = 2.71$

En la figura 1 se pueden observar las curvas del polinomio de diferente orden con $\varepsilon = 0.5$, dentro de un intervalo de $-1 < \omega/\omega_c < 1$.

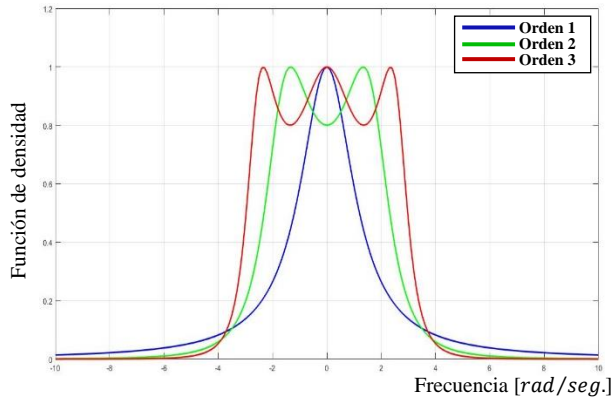


Figura 1.- Función de Densidad Espectral.

B. Función de Covarianza

Aplicando la expresión (12) se puede aproximar la función de covarianza $K(\tau)$ para la respuesta en frecuencia del filtro de Chebyshev. En la figura 2 se presentan las funciones de covarianza normalizada correspondientes a los diferentes órdenes del filtro de Chebyshev.

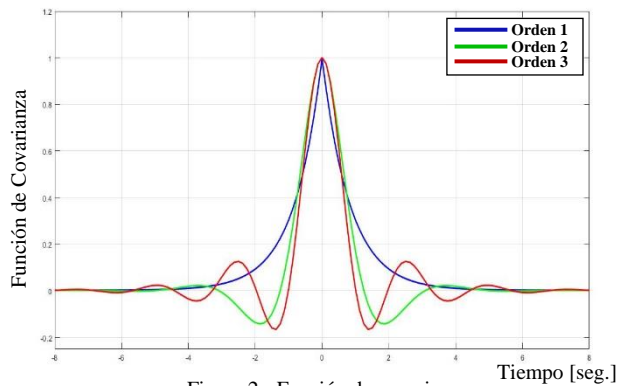


Figura 2.- Función de covarianza

C. Función de Reconstrucción

La función de Reconstrucción expresada en (8) con los parámetros correspondientes a cada orden del filtro Chebyshev se observan en la figura 3. Los valores utilizados para la función de Reconstrucción se expresan en la tabla 2.

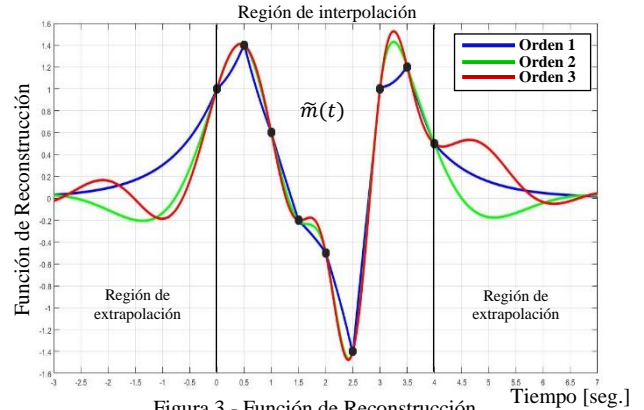


Figura 3.- Función de Reconstrucción.

En la figura anterior, se muestran dos regiones de extrapolación y una de interpolación. Cada función de reconstrucción está determinada por el comportamiento de sus funciones básicas, por lo tanto, en las diferentes regiones se tiene un comportamiento diferente de acuerdo al orden del filtro de Chebyshev. Se observa que entre mayor sea el orden del filtro de Chebyshev, en la región de interpolación, se obtiene una función más suave. En la región de extrapolación tiene un comportamiento diferente debido a que no existen valores asignados para la función.

TABLA 2 Valores de muestreo con 9 muestras con un intervalo de muestreo $\Delta T = 0.5$

Valor de la muestra $x(T_j)$	Instante de muestreo T_j [seg.]
$x(T_1) = 1$	$T_1 = 0$
$x(T_2) = 1.4$	$T_2 = 0.5$
$x(T_3) = 0.6$	$T_3 = 1$
$x(T_4) = -0.2$	$T_4 = 1.5$
$x(T_5) = -0.5$	$T_5 = 2$
$x(T_6) = -1.4$	$T_6 = 2.5$
$x(T_7) = 1$	$T_7 = 3$
$x(T_8) = 1.2$	$T_8 = 3.5$
$x(T_9) = 0.5$	$T_9 = 4$

D. Funciones Básicas

Las funciones básicas descritas por (9) son dependientes de la función de covarianza en cada instante de muestreo, es decir $K(\tau - T_j)$. La función básica $B_j(t)$ con $j=5$ se presenta en la figura 4.

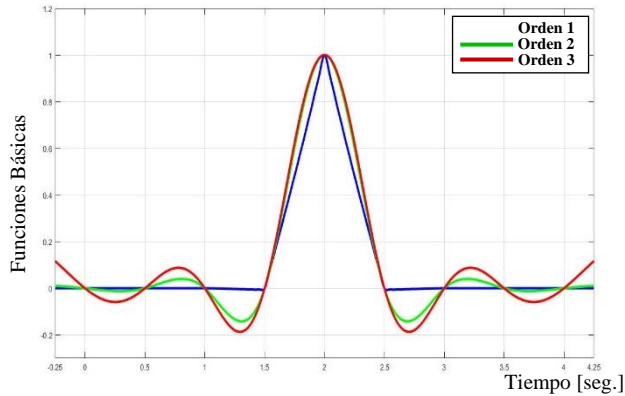


Figura 4.- Funciones Básicas con una muestra en $B_5(t)$

La función $B_5(t)$ es la función básica central y en ella se observa que en sus intervalos más cercanos de muestreo la función se suaviza con respecto al orden del filtro, posteriormente en sus intervalos más alejados de muestreo presenta rizados, los cuales contribuyen a la reconstrucción de la señal como se observó en la figura 3, es decir, tales variaciones tienen gran influencia para la reconstrucción de la señal.

E. Función de Error de Reconstrucción

A partir de (7) se puede conocer el error de reconstrucción de la función que se está trabajando.

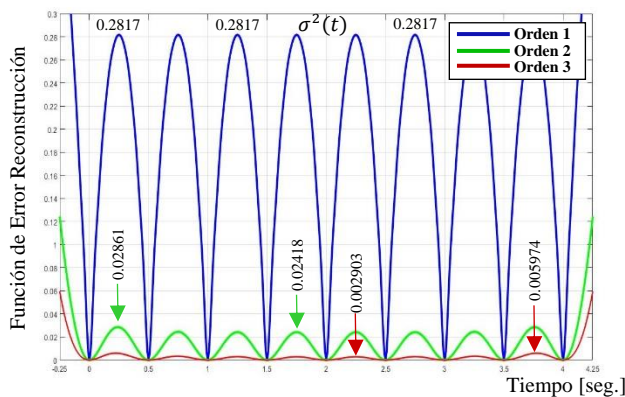


Figura 5.- Función de Error de Reconstrucción.

La función de Error de Reconstrucción nos indica la calidad de reconstrucción que se tiene de la función que se está manejando. En la figura 5, se puede observar que el error máximo de cada una de las funciones mostradas está entre cada intervalo de muestreo, de esta manera se obtiene una función simétrica a partir de su muestra central en la región de interpolación para cada caso. Se observa que la amplitud de cada una de las funciones disminuye con respecto al orden del filtro. Corroborando así, que entre mayor sea el orden del filtro se obtiene una mejor reconstrucción. Se puede destacar que en la región de extrapolación la función de Error de Reconstrucción alcanza su valor máximo de uno, de tal manera

que entre mayor sea el orden del filtro mayor será el tiempo para alcanzar su valor máximo.

En la tabla 3 se presentan los valores registrados de Error de Reconstrucción observados en la figura 5.

TABLA 3 Valores de la función de Error de Reconstrucción con 9 muestras con un intervalo de muestreo $\Delta T = 0.5$

Intervalo de muestro [seg.]	Valor de error máximo		
	Orden 1	Orden 2	Orden 3
0-0.5	0.2817	0.02861	0.005974
0.5-1	0.2817	0.02452	0.003402
1-1.5	0.2817	0.02420	0.002986
1.5-2	0.2817	0.02418	0.002903
2-2.5	0.2817	0.02418	0.002903
2.5-3	0.2817	0.02420	0.002986
3-3.5	0.2817	0.02452	0.003402
3.5-4	0.2817	0.02861	0.005974

IV. CONCLUSIONES

El problema investigado en el artículo trabaja con las funciones de covarianza de los filtros de Chebyshev obtenidas del teorema de Wiener-Khinchine a partir de su respuesta en frecuencia. Posteriormente, con la función covarianza se aplica el método de la esperanza matemática condicional, el cual muestra la función de Reconstrucción, funciones Básicas y función de Error de Reconstrucción.

Al aplicar la metodología basada en la regla de la esperanza matemática condicional a los filtros de Chebyshev se observa que la función de Reconstrucción depende en su totalidad de sus funciones básicas, mostrando de esta manera una mejor reconstrucción de la señal a la salida de dichos filtros. Así, al aumentar el orden del filtro se logra una mejor reconstrucción de la señal. Además, en la función de Error de Reconstrucción, se verifica el aumento en la calidad de reconstrucción, es decir, el Error de Reconstrucción es menor. Por lo tanto, el procedimiento de muestreo y reconstrucción de los filtros de Chebyshev de tipo 1 basado en la metodología ya descrita en el presente trabajo, muestra una óptima reconstrucción al variar los parámetros del polinomio de Chebyshev.

REFERENCIAS

- [1] V. A. Kotel'nikov, "On the transmission capacity of the "Ether" and wire in electrocommunications", Izd. Red. Upr. Svyazi RKKA, Moscow, 1933.
- [2] C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication," Bell System Technical Journal, Vol. 27, pp. 379-423, 623-656, 1948.
- [3] C. E. Shannon, "Communication in the presence of noise," Proceedings of the IRE, vol. 37, pp. 10-21, 1949.
- [4] H. Nyquist, "Certain Topics in Telegraph Transmission Theory", Proceedings of the IEEE, vol. 90, no. 2, pp. 280-305, February 2002..
- [5] A. V. Balakrishnan, "A note on the sampling principle for continuous signals," IRE Trans. on Information Theory, vol. IT-3, pp. 143-14, 1957.

- [6] J. L. Brown, "Sampling of bandlimited signal: Fundamental results and some extensions", en N.K. Bose and C. R. Rao, eds., *Handbook of Statistic*, vol. 10, Elsevier Science Publishers, pp. 59-101, 1993.
- [7] R. S. Stankovi, J. T. Astola, M. G. Karpovsky, "Some historical remarks on sampling theorem", Proc Int Workshop on Spectral Techniques, 2006.
- [8] Qiuhui Chen, Yanbo Wang, Yi Wang, "A sampling theorem for non-bandlimited signal using generalized Sinc functions", *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 56, pp. 1650-1661, 2008.
- [9] A. E. G. Huber, S. C. Liu, "Filtering of nonuniformly sampled bandlimited functions", *IEEE Signal Process. Lett*, vol. 26, no. 7, pp. 1036-1040, 2019.
- [10] R. L. Stratonovich, *Topics in the theory of random noise*, Gordon and Breach. New York., 1963.
- [11] V. Kazakov, "The Reconstruction of Gaussian Process Realizations with an Arbitrary Set of Samples", TELE-INFO '11, pp. 120 – 125, 2011.
- [12] A. R. Gallegos, D. Rodríguez y V. Kazakov, "Muestreo-Reconstrucción de procesos Gaussianos aleatorios con posición aleatoria de muestras", *XVII Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, Noviembre 2018.
- [13] E. De la Rosa, D. Rodríguez y V. Kazakov, "Reconstrucción de procesos Gaussianos estacionarios con una única función básica", *XVIII Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, Noviembre 2019.
- [14] A. L. Venegas, D. Rodríguez y V. Kazakov, "Estimación de funciones básicas en campos de Markov Gaussianos", *XIX Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, Noviembre 2020.

REFERENCIAS

- [1] E. T. Bell. *Historia de las matemáticas*. 2da edición, México: Fondo de Cultura Económica, 1985.
- [2] E. T. Whittaker. “On the Functions which are represented by the Expansions of the Interpolation-Theory”, Proc. Royal Society of Edinburgh, vol. 35, pp. 181-194, 1915.
- [3] J. M. Whittaker. “The Fourier theory of the cardinal function”, Proc. Lond. Math. Soc. Edinburgh, vol. 1, pp. 169–176, 1928.
- [4] H. Nyquist. “Certain topics in telegraph transmission theory”, Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, vol. 47, no. 2, pp. 617-644, 1928.
- [5] V. A. Kotel’nikov. “On the Transmission Capacity of the “Ether” and Wire in Electrocommunication”, Izd. Red. Upr. Svyazi RKKA, Moscow, 1933.
- [6] C. E. Shannon. “A mathematical theory of communication,” Bell System Technical Journal, vol. 27, pp. 623-656, 1948.
- [7] C. E. Shannon. “Communication in the presence of noise,” Proceedings of the IRE, vol. 37, pp. 10-21, 1949.
- [8] A. J. Jerri. “The Shannon Sampling Theorem-Its Various Extensions and Applications: tutorial Review”, Proc. IEEE, Vol. 65, No. 11, pp. 1565-1596, 1977.
- [9] S. P. Lloyd. “A Sampling Theorem for Stationary (Wide Sense) Stochastics Processes”, Trans. Amer. Math. Sec., Vol. 92, No. 1, pp 1-12. 1959.
- [10] A. V. Balakrishnan. “A note on the sampling principle for continuous signal,” IRE Trans. On Information Theory, vol. IT-3, pp. 143-146, 1957.
- [11] H. P. Kramer. A generalized sampling theorem, Bull. Amer. Math. Soc. Abstract 63-2-234.
- [12] R. S. Stankovi, J. T. Astola, M. G. Karpovsky. “Some historical remarks on sampling theorem”, Proc Int Workshop on Spectral Techniques, 2006.
- [13] Qihui Chen, Yanbo Wang, Yi Wang. “A sampling theorem for non-bandlimited signal using generalized Sinc functions”, Computers and Mathematics with Applications, vol. 56, pp. 1650-1661, 2008.
- [14] A. E. G. Huber, S. C. Liu. “Filtering of nonuniformly sampled bandlimited functions”, IEEE Signal Process. Lett, vol. 26, no. 7, pp. 1036-1040, 2019.

- [15] H. Y. Darawsheh, A. Tarczynski. “Antithetical stratified sampling estimator for filtering signals with discontinuities”, *Signal Processing*, vol. 181, pp. 1-10, 2021.
- [16] D. Rodríguez. *Estudio del Procedimiento de Muestreo-Reconstrucción de los procesos Gaussianos con una cantidad de muestras limitada*. México: Tesis, 2003.
- [17] D. Rodríguez. *Investigación de Procedimiento de Muestreo-Reconstrucción de los procesos gaussianos con jitter*. México: Tesis, 2007.
- [18] F. Mendoza. *Algoritmo del Procedimiento de Muestreo-Reconstrucción para procesos gaussianos con espectro restringido*. México: Tesis, 2017.
- [19] V. A. Kazakov. “The evolution of moment and cumulant functions in the generalized Fokker-Plank-Kolmogorov equation”, *Radiophysics and Quantum Electronics*, Vol. 30, núm. 8, pp. 1042-1045, 1987, (en ruso).
- [20] V. A. Kazakov. “Regeneration of samples of random processes following nonlinear inertialess conversions”. *Telecommunications and Radioengineering*, Vol. 43, núm. 10, pp. 94-96, 1988.
- [21] V. A. Kazakov, S. A. Afrikanov and M. A. Beliaev. “Comparison of two algorithms of the realization restorations using random number of counts”. *Radioelectronics and Communication Systems*, Vol. 37, núm. 4, pp. 43-45, 1994.
- [22] V. A. Kazakov, M. A. Belyaev. “Sampling Reconstruction Procedure for Non-Stationary Gaussian Processes Based on Conditional Expectation Rule”, *Sampling Theory in Signal and Image Processing*, Vol. 1, No. 2 May 2002.
- [23] V. Kazakov, Y. Goritskiy. *Muestreo-Reconstrucción de realizaciones de procesos aleatorios y campos aleatorios*, Instituto Politécnico Nacional, Primera edición, 2017.
- [24] V. Kazakov, D. Saldaña. “Procedimiento de Reconstrucción de los Procesos Gaussianos con Filtros Butterworth”, Reunión de Otoño, ROC&C’ 2004, Acapulco Gro., noviembre de 2004.
- [25] Z. T. García Guerrero, L. A. Méndez Cruz. *Análisis de reconstrucción de señales con filtro Chebyshev aplicando la esperanza matemática condicional*, Tesis, 2008.
- [26] C. Casasola, D. Rodríguez, V. Kazakov. “Procedimiento de Muestreo y Reconstrucción a la salida del Filtro de Chebyshev”, XX Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas, noviembre 2021.

- [27] P. Z. Peebles Jr. *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles*. 4th Edition, NY: McGraw-Hill Series in Electrical and Computer Engineering, 2001.
- [28] A. M. Yaglom. *An introduction to the Theory of Stationary Random Functions*. First Edition, NY: Dover Publications, Inc., 2004.
- [29] L. W. Couch. *Sistemas de comunicación digitales y analógicos*. Séptima edición, México: Pearson Education, 2008.
- [30] D. Middleton. *An introduction to Statistical Communication Theory*. NY: IEEE Press, 1996.
- [31] V. S. Pugachev. *Introducción a la teoría de las probabilidades*. URSS: MIR Moscú, 1973.
- [32] C. Chatfield. *The Analysis of time series an introduction*. 5th edition, Chapman & Hall/CRC, 1996.
- [33] S. Haykin, B. Van Veen. *Señales y sistemas*. Primera edición, Mexico: Limusa Wiley, 2001.
- [34] S. S. Soliman, M. D. Srinath. *Señales y Sistemas continuos y discretos*. Segunda edición, España: Prentice Hall, 1999.
- [35] C.J. Savant, M. S. Roden, G. Carpenter. *Diseño Electrónico. Circuitos y Sistemas*, 2 da. Edición, Addison-Wesley Iberoamericana, 1992.
- [36] A. S. Sedra, K. C. Smith. *Microelectronic Circuits*, 7th edition, Oxford University Press, 2015.
- [37] R. L. Stratonovich. *Topics in the Theory of Random Noise, Volumen I*, New York: Gordon and Breach, 1963.
- [38] A. Papoulis, U. Pillai. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. 4th Edition, NY: McGraw-Hill, 2002.
- [39] G. Mastroianni, G. V. Milovanovic. *Interpolation Processes Basic Theory and Applications*. Germany: Springer Monographs in Mathematics, 2008.
- [40] V. V. Prasalov. *Polynomials*, Germany: Springer Algorithms and Computation in Mathematics Volumen 11, 2001.